



Titre: Contribution à l'expression analytique de la matrice jacobienne de
mécanismes parallèles et hybrides par la théorie des visseurs

Auteur: Joseph Massin

Date: 2025

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Massin, J. (2025). Contribution à l'expression analytique de la matrice jacobienne
de mécanismes parallèles et hybrides par la théorie des visseurs [Ph.D. thesis,
Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/68391/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/68391/>

**Directeurs de
recherche:** Lionel Birglen

Advisors:

Programme: Génie mécanique

Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Contribution à l'expression analytique de la matrice jacobienne de mécanismes
parallèles et hybrides par la théorie des visseurs**

JOSEPH MASSIN

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
Génie mécanique

Juillet 2025

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Contribution à l'expression analytique de la matrice jacobienne de mécanismes
parallèles et hybrides par la théorie des visseurs**

présentée par **Joseph MASSIN**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

Khameneifar FARBOD, président

Lionel BIRGLEN, membre et directeur de recherche

Patrice LAMBERT, membre

Olivier PICCIN, membre

REMERCIEMENTS

Je souhaiterais remercier en premier lieu le professeur Lionel Birglen qui, outre avoir été un excellent directeur de thèse, m'a toujours soutenu même lorsque j'étais au plus bas.

J'aimerais également remercier messieurs Khameneifar Farbod, Patrice Lambert et Olivier Piccin d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à mes parents pour leur soutien inconditionnel, mais également à mes soeurs qui m'ont fait confiance jusqu'au bout. Je pense fort à mes nièces et neveux, Juliette, Lucie, Nina, Lise, Titouan et Robin avec qui je n'ai pas pu passer autant de temps que j'aurais voulu.

J'aimerais remercier particulièrement mes amies de longue date, Noémie, Inès pour leur bonne humeur et les moments précieux que j'ai passés avec elles. Je remercie également mes compagnons de laboratoire Nicolas, Davide et Ludovic, ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai partagé ces années de thèse, Yemi, Théo, Sam, Jessica, Fred, Allison, Julien et bien d'autres.

Bien sûr, je voudrais te remercier du fond du coeur Marie, toi qui a accepté de m'accompagner dans ce pays à la fois si froid mais également si chaleureux.

Je ne pourrais pas finir sans remercier Tsuki, qui m'apporte au quotidien autant de poils que de bonheur.

RÉSUMÉ

La théorie des visseurs est un outil mathématique puissant, particulièrement utile à l'étude des mécanismes. Elle permet de caractériser les mobilités et les singularités de ces derniers, mais également d'établir aisément des équations de vitesses. Ces équations permettent d'établir une relation entre un vecteur contenant l'ensemble des vitesses actionnées d'un mécanisme et les vitesses d'un corps situé en sortie de ce dernier. Pour les mécanismes en série, cette relation fait directement apparaître une matrice appelée matrice jacobienne. Cette matrice contient énormément d'informations sur le comportement cinématique d'un mécanisme. Pour les mécanismes parallèles, ou plus généralement hybrides, la relation en vitesse fait apparaître deux matrices distinctes. La matrice jacobienne peut être obtenue en multipliant l'inverse de la première matrice à la seconde. Cependant, cette opération est dans l'immense majorité des cas effectuée numériquement. Ce faisant, nous perdons les informations contenues dans la matrice jacobienne.

L'objectif principal de cette thèse est de donner une expression analytique de la matrice jacobienne en se servant de la théorie des visseurs. En utilisant la modélisation géométrique des forces et moments appliqués à un mécanisme, on peut alors réciproquement donner une interprétation géométrique et significative des mouvements possibles de ce dernier. Les colonnes de la matrice jacobienne que nous obtenons contiennent sous une forme concise la nature des mouvements, l'amplification en vitesse par rapport aux liaisons actionnées ainsi que les conditions d'apparition de singularités.

Nous étudions différentes classes de mécanismes, ces catégories étant caractérisées par le type de déplacement possible des mécanismes, mais surtout par les contraintes qui leur sont appliquées. La matrice jacobienne que nous donnons est valide pour l'ensemble des mécanismes partageant le même type de contraintes. Chaque classe de mécanismes est illustrée par plusieurs exemples pour montrer la polyvalence des équations obtenues. Les mécanismes étudiés dans ce document sont en premier lieu les mécanismes plans, rotationnels et translationnels. Ensuite, nous nous intéressons à d'autres classes de mécanismes spatiaux à trois, puis à six degrés de liberté, qui partagent des caractéristiques communes.

ABSTRACT

Screw theory is a powerful and well-known mathematical tool, particularly useful for studying mechanisms. It provides elegant methods for characterizing both the mobility and singularities of linkages and also offers a straightforward way to derive velocity equations. These equations establish a relationship between a vector containing all the actuated joint velocities and the velocity of a linkage's output body.

For serial mechanisms, this relationship directly yields a matrix known as the Jacobian matrix, which contains numerous pieces of information about the linkage's kinematic behavior. For parallel or, more generally, hybrid linkage, the velocity relationship involves two distinct matrices. The Jacobian matrix can then be obtained by multiplying the inverse of the first matrix by the second. However, this operation is almost always performed numerically, which results in the loss of the structural information contained within the Jacobian matrix.

The main goal of this thesis is to provide an analytical expression of the Jacobian matrix using screw theory. By geometrically modeling external efforts, one can in return significantly describe the linkage's allowed motions. The columns of the Jacobian matrix as provided in this paper concisely describe the nature of the motions, the velocity amplification between the actuated joints and the end-effector, as well as the conditions under which singularities occur.

Several classes of mechanisms are studied. The latter are characterized not only by their prospective motion but also by the constraints imposed on them. The expression of the Jacobian matrix as provided in this paper is applicable for all linkages whose constraints are of the same nature. Each class of mechanisms is illustrated by several examples to demonstrate the versatility of the resulting equations. The mechanisms examined in this work include planar, rotational, and translational linkages. Then another categories of spatial linkages which share common characteristics with three, then six degrees of freedom, are investigated.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.2 Motivation du projet	3
1.3 Objectifs de recherche	4
1.4 Plan de la thèse	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Mécanismes	5
2.1.1 Généralités sur les mécanismes	5
2.1.2 Mécanismes à membrures rigides	11
2.2 Théorie des visseurs	16
2.2.1 Introduction et définitions mathématiques	16
2.2.2 Autres représentations des vis	18
2.2.3 Mobilités	20
2.2.4 Équations de vitesse et matrices jacobienues	23
2.3 Mécanismes étudiés	25
CHAPITRE 3 MÉCANISMES PLANS	27
3.1 Introduction et définitions mathématiques	27
3.2 Mécanismes à un DDL	28
3.2.1 Introduction	28
3.2.2 Boucle cinématique	29
3.2.3 Équation de vitesse	32
3.2.4 Modèle cinématique direct	33
3.2.5 Exemple : La chaise du TIT	42
3.2.6 Remarques sur les chemins cinématiques	49

3.2.7	Conclusion	50
3.3	Mécanismes à plusieurs DDLs	51
3.3.1	Unique boucle cinématique	51
3.3.2	Mécanismes pleinement parallèles	58
3.3.3	Conclusion	63
CHAPITRE 4 MÉCANISMES ROTATIONNELS ET TRANSLATIONNELS		64
4.1	Mécanismes sphériques	64
4.1.1	Mécanismes sphériques à un DDL	65
4.1.2	Mécanismes sphériques à plusieurs DDLs	69
4.1.3	Mécanisme sphérique pleinement parallèle : L'œil agile	72
4.2	Mécanismes d'orientation	76
4.2.1	Modèle cinématique direct	76
4.2.2	Exemple : Mécanisme d'orientation 3 – <i>UPS</i>	78
4.2.3	Exemple : Mécanisme d'orientation 3 – <i>RUU</i>	80
4.2.4	Exemple : Mécanisme d'orientation asymétrique	84
4.3	Mécanismes translationnels	87
4.3.1	Modèle cinématique direct	87
4.3.2	Exemple : Mécanisme translationnel 3 – <i>UPU</i>	88
4.3.3	Exemple : Le Tripteron généralisé	90
4.3.4	Exemple : Le robot Delta	92
4.4	Conclusion	94
CHAPITRE 5 Le 3 – <i>RPS</i> et le 6 – <i>UPS</i> triangulaire		96
5.1	Mécanisme 3 – <i>RPS</i>	96
5.1.1	Introduction	96
5.1.2	Calcul analytique de la matrice jacobienne	98
5.1.3	Remarques et commentaires	107
5.1.4	Analyse des mobilités et expressions alternatives de la matrice jacobienne . . .	111
5.1.5	Conclusion	120
5.2	Mécanisme 6 – <i>UPS</i> triangulaire	121
5.3	Exemple Numérique	126
5.3.1	Modèle cinématique direct	127
5.3.2	Modèle cinématique inverse	131
5.3.3	Application numérique à un instant t	136
5.4	Extension à d'autres mécanismes	138
5.4.1	Mécanismes spatiaux à trois DDLs	138

5.4.2 Mécanismes hybrides spatiaux	140
5.5 Conclusion	150
CHAPITRE 6 CONCLUSION	151
6.1 Synthèse des travaux	151
6.2 Avantages de la solution proposée	152
6.3 Limitations de la solution proposée et améliorations futures	154
BIBLIOGRAPHIE	155
ANNEXES	171
A.1 Comparaison entre les produits vectoriels et de visseurs	171
A.1.1 Produit entre deux torseurs à pas nul	171
A.1.2 Produit entre un torseur à pas nul et un torseur à pas infini	173
A.2 L'articulation Q	173
A.3 Détail des calculs du complément du Schur	175
A.4 Cas particulier du 3 – $R\underline{P}S$ triangulaire	176
A.5 Identification des torseurs réciproques à des mécanismes hybrides	177
A.5.1 Mécanisme 3 – $RR\underline{P}S$	177
A.5.2 Mécanisme 3 – $P\underline{P}SR$	179
B.1 Récapitulatif	180
B.1.1 Mécanismes d'orientation	180
B.1.2 Mécanismes de translation	181
B.1.3 Mécanismes du type 3 – RPS	181
B.2 Calculs de la matrice jacobienne	181
B.2.1 Mécanismes d'orientation	183
B.2.2 Mécanismes translationnels	184

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Conditions de réciprocité entre torseurs et visseurs plans	33
Tableau 5.1	Paramètres des différentes jambes à $t = 1s$	136
Tableau 5.2	Paramètres équivalents à $t = 1s$	136

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Mécanisme sériel et mécanisme parallèle	2
Figure 2.1	Éléments d'un mécanisme auto-adaptatif	7
Figure 2.2	Séquence de fermeture d'un doigt sous-actionné	7
Figure 2.3	Équivalences entre un mécanisme à quatre barres et différentes méthodes de transmission du mouvement	8
Figure 2.4	Engrenages non circulaires, poulies non circulaires et mécanisme à quatre barres cinématiquement équivalents	9
Figure 2.5	Mécanismes à quatre barres compliants	10
Figure 2.6	Articulations à un DDL	11
Figure 2.7	Articulations usuelles vues comme combinaisons de liaisons R et P .	12
Figure 2.8	Application d'une force pure à une liaison rotoïde	21
Figure 2.9	Visseurs et torseurs associés aux liaisons P , R et H	22
Figure 2.10	Visseurs et torseurs associés à une chaîne sérielle spatiale PR à axes perpendiculaires	22
Figure 2.11	Mécanismes parallèles composés de deux chaînes sérielles spatiales PR à axes perpendiculaires	23
Figure 3.1	Mécanisme à quatre barres plan à quatre liaisons rotoïdes	29
Figure 3.2	Mécanisme à six barres de type Watt 2	30
Figure 3.3	Mécanisme à six barres de type Stephenson 1	31
Figure 3.4	Torseurs réciproques appliqués au mécanisme à quatre barres plan . .	35
Figure 3.5	MCD du corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres	38
Figure 3.6	MCD du coupleur d'un mécanisme à quatre barres	39
Figure 3.7	Mécanismes contenus dans la chaise marchante du Tokyo Institute of Technology	43
Figure 3.8	Premier étage de la jambe du TIT	44
Figure 3.9	Vitesses instantanées du point C et du corps EF	47
Figure 3.10	Changement local de mobilité	49
Figure 3.11	Mécanisme à cinq barres plan à cinq liaisons rotoïdes	53
Figure 3.12	Mécanismes à quatre barres virtuels dans un mécanisme à cinq barres	54
Figure 3.13	Jambe ajustable Hoecken-Pantographe	55
Figure 3.14	Mécanisme plan 3 – RRR	58
Figure 3.15	Mécanisme plan 3 – RPR	60

Figure 3.16	Vitesse instantanée de la plateforme du $3 - R\underline{P}R$ soumise au seul actionnement de $\dot{\rho}_1$	61
Figure 3.17	Vitesse instantanée de la plateforme du $3 - \underline{R}PR$ soumise au seul actionnement de $\dot{\theta}_1$	62
Figure 4.1	Mécanisme à quatre barres sphérique	67
Figure 4.2	Visseur du corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres sphérique	68
Figure 4.3	position de l'axe du visseur du coupleur d'un mécanisme à quatre barres sphérique	69
Figure 4.4	Coupleur du mécanisme à quatre barres sphérique vu comme l'organe terminal d'une chaîne $\underline{R}R$	70
Figure 4.5	Mécanisme à quatre barres sphérique vu comme une chaîne sérielle RR	70
Figure 4.6	Mécanisme à cinq barres sphérique	71
Figure 4.7	Mécanisme sphérique $3 - RRR$	73
Figure 4.8	Position de l'axe du visseur ξ_1^m dans le mécanisme sphérique $3 - RRR$	74
Figure 4.9	Position de l'axe du visseur ξ_1^m dans le mécanisme plan $3 - RRR$. .	75
Figure 4.10	Mécanisme d'orientation $3 - UPS$	78
Figure 4.11	Position de l'axe du visseur ξ_3^m dans un mécanisme $1S + 3 - UPS$. .	80
Figure 4.12	Mécanisme $3 - RUU$	81
Figure 4.13	Torseur réciproque aux liaisons passives d'une jambe $\underline{R}UU$	82
Figure 4.14	Position de l'axe du visseur $\xi_0^P(\mathbf{c}_3)$ dans le mécanisme $3 - \underline{R}UU$. . .	84
Figure 4.15	Mécanisme $1S + 2UPU$	85
Figure 4.16	Mécanisme $3 - UPU$	89
Figure 4.17	Tripteron généralisé	90
Figure 4.18	Robot Delta	92
Figure 4.19	Chaîne sérielle instantanément équivalente à une jambe du robot Delta	94
Figure 5.1	Deux architectures du mécanisme $3 - RPS$	97
Figure 5.2	Position des axes des torseurs réciproques pour deux géométries de branches $R\underline{P}S$	98
Figure 5.3	Équivalences instantanées entre un mécanisme parallèle à 3 DDLs et une chaîne sérielle à 3 DDLs	106
Figure 5.4	Faisceau plan de centre P_k contenant les axes possibles du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ pour une branche $R\underline{P}S$	108
Figure 5.5	Position des axes des torseurs réciproques pour deux géométries de branches $\underline{R}PS$	109
Figure 5.6	Faisceau plan de centre P_k contenant les axes possibles du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ pour une branche $\underline{R}PS$	110

Figure 5.7	Position de l'axe du visseur ξ_k^p dans un mécanisme 3 – RPS	112
Figure 5.8	Représentation spatiale d'une cylindroïde	113
Figure 5.9	Position des axes des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b lorsque les liaisons prismatiques des jambes i et j d'un mécanisme 3 – RPS sont actionnées	115
Figure 5.10	Position des axes des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b lorsque les liaisons rotoïdes des jambes i et j d'un mécanisme 3 – RPS sont actionnées	116
Figure 5.11	Relations entre les torseurs ζ_k^l et ζ_k^r et les visseurs ξ_k^a , ξ_k^b , et ξ_k^m	119
Figure 5.12	Représentation spatiale des axes des torseurs ζ_k^l et ζ_k^r et des axes des visseurs ξ_k^a , ξ_k^b , et ξ_k^m	120
Figure 5.13	Mécanisme 6 – UPS triangulaire	121
Figure 5.14	Position des axes des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b dans un mécanisme 6 – UPS triangulaire	124
Figure 5.15	Paramétrage géométrique du mécanisme 3 – RPS cubique	126
Figure 5.16	Variation de la longueur ρ_3	127
Figure 5.17	Déplacement de la plateforme durant le mouvement	128
Figure 5.18	Variations du pas h_3 et du coefficient μ_3 durant le mouvement	128
Figure 5.19	Variations des amplitudes de la vitesse actionnée et de la vitesse de rotation de la plateforme durant le mouvement	129
Figure 5.20	Vecteurs de vitesses linéaires des visseurs ξ_3^m et $\mathcal{S}_3$ durant le mouvement	130
Figure 5.21	Variations de l'angle de rotation imposé à la plateforme et des longueurs des jambes	131
Figure 5.22	Déplacement de la plateforme soumise à une pure rotation	132
Figure 5.23	Vitesse de rotation de la plateforme et vitesses de variations des longueurs de jambes durant le mouvement	133
Figure 5.24	Variation des pas et des amplitudes des vitesses de rotations durant le mouvement	133
Figure 5.25	Variation des vecteurs de vitesses angulaires Ω_1 , Ω_2 et Ω durant le mouvement	134
Figure 5.26	Variation des vecteurs de vitesse de translation durant le mouvement	135
Figure 5.27	Equivalence numérique entre un mécanisme parallèle à 3 DDLs et une chaîne sérielle à 3 DDLs	137
Figure 5.28	Mécanismes 3 – RSR et 3 – RPS	138
Figure 5.29	Mécanisme équivalent à une chaîne $\underline{PPS}$	139
Figure 5.30	Mécanisme 6 – URS triangulaire	141
Figure 5.31	Géométrie d'une chaîne $RPSR$	142
Figure 5.32	Mécanisme 3 – $RRPS$	144

Figure 5.33	Mécanisme 3 – $PPSR$	145
Figure 5.34	Plateforme de Stewart	146
Figure 5.35	Paramétrage d’une jambe de la plateforme de Stewart	147
Figure 5.36	Mécanisme à quatre barres plan compris dans une jambe de la plateforme de Stewart	148
Figure 5.37	Chaîne cinématiquement équivalente à une jambe de la plateforme de Stewart	149
Figure A.1	Mécanisme à six barres du type Stephenson 2	174
Figure A.2	Torseurs réciproque à la branche k du mécanisme 3 – $RRPS$	178
Figure A.3	Torseurs réciproque à la branche k du mécanisme 3 – $PPRS$	179

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La théorie des visseurs est un outil mathématique puissant pour l'étude des mécanismes. Elle permet de modéliser les efforts mécaniques et les vitesses sous forme de droites dans l'espace, chacune de ces droites étant associée à un scalaire appelé pas. Les principaux avantages de la théorie sont d'étudier les mobilités des mécanismes, de décrire les conditions dans lesquelles les mouvements de ces derniers dégénèrent, ainsi que d'établir facilement des équations de vitesses. Pour un mécanisme, ces équations permettent de relier le vecteur des vitesses actionnées au vecteur des vitesses d'un corps de sortie. Pour les mécanismes sériels, cette relation est linéaire et fait apparaître une matrice, appelée matrice jacobienne, qui a un rôle fondamental en cinématique. En revanche, pour les mécanismes parallèles ou de topologies complexes, il n'est pas aussi aisé d'établir l'expression de cette matrice et la relation de vitesse fait généralement apparaître deux matrices jacobiennes partielles distinctes. L'unique matrice jacobienne est dans l'immense majorité des cas obtenue numériquement à partir de ces matrices jacobiennes partielles. Nous allons montrer comment la théorie des visseurs combinée avec des outils d'algèbre linéaire permet d'obtenir une expression analytique de cette matrice pour des mécanismes parallèles.

1.1 Définitions et concepts de base

Les mécanismes sont présents aussi bien dans les objets qui nous entourent au quotidien que dans les robots les plus performants développés dans les meilleures universités et entreprises du monde. Ils ont été étudiés dans le monde occidental au moins depuis l'Antiquité et les travaux d'Archimède. Les mécanismes ont depuis accompagné les grandes avancées technologiques de l'humanité. Parmi elles, on peut par exemple citer la presse de Gutenberg ou la machine à vapeur de Watt, qui ont toutes deux profondément influencé la société de leurs époques. Depuis, les mécanismes ont grandement favorisé l'industrialisation par les lignes d'assemblage puis la robotisation. Ils sont encore présents, notamment au travers des robots collaboratifs dans la récente « Industrie 4.0 ».

Les mécanismes sont un constituant fondamental de la robotique et de manière plus générale de la mécatronique. Cependant, en profitant des actionneurs et capteurs de plus en plus perfectionnés, la mécatronique tend à faire la part belle à la commande et aux algorithmes de contrôle, délaissant ainsi la partie mécanique des systèmes. Une bonne illustration de l'importance des algorithmes est donnée par le développement et la propagation fulgurante de l'intelligence artificielle. Cependant, même la meilleure intelligence artificielle du monde reste

simplement un programme informatique si elle n'est pas associée à un système mécanique. De plus, si ce dernier est mal conçu, alors un dispositif mécatronique peut au mieux peiner à accomplir une tâche donnée, au pire dysfonctionner totalement.

Ainsi, même dans l'ombre des algorithmes de contrôle, l'analyse de la mécanique d'un système reste essentielle. Comprendre et analyser le fonctionnement des mécanismes, c'est-à-dire caractériser leurs mouvements soumis à l'application d'une force externe, permet d'apporter énormément à la synthèse et à l'analyse d'un système robotique. Il est donc nécessaire de développer et exploiter des outils théoriques et mathématiques permettant d'analyser la géométrie des mécanismes afin de décrire les forces, ainsi que les vitesses interagissant en leur sein.

En cinématique, c'est-à-dire dans le domaine de l'analyse des mouvements, la matrice jacobienne joue un rôle primordial. Elle permet d'établir un lien direct entre les vitesses d'actionnement d'un mécanisme et les vitesses en sortie de ce dernier. Réciproquement, cette matrice donne une relation entre les efforts que peuvent fournir les actionneurs et les efforts extérieurs imposés au mécanisme. Cette relation instantanée est linéaire et permet d'exploiter les outils mathématiques de l'algèbre du même nom. Elle permet également l'étude des singularités, c'est-à-dire les conditions géométriques où les mouvements possibles d'un mécanisme sont localement altérés. La matrice jacobienne contient ainsi énormément d'informations sur le comportement d'un mécanisme.

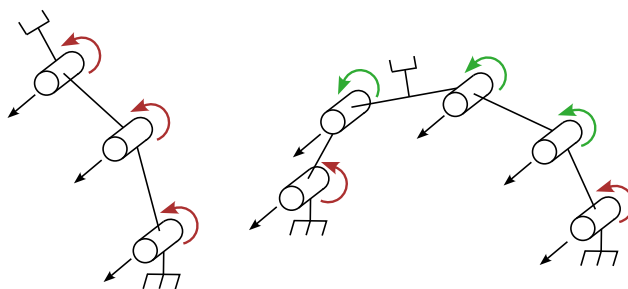


FIGURE 1.1 Mécanisme sériel et mécanisme parallèle

L'obtention de la matrice jacobienne est aisée pour les mécanismes sériels. Ces derniers consistent en un enchaînement de corps rigides connectés par des liaisons, allant du bâti au corps de sortie, appelé organe terminal. La figure 1.1 (gauche) montre un exemple de mécanisme *sériel* qui possède trois liaisons actionnées et indépendantes. Les mécanismes *parallèles* sont des mécanismes dont l'organe terminal est connecté au bâti par au moins deux chaînes sérielles. Toutes les liaisons ne sont pas forcément actionnées. La figure 1.1 (droite) montre un mécanisme parallèle élémentaire connecté par deux chaînes sérielles. Les mécanismes *hybrides* sont des mécanismes ni sériels, ni purement parallèles. Ils sont en général

composés de chaînes cinématiques interconnectées. Ces mécanismes ainsi que les mécanismes parallèles possèdent des articulations qui ne sont pas actionnées, dites passives. Le mécanisme de la figure 1.1 (droite) n’a par exemple que deux liaisons actionnées sur les cinq. La présence de liaisons passives complique l’obtention de la relation d’entrée/sortie en vitesse, puisqu’à chaque liaison passive est associée une vitesse également dite passive qu’il est nécessaire d’éliminer. Pour ce faire, il est indispensable d’exploiter les différentes relations géométriques régissant le mécanisme étudié. Si cela peut être relativement aisé pour le mécanisme parallèle montré figure 1.1 (droite), cela l’est moins pour des mécanismes possédant un nombre de branches plus élevé ou des chaînes interconnectées.

La théorie des visseurs permet de pallier ces difficultés. Cette théorie a été introduite par Ball [1] au début du siècle dernier, puis oubliée durant des décennies avant d’être remise au goût du jour par Hunt [2]. Elle est depuis couramment utilisée pour modéliser des systèmes robotiques, voir notamment [3] et [4]. Elle propose un cadre unifié entre les vitesses et les efforts par la géométrie des droites dans l’espace, donnant une représentation compacte et significative de ces grandeurs. La théorie permet de décrire efficacement les mobilités des mécanismes ainsi que leurs conditions de singularités. En exploitant la dualité entre efforts et vitesses, les relations linéaires entre le vecteur des vitesses actionnées et le vecteur vitesse de sortie peuvent être obtenues quasiment immédiatement.

Pour les mécanismes sériels, l’équation de vitesse fait directement apparaître la matrice jacobienne. Par exemple, pour le mécanisme montré figure 1.1 (gauche), on peut modéliser chacune des trois liaisons par un visseur et la matrice jacobienne est alors simplement une collection de ces trois visseurs. Pour un mécanisme parallèle, comme typiquement celui montré figure 1.1 (droite), l’équation de vitesse fait en revanche apparaître deux matrices jacobiennes partielles distinctes. La matrice jacobienne peut s’obtenir alors en inversant une de ces matrices et en la multipliant à la seconde.

1.2 Motivation du projet

L’opération mathématique que nous venons de décrire est dans l’immense majorité des cas réalisée numériquement, avec les problèmes numériques que cela entraîne. Les composants de la matrice à inverser ont des unités différentes, rendant cette dernière mal conditionnée, en particulier à l’approche de singularités [5, 6]. Il existe certes quelques exemples de matrices jacobiennes analytiques, voir [7–11] par exemple. Cependant, les expressions analytiques de matrices jacobiennes brillent surtout par leur absence dans la littérature scientifique.

Une matrice jacobienne peut certes être obtenue numériquement. En revanche, en faisant

cela, nous perdons des informations sur le comportement cinématique du mécanisme. La motivation derrière ce projet est d'analyser certaines classes de mécanismes et de certains mécanismes partageant des caractéristiques communes afin de donner leur matrice jacobienne. La volonté est de répondre à la simple question suivante : Dans un mécanisme parallèle ou hybride, si l'on actionne une liaison donnée à une vitesse donnée, quel sera le mouvement de l'organe terminal qui en découle ? On souhaite par là savoir si l'organe terminal a un mouvement de translation, de rotation, ou une combinaison des deux, et surtout à quelle vitesse il se meut. Cela revient à chercher le *modèle cinématique direct* (MCD) du mécanisme.

1.3 Objectifs de recherche

L'objectif principal est de proposer explicitement le MCD de plusieurs mécanismes ou classes de mécanismes parallèles, ce qui revient à donner la forme analytique de leur matrice jacobienne. Pour cela, nous nous servons du cadre mathématique de la théorie des visseurs afin d'établir leurs équations de vitesses qui nous serviront de base pour établir les expressions de la matrice jacobienne.

Les matrices jacobiennes sont recherchées non seulement sous forme analytique mais surtout, à l'image des mécanismes sériels, comme collection de visseurs. Ainsi, les résultats obtenus pourront être analysés et décrits de manière significative à travers une approche géométrique.

Un objectif subsidiaire est de donner la forme la plus générale possible des matrices jacobiennes obtenues, afin que la méthode présentée puisse être appliquée à de nombreux mécanismes. Les équations seront données de manière vectorielle, permettant ainsi de s'adapter à tout type de paramétrage. Nous fournirons des exemples concrets pour toutes les catégories de mécanismes que nous étudierons. Cela permettra d'une part d'illustrer les équations obtenues, mais également de montrer que ces dernières sont applicables pour une grande variété de mécanismes.

1.4 Plan de la thèse

Le premier chapitre 2 sera consacré à une revue de littérature. Cette dernière nous permettra de nous familiariser avec les mécanismes et surtout d'introduire les fondamentaux mathématiques de la théorie des visseurs. Le chapitre 3 sera dédié à l'étude des mécanismes plans. Le chapitre suivant se consacrera à deux classes de mécanismes spatiaux qui sont les mécanismes rotationnels et translationnels. Finalement, le chapitre 5 sera consacré à l'étude de deux mécanismes, le 3-*RPS* et le 6-*UPS* ainsi qu'à ceux qui partagent des caractéristiques similaires.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Mécanismes

2.1.1 Généralités sur les mécanismes

Les mécanismes peuvent être définis comme un ensemble de corps agencés de manière à transformer un mouvement afin de générer des vitesses et/ou d'appliquer des efforts. Pour être plus rigoureux, selon l'IFToMM (*International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science*) [12], un mécanisme est défini par un :

Système de corps contraint et conçu pour convertir des mouvements de, et des forces sur, un ou plusieurs corps en mouvements contraints de, et des forces sur, les autres corps.

Cette définition, bien qu'un peu abscons, est assez générale pour englober l'intégralité des mécanismes existants. Il existe pourtant une grande pluralité de ces derniers et leur classification des mécanismes reste un problème ouvert. Il est par exemple possible de classer les mécanismes en fonction de leur fonction, des types de mouvement qu'ils sont capables de générer, des types de technologies de transmission de mouvement qu'ils contiennent, etc...

Comme nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard, nous allons dans ce document principalement nous concentrer sur des mécanismes composés de corps connectés par des *articulations*, également appelées *liaisons* (en anglais *joint* ou *kinematic pairs*). Les corps, aussi appelés *membrures* (en anglais *bodies* ou *links*), sont considérés comme rigides, on supposera donc que les membrures sont indéformables. On appelle communément *mécanisme à membrures rigides* ce type de mécanisme.

Une notion fondamentale commune à n'importe quel mécanisme est appelée *degré de liberté* (DDL). Toujours d'après l'IFToMM, un DDL est défini par le « nombre de variables indépendantes qui doivent être définies comme mouvement d'entrée ». En général, on définit les DDLs d'un mécanisme par ce qu'on appelle les coordonnées généralisées, qui sont différentes des coordonnées cartésiennes. Elles sont bien souvent associées aux paramètres régissant l'actionnement du mécanisme. Nous ferons dans ce document une distinction avec une notion très proche et souvent confondue qui est la *mobilité* d'un mécanisme. Il s'agit du nombre réel de mouvements possibles et indépendants dans un mécanisme. Le nombre de mobilité peut être inférieur au nombre de DDLs si par exemple des contraintes internes au mécanisme empêchent le mouvement, ou si ce dernier a une configuration spécifique modifiant son fonctionnement usuel. On parle aussi de mobilité pour caractériser la nature du mouvement. On

va pouvoir (par exemple) dire que la mobilité d'un corps d'un mécanisme à un DDL est une rotation pure. Ces mobilités peuvent changer localement, c'est-à-dire que cette même rotation peut instantanément se transformer en translation selon la configuration du mécanisme. La formule la plus utilisée pour calculer le nombre de DDLs d'un mécanisme est donnée par la formule de Tchebychev-Grübler-Kutzbach, plus communément simplement appelée formule de Grübler. Elle est donnée par :

$$M = d(N - 1 + J) + \sum_{i=1}^j f_i, \quad (2.1)$$

où M est le nombre de DDLs, N le nombre de corps du mécanisme (en comptant le bâti), j le nombre de liaisons et f_i le nombre de DDL de chaque liaison. Le chiffre d vaut 6 ou 3 selon si le mécanisme est respectivement spatial ou plan/sphérique. Cette formule n'est pas infaillible car elle prend en compte ni l'architecture ni la géométrie des mécanismes.

L'ensemble des coordonnées généralisées est regroupé dans un vecteur $\mathbf{q}$. La *pose* de l'organe terminal est regroupée dans un vecteur que l'on note $\mathbf{X}$. Cette dernière décrit la position d'un corps dans l'espace ainsi que son orientation par rapport à un repère fixe. Une manière de caractériser les mécanismes est de comparer la dimension des vecteurs $\mathbf{q}$ et $\mathbf{X}$ de la manière suivante :

- Si $\dim(\mathbf{q}) = \dim(\mathbf{X})$, le mécanisme est *pleinement actionné*. Il y a autant de paramètres pour définir la pose que de DDLs.
- $\dim(\mathbf{q}) > \dim(\mathbf{X})$, le mécanisme est *redondant*, il y a plus d'actionneurs par rapport au nombre de mobilités du mécanisme.
- $\dim(\mathbf{q}) < \dim(\mathbf{X})$, le mécanisme est *sous actionné*, il n'y a pas assez d'actionneurs pour définir la pose.

Les mécanismes pleinement actionnés constituent la grande majorité des mécanismes existants. Le sur-actionnement est principalement utilisé pour augmenter la précision et le contrôle d'un système [13, 14]. Mais ils sont également courant pour les robots parallèles à câbles [15–17].

La dernière catégorie s'avère très intéressante pour au contraire limiter le nombre d'actionneurs. Certaines liaisons de tels mécanismes peuvent être laissées totalement passives (typiquement un pendule). Il existe par exemple une classe entière de robots marcheurs basés sur des pendules inversés qui peuvent se mouvoir à moindre frais (d'un point de vue énergétique), grâce à la gravité et une simple pente [18–20].

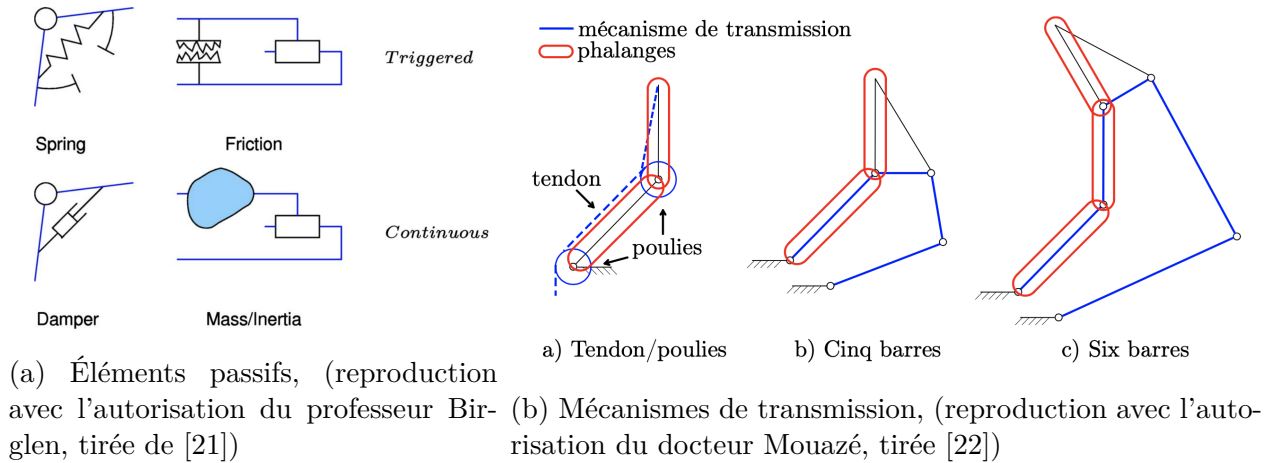


FIGURE 2.1 Éléments d'un mécanisme auto-adaptatif

Certains mécanismes sous actionnés sont appelés *auto-adaptatifs* [21, 23]. Les liaisons non actionnées de ces derniers ne sont pas purement libres mais contraintes par des éléments passifs (des ressorts en majorité, mais pas toujours [24]), voir figure 2.1a. Ces derniers sont combinés à des mécanismes de transmission [25–27], comme illustré figure (2.1b). Ces liaisons contraintes vont s'activer uniquement sous l'effet des efforts extérieurs appliqués au mécanisme [28–30]. Ce dernier va ainsi dans ce cas changer son comportement et s'adapter à son environnement. Un exemple est fourni figure 2.2 où un doigt sous-actionné s'adapte à la forme d'un objet. C'est un domaine particulièrement utile notamment pour la préhension puisque il n'est pas nécessaire *a priori* de connaître la forme de l'objet à attraper. Certaines études ont esquissés les prémisses d'une extension à la locomotion [31–33].

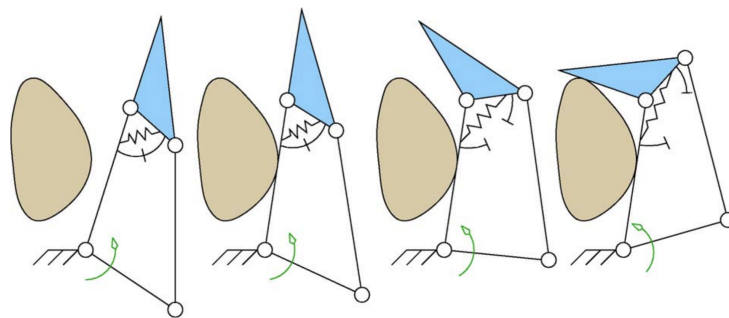


FIGURE 2.2 Séquence de fermeture d'un doigt sous-actionné, (reproduction avec l'autorisation du professeur Birglen, tirée de [21])

Les systèmes auto-adaptatifs peuvent notamment être construits par des mécanismes *différentiels* [34, 35]. Ces derniers permettent de distribuer l'action d'une entrée vers plusieurs sorties et inversement. Cela peut se faire, entre autres, par des membrures rigides [36], des trains d'engrenages [37], des systèmes de poulies [38–42], des fluides [43], etc... Il existe effectivement une grande variété de manières de transmettre le mouvement. Reuleaux a catégorisé à la fin du 19ème siècle les machines selon six catégories, incluant notamment les engrenages, les mécanismes à courroie et les mécanismes à cames [44]. Les mécanismes à membrures rigides n'emploient qu'un seul type de transmission parmi les six définies par Reuleaux. Cependant, il est possible d'établir des équivalences cinématiques entre les types de mécanismes. Par exemple, la figure 2.3 montre pour les trains d'engrenages, les couples de poulies et les systèmes de cames un mécanisme à quatre barres équivalent. Un mécanisme à quatre barres étant un mécanisme à quatre liaisons connectées par quatre corps, bâti compris.

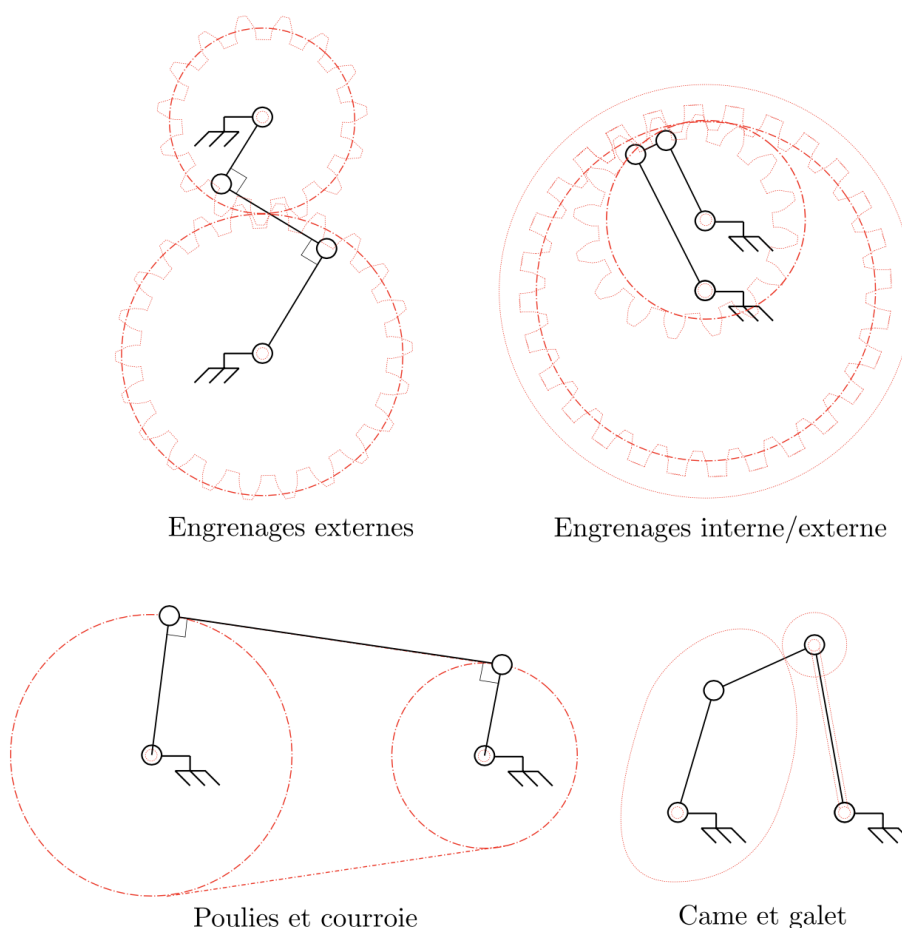


FIGURE 2.3 Équivalences entre un mécanisme à quatre barres et différentes méthodes de transmission du mouvement, (reproduction avec l'autorisation du professeur Birglen, tirée de [45] et inspirée du cours *WB3303 : Mechanisms* de TU Delft)

Ces équivalences entre mécanismes sont généralement instantanées, la configuration du quatre barres va en effet changer au cours du temps contrairement par exemple à l'engrenage. Il est cependant possible d'obtenir des équivalences cinématiques valables en tout temps en utilisant des géométries non linéaires [46–53]. Par exemple, la figure 2.4 montre trois mécanismes différents ayant chacun une relation d'entrée sortie identique. Une rotation complète autour du point A entraîne la même vitesse de rotation autour du point B .

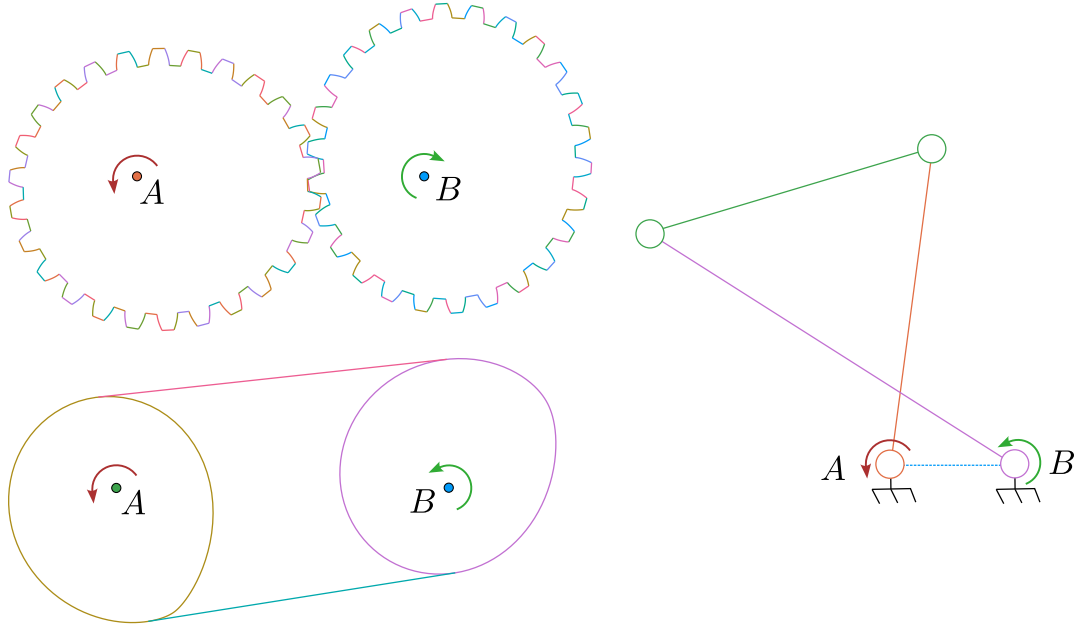


FIGURE 2.4 Engrenages non circulaires, poulies non circulaires et mécanisme à quatre barres cinématiquement équivalents

Il existe une catégorie de mécanismes dont les membrures sont déformables et dont l'importance est croissante en robotique. Ils sont appelés *mécanismes compliants* [54] et leur fonctionnement repose justement sur l'élasticité des corps qui les composent. Les figures 2.5a et 2.5b montrent deux exemples de tels mécanismes, le premier est dit à *compliance localisée* et le second à *compliance distribuée*. Dans les deux cas, il est également possible d'établir une équivalence cinématique avec des mécanismes à membrures rigides via ce que l'on appelle le *modèle pseudo rigide* [54]. Le mécanisme montré figure 2.5c est par exemple parfaitement équivalent à ceux des figures 2.5a et 2.5b. Il est à noter que les mécanismes à membrures rigides et les mécanismes compliants ne sont pas opposés. De nombreux mécanismes bio-inspirés comme par exemple certaines prothèses ou exo-squelettes ainsi que des jambes robotiques combinent mécanismes rigides, câbles et éléments compliants. L'objectif est d'une part de déporter l'actionnement et d'autre part de restituer l'énergie électrique emmagasinée par la déformation des matériaux [55–64].

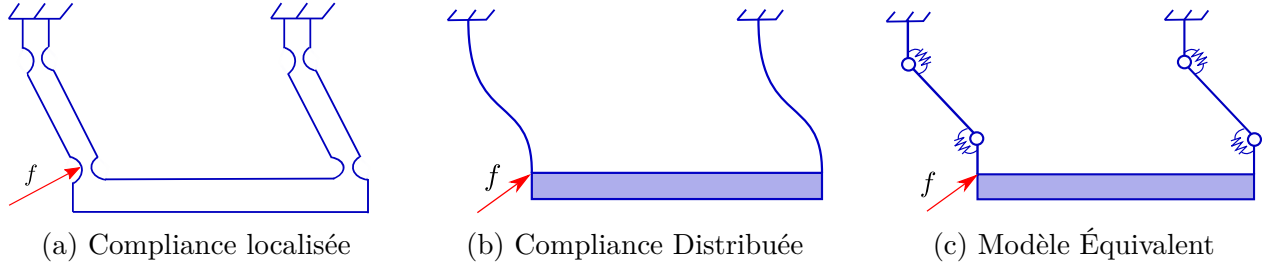


FIGURE 2.5 Mécanismes à quatre barres compliantes

Il existe de nombreux autres types de mécanismes. Parmi les recherches les plus récentes, on retrouve les mécanismes faits d'origamis [65–67]. Ce type de robots est le plus souvent obtenu par pliage d'une feuille dont les plis sont des liaisons compliantes, voir par exemple [68, 69]. Il est également possible de créer de tels robots en assemblant des plaques entre elles par des articulations, voir par exemple [70]. Cette deuxième technique permet de créer des robots modulaires pouvant changer de topologie [71]. De nombreuses recherches actuelles portent en effet sur des robots reconfigurables [11, 72–74], capables de changer d'architecture et donc de fonction suivant les situations. Il existe par exemple toute une classe de robots mobiles dont les roues se transforment en jambes et inversement selon le terrain [29, 75–78]. Les mécanismes déployables [79–81] sont actuellement beaucoup étudiés notamment pour le domaine spatial et la chirurgie minimalement invasive. Dans cette idée là, on retrouve beaucoup de mécanismes continûment déformables [82–89], qui sont compliantes, constitués de membrures connectées entre elles par des câbles ou encore gonflables [90, 91].

Ainsi, la cinématique est toujours un domaine d'étude actif. Les recherches ont désormais tendance à se concentrer sur des mécanismes plus souples que leurs pendants à membrures rigides. Cela passe par leur conception (éléments flexibles et/ou emploi de câbles), mais également par leur fonction (mécanismes auto-adaptatifs ou reconfigurables). Cependant, peu importe le mécanisme, leur analyse repose bien souvent sur des modèles de mécanismes à membrures rigides cinématiquement équivalents. Cette équivalence peut être instantanée, voir figure 2.3, parfaitement équivalente, voir figures 2.4 et 2.5, approchée par discrétisation [92]. L'analyse des mécanismes à membrures rigides demeure donc essentielle à la cinématique.

2.1.2 Mécanismes à membrures rigides

Concepts fondamentaux

Les différents corps d'un mécanisme à membrures rigides sont connectés par des articulations. Parmi elles, il existe trois liaisons possédant un seul DDL. Il s'agit de :

- La liaison *prismatique* (P), dont la mobilité est une translation pure dans une direction donnée. Usuellement appelée glissière en français, on préférera le terme prismatique pour coller avec le nom anglais *prismatic*.
- La liaison *rotoïde* (R), dont la mobilité est une rotation autour d'un axe. Usuellement appelée liaison pivot en français, on préférera ici le terme rotoïde pour garder la même initiale que son nom anglais (*revolute*).
- La liaison *hélicoïdale* (H), dont la mobilité est une rotation autour d'un axe couplée avec une translation dans la direction de ce même axe, par un paramètre appelé *pas*. Elle joue un rôle capital dans la théorie des visseurs.

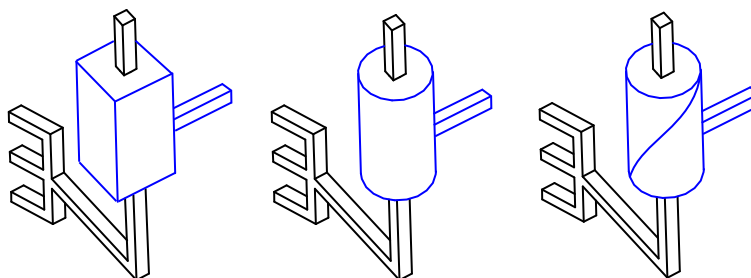


FIGURE 2.6 Articulations à un DDL

Ces trois articulations sont représentées figure 2.6. Il existe de nombreuses autres liaisons possédant plusieurs mobilités. Cependant, ces dernières sont toutes cinématiquement équivalentes à des combinaisons spécifiques des trois articulations déjà citées. Celles que l'on rencontrera dans ce document sont :

- La liaison *universelle* (U), aussi appelée sphérique à doigt en français (ou liaison/joint de Cardan). Il s'agit d'une articulation permettant deux rotations autour d'axes concourants. La figure 2.7 (gauche) montre une liaison universelle composée de deux liaisons rotoïdes. Les axes s'intersectent en un point que l'on appellera centre de la liaison.

- La liaison *sphérique* (S) permettant à deux corps de pivoter l'un par rapport à l'autre dans toutes les directions. La figure 2.7 (milieu) montre une liaison sphérique comme composée de trois liaisons rotoïdes. Les axes de ces dernières s'intersectent en un point appelé centre de la liaison.
- La liaison *cylindrique* (C), aussi appelée pivot glissant en français. Elle consiste en une liaison rotoïde et une liaison prismatique orientées dans la même direction, comme montré figure 2.7 (droite). Contrairement à la liaison hélicoïdale, la rotation et la translation ne sont pas couplées, la liaison C a bien deux mobilités indépendantes.

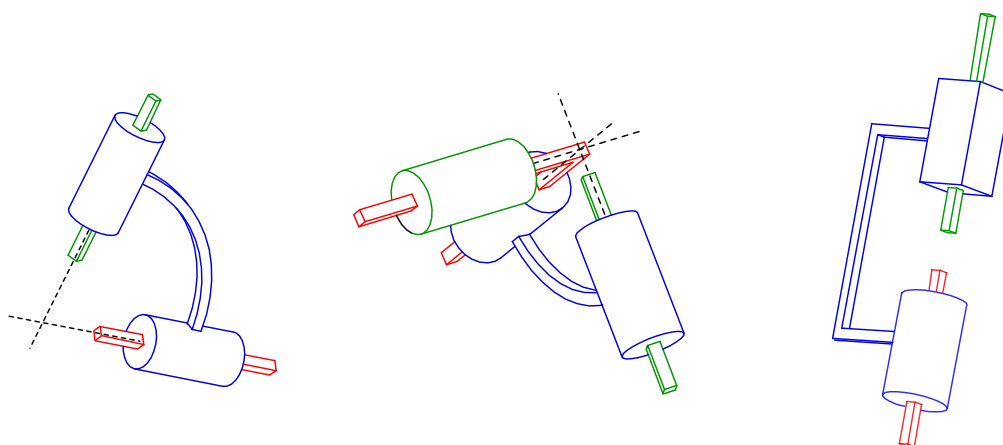


FIGURE 2.7 Articulations usuelles vues comme combinaisons de liaisons R et P

Il est à préciser que les liaisons montrées figure 2.7 ne reflètent pas forcément la manière dont elles sont réalisées physiquement. Il s'agit d'une représentation équivalente cinématique.

Pour décrire l'architecture d'une chaîne sérielle, la norme est d'accoler les initiales des noms des liaisons. Par exemple, la chaîne à trois liaisons rotoïdes montrée figure 1.1 (gauche) est appelée RRR . Pour les mécanismes parallèles, on fait de même mais pour toutes les chaînes sérielles connectant l'organe terminal au bâti et l'on précise le nombre de chaînes identiques. Par exemple un mécanisme dont l'organe terminal serait connecté par trois branches identiques à trois rotoïdes est noté $3 - RRR$. Le mécanisme à cinq barres montré figure 1.1 (droite) peut être décrit comme un $1 - RRR + 1 - RR$. Si l'on souhaite préciser quelles sont les liaisons actionnées, alors la convention est de souligner la lettre correspondante.

Analyse mathématique des mécanismes

Maintenant que nous avons introduit les notions fondamentales de DDLs, de corps et de liaisons, nous allons nous concentrer sur les principes mathématiques élémentaires de l'analyse des mécanismes.

Modèles géométriques et cinématiques

Le modèle géométrique consiste à établir une relation entre le vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ et la *pose* $\mathbf{X}$ d'un corps donné dans un mécanisme. Le modèle géométrique est donné par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Pour les mécanismes sériels, il est aisé de déterminer le *modèle géométrique direct* (MGD) sous la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (2.3)$$

qui permet de connaître la pose en fonction des coordonnées généralisées d'un mécanisme. En faisant varier les coordonnées de $\mathbf{q}$ sur l'ensemble de leur plage de définition, on obtient l'*espace de travail* du mécanisme, c'est-à-dire l'ensemble des positions que peut prendre l'organe terminal. À l'inverse des mécanismes sériels, il est plus facile pour les mécanismes parallèles d'obtenir le *modèle géométrique inverse* (MGI), à savoir :

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}). \quad (2.4)$$

Puisque les équations régissant les mécanismes sont hautement non linéaires, il est général compliqué de passer d'un modèle à l'autre. C'est une des raisons pour laquelle on préfère étudier les mécanismes d'un point de vue cinématique, puisque les équations d'entrée/sortie deviennent alors linéaires. En effet, en dérivant par rapport au temps le MGD d'un mécanisme en série, voir équation (2.3), nous obtenons la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

qui constitue le *modèle cinématique direct*. La matrice $\mathbf{J}$ est appelée matrice jacobienne. Cette dernière est centrale dans ce travail. Elle est donnée par :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

où m et n sont les dimensions respectives des vecteurs $\dot{\mathbf{X}}$ et $\dot{\mathbf{q}}$. Pour les mécanismes parallèles, et plus généralement hybrides (non purement parallèle ni sériel [93]), l'équation de vitesse reliant les vecteurs $\dot{\mathbf{X}}$ et $\dot{\mathbf{q}}$ est obtenue en dérivant l'équation (2.2), ce qui donne :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Il est à préciser que l'équation (2.2) contient également des vitesses passives. On considère que ces dernières ont été éliminées de l'équation (2.7). Cette opération peut s'avérer rapidement fastidieuse, en particulier pour les mécanismes spatiaux, voir [7, 94–96].

L'équation (2.7) fait intervenir deux matrices jacobienues partielles distinctes, qui contrairement à la matrice jacobienne, ne sont pas uniques. La matrice $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}$ sera appelée *matrice jacobienne parallèle*. La matrice $-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ sera quant à elle appelée *matrice jacobienne sérielle*. Pour obtenir le modèle cinématique direct sous la forme de l'équation (2.5), il est possible d'obtenir la matrice jacobienne par l'opération :

$$\mathbf{J} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (2.8)$$

Cette opération n'est possible que si la matrice jacobienne parallèle est inversible, car dans le cas contraire, la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ n'est pas définie. Pour les mécanismes parallèles, la matrice jacobienne sérielle est très souvent diagonale et il est alors beaucoup plus simple d'obtenir le *modèle cinématique inverse* (MCI), à savoir :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{X}}. \quad (2.9)$$

Dans le cadre des mécanismes parallèles, certains auteurs parlent de matrice jacobienne pour désigner l'inverse de cette dernière, mais ce n'est pas la terminologie que nous utiliserons. Il faut noter qu'il existe une vraie dualité, dont nous aurons l'occasion de reparler, entre forces et vitesses. Ainsi, si l'on note $\mathbf{t}$ le vecteur des efforts associés à chaque coordonnée généralisée, et $\mathbf{f}$ le vecteur des efforts de l'organe terminal, alors la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne permet de donner le modèle en force direct :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{t}. \quad (2.10)$$

À l'inverse du MCD, il est relativement aisé d'obtenir cette relation pour les mécanismes parallèles et bien plus compliqué pour mécanismes sériels.

Singularités

L'opération d'inversion donnée équation (2.8) destinée à obtenir la matrice jacobienne est comme nous l'avons déjà évoqué rarement effectuée analytiquement pour deux raisons principales. La première est que ce calcul est en général très complexe, la seconde est que l'équation (2.7) donne déjà beaucoup d'informations sur le comportement un mécanisme, notamment sur l'apparition de singularités. Mathématiquement, cela se traduit par la chute de rang d'une ou des deux matrices jacobienne de l'équation (2.7) [97, 98].

- Si $\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$, on parle de *singularité de type 1*. Dans cette situation, le mécanisme perd localement une ou plusieurs mobilités. Ainsi, le robot ne peut se mouvoir dans certaines directions malgré une entrée non nulle.
- Si $\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$, on parle de *singularité de type 2*. La pose de l'organe terminal devient incontrôlable et peut bouger dans certaines directions malgré une entrée nulle. Dans ce cas là, ni le modèle cinématique direct ni la matrice jacobienne ne sont définies, puisque la matrice jacobienne parallèle n'est plus inversible, voir équation (2.7).

Il est également possible de définir les singularités de type 3 qui apparaissent lorsque le mécanisme subit dans un même temps des singularités de type 1 et 2. Il est à noter que cette classification n'est pas complète puisque pour estimer le déterminant des matrices, il faut que celles-ci soient carrées. C'est en général le cas pour la matrice parallèle jacobienne mais pas toujours pour la matrice jacobienne sérielle. Dans ce cas-là, on parle de singularité de type 1 lorsque l'une de ses colonnes devient nulle, ou lorsque au moins deux de ses colonnes deviennent linéairement dépendantes. Dans ce document nous nous contenterons de ces deux types de singularités bien qu'il existe d'autres classifications plus complètes [99, 100].

2.2 Théorie des visseurs

2.2.1 Introduction et définitions mathématiques

La théorie des visseurs permet de modéliser les vitesses instantanées d'un corps dans l'espace ainsi que les efforts extérieurs qui lui sont appliqués sous une représentation compacte, unifiée et élégante. On différencie deux types de visseurs :

- Les *visseurs* qui regroupent la vitesse angulaire d'un corps et la vitesse de translation d'un point de ce corps. En anglais, un visseur est appelé *twist*, et en français parfois *torseur cinématique*
- Les *torseurs* qui regroupent les couples appliqués à un corps et les forces pures appliquées en un point de ce corps. En anglais, un torseur est appelé *wrench*, et en français parfois *torseur des actions mécaniques*, ou éventuellement *torseur statique*

En anglais, la théorie des visseurs s'appelle *screw theory*. Un *screw* désigne à la fois les visseurs et les torseurs (twists et wrenches). En français, sa traduction serait *vis*, bien que ce mot n'est en pratique que peu utilisé et les auteurs francophones choisissent indépendamment le mot visseur ou torseur pour désigner les deux. Dans cette section, et uniquement, on utilisera le mot vis pour les définitions et propriétés communes à la fois aux visseurs et aux torseurs.

La théorie des visseurs modélise par un formalisme unifié la version infinitésimale du théorème de Chasles-Mozzi [101] et du théorème de Poinsot :

- *Théorème de Chasles-Mozzi* : tout mouvement de corps rigide peut être décrit à l'aide d'une rotation autour d'un axe, associée à une translation le long de cet axe.
- *Théorème de Poinsot* : tout effort mécanique appliqué à un solide rigide peut être réduit à une force selon un axe et d'un couple autour de cet axe.

Ainsi, les vis sont des objets mathématiques représentant des droites dans l'espace cartésien, associées à des scalaires, appelés *pas* régissant le vissage autour de cette droite. L'expression d'une vis à pas fini est :

$$\$_h^X(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \times \mathbf{r}_{XO} + h\mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur directeur de la droite, X est un point appartenant à cette droite, O est la position de l'origine et $\mathbf{r}_{XO}$ un vecteur allant du point X à l'origine. Quant à h , il s'agit du pas. Si ce dernier est infini, alors les visseurs et torseurs ont une expression différente de celle donnée à l'équation précédente, à savoir :

$$\mathbf{\$}_{\infty}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

où $\mathbf{0}_{3 \times 1}$ est le vecteur nul de taille 3×1 et $\mathbf{s}$ le vecteur définissant la direction de la vis. Si le pas est infini, la vis représente en effet uniquement une direction dans l'espace et la notion de point d'application disparaît (typiquement un solide en translation pure ou un couple pur appliqué à ce solide). Si le vecteur $\mathbf{s}$ des équations (2.11) ou (2.12) est normalisé, on parle de vis unitaire.

Les articulations liaisons prismatiques, rotoïdes et hélicoïdales sont modélisés par des visseurs unitaires respectivement à pas infini, nul et fini ($h \neq 0$). Les contraintes sont elles modélisées par des torseurs unitaires, à pas infini s'il s'agit d'un couple pur, à pas nul s'il s'agit d'une force pure, ou à pas fini pour un couple et une force appariés. Les visseurs sont communément noté par la lettre grecque xi et les torseurs par la lettre zeta. En ce qui concerne les vis d'une membrure, son visseur et le torseur qui lui est appliqué sont donnés respectivement par :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V}_P \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur des vitesses de rotation, $\mathbf{f}$ celui des forces tandis que $\mathbf{V}_P$ est le vecteur de vitesses de translation du point P et $\boldsymbol{\tau}$ celui des moments appliqués au même point. Tous ces vecteurs sont de dimension 3×1 . Il existe une légère différence entre les vis introduites équations (2.11) et (2.12) et celles de l'équation (2.13). Si l'on prend le cas des visseurs, alors les visseurs unitaires des équations (2.11) et (2.12) représentent la potentialité de mouvement d'un corps tandis que l'équation (2.13) représente ses vitesses réelles. Les deux visseurs sont cependant liés par la relation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}_h^X(\mathbf{s}) \dot{\theta} \quad \text{pour un mouvement hélicoïdal} \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}_{\infty}(\mathbf{s}) \dot{\rho} \quad \text{pour un mouvement de translation,} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $\dot{\theta}$ est une vitesse de rotation et $\dot{\rho}$ une vitesse linéaire. Cette remarque est également valable pour les torseurs.

2.2.2 Autres représentations des vis

Les vis que nous avons introduites sont des vis instantanées, donc décrivant le mouvement et les contraintes à un instant donné. Il existe en opposition des visseurs finis (à ne pas confondre avec visseurs à pas finis) qui vont représenter un mouvement dans son ensemble comme décrit par le théorème de Chasles-Mozzi cité plus haut [102]. Typiquement, le paramétrage de Denavit-Hartenberg [103], très utilisé pour décrire le modèle cinématique direct des robots sériels fait intervenir ce que l'on appelle une matrice homogène :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

où $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation décrivant l'orientation d'un corps par rapport à une droite et $\mathbf{p}$ représente la position de ce corps par rapport à l'origine. Cette matrice est une représentation d'un visseur fini. En la dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}^\times & \mathbf{V}_P \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega}^\times = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où $\mathbf{V}_P$ est la vitesse linéaire d'un corps et $\boldsymbol{\Omega}^\times$ est la matrice antisymétrique du vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$. L'équation (2.16) définit un visseur sous forme matricielle. Il est ici exprimé comme un élément de l'algèbre de Lie associée au groupe $SE(3)$, qui correspond au groupe des déplacements rigides. Le visseur $\boldsymbol{\xi}$ appartient à l'espace tangent de ce groupe et ainsi représente les vitesses instantanées d'un de ces déplacements. Ce visseur exprime donc la même chose que celui donné équation (2.13). Il est à noter qu'en revanche, il est très rare de définir des torseurs sous forme matricielle, puisqu'il n'existe pas vraiment d'équivalent de $SE(3)$ pour les efforts.

La matrice homogène introduite à l'équation (2.15) est une application linéaire agissant sur les objets géométriques de l'espace projectif. En géométrie projective, les points sont représentés par des coordonnées homogènes qui sont l'équivalent des coordonnées cartésiennes pour l'espace euclidien. Pour un point de l'espace euclidien à trois coordonnées, son équivalent dans l'espace projectif en possède quatre. Une droite reliant deux de ces points dans l'espace projectif est quant à elle représentée par un objet mathématique à six coordonnées qui est donné par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}^T & (\mathbf{s} \times \mathbf{r}_{XO})^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.17)$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur directeur de la droite et $\mathbf{r}_{XO}$ un vecteur allant d'un point de la droite à

l'origine. Ces coordonnées sont appelées *coordonnées de Plücker* [104]. Ainsi, les coordonnées des visseurs et torseurs à pas nuls donnés équation (2.11) sont les coordonnées de Plücker de leur droite.

Il existe une troisième représentation des vis qui est donné par les nombres duaux [105–107]. Il s'agit de nombres qui ressemblent fortement aux nombres imaginaires. Ils possèdent une partie réelle a et une partie duale b . Un nombre dual z est donné par $z = a + \epsilon b$ où ϵ est un nombre non nul tel que $\epsilon^2 = 0$. En utilisant les nombres duaux, il est possible d'écrire les vis de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega} + \epsilon \mathbf{V}_P \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{f} + \epsilon \boldsymbol{\tau}, \quad (2.18)$$

ce qui permet de manipuler vecteurs de dimension 3×1 et utiliser les outils de l'algèbre linéaire propres à cette dimension (principalement le produit vectoriel). Nous avons évoqué les trois manières principales pour représenter des vis (algèbre de Lie, coordonnées de Plücker et nombres duaux). Les avantages et inconvénients des différentes formes ainsi que les liens entre algèbre de Lie et géométrie projective peuvent être retrouvés en [108]. Il est cependant à noter que ce ne sont pas les seules représentations mathématiques de vis existantes. L'algèbre géométrique permet par exemple de modéliser des vis par des multi-vecteurs [109]. Les mouvements de solides rigides peuvent également être décrits par des outils mathématiques plus complexes, comme par exemple l'algèbre des quaternions [110], quaternions duaux [111] ou nombres hyper duaux [112].

Par la suite, nous travaillerons uniquement avec des vis, plus particulièrement celles dont la forme est donnée équations (2.11) et (2.12). La première raison est qu'il s'agit du formalisme très répandu dans la littérature. La deuxième est que l'on peut sous certaines conditions traiter ces vis comme des vecteurs, et utiliser les outils de l'algèbre linéaire. Cependant, comme nous venons de l'évoquer, les vis ne sont pas exactement des vecteurs et l'algèbre linéaire est à utiliser avec précautions. Par exemple, la norme d'une vis correspond à la norme de son vecteur directeur et non à la norme de la vis dans son intégralité traitée comme un vecteur 6×1 . La troisième raison est que c'est cette forme qui permet d'exploiter au mieux la dualité entre vitesses et forces [108].

Il est nécessaire pour exploiter cette dualité d'introduire une opération entre vis appelée *produit réciproque*. Le produit réciproque entre deux vis $\boldsymbol{\$}_a$ et $\boldsymbol{\$}_b$ données par les équations (2.11) et/ou (2.12) est défini par :

$$\boldsymbol{\$}_a \circ \boldsymbol{\$}_b = \boldsymbol{\$}_a^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\$}_b \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

ce qui donne un scalaire. La matrice $\mathbf{A}$ permet de permuter les vecteurs de l'une des deux vis. Si $\mathbf{\$}_a = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T]^T$ et $\mathbf{\$}_b = [\mathbf{b}_1^T \ \mathbf{b}_2^T]^T$, alors cela revient à écrire :

$$\mathbf{\$}_a \circ \mathbf{\$}_b = \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1. \quad (2.20)$$

Il existe une autre opération entre vis qui est une sorte d'équivalent du produit vectoriel dans l'espace des vis, simplement appelé produit de visseurs. Elle est donnée par :

$$\mathbf{\$}_a \times \mathbf{\$}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Cette opération donne une vis. Il est à noter que le visseur obtenu est réciproque à $\mathbf{\$}_a$ et $\mathbf{\$}_b$. Cette opération est beaucoup moins utilisée que le produit réciproque mais va s'avérer importante dans ce travail. Dans le cadre de l'algèbre de Lie, le produit de visseurs est fondamental et est appelé *crochet de Lie*. Pour les nombres duaux, on parle de *motor product* et est simplement le produit vectoriel entre deux nombres duaux. Cette opération est principalement utilisée pour dériver des visseurs par rapport au temps [113], comme nous le verrons cette opération a également de l'importance pour exprimer la matrice jacobienne de mécanismes.

2.2.3 Mobilités

Comme nous l'avons déjà évoqué, la théorie des visseurs permet d'analyser en détail les mobilités d'un mécanisme, voir par exemple [114–118]. Pas seulement en termes de quantité comme le fait la formule de Grübler, mais une vraie description de la nature et de la géométrie de ces dernières. Il faut pour cela introduire la notion de *réciprocité* entre visseurs et torseurs. Deux vis sont considérées comme réciproques si et seulement leur produit réciproque, voir équation (2.19) est nul. Un torseur et un visseur définis équation (2.13) sont réciproques si et seulement si :

$$\boldsymbol{\zeta} \circ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{V}_P^T \mathbf{f} = 0. \quad (2.22)$$

D'un point de vue physique, un torseur est réciproque à un visseur si aucune puissance instantanée n'est développée par l'application du torseur sur un corps rigide en mouvement dont les vitesses sont définies par ce visseur. Plus simplement, deux vis sont réciproques si l'application de l'une sur l'autre ne produit aucun mouvement. La figure 2.8 montre un corps connecté au bâti par une liaison rotoïde, modélisée par un visseur à pas nul. Des forces pures modélisées par des torseurs à pas nuls sont appliquées à ce corps. Dans la figure de gauche, l'application des forces ne permet pas au corps de pivoter, les vis sont réciproques. À l'inverse sur la figure de droite, le mouvement est possible et donc les vis ne sont pas réciproques.

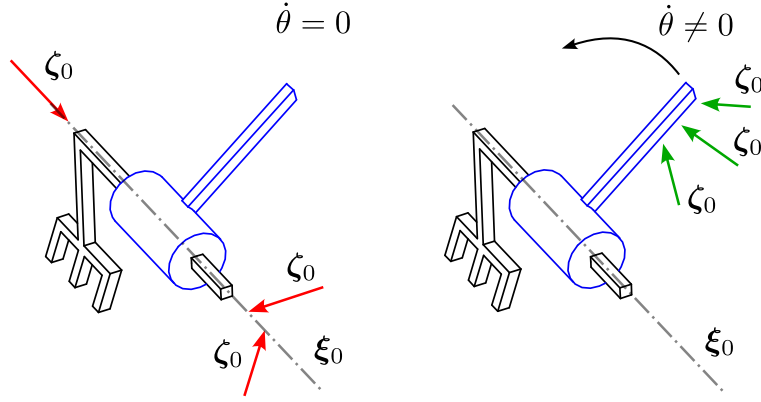


FIGURE 2.8 Application d'une force pure à une liaison rotoïde

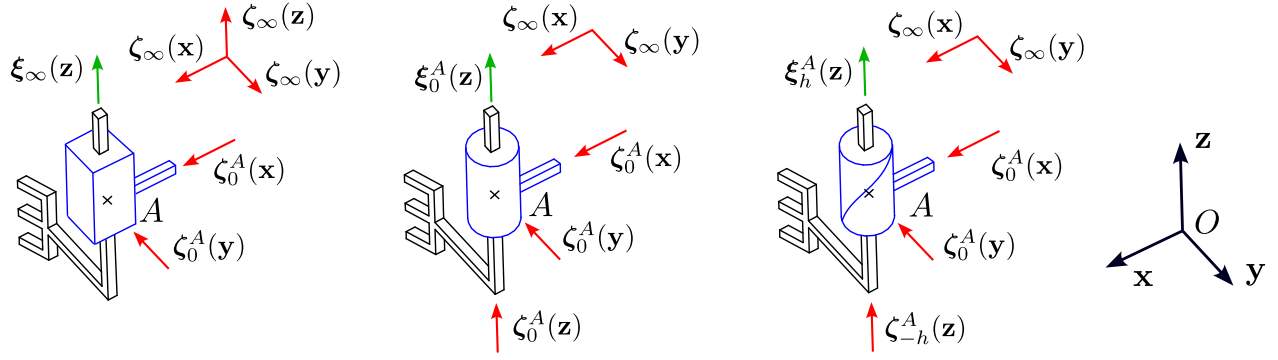
En exploitant cette réciprocité, on peut décrire précisément les mobilités d'un système. En effet, dans l'espace, pour tout ensemble d'ordre n contenant des visseurs il existe un ensemble d'ordre $6 - n$ de torseurs ($3 - n$ dans le plan) dont tous les éléments sont réciproques à ceux du premier, et inversement. C'est à dire que si nous appelons $\mathcal{V}$ l'ensemble de visseurs et $\mathcal{T}$ l'ensemble de torseurs, nous avons :

$$\mathcal{T}^\perp = \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}^\perp = \mathcal{T}. \quad (2.23)$$

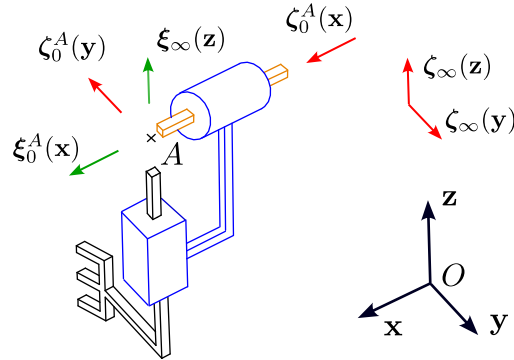
Cette équation est vraie à la condition que les vis contenues dans un ensemble soient linéairement indépendantes. La dépendance entre vis fonctionne de la même manière que pour les vecteurs classiques. On dit que n vis sont linéairement indépendantes si et seulement si la solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{S}_i = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (2.24)$$

implique que les n coefficients λ_i soient nuls. La figure 2.9 montre les trois liaisons à unique DDL et leurs visseurs associés. Pour chacune des trois, il est possible d'identifier cinq torseurs réciproques qui satisfont l'équation (2.23). Il est à noter que ces torseurs ne sont pas uniques. Par exemple, la liaison prismatique connectant deux membrures implique par définition que la première ne peut pas pivoter par rapport à l'autre. Ainsi il est toujours possible d'identifier trois torseurs à pas infinis qui soient réciproques à la liaison. Ici ils ont été choisis comme ayant pour direction les vecteurs du repère, mais n'importe quel choix arbitraire de vecteurs est possible, du moment que ces derniers soient linéairement indépendants. De même, pour les deux torseurs à pas nuls qui sont réciproques à la liaison prismatique, voir figure 2.9, un autre couple de vecteurs directeurs aurait pu être choisi, du moment qu'ils soient perpendiculaires à la direction de la liaison prismatique et qu'ils ne soient pas colinéaires entre eux.

FIGURE 2.9 Visseurs et torseurs associés aux liaisons P , R et H

La mobilité d'une chaîne sérielle correspond à l'union des différentes liaisons qui la composent. Plus il existe de liaisons dans la chaîne, dont les visseurs sont linéairement indépendants, plus la mobilité du corps en bout de chaîne augmente. Un simple exemple est montré figure 2.10 pour un enchaînement d'une liaison P et d'une liaison R . Le corps en sortie possède à la fois une mobilité dans la direction de la prismatique et une autre autour de l'axe de la rotoïde.

FIGURE 2.10 Visseurs et torseurs associés à une chaîne sérielle spatiale PR à axes perpendiculaires

Lorsque le mécanisme est parallèle, alors les contraintes d'un corps correspondent à l'union des contraintes des différentes chaînes sérielles connectées à ce corps. Pour le dire de manière plus intuitive, si l'une des chaînes sérielles ne peut créer un mouvement dans une direction (c'est-à-dire si une contrainte l'en empêche), alors le corps connecté à cette chaîne ne pourra se mouvoir dans cette direction. Plus il y a de contraintes imposées par les chaînes, moins ce corps aura de mobilités. La figure 2.11 montre deux géométries d'un mécanisme composé de deux chaînes PR telles que celle montrée figure 2.10. Les contraintes se répercutent sur le corps connecté par les deux jambes. Dans le mécanisme de gauche, ce corps n'a aucune mobilité, puisque les mobilités permises de la première jambe sont bloquées par les contraintes

imposées sur la seconde et inversement. Le mécanisme montré sur la figure de droite peut en revanche se mouvoir dans une direction puisque aucune contrainte n'empêche la translation dans la direction des articulations prismatiques. Ce simple exemple permet de montrer que la géométrie d'un mécanisme influe sur ses mobilités. Nous sommes capables grâce à la théorie des visseurs de les décompter, mais également de les caractériser. La formule de Grübler aurait quant à elle seulement fourni le nombre théorique des mobilités mais n'aurait fait aucune différence entre les deux géométries montrées figure 2.11.

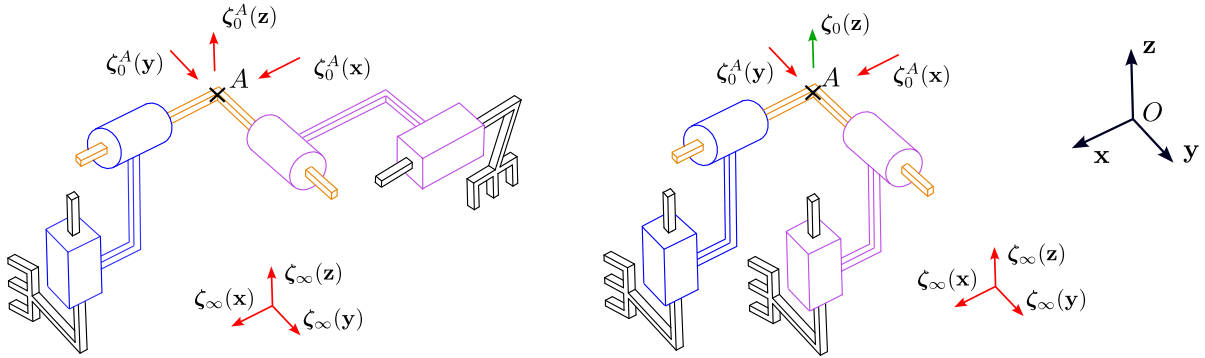


FIGURE 2.11 Mécanismes parallèles composés de deux chaînes sérielles spatiales PR à axes perpendiculaires

2.2.4 Équations de vitesse et matrices jacobiennes

Grâce à la théorie des visseurs, la ou les matrices jacobienne d'un mécanisme peuvent s'obtenir très facilement, voir par exemple [119–123]. Le visseur ξ de l'organe terminal d'un mécanisme sériel à n DDLs peut s'exprimer comme la somme des visseurs unitaires associées à chacune des liaisons de la chaîne de la manière suivante :

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \dot{q}_i, \quad (2.25)$$

où ξ_i est le visseur unitaire associé à la i -ième liaison associée à la vitesse actionnée $\dot{q}_i$. L'équation (2.25) constitue le modèle cinématique direct d'un mécanisme sériel. En introduisant le vecteur des vitesses actionnées $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$, alors l'équation (2.25) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\xi = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = [\xi_1 \ \dots \ \xi_n]. \quad (2.26)$$

Ainsi, la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ d'un mécanisme sériel est obtenue immédiatement comme une collection de visseurs unitaires [124–126]. Comparé à la méthode traditionnelle qui consiste à dériver des relations géométriques du mécanisme, aucun calcul n'est nécessaire en utilisant

le formalisme de la théorie des visseurs.

Pour les mécanismes parallèles et/ou hybrides, il est également possible d'obtenir rapidement une équation de vitesse reliant le visseur ξ et le vecteur $\dot{\mathbf{q}}$. Cependant, une étape additionnelle est nécessaire. L'organe terminal d'un mécanisme parallèle est connecté par au moins deux chaînes sérielles. Pour chacune des chaînes, il est possible d'obtenir une relation similaire à l'équation (2.25). Cependant ces équations contiennent des vitesses passives qui doivent être éliminées de la relation de vitesse finale. Pour cela, il est nécessaire d'identifier des *torseurs réciproques*. Ces torseurs sont choisis pour être réciproques aux visseurs passifs contenus dans les branches. Par visseur passif, on entend ici un visseur associé à une vitesse passive. Par opposition, on appellera visseurs actionnés, un visseur associé à une vitesse actionnée. Grâce aux torseurs réciproques, une relation semblable à l'équation (2.7) peut être aisément obtenue sous la forme :

$$\mathbf{\Pi}\xi = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.27)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est la matrice jacobienne parallèle et $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice jacobienne sérielle. La première matrice est entièrement constituée de torseurs réciproques tandis que la seconde contient des produits réciproques entre ces torseurs et les visseurs actifs. Pour un mécanisme parallèle classique à n DDLs, n branches et un actionneur par chaîne, la matrice jacobienne sérielle est diagonale, ce qui permet d'obtenir aisément le modèle cinématique inverse :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\xi \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\Pi}, \quad (2.28)$$

sous réserve qu'aucun des coefficients de la matrice jacobienne sérielle ne soit nul, c'est à dire hors singularités.

Les singularités s'étudient également en observant les chutes de rang des matrices jacobienues contenues dans les équations (2.26) et (2.27), comme nous en avons discuté à la section 2.1.2. Cependant, puisque ces matrices jacobienues sont constituées de vis qui représentent des droites dans l'espace, alors il est bien plus simple de décrire géométriquement l'apparition de singularités. Les singularités de type 1 émergent pour les mécanismes sériels lorsque les visseurs qui composent la matrice $\mathbf{J}$, voir (2.26) deviennent linéairement dépendants, et pour les mécanismes parallèles/hybrides lorsque les visseurs et torseurs de la matrice $\mathbf{\Sigma}$, voir équation (2.27) deviennent instantanément réciproques. Lorsque les torseurs de la matrice $\mathbf{\Pi}$ deviennent linéairement dépendants, voir équation (2.27), alors cela implique l'apparition de singularité de type 2. À noter que ce type de singularité n'apparaît pas pour les mécanismes sériels. L'étude des singularités est un sujet les plus importants pour l'analyse des mécanismes et a été abondamment traité, voir [97, 124, 127–129].

Pour conclure, la théorie des visseurs présente de nombreux avantages pour l'étude des mécanismes, en ce qui concerne l'étude des mobilités et des singularités, mais également pour l'établissement des équations de vitesse. Nous avons pris le temps de rappeler les principes fondamentaux de la théorie des visseurs car cette thèse est entièrement basée sur cette dernière. Comme nous l'avons vu, même à l'aide de la théorie, il n'est pas aisé d'obtenir la matrice jacobienne de mécanismes parallèles ou hybrides. Nous allons dans ce document donner le résultat analytique de l'opération montrée (2.5) pour plusieurs catégories de mécanismes. La matrice jacobienne ainsi obtenue sera exprimée sous forme de visseurs, de la même manière que la matrice jacobienne d'un mécanisme sériel, voir équation (2.26).

2.3 Mécanismes étudiés

Dans ce document, nous allons nous concentrer sur plusieurs classes de mécanismes à membrures rigides. La première catégorie est celle des *mécanismes plans*. Comme indiqué par leur nom, il s'agit de mécanismes dont les corps peuvent uniquement se mouvoir dans un plan donné de l'espace. Il existe de nombreux prototypes de jambes robotiques utilisant ces mécanismes [31–33, 130–138]. De plus, ils constituent souvent des sous-mécanismes de robots spatiaux plus complexes.

On s'intéressera également aux mécanismes rotationnels dont les mobilités sont trois rotations d'axes concourants. Leur usage principal est l'orientation des corps, en particulier pour les systèmes de caméras. On étudiera les *mécanismes sphériques* qui sont des mécanismes partageant de nombreuses similitudes avec les mécanismes plans. Leur particularité est que les liaisons employées sont toutes des articulations rotoïdes dont les axes sont orientés vers un même point. Tous les corps de ces mécanismes se meuvent sur des sphères concentriques centrées sur ce point. Puis, nous nous pencherons sur des mécanismes rotationnels non sphériques. Les liaisons ne sont pas limitées à des rotoïdes et les corps ne sont pas non plus nécessairement contraints à pivoter autour d'un unique point. Enfin, on étudiera leurs pendants, les *mécanismes translationnels* [139] dont l'organe terminal garde en tout temps une orientation constante et est capable de se déplacer dans les trois directions de l'espace.

Les mécanismes rotationnels et translationnels font partie d'une catégorie plus vaste de mécanismes appelés *mécanismes à degré de liberté limités*. Ces derniers sont des mécanismes spatiaux dont les mobilités sont inférieures à six. Ils sont particulièrement intéressants pour des applications où tous les mouvements ne sont pas requis puisqu'ils permettent de limiter le nombre de corps et surtout le nombre d'actionneurs. Certains de ces mécanismes ont des mobilités mixtes, par exemple capables de translater dans deux directions et de pivoter dans une troisième [140, 141]. Un de ces mécanismes, qui a fait l'objet de nombreuses

études [142–148], va nous servir d’exemple pour l’étude des mécanismes à DDLs limités. Il s’agit du $3 - RPS$, un mécanisme qui selon l’agencement géométrique de ses jambes peut exhiber trois rotations autour de trois axes non-concourants [149,150], ou bien deux rotations et une translation [149].

Finalement, nous nous intéresserons à un mécanisme spatial pleinement parallèle et à six DDLs qui est le $6 - UPS$. Nous étudierons une topologie particulière de ce mécanisme où les jambes sont ancrées sur six points distincts du bâti, tandis qu’elles sont connectées à l’organe terminal par seulement trois points d’ancrage. On appelle les mécanismes ayant cette architecture les *Triangular Simplified Symmetric Manipulator* (TSSM). Ils sont aussi appelés plateforme de Stewart 3/6 [151]. Les mécanismes $3 - RPS$ et $6 - UPS$ ont des matrices jacobiennes partageant bon nombre de similitudes. Enfin, on étudiera une classe de robots spatiaux hybrides, qui ne rentrent strictement pas dans la catégorie des robots sériels, ni des mécanismes parallèles [152]. Ils ont six DDLs et la particularité de n’avoir que trois jambes, chacune ayant deux actionneurs. L’idée derrière ces robots est de limiter le nombre de jambes pour diminuer le risque d’interférences entre ces dernières. Ils ont un espace de travail plus large qu’un robot pleinement parallèle classique, au détriment de leur rigidité et précision. Les mécanismes hybrides que nous étudierons ont une matrice jacobienne semblable à celle du mécanisme $6 - UPS$.

CHAPITRE 3 MÉCANISMES PLANS

3.1 Introduction et définitions mathématiques

On considérera dans ce chapitre que les mécanismes étudiés sont contenus dans un plan doté d'une base orthonormée d'axes $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Les visseurs et torseurs ont dans le plan des définitions légèrement différentes que celles introduites section 2. En effet, les corps d'un mécanisme plan ne peuvent ni translater hors du plan ni tourner autour d'axes compris dans ce dernier. De même, aucune force ne peut être appliquée à ces corps dans la direction normale au plan et les corps ne peuvent subir aucun couple autour d'axes compris dans ce dernier. Il est donc possible de travailler avec des visseurs et torseurs de dimension 3×1 qui contiennent uniquement les vitesses et efforts applicables au plan, donnés par :

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{spatial}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\xi}_{\text{plan}} = \begin{bmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta}_{\text{spatial}} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}_{\text{plan}} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \tau_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Les expressions des visseurs et torseurs plans unitaires peuvent s'exprimer grâce à une matrice $\mathbf{E}$ donnée par :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Cette matrice permet entre autres de définir l'équivalent des produits vectoriels et mixtes dans le plan. Soient $\boldsymbol{\xi}_0^X$ un visseur à pas nul d'axe normal au plan localisé au point X et $\boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{s})$ un visseur à pas infini d'axe $\mathbf{s}$ contenu dans le plan. Leurs expressions sont données respectivement par :

$$\boldsymbol{\xi}_0^X = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{XO} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

où $\mathbf{r}_{XO}$ dénote le vecteur allant du point X au point O , l'origine du repère. Soient également $\boldsymbol{\zeta}_0^X(\mathbf{s})$ un torseur porté par l'axe $\mathbf{s}$ appliqué au point X et $\boldsymbol{\zeta}_\infty$ le torseur à pas infini d'axe normal au plan. Leurs expressions sont :

$$\boldsymbol{\zeta}_0^X(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{E}\mathbf{r}_{OX} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Il est à noter que tous les visseurs et torseurs plans sont nécessairement de pas nul ou infini, aucun mouvement hélicoïdal n'est possible. Le produit réciproque est défini dans le plan de la manière suivante :

$$\zeta \circ \xi = \zeta^T \Lambda \xi \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Maintenant que les visseurs et torseurs plans sont définis, nous allons pouvoir montrer comment établir le modèle cinématique direct d'un mécanisme à partir de ces derniers.

3.2 Mécanismes à un DDL

3.2.1 Introduction

Soit un corps appelé i faisant partie d'un mécanisme plan. Ce corps n'est pas nécessairement l'organe terminal. Pour obtenir le modèle cinématique direct reliant le seul actionneur du mécanisme au visseur du corps i , nous allons nous baser sur une méthode existante basée sur la théorie des visseurs. Elle consiste à identifier dans le mécanisme une (ou plusieurs) boucles cinématiques qui impliquent le corps i , puis identifier des torseurs réciproques aux liaisons passives présentes dans la ou les boucles. Cette démarche mène à une équation de vitesse de la forme :

$$\Pi^i \xi^i = \sigma^i \dot{q}, \quad (3.6)$$

où $\dot{q}$ est la vitesse active, ξ^i le visseur du corps i . La matrice Π^i est la matrice jacobienne parallèle et σ^i est la matrice jacobienne sérielle. La matrice Π^i est de dimension 3×3 tandis que σ^i est ici un vecteur 3×1 . Sous réserve que la matrice Π^i soit inversible (c'est-à-dire hors singularité de type 2), la matrice jacobienne peut être obtenue de la manière suivante :

$$\mathbb{S}^i = (\Pi^i)^{-1} \sigma^i. \quad (3.7)$$

Puisque nous travaillons avec un seul DDL, la matrice $\mathbb{S}^i$ est ici un vecteur de taille 3×1 . Combiner les équations (3.6) et (3.7) permet d'établir le modèle cinématique direct :

$$\xi^i = \mathbb{S}^i \dot{q}. \quad (3.8)$$

La notation dollar, usuellement réservée aux visseurs et torseurs de manière générale, est utilisée ici pour différencier la matrice jacobienne $\mathbb{S}^i$ du corps i de son visseur ξ^i . L'objectif par la suite est de résoudre analytiquement l'équation (3.7) directement à partir de l'équation d'une boucle cinématique.

3.2.2 Boucle cinématique

Les mécanismes parallèles sont constitués d'au moins une boucle cinématique. La première étape pour déterminer une équation de vitesse est de sélectionner une boucle cinématique comprenant le corps i , puis d'identifier deux branches (chaînes sérielles) reliant le corps au bâti, ou au reste du mécanisme. Pour les mécanismes plans à un DDL, cela nous donne une équation de la forme :

$$\begin{aligned}\xi^i &= \mathbb{S}^j \dot{q} + \xi_p^1 \dot{p}_1 + \xi_p^2 \dot{p}_2 \quad \# \text{ première branche} \\ &= \mathbb{S}^k \dot{q} + \xi_p^3 \dot{p}_3 \quad \# \text{ seconde branche}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Les vecteurs $\mathbb{S}^j$ et $\mathbb{S}^k$ représentent soit le visseur unitaire associé à une liaison active j (respectivement k), soit la matrice jacobienne d'un corps j (respectivement k). Les scalaires $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$ et $\dot{p}_3$ sont les vitesses des liaisons passives présentes dans la boucle et sont associées aux visseurs unitaires ξ_p^1 , ξ_p^2 et ξ_p^3 . Il est à noter que la boucle doit contenir exactement 3 liaisons passives. Un mécanisme ne peut pas bouger s'il y en a moins, tandis qu'il devient sous-actionné s'il y en a plus. De plus, il ne peut y avoir plus de trois liaisons passives par branche, sinon cette dernière constituerait un générateur plan, rendant le mouvement du corps i sous-contraint.

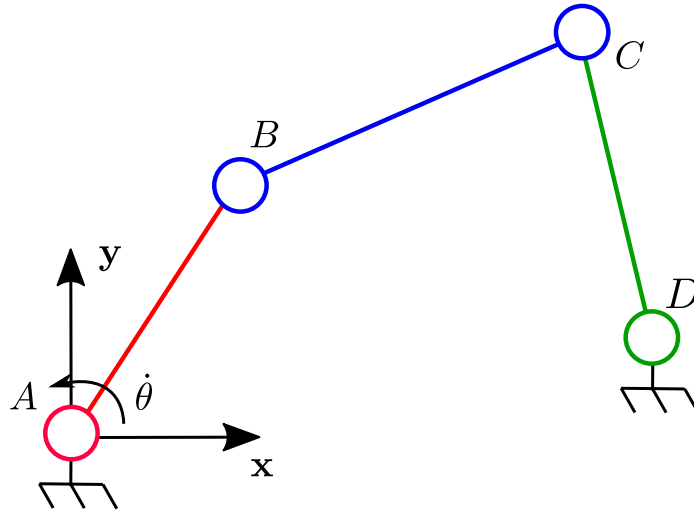


FIGURE 3.1 Mécanisme à quatre barres plan à quatre liaisons rotoïdes

L'équation (3.9) est la forme la plus générale que peut prendre l'équation d'une boucle cinématique d'un mécanisme plan à un DDL. Pour des mécanismes simples, nous avons en général $\mathbb{S}^j = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ ou $\mathbb{S}^k = \mathbf{0}_{3 \times 1}$, exclusivement.

Prenons par exemple un mécanisme à quatre barres comme celui montré figure 3.1. La liaison en A est actionnée et tourne à une vitesse $\dot{q} = \dot{\theta}$. Si l'on souhaite exprimer le visseur du corps de sortie CD , l'équation (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi^{CD} &= \xi_0^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\theta}_B + \xi_0^C \dot{\theta}_C \\ &= \xi_0^D \dot{\theta}_D,\end{aligned}\tag{3.10}$$

où $\dot{\theta}_X$ est la vitesse angulaire passive associée à la rotation autour du point X . Ici $\mathcal{S}^j$ est le visseur unitaire associé à la liaison active en A et $\mathcal{S}^k$ est nul. Si maintenant l'on souhaite exprimer la vitesse du coupleur BC , alors l'équation (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi^{BC} &= \xi_0^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\theta}_B \\ &= \xi_0^D \dot{\theta}_D - \xi_0^C \dot{\theta}_C.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Le signe $-$ devant ξ_0^C sert à rester cohérent avec l'équation (3.10). Ici, c'est $\mathcal{S}^k$ qui est égal au visseur unitaire ξ_0^A tandis que $\mathcal{S}^j$ est nul.

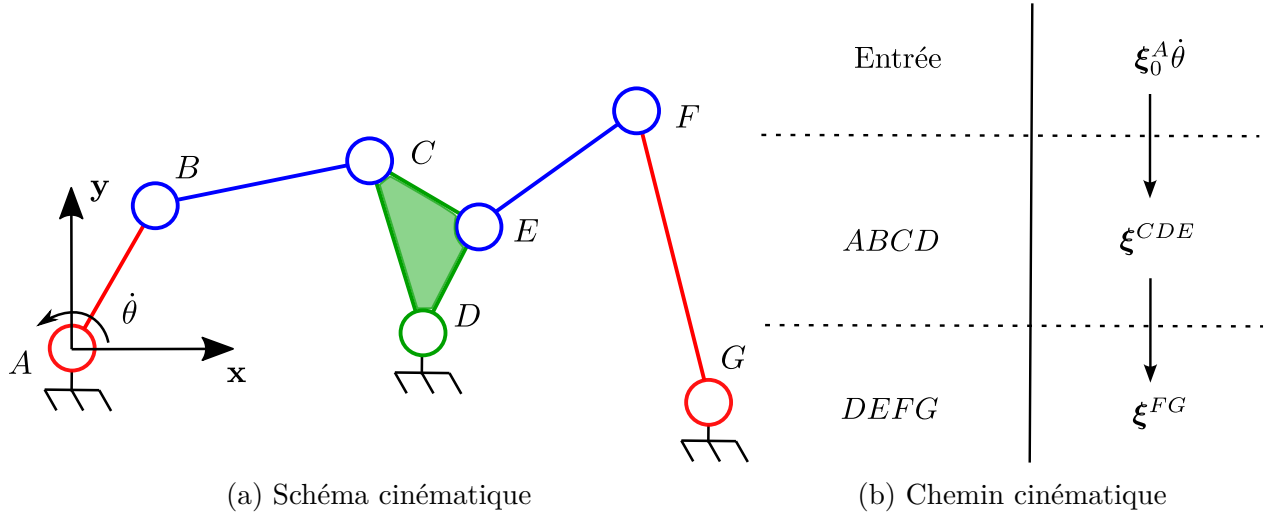


FIGURE 3.2 Mécanisme à six barres de type Watt 2

Comme mentionné plus haut, $\mathcal{S}^j$ et $\mathcal{S}^k$ peuvent représenter le visseur associé à une liaison passive, comme on vient de le voir pour le mécanisme à quatre barres, mais également la matrice jacobienne d'autres corps. Cette situation apparaît lorsque plusieurs boucles cinématiques sont interdépendantes. Cela arrive par exemple pour un mécanisme à six barres de topologie Watt 2. Ce dernier est montré figure 3.2a. Il est possible d'identifier deux boucles à quatre barres ($ABCD$ and $DEFG$) qui partagent la membrure CDE . Supposons que l'or-

gane terminal soit le corps FG tandis l'entrée du mécanisme soit la rotation autour du point A . Pour obtenir le visseur du corps FG , il est nécessaire d'exprimer en premier lieu le visseur du corps CDE en se plaçant dans la boucle $ABCD$, voir équation (3.10). Puis ce visseur sert d'entrée actionnée pour la seconde boucle. La figure 3.2b est ce que l'on appellera un *chemin cinématique*. La colonne de gauche indique les boucles successives du mécanisme à considérer, tandis que la colonne de droite indique par des flèches les dépendances entre visseurs. Plus de précisions concernant les chemins cinématiques sont présentés en section 3.2.6. En considérant la figure 3.2b, l'équation (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi^{FG} &= \$^{CDE}\dot{\theta} + \xi_0^E\dot{\theta}_E + \xi_0^F\dot{\theta}_F \\ &= \xi_0^G\dot{\theta}_G.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Ainsi, $\$^i = \CDE est ici la matrice jacobienne du corps intermédiaire et non un visseur unitaire associé à une liaison.

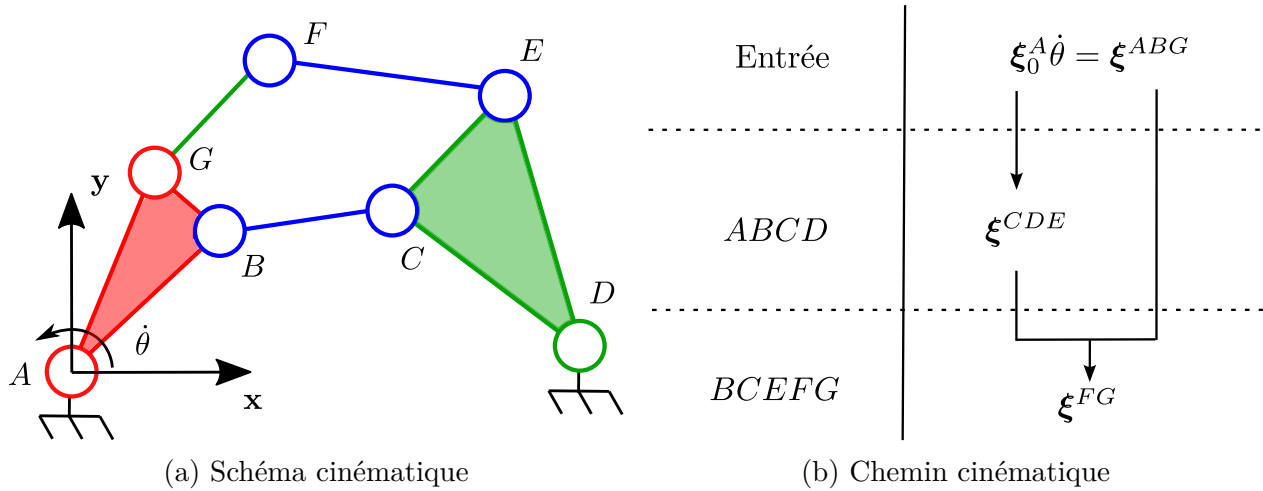


FIGURE 3.3 Mécanisme à six barres de type Stephenson 1

Enfin, la figure 3.3a montre un exemple simple de mécanisme dont au moins une boucle a simultanément les visseurs $\j et $\k non nuls. Il s'agit d'un autre mécanisme à six barres, cette fois de topologie Stephenson 1. On peut clairement identifier une boucle à quatre barres ($ABCD$) et une seconde à cinq barres ($BCEFG$). On suppose une nouvelle fois que l'entrée est la liaison rotoïde au point A et que la sortie est le mouvement du corps FG . Comme montré par le schéma cinématique de la figure 3.3b, on choisit dans un premier lieu de se placer dans la boucle à quatre barres pour exprimer le visseur du corps CDE , voir l'équation (3.10) à

nouveau. Puis, dans la boucle à cinq barres, le visseur du corps FG peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned}\xi^{FG} &= \$^{CDE}\dot{\theta} + \xi_0^E\dot{\theta}_E + \xi_0^F\dot{\theta}_F \\ &= \$^{ABG}\dot{\theta} + \xi_0^G\dot{\theta}_G.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Le visseur du corps FG dépend donc des visseur de deux autres corps (ABG et CDE). Ceci est symbolisé dans le chemin cinématique par deux flèches qui fusionnent, voir figure 3.3b. Il est à noter qu'un mécanisme à cinq barres a deux entrées, mais ici les deux entrées sont couplées, il s'agit bien d'un mécanisme à unique DDL.

Toutes les situations que permettent de représenter l'équation (3.9) ont été illustrées. Nous allons désormais pouvoir nous intéresser à l'élimination des vitesses passives $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$ et $\dot{p}_3$ contenues dans l'équation (3.9), ce qui nous permettra d'obtenir l'équation de vitesse du corps i . Il nous faut pour cela sélectionner un ensemble de torseurs réciproques aux visseurs passifs contenus dans cette même équation.

3.2.3 Équation de vitesse

Les torseurs à choisir sont au nombre de trois et doivent être linéairement indépendants. Dans le plan, les conditions de réciprocités entre visseurs et torseurs sont relativement faciles à établir et sont résumées dans le tableau 3.1. On appellera ζ_1^i et ζ_2^i les torseurs choisis comme étant réciproques au visseur passif ξ_3^i et ζ_3^i le torseur réciproque à la fois aux visseurs ξ_1^i et ξ_2^i . Le produit réciproque entre ces torseurs et les visseurs l'équation (3.9) donne :

$$\begin{aligned}\xi^i &= \$^k\dot{q} + \xi_p^3\dot{p}_3 \leftarrow \begin{cases} \zeta_1^i \\ \zeta_2^i \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \zeta_1^i \circ \xi^i = \zeta_1^i \circ \$^k\dot{q} \\ \zeta_2^i \circ \xi^i = \zeta_2^i \circ \$^k\dot{q} \end{cases} \\ &= \$^j\dot{q} + \xi_p^1\dot{p}_1 + \xi_p^2\dot{p}_2 \leftarrow \zeta_3^i & \Rightarrow \begin{cases} \zeta_3^i \circ \xi^i = \zeta_3^i \circ \$^j\dot{q} \end{cases}\end{aligned}\tag{3.14} \tag{3.15}$$

Mettre l'équation (3.15) sous forme matricielle permet d'obtenir l'équation de vitesse du corps i , voir équation (3.6). La matrice jacobienne parallèle est donnée par :

$$\Pi^i = \begin{bmatrix} \zeta_1^i \circ \\ \zeta_2^i \circ \\ \zeta_3^i \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{iT} \Lambda \\ \zeta_2^{iT} \Lambda \\ \zeta_3^{iT} \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1^i & \zeta_2^i & \zeta_3^i \end{bmatrix}^T \Lambda.\tag{3.16}$$

La matrice jacobienne sérielle est quant à elle donnée par :

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} \zeta_1^i \circ \$^k \\ \zeta_2^i \circ \$^k \\ \zeta_3^i \circ \$^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \zeta_3^i \circ \end{bmatrix} \$^j + \begin{bmatrix} \zeta_1^i \circ \\ \zeta_2^i \circ \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \$^k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \zeta_3^{iT} \end{bmatrix} \Lambda \$^j + \begin{bmatrix} \zeta_1^{iT} \\ \zeta_2^{iT} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \Lambda \$^k.\tag{3.17}$$

La méthode présentée jusqu'ici ne constitue pas une nouveauté et est couramment employée pour l'étude cinématique d'un mécanisme non sériel. Dans la grande majorité des cas il s'agit de la dernière étape de l'analyse. L'équation (3.6) permet en effet de déterminer les conditions d'apparition des singularités comme nous en avons déjà discuté en section 2. Il est à noter que puisque le mécanisme n'a qu'un seul DDL, la matrice jacobienne sérielle n'est pas carrée et donc n'a pas de déterminant. Les singularités de type 1 apparaissent dans ce cas lorsque les trois lignes de σ^i deviennent nulles simultanément.

	ζ_0 (force pure)	ζ_∞ (moment)
ξ_0 (rotation)	Axes qui s'intersectent	Jamais
ξ_∞ (translation)	Axes perpendiculaires	Toujours

TABLEAU 3.1 Conditions de réciprocité entre torseurs et visseurs plans

3.2.4 Modèle cinématique direct

Introduction des matrices de visseurs

Méthode générale

La matrice jacobienne peut être obtenue en multipliant l'inverse de la matrice jacobienne parallèle à la matrice jacobienne sérielle, voir équation (3.7). Puisque dans le plan la matrice jacobienne parallèle est de dimension 3×3 alors il est possible de donner son inverse grâce à une formule d'algèbre linéaire connue. En effet, soit une matrice $\mathbf{M}$ composée de trois vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ linéairement indépendants telle que $\mathbf{M} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]^T$. L'inverse de la matrice $\mathbf{M}$ est donnée par :

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^T \mathbf{u}_3} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Puisqu'une matrice multipliée par son inverse vaut l'identité, alors la relation suivante est vraie :

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^T \mathbf{u}_3} \left[(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_1^T + (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_2^T + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_3^T \right]. \quad (3.19)$$

Ainsi, en appliquant la formule (3.18) à la matrice jacobienne parallèle Π^i donnée équation (3.16), nous obtenons :

$$(\Pi^i)^{-1} = \frac{1}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i} \Lambda^T \begin{bmatrix} \zeta_2^i \times \zeta_3^i & \zeta_3^i \times \zeta_1^i & \zeta_1^i \times \zeta_2^i \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Pour rappel, les trois torseurs réciproques sont considérés comme linéairement indépendants

hors singularités et $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice de permutation, donc son inverse est égale à sa transposée. Il est désormais possible de multiplier l'inverse de $\mathbf{\Pi}^i$ aux deux termes de la matrice Jacobienne sérielle, voir équation (3.17), ce qui d'une part donne :

$$(\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \zeta_3^{iT} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^j \right) = \mathbf{\Lambda}^T \frac{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i) \zeta_3^{iT}}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^j, \quad (3.21)$$

et d'autre part, en prenant en compte l'équation (3.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \left(\begin{bmatrix} \zeta_1^{iT} \\ \zeta_2^{iT} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^k \right) &= \frac{1}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i} \mathbf{\Lambda}^T \left[(\zeta_2^i \times \zeta_3^i) \zeta_1^{iT} + (\zeta_3^i \times \zeta_1^i) \zeta_2^{iT} \right] \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^k \\ &= \mathbf{\Lambda}^T \left(\mathbf{I}_3 - \frac{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i) \zeta_3^{iT}}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i} \right) \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^k. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, en sommant les équations (3.21) et (3.22), nous obtenons analytiquement la forme générale de la matrice jacobienne :

$$\mathbf{\$}^i = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{K}^i \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^j + \mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}^i) \mathbf{\Lambda} \mathbf{\$}^k \quad (3.23)$$

où :

$$\mathbf{K}^i = \frac{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i) \zeta_3^{iT}}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i}. \quad (3.24)$$

Nous appellerons cette nouvelle matrice *matrice de visseurs*. Elle est idempotente et n'a pas d'unité. Il est à noter que son numérateur est un produit dyadique, donc $\mathbf{K}^i$ est bien une matrice. Son dénominateur est quant à lui un produit mixte, donc un scalaire. Ce scalaire est le déterminant de la matrice $\mathbf{\Pi}^i$ et est donc supposé non nul hors singularité de type 2.

La matrice de visseurs, définie équation (3.24) permet d'exprimer facilement le visseur de n'importe quel corps dans un mécanisme à membrures rigides plan. Pour cela, il suffit de :

1. Sélectionner une boucle cinématique et écrire l'équation de boucle, voir équation (3.9).
2. Identifier les trois torseurs réciproques aux liaisons passives.
3. Construire la matrice de visseurs, voir équation (3.24).

La matrice jacobienne est alors obtenue grâce à l'équation (3.23), ce qui permet d'obtenir le modèle cinématique direct sous la forme donnée équation (3.8). Si le corps i n'est pas l'organe terminal, alors la même méthodologie peut être répétée de boucle en boucle jusqu'à l'atteindre.

Exemples simples

Reprenons l'exemple du mécanisme à quatre barres (voir figure 3.1) pour illustrer la méthode. Commençons par déterminer le modèle cinématique direct du corps de sortie qui est la membrure CD . L'équation de boucle correspondante est donnée équation (3.10). Deux torseurs réciproques au visseur passif ξ_0^D sont $\zeta_1^{CD} = \zeta_0^D(\mathbf{x})$ et $\zeta_2^{CD} = \zeta_0^D(\mathbf{y})$. Le torseur réciproque aux deux autres visseurs passifs ξ_0^A et ξ_0^B est $\zeta_3^{CD} = \zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC})$, où $\mathbf{s}_{XY}$ désigne le vecteur unitaire allant du point X au point Y , voir figure 3.4a. En utilisant l'équation (3.24), une matrice de visseur peut être construite de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_S = \frac{\begin{bmatrix} \zeta_0^D(\mathbf{x}) \times \zeta_0^D(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC})^T}{\begin{bmatrix} \zeta_0^D(\mathbf{x}) \times \zeta_0^D(\mathbf{y}) \end{bmatrix}^T \zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC})}, \quad (3.25)$$

où $\mathbf{K}_S = \mathbf{K}^{CD}$. Puis, en utilisant l'équation (3.23), le visseur du corps de sortie est simplement donné par :

$$\xi^{CD} = \underbrace{\Lambda^T \mathbf{K}_S \Lambda}_{\mathfrak{s}^{CD}} \xi_0^A \dot{\theta}. \quad (3.26)$$

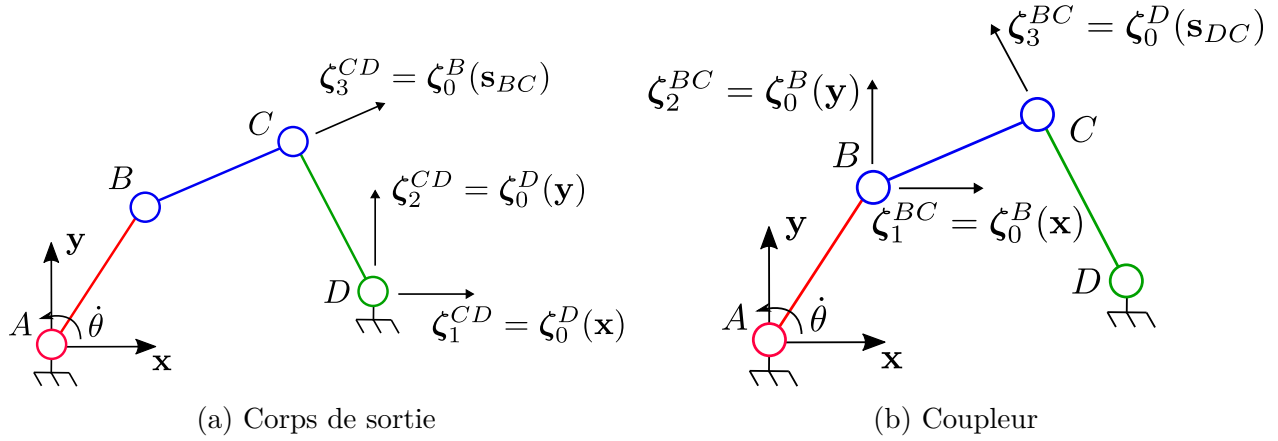


FIGURE 3.4 Torseurs réciproques appliqués au mécanisme à quatre barres plan

Une opération similaire peut être effectuée pour obtenir le visseur du coupleur BC . L'équation de boucle est donnée équation (3.11). Les torseurs $\zeta_1^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{x})$ et $\zeta_2^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{y})$ sont réciproques au visseur passif ξ_0^B , tandis que $\zeta_3^{BC} = \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})$ est réciproque aux visseurs ξ_0^C et ξ_0^D , voir figure 3.4b. Ainsi, l'équation (3.24) peut être utilisée pour construire la matrice :

$$\mathbf{K}_C = \frac{\begin{bmatrix} \zeta_0^B(\mathbf{x}) \times \zeta_0^B(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})^T}{\begin{bmatrix} \zeta_0^B(\mathbf{x}) \times \zeta_0^B(\mathbf{y}) \end{bmatrix}^T \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})}, \quad (3.27)$$

où $\mathbf{K}_C = \mathbf{K}^{BC}$. Puis, en appliquant l'équation (3.23), le visseur du coupleur est donné par :

$$\boldsymbol{\xi}^{BC} = \underbrace{\boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi}_0^A}_{\mathfrak{s}^{BC}} \dot{\theta}. \quad (3.28)$$

Le mécanisme à quatre barres est l'un des mécanismes les plus simples qui existe et souvent utilisé dans d'autres mécanismes plus complexes, y compris parmi les exemples de mécanismes hybrides à venir. Ainsi, les matrices $\mathbf{K}_S$ et $\mathbf{K}_C$, voir équations (3.25) et (3.27) seront par la suite réutilisées.

Analyse des matrices de visseurs

Équation explicite

Avant d'étudier des exemples plus complexes de mécanismes plan, il est important de décrire ce que les matrices de visseurs représentent. Tout d'abord, il faut noter qu'elles possèdent au numérateur et au dénominateur un produit vectoriel entre torseurs, voir équation (3.24). Or un torseur est un objet mathématique particulier *a priori* différent d'un vecteur. Cependant, il est possible de montrer que le produit de visseurs, défini équation (2.21), appliqués sur les versions spatiales des torseurs plans (c'est-à-dire des visseurs de dimension 6 ayant 3 termes nuls, voir équation (3.1) et la discussion en section 3.1) est équivalente à un produit vectoriel entre torseurs plans traités comme des vecteurs, comme démontré en annexe A.1. Il y est montré que le résultat du produit produit vectoriel entre deux torseurs plans donne à une constante près et à la matrice de permutation $\boldsymbol{\Lambda}$ près, un visseur plan.

Pour aller un peu plus loin, ce produit se fait entre les deux torseurs ζ_1^i et ζ_2^i , voir équation (3.24) à nouveau. Le visseur résultant est donc réciproque à la fois à ζ_1^i et ζ_2^i . Or ces derniers ont justement été choisis pour être réciproques au visseur $\boldsymbol{\xi}_p^3$, voir équation (3.14). D'après l'équation (2.23), nous avons donc :

$$\{\boldsymbol{\xi}_p^3\} = \{\zeta_1^i, \zeta_2^i\}^\perp. \quad (3.29)$$

Le visseur obtenu par le produit entre ζ_1^i et ζ_2^i est donc forcément proportionnel à $\boldsymbol{\xi}_p^3$. Plus précisément, d'après l'annexe A.1, nous avons :

$$\zeta_1^i \times \zeta_2^i = \alpha \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi}_p^3, \quad (3.30)$$

où α est un scalaire.

Considérons maintenant le premier terme de l'équation (3.23), en prenant en compte les équations (3.24) et (3.30). Cela nous donne :

$$\begin{aligned}
\Lambda^T \mathbf{K}^i \Lambda \mathbb{S}^j &= \Lambda^T \left[\frac{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i) \zeta_3^{iT}}{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)^T \zeta_3^i} \right] \Lambda \mathbb{S}^j \\
&= \Lambda^T \left[\frac{(\zeta_1^i \times \zeta_2^i)}{\zeta_3^{iT} (\zeta_1^i \times \zeta_2^i)} \right] \zeta_3^{iT} \Lambda \mathbb{S}^j \\
&= \Lambda^T \left[\frac{\alpha \Lambda \xi_p^3}{\alpha \zeta_3^{iT} \Lambda \xi_p^3} \right] \zeta_3^{iT} \Lambda \mathbb{S}^j,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

et donc :

$$\Lambda^T \mathbf{K}^i \Lambda \mathbb{S}^j = \mu_j \xi_p^3 \quad \text{avec} \quad \mu_j = \frac{\zeta_3^i \circ \mathbb{S}^j}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3}. \tag{3.32}$$

Cette forme, qui est rapport de produits réciproques multiplié à un visseur unitaire, est essentielle. Nous allons la retrouver dans l'intégralité des mécanismes que nous étudierons dans ce document. Le visseur unitaire indique la nature du mouvement tandis que le scalaire μ_j donne d'une part l'amplification en vitesse par rapport à la vitesse active $\dot{q}$ et d'autre part les conditions de singularité. En effet, si le numérateur est nul, il s'agit d'une singularité de type 1 car dans ce cas $\mathbb{S}^i = \mathbf{0}_{3 \times 1}$. Si le dénominateur est nul, alors il s'agit d'une singularité de type 2 puisque $\mathbb{S}^i$ n'est alors plus défini. Puisque le numérateur et le dénominateur sont tous deux sous la forme de produits réciproques, alors il est aisé de décrire géométriquement les conditions d'apparition de singularités.

En combinant les équations et (3.23) (3.32), nous obtenons la forme complète du visseur du corps i , à savoir :

$$\mathbb{S}^i = \frac{\zeta_3^i \circ \mathbb{S}^j}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 + \left[\mathbb{S}^k - \frac{\zeta_3^i \circ \mathbb{S}^k}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 \right]. \tag{3.33}$$

Il s'agit d'une seconde forme équivalente de l'équation (3.23). Elle permet d'exprimer la matrice jacobienne du corps i explicitement sous forme d'une combinaison linéaire de visseurs unitaires.

Exemples simples

Reprenons l'exemple du mécanisme à quatre barres, afin d'exprimer les visseurs du corps de sortie et du coupleur sous la forme de l'équation (3.33).

Pour le corps de sortie, les trois torseurs réciproques que nous avons préalablement identifiés sont pour rappel $\zeta_1^{CD} = \zeta_0^D(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{CD} = \zeta_0^D(\mathbf{y})$ et $\zeta_3^{CD} = \zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC})$, comme illustré figure 3.4a. Puisque les torseurs ζ_1^{CD} et ζ_2^{CD} ont été choisis pour être réciproques au visseur ξ_0^D , alors l'équation (3.33) donne :

$$\xi^{CD} = \underbrace{\frac{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^D}}_{\$^{CD}} \xi_0^D \dot{\theta}. \quad (3.34)$$

Les équations (3.34) et (3.26) sont parfaitement équivalentes. L'équation (3.34) met en avant de manière plus explicite le comportement du corps CD . Puisque son visseur est proportionnel au visseur unitaire ξ_0^D , alors le corps CD est en pure rotation autour du point D , ce qui est normal puisqu'il s'agit par définition du corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres, voir figure 3.5. L'équation (3.34) nous donne en chaque instant la vitesse de rotation du corps CD qui est donnée par :

$$\omega^{CD} = \frac{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^D} \dot{\theta} = \frac{\zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC}) \circ \xi_0^A}{\zeta_0^B(\mathbf{s}_{BC}) \circ \xi_0^D} \dot{\theta} = \frac{\mathbf{s}_{BC}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{AB}}{\mathbf{s}_{BC}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{DC}} \dot{\theta} \quad (3.35)$$

Cette relation permet en outre de donner les singularités du corps de sortie. Celles de types 1 apparaissent lorsque les points A , B et C sont alignés tandis que les types 2 apparaissent lorsque les points B , C et D sont alignés.

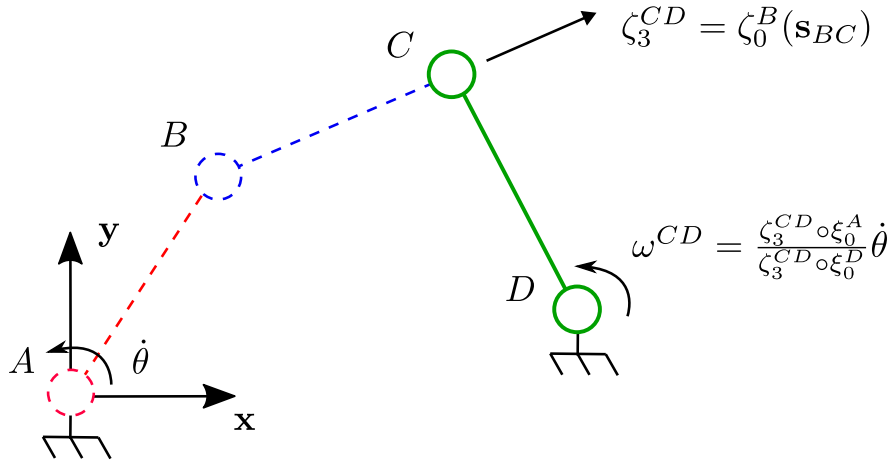
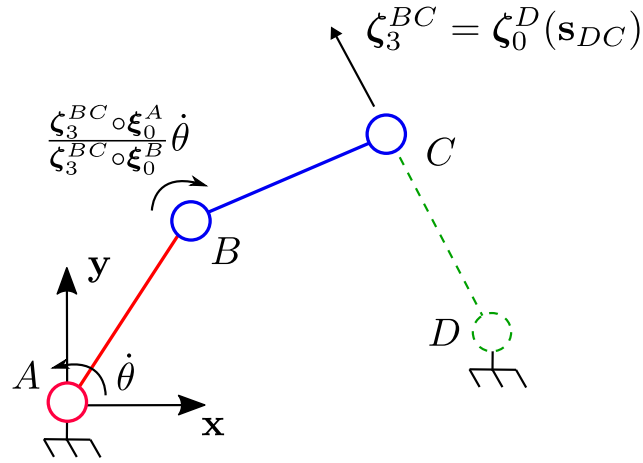
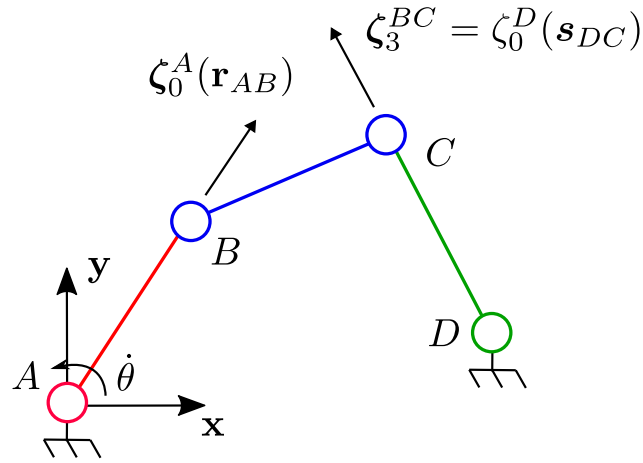
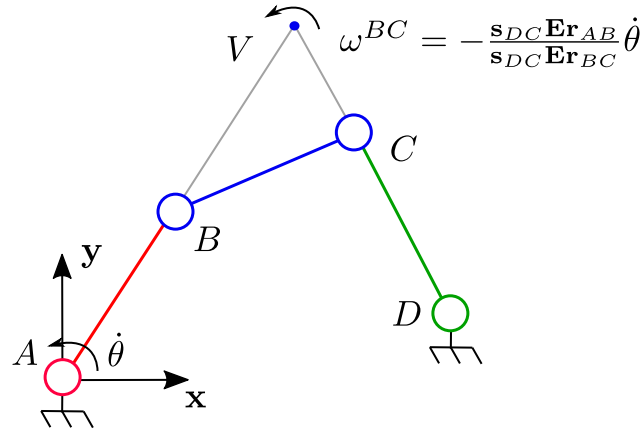


FIGURE 3.5 MCD du corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres

(a) Vu comme une chaîne RR 

(b) Vu comme produit de ses contraintes



(c) Vu comme rotation autour de son CIR

FIGURE 3.6 MCD du coupleur d'un mécanisme à quatre barres

Maintenant, intéressons nous au MCD du coupleur. Les trois torseurs réciproques qui nous avons identifiés sont pour rappel $\zeta_1^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{y})$ et $\zeta_3^{BC} = \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})$, voir figure 3.4b. En utilisant l'équation (3.33), le visseur du coupleur BC s'écrit :

$$\xi^{BC} = \left[\xi_0^A - \frac{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \xi_0^B \right] \dot{\theta} \quad (3.36)$$

En d'autres termes, le visseur BC s'exprime comme une combinaison linéaire de deux visseurs à pas nuls localisés aux points A et B respectivement. L'équation (3.36) peut se réécrire :

$$\xi^{BC} = \begin{bmatrix} \xi_0^A & \xi_0^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dot{\theta}_A = \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_B = -\frac{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \dot{\theta}. \quad (3.37)$$

Ainsi, le mouvement du coupleur d'un mécanisme à quatre barres est cinématiquement équivalent à une branche RR sérielle comme illustré figure 3.6a. La vitesse de la première liaison vaut celle de l'actionneur en A tandis que la vitesse de la seconde liaison dépend du couplage induit par la branche CD .

Il est également possible de rassembler les deux termes de l'équation (3.36). Il existe pour cela deux cas de figure. Le premier est un cas particulier qui arrive lorsque la fraction devant le visseur ξ_0^B vaut 1. Nous avons :

$$\xi^{BC} = (\xi_0^A - \xi_0^B) \dot{\theta} = \xi_\infty(\mathbf{E} \mathbf{r}_{AB}) \dot{\theta}, \quad (3.38)$$

Le coupleur BC est donc en translation circulaire dans la direction $\mathbf{E} \mathbf{s}_{AB}$ avec une vitesse linéaire égale à $l_{AB} \dot{\theta}$ où l_{AB} est la longueur de la membrure AB . Lorsque la fraction devant ξ_0^B , voir équation (3.36), est différente de 1, alors, en utilisant la triple expansion du produit vectoriel nous avons :

$$\begin{aligned} \xi^{BC} &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \left[(\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B) \xi_0^A - (\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^A) \xi_0^B \right] \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \left[(\Lambda^T \zeta_3^{BC})^T \xi_0^B \xi_0^A - (\Lambda^T \zeta_3^{BC})^T \xi_0^B \xi_0^A \right] \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \left[(\Lambda^T \zeta_3^{BC}) \times (\xi_0^A \times \xi_0^B) \right] \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cette opération est possible, puisque nous avons établi que les visseurs plans peuvent être traités comme des vecteurs 3×1 . Ensuite, de la même manière que nous avons établi que le produit vectoriel de deux torseurs plans donne un visseur, il est possible de montrer que le

produit des visseurs ξ_0^A et ξ_0^B donne un torseur. En effet :

$$\xi_0^A \times \xi_0^B = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{AO} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_{BO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{E}\mathbf{r}_{AO} \\ \mathbf{r}_{AB} \end{bmatrix} = \Lambda^T \zeta_0^A(\mathbf{r}_{AB}). \quad (3.40)$$

En introduisant ce vecteur dans l'équation (3.39), nous avons alors :

$$\begin{aligned} \xi^{BC} &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \left[\left(\Lambda^T \zeta_3^{BC} \right) \times \left(\Lambda^T \zeta_0^A(\mathbf{r}_{AB}) \right) \right] \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \Lambda^T \left[\zeta_3^{BC} \times \zeta_0^A(\mathbf{r}_{AB}) \right] \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ainsi, nous exprimons maintenant le visseur du coupleur, non plus à partir de ses potentialités de mouvement (visseurs unitaires), mais grâce aux contraintes qui lui sont imposées (torseurs réciproques), voir figure 3.6b. Dans le plan, le seul visseur qui soit réciproque à la fois à ζ_3^{BC} et $\zeta_0^A(\mathbf{r}_{AB})$ est un visseur à pas nul dont le point d'application est à l'intersection des droites $(A, \mathbf{s}_{AB})$, et $(D, \mathbf{s}_{DC})$, voir figure 3.6b à nouveau. Si on appelle V ce point, alors sa position par rapport à l'origine est donnée par :

$$\mathbf{r}_{OV} = \mathbf{r}_{OA} + \frac{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{E}\mathbf{r}_{AD}}{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{E}\mathbf{s}_{AB}} \mathbf{s}_{AB}. \quad (3.42)$$

En effectuant un calcul similaire à celui détaillé en annexe A.1, on peut montrer que :

$$\zeta_3^{BC} \times \zeta_0^A(\mathbf{r}_{AB}) = (\mathbf{r}_{AB}^T \mathbf{E}\mathbf{s}_{DC}) \Lambda \xi_0^V. \quad (3.43)$$

Ainsi, l'équation (3.41) se réécrit au final :

$$\xi^{BC} = - \frac{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{E}\mathbf{r}_{AB}}{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{E}\mathbf{r}_{BC}} \xi_0^V \dot{\theta}. \quad (3.44)$$

Le point V est donc le centre instantané de rotation du coupleur, localisé à l'intersection des droites passant respectivement par les deux liaisons de la première branche et par les deux liaisons de la seconde branche, voir figure 3.6c. Il s'agit d'un résultat connu pour le mécanisme à quatre barres. L'équation (3.44) apporte en addition la vitesse de rotation qu'à le coupleur autour de ce point, ainsi qu'une forme compacte donnant conditions d'apparition des singularités de ce corps. Les singularité de type 2 sont les mêmes que pour le corps de sortie (les points B , C et D alignés). En revanche, le coupleur ne peut jamais être en singularité de type 1. En effet, d'après l'équation (3.44), elles apparaîtraient lorsque la droite passant par A et B est parallèle à la droite passant par C et D . Or cette condition géométrique

correspond au changement local de mobilité (qui n'est pas une singularité), comme montré équation (3.38).

Il est à noter que les mécanismes vus jusqu'à présent n'ont que des liaisons rotoïdes, mais la méthode présentée marche également pour des mécanismes possédant d'autres types de liaisons, notamment les prismatiques. L'annexe A.2 montre un exemple d'application de la méthode où l'une des articulations est une liaison Q , c'est à dire une liaison formée d'un mécanisme à quatre barres.

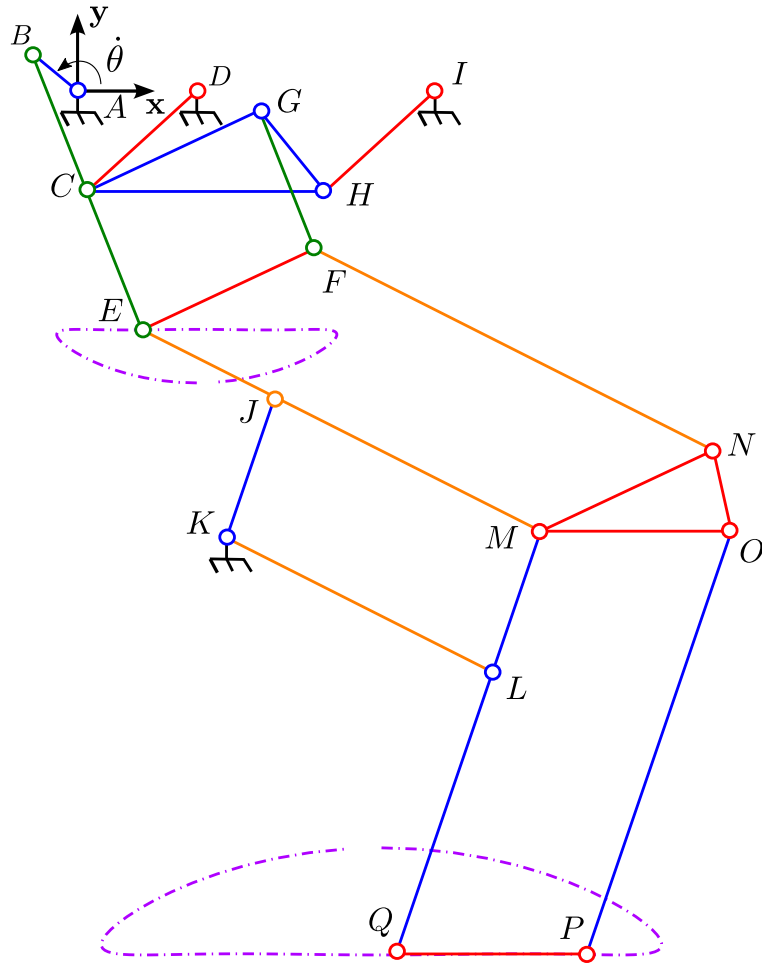
3.2.5 Exemple : La chaise du TIT

Introduction

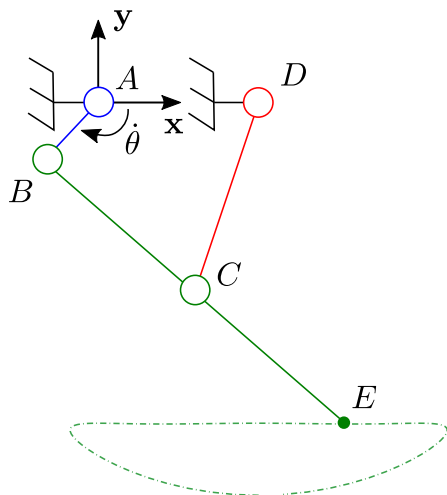
Maintenant que nous sommes familiarisés avec les matrices de visseurs et leur contenu, nous allons pouvoir illustrer leur usage avec un exemple de mécanisme plus complexe que le mécanisme à quatre barres. Le mécanisme choisi est la chaise du *Tokyo Institute of Technology* (TIT). Les chercheurs de cet institut ont créé une chaise marchante dans l'optique d'offrir une alternative aux fauteuils roulants [153, 154]. L'idée est de s'inspirer des avantages des robots marcheurs pour pouvoir créer une chaise capable entre autres de gravir des escaliers.

Les trois jambes partagent une structure commune, montrée figure 3.7a. Il s'agit d'un mécanisme plan hybride (c'est-à-dire ni sériel, ni purement parallèle) pleinement actionné. Ce mécanisme a un DDL est constitué de 16 corps et de pas moins de 22 liaisons rotoïdes. Il est en réalité constitué de plusieurs sous-mécanismes. Le premier est un mécanisme de Hoecken, montré figure 3.7b, qui est un mécanisme à quatre barres dont les dimensions ont été sélectionnées de manière à ce qu'un point du coupleur génère une trajectoire appropriée à la marche, c'est-à-dire une phase quasi-linéaire pour le support qui alterne avec une phase de vol pour le pas suivant. L'entrée du mécanisme est la rotation autour du point A à une vitesse $\dot{\theta}$, le point du coupleur en question est le point E et la trajectoire qu'il parcourt pendant une rotation complète de la membrure AB est tracée en pointillés verts, voir figure 3.7b.

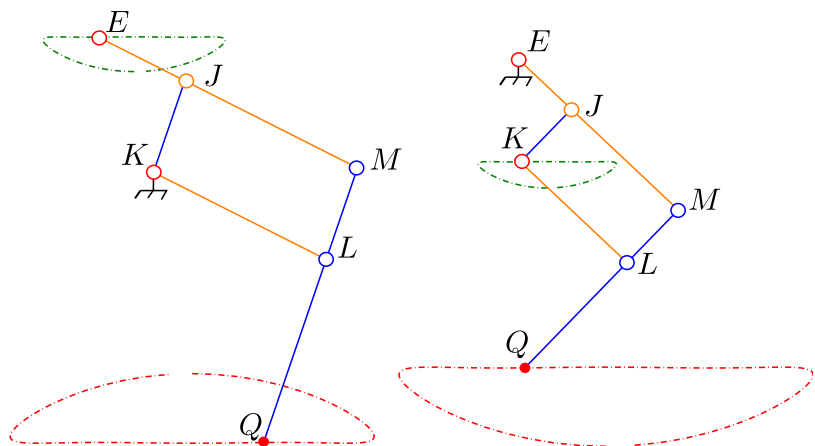
Le second mécanisme est un pantographe, montré figure 3.7c. Il s'agit d'un mécanisme à cinq barres (deux liaisons rotoïdes sont confondues au point K) qui a deux points d'entrée (points E et K). Comme montré figure 3.7c, en fixant un point et en imposant une trajectoire à l'autre, on peut soit amplifier la trajectoire (droite), soit amplifier et inverser la trajectoire (gauche). C'est dans cette deuxième configuration qu'est intégré le pantographe dans la jambe du TIT, voir figure 3.7a. Il est à noter que la combinaison Hoecken/pantographe est un choix très populaire pour la conception de jambes robotiques [155–160].



(a) Schéma cinématique d'une jambe



(b) Mécanisme de Hoecken



(c) Pantographe

FIGURE 3.7 Mécanismes contenus dans la chaise marchante du Tokyo Institute of Technology

Enfin, la jambe possède quatre parallélogrammes en cascade (respectivement $CDHI$, $EDFG$, $EFMN$ et $MOPQ$) dont la fonction est de maintenir le corps PQ en orientation constante durant le mouvement. Ce corps fait donc office de pied. Afin de limiter la longueur de l'exemple et d'éviter les redondances, nous allons nous concentrer ici sur le premier étage de la jambe, à savoir le mécanisme de Hoecken et les deux premiers parallélogrammes (points A à J de la figure 3.7a). Pour une analyse complète de la jambe, il est possible de se référer à l'article [161], co-écrit par l'auteur de ce document.

Le mécanisme étudié est montré figure 3.8 (haut). L'objectif est d'obtenir le visseur du corps EF qui sera considéré comme le corps de sortie à partir de l'actionnement situé au point A . Il est à noter que deux liaisons rotoïdes se chevauchent aux points C et G . La figure 3.8 (bas) montre une version cinématique équivalente où ces liaisons sont explicitement séparées. Cela permet notamment de mettre en avant le fait que la boucle $CEFG$ est en réalité une boucle à cinq barres (C_1C_2EFG). Le chemin cinématique proposé est montré figure 3.8b.

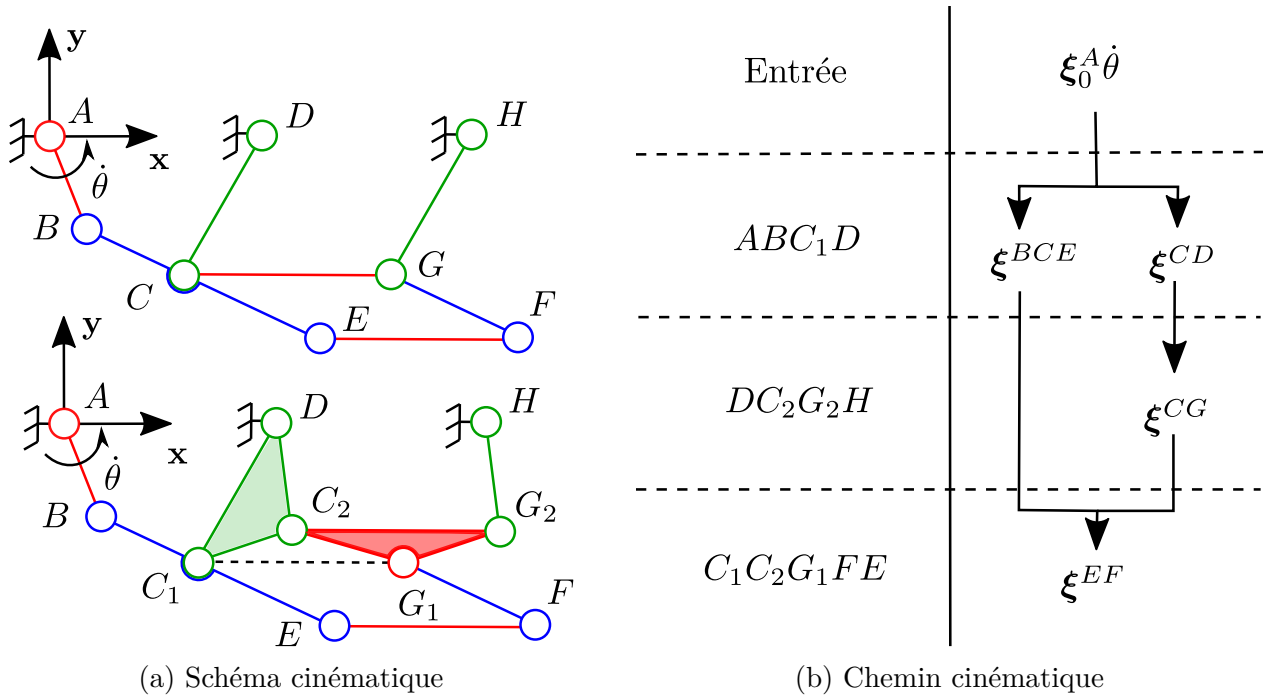


FIGURE 3.8 Premier étage de la jambe du TIT

Utilisation des matrices de visseurs

Nous allons dans un premier temps exprimer le visseur du corps de sortie comme fonction de matrices de visseurs, c'est à dire sous la forme de l'équation (3.23).

D'après le schéma montré figure 3.8b, la première étape est d'exprimer les visseurs des corps CD et BCE . Or ces corps sont respectivement le corps de sortie et le coupleur d'un mécanisme à quatre barres et les notations sont identiques à celles de la figure 3.1. Ainsi, les visseurs ξ^{CD} et ξ^{BCE} ont déjà été donné équations (3.26) et (3.28), nous avons donc pour la première boucle :

$$\xi^{CD} = \underbrace{\Lambda^T \mathbf{K}_S \Lambda \xi_0^A}_{\mathcal{S}^{CD}} \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \xi^{BCE} = \underbrace{\Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A}_{\mathcal{S}^{BCE}} \dot{\theta}, \quad (3.45)$$

où les matrices $\mathbf{K}_S$ et $\mathbf{K}_C$ sont données respectivement équations (3.25) et (3.27).

La seconde étape consiste à se placer dans la boucle DC_2G_2H afin d'exprimer le visseur du corps CG . Ce dernier est donné par :

$$\begin{aligned} \xi^{CG} &= \mathcal{S}^{CD} \dot{\theta} + \xi_0^C \dot{\theta}_{C_2} \\ &= \xi_0^G \dot{\theta}_{G_2} + \xi_0^H \dot{\theta}_H \end{aligned} \quad (3.46)$$

En sélectionnant les torseurs $\zeta_1^{CG} = \zeta_0^C(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{CG} = \zeta_0^C(\mathbf{y})$ ainsi que $\zeta_3^{CG} = \zeta_0^H(\mathbf{s}_{HG})$, il est possible de construire une matrice de visseurs $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}^{CG}$ grâce à l'équation (3.24). Puis l'expression (3.23) nous permet obtenir le visseur ξ^{CG} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \xi^{CG} &= \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) \Lambda \mathcal{S}^{CD} \dot{\theta} \\ &= \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) \Lambda \Lambda^T \mathbf{K}_S \Lambda \xi_0^A \dot{\theta} \\ &= \underbrace{\Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) \mathbf{K}_S \Lambda \xi_0^A}_{\mathcal{S}^{CG}} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Maintenant, nous pouvons nous placer dans la boucle à cinq barres $C_1C_2G_1FE$ pour exprimer le visseur du corps EF à partir des visseurs des corps BCE et CG , comme annoncé par la figure (3.8b). Le visseur ξ^{EF} s'écrit dans cette boucle :

$$\begin{aligned} \xi^{EF} &= \mathcal{S}^{CG} \dot{\theta} + \xi_0^G \dot{\theta}_{G_1} + \xi_0^F \dot{\theta}_F \\ &= \mathcal{S}^{BCE} \dot{\theta} + \xi_0^E \dot{\theta}_E. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les torseurs $\zeta_1^{EF} = \zeta_0^C(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{EF} = \zeta_0^E(\mathbf{y})$, et $\zeta_3^{EF} = \zeta_0^G(\mathbf{s}_{GF})$ sont choisi pour éliminer les vitesses passives. Cela permet de construire la matrice $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}^{EF}$. L'équation (3.23) donne

alors :

$$\boldsymbol{\xi}^{EF} = \left[\boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\$}^{CG} + \boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2) \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\$}^{BCE} \right] \dot{\theta}. \quad (3.49)$$

Puis, en remplaçant les visseurs $\boldsymbol{\BCE et $\boldsymbol{\CG par leur expressions respectives, données respectivement équations (3.45) et (3.47), nous avons :

$$\boldsymbol{\xi}^{EF} = \underbrace{\boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{L}^{EF} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi}_0^A}_{\boldsymbol{\$}^{EF}} \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}^{EF} = \mathbf{K}_2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) \mathbf{K}_S + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2) (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \quad (3.50)$$

L'équation (3.50) nous donne une forme analytique du visseur du corps EF comme fonction linéaire du visseur actif $\boldsymbol{\xi}_0^A$. L'approche classique de la théorie des visseurs aurait nécessité quatre inversions numériques pour obtenir le modèle cinématique direct. Ici, le visseur $\boldsymbol{\xi}^{EF}$ est obtenu grâce à des simples produits et additions de matrices.

Forme explicite du visseur de l'organe terminal

Nous pouvons reprendre le même exemple mais cette fois-ci en utilisant l'équation (3.33) plutôt que l'équation (3.23). Pour commencer, d'après les équations (3.34) et (3.44), nous avons :

$$\boldsymbol{\xi}^{CD} = \omega^{CD} \boldsymbol{\xi}_0^D \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}^{BCE} = \omega^{BCE} \boldsymbol{\xi}_0^V \quad (3.51)$$

avec :

$$\omega^{CD} = \frac{\mathbf{s}_{BC}^T \mathbf{Er}_{AB}}{\mathbf{s}_{BC}^T \mathbf{Er}_{DC}} \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \omega^{BCE} = -\frac{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{Er}_{AB}}{\mathbf{s}_{DC}^T \mathbf{Er}_{BC}} \dot{\theta}. \quad (3.52)$$

Le point V étant pour rappel le centre instantané de rotation du corps BCE , situé à l'intersection des droites passant respectivement par A et B et par C et D . Sa position est donnée (3.42). Maintenant, pour la seconde boucle ($CDHI$), d'après l'équation (3.47), le visseur du corps CG est donné par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{CG} &= \boldsymbol{\xi}^{CG} - \frac{\boldsymbol{\xi}_0^H(\mathbf{s}_{HG}) \circ \boldsymbol{\xi}^{CG}}{\boldsymbol{\xi}_0^H(\mathbf{s}_{HG}) \circ \boldsymbol{\xi}_0^C} \boldsymbol{\xi}_0^C \\ &= \left[\boldsymbol{\xi}_0^D - \frac{\mathbf{s}_{HG}^T \mathbf{Er}_{DH}}{\mathbf{s}_{HG}^T \mathbf{Er}_{CH}} \boldsymbol{\xi}_0^C \right] \omega^{CD} \\ &= [\boldsymbol{\xi}_0^D - \boldsymbol{\xi}_0^C] \omega^{CD} \\ &= \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{Er}_{DC}) \omega^{CD}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

En effet, d'après la géométrie du mécanisme, voir figure 3.8, $\mathbf{s}_{HG} = \mathbf{s}_{DC}$, donc $\mathbf{s}_{HG}^T \mathbf{Er}_{DH} = \mathbf{s}_{HG}^T \mathbf{Er}_{CH}$. D'après l'équation (3.53), le corps CG est en pure translation dans la direction perpendiculaire $\mathbf{s}_{DC}$, d'une amplitude $l_{CD} \omega^{CD}$, où l_{CD} est la distance entre les points C et

D. Cela est cohérent puisque CD est le coupleur du parallélogramme $CDHI$, donc est en translation circulaire.

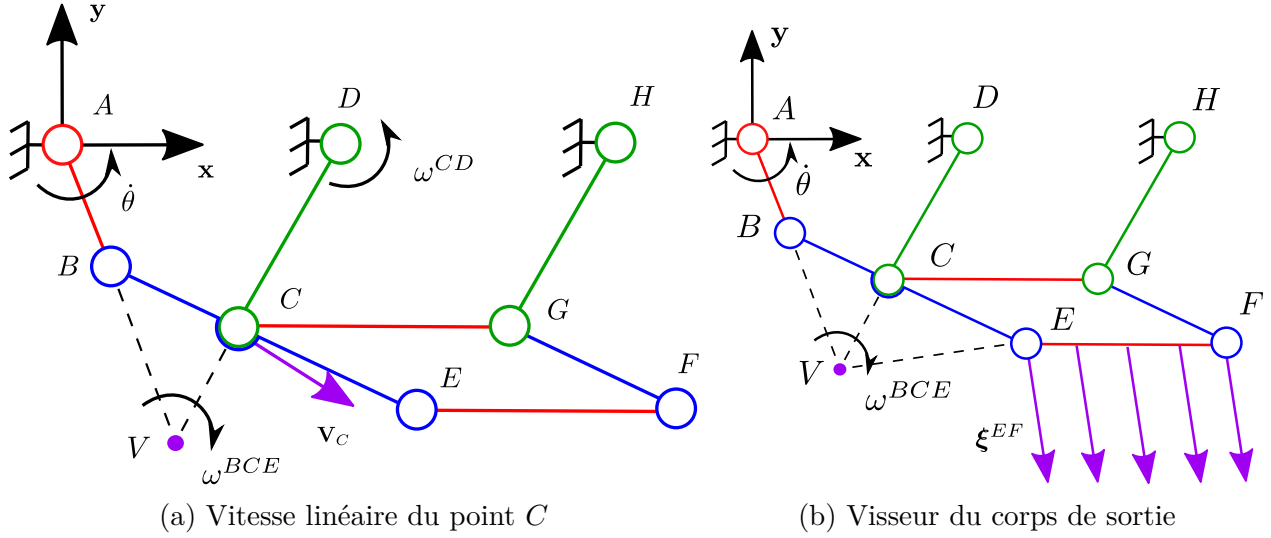


FIGURE 3.9 Vitesses instantanées du point C et du corps EF

Avant de s'intéresser à la dernière boucle cinématique, nous allons légèrement modifier l'expression de ξ^{CG} pour faire apparaître la vitesse ω^{BCE} . Pour cela, il faut remarquer que les corps DC et BCE partagent le même point C , voir figure 3.9a. La vitesse linéaire de ce point est donc identique si l'on exprime le visseur de BCE au point C ou celui de DC en ce même point (à noter que le visseur de DC est à pas infini donc la vitesse linéaire est la même en tout point de ce corps). Si l'on note $\mathbf{V}_C$ la vitesse linéaire du point C , alors :

$$\mathbf{V}_C = \omega^{BCE} \mathbf{Er}_{VC} = \omega^{CD} \mathbf{Er}_{DC}, \quad (3.54)$$

comme illustré figure 3.9a. L'équation (3.53) se réécrit alors :

$$\xi^{CG} = \xi_{\infty}(\mathbf{Er}_{VC}) \omega^{BCE} \quad (3.55)$$

Maintenant nous pouvons finalement exprimer le torseur du corps EF sous la forme de l'équation (3.33) à partir de l'équation (3.50). Tout d'abord, nous avons :

$$\Lambda^T \mathbf{K}_2 \Lambda \xi^{CG} = \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi^{CG}}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E = \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi_{\infty}(\mathbf{Er}_{VC})}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E \omega^{BCE}, \quad (3.56)$$

avec pour rappel $\zeta_3^{EF} = \zeta_0^G(\mathbf{s}_{GF})$ et ζ_1^{EF} tandis que ζ_2^{EF} sont deux torseurs plans à pas nuls appliqués au point E (d'où l'apparition de ξ_0^E dans l'équation précédente). D'autre part, nous

avons :

$$\Lambda^T(\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2)\Lambda\xi^{BCE} = \xi^{BCE} - \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi^{BCE}}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E = \left[\zeta_0^V - \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^V}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E \right] \omega^{BCE}. \quad (3.57)$$

En regroupant les équations (3.56) et (3.57), l'expression du visseur ξ^{EF} est :

$$\begin{aligned} \xi^{EF} &= \left[\frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi_\infty(\mathbf{Er}_{VC})}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E + \zeta_0^V - \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^V}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E \right] \omega^{BCE} \\ &= \left[\zeta_0^V - \frac{\zeta_3^{EF} \circ [\xi_0^V - \xi_\infty(\mathbf{Er}_{VC})]}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E \right] \omega^{BCE} \\ &= \left[\zeta_0^V - \frac{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^C}{\zeta_3^{EF} \circ \xi_0^E} \xi_0^E \right] \omega^{BCE} \\ &= \left[\zeta_0^V - \frac{\mathbf{s}_{GF}^T \mathbf{Er}_{CG}}{\mathbf{s}_{GF}^T \mathbf{Er}_{EF}} \xi_0^E \right] \omega^{BCE} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Or, la boucle *EDFG* est un parallélogramme, donc $\mathbf{r}_{CG} = \mathbf{r}_{EF}$. Le coefficient devant le visseur ξ_0^E devient égal à un, et l'expression de ξ^{EF} se simplifie en :

$$\xi^{EF} = \xi_\infty(\mathbf{Er}_{VE}) \omega^{BCE}. \quad (3.59)$$

Au final, le corps de sortie est en pure translation dans la direction perpendiculaire au vecteur $\mathbf{r}_{VE}$. La vitesse linéaire en tout point de ce corps est égale à la vitesse de rotation du corps *BCE* multipliée par la distance entre *E* et le centre instantané de rotation de ce même corps. Nous avons ainsi exprimé le visseur de l'organe terminal de manière compacte comme un simple visseur unitaire multiplié par une vitesse.

Pour être parfaitement rigoureux, il est à noter que l'équation (3.59) n'est pas vraie en tout temps. Lors d'un tour complet de la membrure d'entrée, le coupleur du mécanisme de Hoecken change localement deux fois de mobilité. En effet, puisque le centre instantané de rotation *V* de ce corps se situe à l'intersection des membrures *AB* et *DC*, alors lorsque ces dernières sont parallèles le point *V* n'est plus défini / est poussé vers l'infini. Le coupleur *BCE* est instantanément en translation pure, son visseur vaut alors $\xi^{BCE} = \xi_\infty(\mathbf{Er}_{AB}) \dot{\theta}$, comme montré figure 3.10. Les flèches violettes représentant la vitesse linéaire de tout point du corps *BCE*. Il est alors facile de prouver que le corps de sortie *EF* est en translation pure, dans la direction perpendiculaire à *AB* et son visseur est localement égal à celui du corps *BDE*, c'est-à-dire :

$$\xi^{EF} = \xi_\infty(\mathbf{Er}_{AB}) \dot{\theta}. \quad (3.60)$$

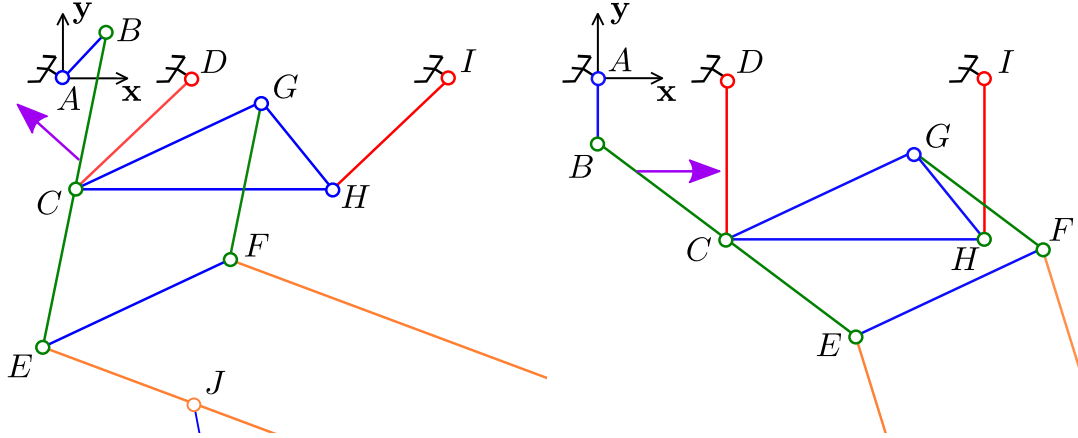


FIGURE 3.10 Changement local de mobilité

3.2.6 Remarques sur les chemins cinématiques

Nous avons introduit dans cette section une représentation graphique que nous avons appelé chemin cinématique. Il est à noter qu'il existe plusieurs méthodes graphiques dédiées à la représentation des mécanismes hybrides [162]. Les graphes dits de mouvement et de contraintes [163] permettent notamment de facilement visualiser les différentes boucles cinématiques présentes dans un mécanisme. Dans ces schémas, les corps sont représentés par des cercles ou des points numérotés. Pour les graphes appelés structuraux et topologiques [164–166], qui sont des graphes de mouvement, les corps sont connectés par des lignes symbolisant les liaisons [167]. Pour les graphes de contraintes, les corps sont connectés par autant de lignes que de contraintes imposés par chaque liaison. Dans les deux cas, les différentes boucles cinématiques sont clairement visibles, ce qui permet d'appréhender facilement les interconnexions entre les différents corps. Cependant, ils sont peu adaptés à l'établissement des modèles cinématiques où une structure arborescente est usuelle. Un exemple de graphique destiné à l'analyse du modèle cinématique direct de mécanismes à plusieurs boucles est proposé en [168]. Pour établir ce schéma, il est nécessaire d'identifier une chaîne sérielle connectant l'organe terminal au bâti. Puis, le reste du mécanisme est décomposé en chaînes élémentaires successives connectant les différents corps de la chaîne entre eux, mais également aux liaisons actionnées. Cela permet d'analyser le mécanisme de manière séquentielle. L'approche proposée dans ce document est relativement similaire, mais l'on part au contraire de la (ou les, comme nous le verrons dans la section suivante) liaison(s) actionnée(s) pour atteindre le visseur de l'organe terminal. Contrairement à toutes les représentations graphiques évoquées, le chemin cinématique n'a pas vocation à montrer l'ensemble du mécanisme (corps et liaisons), mais seulement certains corps bien choisis. Il s'agit en quelque sorte de la repré-

sentation graphique de la procédure à suivre pour établir le modèle cinématique direct. Il est à noter que le choix du chemin n'est pas nécessairement unique. Dans ce document les corps sont choisis pour minimiser le nombre d'étapes intermédiaires.

3.2.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons introduit les chemins cinématiques et les matrices de visseurs. Le principal avantage de ces dernières est de pouvoir exprimer les visseurs des différents corps d'un mécanisme en remplaçant les inversions matricielles par des sommes et multiplications. Comme montré à l'exemple précédent, chaque boucle cinématique introduit une nouvelle matrice de visseur qui constitue une sorte de bloc que l'on peut multiplier aux blocs précédents, voir par exemple l'équation (3.48).

Le modèle cinématique de la jambe du TIT a été proposé sous deux versions différentes. Dans la première, nous avons vu comment ces matrices peuvent se chaîner et/ou s'additionner à chaque nouvelle boucle cinématique. Le visseur de l'organe terminal est obtenu comme fonction linéaire du visseur actionné, voir par exemple l'équation (3.49).

Dans la seconde version, nous avons montré les visseurs contenus implicitement dans ces matrices. Cela permet de donner un sens physique au mouvement de chaque corps puisque l'on peut décrire leur type de mobilité et leur vitesse à chaque instant. Dans l'exemple de la jambe du TIT, plutôt que d'inverser quatre fois des matrices comme l'aurait requis l'approche traditionnelle, ici le visseur de sortie a pu être donné sous sa forme la plus simple, voir équation (3.59).

Comparée à la première approche, la seconde est moins automatique ; il est nécessaire de calculer manuellement le visseur de chaque corps et de simplifier à chaque étape les relations obtenues, tout en prenant en compte les changements locaux de mobilité. Le visseur du corps de sortie de la jambe TIT a par exemple été obtenu relativement facilement puisque le mécanisme contenait deux parallélogrammes, ce qui simplifie considérablement les calculs. Il n'est pas toujours aussi aisé d'obtenir une relation aussi élégante que celle de l'équation (3.59) avec des mécanismes possédant des dimensions arbitraires. Cette méthode, bien que permettant de donner un sens physique au modèle cinématique direct d'un mécanisme est donc relativement peu adaptée aux mécanismes à complexes, contrairement à la première qui peut s'accommoder à n'importe quelle topologie de mécanisme plan à membrures rigides.

3.3 Mécanismes à plusieurs DDLs

Nous nous intéressons maintenant aux matrices de visseurs de mécanismes plan à $n > 1$ DDLs. L'objectif est toujours de donner le modèle cinématique direct d'un corps appelé i . Le visseur de ce dernier est donné par :

$$\boldsymbol{\xi}^i = \mathbf{J}^i \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.61)$$

Cette équation est l'équivalent à n DDLs de l'équation (3.8). Le vecteur $\dot{\mathbf{q}}$ de l'équation (3.61) est le vecteur des vitesses actionnées, de dimension n . Il est à noter que n peut être plus grand que trois, c'est-à-dire qu'un mécanisme peut être sur-actionné. La matrice $\mathbf{J}^i$ est de dimension $3 \times n$ est la matrice jacobienne du corps i . Cette dernière est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^i & \dots & \mathbf{\$}_l^i & \dots & \mathbf{\$}_n^i \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

où $\mathbf{\$}_l^i$ est le visseur associé à l -ième vitesse de $\dot{\mathbf{q}}$, pour $l = 1, \dots, n$.

La méthode globale pour déterminer le modèle cinématique direct demeure la même que pour les mécanismes à un degré de liberté. Elle consiste à sélectionner une boucle cinématique, identifier les torseurs réciproques aux visseurs des liaisons passives, puis créer les matrices parallèles et sérielles. Comme pour le cas à un DDL, à la troisième étape, nous pourrions directement donner la matrice jacobienne. Nous allons séparer cette section en deux parties, selon la nature des boucles cinématiques que nous pouvons identifier dans le mécanisme.

3.3.1 Unique boucle cinématique

Nous commencerons par les boucles qui peuvent s'écrire selon deux branches distinctes, à l'image des mécanismes à unique DDL. Similairement à l'équation (3.9), l'équation la plus complète d'une unique boucle cinématique est :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^i &= \mathbf{J}^j \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\xi}_p^1 \dot{p}_1 + \boldsymbol{\xi}_p^2 \dot{p}_2 \quad \# \text{ première branche} \\ &= \mathbf{J}^k \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\xi}_p^3 \dot{p}_3 \quad \# \text{ seconde branche} \end{aligned} \quad (3.63)$$

De même que pour les mécanismes à un DDL, $\boldsymbol{\xi}_p^1$, $\boldsymbol{\xi}_p^2$, et $\boldsymbol{\xi}_p^3$, sont les visseurs associés aux vitesses passives $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$ et $\dot{p}_3$. Pour les mêmes raisons, il ne peut y avoir plus de trois vitesses passives par boucle et pas plus de deux par branche. Les matrices $\mathbf{J}^j$ et $\mathbf{J}^k$ sont soit les matrices jacobiennes des corps j et k , soit une collection de visseurs unitaires actionnés. Ces matrices sont de dimension $3 \times n$ et il est possible qu'elles ne soient pas de plein rang. Une colonne peut être nulle, signifiant que la vitesse associée à cette colonne n'a pas d'influence sur le corps i .

En identifiant trois torseurs linéairement indépendants réciproques aux visseurs ξ_p^1 , ξ_p^2 , et ξ_p^3 (une fois encore on appelle ζ_3^i le torseur réciproque à ξ_p^1 et ξ_p^2 et on appelle ζ_1^i et ζ_2^i les torseurs réciproques à ξ_p^3), l'équation de vitesse du corps i peut être donnée par :

$$\mathbf{\Pi}^i \xi^i = \Sigma^i \dot{q}, \quad (3.64)$$

où $\mathbf{\Pi}^i$ est la matrice jacobienne parallèle du corps i , qui a exactement la même forme que celle donnée équation (3.16), et Σ^i est la matrice sérielle du même corps. Ici cette matrice est de dimension $3 \times n$, elle est donnée par :

$$\Sigma^i = \begin{bmatrix} \sigma_1^i & \dots & \sigma_l^i & \dots & \sigma_n^i \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \sigma_l^i = \begin{bmatrix} \zeta_1^i \circ \$l^k \\ \zeta_2^i \circ \$l^k \\ \zeta_3^i \circ \$l^j \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

pour $l = 1, \dots, n$. Les vecteurs $\$l^j$ et $\$l^k$ étant les l -ièmes colonnes des matrices $\mathbf{J}^j$ et $\mathbf{J}^k$. Sous réserve que le mécanisme ne soit pas en singularité de type 2, c'est à dire que $\mathbf{\Pi}^i$ soit inversible, la matrice jacobienne et le modèle cinématique direct donné par (3.61) peuvent être obtenus par l'opération :

$$\mathbf{J}^i = (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \Sigma^i. \quad (3.66)$$

De même que pour les mécanismes à un DDL, cette opération peut être faite analytiquement grâce à la formule donnée en (3.18). L'inverse de la matrice jacobienne parallèle est donnée équation (3.20), ce qui donne :

$$\mathbf{J}^i = (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \Sigma^i = \begin{bmatrix} (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \sigma_1^i & \dots & (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \sigma_l^i & \dots & (\mathbf{\Pi}^i)^{-1} \sigma_n^i \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

pour $l = 1, \dots, n$. Les calculs pour obtenir chaque colonne de la matrice $\mathbf{J}^i$ sont ainsi exactement les mêmes que ceux effectués pour les mécanismes à un DDL, voir équations (3.21) et (3.22). Ainsi la l -ième colonne de la matrice jacobienne $\mathbf{J}^i$ vaut :

$$\$l^i = \Lambda^T \mathbf{K}^i \Lambda \$l^j + \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}^i) \Lambda \$l^k, \quad (3.68)$$

avec la matrice de visseurs $\mathbf{K}^i$ définie équation (3.24). En explicitant le contenu de la matrice $\mathbf{K}^i$, il est possible d'obtenir une équation similaire à celle de l'équation (3.33), à savoir :

$$\$l^i = \frac{\zeta_3^i \circ \$l^j}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 + \left[\$l^k - \frac{\zeta_3^i \circ \$l^k}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 \right]. \quad (3.69)$$

Finalement, lorsqu'un corps d'un mécanisme à plusieurs DDLs est exprimé à partir d'une

unique boucle cinématique, chaque colonne de la matrice jacobienne peut être considérée comme un mécanisme à unique DDL où tous les actionneurs, sauf un, sont verrouillés.

Exemple simple : Le mécanisme à cinq barres

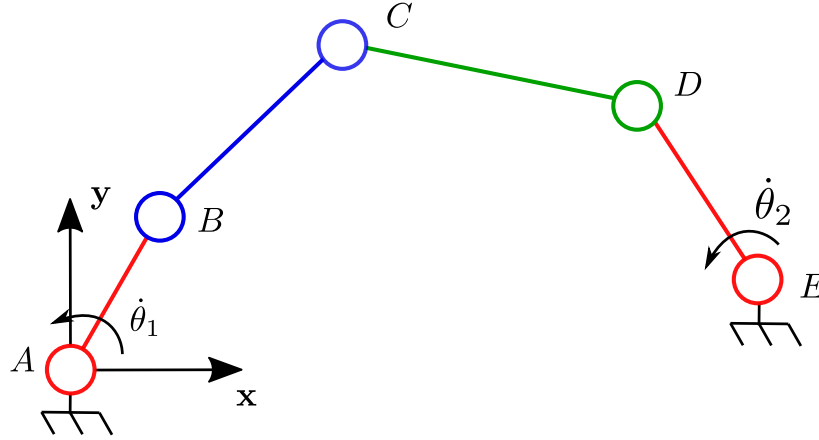


FIGURE 3.11 Mécanisme à cinq barres plan à cinq liaisons rotoïdes

À l'instar du mécanisme à quatre barres, le mécanisme à cinq barres est sûrement le mécanisme à deux DDLs le plus simple qu'il soit. Un exemple d'un tel mécanisme est montré figure 3.11. Les deux entrées du mécanisme sont les rotations autour des points A et E , tournant respectivement à des vitesses $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. En supposant que la membrure distale BC soit la sortie du mécanisme, l'objectif est alors d'exprimer son visseur ξ^{BC} en fonction du vecteur des vitesses actionnées $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$. Il est possible d'identifier deux branches sérielles connectant le corps BC au bâti et ξ^{BC} peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \xi^{BC} &= \xi_0^A \dot{\theta}_1 + \xi_0^B \dot{\theta}_B \\ &= \xi_0^E \dot{\theta}_2 + \xi_0^D \dot{\theta}_D + \xi_0^C \dot{\theta}_C, \end{aligned} \quad (3.70)$$

ou pour le mettre sous la forme de l'équation (3.63) comme :

$$\begin{aligned} \xi^{BC} &= \mathbf{J}^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\theta}_B \\ &= \mathbf{J}^E \dot{\theta} + \xi_0^D \dot{\theta}_D + \xi_0^C \dot{\theta}_C \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^A = \begin{bmatrix} \xi_0^A & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}^E = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \xi_0^E \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Nous pouvons alors identifier les torseurs $\zeta_1^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{x})$ et $\zeta_2^{BC} = \zeta_0^B(\mathbf{y})$ réciproques au visseur ξ_0^B , ainsi que $\zeta_3^{BC} = \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})$ comme étant réciproque aux visseurs ξ_0^C et ξ_0^D . Une matrice de visseurs $\mathbf{K}^{BC}$ peut être construite à partir de ces trois torseurs grâce à l'équation (3.24). À noter qu'avec les notations utilisées, nous avons $\mathbf{K}^{BC} = \mathbf{K}_C$ où $\mathbf{K}_C$ a été définie équation

(3.27). Puis, en utilisant (3.68) deux fois, nous obtenons le modèle cinématique direct du corps BC ainsi que l'expression de sa matrice jacobienne $\mathbf{J}^{BC}$:

$$\xi^{BC} = \underbrace{\begin{bmatrix} \$1^{BC} & \$2^{BC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{BC}} \dot{\theta}, \quad \text{avec} \quad \$1^{BC} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A \quad \text{et} \quad \$2^{BC} = \Lambda^T \mathbf{K}_C \Lambda \xi_0^E. \quad (3.72)$$

Les vecteurs jacobiens $\$1^{BC}$ et $\$2^{BC}$ peuvent également être écrits sous la forme de l'équation (3.69) comme :

$$\$1^{BC} = \left[\xi_0^A - \frac{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \xi_0^B \right] \quad \text{et} \quad \$2^{BC} = \frac{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^E}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \xi_0^B. \quad (3.73)$$

Il est clair qu'en comparant les vecteurs jacobiens de la matrice $\mathbf{J}^{BC}$ avec les équations (3.36) et (3.34) que lorsque seule la vitesse $\dot{\theta}_1$ est active, le corps distale BC a le comportement cinématique similaire au coupleur d'un mécanisme à quatre barres. À l'inverse, lorsque seule la vitesse $\dot{\theta}_2$ est active, BC se comporte comme le corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres. Comme montré figures 3.12a et 3.12b, le corps BC est en effet respectivement le coupleur du quatre barres virtuel $ABCD$ et le corps de sortie du quatre barres virtuel $BCDE$.

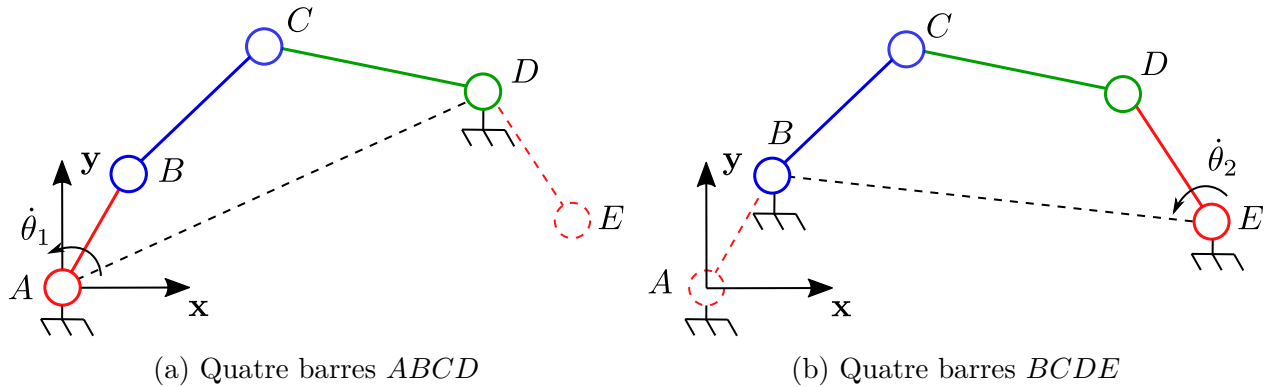


FIGURE 3.12 Mécanismes à quatre barres virtuels dans un mécanisme à cinq barres

Exemple complexe : Jambe robotique ajustable

Le second exemple de mécanisme à n DDLs est donné par le mécanisme montré figure 3.13a. Il s'agit d'un mécanisme de jambe à trois DDLs tiré de [169]. Tout comme la jambe du TIT, il est composé d'une association du mécanisme de Hoecken et d'un pantographe en mode amplificateur inverseur, voir respectivement les figures 3.7b et 3.7c. Ce mécanisme a comme particularité d'avoir deux liaisons prismatiques supplémentaires respectivement aux points A et H , voir figure 3.13a à nouveau. Ces liaisons ont été ajoutées selon [169] de manière à pouvoir modifier la foulée de la patte.

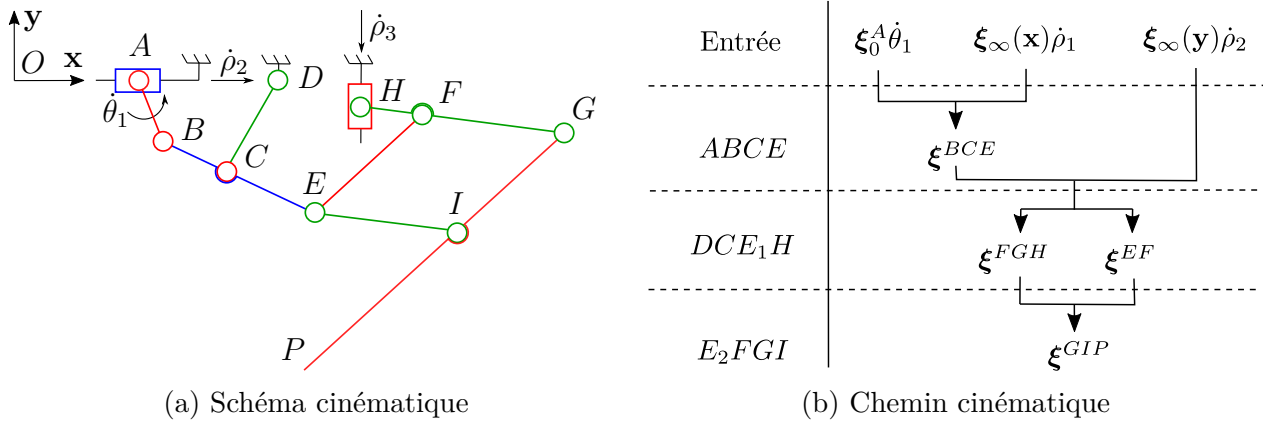


FIGURE 3.13 Jambe ajustable Hoecken-Pantographe

Le vecteur des vitesses actionnées est donné par $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$, où $\dot{\theta}_1$ est la vitesse de rotation de la membrure AB autour de A tandis que $\dot{\rho}_2$ et $\dot{\rho}_3$ sont les vitesses respectives des deux liaisons prismatiques, voir figure 3.13a à nouveau. L'objectif est de donner le visseur du corps GIP que nous considérerons comme la sortie du mécanisme. Le chemin cinématique que nous suivrons est donné figure 3.13b. Il est à noter que une fois encore, deux liaisons rotoïdes sont superposées au point E , il existe donc deux vitesses passives $\dot{\theta}_{E_1}$ et $\dot{\theta}_{E_2}$ autour de ce point.

La première boucle à considérer est le cinq barres $ABCD$ (la longueur AD étant variable). Le visseur du corps BDE est :

$$\begin{aligned} \xi^{BCE} &= \mathbf{J}^1 \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^B \dot{\theta}_B \\ &= \xi_0^C \dot{\theta}_C + \xi_0^D \dot{\theta}_D \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} \xi_0^A & \xi_\infty(\mathbf{x}) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

L'ensemble de torseurs réciproques est donné par $\zeta_1^{BCE} = \zeta_0^B(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{BCE} = \zeta_0^B(\mathbf{y})$ et $\zeta_3^{BCE} = \zeta_0^D(\mathbf{s}_{DC})$. Une matrice $\mathbf{K}^{BCE}$ peut être créée à partir de ces torseurs. À noter qu'il s'agit

de la même que dans l'exemple précédent et que nous avons $\mathbf{K}^{BCE} = \mathbf{K}_C$ avec $\mathbf{K}_C$ définie équation (3.27). En utilisant l'équation (3.68) sur les deux colonnes non nulles de $\mathbf{J}^1$, nous pouvons obtenir les colonnes de la matrice jacobienne du corps BCE :

$$\mathbf{J}^{BCE} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^{BCE} & \mathbf{\$}_2^{BCE} & \mathbf{\$}_3^{BCE} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{\$}_1^{BCE} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A \\ \mathbf{\$}_2^{BCE} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_\infty(\mathbf{x}) \\ \mathbf{\$}_3^{BCE} = \mathbf{0}_{3 \times 1}. \end{cases} \quad (3.75)$$

À noter que la matrice jacobienne $\mathbf{J}^{BCE}$ n'est pas de plein rang puisque la seconde liaison prismatique n'a aucune influence sur le corps BCE .

En ce qui concerne la boucle à six barres $CDEFH$ (la longueur DH est variable), les visseurs des corps FGH et EF sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned} \xi^{FGH} &= \mathbf{J}^{BCE} \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^E \dot{\theta}_{E_1} + \xi_0^F \dot{\theta}_F \\ &= \mathbf{J}^2 \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^H \dot{\theta}_H, \end{aligned} \quad (3.76)$$

et :

$$\begin{aligned} \xi^{EF} &= \mathbf{J}^{BCE} \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^E \dot{\theta}_{E_1} \\ &= \mathbf{J}^2 \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^H \dot{\theta}_H - \xi_0^F \dot{\theta}_F, \end{aligned} \quad (3.77)$$

avec $\mathbf{J}^{BCE}$ définie équation (3.75), et :

$$\mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \xi_\infty(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Un ensemble de trois torseurs réciproques aux visseurs passifs de l'équation (3.76) est donné par $\zeta_1^{FGH} = \zeta_0^H(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{FGH} = \zeta_0^H(\mathbf{y})$ et $\zeta_3^{FGH} = \zeta_0^E(\mathbf{s}_{EF})$. Trois torseurs réciproques à ceux de l'équation (3.77) sont $\zeta_1^{EF} = \zeta_0^E(\mathbf{x})$, $\zeta_2^{EF} = \zeta_0^E(\mathbf{y})$, et $\zeta_3^{EF} = \zeta_0^H(\mathbf{s}_{HF})$. Il est alors possible grâce à l'équation (3.24) d'introduire les matrices de visseurs $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}^{FGH}$ et $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}^{EF}$. Les matrices jacobienues de FGH et EF sont alors données par :

$$\mathbf{J}^{FGH} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^{FGH} & \mathbf{\$}_2^{FGH} & \mathbf{\$}_3^{FGH} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{\$}_1^{FGH} = \Lambda^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A \\ \mathbf{\$}_2^{FGH} = \Lambda^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_\infty(\mathbf{x}) , \\ \mathbf{\$}_3^{FGH} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) \Lambda \xi_\infty(\mathbf{y}), \end{cases} \quad (3.79)$$

et :

$$\text{et } \mathbf{J}^{EF} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^{EF} & \mathbf{\$}_2^{EF} & \mathbf{\$}_3^{EF} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{\$}_1^{EF} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2) (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A \\ \mathbf{\$}_1^{EF} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2) (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_\infty(\mathbf{x}) \\ \mathbf{\$}_3^{EF} = \Lambda^T \mathbf{K}_2 \Lambda \xi_\infty(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (3.80)$$

Enfin, pour la dernière boucle ($EFGI$), voir figure 3.13b, le visseur de l'organe terminal GIP s'exprime par :

$$\begin{aligned} \xi^{GIP} &= \mathbf{J}^{FGH} \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^G \dot{\theta}_G \\ &= \mathbf{J}^{EF} \dot{\mathbf{q}} + \xi_0^E \dot{\theta}_{E_2} + \xi_0^I \dot{\theta}_I. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Une dernière matrice de visseurs $\mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^{GIP}$ peut être construite à partir des torseurs réciproques $\zeta_1^{GIP} = \zeta_0(G, \mathbf{x})$, $\zeta_2^{GIP} = \zeta_0(G, \mathbf{y})$, et $\zeta_3^{GIP} = \zeta_0(E, \mathbf{s}_{EI})$, ce qui nous permet d'obtenir le modèle cinématique direct du mécanisme :

$$\xi^{GIP} = \mathbf{J}^{GIP} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^{GIP} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^{GIP} & \mathbf{\$}_2^{GIP} & \mathbf{\$}_3^{GIP} \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

où les vecteurs jacobiens de $\mathbf{J}^{GIP}$ valent :

$$\begin{cases} \mathbf{\$}_1^{GIP} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) \Lambda \mathbf{\$}_1^{FGH} + \Lambda^T \mathbf{K}_3 \Lambda \mathbf{\$}_1^{EF} \\ \mathbf{\$}_2^{GIP} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) \Lambda \mathbf{\$}_2^{FGH} + \Lambda^T \mathbf{K}_3 \Lambda \mathbf{\$}_2^{EF} \\ \mathbf{\$}_3^{GIP} = \Lambda^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) \Lambda \mathbf{\$}_3^{FGH} + \Lambda^T \mathbf{K}_3 \Lambda \mathbf{\$}_3^{EF}. \end{cases} \quad (3.83)$$

En remplaçant les vecteurs jacobiens des matrices $\mathbf{J}^{FGH}$ et $\mathbf{J}^{EF}$ par leurs expressions, données respectivement équations (3.79) et (3.80), nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{\$}_1^{GIP} = \Lambda^T [(\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_3 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2)] (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_0^A \\ \mathbf{\$}_2^{GIP} = \Lambda^T [(\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_3 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_2)] (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_C) \Lambda \xi_\infty(\mathbf{x}) \\ \mathbf{\$}_3^{GIP} = \Lambda^T [(\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_3) (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_1) + \mathbf{K}_3 \mathbf{K}_2] \Lambda \xi_\infty(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (3.84)$$

La matrice jacobienne de la jambe ajustable est ainsi établie. La méthode (identification d'une boucle, sélection des torseurs réciproques et expression des matrices jacobienues de chaque corps) est finalement identique à celle des mécanismes à unique DDL, puisque chaque colonne de la matrice jacobienne peut être traitée indépendamment, comme montré par exemple par l'équation ci-dessus, chaque colonne de la matrice jacobienne est exprimée comme une fonction linéaire du visseur associé à la liaison active.

Chaque chaîne connectant la plateforme au bâti possède exactement deux vitesses passives. On peut alors identifier pour chaque branche un torseur qui soit réciproque aux deux visseurs passifs associés à ces vitesses. On appellera ces trois torseurs ζ_j^i pour $j = 1, 2, 3$. En calculant le produit réciproque entre chacun de ces torseurs et les visseurs de leur branche respective de l'équation (3.85), une équation de vitesse sous la forme donnée équation (3.64) peut être obtenue. La matrice jacobienne parallèle $\mathbf{\Pi}^i$ a la même expression que celle donnée équation (3.16) et son inverse est donnée équation (3.20). La matrice jacobienne sérielle est une matrice diagonale donnée par :

$$\mathbf{\Sigma}^i = \text{diag} \left(\zeta_1^i \circ \mathcal{S}_a^1 \quad \zeta_2^i \circ \mathcal{S}_a^2 \quad \zeta_3^i \circ \mathcal{S}_a^3 \right). \quad (3.86)$$

L'inverse de la matrice $\mathbf{\Pi}^i$, multipliée à la matrice diagonale $\mathbf{\Sigma}^i$ donne la matrice jacobienne du corps i ainsi que son modèle cinématique direct :

$$\xi^i = \mathbf{J}^i \dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1^i & \mathcal{S}_2^i & \mathcal{S}_3^i \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

où :

$$\mathcal{S}_j^i = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{K}_j^i \mathbf{\Lambda} \mathcal{S}_a^j \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_j^i = \frac{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i) \zeta_l^{iT}}{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i)^T \zeta_j^i}, \quad (3.88)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Les matrices $\mathbf{K}_1^i$, $\mathbf{K}_2^i$ et $\mathbf{K}_3^i$ sont trois matrices de visseurs distinctes. Le dénominateur est un produit mixte qui permet les permutations circulaires, donc identique pour les trois. En revanche chaque numérateur est un produit dyadique différent. Les colonnes de la matrice $\mathbf{J}^i$ peuvent également être réécrites sous formes de visseurs tel que :

$$\mathcal{S}_j^i = \frac{\zeta_j^i \circ \mathcal{S}_a^j}{\zeta_j^i \circ \xi_j^m} \xi_j^m, \quad (3.89)$$

avec $j = 1, 2, 3$, et où ξ_j^m est un visseur généré par le produit vectoriel/de visseurs entre ζ_k^i et ζ_l^i .

Exemples

Pour illustrer les équations présentées à la section 3.3.2, prenons l'exemple d'un mécanisme 3 – RPR comme celui montré figure 3.15. Les points sont agencés de manière à ce que $\mathbf{s}_{O_j A_j} \perp \mathbf{s}_{B_j A_j}$, pour $j = 1, 2, 3$.

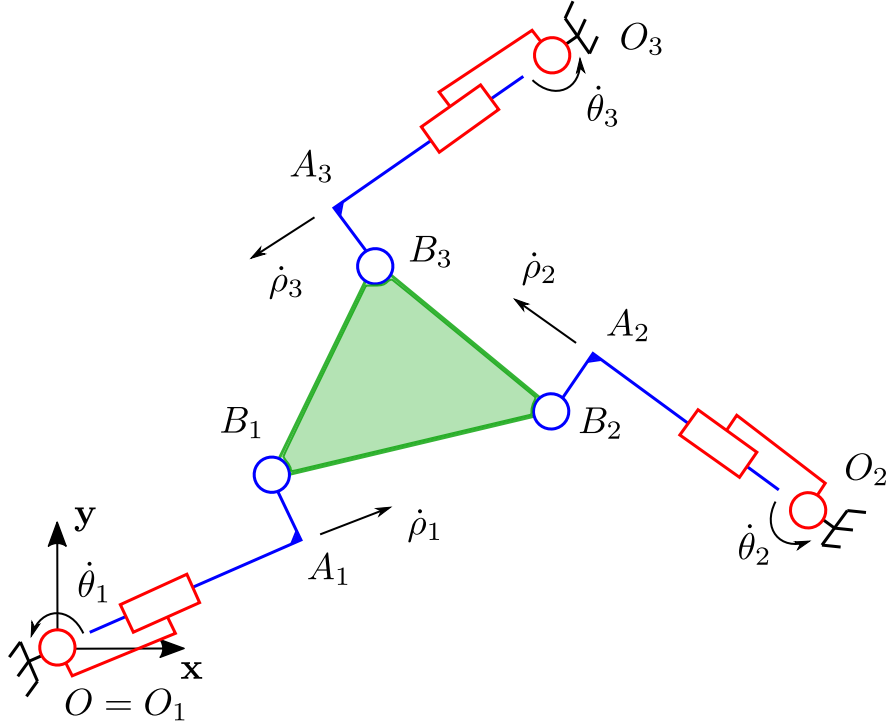


FIGURE 3.15 Mécanisme plan 3 – RPR

Liaisons prismatiques actionnées : 3 – RPR

Supposons dans un premier temps que les liaisons prismatiques soient actionnées. Le vecteur des vitesses actives est alors $\dot{\mathbf{p}} = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$. L'équation (3.85) s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi_0^{O_1} \dot{\theta}_1 + \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_1 A_1}) \dot{\rho}_1 + \xi_0^{B_1} \dot{\theta}_{B_1} \\ &= \xi_0^{O_2} \dot{\theta}_2 + \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_2 A_2}) \dot{\rho}_2 + \xi_0^{B_2} \dot{\theta}_{B_2} \\ &= \xi_0^{O_3} \dot{\theta}_3 + \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_3 A_3}) \dot{\rho}_3 + \xi_0^{B_3} \dot{\theta}_{B_3}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

où $\dot{\theta}_j = \dot{\theta}_{O_j}$ et $\dot{\theta}_{B_j}$ sont les vitesses passives aux points O_j et respectivement B_j , pour $j = 1, 2, 3$. Un torseur réciproque aux visseurs $\xi_0^{O_j}$ et $\xi_0^{B_j}$ est $\zeta_j^i = \zeta_0^{O_j}(\mathbf{s}_{O_j B_j})$, pour $j = 1, 2, 3$.

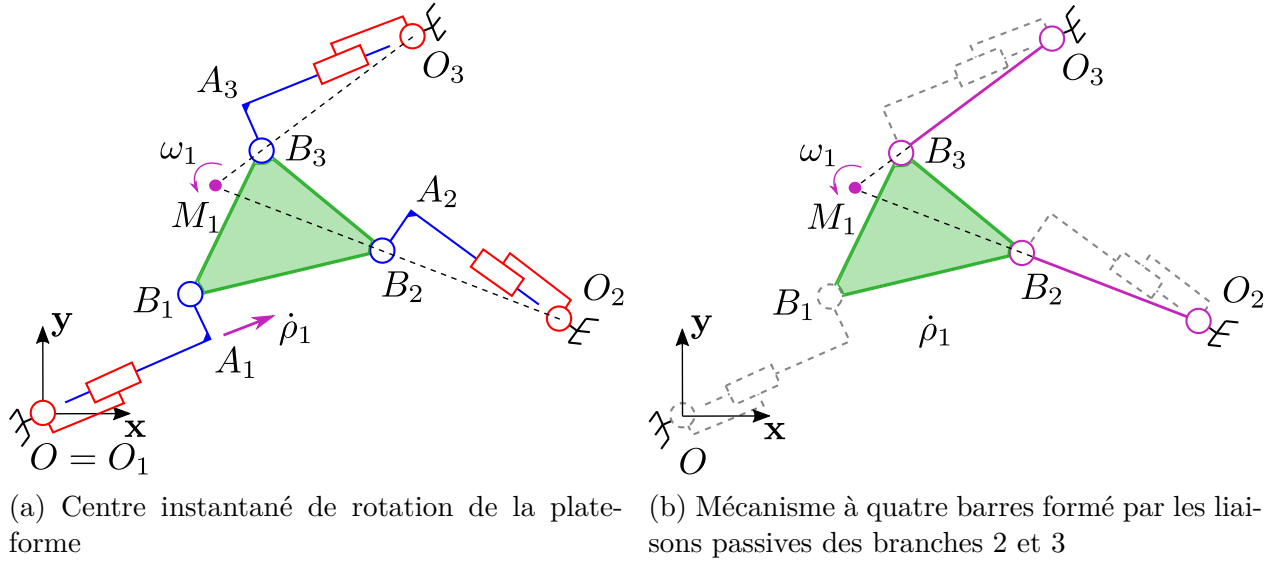


FIGURE 3.16 Vitesse instantanée de la plateforme du 3- RPR soumise au seul actionnement de $\dot{\rho}_1$

En introduisant :

$$\mathbf{K}_j^i = \frac{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i) \zeta_j^{iT}}{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i)^T \zeta_j^i} = \frac{\left[\zeta_0^{O_k}(\mathbf{s}_{O_k B_k}) \times \zeta_0^{O_l}(\mathbf{s}_{O_l B_l}) \right] \zeta_0^{O_j}(\mathbf{s}_{O_j B_j})^T}{\left[\zeta_0^{O_k}(\mathbf{s}_{O_k B_k}) \times \zeta_0^{O_l}(\mathbf{s}_{O_l B_l}) \right]^T \zeta_0^{O_j}(\mathbf{s}_{O_j B_j})}, \quad (3.91)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire, alors chaque colonne de $\mathbf{J}^i$ est simplement donnée par :

$$\mathbf{\$}_j^i = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{K}_j^i \mathbf{\Lambda} \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_j A_j}), \quad (3.92)$$

d'après l'équation (3.88). En introduisant un point M_j un point situé à l'intersection des axes des torseurs ζ_k^i et ζ_l^i , c'est à dire à l'intersection des droites $(O_k, \mathbf{s}_{O_k B_k})$ et $(O_l, \mathbf{s}_{O_l B_l})$, et soit $\xi_0^{M_j}$ le visseur à pas nul situé au point M_j . L'équation précédente peut se réécrire sous la forme de l'équation (3.89) à savoir :

$$\mathbf{\$}_j^i = \frac{\zeta_j^i \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_j A_j})}{\zeta_j^i \circ \xi_0^{M_j}} \xi_0^{M_j} = \frac{\zeta_0^{O_j}(\mathbf{s}_{O_j B_j}) \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_j A_j})}{\zeta_0^{O_j}(\mathbf{s}_{O_j B_j}) \circ \xi_0^{M_j}} \xi_0^{M_j}. \quad (3.93)$$

Chaque colonne de la matrice jacobienne est écrite comme étant proportionnelle à un visseur unitaire. Il ainsi est possible de connaître précisément l'effet qu'à un unique actionneur sur le mouvement de la plateforme. Par exemple, si on regarde uniquement l'effet de $\dot{\rho}_1$ sur son mouvement (en considérant les deux liaisons prismatiques bloquées), alors la plateforme est

en pure rotation autour du point M_1 avec une vitesse de rotation valant :

$$\omega_1 = \frac{\zeta_0^{O_1}(\mathbf{s}_{O_1 B_1}) \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_{O_1 A_1})}{\zeta_0^{O_1}(\mathbf{s}_{O_1 B_1}) \circ \xi_0^{M_1}} \dot{\rho}_1 = \frac{\mathbf{s}_{O_1 B_1}^T \mathbf{s}_{O_1 A_1}}{\mathbf{s}_{O_1 B_1}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{M_1 O_1}} \dot{\rho}_1, \quad (3.94)$$

comme illustré figure 3.16a. La nature de la mobilité de la plateforme soumise à l'actionnement de la jambe 1 ne dépend alors que des jambes 2 et 3. Plus précisément, la plateforme se comporte comme le coupleur du quatre barres $O_2 B_2 O_3 B_3$, qui est le quatre barres constitué des liaisons passives des jambes 2 et 3, comme montré figure 3.16b.

Liaisons rotoïdes actionnées : 3 – $\underline{RPR}$

Supposons maintenant que le mécanisme est actionné par les liaisons rotoïdes en O_1 , O_2 et O_3 . Le vecteur des vitesses actives est alors donné par $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$. L'équation (3.85) est la même que celle donnée (3.90). Il est possible pour chaque branche d'identifier le torseur $\zeta_j^i = \zeta_0^{B_j}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_j A_j})$ comme étant réciproque aux visseurs $\xi_\infty(\mathbf{s}_{O_j A_j})$ et $\xi_0^{B_j}$ pour $j = 1, 2, 3$, puis d'introduire les matrices :

$$\mathbf{K}_j^i = \frac{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i) \zeta_j^{iT}}{(\zeta_k^i \times \zeta_l^i)^T \zeta_j^i} = \frac{[\zeta_0^{B_k}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_k A_k}) \times \zeta_0^{B_l}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_l A_l})] \zeta_0^{B_j}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_j A_j})^T}{[\zeta_0^{B_k}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_k A_k}) \times \zeta_0^{B_l}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_l A_l})]^T \zeta_0^{B_j}(\mathbf{E} \mathbf{s}_{O_j A_j})}, \quad (3.95)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire.

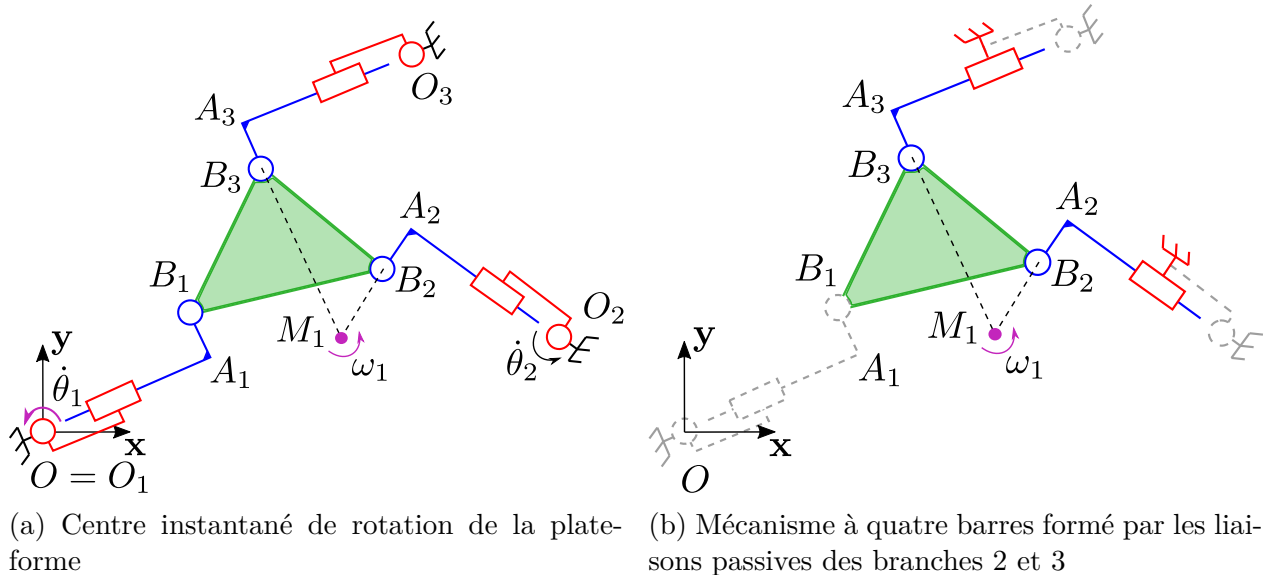


FIGURE 3.17 Vitesse instantanée de la plateforme du du 3 – $\underline{RPR}$ soumise au seul actionnement de $\dot{\theta}_1$

Chaque colonne de la matrice jacobienne $\mathbf{J}^i$ est ainsi donnée par :

$$\mathbf{s}_j^i = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{K}_j^i \mathbf{\Lambda} \xi_0^{O_j}. \quad (3.96)$$

Soit M_j un point situé à l'intersection des axes des torseurs ζ_k^i et ζ_l^i , c'est à dire à l'intersection des droites $(B_k, \mathbf{s}_{A_k B_k})$ et $(B_l, \mathbf{s}_{A_l B_l})$, puisque $\mathbf{E}s_{O_k A_k} = \mathbf{s}_{A_k B_k}$ et $\mathbf{E}s_{O_l A_l} = \mathbf{s}_{A_l B_l}$. Soit également $\xi_0^{M_j}$ le visseur a pas nul situé au point M_j . L'équation précédente peut se également se réécrire sous la forme de l'équation (3.89) à savoir :

$$\mathbf{s}_j^i = \frac{\zeta_j^i \circ \xi_0^{O_j}}{\zeta_j^i \circ \xi_0^{M_j}} \xi_0^{M_j} = \frac{\zeta_0^{B_j}(\mathbf{E}s_{O_j A_j}) \circ \xi_0^{O_j}}{\zeta_0^{B_j}(\mathbf{E}s_{O_j A_j}) \circ \xi_0^{M_j}} \xi_0^{M_j} \quad (3.97)$$

De la même manière que pour l'exemple précédent, on peut décrire exactement le mouvement de la plateforme soumis à un unique actionneur. Si on suppose par exemple que seule la liaison en O_1 est actionnée, alors la plateforme est en pure rotation autour du point M_1 , avec une vitesse de rotation valant :

$$\omega_1 = \frac{\zeta_0^{B_1}(\mathbf{E}s_{O_1 A_1}) \circ \xi_0^{O_1}}{\zeta_0^{B_1}(\mathbf{E}s_{O_1 A_1}) \circ \xi_0^{M_1}} \dot{\theta}_1 = \frac{\mathbf{s}_{O_1 A_1}^T \mathbf{r}_{O_1 B_1}}{\mathbf{s}_{O_1 A_1}^T \mathbf{r}_{M_1 B_1}} \dot{\theta}_1, \quad (3.98)$$

comme illustré figure 3.17a. La plateforme se comporte à nouveau comme le coupleur du mécanisme à quatre barres formé par les liaisons passives des pattes 2 et 3, comme illustré figure 3.17b.

3.3.3 Conclusion

Nous avons traité dans cette section les mécanismes plans à plusieurs DDLs. Selon la nature des boucles cinématiques identifiées dans un mécanisme, il est possible d'utiliser les équations de la section (3.3.1) ou celles de la section 3.3.2. Dans les deux cas, une ou plusieurs matrices de visseurs peuvent être introduites et potentiellement combinées pour exprimer la matrice jacobienne d'un mécanisme d'une complexité arbitraire.

CHAPITRE 4 MÉCANISMES ROTATIONNELS ET TRANSLATIONNELS

Les résultats présentés et illustrés au chapitre 3 peuvent facilement être étendus à d'autres classes de mécanismes spatiaux à trois degrés de liberté. On s'intéressera ici aux mécanismes rotationnels et aux mécanismes translationnels. Les premiers constituent une classe de mécanismes qui permettent à leur organe terminal de tourner dans toutes les directions autour d'un point. L'organe terminal de la seconde classe de mécanisme peut, lui, se translater dans toutes les dimensions de l'espace. Bien entendu, le corps de sortie des mécanismes rotationnels ne peut se translater et inversement celui des mécanismes translationnels garde une orientation constante.

Le point commun majeur avec les mécanismes plans est que le visseur spatial du corps de sortie n'a que trois composantes non nulles (cela est vrai pour les mécanismes d'orientation que si les visseurs sont exprimés au centre de rotation de l'organe terminal). Les visseurs des organes terminaux valent respectivement :

$$\xi_{rot} = \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \xi_{trans} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

où pour ξ_{rot} , Ω est la vitesse de rotation de l'organe terminal et pour ξ_{trans} , $\mathbf{V}$ est la vitesse de translation de tout point de l'organe terminal.

Les mécanismes rotationnels seront séparés en deux catégories. En section 4.1, nous étudierons les mécanismes sphériques et en section 4.2 les mécanismes d'orientation. Finalement, nous étudierons les mécanismes translationnels en section 4.3.

4.1 Mécanismes sphériques

Les mécanismes sphériques sont des mécanismes dont tous les corps se meuvent autour de sphères concentriques. Toutes les liaisons sont des liaisons rotoïdes dont les axes s'intersectent en O , le centre des sphères. Les mécanismes sphériques ont de nombreux points communs avec les mécanismes plans. Nous allons donc suivre la structure du chapitre 3. Ainsi nous allons d'abord nous intéresser aux mécanismes sphériques à un DDL. Puis, nous étudierons ceux à plusieurs DDLs, en commençant par ceux dont le visseur des corps est impliqué dans une unique boucle cinématique. Enfin, nous nous intéresserons à un mécanisme sphérique pleinement parallèle.

4.1.1 Mécanismes sphériques à un DDL

Modèle cinématique direct

La méthode consistant à construire les matrices jacobienues parallèles et sérielles à partir de torseurs réciproques est identique à celle des mécanismes plans. Elle commence par l'identification d'une boucle cinématique qui doit contenir au moins un actionnement et un corps i dont nous voulons connaître le visseur. Cette boucle doit contenir exactement trois vitesses passives avec pas plus de deux vitesses passives par branche. L'équivalent de l'équation (3.9) pour les mécanismes sphériques est donné dans sa forme la plus complète par :

$$\begin{aligned}\xi^i &= \mathcal{S}^j \dot{\theta} + \xi_p^1 \dot{\varphi}_1 + \xi_p^2 \dot{\varphi}_2 \\ &= \mathcal{S}^k \dot{\theta} + \xi_p^3 \dot{\varphi}_3,\end{aligned}\tag{4.2}$$

où $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire actionnée tandis que $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ et $\dot{\varphi}_3$ sont les vitesses passives associées aux visseurs unitaires ξ_p^1 , ξ_p^2 et ξ_p^3 dont les vecteurs directeurs sont respectivement $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ et $\mathbf{s}_3$. Hors singularités, ces trois vecteurs sont supposés linéairement indépendants. De la même manière que pour les mécanismes plans, $\mathcal{S}^j$ est soit un visseur associé à une liaison active, soit le vecteur jacobien d'un corps appelé j , *idem* pour $\mathcal{S}^k$.

L'ensemble des visseurs présents dans l'équation (4.2) sont homogènes à des visseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent au point O . Tous ces visseurs sont toujours réciproques à un ensemble de torseurs à pas nuls linéairement indépendants dont les axes s'intersectent au même point. Puisque ces torseurs représentent des forces pures orientées vers le point O , alors cela signifie qu'aucun des corps d'un mécanisme sphérique ne peut translater. Cet ensemble de torseurs réciproques est relativement peu utile pour établir une équation de vitesse car bien qu'ils soient réciproques aux visseurs passifs, ils le sont également aux visseurs actionnés. Il existe en revanche un autre ensemble de torseurs réciproques à pas infini et linéairement indépendants qui est donné par :

$$\zeta_1^i = \zeta_\infty(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3), \quad \zeta_2^i = \zeta_\infty(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1), \quad \text{et} \quad \zeta_3^i = \zeta_\infty(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2).\tag{4.3}$$

Le torseur ζ_3^i est réciproque à la fois aux visseurs passifs ξ_p^1 , ξ_p^2 , tandis que les torseurs ζ_1^i et ζ_2^i sont tous deux réciproques au visseur ξ_p^3 . En calculant le produit réciproque de ces torseurs avec les visseurs de l'équation (4.2) cela donne une équation de vitesse de la forme :

$$\Pi^i \xi^i = \sigma^i \dot{\theta},\tag{4.4}$$

La matrice jacobienne s rieelle σ^i est un vecteur 3×1 donné par :

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} \zeta_1^i \circ \$^k \\ \zeta_2^i \circ \$^k \\ \zeta_3^i \circ \$^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_\infty(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3) \circ \$^k \\ \zeta_\infty(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1) \circ \$^k \\ \zeta_\infty(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \circ \$^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \mathbf{s}^k \\ (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \mathbf{s}^k \\ (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \mathbf{s}^k \\ (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \mathbf{s}^k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

où $\mathbf{s}^j$ et $\mathbf{s}^k$ sont les vecteurs directeurs respectivement de $\j et $\k . La matrice jacobienne parallèle Π^i est de dimension 3×6 et donc *a priori* non inversible car non carrée. Cependant, puisqu'elle est constitu e de torseurs à pas infini, elle contient une sous-matrice 3×3 nulle. On peut alors obtenir le vecteur de vitesse angulaire Ω^i du corps i en inversant seulement la sous-matrice non nulle de Π^i . En effet, le terme de gauche de l'équation (4.4) est donné par :

$$\Pi^i \xi^i = \begin{bmatrix} \zeta_\infty(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \Lambda \\ \zeta_\infty(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \Lambda \\ \zeta_\infty(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega^i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \\ (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \\ (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \end{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \Omega^i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \\ (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \\ (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \end{bmatrix} \Omega^i. \quad (4.6)$$

L'inverse de la sous-matrice non nulle de Π^i peut être obtenue grâce à l'équation (3.18), donnant :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \\ (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \\ (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1) \times (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) & (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \times (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3) & (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3) \times (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1) \end{bmatrix}$$

avec $\delta = [(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3) \times (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)]^T (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)$

$$= \frac{1}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

puisque pour trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ de taille 3×1 , $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \mathbf{c}] \mathbf{a}$. L'équation précédente multipli e à la matrice jacobienne s rieelle, voir équation (4.5), nous donne :

$$\begin{aligned} \Omega^i &= \frac{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}^j}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \mathbf{s}_3 \dot{\theta} + \left[\frac{(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)^T \mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \mathbf{s}_1 + \frac{(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_1)^T \mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \mathbf{s}_2 \right] \dot{\theta} \\ &= \frac{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}^j}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \mathbf{s}_3 \dot{\theta} + \frac{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \times (\mathbf{s}^k \times \mathbf{s}_3)}{(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)^T \mathbf{s}_3} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nous avons déterminé le vecteur de rotation du corps i à partir de l'équation de vitesse donnée en (4.4). Lorsque exprimé au point O , le visseur de ce corps a ses trois dernières composantes nulles. Nous pouvons donc reconstituer le visseur du corps i , qui est donné par :

$$\begin{aligned} \xi^i &= \mathcal{S}^i \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}^i = \left[\frac{\zeta_3^i \circ \mathcal{S}^j}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 + \frac{1}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi^m \right] \quad \text{et} \\ \xi^m &= (\xi_p^1 \times \xi_p^2) \times (\mathcal{S}^k \times \xi_p^3) = \xi_0^O ([s_1 \times s_2] \times [s^k \times s_3]). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cette équation constitue le modèle cinématique direct du corps i . Le visseur ξ^i comme exprimé équation (4.9) peut être exprimé en un autre point que O par la loi de composition de vitesses.

Exemple : Mécanisme à quatre barres sphérique

À l'instar du plan, le mécanisme à quatre barres sphérique, montré figure 4.1 est sûrement le plus simple des mécanismes parallèles sphériques existants.

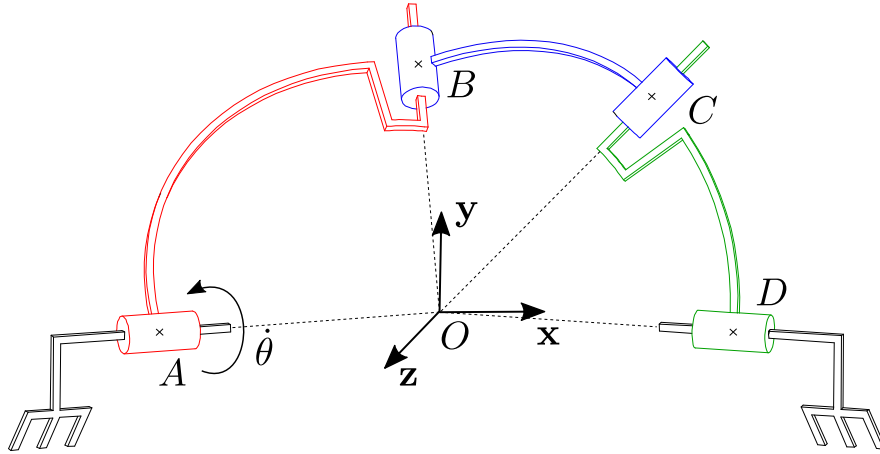


FIGURE 4.1 Mécanisme à quatre barres sphérique

L'actionnement est la rotation au point A autour du vecteur s_{OA} , d'une vitesse $\dot{\theta}$. Les trois autres liaisons rotoïdes aux points B , C et D sont passives et leurs vitesses associées sont respectivement $\dot{\varphi}_B$, $\dot{\varphi}_C$, et $\dot{\varphi}_D$. Le point O est à la fois le centre de la sphère autour de laquelle les corps se déplacent et le centre du repère. En utilisant le formalisme de l'équation (4.2), alors le visseur du corps de sortie CD est donné par :

$$\begin{aligned} \xi^{CD} &= \xi_0^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\varphi}_B + \xi_0^C \dot{\varphi}_C \\ &= \xi_0^D \dot{\varphi}_D, \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $\xi_0^X = [\mathbf{s}_{OX}^T \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}]^T$ est le visseur de la liaison passive au point X . En choisissant $\zeta_3^{CD} = \zeta_\infty(\mathbf{s}_{OB} \times \mathbf{s}_{OC})$ comme étant le torseur réciproque aux visseurs ξ_0^B et ξ_0^C , alors l'équation (4.9) donne directement :

$$\xi^{CD} = \frac{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^A}{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^D} \xi_0^D \dot{\theta} = \omega_{CD} \xi_0^D \quad \text{avec} \quad \omega_{CD} = \frac{(\mathbf{s}_{OB} \times \mathbf{s}_{OC})^T \mathbf{s}_{OA}}{(\mathbf{s}_{OB} \times \mathbf{s}_{OC})^T \mathbf{s}_{OD}} \dot{\theta}. \quad (4.11)$$

Tout comme pour le mécanisme à quatre barres plans, le visseur du corps de sortie est proportionnel à l'unique visseur de sa branche passive, voir équation (4.10), c'est à dire une pure rotation autour de la droite passant par O et D , comme représenté figure (4.2).

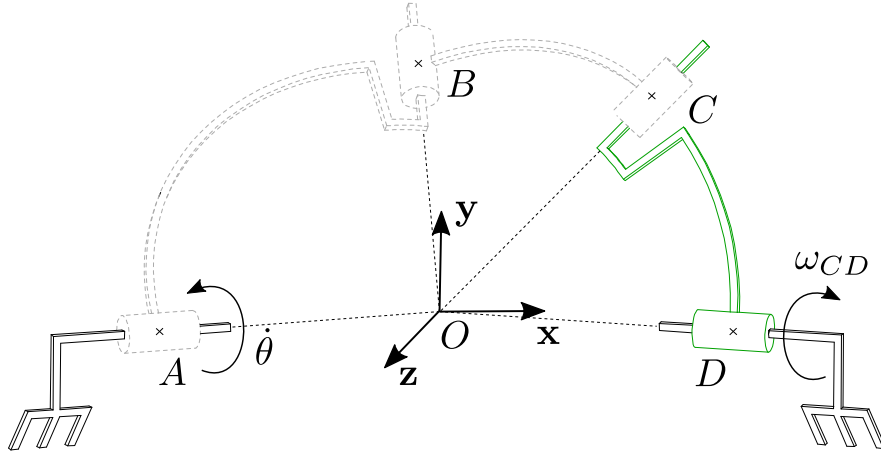


FIGURE 4.2 Visseur du corps de sortie d'un mécanisme à quatre barres sphérique

Maintenant, si l'on s'intéresse au coupleur BC , l'équation (4.10) se réécrit :

$$\begin{aligned} \xi^{CB} &= \xi_0^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\varphi}_B \\ &= \xi_0^D \dot{\varphi}_D - \xi_0^C \dot{\varphi}_C. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En sélectionnant cette fois $\zeta_3^{BC} = \zeta_\infty(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})$ comme étant réciproque aux visseurs ξ_0^C et ξ_0^D , alors l'équation (4.9) donne directement :

$$\begin{aligned} \xi^{BC} &= \frac{1}{\zeta_3^{BC} \circ \xi_0^B} \xi^m \dot{\theta} = \frac{1}{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OB}} \xi^m \dot{\theta} \\ \text{avec} \quad \xi^m &= \xi_0^O ([\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD}] \times [\mathbf{s}_{OA} \times \mathbf{s}_{OB}]). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le coupleur tourne ainsi autour d'un axe situé au point O et dont le vecteur directeur est défini par l'intersection du plan contenant les points A , B et O , de normale $\mathbf{s}_{OA} \times \mathbf{s}_{OB}$ et du plan contenant les points C , D et O , de normale $\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD}$, comme représenté figure 4.3.

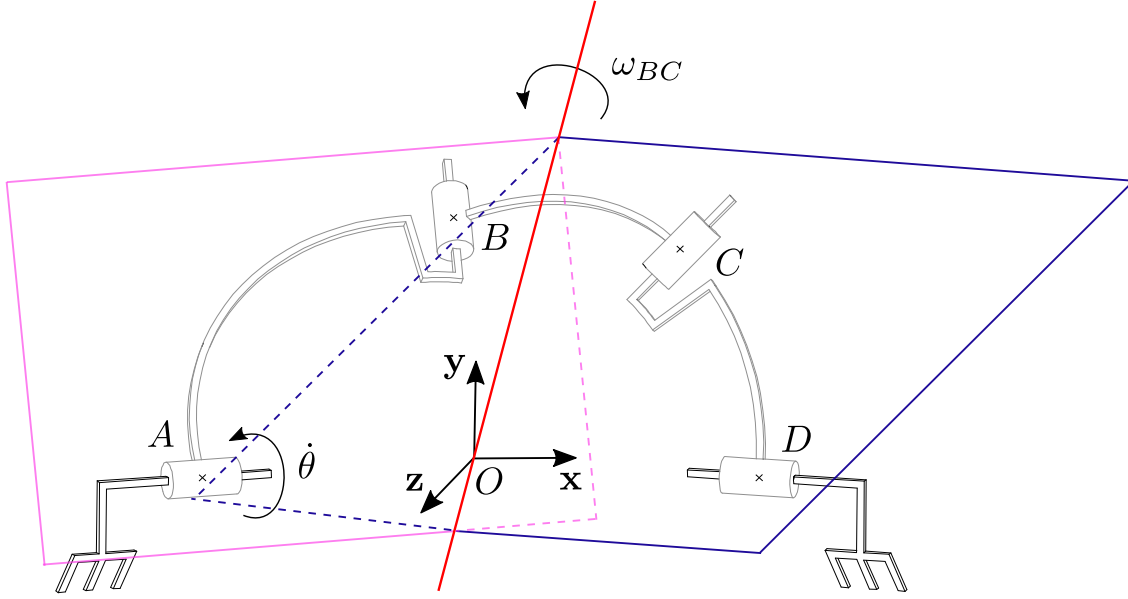


FIGURE 4.3 position de l'axe du visseur du coupleur d'un mécanisme à quatre barres sphérique

En développant l'équation (4.13), on peut tout comme pour le mécanisme à quatre barres plan, obtenir une forme du visseur ξ^{BC} équivalente à une chaîne sérielle RR , à savoir :

$$\xi^{BC} = \begin{bmatrix} \xi_0^A & \xi_0^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dot{\theta}_A = \dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_B = -\frac{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OA}}{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OB}} \dot{\theta}, \quad (4.14)$$

comme cela est illustré figure 4.4.

4.1.2 Mécanismes sphériques à plusieurs DDLs

Modèle cinématique direct

De la même manière que pour les mécanismes plans, il est possible d'étendre les résultats des mécanisme à un DDL à ceux à $n > 1$ DDLs. On considère à nouveau en premier lieu des mécanismes sphériques à n DDL dont le visseur d'un corps i peut s'exprimer à partir d'une simple boucle cinématique. La version à n DDL de l'équation (4.2), c'est à dire la version sphérique de l'équation (3.63) est :

$$\begin{aligned} \xi^i &= \mathbf{J}^j \dot{\theta} + \xi_p^1 \dot{\varphi}_1 + \xi_p^2 \dot{\varphi}_2 \\ &= \mathbf{J}^k \dot{\theta} + \xi_p^3 \dot{\varphi}_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

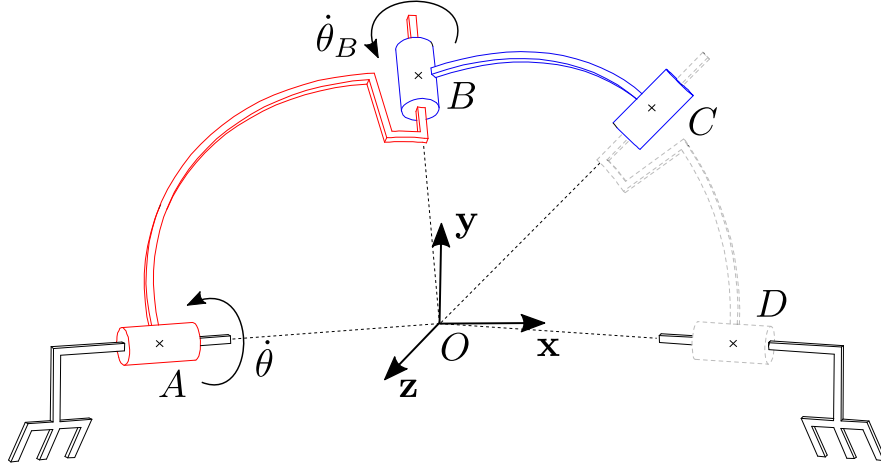


FIGURE 4.4 Coupleur du mécanisme à quatre barres sphérique vu comme l'organe terminal d'une chaîne $\underline{RR}$

FIGURE 4.5 Mécanisme à quatre barres sphérique vu comme une chaîne sérielle RR

où $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \ \dots \ \dot{\theta}_n]^T$ est le vecteur des vitesses actives tandis que $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ et $\dot{\varphi}_3$ sont des vitesses passives. Les matrices $\mathbf{J}^j$ et $\mathbf{J}^k$ sont soit les matrices jacobiennes des corps j et k , soit une collection de visseurs actionnés à pas nuls. Un ensemble de trois visseurs à pas infini réciproques au visseurs passifs de l'équation (4.15) sont donnés équation (4.3). Il est possible grâce à eux d'introduire $\boldsymbol{\Pi}^i$ et $\boldsymbol{\Sigma}^i$, les matrices jacobiennes parallèles et sérielles qui permettent d'obtenir $\mathbf{J}^i$, la matrice jacobienne du corps i , ainsi que le modèle cinématique direct de ce dernier, donné par :

$$\boldsymbol{\xi}^i = \mathbf{J}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^i = (\boldsymbol{\Pi}^i)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1^i & \dots & \mathbf{\$}_n^i \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

La matrice $\boldsymbol{\Pi}^i$ est identique à celle du cas à unique DDL, tandis que $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice $3 \times n$, dont la l -ième colonne est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}_l^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1^i \circ \mathbf{\$}_l^k \\ \boldsymbol{\zeta}_2^i \circ \mathbf{\$}_l^k \\ \boldsymbol{\zeta}_3^i \circ \mathbf{\$}_l^j \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

où $\mathbf{\$}_l^j$ et $\mathbf{\$}_l^k$ sont respectivement la l -ième colonne de $\mathbf{J}^j$ et la l -ième colonne de $\mathbf{J}^k$. Tout comme pour les mécanismes plans à n DDLs et une boucle, il est possible de calculer chaque

colonne de la matrice jacobienne $\mathbf{J}^i$ indépendamment. Sa l -ième colonne est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_l^i &= \frac{\zeta_3^i \circ \mathcal{S}_l^j}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_p^3 + \frac{1}{\zeta_3^i \circ \xi_p^3} \xi_l^m, \quad \text{avec} \\ \xi_l^m &= (\xi_p^1 \times \xi_p^2) \times (\mathcal{S}_l^k \times \xi_p^3) = \xi_0^O ([\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] \times [\mathbf{s}_l^k \times \mathbf{s}_3]),\end{aligned}\tag{4.18}$$

où $\mathbf{s}_l^k$ est le vecteur directeur de $\mathcal{S}_l^k$. L'équation (4.18) est donc l'équivalent à n DDLs de l'équation (4.9), et a été obtenue en suivant la même méthodologie que dans la section 4.1.1.

Exemple : Mécanisme à cinq barres sphérique

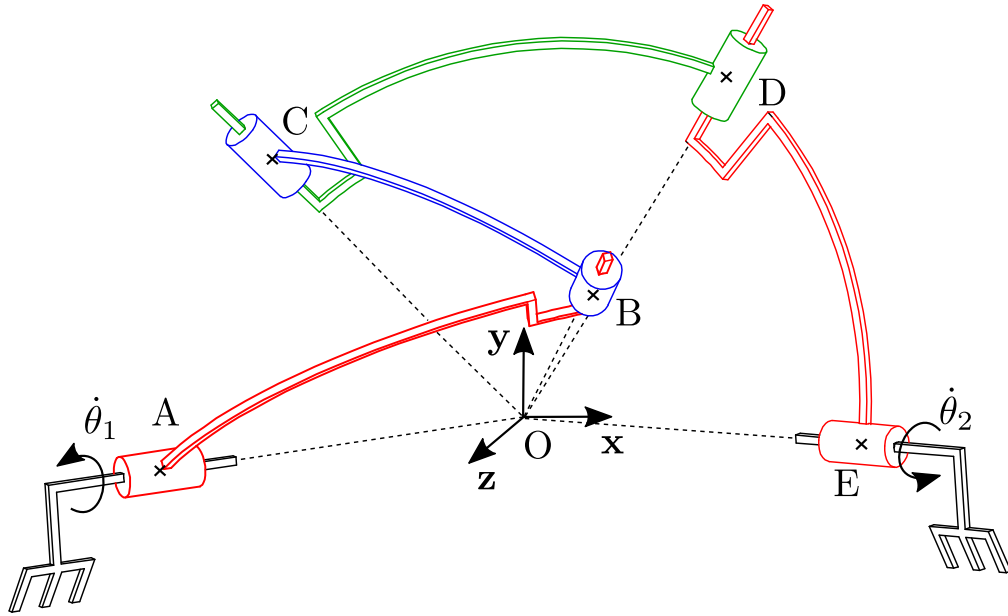


FIGURE 4.6 Mécanisme à cinq barres sphérique

La figure 4.6 montre un mécanisme sphérique à cinq barres. Les axes des cinq liaisons rotoïdes s'intersectent en O , le centre du repère. Les deux liaisons actionnées sont celles en A et E avec des vitesses respectives $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. On considère ici que l'organe terminal est le corps distal BC . Le visseur de ce corps est donné par :

$$\begin{aligned}\xi^{CD} &= \xi_0^A \dot{\theta}_1 + \xi_0^B \dot{\varphi}_B \\ &= \xi_0^E \dot{\theta}_2 + \xi_0^C \dot{\varphi}_C + \xi_0^D \dot{\varphi}_D.\end{aligned}\tag{4.19}$$

En introduisant le vecteur des vitesses actives $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$, l'équation précédente peut se

mettre sous la forme de l'équation (4.15), ce qui donne :

$$\begin{aligned}\xi^{CD} &= \mathbf{J}^1 \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\varphi}_B \\ &= \mathbf{J}^2 \dot{\theta} + \xi_0^C \dot{\varphi}_C + \xi_0^D \dot{\varphi}_D\end{aligned}\quad (4.20)$$

avec $\mathbf{J}^1 = \begin{bmatrix} \xi_0^A & \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{bmatrix}$ and $\mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} & \xi_0^E \end{bmatrix}$. Il est aisé d'identifier $\zeta_3^{BC} = \zeta_\infty(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})$ comme un torseur réciproque à la fois à ξ_0^C et ξ_0^D . Ainsi, en appliquant deux fois l'équation (4.18), on peut obtenir les deux colonnes de la matrice jacobienne $\mathbf{J}^{CD}$ qui sont données par :

$$\begin{aligned}\$1^{CD} &= \frac{1}{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^B} \xi_1^m & \text{et} \quad \$2^{CD} &= \frac{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^E}{\zeta_3^{CD} \circ \xi_0^B} \xi_0^B \\ &= \frac{1}{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OB}} \xi_1^m, & &= \frac{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OE}}{(\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD})^T \mathbf{s}_{OB}} \xi_0^B\end{aligned}\quad (4.21)$$

avec $\xi_1^m = \xi_0^O((\mathbf{s}_{OC} \times \mathbf{s}_{OD}) \times (\mathbf{s}_{OA} \times \mathbf{s}_{OB}))$. Lorsqu'une seule des entrée est active, le corps distal BC se comporte à nouveau comme le coupleur du quatre barres sphérique $ABCD$ et réciproquement comme le corps de sortie du quatre barres sphérique $BCDE$.

4.1.3 Mécanisme sphérique pleinement parallèle : L'œil agile

Nous allons nous intéresser à un mécanisme sphérique appelé *l'œil agile* développé à l'Université de Laval [170,171], qui est une géométrie particulière d'un mécanisme sphérique 3- RRR . Il a été initialement conçu pour l'orientation d'une caméra à très haute vitesse. Il est représenté par le schéma cinématique de la figure 4.7. Il s'agit d'un mécanisme sphérique composé d'une plateforme connectée au bâti par trois branches $\underline{RRR}$. Ce mécanisme est en quelque sorte l'équivalent sphérique du mécanisme plan 3- $\underline{RRR}$ montré figure 3.14. Ses neuf liaisons rotoïdes s'intersectent en un même point O qui est considéré comme le centre du repère. La plateforme possède trois DDLs, qui sont trois rotations autour d'une sphère centrée en O . La plateforme constitue l'organe terminal de ce mécanisme et sera une fois encore appelé i . Si l'on suppose que les liaisons en A_j sont actionnées avec des vitesses $\dot{\theta}_j$ tandis que les liaisons en B_j et C_j sont passives de vitesses respectives $\dot{\varphi}_{j,B}$ et $\dot{\varphi}_{j,C}$, pour $j = 1, 2, 3$, alors le visseur de la plateforme i s'écrit :

$$\xi^i = \xi_0^{A_j} \dot{\theta}_j + \xi_0^{B_j} \dot{\varphi}_{j,B} + \xi_0^{C_j} \dot{\varphi}_{j,C}, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

Soit :

$$\zeta_\infty^j = \zeta_\infty(\mathbf{s}_{OB_j} \times \mathbf{s}_{OC_j}), \quad (4.23)$$

le torseur réciproque aux visseurs passifs $\xi_0^{B_j}$ et $\xi_0^{C_j}$ de la j -ième branche. En calculant les produits réciproques entre les torseurs ζ_∞^j et les visseurs l'équation (4.22), nous obtenons une équation de vitesse de la forme $\Pi^i \xi^i = \Sigma^i \dot{\theta}$ avec $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$ le vecteur des vitesses angulaires actionnées. La matrice jacobienne sérielle Σ^i est donnée par :

$$\Sigma^i = \text{diag} \left(\zeta_1^i \circ \xi_0^{A_1} \quad \zeta_2^i \circ \xi_0^{A_2} \quad \zeta_3^i \circ \xi_0^{A_3} \right). \quad (4.24)$$

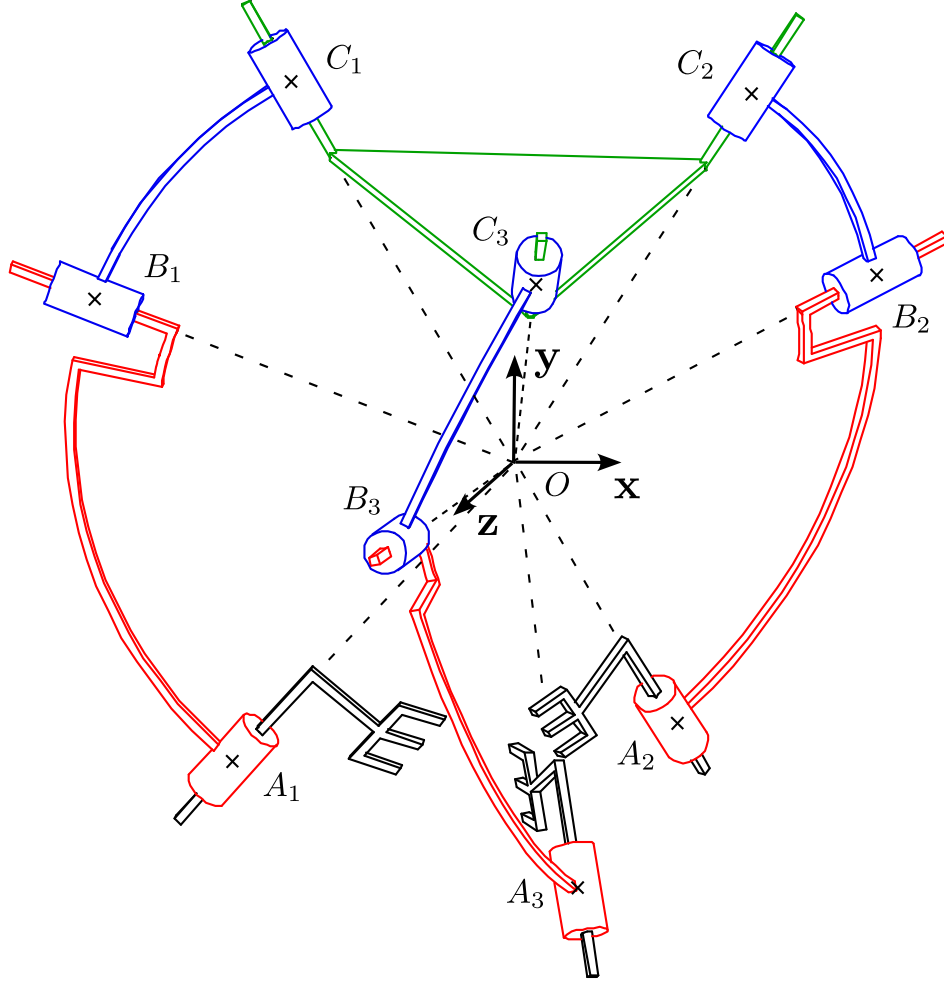


FIGURE 4.7 Mécanisme sphérique 3 – RRR

La matrice jacobienne parallèle Π^i est de taille 3×6 et contient une sous matrice nulle car les torseurs ζ_∞^j sont à pas infini. En notant $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_{OB_j} \times \mathbf{s}_{OC_j}$ pour $j = 1, 2, 3$, alors l'inverse de la sous-matrice non nulle de Π^i est donnée à la transposée près équation (4.7). Soit le visseur unitaire à pas nul suivant :

$$\xi_j^m = \xi_0^O(\mathbf{s}_j^m) \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}_j^m = \frac{(\mathbf{s}_{OB_k} \times \mathbf{s}_{OC_k}) \times (\mathbf{s}_{OB_l} \times \mathbf{s}_{OC_l})}{\|(\mathbf{s}_{OB_k} \times \mathbf{s}_{OC_k}) \times (\mathbf{s}_{OB_l} \times \mathbf{s}_{OC_l})\|}, \quad (4.25)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Alors en combinant les équations (4.7) et (4.24), on obtient le modèle cinématique direct de l'œil agile, donné par :

$$\xi^i = \mathbf{J}^i \dot{\theta}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^i & \mathbf{s}_2^i & \mathbf{s}_3^i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_j^i = \frac{\zeta_\infty^j \circ \xi_0^{A_j}}{\zeta_\infty^j \circ \xi_j^m} \xi_j^m, \quad (4.26)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Ainsi, l'actionnement de la liaison rotoïde localisée au point A_j avec une vitesse de rotation $\dot{\theta}_j$, entraîne la plateforme à tourner à une vitesse angulaire donnée par :

$$\omega_j^i = \frac{\zeta_\infty^j \circ \xi_0^{A_j}}{\zeta_\infty^j \circ \xi_j^m} \dot{\theta}_j, \quad (4.27)$$

autour d'un axe passant par le point O et orienté selon le vecteur directeur $\mathbf{s}_j^m$. Cette droite est située à l'intersection des plans passant par les points O, B_k, C_k et respectivement par les points O, B_l, C_l , c'est-à-dire par les plans contenant les liaisons passives des branches k et l . Il s'agit d'un comportement similaire aux mécanismes plans pleinement parallèles que nous avons étudiés en section 3.3.2 du chapitre précédent, voir par exemple la figure 3.16b.

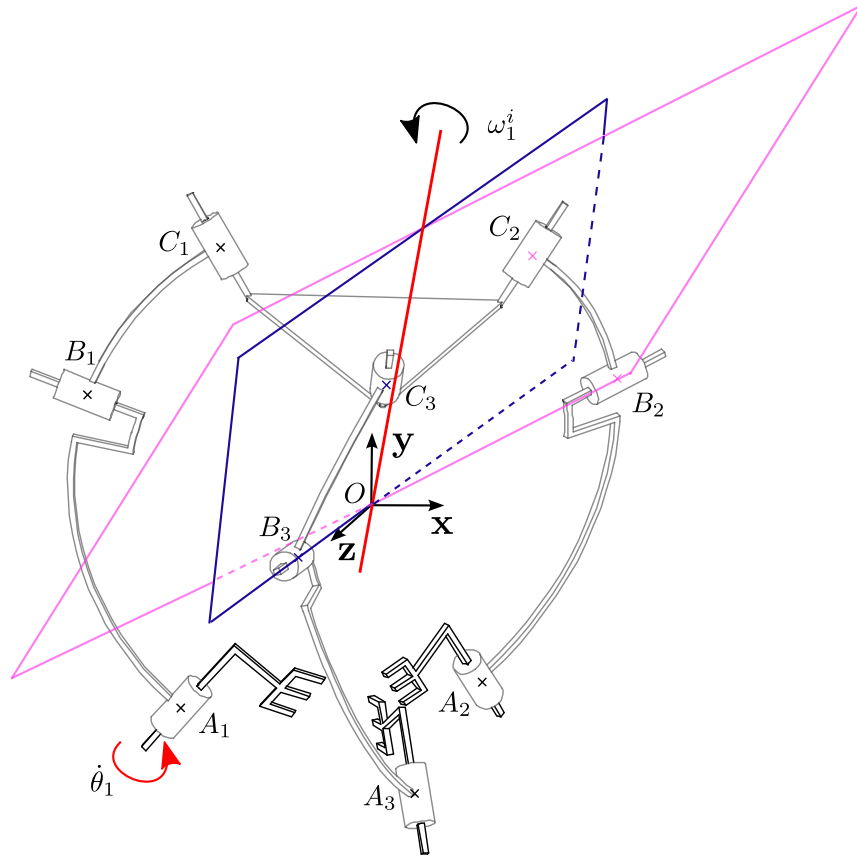


FIGURE 4.8 Position de l'axe du visseur ξ_1^m dans le mécanisme sphérique 3 – RRR

La figure 4.8 illustre la position spatiale de l'axe du visseur ξ_1^m . La figure 4.9 montre quant à elle la localisation de ce même visseur dans une représentation équivalente. Il s'agit du mécanisme plan équivalent de l'œil agile, c'est-à-dire le mécanisme que l'on obtiendrait en « dépliant » le mécanisme sphérique de manière à ce que tous les axes des liaisons rotoïdes deviennent parallèles entre eux, donnant ainsi un mécanisme plan 3 – RRR . Les deux plans sont visibles « vu de haut » sous la forme de segments. Le point M_1 à leur intersection représente l'axe de ξ_1^m également « vu de haut ». La position des axes des deux autres visseurs, respectivement M_2 et M_3 sont également représentés sur la figure 4.9.

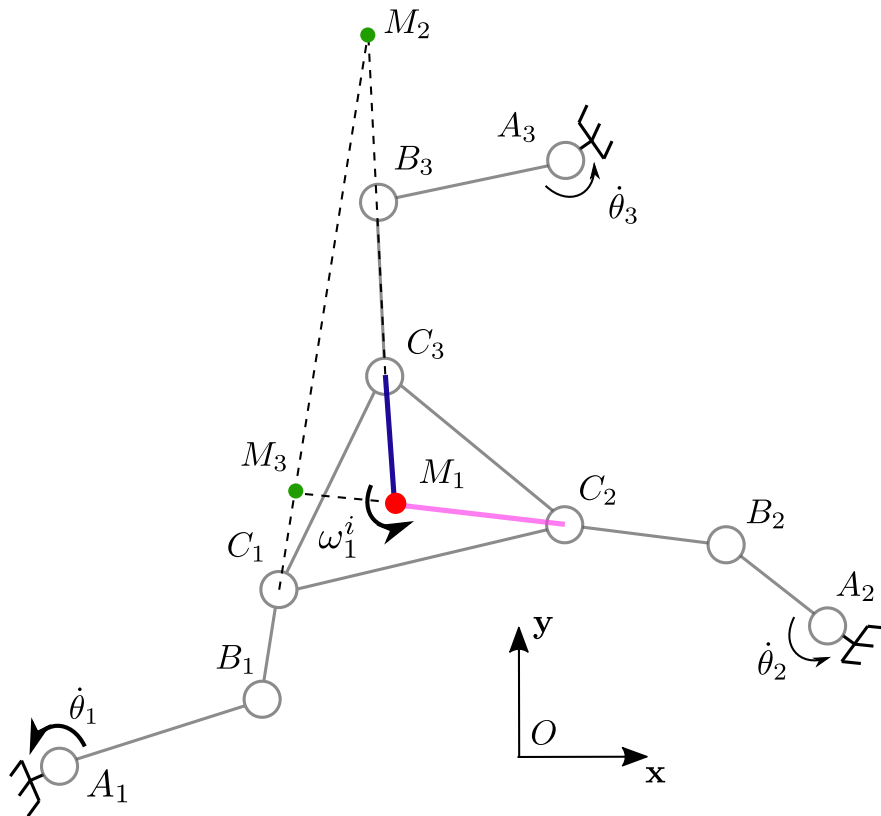


FIGURE 4.9 Position de l'axe du visseur ξ_1^m dans le mécanisme plan 3 – RRR

4.2 Mécanismes d'orientation

4.2.1 Modèle cinématique direct

Nous allons désormais nous intéresser à des mécanismes d'orientation non sphériques. L'organe terminal de ces derniers peut également tourner dans toutes les directions (et uniquement) autour d'un point O . La différence avec les mécanismes sphériques est que les articulations qui composent ces mécanismes ne sont pas nécessairement des liaisons rotoïdes et que les axes des liaisons rotoïdes de tels mécanismes ne passent pas forcément par le centre de rotation de la plateforme. Les différents corps (à l'exception de l'organe terminal) ne sont pas non plus contraints à se déplacer autour d'une sphère. On supposera que les mécanismes étudiés dans cette section sont pleinement actionnés avec trois mobilités et trois actionneurs. En considérant que la plateforme est connectée par trois branches sérielles avec un actionneur par branche, alors le visseur de l'organe terminal est donné par :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_a^j \dot{q}_j + \sum_{k=0}^{m_j} \boldsymbol{\xi}_p^{j,k} \dot{p}_{j,k}, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3 \quad (4.28)$$

où $\boldsymbol{\xi}_a^j$ est le visseur actif associé à la vitesse $\dot{q}_j$ tandis que $\boldsymbol{\xi}_p^{j,k}$ sont les visseurs passifs associés aux vitesses $\dot{p}_{j,k}$, pour $j = 1, 2, 3$. L'indice m_j correspond au nombre de mobilités passives de la j -ème branche et a une valeur comprise entre deux et quatre. L'équation (4.15) introduite pour l'œil agile peut s'écrire sous la forme de l'équation (4.28), puisque ce dernier est également un mécanisme d'orientation, avec pour chaque branche $m_j = 2$. Il est à noter que si le mécanisme n'est pas sphérique et que si $m_j < 4$, alors le mécanisme est sur-contraint, voir la formule de Grübler donnée équation (2.1).

Par la suite, la notation avec i en exposant ne sera plus employée. Les mécanismes que nous étudieront seront toujours composés d'une plateforme connectée au bâti par au moins trois branches cinématiques. Les visseurs exprimés seront toujours ceux de cette plateforme. Cela est également valable pour les mécanismes étudiés au chapitre 5.

Comme pour les mécanismes sphériques, si la plateforme ne peut que pivoter, alors il est toujours possible d'identifier trois torseurs linéairement indépendants à pas nul dont l'axe passe par le centre de rotation. Puisqu'ils sont réciproques au visseur de l'organe terminal, alors ils ne peuvent être utilisés pour construire la relation d'entrée sortie en vitesse. Dans l'espace, il est possible d'identifier un ensemble de trois autres torseurs linéairement indépendants entre eux et aux trois premiers. On appellera $\boldsymbol{\zeta}_j$ le torseur réciproque à l'ensemble des visseurs passifs de la j -ième branche. Ces torseurs ont la forme $\boldsymbol{\zeta}_j = [\mathbf{p}_j^T \quad \mathbf{q}_j^T]^T$ où $\mathbf{p}_j$ et $\mathbf{q}_j$ sont des vecteurs 3×1 . Le vecteur $\mathbf{p}_j$ peut être nul si $\boldsymbol{\zeta}_j$ a un pas infini.

En calculant le produit réciproques entre les torseurs ζ_j et les visseurs de l'équation (4.28) une équation de vitesse de la forme $\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}$ peut être obtenue, avec $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]$. Les matrices parallèle et sérielle sont données respectivement par :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \zeta_1^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_2^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_3^T \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T & \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T & \mathbf{p}_3^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\zeta_1 \circ \boldsymbol{\xi}_a^1 \quad \zeta_2 \circ \boldsymbol{\xi}_a^2 \quad \zeta_3 \circ \boldsymbol{\xi}_a^3). \quad (4.29)$$

Contrairement à l'œil agile, la matrice $\mathbf{\Pi}$ ne contient pas de matrice 3×3 nulle. Cependant au point O , la plateforme n'a aucune vitesse linéaire, donc en ce point son visseur est donné par $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\Omega}^T \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}]^T$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est son vecteur de vitesse angulaire. Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.30)$$

Le modèle cinématique direct du mécanisme peut être à nouveau obtenu en inversant une sous-matrice carrée de la matrice jacobienne parallèle. En supposant que les vecteurs $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ et $\mathbf{q}_3$ soient linéairement indépendants et en utilisant à nouveau l'équation (3.18) pour inverser la matrice de l'équation précédente, on obtient le MCD d'un mécanisme d'orientation, à savoir :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = [\boldsymbol{\$}_1 \quad \boldsymbol{\$}_2 \quad \boldsymbol{\$}_3], \quad \text{où} \\ \boldsymbol{\$}_j &= \frac{\zeta_j \circ \boldsymbol{\xi}_a^j}{\zeta_j \circ \boldsymbol{\xi}_j^m} \boldsymbol{\xi}_j^m \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}_j^m = \boldsymbol{\xi}_0^O \left(\frac{(\mathbf{q}_k \times \mathbf{q}_l)}{\|(\mathbf{q}_k \times \mathbf{q}_l)\|} \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. À noter qu'il est également possible d'obtenir le modèle cinématique direct de l'équation (4.31) en inversant une matrice carrée de taille 6×6 plutôt qu'une matrice de taille 3×3 . La démonstration est montrée en annexe B.2.1 et les deux résultats finaux sont identiques.

L'équation (4.31) est valide au point O pour tous les mécanismes respectant trois conditions. Premièrement, il doit être possible d'écrire une ou plusieurs relations de chaînes cinématiques et d'identifier, à partir de cette dernière ou de ces dernières, un ensemble de torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent en un point qui soient réciproques à l'ensemble des visseurs. Deuxièmement, il doit être possible d'identifier trois autres torseurs linéairement indépendants, chacun étant réciproque aux visseurs passifs d'une branche de l'équation (4.28). Enfin, les six torseurs identifiés doivent être linéairement indépendants. Il existe de nombreux

mécanismes répondant à ces conditions et allons en prendre trois comme exemples.

4.2.2 Exemple : Mécanisme d'orientation 3 – UPS

Le premier exemple de mécanisme d'orientation est le mécanisme $1S + 3 - \underline{UPS}$, étudié notamment en [172, 173] qui est montré figure 4.10. La plateforme est connectée par trois chaînes cinématiques composées d'une liaison universelle d'axes $\mathbf{u}_j$ et $\mathbf{v}_j$ et de centre A_j , d'une liaison prismatique actionnée de direction $\mathbf{w}_j$, et enfin d'une liaison sphérique connectée à la plateforme et localisée au point B_j , pour $j = 1, 2, 3$.

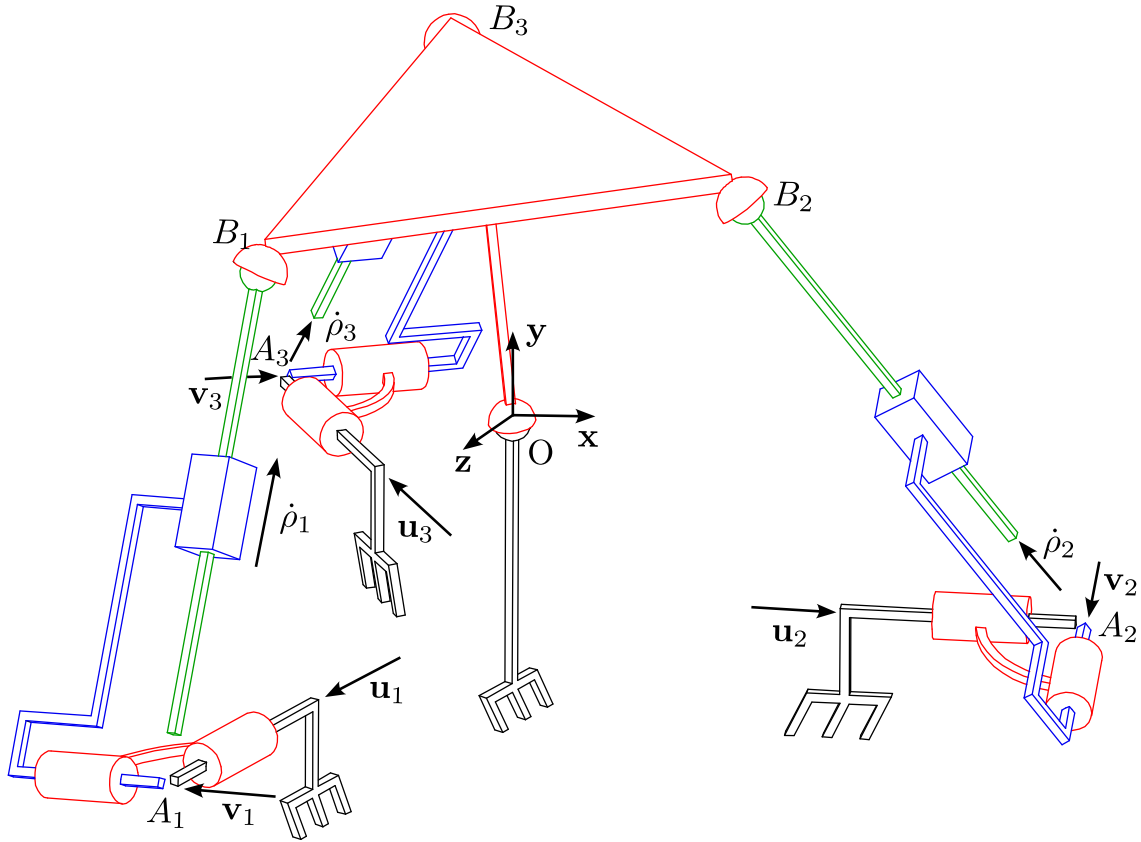


FIGURE 4.10 Mécanisme d'orientation 3 – UPS

Il existe également une quatrième branche connectant la plateforme au bâti, uniquement constituée d'une liaison sphérique localisée au point O . Cette jambe restreint donc le mouvement de la plateforme qui ne peut alors que pivoter autour de ce point. Trois torseurs à pas nuls dont l'axe passe par O réciproques à cette liaison sphérique peuvent ainsi être identifiés. Quant aux trois autres torseurs réciproques, ils peuvent être obtenus en exprimant le visseur

de la plateforme selon l'équation (4.28), ce qui donne :

$$\xi = \xi_0^{A_j}(\mathbf{u}_j)\dot{\varphi}_{u_j} + \xi_0^{A_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\varphi}_{v_j} + \xi_\infty(\mathbf{s}_{A_j B_j})\dot{\rho}_j + \xi_0^{B_j}(\mathbf{x})\dot{\varphi}_{x_j} + \xi_0^{B_j}(\mathbf{y})\dot{\varphi}_{y_j} + \xi_0^{B_j}(\mathbf{z})\dot{\varphi}_{z_j}, \quad (4.32)$$

pour $j = 1, 2, 3$. Les vitesses passives $\dot{\varphi}_{u_j}$ et $\dot{\varphi}_{v_j}$ sont celles de la liaison universelle de la branche j , tandis que $\dot{\varphi}_{x_j}$, $\dot{\varphi}_{y_j}$ et $\dot{\varphi}_{z_j}$ sont les vitesses passives de la liaison sphérique de la branche j , choisies arbitrairement autour des axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ du repère. La seule vitesse active de la j -ième branche est $\dot{\rho}_j$. À partir de l'équation (4.32), il est possible d'identifier un torseur à pas nul réciproque aux cinq visseurs passifs de chaque branche. Il est donné par :

$$\zeta_j = \zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{A_j B_j} \\ \mathbf{s}_{A_j B_j} \times \mathbf{r}_{A_j O} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

L'axe de ce torseur passe par le centre de la liaison sphérique en B_j et le centre de la liaison universelle en A_j , pour $j = 1, 2, 3$. Le visseur de la plateforme peut ainsi être directement donné par l'équation (4.31), où chaque colonne de la matrice jacobienne est donnée par :

$$\begin{aligned} \$j &= \frac{\zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j}) \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_{A_j B_j})}{\zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j}) \circ \xi_j^m} \xi_j^m \quad \text{avec} \\ \xi_j^m &= \xi_0^O \left(\frac{(\mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{r}_{A_k O}) \times (\mathbf{s}_{A_l B_l} \times \mathbf{r}_{A_l O})}{\|(\mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{r}_{A_k O}) \times (\mathbf{s}_{A_l B_l} \times \mathbf{r}_{A_l O})\|} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Ainsi, l'axe du visseur ξ_j^m , voir équation (4.34), est situé à l'intersection du plan passant par les points O , A_k et B_k et de celui passant par les points O , A_l et B_l . Cette droite passe donc par le centre de rotation de la plateforme. Bien que les actionneurs soient prismatiques, le mouvement de sortie correspond bien à une rotation autour du point O , imposée par la quatrième branche.

La figure 4.11 illustre la position de l'axe du visseur ξ_3^m , situé à l'intersection des plans formés par les points O , A_1 et B_1 et respectivement des points O , A_2 et B_2 . La vitesse de rotation autour de cet axe est donnée par :

$$\omega_3 = \frac{\zeta_0^{A_3}(\mathbf{s}_{A_3 B_3}) \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_{A_3 B_3})}{\zeta_0^{A_3}(\mathbf{s}_{A_3 B_3}) \circ \xi_3^m} \dot{\rho}_3 = \frac{\|(\mathbf{s}_{A_1 B_1} \times \mathbf{r}_{A_1 O}) \times (\mathbf{s}_{A_2 B_2} \times \mathbf{r}_{A_2 O})\|}{[(\mathbf{s}_{A_1 B_1} \times \mathbf{r}_{A_1 O}) \times (\mathbf{s}_{A_2 B_2} \times \mathbf{r}_{A_2 O})]^T (\mathbf{s}_{A_3 B_3} \times \mathbf{r}_{A_3 O})} \dot{\rho}_3. \quad (4.35)$$

À noter que dans l'équation précédente, le terme $(\mathbf{s}_{A_3 B_3} \times \mathbf{r}_{A_3 O})$ au dénominateur est homogène à une longueur. Ainsi, puisque la vitesse $\dot{\rho}_3$ est homogène à des longueurs par seconde, alors ω_3 est bien une vitesse de rotation.

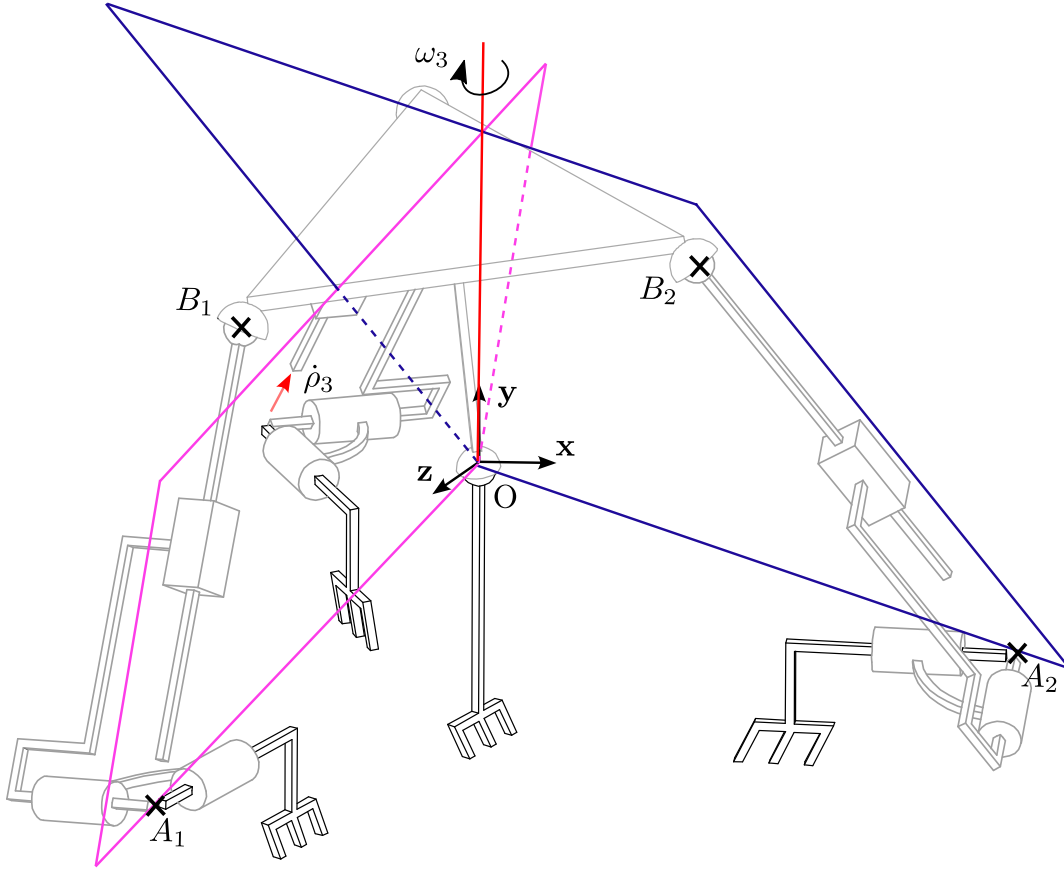
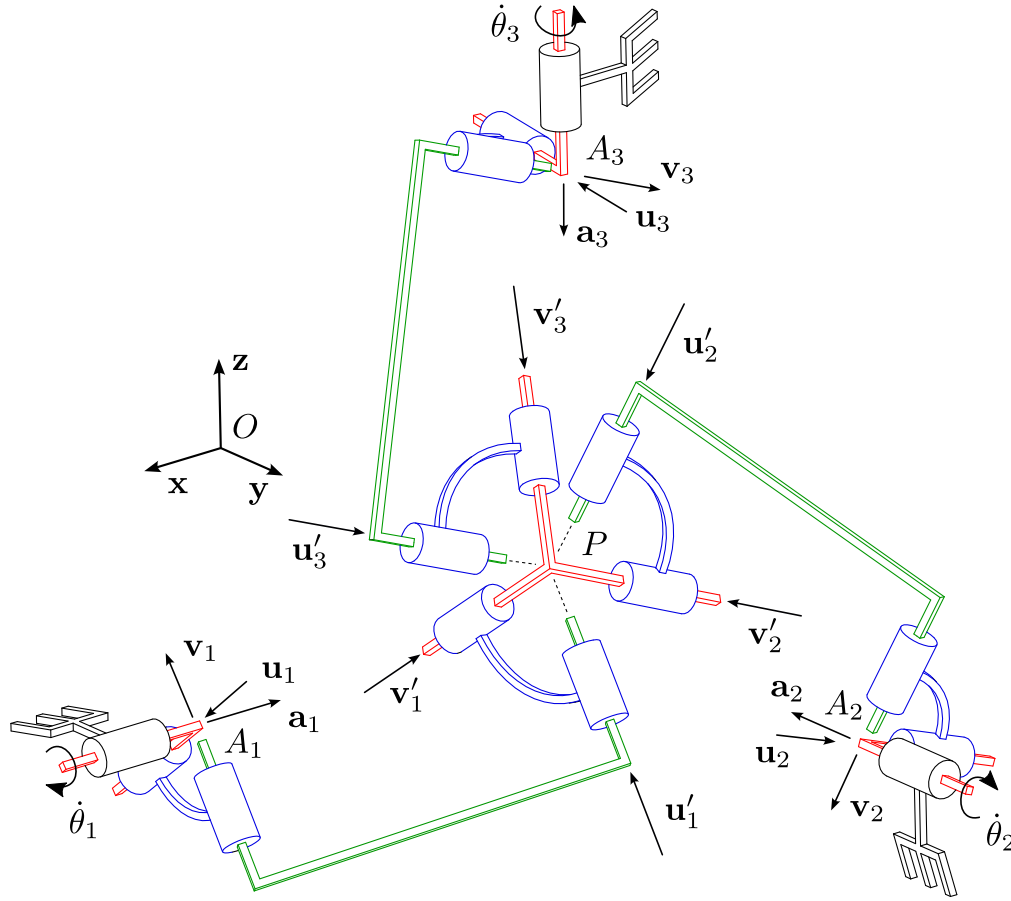


FIGURE 4.11 Position de l'axe du visser ξ_3^m dans un mécanisme $1S + 3 - UPS$

4.2.3 Exemple : Mécanisme d'orientation 3 – RUU

Le second exemple de mécanisme d'orientation est le 3 – RUU montré figure 4.12. Il s'agit d'un mécanisme pleinement actionné à trois DDLs. Ce mécanisme, introduit en [174] est conçu pour qu'à chaque rotation de la plateforme, aucune des liaisons passives ne reste immobile. L'idée derrière la création de ce mécanisme est décrite dans ce même article. L'œil agile, étudié en section 4.1.3 est un mécanisme sensible aux erreurs de fabrication puisqu'il est nécessaire que tous les axes des neuf liaisons s'intersectent exactement au même point. Certains auteurs, voir [175] par exemple ont alors eu l'idée de rajouter deux liaisons rotoïdes à la liaison rotoïde centrale de chaque branche de manière à créer un mécanisme 3 – RSR. Seulement, d'après [174], le mécanisme prédominant dans le 3 – RSR reste le 3 – RRR. Les liaisons additionnelles servent uniquement à compenser les erreurs de positionnement et ne bougent pratiquement pas. Dans le mécanisme 3 – RUU de [174], toutes les liaisons passives ont leur rôle à jouer lors d'une rotation de la plateforme.

FIGURE 4.12 Mécanisme 3 – *RUU*

Comme montré figure 4.12, chacune des trois branches du mécanisme est constituée de cinq liaisons rotoïdes en série qui, contrairement aux mécanismes sphériques, ne convergent pas nécessairement au centre de rotation de la plateforme. Les axes des trois premières liaisons de la i -ème jambe s'intersectent en un point A_i , fixe par rapport au bâti, et forment ainsi une liaison sphérique centrée en A_i . Les deux autres liaisons ont également des axes qui se croisent en un même point et forment une liaison universelle. Chacune des pattes est donc une chaîne *SU*. Une des particularités de ce mécanisme est que le centre des liaisons universelles en bout de chaîne est partagé par les trois branches. En d'autres termes, il existe un point P situé à l'intersection des axes de six liaisons rotoïdes, voir figure 4.12 à nouveau. Le point P est le centre de rotation de l'organe terminal.

On supposera que la première liaison de la chaîne i , pour $i = 1, 2, 3$ est actionnée par une vitesse $\dot{\theta}_i$ autour d'un axe $\mathbf{a}_i$. Les deux autres articulations rotoïdes de la liaison sphérique en A_i sont passives et forment une liaison universelle. Leurs axes respectifs sont appelés $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_i$. Ces trois axes sont considérés linéairement indépendants. Enfin, les axes de la seconde

liaison universelle de la chaîne sont orientés par les vecteurs $\mathbf{u}'_i$ et $\mathbf{v}'_i$.

Pour chaque jambe, un torseur réciproque à pas nul passant par le centre de la liaison sphérique en A_i et le point P peut être facilement identifié. Ces trois torseurs pour $i = 1, 2, 3$ se croisent en un même point, qui constitue le centre de rotation de la plateforme mobile. À noter que par souci de lisibilité, les points P et O , voir figure 4.12 ont été choisis comme étant distincts, mais puisque P est fixe dans l'espace, on aurait pu choisir $P = O$ de manière à ce que le centre de rotation de l'organe terminal soit confondu avec l'origine, comme pour les mécanismes rotationnels étudiés jusqu'alors. Pour trouver un nouvel ensemble de torseurs réciproques, il est possible d'exprimer le visseur de la plateforme selon l'équation (4.28), ce qui nous donne :

$$\xi = \xi_0^{A_i}(\mathbf{a}_i)\dot{\theta}_i + \xi_0^{A_i}(\mathbf{u}_i)\dot{\varphi}_{u_i} + \xi_0^{A_i}(\mathbf{v}_i)\dot{\varphi}_{v_i} + \xi_0^P(\mathbf{u}'_i)\dot{\varphi}_{u'_i} + \xi_0^P(\mathbf{v}'_i)\dot{\varphi}_{v'_i} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad (4.36)$$

où $\dot{\varphi}_{u_i}$ et $\dot{\varphi}_{v_i}$ sont les vitesses passives de la liaison universelle en A_i et $\dot{\varphi}_{u'_i}$ et $\dot{\varphi}_{v'_i}$ sont les vitesses passives de la liaison universelle en P de la branche i . Un torseur réciproque à tous les visseurs de chaque branche, à l'exception de $\xi_0^{A_i}(\mathbf{a}_i)$, est donné par $\xi_0^{B_i}(\mathbf{b}_i)$. Le vecteur $\mathbf{b}_i$ est orienté par la droite à l'intersection du plan passant par A_i , de normale $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i$, et celui passant par P , de normale $\mathbf{w}'_i = \mathbf{u}'_i \times \mathbf{v}'_i$. Donc $\mathbf{b}_i = \mathbf{w}_i \times \mathbf{w}'_i$ pour $i = 1, 2, 3$, comme illustré figure 4.13. Le point B_i est quant à lui un point à l'intersection de ces deux plans, et peut être choisi comme étant le point minimisant la distance entre P et cette droite, comme également illustré figure 4.13.

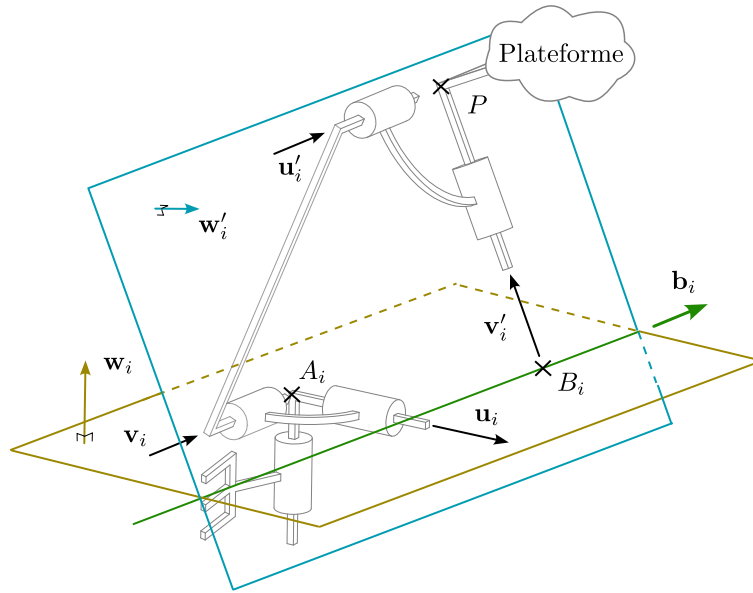


FIGURE 4.13 Torseur réciproque aux liaisons passives d'une jambe $\underline{RUU}$

L'équation (4.31) nous donne alors directement le modèle cinématique direct du mécanisme et la i -ième colonne de la matrice jacobienne est donnée par :

$$\mathbf{s}_i = \frac{\boldsymbol{\zeta}_0^{B_i}(\mathbf{b}_i) \circ \boldsymbol{\xi}_0^{A_i}(\mathbf{a}_i)}{\boldsymbol{\zeta}_0^{B_i}(\mathbf{b}_i) \circ \boldsymbol{\xi}_0^P(\mathbf{c}_i)} \boldsymbol{\xi}_0^P(\mathbf{c}_i), \quad (4.37)$$

où, toujours d'après l'équation (4.31), le vecteur $\mathbf{c}_i$ est donné par :

$$\mathbf{c}_i = \frac{(\mathbf{b}_j \times \mathbf{r}_{B_j P}) \times (\mathbf{b}_k \times \mathbf{r}_{B_k P})}{\|(\mathbf{b}_j \times \mathbf{r}_{B_j P}) \times (\mathbf{b}_k \times \mathbf{r}_{B_k P})\|}, \quad (4.38)$$

pour $i, j, k = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Soit $\mathcal{P}_i$ le plan contenant les axes de la seconde liaison universelle au point P de la i -ième branche, c'est-à-dire le plan passant par le point P , de normale $\mathbf{w}'_i$, voir figure 4.13. Le vecteur $\mathbf{b}_i$ appartient par définition à ce plan, de même que $\mathbf{r}_{B_i P}$. Ainsi, le produit vectoriel $\mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_{B_i P}$ donne un vecteur proportionnel à la normale $\mathbf{w}'_i$ du plan $\mathcal{P}_i$. Le vecteur $\mathbf{c}_i$, voir équation (4.37) peut ainsi être réécrit :

$$\mathbf{c}_i = \frac{\mathbf{w}'_j \times \mathbf{w}'_k}{\|\mathbf{w}'_j \times \mathbf{w}'_k\|}. \quad (4.39)$$

Au final, l'actionnement de la i -ème branche du mécanisme entraîne une rotation pure de la plateforme autour d'une droite passant par le point P et dont l'axe est donné par le produit vectoriel des normales des plans contenant les liaisons universelles en P des deux autres jambes. La figure 4.14 illustre par exemple la position de l'axe du visseur 3 – $\underline{RUU}$. La vitesse de rotation autour de cet axe est donnée par :

$$\omega_3 = \frac{\boldsymbol{\zeta}_0^{B_3}(\mathbf{b}_3) \circ \boldsymbol{\xi}_0^{A_3}(\mathbf{a}_3)}{\boldsymbol{\zeta}_0^{B_3}(\mathbf{b}_3) \circ \boldsymbol{\xi}_0^P(\mathbf{c}_3)} \dot{\theta}_3. \quad (4.40)$$

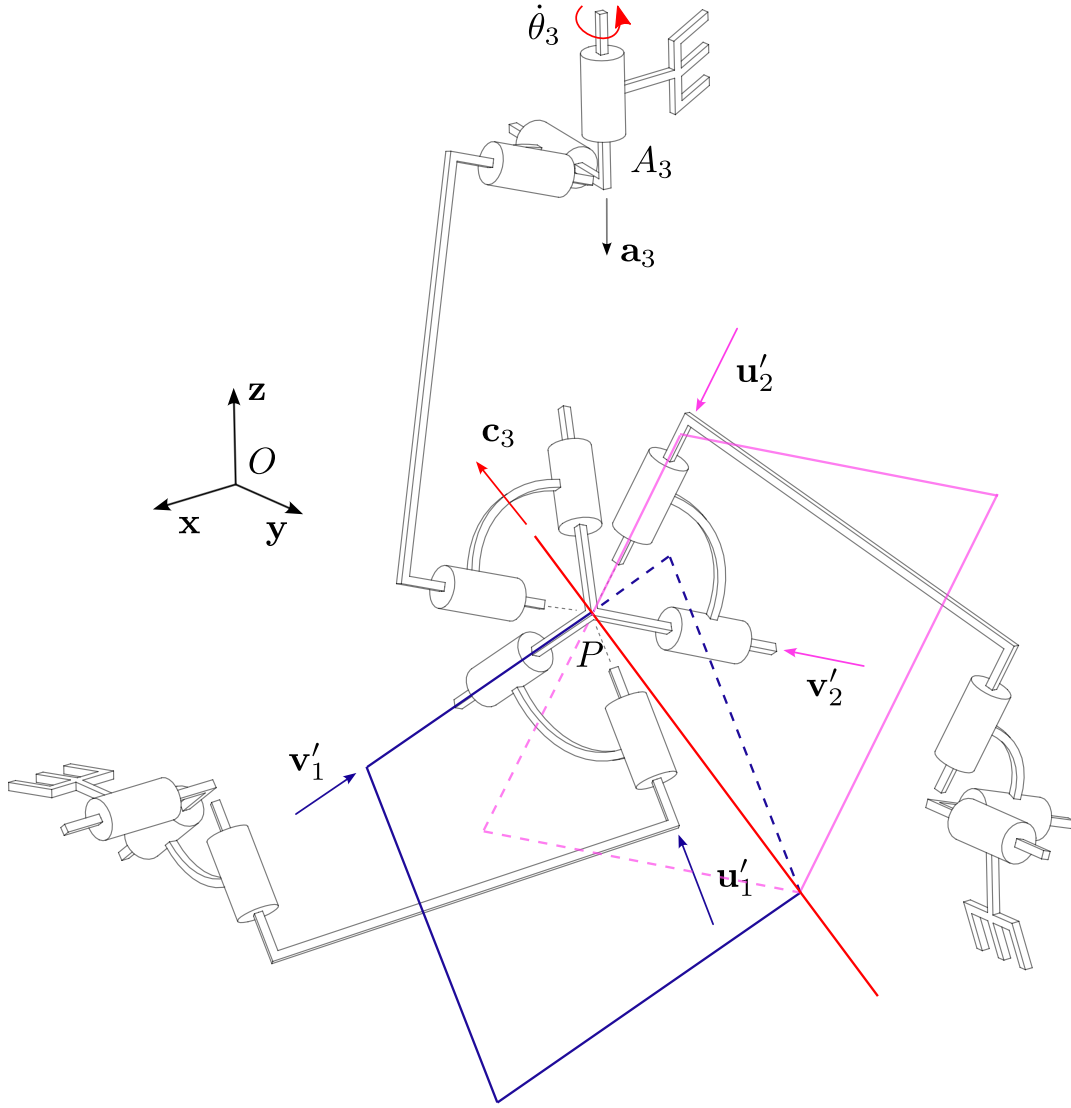


FIGURE 4.14 Position de l'axe du visseur $\xi_0^P(c_3)$ dans le mécanisme 3 – $\underline{RRR}$

4.2.4 Exemple : Mécanisme d'orientation asymétrique

Le dernier exemple de mécanisme d'orientation est montré figure 4.15. D'après [176], ce mécanisme serait appelé poignet de Cheng. Il s'agit d'un mécanisme asymétrique. La première jambe est composée d'une liaison rotoïde d'axe $\mathbf{s}_1$ passant par un point P_1 suivie d'une liaison universelle dont les deux axes sont orientés selon des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{v}_1$. Le centre de cette liaison est localisée au point P_1 , ainsi l'ensemble des trois liaisons de la première jambe forme une liaison sphérique. Les deux autres jambes sont composées d'une liaison universelle dont les axes sont orientés selon les vecteurs $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_i$ localisée au point Q_i , puis d'une liaison prismatique orientée selon un vecteur $\mathbf{w}_i$ et enfin d'une seconde liaison universelle localisée

au point P_i dont les axes sont également orientés selon les vecteurs $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{v}_i$, pour $i = 2, 3$. Le vecteur unitaire allant du point Q_i au point P_i est nommé $\mathbf{s}_i$. Les points P_1 , P_2 et P_3 sont rigidement liés à la plateforme. Il est à noter que dans ce mécanisme, les liaisons universelles respectives des jambes 2 et 3 n'ont pas nécessairement besoin d'être contenues dans des plans parallèles comme c'est ici le cas.

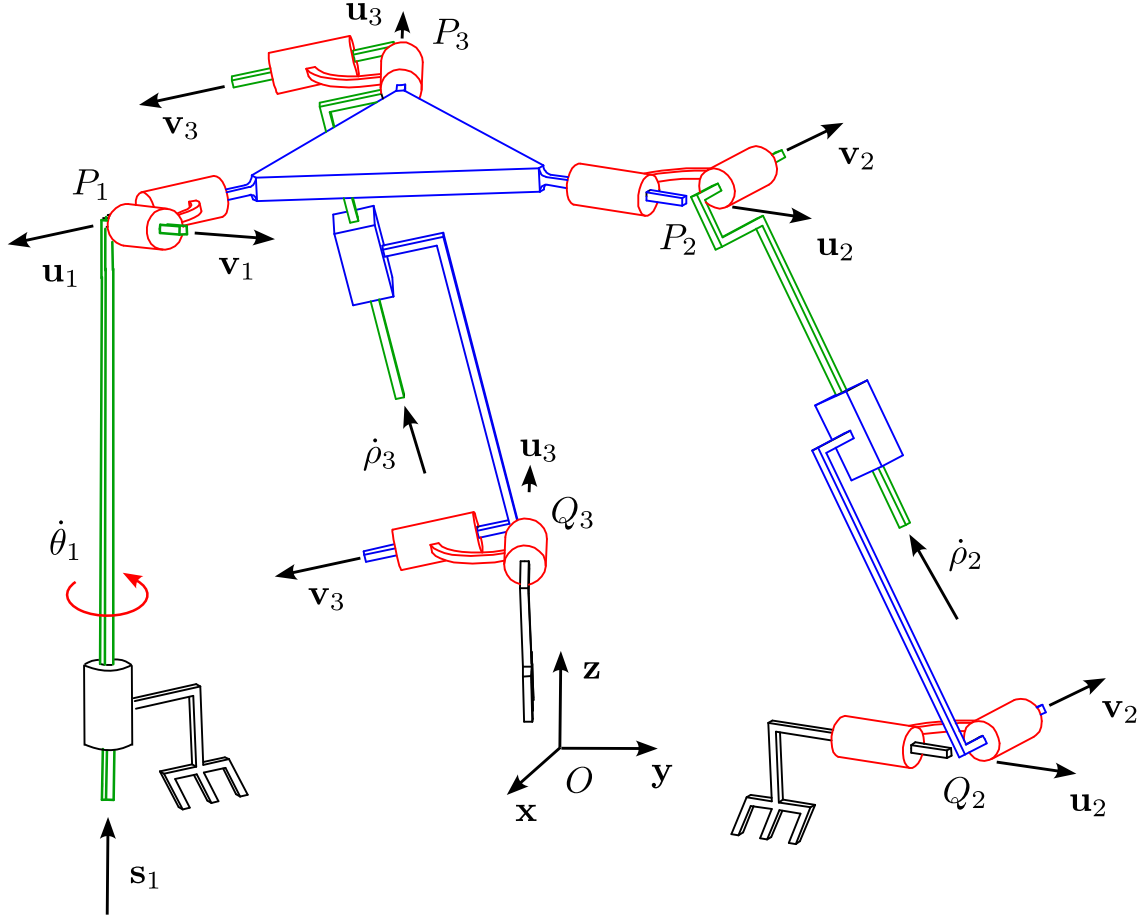


FIGURE 4.15 Mécanisme $1S + 2UPU$

On suppose que la première liaison rotoïde de la jambe 1 et les liaisons prismatiques des deux autres jambes sont les liaisons actionnées avec des vitesses respectives $\dot{\theta}_1$, $\dot{\rho}_2$ et $\dot{\rho}_3$. Le visseur de la plateforme est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_0^{P_1}(\mathbf{s}_1)\dot{\theta}_1 + \xi_0^{P_1}(\mathbf{u}_1)\dot{\psi}_{\mathbf{u}_1} + \xi_0^{P_1}(\mathbf{v}_1)\dot{\psi}_{\mathbf{v}_1} \\
 &= \xi_0^{Q_2}(\mathbf{u}_2)\dot{\varphi}_{\mathbf{u}_2} + \xi_0^{Q_2}(\mathbf{v}_2)\dot{\varphi}_{\mathbf{v}_2} + \xi_\infty(\mathbf{w}_2)\dot{\rho}_2 + \xi_0^{P_2}(\mathbf{u}_2)\dot{\psi}_{\mathbf{u}_2} + \xi_0^{P_2}(\mathbf{v}_2)\dot{\psi}_{\mathbf{v}_2} \\
 &= \xi_0^{Q_3}(\mathbf{u}_3)\dot{\varphi}_{\mathbf{u}_3} + \xi_0^{Q_3}(\mathbf{v}_3)\dot{\varphi}_{\mathbf{v}_3} + \xi_\infty(\mathbf{w}_3)\dot{\rho}_3 + \xi_0^{P_3}(\mathbf{u}_3)\dot{\psi}_{\mathbf{u}_3} + \xi_0^{P_3}(\mathbf{v}_3)\dot{\psi}_{\mathbf{v}_3}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Les vitesses appelées ψ sont celles des liaisons universelles rattachées à la plateforme tandis que celles appelées φ sont ces des liaisons universelles aux points Q_2 et Q_3 .

D'après la première ligne de l'équation (4.41), trois torseurs à pas nuls, linéairement indépendants et dont les axes s'intersectent au point P_1 peuvent être identifiés. La plateforme ne peut ainsi que pivoter autour de ce point. Pour cette même équation, il est également possible d'identifier un torseur à pas infini $\zeta_1 = \zeta_\infty(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1)$ réciproque aux visseurs de la liaison universelle de la branche 1. Puis, pour les jambes 2 et 3, il est possible de sélectionner deux torseurs à pas nuls, qui exprimés au point P_1 sont respectivement donnés par :

$$\zeta_2 = \zeta_0^{P_2}(\mathbf{s}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{P_2 P_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_3 = \zeta_0^{P_3}(\mathbf{s}_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_{P_3 P_1} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Ainsi, d'après l'équation (4.31), la première colonne de la matrice jacobienne de la plateforme s'écrit :

$$\$_1 = \frac{\zeta_\infty(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \circ \xi_0^{P_1}(\mathbf{s}_1)}{\zeta_\infty(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \circ \xi_1^m} \xi_1^m \quad \text{avec} \quad \xi_1^m = \xi_0^{P_1} \left(\frac{(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{P_2 P_1}) \times (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_{P_3 P_1})}{\|(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{P_2 P_1}) \times (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_{P_3 P_1})\|} \right). \quad (4.43)$$

Les deux autres colonnes sont données respectivement par :

$$\$_2 = \frac{\zeta_0^{P_2}(\mathbf{s}_2) \circ \xi_\infty(\mathbf{w}_2)}{\zeta_0^{P_2}(\mathbf{s}_2) \circ \xi_2^m} \xi_2^m \quad \text{et} \quad \xi_2^m = \xi_0^{P_1} \left(\frac{(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_{P_3 P_1}) \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1)}{\|(\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_{P_3 P_1}) \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1)\|} \right), \quad (4.44)$$

et :

$$\$_3 = \frac{\zeta_0^{P_3}(\mathbf{s}_3) \circ \xi_\infty(\mathbf{w}_3)}{\zeta_0^{P_3}(\mathbf{s}_3) \circ \xi_3^m} \xi_3^m \quad \text{et} \quad \xi_3^m = \xi_0^{P_1} \left(\frac{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{P_2 P_1})}{\|(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_{P_2 P_1})\|} \right). \quad (4.45)$$

Malgré le fait que les trois torseurs réciproques identifiés soient de nature différente (un torseur à pas infini et deux à pas fini), le modèle cinématique direct a pu être établi. Cet exemple montre qu'il est possible d'obtenir la matrice jacobienne analytique d'un mécanisme d'orientation dont les branches sont asymétriques.

4.3 Mécanismes translationnels

4.3.1 Modèle cinématique direct

Intéressons-nous à la dernière catégorie de mécanismes étudiés dans ce chapitre qui sont les mécanismes translationnels. Les jambes de ces mécanismes parallèles sont agencées de manière à ce que l'organe terminal puisse (uniquement) se traduire dans l'espace cartésien [177]. La méthode pour déterminer le modèle cinématique direct repose une fois encore sur l'inversion d'une matrice composée de torseurs réciproques. La plateforme d'un mécanisme translationnel ne peut pivoter, cela signifie que son visseur est réciproque à trois couples purs, modélisés par un ensemble de trois torseurs linéairement indépendants à pas infinis.

Pour trouver les trois autres torseurs réciproques qui composeront la matrice jacobienne parallèle, il est nécessaire d'écrire les équations des chaînes cinématiques reliant la plateforme au bâti. En supposant que le mécanisme est composé de trois branches, cette équation est identique à celle des mécanismes d'orientations donnée équation (4.28). Il est alors possible de créer une équation de vitesse de la forme $\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}$, en identifiant pour chaque jambe un torseur réciproque à tous les visseurs passifs. Un point important est que ces torseurs sont nécessairement à pas fini, puisque dans le cas contraire ils seraient linéairement dépendant à l'ensemble de torseurs à pas infinis précédemment identifiés. De la même manière que pour les mécanismes d'orientation, le torseur réciproque aux visseurs passifs de la i -ième branche est donné par $\boldsymbol{\zeta}_i = [\mathbf{p}_i^T \quad \mathbf{q}_i^T]^T$ où $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}_{3 \times 1}$ et $\mathbf{q}_i$ sont des vecteurs 3×1 .

Les expressions matrices jacobienues parallèle et sérielle sont identiques à celles établies pour les mécanismes d'orientation et sont données par l'équation (4.29). Puisque la plateforme ne peut pivoter, alors le visseur de cette dernière a la forme $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{0}_{1 \times 3} \quad \mathbf{V}^T]^T$, où $\mathbf{V}$ est la vitesse de translation de tout point de la plateforme. Ainsi, de la même manière que pour les mécanismes d'orientation, voir équation (4.30), nous avons :

$$\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{V}. \quad (4.46)$$

À nouveau, seule une sous-matrice 3×3 de la matrice jacobienne parallèle $\mathbf{\Pi}$ est à inverser. Cette matrice contient les vecteurs directeurs de trois torseurs à pas nul, considérés hors singularité comme linéairement indépendants.

En utilisant une nouvelle fois la formule (3.18), le modèle cinématique direct des mécanismes translationnels est alors donné par :

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = [\mathbf{\$}_1 \quad \mathbf{\$}_2 \quad \mathbf{\$}_3], \quad \text{où} \\ \mathbf{\$}_j &= \frac{\zeta_j \circ \xi_a^j}{\zeta_j \circ \xi_j^m} \xi_j^m \quad \text{et} \quad \xi_j^m = \xi_\infty \left(\frac{(\mathbf{p}_k \times \mathbf{p}_l)}{\|(\mathbf{p}_k \times \mathbf{p}_l)\|} \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. À noter qu'il est également possible d'obtenir le modèle cinématique direct de l'équation (4.47) en inversant une matrice carrée de taille 6×6 plutôt qu'une matrice de taille 3×3 . La démonstration est montrée en annexe B.2.2 et les deux résultats finaux sont identiques.

L'équation (4.47) est valide pour tous les mécanismes respectant deux conditions. Premièrement, il doit être possible d'écrire une ou plusieurs relations de chaînes cinématiques et d'identifier, à partir de cette dernière ou de ces dernières, un ensemble de torseurs à pas infini réciproques à l'ensemble des visseurs. Deuxièmement, il doit être possible d'identifier trois autres torseurs linéairement indépendants à pas fini, chacun étant réciproque aux visseurs passifs d'une branche de l'équation (4.28). Beaucoup de mécanismes respectent ces conditions et nous allons montrer trois exemples de mécanismes translationnels typiques.

4.3.2 Exemple : Mécanisme translationnel 3 – *UPU*

Le premier exemple choisi pour illustrer cette section est le mécanisme 3–*UPU* [139,178–180] montré figure 4.16. Il est composé de trois jambes cinématiquement identiques, connectées au bâti au point A_j et à la plateforme au point B_j , pour $j = 1, 2, 3$. Au point A_j est localisée une liaison universelle d'axes $\mathbf{u}_j$ et $\mathbf{v}_j$ et au point B_j une liaison universelle de mêmes axes. Entre les deux liaisons se trouve la liaison prismatique actionnée de direction $\mathbf{s}_j$. Pour le mécanisme illustré, nous avons $\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_{A_j B_j}$, voir figure 4.16.

La direction des axes des liaisons universelles est particulièrement importante pour ce mécanisme. Il pourrait en effet être monté comme un mécanisme d'orientation [181]. Pour que le 3 – *UPU* soit translationnel, il faut que la direction de la première liaison rotoïde d'une branche soit parallèle à l'axe de la dernière et que les axes des deux liaisons rotoïdes intermédiaires soient également parallèles entre eux [179,182], voir figure 4.16 à nouveau.

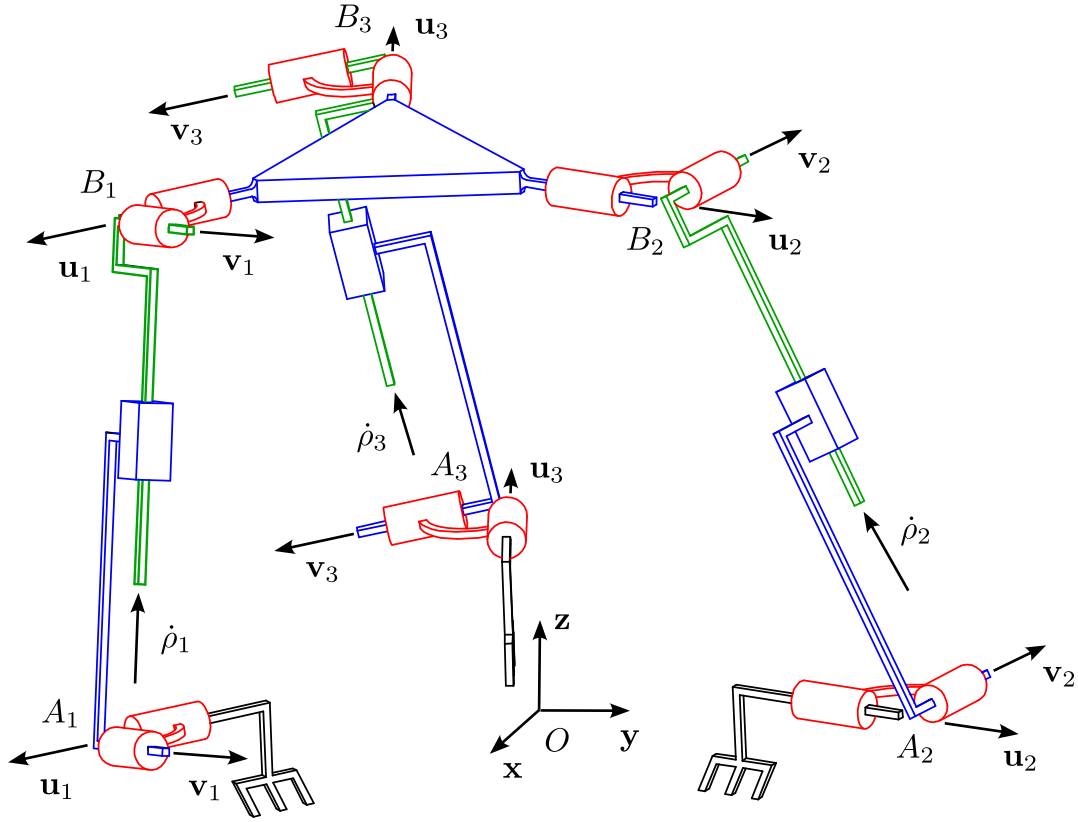


FIGURE 4.16 Mécanisme 3 – UPU

Le visseur de l'organe terminal ξ peut être exprimé par :

$$\xi = \xi_0^{A_j}(\mathbf{u}_j)\dot{\varphi}_{u_j} + \xi_0^{A_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\varphi}_{v_j} + \xi_\infty(\mathbf{s}_j)\dot{\rho}_j + \xi_0^{B_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\psi}_{v_j} + \xi_0^{B_j}(\mathbf{u}_j)\dot{\psi}_{u_j}, \quad (4.48)$$

pour $j = 1, 2, 3$. La vitesse active de chaque branche est $\dot{\rho}_j$. Les vitesses passives de la première liaison universelle sont $\dot{\varphi}_{u_j}$ et $\dot{\varphi}_{v_j}$ tandis que $\dot{\psi}_{u_j}$ et $\dot{\psi}_{v_j}$ sont celles de la seconde. Soit $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j \times \mathbf{v}_j$ le vecteur normal aux axes des deux liaisons universelles de la j -ème patte. Le visseur $\xi_\infty(\mathbf{w}_j)$ est clairement réciproque à l'ensemble des liaisons de la jambe j , voir équation (4.48). Sous réserve que les vecteurs $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ et $\mathbf{w}_3$ soient linéairement indépendants, ce qui est vrai hors singularité, alors cet ensemble restreint toutes les rotations de la plateforme.

Un torseur réciproque à l'ensemble des visseurs passifs de la j -ème branche de l'équation (4.48) est $\zeta_j = \zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j})$. L'équation (4.47) donne alors directement le modèle cinématique direct du mécanisme. Chaque colonne de la matrice jacobienne valant :

$$\mathcal{J}_j = \frac{\zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j}) \circ \xi_\infty(\mathbf{s}_j)}{\zeta_0^{A_j}(\mathbf{s}_{A_j B_j}) \circ \xi_j^m} \xi_j^m \quad \text{avec} \quad \xi_j^m = \xi_\infty \left(\frac{\mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{s}_{A_l B_l}}{\|\mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{s}_{A_l B_l}\|} \right), \quad (4.49)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. Ainsi, l'actionnement de la liaison prismatique de la j -ème jambe entraîne la plateforme à translater dans la direction normale aux vecteurs directeurs des droites passant par A_k et B_k et respectivement par A_l et B_l . D'après l'équation précédente, la vitesse de translation qu'à la plateforme soumise à l'actionnement de la j -ème liaison prismatique est :

$$V_j = \frac{\| \mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{s}_{A_l B_l} \| \mathbf{s}_{A_j B_j}^T \mathbf{s}_j}{(\mathbf{s}_{A_k B_k} \times \mathbf{s}_{A_l B_l})^T \mathbf{s}_{A_j B_j}} \dot{\rho}_j. \quad (4.50)$$

4.3.3 Exemple : Le Tripteron généralisé

Le second exemple de mécanisme translationnel est le Tripteron [183] montré figure 4.17. Chacune de ses trois jambes est constituée d'une liaison prismatique de direction $\mathbf{u}_i$ suivie d'une série de trois liaisons rotoïdes localisées respectivement aux points A_j , B_j , et C_j . Le point C_i étant connecté à la plateforme. Les trois liaisons rotoïdes ont des axes parallèles et sont orientées par le vecteur $\mathbf{v}_j$. Soit $\dot{\rho}_j$ la vitesse de la liaison prismatique que l'on considère actionnée.

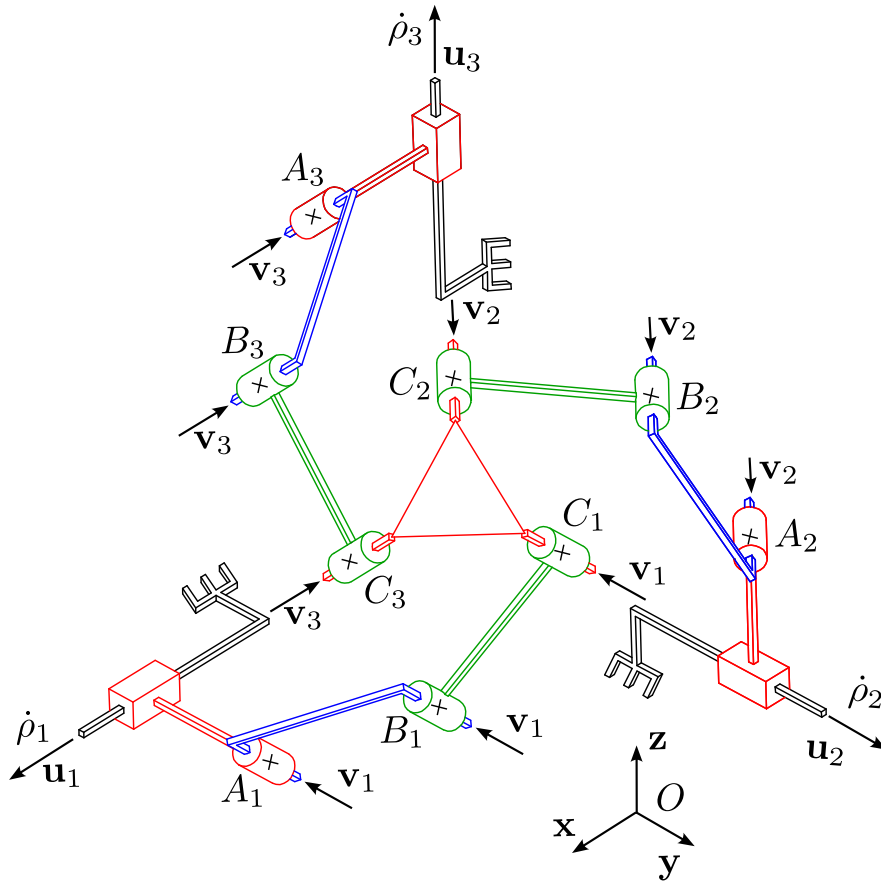


FIGURE 4.17 Tripteron généralisé

Le visseur de la plateforme est donné par :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta}_\infty(\mathbf{u}_j)\dot{\rho}_j + \boldsymbol{\xi}_0^{A_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\varphi}_{A_j} + \boldsymbol{\xi}_0^{B_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\varphi}_{B_j} + \boldsymbol{\xi}_0^{C_j}(\mathbf{v}_j)\dot{\varphi}_{C_j} \quad \text{pour } j = 1, 2, 3. \quad (4.51)$$

Ici, $\dot{\varphi}_{A_j}$, $\dot{\varphi}_{B_j}$ et $\dot{\varphi}_{C_j}$ sont les vitesses passives autour des trois liaisons rotoïdes successives. À noter que puisque ces vitesses sont seulement au nombre de trois, alors le mécanisme est sur-contraint. D'après l'équation précédente, le visseur $\boldsymbol{\zeta}_\infty(\mathbf{u}_j \times \mathbf{v}_j)$ est réciproque à l'ensemble des liaisons de la i -ième jambe. Le mécanisme est donc bien translationnel, à la condition les vecteurs que $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{v}_3$ soient linéairement indépendants, ce qui est vrai par construction puisque les vecteurs $\mathbf{u}_j$ et $\mathbf{v}_j$ pour $j = 1, 2, 3$ ne changent jamais d'orientation.

Il est possible à partir de l'équation (4.51) d'identifier un torseur $\boldsymbol{\zeta}_j = \boldsymbol{\zeta}_0^{A_j}(\mathbf{v}_j)$ comme étant réciproque à l'ensemble des liaisons rotoïdes de la branche j . Le choix du point d'application n'a aucune importance et pourrait être situé n'importe où dans l'espace puisque seul le vecteur directeur des torseurs importe pour construire le MCD, voir équation (4.47). En utilisant cette même équation, on peut obtenir le modèle cinématique direct du Tripteron, où chaque colonne de la matrice jacobienne de la plateforme est donnée par :

$$\boldsymbol{\$}_j = \frac{\boldsymbol{\zeta}_0^{A_j}(\mathbf{v}_j) \circ \boldsymbol{\zeta}_\infty(\mathbf{u}_j)}{\boldsymbol{\zeta}_0^{A_j}(\mathbf{v}_j) \circ \boldsymbol{\xi}_j^m} \boldsymbol{\xi}_j^m \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi}_j^m = \boldsymbol{\xi}_\infty \left(\frac{\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_l}{\|\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_l\|} \right) \quad (4.52)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$. Actionner la liaison prismatique de la j -ième branche a pour effet de translater la plateforme dans une direction parallèle à la droite à l'intersection des plans contenant respectivement les liaisons rotoïdes de la patte k et celles de la patte l . La vitesse de translation dans cette direction est donnée par :

$$V_j = \frac{\|\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_l\| \mathbf{u}_j^T \mathbf{v}_j}{(\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_l)^T \mathbf{v}_j} \dot{\rho}_j. \quad (4.53)$$

Le mécanisme que nous venons d'étudier est une version généralisée du Tripteron. Dans le mécanisme original, pour chaque jambe la direction de la liaison prismatique est parallèle à celle des liaisons rotoïdes, c'est-à-dire que nous avons $\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j$ pour $j = 1, 2, 3$. Si en addition les axes $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ forment une base orthonormée directe, alors le modèle cinématique direct est simplement donné par :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{u}_1) & \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{u}_2) & \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{u}_3) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (4.54)$$

où $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 & \dot{\rho}_2 & \dot{\rho}_3 \end{bmatrix}^T$. L'actionnement de chaque liaison prismatique entraîne la plateforme à se déplacer dans la direction de cette liaison, d'une translation égale à celle de l'actionneur.

4.3.4 Exemple : Le robot Delta

le mécanisme de Delta est un mécanisme très populaire et couramment utilisé dans les lignes d'assemblages. Ce mécanisme a fait l'objet de nombreuses recherches [184–188]. La version que nous allons étudier est montrée figure 4.18. Il s'agit d'un mécanisme purement translationnel. Il existe en effet plusieurs variations du robot Delta, le premier avait par exemple une chaîne supplémentaire destinée à permettre un mouvement de rotation supplémentaire [184].

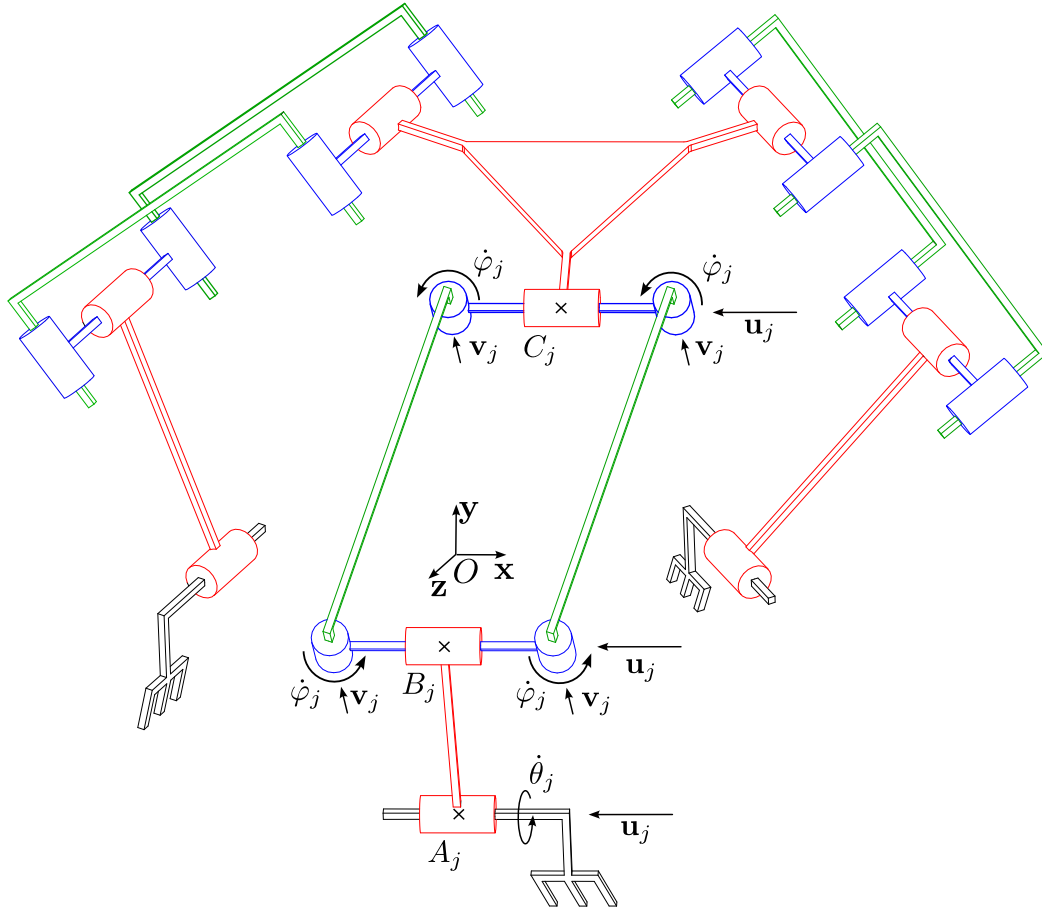


FIGURE 4.18 Robot Delta

Chaque jambe du mécanisme montré figure 4.18 est composée de trois liaisons rotoïdes de même vecteur directeur $\mathbf{u}_j$, localisées respectivement aux points A_j , B_j et C_j . Chaque jambe possède également quatre autres liaisons de même vecteur directeur $\mathbf{v}_j$ formant un parallélogramme. Puisque les liaisons rotoïdes de chaque jambe sont toutes orientées selon deux vecteurs $\mathbf{u}_j$ et $\mathbf{v}_j$, alors le torseur à pas infini $\zeta_\infty(\mathbf{u}_j \times \mathbf{v}_j)$ peut être identifié pour chaque jambe. Si ces trois torseurs pour $j = 1, 2, 3$ sont linéairement indépendants, alors ils restreignent les rotations possibles de plateforme, confirmant que le Delta est bien un robot translationnel.

Le Delta n'est pas à proprement parler un mécanisme parallèle puisqu'il possède une boucle parallèle dans chacune de ses branches. Certains appellent ce type de chaîne *quasi-sériel* [189]. La boucle parallèle est ici un mécanisme à quatre barres plan et peut être considérée comme une unique liaison parallélogramme. Le coupleur d'un mécanisme à quatre barres agencé en parallélogramme a un mouvement de translation circulaire. Ainsi, une liaison parallélogramme est instantanément équivalente à une liaison prismatique, [190]. La figure 4.19 montre un robot Delta dont le parallélogramme de la j -ème branche est remplacé par une liaison prismatique. Chaque branche du Delta est donc instantanément équivalente à une branche $RRPR$. Le visseur de la plateforme est donné par :

$$\xi = \xi_0^{A_j}(\mathbf{u}_j) \dot{\theta}_j + \xi_0^{B_j}(\mathbf{u}_j) \dot{\theta}_{B_j} + \xi_\infty(\mathbf{v}_j \times \mathbf{s}_{B_j C_j}) \dot{\varphi}_j + \xi_0^{C_j}(\mathbf{u}_j) \dot{\theta}_{C_j}, \quad (4.55)$$

pour $j = 1, 2, 3$. Ici, $\dot{\theta}_{B_j}$ et $\dot{\theta}_{C_j}$ sont les vitesses passives associées aux visseurs $\xi_0^{B_j}(\mathbf{u}_j)$ et $\xi_0^{C_j}(\mathbf{u}_j)$. $\dot{\varphi}_j$ est la vitesse de rotation des quatre liaisons composant le parallélogramme, tandis que $\dot{\theta}_j$ est la vitesse de la première liaison rotoïde de la branche, considérée comme actionnée. Contrairement au mécanisme 3 – UPU au Tripteron que nous venons d'étudier, ce mécanisme translationnel est actionné par des vitesses de rotation.

Les torseurs réciproques aux visseurs passifs de l'équation (4.55) sont donnés par $\zeta_j = \zeta_0^{B_j}(\mathbf{s}_{B_j C_j})$, pour $j = 1, 2, 3$. Grâce à cet ensemble de visseurs, le modèle cinématique direct du mécanisme Delta peut être obtenu en appliquant l'équation (4.47). Chaque colonne de la matrice jacobienne est donnée par :

$$\mathbb{S}_j = \frac{\zeta_0^{B_j}(\mathbf{s}_{B_j C_j}) \circ \xi_0^{A_j}(\mathbf{u}_j)}{\zeta_0^{B_j}(\mathbf{s}_{B_j C_j}) \circ \xi_j^m} \quad \text{avec} \quad \xi_j^m = \xi_\infty \left(\frac{\mathbf{s}_{B_k C_k} \times \mathbf{s}_{B_l C_l}}{\|\mathbf{s}_{B_k C_k} \times \mathbf{s}_{B_l C_l}\|} \right), \quad (4.56)$$

pour $j, k, l = 1, 2, 3$ par permutation circulaire. La rotation autour de la droite passant par A_j de vecteur directeur $\mathbf{u}_j$ avec une vitesse $\dot{\theta}_j$ entraîne la plateforme dans un mouvement de translation pur dans la direction perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{s}_{B_k C_k}$ et $\mathbf{s}_{B_l C_l}$ avec une vitesse linéaire donnée par :

$$V_j = \frac{\mathbf{s}_{B_j C_j}^T (\mathbf{u}_j \times \mathbf{r}_{A_j B_j}) \|\mathbf{s}_{B_k C_k} \times \mathbf{s}_{B_l C_l}\|}{\mathbf{s}_{B_j C_j}^T (\mathbf{s}_{B_k C_k} \times \mathbf{s}_{B_l C_l})} \dot{\theta}_j. \quad (4.57)$$

Il est à noter que le vecteur $\mathbf{r}_{A_j B_j}$ n'est pas unitaire, ainsi la distance entre les droites passant par A_j et B_j intervient dans l'expression de la vitesse de la plateforme. La vitesse V_j est ainsi bien homogène une vitesse linéaire.

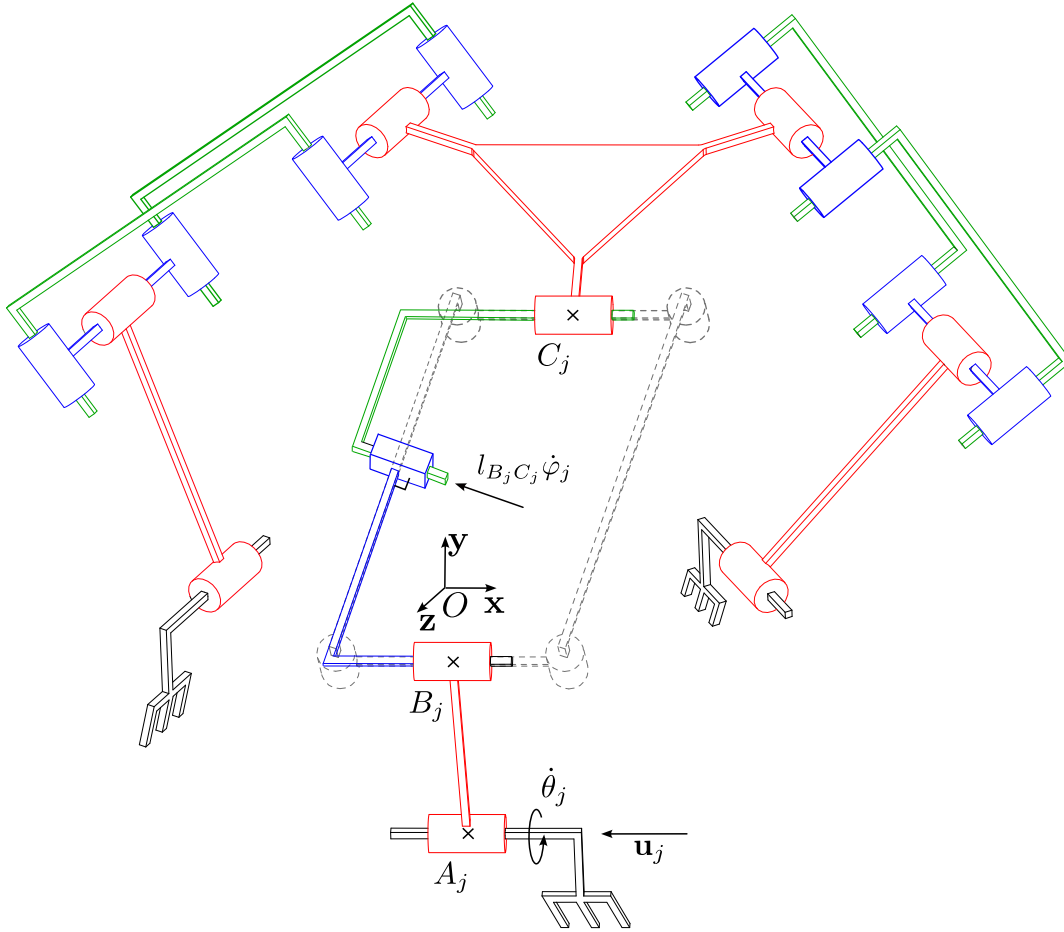


FIGURE 4.19 Chaîne sérielle instantanément équivalente à une jambe du robot Delta

4.4 Conclusion

La section 4.1 de ce chapitre a été consacrée à l'analyse des mécanismes sphériques. Nous avons pu donner analytiquement la matrice jacobienne de ces mécanismes et observer les similitudes entre ces derniers et les mécanismes plans étudiés au chapitre précédent. La section 4.1.3 a été dédiée à l'analyse de l'oeil agile, dont la matrice jacobienne est donnée par l'équation (4.26).

Ensuite nous sommes intéressés à divers mécanismes spatiaux capables de trois rotations pures autour d'un point, puis à d'autres mécanismes à même de se translater dans les trois directions de l'espace, respectivement aux sections 4.2 et 4.3. À partir de l'identification des torseurs réciproques, nous pouvons fournir la matrice jacobienne explicite de ces mécanismes, voir respectivement les équations (4.31) et (4.47). Les colonnes de la matrice jacobienne sont exprimées sous la forme d'un rapport de produits réciproques multiplié à un visseur unitaire. Il s'agit d'une forme que nous avons déjà rencontrée pour les mécanismes sphériques et plans.

Nous avons illustré les équations obtenues par trois exemples de mécanismes d'orientation et trois exemples de mécanismes de translation. Ainsi, il a été montré que les équations obtenues sont applicables pour des mécanismes possédant des architectures variées.

Il est cependant à noter que nous n'avons pas couvert l'intégralité des mécanismes d'orientation et de translation existants. Les mécanismes redondants n'ont par exemple pas été traités.

CHAPITRE 5 Le 3 – *RPS* et le 6 – *UPS* triangulaire

Nous allons dans ce chapitre étudier le modèle cinématique direct de deux mécanismes. Le premier, étudié en section 5.1, est le 3 – *RPS*, il s’agit d’un mécanisme spatial à trois degrés de liberté. À la différence des mécanismes étudiés dans la section précédente, ce mécanisme a des degrés de liberté mixtes, il n’est ni purement rotationnel, ni purement translationnel. Puis, en section 5.2, nous verrons qu’il est aisé d’étendre les résultats obtenus pour le mécanisme 3 – *RPS* à un autre mécanisme, le 6 – *UPS*. Ce dernier possède six degrés de liberté. Le point commun entre ces deux mécanismes est qu’ils ont une matrice jacobienne parallèle constituée de six visseurs à pas nuls qui s’intersectent deux à deux.

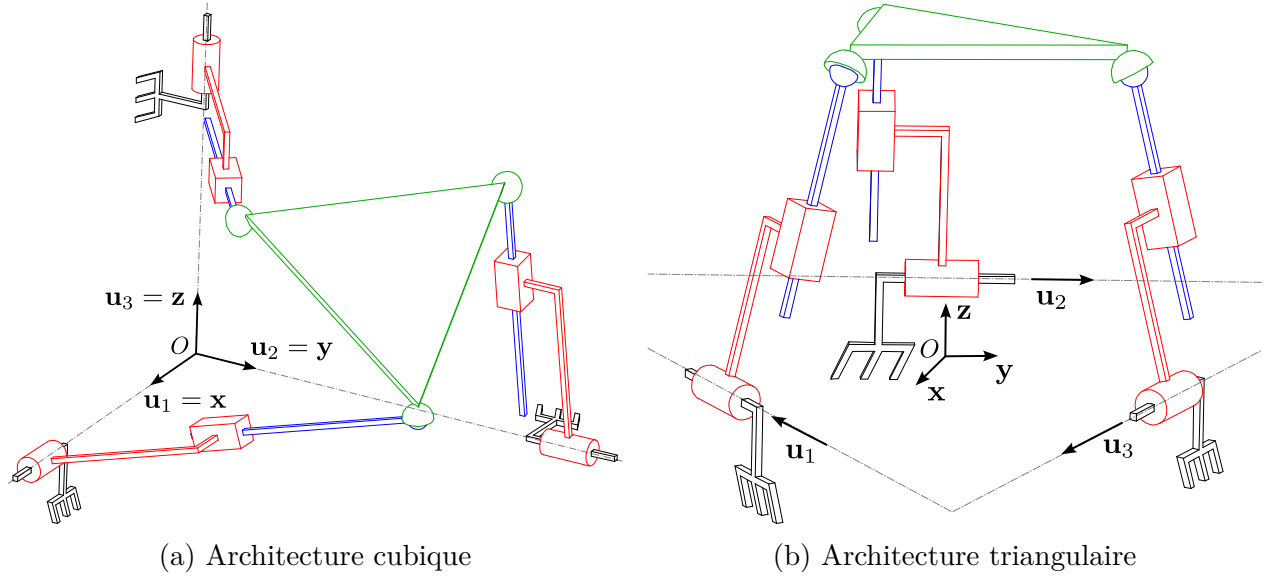
La section 5.3 sera consacrée à une application numérique du 3 – *RPS* pour illustrer les équations présentées section 5.1. Finalement, la section 5.4 sera consacrée à une extension des résultats et verrons d’autres mécanismes qui partagent la même expression de matrice jacobienne que les mécanismes 3 – *RPS* et 6 – *UPS* triangulaire.

5.1 Mécanisme 3 – *RPS*

5.1.1 Introduction

Le mécanisme 3 – *RPS* est un mécanisme qui a fait l’objet de nombreuses recherches, voir par exemple [142–146, 148]. Il s’agit d’un mécanisme à DDLs limités qui possède trois mobilités dans l’espace. Ces dernières dépendent de l’agencement de ses jambes. Si les axes de ses trois liaisons rotoïdes sont orientés selon trois vecteurs linéairement indépendants, alors sa plateforme peut tourner autour de trois axes non-concourants [149, 150], ce qui le différencie des mécanismes d’orientation dont les axes de rotation s’intersectent en un même point. La figure 5.1a montre un exemple d’un tel mécanisme. Les axes des liaisons rotoïdes sont orientés selon les axes du repère du plan. Cette configuration est ainsi appelée *cubique*

Si les axes des liaisons rotoïdes du mécanisme 3 – *RPS* sont compris dans un même plan, alors la plateforme peut translater dans la direction normale à ce plan en plus de pouvoir tourner autour de deux axes concourants [149]. La figure 5.1a montre un mécanisme 3 – *RPS* dans cette configuration. Les axes des trois liaisons forment un triangle compris dans le plan, d’où l’appellation 3 – *RPS triangulaire*.

FIGURE 5.1 Deux architectures du mécanisme 3 – *RPS*

L'objectif de ce chapitre est une fois encore de donner le modèle cinématique direct analytique du mécanisme. Comme pour les chapitres précédents, nous partirons d'une équation de la forme :

$$\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.1)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est le visseur de la plateforme, $\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des vitesses actionnées tandis que $\mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{\Sigma}$ sont les matrices jacobiennes respectivement parallèle et sérielle. Grâce à l'équation (5.1), et sous réserve que la matrice $\mathbf{\Pi}$ soit inversible, le modèle cinématique direct peut être obtenu par la relation :

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{\Sigma}. \quad (5.2)$$

La matrice jacobienne $\mathbf{J}$, n'est pas seulement recherchée analytiquement, mais sous une forme analogue aux mécanismes sériels qui fait explicitement apparaître les visseurs qui la composent :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1 & \mathbf{\$}_2 & \mathbf{\$}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

où $\mathbf{\$}_k$, la k -ème colonne de $\mathbf{J}$, est homogène à un visseur unitaire associé à la vitesse $\dot{q}_i$. Les colonnes de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ seront appelés visseurs partiels. Sauf mention contraire, dans ce chapitre, les indices i, j, k seront égaux à 1, 2, 3 par permutation circulaire.

5.1.2 Calcul analytique de la matrice jacobienne

La figure 5.2 montre deux géométries possibles d'une jambe *RPS*. La liaison rotoïde à la base de la jambe appelée k est orientée selon un axe $\mathbf{q}_k$ et passe par un point Q_k . La liaison prismatique est orientée selon un vecteur unitaire $\mathbf{p}_k$. La liaison sphérique connectée à la plateforme et son centre est appelé P_k . Pour la première géométrie, voir figure 5.2 (haut), les vecteurs $\mathbf{p}_k$ et $\mathbf{q}_k$ sont perpendiculaires. Pour la seconde géométrie, voir figure 5.2 (bas), ces deux vecteurs sont orientés arbitrairement l'un par rapport à l'autre. L'architecture des deux mécanismes montrés figure 5.1 correspond à la première géométrie, voir figure 5.2 (haut) à nouveau.

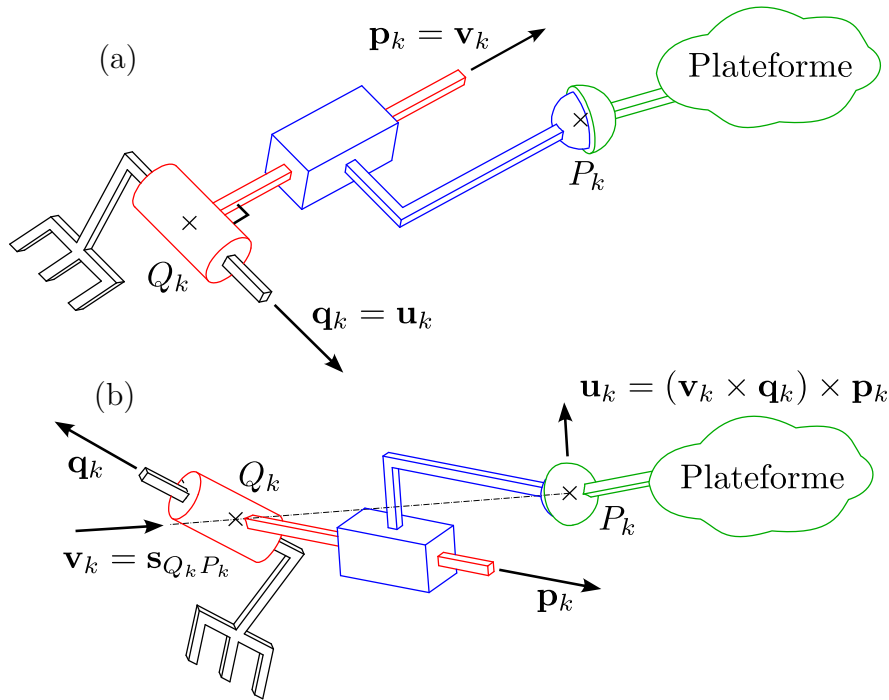


FIGURE 5.2 Position des axes des torseurs réciproques pour deux géométries de branches *RPS*

L'équation cinématique reliant le visseur de la plateforme aux visseurs de la branche k s'écrit :

$$\xi = \xi_0^{Q_k}(\mathbf{q}_k)\dot{\theta}_k + \xi_\infty(\mathbf{p}_k)\dot{\rho}_k + \xi_0^{P_k}(\mathbf{x})\dot{\varphi}_{\mathbf{x}_k} + \xi_0^{P_k}(\mathbf{y})\dot{\varphi}_{\mathbf{y}_k} + \xi_0^{P_k}(\mathbf{z})\dot{\varphi}_{\mathbf{z}_k}, \quad (5.4)$$

où $\dot{\theta}_k$ est la vitesse de rotation autour de la liaison rotoïde, $\dot{\rho}_k$ la vitesse linéaire selon la direction de la liaison prismatique, tandis que $\dot{\varphi}_{\mathbf{x}_k}$, $\dot{\varphi}_{\mathbf{y}_k}$, et $\dot{\varphi}_{\mathbf{z}_k}$ sont trois vitesses de rotations choisies arbitrairement autour des axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ du repère.

Pour obtenir une relation de vitesse sous la forme donnée équation (5.1), il est nécessaire pour chaque branche d'identifier un torseur qui soit réciproque à tous les visseurs de l'équation (5.4), à l'exception du visseur associé à la vitesse active $\dot{q}_k$, que l'on appellera $\xi^{\dot{q}_k}$. On supposera que les liaisons actionnées sont les articulations prismatiques. On aura l'occasion de discuter du mécanisme 3 – RPS en section 5.1.3. Pour le mécanisme 3 – RPS, nous avons alors :

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 & \dot{p}_3 & \dot{p}_3 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \xi^{\dot{q}_k} = \xi_\infty(\mathbf{p}_k). \quad (5.5)$$

Les trois torseurs réciproques sont donnés par :

$$\zeta_0^{\mathbf{v}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_0^{\mathbf{v}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \zeta_0^{\mathbf{v}_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \times \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Si les vecteurs directeurs des liaisons rotoïdes et prismatiques de chaque jambe sont perpendiculaires, voir figure 5.2 (haut), alors $\mathbf{v}_k$ est égal à $\mathbf{p}_k$, le vecteur directeur de la liaison prismatique. Si les vecteurs $\mathbf{p}_k$ et $\mathbf{q}_k$ ne sont pas perpendiculaires, voir figure 5.2 (bas), alors nous prendrons $\mathbf{v}_k$ égal à $\mathbf{s}_{Q_k P_k}$, un vecteur unitaire allant de l'axe de la liaison rotoïde au centre de la liaison sphérique. Hors singularité, on supposera que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement indépendants.

Le vecteur $\mathbf{r}_k$ présent dans l'équation (5.6) représente quant à lui le vecteur allant du centre de la liaison sphérique vers l'origine O , c'est à dire :

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{P_k O} \quad (5.7)$$

Dans ce chapitre, tous les vecteurs de positionnement définissant la position d'un objet géométrique dans l'espace iront toujours d'un point de cet objet vers l'origine. Ce choix est fait pour exprimer les visseurs et torseurs sous leur forme canonique, voir l'équation (2.11).

En calculant le produit réciproque entre les torseurs définis équation (5.6) et les visseurs de l'équation (5.4), alors une équation de vitesse de la forme (5.1) peut être obtenue selon :

$$\mathbf{\Pi}_a \xi = \Sigma_a \dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec}$$

$$\mathbf{\Pi}_a = \begin{bmatrix} \zeta_0^{\mathbf{v}_1 T} \Lambda \\ \zeta_0^{\mathbf{v}_2 T} \Lambda \\ \zeta_0^{\mathbf{v}_3 T} \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_1)^T & \mathbf{v}_1^T \\ (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_2)^T & \mathbf{v}_2^T \\ (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{r}_3)^T & \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_a = \begin{bmatrix} \zeta_0^{\mathbf{v}_1} \circ \xi^{\dot{q}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_0^{\mathbf{v}_2} \circ \xi^{\dot{q}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^{\mathbf{v}_3} \circ \xi^{\dot{q}_3} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

La matrice $\mathbf{\Pi}_a$ est de taille 3×6 et ne peut pas être inversée telle quelle puisque non carrée.

Contrairement aux mécanismes spatiaux étudiés jusqu'à présent, voir notamment sections 4.1.3, 4.2 et 4.3 du chapitre 4, nous n'avons pas d'information *a priori* sur le visseur ξ . Ainsi, il n'est pas possible d'inverser seulement une sous-matrice 3×3 de la matrice Π_a sans perdre d'informations sur le comportement cinématique de la plateforme. La solution est au contraire d'augmenter la matrice Π_a grâce à une seconde matrice 3×6 . Cette technique a été introduite en [121] pour justement étudier un mécanisme 3 – *RPS*. Pour augmenter la matrice Π_a , il est nécessaire d'introduire trois nouveaux torseurs qui sont donnés par :

$$\zeta_0^{\mathbf{u}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_0^{\mathbf{u}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \zeta_0^{\mathbf{u}_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Ces torseurs ont des pas nuls et leurs axes passent par les liaisons sphériques de chaque branche. Ils sont choisis pour être réciproque à *l'ensemble* des visseurs de chaque branche. Ainsi, pour la première géométrie de jambe, voir figure 5.2 (haut) on choisit $\mathbf{u}_k$ comme orienté selon l'axe de la rotoïde, c'est à dire $\mathbf{u}_k = \mathbf{q}_k$. Pour la seconde géométrie, voir figure 5.2 (bas) on choisit $\mathbf{u}_k = (\mathbf{v}_k \times \mathbf{q}_k) \times \mathbf{p}_k$. On supposera que les torseurs définis équation (5.6) et ceux introduits équation (5.9) sont linéairement indépendants. Un point important à noter est que le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ et le torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ ont des axes qui s'intersectent, plus précisément au point P_k , le centre de la liaison sphérique.

En utilisant les visseurs définis équation (5.9), une seconde équation de vitesse ayant la forme donnée équation (5.1) peut être obtenue :

$$\Pi_c \xi = \Sigma_c \dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad (5.10)$$

$$\Pi_c = \begin{bmatrix} \zeta_0^{\mathbf{u}_1 T} \Lambda \\ \zeta_0^{\mathbf{u}_2 T} \Lambda \\ \zeta_0^{\mathbf{u}_3 T} \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T & \mathbf{u}_1^T \\ (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T & \mathbf{u}_2^T \\ (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T & \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_c = \mathbf{0}_{3 \times 3}.$$

La matrice Π_c est souvent appelée dans la littérature jacobienne des contraintes [121], en opposition à Π_a , la jacobienne des actionnements.

En combinant les équations (5.8) et (5.10), alors une troisième équation de vitesse peut être obtenue par :

$$\Pi \xi = \Sigma \dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad (5.11)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_a \\ \Pi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_a \\ \Sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Sigma_a,$$

où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_1)^T \\ (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_2)^T \\ (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T \\ (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T \\ (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

La matrice jacobienne parallèle $\mathbf{\Pi}$ est ainsi constituée de six torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent deux à deux. Cette propriété va nous être utile pour le calcul de son inverse puisque cela ramène le nombre de vecteurs présents dans son expression à neuf ($\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ et $\mathbf{r}_k$). En effet, si la matrice $\mathbf{\Pi}$ était composée de six torseurs à pas nuls dont les axes n'ont pas de relations géométriques particulières entre eux, elle contiendrait douze vecteurs différents.

Selon l'équation (5.12), la matrice jacobienne parallèle est désormais carrée et qui plus est de plein rang puisque l'on a supposé que les différents torseurs qui la composent sont linéairement indépendants. On peut désormais inverser cette matrice pour obtenir la matrice jacobienne, voir équation (5.2). Pour le calcul, on prendra comme hypothèse que la matrice $\mathbf{D}$ définie à l'équation (5.12) est également inversible, c'est à dire que :

$$d \equiv \det(\mathbf{D}) = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)^T \mathbf{u}_3 \neq 0. \quad (5.13)$$

La matrice $\mathbf{\Pi}$ est composée de quatre sous-matrices carrées. Son inverse peut être obtenue par blocs grâce à une formule introduite en [191], ce qui donne :

$$\mathbf{\Pi}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{SBD}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CS} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CSBD}^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}. \quad (5.14)$$

Puis, en combinant les équations (5.2), (5.11) et (5.14), on obtient la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ sous la forme :

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CS} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_a. \quad (5.15)$$

Il est à noter qu'en [192], la matrice jacobienne d'un mécanisme parallèle a été exprimé d'une manière très semblable à celle de l'équation (5.15) grâce à des visseurs sous forme de nombres duaux. Cependant, le calcul n'a pas été explicité.

Nous cherchons l'expression analytique de la matrice jacobienne sous forme d'une collection de trois visseurs, voir équation (5.3). Ainsi, d'après l'équation (5.15), le bloc $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}_a$ contient l'axe de ces visseurs, tandis que la matrice $-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CS}\mathbf{\Sigma}_a$ contient les pas et les vecteurs définissant la position des axes des visseurs. Il est à noter que la matrice $\mathbf{\Sigma}_a$ est diagonale et composée de scalaires, voir équation (5.8). Ainsi elle n'influe ni sur la direction des vecteurs directeurs

des visseurs contenus dans la matrice jacobienne, ni sur leurs pas, ni sur la position de leurs axes. Nous allons donc, dans un premier temps seulement nous concentrer sur l'obtention des matrices $\mathbf{S}$ et $-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CS}$.

Vecteurs directeurs

Commençons donc par obtenir la forme analytique de la matrice $\mathbf{S}$. Pour cela, il est nécessaire d'inverser $\mathbf{D}$, puis dans un second temps d'inverser le complément de Schur de la matrices $\mathbf{D}$ donné par $(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{D})$, voir équation (5.14). En d'autres termes, seules deux inversions de matrice 3×3 sont requises pour obtenir l'expression de la matrice jacobienne. Nous allons pour cela utiliser à nouveau la formule donnée équation (3.18). L'inverse de $\mathbf{D}$ est donnée par :

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

où pour rappel nous avons supposé que $d \neq 0$. La seconde matrice à inverser peut s'écrire sous la forme d'une matrice par lignes tel que :

$$\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Les vecteurs $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$ sont des vecteurs lignes, dont les expressions respectives sont données par :

$$d\mathbf{L}_k^T = \mathbf{w}_k^T \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_j \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] - \mathbf{w}_k^T \mathbf{u}_j [\mathbf{u}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)], \quad (5.18)$$

où :

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k. \quad (5.19)$$

Les calculs détaillant l'obtention des vecteurs lignes $\mathbf{L}_k$ sont donnés en annexe A.3. La matrice $\mathbf{S}$ peut être obtenue en inversant la matrice donnée équation (5.17) une fois encore grâce à l'équation (3.18), ce qui donne :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma = d(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)^T \mathbf{L}_3, \quad (5.20)$$

et :

$$\mathbf{s}_k = d(\mathbf{L}_i \times \mathbf{L}_j). \quad (5.21)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, la matrice jacobienne est recherchée sous la forme

donnée équation (5.3) et donc le vecteur $\mathbf{s}_k$, est à un scalaire près (le k -ième coefficient de la matrice diagonale Σ_a), le vecteur directeur du visseur $\mathbb{S}_k$, voir équation (5.15). En combinant les équations (5.21) et (5.18), ce vecteur est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k = & - \left[\mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{u}_k \right] (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + \left[\mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_k \right] (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \\ & + (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Cette expression peut être considérablement simplifiée en introduisant un vecteur $\mathbf{r}_k^a$ donné par :

$$\mathbf{r}_k^a = \mathbf{r}_{A_k O} = a_{i,k} \mathbf{r}_i + a_{j,k} \mathbf{r}_j, \quad (5.23)$$

avec :

$$a_{i,k} = \frac{\mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{u}_k}{[(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{u}_k} \quad \text{et} \quad a_{j,k} = - \frac{\mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_k}{[(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{u}_k}. \quad (5.24)$$

Ce vecteur définit la position de l'origine par rapport à un point A_k . Puisque $a_{i,k} + a_{j,k} = 1$, alors il appartient à la droite passant par P_i et P_j , puisqu'il est le barycentre de ces points avec des poids $a_{i,k}$ et $a_{j,k}$. Comme nous allons voir par la suite, ce point, et en particulier le vecteur $(\mathbf{r}_k^a - \mathbf{r}_3)$ sont d'une importance capitale pour décrire le mouvement de l'organe terminal du mécanisme. En introduisant le vecteur $\mathbf{r}_k^a$ donné (5.23) dans l'équation (5.22), alors le vecteur $\mathbf{s}_k$ est donné sous la forme d'un produit vectoriel tel que :

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{s}_k^l \times \mathbf{s}_k^r, \quad (5.25)$$

où :

$$\mathbf{s}_k^l = (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_k^r = \mathbf{u}_k \times (\mathbf{r}_k^a - \mathbf{r}_k), \quad (5.26)$$

Le vecteur $\mathbf{s}_k$ est ainsi exprimé sous une forme bien plus compacte que celle présentée équation (5.22). Quant à σ introduit Eq. (5.20), il est possible de prouver que :

$$\sigma = \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \mathbf{w}_k^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \mathbf{w}_k^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i). \quad (5.27)$$

Nous avons désormais complètement déterminé l'expression de la matrice $\mathbf{S}$. Intéressons nous maintenant à la matrice $-\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S}$ qui contient à la fois les pas et les vecteurs localisant l'axe des visseurs $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$ et $\mathbb{S}_3$. Nous appellerons h_k^m le pas du vecteur jacobien $\mathbb{S}_k$ et $\mathbf{r}_k^m$ le vecteur allant d'un point M_k appartenant à l'axe de $\mathbb{S}_k$ à l'origine du repère. Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{s}_k \times \mathbf{r}_k^m + h_k^m \mathbf{s}_k = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{s}_k. \quad (5.28)$$

Pas

Pour n'importe quel visseur ou torseur à pas fini donné par $\mathbf{\$} = [\mathbf{a}^T \quad \mathbf{b}^T]$, son pas est donné par :

$$h = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}. \quad (5.29)$$

Ainsi, en appliquant cette formule avec le vecteur $\mathbf{s}_k$ et le vecteur donné équation (5.28), le pas du visseur $\mathbf{\$}_k$ est donné par :

$$h_k^m = -\frac{[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{s}_k]^T \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k} = -\frac{\omega_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k} (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k^r (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{s}_k^r, \quad (5.30)$$

où le scalaire ω_k est défini par :

$$\omega_k = \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (5.31)$$

Vecteur de positionnement

Il nous reste à déterminer le vecteur permettant de localiser la position de l'axe du visseur $\mathbf{\$}_k$. D'après l'équation (5.28), nous avons :

$$\mathbf{s}_k \times \mathbf{r}_k^m = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} + h_k^m \mathbf{I}_3) \mathbf{s}_k. \quad (5.32)$$

En remplaçant h_k^m par son expression donnée équation (5.30), nous pouvons alors obtenir le vecteur $\mathbf{r}_k^m$, donné par :

$$\mathbf{r}_k^m = m_{i,k} \mathbf{r}_i + m_{j,k} \mathbf{r}_j + m_{k,k} \mathbf{r}_k, \quad (5.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{i,k} &= \frac{\mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [\mathbf{s}_k \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)]^T (\mathbf{s}_k \times \mathbf{w}_j)}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \\ m_{j,k} &= -\frac{\mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [\mathbf{s}_k \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)]^T (\mathbf{s}_k \times \mathbf{w}_i)}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \\ m_{k,k} &= \omega_k \frac{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{n}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

où le scalaire ω_k est donné équation (5.31), et où :

$$\mathbf{n}_k = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{r}_k^a - \mathbf{r}_k) \quad (5.35)$$

est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Ce dernier est défini comme étant le plan de la plateforme mobile, qui passe par les points P_1 , P_2 , et P_3 . Puisqu'il est possible de montrer que $m_{i,k} +$

$m_{j,k} + m_{k,k} = 1$, alors le point M_k appartient à ce plan.

Visseurs de la matrice jacobienne

Grâce au vecteur $\mathbf{s}_k$, au pas h_k^m et au vecteur $\mathbf{r}_k^m$, donnés respectivement équations (5.25), (5.30) et (5.33), nous pouvons construire un visseur unitaire à pas fini donné par :

$$\xi_k^m = \xi_{h_k}^{M_k}(\mathbf{s}_k^m) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k^m \\ \mathbf{s}_k^m \times \mathbf{r}_k^m + h_k^m \mathbf{s}_k^m \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{s}_k^m = \frac{\mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_k\|}. \quad (5.36)$$

Ainsi nous avons :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1\| \xi_1^m & \|\mathbf{s}_2\| \xi_2^m & \|\mathbf{s}_3\| \xi_3^m \end{bmatrix} \Sigma_a, \quad (5.37)$$

avec le scalaire σ donné équation (5.27) et la matrice Σ_a donnée (5.8). Or d'une part, il est possible de montrer que :

$$\frac{\sigma}{\|\mathbf{s}_k\|} = \zeta_0^{v_k} \circ \xi_k^m, \quad (5.38)$$

et d'autre part chaque terme de la diagonale de la matrice Σ_a vaut $\zeta_0^{v_k} \circ \xi^{\dot{q}_k}$. Ainsi, la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ peut enfin être donnée sous la forme de l'équation (5.3), où chacune de ses colonnes vaut :

$$\mathbb{S}_k = \mu_k \xi_k^m, \quad \text{avec} \quad \mu_k = \frac{\zeta_0^{v_k} \circ \xi^{\dot{q}_k}}{\zeta_0^{v_k} \circ \xi_k^m}. \quad (5.39)$$

Les visseurs $\mathbb{S}_k$ ont ainsi la forme que l'on a rencontrée pour les mécanismes plans ainsi que pour les mécanismes du chapitre 4, à savoir un rapport de produit réciproques multiplié à un visseur unitaire. Ce rapport permet d'une part de connaître l'amplification entre la vitesse active $\dot{q}_k$ et la vitesse partielle autour de l'axe de ξ_k^m et d'autre part de décrire analytiquement l'apparition de singularités. Les singularités de type 1 se produisent lorsque $\zeta_0^{v_k} \circ \xi^{\dot{q}_k} = 0$, puisqu'alors la k -ième colonne de la matrice jacobienne est nulle, signifiant que le k -ième actionnement n'a pas d'effet sur le mouvement de la plateforme. Les singularités de type 2 apparaissent lorsque $\zeta_0^{v_k} \circ \xi_k^m = 0$, signifiant que la plateforme a un mouvement incontrôlable puisque $\mathbb{S}_k$ est localement non défini.

D'après les équations (5.2), (5.3) et (5.39), nous avons au final :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2 & \mathbb{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^m & \xi_2^m & \xi_3^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \dot{q}_1 \\ \mu_2 \dot{q}_2 \\ \mu_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Le mécanisme 3 – RPS est ainsi cinématiquement équivalent à une chaîne sérielle à trois liaisons hélicoïdales de pas h_k^m actionnées par une vitesse de rotation $\mu_k \dot{q}_k$. La figure 5.3a montre un mécanisme 3 – RPS en configuration cubique, dont la plateforme tourne autour d'un axe donné. La figure 5.3b montre le modèle sériel équivalent, produisant le même mouvement de rotation.

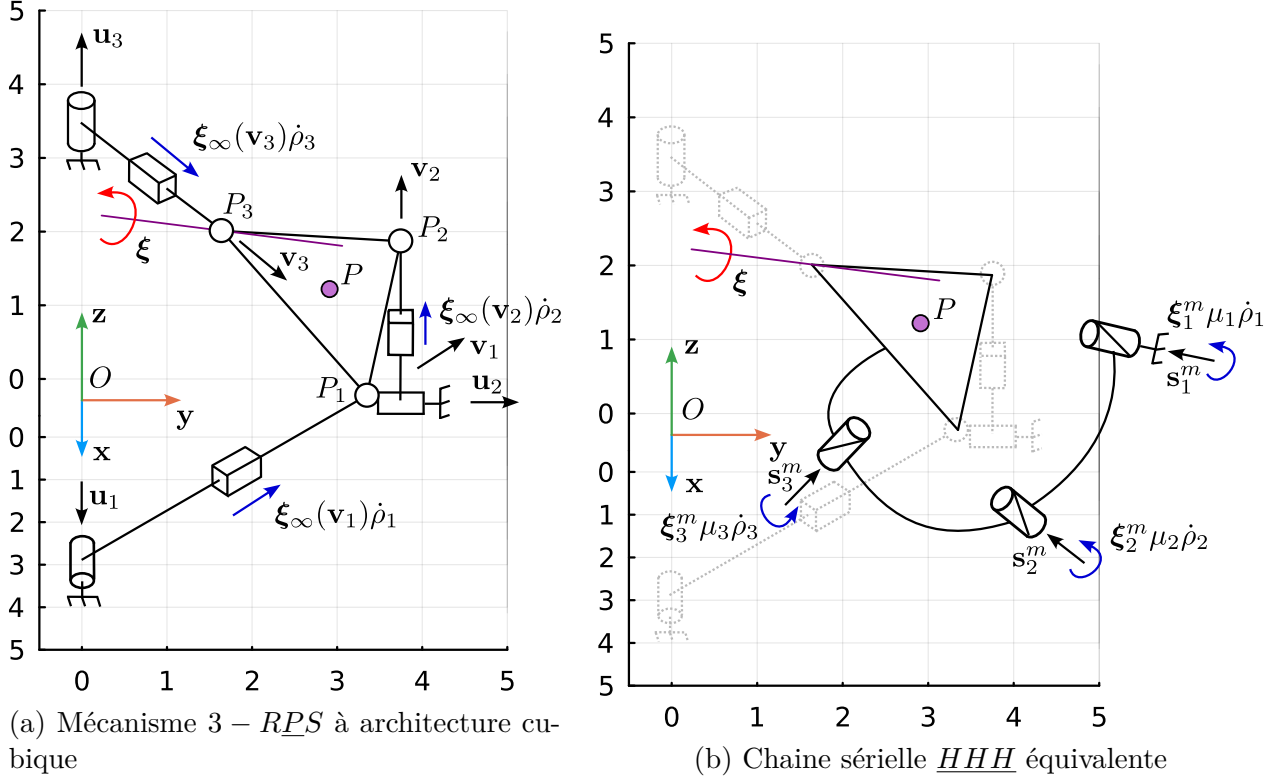


FIGURE 5.3 Équivalences instantanées entre un mécanisme parallèle à 3 DDLs et une chaîne sérielle à 3 DDLs

Lorsque le mécanisme 3 – RPS est en configuration triangulaire, voir figure 5.1b et que sa plateforme est parallèle au plan contenant les axes de ses trois liaisons rotoïdes, les équations présentées dans cette section doivent être légèrement modifiées. On peut prouver alors que la matrice jacobienne est localement constituée de trois visseurs à pas nuls, dont les axes passent par les centres des liaisons sphériques. La preuve est donnée en annexe A.4.

5.1.3 Remarques et commentaires

Précisions sur l'inversion analytique

Pour établir l'expression analytique de la matrice jacobienne, nous avons pris comme hypothèse le fait que la matrice $\mathbf{D}$, voir équation (5.12), soit non singulière. Cela est tout le temps vrai pour des mécanismes 3 – *RPS* agencés de manière à ce que les axes des liaisons rotoïdes soient linéairement indépendants. C'est typiquement le cas pour un 3 – *RPS* cubique, voir figure 5.1a, puisque le déterminant de la matrice $\mathbf{D}$ vaut en tout temps $d = 1$. Cependant, pour un 3 – *RPS* triangulaire, voir figure 5.1b, nous avons en tout temps $d = 0$ puisque les trois axes des liaisons rotoïdes sont dans un même plan, et donc la démonstration ne fonctionne pas *a priori*.

Or, si la matrice $\mathbf{D}$ est singulière, il existe une forme alternative de l'équation (5.14), voir [191], qui requiert que $\mathbf{A}$ soit inversible à la place de la matrice $\mathbf{D}$. Les calculs dans cette situation ne sont pas présentés car peu intéressants. Dans les deux cas, nous obtenons la même inverse de la matrice $\mathbf{\Pi}^{-1}$, puisque qu'une inverse de matrice est unique. La même matrice jacobienne serait ainsi obtenue. Comme montré plus haut, le scalaire $d = \det(\mathbf{D})$ n'intervient à aucun moment dans l'expression finale de la matrice $\mathbf{J}$.

Précision sur le choix des torseurs réciproques

Bien que cela n'ait pas été encore précisé, on considère que les cinq visseurs intervenant dans une branche sérielle connectant la plateforme au bâti, voir équation (5.4), sont linéairement indépendants. Il existe alors un unique torseur réciproque à l'ensemble des liaisons. Il s'agit des trois torseurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_1}$, $\zeta_0^{\mathbf{u}_2}$ et $\zeta_0^{\mathbf{u}_3}$ donnés équation (5.9). Ces derniers représentent une force pure appliquée à la liaison sphérique et dont l'axe est parallèle à celui de la liaison rotoïde de leur branche réciproque.

Les torseurs $\zeta_0^{\mathbf{v}_1}$, $\zeta_0^{\mathbf{v}_2}$ et $\zeta_0^{\mathbf{v}_3}$ donnés équation (5.6) sont seulement réciproques aux visseurs associés aux liaisons passives, ces dernières sont seulement au nombre de quatre par branche. Ainsi, il existe une infinité de choix possibles pour $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$, du moment que son axe passe par le centre de la liaison sphérique localisée au point P_k et par au moins un point de l'axe du visseur $\xi_0^{Q_k}(\mathbf{q}_k)$, c'est-à-dire la droite définie par la liaison rotoïde de la branche. L'ensemble des droites acceptables pour le choix de l'axe du visseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ est montré figure 5.4. Ces droites constituent donc un faisceau de droites centré au point P_k contenues dans le plan formé par l'axe de la liaison rotoïde et du centre de l'articulation sphérique. La seule droite qui ne puisse pas être choisie dans ce faisceau est la droite portée par le vecteur $\mathbf{u}_k$, auquel cas les torseurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ et $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ seraient identiques.

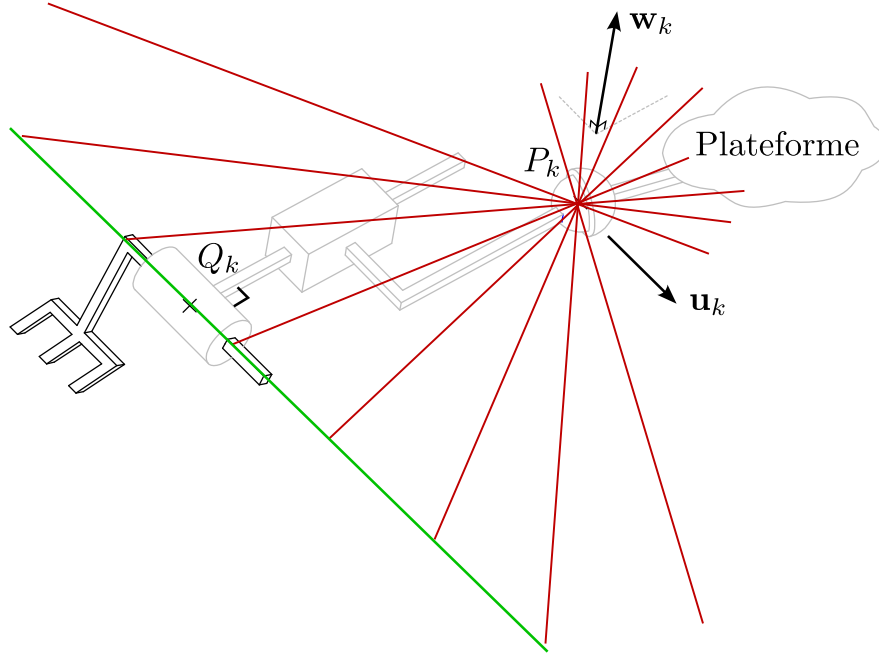


FIGURE 5.4 Faisceau plan de centre P_k contenant les axes possibles du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ pour une branche RPS

Cela peut paraître contre-intuitif que chaque colonne de la matrice jacobienne soit unique alors que son expression dépend d'un choix arbitraire parmi une infinité de possibilités. Cependant, il faut remarquer que dans l'ensemble des équations régissant les paramètres des vecteurs de la matrice jacobienne, jamais un vecteur $\mathbf{v}_k$ apparaît « isolé ». En effet, ce dernier est toujours combiné au vecteur $\mathbf{u}_k$ à travers le vecteur $\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$. Ainsi, ce n'est pas tant la direction de $\mathbf{v}_k$ qui importe mais celle de $\mathbf{w}_k$. Or, ce dernier, peu importe la direction choisie pour $\mathbf{v}_k$, sera toujours perpendiculaire au plan contenant l'axe de la liaisons rotoïde et la liaison sphérique, voir figure 5.4 à nouveau.

Pour la suite, on introduit $\mathcal{P}_k$ comme le plan passant par le point P_k et de normale $\mathbf{w}_k$. Ce dernier étant le plan contenant le faisceau représenté figure 5.4.

Cas du 3 – RPS

Pour établir le modèle cinématique direct du 3 – RPS , nous avons supposé que les liaisons prismatiques étaient actionnées. Si l'on suppose que ce sont les liaisons rotoïdes qui le sont, alors nous avons :

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi}^{\dot{q}_i} = \boldsymbol{\xi}_0^{Q_k}(\mathbf{q}_k), \quad (5.41)$$

voir équation (5.4). Le visseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ est choisi comme étant réciproque à l'ensemble des liaisons de la branche k et est donc identique à celui sélectionné pour le 3 – RPS , voir figure 5.5.

Le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ est quant à lui choisi pour être à la fois réciproque à la liaison prismatique à la liaison sphérique. Il s'agit d'un torseur à pas nul passant par le centre de cette dernière et perpendiculaire à l'axe de l'articulation prismatique. En reprenant les deux géométries de jambes montrées figure 5.2, on peut choisir dans les deux cas $\mathbf{v}_k = \mathbf{p}_k \times \mathbf{q}_k$, comme montré figure 5.5.

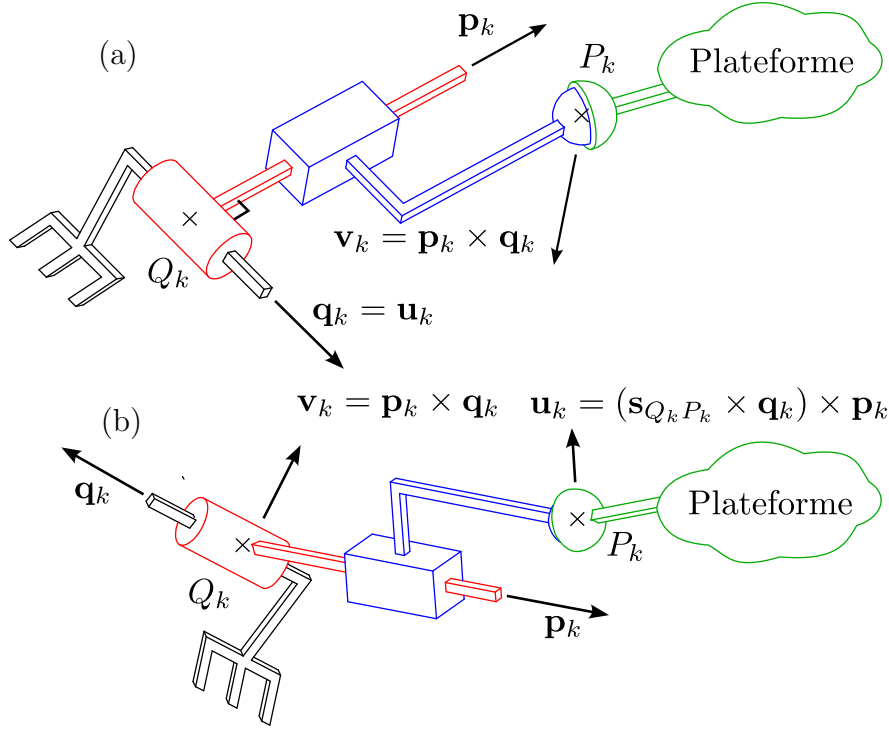


FIGURE 5.5 Position des axes des torseurs réciproques pour deux géométries de branches $\underline{RPS}$

Puisque les torseurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ et $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ sont tous deux à pas nuls et appliqués au centre de la liaison sphérique, alors les matrices jacobiennes parallèles et sérielles seront exactement celles données équation (5.11). Ainsi, les matrices jacobiennes du mécanisme 3- $\underline{RPS}$ et du mécanisme 3- $\underline{RPS}$ ont la même expression. La seule différence est liée à la nature du visseur $\xi^{\dot{q}_k}$ associé à la vitesse active de la branche, qui est à pas infini si la liaison prismatique est actionnée et à pas nul si la liaison rotoïde est actionnée. Ainsi, le paramètre μ_k , qui dépend de $\xi^{\dot{q}_k}$ voir équation (5.39) sera homogène à l'inverse d'une longueur pour le premier cas et sans unité dans le second.

Les colonnes de la matrice jacobienne sont, comme on vient de le dire identiques, pour les mécanismes 3- $\underline{RPS}$ et 3- $\underline{RPS}$. Cependant, l'axe du visseur unitaire ξ_k^m n'est pas orienté de la même manière dans les deux cas. Pour les mêmes raisons qu'évoquées en 5.1.3, le choix du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ pour un mécanisme 3- $\underline{RPS}$ n'est pas unique. Il existe une infinité de torseurs à

pas nuls sélectionnables. Ces derniers doivent respecter deux conditions. Premièrement, leurs axes doivent passer par le centre de la liaison sphérique et deuxièmement être perpendiculaires à la direction de la liaison prismatique. L'ensemble des axes possibles pour le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ est illustré par le faisceau plan de la figure 5.6. Puisque le vecteur $\mathbf{u}_k$ est aussi contenu dans ce plan, alors le vecteur $\mathbf{w}_k$ est le vecteur normal à ce même plan. Ainsi, la direction du vecteur $\mathbf{w}_k$ pour un mécanisme 3 – $\underline{RPS}$ diffère de celle du mécanisme 3 – $R\underline{PS}$, voir figure 5.4 pour comparaison. Par conséquent les axes des visseurs contenus dans la matrice jacobienne seront orientés différemment selon le choix d'actionnement du mécanisme.

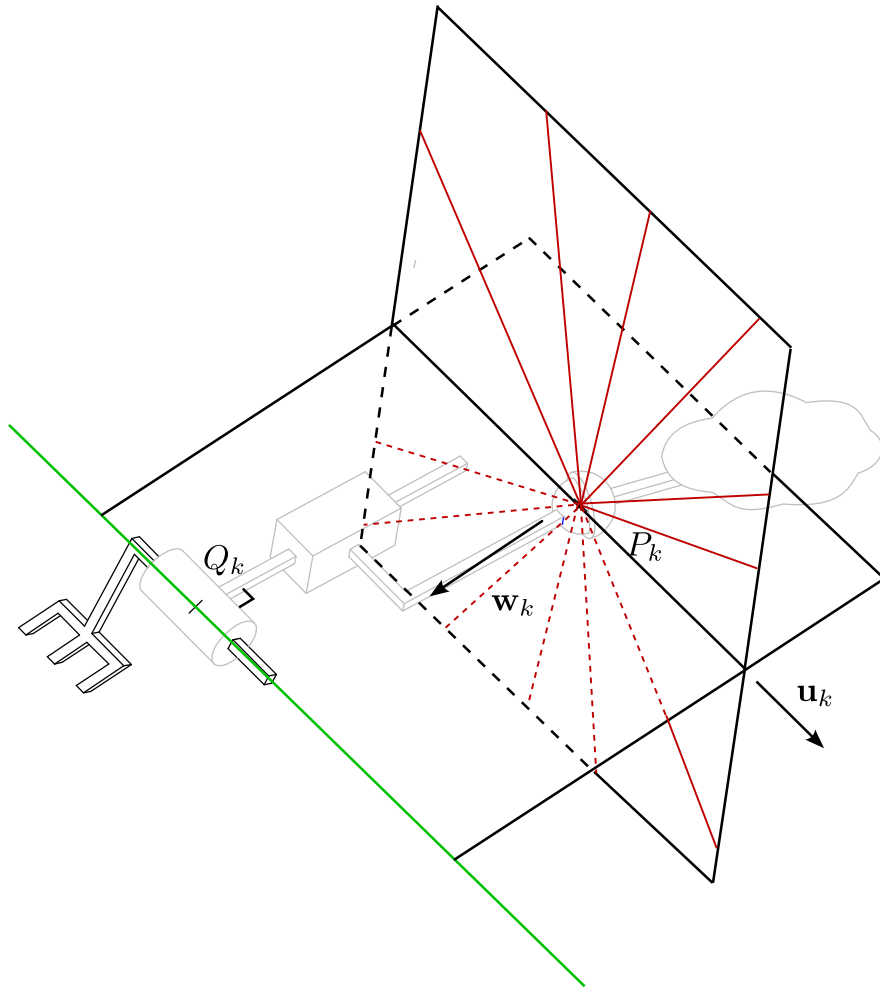


FIGURE 5.6 Faisceau plan de centre P_k contenant les axes possibles du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ pour une branche $\underline{RPS}$

5.1.4 Analyse des mobilités et expressions alternatives de la matrice jacobienne

Dans cette section, nous allons justifier par une analyse de mobilités les calculs obtenus dans la section 5.1.2. L'analyse de mobilité va également nous permettre d'exprimer les visseurs unitaires ξ_k^m , voir équation (5.36) sous des formes plus simples, permettant de décrire plus facilement les mouvements de la plateforme d'un mécanisme 3 – *RPS*. On va considérer que vecteurs directeurs des liaisons rotoïdes et prismatiques des trois branches sont perpendiculaires entre eux, voir figures 5.2 et 5.5 (haut). On considérera également que le mécanisme est monté en configuration cubique, voir figure 5.1a.

Tout d'abord, puisque les visseurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$, voir équation (5.9), sont choisis pour être réciproques à l'ensemble des liaisons de leurs pattes respectives, alors le mouvement de la plateforme est contraint par l'ensemble suivant :

$$\mathcal{T} = \{\zeta_0^{\mathbf{u}_1}, \zeta_0^{\mathbf{u}_2}, \zeta_0^{\mathbf{u}_3}\} \quad (5.42)$$

Un ensemble de visseurs réciproques à $\mathcal{T}$ est donné par :

$$\mathcal{V} = \mathcal{T}^\perp = \{\xi_1^p, \xi_2^p, \xi_3^p\}, \quad (5.43)$$

où :

$$\xi_k^p = \xi_0^{P_k}(\mathbf{s}_k^p) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k^p \\ \mathbf{s}_k^p \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

et :

$$\mathbf{s}_k^p = \frac{[\mathbf{u}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)] \times [\mathbf{u}_j \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)]}{\| [\mathbf{u}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)] \times [\mathbf{u}_j \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] \|}. \quad (5.45)$$

Chaque visseur ξ_k^p est un visseur à pas nul, passant par la liaison sphérique en P_k . L'axe du visseur ξ_k^p est situé à l'intersection de deux plans. Le premier, représenté en bleu figure 5.7, passe par les points P_i et P_k et contient l'axe du torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_i}$. Le second, en rose sur la même figure passe par les points P_j et P_k et contient l'axe du torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_j}$. L'axe du visseur ξ_k^p est représenté par une droite verte sur la figure 5.7. Comme montré sur cette figure, le visseur ξ_k^p est bien réciproque aux visseurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_i}$, $\zeta_0^{\mathbf{u}_j}$ et $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$, représentés par des droites rouges, puisque son axe intersecte ceux des trois torseurs.

L'ensemble $\{\mathcal{V}\}$, voir équation (5.43) représente les mobilités globales de l'organe terminal qui sont trois rotations autour d'axes non concourants, voir équation (5.44). Ce qui va nous intéresser ici est la mobilité de la plateforme soumise au seul k -ième actionnement. Autrement dit, nous cherchons les mobilités du visseur ξ_k^m , voir équation (5.39).

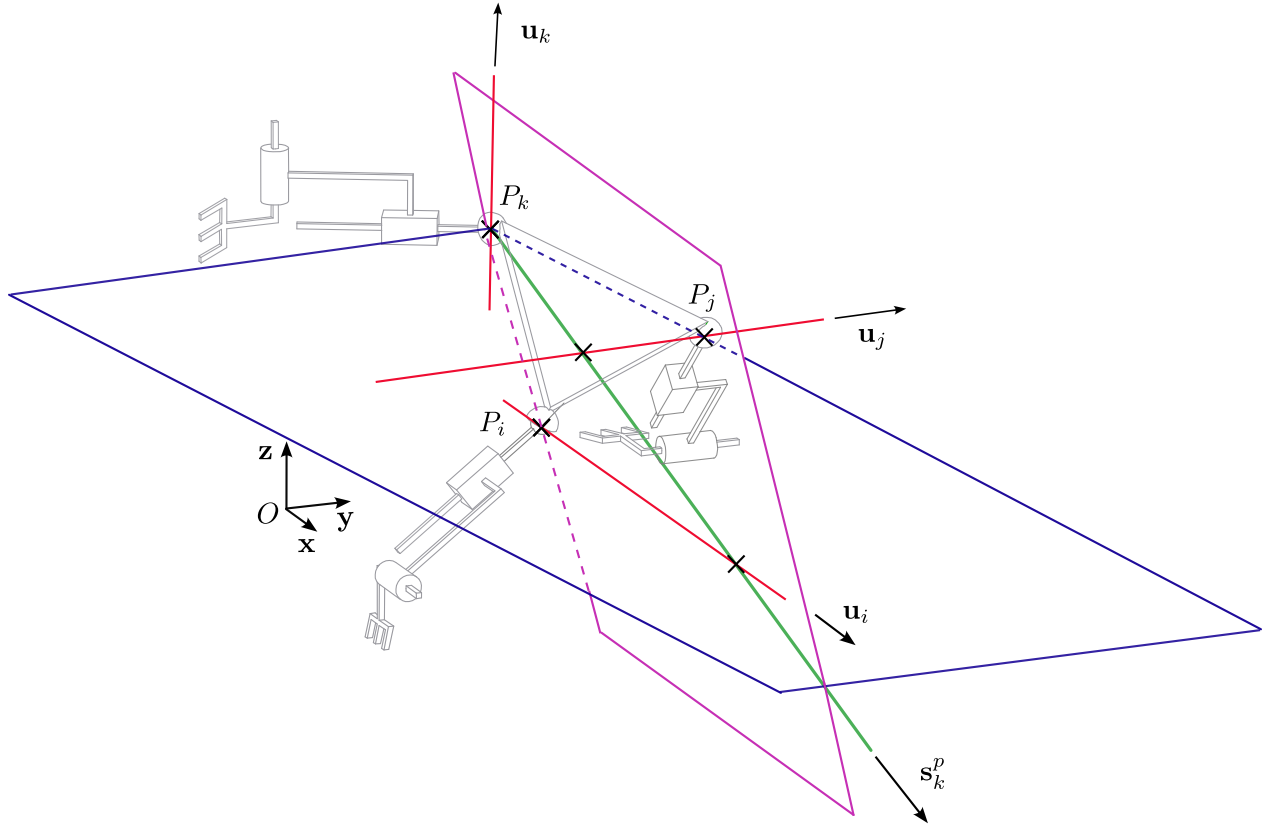


FIGURE 5.7 Position de l'axe du visseur ξ_k^p dans un mécanisme 3 – RPS

Pour ce faire, nous allons considérer les actionneurs des jambes i et j comme bloquées. Ainsi, ces jambes perdent chacune un degré de liberté et les torseurs $\zeta_0^{\mathbf{v}i}$ et $\zeta_0^{\mathbf{v}j}$ deviennent alors également réciproques à l'ensemble des liaisons de leurs jambes respectives. Par conséquent, le mouvement possible de la plateforme soumis au seul actionnement de la k -ième jambe est réciproque à un ensemble donné par :

$$\mathcal{T}_k = \underbrace{\{\zeta_0^{\mathbf{u}i}, \zeta_0^{\mathbf{u}j}, \zeta_0^{\mathbf{u}k}\}}_{\mathcal{T}} \cup \{\zeta_0^{\mathbf{v}i}, \zeta_0^{\mathbf{v}j}\}. \quad (5.46)$$

Il est aisé de vérifier que le vecteur ξ_k^m , calculé en section 5.1.2 et donné équation (5.36) est bien réciproque aux cinq torseurs de l'ensemble $\mathcal{T}_k$. Cependant, pour obtenir une forme alternative à ξ_k^m , nous allons supposer que nous ne connaissons pas *a priori* ce visseur, et nous allons tâcher de retrouver ce résultat à partir de l'ensemble $\mathcal{T}_k$.

Somme de visseurs élémentaires

Il n'est en règle générale pas aisé de trouver dans l'espace un visseur réciproque à cinq torseurs. La méthode la plus ancienne et la plus utilisée a été proposée par Ball [1]. Elle consiste à prendre deux sous-ensembles de quatre torseurs parmi les cinq. Pour chaque sous ensemble de torseurs, il est possible d'en trouver deux visseurs réciproques. La combinaison linéaire de ces deux visseurs génère une surface réglée appelée cylindroïde. Le visseur réciproque recherché se trouve à l'intersection de ces deux surfaces ainsi créées. La figure 5.8 montre un exemple de cylindroïde générée par deux visseurs dont les axes sont respectivement représentés en bleu et vert.

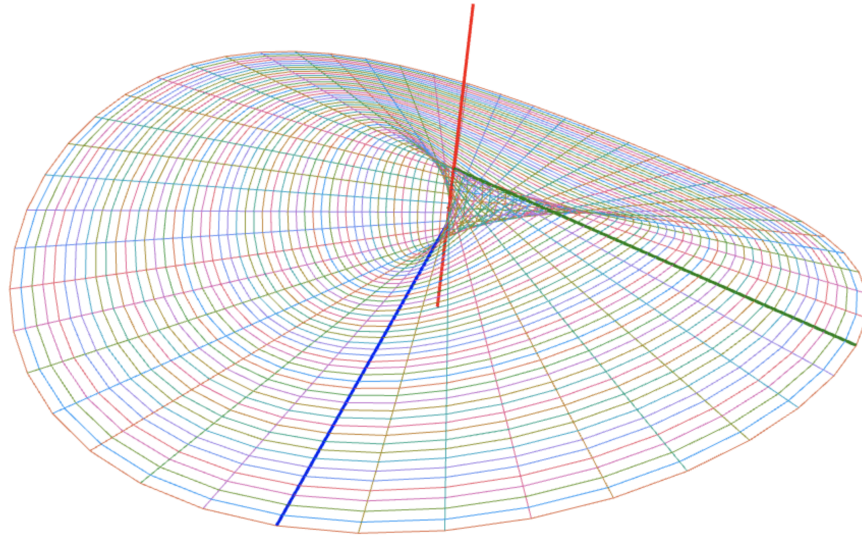


FIGURE 5.8 Représentation spatiale d'une cylindroïde

Il existe cependant une autre méthode pour trouver un visseur réciproque à un ensemble de cinq torseurs. Cette méthode requiert seulement un seul sous ensemble de quatre torseurs parmi ceux de l'ensemble $\mathcal{T}_k$ [193]. Le sous ensemble que nous sélectionnerons est donné par :

$$\mathcal{T}_k^- = \mathcal{T}_k \setminus \{\zeta_0^{\mathbf{u}_k}\} = \underbrace{\{\zeta_0^{\mathbf{u}_i}, \zeta_0^{\mathbf{v}_i}\}}_{\text{réciproque à chaque liaison de la patte } i} \cup \underbrace{\{\zeta_0^{\mathbf{u}_j}, \zeta_0^{\mathbf{v}_j}\}}_{\text{réciproque à chaque liaison de la patte } j} . \quad (5.47)$$

L'ensemble $\mathcal{T}_k^-$ correspond aux torseurs appliqués à la plateforme par les jambes i et j . En d'autres termes, peu importe la géométrie de la jambe k , le visseur de la plateforme ne pourra être autre chose qu'une combinaison linéaire entre les visseurs réciproques à l'ensemble $\mathcal{T}_k^-$.

Soient ξ_k^a et ξ_k^b les deux visseurs en question. Nous avons alors :

$$\mathcal{V}_k^- = \{\mathcal{T}_k^-\}^\perp = \{\xi_k^a, \xi_k^b\}. \quad (5.48)$$

Les visseurs ξ_k^a et ξ_k^b sont donnés respectivement par :

$$\xi_k^a = \xi_0^{A_k}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{r}_k^a \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

et :

$$\xi_k^b = \xi_0^{B_k}(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) = \begin{bmatrix} (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \\ (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times \mathbf{r}_k^b \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Le visseur ξ_k^a modélise une rotation pure autour de la droite passant par les centre des liaisons sphériques des jambes i et j . Le point d'application du visseur ξ_k^a a été choisi comme étant le point A_k , voir équation (5.23) bien que n'importe quel point de cette droite aurait pu être choisi.

Le visseur ξ_k^b voir équation (5.50), est également un visseur à pas nul dont l'axe est situé à l'intersection des plans $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$, qui sont définis pour rappel comme étant respectivement le plan passant par le point P_i et de normale $\mathbf{w}_i$ et le plan passant par le point P_j et de normale $\mathbf{w}_j$. L'axe de ce visseur passe par un point B_k qui est choisi comme étant le point situé à l'intersection du plan $\mathcal{P}_i$, du plan $\mathcal{P}_j$ et du plan de la plateforme $\mathcal{P}$. Ainsi, le vecteur $\mathbf{r}_k^b$ qui définit la position de l'origine par rapport au point B_k est donné par :

$$\mathbf{r}_k^b = \mathbf{r}_{B_k O} = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{w}_i (\mathbf{w}_j \times \mathbf{n}_k) + \mathbf{r}_j^T \mathbf{w}_j (\mathbf{n}_k \times \mathbf{w}_i) + \mathbf{r}_k^T \mathbf{n}_k (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \quad (5.51)$$

où le vecteur $\mathbf{n}_k$ est le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et est défini équation (5.35). L'équation précédente nous donne alors :

$$\mathbf{r}_k^b = b_{i,k} \mathbf{r}_i + b_{j,k} \mathbf{r}_j + b_{k,k} \mathbf{r}_k \quad (5.52)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_{i,k} &= \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{w}_i (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)^T \mathbf{w}_j}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \\ b_{j,k} &= -\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)^T \mathbf{w}_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{w}_j}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \quad \text{et} \\ b_{k,k} &= \frac{\omega_k}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

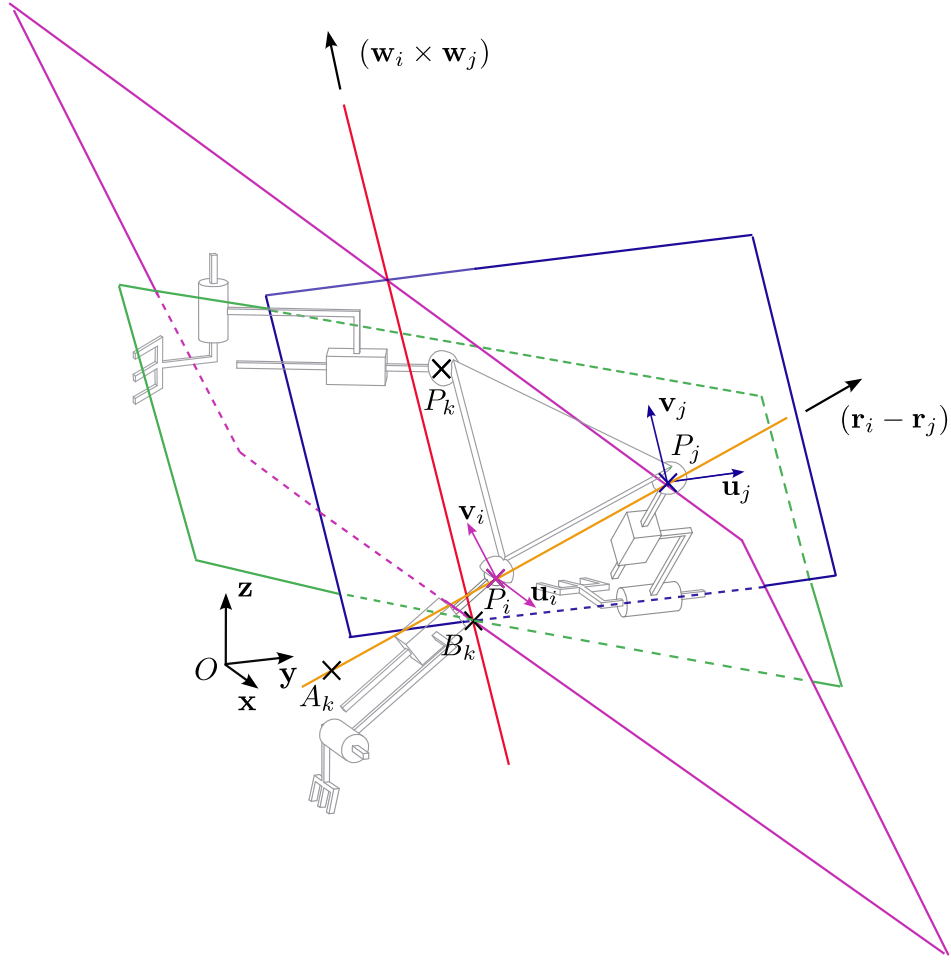


FIGURE 5.10 Position des axes des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b lorsque les liaisons rotoïdes des jambes i et j d'un mécanisme 3 – RPS sont actionnées

Maintenant que nous avons identifié les visseurs ξ_k^a et ξ_k^b , réciproques au sous ensemble $\mathcal{T}_k^-$, voir équation (5.48), il est possible d'utiliser la méthode donnée en [193] pour déterminer le visseur réciproque à l'ensemble de cinq torseurs de l'ensemble $\mathcal{T}_k$. Ce dernier doit être en même temps une combinaison linéaire de ξ_k^a et ξ_k^b , tout en étant réciproque au cinquième torseur de l'ensemble $\mathcal{T}_k$, à savoir $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$. D'après [193], ce visseur est donné par :

$$(\zeta_0^{\mathbf{u}_k} \circ \xi_k^a) \xi_k^b - (\zeta_0^{\mathbf{u}_k} \circ \xi_k^b) \xi_k^a, \quad (5.54)$$

avec :

$$\zeta_0^{\mathbf{u}_k} \circ \xi_k^b = -(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k^r \quad \text{et} \quad \zeta_0^{\mathbf{u}_k} \circ \xi_k^a = -(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{s}_k^r, \quad (5.55)$$

où le vecteur $\mathbf{s}_k^r$ est donné équation (5.26). Les deux coefficients de l'équation (5.54) correspondent aux produits scalaires que l'on obtient en développant le triple produit vectoriel du

vecteur $\mathbf{s}_k$, voir équation (5.25), c'est-à-dire :

$$\mathbf{s}_k = [(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \times \mathbf{s}_k^r = [(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k^r] (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{s}_k^r] (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j). \quad (5.56)$$

Au final, en combinant les équations (5.54) et (5.55) nous obtenons un visseur proportionnel au visseur $\boldsymbol{\xi}_k^m$, plus précisément, nous avons :

$$\boldsymbol{\xi}_k^m = \frac{1}{\|\mathbf{s}_k\|} [(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k^r \boldsymbol{\xi}_k^a - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{s}_k^r \boldsymbol{\xi}_k^b], \quad (5.57)$$

Dans l'équation précédente, le visseur $\boldsymbol{\xi}_k^m$ n'est plus écrit comme un visseur à pas fini représentant un mouvement hélicoïdal, mais comme la somme pondérée de deux visseurs à pas nuls, qui tous deux peuvent être facilement décrits grâce à la géométrie du mécanisme, voir figures 5.9 et 5.10. À noter que l'analyse de mobilité ne peut se substituer au calcul effectué en section 5.1.2. En effet, bien que l'on retrouve le visseur unitaire $\boldsymbol{\xi}_k^m$, ou du moins un visseur proportionnel à ce dernier, on a aucune information sur l'amplitude en vitesse de l'organe terminal engendré un des actionnements du mécanisme.

Produit de torseurs Nous allons désormais donner une représentation alternative du visseur $\boldsymbol{\xi}_k^m$, mais cette fois-ci à partir de torseurs. Comme nous l'avons évoqué plus tôt, l'ensemble des combinaisons possibles entre deux visseurs génère une surface réglée appelée cylindroïde. Puisque le visseur $\boldsymbol{\xi}_k^m$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des visseurs $\boldsymbol{\xi}_k^a$ et $\boldsymbol{\xi}_k^b$, voir équation (5.54) et (5.57), alors son axe appartient nécessairement à la cylindroïde engendrée par $\boldsymbol{\xi}_k^a$ et $\boldsymbol{\xi}_k^b$. Une cylindroïde possède un axe central, représenté en rouge figure 5.8.

À partir des visseurs $\boldsymbol{\xi}_k^a$ et $\boldsymbol{\xi}_k^b$, il est possible d'obtenir un torseur dont l'axe est orienté selon cet axe central, en effectuant le calcul suivant :

$$\boldsymbol{\zeta}_k^l = \boldsymbol{\xi}_k^b \times \boldsymbol{\xi}_k^a, \quad (5.58)$$

où $\times$ désigne le produit de visseurs. Cela nous donne le torseur $\boldsymbol{\zeta}_k^l$ donné par :

$$\boldsymbol{\zeta}_k^l = \boldsymbol{\zeta}_{h_l}^{L_k}(\mathbf{s}_k^k) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k^l \\ \mathbf{s}_k^l \times \mathbf{r}_k^l + h_k^l \mathbf{s}_k^l \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Le vecteur directeur de l'axe du torseur ζ_k^l est perpendiculaire à ceux des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b et vaut $(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, voir équation (5.26). Son pas est donné par :

$$h_k^l = -\frac{\omega_k}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k^l} (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (5.60)$$

où le scalaire ω_k est donné équation (5.31). Si on définit L_k comme étant le point d'intersection du torseur avec le plan $\mathcal{P}$, alors la position de l'origine par rapport à ce point est donnée par :

$$\mathbf{r}_k^l = \mathbf{r}_{L_k O} = l_{i,k} \mathbf{r}_i + l_{j,k} \mathbf{r}_j, \quad (5.61)$$

avec :

$$l_{i,k} = \frac{1}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k^l} \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{s}_k^l, \quad \text{et} \quad l_{j,k} = -\frac{1}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k^l} \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{s}_k^l. \quad (5.62)$$

Puisque nous avons $l_{i,k} + l_{j,k} = 1$, alors l'axe de ce visseur passe par la droite passant par les liaisons sphériques aux points P_i et P_j . En d'autres termes, la torseur ζ_k^l intersecte l'axe du visseur ξ_k^a . De plus, puisque le torseur ζ_k^l est par construction réciproque à la cylindroïde engendrée par les visseurs ξ_k^a et ξ_k^b , alors l'axe de dernier intersecte également celui du visseur ξ_k^b .

Le torseur ζ_k^l a été obtenu par le produit de visseurs entre ξ_k^a et ξ_k^b et est donc par définition réciproque à ces derniers. Ainsi, le torseur ζ_k^l appartient nécessairement à l'ensemble $\mathcal{T}_k^-$, voir équation (5.48). En effet, il est possible de montrer que le torseur ζ_k^l peut s'écrire comme combinaison linéaire des torseurs de l'ensemble $\mathcal{T}_k^-$:

$$\begin{aligned} \zeta_k^l = & -[\mathbf{w}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{v}_i \zeta_0^{\mathbf{u}_i} + [\mathbf{w}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{u}_i \zeta_0^{\mathbf{v}_i} \\ & [\mathbf{w}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{v}_j \zeta_0^{\mathbf{u}_j} - [\mathbf{w}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{v}_j \zeta_0^{\mathbf{v}_j}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Soit un second torseur ζ_k^r tel que :

$$\zeta_k^r = \zeta_0^{R_k}(\mathbf{s}_k^r) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k^r \\ \mathbf{s}_k^r \times \mathbf{r}_k^r \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Ce torseur est à pas nul et son vecteur directeur est donné équation (5.26). Soit le point R_k défini comme étant le point à l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de l'axe du torseur ζ_k^r . La position de l'origine par rapport à ce point est donnée par :

$$\mathbf{r}_k^r = \mathbf{r}_{R_k O} = r_{i,k} \mathbf{r}_i + r_{j,k} \mathbf{r}_j, \quad (5.65)$$

avec :

$$r_{i,k} = \frac{1}{\mathbf{s}_k^l T \mathbf{s}_k^r} \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{s}_k^r, \quad \text{et} \quad r_{j,k} = -\frac{1}{\mathbf{s}_k^l T \mathbf{s}_k^r} \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{s}_k^r. \quad (5.66)$$

Puisque $r_{i,k} + r_{j,k} = 1$, ce point est également situé sur la droite passant par les liaisons sphériques aux points P_i et P_j . Ainsi l'axe du torseur ζ_k^r intersecte celui du visseur ξ_k^a . De plus, il est possible de prouver que l'axe du torseur ζ_k^r intersecte également l'axe du visseur ξ_k^b . Or puisque ζ_k^r , ξ_k^a et ξ_k^b ont tous trois des pas nuls, alors le torseur ζ_k^r est réciproque à la fois au visseur ξ_k^a et au visseur ξ_k^b . Il est en effet possible de montrer que ζ_k^r , tout comme ζ_k^l peut s'écrire comme une combinaison linéaire des torseurs contenus dans l'ensemble $\mathcal{T}_k^-$, à savoir :

$$\begin{aligned} \zeta_k^r = \frac{1}{\mathbf{s}_k^l T \mathbf{s}_k^r} & \left[\mathbf{w}_j^T \mathbf{s}_k^r [\mathbf{v}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{s}_k^r \zeta_0^{\mathbf{u}_i} - \mathbf{w}_j^T \mathbf{s}_k^r [\mathbf{u}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{s}_k^r \zeta_0^{\mathbf{v}_i} \right. \\ & \left. - \mathbf{w}_i^T \mathbf{s}_k^r [\mathbf{v}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{s}_k^r \zeta_0^{\mathbf{u}_j} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{s}_k^r [\mathbf{u}_j \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{s}_k^r \zeta_0^{\mathbf{v}_j} \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Nous avons donc introduits deux torseurs ζ_k^l et ζ_k^r . En calculant le produit entre ces derniers, nous obtenons alors la relation suivante :

$$\xi_k^m = \frac{1}{\|\mathbf{s}_k\|} (\zeta_k^l \times \zeta_k^r). \quad (5.68)$$

Ainsi, l'équation (5.68) fournit une nouvelle expression du visseur ξ_k^m . Contrairement à l'équation (5.57) qui définit ce visseur comme la somme de mouvements élémentaires possibles, l'équation (5.68) définit le même visseur par le produit des contraintes appliquées à la plateforme.

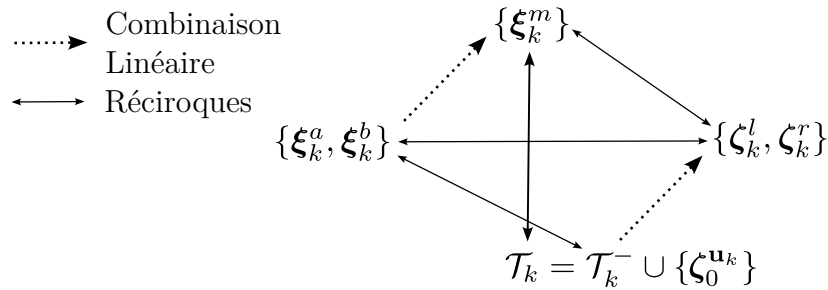


FIGURE 5.11 Relations entre les torseurs ζ_k^l et ζ_k^r et les visseurs ξ_k^a , ξ_k^b , et ξ_k^m

Les relations entre les différents visseurs et torseurs introduits dans cette section sont rassemblées dans le schéma montré figure 5.11. La figure 5.12 montre quant à elle les relations spatiales entre les axes de ces différents visseurs et torseurs. L'axe du visseur ξ_k^a est représenté en bleu foncé, ce dernier passe par les liaisons sphériques aux points P_i et P_j . L'axe du vis-

seur ξ_k^b est représenté en bleu clair. Le quadrillage montre la cylindroïde générée par ces deux visseurs. L'axe du visseur ξ_k^m est représenté en vert, on peut constater que son axe appartient bien à la cylindroïde. La droite rouge est l'axe central de la cylindroïde et représente l'axe du torseur ζ_k^l . Enfin, l'axe du torseur ζ_k^r est représenté en orange. Comme on peut le voir sur la figure, l'axe du torseur ζ_k^l intersecte les axes des trois visseurs, de même pour l'axe du torseur ζ_k^r .

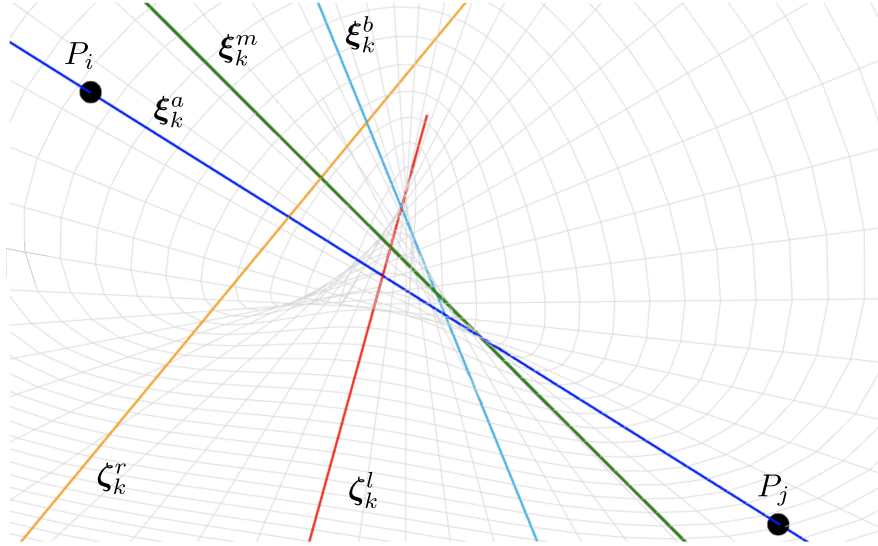


FIGURE 5.12 Représentation spatiale des axes des torseurs ζ_k^l et ζ_k^r et des axes des visseurs ξ_k^a , ξ_k^b , et ξ_k^m

5.1.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette section au modèle cinématique direct d'un mécanisme spatial à trois degrés de liberté qui n'est ni purement rotationnel, ni purement translationnel. En section 5.1.2, nous avons calculé la matrice jacobienne du mécanisme, et nous avons établi que cette dernière est composée de trois visseurs à pas fini, dont l'expression analytique a été donnée équation (5.39). Ainsi, nous avons pu établir une équivalence directe entre ce mécanisme parallèle et une chaîne sérielle à trois liaisons hélicoïdales, voir équation (5.40) et la figure 5.3.

Puis, en section 5.1.4, nous avons étudié les mobilités du mécanisme grâce à la théorie des visseurs, ce qui nous a permis de valider les équations établies en section 5.1.2. Nous avons également pu donner deux autres expressions des colonnes de la matrice jacobienne, l'une comme combinaison linéaire de visseurs élémentaires et l'autre comme produits de torseurs réciproques, voir respectivement équations (5.57) et (5.68).

5.2 Mécanisme 6 – *UPS* triangulaire

Nous allons désormais nous intéresser dans ce chapitre à un deuxième mécanisme qui est le mécanisme 6 – *UPS* triangulaire montré figure 5.13. Il s'agit d'un mécanisme pleinement actionné à six degrés de liberté. Comme nous allons le voir, ce dernier possède beaucoup de similitudes avec le mécanisme 3 – *RPS*. Les six jambes qui composent le mécanisme 6 – *UPS* sont connectées au bâti à six points d'ancrage tandis qu'elles ne sont connectées à la plateforme qu'à seulement trois points appelés P_1 , P_2 et P_3 . Ainsi, nous appellerons ce mécanisme le 6 – *UPS* triangulaire, pour le différencier d'un mécanisme parallèle à six degrés de liberté dont la plateforme possède six points d'attaches distincts [152], comme par exemple le mécanisme classique de Stewart-Gough.

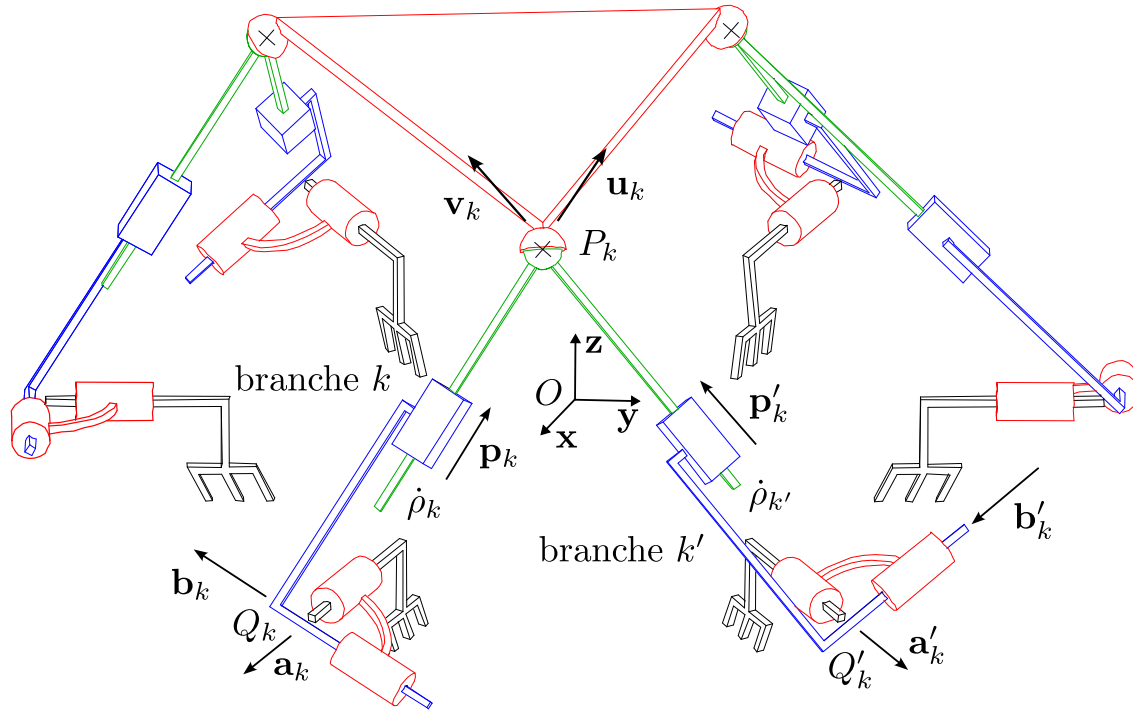


FIGURE 5.13 Mécanisme 6 – *UPS* triangulaire

Les chaînes sérielles qui se partagent la liaison sphérique au point P_k seront appelées respectivement k et k' . On supposera le mécanisme actionné par les six liaisons prismatiques. Celle de la jambe k est actionnée par une vitesse linéaire $\dot{q}_k$ et celle de la jambe k' par une vitesse $\dot{q}'_k$. L'ensemble des six vitesses forme le vecteur des vitesses actionnées :

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}'_1 \quad \dot{q}'_2 \quad \dot{q}'_3]^T \quad (5.69)$$

Soient Q_k et Q'_k les centres des liaisons universelles des jambes k et k' . Les vitesses passives autour des axes $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ de la liaison en Q_k sont appelées $\dot{\varphi}_{\mathbf{a}_k}$ et $\dot{\varphi}_{\mathbf{b}_k}$, tandis que $\dot{\varphi}_{\mathbf{a}'_k}$ et $\dot{\varphi}_{\mathbf{b}'_k}$ sont celles autour des axes $\mathbf{a}'_k$ et $\mathbf{b}'_k$ de la liaison en Q'_k . On appelle respectivement $\mathbf{p}_k$ et $\mathbf{p}'_k$ les vecteurs directeurs des liaisons prismatiques des jambes k et k' . Dans la géométrie montrée figure 5.13, nous avons $\mathbf{p}_k = \mathbf{s}_{Q_k P_k}$ et $\mathbf{p}'_k = \mathbf{s}_{Q'_k P'_k}$. Enfin, on nomme $\dot{\psi}_{\mathbf{x}_k}$, $\dot{\psi}_{\mathbf{y}_k}$ et $\dot{\psi}_{\mathbf{z}_k}$ les liaisons passives de la liaison sphérique de la patte k , arbitrairement choisies autour des axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ du repère cartésien. De même, on nomme $\dot{\psi}_{\mathbf{x}'_k}$, $\dot{\psi}_{\mathbf{y}'_k}$ et $\dot{\psi}_{\mathbf{z}'_k}$ les vitesses passives de la liaison sphérique au même point, respectives à la patte k' . Le visseur $\boldsymbol{\xi}$ de la plateforme s'écrit alors pour les trois pattes k par :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0^{Q_k}(\mathbf{a}_k)\dot{\varphi}_{\mathbf{a}_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{Q_k}(\mathbf{b}_k)\dot{\varphi}_{\mathbf{b}_k} + \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{p}_k)\dot{q}_k + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{x})\dot{\psi}_{\mathbf{x}_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{y})\dot{\psi}_{\mathbf{y}_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{z})\dot{\psi}_{\mathbf{z}_k}. \quad (5.70)$$

Pour les trois jambes k' , on a de même :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0^{Q'_k}(\mathbf{a}'_k)\dot{\varphi}_{\mathbf{a}'_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{Q'_k}(\mathbf{b}'_k)\dot{\varphi}_{\mathbf{b}'_k} + \boldsymbol{\xi}_\infty(\mathbf{p}'_k)\dot{q}'_k + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{x})\dot{\psi}_{\mathbf{x}'_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{y})\dot{\psi}_{\mathbf{y}'_k} + \boldsymbol{\xi}_0^{P_k}(\mathbf{z})\dot{\psi}_{\mathbf{z}'_k}. \quad (5.71)$$

Un ensemble de trois torseurs qui soient réciproques aux cinq visseurs passifs de chaque branche de l'équation (5.70) peut être identifié. Ces visseurs sont à pas nuls et passent chacun par le centre d'une des liaisons sphériques. Si on note $\mathbf{v}_k$ le vecteur unitaire allant du centre de la liaison universelle Q_k au centre de la sphérique P_k , alors ces torseurs sont donnés par $\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathbf{v}_k}$ et sont identiques à ceux définis équation (5.6).

De même, nous pouvons sélectionner trois torseurs réciproques à pas nuls réciproques aux cinq visseurs passifs de chaque branche de l'équation (5.71) passant chacun également par le centre d'une liaison sphérique. Si on note $\mathbf{u}_k$ le vecteur unitaire allant du centre de la liaison universelle Q'_k au centre de la sphérique P_k , alors ces torseurs sont donnés par $\boldsymbol{\zeta}_0^{\mathbf{u}_k}$, et sont identiques à ceux définis équation (5.9).

Grâce à ces six torseurs, une équation de vitesse peut ainsi être établie sous la forme :

$$\begin{aligned} \Pi \boldsymbol{\xi} &= \Sigma \dot{\mathbf{q}} \\ \text{avec } \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \text{et } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_a & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Sigma_b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

La matrice jacobienne parallèle $\mathbf{\Pi}$ est exactement identique à celle définie pour le 3 – *RPS*, et les sous-matrices qui la composent sont données équation (5.12). Les sous matrices de la matrice jacobienne sérielle $\mathbf{\Sigma}$ sont quant à elles données par :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_a &= \text{diag} \left(\zeta_0^{\mathbf{v}_1} \circ \xi^{\dot{q}_1}, \zeta_0^{\mathbf{v}_2} \circ \xi^{\dot{q}_2}, \zeta_0^{\mathbf{v}_3} \circ \xi^{\dot{q}_3} \right) \text{ et} \\ \mathbf{\Sigma}_c &= \text{diag} \left(\zeta_0^{\mathbf{u}_1} \circ \xi^{\dot{q}'_1}, \zeta_0^{\mathbf{u}_2} \circ \xi^{\dot{q}'_2}, \zeta_0^{\mathbf{u}_3} \circ \xi^{\dot{q}'_3} \right),\end{aligned}\tag{5.73}$$

Puisque le mécanisme est pleinement actionné, il n'est pas nécessaire d'introduire une matrice jacobienne de contraintes, la matrice $\mathbf{\Pi}$ étant déjà carrée et de plein rang si les six torseurs qui la composent sont linéairement indépendants. De même que pour le mécanisme 3 – *RPS*, on recherche la matrice jacobienne sous la forme :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_1 & \mathbf{\$}_2 & \mathbf{\$}_3 & \mathbf{\$}'_1 & \mathbf{\$}'_2 & \mathbf{\$}'_3 \end{bmatrix}.\tag{5.74}$$

En supposant à nouveau que le sous-matrice $\mathbf{D}$ est inversible, alors l'inverse de la matrice $\mathbf{\Pi}$, hors singularités (5.14). La matrice jacobienne $\mathbf{J}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Pi}^{-1} \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_a & \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_c \end{bmatrix}.\tag{5.75}$$

Les trois premières colonnes de $\mathbf{J}$ sont exactement les mêmes que celles de la matrice jacobienne du mécanisme 3 – *RPS*, voir équation (5.15). Les trois premiers visseurs jacobiens $\mathbf{\$}_k$ sont donnés équation (5.39). Ils sont proportionnels à un coefficient μ_k près aux visseurs unitaires ξ_k^m , voir équation (5.36). Les vecteurs directeurs, les pas et les vecteurs de positionnement des visseurs ξ_k^m sont donnés respectivement équations (5.36), (5.30) et (5.33).

En observant l'équation (5.75), les trois dernières colonnes de la matrice $\mathbf{J}$ semblent en apparence plus compliquées à calculer que les trois premières. Cependant, on peut remarquer la symétrie entre les jambes k et k' . Les contraintes imposées par les quatre autres jambes sont données par l'ensemble $\mathcal{T}_k^-$ donné équation (5.47), voir l'analyse de mobilités de la section 5.1.4. Ainsi, le visseur jacobien $\mathbf{\$}'_k$ s'exprime également comme combinaison linéaire des visseurs ξ_k^a et ξ_k^b , données respectivement équations (5.49) et (5.50). Ces derniers sont représentés figure figure 5.14.

où $\mathbf{r}_k^{a'}$ est un vecteur définissant la position de l'origine par rapport à un point A'_k appartenant à la droite passant par P_i et P_j . Il est donné par :

$$\mathbf{r}_k^{a'} = \mathbf{r}_{A'_k O} = a'_{i,k} \mathbf{r}_i + a'_{j,k} \mathbf{r}_j, \quad (5.78)$$

avec :

$$a'_{i,k} = \frac{\mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{v}_k} \quad \text{et} \quad a'_{j,k} = -\frac{\mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{v}_k}. \quad (5.79)$$

Le pas du visseur $\xi_k^{m'}$ vaut quant à lui :

$$h_k^{m'} = -\frac{\omega_k}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k'} (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k^{r'} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{s}_k^{r'}. \quad (5.80)$$

La droite du visseur $\xi_k^{m'}$ intersecte le plan $\mathcal{P}$ (toujours défini par le plan passant par les points P_1, P_2 et P_3) en un point M'_k et la position de l'origine par rapport à ce point est donnée par :

$$\mathbf{r}_k^{m'} = m'_{i,k} \mathbf{r}_i + m'_{j,k} \mathbf{r}_j + m'_{k,k} \mathbf{r}_k, \quad (5.81)$$

avec :

$$\begin{aligned} m'_{i,k} &= \frac{\mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [\mathbf{s}_k' \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)]^T (\mathbf{s}_k' \times \mathbf{w}_j)}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k' (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \\ m'_{j,k} &= -\frac{\mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) [\mathbf{s}_k' \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)]^T (\mathbf{s}_k' \times \mathbf{w}_i)}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k' (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k} \\ m'_{k,k} &= \omega_k \frac{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{s}_k' \mathbf{v}_k^T \mathbf{n}_k}{\mathbf{s}_k^{lT} \mathbf{s}_k' (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{n}_k}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Le scalaire ω_k et le vecteur $\mathbf{n}_k$ sont donnés respectivement équations (5.31) et (5.35).

Ainsi, les trois dernières colonnes de la matrice jacobienne du mécanisme 6-*UPS* triangulaire ont été données, complétant le modèle cinématique direct de ce mécanisme spatial à six degrés de liberté. Puisque le mécanisme 3-*RPS* et le mécanisme 6-*UPS* triangulaire partagent la même matrice jacobienne parallèle, il a été possible d'étendre sans difficulté les résultats obtenus pour le premier mécanisme au second.

5.3 Exemple Numérique

Nous allons ici illustrer les équations présentées en section 5.1.2 par un modèle numérique du mécanisme 3 – *RPS*. On s'intéresse à ce mécanisme en configuration cubique, comme illustré figure 5.15 et on considère les liaisons prismatiques comme étant actionnées. Les axes des trois liaisons rotoïdes s'intersectent au point O et sont orientés selon les axes du repère cartésien. La géométrie des jambes est telle que les axes des liaisons prismatiques et rotoïdes sont perpendiculaires. Chaque jambe peut se mouvoir dans un plan dont la normale est le vecteur directeur de sa liaison rotoïde. Ce plan est situé à une distance $L = 3,75$ de l'origine, comme montré figure 5.15. À noter que dans cette section les longueurs sont adimensionnées.

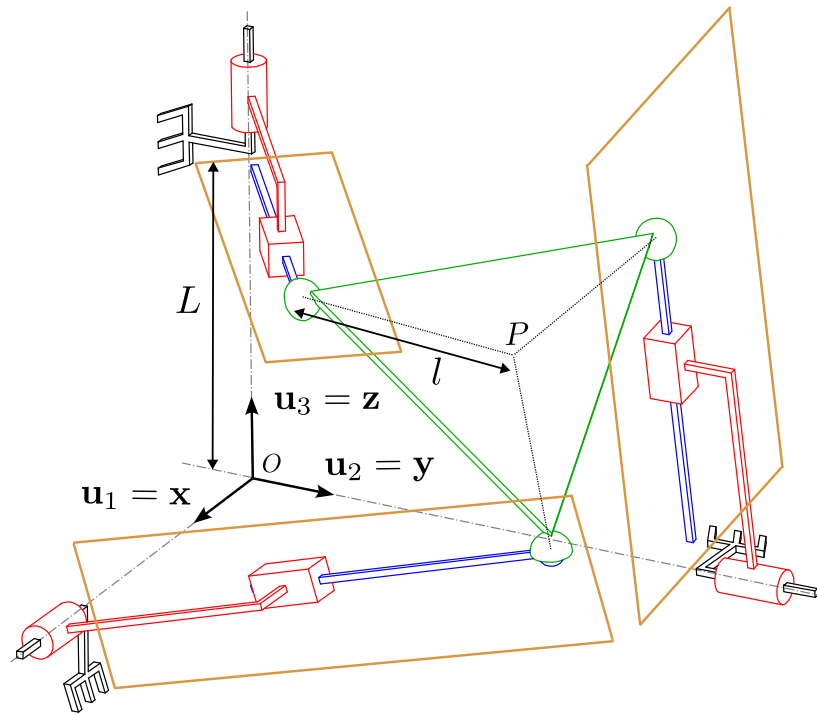


FIGURE 5.15 Paramétrage géométrique du mécanisme 3 – *RPS* cubique

Les trois liaisons sphériques sont agencées de manière à être les sommets d'un triangle équilatéral dont le rayon du cercle circonscrit vaut $l = 1,5$. Nous chercherons à exprimer les vitesses d'un point P , rigidement lié à la plateforme et situé au centre de ce cercle, voir figure 5.15 à nouveau. Chaque déplacement se fait en un temps T , choisi arbitrairement comme valant 2,7 secondes.

5.3.1 Modèle cinématique direct

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au mouvement de la plateforme sous l'effet de l'actionnement d'une unique liaison prismatique. On définit la longueur d'une jambe comme la distance entre le centre de la liaison sphérique et l'axe de la liaison rotoïde. Les longueurs des jambes 1 et 2 sont fixées respectivement à $\rho_1 = 3$ et $\rho_2 = 3$. La longueur ρ_3 varie quant à elle de façon continue entre 2,5 et 4,5 en suivant la trajectoire montrée figure 5.16. Il s'agit d'une portion d'une fonction cubique donnée par $\beta(3x^3 - 2x^2)$, où x varie entre 0 et 1, avec ici $\beta = 2$.

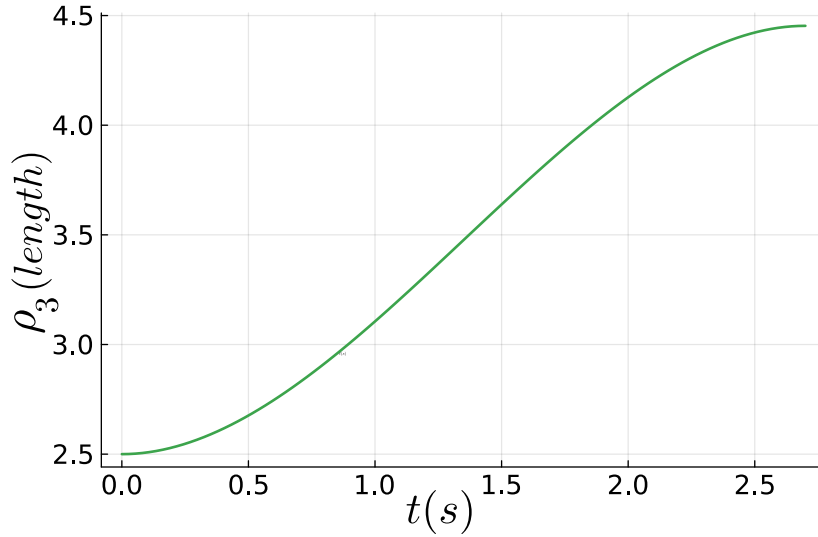


FIGURE 5.16 Variation de la longueur ρ_3

Le déplacement de la plateforme sous l'effet de la variation de ρ_3 est montré figure 5.17. Plus les traits sont épais et colorés, plus l'on s'approche de la fin du déplacement et inversement. Les points en rouge représentent les positions de P à des intervalles discrets. Puisque seul la troisième jambe varie en longueur, les vitesses $\dot{\rho}_1$ et $\dot{\rho}_2$ sont toujours nulles. Le modèle cinématique direct, voir équations (5.2), (5.3) et (5.39) est ainsi donné par :

$$\xi = \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{V}_P \end{bmatrix} = \mathbb{S}_3 \dot{\rho}_3 = \xi_3^m \mu_3 \dot{\rho}_3, \quad (5.83)$$

où Ω est le vecteur de vitesse de rotation de la plateforme tandis que $\mathbf{V}_P$ est le vecteur de vitesse de translation du point P . Le visseur de la plateforme est proportionnel au visseur unitaire à pas fini ξ_3^m . Il est à noter que le pas de ce dernier varie au cours du déplacement. Le coefficient de proportionnalité μ_3 entre le visseur ξ_3^m et le visseur $\mathbb{S}_3$ varie également au cours du mouvement. L'évolution de ces deux scalaires est montrée figure 5.18.

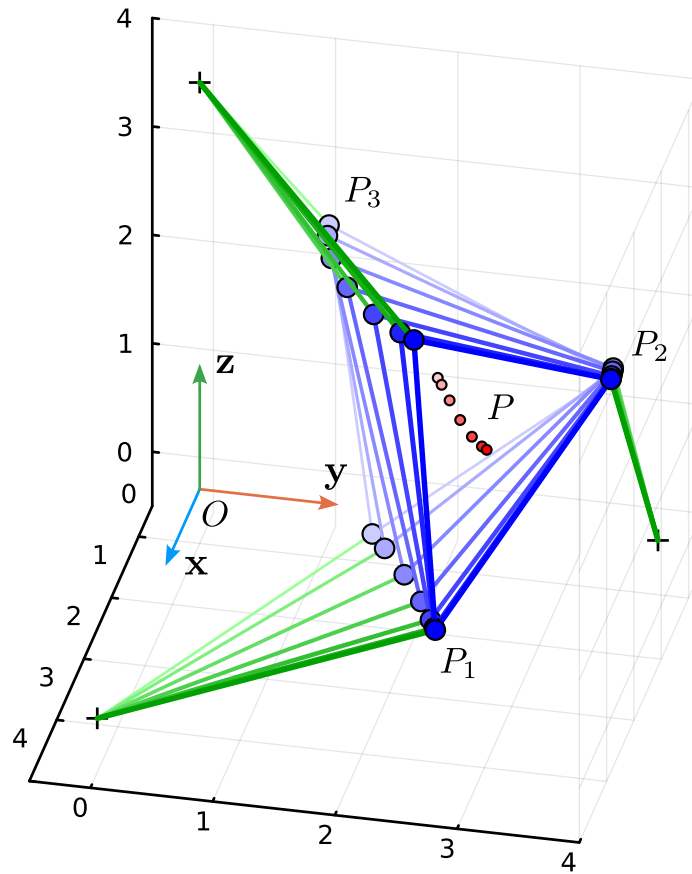
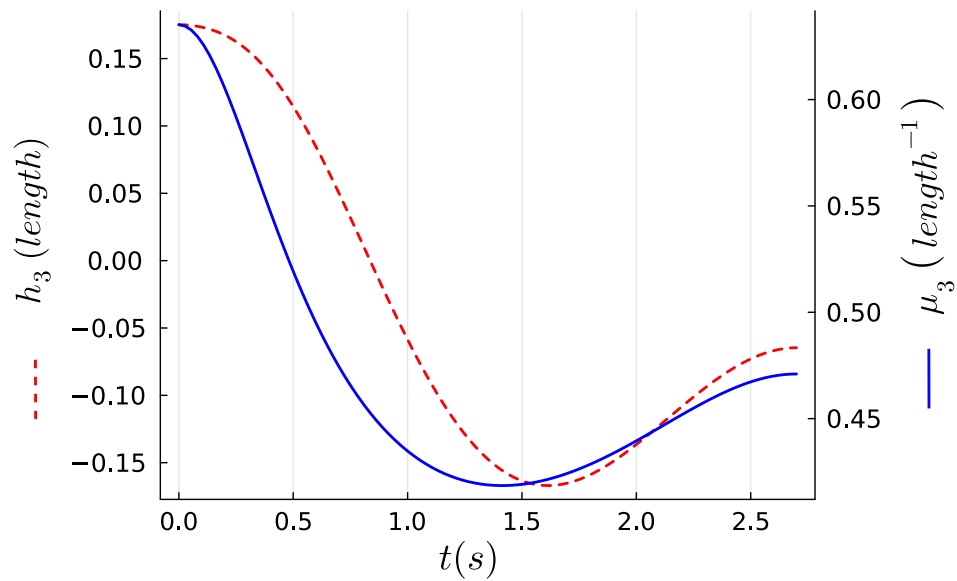


FIGURE 5.17 Déplacement de la plateforme durant le mouvement

FIGURE 5.18 Variations du pas h_3 et du coefficient μ_3 durant le mouvement

Vitesse de rotation de la plateforme

Puisque le mécanisme n'est actionné que par une seule liaison prismatique, le coefficient μ_3 est ici également le coefficient de proportionnalité entre la vitesse actionnée et la vitesse angulaire de la plateforme selon la relation $\|\Omega\| = \mu_3 \dot{\rho}_3$, voir équation (5.83). Comme évoqué en section 5.1.3, μ_3 est ici bien homogène à l'inverse d'une longueur. Les variations des vitesses $\dot{\rho}_3$ et $\|\Omega\|$ sont toutes deux montrées figure 5.19.

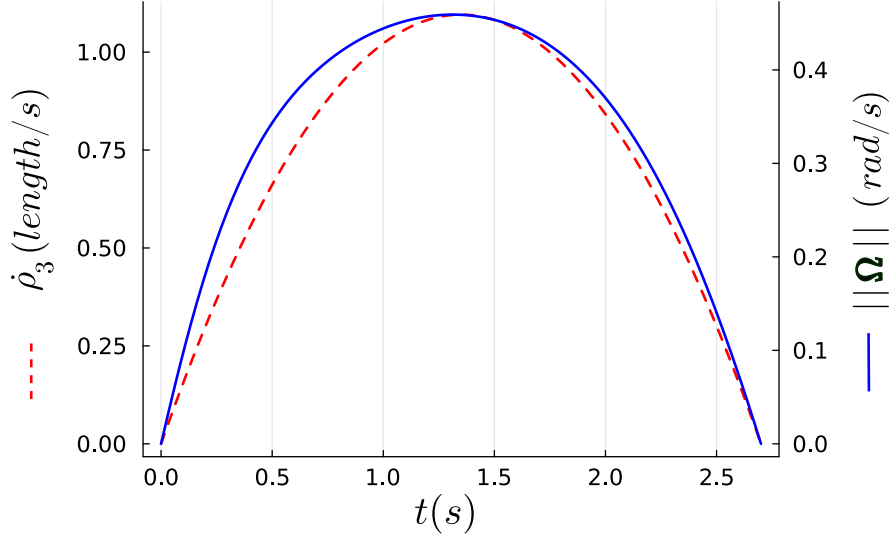


FIGURE 5.19 Variations des amplitudes de la vitesse actionnée et de la vitesse de rotation de la plateforme durant le mouvement

Vitesse de translation

Les figures 5.20a et 5.20b illustrent les vitesses de translation instantanées du point P durant le déplacement, la position ce dernier est illustré par des ronds rouges. La plateforme est seulement représentée à sa position initiale et finale pour une meilleure lisibilité. La vitesse de translation de la plateforme est donné par les trois dernières composantes de ξ . Par abus de langage, on va également parler de vitesse de translation pour les trois dernières composantes du visseur ξ_3^m . Ce vecteur n'est pas homogène à une vitesse puisque unitaire. Les deux vecteurs sont toutefois orientés dans la même direction puisque :

$$\mathbf{V}_P = (\mathbf{s}_k^m \times \mathbf{r}_k^m + h_k^m \mathbf{s}_k^m) \mu_3 \dot{\rho}_3, \quad (5.84)$$

voir équation (5.83). La figure 5.20a illustre les différents termes du vecteur de vitesse de ξ_3^m . Les segments en violet représentent la composante $h_3^m \mathbf{s}_3^m$, c'est-à-dire la vitesse de translation

dans la direction de l'axe du visseur. La variation en amplitude de ces vecteurs correspond à l'amplitude du pas h_k^m montré figure 5.18. Pour plus de lisibilité, les flèches des vecteurs ne sont pas représentées. Les segments en rose représentent quant à eux les vitesses dans la direction perpendiculaire à l'axe du visseur ξ_3^m , à savoir $\mathbf{s}_k^m \times \mathbf{r}_k^m$. Enfin, les segments en noir sont la somme de ces deux vecteurs, c'est-à-dire les trois dernières composantes du visseur ξ_3^m .

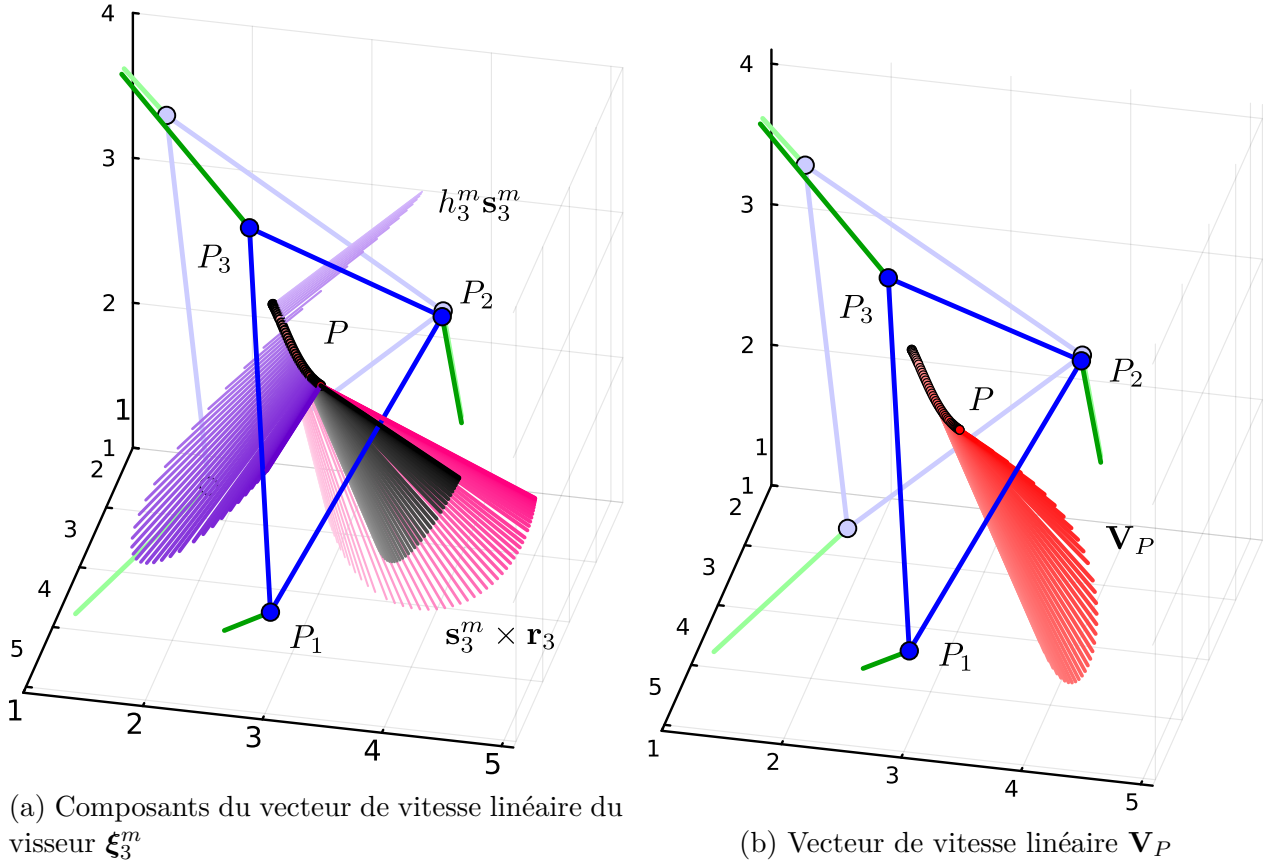


FIGURE 5.20 Vecteurs de vitesses linéaires des visseurs ξ_3^m et $\mathbf{S}_3$ durant le mouvement

La figure 5.20b représente le vecteur $\mathbf{V}_P$ qui est le vecteur de vitesse de translation du point P au cours du temps. Chaque vecteur est orienté selon le vecteur de vitesse linéaire du visseur ξ_3^m , représenté en noir figure 5.20a. L'amplitude des vecteurs de la figure 5.20b est modulée par rapport à ceux de la figure 5.20a par la vitesse $\mu_3 \dot{\rho}_3$, montrée figure 5.19.

5.3.2 Modèle cinématique inverse

Toujours avec le mécanisme montré figure 5.15, nous allons maintenant imposer une vitesse à la plateforme et observer le comportement des visseurs contenus dans la matrice jacobienne. Comme mentionné en section 5.1.4, les mobilités de la plateforme correspondent à trois rotations autour d'axes non-concourants, modélisés par les visseurs à pas nul ξ_k^p , donnés équation (5.44). Chacun représente une droite passant par le point P_k et dont le vecteur directeur $\mathbf{s}_k^p$ est donné équation (5.45).

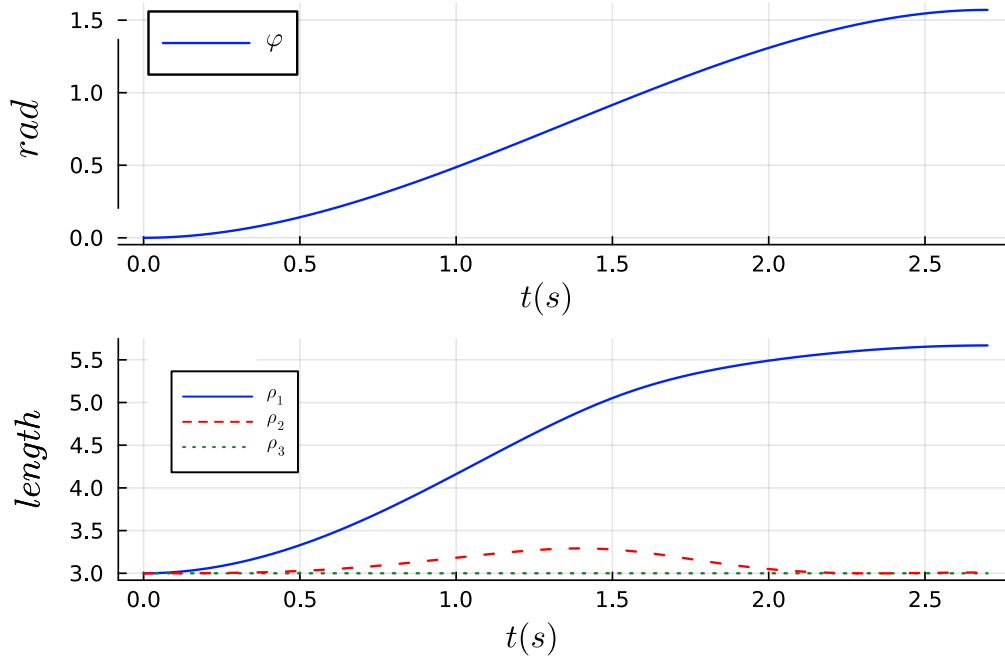


FIGURE 5.21 Variations de l'angle de rotation imposé à la plateforme et des longueurs des jambes

Le mouvement de la plateforme choisi pour illustrer le modèle inverse sera une rotation pure d'un quart de tour mesurée par un angle φ variant continûment de 0 à $\pi/4$ radians, comme montré figure 5.21 (haut). Cette rotation sera effectuée autour d'un axe passant par le point P_3 et ayant un vecteur directeur $\mathbf{s}_3^p$. La variation en longueurs des trois jambes qui en résulte est montrée sur la même figure (bas). Puisque le vecteur directeur $\mathbf{s}_3^p$ de l'axe de rotation dépend lui-même de la position de la plateforme, voir équation (5.44), alors l'orientation de cet axe varie au cours du déplacement. La figure 5.22a illustre l'orientation de l'axe de rotation au cours du temps.

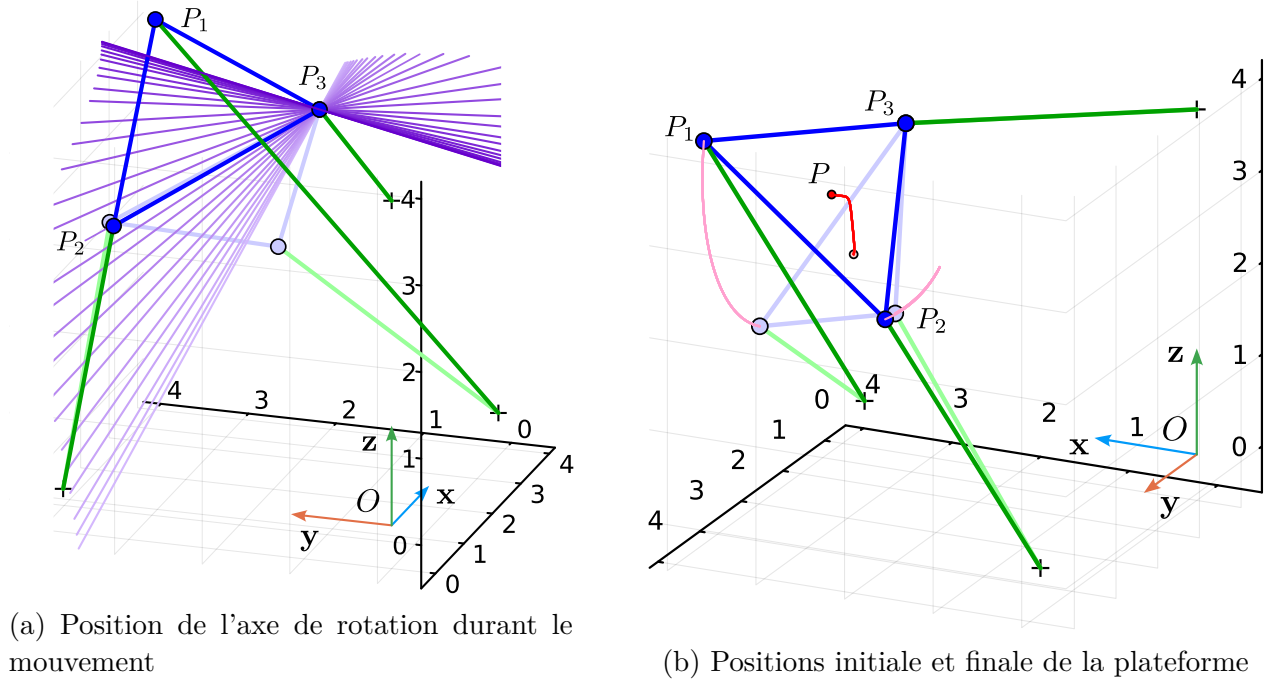


FIGURE 5.22 Déplacement de la plateforme soumise à une pure rotation

La figure 5.22b montre la plateforme en sa position initiale et finale. Le déplacement des liaisons rotoïdes durant le mouvement est montré par des traits roses. Le trait rouge illustre quant à lui le lieu du point P . On peut remarquer le point P_1 ne cesse de s'éloigner de sa position initiale, tandis que le point P_2 revient quasiment à sa position initiale à la fin du mouvement. C'est cohérent avec les variations des longueurs des jambes illustrées figure 5.21. Puisque l'axe de rotation de la plateforme passe par la liaison sphérique en P_3 , alors la position de ce point reste fixe durant le mouvement, comme on peut clairement l'observer sur les figures 5.22a et 5.22b. Ainsi, la longueur de la troisième jambe reste constante au cours du mouvement, voir figure 5.21 à nouveau.

La figure 5.23 montre la dérivée temporelle des courbes affichées figure 5.21. En haut est représentée $\dot{\varphi}$ qui est la vitesse de rotation de la plateforme. En bas sont montrées les dérivées temporelles des longueurs des jambes, autrement dit les vitesses actionnées de chaque liaison prismatique. Puisque la longueur ρ_3 est constante, alors sa dérivée temporelle $\dot{\rho}_3$ est toujours nulle. Ainsi, le modèle cinématique direct de la plateforme, voir équations (5.2), (5.3) et (5.39), est donné ici par :

$$\xi = \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{V}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$1 & \$2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^m & \xi_2^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \dot{\rho}_1 \\ \mu_2 \dot{\rho}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

Ainsi, le visseur ξ est exprimé comme une combinaison linéaire de deux visseurs unitaires dont les pas sont finis h_1^m et h_2^m et qui sont associés à des vitesses de rotation $\mu_1\dot{\rho}_1$ et $\mu_2\dot{\rho}_2$. L'évolution des pas est montrée figure 5.24a tandis que la variation des vitesses est représentée figure 5.24b.

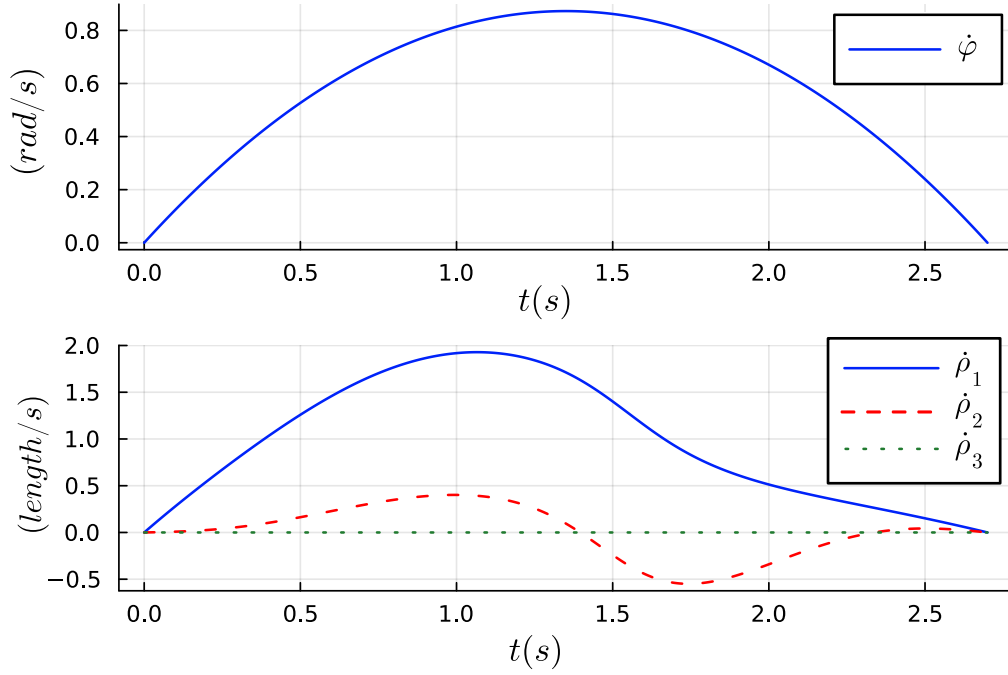


FIGURE 5.23 Vitesse de rotation de la plateforme et vitesses de variations des longueurs de jambes durant le mouvement

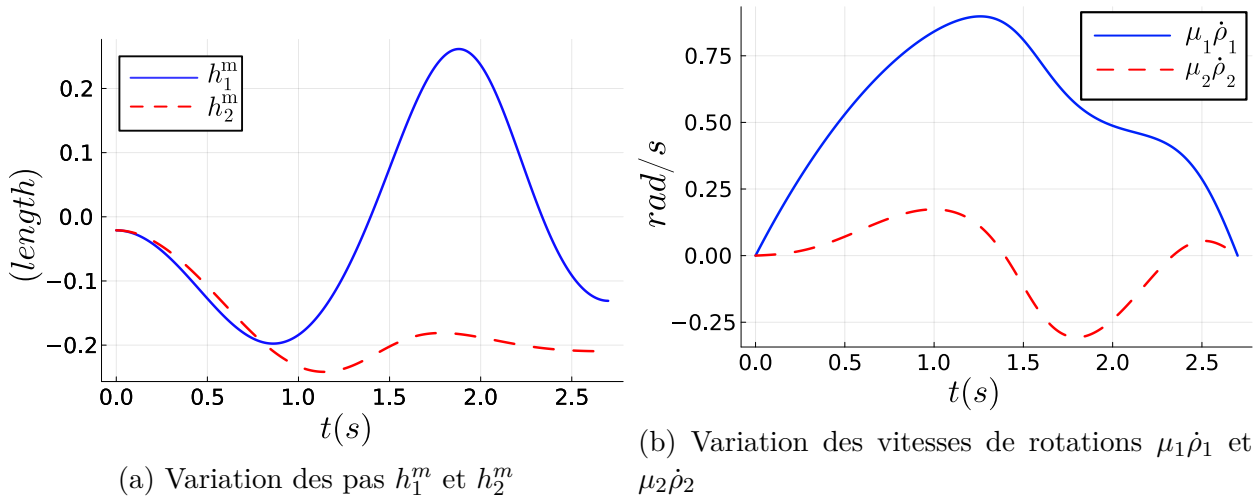


FIGURE 5.24 Variation des pas et des amplitudes des vitesses de rotations durant le mouvement

Vitesses de rotations

Le vecteur de vitesse de rotation de la plateforme est d'après l'équation (5.85) donné par :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \text{avec} \quad \Omega_1 = \mu_1 \dot{\rho}_1 \mathbf{s}_1^m \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \mu_2 \dot{\rho}_2 \mathbf{s}_2^m. \quad (5.86)$$

Les vecteurs Ω_1 et Ω_2 sont les vecteurs de rotation angulaires partiels autour des axes de respectivement ξ_1^m et ξ_2^m . Ils sont tracés figure 5.25. La variation en amplitude des correspond aux variations des vitesses montrées figure 5.24b. Un vecteur représentant une vitesse de rotation est un vecteur libre et n'a pas de point d'application particulier. Sur la figure 5.25, nous avons choisi de représenter les vecteurs Ω_1 et Ω_2 respectivement aux points M_1 et M_2 , c'est-à-dire aux points à l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et des axes des visseurs ξ_1^m et ξ_2^m , voir équation (5.33). Cela signifie que prolonger les segments violets et roses sur la figure 5.25 permettrait de représenter les axes des visseurs ξ_1^m et ξ_2^m au cours du temps. Ces droites ne sont pas représentées par souci de lisibilité.

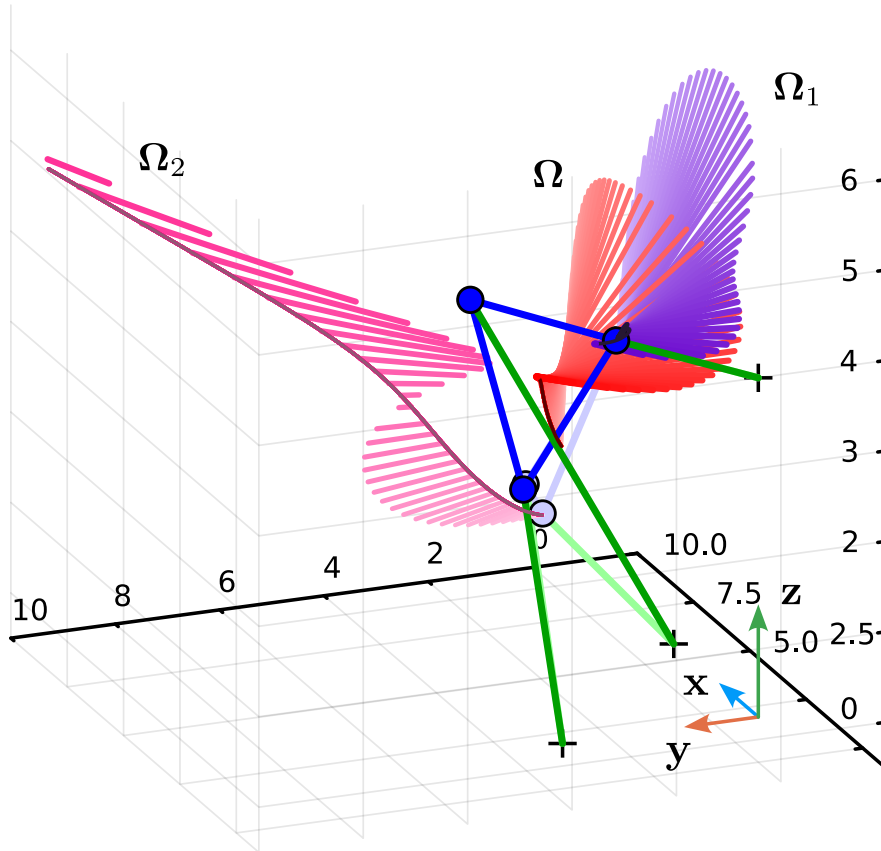


FIGURE 5.25 Variation des vecteurs de vitesses angulaires Ω_1 , Ω_2 et Ω durant le mouvement

Enfin, sur la même figure est représenté le vecteur de vitesse de rotation de la plateforme Ω au cours du temps. Ce vecteur est représenté arbitrairement au point P . L'amplitude du vecteur Ω correspond à la vitesse de rotation de la plateforme, c'est à dire $\dot{\varphi}$. La variation de ce dernier est montré figure 5.23 (haut). La direction du vecteur Ω correspond quant à elle à l'orientation de la droite montré figure 5.22a autour de laquelle la plateforme tourne.

Vitesses de translations

Il est également possible de représenter le vecteur de vitesse de translation du point P , qui est donné d'après l'équation (5.85) par :

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_1 = \mu_1 \dot{\rho}_1 (\mathbf{s}_1^m \times \mathbf{r}_1^m + h_1^m \mathbf{s}_1^m), \quad (5.87)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{V}_2 = \mu_2 \dot{\rho}_2 (\mathbf{s}_2^m \times \mathbf{r}_2^m + h_2^m \mathbf{s}_2^m).$$

Les vecteurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont les vecteurs de vitesse linéaire partielle du point P et sont représentés au cours du déplacement sur la figure 5.26a. Le vecteur de vitesse linéaire du point P au cours du déplacement est quant à lui montré sur la figure 5.26b.

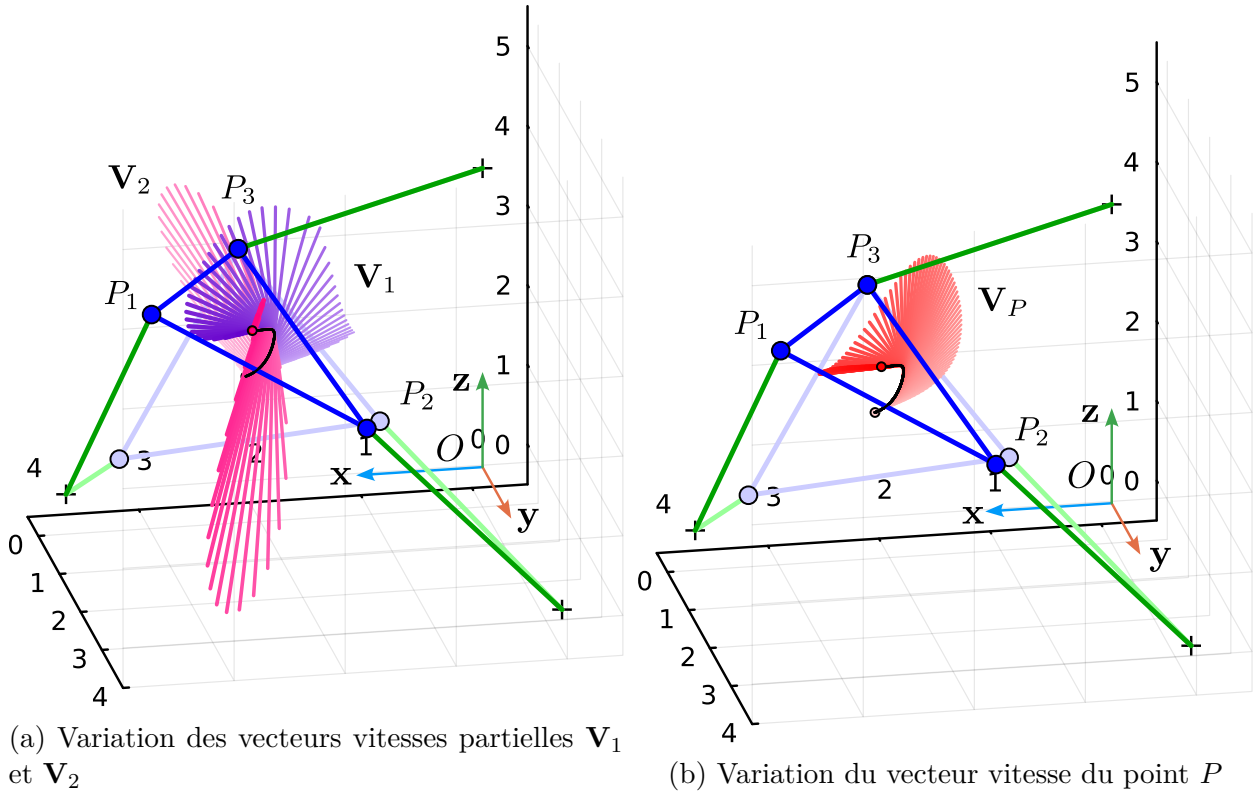


FIGURE 5.26 Variation des vecteurs de vitesse de translation durant le mouvement

5.3.3 Application numérique à un instant t

Les figures 5.16 à 5.26b illustrent le mécanisme 3 – RPS ainsi que les différents vecteurs et scalaires qui composent sa matrice jacobienne au cours du temps. Il est également possible de s'intéresser aux valeurs numériques de sa matrice jacobienne à un instant donné. La figure 5.3 introduite en section 5.1.2 représente le mécanisme à l'instant précis $t = 1s$, durant le mouvement décrit en section 5.3.2, c'est-à-dire lorsque la plateforme est en pure rotation.

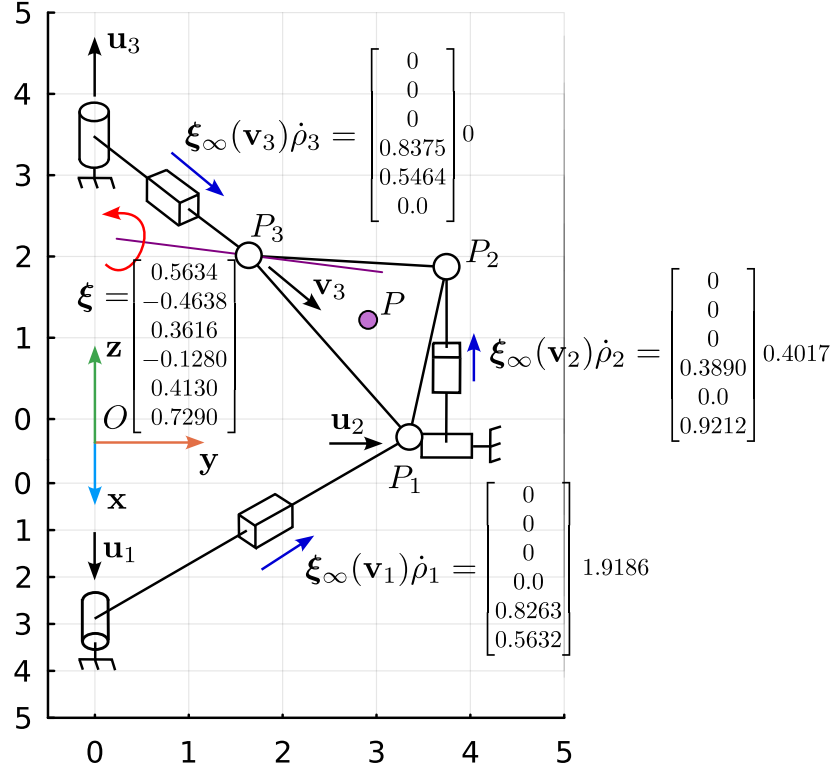
À cet instant précis, la droite passant par le point P_3 est orientée selon le vecteur $\mathbf{s}_3^p = [0.6918 \ -0.5694 \ 0.4440]^T$, l'angle de rotation de la plateforme autour de cette droite est de $\varphi = 0.4876 \text{ rad}$ et la position du point P par rapport à l'origine est donné par $[2.5002 \ 2.9433 \ 3.0090]^T$ (en longueurs adimensionnelles). La vitesse de rotation de la plateforme vaut alors $\|\boldsymbol{\Omega}\| = \dot{\varphi} = 0.8144 \text{ rad/s}$ et le vecteur vitesse du point P est $\mathbf{V}_P = [-0.1280 \ 0.4130 \ 0.7290]^T$ (en longueurs/s). Les paramètres relatifs à chaque jambe du mécanisme sont présentés tableau 5.1, et illustrés figure 5.27a. Le tableau 5.2 montre les paramètres du modèle sériel équivalent illustré figure 5.27b.

Jambe	$\mathbf{u}_i$	$\mathbf{v}_i$	$\mathbf{r}_i$ (longueur)	ρ_i (longueur)	$\dot{\rho}_i$ (longueur/s)
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.8263 \\ 0.5632 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.2498 \\ -0.4974 \\ 0.6638 \end{bmatrix}$	4.1640	1.9186
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3890 \\ 0.0 \\ 0.9212 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.2622 \\ -0.8067 \\ 0.0772 \end{bmatrix}$	3.1825	0.4017
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8375 \\ 0.5464 \\ 0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.01248 \\ 1.3041 \\ -0.7410 \end{bmatrix}$	3.0	0.0

TABLEAU 5.1 Paramètres des différentes jambes à $t = 1s$

Jambe	$\mathbf{s}_i^m$	$\mathbf{r}_i^m$ (longueur)	h_i (longueur)	μ_i (longueur ⁻¹)	ω_i (rad/s)
1	$\begin{bmatrix} 0.5325 \\ -0.6972 \\ 0.4799 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0230 \\ 1.4836 \\ -0.8403 \end{bmatrix}$	-0.1839	0.4385	0.8413
2	$\begin{bmatrix} 0.6643 \\ 0.7070 \\ -0.2425 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.8177 \\ -0.7022 \\ 0.9532 \end{bmatrix}$	-0.2333	0.4324	0.1737
3	$\begin{bmatrix} -0.4602 \\ 0.6865 \\ 0.5630 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.4013 \\ -0.9995 \\ 0.1450 \end{bmatrix}$	-0.1595	0.4435	0.0

TABLEAU 5.2 Paramètres équivalents à $t = 1s$



(a) Valeurs des paramètres du 3 – RPS à architecture cubique

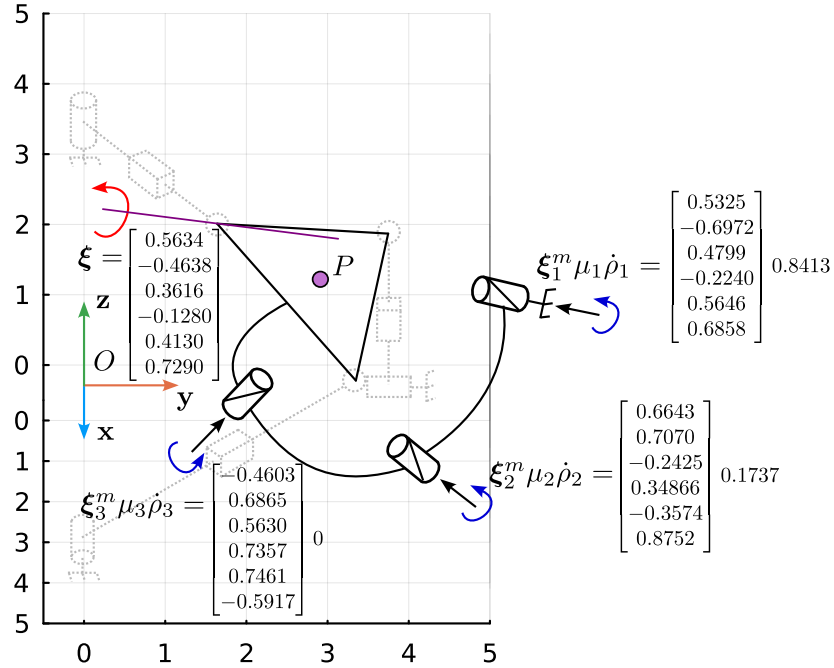
(b) Valeurs des paramètres de la chaîne sérielle HHH équivalente

FIGURE 5.27 Equivalence numérique entre un mécanisme parallèle à 3 DDLs et une chaîne sérielle à 3 DDLs

5.4 Extension à d'autres mécanismes

Un point commun essentiel entre un mécanisme 3 – RPS et le 6 – UPS triangulaire est qu'ils ont une matrice parallèle jacobienne contenant six visseurs à pas nuls qui s'intersectent deux à deux. Cependant, ils ne sont loin d'être les seuls. Nous allons ici discuter d'autres mécanismes dont la matrice jacobienne a la même expression que celle présentée en sections 5.1.2 et 5.2

5.4.1 Mécanismes spatiaux à trois DDLs

Comme nous venons juste de le mentionner, une caractéristique du mécanisme 3 – RPS est que sa matrice jacobienne parallèle possède trois paires de torseurs réciproques à pas nul dont les axes s'intersectent deux à deux. Les torseurs que nous avons identifiés pour ce mécanisme s'intersectent précisément au centre des liaisons sphériques de chaque jambe. Ainsi, tout mécanisme spatial à trois jambes et trois DDLs qui possèdent chacune une liaison sphérique passive sont de potentiels candidats pour la méthode présentée. C'est-à-dire tout mécanisme dont la topologie de ses chaînes sérielles est $\underline{X}YS$ où X et Y sont des liaisons de type R et/ou P . C'est par exemple le cas du mécanisme 3 – RSR [194, 195] montré figure 5.28. Il est en effet possible d'identifier pour chaque jambe de ce mécanisme deux torseurs à pas nuls passant par le centre de la liaison sphérique. Le premier réciproque à une unique articulation rotoïde, et un autre réciproque simultanément aux deux liaisons rotoïdes. Les interprétations géométriques du modèle cinématique direct vont certes potentiellement changer. Par exemple le plan $\mathcal{P}$ correspond au plan de la plateforme pour le 3 – RPS , tandis qu'il va correspondre au plan médian pour le 3 – RSR , voir figure 5.28 à nouveau. Cependant, les deux mécanismes vont avoir une matrice jacobienne ayant exactement la même expression.

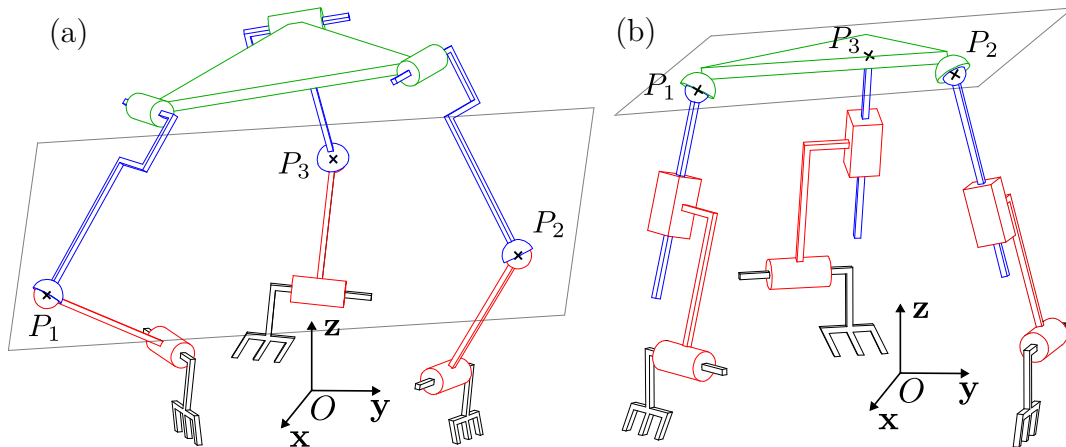


FIGURE 5.28 Mécanismes 3 – RSR et 3 – RPS

La méthode présentée peut également s'appliquer à des mécanismes ayant des architectures plus exotiques. Par exemple, le mécanisme présenté en [196] possède trois jambes identiques. Chacune est constituée d'un mécanisme à quatre barres dont le coupleur est connecté à une chaîne prismatique/sphérique et dont la liaison S est liée à la plateforme mobile. Tout comme pour le robot Delta étudié en section 4.3.4, le mécanisme à quatre barres est agencé en parallélogramme, donc le mouvement du coupleur est une translation circulaire, rendant ce sous-mécanisme équivalent à une liaison prismatique [190].

Chaque jambe est donc équivalente à une chaîne PPS . La figure 5.29 montre la k -ième jambe du mécanisme. Le parallélogramme est constitué des liaisons rotoïdes en A_k , B_k , C_k et D_k , toutes orientées par un vecteur $\mathbf{q}_k$, la liaison prismatique est orientée par un vecteur $\mathbf{p}_k$, normal aux axes des articulations rotoïdes et la liaison sphérique est localisée en un point P_k . L'actionnement se fait autour de la liaison en A_k avec une vitesse de rotation $\dot{\theta}_k$. Le coupleur B_kC_k se translate donc selon la direction $(\mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_{A_kB_k})$. On peut identifier un torseur à pas nul passant par P dont l'axe est porté par $\mathbf{v}_k = \mathbf{q}_k \times \mathbf{p}_k$ réciproque à la liaison sphérique et à la liaison prismatique. On peut également identifier un second torseur à pas nul passant par P d'axe $\mathbf{u}_k = \mathbf{q}_k$ réciproque aux liaisons sphérique, prismatique et parallélogramme. Ainsi, nous pouvons appliquer les équations introduites en section 5.1.2 sur ce mécanisme afin d'obtenir le modèle cinématique direct.

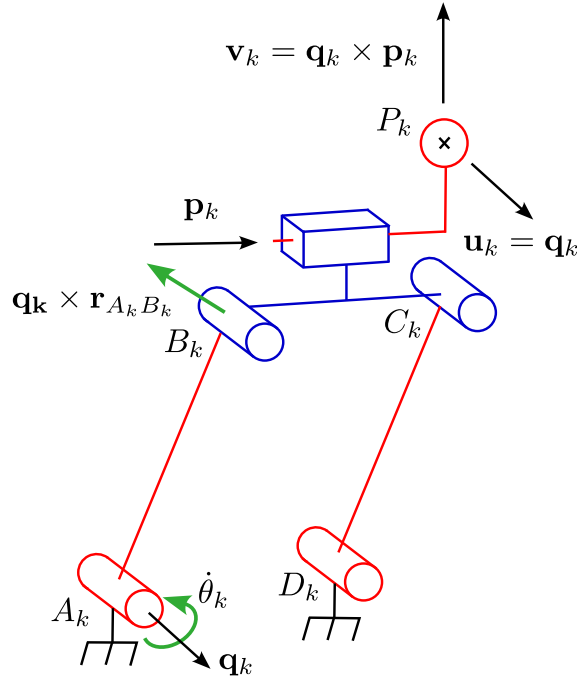


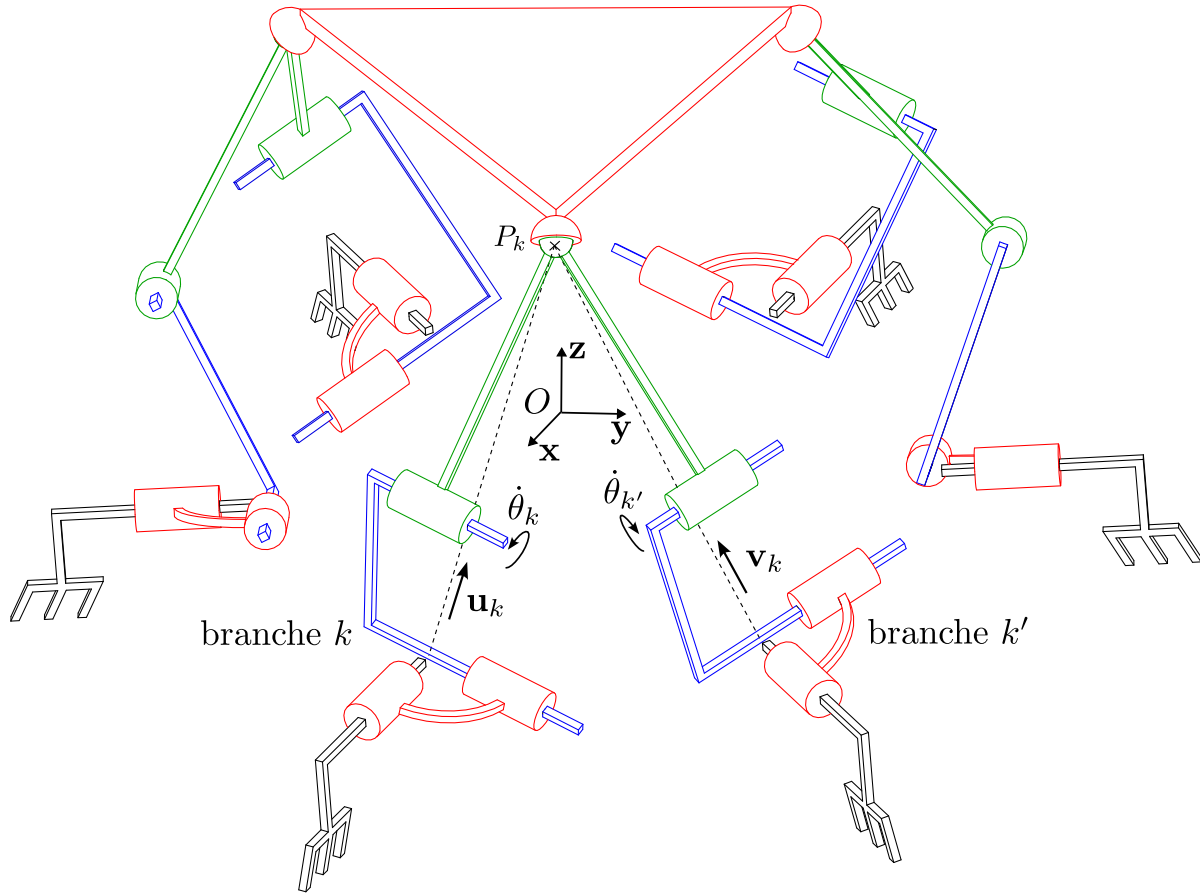
FIGURE 5.29 Mécanisme équivalent à une chaîne PPS

Un autre exemple de mécanisme à architecture inusuelle est donné en [197]. Deux de ses chaînes sont composées d'un mécanisme à quatre barres suivi par une chaîne SP , tandis que la troisième est également composée d'un quatre barres localisé entre une liaison R et une liaison S . Les trois chaînes font en sorte que la plateforme puisse se translater et pivoter dans deux directions. Les trois mécanismes à quatre barres sont conçus pour que la liaison sphérique de chaque chaîne soit localisée en un point particulier du coupleur qui suit un mouvement de translation pure. L'ensemble est donc assimilable à un mécanisme $2 - RPS + 1 - PSP$, dont la matrice jacobienne peut être obtenue avec la méthode présentée. L'asymétrie des jambes ne présente aucun problème.

Il est cependant à noter que pour la matrice jacobienne d'un mécanisme à trois jambes $\underline{XYS}$ (pour $X, Y = R$ et/ou P) puisse être obtenue avec les équations introduites dans ce chapitre, il est nécessaire que les jambes ne soient pas agencées de manière à ce que la plateforme ne puisse uniquement se translater ou pivoter. Le mécanisme $3 - RUU$ étudié en section 4.2.3, qui comme nous l'avons évoqué peut être vu comme un mécanisme $3 - SRR$, constitue un contre-exemple, puisque la géométrie de ce mécanisme a spécifiquement été conçue pour que ces liaisons universelles se croisent en un même point, le rendant rotationnel. Dans ce cas, et comme nous l'avons fait, il est possible d'appliquer les équations du chapitre 4.

5.4.2 Mécanismes hybrides spatiaux

Comme nous l'avons déjà évoqué, le mécanisme $6 - UPS$ étudié fait partie de la classe des mécanismes $TSSM$. Les autres mécanismes de cette catégorie sont également éligibles à la méthode présentée en 5.2 en identifiant des torseurs à pas nulq qui s'intersectent aux trois points de la plateforme que se partagent les six jambes. La figure 5.13 est un autre exemple de mécanisme $TSSM$. Il s'agit d'un $6 - URS$, où les jambes sont connectées deux à deux à la plateforme par des liaisons sphériques. Si l'on considère les liaisons rotoïdes centrales comme actionnées, alors on peut pour chaque groupe de jambes identifier deux torseurs à pas nuls, l'un passant par le centre de la liaison universelle de la jambe k et le centre de la liaison sphérique, et le second passant par le centre de la liaison universelle de la jambe k' et par cette même liaison sphérique. Ainsi, l'on peut obtenir son modèle cinématique direct en appliquant les équations de la section 5.2.

FIGURE 5.30 Mécanisme 6 – *URS* triangulaire

Il existe une sous-famille de la classe des mécanismes *TSSM* qui sont les mécanismes dits *MSSM* (minimal symmetric simplified mechanism). Ces derniers, aussi connus sous le nom de mécanismes de Stewart 3/3 ont six jambes qui se partagent trois points d'ancrage à la plateforme ainsi que trois points liés au bâti. Il serait possible d'identifier six torseurs à pas nuls qui s'intersectent par pair soit aux points d'ancrage de la plateforme, soit aux trois points d'ancrage au bâti. Ainsi, il est également possible d'obtenir le modèle cinématique direct des mécanismes *MSSM* grâce aux relations présentées dans ce document.

Nous allons cependant dans cette section nous intéresser à une autre classe de mécanismes spatiaux à six degrés de liberté, dits hybrides [152]. Ces derniers ont trois jambes et deux actionneurs par jambe. Des exemples de tels mécanismes sont donnés par le 3 – *RRPS* de [198], le 3 – *RSPR* de [199] ou le 3 – *USR* de [200].

Mécanisme à topologie arbitraire

Nous allons montrer comment adapter la méthodologie développée pour établir le modèle cinématique direct d'un mécanisme 6 – *UPS* aux mécanismes hybrides. Pour cela, nous allons commencer par considérer un mécanisme où chaque branche a une topologie arbitraire. Supposons qu'une jambe d'un tel mécanisme soit une branche 3 – *RPSR* comme illustrée figure 5.31.

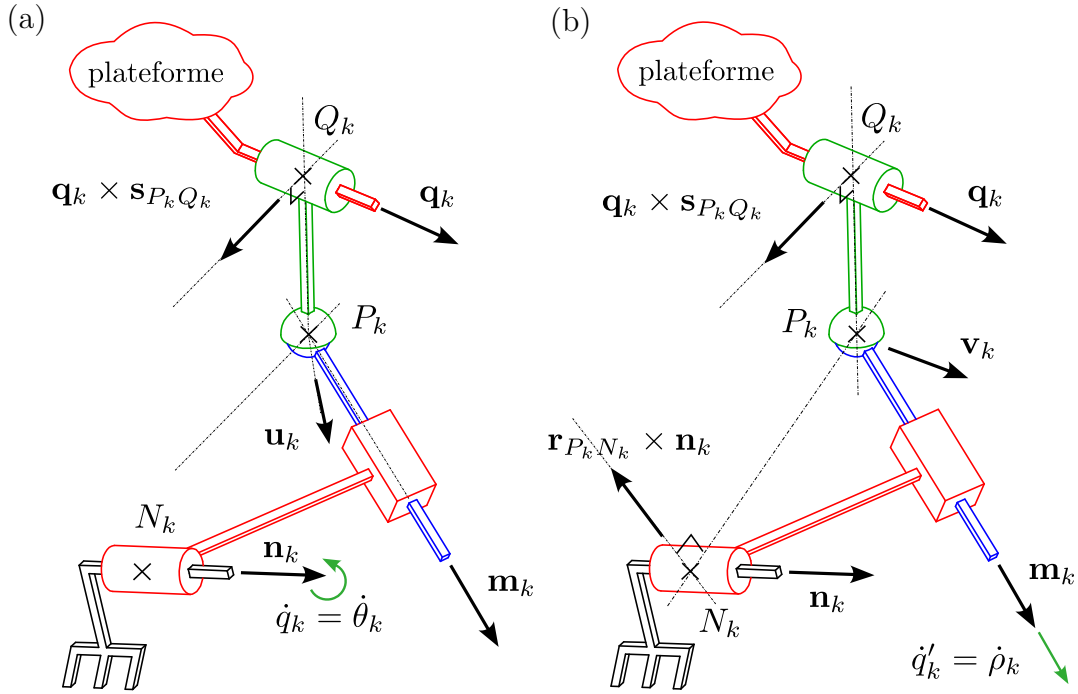


FIGURE 5.31 Géométrie d'une chaîne *RPSR*

La jambe est composée d'une liaison rotatoire de vecteur directeur $\mathbf{n}_k$ passant par un point N_k , suivi d'une liaison prismatique $\mathbf{m}_k$, puis d'une liaison sphérique localisée en un point P_k . Enfin, en bout de chaîne se trouve une seconde liaison rotatoire de vecteur directeur $\mathbf{q}_k$ passant par un point Q_k . On suppose que les deux premières liaisons sont actionnées respectivement avec des vitesses $\dot{q}_k = \dot{\theta}_k$ et $\dot{q}'_k = \dot{\rho}_k$. On suppose également que les vecteurs $\mathbf{q}_k$, $\mathbf{m}_k$ et $\mathbf{n}_k$ sont linéairement indépendants et que la mobilité totale de la jambe est de six. Les deux visseurs associés aux liaisons actionnées ainsi sont respectivement :

$$\xi_0^{N_k}(\mathbf{n}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_k \\ \mathbf{n}_k \times \mathbf{r}_{N_k O} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \xi_\infty(\mathbf{m}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{m}_k \end{bmatrix}. \quad (5.88)$$

Pour exprimer la matrice jacobienne du mécanisme, il nous faut à nouveau identifier deux torseurs à pas nuls $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ et $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ qui s'intersectent en un point. Le torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ sera choisi pour

être réciproque aux visseurs de toutes les liaisons à l'exception de la liaison rotoïde active, tandis que $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ sera choisi pour être réciproque à tous les visseurs à l'exception de celui de la liaison prismatique. Comme les deux liaisons rotoïdes et l'articulations prismatique sont orientées selon des axes gauches quelconques, alors il n'est *a priori* pas aisé de trouver un torseur à pas nul réciproque à cinq visseurs. Nous allons donc commencer par identifier deux torseurs réciproques à la liaison sphérique et à la liaison rotoïde passive. Ils sont donnés par :

$$\zeta_k^{pq_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_{P_k O} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_k^{pq_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{P_k Q_k} \\ \mathbf{s}_{P_k Q_k} \times \mathbf{r}_{P_k O} \end{bmatrix}. \quad (5.89)$$

Puis, nous pouvons utiliser la méthode tirée de [193], comme nous l'avons fait en section 5.1.4. On cherche en premier lieu à déterminer le torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ qui doit être simultanément être une combinaison linéaire des deux torseurs de l'équation (5.89) tout en étant réciproque au visseur de la liaison prismatique, voir équation (5.88). Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \zeta_0^{\mathbf{u}_k} &= [\zeta_k^{pq_2} \circ \xi_\infty(\mathbf{m}_k)] \zeta_k^{pq_1} - [\zeta_k^{pq_1} \circ \xi_\infty(\mathbf{m}_k)] \zeta_k^{pq_2} \\ &= \mathbf{m}_k^T \mathbf{s}_{P_k Q_k} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix} - \mathbf{m}_k^T \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{P_k Q_k} \\ \mathbf{s}_{P_k Q_k} \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{m}_k \times (\mathbf{q}_k \times \mathbf{s}_{P_k Q_k}), \end{aligned} \quad (5.90)$$

où $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{P_k O}$, voir figure 5.31 (a).

Le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ doit quant à lui être une combinaison linéaire des deux torseurs de l'équation (5.89) tout en étant réciproque au visseur de la liaison rotoïde actionnée, voir équation (5.88). Il est donné par :

$$\begin{aligned} \zeta_0^{\mathbf{v}_k} &= [\zeta_k^{pq_2} \circ \xi_0^{N_k}(\mathbf{n}_k)] \zeta_k^{pq_1} - [\zeta_k^{pq_1} \circ \xi_0^{N_k}(\mathbf{n}_k)] \zeta_k^{pq_2} \\ &= \mathbf{s}_{P_k Q_k}^T (\mathbf{r}_{P_k N_k} \times \mathbf{n}_k) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix} - \mathbf{q}_k^T (\mathbf{r}_{P_k N_k} \times \mathbf{n}_k) \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{P_k Q_k} \\ \mathbf{s}_{P_k Q_k} \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}_k = (\mathbf{r}_{P_k N_k} \times \mathbf{n}_k) \times (\mathbf{q}_k \times \mathbf{s}_{P_k Q_k}), \end{aligned} \quad (5.91)$$

comme montré figure 5.31 (b). Ainsi, les torseurs $\xi_0^{\mathbf{u}_k}$ et $\xi_0^{\mathbf{v}_k}$ sont bien à pas nul et s'intersectent en P_k , le centre de la liaison sphérique. En introduisant le vecteur des liaisons actives $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2 \quad \dot{\rho}_3]^T$, on peut construire une équation de vitesse identique à celle de l'équation (5.72), c'est-à-dire ayant une fois encore une matrice jacobienne parallèle contenant des torseurs qui s'intersectent deux à deux et une matrice jacobienne sérielle diagonale.

La matrice jacobienne $\mathbf{J}$ est ainsi identique à celle du mécanisme 6 – *UPS* triangulaire et est donnée équation (5.74). Ses colonnes sont les visseurs ξ_k et ξ'_k donnés respectivement équations (5.39), et (5.76).

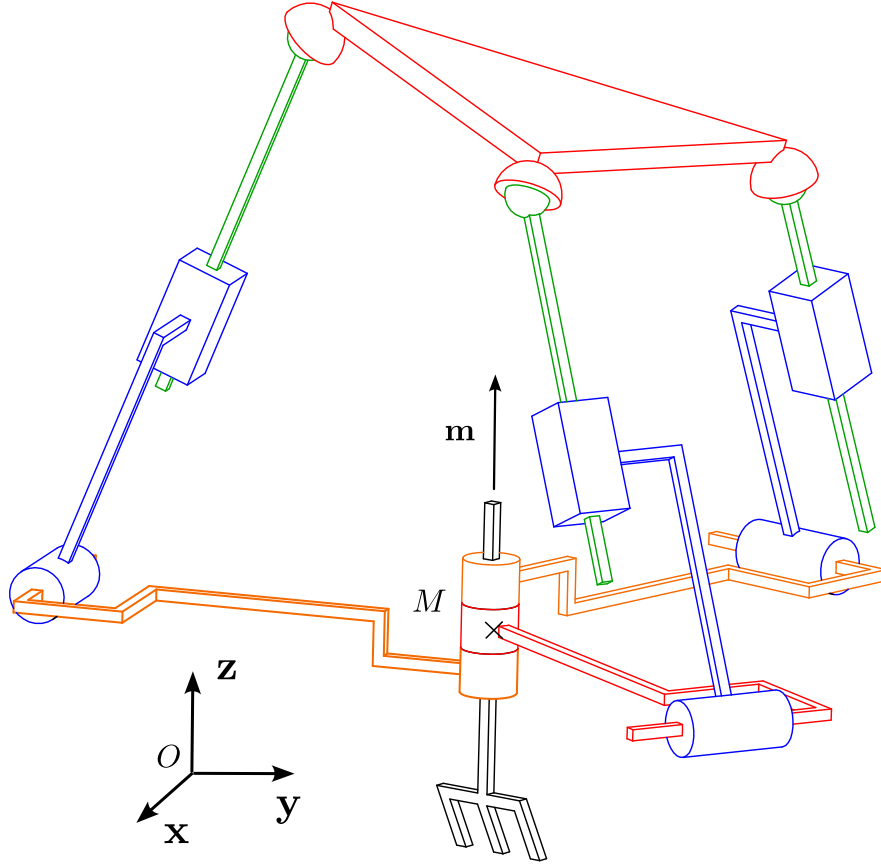


FIGURE 5.32 Mécanisme 3 – *RRPS*

La méthode pour identifier les torseurs réciproques ξ_0^u et ξ_0^v peut être utilisée pour n'importe quel mécanisme hybride avec des jambes de topologie $\underline{XYZS}$ où $\underline{X}$, $\underline{Y}$, et $\underline{Z}$ sont des liaisons P et/ou R , dans n'importe quel ordre. Il est cependant nécessaire que la géométrie de la jambe permette l'identification de torseurs à pas nuls s'intersectant deux à deux aux centres des liaisons sphériques et que les six torseurs identifiés soient linéairement indépendants. La jambe que nous venons d'étudier est juste un exemple. Nous avons volontairement choisi une architecture complexe pour montrer qu'il est possible, dans la majorité des cas d'identifier deux torseurs à pas nuls qui respectent ces conditions. Il est en effet, en pratique, rare que les axes des liaisons aient des relations arbitraires entre eux.

Les figures 5.32 et 5.33 montrent deux exemples typiques de mécanismes hybrides. Chacun de ces mécanismes possède 3 branche à six DDLs, dont deux liaisons sont actionnées. La figure 5.32 montre le mécanisme 3 – *RRPS* introduit en [198]. Il s'agit d'un mécanisme basé sur le

$3 - R\underline{P}S$. Nous avons eu l'occasion d'analyser ce dernier en détail en section 5.1 et 5.3. Le $3 - \underline{R}R\underline{P}S$ ajoute la possibilité à chaque jambe de pivoter autour d'un rail circulaire centré au point M et d'axe $\mathbf{m}$, comme montré figure 5.32. Le mécanisme $3 - \underline{P}P\underline{S}R$, voir [200], montré figure 5.33, possède quant à lui trois branches SR . Le centre de chaque liaison sphérique à la base de chaque jambe peut se mouvoir dans un plan grâce à deux articulations prismatiques actionnées.

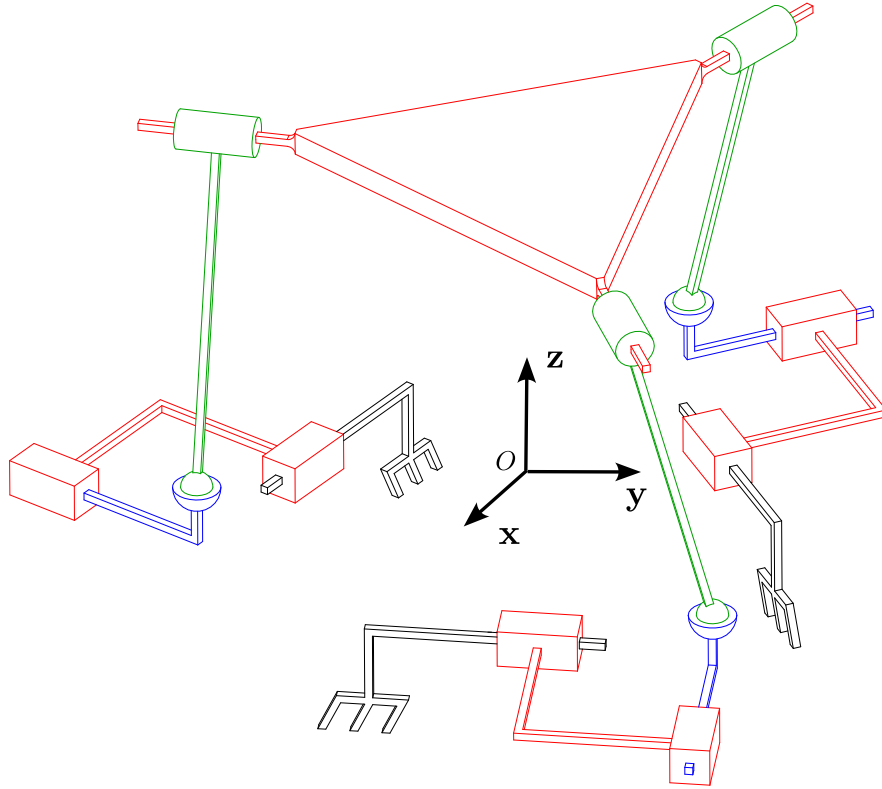


FIGURE 5.33 Mécanisme $3 - PPSR$

Pour les mécanismes $3 - \underline{R}R\underline{P}S$ et $3 - \underline{P}P\underline{S}R$, il est possible d'identifier deux torseurs par jambe qui s'intersectent aux centres des liaisons sphériques, voir annexe A.5, et donc d'obtenir leur modèle cinématique direct grâce aux équations introduites dans ce chapitre.

La plateforme de Stewart

Avant de conclure ce chapitre, nous allons nous intéresser à un dernier mécanisme dont la matrice jacobienne peut être donnée analytiquement. Ce mécanisme est à mi-chemin entre les mécanismes de la classe des *TSSM* et de celle des mécanismes hybrides que nous venons d'évoquer. Il s'agit de la plateforme de Stewart [201] montrée figure 5.34. Ce mécanisme a été utilisé pour l'un des premiers simulateurs de vol, si ce n'est le premier. Il reste aujourd'hui l'un des mécanismes parallèles, ou plutôt hybrides, parmi les plus connus.

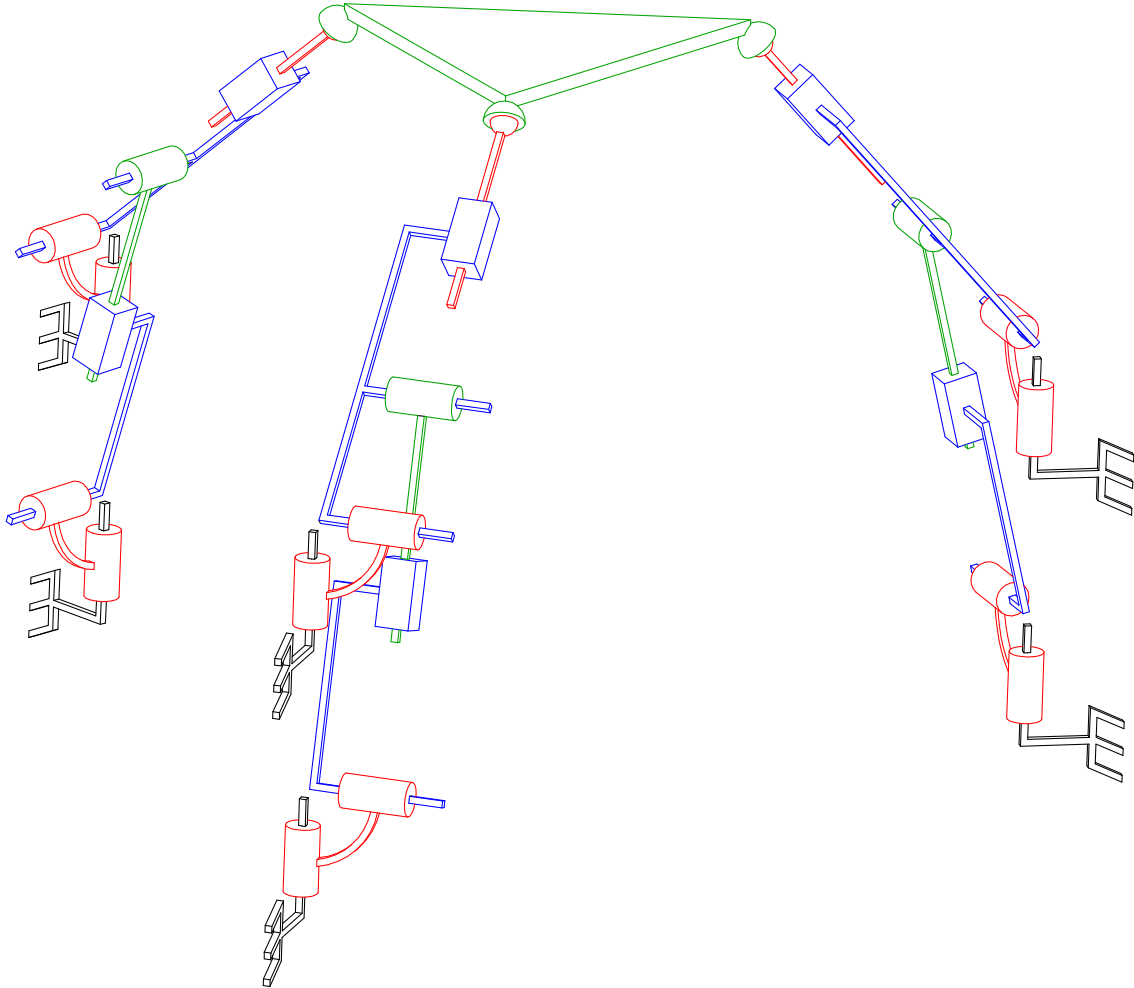


FIGURE 5.34 Plateforme de Stewart

À l'image des *TSSM*, ce mécanisme a six points d'attache au bâti et seulement trois à la plateforme, mais il ne possède que trois jambes. La figure 5.35 montre l'une d'entre elles. Toutes les liaisons sont contenues dans un plan de normale $\mathbf{b}_k$ pouvant pivoter autour d'un axe $\mathbf{a}_k = \mathbf{s}_{A_k B_k}$ où A_k et B_k sont les deux points d'attache de la k -ième jambe au bâti.

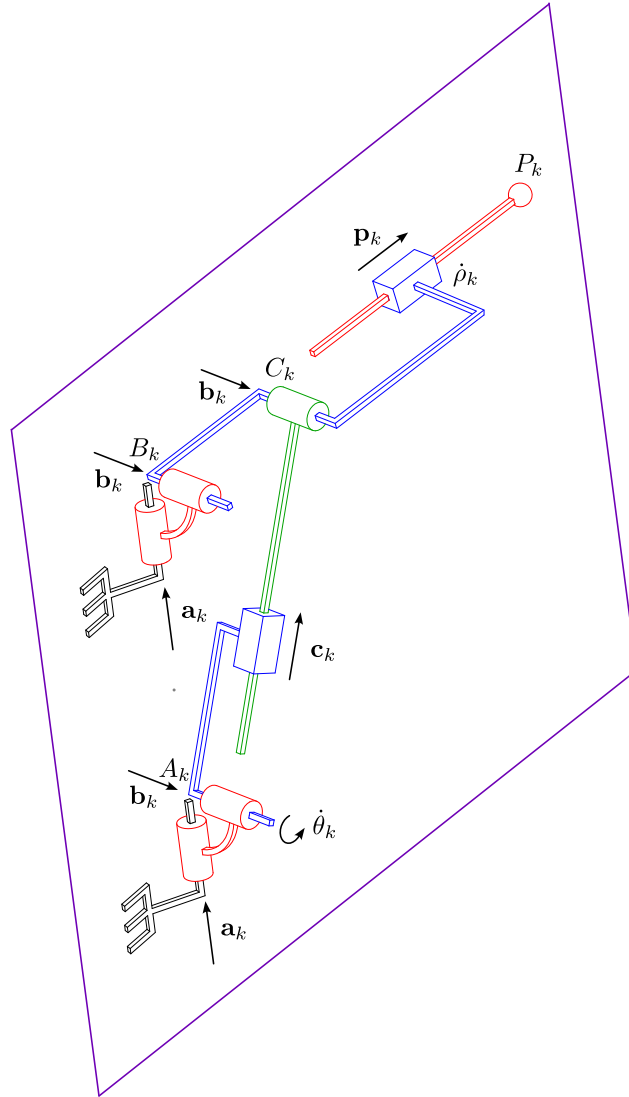


FIGURE 5.35 Paramétrage d'une jambe de la plateforme de Stewart

Une jambe de la plateforme de Stewart est composée d'une première sous-branche constituée d'une liaison universelle localisée au point A_k et d'axes $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ suivie d'une liaison prismatique orientée selon un vecteur $\mathbf{c}_k$. Elle est connectée par une liaison rotoïde d'axe $\mathbf{b}_k$ passant par un point C_k à une seconde branche de topologie UPS .

Le centre de la liaison universelle de cette deuxième branche est localisé au point B_k et ses axes sont également $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$. S'en suit un corps connecté à la première branche par l'articulation rotoïde au point C_k . Ce corps est connecté à une autre membrure par une liaison prismatique dirigée par le vecteur $\mathbf{p}_k$. Enfin, ce dernier corps est connecté à la plateforme par une liaison sphérique de centre P_k .

Le mécanisme est actionné par la liaison prismatique en bout de jambe qui est orientée par le vecteur directeur $\mathbf{p}_k$ ainsi que par la seconde articulation rotoïde de la liaison universelle de la première branche, c'est-à-dire autour de l'axe $\mathbf{b}_k$ passant par le point A_k . On appellera les vitesses actionnées de ces liaisons respectivement $\dot{\rho}_k$ et $\dot{\theta}_k$, voir figure 5.35 à nouveau.

Les deux sous-branches d'une jambe sont interconnectées par un mécanisme plan, plus précisément par le mécanisme à quatre barres de type bielle-manivelle montré figure 5.36. Ainsi, l'actionnement autour de la liaison rotoïde localisée au point A_k d'axe $\mathbf{b}_k$, normal au plan contenant les liaisons de la jambe, entraîne une rotation du corps B_kC_k , qui constitue de le corps de sortie de ce mécanisme, autour du point B_k .

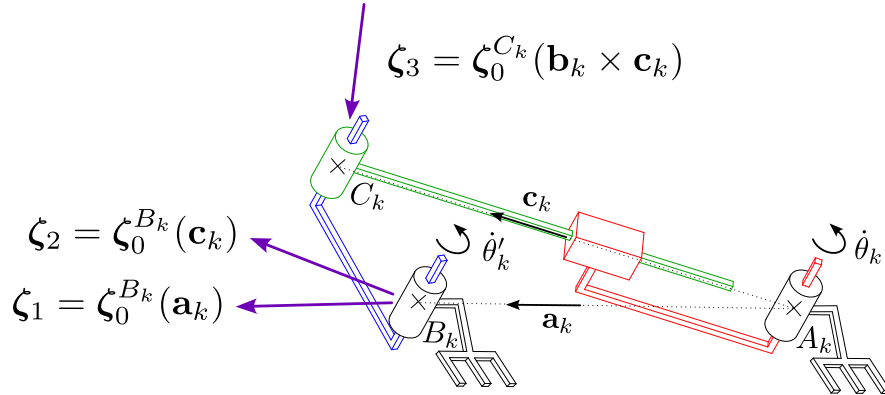


FIGURE 5.36 Mécanisme à quatre barres plan compris dans une jambe de la plateforme de Stewart

Il est possible d'identifier deux torseurs à pas nuls qui sont contenus dans ce plan et dont les axes se rencontrent au point B_k . Les torseurs $\zeta_0^{B_k}(\mathbf{a}_k)$ et $\zeta_0^{B_k}(\mathbf{c}_k)$ constituent un choix approprié car le vecteur $\mathbf{a}_k$ n'est pas colinéaire au vecteur $\mathbf{c}_k$, voir figure 5.36. Il est également possible d'identifier un troisième torseur dans le même plan, passant par le point C_k et d'axe perpendiculaire à $\mathbf{p}_k$, donné par $\zeta_0^{C_k}(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k)$. Ainsi, en appliquant les relations du chapitre 3 introduites en section 3.2 et plus particulièrement l'équation (3.33), nous obtenons directement le visseur du corps B_kC_k , à savoir :

$$\xi^{B_kC_k} = \frac{\zeta_0^{C_k}(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k) \circ \xi_0^{A_k}(\mathbf{b}_k)}{\zeta_0^{C_k}(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k) \circ \xi_0^{B_k}(\mathbf{b}_k)} \xi_0^{B_k} \dot{\theta}_k. \quad (5.92)$$

Il est à noter que ici les torseurs et visseurs sont spatiaux, au contraire de ceux du chapitre 3. Le corps B_kC_k tourne ainsi autour du point B_k avec une vitesse :

$$\dot{\theta}'_k = \frac{\zeta_0^{C_k}(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k) \circ \xi_0^{A_k}(\mathbf{b}_k)}{\zeta_0^{C_k}(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k) \circ \xi_0^{B_k}(\mathbf{b}_k)} \dot{\theta}_k = \frac{(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k)^T (\mathbf{b}_k \times \mathbf{r}_{A_kC_k})}{(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_k)^T (\mathbf{b}_k \times \mathbf{r}_{B_kC_k})} \dot{\theta}_k. \quad (5.93)$$

Par conséquent, une jambe d'un mécanisme de Stewart est équivalente à une jambe $\underline{RRPS}$, comme montré figure 5.37. Il est donc aisé d'identifier deux torseurs à pas nuls de vecteurs directeur $\mathbf{u}_k$ et $\mathbf{v}_k$ qui s'intersectent au centre de la liaison sphérique de chaque jambe, voir figure 5.37. Ainsi, le modèle cinématique direct analytique du mécanisme de Stewart peut être établi grâce aux équations introduites dans ce chapitre.

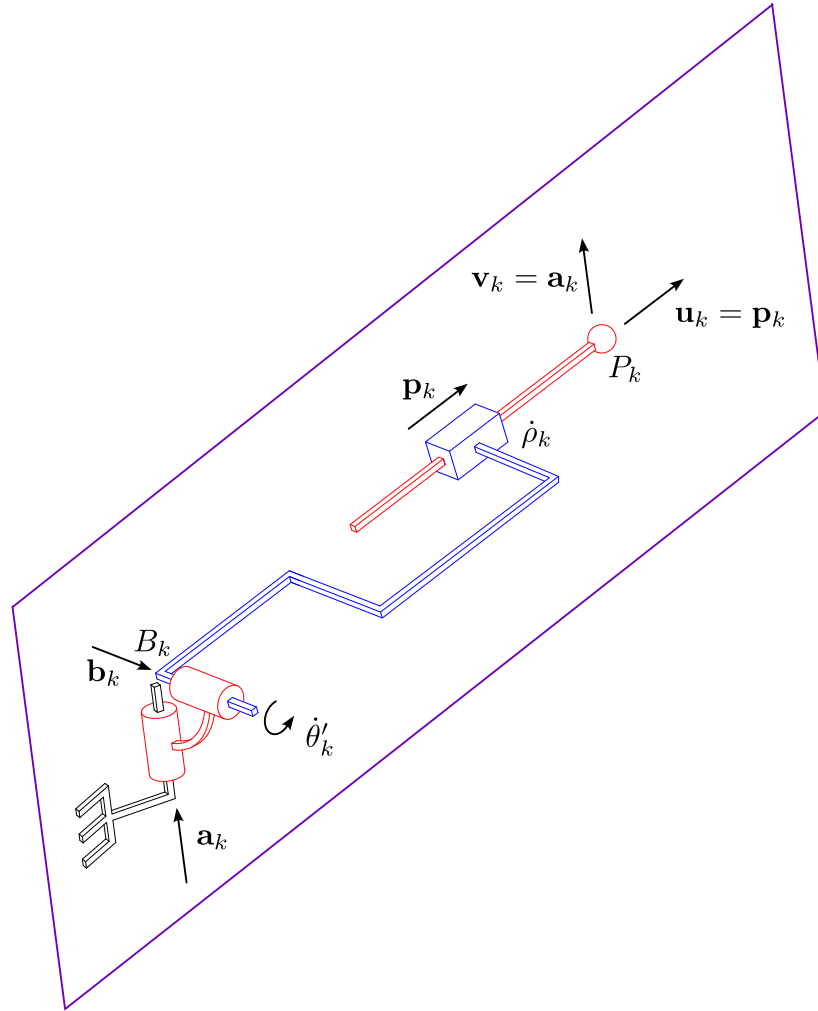


FIGURE 5.37 Chaîne cinématiquement équivalente à une jambe de la plateforme de Stewart

5.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à un mécanisme à trois DDLs et un autre à six DDLs. Nous avons analysé le premier, le mécanisme 3 – *RPS*, dont nous avons pu donner le modèle cinématique direct via une formulation explicite de la matrice jacobienne de son organe terminal. La matrice jacobienne est, comme pour celles introduites aux chapitres 3 et 4 constituée de visseurs homogènes à des visseurs unitaires auxquels on multiplie un rapport de produits réciproques. Nous nous sommes ensuite intéressés à des formulations alternatives de cette même matrice grâce à une analyse de mobilités et nous avons illustré le comportement cinématique de ce mécanisme par des applications numériques. Nous avons ensuite pu étendre aisément ces résultats au mécanisme 6 – *UPS* triangulaire.

Ces deux mécanismes ont été choisis comme illustrations pour donner corps aux équations introduites. En réalité, il existe de nombreux autres mécanismes à trois DDLs qui partagent la même expression de matrice jacobienne que le 3 – *RPS*, comme nous avons pu en discuter en section 5.4.1. De même, les équations établies pour le mécanisme 6 – *UPS* triangulaire peuvent être appliquées aux mécanismes de classe *TSSM* ou *MSSM*, mais pas seulement. Nous avons vu en section (5.4.2), des mécanismes hybrides dont le modèle cinématique direct est donné par les mêmes équations que le mécanisme 6 – *UPS* triangulaire. Tous les mécanismes étudiés dans cette section ont un point commun fondamental. Il a toujours été possible de construire une matrice jacobienne parallèle constituée de six torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent par paires.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'objectif de cette thèse était de donner une expression analytique de la matrice jacobienne de mécanismes parallèles et hybrides. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur le cadre mathématique de la théorie des visseurs. Pour plusieurs classes de mécanismes, nous avons ainsi pu donner une expression de la matrice jacobienne sous la forme d'une collection de visseurs.

6.1 Synthèse des travaux

La théorie des visseurs est un outil puissant pour l'analyse des mécanismes. Grâce à cette dernière, il est aisé d'obtenir une équation reliant les vitesses des articulations actionnées au mouvement de l'organe terminal. Si pour les mécanismes sériels on obtient immédiatement la matrice jacobienne, ce n'est pas le cas pour les mécanismes parallèles et/ou hybrides, dont l'équation de vitesse fait intervenir deux matrices jacobienes distinctes. Cette relation est obtenue grâce à des torseurs réciproques, dont l'identification se fait par une méthodologie connue dans le cadre de la théorie des visseurs. La volonté derrière ce travail était de pouvoir utiliser les informations contenues dans ces torseurs pour pouvoir construire directement la matrice jacobienne de mécanismes parallèles ou hybrides sous forme de visseurs.

Nous avons en premier lieu donné une forme unifiée de la matrice jacobienne des mécanismes plans. Ainsi, comme nous le désirions, il est possible, une fois après avoir identifié les torseurs réciproques, d'appliquer les formules du chapitre 3 pour obtenir analytiquement la matrice jacobienne de ces mécanismes. Nous avons introduit les matrices de visseurs qui permettent d'obtenir une expression des visseurs de n'importe quel corps d'un mécanisme plan par des sommes et/ou multiplication de matrices de visseurs, remplaçant ainsi les inversions de matrices habituelles. Les matrices de visseurs sont particulièrement utiles pour des mécanismes hybrides pouvant comporter de nombreuses boucles cinématiques interconnectées. Lorsque ces matrices sont multipliées aux visseurs actionnés, alors la matrice jacobienne peut être obtenue sous une forme alternative. La ou les colonnes de la matrice jacobienne peuvent être exprimée(s) sous la forme d'un visseur unitaire multiplié par un rapport de produits réciproques. Cette forme particulière a été retrouvée dans l'intégralité des mécanismes spatiaux que l'on a étudiés par la suite.

Le chapitre 4 était consacré à deux classes de mécanismes spatiaux à DDLs limités, qui sont les mécanismes rotationnels et translationnels. Dans la première catégorie, nous nous sommes

d'abord intéressés aux mécanismes sphériques, et notamment au très connu œil agile. Puis, nous avons étudié divers exemples de mécanismes parallèles d'orientation non sphériques. Plusieurs exemples ont été proposés afin de montrer que les équations que nous avons établies sont suffisamment générales pour s'appliquer à un grand nombre de mécanismes. Quant aux mécanismes translationnels, nous avons également illustré la méthode pour plusieurs mécanismes, y compris le populaire robot Delta.

Au chapitre 5, nous nous sommes concentrés sur une classe de mécanismes qui possèdent également trois mobilités dans l'espace mais qui ne sont ni purement rotationnels ni uniquement translationnels. Ces mécanismes ont comme point commun de posséder une matrice jacobienne parallèle constituée de six torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent deux à deux. La matrice jacobienne de ces mécanismes est constituée de trois visseurs à pas finis. Le vecteur directeur, le pas et la position de la droite de ces derniers peuvent être proposés analytiquement grâce aux informations contenues dans six torseurs réciproques préalablement identifiés. Le mécanisme 3-*RPS* a été choisi en principal exemple pour illustrer les équations établies pour cette catégorie de mécanismes, et une application numérique et visuelle a été proposée. D'autres exemples de mécanismes dont l'expression de la matrice jacobienne est identique à celle du mécanisme 3-*RPS* ont été présentés.

Enfin, nous avons pu étendre les résultats obtenus pour ces mécanismes à d'autres mécanismes spatiaux pleinement actionnés. Leur point commun est également d'avoir une matrice jacobienne parallèle composée de six torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent deux à deux. Les colonnes de la matrice jacobienne sont également des visseurs à pas finis. Tout comme nous l'avons fait pour le mécanisme 3-*RPS*, nous avons choisi le mécanisme 6-*UPS* triangulaire pour illustrer les équations introduites. Ces dernières sont cependant applicables à de nombreux mécanismes spatiaux. On retrouve parmi eux la classe des mécanismes de Stewart 6/3, 3/3 et également des mécanismes hybrides à trois branches qui possèdent deux actionnements par chaîne. Plusieurs exemples ont été proposés dont notamment la plateforme de Stewart.

6.2 Avantages de la solution proposée

Cette thèse propose une expression analytique de la matrice jacobienne de nombreux mécanismes parallèles et hybrides, allant des mécanismes plans aux mécanismes spatiaux pleinement actionnés. La matrice jacobienne est donnée sous forme de visseurs, eux-mêmes formés par les vecteurs contenus dans les torseurs réciproques. Cela nous permet d'obtenir une expression analytique et vectorielle de cette matrice qui est d'une part géométriquement interprétable et d'autre part commune et applicable à plusieurs mécanismes.

Obtenir la matrice jacobienne sous la forme de relations vectorielles constitue un énorme avantage par rapport à une matrice jacobienne obtenue par dérivation d'un modèle géométrique. Outre la difficulté d'obtention par dérivation de cette dernière, les équations obtenues sont par définition dépendantes de la géométrie d'un mécanisme donné. Elles sont également dépendantes du paramétrage de ce dernier (par exemple du choix entre angles relatifs ou absolus, de la convention d'angles d'Euler, etc...), tandis que les équations vectorielles sont indépendantes de celui-ci.

Une des applications possibles de la méthode proposée est le contrôle en temps réel. Les algorithmes de contrôle en vitesse nécessitent généralement d'estimer à chaque itération les vitesses cartésiennes de l'organe terminal en fonction des vitesses actionnées, puis de corriger ces dernières en fonction des vitesses cartésiennes. Avoir une expression analytique permet de diminuer le temps de calcul puisqu'il n'est pas nécessaire à chaque cycle de recalculer numériquement l'inverse de la matrice jacobienne parallèle, tout en augmentant la stabilité numérique de l'algorithme.

Les équations présentées dans ce document peuvent également avoir un avantage en ce qui concerne l'optimisation et la conception d'un robot. Une idée d'emploi de la méthode allant dans ce sens peut être le dimensionnement de moteurs ou la réduction de consommation électrique de ces derniers. Puisque le modèle cinématique analytique est proposé, un corollaire est que le modèle en force indirect analytique est également disponible via la transposée de la matrice jacobienne obtenue. Pour un ensemble d'efforts extérieurs appliqués à l'organe terminal d'un mécanisme, il est possible d'obtenir les couples/forces des actionneurs qu'il est nécessaire de fournir par les moteurs. Ainsi, il est possible de travailler sur l'optimisation des différents paramètres géométriques afin de réduire la consommation électrique des actionneurs en utilisant des expressions analytiques, ce qui peut présenter un atout important.

Savoir qu'il est possible d'obtenir analytiquement la matrice jacobienne de certaines classes de mécanismes peut influencer la synthèse de ces derniers. Il serait en effet possible de créer de nouveaux mécanismes en faisant en sorte que les torseurs réciproques respectent les critères présentés dans cette thèse. Une recherche préliminaire a montré qu'il est en effet possible grâce aux équations du chapitre 5 de créer un mécanisme à quatre DDLs dont on connaîtrait analytiquement la matrice jacobienne. Il suffirait de créer un robot à quatre jambes, dont les deux premières sont du type $\underline{XYS}$ tandis que les deux autres sont des chaînes $\underline{XYZS}$ (pour $X, Y, Z = P$ et/ou R) qui se partagent leur liaison sphérique. Il est également possible de créer de la même manière un robot à cinq DDLs.

Enfin, une dernière application serait la synthèse géométrique. En partant d'un ensemble de visseurs représentant le mouvement souhaité, on peut alors déterminer les expressions ana-

lytiques des contraintes de conception que le mécanisme doit satisfaire. Prenons par exemple le mécanisme sériel HHH montré figure 5.27 (b), où les trois liaisons hélicoïdales sont représentées par un ensemble de trois visseurs. Alors, grâce au chapitre 5, il est possible de calculer les paramètres géométriques du mécanisme 3 – RPS permettant de générer une géométrie particulière de ces trois liaisons hélicoïdales, voir figure 5.27 (a).

6.3 Limitations de la solution proposée et améliorations futures

Ce travail s’est uniquement consacré à des mécanismes à membrures rigides, or comme nous l’avons évoqué en introduction, il existe une multitude d’autres types de mécanismes, certains n’ayant pas d’équivalent cinématique exact avec les mécanismes à membrures rigides. Il existe également de nombreux types de mécanismes à membrures rigides sur lesquels nous ne nous sommes pas penchés. Aux chapitres 4 et 5, à l’exception des mécanismes sphériques, nous ne nous sommes seulement intéressés aux mécanismes pleinement actionnés, laissant notamment de côté les mécanismes redondants.

Les différents mécanismes que nous avons étudiés pourraient être classés par la nature des torseurs réciproques que nous pouvons identifier, par exemple trois torseurs à pas infinis pour les mécanismes translationnels, six visseurs à pas nuls qui s’intersectent deux à deux pour les mécanismes du chapitre 5, etc... Un récapitulatif des mécanismes classés par leurs contraintes est par ailleurs donné en annexe B. Or il existe une multitude de mécanismes qui ne rentrent pas dans ces catégories. On pourrait créer d’autres classes basées sur les torseurs réciproques identifiables, par exemple une classe possédant deux torseurs à pas infinis et quatre autres à pas nuls, ou une classe de mécanismes dont les torseurs réciproques identifiés ont des pas finis, etc... Il existe un grand nombre de combinaisons de torseurs réciproques possibles et donc de classes de mécanismes.

Un objectif futur serait donc de donner la matrice jacobienne analytique de mécanismes dont les combinaisons de torseurs réciproques seraient différentes de celles présentées dans cette thèse. Parmi elles, nous souhaiterions en particulier nous pencher sur des mécanismes dont les six torseurs ont un pas nul et dont les axes n’ont pas de relations particulières entre eux. Cela nous permettrait de fournir l’expression générale de la matrice jacobienne de la plateforme de Gough-Stewart 6/6 et dans un même temps le modèle cinématique inverse d’un robot sériel à six liaisons rotoïdes.

Bien qu’il reste de nombreuses classes de mécanismes dont la matrice jacobienne analytique reste à déterminer, nous espérons que par ce travail, nous avons pu contribuer à notre échelle à la théorie des visseurs et à une meilleure connaissance des mécanismes parallèles et hybrides.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. S. Ball, *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge university press, 1900.
- [2] K. H. Hunt, *Kinematic geometry of mechanisms*. Oxford University Press, 1978.
- [3] J. Phillips, *Freedom in machinery : Introducing screw theory*. Cambridge University Press, 1984, vol. 1.
- [4] J. K. Davidson, K. H. Hunt et G. R. Pennock, “Robots and screw theory : Applications of kinematics and statics to robotics,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 126, n^o. 4, p. 763–764, 08 2004.
- [5] J.-P. Merlet, “Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, n^o. 1, p. 199–206, 2006.
- [6] P. Cardou, S. Bouchard et C. Gosselin, “Kinematic-sensitivity indices for dimensionally nonhomogeneous jacobian matrices,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 26, n^o. 1, p. 166–173, 2010.
- [7] X. Shi et R. Fenton, “Solution to the forward instantaneous kinematics for a general 6-dof stewart platform,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, n^o. 3, p. 251–259, 1992.
- [8] M. Honegger, A. Codourey et E. Burdet, “Adaptive control of the hexaglide, a 6 dof parallel manipulator,” dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, 1997, p. 543–548.
- [9] C. Gosselin et X. Kong, “Cartesian parallel manipulators,” mai 4 2004, US Patent 6,729,202.
- [10] Y. Li et Q. Xu, “Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 23, n^o. 4, p. 395–408, 2007.
- [11] J. Liu, R. Li, Y. Wang, L. Zhang et F. Ning, “Kinematics and performance analysis of the 2T1R/1T2R reconfigurable decoupled parallel mechanism,” *Applied Sciences*, vol. 15, n^o. 3, p. 1134, 2025.
- [12] T. LEINONEN, “Terminology for the theory of machines and mechanisms,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, n^o. 5, p. 435–539, 1991.
- [13] M. G. Schneiders, M. Van De Molengraft et M. Steinbuch, “Benefits of over-actuation in motion systems,” dans *Proceedings of the 2004 American control conference*, vol. 1. IEEE, 2004, p. 505–510.

- [14] Z. Chen, Y. Liu, P. Zanchetta, X. Fu et J. Tan, “A novel dynamic decoupling approach based on command shaping for overactuated motion systems,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 71, n°. 8, p. 9139–9149, 2023.
- [15] R. G. Roberts, T. Graham et T. Lippitt, “On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 15, n°. 10, p. 581–597, 1998.
- [16] J. Lamaury et M. Gouttefarde, “Control of a large redundantly actuated cable-suspended parallel robot,” dans *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2013, p. 4659–4664.
- [17] P. C. Chesser, P. L. Wang, J. E. Vaughan, R. F. Lind et B. K. Post, “Kinematics of a cable-driven robotic platform for large-scale additive manufacturing,” *Journal of mechanisms and robotics*, vol. 14, n°. 2, p. 021010, 2022.
- [18] T. A. McMahon, “Mechanics of locomotion,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 3, n°. 2, p. 4–28, 1984.
- [19] T. McGeer *et al.*, “Passive dynamic walking,” *Int. J. Robotics Res.*, vol. 9, n°. 2, p. 62–82, 1990.
- [20] S. H. Collins, M. Wisse et A. Ruina, “A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 20, n°. 7, p. 607–615, 2001.
- [21] L. Birglen, “Type synthesis of linkage-driven self-adaptive fingers,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 1, n°. 2, p. 021010, 01 2009.
- [22] N. Mouazé et L. Birglen, “Deformation analysis of a compliant underactuated finger grasping a soft object,” ser. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, vol. Volume 5A : 42nd Mechanisms and Robotics Conference, 08 2018, p. V05AT07A001.
- [23] C. Gosselin et T. Laliberté, “Underactuated versatile gripper for the cleaning of nuclear sites,” dans *2010 1st International Conference on Applied Robotics for the Power Industry*. IEEE, 2010, p. 1–6.
- [24] V. Begoc, S. Krut, E. Dombre, C. Durand et F. Pierrot, “Mechanical design of a new pneumatically driven underactuated hand,” dans *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2007, p. 927–933.
- [25] C. M. Gosselin, “Adaptive robotic mechanical systems : A design paradigm,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, n°. 1, p. 192–198, 08 2005.
- [26] M. Zecca, G. Cappiello, F. Sebastiani, S. Roccella, F. Vecchi, M. Carrozza et P. Dario, “Experimental analysis of the proprioceptive and exteroceptive sensors of an unde-

- ractuated prosthetic hand,” *International Journal of Human-friendly Welfare Robotic Systems*, vol. 4, n°. 4, p. 2–6, 2003.
- [27] J. D. Crisman, C. Kanojia et I. Zeid, “Graspar : A flexible, easily controllable robotic hand,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 3, n°. 2, p. 32–38, 1996.
 - [28] G. Grioli, M. Catalano, E. Silvestro, S. Tono et A. Bicchi, “Adaptive synergies : an approach to the design of under-actuated robotic hands,” dans *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2012, p. 1251–1256.
 - [29] C. Zheng et K. Lee, “Wheeler : Wheel-leg reconfigurable mechanism with passive gears for mobile robot applications,” dans *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2019, p. 9292–9298.
 - [30] L. Bai, J. Guan, X. Chen, J. Hou et W. Duan, “An optional passive/active transformable wheel-legged mobility concept for search and rescue robots,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 107, p. 145–155, 2018.
 - [31] O. Y. Kanner et A. M. Dollar, “Kinematic design of an underactuated robot leg for passive terrain adaptability and stability,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 5, n°. 3, p. 031006, 2013.
 - [32] O. Y. Kanner, N. Rojas et A. M. Dollar, “Between-leg coupling schemes for passively-adaptive non-redundant legged robots,” dans *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2017, p. 1072–1079.
 - [33] D. Fedorov, “Conception de systèmes mécaniques auto-adaptatifs pour la locomotion,” Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), 2019.
 - [34] T. Laliberté et C. Gosselin, “Actuation system for highly underactuated gripping mechanism,” janv. 14 2003, U.S. Patent 6,505,870.
 - [35] M. Luo, T. Mei, X. Wang et Y. Yu, “Grasp characteristics of an underactuated robot hand,” dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA’04. 2004*, vol. 3. IEEE, 2004, p. 2236–2241.
 - [36] N. Dechev, W. Cleghorn et S. Naumann, “Multiple finger, passive adaptive grasp prosthetic hand,” *Mechanism and machine theory*, vol. 36, n°. 10, p. 1157–1173, 2001.
 - [37] L. Birglen et C. M. Gosselin, “Force analysis of connected differential mechanisms : Application to grasping,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 25, n°. 10, p. 1033–1046, 2006.
 - [38] L. Da Vinci, “Codex atlanticus,” *Biblioteca Ambrosiana, Milan*, vol. 26, n°. 1, 1894.
 - [39] S. Hirose, “Connected differential mechanism and its application,” dans *Proc. 1985 Int. Conf. on Advanced Robotics, Tokyo, Japan*, 1985, p. 319–329.

- [40] M. C. Carrozza, B. Massa, S. Micera, R. Lazzarini, M. e. Zecca et P. Dario, “The development of a novel prosthetic hand-ongoing research and preliminary results,” *IEEE/Asme Transactions on Mechatronics*, vol. 7, n^o. 2, p. 108–114, 2002.
- [41] C. Gosselin, F. Pelletier et T. Laliberte, “An anthropomorphic underactuated robotic hand with 15 dofs and a single actuator,” dans *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2008, p. 749–754.
- [42] A. M. Dollar et R. D. Howe, “The highly adaptive sdm hand : Design and performance evaluation,” *The international journal of robotics research*, vol. 29, n^o. 5, p. 585–597, 2010.
- [43] R. Carpenter, R. Hatton et R. Balasubramanian, “Comparison of contact capabilities for underactuated parallel jaw grippers for use on industrial robots,” dans *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 46377. American Society of Mechanical Engineers, 2014, p. V05BT08A026.
- [44] F. Reuleaux, *Kinematics of machinery*. MacMillan and Co, 1876.
- [45] L. Birglen, “MEC6319 conception et commande des mécanismes,” 2022.
- [46] S. Krut, “A force-isotropic underactuated finger,” dans *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2005, p. 2314–2319.
- [47] G. Endo, H. Yamada, A. Yajima, M. Ogata et S. Hirose, “A passive weight compensation mechanism with a non-circular pulley and a spring,” dans *2010 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE, 2010, p. 3843–3848.
- [48] K.-J. Huang, S.-C. Chen, H. Komsuoglu, G. Lopes, J. Clark et P.-C. Lin, “Design and performance evaluation of a bio-inspired and single-motor-driven hexapod robot with dynamical gaits,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 7, n^o. 3, p. 031017, 2015.
- [49] S. Shirafuji, S. Ikemoto et K. Hosoda, “Designing noncircular pulleys to realize target motion between two joints,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, n^o. 1, p. 487–497, 2016.
- [50] D. Fedorov et L. Birglen, “Differential noncircular pulleys for cable robots and static balancing,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 10, n^o. 6, p. 061001, 2018.
- [51] M. Li, T. Shi, J. Yang, L. Qi et Z. Zhao, “Realizing nonlinear springs through noncircular planetary gears,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 156, p. 104151, 2021.
- [52] E. Zheng, F. Jia, H. Sha et S. Wang, “Non-circular belt transmission design of mechanical press,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 57, p. 126–138, 2012.
- [53] J. Chen, J. Ye, Y. Wang, X. Sun, X. Xia et X. He, “Design, modeling and experiment of a novel synchronous belt drive with noncircular pulleys,” *Iranian Journal of Science*

- and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 44, n°. 3, p. 533–542, 2020.
- [54] L. L. Howell, *Compliant mechanisms*. John Wiley & Sons, 2001.
 - [55] J. Pratt, P. Dilworth et G. Pratt, “Virtual model control of a bipedal walking robot,” dans *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1. IEEE, 1997, p. 193–198.
 - [56] B. Verrelst, F. Daerden, D. Lefeber, R. Van Ham et T. Fabri, “Introducing pleated pneumatic artificial muscles for the actuation of legged robots : a one-dimensional setup,” dans *Proceedings of the 3rd International Conference on Climbing and Walking Robots*. Citeseer, 2000, p. 583–590.
 - [57] U. Saranli, M. Buehler et D. E. Koditschek, “Rhex : A simple and highly mobile hexapod robot,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 20, n°. 7, p. 616–631, 2001.
 - [58] S. Kim, J. E. Clark et M. R. Cutkosky, “isprawl : Design and tuning for high-speed autonomous open-loop running,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 25, n°. 9, p. 903–912, 2006.
 - [59] S. H. Collins et A. D. Kuo, “Recycling energy to restore impaired ankle function during human walking,” *PLoS one*, vol. 5, n°. 2, p. e9307, 2010.
 - [60] K. C. Galloway, J. E. Clark et D. E. Koditschek, “Variable stiffness legs for robust, efficient, and stable dynamic running,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 5, n°. 1, 2013.
 - [61] S. H. Collins, M. B. Wiggin et G. S. Sawicki, “Reducing the energy cost of human walking using an unpowered exoskeleton,” *Nature*, vol. 522, n°. 7555, p. 212–215, 2015.
 - [62] S. Cotton, I. M. C. Olaru, M. Bellman, T. van der Ven, J. Godowski et J. Pratt, “Fastrunner : A fast, efficient and robust bipedal robot. concept and planar simulation,” dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2012, p. 2358–2364.
 - [63] A. Badri-Spröwitz, A. Aghamaleki Sarvestani, M. Sitti et M. A. Daley, “Birdbot achieves energy-efficient gait with minimal control using avian-inspired leg clutching,” *Science Robotics*, vol. 7, n°. 64, p. eabg4055, 2022.
 - [64] D. R. Yao, I. Kim, S. Yin et W. Gao, “Multimodal soft robotic actuation and locomotion,” *Advanced Materials*, vol. 36, n°. 19, p. 2308829, 2024.
 - [65] D. Rus et M. T. Tolley, “Design, fabrication and control of origami robots,” *Nature Reviews Materials*, vol. 3, n°. 6, p. 101–112, 2018.

- [66] M. Meloni, J. Cai, Q. Zhang, D. S.-H. Lee, M. Li, M. Ruijun, T. Parashkevov et J. Feng, “Engineering origami : A comprehensive review of recent applications, design methods, and tools,” *Advanced Science*, vol. 8, 05 2021.
- [67] B. Feng, Y. Liu, J. Zhang, S. Qu et W. Yang, “Miniature origami robot for various biological micromanipulations,” *Nature Communications*, vol. 16, 03 2025.
- [68] S. Miyashita, S. Guitron, M. Ludersdorfer, C. R. Sung et D. Rus, “An untethered miniature origami robot that self-folds, walks, swims, and degrades,” dans *2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*. IEEE, 2015, p. 1490–1496.
- [69] Z. Kan, Y. Zhang, Y. Yang, Y. A. Tse et M. Y. Wang, “An origami-inspired monolithic soft gripper based on geometric design method,” dans *2019 2nd IEEE International Conference on Soft Robotics (RoboSoft)*. IEEE, 2019, p. 470–476.
- [70] C. H. Belke et J. Paik, “Mori : a modular origami robot,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, n^o. 5, p. 2153–2164, 2017.
- [71] M. Yim, W.-M. Shen, B. Salemi, D. Rus, M. Moll, H. Lipson, E. Klavins et G. S. Chirikjian, “Modular self-reconfigurable robot systems [grand challenges of robotics],” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 14, n^o. 1, p. 43–52, 2007.
- [72] C. E. Bryson et D. C. Rucker, “Toward parallel continuum manipulators,” dans *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2014, p. 778–785.
- [73] F. Aimedee, G. Gogu, J. Dai, C. Bouzgarrou et N. Bouton, “Systematization of morphing in reconfigurable mechanisms,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 96, p. 215–224, 2016, reconfigurable mechanisms.
- [74] H. Dokuyucu et N. Özmen, “Achievements and future directions in self-reconfigurable modular robotic systems,” *Journal of Field Robotics*, vol. 40, p. 701–746, 12 2022.
- [75] S. Hirose et H. Takeuchi, “Study on roller-walk (basic characteristics and its control),” dans *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4. IEEE, 1996, p. 3265–3270.
- [76] K. Tadakuma, R. Tadakuma, A. Maruyama, E. Rohmer, K. Nagatani, K. Yoshida, A. Ming, S. Makoto, M. Higashimori et M. Kaneko, “Armadillo-inspired wheel-leg retractable module,” dans *2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. IEEE, 2009, p. 610–615.
- [77] J.-J. Chou et L.-S. Yang, “Innovative design of a claw-wheel transformable robot,” dans *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2013, p. 1337–1342.

- [78] Z. Wei, G. Song, Y. Zhang, H. Sun et G. Qiao, “Transleg : A wire-driven leg-wheel robot with a compliant spine,” dans *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*. IEEE, 2016, p. 7–12.
- [79] M. C. Phocas, E. G. Christoforou et P. Dimitriou, “Kinematics and control approach for deployable and reconfigurable rigid bar linkage structures,” *Engineering Structures*, vol. 208, p. 110310, 2020.
- [80] J. Unde, Y. Ito, J. Colan et Y. Hasegawa, “Kinematic analysis and experimental verification of transforming planar linkage mechanism,” *ROBOMECH Journal*, vol. 12, 02 2025.
- [81] Q. Meng, M. Jiang et M. Ceccarelli, “Deployable cellular structures of pyramids and prisms for construction of large-scale deployable supporting trusses,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 209, p. 106001, 2025.
- [82] A. W. Mahoney, P. L. Anderson, P. J. Swaney, F. Maldonado et R. J. Webster, “Reconfigurable parallel continuum robots for incisionless surgery,” dans *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2016, p. 4330–4336.
- [83] K. Xu et H. Liu, “Continuum differential mechanisms and their applications in gripper designs,” *IEEE transactions on robotics*, vol. 32, n^o. 3, p. 754–762, 2016.
- [84] R. Deimel et O. Brock, “A novel type of compliant and underactuated robotic hand for dexterous grasping,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 35, n^o. 1-3, p. 161–185, 2016.
- [85] Z. Yang, X. Zhu et K. Xu, “Continuum delta robot : A novel translational parallel robot with continuum joints,” dans *2018 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. IEEE, 2018, p. 748–755.
- [86] G. Böttcher, S. Lilge et J. Burgner-Kahrs, “Design of a reconfigurable parallel continuum robot with tendon-actuated kinematic chains,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, n^o. 2, p. 1272–1279, 2021.
- [87] T. Ding, B. Li, H. Liu, Y. Peng et Y. Yang, “Planar multi-closed-loop hyper-redundant manipulator using extendable tape springs : Design, modeling, and experiments,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 7, n^o. 3, p. 6630–6637, 2022.
- [88] S. Lilge, K. Wen et J. Burgner-Kahrs, “Singularity analysis of 3-DOF planar parallel continuum robots with constant curvature links,” *Frontiers in Robotics and AI*, vol. Volume 9 - 2022, 2023.
- [89] O. Altuzarra, M. Urizar, K. Bilbao et A. Hernández, “Full forward kinematics of lower-mobility planar parallel continuum robots,” *Mathematics*, vol. 12, p. 3562, 11 2024.

- [90] M. Jiang, J. Wang et N. Gravish, “A reconfigurable soft linkage robot via internal “virtual” joints,” *Soft Robotics*, vol. 11, n° 6, p. 946–957, 2024.
- [91] C. Kim, D. Shin, I. Back, D. Kim, D. Choi, S. Han, D. Kang et J.-S. Koh, “Inflatable robotics arm capable of deploying and retracting by rolling for high-packaging ratio,” dans *2024 IEEE 7th International Conference on Soft Robotics (RoboSoft)*. IEEE, 2024, p. 990–996.
- [92] N. Mouazé, “Analyse de la saisie d’objets déformables par des pinces adaptatives,” Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), 2021.
- [93] A. Antonov, “Parallel–serial robotic manipulators : A review of architectures, applications, and methods of design and analysis,” *Machines*, vol. 12, n° 11, 2024.
- [94] R. C. Leishman et K. W. Chase, “Direct linearization method kinematic variation analysis,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 132, n° 7, p. 071003, 2010.
- [95] J. J. Uicker Jr, G. R. Pennock et J. E. Shigley, *Theory of machines and mechanisms*. Cambridge University Press, 2023.
- [96] T. Marchi, G. Mottola, J. M. Porta, F. Thomas et M. Carricato, “Position and singularity analysis of a class of planar parallel manipulators with a reconfigurable end-effector,” *Machines*, vol. 9, n° 1, p. 7, 2021.
- [97] C. Gosselin, J. Angeles *et al.*, “Singularity analysis of closed-loop kinematic chains.” *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 6, n° 3, p. 281–290, 1990.
- [98] B. Monsarrat et C. M. Gosselin, “Singularity analysis of a three-leg six-degree-of-freedom parallel platform mechanism based on grassmann line geometry,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 20, n° 4, p. 312–328, 2001.
- [99] D. S. Zlatanov, “Generalized singularity analysis of mechanisms,” Thèse de doctorat, University of Toronto, 1998.
- [100] D. Zlatanov, I. A. Bonev et C. M. Gosselin, “Constraint singularities of parallel mechanisms,” dans *Proceedings 2002 IEEE international conference on robotics and automation (Cat. No. 02CH37292)*, vol. 1. IEEE, 2002, p. 496–502.
- [101] M. Ceccarelli, “Screw axis defined by giulio mozzi in 1763 and early studies on helicoidal motion,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, n° 6, p. 761–770, 2000.
- [102] J. S. Dai, “An historical review of the theoretical development of rigid body displacements from rodrigues parameters to the finite twist,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, n° 1, p. 41–52, 2006.
- [103] R. Hartenberg et J. Danavit, *Kinematic synthesis of linkages*. New York : McGraw-Hill, 1964.

- [104] L. Aveneau, “Les coordonnées de plücker revisitées,” *Revue Electronique Francophone d’Informatique Graphique*, vol. 3, n°. 2, 2009.
- [105] G. Sobczyk, “Clifford geometric algebras in multilinear algebra and non-euclidean geometries,” dans *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. Springer, 2004, p. 1–27.
- [106] Y.-L. Gu et J. Luh, “Dual-number transformation and its applications to robotics,” *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 3, n°. 6, p. 615–623, 1987.
- [107] D. Condurache, “Higher-order relative kinematics of rigid body and multibody systems. a novel approach with real and dual lie algebras,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 176, p. 104999, 2022.
- [108] H. Lipkin et J. Duffy, “Sir robert stawell ball and methodologies of modern screw theory,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 216, n°. 1, p. 1–11, 2002.
- [109] T. G. Vold, “An introduction to geometric algebra with an application in rigid body mechanics,” *American journal of physics*, vol. 61, n°. 6, p. 491–504, 1993.
- [110] A. T. Yang, *Application of quaternion algebra and dual numbers to the analysis of spatial mechanisms*. Columbia University, 1963.
- [111] N. T. Dantam, “Robust and efficient forward, differential, and inverse kinematics using dual quaternions,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 40, n°. 10-11, p. 1087–1105, 2021.
- [112] A. Cohen et M. Shoham, “Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 8, n°. 1, p. 011015, 2016.
- [113] H. Lipkin, “Time derivatives of screws with applications to dynamics and stiffness,” *Mechanism and machine theory*, vol. 40, n°. 3, p. 259–273, 2005.
- [114] J. S. Dai et J. R. Jones, “Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications,” *Mechanism and machine theory*, vol. 36, n°. 5, p. 633–651, 2001.
- [115] X. Kong et C. M. Gosselin, *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2007.
- [116] Z. Huang, J. Liu et D. Zeng, “A general methodology for mobility analysis of mechanisms based on constraint screw theory,” *Science in China Series E : Technological Sciences*, vol. 52, n°. 5, p. 1337–1347, 2009.
- [117] Z. Huang, Q. Li et H. Ding, *Dependency and Reciprocity of Screws*. Dordrecht : Springer Netherlands, 2013, p. 17–45.

- [118] Y. Liao, G. Kiper et S. Krishnan, “Mobility analysis of tripod scissor structures using screw theory,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 191, p. 105468, 2024.
- [119] M. G. Mohamed et J. Duffy, “A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 107, n^o. 2, p. 226–229, 1985.
- [120] K. Etemadi-Zanganeh et J. Angeles, “Instantaneous kinematics of general hybrid parallel manipulators,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 117, n^o. 4, p. 581–588, 1995.
- [121] S. A. Joshi et L.-W. Tsai, “Jacobian analysis of limited-dof parallel manipulators,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 124, n^o. 2, p. 254–258, 2002.
- [122] M. Zoppi, D. Zlatanov et R. Molino, “On the velocity analysis of interconnected chains mechanisms,” *Mechanism and machine theory*, vol. 41, n^o. 11, p. 1346–1358, 2006.
- [123] J. Zhao, B. Li, X. Yang et H. Yu, “Geometrical method to determine the reciprocal screws and applications to parallel manipulators,” *Robotica*, vol. 27, n^o. 6, p. 929–940, 2009.
- [124] K. J. Waldron, S.-L. Wang et S. J. Bolin, “A study of the jacobian matrix of serial manipulators,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 107, n^o. 2, p. 230–237, 1985.
- [125] K. Wang, H. Dong, E. Spyrakos-Papastavridis, C. Qiu et J. S. Dai, “A repelling-screw-based approach for the construction of generalized jacobian matrices for nonredundant parallel manipulators,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 176, p. 105009, 2022.
- [126] J.-S. Zhao et H.-L. Sun, “Kinetostatics of a serial robot in screw form,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 15, n^o. 6, 2023.
- [127] H. Lipkin et E. Pohl, “Enumeration of singular configurations for robotic manipulators,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 113, n^o. 3, p. 272–279, 1991.
- [128] I. A. Bonev, D. Zlatanov et C. m. M. Gosselin, “Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory,” *J. Mech. Des.*, vol. 125, n^o. 3, p. 573–581, 2003.
- [129] P. S. Donelan, “Singularity-theoretic methods in robot kinematics,” *Robotica*, vol. 25, n^o. 6, p. 641–659, 2007.
- [130] P. Simionescu et I. Tempea, “Kinematic and kinetostatic simulation of a leg mechanism,” dans *Proceedings of the 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, 1999, p. 572–577.
- [131] J. C. Klann, “Walking device,” July 2001, u.S. Patent US6260862.
- [132] T. Jansen, *The great pretender*. 010 Publishers, 2007.
- [133] A. Ghassaei, P. P. Choi et D. Whitaker, “The design and optimization of a crank-based leg mechanism,” *Pomona, USA*, 2011.

- [134] Y. She, C. J. Hurd et H.-J. Su, “A transformable wheel robot with a passive leg,” dans *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2015, p. 4165–4170.
- [135] T. Sun, X. Xiang, W. Su, H. Wu et Y. Song, “A transformable wheel-legged mobile robot : Design, analysis and experiment,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 98, p. 30–41, 2017.
- [136] M. M. Plecnik et J. M. McCarthy, “Design of stephenson linkages that guide a point along a specified trajectory,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 96, p. 38–51, 2016.
- [137] İ. Mertçyüz, A. K. Tanyıldızı, B. Taşar, A. B. Tatar et O. Yakut, “Fuhar : A transformable wheel-legged hybrid mobile robot,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 133, p. 103627, 2020.
- [138] “Diywalkers,” <https://www.diywalkers.com/>.
- [139] R. Di Gregorio et V. Parenti-Castelli, *A Translational 3-dof Parallel Manipulator*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1998, p. 49–58.
- [140] X.-J. Liu, J. Wang, F. Gao et L.-P. Wang, “On the analysis of a new spatial three-degrees-of-freedom parallel manipulator,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17, n°. 6, p. 959–968, 2001.
- [141] X. Kong et C. M. Gosselin, “Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, n°. 6, p. 1113–1121, 2005.
- [142] K. H. Hunt, “Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 105, n°. 4, p. 705–712, 12 1983.
- [143] K.-M. Lee et D. K. Shah, “Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator,” *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 4, n°. 3, p. 354–360, 1988.
- [144] Z. Huang, W. Tao et Y. Fang, “Study on the kinematic characteristics of 3 DOF in-parallel actuated platform mechanisms,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 31, n°. 8, p. 999–1007, 1996.
- [145] G. Dunlop et T. Jones, “Position analysis of a 3-DOF parallel manipulator,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 32, n°. 8, p. 903–920, 1997.
- [146] J. A. Carretero, R. P. Podhorodeski, M. A. Nahon et C. M. Gosselin, “Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 122, n°. 1, p. 17–24, 2000.

- [147] Y. Zhao, J. F. Liu et Z. Huang, “A force analysis of a 3-RPS parallel mechanism by using screw theory,” *Robotica*, vol. 29, n° 7, p. 959–965, 2011.
- [148] L. Wang, H. Xu et L. Guan, “Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and mechanism topology,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7, n° 11, 2015.
- [149] Z. Huang et Y. Fang, “Motion characteristics and rotational axis analysis of three DOF parallel robot mechanisms,” dans *1995 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Intelligent Systems for the 21st Century*, vol. 1. IEEE, 1995, p. 67–71.
- [150] L. Nurahmi, J. Schadlbauer, S. Caro, M. Husty et P. Wenger, “Kinematic analysis of the 3-RPS cube parallel manipulator,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 7, n° 1, p. 011008, 2015.
- [151] Z. Huang, L. Chen et Y. Li, “The singularity principle and property of stewart parallel manipulator,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 20, n° 4, p. 163–176, 2003.
- [152] J.-P. Merlet, *Parallel robots*. Springer Science & Business Media, 2006, vol. 128.
- [153] H. Funabashi, Y. Takeda, I. Kawabuchi et M. Higuchi, “Development of a walking chair with a self-attitude-adjusting leg mechanism for stable walking on uneven terrain,” dans *Proc. of the 10th World Congress on TMM*, 1999, p. 1164–1169.
- [154] Y. Takeda, M. Higuchi, H. Funabashi, Y. Oki et K. Shimizu, “Development of a walking chair (fundamental investigations for realizing a practical walking chair),” dans *Proc. Int. Conf. on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Karlsruhe, 2001*, 2001, p. 1037–1044.
- [155] E. Ottaviano, M. Ceccarelli et C. Tavolieri, “Kinematic and dynamic analyses of a pantograph-leg for a biped walking machine,” dans *Climbing and Walking Robots*. Springer, 2005, p. 561–568.
- [156] M. A. Armada, P. de González Santos, E. Ottaviano, M. Ceccarelli et C. Tavolieri, “Kinematic and dynamic analyses of a pantograph-leg for a biped walking machine,” dans *Climbing and Walking Robots : Proceedings of the 7th International Conference CLAWAR 2004*. Springer, 2005, p. 561–568.
- [157] C. Liang, M. Ceccarelli et Y. Takeda, “Operation analysis of a chebyshev-pantograph leg mechanism for a single dof biped robot,” *Frontiers of Mechanical Engineering*, vol. 7, n° 4, p. 357–370, 2012.
- [158] D. Fedorov et L. Birglen, “Analysis and design of a two degree of freedom Hoeckens-pantograph leg mechanism,” dans *International Design Engineering Technical Confe-*

- rences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 57137. American Society of Mechanical Engineers, 2015, p. V05BT08A079.
- [159] —, “Design of a self-adaptive robotic leg using a triggered compliant element,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 2, n^o. 3, p. 1444–1451, 2017.
 - [160] —, “Geometric optimization of a self-adaptive robotic leg,” *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 42, n^o. 1, p. 49–60, 2018.
 - [161] J. Massin et L. Birglen, “Analysis of the walking chair from tokyo institute of technology with screw theory,” dans *USCToMM Symposium on Mechanical Systems and Robotics*. Springer, 2022, p. 76–89.
 - [162] T. Davies, “Kirchhoff’s circulation law applied to multi-loop kinematic chains,” *Mechanism and machine theory*, vol. 16, n^o. 3, p. 171–183, 1981.
 - [163] A. Müller, “Kinematic topology and constraints of multi-loop linkages,” *Robotica*, vol. 36, n^o. 11, p. 1641–1663, 2018.
 - [164] J. Buśkiewicz, “A method of optimization of solving a kinematic problem with the use of structural analysis algorithm (sam),” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, n^o. 7, p. 823–837, 2006.
 - [165] Y. Sun, W. Ge, J. Zheng et D. Dong, “Solving the kinematics of the planar mechanism using data structures of assur groups,” *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 8, n^o. 6, p. 061002, 2016.
 - [166] F. V. Morlin, A. P. Carboni et D. Martins, “Synthesis of assur groups via group and matroid theory,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 184, p. 105279, 2023.
 - [167] A. Müller et O. Shai, “Constraint graphs for combinatorial mobility determination,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 108, p. 260–275, 2017.
 - [168] P. Fanghella, “Solving the inverse kinematics of multiloop robots by structural and geometric decoupling,” dans *[1991 Proceedings] 6th Mediterranean Electrotechnical Conference*. IEEE, 1991, p. 896–899.
 - [169] L. Tao et M. Ceccarelli, “Additional actuations for obstacle overcoming by a leg mechanism,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, n^o. 1, p. 6898–6903, 2011.
 - [170] C. Gosselin et J.-F. Hamel, “The agile eye : a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device,” dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, 1994, p. 781–786.
 - [171] C. M. Gosselin, E. S. Pierre et M. Gagne, “On the development of the agile eye,” *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 3, n^o. 4, p. 29–37, 1996.

- [172] X. Han et Y. Liu, “Geometric condition of 3UPS-S parallel mechanism in singular configuration,” *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 27, n°. 1, p. 130–137, 2014.
- [173] J. Enferadi, “A novel approach for obtaining assembly modes of a 3ups-s fully spherical parallel manipulator,” *Journal of Mechanics*, vol. 32, n°. 5, p. 555–563, 2016.
- [174] J. M. Hervé et M. Karouia, “The novel 3-RUU wrist with no idle pair,” dans *Proceedings of the Workshop on Fundamental issues and future research directions for parallel mechanisms and manipulators*, 2002, p. 3–4.
- [175] R. Di Gregorio, “A new parallel wrist using only revolute pairs : the 3-RUU wrist,” *Robotica*, vol. 19, n°. 3, p. 305–309, 2001.
- [176] “Site internet de j.p. merlet,” <https://www-sop.inria.fr/members/Jean-Pierre.Merlet/Archi/>.
- [177] M. Carricato, V. Parenti-Castelli *et al.*, “On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms,” dans *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China*, 2004, p. 1624–1628.
- [178] L.-W. Tsai, *Kinematics of a three-Dof platform with three extensible limbs*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1996, p. 401–410.
- [179] R. Di Gregorio et V. Parenti-Castelli, “Mobility analysis of the 3-UPU parallel mechanism assembled for a pure translational motion,” *J. Mech. Des.*, vol. 124, n°. 2, p. 259–264, 2002.
- [180] Z. Huang et Q. Li, “Construction and kinematic properties of 3-UPU parallel mechanisms,” dans *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 36533. American Society of Mechanical Engineers, 2002, p. 1027–1033.
- [181] M. Karouia et J. Hervé, “A three-dof tripod for generating spherical rotation,” *Advances in robot kinematics*, p. 395–402, 2000.
- [182] L.-W. Tsai et S. Joshi, “Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator,” *J. Mech. Des.*, vol. 122, n°. 4, p. 439–446, 2000.
- [183] C. Gosselin et X. Kong, “Cartesian parallel manipulators,” 2004, U.S. Patent number 6 729 202.
- [184] R. Clavel, “Delta, a fast robot with parallel geometry,” dans *Proceedings of the 18th International Symposium on Industrial Robots*, C. W. Burckhardt, édit. New York : Springer-Verlag, 1988, p. 91–100.

- [185] F. Pierrot, C. Reynaud et A. Fournier, “Delta : a simple and efficient parallel robot,” *Robotica*, vol. 8, n°. 2, p. 105–109, 1990.
- [186] I. Bonev, “Delta parallel robot-the story of success,” *Newsletter*, available at <http://www.parallelmic.org>, 2001.
- [187] H. Hadfield, L. Wei et J. Lasenby, “The forward and inverse kinematics of a delta robot,” dans *Advances in Computer Graphics : 37th Computer Graphics International Conference, CGI 2020, Geneva, Switzerland, October 20–23, 2020, Proceedings 37*. Springer, 2020, p. 447–458.
- [188] L. Szűcs, P. Galambos et D. A. Drexler, “Kinematics of delta-type parallel robot mechanisms via screw theory : A tutorial paper,” dans *2021 IEEE 19th World Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMi)*, 2021, p. 000 293–000 298.
- [189] A. Klimchik et A. Pashkevich, “Serial vs. quasi-serial manipulators : Comparison analysis of elasto-static behaviors,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 107, p. 46–70, 2017.
- [190] F. Gao, W. Li, X. Zhao, Z. Jin et H. Zhao, “New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs,” *Mechanism and machine theory*, vol. 37, n°. 11, p. 1395–1411, 2002.
- [191] T.-T. Lu et S.-H. Shiou, “Inverses of 2×2 block matrices,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 43, n°. 1-2, p. 119–129, 2002.
- [192] K. Sugimoto, “Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 109, n°. 1, p. 3–7, 03 1987.
- [193] C. L. Collins, “Geometric constructions for determining the screw reciprocal to five lines,” dans *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 46954, 2004, p. 1063–1072.
- [194] S. L. Canfield, A. J. Ganino, R. J. Salerno et C. F. Reinholtz, “Singularity and dexterity analysis of the carpal wrist,” dans *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 97577. American Society of Mechanical Engineers, 1996, p. V02AT02A059.
- [195] S. L. Canfield, “Development of the carpal wrist ; a symmetric, parallel-architecture robotic wrist,” 1997.
- [196] M. Ceccarelli, “A new 3 DOF spatial parallel mechanism,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 32, n°. 8, p. 895–902, 1997.
- [197] J. H. Chung, B.-J. Yi et S. Oh, “Design of a new spatial 3-DOF parallel mechanism with application to a pdp tv mounting device,” dans *2007 IEEE/RSJ International*

- Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2007, p. 3999–4006.
- [198] R. I. Alizade, N. R. Tagiyev et J. Duffy, “A forward and reverse displacement analysis of a 6-DOF in-parallel manipulator,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, n^o. 1, p. 115–124, 1994.
- [199] N. Sima’an, D. Glozman et M. Shoham, “Design considerations of new six degrees-of-freedom parallel robots,” dans *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146)*, vol. 2. IEEE, 1998, p. 1327–1333.
- [200] L.-W. Tsai, *The Jacobian analysis of a parallel manipulator using reciprocal screws*. Springer Netherlands, 1998, p. 327–336.
- [201] D. Stewart, “A platform with six degrees of freedom,” *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, vol. 180, n^o. 1, p. 371–386, 1965.

ANNEXE A RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES

A.1 Comparaison entre les produits vectoriels et de visseurs

A.1.1 Produit entre deux torseurs à pas nul

Soient deux torseurs plans à pas nuls, l'un passant par le point A et de vecteur directeur $\mathbf{a}$ et l'autre par le point B de vecteur directeur $\mathbf{b}$ avec $\mathbf{a}$ non colinéaire à $\mathbf{b}$. Le produit vectoriel de ces deux torseurs donne :

$$\begin{aligned}
 \zeta_0^A(\mathbf{a}) \times \zeta_0^B(\mathbf{b}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OA} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OB} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OB})(\mathbf{a}^T \mathbf{y}) - (\mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OA})(\mathbf{b}^T \mathbf{y}) \\ -(\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OB})(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) + (\mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{OA})(\mathbf{b}^T \mathbf{x}) \\ (\mathbf{b}^T \mathbf{y})(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) - (\mathbf{a}^T \mathbf{y})(\mathbf{b}^T \mathbf{x}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{AB})(\mathbf{a}^T \mathbf{y}) + (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a})(\mathbf{r}_{OA}^T \mathbf{y}) \\ -(\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{AB})(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) + (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a})(\mathbf{r}_{OA}^T \mathbf{x}) \\ \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a} \begin{bmatrix} -\mathbf{E} \left(\mathbf{r}_{OA} + \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{AB}}{\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}} \mathbf{a} \right) \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Soit C un point à l'intersection des droites $(A, \mathbf{a})$ et $(B, \mathbf{b})$. Sa position par rapport à l'origine du plan est donnée par :

$$\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{r}_{OA} + \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{r}_{AB}}{\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}} \mathbf{a}. \tag{A.2}$$

Ainsi, en introduisant le vecteur $\mathbf{r}_{OC}$ dans l'équation (A.1), nous obtenons :

$$\zeta_0^A(\mathbf{a}) \times \zeta_0^B(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \mathbf{r}_{CO} \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}) \mathbf{\Lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E} \mathbf{r}_{CO} \end{bmatrix} = (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}) \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\xi}_0^C, \tag{A.3}$$

soit, à une matrice de permutation près, un visseur à pas nul d'axe normal au plan localisé au point C .

Maintenant, nous pouvons faire la même chose avec une version spatiale de ces deux torseurs. Les versions spatiales des vecteurs plans seront ici notées avec un prime, par exemple $\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T & 0 \end{bmatrix}^T$. Le produit de visseurs entre deux torseurs $\zeta_0^A(\mathbf{a}')$ et $\zeta_0^B(\mathbf{b}')$ est donné par :

$$\begin{aligned} \zeta_0^A(\mathbf{a}') \times \zeta_0^B(\mathbf{b}') &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{a}' \times \mathbf{r}'_{AO} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}' \times \mathbf{r}'_{BO} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' \\ \mathbf{a}' \times (\mathbf{b}' \times \mathbf{r}'_{BO}) - \mathbf{b}' \times (\mathbf{a}' \times \mathbf{r}'_{AO}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \\ (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \times \left[\mathbf{r}'_{AO} + \frac{(\mathbf{b}' \times \mathbf{r}'_{AB})^T (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')}{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')^T (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')} \mathbf{a}' \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Puisque les deux torseurs ont des axes contenus dans le même plan, ils s'intersectent en un point C . La version spatiale de l'équation (A.2) est :

$$\mathbf{r}'_{OC} = \mathbf{r}'_{OA} - \frac{(\mathbf{b}' \times \mathbf{r}'_{AB})^T (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')}{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')^T (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')} \mathbf{a}', \quad (\text{A.5})$$

ainsi, en insérant le vecteur $\mathbf{r}'_{OC}$ dans l'équation (A.4), nous avons alors :

$$\zeta_0^A(\mathbf{a}') \times \zeta_0^B(\mathbf{b}') = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \\ (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \times \mathbf{r}'_{CO} \end{bmatrix} = \zeta_0^C(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'). \quad (\text{A.6})$$

Or :

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}) \mathbf{z}, \quad (\text{A.7})$$

où $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ est le vecteur normal au plan, et :

$$\mathbf{r}'_{OC} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{OC}^T & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.8})$$

ce qui au final nous donne :

$$\zeta_0^A(\mathbf{a}') \times \zeta_0^B(\mathbf{b}') = (\mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{E} \mathbf{r}_{CO} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Il s'agit bien de la version spatiale d'un visseur plan, voir équation (3.1), plus précisément, la version spatiale de $\mathbf{\Lambda}^T[\zeta_0^A(\mathbf{a}) \times \zeta_0^B(\mathbf{b})]$, voir équation (A.3). Les deux produits (vectoriel

et visseurs) sont donc bien cohérents.

A.1.2 Produit entre un torseur à pas nul et un torseur à pas infini

Une opération similaire peut être effectuée entre un torseur plan à pas nul $\zeta_0^A(\mathbf{a})$ et un (le) torseur à pas infini plan ζ_∞ , ce qui nous donne :

$$\zeta_\infty \times \zeta_0^A(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix} = \Lambda \xi_\infty(\mathbf{E}\mathbf{a}), \quad (\text{A.10})$$

soit à une matrice de permutation près un visseur plan à pas nul dont l'axe est perpendiculaire à $\mathbf{a}$. Le produit de visseurs entre la version spatiale de $\zeta_0^A(\mathbf{a})$ et ζ_∞ est quant à elle donnée par :

$$\zeta_\infty(\mathbf{z}) \times \zeta_0^A(\mathbf{a}') = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{a}' \times \mathbf{r}'_{AO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{z} \times \mathbf{a}' \end{bmatrix} = \xi_\infty(\mathbf{z} \times \mathbf{a}') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{E}\mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Le produit de visseurs entre les versions spatiales d'un torseur à plan à pas nul et d'un torseur plan à pas infini donne la version spatiale d'un visseur plan à pas infini voir équation (3.1), plus précisément, la version spatiale de $\Lambda^T[\zeta_\infty \times \zeta_0^A(\mathbf{a})]$, voir équation (A.10). Les deux produits (vectoriel et visseurs) sont une fois encore bien cohérents.

A.2 L'articulation Q

La figure A.1 montre un mécanisme à six barres d'architecture Stephenson 2. Supposons que l'entrée est la rotation autour de A avec une vitesse $\dot{\theta}$ et la sortie du corps GF . À première vue, la méthode présentée en section 3.2 semble ne pas marcher puisque les deux boucles cinématiques qui font intervenir la liaison actionnée ($ABCDE$ et $ABFGE$) ont quatre liaisons passives au lieu des trois habituelles, rendant impossible l'identification des torseurs réciproques. La solution est de considérer que le quatre barres passif $CDGF$ comme une unique liaison appelée liaison Q . Pour cela on introduit le point H située à l'intersection de la droite passant par C et D et de celle passant par F et G , voir figure A.1. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \xi^{BCG} &= \xi_0^A \dot{\theta} + \xi_0^B \dot{\theta}_B \\ &= \xi_0^H \dot{\theta}_H + \xi_0^E \dot{\theta}_E, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

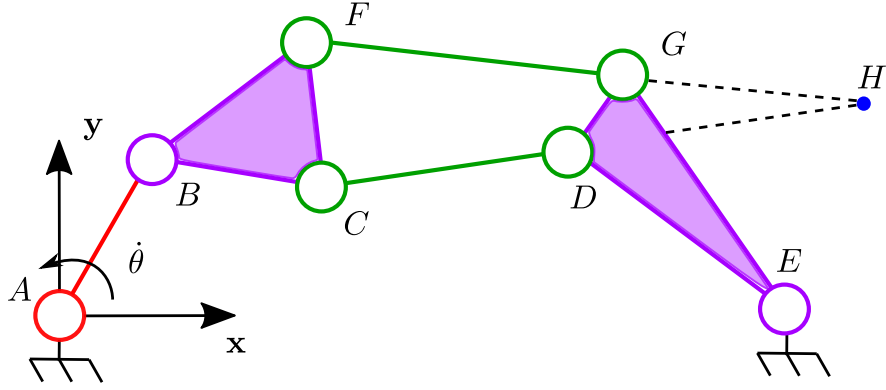


FIGURE A.1 Mécanisme à six barres du type Stephenson 2

où $\dot{\theta}_H$ est une vitesse passive autour du point H qui correspond à la vitesse de rotation du corps DEG par rapport au corps BCF . L'équation ci-dessus n'a alors que trois liaisons passives et l'on peut identifier les trois torseurs réciproques et obtenir le visseur du corps BCG avec la méthode présentée en section 3.2. Puis, le visseur du corps FG peut être exprimé en se plaçant dans la boucle $BFGE$ tel que :

$$\begin{aligned}\xi^{FG} &= \$^{BCF}\dot{\theta} + \xi_0^F\dot{\theta}_F \\ &= \xi_0^E\dot{\theta}_E + \xi_0^G\dot{\theta}_G\end{aligned}\tag{A.13}$$

Ainsi, en appliquant une deuxième fois la méthode présentée à la section 3.2, on obtient le visseur de l'organe terminal.

A.3 Détail des calculs du complément du Schur

Le complément de Schur du bloc $\mathbf{D}$ de la matrice Jacobienne parallèle $\mathbf{\Pi}$, est donné par $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D})$. La matrice $\mathbf{\Pi}$ étant définie équation (5.11) et les sous-blocs qui la composent équation (5.12). L'inverse de $\mathbf{D}$ est également donnée équation (5.16). Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} &= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Puis nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} &= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) & \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) & \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T \\ (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T \\ (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T + \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T + \mathbf{v}_1^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \\ \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T + \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T + \mathbf{v}_2^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \\ \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)^T + \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_2)^T + \mathbf{v}_3^T(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_3)^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Définissons maintenant $\mathbf{L}_k$ comme étant la k -ième ligne du complément de Schur. Nous avons alors :

$$d\mathbf{L}_k^T = (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j)^T \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_k \times \mathbf{r}_k) - \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) (\mathbf{u}_i \times \mathbf{r}_i) - \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_k \times \mathbf{u}_i) (\mathbf{u}_j \times \mathbf{r}_j) - \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j) (\mathbf{u}_k \times \mathbf{r}_k). \quad (\text{A.16})$$

Or pour quatre vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$, (avec $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ linéairement indépendants) il existe la relation suivante :

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \mathbf{c}] \mathbf{d} = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c})^T \mathbf{d}] \mathbf{a} + [(\mathbf{c} \times \mathbf{a})^T \mathbf{d}] \mathbf{b} + [(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \mathbf{d}] \mathbf{c}. \quad (\text{A.17})$$

En prenant $\mathbf{a} = \mathbf{u}_i$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_j$, $\mathbf{c} = \mathbf{u}_k$ et $\mathbf{d} = \mathbf{v}_k$, le premier terme de l'équation (A.16) vaut :

$$(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j)^T \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_k \times \mathbf{r}_k) = \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) (\mathbf{u}_i \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_k \times \mathbf{u}_i) (\mathbf{u}_j \times \mathbf{r}_j) + \mathbf{v}_k^T (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j) (\mathbf{u}_k \times \mathbf{r}_k), \quad (\text{A.18})$$

et donc au final nous avons :

$$d\mathbf{L}_k^T = \mathbf{v}_k^T(\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) [\mathbf{u}_i \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)] + \mathbf{v}_k^T(\mathbf{u}_k \times \mathbf{u}_i) [\mathbf{u}_j \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)], \quad (\text{A.19})$$

en en introduisant $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i$, on retrouve alors l'équation (5.18)

A.4 Cas particulier du 3 – RPS triangulaire

Pour le mécanisme 3 – RPS en configuration triangulaire, il existe une configuration pour laquelle les équations introduites en section 5.1.2 doivent être légèrement modifiées.

Pour cela, considérons un tel mécanisme dont les axes des liaisons rotoïdes sont dans le plan passant par l'origine et normal à l'axe $\mathbf{z}$ du repère cartésien. Ces axes sont agencés pour former un triangle équilatéral, et les trois liaisons sphériques rattachées à la plateforme forment également un triangle équilatéral. La configuration particulière que nous venons de mentionner apparaît lorsque le plan $\mathcal{P}$ rattaché à la plateforme est parallèle au plan contenant les liaisons rotoïdes.

Nous avons alors $\mathbf{n}_k = \mathbf{z}$, où le vecteur $\mathbf{n}_k$ est la normale au plan $\mathcal{P}$ et est définie équation (5.35). En outre, le vecteur $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ est parallèle au vecteur $\mathbf{u}_k$ associé à la liaison rotoïde de la jambe k . Les points $\mathbf{A}_k$ ne sont pas définis / poussés à l'infini, puisque le produit mixte $[(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^T \mathbf{u}_k$ est toujours nul, voir équation (5.23). Il n'est alors pas possible d'utiliser l'expression compacte du vecteur $\mathbf{s}_k$, voir équation (5.25). Il est cependant toujours possible d'utiliser l'expression de ce vecteur donnée équation (5.22) qui ne dépend pas du point A_k . De plus, il est possible de réécrire l'équation (5.22) tel que :

$$\mathbf{s}_k = \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) - \mathbf{w}_j^T \mathbf{u}_k \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \right] (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \mathbf{n}_k^T \mathbf{u}_k (\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j). \quad (\text{A.20})$$

Or, puisque le vecteur $\mathbf{u}_k$ est contenu dans un plan parallèle au plan de normale $\mathbf{n}_k$, les deux vecteurs sont perpendiculaires et le dernier terme de l'équation précédente disparaît. Le vecteur $\mathbf{s}_k$ est alors colinéaire au vecteur $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Le pas h_k^m défini équation (5.30) dépend lui aussi de la position du point A_k . Cependant, il peut être réécrit sans faire appel à ce point par :

$$h_k^m = -\omega_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{n}_k \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_k \mathbf{w}_j^T (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) - \mathbf{w}_j^T \mathbf{u}_k \mathbf{w}_i^T (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \right]. \quad (\text{A.21})$$

Or, puisque $\mathbf{u}_k^T \mathbf{n}_k = 0$, ce pas est nul. Enfin, en ce qui concerne la position du point M_k , on peut prouver facilement que le vecteur $\mathbf{r}_k^m$ qui définit sa position, voir équation (5.33), a

comme coordonnées barycentriques :

$$m_{1,3} = \frac{\mathbf{w}_i^T(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_j^T \mathbf{p}_k}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{p}_k}, \quad m_{2,3} = -\frac{\mathbf{w}_j^T(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_k}{(\mathbf{w}_i \times \mathbf{w}_j)^T \mathbf{p}_k}, \quad \text{and} \quad m_{3,3} = 0, \quad (\text{A.22})$$

avec $\mathbf{p}_k = \mathbf{n}_k \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Puisque $m_{1,3} + m_{2,3} = 1$, le point M_k appartient à la droite passant par les points P_1 et P_2 .

Au final, lorsque le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan contenant les axes des liaisons rotoïdes d'un mécanisme 3 – RPS triangulaire, le visseur ξ_k^m a un pas nul et son axe passe par les centres des liaisons sphériques aux points P_1 et P_2 .

La raison pour laquelle la matrice jacobienne n'a localement pas la même expression que celle présentée en section 5.1.2 est que les vecteurs $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ deviennent localement linéairement dépendants. En effet, dans la configuration que nous venons de décrire, les axes de ces trois torseurs sont compris dans un même plan, qui est celui de la plateforme.

A.5 Identification des torseurs réciproques à des mécanismes hybrides

A.5.1 Mécanisme 3 – $RRPS$

Le mécanisme 3 – $RRPS$, montré figures 5.32 et A.2 est un mécanisme hybride dont nous pouvons obtenir analytiquement la matrice jacobienne grâce aux équations introduites à la section 5.2. Pour cela il est nécessaire d'identifier deux torseurs réciproques à pas nuls par branche qui s'intersectent en un même point.

Le premier torseur, réciproque à toutes les liaisons à l'exception de la première articulation rotoïde, est évident à trouver. Il s'agit du torseur réciproque à l'ensemble des liaisons d'une chaîne RPS et nous l'avons déjà identifié en section 5.1. Il est donné par $\zeta_0^{\mathbf{u}_k} = \zeta_0^{P_k}(\mathbf{q}_k)$, où P_k est le centre de la liaison sphérique et $\mathbf{q}_k$ est l'axe de la liaison rotoïde de la branche RPS , voir figure A.2. Le second torseur, qui doit être choisi pour être réciproque à l'ensemble des liaisons à l'exception de l'articulation prismatique est légèrement plus compliqué à identifier. On peut commencer par trouver deux torseurs réciproques à la liaison sphérique et à la liaison rotoïde au point Q_k qui sont :

$$\zeta_0^{P_k}(\mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_0^{P_k}(\mathbf{q}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

où $\mathbf{p}_k$ est la direction de la liaison prismatique et $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{P_k O}$. Le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ que l'on recherche doit être une combinaison linéaire de ces deux torseurs tout en étant réciproque au visseur

$\xi_0^M(\mathbf{m})$ de la liaison rotoïde située à la base de la jambe. En utilisant la méthode de [193] comme nous l'avons fait en section 5.4.2, nous obtenons alors le vecteur directeur du torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ donné par :

$$\mathbf{v}_k = (\mathbf{m} \times \mathbf{r}_{MP}) \times (\mathbf{p}_k \times \mathbf{q}_k). \quad (\text{A.24})$$

Le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$ est bien à nul et sa droite est à l'intersection du plan passant par le point P_k de normale $(\mathbf{m} \times \mathbf{r}_{MP})$ et de celui passant par le même point et de normale $(\mathbf{p}_k \times \mathbf{q}_k)$, comme illustré figure A.2. Nous avons au final pour chaque jambe du mécanisme 3 – *RRPS* identifié deux torseurs à pas nuls dont les axes se croisent au centre de la liaison sphérique. La matrice jacobienne de ce mécanisme peut donc être obtenue grâce aux équations introduites en section 5.2.

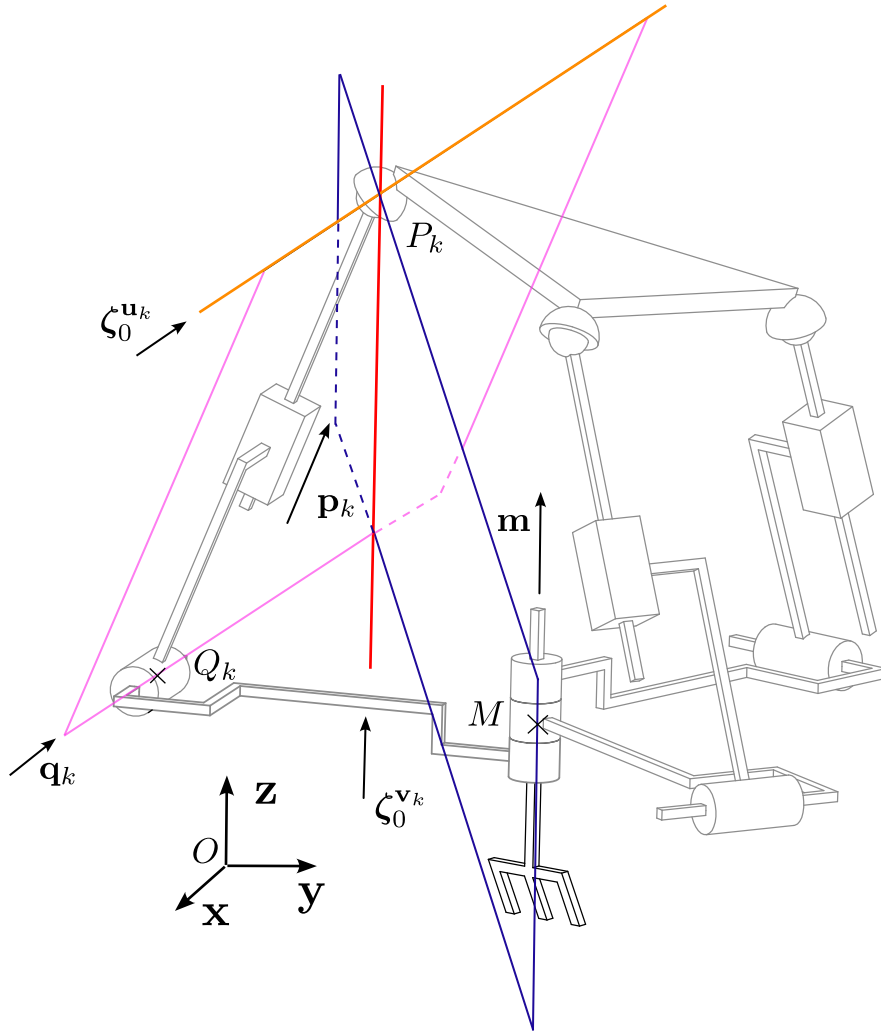


FIGURE A.2 Torseurs réciproque à la branche k du mécanisme 3 – *RRPS*

A.5.2 Mécanisme 3 – $\underline{PPSR}$

Il est également possible d'identifier deux torseurs à pas nuls qui s'intersectent au centre de la liaison sphérique de chaque branche du mécanisme 3 – $\underline{PPSR}$ montré figure ???. Ces torseurs doivent tous deux être réciproques à la liaison sphérique et à la liaison rotoïde. Ils doivent donc appartenir au faisceau plan centré sur la liaison sphérique dont le plan est celui passant par le centre de cette même liaison et qui contient l'axe de la liaison rotoïde.

Le premier torseur doit en outre être réciproque à la liaison prismatique de direction $\mathbf{p}_k$, donc dans un plan de normal $\mathbf{p}_k$. Ce torseur, à l'intersection de ces deux plans est montré figure A.3 (gauche). Le second torseur doit quant à lui appartenir au plan contenant l'axe de la liaison rotoïde et le centre de la liaison sphérique, ainsi que dans un plan dont la normale est donnée par $\mathbf{q}_k$ le vecteur directeur de la liaison prismatique. Ce visseur est représenté A.3 (droite). À l'aide de ces torseurs, on peut alors déterminer le modèle cinématique direct du mécanisme 3 – $\underline{PPSR}$ grâce aux équations données au chapitre 5.

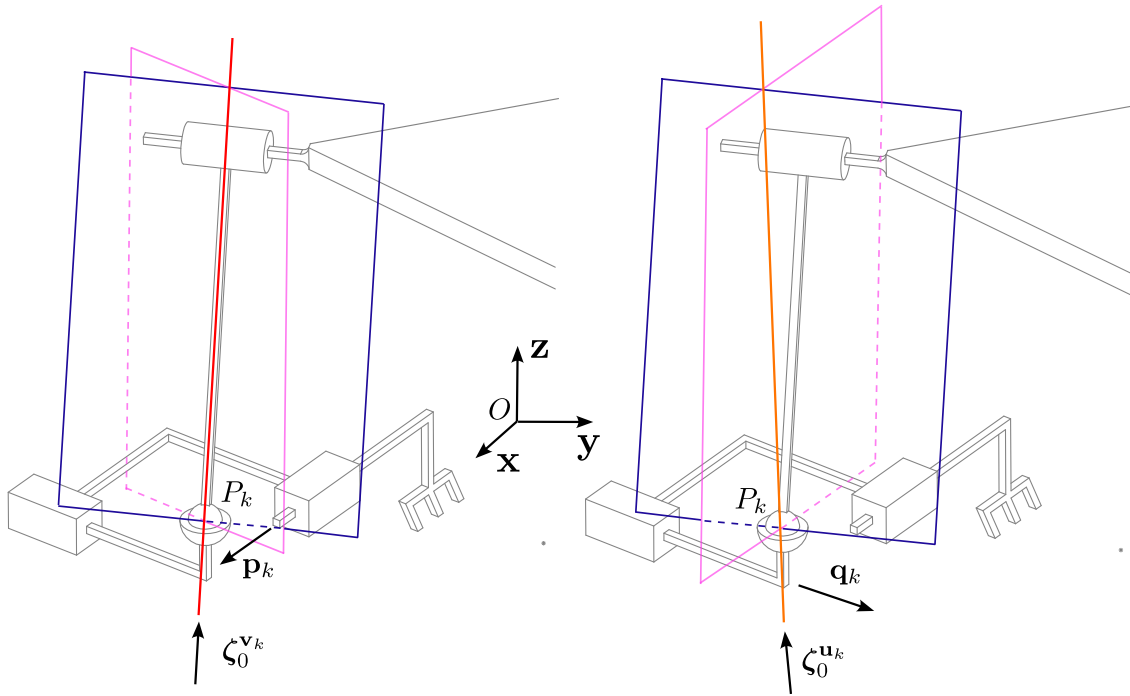


FIGURE A.3 Torseurs réciproque à la branche k du mécanisme 3 – $\underline{PPSR}$

ANNEXE B UNIFICATION ENTRE LES MÉCANISMES SPATIAUX À TROIS DDLs

Cette section a pour but de faire le lien entre les expressions des matrices jacobiennes des mécanismes d'orientation et de translation du chapitre 4, ainsi que ceux montré au chapitre 5. Par la suite on note $i, j, k = 1, 2, 3$ par permutation circulaire.

B.1 Récapitulatif

Pour tous les mécanismes à trois DDLs, nous avons identifié un ensemble de trois torseurs réciproques linéairement dépendants contraignant le mouvement de la plateforme. On les note ici ζ_1^c, ζ_2^c et ζ_3^c et on les regroupe dans un ensemble appelé $\mathcal{T}_c$. Nous avons également identifié un autre ensemble de trois torseurs réciproques linéairement dépendants. Nous les appellerons dans cette section ζ_1^a, ζ_2^a et ζ_3^a , et on considère qu'ils font partie d'un ensemble $\mathcal{T}_a$. On considère également que l'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a \cup \mathcal{T}_c$ est de plein rang.

Le modèle cinématique direct obtenu pour les mécanismes à trois DDLs des chapitres 4 et 5 est de la forme :

$$\xi = \underbrace{\begin{bmatrix} \$_1 & \$_2 & \$_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.1})$$

où ξ est le visseur de l'organe terminal, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$ est le vecteur des vitesses actionnées et $\mathbf{J}$ la matrice jacobienne de l'organe terminal. Chaque colonne de cette dernière est donnée par :

$$\$_k = \mu_k \xi_k^m \quad \text{avec} \quad \mu_k = \frac{\zeta_k^a \circ \xi_k^q}{\zeta_k^a \circ \xi_k^m}, \quad (\text{B.2})$$

où ξ_k est un visseur unitaire et ξ_k^q est le visseur associé à la k -ième liaison actionnée.

B.1.1 Mécanismes d'orientation

- $\mathcal{T}_c$ est constitué de torseurs à pas nuls dont les axes s'intersectent en un point P . Aucun de ces torseurs ne sert à construire le visseur ξ_k^m .
- $\mathcal{T}_a$ est constitué de torseurs à pas nuls et/ou à pas infinis.
- Le visseur ξ_k^m est à pas nul et son axe passe par le point P . Son vecteur directeur est donné par le produit vectoriel entre les trois dernières composantes des torseurs ζ_i^a et ζ_j^a , voir équation (4.31). Si ζ_i^a est à pas nul ce vecteur est la partie linéaire du torseur.

Si ζ_i^a est à pas infini, ce vecteur est le vecteur directeur du torseur, idem pour ζ_j^a .

- *remarque* Dans le cas de l’Oeil agile ζ_1^a , ζ_2^a ζ_3^a sont tous trois à pas infini.

B.1.2 Mécanismes de translation

- $\mathcal{T}_c$ est constitué de torseurs à pas infinis. Aucun de ces torseurs ne sert à construire le visseur ξ_k^m .
- $\mathcal{T}_a$ est constitué de torseurs à pas nuls et/ou finis.
- Le visseur ξ_k^m est à pas infini et son vecteur directeur est donné par le produit vectoriel des vecteurs directeurs des torseurs ζ_i^a et ζ_j^a , voir équation (4.31).

B.1.3 Mécanismes du type 3 – RPS

- $\mathcal{T}$ est constitué de torseurs à pas nuls qui s’intersectent deux à deux en des points P_1 , P_2 et P_3 .
- Le visseur ξ_k^m est à pas fini. Son vecteur directeur (à la norme près) est donné équation (5.25) et son pas est donné (5.30). Son axe passe par un point situé à l’intersection de ce dernier et du plan formé par les points P_1 , P_2 et P_3 à l’équation (5.33).
- *remarque* : Le torseur ζ_k^a équation (B.2) est donné par $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$, voir équation (5.6). Il s’agit du seul parmi les six torseurs de l’ensemble $\mathcal{T}$ dont les composantes ne servent pas à caractériser le visseur ξ_k^m .
- *mécanismes à six DDLs* : Nous avons identifié pour l’ensemble des mécanismes à six degrés de liberté étudiés dans cette thèse un ensemble de six torseurs à pas nuls dont les axes s’intersectent deux à deux. Les trois premières colonnes de la matrice jacobienne d’un tel mécanisme sont identiques à celle d’un mécanisme type 3–RPS, voir équation (B.2). Les trois dernières colonnes de la matrice jacobienne d’un tel mécanisme sont identiques à celles des mécanismes de type 3 – RPS, où le torseur $\zeta_0^{\mathbf{u}_k}$ remplace le torseur $\zeta_0^{\mathbf{v}_k}$, voir section 5.2.

B.2 Calculs de la matrice jacobienne

En section 5.1.2, la matrice jacobienne du 3 – RPS est obtenue en inversant une matrice de plein rang 6×6 . Au contraire en sections 4.2 et 4.3, nous avons choisi de n’inverser qu’une matrice 3×3 en omettant les informations non importantes de la matrice jacobienne parallèle. Il est possible d’obtenir le même résultat pour les mécanismes rotationnels et translationnels en inversant également une matrice 6×6 .

Il est possible d'exprimer les équations de vitesses des mécanismes rotationnels et translationnels grâce aux torseurs ζ_1^a , ζ_2^a et ζ_3^a , voir section précédente, ce qui donne :

$$\mathbf{\Pi}_a \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Sigma}_a \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.3})$$

où les matrices jacobienues parallèles et sérielles des actionnements sont respectivement données par :

$$\mathbf{\Pi}_a = \begin{bmatrix} \zeta_1^{aT} \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_2^{aT} \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_3^{aT} \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma}_a = \text{diag}(\zeta_1^a \circ \boldsymbol{\xi}_1^{\dot{q}} \quad \zeta_2^a \circ \boldsymbol{\xi}_2^{\dot{q}} \quad \zeta_3^a \circ \boldsymbol{\xi}_3^{\dot{q}}). \quad (\text{B.4})$$

La matrice $\mathbf{\Pi}_a$ n'est pas carrée. Il est possible de l'augmenter de la même manière qu'en section 5.1.2 en introduisant la jacobienne des contraintes grâce aux torseurs ζ_1^c , ζ_2^c et ζ_3^c , voir section B.1, ce qui donne une seconde équation de vitesse donnée par :

$$\mathbf{\Pi}_c \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Sigma}_c \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.5})$$

où les matrices jacobienues parallèles et sérielles des contraintes sont respectivement données par :

$$\mathbf{\Pi}_c = \begin{bmatrix} \zeta_1^{cT} \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_2^{cT} \boldsymbol{\Lambda} \\ \zeta_3^{cT} \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma}_c = \mathbf{0}_{3 \times 3}. \quad (\text{B.6})$$

En combinant les équations (B.4) et (B.5), on obtient une troisième équation de vitesse de la forme :

$$\mathbf{\Pi} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Sigma} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.7})$$

où :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_a \\ \mathbf{\Pi}_c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

ou :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_c \\ \mathbf{\Pi}_a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{\Sigma}_a \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Il est possible d'inverser la matrice $\mathbf{\Pi}$ qui est désormais carrée et de plein rang pour obtenir la matrice jacobienne.

B.2.1 Mécanismes d'orientation

Pour les mécanismes d'orientation, nous avons :

$$\zeta_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_k^c = \zeta_0^P(\mathbf{u}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

où $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont trois vecteurs linéairement indépendants et le point P est le centre de rotation de l'organe terminal. Le vecteur $\mathbf{p}_k$ est nul si le torseur ζ_k^a est à pas infini. Le vecteur $\mathbf{q}_k$ est soit le vecteur directeur d'un torseur à pas infini, soit la partie linéaire d'un torseur à pas fini. Dans ce cas son axe ne passe pas par le point P sinon le torseur ζ_k^a serait linéairement dépendant des torseurs de l'ensemble $\mathcal{T}_c$. Ainsi, le vecteur $\mathbf{q}_k$ est nécessairement non nul. On suppose également que les vecteurs $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ et $\mathbf{q}_3$ linéairement indépendants. En appliquant l'équation (B.7) avec les matrices agencées selon l'équation (B.8), nous avons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}_{3 \times 3}, \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont non singulières puisque les vecteurs qui les composent sont linéairement indépendants. Puisque $\mathbf{C}$ est nulle, alors la matrice jacobienne parallèle est triangulaire supérieure par blocs, ainsi nous avons :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_a \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

La sous-matrice inférieure de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ est nulle donc cette dernière est composée de trois visseurs à pas nuls passant par le point P . D'après l'équation précédente, seule une sous-matrice de la matrice jacobienne parallèle $\boldsymbol{\Sigma}_a$ est à inverser, comme nous l'avons fait au chapitre 4.2. Nous obtenons bien la même matrice jacobienne que celle obtenue dans ce chapitre.

B.2.2 Mécanismes translationnels

Pour les mécanismes translationnels, nous avons :

$$\zeta_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \zeta_k^c = \zeta_\infty(\mathbf{u}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

où $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont trois vecteurs linéairement indépendants. Le visseur ζ_k^a est à pas fini, et on suppose que les vecteurs directeurs $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_3$ sont linéairement indépendants. En appliquant l'équation (B.7) avec les matrices agencées selon l'équation (B.9), nous avons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{\Sigma}_a \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{B.15})$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \mathbf{u}_3^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \mathbf{q}_3^T \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont non singulières puisque les vecteurs qui les composent sont linéairement indépendants. Puisque $\mathbf{B}$ est nulle, alors la matrice jacobienne parallèle est triangulaire inférieure par blocs, ainsi nous avons :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{\Sigma}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{\Sigma}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_a \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

La sous-matrice supérieure de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ est nulle donc cette dernière est composée de trois visseurs à pas infinis. D'après l'équation précédente, seule une sous-matrice de la matrice jacobienne parallèle $\boldsymbol{\Sigma}_a$ est à inverser, comme nous l'avons fait au chapitre 4.3. Nous obtenons bien la même matrice jacobienne que celle obtenue dans ce chapitre.