UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU COMPORTEMENT THERMOMÉCANIQUE DE COMPOSANTES EN ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME

PATRICK TERRIAULT
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 1997

© Patrick Terriault, 1997.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre reference

Our file Notre reference

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33032-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU COMPORTEMENT THERMOMÉCANIQUE DE COMPOSANTES EN ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME

Présentée par: TERRIAULT Patrick

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. ROUSSELET Jean, Ph.D., président

M. TROCHU François, Ph.D., directeur de recherche

M. BRAUNOVIC Milenko, Ph.D., membre

M. TURENNE Sylvain, Ph.D., membre

Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier sincèrement monsieur François Trochu qui est responsable en grande partie de cette aventure qui m'a mené jusqu'au doctorat. À titre de directeur de recherche, il a fait naître en moi la curiosité scientifique et le goût du savoir. Ses nombreux conseils se sont avérés profitables sur les plans académique, professionnel et personnel. L'encadrement que j'ai reçu de la part de François Trochu, de Vladimir Brailovski et de l'École Polytechnique en général a grandement favorisé mon épanouissement face au monde fascinant de la recherche scientifique.

Je ne peux passer sous silence tout l'encouragement et tout le support que les gens qui m'entourent m'ont témoignés durant toutes ces années de travail ardu. En effet, les membres de ma famille, mes amis et mes compagnons de classe ont tous joué un rôle de premier plan en m'épaulant et en me motivant pendant toute la durée de mes études.

Je tiens également à remercier les organismes suivants pour un support financier grandement apprécié : le CRSNG (Gouvernement du Canada) pour les quatre années de bourse de recherche, le FCAR (Gouvernement du Québec) pour les subventions de stages à l'étranger, le CRASP, l'École Polytechnique et Gaz Métropolitain.

Finalement, je remercie Étienne Patoor, Laurent Buffard, Pierre Charbonnier, Alexandre Volkov, Sergei Belaev et Alexandre Razov pour l'exceptionnel encadrement qu'ils m'ont procuré lors de mes stages en France et en Russie.

Résumé

De nombreuses applications industrielles peuvent bénéficier des propriétés remarquables des alliages à mémoire de forme, mais peu d'entre elles ont véritablement connu un succès technique et commercial. Cette lacune s'explique partiellement par le manque d'outils de modélisation numérique adaptés à la conception de composantes à mémoire de forme. De nos jours, la phase de conception repose essentiellement sur une approche par *essais et erreurs* et dans la plupart des cas, plusieurs prototypes sont construits avant de rencontrer les objectifs initialement fixés par le cahier des charges. En plus d'être une pratique coûteuse, il peut même arriver qu'un projet entier soit simplement abandonné parce que les performances optimales escomptées n'ont jamais pu être obtenues. Il est alors impératif de développer des outils numériques pour faciliter l'émergence des alliages à mémoire de forme dans de nouvelles applications industrielles.

Le développement d'une relation constitutive simulant les comportements complexes des alliages à mémoire de forme est le premier mandat à remplir en vue de l'obtention d'un outil de modélisation numérique fiable. Cette thèse présente une nouvelle relation constitutive phénoménologique fondée sur le krigeage. Le krigeage est une méthode numérique puissante qui est utilisée dans le modèle à titre de technique d'interpolation. À partir de quelques courbes expérimentales isothermes à différentes températures, deux surfaces qui définissent le comportement de l'alliage au chargement et au déchargement sont construites. La réponse du matériau soumis à des chargements thermomécaniques complexes est calculée par une série d'interpolations sur les surfaces par l'entremise du krigeage. Le traitement des sous-cycles d'hystérésis est également considéré lorsque le volume délimité par les deux surfaces est traversé. Cette méthodologie produit une relation constitutive phénoménologique uniaxiale qui inclut dans une seule formulation les principaux comportements des alliages à mémoire de forme comme la superélasticité, la pseudo-plasticité, l'effet mémoire simple sens et l'effet mémoire double sens assisté.

La modélisation de composantes tridimensionnelles est réalisée par la méthode des éléments finis. Les non-linéarités géométriques sont prises en compte grâce à une formulation incrémentale de type Lagrangienne-réactualisée. La non-linéarité du comportement du matériau est considérée en interfaçant le programme d'éléments finis avec la relation constitutive fondée sur le krigeage. Le passage entre les états tridimensionnels de contrainte et de déformation calculés par les éléments finis et les états unidimensionnels manipulés par la relation constitutive repose sur la définition de valeurs équivalentes. Une définition de ces valeurs équivalentes fondées sur un critère de type Prager est suggérée. Un tel critère semble mieux adapté que le critère de Von-Mises pour prédire le début de la transformation de phase dans les alliages à mémoire de forme.

Enfin, deux applications industrielles sont calculées par la méthodologie développée dans cette thèse. La première application traite d'une rondelle Belleville montée dans un joint boulonné utilisé pour la distribution de l'électricité. Dans le cas d'un montage défectueux, une élévation de température est observée. Une rondelle Belleville à mémoire de forme est introduite dans le montage dans le but d'augmenter la force de serrage et de restaurer l'intégrité du joint lorsque la rondelle tente de revenir à sa géométrie initiale pendant le chauffage. Les résultats obtenus à la suite des analyses ont démontré une lacune importante de ce dispositif au refroidissement. Le dispositif fonctionne adéquatement au chauffage, mais des pertes substantielles de la force de serrage sont calculées au refroidissement. Le principe de la rondelle Belleville dans un joint boulonné doit donc être revu. La seconde application industrielle étudiée dans cette thèse concerne un stent médical superélastique. Un stent est un élément utilisé pour agrandir les artères partiellement obstruées. L'introduction du stent contracté dans le corps est réalisée par l'entremise d'un cathéter. Lorsque le stent est bien positionné, il est expulsé du cathéter et il reprend sa forme déployée grâce à la superélasticité. Les analyses par éléments finis ont permis de vérifier la validité d'un tel concept en plus de calculer le diamètre critique du cathéter avant d'endommager le stent.

Abstract

A large number of applications could benefit from the remarkable properties of shape memory alloys but up to now, a relatively limited number have been brought to the market. This can be attributed in part to the lack of numerical tools dedicated to the computer aided design of shape memory devices. The actual design process of shape memory components is mostly based on *trial-and-error* and most of the time, several prototypes must be built in order to meet the functional requirements. Apart from being an expensive practice, sometimes a whole project is abandoned because the optimal performance was never attained. Therefore, it is mandatory to develop computer aided design software in order to facilitate the emergence of new shape memory industrial applications.

The development of a general material law is the first important step before reliable design calculations can be carried out. This thesis presents a new phenomenological constitutive law based on dual kriging, which is a powerful mathematical tool used here as an interpolation method. From a few isothermal experimental force-deflection curves at different temperatures, two surfaces are constructed which describe the loading and unloading behavior of the material. The response of the material subjected to complex thermomechanical loadings is calculated by successive interpolations on these surfaces via dual kriging. For hysteretic subcycles, the response is calculated through the volume delimited by the two surfaces in such way that any recursive thermomechanical subcycle can be simulated. This methodology yields a uniaxial material law for shape memory alloys that includes in a single formulation superelasticity, pseudo-plasticity, one way shape memory effect and assisted two way shape memory effect.

The modeling of three-dimensional devices is performed by finite elements. The geometrical nonlinearities are taken into account by an updated-Lagrangian formulation.

The material nonlinearities are calculated by the material law based on kriging connected to the finite element program. The relationship between the three-dimensional stress states of the finite element program and the one-dimensional states of the material law is achieved by the definition of equivalent stress and strain values based on Prager type criterion. Such a criterion seems to be more realistic for the shape memory behavior.

Finally, two industrial applications of shape memory devices are analyzed. The first application is a Belleville spring disk mounted in bolted joint for electrical contact. When a bolted joint is not properly assembled, an increasing temperature is observed. The Belleville spring disk is introduced in order to increase the force in the assembly by shape recovery during heating. The finite element results point out an important deficiency. The Belleville disk works properly during heating, but a loss of the generated force is calculated after a subsequent cooling. Therefore, the entire concept based on the shape recovery of the Belleville disk should be revised. The other industrial application studied in this thesis is a superelastic shape memory medical stent. A stent is a device inserted in the human body via a catheter to increase the diameter of partially obstructed blood vessels. Afterward, the stent is extracted from the catheter in the body and deployed by superelasticity. The validity of the superelastic stent concept is verified by finite elements and the minimal radius of the catheter until plastification of the stent is determined.

Tables des matières

Remerciements iv
Résumé v
Abstract vii
Tables des matières ix
Liste des tableaux xiii
Liste des figures xiv
Liste des annexes xx
Introduction 1
Chapitre 1 : Présentation des alliages à mémoire de forme 3
1.1 Métallurgie des alliages à mémoire de forme 4
1.1.1 Types d'alliages 4
1.1.2 Diagramme d'équilibre et traitements thermiques 5
1.2 Transformation martensitique 10
1.2.1 Particularités de la transformation martensitique des AMF 11
1.2.2 Diagramme d'énergie libre, hystérésis et températures de transformation 16
1.2.3 Diagramme d'état 18
1.2.4 Modification des propriétés physiques 20
1.3 Comportements thermomécaniques des alliages à mémoire de forme 23
1.3.1 Super-thermoélasticité 23
1.3.2 Pseudo-plasticité (ferroélasticité) 26
1.3.3 Effet mémoire simple sens 27
1.3.4 Effet mémoire double sens 29
1.3.5 Effet amortissant 30
1.4 Fatigue thermomécanique 32
Chapitre 2 : Revue bibliographique 37
2.1 Relations constitutives pour les AMF 37
2.1.1 Modèles micromécaniques 39
2.1.2 Modèles phénoménologiques 59

2.2 Éléments finis appliqués aux AMF 72
Chapitre 3 : Modèle phénoménologique *KRIGAMF* 79
3.1 Présentation du krigeage 80
3.1.1 Krigeage dual 80
3.1.2 Krigeage paramétrique des courbes 85
3.1.3 Krigeage paramétrique des surfaces 86
3.2 Philosophie du modèle 89
3.3 Construction du modèle 93
3.4 Algorithme de calcul 100
3.5 Construction des sous-cycles d'hystérésis 105
3.6 Exemples d'utilisation et de validation 121
3.7 Principales limitations et conclusions 131
Chapitre 4 : Programme d'éléments finis *SIMAMF* 134
4.1 Présentation générale 134
4.2 Architecture du programme 142
4.2.1 Classe *Node_c* 147
4.2.2 Classe *Bcond_c* 148
4.2.3 Classe *Elem_c* et ses classes dérivées 149
4.2.4 Classe *State_c* et ses classes dérivées 153
4.2.5 Classe *Mesh_c* 172
4.3 Algorithme de calcul 172
4.3.1 Calcul de ${}^{t}\{F\}$ 176
4.3.2 Obtention de $\{\Delta R_{MEC}\}$ 178
4.3.3 Imposition de ΔT 179
4.3.4 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_i^k$ 179
4.3.5 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_i^k$ 180
4.3.6 Processus itératif 182
4.3.7 Calcul de $\{\Delta R_{THR}\}$ 183
4.3.8 Calcul de $\{\Delta R_{SME}\}$ 185

4.3.9 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{R\}$ 185
4.3.10 Calcul de ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]$ 186
4.3.11 Calcul de $\{\Delta U\}$ 188
4.3.12 Imposition de $\{\Delta U\}$ 189
4.3.13 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e\}_i^k$ 190
4.3.14 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{\tau\}_i^k$ 196
4.3.15 Calcul de ΔU_{max} 198
4.3.16 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{F\}$ 199
4.3.17 Mise à jour 199
4.3.18 Écriture des fichiers de sortie 200
4.4 Exemples de validation 200
4.4.1 Géométrie et maillage de la poutre 200
4.4.2 Relations constitutives 201
4.4.3 Chargement superélastique 203
4.4.4 Effet mémoire simple sens 208
4.5 Développements futurs 209
Chapitre 5 : Étude d'une rondelle Belleville avec *KRIGAMF* 212
5.1 Exposé du problème 212
5.2 Théorie des rondelles Belleville 215
5.3 Fonction d'une rondelle Belleville dans un joint boulonné 215
5.4 Définition de la relation constitutive de la rondelle dans KRIGAMF 223
5.5 Comportement isotherme de la rondelle 225
5.6 Comportement non-isotherme de la rondelle 228
5.7 Validation qualitative et quantitative 230
5.8 Conclusion 232
Chapitre 6 : Étude par éléments finis d'une rondelle Belleville 235
6.1 Analyse de la rondelle avec des éléments axisymétriques 235
6.1.1 Effet du raffinement du maillage 236

6.1.2 Imposition des conditions aux frontières 239
6.1.3 Simulation du comportement superélastique de la rondelle 246
6.2 Analyse de la rondelle avec des éléments tridimensionnels 259
6.2.1 Maillage utilisé 259
6.2.2 Relation constitutive 260
6.2.3 Coefficient de frottement 261
6.2.4 Chargement superélastique 263
6.3 Conclusions et recommandations 265
Chapitre 7 : Étude par éléments finis d'un stent médical 269
7.1 Exposé du problème 269
7.2 Géométrie du stent 273
7.3 Étude du raffinement du maillage 277
7.4 Définition de la relation constitutive de l'alliage dans KRIGAMF 280
7.5 Simulation du stent permanent superélastique 282
7.5.1 Choix de la relation constitutive 282
7.5.2 Détermination du rayon critique du cathéter 286
7.5.3 Analyse de la contraction du stent 288
7.5.4 Analyse de la distribution de contrainte dans le stent 291
Conclusion 296
Références 298
Annexes 304

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Différents choix de dérive pour le krigeage dual. 81
Tableau 3.2 : Différents choix de covariance généralisée pour le krigeage dual..... 82
Tableau 5.1 : Propriétés du boulon d'acier et des plaques d'aluminium. 217
Tableau 5.2 : Résumé des analyses macroscopiques de la rondelle Belleville. 233
Tableau 7.1 : Coordonnées des 9 noeuds du maillage pour le quart d'une boucle. 279

Liste des figures

Figure 1.1 Diagramme d'équilibre binaire AB. ..7

Figure 1.2 Différence entre les mailles élémentaires cubiques centrées B2 et DO_3. 9

Figure 1.3 Transformation d'un élément de volume d'austénite en martensite. 13

Figure 1.4 Formation de variantes de martensite autoaccommodantes..... 14

Figure 1.5 Conservation des dimensions macroscopiques (autoaccommodation)..... 14

Figure 1.6 Formation d'une variante de martensite orientée par la contrainte 14

Figure 1.7 Réorientation de variantes de martensite 15

Figure 1.8 Diagramme d'énergie libre de l'austénite et de la martensite..... 16

Figure 1.9 Fraction volumique de martensite en fonction de la température..... 17

Figure 1.10 Diagramme d'état d'un AMF..... 18

Figure 1.11 Dépendance des températures de transformation par rapport à la contrainte..... 19

Figure 1.12 Résultat d'un essai de résistivité électrique..... 21

Figure 1.13 Résultat d'un essai de DSC. 22

Figure 1.14 Représentation d'un chargement superélastique. 24

Figure 1.15 Influence de la température sur les courbes superélastiques. 25

Figure 1.16 Représentation d'un chargement superthermique. 26

Figure 1.17 Représentation de l'effet pseudo-plastique. 27

Figure 1.18 Représentation de l'effet mémoire simple sens..... 28

Figure 1.19 Résultat d'un test de DMA..... 31

Figure 1.20 Vie en fatigue d'un monocristal de Cu-Zn-Al..... 33

Figure 1.21 Hystérésis de trois cycles de fatigue d'un monocristal Cu-Zn-Al..... 35

Figure 2.1 Différence entre un alliage classique et un AMF..... 38

Figure 2.2 Exemples de distorsion tensorielle D_{ik}..... 46

Figure 2.3 Représentation des 3 angles d'Euler qui définissent l'orientation d'un repère d'une région x-y-z par rapport au repère macroscopique X-Y-Z..... 48

Figure 2.4 Cinétique d'une transformation de phase du second ordre. 53
Figure 2.5 Cinétique de transformation de phase d'un AMF avec étalement de la transformation et hystérésis. 54
Figure 2.6 Différentes représentations d'un modèle bilinéaire 65
Figure 3.1 Trois exemples de composantes mécaniques simples. 90
Figure 3.2 Courbes isothermes expérimentales (gauche), surfaces krigées (centre) et réponse thermomécanique (droite) d'une rondelle Belleville en AMF... 91
Figure 3.3 Obtention par krigeage de l'équation mathématique de deux séries de surfaces paramétriques, une pour le chargement et l'autre pour le déchargement 94
Figure 3.4 Version tension-compression de *KRIGAMF*. 98
Figure 3.5 Version bilinéaire de *KRIGAMF*. 100
Figure 3.6 Construction d'un premier sous-cycle de déchargement. 106
Figure 3.7 Construction d'un second sous-cycle de chargement. 110
Figure 3.8 Construction d'un second sous-cycle de chargement. 112
Figure 3.9 Exemple de six sous-cycles imbriqués les uns dans les autres. 113
Figure 3.10 Construction des sous-cycles pour les simulations non-isothermes. 115
Figure 3.11 Construction du modèle en utilisant des courbes isothermes calculées par le modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin. 122
Figure 3.12 Validation quantitative du modèle pour des chargements superthermiques. 123
Figure 3.13 Courbes isothermes et surfaces krigées d'un AMF créé pour la validation qualitative de *KRIGAMF* 125
Figure 3.14 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes superélastiques 126
Figure 3.15 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes superthermiques 127
Figure 3.16 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des chargements pseudo-plastiques. 128
Figure 3.17 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes d'effet mémoire simple sens 129

Figure 3.18 Validation qualitative de *KRIGAMF* par une simulation de génération d'effort au chauffage. 130
Figure 4.1 Exemple de maillage dans *SIMAMF*. 143
Figure 4.2 Architecture des principales classes de *SIMAMF*. 145
Figure 4.3 Types d'éléments disponibles dans *SIMAMF*. 149
Figure 4.4 Paramètres descriptifs de la relation bilinéaire (gauche) et modélisation des sous-cycles d'hystérésis (droite). 156
Figure 4.5 Obtention de rigidités différentes suite à l'application de trois incréments de chargement différents à partir du même état de sollicitation. 164
Figure 4.6 Différence entre les critères de Von-Mises et de Prager pour un état plan de contrainte. 169
Figure 4.7 Obtention expérimentale des contraintes de début de transformation en tension et en compression. 170
Figure 4.8 Algorithme de calcul de la prochaine configuration. 175
Figure 4.9 Processus itératif de solution de type Newton-Raphson. 183
Figure 4.10 Déformation d'une segment de droite AB lors du passage de la configuration initiale vers la prochaine configuration. 191
Figure 4.11 Déformation en cisaillement d'un angle $\overline{\overline{AIB}}$ lors du passage de la configuration initiale vers la prochaine configuration. 194
Figure 4.12 Géométrie et maillage de la poutre encastrée utilisée pour valider *SIMAMF*. 201
Figure 4.13 Définition d'un AMF fictif dans *KRIGAMF* pour l'analyse de la poutre. 202
Figure 4.14 Comportement superélastique de l'alliage à 40°C. 202
Figure 4.15 Réponse superélastique de la poutre calculée selon différents modèles. 203
Figure 4.16 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans la poutre. 206
Figure 4.17 Déplacement de l'axe neutre engendrée par l'asymétrie du critère de Prager. 207
Figure 4.18 Chargement pseudo-plastique à 0°C de la poutre encastrée. 208
Figure 4.19 Effet mémoire simple sens de la poutre encastrée lors du chauffage. 209
Figure 5.1 Montage avec rondelle Belleville pour créer une pression de contact. 213

Figure 5.2 Géométrie de la rondelle Belleville. 214
Figure 5.3 Boulonnage de deux plaques sans rondelle Belleville. 216
Figure 5.4 Boulonnage de deux plaques avec rondelle Belleville. 218
Figure 5.5 Constante de ressort K d'une rondelle Belleville. 220
Figure 5.6 Courbes expérimentales isothermes à différentes températures. 223
Figure 5.7 Modélisation du comportement de la rondelle dans *KRIGAMF*. 224
Figure 5.8 Réponse tridmensionnelle pour un chargement isotherme. 225
Figure 5.9 Réponse de la rondelle pour le chargement isotherme. 226
Figure 5.10 Réponse tridimensionnelle pour un chargement non-isotherme 229
Figure 5.11 Validation de la réponse non-isotherme avec un boulon d'acier 231
Figure 6.1 Cinq maillages utilisés pour l'étude du raffinement du maillage. 237
Figure 6.2 Courbe force-déflection pour les différents maillages. 238
Figure 6.3 Convergence de l'écrasement de la rondelle en fonction du nombre de noeuds pour une force de 3500 N. 239
Figure 6.4 Différents types de conditions aux frontières imposés aux points de contact. 240
Figure 6.5 Résultats des simulations réalisées avec *ABAQUS*. 241
Figure 6.6 Test de frottement réalisé dans les laboratoires de l'IREQ. 242
Figure 6.7 Évolution du coefficient de frottement en fonction d'une charge appliquée. 244
Figure 6.8 Comportement initial de la rondelle selon différentes conditions frontières. 245
Figure 6.9 Courbe de traction superélastique de l'alliage Cu-Al-Ni-Mn-Ti à 127°C. 247
Figure 6.10 Courbe superélastique initiale de la rondelle Belleville à 130°C. 247
Figure 6.11 Courbe superélastique modifiée de la rondelle Belleville à 130°C. 248
Figure 6.12 Modélisation de l'alliage Cu-Al-Ni-Mn-Ti dans *KRIGAMF*. 249
Figure 6.13 Validation des résultats pour un chargement superélastique. 250
Figure 6.14 Proportion volumique de la rondelle transformée en martensite en fonction de la charge appliquée 253

Figure 6.15 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 993N. 254
Figure 6.16 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 1975N. 254
Figure 6.17 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 2964N. 255
Figure 6.18 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 3953N. 255
Figure 6.19 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 4941N. 256
Figure 6.20 Évolution de la proportion de martensite et de la déformation récupérable en fonction de l'écrasement relatif de la rondelle. 257
Figure 6.21 Évolution de l'indice de performance en fonction de l'écrasement relatif. 258
Figure 6.22 Modélisation de la rondelle par des éléments tridimensionnels. 260
Figure 6.23 Relation constitutive de l'alliage définie dans *KRIGAMF* 260
Figure 6.24 Influence du coefficient de frottement sur la réponse de la rondelle. 262
Figure 6.25 Variation du coefficient de frottement en fonction de la charge appliquée 262
Figure 6.26 Validation expérimentale du comportement superélastique de la rondelle 263
Figure 6.27 Distribution de contrainte équivalente dans la rondelle (P = 4.9 kN) 264
Figure 6.28 Fonctionnement d'un actuateur linéaire actif/passif en AMF. 266
Figure 6.29 Utilisation de rondelles plates avec épaulement dans un joint boulonné. 268
Figure 7.1 Configurations déployée et contractée du stent. 270
Figure 7.2 Géométrie d'un quart de boucle en configuration complètement déployée. 274
Figure 7.3 Différence entre des secteurs triangulaires et des secteurs en arc de cercle. 275
Figure 7.4 Position de l'axe neutre d'un quart de boucle 275
Figure 7.5 Dimensions d'un quart de boucle selon les deux configurations 276
Figure 7.6 Éléments poutre bidimensionnel à deux noeuds et 6 degrés de liberté 277
Figure 7.7 Imposition des conditions aux frontières. 278
Figure 7.8 Convergence de la contraction d'un quart de boucle en fonction du nombre de noeuds du maillage pour une force de 0.6 N. 279

Figure 7.9 Numérotation des noeuds et des éléments du maillage. 280
Figure 7.10 Modélisation par *KRIGAMF* d'un alliage Ti-Ni calculé par *DEFORM*. 281
Figure 7.11 Courbes d'écrasement d'un quart de boucle calculées en utilisant trois relations constitutives (linéaire, modèle bilinéaire et *KRIGAMF*). 283
Figure 7.12 Position médiane des 8 couches d'un élément poutre. 284
Figure 7.13 Distribution de la contrainte axiale dans le premier élément pour des écrasements d'un quart de boucle de 0.13 mm et 0.3 mm. 285
Figure 7.14 Évolution de la contrainte axiale maximale dans l'élément #1 en fonction du rayon relatif R/R_i du stent lors de la contraction. 287
Figure 7.15 Courbe d'écrasement d'un quart de boucle lors de la contraction du stent dans le cathéter suivi d'un déploiement dans l'artère. 290
Figure 7.16 Distributions de la contrainte axiale dans les 8 éléments du maillage pour un écrasement de 0.77 mm (rayon du stent de 2.5 mm). 291
Figure 7.17 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément lors de la contraction du stent dans le cathéter. 293
Figure 7.18 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément lors du déploiement du stent dans l'artère. 293

Liste des annexes

Annexe I : Exemples numériques réalisés avec le modèle de Likhatchev et Malinin 304

Annexe II : Minimisation quadratique du potentiel thermodynamique de Patoor..... 321

Annexe III : Caractérisation en torsion d'un AMF et étude expérimentale d'un manchon de raccordement AMF..... 345

Introduction

Les alliages à mémoire de forme (AMF) sont des matériaux relativement nouveaux qui sont voués à un avenir prometteur à titre d'actuateur, de connecteur ou d'amortisseur dans des secteurs industriels aussi variés que l'aérospatial, l'aéronautique, le biomédical, l'électronique, l'électricité, la micromécanique, l'automobile et le nucléaire. Une transformation de phase à l'état solide est à la base de toutes les propriétés exceptionnelles des alliages à mémoire de forme. La déformation réversible que peuvent subir ces matériaux est très largement supérieure à celle des matériaux métalliques classiques. De plus, ils peuvent générer des efforts importants et ils comptent parmi les matériaux dont la force spécifique (la force par unité de masse) est la plus élevée. En revanche, ces propriétés remarquables se traduisent par un comportement fort complexe du matériau. En effet, le comportement des alliages à mémoire de forme est fortement non-linéaire, dépendant de la température et caractérisé par une hystérésis mécanique et thermique. Il devient alors difficile de concevoir une composante en AMF tout en prenant en considération ces caractéristiques. De nos jours, la conception d'une composante à mémoire de forme est essentiellement fondée sur une approche expérimentale dite *par essais et erreurs*. Ainsi, des prototypes sont construits, étudiés et modifiés jusqu'à ce que la composante rencontre le cahier des charges initialement établi. Une telle pratique s'avère souvent inefficace et coûteuse et l'arrivée d'outils de modélisation numérique devient maintenant une nécessité.

Le mandat principal de cette thèse est de développer des outils de modélisation numérique spécialement adaptés aux comportements complexes des alliages à mémoire de forme. Ces objectifs sont visés dans le but d'accélérer et de faciliter la phase de conception de composantes à mémoire de forme afin de permettre leur émergence dans de nouvelles applications industrielles. Les deux principales contributions de cette thèse résident dans le développement d'un programme général d'éléments finis pouvant

modéliser des géométries tridimensionnelles et d'une relation constitutive purement phénoménologique permettant de calculer les comportements complexes des AMF. L'interface entre le programme d'éléments finis et la relation constitutive est l'aboutissement logique des travaux vers l'obtention d'un outil de modélisation numérique général, souple et performant.

Cette thèse composée de sept chapitres reflète la volonté de créer des liens entre la théorie et la pratique. En effet, les premiers chapitres servent à exposer les fondements théoriques qui sont ensuite transposés dans les derniers chapitres pour calculer la réponse d'une composante dans des applications industrielles. Le premier chapitre présente de manière générale les alliages à mémoire de forme et leur comportement tandis que le second chapitre effectue une revue bibliographique des principaux travaux de modélisation qui se rapportent aux AMF. Le coeur de la thèse est sans contredit les troisième et quatrième chapitres. Au troisième chapitre, une relation constitutive phénoménologique est développée à partir d'une nouvelle approche fondée sur le krigeage. Les principaux comportements des AMF sont pris en considération au sein d'une seule formulation construite à partir de courbes expérimentales. Le quatrième chapitre expose la formulation sur laquelle est construite un programme d'éléments finis non-linéaires spécialement adapté aux AMF. Les cinquième, sixième et septième chapitres représentent les applications pratiques des développements théoriques obtenus dans les chapitres précédents. Une rondelle Belleville montée dans un contact électrique et un stent médical servant à augmenter le diamètre d'artères obstruées sont les deux applications étudiées dans cette thèse. Le comportement macroscopique de la rondelle Belleville est d'abord étudiée au cinquième chapitre et les analyses par éléments finis de la rondelle sont présentés au sixième chapitre. Les analyses par éléments finis du stent médical sont effectuées au septième chapitre. Enfin, trois annexes viennent compléter la thèse en présentant des développements théoriques ou expérimentaux.

Chapitre 1 : Présentation des alliages à mémoire de forme

La mémoire de forme de certains alliages est un phénomène connu depuis plusieurs décennies, mais les toutes premières applications ont tardé à émerger. En effet, les premières observations de l'effet mémoire remontent à la fin des années 30, mais l'intérêt pour d'éventuelles applications ne s'est manifesté que dans les années 60. Le US Naval Ordnance Laboratory avait mis au point un alliage à base de titane et de nickel appelé NiTiNOL. La première application industrielle utilisant cet alliage fut un manchon de raccordement pour des conduits hydrauliques sur l'avion de chasse F14. Ce manchon développé par la compagnie Raychem en 1969 constitue la toute première application industrielle à connaître un succès incontesté. Dans les années qui ont suivi, peu de nouvelles applications ont été développées. Les principales causes de ce ralentissement semblent être le manque de compréhension des phénomènes métallurgiques qui régissent la mémoire de forme, le manque de contrôle sur les paramètres d'élaboration des alliages (traitements thermiques, composition, etc.) et l'absence d'outils de modélisation. La recherche fondamentale effectuée dans tous ces domaines a permis de progresser à un tel point qu'il est maintenant question de fabriquer des dispositifs utilisant des composantes en AMF dans des domaines aussi variés que l'automobile, l'aéronautique, l'électronique, le biomédical, la robotique, le sport et l'art.

Dans ce chapitre, les notions de base des alliages à mémoire de forme (AMF) sont abordées. L'information présentée est principalement tirée des livres de Funakubo [1.1] et de Patoor et Berveiller [1.2]. Ce chapitre est divisé en quatre sections qui traitent respectivement des notions de base en métallurgie relatives aux AMF, de la transformation martensitique, des différents comportements thermomécaniques typiques de ces alliages et finalement de la fatigue des AMF qui constitue une limitation importante à l'utilisation de ces matériaux.

1.1 Métallurgie des alliages à mémoire de forme

Bien que cette thèse traite de la modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme, il est essentiel d'aborder ici quelques notions de base de métallurgie comme les diagrammes d'équilibre et les traitements thermiques qui sont à l'origine des propriétés remarquables des AMF. En plus de discuter de ces sujets, cette section présente en première partie les différents alliages qui possèdent les propriétés de mémoire de forme.

1.1.1 Types d'alliages

Il existe un nombre assez élevé d'alliages qui possèdent les propriétés de mémoire de forme. Parmi ceux-ci, certains présentent seulement des intérêts de recherche car ils sont peu exploitables industriellement étant donné leur prix très élevé. C'est le cas de l'alliage or-cadmium (Au-Cd) qui fut l'un des premiers à être étudié. Pour qu'un alliage soit commercialement exploitable, il doit répondre à certains critères :

- son prix doit être relativement faible;
- il doit être apte à déployer sa mémoire de forme dans une gamme de températures qui correspond aux conditions d'utilisation;
- les procédés de fabrication et de mise en forme de l'alliage doivent être contrôlés à la perfection (par exemple, des variations de composition de l'ordre du dixième de 1% peuvent modifier les températures de transformation de près de 100°C);
- l'alliage ne doit pas perdre ses propriétés dans des conditions normales d'utilisation.

La conséquence de toutes ces restrictions a été de faire ressortir deux familles d'alliages qui sont les plus fréquemment utilisées pour des applications industrielles. Il s'agit des alliages à base de titane-nickel (Ti-Ni) et ceux à base de cuivre (Cu-Zn-Al et Cu-Al-Ni principalement). Certains alliages, qui sont encore au stade de développement, ont un avenir très prometteur pour des applications industrielles. Parmi ceux-ci, on retrouve d'autres alliages cuivreux comme le Cu-Al-Be et les alliages ferreux. Comparativement

au Cu-Zn-Al, le Cu-Al-Be semble démontrer une meilleure conservation de ses propriétés lorsqu'il est utilisé dans un environnement à température élevée. En ce qui concerne les alliages ferreux (le fer-manganèse Fe-Mn par exemple), ils sont développés dans le but de réduire le coût des matières premières car mis à part leur excellente tenue en température, leurs propriétés sont largement inférieures à celles des autres alliages. De plus, il faut leur ajouter de nombreux additifs pour différentes raisons comme la résistance à la corrosion. Par conséquent, la composition et la structure cristalline des alliages deviennent assez complexes comme le laisse entrevoir la formule chimique des deux alliages ferreux suivants : le Fe-Mn-Cr-Ni-Si et le Fe-Cr-Ni-Co-Mn-Si.

Voici quelques-uns des alliages qui possèdent les propriétés de mémoire de forme, mais qui n'ont malheureusement pas été commercialement exploités pour diverses raisons (principalement le coût de l'alliage) : Ag-Cd, Au-Cd, Cu-Au-Zn, Cu-Sn, In-Tl, Fe-Pt, Fe-Pb et Mn-Co. Les propriétés physiques, électriques, mécaniques et d'effet mémoire des trois alliages les plus utilisés (Ti-Ni, Cu-Zn-Al et Cu-Al-Ni) sont abordées plus profondément dans plusieurs publications, dont celle de B.G. Mellor [1.3].

1.1.2 Diagramme d'équilibre et traitements thermiques

Les traitements thermiques que reçoivent les alliages Ti-Ni sont beaucoup moins complexes que ceux des alliages cuivreux. Les propriétés thermomécaniques des Ti-Ni dépendent principalement de la composition de l'alliage. En effet, les phénomènes reliés à la mémoire de forme sont observés dans ces alliages lorsque la proportion de titane varie entre 50 ± 1 % atomique. La proportion restante est normalement constituée de nickel, mais certains éléments d'addition comme le carbone, le cuivre ou l'azote peuvent être introduits pour améliorer certaines propriétés spécifiques de l'alliage. Les propriétés des alliages Ti-Ni sont donc essentiellement gouvernées par leur composition nominale. Une fois la coulée de l'alliage terminée, ce dernier est refroidi lentement jusqu'à la température ambiante. Les phénomènes d'effet mémoire peuvent immédiatement être

utilisés dans une application. Des traitements thermiques peuvent ultérieurement être appliqués pour restaurer partiellement ou complètement les propriétés des alliages Ti-Ni à la suite d'une utilisation trop sévère ou prolongée. Dans un premier temps, un *revenu* permet d'éliminer une partie importante des dislocations qui ont été créées au niveau du réseau cristallin lors de l'utilisation de l'alliage. À titre d'exemple, le revenu d'un alliage Ti-Ni peut durer entre 1 et 3 heures à une température comprise entre 550°C et 500°C suivi d'un refroidissement lent. Dans un second temps, *un traitement d'homogénéisation* peut être employé pour restaurer un alliage qui a perdu complètement ses propriétés de mémoire de forme. Il s'agit alors de favoriser une nouvelle cristallisation de l'alliage en l'amenant à une température supérieure à 800°C pendant plusieurs minutes.

En ce qui concerne les alliages cuivreux, la composition de l'alliage joue un rôle aussi important que celui dans le cas des alliages Ti-Ni. Par contre, des traitements thermiques additionnels après la coulée des alliages cuivreux sont nécessaires pour obtenir les propriétés d'effet mémoire. Les paramètres qui caractérisent les traitements thermiques influencent également les propriétés de l'alliage. Cela représente à la fois un inconvénient puisqu'il faut contrôler davantage de paramètres afin d'obtenir un alliage aux propriétés désirées, et un avantage car une plus grande plage de propriétés peuvent être obtenues avec le même alliage.

La mémoire de forme dans les alliages cuivreux peut exister si et seulement si l'alliage se trouve dans une phase homogène et métastable à la température d'utilisation. Une phase est dite *métastable* quand elle est dans un état qui ne correspond pas à l'équilibre thermodynamique, sans pour autant retourner vers un état d'équilibre. Une telle phase est souvent appelée "hors équilibre". Pour obtenir une phase homogène et métastable, il faut d'abord connaître le diagramme d'équilibre de l'alliage et ensuite imposer les traitements thermiques adéquats qui permettent d'obtenir la mémoire de forme. Un diagramme d'équilibre est un graphe qui montre les différentes phases d'un alliage qui peuvent coexister en fonction de la composition et de la température lorsque l'alliage est à

l'équilibre thermodynamique. Même si un diagramme d'équilibre nous renseigne sur l'état de l'alliage à l'équilibre thermodynamique, il fournit suffisamment d'information pour réaliser les premiers traitements thermiques à imposer afin d'obtenir des alliages cuivreux métastables à la température d'utilisation. En effet, les températures des traitements thermiques de *bétatisation* et de *trempe* sont obtenues grâce au diagramme d'équilibre de l'alliage. Par contre, la durée des traitements doit être déterminée de façon expérimentale ou par des calculs relatifs à la cinétique des transformations de phase. À titre d'exemple, prenons un diagramme fictif d'équilibre binaire AB comportant trois phases solides homogènes α, β et γ tel qu'illustré à la figure 1.1.

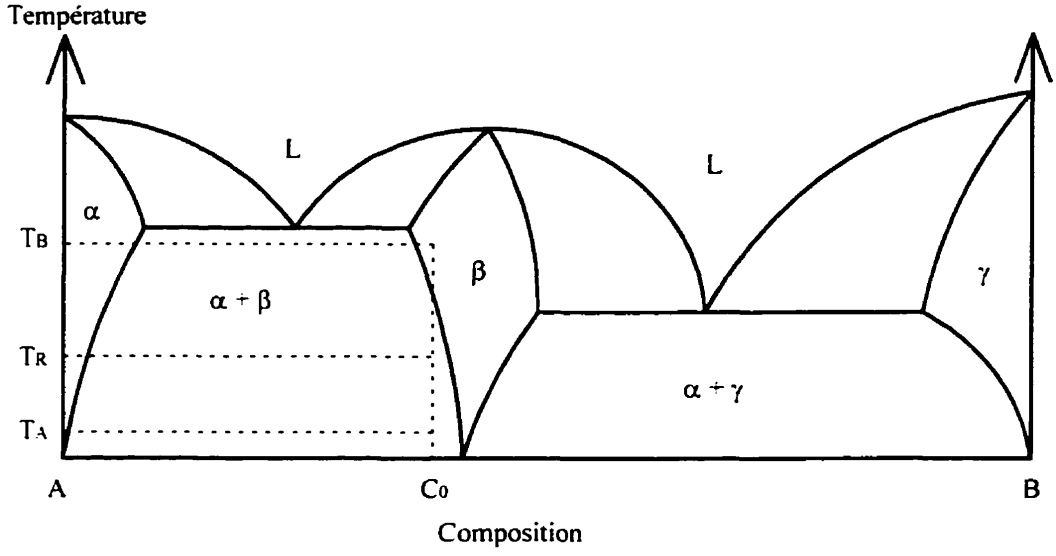


Figure 1.1 Diagramme d'équilibre binaire AB.

Avec le diagramme de la figure 1.1, imaginons que nous soyons en présence d'un alliage de composition C_0. De plus, nous savons que la mémoire de forme peut être observée si l'alliage est en phase β à la température d'utilisation, la température ambiante T_A dans le cas présent. Si l'alliage est amené à la température T_B, seule la phase β est présente. Après un refroidissement lent jusqu'à la température ambiante T_A, il y a précipitation de la phase α dans β. Il s'agit d'un mélange hétérogène de α et de β qui ne possède pas les propriétés de mémoire de forme. Il faut donc piéger la phase β de façon à empêcher la

diffusion d'agir. La diffusion est le déplacement d'atomes sur de longues distances (plusieurs longueurs atomiques par exemple) et c'est grâce à cette diffusion qu'un certain nombre d'atomes se regroupent pour former des précipités. Pour arriver à obtenir une phase β homogène, il faut d'abord amener l'alliage dans le domaine d'équilibre de la phase β (à la température T_B par exemple) pendant un certain temps. C'est le traitement d'homogénéisation appelé plus communément *bétatisation*. Par la suite, une *trempe* rapide est effectuée en plongeant l'AMF dans un fluide à la température T_A. Le but de la trempe est de piéger la phase β à la température T_A. À cette température, l'activation thermique n'est pas suffisante pour favoriser la diffusion qui permettrait de retourner vers un état d'équilibre. Pourtant, une phase métastable β est ainsi obtenue à la température ambiante T_A même si le diagramme d'équilibre ne le prévoit pas.

Après la trempe, le piégeage de l'alliage dans un état métastable apporte inévitablement une densité élevée de dislocations et de lacunes dans le réseau cristallin. Les dislocations et les lacunes sont des défauts à l'échelle atomique qui produisent des distorsions dans le réseau cristallin. Ce dernier n'est alors pas entièrement composé de mailles élémentaires parfaites, c'est-à-dire des petits parallélépipèdes parfaits formés par l'arrangement ordonné des atomes. Une lacune est simplement un atome manquant dans une maille élémentaire tandis qu'une dislocation est un déplacement partiel d'un plan atomique qui affecte la répétition des mailles élémentaires dans le réseau cristallin. Bien que tous les cristaux possèdent des défauts, même ceux aussi "parfaits" que les diamants, la trempe crée une quantité trop importante de défauts qui affectent négativement les propriétés de l'alliage. Afin d'éliminer cette sursaturation de défauts, il est nécessaire d'effectuer un *revenu* jusqu'à la température T_R. Il consiste à élever la température de l'alliage pour permettre une diffusion à courte distance. De plus, le revenu permet une remise en ordre de la structure cristalline. Cette notion de mise en ordre est nécessaire pour que la transformation martensitique réversible qui régit la mémoire de forme des alliages puisse se produire dans les matériaux. Cela signifie que l'activation thermique est suffisante

pour permettre aux atomes de se déplacer sur une courte distance afin de former de l'austénite composée d'une structure cristalline continue et ordonnée. Si les atomes se déplacent sur une grande distance pendant le revenu, il y aurait précipitation de α dans β et perte des propriétés d'effet mémoire. Il est à noter qu'un changement des températures T_B et T_R ainsi que des durées de la trempe et du revenu affectent significativement les températures de transformation des alliages à mémoire de forme. À titre d'exemple, pour un échantillon de Cu-Zn-Al typique, il faut appliquer la séquence de traitements thermiques suivante pour obtenir un échantillon présentant la propriété de mémoire de forme : une bétatisation à 850°C pendant 15 minutes suivie d'une trempe à l'eau (20°C), puis d'un revenu à l'eau bouillante (100°C) pendant 60 minutes. À la suite de ces traitements thermiques, la maille élémentaire des principaux AMF est cubique centrée B2 ou cubique centrée DO_3. La figure 1.2 montre la différence entre ces deux mailles élémentaires du réseau cristallin.

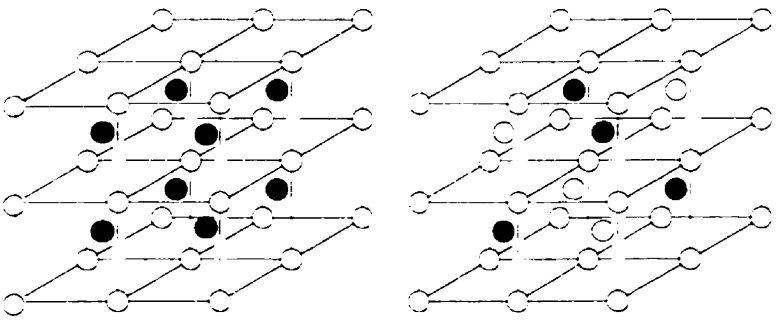


Figure 1.2 Différence entre les mailles élémentaires cubiques centrées B2 et DO_3.

Il existe un nombre important de paramètres à contrôler pour réussir un traitement thermique. Un paramètre mal ajusté peut être responsable à lui seul de l'échec du traitement thermique, c'est-à-dire que l'alliage n'aurait pas les propriétés de mémoire de forme ou encore ne posséderait pas les bonnes caractéristiques comme de mauvaises températures de transformation. Voici quelques paramètres qui influent la mémoire de forme des alliages : la température et la durée de la bétatisation, l'environnement de la

bétatisation (formation d'oxydes si l'oxygène est présent), le milieu de trempe (eau, air ou huile), la température du bain de trempe ainsi que la température et la durée du revenu.

On peut donc constater toute l'expertise requise afin d'inculquer la mémoire de forme à certains alliages. Il existe une séquence de traitements thermiques pour chaque alliage et pour chaque composition d'un même alliage. De plus, lorsqu'on applique différents traitements thermiques sur des alliages identiques, on obtient des propriétés différentes (températures de transformation, largeur de l'hystérésis, etc.). Enfin, il est crucial de porter une attention particulière à la température d'utilisation d'une pièce en AMF. Si cette température devient trop élevée, l'activation thermique est suffisante pour favoriser une diffusion à grande échelle suivie d'une précipitation. Par conséquent, il y aura perte des propriétés d'effet mémoire. Il faut donc être très prudent lors de la détermination des paramètres du revenu. Une température trop élevée ou encore un temps de maintien trop long (autant lors du revenu que lors de l'utilisation de la composante AMF) peut inciter l'alliage à revenir vers l'équilibre thermodynamique par précipitation. Pour récupérer les propriétés d'effet mémoire, il faut reprendre toute la séquence des traitements thermiques.

1.2 Transformation martensitique

Tous les phénomènes particuliers aux AMF sont reliés à un changement de phase à l'état solide appelé *transformation martensitique*. Il s'agit d'une modification du réseau cristallin entre une phase à haute température appelée *austénite* et une phase à basse température appelée *martensite*. La température qui correspond à l'existence de l'austénite (phase haute température) est bien inférieure à la température critique pour laquelle la diffusion devient significative et pour laquelle une précipitation est observée. Dans les sections qui suivent, nous aborderons plus en profondeur cette notion de transformation martensitique qui est la pierre angulaire des phénomènes de mémoire de forme.

1.2.1 Particularités de la transformation martensitique des AMF

Le nom *martensite* fut donné en l'honneur du métallurgiste allemand Adolph Martens. Il fut un des premiers à observer la formation de plaquettes de martensite lorsqu'un acier était trempé à partir d'une phase haute température appelée austénite. Plus tard, il a été montré que ce comportement était le résultat d'une transformation sans diffusion du réseau cristallin. L'absence de diffusion est importante car cela signifie que les atomes se réarrangent en effectuant des déplacements ordonnés inférieurs à la distance atomique. La composition locale de l'alliage demeure donc la même. Lorsqu'un échantillon d'AMF est refroidi, des plaquettes (appelées souvent aiguilles) de martensite se forment à partir d'une phase haute température. Par analogie avec la transformation observée dans les aciers, les noms *austénite* et *martensite* ont été donnés aux différentes phases et la transformation a ainsi été appelée *transformation martensitique*.

Il est important de remarquer que la transformation martensitique est fort différente dans les aciers et dans les AMF. Dans les aciers, lors d'un refroidissement, la martensite se forme en plaquettes de dimensions finies et cela de façon presque instantanée. Plus la température diminue, plus le nombre de plaquettes augmente, mais leur dimension demeure constante. Lors d'un réchauffement, il y a une nouvelle germination et croissance de l'austénite à l'intérieur des plaquettes de martensite. Ainsi, l'arrangement cristallographique global après le refroidissement et le réchauffement peut être différent de celui qui existait auparavant.

Dans les alliages à mémoire de forme, les transformations directe (austénite→martensite) et inverse (martensite→austénite) sont différentes. Dans la transformation directe (refroidissement), il y a formation des premières plaquettes de martensite aux endroits favorisés par un champ de contraintes internes ou par des dislocations dans le réseau cristallin. Plus la température diminue, plus la taille des plaquettes augmente et cela, de façon continue. La formation d'une plaquette crée forcément un nouveau champ de

contraintes internes qui favorisent la croissance de nouvelles plaquettes. Une plaquette peut progresser jusqu'à ce qu'elle rencontre une autre plaquette ou un joint de grain. Lors de la transformation inverse (réchauffement), il n'y a pas de nouvelle germination et croissance de l'austénite dans la martensite, mais on observe plutôt une décroissance des plaquettes de martensite préalablement formées. La première plaquette à s'être formée est la dernière à se retirer, comme si un film était visionné en marche arrière. L'arrangement cristallographique initial est donc restauré à chaque transformation inverse.

Cette transformation martensitique est dite *thermoélastique* et *displacive* du *premier ordre*. Le terme thermoélastique signifie que la transformation progresse soit avec la température, soit sous l'effet d'une contrainte. Une analogie concernant l'ébullition de l'eau peut favoriser la compréhension de ce phénomène. En effet, il est possible de faire bouillir de l'eau soit en augmentant la température, soit en diminuant la pression. La transformation inverse est obtenue par un mouvement de retour des interfaces austénite-martensite pour restaurer complètement la phase mère (austénite). Quant au terme displacif, il signifie que la transformation de phase a lieu sans diffusion et qu'elle est caractérisée par un très grand nombre de petits déplacements ordonnés et finis. Enfin, le fait d'ajouter que la transformation est du premier ordre indique que les deux phases, l'austénite et la martensite, peuvent coexister simultanément en étant séparées par une interface. Par opposition, une transformation du second ordre implique que le passage d'une phase à l'autre se fait de façon brusque et sévère de façon telle que les deux phases ne peuvent pas coexister simultanément. Ce type de transformation de phase est moins fréquent, mais il est observé dans divers phénomènes comme par exemple le passage de l'état conducteur à celui d'isolant d'un supraconducteur. À l'opposé, la transformation de la glace en eau représente une transformation de phase du premier ordre car on peut retrouver de la glace flottant sur l'eau, ce qui implique une coexistence simultanée des deux phases.

Les petits déplacements ordonnés discutés précédemment créent un cisaillement homogène dans la structure cristalline ainsi qu'une augmentation de volume, mais cette dernière demeure faible devant la déformation associée au cisaillement. La figure 1.3 illustre une telle situation où le vecteur **m** représente la direction de transformation, le vecteur **n** correspond au changement de volume, et le vecteur **a** au cisaillement pur.

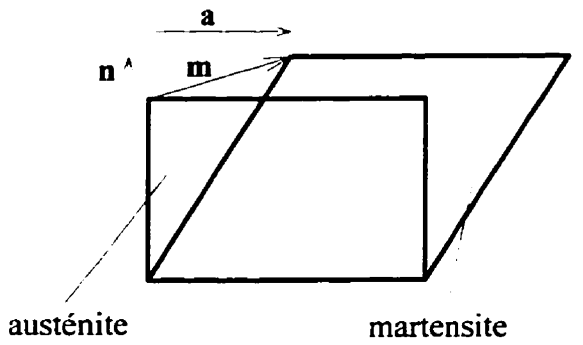


Figure 1.3 Transformation d'un élément de volume d'austénite en martensite.

Dans une telle transformation, un plan reste invariant et ne subit aucune déformation (déplacement rigide sans rotation). Il est appelé *plan d'habitat* et délimite l'interface entre l'austénite et la martensite. Lorsque l'austénite se transforme en martensite en effectuant les déplacements atomiques décrits plus haut, une variante de martensite s'est formée. Pour des raisons de symétrie du réseau cristallin, la martensite peut se former selon 24 variantes possibles. Chaque variante est caractérisée par une normale à son plan d'habitat (le vecteur **n**) dont il est possible de connaître la direction en utilisant la théorie WLR [1.4]. Cette théorie est fondée essentiellement sur des considérations géométriques sachant que l'austénite à structure cubique centrée (B2 ou DO_3) passe en martensite avec une structure orthorhombique. Revenons au cas bidimensionnel et imaginons qu'un volume d'austénite est refroidi, volume dans lequel seulement deux variantes peuvent se former. La première variante de martensite se forme. Elle crée un champ de contraintes internes et la seule façon de minimiser l'énergie de déformation est de former une seconde variante complémentaire à la première (voir figure 1.4). Ces variantes sont dites

autoaccommodantes car elles n'engendrent aucun changement de forme macroscopique. La figure 1.5 illustre mieux cet aspect car, en réalité, plusieurs plaquettes de martensite se forment selon chaque variante.

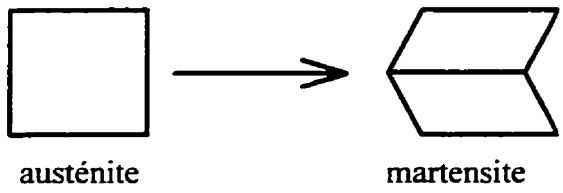


Figure 1.4 Formation de variantes de martensite autoaccommodantes.

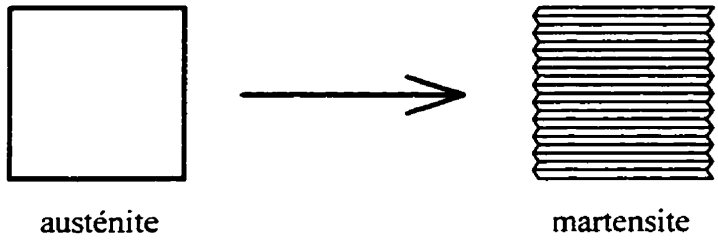


Figure 1.5 Conservation des dimensions macroscopiques (autoaccommodation).

Il existe une autre façon que l'abaissement de température pour former de la martensite, soit par application d'une contrainte. Cette deuxième alternative forme des variantes de martensite qui ne sont pas autoaccommodantes. En effet, seulement les variantes les plus favorisées sont formées. Une variante est favorisée si le cisaillement qu'elle génère crée un champ de déformation compatible avec la contrainte appliquée. La figure 1.6 schématise la formation d'une variante de martensite suite à l'application d'une contrainte.

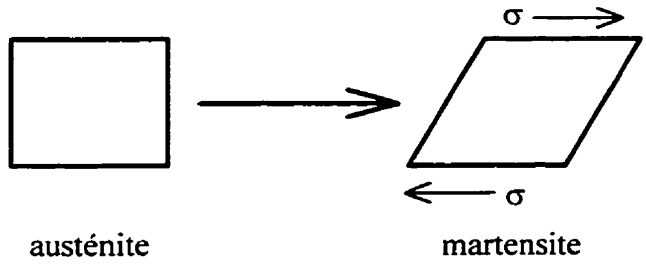


Figure 1.6 Formation d'une variante de martensite orientée par la contrainte

Un autre cas particulier concerne la réorientation de variantes déjà formées. Par exemple, si une contrainte est appliquée sur un volume de martensite composé de variantes autoaccommodantes, il y a progression des variantes favorisées au dépens des autres comme le montre la figure 1.7.

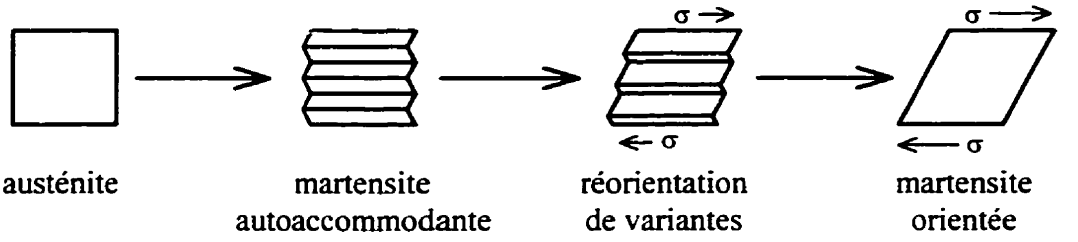


Figure 1.7 Réorientation de variantes de martensite

En général, lorsqu'une contrainte est imposée ou que la température est abaissée, il y a formation de martensite orientée dans le premier cas et de martensite autoaccommodante dans le second. Dans les deux cas, il n'y a pas seulement deux variantes de martensite qui sont activées, mais plusieurs parmi les 24 variantes possibles. Il est cependant très difficile de prévoir lesquelles car l'évolution des variantes dans un alliage polycristallin dépend de l'état des contraintes internes et de l'orientation des grains. Quand le champ des contraintes appliquées est modifié, ce ne sont plus les mêmes variantes qui s'activent. Par contre, lors de la transformation inverse (par diminution de la contrainte ou augmentation de la température), les cisaillements dans le réseau cristallin se produisent dans l'ordre inverse par rapport à la séquence suivie lors de la formation de ces variantes. À la fin, l'austénite avec sa structure cristalline ordonnée est toujours restaurée. Ces phénomènes reliés à la transformation martensitique thermoélastique et displacive du premier ordre sont directement à l'origine des propriétés remarquables des AMF (superélasticité, pseudo-plasticité, effet mémoire, etc.). Comme nous allons le voir dans la troisième section de ce chapitre, la majorité des comportements des AMF s'expliquent

par la création de variantes de martensite (autoaccommodantes ou non) et par la réorientation de ces variantes sous l'effet d'un champ de contraintes.

1.2.2 Diagramme d'énergie libre, hystérésis et températures de transformation

La nature s'organise toujours pour qu'un système retourne dans une configuration où son énergie potentielle est minimum. En métallurgie, le niveau d'énergie potentielle d'un alliage est souvent exprimé par l'énergie libre de Gibbs, notée G. Par définition, $G = H - T S$ où H représente l'enthalpie, T, la température et S, l'entropie. L'énergie libre de Gibbs est particulièrement intéressante pour analyser les changements de phase. En effet, pendant une transformation de phase, les deux phases impliquées ont la même énergie libre. Dans les alliages à mémoire de forme, l'austénite et la martensite possèdent donc la même énergie libre lors de la transformation. Si les courbes d'énergie libre des deux phases (martensite et austénite) sont tracées en fonction de la température, un graphe dont l'allure ressemble à celui présenté à la figure 1.8 est obtenu.

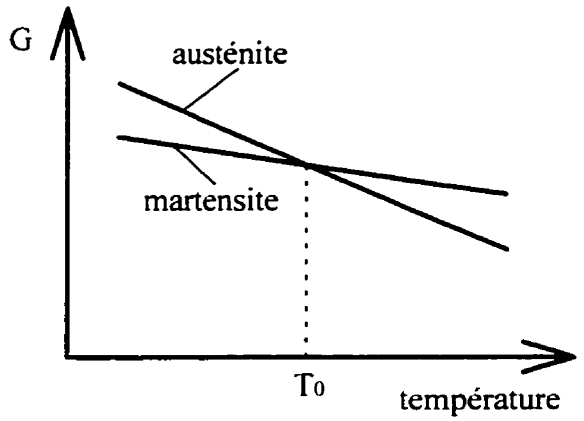


Figure 1.8 Diagramme d'énergie libre de l'austénite et de la martensite.

La phase qui possède l'énergie libre la plus faible à une température donnée est la plus stable. Donc, pour une température inférieure à T_0, la martensite est la phase stable. Si la température augmente au dessus de T_0, la martensite commence à se transformer en

austénite aux abords de T_0 pour finalement devenir complètement de l'austénite. En raisonnant seulement avec le diagramme d'énergie libre, on traite un cas idéal. En effet, lors de la transformation, il ne faut pas seulement considérer l'énergie libre de Gibbs, mais aussi les énergies suivantes : l'énergie d'interface des variantes de martensite, l'énergie élastique de déformation causée par le champ de contraintes appliquées, l'énergie élastique bloquée par le champ de contraintes internes (énergie nécessaire pour accommoder les déformations du réseau cristallin aux interfaces) et l'énergie dissipée par frottement lors des déplacements des interfaces au cours de la transformation.

Par conséquent, les transformations directe et inverse ne se produisent pas à une température unique T_0, mais plutôt sur un intervalle de température. De plus, puisqu'il y a une dissipation d'énergie, les températures entre lesquelles les transformations s'effectuent ne sont pas les mêmes lors des transformations directe et inverse. Une façon de bien visualiser ces aspects est de reporter sur un graphique la fraction volumique de martensite comprise dans un volume de matière en fonction de la température. Le graphe obtenu est présenté à la figure 1.9.

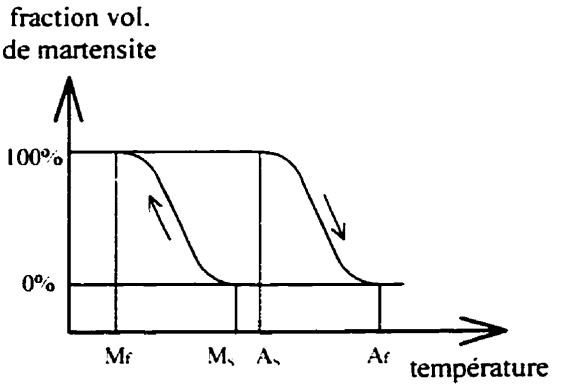


Figure 1.9 Fraction volumique de martensite en fonction de la température.

Un graphique similaire à celui de la figure 1.9 peut être obtenu expérimentalement en étudiant la variation de la résistivité d'un AMF en fonction de la température. On remarque qu'il existe une hystérésis qui correspond à l'énergie dissipée lors d'un cycle complet. De plus, il est facile d'observer que les transformations se produisent sur des

intervalles de température (entre M_S et M_f pour la transformation directe et entre A_S et A_f pour la transformation inverse) qui ne sont pas les mêmes pour chaque transformation. Nous pouvons maintenant introduire quatre températures qui caractérisent les AMF. Ces températures sont M_S (martensite "start"), M_f (martensite "finish"), A_S (austénite "start") et A_f (austénite "finish"). La surface comprise à l'intérieur de l'hystérésis est proportionnelle à l'énergie dissipée lors d'un cycle complet et l'étalement de la transformation (M_S-M_f ou A_f-A_S) est un bon indicateur de l'énergie élastique bloquée lors de la transformation de phase dans l'échantillon.

1.2.3 Diagramme d'état

Dans la section précédente, nous avons discuté des quatre températures caractéristiques de la transformation martensitique des AMF. Il n'était alors jamais question de la contrainte appliquée et les températures M_S, M_f, A_S et A_f ont été définies pour un état de contrainte nulle. Comme nous l'avons abordé précédemment, il est possible de créer de la martensite soit par abaissement de la température, soit par application d'un champ de contraintes. Une étude du changement de phase en fonction de la température et de la contrainte appliquée permet de démontrer l'existence d'une relation linéaire contrainte-température. C'est le diagramme d'état d'un AMF (figure 1.10).

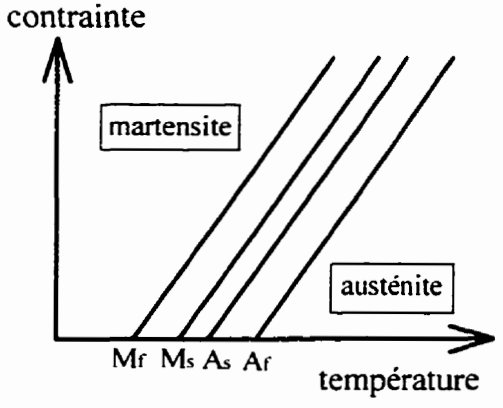


Figure 1.10 Diagramme d'état d'un AMF.

Les droites d'évolution des températures de transformation dans un plan contrainte-température correspondent à la relation de Clausius-Clapeyron

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\Delta S}{V_0 \, \Delta \varepsilon} \tag{1.1}$$

où ΔS est la variation d'entropie, V_0 est le volume initial non déformé et $\Delta\varepsilon$ est la variation de déformation macroscopique lors de la transformation. En supposant que les variations d'entropie ΔS et de déformation macroscopique $\Delta\varepsilon$ sont indépendantes de la température, ce qui est vérifié pour les AMF, la conclusion est donc que $d\sigma/dT$ est constant et représente la pente des droites sur la figure 1.10. Avec un diagramme d'état, il est facile de constater que les températures de transformation sont plus élevées au fur et à mesure que la contrainte appliquée augmente. Imaginons qu'une contrainte σ_1 est appliquée à la température T_1 sur un échantillon totalement en martensite. Le diagramme de la figure 1.11 montre que la transformation s'effectue à des températures plus élevées que A_S et A_f, ces dernières étant obtenues suite à un chauffage à contrainte nulle. Avec la contrainte appliquée σ_1, le début et la fin de la transformation se produisent respectivement aux températures A_S' et A_f'. La transformation s'effectue donc entre les droites $M_S(\sigma)$ et $M_f(\sigma)$ lors de la transformation directe et entre les droites $A_S(\sigma)$ et $A_f(\sigma)$ pour la transformation inverse, et cela indépendamment de la façon dont ces droites sont traversées.

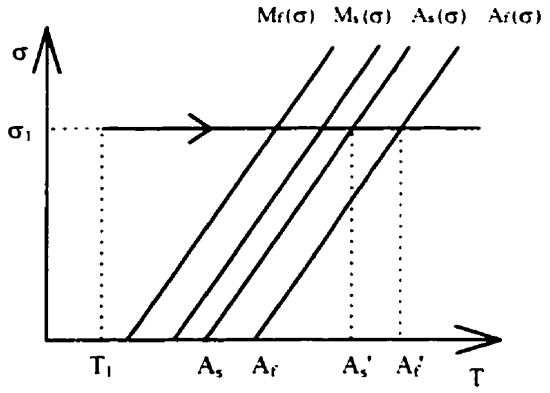


Figure 1.11 Dépendance des températures de transformation par rapport à la contrainte.

1.2.4 Modification des propriétés physiques

La transformation martensitique dans les alliages à mémoire de forme produit un changement dans le réseau cristallographique. L'austénite avec une structure cubique centrée passe à la martensite avec une structure orthorhombique. Cette transformation martensitique change beaucoup les propriétés physiques de l'alliage. Par exemple, lors de la transformation directe, il y a libération de chaleur (transformation exothermique) tandis qu'un phénomène endothermique se produit lors de la transformation inverse. Pendant la transformation de phase, des variations significatives de certaines propriétés physiques de l'échantillon sont observées comme la résistivité électrique, la susceptibilité magnétique, la chaleur spécifique, le coefficient d'expansion thermique et le frottement interne (propriété recherchée pour les applications d'amortissement). Pour de plus amples informations concernant l'évolution de ces paramètres en fonction de la progression de la transformation de phase, il est préférable de se référer à des ouvrages spécialisés (le livre de Funakubo [1.1] par exemple). Il est possible de mettre à profit ces variations de propriétés pour caractériser un alliage. La calorimétrie différentielle à balayage et l'essai de résistivité sont parmi les essais les plus utilisés pour déterminer les températures de transformation d'un AMF.

Dans l'essai de résistivité, on profite du fait que la résistivité spécifique de la martensite est plus élevée que celle de l'austénite. On utilise un montage dans lequel un faible courant électrique est appliqué sur un échantillon d'AMF pour éviter que le courant ne chauffe l'échantillon par effet Joule. Le tout est positionné à l'intérieur d'une enceinte thermique. En faisant varier la température de l'enceinte et en mesurant la différence de potentiel aux bornes de l'échantillon, la résistance de l'échantillon est déterminée en fonction de la température. Sur un tel diagramme, l'hystérésis qui existe entre les chemins parcourus lors des transformations directe et inverse est facilement observée. Quand le comportement cesse d'être linéaire, la transformation débute jusqu'à ce que le comportement redevienne à nouveau linéaire. Ainsi, il est possible d'estimer les quatre températures caractéristiques de transformation comme le montre la figure 1.12.

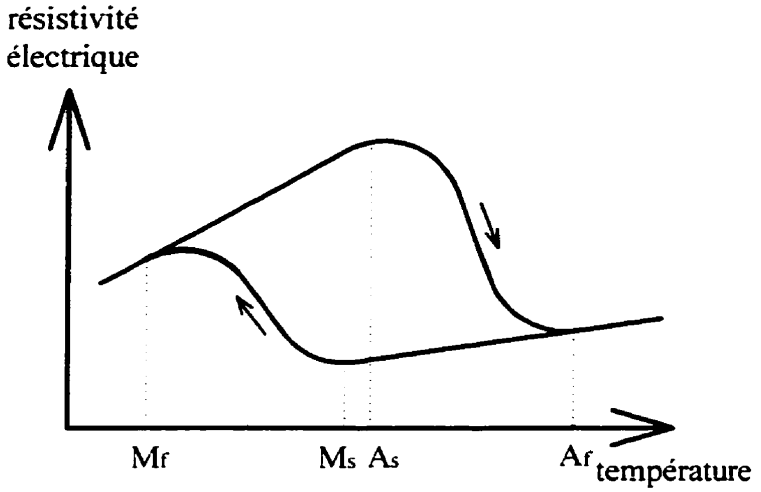


Figure 1.12 Résultat d'un essai de résistivité électrique.

Dans la calorimétrie différentielle à balayage (appelée communément DSC), les échanges de chaleur avec le milieu extérieur sont mesurés lors de la transformation martensitique. Le principe de fonctionnement d'un essai de DSC est relativement simple. Dans une enceinte thermique régulée en température, on retrouve deux cellules. Sur la première cellule, un creuset qui contient un petit échantillon d'AMF est déposé tandis que sur l'autre, un creuset vide sert de référence. Lors des balayages en température, la différence de température est mesurée entre les deux cellules. Lorsque l'échantillon subit une réaction exothermique lors de la transformation martensitique directe, la libération de chaleur se traduit par une élévation de température plus rapide dans le creuset contenant l'AMF que dans le creuset de référence. Un raisonnement analogue peut se faire dans le cas de la réaction endothermique. À l'aide de la différence de température entre les deux creusets, il est possible de calculer le flux de chaleur échangé avec le milieu extérieur en tenant compte de certains paramètres tels que les inerties thermiques, la sensibilité des thermocouples, les paramètres d'étalonnage et la résistance de contact entre les creusets et les cellules. Si les flux de chaleur calculés en fonction de la température sont reportés sur un graphique, les températures caractéristiques de transformation et l'énergie impliquée lors des changements de phase peuvent être estimées. La figure 1.13 schématise un résultat typique de DSC avec les informations pertinentes qu'on peut en déduire.

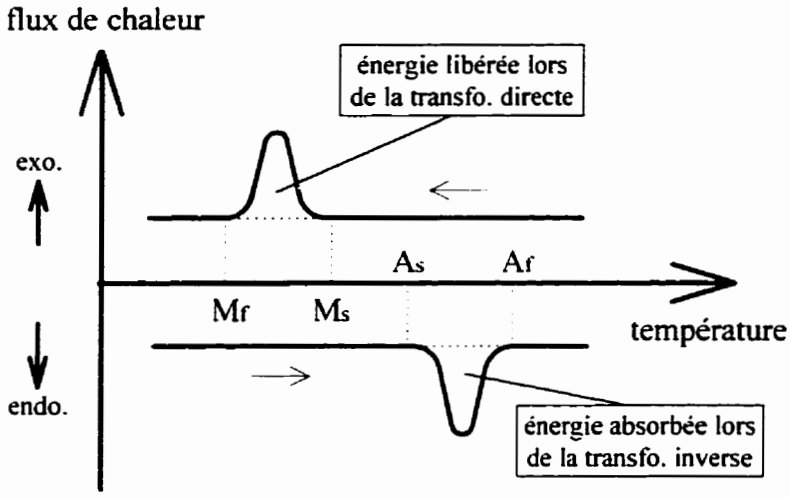


Figure 1.13 Résultat d'un essai de DSC.

Un essai de résistivité ou de DSC permet de déterminer entre autres les températures de transformation de l'alliage. Par contre, il n'est pas facile d'interpréter avec précision les courbes obtenues. En effet, dans le cas d'un essai de DSC, les pics endothermiques ou exothermiques ne sont pas toujours très nets et il existe souvent un glissement dans la ligne de base avec la température. Afin de remédier à cette difficulté, il existe des normes qui permettent d'obtenir ces températures de transformation. Dans la norme française NFA 51-080, la transformation martensitique est caractérisée par les températures qui correspondent à 10% et 90% de la transformation ($A_{S\,90}$, $A_{f\,10}$, $M_{S\,10}$ et $M_{f\,90}$). Le but ici n'est pas d'expliquer comment la mesure des températures normalisées s'effectue, mais plutôt d'informer le lecteur qu'il existe des normes sur la caractérisation expérimentale des AMF. Malheureusement, aucune norme américaine ou canadienne concernant les alliages à mémoire de forme n'est actuellement établie.

1.3 Comportements thermomécaniques des alliages à mémoire de forme

Dans cette section, cinq comportements remarquables des AMF seront présentés : la super-thermoélasticité, la pseudo-plasticité (ou ferroélasticité), l'effet mémoire simple sens, l'effet mémoire double sens et l'effet amortissant.

1.3.1 Super-thermoélasticité

Cette propriété rend les AMF très attrayants pour un bon nombre d'applications car il est possible de déformer de façon réversible un échantillon jusqu'à 3 - 4 % pour un alliage cuivreux, jusqu'à 7 - 8 % pour un titane-nickel et même plus dans le cas d'un monocristal, comparativement à quelque 0.1 % pour les alliages classiques. Il existe deux cas particuliers de comportements super-thermoélastiques : le cas superélastique et le cas superthermique.

a) Comportement superélastique

Dans un chargement superélastique, une contrainte variable est appliquée sur un échantillon maintenu à une température constante T_1 supérieure à A_f. Au début, l'échantillon est complètement austénitique et la contrainte est augmentée jusqu'à ce que la zone de transformation soit traversée. La contrainte est ensuite relâchée pour revenir à l'état initial. La figure 1.14 présente dans le schéma de gauche le chargement thermomécanique superposé au diagramme d'état et le schéma de droite montre la réponse de l'échantillon dans le repère contrainte-déformation.

La courbe de chargement lors de l'augmentation de la contrainte peut être divisée en trois segments. Premièrement, lorsque la contrainte passe de 0 à σ_{MS}, la relation est linéaire et le comportement correspond à celui de l'austénite élastique caractérisée par son module de Young. Deuxièmement, on entre dans la région de transformation où la contrainte varie entre σ_{MS} et σ_{MF}. Une "rigidité apparente" (pente dans la zone de transformation)

inférieure au module de Young est alors observée et c'est à ce moment que la transformation de phase s'effectue. Toutes les variantes de martensite formées s'orientent dans une direction privilégiée; c'est la raison pour laquelle il est possible d'obtenir des déformations de l'ordre de 10% pour un monocristal et de 5% pour un polycristal. Enfin, lorsque la contrainte devient supérieure à σ_{MF}, le régime élastique de la martensite orientée est retrouvé. Quand la contrainte est relâchée, les trois mêmes étapes se reproduisent en sens contraire sauf que la transformation s'effectue à des niveaux de contraintes inférieurs (entre σ_{AS} et σ_{AF}).

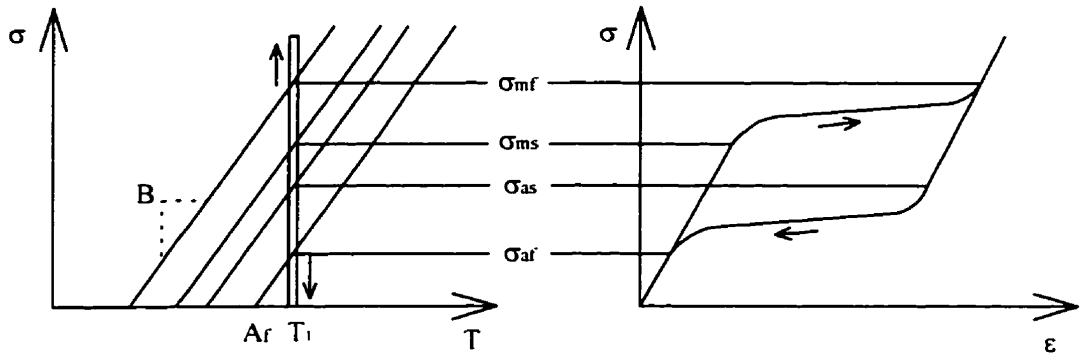


Figure 1.14 Représentation d'un chargement superélastique.

Les contraintes de début et de fin de transformation dépendent de la température de l'essai. En effet, la transformation de phase s'effectue à des niveaux de contraintes plus élevés au fur et à mesure que la température augmente. Ce phénomène est directement relié à la pente B (voir figure 1.14) des droites de transformation dans le diagramme d'état. La valeur de B varie entre 2 et 5 MPa/°C pour les alliages cuivreux et entre 4 et 20 MPa/°C pour les Ti-Ni. La figure 1.15 montre les courbes superélastiques obtenues à deux températures différentes T_1 et T_2 supérieures à A_f dans le repère contrainte-déformation. La pente de transformation B est un paramètre fréquemment utilisé pour caractériser un AMF. Il est alors possible de l'estimer en réalisant au moins deux essais superélastiques à différentes températures.

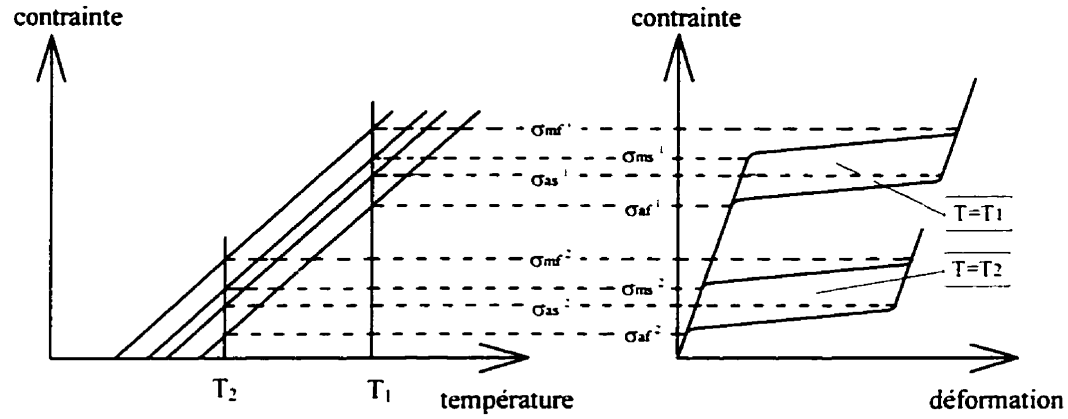


Figure 1.15 Influence de la température sur les courbes superélastiques.

b) Comportement superthermique

Un cycle superthermique ressemble beaucoup à la superélasticité à l'exception que la zone de transformation du diagramme d'état n'est pas balayée à température constante mais plutôt à contrainte constante. Par contre, la contrainte appliquée ne doit pas être nulle, sinon de la martensite autoaccommodante est formée au lieu de la martensite orientée.

Dans un chargement superthermique, l'échantillon doit être complètement en austénite à la température T_1. Une contrainte σ_1 est imposée pour laquelle l'échantillon demeure totalement en austénite. Par la suite, la température est abaissée à T_2 pour ensuite revenir à T_1. La figure 1.16 présente le diagramme d'état et la réponse de l'échantillon pour un tel chargement. Sur le schéma de droite de la figure 1.16, seulement la déformation de transformation est représentée. Les effets de la dilatation thermique et de la déformation élastique ont été retranchés. Lors du refroidissement, la transformation directe débute à la température M_S^σ et se termine à la température M_f^σ. La déformation totale qu'on peut obtenir avec un cycle superthermique est du même ordre de grandeur que celle obtenue avec un cycle superélastique. Lors du chauffage, la transformation inverse se produit à des températures supérieures, soit entre A_S^σ et A_f^σ.

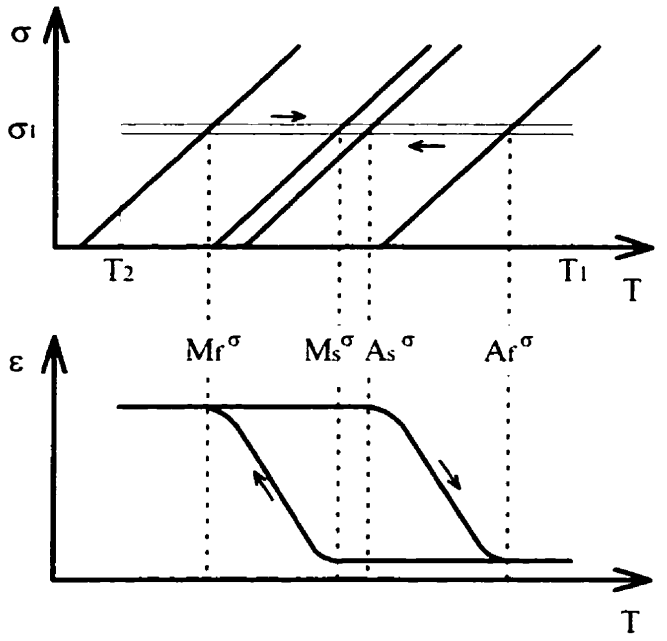


Figure 1.16 Représentation d'un chargement superthermique.

1.3.2 Pseudo-plasticité (ferroélasticité)

Lorsqu'un AMF est refroidi à contrainte nulle à partir d'un état austénitique jusqu'à une température inférieure à M_f, des variantes autoaccommodantes de martensite se forment. En gardant constante cette dernière température, la contrainte est augmentée. Comme il en a été discuté précédemment, les variantes de martensite se réorientent de façon à faire croître celles qui sont le plus favorables au cisaillement dans le sens de la contrainte appliquée. Si la contrainte est relâchée, il y a bien entendu un retour élastique, mais l'échantillon ne reprend pas sa configuration initiale (avant l'application de la contrainte). En effet, puisque la martensite est la phase de plus faible énergie à cette température inférieure à M_f, les variantes orientées se trouvent donc à un niveau d'énergie stable. Par conséquent, les variantes de martensite ne reviennent pas vers une configuration autoaccommodante et une déformation résiduelle notée ε_r persiste pour une contrainte nulle. Si par la suite, la contrainte est de nouveau augmentée à un niveau supérieur à ce qui avait été atteint lors de la première montée, une proportion plus grande de martensite se transforme jusqu'à ce que toute la martensite soit orientée. En somme, l'effet pseudo-

plastique est fondé exclusivement sur le phénomène de réorientation des variantes. La figure 1.17 schématise un tel comportement. Ce phénomène est également appelé ferroélasticité lorsque la contrainte passe successivement de la tension à la compression. La courbe obtenue ressemble à celle d'un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique.

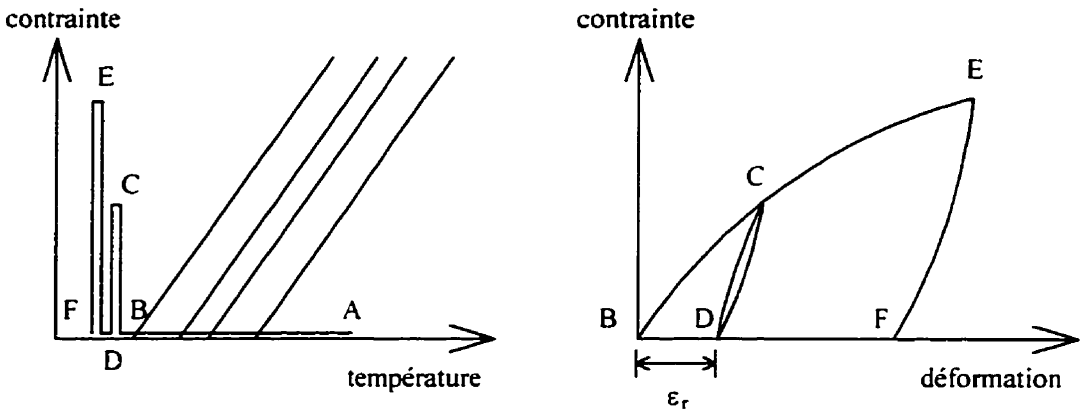


Figure 1.17 Représentation de l'effet pseudo-plastique.

1.3.3 Effet mémoire simple sens

Ce comportement thermomécanique est sans doute le plus impressionnant et c'est la raison principale pour laquelle on dit que ces alliages possèdent une mémoire de forme. Ce comportement est observé en appliquant un chargement thermomécanique particulier. À partir d'un échantillon complètement austénitique, un refroidissement est effectué jusqu'à une température inférieure à M_f. Par la suite, l'échantillon est déformé et la déformation est le résultat du phénomène de réorientation de variantes (voir la description de la pseudo-plasticité). Après avoir relâché la contrainte, il subsiste une déformation résiduelle. L'échantillon est ensuite chauffé à une température supérieure à A_f pour qu'il retourne à sa configuration initiale en phase austénitique. Ainsi, tous les cisaillements microscopiques dans le réseau cristallin générés lors de la réorientation de la martensite

se résorbent. L'échantillon reprend alors sa forme initiale simplement par chauffage. La figure 1.18 présente un exemple d'effet mémoire simple sens.

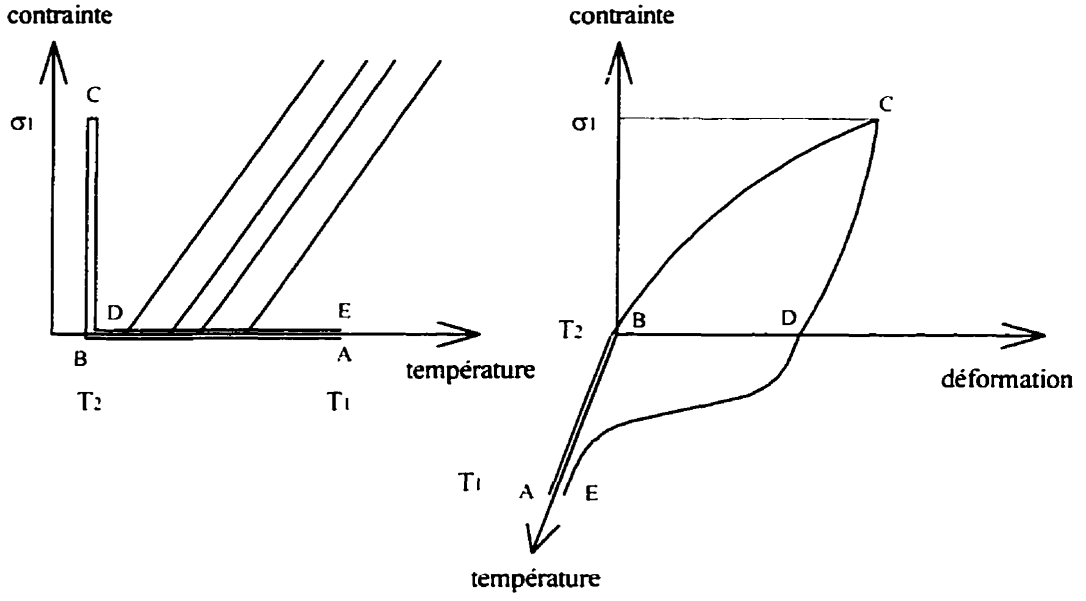


Figure 1.18 Représentation de l'effet mémoire simple sens.

En résumé, voici les différents mécanismes impliqués dans le phénomène d'effet mémoire simple sens. Les repères utilisés sont indiqués à la figure 1.18.

- De A à B : refroidissement à partir de $T_1 > A_f$ jusqu'à $T_2 < M_f$, création de variantes autoaccommodantes de martensite.
- De B à C : application d'une contrainte, réorientation des variantes de martensite.
- De C à D : relâchement de la contrainte, déformation résiduelle observée.
- De D à E : chauffage jusqu'à $T_1 > A_f$, transformation de la martensite en austénite, reprise macroscopique de la forme de l'échantillon.

Dans les applications d'ingénierie, l'effet mémoire simple sens tel que décrit jusqu'à maintenant est très peu employé. Ce comportement est principalement utilisé dans des gadgets ou encore pour démontrer les propriétés exceptionnelles des AMF. Par contre, la génération d'effort au chauffage d'un actuateur AMF présente un grand potentiel

d'applications. En effet, en restreignant complètement ou partiellement la reprise de la forme initiale au chauffage. la composante en alliage à mémoire de forme peut développer des efforts impressionnants. Il est donc possible de retirer un travail d'un élément AMF lors de la transformation de la martensite en austénite. Ainsi. les dispositifs appelés actuateurs qui utilisent une composante en AMF pour réaliser un travail doivent toujours bénéficier de la transformation inverse obtenue lors d'un chauffage. La force par unité de volume que peut fournir une pièce en AMF est très impressionnante et c'est la raison pour laquelle il est possible de réaliser des dispositifs très compacts. Un alliage titane-nickel peut déployer une contrainte de rappel de l'ordre de 400 MPa. À titre d'exemple. un cylindre de 1 cm^2 de section d'une hauteur de 3 cm peut soulever une masse de 4000 kg (quatre voitures compactes) sur une hauteur de plus de 1 mm.

1.3.4 Effet mémoire double sens

À la suite d'un traitement thermomécanique adéquat imposé à une composante AMF. il est possible d'inculquer une "mémoire" de sa géométrie non seulement à haute température (austénite) mais aussi à basse température (martensite). Pour y arriver. il faut *éduquer* le matériau. Il existe plusieurs méthodes d'éducation et le but ici n'est pas de toutes les aborder. Nous allons discuter seulement de l'éducation qui consiste à effectuer des cycles superthermiques afin d'introduire un réseau de dislocations dans la structure cristalline. Revenons un peu en arrière pour discuter d'un cycle superthermique. Un tel cycle consiste à effectuer un balayage en température qui traverse la zone de transformation tout en conservant une contrainte supérieure à zéro. À la section 1.3.1. on a vu que la déformation est complètement réversible. Cette affirmation n'est pas tout à fait véridique. Lors des premiers cycles. une déformation résiduelle permanente principalement causée par la création de dislocations est observée. Ces dislocations sont le résultat des déformations qu'a dû subir le réseau cristallin pour accommoder les cisaillements lors des transformations de phase. Celles-ci créent un champ de contraintes

internes qui piègent de la martensite qu'on appelle *martensite résiduelle*. Plus le nombre de cycles augmente, plus cette déformation permanente augmente et cette dernière se stabilise pour un nombre de cycles relativement faible. Souvent moins de 20 cycles sont nécessaires pour les alliages polycristallins. On dit que la composante AMF est éduquée. Si une nouvelle série de cycles thermiques à contrainte nulle est effectuée, un effet mémoire double sens est alors observé car l'échantillon présentera un changement de forme macroscopique autant au chauffage qu'au refroidissement.

Sur une pièce non éduquée, un refroidissement à contrainte nulle n'engendre aucune déformation macroscopique car il y a formation de variantes autoaccommodantes de martensite. Par contre, si la pièce est éduquée, le réseau de dislocations favorise la formation préférentielle de certaines variantes de martensite au détriment des autres pour produire une déformation macroscopique semblable à celle qui était imposée lors de l'éducation. Au chauffage, la pièce reprend toujours sa configuration initiale, comme à l'habitude. Une pièce éduquée possède donc une double mémoire de forme. Elle revient toujours à la même géométrie à haute température et si aucune contrainte n'est appliquée lors d'un refroidissement, elle se déforme pour adopter une autre géométrie à basse température. Il est important de noter qu'il est possible de générer un travail à partir d'une composante AMF seulement lors du chauffage. En effet, si une contrainte est appliquée au refroidissement, la martensite formée s'oriente dans le sens de la contrainte qui domine en intensité le champ de contraintes internes. Les variantes de martensite qui auparavant étaient favorisées à la suite de l'éducation ne le sont plus. Si un travail était produit au refroidissement, les lois de la thermodynamique concernant la conservation d'énergie auraient été violées.

1.3.5 Effet amortissant

Il est connu que les alliages à mémoire de forme possèdent un bonne capacité d'amortissement. De nombreuses applications mettent à profit cette propriété en utilisant

des amortisseurs compacts composés d'une seule pièce. La capacité d'amortir des chocs est directement reliée au frottement interne dans le matériau. Une des façons de mesurer le frottement interne d'un matériau est d'effectuer un test de DMA (Dynamic Mechanical Analyser). Dans ce type d'essai, des oscillations mécaniques sont imposées à un échantillon sous forme de plaque mince et le déphasage entre l'excitation et la réponse est mesuré. Le déphasage est proportionnel à l'énergie dissipée par le frottement interne. En effectuant un balayage en température, le graphe du déphasage (mesure de la dissipation d'énergie) en fonction de la température est ainsi obtenu. La figure 1.19 présente un schéma de l'allure du graphique obtenu à la suite d'un test de DMA.

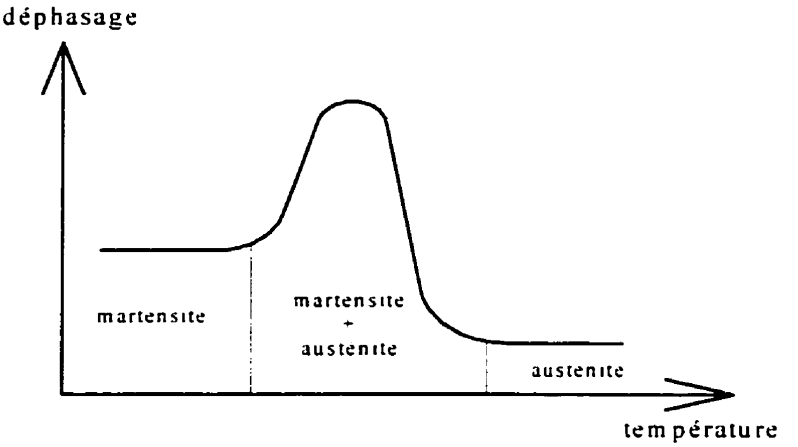


Figure 1.19 Résultat d'un test de DMA.

Les conclusions qu'on peut tirer sont assez évidentes. À faible température (martensite), une réorientation continuelle des variantes de martensite est observée lors des oscillations mécaniques. L'énergie dissipée lors du mouvement des interfaces entre les différentes variantes est assez importante. À haute température (austénite), l'AMF est composé d'une seule phase homogène et il agit comme un alliage classique. Il présente donc une faible capacité d'amortissement et sa rigidité est plus grande. Entre les deux domaines, l'amortissement est à son maximum. En effet, une série d'interfaces existent entre les différentes variantes de martensite ainsi qu'entre la martensite et l'austénite. La rigidité de l'alliage atteint alors une valeur minimale. De plus, dans cette région, les transformations

de phase cycliques provoquées par les oscillations entraînent une dissipation d'énergie (hystérésis) et donc une capacité amortissante maximale. En résumé, afin d'amortir des oscillations mécaniques, il est préférable d'utiliser un AMF en phase martensitique à la température d'utilisation ou préférablement, si c'est possible, dans la zone de transformation.

1.4 Fatigue thermomécanique

La fatigue représente une limite incontournable à l'utilisation de composantes AMF dont les propriétés évoluent avec le nombre de cycles thermomécaniques appliqués. Le sujet a été abordé brièvement à la section 1.3.4 qui traite de l'effet mémoire double sens. En effectuant des cycles superthermiques, il est possible d'utiliser un réseau de dislocations afin de favoriser la formation de certaines variantes de martensite. L'éducation entre dans la catégorie des phénomènes reliés à la fatigue car il y a une évolution de la densité de dislocations au fil des cycles. Malheureusement, toutes les conséquences de la fatigue ne sont pas bénéfiques. En effet, chaque fois qu'un concepteur doit faire le design d'une composante AMF subissant des cycles répétitifs, il doit garder constamment à l'esprit les conséquences possibles de la fatigue. Parmi les effets indésirables, on peut citer entre autres le glissement des températures de transformation, la variation de la largeur de l'hystérésis, l'augmentation de la déformation permanente au fil des cycles, la perte de l'effet mémoire et la rupture de l'échantillon dans un cas extrême.

Beaucoup de projets de recherche sont dédiés à l'étude de la fatigue des AMF, mais la compréhension de ces phénomènes demeure complexe et n'est pas encore maîtrisée. L'hypothèse la plus plausible semble être celle qui relie l'évolution des propriétés du matériau avec la densité des dislocations dans le réseau cristallin. Le but ici est simplement de présenter la problématique de la fatigue en montrant, à titre d'exemple, les résultats d'une étude de fatigue sur un monocristal de Cu-Zn-Al. Cette étude a été réalisée dans les laboratoires d'Imago à La Ciotat en France. La première manipulation

s'est avérée tellement longue qu'elle a dû être interrompue après plusieurs semaines. Un seul monocristal a été étudié mais malgré le peu d'informations recueillies, des conclusions intéressantes ont pu être tirées. L'étude consistait à imposer une contrainte de traction uniaxiale constante légèrement inférieure à 39 MPa sur un fil monocristallin de diamètre 2 mm et de longueur 55 mm. Par la suite, des balayages en température allant de -37°C à +12°C furent réalisés. L'allongement du fil en fonction de la température était constamment enregistré par un système d'acquisition de données. Près de 7600 cycles superthermiques ont été imposés à l'échantillon qui est peu fatigué comme le montrent les résultats obtenus. Dans un premier temps, le graphe de vie en fatigue est présenté à la figure 1.20. L'évolution de la fatigue de l'échantillon avec le nombre de cycles est représentée par trois courbes. La courbe du bas correspond à la position de l'échantillon à l'état martensitique (basse température), celle du milieu à l'état austénitique (haute température) et celle du haut représente la différence entre les deux courbes.

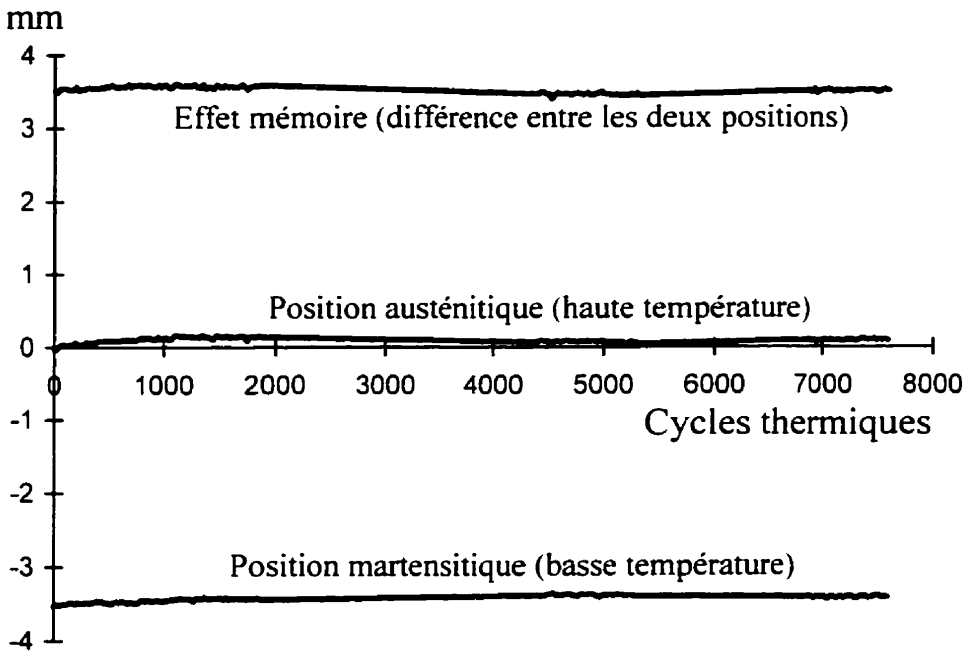


Figure 1.20 Vie en fatigue d'un monocristal de Cu-Zn-Al.

En regardant le graphe de vie en fatigue de l'échantillon, un léger fluage de l'échantillon lors des 1000 premiers cycles est observé. Ce fluage se traduit par un déplacement simultané vers le haut des positions martensitique et austénitique. Par la suite, le fluage semble se stabiliser. L'allongement ou l'effet mémoire augmente lors des 1000 premiers cycles, ce qui correspond probablement au processus d'éducation du monocristal. Pour les cycles suivants, il est extrêmement difficile d'observer une fatigue de l'échantillon au niveau de l'effet mémoire car l'allongement de l'échantillon demeure à peu près constant tout au long de l'expérience.

L'hystérésis en température obtenue lors de 3 cycles différents est présentée à la figure 1.21. On remarque principalement une élévation des températures de transformation. Le manque de données empêche de tirer une conclusion sur le type de relation (linéaire, logarithmique ou autre) entre l'évolution de ces températures et le nombre de cycles. Contrairement aux propriétés précédentes, le décalage des températures ne semble pas vouloir se stabiliser, du moins lors des 7600 premiers cycles. Ce décalage des températures de transformation est un phénomène qui a déjà été observé sur des échantillons Cu-Zn-Al et c'est une des raisons pour lesquelles les propriétés de cet alliage sont considérées comme peu enviables. De plus, on remarque une modification de la forme de l'hystérésis. En effet, les transformations de phase se produisent de façon plus saccadée pour les premiers cycles. En analysant les résultats obtenus, il est possible de tirer quelques conclusions partielles, même si l'étude n'a porté que sur une seule manipulation.

1) Une augmentation des températures de transformation est observée au fil des cycles. Ceci peut s'expliquer en partie par la création d'un champ de contrainte interne résultant des dislocations créées dans le réseau cristallin lors des cycles. Or, plus le niveau de contrainte est élevé, plus la transformation de phase s'effectue à des températures élevées. C'est un des principes de base des alliages à mémoire de forme qui est véhiculé par le diagramme d'état (voir figure 1.10).

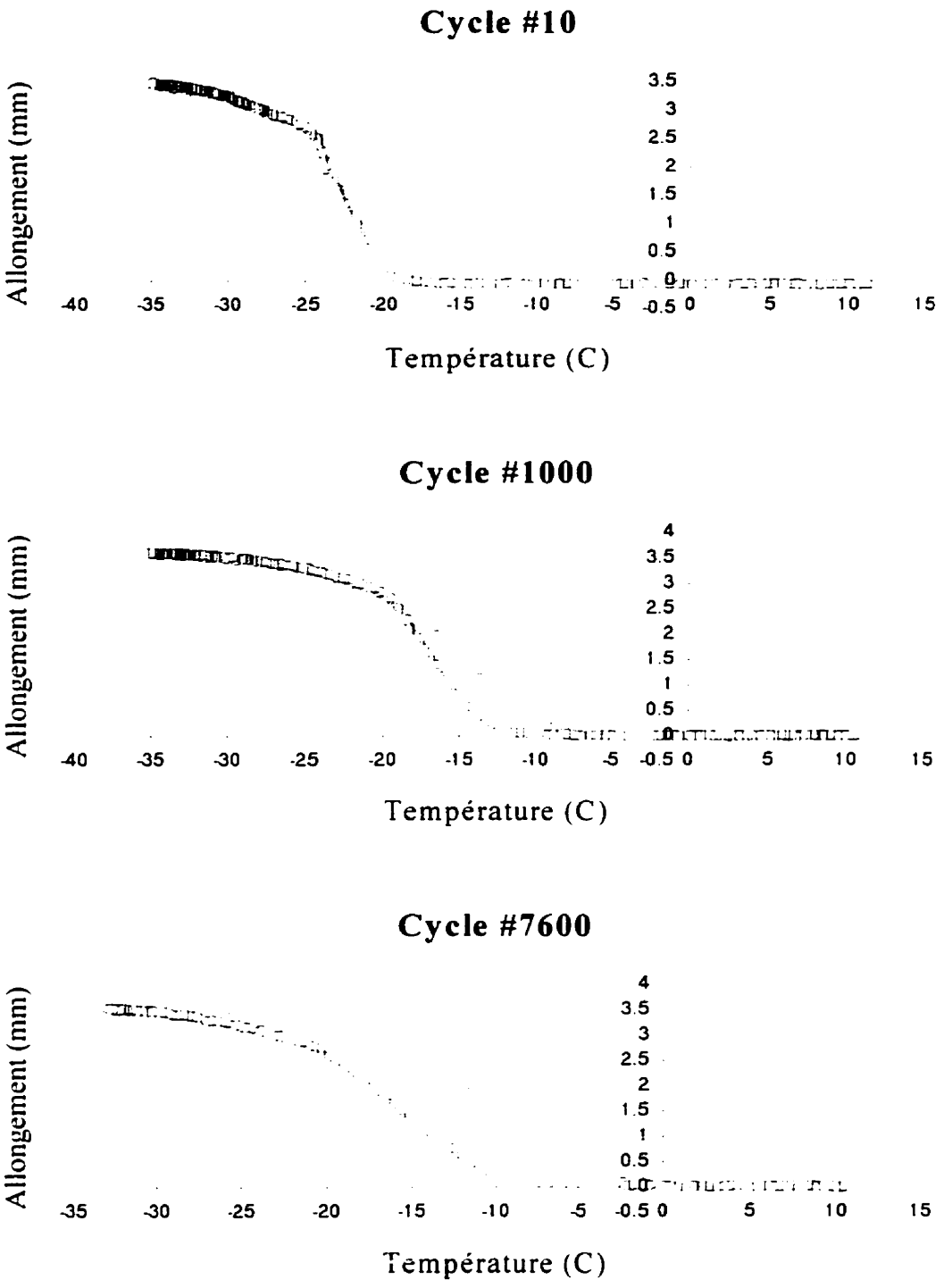


Figure 1.21 Hystérésis de trois cycles de fatigue d'un monocristal Cu-Zn-Al.

2) La résistance à la perte d'effet mémoire est une des forces des échantillons monocristallins. Dans le cas présent, on n'observe aucune perte significative de l'effet mémoire après 8000 cycles et cela même pour une déformation exceptionnelle de 7.3%. Un échantillon polycristallin semblable soumis aux mêmes conditions aurait perdu plus de la moitié de son effet mémoire après moins de 1000 cycles. Malgré leur coût plus élevé, ceci représente un atout important pour l'utilisation de monocristaux dans certaines applications spécialisées.

3) Un léger fluage est observé lors des 1000 premiers cycles. Ce phénomène, qui peut être associé à une migration plus importante des dislocations lors des premiers cycles, semble se stabiliser par la suite. On peut donc conclure que ce mouvement de dislocations contribue également à éduquer l'échantillon. Pour un échantillon polycristallin, l'éducation se réalise en effectuant un vingtaine de cycles. Il est donc permis d'imaginer que la période d'éducation est très largement supérieure pour un monocristal (près de 1000 cycles dans le cas présent).

Le but de cette section est de sensibiliser le lecteur à l'importance des phénomènes de fatigue. Les concepteurs de composantes AMF doivent agir avec une extrême prudence. Par exemple, la défaillance d'un actuateur AMF peut simplement être causée par un décalage des températures de transformation de l'alliage à la suite de sollicitations répétitives. Dans une telle situation, l'actuateur ne s'activerait plus à la température recherchée initialement.

Chapitre 2 : Revue bibliographique

Ce chapitre passe en revue les travaux de différents auteurs qui ont oeuvré dans le domaine de la modélisation des alliages à mémoire de forme. La première section présente brièvement les concepts fondamentaux sur lesquels sont fondées différentes *relations constitutives* afin de prédire le comportement d'un alliage à mémoire de forme soumis à des chargements thermiques et mécaniques complexes. Dans une relation constitutive également appelée *loi de matériau*, seulement le comportement intrinsèque d'un AMF est modélisé. Par contre, lors d'une analyse par éléments finis, la réponse d'une composante en AMF de géométrie donnée est calculée suite à l'imposition de sollicitations externes mécaniques et thermiques. Dans une telle analyse, autant le comportement intrinsèque de l'AMF que la géométrie de la pièce sont considérés. La seconde section de ce chapitre discute de la méthodologie et des résultats d'analyses par éléments finis menées par certains auteurs.

2.1 Relations constitutives pour les AMF

Il y a lieu de se demander quels sont les véritables défis soulevés par le développement de relations constitutives pour les AMF. En effet, des relations constitutives ont été élaborées et validées depuis longtemps dans le domaine élastique et plastique pour les métaux classiques. En réalité, la principale difficulté provient de la coexistence possible de deux phases dans un AMF alors qu'un alliage classique peut être considéré comme un matériau macroscopiquement homogène. Si l'on compare le comportement en traction d'un alliage classique comme l'acier avec celui d'un AMF, les différences sont impressionnantes comme le schématise la figure 2.1. Dans le domaine élastique, un alliage classique est généralement caractérisé dans l'espace contrainte-déformation par une droite de pente constante quelle que soit la température. Le paramètre important est la pente de cette droite, c'est-à-dire le module de Young E du matériau. Par contre, le

comportement d'un AMF dans le domaine élastique est fortement non-linéaire et présente une hystérésis avec une infinité de sous-cycles possibles. De plus, ce comportement est largement affecté par la température comme le montrent les deux courbes caractéristiques d'un AMF de la figure 2.1.

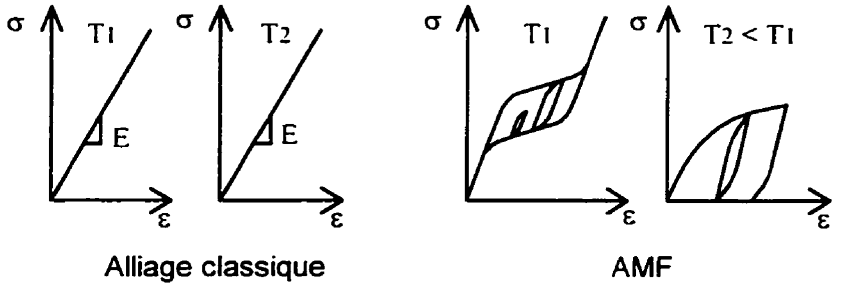


Figure 2.1 Différence entre un alliage classique et un AMF.

Puisque le comportement d'un alliage à mémoire de forme est beaucoup plus complexe que celui d'un alliage classique, des relations constitutives particulières doivent être employées pour simuler leur comportement. Le but de l'élaboration de tels modèles est de diminuer le temps et les coûts de conception de composantes en AMF de géométrie complexe en prédisant leur comportement suite à l'imposition de chargements thermomécaniques généraux. Pour ce faire, les relations constitutives devront être interfacées avec d'autres méthodes numériques dont font partie les éléments finis. Afin d'être le plus général possible, une relation constitutive *idéale* devrait posséder les caractéristiques suivantes :

- manipulation d'états tridimensionnels de contrainte et de déformation (tenseurs);
- simulation du comportement d'un AMF pour tous les régimes en température (superélasticité, pseudo-plasticité, effet mémoire, etc.);
- modélisation de l'hystérésis et de tous les sous-cycles possibles;
- possibilité d'interface facile avec un programme d'éléments finis;
- minimisation du nombre de caractérisations expérimentales de l'alliage;
- considération de l'évolution des propriétés de l'alliage engendrée par la fatigue.

Actuellement, aucun modèle ne répond à toutes ces exigences. Certains auteurs préfèrent développer un modèle très général tandis que d'autres s'attaquent à des aspects très particuliers du comportement d'un AMF. Cette revue bibliographique traite de l'avancement des travaux des principaux modèles qui essaient par différentes approches de simuler le comportement fort complexe des AMF. Chaque modèle entre dans l'une ou l'autre des deux grandes classes suivantes : les modèles micromécaniques ou les modèles phénoménologiques. La description des modèles micromécaniques sera d'abord effectuée.

2.1.1 Modèles micromécaniques

Dans les modèles micromécaniques, la résolution des équations s'effectue sur un petit volume de matière. Le comportement global (ou macroscopique) est alors déterminé par une opération de moyenne sur chaque petit élément de volume. Ces modèles sont explicatifs car ils permettent de décrire les phénomènes impliqués. Les travaux de Patoor, ceux de Sun et Hwang ainsi que ceux de Likhatchev et Malinin entrent dans les modèles micromécaniques qui sont discutés dans ce chapitre.

2.1.1.1 Travaux de Patoor

L'approche micromécanique développée dans les travaux de Patoor a mené à l'obtention d'un potentiel thermodynamique de Gibbs. Ce potentiel est une quantification énergétique de l'état de déformation à l'intérieur d'un volume polycristallin d'AMF. Pour calculer la configuration d'équilibre du système, l'expression du potentiel thermodynamique sera minimisée afin d'obtenir l'état d'énergie potentielle minimale. Cette résolution du potentiel a été réalisée premièrement par un algorithme de minimisation linéaire et deuxièmement, par une méthode dite "auto-cohérente". Ces approches peuvent être perçues comme des méthodes de résolution distinctes

développées en parallèle pour résoudre le même système d'équations. Des travaux de minimisation quadratique ont également été entrepris à l'annexe II.

Patoor et al. [2.1, 2.2] ont exprimé le potentiel thermodynamique de Gibbs d'un volume polycristallin de matière dans lequel peuvent coexister de l'austénite et de la martensite formée selon 24 variantes possibles dans chaque grain. Ce potentiel thermodynamique est fonction de la température, du tenseur de contrainte qui agit sur le volume de matière étudié et des proportions de martensite transformée de chaque variante dans chaque grain qui sont les inconnues du problème. L'expression obtenue est une fonction scalaire quadratique par rapport aux proportions de martensite formée lorsqu'on considère les interactions entre les différentes variantes de martensite d'un même grain et entre les variantes de martensite de différents grains. Les interactions entre les variantes de martensite se manifestent sous forme d'énergie mécanique bloquée.

En première approximation, Patoor et al. [2.1] négligent les termes d'énergie d'interaction entre les variantes de différents grains et ils obtiennent ainsi un potentiel simplifié. Il s'agit d'une expression linéaire qui est fonction des taux de martensite formée dans chaque variante de chaque grain, de la température et du tenseur de contrainte. La réponse du système, c'est-à-dire les proportions de martensite formée selon chaque variante de chaque grain pour un volume de matière soumis à un champ uniforme de contrainte et de température, est obtenue lorsque le potentiel thermodynamique de Gibbs atteint un minimum. Une fois les proportions de martensite formée connues, il est possible de calculer la déformation globale ou macroscopique du volume de matière étudié en utilisant une opération de sommation pondérée par la proportion volumique de chaque grain. Cette technique nécessite la connaissance du nombre de grains et de l'orientation de chacun d'entre eux dans le volume étudié, ce qui est inconcevable pour modéliser une pièce réelle. Par contre, il serait possible de recourir à une approche statistique pour simuler le nombre et l'orientation des grains. Les résultats de simulation pour une contrainte de traction uniaxiale sur un monocristal

démontrent l'influence de la température sur le comportement superélastique ainsi que l'influence de l'orientation cristallographique du grain par rapport à l'axe de traction dans le cas de monocristaux.

Le modèle permet de travailler avec un état de sollicitation tridimensionnel, ce qui représente un atout incontesté. En effet, on calcule la déformation sous forme tensorielle d'un volume polycristallin lorsqu'il est soumis à un tenseur de contrainte à une température donnée. Le fait d'avoir négligé l'énergie d'interaction entre les différentes variantes de martensite représente cependant une limite à l'utilisation de ce modèle. De plus, il aurait été intéressant de comparer les résultats expérimentaux avec ceux calculés par le modèle. Enfin, l'utilisation d'un seul potentiel thermodynamique ne permet pas de modéliser l'hystérésis intrinsèque aux AMF. Par exemple, il faudrait définir un second potentiel thermodynamique à minimiser pour calculer la réponse du système lors du déchargement.

Le comportement des alliages à mémoire de forme présente une dissymétrie en fonction des modes de chargement. Par exemple, la transformation de phase débute à une contrainte plus élevée en compression qu'en tension dans le cas d'un chargement superélastique. Cette dissymétrie était souvent attribuée aux variations de volume lors du changement de phase. Amrani et al. [2.3] ont vérifié numériquement cette caractéristique avec la méthode de minimisation linéaire du potentiel thermodynamique de Gibbs discutée précédemment. Ils expliquent plutôt que la dissymétrie du comportement est reliée à la création de la martensite selon des orientations qui ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Selon leurs résultats, les variantes de martensite activées lors de la tension sont différentes de celles en compression. De plus, ils ont tracé pour un état bidimensionnel de chargement les surfaces de début et de fin de transformation. Ces surfaces sont analogues aux critères d'écoulement des matériaux classiques comme Tresca ou Mises sauf qu'elles diffèrent passablement des critères

classiques. Les mêmes surfaces peuvent être obtenues pour un état tridimensionnel de contrainte, mais celles-ci sont plus difficiles à visualiser.

L'annexe II présente les premiers travaux sur la minimisation quadratique du potentiel thermodynamique de Gibbs. Dans ces travaux, les termes d'interaction entre les variantes de martensite ne sont pas négligés et la solution devient une fonction quadratique par rapport au vecteur solution du problème, c'est-à-dire le vecteur des proportions de martensite formées selon chaque variante de chaque grain. Le problème est passablement plus compliqué que la minimisation linéaire et des difficultés numériques ont empêché l'aboutissement des travaux. L'inachèvement de ces derniers explique le renvoi en annexe des développements qui concernent la minimisation quadratique. Dans l'annexe II, une description plus approfondie du modèle de Patoor est d'abord effectuée. Par la suite, la méthodologie de minimisation quadratique est présentée et les problème numériques survenus sont finalement discutés.

La méthode dite "auto-cohérente" ("self-consistent" en anglais) est une approche classique utilisée pour calculer la réponse d'un matériau polycristallin. Par cette approche, chaque grain est tour à tour considéré comme une inclusion dans une matrice homogène formée par tous les autres grains. Le comportement global du polycristal est alors calculé en faisant une moyenne des comportements individuels de chaque grain. Les travaux de Patoor et al. [2.2, 2.4, 2.5, 2.6] ont permis d'obtenir une équation thermodynamique sous une forme intégrale qui tient compte à la fois des interactions entre variantes de martensite et d'un potentiel dissipatif pour modéliser l'hystérésis. C'est en fait le même potentiel thermodynamique de Gibbs utilisé lors de la minimisation quadratique dans lequel les termes d'interaction entre les variantes des différents grains sont présents. Le fait de considérer l'énergie d'interaction et un potentiel dissipatif justifie l'utilisation d'une méthode "auto-cohérente" pour résoudre l'équation intégrale. Dans les premières publications [2.4, 2.5], les résultats numériques se comparent bien avec les observations expérimentales. Dans ces deux publications,

aucun potentiel dissipatif n'était considéré, ce qui obligeait à travailler en chargement seulement, donc sans hystérésis. Dans les publications plus récentes [2.2, 2.6], un potentiel dissipatif est pris en compte. Une hystérésis a pu être générée pour différentes températures et intensités de chargement. Ce potentiel dissipatif est proportionnel à la fraction volumique de martensite cumulée. Par contre, le concept de potentiel dissipatif n'est employé ici qu'à l'état superélastique. Malheureusement, aucune validation expérimentale des boucles d'hystérésis n'est effectuée.

2.1.1.2 Modèle de Sun et Hwang

Sun et Hwang [2.7] ont développé un modèle assez général qui prend en considération les principaux comportements des AMF comme la superélasticité et la pseudo-plasticité. Le point de départ de leurs travaux est un potentiel thermodynamique similaire à celui de Patoor et al. [2.1]. À partir de ce potentiel, des conditions particulières restreignent le problème afin d'obtenir les équations constitutives de chaque régime (superélastique, pseudo-plasticité, etc.). De plus, un critère d'écoulement de type Von Mises est introduit pour prédire le début de la transformation de phase en fonction de la température. Contrairement au modèle de Patoor où la déformation totale est calculée à partir des proportions de martensite transformée dans chaque variante de chaque grain, Sun et Hwang travaillent avec une proportion de martensite globale et une seule déformation de transformation moyenne. Par contre, ils doivent utiliser une seconde proportion de martensite, celle de la martensite orientée afin de tenir compte de certains phénomènes comme la réorientation de variantes de martensite où la proportion de martensite globale demeure constante.

Il existe plusieurs autres différences entre le modèle de Patoor et celui de Sun et Hwang : (1) Sun et Hwang prennent en considération l'énergie de surface lors de la formation des plaquettes de martensite; (2) ils obtiennent des courbes de début et de fin de transformation symétriques en fonction de la sollicitation appliquée compte tenu de l'utilisation d'un critère d'écoulement symétrique de type Von Mises, ce qui est plus ou

moins représentatif de la réalité; (3) un potentiel dissipatif est constamment pris en considération, ce qui représente un atout; (4) ils n'utilisent pas une formulation unifiée, c'est-à-dire que des équations différentes sont développées pour chaque comportement (superélasticité, pseudo-plasticité, etc.). La modélisation avec des variations de température devient alors très difficile car il faut, à certains moments, changer d'équations constitutives.

Certains paramètres du modèle sont assez difficiles à évaluer expérimentalement, plus particulièrement certaines relations du modèle exprimées en fonction de la température. C'est le cas entre autres du module de cisaillement et d'un paramètre définissant le critère d'écoulement pour prédire le début de la transformation de phase. Quelques validations expérimentales sont effectuées et celles-ci correspondent bien aux résultats numériques pour les régimes de superélasticité et de pseudo-plasticité. Bien que le modèle présente un potentiel dissipatif, aucune validation des sous-cycles d'hystérésis modélisés par le modèle n'est effectuée. Les validations expérimentales sont réalisées avec des échantillons de titane-nickel et d'or-cadmium. Ces alliages présentent un comportement plus "idéal" qui se rapproche davantage de la réponse "linéaire par morceaux" calculée par le modèle. Il n'est cependant pas évident que d'aussi bonnes prédictions seraient obtenues pour des échantillons à base de cuivre.

En somme, les travaux de Sun et Hwang présentent un modèle tridimensionnel assez général qui peut être utilisé dans la majorité des phénomènes reliés aux alliages à mémoire de forme. Par contre, le fait d'avoir utilisé des équations différentes selon le type de comportement simulé complique énormément l'implantation du modèle dans un module de calcul.

2.1.1.3 Modèle de Likhatchev et Malinin

Le modèle de Likhatchev et Malinin [2.8, 2.9, 2.10] appelé en anglais *Structure-Analytical Theory* est fondé sur des concepts mécaniques et thermodynamiques. Dans le cadre de cette revue bibliographique, la théorie de Likhatchev et Malinin est décrite de façon plus exhaustive que les autres modèles puisque leur approche est utilisée ultérieurement lors d'analyses par éléments finis. L'objectif visé ici est d'assurer une compréhension globale de la philosophie du modèle sans discuter de toutes les particularités. La formulation de la théorie de Likhatchev et Malinin comporte plusieurs analogies avec le modèle de Patoor décrit précédemment. Il est étonnant de constater toutes les similitudes qui existent entre les deux approches qui ont pourtant été développées en parallèle à la même époque dans deux univers complètement différents sans qu'aucune interaction ne soit établie entre les deux milieux.

La première étape dans la formulation de la théorie de Likhatchev et Malinin concerne l'étude de la transformation de phase sur une échelle microscopique. Ils supposent qu'un volume de matière est composé d'un certain nombre de régions dans lesquelles une transformation de phase peut se manifester selon une direction unique bien définie. Cette direction de transformation est donnée par la distorsion tensorielle D_{ik} de l'alliage. La distorsion tensorielle spécifie les cisaillements et les changements de volume que le réseau cristallin de l'alliage subit pendant la transformation de phase de l'austénite en martensite. La distorsion tensorielle est toujours exprimée dans le repère d'une région. La figure 2.2 montre deux exemples de distorsion tensorielle. La première est un changement de volume selon l'axe x de 10% sans cisaillement et la seconde, un cisaillement dans le plan x-y sans changement de volume. Il est à noter que les déplacements sur les schémas sont amplifiés pour une meilleure visualisation. Le repère x-y-z est le repère d'une région. Pour les alliages Ti-Ni, il est fréquent d'utiliser une distorsion en cisaillement sans changement de volume.

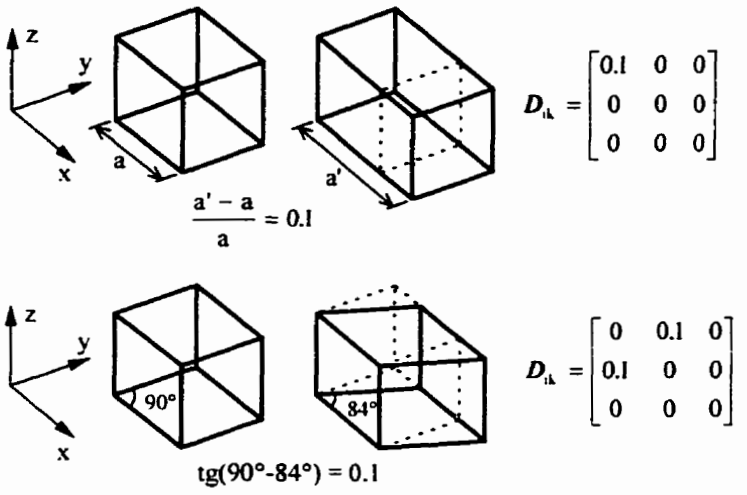


Figure 2.2 Exemples de distorsion tensorielle D_{ik}.

Dans le modèle de Likhatchev et Malinin, la détermination du tenseur de distorsion est fondée sur les observations expérimentales (une analyse microstructurale similaire à celle de Knowles et Smith [2.11] par exemple). Le tenseur D_{ik} est donc un paramètre intrinsèque qui caractérise un alliage et qui est expérimentalement déterminé par une étude cristallographique. Ce tenseur est une donnée dans le modèle. La distorsion est identique dans toutes les régions du volume de matière. Lorsque la transformation de l'austénite en martensite se produit dans une région suite à l'application d'un chargement thermomécanique favorable, il en résulte une déformation microscopique β^r_{ik} exprimée dans un repère de la région. Plus la transformation de phase progresse, plus l'intensité de la déformation augmente tout en conservant une orientation constante. Le paramètre qui quantifie la progression de la transformation de phase est la proportion de martensite transformée Φ dans la région considérée. L'intensité de la déformation microscopique d'une région est donc directement proportionnelle à la proportion de martensite transformée dans la région.

$$\beta^r_{ik} = D_{ik}\,\Phi \tag{2.1}$$

Les régions qui forment le volume de matière peuvent être assimilées aux grains dans le matériau ou encore aux variantes de martensite dans chaque grain du matériau. Pour un AMF dont l'austénite possède une structure cubique centrée, la symétrie de la maille élémentaire implique que 24 variantes de martensite peuvent être formées. Une variante est une orientation possible de création de la martensite. Or, dans la modèle de Likhatchev et Malinin, un certain nombre de régions sont considérées sans spécifier si une région est associée à un grain ou à une variante de martensite. L'ensemble du volume est subdivisé en régions dans lesquelles la transformation de phase peut se produire dans une seule et unique direction. Par contre, chaque région est orientée différemment par rapport au repère global ou macroscopique. Par conséquent, il est impératif d'exprimer les déformations microscopiques de chaque région dans un repère global afin de pouvoir comparer et additionner l'effet de chaque déformation microscopique. Ainsi, un changement de repère s'effectue selon les règles classiques de l'analyse tensorielle. La même déformation microscopique dans le repère local β^{r}_{ik} est exprimée dans le repère global β^{g}_{ik} selon l'expression suivante :

$$\beta^{g}_{pq} = \alpha_{pi}\, \alpha_{qk}\, \beta^{r}_{ik} \tag{2.2}$$

où α_{mn} est une matrice de rotation qui prend en considération l'orientation de la région. L'orientation du repère d'une région x-y-z par rapport au repère macroscopique X-Y-Z est exprimée par trois angles Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 appelés angles d'Euler. C'est angles sont les rotations successives à appliquer au repère global X-Y-Z afin d'obtenir le repère d'une région x-y-z. La figure 2.3 montre les rotations appliquées au repère global ainsi qu'aux repères intermédiaires x'-y'-z' et x"-y"-z" obtenus. Dans un premier temps, une rotation de Ψ_1 autour de l'axe Z est appliquée au repère macroscopique X-Y-Z pour générer le repère intermédiaire x'-y'-z'. Ensuite, une rotation de Ψ_2 autour de l'axe x' est appliquée pour générer le second repère intermédiaire x"-y"-z". Finalement, une rotation de Ψ_3 est imposée autour de l'axe z" pour obtenir le repère d'une variante x-y-z. Lorsque les trois

angles d'Euler sont connus, la matrice de rotation α_{mn} qui permet d'exprimer la déformation microscopique d'une région dans le repère macroscopique est donnée à l'équation (2.3).

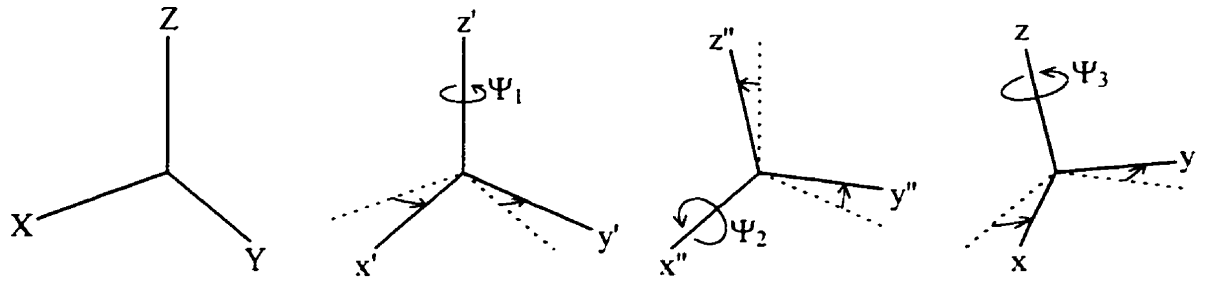


Figure 2.3 Représentation des 3 angles d'Euler qui définissent l'orientation d'un repère d'une région x-y-z par rapport au repère macroscopique X-Y-Z.

$$\alpha_{mn} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_1\cos\Psi_3 - \sin\Psi_1\cos\Psi_2\sin\Psi_3 & -\cos\Psi_1\sin\Psi_3 - \sin\Psi_1\cos\Psi_2\cos\Psi_3 & \sin\Psi_1\sin\Psi_2 \\ \sin\Psi_1\cos\Psi_3 + \cos\Psi_1\cos\Psi_2\sin\Psi_3 & -\sin\Psi_1\sin\Psi_3 + \cos\Psi_1\cos\Psi_2\cos\Psi_3 & -\cos\Psi_1\sin\Psi_2 \\ \sin\Psi_2\sin\Psi_3 & \sin\Psi_2\cos\Psi_3 & \cos\Psi_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Les équations (2.2) et (2.3) permettent d'exprimer la déformation de transformation microscopique d'une région dans le repère global ou macroscopique. La déformation de transformation macroscopique est la sommation de la déformation de transformation microscopique de toutes les régions. Likhatchev et Malinin propose d'effectuer une intégrale en utilisant les angles d'Euler comme variables d'intégration pour prendre en considération toute les directions possibles des régions. Ceci équivaut à supposer que le matériau est composé d'un très grand nombre de régions dont l'orientation obéit à une fonction de distribution $f(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$. Un matériau isotrope est alors modélisé si la fonction de distribution admet toutes les orientations possibles avec une probabilité égale. À l'opposé, il est possible de simuler une texture dans le matériau en favorisant une orientation privilégiée pour la majorité des régions. La déformation macroscopique de transformation ε^{TR} est calculée par intégration sur toutes les orientations possibles.

$$\varepsilon_{ik}^{TR} = \iiint_{\Psi_1\Psi_2\Psi_3} f(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)\ \alpha_{pi}\ \alpha_{qk}\ D_{ik}\ \Phi\, d\Psi_1\, d\Psi_2\, d\Psi_3 \qquad (2.4)$$

Les concepts véhiculés par la formulation de Likhatchev et Malinin sont plus faciles à comprendre lorsqu'un nombre fini de régions sont considérées. De cette façon, l'équation intégrale (2.4) peut être remplacée par une sommation. Par contre, l'orientation de chaque région doit être connue. Imaginons que le volume de matière est constitué de N régions d'égales dimensions et que les angles d'Euler de chaque région sont connus. L'intégrale de l'équation (2.4) se réduit à la sommation suivante :

$$\varepsilon_{ik}^{TR} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \alpha_{pi}^{n}\ \alpha_{qk}^{n}\ D_{ik}\ \Phi^{n} \qquad (2.5)$$

où N est le nombre de régions considérées, α_{st}^{n} est la matrice de rotation de la n-ième région définie par ses trois angles d'Euler, D_{ik} est le tenseur de distorsion de l'AMF qui est identique pour toutes les régions et Φ^{n} est la proportion volumique de martensite dans la n-ième région. La proportion globale de martensite est calculée de façon similaire à la déformation macroscopique de transformation. L'idée est d'additionner la proportion de martensite transformée microscopiquement dans chaque région pour obtenir la valeur macroscopique. Dans le cas où l'orientation des régions obéit à une fonction de distribution $f(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$, la proportion volumique globale de martensite Φ_m dans le volume de matière est calculée par l'intégrale suivante :

$$\Phi_m = \iiint_{\Psi_1\Psi_2\Psi_3} f(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)\,\Phi\, d\Psi_1\, d\Psi_2\, d\Psi_3 \qquad (2.6)$$

Pour un nombre limité de régions, l'intégrale de l'équation (2.6) se ramène à la sommation suivante :

$$\Phi_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Phi^n \qquad (2.7)$$

La déformation macroscopique de transformation et la proportion globale de martensite sont données par les équations (2.4) à (2.7) selon la formulation adoptée. Dans tous les cas, les seuls inconnus de ces équations sont les proportions relatives de martensite des régions. Une fois ces paramètres calculés, le problème est résolu. Or, le calcul des proportions relatives de martensite dans une région n'est pas une tâche évidente car l'évolution de la martensite dépend entre autres de la variation de température imposée, du tenseur de contrainte appliquée et de l'histoire thermomécanique de la région. La cinétique de la transformation martensitique doit donc être définie afin de suivre l'évolution de la proportion de martensite dans une région en fonction du chargement thermomécanique imposé. Les paragraphes suivants décrivent les principaux fondements de la cinétique de la transformation de phase du modèle de Likhatchev et Malinin.

La contribution qui est probablement la plus originale dans le modèle est la définition de la *température effective* T^*. La température effective T^* est une valeur scalaire qui établit une équivalence entre la température T et l'état tensoriel de contrainte σ_{pq}. Une équation identique est obtenue lorsque des variations de température (ΔT et ΔT^*) et de contrainte ($\Delta\sigma_{pq}$) sont manipulées.

$$T^* = T - \frac{T_0}{q_0}\,\alpha_{pl}\,\alpha_{qk}\,D_{ik}\,\sigma_{pq} \qquad (2.8)$$

où $T_0 = (M_f + M_s + A_s + A_f) / 4$ est la température d'équilibre thermodynamique et q_0 est la chaleur échangée par unité de volume lors de la transformation de phase. L'équation (2.8) est obtenue à partir de l'équation Clausius-Clapeyron :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = \frac{\Delta S}{V_0\,\Delta\varepsilon} \tag{2.9}$$

où ΔS est la variation d'entropie, V_0 est le volume initial non déformé et $\Delta\varepsilon$ est la variation de déformation macroscopique lors de la transformation. La thermodynamique définit la variation d'entropie de la façon suivante : $\Delta S = \Delta Q/T$ où ΔQ est la chaleur échangée. En supposant que les changements de volume sont faibles devant les cisaillements engendrés lors de la transformation martensitique des AMF, la chaleur échangée par unité de volume q_0 est donc $\Delta Q/V_0$. De plus, en remplaçant la température T dans la définition de l'entropie par la température d'équilibre thermodynamique T_0, le terme $\Delta S/V_0$ de l'équation (2.9) devient q_0/T_0. De son côté, la variation de la déformation macroscopique $\Delta\varepsilon$ est reliée au tenseur de distorsion D_{ik} selon les équations (2.1) et (2.2). Lorsque la transformation de phase est complétée dans une région, une quantité de chaleur ΔQ est échangée avec le milieu environnant, la proportion de martensite Φ de la région vaut 1.0 et la variation de déformation macroscopique devient $\Delta\varepsilon_{pq} = \alpha_{pi}\,\alpha_{qk}\,D_{ik}$. En remplaçant ces derniers résultats dans l'équation (2.9), l'équivalent de la relation de Clausius-Clapeyron exprimée en notation tensorielle devient :

$$\Delta T = \frac{T_0}{q_0}\,\alpha_{pi}\,\alpha_{qk}\,D_{ik}\,\Delta\sigma_{pq} \tag{2.10}$$

Cette dernière équation montre l'équivalence thermodynamique entre une variation de température et une variation de contrainte appliquée. Likhatchev et Malinin proposent de définir une variation de température effective ΔT^* comme étant simplement la différence entre le membre de gauche et celui de droite de l'équation (2.10). Ainsi, la définition d'un incrément de température effective peut être déduite de ce dernier raisonnement.

La cinétique de la transformation de phase dans le modèle de Likhatchev et Malinin est intimement liée à la définition de la température effective. Dans un premier temps, imaginons que la transformation de phase dans les AMF est une transformation du second ordre, c'est-à-dire que l'austénite et la martensite ne peuvent pas coexister simultanément dans le même volume de matière. Bien entendu, cette hypothèse n'est pas représentative de la réalité mais elle est introduite afin de faciliter la compréhension du modèle. La cinétique de la transformation de phase qui permet de suivre l'évolution de la proportion de martensite dans une région pourrait être la suivante :

$$\Phi = \Phi_{min}\, H\left(T^* - T_0\right) + \Phi_{max}\, H\left(T_0 - T^*\right) \qquad (2.11)$$

où H(x) est une fonction Heaviside qui vaut 1 si $x \geq 0$ et qui vaut 0 si $x < 0$. Φ_{min} et Φ_{max} représentent respectivement la proportion minimale et maximale que la martensite peut occuper dans une région par rapport au volume initial de la région. Φ_{min} et Φ_{max} sont des paramètres connus qui caractérisent un AMF. Ainsi, lorsque la température effective T^* est supérieure à la température d'équilibre thermodynamique T_0, la proportion de martensite Φ dans la région étudiée vaut Φ_{min}. Dans le cas contraire, Φ est imposé à la valeur Φ_{max}. La figure 2.4 montre l'allure de la cinétique de transformation de phase si la transformation des AMF était du second ordre. Ceci équivaut à imaginer que les quatre températures de transformation sont identiques ($T_0 = A_f = A_s = M_s = M_f$). En somme, lors d'un refroidissement au sens de la température effective, une région d'austénite se transforme instantanément en martensite lorsque la température effective atteint la valeur d'équilibre thermodynamique. Il est important de rappeler qu'un refroidissement au sens de la température effective est le résultat d'une diminution de la température réelle, d'une augmentation de la contrainte appliquée ou de n'importe quelle autre combinaison de variations de température et de contrainte qui provoque une diminution de la température effective. À l'opposé, un

chauffage au sens de la température effective prend autant en considération les variations de température et de contrainte qui provoquent une élévation de la température effective. Dans le cas où $\Phi_{min} = 0$ et $\Phi_{max} = 1$, le passage d'une phase à l'autre s'effectue de manière instantanée sans qu'il y ait coexistence des deux phases.

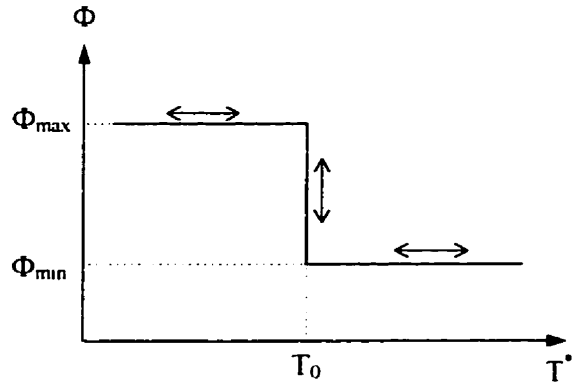


Figure 2.4 Cinétique d'une transformation de phase du second ordre.

Dans les alliages à mémoire de forme, la transformation de phase est du premier ordre, c'est-à-dire que l'austénite et la martensite peuvent coexister simultanément dans une région. La transformation de phase ne s'effectue pas de façon instantanée à une température donnée mais plutôt de manière progressive sur un intervalle de température. En effet, pour un état libre de contrainte, l'austénite se transforme en martensite entre les températures M_s et M_f et la martensite se transforme en austénite entre les températures A_s et A_f. Ces quatre températures de transformation ne sont pas superposées et forment une hystérésis. Likhatchev et Malinin proposent une cinétique de transformation qui prend en considération l'étalement et l'hystérésis de la transformation de phase des AMF de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = {} & \frac{-\Delta T^*}{M_s - M_f} \cdot H\left[-\Delta T^*\right] \cdot H\left[1 - \Phi_m\right] \cdot H\left[\Phi_{max} - \Phi\right] \cdot H\left[M_s - \Phi(M_s - M_f) - T^*\right] \\ & - \frac{\Delta T^*}{A_f - A_s} \cdot H\left[\Delta T^*\right] \cdot H\left[\Phi_m\right] \cdot H\left[\Phi - \Phi_{min}\right] \cdot H\left[T^* + \Phi(A_f - A_s) - A_f\right]\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\Delta\Phi$ représente l'incrément de proportion de martensite dans une région. A_f, A_s, M_s et M_f sont les températures de transformation d'un alliage. T^* et ΔT^* sont respectivement la température effective actuelle et l'incrément de température effective de la région. Φ est la proportion actuelle de martensite dans la région. Φ_{max} et Φ_{min} sont les proportions relatives maximale et minimale des régions et finalement Φ_m est la proportion globale de martensite qui prend en considération la proportion de martensite de toutes les régions. La figure 2.5 montre graphiquement l'équation (2.12). Dans le cas où le volume de matière est composé d'un nombre fini de régions, l'équation (2.12) est employée autant de fois qu'il y a de régions pour chaque variation de température effective.

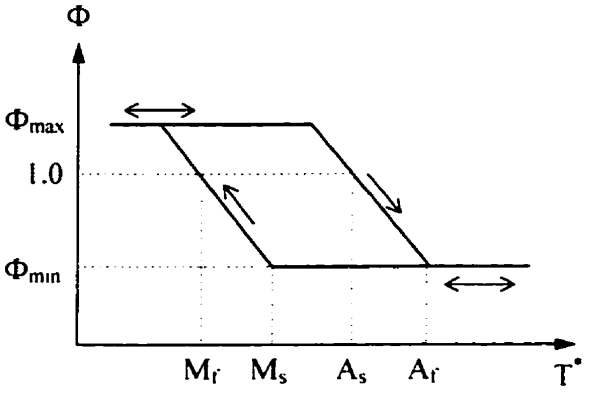


Figure 2.5 Cinétique de transformation de phase d'un AMF avec étalement de la transformation et hystérésis.

Le membre de droite de l'équation (2.12) est la somme de deux contributions dont chacune contient 5 termes (une intensité et 4 fonctions Heaviside). La première contribution s'applique à un refroidissement au sens de la température effective et la seconde, à un chauffage. En effet, un refroidissement implique que ΔT^* soit inférieur à zéro. Dans un tel cas, $H(\Delta T^*) = 0$ et $H(-\Delta T^*) = 1$ et la seconde contribution est ainsi négligée. À l'opposé, un chauffage implique que $H(-\Delta T^*) = 0$ et la première contribution est négligée.

Le premier terme de chaque contribution est l'intensité de l'incrément de proportion de martensite dans une région causée par l'évolution de la transformation de phase. La valeur de cette intensité est simplement le quotient de l'incrément de température effective sur l'étalement de la transformation directe (M_s - M_f) ou inverse (A_f - A_s) selon le cas.

Deux fonctions Heaviside de l'équation (2.12) concernent la proportion globale de martensite Φ_m. La valeur de Φ_m est toujours comprise entre 0.0 et 1.0 car à la limite, tout le volume est composé de martensite ($\Phi_m = 1$) ou d'austénite ($\Phi_m = 0$). Lors d'une diminution de la température effective, la proportion de martensite d'une région ne peut qu'augmenter, et cela seulement s'il reste encore de la martensite globale à transformer. Il faut donc que Φ_m soit inférieur à 1.0 et c'est la fonction Heaviside $H(1-\Phi_m)$ de la première contribution qui s'assure de ne pas violer cette condition physique. À l'inverse, lors d'une augmentation de la température effective, la proportion de martensite ne peut que diminuer, et cela seulement s'il reste de la martensite dans le volume de matière. Il faut donc lors d'une élévation de température effective arrêter la transformation lorsque la proportion globale de martensite atteint 0.0. C'est la fonction Heaviside $H(\Phi_m)$ de la seconde contribution qui impose cette condition.

La proportion de martensite Φ d'une région peut varier entre deux valeurs limites qui sont les proportions relatives maximale Φ_{max} et minimale Φ_{min}. Dans le cas où $\Phi_{max} = 1.0$, cela implique que la transformation de phase dans une région peut se produire jusqu'à ce que le volume de martensite occupe complètement le volume de la région défini initialement. Si $\Phi_{max} = 0.5$, la transformation de l'austénite en martensite dans une région donnée ne peut excéder la moitié du volume initial de la région. Ainsi, il devient impossible de transformer complètement le volume en martensite. D'un autre côté, si $\Phi_{max} = 2.0$, la transformation de phase d'une région peut empiéter sur les zones qui ne sont pas encore transformées des autres régions jusqu'à ce que le volume

transformé occupe le double du volume initial d'une région. Une valeur de Φ_{max} supérieure à 6.0 est généralement employée. La limite sur la taille maximale des régions est vérifiée par la fonction Heaviside $H(\Phi_{max} - \Phi)$ de la première contribution, celle qui traite l'augmentation de la taille des régions de martensite. En ce qui concerne la valeur de Φ_{min}, elle est plus souvent qu'autrement imposée à 0.0. Cela signifie que la martensite d'une région arrête de se transformer en austénite lorsqu'il n'y a plus de martensite. Cette condition est vérifiée lors d'une augmentation de la température effective dans la seconde contribution par la fonction Heaviside $H(\Phi - \Phi_{min})$. Dans un cas extrême, Φ_{min} pourrait être fixé à une valeur supérieure à 0.0 pour empêcher le retour complet de la martensite en austénite. Cette astuce pourrait être employée pour simuler une certaine dégradation de l'alliage en forçant une certaine quantité de *martensite résiduelle* à demeurer dans l'alliage lors du retour en austénite.

Les deux dernières fonctions Heaviside s'occupent de prédire le début de la transformation de phase. Par exemple, dans une région où la proportion de martensite est nulle ($\Phi = 0.0$), la transformation de phase lors d'une élévation de température effective débute lorsque $T^* = M_s$. Si $\Phi = 1.0$, la transformation de phase débute lorsque $T^* = M_f$. Enfin, si $\Phi = 0.5$, la transformation s'active lorsque $T^* = M_s - 0.5(M_s - M_f)$. De façon générale, la martensite a tendance à augmenter dans une région contenant une proportion Φ de martensite lorsque la température effective diminue et lorsque la température effective T^* est inférieure à $M_s - \Phi(M_s - M_f)$. C'est la raison pour laquelle une fonction Heaviside supplémentaire $H(M_s - \Phi(M_s - M_f) - T^*)$ est introduite dans la première contribution de l'équation (2.12). Un raisonnement analogue peut être réalisé pour la transformation de la martensite en austénite de façon à justifier la présence de la fonction Heaviside $H(T^* + \Phi(A_f - A_s) - A_f)$ dans la seconde contribution de la même équation.

La formulation de la cinétique de transformation de l'équation (2.12) impose un cheminement au travers de l'hystérésis qui est obligatoirement horizontal. Pour la transformation inverse de la martensite en austénite, le comportement repose sur une droite horizontale jusqu'à ce que la pente de transformation définie entre A_s et A_f soit atteinte. À l'opposé, la transformation directe (austénite en martensite) lors d'un abaissement de la température effective se produit lorsque la droite définie entre M_s et M_f est rencontrée. Bien que la cinétique de la transformation de phase dans la théorie de Likhatchev et Malinin soit originale, il n'en demeure pas moins que cette formulation représente un volet phénoménologique au modèle micromécanique.

La théorie de Likhatchev et Malinin propose d'ajouter des distributions statistiques afin d'incorporer dans le modèle une dispersion au niveau de l'étalement de la transformation de phase et de la largeur de l'hystérésis. Ainsi, certaines régions du volume de matière peuvent se transformer plus ou moins rapidement et sur des intervalles de températures plus ou moins larges. De cette façon, il est possible de prendre en considération l'influence de certaines caractéristiques physiques comme les variations de composition de l'alliage ou les variations de taille de grains entre différents endroits du volume de matière étudié.

Le calcul de la déformation macroscopique de transformation ε^{TR} est donc effectué en divisant un volume de matière en un certain nombre de régions. Sur ce volume de matière est appliquée une variation de température ΔT et/ou une variation de contrainte $\Delta\sigma_{pq}$. En considérant l'orientation des régions, la variation de température effective ΔT^* de chacune d'entre elles est calculée selon l'équation (2.8). Par la suite, l'incrément de proportion de martensite $\Delta\Phi$ de chaque région est calculé selon l'équation (2.12). Avec cet incrément de proportion de martensite, la valeur Φ de chaque région est alors connue. La déformation de transformation macroscopique ε^{TR} ainsi que la proportion globale de martensite Φ_m sont respectivement calculées selon les équations (2.5) et (2.7).

Une fois la déformation de transformation macroscopique ε^{TR} connue, deux autres types de déformation contribuent à la déformation macroscopique totale ε^{TOT}. Il s'agit de la déformation élastique ε^{EL} et de la déformation thermique ε^{TH}, cette dernière étant le résultat de la dilatation thermique. La déformation totale est simplement la somme de chacune des contributions.

$$\varepsilon_{pq}^{TOT} = \varepsilon_{pq}^{TR} + \varepsilon_{pq}^{EL} + \varepsilon_{pq}^{TH} \tag{2.13}$$

Le calcul de la contribution élastique et thermique à la déformation totale est simplement fondé sur la théorie de l'élasticité classique. Par contre, une loi des mélanges est introduite afin de prendre en considération la différence des propriétés entre la martensite et l'austénite. Le paramètre de pondération dans la loi des mélanges est la proportion globale de martensite Φ_m. Les expressions des déformations élastique et thermique sont données à l'équation (2.14) où δ_{pq} est le delta de Kronecker et γ_A, γ_M, ν_A, ν_M, E_A, et E_M sont respectivement le coefficient de dilatation thermique, le coefficient de Poisson et le module d'élasticité de l'austénite et de la martensite. Les propriétés élastiques et thermiques de l'austénite et de la martensite sont supposées isotropes.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pq}^{EL} &= \frac{1}{E_A}\left[(1+\nu_A)\sigma_{pq} - \nu_A\,\sigma_{kk}\,\delta_{pq}\right] + \Phi_M\left[\left(\frac{1+\nu_M}{E_M} - \frac{1+\nu_A}{E_A}\right)\sigma_{pq} - (\nu_M - \nu_A)\,\sigma_{kk}\,\delta_{pq}\right] \\ \varepsilon_{pq}^{TH} &= \left\{\gamma_A + \Phi_M(\gamma_M - \gamma_A) + \left[(\gamma_M - \gamma_A)\Delta T + \frac{1}{3}D_{kk}\right]\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta T}\right\}\Delta T\,\delta_{pq} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le modèle de Likhatchev et Malinin est validé qualitativement pour de nombreux cas de chargements thermomécaniques complexes mais malheureusement, une validation quantitative demeure inexistante. Par contre, le modèle est très intéressant puisqu'il regroupe en une seule formulation tous les comportement particuliers des AMF avec une

notation tensorielle. Quelques paramètres sont difficiles à déterminer expérimentalement et c'est principalement le cas de la matrice de distorsion D_{ik}. L'annexe I présente quelques exemples numériques de la théorie de Likhatchev et Malinin avec l'approche simplifiée où les intégrales sont remplacées par des sommations. Trois exemples montrent la validité qualitative du modèle pour la superélasticité, la pseudo-plasticité et l'effet mémoire simple sens. En plus de clarifier le fonctionnement du modèle, ces exemples montrent l'influence de certains paramètres comme l'orientation et la taille maximale Φ_{max} des régions qui caractérisent le volume de matière.

2.1.2 Modèles phénoménologiques

Dans un modèle phénoménologique, les paramètres descriptifs de la relation constitutive sont déduits à partir de courbes expérimentales obtenues en laboratoire sur un échantillon. Il faut préalablement connaître l'allure du phénomène avant d'entreprendre la modélisation. Un modèle phénoménologique est descriptif car il n'explique pas un phénomène, mais il en fait la description. Les modèles entrant dans cette classe ont été divisés en quatre sections : les modèles fondés sur l'approche de Tanaka, les modèles bilinéaires, les travaux de Lexcellent et la modélisation des sous-cycles d'hystérésis d'Ortin.

2.1.2.1 Modèles fondés sur l'approche de Tanaka

Plusieurs auteurs ont été inspirés par la façon dont Tanaka aborde les alliages à mémoire de forme et leur travaux sont résumés dans cette section. Tanaka [2.12] obtient à partir de considérations thermodynamiques des équations constitutives thermomécaniques et des équations donnant la cinétique de transformation de phase. À partir de l'énergie libre d'Helmholtz et d'un potentiel dissipatif, il a pu modéliser les phénomènes de transformation de phase des alliages à mémoire de forme. Cette démarche [2.13] lui a

permis d'exprimer la variation de la déformation comme étant le résultat de trois contributions distinctes : la variation de la contrainte, de la température et de la proportion de martensite transformée. La modélisation de Tanaka est effectuée pour un état tridimensionnel de contrainte. Cependant, il est extrêmement difficile d'appliquer ce modèle pour une sollicitation tridimensionnelle car il faut connaître la relation qui donne la proportion de martensite transformée en fonction du tenseur de contrainte et de la température. C'est ici que réside l'aspect phénoménologique du modèle. Dans le cas de la traction uniaxiale, Tanaka a obtenu une relation qui donne la proportion de martensite transformée en fonction de la contrainte de traction et de la température. En fait, il existe une relation pour le chargement et une autre pour le déchargement. Dans les deux cas, en plus de la contrainte de traction et de la température, les relations comportent certains paramètres intrinsèques au matériau comme les températures caractéristiques de transformation.

Avec ce modèle, Tanaka peut modéliser la superélasticité, l'effet mémoire simple sens, la pseudo-plasticité en plus de calculer la force de rappel lors du chauffage d'un alliage préalablement déformé à froid lorsque tout déplacement est bloqué. Des validations expérimentales ont été réalisées avec des alliages titane-nickel dans des cas isothermes seulement. Les résultats pour la pseudo-plasticité et la superélasticité sont excellents. Par contre, il aurait été intéressant de valider le modèle pour des chargements thermomécaniques faisant intervenir des variations de température comme l'effet mémoire. De plus, il y a absence de validations expérimentales effectuées avec des alliages cuivreux qui présentent souvent des comportements beaucoup moins idéaux que ceux employés. Une des principales lacunes du modèle, mis à part la grande difficulté à l'appliquer pour des sollicitations tridimensionnelles, est l'impossibilité de traiter les sous-cycles d'hystérésis. Le modèle ne fait que se promener sur l'enveloppe principale délimitée par les courbes de chargement et de déchargement. Il ne peut pas prédire le comportement des AMF à l'intérieur de cette enveloppe.

Tobushi et al. [2.14] ont appliqué les concepts développés par Tanaka pour modéliser la transition R dans les alliages titane-nickel. Le modèle est adapté pour répondre à leurs besoins. De nouvelles températures de transformation associées à la transition R sont définies, de même qu'une nouvelle variable représentant la proportion de phase-R plutôt que la proportion de martensite formée. Le modèle se bute aux mêmes problèmes que ceux rencontrés par le modèle de Tanaka. En effet, il faut connaître la relation entre la proportion de phase-R, la contrainte et la température. Le modèle opère en régime superélastique seulement, ce qui est tout à fait normal car ce n'est que dans ce régime que la transition R est observée. Il fonctionne en traction uniaxiale étant donné les difficultés reliées à la connaissance de la proportion de phase-R. Une validation expérimentale semble bien modéliser toute la région de la transition R pour l'alliage étudié mais seulement dans le cas du chargement. L'hystérésis n'a pas été abordée dans ce travail et encore moins les problèmes reliés aux sous-cycles qui se produisent à l'intérieur de la boucle principale.

Tobushi et al. [2.15] ont repris la même approche pour modéliser les propriétés cycliques d'un alliage Ti-Ni. Voici les propriétés en fatigue qu'ils abordent : (1) l'augmentation des contraintes de transformation lorsque l'échantillon est soumis à des cycles thermiques à contrainte constante; (2) l'augmentation des températures de transformation lorsque l'échantillon est soumis à des cycles en température à contrainte constante; (3) l'augmentation de la déformation résiduelle avec le nombre de cycles et (4) la diminution de l'allongement au fil des cycles. Il est à noter que les pertes de propriétés se font de façon drastique lors des premiers cycles pour ensuite suivre un rythme plus lent. Les auteurs ont débuté leurs développements avec les équations élaborées par Tanaka [2.13], mais en prenant soin d'ajouter un terme de déformation résiduelle. Ils ont donc une relation exprimant la variation de contrainte en fonction des variations de déformation, de déformation résiduelle, de température et du taux de martensite transformée. Pour tenir compte de l'évolution de certains paramètres au fil des cycles, les auteurs doivent exprimer la déformation résiduelle ainsi que les

températures Ms et As en fonction du nombre de cycles cumulés. Pour ces trois relations, ils proposent des expressions exponentielles afin de prendre en considération la non-linéarité des pertes (plus rapide dans les premiers cycles que dans les cycles suivants).

Les validations expérimentales effectuées collent très bien aux prédictions du modèle dans les cas de fatigue superélastique (contrainte variable à température constante) et de fatigue superthermique (température variable à contrainte constante). Par contre, les mêmes difficultés rencontrées par Tanaka dans son modèle sans fatigue se retrouvent dans le cas présent. Le modèle fonctionne pour une sollicitation en traction uniaxiale seulement. La principale difficulté réside dans la connaissance des relations exprimant le taux de martensite formée en fonction de la contrainte et de la température ainsi que celles qui décrivent les pertes des propriétés caractéristiques avec le nombre de cycles. De plus, les validations expérimentales utilisent des alliages de titane-nickel. Ces derniers présentent des comportements presque "idéaux", car ils peuvent facilement être approchés par des segments de droite. Il est donc moins évident que le modèle donnerait d'aussi bons résultats pour des alliages cuivreux par exemple.

Boyd et Lagoudas [2.16] ont travaillé sur la modélisation de la réponse d'un matériau composite (fibres AMF dans une résine polymérique) soumis à des chargements thermomécaniques. Une partie importante de cette publication est consacrée aux équations décrivant le comportement du matériau composite proprement dit. Néanmoins, les auteurs abordent un point crucial lorsqu'ils élaborent une relation constitutive pour les fibres AMF du composite. Ils débutent leurs développements en séparant la contribution de la déformation élastique de la déformation de transformation et cela, en notation tensorielle. Il est donc question d'un chargement mécanique tridimensionnel. Pour la contribution élastique, l'hypothèse est assez élémentaire puisqu'elle est fondée sur une simple loi des mélanges. En effet, connaissant le tenseur de rigidité et le tenseur de dilatation thermique de l'austénite et de la martensite, les

propriétés d'un mélange d'austénite et de martensite sont déduites par une loi des mélanges pondérée par la proportion volumique de martensite.

L'originalité de cette publication réside sans doute dans le calcul de la contribution de la déformation de transformation. Les auteurs reprennent les concepts développés initialement par Tanaka (c'est-à-dire qu'ils expriment la proportion de martensite formée en fonction de la température et de la contrainte) mais cette fois pour un état tridimensionnel de contrainte. Cet aspect constituait une des principales limitations aux modèles discutés précédemment. En supposant que la transformation soit indépendante de la contrainte hydrostatique, Boyd et Lagoudas ont exprimé la fraction de martensite formée pour un état tridimensionnel de contrainte à une température donnée. Par contre, certaines hypothèses deviennent restrictives. En effet, un critère d'écoulement isotropique du type Von Mises est préconisé même s'il est expérimentalement vérifié qu'un tel critère d'écoulement n'est pas représentatif du comportement réel des AMF (la transformation de phase débute à des contraintes plus élevées en compression qu'en tension). De plus, ces derniers ne prennent pas en considération les phénomènes de réorientation des variantes de martensite. Par conséquent, ils manipulent seulement la proportion de martensite orientée sans tenir compte de la martensite auto-accommodation. Leur modèle est donc limité aux comportements superélastiques ou superthermiques.

Plusieurs simulations à température constante sont réalisées avec le modèle mais aucune d'entre elles n'est confrontée à des validations expérimentales. L'allure des courbes calculées semble en général bien représenter le comportement des AMF mais un changement brusque lors des débuts de transformation laisse présager une déviation relativement importante par rapport à la situation réelle. Le point le plus discutable concernant les simulations est que certaines sont réalisées à des températures pour lesquelles il existe de la martensite auto-accommodante. Cette anomalie se traduit par une déformation résiduelle observable après une application et un relâchement de la

contrainte. Or, selon les hypothèses de base, seulement la martensite orientée est prise en considération. Il y a donc une contradiction entre les hypothèses et les simulations réalisées. Finalement, les travaux de Boyd et Lagoudas constituent une autre étape importante dans le cheminement proposé initialement par Tanaka car ils ont généralisé la relation cinématique de formation de la martensite orientée pour un état tridimensionnel de contrainte.

2.1.2.2 Modèles bilinéaires

Plusieurs auteurs ont développé des modèles qui approchent le comportement superélastique d'un AMF par une série de droites à différentes températures dans l'espace contrainte-déformation. De tels modèles sont appelés "bilinéaires" car ils sont généralement constitués d'une droite correspondant au comportement linéaire de l'austénite, d'une autre associée au comportement linéaire de la martensite et d'une dernière caractérisant la transformation de phase. La rigidité apparente (pente de la droite) dans la zone de transformation est habituellement beaucoup plus faible que celle correspondant aux régimes élastiques de l'austénite et de la martensite. Müller et Xu [2.17] proposent un modèle bilinéaire fondé sur une approche thermodynamique. Ils expriment un potentiel thermodynamique d'énergie libre comme étant une équation polynomiale où plusieurs variables, qui n'ont pas vraiment de signification physique, doivent être déterminées d'une façon ou d'une autre. En fait, cette technique est inspirée des équations de type "Van der Waals". En traçant les courbes contrainte-déformation isothermes qui correspondent au potentiel d'énergie libre, une zone d'instabilité devient apparente. Cette zone d'instabilité est la partie de la courbe pour laquelle une augmentation de la déformation nécessite une diminution de la charge comme le montre la figure 2.6(a).

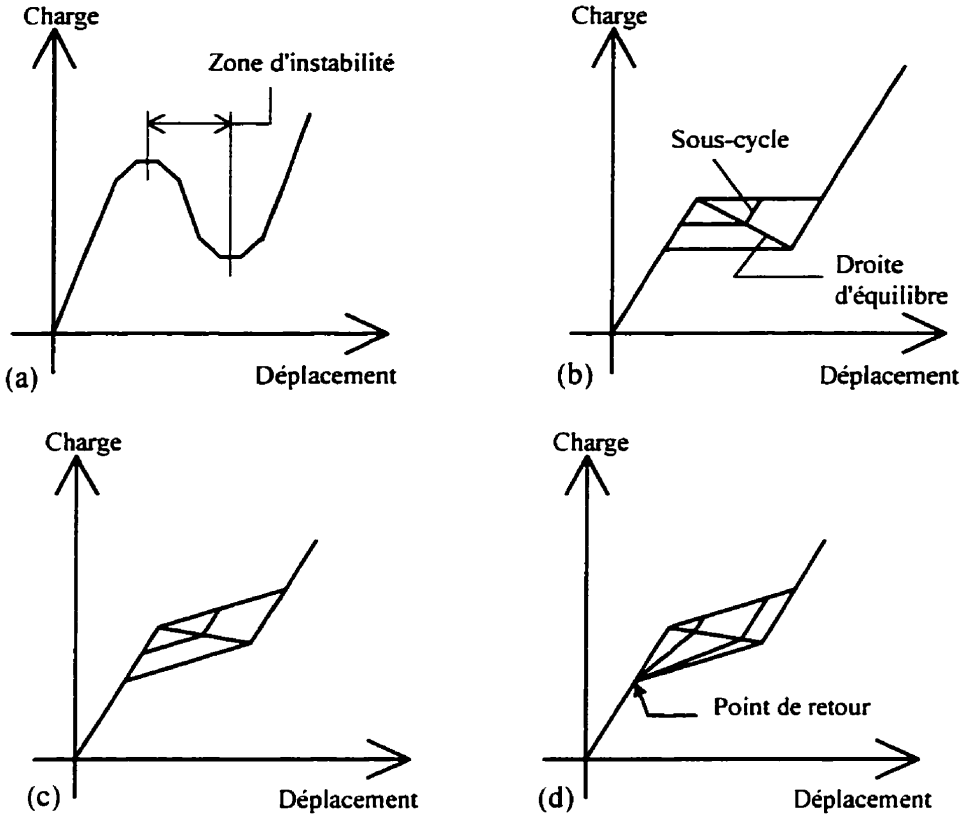


Figure 2.6 Différentes représentations d'un modèle bilinéaire : (a) équation de type Van der Waals et de la zone d'instabilité qui est à l'origine de la droite d'équilibre, (b) modèle de Müller et Xu, (c) modèle de Brandon et Rogers et (d) modèle de Gillet et al.

La transformation de phase (austénite-martensite ou vice versa) se produit dans cette zone d'instabilité. La largeur de l'hystérésis est déterminée par l'énergie de surface entre les deux phases et par des constructions géométriques fondées sur des calculs d'aire. Afin de simplifier le problème, les auteurs proposent de modéliser l'énergie libre par la jonction de deux paraboles plutôt qu'avec une seule équation polynomiale. Les courbes de contrainte-déformation isothermes correspondantes se ramènent donc à des segments de droite comme le montre la figure 2.6(b). En utilisant le même genre d'approche que précédemment, c'est-à-dire des constructions géométriques suivies d'un calcul d'aire, on obtient une courbe caractéristique avec une hystérésis traversée par la droite théorique d'équilibre thermodynamique. Cette dernière droite est la ligne qui traverse l'hystérésis à

la figure 2.6(b). Dans ce cas, l'enveloppe de l'hystérésis est délimitée par deux droites parallèles à l'axe de la déformation. Il est donc sous-entendu que la transformation de phase se fait à contrainte constante, ce qui n'est pas tout à fait représentatif de la réalité.

Lorsque la contrainte est relâchée pendant la transformation de l'austénite à la martensite orientée sous contrainte, un sous-cycle de déchargement est amorcé. Les auteurs proposent de traiter un tel sous-cycle de la façon suivante : un retour élastique jusqu'à la droite théorique d'équilibre thermodynamique suivi d'une transformation de phase à contrainte constante jusqu'à la droite élastique de l'austénite. Ce sous-cycle de déchargement est représenté à la figure 2.6(b). Il faut noter que cette approche s'applique aussi bien pour les sous-cycles de chargement.

Le modèle semble facilement exploitable, mais les coefficients utilisés pour décrire l'énergie libre du système ne sont pas évidents à déterminer. Bien entendu, ce modèle ne peut fonctionner qu'en régime superélastique. Les auteurs effectuent une validation expérimentale de leur modèle et les prédictions du modèle se rapprochent assez bien des observations en laboratoire. Par contre, lorsqu'ils comparent le modèle avec l'expérimental, aucune graduation n'apparaît sur les axes ce qui laisse entrevoir la possibilité d'une mise à l'échelle pour faire concorder les résultats. De plus, les validations expérimentales se font avec des monocristaux pour lesquels l'hypothèse de la transformation de phase à contrainte constante est en général vérifiée. Il est donc difficile d'imaginer que le modèle fournirait d'aussi bonnes prédictions pour des cuivreux polycristallins par exemple, car la transformation de phase dans ces derniers est loin d'avoir lieu à contrainte constante.

Brandon et Rogers [2.18] proposent un modèle qui ressemble beaucoup à celui de Müller et Xu [2.17] à l'exception de la pente de transformation qui peut être non-nulle comme le montre la figure 2.6(c). Les sous-cycles d'hystérésis sont décrits de la même façon en deux étapes : un retour élastique jusqu'à la droite théorique d'équilibre

thermodynamique, suivi d'un retour dit "plastique" jusqu'à la région élastique de l'austénite. La figure 2.6(c) montre un sous-cycle de déchargement. Bien entendu, le comportement est analogue pour les sous-cycles de chargement. Ce modèle est mieux adapté que celui de Müller et Xu pour traiter des polycristaux à cause de la pente de transformation non-nulle. Malgré le nombre assez imposant de relations thermodynamiques qu'ils utilisent pour justifier leur approche, celles-ci ne servent pratiquement pas à prédire le comportement du matériau. Ils proposent plutôt une façon de traiter l'hystérésis et ses sous-cycles sans vraiment développer les équations requises pour y arriver. Aucune validation expérimentale du modèle n'est effectuée et évidemment, celui-ci ne fonctionne qu'en régime superélastique.

Inspirés par les travaux de Patoor et al. [2.19], Gillet et al. [2.20, 2.21, 2.22] ont développé à leur tour un modèle bilinéaire. Dans un premier temps, Patoor et al. [2.19] calculent le seuil de transformation d'un monocristal (c'est-à-dire la fin du comportement élastique de l'austénite avant la transformation de phase) pour un état tridimensionnel de contrainte à une température donnée. Ce seuil de transformation est obtenu à partir d'une étude cinématique qui fait intervenir la création de martensite selon des directions très précises (variantes). Par la suite, ils élaborent une loi d'écoulement régissant la transformation de phase qui tient compte de la variation du tenseur des contraintes et des variations de température. L'extension au cas du polycristal se fait par une approche phénoménologique fondée sur l'allure des courbes expérimentales. En effet, pour connaître le seuil de transformation et la loi d'écoulement du polycristal, il faut supposer la forme de certaines fonctions. Puisque le modèle prédit ces deux relations, le seuil de transformation et la loi d'écoulement, il fonctionne donc en régime superélastique seulement. Une des lacunes évidentes du modèle est de ne pas pouvoir prédire la fin de la transformation, c'est-à-dire l'état à partir duquel le comportement élastique de la martensite se manifeste.

Cette approche est appliquée aux ressorts dans les travaux de Gillet et al. [2.20]. L'étude se concentre sur le comportement d'une tige en torsion car il est supposé à juste titre qu'une section d'un ressort en tension est pratiquement soumise à de la torsion pure. Dans ces travaux, une autre hypothèse stipule que l'alliage possède un comportement symétrique et que le seuil de transformation utilisé se rapproche du critère de Von Mises. L'aspect phénoménologique de cette étude consiste à supposer que la superélasticité de l'alliage est assimilée à un comportement bilinéaire avec un module d'élasticité identique pour les phases élastiques de la martensite et de l'austénite. La conséquence directe de cette hypothèse ramène à une constante la fonction qui dépend de la nature du matériau dans la loi d'écoulement. Les notions d'hystérésis et de sous-cycles sont également considérées par une approche phénoménologique. Les hypothèses posées ressemblent beaucoup à celles précédemment élaborées par Müller et Xu [2.17] et reprises par Brandon et Rogers [2.18]. La modélisation des sous-cycles d'hystérésis est également divisée en deux étapes. Premièrement, il y a un retour élastique jusqu'à la droite théorique d'équilibre thermodynamique. Deuxièmement, tous les sous-cycles tendent vers une seule destination appelée "point de retour". La figure 2.6(d) présente deux sous-cycles de déchargement. Comme d'habitude, les sous-cycles de chargement se comportent de la même façon. Les calculs effectués pour un ressort en tension sont comparés avec des essais expérimentaux et une très bonne concordance est observée entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux autant au niveau de l'enveloppe principale d'hystérésis que des sous-cycles.

Par la suite, Gillet et al. [2.21] ont appliqué le même genre d'approche pour simuler la déflexion d'une poutre encastrée soumise à un couple concentré appliqué à l'extrémité libre. Dans ces derniers travaux, le matériau était encore considéré comme symétrique et la loi d'écoulement utilisée ressemblait au critère de Von Mises. La dissymétrie entre la compression et la tension n'est donc pas prise en compte. De plus, aucune validation expérimentale n'est effectuée pour ce type de sollicitation. Des travaux encore plus récents de Gillet et al. [2.22] illustrent la puissance du modèle. L'aspect tridimensionnel

des lois d'écoulement et des seuils de transformation est utilisé avec un seuil de transformation asymétrique, ce qui permet de se rapprocher davantage du comportement réel des alliages à mémoire de forme. Ceci a permis de valider expérimentalement le modèle pour des essais de flexion 3-points et de flexion 4-points à différentes températures. Les très bons résultats obtenus montrent une étroite concordance entre la théorie et l'expérimental. Par contre, comme il en a déjà été discuté, le modèle ne fonctionne qu'en régime superélastique et ne peut tenir prédire la fin de la transformation de phase. Il faut donc supposer que chaque particule de matière demeure dans la zone de transformation et qu'aucune d'entre elles n'atteint la zone de la martensite élastique. Avec les derniers travaux de Gillet et al. [2.21, 2.22], il est possible de dériver des équations semblables à celles de la résistance des matériaux pour des éléments simples (tige et ressort en traction, poutre en flexion, etc.) fabriqués en alliages à mémoire de forme. Les équations obtenues permettent de diminuer le temps et les coûts de design de ces composantes simples lorsque celles-ci sont utilisées en régime superélastique.

2.1.2.3 Travaux de Lexcellent

Dans les travaux de Lexcellent, l'étude du comportement des alliages à mémoire de forme s'appuie sur des fondements thermodynamiques (notions d'enthalpie, entropie, énergie de cohésion, énergie interne, etc.) exprimés dans une notation assez ardue. Dans un premier temps, les travaux de Raniecki et Lexcellent [2.23] ont permis de développer un modèle prédisant le comportement superélastique de différents alliages cuivreux ou titane-nickel. Le modèle en question prend en compte des états tridimensionnels de contrainte dans les plages de température du régime superélastique et il permet de calculer des sous-cycles d'hystérésis. Malheureusement, aucune validation expérimentale n'est effectuée pour les sous-cycles. Pour le comportement superélastique, des validations pour des sollicitations en traction uniaxiale ont démontré que le modèle se rapproche assez bien de la réalité. Un aspect intéressant du modèle est que les constantes intrinsèques du matériau à connaître pour la modélisation, bien

qu'elles soient très nombreuses, peuvent être obtenues seulement à partir de courbes de traction uniaxiale.

Dans un deuxième temps, les travaux effectués avec Leclercq et al. [2.24] proposent une simplification du modèle précédent. Ils l'ont appliqué pour modéliser la transition R de certains alliages titane-nickel pour un état de contrainte unidimensionnel en traction. La transition R est un changement de phase intermédiaire qui peut être observé sur une plage de température bien précise. Le nom de la transition R provient de la structure cristallographique rhomboédrique de cette phase. Au lieu de travailler avec une variable interne z représentant la proportion de martensite et 1-z pour la proportion d'austénite, le dernier modèle utilise la variable z pour représenter la proportion de matière en phase R et 1-z pour représenter l'austénite. La transition R a la particularité de présenter une très faible hystérésis. Dans leurs travaux, les auteurs ont négligé totalement cette hystérésis et les chargements et déchargements suivent exactement les mêmes chemins. Avec ce modèle modifié, ils calculent la force de rappel lors du changement de phase R en austénite. Une validation expérimentale est réalisée, mais celle-ci reste plus ou moins satisfaisante.

Bourdon et Lexcellent [2.26] ont repris le potentiel d'énergie libre développé par Raniecki et al. [2.25] en ajoutant un terme de contribution cyclique pour simuler le comportement en fatigue d'alliages titane-nickel et cuivreux. Le modèle comprend une variable supplémentaire qui tient compte de la fraction de martensite résiduelle (ou stabilisée) qui serait un des phénomènes responsables de la perte progressive des propriétés AMF avec le nombre de cycles. Certaines relations à la base du modèle ont des fondements purement phénoménologiques car elles sont présentées sans justifications et surtout avec plusieurs constantes dont la signification physique demeure discutable. De plus, il faut connaître l'évolution de la fraction de martensite résiduelle avec le nombre de cycles. La relation ainsi cherchée peut être déterminée expérimentalement, mais non sans difficultés. Le modèle est confronté à des validations

expérimentales. Il existe une très bonne concordance pour le cas des alliages Ti-Ni, mais il est difficile d'en dire autant des alliages cuivreux. Toutes les manipulations sont effectuées en régime superélastique en traction uniaxiale. Enfin, les auteurs admettent que la tâche est beaucoup plus délicate pour modéliser la fatigue superthermique (fatigue à contrainte constante et à température variable). En somme, le modèle de Bourdon et Lexcellent est respectable bien qu'il présente beaucoup de limitations. Il constitue une première étape en vue de mettre au point un modèle plus général capable de prendre en compte les effets de la fatigue sur le comportement des alliages à mémoire de forme.

2.1.2.4 Modélisation des sous-cycles d'hystérésis d'Ortin

Ortin [2.27] propose un modèle pour prédire la trajectoire suivie lors de sous-cycles effectués à l'intérieur de l'enveloppe de l'hystérésis. Bien que son modèle ne représente pas une relation constitutive capable de prédire la réponse d'un AMF soumis à des chargements thermomécaniques complexes, ses travaux représentent une intéressante contribution à la modélisation des sous-cycles d'hystérésis en général. Son approche nécessite l'acquisition expérimentale de quelques sous-cycles de déchargement. Tout le modèle gravite autour d'une fonction F qui est utilisée pour connaître la variation de la déformation uniaxiale associée à une contrainte initiale de relâchement sur l'enveloppe d'hystérésis et une contrainte comprise à l'intérieur de l'enveloppe. Cette fonction n'est pas facile à obtenir, mais une fois le travail effectué, il est alors possible de prédire les sous-cycles d'hystérésis. Un aspect intéressant du modèle est que l'auteur laisse entrevoir la possibilité de pouvoir déduire toutes les trajectoires des sous-cycles à partir d'une seule courbe expérimentale. Cette idée est intéressante car elle permettrait de diminuer de façon significative le nombre de manipulations expérimentales nécessaires pour construire la fonction. Par contre, il faudrait utiliser un facteur d'échelle pour s'ajuster à tous les cas. Une constante supplémentaire dépendante de l'intensité des contraintes devient alors nécessaire.

Pour la modélisation du phénomène, Ortin propose d'utiliser la même fonction en chargement qu'en déchargement. Deux fois moins de courbes expérimentales sont alors nécessaires. Si une précision accrue est exigée, il est alors préférable d'obtenir une série de sous-cycles en chargement et une autre en déchargement. La concordance entre les résultats produits par le modèle et les essais expérimentaux est excellente. Des sous-cycles d'hystérésis complets et partiels ont été modélisés avec précision. Par contre, l'auteur utilise des monocristaux soumis à de la traction uniaxiale dans le régime superélastique pour valider son modèle. Rien ne garantit que la surface serait similaire pour des états tridimensionnels de sollicitation et à des températures différentes. Pour appliquer cette technique dans le cadre d'un modèle plus général, il faudrait connaître cette fonction pour différents états de sollicitation, ce qui peut s'avérer extrêmement difficile à réaliser.

2.2 Éléments finis appliqués aux AMF

Certains auteurs ont déjà entrepris de modéliser le comportement des alliages à mémoire de forme en utilisant la méthode des éléments finis. Malheureusement, quelques-uns ont modélisé le comportement des AMF avec des éléments finis en imposant suffisamment d'hypothèses restrictives qu'ils ont contourné les problèmes reliés aux AMF. C'est le cas des travaux de Hawkins et al. [2.28], de Liang et Rogers [2.29] et ceux de Baz et al. [2.30]. Bien entendu, les simplifications effectuées sont justifiées car la proportion d'AMF dans le dispositif modélisé est faible. Dans un modèle consacré exclusivement au comportement de l'AMF, de telles simplifications deviennent rapidement inadmissibles. Une brève description de leurs travaux ainsi que des hypothèses restrictives adoptées sont exposées afin de démontrer les astuces utilisées par certains auteurs pour remédier aux problèmes auxquels ils ont dû faire face.

Les travaux de Hawkins et al. [2.28] consistent à modéliser par éléments finis la réponse thermique d'un matériau composite muni de fils en alliage à mémoire de forme. Ils

désirent connaître le temps requis pour élever la température du matériau. Pour les calculs, les auteurs ont besoin de la chaleur spécifique de l'alliage et cette dernière varie de façon très particulière (élévation très prononcée lors de la transformation). Pour simplifier les choses, ils ont employé une valeur moyenne pour éviter la variation de la chaleur spécifique en fonction de la température. Les auteurs justifient cette approche en disant que les fils d'alliage à mémoire de forme constituent une proportion volumique très faible et qu'une telle approximation est sans conséquence. Ils ont peut-être raison, mais cela démontre une façon un peu cavalière de traiter le comportement fort complexe des alliages à mémoire de forme. De plus, aucune validation expérimentale n'est effectuée.

Liang et Rogers [2.29] ont modélisé avec les éléments finis la force de rappel et le déplacement associé au chauffage d'un matériau composite renforcé par des fils en alliage à mémoire de forme. Par une approche expérimentale, ils ont réussi à tracer la courbe de la force de rappel en fonction de la déformation uniquement pour les fils en alliage à mémoire de forme. Le profil de cette courbe, qui ressemble à celui d'une cloche, est donc fortement non linéaire. Par la suite, ils ont utilisé les éléments finis pour modéliser le comportement du composite. Lors des calculs, les auteurs ont besoin de connaître la pente de la courbe pour chaque état de déformation. Ils ont contourné le problème en stipulant que les déformations dans la pièce sont en majorité petites et que pour de telles déformations, le profil de la courbe peut être assimilé à une droite. Ils ont donc linéarisé le comportement, ce qui ne correspond évidemment plus à une modélisation d'un alliage à mémoire de forme mais plutôt à celle d'un matériau purement élastique. Les auteurs admettent que cette approche est erratique à certains endroits de la pièce et les prochains travaux devront prendre en considération cette relation non linéaire. Encore une fois, aucune validation expérimentale n'est réalisée. En somme, il s'agit d'un modèle très simplifié qui présente peu d'intérêt pour la modélisation par éléments finis de composantes en AMF.

Baz et al. [2.30] se sont heurtés à des problèmes similaires lorsqu'ils ont utilisé des éléments finis pour modéliser une poutre en flexion montée en parallèle avec deux fils d'alliage à mémoire de forme qui agissent comme des amortisseurs. Le premier fil se trouve au-dessus de la poutre et le second, au-dessous. C'est en effectuant des chauffages ou des refroidissements coordonnés que l'effet mémoire simple sens des fils de NiTinol est mis à profit pour ramener le plus rapidement possible la poutre à sa position neutre. Ils admettent que le module de Young varie avec la température et la contrainte et ils essaient d'en tenir compte dans la modélisation en supposant que le module de Young passe instantanément d'une valeur donnée à l'état austénitique à une autre valeur à l'état martensitique, et cela à une température de transformation précise. Cette approche est une approximation assez grossière car la variation ne se fait pas de façon instantanée mais sur une plage assez large de température et surtout, les températures de transformation sont fonctions de la contrainte appliquée. Par contre, les auteurs ont tenté de prendre en considération le comportement complexe du NiTinol. Malheureusement, les hypothèses utilisées s'éloignent beaucoup trop de la réalité.

Deux publications, Ganghoffer et al. [2.31] ainsi que Collins et Luskin [2.32], traitent d'un sujet assez particulier qui, en réalité, n'est pas une simulation par élément finis d'une composante en AMF. Par contre, la contribution qu'apportent ces articles à la compréhension de la transformation martensitique est importante. C'est la raison pour laquelle ces publications sont abordées dans cette revue bibliographique. Ganghoffer et al. [2.31] ont étudié l'évolution d'une transformation martensitique à l'intérieur d'un grain par la méthode des éléments finis. Ils ont modélisé un grain de forme carrée à l'aide de petits triangles. Chaque triangle peut faire partie d'une des quatre directions possibles de formation de la martensite (variantes). Ils justifient l'utilisation de quatre directions de formation des plaquettes de martensite en prenant le cas bidimensionnel de la transformation des alliages ferreux qui comprennent 12 orientations possibles de formation des variantes. Leur étude consiste à appliquer un champ bidimensionnel de contraintes sur le grain en plus de choisir la grandeur, la position dans le grain et

l'orientation de la première plaquette de martensite à se former pour créer un champ de contraintes internes. En utilisant une méthode incrémentale appliquée aux éléments finis, ils déterminent les plaquettes qui vont se former pour accommoder le champ de contraintes internes. Les résultats ont permis de faire ressortir l'importance des contraintes internes dans la formation des plaquettes de martensite ainsi que les phénomènes d'auto-accommodation (twinning). Ce modèle a plus d'intérêt théorique que pratique, car il est extrêmement difficile d'appliquer cette méthode pour calculer la déformation macroscopique d'une pièce réelle. En effet, le modèle fonctionne en deux dimensions seulement et il traite le cas d'un monocristal où seulement quatre variantes peuvent être activées, ce qui n'est pas le cas des alliages cuivreux ou titane-nickel. Enfin, le modèle n'est pas autonome car il faut imposer toutes les caractéristiques de la première variante de martensite à se former.

Les travaux de Collins et Luskin [2.32] ressemblent à ceux de Ganghoffer et al. [2.31]. Collins et Luskin ont visualisé, par une méthode d'éléments finis, la formation des variantes de martensite dans un volume de matière. Ils débutent leur étude avec l'équation de la densité d'énergie libre développée par Ericksen. Ils calculent la configuration des plaquettes de martensite qui minimisent cette densité d'énergie libre. Les résultats démontrent un phénomène d'auto-accommodation (twinning). Par contre, cette approche ne s'applique que pour une transformation de phase qui passe d'une structure cristallographique cubique à une structure quadratique. Ce genre de transformation est celui retrouvé dans les alliages indium-thallium, qui sont malheureusement très peu utilisés. Même si cette approche est employée dans un espace tridimensionnel, ces travaux présentent surtout un intérêt théorique car ils ne permettent pas de calculer la déformation du volume de matière suite à l'application du champ de contraintes et de la température. Néanmoins, cette étude permet une meilleure compréhension de la formation des plaquettes de martensite, mais elle s'avère peu utile pour la modélisation de pièces réelles.

Enfin, deux publications (Leclercq et al. [2.33] ainsi que Brinson et Lammering [2.34]) se rapprochent passablement des buts à atteindre en modélisant avec des éléments finis le comportement thermomécanique d'une structure en AMF. Même si certaines limitations doivent être imposées, leurs travaux constituent quand même un pas dans la bonne direction. Il y a encore beaucoup à faire pour arriver un jour à modéliser avec des éléments finis des pièces complexes sollicitées par des chargements tridimensionnels, et cela pour tous les régimes de température (superélastique, pseudo-plasticité, effet mémoire simple sens, etc.). La publication de Leclercq et al. [2.33] modélise le comportement de pièces en AMF par une méthode incrémentale appliquée aux éléments finis. La méthode incrémentale est inévitable étant donné le comportement fortement non linéaire des alliages à mémoire de forme. Un programme d'éléments finis a été employé pour les calculs, mais ce dernier n'a pas été développé explicitement pour simuler des composantes en AMF. Le code d'éléments finis et la relation constitutive utilisée ne sont donc pas reliés. Ceci limite les types de simulations qui peuvent être effectuées. Par exemple, les simulations sont obligatoirement isothermes, ce qui constitue une importante limitation pour simuler le comportement d'un AMF. La relation constitutive utilisée pour le jumelage avec le programme d'éléments finis est celle développée par Raniecki et al. [2.25]. Ceux-ci travaillent avec des états tridimensionnels de contrainte, ce qui permet d'étudier tous les cas de chargement et de géométrie. Malheureusement, aucune validation expérimentale des calculs par éléments finis n'est effectuée pour des états de sollicitation plus complexes que la traction uniaxiale alors que certaines analyses portent sur la flexion d'une poutre ou l'ouverture d'une bague.

En ce qui concerne Brinson et Lammering [2.34], ils ont développé davantage les concepts élaborés initialement par Tanaka [2.12] afin d'appliquer les résultats à des calculs par éléments finis. Ils ont modifié la relation constitutive (la relation qui exprime un incrément de contrainte en fonction d'un incrément de température, de déformation et de proportion de martensite transformée) de façon à la rendre plus

générale. Ainsi, il est maintenant question de deux proportions de martensite : celle de la martensite orientée et celle de la martensite auto-accommodante. L'étape cruciale de l'approche de Tanaka consiste à exprimer ces proportions de martensite en fonction de la température et de l'état de contrainte pour obtenir les relations de la cinétique de transformation. Encore une fois, la complexité de cette étape limite l'étude au cas unidimensionnel. Par contre, toutes les constantes des équations sont des paramètres facilement mesurables à partir d'un échantillon.

Pour arriver au système d'équations nécessaire aux calculs par éléments finis, les auteurs linéarisent la forme variationnelle de l'équation d'équilibre ainsi que la relation constitutive de l'AMF. En utilisant cette approche, un problème supplémentaire survient. En effet, il existe trois équations différentes de linéarisation de la relation constitutive qui correspondent à trois transformations différentes (martensite à austénite, austénite à martensite pour $T > M_S$ et austénite à martensite pour $T < M_S$). Il n'existe donc pas une relation unique et une analyse supplémentaire est nécessaire pour déterminer quelle relation constitutive doit être utilisée. En effectuant quelques raffinements mathématiques, les équations d'un élément "barre" pouvant supporter de la traction uniaxiale ont été développées. La linéarisation des relations sur de petits intervalles s'est avérée utile lors de la résolution des équations par une méthode itérative de Newton.

Dans cette étude, les auteurs font remarquer que les transferts de chaleur entre les éléments du maillage sont négligés et que la température instantanée est uniforme sur tout le domaine. Ils insistent sur l'importance d'améliorer le volet thermique pour des développements ultérieurs. La validation de l'élément barre est réalisée de différentes façons. Dans un premier temps, la réponse numérique d'un élément est comparée à des manipulations expérimentales pour deux types de sollicitations uniaxiales simples (comportement superélastique et calcul de la force de rappel lors d'un chauffage à déformation constante). Dans un deuxième temps, la simulation d'une bague de serrage

est effectuée en joignant bout à bout une série d'éléments barre formant une boucle fermée où chaque élément est soumis à de la traction pure. Les résultats numériques sont confrontés à des calculs analytiques pour des bagues de serrage. Dans tous les cas, la validation des calculs est respectable. La principale lacune de ces travaux demeure l'impossibilité d'analyser des problèmes autres qu'unidimensionnels. Brinson et Lammering ont démontré qu'il est possible de modéliser certaines structures en n'utilisant que des éléments barre mais le nombre d'applications devient rapidement restreint. Ce problème persistera tant et aussi longtemps que la relation cinématique de la transformation ne sera pas obtenue pour un état tridimensionnel de contrainte.

Chapitre 3 : Modèle phénoménologique *KRIGAMF*[1]

Les alliages à mémoire de forme (AMF) possèdent des propriétés thermomécaniques remarquables. Ils sont utilisés entre d'autres à titre d'actuateurs, de connecteurs et d'amortisseurs. Actuellement, la conception d'une composante en AMF utilise principalement une technique dite *par essais et erreurs* étant donné le manque d'outils de modélisation numérique. De cette façon, plusieurs prototypes doivent être construits avant d'atteindre les performances désirées. En plus de s'avérer une pratique coûteuse, un projet peut simplement être abandonné car les performances optimales n'ont jamais pu être obtenues. Par conséquent, des programmes de conception assistée par ordinateur doivent être développés afin de faciliter l'émergence de nouvelles applications industrielles bénéficiant des propriétés des AMF. L'étape cruciale de ces développements est probablement la formulation de relations constitutives mathématiques ou numériques qui décrivent fidèlement les comportements complexes des AMF comme l'effet mémoire de forme, la superélasticité et la pseudo-plasticité. Avec de telles relations constitutives éventuellement interfacées avec un programme d'éléments finis non-linéaires, le comportement d'une composante tridimensionnelle en AMF soumise à des chargements thermomécaniques pourra être calculé, ce qui diminuera grandement la durée et le coût de la phase de conception et permettra d'optimiser les performances de la composante en AMF.

Plusieurs auteurs ont élaboré des relations constitutives pour les AMF et leur travaux ont été présentés au deuxième chapitre de cette thèse. Par contre, aucun modèle phénoménologique ou micromécanique déjà expérimentalement validé n'incorpore dans une seule formulation tous les comportements complexes des AMF. Afin de pallier à

---

[1] Les quatre premières lettres du sigle *KRIGAMF* proviennent de la méthode d'interpolation utilisée, le krigeage. Les trois dernières correpondent à la première lettre des mots Alliage, Mémoire et Forme.

cette lacune, une nouvelle relation constitutive appelée *KRIGAMF* a été développée. Le support mathématique sur lequel repose *KRIGAMF* est le krigeage paramétrique des surfaces. Un bref aperçu du krigeage dual et du krigeage paramétrique est d'abord présenté à la première section de ce chapitre. Par la suite, la description proprement dite du modèle est effectuée. La philosophie et la construction du modèle à partir de courbes expérimentales sont d'abord discutées aux deuxième et troisième sections. La procédure numérique et le traitement du comportement hystérétique de l'AMF sont ensuite présentés aux quatrième et cinquième sections respectivement. Quelques exemples de validation qualitative et quantitative sont exposées à la sixième section de ce chapitre. Enfin, les principales limitations de la formulation actuelle de *KRIGAMF* sont abordées à la dernière section.

3.1 Présentation du krigeage

Le krigeage est une méthode d'interpolation d'origine statistique appliquée pour la première fois en 1951 par Krige [3.1] en Afrique du Sud pour estimer les réserves d'une mine d'or. Le formalisme mathématique de la méthode est l'oeuvre du mathématicien français Matheron [3.2] dans les années 60. Les techniques d'estimation par krigeage ont été raffinées en géostatistique minière dans les années 70 et peu à peu, ces méthodes ont été appliquées dans des disciplines aussi variées que la cartographie numérique [3.3], la géotechnique et la modélisation géométrique.

3.1.1 Krigeage dual

Afin d'alléger la notation, la méthode est présentée en utilisant le vecteur de position $X = x$, $X = (x, y)$ et $X = (x, y, z)$ pour les cas 1D, 2D et 3D respectivement. Une des caractéristiques intéressantes du krigeage est la possibilité de traiter des problèmes dont la dimension de l'espace est supérieure à 3, en fait la dimension de l'espace d'interpolation est théoriquement illimitée. Le but du krigeage est d'estimer la valeur d'une fonction

aléatoire U(X) à une position particulière X lorsqu'un ensemble de N mesures u_i ont été prises aux positions X_i. La fonction $u^*(X)$ est l'estimation tandis que U(X) est la fonction inconnue qu'on cherche à évaluer. Le krigeage dual consiste à décomposer la fonction inconnue $u^*(X)$ en une somme de deux termes :

$$u^*(X) = a(X) + b(X) \tag{3.1}$$

Le terme a(X) appelé *dérive* représente la valeur moyenne du phénomène. La dérive peut être une fonction polynomiale de degré k (k étant un entier supérieur à 0) ou une fonction trigonométrique. La dérive est représentée par une somme de M fonctions de base $p_l(X)$, $1 \leq l \leq M$. Le tableau 3.1 présente une série de choix possibles pour exprimer la dérive. Le choix de la dérive est arbitraire. Celle-ci représente le comportement moyen du phénomène physique étudié et plus elle se rapproche du phénomène étudié, meilleures seront les interpolations.

Tableau 3.1 : Différents choix de dérive pour le krigeage dual.

$a(X)=\sum_{l=1}^{M} a_l\, p_l(X)$			
Dim. de l'espace	Choix de dérive	M	Développement de a(X)
1D	Constante	1	$a(x) = a_1$
1D	Cubique	4	$a(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$
1D	Trigonométrique	3	$a(x) = a_1 + a_2\cos(2\pi x) + a_3\sin(2\pi x)$
2D	Quadratique	6	$a(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy$
3D	Linéaire	4	$a(x,y,z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z$

Le second terme b(X) appelé *covariance* représente les fluctuations autour de la valeur moyenne du phénomène. Plus la distance entre le point d'interpolation X et un échantillon X_j est importante, moins l'influence de cet échantillon sur l'interpolation devrait être significative. Par conséquent, il est raisonnable de supposer que l'importance

de l'influence d'un échantillon dépend uniquement de la distance euclidienne $h = |X-X_j|$ qui sépare cet échantillon du point d'interpolation. À titre d'exemple, la distance euclidienne entre deux points X_1 et X_2 dans un espace bidimensionnel est :

$$h = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{1/2} \tag{3.2}$$

La covariance b(X) est exprimée en fonction de la *covariance généralisée* K(h) qui est simplement fonction de la distance euclidienne h. La covariance est finalement représentée par une combinaison linéaire de la covariance généralisée associée à chaque point de mesure X_j pondéré par un coefficient b_j. Le tableau 3.2 présente l'expression de la covariance b(X) ainsi que quelques choix possibles de covariance généralisée K(h).

Tableau 3.2 : Différents choix de covariance généralisée pour le krigeage dual.

$b(X) = \sum_{j=1}^{N} b_j K(\|X - X_j\|)$	
Choix de covariance généralisée	Expression de K(h)
Linéaire	$K(h) = h$
Logarithmique	$K(h) = h^2 \ln(h)$
Cubique	$K(h) = h^3$
Gaussienne	$K(h) = \exp(-h^2)$

En choisissant différentes dérives et covariances généralisées, l'allure de la fonction $u^*(X)$ est modifiée. Il est démontré que le choix d'une dérive linéaire et d'une covariance cubique est l'équivalent d'une interpolation par des splines cubiques. Dans *KRIGAMF*, le choix d'une dérive linéaire et d'une covariance linéaire a été préconisé. Des fonctions linéaires par morceaux sont alors obtenues. En optant pour une autre combinaison, des fonctions plus "continues" auraient été calculées, mais certaines fluctuations locales indésirables peuvent nuire au bon fonctionnement de *KRIGAMF*. Finalement, l'expression de la fonction d'estimation $u^*(X)$ est donnée par l'équation suivante :

$$u^*(X) = \sum_{l=1}^{M} a_l p_l(X) + \sum_{j=1}^{N} b_j K\left(\left|X - X_j\right|\right) \tag{3.3}$$

L'équation (3.3) possède M+N coefficients inconnus à déterminer, soit les M coefficients a_l et les N coefficients b_j. Il faut donc élaborer M+N équations. Une première série de N équations est obtenue en imposant que la fonction $u^*(X)$ passe par les N points de mesure, soit $u^*(X_i) = u_i$ pour $1 \leq i \leq N$. Une série additionnelle de M équations est le résultat des *conditions de non-biais*. Sans entrer dans les détails techniques, les conditions de non-biais imposent que la dérive corresponde au comportement moyen du phénomène. Voici deux exemples particuliers pour lesquels il faut imposer trois conditions de non-biais :

- espace 1D avec dérive quadratique : $\sum_{i=1}^{N} b_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} b_i x_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} b_i x_i^2 = 0$

- espace 2D avec dérive linéaire : $\sum_{i=1}^{N} b_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} b_i x_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} b_i y_i = 0$

En forçant la fonction $u^*(X)$ à passer par les points de mesure et en imposant les conditions de non-biais, un système symétrique de M+N équations à M+N inconnus est obtenu. La résolution de ce système donné aux équations (3.4) permet de déterminer les coefficients inconnus de l'équation (3.3). Pour interpoler un point de mesure à une position X, il suffit de remplacer les coordonnées de la position X dans l'équation (3.3) et une valeur interpolée $u^*(X)$ peut alors être calculée.

$$\begin{bmatrix} & & & & & p_1(X_1) & \cdots & p_1(X_j) & \cdots & p_M(X_1) \\ & \ddots & & \iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & K(\|X_i - X_j\|) & & & p_1(X_i) & \cdots & p_1(X_j) & \cdots & p_M(X_i) \\ & \iddots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & p_1(X_N) & \cdots & p_1(X_N) & \cdots & p_M(X_N) \\ p_1(X_1) & \cdots & p_1(X_j) & \cdots & p_1(X_N) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1(X_i) & \cdots & p_1(X_j) & \cdots & p_1(X_N) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_M(X_1) & \cdots & p_M(X_j) & \cdots & p_M(X_N) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_N \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Une notion très importante appelée *effet de pépite* peut être prise en considération lorsque des données expérimentales entachées d'erreurs de mesure sont manipulées. L'effet de pépite est une perturbation du système de krigeage suite à l'addition d'une valeur P aux termes diagonaux de la matrice de krigeage. De cette façon, la fonction d'interpolation ne passe plus exactement par les points de mesure. Plus la valeur de P augmente, plus la déviation de la fonction par rapport aux points de mesure est importante. Pour une valeur très élevée de l'effet de pépite, le krigeage se réduit à la méthode des moindres carrés et la fonction d'interpolation est exprimée par la dérive seulement. Dans *KRIGAMF*, aucun effet de pépite n'est pris en considération et la fonction d'interpolation passe toujours par tous les points de mesure.

La *distance d'influence* est une autre notion importante qui permet de simplifier le système d'équations. Il s'agit de modifier le terme de covariance généralisée K(h) de façon à ce qu'il devienne nul lorsque la distance euclidienne h entre deux points excède une certaine valeur. Certains échantillons n'ont donc pas d'influence sur la fonction d'interpolation $u^*(X)$ lorsqu'ils sont suffisamment éloignés de la position X. Le système d'équations se réduit alors à une matrice bande, ce qui facilite sa résolution. Par contre, la distance d'influence optimale n'est pas facile à déterminer et son choix peut affecter considérablement la précision de la fonction d'interpolation. Dans *KRIGAMF*, il n'a pas été jugé nécessaire d'utiliser une distance d'influence.

3.1.2 Krigeage paramétrique des courbes

Dans *KRIGAMF*, le comportement d'un AMF est essentiellement décrit par des surfaces paramétriques qui ont été krigées. Avant de discuter des équations du krigeage paramétrique des surfaces, il est impératif de présenter le krigeage paramétrique des courbes.

Dans un espace Cartésien tridimensionnel défini par les axes x, y et z, l'équation paramétrique d'une courbe est décrite par trois fonctions $\boldsymbol{P}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$. Le krigeage permet de construire automatiquement les fonctions $\boldsymbol{P}(t)$ à partir de N points $\boldsymbol{P}_i(x_i,y_i,z_i)$, $1 \le i \le N$. Par exemple, dans le cas d'une dérive linéaire et d'une covariance cubique, l'équation paramétrique d'une courbe krigée s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{P}(t) = a_0 + a_1 t + \sum_{j=1}^{N} b_j \left| t - t_j \right|^3 \tag{3.5}$$

où les paramètres t_j , $1 \le j \le N$, dénotent une approximation de la longueur de la courbe calculée à partir de $t_1 = 0$ selon l'équation suivante :

$$t_{i+1} = t_i + \left[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 \right]^{1/2}, \qquad 1 \le i \le (N-1) \tag{3.6}$$

Les deux premiers termes a_0 et a_1 de l'équation (3.5) représentent la dérive de la courbe krigée, c'est-à-dire le comportement moyen qui est linéaire dans le cas présent. La covariance est la sommation comprenant les N coefficients b_j. À l'équation (3.5), une covariance cubique a été choisie arbitrairement. Les coefficients a_0 , a_1 et b_j sont obtenus en imposant que l'équation (3.5) passe par les N points connus :

$$\boldsymbol{P}(t_i) = \boldsymbol{P}_i(x_i, y_i, z_i) \qquad 1 \le i \le N \tag{3.7}$$

et en imposant les conditions de non-biais qui s'écrivent comme suit dans le cas d'une dérive linéaire :

$$\sum_{j=1}^{N} b_j = 0 \qquad \sum_{j=1}^{N} b_j t_j = 0 \tag{3.8}$$

Les équations (3.7) et (3.8) sont suffisantes pour déterminer les coefficients a_0, a_1 et b_j de la courbe paramétrique. Le système symétrique obtenu est donné aux équations (3.9) en notation matricielle. Dans le cas où la courbe paramétrique est définie dans un espace tridimensionnel, trois séries de coefficients sont calculées. Les $\boldsymbol{P}_i$ des équations (3.9) sont alors remplacés à tour de rôle par les cordonnées x_i, y_i et z_i.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \iddots & 1 & t_1 \\ & |t_i - t_j|^3 & & 1 & t_i \\ \iddots & & \ddots & 1 & t_N \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & t_j & t_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_N \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_i \\ \boldsymbol{P}_N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

3.1.3 Krigeage paramétrique des surfaces

Une surface dans un espace tridimensionnel peut être décrite par une équation paramétrique de la forme $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(s,t)$ où les trois composantes de $\boldsymbol{P}$ sont $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ et $z = z(s,t)$. Deux profils de krigeage A et B doivent être choisis selon les directions paramétriques s et t respectivement. Un profil de krigeage est caractérisé par une dérive et une covariance qui gouvernent la forme de la surface paramétrique. Afin de simplifier les prochains développements, les profils de krigeage A et B sont supposés

identiques. L'équation paramétrique d'une courbe selon la direction t pour le profil A avec une dérive linéaire et une covariance généralisée $K_a(h)$ s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{P}_t(s) = a_0 + a_1 s + \sum_{i=1}^{I} b_i K_a\left(|s - s_i|\right) \tag{3.10}$$

On suppose ici qu'il existe J sections orientées selon la direction t et que chaque section est définie par I points $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, $1 \le i \le I$ et $1 \le j \le J$. L'équation paramétrique des J sections est donnée par l'équation (3.10) où les coefficients a_0, a_1 and b_i sont la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \iddots & 1 & s_1 \\ & K_a\left(|s_i - s_k|\right) & & 1 & s_i \\ \iddots & & \ddots & 1 & s_I \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_k & s_I & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_I \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{1j} & \boldsymbol{P}_{1J} \\ \boldsymbol{P}_{i1} & \boldsymbol{P}_{ij} & \boldsymbol{P}_{iJ} \\ \boldsymbol{P}_{I1} & \boldsymbol{P}_{Ij} & \boldsymbol{P}_{IJ} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.11}$$

La notation employée dans le terme de droite de l'équation (3.11) inclut les points des J sections considérées selon la direction t. En fait, il existe une série de coefficients a_0, a_1 et b_i pour chaque section. L'équation (3.11) peut être écrite sous forme compacte de la manière suivante :

$$[K_A] \cdot \{b\} = [\boldsymbol{P}] \tag{3.12}$$

où $\{b\} = \{b_1 \quad b_i \quad b_I \quad a_0 \quad a_1\}^T$. En résolvant $\{b\}$, on obtient :

$$\{b\} = [K_A]^{-1} \cdot [\boldsymbol{P}] \tag{3.13}$$

En substituant ce dernier résultat dans l'équation (3.10), l'équation paramétrique des J sections orientées selon la direction t est obtenue :

$$\left\{\boldsymbol{P}_t(s)\right\}^T = \left\{K_a(|s-s_1|) \quad K_a(|s-s_i|) \quad K_a(|s-s_I|) \quad 1 \quad s\right\} \cdot \left[K_A\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & \iddots \\ & \boldsymbol{P}_{ij} & \\ \iddots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Tout comme pour le profil A, l'équation paramétrique d'une courbe selon le profil B avec une dérive linéaire s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{P}_s(t) = A_0 + A_1 t + \sum_{j=1}^{J} B_j K_b(|t-t_j|) \tag{3.15}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \iddots & 1 & t_1 \\ & K_b(|t_j - t_q|) & & 1 & t_j \\ \iddots & & \ddots & 1 & t_J \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & t_q & t_J & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_j \\ B_J \\ A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & | & \boldsymbol{P}_{i1} & | & \boldsymbol{P}_{I1} \\ \boldsymbol{P}_{1j} & | & \boldsymbol{P}_{ij} & | & \boldsymbol{P}_{Ij} \\ \boldsymbol{P}_{1J} & | & \boldsymbol{P}_{iJ} & | & \boldsymbol{P}_{IJ} \\ 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Finalement, l'équation des I sections selon la direction s devient :

$$\left\{\boldsymbol{P}_s(t)\right\}^T = \left\{K_b(|t-t_1|) \quad K_b(|t-t_j|) \quad K_b(|t-t_J|) \quad 1 \quad t\right\} \cdot \left[K_B\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & \iddots \\ & \boldsymbol{P}_{ij}^T & \\ \iddots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Les équations (3.14) et (3.17) peuvent être rassemblées dans une seule formulation afin d'incorporer simultanément les équations des I et J sections selon les directions s et t :

$$\boldsymbol{P}(s,t)=\begin{bmatrix}\cdots & K_a\left(\left|s-s_i\right|\right) & \cdots & 1 & s\end{bmatrix}\left[K_A\right]^{-1}\begin{bmatrix}\ddots & & \iddots & 0 & 0\\ & P_{ij} & & \vdots & \vdots\\ \iddots & & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\left[K_B\right]^{-1}\begin{bmatrix}\vdots\\ K_b\left(\left|t-t_j\right|\right)\\ \vdots\\ 1\\ t\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

L'équation (3.18) constitue la représentation paramétrique d'une surface complexe. La dérive et la covariance de chaque profil peuvent être modifiées, ce qui affecte la forme de la surface krigée. Lorsque $K(h) = h$, une surface linéaire par morceaux est obtenue et c'est le choix qui est préconisé dans *KRIGAMF*. Il peut être démontré qu'une combinaison d'une covariance cubique $K(h) = h^3$ et d'une dérive linéaire est l'équivalent des interpolations par splines bicubiques.

Dans le modèle phénoménologique *KRIGAMF*, le comportement d'un AMF est représenté par quatre surfaces paramétriques. En fait, il y a deux surfaces paramétriques qui modélisent le comportement en chargement et deux autres pour le comportement en déchargement. La réponse de l'alliage à une sollicitation quelconque peut ensuite être calculée en interpolant sur les surfaces paramétriques. Comme nous le verrons un peu plus loin dans le chapitre, les variables $\boldsymbol{P}$ des équations (3.10) à (3.18) doivent être interprétées comme étant soit la contrainte σ ou la déformation ε.

3.2 Philosophie du modèle

Au début des travaux [3.4], *KRIGAMF* fut développé pour satisfaire un besoin particulier qui concernait la prédiction du comportement macroscopique d'une composante simple à mémoire de forme. Une composante simple est une pièce mécanique déformable dont le comportement macroscopique peut être décrit par le déplacement d'un point particulier de la composante sous l'application d'une charge à une température donnée. La figure 3.1 présente trois exemples de composantes simples. Une poutre en flexion peut être étudiée

macroscopiquement en appliquant une force F à une température donnée et en mesurant la flèche v à l'extrémité libre. Une rondelle Belleville est un corps axisymétrique dont l'écrasement δ peut être mesuré en appliquant une force P à une température donnée. Dans le cas d'un arbre en torsion de géométrie complexe, la rotation angulaire θ de l'extrémité libre peut être analysée en fonction du couple appliqué T et de la température. En somme, n'importe quelle composante simple peut faire l'objet d'une telle analyse si son comportement macroscopique est décrit par trois paramètres caractéristiques : une force, un déplacement et la température.

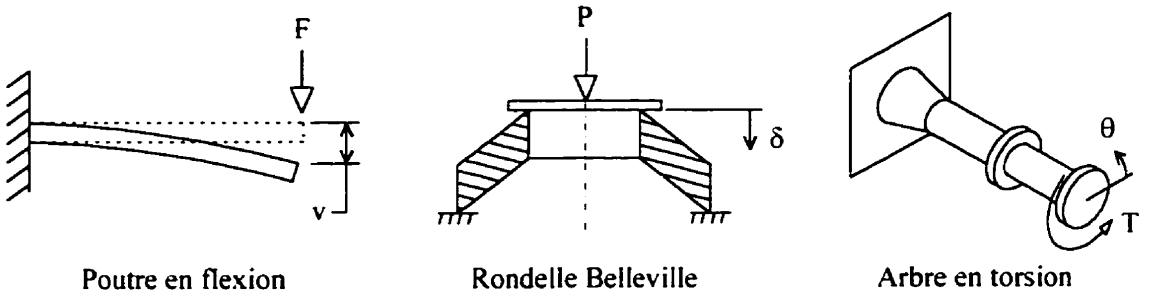


Figure 3.1 Trois exemples de composantes mécaniques simples.

La modélisation avec *KRIGAMF* du comportement thermomécanique d'une composante simple nécessite d'abord la construction d'un prototype qui est ensuite expérimentalement caractérisé. L'idée principale est de prédire la réponse de la composante en AMF soumise à des chargements thermomécaniques différents de ceux utilisés lors de la caractérisation. En d'autres mots, la réponse globale d'une composante en AMF doit être prédite à partir d'un nombre limité d'essais expérimentaux préliminaires. La meilleure façon de caractériser expérimentalement une composante en alliage à mémoire de forme est probablement d'obtenir quelques courbes isothermes à différentes températures. Des essais expérimentaux faisant intervenir des variations de températures sont souvent difficiles à réaliser avec précision. En effet, la dilatation thermique et le régime transitoire de la diffusion thermique sont parmi les causes qui peuvent affecter la

précision des résultats expérimentaux lors d'un essai non-isotherme. À différentes températures, un chargement suivi d'un déchargement sont imposés en contrôlant soit la force ou soit le déplacement caractéristique de la composante simple. La paire de courbes obtenue à chaque température forme une hystérésis comme le montre le schéma de gauche de la figure 3.2. Ces courbes représentent le comportement isotherme à différentes températures d'une rondelle Belleville en AMF. L'axe F représente la force appliquée sur la rondelle, l'axe D l'écrasement de la rondelle et T la température. Par la suite, l'équation de deux surfaces qui passent exactement par les courbes expérimentales sont calculées par l'entremise du krigeage paramétrique. Ces deux surfaces sont montrées au centre de la figure 3.2. La première surface représente le comportement au chargement, alors que la seconde correspond au déchargement. Par interpolations successives sur ces deux surfaces, la réponse de la rondelle Belleville sous un chargement thermomécanique quelconque peut être estimée. Le schéma de droite de la figure 3.2 montre un cycle d'hystérésis particulier obtenu en variant simultanément la température et la contrainte. Ainsi, il est possible de calculer le comportement macroscopique d'une composante en AMF soumise à des variations de température en utilisant seulement des courbes expérimentales isothermes. Les détails concernant les algorithmes de calculs sont présentés dans les prochaines sections. Pour l'instant, une présentation globale de *KRIGAMF* est recherchée.

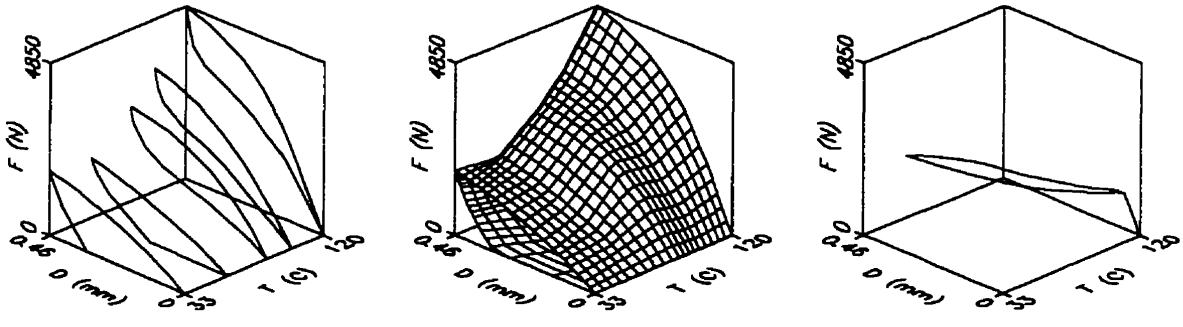


Figure 3.2 Courbes isothermes expérimentales (gauche), surfaces krigées (centre) et réponse thermomécanique (droite) d'une rondelle Belleville en AMF.

Avec une telle méthodologie, seul le comportement macroscopique d'une composante simple en AMF peut être étudié. De plus, il est impératif que les conditions d'application de la force et de mesure du déplacement imposées lors des calculs soient identiques aux conditions imposées lors de la caractérisation expérimentale. Par exemple, il est impossible de caractériser une poutre en flexion encastrée en appliquant une force à l'extrémité libre et d'utiliser les résultats expérimentaux pour calculer le comportement de la même poutre alors que la force est appliquée au milieu de la poutre. Dans un tel cas, les conditions imposées lors de la caractérisation et lors des calculs sont différentes. Pour effectuer de telles analyses, des méthodes numériques plus générales comme les éléments finis doivent être employées. De plus, la température et les variations de température à l'intérieur d'une composante simple sont supposées homogènes lorsqu'une réponse non-isotherme de la composante est calculée avec *KRIGAMF*. Ces conditions sont restrictives même si cette démarche peut s'avérer utile pour calculer la réponse thermomécanique d'une composante en AMF existante. En somme, une nouvelle caractérisation expérimentale doit être exécutée à chaque fois que la géométrie de la composante ou les conditions d'application de la force et de mesure du déplacement sont modifiées.

Le modèle tel que décrit jusqu'à maintenant ne peut pas être considéré comme un outil de conception général permettant l'optimisation des performances d'une composante en AMF. Par contre, cette lacune peut être corrigée en remplaçant respectivement la force appliquée sur la composante simple et le déplacement correspondant par la contrainte et la déformation uniaxiales. De cette façon, les données expérimentales nécessaires à la caractérisation deviennent des courbes contrainte-déformation à différentes températures. Le modèle construit dans *KRIGAMF* ne représente plus le comportement d'une composante simple soumise à des conditions de chargement particulières, mais plutôt le comportement intrinsèque d'un AMF en tension uniaxiale. Grâce à l'efficacité et à la généralité du krigeage, une relation constitutive uniaxiale, hystérétique, non-linéaire et dépendante de la température peut être construite à partir d'une série de courbes isothermes à différentes températures. La méthodologie employée ici en chargement

uniaxial peut également être généralisé pour obtenir une relation constitutive tridimensionnelle (voir la section au chapitre 4 décrivant *KRIGAMF* utilisé comme relation constitutive dans le programme d'éléments finis *SIMAMF*). Le fonctionnement de *KRIGAMF* utilisé comme relation constitutive uniaxiale est décrit dans les prochaines sections. Une discussion identique aurait pu être effectuée avec *KRIGAMF* utilisé comme relation constitutive d'une composante simple, sauf que la contrainte et la déformation doivent respectivement être remplacées par une force et un déplacement, ce qui est effectué au chapitre 5 pour décrire et calculer le comportement macroscopique d'une rondelle Belleville.

3.3 Construction du modèle

La construction du modèle est effectuée en plusieurs étapes comme le montre la figure 3.3. La première étape consiste à obtenir une série de courbes de chargement et de déchargement isothermes à différentes températures. Le nombre de courbes est arbitraire. Plus ce nombre est élevé, meilleure est la précision des résultats, mais le temps d'exécution des calculs est plus long. Habituellement, un bon compromis entre le temps et la précision des calculs consiste à employer un nombre de courbes isothermes variant entre 4 et 8. À la figure 3.3, on utilise une série de courbes obtenues à partir de quatre températures différentes notées T1 à T4 où T1 est la plus faible température et T4 la plus élevée. Le nombre de courbes n'est pas un paramètre important, mais dans tous les cas, la différence entre les températures maximale et minimale atteintes lors de la caractérisation doivent inclure l'intervalle des températures couvert lors des calculs. Chaque courbe est décrite par un chargement suivi d'un déchargement. Afin de ne pas surcharger les schémas, l'étape A de la figure 3.3 présente seulement deux des quatre courbes isothermes, soit aux températures T2 et T4. Les noms SIGMA et EPSILON qui servent de titres aux axes de la figure 3.3 représentent respectivement la contrainte et la déformation uniaxiales de la relation constitutive.

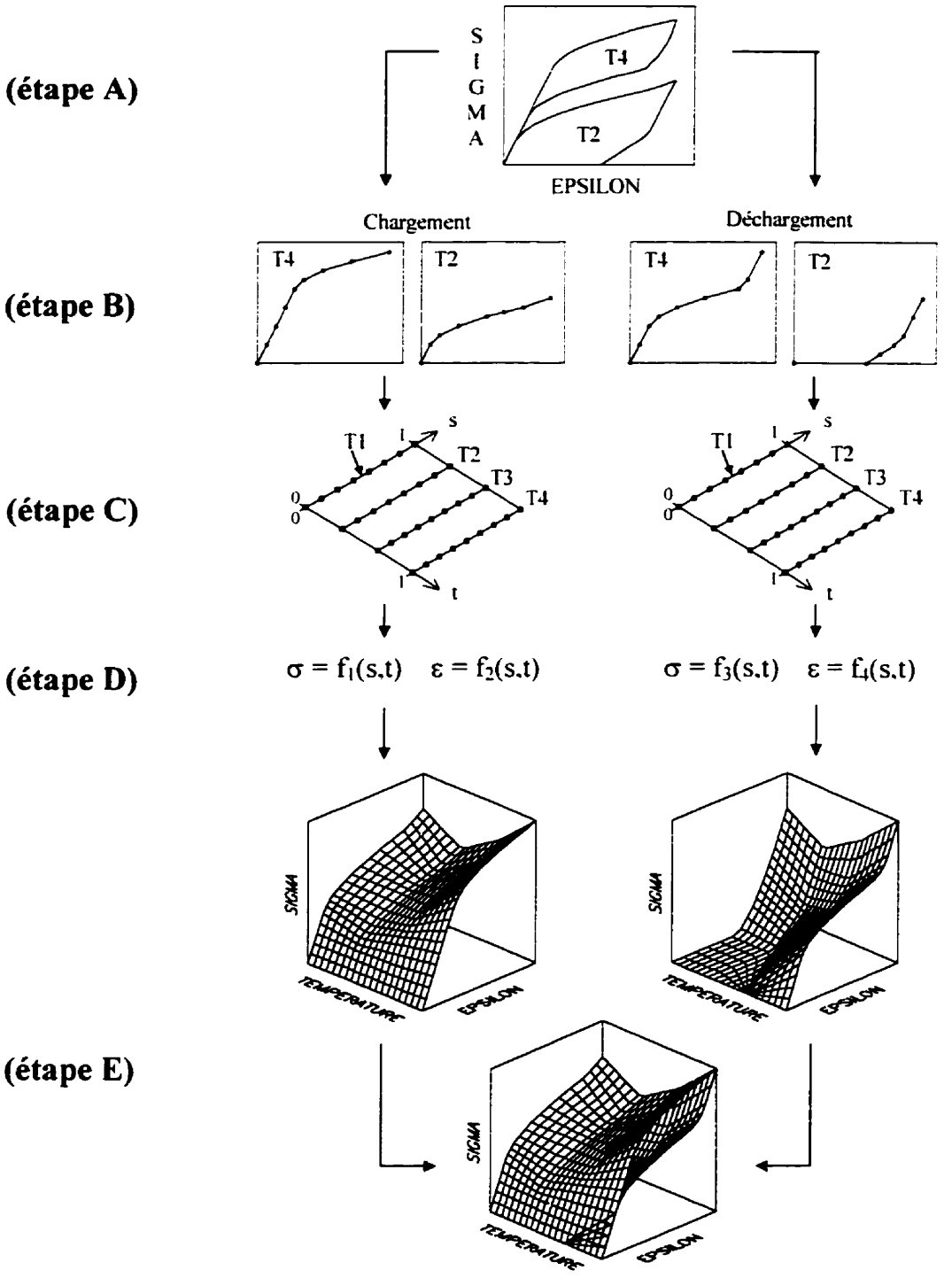


Figure 3.3 Obtention par krigeage de l'équation mathématique de deux séries de surfaces paramétriques, une pour le chargement et l'autre pour le déchargement

La relation constitutive est construite à partir de courbes isothermes et ce choix est fondé sur des considérations expérimentales. Il est généralement plus facile d'obtenir plusieurs courbes isothermes pour caractériser l'alliage sur un intervalle de température plutôt que d'effectuer des essais comportant des variations de température. Un essai expérimental non-isotherme est souvent affecté par divers facteurs comme la vitesse de chauffage et de refroidissement, la diffusion de la chaleur produisant un champ non-homogène de la température et la différence au niveau des coefficients de dilatation thermique des composantes du montage expérimental pouvant engendrer des contraintes mécaniques.

L'étape B de la figure 3.3 montre que plusieurs points contrainte-déformation doivent être prélevés sur les courbes isothermes. Tout comme le nombre de courbes isothermes, le nombre de points par courbe est également arbitraire. Habituellement, entre 6 et 15 points sont suffisants et le nombre de points prélevés peut être différent d'une courbe à l'autre. Par exemple, les courbes de chargement aux températures T2 et T4 de la figure 3.3 sont respectivement représentées par 8 et 9 points. Les valeurs de contrainte, de déformation et de température sont relevées pour chaque point.

En plus de la contrainte, de la déformation et de la température, deux paramètres additionnels doivent être calculés pour chaque point prélevé sur les courbes. Ces paramètres additionnels appelés *coordonnées normalisées* s et t sont sans signification physique et par conséquent purement numériques. Les coordonnées normalisées s et t jouent le rôle des paramètres d'interpolation lors de la construction par krigeage des surfaces paramétriques. L'idée directrice est d'associer une coordonnée normalisée (s, t) unique à chaque point constituant les courbes de chargement ou de déchargement. Le paramètre t qui dépend uniquement du nombre de courbes isothermes est calculé selon l'équation suivante :

$$t_i = \frac{i-1}{N-1} \tag{3.19}$$

où i représente la numérotation des courbes isothermes ($1 \leq i \leq N$) et N le nombre total de courbes. À la figure 3.3, tous les points prélevés sur la courbe isotherme T1 reçoivent la valeur $t_1 = 0.0000$, ceux sur T2, $t_2 = 0.3333$, sur T3, $t_3 = 0.6667$ et finalement, ceux sur T4 reçoivent $t_4 = 1.0000$. En fait, le paramètre t correspond à la température normalisée de chaque courbe. La coordonnée normalisée s est calculée de façon similaire, sauf qu'elle dépend uniquement du nombre de points par courbe :

$$s_j = \frac{j-1}{P-1} \tag{3.20}$$

où j représente la numérotation des points prélevés sur une courbe ($1 \leq j \leq P$) et P le nombre total de points qui décrivent la courbe isotherme. Par exemple, à la figure 3.3, la courbe isotherme T4 est décrite par 9 points et les valeurs de la coordonnée normalisée s est alors $s_1 = 0.000$, $s_2 = 0.125$, $s_3 = 0.250$, ..., $s_9 = 1.000$. Lorsque les coordonnées normalisées ont été calculées, tous les points prélevés sur les courbes isothermes sont inclus dans un carré unitaire défini dans l'espace bidimensionnel des paramètres s et t (voir l'étape C de la figure 3.3). Il est à noter qu'il existe un ensemble de coordonnées normalisées pour le comportement en chargement des courbes isothermes et un autre ensemble pour le comportement en déchargement.

Les coordonnées normalisées s et t sont automatiquement calculées à partir du nombre de courbes et du nombre de points prélevés sur chaque courbe. Par conséquent, ces paramètres sont des variables internes au modèle qui sont complètement transparentes à un usager de *KRIGAMF*. Lorsque les coordonnées normalisées ont été calculées, l'équation de quatre surfaces paramétriques est obtenue par krigeage. On désire obtenir l'équation d'une surface paramétrique de la contrainte σ et de la déformation ε en fonction des coordonnées normalisées s et t, et cela autant au chargement qu'au déchargement. Les quatre surfaces paramétriques sont représentées par les équations montrées à l'étape D de

la figure 3.3. Les coefficients qui décrivent les surfaces paramétriques sont obtenus à partir de l'équation (3.18) où la variable ***P*** est remplacée par σ ou ε selon le cas.

Puisque les trois paramètres significatifs à un usager de *KRIGAMF* sont la contrainte σ, la déformation ε et la température T, la représentation visuelle des surfaces est effectuée sans prendre en considération les coordonnées normalisées s et t. Le comportement en chargement du matériau est numériquement modélisé par deux surfaces paramétriques qui se réduisent à une seule surface tridimensionnelle uniquement pour la visualisation. Bien entendu, le comportement au déchargement est modélisé de la même façon. Une série de points (σ, ε, T) sont calculés pour un nombre quelconque de coordonnées normalisées (s, t). Les points (σ, ε, T) forment une surface tridimensionnelle dans l'espace contrainte-déformation-température comme le montre l'étape E de la figure 3.3 où les surfaces de chargement et de déchargement sont séparées et ensuite superposées.

À la figure 3.3, *KRIGAMF* est utilisé pour décrire le comportement en tension uniaxiale d'un alliage à mémoire de forme. Une version en tension-compression du modèle est disponible. Il devient alors possible de prendre en considération l'asymétrie du comportement d'un AMF en tension et en compression uniaxiale. Généralement, les contraintes nécessaires à transformer l'alliage sont plus grandes en compression qu'en tension dans le régime superélastique. Le schéma supérieur de la figure 3.4 montre les courbes isothermes qui ont été expérimentalement obtenues pour construire le modèle. Bien entendu, la procédure expérimentale est plus complexe pour obtenir des courbes en tension-compression à partir d'un même échantillon. Dans un premier temps, la machine de traction doit pouvoir générer de la compression et dans un second temps, les échantillons doivent être suffisamment costauds afin d'éviter le flambement lors de la compression. Un nombre plus élevé de points doit être prélevé sur les courbes expérimentales afin d'obtenir une précision similaire à celle obtenue avec seulement des courbes en traction. Par conséquent, la vitesse de calcul avec un modèle en tension-

compression est forcément affectée. Les deux schémas inférieurs de la figure 3.4 donnent une représentation des surfaces de chargement et de déchargement qui définissent la relation constitutive selon deux angles d'observation. À gauche, l'emphase est mise sur le comportement superélastique tandis qu'à droite, le comportement pseudo-plastique (ou ferroélastique) est mis en évidence. On remarque la présence de deux volumes d'hystérésis distincts en superélasticité qui s'unissent pour n'en former qu'un seul en pseudo-plasticité. Le modèle de la figure 3.4 est assez complet puisqu'il traite tous les régimes en température en plus de prendre en considération l'asymétrie du comportement en tension et en compression.

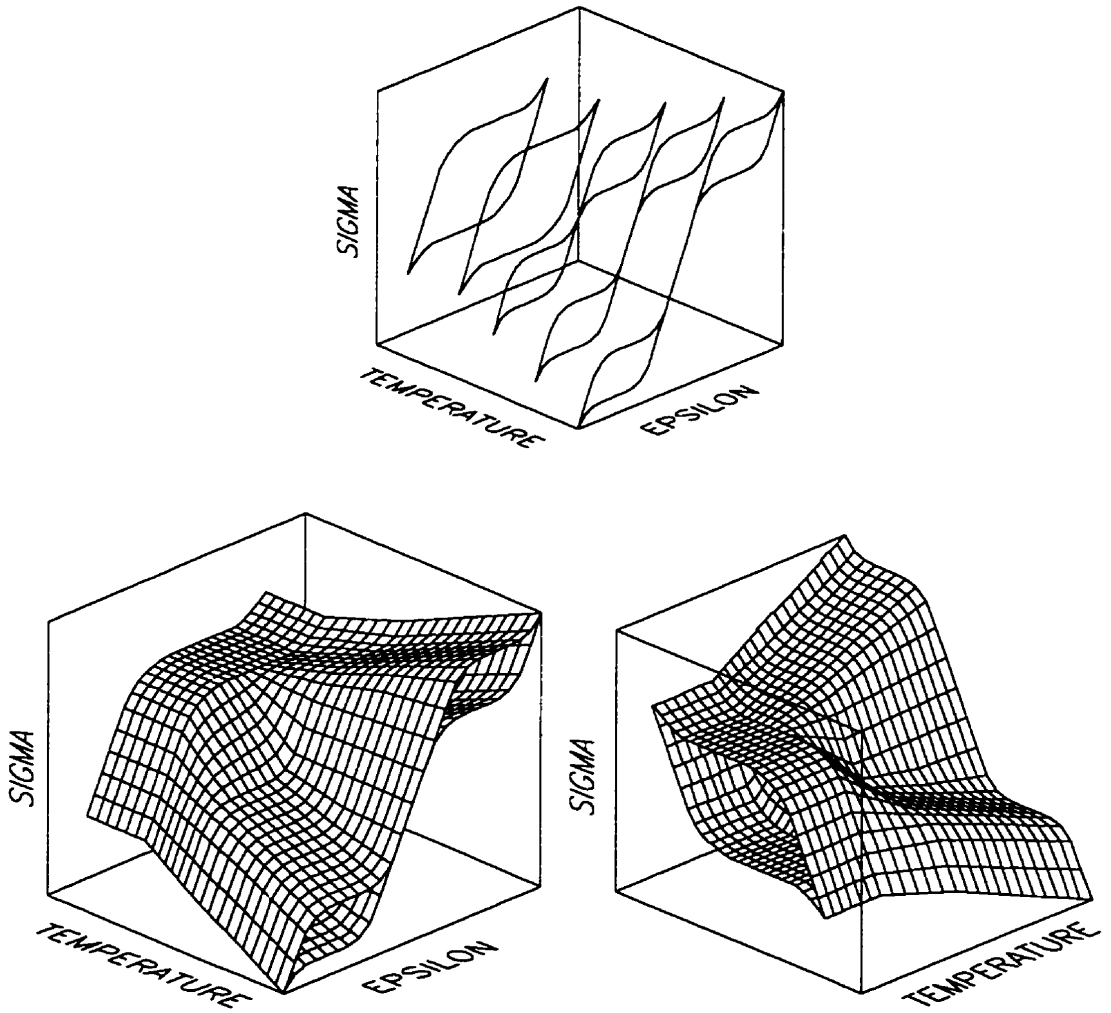
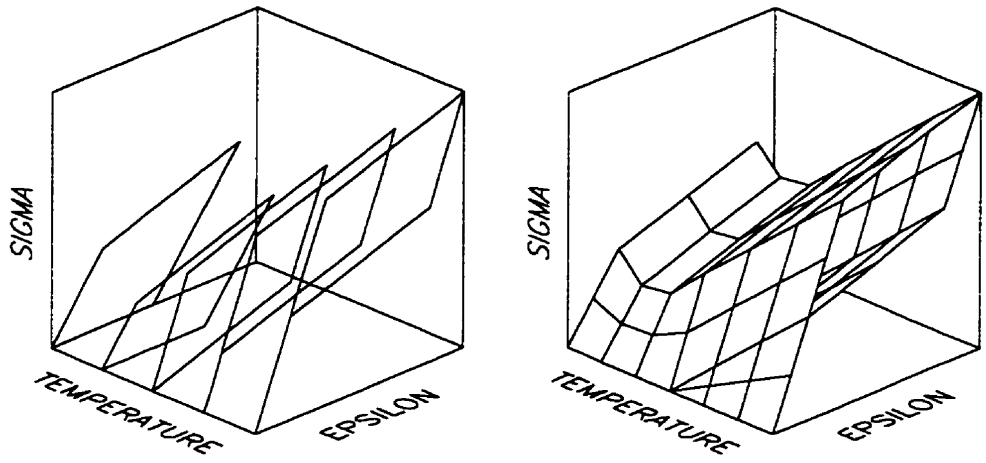


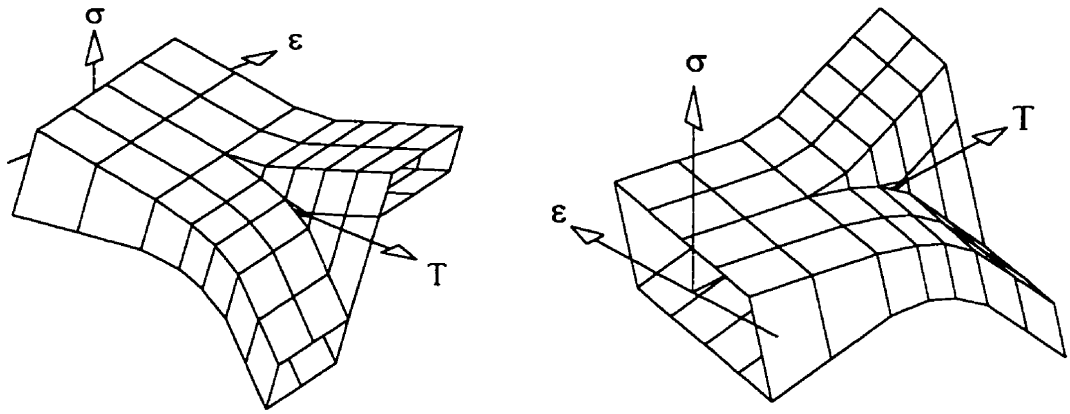
Figure 3.4 Version tension-compression de *KRIGAMF*.

Une version bilinéaire de *KRIGAMF* est également disponible car le comportement isotherme peut être représenté par deux droites. Le schéma supérieur gauche de la figure 3.5 montre quelques courbes isothermes en tension seulement qui servent à construire les surfaces dans *KRIGAMF*. Avec la version bilinéaire, les surfaces sont représentées par une série de plans reliés les uns aux autres comme le laisse entrevoir le schéma supérieur droit de la figure 3.5. La version bilinéaire peut également être utilisée en tension-compression. Les deux schémas inférieurs de la figure 3.5 illustrent un tel exemple selon deux perpectives différentes où la contrainte de début de transformation de phase en compression est supérieure à celle en tension pour le régime superélastique seulement. En effet, en regardant le schéma inférieur gauche de la figure 3.5 qui fait ressortir le comportement superélastique, on observe effectivement une contrainte de début de transformation de phase plus élevé en compression qu'en tension. L'autre perspective illustrée par le schéma inférieur droit de la figure 3.5 montre un comportement symétrique pour le régime pseudo-plastique.

Le modèle bilinéaire de *KRIGAMF* représente une simplification par rapport aux exemples présentés jusqu'à maintenant, mais la construction du modèle demeure identique. Par contre, seulement 3 points sont nécessaires pour définir les courbes isothermes afin de construire les surfaces paramétriques dans le cas du modèle en tension seulement. Dans certaines situations, il est avantageux d'opter pour une telle représentation principalement lorsqu'une grande vitesse de calcul est recherchée ou lorsque la mémoire est très limitée. De façon générale, le modèle bilinéaire génère des résultats moins précis car peu de points sont utilisés pour représenter le comportement isotherme de l'alliage. Par contre, des résultats d'une excellente précision peuvent être obtenus lorsque la transformation de phase dans l'alliage s'effectue de manière saccadée, ce qui est le cas des monocristaux ou de certains alliages Ti-Ni.



modèle en tension seulement



modèle en tension-compression

Figure 3.5 Version bilinéaire de *KRIGAMF*.

3.4 Algorithme de calcul

Une caractéristique importante de *KRIGAMF* est le *critère de chargement* qui détermine si l'alliage est en chargement ou en déchargement. Ce critère doit être fondé sur un seul paramètre afin de demeurer le plus général possible. Le critère de chargement pour une analyse isotherme peut simplement être la contrainte. Une augmentation de contrainte correspond à un chargement et une diminution de contrainte, à un déchargement. Un tel

critère fondé exclusivement sur la contrainte devient rapidement inadéquat lors d'analyses comportant des variations de température. Par exemple, un cycle thermique à contrainte constante balayant complètement l'intervalle de température compris entre A_f et M_f génère une hystérésis thermique. Puisque le chemin suivi lors du chauffage est différent de celui suivi lors du refroidissement et que la contrainte demeure constante, il est évident qu'un critère fondé exclusivement sur la contrainte est insuffisant.

Dans *KRIGAMF*, le critère de chargement est fondé sur un paramètre *appelé déformation de transformation* ε_{tr}. La signification physique de ce paramètre est simplement la différence entre la déformation totale ε_{tot} et la partie élastique ε_{el} de cette déformation. L'équation (3.21) présente la façon dont la déformation de transformation associée à une position est calculée à partir de sa contrainte et de sa déformation.

$$\varepsilon_{tr} = \varepsilon_{tot} - \varepsilon_{el} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \tag{3.21}$$

où σ et ε sont respectivement la contrainte et la déformation d'un point. E est le module d'élasticité de Young évalué à la température du point considéré. On suppose que le module d'élasticité est une fonction "linéaire par morceaux" de la température. Le calcul de ce module s'effectue par interpolation à partir des modules mesurés sur les courbes isothermes obtenues expérimentalement. Sur une courbe expérimentale, le module de Young est déterminé par la pente au tout début du chargement.

Le critère de chargement de *KRIGAMF* est simplement énoncé comme suit : *si la déformation de transformation tend à augmenter lors d'une variation simultanée ou non de la contrainte, de la déformation ou de la température, il s'agit alors d'un chargement. À l'opposé, si la déformation de transformation tend à diminuer suite à l'imposition d'une sollicitation thermomécanique, l'alliage est en déchargement.*

Après avoir caractérisé expérimentalement un alliage en traction ou en traction-compression uniaxiale, la réponse du matériau suite à l'imposition d'un chargement thermomécanique quelconque peut ensuite être calculée. Pour ce faire, deux paramètres de contrôle doivent être imposés de manière séquentielle. Les paramètres de contrôle peuvent être premièrement la température T et la contrainte σ ou deuxièmement, la température T et la déformation ε. Dans le premier cas, la déformation ε devient la réponse calculée de l'alliage alors que dans le second cas, la réponse est la contrainte σ. Pour la suite de la discussion concernant le fonctionnement de *KRIGAMF*, la température et la contrainte seront utilisées comme paramètres de contrôle, mais il est clair qu'un raisonnement analogue s'applique lorsque la seconde combinaison de paramètres de contrôle est employée.

La réponse de l'alliage est décrite par une série de positions où chacune d'entre elles appartient à un des quatre *états* admissibles suivants : surface principale de chargement, surface principale de déchargement, sous-cycle de chargement ou sous-cycle de déchargement. Les surfaces principales de chargement et de déchargement correspondent aux surfaces calculées directement à partir des points prélevés sur les courbes expérimentales isothermes. Les surfaces principales sont calculées une seule fois au début d'une analyse et elles sont conservées en mémoire. Lorsque le volume d'hystérésis délimité par les deux surfaces principales est traversé, un sous-cycle d'hystérésis est entrepris. Les positions de la réponse de l'alliage n'appartiennent plus à l'une ou l'autre des surfaces principales, mais plutôt à un sous-cycle. Contrairement aux surfaces principales, les sous-cycles sont construits de façon dynamique car leur nombre est infini. La construction des sous-cycles est discutée à la prochaine section.

Le critère de chargement fondé sur la déformation de transformation est utilisé dans un algorithme itératif qui calcule la prochaine position de la réponse à partir de l'information fournie par la position précédente. Il est à noter que pour la détermination de la position initiale de la réponse, on suppose que l'alliage repose sur une des deux surfaces

principales à une contrainte et une température donnée. À chaque itération, la valeur de la température et de la contrainte de la prochaine position est obtenue en ajoutant un incrément de température et de contrainte (qui sont en fait les paramètres de contrôle) à la température et la contrainte de la position précédente. L'état de la prochaine position est d'abord supposé identique à l'état de la position précédente. À titre d'exemple, imaginons pour l'instant que la position précédente appartient à la surface principale de chargement. Les coordonnées normalisées s et t qui correspondent à la prochaine position sont ensuite calculées.

Le paramètre t est plus facile à calculer car il dépend uniquement de la température de la prochaine position. Le paramètre s est obtenu en interpolant la valeur de la contrainte de la prochaine position sur la surface paramétrique de la contrainte au chargement. Puisque cette surface exprime la contrainte au chargement en fonction des coordonnées normalisées s et t, l'obtention du paramètre s pour une valeur donnée de la contrainte et du paramètre t ne s'effectue pas simplement. En effet, une série d'interpolations sont réalisées de façon séquentielle jusqu'à ce que la valeur de la contrainte de la prochaine position soit interpolée à une précision près. En somme, le paramètre s de la prochaine position est calculé par essais et erreurs, tout en suivant une approche ordonnée fondée sur un principe de dichotomie. Sachant que le paramètre s est compris entre 0.0 et 1.0, l'intervalle est divisé en deux et la première interpolation est effectuée à $s = 0.5$. Le paramètre t est gardé constant tout au long du processus de dichotomie à la valeur calculée grâce à la température de la prochaine position. Si la valeur de la contrainte de la prochaine position est supérieure à la contrainte interpolée à $s = 0.5$, l'intervalle entre 0.5 et 1.0 est divisé en deux et la prochaine interpolation est effectuée à $s = 0.75$. Sinon, c'est l'intervalle entre 0.0 et 0.5 qui est subdivisé en deux. L'intervalle devient de plus en plus petit au fil des itérations et une convergence est finalement obtenue après un nombre limité d'itérations. Cette technique s'appuie sur le fait que la contrainte et la déformation sont des fonctions croissantes par rapport à s.

Lorsque les coordonnées normalisées s et t ont été calculées afin d'obtenir la prochaine position décrite par une contrainte et une température, la déformation de la prochaine position est calculée. Cette dernière valeur est passablement plus facile à déterminer car elle est obtenue par simple interpolation sur la surface paramétrique de la déformation au chargement. En effet, la déformation est interpolée aux coordonnées normalisées s et t précédemment calculées. Connaissant la contrainte, la déformation et le module d'élasticité associé à la température de la prochaine position, la déformation de transformation de cette nouvelle position est calculée selon l'équation (3.21). Si la déformation de transformation de la prochaine position est supérieure ou égale à la déformation de transformation de la position précédente, alors la prochaine position repose également sur la surface principale de chargement. Si ce n'est pas le cas, deux scénarios peuvent survenir. Le premier scénario prévoit un passage direct de la surface principale de chargement vers la surface principale de déchargement. Cette situation est observée lorsque la position précédente est située à un endroit où les deux surfaces principales sont confondues. On remarque entre autres une superposition des surfaces principales aux premiers et derniers points des courbes isothermes. Le second scénario prévoit le passage de la surface principale de chargement vers un sous-cycle de déchargement lorsque la position précédente n'est pas située à un endroit où les deux surfaces principales sont superposées. Dans les deux scénarios, une nouvelle interpolation doit être réalisée pour connaître la prochaine position.

En résumé, dans le cas où la position précédente repose sur la surface principale de chargement, l'idée directrice est d'interpoler sur cette même surface principale la prochaine position et de vérifier si la déformation de transformation a tendance à augmenter. Si oui, la prochaine position interpolée est satisfaisante. Sinon, un déchargement est entrepris via la surface principale ou un sous-cycle. Une méthodologie similaire s'applique lorsque la position précédente appartient à la surface principale de déchargement. Dans un premier temps, on suppose que la prochaine position appartient également au déchargement principal. La prochaine position est d'abord interpolée pour

une contrainte et une température données et la déformation de transformation est ensuite calculée. Si la déformation de transformation tend à diminuer par rapport à la position précédente, le prochaine position appartient bel et bien à la surface principale de déchargement. Sinon, la prochaine position appartient soit à la surface principale de chargement ou soit à un sous-cycle de chargement, tout dépendant de la position précédente.

Lorsque la prochaine position a été calculée, une nouvelle itération peut être entreprise. On impose alors des incréments de température et de contrainte à partir de la position nouvellement calculée, position qui devient l'état précédent pour la prochaine itération. C'est en fait l'étape de mise-à-jour dans le processus itératif. Le calcul d'une réponse thermomécanique est passablement simple lorsque les positions reposent continuellement sur les surfaces principales. Par contre, la méthodologie devient plus complexe lorsque des sous-cycles d'hystérésis sont entrepris et la prochaine section discute de ce sujet.

3.5 Construction des sous-cycles d'hystérésis

Lorsque la réponse de l'alliage ne repose plus sur aucune des deux surfaces principales, un sous-cycle d'hystérésis est entrepris et le volume délimité par les deux surfaces est alors traversé. La construction d'un sous-cycle d'hystérésis est réalisée à partir de données prélevées sur les surfaces principales. Imaginons que la position précédente appartient à la surface principale de chargement. Cette position est représentée par le point A de la figure 3.6 où une situation isotherme est abordée afin de simplifier les explications. Une diminution de contrainte est appliquée à partir du point A où la contrainte est σ_A jusqu'à une valeur de contrainte σ_Q. La première opération consiste à interpoler sur la surface principale de chargement la prochaine position et le point Q^I est obtenu. La déformation de transformation du point Q^I est inférieure à celle du point A et par conséquent, la position Q^I n'est pas admissible. En effet, selon le critère de chargement de *KRIGAMF*, une diminution de la déformation de transformation résulte en

un déchargement et le point Q^1 ne peut donc pas demeurer sur la surface principale de chargement. Puisque le point A n'est pas sur une région où les deux surfaces principales sont superposées, un sous-cycle de déchargement est entrepris. Le départ du sous-cycle est la position précédente, en l'occurrence le point A pour l'exemple présent. Le point d'arrivée du sous-cycle dépend s'il s'agit du premier sous-cycle ou d'un autre sous-cycle. Dans le cas présentement étudié, un premier sous-cycle de déchargement est créé et le point d'arrivée est le point de jonction inférieure entre les deux surfaces principales représenté par le point B à la figure 3.6. Le chemin qu'épouse le sous-cycle entre les points A et B est dicté par le comportement de la surface principale entre les points E et F. Le point E est la jonction supérieure entre les deux surfaces principales et le point F est superposé au point B lors d'un premier sous-cycle. Ainsi, un point prélevé sur la surface principale de déchargement entre les points E et F possédant une contrainte σ_{EF} et une déformation ε_{EF} est projeté dans le volume d'hystérésis entre les points A et B selon les équations (3.22) avec une valeur de contrainte σ_{AB} et de déformation ε_{AB}.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= a_1 + a_2 \varepsilon_{EF} + a_3 \sigma_{EF} \\ \sigma_{AB} &= a_4 + a_5 \varepsilon_{EF} + a_6 \sigma_{EF} \end{aligned} \tag{3.22}$$

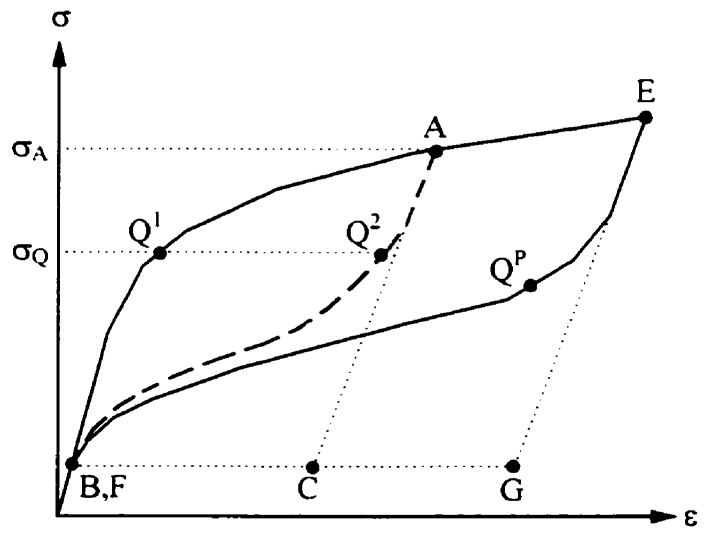


Figure 3.6 Construction d'un premier sous-cycle de déchargement.

Afin de calculer les *coefficients de projection* a_i donnés à l'équation (3.22), deux points additionnels C et G doivent être localisés. Le point G représente l'intersection de la droite de pente nulle passant par le point F avec la droite passant par le point E qui possède une pente égale à celle du point E au déchargement. De son côté, le point C est l'intersection de la droite de pente nulle passant par le point B avec la droite passant par le point A qui possède également la même pente que celle au point E. Les points C et G sont également représentés à la figure 3.6. Les six coefficients a_i des équations (3.22) sont déterminés en imposant que les points E, F et G soient respectivement projetés sur les points A, B et C. Ainsi, les six équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= a_1 + a_2\varepsilon_E + a_3\sigma_E & \sigma_A &= a_4 + a_5\varepsilon_E + a_6\sigma_E \\ \varepsilon_B &= a_1 + a_2\varepsilon_F + a_3\sigma_F & \sigma_B &= a_4 + a_5\varepsilon_F + a_6\sigma_F \\ \varepsilon_C &= a_1 + a_2\varepsilon_G + a_3\sigma_G & \sigma_C &= a_4 + a_5\varepsilon_G + a_6\sigma_G \end{aligned} \tag{3.23}$$

En notation matricielle, on obtient les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \\ \varepsilon_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_E & \sigma_E \\ 1 & \varepsilon_F & \sigma_F \\ 1 & \varepsilon_G & \sigma_G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_E & \sigma_E \\ 1 & \varepsilon_F & \sigma_F \\ 1 & \varepsilon_G & \sigma_G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

La résolution des deux systèmes d'équations précédents permettent de calculer les six coefficients a_i qui décrivent la projection d'un point appartenant à une surface principale vers un sous-cycle d'hystérésis. Bref, les coefficients de projection sont calculés avec les valeurs de contrainte et de déformation des points A, B, C, E, F et G comme le montrent les équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \\ \varepsilon_C \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } [T]^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} \varepsilon_F\sigma_G - \varepsilon_G\sigma_F & \varepsilon_G\sigma_E - \varepsilon_E\sigma_G & \varepsilon_E\sigma_F - \varepsilon_F\sigma_E \\ \sigma_F - \sigma_G & \sigma_G - \sigma_E & \sigma_E - \sigma_F \\ \varepsilon_G - \varepsilon_F & \varepsilon_E - \varepsilon_G & \varepsilon_F - \varepsilon_E \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\text{et} \quad \det T = \varepsilon_F\sigma_G - \varepsilon_G\sigma_F + \varepsilon_G\sigma_E - \varepsilon_E\sigma_G + \varepsilon_E\sigma_F - \varepsilon_F\sigma_E$$

Une fois les coefficients de projection calculés, une série de points reposant sur la surface principale de déchargement compris entre les points E et F sont choisis de façon séquentielle et projetés vers le sous-cycle de déchargement entre les points A et B. La contrainte d'un point projeté est ensuite comparée à la contrainte imposée σ_Q. Une dichotomie est alors entreprise jusqu'à ce que le point Q^P situé sur la surface principale de déchargement corresponde au point projeté Q^2 sur le sous-cycle, ce dernier point possédant une contrainte égale à la valeur imposée σ_Q (voir la figure 3.6).

Lorsque la prochaine position Q^2 est déterminée sur le sous-cycle de déchargement, une nouvelle itération peut être entreprise. Une nouvelle valeur de la contrainte est alors imposée et la position Q^2 nouvellement calculée devient maintenant la position précédente pour l'itération suivante. La première étape de la détermination de la prochaine position consiste à supposer que son état repose sur le même sous-cycle de déchargement. De la même façon que le point Q^2 a été déterminé, une nouvelle position est calculée. Si la déformation de transformation de la nouvelle position est inférieure ou égale à celle de la position précédente, alors la prochaine position a été correctement calculée et elle repose sur le même sous-cycle de déchargement. Sinon, un second sous-cycle, mais cette fois-ci un sous-cycle de chargement, doit être entrepris. En somme, la réponse thermomécanique repose sur le premier sous-cycle de déchargement tant et aussi

longtemps que la déformation de transformation n'a pas tendance à augmenter et que les limites supérieures et inférieures n'ont pas été franchies. Lorsque la limite inférieure du premier sous-cycle de déchargement (le point B) est atteinte à la suite d'une diminution graduelle de la déformation de transformation, on passe du sous-cycle de déchargement jusqu'à la surface principale de déchargement. À l'opposé, lorsque la limite supérieure du premier sous-cycle de déchargement (le point A) est franchie, on passe du sous-cycle de déchargement jusqu'à la surface principale de chargement. Cette dernière situation est plutôt rare, mais elle se produit lorsque la réponse s'est exclusivement baladée sur la partie élastique du sous-cycle de déchargement. La partie élastique du sous-cycle correspond au premier segment voisin du point A et dans cette région, la déformation de transformation est constante et égale à celle du point A. Ainsi, en augmentant la contrainte sur une zone élastique d'un sous-cycle de déchargement, il n'y a pas d'augmentation de déformation de transformation et la réponse demeure bel et bien sur le sous-cycle de déchargement.

Jusqu'à présent, un seul sous-cycle de déchargement a été employé. Imaginons maintenant que la position précédente sur ce premier sous-cycle de déchargement corresponde au point A de la figure 3.7. Ce point A est la projection du point A^P appartenant à la surface principale de déchargement. La contrainte est augmentée et à la suite d'une projection sur le sous-cycle de déchargement, une augmentation de déformation de transformation est observée. Cette situation est inadmissible et un second sous-cycle de chargement doit être calculé. Puisqu'il s'agit d'un sous-cycle de chargement, des points appartenant à la surface principale de chargement seront ainsi projetés. La détermination des points A, B, C, E, F et G qui permettront de calculer les coefficients de projection sont déterminés de la façon suivante. Dans un premier temps, le point de départ A est toujours le point à partir duquel le changement d'état s'effectue. Lorsqu'il s'agit d'un sous-cycle autre que le premier sous-cycle (second sous-cycle, troisième sous-cycle, etc.), le point d'arrivée B du sous-cycle est le point de départ du sous-cycle précédent. Dans le cas présent, le point B de la figure 3.7 correspond au

point A de la figure 3.6. Pour tous les sous-cycles de chargement, le point E correspond à la jonction inférieure des surfaces principales (voir figure 3.7). Finalement, le point F est le plus subtil à déterminer. Dans le cas d'un sous-cycle autre que le premier, le point F correspond au point appartenant à une surface principale qui une fois projeté, donne le point de départ du sous-cycle précédent. Dans le cas présent, le point de départ du sous-cycle précédent est le point B de la figure 3.7. Ce point repose sur la surface principale de chargement. En conséquence, le point de la surface principale de chargement qui une fois projeté génère le même point est simplement lui-même. Bref, pour un second sous-cycle, le point F est facilement déterminé et il est le même que le point B. Par contre, comme nous le verrons un peu plus loin, la détermination du point F est plus délicate pour les troisièmes sous-cycles et les subséquents. En ce qui concerne les points C et G, ils sont déterminés de la même manière que précédemment, sauf que la pente aux points A et E est celle du point E sur la surface de chargement.

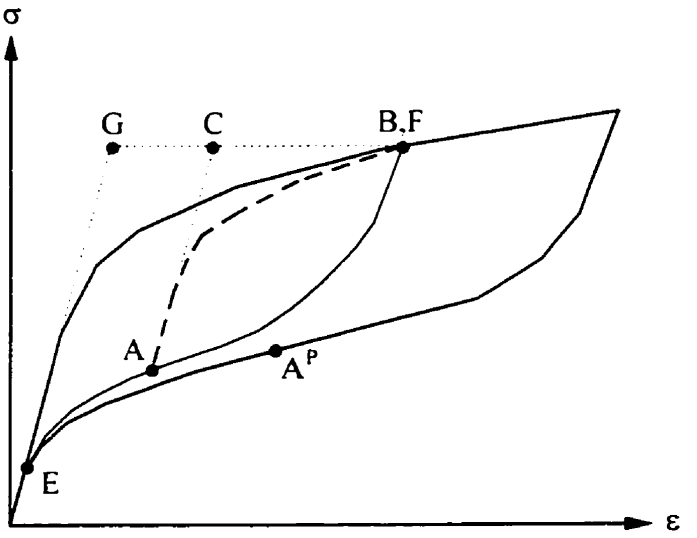


Figure 3.7 Construction d'un second sous-cycle de chargement.

Lorsque les points A, B, C, E, F et G sont connus, les coefficients de projection qui permettent le passage d'un point appartenant à la surface principale de chargement jusqu'au second sous-cycle de chargement sont calculés à l'aide des équations (3.25). Par

une dichotomie, le point situé sur la surface principale de chargement (entre les points E et F) qui une fois projeté sur le sous-cycle de chargement possède une contrainte égale à la contrainte imposée devient la prochaine position. La contrainte et la déformation d'un point projeté à partir d'une surface principale vers un sous-cycle sont toujours calculées à partir des équations (3.22). La déformation de transformation du nouveau point est déterminée par l'équation (3.21). Lorsque la nouvelle position est obtenue, une nouvelle itération débute en imposant un incrément de contrainte. La réponse repose sur le second sous-cycle de chargement tant et aussi longtemps que la déformation de transformation n'a pas tendance à décroître ou que les limites du sous-cycle ne sont pas atteintes. Si la limite supérieure est atteinte (le point B), on passe à la surface principale de chargement et si la limite inférieure est atteinte (le point A), on retombe sur le premier sous-cycle de déchargement.

Jusqu'à maintenant, la création des premier et second sous-cycles a été discuté. Nous allons maintenant présenter la création d'un troisième sous-cycle de déchargement. Imaginons que la position précédente sur le second sous-cycle de chargement est représentée par le point A de la figure 3.8. Ce point est la projection du point A^P appartenant à la surface principale de chargement qui est également représenté à la figure 3.8. À partir du point A, une diminution de contrainte est appliquée et afin de demeurer sur ce sous-cycle de chargement, il faudrait admettre une diminution de la déformation de transformation, ce qui est inadmissible. Un troisième sous-cycle de déchargement doit être construit. Le départ de ce sous-cycle est bien entendu le point A de la figure 3.8, point à partir duquel le changement d'état s'est produit. Puisqu'il s'agit d'un sous-cycle autre que le premier, le point B du troisième sous-cycle est le point de départ du second sous-cycle. Le point B est obtenu par la projection du point B^P appartenant à la surface principale de déchargement. En fait, les point B et B^P du troisième sous-cycle illustré à la figure 3.8 sont en fait les points A et A^P du second sous-cycle montré à la figure 3.7. Puisque le troisième sous-cycle est un déchargement, le point E est la jonction supérieure des deux surfaces principales. Le point F correspond au

point appartenant à la surface principale de déchargement qui une fois projeté, donne le point de départ du sous-cycle précédent, soit le second sous-cycle. En somme, le point F correspond au point B^P de la figure 3.8. Les points d'intersection C et G sont toujours déterminés de la même manière. En effet, les segments BC et FG ont une pente nulle et les segments AC et EG possèdent une pente égale à la pente au point E sur la surface principale de déchargement.

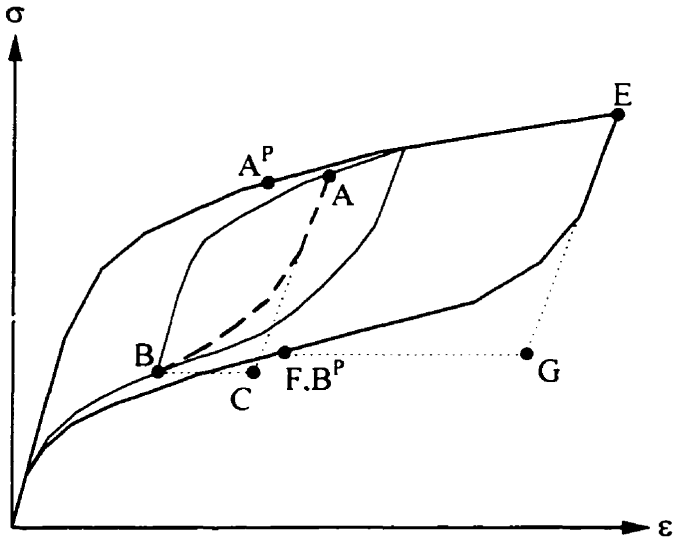


Figure 3.8 Construction d'un second sous-cycle de chargement.

Une fois les points positionnés et les coefficients de projection calculés, les mêmes principes s'appliquent pour ce troisième sous-cycle que pour les sous-cycles précédents. En effet, on demeure sur ce sous-cycle tant et aussi longtemps que la déformation de transformation n'a pas tendance à augmenter. Si c'est le cas, un nouveau sous-cycle de chargement devra être calculé. Cette méthodologie peut être appliquée afin d'obtenir une infinité de sous-cycles imbriqués les uns dans les autres comme le montre les six sous-cycles de la figure 3.9. Dans le cas du troisième sous-cycle de déchargement, on passe au premier sous-cycle de déchargement si la limite inférieure (le point B de la figure 3.8) est franchie et on atteint le second sous-cycle de chargement si la limite supérieure (le point A) est dépassée.

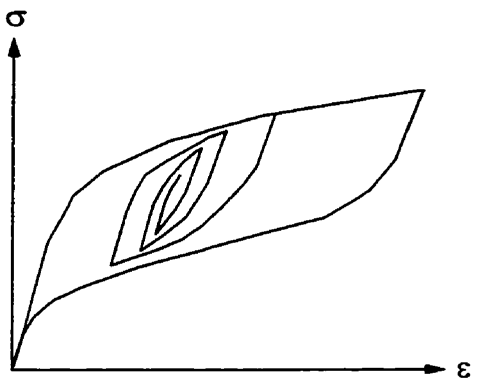


Figure 3.9 Exemple de six sous-cycles imbriqués les uns dans les autres.

En résumé, l'idée directrice derrière la gestion des sous-cycles est de déterminer les points A, B, C, E, F et G qui décrivent correctement la projection d'un point appartenant à une surface principale vers un sous-cycle. En utilisant une dichotomie, méthode qui peut être perçue comme une approche par essais et erreurs, des points sont choisis sur les surfaces principales entre les points E et F puis ensuite projetés sur le sous-cycle en utilisant les coefficients de projection. Les propriétés comme la contrainte, la déformation ou la déformation de transformation associées au point obtenu après la projection sont vérifiées. Si le point ne répond pas aux conditions désirées (la contrainte du point est insuffisante par exemple), un nouveau point est choisi sur les surfaces principales, ensuite projeté et finalement testé de nouveau. Ce processus est constamment effectué jusqu'à ce que le point désiré ait été trouvé.

Il est à noter que toutes les explications concernant la gestion des sous-cycles ont été apportées en utilisant un exemple où le premier sous-cycle est tracé à partir de la surface principale de chargement. En d'autres mots, le premier sous-cycle est un sous-cycle de déchargement. Tous les concepts véhiculés par les cas présentés précédemment s'appliquent de façon intégrale lorsque le premier sous-cycle est en chargement plutôt qu'en déchargement.

Jusqu'à présent, la construction des sous-cycles a été présentée sans que la température n'intervienne. La simplification d'une sollicitation isotherme a volontairement été introduite afin de faciliter la compréhension des concepts fondamentaux sur lesquels repose la création des sous-cycles d'hystérésis. Dans le cas d'une sollicitation isotherme, des points particuliers qui caractérisent le départ et l'arrivée de chaque sous-cycle peuvent être conservés en mémoire pour construire les sous-cycles d'hystérésis. Par contre, lorsque des variations de température sont simulées, il devient impossible de suivre la réponse de l'alliage seulement en conservant les points à partir desquels les conditions de transition chargement/déchargement ont été rencontrées. En effet, une position à partir de laquelle on passe d'un chargement à un déchargement ou vice versa (c'est-à-dire le point A des figures 3.6 à 3.8) n'est plus la même d'une température à l'autre. Dans les paragraphes suivants, un exemple est abordé afin de clarifier comment la construction des sous-cycles est effectuée de façon générale pour tous les cas de chargement à partir de la déformation de transformation des points de transition chargement/déchargement.

La figure 3.10 montre à trois reprises le même segment de la surface principale de déchargement entre les températures T_1 et T_2 pour les schémas de gauche et central et entre T_1 et T_3 pour le schéma de droite ($T_1 > T_2 > T_3$). Imaginons que la position précédente correspond au point A sur le schéma de gauche. Cette position repose sur la surface principale de déchargement à la température T_1 et avec une contrainte σ_1. Le chargement thermomécanique imposé à partir de cette position consiste en une diminution de la température de T_1 à T_2 à contrainte constante σ_1. La première étape du calcul de la prochaine position demeure toujours la même, c'est-à-dire on suppose que l'état de la prochaine position est identique à celui de la position précédente, soit appartenant à la surface principale de déchargement dans le cas présent. Une position est alors interpolée sur la surface principale de déchargement à la température T_2 et à une contrainte σ_1 et le point B sur le schéma de gauche est obtenu. Puisque la déformation de transformation calculée selon l'équation (3.21) augmente entre les points A et B, il est

donc inadmissible que la prochaine position demeure sur la surface principale de déchargement. Un sous-cycle de chargement doit ainsi être entrepris.

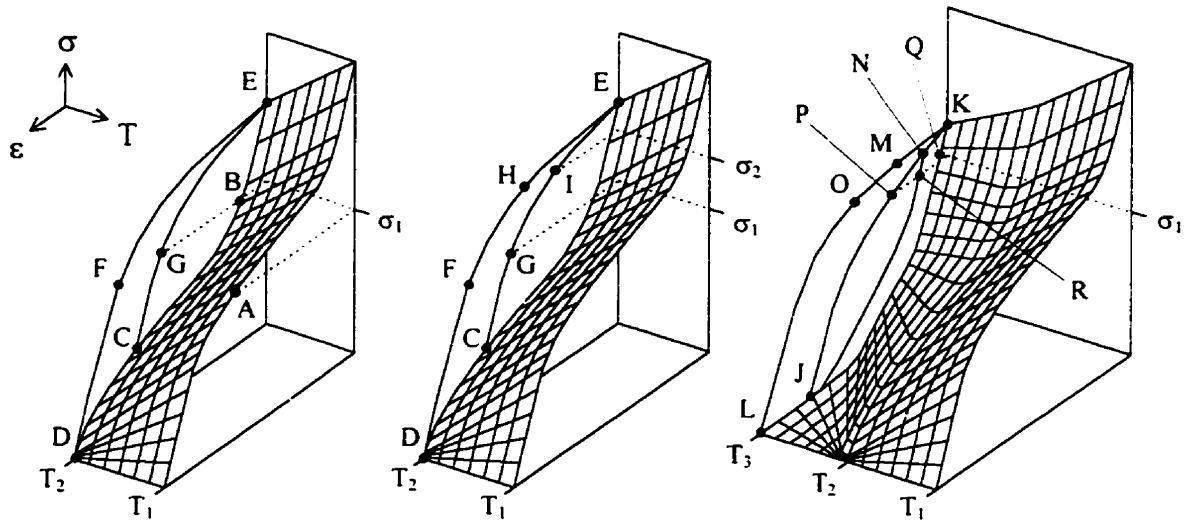


Figure 3.10 Construction des sous-cycles pour les simulations non-isothermes.

Dans le cas d'une simulation isotherme, le point de départ du sous-cycle serait le point A de la figure 3.10, point à partir duquel la transition chargement/déchargement s'est effectuée à la température précédente T_1. Dans l'exemple présent, le point de départ du sous-cycle à la prochaine température T_2 est inconnu et il doit être déterminé. Il s'agit de chercher par une dichotomie le point sur la surface principale de déchargement qui possède la même déformation de transformation que le point A, mais à la température T_2. Le point C de la figure 3.10 répond à ces exigences par rapport à la température et à la déformation de transformation. Une fois le point C déterminé, les autres points qui vont servir à calculer les coefficients de projection sont obtenus de manière identique à ce qui a été présenté précédemment aux figures 3.6 à 3.8. En effet, pour le premier sous-cycle de chargement calculé à la température T_2, le point d'arrivée du sous-cycle correspond à la jonction supérieure des surfaces principales représenté par le point E et la jonction inférieure de ces mêmes surfaces est le point D. En réalité, la segment de courbe DFE représente la surface principale de chargement à la température T_2. La surface principale

n'a pas été dessinée afin de ne pas surcharger la figure 3.10. Lorsque les points de départ et d'arrivée du sous-cycle de chargement (respectivement les points C et E) ainsi que les jonctions entre les deux surfaces principales (les points D et E) ont été déterminés, les coefficients de projection sont calculés. Par une dichotomie, un point F appartenant à la surface principale de chargement entre les points D et E est recherché. Le point F est celui qui une fois projeté sur le sous-cycle génère le point G, le point G possédant une contrainte égale à la contrainte imposée σ_1. En somme, le point G constitue la prochaine position avec une contrainte σ_1 et une température T_2.

Imaginons maintenant qu'un autre incrément de chargement thermomécanique soit imposé. Cette fois, seulement une augmentation isotherme de contrainte à la température T_2 à partir d'une valeur de contrainte σ_1 jusqu'à une valeur σ_2 est prescrite. La dernière position calculée (le point G) devient maintenant la position précédente pour la prochaine itération, ce qui implique que l'état précédent est maintenant "sous-cycle de chargement". Comme à l'habitude, la première opération consiste à tester une prochaine position tout en imposant que l'état de cette prochaine position est le même que celui de la position précédente. Ainsi, on suppose que la prochaine position repose sur le premier sous-cycle de chargement précédemment calculé. Puisqu'il s'agit d'un chargement isotherme, les coefficients de projection demeurent les mêmes et la prochaine position est recherchée par une dichotomie sur la surface principale entre les points D et E. Le point H sur le schéma central de la figure 3.10 est le point qui repose sur la surface principale de chargement et qui une fois projeté sur le premier sous-cycle génère le point I, ce dernier point possédant une contrainte σ_2. Par la suite, on vérifie que la déformation de transformation augmente entre les points G et I alors qu'on se situe sur un sous-cycle de chargement. Cette situation est admissible et le point I correspond bel et bien à la prochaine position.

Imaginons maintenant que la contrainte et la température soient diminuées simultanément à partir de la dernière position calculée. La température passe de T_2 à T_3 alors que la contrainte passe d'une valeur σ_2 à une valeur σ_1. Puisqu'il y a eu variation de la température, tous les sous-cycles à la prochaine température T_3 doivent être calculés. Pour construire le premier sous-cycle de chargement, il faut utiliser la déformation de transformation du point à partir duquel la transition chargement/déchargement s'est produite. Dans notre cas, cette transition s'est produite au point A à la température T_1 (voir figure 3.10). Afin de déterminer le point de départ du premier sous-cycle de chargement à la température T_3, une dichotomie est réalisée sur la surface principale de déchargement à la température T_3 jusqu'à ce qu'un point J possédant la même déformation de transformation que celle du point A soit trouvé. Le point J représente donc le point de départ du premier sous-cycle à la température T_3. Par la suite, le point d'arrivée de ce sous-cycle qui correspond au point de jonction supérieure des surfaces principales est représenté par le point K. De plus, pour calculer les coefficients de projection du premier sous-cycle à la température T_3, le point de jonction inférieure des surfaces principales doit également être retracé. Ce dernier correspond au point L du schéma de droite de la figure 3.10. Une fois ces points obtenus, les coefficients de projection du premier sous-cycle à la température T_3 peuvent être calculés.

On suppose ensuite que l'état de la prochaine position est identique à celui de la position précédente, c'est-à-dire "sous-cycle de chargement". Cet état est dicté par le point I qui est maintenant devenu la position précédente pour l'itération en cours. Par une dichotomie sur la surface principale de chargement, le point P est retracé car en plus d'appartenir au premier sous-cycle de chargement à la température T_3, il possède une contrainte σ_1. Le point P est la projection du point O appartenant à la surface principale de chargement. Dans un second temps, une vérification concernant la déformation de transformation est menée et il est observer que la déformation de transformation diminue entre le point I (la position précédente) et le point P (la prochaine position testée), ce qui s'avère être une incompatibilité puisque le comportement repose sur un sous-cycle de

chargement. Par conséquent, un nouveau sous-cycle de déchargement doit être entrepris et calculé.

Le point de transition chargement/déchargement d'un nouveau sous-cycle est toujours la position précédente, position qui sert toujours de référence afin de vérifier si la déformation de transformation tend à augmenter ou à diminuer. Pour le second sous-cycle de déchargement, le point de transition est le point I à la température T_2. Puisque ce point de transition n'est pas à la température T_3 de la prochaine position, il est impératif de repérer son équivalent. Ainsi, en utilisant les coefficients de projection pour le premier sous-cycle de chargement à la température T_3, le point N est celui qui possède la même déformation de transformation que celle du point de transition I. Le point N est obtenu par projection du point M. Par la suite, le second sous-cycle de déchargement à la température T_3 est calculé. Le point de départ du sous-cycle est l'équivalent du point de transition à la température T_3, c'est-à-dire le point N. Le point d'arrivée pour un sous-cycle autre que le premier est toujours le point de départ du sous-cycle précédent. Dans notre cas, ce point d'arrivée correspond au point de départ du premier sous-cycle à la température T_3, soit le point J. Le point de jonction supérieure à la température T_3 est illustré par le point K du schéma de droite de la figure 3.10. Enfin, le dernier point nécessaire à fixer pour calculer les coefficients de projection du second sous-cycle est celui qui une fois projeté génère le point de départ du sous-cycle précédent. Comme il en a été discuté précédemment, ce point est simplement le point J puisqu'il s'agit d'un second sous-cycle. Enfin, la dernière opération consiste à chercher par une dichotomie le point Q de la surface principale de déchargement qui une fois projeté sur le second sous-cycle de déchargement génère un point R possédant une contrainte égale à la valeur imposé σ_1. Ce dernier point R représente donc la prochaine position qu'on désirait calculer pour une contrainte σ_1 à la température T_3.

L'exemple de la figure 3.10 a été présenté dans le but de faire la lumière sur la manière dont les sous-cycles sont créés de façon dynamique dans *KRIGAMF*. En résumé, il s'agit

de construire à chaque itération tous les sous-cycles à la prochaine température imposée et cela à partir du premier sous-cycle jusqu'au dernier. Cette démarche est nécessaire car le point de départ d'un sous-cycle repose toujours sur le sous-cycle précédent, à moins qu'il s'agisse du premier sous-cycle qui débute sur une des deux surfaces principales. Cette approche a été préconisée afin de minimiser l'espace mémoire nécessaire pour conserver toute l'information requise à la construction des sous-cycles. Imaginons une analyse par éléments finis où il peut y avoir un nombre assez élevé d'éléments dans lesquels plusieurs points d'intégration numérique sont utilisés. Il devient impératif de suivre la réponse thermomécanique de chaque point d'intégration numérique pour prédire le comportement global de la structure. Si la méthode de calcul est très gourmande au niveau de la mémoire, des problèmes peuvent rapidement survenir et affecter la puissance d'un programme d'éléments finis. Par conséquent, la seule information requise par *KRIGAMF* pour suivre la réponse thermomécanique avec des sous-cycles est la déformation de transformation de toutes les transitions chargement/déchargement, le nombre de sous-cycles et un indice spécifiant si le premier sous-cycle débute sur la surface principale de chargement ou de déchargement. Avec ce minimum d'information, les sous-cycles peuvent être reconstruits dynamiquement à chaque itération et à la température de la prochaine position, cette température étant un paramètre de contrôle qui est toujours imposé.

Avant de montrer les différentes possibilités de *KRIGAMF* par quelques exemples, une remarque concernant le calcul du module de rigidité est apportée. Il est souvent utile de connaître le module tangent du matériau à une position donnée. C'est principalement le cas lors d'une analyse par éléments finis afin de calculer la rigidité globale d'une structure. Dans la majorité des cas, il s'agit d'évaluer la rigidité apparente donnée par la pente $d\sigma/d\varepsilon$ à température constante. Lorsqu'une position repose sur une des deux surfaces principales, la détermination du module tangent est évidente car les équations des surfaces principales sont connues par le krigeage et ainsi, la pente est calculée par une simple dérivée. Par contre, lorsqu'une position repose sur un sous-cycle, la détermination

du module tangent est beaucoup moins évidente. En effet, un point appartenant à un sous-cycle est toujours le résultat de la projection d'un point reposant sur une des deux surfaces principales. Par conséquent, la pente $d\sigma/d\varepsilon$ du point avant la projection appartenant à une surface principale ainsi que les coefficients de projection a_1 à a_6 sont connus pour un sous-cycle particulier. Il s'agit donc de manipuler les équations de la projection pour obtenir la pente $d\sigma'/d\varepsilon'$ du point reposant sur le sous-cycle. Pour ce faire, les équations (3.22) sont reprises en modifiant légèrement la notation :

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= a_1 + a_2\,\varepsilon + a_3\,\sigma \\ \sigma' &= a_4 + a_5\,\varepsilon + a_6\,\sigma \end{aligned} \tag{3.26}$$

où ε et σ sont respectivement la déformation et la contrainte du point reposant sur une surface principale et ε' et σ' les mêmes paramètres du point correspondant projeté sur le sous-cycle. En effectuant les dérivées en chaîne des équations (3.26), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} d\sigma' &= \frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} d\sigma = a_5\, d\varepsilon + a_6\, d\sigma \\ d\varepsilon' &= \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \sigma} d\sigma = a_2\, d\varepsilon + a_3\, d\sigma \end{aligned} \tag{3.27}$$

En effectuant le quotient des deux équations (3.27) et en divisant le numérateur et le dénominateur par $d\varepsilon$, l'expression de la pente $d\sigma'/d\varepsilon'$ exprimée en fonction de la pente $d\sigma/d\varepsilon$ est obtenue. C'est ainsi que le module tangent de rigidité d'une position reposant sur un sous-cycle est calculé.

$$\frac{d\sigma'}{d\varepsilon'} = \frac{a_5\, d\varepsilon + a_6\, d\sigma}{a_2\, d\varepsilon + a_3\, d\sigma} = \frac{a_5 + a_6 \left(d\sigma / d\varepsilon\right)}{a_2 + a_3 \left(d\sigma / d\varepsilon\right)} \tag{3.28}$$

3.6 Exemples d'utilisation et de validation

Dans les paragraphes suivants, quelques exemples sont présentés afin de démontrer les performances de *KRIGAMF*. Le premier exemple se veut plutôt une discussion concernant la caractérisation de la loi de matériau dans *KRIGAMF*. Jusqu'à présent, il a toujours été question de caractériser un alliage ou une composante simple par des courbes expérimentales isothermes à différentes températures. Par contre, il est envisageable de remplacer les courbes expérimentales par des courbes calculées par un autre modèle. Cette alternative peut s'avérer intéressante pour diverses raisons. Premièrement, un modèle pourrait produire d'excellents résultats isothermes, mais de piètres résultats non-isothermes. Dans un tel cas, les courbes isothermes relativement fiables peuvent être employées pour générer une relation constitutive dans *KRIGAMF* afin de calculer avec plus de précision les simulations non-isothermes. Deuxièmement, un modèle produisant des résultats fiables peut s'avérer trop lent ou trop difficile à interfacer avec une méthode numérique (les éléments finis par exemple) pour permettre une utilisation efficace. Il serait alors peut-être souhaitable de calculer une seule fois une série de courbes isothermes pour générer la loi de matériau dans *KRIGAMF*, et cela même si une telle opération peut demander un temps considérable. Une fois les courbes isothermes calculées, la rapidité de calcul de *KRIGAMF* et sa facilité d'interface peuvent ensuite être mises à profit indépendamment du modèle qui a généré initialement les courbes. Dans tous les cas, le remplacement des courbes expérimentales par des courbes calculées devient intéressant si et seulement si une telle approche permet de faciliter la caractérisation expérimentale de l'alliage, ce qui dépend souvent des équipements disponibles dans un laboratoire. En effet, s'il est plus difficile de mesurer certains paramètres à fournir au modèle qui calcule les courbes isothermes que d'obtenir une série de courbes expérimentales à différentes températures, il devient alors inutile de recourir à un modèle intermédiaire pour générer les courbes isothermes de *KRIGAMF*.

À titre d'exemple, l'utilisation d'un modèle intermédiaire est montrée à la figure 3.11. Le modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin [3.5] a été utilisé pour générer quatre courbes isothermes entre 10°C et 40°C montrées dans le schéma de gauche de la figure 3.11. Le modèle de Likhatchev et Malinin est brièvement discuté au second chapitre ainsi qu'à l'annexe I. Ces courbes représentent le comportement d'un alliage Ti-Ni ayant une température de transformation $A_f = 30°C$ et un module élastique de l'austénite de 74 GPa. Les surfaces construites par *KRIGAMF* sont illustrées au centre de la figure 3.11. Enfin, un chargement thermomécanique complexe est calculé et montré dans le schéma de droite de la figure 3.11. Ce chargement consiste à obtenir un cycle d'hystérésis durant lequel la température et la contrainte varient simultanément avec une pente constante $d\sigma/dT$ au chauffage et au refroidissement.

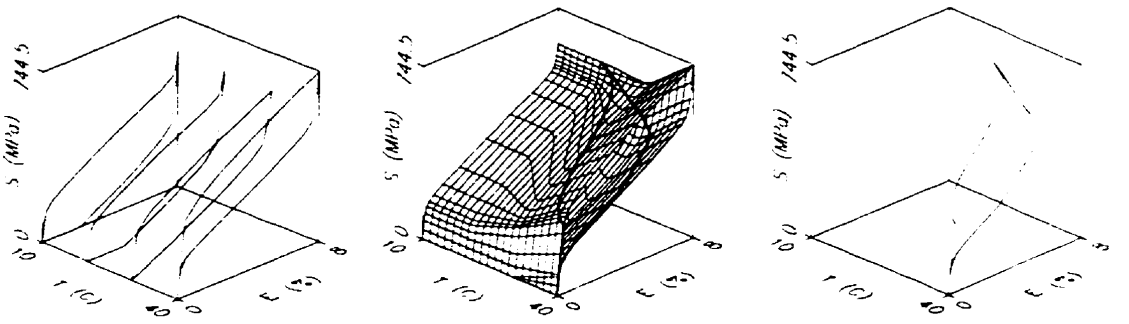
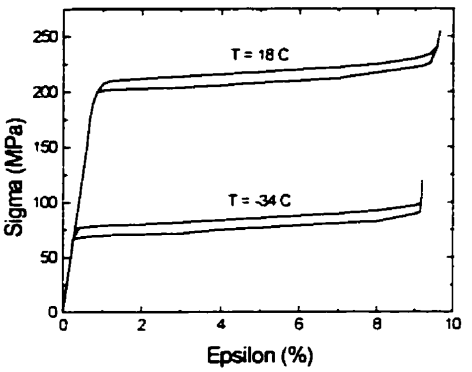
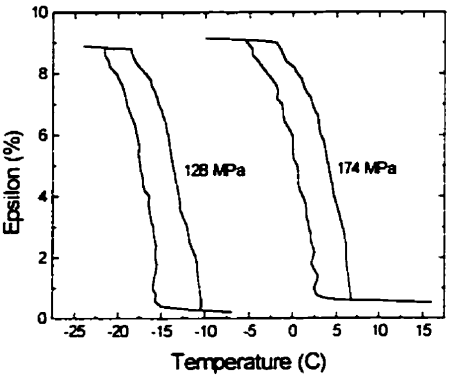


Figure 3.11 Construction du modèle en utilisant des courbes isothermes calculées par le modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin.

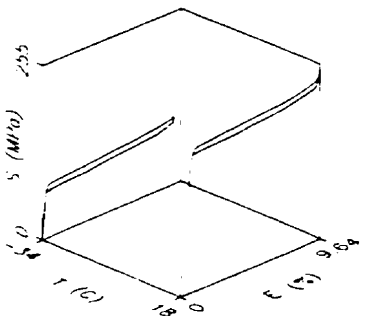
Le second exemple constitue une validation quantitative de *KRIGAMF*. Deux séries de courbes expérimentales ont été obtenues par Patoor et al. [3.6] à partir d'un monocristal Cu-Zn-Al. La première série comprend deux courbes isothermes et superélastiques à 18°C et -34°C allant jusqu'à près de 10% de déformation. Ces courbes superélastiques sont montrées à la figure 3.12-A. La deuxième série comprend deux courbes superthermiques à une contrainte constante respective de 128 MPa et 174 MPa reproduites à la figure 3.12-B.



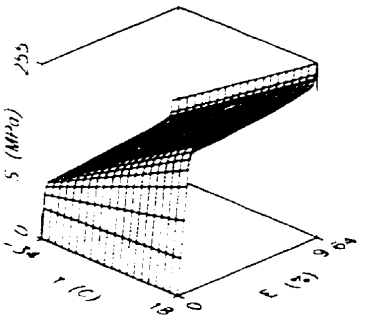
(A) Courbes expérimentales superélastiques



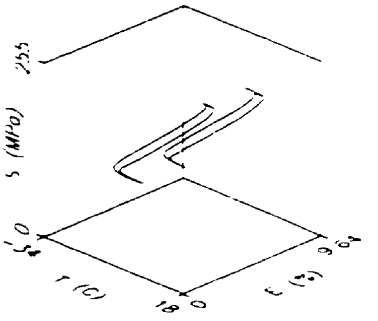
(B) Courbes expérimentales superthermiques



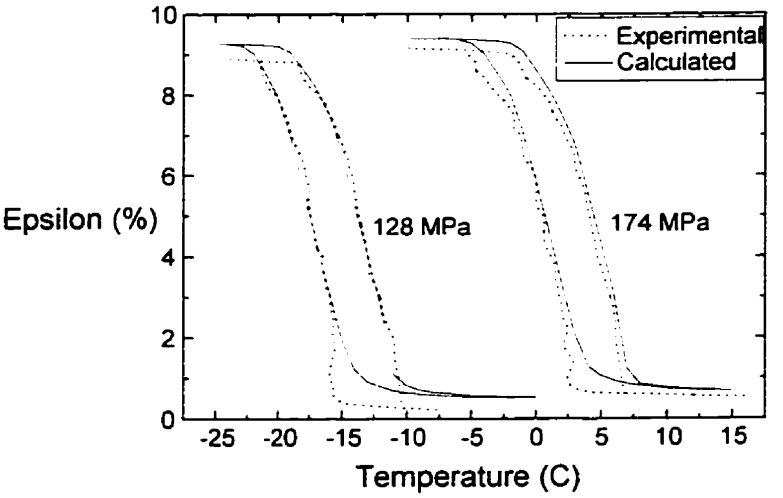
(C) Construction du modèle avec les courbes superélastiques



(D) Krigeage des surfaces principales



(E) Courbes superthermiques calculées



(F) Comparaison entre les courbes superthermiques expérimentales et calculées

Figure 3.12 Validation quantitative du modèle pour des chargements superthermiques.

L'idée principale de cet exemple est de calculer les deux courbes superthermiques à partir des courbes expérimentales superélastiques et de comparer le résultat avec les courbes expérimentales superthermiques. Dans un premier temps, plusieurs points sont relevés sur les courbes expérimentales superélastiques afin de les modéliser dans *KRIGAMF*. Les courbes obtenues sont tracées dans l'espace température-contrainte-déformation à la figure 3.12-C. Par la suite, les surfaces principales sont krigées à la figure 3.12-D et finalement, les cycles superthermiques sont calculés à la figure 3.12-E. Une validation quantitative est effectuée à la figure 3.12-F en superposant les courbes expérimentales en traits pointillés et les courbes calculées en traits pleins sur le même graphique. La concordance est excellente même s'il existe un léger décalage entre les courbes calculées et expérimentales. La cause la plus probable qui puisse expliquer ce décalage concerne la méthode utilisée pour mesurer les déplacements à partir desquels la déformation est calculée. Par exemple, si l'instrument servant à mesurer les déplacements est installé après avoir appliqué une charge statique qui génère la contrainte constante, il devient difficile de retracer l'état de référence à déformation nulle avant l'application de la charge. Un décalage peut alors facilement être introduit car l'état de référence doit être choisi ultérieurement et arbitrairement. Par contre, ce qui demeure inchangé peu importe le choix de la position de référence est la différence entre les déformations à haute et basse températures, différence qui est très similaire entre les courbes expérimentales et calculées.

Le dernier exemple regroupe une série de validations qualitatives qui permettent de vérifier que les principaux comportements typiques des alliages à mémoire de forme peuvent être reproduits par *KRIGAMF*. Dans un premier temps, un AMF à été créé en utilisant cinq courbes isothermes qui reproduisent le comportement normal d'un AMF. Ces courbes sont montrées au haut de la figure 3.13 sur un graphique contrainte-déformation et dans le bas à gauche de la même figure dans un espace tridimensionnel température-contrainte-déformation. Dans le repère tridimensionnel, les mots *contrainte* et *déformation* sont respectivement remplacés par SIGMA et EPSILON. Il y a une courbe

isotherme pour les cinq températures suivantes : 0°C, 20°C, 60°C, 100°C et 120°C. Il est à noter que les comportements à 0°C et 20°C sont identiques. Enfin, les surfaces krigées qui caractérisent l'AMF sont également montrées dans le bas de la figure 3.13.

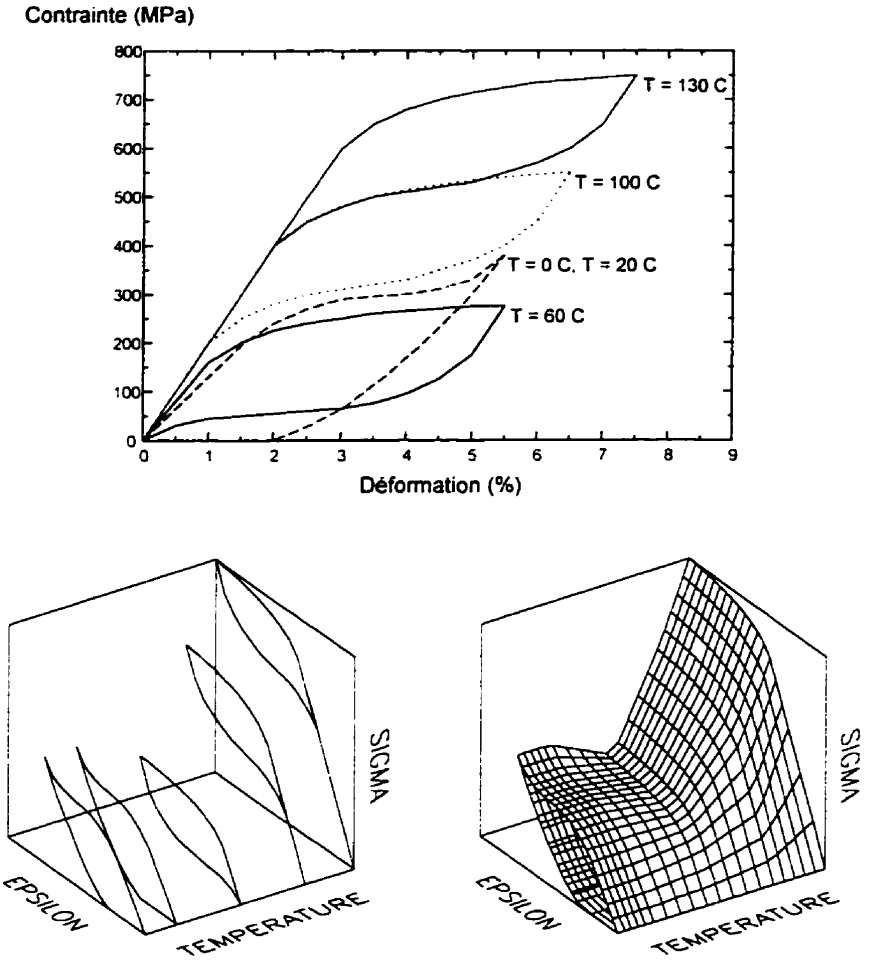


Figure 3.13 Courbes isothermes et surfaces krigées d'un AMF créé pour la validation qualitative de *KRIGAMF*.

Les résultats des validations qualitatives réalisées avec l'alliage créé à la figure 3.13 sont présentés sous forme graphique aux figures 3.14 à 3.18. Dans tous les cas, la réponse de l'alliage est d'abord présentée dans un graphique bidimensionnel afin de mieux la visualiser et ensuite, cette même réponse est présentée dans des repères tridimensionnels température-contrainte-déformation afin de la situer par rapport au comportement global

de l'alliage. La première validation qualitative reproduit deux cycles superélastiques à 80°C et 130°C. À 80°C, la contrainte est le paramètre de contrôle qui varie de 0 à 412.5 MPa. De plus, quelques sous-cycles ont été obtenus en contrôlant volontairement la contrainte selon la séquence suivante : 0 MPa, 412.5 MPa, 170 MPa, 390 MPa, 190 MPa et finalement retour à 412.5 MPa. Par contre, la déformation est le paramètre de contrôle qui varie entre 0 et 5.25% pour la courbe à 130°C. Les graphiques au haut de la figure 4.14 montrent la réponse de l'alliage pour chaque simulation tandis qu'au bas, ces mêmes réponses sont d'abord superposées aux surfaces principales puis ensuite montrées seules sur des graphiques tridimensionnels.

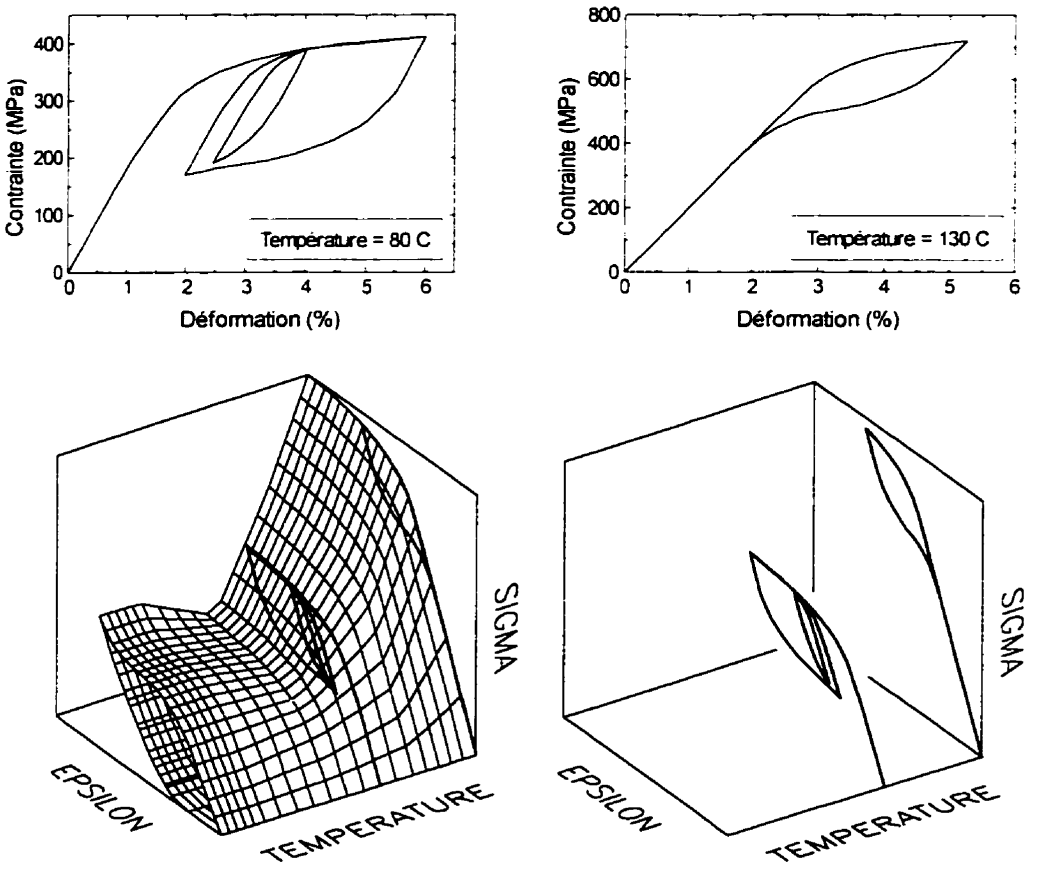


Figure 3.14 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes superélastiques.

La seconde validation qualitative est menée avec des cycles superthermiques où la contrainte est conservée constante pendant que la température est variée. Dans un premier temps, l'alliage est chargé jusqu'à une contrainte de 275 MPa puis un balayage en température est ensuite réalisé entre 130°C et 60°C. Dans un second temps, une contrainte de 300 MPa est imposée sur l'alliage et la température passe de 130°C jusqu'au températures suivantes de manière séquentielle : 65°C, 105°C, 68°C et finalement 130°C. Cette séquence de température a été imposée dans le but d'obtenir des sous-cycles thermiques. Les graphiques au haut de la figure 4.15 montrent la réponse de l'alliage pour chaque cas séparément tandis qu'au bas de cette même figure, les deux réponses sont superposées dans des graphiques tridimensionnels.

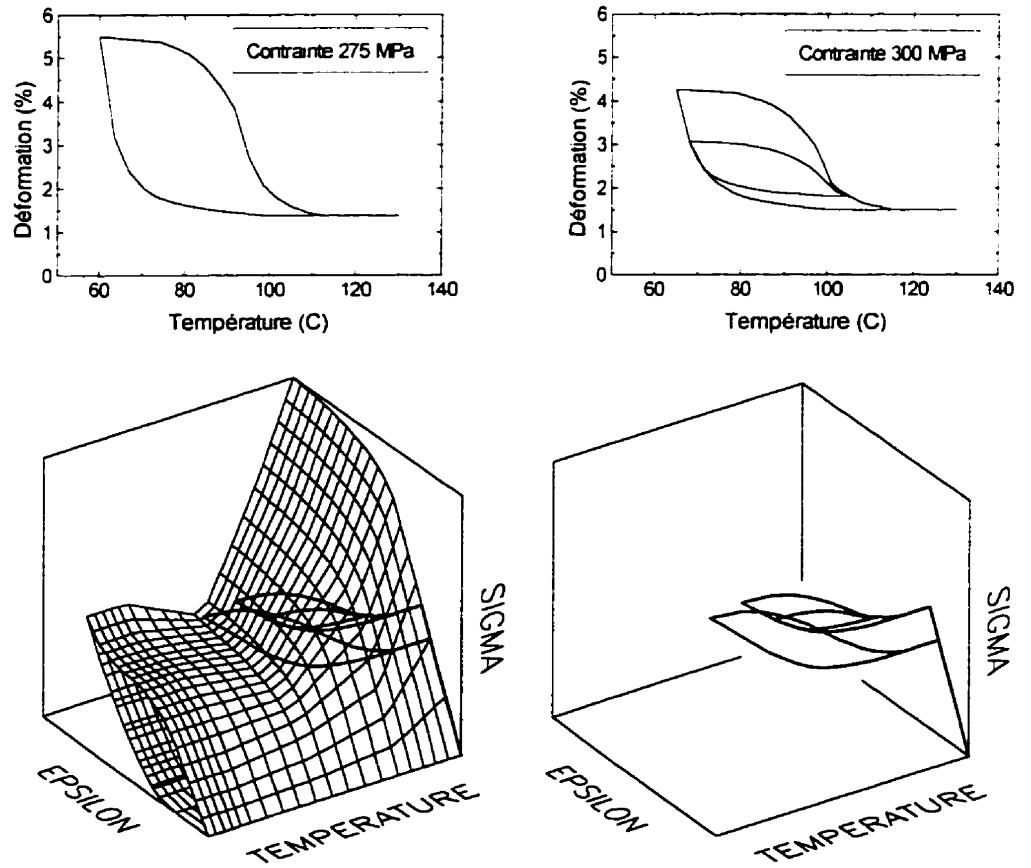


Figure 3.15 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes superthermiques.

La troisième validation qualitative s'attarde au comportement pseudo-plastique d'un AMF à basse température. Encore une fois, deux simulations à des températures différentes ont été réalisées. La première à 20°C reproduit en plus quelques sous-cycles d'hystérésis. Pour cette simulation, la contrainte est variée selon la séquence suivante : 0 MPa, 290 MPa, 0 MPa, 305 MPa, 0 MPa, 380 MPa suivi d'un retour à 0 MPa. La simulation à 40°C est plus simple puisque seulement un chargement suivi d'un déchargement sont calculés. À 40°C, la contrainte passe de 0 MPa jusqu'à 300 MPa avant de revenir à 0 MPa. Les résultats sont présentés de la même manière que précédemment, c'est-à-dire dans des graphiques séparés au haut de la figure 3.16 puis ensuite superposés dans des graphiques tridimensionnels au bas de la même figure.

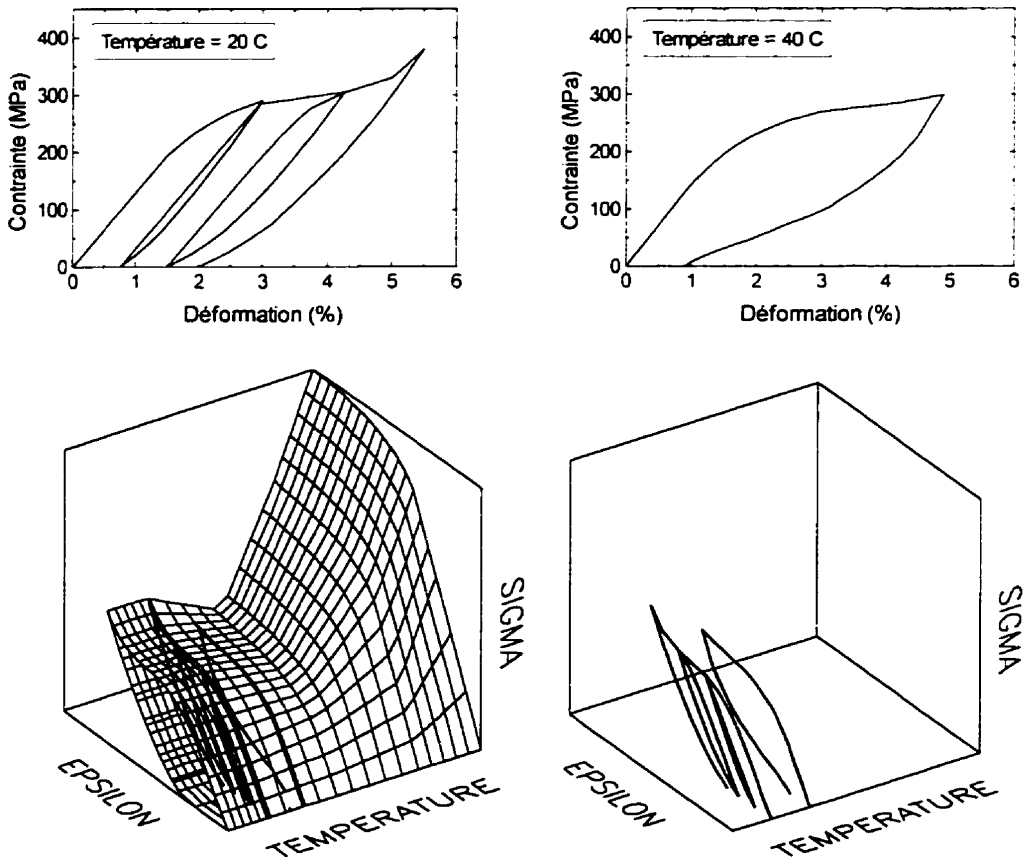


Figure 3.16 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des chargements pseudo-plastiques.

La quatrième validation qualitative s'attarde sur un des comportements les plus importants des AMF, c'est-à-dire l'effet mémoire simple sens. Dans de tels chargements, un chauffage à contrainte nulle est réalisé après avoir déformé l'alliage à basse température. Le graphique dans le coin supérieur gauche de la figure 3.17 montre deux cas où la contrainte a été augmentée jusqu'à 290 MPa (la courbe notée A) et 380 MPa (la courbe notée B) puis relâchée à la température de 0°C. On remarque une déformation résiduelle qui est ensuite récupérée au chauffage pour les deux cas de chargement (voir le graphique dans le coin supérieur droit de la figure 3.17). Comme à l'habitude, les réponses de l'alliage sont représentées dans des graphiques tridimensionnels au bas de la même figure.

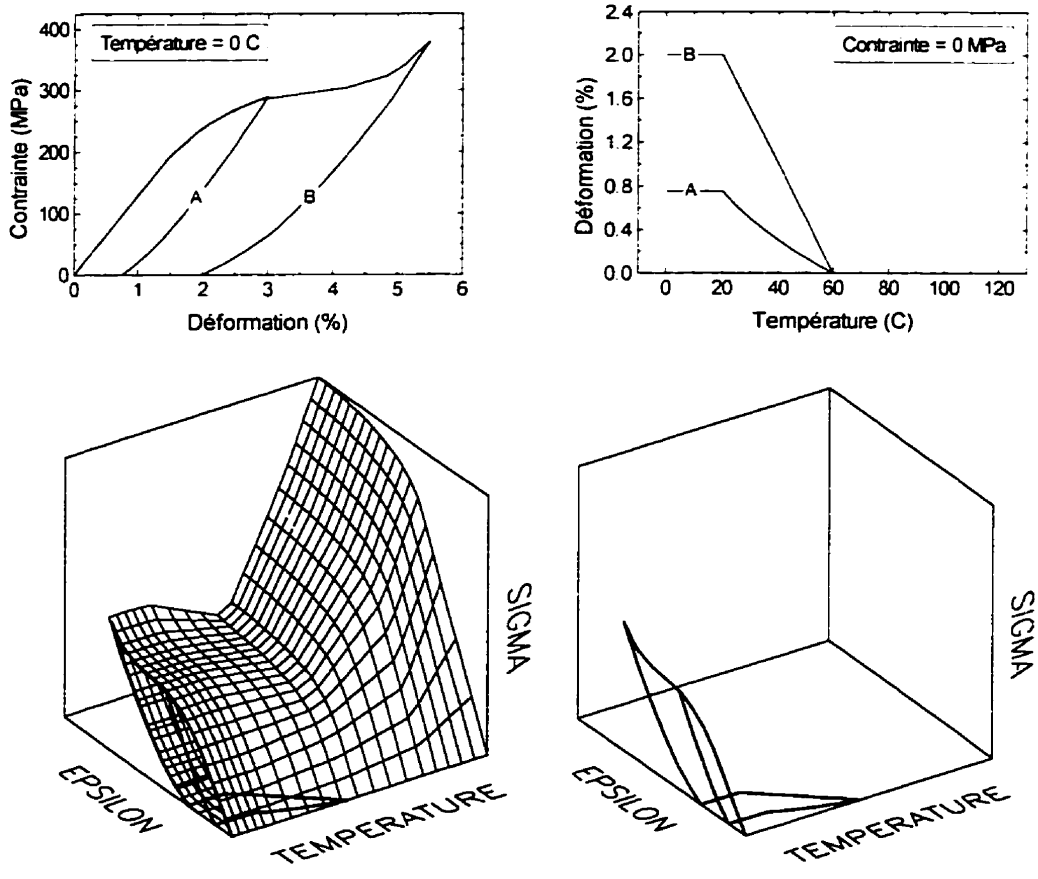


Figure 3.17 Validation qualitative de *KRIGAMF* par des courbes d'effet mémoire simple sens.

Enfin, la dernière validation qualitative concerne la génération d'effort au chauffage. L'alliage est d'abord déformé à basse température puis ensuite chauffé à déformation constante. Pendant le chauffage, l'alliage a tendance à vouloir reprendre sa forme initiale non-déformée, mais un dispositif mécanique restreint tout déplacement. Une contrainte additionnelle est alors générée. Au haut de la figure 3.18, la contrainte initiale de près de 300 MPa est presque doublée pendant le chauffage allant de 0°C à 130°C alors que la déformation est imposée à une valeur constante de 4.25%. Après la génération d'effort au chauffage, on remarque une perte de la contrainte au refroidissement, ce qui peut représenter une limitation importante à l'utilisation de cette propriété des AMF. Finalement, la réponse à ce chargement thermomécanique est une fois de plus représentée dans les graphiques tridimensionnels au bas de la figure 3.18.

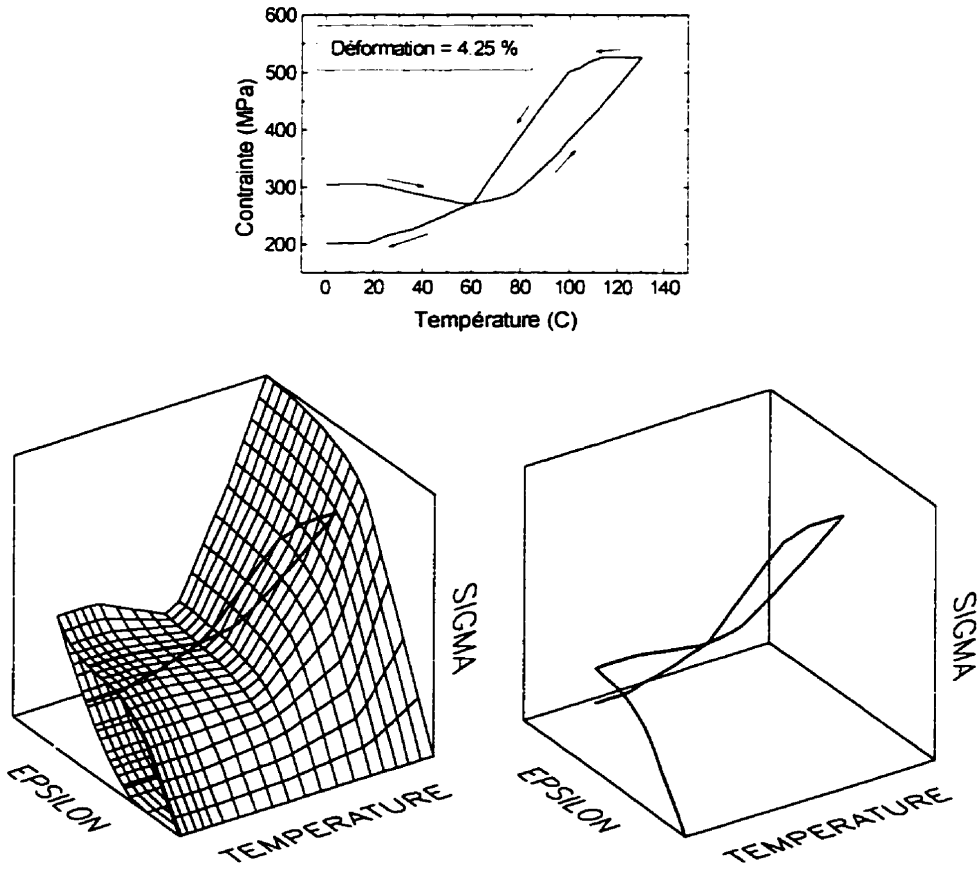


Figure 3.18 Validation qualitative de *KRIGAMF* par une simulation de génération d'effort au chauffage.

De nombreux autres exemples auraient pu être montrés, mais il devient rapidement difficile d'interpréter les résultats lorsque la sollicitation est trop complexe. Il aurait été également possible d'aborder certains exemples dans lesquels les deux paramètres de contrôle varient simultanément. Cette situation a été brièvement présentée à la figure 3.11 où une boucle d'hystérésis a été obtenue en variant simultanément la température et la contrainte. Le but premier des validations présentées dans cette section est de faire ressortir la facilité avec laquelle *KRIGAMF* peut modéliser tous les principaux comportements typiques des alliages à mémoire de forme.

3.7 Principales limitations et conclusions

La formulation actuelle de *KRIGAMF* possède quatre principales limitations qui sont discutées dans les paragraphes suivants :

1) Il est impossible de modéliser les comportements des AMF qui sont reliés à la microstructure comme par exemple l'éducation et l'effet mémoire double sens. En effet, ces phénomènes sont reliés à la création d'un réseau de dislocations dans l'alliage qui n'intervient aucunement dans la formulation de *KRIGAMF*.

2) Les variations de température à contrainte et déformation nulle peuvent engendrer des résultats erronés. Lors de variations de température à contrainte et déformation nulle, l'austénite est transformée en martensite autoaccommodante au refroidissement et la martensite autoaccommodante est transformée en austénite au chauffage. Au chauffage et au refroidissement, les intervalles de température sur lesquels la transformation se produit sont différents. Ces transformations se produisent sans que la moindre déformation macroscopique ne soit observée. Il est à noter que les phénomènes d'effet mémoire simple sens ne sont présentement pas impliqués puisque le chauffage s'effectue à contrainte nulle mais à déformation non-nulle. Si des variations de température à contrainte et déformation nulle sont

simulées avant d'entreprendre un chargement mécanique, il est possible que la réponse calculée par *KRIGAMF* soit fausse. En effet, si la température T se situe entre les températures caractéristiques de l'alliage ($M_s < T < A_s$) et que cette température T a été obtenue suite à des variations de température à contrainte et déformation nulle, alors le contenu de l'alliage peut différer selon la séquence de chauffage et de refroidissement préalablement imposée. Ainsi, pour une même température à contrainte et déformation nulle, l'alliage peut être soit complètement austénitique, soit complètement en martensite autoaccommodante ou soit composé d'un mélange de ces deux phases. En augmentant la contrainte ou la déformation, la transformation de l'austénite en martensite orientée et la réorientation de martensite autoaccommodante en martensite orientée sont caractérisées par un comportement mécanique fort différent. Lorsque des variations de température à contrainte et déformation nulle sont imposées, *KRIGAMF* n'est pas en mesure de suivre l'évolution des phases qui composent l'alliage et la réponse calculée lors du chargement peut s'avérer erronée. À la défense de cette lacune, il est inutile d'imposer à *KRIGAMF* des variations de température à contrainte et déformation nulle puisqu'une composante réelle en AMF est rarement sollicitée d'une telle façon dans sa vie utile. Pour minimiser les problèmes reliés aux variations de température à contrainte et déformation nulle, il est fortement recommandé d'atteindre par chauffage ou par refroidissement la température d'un essai expérimental isotherme de la même façon que cette température est atteinte lors des simulations réelles. Par exemple, si un dispositif en AMF est normalement chauffé jusqu'à 100°C et ensuite refroidi à contrainte et déformation nulle jusqu'à -30°C pour ensuite exécuter une fonction, il serait souhaitable de caractériser l'alliage par quelques courbes isothermes entre -30°C et 100°C, mais pour lesquelles la température de l'essai est obtenue par un refroidissement à partir de 100°C. Bref, toutes ces précautions doivent être prises si et seulement si des variations de température à contrainte et déformation nulle sont imposées lors de la vie utile d'une composante en AMF.

3) Aucune déformation plastique ne peut actuellement être considérée dans le matériau. Le modèle phénoménologique *KRIGAMF* repose donc sur l'hypothèse que l'alliage demeure toujours dans un régime d'élasticité non-linéaire et que les déformations pseudo-plastiques sont complètement récupérables par chauffage.

4) L'obtention expérimentale de courbes isothermes pour construire les surfaces de *KRIGAMF* exige certaines ressources humaines et matérielles. Les manipulations expérimentales demandent passablement de précision et de minutie pour la lecture des contraintes, des déformations et des températures. Le type d'équipement requis (machine de traction, enceinte thermique, système d'acquisition de données, etc.) peut être relativement coûteux en plus d'exiger une personne qualifiée qui connaît bien les instruments de laboratoire ainsi que les alliages à mémoire de forme afin d'obtenir des résultats expérimentaux fiables et précis.

Néanmoins, *KRIGAMF* représente un modèle puissant capable de reproduire tous les principaux comportements thermomécaniques des alliages à mémoire de forme comme la superélasticité, les cycles superthermiques, l'effet mémoire de forme, la pseudo-plasticité, la génération d'effort au chauffage, les sous-cycles d'hystérésis, etc. L'originalité de *KRIGAMF* est sans contredit sa simplicité. En effet, tous les comportements remarquables des AMF sont modélisés à partir de simples courbes isothermes à différentes températures et cela sans qu'aucun autre paramètre thermodynamique, microstructural ou physique ne soit requis. *KRIGAMF* est donc un modèle général qui est fondé exclusivement sur des notions purement mécaniques de contrainte et de déformation. De plus, *KRIGAMF* offre les principales caractéristiques d'un bon interface entre une loi de matériau (relation constitutive) et un programme d'éléments finis car il est simple, général, fiable et relativement rapide.

Chapitre 4 : Programme d'éléments finis *SIMAMF*

De nos jours, les analyses par éléments finis sont abondamment utilisées pour concevoir et calculer la réponse d'une composante métallique soumise à des chargements mécaniques et thermiques. Ces analyses permettent d'accélérer la période de conception et des économies substantielles de temps et d'argent en résultent. À notre connaissance, aucun programme général d'éléments finis n'est disponible pour les concepteurs de composantes en alliage à mémoire de forme (AMF). Puisque le comportement d'un AMF est plus complexe que celui d'un alliage métallique classique (acier, aluminium, cuivre, etc.), la conception d'une composante en AMF est donc passablement plus difficile sans outils numériques spécialement adaptés. Ainsi, nous croyons qu'il est impératif de développer un programme d'éléments finis capable de reproduire les comportements thermomécaniques complexes des AMF. Ce chapitre présente le programme d'éléments finis *SIMAMF* qui a été entièrement programmé dans le but de faciliter l'émergence des alliages à mémoire de forme dans de nouvelles applications industrielles. Dans un premier temps, une présentation générale de *SIMAMF* est effectuée et l'architecture du programme est présentée dans un second temps. Les troisième et quatrième sections discutent respectivement des algorithmes numériques utilisés et de quelques exemples de validation permettant de vérifier le programme. Enfin, la cinquième section aborde les développements futurs qui devront être apportés au programme actuel afin de le rendre encore plus général.

4.1 Présentation générale

Le besoin de développer un programme d'éléments finis adapté aux comportements des AMF était évident, mais la façon de remplir ce besoin était une question beaucoup plus délicate. Une décision importante devait être prise au tout début; devions-nous utiliser un programme d'éléments finis commercial existant et l'adapter à nos besoins ou

entièrement développer un nouveau programme? La seconde alternative s'est avérée la meilleure principalement pour les raisons suivantes. Le comportement d'un AMF est fortement non-linéaire, caractérisé par une hystérésis et dépendant de la température ainsi que de l'histoire thermomécanique subit par l'alliage. Par conséquent, les relations constitutives élastiques, plastiques ou non-linéaires incorporées dans les programmes d'éléments finis commerciaux ne sont pas en mesure de modéliser un comportement aussi complexe. Des relations constitutives particulières aux AMF comme *KRIGA.MF* (voir le troisième chapitre) doivent alors être employées à titre de modules externes par rapport au programme d'éléments finis commercial. Une telle façon de procéder n'est pas problématique en soi, mais la difficulté surgit lorsqu'un protocole d'échange d'information entre le module externe et le programme d'éléments finis doit être établi. En effet, les codes d'éléments finis commerciaux sont complètement fermés, c'est-à-dire qu'il est impossible de modifier les algorithmes de calcul afin de permettre une interaction efficace avec les relations constitutives externes. Bref, nous avons jugé qu'il était plus avantageux de développer entièrement un nouveau programme d'éléments finis supportant les comportements complexes des AMF plutôt que d'adapter un programme d'éléments finis commercial.

Dans cette ligne d'idée, Trochu et Qian [4.1] ont mis au point un programme d'analyse par éléments finis spécialement adapté aux comportements AMF. Le logiciel permet de calculer des poutres bidimensionnelles et des corps axisymétriques en état superélastique. Un modèle bilinéaire était utilisé comme relation constitutive et *KRIGA.MF* a même été interfacé avec succès. Malheureusement, l'interaction avec *KRIGA.MF* s'est avérée efficace seulement pour des simulations isothermes, ce qui représente une limitation majeure. Néanmoins, le programme de Trochu et Qian a permis de réaliser plusieurs simulations par éléments finis dans le cadre d'applications industrielles. En plus d'être limité à des analyses isothermes, le programme de Trochu et Qian ne permet pas de modéliser des structures tridimensionnelles. Afin de rendre ce programme plus général, de nouveaux algorithmes doivent être implantés pour prendre

en considération les variations de température. De plus, des éléments tridimensionnels doivent être ajoutés pour modéliser des structures complexes. Après une analyse en profondeur des forces et des faiblesses du programme de Trochu et Qian, une conclusion importante a pu être tirée. Les modifications requises pour généraliser le programme requièrent plus d'efforts que de développer un nouveau programme d'éléments finis répondant aux exigences d'une généralisation tridimensionnelle tout en prenant en considération l'effet de la température. C'est en se basant sur ces nouveaux besoins que le programme d'éléments finis *SIMAMF* a été développé. Ce chapitre présente les avancements des travaux, mais les développements ne sont pas terminés comme le laisse entrevoir la dernière section.

Le code d'éléments finis *SIMAMF* est programmé avec le langage C++ afin de bénéficier de la puissance des concepts de la programmation orientée objet (POO). En effet, une programmation orientée objet permet entre autres de réutiliser le même code source pour manipuler différents objets. Par exemple, les éléments du maillage dans *SIMAMF* sont des objets appartenant à une classe mère nommée *Elem_c*. Par contre, plusieurs types d'éléments sont disponibles (des tétraèdres, des "wedges" et des briques) et chaque type constitue un objet d'une classe dérivée de la classe mère *Elem_c*. Ainsi, un seul algorithme de calcul est employé pour calculer les propriétés d'un élément comme la matrice de rigidité. Cette remarque peut sembler anodine, mais les concepts de la POO réduisent considérablement le temps de conception et de déverminage ("debugging") d'un logiciel. La section 4.2 discute beaucoup plus en profondeur de l'architecture du programme et de l'utilisation des classes dérivées. Finalement, en plus de la puissance des concepts de la POO, la portabilité du code est un autre facteur qui a favorisé le choix du C++ comme langage de programmation. En programmant en C++, le code peut être compilé et exécuté sur différentes plates-formes comme les ordinateurs personnels (système d'exploitation DOS ou Windows) ou les stations de travail (système d'exploitation UNIX). Il est à noter que le C++ n'est pas le seul langage orienté objet pouvant être porté sur différentes plates-formes.

Le programme d'analyse par éléments finis *SIMAMF* permet de combler les deux principales lacunes des développements de Trochu et Qian [4.1]. Dans un premier temps, des structures tridimensionnelles de géométrie complexe peuvent être modélisées. En effet, les principaux éléments tridimensionnels (tétraèdres, briques et "*wedges*") sont disponibles dans leurs versions linéaire et quadratique. Dans un second temps, des variations de température peuvent être correctement simulées. Ainsi, l'effet mémoire simple sens, l'effet mémoire double sens assisté (cycle superthermique) et la génération d'effort au chauffage sont parmi les phénomènes qui peuvent maintenant être calculés. Par contre, on suppose que la température varie uniformément dans toute la structure. Puisque les alliages à mémoire de forme sont des matériaux métalliques diffusant facilement la chaleur, l'hypothèse de la variation homogène de la température est sans conséquence lorsque le rapport du volume sur la surface d'échange thermique de la composante étudiée est faible. C'est le cas d'un grand nombre de géométries comme les poutres élancées et les plaques minces. À l'opposé, lorsque le rapport du volume sur la surface d'échange devient plus élevé, on ne peut plus supposer une distribution homogène de la température dans la pièce. Le nombre de Biot [4.2] permet de déterminer si la condition de température homogène dans la pièce est vérifiée. Le nombre de Biot est défini de la façon suivante :

$$B_i = \frac{h\,V}{k\,A_s} \tag{4.1}$$

où B_i est le nombre de Biot (adimensionnel), V est le volume de la pièce (en m^3), k est la conductivité thermique du matériau (en W/m·K), A_s est la surface d'échange thermique entre la pièce et le milieu environnant (en m^2) et h est le coefficient de convection entre la pièce et le milieu environnant (en $W/m^2 \cdot K$). Il est à noter que seul h dépend des conditions d'exposition de la pièce dans son entourage. Par exemple, si la composante est placée dans un fort débit d'air, les conditions de convection forcée ainsi créées se traduisent par une élévation du coefficient de convection h. Il devient alors plus difficile

d'obtenir des conditions de température homogène. Si le nombre de Biot donné à l'équation (4.1) est inférieur à 0.1, on peut alors supposer que la température et la variation de température dans la pièce sont homogènes. Si une telle hypothèse ne peut pas être posée à cause d'un nombre de Biot supérieur à 0.1, la distribution de température doit alors être calculée par une méthode numérique (différences finies, éléments finis, etc.). Un tel couplage avec une autre méthode numérique n'est pas encore implanté dans *SIMAMF*, mais nous sommes conscients de la nécessité d'une telle approche. Des développements en ce sens devront être entrepris prochainement et une certaine précaution devra être prise afin de considérer les échanges endothermiques et exothermiques lors des transformations de phase entre l'austénite et la martensite.

La formulation des équations de *SIMAMF* suit une approche standard fondée sur la méthode des déplacements. Ainsi, les inconnus du problème sont les déplacements des noeuds du maillage. Lorsque ceux-ci sont connus, la solution du problème est déterminée. À l'opposé de la méthode des déplacements, les formulations mixtes introduisent des variables additionnelles afin de calculer la solution du problème. Par exemple, l'analyse des corps incompressibles nécessite une formulation mixte dans laquelle les déplacements nodaux et la pression dans les éléments sont les inconnus du problème. Dans *SIMAMF*, aucune formulation mixte n'est utilisée et les inconnus du problème sont exclusivement les déplacements nodaux. Comme la plupart des programmes d'éléments finis structuraux, *SIMAMF* utilise le principe du déplacement virtuel comme relation de base pour développer la formulation. De nombreux ouvrages comme celui de Bathe [4.3] discutent du concept de déplacement virtuel. Le livre de Bathe a été la principale référence utilisée pour développer le programme d'éléments finis *SIMAMF*. Par contre, la formulation de *SIMAMF* inclut la possibilité d'avoir des grands déplacements, des grandes rotations et des grandes déformations. Le traitement des grandes déformations est nécessaire puisque les alliages à mémoire de forme peuvent se déformer de façon réversible jusqu'à 10% (et même plus dans le cas des monocristaux). On dit qu'une déformation est grande lorsque celle-ci excède 1%. La

notion de grande déformation n'est pas directement prise en compte par *SIMAMF*, mais plutôt par les relations constitutives qui lui sont interfacées. En permettant à *SIMAMF* de manipuler des relations constitutives capables de modéliser les grandes déformations, un code d'éléments finis "*non-linéaire matériau*" est ainsi obtenu.

La possibilité d'accommoder les grands déplacements et les grandes rotations nécessite des algorithmes de calculs particuliers. En effet, si de grands déplacements et de grandes rotations surviennent lors de calculs effectués par un programme d'éléments finis linéaires, la solution calculée sera inévitablement erronée. Il est possible de vulgariser un tel comportement dans le cas des grands déplacements en effectuant une analogie avec un test de traction. Dans un test de traction, la contrainte est calculée en divisant la force appliquée par la section initiale. Pour de petits déplacements, la section demeure presque inchangée et la contrainte calculée est très voisine de la contrainte réelle. La contrainte réelle également appelée contrainte Cauchy est définie comme étant la force divisée par la section instantanée. Si les déplacements deviennent grands, il y aura une diminution relativement importante de la section et l'écart entre la contrainte Cauchy et la contrainte calculée sera importante. Les grandes rotations engendrent également des écarts importants entre les contraintes calculées et les contraintes réelles. Par exemple, si une rotation rigide est appliquée à un élément dans un programme d'éléments finis linéaires, des contraintes seront générées alors qu'en réalité, aucun contrainte ne devrait être calculée. Afin de prendre en considération les effets des grands déplacements et des grandes rotations, les contraintes et les déformations doivent être calculées de façon différentes. Ainsi, le tenseur de déformation de Green-Lagrange et le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff sont employées dans *SIMAMF*. L'introduction de ces deux tenseurs dans la formulation fait de *SIMAMF* un code d'éléments finis "*non-linéaire géométrique*". Une discussion plus approfondie concernant ces tenseurs de déformation et de contrainte est réalisée à la section 4.3 consacrée aux algorithmes de calcul.

Puisque le programme peut manipuler des non-linéarités au niveau du comportement du matériau et au niveau de la géométrie de la composante, la solution du problème est également non-linéaire. Une approche incrémentale doit alors être préconisée afin de calculer les déplacements nodaux qui assurent l'équilibre entre les forces externes appliquées et les forces internes générées par les contraintes dans la composante. Dans *SIMAMF*, une formulation de type *Lagrangienne-réactualisée* est employée. La formulation est de type *Lagrangienne* car les déplacements de certaines particules appartenant à la composante étudiée sont suivis à partir d'une configuration initiale jusqu'à une configuration finale. À l'opposé, une formulation de type *Eulérienne* étudie le mouvement des particules de matière au travers d'un volume fixe. Une formulation Eulérienne est mieux adaptée pour analyser les problèmes de la mécanique des fluides tandis que l'utilisation d'une formulation Lagrangienne répond mieux aux problèmes de la mécanique des solides. Imaginons que l'on désire calculer la configuration du système (les déplacements nodaux, les contraintes et les déformations internes, etc.) au temps $t+\Delta t$ alors que les configurations au temps 0 et au temps t sont connues, deux alternatives sont alors disponibles. La première consiste à calculer la configuration au temps $t+\Delta t$ à partir de la configuration initiale au temps 0. C'est la formulation *Lagrangienne-totale*. D'un autre côté, une formulation *Lagrangienne-réactualisée* calcule la configuration du système au temps $t+\Delta t$ à partir de la configuration au temps t. Les deux formulations de type Lagrangienne sont entièrement équivalentes et le choix d'une formulation Lagrangienne-réactualisée dans *SIMAMF* est fondé exclusivement sur des considérations numériques. En effet, l'expression de certains tenseurs est allégée dans une formulation Lagrangienne-réactualisée. Cette discussion concernant les différentes formulations disponibles est très sommaire. Le livre de Bathe [4.3] explique beaucoup plus en profondeur toutes les nuances qui existent entre les différentes formulations et les équations du principe du déplacement virtuel y sont élaborées.

En somme, *SIMAMF* est un programme d'éléments finis très général fondé sur la méthode des déplacements et du principe du déplacement virtuel. En plus d'être non-linéaire

matériau et non-linéaire géométrique, le programme adopte une formulation de type Lagrangienne-réactualisée afin de calculer la réponse incrémentale d'une composante en alliage à mémoire de forme. Ces caractéristiques font de *SIMAMF* un outil de calcul très complexe pour les programmeurs, mais combien puissant et général pour les utilisateurs et les concepteurs de composantes en AMF.

Il est important de souligner que *SIMAMF* est seulement un processeur. Il reçoit en entrée un fichier texte décrivant le maillage (les noeuds, les éléments, les conditions aux frontières, etc.) et produit en sortie des fichiers textes dans lesquels sont inscrits les résultats (déplacements, contraintes, déformations, etc.). Un logiciel commercial de démonstration *FEMAP 4.3* pour Windows (*Finite Element Modeler And Postprocessor*) de la compagnie *Enterprise Software Products inc.* est employé comme préprocesseur et postprocesseur. Dans un premier temps, *FEMAP* employé comme préprocesseur permet de construire le maillage en localisant les noeuds ainsi qu'en définissant les éléments et les conditions frontières. Avec un tel logiciel, plusieurs erreurs sont évitées comme une mauvaise numérotation des noeuds qui engendre des distorsions dans les éléments. Une fois les calculs effectués avec *SIMAMF*, *FEMAP* joue le rôle d'un postprocesseur en visualisant les résultats des analyses par éléments finis. On peut y voir la déformée tridimensionnelle des composantes ainsi que les distributions de contraintes et de déformation. *FEMAP* est un outil qui permet de diminuer considérablement le temps de préparation de maillages et le temps d'analyse des résultats. La seule ombre au tableau concernant *FEMAP* réside dans la nécessité de développer des interfaces afin de traduire les données pour les rendre compatibles avec *SIMAMF*.

Dans les prochaines sections, on fait référence à trois configurations possibles : la configuration *initiale*, la configuration *actuelle* et la *prochaine* configuration. La configuration initiale est la position des noeuds du maillage telle que définie dans le fichier d'entrée. De plus, on impose que tous les états de contrainte et de déformation à l'intérieur des éléments sont nuls. La configuration initiale demeure inchangée durant

toute l'analyse. Les deux autres configurations sont en relation avec l'approche incrémentale de la formulation Lagrangienne-réactualisée utilisée pour calculer la réponse du système. La configuration actuelle correspond à la position d'équilibre du système au temps t par rapport aux conditions frontières appliquées. Les noeuds se sont déplacés par rapport à la configuration initiale et des états de contraintes et de déformation ont été générés dans les éléments. Les contraintes internes produisent alors des forces internes qui équilibrent les forces externes appliquées sur la composante. La prochaine configuration est utilisée temporairement pour calculer les déplacements et les contraintes internes au temps $t+\Delta t$. Entre les temps t et $t+\Delta t$, les conditions aux frontières sont modifiées.

Les algorithmes calculent une prochaine configuration au temps $t+\Delta t$. Étant donné le caractère non-linéaire de la réponse du système, les contraintes internes au temps $t+\Delta t$ risquent de ne pas être en équilibre avec les forces externes. Des modifications sont alors apportées à la prochaine configuration selon une approche itérative jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. La prochaine configuration est donc constamment réévaluée et lorsque les conditions d'équilibre sont respectées, une mise à jour est réalisée. Cette mise à jour consiste à transférer les données descriptives (position des noeuds, états de contrainte et de déformation) de la prochaine configuration vers la configuration actuelle. Une "nouvelle" prochaine configuration peut alors être calculée pour ensuite être mise à jour de nouveau et ainsi de suite. Ainsi, la configuration actuelle est toujours en équilibre tandis que la prochaine configuration est constamment hors d'équilibre. Lorsque la "première" prochaine configuration est calculée, la configuration actuelle au temps t=0 correspond exactement à la configuration initiale.

4.2 Architecture du programme

Avant de discuter de l'architecture du programme proprement dite, nous allons considérer un exemple de maillage simple pour bien faire ressortir la philosophie de

SIMAMF fondée sur une programmation orientée objet. Imaginons que l'on doive analyser par éléments finis une pièce dont la géométrie est donnée à la figure 4.1. Afin de modéliser cette pièce, douze noeuds (numérotés de 1 à 12 sur la figure 4.1) et 4 éléments linéaires sont définis. Le maillage comprend un élément brique (délimité par les noeuds 1 à 8), deux éléments "*wedge*" (entre les noeuds 2, 6, 9, 3, 7 et 10 ainsi qu'entre les noeuds 3, 7, 11, 4, 8 et 12) et un élément tétraèdre (défini par les noeuds 3, 10 , 11 et 7). De plus, cinq rotules sont modélisées en bloquant tous les déplacements des noeuds 1, 9, 10, 11 et 12. Finalement, quatre forces nodales sont appliquées sur la partie supérieure de la pièce aux noeuds 5, 6, 7 et 8. L'analyse par éléments finis permet de déterminer les déplacements des noeuds ainsi que les contraintes et les déformations à l'intérieur des éléments.

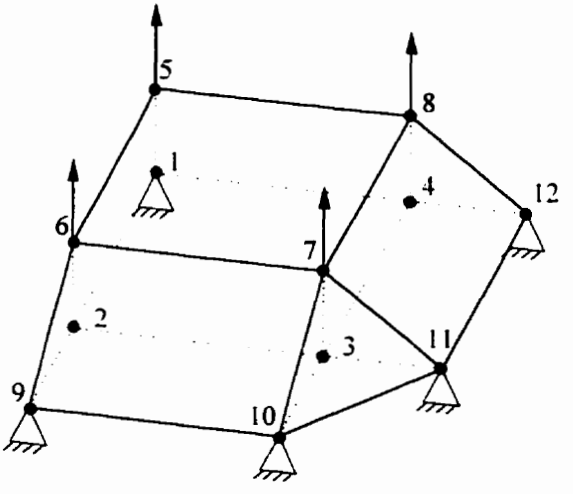


Figure 4.1 Exemple de maillage dans *SIMAMF*.

Dans *SIMAMF*, toutes les composantes du maillage de la figure 4.1 sont considérées comme des objets appartenant à différentes classes. Une classe est un concept de la programmation orientée objet qui permet d'associer certaines propriétés et certaines méthodes de calcul à un objet. Chaque noeud, objet de la classe *Node_c*, est défini par sa température et par ses coordonnées dans les configurations initiale et déformées.

Chaque élément est un objet d'une classe dérivée de la classe mère *Elem_c*. Un élément est caractérisé par une série de noeuds qui délimitent l'élément et par un certain nombre de points de Gauss qui servent à calculer numériquement les intégrales. Comme nous le verrons plus loin, chaque point de Gauss appartient à une classe dérivée de la classe mère *State_c*. Les conditions frontières sont également des objets appartenant à une autre classe appelée *Bcond_c*.

Tous ces objets sont regroupés au sein d'une autre classe nommée *Mesh_c* à titre de membres. Cette classe définit complètement le maillage et elle permet d'accéder à toute l'information en tout temps. Les algorithmes de calcul décrits à la section 4.3 travaillent avec un seul objet de la classe *Mesh_c* qu'est le maillage. Les fonctions membres de la classe *Mesh_c* accèdent à l'information qui leur est requise par l'entremise des autres objets membres. Clarifions cette hiérarchie en explicitant sur l'architecture de la classe *Mesh_c*. *Le* graphe de la figure 4.2 montre la structure principale de la classe *Mesh_c* et des autres classes membres. Il est à noter que certains membres de cette classe ne sont pas indiqués puisqu'ils jouent un rôle secondaire. C'est le cas des paramètres de gestion de fichiers dans lesquels les informations des fichiers d'entrée et de sortie sont gardés en mémoire et aussi des paramètres de convergence pour le processus itératif de résolution des équations. De plus, seulement les membres des classes sont indiqués. Les fonctions membres qui sont appelées pour les calculs sont volontairement omises. Le but recherché présentement est de fournir un minimum de précisions concernant la structure du programme afin de faciliter la compréhension des algorithmes de calculs présentés à la prochaine section. Néanmoins, le lecteur doit avoir quelques connaissances de base sur les langages de programmation orientée objet comme le C++ afin de bien assimiler les notions présentées car sinon, cette section pourrait sembler assez ardue.

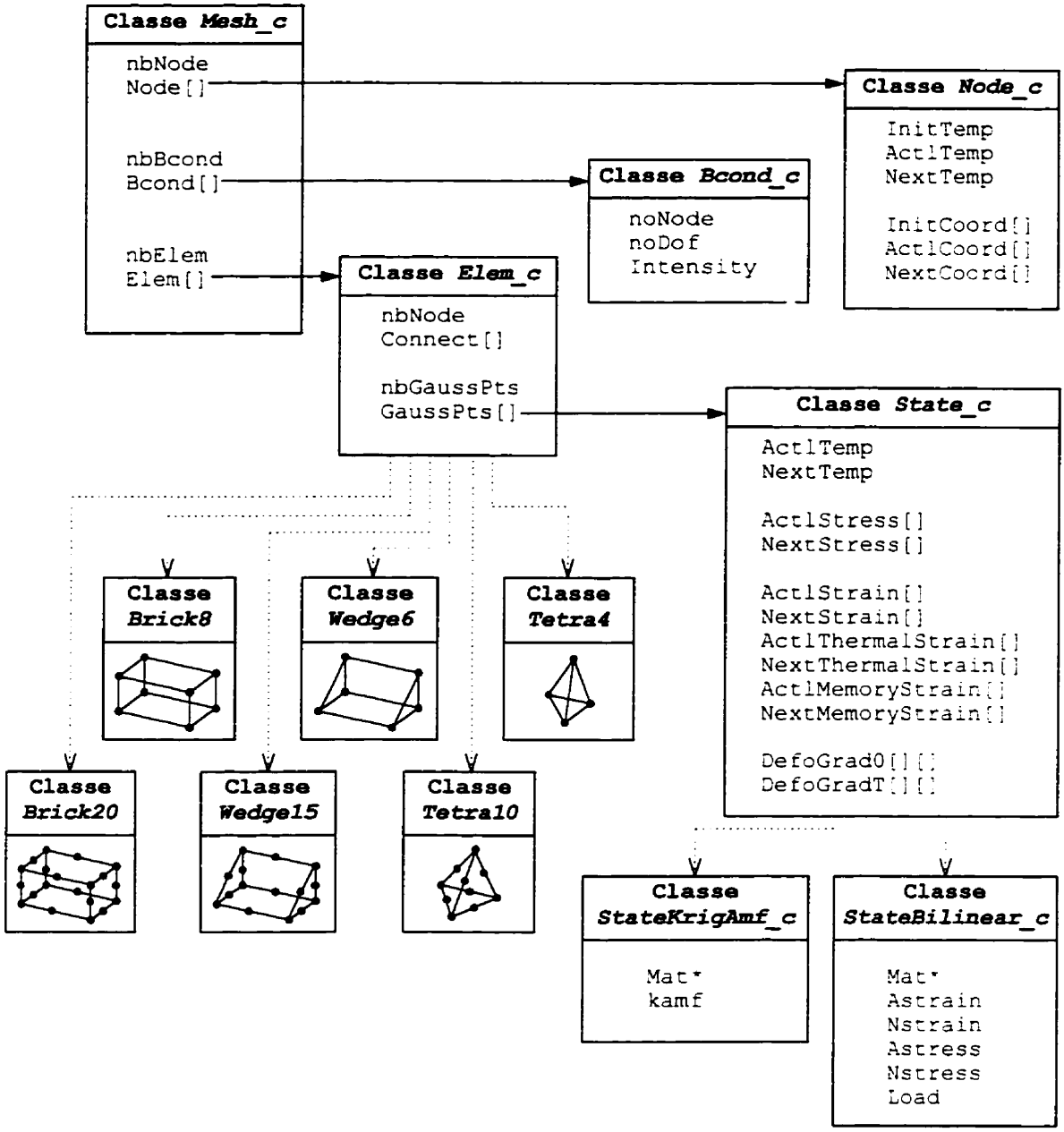


Figure 4.2 Architecture des principales classes de *SIMAMF*.

Dans la hiérarchie présentée à la figure 4.2, deux types de lien sont indiqués. Dans un premier temps, les flèches en trait plein indiquent que certains objets appartenant à la classe pointée par la flèche sont des membres d'une autre classe. Par exemple, un maillage (classe *Mesh_c*) comprend un certain nombre de noeuds et chacun d'entre eux est un objet de la classe *Node_c*. Il existe un lien entre la classe *Mesh_c* et la classe

Node_c puisque les noeuds servant à définir le maillage sont en réalité des membres de la classe *Mesh_c*. Il y a même une double hiérarchie au niveau des éléments du maillage (classe *Elem_c*) qui sont des membres de la classe *Mesh_c*, mais qui possèdent comme membres des objets de la classe *State_c*. La classe *State_c* sert à définir les états de contrainte et de déformation à chaque point de Gauss afin de calculer numériquement les intégrales. Si le maillage comprend dix éléments dans lesquels sont définis huit points de Gauss, l'analyse compte donc au total 80 points d'intégration numérique de Gauss. Ainsi, 80 objets de la classe *State_c* seront créés pendant l'analyse.

Le second type de liens schématisés par les flèches en traits discontinus à la figure 4.2 représente les classes dérivées. Ce concept de la programmation orientée objet est appelé l'*héritage*. En effet, une classe dérivée est une classe qui hérite tous les membres et toutes les fonctions membres d'une classe mère en plus d'avoir la possibilité de posséder ses propres membres et fonctions membres. Par exemple, six classes sont dérivées de la classe mère *Elem_c*. À chaque type d'élément (tétraèdre, brique et "*wedge*") est associée une classe dérivée. Une telle architecture fondée sur des classes dérivées permet d'écrire des algorithmes de calcul qui sont indépendants du nombre de types d'élément. Si un nouveau type d'élément est ajouté, l'algorithme de calcul demeure inchangé. Des classes dérivées sont également employées au niveau des états de contraintes et de déformation à l'intérieur des éléments. La classe *State_c* sert de classe mère à partir de laquelle deux autres classes sont dérivées. Ces classes dérivées permettent de manipuler différentes relations constitutives afin de définir le comportement du matériau qui compose les éléments. Comme dans le cas des différents types d'éléments, les algorithmes de calcul sont indépendants des relations constitutives employées et l'ajout de nouvelles relations constitutives est grandement facilité.

À la figure 4.2, les principales classes sont représentées par les boîtes rectangulaires. Le nom de la classe est inscrit dans la partie supérieure ombragée et ses principaux membres sont listés au-dessous. Certains membres sont suivis de crochets [] et ces

derniers indiquent qu'il s'agit d'un tableau de données. Par exemple, le membre `Node[]` de la classe *Mesh_c* est un tableau d'objet *Node_c* dont la dimension correspond au nombre de noeuds dans le maillage. Nous allons maintenant discuter plus en détail à propos de chaque classe représentée à la figure 4.2.

4.2.1 Classe *Node_c*

Un objet de la classe *Node_c* caractérise un noeud du maillage. La position dans l'espace d'un noeud est toujours connue en gardant en mémoire la position initiale, la position finale et la prochaine position. Ces trois positions correspondent aux trois configurations précédemment discutées et elles sont définies par les trois tableaux de coordonnées suivants : `InitCoord[]`, `ActlCoord[]` et `NextCoord[]`. Chaque tableau de coordonnées constitue un vecteur comprenant trois nombres réels puisque le logiciel *SIMAMF* modélise des composantes tridimensionnelles. Les vecteurs de coordonnées permettent de calculer les déplacements et les déformations à l'intérieur des éléments. Les température initiale et actuelle ainsi que la prochaine température d'un noeud sont données respectivement par les membres `InitTemp`, `ActlTemp` et `NextTemp`. Dans *SIMAMF*, les variations de température s'effectuent de manière homogène et tous les noeuds sont constamment à la même température. Une telle structure permettant de garder en mémoire la température de chaque noeud a été préconisée pour prendre en considération la diffusion thermique dans la composante étudiée. Éventuellement, *SIMAMF* sera couplé à un programme d'éléments finis thermiques qui calculera la distribution de température dans le temps. *SIMAMF* ne sera alors plus seulement limité à des variations homogènes de la température, principalement lorsque la composante est relativement massive (nombre de Biot supérieur à 0.1). Lorsqu'un tel branchement avec un module thermique sera opérationnel, les effets de la température sur le comportement mécanique de la composante pourront être correctement modélisés sans modifier la structure de *SIMAMF*.

4.2.2 Classe *Bcond_c*

Les objets de la classe *Bcond_c* servent à spécifier les conditions frontières qui sont contrôlées de manière incrémentale dans *SIMAMF*. En effet, à partir de la configuration actuelle qui est en équilibre, des incréments de déplacements nodaux et/ou de forces nodales sont imposés. Ces incréments modifient l'équilibre du système et la prochaine configuration est calculée. Un objet de la classe *Bcond_c* comprend principalement les trois membres suivants : `noNode`, `noDof` et `Intensity`. Ces membres sont respectivement le numéro du noeud sur lequel est imposée une condition frontière, le numéro du degré de liberté qui indique la direction d'application (x, y ou z) et l'intensité de la condition frontière. L'intensité représente la valeur de l'incrément de déplacement ou la composante de la force selon la direction spécifiée par le numéro du degré de liberté. Dans les algorithmes de calcul de *SIMAMF*, chaque condition frontière peut être activée ou désactivée à chaque étape du processus incrémental. En effet, un déplacement nodal peut être libre pendant un certain temps et ensuite devenir imposé à une valeur nulle ou prescrite pour quelques incréments. Le contrôle des conditions frontières dans la présente version de *SIMAMF* est assez rudimentaire. En effet, seulement les incréments de déplacements nodaux et de forces nodales peuvent être imposés dans les directions du système global X-Y-Z. Bien qu'il soit possible d'activer ou de désactiver chaque condition frontière entre les incréments, certaines situations particulières sont difficilement modélisables. C'est le cas entre autres de l'application d'une pression sur la paroi d'une pièce ou de l'imposition d'un déplacement nodal selon un plan incliné. De telles conditions frontières spécialisées vont être ajoutées ultérieurement car le mandat visé dans le cadre de cette thèse est d'obtenir un programme général d'éléments finis non-linéaires pour des composantes à mémoire de forme qui soit opérationnel le plus rapidement possible.

4.2.3 Classe *Elem_c* et ses classes dérivées

Chaque élément du maillage est représenté par un objet d'une des classes dérivées de la classe mère *Elem_c*. Actuellement, six types d'éléments sont disponibles pour modéliser une structure tridimensionnelle. Ces éléments sont les briques, les "wedges" et les tétraèdres dans leur version linéaire et quadratique et ils sont illustrés à la figure 4.3.

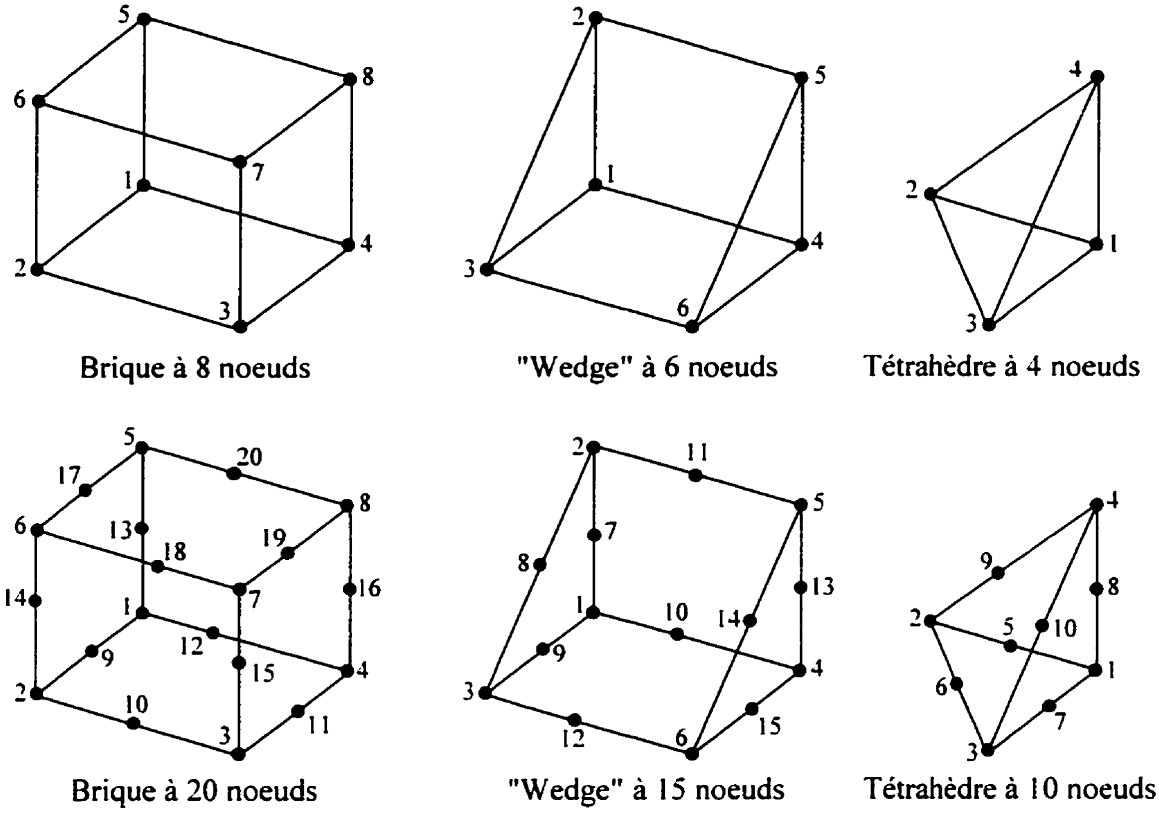


Figure 4.3 Types d'éléments disponibles dans *SIMAMF*.

Les éléments linéaires sont représentés dans la partie supérieure de la figure 4.3 tandis que les éléments quadratiques le sont dans la partie inférieure. Ces derniers présentent plusieurs avantages par rapport aux éléments linéaires. Dans un premier temps, pour un même nombre d'éléments dans un maillage, les éléments quadratiques produisent des résultats bien plus précis que les éléments linéaires. Dans un second temps, les éléments

quadratiques permettent de modéliser des géométries tridimensionnelles possédant des arêtes courbées. En effet, les arêtes d'une pièce peuvent être représentées seulement par des segments "linéaires par morceaux" lorsque des éléments linéaires sont employés. Enfin, les éléments quadratiques sont mieux adaptés pour les analyses non-linéaires. Par contre, pour un même nombre d'éléments dans un maillage, le nombre de noeuds qui doivent être définis est supérieur avec des éléments quadratiques, ce qui augmente inévitablement la taille du système d'équations à résoudre et le temps des calculs. Dans *SIMAMF*, tous les types d'éléments peuvent être employés au sein d'une même analyse. Le choix des éléments dépend seulement de la géométrie à modéliser (voir l'exemple de la figure 4.1 où trois types d'éléments différents ont été utilisés) et de la précision recherchée pour les calculs.

Il existe une classe dérivée de la classe mère *Elem_c* pour chaque type d'éléments. Le nom des classes dérivées spécifie la topologie de l'élément et le nombre de noeuds qui le composent. Les six classes dérivées sont les suivantes : *Brick8*, *Brick20*, *Wedge6*, *Wedge15*, *Tetra4* et *Tetra10*. Certaines informations qui caractérisent un élément sont indépendantes du type d'élément. De telles informations sont membres de la classe mère *Elem_c*. C'est le cas de la connectivité de l'élément et des points d'intégration numérique de Gauss. Nous reviendrons plus loin sur les points d'intégration numérique à la section 4.2.4. La connectivité spécifie quant à elle le numéro des noeuds qui composent un élément. En effet, le membre `nbNode` de la classe mère *Elem_c* garde en mémoire le nombre de noeuds d'un élément tandis que le vecteur membre `Connect[]` liste le numéro des noeuds de la connectivité d'un élément. Par exemple, le vecteur de connectivité de l'élément tétraèdre à quatre noeuds de la figure 4.1 serait `Connect[3,10,11,7]`.

Tous les types d'éléments définis dans *SIMAMF* sont solides, tridimensionnels et isoparamétriques. On dit qu'un élément est isoparamétrique lorsque les fonctions d'interpolation utilisées pour interpoler les déplacements sont identiques à celles utilisées

pour interpoler les coordonnées (ou les positions). Les interpolations sont réalisées par une combinaison linéaire des valeurs nodales pondérées par des fonctions appelées fonctions d'interpolation h_i. Ainsi, la position X (X pouvant signifier la coordonnée spatiale x, y ou z) et le déplacement U (U pouvant signifier la composante de déplacement u, v ou w) s'interpolent comme suit :

$$X = \sum_{i=1}^{N} h_i X_i \qquad U = \sum_{i=1}^{N} h_i U_i \tag{4.2}$$

où N est le nombre de noeuds dans l'élément et X_i et U_i sont respectivement les coordonnées et les composantes de déplacement des noeuds. La fonction d'interpolation h_i associée au i-ième noeud a la propriété de valoir 1.0 lorsqu'elle est évaluée au i-ième noeud de l'élément et 0.0 à tous les autres noeuds. Or, puisque le nombre et l'arrangement des noeuds sont différents d'un élément à l'autre, il est évident que les fonctions d'interpolation le sont également. Les fonctions d'interpolation ainsi que leurs dérivées sont constamment employées dans les algorithmes de calcul pour évaluer certains vecteurs et certaines matrices à des positions bien spécifiques à l'intérieur des éléments (c'est-à-dire aux points d'intégration numérique). L'utilisation de classes dérivées permet d'évaluer les N fonctions d'interpolation et leurs dérivées à une position particulière à l'intérieur d'un élément et cela de façon systématique. En effet, dans les algorithmes de calcul, aucun aiguillage ne doit être prévu afin de supporter tous les types d'éléments. C'est le principal avantage du concept d'héritage en POO. Les fonctions d'interpolation exprimées sur un élément de référence sont explicitées dans la majorité des ouvrages spécialisés traitant des éléments finis (le livre de Bathe [4.3] par exemple).

L'autre information commune à tous les types d'éléments concerne le nombre de points d'intégration numérique de Gauss à l'intérieur des éléments. En effet, de nombreuses intégrales doivent être calculées dans la méthode des éléments finis. Or, la résolution analytique de ces intégrales est pratiquement impossible à réaliser et des méthodes

numériques doivent être employées. Ainsi, l'intégrale d'une fonction F(r.s.t) sur un élément de volume dV = dr ds dt peut être calculée par la sommation suivante :

$$\int F(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{P} \omega_i\, F(r_i, s_i, t_i) \qquad (4.3)$$

où P représente le nombre de points d'intégration numérique, ω_i le facteur de pondération (appelé également le poids) du i-ième point d'intégration et $F(r_i, s_i, t_i)$ la fonction F évaluée aux i-ième point d'intégration dont les coordonnées sont r_i, s_i et t_i. Dans *SIMAMF*, le nombre de points d'intégration numérique peut être spécifié pour chaque élément. Lorsque les gradients de déplacement entre les noeuds de l'élément sont importants, il est souhaitable d'utiliser un plus grand nombre de points d'intégration afin d'obtenir des résultats plus précis. Généralement, on utilise 8 points d'intégration numérique pour les éléments briques à 8 noeuds dans un arrangement de 2 noeuds dans chaque direction de la brique (2 x 2 x 2) et 27 points d'intégration pour la brique à 20 noeuds (3 x 3 x 3). Habituellement, on emploie 6 points d'intégration pour les éléments "wedge" à 6 noeuds et 18 points d'intégration pour les "wedge" à 15 noeuds. Les points d'intégration dans les éléments "wedge" forment des triangles dont la normale est alignée avec les arêtes longitudinales des "wedge". Dans le "wedge" à 6 noeuds, 2 triangles composés chacun de 3 points d'intégration sont employés alors que trois triangles composés chacun de 6 points d'intégration sont utilisés pour le "wedge" à 10 noeuds. Enfin, un seul point d'intégration numérique est requis dans le tétraèdre à 4 noeuds car les états de déformation et de contrainte sont constants. Le point d'intégration est situé au centroïde du tétraèdre. Enfin, 4 points d'intégration sont généralement employés pour les éléments tétraèdres à 10 noeuds. Le poids ω_i et les coordonnées r_i, s_i et t_i des points d'intégration numérique de Gauss sur l'élément de référence sont également donnés dans les livres spécialisés traitant des éléments finis (le livre de Bathe [4.3] par exemple). Le poids et les coordonnées des points sont évidemment fonctions du type d'élément et du nombre de points d'intégration. Dans un

élément de *SIMAMF*, le nombre de points d'intégration numérique de Gauss est une donnée de la classe mère *Elem_c* via le membre `nbGaussPts`. Chaque point de Gauss est un objet de la classe *State_c* qui est gardé en mémoire dans le tableau `GaussPts[]`.

4.2.4 Classe *State_c* et ses classes dérivées

Comme nous l'avons déjà discuté, un objet de la classe *State_c* représente un point d'intégration numérique à l'intérieur d'un élément. À chaque point d'intégration, les états tridimensionnels de contrainte et de déformation sont suivis. L'état de contrainte est représenté par un tableau de 6 nombres réels qui correspondent aux 6 composantes du tenseur de contrainte (3 contraintes axiales et 3 contraintes de cisaillement). Il y a un tableau pour l'état actuel de contrainte `ActlStress[]` et un autre pour le prochain état de contrainte `NextStress[]`. Les deux états font référence à la configuration actuelle et à la prochaine configuration. L'état de contrainte est décrit par les contraintes de Cauchy, c'est-à-dire la force par unité de surface en configuration déformée. Cette précision est apportée puisque dans les calculs, le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff est également utilisé. Ce dernier tenseur n'a pas de véritable signification physique et c'est la raison pour laquelle on garde en mémoire les contraintes réelles de Cauchy.

En plus des états de contrainte, six états de déformation servent à définir un point de Gauss dans *SIMAMF*. Chaque état de déformation est défini par un tableau de six composantes correspondant aux trois déformations axiales et aux trois déformations de cisaillement. Autant pour la configuration actuelle que pour la prochaine configuration, on retrouve l'état de déformation totale (`ActlStress[]` et `NextStrain[]`), l'état de déformation causée par la dilatation thermique (`ActlthermalStrain[]` et `NextThermalStrain[]`) et l'état de déformation causée par l'effet mémoire de forme (`ActlMemoryStrain[]` et `NextMemoryStrain[]`). Ces états de déformation sont exprimés en déformation d'ingénierie et non pas en déformation de

Green-Lagrange, ce dernier tenseur étant employé seulement pour les calculs. La façon dont les états de contrainte et de déformation sont calculés seront expliqués à la section 4.3 lors de la présentation des algorithmes de calcul.

Il est bien connu que les alliages à mémoire de forme sont fortement dépendants de la température. Afin de bien calculer le comportement du matériau, la température de chaque point de Gauss doit être évaluée. On utilise les fonctions d'interpolation et les températures nodales de manière similaire à l'équation (4.2) pour calculer la température actuelle `ActlTemp` et la prochaine température `NextTemp` du point de Gauss. Les états actuels de contrainte et de déformation demeurent inchangés lorsqu'un nouvel incrément est calculé. En effet, ces états correspondent à la configuration d'équilibre. Par contre, les prochains états de contrainte et de déformation sont constamment modifiés jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre soit atteint.

Enfin, les deux derniers membres de la classe *State_c* qui ont été présentés à la figure 4.2 et qui n'ont pas encore été discutés sont les gradients de déformation. À partir des déplacements nodaux, les gradients de déformation d'un point de Gauss peuvent être calculés. Le premier gradient de déformation `DefoGrad0[][]` est celui qui caractérise l'état de déformation générée au point de Gauss par le passage de la configuration initiale à la prochaine configuration. De son côté, le second gradient de déformation `DefoGradT[][]` remplit exactement le même rôle sauf qu'il mesure l'état de déformation résultant du passage entre la configuration actuelle et la prochaine configuration. Ces gradients de déformation permettent de calculer l'état de déformation évalué au point de Gauss dans la prochaine configuration ainsi que l'incrément de déformation qu'a subi le point de Gauss par le passage de la configuration actuelle vers la prochaine configuration. La façon de calculer ces gradients de déformation est abordée à la section 4.3 lors de la discussion sur les algorithmes de calcul. Les gradients de déformation sont des tenseurs du second ordre et c'est la raison pour laquelle ils sont définis dans la figure 4.2 comme des tableaux à double indice.

Pour calculer les états de contrainte et de déformation, il faut savoir comment se comporte le matériau. Il faut donc recourir à des relations constitutives spécialement adaptées aux comportements complexes des alliages à mémoire de forme. Pour chaque relation constitutive interfacée à *SIMAMF*, une classe dérivée de la classe mère *State_c* devra être développée. Actuellement, deux relations constitutives ont été interfacées à *SIMAMF* avec succès. La première relation constitutive est un modèle bilinéaire et la classe dérivée de ce modèle s'appelle *StateBilinear_c*. Ce modèle est généralement utilisé pour les analyses par éléments finis préliminaires. En effet, le modèle n'est valide que dans le cas superélastique et isotherme. Aucune variation de température ne peut être modélisée mais les calculs sont rapides.

Une fois les analyses préliminaires terminées, des analyses plus poussées peuvent être réalisées avec la relation constitutive *KRIGAMF* dont la classe dérivée est *StateKrigamf_c*. *KRIGAMF* est le modèle phénoménologique décrit au chapitre 3 avec lequel des variations de température et des comportements non-linéaires peuvent être traités. Ce modèle est probablement celui qui donne les résultats les plus précis mais la caractérisation expérimentale de l'alliage peut s'avérer difficile car plusieurs courbes isothermes à différentes températures doivent être obtenues. Des efforts ont été entrepris pour interfacer le modèle micromécanique fondé sur l'approche de Likhatchev et Malinin qui a été brièvement décrite au deuxième chapitre ainsi qu'à l'annexe I. Par contre, les premiers n'ont pas été concluants et de nouvelles tentatives sont planifiées prochainement. La principale difficulté provient du fait que le modèle micromécanique est tensoriel alors que les deux autres (le modèle bilinéaire et *KRIGAMF*) sont unidimensionnels. Ces deux derniers modèles subissent une généralisation tridimensionnelle en empruntant des notions de la plasticité classique comme nous le verrons un peu plus loin.

4.2.4.1 Classe StateBilinear_c

La classe *StateBilinear_c* est dérivée de la classe mère *State_c*. Elle permet de calculer les états de contrainte et de déformation qui sont les membres de la classe *State_c* en suivant un comportement dicté par un modèle bilinéaire. Le modèle bilinéaire employé est une relation constitutive unidimensionnelle car il modélise le comportement superélastique et isotherme d'un alliage à mémoire de forme soumis seulement à de la tension uniaxiale. Cette loi de matériau est décrite par des segments de droite qui épousent le mieux possible une courbe expérimentale superélastique d'un AMF. La relation bilinéaire est entièrement définie par sept paramètres dont cinq d'entre eux sont représentés à la gauche de la figure 4.4 : le module d'élasticité E, la pente de transformation de phase H, la déformation ε_{mf} à la fin de la transformation de l'austénite en martensite, la contrainte σ_{ms} au début de la transformation de l'austénite en martensite et la contrainte σ_{af} à la fin de la transformation de la martensite en austénite. Les deux autres paramètres sont les coefficients de Poisson ν et de dilatation thermique α. On suppose que ces deux coefficients demeurent constants peu importe l'état du matériau (austénitique, martensitique ou pendant la transformation de phase) et que les zones élastiques de la martensite et de l'austénite sont caractérisées par la même rigidité E.

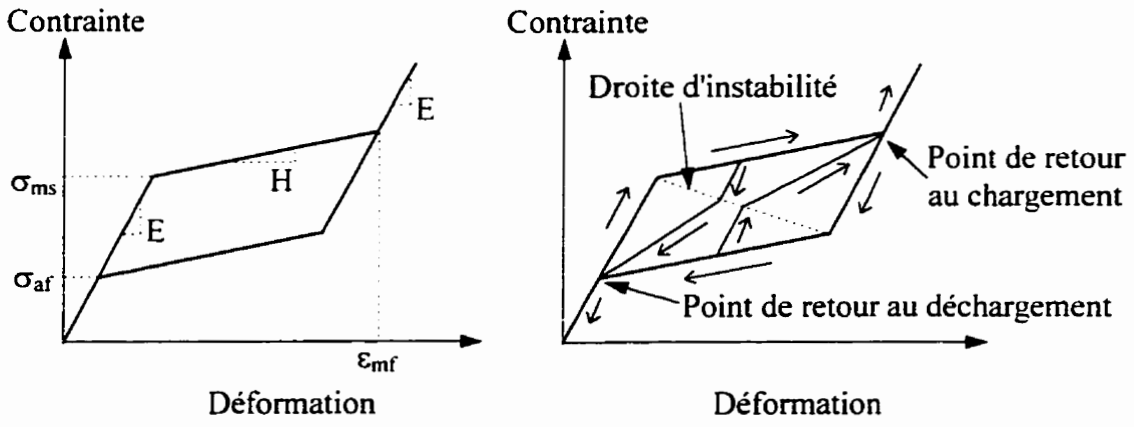


Figure 4.4 Paramètres descriptifs de la relation bilinéaire (gauche) et modélisation des sous-cycles d'hystérésis (droite).

Lorsque la contrainte ou la déformation est augmentée graduellement à partir d'une valeur nulle, le comportement élastique de l'austénite se manifeste jusqu'à ce que la contrainte atteigne σ_{ms}. Par la suite, la transformation de l'austénite en martensite se produit tant et aussi longtemps que la déformation est inférieure à ε_{mf}. Finalement, le comportement redevient élastique une fois la transformation de phase complétée. Une progression similaire est observée au déchargement lorsque la contrainte est ramenée à zéro sauf que la transformation de phase inverse se produit à des niveaux de contrainte inférieurs à ceux obtenus au chargement. Un cycle complet d'hystérésis a alors été effectué et le résultat est montré à la gauche de la figure 4.4. Si la contrainte est relâchée pendant le chargement alors que la transformation de phase est incomplète, un sous-cycle de déchargement est entamé. Ce sous-cycle illustré à la droite de la figure 4.4 est caractérisé premièrement par un déchargement élastique jusqu'à la droite d'instabilité et deuxièmement par une transformation inverse vers le point de retour au déchargement. Le cas du sous-cycle de chargement peut être raisonné de façon analogue (voir le schéma de droite de la figure 4.4). Bien entendu, le modèle bilinéaire est isotherme et les variations de température imposées n'engendrent aucun effet de mémoire de forme. Par contre, la dilatation thermique classique est prise en considération. En plus de modéliser le comportement superélastique d'un AMF, il est possible d'employer le modèle bilinéaire pour simuler le comportement des matériaux élastiques et élasto-plastiques. Dans la cas d'un matériau élastique, on impose le début de la transformation de phase à un niveau de contrainte extrêmement élevé, ce qui oblige le matériau à toujours se comporter de manière élastique. Pour un matériau élasto-plastique, le module de Young E , la pente de transformation H et la contrainte de début de transformation σ_{ms} peuvent être définis de la manière conventionnelle. Par contre, la contrainte σ_{ms} joue alors le rôle de la contrainte d'écoulement. De plus, il suffit d'imposer une valeur de contrainte σ_{af} bien inférieure à zéro afin d'obtenir un retour élastique jusqu'à un niveau de contrainte nulle.

Lorsqu'un volume de matière est soumis à un état de contrainte en tension uniaxiale, il est facile de suivre le chemin parcouru par le modèle bilinéaire. Par contre, lorsqu'un état tensoriel ou tridimensionnel de contrainte est étudié, certaines considérations doivent être apportées afin d'utiliser le modèle bilinéaire décrit précédemment. En somme, les états tridimensionnels de contrainte et de déformation doivent être ramenés à des valeurs scalaires. La conversion d'un tenseur vers une valeur scalaire est fortement inspirée de la théorie de la plasticité dans laquelle des contraintes et des déformations équivalentes sont définies. Par conséquent, un bref rappel de plasticité est effectué avant de présenter les développements qui ont mené à l'utilisation du modèle bilinéaire lorsque des états tridimensionnels de sollicitation sont manipulés.

Rappel de plasticité (critère de Von-Mises)

À la suite d'essais expérimentaux, il a été observé qu'il est impossible de plastifier un volume de matière ductile lorsqu'il est soumis uniquement à une pression hydrostatique. L'application d'une pression uniforme produit des déformations purement élastiques et réversibles même si la pression est supérieure à la limite d'écoulement du matériau. En 1913, Von-Mises suggéra que l'écoulement en un point donné survient lorsque le second invariant du tenseur déviatorique de la contrainte atteint une valeur critique. Un invariant d'un tenseur est un scalaire qui ne sera pas modifié à la suite d'un changement de repère (rotation) du tenseur. Le second invariant I_2 d'un tenseur A_{ij} est défini comme suit :

$$I_2 = \frac{1}{2} A_{ij} A_{ij} \tag{4.4}$$

Le déviatorique d'un tenseur est simplement obtenu en retranchant au tenseur la partie hydrostatique du chargement. Il s'agit donc de filtrer la partie hydrostatique du

chargement qui n'influence aucunement la plastification. La partie déviatorique A_{ij}^S d'un tenseur A_{ij} du second ordre et de dimension 3 par 3 est donnée par l'expression suivante :

$$A_{ij}^S = A_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} A_{kk} \tag{4.5}$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) et A_{kk} est la trace du tenseur ($A_{kk} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$). Selon la théorie de la plasticité fondée sur le critère de Von-Mises, il est possible de définir une contrainte équivalente $\bar{\sigma}_M$. Le concept de contrainte équivalente permet de quantifier de façon scalaire un tenseur. Un raisonnement similaire s'applique lorsque la norme d'un vecteur est calculée afin d'évaluer sa longueur. Or, les développements de Von-Mises proposent de relier l'évolution de la plastification uniquement au second invariant I_2^S du tenseur déviatorique de la contrainte selon la relation suivante :

$$\bar{\sigma}_M = K\sqrt{I_2^S} \tag{4.6}$$

où K est une constante adimensionnelle à déterminer. La racine carrée dans l'équation (4.6) est nécessaire afin de respecter les unités. En effet, la contrainte équivalente est Pa alors que le second invariant est en Pa^2. La constante K est calculée de façon à obtenir une égalité entre la valeur de la contrainte équivalente de Mises et la contrainte appliquée dans le cas de la traction uniaxiale et cela principalement à cause de considérations expérimentales. En effet, la manière la plus simple de déterminer le début de la plastification est par un essai de traction uniaxiale dans lequel la limite d'écoulement S_y en tension du matériau est déterminée. Ainsi, le début de la plastification peut être détecté pour un état quelconque de chargement lorsque la contrainte équivalente atteint la valeur de S_y. Déterminons la valeur de la constante K de façon à obtenir une égalité entre la contrainte équivalente et la contrainte pour un

chargement de traction uniaxiale d'une intensité σ. Le tenseur de contrainte σ_{ij} et le tenseur déviatorique de la contrainte σ_{ij}^S sont donnés respectivement par les expressions suivantes :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{ij}^S = \begin{bmatrix} 2\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/3 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Après avoir calculé le second invariant du tenseur déviatorique de la contrainte $I_2^S = \sigma^2/3$ et imposé la valeur de la contrainte équivalente à la valeur de la contrainte en tension uniaxiale $\bar{\sigma}_{Mises} = \sigma$ dans l'équation (4.6), la constante K doit valoir $\sqrt{3}$ afin de respecter l'égalité. Ainsi, la définition de la contrainte équivalente de Mises est :

$$\bar{\sigma}_M = \sqrt{3\ I_2^S} = \sqrt{\frac{3}{2}\ \sigma_{ij}^S\ \sigma_{ij}^S} \tag{4.8}$$

Définition des valeurs équivalentes dans le modèle bilinéaire

Avec les alliages à mémoire de forme, il n'est aucunement question de plastification mais plutôt de transformation de phase. Par contre, il existe une analogie entre la plastification et la transformation de phase qui se situe au niveau d'un assouplissement du matériau au-delà d'une certaine valeur de la contrainte. Par conséquent, les concepts de contrainte équivalente discutés dans le rappel de plasticité peuvent être adaptés afin d'utiliser le modèle bilinéaire pour calculer le comportement de l'alliage soumis à des états tridimensionnels de contrainte. Dans un premier temps, nous émettons l'hypothèse que la transformation de phase n'est gouvernée que par la partie déviatorique de la contrainte. Ceci revient à supposer qu'une pression hydrostatique ne peut pas engendrer une transformation de phase. Dans un second temps, une contrainte équivalente est définie seulement par rapport au second invariant du tenseur déviatorique de la

contrainte afin d'éliminer l'effet de l'orientation du repère selon laquelle la contrainte est exprimée. Ainsi, les états de contrainte tridimensionnels peuvent se ramener à une valeur scalaire en imposant que la contrainte équivalente fondée sur le critère de Mises corresponde à la contrainte uniaxiale dans un essai de traction. Par un raisonnement identique à celui qui a été effectué précédemment, on peut définir la contrainte équivalente de Mises utilisée dans le modèle bilinéaire :

$$\bar{\sigma}_M = \sqrt{3 I_2^S} \tag{4.9}$$

Les états de déformation peuvent également être ramenés à des valeurs équivalentes en utilisant des développements similaires. En effet, si un état tridimensionnel de déformation est connu, on peut lui associer une valeur scalaire équivalente $\bar{\varepsilon}_M$ en se basant sur un critère de Mises. Ainsi, on cherche à déterminer la valeur de la constante K qui permet de satisfaire l'égalité suivante :

$$\bar{\varepsilon}_M = K\sqrt{I_2^S} \tag{4.10}$$

Dans l'équation (4.10), I_2^S représente le second invariant du tenseur déviatorique de la déformation. Afin de déterminer la constante K dans la dernière équation, nous allons imposer que la déformation équivalente de Mises $\bar{\varepsilon}_M$ doit égaler la déformation uniaxiale ε dans le cas d'une traction pure. Dans une telle situation, le tenseur de déformation, le tenseur déviatorique et le second invariant du tenseur déviatorique sont donnés aux équations suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij}^S = \frac{\varepsilon(1+\nu)}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad I_2^S = \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\nu)^2 \tag{4.11}$$

En imposant que $\bar{\varepsilon}_M = \varepsilon$, l'expression de K pour la définition de la déformation équivalente de Mises peut être déterminée. En effet, on obtient $K = \sqrt{3}/(1+\nu)$. Finalement, en remplaçant l'expression de K dans l'équation (4.10), la définition de la déformation équivalente de Mises est obtenue :

$$\bar{\varepsilon}_M = \sqrt{\frac{3 I_2^S}{(1+\nu)^2}} \tag{4.12}$$

Contrairement à la définition de la contrainte équivalente de Mises, le coefficient de Poisson ν apparaît dans l'expression de la déformation équivalente de Mises. Le critère de Mises employé pour définir les valeurs équivalentes dans le modèle bilinéaire est symétrique. En effet, il suppose qu'un état de sollicitation en traction uniaxiale est identique à un état de sollicitation en compression uniaxiale. Ainsi, un tel critère prédit le début de la transformation de phase à des niveaux de contrainte identiques en tension et en compression, ce qui n'est pas complètement représentatif de la réalité. D'autres critères permettent de prendre en considération une certaine dissymétrie. Ces aspects sont discutés dans la définition des valeurs équivalentes pour le modèle phénoménologique *KRIGAMF*.

Un mandat important d'une relation constitutive lorsqu'elle est interfacée à un programme d'éléments finis est d'évaluer la rigidité du matériau à un état de sollicitation donné. Reportons-nous maintenant au niveau d'un point d'intégration numérique pour lequel la configuration actuelle est connue et dont le comportement obéit à un modèle bilinéaire. Les états tridimensionnels de contrainte et de déformation sont donc connus et des valeurs équivalentes leur sont associées selon les équations (4.9) et (4.12). Imaginons que les valeurs équivalentes correspondent au point A de la figure 4.5 sur la courbe de chargement. Par la suite, imaginons que lors du processus itératif, trois états différents permettant de calculer la prochaine configuration sont testés. En effet, un

premier incrément tensoriel de déformation est imposé et l'incrément de déformation équivalent correspondant $\Delta\bar{\varepsilon}_{MI}$ est calculé selon l'équation (4.12). Cet incrément de déformation équivalente est envoyé au modèle bilinéaire et ce dernier calcule un incrément de contrainte équivalente $\Delta\bar{\sigma}_{MI}$. Ainsi, selon l'incrément tensoriel de déformation testé sur le point de Gauss étudié, un premier module de rigidité apparente E'_1 peut être calculé. Le calcul de la prochaine configuration du système peut nécessiter plusieurs itérations et à chacune d'elles, la rigidité apparente peut être différente. C'est la situation montrée à la figure 4.5 où trois rigidités apparentes différentes E'_1, E'_2 et E'_3 sont calculées à partir du même état de contrainte et de déformation équivalente. Dans les deux premiers cas, la prochaine configuration testée continue à charger le matériau alors que le matériau est déchargé pour le troisième cas. En somme, le calcul du module de rigidité apparente dépend de l'intensité et de la direction de chargement ainsi que de l'histoire de la sollicitation. Finalement, la matrice de rigidité [C] pour un problème tridimensionnel peut ensuite être construite en utilisant la rigidité apparente E' calculée par le modèle et le coefficient de Poisson ν du matériau. L'expression de la matrice de rigidité [C] est donnée au système d'équation (4.13). On suppose donc que le matériau est isotrope, ce qui se rapproche de la réalité si le nombre de grains est suffisamment élevé et que leur orientation est aléatoire (matériau sans texture).

$$[C]=\frac{E'\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

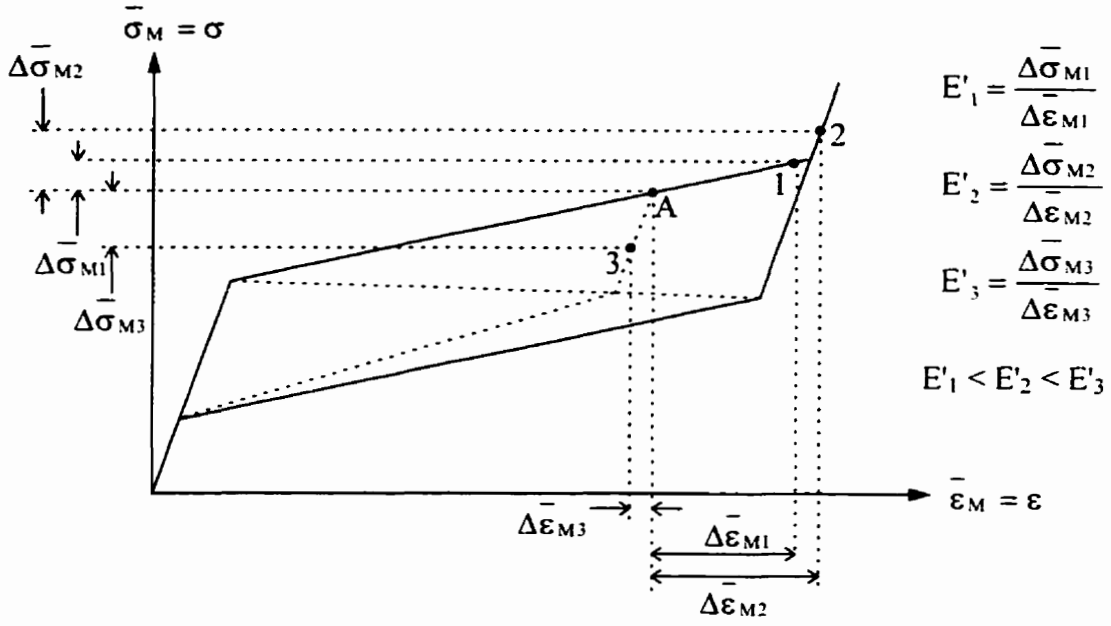


Figure 4.5 Obtention de rigidités différentes suite à l'application de trois incréments de chargement différents à partir du même état de sollicitation.

Dans la classe *StateBilinear_c*, les valeurs équivalentes actuelles de la contrainte et de la déformation sont représentées respectivement par les membres `Astress` et `Astrain`. Ces membres correspondent aux valeurs équivalentes des tenseurs de contrainte et de déformation qui sont calculées au point de Gauss dans la configuration actuelle en équilibre. Les membres `Nstress` et `Nstrain` remplissent exactement la même fonction sauf qu'ils se rapportent à la prochaine configuration. Le membre `load` est un entier qui spécifie si le matériau subit un chargement ou un déchargement. Cette variable est essentiellement utilisée pour calculer la "première" prochaine configuration car cette dernière est identique à la configuration actuelle après la mise à jour. Il faut donc connaître le sens du chargement afin d'évaluer correctement la rigidité tangentielle. Enfin, le dernier membre `mat*` est un pointeur vers un objet d'une autre classe qui représente le comportement du matériau bilinéaire. Il est inutile de garder en mémoire les paramètres qui décrivent le comportement d'un matériau bilinéaire (module E, contrainte σ_{ms}, pente H, coefficient de Poisson ν, etc.) à chaque point de Gauss. On

définit plutôt un matériau bilinéaire une seule fois et on copie le pointeur à ce matériau dans un membre `mat` de la classe *StateBilinear_c*.

4.2.4.2 Classe StateKrigamf_c

Le modèle bilinéaire est très limitatif car les alliages à mémoire de forme ne présentent pas seulement des comportements isothermes et superélastiques. En effet, les AMF sont grandement influencés par la température (superélasticité, pseudo-plasticité, etc.) et de nombreux phénomènes font intervenir des variations de température (effet mémoire simple sens, cycle superthermique, etc.). Par conséquent, des modèles plus performants doivent être utilisés afin de simuler correctement le comportement thermomécanique complexe des AMF. Même si l'alliage est sollicité de façon superélastique et isotherme, un modèle autre que le bilinéaire est souhaitable afin de calculer plus précisément la réponse de l'alliage. Le modèle bilinéaire représente le début et la fin des transformations de phase par des changements abrupts de pente alors que dans la réalité, la transformation de phase s'effectue de manière progressive. Lorsque des résultats précis sont désirés, il est déconseillé de fonder les calculs d'une analyse exclusivement sur le modèle bilinéaire. Le modèle phénoménologique *KRIGAMF* présenté au chapitre 3 constitue alors une alternative intéressante car ce dernier est capable de calculer le comportement thermomécanique complexe des alliages à mémoire de forme.

À la limite, *KRIGAMF* peut être perçu comme une extension du modèle bilinéaire car les deux modèles sont construits à partir de courbes contrainte-déformation isothermes en traction uniaxiale. Par contre, l'effet de la température est considéré dans *KRIGAMF*. Néanmoins, la plus grande limitation de *KRIGAMF* tel que présenté au chapitre 3 est sans contredit l'impossibilité de manipuler des états tridimensionnels de contrainte. Cette lacune était également présente avec le modèle bilinéaire, mais le problème a alors été résolu en introduisant le concept de contrainte équivalente. Par conséquent, une

approche similaire est préconisée avec *KRIGAMF* afin de le généraliser et de le rendre apte à manipuler des sollicitations tridimensionnelles.

Avec le modèle bilinéaire, la généralisation tridimensionnelle est réalisée en définissant une contrainte et une déformation équivalente fondée sur le critère de Von-Mises. Ce critère symétrique prédit le début de la transformation de phase pour des valeurs de contrainte identiques en tension et en compression. Or, le critère de Von-Mises n'est pas complètement représentatif pour les AMF qui sont caractérisés par un comportement asymétrique. Par exemple, la transformation de phase débute avec une contrainte plus élevée en compression qu'en tension. Afin d'améliorer la précision des calculs produits par *KRIGAMF*, un critère asymétrique de type Prager est introduit. Gillet [4.4] a été un des premiers à employer un tel critère pour représenter le comportement des AMF. La définition des valeurs équivalentes est intimement liée au choix du critère permettant de ramener des états tridimensionnels de contrainte à une valeur scalaire. Puisqu'un nouveau critère de type Prager est utilisé, la démarche suivie précédemment sera reprise afin d'obtenir les définitions des valeurs équivalentes de contrainte et de déformation fondées sur un critère de Prager. La principale différence entre le critère de Von-Mises et celui de Prager est l'introduction du troisième invariant de la partie déviatorique. En effet, seulement le second invariant de la partie déviatorique est considéré dans le critère de Von-Mises.

En utilisant le critère de Prager et en reprenant les mêmes développements, nous pouvons obtenir une nouvelle définition de la contrainte et de la déformation équivalente. Dans un premier temps, nous posons que la contrainte équivalente est définie comme suit :

$$\bar{\sigma}_P = K\sqrt{I_2^s\left[1+\frac{bI_3^s}{(I_2^s)^{3/2}}\right]} \qquad (4.14)$$

où K est une constante à déterminer, I_2^S et I_3^S sont respectivement les second et troisième invariants du tenseur déviatorique de contrainte et b représente une constante caractéristique du matériau pour prendre en considération l'asymétrie du comportement de l'AMF. Le second invariant est calculé selon l'équation (4.4) et le troisième invariant I_3^S est simplement le déterminant du déviatorique de la contrainte. L'indice $_P$ spécifie que la contrainte équivalente est fondée sur un critère de type Prager. une fois de plus, la constante K est calculée de façon à avoir une égalité entre la valeur de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}_P$ et la contrainte σ uniaxiale dans le cas d'une sollicitation de traction pure. Ce choix est dicté par le type de courbes qui servent à construire les surfaces caractéristiques de *KRIGAMF*, c'est-à-dire des courbes de traction uniaxiale. De cette façon, la contrainte équivalente calculée peut être rabattue sur les surfaces de *KRIGAMF*. En utilisant un état tensoriel de contrainte correspondant à une sollicitation uniaxiale et en calculant le déviatorique de cette contrainte comme le montrent les équations (4.7), les second et troisième invariants du déviatorique peuvent être calculés. On obtient respectivement $I_2^S = \sigma^2/3$ et $I_3^S = 2\sigma^3/27$. En imposant $\bar{\sigma}_P = \sigma$ et en remplaçant les invariants par leur expression respective dans l'équation (4.14), la constante K doit être fixée à la valeur donnée par l'équation (4.15) afin de respecter l'égalité.

$$K = \sqrt{\frac{27}{\left(9 + 2\sqrt{3}\,b\right)}} \tag{4.15}$$

Finalement, l'expression de la contrainte équivalente fondée sur un critère de type Prager est exprimée à l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_P = \sqrt{\left(\frac{27}{9 + 2\sqrt{3\,b}}\right) I_2^S \left(1 + \frac{b\,I_3^S}{(I_2^S)^{3/2}}\right)} \tag{4.16}$$

Pour la définition de la déformation équivalente fondée sur le critère de Prager, la méthodologie est appliquée exactement de la même manière. On pose la définition suivante de la déformation équivalente de Prager :

$$\bar{\varepsilon}_P = K\sqrt{I_2^s\left[1+\frac{bI_3^s}{(I_2^s)^{3/2}}\right]} \tag{4.17}$$

On débute avec un état tensoriel de déformation qui correspond à une sollicitation uniaxiale d'intensité ε. Le tenseur de déformation ainsi que son déviatorique sont donnés aux équations (4.11). Le calcul des second et troisième invariants donnent respectivement $I_2^S = \varepsilon^2(1+\nu)^2/3$ et $I_3^S = 2\varepsilon^3(1+\nu)^3/27$. En imposant que $\bar{\varepsilon}_P = \varepsilon$, l'expression de K peut être déterminée. Une fois cette expression remplacée dans l'équation (4.17), la définition de la déformation équivalente de Prager est obtenue :

$$\bar{\varepsilon}_P = \sqrt{\left[\frac{27}{\left(9+2\sqrt{3b}\right)(1+\nu)^2}\right] I_2^S\left(1+\frac{b\,I_3^S}{(I_2^S)^{3/2}}\right)} \tag{4.18}$$

Il est à noter que si le coefficient d'asymétrie b est nul, on retrouve exactement le critère de Von-Mises. En conséquence, si b n'a pas pu être déterminé expérimentalement, il suffit de lui attribuer une valeur nulle et le critère de Von-Mises est implicitement employé. La comparaison entre les critères de Von-Mises et de Prager est illustrée pour un état plan de contrainte à la figure 4.6. Les deux tracés correspondent à l'ensemble des points pour lesquels la valeur de la contrainte équivalente est identique.

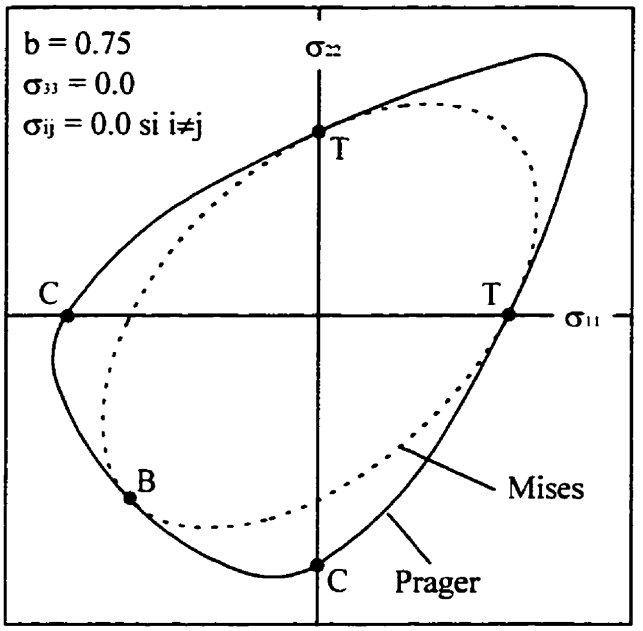


Figure 4.6 Différence entre les critères de Von-Mises et de Prager pour un état plan de contrainte.

Dans le cas où $b \neq 0$, les deux critères s'équivalent seulement lorsque la sollicitation est de la traction uniaxiale pure (points T) ou de la compression bidirectionnelle (point B). De plus, on remarque que le critère de Prager est asymétrique. En effet, la contrainte de compression uniaxiale (points C) doit être supérieure à la contrainte de tension uniaxiale (points T) pour obtenir la même valeur de contrainte équivalente. De cette façon, la transformation de phase s'initie pour un niveau de contrainte plus élevé en compression qu'en tension, ce qui est plus représentatif du comportement des alliages à mémoire de forme que le critère de Von-Mises. Le coefficient d'asymétrie b dans les équations précédentes est déterminé expérimentalement à partir d'une courbe de traction et d'une courbe de compression à la même température. Il s'agit de relever les contraintes de début de transformation en tension σ_T et en compression σ_C. La figure 4.7 montre les contraintes de début de transformation en tension et en compression pour un chargement superélastique. De plus, l'équation (4.17) définit le coefficient d'asymétrie b en fonction des contraintes de début de transformation.

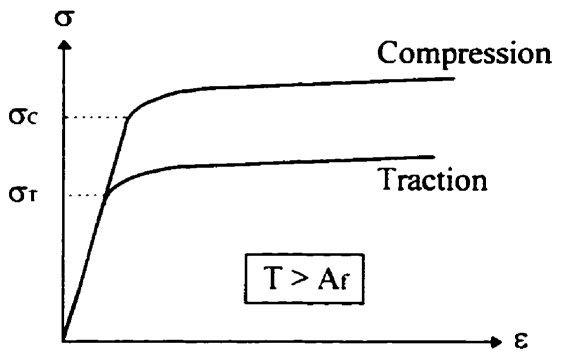


Figure 4.7 : Obtention expérimentale des contraintes de début de transformation en tension et en compression.

$$b = \frac{\sqrt{27}}{2}\frac{\left(\sigma_C^2 - \sigma_T^2\right)}{\left(\sigma_C^2 + \sigma_T^2\right)} \tag{4.19}$$

Le critère de Prager implanté avec *KRIGAMF* suppose que le coefficient b est un paramètre caractéristique d'un AMF qui est indépendant de la température. Par contre, il semblerait que le comportement superélastique est asymétrique et qu'un coefficient b différent de zéro serait adéquat. Par contre, pour le régime pseudo-plastique de basse température, le comportement est beaucoup plus symétrique et un critère de Von-Mises semble mieux adapté. Dans un tel cas, il serait alors préférable d'imposer le coefficient b = 0.0 lorsque la température est inférieure aux températures de transformation. Des manipulations expérimentales doivent être menées afin de vérifier la symétrie du comportement des AMF en fonction de la température. Actuellement, l'implantation du critère de Prager avec *KRIGAMF* est réalisée en utilisant une valeur constante de b indépendante de la température. Dans le cas où il serait expérimentalement vérifié que la symétrie du comportement d'un AMF est dépendant de la température, de simples modifications mineures devraient être apportées au programme *SIMAMF* pour simuler correctement cette particularité. Il suffirait d'imposer b = 0 sur les plages de

températures où l'alliage présente un comportement symétrique afin de retrouver le critère de Mises.

Le calcul de la matrice de rigidité [C] avec *KRIGAMF* utilisée comme relation constitutive s'effectue de la même manière qu'avec le modèle bilinéaire. L'alliage doit préalablement être caractérisé en obtenant quelques courbes isothermes à différentes températures et en déterminant certains paramètres comme le coefficient d'asymétrie b ainsi que les températures de transformation. Une fois l'alliage caractérisé, *KRIGAMF* peut être employé pour calculer le module de rigidité apparente E' du matériau. En effet, connaissant l'état de déformation et de contrainte correspondant à la configuration actuelle en équilibre, la contrainte et la déformation équivalentes peuvent être localisées sur les surfaces de *KRIGAMF*. Lorsqu'une prochaine configuration est testée, les prochaines valeurs équivalentes sont calculées et introduites dans *KRIGAMF*. Une rigidité apparente E' peut alors être déterminée et la matrice de rigidité [C] est obtenue grâce aux équations (4.13). En somme, la détermination de la rigidité de l'alliage avec *KRIGAMF* est identique à la méthodologie employée avec le modèle bilinéaire. Par contre, la formulation de *KRIGAMF* est plus générale car elle prend en considération l'influence de la température et l'asymétrie dans le comportement de l'alliage.

La classe *StateKrigamf_c* comprend seulement deux membres. Le premier membre `mat*` est un pointeur vers un objet qui définit le matériau dans *KRIGAMF*. Puisque tous les points d'intégration numérique obéissent à la même relation constitutive, il est inefficace de garder en mémoire à chaque point de Gauss les paramètres qui définissent le comportement du matériau. Ces paramètres sont les coefficients qui permettent entre autres de construire les surfaces caractéristiques de *KRIGAMF*. S'il fallait conserver en mémoire tous ces mêmes paramètres à chaque point de Gauss, un gaspillage de mémoire serait alors évident. Le matériau est donc construit une seule fois et on accède à cette relation constitutive par l'entremise du pointeur membre `mat*`. Le second membre `kamf` est un objet d'une classe définie dans *KRIGAMF* qui permet de garder à l'intérieur

de sa propre structure toutes les données requises pour suivre l'histoire thermomécanique à un point de Gauss. À l'intérieur de cette structure, les valeurs équivalentes sont conservées pour la configuration actuelle et la prochaine configuration.

4.2.5 Classe *Mesh_c*

La classe *Mesh_c* permet de regrouper à l'intérieur d'une seule entité tous les éléments du maillage d'éléments finis. Un nombre arbitraire d'éléments, de noeuds, de matériaux, et de conditions frontières peuvent être définis. La possibilité de définir plusieurs types d'éléments au sein d'une analyse permet de faciliter la discrétisation d'une pièce en éléments finis comme c'est le cas à la figure 4.1. De plus, des matériaux différents peuvent être définis afin de représenter le plus fidèlement possible le comportement d'une pièce composée de plus d'un matériau. Les principaux membres d'un objet de la classe *Mesh_c* sont le nombre de noeuds `nbNode`, le nombre d'éléments `nbElem`, le nombre de conditions frontières `nbBcond`. Bien entendu, les membres `Node[]`, `Elem[]` et `Bcond[]` sont respectivement les tableaux d'objets des classes *Node_c*, *Elem_c* et *Bcond_c*. Ces tableaux gardent en mémoire l'information relative aux noeuds, aux éléments et aux conditions frontières qui permet de calculer la prochaine configuration à partir de la configuration actuelle.

4.3 Algorithme de calcul

Avant d'entreprendre les calculs proprement dits, la première opération de toute analyse par éléments finis est de définir le problème en créant un maillage. Dans le cas de *SIMAMF*, le maillage est généré par un préprocesseur indépendant qui sauvegarde les résultats dans un fichier texte. Par la suite, une interface traduit les données afin de les rendre compatibles avec le fichier d'entrée de *SIMAMF*. Le fichier d'entrée de *SIMAMF* est également un fichier texte dans lequel sont inscrites les informations suivantes :

- les types de matériau (bilinéaire ou *KRIGAMF*) utilisés dans l'analyse;
- le numéro et les coordonnées initiales des noeuds;
- le numéro, le type et la connectivité des éléments;
- le nombre de points d'intégration numérique dans chaque élément;
- le matériau qui compose chaque élément;
- les forces nodales appliquées sur le maillage (conditions frontières);
- les déplacements qui sont imposés ou bloqués (conditions frontières);
- les paramètres de convergence de l'algorithme itératif;
- le nom des fichiers de sortie dans lesquels les résultats sont sauvés.

Lorsque le fichier d'entrée est lu, une interaction avec l'usager est entreprise. Deux options s'offrent principalement à lui. La première option permet à l'usager de spécifier les incréments de conditions frontières à appliquer pour calculer la prochaine configuration. Il spécifie les incréments de forces nodales qui seront ajoutées aux forces appliquées sur le maillage dans la configuration actuelle en équilibre. Il spécifie également les incréments de déplacements nodaux qui seront imposés à partir de la configuration actuelle. Un déplacement nodal peut simplement être bloqué en imposant une valeur nulle. Finalement, l'usager spécifie l'incrément de température entre la configuration actuelle et la prochaine configuration. La seconde option qui s'offre à l'usager est le lancement d'un algorithme itératif permettant de calculer la prochaine configuration. L'usager peut décider de calculer plusieurs "prochaines configurations" en conservant les mêmes incréments de conditions frontières entre chaque configuration calculée. Lorsque l'équilibre d'une prochaine configuration est atteint, les résultats sont écrits dans des fichiers afin qu'ils puissent être visualisés ultérieurement avec un postprocesseur. Le coeur de *SIMAMF* est sans contredit l'algorithme qui permet de calculer la prochaine configuration à partir de la configuration actuelle en utilisant les incréments de conditions frontières spécifiés par l'usager.

La configuration actuelle est toujours en équilibre. Elle est décrite par les données qui sont gardées en mémoire selon l'architecture des classes présentée à la figure 4.2. Dans les algorithmes de calculs qui sont décrits dans les prochaines sections, les indices supérieurs gauches ^{t} font référence à la configuration actuelle tandis que les indices $^{t+\Delta t}$ se rapportent à la prochaine configuration. Les données qui caractérisent la configuration actuelle sont les suivantes :

- la température actuelle ^{t}T de la composante;
- le vecteur des déplacements nodaux $^{t}\{U\}$ par rapport aux coordonnées initiales;
- les états tridimensionnels de contrainte Cauchy $^{t}\{\tau\}_{i}^{k}$ évalués aux 'i' points de Gauss à l'intérieur des 'k' éléments du maillage;
- les états de déformation d'ingénierie totale $^{t}\{e\}_{i}^{k}$;
- les états de déformation d'ingénierie $^{t}\{e_{THR}\}_{i}^{k}$ causés par la dilatation thermique;
- les états de déformation d'ingénierie $^{t}\{e_{SME}\}_{i}^{k}$ résultant de l'effet mémoire;
- le vecteur des forces nodales externes $^{t}\{R\}$ appliquées aux noeuds du maillage.

En contrôlant les incréments de conditions frontières, l'usager spécifie les informations suivantes :

- l'incrément de température ΔT;
- le vecteur d'incrément des forces externes mécaniques $\{\Delta R_{MEC}\}$ appliquées sur les noeuds du maillage;
- un certain nombre d'incréments de déplacements nodaux imposés ΔU_{p}^{*}.

En premier lieu, la séquence des principales opérations du processus itératif permettant de calculer la prochaine configuration à partir de la configuration actuelle est montrée à la figure 4.8. Par la suite, des précisions additionnelles sont apportées pour chaque étape de l'algorithme afin d'expliciter les concepts théoriques sur lesquels repose *SIMAMF*.

- Calcul de ${}^{t}\{F\}$
- Obtention de $\{\Delta R_{MEC}\}$
- Imposition de ΔT
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_t^k$
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_t^k$

Processus itératif → Pour la j-ième itération, effectuer cette boucle ...

- Calcul de $\{\Delta R_{THR}\}_j$
- Calcul de $\{\Delta R_{SME}\}_j$
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{R\}_j = {}^{t}\{F\} + \{\Delta R_{MEC}\} + \{\Delta R_{THR}\}_j + \{\Delta R_{SME}\}_j$
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]_{j-1}$
- Calcul de $\{\Delta U\}_j$ selon ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]_{j-1}\{\Delta U\}_j = {}^{t+\Delta t}\{R\}_j - {}^{t}\{F\}$ avec les ΔU_p^*
- Imposition de $\{\Delta U\}_j$
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e\}_t^k$
- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{\tau\}_t^k$
- Calcul de ΔU_{max} (composante maximale de $\{\Delta U\}_j - \{\Delta U\}_{j-1}$)

... jusqu'à ce que (ΔU_{max} < tolérance) ou (nombre d'itération = nombre maximum)

- Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{F\}$
- Mise à jour
- Écriture des fichiers de sortie

Figure 4.8 Algorithme de calcul de la prochaine configuration.

4.3.1 Calcul de ${}^{t}\{F\}$

Le vecteur ${}^{t}\{F\}$ correspond aux forces nodales internes qui engendrent les mêmes déplacements nodaux que les états de contrainte à l'intérieur des éléments dans la configuration actuelle au temps "t". Pour lancer le processus itératif, les forces nodales internes sont supposées nulles ${}^{0}\{F\} = \{0\}$. Le vecteur de forces nodales internes est obtenu en assemblant dans un vecteur global le vecteur des forces nodales calculé pour chaque élément du maillage. L'assemblage est effectué de manière conventionnelle en utilisant la connectivité d'un élément qui représente la correspondance des noeuds de l'élément avec la numérotation globale des noeuds. Le vecteur de forces internes pour un élément est donné par l'expression suivante :

$$ {}^{t}\{F\}_{elem} = \int_{{}^{t}V} {}^{t}[B_L]^T \; {}^{t}\{\tau\} \, d\,{}^{t}V \tag{4.20} $$

où ${}^{t}V$ est le volume d'intégration, ${}^{t}[B_L]^T$ est la transposée de la matrice linéaire de transformation déplacement-déformation et ${}^{t}\{\tau\}$ est le vecteur des contraintes Cauchy. Le vecteur des contraintes Cauchy ${}^{t}\{\tau\}$ regroupe les trois contraintes axiales et les trois contraintes de cisaillement ${}^{t}\{\tau\} = \{{}^{t}\tau_{11}, {}^{t}\tau_{22}, {}^{t}\tau_{33}, {}^{t}\tau_{12}, {}^{t}\tau_{23}, {}^{t}\tau_{31}\}^T$. Les matrices et les vecteurs sont exprimés en configuration actuelle d'équilibre au temps "t". L'intégrale de l'équation (4.20) est calculée numériquement en évaluant les termes à l'intérieur de l'intégrale aux N points de Gauss dans le k-ième élément selon l'équation suivante :

$$ {}^{t}\{F\}^{k} = \sum_{g=1}^{N} {}^{t}[B_L]_g^{k\,T} \; {}^{t}\{\tau\}_g^k \det J_g \; \varpi_g \tag{4.21} $$

où ${}^{t}[B_L]_g^{k\,T}$ est la transposée de la matrice de transformation déplacement-déformation évaluée au g-ième point de Gauss du k-ième élément, ${}^{t}\{\tau\}_g^k$ est le vecteur des

contraintes Cauchy, ϖ_g est le poids du point de Gauss et det J_g est le déterminant de la matrice Jacobienne ${}^t[J]_g^k$. La matrice Jacobienne caractérise le passage de l'élément réel en configuration actuelle au temps "t" vers l'élément de référence dans lequel sont définis la position et le poids des points de Gauss. Cette matrice est définie comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \\ \partial/\partial t \end{Bmatrix} = {}^t[J] \cdot \begin{Bmatrix} \partial/\partial {}^t x_1 \\ \partial/\partial {}^t x_2 \\ \partial/\partial {}^t x_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad {}^t[J] = \begin{bmatrix} \partial {}^t x_1/\partial r & \partial {}^t x_2/\partial r & \partial {}^t x_3/\partial r \\ \partial {}^t x_1/\partial s & \partial {}^t x_2/\partial s & \partial {}^t x_3/\partial s \\ \partial {}^t x_1/\partial t & \partial {}^t x_2/\partial t & \partial {}^t x_3/\partial t \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

où ${}^t x_1$, ${}^t x_2$, ${}^t x_3$ et r, s, t sont respectivement les positions exprimées dans le repère global au temps "t" et dans le repère local de l'élément de référence. Les termes de la matrice Jacobienne de l'équation (4.22) s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t x_j}{\partial r} &= \frac{\partial h_1}{\partial r} {}^t x_j^1 + \frac{\partial h_2}{\partial r} {}^t x_j^2 + \cdots + \frac{\partial h_M}{\partial r} {}^t x_j^M \\ \frac{\partial {}^t x_j}{\partial s} &= \frac{\partial h_1}{\partial s} {}^t x_j^1 + \frac{\partial h_2}{\partial s} {}^t x_j^2 + \cdots + \frac{\partial h_M}{\partial s} {}^t x_j^M \\ \frac{\partial {}^t x_j}{\partial t} &= \frac{\partial h_1}{\partial t} {}^t x_j^1 + \frac{\partial h_2}{\partial t} {}^t x_j^2 + \cdots + \frac{\partial h_M}{\partial t} {}^t x_j^M \end{aligned} \tag{4.23}$$

où M est le nombre de noeuds de l'élément, h_M représente la fonction d'interpolation associée à chaque noeud et ${}^t x_j^M$ est la coordonnée selon la direction j du M-ième noeud en configuration actuelle au temps "t". Les dérivées des fonctions d'interpolation dh/dr, dh/ds et dh/dt sont des fonctions polynomiales différentes et connues pour chaque type d'élément et elles sont évaluées au point de Gauss considéré. De son côté, la matrice linéaire de transformation déplacement-déformation est exprimée de la façon suivante pour les éléments tridimensionnels :

$$
{}^{t}[B_L] = \begin{bmatrix}
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_3} \\
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1} & 0 \\
0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_3} & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} \\
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1}
\end{bmatrix} \qquad (4.24)
$$

La matrice ${}^{t}[B_L]$ possède toujours six lignes (une pour chaque composante du tenseur de déformation) et 3M colonnes, M étant le nombre de noeuds de l'élément. Les membres de la matrice ${}^{t}[B_L]$ sont calculés par l'entremise de la matrice Jacobienne définie aux équations (4.22) comme suit :

$$
\begin{Bmatrix} \partial h_M/\partial {}^{t}x_1 \\ \partial h_M/\partial {}^{t}x_2 \\ \partial h_M/\partial {}^{t}x_3 \end{Bmatrix} = {}^{t}[J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \partial h_M/\partial r \\ \partial h_M/\partial s \\ \partial h_M/\partial t \end{Bmatrix} \qquad (4.25)
$$

4.3.2 Obtention de $\{\Delta R_{MEC}\}$

Le vecteur $\{\Delta R_{MEC}\}$ représente l'incrément des forces nodales externes appliqué sur la structure à partir de la configuration actuelle au temps "t". Ce vecteur de conditions frontières est contrôlé par l'utilisateur à chaque fois qu'une prochaine configuration est calculée.

4.3.3 Imposition de ΔT

Les variations de température dans *SIMAMF* sont supposées homogènes à tous les noeuds du maillage. C'est l'utilisateur qui spécifie la variation de température ΔT entre la configuration actuelle et la prochaine configuration. Ainsi, la prochaine température ${}^{t+\Delta t}T$ des noeuds est simplement donnée par la somme de la température actuelle ${}^{t}T$ et de l'incrément de température ΔT. Par la suite, la prochaine température des points de Gauss dans les éléments est évaluée à partir des températures nodales selon une relation similaire aux équations (4.2). Puisque les variations de température nodale sont homogènes, les incréments de température évalués aux points de Gauss le sont également dans le cas présent.

4.3.4 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_i^k$

Les variations de température engendrent des déformations qui proviennent de la dilatation thermique. Le modèle bilinéaire et *KRIGAMF* prennent en considération l'effet de la dilatation thermique. Cette étape de l'algorithme permet d'évaluer les déformations dues à la dilatation thermique pour la prochaine configuration aux points de Gauss. Ainsi, la prochaine déformation due à la dilatation thermique ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_i^k$ évaluée au i-ième point de Gauss du k-ième élément est simplement obtenue en ajoutant l'incrément de dilatation thermique $\{\Delta e_{THR}\}_i^k$ à la déformation actuelle ${}^{t}\{e_{THR}\}_i^k$ qui fait partie des données connues. Par conséquent, pour déterminer la prochaine déformation due à la dilatation thermique ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_i^k$, il suffit d'évaluer l'incrément de déformation de la façon suivante :

$$\{\Delta e_{THR}\}_i^k = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \ \alpha \ \Delta T \tag{4.26}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et ΔT est l'incrément de température évalué au point de Gauss de l'élément. Le vecteur $\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}^T$ assure que les dilatations thermiques n'engendrent que des changements de volume sans cisaillement.

4.3.5 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_i^k$

En plus de la dilatation thermique, les variations de température peuvent engendrer des déformations additionnelles qui sont le résultat des effets de mémoire de forme. À l'opposé du modèle bilinéaire, le modèle phénoménologique *KRIGAMF* prend en considération ces effets de mémoire de forme et permet ainsi de calculer les déformations d'effet mémoire de la prochaine configuration. Pour calculer la prochaine déformation due aux effets mémoire à chaque point de Gauss, *KRIGAMF* impose une variation de température (préalablement calculée en 4.3.3) tout en conservant une contrainte constante dont la valeur est donnée par la contrainte équivalente associée à l'état actuel de contrainte. Une variation de déformation équivalente $\Delta\bar{\varepsilon}_P$ est alors calculée par *KRIGAMF* et trois situations peuvent survenir :

a) la variation de déformation équivalente est nulle

Les effets mémoire ne se manifestent pas pour l'incrément de température imposé. Les états de déformation actuelle ${}^{t}\{e_{SME}\}_i^k$ et de prochaine déformation ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_i^k$ dues aux effets mémoire sont donc identiques.

b) la variation de déformation équivalente est positive

Une augmentation de la déformation équivalente implique la création de martensite orientée selon la contrainte. La prochaine déformation due aux effets mémoire évaluée au i-ième point de Gauss du k-ième élément est donnée par l'équation suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_t^k = {}^{t}\{e_{SME}\}_t^k + \Psi \; {}_t^t[C]_t^{k-1} \; {}^{t}\{\tau\}_t^k $$

$$ \text{avec} \quad \Psi = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_P}{\overline{\left\langle {}_t^t[C]_t^{k-1} \; {}^{t}\{\tau\}_t^k \right\rangle_P}} \tag{4.27} $$

où ${}_t^t[C]_t^k$ est la rigidité actuelle du matériau calculée à partir du module tangent évalué par *KRIGAMF* selon l'histoire de la sollicitation et ${}^{t}\{\tau\}_t^k$ est l'état actuel de contrainte évalué au point de Gauss. La matrice ${}_t^t[C]_t^k$ est calculée selon l'équation (4.13). Nous supposons que la martensite créée s'oriente selon l'état de contrainte actuel. La direction de création de martensite ${}_t^t[C]_t^{k-1} \; {}^{t}\{\tau\}_t^k$ est donc fournie par le produit de la matrice de souplesse (l'inverse de la rigidité) par le vecteur d'état actuel de contrainte. L'intensité de la transformation est donnée par Ψ. Cette valeur scalaire est obtenue en divisant l'incrément de déformation équivalente $\Delta\bar{\varepsilon}_P$ par la déformation équivalente $\overline{\left\langle {}_t^t[C]_t^{k-1} \; {}^{t}\{\tau\}_t^k \right\rangle_P}$ correspondant à la direction de transformation. Le calcul de Ψ consiste donc à normaliser la direction de transformation afin d'estimer l'intensité de cette transformation.

c) la variation de déformation équivalente est négative

Une diminution de la déformation équivalente correspond à la transformation inverse de la martensite en austénite. Ainsi, la prochaine déformation est calculée de la manière suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_t^k = (1+\Psi) \; {}^{t}\{e_{SME}\}_t^k $$

$$ \text{avec} \quad \Psi = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_P}{\overline{\left\langle {}^{t}\{e_{SME}\}_t^k \right\rangle_P}} \tag{4.28} $$

où Ψ spécifie la proportion de déformation actuelle qui subit une transformation inverse due aux effets mémoire. Cette proportion est calculée en effectuant le rapport de la variation de déformation équivalente $\Delta\bar{\varepsilon}_P$ (valeur négative) sur la valeur équivalente correspondant à l'état actuel de déformation $\overline{\left\langle {}^{t}\{e_{SME}\}_{i}^{k} \right\rangle}_{P}$

4.3.6 Processus itératif

Afin de calculer la prochaine configuration, un processus itératif semblable à celui de Newton-Raphson est employé. Dans le processus itératif classique de Newton-Raphson, l'algorithme de calcul utilise un module de rigidité tangent contrairement à l'algorithme de *SIMAMF* qui travaille avec un module sécant. Ce choix a été préconisé car le processus itératif s'est avéré plus robuste (plus difficile à faire diverger), mais un nombre plus élevé d'itérations est nécessaire. L'utilisation du module sécant ne modifie que très légèrement l'algorithme de calcul. Ce processus itératif illustré à la figure 4.9 permet de converger vers la prochaine configuration (point C) à partir de la configuration actuelle (point B). La configuration initiale (point A) et la configuration actuelle sont en équilibre tandis que la prochaine configuration est atteinte après quelques itérations. À chaque itération, une prochaine configuration hors d'équilibre intermédiaire (points C^1, C^2, etc.) est obtenue. Le comportement de la structure est représenté par le comportement curviligne. Bien entendu, le processus itératif est représenté à la figure 4.9 pour un système possédant un seul degré de liberté. C'est une situation simplifiée pour laquelle les vecteurs de déplacement et de force se réduisent à des scalaires et les matrices de rigidité, à des pentes. En éléments finis, le système étudié possède un très grand nombre de degrés de liberté et il devient impossible d'illustrer la réponse de tous les degrés de liberté dans un seul graphique. Par conséquent, la figure 4.9 est seulement présentée à titre explicatif. Les principales étapes du processus itératif sont indiquées dans le cadre positionné à l'intérieur de la figure 4.9. Les étapes qui permettent de calculer les prochaines configurations intermédiaires sont explicitées dans

les prochaines sections. Enfin, le processus est interrompu lorsqu'un incrément de déplacement $\{\Delta U\}_j$ entre deux itérations successives est identique à une certaine tolérance près. Naturellement, le nombre d'itérations est plus élevé lorsque la tolérance imposée est faible. Une sécurité est prévue pour interrompre le processus itératif en cas de divergence ou de problèmes numériques en limitant le nombre d'itérations à un nombre maximum. La tolérance et le nombre maximum d'itérations sont des paramètres spécifiés par l'utilisateur.

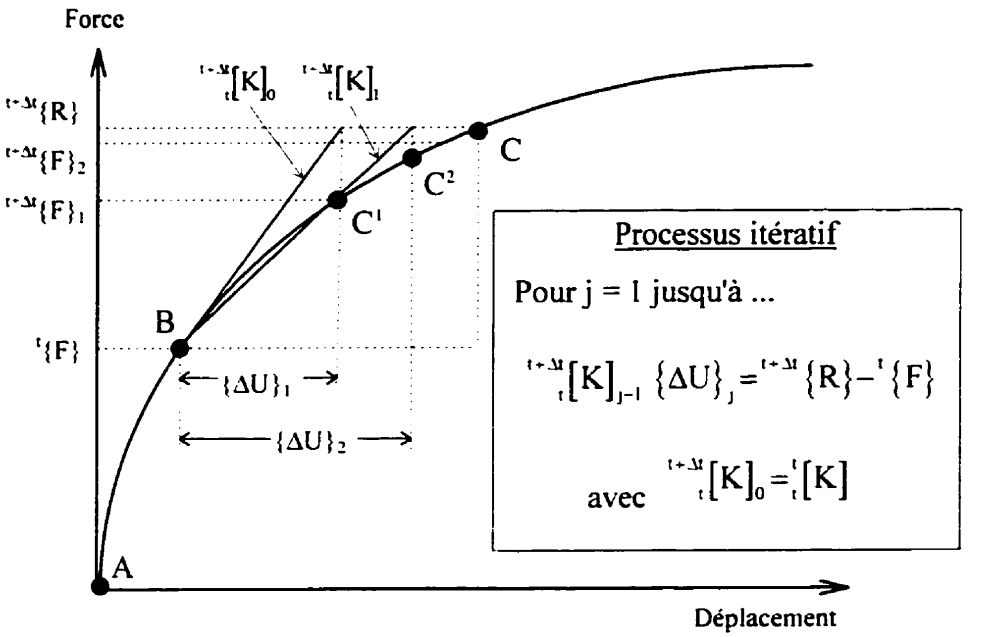


Figure 4.9 Processus itératif de solution de type Newton-Raphson.

4.3.7 Calcul de $\{\Delta R_{THR}\}$

Pour simuler les dilatations thermiques dans la structure, des forces sont appliquées aux noeuds du maillage afin de forcer une expansion ou une contraction lors des élévations ou des diminutions de température. Le vecteur global $\{\Delta R_{THR}\}$ correspond à l'incrément des forces nodales qui produit l'effet des dilatations thermiques. Ce vecteur global est construit en assemblant le vecteur provenant de chaque élément :

$$\{\Delta R_{THR}\}_{elem} = \int_{{}^{t}V}^{{}^{t+\Delta t}} [B_L]^T \{\Delta \tau_{THR}\} \, d^{t}V \qquad (4.29)$$

où $\{\Delta\tau_{THR}\}$ est l'incrément des contraintes internes qui génère le vecteur d'incrément de forces $\{\Delta R_{THR}\}_{elem}$ aux noeuds de l'élément. L'intégrale de l'équation (4.29) est calculée numériquement en utilisant les données connues aux points de Gauss. À la section 4.3.4, le prochain état de déformation ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_g^k$ engendré par la dilatation thermique a été calculé à partir de l'état actuel ${}^{t}\{e_{THR}\}_g^k$. Ces deux états servent à calculer le vecteur d'incrément de contrainte $\{\Delta\tau_{THR}\}$ de l'équation (4.29). Par contre, le passage d'un état de déformation à un état de contrainte nécessite toujours la prise en considération de la rigidité du matériau. De cette façon, l'intégrale de l'équation (4.29) se calcule numériquement de la manière suivante pour le k-ième élément :

$$\{\Delta R_{THR}\}^k = \sum_{g=1}^{N} {}^{t}[B_L]_g^{kT} \; {}^{t+\Delta t}_{t}[C]_g^k \left({}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}_g^k - {}^{t}\{e_{THR}\}_g^k \right) \det J_g \; \varpi_g \qquad (4.30)$$

où ${}^{t}[B_L]_g^{kT}$ est la transposée de la matrice de transformation déplacement-déformation évaluée au g-ième point de Gauss du k-ième élément, ${}^{t+\Delta t}_{t}[C]_g^k$ est la matrice de rigidité entre la configuration actuelle et la prochaine configuration, ϖ_g est le poids du point de Gauss et det J_g est le déterminant de la matrice Jacobienne ${}^{t}[J]_g^k$. Les matrices ${}^{t}[B_L]_g^{kT}$ et ${}^{t}[J]_g^k$ sont calculées de la même manière qu'à la section 4.3.1. Enfin, la matrice de rigidité ${}^{t+\Delta t}_{t}[C]_g^k$ est calculée selon l'équation (4.13) en utilisant le module sécant de rigidité calculé par les relations constitutives.

4.3.8 Calcul de $\{\Delta R_{SME}\}$

Le vecteur de forces nodales générées par les effets de mémoire de forme suite aux variations de température se calcule exactement de la même façon que le vecteur $\{\Delta R_{THR}\}$. En effet, lorsqu'une variation de température est imposée dans *KRIGAMF*, la prochaine déformation d'effet mémoire ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_t^k$ du g-ième point de Gauss dans le k-ième élément est calculée à partir de la déformation actuelle ${}^{t}\{e_{SME}\}_t^k$ selon la méthodologie proposée à la section 4.3.5. Lorsque ces deux états de déformation sont connus, l'équation (4.30) est reprise tout en remplaçant les déformations thermiques par les déformations dues aux effets mémoire. Ainsi, le vecteur de forces nodales générées par les effets mémoire est calculé pour chaque élément selon l'équation (4.31). Par la suite, tous les vecteurs sont assemblés dans le vecteur global $\{\Delta R_{SME}\}$.

$$\{\Delta R_{SME}\}^k = \sum_{g=1}^{N} {}^{t}[B_L]_g^{k\,T}\ {}_{t}^{t+\Delta t}[C]_g^k \left({}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}_g^k - {}^{t}\{e_{SME}\}_g^k \right) \det J_g\ \varpi_g \qquad (4.31)$$

4.3.9 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{R\}$

Les forces nodales de la prochaine configuration calculée sont données par la somme du vecteur de forces nodales internes ${}^{t}\{F\}$ de la position actuelle d'équilibre, du vecteur d'incrément de forces nodales mécaniques $\{\Delta R_{MEC}\}$ (conditions frontières spécifiées par l'utilisateur), du vecteur d'incrément de forces nodales thermiques $\{\Delta R_{THR}\}$ et du vecteur d'incrément de forces nodales dues aux effets mémoire $\{\Delta R_{SME}\}$. Cette étape de l'algorithme regroupe simplement les données calculées aux étapes précédentes.

$${}^{t+\Delta t}\{R\} = {}^{t}\{F\} + \{\Delta R_{MEC}\} + \{\Delta R_{THR}\} + \{\Delta R_{SME}\} \qquad (4.32)$$

4.3.10 Calcul de ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]$

La matrice de rigidité ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]$ représente la rigidité de la structure entre la configuration actuelle au temps "t" et la prochaine configuration au temps "t+dt". La non-linéarité géométrique de *SIMAMF* introduit un terme de rigidité non-linéaire dans l'expression de ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]$ en plus du terme de rigidité linéaire. La matrice de rigidité de chaque élément est calculée et ensuite assemblée dans la matrice globale selon les techniques classiques d'assemblage. L'expression de la matrice de rigidité d'un élément est donnée à l'équation suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}[K]_{elem} = \int_{{}^{t}V} \left({}^{t}[B_L]^T \; {}^{t+\Delta t}_{t}[C] \; {}^{t}[B_L] + {}^{t}[B_{NL}]^T \; {}^{t}[\hat{\tau}] \; {}^{t}[B_{NL}] \right) d\,{}^{t}V \qquad (4.33) $$

où ${}^{t}V$ est le volume d'intégration. ${}^{t}[B_L]$ et ${}^{t}[B_{NL}]$ sont respectivement les matrices linéaire et non-linéaire de transformation déplacement-déformation. ${}^{t+\Delta t}_{t}[C]$ est la matrice de rigidité et ${}^{t}[\hat{\tau}]$ est une matrice des contraintes de Cauchy. La matrice ${}^{t}[B_L]$ est donnée à l'équation (4.24) et elle est de dimension 6 par 3M où M est le nombre de noeuds dans l'élément. La matrice ${}^{t+\Delta t}_{t}[C]$ est la matrice de rigidité entre la configuration actuelle et la prochaine configuration calculée selon l'équation (4.13) en utilisant le module sécant de l'alliage entre les deux configurations. La dimension de la matrice de rigidité est de 6 par 6. La matrice non-linéaire de transformation ${}^{t}[B_{NL}]$ de dimension 9 par 3M (M étant le nombre de noeuds) est donnée à l'équation (4.34). Elle contient les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux positions actuelles définies aux équations (4.25). Finalement, la matrice des contraintes de Cauchy de dimension 9 par 9 est donnée à l'équation (4.35). En effectuant les produits matriciels de l'équation (4.33), la matrice de rigidité d'un élément possédant M noeuds est de dimension 3M par 3M.

$$
{}^{t}[B_{NL}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 \\
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 \\
\frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1} & 0 \\
0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} & 0 \\
0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_1} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_1} \\
0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_2} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_2} \\
0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial {}^{t}x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial {}^{t}x_3} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial {}^{t}x_{31}}
\end{array}\right] \qquad (4.34)
$$

$$
{}^{t}[\hat{\tau}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
{}^{t}\tau_{11} & {}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{22} & {}^{t}\tau_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}^{t}\tau_{13} & {}^{t}\tau_{23} & {}^{t}\tau_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{11} & {}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{22} & {}^{t}\tau_{23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{13} & {}^{t}\tau_{23} & {}^{t}\tau_{33} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{11} & {}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{12} & {}^{t}\tau_{22} & {}^{t}\tau_{23} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t}\tau_{13} & {}^{t}\tau_{23} & {}^{t}\tau_{33}
\end{array}\right] \qquad (4.35)
$$

La matrice de rigidité du k-ième élément est calculée numériquement en évaluant l'expression (4.33) aux N points de Gauss, et cela après avoir effectué le passage sur l'élément de référence. Ainsi, on obtient :

$$
{}^{t+\Delta t}_{t}[K]^{k} = \sum_{g=1}^{N} \left({}^{t}[B_L]_g^{k\,T}\, {}^{t+\Delta t}_{t}[C]_g^{k}\, {}^{t}[B_L]_g^{k} + {}^{t}[B_{NL}]_g^{k\,T}\, {}^{t}[\hat{\tau}]_g^{k}\, {}^{t}[B_{NL}]_g^{k} \right) \det J_g \; \varpi_g \qquad (4.36)
$$

4.3.11 Calcul de $\{\Delta U\}$

En utilisant la matrice ${}^{t+\Delta t}_{t}[K]$ et les vecteurs ${}^{t+\Delta t}\{R\}$ et ${}^{t}\{F\}$ calculés lors des étapes précédentes, un vecteur de déplacement nodaux $\{\Delta U\}$ est obtenu lors de chaque itération selon l'équation suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}[K]\ \{\Delta U\} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t}\{F\} \tag{4.37} $$

Il existe de nombreuses techniques directes ou itératives pour résoudre un tel système d'équations linéaires. La technique présentement employée dans *SIMAMF* est la méthode d'élimination de Gauss. C'est lors de la résolution du système d'équations (4.37) que les conditions frontières de déplacements imposés sont prises en considération. En effet, il est possible avec *SIMAMF* de contrôler des incréments de déplacements nodaux ΔU_p^*. Ces incréments de déplacements nodaux sont spécifiés à chaque incrément par l'utilisateur. Pour forcer la solution du système à respecter ces incréments de déplacements imposés, une méthode de pénalisation est employée. Dans une telle méthode, une importante rigidité artificielle est introduite dans le système au niveau de la matrice de rigidité et du vecteur des forces. Par exemple, imaginons qu'un système $[K]\ \{\Delta U\} = \{\Delta R\}$ de trois équations à trois inconnus doit être résolu et que la valeur de ΔU_2 doit être imposée à une valeur prescrite ΔU_2^*. Le système d'équations est modifié en introduisant une constante β qui joue le rôle de la rigidité artificielle. Le système d'équations (4.38) montre une telle modification. De cette façon, la valeur de ΔU_2 calculée lors de la résolution devient très voisine de la valeur imposée ΔU_2^*. L'ordre de grandeur de la constante β peut être de 10^8 et même plus. L'imposition de déplacements nuls est effectuée de la même manière.

$$ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & \beta K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ K_{22} \cdot \beta \cdot \Delta U_2^* \\ \Delta R_3 \end{Bmatrix} \tag{4.38} $$

4.3.12 Imposition de $\{\Delta U\}$

Lorsqu'un vecteur de déplacement est calculé, les positions des noeuds de la prochaine configuration sont simplement déterminées en ajoutant les déplacements nodaux aux positions de la configuration actuelle. Cette opération est simple et triviale. Les états de déformation à l'intérieur des éléments peuvent être déterminés exclusivement en se basant sur ces déplacements nodaux. Pour se faire, deux gradients de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$ et ${}^{t+\Delta t}_{t}X$ sont calculés à chaque point de Gauss. Leur définition est donnée aux équations suivantes :

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}X = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{0}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{0}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{0}x_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{0}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{0}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{0}x_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{0}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{0}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{0}x_3} \end{bmatrix} \quad {}^{t+\Delta t}_{t}X = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{t}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_1}{\partial {}^{t}x_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{t}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_2}{\partial {}^{t}x_3} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{t}x_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{t}x_2} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_3}{\partial {}^{t}x_3} \end{bmatrix} \tag{4.39} $$

où ${}^{0}x_j$, ${}^{t}x_j$, ${}^{t+\Delta t}x_j$ sont respectivement les positions exprimées dans la configuration initiale, dans la configuration actuelle et dans la prochaine configuration. Le gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$ caractérise les déformations qu'un point de Gauss a dû subir pour passer de la configuration initiale vers la prochaine configuration tandis que le gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{t}X$ remplit les mêmes fonctions pour le passage de la configuration actuelle vers la prochaine configuration. Les termes des gradients de déformation sont calculés selon les équations (4.40) en utilisant les positions nodales de la prochaine configuration et les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux positions initiale ou actuelle. Ces dérivées sont calculées en utilisant la définition de la matrice Jacobienne présentée aux équations (4.22) et (4.25). Évidemment, la matrice Jacobienne ${}^{t}[J]$ doit être remplacée par ${}^{0}[J]$ pour la définition du gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$.

$$\frac{\partial^{t+\Delta t}x_i}{\partial^0 x_j} = \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^1 + \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^2 + \cdots + \frac{\partial h_M}{\partial^0 x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^M$$
$$\frac{\partial^{t+\Delta t}x_i}{\partial^t x_j} = \frac{\partial h_1}{\partial^t x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^1 + \frac{\partial h_2}{\partial^t x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^2 + \cdots + \frac{\partial h_M}{\partial^t x_j}{}^{t+\Delta t}x_i^M \qquad (4.40)$$

Les deux gradients de déformation calculés à chaque point de Gauss dans les éléments servent à l'étape suivante pour calculer les états de contrainte et de déformation. Le calcul de ces gradients est exclusivement fondé sur les déplacements nodaux. La relation constitutive utilisée pour représenter le comportement du matériau n'est alors aucunement considérée lors de ces calculs. Le déterminant des gradients de déformation permettent également de déterminer le rapport de densité ρ entre deux configurations.

$$\det\left({}^{t+\Delta t}_{0}X\right) = \frac{\rho_0}{\rho_{t+\Delta t}} \qquad \det\left({}^{t+\Delta t}_{t}X\right) = \frac{\rho_t}{\rho_{t+\Delta t}} \qquad (4.41)$$

4.3.13 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{e\}_i^k$

Le calcul du tenseur de déformation de Green-Lagrange est relativement facile à réaliser lorsque les gradients de déformation sont connus. Par contre, le tenseur de déformation de Green-Lagrange n'a pas de véritable signification physique et une autre définition de déformation doit être employée pour l'analyse des résultats. Les déformations calculées dans *SIMAMF* sont exprimées en déformation d'ingénierie. Le vecteur ${}^{t+\Delta t}\{e\}_i^k$ contient les composantes de déformation d'ingénierie du i-ième point de Gauss au sein du k-ième élément dans la configuration déformée au temps t+Δt. La définition classique du tenseur infinitésimal de déformation d'ingénierie e_{ij} est donnée à l'équation suivante :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (4.42)$$

Il n'est pas recommandé d'employer la définition de la déformation d'ingénierie donnée à l'équation (4.42) car les rotations rigides et les grandes déformations provoquent des résultats erronés. Puisque *SIMAMF* est conçu pour calculer les grandes déformations, les grands déplacements et les grandes rotations, les déformations d'ingénierie doivent donc être calculées d'une autre façon. En effet, plutôt que d'utiliser les déplacements nodaux comme le prévoit l'équation (4.42), les gradients de déformation sont employés pour calculer les déformations d'ingénierie dans *SIMAMF*. Le calcul des composantes axiales et des composantes de cisaillement de l'état de déformation d'ingénierie repose sur des considérations théoriques différentes dans les deux cas. Les explications concernant le calcul des composantes axiales sera d'abord effectué.

Imaginons qu'un corps se déforme en passant d'une configuration initiale au temps $t = 0$ vers une prochaine configuration au temps $t = t+\Delta t$ comme le montre la figure 4.10. Deux points A et B sont suivis lors de la déformation du corps. Ces points passent des positions ${}^{0}A$ et ${}^{0}B$ jusqu'aux positions ${}^{t+\Delta t}A$ et ${}^{t+\Delta t}B$ et le segment de droite reliant les points A et B subit un allongement ou une contraction.

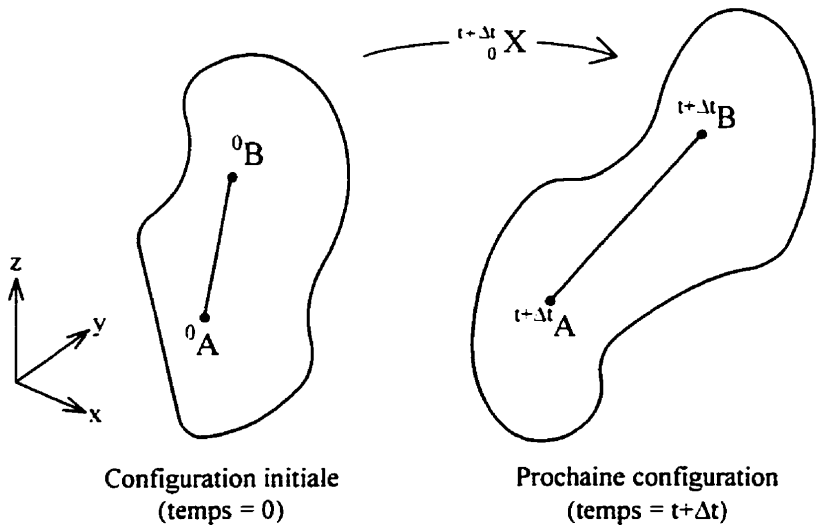


Figure 4.10 Déformation d'une segment de droite AB lors du passage de la configuration initiale vers la prochaine configuration.

La déformation d'ingénierie du segment de droite AB entre la configuration initiale et la prochaine configuration peut s'exprimer de la façon suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}e_{AB} = \frac{{}^{t+\Delta t}l_{AB} - {}^{0}l_{AB}}{{}^{0}l_{AB}} = \frac{{}^{t+\Delta t}l_{AB}}{{}^{0}l_{AB}} - 1 = \lambda - 1 \qquad (4.42) $$

où ${}^{t+\Delta t}l_{AB}$ et ${}^{0}l_{AB}$ sont respectivement les longueurs du segment AB dans la prochaine configuration et dans la configuration initiale et λ est le facteur d'allongement (appelé en anglais *stretch ratio*) du segment AB. Le facteur d'allongement est toujours positif et une valeur inférieure à 1.0 correspond à une contraction. À l'opposé, un allongement du segment est caractérisé par une valeur λ supérieure à 1.0. En évaluant le facteur d'allongement, la déformation d'ingénierie d'un segment de droite peut être déterminée avec l'équation (4.42). La mécanique des corps déformables permet de calculer ce facteur d'allongement à partir du gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}\mathrm{X}$ qui caractérise le passage entre les deux configurations selon l'équation suivante :

$$ \lambda = \left({}^{t+\Delta t}\bar{n}^{T} \left[{}^{t+\Delta t}_{0}\mathrm{X} \; {}^{t+\Delta t}_{0}\mathrm{X}^{T} \right]^{-1} \; {}^{t+\Delta t}\bar{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.43) $$

où ${}^{t+\Delta t}\bar{n}$ est le vecteur des cosinus directeurs qui permettent d'orienter dans l'espace le segment de droite en configuration déformée au temps t+Δt. En combinant les équations (4.42) et (4.43), la déformation axiale d'ingénierie au temps t+Δt peut être calculée selon le système d'axe global. La prochaine déformation axiale d'ingénierie selon le premier axe du repère global est déterminée en imposant que le vecteur ${}^{t+\Delta t}\bar{n} = \{1\ 0\ 0\}^{T}$. Les autres composantes axiales sont obtenues de manière similaire en alignant le vecteur ${}^{t+\Delta t}\bar{n}$ par rapport aux autres axes du repère global. Ainsi, l'expression des trois composantes axiales du prochaine vecteur de déformation d'ingénierie sont :

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}e_{11} &= \left(\{1 \quad 0 \quad 0\} \left[{}^{t+\Delta t}_{0}X \; {}^{t+\Delta t}_{0}X^{T} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \\
{}^{t+\Delta t}e_{22} &= \left(\{0 \quad 1 \quad 0\} \left[{}^{t+\Delta t}_{0}X \; {}^{t+\Delta t}_{0}X^{T} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \\
{}^{t+\Delta t}e_{33} &= \left(\{0 \quad 0 \quad 1\} \left[{}^{t+\Delta t}_{0}X \; {}^{t+\Delta t}_{0}X^{T} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

En ce qui concerne le calcul des composantes de déformation en cisaillement du vecteur ${}^{t+\Delta t}\{e\}_1^k$, une démarche similaire fondée sur le gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$ est suivie. Imaginons maintenant qu'un corps se déforme à partir d'une configuration jusqu'à une autre comme le montre la figure 4.11 et que le mouvement des trois points I, A et B est suivi. Les points passent respectivement des positions ^{0}I, ^{0}A et ^{0}B vers les positions ${}^{t+\Delta t}$I, ${}^{t+\Delta t}$A et ${}^{t+\Delta t}$B. La déformation en cisaillement ${}^{t+\Delta t}\gamma_{AIB}$ subie par l'angle $\overline{\overline{AIB}}$ est définie de la façon suivante :

$$
{}^{t+\Delta t}\gamma_{AIB} = \operatorname{tg}\left(\overline{\overline{{}^{0}A\,{}^{0}I\,{}^{0}B}} - \overline{\overline{{}^{t+\Delta t}A\,{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}} \right) \tag{4.45}
$$

où $\overline{\overline{{}^{0}A\,{}^{0}I\,{}^{0}B}}$ et $\overline{\overline{{}^{t+\Delta t}A\,{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}}$ sont respectivement les angles entre les segments IA et IB en configuration initiale et en prochaine configuration. Ces angles sont déterminés en utilisant la loi des cosinus présentée à l'équation (4.46) où $\overline{IA}$ et $\left|\overline{IA}\right|$ représentent respectivement le vecteur entre les points I et A et la norme de ce vecteur.

$$\overline{\overline{{}^{0}A\,{}^{0}I\,{}^{0}B}} = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{{}^{0}I\,{}^{0}A}\cdot\overline{{}^{0}I\,{}^{0}B}}{\left|\overline{{}^{0}I\,{}^{0}A}\right|\cdot\left|\overline{{}^{0}I\,{}^{0}B}\right|}\right)$$

$$\overline{\overline{{}^{t+\Delta t}A\,{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}} = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}A}\cdot\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}}{\left|\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}A}\right|\cdot\left|\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}\right|}\right) \qquad (4.46)$$

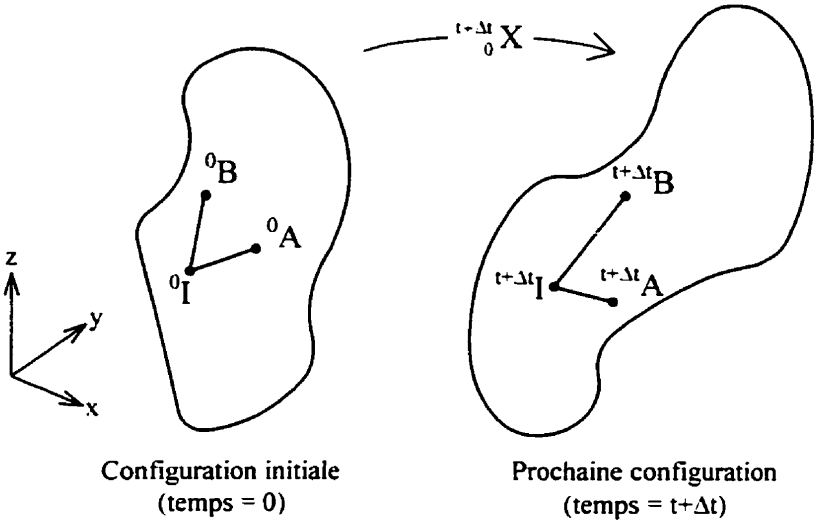


Figure 4.11 Déformation en cisaillement d'un angle $\overline{\overline{AIB}}$ lors du passage de la configuration initiale vers la prochaine configuration.

La relation qui existe pour un vecteur exprimé selon différentes configurations est obtenue grâce au gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$ qui caractérise le passage d'une configuration à l'autre. Les équations suivantes mettent en évidence la transformation des vecteurs $\overline{IA}$ et $\overline{IB}$ lors du passage de la configuration initiale vers la prochaine configuration ou vice versa :

$$\begin{aligned}
\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}A} &= {}^{t+\Delta t}_{0}X\ \overline{{}^{0}I\,{}^{0}A} \quad\Rightarrow\quad \overline{{}^{0}I\,{}^{0}A} = {}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\ \overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}A} \\
\overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B} &= {}^{t+\Delta t}_{0}X\ \overline{{}^{0}I\,{}^{0}B} \quad\Rightarrow\quad \overline{{}^{0}I\,{}^{0}B} = {}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\ \overline{{}^{t+\Delta t}I\,{}^{t+\Delta t}B}
\end{aligned} \qquad (4.47)$$

Pour calculer la déformation de cisaillement dans le plan XY en configuration déformée au temps t+Δt, la première étape est d'imposer l'orientation des vecteurs $\overline{{}^{t+\Delta t}I^{t+\Delta t}A}$ et $\overline{{}^{t+\Delta t}I^{t+\Delta t}B}$ de façon à ce qu'ils soient parallèles aux axes X et Y du repère global. En posant $\overline{{}^{t+\Delta t}I^{t+\Delta t}A} = \{1\,0\,0\}^T$ et $\overline{{}^{t+\Delta t}I^{t+\Delta t}B} = \{0\,1\,0\}^T$ dans l'équation (4.46), la valeur de l'angle $\overline{\overline{{}^{t+\Delta t}A\,{}^{t+\Delta t}I^{t+\Delta t}B}}$ devient évidemment égale à π/2. L'orientation des vecteurs $\overline{{}^{0}I^{0}A}$ et $\overline{{}^{0}I^{0}B}$ est calculée par les équations (4.47) et l'angle $\overline{\overline{{}^{0}A^{\circ}I^{0}B}}$ qui existe entre les vecteurs dans la configuration initiale est obtenu par l'équation (4.46). Enfin, en remplaçant la valeur des angles dans l'équation (4.45), l'expression de la déformation de cisaillement ${}^{t+\Delta t}e_{12}$ dans le plan XY en configuration déformée au temps t+Δt est donnée à l'équation (4.48). Les autres composantes de cisaillement selon les plans YZ et ZX sont calculées exactement de la même manière, mais les vecteurs doivent être orientés selon les axes appropriés du repère global.

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}e_{12} &= \operatorname{tg}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{1\,0\,0\}^T}\cdot\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,1\,0\}^T}}{\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{1\,0\,0\}^T}\right|\cdot\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,1\,0\}^T}\right|}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\\
{}^{t+\Delta t}e_{23} &= \operatorname{tg}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,1\,0\}^T}\cdot\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,0\,1\}^T}}{\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,1\,0\}^T}\right|\cdot\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,0\,1\}^T}\right|}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\\
{}^{t+\Delta t}e_{31} &= \operatorname{tg}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,0\,1\}^T}\cdot\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{1\,0\,0\}^T}}{\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{0\,0\,1\}^T}\right|\cdot\left|\overline{{}^{t+\Delta t}_{0}X^{-1}\{1\,0\,0\}^T}\right|}\right)-\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
\qquad (4.48)
$$

Il est à noter que les six composantes du vecteur de déformation d'ingénierie ${}^{t+\Delta t}\{e\}$ données aux équations (4.44) et (4.48) sont calculées par l'entremise du gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{0}X$. De cette façon, le calcul des déformations d'ingénierie n'est pas influencé par les grands déplacements, les grandes rotations ainsi que les déplacements

et rotations rigides. Il est nécessaire de filtrer les effets des grands déplacements et des grandes déformations dans le calcul des déformations d'ingénierie car la formulation de *SIMAMF* les prend en considération.

4.3.14 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{\tau\}_i^k$

Le calcul des composantes du vecteur de contrainte Cauchy ${}^{t+\Delta t}\{\tau\}_i^k$ au i-ième point de Gauss dans le k-ième élément débute en obtenant un incrément de déformation effective. L'incrément de déformation effective est la partie de la déformation qui engendre des variations de contrainte. Les dilatations thermiques et certains effets de mémoire de forme créent des déformations sans modifier l'état de contrainte. Par exemple, la dilatation thermique sans restriction d'un corps n'engendre aucun contrainte dans la structure. Pour calculer l'incrément de déformation effective $\{\Delta e'\}$, l'incrément de déformation thermique $\{\Delta e_{THR}\}$ et l'incrément de déformation due aux effets mémoire $\{\Delta e_{SME}\}$ sont retranchés de l'incrément de déformation totale $\{\Delta e\}$:

$$\{\Delta e'\} = \{\Delta e\} - \{\Delta e_{THR}\} - \{\Delta e_{SME}\}$$

$$\text{avec} \quad \{\Delta e\} = {}^{t+\Delta t}\{e\} - {}^{t}\{e\} \tag{4.49}$$
$$\{\Delta e_{THR}\} = {}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\} - {}^{t}\{e_{THR}\}$$
$$\{\Delta e_{SME}\} = {}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\} - {}^{t}\{e_{SME}\}$$

Il est à noter que tous ces états de déformation sont exprimés en déformation d'ingénierie. Les déformations qui correspondent à la configuration actuelle au temps t sont connues tandis que les déformations qui se réfèrent au temps t+Δt ont été calculées à l'étape 4.3.4 pour ${}^{t+\Delta t}\{e_{THR}\}$, à l'étape 4.3.5 pour ${}^{t+\Delta t}\{e_{SME}\}$ et à l'étape 4.3.13 pour ${}^{t+\Delta t}\{e\}$. Pour calculer les prochaines contraintes de Cauchy, l'incrément de déformation

effective d'ingénierie doit être converti en incrément de déformation effective de Green-Lagrange. Cette conversion s'effectue grâce au gradient de déformation ${}^{t+\Delta t}_{t}X$ entre la configuration actuelle et la prochaine configuration selon l'équation (4.50). Dans cette équation, les états de déformation sont exprimés en notation tensorielle et $\Delta\varepsilon'_{ij}$ et $\Delta e'_{ij}$ représentent respectivement les tenseurs de déformation effective de Green-Lagrange et d'ingénierie.

$$\Delta\varepsilon'_{ij} = {}^{t+\Delta t}_{t}X_{mi}\ {}^{t+\Delta t}_{t}X_{nj}\ \Delta e'_{mn} \tag{4.50}$$

Par la suite, un incrément du second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff ΔS_{ij} est calculé en utilisant l'incrément de déformation de Green-Lagrange $\Delta\varepsilon'_{ij}$ selon l'équation suivante :

$$\Delta S_{ij} = {}^{t+\Delta t}_{t}C_{ijpq}\ \Delta\varepsilon'_{pq} \tag{4.51}$$

où ${}^{t+\Delta t}_{t}C_{ijpq}$ représente le tenseur de rigidité du quatrième ordre défini en fonction des coefficients de Lamé λ et μ comme suit :

$$\begin{gathered} {}^{t+\Delta t}_{t}C_{ijpq} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{pq} + \mu\left(\delta_{ip}\,\delta_{jq} + \delta_{iq}\,\delta_{jp}\right) \\ \lambda = \frac{E'\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E'}{2(1+\nu)} \end{gathered} \tag{4.52}$$

Dans les équations (4.52), δ_{ij} est le delta de Kronecker, ν est le coefficient de Poisson et E' est le module de rigidité sécant calculé par la relation constitutive. Le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff ${}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij}$ qui caractérise le passage entre la configuration

actuelle au temps t et la prochaine configuration au temps t+Δt est calculé de la manière suivante :

$$ {}^{t+\Delta t}_{t}S_{ij} = \Delta S_{ij} + {}^{t}\tau_{ij} \tag{4.53} $$

où ${}^{t}\tau_{ij}$ représente le tenseur des contraintes Cauchy de la configuration actuelle d'équilibre au temps t. Enfin, les contraintes Cauchy au temps t+Δt sont obtenues en employant l'équation (4.54) exprimée en notation tensorielle dans laquelle le rapport des densités est déterminé selon l'équation (4.41).

$$ {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} = \frac{{}^{t+\Delta t}\rho}{{}^{t}\rho} \, {}^{t+\Delta t}_{t}X_{ip} \, {}^{t+\Delta t}_{t}S_{pq} \, {}^{t+\Delta t}_{t}X_{jq} \tag{4.54} $$

Enfin, la dernière opération à effectuer en vue de l'obtention du vecteur des prochaines contraintes Cauchy ${}^{t+\Delta t}\{\tau\}$ concerne la conversion du tenseur calculé à l'équation (4.54) en notation vectorielle. En effet, tous les états de contrainte et de déformation sont gardés en mémoire sous forme de vecteur dans *SIMAMF*.

4.3.15 Calcul de ΔU_{max}

Pendant le processus itératif, un vecteur de déplacements nodaux est calculé à chaque itération. La convergence est atteinte lorsque ce vecteur calculé lors d'une itération est presque égal à celui de l'itération précédente. Dans un premier temps, on calcule la différence entre les deux vecteurs de déplacements nodaux. Ensuite, la valeur absolue de la plus grande composante du vecteur de différence ΔU_{max} est comparée à une tolérance fixée par l'utilisateur. Si la valeur ΔU_{max} est inférieure à la tolérance, le processus itératif est interrompu. La convergence selon une certaine précision imposée par l'utilisateur est alors atteinte.

4.3.16 Calcul de ${}^{t+\Delta t}\{F\}$

Lorsque la convergence est atteinte, la "dernière" prochaine configuration calculée est alors en équilibre. Les forces nodales ${}^{t+\Delta t}\{F\}$ générées par les contraintes internes sont calculées exactement de la même manière qu'à la section 4.3.1. Par contre, les positions ${}^{t}x_j$ correspondantes à la configuration actuelle sont remplacées par celles qui se réfèrent à la prochaine configuration ${}^{t+\Delta t}x_j$. Ce vecteur est déterminé simplement pour l'écriture des résultats dans les fichiers de sortie. En effet, les forces nodales correspondent entre autres aux réactions où les conditions frontières ont été spécifiées par l'utilisateur. Ce genre d'information est extrêmement utile pour analyser la réponse d'une structure.

4.3.17 Mise à jour

La mise à jour consiste à copier toutes les données qui caractérisent la "dernière" prochaine configuration vers la configuration actuelle. De cette façon, lorsqu'un nouvel incrément de chargement est imposé par l'utilisateur, le processus itératif est relancé et la configuration de référence (la configuration actuelle) devient la dernière configuration calculée lors de l'incrément précédent. En fait, les données qui caractérisent la configuration actuelle (position des noeuds, états de contrainte et de déformation aux points de Gauss dans les éléments, etc.) sont écrasées par celles qui caractérisent la nouvelle configuration d'équilibre. Les informations des différentes configurations d'équilibre calculées lors de tous les incréments contrôlés par l'utilisateur ne sont pas perdues puisqu'elles sont constamment inscrites dans les fichiers de sortie. Cette démarche est préconisée afin de ne pas occuper toute la mémoire de l'ordinateur simplement pour conserver des résultats numériques.

4.3.18 Écriture des fichiers de sortie

Lorsqu'une nouvelle configuration en équilibre a été calculée par le processus itératif, les résultats sont inscrits dans les fichiers de sortie. Les déplacements nodaux, les forces nodales et les états de déformation et de contrainte à chaque point de Gauss dans tous les éléments sont les données conservées dans les fichiers. Ces données servent à l'analyse des résultats par le concepteur ou par le postprocesseur. Dans *SIMAMF*, des fichiers textes qui énumèrent tous les résultats et des fichiers d'interface spécialement adaptés au postprocesseur sont produits.

4.4 Exemples de validation

Cette section présente la première validation qualitative de *SIMAMF*. Il s'agit de l'étude d'une poutre en flexion soumise à des chargements superélastique, pseudo-plastique et d'effet mémoire simple sens. Les deux relations constitutives implantées dans *SIMAMF* (le modèle bilinéaire et *KRIGAMF*) sont utilisées dans cette validation.

4.4.1 Géométrie et maillage de la poutre

La poutre étudiée possède une section rectangulaire de b = 2 mm par h = 2 mm et une longueur de l = 4 mm comme le montre le schéma de gauche de la figure 4.12. La poutre est encastrée à une extrémité et une force ponctuelle P est appliquée au centre de l'extrémité libre. La déflexion δ de la poutre est calculée au point d'application de la charge. Le maillage utilisé pour modéliser la poutre est représenté dans le schéma de droite de la figure 4.12. Des éléments tridimensionnels sont employés. Le maillage comprend 45 noeuds à trois degrés de liberté par noeud (les trois déplacements) et 16 éléments briques à 8 noeuds. L'encastrement est modélisé en bloquant les trois déplacements des 9 noeuds de l'extrémité encastrée.

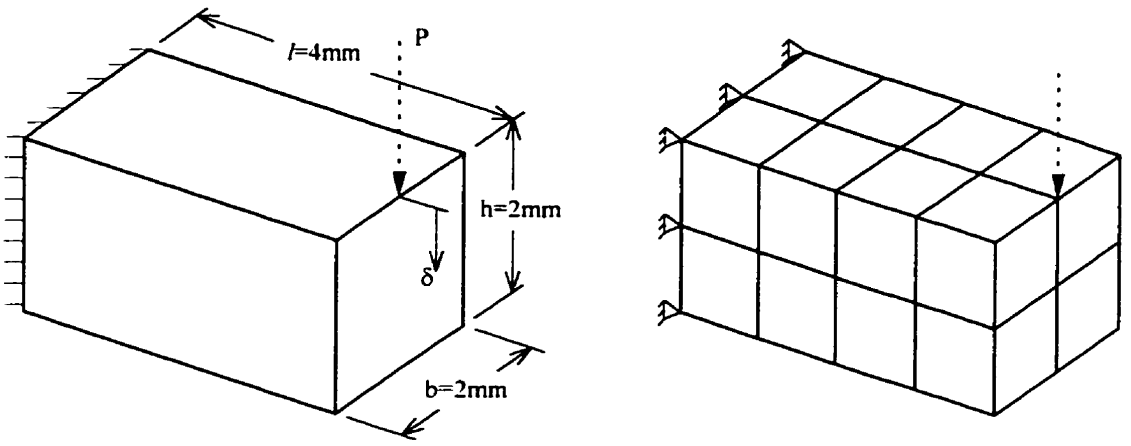


Figure 4.12 Géométrie et maillage de la poutre encastrée utilisée pour valider *SIMAMF*.

4.4.2 Relations constitutives

Deux relations constitutives sont utilisées dans l'analyse de la poutre encastrée. Dans un premier temps, un AMF fictif a été créé dans *KRIGAMF*. Bien que les courbes qui caractérisent le matériau n'aient pas été expérimentalement obtenues, la loi de matériau définie représente un comportement réel d'un AMF. En effet, le matériau est représenté par trois courbes entre 0°C et 40°C comme le montre la figure 4.13. L'alliage est superélastique pour une température supérieure à 20°C. À 0°C, l'AMF présente un comportement pseudo-plastique et une déformation résiduelle persiste après le déchargement. La déformation maximale est de 6% tandis que la contrainte maximale est de 800 MPa. La figure 4.13 montre également les surfaces caractéristiques du matériau. La transformation de phase de l'alliage défini dans *KRIGAMF* obéit à un critère asymétrique de Prager dont la valeur caractéristique est $b = 0.75$. Ainsi, la transformation de phase débute à des niveaux de contrainte plus élevés en compression qu'en tension. Dans un second temps, un matériau bilinéaire est défini de façon à ce qu'il colle le mieux possible au comportement superélastique de l'AMF à 40°C. Les paramètres qui décrivent le modèle bilinéaire sont : $E = 50\,000$ MPa, $H = 6000$ MPa, $\varepsilon_{mf} = 6\%$, $\sigma_{ms} = 500$ MPa, $\sigma_{af} = 200$ MPa et $\nu = 0.3$. La transformation de phase dans le

modèle bilinéaire obéit à un critère symétrique de Mises. La figure 4.14 superpose le modèle bilinéaire et la courbe superélastique à 40°C de *KRIGAMF*.

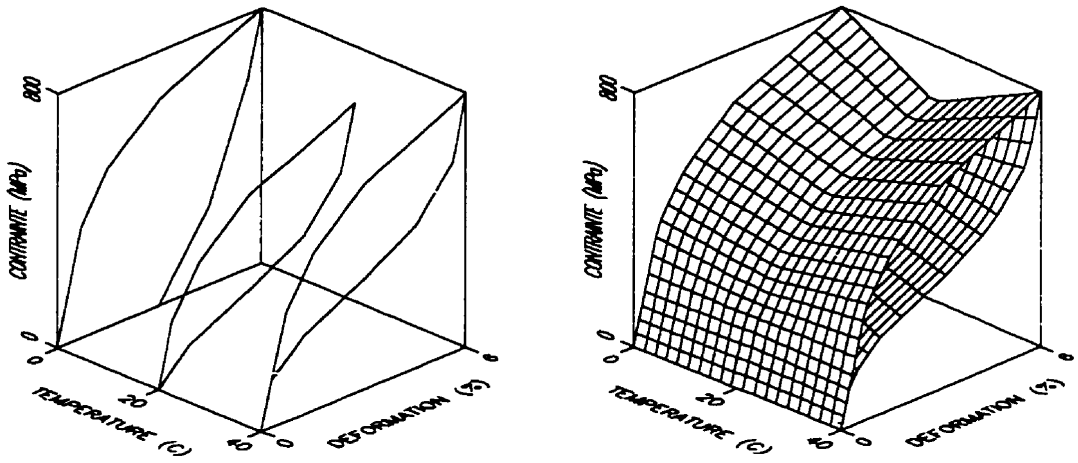


Figure 4.13 Définition d'un AMF fictif dans *KRIGAMF* pour l'analyse de la poutre.

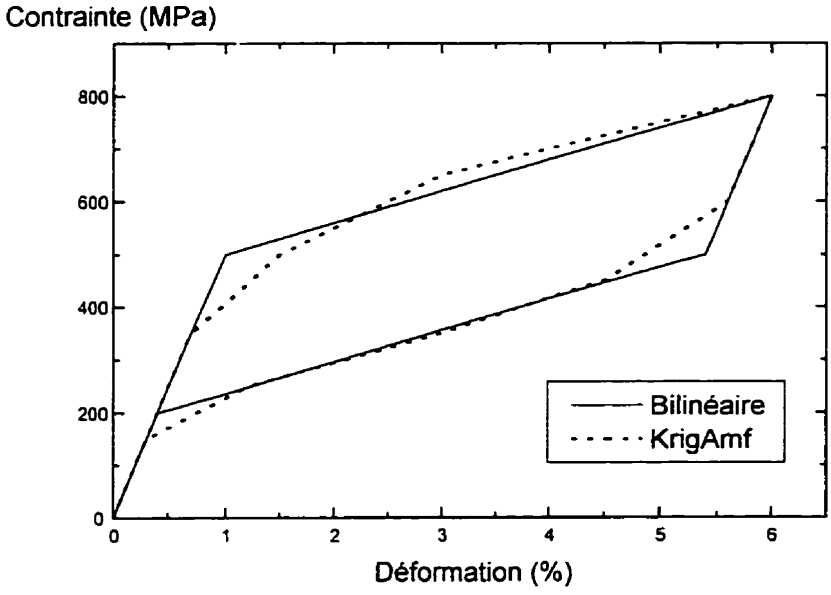


Figure 4.14 Comportement superélastique de l'alliage à 40°C.

4.4.3 Chargement superélastique

Le comportement superélastique de la poutre à 40°C est calculé en appliquant une charge ponctuelle au centre de l'extrémité libre. La charge est augmentée jusqu'à 300 N et ensuite ramenée à 0 N. En utilisant les deux relations constitutives, la réponse de la poutre est calculée. La figure 4.15 montre la déflexion δ de l'extrémité libre en fonction de la charge P.

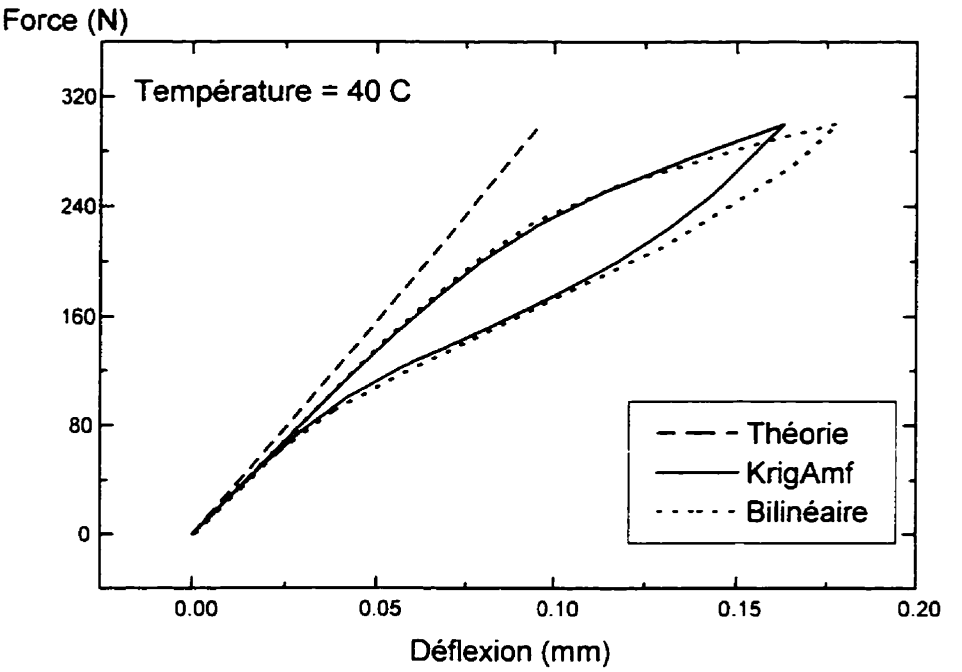


Figure 4.15 Réponse superélastique de la poutre calculée selon différents modèles.

On remarque une bonne concordance entre le modèle bilinéaire et *KRIGAMF*. La boucle d'hystérésis délimitée par le chargement et le déchargement est bien mise en évidence. Sur le même graphique, la réponse de la poutre selon la théorie des poutres élastiques est également tracée. Lorsque la transformation de phase se manifeste dans la poutre, un assouplissement du matériau se produit et le comportement macroscopique de la poutre

devient non-linéaire. Bien entendu, la théorie des poutres élastiques ne peut pas simuler un tel comportement.

Avec le modèle bilinéaire et *KRIGAMF*, on note une plus faible rigidité de la poutre par rapport à la théorie au début du chargement. Cette particularité est le résultat de l'application d'une force ponctuelle sur un noeud du maillage plutôt qu'une force répartie sur plusieurs noeuds. En effet, la déflexion de la poutre est calculée au point d'application de la charge. Comme le montre la déformée de la poutre à la figure 4.16, le noeud sur lequel est appliquée la charge subit un déplacement légèrement surestimé par rapport aux autres noeuds. Ainsi, la déflexion de la poutre est surestimée, ce qui diminue artificiellement la rigidité de la poutre. Il est à noter que la déformée de la poutre à la figure 4.16 est amplifiée afin de bien visualiser la surestimation du déplacement du noeud central de l'extrémité libre.

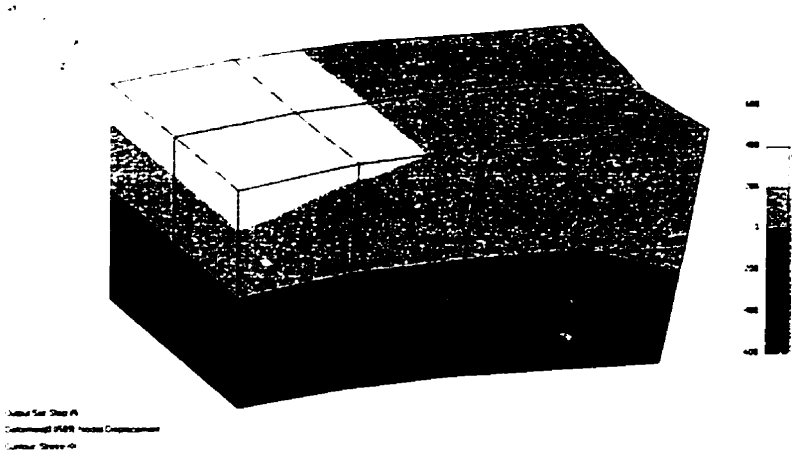
La figure 4.16 montre également la distribution de la contrainte axiale σ_{xx} pour trois intensités de la charge appliquée. Les schémas supérieur, médian et inférieur de la figure 4.16 représentent respectivement la distribution de la contrainte axiale σ_{xx} dans la poutre pour une force de 150 N, 225 N et 300 N. Ces distributions ont été obtenues avec la relation constitutive *KRIGAMF* lors du chargement de la poutre. La contrainte axiale est exprimée en MPa selon l'échelle positionnée à la droite des distributions. En comparant les trois distributions de contrainte, la progression de la transformation de phase peut être suivie. En effet, la transformation de phase débute aux endroits les plus sollicités (c'est-à-dire près de l'encastrement) pour ensuite se propager vers le centre de la poutre.

La figure 4.17 montre deux distributions de contrainte axiale dans la poutre qui correspondent à une charge de 300 N. La distribution de la partie supérieure de la figure est obtenue avec la relation constitutive *KRIGAMF* alors que celle de la partie inférieure correspond au modèle bilinéaire. Les deux distributions sont comparées afin de montrer l'influence du critère asymétrique de Prager introduit dans *KRIGAMF*. Puisque dans

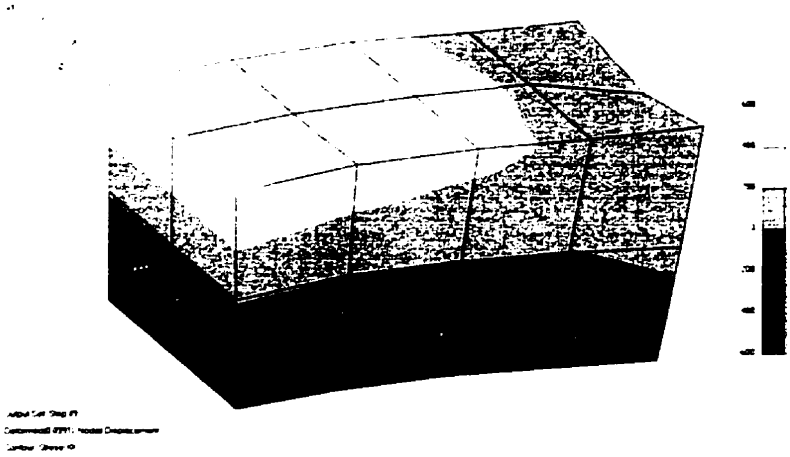
KRIGAMF la transformation de phase débute à des niveaux de contrainte plus élevés en compression qu'en tension, on observe un léger déplacement de l'axe neutre de la poutre vers la partie en compression. L'axe neutre délimite la région de la poutre qui est en compression de celle en tension.

Pour un critère symétrique de Mises (modèle bilinéaire), l'axe neutre est superposé au centre géométrique de la poutre qui est localisé par les intersections entre les éléments du maillage. Cette situation est observée dans la partie inférieure de la figure 4.17, sauf pour les éléments qui composent l'extrémité libre de la poutre. En effet, la force ponctuelle perturbe localement le champ de contrainte dans ces éléments. En observant attentivement les résultats produits par *KRIGAMF* (critère asymétrique de Prager), un déplacement de l'axe neutre vers la partie de la poutre en compression est obtenu. En effet, puisque l'assouplissement du matériau se produit en premier lieu dans la partie en tension lors de la transformation de phase, une plus grande proportion de la poutre doit entrer en tension afin de conserver l'équilibre de la structure. L'axe neutre empiète alors sur la partie en compression.

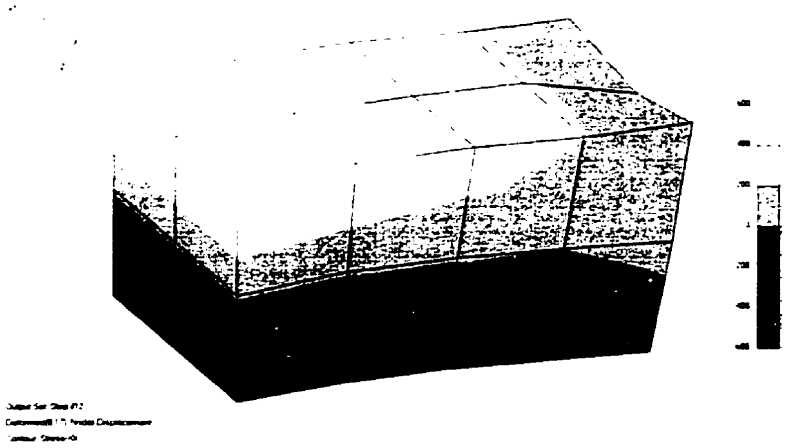
Dans le cas présent, le déplacement de l'axe neutre est relativement minime car seulement une faible proportion de la poutre se transforme en martensite. En effet, l'asymétrie du comportement se manifeste seulement lors du passage de l'austénite en martensite et plus la proportion d'austénite est grande dans une structure, plus les effets de l'asymétrie sont négligeables. Une géométrie favorisant la transformation de phase sur une plus grande proportion de la strucutre (une poutre en I par exemple) permettrait de mieux visualiser le déplacement de l'axe neutre.



P = 150 N

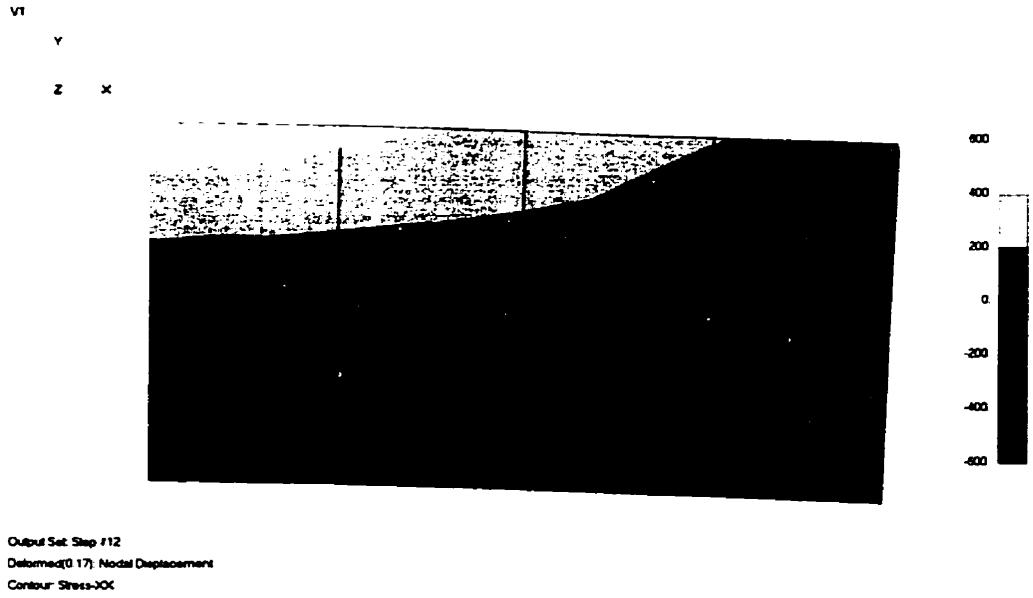


P = 225 N

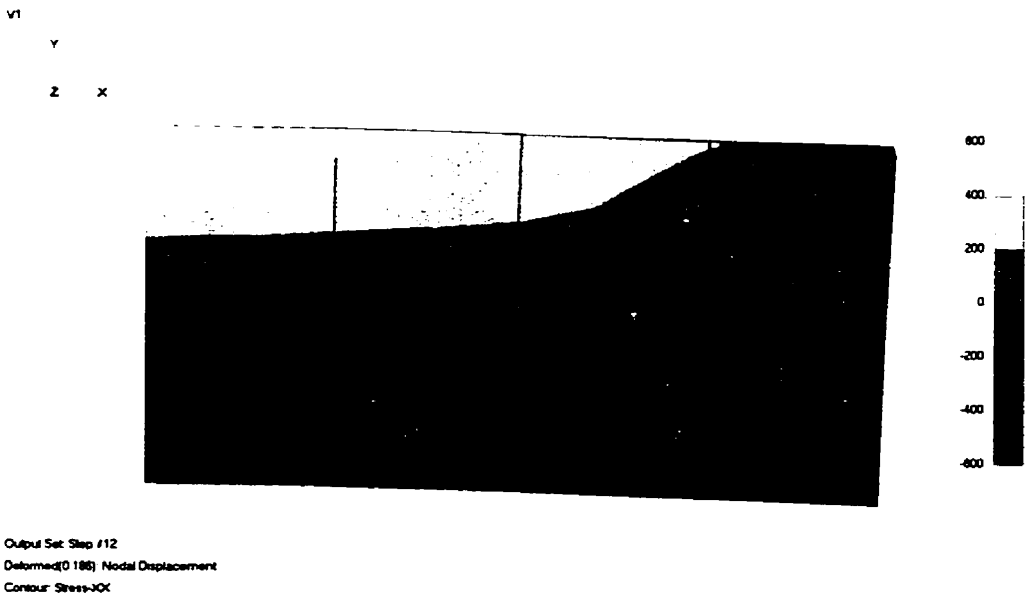


P = 300 N

Figure 4.16 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans la poutre.



KRIGAMF



Modèle bilinéaire

Figure 4.17 Déplacement de l'axe neutre engendrée par l'asymétrie du critère de Prager.

4.4.4 Effet mémoire simple sens

Le dernier chargement simulé avec la poutre encastrée est l'effet mémoire simple sens. Pour cette simulation, seulement la relation constitutive *KRIGAMF* est employée car le modèle bilinéaire ne prend pas en considération les variations de température. Dans un premier temps, une charge de 300 N est appliquée sur la poutre puis ensuite relâchée à 0°C. La réponse de la poutre est reproduite à la figure 4.18 entre les points A et B pour le chargement et entre les points B et C pour le déchargement. À cette température, l'alliage est dans un état pseudo-plastique et une déflexion résiduelle de la poutre est observée (déflexion au point C). Cette déformation résiduelle est récupérée en chauffant la structure. La figure 4.19 montre la récupération de la déflexion entre les points C et D. C'est l'effet mémoire simple sens qui se manifeste. Il est à noter que les points A à D sur les figures 4.18 et 4.19 correspondent aux mêmes états.

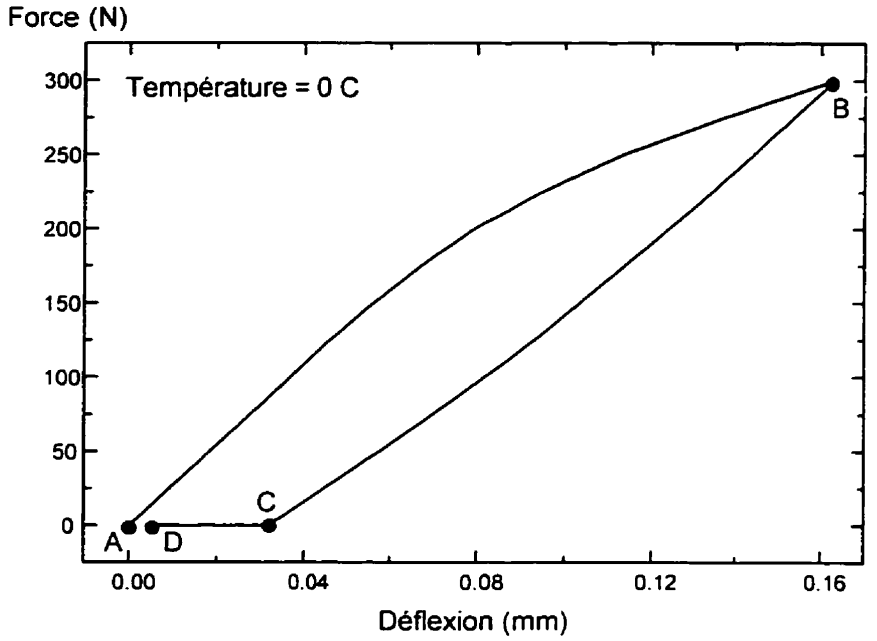


Figure 4.18 Chargement pseudo-plastique à 0°C de la poutre encastrée.

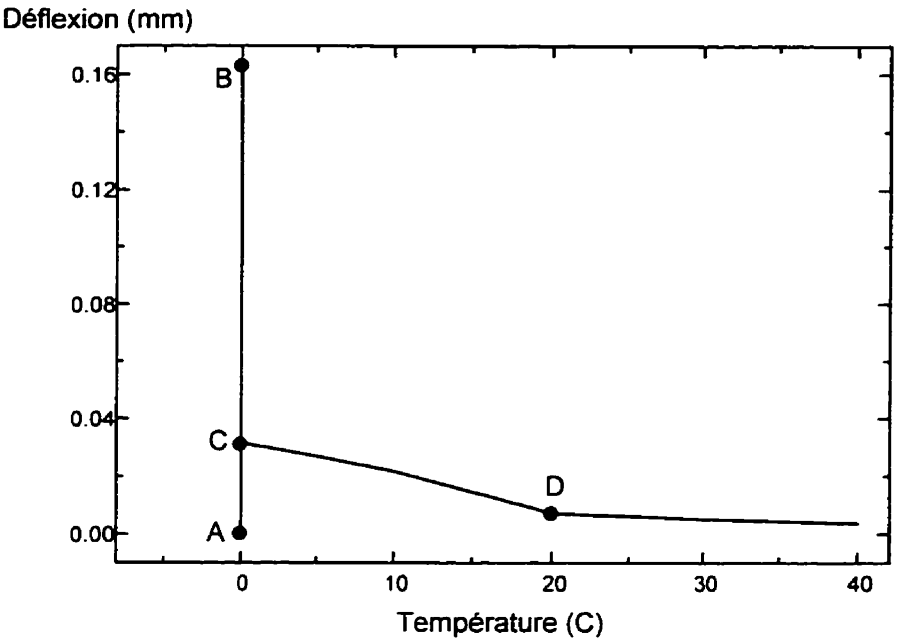


Figure 4.19 Effet mémoire simple sens de la poutre encastrée lors du chauffage.

4.5 Développements futurs

La structure de *SIMAMF* fait de lui un logiciel d'analyse par éléments finis non-linéaires souple et performant. En effet, des géométries tridimensionnelles complexes composées de plusieurs matériaux dont le comportement est différent peuvent être modélisées. Une formulation générale et incrémentale de type Lagrangienne-réactualisée permet de considérer les grandes déformations, les grands déplacements et les grandes rotations. Par contre, certaines améliorations doivent être apportées afin de généraliser davantage *SIMAMF* et de la rendre encore plus performant.

Dans un premier temps, le programme d'éléments finis *SIMAMF* devra être confronté à une série de validations quantitatives afin de vérifier l'exactitude des résultats calculés. Des validations devront être effectuées pour tous les principaux comportements des

AMF que *SIMAMF* peut calculer comme la superélasticité, la pseudo-plasticité, l'effet mémoire simple sens et l'effet mémoire double sens assisté. La manipulation d'échantillons en AMF exige une minutie et une rigueur exceptionnelles afin d'obtenir des résultats en laboratoire précis et fiables. En effet, les comportements exceptionnels des AMF comme la possibilité d'obtenir des déformations réversibles de l'ordre de 10% et une excellente régulation en température engendrent des complications au niveau de l'obtention des courbes expérimentales. Par conséquent, la validation quantitative de *SIMAMF* ne doit pas être réalisée de manière précipitée.

Dans un second temps, le branchement avec un programme d'éléments finis thermiques est souhaitable afin de calculer une distribution non-homogène de la température dans la composante étudiée. Actuellement, les variations de la température dans *SIMAMF* sont supposées uniformes dans toute la pièce. Comme il en a été discuté précédemment, cette hypothèse est valable lorsque le nombre de Biot est inférieur à 0.1. Dans un tel cas, l'hypothèse de la distribution homogène de la température n'influence que très légèrement les résultats produits par *SIMAMF*. Par contre, si le nombre de Biot est supérieur à 0.1, une analyse par éléments finis thermiques devient nécessaire pour estimer les gradients de température. Il est important de calculer la distribution réelle de la température car les transformations de phase des AMF dépendent de l'état de sollicitation mécanique et de la température. De plus, en calculant par éléments finis les champs de température, les effets endothermiques et exothermiques qui se manifestent pendant les transformations de phase pourront également être considérés. Bref, le couplage de *SIMAMF* avec un programme d'éléments finis thermiques semble être une étape cruciale qui exigera un échange d'information efficace entre les deux programmes pour ne pas engendrer des temps de calcul trop imposants.

Les matériaux constituant la composante analysée peuvent se comporter selon deux types de relations constitutives : le modèle bilinéaire isotherme et *KRIGAMF*. Des tentatives ont été entreprises pour coupler le modèle de Likhatchev et Malinin (modèle

appelé *DEFORM*) avec le programme d'éléments finis de Trochu et Qian [4.1] sans véritable succès. Les principales difficultés proviennent du fait que le modèle de Likhatchev et Malinin est tensoriel, c'est-à-dire tridimensionnel. L'utilisation de critère d'écoulement permettant de définir des valeurs équivalentes afin de ramener les états tensoriels de déformation et de contrainte n'est plus nécessaire. Par contre, le calcul de la matrice de rigidité [C] est beaucoup plus compliqué à réaliser. En effet, la matrice [C] dans *DEFORM* est obtenue en déterminant un *plan* tangent à une *surface*. Il est plutôt question d'*hyper-plan* et d'*hyper-surface* car ils sont définis dans un espace multidimensionnel à six dimensions (une pour chaque composante de contrainte). C'est au niveau de l'obtention de la matrice [C] que les principales difficultés ont été rencontrées, ce qui a affecté la validité de l'interface entre *DEFORM* et le programme d'éléments finis de Trochu et Qian. Le programme d'éléments finis *SIMAMF* présenté dans ce chapitre est complètement tridimensionnel, ce qui permet donc d'espérer un meilleur couplage entre *SIMAMF* et *DEFORM*. Il est donc souhaitable de continuer les développements au niveau de l'interface entre *SIMAMF* et *DEFORM* afin de bénéficier dans les analyses par éléments finis de la souplesse et de la puissance du modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin. Il n'est pas évident que les résultats seront meilleurs, mais l'avenir semble prometteur à ce sujet. Le développement de l'interface avec *DEFORM* est effectué avec la collaboration très appréciée du professeur Alexandre Volkov de l'université d'État de St-Pétersbourg en Russie.

Chapitre 5 : Étude d'une rondelle Belleville avec *KRIGAMF*

Ce chapitre effectue la première validation qualitative et quantitative de *KRIGAMF* utilisé comme relation constitutive d'une composante simple. La composante simple en question est une rondelle Belleville. Ces rondelles sont fréquemment employées comme ressorts dans les joints boulonnés où l'espace est très restreint. La méthodologie suivie dans ce chapitre permet d'analyser macroscopiquement le comportement d'une rondelle Belleville en AMF. Les performances de la rondelle sont ainsi estimées afin de vérifier si elles répondent aux attentes fixées initialement lors de la conception. En somme, ce chapitre constitue une étude de faisabilité sommaire pour une rondelle Belleville en alliage à mémoire de forme.

La première section de ce chapitre expose le rôle des rondelles Belleville dans un joint boulonné tandis que leur théorie classique est brièvement présentée à la seconde section. La troisième section justifie par des calculs l'utilisation de ce type de rondelle. Le comportement macroscopique d'une rondelle Belleville particulière est défini dans *KRIGAMF* à la quatrième section. Les résultats de simulations avec *KRIGAMF* sont présentés aux cinquième et sixième sections. Enfin, la dernière partie discute des conclusions préliminaires tirées à partir des résultats obtenus, conclusions qui seront confirmées ou infirmées au chapitre suivant par des analyses par éléments finis.

5.1 Exposé du problème

Une rondelle Belleville est un corps axisymétrique conique employé comme ressort dans une application où une grande force de rappel est recherchée pour de faibles déplacements axiaux. Ce type de ressort est fréquemment préconisé lorsque l'espace est très restreint. Pour la distribution de l'électricité, il existe plusieurs façons de relier deux câbles entre eux. Une d'entre elles consiste à souder une plaque trouée à chaque extrémité des câbles et à les raccorder par des boulons et des rondelles Belleville tel que

schématisé à la figure 5.1. Il est à noter que le montage réel peut être légèrement différent, mais le principe demeure le même. Les rondelles Belleville, actuellement en acier, sont nécessaires pour assurer une pression de contact entre les deux plaques de raccordement. Cela devient essentiel surtout lorsque le montage subit des variations de température. On cherche ainsi à minimiser la résistance de contact lors du passage du courant électrique d'une plaque à l'autre.

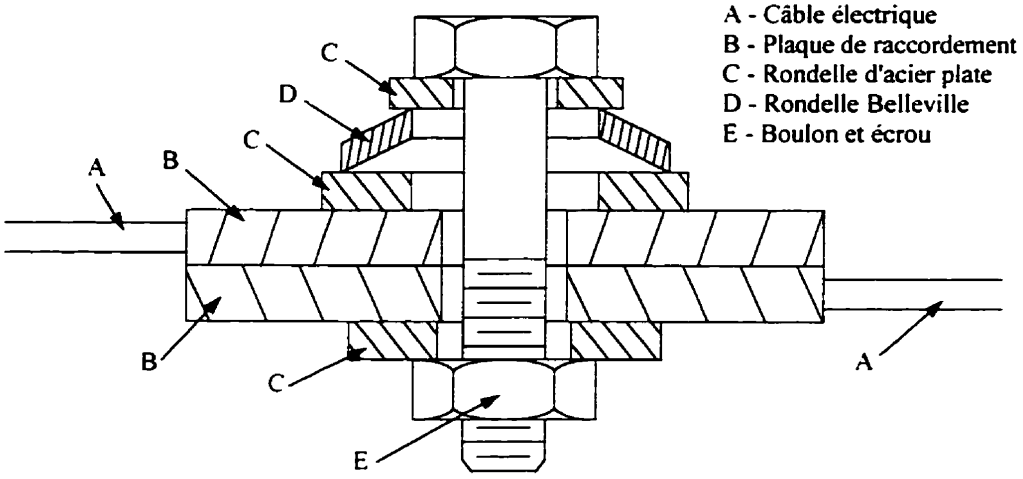


Figure 5.1 Montage avec rondelle Belleville pour créer une pression de contact.

Lors de l'installation de ce type de montage, la force de serrage que le technicien doit appliquer sur le boulon est critique et souvent difficile à évaluer avec précision. Une force insuffisante résulte en un échauffement et une dégradation prématurée est causée par une résistance de contact trop élevée. Les coûts d'entretien occasionnés par cette lacune sont considérables. À l'IREQ (laboratoire de recherche de la société d'état Hydro-Québec), une équipe de recherche étudie la possibilité de remplacer les rondelles en acier par des rondelles similaires faites en alliage à mémoire de forme.

Deux stratégies utilisant des rondelles Belleville en alliage à mémoire de forme peuvent être envisagées. Premièrement, une approche *corrective* utilise l'effet mémoire simple sens de l'AMF pour augmenter la force de serrage lorsqu'un mauvais montage s'échauffe.

L'élévation de température du montage incite la rondelle Belleville à reprendre sa forme initiale. Son déploiement étant restreint par le joint boulonné, une force de serrage supplémentaire est créée entre les deux plaques de raccordement. Deuxièmement, une approche *préventive* met à profit la superélasticité. En dimensionnant correctement une rondelle Belleville classique, il est possible d'obtenir un plateau pour lequel la force de rappel de la rondelle est constante pour une plage d'écrasement donnée [5.1]. En ayant une rondelle en AMF superélastique, ce plateau de force constante pourrait être élargi. De cette façon, le technicien qui installe le montage possède une plus grande marge de manoeuvre. La probabilité d'un montage défectueux est alors diminuée. Dans ce chapitre, les deux approches corrective et préventive sont étudiées.

Une rondelle Belleville est géométriquement décrite par quelques dimensions caractéristiques. La rondelle étudiée dans ce travail possède un rayon externe r_o de 11.8 mm, un rayon interne r_i de 6.4 mm, une hauteur initiale h_o de 1.5 mm et une épaisseur t de 2.1 mm. La figure 5.2 montre la géométrie et les dimensions caractéristiques de la rondelle Belleville.

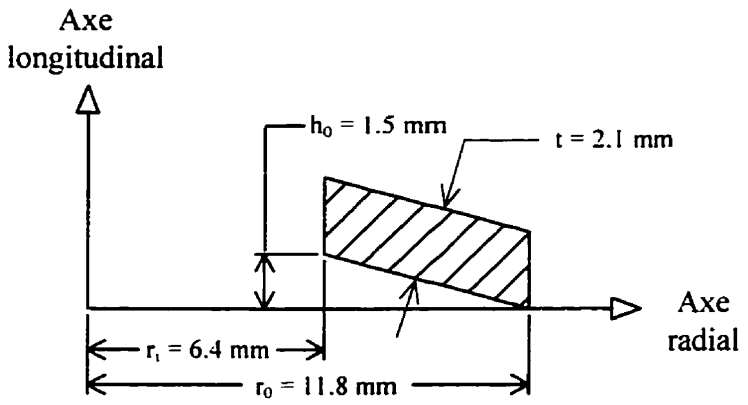


Figure 5.2 Géométrie de la rondelle Belleville.

5.2 Théorie des rondelles Belleville

La théorie des rondelles Belleville est connue depuis plus de 50 ans et certains ouvrages spécialisés abordent le sujet de façon très détaillée [5.1]. Les développements théoriques ont mené à l'équation (5.1) qui exprime la charge F appliquée sur la rondelle en fonction de l'écrasement δ. Dans cette équation, la constante C_2 n'est fonction que du rapport géométrique $\alpha = r_o / r_i$. E est le module de Young et ν, le coefficient de Poisson. Les autres paramètres géométriques de la rondelle ont été définis à la figure 5.2.

$$F = \frac{E\delta C_2}{\left(1-\upsilon^2\right)r_o^2}\left[\left(h_o-\delta\right)\left(h_o-\frac{\delta}{2}\right)t+t^3\right] \qquad (5.1)$$

$$\text{avec } C_2 = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\frac{2}{\ln(\alpha)}\right)\pi\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2$$

Cette équation théorique est bien adaptée pour les matériaux classiques. Par contre, elle n'est plus valide lorsque le matériau constituant la rondelle est un alliage à mémoire de forme. La transformation de phase provoque des variations significatives au niveau des propriétés du matériau ainsi que sur les conditions d'appui de la rondelle, également appelées conditions aux frontières. Une discussion plus approfondie concernant les conditions aux frontières est effectuée au prochain chapitre.

5.3 Fonction d'une rondelle Belleville dans un joint boulonné

Dans un joint boulonné, il est fréquent que le matériau du boulon soit différent de celui des éléments qui sont reliés par le boulon. Lorsque la température du montage varie, les différents coefficients de dilatation thermique des matériaux peuvent engendrer des variations importantes de force dans le montage. L'introduction d'une rondelle Belleville classique dans celui-ci permet de minimiser ces variations. Dans un premier temps, nous

allons calculer les variations de force de contact dans un montage avec et sans rondelle Belleville lorsque la température augmente.

Simplifions maintenant le modèle et imaginons qu'un joint boulonné est composé d'un boulon d'acier de 0.5 pouce de diamètre et de deux plaques d'aluminium formant au total 12 mm d'épaisseur. La figure 5.3 illustre un tel montage. C'est la façon la plus simple de créer un joint boulonné. Il n'y a pas de rondelles plates pour répartir la charge, ni de rondelle Belleville.

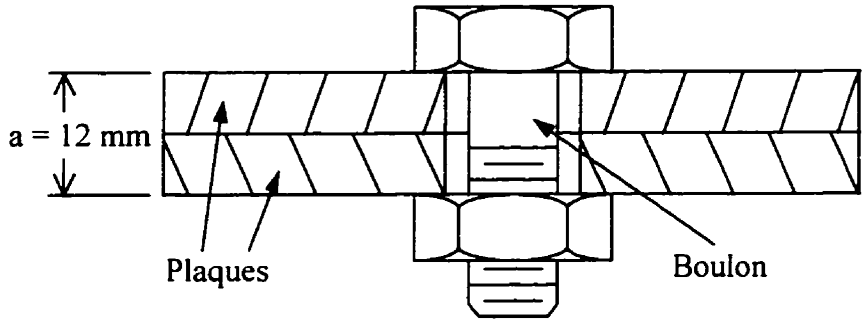


Figure 5.3 Boulonnage de deux plaques sans rondelle Belleville.

Les propriétés des matériaux sont données au tableau 5.1. Dans ce tableau, la section utile est nécessaire pour calculer la rigidité du boulon ou des plaques afin de déterminer les forces à l'équilibre. La section utile du boulon représente sa surface en tension. Cette valeur de 91.5 mm^2 (0.1419 po^2) est normalisée par la norme SAE J429. Pour les plaques d'aluminium, la situation est plus complexe car la compression n'est pas uniforme. Par contre, selon Drouin et al. [5.2] (page 186), on peut supposer que les plaques se comportent comme un cylindre creux, c'est-à-dire un cylindre dont le diamètre intérieur est identique à celui du boulon et dont le diamètre extérieur est égal à trois fois le diamètre intérieur. La section utile des plaques est alors de 1013.4 mm^2.

Tableau 5.1 : Propriétés du boulon d'acier et des plaques d'aluminium.

	Boulon	Plaques
Matériau	Acier	Aluminium
Module d'élasticité	$E_b = 200$ GPa	$E_p = 70$ GPa
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_b = 11 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}	$\alpha_p = 22 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}
Section utile	$A_b = 91.5$ mm^2	$A_p = 1013.4$ mm^2

Imaginons maintenant que la température du montage de la figure 5.3 passe de 33°C à 120°C, ce qui correspond à une variation de température ΔT de 87°C. En supposant que la température soit uniforme dans le montage, que le boulon est soumis à de la traction simple et que les plaques sont en compression simple selon l'hypothèse du cylindre creux, la force supplémentaire F_{supp} dans le boulon et sur les plaques est donnée par l'équation (5.2). Sans entrer dans les développements qui mènent à cette équation, celle-ci est obtenue en effectuant l'équilibre des forces dans le domaine élastique entre le boulon et les plaques qui sont assimilées à des ressorts de rigidité $k = AE/L$ (cf. Braunovic et al. [5.3]).

$$F_{supp} = \frac{\left(\alpha_p - \alpha_b\right) A_b E_b \Delta T}{1 + \dfrac{A_b E_b}{A_p E_p}} \tag{5.2}$$

En utilisant dans l'équation (5.2) les propriétés des matériaux indiquées au tableau 5.1, une force de serrage supplémentaire de **13.9 kN** est obtenue. Cette force supplémentaire s'ajoute à la force initiale qui est imposée dans le montage lors de l'assemblage. Les plaques sont en aluminium 1100 et elles ne sont pas traitées thermiquement. Elles possèdent une limite élastique d'environ 20.7 MPa (3000 psi). La force supplémentaire de 13.9 kN produit à elle seule une contrainte de 13.7 MPa dans les plaques. En ajoutant la contrainte initiale générée lors de l'assemblage du joint boulonné, la résultante peut

atteindre des valeurs supérieures à la limite élastique des plaques d'aluminium. Si les plaques d'aluminium se plastifient lors de l'élévation de la température, l'intégrité mécanique du joint est compromise et ceci pourrait conduire à une baisse significative de la force de serrage lors du refroidissement. Bien entendu, l'utilisation de rondelles plates pour répartir la charge sur une plus grande surface améliorerait considérablement la situation.

En somme, une élévation de température dans un joint boulonné monté sans rondelle Belleville peut plastifier les plaques d'aluminium et affecter l'intégrité mécanique du joint simplement à cause de la différence des coefficients de dilatation thermique. L'introduction d'une rondelle Belleville classique dans le montage améliore grandement la situation. Des calculs similaires à ceux effectués précédemment sont repris tout en prenant en considération l'effet d'une rondelle Belleville classique en acier. La figure 5.4 illustre un tel montage et comme dans le cas précédent, aucune rondelle plate n'est utilisée pour répartir la charge. Il est important de souligner que pour l'instant, la rondelle Belleville n'est pas en alliage à mémoire de forme, mais bien en acier.

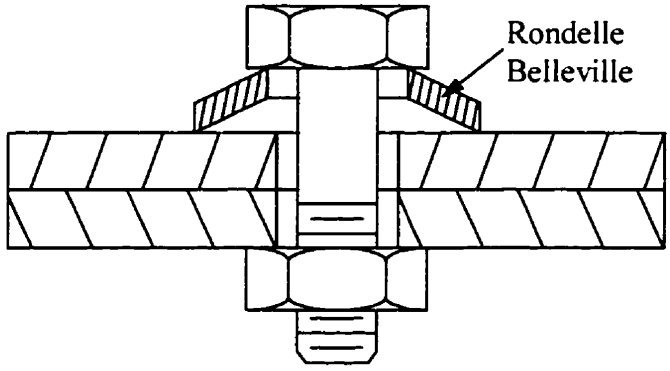


Figure 5.4 Boulonnage de deux plaques avec rondelle Belleville.

Le boulon d'acier et les plaques d'aluminium ont exactement les mêmes propriétés mécaniques et la même géométrie que le cas précédent. La rondelle Belleville est en acier (E = 200 000 MPa) et sa géométrie est identique à celle de la rondelle dessinée à la

figure 5.2 (r_o = 11.8 mm, r_i = 6.4 mm, h_o = 1.5 mm et t = 2.1 mm). Dans le cas où une rondelle Belleville est installée dans le montage, l'expression de la force supplémentaire lors d'une élévation de la température est donnée par l'équation (5.3) également tirée de Braunovic et al. [5.3]. Deux termes additionnels se retrouvent au dénominateur à cause de la présence de la rondelle Belleville qui modifie la rigidité du montage. La variable K représente la constante de ressort de la rondelle Belleville (en N/mm), a l'épaisseur des plaques d'aluminium (a = 12 mm) et h la hauteur initiale de la rondelle (h = 1.5 mm).

$$F_{supp} = \frac{\left(\alpha_p - \alpha_b\right) A_b E_b \Delta T}{1 + \frac{h}{a} + \frac{A_b E_b}{a K} + \frac{A_b E_b}{A_p E_p}} \tag{5.3}$$

Le seul paramètre inconnu dans cette dernière équation est la constante K de ressort de la rondelle qui dépend de la force supplémentaire F_{supp} générée. Le problème est donc non-linéaire. En effet, selon la théorie des rondelles Belleville, la force en fonction de l'écrasement est décrite par la relation non-linéaire donnée à l'équation (5.1). En remplaçant les paramètres de l'équation (5.1) par les valeurs numériques, l'équation suivante est obtenue :

$$F = 2400\delta\left[2.1\cdot\left(1.5-\delta\right)\cdot\left(1.5-\frac{\delta}{2}\right)+9.261\right] \tag{5.4}$$

La figure 5.5 illustre la constante de ressort K d'une rondelle Belleville dont l'écrasement passe d'une valeur initiale δ_0 à δ_1 sous l'application d'une charge variant de F_0 à F_1. Avec cette figure, il est facile de constater que la constante de ressort dépend de deux facteurs, la valeur de la force supplémentaire $F_{supp} = F_1 - F_0$ et la valeur de l'état initial de chargement (la valeur F_0 ou encore celle de δ_0). L'incrément d'écrasement correspondant est alors $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_0$. Dans les calculs suivants, la force initiale d'écrasement F_0 est imposée à 1000 N et selon l'équation (5.4), la rondelle doit subir un écrasement δ_0 de

0.0331 mm pour offrir une telle force de rappel. La constante de ressort K de la rondelle est alors donnée par l'équation suivante :

$$K = \frac{F_1 - 1000}{\delta_1 - 0.0331} \tag{5.5}$$

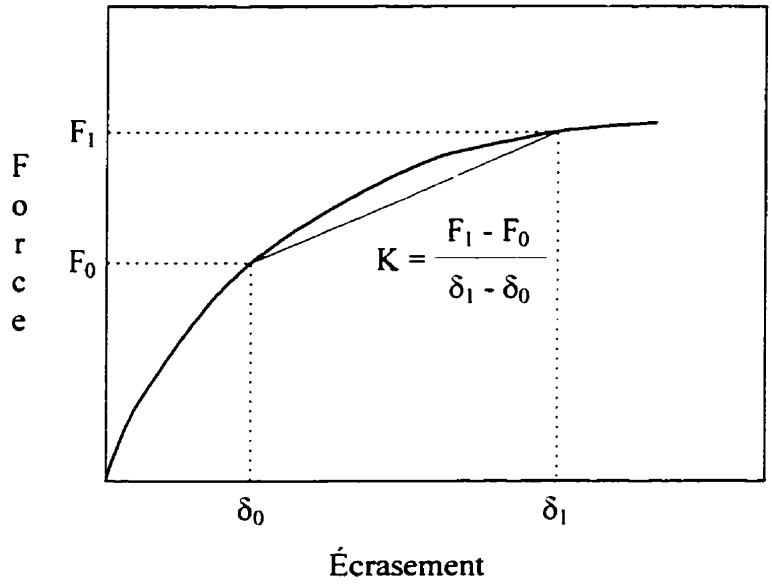


Figure 5.5 Constante de ressort K d'une rondelle Belleville.

Afin de déterminer la force supplémentaire F_{supp} qui apparaît dans l'équation (5.3), il faut utiliser une série de calculs itératifs tels que décrits par l'algorithme suivant. Ceci est inévitable puisqu'un des paramètres inconnus de l'équation est la constante de ressort K de la rondelle qui est en même temps fonction de la solution. Les calculs ont été réalisés et après 5 itérations, une valeur de la force supplémentaire $\mathbf{F_{supp} = 460\ N}$ a été obtenue. L'incrément d'écrasement de la rondelle Belleville correspondant est alors de $\mathbf{\Delta\delta = 0.0112\ mm}$.

Algorithme de résolution de l'équation (5.3) en 6 étapes :

① - Imposer une valeur d'écrasement final δ_1.

② - Calculer la valeur de la force finale F_1 selon l'équation (5.4).

③ - Calculer la force supplémentaire avec $F_{supp} = F_1 - 1000$.

④ - Calculer la constante de ressort K selon l'équation (5.5).

⑤ - Calculer la force supplémentaire F_{supp} selon l'équation (5.3).

⑥ - Si les valeurs de F_{supp} calculées aux étapes ③ et ⑤ sont différentes.

ALORS reprendre à l'étape ① avec une nouvelle valeur de δ_1,

SINON la valeur de F_{supp} calculée est la bonne et l'incrément d'écrasement de la rondelle Belleville est $\Delta\delta = \delta_1 - 0.0331$.

L'introduction d'une rondelle Belleville dans le montage diminue considérablement la force supplémentaire générée par les dilatations thermiques des différentes composantes de l'assemblage. En effet, cette force supplémentaire passe de **13.9 kN** (sans rondelle Belleville) à **460 N** (avec une rondelle Belleville classique en acier). L'intensité de la force supplémentaire est près de **30 fois plus faible.** simplement en installant une rondelle Belleville classique. Ce résultat démontre la nécessité d'employer une rondelle Belleville dans un joint boulonné soumis à des variations de températures.

Si la rondelle Belleville classique en acier est maintenant remplacée par une rondelle en alliage à mémoire de forme, l'algorithme de calcul de la force supplémentaire antérieurement utilisé ne peut pas être employé directement car le comportement de la rondelle Belleville n'est plus décrit par l'équation (5.4). Il serait intéressant d'éviter les calculs itératifs en adoptant une approche simplifiée qui permettrait d'estimer avec une bonne précision la force supplémentaire générée ainsi que l'incrément d'écrasement de la rondelle Belleville lors du chauffage.

L'approche simplifiée proposée consiste à calculer directement la différence entre la dilatation thermique des plaques et celle du boulon afin d'imposer cette différence de

dilatation thermique directement à la rondelle Belleville sous forme d'incrément d'écrasement $\Delta\delta$. La rondelle Belleville est environ 50 fois moins rigide que les plaques et le boulon. Par conséquent, en première approximation, il est logique de supposer que toutes les dilatations thermiques du montage sont reprises par la rondelle. Reprenons le cas du joint boulonné monté avec une **rondelle Belleville classique en acier** et calculons, avec l'approche simplifiée, la force supplémentaire F_{supp} ainsi que l'incrément d'écrasement $\Delta\delta$.

Une élévation de température de $\Delta T = 87°C$ sur une épaisseur $a = 12$ mm produit une dilatation thermique dans les plaques $\delta_p = \alpha_p \Delta T\, a = 0.0230$ mm et dans le boulon $\delta_b = \alpha_b \Delta T\, a = 0.0115$ mm. L'incrément d'écrasement $\Delta\delta$ imposé à la rondelle Belleville est donc la différence entre la dilatation thermique des plaques et celle du boulon, ce qui donne $\Delta\delta = \delta_p - \delta_b = \mathbf{0.0115\ mm}$. D'abord, l'écrasement final δ_1 est obtenu en ajoutant l'incrément d'écrasement $\Delta\delta = 0.0115$ mm à la valeur initiale $\delta_0 = 0.0331$ mm. Ensuite, en remplaçant la valeur de $\delta_1 = 0.0446$ mm dans l'équation (5.4), une force $F_1 = 1474$ N est obtenue. Enfin, en retranchant de cette dernière valeur la force initiale $F_0 = 1000$ N, une force supplémentaire $\mathbf{F_{supp} = 474\ N}$ est obtenue.

L'approche simplifiée semble suffisamment précise pour calculer la force supplémentaire F_{supp} et l'incrément d'écrasement $\Delta\delta$ que subit la rondelle Belleville lors d'une élévation de température de l'assemblage. En effet, cette approche simplifiée calcule une force supplémentaire de **474 N** plutôt que **460 N** (erreur de 3%) et un incrément d'écrasement de **0.0115 mm** plutôt que **0.0112 mm** (erreur de moins de 3%). Pour les calculs concernant le comportement de la rondelle Belleville en AMF, l'approche simplifiée sera préconisée. Les dilatations thermiques du montage seront simulées en ajoutant un incrément d'écrasement de 0.0115 mm à l'écrasement obtenu au serrage initial. Lors du refroidissement, cet incrément d'écrasement sera simplement retranché.

5.4 Définition de la relation constitutive de la rondelle dans KRIGAMF

Avec *KRIGAMF*, la relation constitutive de la rondelle Belleville est définie en utilisant une série de courbes expérimentales. Ces courbes ont été obtenues dans les laboratoires de l'IREQ en écrasant une rondelle Belleville sur une machine de traction et en mesurant l'écrasement en fonction de la force de compression. La figure 5.6 montre les courbes expérimentales à différentes températures variant entre 33°C et 120°C. Pour chaque courbe, un chargement isotherme allant jusqu'à un écrasement de 460 µm suivi d'un déchargement ont permis de tracer un cycle d'hystérésis. Le montage est chauffé dans un four qui est installé sur la machine de traction et qui recouvre toute l'installation. Par conséquent, la rondelle Belleville est chauffée par convection alors que dans un montage réel, elle est chauffée par conduction suite à l'échauffement des plaques de raccordement.

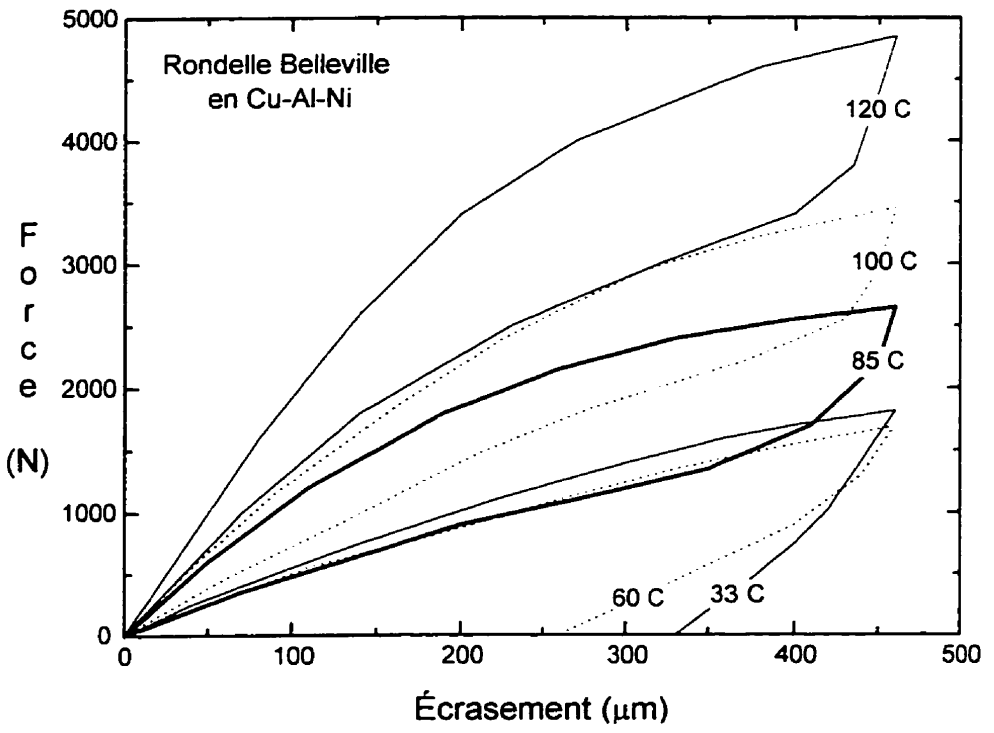


Figure 5.6 Courbes expérimentales isothermes à différentes températures.

Voici quelques remarques concernant les courbes expérimentales de la figure 5.6. Plusieurs essais similaires ont été répétés sur différentes rondelles de géométrie pratiquement identique afin de vérifier la répétabilité des manipulations et malheureusement, il a été observé qu'une dispersion des résultats pouvait être assez importante. Le facteur qui semble avoir le plus d'influence sur le comportement des rondelles concerne les conditions de frottement aux points d'appui. L'état de surface de chaque rondelle et la qualité de la lubrification dans le montage expérimental peuvent modifier le frottement et ainsi altérer le comportement de la rondelle. Ce point est plus amplement discuté au prochain chapitre. Néanmoins, un comportement moyen a été utilisé pour tracer les courbes de la figure 5.6, ce qui représente le meilleur compromis afin de minimiser l'impact de la dispersion des données expérimentales sur les résultats calculés. Les courbes de la figure 5.6 servent de squelette pour construire les deux surfaces caractéristiques de *KRIGAMF*. Le schéma de gauche de la figure 5.7 présente les courbes expérimentales dans un repère tridimensionnel alors que le schéma de droite dessine les deux surfaces caractéristiques. Les axes du repère représentent la force F, l'écrasement D et la température T. Dans le cas présent, pour simuler les dilatations thermiques, les paramètres de contrôle sont l'écrasement et la température. La réponse calculée devient alors la force qui est générée par la rondelle.

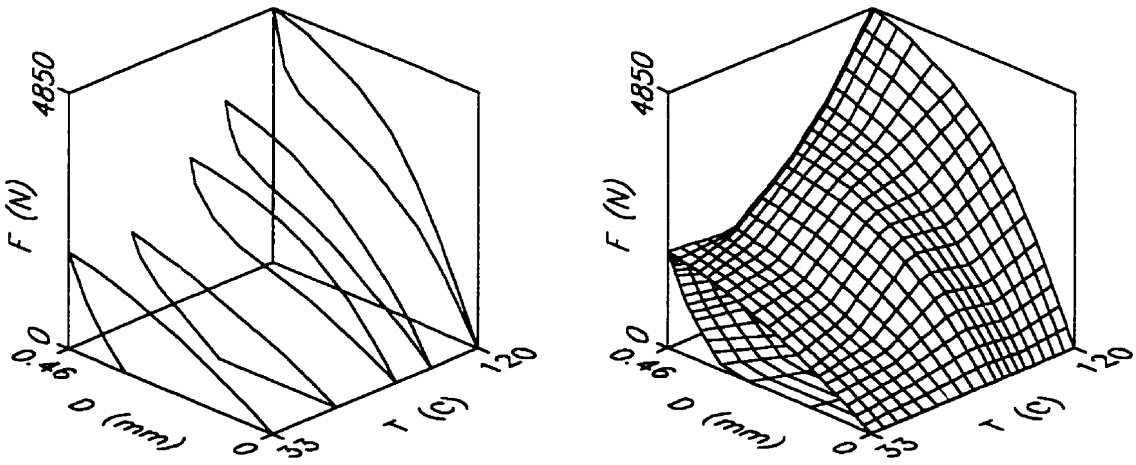


Figure 5.7 Modélisation du comportement de la rondelle dans *KRIGAMF*.

5.5 Comportement isotherme de la rondelle

Dans ce premier cas de chargement, on suppose que la rondelle Belleville reprend toutes les dilatations thermiques du montage (approche simplifiée discutée à la section 5.3) tout en demeurant à la même température de 33°C. La figure 5.8 montre dans le repère tridimensionnel force-déflection-température l'évolution de la force générée par la rondelle lorsque l'écrasement est contrôlé.

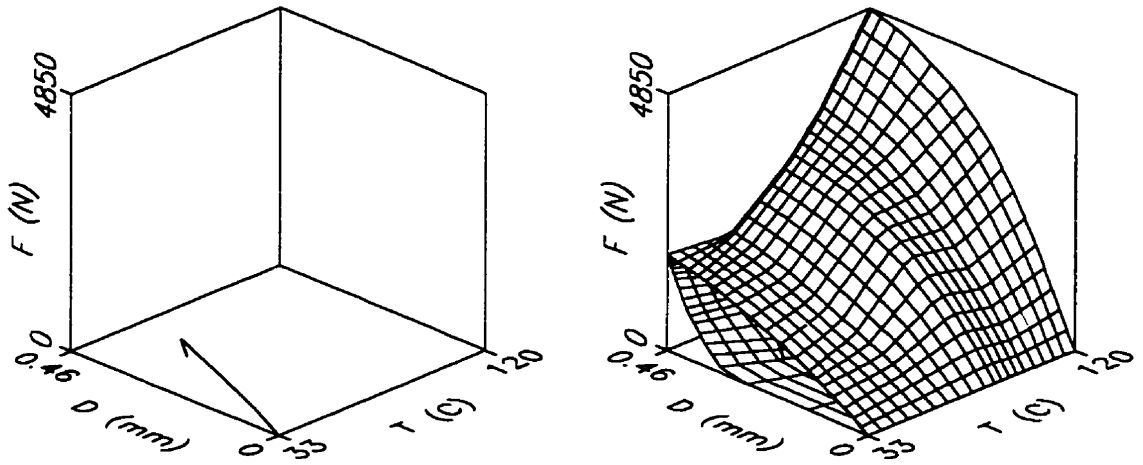


Figure 5.8 Réponse tridmensionnelle pour un chargement isotherme.

La figure 5.9 reprend exactement la même courbe mais sur un graphique force-déflection. La première séquence de chargement, notée A sur la figure 5.9, consiste à imposer un écrasement progressif jusqu'à 197 µm pour simuler la force de serrage initiale de 1 kN appliquée lors de l'installation. Ensuite, les dilatations thermiques au chauffage provoquent un écrasement supplémentaire de 11.5 µm (séquence B). Une force supplémentaire de 49 N est générée dans le montage. Finalement, au refroidissement, l'écrasement diminue de 11.5 µm (séquence C) et la force finale dans le montage n'est plus que 779 N (perte de 221 N).

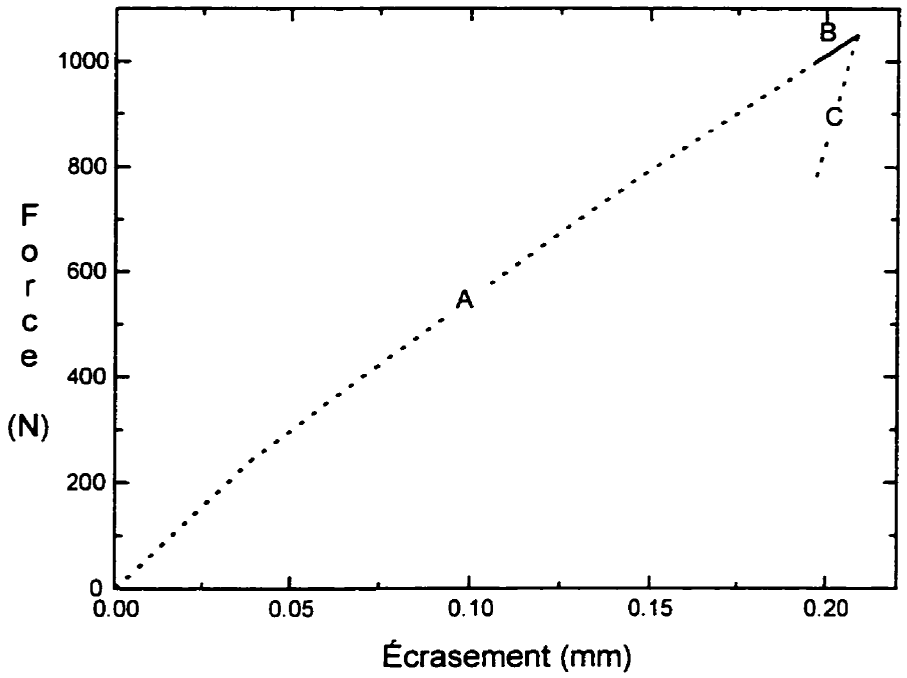


Figure 5.9 Réponse de la rondelle pour le chargement isotherme.

La force supplémentaire F_{supp} générée au chauffage dans le cas de la rondelle Belleville classique en acier est de 474 N. En remplaçant la rondelle d'acier par une rondelle en AMF Cu-Al-Ni, cette force supplémentaire chute à 49 N. Il y a donc une amélioration marquée. Par contre, l'amélioration apportée par la rondelle Belleville en AMF n'est pas comparable par rapport à la rondelle Belleville classique en acier car cette dernière est beaucoup trop rigide. En effet, l'acier a un module d'élasticité voisin de 200 000 MPa alors que l'alliage Cu-Al-Ni utilisé pour la fabrication des rondelles Belleville en AMF est d'environ 80 000 MPa [5.4]. Afin d'apprécier les avantages qu'offre l'AMF, les calculs de la force supplémentaire pour une rondelle classique en aluminium avec un module d'élasticité de E_{al} = 80 000 MPa sont refaits de façon identique à ceux décrits par l'approche simplifiée de la section 5.3.

Pour la rondelle Belleville classique en aluminium, une charge de 1 kN produit un écrasement de $\delta_0 = 0.0765$ mm. La dilatation thermique lors du chauffage fournit un écrasement additionnel $\Delta\delta = 0.0115$ mm. Pour connaître la force supplémentaire générée, l'écrasement final $\delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta = 0.0880$ mm est remplacé dans l'équation (5.1). Une charge finale de 1147 N est alors obtenue. La force supplémentaire générée au chauffage est donc de 147 N. Il est maintenant évident qu'une rondelle en AMF diminue de façon appréciable la force supplémentaire F_{supp}. C'est l'assouplissement du matériau lors de la transformation de phase qui est responsable de ce résultat. Dans le cas présent, cette force supplémentaire est 3 fois plus faible, c'est-à-dire 49 N par rapport 147 N.

D'une part, la rondelle Belleville en AMF améliore la situation au chauffage en diminuant la force supplémentaire générée. D'autre part, elle détériore l'intégrité mécanique du joint boulonné au refroidissement. Avec une rondelle classique en acier ou en aluminium, l'état initial caractérisé par une force de serrage de 1 kN est toujours retrouvé. Avec la rondelle Belleville en AMF, son comportement hystérétique produit au refroidissement une diminution importante de la force de serrage. Pourtant, la diminution de l'écrasement est relativement faible, soit de 0.0115 mm. Néanmoins, cette faible variation dimensionnelle fait perdre près du quart de la force initiale de serrage de 1 kN. Après le chauffage et le refroidissement, la force de serrage dans le joint boulonné n'est plus que de 779 N.

Ce dernier résultat permet d'avancer une première conclusion sur l'utilisation d'une rondelle Belleville superélastique (approche préventive). Il semblerait que le plateau de charge constante puisse effectivement être élargi. Par contre, la perte partielle de la force de serrage pour de faibles variations dimensionnelles du montage rend pratiquement impossible l'utilisation d'une rondelle Belleville AMF dans un joint boulonné. Il serait possible d'améliorer la situation en utilisant un alliage pour lequel l'hystérésis est très faible. Ainsi, l'effet de la perte de force de serrage au refroidissement pourrait être minimisé. De nouveaux mécanismes pourraient également être conçus de façon à ce que

les propriétés favorables de l'AMF soit exploitées au chauffage seulement. Au chauffage, la rondelle Belleville AMF serait active alors qu'au refroidissement, elle deviendrait passive. La force de serrage serait alors reprise par un autre dispositif mécanique.

La discussion du paragraphe précédent concernant la faisabilité d'une rondelle AMF superélastique est fondée sur un résultat numérique obtenus à 33°C, température à laquelle le comportement est martensitique plutôt que superélastique. L'allure des résultats aurait été identique si la simulation avait été réalisée à 120°C par exemple. Les valeurs numériques auraient été différentes, mais des conclusions similaires auraient pu être tirées concernant la perte de la force de serrage au refroidissement. De toute façon, l'idée d'employer une rondelle Belleville superélastique dans une plage d'utilisation allant de -40°C à 120°C semble très difficile à réaliser en pratique. Par contre, il est possible de profiter de la superélasticité de l'AMF, mais sur une plage de température plus restreinte.

5.6 Comportement non-isotherme de la rondelle

Le second cas de chargement ressemble beaucoup au premier sauf que la température de la rondelle varie pendant les dilatations thermiques de l'assemblage. Dans le repère tridimensionnel force-déflection-température, la figure 5.10 montre l'évolution de la force de serrage en fonction de la température et de l'écrasement. La réponse est plus complexe que précédemment car la température et l'écrasement varient simultanément. Une validation d'un chargement similaire est effectuée à la prochaine section. La courbe calculée de la figure 5.10 montre une diminution de la force de serrage suivie par une génération d'effort lors du chauffage. En effet, la force initiale de 1 kN à 33°C augmente jusqu'à 2332 N à 120°C. La force supplémentaire F_{supp} est donc de 1332 N. En augmentant la température, certaines parties de la rondelle se transforment en austénite. La rondelle a donc tendance à reprendre sa forme initiale, mais puisque le boulon restreint les déplacements, la force de serrage augmente. Cette propriété est intéressante à exploiter car dans le cas d'un montage défectueux où la force initiale de serrage est

insuffisante, l'échauffement résultant augmente cette force de serrage pour ainsi rétablir complètement ou partiellement l'intégrité mécanique du joint boulonné. C'est l'approche corrective qui est discutée au début du chapitre.

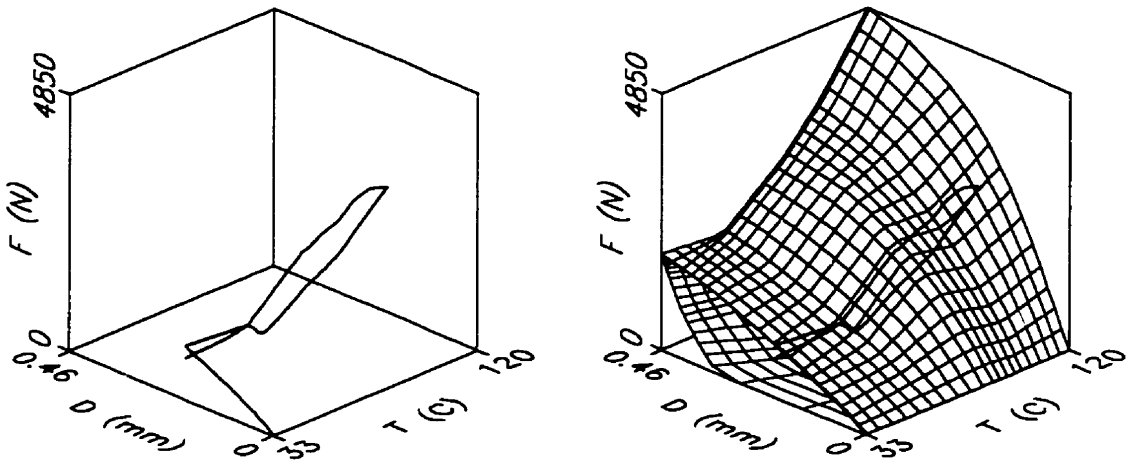


Figure 5.10 Réponse tridimensionnelle pour un chargement non-isotherme.

Au refroidissement, la force dans le montage diminue, mais avec un certain décalage des températures de transformation. En effet, les températures de transformation de l'austénite en martensite sont inférieures à celles qui correspondent à la transformation de la martensite en austénite. Finalement, après le chauffage et le refroidissement, l'état initial caractérisé par une force de serrage de 1 kN n'est pas retrouvé. Une perte de la force de serrage similaire à celle observée lors de la simulation isotherme est calculée. L'intensité de cette perte de force après le refroidissement est de 232 N. Un comportement similaire est validé à la prochaine section à partir des résultats d'un essai expérimental.

5.7 Validation qualitative et quantitative

Pour valider les calculs réalisés avec *KRIGAMF*, un essai expérimental a été mené dans les laboratoires de l'IREQ et publié par Labrecque et al. [5.4]. Afin de diminuer le nombre de paramètres qui influencent les résultats de cet essai, le boulon en acier est remplacé par un boulon en aluminium. Les dilatations thermiques des plaques et du boulon sont ainsi identiques. Dans le cas présent, on suppose que la rondelle Belleville est chauffée au même rythme que le montage (approche identique à celle utilisée à la section 5.6) sauf que l'écrasement de la rondelle Belleville demeure constant lors des variations de température.

Les résultats obtenus avec un boulon en aluminium donnent une force de serrage supplémentaire de 1243 N avec une perte de l'ordre de 162 N après refroidissement. Une légère diminution de la force supplémentaire est obtenue par rapport au cas précédent où le boulon était en acier.

À la figure 5.11, la courbe expérimentale en traits discontinus est superposée à la courbe calculée par *KRIGAMF*. Pendant le chauffage, le comportement calculé est caractérisé par une diminution de la force suivie d'une génération d'effort. Par la suite, après le refroidissement, la force dans le montage est plus faible que la force initiale de 1 kN. La validation qualitative est assez bonne sauf pour la perte de force avant la génération d'effort lors du chauffage. Par contre, la validation quantitative est plus ou moins satisfaisante. En effet, la force supplémentaire F_{supp} mesurée expérimentalement est 2050 N et la perte d'effort au refroidissement est environ 600 N. La force supplémentaire calculée est donc sous-estimée de 40%. Quant à la perte de force après le refroidissement, elle est 3.7 fois inférieure à la valeur expérimentale.

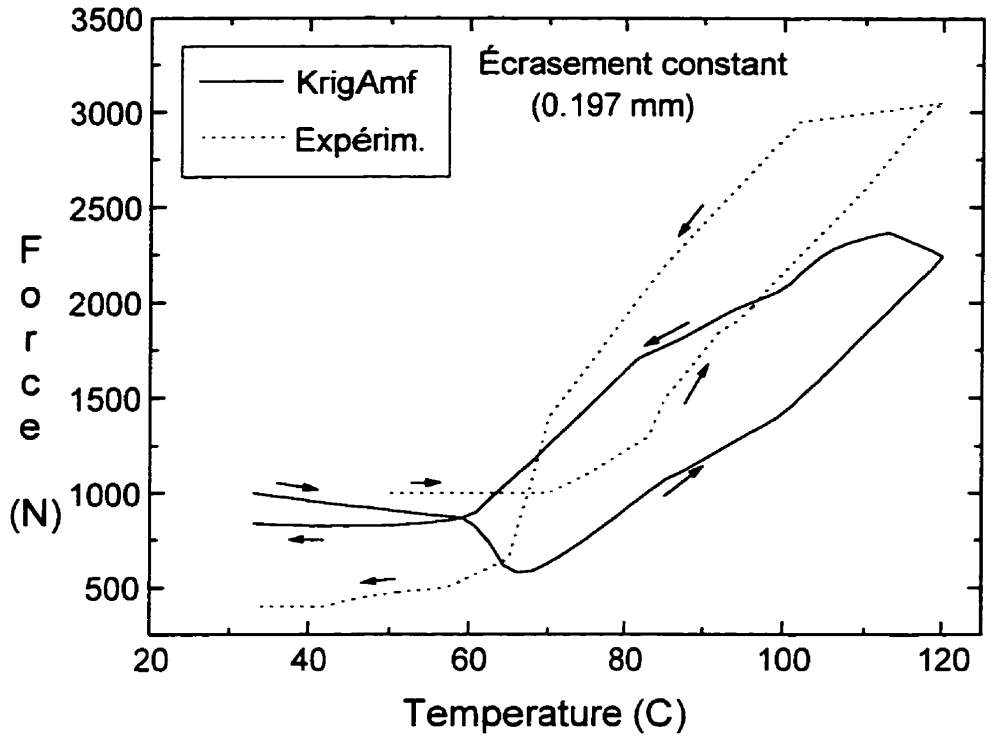


Figure 5.11 Validation de la réponse non-isotherme avec un boulon d'acier

Plusieurs facteurs peuvent expliquer l'écart entre la courbe calculée et la courbe expérimentale de la figure 5.11. Ceux-ci apportent des explications potentielles, mais ils n'ont pas été expérimentalement ou numériquement vérifiés. Deux de ces principaux facteurs sont soulevés et discutés dans les paragraphes suivants :

1) Les courbes expérimentales qui ont été utilisées pour construire le modèle dans *KRIGAMF* proviennent d'essais de caractérisation avec une machine de traction. De son coté, la courbe expérimentale de la figure 5.11 a été obtenue avec un montage qui contient plus d'éléments. En effet, on y retrouve des isolants en céramique, des rondelles plates pour répartir la charge, un capteur de force, etc.

Des interactions comme le frottement entre les différentes composantes peuvent modifier l'écrasement subi par la rondelle Belleville. De plus, les façons dont la rondelle Belleville est chauffée dans le montage expérimental (conduction) et dans la machine de traction (convection) sont complètement différentes. Une étude antérieure menée par Trochu et al. [5.5] a démontré que la température à l'intérieur de la rondelle Belleville n'était pas complètement homogène lorsque celle-ci est chauffée par conduction à la suite d'un échauffement au niveau des plaques de raccordement, même lorsque l'équilibre thermique est atteint. La température est beaucoup plus homogène dans la rondelle lorsqu'elle est chauffée par une enceinte thermique qui recouvre tout le montage, ce qui est le cas pour les courbes de caractérisation. Il est donc possible que les courbes de caractérisation obtenues avec la machine de traction ne soient pas parfaitement représentatives du comportement de la rondelle Belleville dans le montage réel.

2) Il a été discuté à la section 5.4 qu'il y avait une certaine dispersion au niveau des courbes expérimentales pour des essais similaires. La courbe expérimentale de la figure 5.11 a été obtenue à partir d'un seul essai. Il est donc difficile de juger si ce résultat est représentatif d'un comportement moyen ou plutôt d'un comportement extrême. Il faudrait refaire plusieurs fois le même essai expérimental afin de juger de sa répétabilité.

5.8 Conclusion

Ce chapitre constitue la toute première validation qualitative et quantitative du logiciel *KRIGAMF* utilisé comme relation constitutive d'une composante simple, en l'occurrence ici une rondelle Belleville en AMF. Il a été montré que *KRIGAMF* peut être utile pour évaluer rapidement et sommairement les performances thermomécaniques d'une composante simple à mémoire de forme. Dans le but d'obtenir des simulations plus précises, des analyses par éléments finis viendront compléter par la suite le processus de design.

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont résumés dans le tableau 5.2. Pour chacune des situations étudiées, on y retrouve le type de montage, la force générée lors d'une élévation de température de 87°C (passage de 33°C à 120°C) et la perte de la force de serrage après le refroidissement. Bien entendu, pour le montage sans rondelle Belleville ou encore lorsque la rondelle Belleville n'est pas en alliage à mémoire de forme, il n'y a aucune perte de force après le refroidissement car l'état initial est retrouvé.

Tableau 5.2 : Résumé des analyses macroscopiques de la rondelle Belleville.

Type de montage	Force supplémentaire au chauffage (F_{supp})	Perte de la force au refroidissement
Sans rondelle Belleville (section 5.3)	13 900 N	0 N
Belleville classique en acier (section 5.3)	474 N	0 N
Belleville classique en aluminium (section 5.5)	147 N	0 N
Belleville AMF isotherme (section 5.5)	49 N	221 N
Belleville AMF non-isotherme (boulon acier) (section 5.6)	1 332 N	232 N
Belleville AMF non-isotherme (boulon alu.) (section 5.7)	1 243 N	162 N
Expérimental pour une Belleville AMF (section 5.7)	2 050 N	600 N

À partir de ce tableau résumé, les conclusions suivantes peuvent être tirées, conclusions qui s'appliquent non seulement aux rondelles Belleville mais à de nombreux autres éléments en AMF utilisés comme actuateurs ou connecteurs.

- ✓ Une rondelle Belleville est nécessaire afin de minimiser les augmentations excessives de la force de serrage engendrées par la dilatation thermique des différentes composantes d'un joint boulonné.

- ✓ Bien qu'un rondelle Belleville en AMF semble être en mesure d'élargir le plateau de charge constante de son comportement macroscopique force-déflection. il est déconseillé de les utiliser car celles-ci offrent une piètre performance au refroidissement en étant à l'origine d'une perte importante de la force de serrage.

- ✓ La génération d'effort au chauffage est une propriété qui offre un grand potentiel d'applications. particulièrement dans le domaine des actuateurs. En effet. il est possible de générer des forces appréciables simplement en chauffant la rondelle Belleville. Par contre. le comportement au refroidissement demeure problématique et la conception de ce type de dispositifs doit être approfondie.

Ces conclusions préliminaires seront étayées par les résultats du chapitre dans lequel des analyses plus poussées sont effectuées. En effet. des simulations similaires seront réalisées par éléments finis afin de tirer des conclusions finales sur l'utilisation des rondelles Belleville en alliage à mémoire de forme dans les joints boulonnés.

Chapitre 6 : Étude par éléments finis d'une rondelle Belleville

Ce chapitre qui est consacré à la simulation par éléments finis de la rondelle Belleville en alliage à mémoire de forme décrite au chapitre 5 constitue la première validation ***quantitative*** de *KRIGAMF* interfacé à *SIMAMF*. Ce chapitre reprend essentiellement les chargements discutés au chapitre précédent, mais cette fois en calculant la réponse de la rondelle par des analyses par éléments finis. Les résultats obtenus permettront de tirer des conclusions définitives concernant l'utilisation d'une rondelle Belleville en AMF dans un joint boulonné. En effet, en plus de calculer le comportement macroscopique force-déflexion de la rondelle, les analyses par éléments finis permettent de visualiser les distributions de contrainte et de déformation à l'intérieur de la rondelle. De cette façon, les résulats obtenus favorisent une meilleure compréhension du fonctionnement et des performances de la rondelle.

Les deux premières sections de ce chapitre présentent les résultats de deux séries d'analyses par éléments finis. La première série a été menée avec des éléments triangulaires axisymétriques et seulement le comportement isotherme et superélastique de la rondelle a été étudié. Dans la seconde série, la rondelle a alors été modélisée avec des éléments tridimensionnels. Le comportement superélastique ainsi que la génération d'effort au chauffage ont alors été calculés. Enfin, la dernière section de ce chapitre aborde les principales conclusions et recommandations concernant l'utilisation d'une rondelle Belleville en alliage à mémoire de forme dans un joint boulonné.

6.1 Analyse de la rondelle avec des éléments axisymétriques

Avant de présenter les résultats des analyses, deux aspects importants sont étudiés : l'effet du raffinement du maillage et le type de conditions frontières à appliquer sur le maillage afin d'obtenir des modélisations les plus réalistes possible.

6.1.1 Effet du raffinement du maillage

Une rondelle Belleville est un corps axisymétrique et dans le cas présent, le chargement mécanique appliqué sur la rondelle est également axisymétrique. Une analyse axisymétrique peut alors être réalisée et le problème tridimensionnel est simplifié en une analyse bidimensionnelle. Le raffinement du maillage, c'est-à-dire le nombre d'éléments et de noeuds constituant le maillage, est laissé à la discrétion de la personne qui réalise une simulation par éléments finis. D'une part, un maillage grossier ne possédant pas suffisamment d'éléments produira inévitablement des résultats de simulations erronés. En effet, plus le maillage est grossier, plus les déplacements sont sous-estimés. D'autre part, un maillage trop raffiné engendre des pertes de temps au niveau de l'exécution de la simulation et une quantité souvent trop imposante de résultats numériques. La situation idéale est de préconiser un maillage possédant le moins d'éléments possible sans trop influencer la précision des résultats.

Pour étudier l'effet du raffinement du maillage, l'écrasement d'une rondelle Belleville est calculée avec cinq maillages différents. Dans tous les cas de raffinement, le maillage est uniforme sur toute la section. Tous les éléments d'un maillage ont les mêmes dimensions mais le nombre d'éléments varie d'un maillage à l'autre. Il aurait été avantageux de varier la densité d'éléments sur la section de la rondelle en raffinant le maillage aux endroits où les gradients de contrainte sont les plus prononcés (près des points de contact) et en utilisant des éléments plus gros au coeur de la rondelle. Par contre, ce genre d'optimisation devient rapidement délicat et des maillages uniformes ont été préférés. Les cinq maillages étudiés sont tous constitués d'éléments triangulaires axisymétriques à trois noeuds. La figure 6.1 présente ces maillages en plus d'indiquer le nombre de noeuds et d'éléments qui les composent.

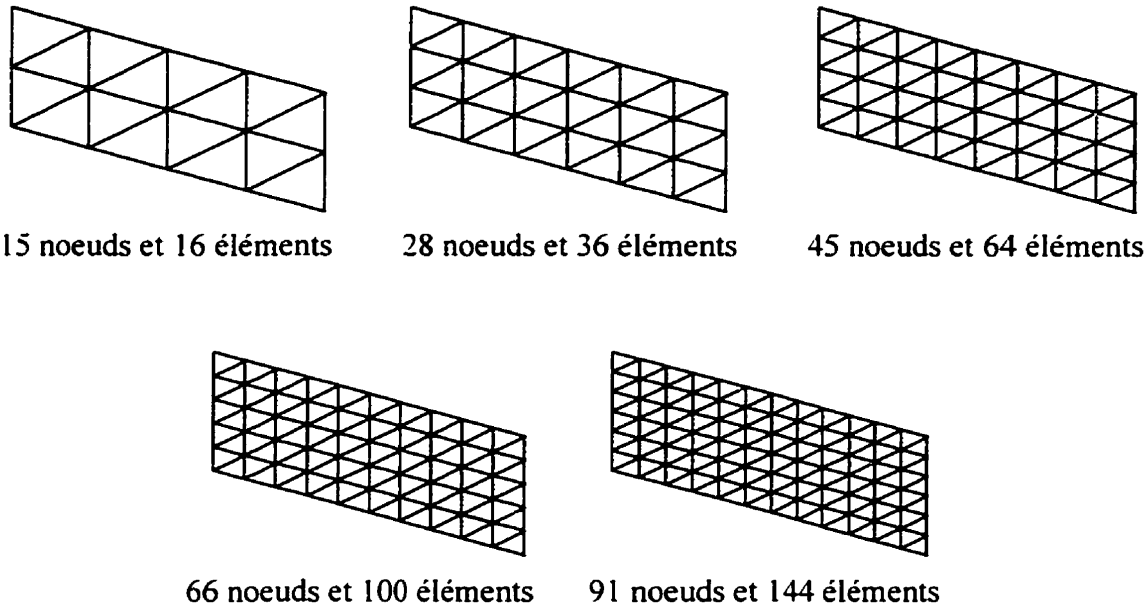


Figure 6.1 Cinq maillages utilisés pour l'étude du raffinement du maillage.

Le même chargement mécanique est imposé à chaque maillage. Une force appliquée sur le point de contact supérieur dans la direction de l'axe longitudinal varie de 0 à 4000 N. Les déplacements axial et radial du point de contact inférieur sont bloqués, ce qui équivaut à imposer une condition frontière de type rotule. Bien que ce type de condition frontière ne soit pas représentatif de la situation réelle, le but de cette analyse est de rechercher un raffinement satisfaisant du maillage. La discussion sur les conditions frontières à appliquer pour représenter la situation réelle fait l'objet de la prochaine section (section 6.1.2).

Pour étudier l'effet du raffinement du maillage, une relation constitutive bilinéaire est définie (voir la description du modèle à la section 4.2.4.1). Les propriétés du matériau bilinéaire ont été déterminées à partir de la courbe de traction à 127°C (figure 6.9) de façon à se rapprocher davantage du comportement réel de l'alliage. Les paramètres du modèle bilinéaire sont les suivants : module d'élasticité $E = 40\,000$ MPa, pente de transformation $H = 13680$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, déformation de fin de

transformation $\varepsilon_{mf} = 2.5\ \%$, contrainte de début de transformation au chargement $\sigma_{ms} = 240$ MPa et contrainte de fin de transformation au déchargement $\sigma_{af} = 30$ MPa.

La figure 6.2 présente les résultats de l'écrasement de la rondelle en fonction de la charge appliquée pour chacun des maillages. La légende indique la correspondance entre les courbes et les maillages. Par exemple, la courbe 15N - 16E correspond au maillage possédant 15 noeuds et 16 éléments.

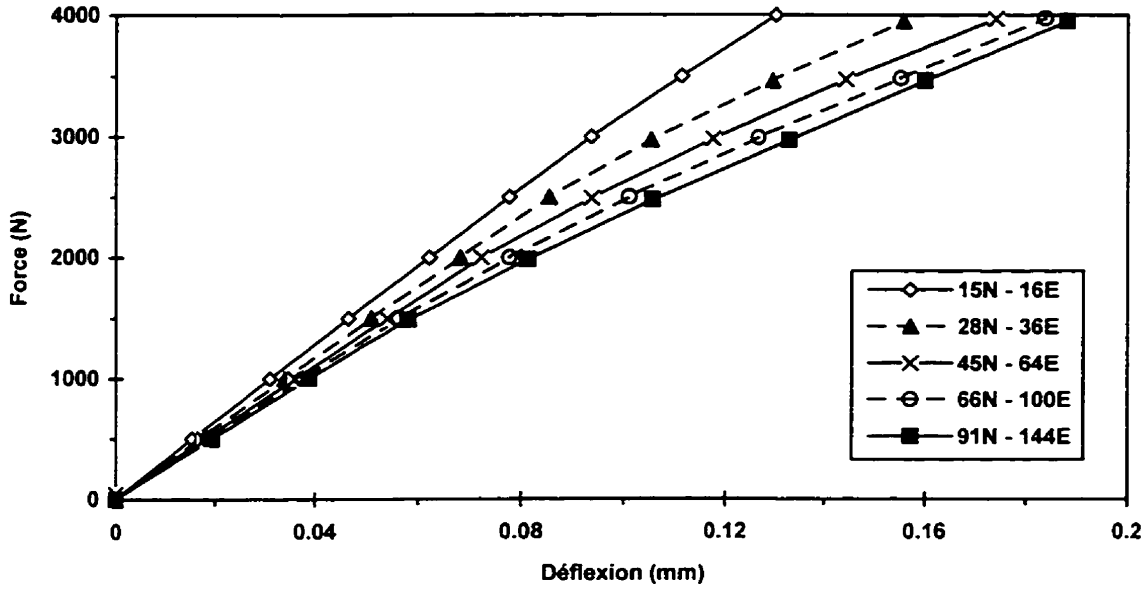


Figure 6.2 Courbe force-déflexion pour les différents maillages.

Les résultats comparatifs entre les différents maillages démontrent effectivement une sous-estimation des déplacements pour les maillages grossiers. En outre, on remarque que plus le maillage est raffiné, plus la non-linéarité du comportement débute pour une faible intensité de la force appliquée. Cette non-linéarité est le résultat de la transformation de phase dans l'alliage. Enfin, une certaine convergence est observée car le comportement tend à se stabiliser pour des maillages de plus en plus raffinés. La convergence du comportement en fonction du raffinement du maillage est plus

facilement observable si l'écrasement de la rondelle est tracé en fonction du nombre de noeuds dans le maillage pour une charge donnée. La figure 6.3 trace l'écrasement de la rondelle pour une charge de 3500 N en fonction du raffinement du maillage. Chaque point noir de la courbe provient d'un des cinq maillages précédemment présentés. La tendance générale du comportement est clairement mise en évidence et la convergence est facilement observable. Nous estimons que le meilleur compromis consiste à employer le maillage de 66 noeuds et 100 éléments. En effet, ce maillage semble démontrer un bon compromis entre la précision des résultats et le temps d'exécution des calculs. Selon nous, il n'est pas souhaitable d'augmenter le temps des calculs d'au moins 44% (c'est-à-dire de préférer le maillage de 144 éléments à celui qui en possède 100) pour obtenir légèrement plus de précision, c'est-à-dire une amélioration marginale de l'ordre de 2%.

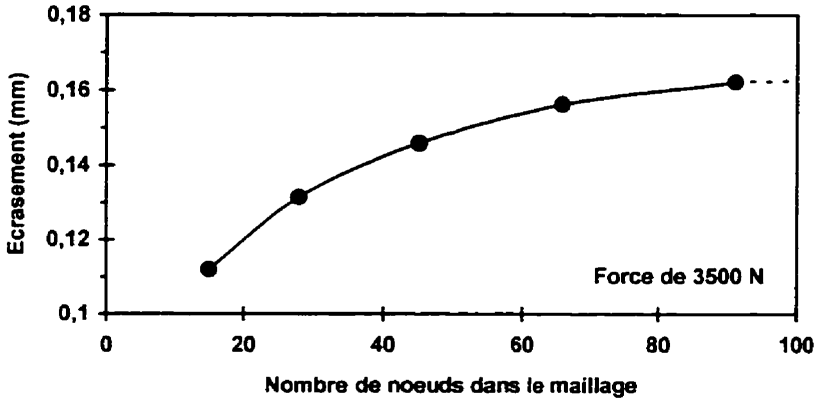


Figure 6.3 Convergence de l'écrasement de la rondelle en fonction du nombre de noeuds pour une force de 3500 N.

6.1.2 Imposition des conditions aux frontières

Une étude antérieure réalisée par Terriault [6.1] a démontré que les conditions aux frontières imposées aux points de contact jouent un rôle primordial sur le comportement numérique de la rondelle Belleville. En utilisant le logiciel commercial *ABAQUS*, la rondelle Belleville a été modélisée avec 253 noeuds et 72 éléments rectangulaires à

8 noeuds par éléments. Selon l'analyse effectuée précédemment, le nombre de noeuds de ce maillage était amplement suffisant. Dans cette étude avec *ABAQUS*, cinq simulations ont été effectuées. Dans un premier temps, deux simulations simplifiées ont été réalisées. La première imposait une condition frontière de type "rotule" au point de contact inférieur tandis que la seconde y imposait une condition frontière de type "rouleau". La schématisation de ces types de conditions aux frontières est illustrée à la figure 6.4. Dans un second temps, aucune condition frontière n'était imposée directement sur la rondelle Belleville mais tout le montage était modélisé. Des éléments finis de contact ont permis de simuler le frottement entre la rondelle Belleville et les rondelle plates d'acier contre lesquelles la rondelle Belleville vient s'appuyer. Trois simulations avec des coefficients de frottement entre la rondelle Belleville et les rondelles plates de 0.2, 0.4 et 0.6 ont été complétées. La figure 6.5 expose les courbes d'écrasement de la rondelle Belleville obtenues à la suite des cinq simulations réalisées avec *ABAQUS*.

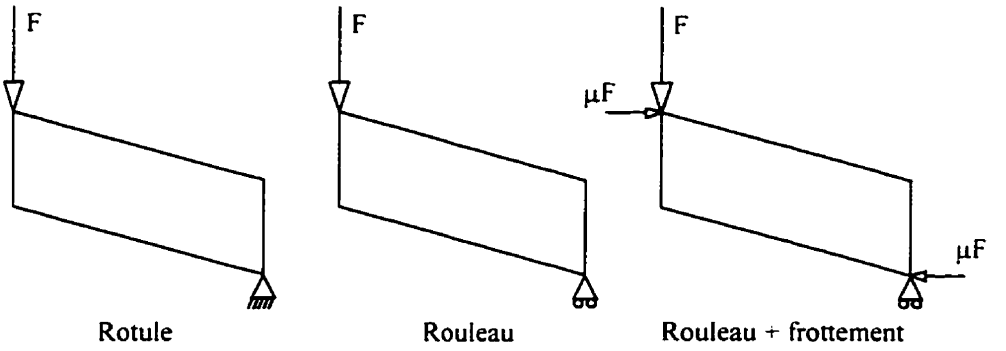


Figure 6.4 Différents types de conditions aux frontières imposés aux points de contact.

Comme on sait qu'il existe un frottement entre les deux surfaces et bien qu'on ignore la valeur exacte du coefficient de frottement, l'analyse avec *ABAQUS* démontre clairement que deux des principaux types de conditions frontières habituellement utilisés en éléments finis (rotule et rouleau tels qu'illustrés à la figure 6.4) ne sont pas représentatifs du comportement réel d'une rondelle Belleville. La principale conclusion de cette étude

est que le frottement ne peut pas être négligé et que l'imposition de conditions aux frontières trop simplificatrices détériore la validité des résultats numériques. Il est impératif de ne pas comparer les résultats de la figure 6.5 avec ceux des autres analyses de ce chapitre. En effet, lorsque les analyses menées avec *ABAQUS* ont été complétées, l'AMF n'avait pas encore été expérimentalement caractérisé. Un matériau élasto-plastique quelconque a alors été définit dans *ABAQUS*. Le but recherché par cette étude était de vérifier l'influence des conditions frontières sur les résultats.

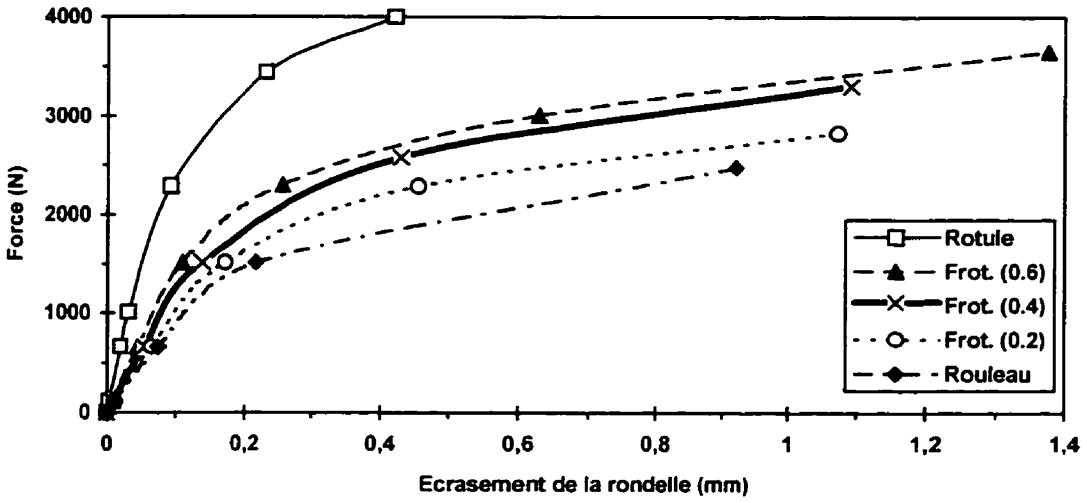


Figure 6.5 Résultats des simulations réalisées avec *ABAQUS*.

Le programme d'analyse par éléments finis *SIMAMF* ne permet pas de simuler l'interaction de deux corps par des éléments finis de contact. Par conséquent, de nouvelles conditions aux frontières doivent être imposées à la rondelle Belleville pour prendre en considération le frottement qui existe entre la rondelle Belleville et les rondelles plates. La figure 6.4 présente les différents types de conditions frontières qui peuvent être appliqués sur la rondelle Belleville. On y retrouve les deux situations simplifiées appelées "rotule" et "rouleau" où seulement le point de contact inférieur est affecté d'une condition frontière. Le troisième type de condition frontière impose un rouleau au point de contact inférieur en plus d'ajouter deux forces de frottement μF où μ

est le coefficient de frottement. L'orientation des deux forces de frottement correspond à une augmentation de la force F, car une force de frottement s'oppose toujours au déplacement. Dans le cas d'un déchargement, l'intensité de la force F diminue tout en étant toujours orientée vers le bas. Par contre, l'orientation des deux forces de frottement est inversée. La principale difficulté est de déterminer la valeur du coefficient de frottement μ. Un test expérimental effectué dans les laboratoires de l'IREQ a permis d'évaluer le coefficient de frottement dynamique entre l'alliage Cu-Al-Ni-Mn-Ti et l'acier inoxydable 304. Une valeur moyenne de $\mu = 0.43$ a été obtenue à partir des résultats expérimentaux de la figure 6.6.

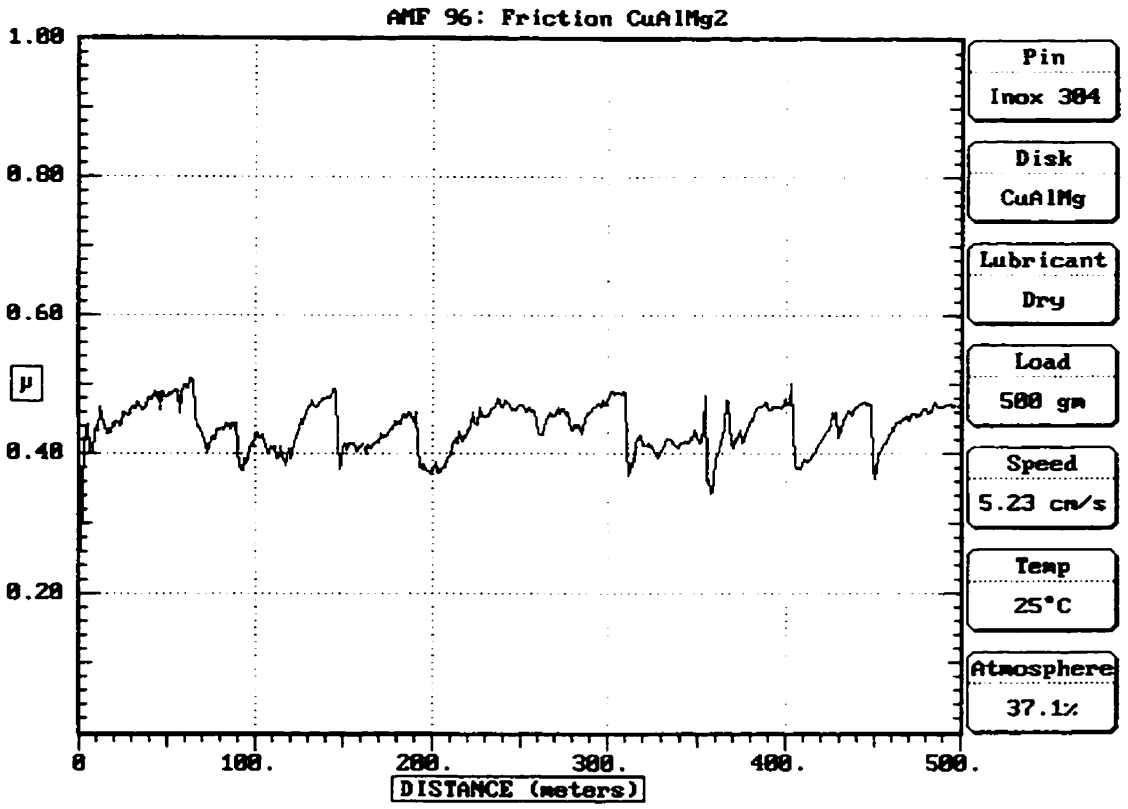


Figure 6.6 Test de frottement réalisé dans les laboratoires de l'IREQ.

Comme nous le verrons un peu plus loin, cette valeur du coefficient de frottement est nettement insuffisante pour se rapprocher de la courbe expérimentale. Cette affirmation

peut s'expliquer de la façon suivante. Dans un premier temps, au tout début de l'écrasement de la rondelle Belleville, il n'y a aucun déplacement au niveau des points de contact entre la rondelle Belleville et les rondelles plates. Il faudrait donc utiliser un coefficient de frottement statique plutôt que dynamique. Or, il est bien connu qu'un coefficient de frottement statique est supérieur à sa valeur dynamique. Par contre, à partir du moment où le point de contact se déplace, c'est plutôt le coefficient dynamique qui devrait être employé. Le problème est donc assez complexe car la valeur du coefficient n'est pas constante pendant la simulation.

Dans un second temps, un problème de plus grande envergure s'impose. En effet, le contact entre la rondelle Belleville et les rondelles d'acier étant ponctuel, il est évident qu'une plastification locale se manifeste. Dans la littérature, il est rapporté que le coefficient de frottement entre deux surfaces peut atteindre des valeurs aussi élevées que 2.0 lorsque la contrainte de contact entre les deux surfaces devient très élevée (suffisamment élevée pour atteindre la plastification).

Bowden et Tabor [6.2] ainsi que Schey [6.3] ont étudié ce genre de comportement. Ils émettent l'hypothèse que ces grandes forces de frottement proviennent des microsoudures à froid qui se créent lorsque les aspérités des matériaux pénètrent les unes dans les autres. La figure 6.7 tirée de Bowden et Tabor illustre un tel comportement en reportant sur un graphique le coefficient de frottement en fonction de la contrainte de contact (représentée sur le graphique par une masse en grammes). Il est donc permis de croire que le coefficient de frottement entre la rondelle Belleville et les rondelles d'acier est significativement supérieur à 0.43, principalement à cause de la plastification locale de l'alliage à mémoire de forme aux points de contact.

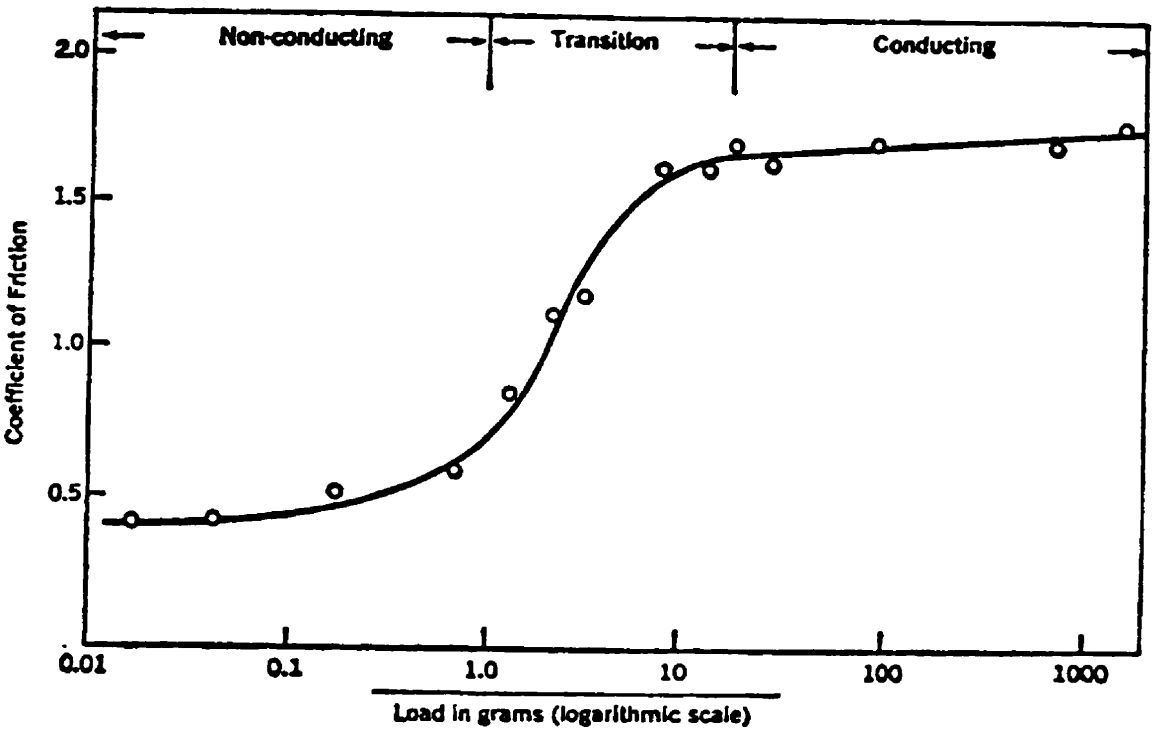


Figure 6.7 Évolution du coefficient de frottement en fonction d'une charge appliquée.

Le véritable coefficient de frottement au niveau des points de contact est une donnée qui devrait être expérimentalement déterminée mais qui est actuellement inconnue. Nous allons donc recourir à une nouvelle simulation par éléments finis qui nous permettra d'estimer ce coefficient de frottement. Un logiciel d'éléments finis linéaires est utilisé pour simuler le comportement de la rondelle au tout début de l'écrasement. Le logiciel en question est *FEPC* (Finite Element for Personal Computers) écrit par C.E. Knight du Virginia Polytechnic Institute and State University. Ce logiciel a été préféré car il est facile d'utilisation et il permet d'effectuer rapidement des analyses linéaires. Le maillage de 66 noeuds et 100 éléments triangulaires axisymétriques à trois noeuds est préconisé. Les propriétés du matériau sont un module d'élasticité de 60 000 MPa et un coefficient de Poisson de 0.3. La valeur du module d'élasticité provient de la valeur de la pente au tout début du chargement sur la courbe de caractérisation de l'alliage de la figure 6.9.

Par essais et erreurs, le coefficient de frottement est déterminé de façon à ce que la pente au début de l'écrasement coïncide avec le début de la courbe expérimentale de la rondelle Belleville (figure 6.11). Les résultats sont présentés à la figure 6.8. On y retrouve les deux cas limites "rotule" et "rouleau" et la courbe théorique calculée selon l'équation 5.1. Cette dernière est presque superposée au cas limite "rouleau". Les données expérimentales prélevées de la figure 6.11 sont représentées sur le graphique par les petites croix (+).

En réalisant une simulation avec un coefficient de frottement de 0.43, on remarque que la réponse est passablement éloignée des points expérimentaux. Ceci confirme les hypothèses avancées antérieurement stipulant qu'un coefficient de frottement de 0.43 serait insuffisant. Une simulation réalisée avec un coefficient de frottement de 0.83 a permis d'obtenir un comportement au début de l'écrasement de la rondelle Belleville qui se superpose aux points expérimentaux. En somme, la simulation sera réalisée un coefficient de frottement de 0.83.

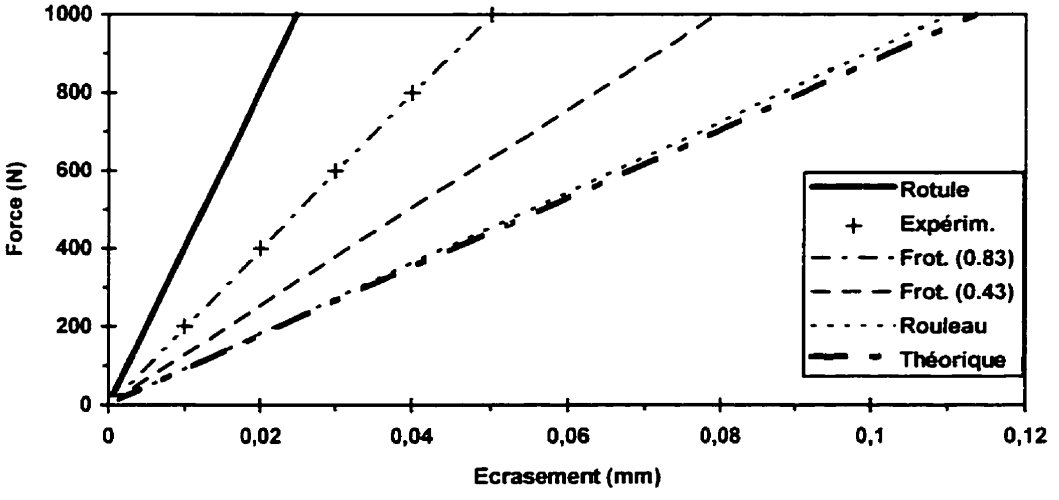


Figure 6.8 Comportement initial de la rondelle selon différentes conditions frontières.

Il est important de soulever une petite lacune à la méthodologie employée. La courbe d'écrasement de la rondelle Belleville (figure 6.11) est initialement l'inconnu que l'on cherche à calculer par les éléments finis. Idéalement, cette courbe ne devrait être utilisée qu'à la toute fin de l'analyse pour valider les résultats numériques. Or, quelques points de cette courbe (les croix de la figure 6.8) ont été utilisés pour déterminer le coefficient de frottement essentiel aux simulations par éléments finis. Ceci est indispensable pour réaliser les simulations numériques car des données plus approfondies sur le coefficient de frottement n'étaient pas disponibles. De plus, seulement le tout début du comportement a été utilisé et la région de la courbe expérimentale qui correspond à la transformation de phase a été ignorée.

6.1.3 Simulation du comportement superélastique de la rondelle

La démarche employée pour simuler par éléments finis le comportement d'une rondelle Belleville superélastique est assez simple. À partir d'un essai de traction sur un échantillon d'alliage identique à celui utilisé pour la fabrication des rondelles Belleville (un alliage cuivreux Cu-Al-Ni-Mn-Ti), une courbe de traction superélastique est obtenue expérimentalement. Plusieurs courbes isothermes ont été obtenues dans les laboratoires de l'IREQ mais seulement une d'entre elles, décrivant le comportement superélastique de l'alliage à 127°C, est employée. La figure 6.9 montre cette courbe superélastique de l'alliage cuivreux. Par la suite, la courbe de traction superélastique est utilisée pour construire la relation constitutive unidimensionnelle de l'alliage dans *KRIGAMF*. Le comportement calculé est finalement comparé au comportement expérimental obtenu en laboratoire en écrasant la rondelle Belleville sur une machine de traction. Une courbe à 130°C a été obtenue et elle est présentée à la figure 6.10. Une attention particulière doit être apportée afin d'éliminer les effets de la température différente pour les deux courbes, soit 127°C pour la courbe de traction et 130°C pour celle de la rondelle. Cet aspect est pris en considération dans *KRIGAMF* et il sera discuté un peu plus loin.

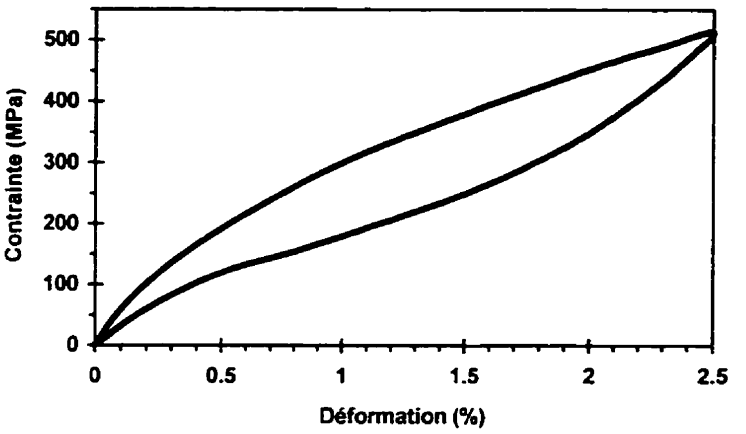


Figure 6.9 Courbe de traction superélastique de l'alliage Cu-Al-Ni-Mn-Ti à 127°C.

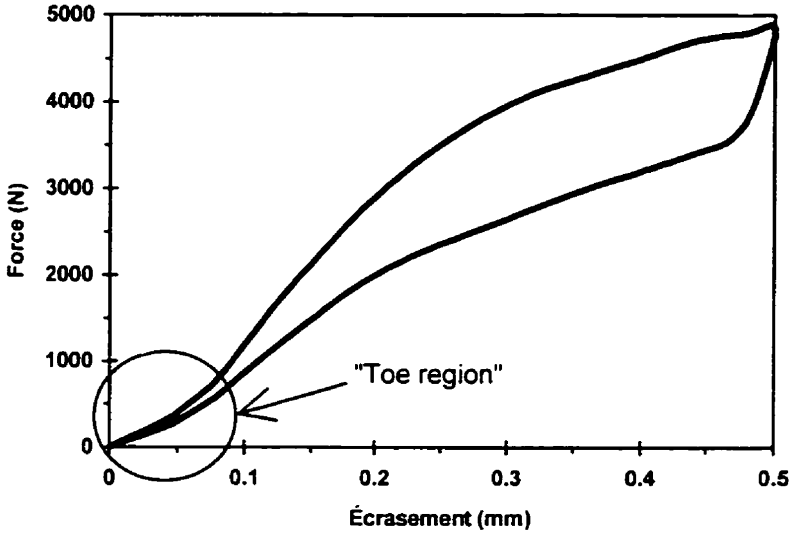


Figure 6.10 Courbe superélastique initiale de la rondelle Belleville à 130°C.

La courbe superélastique de la rondelle Belleville présentée à la figure 6.10 comporte une anomalie au tout début du comportement. Une faible rigidité est observée pour de faibles charges. Ce genre de comportement, appelé "toe region", est souvent le résultat des désalignements et des jeux mécaniques entre les différentes composantes du montage expérimental. La norme ASTM D638 stipule que la partie erronée du

comportement est donc éliminée et la courbe pour de faibles forces d'écrasement est extrapolée à partir de la tendance dictée par les charges supérieures. La figure 6.11 présente la courbe superélastique modifiée de la rondelle Belleville. C'est cette dernière courbe qui sera utilisée pour la validation des calculs numériques.

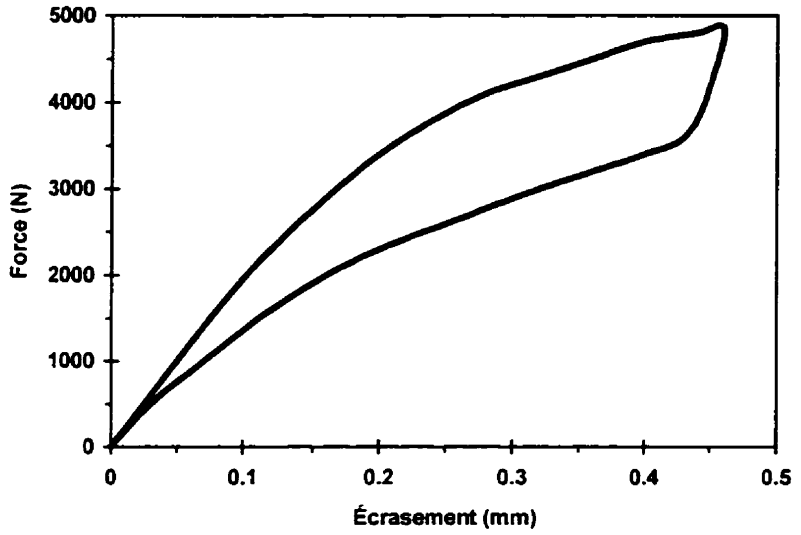


Figure 6.11 Courbe superélastique modifiée de la rondelle Belleville à 130°C.

Les simulations par éléments finis sont réalisées avec des éléments axisymétriques. Le comportement de l'alliage est modélisé dans *KRIGAMF* avec un critère de Von-Mises. Cette démarche est acceptable en première approximation bien qu'un alliage à mémoire de forme possède un comportement asymétrique en traction et en compression. La première étape de l'analyse consiste à modéliser le matériau dans *KRIGAMF*. Même si la simulation est isotherme, il est impossible de construire les surfaces caractéristiques de *KRIGAMF* à partir d'une seule courbe. De plus, la courbe de caractérisation de l'alliage est obtenue à 127°C tandis que celle de l'écrasement de la rondelle Belleville correspond à une température de 130°C. Afin d'obtenir une seconde courbe nécessaire à la construction des surfaces dans *KRIGAMF* et de pouvoir estimer la comportement de l'alliage également à 130°C, une courbe de traction à 133°C est calculée à partir de la

courbe à 127°C tout en l'ajustant avec une pente de transformation B de 4 MPa / °C. Cette valeur de la pente de transformation dσ/dT est en fait la valeur moyenne pour les alliages cuivreux.

La figure 6.12 présente les surfaces caractéristiques de l'alliage définies dans *KRIGAMF*. La pente de transformation B peut être visualisée sur le schéma de droite en portant une attention particulière à la contrainte maximale sur les surfaces en fonction de la température. On remarque sur le schéma de gauche les deux courbes qui ont servi de squelette pour construire les surfaces. La courbe à 127°C est exactement celle présentée à la figure 6.9. Enfin, la simulation est isotherme et la température est de 130°C. Le comportement du matériau sera donc interpolé exactement au centre des surfaces.

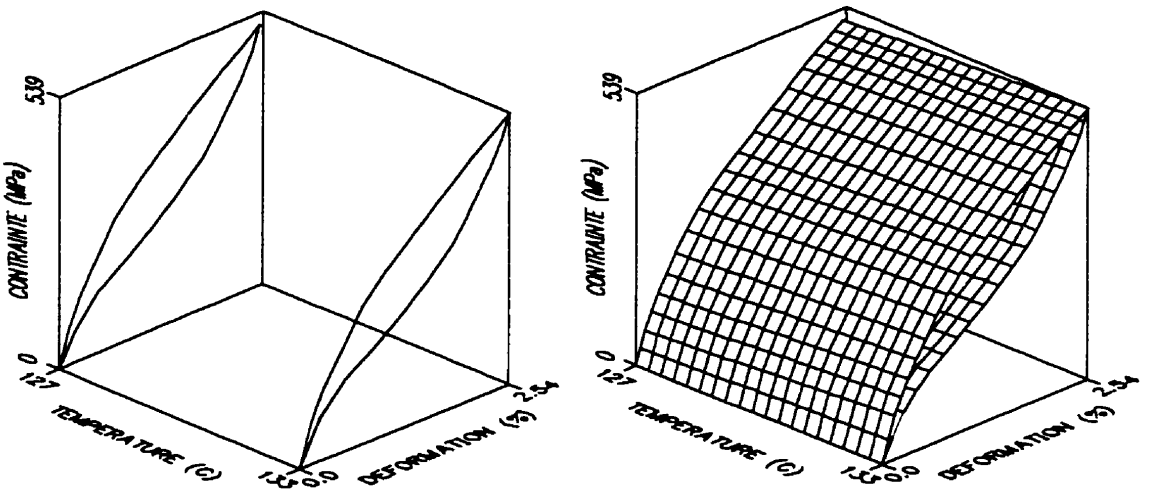


Figure 6.12 Modélisation de l'alliage Cu-Al-Ni-Mn-Ti dans *KRIGAMF*.

La simulation par éléments finis de l'écrasement de la rondelle Belleville avec un maillage de 66 noeuds et 100 éléments a été réalisée. La force a été le paramètre de contrôle. À chaque incrément, une force d'écrasement de 100 N est ajoutée sur le point de contact supérieur dans la direction axiale de la rondelle. De plus, pour simuler le

frottement caractérisé par un coefficient de 0.83, deux forces de 83 N localisées sur les deux points de contact dans la direction radiale de la rondelle s'opposent au mouvement. La figure 6.13 présente la courbe calculée de l'écrasement de la rondelle en fonction de la force. Sur la même figure, la courbe expérimentale est reportée afin de permettre une comparaison et une validation des calculs numériques.

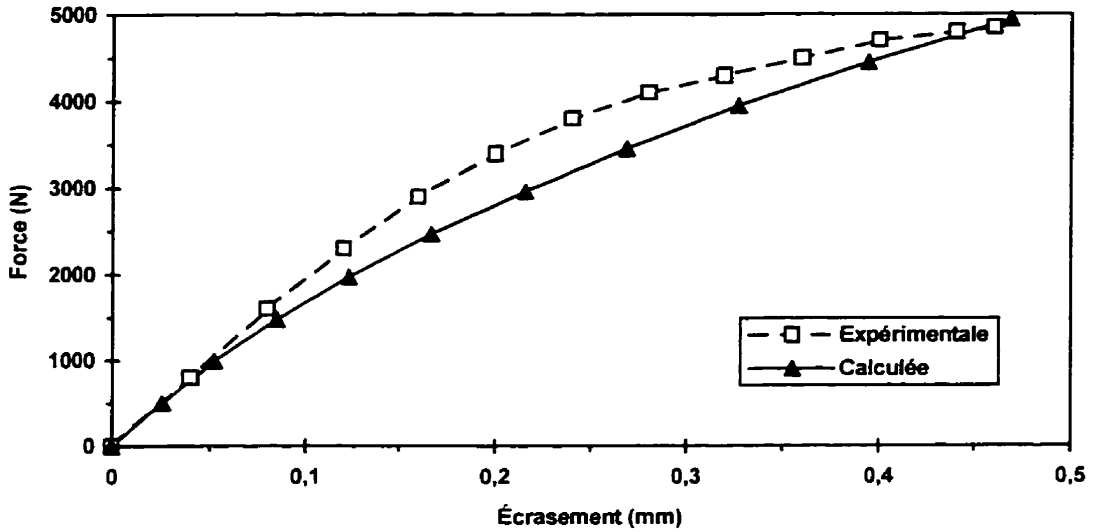


Figure 6.13 Validation des résultats pour un chargement superélastique.

Dans l'ensemble, les résultats sont satisfaisants car le comportement calculé s'approche raisonnablement de la courbe expérimentale. Il n'est pas surprenant d'observer une superposition des courbes au début du chargement car le coefficient de frottement a été ajusté pour obtenir un tel résultat. La jonction des courbes pour une charge d'environ 5 000 N est simplement un hasard et à priori, il n'y a aucune raison qui justifie un tel résultat. De façon générale, le modèle numérique surestime l'écrasement de la rondelle. Trois hypothèses peuvent être soulevées pour expliquer cette déviation :

1) Il a été discuté précédemment que le coefficient de frottement était fortement dépendant de la charge appliquée et que ce coefficient pouvait potentiellement atteindre des valeurs très élevées. Pour la simulation, nous avons supposé un coefficient de frottement constant de 0.83. Par contre, plus la charge augmente, plus le coefficient de frottement augmente (voir figure 6.7). D'un autre côté, plus les points de contact se plastifient, plus la surface de contact augmente, ce qui tend à diminuer la contrainte à l'interface. Il est donc très difficile de prédire l'effet de la plastification des points de contact mais il est permis de croire que ce phénomène peut être partiellement responsable de la déviation de la courbe calculée par rapport à la courbe expérimentale.

2) Dans cette simulation, le critère de Von-Mises régit la transformation de phase et il est recommandé d'utiliser des critères mieux adaptés aux AMF (Prager par exemple) pour modéliser le comportement de l'alliage. L'utilisation de Mises impose une contrainte de début de transformation identique en tension et en compression. Or, dans la structure réelle, la transformation de phase débute à des intensités de contrainte supérieures dans les zones en compression. Le modèle numérique est donc plus "souple" car la transformation de phase se produit prématurément dans les zones de compression, c'est-à-dire sur la face supérieure de la rondelle. Cette hypothèse apporte donc une explication sur l'assouplissement de la courbe calculée.

3) Le dernier facteur qui pourrait expliquer la déviation du comportement numérique par rapport aux manipulations expérimentales concerne les traitements thermiques. La mise en forme des rondelles Belleville et des éprouvettes pour la caractérisation de l'alliage par des tests de traction nécessite une séquence d'usinage et de traitements thermiques différente. À partir d'une tôle de matériau brut, les rondelles Belleville sont poinçonnées et les dimensions désirées sont usinées par une méthode conventionnelle. Elles sont ensuite déformées à chaud (450-500°C)

entre des matrices d'acier pour leur conférer une géométrie conique. Par la suite, elles sont maintenues dans leur forme conique jusqu'à la température de mise en solution de 800°C pendant 30 minutes. Elles sont finalement trempées à l'eau et un revenu de 150°C vient compléter le traitement. La forme des éprouvettes standardisées est usinée par électroérosion à partir de la même tôle de matériau brut. L'éprouvette est ensuite traitée thermiquement selon un traitement identique à celui des rondelles Belleville. Par contre, étant donné que les rondelles Belleville sont coincées entre des matrices d'acier pendant tout le traitement thermique, l'inertie thermique des matrices risque d'altérer le traitement thermique imposé aux rondelles, surtout lors de la trempe à l'eau. Le traitement thermique n'étant pas complètement identique pour les rondelles et pour les éprouvettes, il est possible que ce phénomène provoque une certaine déviation du comportement calculé par rapport à la courbe expérimentale. Pour l'instant, ceci n'est qu'une hypothèse et une analyse plus poussée permettrait de clarifier la situation.

Le comportement macroscopique de la rondelle Belleville, c'est-à-dire l'écrasement en fonction de la force, a été étudié. Il s'agit maintenant d'analyser la distribution de la contrainte à l'intérieur de la rondelle pour évaluer la proportion d'austénite qui se transforme en martensite. Les figures 6.15 à 6.19 illustrent la distribution de la contrainte équivalente de Mises en MPa à l'intérieur de la section de la rondelle pour des forces d'écrasement variant approximativement de 1 kN à 5 kN. Dans le coin supérieur gauche de chaque figure, on retrouve la force d'écrasement qui a généré cette distribution de contrainte ainsi que les valeurs minimale et maximale de la contrainte de Mises.

Les résultats obtenus montrent de forts gradients de contrainte près du point de contact supérieur et la valeur maximale de la contrainte indique qu'il y a même une plastification locale à cet endroit lorsque la force de compression devient suffisamment élevée. À partir de la courbe expérimentale de traction à 127°C de la figure 6.9, il a été établi que la transformation de phase débute à une contrainte de 200 MPa et que la plastification se

manifeste à 700 MPa. Cette dernière valeur de 700 MPa a été tirée de la littérature puisqu'elle n'a pas été expérimentalement déterminée. Lors de l'écrasement de la rondelle Belleville, les premières zones plastifiées apparaissent pour une charge d'environ 3 kN (voir la contrainte maximale de la figure 6.17) pour ensuite se propager près du point de contact supérieur (figures 6.18 et 6.19). Afin de bien visualiser la progression du front de transformation de phase dans la rondelle, une courbe isocontrainte a été tracée à 200 MPa. Pour repérer la courbe en question, il suffit de consulter la légende dans le coin supérieur droit de chaque figure.

Pour étudier l'évolution de la proportion de phase transformée dans la rondelle en fonction du chargement, la partie de la rondelle transformée en martensite est calculée en fonction de la force d'écrasement. Dans un premier temps, la proportion de l'aire de la section transformée en martensite est calculée. Ensuite, en tenant compte du rayon du centroïde de l'aire, le pourcentage volumique est déterminé. La proportion de phase transformée en martensite est évaluée à partir de la courbe isocontrainte de 200 MPa. La figure 6.14 expose l'évolution de la proportion volumique de la rondelle transformée en martensite en fonction de la force appliquée.

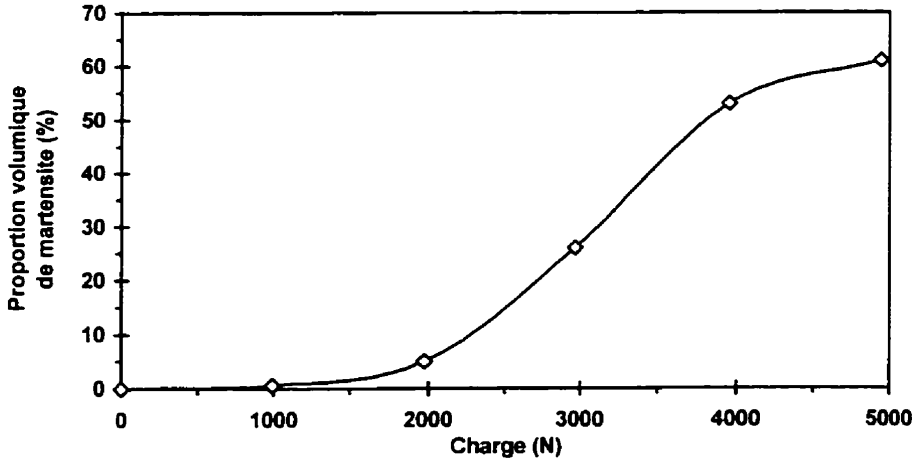


Figure 6.14 Proportion volumique de la rondelle transformée en martensite en fonction de la charge appliquée.

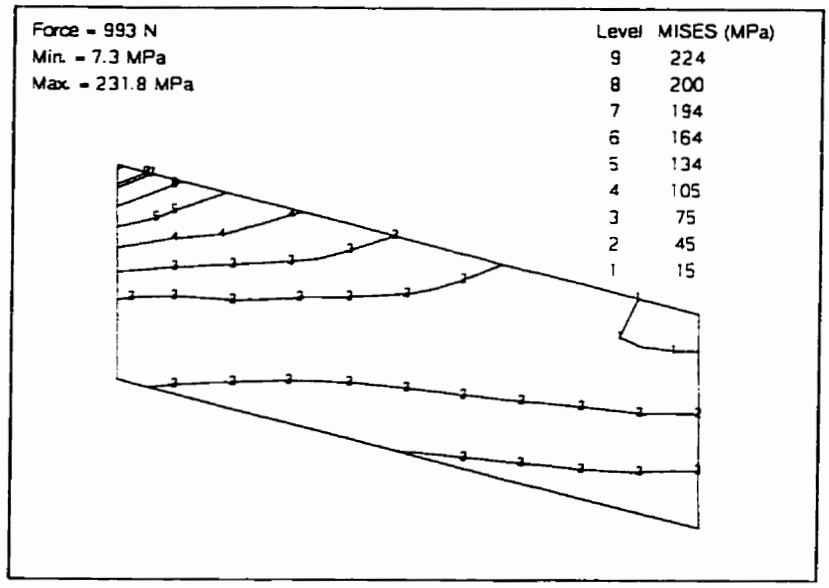


Figure 6.15 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 993N.

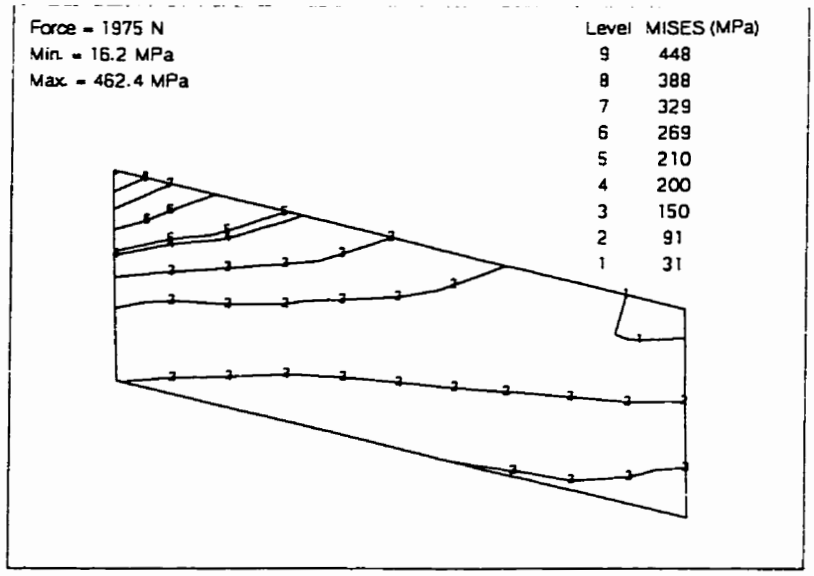


Figure 6.16 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 1975N.

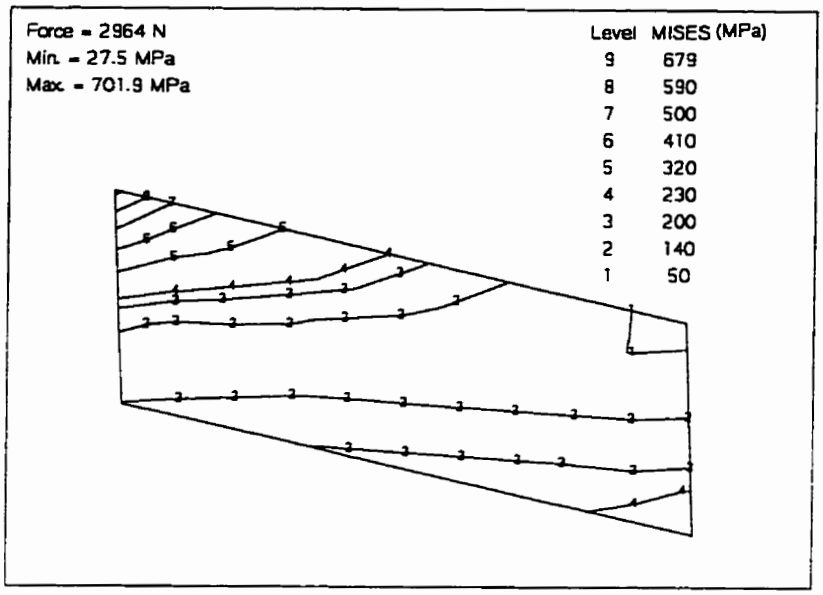


Figure 6.17 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 2964N.

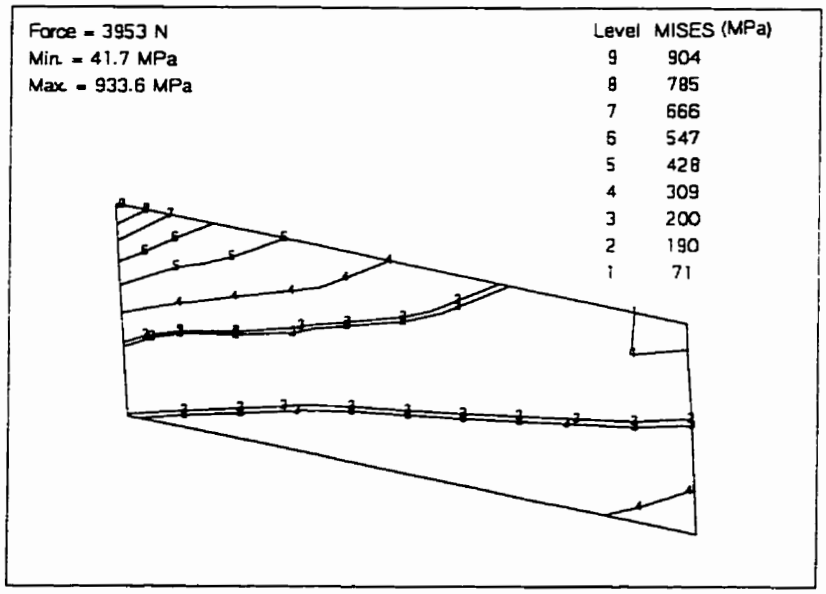


Figure 6.18 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 3953N.

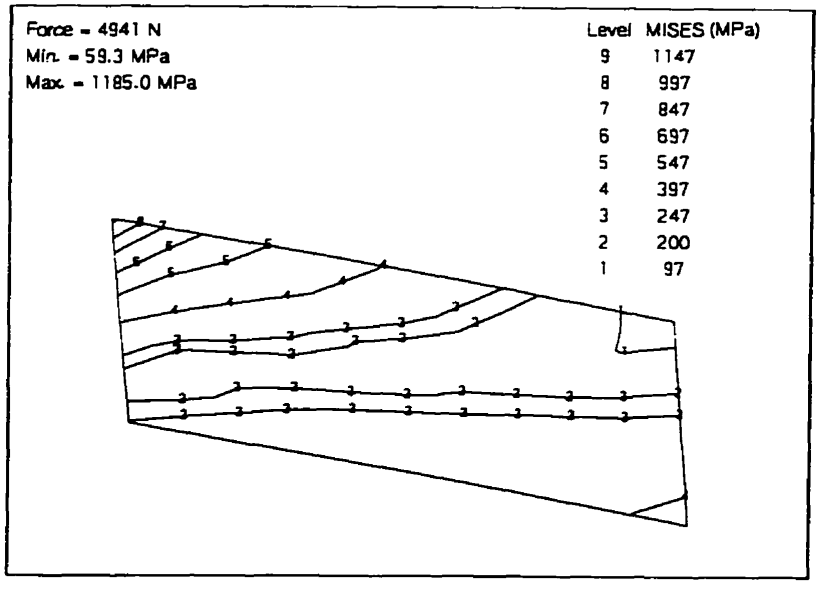


Figure 6.19 Distribution de la contrainte de Mises pour une force de 4941N.

En consultant la figure 6.14, on remarque une progression rapide de la transformation de phase pour des forces variant entre 2 kN et 4 kN. Au delà de cette limite, une saturation survient et il devient de plus en plus difficile de transformer le 30 à 40% d'austénite restant dans la rondelle. Pour des forces inférieures à 2 kN, le comportement est sensiblement élastique sauf pour la région voisine du point de contact supérieur où le gradient de contrainte est prononcé. La proportion de martensite est alors assez faible.

La figure 6.20 reprend le même genre de graphique mais cette fois-ci en fonction de l'écrasement relatif. L'écrasement relatif est le rapport de l'écrasement de la rondelle sur la hauteur initiale h_o de 1.5 mm. La proportion volumique de martensite transformée dans la rondelle est tracée en fonction de l'écrasement relatif. Une tendance similaire à la figure précédente est évidemment obtenue. De plus, la proportion volumique de transformation récupérable a été calculée d'une manière analogue à la proportion volumique de martensite et elle est reportée sur la figure 6.20. La proportion volumique de transformation récupérable est le volume de matière pour lequel la contrainte n'a pas

atteint le seuil de plastification. Il est important de faire remarquer que les deux courbes sont superposées mais qu'elles n'utilisent pas la même échelle. La courbe de la déformation récupérable utilise l'échelle à droite du graphique (variant de 98 à 100%) tandis que celle de la courbe de transformation de phase correspond à l'échelle de gauche (variant de 0 à 70%).

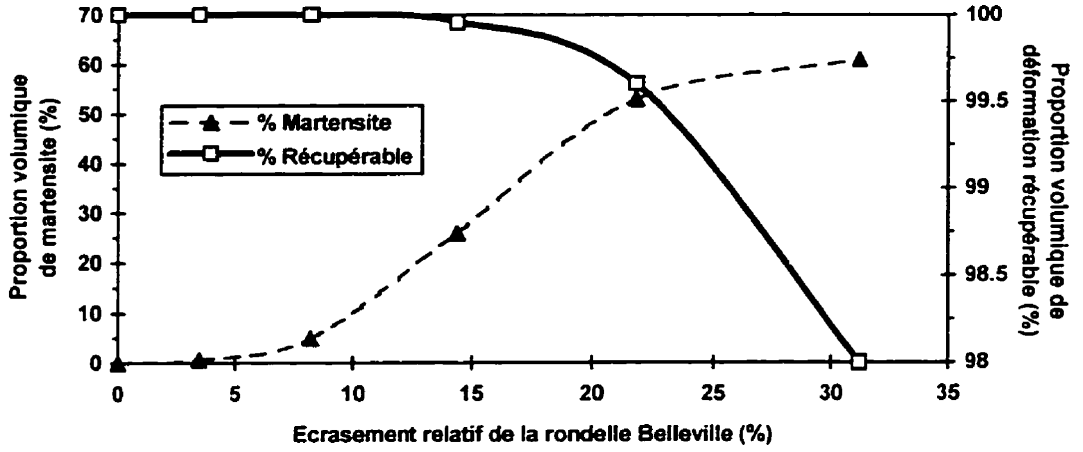


Figure 6.20 Évolution de la proportion de martensite et de la déformation récupérable en fonction de l'écrasement relatif de la rondelle.

La figure 6.20 montre l'évolution de deux effets antagonistes. En augmentant l'écrasement de la rondelle, une plus grande partie se transforme en martensite et les phénomènes reliés à la transformation martensitique peuvent davantage être mis à profit. Par contre, une zone de déformation plastique irrécupérable est inévitablement créée, ce qui affecte négativement les performances de la rondelle. Il existe donc un point critique pour lequel les performances de la rondelle sont optimales. La figure 6.21 montre l'évolution de l'indice de performance en fonction de l'écrasement relatif de la rondelle. L'indice de performance est un paramètre qui permet de déterminer le point critique d'utilisation de la rondelle. Il est simplement le produit de deux nouveaux paramètres, soit la proportion normalisée de martensite transformée et la proportion normalisée de déformation récupérable. Ces deux nouveaux paramètres sont exactement ceux utilisés à

la figure 6.20 mais ils sont normalisés par rapport à leurs valeurs minimale et maximale de la figure 6.20. Les deux courbes de la figure 6.20 sont donc normalisées entre 0.0 et 1.0 puis tracées à la figure 6.21. Le produit de ces deux nouvelles courbes génère la courbe d'indice de performance également représentée à la figure 6.21.

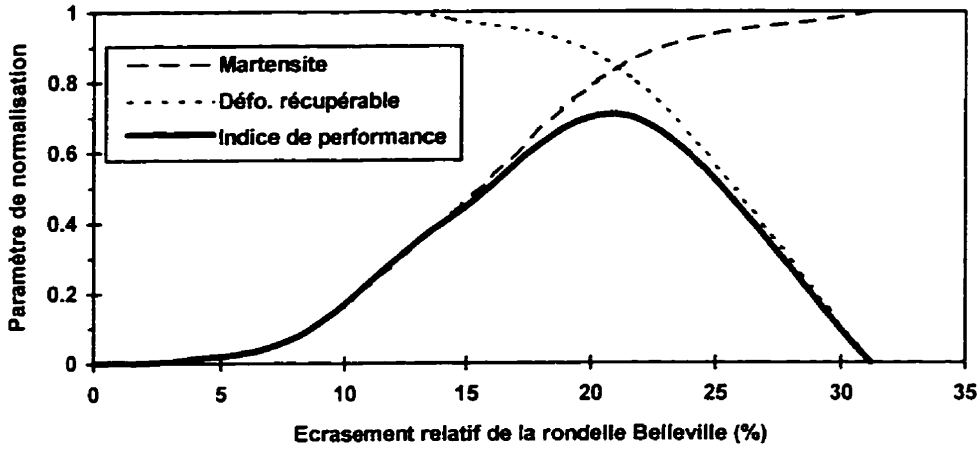


Figure 6.21 Évolution de l'indice de performance en fonction de l'écrasement relatif.

La valeur maximale de l'indice de performance permet de faire ressortir le point critique à 20% d'écrasement relatif. Ce point critique correspond à un écrasement de 0.3 mm pour une force d'un peu moins de 4 kN. Il correspond au meilleur compromis entre la proportion de martensite transformée et celle de la déformation plastique. Au-delà de ce point critique, il devient de plus en plus difficile de transformer l'austénite en martensite et la proportion volumique plastifiée commence à prendre des proportions significatives. Ce résultat démontre que le design actuel de la rondelle Belleville ne répond pas aux attentes de l'IREQ. En effet, une dégradation permanente à la suite de la plastification locale de la rondelle survient avant même qu'un plateau à force constante soit observé sur le graphique de l'écrasement de la rondelle en fonction de la force appliquée.

6.2 Analyse de la rondelle avec des éléments tridimensionnels

Le second type d'analyses par éléments finis réalisées dans ce chapitre emploie des éléments tridimensionnels. Les prochaines sections décrivent le maillage utilisé, les précautions apportées concernant les conditions frontières, la relation constitutive et les principaux résultats.

6.2.1 Maillage utilisé

Le maillage utilisé pour cette analyse est illustré à la figure 6.22. Pour des raisons de symétrie, seulement le quart de la rondelle Belleville est modélisé par 75 noeuds et 32 éléments briques à 8 noeuds. Par contre, certaines précautions doivent être prises afin de représenter une telle simplification. En effet, les déplacements des noeuds situés sur l'axe de symétrie X doivent être bloqués dans la direction Y. C'est la cas des 15 noeuds du maillage compris sur la surface délimitée par les points A, B, C et D de la figure 6.22. De la même façon, les déplacements selon l'axe X des noeuds situés sur la surface définie par les points E, F, G et H sont imposés à une valeur nulle. Pour éviter un déplacement rigide selon une direction normale au plan XY, le déplacement des noeuds de l'arête externe de la rondelle comprise entre les points C et G est bloqué dans cette direction. Pour simuler la force totale d'écrasement P de la rondelle, des forces ponctuelles P/32 et P/16 sont appliquées sur les noeuds de l'arête interne de la rondelle entre les points A et E. La somme de ces forces verticales correspond ainsi au quart de la force totale. Enfin, le frottement entre la rondelle Belleville et les rondelles plates est pris en considération en introduisant des forces parallèles au plan XY sur l'arête comprise entre les points A et E ainsi que sur l'arête comprises entre les points C et G. Ces forces de frottement sont radiales et leur orientation est indiquée à la figure 6.22. Cette situation qui correspond au schéma de droite de la figure 6.4 est préconisée à la suite de la discussion réalisée à la section 6.1.2. La détermination de la valeur du coefficient de frottement μ est délicate et la discussion concernant ce sujet est effectuée un peu plus loin.

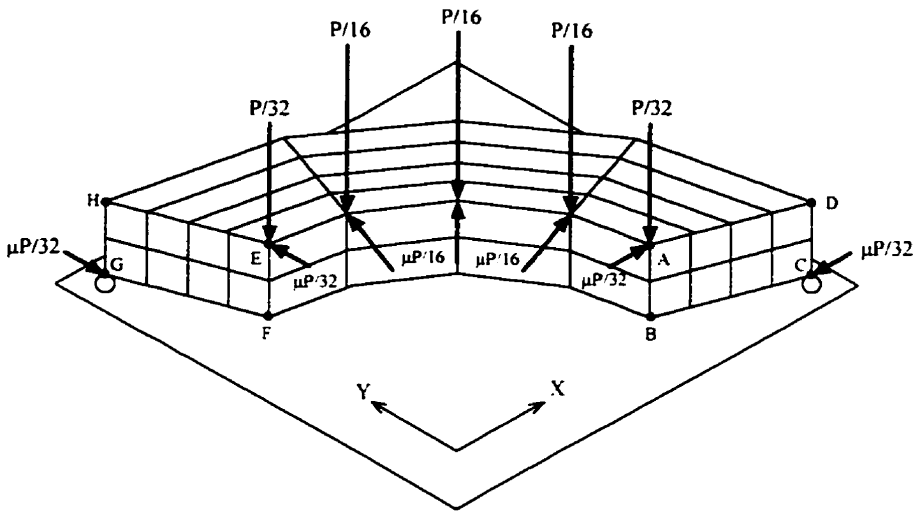


Figure 6.22 Modélisation de la rondelle par des éléments tridimensionnels.

6.2.2 Relation constitutive

Pour réaliser les analyses tridimensionnelles par éléments finis, *KRIGAMF* est utilisé comme relation constitutive. Le comportement de l'alliage est essentiellement le même que celui montré à la figure 6.12, sauf que la déformation maximale est prolongée jusqu'à environ 4%. La figure 6.23 montre les surfaces caractéristiques définies dans *KRIGAMF*.

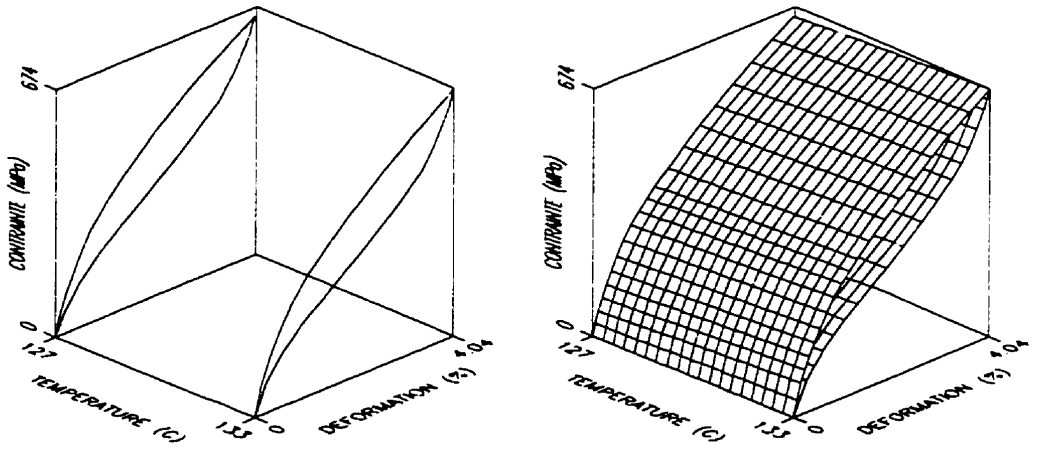


Figure 6.23 Relation constitutive de l'alliage définie dans *KRIGAMF*.

6.2.3 Coefficient de frottement

Il a été établi précédemment que la valeur du coefficient de frottement entre la rondelle Belleville et les rondelles plates influence considérablement le comportement macroscopique. En utilisant le maillage d'éléments finis tridimensionnels et la relation constitutive montrée à la figure 6.23, l'écrasement de la rondelle est calculé en utilisant différentes valeurs du coefficient de frottement. Dans un premier temps, un coefficient de frottement constant de valeurs $\mu = 0.43$ et $\mu = 0.83$ a permis d'obtenir deux des courbes de la figure 6.24. La valeur $\mu = 0.43$ provient de l'étude effectuée dans les laboratoires de l'IREQ (voir figure 6.6) tandis que $\mu = 0.83$ est la valeur employée dans l'analyse axisymétrique (voir figure 6.8). Ces coefficients introduits dans l'analyse tridimensionnelle produisent des résultats qui s'éloignent passablement de la courbe expérimentale également montrée à la figure 6.24. En effet, un coefficient de frottement de 0.43 représente bien le comportement au début du chargement. Lorsque l'écrasement de la rondelle progresse, la structure devient trop souple et une surestimation des déplacements est calculée. Avec un coefficient de frottement de 0.83, le comportement calculé est trop rigide au début du chargement, mais semble plus représentatif du comportement expérimental pour des charges plus élevées.

Une situation intermédiaire caractérisée par un coefficient de frottement variable est donc préconisée. Le coefficient de frottement varie entre 0.43 et 0.83 en fonction de la charge selon la relation montrée à la figure 6.25. Cette situation s'apparente beaucoup à l'observation expérimentale de Bowden et Tabor [6.2] illustrée à la figure 6.7. La courbe identifiée "Frot.Var" à la figure 6.24 représente le comportement calculé de la rondelle au chargement en considérant un coefficient de frottement variable entre 0.43 et 0.83. Cette courbe permet de reproduire assez fidèlement le comportement expérimental de la rondelle au chargement.

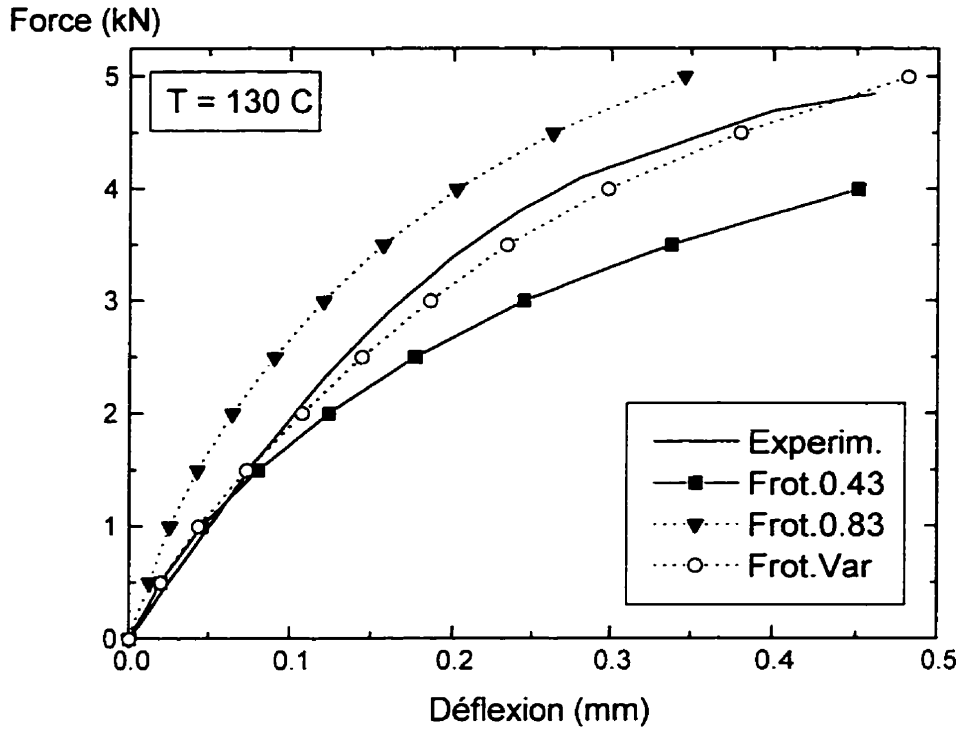


Figure 6.24 Influence du coefficient de frottement sur la réponse de la rondelle.

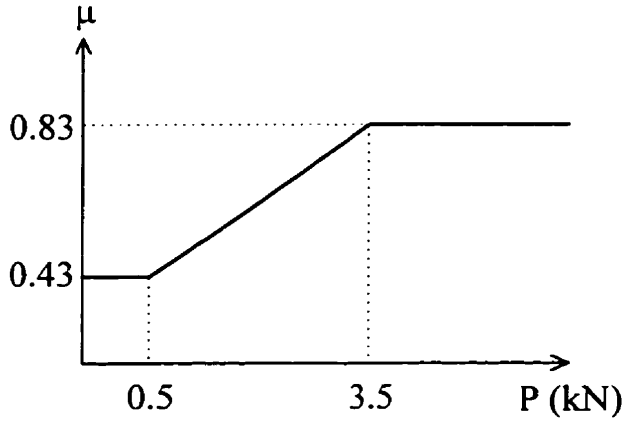


Figure 6.25 Variation du coefficient de frottement en fonction de la charge appliquée.

6.2.4 Chargement superélastique

Un cycle superélastique de la rondelle est calculé à 130°C. Au chargement, les forces d'écrasement et les forces de frottement sont appliquées selon les directions indiquées à la figure 6.22. Au déchargement, la direction des forces de frottement est inversée de façon à ce que le frottement soit toujours opposé au déplacement radial des noeuds. On suppose que le coefficient de frottement est variable et obéit à la relation montrée à la figure 6.25 autant au chargement qu'au déchargement. À la figure 6.26, la courbe superélastique calculée est comparée à la courbe expérimentale.

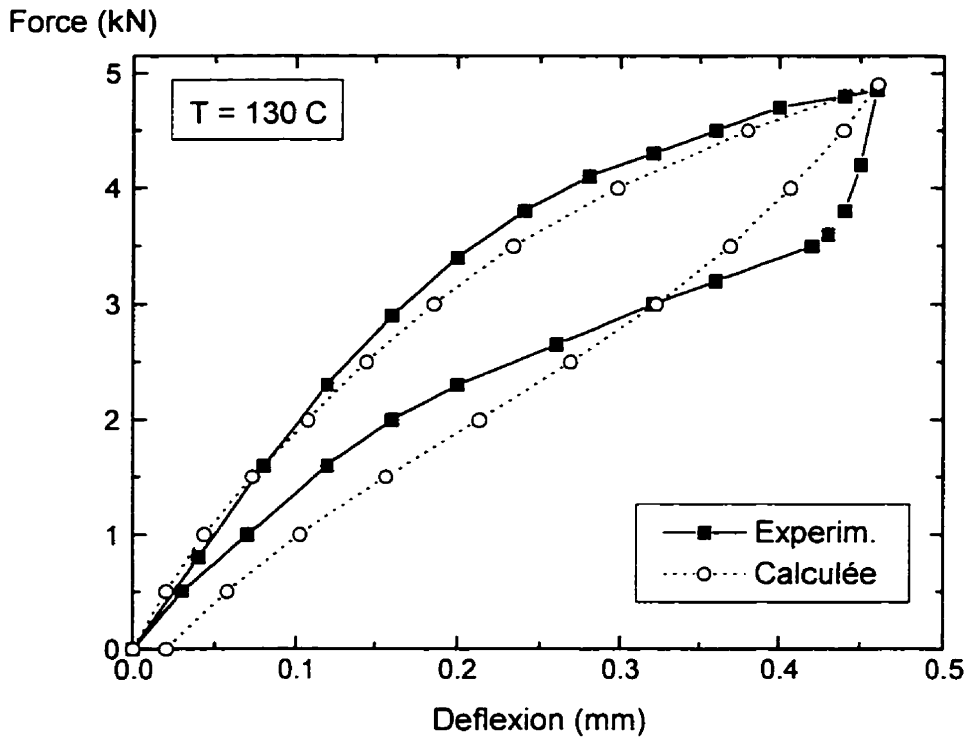


Figure 6.26 Validation expérimentale du comportement superélastique de la rondelle.

La distribution de contrainte équivalente de Prager dans la rondelle est illustrée à la figure 6.27. Cette distribution de contrainte correspond à la fin du chargement de la rondelle lorsque la charge P est de 4.9 kN. On remarque une bonne concordance avec

l'allure de la distribution de contrainte équivalente calculée lors de l'analyse axisymétrique.

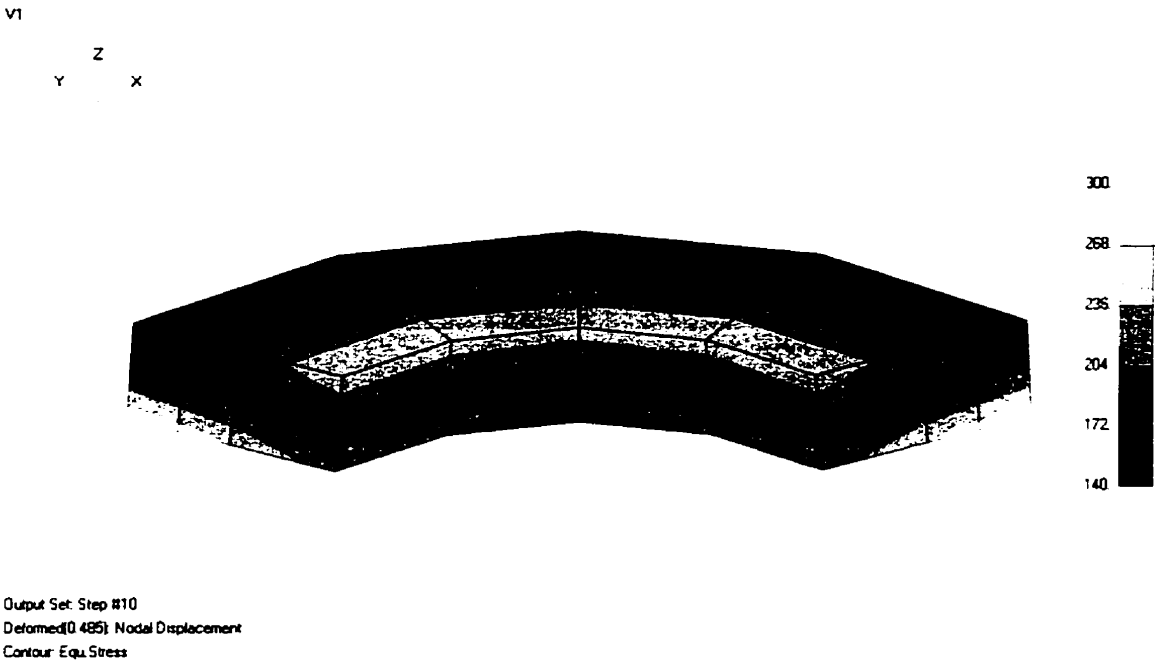


Figure 6.27 Distribution de contrainte équivalente dans la rondelle (P = 4.9 kN).

La réponse de la rondelle calculée à la figure 6.26 se rapproche du comportement expérimental de façon appréciable pour le chargement. Par contre, une déviation importante au déchargement est observée. En effet, l'analyse par éléments finis n'a pas été en mesure de reproduire la très grande rigidité de la rondelle au début du déchargement. La cause de cette déviation réside probablement dans l'imposition des conditions frontières au déchargement. En effet, il est supposé que le coefficient de frottement varie en fonction de la charge de la même manière au chargement qu'au déchargement. Il n'est pas évident à priori d'émettre une telle hypothèse car les conditions de contact entre la rondelle Belleville et les rondelles plates ne sont probablement plus les mêmes lors du déchargement. Les empreintes laissées lors du chargement influencent certainement le comportement au déchargement. Avant de poursuivre les simulations par éléments finis de la rondelle Belleville, une meilleure

compréhension des phénomènes régissant les conditions de contact avec les rondelles plates doit être atteinte. La plastification locale du matériau, la variation du coefficient de frottement et la formation de microsoudures à froid sont des facteurs qui peuvent être étudiés afin de spécifier les conditions frontières adéquates à appliquer lors des analyses par éléments finis. Ces démarches sont souhaitables dans le but de pouvoir calculer le comportement d'une rondelle Belleville soumise à différents types de chargement comme la génération d'effort au chauffage par exemple. En effet, il est inutile pour le moment de réaliser des analyses par éléments finis simulant d'autres types de sollicitation car les conditions frontières à appliquer sont complètement inconnues. Il serait alors extrêmement difficile d'identifier les causes des déviations entre les courbes expérimentales et calculées.

6.3 Conclusions et recommandations

À la suite des analyses par éléments finis effectuées dans ce chapitre, les trois principales conclusions émises au cinquième chapitre demeurent. Premièrement, une rondelle Belleville est nécessaire afin de minimiser les augmentations de contrainte dans le joint suite à une élévation de température. Deuxièmement, le plateau de charge constante semble pouvoir être élargi pour un état superélastique. La géométrie de la rondelle doit ainsi être optimisée. Par contre, une perte importante de la force de serrage est observée lors d'un refroidissement, ce qui représente une limitation importante. L'influence de cette lacune peut être limitée si l'hystérésis superélastique est très faible (courbe de chargement presque superposée à la courbe de déchargement). Malheureusement, peu d'alliages polycristallins présentent un tel comportement et l'utilisation d'un matériau monocristallin dans une telle application semble économiquement peu justifiable. Troisièmement, la génération d'effort au chauffage est une propriété prometteuse pour cette application, mais le comportement au refroidissement est problématique.

La piètre performance au refroidissement d'une rondelle Belleville provient du fait qu'elle est constamment active. En effet, la rondelle Belleville en AMF supporte continuellement la charge dans le joint boulonné selon le design actuel. Dans le cas où une augmentation de la charge est souhaitée lors d'une élévation de température, la rondelle doit entrer en phase active afin de produire un travail. À l'opposé, lorsque la rondelle est passive, elle ne fait que supporter la charge. C'est dans sa phase passive que la rondelle Belleville est vulnérable car les diminutions de température peuvent générer des pertes considérables de la force de serrage. Il serait donc intéressant de modifier la conception du joint boulonné de façon à ce que la rondelle soit active au chauffage et passive au refroidissement. Dans un tel cas, la charge serait reprise par un élément mécanique autre que la rondelle Belleville lors du refroidissement. Une analogie pourrait être soulevée avec un actuateur linéaire actif/passif permettant de se contracter lors des élévations de température (phase active) tout en restreignant les élongations lors des diminutions de température (phase passive). Le fonctionnement d'un tel actuateur est montré à la figure 6.28.

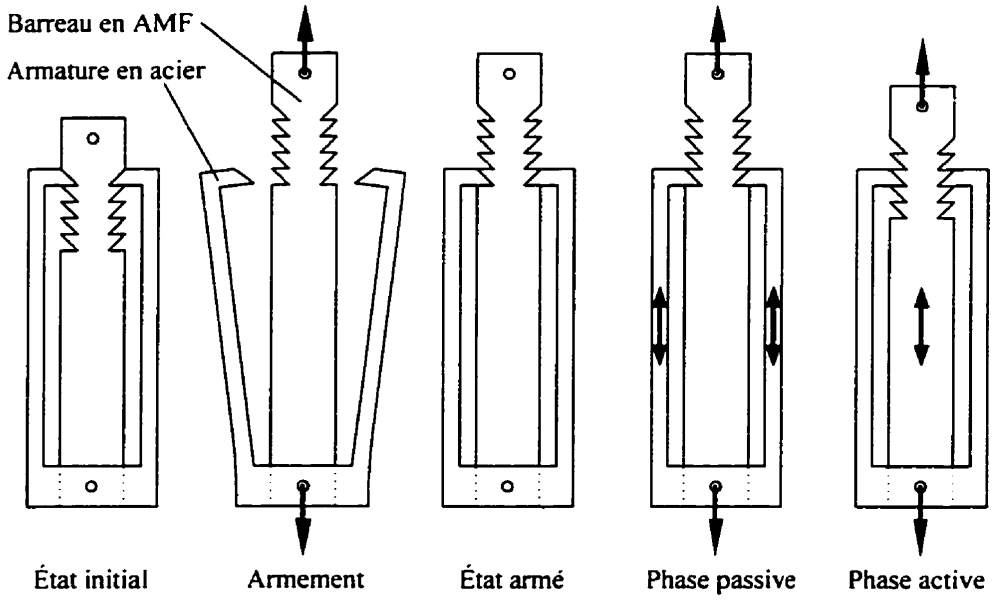


Figure 6.28 Fonctionnement d'un actuateur linéaire actif/passif en AMF.

L'actuateur linéaire est composé de deux éléments, un barreau en AMF et une armature en acier. À partir de l'état initial, les bras de l'armature sont écartés dans le domaine élastique et le barreau en AMF est déformé à froid de façon à obtenir une déformation résiduelle récupérable par chauffage. Les bras de l'armature sont refermés et l'actuateur est armé. Une force est ensuite appliquée sur l'actuateur. Lors d'une diminution de température, l'allongement du barreau en AMF est bloqué et l'effort est repris par l'armature en acier. Par contre, la géométrie des dents usinées sur le barreau en AMF et celle des bras de l'armature permettent une contraction du barreau à la suite de la mémoire de forme lors d'un chauffage. L'actuateur produit alors un travail et il entre dans sa phase active. La conception du joint boulonné pourrait bénéficier d'une telle approche dans laquelle la rondelle Belleville en AMF est active seulement lors des élévations de température. En autre temps, la rondelle est passive et les efforts doivent être repris par un autre élément mécanique. Bien entendu, la conception du joint boulonné doit être revue en profondeur afin de bénéficier de ce concept car un élément additionnel jouant le rôle de l'armature doit être ajouté.

La principale difficulté des analyses par éléments finis se rapporte à la détermination du coefficient de frottement qui existe entre la rondelle Belleville et les rondelles plates. Ce frottement doit être introduit car il y a mouvement relatif entre les composantes. Bien que cette difficulté se rapporte exclusivement aux simulations numériques, elle permet de faire ressortir un aspect problématique du montage réel. En effet, pour qu'un montage avec une rondelle Belleville en AMF fonctionne adéquatement sur une grande échelle de production, les conditions d'opération doivent être similaires dans tous les cas. Or, les analyses par éléments finis ont démontré que des faibles variations au niveau des conditions de contact entre la rondelle Belleville et les rondelles plates modifient systématiquement le comportement du joint boulonné. Ainsi, si les conditions de contact ne sont pas identiques entre deux montages, il est fort probable que la réponse du joint boulonné soit différente. Une telle situation n'est pas intéressante car les performances recherchées peuvent ne pas être atteintes. L'état de surface des rondelles,

la lubrification et la dépendance du coefficient de frottement en fonction de la charge et de la température sont parmi les facteurs qui influencent le frottement entre les rondelles. Une alternative serait d'éliminer à la source la cause des dispersions au niveau du comportement du joint boulonné, c'est-à-dire éliminer complètement le mouvement relatif entre les rondelles. L'utilisation de rondelles plates munies d'un épaulement représente une solution envisageable. L'utilisation de rondelles avec épaulement dans une configuration modifiée est illustrée à la figure 6.29. Bien entendu, la rigidité de la rondelle est fortement augmentée, mais la géométrie de celle-ci peut être adaptée afin de mieux répondre au cahier des charges. Ainsi, le comportement d'une rondelle Belleville pourrait être mieux expérimentalement caractérisé et la conception du joint boulonné pourrait bénéficier d'analyses par éléments finis beaucoup plus fiables.

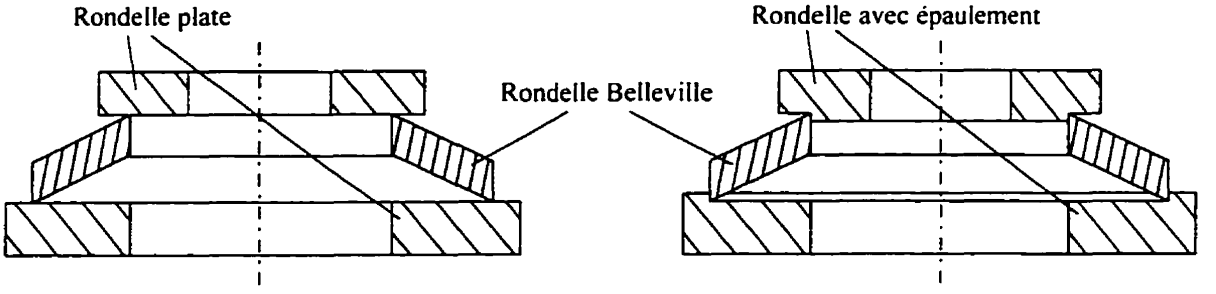


Figure 6.29 Utilisation de rondelles plates avec épaulement dans un joint boulonné.

Chapitre 7 : Étude par éléments finis d'un stent médical

Ce chapitre discute de la méthodologie suivie pour modéliser par éléments finis le comportement d'un stent cardio-vasculaire en alliage à mémoire de forme. Un aspect original de cette analyse est la combinaison de deux modèles pour décrire le comportement intrinsèque de l'AMF. Plutôt que d'utiliser des courbes expérimentales isothermes afin de définir le comportement du matériau dans le modèle phénoménologique *KRIGAMF*, des courbes isothermes calculées par le modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin ont été utilisées. Il s'agit ici d'une approche mixte qui bénéficie de la souplesse et de la précision du modèle phénoménologique *KRIGAMF* tout en minimisant le nombre et la durée requise pour caractériser expérimentalement un AMF. Les résultats numériques ne sont confrontés à aucune validation expérimentale et le stent étudié dans ce chapitre est purement fictif. Le but de ce chapitre est de montrer les possibilités qu'offrent les logiciels qui ont été développés pour assister les concepteurs dans le design d'une composante en AMF.

La première section de ce chapitre discute du fonctionnement d'un stent cardio-vasculaire en alliage à mémoire de forme tandis que la seconde section décrit la géométrie du stent étudié. Une étude sur le raffinement du maillage est ensuite réalisée et la relation constitutive de l'alliage modélisé dans *KRIGAMF* est présentée à la quatrième section. Enfin, la dernière section présente les résultats de l'analyse par éléments finis qui étudie le comportement isotherme d'un stent en AMF.

7.1 Exposé du problème

Dans notre société moderne, les maladies du coeur sont très répandues et plusieurs d'entre elles se rapportent à l'occlusion des artères coronariennes. Une intervention appelée angioplastie est de plus en plus pratiquée afin d'augmenter le diamètre de l'artère en lui introduisant un dispositif mécanique quelconque appelé *stent*. Il existe de

nombreux types de stents sur le marché qui se différencient par leur géométrie et par leur matériau. Le stent étudié dans ce chapitre est une bague en Ti-Ni composée de plusieurs boucles unies les unes aux autres pour former une géométrie cylindrique de rayon R. Il est généralement fabriqué à partir d'un cylindre dans lequel les boucles sont taillées au laser. La figure 7.1 illustre un stent à boucles sinusoïdales en configuration déployée et contractée. La géométrie d'une boucle sinusoïdale est définie à partir des deux grandeurs H et L qui dépendent du rayon du stent R. Plus le rayon R augmente, plus la longueur L augmente tandis que H diminue.

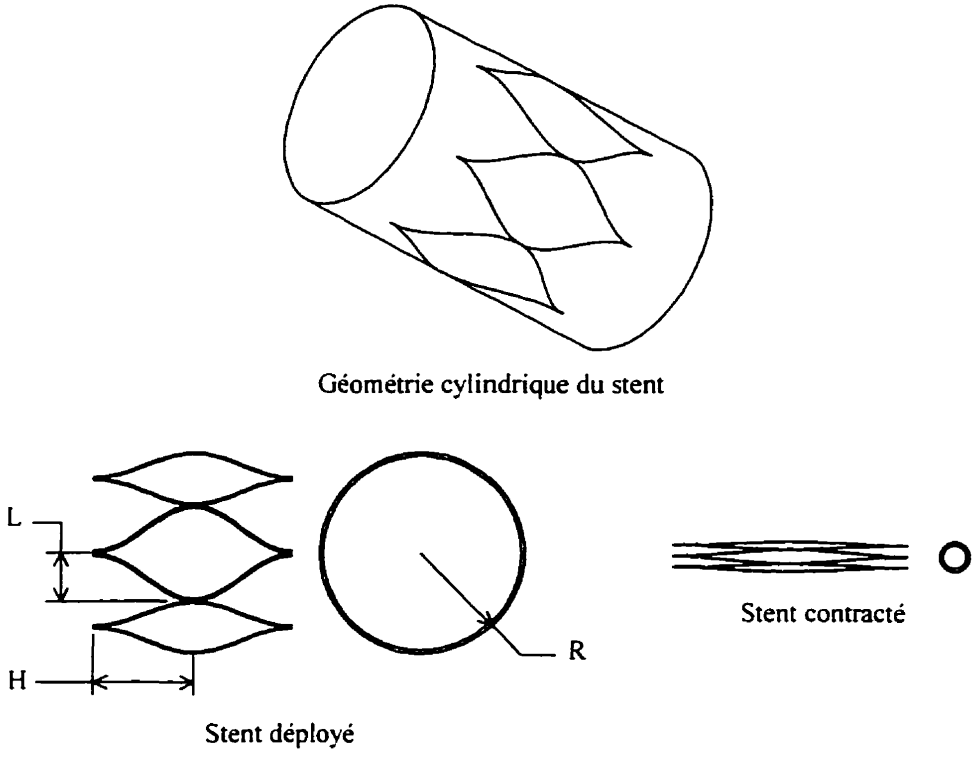


Figure 7.1 Configurations déployée et contractée du stent.

Un stent classique est généralement en acier inoxydable et il est usiné de façon à ce qu'il soit complètement contracté lorsqu'aucune force n'est appliquée. Il est ensuite installé sur un ballon cylindrique et le tout est introduit dans l'artère obstrué. La pression dans le ballon est augmentée pour déployer le stent aux dimensions désirées. Suite aux grandes

déformations subies par le stent, ce dernier se déforme plastiquement et lorsque la pression dans le ballon est enlevée, il conserve une forme déployée qui agrandit l'artère. Pour retirer le stent, une chirurgie est nécessaire.

Un stent en alliage à mémoire de forme permet d'améliorer considérablement la situation en éliminant la présence du ballon gonflable. L'alliage le plus souvent employé pour la fabrication des stents en alliage à mémoire de forme est le Ti-Ni à cause de sa bonne biocompatibilité avec le corps humain. Imaginons qu'un stent en Ti-Ni est superélastique et complètement déployé pour toute température supérieure à $A_f = 20°C$. Le stent est contracté et inséré dans un cathéter. Le cathéter est un petit cylindre utilisé pour conserver le stent en position contractée lors de son introduction dans l'artère. Une fois localisé correctement dans l'artère, le stent est expulsé du cathéter par un mécanisme. Le stent tend alors à reprendre sa position complètement déployée à cause de l'effet superélastique et agrandit ainsi l'artère obstruée. Pour récupérer le stent, une chirurgie doit être pratiquée. Ce type de stent est appelé *stent permanent superélastique* et la simulation de son comportement fait l'objet de la section 7.5.

Le stent permanent superélastique requiert une incision plus petite dans le corps humain pour l'introduction de l'ensemble car il n'y a pas de ballon gonflable. Le temps de récupération du patient est ainsi diminué. Une telle méthode est impensable avec un stent en acier inoxydable classique car, contrairement aux alliages à mémoire de forme, les déformations engendrées lors de la contraction du stent produiraient inévitablement une dégradation irréversible suite à la plastification des parties les plus sollicitées du stent. Il existe des stents en AMF qui fonctionnent de manière différente de ce qui a été présenté jusqu'à maintenant. Deux autres types de stents en AMF sont brièvement discutés aux paragraphes suivants, mais leur comportement n'a pas été modélisé par éléments finis dans le cadre de cette thèse.

Un autre type de stent appelé *stent permanent par effet mémoire* fonctionne de façon très similaire au stent permanent superélastique car un cathéter remplace le ballon gonflable.

Par contre, les températures de transformation du stent sont différentes, à titre d'exemple $A_f = 30°C$ plutôt que 20°C comme dans le cas précédent. En effet, à la température ambiante d'insertion dans le cathéter, le stent est en phase martensitique. Lorsqu'il est expulsé du cathéter, un léger délai persiste avant le déploiement du stent dans l'artère. Ensuite, la température s'élève graduellement et le stent se transforme en austénite lorsque la température du corps humain de 37°C est atteinte. Le déploiement est alors gouverné par l'effet mémoire simple sens. Ce type de stent est également permanent car il faut recourir à une chirurgie pour le retirer de l'artère.

Un troisième type de stent en alliage à mémoire de forme est présenté par Bramfitt et Hess [7.1]. Contrairement aux deux stents précédents qui sont permanents, le stent Harts est temporaire et il est en phase martensitique pour toute sa durée en service dans l'artère. En austénite, le stent est dans sa forme contractée et la transformation de phase inverse (martensite vers austénite) se produit lorsque la température excède 42°C, température maximale du corps humain (donc $A_S \approx 42°C$). Le stent en martensite est introduit dans l'artère avec l'aide du ballon gonflable à l'endroit désiré et le déploiement du stent est réalisé par le gonflage du ballon. Pour retirer le stent ou pour un repositionnement, un liquide chauffant est injecté sur le stent pour produire la transformation inverse. Le stent se contracte pour reprendre sa forme d'équilibre à haute température. Un cathéter spécial peut venir récupérer le stent contracté, ce qui évite une chirurgie majeure et des coûts élevés. Il faut que les températures A_S et A_f soient les plus près possible l'une de l'autre afin de minimiser l'énergie thermique requise pour la contraction. Ce type de stent bénéficie également de l'effet mémoire simple sens mais de façon complètement différente du stent permanent par effet mémoire.

Le but de simuler par éléments finis le comportement d'un stent en AMF est d'évaluer les niveaux de contrainte associés aux contractions et aux déploiements afin d'éviter toute plastification dans le stent. La création de zones plastifiées peuvent détériorer un stent de façon irréversible car il y aura perte partielle ou complète des propriétés reliées à la

mémoire de forme. À la limite, une plastification locale peut créer des microfissures pouvant mener à un bris prématuré du stent lorsqu'il est implanté dans le corps humain. Pour le stent temporaire, si une plastification survient lors du déploiement, il est possible qu'il ne se contracte pas suffisamment lors du chauffage pour la récupération avec le cathéter et une chirurgie devient alors nécessaire pour le retirer. Pour les stents permanents, une plastification diminue l'ampleur des déploiements prévus et à la limite, il pourrait y avoir absence d'augmentation du diamètre de l'artère. Dans tous les cas, une chirurgie est nécessaire pour retirer le stent défectueux, ce qui peut devenir très coûteux. Ainsi, avec une analyse par éléments finis, il est possible d'éviter un mauvais fonctionnement d'un stent en détectant les zones plastifiées dans le stent. De cette façon, la géométrie d'un stent peut être optimisée et la contraction limite à appliquer sur un stent peut être estimée.

Les travaux d'Auricchio et Taylor [7.2] ressemblent à la simulation par éléments finis réalisée à la section 7.5. Par contre, il existe de nombreuses différences au niveau des relations constitutives utilisées, du type d'éléments finis et du type de simulations. Dans cette publication, des éléments 3D solides sont utilisés tandis que nous utilisons des éléments poutres pour modéliser un quart de boucle. De plus, les simulations des auteurs Auricchio et Taylor sont isothermes et superélastiques. Avec la méthodologie employée dans cette thèse, des variations de températures homogènes pourraient facilement être imposées afin d'étudier le comportement des deux types de stent en AMF qui bénéficient de l'effet mémoire simple sens.

7.2 Géométrie du stent

La géométrie du stent modélisé dans le cadre de cette étude est inspirée de la publication de Bramfitt et Hess [7.1]. Imaginons que le stent étudié est formé de $N = 6$ boucles sinusoïdales et le rayon R du stent lorsqu'il est complètement ouvert est de 4.0 mm. La hauteur 2H lorsque le stent est complètement contracté est de 7.0 mm. La section du fil

composant la boucle est carrée et pleine avec un côté de longueur 2b = 0.2 mm. En première approximation, lors d'un déploiement ou d'une contraction du stent, toutes les boucles se déforment de façon identique. De plus, étant donné qu'une boucle possède deux axes de symétrie, l'analyse peut être considérablement simplifiée en ne modélisant qu'un quart de boucle dans un espace bidimensionnel. La figure 7.2 illustre la section carrée du fil qui constitue la boucle ainsi que la géométrie sinusoïdale d'un quart de boucle caractérisée par les deux grandeurs L et H.

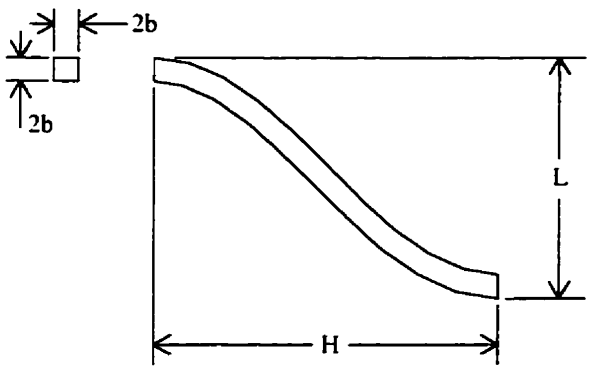


Figure 7.2 Géométrie d'un quart de boucle en configuration complètement déployée.

Le fait de simplifier le problème initial tridimensionnel en le ramenant dans un espace bidimensionnel est l'équivalent d'émettre l'hypothèse que les demi-boucles forment des secteurs triangulaires plutôt que des secteurs en arc de cercle. La figure 7.3 montre la différence entre les secteurs triangulaires et ceux en arc de cercle. À partir de la loi des cosinus, cette hypothèse simplificatrice permet donc d'établir la relation qui relie la largeur L d'un quart de boucle au rayon R du stent (équation 7.1). Dans notre cas, puisque N vaut 6, l'équation (7.1) se ramène tout simplement à $L = 0.518\,R$ et la contraction du stent peut donc être exprimée par l'écrasement d'un quart de boucle.

$$L = R\sqrt{2\left[1-\cos\left(\pi/N\right)\right]} \qquad (7.1)$$

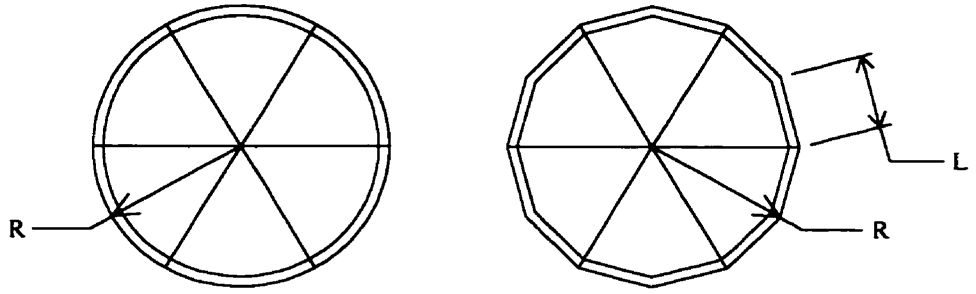


Figure 7.3 Différence entre des secteurs triangulaires et des secteurs en arc de cercle.

Pour modéliser un quart de boucle, des éléments poutres bidimensionnels seront utilisés. Sans la simplification discutée précédemment qui ramène le problème 3D dans un espace bidimensionnel, l'utilisation d'éléments poutres bidimensionnels aurait été impossible et des éléments poutres 3D avec 6 degrés de liberté par noeud auraient alors été nécessaires. Pour obtenir des résultats précis, les noeuds du maillage doivent être positionnés sur l'axe neutre. La représentation de l'axe neutre d'un quart de boucle est effectuée à la figure 7.4. L'équation de l'axe neutre dépend de trois paramètres géométriques, la hauteur H et la largeur L du quart de boucle ainsi que l'épaisseur 2b de la section carrée. L'équation (7.2) présente la relation qui servira ultérieurement à calculer la position des noeuds sur l'axe neutre d'un quart de stent.

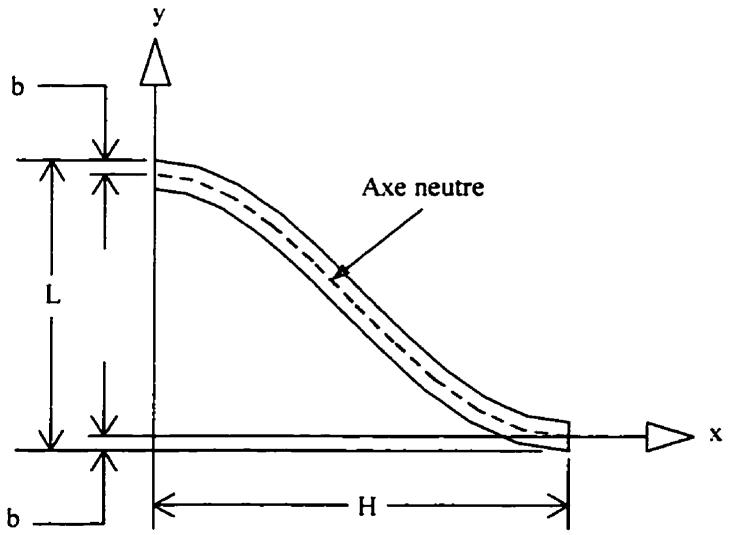


Figure 7.4 Position de l'axe neutre d'un quart de boucle.

$$y = \left(\frac{L-2b}{2}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{H}\right)\right] \tag{7.2}$$

Afin de positionner correctement sur l'axe neutre les noeuds d'un maillage qui modélisent un quart de boucle, il suffit seulement de déterminer les dimensions L et H qui correspondent à un rayon R initial (rayon pour lequel aucune force n'est appliquée sur le stent). Dans le cas où le stent est complètement contracté, la hauteur H d'un quart de boucle est de 3.5 mm (donnée initiale) et la largeur L correspond à l'épaisseur du fil qui compose la boucle, soit L = 2b = 0.2 mm. Dans cette configuration, l'axe neutre n'est pas sinusoïdal mais plutôt linéaire. À l'opposé, dans la configuration complètement déployée, le rayon R du stent est de 4.0 mm (donnée initiale). Selon l'équation 7.1, la largeur L d'un quart de boucle vaut donc 2.072 mm. Selon la théorie des poutres en flexion, l'axe neutre ne subit aucune déformation. Par conséquent, puisque l'axe neutre d'un quart de boucle en position complètement contractée mesure 3.5 mm, la longueur de ce dernier doit demeurer inchangée lors d'un déploiement. Afin de conserver une longueur de l'axe neutre de 3.5 mm en position complètement déployée, il faut que la hauteur H d'un quart de boucle soit de 2.871 mm. Cette dernière valeur a été déterminée par un petit programme itératif qui effectue la somme de la longueur de petits segments linéaires dont la position des extrémités est donnée par l'équation (7.2). La figure 7.5 montre l'axe neutre en trait discontinu ainsi que les dimensions d'un quart de boucle dans les configurations complètement contractée et complètement déployée.

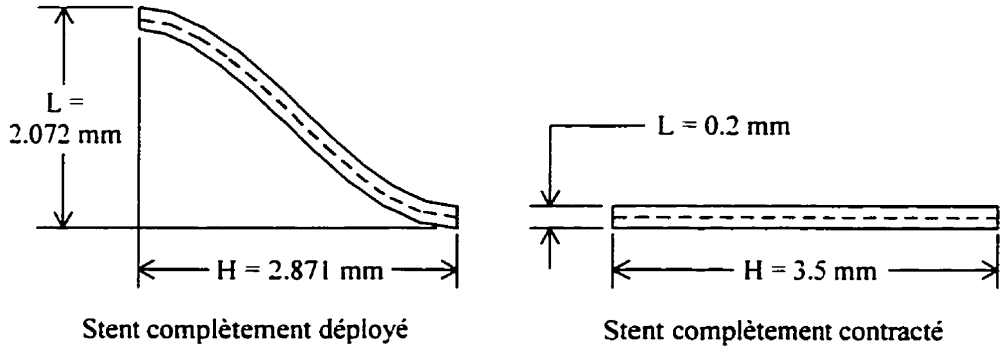


Figure 7.5 Dimensions d'un quart de boucle selon les deux configurations.

7.3 Étude du raffinement du maillage

Comme il en a été discuté précédemment, les simulations par éléments finis de la contraction du stent sont réalisées dans un espace bidimensionnel. Les éléments utilisés, illustrés à la figure 7.6, sont des éléments poutres à deux noeuds avec trois degrés de liberté par noeud, soit deux déplacements u et v ainsi qu'une rotation θ. L'élément poutre employé est légèrement différent des éléments classiques. En effet, pour les fins des calculs, il est subdivisé en 8 couches sur l'épaisseur de l'élément de façon à calculer une distribution non-linéaire de la contrainte au travers de la section de la poutre. La distribution de la contrainte dans la section d'un élément poutre est calculée de façon à ce que l'équilibre des forces internes et externes soit toujours respecté.

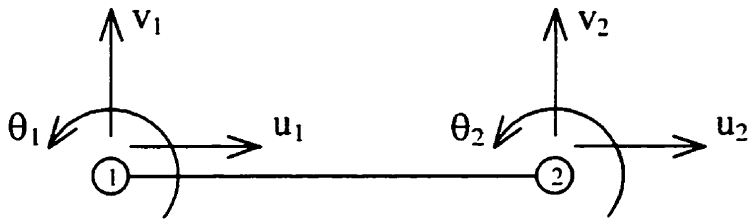


Figure 7.6 Éléments poutre bidimensionnel à deux noeuds et 6 degrés de liberté.

Les conditions aux frontières imposées sur le maillage d'éléments finis sont illustrées à la figure 7.7. Afin de bloquer les déplacements rigides, le déplacement selon x du point A ainsi que celui du point B dans la direction y sont imposés à zéro. Étant donné que les axes x et y sont des axes de symétrie, il est impératif de bloquer la rotation aux points A et B. Les contractions et les déploiements du stent sont simulés en appliquant une force ou en imposant un déplacement au point A.

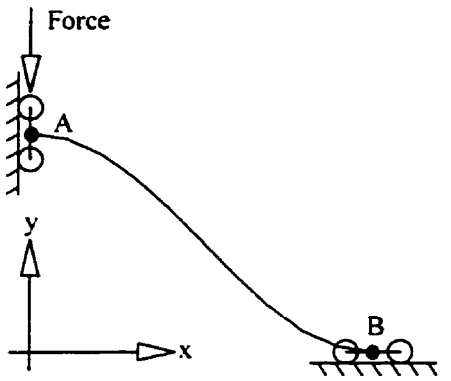


Figure 7.7 Imposition des conditions aux frontières.

Afin de déterminer le raffinement adéquat du maillage, une méthodologie similaire à celle employée au chapitre 6 est préconisée. À partir d'une géométrie complètement déployée (H = 2.871 mm et L = 2.072 mm), la contraction du stent est simulée en appliquant une force au point A de la figue 7.7 variant de 0 à 0.6 N. Afin de minimiser la durée de cette analyse, un matériau superélastique bilinéaire est employé (voir la description du matériau bilinéaire dans le chapitre 4 consacré à *SIMAMF*). Les propriétés sont les suivantes : E = 75000 MPa, $\varepsilon_{Mf} = 0.08$, $\sigma_{Ms} = 360$ MPa, $\sigma_{Af} = 120$ MPa, $\nu = 0.3$ et H/E = 0.076. Les courbes d'écrasement d'un quart de boucle ont été obtenues pour quatre maillages comprenant un nombre différent de noeuds, soit 5, 7, 9 ou 11 noeuds. Dans chacun des cas, les noeuds sont répartis sur l'axe neutre du quart d'une boucle selon une distribution uniforme des noeuds suivant l'axe des x. Bien entendu, pour un maillage possédant k noeuds, il y a (k-1) éléments puisque le premier élément relie les premier et second noeuds, le second élément relie les deuxième et troisième noeuds et ainsi de suite.

Les résultats obtenus montrent une assez faible sensibilité de la courbe d'écrasement d'un quart de boucle par rapport au nombre de noeuds du maillage. Les courbes d'écrasement provenant des maillages à 7, 9 et 11 noeuds étaient pratiquement superposées et c'est la raison pour laquelle leur présentation a été volontairement omise. Par contre, la figure 7.8 présente la contraction d'un quart de boucle en fonction du nombre de noeuds du maillage lorsqu'une charge de 0.6 N est appliquée. On remarque effectivement une

convergence assez rapide de l'écrasement d'un quart de boucle pour ensuite se stabiliser pour des maillages à 7 noeuds ou plus. La différence entre le maillage à 7 noeuds et celui à 11 noeuds est très minime.

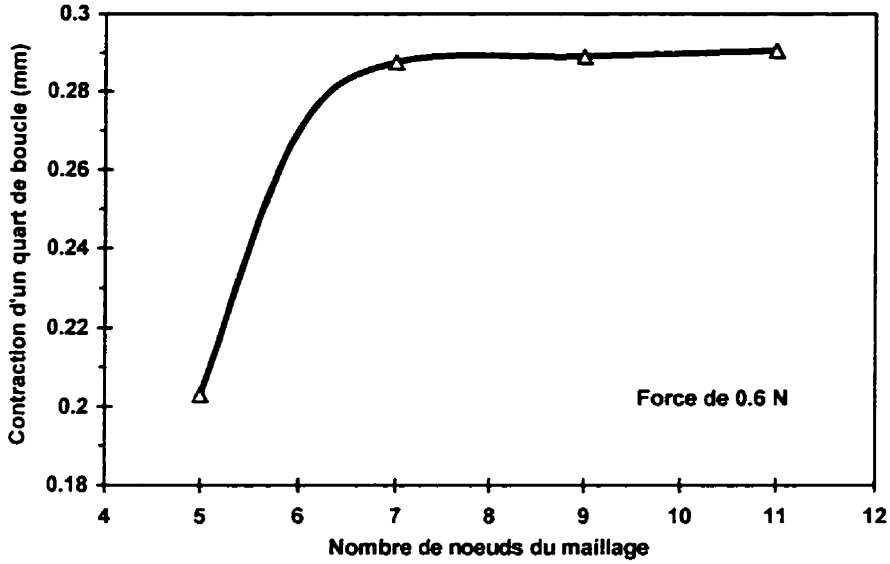


Figure 7.8 Convergence de la contraction d'un quart de boucle en fonction du nombre de noeuds du maillage pour une force de 0.6 N.

Pour les analyses subséquentes, le maillage à 9 noeuds et 8 éléments est utilisé car il semble présenter un bon compromis entre la précision des résultats et la vitesse des calculs. Le tableau 7.1 donne les coordonnées des 9 noeuds tandis que la figure 7.9 présente la numérotation des noeuds et des éléments du maillage. Il est à noter que les noeuds sont également distancés le long de l'axe des x et la coordonnée y est calculée par l'équation (7.2) qui représente l'axe neutre d'un quart de boucle.

Tableau 7.1 : Coordonnées des 9 noeuds du maillage pour le quart d'une boucle.

Noeud #	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x (mm)	0.0000	0.3589	0.7178	1.0767	1.4355	1.7944	2.1533	2.5121	2.8710
y (mm)	1.8720	1.8007	1.5978	1.2941	0.9360	0.5778	0.2741	0.0713	0.0000

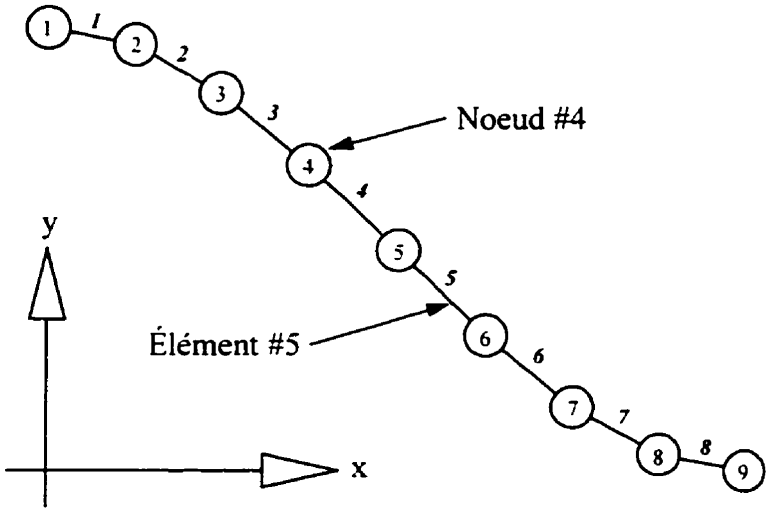


Figure 7.9 Numérotation des noeuds et des éléments du maillage.

7.4 Définition de la relation constitutive de l'alliage dans KRIGAMF

Pour les simulations concernant le stent cardio-vasculaire, *KRIGAMF* est utilisé mais d'une manière légèrement différente. En effet, plutôt que d'utiliser des courbes expérimentales pour construire les surfaces caractéristiques, des courbes calculées par un autre logiciel serviront de squelette aux surfaces de *KRIGAMF*. C'est le logiciel *DEFORM* de l'équipe de recherche du Dr Alexander Volkov à St-Pétersbourg en Russie qui a calculé les courbes contrainte-déformation isothermes à différentes températures. Le logiciel *DEFORM* est fondé sur le modèle micromécanique de Likhatchev et Malinin décrit au deuxième chapitre de cette thèse. L'alliage modélisé est un Ti-Ni pour lequel le module d'élasticité de la phase austénitique est de 74 000 MPa. D'autres paramètres doivent être fournis au logiciel *DEFORM* pour modéliser le comportement intrinsèque d'un alliage mais pour l'instant, il serait inutile de tous les expliciter. Trois courbes de chargement et de déchargement isothermes allant jusqu'à 8% de déformation ont été calculées. Une fois les courbes isothermes calculées par *DEFORM*, le modèle phénoménologique *KRIGAMF* les utilise pour la construction des surfaces caractéristiques de l'AMF. Après cette opération, les calculs par éléments finis sont interfacés seulement avec *KRIGAMF*.

Pour la simulation réalisée dans ce chapitre, trois courbes isothermes ont été calculées par *DEFORM*. Ces trois courbes sont représentées à la figure 7.10. Il y a une première courbe à la température $T_1 = 10°C$, une seconde à $A_f = 20°C$ et une dernière à $T_2 = 30°C$. À la température T_1, une déformation résiduelle récupérable par chauffage est observée après le déchargement et la courbe à la température T_2 représente un comportement superélastique.

En observant le comportement de la courbe à T_1, la valeur de 8% de déformation imposée lors du calcul des courbes semble représenter une limite. En effet, on remarque une augmentation de la rigidité pour des déformations voisines de 8%, ce qui indique que tout l'alliage est transformé en martensite et que l'on débute le régime de la martensite élastique. Dans la majorité des cas, pour de telles déformations, l'alliage plastifie (donc dégradation irréversible) avant même d'atteindre le comportement élastique de la martensite. Sur le schéma de droite de la figure 7.10, les surfaces caractéristiques calculées par *KRIGAMF* sont également dessinées. Enfin, un critère symétrique au niveau de la transformation de phase a été choisi, c'est-à-dire que la transformation débute à la même valeur de la contrainte en compression et en tension.

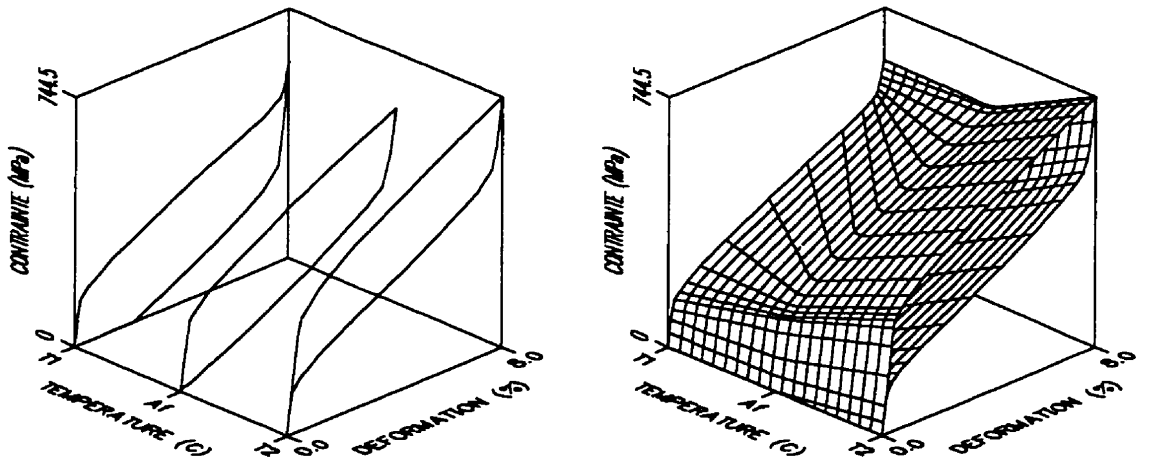


Figure 7.10 Modélisation par *KRIGAMF* d'un alliage Ti-Ni calculé par *DEFORM*.

7.5 Simulation du stent permanent superélastique

Le fonctionnement d'un stent permanent superélastique a été décrit plus en détail lors de l'exposé du problème à la section 7.1. En résumé, à la température ambiante, le stent est superélastique et il est contracté pour l'introduire dans un cathéter. Une fois le tout positionné correctement dans l'artère, le stent est expulsé mécaniquement. Grâce à la superélasticité, il reprend sa forme déployée afin d'augmenter le diamètre de l'artère. Les déformations dans le stent sont les plus critiques lorsqu'il est inséré dans le cathéter. La simulation par éléments finis permettra d'évaluer les intensités de contraintes à l'intérieur du stent lors d'une utilisation normale et de déterminer le diamètre optimal du cathéter qui n'engendre aucune plastification locale dans le stent lorsque ce dernier est inséré dans le cathéter.

7.5.1 Choix de la relation constitutive

Puisqu'il est possible de simuler le comportement du stent permanent superélastique avec une relation constitutive isotherme, deux options s'imposent. Nous pouvons utiliser *KRIGAMF* sans variation de température ou encore simplement le modèle bilinéaire. Afin de comparer les performances des deux modèles, une contraction et un déploiement isothermes du stent à la température superélastique T_2 sont simulés en utilisant la relation constitutive définie dans *KRIGAMF* (figure 7.10) ainsi que le modèle bilinéaire. Les paramètres du matériau bilinéaire ont été choisis de façon à ce que le comportement se rapproche le plus possible de la courbe calculée par *DEFORM* à la température T_2, soit $E = 74000$ MPa, $\varepsilon_{Mf} = 0.08$, $\sigma_{Ms} = 360$ MPa, $\sigma_{Af} = 120$ MPa, $\nu = 0.3$ et $H/E = 0.076$. La figure 7.11 montre les courbes calculées en utilisant les deux relations constitutives. De plus, sur la même figure, les résultats d'une analyse linéaire avec un module d'élasticité de $E = 74\,000$ MPa sont représentés par la droite continue au trait plus épais. Dans les trois cas, le maillage utilisé est celui dessiné à la figure 7.9 possédant 9 noeuds et 8 éléments. Le chargement consiste à imposer un écrasement du quart de boucle légèrement supérieur à 0.3 mm suivi d'un relâchement pour obtenir un cycle d'hystérésis.

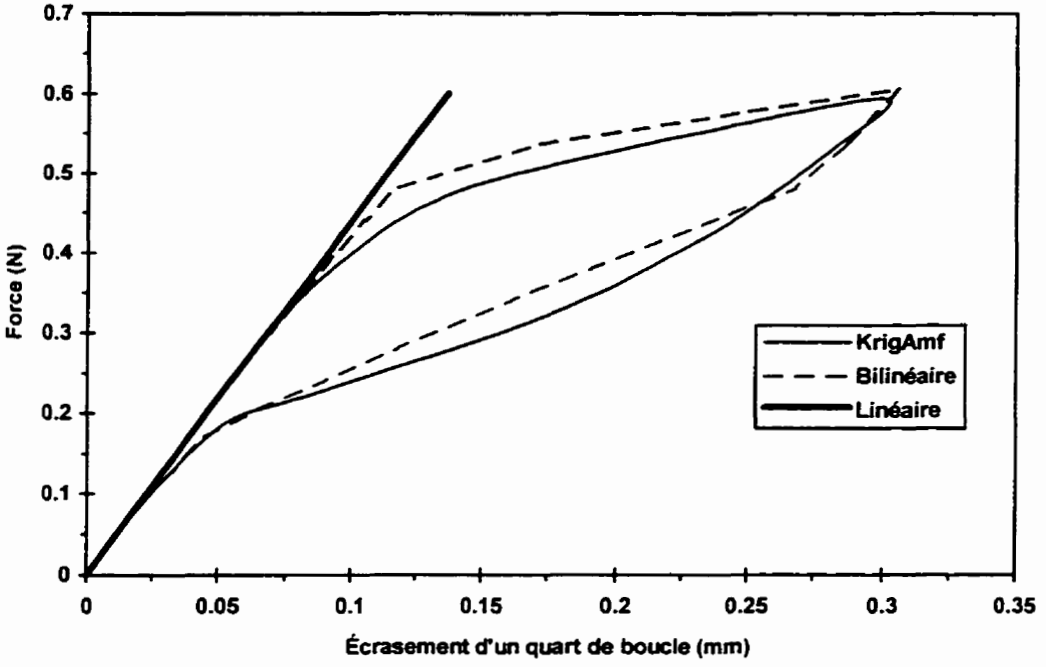


Figure 7.11 Courbes d'écrasement d'un quart de boucle calculées en utilisant trois relations constitutives (linéaire, modèle bilinéaire et *KRIGAMF*).

La figure 7.11 démontre une certaine concordance des résultats entre l'analyse bilinéaire et celle réalisée avec *KRIGAMF*. Le comportement avec *KRIGAMF* est plus lisse car les transitions de pente de la relation constitutive se font graduellement, ce qui n'est pas le cas avec le modèle bilinéaire. À moins que la contraction du stent demeure assez faible (écrasement maximal d'un quart de boucle de l'ordre de 0.1 mm), il est évident qu'une analyse linéaire est inadmissible car rapidement, le comportement devient non-linéaire.

Il est également intéressant d'analyser l'impact du choix de la relation constitutive sur la distribution de la contrainte calculée à l'intérieur du stent. Puisque l'élément poutre du logiciel est formé de 8 couches, la distribution de la contrainte au travers de la section de la poutre peut être tracée à partir des 8 valeurs de contraintes calculées à la position médiane de chaque couche. La figure 7.12 illustre la position médiane de chaque couche et à chacune de ces positions médianes est associée une lettre entre A et H. Ces 8 lettres

sont utilisées aux figures 7.13, 7.17 et 7.18 pour caractériser la section des éléments poutres.

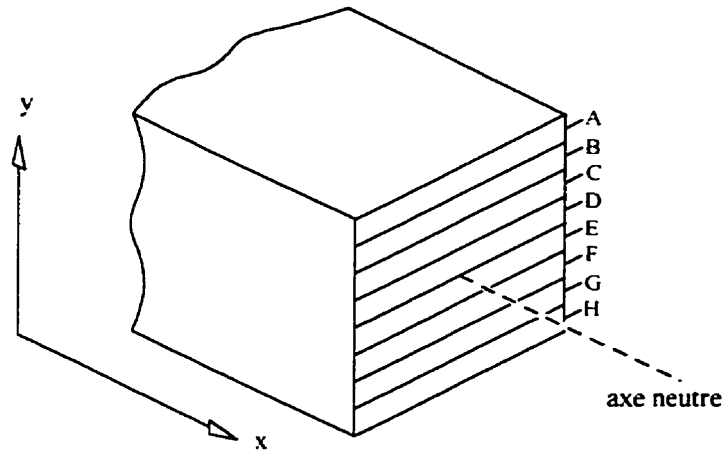


Figure 7.12 Position médiane des 8 couches d'un élément poutre.

La figure 7.13 présente la distribution de la contrainte axiale de flexion dans le premier élément (voir élément #1 de la figure 7.9) du maillage pour deux écrasements d'un quart de boucle au chargement, soit 0.13 mm et 0.3 mm. Les autres contraintes de cisaillement sont négligeables devant la contrainte axiale en flexion car la poutre est très élancée.

Les résultats de la figure 7.13 concordent avec ceux de la figure 7.11. En effet, la différence entre les distributions de contrainte axiale obtenues avec la relation constitutive bilinéaire et *KRIGAMF* est plus grande pour un écrasement d'un quart de boucle de 0.13 mm par rapport à un écrasement de 0.3 mm. En observant la courbe au chargement de la figure 7.11, on remarque effectivement un plus grand écart entre les deux courbes pour un écrasement de 0.13 mm. Les courbes macroscopiques du stent, c'est-à-dire les courbes d'écrasement d'un quart de boucle en fonction de la charge appliquée, sont donc en étroite relation avec les courbes microscopiques qui caractérisent la distribution de la contrainte à l'intérieur du stent.

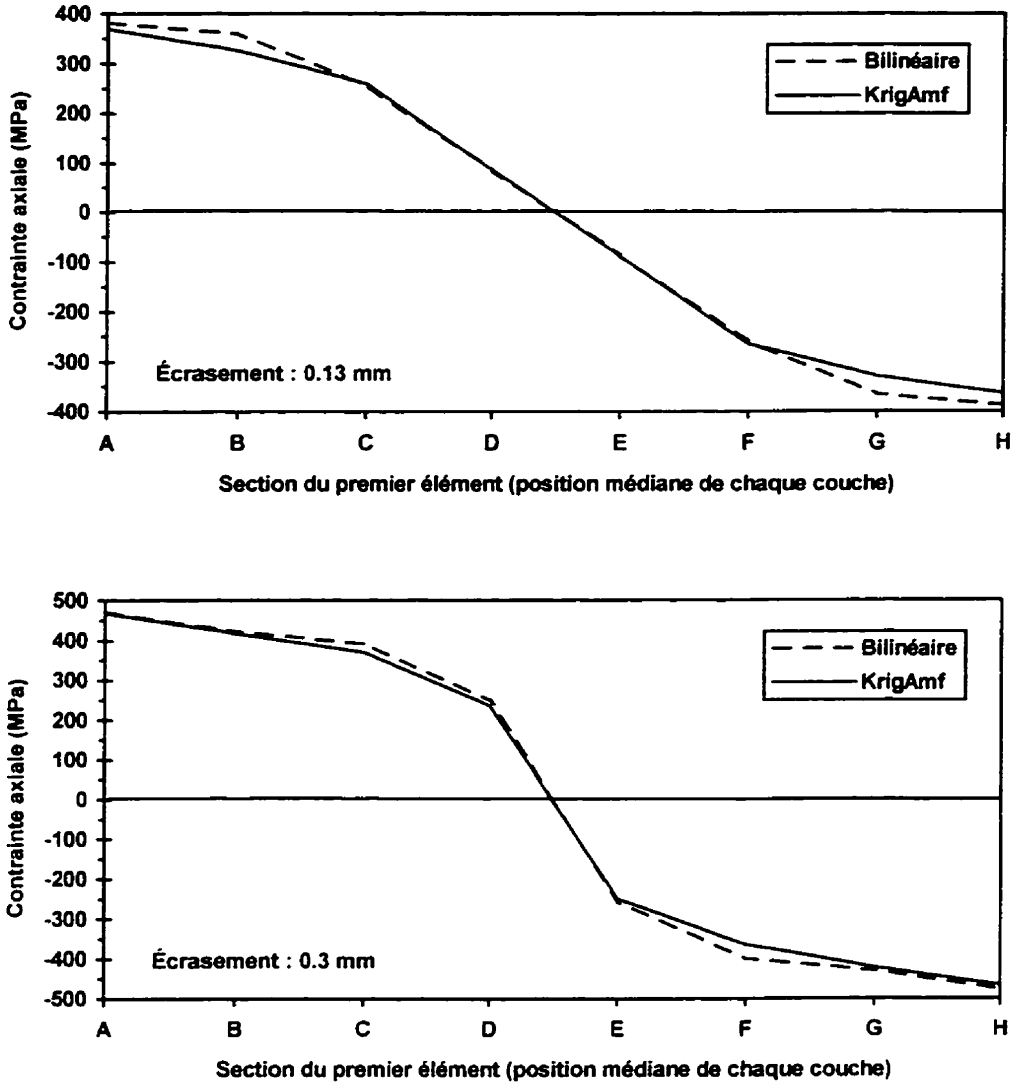


Figure 7.13 Distribution de la contrainte axiale dans le premier élément pour des écrasements d'un quart de boucle de 0.13 mm et 0.3 mm.

Afin d'avoir le maximum de précision lors de la simulation tant au niveau de l'écrasement d'un quart de boucle qu'au niveau des intensités de contrainte dans la section, *KRIGAMF* est choisi comme relation constitutive pour simuler le comportement du stent permanent superélastique. L'envers de la médaille associé à ce choix est que le temps d'exécution de la simulation par éléments finis est passablement plus long comparativement au temps requis lorsque la simulation est réalisée avec le modèle bilinéaire.

7.5.2 Détermination du rayon critique du cathéter

L'état de sollicitation le plus sévère pour le stent superélastique permanent survient lorsqu'il est contracté dans le cathéter. Lorsque le stent se retrouve dans l'artère, les déformations sont bien inférieures. Pour avoir un fonctionnement adéquat, l'insertion dans le cathéter ne doit pas plastifier localement le stent. Bien entendu, la plastification microscopique causée par certains défauts inhérents aux matériaux tels les microfissures ou les lacunes dans le réseau cristallin est inévitable et ce genre de plastification n'est pas modélisé.

La démarche suivie dans cette section consiste à contracter graduellement le stent jusqu'à ce que la plastification se manifeste. De cette façon, il est possible de déterminer le rayon critique du cathéter qui n'engendre aucune zone plastifiée dans le stent. Imaginons que la température à laquelle l'insertion du stent dans le cathéter s'effectue est $A_f = 20°C$. La relation constitutive de l'alliage modélisée par *KRIGAMF* (figure 7.10) permet d'estimer le début de la plastification lorsque la contrainte axiale atteint une valeur de 580 MPa. Cette valeur est réaliste car elle correspond à des déformations de 8%. De plus, le comportement de l'alliage à la température T_1 pour un tel niveau de déformation indique clairement qu'une plastification est imminente car la transformation de phase est complétée (comportement élastique de la martensite). Lors de l'écrasement d'un quart de boucle, le premier élément ainsi que le huitième sont les éléments les plus sollicités. Dans l'élément #1, la fibre supérieure est en tension alors que la fibre inférieure, en compression. Le contraire est observé dans l'élément #8. Par contre, le profil de la distribution de la contrainte axiale dans la section de ces deux éléments est pratiquement identique. Par conséquent, seulement les résultats pour l'élément #1 sont présentés. La contrainte axiale maximale est obtenue dans les couches extrêmes de l'élément poutre, c'est-à-dire dans les couches A et H de la figure 7.12.

La figure 7.14 montre l'évolution de la contrainte axiale maximale dans le stent en fonction du rayon relatif du stent. Le rayon relatif est le rayon R du stent divisé par le

rayon initial R_i de 4.0 mm. En appliquant une force quelconque, le quart de boucle s'écrase et l'insertion du stent dans le cathéter est ainsi simulé. Le rayon R du stent correspondant à un écrasement d'un quart de boucle est calculé par l'équation (7.1) qui relie la largeur L du quart de boucle au rayon R du stent. La largeur L du quart de boucle est obtenue en retranchant l'écrasement calculé à la largeur initiale de 2.072 mm. En somme, le rayon relatif du stent est facilement déterminé en connaissant l'écrasement d'un quart de boucle. Pour chaque incrément d'écrasement d'un quart de boucle, la contrainte axiale maximale est relevée et le rayon du stent est calculé. Le résultat, la courbe notée AMF, est présenté à la figure 7.14.

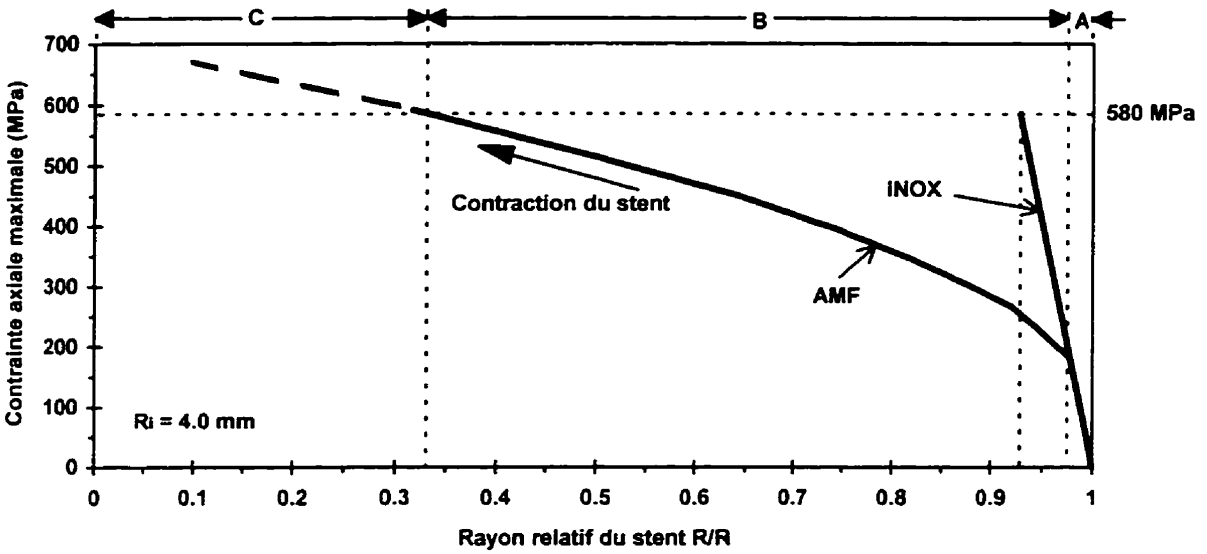


Figure 7.14 Évolution de la contrainte axiale maximale dans l'élément #1 en fonction du rayon relatif R/R_i du stent lors de la contraction.

La courbe AMF de la figure 7.14 permet de déterminer le plus petit rayon interne du cathéter pour lequel la contrainte maximale dans le stent est de 580 MPa. Cette figure fait ressortir trois zones notées A, B et C. Dans la zone A, le stent est complètement en austénite et son comportement est élastique linéaire. Dans la zone B, les parties du stent les plus sollicitées commencent à se transformer en martensite et le comportement

devient non-linéaire. Dans la zone C, les contraintes atteignent localement des valeurs supérieures à 580 MPa. Les endroits critiques où la plastification débute sont les couches inférieures et supérieures des éléments 1 et 8. Le stent est alors endommagé et il faut absolument éviter de lui imposer des contractions aussi sévères.

Pour le stent en AMF, le plus petit rayon relatif qui n'engendre aucune plastification est 0.325. Le rayon interne du cathéter est alors 1.3 mm. Un plus petit rayon créerait des zones plastiques dans le stent qui l'abîmeraient irréversiblement. D'un point de vue chirurgical, si le rayon interne minimal du cathéter est trop gros, c'est toute la conception du stent qui doit être revue. Il est possible d'optimiser le stent en modifiant les dimensions de la section ou en utilisant des boucles de géométrie différente. Un nouvel alliage pourrait également être considéré.

La figure 7.14 montre également le comportement d'un stent classique en acier inoxydable (courbe notée INOX). On suppose que le début de la plastification survient à 580 MPa, ce qui est assez élevé pour un acier. Les résultats montrent que les premières zones plastifiées du stent apparaissent lors de très faibles contractions. Le rayon relatif est alors de 0.925, ce qui signifie que le stent en acier inoxydable est 9 fois moins contracté que le stent en Ti-Ni. Ceci démontre bien que l'alliage à mémoire de forme ne peut pas être remplacé par un alliage classique pour ce type d'application.

7.5.3 Analyse de la contraction du stent

La véritable analyse par éléments finis du stent permanent superélastique peut maintenant être réalisée. Le maillage ainsi que la relation constitutive ont été choisis et la contraction maximale du stent avant la création de zones plastifiées est connue. L'analyse consiste à imposer une contraction du stent jusqu'à un rayon de 2.5 mm (rayon relatif de $R/R_i = 0.625$ et écrasement d'un quart de boucle de 0.77 mm) afin de simuler l'insertion dans la cathéter. Ce rayon est supérieur au rayon critique précédemment calculé, ce qui

assure qu'aucune zone plastifiée ne sera créée dans le stent. Par la suite, après l'expulsion du cathéter, le stent se déploie jusqu'à un rayon de R = 3.3 mm, ce qui correspond à un écrasement d'un quart de boucle de 0.363 mm. Ce dernier rayon est celui de l'artère dans lequel le stent est positionné. La figure 7.15 présente la courbe d'écrasement d'un quart de boucle en fonction de la charge appliquée.

Il est important de rappeler que seulement la contraction du stent dans le cathéter suivie d'un déploiement dans l'artère sont modélisés. En ce qui concerne l'étape de contraction dans le cathéter, l'analyse est tout à fait valable. Par contre, pour le déploiement, deux simplifications sont apportées. Premièrement, le rayon du stent lorsqu'il est positionné dans l'artère est imposé à 3.3 mm. Ceci laisse sous-entendre que l'artère est rigide et qu'elle ne subit aucune déformation lors du déploiement du stent. Une analyse plus approfondie pourrait prendre en considération la rigidité de l'artère afin de calculer le rayon du stent lorsque l'équilibre mécanique est atteint entre le stent et l'artère. De tels calculs sont assez difficiles à réaliser car les algorithmes requis pour déterminer le moment où le stent entre en contact avec l'artère deviennent rapidement complexes. Deuxièmement, au tout début du déploiement, la température peut être supposée identique à la température d'insertion dans le cathéter, principalement à cause de l'inertie thermique du cathéter. Par contre, lorsque le stent s'appuie contre l'artère pendant le déploiement, sa température s'élève pour atteindre la température du corps humain. Ces variations de température ainsi générés modifient l'état de contrainte dans le stent et pour l'instant, elles sont négligées.

Néanmoins, la phase critique pour le stent permanent superélastique est son insertion dans le cathéter. Le fait de modéliser avec une bonne fidélité cette étape cruciale permet d'obtenir des résultats fiables. Les simplifications apportées lors du déploiement dans l'artère ont peu de conséquences sur l'analyse en générale. L'étude réalisée dans ce chapitre s'attarde exclusivement au stent proprement dit. En effet, à titre d'exemple, l'augmentation des contraintes dans l'artère à la suite du déploiement du stent n'est pas

estimée. La présente étude assure que le stent conservera son intégrité mécanique lors d'une utilisation normale.

Les résultats de la figure 7.15 ne doivent pas être comparés avec ceux obtenus lors du choix de la relation constitutive de la figure 7.11. À la figure 7.15, la simulation isotherme s'effectue à la température A_f de 20°C alors que pour le choix de la relation constitutive, l'analyse était réalisée à la température T_2, c'est-à-dire à 30°C. La différence de température entre les deux analyses affecte grandement les courbes d'écrasement d'un quart de boucle. En effet, la transformation de phase débute pour une force d'écrasement plus faible à la température de 20°C.

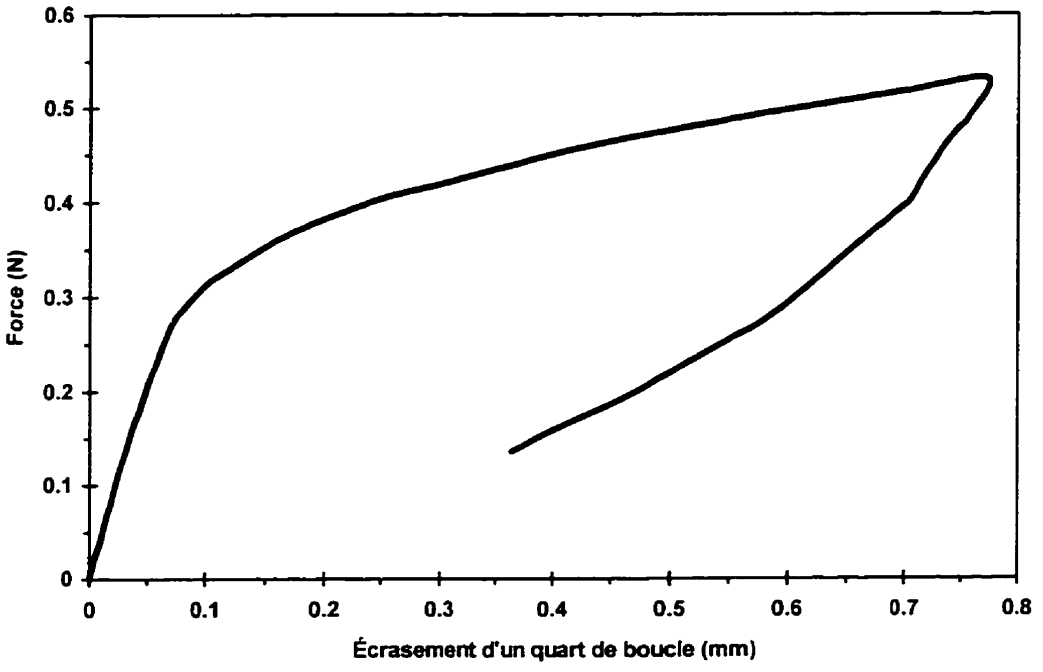


Figure 7.15 Courbe d'écrasement d'un quart de boucle lors de la contraction du stent dans le cathéter suivi d'un déploiement dans l'artère.

7.5.4 Analyse de la distribution de contrainte dans le stent

Étant donné qu'un quart de boucle est représenté par des éléments poutres très élancés, l'état de contrainte dans le stent est pratiquement uniaxial. En effet, le cisaillement est environ dix fois plus petit en intensité que la tension axiale dans les éléments poutres. Pour un écrasement d'un quart de boucle de 0.77 mm, la distribution de la contrainte axiale dans chacun des 8 éléments du maillage est superposée sur le graphique de la figure 7.16. Cet écrasement correspond au stent contracté dans le cathéter avec un rayon de 2.5 mm. La courbe notée E1 correspond à la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément, E2 pour le second élément et ainsi de suite jusqu'au huitième élément.

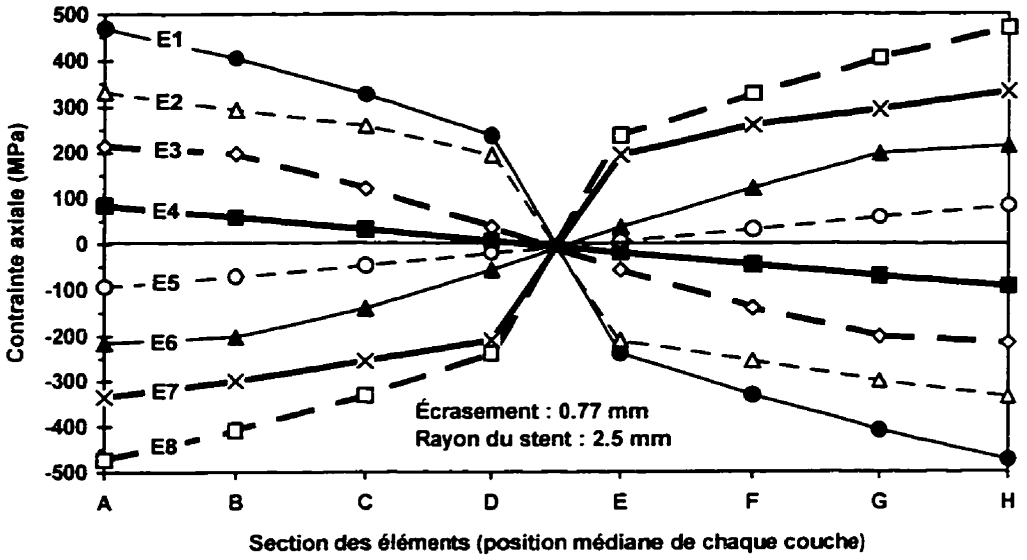


Figure 7.16 Distributions de la contrainte axiale dans les 8 éléments du maillage pour un écrasement de 0.77 mm (rayon du stent de 2.5 mm).

Les résultats de la figure 7.16 confirment que ce sont les premier et huitième éléments du maillage qui sont les plus sollicités. La distribution de la contrainte axiale dans ces deux éléments est identique mais inversée l'une par rapport à l'autre. De plus, chaque élément peut être associé à un autre élément pour lequel la distribution de la contrainte axiale est identique mais inversée. C'est le cas des éléments 2 et 7, 3 et 6 ainsi que 4 et 5.

Les éléments 4 et 5 sont les seuls éléments qui demeurent complètement en austénite lors de l'insertion du stent dans le cathéter. Dans ces éléments, aucune transformation de phase n'est générée et le comportement est entièrement linéaire (voir les courbes E4 et E5 de la figure 7.16). Dans les autres éléments, certaines couches ont débuté leur transformation en martensite. Selon la relation constitutive définie dans *KRIGAMF*, pour la température de simulation $A_f = 20°C$, la contrainte pour laquelle l'austénite commence à se transformer en martensite est 210 MPa. Puisque le critère de transformation de phase est celui de Mises, la transformation débute pour une intensité de contrainte identique en tension et en compression.

Pour les éléments 3 et 6, les couches C, D, E et F sont donc en austénite alors que les quatre autres couches se transforment progressivement en martensite. Enfin, dans le cas des éléments 1, 2, 7 et 8, toutes les couches sont constituées d'un mélange de martensite et d'austénite car la contrainte axiale à l'intérieur de chacune d'elle est comprise entre 210 MPa (début de la transformation) et 580 MPa (fin de la transformation et début de la plastification). Bien entendu, les couches extrêmes A et H sont constituées d'une proportion plus grande de martensite car l'intensité de la contrainte axiale est plus élevée.

La figure 7.17 montre l'évolution de la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément, l'élément le plus sollicité lors de la contraction du stent pour son insertion dans le cathéter. Chaque courbe correspond à un rayon R du stent variant entre 3.9 mm et 2.5 mm. En fait, la contraction débute pour un rayon de 4.0 mm mais il est inutile d'indiquer la distribution de la contrainte pour ce rayon car toutes les contraintes sont nulles. D'un autre côté, la figure 7.18 reprend le même genre d'évolution mais cette fois lors du déploiement du stent dans l'artère. Le stent passe alors d'un rayon de 2.5 mm jusqu'à un rayon de 3.3 mm. Cette dernière dimension représente le rayon de l'artère dans laquelle le stent est positionné.

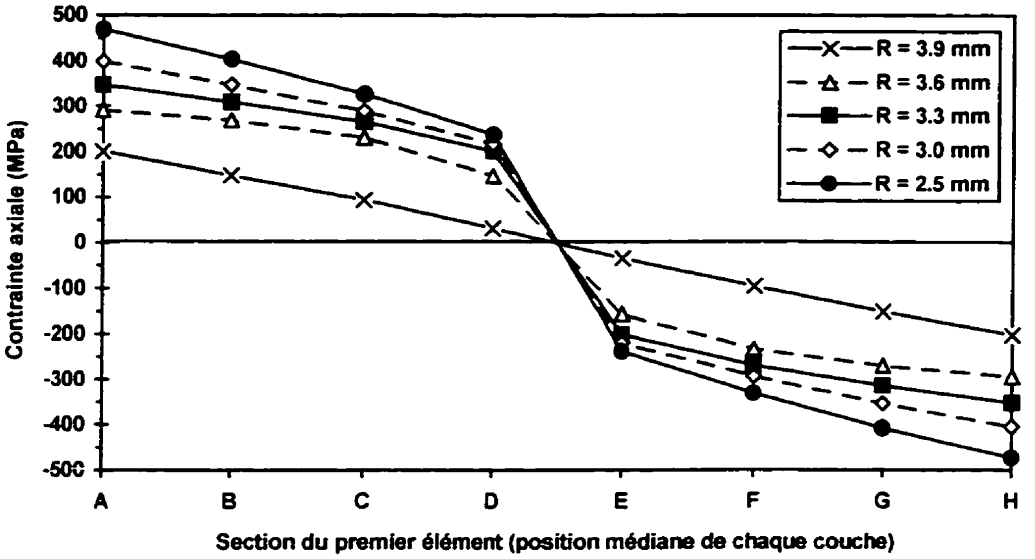


Figure 7.17 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément lors de la contraction du stent dans le cathéter.

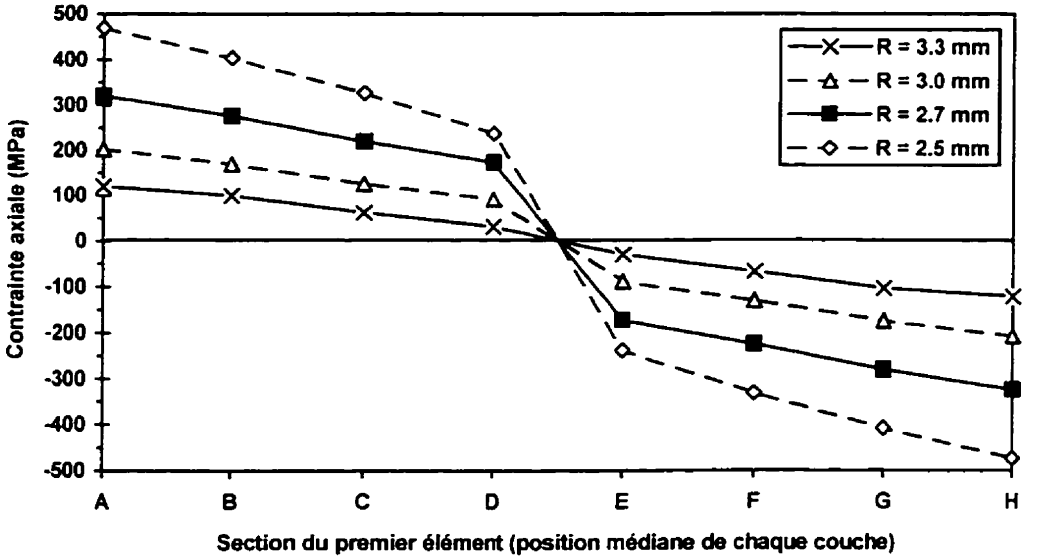


Figure 7.18 Évolution de la distribution de la contrainte axiale dans le premier élément lors du déploiement du stent dans l'artère.

Selon la figure 7.17, les zones les plus sollicitées se transforment rapidement en martensite lors de la contraction. Pour une très faible contraction, c'est-à-dire lorsque le rayon du stent passe de 4.0 mm à 3.9 mm, les couches A et H sont sur le point d'entreprendre une transformation de phase car la contrainte est très voisine de 210 MPa. Lorsque le rayon du stent atteint 3.6 mm, seulement les couches D et E du coeur de l'élément poutre sont encore complètement austénitiques. Enfin, toute la section du stent subit progressivement une transformation de phase pour des contractions inférieures à 3.6 mm. La transformation martensitique est donc extrêmement avantageuse pour ce type d'application car rapidement, la martensite créée suite au phénomène de superélasticité permet d'accommoder les grandes déformations sans plastifier le matériau.

La figure 7.18 permet de confirmer que les intensités de contrainte dans le stent sont beaucoup moins élevées lorsqu'il est positionné dans l'artère. En effet, en comparant le profil de contrainte pour un rayon de 3.3 mm lors de la contraction du stent (figure 7.17) avec le profil pour un rayon identique une fois déployé dans l'artère (figure 7.18), on remarque que la contrainte maximale est environ 3 fois plus faible lorsque le stent est dans l'artère. Cela démontre bien que l'étape critique pour le stent permanent superélastique est son insertion dans le cathéter. Une fois positionné dans l'artère, le stent est très faiblement sollicité et les risques d'une défaillance sont donc très minimes. Le profil de contrainte est alors presque linéaire avec une contrainte maximale d'environ 120 MPa. Étant donné que les niveaux de contrainte sont relativement faibles, la tenue en fatigue est excellente. Cette propriété est un avantage pour ce type de stent car dans sa vie utile, c'est-à-dire lorsqu'il est installé dans le corps humain, le stent est continuellement soumis à de légères contractions causées par la circulation sanguine dans l'artère.

En conclusion, les simulations numériques démontrent la faisabilité du stent superélastique permanent. Par contre, il semble que le design du stent n'est pas optimisé. En effet, lorsque le stent est contracté au maximum sans engendrer de plastification

(rayon relatif de 0.325, figure 7.14), il persiste des zones dans le stent qui ne bénéficient pas de la transformation de phase par superélasticité (éléments 3 à 6 de la figure 7.16). La proportion du stent qui demeure en austénite est alors évaluée approximativement à 40%. Pour avoir de meilleures performances du stent, c'est-à-dire l'obtention d'une contraction maximale dans le cathéter encore plus prononcée afin de diminuer l'ampleur de l'intervention chirurgicale, il faudrait modifier la géométrie des boucles ou la section du fil qui compose les boucles. Cette étape d'optimisation ne fait pas partie de cette étude car le but présentement recherché est de présenter les différentes possibilités qu'offrent les logiciels pour la conception d'une composante en alliage à mémoire de forme.

Conclusion

Le mandat premier de cette thèse concerne le développement d'outils de modélisation numérique spécialement adaptés à la conception de composantes en alliage à mémoire de forme. Selon le cheminement qui mène à ce but, la première étape est le développement de relations constitutives. L'approche originale et innovatrice fondée sur le krigeage présentée au troisième chapitre permet de considérer tous les principaux comportements thermomécaniques des alliages à mémoire de forme au sein d'une même formulation. Le modèle est phénoménologique car il est construit à partir de courbes expérimentales, mais les courbes expérimentales peuvent être remplacées par des courbes calculées par un autre modèle afin de diminuer la quantité de caractérisations expérimentales nécessaires. Le modèle en soi est unidimensionnel, mais une généralisation tridimensionnelle fondée sur un critère asymétrique de Prager représente un volet original de la recherche. Certains phénomènes microstructuraux comme la dégradation de l'alliage lors d'un chargement cyclique (fatigue) ne sont pas actuellement considérés. Par contre, le krigeage permet d'introduire des variables additionnelles dans le modèle pour tenir compte de cette dégradation et des travaux en ce sens peuvent être envisagés.

Pour calculer la réponse d'une composante en alliage à mémoire de forme, un programme d'éléments finis tridimensionnels a été développé. Ce programme est fondé sur une formulation incrémentale de type Lagrangienne-réactualisé afin de considérer les effets de la non-linéarité géométrique. La non-linéarité du matériau est considérée par l'entremise des liens établis entre le programme d'éléments finis et les relations constitutives spécialement conçues pour les alliages à mémoire de forme. Les développements effectués dans le cadre de cette thèse constituent à notre connaissance les premiers véritables outils de modélisation numérique spécifiquement adaptés à la conception de composantes en alliage à mémoire de forme. Afin de généraliser davantage les outils de calcul, un volet thermique devrait être implanté. De cette façon,

la diffusion de la chaleur pourrait être calculée dans la composante tout en prenant en compte les effets endothermiques et exothermiques de la transformation de phase.

Les simulations réalisées dans les derniers chapitres avec le programme d'éléments finis couplé aux relations constitutives a permis de tirer d'importantes conclusions sur la conception de deux dispositifs en alliage à mémoire de forme. Dans un premier temps, une rondelle Belleville insérée dans un joint boulonné s'est avérée efficace pour générer des efforts supplémentaires lors d'un chauffage du montage. Par contre, le dispositif a démontré une importante lacune au refroidissement en perdant une importante partie de la force de serrage. La conception des joints boulonnés munis d'une rondelle à mémoire de forme doit être revue en profondeur. Dans un second temps, le stent médical superélastique calculé par éléments finis a permis de valider le déploiement superélastique du stent dans l'artère. Ces deux exemples montrent la validité et les différentes possibilités du programme d'éléments finis pour assister le concepteur de composantes à mémoire de forme. Dorénavant, la conception de dispositifs à mémoire de forme sera grandement accélérée et les risques d'une défaillance du dispositif seront passablement diminués. Ce sont du moins les espoirs qui sont véhiculés par la venue de ces nouveaux outils de modélisation numérique.

Références

1.1 FUNAKUBO, H. (1986). *Shape Memory Alloys*, Gordon and Breach Science Publishers, pp. 275.

1.2 PATOOR, E. et BERVEILLER, M. (1994). *Techonologie des alliages à mémoire de forme*, Hermès, Paris, pp. 288.

1.3 MELLOR, B.G. (1989). *Engineering Properties of Shape Memory Alloys*, Proceedings of the course "The Science and Technology of Shape Memory Alloys", Barcelona, pp. 334-394.

1.4 WECHLSLER, M.S., LIEBERMAN, D.S. et READ, T.A. (1953). Trans AIME, 197, 1503.

2.1 PATOOR, E., BENSALAH, M.O., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1992). *Détermination du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme par optimisation d'un potentiel thermodynamique*, Revue de Métallurgie.

2.2 PATOOR, E., (1993). *Modélisation thermomécanique du comportement des matériaux et structures à mémoire de forme*, Actes du congrès Technologie et Mise en Oeuvre des Matériaux à Mémoire de Forme, Montréal, Canada.

2.3 AMRANI, M.E., BENSALAH, M.O., PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1993). *Détermination des surfaces de début et de fin de transformation pour un alliage à mémoire de forme*, Actes du Premier Congrès Marocain de Mécanique, Rabat, Maroc.

2.4 PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1988). *Thermomechanical Behaviour of Shape Memory Alloys*, Arch. Mech., 40, 5-6, pp. 775-794.

2.5 PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1988). *An Integral Equation for the Polycristalline Thermomechanical Behavior of Shape Memory Alloys*, Proceedings of MECAMAT - International seminar on the Inelastic Behaviour of Solids : Models and Utilization, Besançon (France).

2.6 PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1993). *Micromechanical Modelling of Superelasticity in Shape Memory Alloys*, Pitman Research Notes in Mathematics.

2.7 SUN, Q.P. et HWANG, K.C. (1993). *Micromechanics Modelling for the Constitutive Behavior of Polycristalline Shape Memore Alloys (part I and II)*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, No. 1, pp. 1-33.

2.8 LIKHATCHEV, V.A. et MALININ, V.G. (1993). *Structure-Analytical Theory of Strength*, Nauka, St-Pétersbourg, 471 p.

2.9 LIKHATCHEV, V.A. (1995). *Structure-Analitycal Theory of Martensitic Unelasticity*, Journal de Physique IV, Colloque C8, supplément au Journal de Physique III, Volume 5.

2.10 ERGLIS, I.V., ERMOLAYEV, V.A. et VOLKOV, A.E. (1995). *A Model of Martensitic Unelasticity Accounting for the Crystal Symmetry of the Material*, Journal de Physique IV, Colloque C8, supplément au Journal de Physique III, Volume 5.

2.11 KNOWLES, K.M. et SMITH, D.A. (1981). *The Crystallography of the Martensitic Transformation in Equiatomic Nickel-Titanium*, Acta. Metall., Vol.29, pp.101-110.

2.12 TANAKA, K. (1986). *A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-dimensional Tensile Behavior*, Res. Mech., 18, pp. 251-263.

2.13 TANAKA, K. (1990). *A Phenomenological Description on Thermomechanical Behavior of Shape Memory Alloys*, J. Pressure Vessel Technology, Vol. 112, pp.158-163.

2.14 TOBUSHI, H., TANAKA, K., KIMURA, K., HORI, T. et SAWADA, T. (1992). *Stress-Strain-Temperature Relationship Associated with the R-Phase Transformation in TiNi Shape Memory Alloy*, JSME International Journal, Series I, Vol. 35, No. 3, pp. 278-284.

2.15 TOBUSHI, H., IWANAGA, H., TANAKA, K., HORI, T. et SAWADA, T. (1992). *Stress-Strain-Temperature Relationship of TiNi Shape Memory Alloy Suitable for Thermomechanical Cycling*, JSME International Journal, Series I, Vol. 35, No. 3, pp. 271-277.

2.16 BOYD, J.G. et LAGOUDAS, D.C. (1994). *Thermomechanical Response of Shape Memory Composites*, J. of Intelligent Material Systems & Structures, Vol. 5, pp. 333-346.

2.17 MÜLLER, I. et XU, H. (1991). *On the Pseudo-Elastic Hysteresis*, Acta Metall. Mater., Vol. 39, No. 3, pp. 263-271.

2.18 BRANDON, D. et ROGERS, R.C. (1992). *Constitutive Laws for Pseudo-Elastic Materials*, J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., Vol. 3, pp. 255-267.

2.19 PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER, M. (1987). *Potentiel pseudoelastique et placicité de transformation martensitique dans les mono- et polycristaux métalliques*, Acta Metall., Vol. 35, No. 11, pp. 2779-2789.

2.20 GILLET, Y., PATOOR, E. et BERVEILLER, M. (1992). *Mechanical Engineering for Shape Memory Alloys*, Proceedings of the International Conference on Martensitic Transformations.

2.21 GILLET, Y., PATOOR, E. et BERVEILLER, M. (à paraître). *Sollicitation non homogène de poutre superélastique avec hystérésis.*

2.22 GILLET, Y., PATOOR, E. et BERVEILLER, M. (à paraître). *Beam theory Applied to Shape Memory Alloys.*

2.23 RANIECKI, B. et LEXCELLENT, C. (1994). *R_L-Models of Pseudoelasticity and their Specification for some Shape Memory Solids*, Eur. J. Mech., A/Solids, 13, No. 1, pp. 21-50.

2.24 LECLERCQ, S., LEXCELLENT, C., TOBUSHI, H. et LIN, P.H. (à paraître). *Thermodynamical Modelling of Recovery Stress Associated with R-Phase Transformation in TiNi Shape Memory Alloys*, Mat. Trans. JIM.

2.25 RANIECKI, B., LEXCELLENT, C. et TANAKA, K. (1992). *Thermodynamic Models of Pseudoelastic Behavior of SMA*, Arch. Mech., 44, 3, pp. 261-284.

2.26 BOURDON, G. et LEXCELLENT, C. (1994), *Modélisation thermodynamique du comportement cyclique d'alliages à mémoire de forme TiNi et CuZnAl sollicités en traction ondulée*, Journal de Physique IV, Colloque C3, supp. au Journal de Physique III, Vol. 4, pp.145-150.

2.27 ORTIN, J. (1991). *Partiel Hysteresis Cycles in Shape-Memory Alloys: Experiments and Modelling*, Journal de Physique IV, Colloque C4, supp. au Journal de Physique III, Vol. 1, pp. 65-70.

2.28 HAWKINS, L.E., VICK, B. et ROGERS, C.A. (1990). *An Investigation of the Transient Thermal Response of a Shape Memory Alloy Composite Beam*, AIAA-90-0941-CP, pp. 1972-78.

2.29 LIANG, C. et ROGERS, C.A. (1990). *Behavior of Shape Memory Alloy Actuators Embedded in Composites*, ICCM Proceedings of the 8th International Conference on Composite Materials.

2.30 BAZ, A., IMAM, K. et MCCOY, J. (1989). *Active Vibration Control of Flexible Beams Using Shape Memory Actuators*, source inconnue.

2.31 GANGHOFFER, J.F., DENIS, S., GAUTIER, E., SIMON, A., SIMONSSON, K. et SJÖSTRÖM, S. (1991). *Micromechanical Simulation of a martensitic Transformation by Finite Elements*, Journal de Physique IV, Colloque C4, supp. au Journal de Physique III, Vol. 1, pp. 77-82.

2.32 COLLINS, C. et LUSKIN, M. *Computational Results for Phase Transitions in Shape Memory Materials*, source inconnue.

2.33 LECLERCQ, S., LEXCELLENT, C. et GELIN, J.C. (1993). *Utilisation de la méthode des éléments finis pour l'étude du comportement pseudoélastique de structures en alliage à mémoire de forme*, Actes du 11ème Congrès Français de Mécanique, Vol. 4, pp.173-176.

2.34 BRINSON, L.C. et LAMMERING, R. (1993). *Finite Element Analysis of the Behavior of Shape Memory Alloys and their Applications*, Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 23, pp. 3261-3280.

3.1 KRIGE, D.G. (1951). *A statical Approach to Some Basic Mine Evaluation Problems on the Witwatersrand*, J. Chem. Min. Soc. S. Afr., 52, pp. 119-139.

3.2 MATHERON, G. (1973). *The Intrinsic Random Functions and Their Applications*, Adv. In Appl. Prob., 5, pp. 439-468.

3.3 TROCHU, F. (1993). *A Contouring Program Based on Dual Kriging Interpolation*, Engineering with Computers, No. 9, pp. 160-177.

3.4 TROCHU, F., MEUNIER, M.A. et TERRIAULT, P. (1994). *Modélisation thermo-mécanique d'un alliage à mémoire de forme en sollicitation uniaxiale*. Actes de IA-SMA 94, Québec, Canada.

3.5 LIKHATCHEV, V.A. et MALININ, V.G. (1993). *Structural-Analytical Theory of Strengh*, Nauka, St-Petersburg, 471 p.

3.6 PATOOR, E., EBERHARDT, A. et BERVEILLER M. (1987). *Potentiel pseudoplastique et plasticité de transformation martensitique dans les mono- et polycristaux métalliques*, Acta metall., Vol. 35, No. 11, pp. 2779-2789.

4.1 TROCHU, F. et QIAN, Y.Y. (1997). *Nonlinear Finite Element Simulation of Superelastic Shape Memory Alloy Parts*, Computer & Structures, Vol.62, No.5, pp. 799-810.

4.2 INCROPERA, F.P. et DE WITT, D.P. (1990). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, 3ième édition.

4.3 BATHE, K.J. (1996). *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.

4.4 GILLET, Y. (1994). Dimensionnement d'éléments simples en alliage à mémoire de forme, Thèse de doctorat de l'Institut supérieur de génie mécanique et productique, Université de Metz, France.

5.1 WAHL, A.M. (1944). *Mechanical Springs*, Penton Publishing Company, Cleveland, Ohio, 238-262.

5.2 DROUIN, G., GOU, M., THIRY, P. et VINET, R. (1986). *Éléments de machines*, Édition de l'École Polytechnique de Montréal, deuxième édition, pp. 543.

5.3 BRAUNOVIC, M. et MARJANOV, M. (1995). *Thermoelastic Ratcheting Effect in Bolted Aluminium-to-Aluminium Connections*, IEEE, CH2453-4/87/0000-123.

5.4 LABRECQUE, C., BRAUNOVIC, M., TERRIAULT, P., TROCHU, F. et SCHETKY, M. (1996). *Experimental and Theretical Evaluation of the Behavior of a Shape Memory Alloy Belleville Washer under Different Operating Conditions*, Actes de 42nd IEEE Holm Conf. Elect. Cont., Chicago.

5.5 TROCHU, F., BRAILOVSKI, V. et TERRIAULT, P. (1995). *Étude thermomécanique de rondelles Belleville en AMF*, Rapport du CDT #P2019, École Polytechnique de Montréal, pp. 35.

6.1 TERRIAULT, P. (1996). *Étude d'une rondelle Belleville avec des éléments finis de contact*, Rapport de fin de session du cours MEC6404, École Polytechnique de Montréal.

6.2 BOWDER, F.B. et TABOR, D. (1973). *Friction - An Introduction to Tribology*, Anchor Press / Doubleday, New York.

6.3 SCHEY, J.A. (1970). *Metal Deformation Processes - Friction and Lubrification*, Marcel Dekker Inc., New York.

7.1 BRAMFITT, J.E. et HESS, R.L. (1994). *A Novel Heat Activated Recoverable Temporary Stent (Harts System)*, Proceedings of the First Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, Californie, États-Unis, pp.435-442.

7.2 AURICCHIO, F. et TAYLOR, R.L. (1996). *Shape-memory-alloy superelastic behavior : 3D finite-element simulations*, Proceedings of the Third ICIM/ECSSM, Lyon, France, pp.487-492.

Annexe I : Exemples numériques réalisés avec le modèle de Likhatchev et Malinin

Cette annexe présente trois exemples numériques dans le but de clarifier le fonctionnement du modèle microstructural de Likhatchev et Malinin. Ce modèle micromécanique est utilisé comme relation constitutive d'un alliage à mémoire de forme (AMF) dont la description est faite au chapitre 2 de cette thèse. Les équations utilisées dans le modèle proviennent de la formulation générale de Likhatchev et Malinin dans laquelle la proportion globale de martensite ainsi que la déformation macroscopique sont obtenues par intégration des valeurs microscopiques. Les intégrations sont calculées en supposant une fonction de distribution au niveau de l'orientation des grains dans le volume de matière et une seconde fonction de distribution pour la variation des propriétés du matériau (étalement de l'hystérésis et décalage des températures de transformation).

Dans cette annexe, les exemples traités sont simplifiés. Premièrement, on suppose que le volume de matière est composé d'un nombre fini de régions et que chacune d'entre elles occupe la même proportion volumique initiale. L'orientation de chaque région est connue en imposant la valeur des trois angles d'Euler. Par conséquent, l'intégration qui considère toutes les orientations possibles est remplacée par une sommation où le nombre de termes est donné par la quantité de régions considérées. Deuxièmement, on suppose que les trois régions possèdent les mêmes propriétés de matériau (températures de transformation, chaleur échangée par unité de volume lors de la transformation, etc.). Ainsi, aucune intégration supplémentaire n'est effectuée afin de prendre en considération la dispersion des propriétés de l'AMF dans le volume de matière. La proportion de martensite dans le volume total et la déformation macroscopique peuvent être alors calculées par des sommations plutôt que par l'entremise d'intégrales.

À la suite de ces simplifications, la réponse d'un AMF, c'est-à-dire le tenseur de déformation macroscopique, est calculée de façon séquentielle en imposant une série d'incréments de température ΔT et de contrainte $\Delta\sigma_{pq}$. La déformation macroscopique est la somme de deux contributions : une déformation élastique et une déformation de transformation de phase. Dans cette annexe, la déformation due aux dilatations thermiques est négligée. La déformation de transformation est calculée selon l'algorithme présenté à la page suivante. Les régions du volume de matière subissent toutes les mêmes incréments de sollicitations thermomécaniques. Le champ de contraintes internes n'est pas considéré car l'incrément de contrainte appliqué sur chaque région est donné par l'incrément macroscopique $\Delta\sigma_{pq}$. Il est à noter que les propriétés de l'alliage et l'orientation des régions sont connues. Finalement, l'indice t est introduit dans l'algorithme de calcul pour spécifier l'itération durant laquelle un paramètre a été calculé.

Les trois exemples qui suivent montrent le fonctionnement d'une version simplifiée de la théorie de Likhatchev et Malinin. Les deux premiers exemples simulent un comportement superélastique tandis que le troisième exemple modélise un comportement pseudo-plastique suivi d'un effet mémoire simple sens. Certains paramètres sont modifiés d'un exemple à l'autre afin de mettre en valeur leur influence. Une attention particulière est portée sur l'orientation des régions donnée par trois angles d'Euler (Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3) et sur la proportion relative maximale de martensite transformée dans chaque région (Φ_{max}). Dans les exemples, le matériau est composé de trois régions qui occupent le même volume initial, soit le tiers du volume total. La figure I.1 illustre cette situation en représentant les régions dans un espace bidimensionnel. La sollicitation thermomécanique imposée au volume de matière est un cisaillement dans le plan x-y. Toutes les autres composantes du tenseur de contrainte sont nulles. Par contre, certaines autres composantes du tenseur de déformation résultant seront différentes de zéro à cause de la direction préférentielle de la transformation de phase. La majorité des propriétés de l'alliage sont identiques pour toutes les régions et elles sont données au tableau I.1.

Algorithme de calcul de la déformation de transformation

⓪ Imposition des conditions initiales, soit contrainte nulle et 100 % austénite :

- $(\sigma_{pq})_0 = 0$
- $(T^*)_0 = T_0$ pour chaque région
- $T_0 \geq A_f$
- $\Phi_0 = 0$ pour chaque région
- $(\Phi_m)_0 = 0$
- Itération $t = 1$

① Imposition d'un incrément de température $(\Delta T)_t$ et de contrainte $(\Delta\sigma_{pq})_t$

② Calcul de la température et de la contrainte totale :

$$T_t = T_{t-1} + (\Delta T)_t$$

$$(\sigma_{pq})_t = (\sigma_{pq})_{t-1} + (\Delta\sigma_{pq})_t$$

③ Calcul de l'incrément de température effective pour chaque région :

$$\left(\Delta T^*\right)_t = \Delta T_t - \frac{T_0}{q_0}\,\alpha_{ip}\,\alpha_{kq}\,D_{ik}\left(\Delta\sigma_{pq}\right)_t$$

④ Calcul de la température effective de chaque région :

$$\left(T^*\right)_t = \left(T^*\right)_{t-1} + \left(\Delta T^*\right)_t$$

⑤ Calcul de l'incrément de proportion volumique de martensite de chaque région :

$$\Delta\Phi_t = \frac{-\left(\Delta T^*\right)_t}{M_s - M_f}\cdot H\left[-\left(\Delta T^*\right)_t\right]\cdot H\left[1-(\Phi_m)_{t-1}\right]\cdot H\left[\Phi_{max}-\Phi_{t-1}\right]\cdot H\left[M_s-\Phi_{t-1}(M_s-M_f)-\left(T^*\right)_t\right]$$
$$-\frac{\left(\Delta T^*\right)_t}{A_f - A_s}\cdot H\left[\left(\Delta T^*\right)_t\right]\cdot H\left[(\Phi_m)_{t-1}\right]\cdot H\left[\Phi_{t-1}-\Phi_{min}\right]\cdot H\left[\left(T^*\right)_t+\Phi_{t-1}(A_f-A_s)-A_f\right]$$

⑥ Calcul de la proportion volumique de martensite de chaque région :

$$\Phi_t = \Phi_{t-1} + \Delta\Phi_t$$

⑦ Calcul de la proportion volumique globale de martensite :

$$\left(\Phi_m\right)_t = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_t^n$$

⑧ Calcul de la déformation macroscopique totale :

$$\left(\varepsilon_{pq}\right)_t = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\alpha_{pt}^n\,\alpha_{qk}^n\,D_{ik}\,\Phi_t^n$$

⑨ Reprise de l'étape ① avec $t = t + 1$

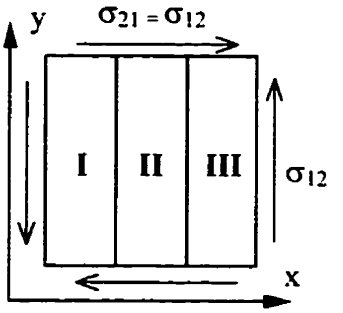


Figure I.1 Représentation des régions du volume de matière.

Tableau I.1 : Propriétés de l'alliage.

Description de la propriété	Symbole utilisé	Valeur numérique
Température "martensite finish"	M_f	100 K
Température "martensite start"	M_s	110 K
Température "austénite start"	A_s	120 K
Température "austénite finish"	A_f	130 K
Température d'équilibre thermodynamique	T_0	115 K
Chaleur échangée par unité de volume	q_0	150 MJ/m^3
Proportion relative minimale de martensite	Φ_{min}	0.0
Proportion relative maximale de martensite	Φ_{max}	Voir chaque exemple
Module d'élasticité de l'austénite	E_A	70 000 MPa
Module d'élasticité de la martensite	E_M	50 000 MPa
Coefficient de Poisson de l'austénite	ν_A	0.33
Coefficient de Poisson de la martensite	ν_M	0.45
Matrice de distorsion : - Sans changement de volume car D_{pp}=0 - Cisaillement dans le plan x-z seulement	D_{ik}	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.075 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exemple 1 : Superélasticité à T = A_f = 130 K

Le premier exemple calcule un chargement superélastique à la température A_f. La proportion relative maximale de martensite est limitée à $\Phi_{max} = 1.0$. Ceci implique qu'une variante de martensite peut croître dans une région jusqu'à ce qu'elle occupe entièrement le volume initial de la région. Elle ne peut pas progresser davantage au détriment des autres régions. Le tableau I.2 donne l'orientation de chaque région définie

par trois angles d'Euler Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3. Enfin, le tableau I.3 reporte les valeurs numériques des paramètres calculées à chacune des 8 itérations selon l'algorithme antérieurement présenté. La sollicitation mécanique imposée est un cisaillement dans le plan x-y allant de 0 MPa jusqu'à 400 MPa suivi de retour à 0 MPa.

Tableau I.2 : Orientation des trois régions de l'exemple 1.

	Ψ_1 (rad.)	Ψ_2 (rad.)	Ψ_1 (rad.)
Région I	0	$\pi/2$	0
Région II	0	0	0
Région III	0	$\pi/4$	0

Tableau I.3 : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 1.

Itération		0 (État initial)	1	2	3	4
ΔT		---	0	0	0	0
T		130	130	130	130	130
$\Delta\sigma$		---	$\begin{bmatrix} 0 & 17391 & 0 \\ 17391 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 7203 & 0 \\ 7203 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1493 & 0 \\ 1493 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 10805 & 0 \\ 10805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 17391 & 0 \\ 17391 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 24594 & 0 \\ 24594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 26087 & 0 \\ 26087 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 36892 & 0 \\ 36892 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ΔT^*	I	---	-20	-8.283	-1.717	-12.426
	II	---	0	0	0	0
	III	---	-14.142	-5.858	-1.214	-8.786
T^*	I	130	110	101.717	100	87.574
	II	130	130	130	130	130
	III	130	115.858	110	108.786	100
$\Delta\Phi$	I	---	0	0.828	0.172	0
	II	---	0	0	0	0
	III	---	0	0	0.121	0.879
Φ	I	0	0	0.828	1	1
	II	0	0	0	0	0
	III	0	0	0	0.121	1
Φ_m		0	0	0.276	0.374	0.667
ε^{TR}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0021 & 0 \\ 0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0027 & 0002 \\ 0027 & 0 & 0 \\ 0002 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0043 & 0018 \\ 0043 & 0 & 0 \\ 0018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0003 & 0 \\ 0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0005 & 0 \\ 0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0006 & 0 \\ 0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0009 & 0 \\ 0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0003 & 0 \\ 0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0026 & 0 \\ 0026 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0033 & 0002 \\ 0033 & 0 & 0 \\ 0002 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0052 & 0018 \\ 0052 & 0 & 0 \\ 0018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau I.3 (suite) : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 1.

Itération		5	6	7	8
ΔT		0	0	0	0
T		130	130	130	130
$\Delta\sigma$		$\begin{bmatrix} 0 & 31.08 & 0 \\ 31.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -277.03 & 0 \\ -277.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -36.02 & 0 \\ -36.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -86.95 & 0 \\ -86.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix} 0 & 400 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 122.97 & 0 \\ 122.97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 86.95 & 0 \\ 86.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ΔT^*	I	-3.574	31.858	4.142	10
	II	0	0	0	0
	III	-2.527	22.527	2.929	7.071
T^*	I	84	115.858	120	130
	II	130	130	130	130
	III	97.473	120	122.929	130
$\Delta\Phi$	I	0	0	0	0
	II	0	0	0	0
	III	0	0	-0.293	0
Φ	I	1	1	1	0
	II	0	0	0	0
	III	1	1	0.707	0
Φ_m		0.667	0.667	0.569	0
ε^{TR}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.043 & 0.018 \\ 0.043 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.043 & 0.018 \\ 0.043 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.038 & 0.013 \\ 0.038 & 0 & 0 \\ 0.013 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.010 & 0 \\ 0.010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.002 & 0 \\ 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.053 & 0.018 \\ 0.053 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.046 & 0.018 \\ 0.046 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.04 & 0.013 \\ 0.04 & 0 & 0 \\ 0.013 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Les figures I.2 et I.3 font ressortir les principaux résultats parmi la quantité importante d'information présentée au tableau I.3. Dans un premier temps, le cisaillement macroscopique σ_{12} est tracé en fonction de la réponse macroscopique ε_{12}^{TOT} à la figure I.2. Lors de la transformation de phase, la distorsion dans la région III génère une déformation de cisaillement ε_{13}^{TOT} qui n'est pas considérée. Le début de la transformation de phase s'effectue de manière saccadée car seulement trois régions sont considérées. Un nombre supérieur de régions avec des orientations différentes produirait une transition plus graduelle. On remarque sur la figure I.2 le comportement élastique de l'austénite qui précède la transformation de phase. Lorsque la transformation de phase est complétée

dans les régions I et III, un comportement élastique est retrouvé. Il s'agit d'un mélange du comportement élastique de la martensite (régions I et III) et du comportement élastique de l'austénite (région II). Lors du déchargement, la position initiale est retrouvée directement à la fin de la transformation de la martensite en austénite. Ceci correspond bien au comportement superélastique d'un AMF pour une température égale à A_f. Les points de la figure I.2 sont numérotés et les numéros correspondent à l'état calculé lors de chacune des 8 itérations.

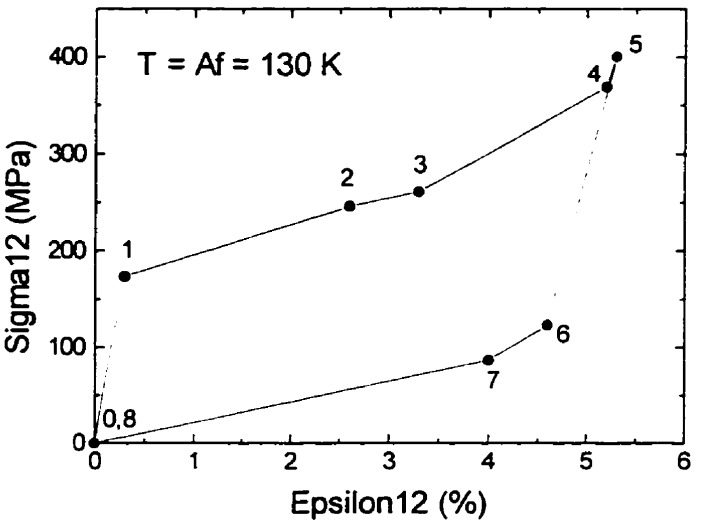


Figure I.2 Réponse macroscopique de l'exemple 1 (σ_{12} en fonction de ε_{12}^{TOT}).

La proportion de martensite de chaque région varie de manière différente lors de l'imposition de la contrainte macroscopique car l'orientation des régions est différente. Par exemple, la région II ne se transforme jamais en martensite puisque la direction de la distorsion est perpendiculaire au cisaillement σ_{12} appliqué. À l'opposé, la distorsion de la région I est dans le même plan que le cisaillement appliqué et seulement une partie de la distorsion de la région III est orientée dans le sens du cisaillement. C'est la raison pour laquelle la transformation de phase de la région I se produit avant celle de la région III et que même lorsque la transformation de phase est complétée dans ces deux régions, la

contribution de la région I est plus importante que celle de la région III au niveau de la composante ε_{12}^{TOT} du tenseur de déformation totale. La figure I.3 présente l'évolution de la proportion de martensite dans chaque région en fonction de la température effective lors des 8 itérations effectuées pendant les calculs. Les carrés vides ainsi que les numéros encadrés se rapportent à l'évolution de la proportion de martensite dans la région I tandis que les points noirs et les autres numéros se rapportent à celle de la région III.

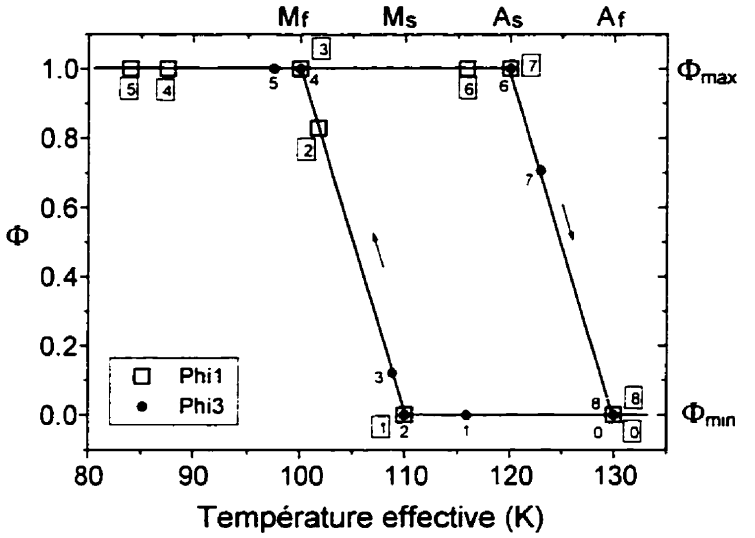


Figure I.3 Évolution de la proportion de martensite dans chaque région pour l'exemple 1.

Le choix de $\Phi_{max} = 1.0$ dans cet exemple limite la proportion globale de martensite à $\Phi_m = 0.667$. En effet, puisque le cisaillement appliqué ne peut pas transformer en martensite la région II et que la transformation des zones I et III ne peut excéder le volume initial de la région ($\Phi_{max} = 1.0$), le tiers du volume total occupé par la région II demeure toujours en austénite. Afin de transformer le volume occupé par les régions les moins "actives" (la région II dans le cas présent), il faut permettre à la transformation de phase des régions les plus "actives" (les régions I et III) d'empiéter sur le volume délimité par les régions les moins "actives". Ceci est possible en augmentant la valeur de la proportion relative maximale de martensite des régions Φ_{max} (voir l'exemple suivant).

Exemple 2 : Superélasticité à T = 150 K

Cet exemple calcule un chargement superélastique à une température supérieure à A_f, soit à T = 150 K. La proportion relative maximale de martensite des régions est maintenant limitée à $\Phi_{max} = 3.0$. Ceci implique qu'une variante peut progresser dans les autres régions jusqu'à ce que la martensite occupe trois fois le volume initial d'une région, c'est-à-dire le volume total. L'orientation des trois régions est identique à l'exemple précédent (voir tableau I.2). Le tableau I.4 reporte les valeurs numériques des paramètres calculées à chacune des 9 itérations pour un cisaillement allant jusqu'à 650 MPa.

Tableau I.4 : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 2.

Itération		0 (État initial)	1	2	3	4
ΔT		---	0	0	0	0
T		150	150	150	150	150
$\Delta\sigma$		---	$\begin{bmatrix} 0 & 34783 & 0 \\ 34783 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 8696 & 0 \\ 8696 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 571 & 0 \\ 571 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 6845 & 0 \\ 6845 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 34783 & 0 \\ 34783 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 43479 & 0 \\ 43479 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 49189 & 0 \\ 49189 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 56034 & 0 \\ 56034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ΔT^*	I	---	-40	-10	-6.567	-7.872
	II	---	0	0	0	0
	III	---	-28.285	-7.071	-4.644	-5.566
T^*	I	150	110	100	93.434	85.562
	II	150	150	150	150	150
	III	150	121.715	114.644	110	104.434
$\Delta\Phi$	I	---	0	1	0.657	0.787
	II	---	0	0	0	0
	III	---	0	0	0.121	0.557
Φ	I	0	0	1	1.657	2.444
	II	0	0	0	0	0
	III	0	0	0	0	0.556
Φ_m		0	0	0.333	0.552	1
ε^{TR}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0025 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0041 & 0 \\ 0041 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0071 & 001 \\ 0071 & 0 & 0 \\ 001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0007 & 0 \\ 0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 001 & 0 \\ 001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0012 & 0 \\ 0012 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0016 & 0 \\ 0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0007 & 0 \\ 0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0035 & 0 \\ 0035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0053 & 0 \\ 0053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0087 & 001 \\ 0087 & 0 & 0 \\ 001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau I.4 (suite) : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 2.

Itération		5	6	7	8	9
ΔT		0	0	0	0	0
T		150	150	150	150	150
$\Delta\sigma$		$\begin{bmatrix} 0 & 89.66 & 0 \\ 89.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -26.355 & 0 \\ -26.355 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -7.213 & 0 \\ -7.213 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -6.837 & 0 \\ -6.837 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -7.808 & 0 \\ -7.808 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix} 0 & 650 & 0 \\ 650 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 386.45 & 0 \\ 386.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 314.32 & 0 \\ 314.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 245.95 & 0 \\ 245.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 173.87 & 0 \\ 173.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ΔT^*	I	-10.311	30.308	8.295	7.863	8.289
	II	0	0	0	0	0
	III	-7.291	21.431	5.865	5.56	5.861
T^*	I	75.251	105.559	113.854	121.717	130
	II	150	150	150	150	150
	III	97.143	118.574	124.439	130	135.861
$\Delta\Phi$	I	0	0	-0.829	-0.786	-0.829
	II	0	0	0	0	0
	III	0	0	0	-0.556	0
Φ	I	2.444	2.444	1.615	0.829	0
	II	0	0	0	0	0
	III	0.556	0.556	0.556	0	0
Φ_m		1	1	0.724	0.276	0
ε^{TR}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.071 & 0.01 \\ 0.071 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.071 & 0.01 \\ 0.071 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0.01 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.021 & 0 \\ 0.021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.019 & 0 \\ 0.019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.011 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.008 & 0 \\ 0.008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.005 & 0 \\ 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix} 0 & 0.09 & 0.01 \\ 0.09 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.082 & 0.01 \\ 0.082 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.058 & 0.01 \\ 0.058 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.026 & 0 \\ 0.026 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.003 & 0 \\ 0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Les principaux résultats obtenus au tableau I.4 sont résumés aux figures I.4 et I.5. La méthodologie employée pour tracer ces figures est la même que celle suivie lors du premier exemple. Par conséquent, la plupart des conclusions tirées à l'exemple précédent s'appliquent également dans le cas présent. Par contre, quelques différences peuvent être notées. La figure I.4 montre une élévation des contraintes de début et de fin de transformation avec une augmentation de la température de la courbe superélastique. En effet, la contrainte de début de transformation était environ 175 MPa dans le premier exemple où T = 130 K alors que pour ce second exemple où T = 150 K, la contrainte de début de transformation de phase est près de 375 MPa. La transformation de phase de la

martensite en austénite lors du déchargement se termine à une contrainte supérieure à zéro. Le comportement élastique de l'austénite se manifeste donc également au déchargement. Cette caractéristique est en concordance avec les observations expérimentales réalisées avec des échantillons d'AMF.

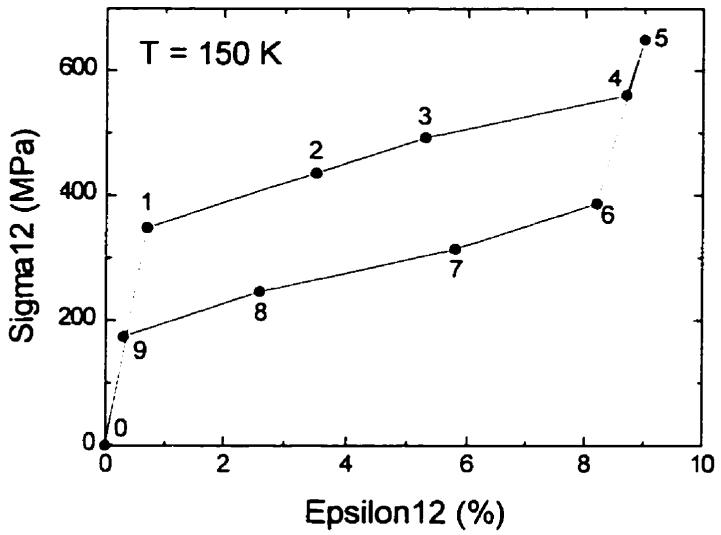


Figure I.4 Réponse macroscopique de l'exemple 2 (σ_{12} en fonction de ε_{12}^{TOT}).

L'allure générale des boucles d'hystérésis présentées aux figures I.2 et I.4 est différente. On observe une déformation de transformation maximale beaucoup plus élevée dans le second exemple. Ceci est attribuable à la proportion relative maximale des régions de martensite qui a été triplée ($\Phi_{max} = 3.0$). Ainsi, la région I qui est la plus "active" empiète sur les autres régions lors de la transformation de phase. Contrairement au premier exemple, tout le volume de matière a été transformé en martensite ($\Phi_m = 1.0$). La région I a empiété complètement sur la région II et partiellement sur la région III. Afin de bien visualiser la progression de la martensite dans chaque région, la figure I.5 montre l'évolution de la proportion de martensite des régions I et III au cours des 9 itérations. Ainsi, à la fin de la transformation, la martensite de la région I occupe un volume 2.444 fois supérieur à son volume d'austénite initial. Le reste du volume est occupé par la

martensite de la région III. En somme, 81.5% de la martensite est orientée selon la distorsion de la région I et le reste, selon la distorsion de la région III.

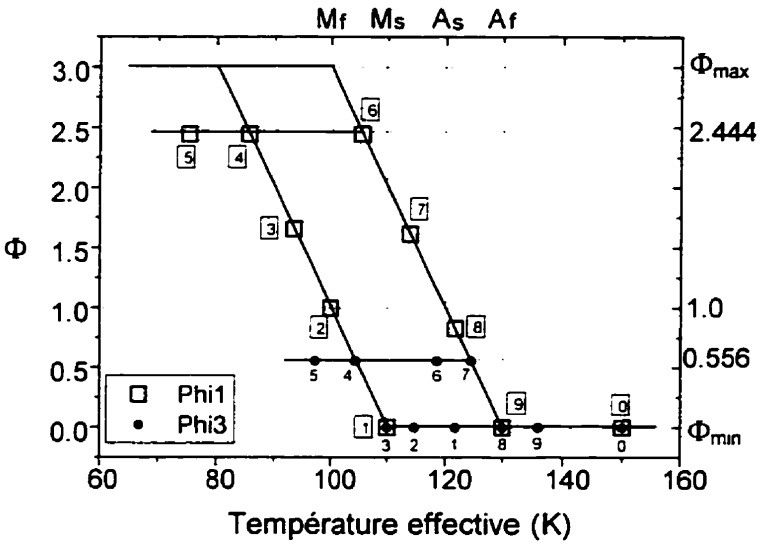


Figure I.5 Évolution de la proportion de martensite dans chaque région pour l'exemple 2.

En permettant à la martensite créée dans une région de progresser dans une autre, la déformation maximale de transformation est augmentée. En effet, les régions qui ne permettent pas de transformation à cause d'une mauvaise orientation peuvent être envahies par de la martensite d'une autre région. Au premier exemple, la déformation maximale de transformation ε_{12}^{TOT} était limitée à 4.3 % et seulement les deux tiers du volume total était transformé. Dans cet exemple, la déformation maximale atteint 9 % lorsque tout le volume est transformé.

Exemple 3 : Pseudo-plasticité et effet mémoire simple sens

Ce dernier exemple met en évidence le fonctionnement du modèle avec des variations de température. D'un état complètement austénitique à T = 130 K, l'alliage est refroidi jusqu'à T = 90 K sans qu'aucune contrainte mécanique soit appliquée. Il y a alors création

de martensite autoaccommodante. Ensuite, un cisaillement est imposé à température constante et il y a réorientation des variantes. La pseudo-plasticité est alors observée. Après relâchement de la contrainte mécanique, une déformation résiduelle est récupérée par chauffage jusqu'à 130 K. C'est maintenant l'effet mémoire simple sens qui se manifeste. Pour cet exemple, $\Phi_{max} = 3.0$ et l'orientation des trois régions est identique aux exemples précédents sauf pour l'angle ψ_2 de la région III qui est imposé à $-\pi/2$. Ce changement est effectué afin d'obtenir de la martensite autoaccommodante dans le plan de la contrainte appliquée σ_{12}. Le tableau I.5 présente les valeurs calculées lors du processus itératif décrivant le chargement thermomécanique précédemment énoncé.

Tableau I.5 : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 3.

Itération		0 (État initial)	1	2	3	4
ΔT		---	-20	-10	-20	0
T		130	110	100	90	90
$\Delta\sigma$		---	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&26088&0\\26088&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&26088&0\\26088&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
ΔT^*	I	---	-20	-10	-10	-30
	II	---	-20	-10	-10	0
	III	---	-20	-10	-10	30
T^*	I	130	110	100	90	60
	II	130	110	100	90	90
	III	130	110	100	90	120
$\Delta\Phi$	I	---	0	1	0	0
	II	---	0	1	0	0
	III	---	0	1	0	0
Φ	I	0	0	1	1	1
	II	0	0	1	1	1
	III	0	0	1	1	1
Φ_m		0	0	1	1	1
ε^{TR}		$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0.025\\0&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0.025\\0&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0.025\\0&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0.008&0\\0.008&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0.025\\0&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0.025\\0&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0.008&0.025\\0.008&0&0\\0.025&0&0\end{bmatrix}$

Tableau I.5 (suite) : Valeurs numériques des paramètres pour l'exemple 3.

Itération		5	6	7	8	9
ΔT		0	0	20	10	10
T		90	90	110	120	130
$\Delta\sigma$		$\begin{bmatrix} 0 & 86.96 & 0 \\ 86.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -34784 & 0 \\ -34784 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
σ		$\begin{bmatrix} 0 & 34784 & 0 \\ 34784 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ΔT^*	I	-10	40	20	10	10
	II	0	0	20	10	10
	III	10	-40	20	10	10
T^*	I	50	90	110	120	130
	II	90	90	110	120	130
	III	130	90	110	120	130
$\Delta\Phi$	I	1	0	0	-1	-1
	II	0	0	0	0	-1
	III	-1	0	0	0	0
Φ	I	2	2	2	1	0
	II	1	1	1	1	0
	III	0	0	0	0	0
Φ_m		1	1	1	0.667	0
ε^{TR}		$\begin{bmatrix} 0 & 005 & 0025 \\ 005 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 005 & 0025 \\ 005 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 005 & 0025 \\ 005 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0025 & 0025 \\ 0025 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{EL}		$\begin{bmatrix} 0 & 001 & 0 \\ 001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
ε^{TOT}		$\begin{bmatrix} 0 & 006 & 0025 \\ 006 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 005 & 0025 \\ 005 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 005 & 0025 \\ 005 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0025 & 0025 \\ 0025 & 0 & 0 \\ 0025 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

De façon similaire aux exemples précédents, les principaux résultats du tableau I.5 sont résumés aux figures I.6 et I.7. La réponse macroscopique est reproduite à la figure I.6 selon deux plans perpendiculaires. L'analyse de la composante ε_{12}^{TOT} du tenseur de déformation totale montre effectivement une autoaccommodation lors du refroidissement car aucune déformation n'est calculée. Par contre, les itérations 2 et 3 du tableau I.5 montrent une déformation de transformation qui n'est pas complètement nulle. Ceci est causé par un nombre limité de régions considérées. L'utilisation d'une quatrième région de direction opposée à la région II aurait annulé la transformation de phase lors du refroidissement sans contrainte. Par contre, nous désirons étudier ici la composante ε_{12}^{TOT}

du tenseur de déformation et l'effet d'autoaccommodation est obtenu avec le nombre et l'orientation des régions considérées.

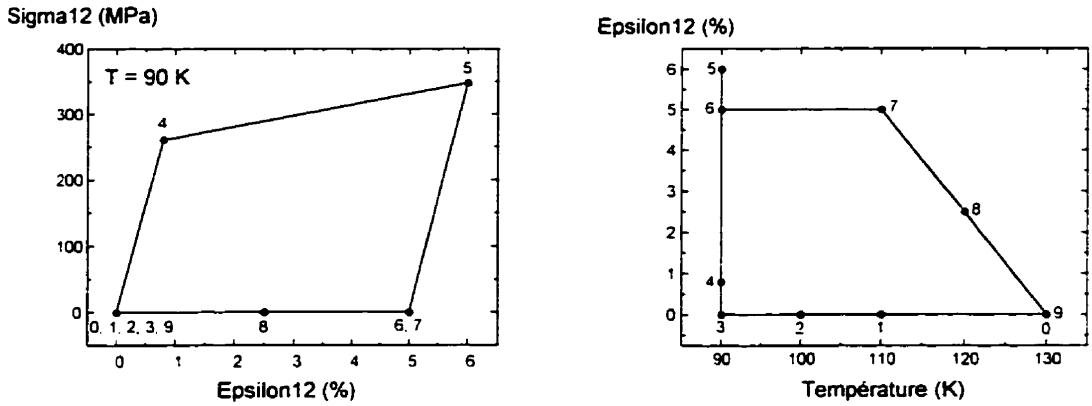


Figure I.6 Réponse macroscopique de l'exemple 3. À gauche, σ_{12} en fonction de ε_{12}^{TOT} et à droite, ε_{12}^{TOT} en fonction de la température.

La figure I.6 constitue une validation qualitative de la théorie de Likhatchev et Malinin concernant trois phénomènes importants des alliages à mémoire de forme, soit l'autoaccommodation (itérations 0 à 3), la pseudo-plasticité par réorientation des variantes de martensite (itérations 3 à 6) et l'effet mémoire simple sens (itérations 6 à 9).

Une déformation de transformation maximale de 5 % a été obtenue même si le volume de matière est complètement transformé en martensite. Dans l'exemple précédent, la déformation de transformation maximale avait atteint 9 %. La région I qui était la plus "active" avait empiété sur les deux autres régions et une plus grande déformation dans la direction du cisaillement appliqué était obtenue. Pour que la déformation de transformation d'une région empiète sur les autres régions, il faut que le volume des autres régions soient en austénite. Dans l'exemple présent, la martensite orientée selon le cisaillement appliqué de la région I empiète sur la région III entre les itérations 4 et 5 car lors de l'augmentation de la contrainte, la martensite de la région III se transforme en austénite. Mais au même moment, l'austénite nouvellement restaurée de la région III se

transforme immédiatement en martensite possédant l'orientation de la région I. Ainsi, la région I empiète sur la région III. Par contre, la martensite de la région I est incapable d'empiéter sur la région II. En effet, selon la séquence de chargement thermomécanique imposée, la martensite de la région I n'a jamais tendance à croître lorsque la martensite de la région II se transforme en austénite. Par conséquent, la déformation de transformation maximale est limitée à 5 % car la région I est incapable d'empiéter sur la région II qui ne contribue pas à la composante ε_{12}^{TOT} de la déformation.

La figure I.7 montre l'évolution de la proportion de martensite dans chaque région en fonction de la température effective calculée à chaque itération. Les numéros inscrits dans le graphique font référence aux itérations effectuées lors du calcul et les résultats sont présentés au tableau I.5. Les numéros en gras et les points noirs se rapportent à la région III, les numéros en italique et les croix se rapportent à la région II et finalement, les numéros encadrés et les carrés vides se rapportent à la région I. Il est surtout intéressant de remarquer "la période d'attente" de la région I entre les itérations 2 et 4 avant d'empiéter sur la région III.

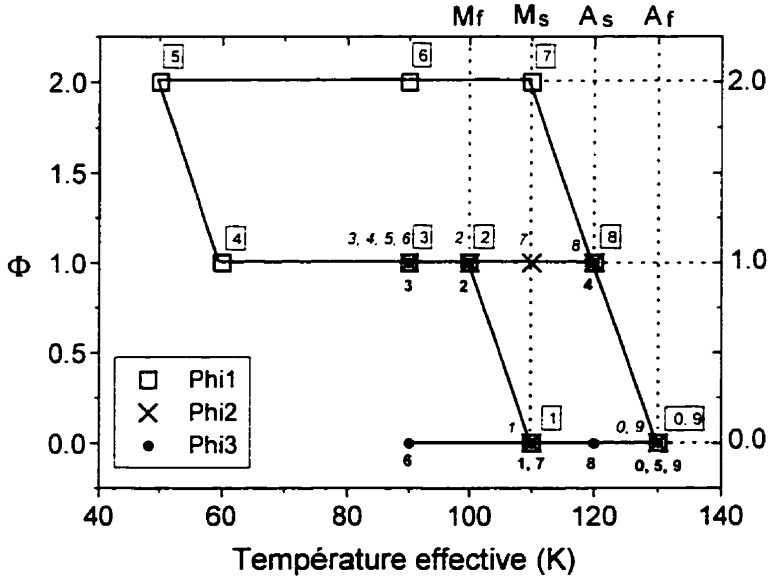


Figure I.7 Évolution de la proportion de martensite dans chaque région pour l'exemple 3.

Les trois exemples présentés dans cet annexe ont permis de vérifier qualitativement la théorie microstructurale de Likhatchev et Malinin. Avec une seule formulation fondée sur des paramètres intrinsèques d'un AMF (températures de transformation, tenseur de distorsion D_{ik}, chaleur échangée par unité de volume q_0, etc.) et des paramètres phénoménologiques (taille relative minimale Φ_{min} et maximale Φ_{max}, nombre et orientation des régions, etc.), tous les principaux comportements si particuliers aux AMF sont calculés. C'est le cas de la superélasticité, de la pseudo-plasticité, de l'autoaccommodation lors d'un refroidissement sans contrainte et de l'effet mémoire simple sens. Pourtant, tous les calculs ont été réalisés en considérant un faible nombre de régions. Une augmentation du nombre de régions produirait des transitions plus douces au niveau du comportement macroscopique du volume étudié. La principale difficulté associée à la formulation présentée dans cet annexe concerne la détermination des paramètres phénoménologiques relatifs aux régions, plus particulièrement Φ_{max}, leur nombre et leur orientation. C'est la raison pour laquelle une approche plus générale est proposée au chapitre 2. C'est par intégration sur toutes les orientations possibles des régions que le comportement macroscopique est calculée. Toutefois, il demeure difficile d'évaluer expérimentalement certains paramètres intrinsèques de l'alliage comme la matrice de distorsion D_{ik} et le paramètre Φ_{max}.

Annexe II : Minimisation quadratique du potentiel thermodynamique de Patoor

Cette annexe constitue un complément à la description du modèle micromécanique de Patoor effectuée au deuxième chapitre. Dans le cadre d'un stage fait à l'université de Metz en France, un projet concernant la minimisation quadratique du potentiel thermodynamique de Gibbs a été entrepris, mais malheureusement des difficultés numériques ont empêché l'aboutissement des travaux. Néanmoins, il a été jugé essentiel d'inclure en annexe de cette thèse l'avancement du projet même si ce dernier est inachevé. Cette annexe aborde les différents aspects du modèle tels la cinématique, le potentiel thermodynamique de la transformation de phase, le développement d'une fonctionnelle quadratique, la résolution de cette fonctionnelle et finalement les problèmes rencontrés.

II.1 Cinématique de la transformation

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps, abstraction faite des forces qui les produisent. Ainsi, la première étape de la formulation est d'exprimer la déformation macroscopique d'un volume de matière qui subit une transformation de phase entre l'austénite et la martensite. Cette transformation dans les alliages à mémoire de forme (AMF) peut être provoquée par abaissement de la température ou par application d'une contrainte mécanique. Dans les deux cas, la martensite apparaît sous forme de plaquettes appelées *variantes* qui s'orientent selon des directions bien particulières. Dans un cristal d'austénite, la martensite peut se former selon une ou plusieurs orientations parmi les 24 variantes possibles. Ce nombre est une conséquence de la symétrie de la maille élémentaire cubique centrée de l'austénite. Analysons la transformation d'un volume d'austénite qui se transforme en martensite selon une seule variante. Lors de la transformation, on observe une interface en mouvement qui délimite l'austénite de la martensite. Cette interface également appelée *plan d'habitat* ne subit aucune déformation comme le montre la figure II.1.

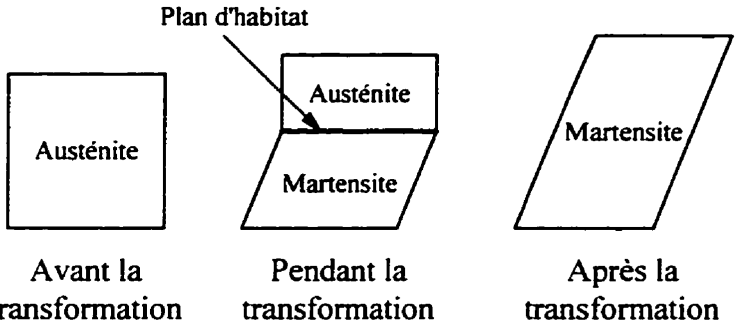


Figure II.1 Mouvement du plan d'habitat durant la transformation de phase.

La déformation intrinsèque ε_{ij} causée par la formation d'une variante de martensite lors de la transformation de l'austénite est homogène et caractérisée par un cisaillement ainsi qu'un changement de volume. À la figure II.2, le cisaillement est représenté par le vecteur **a** et le changement de volume par le vecteur **n**. Leur résultante donne le vecteur **m**. Les composantes des vecteurs **n** et **m** d'une variante de martensite peuvent être déterminées expérimentalement par une étude cristallographique. Dans un volume d'austénite, la martensite est susceptible de se former selon 24 variantes possibles. La déformation intrinsèque ε_{ij}^{p} de la p-ième variante de martensite dans un cristal d'austénite est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{1}{2}\left(n_i\, m_j + n_j\, m_i\right) g = R_{ij}\, g \qquad \text{(II.1)}$$

où n_i et m_i sont les composantes des vecteurs **n** et **m** exprimées dans le repère du cristal d'austénite, R_{ij} est appelé tenseur d'orientation d'une variante de martensite et g représente l'amplitude de la déformation de transformation. Dans le cas d'un alliage Cu-Zn-Al, la valeur de $g = 0.23$ et les composantes des vecteurs **n** et **m** sont données au tableau II.1 pour chacune des 24 variantes de martensite.

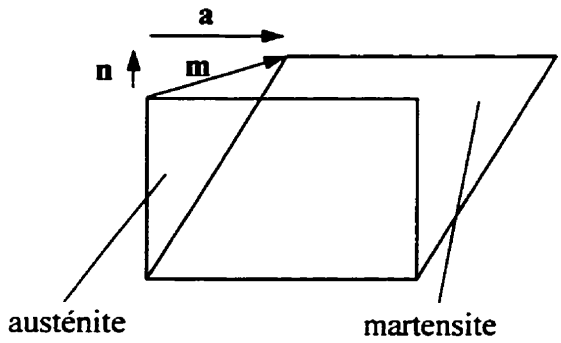


Figure II.2 Déformation d'un élément de volume lors de la transformation de phase.

Tableau II.1 Composantes des vecteurs **n** et **m** pour les variantes d'un alliage Cu-Zn-Al.

Variante	n_1	m_1	n_2	m_2	n_3	m_3
1	-0.182	-0.165	0.669	-0.737	0.721	0.655
2	-0.182	-0.165	0.721	0.655	0.669	-0.737
3	0.182	0.165	0.669	-0.737	0.721	0.655
4	0.182	0.165	0.721	0.655	0.669	-0.737
5	-0.669	0.737	-0.182	-0.165	0.721	0.655
6	-0.721	-0.655	-0.182	-0.165	0.669	-0.737
7	-0.669	0.737	0.182	0.165	0.721	0.655
8	-0.721	-0.655	0.182	0.165	0.669	-0.737
9	-0.182	-0.165	-0.669	0.737	0.721	0.655
10	-0.182	-0.165	-0.721	-0.655	0.669	-0.737
11	0.182	0.165	-0.669	0.737	0.721	0.655
12	0.182	0.165	-0.721	-0.655	0.669	-0.737
13	0.721	0.655	-0.182	-0.165	0.669	-0.737
14	0.669	-0.737	-0.182	-0.165	0.721	0.655
15	0.721	0.655	0.182	0.165	0.669	-0.737
16	0.669	-0.737	0.182	0.165	0.721	0.655
17	0.669	-0.737	-0.721	-0.655	0.182	0.165
18	0.721	0.655	-0.669	0.737	0.182	0.165
19	-0.669	0.737	0.721	0.655	0.182	0.165
20	-0.721	-0.655	0.669	-0.737	0.182	0.165
21	-0.721	-0.655	-0.669	0.737	0.182	0.165
22	-0.669	0.737	-0.721	-0.655	0.182	0.165
23	0.721	0.655	0.669	-0.737	0.182	0.165
24	0.669	-0.737	0.721	0.655	0.182	0.165

La figure II.3 montre une représentation stéréographique de la normale aux plans d'habitat des 24 variantes de martensite qu'on peut former à partir d'un cristal d'austénite (voir tableau II.1). Les normales se regroupent autour des 6 pôles $\{011\}$ pour former des quatuors. Or, chaque quatuor représente un groupe de 4 variantes autoaccommodantes de martensite. Le niveau d'interaction entre les variantes autoaccommodantes d'un même groupe est plus élevé que celui entre les variantes appartenant à des quatuors différents. Cette notion de niveau d'interaction sera utilisée plus loin dans cette annexe.

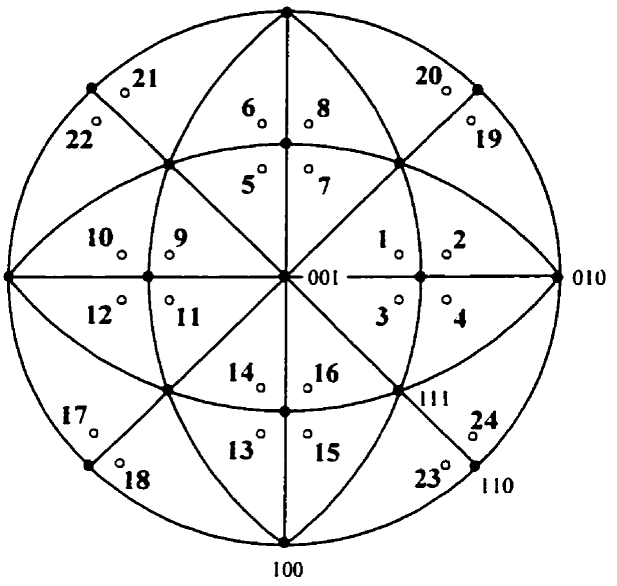


Figure II.3 Représentation stéréographique de la normale des 24 variantes de martensite.

La déformation intrinsèque d'une variante de martensite donnée par l'équation (II.1) est exprimée dans le repère du cristal. La formulation élaborée par Patoor permet d'étudier un matériau polycristallin où chaque grain est considéré comme un monocristal possédant une orientation différente par rapport au repère global. Une rotation qui permet le passage du repère cristal vers le repère global doit alors être appliquée. Ainsi, la déformation intrinsèque de la p-ième variante de martensite du I-ème grain dans le repère global est donnée par l'équation suivante :

$$(\varepsilon_{ab})_l^p = \alpha_{al}^l \; \alpha_{bj}^l \; \varepsilon_{ij}^p \qquad \text{(II.2)}$$

où α_{ij}^l est la matrice de rotation permettant le passage du repère du I-ième grain vers le repère global. Ce changement de repère est trivial car l'orientation de chaque grain définissant le volume de matière est connue et donnée par 3 angles d'Euler (voir la signification des angles d'Euler à la section 2.1.1.3 du second chapitre). Si les angles d'Euler sont choisis de façon aléatoire, un matériau sans texture est obtenu. La texture d'un matériau est le résultat d'une orientation préférentielle des grains provoquant une certaine anisotropie. Il est donc possible de simuler le comportement d'un AMF texturé en imposant la valeur des angles d'Euler entre des limites déterminées. Dans le modèle, l'orientation de chaque grain par rapport au repère global est donnée par trois angles d'Euler Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 générés de manière aléatoire et α^l est la matrice de rotation qui permet le passage du repère du I-ième cristal au repère global.

$$\alpha^l = \begin{bmatrix} \cos\Psi_1\cos\Psi_3 - \sin\Psi_1\cos\Psi_2\sin\Psi_3 & -\cos\Psi_1\sin\Psi_3 - \sin\Psi_1\cos\Psi_2\cos\Psi_3 & \sin\Psi_1\sin\Psi_2 \\ \sin\Psi_1\cos\Psi_3 + \cos\Psi_1\cos\Psi_2\sin\Psi_3 & -\sin\Psi_1\sin\Psi_3 + \cos\Psi_1\cos\Psi_2\cos\Psi_3 & -\cos\Psi_1\sin\Psi_2 \\ \sin\Psi_2\sin\Psi_3 & \sin\Psi_2\cos\Psi_3 & \cos\Psi_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.3)}$$

La déformation globale ou macroscopique de transformation E_{ab}^{TR} est obtenue en effectuant la moyenne volumique des déformations intrinsèques de chaque variante dans chaque grain. La fraction volumique de chaque variante dans chaque grain ainsi que celle de chaque grain dans le volume total doivent ainsi être connues. La déformation macroscopique est ainsi donnée par l'expression suivante :

$$E_{ab}^{TR} = \sum_l \left[\sum_p (\varepsilon_{ab})_l^p \; f_l^p \right] F^l \qquad \text{(II.4)}$$

où f_l^p représente la fraction volumique de la p-ième variante dans le l-ième grain et F^l est la fraction volumique du l-ième grain dans le volume total de matière. La valeur des F^l fait partie des paramètres connus du problème. Normalement, on suppose que tous les grains occupent la même fraction volumique dans le volume total et par conséquent, $F^l = 1/N$ pour tous les grains où N est le nombre de grains considérés. Par contre, la valeur des F^l pourrait être différente d'un grain à l'autre mais la somme de tous les F^l doit égaler l'unité. En ce qui concerne les f_l^p, ils sont les inconnus du problème et c'est par une minimisation quadratique qu'ils seront déterminés. Le nombre d'inconnus se chiffre donc à 24 × N. De plus, les proportions volumiques f_l^p doivent respecter deux conditions physiques. Dans un premier temps, chaque proportion volumique d'une variante dans un grain doit être supérieure ou égale à zéro et dans un second temps, la somme des proportions volumiques de chaque variante au sein d'un même grain ne doit jamais excéder l'unité.

$$f_l^p \geq 0 \qquad \sum_p f_l^p \leq 1 \tag{II.5}$$

Lorsque les f_l^p sont déterminés, la déformation macroscopique de transformation est obtenue selon l'équation (II.4). Dans cette annexe, les déformations élastique et thermique ne sont pas calculées. Elles contribuent à la déformation totale selon la théorie classique de la mécanique des corps déformables. La proportion globale de martensite Φ_m peut être déterminée par la sommation de la proportion de martensite formée de chacune des 'p' variantes dans chacun des 'l' grains.

$$\Phi_m = \sum_l \left[\sum_p f_l^p \right] F^l \tag{II.6}$$

II.2 Potentiel thermodynamique

L'idée générale derrière l'approche de Patoor est de développer un potentiel thermodynamique dans lequel sont inclus les inconnus du problème, c'est-à-dire la fraction volumique de chaque variante dans chaque grain. Le potentiel thermodynamique choisi par Patoor est l'énergie libre de Gibbs qui permet de quantifier l'évolution de la transformation de phase. Sous l'application d'un champ de contrainte à une température donnée, l'austénite se transforme en martensite dans les grains selon les orientations les plus favorables, si et seulement si l'énergie libre de Gibbs du système a tendance à diminuer. En ayant une formulation d'un potentiel thermodynamique exprimée en fonction des inconnus du problème (c'est-à-dire les proportions de martensite de chaque variante dans chaque grain), la minimisation du potentiel thermodynamique permet de déterminer ces inconnus. En somme, la minimisation représente la cinétique de la transformation de phase du modèle.

Le but de cette annexe n'est pas de démontrer le développement du potentiel thermodynamique de Gibbs mais plutôt de discuter de sa minimisation quadratique. Par conséquent, les explications concernant le potentiel thermodynamique sont succinctes. L'énergie libre de Gibbs ΔG d'un système dans lequel peuvent coexister la martensite et l'austénite est défini comme suit :

$$\Delta G = B\left(T - M_S\right)\Phi_m - \Sigma_{ij}\, E_{ij}^{TR} + W_{interface} - \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\, M_{ijkl}\, \Sigma_{kl} + W_B \qquad \text{(II.7)}$$

Le membre de droite de l'équation (II.7) comprend 5 termes dont le premier est l'énergie chimique de la transformation qui varie de façon linéaire avec la proportion globale de martensite Φ_m définie à l'équation (II.6). Dans ce même terme, T est la température du volume de matière, M_s représente la température caractéristique et B est un coefficient de proportionnalité. Ce dernier est interprété selon la relation de Clausius-Clapeyron comme étant la pente $d\sigma/dT$ de la droite M_s du diagramme d'état exprimée en MPa/K. Pour les

calculs, nous allons utiliser $B = 0.23$ MPa/K et $M_S = -30°C$. Le second terme est simplement l'énergie mécanique externe qui correspond au travail des forces externes résultant de la transformation de phase. La contrainte externe appliquée sur le volume de matière est Σ_{ij} et la déformation de transformation de phase macroscopique E_{ij}^{TR} est donnée par l'équation (II.4). La troisième contribution au potentiel de Gibbs est l'énergie libre interfaciale $W_{interface}$. La forme allongée des plaquettes de martensite qui se forment dans l'austénite rend l'énergie d'interface négligeable devant l'énergie mécanique impliquée. Cette contribution sera donc négligée pour la suite de la discussion. Le quatrième terme est l'énergie mécanique élastique interne où M_{ijkl} est le tenseur de compliance du comportement élastique de l'austénite et de la martensite. On suppose ici que les deux phases ont un comportement élastique isotrope identique. Lorsque la contrainte externe Σ_{ij} est appliquée sur le volume de matière, l'énergie mécanique interne devient une constante qui n'affecte aucunement les calculs de minimisation du potentiel thermodynamique. Par conséquent, ce troisième terme sera omis pour la suite des développements. La dernière contribution de l'équation (II.7) W_B représente l'énergie élastique qui est bloquée dans le volume de matière à cause des contraintes internes engendrées par la transformation de phase. Cette énergie peut être considérée comme l'interaction entre les variantes de martensite qui se forment dans le volume. Cette énergie élastique bloquée W_B est définie comme étant :

$$W_B = -\frac{1}{2V}\int_V \sigma_{ij}(r)\varepsilon_{ij}^{TR}(r)\,dV \qquad \text{(II.8)}$$

où $\sigma(r)$ est la contrainte interne au point r et $\varepsilon^{TR}(r)$ la déformation de transformation au même point. L'intégrale sur le volume V donne l'énergie d'interaction des variantes de martensite formées lors de la transformation de phase. On suppose que $\varepsilon^{TR}(r)$ est homogène dans une variante et que les variantes sont représentées par des inclusions

ellipsoïdales caractérisées par le tenseur d'Eshelby S. L'expression de la contrainte interne σ_I^n dans la n-ième variante du I-ième grain est donnée par l'équation suivante :

$$\left(\sigma_{ij}\right)_I^n = C_{ijkl}\left(I_{klmn} - \left(S_{klmn}\right)_I^n\right)\left(E_{mn}^{TR} - \left(\varepsilon_{mn}\right)_I^n\right) \qquad \text{(II.9)}$$

où I_{klmn} est le tenseur identité d'ordre 4. La déformation macroscopique E_{mn}^{TR} est donnée par l'équation (II.4) tandis que la déformation intrinsèque $\left(\varepsilon_{mn}\right)_I^n$ de la n-ième variante du I-ième grain exprimée dans le repère global est obtenue par les équations (II.1) et (II.2). C_{ijkl} représente le tenseur de rigidité du comportement élastique supposé isotrope et identique pour les deux phases. Ce tenseur est défini par la mécanique des corps déformables de la manière classique suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}\right) \qquad \text{(II.10)}$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker et λet μ sont les coefficients de Lame de l'austénite et de la martensite. Ces coefficients sont définis en fonction du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν. L'alliage modélisé dans ce travail est un Cu-Zn-Al pour lequel le coefficient de Poisson et le module de Young ont été imposés à $\nu = 0.3$ et E = 104 MPa.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \text{(II.11)}$$

Le terme de l'équation (II.9) qui n'est pas encore défini est le tenseur d'Eshelby. Ce tenseur exprimé dans le repère d'une variante de martensite permet de connaître la contrainte homogène dans la variante qui est considérée comme une inclusion dans une matrice d'austénite. Cette contrainte homogène est calculée en tenant compte de la différence entre la déformation macroscopique du volume de matière et la déformation

microscopique d'une variante. Les composantes du tenseur d'Eshelby sont données aux équations (II.12). Les composantes qui ne sont pas spécifiées sont nulles. Le rapport a_3/a_1 prend en considération la géométrie des variantes de martensite qui sont assimilées à des inclusions circulaires de section ellipsoïdale (voir figure II.4). Dans ce travail, on pose que l'épaisseur de l'inclusion est 100 fois plus faible les autres dimensions ($a_3/a_1 = 0.01$). Dans la littérature, on discute souvent de la création de la martensite sous forme d'aiguilles ou de plaquettes. Cette géométrie plutôt allongée de la martensite est obtenue lorsque la section d'une variante est observée. La figure II.5 schématise une aiguille de martensite observée dans un cristal d'austénite.

$$
\begin{aligned}
S_{1111} &= S_{2222} = \frac{13-8\nu}{32(1-\nu)}\pi\frac{a_3}{a_1} & S_{1122} &= S_{2211} = \frac{8\nu-1}{32(1-\nu)}\pi\frac{a_3}{a_1} \\
S_{1133} &= S_{2233} = \frac{2\nu-1}{8(1-\nu)}\pi\frac{a_3}{a_1} & S_{1212} &= \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)}\pi\frac{a_3}{a_1} \\
S_{3311} &= S_{3322} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(1-\frac{4\nu+1}{8\nu}\pi\frac{a_3}{a_1}\right) & S_{3333} &= 1-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\pi\frac{a_3}{a_1} \\
S_{1313} &= S_{2323} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu-2}{1-\nu}\pi\frac{a_3}{a_1}\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(II.12)}
$$

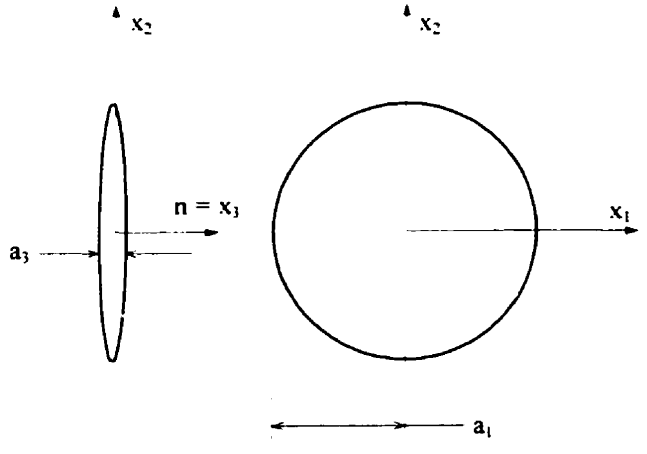


Figure II.4 Géométrie d'une inclusion ellipsoïdale représentant une variante.

En remplaçant les différentes contributions de l'énergie libre de Gibbs (équation II.7) par leur équivalence exprimée en fonction du tenseur de contrainte appliquée Σ_{ab}, de la température T et des proportions de martensite transformée de chaque variante dans chaque grain f_l^n, la relation suivante est obtenue :

$$\Delta G = B(T - M_S)\sum_l \left\{\sum_n f_l^n\right\} F^l - \Sigma_{ab}\sum_l \left\{\sum_n (\varepsilon_{ab})_l^n f_l^n\right\} F^l$$
$$-\frac{1}{2}\sum_l \left\{\sum_n C_{abkl}\left(I_{klrs} - (S_{klrs})_l^n\right)\left[\sum_J \left\{\sum_m (\varepsilon_{rs})_J^m f_J^m\right\} F^J - (\varepsilon_{rs})_l^n\right](\varepsilon_{ab})_l^n f_l^n\right\} F^l \qquad \text{(II.13)}$$

Les tenseurs de l'équation (II.13) sont exprimés dans l'une ou l'autre des trois familles de repères schématisés à la figure II.5. Dans cette figure, la moitié de la n-ième variante de martensite formée dans le I-ième cristal (ou grain) d'austénite est schématisée. Dans un premier temps, il y a le repère global X-Y-Z dans lequel la contrainte macroscopique Σ_{ab} est exprimée. Dans un second temps, il existe le repère des cristaux d'austénite. À la figure II.5, le repère du I-ième grain est représenté par les axes x_I-y_I-z_I. L'orientation de chaque grain par rapport au repère global est fournie par trois angles d'Euler qui comptent parmi les données du problème. Les déformations intrinsèques $(\varepsilon_{mn})_l^n$ de chaque variante de chaque grain et le tenseur d'élasticité C_{abkl} sont exprimés dans le repère cristal. Enfin, le tenseur d'Eshelby S_{klrs} est quant à lui exprimé dans le repère d'une variante de martensite. L'orientation d'une variante de martensite par rapport au repère d'un cristal est caractérisée par le vecteur **n**, vecteur normal à l'inclusion dont les composantes sont données au tableau II.1. Afin d'effectuer les sommations de l'équation (II.13), tous les tenseurs doivent être exprimés dans le même repère. La référence choisie est le repère global X-Y-Z. Il faut donc construire des matrices de transformation (rotations) qui permettent d'exprimer les tenseurs dans un même repère, soit le repère global X-Y-Z. Ainsi, une première transformation doit être appliquée aux tenseurs donnés dans les repères des cristaux pour les exprimer dans le repère global. La matrice de rotation de

l'équation II.3 qui doit être appliquée est directement obtenue grâce aux trois angles d'Euler du cristal. Par exemple, les déformations intrinsèques sont obtenues dans le repère global en effectuant une simple transformation (voir équation II.2). La seconde transformation consiste à exprimer dans le repère global les tenseurs définis selon le repère d'une variante. Cette transformation s'effectue en deux étapes. Il y a d'abord le passage du repère variante au repère cristal et ensuite le passage du repère cristal au repère global. Cette transformation s'applique uniquement au tenseur d'Eshelby S_{klrs} de l'équation (II.13) et les prochains paragraphes en discutent plus amplement.

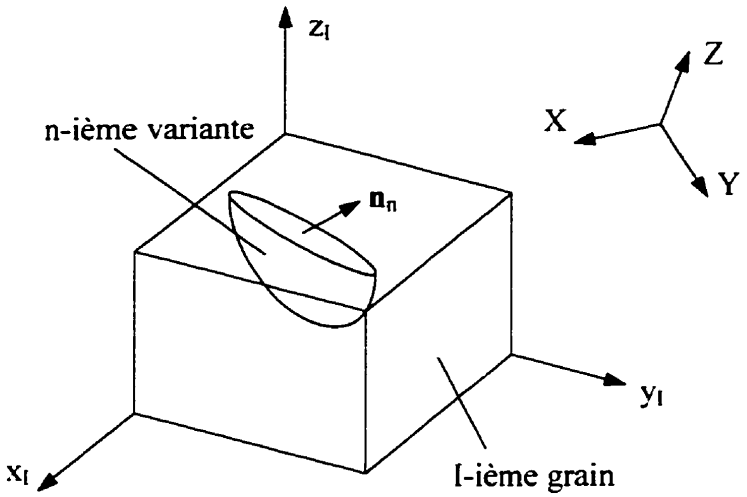


Figure II.5 Représentation des repères selon lesquels les tenseurs sont exprimés.

Les termes $C_{abkl}\left(I_{klrs} - \left(S_{klrs}\right)_l^n\right)$ de l'équation (II.13) est constitué du produit d'un tenseur C_{abkl} exprimé dans le repère cristal par un tenseur exprimé dans le repère de la n-ième variante du l-ième grain. Avant d'effectuer le produit tensoriel, il faut calculer la différence entre le tenseur identité I_{klrs} et S_{klrs}. Le tenseur différence est ensuite exprimé dans le repère du l-ième cristal. Pour y arriver, les angles d'Euler qui permettent le passage du repère de la n-ième variante au repère cristal sont déterminés grâce aux trois composantes du vecteur normal n_1, n_2 et n_3 données au tableau II.1. Puisque l'on suppose

que les variantes de martensite dans l'austénite ont la forme d'un disque plat de section ellipsoïdale, le choix des deux axes du repère variante dans le plan du disque devient alors arbitraire. Il y a alors un des trois angles d'Euler qui est inutile. C'est la raison pour laquelle l'angle Ψ_3 est toujours nul. Les équations (II.14) donnent la valeur des deux autres angles d'Euler qui permettent le passage d'un repère de la n-ième variante au repère cristal. Une fois les angles d'Euler connus, la matrice de rotation qui permet le passage du repère d'une variante au repère cristal est calculée selon l'équation (II.3)

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right) \qquad \text{si } n_1 < 0 \\
\Psi_1 &= -\cos^{-1}\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right) \qquad \text{si } n_1 \geq 0 \\
\Psi_2 &= -\cos^{-1}(n_3)
\end{aligned} \tag{II.14}$$

Une fois la différence entre le tenseur identité et le tenseur d'Eshelby exprimé dans le repère du cristal, l'expression $C_{abkl}\left(I_{klrs} - (S_{klrs})_l^n\right)$ peut être calculée. Le résultat sera ensuite rabattu dans le repère global en appliquant la règle générale des transformations des tenseurs d'ordre 4, c'est-à-dire un produit tensoriel où la matrice de rotation est appliquée à quatre reprises. La matrice de rotation choisie sera celle du I-ième grain.

Le potentiel thermodynamique ainsi que les rotations à appliquer aux tenseurs pour les exprimer dans le même repère sont maintenant déterminés. Les seuls inconnus de l'équation (II.13) sont les proportions de martensite f_l^n de chaque variante dans chaque grain. C'est par minimisation du potentiel thermodynamique que ces inconnus seront déterminés car l'équilibre entre la martensite et l'austénite est atteint lorsque l'énergie du système est à son plus faible. Lorsque les inconnus sont déterminés, la proportion globale de martensite et la déformation macroscopique de transformation sont calculées selon les équations (II.4) et (II.6).

II.3 Obtention d'une fonctionnelle

La potentiel thermodynamique obtenu à l'équation (II.13) est une fonction quadratique par rapport aux inconnus du problème. Pour effectuer les calculs de minimisation, il faut arranger les termes linéaires et quadratiques de façon à obtenir une expression dont la forme est la suivante :

$$\Delta G = \frac{1}{2}\{X\}^T[Q]\{X\} + \{X\}^T\{c\} \qquad \text{(II.15)}$$

La matrice [Q] contient les termes quadratiques de la fonctionnelle et le vecteur $\{c\}$, les termes linéaires. Le vecteur $\{X\}$ contient les degrés de liberté du système, c'est-à-dire les proportions de martensite de chaque variante dans chaque grain $\{X\}^T = \{f_1^1, f_1^2, \ldots, f_I^n\}$. C'est un vecteur de dimension n·I où n est le nombre de variantes par cristal et I est le nombre de grains considérés. Par inspection entre le potentiel thermodynamique de l'équation (II.13) et la fonctionnelle à obtenir de l'équation (II.15), l'élément du vecteur $\{c\}$ qui correspond à la proportion de martensite f_I^n est calculé de la façon suivante :

$$B(T - M_S) - \Sigma_{ab}(\varepsilon_{ab})_I^n + \frac{1}{2}C_{abkl}\left[I_{klrs} - (S_{klrs})_I^n\right](\varepsilon_{rs})_I^n(\varepsilon_{ab})_I^n F^I \qquad \text{(II.16)}$$

Le terme de la matrice [Q] correspondant à la ligne da la proportion f_I^n et à la colonne de f_J^m est donné à l'équation (II.17). Le multiplicateur ½ n'entre pas dans le calcul des termes de la matrice [Q] car il doit apparaître devant le terme quadratique de la fonctionnelle. La minimisation de cette fonctionnelle soumise à un champ de contrainte macroscopique à une température donnée permettra de déterminer le vecteur solution $\{X\}$ contenant la proportion de martensite formée selon chaque variante dans chaque grain.

$$-C_{abkl}\left[I_{klrs} - (S_{klrs})_I^n\right](\varepsilon_{rs})_J^m(\varepsilon_{ab})_I^n F^I F^J \qquad \text{(II.17)}$$

II.4 Algorithme de minimisation quadratique sous contraintes inégalités

La technique employée pour minimiser la fonctionnelle de l'équation (II.15) soumise aux contraintes inégalités données par les équations (II.5) est la méthode des contraintes actives de Lagrange appelée en anglais "Active Set Method" (voir D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd edition, Addison-Wesley, pp. 423 à 427). Cette méthode consiste à diviser les contraintes inégalités du problème en deux groupes : les contraintes actives et les autres appelées contraintes inactives. Lors des itérations, les contraintes inactives sont ignorées tandis que les contraintes actives sont transformées en contraintes égalités. Pendant le processus itératif, l'ensemble des contraintes actives est constamment modifié pour converger vers la solution du problème. L'algorithme de calcul présenté plus loin comprend 6 étapes qui sont décrites brièvement dans les paragraphes suivants.

À ce moment de la discussion, une mise en garde s'impose. Il est important de porter une attention particulière entre la notation utilisée lors de la formulation du potentiel thermodynamique de Gibbs et celle utilisée pour décrire l'algorithme de minimisation quadratique. Dans les deux cas, les variables n et I sont utilisées mais selon le cas, une signification complètement différente leur est attribuée. Lors de la description du potentiel thermodynamique de Gibbs, les variables n et I identifiaient respectivement les variantes de martensite et les grains dans le volume de matière. Dans l'algorithme de minimisation quadratique, n est le nombre d'inconnus et I représente le nombre de contraintes inégalités du problème (cette notion est décrite un peu plus loin). Dans le dernier cas, les variables ont volontairement été mises en italique afin d'éviter toute confusion. Malheureusement, ces 4 variables sont reliées entre elles de la façon suivante : $n = \mathrm{n\,I}$ et $I = (\mathrm{n} + 1)\,\mathrm{I}$.

Avant d'entreprendre les itérations, la première étape (notée étape ⓪ dans l'algorithme) consiste à initialiser les données du problème. Les termes des matrices et des vecteurs qui définissent la fonctionnelle sont calculés selon les équations présentées

précédemment. Il faut ensuite choisir un certain nombre J de contraintes actives parmi les I contraintes inégalités du problème ($0 \leq J \leq I$). Enfin, on suppose un vecteur solution initial qui respecte toutes les contraintes inégalités du problème afin de lancer le processus itératif. L'étape ① de l'algorithme calcule simplement le minimum de la fonctionnelle dans le cas où aucune contrainte inégalité n'est active tandis que l'étape ② calcule la direction dans laquelle la fonctionnelle tend à être minimisée tout en considérant les contraintes actives du problème.

Les étapes ③ et ④ sont sans aucun doute les plus importantes de l'algorithme car c'est alors que l'ensemble des contraintes actives est modifié. Lorsque l'étape ③ est exécutée, deux vecteurs sont connus. Il s'agit d'un vecteur position actuelle à l'itération k $\{X\}_k$ et d'un vecteur de direction ou de déplacement $\{d\}$ qui tend à minimiser la fonctionnelle en considérant les J contraintes qui sont actives. Cette étape ③ détermine la valeur du scalaire α qui permet d'obtenir le prochain vecteur position $\{X\}_{k+1} = \{X\}_k + \alpha \{d\}$. La valeur de α est obtenue en vérifiant si le vecteur direction $\{d\}$ a tendance ou non à violer les contraintes inactives. Pour ce faire, un coefficient β est calculé pour chacune des $(J - I)$ contraintes inactives du problème. Si le coefficient β associé à une contrainte inactive est négatif, cela implique que le vecteur $\{d\}$ est opposé à une direction qui tend à violer cette contrainte. Si le coefficient β associé à une contrainte inactive est positif et supérieur à 1.0, il est sous-entendu que $\{X\}_k + \{d\}$ représente un minimum sous l'ensemble des contraintes actives à l'itération k sans violer la contrainte inactive considérée. Enfin, si le coefficient β associé à une contrainte inactive est compris entre 0.0 et 1.0, la déplacement $\{d\}$ ne peut pas être complété sans que la contrainte inactive considérée soit violée. Par conséquent, il faut limiter le déplacement $\{d\}$ à la valeur maximale avant de violer la première contrainte inactive. Dans ce cas, la valeur de α est imposée à la plus petite valeur de β comprise entre 0.0 et 1.0 et la première contrainte inactive violée devient active pour les prochaines itérations. À l'opposé, si aucune

contrainte inactive n'est violée lors du déplacement $\{d\}$, α est fixé à 1.0 et le déplacement total est appliqué.

L'étape ④ est exécutée lorsque le vecteur directionnel $\{d\}$ est nul. Cela signifie qu'aucun déplacement ne doit être appliqué au vecteur solution actuel $\{X\}_k$ pour atteindre un minimum sous l'ensemble des contraintes actives. Par contre, il est possible que des contraintes aient été activées inutilement lors du choix arbitraire de J contraintes actives initiales. Le problème devient alors trop contraint et il devient impératif de rendre inactives certaines contraintes actives. La façon systématique de procéder consiste à calculer le multiplicateur de Lagrange associé à chaque contrainte active. Dans l'algorithme, les multiplicateurs de Lagrange sont représentés dans un vecteur $\{\lambda\}$ de dimension J. Si au moins un des multiplicateurs de Lagrange est négatif, le problème est trop contraint et certaines contraintes actives doivent être inactivées. L'algorithme procède de manière séquentielle en désactivant une seule contrainte à la fois, celle associée au multiplicateur de Lagrange le plus négatif. Enfin, si aucun multiplicateur de Lagrange est négatif, l'étape ⑤ de l'algorithme est appelée et le vecteur solution $\{X^*\}$ qui minimise la fonctionnelle sous les I contraintes inégalités du problème est obtenu.

Énoncé du problème

Déterminer le vecteur solution $\{X^*\}$ qui minimise la fonctionnelle

$$\tfrac{1}{2} \{X\}^T [Q] \{X\} + \{X\}^T \{c\}$$

soumise à I contraintes inégalités linéaires exprimée sous la forme

$$[a]^T \{X\} \leq \{b\}$$

où $\{X\}$ est le vecteur des n inconnus du problème,

$[Q]$ est la matrice n par n des termes quadratiques de la fonctionnelle,

$\{c\}$ est le vecteur de dimension n des termes linéaires de la fonctionnelle,

$[a]$ est la matrice I par n des termes linéaires des contraintes inégalités,

$\{b\}$ est le vecteur de dimension I des termes constants des contraintes inégalités.

Algorithme de minimisation en 6 étapes

Étape ⓪ :
- Former les matrices [Q] et [a] ainsi que les vecteurs {c} et {b}.
- Choisir J contraintes actives parmi les I contraintes du problème.
- Choisir un vecteur solution {X} qui satisfasse les I contraintes inégalités du problème afin de débuter le processus itératif

Étape ① :
- Si le nombre de contraintes actives est nul ($J = 0$),

alors
- Calculer le minimum $\{X_{SC}^{*}\}$ de la fonctionnelle sans contrainte

$$\{X_{SC}^{*}\} = -[Q]^{-1}\{c\}$$

- Calculer le vecteur directionnel {d} qui minimise la fonctionnelle

$$\{d\} = \{X_{SC}^{*}\} - \{X\}$$

- Si toutes les composantes de {d} sont nulles

alors
- Passer à l'étape ⑤

sinon
- Passer à l'étape ③

sinon
- Passer à l'étape ②

Étape ② :
- Former la matrice [A] de dimension J par n qui contient les termes linéaires des contraintes *actives*
- Calculer le vecteur directionnel {d} qui tend à minimiser la fonctionnelle en considérant les J contraintes actives (N.B. [I] est la matrice identité)

$$\{d\} = -[Q]^{-1}\left[[I] - [A]^{T}\left([A][Q]^{-1}[A]^{T}\right)^{-1}[A][Q]^{-1}\right]\{\{c\} + [Q]\{X\}\}$$

- Si toutes les composantes de {d} sont nulles ($\{d\} = 0$),

alors
- Passer à l'étape ④

sinon
- Passer à l'étape ③

Étape ③ : • Calculer la valeur de β_i pour les $(I - J)$ contraintes inactives du problème

$$\beta_i = \frac{b_i - \{a_i\}^T \{X\}}{\{a_i\}^T \{d\}} \qquad 0 \le i \le (I - J)$$

où b_i est la i-ème composante du vecteur $\{b\}$
$\{a_i\}$ est la i-ème ligne de la matrice [a]

• Déterminer la valeur de α, valeur minimale entre 1.0 et le plus petit β_i compris entre 0.0 et 1.0

• Si α provient d'un β_i calculé (c'est-à-dire si $\alpha < 1.0$)
alors
  • Ajouter dans les contraintes actives celle qui a donné la valeur de α
  • Augmenter le nombre de contraintes actives ($J = J + 1$)

• Mettre à jour le vecteur solution

$$\{X\} = \{X\} + \alpha\{d\}$$

• Reprendre à l'étape ①

Étape ④ : • Calculer le vecteur $\{\lambda\}$ de dimension J contenant le multiplicateur de Lagrange associé à chaque contrainte active

$$\{\lambda\} = -\left[[A][Q]^{-1}[A]^T\right]^{-1}\left\{[A][Q]^{-1}\{c\}\right\}$$

• Si une des composantes de $\{\lambda\}$ est négative,
alors
  • Enlever des contraintes actives celle qui a le multiplicateur de Lagrange le plus négatif
  • Diminuer le nombre de contraintes actives ($J = J - 1$)
  • Reprendre à l'étape ①

sinon
  • Passer à l'étape ⑤

Étape ⑤ : • Le vecteur solution $\{X^*\}$ qui minimise la fonctionnelle est trouvé!!!

$$\{X^*\} = \{X\}$$

II.5 Problèmes rencontrés

Le programme de minimisation quadratique rédigé en C++ a été validé avec succès pour des exemples numériques simples pour lesquels la solution était connue. Par contre, lorsque l'algorithme a été employé pour minimiser le potentiel thermodynamique quadratique de Gibbs (équation II.13), des difficultés numériques sont survenues. L'algorithme des contraintes actives de Lagrange est efficace lorsque la matrice [Q] de l'équation (II.15) est définie positive. Une des caractéristiques d'une matrice définie positive concerne les valeurs propres de la matrice qui doivent toutes être supérieures à zéro. Or, il a été vérifié par de nombreux exemples que la matrice [Q] n'est pas définie positive car plusieurs valeurs propres sont négatives et pire encore, certaines autres sont imaginaires. Parmi les vérifications effectuées, cette anomalie a été observée premièrement lorsqu'un seul grain était considéré avec la possibilité de création de martensite selon les 24 variantes admissibles et deuxièmement, lorsque 5 grains étaient considérés dans lesquels la martensite peut se former selon un nombre limité de 3 variantes.

Le nombre d'inconnus à déterminer lors de la minimisation est toujours donné par le produit entre le nombre de grains considérés et le nombre de variantes par grain selon lesquelles la martensite peut se former. Il s'agit en fait de la dimension du vecteur solution {X}. Les deux exemples de vérifications discutés au paragraphe précédent possédaient donc respectivement 24 et 15 inconnus à déterminer également appelés degrés de liberté. L'objectif initial était d'effectuer la minimisation du potentiel thermodynamique pour un volume de matière comprenant 100 grains et dans lesquels la martensite peut se former selon les 24 variantes possibles. Le problème possède alors 2400 degrés de liberté et [Q] devient une matrice de 2400 par 2400. Dans l'algorithme de minimisation, l'inversion de la matrice [Q] est nécessaire pour calculer les multiplicateurs de Lagrange et le vecteur directionnel {d}. Malheureusement, il a été impossible d'inverser la matrice [Q] lorsque 2400 degrés de liberté étaient présents. Une analyse des

termes de la matrice a démontré que tous les termes de [Q] sont du même ordre de grandeur et qu'aucun d'entre eux est nul. Dans un tel cas, la matrice [Q] est près d'être singulière et par conséquent, il devient presque impossible de l'inverser.

En somme, lorsque le nombre de degrés de liberté du problème devient relativement important (supérieur à 50 par exemple), la matrice tend vers la singularité. À l'opposé, pour un faible nombre de degrés de liberté, la matrice [Q] peut être inversée mais il est vérifié qu'elle n'est pas définie positive. D'une façon ou d'une autre, l'algorithme de minimisation quadratique suggéré dans cette annexe n'est pas applicable pour ce problème. Après ces observations, deux alternatives sont envisageables. Premièrement, une nouvelle méthode de minimisation quadratique n'imposant aucune condition sur la positivité de [Q] pourrait être utilisée, mais aucun développement n'a été entrepris dans ce sens. Deuxièmement, la formulation du potentiel thermodynamique n'est probablement pas complète. Il existe un doute important concernant la signification physique des termes de la matrice [Q] qui représentent l'interaction entre chaque paire de variantes de martensite dans le volume de matière. En effet, la formulation employée sous-entend que l'interaction entre chaque paire de variantes de martensite est exclusivement reliée à leur orientation (orientation de la variante dans le grain et orientation du grain par rapport au repère global). Il est permis de croire que d'autres facteurs peuvent influencer l'interaction entre deux variantes de martensite. Par exemple, une variante de martensite qui se forme dans un grain crée un champ de contraintes internes qui favorise l'apparition de certaines autres variantes dans ce même grain. Ce champ de contraintes internes peut également influencer les grains voisins, mais probablement à un niveau inférieur. Dans un cas limite, si deux grains sont très éloignés, la formation d'une variante de martensite dans le premier grain crée un champ de contraintes internes qui a très peu d'influence sur le second grain. Il y a donc une corrélation spatiale qui paraît logique et qui n'est pas prise en considération dans la formulation actuelle du potentiel thermodynamique. La corrélation spatiale prendrait en compte le positionnement des grains les uns par rapport

aux autres dans le volume de matière. Plus le rapprochement entre deux grains est faible, plus l'interaction entre les variantes de martensite de ces grains devrait être élevée.

Une corrélation spatiale a été introduite **artificiellement** dans le modèle en considérant seulement la numérotation des grains. Dans un problème où N grains sont considérés, l'interaction entre deux variantes appartenant à des grains numérotés respectivement *ga* et *gb* est quantifié par un facteur d'interaction F_{int} exprimé à l'équation (II.18). Ainsi, lorsque le facteur d'interaction entre deux variantes de martensite appartenant au même grain est calculé, la différence entre *ga* et *gb* est nulle et selon l'équation (II.18), $F_{int} = 1.0$. Pour le calcul du facteur d'interaction entre deux variantes appartenant à des grains différents, plus les grains sont éloignés, plus la différence entre ga et gb est élevée et plus F_{int} tend vers zéro. Une relation quadratique a été imposée, mais ce choix est arbitraire. Le facteur d'interaction est multiplié à chaque terme quadratique de l'équation (II.17) qui calcule l'énergie d'interaction entre chaque paire possible de variantes de martensite.

$$F_{int} = 1 - \frac{(ga - gb)^2}{(N-1)^2} \qquad \text{(II.18)}$$

Une telle corrélation spatiale a été utilisée pour minimiser le potentiel thermodynamique d'un volume de matière contenant 5 grains dans lesquels seulement 3 variantes de martensite peuvent se former. On rappelle qu'une situation similaire avait été étudiée auparavant sans corrélation spatiale. Tous les termes de la matrice [Q] étaient alors du même ordre de grandeur et la matrice [Q] n'était pas définie positive. En introduisant la corrélation spatiale, l'ordre de grandeur des termes près de la diagonale de [Q] devient plus important que celui des termes éloignés. Par contre, la minimisation quadratique n'est toujours pas concluante. En effet, la matrice [Q] avec une corrélation spatiale n'est pas définie positive car certaines valeurs propres de la matrice sont encore négatives ou imaginaires.

Une dernière tentative est mise de l'avant pour améliorer la situation, c'est-à-dire obtenir une matrice [Q] définie positive dans le but d'utiliser l'algorithme de minimisation quadratique avec les contraintes actives de Lagrange. Une attention particulière est portée aux groupes de variantes autoaccommodantes de martensite. Il a été discuté précédemment que les 24 variantes de martensite se regroupent en quatuor autour des 6 pôles $\{011\}$ (voir figure II.3) et que chaque quatuor constitue un groupe de variantes autoaccommodantes. Au sein d'un même grain, l'interaction entre deux variantes autoaccommodantes est forcément plus élevée que celle entre deux variantes non-autoaccommodantes. À partir d'un volume de matière constitué d'un seul grain dans lequel la martensite peut se former selon les 24 variantes possibles, la minimisation quadratique a été effectuée en prenant soin d'imposer le facteur d'interaction qui multiplie l'équation (II.17) à $F_{int} = 1.0$ lorsque deux variantes étaient autoaccommodantes et à $F_{int} = 0.5$ lorsque les variantes étaient non-autoaccommodantes. Le choix de $F_{int} = 0.5$ a été effectué de manière arbitraire. Les résultats obtenus n'ont montré aucune amélioration car certaines valeurs propres de [Q] étaient toujours négatives ou imaginaires. Cette alternative s'est avérée infructueuse pour l'amélioration de la positivité de la matrice [Q]. De plus, cette approche va à l'encontre de la philosophie de la minimisation du potentiel thermodynamique. En effet, la minimisation quadratique devrait par elle-même faire ressortir les groupes de variantes autoaccommodantes sans qu'un facteur d'interaction soit introduit. Une variante de martensite qui se forme crée un champ de contraintes internes, ce qui favorise automatiquement la formation des variantes autoaccommodantes. Puisque l'orientation de chaque variante de martensite dans un grain est une donnée du problème et que cette orientation permet de retracer les quatuors de variantes autoaccommodantes, aucun facteur additionnel ne devrait être ajouté à la formulation pour tenir compte de ce phénomène. La formulation de l'équation (II.17) fondée sur l'orientation des variantes est en principe suffisante. L'introduction d'un facteur d'interaction pour prendre en considération les groupes de variantes autoaccommodantes était seulement un essai qui ne devrait pas être davantage exploité.

Les travaux ont atteint un point où de nouveaux développements majeurs doivent être entrepris pour résoudre le problème de la minimisation quadratique. Dans un premier temps, les causes exactes des difficultés numériques doivent être soulevées. L'algorithme de calcul proposé dans cette annexe ne semble pas adéquat puisque la matrice [Q] des termes quadratiques n'est pas définie positive. Si la formulation du potentiel thermodynamique est satisfaisante, une nouvelle méthode de minimisation devra être utilisée pour résoudre le problème. Par contre, l'hypothèse d'une formulation incomplète du problème ne doit pas être écartée. Le concept de corrélation spatiale est un aspect qui a été négligé dans la formulation du potentiel thermodynamique, mais qui logiquement semble influant.

Devant l'ampleur des difficultés numériques et l'absence de solutions immédiates, les travaux concernant la minimisation quadratique du potentiel thermodynamique de Patoor ont tout simplement été interrompus. Même si le potentiel thermodynamique de l'équation (II.13) avait pu être minimisé selon l'algorithme proposé dans cette annexe, le modèle n'aurait pas été complet en soi. En effet, un seul et unique potentiel thermodynamique est proposé. Il serait donc impossible de calculer des cycles d'hystérésis puisque les chemins suivis par un chargement et par un déchargement seraient superposés. Pour compléter la formulation dans le but d'obtenir un modèle général, une *gestion* des potentiels thermodynamiques doit être introduite, soit par l'entremise d'un potentiel dissipatif ou par une autre approche. Ce facteur a également contribué à justifier l'arrêt des travaux concernant la minimisation quadratique. Enfin, il est évident que le modèle cherche à calculer seulement la contribution de la déformation de transformation. Si un jour toutes les difficultés reliées à la minimisation quadratique étaient surmontées, il est évident que les contributions classiques de la déformation élastique et de la déformation due aux dilatations thermiques devraient être ajoutées.

Finalement, je tiens à remercier monsieur Étienne Patoor qui m'a si aimablement bien guidé et renseigné durant mon stage à l'université de Metz en France.

Annexe III : Caractérisation en torsion d'un AMF et étude expérimentale d'un manchon de raccordement AMF

Récemment, une collaboration scientifique fut entreprise entre le CRASP de l'École Polytechnique de Montréal et le NIIMM de l'université d'état de St-Pétersbourg en Russie. Le but de ce partenariat est de développer des outils numériques servant à la conception assistée par ordinateur de composantes en alliage à mémoire de forme. Après la visite du professeur Likhatchev et le séjour d'Alexandre Volkov à Montréal, j'ai été appelé à faire un stage de recherche de quelques mois en Russie. Initialement, le but de mon stage était de caractériser en torsion et en tension un alliage Ti-Ni afin de valider quantitativement les relations constitutives développées par les deux équipes de recherche. De sérieuses difficultés techniques sont survenues avec la machine de traction et seulement la caractérisation en torsion de l'alliage Ti-Ni a pu être réalisée. Par contre, des essais expérimentaux menés avec des manchons de raccordement ont été exécutés et les résultats pourront servir ultérieurement pour la validation de calculs par éléments finis.

La première section de cette annexe présente brièvement les différents essais thermomécaniques qui peuvent être conduits afin de caractériser expérimentalement le comportement complexe d'un AMF. Des échantillons de Ti-Ni ont été usinés spécialement pour les essais expérimentaux et la seconde section effectue une description complète de ces échantillons. De son côté, la machine d'essai en torsion est présentée à la troisième section et les résultats obtenus sont analysés à la quatrième section. Enfin, la cinquième section présente dans un premier temps les manchons de raccordement qui ont été étudiés, et dans un second temps les résultats des essais qui ont été complétés avec ces manchons en Ti-Ni.

Cette annexe est le corps principal du rapport de stage qui a été remis à l'équipe de recherche de St-Pétersbourg. Par conséquent, le travail a été rédigé en anglais. De plus, les *appendix* du rapport de stage ont été volontairement omis afin de minimiser la

longueur de la présente thèse. Ces *appendix* rapportent les mesures effectuées sur les échantillons et les manchons de raccordement en plus de décrire chacun des essais effectués. Lorsque le contenu de cette annexe fait référence à un *appendix*, le lecteur qui désire obtenir plus d'information doit absolument consulter le rapport de stage intégral.

Je tiens à remercier chaleureusement messieurs Alexandre Volkov, Sergei Beliaev et Alexandre Razov pour le remarquable encadrement scientifique et technique qu'ils m'ont procuré. De nombreuses discussions avec ces chercheurs d'expérience m'ont permis d'apprendre énormément sur les alliages à mémoire de forme et sur les manipulations expérimentales en général.

III.1 Thermomechanical testing for SMA

Characterization of a shape memory alloy (SMA) can be done with many different thermomechanical testing. Here, thermomechanical tests are classified in two groups, classical and advanced tests. Classical tests such as constant stress with temperature variation, isothermal stress-strain curves, one way and two way shape memory effect and stress generation after straining are widely used, but advanced tests are less known because they are based on particular effects of the martensitic transformation related to the alloy's microstructure. Advanced tests include reverse shape memory effect and deformation of oriented transformation. In the sequel, each test is briefly described and a figure shows the controlled parameters. Descriptions are presented as if each test were conducted in tension with an axial stress σ and strain ε, but identical descriptions can be given for different loading. For example, when a sample is in torsion, the shear strain γ and shear stress τ are studied.

III.1.1 Classical tests

III.1.1.1 Constant Stress with Temperature Variation (CSTV)

In these tests, stress is maintained constant while temperature is varied. Usually, the highest temperature reached T_2 (see Figure III.1) is higher than A_f, and the lowest one T_1 is smaller than M_f in order to observe a complete phase transformation. One must keep in mind that transformation temperatures increase with stress and for high stress levels, T_2 should not be too close of A_f. Hysteresis subcycles can also be studied if $T_2 < A_f$ and/or $T_1 > M_f$.

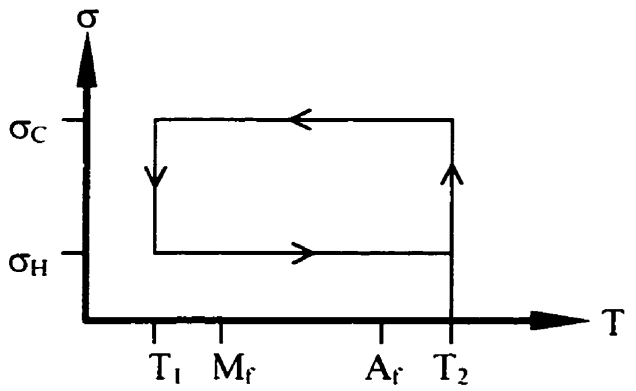


Figure III.1 Constant stress with temperature variation.

The controlled parameters are temperature and stress. σ_C is the stress on cooling and σ_H, the stress on heating. Note that σ_C may also be higher than σ_H. If $\sigma_C = \sigma_H = 0$, material's texture is observed. Texture is the preferential orientation of the grains that is present in the material in the absence of stress. All four characteristic temperatures of the alloy (A_S, A_f, M_S and M_f) can be estimated if $\sigma_C \approx 0$ and $\sigma_H = 0$. In this case, a very low stress must be applied on cooling in order to create oriented martensite instead of self accommodated martensite. If $\sigma_C = \sigma_H \neq 0$, a classical superthermal cycle is obtained. Finally, if $\sigma_H = 0$ and $\sigma_c \neq 0$, assisted two way shape memory effect (ATWSME) can be studied.

III.1.1.2 Isothermal stress-strain curve (ISSC)

At constant temperature T_1 (see Figure III.2), the sample is deformed between a maximal value (Max) and a minimal value (Min) of stress or strain. The behavior can be studied in tension and compression (Min < 0 and Max > 0), only in tension (Min = 0 and Max >0) or only in compression (Max = 0 and Min < 0). Hysteresis cycles can also be studied by reaching intermediate values of stress or strain between the two extremes. It is very important to pay attention if the temperature T_1 of the test has been reached by heating or cooling the sample. If T_1 is between M_f and A_f, the behavior is quite different if T_1 has been obtained by cooling or heating because the volumic fraction of martensite in these two cases is different. If $T_1 > A_f$, superelastic curves are observed and if $T_2 < M_f$, martensitic curves are obtained.

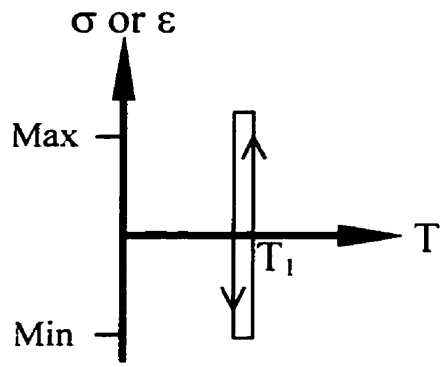


Figure III.2 Isothermal stress-strain curve

III.1.1.3 One Way Shape Memory Effect (OWSME)

The sample is first deformed at a temperature lower than M_f (Figure III.3). When the stress is released, a residual strain is observed. This residual strain is partially or fully recovered by heating to a temperature higher than A_f.

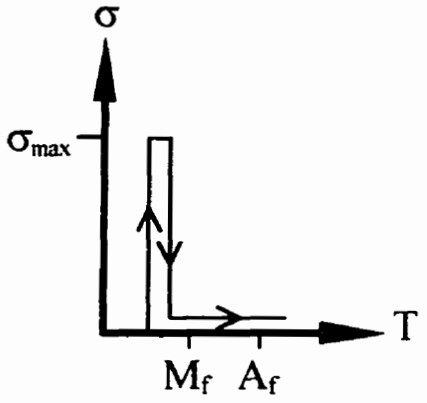


Figure III.3 One way shape memory effect.

III.1.1.4 Stress Generation After Straining (SGAS)

The sample is once again deformed at a temperature lower than M_f (Figure III.4). When a prescribed strain is reached (ε_{max}), it is kept constant during a subsequent heating up to a temperature higher than A_f. By restraining the shape recovery during heating, an additional stress is generated. This effect is also called *stress recovery*.

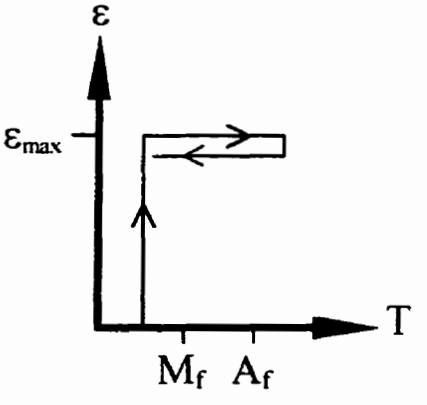


Figure iII.4 Stress generation after straining.

III.1.1.5 Two Way Shape Memory Effect (TWSME)

After one or more thermal cycles with a constant stress σ_1 (Figure III.5), the load is removed and a final thermal cycle without stress is performed. In this last cycle, a deformation similar to the one observed when the stress was applied, but generally lower in amplitude, is generated on cooling and recovered on heating. This phenomenon is also called *education*. The number of cycles before a significant effect is observed is generally the predominant factor investigated in this kind of experiments, as well as the stability of behavior conferred by the education process.

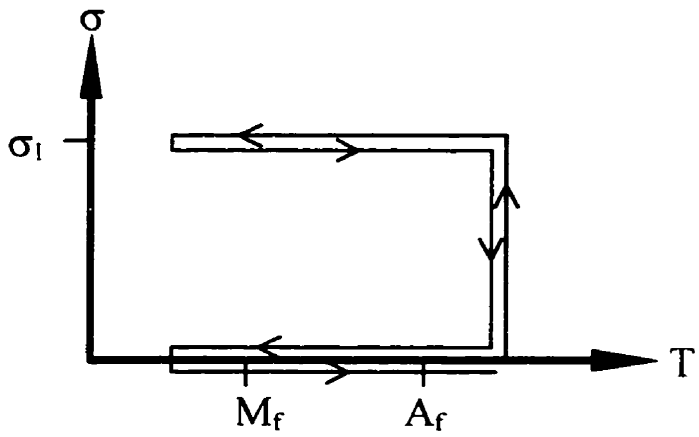


Figure III.5 Two way shape memory effect.

III.1.2 Advanced tests

III.1.2.1 Reverse Shape Memory Effect (RSME)

The sample is first deformed in the martensitic phase in such way that a final state with no stress and no strain is obtained (Figure III.6). Stress intensities σ_1 and σ_2 must be chosen carefully. After, the sample is heated to a temperature higher than A_f with no stress applied. A small strain can be recorded during heating. At the beginning, it increases and then, it decreases to zero when A_f temperature is reached. Two different

loading can be performed in order to obtain the state of no strain and no stress in the martensitic phase. The first one is simply a dynamic isothermal loading at a temperature lower than M_f, while the second one uses a cooling at constant stress.

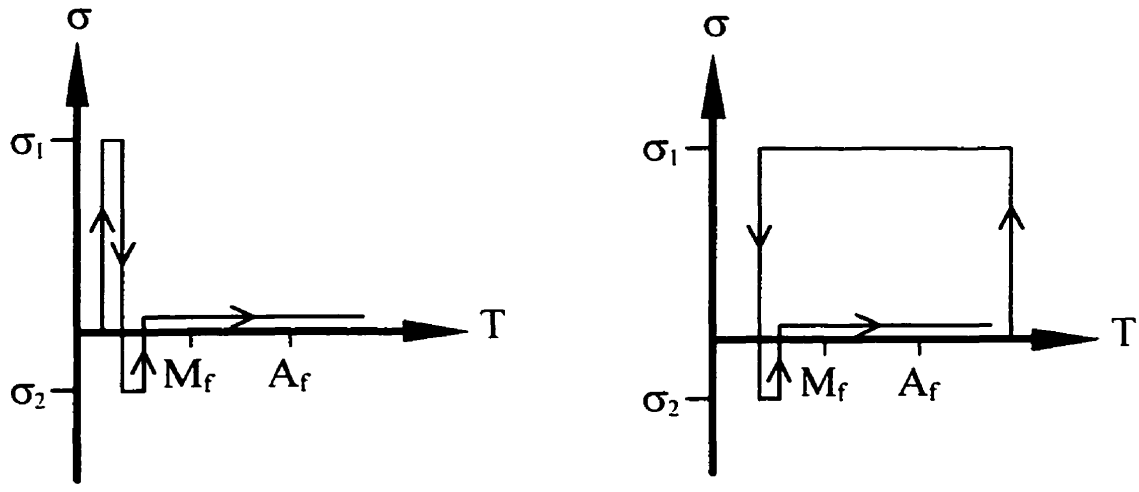


Figure III.6 Reverse shape memory effect.

III.1.2.2 Deformation of Oriented Transformation (DOT)

From a temperature higher than A_f, the sample is stressed and cooled under constant stress σ_1 to a temperature between M_f and M_s (Figure III.7). After, the load is released and the evolution of the residual strain is observed. By cooling to a lower temperature, the direct transformation which creates martensite from austenite produces an additional deformation that can either increase, decrease of remain constant. Note that the temperature for which the stress is released and the stress σ_1 applied during first cooling are two parameters that influence the behavior of the deformation of oriented transformation.

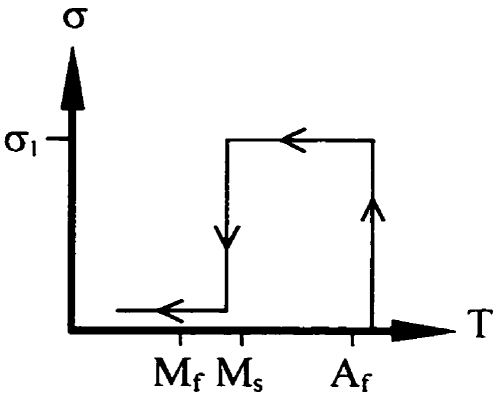


Figure III.7 Deformation of oriented transformation.

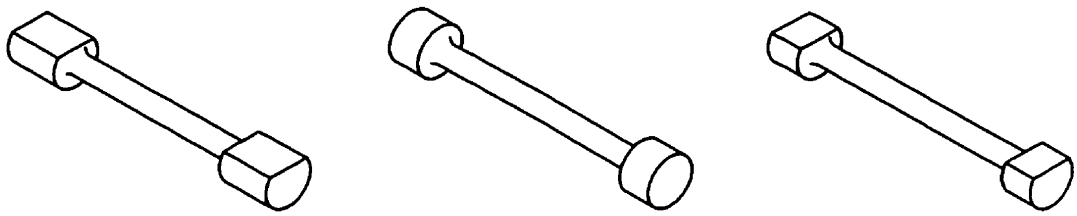
III.2 Samples of Ti-Ni shape memory alloy

III.2.1 Geometry

Initially, characterization of the alloy was planned to be done with different machines in order to generate different stress states in samples (torsion, tension and possibly tension-torsion). Due to technical difficulties, only the characterization in torsion has been performed, but samples for each kind of machine have been manufactured. Even if only torsion samples have been used, this section describes the samples for each machine.

All samples have been manufactured from a same piece of Ti-Ni to minimize property differences between samples. Five samples were machined for tests in torsion, three for tests in traction and only one for eventual tests in tension-torsion. Samples have been marked and each of them received a different number with the same prefix 499-2. This prefix is the number of the piece from which samples have been manufactured. Numbers for torsion samples are 0 to 4, 5 to 7 for tension samples and finally 8 for the tension-torsion sample. This means that a sample is described by five digits and for example, sample 499-2-3 denotes the fourth sample for torsion tests.

The geometry of samples is shown in Figure III.8. They have all the same total length (approximately 60.0 mm) and a same diameter of the gage length of 4.0 mm. Samples for torsion tests (Figure III.8A) have a smaller gage length because they must have relatively big ends for a good gripping. These ends are 15 mm long with a 10 mm diameter and they have been flattened for a proper gripping. Samples for tension (Figure III.8B) have a longer gage length since their ends are only 8 mm long with a diameter of 10 mm. Finally, the sample for tension-torsion (Figure III.8C) is identical to a sample for tension except that the ends have been flattened. Section III.2.4 discusses the measurements of the two most important geometrical parameters of a sample : the length and diameter of the gage length.



A (torsion) B (tension) C (tension-torsion)

Figure III.8 Difference between samples for each kind of testing machine.

III.2.2 Alloy

The alloy for all samples is made of a 50% titanium and 50% nickel. The exact nominal composition and supplier of this alloy are unknown.

III.2.3 Polishing

Many scratches were observed with microscope on the surface of all samples. It is the manufacturing process (turning) that is responsible. A light polishing using abrasive with

a small grain size improved considerably the quality of sample's surface in order to reduce the size of scratches that can create stress concentrations on the surface.

III.2.4 Measuring of gage length

The length and diameter of the gage length are the two most important dimensions because they are used for calculations of the shear stress and shear strain. They have been precisely measured with a microscope. As illustrated in Figure III.9, the diameter of each sample has been measured in 3 different places (d_1 to d_3) with 4 projection angles (θ_1 to θ_4). The gage length denoted "l" has also been measured for each angle. This means that 12 measurements of diameter and 4 measurements of gage length are taken for each sample. All these dimensions were measured after manufacturing and after an annealing of 3 hours at 500°C. All measurements are presented in Appendix I except those of samples 499-2-0 and 499-2-4.

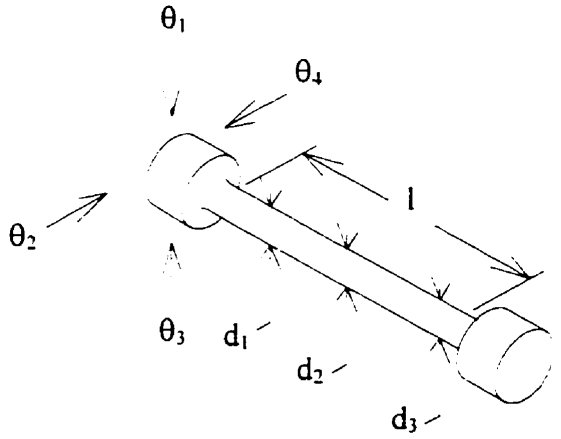


Figure III.9 Orientation of measurements of the gage length.

With the microscope, diameters are measured with a precision of 0.001 mm. On the other hand, measurements of the length are not so precise because it is difficult to establish the beginning and the end (see Figure III.10A). Also, machining of samples left a reduction

of the radius from 0.01 to 0.04 mm near both ends as illustrated in Figure III.10B. These two factors reduce precision of the length to 0.01 mm or even 0.1 mm.



Figure III.10 Difficulties related to the measurement of the gage length.

Generally speaking, measurements of samples before and after annealing of 3 hours at 500°C (see Appendix I) show that this heat treatment produces a diameter reduction of the gage length of approximately 0.003 to 0.03 mm. For the gage length, an increase of few tenths of a mm has been observed but it is difficult to draw valuable conclusions due to the imprecision associated to this measurement. Due to some technical difficulties with the microscope, samples 499-2-0 et 499-2-4 could not be measured. Their diameter had been measured with a micrometer with a precision of 0.01 mm and the final value reported in table III.1 is the average taken from 12 measurements. The length is almost impossible to measure accurately with a micrometer or any other mechanical device. Since all samples have been manufactured at the same time by the same person, the gage length of these two samples is assumed to be the average of the three others. A length of 22.0 mm is obtained and this is the best possible evaluation in these circumstances. Table III.1 summarizes the measurements after annealing for each sample.

Table III.1 : Diameter and gage length of each sample after annealing.

Sample	499-2-0	499-2-1	499-2-2	499-2-3	499-2-4	499-2-5	499-2-6	499-2-7	499-2-8
d (mm)	3.93	3.773	3.857	3.781	3.91	3.980	3.767	3.795	3.975
l (mm)	22.0	21.66	22.86	21.61	22.0	35.85	36.00	35.76	36.58

III.2.5 Stabilization, education and dislocations

When a shape memory alloy device is subjected to many thermomechanical cycles. its response can be different from cycle to cycle. The difference between the first cycles is larger than for the subsequent ones. After a certain number of cycles. the behavior becomes almost identical between cycles and the device's alloy is said to have been stabilized. Usually, for polycristal shape memory alloys, stabilization is reached after 10 to 20 thermomechanical cycles. With the torsion testing machine that will be further presented, 10 thermal cycles with a constant stress of 110 MPa (superthermal cycles) were imposed to a sample (see experiment #3 of Appendix II). The left graphic of Figure II.11 shows the response for each cycle. The right graphic of the same Figure plots the evolution of the shear strain Gamma in martensitic phase (low temperature) and in austenitic phase (high temperature) with the number of cycles. It is obvious that a few more cycles would be necessary to obtain a complete stabilization. The difference between the strain at low temperature and at high temperature is also plotted in the right graphic of Figure III.11. It is almost constant during the thermal cycling.

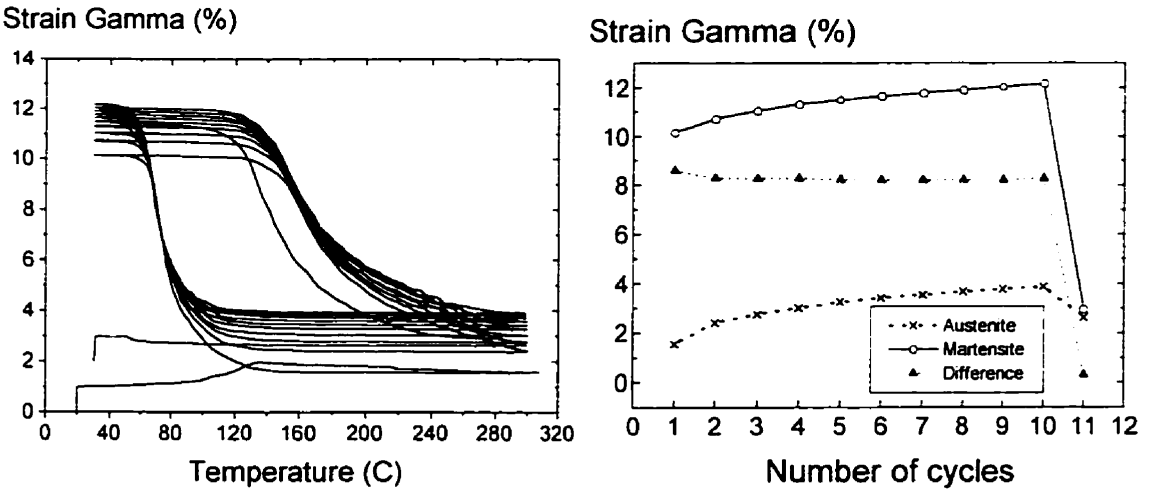


Figure III.11 Alloy's stabilization with superthermal cycles in torsion.

After these 10 cycles with constant stress, a last thermal cycle was performed to observe the two way shape memory effect, also called education. At low temperature, the stress was removed and the residual strain was recovered on heating due to one way shape memory effect. A final cooling without stress shows that only a strain of 0.3% is registered comparatively to a strain difference of approximately 8% in the previous cycles with constant stress.

The alloy is not stabilized even after 10 cycles, but the augmentation of the residual strain decreases from cycle to cycle (a few more cycles and the stabilization would be reached). The width of the hysteresis is too large; this is caused by the excessive rate of cooling and heating with a small stove (this will be fully discussed in section III.3.2). Thermal diffusion along the radial axis of the sample does not have time to occur. That means that the core of the sample transforms later than external layers which explains the large hysteresis. Therefore, results from experiment #3 shown in Figure III.11 can only be used in a qualitative but not quantitative way.

Results from experiments conducted with Ti-Ni sleeves in section III.5.3 are not in perfect agreement with those obtained here. Sleeves are first deformed at room temperature (martensitic phase). After heating without stress, a strain of approximately 2% is not recovered. This is probably the effect of stabilization for the first cycle. After, the sleeve is cooled and a two way shape memory of approximately 1.3% is recorded, which is larger than the one observed in experiment #3, even if initial deformations are similar. Note that the initial strain in the alloy has been obtained from different processes and maybe results can not be compared.

Stabilization with mechanical cycles in torsion have also been briefly studied in experiment #4. When this experiment was conducted, mechanical cycles in the austenitic phase were desired. From experiment #3 that was not considered erroneous at that time (after, it became obvious that the hysteresis was too large), temperature for isothermal

superelastic cycles was chosen at 315°C. This temperature may be higher than the critical temperature M_d. M_d is the temperature for which the stress needed to move dislocations is lower than the stress needed to shear the crystallographic structure in order to achieve phase transformation. In other words, we believe that this result contains pure plastification, so it is totally useless to analyze stabilization with these superelastic cycles. Experiment #34 is more useful for studying stabilization of the alloy with mechanical cycles in torsion. In this experiment, few cycles where obtained at 160°C for a maximal strain of 5%. Experiment #33 has been conducted at the same temperature, but the maximal strain of 5% is obtained with a monotonic loading. Comparison of the results from these two experiments in Figure III.12 shows that a stabilization is also observed after mechanical cycling. For a same level of stress, the strain with a non-monotonic loading (with subcycles) is higher because there is an accumulation of residual strain during previous subcycles.

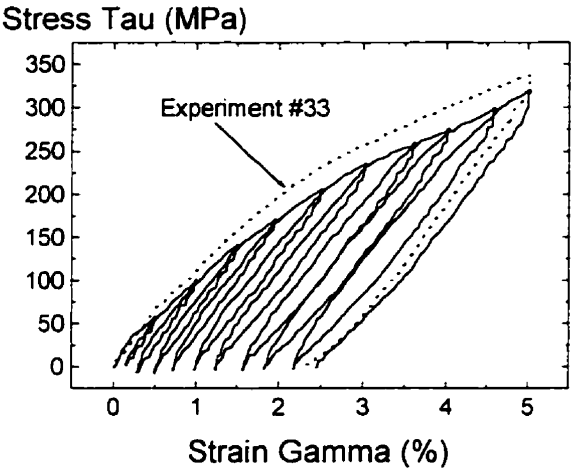


Figure III.12 Stabilization of the alloy with isothermal cycles in torsion.

The mechanisms that govern stabilization of the alloy are often related to dislocations in the material, but they are still not perfectly understood. Many researchers have worked on this topic and a general consensus has not yet been reached. Figure III.13 compares the behavior of the alloy when dislocations have been annealed by a thermal treatment (experiment #46) and when dislocations are present in the material after

thermomechanical loadings without annealing (experiment #45). It seems that dislocations have almost no influence on the overall behavior since both curves are practically superposed. Here, the comparison is made when the residual strain of experiment #45 (residual strain that is the result of previous thermomechanical loadings) after heating up to 150°C has been neglected. The curve denoted "After T.M. loading" in Figure III.13 has been simply translated in order to removed the residual strain. Experiment #45 (sample with dislocations) was conducted with an another aim. In some Ti-Ni alloys, a well defined superelastic behavior with no residual strain after unloading can be observed only if the alloy contains dislocations. Here, it seems that the alloy does not have a well defined superelastic regime even with dislocations. This latest remark must not be treated as a conclusion because Ti-Ni alloys sometimes exhibit a well-defined superelastic behavior only in a small temperature interval. The test's temperature of 150°C may not be in this narrow window.

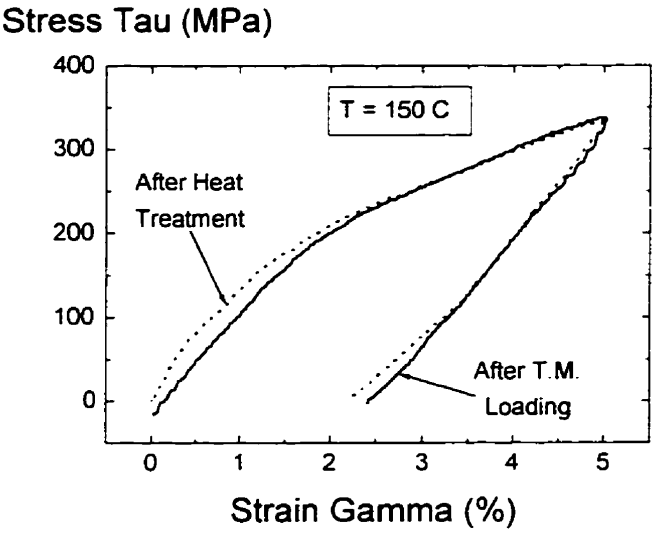


Figure III.13 Effect of dislocations on the general behavior at high temperature.

Stabilization, education and the effect of dislocations have been studied very briefly in this section. Few experiments have been conducted and therefore, it is not possible to draw immediate conclusions. The results presented in this section must be interpreted

bearing this fact in mind. More experiments should be performed to study these important aspects of shape memory alloy's behavior, but it is not the aim of this work.

III.2.6 Texture

Texture is a preferential orientation of the grains in the material. If the material is highly textured, a direct transformation (from austenite to martensite) without stress can produce deformations that could affect the precision of results. In order to verify the alloy's texture, thermal cycles are performed without any stress applied. Experiments #7, #8 and #9 observe texture of the Ni-Ti alloy before heat treatment (directly after machining), after annealing at 500° C during 1 hour and annealing of 3 hours at 500°C respectively. Figure III.14 shows the results obtained. Even if two of these curves are less reliable (excessive rate of heating that produces a very large hysteresis), the results are clear. The material before heat treatment is lightly textured (around 0.15%). An annealing of 1 hour reduces approximately 2/3 of the texture and an annealing of 3 hour eliminates practically all of it. It is obvious that the effect of texture on results can be neglected and after annealing, it becomes almost impossible to measure its influence due to the limited precision of the testing machine.

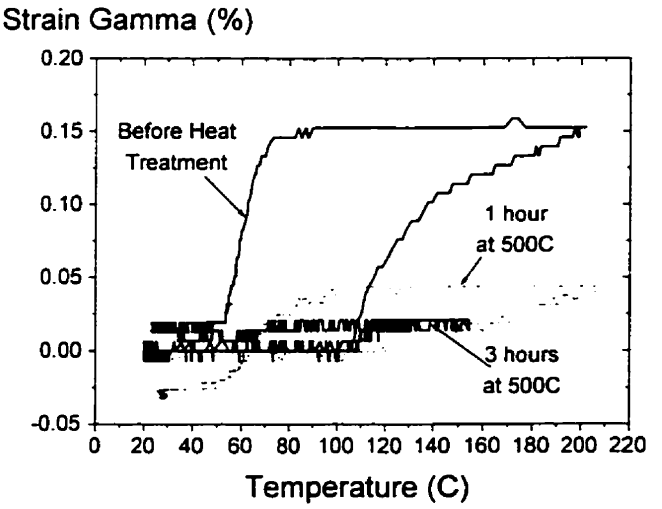


Figure III.14 Effect of annealing on material's texture.

III.2.7 Heat treatment

This experimental work is the first step towards finite element modeling of Ti-Ni sleeves. Usually, in their service life, these sleeves are designed to be loaded only once. Therefore, the alloy's characterization for this kind of application must be done without stabilization in order to have a similar material without thermomechanical history. Each sample after each experiment is heat-treated to remove all the dislocations that previous experiments could have created.

For the heat treatment, the samples are buried in sand in a container to increase the thermal inertia (to avoid extremes rate of heating or cooling) and placed in a big stove. From previous results, an annealing of 3 hours at 500°C is chosen. After annealing, the container is removed from the stove, but samples are kept in the sand. Thus, cooling of samples is relatively slow.

Naturally, for other kind of applications where a shape memory device is used during many cycles like an actuator for example, it is useful to stabilize all characterization samples in order to study a material similar to that of the working device.

III.2.8 Reproductibility of results between samples

All tests are not performed with a single sample. It is important to verify if the results obtained with one sample can be compared with those of other samples. Since all samples have been manufactured by the same person and that they come from the same piece of Ni-Ti, we believe that results can be compared between samples.

Ideally, the response of each sample to the same loading should be compared but due to limited time, only two samples are verified in Figure III.15. Experiments #10 and #11 reproduce the same experiment with the torsion testing machine. It is a thermal cycle

with no stress on heating and a very low stress on cooling (around 10 MPa). Figure III.15 superposes the response obtained with two different samples. We can see a good agreement between these two tests even if there are small deviations in their behavior. We can conclude that results obtained from different samples can be compared together but with a small error.

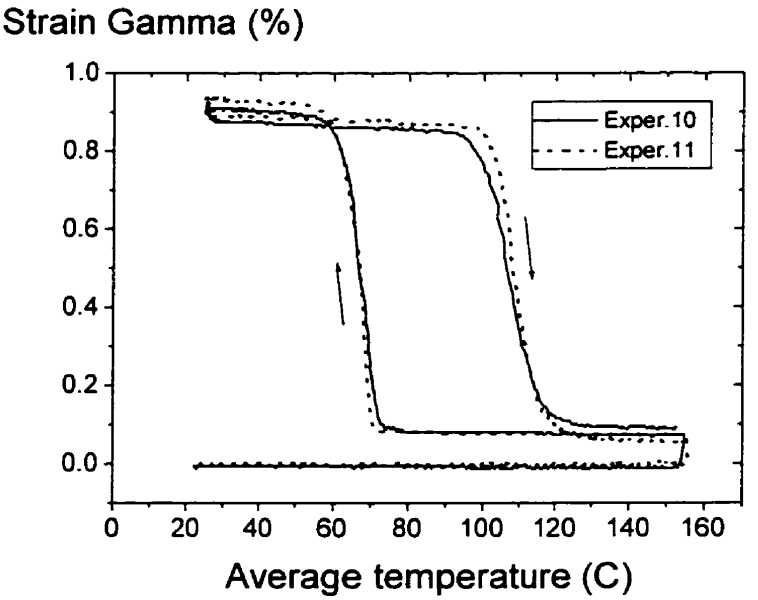


Figure III.15 Reproductibility of results between samples under thermal cycling.

This slight difference in the behavior between each sample is easily observed in Figure III.16. For example, in the left graphic of Figure III.16, two experiments were conducted with the same sample. Experiment #24 is a stress-strain curve at room temperature with a maximum strain of 5% while experiment #65 is a similar curve with a maximum strain of 12%. These two curves are in a very good agreement during loading up to 5%. On the other hand, the same curves have been obtained at 90°C (experiment #28 up to 5% and experiment #64 for a maximal strain of 12%) with different samples. Small deviations in stress-strain curves can be observed. Finally, one must keep in mind that small deviations can be attributed to the intrinsic behavior of each sample and errors are generated when two curves obtained with different samples are compared.

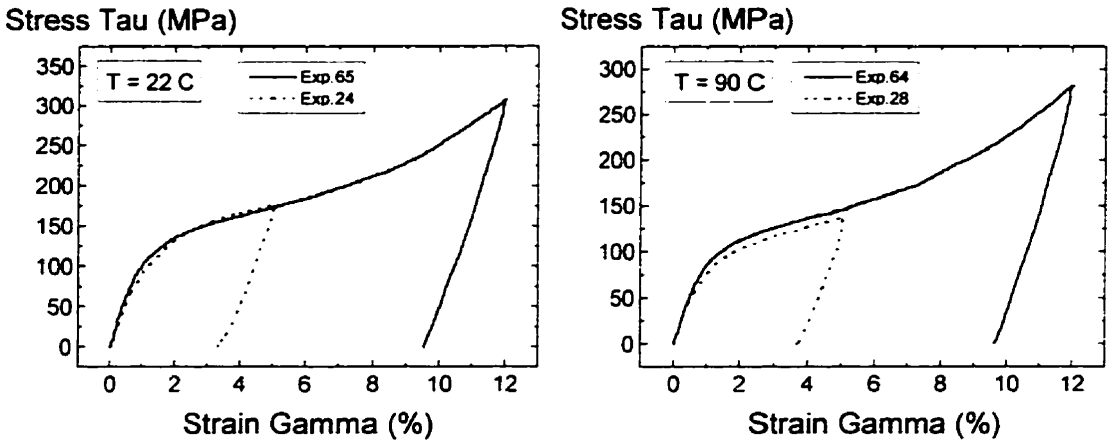


Figure III.16 Reproductibility or results between samples with isothermal curves.

III.2.9 Determination of the characteristic temperatures

When a shape memory alloy device is used, characteristic temperatures must be known for a proper utilization. Many techniques are available to determine these phase transformation temperatures. In this report, only thermal cycle performed with the torsion testing machine is suggested.

With the torsion testing machine, experiment #10 performs a thermal cycle with no stress on heating and a very low stress on cooling. A stress must be applied on cooling to create a preferential orientation of the martensite during direct transformation. If not, only twinned martensite is created and texture is observed. On the other side, it is well known that transformation temperatures depend on stress. If the applied stress on cooling is too large, the evaluation of characteristic temperatures will be erroneous (overestimated). The applied stress on cooling in experiment #10 is less than 10 MPa. Figure III.17 shows the strain during a thermal cycle. From this Figure, characteristic temperatures are estimated to $M_f = 55°C$, $M_S = 75°C$, $A_S = 93°C$ and $A_f = 120°C$.

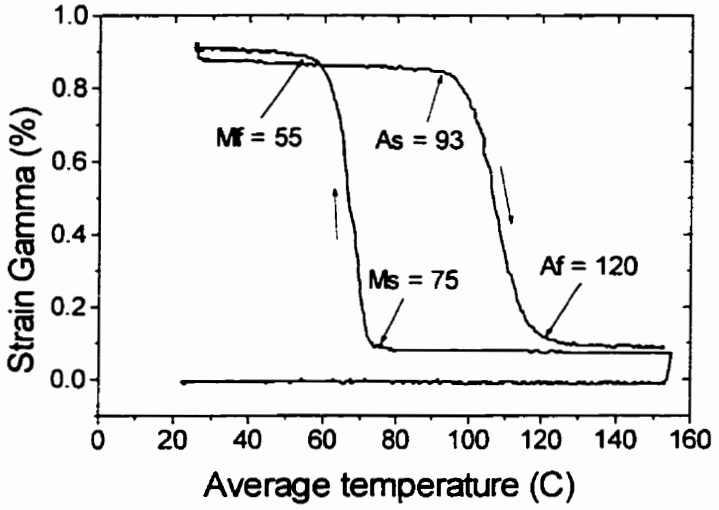


Figure III.17 Determination of characteristic temperatures from a thermal cycle.

III.3 Torsion testing machine

III.3.1 Description

The testing machine that was used for characterization of the alloy is "home-made" and it is shown in Figure III.18 (see Table III.2 for the name of each component). It can be used in two modes, dynamic or static loading.

For dynamic loading, deformations in samples are generated by an electric motor that is connected to a shaft via a gear box. The gear box reduces the rotation speed of the motor to a slow deformation rate with a high torque. The first shaft is connected to the motor and the other one, to the lever and weights. When the lever rotates, it creates a moment that is proportional to the rotation (for small rotations). One of the two shafts rotates on a ball bushing (instead of a ball bearing) that enables free rotations and free axial

displacements in order to avoid any axial stress in samples caused by thermal expansion. Samples are installed in shafts as illustrated in Figure III.30.

For static loading, the machine is used in a similar fashion but the gear D is removed. Weights are suspended on the constant stress disk and a constant moment, that is balanced by a rotation of the lever, is created.

A stove can be installed around the sample for studying its behavior at temperatures higher than room temperature. Two thermocouples are installed on the sample and they are information that is constantly received by the "data receiver" and transmitted to the computer for analysis. Section III.3.2 gives more details concerning heating and cooling of samples.

Other information that is constantly supplied by the machine is the rotation of each shafts. Rotation of a shaft is amplified by a disk for better accuracy. Theses amplifier disks are linked to angular measurements devices by a thin wire. Finally, rotations are transmitted to the computer for calculation of stress and strain in the sample. By assuming that shafts are rigid, the difference between these two measured angles is the total deformation angle φ over the sample. Moment M applied on the sample is computed by knowing only the rotation of the shaft connected to the lever (by a simple geometrical relation for small rotations). Section III.3.3 explains how the total angle φ and the moment M are used to compute shear stress and strain on sample's surface.

Two temperatures and two rotation angles are information that is supplied to the computer. On the other hand, the operator can control the motor (direction and on/off) and the stove (on/off) with the computer. The computer sends a signal to the "controller box" which give (or cut) voltage to the motor and to the stove. Heating rate is manually controlled by changing the output voltage of a variable transformer which supply voltage to the stove.

When the motor is used in a dynamic loading, it is possible to performed isothermal loading and unloading (possibly with subcycles) at different temperatures. It is also possible to look at the stress generation on heating by keeping constant the strain to a prescribed value when the motor is stopped during loading. As it is discussed in section III.4.5, results obtained by this latest technique are not very precise because it is impossible to keep a constant strain during heating (the stress generated changes the strain in the sample).

In static loading with constant stress disk and suspended weight, thermal cycles with constant stress (material texture, superthermal cycles, assisted two way shape memory effect, one way shape memory effect, etc.) and creep at different temperatures are experiments that can be easily performed.

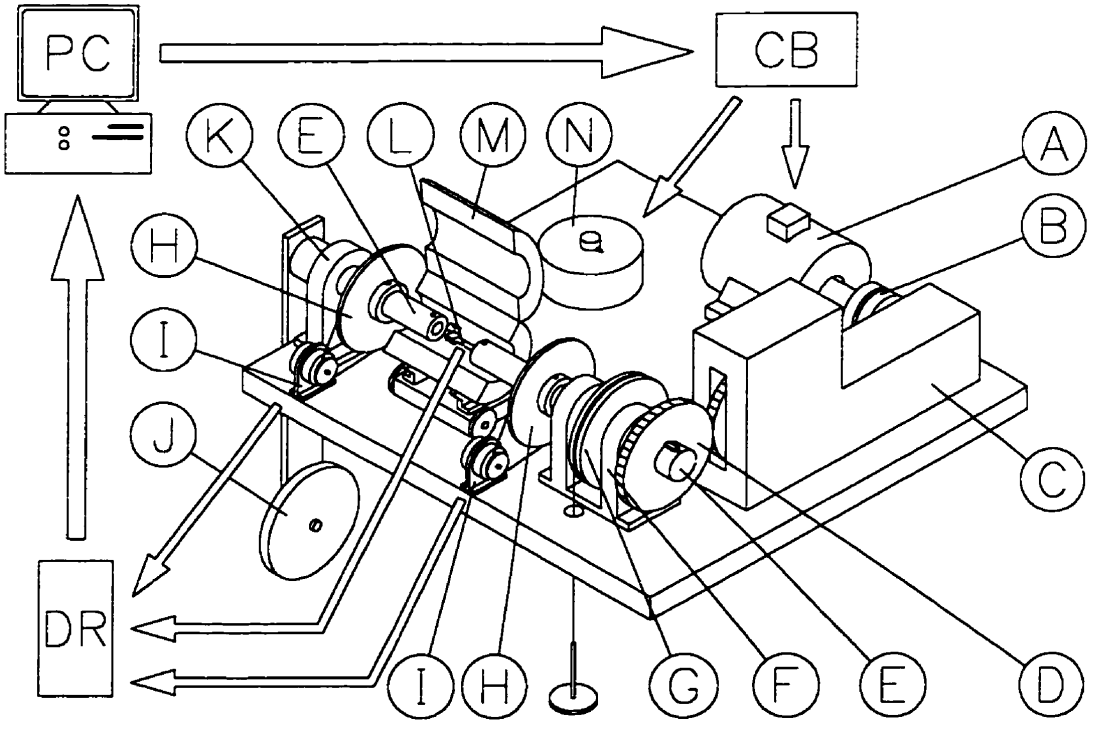


Figure III.18 Representation of the torsion testing machine.

Table III.2 : Legend of Figure III.18.

A	Electric motor	J	Lever & weight
B	Mechanical coupling	K	Ball bushing
C	Gear Box	L	Sample
D	Gear	M	Stove
E	Shaft & grip	N	Variable transformer
F	Ball bearing	PC	Personal computer (286)
G	Constant stress disk	CB	Controller box
H	Amplifier disk	DR	Data receiver
I	Angular measurement device		

The main advantage of this machine is its ability to invert the stress distribution in the sample (the analogy is to perform traction and compression with a tensile machine). It is well known that shape memory alloys behave non-symmetrically, for example in tension and in compression. Unfortunately, by inverting the shear stress distribution in the sample, this non-symmetrical behavior cannot be studied because it is basically the same loading (only the sign of the shear stress is changed). In tension/compression, the sign is also changed but in tension, there is a cross-section reduction while in compression, the cross-section increases. The given explanation for the non-symmetrical behavior is very simple and many other facts must be taken into account to explain properly this non-symmetry. Therefore, even if the stress can be inverted in the sample, it is insufficient for a complete characterization of this non-symmetric behavior and samples must be studied for another stress state (traction for example).

The main disadvantage of this machine is that a non-uniform stress distribution in sample's cross-section. Here, the sample's gage length is circular and full. The shear stress is zero at the geometrical center and reaches a maximum value in outer layers. The stress distribution is not linear and an assumption must be made for a good estimation of the shear stress on the outer surface of the sample. Section III.3.3 discusses this assumption. If a thin hollow tube is studied, the stress distribution can be assumed constant, but stability of the tube becomes a problem for high stress values.

III.3.2 Heating and cooling of samples

Heating of samples can be performed by two stoves : a small one that covers only the sample and a bigger one that also covers partially both gripping shafts (the big stove is shown in figure III.18). A good stove generates an homogeneous temperature along the sample's gage length in the radial, circumferential and longitudinal directions. Since stoves are cylindrical, it is assumed that there is a good homogeneity in the circumferential direction. Radial homogeneity is obtained only if the heating rate is slow (less than 5°C/min.). And finally, longitudinal homogeneity is the hardest to achieve due to the influence of the gripping shafts. To evaluate thermal gradients in the longitudinal direction, two thermocouples are installed. The first one is located at the middle of the sample while, the second one is near a gripping shaft. Thermocouples are simply in contact with the sample and a rope of isolating material called *Asbestos* is rolled around the sample in order to create a layer of isolation and to keep the installed thermocouples in place.

The small stove creates excessive rates of heating (75°C/min. to 100°C/min.) and slower heating rates were extremely difficult to control, even with the computer. Thus, with the small stove, radial homogeneity was never obtained. The outer layers of a sample transformed quicker that the middle parts, so results were erroneous. Larger hysteresis loops were obtained with the small stove (see Figure III.11) than with the big stove (see Figure III.15). A longitudinal thermal homogeneity was also difficult to reach with the small stove because only the sample is heated. The thermal inertia of gripping shafts (that are bulky to minimize their deformation) is important and creates large thermal gradients in the sample. The temperature difference between the two thermocouples installed on the sample was approximately 22°C when the middle temperature is 140°C (the middle temperature is always higher that the one near the gripping shafts). The sample was lightly isolated with 2 layers of Asbestos. For all these reasons, the small stove was rejected.

The big stove gave better results. First, it allows slow heating rates (from 0 to 5°C/min.) which ensures that radial temperature in the sample is homogeneous. Heating rates are controlled by the input voltage given to the stove with a variable transformer. Also, about 12 cm of each gripping shaft are heated with this stove. The effect of thermal inertia on the grips is reduced, but they still create relatively large thermal gradients in the sample. With a sample isolated with 2 layers of Asbestos, the temperature difference was around 15°C when the middle temperature was approximately 140°C. Ideally, a stove should have different heating systems (one for the sample and two others for both gripping shafts) that would be controlled by a computer. More thermal energy should be given to the gripping shafts in order to have a similar heating rate in the sample and in the grips.

Since the actual big stove has only one heating system, a similar effect can be achieved if the sample is more isolated. Theoretically, a perfect layer of isolation on the sample is supposed to create heating by its two ends only. This means that the end temperature would be higher than the middle temperature in transient regime and that the temperature would be homogeneous in permanent regime. To do so, many layers of isolation have been added and results were improved, but the middle temperature remains higher (it is easier for heat to pass through many layers of isolation than to heat the gripping shafts). With 12 layers of Asbestos, the temperature difference with 140°C in the middle is reduced to approximately 5°C. More layers would be necessary, but the inner diameter of the stove makes it impossible. From the results of our tests, the best homogeneous heating of the sample can be achieved with the following procedures.

1) Samples should be isolated with the maximum possible layers of Asbestos in order to heat a sample by its ends. Layers are created by enrolling around the sample a small rope of Asbestos. In the reports of experiments (appendix II), a low level of isolation means that 2 layers were applied, an intermediate level corresponds to 7 or 8 layers and a high level is at least 12 layers of Asbestos.

2) The big stove should be used because it heats the grips and the sample at the same time and gives a better longitudinal thermal homogeneity. It can also create slow heating rates that ensure radial thermal homogeneity. For example, Figure III.19 (taken from experiment #20) shows a typical heating rate of approximately 3°C/min.

3) At least two thermocouples should be installed on the surface of a sample in order to evaluate the thermal non-homogeneity along the gage length. Figure III.19 also shows the average temperature and the temperature difference between the two temperatures read by thermocouples. These two curves are plotted as a function of time. In this case, the homogeneity is fairly good because the temperature difference is around 6°C at 140°C. The average temperature is used to estimate the overall temperature over the gage length. Some results were much worse and we conclude that the positioning of thermocouples is critical. Some experiments show a temperature difference above 10°C (Figure III.21 for example). It has been verified that the thermocouple near the grip was not touching the gage length but the sample's end (see the hatched part of Figure III.22). We believe that a bad positioning of a thermocouple (too close to the gripping shaft) produces a temperature difference that is overestimated. It seems that there are big temperature gradients near the sample's end, in a part of the sample that is not studied.

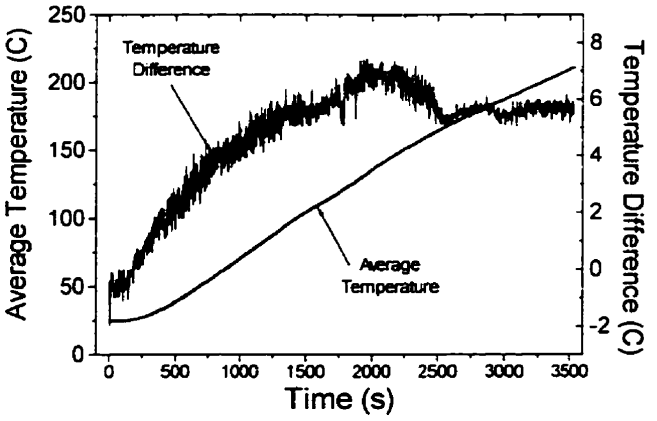


Figure III.19 Average temperature and temperature difference between two thermocouples installed on a sample.

Since it is possible with the big stove to obtain very low heating rates, isothermal tests can be performed with accurate results. Generally speaking, a simple isothermal curve takes about one minute to obtain. With a heating rate of 1°C/min., temperatures at the beginning and at the end of the test are within the precision of 1°C or 2°C of the machine. If better results are wanted, heating can be shot down when a desired temperature is reached. Figure III.20 shows a typical experimental result taken from experiment #30 where average temperature and temperature difference are plotted on a broken axis graph. We can observe a slight increasing average temperature during the test while temperature difference is fairly stable.

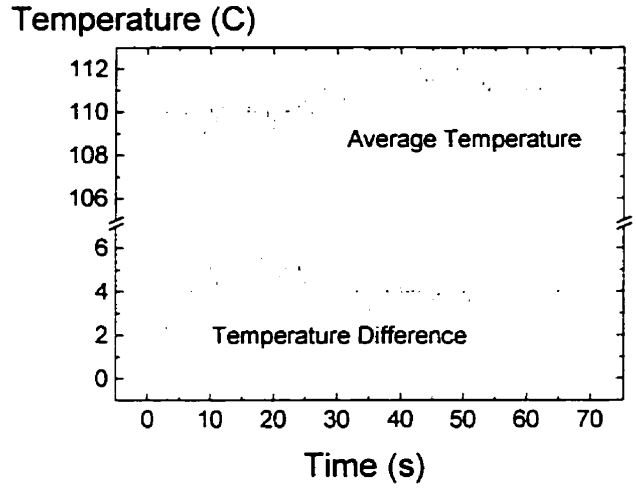


Figure III.20 Average temperature and temperature difference during an isothermal test at 110°C.

Cooling of samples is less problematic. With the small stove, it is possible to cool a sample with liquid nitrogen. The problem with this technique is that the cooling rate becomes extreme and a radial thermal homogeneity is difficult to obtain. With the big stove, liquid nitrogen cannot be used. Here, it is not a problem since all characteristic temperatures of the alloy are above room temperature. It would have been interesting to study the alloy at lower temperatures, but these tests are not conducted in this report.

Cooling rates are more difficult to control but some procedures can be devised to achieve a partial control. For slow cooling rates, the input power to the stove can be shot down while the stove is kept close. For faster cooling rates, the power is also shut down and the stove can be opened or even retrieved. Finally, the fastest cooling rates are obtained when the stove is retrieved while a fan produces an air flow around the sample. For many experiments, cooling of the sample was produced with a combination of all these procedures in order to obtain (as much as it is possible) a constant cooling rate. At the beginning of cooling, the power is shut down and the stove is kept close. When the cooling rate becomes too slow, the stove is opened. Finally, at lower temperatures, the stove is retrieved and a fan is positioned in front of the sample. The middle part of Figure III.21 shows average temperature and temperature difference during cooling (taken from experiment #18). A fine observation of these two curves reveals a cooling in 3 stages characterized by discontinuities in the slope of these curves. The temperature difference curve of this same Figure also shows that temperature homogeneity is better on cooling than on heating.

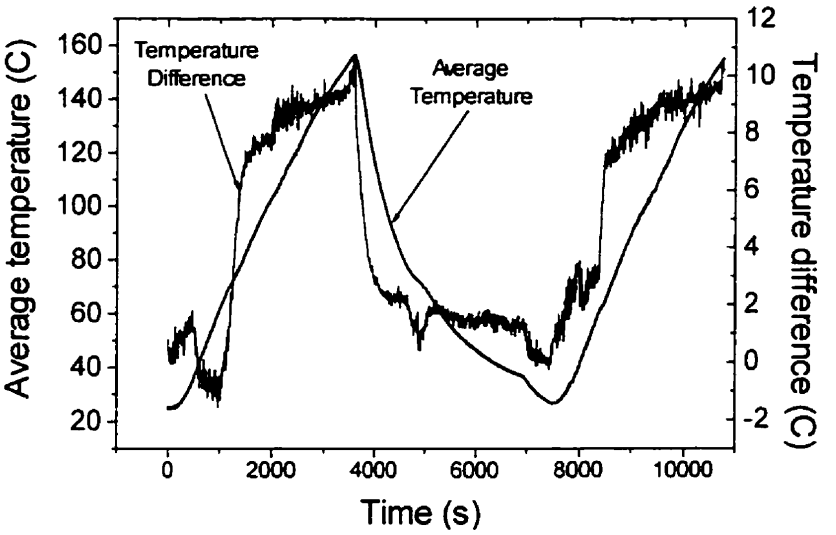


Figure III.21 Effect of cooling in 3 stages on the average temperature and on temperature difference curves.

III.3.3 Determination of shear stress and shear strain

The shear stress and shear strain on the surface of the sample can be computed by only the two rotation angles read by angular measurement devices. With these rotations, the moment M and total angle of rotation φ over the gage length can be calculated (see section III.3.1).

The **shear strain** γ is determined by purely geometrical considerations. When a moment M is applied, an infinitesimal square ABCD on the surface of the sample (Figure III.23) is deformed into a geometry described by a parallelepiped A'B'C'D'. The shear strain γ_{xy} can be easily computed by assuming that :

1) the gage length of samples is considered to be an uniform rod with constant radius,

2) the deformation of the ends of a sample are negligible (the hatched part of Figure III.22 illustrates the end of a sample),

3) the shafts in which a sample is gripped are rigid,

4) each cross-section in the gage length of the sample always remains a plane when the moment is applied,

5) each cross-section in the gage length is identically deformed in such way that a straight line becomes an helix after deformation (this is possible only if temperature is homogeneous on the entire gage length).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 + \frac{R\varphi}{L}\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{R\varphi}{L} = \gamma$$

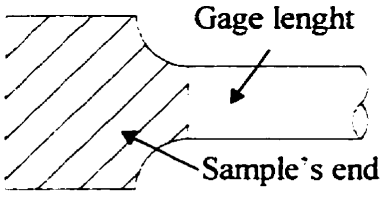


Figure III.22 End of a sample that is assumed to be rigid.

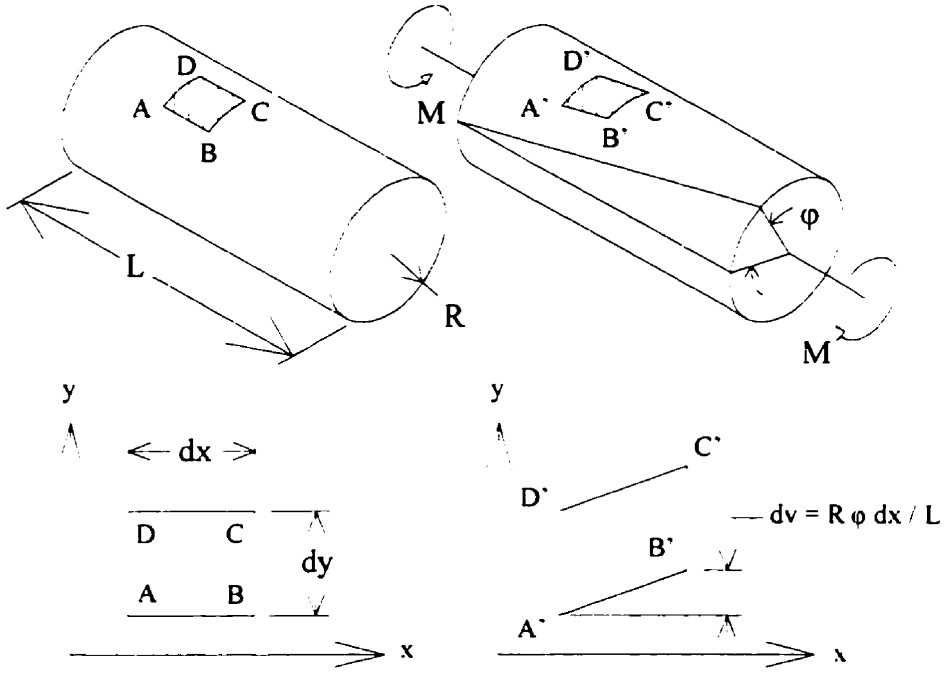


Figure III.23 Deformation of an infinitesimal square on the sample's surface.

The **shear stress** τ on the surface of a sample is more difficult to determine because the stress distribution in the cross-section of the gage length must be assumed. Let us analyze two limit situations. The first one is a linear elastic stress distribution as shown in Figure III.24. We know that external moment M must be equilibrated by the internal moment M_{int}. The internal moment is calculated by a simple integral. The internal moment dM_{int} of an infinitesimal annulus of radius r and thickness dr (right drawing of Figure III.24) is:

$$dM_{int} = \text{force} \times \text{lever} = \text{stress} \times \text{area} \times \text{lever}$$

$$= \left(\tau_l \frac{r}{R}\right) \times (2\pi\, r\, dr) \times (r)$$

$$= 2\pi \frac{\tau_l}{R} r^3 dr$$

The total internal moment M_{int} is simply obtained by integration from r = 0 to r = R of the previous expression.

$$M_{int} = \int_{r=0}^{r=R} dM_{int} = 2\pi \frac{\tau_l}{R} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \tau_l R^3$$

Finally, since the internal moment is equilibrated by the external moment M, the stress on the surface of a sample for a linear distribution is :

$$\boxed{\tau_l = \frac{2M}{\pi R^3}}$$

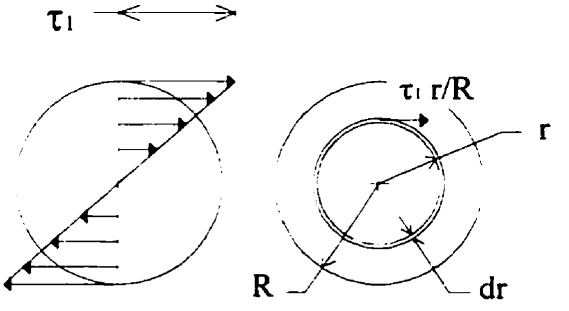


Figure III.24 Linear stress distribution in the sample's cross-section.

The second limit situation is a purely plastic stress distribution as shown in Figure III.25. By a similar integral, the stress τ_2 on the surface of the sample that would equilibrate the applied moment M is :

$$\tau_2 = \frac{1.5\,M}{\pi R^3}$$

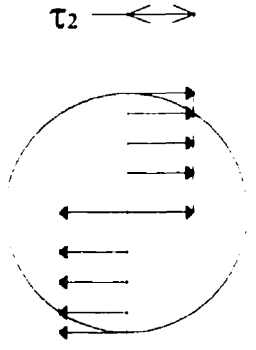


Figure III.25 Purely plastic stress distribution in the sample's cross-section.

For martensitic transformation in shape memory alloys, the stress distribution is between these two limit situations. Figure III.26 schematizes such stress distribution. At the beginning of a loading, the stress distribution is linear and when phase transformation occurs, it becomes non-linear. When the phase transformation progresses, it tends to the purely plastic case, but without never reaching it. Therefore, this means that the real value of the shear stress τ_R on the surface of the sample is between the two values previously calculated.

$$\tau_1 = \frac{2\,M}{\pi R^3} \geq \tau_R \geq \frac{1.5\,M}{\pi R^3} = \tau_2$$

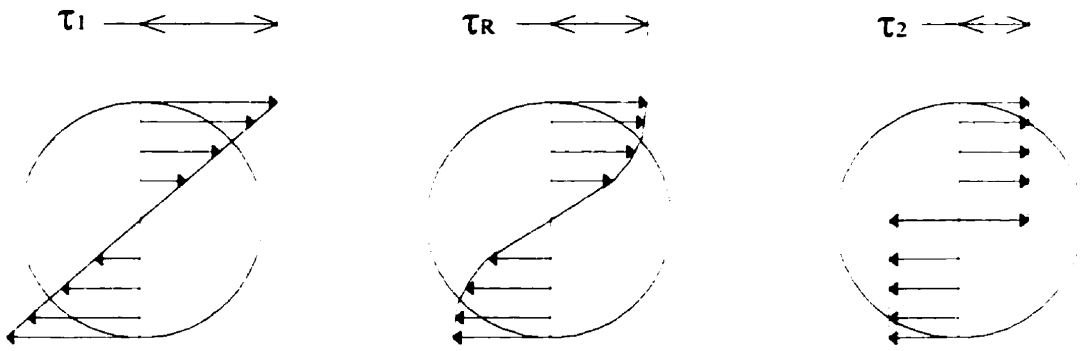


Figure III.26 Stress distribution during phase transformation.

In the software used in parallel with the torsion testing machine, the shear stress is computed as if the stress distribution were purely plastic (the second limit case). Therefore, the calculated stress τ_2 is always under-estimated and the error reaches 33% at the beginning of loading when the distribution is linear. The following development proposes a way to improve the precision of calculated shear stress values. It consists of assuming that the stress distribution is elasto-plastic (left drawing of Figure III.27). With this assumption, a coefficient k can be calculated and a corrected shear stress τ_C is obtained.

$$\tau_C = k\,\tau_2$$

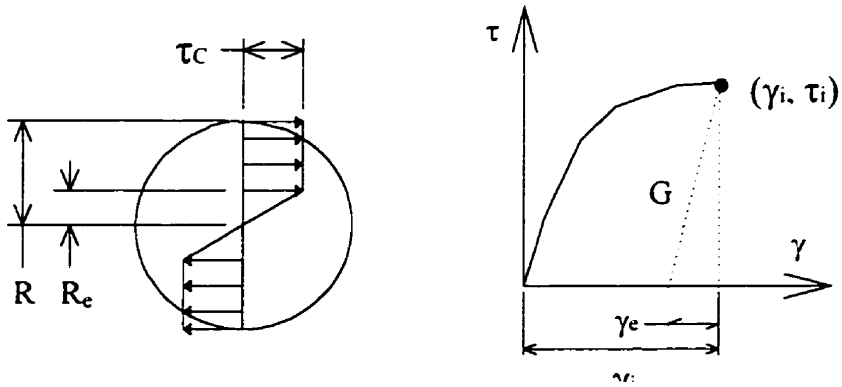


Figure III.27 Elasto-plastic stress distribution in the sample's cross-section.

The correction procedure is applied to every single point (γ_i, τ_i) computed by the software (right graphic of Figure III.27). The unknown radius R_e of the elastic part of the stress distribution is an important parameter that must be estimated. Let us imagine that the total strain γ_i is the sum of an elastic contribution γ_e and a non-elastic one. Here, we assume that the elastic radius is the ratio of the elastic contribution γ_e over the total shear strain γ_i multiplied by the sample's radius R. But, to be able to do so, the shear modulus G of the alloy must be estimated.

$$R_e = \frac{\gamma_e}{\gamma_i} R = \frac{\tau_i}{G\gamma_i} R = AR \qquad \text{where } A = \frac{\tau_i}{G\gamma_i}$$

When the elastic radius R_e of the stress distribution is known, the internal moment can be calculated in a similar way as the other stress distributions.

$$M_{int} = \int_0^{Re} \frac{r}{Re} \tau_C \, 2\pi r^2 dr + \int_{Re}^{R} \tau_C \, 2\pi r^2 dr$$

After few simple mathematical transformations, the internal moment is expressed as a function of the parameter A previously defined.

$$M_{int} = \left(\frac{\pi}{2} \tau_C A^3 R^3 \right) + \left(\frac{2\pi}{3} \tau_C \left[1 - A^3 \right] R^3 \right)$$

On the other hand, we know that the internal moment is also given by the following relation that is used in the software (purely plastic distribution).

$$M_{int} = \frac{\tau_i \, \pi \, R^3}{1.5}$$

Equality between the two latest relations gives an expression for the correction factor k that must be multiplied to the calculated shear stress τ_i to obtain the corrected shear stress τ_C. Note that τ_i and τ_2 are identical.

$$\tau_C = k\,\tau_i \qquad \text{where} \quad k = \frac{4}{4 - A^3} \quad \text{and} \quad A = \frac{\tau_i}{G\gamma_i}$$

When the behavior is elastic, the parameter A is 1.0 and the correction factor k is 1.33, which corrects the error of 33%. When the elastic shear strain becomes negligible in front of the total shear strain (for large transformation strains), the value of A is nearly zero and the correction factor is almost 1.0. This means that the stress distribution is practically purely plastic (second limit case).

Figure III.28 shows simultaneously an experimental curve obtained at room temperature (from experiment #24) and its corresponding corrected curve. We can observe that the correction is larger near elastic regions and almost invisible for larger shear strains. The overall correction is relatively small and this proves that in first approximation, the choice of the purely plastic stress distribution is satisfactory.

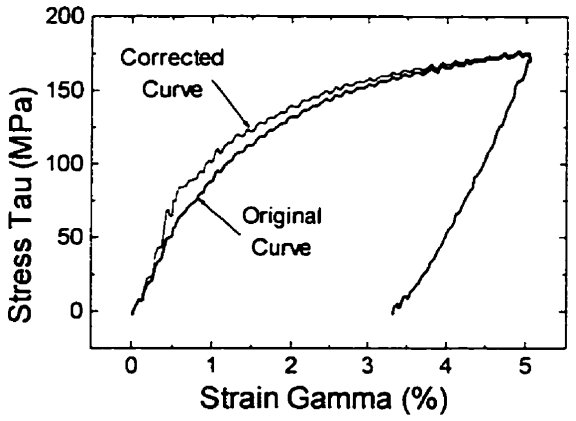


Figure III.28 Experimental curve corrected by the assumption of elasto-plastic stress distribution.

It is important to specify that all experimental results presented in this report (except Figure III.28) ARE NOT CORRECTED by the assumption of an elasto-plastic stress distribution.

Other correction factors could be obtained by assuming more complex stress distributions (a bilinear stress distribution for example). But I strongly believe that it would be useless because the improvement on the corrected shear stress value would be much less than the precision of results given by the experimental machine, precision which is around 10 MPa.

For curves that are described by only positive values of shear stress or by classical superelastic behavior with positive and negative values of shear stress, this correction technique is applicable without any problem. Curves with residual strain (martensitic curves for example) that are characterized with positive and negatives values of shear stress are difficult to correct. The elastic radius R_e of the elasto-plastic stress distribution becomes difficult to determine and the singularity of parameter A is obvious since γ_i can be zero for a non-zero value of τ_i.

III.3.4 Effect of the machine on results

The aim of this section is to verify if the torsion testing machine affects the precision of results. In the first place, two identical experiments were conducted with the same sample. For experiment #1, a sample was installed with thermocouples and 2 layers of isolation. For experiment #2, after annealing, the sample was reinstalled in the gripping shafts without isolation and thermocouple. Stress-strain curves in Figure III.29 show a very good reproductibility between experiments #1 and #2. Isolation layers and thermocouples installed on the sample seem to have no effect on results. Since both curves obtained from two different experiments are almost superposed, we believe that the torsion testing machine has a negligible influence on results.

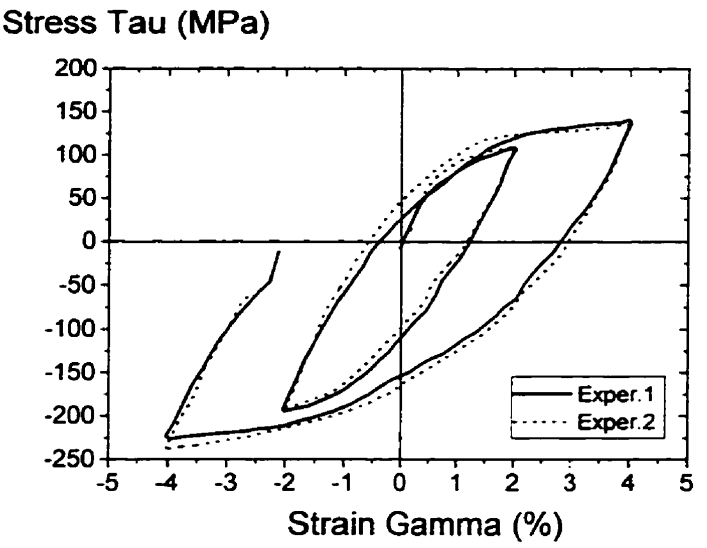


Figure III.29 Reproductibility of an identical experiment.

Figure III.30 shows how a sample is gripped in shafts. A bad gripping can produce erroneous results. It is a bolt that ensures the gripping and if the bolt is not tightened enough, a movement of the sample in the shafts can be observed. It is mandatory to tighten very strongly the sample especially when it is submitted to temperature variations. Thermal expansion can "relax" the assembly and then the sample becomes badly gripped. Figure III.31 shows results obtained from two identical experiments, but in experiment #5, the sample is badly installed. The strange behavior is caused by a bad gripping. The testing machine has a negligible influence on the results, but samples must be properly installed.

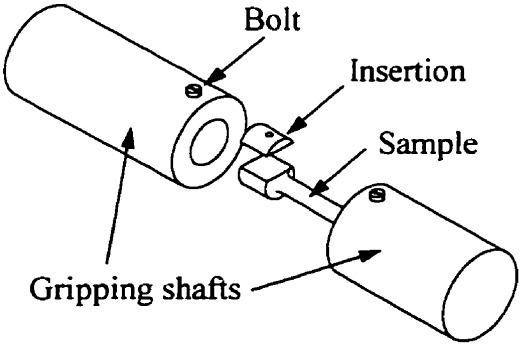


Figure III.30 Gripping of the sample in shafts.

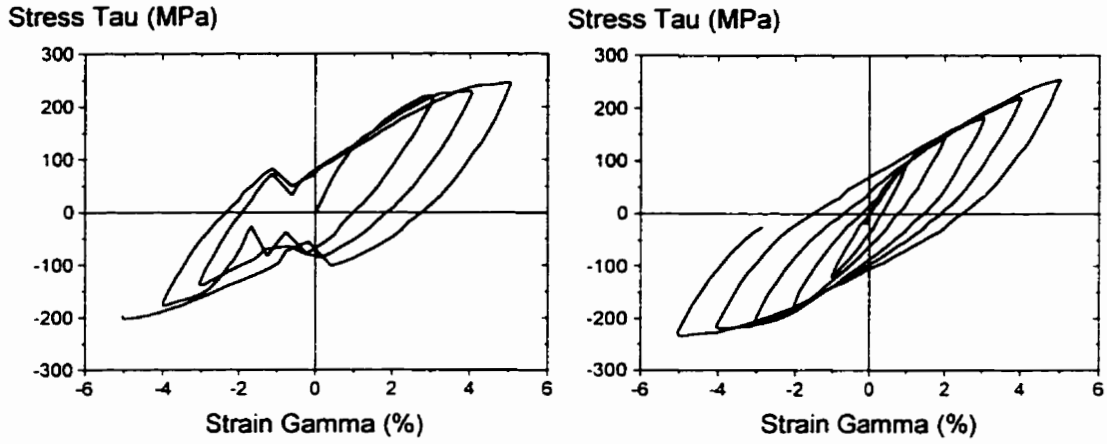


Figure III.31 Effect of bad (left) and good (right) gripping of the sample.

Sometimes, the effects of a bad gripping are less obvious and it may cause erroneous interpretation of results. For example, two isothermal curves have been obtained at 140°C (experiment #32 after heating and experiment #35 after cooling). Figure III.32 superposes these two curves and one could believe that the alloy behaves differently after heating of after cooling. In fact, it is a bad gripping of the sample that is responsible for the softening at the beginning of loading after cooling. At this temperature, the behavior should be identical since the alloy is completely in austenite and a bad gripping has been verified after experiment #35. This proves that the sample must be firmly gripped in the shafts in order to obtain reliable results.

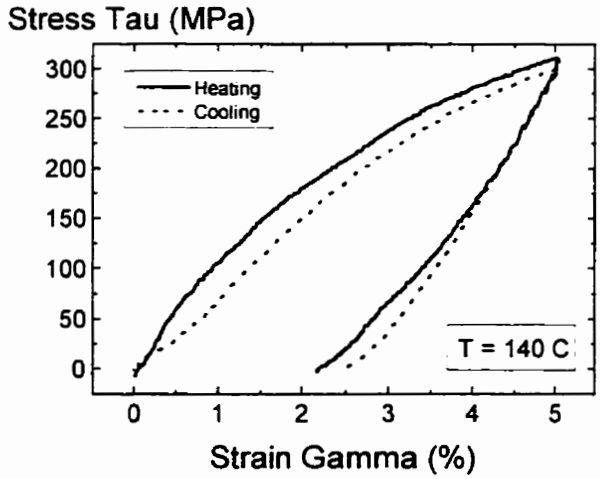


Figure III.32 Softening of the behavior due to a bad gripping of the sample.

Finally, mechanical friction in the machine (especially on bearings) affects the precision of the stress. For example, in experiment #68 that studied the DOT effect, a load is applied at the beginning of cooling. The increase of stress registered was 33 MPa. When the static load was removed, only 25 MPa of the stress registered by the computer was removed. This effect can be observed in many other experiments and we conclude that the stress is given by this testing machine in torsion with a precision of $\pm$ 5 MPa.

III.4. Characterization of the Ni-Ti alloy in torsion

This section presents results obtained with the torsion testing machine. Few analysis and explanations are given to describe the behavior of the alloy due to the limited time available to conduct experiments. It has been preferred to perform as many experiments as possible. So, this section is more a synthesis of important results that characterize the Ti-Ni alloy.

III.4.1 Analysis of constant stress curves

All curves analyzed in this section have been obtained by "Constant Stress Temperature Variation" and "One Way Shape Memory Effect" tests as described in section III.1.1.

III.4.1.1 Strain after cooling

When the alloy is cooled from austenite to martensite with a constant stress applied, an increasing strain can be observed and it reaches a maximal and quasi-constant value for temperatures lower than M_f. This maximum strain is called here "Strain after cooling" and it depends on the stress applied during cooling. Figure III.33 shows a typical result obtained from experiment #19. From room temperature, the temperature is increased with no stress applied (segment AB of Figure III.33). At a temperature for which the

sample is completely in austenite, a stress is applied (segment BC). Finally, the sample is cooled while the stress is kept constant (segment CD).

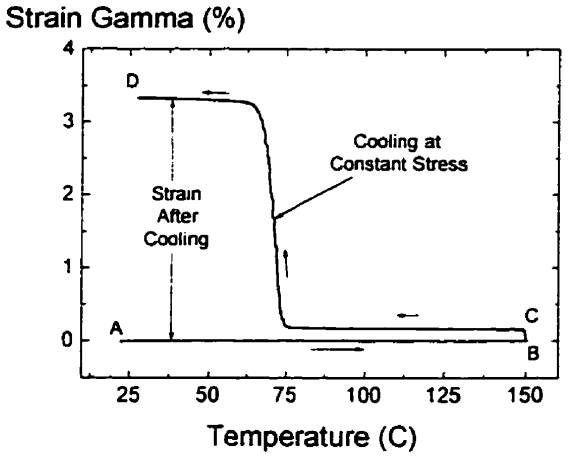


Figure III.33 Definition of strain after cooling.

The evolution of strain after cooling depends on the cooling stress as plotted in Figure III.34. Values in this graphic have been taken from results of experiments #10, #12 to #14 and #16 to #19. Ideally, the relation should be linear, which is nearly the case for small strains. For strains higher that 8%, we suspect that plastification occurs in the most loaded parts of the sample and the relation becomes non-linear. In this case, a parabolic behavior (dotted line) gives a very good fitting of the experimental results.

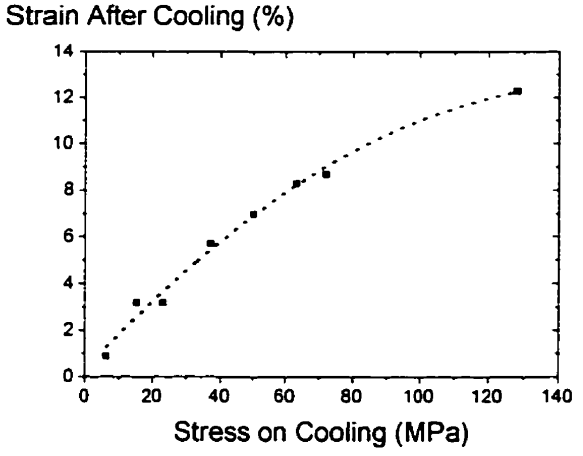


Figure III.34 Evolution of the strain after cooling as a function of stress.

III.4.1.2 Transformation temperatures

It is well known that transformation temperatures increase with stress and Figure III.35 presents their evolution obtained from experiments #10, #12 to #14 and #16 to #19. Transformation temperatures were read on each curve as presented in Figure III.17. Another technique could have been used (for example, intersection of two tangent lines), but general behavior of curves gave erroneous results, especially for the estimation of As. The results presented in Figure III.35 show effectively higher transformation temperatures with stress, but the value of the slope is slightly too high for a typical Ti-Ni alloy. When the Clausius-Clapeyron relation is used, the slope for the temperature M_S should be approximately 6 MPa/°C. Here, the slope for M_S and A_S is 9 MPa/°C, 10 MPa/°C for M_f and 8 MPa/°C for A_f. These slopes have been calculated by linear regressions that give the best fitting of all data points. Note that only few data were used and therefore, the determination of these transformation temperatures is not very precise.

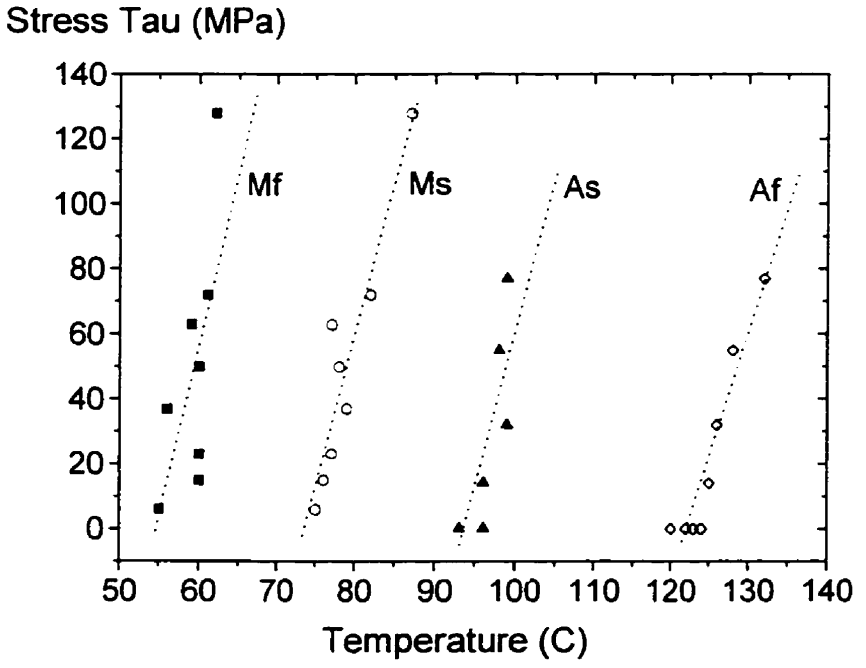


Figure III.35 Evolution of transformation temperatures with stress.

III.4.1.3 Shape memory effect

Shape memory effect is the recovery of residual strain on heating when no stress is applied. This effect is observed with the classical One Way Shape Memory Effect (experiment #22) or with the Assisted Two Way Shape Memory Effect (experiments #10, #12, #13 and #14). In the first case (OWSME), a residual strain is created from reorientation of martensite after isothermal dynamic loading. In the second case (ATWSME), the residual strain comes from martensite that has been created with a particular orientation during cooling under applied stress.

Figure III.36 shows the strain recovery for different experiments. Ideally, the strain recovery should be complete in such way that the strain would be zero at high temperature, but it is clearly not the case here. Stabilization affects this process and the strain is not fully recovered. A larger non-recovered strain is obtained at high temperature for a larger residual strain at low temperature. It is also interesting to observe that the behavior is slightly different in experiment #22 since the non-recoverable strain at high temperature is higher than the one of experiment #13, even if its residual strain (at low temperature) was lower. This indicates that the mechanism of martensite creation may have an effect on the stabilization of the alloy. Martensite created in experiment #22 is different than all other experiments. The reorientation of martensite may generate more dislocations than the creation of oriented martensite from cooling, which could explain the higher non-recoverable strain after heating. This is only an assumption and more serious experimental work should be performed to obtain satisfactory conclusions.

From the curves of Figure III.36, a parameter called coefficient of recovery K_R can be defined. It is simply the ratio of the recovered strain to the strain before heating (see Figure III.37). Table III.3 presents the values of this coefficient for experiments discussed in this section. A value around 0.9 is obtained for each experiment, which tell that 10% of the strain is not recovered during the reverse transformation. Lowest value of this

coefficient is obtained for experiment #22, the only experiment for which the residual strain (strain before heating) was obtained by a dynamic loading at room temperature.

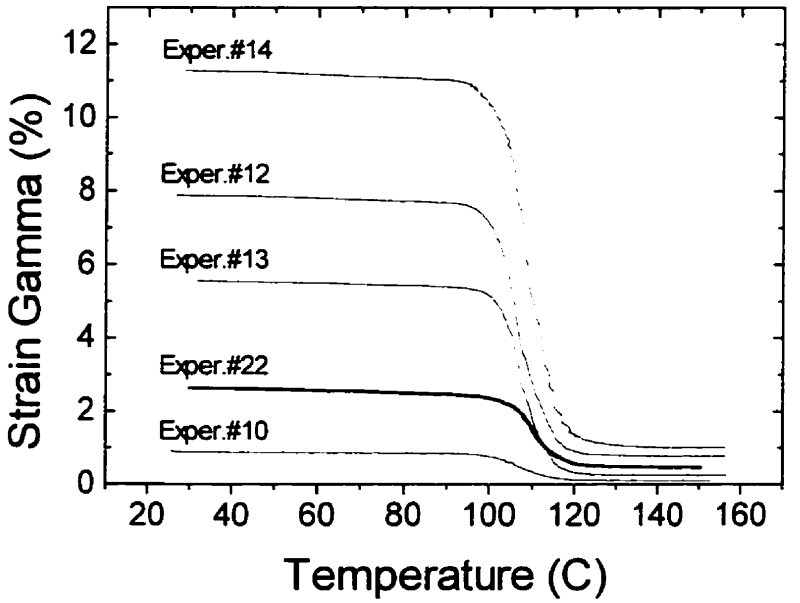


Figure III.36 Shape memory effect for different residual strains.

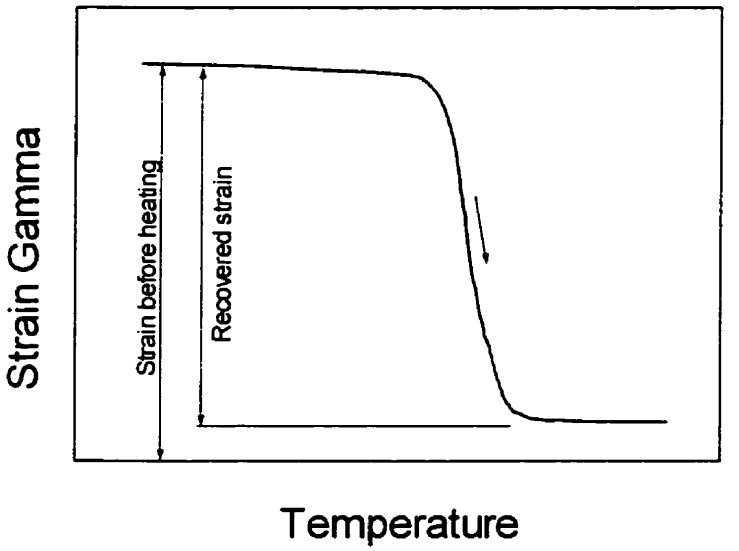


Figure III.37 Definition of strain before heating and recovered strain.

Table III.3 : Recovery coefficient K_R for different experiments.

Experiment #	Strain before heating	Recovered strain	K_R
10	0.87	0.78	0.90
12	7.89	7.12	0.90
13	5.55	5.30	0.95
14	11.27	10.27	0.91
22	2.64	2.16	0.87

III.4.2 Analysis of isothermal curves

All the analysis performed in this section is based on the isothermal stress-strain curves (ISSC) obtained in experiments #24 to #67.

III.4.2.1 Isothermal curves obtained after heating

Several isothermal curves have been obtained from temperatures lower than M_f up to temperatures higher than A_f. For temperatures where martensite and austenite could coexist, the behavior of the alloy has been studied at every 10°C. Curves from experiments #24, #26, #28 to #31, #53 to #55, #58 and #62 are used to characterize the isothermal behavior of the alloy when the temperature of the test is reached after heating.

Ideally, all curves should be plotted on the same graphic in order to make better comparisons between them. In this case, there are too many curves and a single graphic becomes useless. For an easy visualization, all curves have been plotted in 3 different graphics shown in Figure III.38. The upper graphic presents the curve at the highest temperature (160°C), the one at the lowest temperature (20°C) and the curve for which the behavior is the "lowest" (90°C). The middle graphic plots the curves between 20°C and 90°C and finally, the bottom graphic shows the curves between 90°C and 160°C.

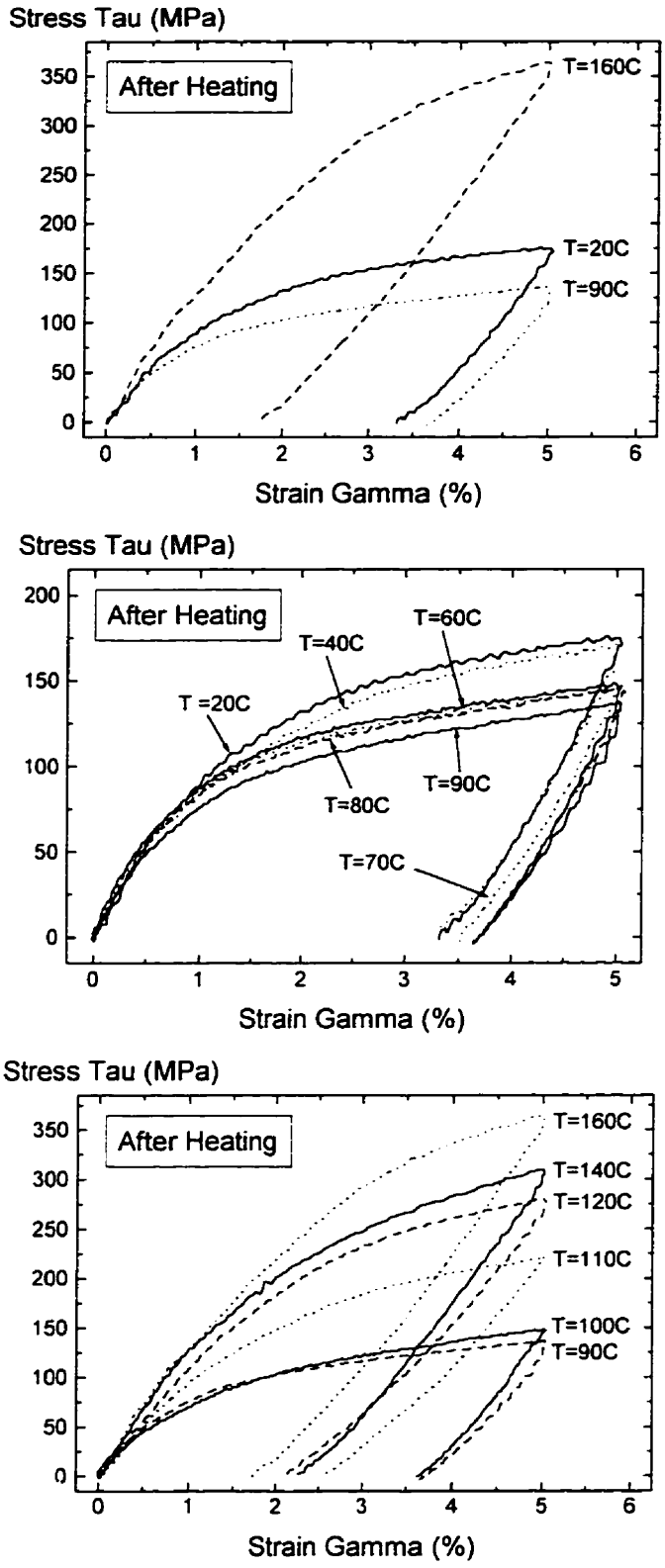


Figure III.38 Isothermal stress-strain curves at several temperatures obtained by heating.

It is interesting to study the evolution of some parameters as a function of temperature. Here, 5 parameters are studied. They are the shear modulus at the beginning of loading (G_{start}), the shear modulus at the beginning of unloading (G_{unload}), the yield stress at 0.1% and 0.2% strains and the stress at 5% strain. The left graphic of Figure III.39 presents these parameters for experiment #24 at room temperature.

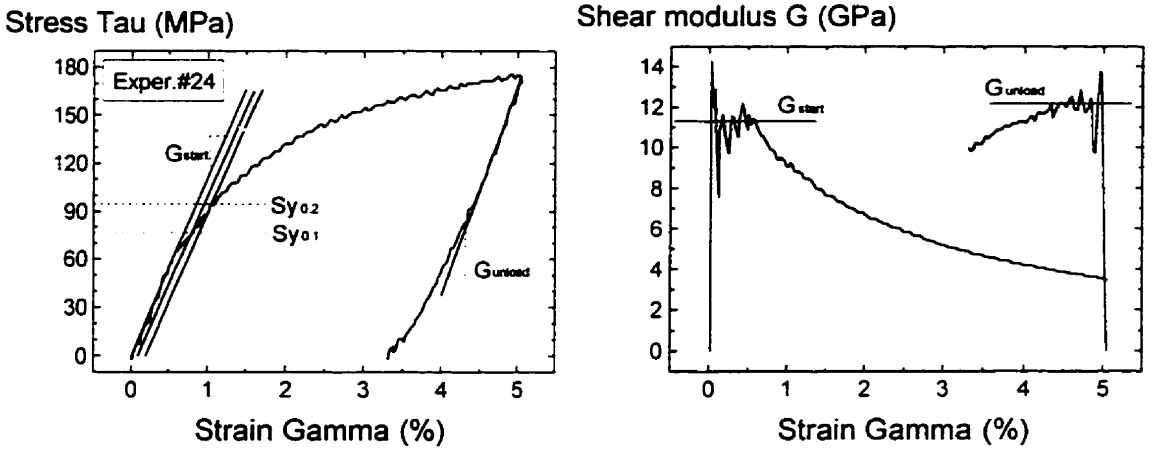


Figure III.39 Definition of yield stresses and shear modulus.

Since the behavior of a curve is not perfectly smooth (due to the imprecision of the testing machine and instrumentation), it is difficult to evaluate precisely the slopes that characterize these shear modulus. It is important to estimate them correctly because they have a strong influence on the determination of shear stress at 0.1% and 0.2%. In order to minimize the error, the secant modulus (not tangent modulus) for each data points have been calculated and are reported in the right graphic of Figure III.39 as a function of strain. Oscillations are obvious but the average value of the shear modulus is relatively easy to obtain. When the G_{start} is known, a shift of 0.1% and 0.2% is applied to evaluate yield stresses. This technique has been employed for the determination of each parameter at each temperature and Figure III.40 shows the evolution of these parameters as a function of temperature.

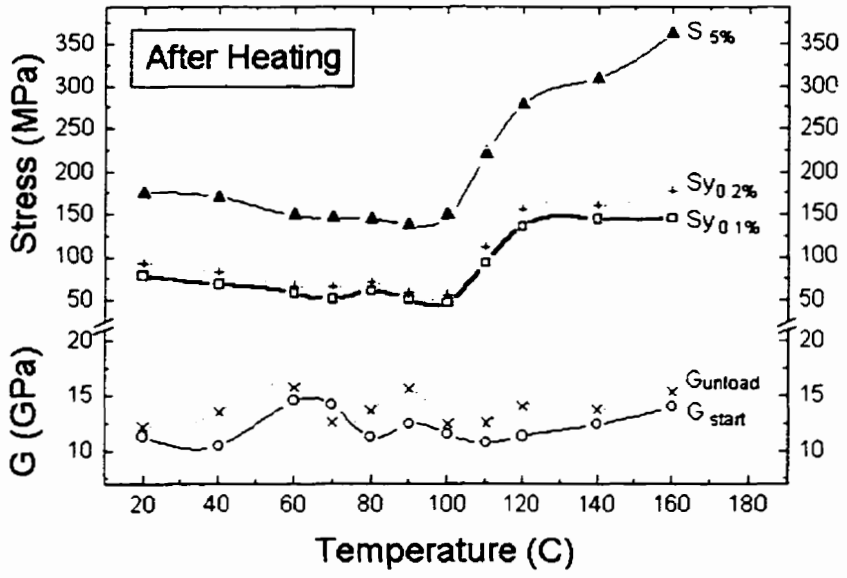


Figure III.40 Shear modulus and yield stress at several temperatures after heating.

It is very difficult to give valuable conclusions concerning the evolution of the shear modulus with temperature. The behavior is not well defined for both G_{start} and G_{unload}. The shear modulus is between 10 and 15 GPa. On the other hand, the behavior of the yield stresses and the stress at 5% shows clearly a minimum value around the temperature $A_s \approx 93°C$. For temperatures higher than $A_f \approx 120°C$ or lower than $M_s \approx 75°C$, the general behavior of yield stresses with temperature seems to be linear. This V-shape behavior will be further discussed in section III.4.2.3.

III.4.2.2 Isothermal curves obtained after cooling

A similar analysis as the one performed in the previous section is repeated but this time, isothermal temperatures are reached after cooling. Temperature cannot be the only parameter to be considered here because stress-strain curves between transformation temperatures are very different if the testing temperature is reached after cooling or after heating.

Curves from experiments #24, #36 to #41, #48, #58 and #61 are used to characterize the isothermal behavior of the alloy when the temperature of the test is reached after cooling. Figure III.42 presents all these curves on three different graphics. Once again, the maximal and minimal temperatures are respectively 160°C and 20°C. But now, the "lowest" stress-strain curve is obtained at 70°C (comparatively to 90°C when isothermal curves are obtained after heating).

Evolution of shear modulus and yield stresses with temperature are also studied and results are presented in Figure III.41. Once again, a similar value of the shear modulus between 10 and 15 GPa seems to be characteristic for this alloy. Yield stresses and stress at 5% are described by a similar V-shape behavior. This time, the V-shape is shifted and the minimal value is measured for a temperature around Ms ≈ 75°C. A linear evolution of the yield stress is observed for temperatures higher than As ≈ 93°C and temperatures lower than Mf ≈ 55°C. In section III.4.2.3, V-shapes obtained after cooling and after heating are compared.

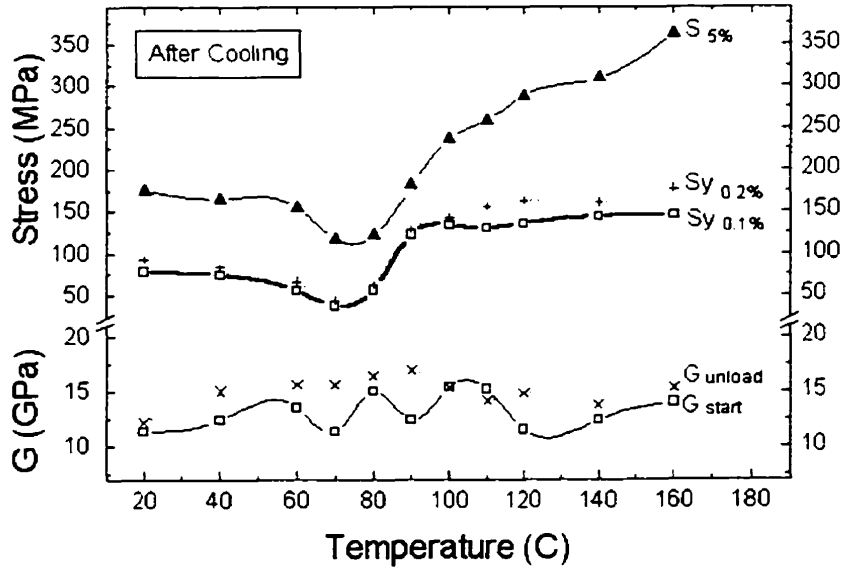


Figure III.41 Shear modulus and yield stress at several temperatures after cooling.

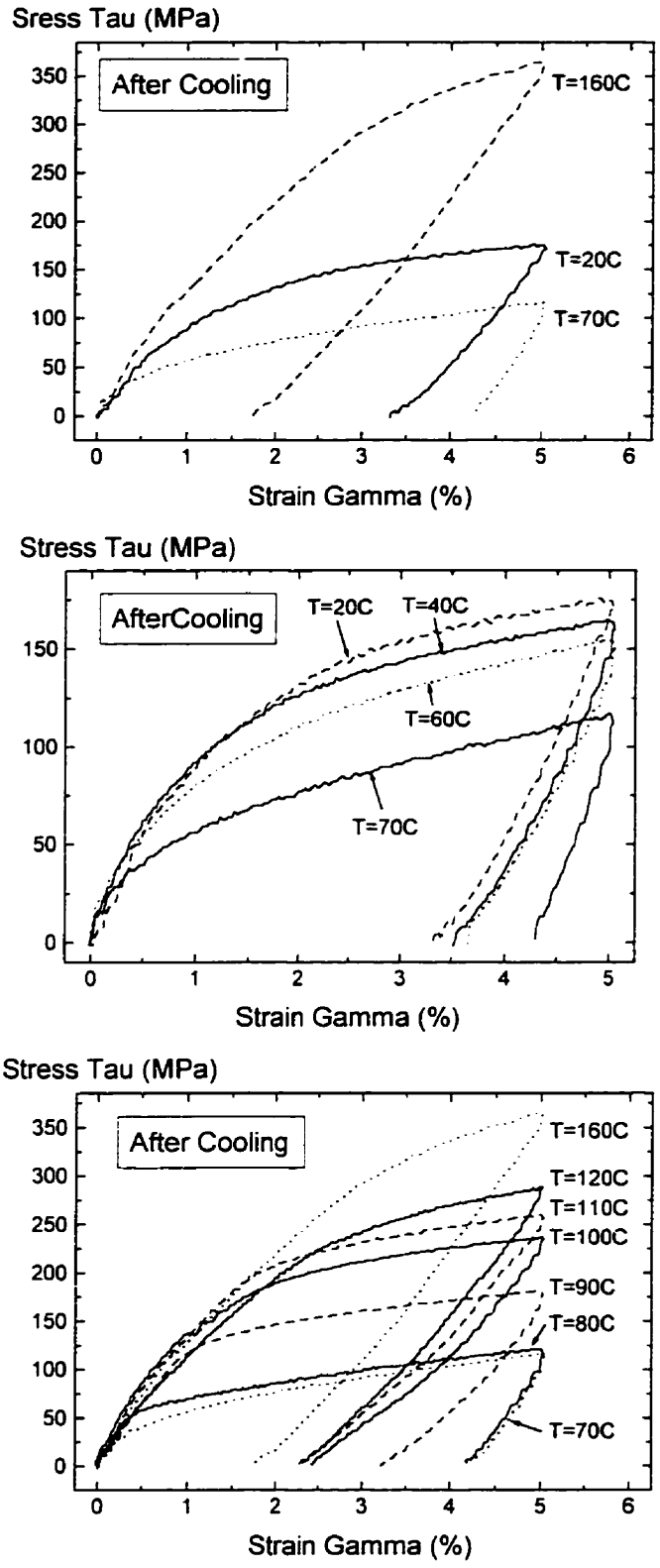


Figure III.42 Isothermal stress-strain curves at several temperatures obtained by cooling.

III.4.2.3 Difference between isothermal curves after heating and cooling

Temperature of isothermal testing is not the only parameter that influences isothermal stress-strain curves. Between transformation temperatures, the behavior is very different if the same testing temperature is reached after heating or after cooling. For temperatures higher than Af or lower than Mf, the alloy is completely in austenite or in martensite and there is no difference in the isothermal behavior.

Figure III.44 shows the difference between isothermal stress-strain curves obtained after heating and cooling for 8 temperatures (40°C, 60°C, 70°C, 80°C, 90°C, 100°C, 110°C and 120°C). The last graphic of this Figure III.44 shows that any intermediate behavior between the two extreme curves (obtained after heating and cooling) can be observed by performing partial heating of cooling. On this last graphic, 6 stress-strain curves at 100°C are plotted and the temperature history that has been followed is given in the top left corner of the graphic.

If we assume that the fraction of martensite (Φm) in the alloy follows a linear relationship between the characteristic temperatures as illustrated in Figure III.43, all curves of Figure III.44 can be localized easily. Solid squares represent curves obtained after cooling and open circles, those after heating. All 6 curves at 100°C shown in the last graphic of Figure III.44 are also localized and they are identified by letters A to H (same letters as in the last graphic of Figure III.44).

With this kind of relationship between fraction of martensite and temperature, the hysteresis is crossed with a constant value of the fraction of martensite. This is how all 6 intermediate points at 100°C in Figure III.43 have been localized. When the line of direct transformation (austenite to martensite) between M_s and M_f is reached after a partial heating, the fraction of martensite is increased. On the other hand, for the inverse

transformation (martensite to austenite), the fraction of martensite is decreased when the line between A_s and A_f is reached after a partial heating.

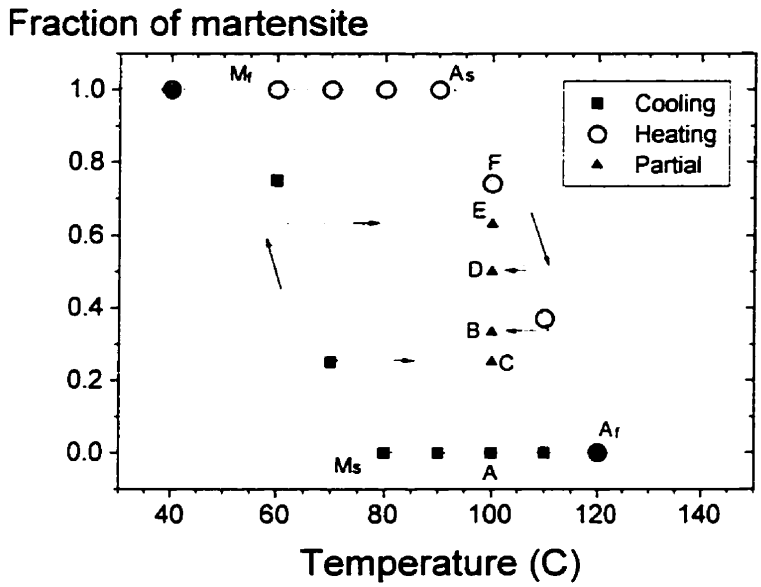


Figure III.43 : Linear relation between fraction of martensite and temperature.

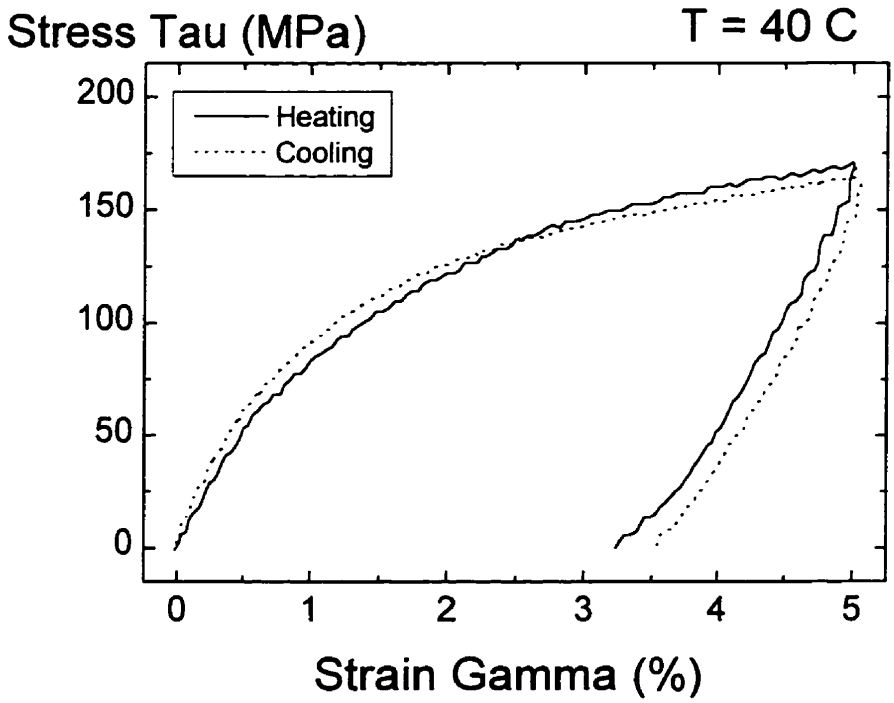


Figure III.44 Difference between stress-strain isothermal curves obtained after heating and cooling.

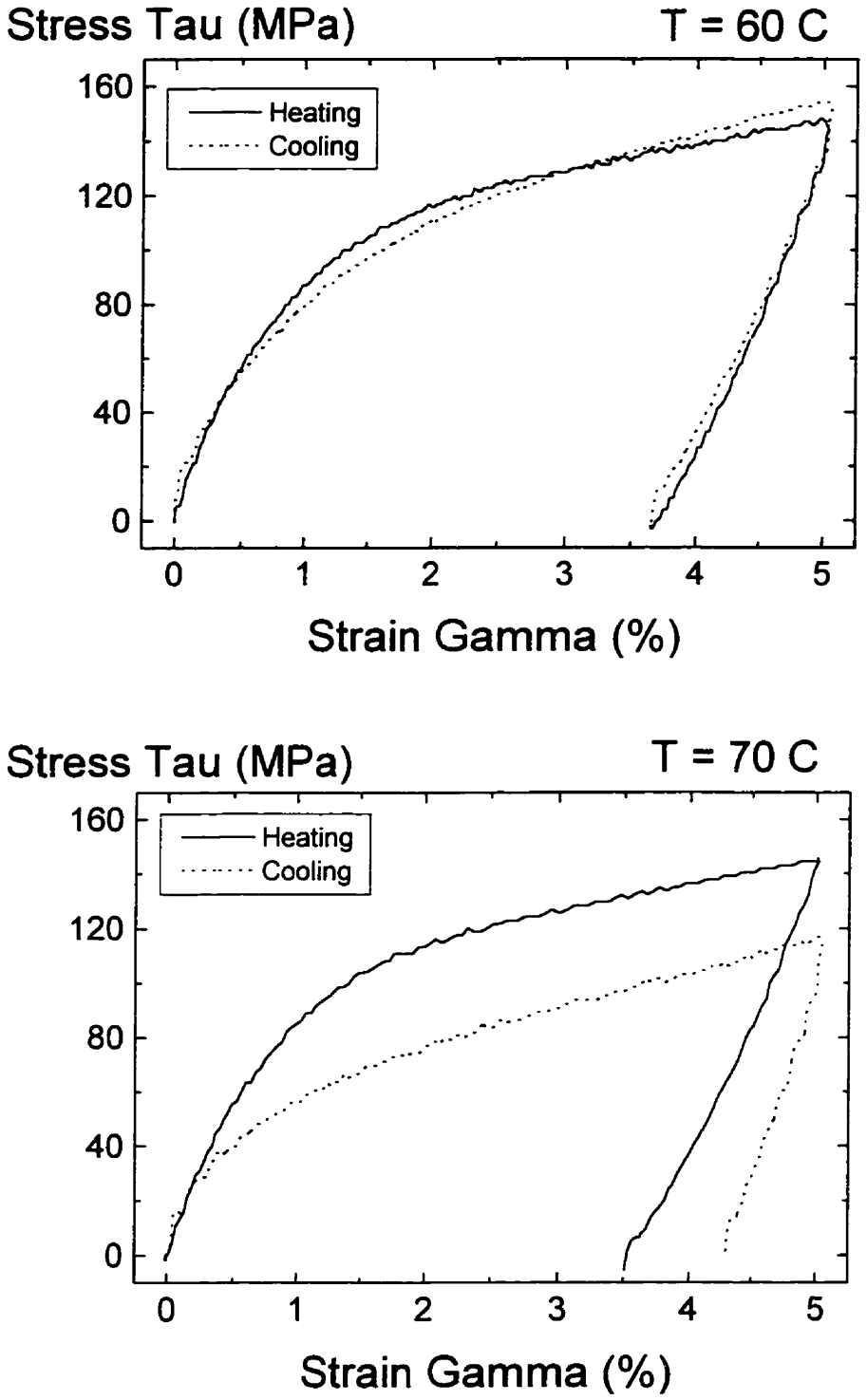


Figure III.44 (continued) Difference between stress-strain isothermal curves obtained after heating and cooling.

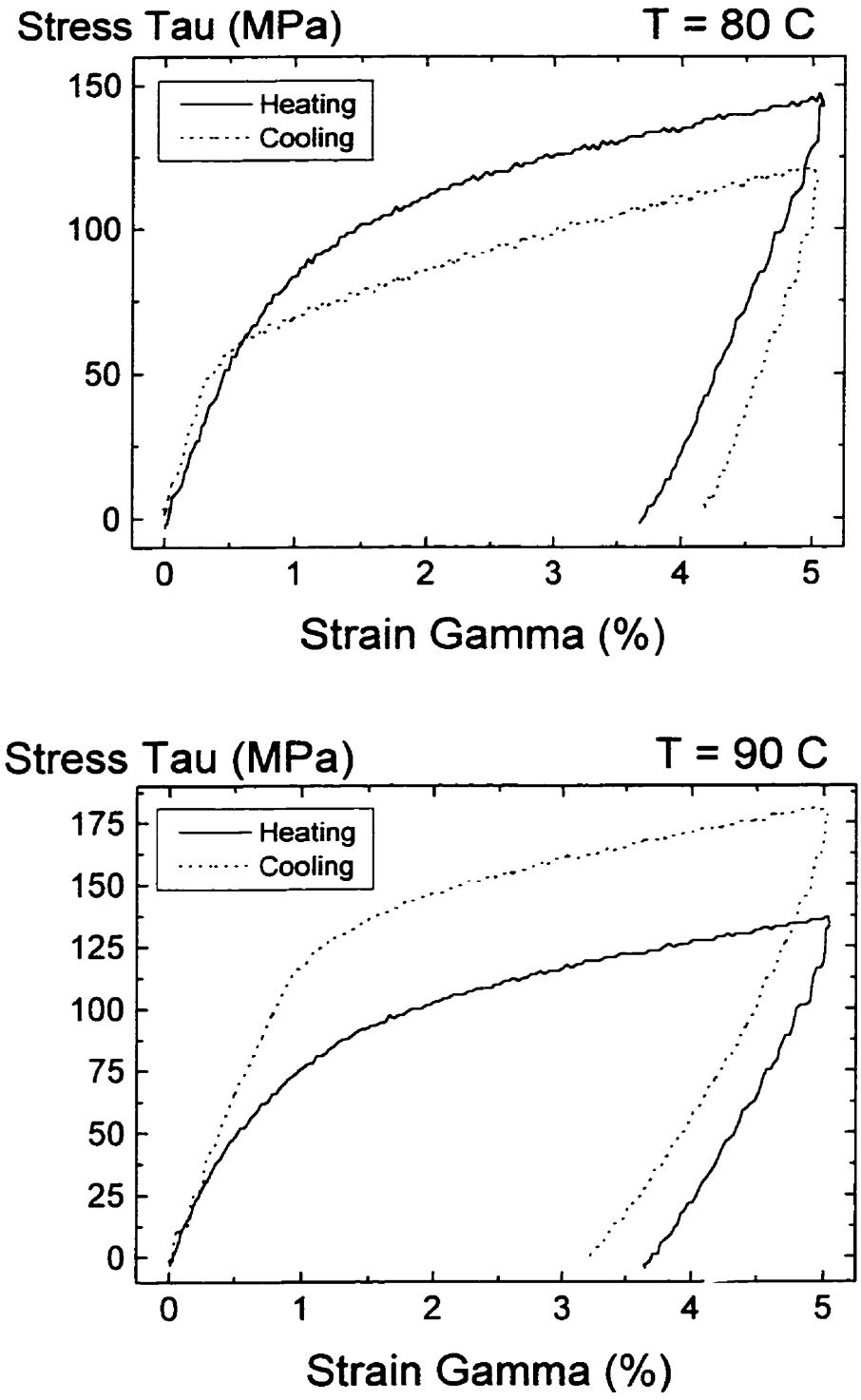
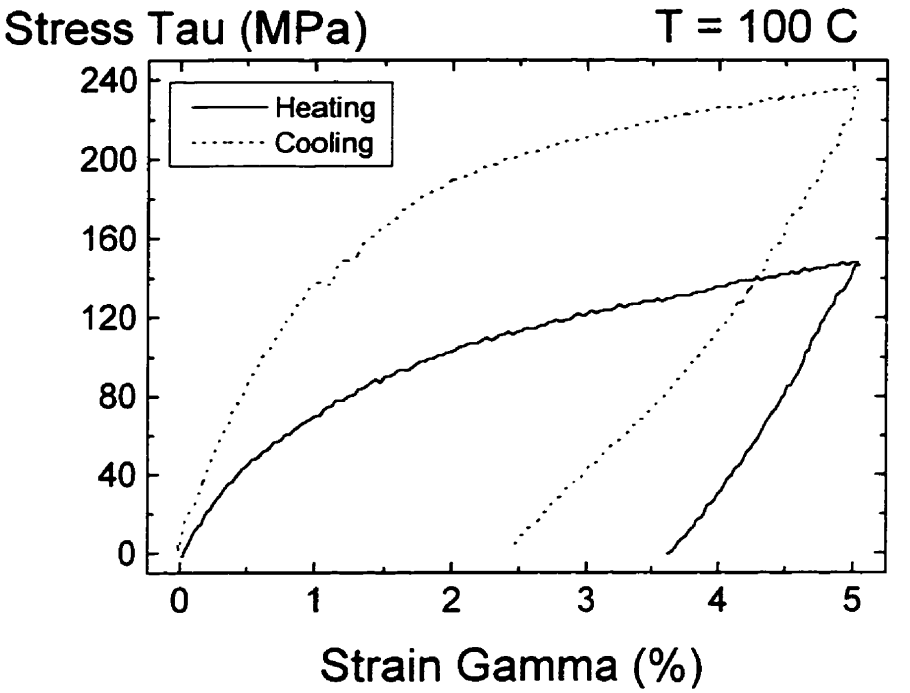


Figure III.44 (continued) Difference between stress-strain isothermal curves obtained after heating and cooling.



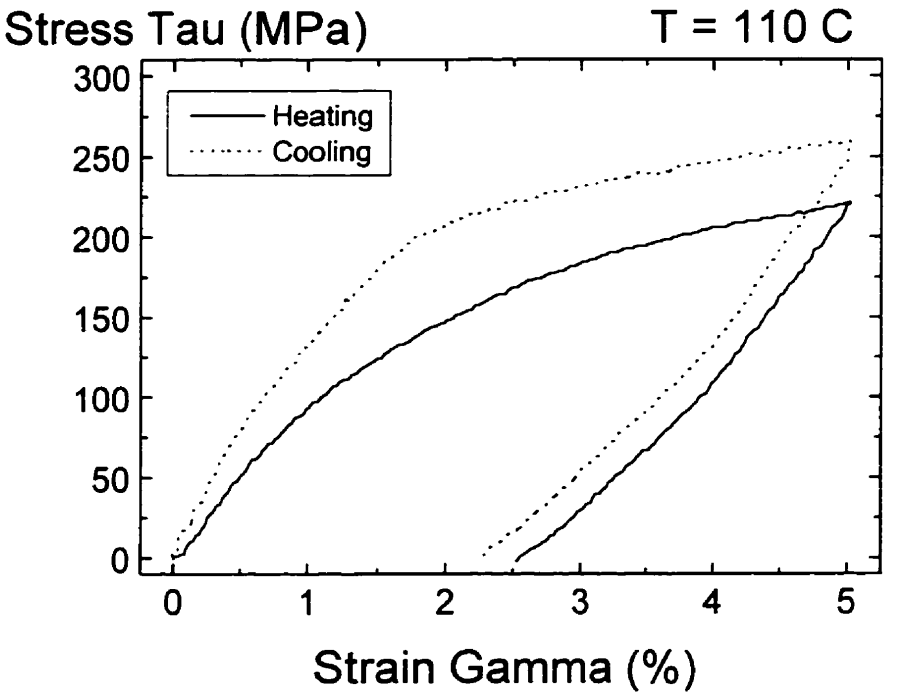


Figure III.44 (continued) Difference between stress-strain isothermal curves obtained after heating and cooling.

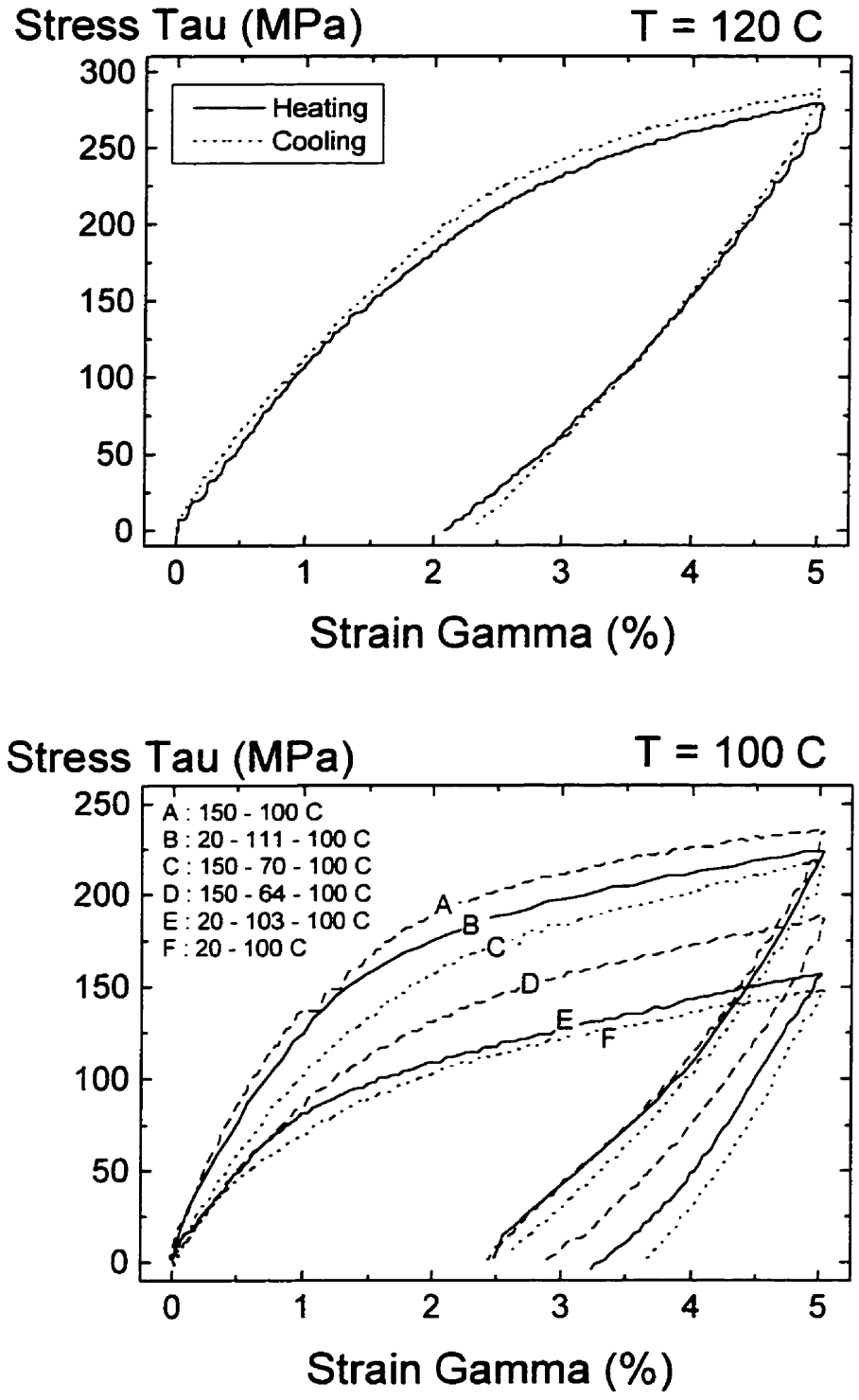


Figure III.44 (continued) Difference between stress-strain isothermal curves obtained after heating and cooling.

If the behavior of a stress-strain curve depends only on the fraction of martensite (parameter that takes into account the temperature and the manner for which this temperature had been reached), all curves obtained from heating for temperatures below A_s would have the same behavior. The same thing could be said for curves obtained after cooling for temperatures higher than M_s. And finally, the curve at 100°C obtained after a partial heating from 70°C (identified by the letter C) would be similar to the curve at 70°C after cooling.

Unfortunately, it is clearly not the case. For a phenomenological model like *KRIGAMF*, one of the main objectives is to compute all these different behaviors from only one set of experimental curves (for example, only curves obtained after heating). If only the fraction of martensite is taken into account, it is obvious that computations will be erroneous in many cases.

The analysis of the superposition of the two V-shapes discussed in previous sections may give good results. Figure III.45 shows the 0.2% yield stress of both isothermal curves at different temperatures after heating and cooling. From these experimental points, it seems that the V-shapes, that have been idealized by straight lines, are closely related to the transformation temperatures. Also, results give a good indication that it may be possible to simply shift a V-shape to obtain the other.

The superposition of both V-shapes shows a good agreement with differences between isothermal curves obtained after heating and cooling. For example, the two V-shapes almost intersect at 80°C and from Figure III.44, the behavior for heating and cooling at this temperature is very similar. The largest difference between curves obtained after heating and cooling is at 100°C and it is at this temperature that the largest deviation between both V-shapes can be observed, even if the diagram of the fraction of martensite (see Figure III.43) gives the largest difference at 80°C and 90°C .

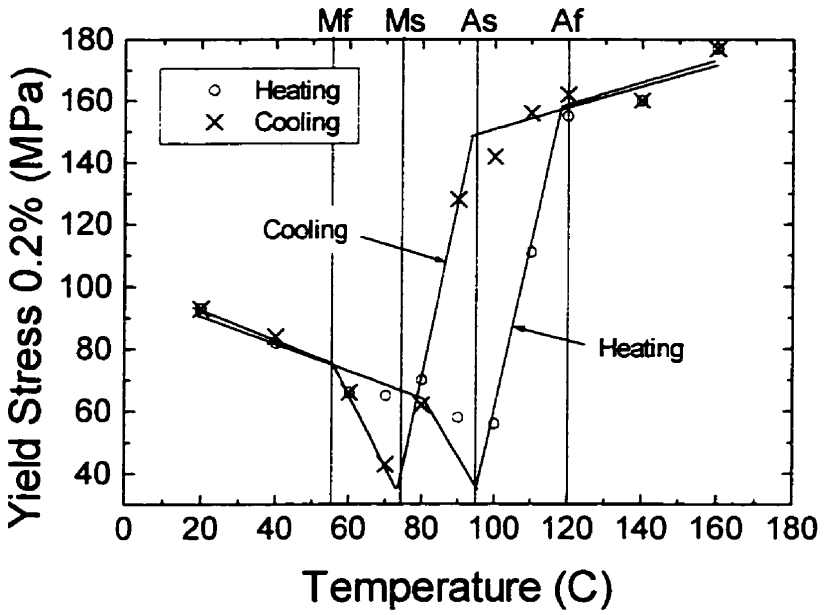


Figure III.45 Superposition of V-shapes for 0.2% yield stress.

It is not clear if every shape memory alloy can be described by this particular behavior of both V-shapes or if this is only a characteristic of this particular Ti-Ni alloy. To answer this question, more studies should be performed on this alloy and on many others copper-based and Ti-Ni alloys. It is also not obvious that this characteristic will be helpful for numerical simulations of the general behavior of shape memory alloys. It is only reported here as an observation that is worth some attention.

III.4.2.4 Behavior in "tension-compression"

As it was discussed in section III.3.1, shape memory alloys behave non-symmetrically in tension and compression when they are loaded uniaxially. Yield stress in compression is higher than in tension. With the torsion testing machine, stress can be easily inverted but it does not characterize the alloy's non-symmetry because both loadings are mechanically identical.

In this paragraph, the words "tension" and "compression" are used even if the samples are studied in torsion which create shear stress and strain. "Tension" only means that the stress is positive and "compression", that the stress is negative. If an experiment is properly performed, results should be identical in tension and compression like those of experiment #46 at Figure III.46. In this Figure, we can observe a very good symmetry (a stress near 350 MPa for a strain of 5% and a stress of -350 MPa for a strain of -5%) even if a slightly bad gripping can be observed (discontinuity of the slope when the strain passes from 5% to -5%).

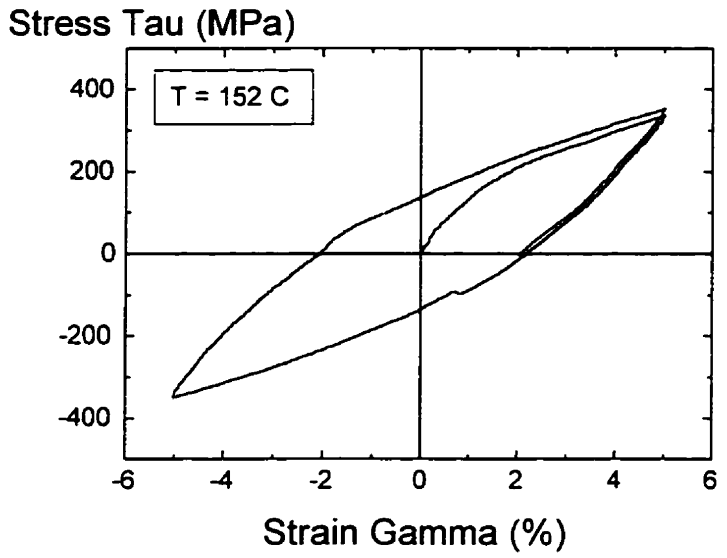


Figure 46 : Behavior in "tension-compression" at high temperature.

III.4.2.5 Behavior at high strains

Preliminary calculations for sleeves give strain values that may attain 10% during mandrelling. Isothermal characterization of the alloy has been made with curves that reach maximum shear strain values of only 5% (in order to avoid spoiling the samples). It is important to perform a few experiments with higher maximum strains to have at least an idea of the alloy's behavior. Naturally, due to the limited time, it is impossible to realize a complete characterization at high strains.

Figure III.47 shows the isothermal behavior at several temperatures with a maximum strain of 12%. These curves come from experiments #63 to #67 and they are all obtained after heating. Previously, during discussion concerning reproductibility or results between samples, Figure III.16 shown a superposition of the behavior for a maximum strain of 5% and 12%. Qualitatively, behavior at high temperatures (110°C and 160°C) is very similar between maximum strain values of 5% and 12%. On the other hand, at lower temperatures, a hardening for large strains is observed. It is the elastic behavior of oriented martensite that begins to affect the stress-strain curve. But, even when a 12% shear strain is reached, no plastification seems to occur because no "plateau" (softening after elastic behavior of oriented martensite) is observed.

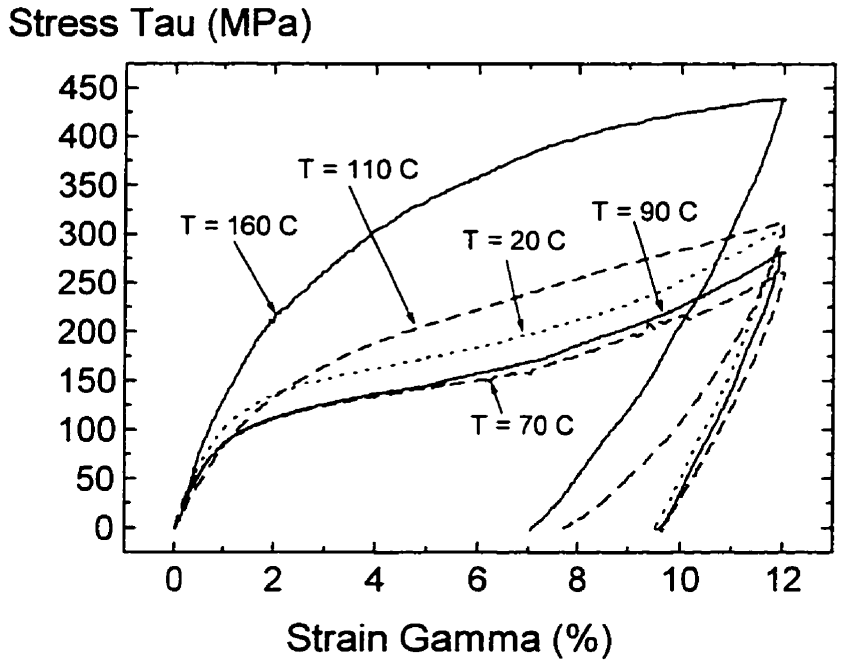


Figure III.47 Isothermal stress-strain curves at several temperatures with a maximum strain of 12%.

III.4.3 Reverse shape memory effect

Only experiment #23 studied the reverse shape memory effect for this Ti-Ni alloy. The results of this experiment are presented in Figure III.48. In the left graphic, the isothermal

loading that generated the state of no stress and no strain in martensite before heating is shown. In the right graphic, the evolution of the strain during heating is plotted. We can observe a very small reverse shape memory effect characterized by an increase followed by a decrease of the strain (heating of the sample is done with no stress applied). The magnitude of the reverse shape memory effect observed here is less than 0.1%, which is much smaller than previous published values that can reach 0.5%. Here, it is almost impossible to draw conclusions with so few results.

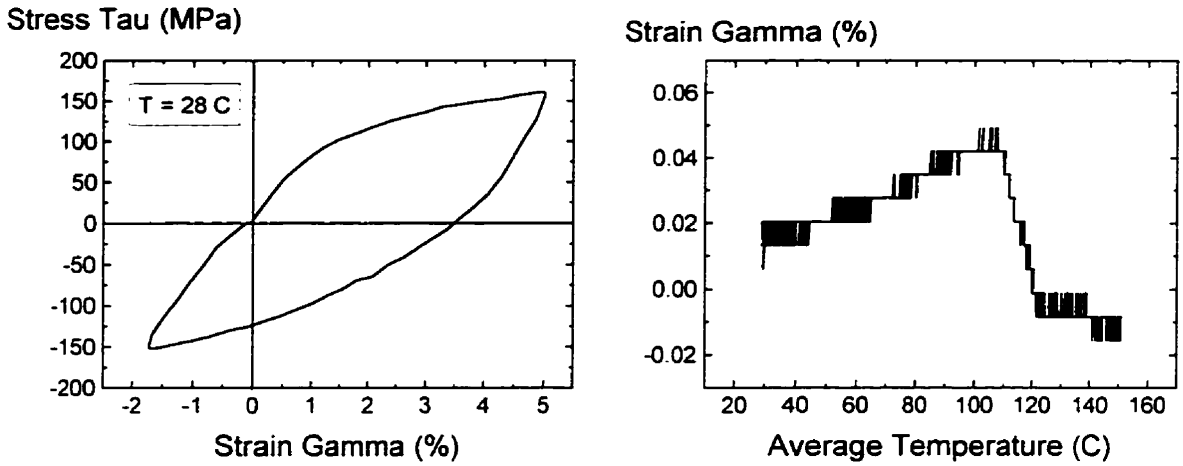


Figure III.48 Results of a reverse shape memory effect.

III.4.4 Deformation of oriented martensite (DOT)

Experiment #68 studied the deformation's behavior of oriented martensite. From high temperature, a static load is applied and the sample is cooled. If the load was not removed during cooling, we know (from experiment #18) that the strain after cooling for a similar static load would be around 3%. Here, the load is removed when the strain is 1.2% and this indicates that martensite will still be created during further cooling. Martensite created by cooling after removing the load produces either a strain increase, a stress decrease or a constant strain. Here, Figure III.49 shows that the strains after the load removal is kept constant. It is possible that the DOT effect has not been studied in

optimal conditions since it depends on the load applied during the first cooling and on the temperature at which the load is removed. Once again, many other experiments should be conducted in order to draw valuable conclusions concerning this interesting effect.

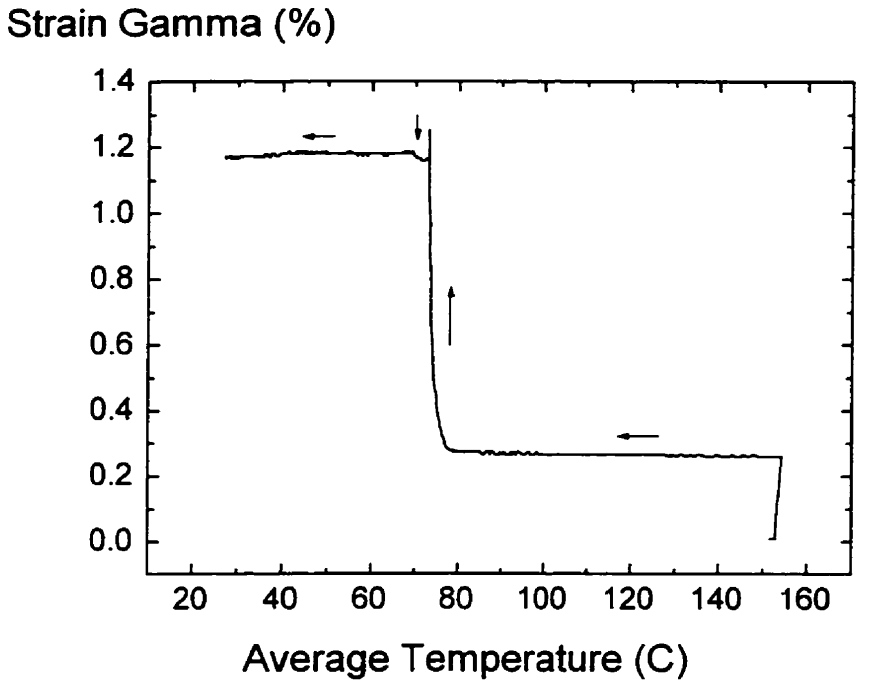


Figure III.49 Results of a deformation of oriented martensite test.

III.4.5 Stress generation after straining

This effect, also called *stress recovery*, studies the evolution of stress during heating when strain is kept constant. Experiments #20 and #21 have conducted such testing, but difficulties were encountered when trying to keep a constant strain value. A good force measuring device must be as rigid as possible; in a same manner, a displacement measuring device must offer a negligible rigidity. Here, moment M (which is used for the calculation of the shear stress) is determined by the rotation of the lever which is not enough rigid for this particular application and the results are not exactly those expected.

First, at room temperature, the sample is deformed to a desired strain value. When this value is reached, the motor is shut-off and the sample is then heated. During heating, the shaft connected to the motor (see Figure III.18) cannot rotate because the motor is stopped. If there are stress variations during heating, they must be recorded by a rotation of the lever but if the lever rotates, strain cannot remains constant.

Figure III.50 shows the results of experiment #21. Two curves are plotted in this graphic, the shear stress (Tau) and the shear strain (Gamma), and it is clear that the strain is not constant. Even if results are not very reliable due to problems related with constant strain, conclusions on the general behavior of the alloy can be pointed out. There is a stress generated on heating that follows a stress reduction. Reduction of the strain gamma limits the increasing value of stress during heating. On cooling, results show a great loss of the stress which is effectively a main concern when designing a shape memory actuator.

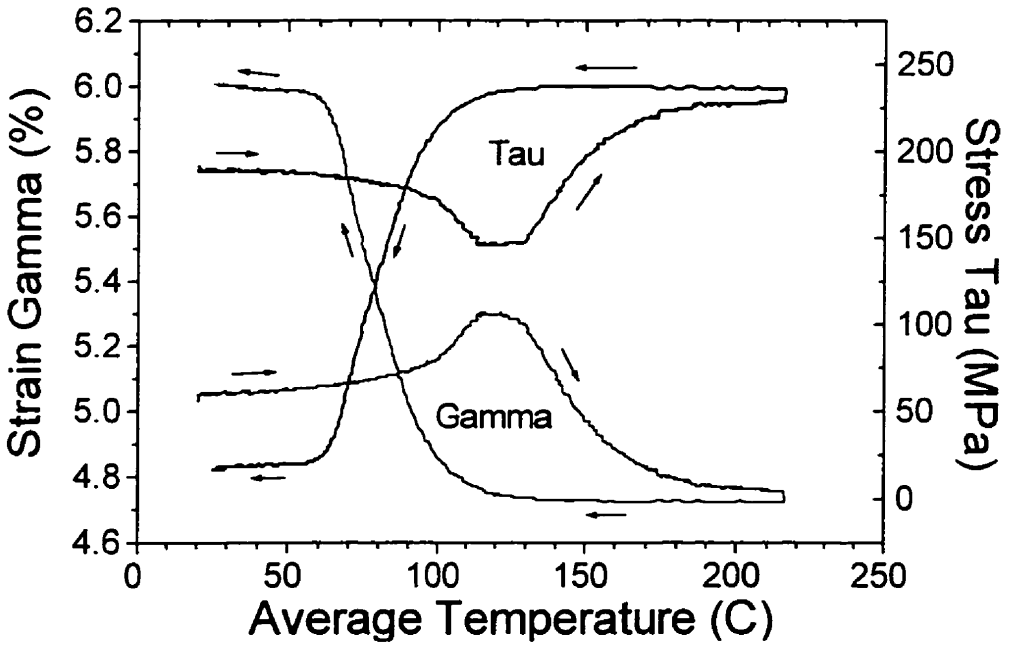


Figure III.50 Results of a stress generation after straining test.

III.4.6 Subcycles

Few experiments studied the behavior of isothermal and iso-stress subcycles. The aim was not a full understanding and a complete characterization of subcycles but simply to obtain few of them for validation of numerical models. The results are difficult to analyze because stabilization of the alloy makes that the overall behavior does not form a close hysteresis. For thermal subcycles, a simple correction could be applied to improve the results and it consists to apply a shift to each subcycle so that they have the same level of maximum or minimum strains. This is possible since it has been verified (see Figure III.11) that during stabilization with thermal cycles, only a shift of the hysteresis is observed but its span remains constant during cycles.

Experiment #15 studied thermal subcycles with constant stress. Experiments #34, #56 and #57 studied isothermal subcycles in "tension" only and experiments #44, #58 and #59 in "tension-compression". For isothermal tests, it is more difficult to keep a constant temperature due to the long duration of an experiment. Sometimes, temperatures at the beginning and at the end of a test may be very different, which makes any interpretation of results difficult.

III.5 Ni-Ti sleeves

Finite element analysis of Ni-Ti sleeves are an important step in the collaboration between both research teams involved in this work. The sleeves are made from the Ti-Ni alloy that has been previously characterized in torsion, but unfortunately, the sleeves received a heat treatment that is not identical to the one given to characterization samples after machining. Sleeves were annealed during 1 hour at 550°C and their cooling was extremely slow since they were left in the stove. Characterization samples were annealed during 3 hours at 500°C and cooling was faster because they were taken out from the stove, but kept in sand to avoid extremely fast cooling. This difference in thermal

treatments has a very weak effect on the overall alloy's behavior of characterization samples and sleeves.

Six sleeves were manufactured, but not all of them are used in this section. Each sleeve received a number between 1 and 6. First, the sleeves were measured (section III.5.1) and mandrelled (section III.5.2). Mandrelling is an isothermal process at room temperature that increases the diameter of the sleeves for insertion over tubes or rods. After, dimensional variations of sleeves were studied when they were only subjected to thermal cycles (section III.5.3). Finally, similar analysis were performed but this time, thermal cycles were performed when sleeves were contracted on tubes made of steel or titanium (section III.5.4).

The sleeves and tubes (that will be discussed later) have been measured many times after each thermomechanical loadings. Appendix III gives all the details concerning measurements, while tables in this section summarize the important dimensions for easy comparisons and analysis.

III.5.1 Geometry

Sleeves are hollow cylinders as illustrated in Figure III.51. For their measurement, two perpendicular marks (I and II) have been made on one end of each sleeve. This end is called the UP side. Naturally, the other end is called the DOWN side. Inner (D_{IN}) and outer (D_{OUT}) diameters are measured in each of these four directions as shown in the left graphic of Figure III.51. The length of the sleeves (L) are also measured in two places were each mark has been made. Finally, sharp edges of inner and outer circumferences of both sides have been slightly flattened (not shown in Figure III.51).

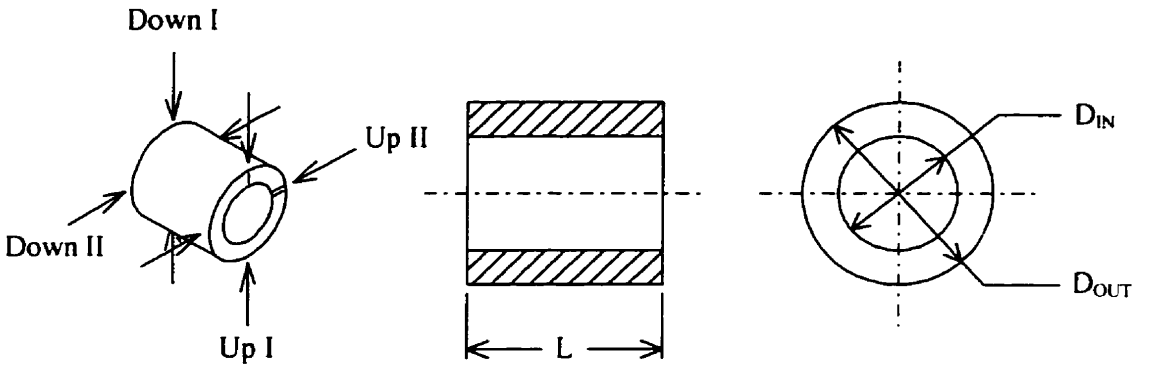


Figure III.51 Geometry of the sleeves.

For the measurements of the sleeves, many instruments were available. A caliper with a precision of 0.05 mm is the less precise instrument but the opening of its arms can be measured with a micrometer with a 0.01 mm precision. This latest technique shows a systematic under-estimation of approximately 0.05 mm that can probably be attributed to the bending of the caliper's arms when the micrometer is closed on them. A micrometer can be directly used for measuring the outer diameter and length with a 0.01 mm accuracy. Finally, the microscope can also be used. Even if it gives a 0.001 mm precision, the accuracy of measurements with this instrument is not very good. It seems that there are optical phenomena that generate erroneous results due to the measurement of the shadow of an object that is not flat.

The table entitled "Before mandrelling" in Appendix III gives the measurements of sleeves #1 and #3 to #6 with the caliper only, the caliper and micrometer, the micrometer only and with the microscope. Only sleeve #1 has been measured only with the microscope. The outer and inner diameters are measured in four different places (two sides and two directions). From all these measurements, a final value that takes into account the limitations of each instrument is given in the last column. This final value represents the best evaluation of each dimension that has been measured with several instruments. The values in parenthesis in Appendix III represent the precision of each

measuring instrument. To my point of view, measurements made directly with a micrometer are the most reliable. For inner diameters, a micrometer cannot be used and others measurements are necessary to estimate the final value. Row named "Before" of Table III.4 in section III.5.2 summarizes all measurements performed on sleeves before mandrelling.

III.5.2 Mandrelling

Mandrelling is a deformation process that inserts a body (called mandrel) into the sleeves for increasing their inner diameter. The diameters of sleeves are expanded at room temperature, temperature for which the alloy is completely in martensite. After mandrelling, expanded diameters can be reduced by heating. The mandrel is made of a very rigid steel for tools. Its geometry is presented in Figure III.52. Note that dimensions are voluntarily not proportional in order to show properly the geometry of the mandrel.

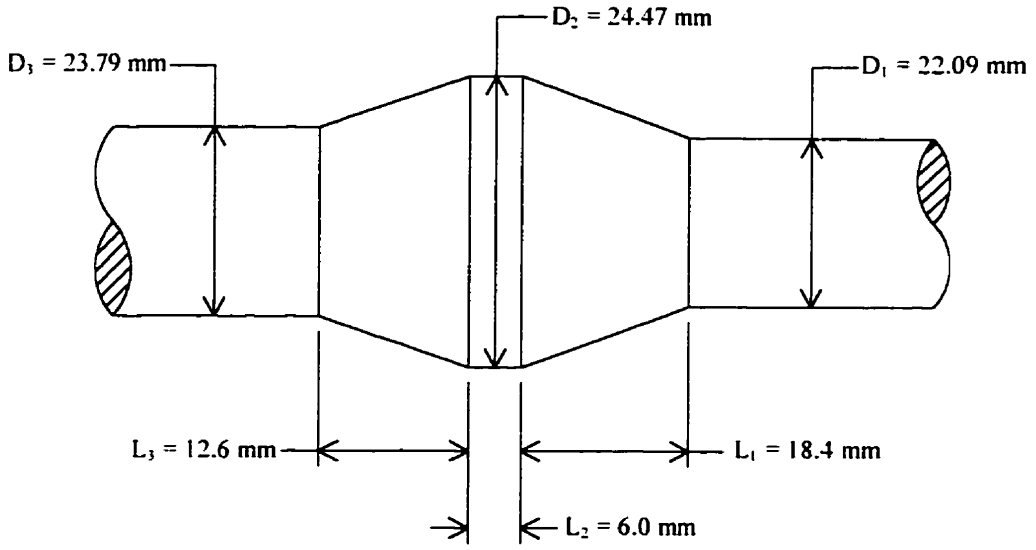


Figure III.52 Geometry of the mandrel.

For each sleeve, two mandrellings are performed. First, the smaller end of the mandrel (denoted D_1 in Figure III.52) is inserted in sleeves from the UP to the DOWN face. The

mandrel is pushed through each sleeve by an industrial compression testing machine. Before mandrelling, grease is applied inside sleeves and on the mandrel to ensure a good lubrication. During mandrelling, the force applied on the mandrel is recorded as a function of the insertion distance in the sleeve and appendix IV presents such curves for sleeves #3 to #6. Figure III.53 schematizes a curve by pointing out the 8 steps that can be detected on a typical curve.

The force starts to increase when the mandrel touches the sleeve (state A of Figure III.53). Between states A and B, the force needed to expand the mandrel is increased in a non-linear manner at the beginning than after in a linear fashion. The curve becomes again non-linear (state B) when the upper part of the sleeve reaches the maximal and constant diameter D_2 of the mandrel. A maximum force is obtained when all the constant maximum diameter of the mandrel is recovered by the sleeve (state C). This maximum force is constant between states C and D. After, the force needed for the insertion of the mandrel is decreased and each state can be detected in the behavior of the curve. It is interesting to observe that the force is very low at state G, even if the mandrel is still in the sleeve. This can be understood easily because the deformation of the sleeve tends by itself to push out the sleeve from the mandrel. The process between states G and H is very fast with a very small force.

After first mandrelling, each sleeve has been measured in a similar manner as described in section III.5.1. Appendix III presents all the measurements taken with several instruments. Rows named "After 1st mandrel." of Table III.4 gives only the final value of each dimension. Values in parenthesis are tensile circumferential strain based on measurements taken before mandrelling. Diameters on the DOWN face are larger than those on the UP face and a length reduction is observed. Residual strains of approximately 8% are measured, which indicates that mandrelling generates very high levels of deformation in the sleeves. During mandrelling, when the larger diameter of the mandrel is completely inserted in a sleeve, strains reach higher levels. The outer diameter

in the middle of sleeve #3 (between state D and E of Figure III.53) has been measured with a micrometer and the sleeve's length with a caliper. Values are reported further in Table III.5.

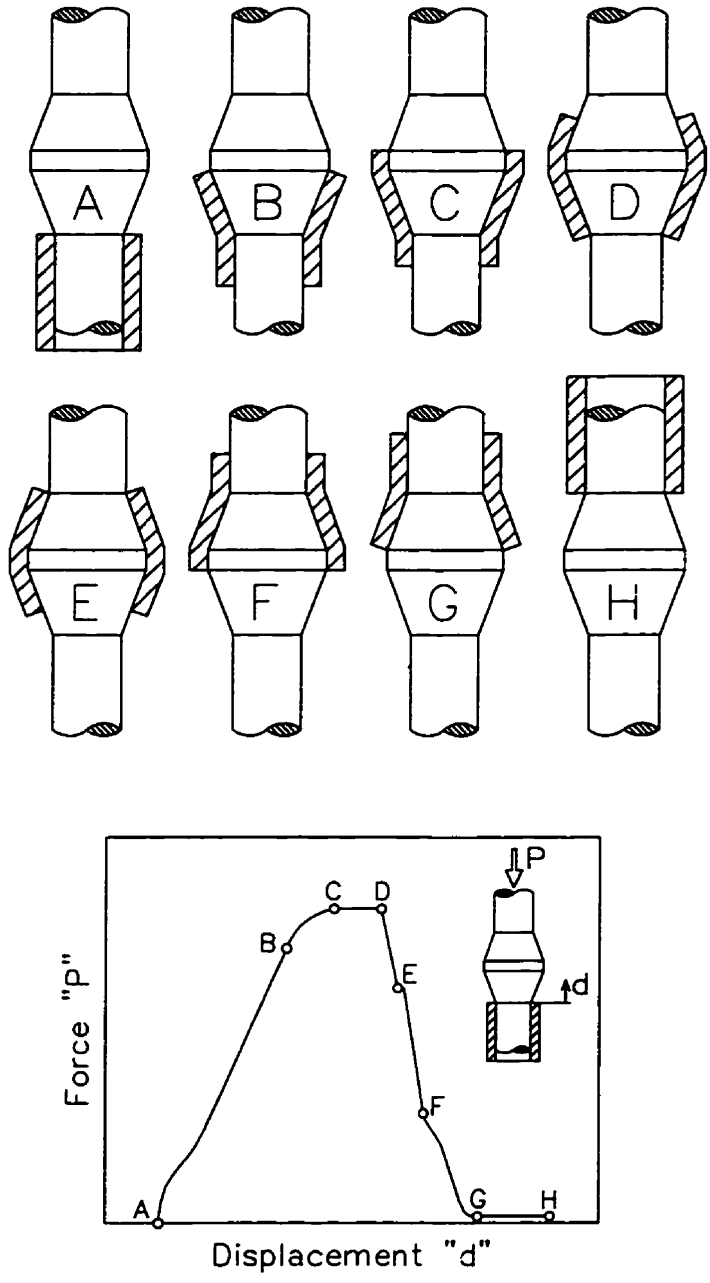


Figure III.53 Typical curve during first mandrelling.

Each sleeve was mandrelled a second time to eliminate dimensional variations between the UP and DOWN sides. This time, the smaller end of the mandrel was inserted in the sleeves from the DOWN side to the UP side. During second mandrelling, the force applied on the mandrel was recorded and Appendix IV presents these curves. The general behavior is quite different from the one recorded during first mandrelling. Cylindrical sleeves became conical after first mandrelling. It is now very difficult to analyze the behavior of the applied force on the mandrel during second mandrelling. This time, the behavior does not depend only on geometrical parameters but also on the residual deformation generated by the first mandrelling.

After second mandrelling, all the sleeves have been measured another time in an identical manner as after the first mandrelling. The results are given in Appendix III and in Table III.4. Dimensional differences between the UP and DOWN sides are much smaller. During the second mandrelling, the outer diameter (with micrometer) and length (with caliper) of sleeve #3 have been measured when the largest diameter of the mandrel was completely inserted in the sleeve. Measurements are given in Table III.5.

Table III.4 : Dimensions after each mandrelling (all dimensions are in mm).

Sleeve #	State	$[D_{IN}]^{up}$	$[D_{IN}]^{down}$	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
1	Before	22.23	----	29.93	----	27.88
	After 2nd mandrel.	24.00 (+8.0 %)	----	31.41 (+4.9 %)	----	27.09 (-2.8 %)
3	Before	22.19	22.18	29.88	29.95	27.90
	After 1st mandrel.	23.80 (+7.3 %)	23.96 (+8.0 %)	31.48 (+5.3 %)	31.53 (+5.3 %)	27.15 (-2.7 %)
	After 2nd mandrel.	23.96 (+8.0 %)	23.96 (+8.0 %)	31.51 (+5.4 %)	31.56 (+5.4 %)	27.14 (-2.7 %)
4	Before	22.21	22.19	29.93	29.96	28.08
	After 1st mandrel.	23.81 (+7.2 %)	23.95 (+7.9 %)	31.54 (+5.4 %)	31.57 (+5.4 %)	27.34 (-2.6 %)
	After 2nd mandrel.	23.96 (+7.9 %)	23.94 (+7.9 %)	31.56 (+5.4 %)	31.60 (+5.5 %)	27.30 (-2.8 %)

Table III.4 (continued) : Dimensions after each mandrelling (all dimensions are in mm).

Sleeve #	State	$[D_{IN}]^{up}$	$[D_{IN}]^{down}$	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
5	Before	22.26	22.19	29.95	29.89	28.05
	After 1st mandrel.	23.81 (+7.0 %)	23.95 (+7.9 %)	31.51 (+5.2 %)	31.54 (+5.5 %)	27.26 (-2.8 %)
	After 2nd mandrel.	23.96 (+7.6 %)	23.95 (+7.9 %)	31.55 (+5.3 %)	31.56 (+5.6 %)	27.23 (-2.9 %)
6	Before	22.16	22.17	29.85	29.90	27.47
	After 1st mandrel.	23.80 (+7.4 %)	23.96 (+8.0 %)	31.46 (+5.4 %)	31.52 (+5.4 %)	26.70 (-2.8 %)
	After 2nd mandrel.	23.95 (+8.1 %)	23.94 (+8.0 %)	31.52 (+5.6 %)	31.54 (+5.5 %)	26.70 (-2.8 %)

Table III.5 : Dimensions of sleeve #3 during mandrellings (all dim. are in mm)

Sleeve #	State	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{middle}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
3	Before	29.88	29.92	29.95	27.90
	During 1st mandrel.	----	31.83 (+6.4 %)	----	27.25 (-2.3 %)
	During 2nd mandrel.	31.28 (+4.7 %)	31.86 (+6.5 %)	31.58 (+5.4 %)	27.15 (-2.7 %)

The maximal forces during the first mandrelling (constant force between states C and D of Figure III.53) and during second mandrelling are given in Table III.6. Note that forces are in kg. Multiplication by gravitational acceleration of 9.8 m/s^2 gives the corresponding values in N. We can see that the maximal force during second mandrelling is about 60% of the maximum force during the first mandrelling.

Table III.6 : Maximum force during each mandrelling.

	Sleeve #3	Sleeve #4	Sleeve #5	Sleeve #6
1st mandrel.	2290 kg	2345 kg	2485 kg	2610 kg
2nd mandrel.	1430 kg	1385 kg	1380 kg	1510 kg

III.5.3 Unconstrained thermal cycles

After mandrelling, two unconstrained thermal cycles were performed with sleeve #1 that has been positioned in a small stove. Figure III.54 shows the experimental set-up used. The sleeve lies on a semi-cylindrical holder that has a diameter larger than its outer diameter. A thermocouple (not shown in Figure III.54) is installed on the sleeve and a small glass rod rests on it. During thermal cycles, the sleeve cannot move but thermal expansion and unconstrained shape memory effects can be measured with a dial gage. The precision of the dial gage is of 0.001 mm. Heating and cooling rates are approximately 1°C/min. and they are controlled by changing the current in the heating wires around the stove. At the end of cooling, it becomes very difficult to evacuate the heat due to the high thermal inertia of the metallic stove and this generates a very low cooling rate (much less than 1°C/min.).

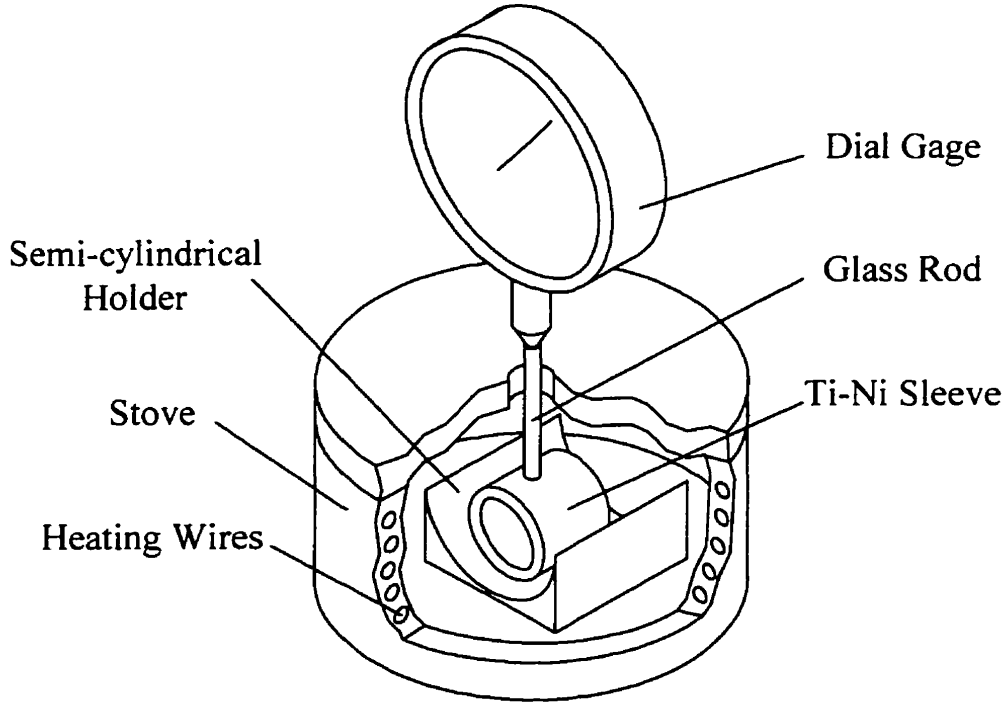


Figure III.54 Experimental set-up for unconstrained thermal cycles.

During thermal cycles, variations of the outer diameter in the middle of the sleeve are measured and shown in Figure III.55. Appendix III gives measurements taken on sleeve #1 before and after the first thermal cycle. Measurements after the second cycle are not given since they are practically identical as those after the first cycle. Finally, important measurements are given in Table III.7 in order to evaluate amplitudes of shape memory effects.

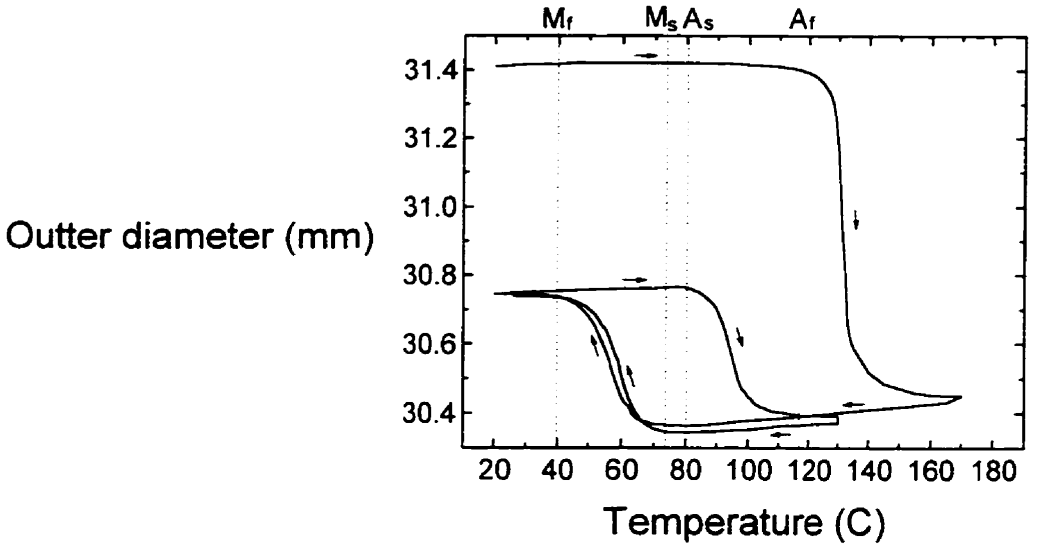


Figure III.55 Variation of outer diameter of sleeve #1 during unconstrained thermal cycles.

Table III.7 : Dimensions of sleeve #1 after unconstrained heating and cooling (all dimensions are in mm).

Sleeve #	State	$[D_{IN}]^{up}$	$[D_{IN}]^{down}$	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
1	Before	22.23	----	29.93	----	27.88
	After 2 mandrel.	24.00 (+8.0 %)	----	31.41 (+4.9 %)	----	27.09 (-2.8 %)
	After 1st Heating	----	----	30.45* (+1.7 %)	----	----
	After 1st Cooling	23.30 (+4.8 %)	23.30	30.83 (+3.0 %)	30.85	27.36 (-1.9 %)
	After 2nd Heating	----	----	30.38* (+1.5 %)	----	----
	After 2nd Cooling	----	----	30.74* (+2.7 %)	----	----

* These measurements were taken in the middle of the sleeve

At high temperature, the sleeve does not return to its original shape before mandrelling. A residual strain of 1.5 % (at 130°C after second heating) to 1.7 % (at 170°C after first cooling) is measured on the outer diameter in the middle of the sleeve. This could be caused by stabilization during the first thermal cycles or by plastification generated during mandrelling. On cooling, a double shape memory effect of approximately 1.2% is observed, which is larger than what was studied during characterization of the alloy in torsion. In section III.2.5 (Figure III.11), a double shape memory effect of 0.3 % was obtained after 10 thermal cycles. Here, only 2 isothermal mandrellings produce a larger effect. In both cases, high strains were reached but the mechanism of martensite creation is very different. In section III.2.5, martensite was generated from austenite by cooling under stress and here, martensite is reoriented by a dynamic loading at room temperature.

From Figure III.55, we can see a good agreement between both cooling. After the first heating, thermal expansion can be measured when phase transformation does not occur. Transformation temperatures can also be estimated with this result. The first heating gives overestimated transformation temperatures that can be explained by residual stresses generated during mandrelling. At high temperature, these internal stresses are erased when martensite is transformed in austenite. With subsequent unconstrained heating and cooling, a double shape memory effect is studied and transformation temperatures can be determined (dotted lines in Figure III.55). Temperatures M_S = 73°C and A_f = 117°C are very similar to those obtained during characterization in torsion, but M_f = 40°C and A_S = 80°C show a 15°C difference.

III.5.4 Contraction on a tube and push-out force

After mandrelling, sleeves #3 to #6 are mounted on tubes to perform experiments in which the contraction force caused by restrained recovery during heating will be estimated. Sleeves #3 and #4 are mounted on titanium tubes and sleeves #5 and #6, on

steel tubes. Each tube received a number that corresponds to the one of the sleeve in which it is inserted. The geometry of tubes is cylindrical with a similar length as the sleeves and with an outer diameter slightly smaller than the inner diameter of sleeves after mandrelling. Tubes are precisely measured with caliper and micrometers. The inner diameters of tubes are also measured with a dial gage with a precision of 0.01 mm. Measurements are given in appendix III and in Table III.10.

The material for tubes needs to have a very high yield stress in order to avoid plastification of the tubes during contraction of the sleeves on them. The steel chosen for tubes is called XVG (Russian identification) that has been quenched only. There are many internal stresses after quenching and the nominal composition for this steel is : C 0.9-1.05, Cr 0.9-1.2, Mn 0.8-1.1, Si 0.15-0.35 and W 1.2-1.6. The titanium alloy chosen for the other tubes is called VT14 (Russian identification). It has been quenched and annealed during 8 hours to improve its mechanical properties and remove the internal stresses. Its chemical composition is : Al 4, Mo 3 and V 1. Table III.8 gives other properties for each alloy. Properties of titanium VT14 depends on temperature while those for steel XVG are practically not affected by temperature.

Table III.8 : Properties of material used for tubes.

Material	Temperature (°C)	Young modulus (GPa)	Yield stress 0.2% (MPa)	Poisson coef.
Steel XVG	20	200	1100 - 1300	0.28
Titanium VT14	20	110	1080 - 1300	0.35
Titanium VT14	350	89	700 - 800	0.35

In this section, sleeve #4 (with titanium tube) and sleeve #5 (with steel tube) have been studied. By hand, tubes are inserted in sleeves without difficulties. The assembly is then heated from room temperature to 180°C with a heating rate of 1 to 2°C/min. This slow heating rate ensures homogeneous temperature in Ti-Ni sleeves. During heating, the inner diameter of tubes is measured manually at different temperatures. Other dimensions like the outer diameter of sleeves are very difficult to measure because the

sleeve must be retrieved from the stove, which affects heating. When the maximum temperature is reached, the assembly is installed in a compression testing machine and the axial force needed (called here "push-out" force) to move the tube in the sleeve is measured. The "push-out" force for each type of tube will be further discussed.

After, during cooling, the inner diameter of tubes and outer diameter of sleeves are measured at different temperatures. The cooling rate is less constant than the heating rate. At the beginning of cooling, the rate is fast (approximately 5°C/min.), but it is still satisfactory to ensure a good temperature homogeneity in the sleeves. After, the cooling rate decreases to reach very slow values at the end. The only parameter that has been measured during the whole process is the inner diameter in the middle of the tubes. Figure III.56 shows the evolution of this parameter with temperature for both experiments made with titanium tube #4 and steel tube #5.

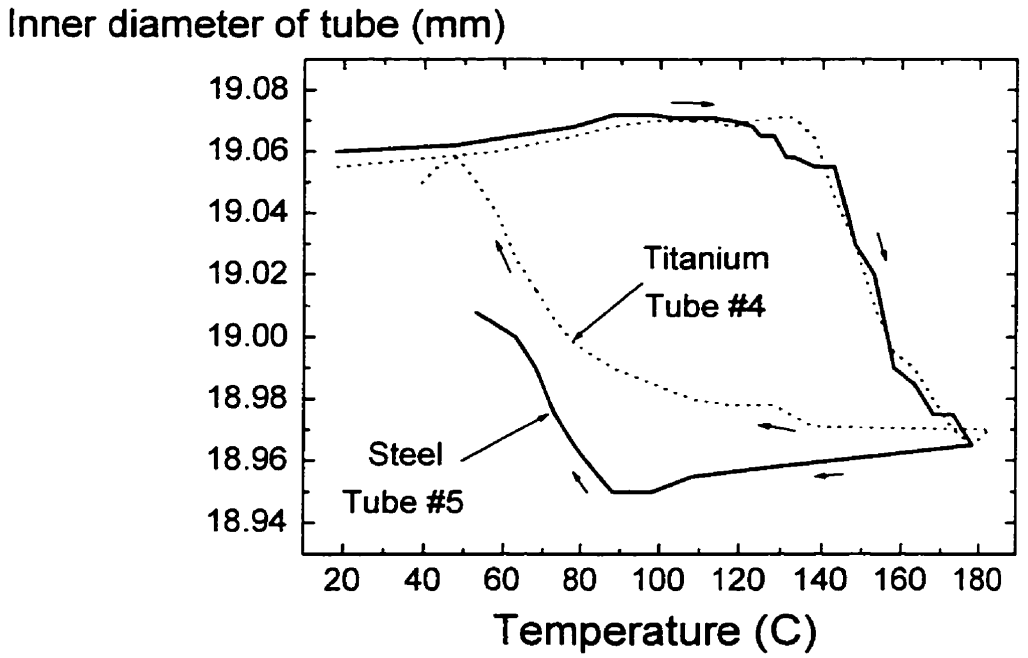


Figure III.56 Variations of the inner diameter of tubes with temperature during contraction and expansion of Ti-Ni sleeves.

In Figure III.56, two steps can be observed on heating for both tubes. First, from room temperature to approximately 100°C, an increase of the diameter is recorded. It is the effect a thermal expansion. After, the shape recovery of the sleeve becomes much larger than thermal expansion and the tubes become contracted. A decreasing diameter is then observed. On cooling, the same effect is obvious for steel tube #5 but results from titanium tube #4 are more complex and are difficult to explain. Also, it is strange to have a similar contraction with titanium tube and steel tube. We expected a larger contraction with the titanium tube because its rigidity is approximately two times lower than that of the steel tube.

Generally speaking, the transformation temperatures observed in Figure III.56 are higher than those determined during characterization of the alloy in torsion. This is normal because here, the material is stressed during phase transformation and characteristic temperatures increase with stress. A precise value of these characteristic temperature is hard to determine because the behavior is not very well defined.

Sleeves and tubes have been completely measured before and after these experiments (see appendix III). Other dimensions were also measured during experiments and results are presented in appendix V. Tables III.9 and III.10 give a summary of these measurements. Rows called "after 2 mandrel" for sleeves and rows called "before" for tubes are measurements before the beginning of experiments. Few measurements were taken after heating just before push-out of tubes but they are given in rows called "after heating". Finally, tubes were pushed out and the assembly was cooled. Final measurements are reported in rows called "after p.o. + cooling". It is normal to observe differences between measurements taken on sleeves between UP and DOWN faces after cooling because tubes have been moved during push-out. This light offset creates different stress states in the UP and DOWN faces of tubes and sleeves.

Table III.9 : Dimensional variations of SLEEVES caused by a temperature cycle when mounted on tubes (all dimensions are in mm)

Sleeve #	State	$[D_{IN}]^{up}$	$[D_{IN}]^{down}$	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
4	After 2 mandrel.	23.96 (+7.9 %)	23.94 (+7.9 %)	31.56 (+5.4 %)	31.60 (+5.4 %)	27.30 (-2.6 %)
	After heating	----	----	31.29 (+4.5 %)	----	----
	After p.o. + cooling	23.97 (+7.9 %)	23.88 (+7.6 %)	31.37 (+4.8 %)	31.40 (+4.8 %)	26.73 (-4.8 %)
5	After 2 mandrel.	23.96 (+7.6 %)	23.95 (+7.9 %)	31.55 (+5.3 %)	31.56 (+5.6 %)	27.23 (-2.9 %)
	After heating	----	----	31.37 (+4.7 %)	----	----
	After p.o. + cooling	23.88 (+7.3 %)	23.98 (+8.0 %)	31.45 (+5.0 %)	31.50 (+5.3 %)	27.35 (-2.5 %)

Table III.10 : Dimensional variations of TUBES caused by a temperature cycle when inserted in sleeves (all dimensions are in mm).

Tube #	State	$[D_{IN}]^{up}$	$[D_{IN}]^{down}$	$[D_{OUT}]^{up}$	$[D_{OUT}]^{down}$	L
4 (titanium)	Before	19.05	19.05	23.91	23.88	27.15
	After heating	18.96 (-0.4 %)	----	----	----	----
	After p.o. + cooling	19.04 (-0.1 %)	19.04 (-0.1 %)	23.90 (-0.0 %)	23.87 (-0.0 %)	27.15 (0.0 %)
5 (steel)	Before	19.06	19.06	23.93	23.93	27.18
	After heating	18.97 (-0.5 %)	----	----	----	----
	After p.o. + cooling	19.00 (-0.3 %)	19.05 (-0.1 %)	23.88 (-0.2 %)	23.92 (-0.0 %)	27.19 (+0.0 %)

From Table III.10, tubes have practically retaken their original shape, except for the UP face of steel tube #5 that seems to be slightly plastified. Therefore, we can assume in calculations that tubes are always elastic and that no plastic deformation occurs.

In sleeves (see Table III.9), dimensions after cooling are not identical to those measured before heating even if tubes behave like an elastic spring. The elastic behavior of tubes should expand sleeves until they reach their original dimensions and when expansion is

completed, the fall-down of tubes should be observed. Explanations for these dimensional variations are not obvious. A relatively large length change in sleeve #4 can be explained by the push-out force of 10 000 kg (see further for more details) that could generate plastified regions in the sleeve.

The measurements reported in appendix V show that tubes and sleeves are not deformed perfectly axisymmetrically. There are sometimes differences between the same dimension when it is measured in direction I or II. Sleeves and tubes pass from a circular to an ellipsoidal geometry. This instability may be caused by high levels of stresses and strains in the interface between sleeves and tubes. On the other hand, differences between the same measurement taken in two different directions is small (maximum of 30μm) and future numerical simulations will treat this problem as a purely axisymmetric one.

At high temperature (after heating and before cooling), the push-out force needed to move tubes in sleeves is measured. Sleeves rest on their DOWN side while the force is applied on the UP side of tubes. Usually, before any displacement of tubes, a "first slip" is observed. This first slip generates a sharp noise that can be attributed to the breaking of micro-welding caused by high stresses at the interface between tubes and sleeves. After, the force applied on tubes continues to increase until a relative displacement between tubes and sleeves is observed. After a displacement of approximately 1 mm, the push-out is stopped. The force needed for a second push-out of approximately 1 mm is also measured and it is usually lower than the one recorded in the first push-out. During the first push-out, displacement of tubes created favorable surfaces that enable easier displacements during the second one.

For sleeve and steel tube #5, the first slip was at 4800 kg (155°C). Once again, forces are given in kg and a simple multiplication by 9.8 m/s^2 will transform them in N. The first push-out was at 5350 kg (155°C) and the second push-out at 3500 kg (140°C). Values in parenthesis are temperatures for which each event occurs. Temperatures are lower than

the maximum temperature of the experiment (around 180°C) due to the time needed for positioning the assembly in the compression testing machine.

For sleeve and titanium tube #4, the first slip was at 7900 kg (155°C). Before displacement, a second slip was recorded at 8400 kg (155°C). The first push-out needed a force of 9300 kg (155°C) and the second push-out, 8830 kg (160°C). The assembly was inverted (sleeve rested on its UP side while the force was applied on the DOWN side of the tube) and an additional push-out was performed in order to eliminate the offset produced during the first and second push-out. Another first slip was recorded at 10 050 kg (165°C) and the final push-out between 9300 and 9600 kg (165°C). Higher forces were recorded during this last push-out because favorable surfaces for a displacement in the opposite direction must be rebuilt.

Note that slip and push-out forces in the case of titanium tube #4 are much higher than those needed with steel tube #5. Actually, it is not clear if it can be explained by differences in material properties of tubes, for example elastic Young's modulus ($E_{titanium} \approx 0.5\ E_{steel}$), coefficient of friction, quality of surfaces, etc. A maximum force near 100 kN applied on sleeve #4 generates an axial stress of approximately 100 MPa (very rough calculations with the assumption of a homogeneous stress distribution, which is not really the case). This axial stress added to other stress components due to contraction of the sleeve on the tube may be sufficient to plastify the sleeve, which could be an explanation to the dimensional variations presented in Table III.9.

During cooling, at a certain temperature, tubes start to move freely in sleeves. This temperature is called here the "fall-down" temperature. For titanium tube #4, this fall-down temperature is 50°C and for steel tube #5, 38°C. After complete cooling down to room temperature, steel tube #5 could be retrieved from sleeve without any difficulty. In the case of the titanium tube #4, it could move in the sleeve, but it was impossible to retrieve it by hand. The axial geometry of tube #4 was not any more linear but convex

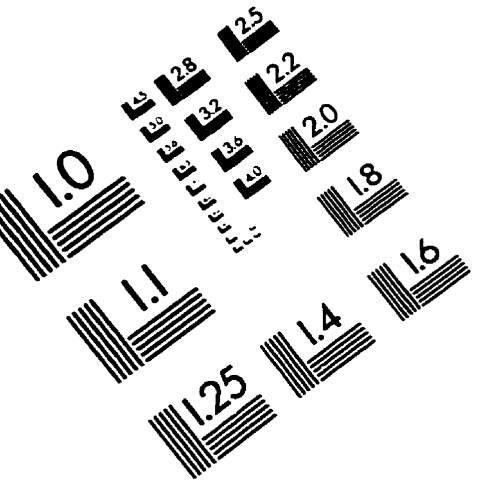
and this may be caused by the very high push-out force (more than 10 000 kg) applied on this assembly.

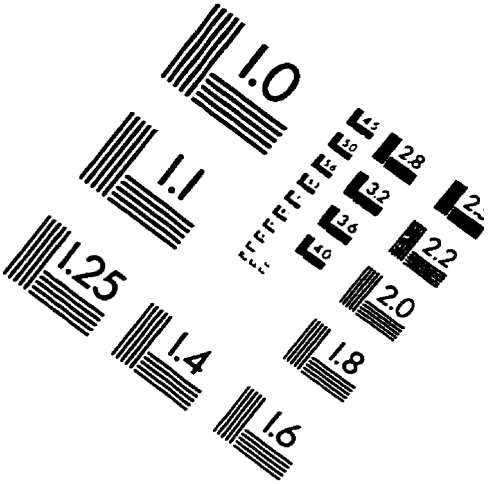
III.6 Concluding remarks

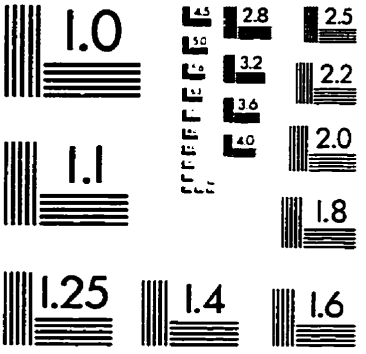
The aim of this work was to obtain two types of experimental results. On the first hand, the alloy was characterized to validate numerical models developed by both research teams involved in this partnership. Unfortunately, characterization in tension could not be performed due to technical difficulties, but the alloy is characterized in torsion for many cases. In the near future, it is mandatory to perform tension tests to characterize the non-symmetrical behavior of this Ti-Ni alloy. After, other loading cases could be studied (for example torsion-traction, torsion-pressure, tension-pressure, biaxial tension, etc.) for a better validation of numerical material laws in a tensorial scheme for complex 3D stress states. On the other hand, experimental results were obtained with Ti-Ni sleeves used as connectors. These results are precious for validation of finite element analysis that will simulate the thermomechanical behavior of these sleeves. Thereafter, many loading cases can be modeled with finite elements and among those, isothermal mandrelling, unconstrained heating after mandrelling and contraction of an elastic tube by a Ti-Ni sleeve will be analyzed.

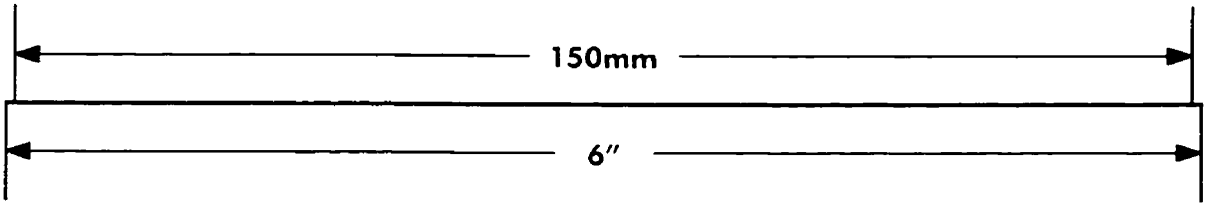
Finally, other experimental results should be obtained with Ti-Ni sleeves with more sophisticated devices. The measuring instruments used during the experimental tests with Ti-Ni sleeves were very precise but everything was done manually. Deformation of sleeves and tubes could be measured with electrical strain gages and results could be recorded by a computer during thermomechanical loadings. Therefore, more precise results, requiring less human interventions, would be obtained and experiments could be performed much faster.

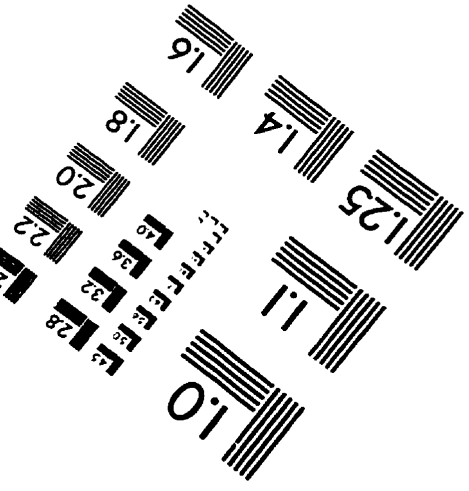
IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (QA-3)

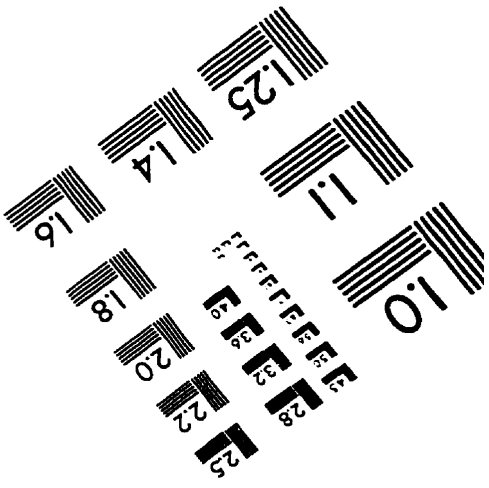












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved