Titre: Title:	Etude numérique et analytique de la convection naturelle en milieu poreux anisotrope
Auteur: Author:	Gérard Degan
Date:	1997
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Degan, G. (1997). Etude numérique et analytique de la convection naturelle en milieu poreux anisotrope [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/6803/

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/6803/
Directeurs de recherche: Advisors:	Patrick Vasseur
Programme: Program:	Non spécifié

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET ANALYTIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN MILIEU POREUX ANISOTROPE

GÉRARD DEGAN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MARS 1997

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET ANALYTIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE EN MILIEU POREUX ANISOTROPE

présentée par: DEGAN Gérard

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., Président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre

MME. GOUJON-DURAND, Sophie, Ph.D., membre externe

A feue ma mère

A mon père

A mon épouse

A mes enfants

A tous ceux qui me sont chers

≪ Quand vient la Sagesse, sa première leçon est de dire: "La connaissance n'existe pas; il y a seulement des aperçus de la Divinité infinie." La connaissance pratique est chose différente, c'est-à-dire qu'elle est réelle et commode, mais jamais complète. Par conséquent, la systématiser et la codifier est nécessaire, mais fatal. ≫

(Sri Aurobindo)

Résumé

La convection naturelle, induite par la poussée d'Archimède et engendrée par des gradients de température en milieu poreux saturé, est d'un intérêt considérable, couvrant maintes applications en géophysique et en ingénierie. Parmi les plus importantes applications, figurent les techniques d'isolation thermique, les écoulements géothermiques, l'extraction du pétrole, le stockage des produits agricoles, la diffusion souterraine des contaminants et la régénération des matériaux poreux des échangeurs de chaleur. L'anisotropie qui est généralement la conséquence de l'orientation préférentielle des directions dominantes du milieu poreux ou de la géométrie asymétrique des grains ou des fibres, est rencontrée en fait dans toutes ces applications dans l'industrie et dans la nature.

Dans cette thèse, le transfert de chaleur par convection naturelle en milieu poreux anisotrope est étudié numériquement et analytiquement. La première partie de l'investigation du problème considéré est relative à l'écoulement convectif externe le long d'une plaque verticale imperméable, bordant un milieu poreux anisotrope et chauffée isothermiquement ou par un flux de chaleur uniforme. La seconde partie de la recherche est consacrée à l'étude des phénomènes thermoconvectifs naturels dans une cavité poreuse verticale limitée horizontalement par des parois adiabatiques et chauffée par les côtés isothermiquement ou par des flux de chaleur constants. L'anisotropie en perméabilité et l'anisotropie en conductivité thermique sont toutes deux envisagées. Les directions principales du tenseur d'anisotropie en perméabilité sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel tandis que celles du tenseur de conductivité thermique sont coïnci-

dantes avec les axes de coordonnées horizontal et vertical.

Les points suivants constituant le contenu de la thèse sont:

- Objectif et position de notre étude;

- Formulation mathématique des modèles à étudier;

- Transfert de chaleur par convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale, chauffée et adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité;

- Convection naturelle dans une couche poreuse verticale: effets de l'anisotropie en perméabilité;

- Convection naturelle dans une cavité poreuse verticale: effets de l'anisotropie en conductivité thermique;

- Convection naturelle dans un enclos poreux vertical, caractérisé par une anisotropie en perméabilité: effets visqueux pariétaux (modèle de Brinkman).

Dans tous ces points, le choix de la géométrie simple rectangulaire est justifié par la complexité du phénomène physique à étudier et la prise en compte de plus de réalisme physique dans les propriétés physiques de la matrice solide du milieu poreux en vue de la modelisation assez précise de ce dernier. La technique des différences finies est utilisée pour l'intégration numérique du système complet des équations gouvernantes. La validité des codes numériques est obtenue par comparaison avec les résultats disponibles dans la littérature en situation isotrope. Pour tous les aspects du problème abordés ici, des solutions analytiques basées sur des méthodes variées (méthode de similitude, méthode intégrale et méthode modifiée de linéarisation d'Oseen valides en régime de couche limite, méthode d'approximation de l'écoulement parallèle valide à tous les régimes, pour des écoulements

stratifiés en espaces confinés de grande extension) sont développées et vérifiées par les prédictions numériques dans de larges gammes de valeurs prises par les paramètres de contrôle. En ce qui concerne la structure de type couche limite, une analyse d'échelle des grandeurs d'intérêt caractérisant chaque type de problème est conduite pour prédire la solution analytique. En général, un bon accord est observé entre les solutions analytiques et les résultats des simulations numériques.

Trois cas principaux de conclusion à l'investigation menée sont tirés:

Dans une première étape, nous avons observé que l'écoulement convectif le long d'une plaque verticale dans un milieu poreux anisotrope est considérablement affecté par les paramètres d'anisotropie, à savoir le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux. Lorsque l'angle d'inclinaison θ est tel que l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée soit parallèle à la plaque, l'intensité de l'écoulement convectif est maximale. Dans cette situation, les hypothèses en régime de couche limite sont valides et montrent que la perméabilité le long de la plaque n'est pas considérablement plus élevée que celle dirigée perpendiculairement à cette dernière. Aussi, pour une valeur fixée de l'angle de rotation θ, le transfert de chaleur est plus accentué que celui correspondant à la situation isotrope, car le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* est supérieur à l'unité. Inversement, ce transfert de chaleur est plus réduit lorsque K^* est inférieur à l'unité.

Ensuite, les effets de l'anisotropie en perméabilité et de l'anisotropie en conductivité thermique sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité poreuse verticale sont tous deux examinés dans cette seconde étape. Les résultats ont indiqué qu'un rapport élevé de l'anisotropie en perméabilité ($K^* > 1$) entraîne une canalisation de l'écoulement près des parois verticales lorsque $\theta = 0^o$. Puisque l'angle d'orientation de l'anisotropie croît, l'intensité de l'écoulement con-

vectif est progressivement affaiblie. Pour $\theta = 90^o$, le modèle de l'écoulement consiste en une très faible circulation de celui-ci dans la région centrale de la cavité présentant de très minces couches limites de la vitesse près des parois horizontales. Dans la limite où $K^* \rightarrow \infty$, toute valeur du nombre de Nusselt indépendante de θ se rapproche de l'unité. Aussi, un faible rapport d'anisotropie en perméabilité ($K^* < 1$) entraîne une canalisation de l'écoulement près des parois horizontales lorsque $\theta = 0^o$. La force de la circulation de l'écoulement est accentuée avec l'augmentation de θ. Le transfert de chaleur résultant est maximal à $\theta = 90^o$, cas pour lequel le parallélisme de l'écoulement n'est possible que pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh R. Il est démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et minimal quand cette orientation est perpendiculaire à ce dernier. Autrement dit, la meilleure isolation thermique possible est celle obtenue lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible est parallèle à la force gravitationnelle. De plus, pour le cas particulier où $\theta = 45^o$, les solutions pour des valeurs fixées de R^* (nombre de Rayleigh modifié) et de A (rapport de forme de la cavité) sont parfaitement symétriques par rapport à la situation isotrope ($K^* = 1$), de sorte que les résultats pour une valeur donnée de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$. Par ailleurs, en augmentant le rapport d'anisotropie en conductivité thermique ($k^* > 1$), la convection induite par l'écoulement est accentuée mais le nombre de Nusselt se rapproche de l'unité. Lorsque le rapport d'anisotropie en conductivité thermique est décroissant ($k^* < 1$), Nu tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de R.

Finalement, le troisième cas est relatif à la convection naturelle en régime de couche limite dans une couche poreuse verticale caractérisée par une anisotropie en perméabilité et des effets pariétaux. Dans la formulation de ce problème, le modèle de Darcy élargi par Brinkman pour satisfaire la condition d'adhérence (non-

glissement) aux parois est utilisé. Les résultats montrent que lorsque le nombre de Darcy (Da) est assez faible (milieux à faibles porosités), le champ de l'écoulement est identifié à celui obtenu pour l'analyse précédente, gouvernée par la loi de Darcy. Dans cette situation observable pour Da approximativement inférieur ou égal à 10^{-6}, les effets visqueux près des parois sont négligeables et le rapport d'anisotropie en perméabilité ont tous deux une forte influence sur le transfert de chaleur par convection naturelle. Pour des valeurs intermédiaires de Da ($10^{-6} \leq Da \leq 10$), la résistance aux frottements sur les parois devient graduellement plus importante et vient s'ajouter à la résistance à la friction induite par la matrice solide pour ralentir le mouvement convectif, lorsque Da est de plus en plus croissante. Par conséquent, les effets de l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux sur le transfert de chaleur par convection naturelle sont progressivement inhibés. Lorsque Da est assez élevé (Da approximativement supérieur ou égal à 10), la solution obtenue ici, basée sur le modèle de Brinkman, s'apparente à celle correspondant au milieu fluide pur (en l'absence des effets inertiels).

Abstract

Buoyancy-induced convection in a fluid saturated porous medium is of considerable interest, owing to several geophysical and engineering applications. Prominent among these are insulation techniques, flows in soils aquifers, petroleum extraction, storage of agricultural products, underground diffusion of contaminants and porous material regenerative heat exchangers. Anisotropy, which is generally a consequence of a preferential orientation or asymmetric geometry of the grain or fibers, is in fact encountered in all those applications in industry and nature.

In this thesis, natural convection heat transfer in anisotropic porous media is studied both numerically and analytically. The first part of the investigation concerns the external convective flow along a vertical impermeable plate embedded in an anisotropic porous medium and heated isothermally or by an uniform heat flux. The second part of the research receiving our attention considers the phenomenon of natural convection in a vertical porous cavity boarded by adiabatic horizontal walls and heated from the sides isothermally or by a constant heat flux. Both the anisotropy in permability and the anisotropy in thermal conductivity are involved. The principal directions of the permeability are oriented arbitrarily, while those of the thermal conductivity are coincident with the horizontal and vertical coordinate axes.

The following points have been considered in the present thesis:

- Mathematical formulation of the studied models.

- Convective heat transfer along a vertical heated plate embedded in a fluid

saturated porous medium with anisotropic permeability.

• Natural convection in a vertical porous layer: effects of anisotropy in permeability.

• Natural convection a vertical porous slot: effects of anisotropy in thermal conductivity.

• The Brinkman model for boundary-layer regime in a vertical porous enclosure with anisotropic permeability.

In all those subjects, the choice of a simple rectangular geometry is due to the complexity of the physical phenomenon and the inclusion of more physical realism in the matrix properties of the medium for the accurate modeling of that latter. A finite difference procedure is used for numerical integration of the complete system of governing equations. The validity of the numerical codes is verified by comparison with the results available in the literature for the isotropic case. For each of the models considered here, analytical solutions based on various methods (similarity solutions, integral relations approach, modified Oseen linearization method valid for the boundary-layer regime, and parallel flow approximation valid for flows in slender enclosures) are derived and verified with the numerical simulations for larges ranges of the governing parameters. For the boundary flow structure, scale analysis of the quantities of interest involved in each type of problem is carried out to predict the analytical solutions. In general, a good agreement between those latters and the numerical simulations is obtained.

The main conclusions of the present study are:

The convective flow along a vertical plate in an anisotropic porous medium is considerably affected by both the permeability ratio K^* and the inclination

angle θ of the principal axes. When that latter is such that the principal axis with higher permeability is parallel to the plate the strength of the convective flow is maximum. For this situation the boundary-layer hypothesis is valid provided that the permeability along the plate is not considerably greater than that in the direction normal to it. Also, for a fixed inclination θ the heat transfer is promote, when compared with the isotropic situation, as the permeability ratio $K*$ is made larger than unity and reduced when it is made smaller.

Both the effects of anisotropy in permeability and anisotropy in thermal conductivity on natural convection heat transfer within a vertical porous cavity have been considered. Results indicate that a large permeability ratio ($K^* > 1$) causes channeling of the flow near the vertical walls when $\theta = 0^o$. As the anisotropic orientation angle is increased the strength of the convective flow is progressively annihilated. For $\theta = 90^o$ the flow pattern consists in a very weak convective flow in the core of the cavity with very thin velocity boundary-layers near the horizontal walls. Independently of θ, Nu (Nusselt number) approaches unity in the limit $K^* \rightarrow \infty$. Also, a small permeability ratio ($K^* < 1$) causes channeling of the flow near the horizontal walls when $\theta = 0^o$. The heat transfer is maximum at $\theta = 90^o$ for which the parallelism of the flow is destroyed for large value of the Rayleigh number R. A maximum (minimum) heat transfer within the cavity is obtained when the porous matrix is oriented in such way that the principal axis with higher permeability is parallel (perpendicular) to the vertical direction. Thus, the best possible insulation is reached when the principal axis with lower permeability is parallel to the gravity. Moreover, for the particular case $\theta = 45^o$, the solutions, for fixed values of R^* (modified Rayleigh number) and A (aspect ratio of the cavity), are perfectly symmetrical with respect to $K^* = 1$, such that the results for a value of K^* are equivalent to those for $1/K^*$. Also, upon increasing the thermal conductivity ratio (k^*) the convective induced flow is promoted but the Nusselt number

(Nu) approaches unity as k^* is made large enough. As the thermal conductivity ratio is decreased (k^*), Nu tends asymptotically towards a constant value that depends upon R.

Finaly, the boundary-layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects has been investigated. The Brinkman-extended Darcy model, which allows the no-slip boundary condition to be satisfied, is used in the formulation of the problem. The results indicate that when Da (the Darcy number) is small enough (low porosity media) the flow field resembled that given by a pure Darcy model. For this situation, which holds for $Da \leq 10^{-6}$, the viscous effects near the boundaries are negligible and both the permeability ratio and inclination of the principal axes of anisotropic permeability have a strong influence on the convective heat transfer. For intermediate values of Da, the boundary frictional resistance becomes gradually more important, as Da is increased, and adds to the bulk frictional drag induced by the solid matrix to slow down the convection motion. As a result, the effects of the anisotropic permeability of the porous medium on the convection heat transfer are progressively inhibited. When Da is large enough ($Da \geq 10$) the solution based on the Brinkman-extended Darcy model, approaches that of a pure fluid medium (in the absence of inertia effects).

Remerciements

Le présent travail de recherche fait suite à plusieurs années d'études supérieures effectuées au Département de Génie Mécanique, Section Aérothermique de l'École Polytechnique de Montréal. Nous remercions sincèrement notre directeur de recherche, le Professeur **Patrick Vasseur** qui nous a accepté dans son groupe de recherche. Nous restons redevable à celui-ci de la qualité des relations humaines et de la disponibilité permanente pour avoir bénéficié de sa compétence et de son expérience afin de mener à bien cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre reconnaissance et nos chaleureux remerciements.

C'est également pour nous un grand plaisir de remercier le Professeur **Luc Robillard** qui, malgré ses multiples occupations, nous a fait l'honneur d'assurer la présidence du jury d'examen de cette thèse. Nous sommes agréablement touché par la participation appréciable des Professeurs **Sophie Goujon-Durand** et **René Kahawita**, en leur qualité de membres de jury et nous leur exprimons nos remerciements.

Nous adressons nos vifs remerciements à Madame **Micheline Roberge** et à tout le personnel en charge de gérer le Programme Canadien de Bourses de la Francophonie qui a assuré financièrement ces études. Aussi est-il important pour nous de remercier sincèrement notre épouse **Mathilde** et nos enfants dont le soutien indéfectible nous a été d'un grand réconfort durant toutes ces années passées très loin de notre milieu natal. Nous tenons à exprimer nos remerciements à notre oncle, Papa **Alexis Béhanzin** qui nous a beaucoup aidé.

Nos derniers remerciements vont en général à tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette thèse et en particulier à nos amis et collègues du groupe thermique pour leur esprit de compréhension mutuelle et leur sollicitude.

Table des Matières

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Nomenclature

A	: rapport de forme de la cavité ou du domaine numérique, H'/L'
a, b, c	: constantes, *Equation* (2.7)
C	: gradient vertical de température adimensionnel, $\Delta T^*/A$
c_p	: chaleur spécifique à pression constante, $J/(kg.K)$
D	: constante, *Equation* (3.7)
Da	: nombre de Darcy, K_1/l^2
g	: accélération de la pesanteur, m/s^2
H'	: hauteur de la cavité ou du domaine numérique, m
$\vec{J}$	: gradient hydraulique, *Equation* (1.2)
k	: conductivité thermique, $J/(s.m.K)$
$k_{x'}, k_{y'}$	: conductivité thermique suivant les axes principaux, $J/(s.m.K)$
k^*	: rapport d'anisotropie en conductivité thermique, $k_{x'}/k_{y'}$
K	: perméabilité, m^2
$\overline{\overline{K}}'$	: tenseur (de second ordre) de la perméabilité, *Equation* (2.4)
K_1, K_2	: perméabilités suivant les axes principaux, m^2
K^*	: rapport d'anisotropie en perméabilité, K_1/K_2
l	: longueur caractéristique du modèle physique, m
L'	: largeur de la cavité ou du domaine numérique, m
Nu	: nombre de Nusselt
Ox', Oy'	: coordonnées cartésiennes coïncidant avec les axes principaux, m
p'	: pression, N/m^2
q'	: flux de chaleur uniforme (par unité de surface)
r	: constante, *Equation* (3.7)

R	: nombre de Rayleigh , $K_1 g\beta l\Delta T'/\alpha\nu$
Ra	: nombre de Rayleigh en milieu fluide, R/Da
R^*	: nombre de Rayleigh modifié, $R/\sqrt{K^*}$
$R_{H'}$	: nombre de Rayleigh basé sur la hauteur, *Equation* (3.22)
$R_{x'}$	: nombre de Rayleigh local, *Equation* (3.12)
Re	: nombre de Reynolds basé sur le diamètre des pores, $V\ K^{1/2}/\nu$
t'	: temps, s
T	: température adimensionnelle, $(T' - T'_o)/\Delta T'$
T'_o	: température de référence au centre géométrique de la cavité, K
$\Delta T'$	: différence de température caractéristique, K
$\overline{\Delta T'}$	: différence de température pariétale dimensionnelle, K
ΔT	: différence de température pariétale adimensionnelle
ΔT^*	: différence de température adimensionnelle entre les parois horizontales
u, v	: vitesses adimensionnelles dans les directions Ox et Oy, $(u', v')l/\alpha_{y'}$
$\vec{V}'$	: vitesse de filtration, m/s
x, y	: coordonnées cartésiennes adimensionelles, $(x', y')/l$

Lettres grecques

$\overline{\overline{\alpha}}'$	: tenseur (de second ordre) de la diffusivité thermique, *Equation* (2.12)
α	: diffusivité thermique, m^2/s
$\alpha_{x'}, \alpha_{y'}$	: diffusivité thermique suivant les axes principaux, m^2/s
β	: coefficient d'expansion thermique du fluide, $1/K$
θ	: angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
δ	: épaisseur adimensionnelle de la couche limite sur les parois verticales, δ'/l
δT	: différence de température entre les frontières verticales, K
λ	: viscosité relative, μ_{eff}/μ

μ : viscosité dynamique du fluide, $kg/(m.s)$

μ_{eff} : viscosité dynamique apparente pour le modèle de Brinkman, $kg/(m.s)$

ν : viscosité cinématique du fluide, m^2/s

Υ : force potentielle spécifique, N

ψ' : fonction de courant dimensionnelle, *Equation* (3.9)

ψ : fonction de courant adimensionnelle, $\psi'/\alpha_{y'}$

φ : porosité du milieu poreux, %

Φ : température adimensionnelle, *Equation* (3.10)

σ : rapport de capacités calorifiques, $(\varrho c)_p/(\varrho c)f$

ϱ : densité du fluide, kg/m^3

$(\varrho c_p)_f$: capacité calorifique du fluide, $J/(m^3.K)$

$(\varrho c_p)_s$: capacité calorifique de la matrice solide, $J/(m^3.K)$

$(\varrho c_p)_p$: capacité calorifique du milieu poreux, $J/(m^3.K)$

Exposants

$'$: quantités dimensionnelles

Indices

c : au centre géométrique de la cavité

max : valeur maximale

min : valeur minimale

o : état de référence

w : paroi verticale

∞ : loin de la plaque ou relatif à la région centrale de la cavité

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Considérations préliminaires

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous paraît important de rapporter sommairement un certain nombre de définitions utiles à la compréhension du problème physique étudié.

Dans un sens général, un *milieu poreux* est un milieu solide parsemé de nombreux petits trous ou espaces vides distribués plus ou moins fréquemment dans toute la masse du milieu et de façon désordonnée. Une grande variété de matériaux naturels et artificiels sont poreux. Une pincée de sable, un morceau de pierre, de calcaire et de dolomite, une touffe de coton, les agrégats fibreux comme la toile, le feutre et le papier filtre et les particules catalytiques sont des exemples de milieux poreux. Les espaces vides interconnectés ou non sont communément appelés *pores*. Un fluide peut s'écouler à travers un milieu poreux à condition que la plupart des nombreux espaces vides dont ce dernier est composé, soient interconnectés. Dans cette situation, le milieu poreux est dit *saturé* par le fluide. L'espace occupé par un pore est appelé espace poreux *total*. La partie interconnectée du système poreux est appelée espace poreux *effectif*. Le volume moyen du milieu poreux non occupé par les pores contient les grains solides dont l'ensemble est connu sous la désignation *matrice solide*. En se basant sur le comportement du fluide à

travers les espaces vides, ceux-ci sont classés suivant leur taille en trois catégories. D'abord, si les espaces vides sont assez petits pour que les forces moléculaires entre le solide et le fluide soient insignifiantes, ces minuscules espaces vides sont appelés *interstices moléculaires*. Ensuite, lorsque les espaces vides sont assez grands pour que le mouvement du fluide soit déterminé en partie par les parois locales limitant ces vides, ces plus larges espaces vides sont identifiés aux *cavernes* dont le nom leur est attribué. Enfin, les autres espaces vides dont la taille est située entre ces deux extrêmes sont appelés pores. Beaucoup de théories statistiques et de résultats des travaux expérimentaux ont proposé différentes expressions de la relation entre la "distribution de la taille des pores" et les propriétés macroscopiques du milieu poreux. Parmi ces propriétés, nous retenons essentiellement la *porosité* et la *perméabilité*.

La *porosité* d'un milieu poreux est la fraction du volume moyen du milieu poreux occupé par les espaces vides. En d'autres termes, c'est le rapport du volume des pores au volume moyen du milieu poreux. Deux types de porosité sont définis: (i) la porosité *totale* et (ii) la porosité *effective*. La porosité *totale* ou *absolue* est le rapport du volume occupé par les pores au volume moyen du milieu poreux sans tenir compte des connexions alors que la porosité *effective* désigne la fraction du volume moyen du milieu poreux constitué par les pores interconnectés. Beaucoup de roches naturelles telles que les laves et autres roches éruptives ont une porosité totale élevée tandis que leur porosité effective est nulle. La porosité effective est une indication de la perméabilité mais n'est pas une mesure de cette dernière.

La *perméabilité* est cette propriété du milieu poreux qui caractérise la facilité avec laquelle le fluide est mis en écoulement par l'application d'un gradient de pression. La valeur de la perméabilité est déterminée par la structure du milieu poreux. Il est démontré que la perméabilité est, en première approximation, le

carré du diamètre moyen des pores. Beaucoup de matériaux poreux possèdent une qualité directionnelle dans leur structure. En conséquence, les perméabilités mesurées avec l'écoulement perpendiculaire à chaque face d'un cube relevant de la structure de tels matériaux poreux ne sont pas égales. Ces matériaux poreux sont dits *anisotropes* et il en résulte que la transmissibilité du fluide saturant n'est pas identique dans toutes les directions.

Par ailleurs, un milieu est dit *homogène*, relativement à une certaine propriété, si cette dernière est indépendante de la position dans le milieu; dans le cas contraire, le milieu est dit *hétérogène*. De même, un milieu est dit *isotrope*, relativement à une certaine propriété physique si cette dernière est indépendante de la direction dans le milieu. Par conséquent, si à un point quelconque du milieu, une propriété telle que la *perméabilité* ou la *conductivité thermique* varie avec la direction, le milieu est dit *anisotrope* ou *aléotrope* au point considéré, relativement à cette propriété. Dans le monde environnant, nous rencontrons l'*anisotropie en perméabilité* dans les sols et dans les formations géologiques servant de réservoirs ou nappes aquifères. Les sédiments sont généralement déposés de telle sorte que leur perméabilité dans une direction (habituellement la direction horizontale) est plus élevée que celle observée dans toutes les autres directions. Dans la plupart des matériaux stratifiés, la résistance à l'écoulement est plus faible (la perméabilité étant plus grande) le long des plans de dépôt qu'ailleurs. Les sols stratifiés sont habituellement anisotropes en perméabilité. La stratification peut résulter de la forme des particules. Par exemple, les particules en forme de plaques (comme le mica) sont généralement orientées de manière à ce que leur côté plat soit dirigé vers le bas. La sédimentation et la pression d'un matériau difforme occasionnent toutes deux des plaques dont les plus grandes dimensions sont orientées parallèlement au plan sur lequel elles sont déposées. Plus tard, cette disposition entraîne des canalisations de l'écoulement parallèlement au plan de dépôt. Ces canalisations

de l'écoulement sont différentes de celles observées perpendiculairement à ce plan, et par conséquent le milieu aquifère devient ainsi anisotrope en perméabilité. Des couches alternées de différentes textures peuvent donner naissance à une anisotropie en perméabilité. Cependant, pour ordonner une formation stratifiée du type précédent, de manière à la qualifier de milieu anisotrope homogène, l'épaisseur de chaque couche individuelle doit être plus petite que la longueur caractéristique des strates. Il n'y a aucun moyen de tenter de déterminer la perméabilité d'une telle formation à partir de la région centrale dont la taille est plus petite que l'épaisseur d'une couche individuelle. Dans beaucoup de nappes aquifères, des fractures et des érosions des roches occasionnent une très grande perméabilité dans la direction longitudinale de ces fractures tandis que dans la direction normale à ces dernières, la perméabilité est beaucoup plus faible. Dans les roches carbonatées, la solution de celles-ci est réalisée au moyen de l'écoulement de l'eau érodant leur surface. Il se produit une canalisation de cette solution qui se développe principalement dans la direction de l'écoulement. Par conséquent, le milieu rocheux ayant une très grande perméabilité dans la direction draînante devient ainsi anisotrope en perméabilité. Dans beaucoup de sols, des jointures verticales, des trous de racines et des terriers animaux donnent naissance à l'anisotropie en perméabilité avec la perméabilité la plus grande dans la direction verticale.

Nous rencontrons aussi l'*anisotropie en conductivité thermique* dans les sols et dans les formations géologiques où l'intrusion magmatique apparaît comme le résultat des activités volcaniques ou des mouvements techtoniques à de faibles profondeurs dans la croûte terrestre. Si ce magma intrusif prend naissance dans la nappe phréatique, un écoulement convectif naturel est généré dans la nappe souterraine adjacente à des zones chaudes et froides et se propage verticalement à travers les fissures. Il en résulte que la conductivité thermique dans la direction verticale soit plus élevée que celle enregistrée dans la direction horizontale. Cet état

de choses rend donc anisotrope en conductivité thermique le milieu géothermique. De même, la remontée des laves en surface lors des éruptions volcaniques engendre la propagation désordonnée de la chaleur dans les directions environnantes, entraînant la non-uniformité de la conductivité thermique des sites rocheux dont l'anisotropie en conductivité n'est plus à démontrer.

Ces exemples en prélude à l'étude proprement dite ne sont ni exhaustifs, ni limitatifs.

1.2 Bien-fondé de l'étude et définition du problème physique

Généralement, le transfert de chaleur par convection se fait grâce au mouvement d'un fluide circulant au voisinage d'un corps solide dont la température est différente de celle du fluide. Il en résulte que l'écoulement convectif d'un fluide est engendré par les différences de densités causées par des gradients thermiques au sein de celui-ci.

D'un point de *vue phénoménologique*, nous distinguons deux types de mouvements convectifs: la convection *naturelle* ou *libre* et la convection *forcée*. La convection *naturelle* est celle qui prend naissance lorsque le mouvement est dû uniquement à l'action du champ de pesanteur sur un fluide dont la température, et par suite la masse volumique, sont variables d'un point à un autre. Dans le cas contraire, la convection est dite *forcée* pour caractériser l'effet d'une force extérieure causant la circulation du fluide. Une superposition de l'action de la poussée et de l'effet de cette force extérieure donne naissance à la convection dite *mixte*. Le paramètre communément connu qui influence la densité du fluide est la température (habituellement la densité décroît quand la température augmente).

La convection naturelle joue un rôle important dans de nombreux problèmes physiques. A cause de son importance en milieu poreux saturé par un fluide, beaucoup de recherches fondamentales lui ont été consacrées durant les deux dernières décennies. Ses applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont variées et comportent notamment les écoulements géothermiques, l'extraction du pétrole, le stockage des produits agricoles, la diffusion souterraine des contaminants, la régénération des matériaux poreux des échangeurs thermiques, le génie nucléaire, l'isolation thermique, etc...

D'un point de *vue physique*, les mouvements convectifs dans une couche poreuse ont deux effets principaux. Premièrement, ils tendent à homogénéiser tout le volume du fluide dans lequel ils prennent naissance. Deuxièmement, ils produisent une distribution de température *in situ* non-uniforme caractérisée par des zones chaudes et des zones froides. La convection en milieu aquifère doit être prise en considération dans les situations réelles suivantes (*Combarnous et Bories* (1975)):

(a) La contribution des "effets homogénéisants" de ces mouvements convectifs à la diffusion d'un contaminant. En effet, à partir d'une source locale de pollution dans le milieu aquifère, les effets de la dispersion dus à la vitesse moyenne de l'écoulement et la convection due au gradient géothermique tendent à disperser l'agent polluant à travers toute la couche poreuse et peuvent ainsi affecter les programmes d'adduction d'eau potable.

(b) L'influence sur le rendement des installations industrielles utilisant des forages de sources d'eau chaude. Dans ces usines, l'eau froide est souvent réinjectée dans d'autres endroits de la nappe aquifère, et le rendement du procédé est fortement influencé par les conditions de chauffage de l'eau réinjectée. Ces conditions dépendent des débits de pompage de l'eau, de la conductivité thermique des couches poreuses, du flux local de la chaleur souterraine et bien entendu de l'existence des

effets de la convection thermique dans la couche poreuse (*Aziz et al* (1972)).

(c) L'influence d'un champ de température non-uniforme résultant de la convection en exploration photographique infra-rouge. Théoriquement, l'existence de n'importe quelle structure hétérogène souterraine ayant une conductivité thermique différente de celle du voisinage immédiat pourrait être détectée par l'influence qu'elle exerce sur la distribution verticale de la température. Et donc, à cause des effets perturbateurs engendrés par la convection thermique souterraine, la technique d'exploration photographique infra-rouge qui a été développée intensément se trouve limitée à l'exploration en profondeurs étroites.

La convection naturelle est l'une des principales causes de sources d'eau chaude souterraines et des régions géothermiques à hautes températures. Dans ce dernier cas, l'extension verticale des cavités poreuses à travers lesquelles circulent l'eau et la vapeur est assez grande, souvent de l'ordre de plusieurs kilomètres. A cause de cette extension, deux approches alternatives sont utilisées comme hypothèses simplificatrices dans l'analyse théorique du comportement thermique de toute la structure géothermique, laquelle analyse est nécessaire pour l'évaluation d'une installation industrielle utilisant de l'énergie géothermique. Comme approche rigoureuse, les canaux hydrodynamiques sont considérés assez compacts et uniformément distribués. Dans ce cas, la structure est supposée se comporter comme un milieu poreux homogène et certains résultats expérimentaux obtenus en laboratoire sur la convection d'origine thermique dans des couches poreuses régulières sont utilisés. L'autre approche prend en compte, de façon plus précise, des zones à perméabilités particulièrement élevées dans un réservoir géothermique et considère que le milieu environnant est imperméable. Avec cette hypothèse, des modèles tant expérimentaux que numériques peuvent être développés.

Des mouvements convectifs existent aussi dans une couche de neige lorsque

la composante verticale du gradient thermique pointe dans la même direction que la gravité, l'air contenu dans la couche devenant plus léger que celui se trouvant à la surface supérieure de cette dernière. Ce genre de situation apparaît lorsque le temps change d'un niveau de température froide à un autre plus bas, par exemple au cours de la nuit. Aussi bien les mouvements convectifs dans la couche que le gradient de température contribuent au transfert de masse d'eau par le biais des mécanismes de vaporisation et de condensation. Ce transfert de masse modifie considérablement la structure de la couche et la distribution verticale de la densité de la neige. Ces modifications réduisent souvent la cohésion de certaines parties de la couche neigeuse et peuvent occasionner des avalanches (*Bories et Thirriot* (1971)).

Par ailleurs, les dykes complexes pratiqués dans les zones fissurées des formations volcaniques peuvent engendrer des sources thermiques pour l'échauffement de la nappe phréatique du milieu aquifère. Un dyke est semblable à une plaque intrusive presque verticale dont la surface devient relativement perméable ou non après son refroidissement par la formation rocheuse aqueuse. Lorsque le dyke est rechauffé à une température supérieure au point d'ébullition correspondant à une profondeur donnée de l'eau, le problème physique est idéalisé comme la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale. Cette dernière est perméable ou non selon la fréquence de fissures observées sur sa surface et peut se trouver adjacente à un milieu poreux saturé par l'eau souterraine. Lorsque ce dyke est adjacent à une denivellation rocheuse presque horizontale servant de canal à l'écoulement de la nappe phréatique, le problème physique est dans ce cas assimilable à la convection forcée ou mixte sur une plaque horizontale dans un milieu poreux saturé.

Dans le même ordre d'idées, la chaleur produite par les sources concentrées, provoquées par les phénomènes volcaniques au voisinage des points d'eau dans la

terre migre selon les principes de la convection thermique à travers le milieu géothermique. Nous notons des applications évidentes de cette classe de problèmes de convection au refroidissement des câbles électriques souterraines ou à la désintégration des déchets nucléaires enfouis sous terre.

Dans la plupart des situations physiques précédemment décrites et dans lesquelles le phénomène de la convection naturelle est omniprésent, le milieu poreux quoique homogène par hypothèse est fortement anisotrope. Cependant, dans la littérature, la plupart des travaux effectués sur la convection naturelle en milieu poreux confiné ou non se rapportent aux structures homogènes et isotropes classiques. Ce ne sont là que des hypothèses simplificatrices introduites pour approcher la réalité. En fait, la prise en compte de plus de réalisme physique dans les propriétés physiques de la matrice solide du milieu poreux est déterminante pour la modelisation assez précise de celui-ci. Ce réalisme physique apparaît par exemple avec l'anisotropie qui est généralement la conséquence d'une orientation préférentielle des directions dominantes ou principales du milieu poreux ou de la géométrie asymétrique des grains et des fibres. Dans la plupart des matériaux poreux, l'anisotropie en perméabilité est plus prononcée que l'anisotropie en conductivité thermique. Cela a été démontré par *Neale* (1977) pour le cas d'une matrice solide thermiquement isolante. Pour une matrice conductrice de la chaleur, aucune conclusion générale n'a pu être tirée.

Eu égard à la difficulté relative de tenir compte de l'anisotropie de la matrice solide du milieu poreux dans la modelisation des lois de conservation décrivant le comportement intrinsèque de celui-ci, il est compréhensible que très peu d'études aient été menées sur la convection en milieu poreux anisotrope. Pour les raisons venant d'être évoquées et faisant état de l'existence du phénomène de la convection en milieu poreux saturé, il nous a été donné de développer le thème de recherche

intitulé: "**Étude numérique et analytique de la convection naturelle en milieu poreux anisotrope**".

Dans les développements ultérieurs de ce sujet de recherche, il sera envisagé dans cette thèse deux essais scientifiques principaux relatifs aux mouvements thermoconvectifs bidimensionnels. Le premier sera conduit dans les milieux poreux ouverts, sièges des écoulements externes (au voisinage d'une plaque verticale choisie comme exemple et soumise à des conditions thermiques générales). Le second sera considéré dans les milieux poreux fermés donnant lieu à des écoulements confinés (à l'intérieur des cavités rectangulaires verticales aux parois horizontales adiabatiques et dont les frontières verticales sont soumises à des conditions thermiques variées). Donc, dans cette thèse, les deux configurations à géométrie rectangulaire servant à la définition du problème physique relatif à l'étude des phénomènes thermoconvectifs naturels (a) au voisinage d'une plaque verticale et (b) à l'intérieur d'une couche poreuse verticale anisotrope sont illustrées schématiquement à la figure 1.1.

1.3 Loi de Darcy généralisée

Dans le but de développer une représentation quantitative du comportement des fluides s'écoulant à travers un milieu poreux, il est avant tout nécessaire d'établir les principes physiques déterminant ce comportement. Ces principes sont fondamentalement identiques à ceux qui gouvernent le mouvement des fluides visqueux que régissent les équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique classique. Cette dernière impose sur la distribution de la vitesse, dans tout système d'écoulement, la condition de l'équilibre dynamique entre les forces inertielles et visqueuses, les forces massiques et la distribution interne de la pression du fluide. Malheureu-

sement, malgré la simplification justifiable de négliger les forces inertielles —dues aux faibles vitesses généralement caractéristiques de l'écoulement à travers le milieu poreux—, les difficultés mathématiques pour appliquer ces équations sont encore grandes.

C'est donc dans la recherche de la solution à ce problème que, *Darcy*, en 1856, travaillant sur les "*fontaines publiques de Dijon*", a conduit une étude expérimentale classique sur le fondement même de la théorie quantitative de l'écoulement laminaire des fluides homogènes en milieu poreux. Ces expériences menées sur un modèle d'écoulement unidimensionnel ont abouti à une relation linéaire, simple, —connue sous le nom de *loi de Darcy* — et s'exprimant comme suit:

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \nabla p \tag{1.1}$$

où $\vec{V}$ est la vitesse de filtration, μ la viscosité dynamique du fluide, K la perméabilité du milieu poreux considérée ici comme une constante et ∇p le gradient de pression dans la direction de l'écoulement.

Cette équation a été largement utilisée pour des écoulements multidimensionnels par de nombreux chercheurs. Plus tard, en 1946, *Ferrandon* (voir *Scheidegger* (1974) et *Bear* (1972)) a élaboré une théorie consistante de l'écoulement des fluides homogènes en milieu poreux anisotrope, avec la généralisation de la loi de Darcy. Sans trop entrer dans les détails ici, il est à noter qu'en milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide homogène, cette théorie a conduit à la formulation généralisée de la loi de Darcy qui se présente sous la forme compacte suivante:

$$\vec{V} = \overline{\overline{K}}\, \vec{J} \qquad \text{avec} \qquad \vec{J} = -\nabla \Upsilon \tag{1.2}$$

Le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K}}$, un tenseur du second ordre est symétrique. Cette dernière propriété permet de faire les remarques suivantes: (i) le gradient de la force potentielle $\nabla\Upsilon$ et la vitesse de filtration $\vec{V}$ ne sont pas parallèles; (ii) il y a dans l'espace trois axes orthogonaux le long desquels le gradient de la force potentielle et la vitesse de filtration ont la même direction; ces axes sont appelés *axes principaux* du tenseur de perméabilité. En conséquence, les règles de l'analyse tensorielle classique s'appliquent à ce tenseur de perméabilité dont les propriétés dans un système de coordonnées cartésiennes permettent d'étudier facilement le comportement des écoulements convectifs stationnaires en milieu poreux anisotrope.

Il est à mentionner qu'en milieu poreux, la loi de Darcy généralisée est limitée à des écoulements laminaires à faibles nombres de Reynolds basés sur le diamètre des pores ($Re < 1$). De plus, cette loi ne tient pas compte des effets de la diffusion visqueuse, c'est-à-dire du terme $\nabla^2 \vec{V}$, et n'est donc pas valide à l'interface du milieu poreux avec un solide ou du milieu poreux avec une surface libre. C'est pour tenir compte de cette réalité physique que *Brinkman* (1947) a ajouté le terme de diffusion à la loi de Darcy qui devient:

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \nabla p + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V} \tag{1.3}$$

Cette équation est connue sous le nom de *équation de Brinkman* et est largement utilisée dans la modelisation des écoulements bidimensionnels et tridimensionnels. Cependant, la difficulté de l'évaluation de la viscosité μ_{eff} différente de celle du fluide subsiste, car cette grandeur dépend de la microstructure du milieu poreux. Toutefois, en pratique, l'approximation $\mu_{eff} \simeq \mu$ est souvent utilisée. En effet, selon *Neale et Nader* (1974), Brinkman a opté lui-même pour ce choix car cette

valeur attribuée à μ_{eff} donne le meilleur accord entre ses propres prédictions (pour le cas de la perméabilité d'un agrégat de sphères imperméables) et les données expérimentales existantes.

1.4 Revue bibliographique

Dans cette section, nous essaierons de situer les études disponibles dans la littérature par rapport à notre sujet de recherche. Il est à rappeler que les travaux qui ont été effectués durant la dernière décennie, en milieu poreux isotrope, sont pour la plupart consignés dans un livre de référence par *Nield et Bejan* (1992).

Les travaux disponibles dans la littérature, relatifs à la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope sont relativement peu nombreux et portent, pour la plupart, sur l'étude dans des couches poreuses horizontales chauffées par le bas. Ainsi, *Castinel et Combarnous* (1974) ont conduit une investigation tant expérimentale que théorique sur la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope, limitée par des surfaces isothermes et imperméables. Un critère pour l'apparition de la convection (le nombre de Rayleigh critique) a été dérivé par ces auteurs. Leurs études ont été poursuivies par *Epherre* (1975) pour prendre en compte l'effet de l'anisotropie en conductivité thermique sur l'apparition des mouvements thermoconvectifs. *Kvernvold et Tyvand* (1979) ont étendu ces analyses à la convection supercritique stationnaire d'amplitude finie en utilisant la méthode de Galerkin. Ils ont établi que, pour un écoulement bidimensionnel dans une couche horizontale illimitée, le nombre de Nusselt dépend du quotient des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique. Les résultats obtenus sont applicables en isolation thermique pour minimiser les pertes énergétiques. Selon ces auteurs, la classe de matériaux poreux anisotropes définie par

$0 < K_x/K_z, K_y/K_z < 1$ (où K_x, K_y et K_z sont respectivement les perméabilités notées dans les directions Ox, Oy et Oz) est identifiable à un milieu poreux composé de fibres parallèles (voir à la figure 1.2). Par contre, lorsque $(K_x/K_z, K_y/K_z > 1)$, cette classe de matériaux poreux anisotropes est assimilable à un milieu poreux composé de plaques parallèles perforées. Dans les deux cas, l'orientation des fibres ou des plaques influence qualitativement le taux de transfert de chaleur. Par ailleurs, les effets de la viscosité dépendante de la température et de l'anisotropie en perméabilité sur la taille des cellules à l'apparition des mouvements convectifs ont été examinées par *Wooding* (1978).

Dans le même ordre d'idées, *Tyvand* (1980) a déterminé analytiquement un critère d'apparition de la convection naturelle due aux gradients de salinité dans une couche poreuse horizontale anisotrope en perméabilité, en diffusivité thermique et en diffusivité solutale. Il a démontré que, lorsque la matrice solide est thermiquement isolée, la courbe de stabilité présente la même pente que celle observée pour le cas isotrope et que le nombre d'ondes critiques est constant et égal à celui obtenu dans le cas d'un seul composant chimique. Un modèle très général de détermination du critère d'apparition de la convection naturelle en milieu poreux a été proposé par *Richard et Gounot* (1981). Ce modèle s'applique à des milieux poreux constitués de plusieurs strates superposées et anisotropes en perméabilité et en diffusivité thermique.

Kibbin et Tyvand (1982) ont étudié la convection naturelle dans des milieux poreux anisotropes multi-couches, pour aider à la compréhension physique de l'anisotropie. Les mouvements convectifs d'amplitude finie et soumis à des conditions périodiques ont été considérés par ceux-ci. Pour un nombre donné de couches, il peut se produire une cassure soudaine de ce modèle d'anisotropie due à l'apparition locale de la convection se manifestant à un nombre de Rayleigh local sen-

siblement égal à $4\pi^2$. Aussi ont-ils démontré l'existence de deux niveaux distincts de description moyenne et continue de la microstructure d'un milieu poreux, le premier étant le niveau le plus bas de la stratification, le second correspondant au niveau le plus élevé de l'anisotropie. *Kibbin* (1984) a conduit une étude extensive relative aux effets de l'anisotropie sur la stabilité de la convection dans une couche poreuse. Celui-ci a considéré, à la surface supérieure du milieu poreux, des conditions aux limites suffisamment générales pour simuler les modèles d'écoulement avec des frontières à la fois imperméables et isobariques. Le critère d'apparition de la convection thermosolutale dans un milieu poreux anisotrope et rotatif, ayant une extension horizontale infinie, a été examiné par *Patil et al.* (1989). Ceux-ci ont trouvé entre autres, que l'augmentation du paramètre d'anisotropie en perméabilité stabilise le système, alors que la diminution de ce paramètre destabilise ce dernier lorsque cette tendance est comparée avec celle observée en situation isotrope.

Nielsen et Storesletten (1990) ont étudié analytiquement la convection bidimensionnelle dans des canaux rectangulaires poreux, anisotropes en perméabilité et en conductivité thermique et ayant des parois imperméables non-uniformément chauffées pour favoriser une distribution linéaire de la température dans la direction verticale. Ils ont calculé les nombres de Rayleigh critiques pour l'apparition de la convection en conditions isotrope et anisotrope et examiné les modèles d'écoulement en régime permanent, pour des nombres de Rayleigh modérément supercritiques. Il a été démontré que l'effet de la conductivité thermique des parois était stabilisateur.

Chen et Hsu (1991) ont étudié théoriquement l'apparition de la convection dans un système ayant une extension infinie dans la direction horizontale et composé de deux couches superposées, l'une constituée par un milieu fluide limité à la

surface par une paroi rigide, l'autre contenant un milieu poreux, inhomogène et anisotrope en perméabilité et en diffusivité thermique. Entre autres effets, ceux-ci ont observé que, en général, l'augmentation de la perméabilité dans la direction verticale confère un état moins stable et une longueur d'onde critique des cellules convectives très faible. De plus, il a été démontré que l'augmentation de la diffusivité thermique dans la direction verticale produit un état plus stable et une longueur d'onde critique très élevée.

L'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard dans une couche poreuse horizontale et anisotrope en perméabilité a été considérée par *Tyvand et Storesletten* (1991) qui ont envisagé l'orientation arbitraire des axes principaux du tenseur de perméabilité par rapport au champ gravitationnel. Ils ont obtenu comme résultat de nouveaux modèles qualitatifs de l'écoulement convectif caractérisé par des cellules latérales, pariétales et inclinées et ont démontré que le nombre de Rayleigh critique est toujours réduit, en comparaison de celui-ci avec l'orientation perpendiculaire ou parallèle des fibres par rapport aux frontières. En outre, ils ont observé comme *Kvernvold et Tyvand* (1979) que les résultats obtenus sont applicables dans le domaine de l'isolation thermique, pour la minimisation des pertes énergétiques à travers la couche poreuse.

La solidification d'un mélange binaire, solution aqueuse de chlorure d'ammonium, contenu dans une cavité carrée, a été simulée numériquement par *Yoo et Viskanta* (1992). Trois zones principales sont observées: la zone solide, la zone liquide et la zone dite boueuse située entre les deux premières. L'anisotropie en perméabilité de la région boueuse a été envisagée. La comparaison des résultats avec des données expérimentales connues montre que le modèle est capable de rendre compte des caractéristiques fondamentales du mécanisme de solidification. Les effets de l'anisotropie sont sensibles: un faible rapport de l'anisotropie en per-

méabilité aide à la croissance d'une couche secondaire mais aussi conduit à une grande différence de concentration entre la zone boueuse et celle du liquide pur.

Chen et Lu (1992) ont déterminé théoriquement le critère d'apparition de la convection naturelle due aux gradients de salinité dans un milieu poreux anisotrope et inhomogène et dans lequel aucun mécanisme de solidification n'apparaît. Ceux-ci ont dérivé sur la base de la théorie de la stabilité linéaire un critère pour l'apparition de la convection due aux gradients de salinité et de la convection d'origine thermique dans la zone boueuse caractérisée par l'anisotropie en perméabilité.

Les effets de l'instabilité engendrée par l'anisotropie dans un milieu poreux saturé par un fluide incompressible et soumis à un gradient incliné de température de grandeur finie ont été analysés par *Parthiban et Patil* (1993) par la technique de Galerkin. Ils ont trouvé que le milieu poreux anisotrope est le plus stable en comparaison avec la situation isotrope horizontale qui est la plus instable, dépendamment du nombre de Rayleigh horizontal et des paramètres d'anisotropie.

Récemment, *Zhang et al.* (1993) ont étudié la convection de Bénard dans une cavité confinée par un milieu poreux anisotrope en perméabilité dont les axes principaux sont non-coïncidants avec le champ gravitationnel. Ils ont conclu que le rapport d'anisotropie en perméabilité et l'angle d'inclinaison des axes principaux ont tous deux une grande influence sur le système. L'existence ou la co-existence de quatre branches de solution, à des nombres de Rayleigh supercritiques, a été démontrée.

Ni et Beckermann (1991) ont considéré numériquement l'écoulement convectif et le transfert de chaleur dans une cavité verticale confinant un milieu poreux hydrodynamiquement et thermiquement anisotrope. Le même problème a été considéré analytiquement pour de faibles nombres de Rayleigh par *Kimura et al.* (1993).

Il a été trouvé que les effets des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur le transfert de chaleur total étaient tous deux significatifs. Plus tard, *Zhang* (1993) a examiné numériquement le même problème en considérant l'orientation arbitraire des directions principales de l'anisotropie en perméabilité par rapport aux axes de coordonnées. Il a été observé que l'angle d'inclinaison des directions dominantes de l'anisotropie influence grandement l'écoulement et le transfert de chaleur.

Chang et Lin (1994) ont étudié numériquement les effets de l'anisotropie en perméabilité, de la diffusivité thermique non-uniforme et des parois conductrices sur le transfert de chaleur par convection dans une cavité poreuse rectangulaire. Les résultats ont indiqué que le rapport d'anisotropie en diffusivité thermique influence grandement le transfert de chaleur. Le problème de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire poreuse, anisotrope et hétérogène avec génération interne de chaleur a été considéré récemment par *Royer et Flores (1994)*. Les résultats numériques, comparés avec ceux correspondant à la situation homogène et isotrope, ont été rapportés. Les effets des diverses conditions aux limites sur les champs d'écoulement et de température ont été examinés.

Le problème de la convection naturelle dans un cylindre vertical confiné par un milieu poreux anisotrope a été considéré par *Chang et Hsiao* (1993). Les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité, du rapport d'anisotropie en conductivité thermique, du nombre de Rayleigh et du rapport de forme géométrique sur les champs d'écoulement et de température ont été discutés.

Récemment, le problème de la convection naturelle dans un anneau horizontal poreux anisotrope avec des conditions aux limites isothermes appliquées aux frontières interne et externe, a été examiné par *Aboubi et al.* (1995). Les résultats obtenus ont indiqué que, pour une inclinaison arbitraire des axes principaux

différente de la direction horizontale (ou verticale), une circulation nette de l'écoulement apparaîssait dans l'anneau. Une perméabilité relativement faible dans la direction horizontale fait croître le transfert de chaleur et accentue l'apparition de cellules additionnelles dans la plus basse région de l'anneau.

1.5 Contenu de la thèse

Après ce chapitre introductif, la présente thèse est structurée de la façon suivante:

Le Chapitre 2 présente de façon générale les équations gouvernantes des phénomènes thermoconvectifs en milieu poreux anisotrope. Le traitement numérique sur la base de méthodes conventionnelles en différences finies de ces équations rendues adimensionnées sera exposé.

Le Chapitre 3 rend compte de la convection naturelle sur une plaque verticale soumise à des conditions thermiques générales et bordant un milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope. Une résolution numérique des équations gouvernantes complètes est proposée et les résultats obtenus seront comparés avec la solution affine, valide en régime de couche limite.

Le Chapitre 4 décrit la convection naturelle dans une cavité verticale anisotrope en perméabilité et chauffée isothermiquement par les côtés. La résolution numérique des équations gouvernantes donnera des résultats qui seront examinés et comparés avec la solution analytique en régime de couche limite, basée sur une approche intégrale.

Le Chapitre 5 rapporte la convection naturelle dans une couche poreuse verticale, anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique et exposée à un flux

de chaleur constant. Une étude numérique des équations gouvernantes complètes sera menée conjointement avec une modelisation analytique basée sur la théorie de l'écoulement parallèle.

Le Chapitre 6 traite des écoulements convectifs pour un modèle de Brinkman dans un milieu poreux confiné et anisotrope en perméabilité. Une comparaison des résutats numériques obtenus sera faite en régime de couche limite avec la solution analytique basée sur la méthode de linéarisation d'Oseen.

Le Chapitre 7 fait finalement l'objet de la conclusion générale aux différents aspects du sujet abordés dans les parties précédentes, ce qui permettra en dernière analyse de faire des suggestions pour des études subséquentes.

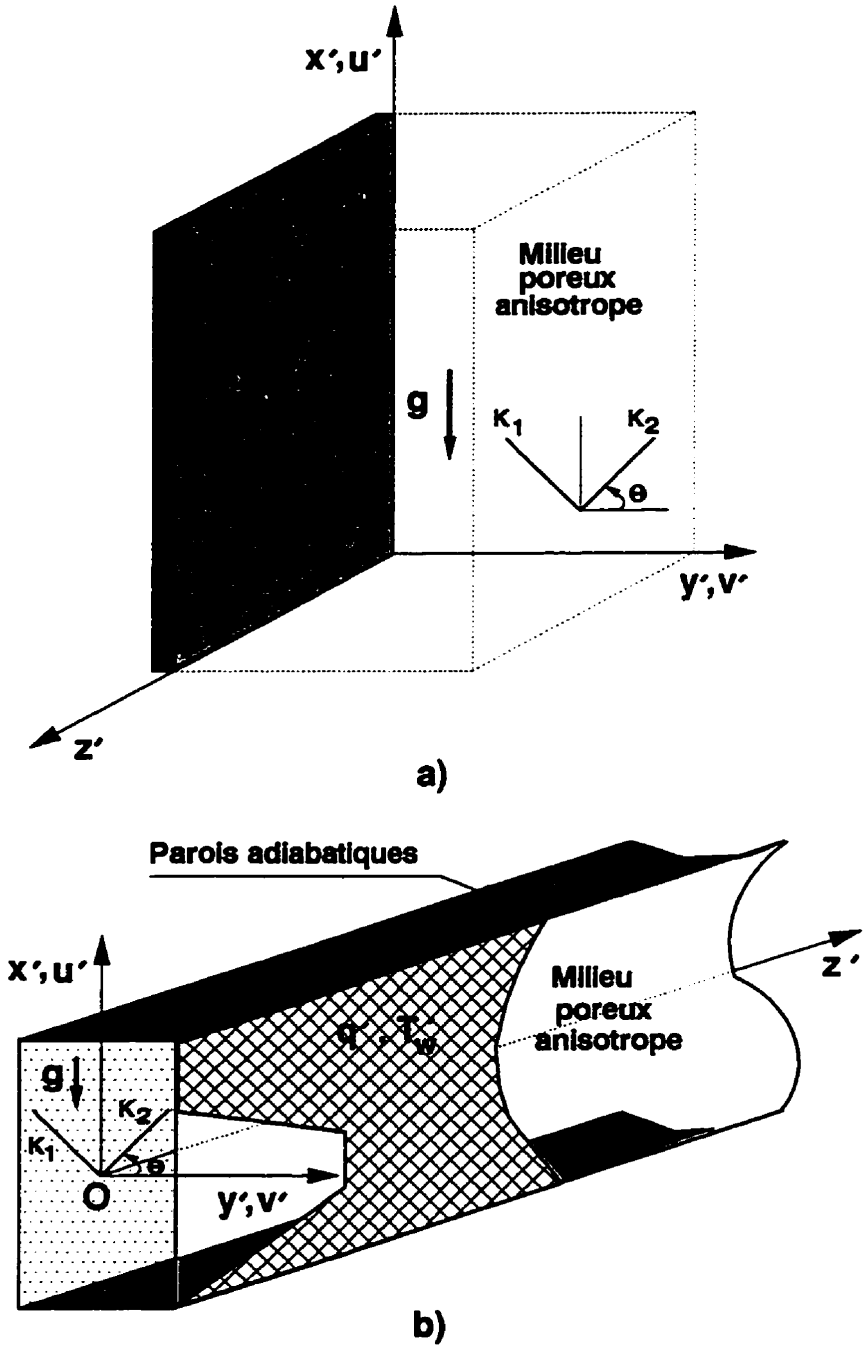


Figure 1.1: Configurations à géométrie rectangulaire relatives à l'étude des mouvements thermoconvectifs naturels (a) au voisinage d'une plaque verticale et (b) à l'intérieur d'une couche poreuse verticale.

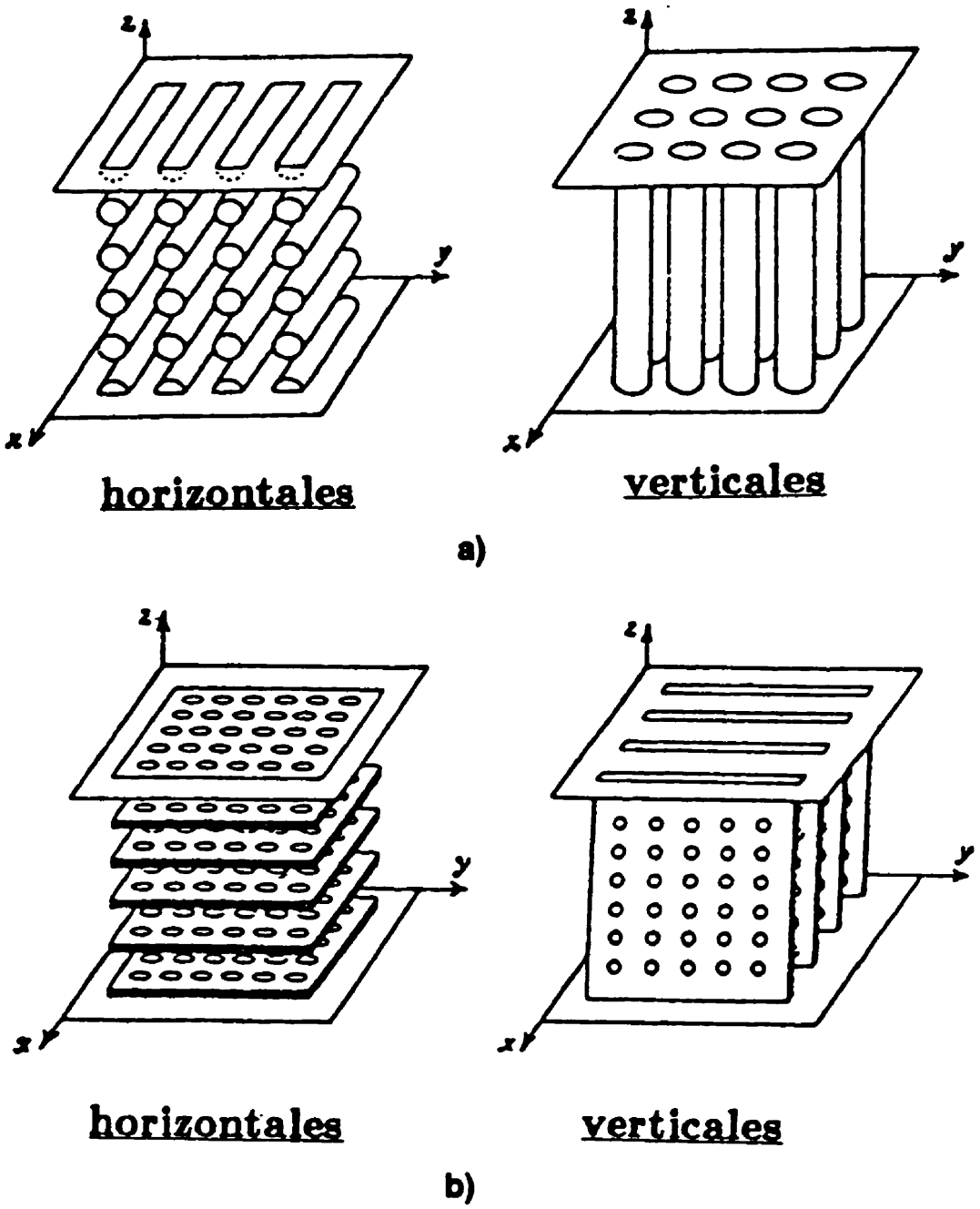


Figure 1.2: Classes de matériaux poreux anisotropes (utilisés en isolation thermique, selon *Kvernvold et Tyvand* (1979)): (a) composés de fibres parallèles, $(0 < K_x/K_z, K_y/K_z < 1)$; (b) composés de plaques parallèles perforées, $(K_x/K_z, K_y/K_z > 1)$.

Chapitre 2

Modèle mathématique et résolution

2.1 Introduction

La résolution des problèmes énergétiques rencontrés couramment dans l'industrie et dans la vie impose une connaissance plus approfondie des lois de conservation relatives au transport des fluides. La nécessité de la recherche de l'optimisation énergétique a conduit à mieux comprendre les phénomènes thermoconvectifs dont le comportement fait appel à un ensemble de notions relatives à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie des fluides en écoulement. Ces notions permettent en définitive de mesurer le taux de transfert de chaleur ou d'énergie occasionnée ou produite par l'écoulement des fluides. Trois méthodes classiques sont indiquées dans la détermination de cette énergie transférée. Ce sont les méthodes expérimentales, les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Le caractère onéreux des moyens expérimentaux et les difficultés d'application des modèles analytiques aux problèmes physiques réels ont poussé les chercheurs à adopter les méthodes numériques qui donnent des solutions rapides, fiables et relativement peu coûteuses.

Dans la présente étude, le transfert de chaleur engendré par les écoulements convectifs d'un fluide saturant la matrice solide d'un milieu poreux anisotrope sera modelisée à partir des lois de conservation classiques. Dans cette optique, il s'agira

de décrire dans ce chapitre les différentes étapes de la méthode de résolution numérique proposée, suite à la formulation mathématique des équations gouvernantes sur la base des hypothèses simplificatrices.

2.2 Modèle mathématique

Soit un milieu poreux rapporté à un système de coordonnées cartésiennes (Ox', Oy', Oz'), saturé par un fluide incompressible tel qu'illustré schématiquement par la figure 2.1. Le milieu poreux est hydrodynamiquement et thermiquement anisotrope et est supposé infini dans la direction Oz' de manière à considérer le système comme bidimensionnel. Les composantes de la perméabilité, respectivement notées K_1 et K_2 forment un angle θ par rapport aux axes de coordonnées (Ox', Oy') et tournent donc autour du point origine O. Les directions principales de la conductivité thermique $(k_{x'}, k_{y'})$ coïncident respectivement avec les axes vertical et horizontal. Le système soumis à des conditions thermiques non spécifiées ici, est le siège de mouvements thermoconvectifs naturels qui sont régis par des équations fondamentales.

2.2.1 Hypothèses simplificatrices

Comme dans tout problème scientifique, l'écriture des équations gouvernantes qui traduisent les lois de comportement relatives au phénomène physique est subordonnée à des hypothèses. Il est alors convenable de rappeler ici les hypothèses les plus importantes en vue de négliger certaines grandeurs dont les variations compliqueraient ou rendraient impossible ce travail de modelisation.

Ainsi, dans la présente étude, la vitesse de circulation du fluide saturant la

matrice solide est supposée faible et le nombre de Reynolds basé sur le diamètre moyen des grains est approximativement inférieur ou égal à l'unité. Nous considérons que l'écoulement est laminaire, le milieu poreux homogène et le fluide saturant en équilibre thermodynamique local avec la matrice solide.

Les écarts de température sont faibles de sorte que les propriétés thermophysiques du fluide peuvent être considérées comme constantes, donc indépendantes de la température, à l'exception de la variation linéaire de la densité dans le terme de la poussée d'Archimède *(approximation de Boussinesq)*. De même, les effets de la dissipation visqueuse et du rayonnement thermique sont négligeables et aucune réaction chimique entre le fluide et la matrice solide n'est susceptible de générer des sources thermiques.

2.2.2 Equations gouvernantes

2.2.2.1 Formulation en variables primitives

Equation de continuité:

En considérant le milieu poreux comme un milieu continu basé sur le concept du volume élémentaire représentatif, le principe de la conservation de la masse permet d'étabir l'équation de continuité suivante, valable pour un fluide s'écoulant à travers les interstices moléculaires:

$$\frac{\partial(\varphi\varrho)}{\partial t'} + \nabla.(\varrho\vec{V'}) = 0 \tag{2.1}$$

où $\partial(\varphi\varrho)/\partial t'$ désigne le taux d'accroissement du fluide dans le volume élementaire et $\nabla.(\varrho\vec{V'})$ représente le débit massique net du fluide à travers ce volume. Dans

l'équation (2.1), la porosité φ, quantité en général adimensionnelle, est indépendante du temps t'.

Dans le cas où le fluide est supposé incompressible ($\varrho = constante$), l'équation (2.1) devient:

$$\nabla . \vec{V'} = 0 \tag{2.2}$$

Equation de mouvement:

Pour un milieu poreux anisotrope, la théorie quantitative de l'écoulement laminaire des fluides homogènes est régie par la loi de Darcy généralisée (*Bear* (1972)) qui, en présence du champ gravitationnel terrestre, s'écrit:

$$\vec{V'} = \frac{\overline{\overline{K'}}}{\mu} \left(-\nabla p' + \varrho \vec{g}\right) \tag{2.3}$$

où le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K'}}$ s'exprime dans le système d'axes rotatifs autour de l'origine 0 par la matrice suivante:

$$\overline{\overline{K}}' = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2\theta + K_2 \sin^2\theta & (K_1 - K_2)\sin\theta\cos\theta \\ (K_1 - K_2)\sin\theta\cos\theta & K_2\cos^2\theta + K_1\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

En éliminant le terme de pression de l'équation (2.3) en prenant le rotationnel de cette dernière et en tenant compte de l'approximation de Boussinesq et de l'équation d'état (2.15), nous obtenons l'équation suivante:

$$\nabla . \overline{\overline{K}} \nabla \psi' - \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0 \tag{2.5}$$

où

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} a &= K^* sin^2\theta + cos^2\theta \\ b &= K^* cos^2\theta + sin^2\theta \\ c &= (K^* - 1) sin\theta \; cos\theta \\ K^* &= \frac{K_1}{K_2} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

et où ψ' la fonction de courant relative aux composantes de vitesse est telle que:

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}, \qquad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \tag{2.8}$$

Les relations (2.8) rendent automatiquement satisfaite l'équation de continuité (2.2).

Equation d'énergie:

En négligeant les effets de la dissipation visqueuse, l'équation d'énergie établie à partir du premier principe de la thermodynamique, pour un milieu poreux anisotrope en conductivité thermique, s'écrit (voir *Bejan* (1984)):

$$(\varrho c_p)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\varrho c_p)_f \nabla . \left(\vec{V'}\, T'\right) = k_{x'} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + k_{y'} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \tag{2.9}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} (\varrho c_p)_p &= (1-\varphi)(\varrho c_p)_s + \varphi(\varrho c_p)_f \\ k_{x'} &= (1-\varphi) k_{sx'} + \varphi k_{fx'} \\ k_{y'} &= (1-\varphi) k_{sy'} + \varphi k_{fy'} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

où $(\varrho c_p)_p$ est la capacité thermique *totale* du milieu poreux par unité de volume, $k_{x'}$ et $k_{y'}$ les conductivités thermiques du milieu poreux dans les directions respectives x' et y'. De même, $k_{sx'}$ et $k_{fx'}$ d'une part, $k_{sy'}$ et $k_{fy'}$ d'autre part sont respectivement les conductivités thermiques de la matrice solide et du fluide dans les directions x' et y'. Remarquons que la différence $(1-\varphi)$ intervenant dans les relations ci-dessus désigne le rapport du volume élémentaire occupé par les grains solides au volume total de l'élément. Le terme $(\varrho c_p)_f\ \nabla.(\vec{V}'T')$ est le taux de variation de l'énergie thermique due à la convection par unité de volume. Le second membre de l'équation (2.9) est constitué des termes conductifs exprimés suivant les axes de coordonnées.

La forme condensée de l'équation (2.9) donne l'expression suivante:

$$\sigma\frac{\partial T'}{\partial t'} + \nabla.\ \left(\vec{V}'T' - \overline{\overline{\alpha}}'\ \nabla T'\right) = 0 \tag{2.11}$$

où $\sigma = (\varrho c_p)_p/(\varrho c_p)f$ désigne le rapport des capacités calorifiques et $\overline{\overline{\alpha}}'$ le tenseur de diffusivité thermique, tenseur du second ordre, est exprimé dans le système d'axes (Ox', Oy') par:

$$\overline{\overline{\alpha}}' = \begin{bmatrix} \alpha_{x'} & 0 \\ 0 & \alpha_{y'} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Dans les situations où le milieu poreux est isotrope en conductivité thermique, $k_{x'} = k_{y'} = k$ et donc $\alpha_{y'} = \alpha_{x'} = \alpha$. Par conséquent, le tenseur symétrique $\overline{\overline{\alpha}}'$ est identique à $\alpha\overline{\overline{I}}$ où $\overline{\overline{I}}$ est la matrice unité et l'équation (2.11) devient:

$$\sigma\frac{\partial T'}{\partial t'} + \nabla.\ \left(\vec{V}'T'\right) \ = \ \alpha\ \nabla^2 T' \tag{2.13}$$

Equation d'état

A travers le terme de poussée intervenant dans l'équation du mouvement (2.3), l'écoulement est provoqué par le champ de densité généré par le champ de température. Le couplage des équations de mouvement (2.3) et d'énergie (2.11) est réalisé au moyen de l'équation d'état du fluide saturant. En admettant que ce dernier se comporte comme un gaz parfait et en négligeant l'influence de la pression dans l'équation différentielle d'état des gaz idéaux qui est réduite à:

$$d\varrho = -\varrho\beta \; dT \tag{2.14}$$

nous obtenons, dans la limite de $(T' - T'_o) \ll T'_o$, l'équation suivante:

$$\varrho = \varrho_o \; [1 - \beta(T' - T'_o)] \tag{2.15}$$

où l'indice "o" relatif à l'état de référence est identifié dans certaines circonstances à "∞" pour caractériser les grandeurs de l'écoulement loin d'un obstacle, à l'infini.

En conclusion, l'équation (2.15) appelée *équation d'état* est valide lorsque les variations de densité $\Delta\varrho$ sont très petites devant ϱ_o à travers la région du milieu poreux où le fluide s'écoule et lorsque les variations de température $\Delta T' = T' - T'_o$ sont insuffisantes pour provoquer des variations qualitatives des propriétés du milieu poreux (fluide et matrice solide) autour de leurs valeurs moyennes.

Conditions aux limites

• Conditions hydrodynamiques

Lorsque l'écoulement du fluide suit la loi de Darcy, seule une condition hydrodynamique peut être appliquée à une frontière solide, puisque l'équation (2.3) ne comporte que des dérivées spatiales du premier ordre. Il en résulte que l'écoulement parallèle à la paroi est libre de glisser. En d'autres termes, la condition

d'adhérence du fluide à la paroi n'est pas satisfaite.

Pour satisfaire la condition d'adhérence de l'écoulement à la paroi, il faut considérer le modèle de Brinkman qui met en évidence les effets visqueux du fluide saturant aux frontières solides. Dans ce cas, les composantes normale et tangentielle de la vitesse sont toutes deux nulles.

- **Conditions thermiques**

En raison de la continuité de la température due à l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local stipulé entre le fluide et la matrice solide, le vecteur flux thermique, somme des termes convectifs et conductifs doit être aussi continu à travers le milieu poreux considéré également comme un milieu continu. Par conséquent, à une frontière imperméable (paroi solide), les conditions thermiques classiques appropriées à l'environnement externe peuvent être appliquées. Il s'agira d'envisager comme conditions thermiques, soit une température, soit un flux de chaleur ou encore un coefficient de transfert de chaleur.

2.2.2.2 Adimensionnalisation des équations

Pour caractériser et interpréter physiquement les écoulements thermoconvectifs étudiés, il est utile de procéder à l'adimensionnalisation des équations gouvernantes. Les facteurs d'échelle de normalisation utilisés pour les grandeurs d'intérêt sont:

- l : longueur caractéristique du modèle physique;
- $\alpha_{y'}/l$: facteur d'échelle pour la vitesse;
- $l^2\sigma/\alpha_{y'}$: facteur d'échelle pour le temps;

- $\Delta T'$: facteur d'échelle pour la température;
- $\alpha_{y'}$: facteur d'échelle pour la fonction de courant.

Il résulte de ces facteurs d'échelle de normalisation que les variables adimensionnelles sont les suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} (x,y) = \dfrac{(x',y')}{l} & & (u,v) = \dfrac{(u',v')}{\alpha_{y'}/l} \\ T = \dfrac{T'-T'_o}{\Delta T'} & t = \dfrac{\alpha_{y'}}{\sigma l^2}t' & \psi = \dfrac{\psi'}{\alpha_{y'}} \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

En introduisant les variables (2.16) dans les équations gouvernantes (2.2), (2.5) et (2.11), il vient:

$$\nabla.\,\overline{\overline{K}}\,\nabla\psi - R\,\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla.\left(\vec{V}T - \overline{\overline{\alpha}}\,\nabla T\right) = 0 \tag{2.18}$$

Dans les équations (2.17) et (2.18), le nombre de Rayleigh R et le tenseur $\overline{\overline{\alpha}}$ sont donnés par:

$$\left.\begin{array}{l} R = K_1 g\beta\Delta T' l/\alpha_{y'}\nu \\ \overline{\overline{\alpha}} = \begin{bmatrix} k^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{2.19}$$

où k^* le rapport d'anisotropie en conductivité thermique est donné par $k^* = k_{x'}/k_{y'}$.

Les conditions aux limites auxquelles sont soumises les équations gouvernantes adimensionnées (2.17) et (2.18) seront spécifiées dans les prochains chapitres où des modèles physiques typiques sont étudiés plus en détail. Toutefois, nous pouvons retenir, à cette étape de l'étude, l'existence de quatre paramètres adimensionnels qui sont le nombre de Rayleigh R, le rapport d'anisotropie en conductivité thermique k^*, le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux.

2.2.2.3 Cas étudiés

Premier cas:

Pour des applications ultérieures dans la présente thèse, une variante des équations gouvernantes adimensionnées sera dès lors considérée. Ainsi, lorsque le milieu poreux est anisotrope en perméabilité et isotrope en conductivité thermique, le fluide saturant obéissant au modèle de Darcy, les équations gouvernantes (2.17) et (2.18) deviennent:

$$a\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2c\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + b\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = R\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \tag{2.21}$$

Deuxième cas:

Lorsque le modèle de Brinkman est appliqué à un milieu poreux anisotrope en perméabilité, l'équation de mouvement (2.3) peut s'écrire sous la forme suivante (voir par exemple *Chan et al.* (1970), *Tong et Subramanian* (1985)):

$$\vec{V}' = \frac{\overline{\overline{K'}}}{\mu} \left(-\nabla p' + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}' + \varrho \vec{g}\right) \tag{2.22}$$

Si, de plus, le milieu poreux est isotrope en conductivité thermique, la considération de $\alpha_{y'} = \alpha$ dans les échelles de normalisation antérieure est nécessaire. En suivant le cheminement classique de normalisation, nous obtenons dans ce cas les équations gouvernantes adimensionnées suivantes:

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \lambda \, Da \, \nabla^4 \psi + R \frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \tag{2.24}$$

où Da est le nombre de Darcy donné par $Da = K_1/l^2$ et λ est le paramètre adimensionnel défini par $\lambda = \mu_{eff}/\mu$. Pour les raisons évoquées précédemment, λ sera pris égal à l'unité.

2.2.2.4 Existence du régime de couche limite

Dans les applications à venir, nous étudierons en partie la convection en régime de couche limite pour lequel le mouvement du fluide est restreint à une mince couche limite le long d'une paroi orientée suivant la verticale ascendante (direction de l'axe Ox), l'axe Oy étant dirigé horizontalement. Dans cette situation, en première approximation, nous pouvons observer que $x \ll y$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/(\partial x \partial y) \ll \partial^2/\partial y^2$. Par conséquent, en retournant à l'équation du mouvement (2.20) ou (2.23), le régime de couche limite n'est possible que lorsque les second et troisième termes du premier membre de celle-ci sont négligeables devant le premier terme. Autrement dit, les conditions suivantes:

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \gg c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tag{2.25}$$

et

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \gg b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{2.26}$$

doivent être satisfaites.

2.3 Transfert de chaleur

Le flux énergétique transféré localement à travers une paroi chaude ou froide est exprimé en terme de nombre de Nusselt local Nu_{loc} défini par:

$$Nu_{loc} = \frac{h_{conv}\, l}{k_{y'}} \tag{2.1}$$

où h_{conv} est le coefficient local de convection à une position donnée de la paroi.

Le taux de transfert thermique total à travers cette paroi, exprimé par le nombre de Nusselt moyen Nu, est donné par:

$$Nu = \frac{\overline{h}\, l}{k_{y'}} \tag{2.2}$$

où $\overline{h}$ est le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection.

2.4 Résolution numérique

La méthode des différences finies est utilisée pour l'intégration numérique du système formé par les équations de transport et d'énergie. Cette méthode de

résolution numérique, en raison de la simplicité relative du concept mathématique de la discrétisation des équations à intégrer, a été largement suivie pour résoudre les problèmes bidimensionnels transitoires de la convection dans des géométries rectangulaires et cylindriques. La discrétisation est définie comme une procédure d'approximation qui consiste à remplacer le domaine physique par un ensemble de nœuds discrets où toutes les inconnues sont ramenées. Les dérivées partielles sont approchées par des différences finies en utilisant un développement en série de Taylor.

2.4.1 Discrétisation des équations

Un maillage uniforme suivant les directions x et y est adopté ici, avec respectivement les pas constants d'espace $\Delta x(i)$ et $\Delta y(j)$ égaux dans les directions précitées.

A l'intérieur du domaine physique, les termes non convectifs sont discrétisées en utilisant les différences finies centrées, précises à l'ordre deux. La convection dominant dans les cas où le nombre de Rayleigh est élevé, les termes convectifs sont discrétisés en utilisant la formulation conservative, pour éviter des instabilités et conférer la précision de la solution. Par exemple, à un nœud quelconque (i, j), la dérivation temporelle et les dérivations spatiales par rapport à y correspondant au schéma centré interne au domaine physique s'écrivent comme suit:

- Dérivée temporelle:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{2.1}$$

- Dérivées spatiales dans le terme de poussée:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \tag{2.2}$$

- Dérivées spatiales dans les termes convectifs:

$$\left.\frac{\partial(uf)}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1}f_{i,j+1} - u_{i,j-1}f_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \tag{2.3}$$

- Dérivées spatiales dans les termes visqueux:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x \Delta y) \tag{2.5}$$

où f désigne l'une quelconque des variables T et ψ, conformément aux différents termes intervenant dans les équations gouvernantes adimensionnées. Remarquons que l'erreur de troncature commise sur la précision de la dérivée temporelle est du second ordre, en raison de la symétrie du schéma numérique utilisé ici, par rapport au niveau temporel $(n + 1/2)$, n étant le nombre d'itérations.

Comme l'équation d'énergie (2.18) est parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la distribution de la température est obtenue en utilisant la méthode A.D.I. "*Alternating Direction Implicit*" (méthode implicite aux dérivées alternées) pour résoudre cette équation. Cette méthode numérique assez conventionnelle a été largement suivie car elle donne lieu à des matrices tridiagonales dans les deux directions et permet de construire un schéma de calcul très efficace et simple (se référer à *Roache* (1976)). La méthode A.D.I. utilisant deux équations, l'une implicite par rapport à la première coordonnée, l'autre implicite par rapport à la deuxième coordonnée, la solution formulée implicitement est obtenue à chaque pas de temps en balayant le domaine verticalement et horizontalement. Pour faire avancer la solution du temps $t_1 = n\Delta t$ au

temps $t_2 = t_1 + \Delta t = (n+1)\Delta t$, les équations discrétisées suivantes, déduites de l'équation (2.18) sont:

(a) Température implicite en x:

$$\begin{aligned} &\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j}T_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \\ &+ \frac{v_{i,j+1}T_{i,j+1}^{n} - v_{i,j-1}T_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} = \\ &k^* \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

expression se présentant, pour chaque nœud interne au domaine, sous la forme condensée suivante:

$$A_{i,j}^{(1)}T_{i-1,j}^{n+1/2} + B_{i,j}^{(1)}T_{i,j}^{n+1/2} + C_{i,j}^{(1)}T_{i+1,j}^{n+1/2} = D_{i,j}^{(1)} \tag{2.7}$$

où les coefficients $A_{i,j}^{(1)}$, $B_{i,j}^{(1)}$, $C_{i,j}^{(1)}$ et $D_{i,j}^{(1)}$ qui s'en déduisent aisément après identification sont:

$$\left.\begin{aligned} &A_{i,j}^{(1)} = -\frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{k^*}{\Delta x^2}, \qquad B_{i,j}^{(1)} = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2k^*}{\Delta x^2}, \qquad C_{i,j}^{(1)} = \frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{k^*}{\Delta x^2} \\ &D_{i,j}^{(1)} = \left[\frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2}\right]T_{i,j-1}^{n} + \left[\frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{\Delta y^2}\right]T_{i,j}^{n} + \left[-\frac{v_{i,j+1}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2}\right]T_{i,j+1}^{n} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

En tenant compte de l'ensemble des nœuds internes de chaque colonne, nous obtenons un système d'équations linéaires dont la résolution se ramène à l'inversion d'une matrice tridiagonale. Bien entendu, les première et dernière lignes de cette matrice tridiagonale sont corrigées par la connaissance des conditions thermiques

imposées sur les frontières limitant le domaine physique suivant la direction y.

(b) Température implicite en y:

$$\begin{aligned} &\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1,j}T_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \\ &+ \frac{v_{i,j+1}T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} = \\ k^* &\frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n-1/2}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

équation qui, pour un nœud donné du domaine physique, prend la forme condensée suivante:

$$A_{i,j}^{(2)}T_{i,j-1}^{n+1} + B_{i,j}^{(2)}T_{i,j}^{n+1} + C_{i,j}^{(2)}T_{i,j+1}^{n+1} = D_{i,j}^{(2)} \tag{2.10}$$

ce qui donne ci-après les expressions des coefficients $A_{i,j}^{(2)}$, $B_{i,j}^{(2)}$, $C_{i,j}^{(2)}$ et $D_{i,j}^{(2)}$ obtenus de façon analogue au cas précédent:

$$\left.\begin{aligned} &A_{i,j}^{(2)} = -\frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2}, \qquad B_{i,j}^{(2)} = \frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta y^2}, \qquad C_{i,j}^{(2)} = \frac{v_{i,j+1}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \\ &D_{i,j}^{(2)} = \left[\frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{k^*}{\Delta x^2}\right]T_{i-1,j}^{n+1/2} + \left[\frac{2}{\Delta t} - \frac{2k^*}{\Delta x^2}\right]T_{i,j}^{n+1/2} + \left[-\frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} + \frac{k^*}{\Delta x^2}\right]T_{i+1,j}^{n+1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Nous obtenons de même un système d'équations linéaires relatif à l'ensemble des nœuds de chaque ligne, qui est résolu en inversant une matrice tridiagonale. Dans ce cas, les première et dernière lignes de cette matrice sont corrigées par la connaissance des conditions thermiques aux limites suivant la direction x.

Une fois les deux étapes précédentes franchies, le champ de température ob-

tenu pour l'ensemble des nœuds du domaine sera utilisé dans le calcul du terme de poussée qui est donné par:

$$\Gamma_{i,j}^{n+1} = R\left[\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}\right] \tag{2.12}$$

Connaissant le champ de la fonction de courant à l'instant $n\Delta t$, l'étape suivante consistera à déterminer le champ de cette fonction de courant à l'instant $(n+1)\Delta t$ à partir de l'équation du mouvement (2.17). Pour diminuer le temps d'exécution, la méthode S.O.R. "*Successive Over-Relaxation*" par point (méthode de sur-relaxation succesive) est une méthode explicite donnant directement la valeur de ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$ au nœud considéré, avec un nombre suffisant d'itérations pour que le critère de convergence souhaité soit atteint. Donc, au nœud (i,j) nous avons:

$$\begin{aligned}\psi_{i,j}^{n+1} = (1-\xi)\psi_{i,j}^{n} + \xi \Bigg[& \frac{b}{2}\frac{\Delta y^2}{a\Delta x^2 + b\Delta y^2}(\psi_{i+1,j}^{n} + \psi_{i-1,j}^{n}) \\ & + \frac{a}{2}\frac{\Delta x^2}{a\Delta x^2 + b\Delta y^2}(\psi_{i,j+1}^{n} + \psi_{i,j-1}^{n}) + \\ & + \frac{c}{4}\frac{\Delta x \Delta y}{a\Delta x^2 + b\Delta y^2}(\psi_{i+1,j+1}^{n} - \psi_{i+1,j-1}^{n} - \psi_{i-1,j+1}^{n} + \psi_{i-1,j-1}^{n}) + \\ & - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{a\Delta x^2 + b\Delta y^2}\Gamma_{i,j}^{n+1}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.13}$$

où ξ est le coefficient de sur-relaxation tel que $1 \leq \xi \leq 2$. Ce coefficient est introduit pour accélérer la convergence et donc pour diminuer le nombre d'itérations. Sa valeur optimale, ξ_o dépend de la géométrie du domaine physique, du maillage et des conditions aux limites. Pour un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, ξ_o est évalué par l'expression suivante:

$$\xi_o = 2\left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) \tag{2.14}$$

avec

$$\varepsilon = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{I_{max}-1}\right) + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\cos\left(\frac{\pi}{J_{max}-1}\right)}{1+\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}}\right)^2 \tag{2.15}$$

où I_{max} et J_{max} désignent les nombres de nœuds respectivement suivant les directions verticale et horizontale.

Le champ de vitesse est facilement connu à partir de ses composantes calculées par les formules:

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j-1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{2.16}$$

et

$$v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{2.17}$$

2.4.2 Algorithme de calcul

Les séquences importantes de l'algorithme de calcul sont résumées ici dans les opérations suivantes:

1. Initialisation ou lecture des valeurs des champs de température, de fonction de courant et de vitesse, à partir des fichiers existants.

2. Calcul du champ de température à l'instant $t + \Delta t$ par la méthode A.D.I. à partir des équations (2.35) et (2.38) en utilisant les valeurs de la vitesse à l'instant t.

3. Calcul de la fonction de courant à l'instant t à partir de l'équation (2.41). Des calculs itératifs sont effectués à cette étape jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait ou le nombre maximal d'itérations prévu soit atteint. Ce critère de convergence est défini par:

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\left(\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n}\right)\right|}{\sum_i \sum_j \left|\psi_{i,j}^{n+1}\right|} \leq \epsilon_1 \tag{2.18}$$

où ϵ_1 désigne la limite de convergence. Une variation totale de 10^{-4} de la fonction de courant dans tout le domaine est choisie comme critère de convergence.

4. Détermination du champ de vitesse à partir du champ de fonction de courant calculé à l'étape précédente.

5. Le régime permanent est atteint lorsque le critère suivant est satisfait:

$$\frac{\sum_i \sum_j \left|\left(\Omega_{i,j}^{n+1} - \Omega_{i,j}^{n}\right)\right|}{\sum_i \sum_j \left|\Omega_{i,j}^{n+1}\right|} \leq \epsilon_2 \tag{2.19}$$

où $(n+1)$ et n désignent respectivement les étapes de temps $(n+1)\Delta t$ et $n\Delta t$ et Ω représente T ou ψ. Si la condition (2.47) n'est pas satisfaite pour toutes les variables mentionnées ou si le temps maximal t_{max} prévu pour l'exécution du programme numérique n'est pas atteint, nous recommençons les calculs à partir de l'étape 2.

2.4.3 Validation des résultats

Les résultats donnés par le programme numérique conçu pour la résolution des équations gouvernantes complètes et soumises à des conditions aux limites non spécifiées dans ce chapitre, sont validés en conditions isotropes avec ceux existant dans la littérature pour chaque type de problème examiné dans les chapitres ultérieurs. Evidemment, l'influence du maillage utilisé sur la précision de ces résultats est variable d'une situation à l'autre. Le lecteur est alors invité à se référer aux chapitres suivants où des détails de validation du code numérique sont rapportés.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations de base régissant la convection naturelle en milieu poreux anisotrope ont été considérées. Suivant la technique des différences finies, les différentes étapes de résolution numérique de ces équations gouvernantes adimensionnées ont été examinées. L'algorithme de calcul passant en revue les méthodes numériques assez conventionnelles et largement utilisées pour résoudre des problèmes thermoconvectifs dans des géométries variées a été mis en oeuvre itérativement. Les résultats fiables obtenus qui seront validés en situation isotrope, vont être comparés avec les solutions analytiques développées dans les différents problèmes physiques abordés dans les chapitres à venir.

L'objet de la première application de ce calcul itératif, autrement dit, l'objet du prochain chapitre est relatif à la convection naturelle le long d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope et soumise à des conditions thermiques variées.

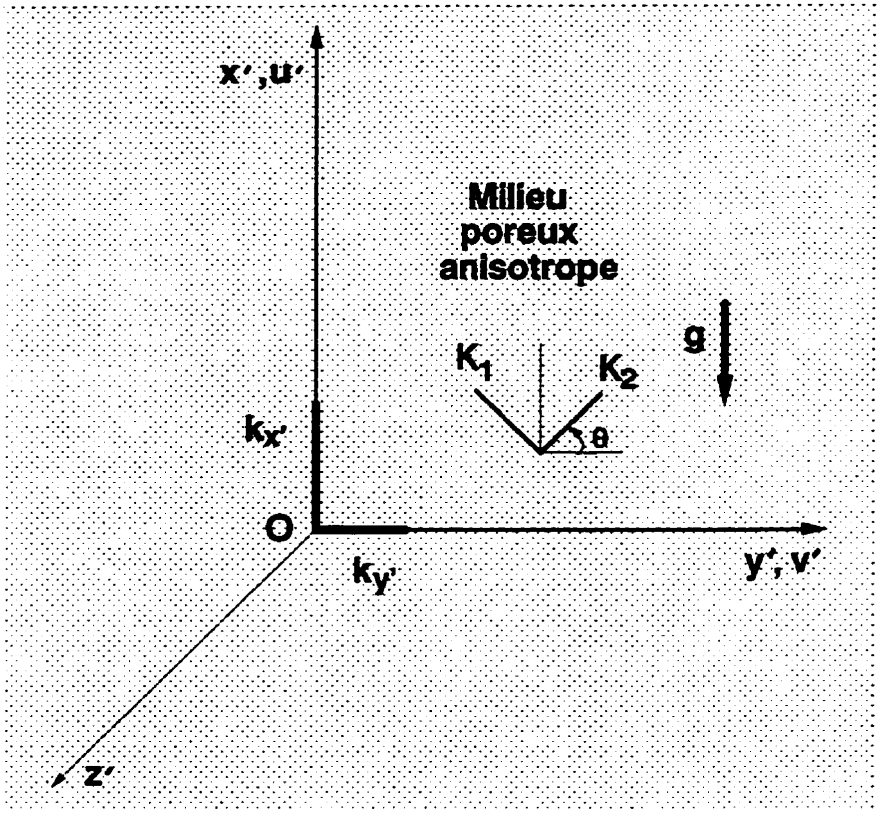


Figure 2.1: Système d'axes de coordonnées.

Chapitre 3

Convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale bordant un milieu poreux anisotrope

3.1 Introduction

Le calcul de la chaleur transférée par convection naturelle à travers une plaque verticale adjacente à un milieu poreux trouve des applications dans de nombreux domaines. Les industries géothermiques et pétrolières, le stockage des matériaux radioactifs, la pollution des nappes souterraines, etc... en sont des exemples. Dans un traité de revue bibliographique, *Cheng* (1978) a discuté les travaux y afférents et dont les applications sont relatifs aux systèmes géothermiques. Du point de vue académique, ce problème est fondamental en mécanique des fluides appliquée et en transfert de chaleur.

En milieu poreux isotrope, les études effectuées sur le sujet sont très nombreuses. *Cheng et Minkowycz* (1977) ont considéré la convection naturelle le long d'une plaque verticale semi-infinie dans un milieu poreux isotrope. Basées sur les approximations caractérisant le régime de couche limite et la loi de Darcy, des solutions affines ont été obtenues par ces auteurs pour le cas où une température est spécifiée à la surface de la plaque. Une analyse systématique, au regard des

possibilités des solutions affines pour différentes fonctions de la température pariétale, a été faite par *Johnson et Cheng* (1978). *Seetharamu et Dutta* (1990) ont considéré le problème de la plaque verticale dont la température pariétale varie comme une fonction arbitraire de la position sur la plaque par rapport à l'origine. *Nakayama et Koyama* (1982) ont utilisé une méthode intégrale pour analyser la convection naturelle engendrée par une surface verticale chauffée dans un milieu poreux isotrope. Les effets de la stratification thermique sur les taux de transfert de chaleur ont été examinés. *Ingham et al.* (1982) ont considéré le problème de la convection naturelle en régime transitoire près d'une surface plane verticale soudainement refroidie à la même température que le fluide ambiant, dans un milieu poreux saturé.

Quelques études ont été rapportées aussi pour le cas où la plaque verticale est chauffée par un flux de chaleur, puisqu'une telle condition thermique est rencontrée dans des applications pratiques. La convection naturelle engendrée par une plaque verticale chauffée par un flux de chaleur uniforme a été considérée par *Cheng* (1977). Ce problème a été réexaminé par *Dutta et Seetharamu* (1987, 1993) pour un flux de chaleur variant comme une fonction de puissance de la position par rapport à l'origine et pour un flux de chaleur non-uniforme. De nombreuses investigations ont été menées en prenant en compte les effets pariétaux et inertiels, non considérés par le modèle de Darcy, qui deviennent importants en milieux à perméabilités élevées. *Evans et Plumb* (1978) et *Hsu et Cheng* (1985) ont étudié l'effet de la friction pariétale sur l'écoulement convectif, sur la base de l'équation de Brinkman. *Plumb et Huenefeld* (1981) et *Bejan et Poulikakos* (1984) ont utilisé l'équation de Forschheimer pour étudier l'influence de la force de traînée quadratique (force d'inertie) sur la convection naturelle le long d'une surface verticale. *Hong et al.* (1985) ont considéré à la fois les effets pariétaux et inertiels, de même que les termes convectifs dans leur modèle pour investiguer l'influence de ces effets sur la

convection naturelle dans un milieu à grandes porosités. *Kaviany et Mittal* (1987) ont conduit une étude tant analytique qu'expérimentale sur le taux de transfert de chaleur engendré par une plaque verticale isotherme et adjacente à un milieu poreux à perméabilités élevées. Il a été démontré par ces auteurs que les effets pariétaux et inertiels ralentissent la convection, entraînant la décroissance du taux de transfert de chaleur.

Dans toutes les études précitées, les milieux poreux sont supposés isotropes alors que dans maintes applications, les matériaux poreux sont fortement anisotropes. En dépit de ce fait, la convection naturelle dans de tels matériaux a reçu relativement moins d'attention. Dans la revue de bibliographie générale présentée au chapitre 1, les études rapportées sur la convection naturelle en milieu poreux anisotrope ont été considérées pour la plupart dans des couches horizontales et dans des cavitées confinées. La seule étude traitant de la convection naturelle en régime de couche limite le long d'une plaque verticale isotherme et adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité a été examiné analytiquement par *Ene* (1991). En utilisant l'approche analytique dite Méthode de Relations Intégrales, cet auteur a démontré que, lorsque la perméabilité dans la direction orthogonale à la plaque est plus élevée que celle dirigée le long de cette dernière, une augmentation du champ de température est observée dans le milieu poreux. Dans son étude, Ene (1991) a supposé que les axes principaux de l'anisotropie en perméabilité étaient coïncidants avec les axes de coordonnées.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la convection naturelle le long d'une plaque verticale chauffée et adjacente à un milieu poreux saturé. Ce dernier étant anisotrope en perméabilité, les directions principales de celle-ci sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel terrestre. Sur la base des approximations en régime de couche limite, les solutions affines seront obtenues pour

le cas où la température pariétale varie comme une fonction de puissance de la distance comptée à partir du bord d'attaque de la plaque. Les équations gouvernantes complètes seront résolues numériquement. Les effets des paramètres de contrôle sur les taux de transfert de chaleur local seront analysés.

3.2 Présentation du système physique et du modèle mathématique

Nous considérons le cas d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux saturé et caractérisé par l'anisotropie en perméabilité. Les axes de coordonnées x' et y' sont respectivement orientés suivant les directions verticale et horizontale, conformément aux annotations de la figure 3.1a. Les perméabilités respectivement désignées par K_1 et K_2 sont non-coïncidantes avec la gravité terrestre. Le mouvement du fluide qui circule dans le milieu poreux suit la loi de Darcy généralisée. La température prescrite à la paroi est une fonction de puissance de la position le long de la plaque par rapport à l'origine des espaces.

Dans les conditions sus-indiquées, les équations gouvernantes (2.2), (2.5), (2.13) et (2.15) formulées en variables primitives (ψ', T', x', y') décrivent les lois de comportement du phénomène convectif considéré dans ce chapitre.

Dans les sections suivantes, nous résoudrons ces équations d'abord analytiquement sur la base des approximations en régime de couche limite et ensuite numériquement par une procédure des différences finies.

3.3 Solutions affines

Dans cette section, nous utilisons les expressions (2.5) et (2.13) des équations gouvernantes qui peuvent s'écrire comme suit:

$$a\,\frac{\partial^2\psi'}{\partial y'^2} + 2c\,\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial y'} + b\,\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} = \frac{K_1 g\beta}{\nu}\,\frac{\partial T'}{\partial y'} \tag{3.1}$$

$$\sigma\frac{\partial T'}{\partial t'} + \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\,\frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\,\frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha\,\nabla^2 T' \tag{3.2}$$

où a, b et c sont des coefficients donnés par les relations (2.7).

En désignant par δ' l'épaisseur de la couche limite au voisinage de la plaque et en faisant les approximations $x' \sim H'$, $y' \sim \delta'$, $\psi' \sim \alpha H'/\delta'$ et $T' \sim 1$ (voir par exemple *Ene et Polisevski* (1991)), les conditions d'existence du régime de couche limite (2.25) et (2.26) impliquent que:

$$\frac{a}{c}\,\frac{H'}{\delta'} \gg 1 \tag{3.3}$$

et

$$\frac{a}{b}\,\frac{H'^2}{\delta'^2} \gg 1 \tag{3.4}$$

Les équations (3.3) et (3.4) indiquent que, lorsque $a/c = O(1)$ et $a/b = O(\delta'/H')$, les approximations classiques utilisées en régime de couche limite sont valides. Cependant, si $a/c = O(\delta'/H')$ et si $a/b = O(\delta'^2/H'^2)$, alors tous les termes du premier membre de l'équation (3.1) sont du même ordre de grandeur et les approximations en régime de couche limite ne sont plus valides.

Tenant compte des considérations précédentes, lorsque les conditions (3.3) et (3.4) sont satisfaites, les équations (3.1) et (3.2) se simplifient en régime permanent pour donner:

$$a \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\partial T'}{\partial y'} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \tag{3.6}$$

En nous référant au système de coordonnées présenté à la figure 3.1a, les conditions aux frontières prévalant à la paroi et à une grande distance (supposée à l'infini) de cette dernière, sont les suivantes:

$$y' = 0: \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial x'} = 0, \qquad T' = T'_w = T'_\infty + D x'^{\,r} \tag{3.7}$$

$$y' \to \infty: \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0, \qquad T' = T'_\infty \tag{3.8}$$

où la température pariétale prescrite T'_w est une fonction puissance de la distance x', D et r des constantes et T'_∞ la température dans le milieu poreux loin de la plaque.

Nous introduisons à cette étape les transformations suivantes:

$$\psi' = \alpha \left(\frac{R_{x'}}{a} \right) f(\eta) \tag{3.9}$$

$$\Phi(\eta) = (T' - T'_\infty)/(T'_w - T'_\infty) \tag{3.10}$$

$$\eta = \frac{y'}{x'} \left(\frac{R_{x'}}{a} \right)^{1/2} \tag{3.11}$$

où

$$R_{x'} = \frac{K_1 g\beta(T'_w - T'_\infty)\ x'}{\alpha\nu} \tag{3.12}$$

est le nombre de Rayleigh local et η est la variable similaire. En substituant les équations précédentes (3.9)-(3.11) dans les équations simplifiées (3.5) et (3.6) de la couche limite, il vient:

$$f'' - \Phi = 0 \tag{3.13}$$

$$\Phi'' + \frac{(1+r)}{2} f\Phi' - rf'\Phi = 0 \tag{3.14}$$

avec les conditions aux limites (3.7) et (3.8) qui deviennent:

$$\eta = 0: \qquad f = 0, \qquad \Phi = 1 \tag{3.15}$$

$$\eta \to \infty: \qquad f' = 0, \qquad \Phi = 0 \tag{3.16}$$

Les primes dans les équations ci-dessus se rapportent aux dérivées par rapport à η.

En fonction de la variable similaire η, les composantes de la vitesse de filtration sont données par:

$$u' = \frac{\alpha}{x'} \frac{R_{x'}}{a} f'(\eta) \tag{3.17}$$

$$v' = \frac{\alpha}{2x'} \left(\frac{R_{x'}}{a}\right)^{1/2} [(1-r)\eta f' - (1+r)f] \tag{3.18}$$

Le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ est défini ici par:

$$Nu_{x'} = \frac{h\, x'}{k} \tag{3.19}$$

où $h = q'/(T'_w - T'_\infty)$ est le coefficient local de transfert de chaleur et $q' = -k(\partial T'/\partial y')_{y'=0}$ désigne le flux local de chaleur à la surface de la paroi chaude. En fonction des paramètres de similitude définis par les équations (3.9)-(3.11), le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ est exprimé par la relation:

$$Nu_{x'} = \left(\frac{R_{x'}}{a}\right)^{1/2} [-\Phi'(0)] \tag{3.20}$$

Le système formé par les équations (3.13) et (3.14) et les conditions aux frontières (3.15) et (3.16) est similaire à celui obtenu par *Cheng et Minkowycz* (1977) lorsque ceux-ci ont étudié la convection naturelle au voisinage d'une plaque adjacente à un milieu isotrope ($K^* = 1$). L'intégration de ce système d'équations a été effectuée par ces auteurs, pour différentes valeurs de r, au moyen d'une procédure numérique standard, la méthode de Runge-Kutta. Les résultats $[-\Phi'(0)] = 0.444$ et $[-\Phi'(0)] = 0.678$ obtenus respectivement pour les cas d'une surface isotherme ($r = 0$) et d'une surface exposée à un flux de chaleur constant ($r = 1/3$) sont d'un intérêt particulier dans cette étude.

La profondeur de la zone chaude du milieu poreux situé au voisinage de la plaque chauffée, mesurant l'épaisseur de la couche limite thermique δ' du milieu poreux où l'effet de la présence de la paroi se fait sentir, sera maintenant estimée. En désignant par $\eta_{\delta'}$ la valeur de η à la lisière de la couche limite, exprimée à $y' = \delta'$, nous trouvons à partir de l'équation (3.11) que:

$$\frac{\delta'}{x'} = \eta_{\delta'} \left(\frac{R_{x'}}{a}\right)^{-1/2} \tag{3.21}$$

où, selon *Cheng et Minkowycz* (1977), $\eta_{\delta'} = 6.31$ et 5.50 respectivement pour les cas où la surface est chauffée isothermiquement et où celle-ci est exposée à un flux de chaleur constant. Donc, les conditions de validité de la solution en régime de couche limite au présent problème peuvent être estimées à partir des équations (3.3), (3.4) et (3.21).

3.4 Solution numérique

Les simulations numériques, basées sur la résolution complète des équations gouvernantes formulées en variables adimensionnelles, ont été conduites. Les équations adimensionnées (2.20) et (2.21) décrivent correctement le phénomène physique étudié dans ce chapitre. Pour des convenances d'ordre numérique, nous ramènerons la région où se développe la couche limite au voisinage de la plaque verticale semi-infinie à un domaine rectangulaire de hauteur H' et de largeur L', de manière que cette dernière dimension soit assez grande pour permettre l'harmonisation de l'écoulement à l'infini. En prenant H' comme longueur caractéristique de ce domaine numérique, le nombre de Rayleigh est donné par:

$$R_{H'} = \frac{K_1 g \beta \Delta T' H'}{\alpha \nu} \tag{3.1}$$

où $\Delta T'$ est la différence de température caractéristique qui dépend des conditions thermiques appliquées aux frontières de la plaque. Lorsque la plaque est maintenue à une température constante T'_w, $\Delta T' = T'_w - T'_\infty$ tandis que, pour un flux de chaleur uniforme q' (par unité d'aire) appliqué à cette plaque, $\Delta T' = q'H'/k$. Ces deux

cas seront considérés dans la présente analyse numérique.

En suivant *Mahajan et Angirasa* (1993), les conditions adimensionnées appliquées aux limites du domaine numérique considéré à la figure 3.1*b* sont:

$$\left.\begin{array}{llll}
x = 0: & \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, & T = 0 & \\
x = 1: & \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 & \\
y = 0: & \psi = 0, & T = 1 & \text{(paroi isotherme)} \\
 & & \dfrac{\partial T}{\partial y} = -1 & \text{(paroi avec flux de} \\
 & & & \text{chaleur uniforme)} \\
y = A: & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0, & T = 0 &
\end{array}\right\} \quad (3.2)$$

où $A = H'/L'$ est le rapport de forme du domaine numérique rectangulaire. L'imposition de la dérivée du second ordre sur la température à $x = 1$, parmi les conditions aux limites (3.23) ci-dessus, est similaire à l'approche utilisée dans le passé par *Yücel et al.* (1993) pour exprimer la constance du gradient thermique dans la région de la couche limite le long de la plaque, loin du bord d'attaque.

Le nombre de Nusselt local, basé sur la hauteur de la plaque est donné, compte tenu de l'équation (3.19), par $Nu_{H'} = hH'/k$. Donc, dans le cas où la plaque est maintenue à une température constante, nous obtenons:

$$Nu_{H'}(x) = -\left.\frac{\partial T(x)}{\partial y}\right|_{y=0} \quad (3.3)$$

tandis que, pour la situation où la plaque est chauffée par un flux de chaleur constant, le nombre de Nusselt local est donné par:

$$Nu_{H'}(x) = \frac{1}{T_w(x)} \tag{3.4}$$

avec $T_w(x)$ désignant la température locale adimensionnelle de la paroi.

La procédure de calcul numérique suivie ici est analogue à celle décrite au chapitre précédent. Toutefois, une discrétisation du second ordre suivant des schémas décentrés avant et arrière est employée pour approcher les conditions thermiques et hydrodynamiques imposées aux limites du domaine physique. Le rapport de forme du domaine numérique est choisi égal à $A = 0.25$. Cette valeur de A a été estimée par comparaison des résultats numériques obtenus avec ceux des solutions affines en situation isotrope. Il a été vérifié que pour des valeurs plus élevées de ce rapport de forme, la solution numérique ne variait pas de façon significative. Pour les présentes simulations, des maillages uniformes ont été choisis dans les deux directions x et y. Un champ de mailles de (40×60) a été utilisé pour la plupart des calculs effectués dans la présente étude. Dans les situations où une couche limite très mince est observée le long de la plaque chauffée, un raffinement de la taille des mailles s'est avéré nécessaire et a justifié le choix de (100×120). Des valeurs typiques du pas temporel se situent entre 5×10^{-5} et 10^{-3}.

3.5 Résultats et discussion

3.5.1 a) Cas où le milieu poreux est isotrope

Pour tester la validité du code numérique, la comparaison des résultats donnés par le programme numérique avec la solution obtenue en régime de couche limite par *Cheng et Minkowycz* (1977) en situation isotrope ($K^* = 1$) a été faite.

Le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ est illustré à la figure 3.2*a* comme fonction du nombre de Rayleigh $R_{H'}$, basé sur la hauteur de la plaque. Les symboles sur cette figure représentent les résultats numériques obtenus à mi-hauteur de la plaque ($x = 0.5$) pour les deux cas où la paroi est chauffée isothermiquement et par un flux de chaleur uniforme. Les résultats analytiques exprimés par le rapport $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ qui est égal à 0.444 (pour paroi isotherme) et à 0.678 (pour paroi avec flux de chaleur constant), prédits par *Cheng et Minkowycz* (1977), sont aussi indiqués sur le graphique. Pour des valeurs très élevées de $R_{H'}$, autrement dit, en régime de couche limite, l'accord entre les résultats analytiques et numériques est excellent. Lorsque $R_{H'}$ diminue, nous remarquons que le régime de couche limite cesse d'exister en dessous d'une valeur donnée de ce nombre. Cette invalidité des approximations en régime de couche limite apparaît à $R_{H'} \simeq 10^2$ dans le cas où la plaque est chauffée isothermiquement et à $R_{H'} \simeq 10^3$ lorsqu'elle est chauffée par un flux de chaleur uniforme. Lorsque $R_{H'}$ est davantage réduit, le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ décroît également (autrement dit, $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ croît) puisque l'intensité de l'écoulement convectif le long de la plaque plane devient de plus en plus faible. Il est bien connu que le caractère similaire des équations de la couche limite le long d'une plaque est seulement applicable loin du bord d'attaque de cette dernière. Ce point est illustré sur la figure 3.2*b* où le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ est représenté en fonction de la position adimensionnelle x le long de la plaque verticale. Les résultats numériques ont été obtenus pour $R_{H'} = 10^3$ et 2×10^3 pour lesquels l'écoulement est de type couche limite. Nous observons que le paramètre $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ croît d'abord de zéro, origine des axes de coordonnées ($x = 0$), à une valeur maximale localisée près du bord d'attaque de la plaque et décroît ensuite de façon monotone vers les valeurs constantes rapportées par *Cheng et Minkowycz* (1977). Nous notons que les solutions affines sont valides à partir de $x \simeq 0.2$ pour le cas où la plaque est chauffée isothermiquement et de $x \simeq 0.4$ lorsque cette dernière

est exposée à un flux de chaleur uniforme. Pour cette raison, les solutions affines concernant le milieu poreux anisotrope seront comparées dans la prochaine section avec les résultats numériques obtenus à une position arbitraire $x = 0.5$. Une telle distance est assez éloignée du bord d'attaque pour assurer le caractère d'affinité conférée à la solution en régime de couche limite.

La figure 3.3 montre la température adimensionnelle Φ et de la distribution de la vitesse f', à mi-hauteur de la plaque ($x = 0.5$), en fonction de la variable similaire η. Les valeurs numériques obtenues pour $R_{H'} = 3 \times 10^3$ et 5×10^3 s'accordent bien avec les solutions affines de *Cheng et Minkowycz* (1977), la différence maximale entre ces deux types de résultats étant inférieure à environ 1.5%. Ayant donc acquis confiance en la validité du code numérique, nous utiliserons ce dernier pour examiner les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le présent problème, à tous les régimes d'écoulement, même en dehors des approximations caractérisant le régime de couche limite.

3.5.2 b) Cas où le milieu poreux est anisotrope

Dans cette section, les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de la position angulaire θ des axes principaux sur la convection naturelle le long de la plaque verticale seront discutés pour les deux cas de conditions thermiques spécifiées.

Les figures 3.4*a*-3.4*c* montrent des résultats numériques typiques illustrant les effets de l'angle d'orientation θ sur les lignes de courant (à gauche) et les isothermes (à droite) le long de la plaque en conditions isothermes, pour $R_{H'} = 10^3$ et $K^* = 10^{-2}$ (c'est-à-dire, $K_1 < K_2$). Sur ces graphiques, les intervalles entre les lignes de courant adjacentes et les isothermes consécutives sont respectivement

$\Delta\psi = \psi_{max}/10$ et $\Delta T = 0.1$, où ψ_{max} est la valeur maximale de la fonction de courant. Par commodité, la direction et la grandeur des perméabilités minimale et maximale sont représentées respectivement par la position et les longueurs relatives des lignes perpendiculaires localisées entre chaque ensemble des champs d'écoulement et de température. Dans toute la suite de la thèse, nous adopterons la même structure organisationnelle des lignes des courant et des isothermes et la même représentation de la direction et de la grandeur des perméabilités extrêmes. Les résultats obtenus pour $\theta = 0^o$, autrement dit, lorsque la perméabilité minimale (maximale) du milieu poreux est parallèle (perpendiculaire) à la plaque, sont représentés à la figure 3.4*a*. Lorsque le fluide en contact avec la plaque est chauffé, sa densité diminue et il s'élève conformément à la loi d'Archimède. La formation le long de la plaque d'une mince couche limite dans laquelle l'écoulement est essentiellement ascendant est clairement observée. De façon à satisfaire le principe de conservation de la masse, le fluide se trouvant à l'extérieur de la couche limite engendre par le côté un afflux de l'écoulement qui se fait dans la direction horizontale. Ce type d'écoulement est similaire à celui qui serait observé en situation isotrope ($K^* = 1$). Les effets de l'orientation anisotrope de la perméabilité sur les champs d'écoulement et de température sont illustrés sur les figures 3.4*b* et 3.4*c* pour respectivement $\theta = 45^o$ et 90°. En général, l'intensité de l'écoulement convectif, comme l'indique la valeur de ψ_{max}, est plus accentuée lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée varie de la position horizontale ($\theta = 0^o$) à la position verticale ($\theta = 90^o$). L'orientation anisotrope θ a également une influence importante sur le champ d'écoulement. En effet, lorsque $\theta = 45^o$, la figure 3.4*b* indique que le fluide à l'extérieur de la couche limite s'écoule non seulement par le côté, comme le montre la figure 3.4*a* pour $\theta = 0^o$, mais également au voisinage du bas de la plaque, près du bord d'attaque. Cette tendance est plus prononcée lorsque l'angle d'orientation θ croît de 45° à 90°. Pour cette

situation, la perméabilité dans la direction verticale est maintenant beaucoup plus élevée que celle observée dans la direction horizontale ($K_2 \gg K_1$); il en résulte que l'écoulement se trouve essentiellement canalisé le long de la plaque.

La figure 3.5*a* illustre la distribution de la vitesse verticale u à mi-hauteur de la plaque isotherme, pour un milieu poreux ayant un rapport d'anisotropie en perméabilité $K^* = 0.25$ (c'est-à-dire, pour $K_2 > K_1$) et pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ, telle que prédit par la présente solution analytique. Les symboles en noir sur ce graphique sont des résultats de la simulation numérique, pour $R_{H'} = 2 \times 10^3$ et 4×10^3. Nous observons que ces derniers sont en bon accord avec la solution analytique représentée par des lignes pleines continues. Les courbes indiquent que la vitesse est maximale à la paroi, ce qui est en accord avec le fait que l'écoulement dans le milieu poreux a été modelisé suivant la loi de Darcy pour laquelle le fluide n'adhère pas aux parois solides. En général, la figure 3.5*a* indique que la grandeur de la vitesse verticale est considérablement affectée par l'angle d'orientation θ. En effet, comme prévu, la vitesse de l'écoulement le long de la paroi est maximale (minimale) pour $\theta = 90^o$ ($\theta = 0^o$), autrement dit, lorsque la perméabilité maximale (minimale) est orientée dans la direction de la gravité. Pour des valeurs intermédiaires de θ, la vitesse à la paroi a une grandeur située entre ces deux valeurs extrêmes, comme l'illustre la courbe correspondant à $\theta = 45^o$. Le fait que l'écoulement dans le milieu poreux anisotrope est maximal (minimal) lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) à la gravité, a été rapporté dans le passé par *Zhang* (1993) pour le cas de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire chauffée par les côtés. L'effet du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur la distribution de vitesse pour un milieu poreux ayant une orientation anisotrope $\theta = 45^o$ est représenté sur la figure 3.5*b*. Le cas où $K^* = 1$ correspond à un milieu poreux isotrope. Pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh $R_{H'}$, autrement dit, pour une valeur

fixée de K_1, une augmentation de K^* correspond à une diminution de K_2 et donc de l'intensité de l'écoulement convectif. Naturellement, l'effet inverse est observé lorsque la valeur de K^* est décroissante ($K^* < 1$).

Les figures 3.6*a* et 3.6*b* montrent l'effet du nombre de Rayleigh $R_{H'}$ sur le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$, à mi-hauteur de la plaque isotherme, pour différentes valeurs de θ et pour respectivement $K^* = 4$ et 0.25. Les résultats numériques indiquent que, lorsque $R_{H'}$ est assez grand, de manière à ce que l'écoulement le long de la plaque soit de type couche limite, le rapport $Nu_{x'}/[0.444(R_{x'}/a)^{1/2}]$ est égal à l'unité, en accord avec la prédiction de la solution analytique (équation (3.20)). La valeur de $R_{H'}$ nécessaire pour atteindre ce régime de couche limite est dépendante à la fois de K^* et de θ. Par exemple, lorsque $\theta = 0^o$, les figures 3.6*a* et 3.6*b* indiquent que le régime de couche limite est atteint à environ $R_{H'} \simeq 10^3$ pour $K^* = 4$ et à $R_{H'} \simeq 2 \times 10^2$ quand $K^* = 0.25$. Pour cet angle d'inclinaison, K_1 est orientée le long de la plaque et K_2 est orthogonale à cette dernière. En régime de couche limite, l'écoulement le long de la plaque verticale résulte de l'entraînement horizontal du fluide à l'infini. Il est donc prévisible que, lorsque la valeur de K^* est décroissante, autrement dit, lorsque la perméabilité dans la direction perpendiculaire à la plaque est croissante, l'écoulement dans la direction horizontale sera plus accentué, de sorte que le régime de couche limite peut être atteint à un nombre de Rayleigh relativement plus faible. Un argument similaire est valable lorsque $\theta = 90^o$, cas pour lequel la perméabilité K_2 est orientée ici le long de la plaque. Pour une valeur fixée de K_1, une décroissance de K^* entraîne une croissance de K_2 correspondant à la situation dans laquelle l'écoulement le long de la plaque devient plus intense de façon que le régime de couche limite apparaisse à une valeur de $R_{H'}$ relativement plus faible.

Sur la figure 3.7, le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ à mi-hauteur de la plaque,

est donné en fonction de θ et de K^* dans le cas où la paroi est chauffée isothermiquement (en lignes pleines continues) ou par un flux de chaleur uniforme (en traits interrompus courts). Les résultats numériques obtenus pour $R_{H'} = 3 \times 10^3$ et 5×10^3 sont visiblement en accord avec la solution analytique. Compte tenu de l'équation (3.21), il est observé que le paramètre $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ est fonction de $[-\Phi'(0)]a^{-1/2}$, où $[-\Phi'(0)]$ est une constante qui dépend du processus de chauffage et de $a = cos^2\theta + K^* sin^2\theta$, c'est-à-dire des propriétés anisotropes du milieu poreux, à savoir le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'inclinaison θ. Les cas particuliers $\theta = 0^o$ et 90°, pour lesquels les axes principaux de l'anisotropie sont alignés avec le champ gravitationnel, seront d'abord examinés. Lorsque $\theta = 0^o$ ($a = 1$), la figure 3.7 indique que le paramètre $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ est constant, indépendamment de la valeur du rapport des perméabilités K^*. Pour cette situation, le transfert de chaleur local en régime de couche limite dépend uniquement du nombre de Rayleigh $R_{x'}$ basé sur la perméabilité K_1 le long de la plaque, et n'est pas affecté par la grandeur de la perméabilité K_2 dans la direction orthogonale à celle-ci. Naturellement, comme illustré par la figure 3.6, le nombre de Rayleigh minimal nécessaire pour que l'écoulement le long de la plaque atteigne le régime de couche limite doit dépendre de K_2. Pour $\theta = 90^o$ ($a = K^*$), la perméabilité K_2 est dans ce cas alignée le long de la plaque tandis que la perméabilité K_1 est dans la direction orthogonale à cette dernière. Suivant la figure 3.7, le nombre de Nusselt local résultant dépend fortement du rapport d'anisotropie en perméabilité K^*. Cette tendance vient du fait que le nombre de Rayleigh local $R_{x'}$ qui est basé sur la perméabilité K_1 dirigée ici perpendiculairement à la plaque, n'est plus le paramètre approprié dans cette situation. En effet, compte tenu de l'équation (3.20), en utilisant le nombre de Rayleigh $R_{x'}/a = K_2 g\beta\Delta T' x'/\alpha\mu$, basé sur la perméabilité K_2 dirigé le long de la plaque, le nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ devient indépendant de K^*. Récemment, les effets de l'anisotropie sur la convection

naturelle en régime de couche limite sur une surface verticale imperméable ont été investigués par *Ene* (1991). Les équations gouvernantes de la couche limite ont été résolues par la méthode dite de relations intégrales pour le cas où les axes principaux de la perméabilité sont coïncidants avec les axes de coordonnées. Ce problème est cependant marginal puisque, comme nous venons de le souligner, en utilisant une normalisation appropriée, le transfert de chaleur par convection naturelle peut être directement déduit à partir de la solution en situation isotrope ($K^* = 1$). Pour une valeur arbitraire de l'angle d'orientation θ, la solution dépend grandement de K^*. Ce point est illustré par la figure 3.7 pour $\theta = 45^o$, cas pour lequel il est observé que, lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* est plus élevé, la valeur de $Nu_{z'}$ décroît. Ceci peut être encore expliqué par le fait que, pour un nombre de Rayleigh donné, (autrement dit, pour une valeur donnée de K_1), une augmentation en K^* correspond à une diminution en K_2 résultant d'une intensité plus faible de l'écoulement convectif et du taux de transfert de chaleur.

3.6 Conclusion

Nous venons d'étudier la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale semi-infinie, bordant un milieu poreux anisotrope où les axes principaux du tenseur de perméabilité sont non-coïncidants avec le vecteur gravitationnel. Dans le cadre des approximations en régime de couche limite, des solutions affines sont dérivées pour le cas où la plaque est chauffée isothermiquement ou par un flux de chaleur uniforme. Les principales caractéristiques de la solution analytique approchée ont été vérifiées par les résultats numériques donnés par la résolution des équations gouvernantes complètes pour la gamme de valeurs $10^1 \leq R_{H'} \leq 10^4$, $0.1 \leq K^* \leq 10$ et $0 \leq \theta \leq 90^o$. Il s'est dégagé de la présente analyse les conclusions suivantes:

1°) L'écoulement convectif le long d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope est considérablement affecté à la fois par le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'inclinaison θ des axes principaux.

2°) Lorsque l'angle d'inclinaison est tel que l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle à la plaque, l'intensité de l'écoulement convectif est maximale. Cette tendance apparaît pour $K^* < 1$ lorsque $\theta = 0°$ et pour $K^* > 1$ quand $\theta = 90°$. Dans cette situation, les hypothèses en régime de couche limite sont valides.

3°) Pour une valeur fixée de l'angle d'inclinaison θ, le transfert de chaleur est plus accentué que celui correspondant à la situation isotrope ($K^* = 1$), car le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* est supérieur à l'unité. Inversement, ce transfert de chaleur est plus réduit lorsque K^* est inférieur à l'unité.

Dans la poursuite de l'investigation qui vient d'être menée, nous aborderons dans les chapitres à venir, l'étude des écoulements thermoconvectifs confinés en milieu poreux anisotrope.

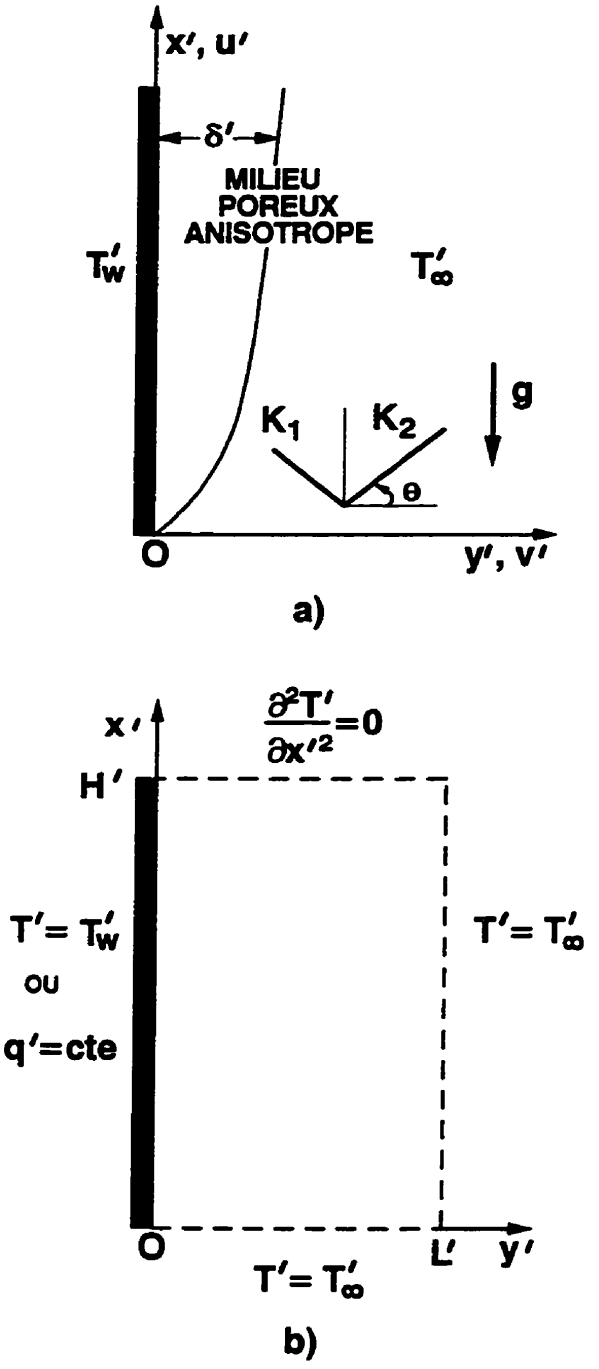


Figure 3.1: a) Modèle physique et système de coordonnées; b) domaine numérique.

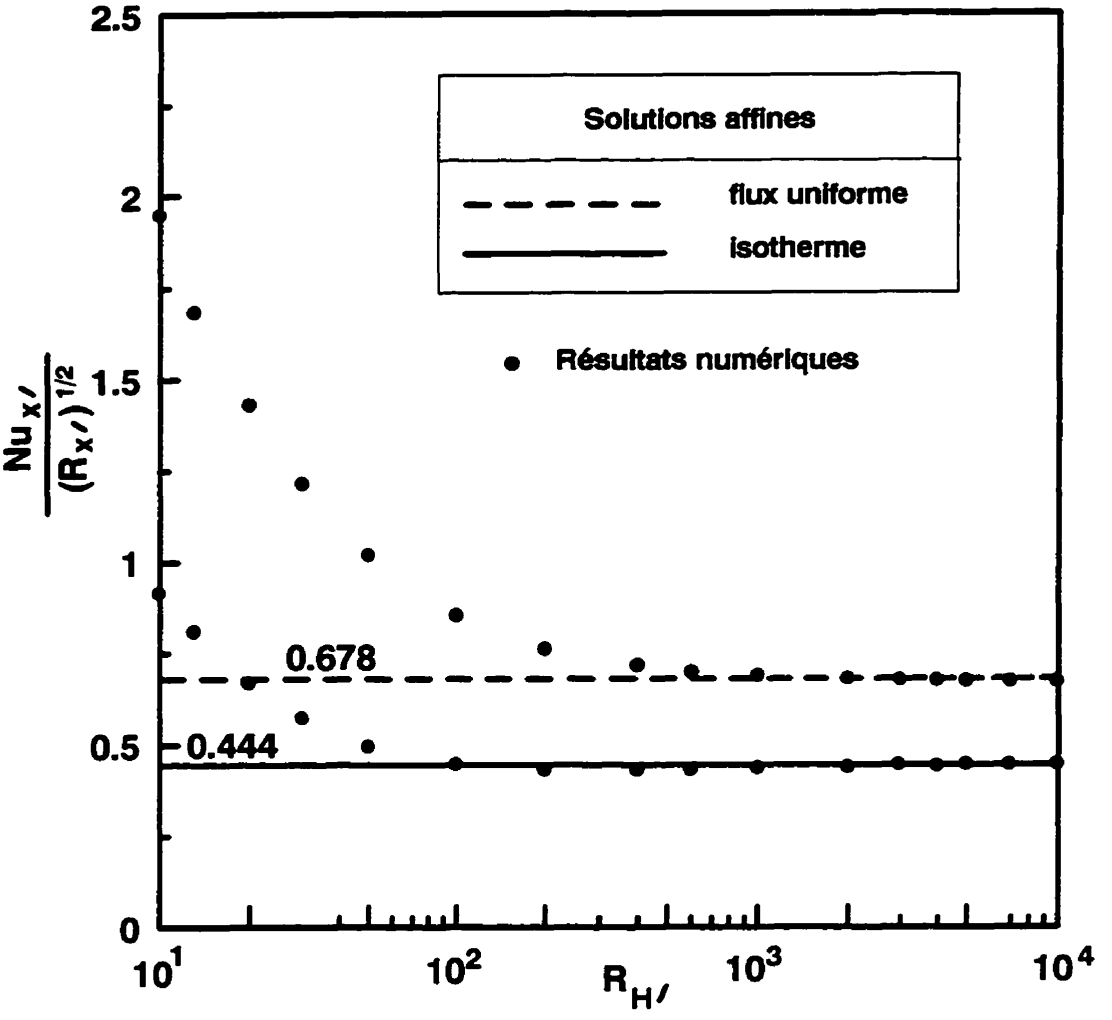


Figure 3.2: a) Variation de $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ à mi-hauteur de la plaque, en fonction de $R_{H'}$.

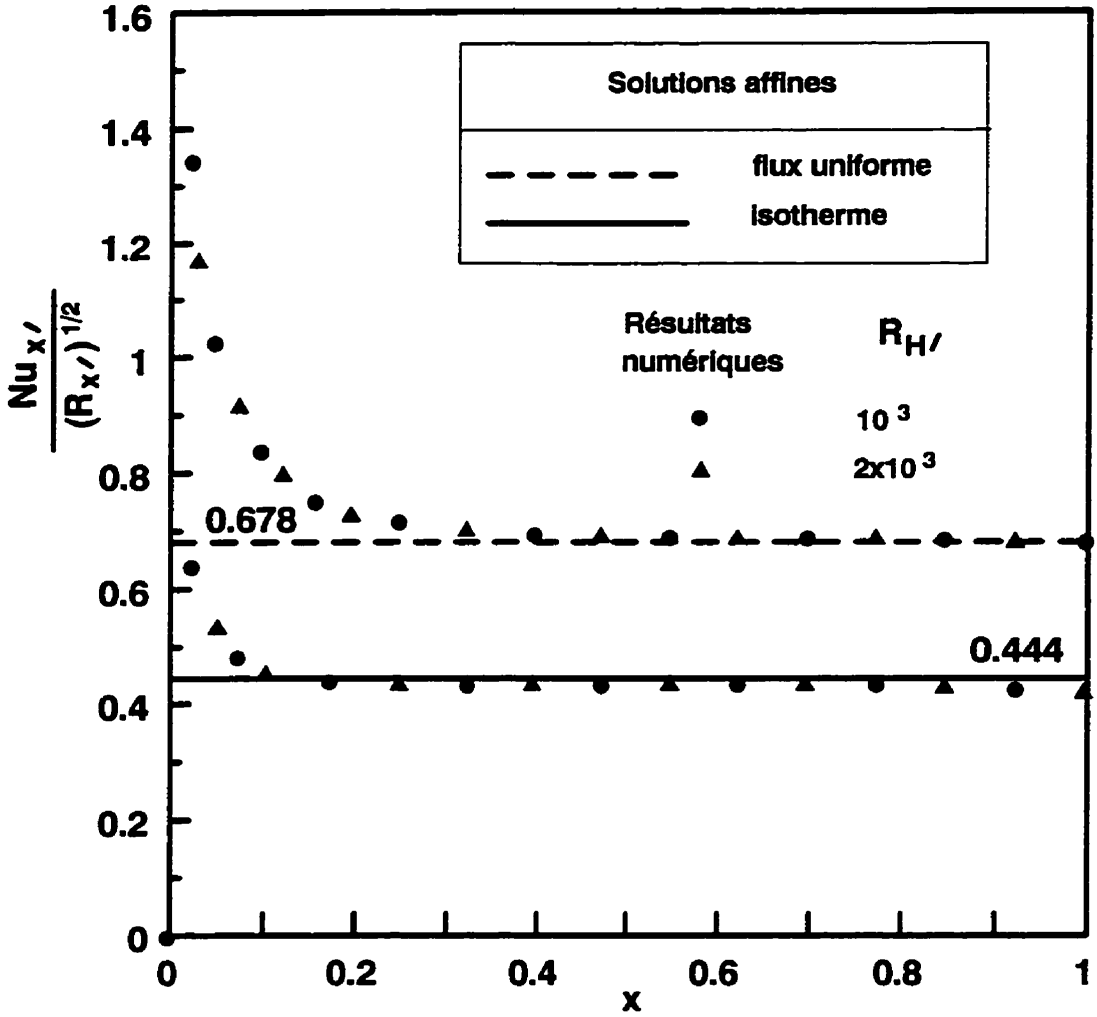


Figure 3.2: b) Variation de $Nu_{x'}/(R_{x'})^{1/2}$ en fonction de x.

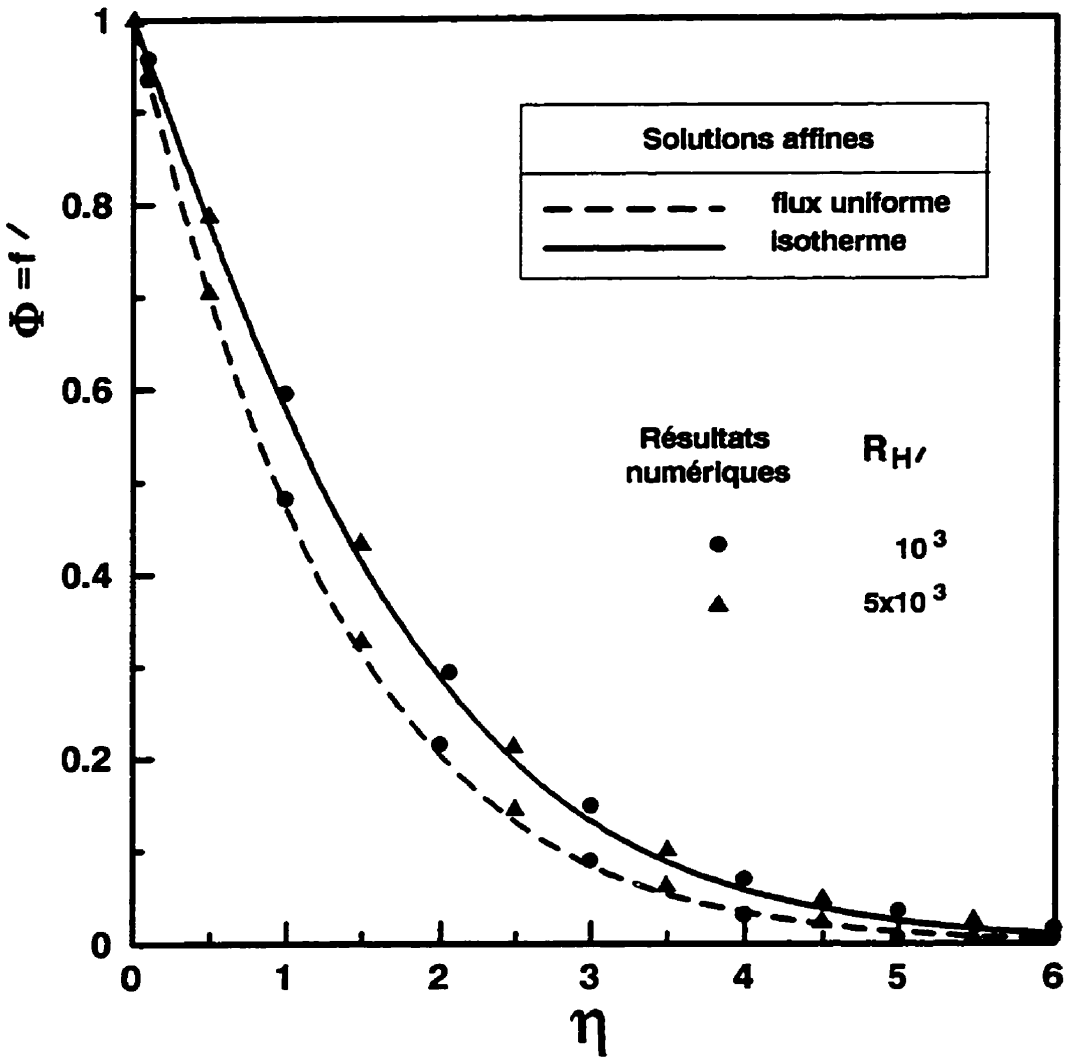


Figure 3.3: Température adimensionnelle Φ et vitesse verticale f' en fonction de la variable similaire η.

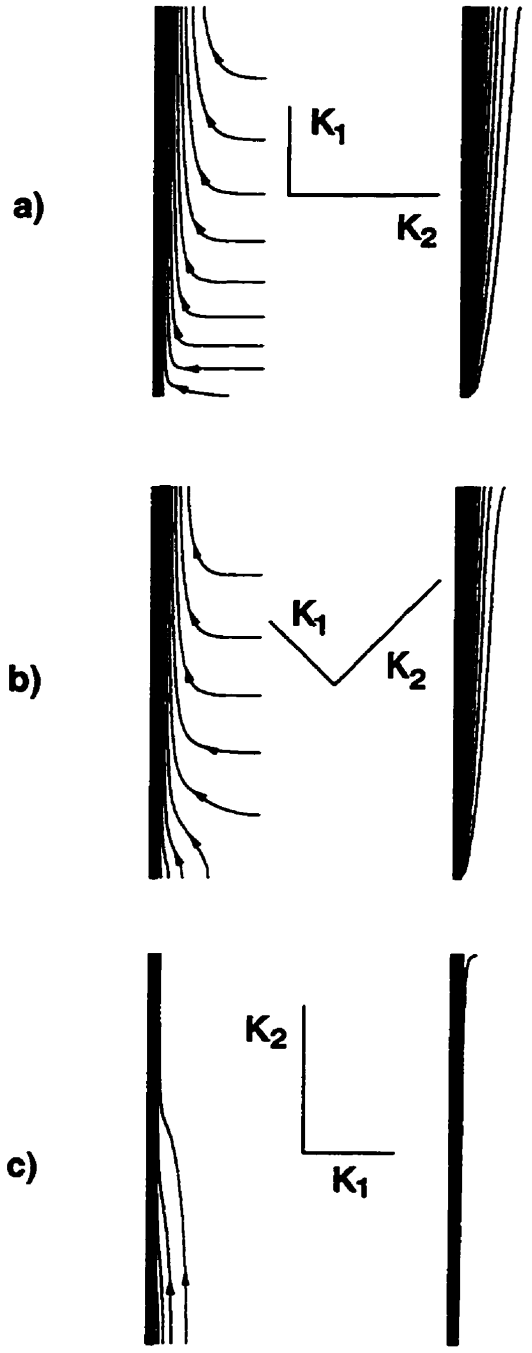


Figure 3.4: Solutions numériques pour les champs d'écoulement et de température correspondant au cas où la plaque adjacente à un milieu poreux anisotrope est isotherme, pour $R_{H'} = 10^3$, $K^* = 10^{-2}$, a) $\theta = 0^o$, $\psi_{max} = 50.515$; b) $\theta = 45^o$, $\psi_{max} = 67.864$; c) $\theta = 90^o$, $\psi_{max} = 526.96$.

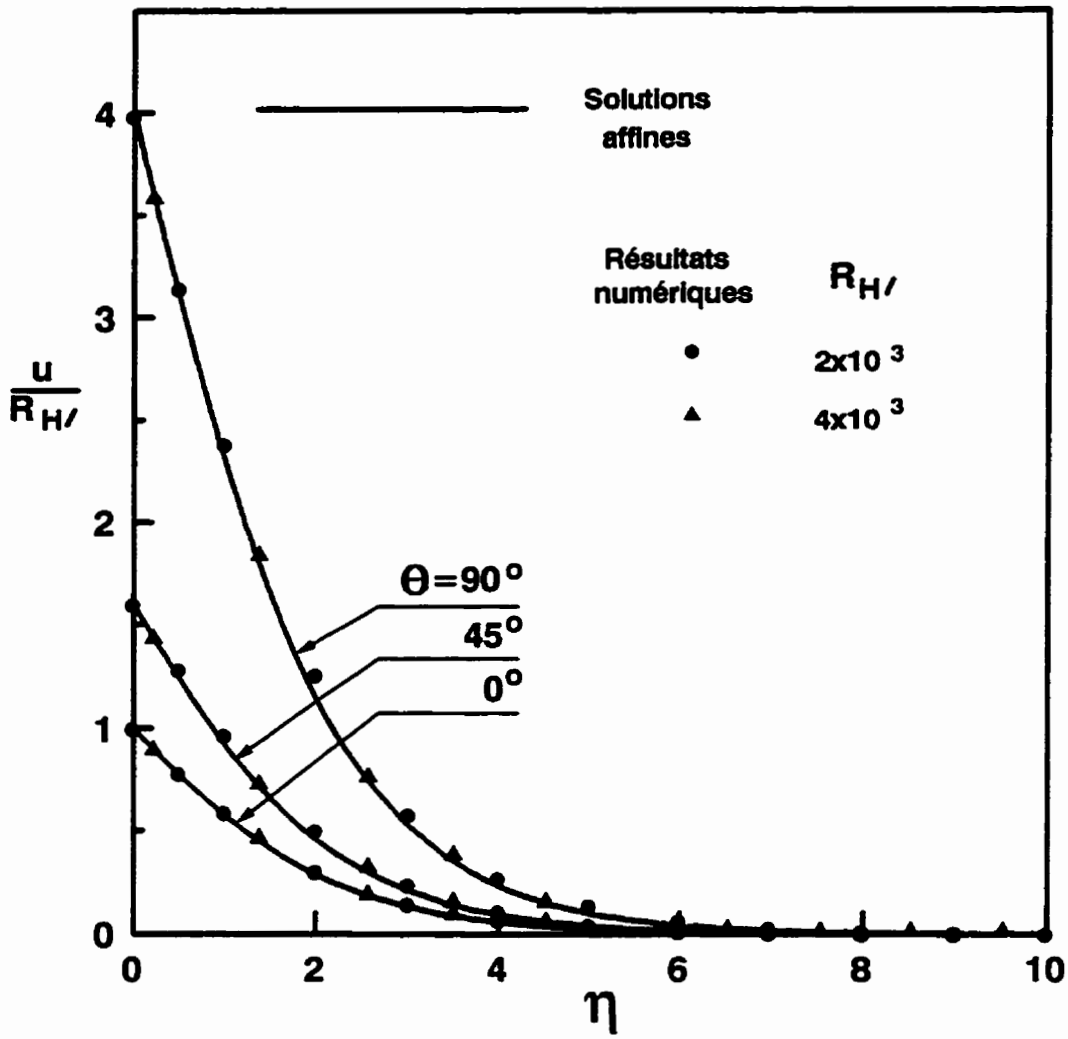


Figure 3.5: a) Vitesse verticale u à mi-hauteur de la plaque verticale isotherme, pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ.

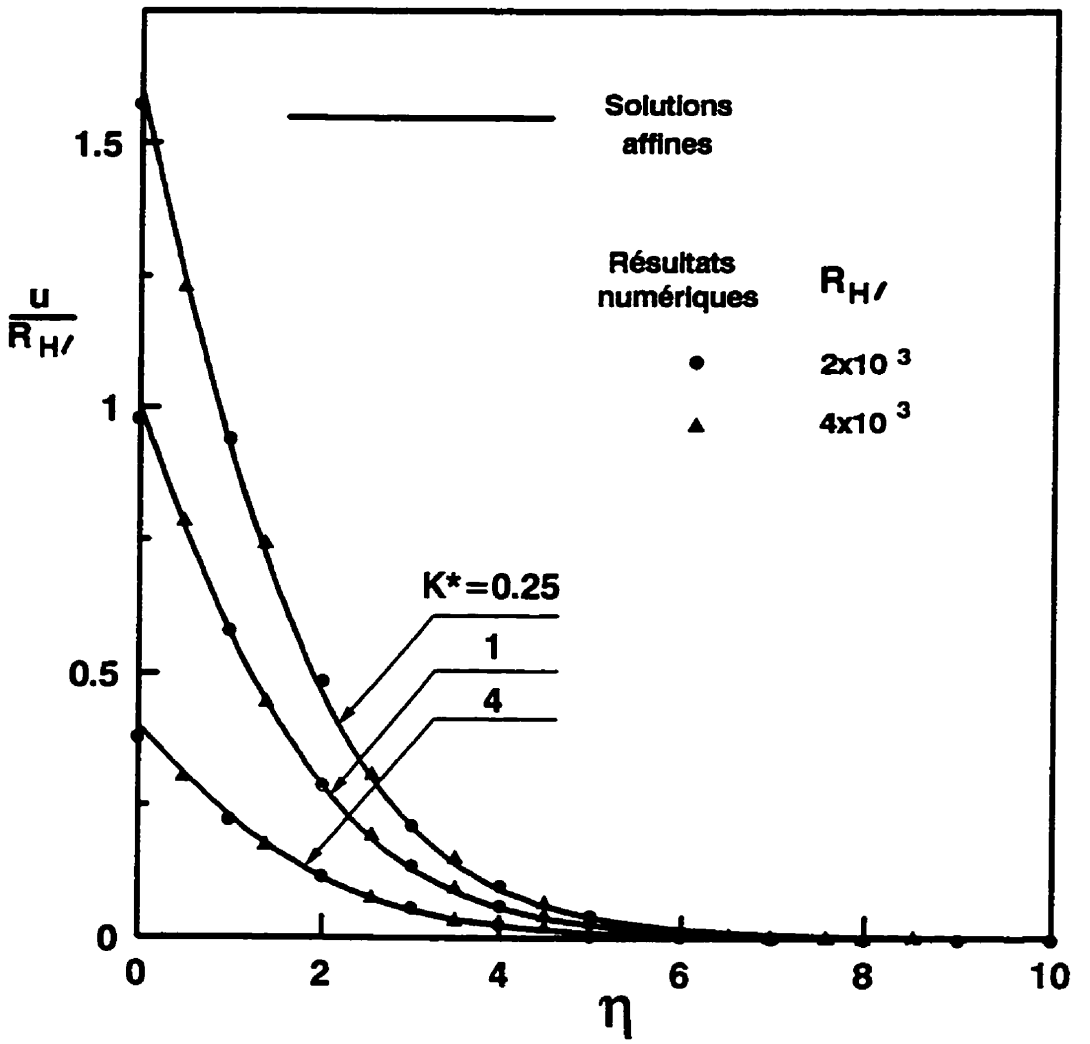


Figure 3.5: b) Vitesse verticale u à mi-hauteur de la plaque verticale isotherme, pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^*.

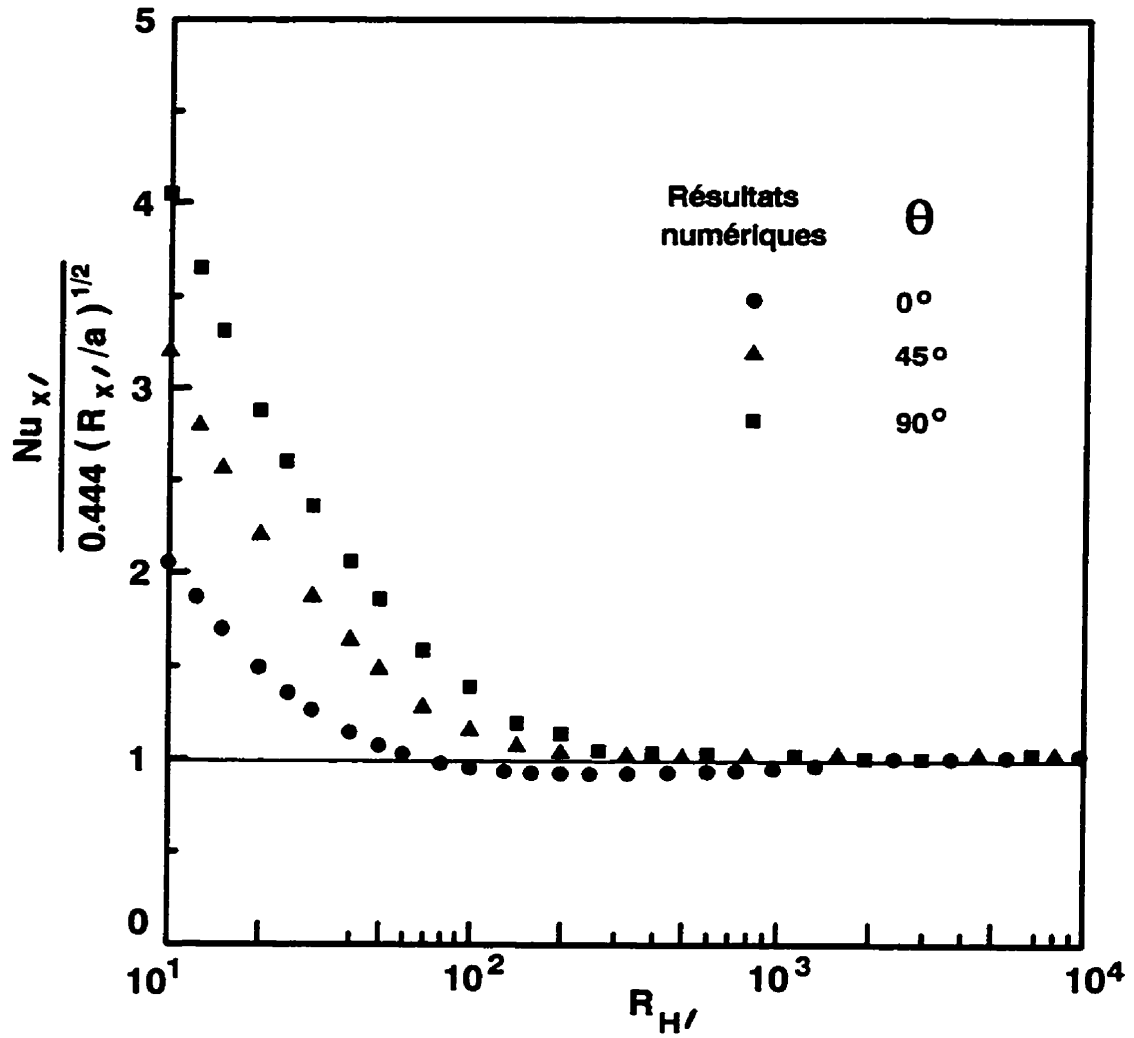


Figure 3.6: a) Variation du nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ à mi-hauteur de la plaque isotherme, en fonction de $R_{H'}$ pour $K^* = 4$.

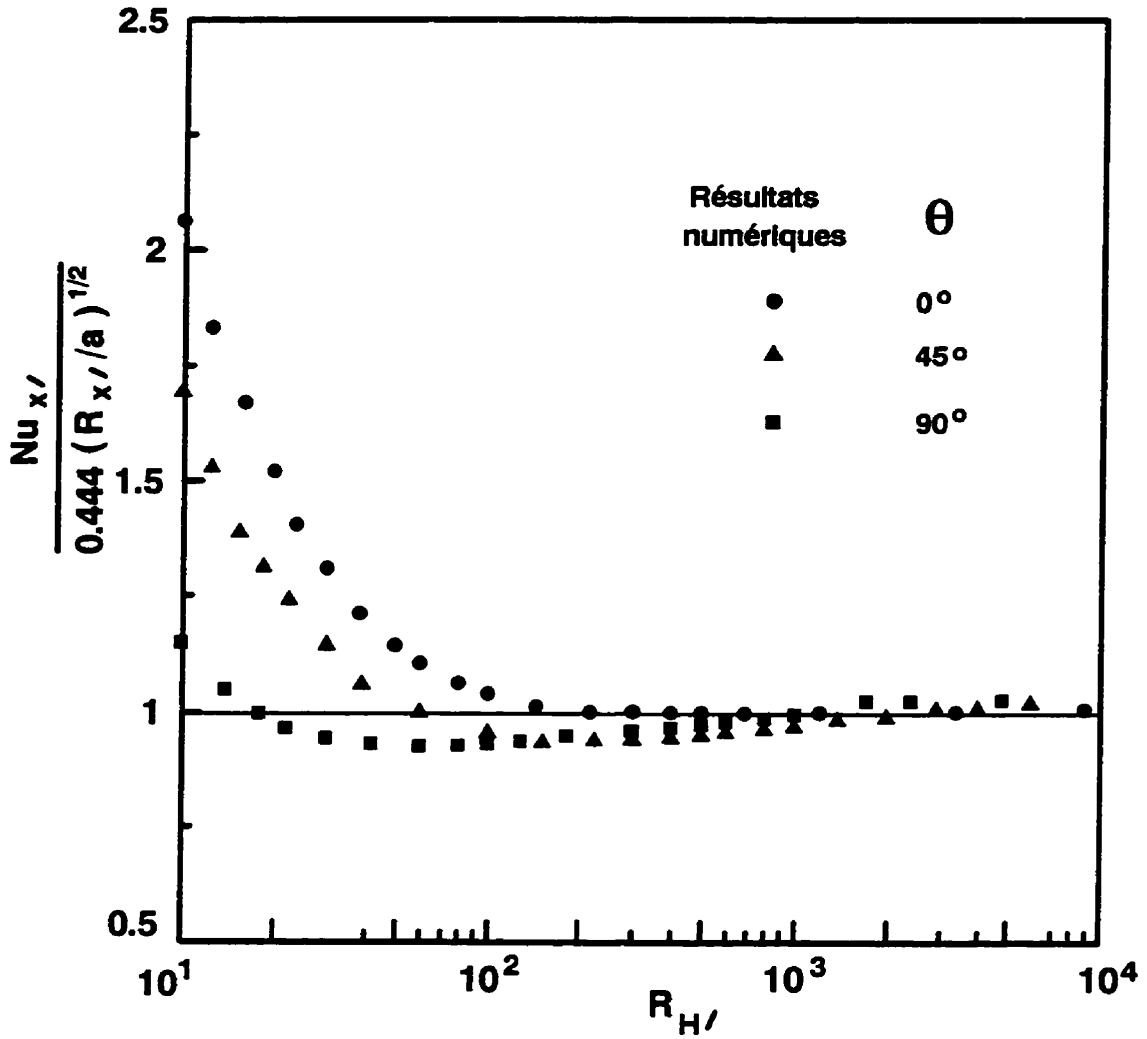


Figure 3.6: b) Variation du nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ à mi-hauteur de la plaque isotherme, en fonction de $R_{H'}$ pour $K^* = 0.25$.

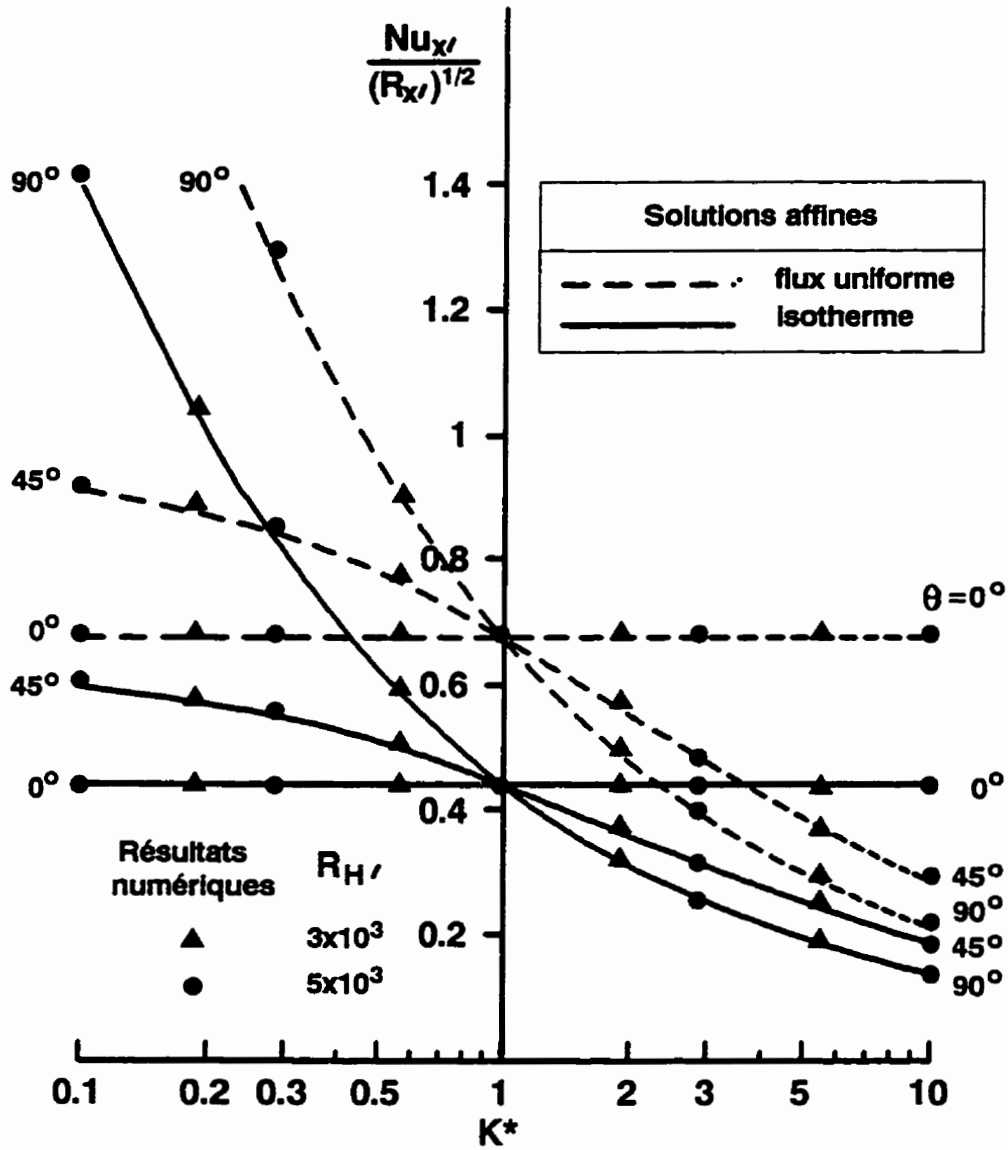


Figure 3.7: Variation du nombre de Nusselt local $Nu_{x'}$ à mi-hauteur de la plaque, en fonction de K^*, pour différentes valeurs de θ.

Chapitre 4

Convection naturelle dans une cavité poreuse: effets de l'anisotropie en perméabilité

4.1 Introduction

Le problème de la convection au sein d'une enceinte verticale poreuse, anisotrope et chauffée isothermiquement par les côtés, a été étudié numériquement par *Ni et Beckermann* (1991). En définissant respectivement le rapport d'anisotropie en perméabilité et le nombre de Rayleigh par les relations $\tilde{K} = K_y/K_x$ et $\tilde{R} = g\beta\Delta T' K_x L'/\alpha\mu$ (K_x et K_y étant les perméabilités notées respectivement dans les directions horizontale et verticale), ces auteurs ont démontré qu'un grand rapport d'anisotropie en perméabilité ($\tilde{K} > 1$) engendre une canalisation de l'écoulement le long des parois verticales isothermes, une intensité plus forte de l'écoulement dans la cavité et par conséquent une valeur plus élevée du nombre de Nusselt. Inversement, un faible rapport d'anisotropie en perméabilité ($\tilde{K} < 1$) est la cause d'une plus faible intensité de l'écoulement dans la cavité et par conséquent d'un plus faible taux de transfert de chaleur. Le même problème a été repris analytiquement par *Kimura et al.* (1993). Une méthode de perturbation pour de faibles nombres de Rayleigh a été utilisée pour résoudre, à l'aide des séries de Fourier, les équations gouvernantes. Dans le même ordre d'idées, il nous paraît important de rapporter les résultats de certains travaux de recherche concernant la convection

naturelle dans une cavité poreuse verticale, où la non-uniformité de la perméabilité a été considérée. *Burns et al.* (1977) ont étudié analytiquement le transfert de chaleur par convection naturelle dans une lame d'isolant poreux assimilée à une cavité verticale pour simuler les structures usuelles des bâtiments au regard des fuites par les parois. Après avoir obtenu un coefficient d'adaptation par comparaison avec les solutions numériques, ils ont donné une expression simple du taux de transfert thermique en fonction du nombre de Rayleigh et du rapport des perméabilités $\tilde{K}$. De plus, ils ont montré que pour des fuites de paroi appréciables, le mode dominant du transfert thermique est dû au changement d'enthalpie du fluide transféré lorsqu'il est soufflé à travers l'ouverture. *Poulikakos et Bejan* (1983) ont étudié numériquement l'effet de la non-uniformité de la perméabilité sur la convection naturelle dans un système poreux rectangulaire, chauffé par les côtés. Lorsque le système est composé de deux couches verticales, ceux-ci ont prouvé que le flux thermique de chaleur est sensiblement influencé par l'épaisseur et la perméabilité des couches périphériques adjacentes aux parois verticales chauffées. Les résultats du transfert de chaleur sont unifiés en utilisant le rapport de l'épaisseur de la sous-couche périphérique à l'épaisseur de la couche limite basée sur les propriétés de la sous-couche périphérique. Lorsque le système poreux est composé de sous-couches horizontales avec des perméabilités différentes, ces auteurs ont montré qu'à cause de l'absence d'homogénéité, les parois verticales du système sont bordées par des couches limites dont les épaisseurs varient d'une sous-couche à l'autre. *Lai et Kulacki* (1988) ont examiné numériquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire avec une interface perméable verticale entre deux sous-couches poreuses dont les perméabilités sont désignées respectivement par K_a et K_b. Il a été observé que, lorsque les propriétés thermiques sont uniformes, le nombre de Nusselt moyen obtenu pour le cas où $K_a/K_b < 1$ est toujours supérieur à celui correspondant à la situation où la couche est homogène, croît avec le nombre de

Rayleigh basé sur K_a et décroît avec le rapport des épaisseurs des sous-couches. Lorsque $K_a/K_b > 1$, le taux de transfert de chaleur est toujours inférieur à celui relatif au système homogène et augmente à la fois avec le nombre de Rayleigh et le rapport des épaisseurs des sous-couches.

Il importe de présiser que tous les travaux venant d'être passés en revue sont limités par l'hypothèse que les directions principales du tenseur d'anisotropie en perméabilité sont coïncidantes avec les axes de coordonnées, c'est-à-dire parallèles au champ gravitationnel. En général, le problème est plus complexe et il faut tenir compte de l'angle d'orientation arbitraire θ des directions principales de l'anisotropie en perméabilité. La seule étude exprimant cette réalité physique a été celle de *Zhang* (1993) qui a abordé numériquement ce problème. Cependant, les résultats obtenus par cet auteur sont très fragmentaires.

Dans ce chapitre, une étude analytique et numérique au problème sera proposée. La modelisation analytique de type couche limite sera basée sur une approche intégrale. Principalement, les effets des paramètres d'anisotropie en perméabilité sur l'écoulement et le transfert thermique seront analysés.

4.2 Description du problème physique et du modèle mathématique

4.2.1 Description du modèle physique

Le modèle physique est illustré à la figure 4.1. Une verticale cavité rectangulaire, de hauteur H' et de largeur L' confine un milieu poreux caractérisé par une anisotropie en perméabilité ayant une orientation générale θ. Les deux parois verticales sont respectivement chauffées et refroidies à des températures T'_h et T'_c,

tandis que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques.

4.2.2 Formulation mathématique du problème

Dans les conditions ci-dessus indiquées, les équations gouvernantes adimensionnées (2.20 et (2.21) sont applicables ici. En prenant la largeur L' de la cavité comme longueur caractéristique du modèle physique, le nombre de Rayleigh est alors défini par:

$$R = \frac{K_1 g \beta \Delta T' L'}{\alpha \nu} \tag{4.1}$$

où $\Delta T' = T'_h - T'_c$ est ici le facteur d'échelle de normalisation de la température.

Les conditions aux limites considérées ici sont les suivantes:

• Sur les parois horizontales ($x = 0,\ A$):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{– conditions hydrodynamiques :} & \psi = 0, \quad u = 0 & \\ \text{– conditions thermiques :} & \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0,\ A} = 0 & \text{(parois adiabatiques)} \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

• Sur les parois verticales ($y = 0,\ 1$):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{– conditions hydrodynamiques :} & \psi = 0, \quad v = 0 & \\ \text{– conditions thermiques :} & T = 0 \ \text{ à } \ y = 0 & \text{(paroi froide gauche)} \\ & T = 1 \ \text{ à } \ y = 1 & \text{(paroi chaude droite)} \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

où $A = H'/L'$ est le rapport de forme de la cavité.

A partir des équations gouvernantes (2.20) et (2.21) et les conditions aux limites (4.2) et (4.3), le présent problème est contrôlé par quatre paramètres adi-

mensionnels, à savoir, le nombre de Rayleigh R, le rapport d'anisotropie en perméabilité K^*, l'angle d'orientation des axes principaux θ et le rapport de forme A de la cavité.

Compte tenu de l'équation (2.28), le nombre de Nusselt moyen mesurant le transfert thermique total à travers la couche poreuse est évalué sur la paroi verticale droite et chaude par la relation:

$$Nu = \frac{\overline{h}L'}{k} = -\frac{1}{A}\int_0^A \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=1} dx \tag{4.4}$$

4.3 Solution numérique

La procédure de calcul itératif décrite au chapitre 2 a été utilisée pour conduire les présentes simulations numériques.

Pour choisir le maillage adéquat, il a été observé que la différence entre les nombres de Nusselt moyens obtenus pour de nombreux essais utilisant des maillages de 80×100 et de 100×120 respectivement dans les directions x and y est inférieure à 2% pour la plupart des cas considérés. Dans la présente étude, un maillage de 80×100 a été utilisé, ce qui confère le meilleur compromis entre la précision, la convergence et l'économie. En outre, pour contrôler la précision des résultats, un test d'équilibre de bilan d'énergie totale a été fait sur le système. Nous avons noté, à ce sujet, que la différence obtenue entre l'énergie reçue à la paroi chaude à $y = 1$ et l'énergie rejetée à la paroi froide à $y = 0$ est toujours inférieure à environ 1%.

Des résultats de la présente approche numérique sont obtenus pour le cas isotrope $K^* = 1$. Une comparaison de ceux-ci faite avec d'autres obtenus dans le

passé par *Shiralkar et al.* (1983) pour différents rapports de forme A et pour des valeurs variées du nombre de Rayleigh R est consignée dans le tableau 4.1. Cette comparaison révèle un écart de 0.5%, ce qui assure la validité du code numérique.

Les figures 4.2*a*-4.2*g* illustrent les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de l'angle d'orientation des axes principaux θ sur les lignes de courant (à gauche) et les isothermes (à droite) pour $A = 1$, c'est-à-dire, pour une cavité carrée.

L'évolution des champs d'écoulement et des isothermes avec K^* est illustrée sur les figures 4.2*a*-4.2*c* pour θ maintenu constant à 45°, $R = 400$ et pour respectivement $K^* = 0.01$, 1 et 100. Pour $K^* = 1$, le milieu poreux est isotrope et les champs d'écoulement et de température de la figure 4.2*b* sont similaires à ceux rapportés dans la littérature par *Shiralkar et al.* (1983) et *Bejan* (1985). Une cellule rotative tournant dans le sens anti-horaire remplit entièrement la cavité. La formation de couches limites hydrodynamiques et thermiques le long des parois verticales isothermes est observée. Nous remarquons que la variation de la température est grande au voisinage des parois tandis que la température dans la région centrale est pratiquement constante dans la direction horizontale mais varie linéairement dans la direction verticale. Dans la décroissance de K^* de 1 à 0.01, nous observons sur la figure 4.2*a* que la valeur de $|\psi_{max}|$ croît de 11.78 à 16.185, ce qui indique que la circulation de l'écoulement convectif dans la cavité est favorisée. De même, la figure 4.2*a* montre que, lorsque la valeur de K^* est réduite, les lignes de courant et les isothermes sont plus concentrées dans les coins supérieur gauche et inférieur droit, indiquant un écoulement fort et un transfert de chaleur accrû dans ces régions. Comme déjà mentionné dans l'étude précédente, ce fait peut être expliqué par le comportement des perméabilités extrêmes K_1 et K_2, pour des valeurs fixées de θ et de R (autrement dit, de K_1), lorsque K^* est inférieur à l'unité. Dans

ce cas, une décroissance en K^* correspond à une croissance en K_2, engendrant un écoulement convectif plus accentué. Naturellement, l'inverse est vrai lorsque K^* est supérieur à l'unité. Ainsi, la figure 4.2*c* montre que pour $K^* = 100$, l'intensité de la circulation est considérablement réduite ($|\psi_{max}| = 0.97$). La cellule convective résultante est alignée le long de la région diagonale centrale de la cavité, c'est-à-dire le long de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée. A cause de ce mouvement convectif relativement faible, les isothermes de la figure 4.2*c* sont presque verticales, ce qui indique que le transfert de chaleur résultant se fait pratiquement par conduction pure ($Nu \simeq 1.09$).

Les figures 4.2*d* et 4.2*e* illustrent l'influence de l'angle d'orientation de l'anisotropie θ pour $R = 1$, $K^* = 10^{-3}$ (c'est-à-dire $K_2 \gg K_1$) et pour respectivement $\theta = 0$ et 90°. A cause du faible nombre de Rayleigh considéré ici, le transfert de chaleur est presque celui de la conduction pure. Pour $\theta = 0^o$, les lignes de courant de la figure 4.2*d* indiquent que, à cause de la perméabilité relativement élevée (faible) dans la direction horizontale (verticale), le fluide s'écoule parallèlement aux parois verticales, avec une épaisseur approximativement égale à la largeur médiane de la cavité, tandis qu'il est fortement canalisé le long des parois horizontales. Ce type de configuration de l'écoulement est identique à celui rapporté et discuté dans le passé par *Ni et Beckermann* (1991). Naturellement, pour $\theta = 90^o$, la figure 4.2*e* montre que la situation est inversée. Dans ce cas, l'écoulement est canalisé le long des parois verticales thermiquement actives alors qu'il s'étend parallèlement aux frontières horizontales adiabatiques. En outre, nous pouvons facilement démontrer à partir des équations gouvernantes (2.20) et (2.21) que la solution, dans le cas où $\theta = 0^o$ (90°), $K^* \ll 1$ ($\gg 1$) et R est fixé, est équivalente à celle que nous obtiendrions pour la situation où $\theta = 90^o$ (0°), $K^* = 1/K^*$ et $R = R/K^*$. Donc, par exemple, les résultats numériques illustrés par les figures 4.2*e* et 4.2*d* sont semblables à ceux qui auraient été obtenus pour $R = 10^3$, $K^* = 10^3$, et pour

respectivement $\theta = 0^o$ et 90°. Un autre exemple montrant les effets de l'angle d'inclinaison θ sur les modèles d'écoulement et d'isothermes est illustré par les figures 4.2f et 4.2g pour $R = 10^4$, $K^* = 10^2$ et pour respectivement $\theta = 0^o$ et 90°. Pour $\theta = 0^o$, l'écoulement induit par la poussée le long des parois verticales isothermes est très intense et la figure 4.2f laisse voir la formation de très minces couches limites hydrodynamiques près de la partie médiane supérieure (inférieure) de la paroi froide (chaude). L'écoulement s'étend alors à travers la partie médiane supérieure (inférieure) de la cavité et les isothermes résultantes se sont concentrées le long de la diagonale se situant entre les coins supérieur gauche et inférieur droit de la cavité. Comme l'angle d'inclinaison est égal à 90° ($\theta = 90^o$), la figure 4.2g montre que les modèles de lignes de courant et d'isothermes sont tous deux considérablement modifiés. L'intensité de la circulation de l'écoulement dans la cavité est affaiblie puisque la perméabilité dans la direction verticale est maintenant beaucoup plus petite que celle dans la direction horizontale. Il en est de même pour le transfert de chaleur résultant comme l'illustrent bien les champs d'isothermes de la figure 4.2g.

4.4 Solution analytique en régime de couche limite

Nous considérons dans cette section le régime de couche limite ($R \to \infty$) pour lequel la plupart du mouvement du fluide est restreint à une mince couche d'épaisseur δ' le long de chaque paroi verticale. En désignant par H' et δ' les échelles caractéristiques des variables x' et y' dans la couche limite ($\delta' \ll H'$), les équations de conservation (2.20), (2.21) et (2.2) requièrent les relations suivantes:

$$\frac{a\,u}{\delta} \sim R\,\frac{1}{\delta} \tag{4.1}$$

$$u\,\frac{1}{A} \sim \frac{1}{\delta^2} \tag{4.2}$$

$$\frac{u}{A} \sim \frac{v}{\delta} \tag{4.3}$$

Nous notons, à partir des conditions thermiques (équations (4.2) et (4.3)), que la variation de la température à travers la couche limite est de l'ordre de l'unité.

En résolvant les équations (4.5) à (4.7), nous obtenons pour u, v et δ les résultats suivants:

$$\delta \sim A^{1/2}\, a^{1/2}\, R^{-1/2} \tag{4.4}$$

$$u \sim a^{-1}\, R \tag{4.5}$$

$$v \sim A^{-1/2}\, a^{-1/2}\, R^{1/2} \tag{4.6}$$

L'ordre de grandeur obtenu pour la fonction de courant est le suivant:

$$\psi \sim A^{1/2}\, a^{-1/2}\, R^{1/2} \tag{4.7}$$

Le nombre de Nusselt moyen Nu a comme ordre de grandeur:

$$Nu \sim \frac{q'}{q'_c} = \frac{kH'\Delta T'/\delta'}{kH'\Delta T'/L'} \sim A^{-1/2}\, a^{-1/2}\, R^{1/2} \tag{4.8}$$

où $q'_c = kH'\Delta T'/L'$ est la chaleur par conduction pure à travers la couche poreuse.

Pour le cas spécial d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire $a = 1$), les ordres de grandeur précédents se réduisent pour donner ceux prédits par *Bejan* (1985) lorsque celui-ci a étudié le régime de couche limite dans une verticale cavité poreuse isotrope, chauffée isothermiquement par les côtés.

Les conditions de validité de la présente analyse du régime de couche limite seront maintenant discutées. Les résultats prédisant les ordres de grandeur des paramètres d'intérêt ne sont supposés valides que lorsque la couche limite verticale est très mince ($\delta' \ll H'$), autrement dit, pour $R \gg a\ A^{-1}$. De même, les couches limites verticales doivent être distinctes ($\delta' \ll L'$), ce qui requiert la condition $R \gg a\ A$. De plus, au regard des relations d'ordre de grandeur développées dans cette section, les conditions de validité du régime de couche limite (2.25) et (2.26) deviennent:

$$c \ll a^{1/2}\, A^{1/2}\, R^{1/2} \tag{4.9}$$

et

$$b \ll A\, R \tag{4.10}$$

En conséquence, nous pouvons à cette étape de l'étude déduire, à partir des résultats de l'analyse d'échelle, les approximations en régime de couche limite des équations gouvernantes. En utilisant les variables suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{x} = \dfrac{x}{A} & \overline{y} = \dfrac{y\,L'}{\Lambda} & \overline{\psi} = \psi\dfrac{\Lambda}{H'} \\[2ex] \overline{u} = \dfrac{u\,\Lambda^2}{L'H'} & \overline{v} = \dfrac{v\,\Lambda}{L'} & \overline{T} = T \\[2ex] & \Lambda^2 = \dfrac{L'\,H'\,a}{R} & \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

les formes approchées des équations (2.20) et (2.21) sont exprimées comme suit:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} \tag{4.12}$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} = \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \tag{4.13}$$

Selon *Gill* (1966), la centro-symétrie du problème physique étudié conduit à considérer une seule couche limite le long des parois verticales, ce qui entraîne l'introduction en régime de couche limite des variables suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{T}_\infty(\overline{x}) + \vartheta(\overline{x},\overline{y}) \\ \overline{\psi} &= \overline{\psi}_\infty(\overline{x}) + \varsigma(\overline{x},\overline{y}) \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

où ϑ et ς, désignant respectivement la température et la fonction de courant au voisinage de la paroi verticale, sont tels que ϑ et $\varsigma \rightarrow 0$ lorsque $\overline{y} \rightarrow \infty$.

Les conditions aux limites résultantes sont données par:

$$\overline{y} = 0: \qquad \overline{\psi} = 0, \qquad \overline{T} = 0 \tag{4.15}$$

$$\overline{y} \rightarrow \infty: \qquad \overline{\psi} = \overline{\psi}_\infty(\overline{x}), \qquad \overline{T} = \overline{T}_\infty(\overline{x}) \tag{4.16}$$

Dans les équations ci-dessus, $\overline{\psi}_\infty(\overline{x})$ et $\overline{T}_\infty(\overline{x})$ désignent respectivement la fonction de courant et la distribution de la température dans la région centrale de la cavité, c'est-à-dire, à l'extérieur de la couche limite.

Les équations adimensionnelles non linéaires (4.16) et (4.17) avec les conditions aux limites (4.19) et (4.20) sont exactement celles qui ont été résolues dans le passé par bon nombre d'auteurs dont *Weber* (1975), *Bejan* (1979), *Simpkins et Blythe* (1980) etc... en situation isotrope ($K^* = 1$). La méthode de solution qui sera suivie ici est la méthode intégrale développée par *Simpkins et Blythe* (1980) en raison de la précision des résultats obtenus par ces derniers.

L'intégration par rapport à $\overline{y}$ des équations (4.16) et (4.17) en utilisant les conditions aux limites (4.19) donne respectivement:

$$\overline{u} = \overline{T} - \overline{T}_\infty \tag{4.17}$$

et

$$\frac{d}{d\overline{x}} \int_0^\infty \overline{u}(\overline{T} - \overline{T}_\infty) d\overline{y} - \frac{d\overline{T}_\infty}{d\overline{x}} \overline{\psi}_\infty = -\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \tag{4.18}$$

De même, il résulte de l'intégration de la relation $\overline{u} = \partial\overline{\psi}/\partial\overline{y}$, en tenant compte de l'équation (4.21), l'expression suivante:

$$\overline{\psi}_\infty = -\int_0^\infty (\overline{T} - \overline{T}_\infty) d\overline{y} \tag{4.19}$$

En multipliant par $\overline{u}$ l'équation (4.16) et en intégrant le résultat obtenu par rapport à $\overline{y}$, nous trouvons, après dérivation première par rapport à $\overline{x}$ des deux membres, l'équation suivante:

$$\frac{d}{d\overline{x}} \int_0^\infty (\overline{u})^2 d\overline{y} = \frac{d}{d\overline{x}} \int_0^\infty \overline{u}(\overline{T} - \overline{T}_\infty) d\overline{y} \tag{4.20}$$

Par conséquent, l'équation (4.22) devient:

$$\frac{d}{d\overline{x}} \int_0^\infty (\overline{u})^2 d\overline{y} = \overline{\psi}_\infty \frac{d\overline{T}_\infty}{d\overline{x}} - \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \tag{4.21}$$

Les relations intégrales (4.23) et (4.25) peuvent être satisfaites par des solutions affines de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{T}_\infty(\overline{x})\, g(\eta) \\ \eta &= \frac{\overline{y}}{\overline{\delta}(\overline{x})} \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

où $\overline{\delta}(\overline{x})$ est l'épaisseur de la couche limite et $g(\eta)$ est un profil de vitesse; seules les solutions de la forme (4.26) satisfont les conditions aux limites (4.20).

Tenant compte des relations (4.26), l'équation (4.21) s'écrit:

$$\overline{u} = -\overline{T}_\infty(\overline{x})\, f(\eta) \tag{4.23}$$

où $f(\eta) = 1 - g(\eta)$ est un profil de vitesse.

De même, en se référant à ce qui précède, l'équation (4.23) devient:

$$\overline{\psi}_\infty = \overline{T}_\infty(\overline{x})\, \overline{\delta}(\overline{x}) \int_0^\infty f(\eta) d\eta \tag{4.24}$$

En normalisant $f(\eta)$ de sorte que $\int_0^\infty f(\eta) d\eta = 1$, l'équation précédente (4.28) devient:

$$\overline{\psi}_\infty = \overline{T}_\infty(\overline{x})\, \overline{\delta}(\overline{x}) \tag{4.25}$$

Il résulte de la normalisation précédente qu'en introduisant les expressions de $(\overline{u})^2$ et de $(\partial\overline{u}/\partial\overline{y})_{\overline{y}=0}$ en fonction de f dans l'équation (4.25), nous obtenons:

$$\alpha \frac{d}{d\overline{x}} \left(\overline{T}_\infty\, \overline{\psi}_\infty\right) = \overline{\psi}_\infty \frac{d\overline{T}_\infty}{d\overline{x}} - \beta \frac{\overline{T}_\infty^2}{\overline{\psi}_\infty} \tag{4.26}$$

avec

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty f^2(\eta)d\eta}{\int_0^\infty f(\eta)d\eta} \qquad \text{et} \qquad \beta = -f'(0)\int_0^\infty f(\eta)d\eta \tag{4.27}$$

L'équation (4.30) est une relation simple entre les inconnues $\overline{\psi}_\infty$ et $\overline{T}_\infty$ qui caractérisent la structure de l'écoulement convectif dans la région centrale de la cavité.

Une seconde relation est obtenue à partir de la solution de la couche limite sur la paroi chaude, mais il est convenable ici d'utiliser les propriétés centro-symétriques du problème qui se résument à:

$$\left.\begin{aligned} \overline{T}_\infty(\overline{x}) &= 1 - \overline{T}_\infty(1-\overline{x}) \\ \overline{\psi}_\infty(\overline{x}) &= \overline{\psi}_\infty(1-\overline{x}) \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

L'expression (4.30) donne, en prenant en compte les équations (4.32), après manipulations algébriques, l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d\overline{\psi}_\infty}{\overline{\psi}_\infty} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\,\frac{2\overline{T}_\infty - 1}{\overline{T}_\infty(1-\overline{T}_\infty)}\,d\overline{T}_\infty \tag{4.29}$$

L'intégration par variables séparées des deux membres de l'équation (4.33) conduit à la solution:

$$\overline{\psi}_\infty = C\left[\overline{T}_\infty(1-\overline{T}_\infty)\right]^{(1-\alpha)/\alpha} \tag{4.30}$$

où C est une constante d'intégration à déterminer.

L'expression (4.34) montre que, si $\overline{\psi}_\infty$ s'annule aux parois horizontales, soit $\overline{T} = 0$, soit $\overline{T} = 1$ à $\overline{x} = 0$, 1. Donc, pour que $d\overline{T}_\infty/d\overline{x} > 0$, il est nécessaire que:

$$\overline{T}_\infty(0) \;=\; 0 \qquad\qquad \overline{T}_\infty(1) \;=\; 0 \tag{4.31}$$

La dérivée première de $\overline{\psi}_\infty$ par rapport à $\overline{x}$ obtenue à partir de l'équation (4.34) donne:

$$\frac{d\overline{\psi}_\infty}{d\overline{x}} \;=\; \frac{\alpha-1}{\alpha}\, C\,(1-2\overline{T}_\infty)\,\frac{d\overline{T}_\infty}{d\overline{x}}\,\left[\overline{T}_\infty(1-\overline{T}_\infty)\right]^{(1-2\alpha)/\alpha} \tag{4.32}$$

Il est assez facile de déduire, à ce niveau, à partir des équations (4.30) et (4.36) l'équation différentielle suivante:

$$d\overline{x} \;=\; \frac{1-\alpha}{\beta}\, C^2\,\left[\overline{T}_\infty(1-\overline{T}_\infty)\right]^{(2-3\alpha)/\alpha} \tag{4.33}$$

L'intégration des deux membres de l'équation (4.37) conduit au résultat suivant:

$$\overline{x} \;=\; \frac{(1-\alpha)\,C^2}{\beta}\int_0^\infty [\varsigma(1-\varsigma)]^{(2-3\alpha)/\alpha}\; d\varsigma \tag{4.34}$$

En normalisant $\overline{x}$ par rapport à la fonction beta suivante:

$$\int_0^1 [\varsigma(1-\varsigma)]^{(2-3\alpha)/\alpha}\; d\varsigma \;=\; B\left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\;,\; 2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right] \tag{4.35}$$

nous obtenons:

$$\overline{x} \;=\; \frac{\displaystyle\int_0^{\overline{T}_\infty} [\varsigma(1-\varsigma)]^{(2-3\alpha)/\alpha}\; d\varsigma}{\displaystyle\int_0^1 [\varsigma(1-\varsigma)]^{(2-3\alpha)/\alpha}\; d\varsigma} \;=\; I_{\overline{T}_\infty}\left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\;,\; 2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right] \tag{4.36}$$

où $I_x(p,q)$ désigne la fonction beta incomplète normalisée par rapport à $B(p,q)$.

En identifiant les expressions (4.38) et (4.40) de $\overline{x}$, il vient:

$$C = \left\{(1-\alpha)\,\beta^{-1}\,B\left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ ,\ 2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right]\right\}^{-1/2} \tag{4.37}$$

Par ailleurs, le nombre de Nusselt moyen Nu, en tenant compte de l'approximation (4.12), s'écrit:

$$Nu = \frac{R^{1/2}}{a^{1/2}\,A^{1/2}}\int_0^1\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} d\overline{x} \tag{4.38}$$

et, en considérant les développements algébriques précédents, il vient:

$$Nu = \frac{R^{1/2}}{a^{1/2}\,A^{1/2}}\,\overline{B} \tag{4.39}$$

où:

$$\overline{B} = \frac{(1-\alpha)^{1/2}\,\beta^{1/2}\,B\left[\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\ ,\ \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right]}{B^{1/2}\left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ ,\ 2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right]} \tag{4.40}$$

La théorie consistante en elle-même pour la structure de la région centrale de la cavité requiert la détermination à cette étape des paramètres α et β dont dépend la solution de la présente analyse. Une fois le profil de vitesse $f(\eta)$ dans la couche limite spécifié, ces paramètres seront calculés à l'aide des expressions (4.31). Ce profil de vitesse, au regard des spécifications imposées sur la vitesse aux frontières, doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1, & f''(0) &= 0 \\ f(\infty),\ f'(\infty),\ f''(\infty) &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & & 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Des profils polynômiaux de vitesse avec des conditions asymptotiques imposées à une valeur finie de η sont souvent utilisés dans les calculs conventionnels de couche limite. Aussi est-il important que la décroissance asymptotique de ces profils ait la forme adéquate près des frontières. C'est pour ces raisons que, parmi les différents profils de vitesse proposés par *Simpkins et Blythe* (1980), nous avons choisi pour cette étude le profil de vitesse défini par:

$$\left.\begin{aligned} f(\eta) &= 1 - \frac{9}{14}\eta + \frac{1}{14}\eta^2, & 0 \leq \eta \leq 1 \\ &= \frac{3}{7}\ \exp[-(\eta - 1)], & \eta > 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

qui satisfait les conditions aux limites (4.45) précitées. Par conséquent, des expressions (4.31), nous obtenons $\alpha \approx 0.538$ et $\beta \approx 0.723$. Aussi, à l'aide des tables des valeurs de la fonction gamma, les calculs numériques ont conduit aux résultats suivants:

$$\overline{B} \approx 0.51 \qquad \text{et} \qquad C \approx 2.41 \tag{4.43}$$

Alors, les expressions (4.34) et (4.40) deviennent:

$$\overline{\psi}_\infty = 2.41\ \left[\overline{T}_\infty(1 - \overline{T}_\infty)\right]^{0.859} \tag{4.44}$$

$$\overline{x} = 2.17\,\overline{T}_\infty{}^{1.717}\,[1 - 0.453\,\overline{T}_\infty - 0.468\,\overline{T}_\infty{}^2 - 1.580\times10^{-2}\,\overline{T}_\infty{}^3 - 7.44\times10^{-3}\,\overline{T}_\infty{}^4 ....] \tag{4.45}$$

L'équation (4.29) permet de déduire, en tenant compte de l'équation (4.48), l'expression suivante de l'épaisseur de la couche limite:

$$\overline{\delta}(\overline{x}) = 2.41\,\overline{T}_\infty{}^{-1}\,\left[\overline{T}_\infty(1-\overline{T}_\infty)\right]^{0.859} \tag{4.46}$$

En retournant aux résultats de l'analyse d'échelle faite dans ce chapitre, nous avons implicitement, en guise de comparaison avec les résultats des simulations numériques, la solution analytique approchée ci-après:

$$\psi_\infty = 2.41\,\left(\frac{A\,R^*\,\sqrt{K^*}}{a}\right)^{1/2}\,[T_\infty(1-T_\infty)]^{0.859} \tag{4.47}$$

$$x = 2.17\,A\,T_\infty^{1.717}\,[1 - 0.453\,T_\infty - 0.468\,T_\infty^2 - 1.580\times10^{-2}\,T_\infty^3 - 7.44\times10^{-3}\,T_\infty^4 ....] \tag{4.48}$$

de sorte que, au centre de la cavité ($x = A/2, y = 1/2$), la valeur de la fonction de courant est donnée par:

$$\psi_C = \left(\overline{\psi}_\infty\right)_{max}\,\left(\frac{A\,R^*\,\sqrt{K^*}}{a}\right)^{1/2} \tag{4.49}$$

avec $\left(\overline{\psi}_\infty\right)_{max} = \overline{\psi}_\infty(1/2) = C\,(4)^{-(1/a-1)} \approx 0.734$, ce qui permet d'écrire:

$$\psi_C = 0.734\,\left(\frac{A\,R^*\,\sqrt{K^*}}{a}\right)^{1/2} \tag{4.50}$$

Le nombre de Nusselt moyen est finalement donné par la relation:

$$Nu = 0.51 \left(\frac{R^* \sqrt{K^*}}{a\ A} \right)^{1/2} \tag{4.51}$$

Dans les équations présentées ci-dessus, R^* est un nombre de Rayleigh modifié et défini par:

$$R^* = \frac{g\beta \Delta T' L' \sqrt{K_1\ K_2}}{\alpha \nu} = \frac{R}{\sqrt{K^*}} \tag{4.52}$$

Comme l'ont discuté *Aboubi et al.* (1995), le nombre de Rayleigh modifié R^* est plus approprié pour décrire le présent phénomène, puisque les perméabilités extrêmes K_1 et K_2 font maintenant partie intégrante des effets normalement associés à tout changement en nombre de Rayleigh.

Dans la section suivante, la solution analytique approchée qui vient d'être développée sera comparée avec les résultats numériques de la résolution des équations gouvernantes complètes.

4.5 Résultats et discussion

Dans le but d'étudier les effets de l'anisotropie sur le transfert de chaleur par convection naturelle, des simulations numériques ont été faites pour une gamme de valeurs prises par le nombre de Rayleigh allant de $R^* = 10^2$ à 10^4, pour un intervalle de valeurs du rapport de forme de la cavité allant de $A = 4$ à 10, pour des valeurs de l'angle d'orientation θ variant de 0° à 180° et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité se situant entre $K^* = 10^{-3}$ et 10^3.

Les figures 4.3*a* et 4.3*b* illustrent respectivement les distributions de la tempé-

rature et de la fonction de courant dans la région centrale, pour un milieu poreux ayant une orientation anisotrope $\theta = 45^o$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^*, conformément à la prédiction faite par l'analyse précédente du régime de couche limite. Les symboles en noir sur ces graphiques sont des résultats de la simulation numérique pour différentes valeurs de A, de R^* et de K^*, résultats qui s'accordent bien avec la solution analytique représentée par des lignes pleines continues. La distribution de la température dans la région centrale $T_\infty(x)$ est présentée sur la figure 4.3*a* et, comme nous devrions nous y attendre, la solution laisse voir les propriétés centro-symétriques. Nous notons que la distribution de la température est assimilable à une ligne droite dans la partie centrale de la couche poreuse et que les gradients thermiques, aux parois horizontales, ne sont pas nuls, contrairement aux conditions aux limites (4.2) et (4.3) imposées. Ce comportement vient du fait que, à cause des approximations faites dans l'analyse, seule la fonction de courant peut satisfaire exactement les conditions aux frontières ($\psi = 0$) imposées aux parois horizontales. Par conséquent, la température T est respectivement égale à 0 et à 1 aux frontières supérieure et inférieure et les conditions thermiques aux limites $\partial T/\partial x = 0$, équation (4.2), ne sont pas satisfaites. Pour le cas d'un milieu poreux isotrope, une discussion détaillée sur la portée de cette approximation sur la solution a été faite par *Bejan* (1979). En effet, celui-ci a démontré que la condition de flux nul appliqué aux parois horizontales ne justifie pas l'argumentation basée sur l'imperméabilité et l'adiabaticité de ces dernières, faite par *Weber* (1975). Selon *Bejan* (1979), cette condition de flux nul est plutôt un artifice qui a permis par défaut de tenir compte simultanément des propriétés d'imperméabilité et d'adiabaticité de ces parois.

L'effet du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur la distribution de la fonction de courant dans la région centrale ψ_∞ est illustré sur la figure 4.3*b*. La valeur de ψ_∞ croît de façon monotone de zéro, aux parois horizontales, à la

valeur maximale ψ_C, au centre de la cavité. La dépendance de ψ_C vis-à-vis de R^*, de K^* et de θ sera discutée au paragraphe suivant. En général, la figure 4.3*b* indique que l'intensité de la circulation du mouvement convectif unicellulaire est réduite pour $K^* > 1$ et accentuée pour $K^* < 1$, lorsqu'elle est comparée avec celle correspondant à un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$). Cette tendance est qualitativement en accord avec les résultats numériques présentés sur les figures 4.2*a* à 4.2*c*.

La figure 4.4 montre les effets du nombre de Rayleigh R^* et du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur le nombre de Nusselt moyen Nu pour $\theta = 45^o$. La solution en régime de couche limite, équation (4.55), est représentée par des lignes pleines continues. Les symboles représentent les résultats de la présente solution numérique obtenus pour des valeurs données de A, de R^* et de K^*. Aussi, quelques-unes des valeurs numériques rapportées par *Shiralkar et al.* (1983), pour le cas d'un milieu poreux isotrope, sont indiquées sur le graphique. Le fait que les courbes pour $K^* = 0.1$ et 10 sont identiques est une conséquence de la présente normalisation et n'est vérifiée que lorsque $\theta = 45^o$, comme nous le discuterons plus loin. Il est à souligner qu'en régime de couche limite, le transfert de chaleur est proportionnel à $R^{*1/2}$, indépendamment des valeurs de K^* et de θ.

Sur les figures 4.5*a* et 4.5*b* le taux moyen de transfert de chaleur Nu et la fonction de courant ψ_C au centre de la cavité sont donnés en fonction de K^* et de θ. En accord avec les équations (4.54) et (4.55), nous observons que les paramètres $\psi_C/(A\ R^*)^{1/2}$ et $Nu\ A^{1/2}/(R^*)^{1/2}$ dépendent uniquement de $(K^{*1/2}/a)^{1/2}$, où $a = cos^2\theta + K^* sin^2\theta$, c'est-à-dire des propriétés anisotropes du milieu poreux, à savoir le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ. En outre, en fonction du nombre de Rayleigh modifié R^* donné par l'équation (4.56), nous pouvons facilement déduire que si $\psi(x,y)$ et $T(x,y)$ sont solutions

pour (R^*, A, θ, K^*), alors elles le sont également pour (R^*, A, $\pi/2-\theta$, $1/K^*$). Ce point est illustré par les figures 4.5*a* et 4.5*b* sur lesquelles la symétrie obtenue par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$ est aussi une conséquence de l'échelle logarithmique adoptée pour K^*. Pour le cas particulier où $\theta = 45^o$, θ est égal à $\pi/2-\theta$ et les courbes correspondantes sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$ de sorte que les résultats, pour une valeur donnée de K^*, sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$. Cependant, lorsque θ est différent de 45°, la symétrie pour un ensemble donné de propriétés anisotropes θ et K^* est réalisée pour $\pi/2-\theta$ et $1/K^*$.

Le nombre de Nusselt moyen Nu et la fonction de courant ψ_C au centre de la cavité sont présentés respectivement sur les figures 4.6*a* et 4.6*b* en fonction de K^* et de R^* pour $\theta = 45^o$. Pour des raisons avancées antérieurement, les courbes sont symétriques par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$. Aussi, à partir des équations gouvernantes, nous pouvons déduire que, pour une valeur donnée de R^*, la solution pour $\theta = 45^o$ et pour une valeur particulière de K^* correspond à celle que nous obtiendrions pour $\theta = -45^o$ et pour $1/K^*$. L'accord entre les résultats numériques et la solution analytique est meilleur dans le cas du nombre de Nusselt qui est une valeur moyenne que celui de la fonction du courant qui est une valeur locale. C'est là, une conséquence de la méthode intégrale utilisée dans la modelisation analytique.

Le taux moyen de transfert de chaleur Nu et la fonction de courant au centre de la cavité ψ_C sont présentés sur les figures 4.7*a* et 4.7*b* en fonction de θ, pour $R^* = 100$, 500 et 1500 et pour respectivement K^* égal à 4 et à 0.25. Les résultats indiquent que Nu et ψ_C dépendent fortement tous deux de l'angle d'orientation θ du milieu poreux. Pour $K^* = 0.25$, le transfert de chaleur par convection naturelle est maximal à $\theta = 90^o$, autrement dit, lorsque la perméabilité dans la direction

verticale est maximale, mais est minimal à $\theta = 0^o$ et 180°, c'est-à-dire lorsque la perméabilité dans la direction verticale est minimale. L'effet inverse est observé pour $K^* = 4$, cas pour lequel l'intensité du mouvement convectif unicellulaire et le transfert de chaleur résultant sont minimaux à $\theta = 90^o$ et maximaux à $\theta = 0^o$ et 180°. Le fait que pour $K^* > 1$ ($K^* < 1$) Nu est maximal (minimal) à $\theta = 0^o$ et 180° et minimal (maximal) à $\theta = 90^o$ peut être aisément déduit des dérivées première et seconde de Nu par rapport à θ (équation (4.55)). Des résultats similaires ont été rapportés dans le passé par *Zhang* (1993) lorsque cet auteur a étudié la convection naturelle dans une cavité rectangulaire latéralement chauffée. Dans toutes ces études, il est observé qu'un maximum (un minimum) de transfert de chaleur par convection naturelle est obtenu lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux anisotrope ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel.

4.6 Conclusion

La convection naturelle dans une cavité rectangulaire confinée par un milieu poreux anisotrope et chauffée isothermiquement par les côtés a été examinée. En régime de couche limite, une modelisation analytique est proposée, cette dernière étant valide pour un milieu poreux anisotrope en perméabilité, ayant ses axes principaux orientés arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Le nombre de Nusselt moyen a été prédit comme étant une fonction du nombre de Rayleigh, du rapport d'anisotropie en perméabilité et de l'angle d'orientation anisotrope des axes principaux. Pour le cas spécial d'un milieu isotrope, les résultats sont en excellent accord avec ceux disponibles dans la littérature. Une étude numérique du même phénomène est menée en résolvant le système complet des équations gouvernantes. Trois rapports de forme de la cavité, à savoir $A = 4$, 8 et 10 sont choisis

pour vérifier les prédictions du modèle analytique proposé. Un bon accord entre la solution en régime de couche limite et les résultats des simulations numériques est obtenu pour une large gamme des paramètres de contrôle considérés dans la présente étude.

Il a été retenu que le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'inclinaison θ des axes principaux ont tous deux une grande influence sur la structure de l'écoulement et sur le taux moyen de transfert de chaleur par convection naturelle. En particulier, nous avons démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et minimal lorsque cette orientation est perpendiculaire à ce dernier. Donc, la meilleure isolation thermique possible est obtenue lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible est parallèle au champ gravitationnel. Pour une orientation fixée θ, la solution pour un ensemble donné de paramètres de contrôle R^*, A et K^* est équivalente à celle correspondant aux paramètres R^*, A, $\pi/2-\theta$ et $1/K^*$. Finalement, pour le cas particulier où $\theta = 45°$, les solutions pour de valeurs fixées de R^* et de A sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$, de sorte que les résultats pour une valeur de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$.

En vue de compléter la présente analyse, nous étudierons dans le chapitre suivant le même problème physique en considérant une couche poreuse anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique. Les effets de l'anisotropie en conductivité thermique y seront principalement mis en évidence.

Tableau 4.1: Comparaison du nombre de Nusselt Nu pour différentes valeurs du rapport de forme A de la cavité et du nombre de Rayleigh R en situation isotrope ($K^* = 1$).

A	R	Présente étude	Shiralkar et al. (1983)
1	100	3.117	3.115
	1000	13.585	13.534
	1200	15.010	15.035
5	100	2.078	2.086
	500	4.989	4.910
10	100	1.557	1.567
	250	2.442	2.435

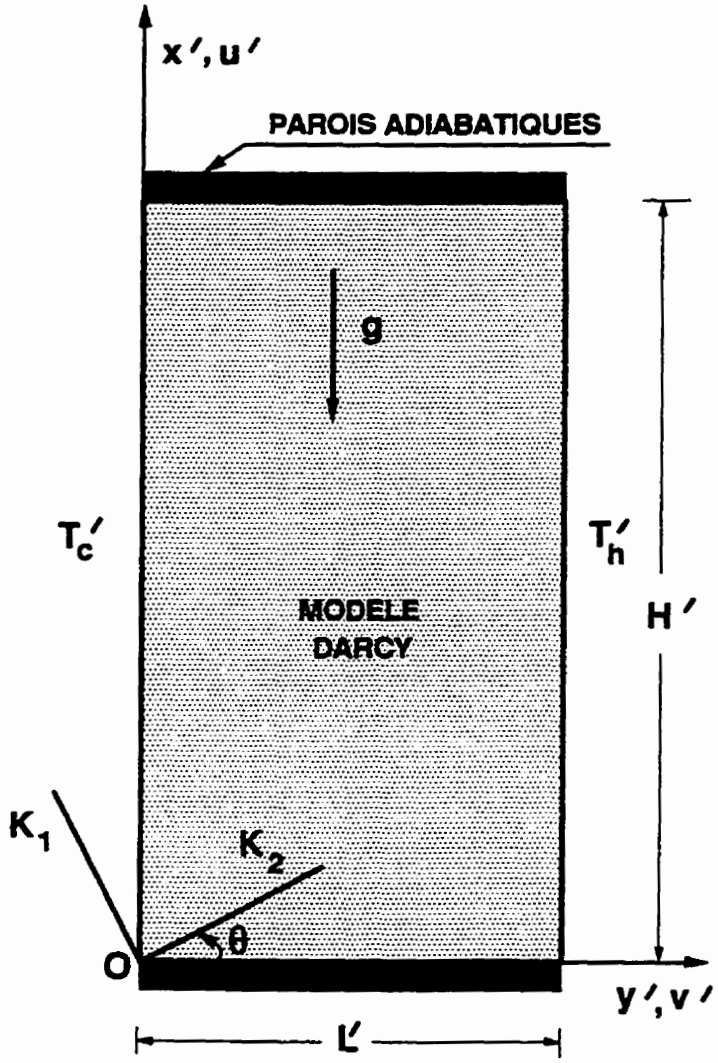


Figure 4.1: Modèle physique et système de coordonnées.

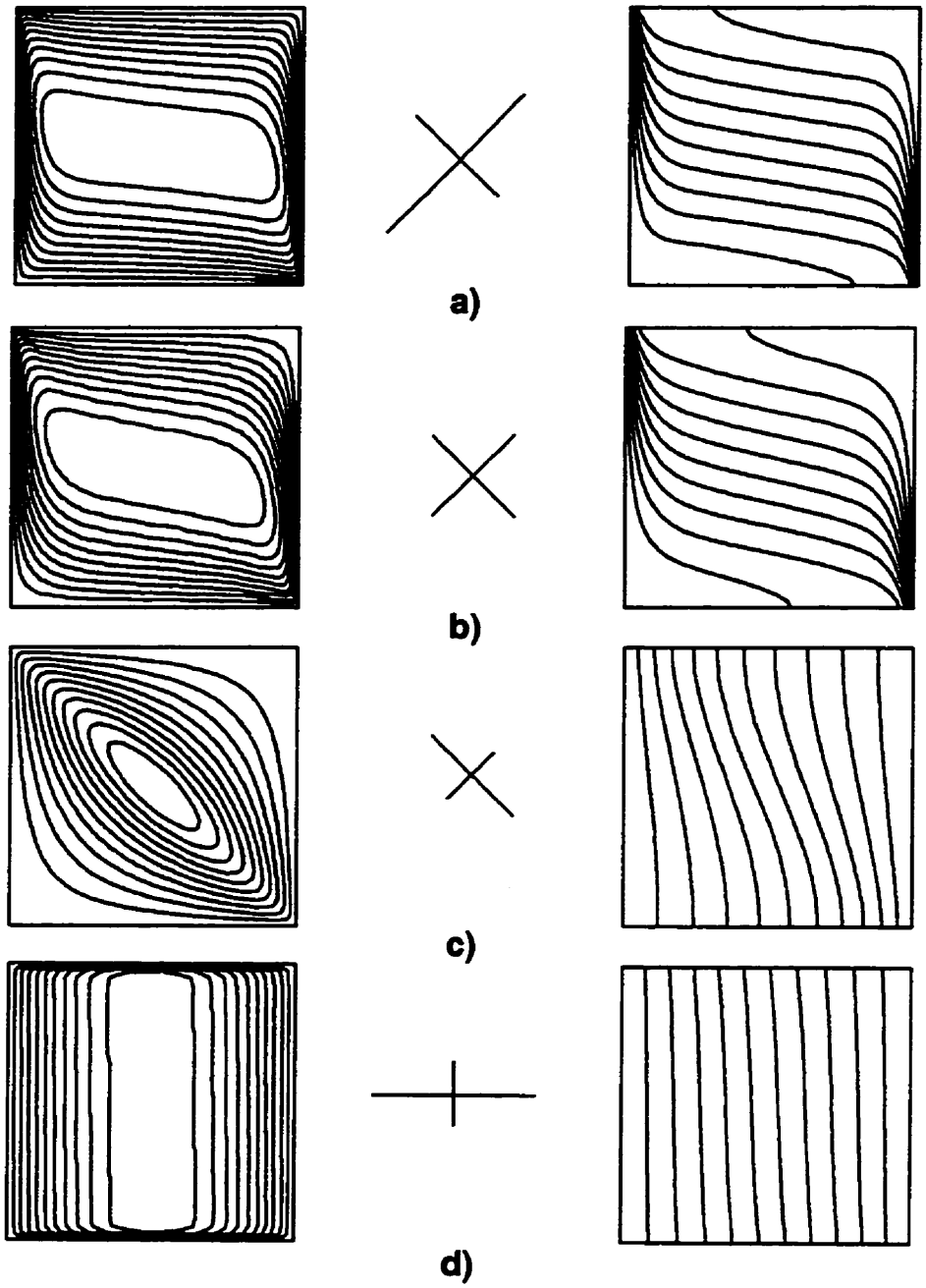


Figure 4.2: Lignes de courant et isothermes pour a) $R = 400$, $\theta = 45^o$, $K^* = 10^{-2}$, $|\psi_{max}| = 16.185$, $Nu = 11.313$; b) $R = 400$, $\theta = 45^o$, $K^* = 1$, $|\psi_{max}| = 11.779$, $Nu = 7.859$; c) $R = 400$, $\theta = 45^o$, $K^* = 10^2$, $|\psi_{max}| = 0.968$, $Nu = 1.090$; d) $R = 1$, $\theta = 0^o$, $K^* = 10^{-3}$, $|\psi_{max}| = 0.125$, $Nu = 1.003$.

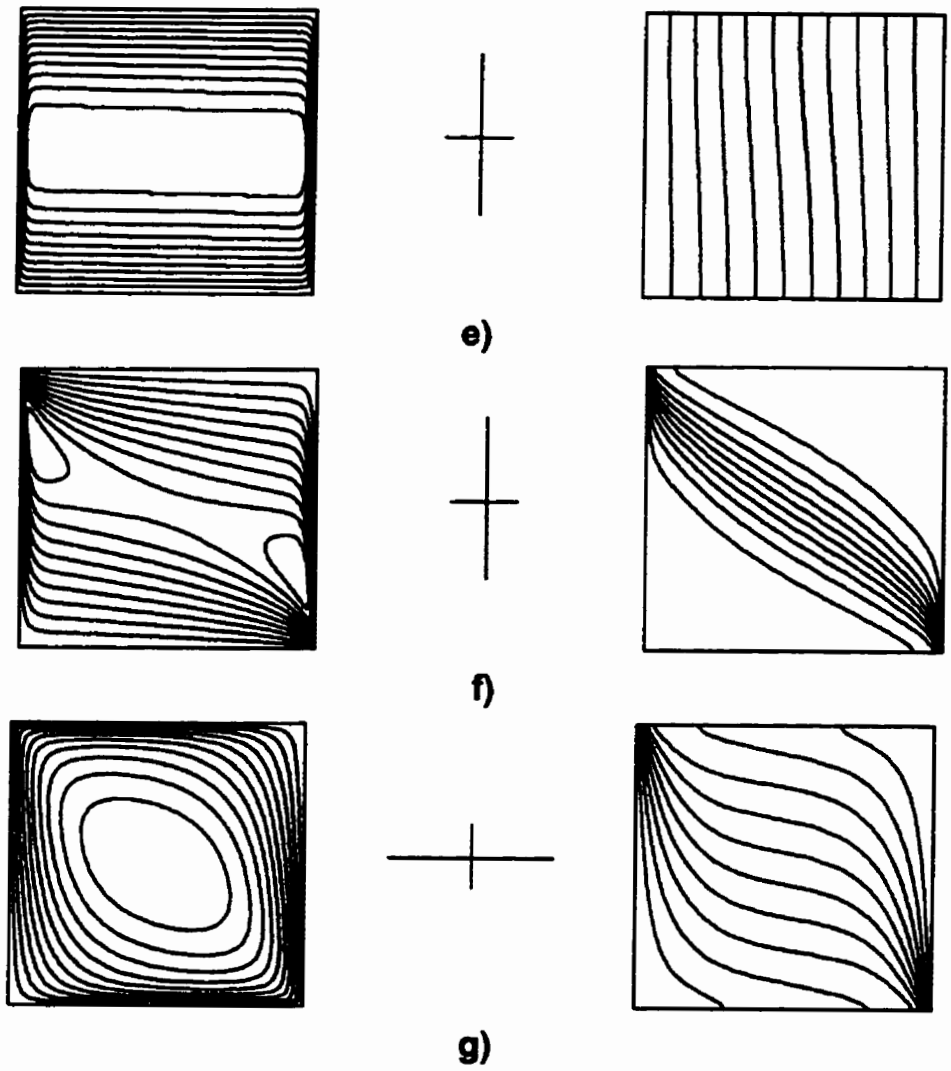


Figure 4.2: Lignes de courant et isothermes pour e) $R = 1$, $\theta = 90^o$, $K^* = 10^{-3}$, $|\psi_{max}| = 0.125$, $Nu = 1.003$; f) $R = 10^4$, $\theta = 0^o$, $K^* = 10^2$, $|\psi_{max}| = 13.75$, $Nu = 9.967$; g) $R = 10^4$, $\theta = 90^o$, $K^* = 10^2$, $|\psi_{max}| = 6.893$, $Nu = 4.341$.

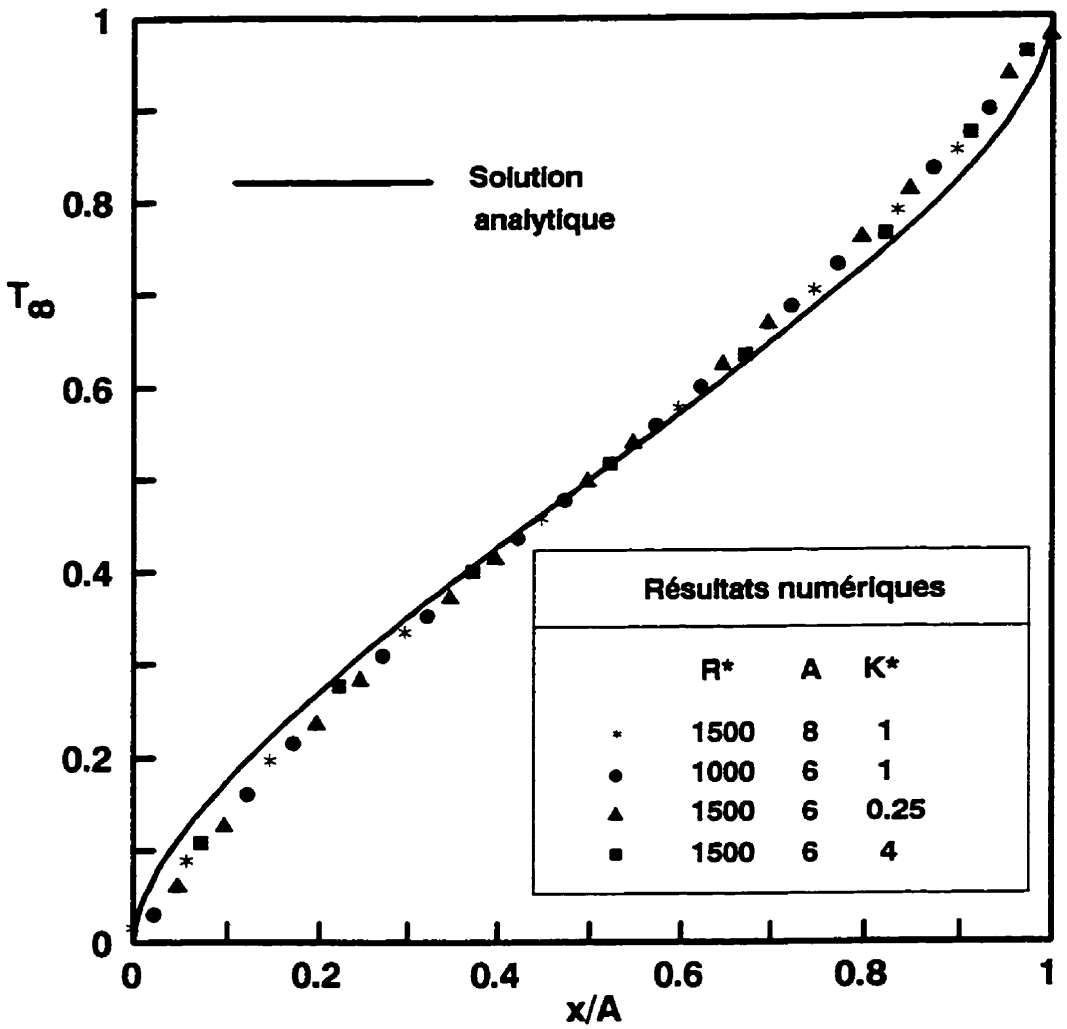


Figure 4.3: a) Distribution de la température le long d'un plan vertical à travers le centre de la cavité pour $\theta = 45^o$.

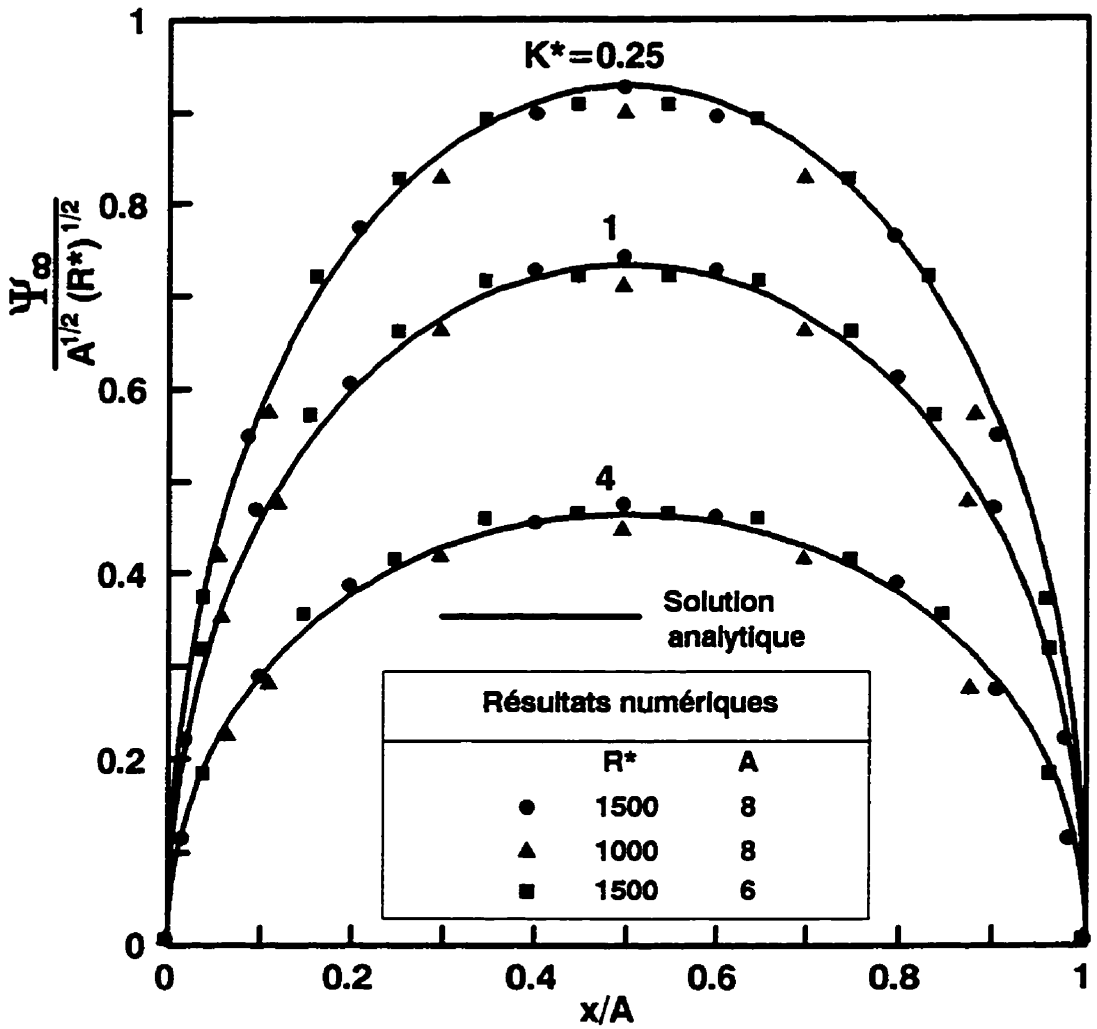


Figure 4.3: b) Distribution de la fonction de courant le long d'un plan vertical à travers le centre de la cavité pour $\theta = 45^o$.

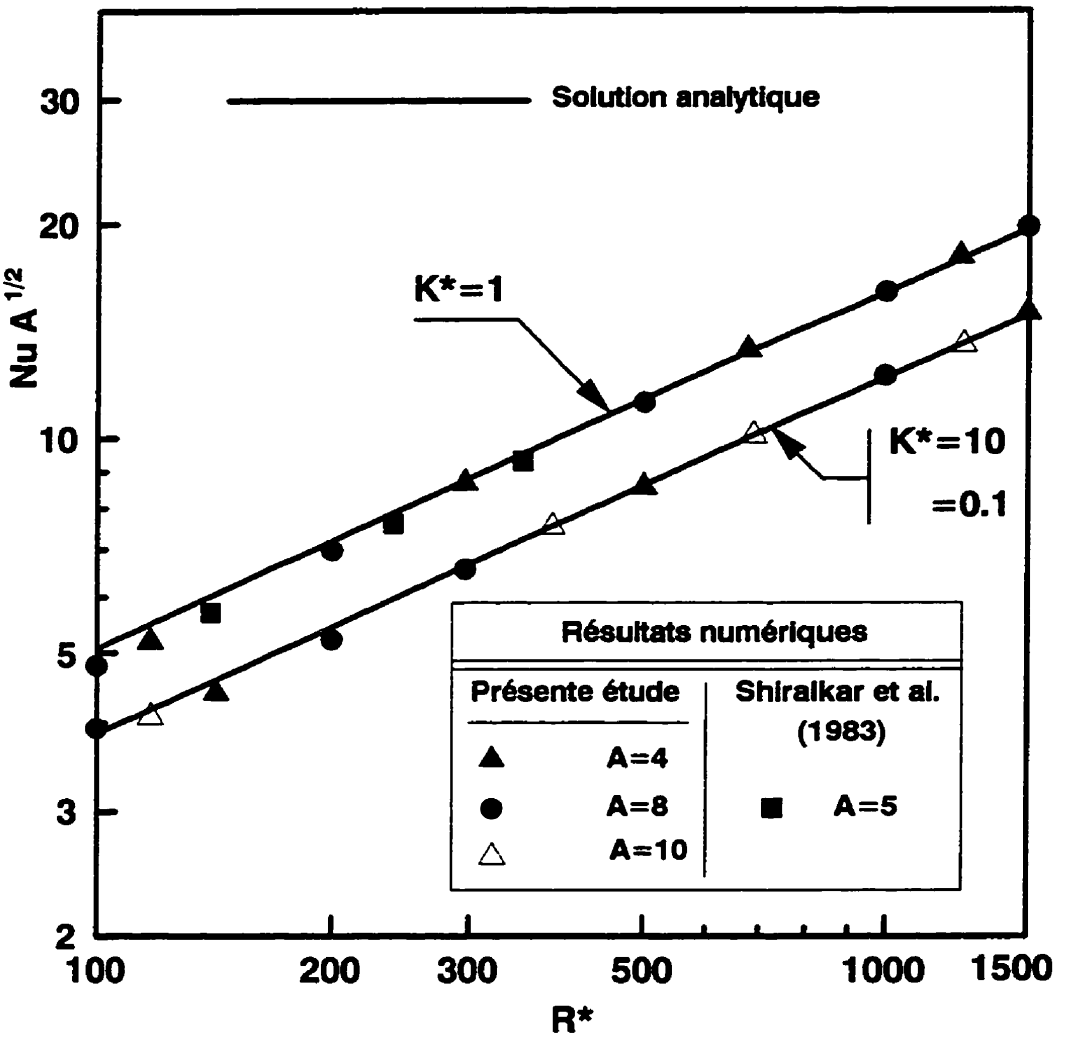


Figure 4.4: Effets du nombre de Rayleigh modifié R^* et du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur le nombre de Nusselt moyen Nu pour $\theta = 45^o$.

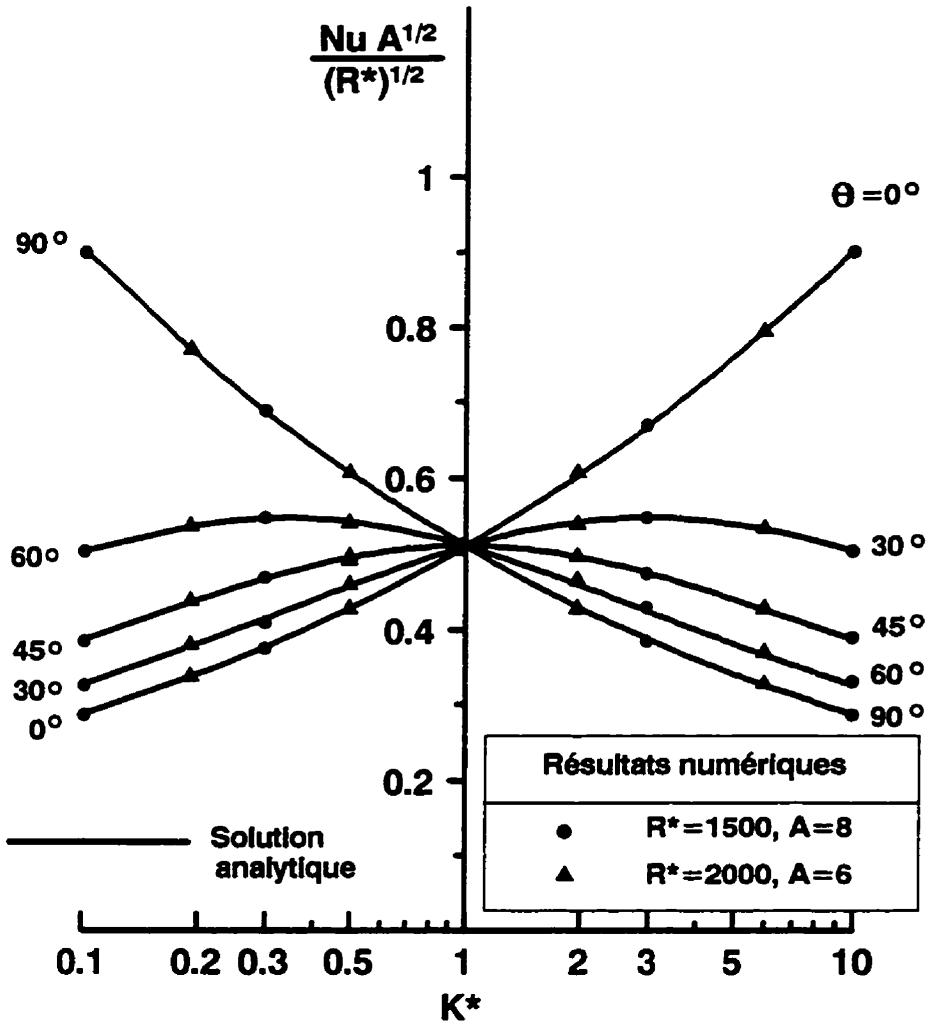


Figure 4.5: a) Effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de l'angle d'orientation θ sur le nombre de Nusselt moyen.

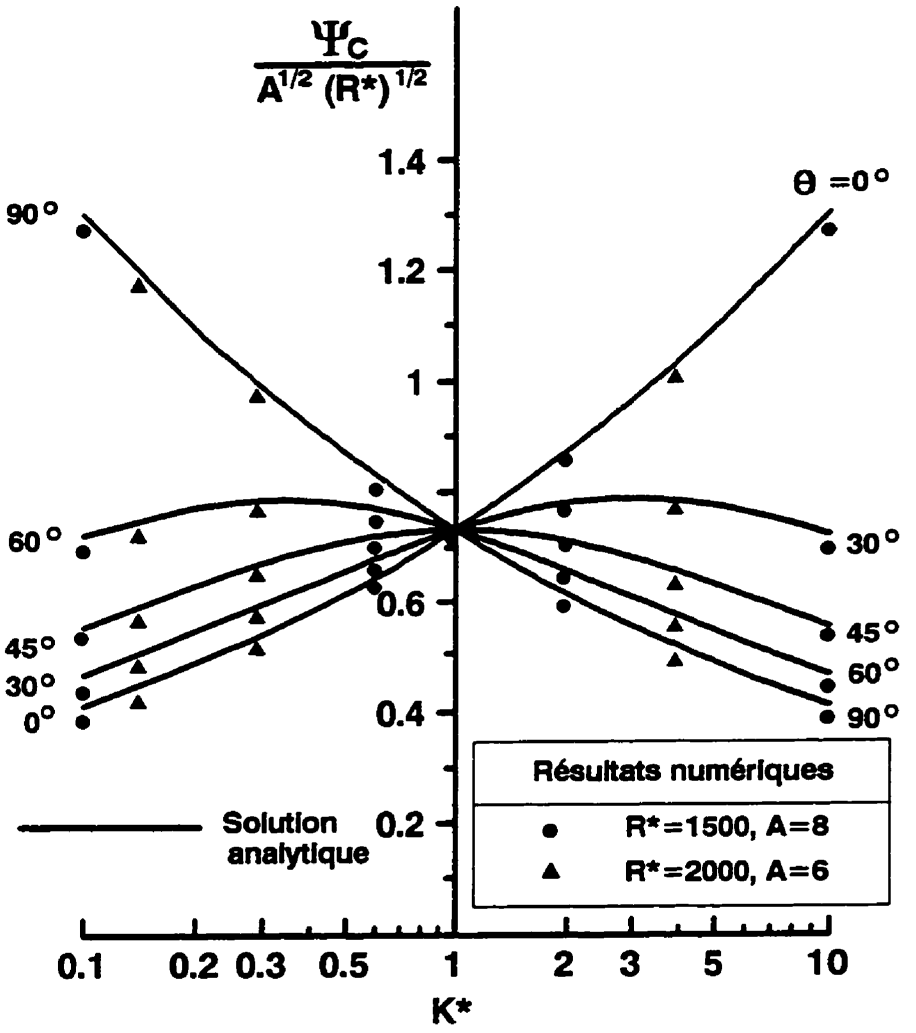


Figure 4.5: b) Effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de l'angle d'orientation θ sur la fonction de courant au centre de la cavité.

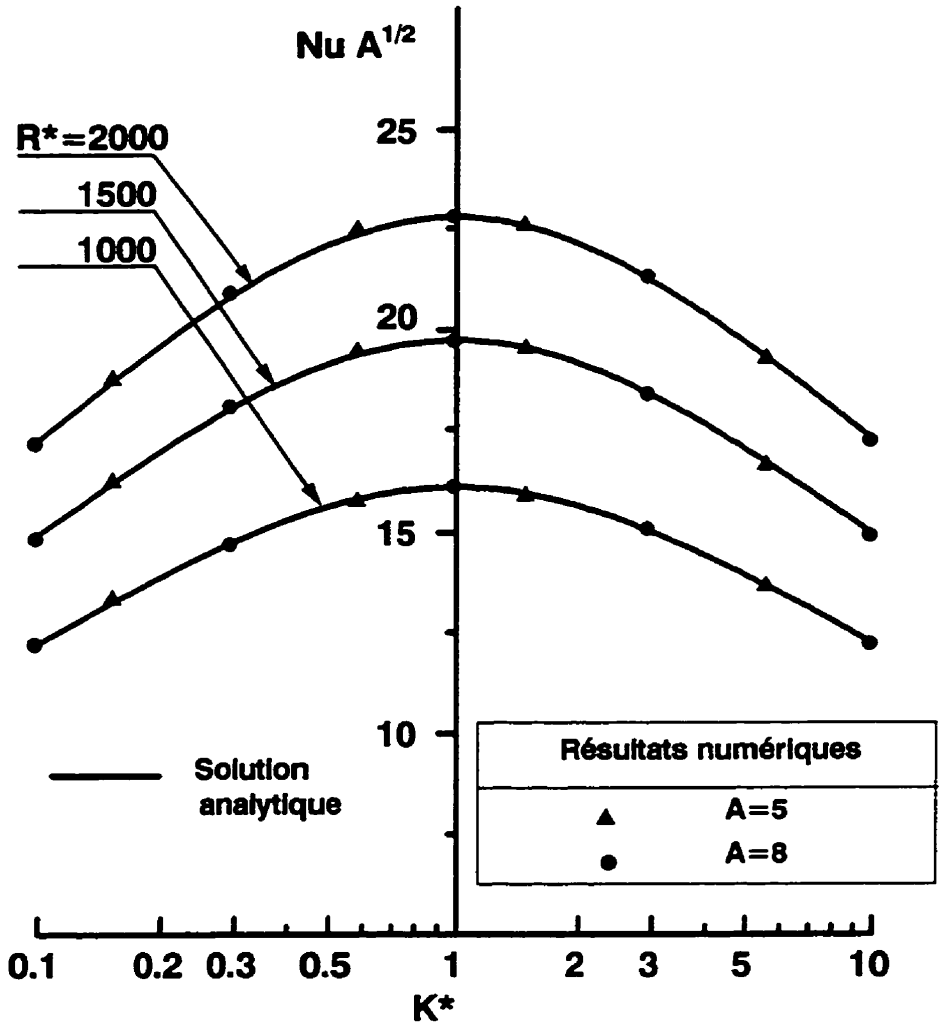


Figure 4.6: a) Effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et du nombre de Rayleigh modifié R^*, pour $\theta = 45°$, sur le nombre de Nusselt moyen.

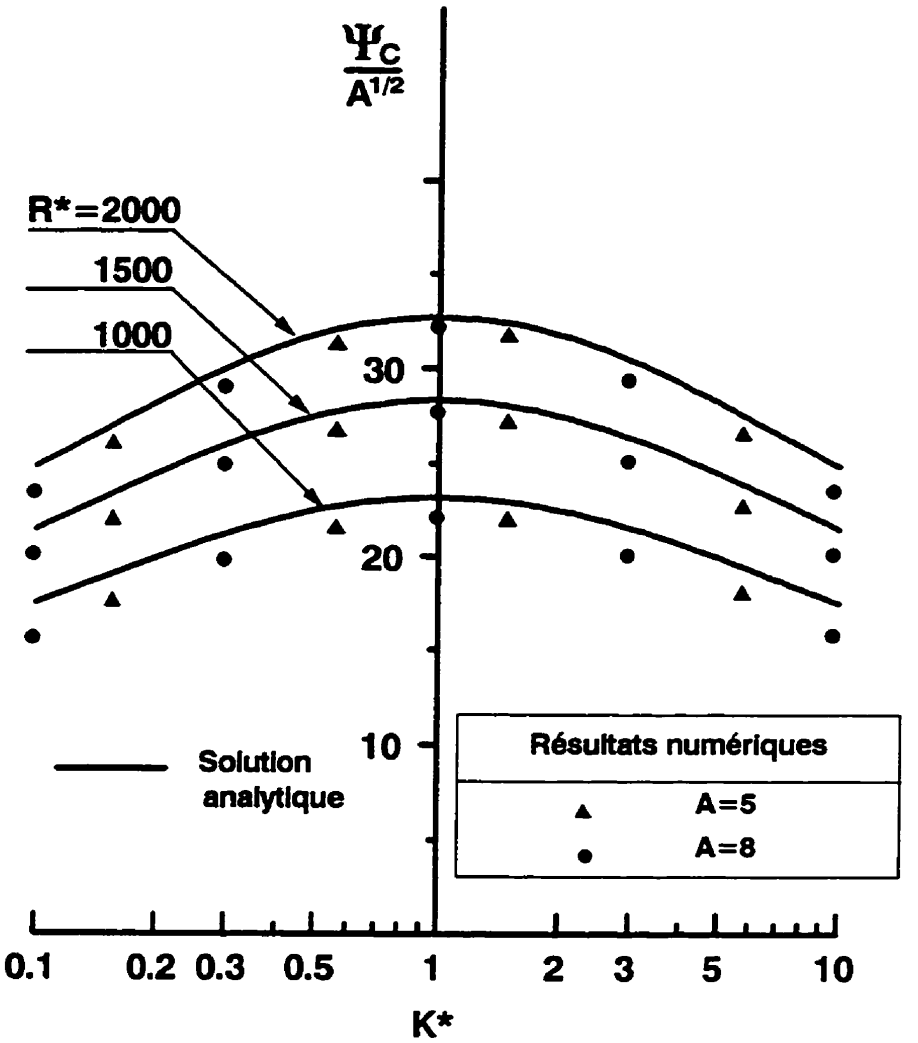


Figure 4.6: b) Effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et du nombre de Rayleigh modifié R^*, pour $\theta = 45^o$, sur la fonction de courant au centre de la cavité.

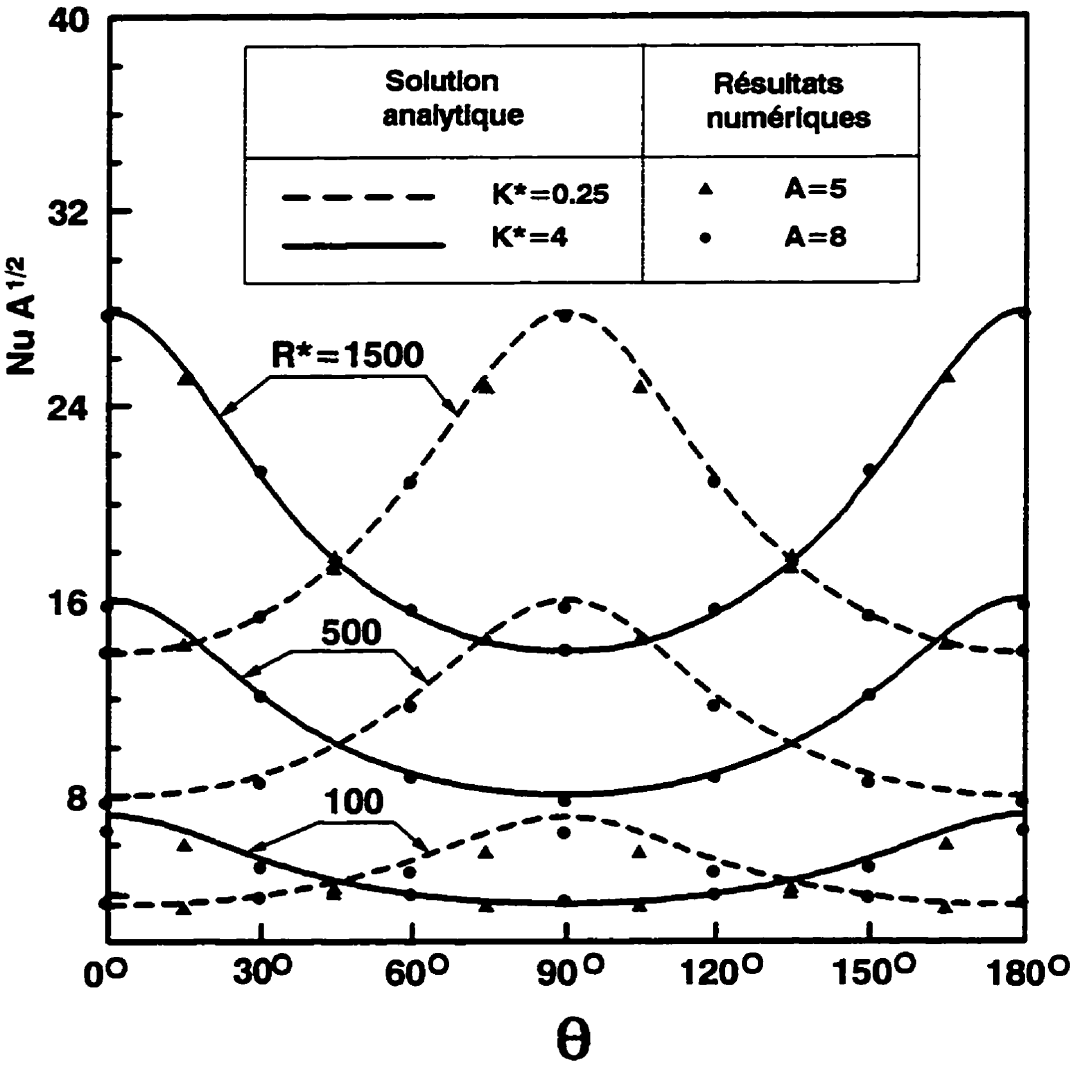


Figure 4.7: a) Effets de l'angle d'inclinaison θ et du nombre de Rayleigh modifié R^*, pour $K^* = 0.25$ et 4, sur le nombre de Nusselt moyen.

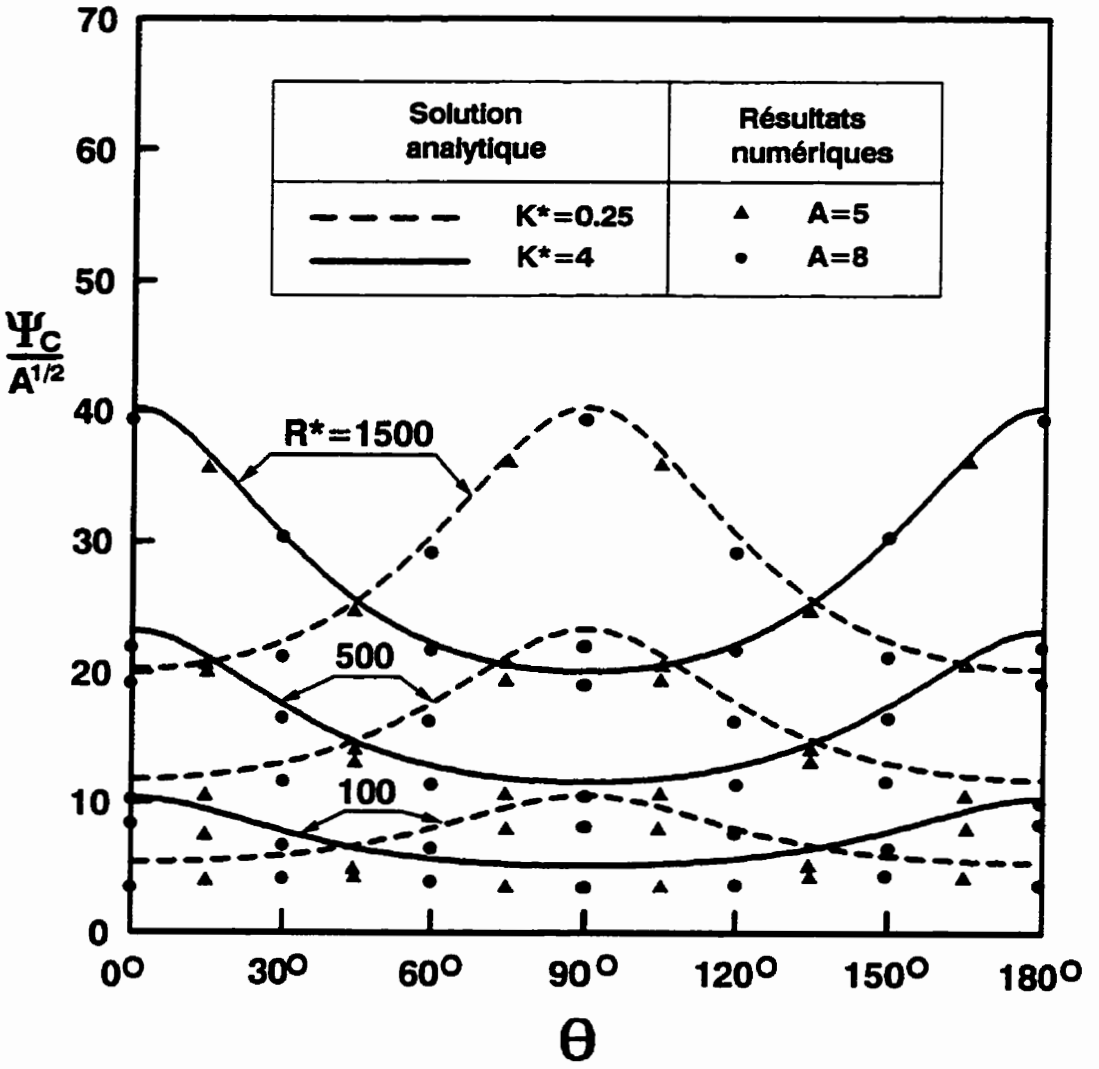


Figure 4.7: b) Effets de l'angle d'inclinaison θ et du nombre de Rayleigh modifié R^*, pour $K^* = 0.25$ et 4, sur la fonction de courant au centre de la cavité.

Chapitre 5

Convection naturelle dans une cavité poreuse: effets de l'anisotropie en conductivité thermique

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la convection naturelle dans une couche poreuse verticale anisotrope en perméabilité a été examinée. L'anisotropie en perméabilité avec l'orientation arbitraire des axes principaux par rapport à la gravité terrestre a été envisagée. Dans ce chapitre, en complément à l'anisotropie en perméabilité, l'anisotropie en conductivité thermique sera considérée. En effet, dans la revue de la littérature antérieure, les premières études conduites dans des couches horizontales chauffées par le bas ont fait état de l'anisotropie en conductivité thermique dont les effets influencent qualitativement le critère d'apparition de la convection naturelle. Selon *Neale* (1977), la conductivité thermique du fluide saturant la matrice solide est non-uniforme dans les directions dominantes de l'écoulement et affecte sensiblement le transfert de chaleur. Expérimentalement, cet auteur a prouvé que l'introduction de fils de cuivre parallèles dans la matrice d'un milieu poreux entraîne l'augmentation considérable du transfert de chaleur dans la direction où ces fils de cuivre sont alignés. Dans l'analyse de stabilité faite dans une couche horizontale anisotrope, *Kvernvold et Tyvand* (1979) ont démontré que, pour minimiser les pertes thermiques, la matrice solide du milieu poreux doit être orientée

dans une direction telle que la conductivité thermique verticale soit minimale. De même, les effets de l'anisotropie en conductivité thermique sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans des cavités poreuses verticales sont significatifs. En définissant le rapport d'anisotropie en conductivité thermique par l'expression $\tilde{k} = k_y/k_x$ (k_x et k_y désignant respectivement les conductivités thermiques suivant les directions horizontale et verticale), *Ni et Beckermann* (1991) ont obtenu entre autres résultats que lorsque $\tilde{k} > 1$, l'écoulement convectif est très accentué et un faible taux de transfert de chaleur largement dominé par la conduction pure est enregistré dans la cavité. Dans la limite où $\tilde{k} \rightarrow \infty$, tous les nombres de Nusselt se rapprochent de l'unité. Aussi, un faible rapport d'anisotropie en conductivité thermique ($\tilde{k} < 1$) a une très faible influence sur les champs d'écoulement et de température et tous les nombres de Nusselt moyens tendent approximativement vers la même valeur lorsque $\tilde{k} \rightarrow 1$. De même, en définissant dans leur étude deux rapports de conductivités thermiques, l'un relatif au fluide saturant, $\tilde{k}$ (cas anisotrope), l'autre relatif aux parois conductrices, $\tilde{k}_w = k_w/k$ (cas isotrope) où k_w et k désignent respectivement les conductivités thermiques des parois conductrices et du fluide saturant, *Chang et Lin* (1994) ont montré que lorsque $\tilde{k}_w < 100$, le transfert de chaleur croît de façon significative tandis que pour $\tilde{k}_w > 100$ ce dernier augmente très lentement. Pour des valeurs décroissantes de $\tilde{k}$, la convection est en général très prononcée. En outre, ces auteurs ont démontré l'existence d'une valeur critique de $\tilde{k}$ pour laquelle le nombre de Nusselt moyen est minimal. Par ailleurs, *Lai et Kulacki* (1988) ont étudié les effets du contraste de la perméabilité et de la conductivité non-uniforme sur la convection naturelle dans une cavité poreuse comprenant deux couches de perméabilités respectives K_a et K_b et de conductivités thermiques k_a et k_b. Ceux-ci ont observé que, lorsque $k_a \neq k_b$, une seconde cellule de recirculation est générée dans la couche la moins perméable pour $K_a/K_b < 1$. Le nombre de Nusselt moyen augmente avec le rapport des conductivités k_a/k_b

lorsque $K_a/K_b < 1$ et décroît pour $K_a/K_b > 1$. Lorsque la conductivité thermique dans la cavité devient uniforme ($k_a/k_b \rightarrow 1$), le fluide s'écoule à travers l'interface perméable entre les deux couches, le gradient de température à travers la première couche devient plus faible et engendre une cellule convective d'intensité réduite si $K_a/K_b > 1$. Dans le cas où $K_a/K_b < 1$, les deux cellules de recirculation observées dans les couches se combinent éventuellement en une seule.

Dans cette étude, la condition de flux de chaleur uniforme sera spécifiée aux parois verticales de la cavité poreuse, contrairement au cas de parois isothermes examiné au chapitre précédent. Pratiquement, la condition de flux thermique traduit mieux la réalité physique. Dans la nature, la température de la plupart des parois architecturales n'est pas constante. Selon *Kimura et Bejan* (1984), cette température est la "conséquence" d'un flux de chaleur administré à ces parois. Aussi, pour idéaliser les habitations dont les façades sont exposées au soleil, les cavités verticales chauffées latéralement par un flux de chaleur sont, selon ces auteurs, plus indiquées dans la recherche de l'optimisation de l'énergie transférée par ces façades.

Compte tenu de ce qui précéde, le but de la présente investigation sera de faire ressortir entre autres effets, ceux de l'anisotropie en conductivité thermique sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité verticale poreuse. Une solution analytique, valide pour les couches de grande extension, sera dérivée sur la base de la théorie de l'approximation de l'écoulement parallèle. La résolution numérique des équations gouvernantes complètes, basée sur l'approche des différences finies, sera effectuée pour fins de validation de la solution analytique.

5.2 Présentation du système et du modèle mathématique

Soit le modèle physique illustré à la figure 5.1. et constitué d'un milieu poreux saturé par un fluide incompressible et confiné dans une cavité rectangulaire verticale de hauteur H' et de largeur L'. Les parois verticales sont chauffées ou refroidies par un flux constant de chaleur q' tandis que les parois horizontales sont isolées thermiquement. Le milieu poreux est à la fois anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique.

En tenant compte des considérations sus-indiquées et des hypothèses générales énumérées au chapitre 2 et en admettant que le mouvement du fluide saturant est régi par la loi de Darcy, les équations gouvernantes adimensionnées (2.17) et (2.18) décrivent la présente situation. Cependant, en choisissant ici L' comme longueur caractéristique du modèle physique, le nombre de Rayleigh R est exprimé par la relation $R = K_1 g\beta\Delta T' L'/\alpha_{y'}\nu$ où le facteur d'échelle de normalisation de la température est donné par $\Delta T' = q'L'/k_{y'}$.

Les conditions aux frontières à considérer ici sont les suivantes:

- Parois verticales:

$$y = \pm\ 1/2: \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 1 \tag{5.1}$$

- Parois horizontales:

$$x = \pm\ A/2: \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{5.2}$$

Il est à souligner, à partir des équations gouvernantes (2.17) et (2.18) et des conditions aux limites (5.1) et (5.2), que le problème physique étudié est fondamentalement contrôlé par cinq paramètres adimensionnels, à savoir le rapport de

forme de la cavité A , le nombre de Rayleigh R , le rapport d'anisotropie en conductivité thermique k^*, le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation des axes principaux θ.

5.3 Analyse d'échelle

A des nombres de Rayleigh suffisamment élevés, l'écoulement présente une structure de type couche limite pour laquelle nous pouvons dériver les estimations des ordres de grandeur basées sur les paramètres d'échelle. Soient respectivement δy, δu et δT l'épaisseur dimensionnelle de la couche limite le long des parois verticales et les variations de vitesse et de température à travers cette couche limite. Comme la cavité est chauffée ou refroidie par les côtés par un flux de chaleur constant, nous considérons comme *Bejan* (1983), deux paramètres d'échelle pour la température qui sont notamment: δT, la variation de température à travers la paroi verticale et ΔT^*, la différence de température entre les parois horizontales. Ces deux grandeurs d'échelle pour la température sont différentes l'une de l'autre.

A partir des conditions thermiques imposées le long des parois verticales, nous avons:

$$\frac{\delta T}{\delta y} \sim 1 \tag{5.1}$$

tandis que la loi de Darcy (équation (2.17)) et l'équation d'énergie (équation (2.18) imposent les ordres de grandeur ci-après:

$$\delta u \sim \frac{R}{a}\,\delta T \tag{5.2}$$

$$\delta u\, C \sim \frac{\delta T}{\delta y^2} \tag{5.3}$$

Des équations ci-dessus, nous déduisons:

$$\delta y \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-1/2} C^{-1/2} \tag{5.4}$$

$$\delta T \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-1/2} C^{-1/2} \tag{5.5}$$

$$\delta u \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{1/2} C^{-1/2} \tag{5.6}$$

où le gradient thermique vertical C est déterminé à partir de l'équation de conservation de l'énergie appliquée à un volume de contrôle ayant une hauteur arbitraire comptée à partir de l'extrémité de la cavité (voir en Annexe). Nous trouvons aisément que:

$$\delta u \, \delta T \, \delta y \sim k^* \, C \tag{5.7}$$

En substituant l'équation (5.9) dans les équations (5.6)-(5.8), il vient:

$$\delta y \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-2/5} k^{*1/5} \tag{5.8}$$

$$\delta T \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-2/5} k^{*1/5} \tag{5.9}$$

$$\delta u \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{3/5} k^{*1/5} \tag{5.10}$$

$$C \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-1/5} k^{*-2/5} \tag{5.11}$$

Considérons maintenant le cas où la convection est assez forte de manière à donner lieu à un développement de couches limites horizontales le long des surfaces limitant horizontalement en haut et en bas la cavité. Soient respectivement, de façon analogue au cas précédent, δx, δv et δT^*, l'épaisseur des couches limites

horizontales, les variations de vitesse et de température observées à travers ces couches limites. L'équation de conservation de la masse exige l'approximation suivante:

$$\frac{\delta u}{\delta x} \sim \frac{\delta v}{\delta y} \tag{5.12}$$

tandis que l'équation de Darcy implique:

$$\frac{\delta v}{\delta x} \sim \frac{R}{b}\,\delta T \tag{5.13}$$

De la loi de conservation de l'énergie, nous devons avoir:

$$\delta u\ \delta T\ \delta y \sim k^{*}\frac{\delta T^{*}}{\delta x} \tag{5.14}$$

Des équations (5.10)-(5.16), nous pouvons déduire que:

$$\delta x \sim a^{-3/10}\, b^{1/2}\, k^{*1/10}\, R^{-1/5} \tag{5.15}$$

$$\delta v \sim a^{1/10}\, b^{-1/2}\, k^{*3/10}\, R^{2/5} \tag{5.16}$$

$$\delta T^{*} \sim a^{-1/10}\, b^{1/2}\, k^{*-3/10}\, R^{-2/5} \tag{5.17}$$

Les résultats de l'analyse d'échelle venant d'être ainsi faite et donnant les estimations recherchées des grandeurs d'intérêt se résument comme suit:

$$u \sim R^{3/5}\, a^{-3/5}\, k^{*1/5} \tag{5.18}$$

$$v \sim R^{2/5}\, a^{1/10}\, b^{-1/2}\, k^{*3/10} \tag{5.19}$$

$$\delta T \sim R^{-2/5}\, a^{2/5}\, k^{*1/5} \tag{5.20}$$

$$C \sim R^{-1/5}\, a^{1/5}\, k^{*-2/5} \tag{5.21}$$

Le nombre de Nusselt moyen, déterminé plus tard par l'équation (5.35), est prédit par l'approximation suivante:

$$Nu \sim R^{2/5}\, a^{-2/5}\, k^{*-1/5} \tag{5.22}$$

En tenant compte des relations des ordres de grandeur obtenues précédemment, les conditions de validité du régime de couche limite (2.25) et (2.26) se ramènent à:

$$b \ll A^2\, a^{1/5}\, R^{4/5}\, k^{*-2/5} \tag{5.23}$$

et

$$c \ll A\, a^{3/5}\, R^{2/5}\, k^{*-1/5} \tag{5.24}$$

Les prédictions des ordres de grandeur dans la présente section seront confirmées ultérieurement tant par la solution analytique que par les résultats numériques.

5.4 Solution analytique approchée

Nous présentons dans cette partie la solution analytique approchée qui est valide pour des cavités de grande extension ($A \gg 1$). Comme il a été discuté en détail dans le passé par *Cormack et al.* (1974), *Walker et Homsy* (1978), *Vasseur et al.* ((1987), (1989), (1993)) et par d'autres auteurs, la vitesse de l'écoulement

dans la région centrale de la cavité, loin de chaque extrémité, est parallèle dans la direction Ox. Seule la composante $u(x)$ dans la direction précitée existe, de sorte que $\psi(x,y) = \psi(y)$. Aussi, le champ de température se comporte comme étant la somme d'une partie longitudinale variant linéairement avec x et d'une autre partie inconnue dans la direction transversale. Nous pouvons donc poser que $T = Cx + \varsigma(y)$ où C est le gradient de température dans la direction (Ox). En substituant ces deux approximations découlant de l'hypothèse d'écoulement parallèle dans l'équation (2.17) et dans l'équation d'énergie (2.18) en régime permanent, nous trouvons:

$$\frac{d^3\varsigma}{dy^3} - \alpha^2 \frac{d\varsigma}{dy} = 0 \tag{5.1}$$

et

$$\frac{d^2\varsigma}{dy^2} = C\,\frac{d\psi}{dy} \tag{5.2}$$

Les conditions aux limites dans la direction Oy deviennent:

$$y = \pm 1/2: \qquad \psi = 0, \qquad \frac{d\varsigma}{dy} = 1 \tag{5.3}$$

Les conditions thermiques aux limites dans la direction Ox ne peuvent pas être satisfaites avec l'hypothèse d'écoulement parallèle. Cependant, le bilan énergétique (voir en Annexe) sur un volume de contrôle entourant l'une quelconque des régions extrêmes de la cavité donne:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} T - k^{*} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy = 0 \tag{5.4}$$

Les solutions des équations (5.27) et (5.28) satisfaisant les conditions aux frontières (5.29) sont:

$$\psi = \frac{1}{C}\left(\frac{cosh\ \alpha y}{cosh\ \alpha/2} - 1\right) \tag{5.5}$$

$$T = Cx + \frac{1}{\alpha}\frac{sinh\ \alpha y}{cosh\ \alpha/2} \tag{5.6}$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{R\,C}{a} \tag{5.7}$$

L'équation (5.30), compte tenu de ce qui précède, devient:

$$C = \frac{1}{2k^*C}\ \frac{1}{cosh^2\ \alpha/2}\left(\frac{sinh\ \alpha}{\alpha} - 1\right) \tag{5.8}$$

Le gradient de température C est obtenu pour toute combinaison des paramètres de contrôle R, K^*, k^* et θ par l'intégration numérique de l'équation transcendante (5.34). Ceci est bien sûr moins fastidieux et beaucoup plus rapide que de résoudre le système formé par les équations (2.17) et (2.18) soumises aux conditions aux limites (5.1) et (5.2).

Le transfert de chaleur exprimé en terme de nombre de Nusselt Nu est défini par:

$$Nu = \frac{q'}{\overline{\Delta T'}}\frac{L'}{k_{y'}} = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\alpha}{2}coth\ \frac{\alpha}{2} \tag{5.9}$$

où $\overline{\Delta T'}$ est la différence pariétale effective de température. En se référant à l'équation (5.32), ΔT varie linéairement en fonction de x et par conséquent a été évalué arbitrairement à la position $x = 0$.

En régime de couche limite, les équations précédentes peuvent être considérablement réduites. En effet, pour $R \gg 1$, nous démontrons facilement à partir des équations (5.33) et (5.34) que:

$$\alpha = R^{2/5}\, a^{-2/5}\, k^{*-1/5} \tag{5.10}$$

et

$$C = R^{-1/5}\, a^{1/5}\, k^{*-2/5} \tag{5.11}$$

de sorte que les équations (5.31), (5.32) et (5.35) se réduisent à:

$$\psi = \sqrt{k^*\alpha}\,(e^{\alpha\,(y-1/2)} - 1) \tag{5.12}$$

$$T = \frac{x}{\sqrt{k^*\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\,(y-1/2)} \tag{5.13}$$

$$Nu = \frac{\alpha}{2} \tag{5.14}$$

Le comportement asymptotique des équations ci-dessus présentées, en régime de couche limite, s'accorde bien avec les prédictions données par l'analyse d'échelle antérieure, comme nous pouvons le constater en examinant les équations (5.13), (5.22) et (5.24). Aussi, ces équations ci-dessus présentées s'identifient à celles obtenues par *Bejan* (1983) et *Vasseur et al.* (1987) pour le cas particulier d'un milieu isotrope où $k^* = K^* = 1$.

Il est aussi intéressant de considérer le cas limite où $\alpha \rightarrow 0$, qui est observé, soit quand $R \rightarrow 0$ (régime de pseudo-conduction), soit quand la stratification thermique verticale $C \rightarrow 0$. Dans cette situation, l'équation (5.34) entraîne l'approximation:

$$\alpha \simeq \frac{R}{2\sqrt{3}\, a\, \sqrt{k^*}} \tag{5.15}$$

de telle sorte que nous déduisions de l'équation (5.33):

$$C \simeq \frac{R}{12\, a\, k^*} \tag{5.16}$$

Par conséquent, des équations (5.31) et (5.35), il est facile de noter que la fonction de courant au centre de la cavité ψ_C et le nombre de Nusselt Nu sont respectivement donnés par:

$$\psi_C \simeq -\frac{1}{8}\frac{R}{a}\left[1 - \frac{5}{576}\frac{R^2}{a^2\, k^*}\right] \tag{5.17}$$

et

$$Nu \simeq 1 + \frac{R^2}{144\, a^2\, k^*} \tag{5.18}$$

5.5 Résolution numérique

L'algorithme de calcul itératif évoqué antérieurement a permis la résolution intégrale du système formé par les équations gouvernantes (2.17) et (2.18) et les conditions aux limites (5.1) et (5.2). Des tests numériques utilisant des maillages variés ont été effectués pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle pour déterminer le meilleur compromis entre la précision des résultats et le temps machine. Pour atteindre le régime permanent, le temps machine CPU requis se situe approximativement entre 80s et 460s sur la station de travail IBM RISC 6000/RS 365. Des résultats typiques pour ψ_C et Nu sont donnés dans le tableau 5.1. En se basant sur ces résultats, un maillage de 50×50 a été adopté pour la plupart des cas considérés dans cette étude.

Avec le chauffage ou le refroidissement par un flux latéral constant des parois verticales d'une cavité confiné par un milieu poreux isotrope, le mouvement convectif unicellulaire est indépendant du rapport de forme A pour des rapports de

forme élevés, comme l'avaient souligné dans le passé *Vasseur et al.* (1987).

D'autres tests numériques utilisant des rapports de forme variés A ont été effectués pour d'autres conditions maintenues constantes dont notamment le maillage; les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 5.2. Il est clair à partir des valeurs de ce tableau que ψ_C et Nu convergent très rapidement vers une valeur asymptotique lorsque A croît à partir de l'unité. Pour tous les cas numériques simulés, le rapport de forme $A = 4$ a été adopté.

5.6 Discussion des résultats

Dans cette partie, nous discuterons les effets de l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur les champs de température et d'écoulement. Les résultats de ces effets sur un système ayant des propriétés thermiques isotropes ($k^* = 1$) seront d'abord présentés. Ensuite, nous étudierons les effets de la non-uniformité de la conductivité thermique.

5.6.1 Effets de l'anisotropie en perméabilité

Les figures 5.2*a*-5.2*c* illustrent les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur les lignes de courant et les isothermes pour $R = 100$ et $\theta = 45°$. En milieu isotrope ($K^* = 1$), les champs d'écoulement et de température de la figure 5.2*a* sont semblables à ceux obtenus dans le passé par *Bejan* (1983) et *Vasseur et al.* (1987). Les principales caractéristiques de l'écoulement convectif révèlent que l'épaisseur des couches limites le long des parois verticales est constante et que la région centrale de la cavité est sans mouvement. Aussi, cette région centrale est linéairement stratifiée avec un gradient thermique vertical résultant d'une

différence de température entre les parois thermiquement actives qui est indépendante de l'altitude. Finalement, à cause des conditions thermiques considérées ici, les épaisseurs des couches limites hydrodynamique et thermique sont toutes deux égales. Les effets de K^* sont qualitativement similaires à ceux obtenus au chapitre précédent où la cavité est chauffée isothermiquement par les côtés. En effet, lorsque $K^* > 1$, l'écoulement convectif au centre de la couche poreuse, ψ_C et le transfert de chaleur Nu sont tous deux faibles. Naturellement, le phénomène inverse est observé pour $K^* < 1$ (voir figure 5.2). Par conséquent, ces résultats pour ψ_C et Nu sont fortement dépendants des propriétés anisotropes du milieu poreux et non des conditions thermiques appliquées aux frontières de la cavité. Une tendance similaire a été rapportée dans le passé par *Chang and Lin* (1994) en étudiant la convection naturelle dans une cavité rectangulaire chauffée par les côtés et remplie d'un milieu poreux anisotrope ayant ses axes principaux coïncidant avec le champ gravitationnel ($\theta = 0^o$).

Les variations du nombre de Nusselt Nu et de la fonction de courant au centre de la cavité ψ_C en fonction du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sont respectivement présentées sur les figures 5.3*a* et 5.3*b* pour $k^* = 1$, $\theta = 45^o$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh R. Sur ces courbes, les résultats analytiques sont représentés par des traits continus; les résultats numériques indiqués par des cercles pleins, s'accordent bien avec ces derniers, malgré la large plage de valeurs prises par les paramètres considérés ici. Comme nous pouvions nous y attendre, les figures 5.3*a* et 5.3*b* indiquent que, pour une valeur donnée de K^*, le transfert de chaleur par convection croît avec l'augmentation de R. Pour une valeur de R connue, Nu et ψ_C tous deux tendent asymptotiquement vers des valeurs constantes si K^* est assez faible. Ce comportement peut être prédit en régime de couche limite, par les équations (5.36), (5.38) et (5.40) à partir desquelles il est facile de noter que $Nu \rightarrow (R/cos^2\theta)^{2/5}/2$ et $\psi_C \rightarrow (R/cos^2\theta)^{1/5}$ si $K^* \rightarrow 0$. Ces

limites sont indiquées par des traits interrompus courts sur les figures 5.3*a* et 5.3*b* pour $R = 100$ et 600. Dans le cas où $R = 20$, situation qui correspond à un nombre de Rayleigh relativement faible où le régime de couche limite n'est pas encore atteint, les limites asymptotiques précédentes ne sont pas représentées. Comme nous l'avions souligné plus tôt, la convection devient de plus en plus faible lorsque K^* augmente progressivement. Donc, pour chaque valeur de R considérée sur la figure 5.3, le nombre de Nusselt se rapproche du régime de conduction pure, $Nu \rightarrow 1$ et $\psi_C \rightarrow 0$ lorsque K^* croît de plus en plus (voir par exemple la figure 5.2*b*). La valeur de K^* nécessaire pour atteindre le régime de conduction pure est dépendante de R. Par exemple, pour $R = 20$, la conduction pure est atteinte quand $K^* \simeq 10$, tandis que pour $R = 600$, la valeur correspondante est approximativement $K^* \simeq 10^3$.

Les influences du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de l'angle d'orientation de l'anisotropie θ sur l'évolution des lignes de courant et des isothermes sont remarquables comme l'indiquent les figures 5.2 et 5.4 correspondant à $R = 100$, $k^* = 1$, $K^* = 10^3$ et 10^{-3} et à $\theta = 0^o$, 45° et 90°. Le cas du milieu poreux ayant un rapport d'anisotropie en perméabilité élevé sera d'abord examiné. Pour $\theta = 0^o$, c'est-à-dire lorsque les axes principaux de l'anisotropie sont alignés par rapport au champ gravitationnel, nous notons à partir de la figure 5.4*a* que l'écoulement dû à la poussée pour $K^* = 10^3$ est considérablement plus faible que celui observé pour $K^* = 1$ (figure 5.2*a*). En conséquence, le transfert de chaleur est dû à la conduction telle que nous pouvons le visualiser à travers la plupart des isothermes verticales de la figure 5.4*a*. Le modèle de l'écoulement résultant est similaire à celui obtenu par *Ni et Beckermann* (1991) et *Dègan et Vasseur* (1996a) dans le cas où la cavité est chauffée isothermiquement par les côtés. Donc, l'écoulement est canalisé le long des parois verticales à telle enseigne que la couche limite hydrodynamique devient extrêmement mince. Ce phénomène apparaît quand bien même le milieu poreux est homogène, car la perméabilité dans

la direction verticale est beaucoup plus élevée que la perméabilité dans la direction horizontale. L'effet de l'angle d'orientation de l'anisotropie sur les distributions de la température et de l'écoulement est illustré par les figures 5.4*a*, 5.2*b* et 5.4*c* pour respectivement $\theta = 0^o$, 45° et 90°. Ces figures montrent clairement que la force de la circulation de l'écoulement est réduite, puisque l'orientation des axes principaux avec la perméabilité la plus élevée est changée de la position verticale ($\theta = 0$) à la position horizontale ($\theta = 90^o$). Aussi, les couches limites de la vitesse observées le long des parois verticales pour 0° (figure 5.4*a*) disparaissent avec l'augmentation progressive de l'angle d'orientation θ vers 90° (figure 5.4*c*). Pour cette situation, la perméabilité dans la direction horizontale est ici beaucoup plus élevée que celle dans la direction verticale, laissant se propager ainsi dans la direction horizontale toutes les non-uniformités du fluide s'écoulant de la direction verticale. Par contre, à cause de la perméabilité relativement faible dans la direction verticale, le fluide s'écoulant horizontalement se trouve fortement canalisé le long des deux parois adiabatiques horizontales.

Le cas d'une couche poreuse ayant un faible rapport d'anisotropie en perméabilité ($K^* = 10^{-3}$) est maintenant examiné. Pour $\theta = 0^o$, la figure 5.4*b* montre qu'une réduction du rapport d'anisotropie en perméabilité a une très faible influence sur la force de la circulation de l'écoulement et le transfert de chaleur. Les lignes de courant et les isothermes visualisées à la figure 5.3*b* pour $K^* = 10^{-3}$ sont semblables à celles observées pour $K^* = 1$ (figure 5.2*a*). En outre, la figure 5.4*b* indique que pour $K^* = 10^{-3}$, le modèle de l'écoulement est non seulement caractérisé par la présence de lignes de courant ayant la forme d'un os, mais aussi canalisé le long des frontières horizontales supérieure et inférieure. Un tel effet de canalisation de l'écoulement a été observé par *Ni et Beckermann* (1991) dans le cas d'une cavité carrée chauffée isothermiquement par les côtés. L'effet de cette canalisation de l'écoulement peut être attribué à la perméabilité relativement faible prédomi-

nant maintenant dans la direction verticale. En effet, l'épaisseur de l'écoulement canalisé est prédite dans l'analyse d'échelle précédente par l'équation (5.17) selon laquelle δx est proportionnel à $\sqrt{K^*}R^{-1/5}$ lorsque θ est nulle et qui donc vraissemblablement pourrait arriver pour seulement des valeurs faibles de K^*. Lorsque l'angle d'orientation de l'anisotropie θ croît de 0 à 90°, les champs d'écoulement et de température résultants sont illustrés par les figures 5.4*b*, 5.2*c* et 5.4*d*. Pour $\theta = 45°$, la figure 5.2*c* indique que, à cause de la perméabilité K_1 relativement élevée, l'écoulement dans les régions extrêmes de la cavité est dirigé respectivement vers le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit. L'écoulement dans la partie centrale de la cavité reste néanmoins essentiellement parallèle. Cependant, comme l'angle d'orientation de l'anisotropie θ croît davantage, la distorsion de l'écoulement dans les régions extrêmes s'étend progressivement dans la région centrale. Par conséquent, le parallélisme de l'écoulement dans la cavité est progressivement détruit comme l'illustre la figure 5.4*d* pour $\theta = 90°$. Aussi, cette figure montre l'existence d'une couche limite verticale extrêmement mince. Pour cette raison, un accord peu parfait a été observé entre les résultats numériques et la présente étude analytique.

Les effets de l'orientation θ de l'anisotropie de la perméabilité sur Nu et ψ_C sont présentés respectivement par les figures 5.5*a* et 5.5*b* pour $R = 20$ et pour différentes valeurs de K^*. En milieu poreux isotrope ($K^* = 1$), Nu et ψ_C sont tous deux indépendants de θ comme prévu. En général, une symétrie des résultats par rapport à $\theta = 90°$ est observée sur les figures (5.5). Cela vient du fait qu'il peut être montré à partir des équations gouvernantes (2.18) et (2.19) et des conditions aux limites (5.1) et (5.2) que, si $\psi(x,y)$ et $T(x,y)$ sont des solutions pour R, K^*, k^* et θ, alors $\psi(x,1-y)$ sont également des solutions pour R, K^*, k^* et $\pi-\theta$. Nous pouvons donc limiter la discussion à $0 \leq \theta \leq 90°$. Conformément aux figures (4.7) du chapitre précédent, le comportement de Nu et de ψ_C est analogue à celui observé

sur les figures (5.5). Par conséquent, les conclusions tirées antérieurement dans le cadre de ces dernières sont valables ici. Ce comportement peut être facilement démontré ici à partir de la solution analytique obtenue en régime de couche limite. En prenant la dérivée première de Nu (équations (5.40) et (5.36)) par rapport à θ et en posant cette dérivée égale à zéro, nous trouvons aisément que $(K^* - 1)sin2\theta = 0$, de sorte qu'un maximum ou un minimum apparaît pour $\theta = 0^o$ et 90°. La dérivée seconde de Nu donne $d^2Nu/d\theta^2 = \pm R^{2/5}(K^* - 1)/k^{*1/5}$ lorsque respectivement $\theta = 0^o$ et 90°. Donc, quand $K^* > 1$ ($K^* < 1$), Nu est maximal (minimal) à $\theta = 0^o$ et minimal (maximal) à $\theta = 90^o$. Ces résultats sont qualitativement similaires à ceux obtenus numériquement par *Zhang* (1993) et par *Dègan et Vasseur* (1996a) lorsque la cavité est isothermiquement par les côtés.

En conséquence, les résultats ci-dessus peuvent être appliqués dans la minimisation des pertes énergétiques à travers la cavité poreuse verticale et donc dans le domaine de l'isolation thermique, comme l'avaient souligné dans le passé *Kvernvold et Tyvand* (1979). En confirmant les résultats obtenus par ces derniers, nous concluons que le milieu poreux anisotrope qui donne la meilleure isolation est celui ayant dans la direction verticale la perméabilité la plus faible possible.

La figure 5.6 montre les variations de Nu en fonction de R pour des valeurs choisies de l'angle d'orientation θ de l'anisotropie et pour respectivement $K^* = 10^{-1}$ et 10. La solution analytique (équation (5.35)) est comparée avec les résultats numériques et l'accord s'est avéré excellent. Lorsque $\theta = 0^o$, nous notons que le nombre de Nusselt est indépendant de K^* (voir aussi la figure 5.5a). C'est seulement dans la limite de l'approximation de l'écoulement parallèle pour laquelle il est facile de remarquer à partir des équations (5.33)-(5.35) que $a = 1$ pour $\theta = 0^o$ et que Nu devient indépendant de K^*. Cependant, en général, si l'écoulement n'est pas parallèle, Nu doit dépendre du rapport d'anisotropie en perméabilité K^*,

comme l'ont démontré *Ni et Bekermann* (1991) pour une cavité carrée ($A = 1$) et *Dègan et Vasseur* (1996a, 1996b) dans le cas d'une cavité de grande extension, chauffée par les côtés. Aussi, il est facile de noter sur la figure 5.6 la confirmation de tous les résultats précédents obtenus pour le transfert de chaleur en fonction des paramètres d'anisotropie K^* et θ. Le nombre de Nusselt prédit par l'équation (5.40) pour le régime de couche limite est illustré, en guise de comparaison, sur la figure 5.6 par des traits interrompus courts. L'amorçage du régime de couche limite est fortement dépendant de K^* et de θ. Par exemple, pour $\theta = 90^o$ le régime de couche limite s'amorce à $R \simeq 2$ pour $K^* = 10^{-1}$ tandis qu'il commence seulement à $R \simeq 200$ pour $K^* = 10$.

5.6.2 Effets de l'anisotropie en conductivité thermique

Les figures 5.7*a* et 5.7*b* montrent les lignes de courant et les isothermes obtenus numériquement pour respectivement $R = 100$, $K^* = 1$ et $k^* = 10^3$ et 10^{-3}. Les résultats pour les champs d'écoulement et de température correspondant à un milieu poreux isotrope en conductivité thermique ($k^* = 1$) sont illustrés par la figure 5.2*a*. Pour $k^* = 10^3$, les isothermes de la figure 5.7*a* sont verticales, indiquant que le transfert de chaleur à travers la cavité se fait essentiellement par conduction pure. L'absence de gradients de température dans la direction Ox est due au fait que la conductivité thermique dans cette direction est beaucoup plus élevée que dans la direction Oy ($k^* \gg 1$). Le champ d'écoulement résultant indique l'absence d'un régime de couche limite, tel qu'observé sur la figure 5.2*a* pour $k^* = 1$, même si l'intensité de l'écoulement est beaucoup plus élevée ici. En dépit de la forte circulation de la convection dans la couche poreuse, le modèle de l'écoulement de la figure 5.7*a* est plutôt typique à la convection naturelle correspondant à un nombre de Rayleigh beaucoup plus faible. Une tendance similaire a été rapportée

par *Ni et Beckermann* (1991) lorsqu'ils ont étudié l'effet d'un grand rapport de conductivités thermiques ($\tilde{k} > 1$) sur l'écoulement convectif dans une cavité carrée chauffée isothermiquement par les côtés. Cependant, il a été rapporté par ces auteurs qu'un faible rapport d'anisotropie en conductivité thermique ($\tilde{k} \ll 1$) a une très faible influence sur l'écoulement et le transfert de chaleur, par rapport à la situation isotrope ($\tilde{k} = 1$). Ce résultat n'est pas en accord avec les conclusions de la présente étude où les lignes de courant et les isothermes obtenues pour $k^* = 10^{-3}$ sont visualisées à la figure 5.7*b*. Comme nous pouvons le constater ici, les isothermes sont considérablement plus horizontales que celles observées dans le cas où $k^* = 1$ (figure 5.2*a*). Lorsque k^* est petit, la conductivité thermique est beaucoup plus élevée dans la direction horizontale que dans la direction verticale. Le modèle de champ de température résultant consiste en une stratification thermique de la région centrale, donnant naissance à une circulation de l'écoulement approximativement deux fois et demie plus faible que celle observée pour la situation isotrope ($k^* = 1$). En dépit de cette circulation relativement faible de la convection, une couche limite est observée près des parois thermiquement actives.

L'effet du rapport de l'anisotropie en conductivité thermique sur le nombre de Nusselt et la fonction de courant au centre de la cavité est illustré par les figures 5.8*a* et 5.8*b* respectivement pour $K^* = 1$ et pour $R = 20$, 100 et 200. La figure 5.8*a* montre que, pour une valeur donnée de R, Nu se rapproche de l'unité si la valeur de k^* est assez grande. Ceci est prédit dans la présente théorie par les équations (5.41)-(5.44) qui montrent que, lorsque k^* est assez grand, C et α tendent tous deux vers zéro, indépendamment de la valeur de R, de sorte que le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction pure ($Nu \rightarrow 1$). Naturellement, le rapport d'anisotropie en conductivité thermique nécessaire pour atteindre cette limite croît avec l'augmentation de R. Par exemple, cette situation se présente lorsque $k^* \simeq 10$ pour $R = 20$ et $k^* \simeq 10^3$ pour $R = 200$. En général, un nombre de Nusselt se

rapprochant de l'unité est associé ou attribué au régime de pseudo-conduction, c'est-à-dire, à une très faible circulation de l'écoulement dans la cavité ($R \ll 1$). Ce n'est pas le cas dans la présente situation où le transfert de chaleur par conduction n'est pas la conséquence d'une faible force de poussée, mais est due plutôt à un grand rapport d'anisotropie en conductivité thermique. En réalité, la figure 5.8*b* montre que la force de l'écoulement convectif ψ_C croît asymptotiquement avec k^*, compte tenu de l'équation (5.43), vers une valeur maximale $|\psi_C| = R/8$. En comparant la solution analytique avec les résultats numériques, nous remarquons que, pour $k^* > 1$ l'accord entre les deux est excellent. Par contre, si la valeur de k^* est plus petite que l'unité, le nombre de Nusselt calculé analytiquement augmente continuellement pendant que les résultats numériques tendent vers une valeur constante qui dépend de R. Cette déviation est due au fait que, comme illustré à la figure 5.7*b*, l'écoulement convectif dans la cavité n'est pas parallèle et la solution analytique devient invalide dans cette situation.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité poreuse verticale exposée à un flux de chaleur constant. Le milieu poreux est supposé à la fois thermiquement et hydrodynamiquement anisotrope avec les axes principaux de l'anisotropie en perméabilité inclinés par rapport à la force gravitationnelle. Une étude analytique valide pour l'écoulement dans les cavités de grande extension est dérivée sur la base de l'approximation d'écoulement parallèle, tandis que la méthode des différences finies est utilisée pour simuler numériquement ce problème. Des résultats détaillés pour le champ d'écoulement, la distribution de la température et les taux de transfert de chaleur ont été présentés et discutés. De ces résultats, il se dégage les remarques suivantes:

1°) Un rapport élevé de l'anisotropie en perméabilité ($K^* > 1$) entraîne une canalisation de l'écoulement près des parois verticales lorsque $\theta = 0°$. Puisque l'angle d'orientation de l'anisotropie croît, la force de l'écoulement convectif est progressivement affaiblie. Pour $\theta = 90°$, le modèle de l'écoulement consiste en une très faible circulation de l'écoulement convectif dans la région centrale de la cavité présentant des couches limites de la vitesse très minces près des parois horizontales. Dans la limite où $K^* \rightarrow \infty$, toute valeur du nombre de Nusselt indépendante de θ se rapproche de l'unité.

2°) Un rapport faible de l'anisotropie en perméabilité ($K^* < 1$) entraîne une canalisation de l'écoulement près des parois horizontales lorsque $\theta = 0°$. La force de la circulation de l'écoulement est accentuée avec l'augmentation de θ. Le transfert de chaleur est maximal à $\theta = 90°$, cas pour lequel le parallélisme de l'écoulement existe seulement pour des valeurs grandes de R.

3°) En augmentant le rapport d'anisotropie en conductivité thermique ($k^* > 1$), la convection induite par l'écoulement est accentuée mais le nombre de Nusselt se rapproche de l'unité lorsque k^* est assez élevé. Lorsque le rapport d'anisotropie en conductivité thermique est décroissant ($k^* < 1$), Nu tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de R.

Au prochain chapitre, l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle en régime de couche limite dans une cavité verticale où le mouvement du fluide est régi par l'équation de Brinkman seront considérés.

Tableau 5.1: Effet du maillage sur ψ_C et Nu pour $A = 4$, $R = 100$, $k^* = 1$ et $K^* = 1$.

$M \times N$	20×20	40×40	50×50	80×80	Solution analytique
ψ_C	2.348	2.331	2.328	2.324	2.320
Nu	3.132	3.143	3.144	3.147	3.149

Tableau 5.2: Effet du rapport de forme A sur ψ_C et Nu pour $R = 100$, $k^* = 1$ et $K^* = 1$.

A	1	2	3	4	5	Solution analytique
ψ_C	2.193	2.368	2.336	2.328	2.328	2.320
Nu	2.571	3.106	3.145	3.144	3.144	3.149

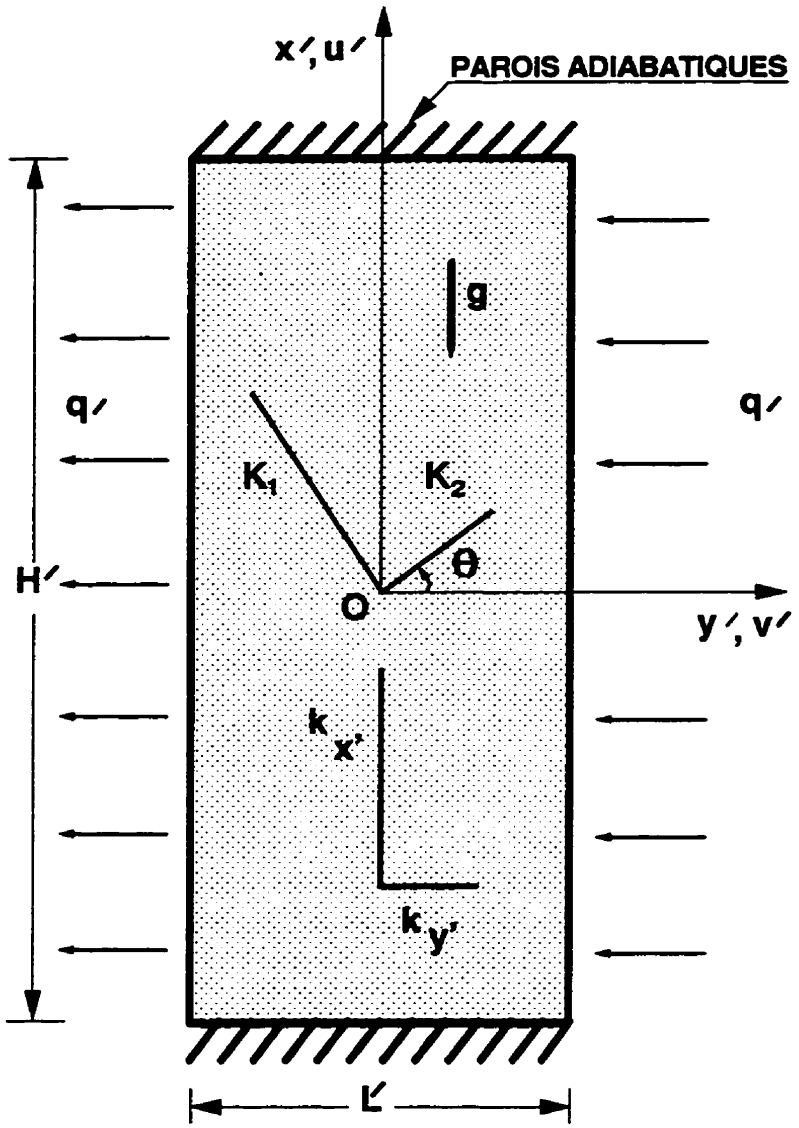


Figure 5.1: Modèle physique et système de coordonnées.

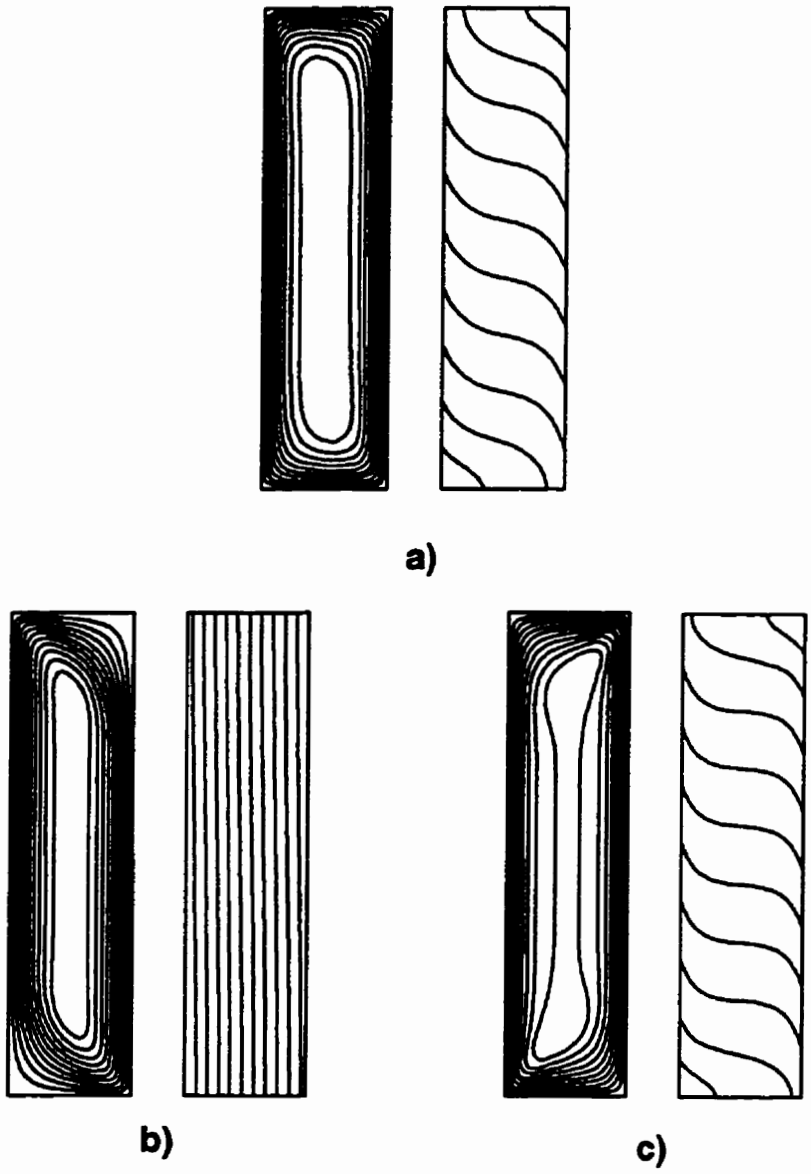


Figure 5.2: Lignes de courant et isothermes pour $R = 100$, $\theta = 45^o$, $k^* = 1$ et a) $K^* = 1$, $\psi_C = 2.328$, $T_{max} = 1.038$, $T_{min} = -1.038$; b) $K^* = 10^3$, $\psi_C = 0.025$, $T_{max} = 0.528$, $T_{min} = -0.528$; c) $K^* = 10^{-3}$, $\psi_C = 2.816$, $T_{max} = 0.913$, $T_{min} = -0.913$.

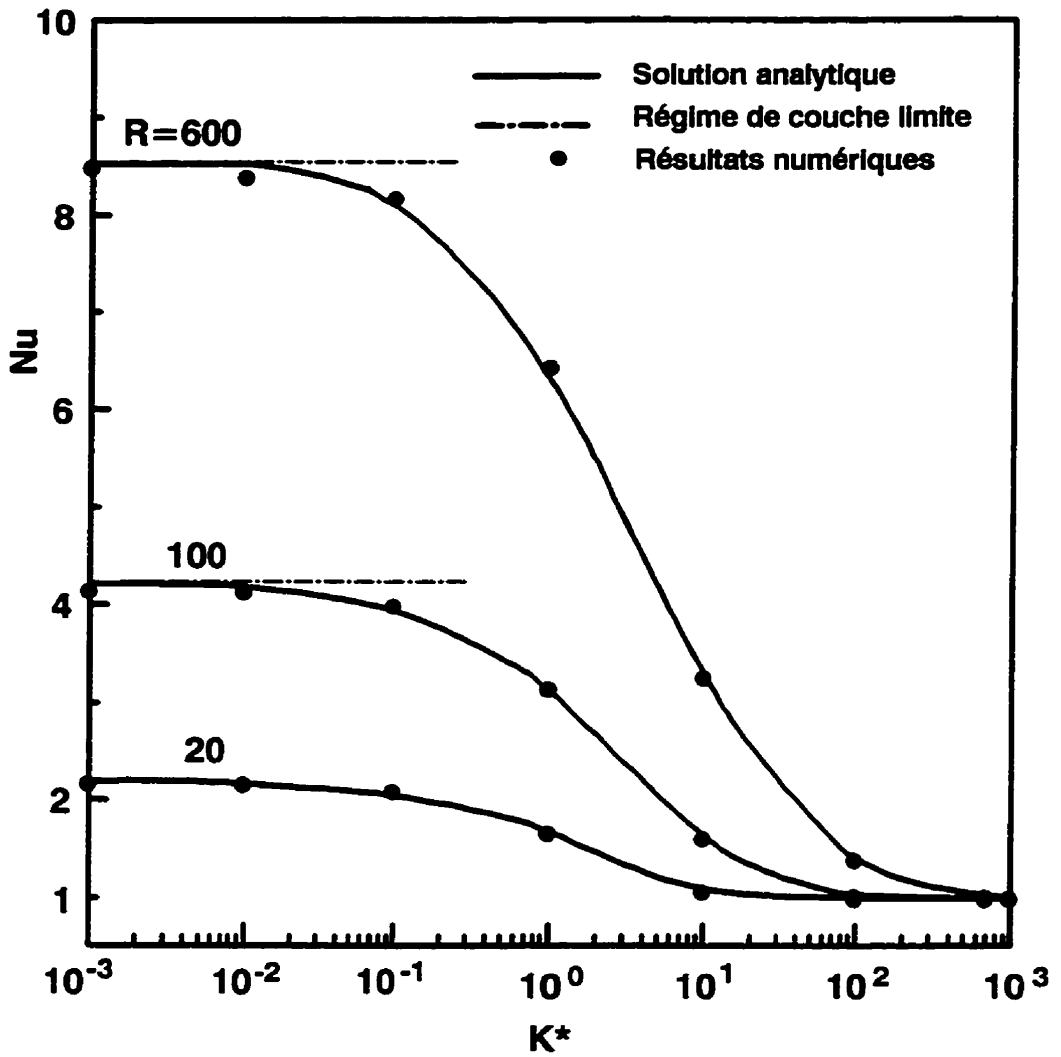


Figure 5.3: a) Effet du rapport d'anisotropie K^* sur le nombre de Nusselt pour $\theta = 45°$, $k^* = 1$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

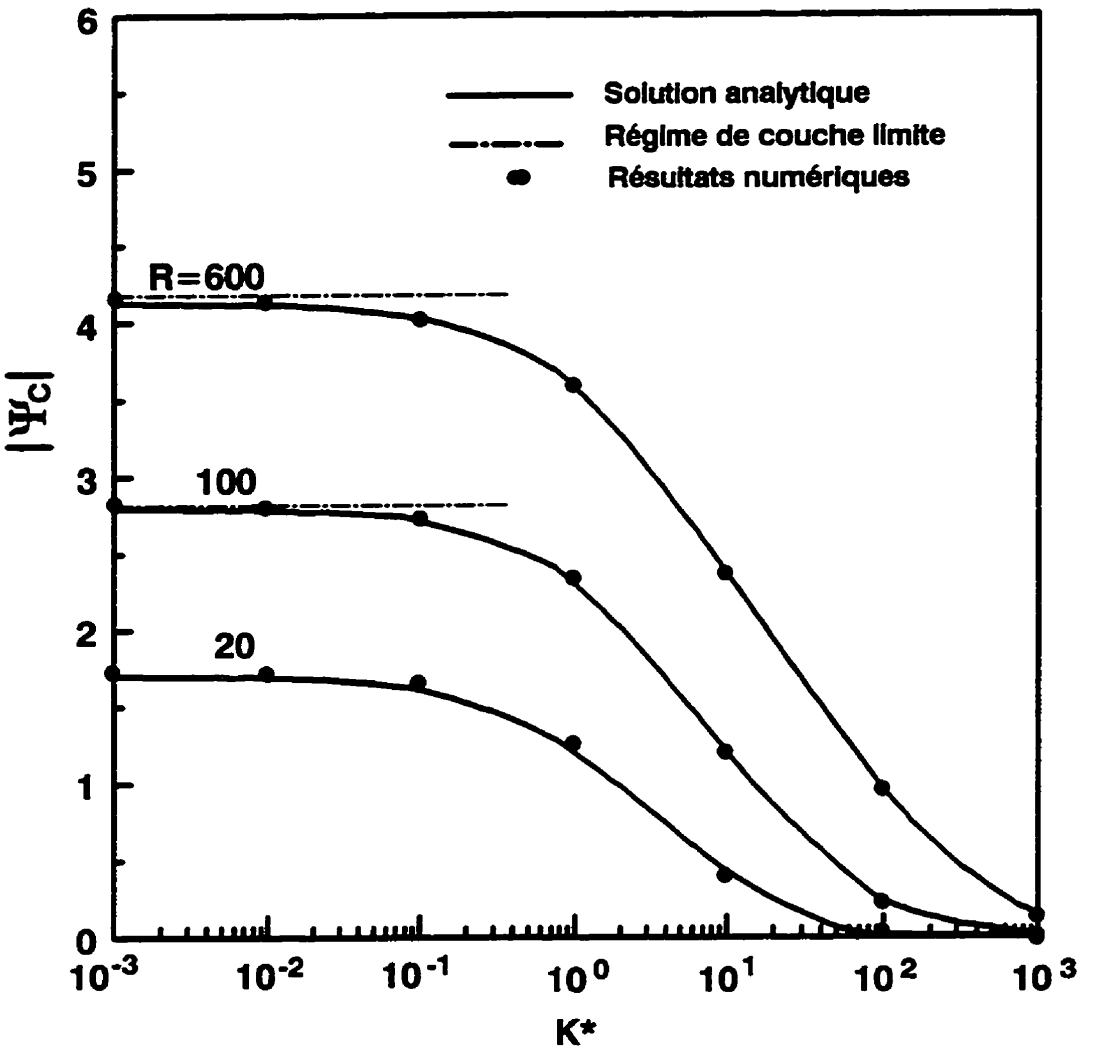


Figure 5.3: b) Effet du rapport d'anisotropie K^* sur la fonction de courant au centre de la cavité pour $\theta = 45^o$, $k^* = 1$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

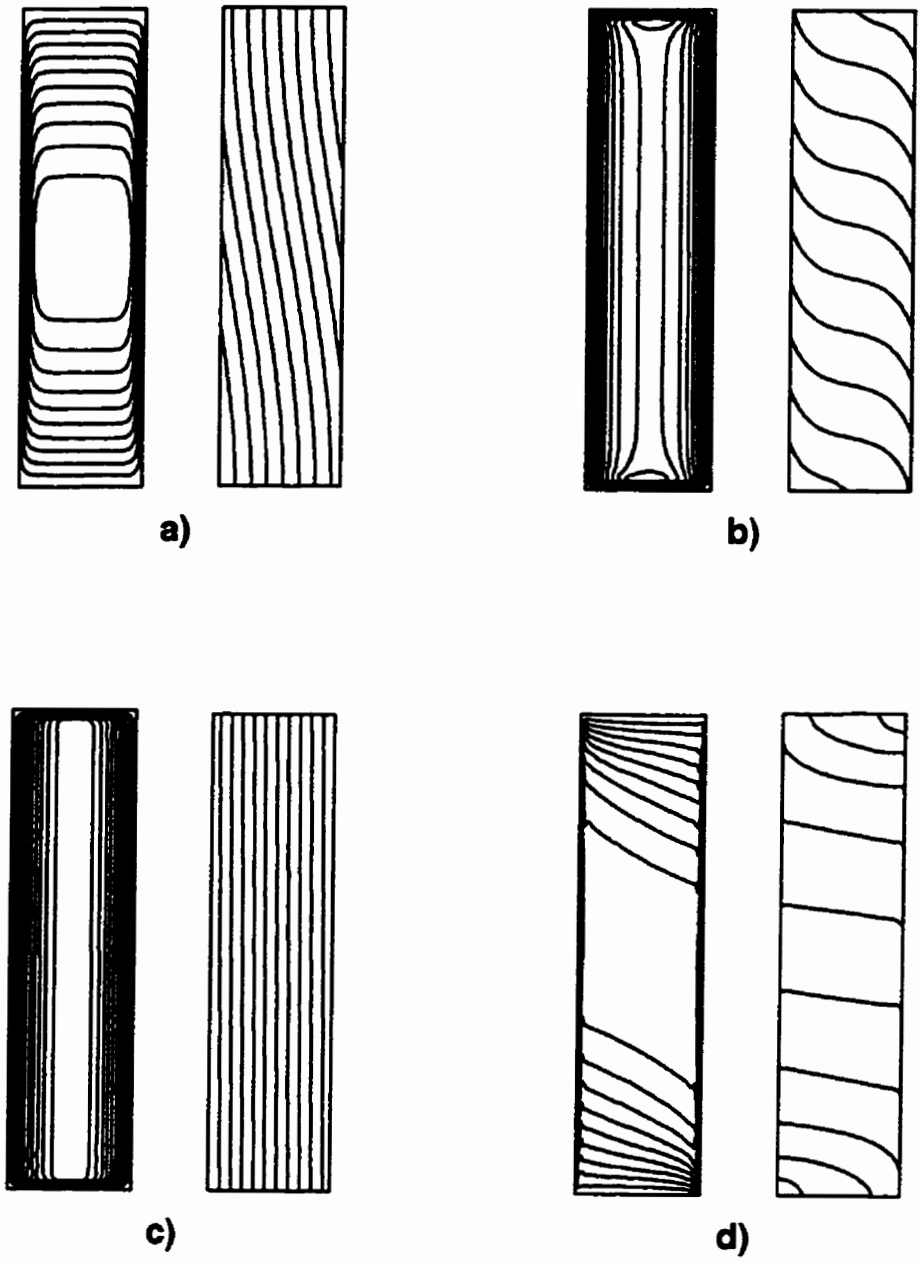


Figure 5.4: Lignes de courant et isothermes pour $R = 100$, $k^* = 1$ et a) $\theta = 0^o$, $K^* = 10^3$, $\psi_C = 0.195$, $T_{max} = 0.724$, $T_{min} = -0.724$; b) $\theta = 0^o$, $K^* = 10^{-3}$, $\psi_C = 2.330$, $T_{max} = 0.964$, $T_{min} = -0.964$; c) $\theta = 90^o$, $K^* = 10^3$, $\psi_C = 0.012$, $T_{max} = 0.515$, $T_{min} = -0.515$; d) $\theta = 90^o$, $K^* = 10^{-3}$, $\psi_C = 6.543$, $T_{max} = 0.589$, $T_{min} = -0.653$.

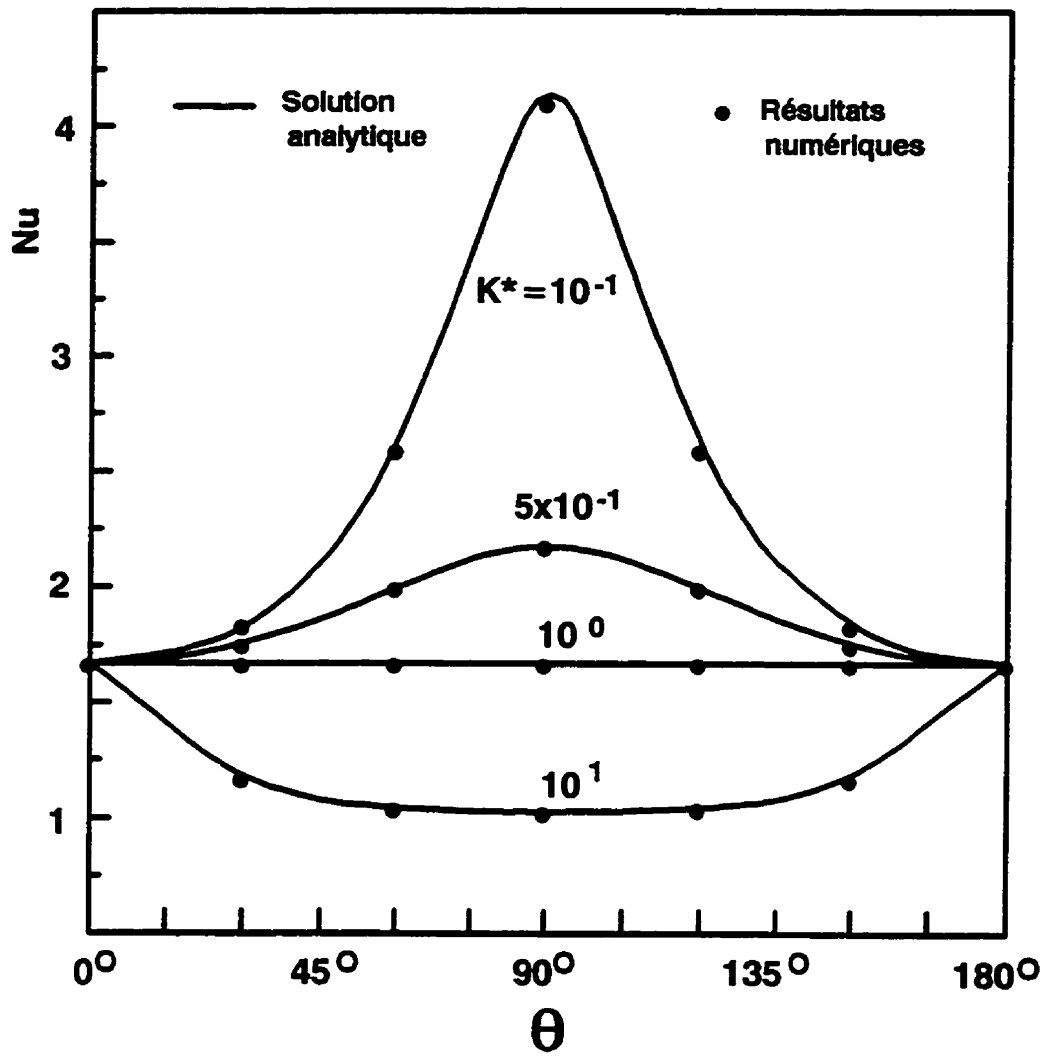


Figure 5.5: a) Effet de l'angle d'orientation θ de l'anisotropie en perméabilité sur le nombre de Nusselt pour $R = 20$, $k^* = 1$ et pour différentes valeurs de K^*.

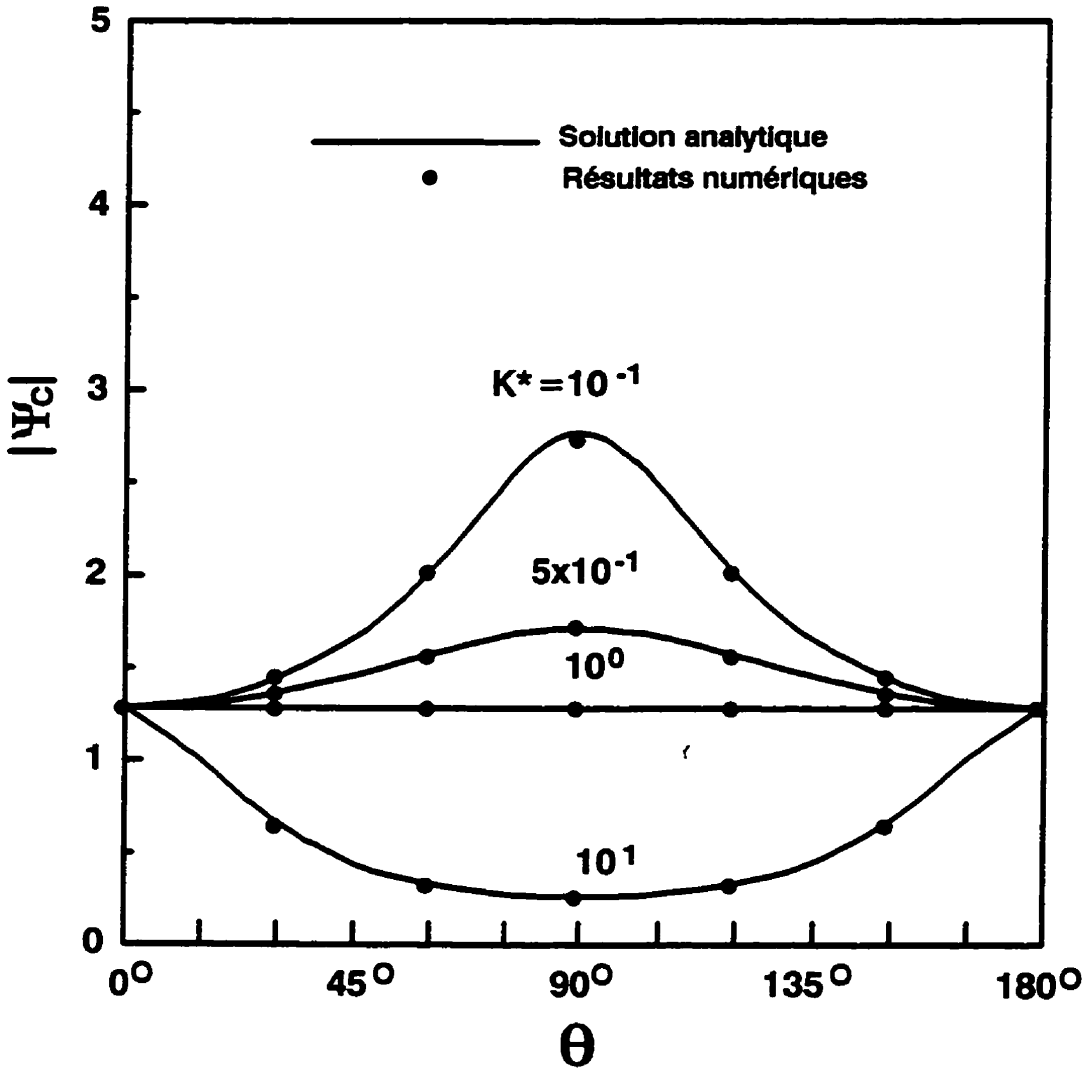


Figure 5.5: b) Effet de l'angle d'orientation θ de l'anisotropie en perméabilité sur la fonction de courant au centre de la cavité pour $R = 20$, $k^* = 1$ et pour différentes valeurs de K^*.

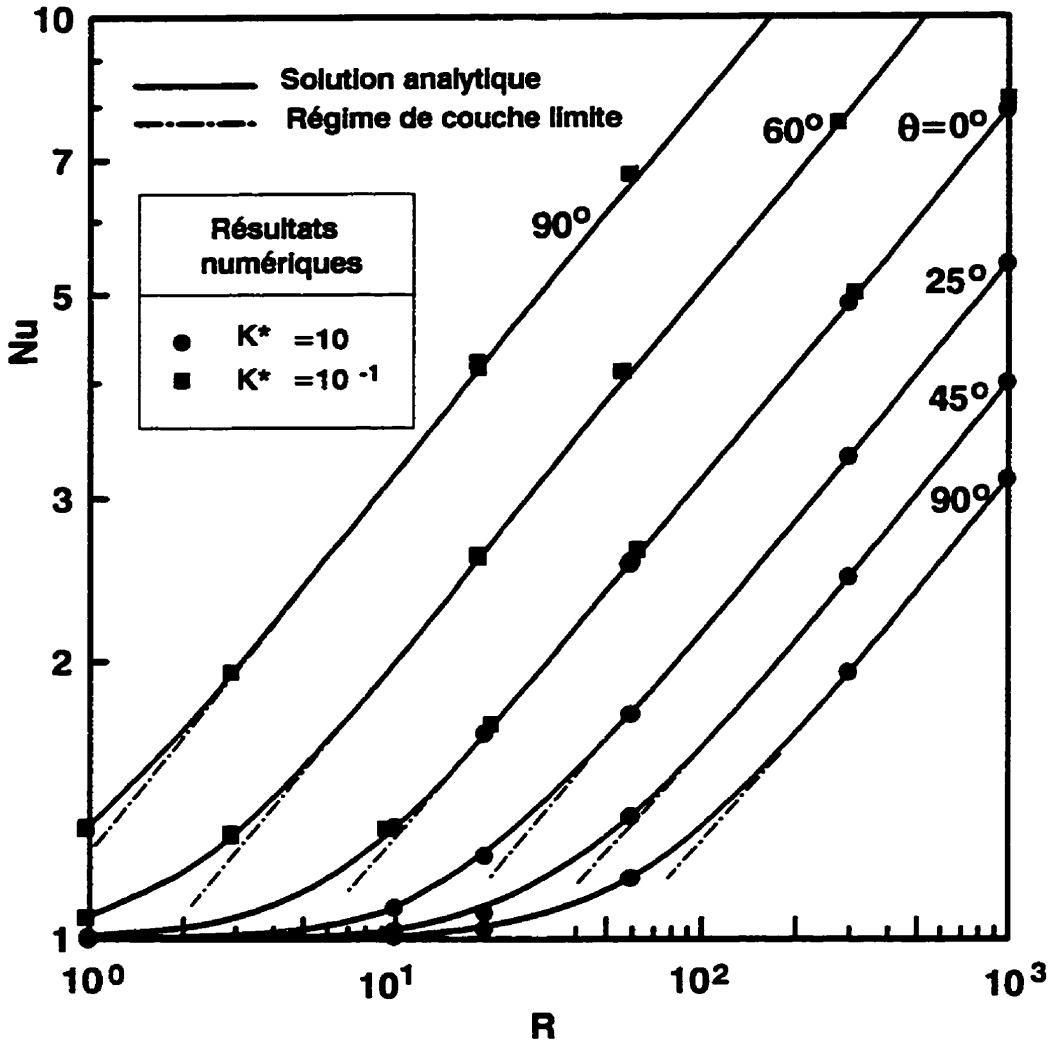


Figure 5.6: Effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt pour $k^* = 1$, $K^* = 0.1$ et 10 et pour différentes valeurs de l'angle d'orientation de l'anisotropie en perméabilité.

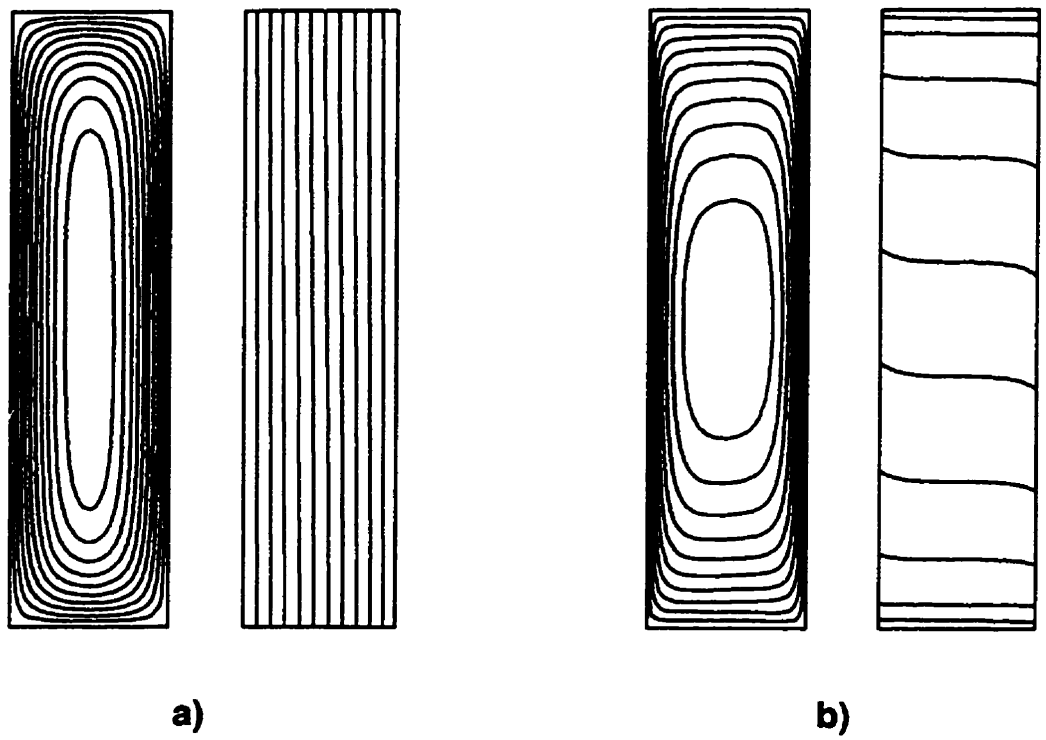


Figure 5.7: Lignes de courant et isothermes pour $R = 100$, $K^* = 1$, $\theta = 0^o$ et a) $k^* = 10^3$, $\psi_C = 11.598$, $T_{max} = 0.477$, $T_{min} = -0477$; b) $k^* = 10^{-3}$, $\psi_C = 0.901$, $T_{max} = 4.476$, $T_{min} = -4.476$.

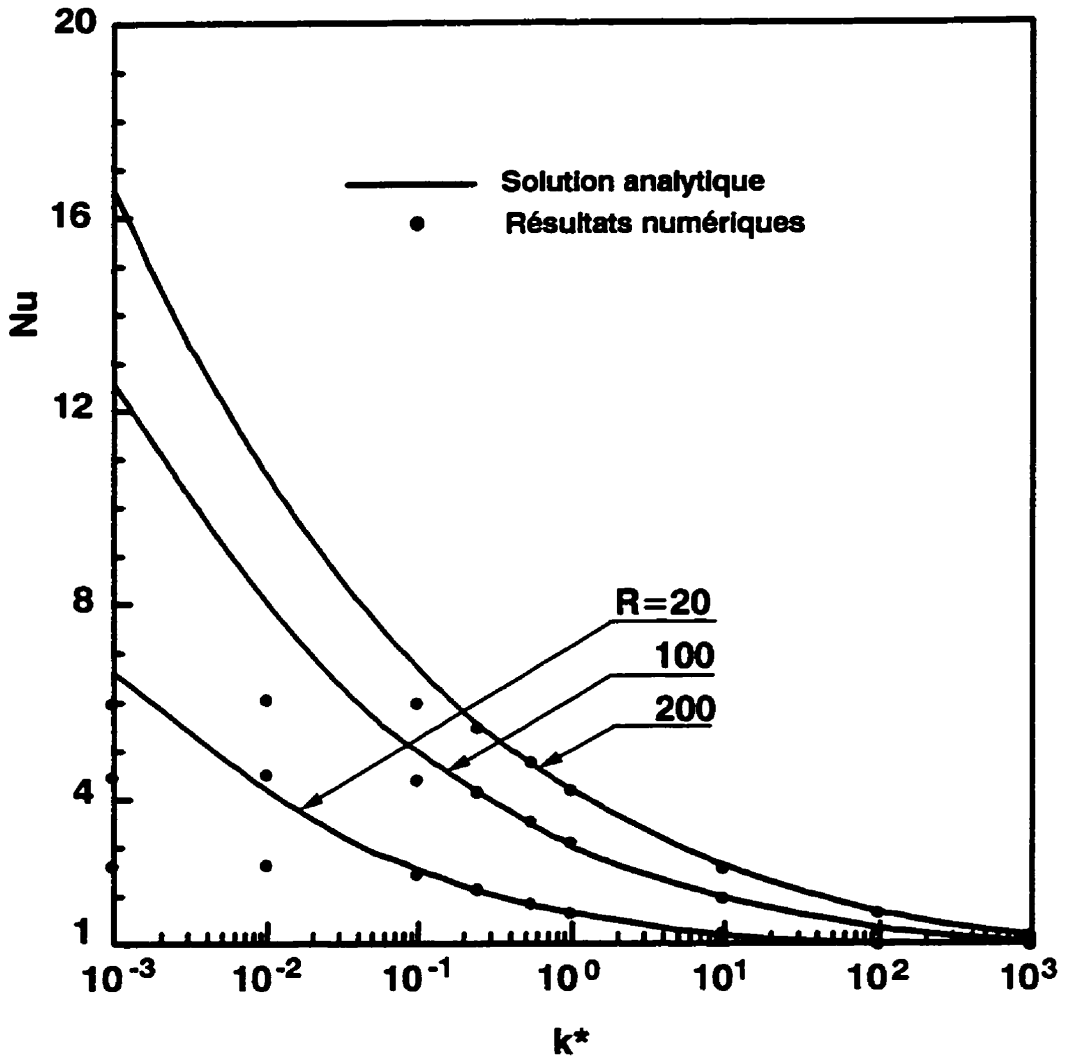


Figure 5.8: a) Effet du rapport d'anisotropie en conductivité thermique k^* sur le nombre de Nusselt pour $K^* = 1$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

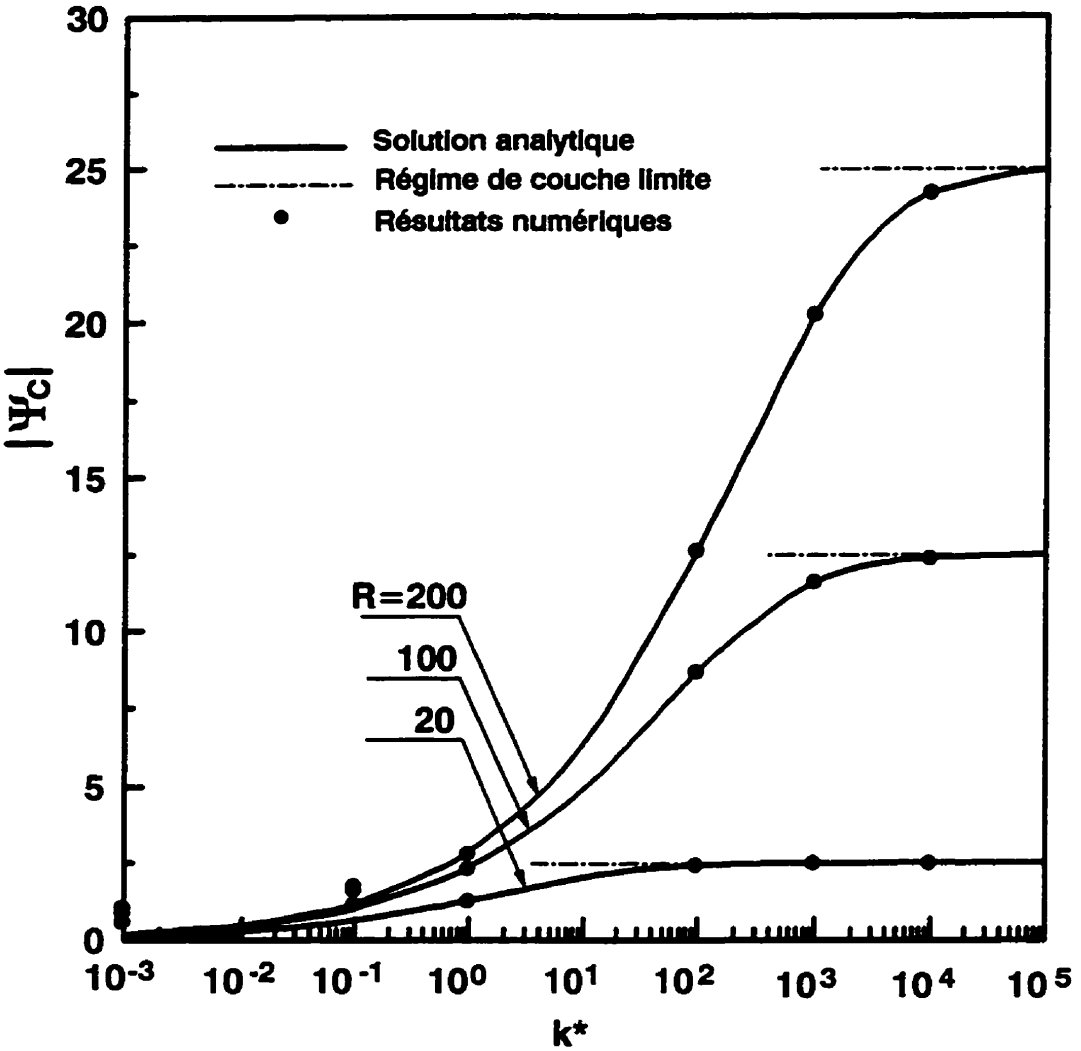


Figure 5.8: b) Effet du rapport d'anisotropie en conductivité thermique k^* sur la fonction de courant au centre de la cavité pour $K^* = 1$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Chapitre 6

Convection naturelle dans une cavité poreuse anisotrope: modèle de Brinkman

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, la convection naturelle en milieu poreux anisotrope et saturé par un fluide incompressible, a été modelisée en utilisant la *loi de Darcy*. La raison de l'utilisation intensive de la formulation de Darcy est due à sa simplicité. En effet, cette dernière donne lieu à une forme linéarisée de l'équation de mouvement du fluide saturant la matrice solide du milieu poreux, laquelle forme facilitant la résolution des équations fondamentales qui régissent le problème physique. Cependant, la loi de Darcy ne permet pas de satisfaire la condition de non-glissement à l'interface du milieu poreux et d'une frontière solide. L'extension de la loi de Darcy proposée par Brinkman comble cette lacune par l'ajout d'un terme visqueux.

Dans la littérature, les études dans lesquelles le modèle de Brinkman est utilisé, concernent seulement le milieu poreux isotrope. *Chan et al* (1970) ont considéré le modèle de Brinkman pour étudier la convection naturelle dans une cavité poreuse rectangulaire chauffée différentiellement dans la direction horizontale. Lorsque le nombre de Darcy basé sur la largeur de la cavité est inférieur à 10^{-3}, ceux-ci ont

observé que les résultats obtenus sont qualitativement similaires à ceux correspondant à la loi de Darcy. *Tong et Subramanian* (1985) se sont servi de l'équation de Brinkman pour investiguer par la méthode d'Oseen la convection naturelle en régime de couche limite dans une cavité verticale chauffée isothermiquement par les côtés. En basant les nombres de Rayleigh (Ra) et de Darcy (Da) sur la hauteur de la cavité, ils ont trouvé que le champ d'écoulement est gouverné par le paramètre $E = Ra\ Da\ A$ où A désigne le rapport de forme de la cavité. Excepté dans une mince région proche de la paroi, lorsque $E \rightarrow 0$, l'écoulement est semblable à celui donné par l'analyse de la loi de Darcy. A partir des résultats sur le nombre de Nusselt, ces auteurs ont montré que le régime de Darcy n'est valide que lorsque $E < 10^{-4}$. Une vérification numérique de la solution obtenue par *Tong et Subramanian* (1985) a été effectuée par *Lauriat et Prasad* (1987). Ces derniers ont montré que, en raison de la présence des forces visqueuses qui retardent l'écoulement convectif, le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation du nombre de Darcy, pour une valeur fixée du nombre de Rayleigh. Cette décroissance devient très prononcée à des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh. Des résultats similaires ont été obtenus analytiquement et numériquement par *Vasseur et Robillard* (1987) pour le cas d'une cavité verticale chauffée ou refroidie latéralement par des flux de chaleur uniformes. *Sen* (1987) a considéré le modèle de Brinkman dans l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale. Celui-ci a démontré que le modèle de Brinkman et la loi de Darcy donnent virtuellement les mêmes résultats pour le taux de transfert de chaleur lorsque le nombre de Darcy basé sur la profondeur de la cavité est inférieur à 10^{-4}. De plus, il a conclu que pour des valeurs élevées du nombre de Darcy, le nombre de Nusselt résultant était significativement plus faible que la valeur prédite par la loi de Darcy à un nombre de Rayleigh donné. Donc, la loi de Darcy est une bonne approximation du modèle d'écoulement en milieux à faibles porosités pour lesquels le nombre

de Darcy est approximativement inférieur à 10^{-4}. Cependant, pour des nombres élevés de Da, le modèle de Brinkman peut être utilisé dans la formulation de la loi du comportement de l'écoulement, en raison du fait que la résistance à l'inertie devient comparable à celle due à la viscosité intervenant dans la loi de Darcy.

Compte tenu des considérations précédentes, aucune étude portant sur l'influence du modèle de Brinkman en milieu poreux anisotrope n'existe. La motivation de la présente investigation dans ce chapitre est d'étudier les effets visqueux de l'écoulement sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité verticale confinant un milieu poreux anisotrope en perméabilité. Une solution analytique de type couche limite sera développée sur la base de la technique d'Oseen. De même, les équations gouvernantes complètes seront résolues numériquement pour vérifier la validité de la solution analytique. Les effets des différents paramètres de contrôle seront analysés.

6.2 Formulation du problème

Le modèle physique représenté à la figure 6.1 est constitué d'une couche poreuse verticale et rectangulaire de hauteur H' et de profondeur L'. Ses deux extrémités sont isolées thermiquement tandis qu'un flux de chaleur uniforme q' est appliqué le long des deux parois verticales. Le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope.

Dans ce cas, les équations adimensionnées (2.23) et (2.24) expriment les lois de conservation traduisant le comportement intrinsèque du phénomène physique en cause. En adoptant dans cette étude L' comme longueur caractéristique de la couche poreuse, le nombre de Rayleigh est donné par la relation (4.1) avec $\Delta T' = q'L'/k$ et le nombre de Darcy par l'expression $Da = K_1/L'^2$.

Les conditions aux frontières considérées dans la situation présente et venant compléter les équations gouvernantes précitées sont les suivantes:

- Frontières horizontales:

$$x = \pm A/2 : \qquad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad (6.1)$$

- Frontières verticales:

$$y = 0, 1 : \qquad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 1 \qquad (6.2)$$

Nous pouvons déduire de l'observation du système formé par les équations (2.24) et (2.25) et des conditions aux limites (6.1) et (6.2) que le présent problème physique est gouverné par cinq paramètres adimensionnelles, à savoir R, Da, θ, K^* et A.

Le taux de transfert de chaleur à travers le système, exprimé par le nombre de Nusselt à la paroi $y = 0$, est défini par l'équation (5.35) où $k_{y'} = k$, le milieu poreux étant ici isotrope en conductivité thermique.

6.3 Solution numérique

La méthode de résolution numérique reste identique à celle utilisée dans les études précédentes. Les données de l'exécution du programme informatique sont également identiques à celles rapportées au chapitre précédent.

La figure 6.2 illustre les lignes de courant et les isothermes typiques obtenues numériquement pour $R = 500$, $A = 1$ (pour le cas d'une cavitée carrée) et pour différentes valeurs de Da, K^* et θ. Les figures 6.2*a*, 6.2*c* et 6.2*e* illustrent les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et de l'angle d'orientation

θ des axes principaux sur les modèles de lignes de courant et d'isothermes lorsque $Da = 10^{-5}$, c'est-à-dire lorsque le nombre de Darcy est relativement faible. Pour cette situation, toutes les conclusions tirées au chapitre précédent sont valables. Par conséquent, les résultats obtenus dans ce cas sont qualitativement similaires à ceux rapportés par *Ni et Beckermann* (1991), *Dègan et al.* (1995a, 1995b) et *Dègan et Vasseur* (1996a) en considérant le modèle de Darcy, c'est-à-dire les milieux à faibles porosités. Nous devrions nous attendre à de tels résultats, puisque lorsque Da est assez faible, les termes visqueux qui sont responsables des effets pariétaux, sont négligeamment faibles et la loi de Darcy décrit correctement le comportement intrinsèque de l'écoulement. Cependant, pour les milieux à grandes porosités comme les mousses métallisées et les substances fibreuses, l'effet pariétal peut devenir important et l'extension faite par Brinkman de la loi de Darcy doit être utilisée. En conséquence, en augmentant le nombre de Darcy de $Da = 10^{-5}$ à $Da = 10^{-3}$, les champs d'écoulement résultants sur les figures 6.2*b*, 6.2*d* et 6.2*f* se trouvent considérablement modifiés (à l'exception des figures 2*c* et 2*d* obtenues pour le cas où $K = 10^2$, pour lequel la convection est d'autant plus faible que l'effet de Da est négligeable) . En particulier, nous observons que les lignes de courant s'éloignent distinctement des parois solides au fur et à mesure que la valeur de Da augmente. Ceci est prévisible puisque le terme visqueux (de Brinkman) devient important et ralentit l'écoulement au voisinage des parois. De même, les effets des propriétés anisotropes du milieu poreux deviennent visiblement moins significatifs. Cette observation vient du fait que, lorsque le nombre de Da croît, la résistance due aux frottements au voisinage des parois devient plus prononcée et vient s'ajouter à la résistance à la friction moyenne induite par la matrice solide pour ralentir le mouvement convectif. Par conséquent, l'influence de l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux devient graduellement moins importante. Ainsi, lorsque $Da = 10$, le modèle d'écoulement illustré à la figure 6.2*g* correspond

approximativement au cas d'un fluide visqueux pur pour lequel l'anisotropie du milieu poreux en question est hors de propos.

6.4 Solution analytique approchée

Dans cette section, une solution analytique approchée sera présentée pour le cas de la convection à des nombres de Rayleigh élevés.

6.4.1 Analyse d'échelle

Pour les deux cas limites comprenant les milieux à porosités faibles ($Da \rightarrow 0$) d'une part et les milieux à porosités élevées ($Da \rightarrow \infty$) d'autre part, il est possible d'estimer les approximations des ordres de grandeur des paramètres caractéristiques de l'écoulement convectif.

6.4.1.1 $Da \ll 1$: *La limite de milieux à faibles porosités*

Dans cette situation, conformément aux résultats numériques de la figure 6.2, les effets de l'anisotropie (à savoir les termes du premier membre de l'équation (2.23)) sont prédominants. Un équilibre entre ceux-ci et le terme de poussée requiert l'approximation (5.4).

En outre, le gradient thermique vertical C, en se référant à l'équation (5.9) est approximé par:

$$C \sim \delta u \, \delta T \, \delta y \tag{6.1}$$

La résolution des équations (5.3), (5.4) et (6.3) entraîne:

$$\left.\begin{aligned} \delta u &\sim \left(\frac{R}{a}\right)^{3/5} \\ \delta y = \delta T &\sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-2/5} \\ C &\sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-1/5} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

tandis que l'ordre de grandeur du nombre de Nusselt est donné par:

$$Nu \sim R^{2/5}\, a^{-2/5} \tag{6.3}$$

Des résultats similaires ont été obtenus par *Dègan et al.* (1995a, 1995b) en considérant le présent problème sur la base du modèle de Darcy.

6.4.1.2 $Da \gg 1$: *La limite de milieux à grandes porosités*

Dans ce cas, les effets visqueux sont prédominants et un équilibre entre le terme de poussée et les termes visqueux de l'équation (2.23) entraîne:

$$R\,\frac{\delta T}{\delta y} \sim Da\,\frac{\delta u}{\delta y^3} \tag{6.4}$$

de sorte que la résolution des équations (5.3), (5.4), (6.3) et (6.6) donne:

$$\left.\begin{aligned} \delta u &\sim Ra^{3/9} & \delta y = \delta T &\sim Ra^{-2/9} \\ C &\sim Ra^{-1/9} & Nu &\sim Ra^{2/9} \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Les ordres de grandeur ci-dessus s'accordent bien avec la solution analytique prédite par *Kimura et Bejan* (1984) dans le cas d'une cavité verticale confinant un

fluide et chauffée latéralement par des flux de chaleur constants.

6.4.2 Solution en régime de couche limite

Dans cette partie, les expressions des champs de vitesse et de température valides en régime de couche limite ($R \rightarrow \infty$) seront déterminées. En faisant les simplifications usuelles en régime de couche limite, les équations gouvernantes à résoudre analytiquement sont:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.6}$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} = Da \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + R \frac{\partial T}{\partial y} \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \tag{6.8}$$

Les conditions aux limites adimensionnées correspondant à la couche limite au voisinage de la paroi verticale gauche sont:

$$y = 0: \qquad u = v = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 1 \tag{6.9}$$

$$y \rightarrow \infty: \qquad \begin{cases} u \rightarrow 0 \\ T \rightarrow T_\infty(x) \\ v \rightarrow v_\infty(x) \end{cases} \tag{6.10}$$

En tenant compte des relations d'ordre de grandeur obtenues pour le cas de milieux à porosités faibles, les conditions d'existence (2.25) et (2.26) du régime de couche limite deviennent:

$$b \ll A^2 \, a^{1/5} \, R^{4/5} \tag{6.11}$$

et

$$c \ll A \, a^{3/5} \, R^{2/5} \tag{6.12}$$

relations qui ne sont pas trop restrictives puisque le nombre de Rayleigh R en régime de couche limite est très élevé.

Le système d'équations non linéaires (6.8)-(6.12) est semblable à celui résolu dans le passé en situation isotrope par *Vasseur et Robillard* (1987) qui ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier la convection naturelle en régime de couche limite dans une cavité poreuse rectangulaire, chauffée latéralement par un flux de chaleur constant. La procédure de calcul analytique qui sera suivie ici est identique à celle adoptée dans ladite étude. Cette procédure de calcul est basée sur la technique développée par *Gill* (1966) qui a modifié la méthode de linéarisation d'Oseen pour résoudre les équations gouvernantes en régime de couche limite dans le cas de la convection naturelle au sein d'un milieu fluide newtonien confiné dans un espace rectangulaire clos.

Comme dans l'analyse de *Gill* (1966), nous posons:

$$T(x,y) = \xi(x,y) + T_\infty(x) \tag{6.13}$$

$$\psi(x,y) = \eta(x,y) + \psi_\infty(x) \tag{6.14}$$

où (ξ, η) représente une perturbation de la solution à $y \to \infty$, et donc satisfait les conditions suivantes:

$$\xi, \quad \eta \quad \to \quad 0 \qquad \text{lorsque} \qquad y \to \infty \tag{6.15}$$

En substituant l'expression dérivée de l'équation (6.15) par rapport à y dans les équations de mouvement (6.9) et d'énergie (6.10), il vient:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{a}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{Da}{R}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \tag{6.17}$$

La méthode d'Oseen est basée sur l'observation que, à chaque position $x =$ *constante* dans la direction verticale, les quantités v et $\partial T/\partial x$ apparaissant dans les termes convectifs varient à travers les couches limites verticales de 0 (le long des parois) aux valeurs respectives v_∞ et $\partial T_\infty/\partial x$ (dans la région centrale de la couche poreuse). Comme approximation, v et $\partial T/\partial x$ seront remplacées, à chaque altitude $x =$ *constante*, par des valeurs moyennes $v_A(x)$ et $\partial T_A/\partial x$ présumément comprises respectivement entre 0 (aux parois) et les valeurs $v_\infty(x)$ et $\partial v_\infty/\partial x$ relatives à la région centrale (à l'extérieur des couches limites verticales). Par symétrie, les fonctions $v_A(x)$ et $\partial T_A/\partial x$ sont respectivement paire et impaire.

Compte tenu de l'approximation précitée, l'élimination de ξ entre les relations (6.18) et (6.19) donne l'équation suivante:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - v_A\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{a}{Da}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a}{Da}v_A\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{R}{Da}u\frac{\partial T_A}{\partial x} = 0 \tag{6.18}$$

La solution générale de l'équation (6.20) s'écrit sous la forme:

$$u = \sum_{n=1}^{4} a_n(x)\ e^{-\lambda_n(x)\ y} \tag{6.19}$$

où les fonctions λ_n sont les racines de l'équation caractéristique suivante:

$$\left(\lambda^3 - \frac{a}{Da}\lambda\right)(\lambda + v_A(x)) + \frac{R}{Da}\frac{\partial T_A}{\partial x} = 0 \tag{6.20}$$

Utilisant les conditions aux limites (6.12), nous trouvons ci-après les expressions de u et de T:

$$u = \frac{R\ \left(e^{-\lambda_1\ y} - e^{-\lambda_2\ y}\right)}{Da(\lambda_1^3 - \lambda_2^3) - a(\lambda_1 - \lambda_2)} \tag{6.21}$$

$$T = -\frac{Da\left(\lambda_1^2\ e^{-\lambda_1\ y} - \lambda_2^2\ e^{-\lambda_2\ y}\right)}{Da(\lambda_1^3 - \lambda_2^3) - a(\lambda_1 - \lambda_2)} + a\frac{u}{R} + T_\infty \tag{6.22}$$

où λ_1 et λ_2, fonctions inconnues de x, sont des nombres complexes ayant comme parties réelles positives celles de l'équation (6.22).

Pour déterminer les inconnues $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$, nous utiliserons les expressions liant les valeurs moyennes v_A et $\partial T_A/\partial x$ d'une part aux paramètres v_∞ et $\partial T_\infty/\partial x$ d'autre part, en écrivant les formes intégrales des équations de conservation de masse et d'énergie et en évoquant les propriétés centro-symétriques du phénomène physique. Ainsi, l'intégration de l'équation de conservation de masse (6.8) donne, en tenant compte de l'expression (6.23):

$$\psi_\infty = -\int_0^\infty u\ dy = \frac{R\ (\lambda_1 - \lambda_2)}{[Da\ (\lambda_1^3 - \lambda_2^3) - a(\lambda_1 - \lambda_2)]\ \lambda_1\lambda_2} \tag{6.23}$$

Aussi, l'intégration de l'équation d'énergie (6.19) donne, en utilisant les expressions (6.23) et (6.24), la relation différentielle suivante:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi_\infty^2}{2\,R}\,\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(Da\;\lambda_1\lambda_2)+a)\right] \;-\; \psi_\infty\,\frac{\partial T_\infty}{\partial x} \;=\; -1 \qquad (6.24)$$

Puisque les expressions (6.25) et (6.26) ne dépendent ni exclusivement de λ_1, ni exclusivement de λ_2, les seuls invariants apparents à considérer sont:

$$\tau \;=\; \lambda_1+\lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \chi \;=\; \lambda_1\,\lambda_2 \qquad (6.25)$$

Ces invariants sont liés à v_A et $\partial T_A/\partial x$ par l'expression (6.22); cette liaison est relativement simple, en raison du fait que v_A et T_A sont des fonctions impaires de x. Donc, en faisant la transformation $x \rightarrow -x$, $\lambda \rightarrow -\lambda$, l'équation (6.22) est invariante et les quatre racines sont respectivement $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $-\lambda_1(-x)$ et $-\lambda_2(-x)$.

L'identification des termes correspondants de l'équation (6.22) avec ceux de l'équation suivante:

$$(\lambda-\lambda_1(x))\;(\lambda-\lambda_2(x))\;(\lambda+\lambda_1(x))\;(\lambda+\lambda_2(x)) \;=\; 0 \qquad (6.26)$$

donne:

$$\left.\begin{aligned}
\tau(-x)-\tau(x) &= v_A\\
\chi(x)+\chi(-x)-\tau(x)\tau(-x) &= -\frac{a}{Da}\\
\tau(x)\chi(-x)-\tau(-x)\chi(x) &= -\frac{a}{Da}\,v_A\\
\chi(x)\chi(-x) &= \frac{R}{Da}\frac{\partial T_A}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

En utilisant les propriétés centro-symétriques de l'écoulement convectif, nous notons que v_∞, T_∞, v_A et T_A sont toutes des fonctions impaires de x. Pour faire usage pleinement de ces propriétés de symétrie centrale par rapport à $(x = 0, y = 1/2)$, les invariants τ et χ seront exprimés en fonction de deux autres fonctions p et q appelées *fonctions de Gill*, respectivement paire et impaire et définies par:

$$p = \chi(-x) + \chi(x) \tag{6.28}$$

$$q = \frac{v_A}{p} \tag{6.29}$$

L'élimination de $\tau(-x)$ et de $\chi(-x)$ entre les équations du système (6.29) et les relations (6.30) et (6.31) conduit aux expressions suivantes:

$$\tau(x) = \frac{p}{2}(1-q) \tag{6.30}$$

$$\chi(x) = \frac{a}{2\,Da}(3q-1) + \frac{p^2}{8}(1-q)^2(1+q) \tag{6.31}$$

Connaissant donc la somme $\tau(x)$ et le produit $\chi(x)$ des fonctions $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$, ces dernières sont solutions de l'équation du second degré suivante:

$$\lambda^2 - \tau(x)\,\lambda + \chi(x) = 0 \tag{6.32}$$

La résolution de l'équation (6.34) donne, en fonction de p et de q, les expressions des racines cherchées λ_1 et λ_2, soit:

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{4}(1-q)\left[1 \pm \sqrt{\frac{8a}{Da}\frac{(1-3q)}{p^2(1-q)^2} - (1+2q)}\,\right] \tag{6.33}$$

En substituant l'expression (6.35) dans les relations intégrales (6.25) et (6.26) précédentes dont la dérivation constitue l'essence même de la présente analyse, nous obtenons respectivement:

$$\psi_\infty = R\left\{\left[\frac{Da}{8}p^2(1-q)^2\left(\frac{4a}{Da}\frac{(1-3q)}{p^2(1-q)^2}+(1-q)\right)-a\right].\right.$$
$$\left.\left[\frac{a}{2Da}(3q-1)+\frac{p^2}{8}(1-q)^2(1+q)\right]\right\}^{-1} \tag{6.34}$$

et

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi_\infty^2}{2\,R}\frac{2}{p(1-q)}\left(\frac{a}{2\,Da}(3q-1)+\frac{p^2}{8}(1-q)^2(1+q)\right).\right.$$
$$\left.\left(\frac{a}{2}(3q-1)+\frac{Da\,p^2}{8}(1-q)^2(1+q)+a\right)\right]-\psi_\infty\frac{\partial T_\infty}{\partial x}=-1 \tag{6.35}$$

L'étude de parité de chacun des termes intervenant dans les équations (6.36) et (6.37), compte tenu des considérations précédentes, amène à conclure que, pour que ψ_∞ et le premier membre de l'équation (6.37) soient des fonctions paires de x, il faut et il suffit que l'on ait simultanément:

$$\left.\begin{aligned} q &= 0 \\ p &= \text{constante} \\ \partial T_\infty/\partial x &= \text{constante} \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Il résulte donc des conditions (6.38) que la solution au présent problème est donnée par:

$$u = -\frac{32}{B\,D}\,\frac{R}{p}\,e^{-py/4}\sinh\left(\frac{p\,D}{4}\,y\right) \tag{6.37}$$

$$T = -\frac{4}{D}\, Da\, p\, e^{-py/4} \cosh\left(\frac{p\, D}{4}\, y\right) + \frac{a\, u}{2\, R} + T_\infty \tag{6.38}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_\infty &= \frac{64\, Da\, R}{B^2} \\ T_\infty &= \frac{x}{\psi_\infty} \\ v_\infty &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

où

$$\left.\begin{aligned} B &= Da\, p^2 - 4\, a \\ D &= \sqrt{\left(\frac{8\, a}{Da\, p^2} - 1\right)} \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

Dans ces expressions, p est une constante inconnue. Pour déterminer cette inconnue, la solution sera complétée par l'équation de bilan énergétique (5.30) (où $k^* = 1$) intégrée sur un volume de contrôle entourant l'une quelconque des régions extrêmes de la couche poreuse (voir en Annexe). En tenant compte des équations (6.39)-(6.42), nous obtenons après manipulations algébriques l'équation transcendante suivante:

$$p = 8192\, R^2\, Da^2\, \frac{B - 8\, a}{B^5} \tag{6.41}$$

Cette équation est résolue numériquement par la méthode de la sécante.

La différence de température adimensionnelle pariétale est calculée par l'expression:

$$\Delta T = T_{y=1} - T_{y=0} = \frac{8\, Da\, p}{B} \tag{6.42}$$

Par conséquent, le nombre de Nusselt est calculé par la relation:

$$Nu = \frac{B}{8\,Da\,p} \tag{6.43}$$

6.5 Résultats et discussion

Les figures 6.3*a* et 6.3*b* montrent respectivement les profils de vitesse verticale et de température à mi-hauteur de la cavité ($x = A/2$) lorsque $R = 500$, $Da = 10^2$, $\theta = 90^o$ et pour différentes valeurs de K^*. Puisque les résultats sont antisymétriques par rapport à y, ces courbes sont seulement présentées pour $0 \leq y \leq 0.5$. La solution de l'analyse du régime de couche limite illustrée par des traits pleins continus est visiblement en accord avec les résultats numériques représentés par des cercles pleins. La figure 6.3*a* indique que la vitesse à la paroi est nulle car, avec le modèle de Brinkman, les forces visqueuses sont prises en compte et la condition d'adhérence ou de non-glissement à la paroi est satisfaite. La vitesse croît et atteint sa valeur maximale correspondant à $y_p = [4/(pB)]\tanh^{-1} B$. Dans la région centrale de la cavité, la vitesse tombe à zéro. En général, la figure 6.3*a* indique que l'intensité de l'écoulement est accentuée, par rapport à celle observée dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$), lorsque le facteur d'anisotropie en perméabilité K^* est beaucoup plus faible que l'unité, pour les mêmes raisons évoquées dans les études précédentes. Naturellement, la tendance inverse est observée lorsque K^* est supérieur à l'unité. Les effets de K^* sur les profils de température sont illustrés à la figure 6.3*b*. Toutes les courbes ont une pente constante à $y = 0$ car un flux de chaleur constant est appliqué sur les parois verticales. De même, nous notons que la température sur les parois de la cavité chute lorsque la valeur de K^* augmente. Nous pouvons conclure que, contrairement au cas de

parois isothermes, l'effet de la convection n'est pas d'augmenter le flux de chaleur à travers les frontières mais plutôt de diminuer la température induite dans la cavité lors du processus de chauffage. Pour cette raison, les profils de température chutent lorsque K^* devient plus faible, autrement dit, lorsque la convection est plus prononcée.

Les effets de l'angle d'inclinaison θ des axes principaux sur les profils de vitesse verticale et de température sont présentés sur les figures 6.4a et 6.4b lorsque $R = 500$, $Da = 10^{-3}$ et $K^* = 0.25$ (c'est-à-dire $K^* < 1$). Les résultats indiquent que la température est respectivement maximale et minimale pour $\theta = 0^o$ et 90°. Pour ($K^* > 1$), le résultat (non présenté ici) montre que dans ce cas la convection est maximale lorsque $\theta = 0^o$ et minimale lorsque $\theta = 90^o$. Il en est de même pour l'écoulement convectif.

Les effets du nombre de Darcy Da sur le présent problème vont être maintenant examinés. Etant donné que l'équation de Brinkman est réduite respectivement à la situation de Darcy pur (modèle de Darcy) lorsque $Da \rightarrow 0$ et à la situation de fluide pur (équation de Stokes) en l'absence des effets inertiels lorsque $Da \rightarrow \infty$, ces deux cas limites évoqués antérieurement seront d'abord examinés.

(1) $Da \ll 1$: *La situation du milieu de Darcy*

Lorsque $Da \rightarrow 0$, nous montrons que p donné par l'équation (6.43) est réduit à l'approximation $p \simeq 2((a/Da)^{1/2} + (R/a)^{2/5})$. En substituant cette estimation dans les équations (6.39)-(6.42) et (6.44), nous trouvons que les champs de vitesse et de température et le nombre de Nusselt sont donnés par:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\infty &= \left(\frac{R}{a}\right)^{1/5} \\ T_\infty &= \frac{x}{\psi_\infty} \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -\left(\frac{R}{a}\right)^{3/5} e^{-(R/a)^{2/5}\, y} \\ T &= -\left(\frac{R}{a}\right)^{-2/5} e^{-(R/a)^{2/5}\, y} + T_\infty \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

$$Nu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^{2/5} \tag{6.3}$$

relations qui sont consistantes avec celles prédites par l'analyse d'échelle précédente à travers les approximations (6.4) et (6.5).

(2) $Da \gg 1$: *La situation du milieu fluide visqueux*

Pour cette situation, la valeur de p est approximativement donnée par $p \simeq (8192\ Ra^2)^{1/9}$ (où $Ra = R/Da$). Par conséquent, nous trouvons que les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\infty &= \frac{64\ Ra}{p^4} \\ T_\infty &= \frac{x}{\psi_\infty} \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{32}{p^3}\, Ra\, e^{-py/4} \sin\left(\frac{p}{4}\, y\right) \\ T &= -\frac{4}{p}\, e^{-py/4} \cos\left(\frac{p}{4}\, y\right) + T_\infty \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$Nu = \frac{p}{8} \tag{6.6}$$

sont en accord avec les prédictions de l'équation (6.7).

En intégrant le profil de vitesse, l'équation (6.39) sur l'épaisseur de la couche limite, nous trouvons que le débit volumique résultant Q est donné par $Q = 64\ R\ Da/(Da\ p^2 - 4a)^2$. Similairement, les intégrations des équations (6.47) et (6.50) donnent $Q_D = R^{1/5}\ a^{-1/5}$ pour un milieu de Darcy pur et $Q_f = 1.167\ Ra^{1/9}$ pour un milieu fluide visqueux pur. A la figure 6.5, le débit volumique Q dans la couche limite est représenté comme une fonction de Da pour le cas $R = 500$, $\theta = 45^o$ et pour différentes valeurs de K^*. Les résultats indiquent, en comparaison avec la situation isotrope (où $K^* = 1$) que le débit volumique Q est accentué pour $K^* < 1$ et réduit pour $K^* > 1$. Comme précédemment discuté, la raison émane du comportement de K^* vis-à-vis de K_1 et de K_2 lorsque R est fixé. Aussi, la figure 6.5 indique que les débits volumiques prédits par le modèle de Darcy commencent à dévier du modèle de Brinkman à un nombre de Darcy qui est d'autant plus croissant que K^* est plus élevé. Par exemple, cette déviation est observable à $Da \simeq 10^{-4}$ pour $K^* = 0.25$ et à $Da \simeq 10^{-3}$ pour $K^* = 4$. Lorsque le nombre de Darcy est assez élevé, les résultats montrent que les courbes, pour une valeur donnée de K^*, tendent asymptotiquement vers la situation de fluide pur. Le nombre de Darcy requis pour atteindre cette limite croît lorsque la valeur de K^* est plus élevée.

Sur la figure 6.6, le nombre de Nusselt, donné par l'équation (6.45) est représenté en fonction de Da pour $R = 500$ et pour différentes valeurs de K^* et de θ. Un bon accord est observé entre la solution analytique et les résultats numériques. Il est clair, à partir de la figure 6.6, que lorsque Da est assez faible, Nu tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de K^* et de θ. Cette limite où $Da \rightarrow 0$ correspond à la situation d'un milieu de Darcy pur pour laquelle Nu est donné par l'équation (6.48). Donc, par exemple, $Nu = 6$ pour un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire $a = 1$). Dans la situation de Darcy pur, les effets de l'anisotropie du milieu poreux sur le transfert de chaleur sont significatifs.

Ainsi, pour $\theta = 90°$, le nombre de Nusselt Nu est égal à 10.4 lorsque $K^* = 0.25$ et égal à 3.5 lorsque $K^* = 4$. Comparé à celui d'un milieu poreux isotrope, ce résultat représente une augmentation d'environ 73% du transfert de chaleur enregistrée pour le premier cas d'exemple et une diminution de 41% pour le second. Une tendance similaire est observée pour $\theta = 45°$ en dépit des différences qui sont moins importantes. En conclusion, lorsque la perméabilité du milieu poreux croît et engendre la croissance du nombre de Darcy Da, les effets de l'anisotropie du milieu poreux deviennent de moins en moins importants. De même, la valeur du transfert de chaleur dans la cavité chute de façon significative. Lorsque Da est assez élevé, autrement dit, lorsque la résistance due aux effets pariétaux est prédominante par rapport à celle induite par la matrice solide, la présente solution se rapproche davantage de celle correspondant à la situation de fluide visqueux pur (équation (6.51)) et ce, indépendamment de l'anisotropie du milieu poreux. Cette limite est atteinte lorsque $Da \simeq 10$, conformément aux conditions de la figure 6.6.

Un autre aspect de l'effet de Da sur le transfert de chaleur est illustré par la figure 6.7 sur laquelle une corrélation de Nu en fonction de Da est présentée pour $R = 500$ et 1000 et pour $K^* = 0.25$ et 4. Le nombre de Nusselt prédit par le modèle de Brinkman commence à dévier du modèle de Darcy à $Da \simeq 10^{-6}$ lorsque le mouvement convectif est relativement élevé ($R = 10^3$, $K^* = 0.25$) et à $Da \simeq 10^{-5}$ lorsque ce mouvement convectif est relativement faible ($R = 5 \times 10^2$, $K^* = 4$). La situation de fluide visqueux pur est représentée sur la figure 6.7 par des pointillés. Cette situation est atteinte approximativement à $Da \simeq 2$ pour $R = 5 \times 10^2$ et à $Da \simeq 0.5$ pour $R = 10^3$. Pour des valeurs intermédiaires du nombre de Darcy, nous observons que les effets de l'anisotropie du milieu poreux deviennent beaucoup plus importants lorsque le nombre de Rayleigh est plus élevé, ce qui est prévisible.

La figure 6.8 montre les effets du nombre de Darcy Da et de l'angle d"orientation anisotrope θ sur le nombre de Nusselt, pour $R = 500$ et $K^* = 0.25$. Comme prévu, lorsque le nombre de Darcy est assez faible ($Da \leq 10^{-6}$), les solutions analytique et numérique s'accordent toutes deux avec celles correspondant à la loi de Darcy (équation (6.48)) et représentées par des pointillés sur le graphique. Dans cette limite, le transfert de chaleur est non seulement maximal mais également varie considérablement avec l'angle θ. Le comportement du taux de transfert de chaleur aux valeurs angulaires $\theta = 0^o$, 90° et 180° est en accord avec la variation de l'intensité de l'écoulement convectif en fonction de θ, conformément à la discussion faite sur la figure 6.4a. Au fur et à mesure que la perméabilité (et par conséquent le nombre de Darcy) du milieu poreux augmente, nous observons que, pour des raisons expliquées précédemment, le taux de transfert de chaleur chute progressivement et devient de moins en moins affecté par θ. Par exemple, le cas où $Da = 10^{-1}$ correspond à la situation de milieu fluide pur pour laquelle $Nu = (2.25)$, en accord avec l'équation (6.51) qui est indépendante de θ.

6.6 Conclusion

Le problème de la convection naturelle dans une cavité poreuse anisotrope verticale, soumise à des flux de chaleur constants appliqués à ses parois latérales a été examiné. Le milieu poreux est supposé hydrodynamiquement anisotrope avec les axes principaux de l'anisotropie en perméabilité inclinés par rapport à la force gravitationnelle. Dans la formulation du problème, le modèle de Darcy élargi par Brinkman pour satisfaire la condition d'adhérence (non-glissement) aux parois est utilisé. Une solution analytique, valide en régime de couche limite, est dérivée sur la base de la technique d'Oseen. De même, une procédure des différences finies est développée pour vérifier la validité des résultats analytiques. Un excellent

accord entre la solution analytique en régime de couche limite et les résultats des simulations numériques est obtenu pour une large gamme des paramètres de contrôle considérés dans cette étude. Les conclusions tirées ont été les suivantes:

1°) Lorsque Da est assez faible (milieux à faibles porosités), le champ de l'écoulement est identifié à celui obtenu pour l'analyse en régime Darcy pur. Dans cette situation observable pour Da approximativement inférieur ou égal à 10^{-6}, les effets visqueux près des parois sont négligeables et le rapport d'anisotropie en perméabilité ont tous deux une forte influence sur le transfert de chaleur par convection naturelle.

2°) Pour des valeurs intermédiaires de Da, la résistance aux frottements sur les parois devient graduellement plus importante et vient s'ajouter à la résistance à la friction induite par la matrice solide pour ralentir le mouvement convectif, lorsque Da est de plus en plus croissante. Par conséquent, les effets de l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux sur le transfert de chaleur par convection sont progressivement inhibés.

3°) Lorsque Da est assez élevé (Da approximativement supérieur ou égal à 10), la présente solution basée sur l'extension du modèle de Darcy introduite par Brinkman s'apparente à celle correspondant au milieu fluide pur (en l'absence des effets inertiels).

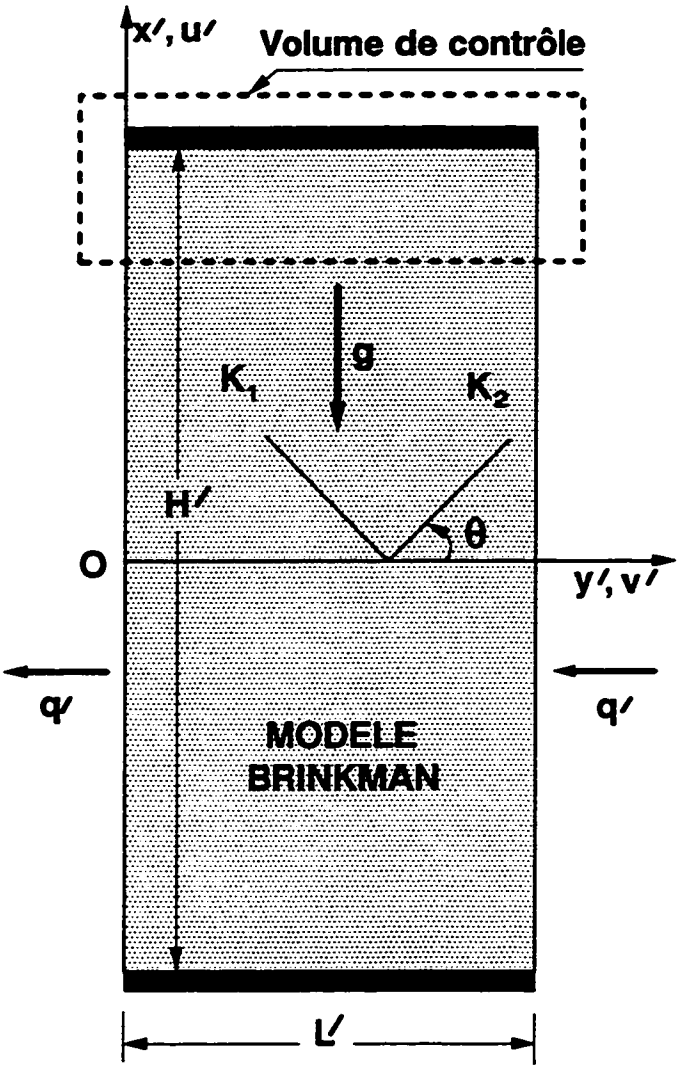


Figure 6.1: Modèle physique et système de coordonnées.

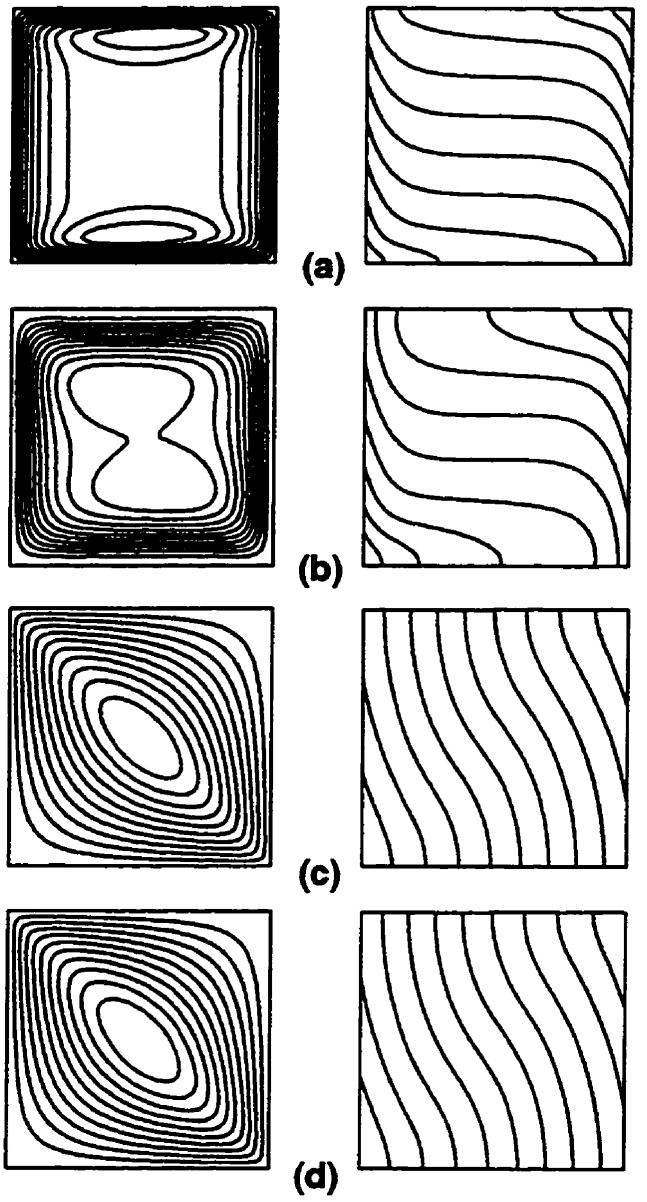


Figure 6.2: Lignes de courant et isothermes pour $R = 500$, $A = 1$ et a) $Da = 10^{-5}$, $\theta = 0^o$, $K^* = 10^{-3}$, $\psi_{max} = 4.40$, $Nu = 5.909$, $T_{max} = -T_{min} = 0.247$; b) $Da = 10^{-3}$, $\theta = 0^o$, $K^* = 10^{-3}$, $\psi_{max} = 3.92$, $Nu = 4.727$, $T_{max} = -T_{min} = 0.3045$; c) $Da = 10^{-5}$, $\theta = 45^o$, $K^* = 10^2$, $\psi_{max} = 0.79$, $Nu = 1.173$, $T_{max} = -T_{min} = 0.576$; d) $Da = 10^{-3}$, $\theta = 45^o$, $K^* = 10^2$, $\psi_{max} = 0.785$, $Nu = 1.170$, $T_{max} = -T_{min} = 0.5759$.

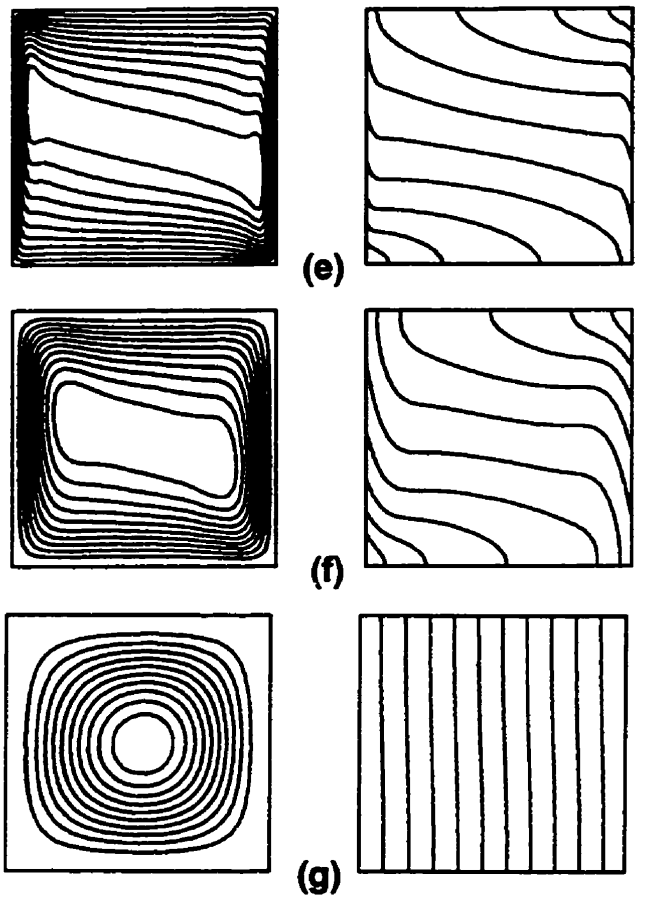


Figure 6.2: Lignes de courant et isothermes pour $R = 500$, $A = 1$ et e) $Da = 10^{-5}$, $\theta = 90^o$, $K^* = 10^{-2}$, $\psi_{max} = 4.77$, $Nu = 10.781$, $T_{max} = -T_{min} = 0.2613$; f) $Da = 10^{-3}$, $\theta = 90^o$, $K^* = 10^{-2}$, $\psi_{max} = 4.175$, $Nu = 5.414$, $T_{max} = -T_{min} = 0.3041$; g) $Da = 10$, $\psi_{max} = 0.0528$, $Nu = 1.00$, $T_{max} = -T_{min} = 0.5068$ (suite et fin).

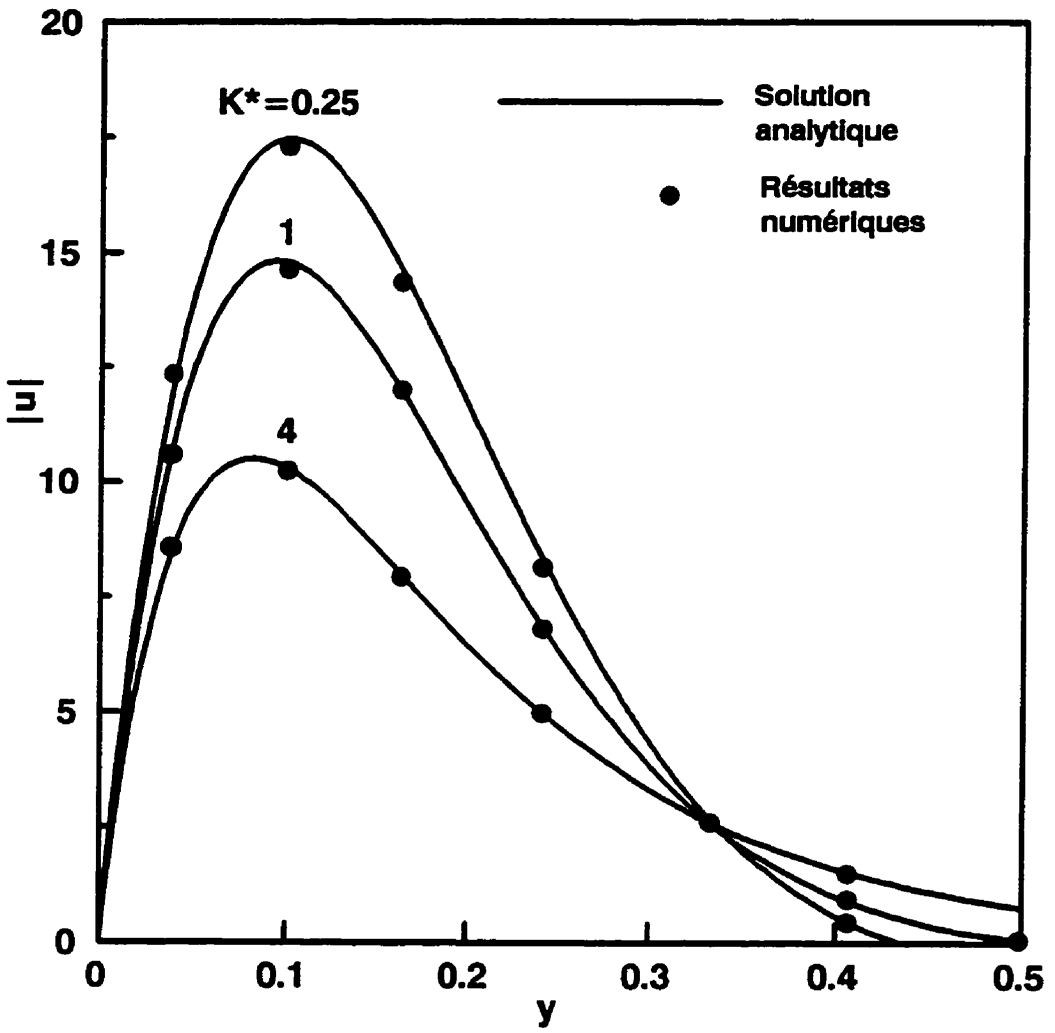


Figure 6.3: a) Effet du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* pour $R = 500$, $Da = 10^{-2}$ et $\theta = 90^o$ sur le profil de vitesse.

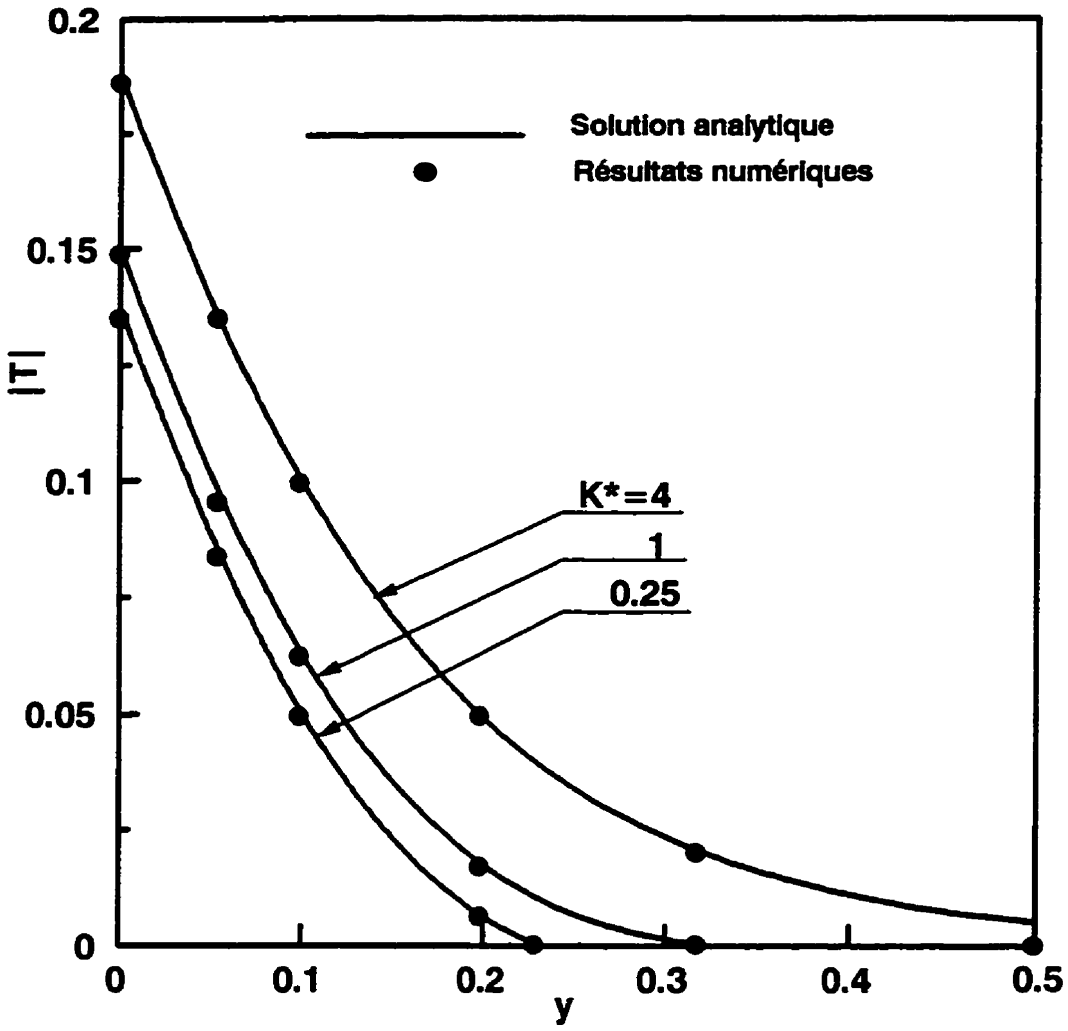


Figure 6.3: b) Effet du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* pour $R = 500$, $Da = 10^{-2}$ et $\theta = 90^o$ sur le profil de température.

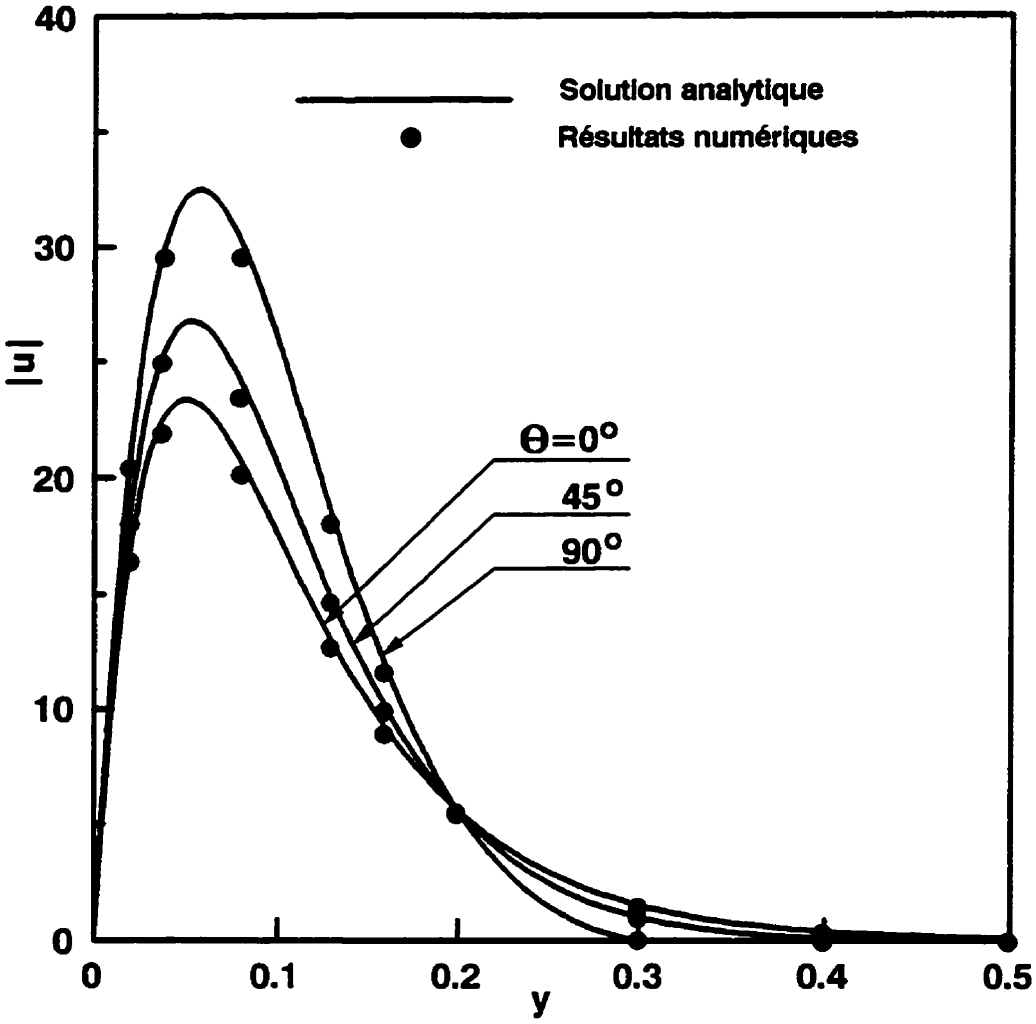


Figure 6.4: a) Effet de l'angle d'inclinaison θ pour $R = 500$, $Da = 10^{-2}$ et $K^* = 0.25$ sur le profil de vitesse.

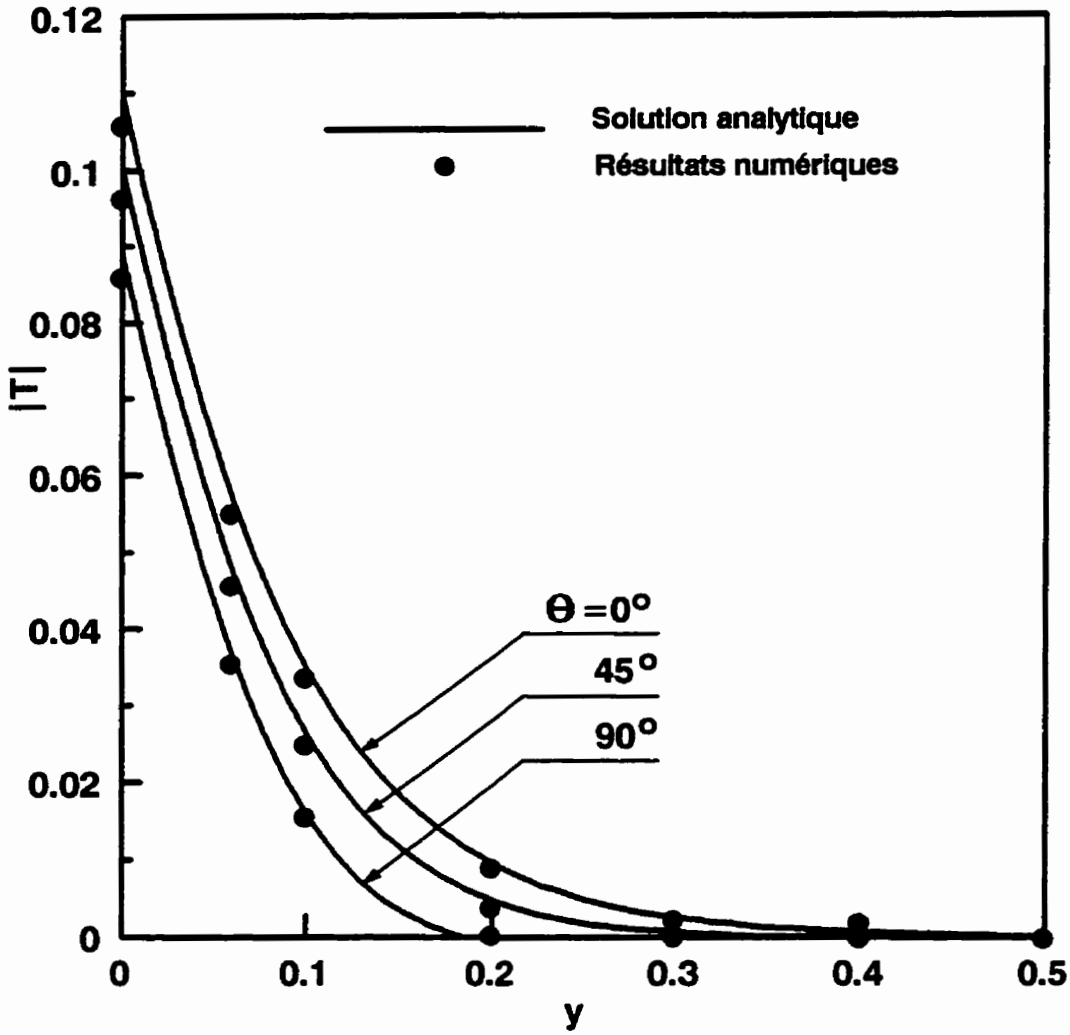


Figure 6.4: b) Effet de l'angle d'inclinaison θ pour $R = 500$, $Da = 10^{-2}$ et $K^* = 0.25$ sur le profil de température.

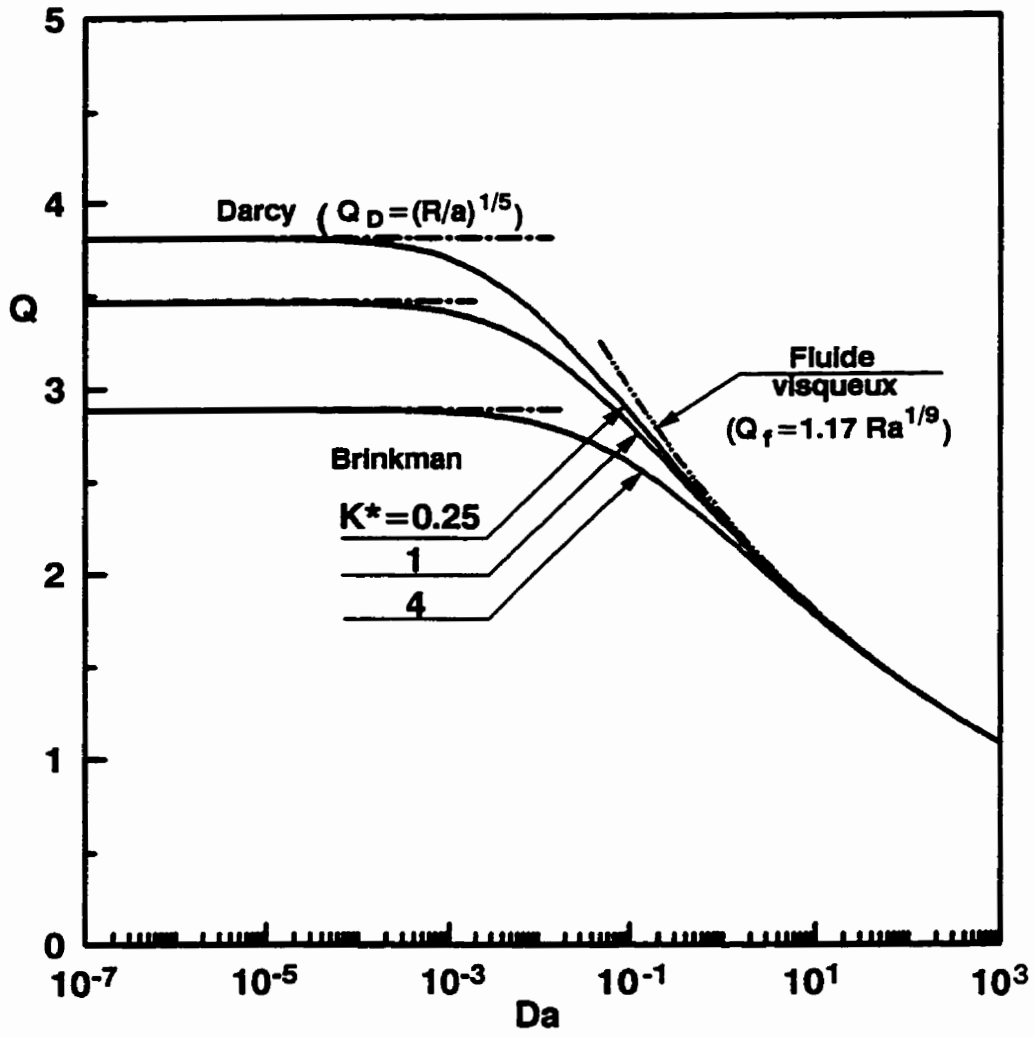


Figure 6.5: Effet du nombre de Darcy sur le débit volumique Q pour $R = 500$, $\theta = 45^o$ et pour différentes valeurs de K^*.

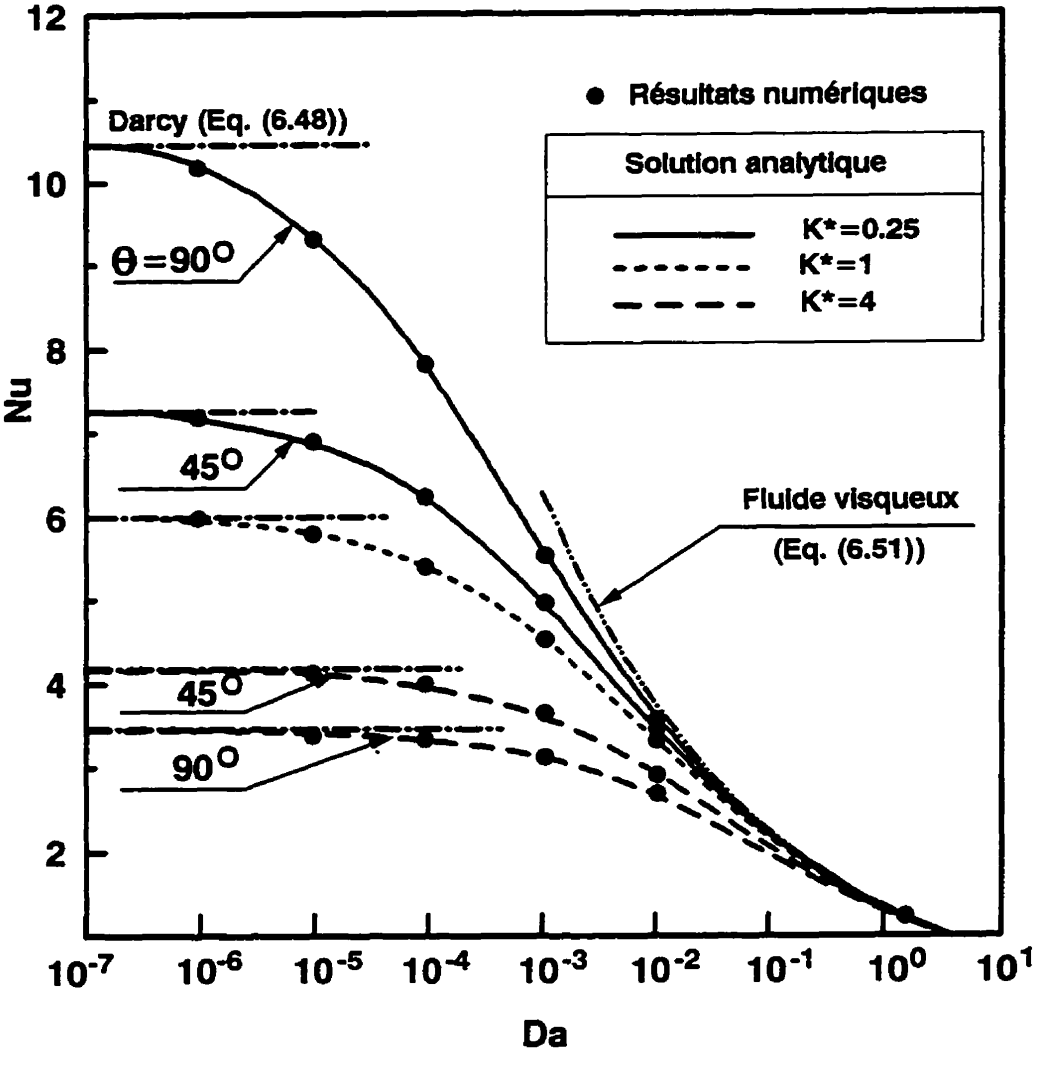


Figure 6.6: Effet du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt pour $R = 500$ et pour différentes valeurs de K^* et de θ.

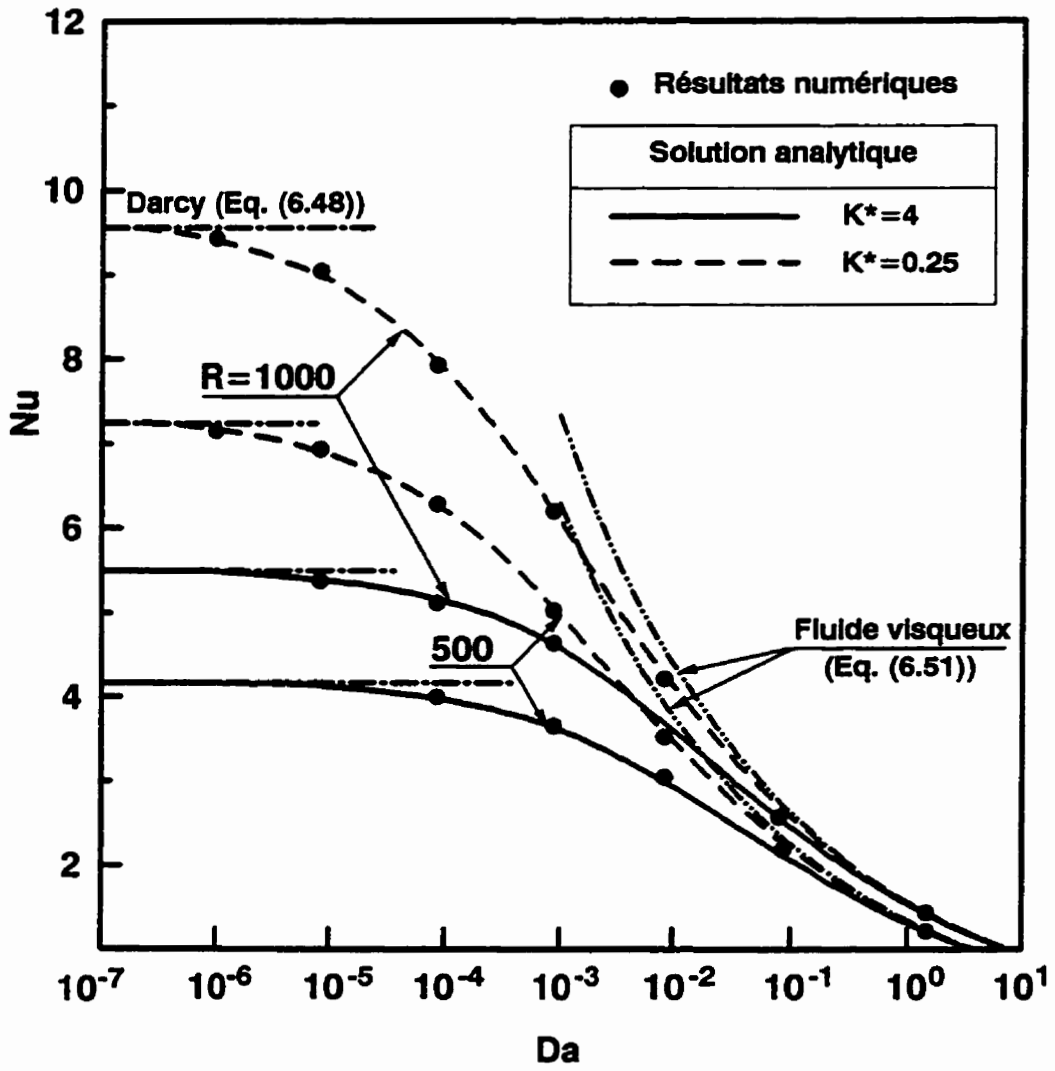


Figure 6.7: Effet du nombre de Darcy sur le nombre de Nusselt pour $R = 500$ et 1000, $\theta = 45^o$ et pour $K^* = 0.25$ et 4.

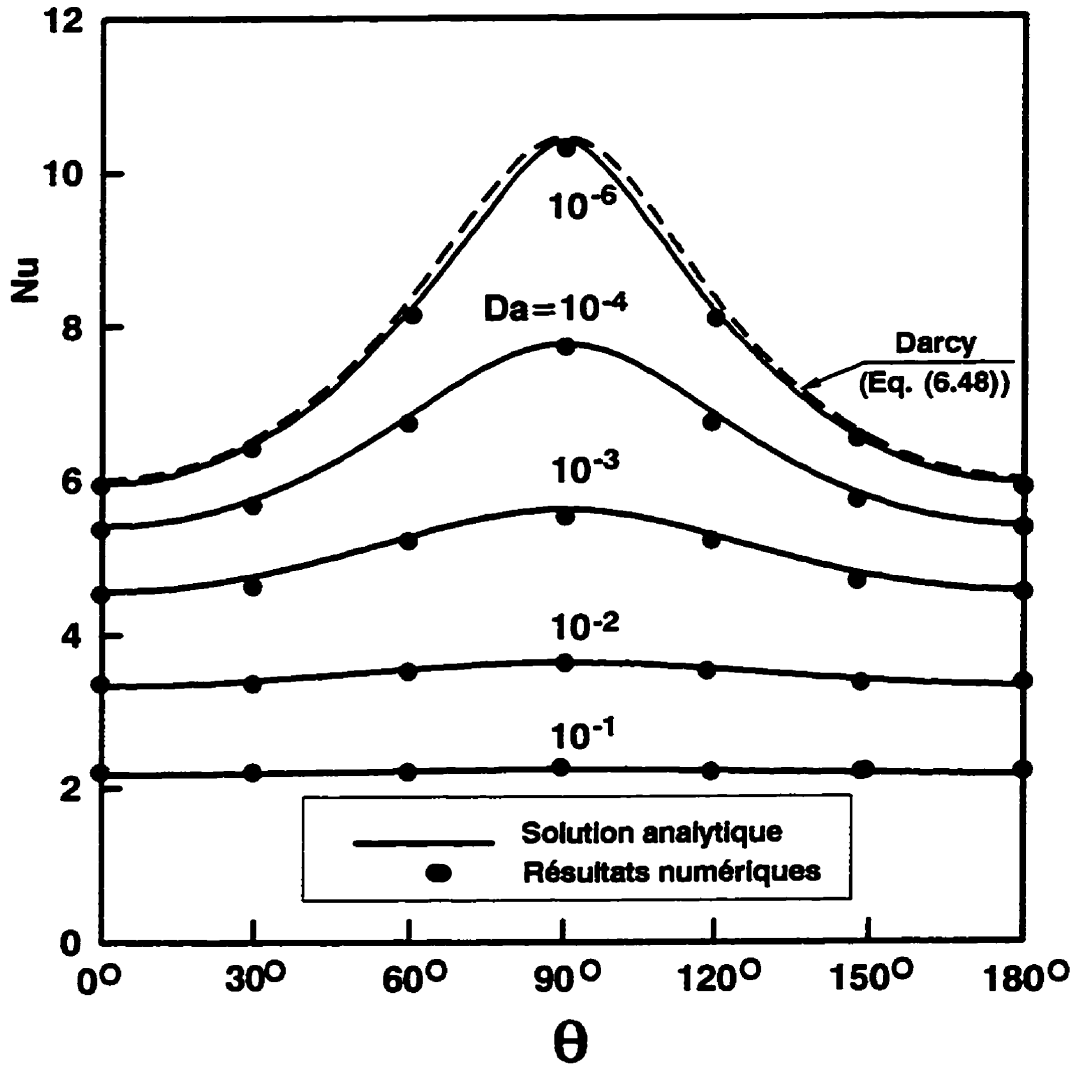


Figure 6.8: Effet de l'angle d'inclinaison θ sur le nombre de Nusselt pour $R = 500$, $K^* = 0.25$ et pour différentes valeurs de Da.

Chapitre 7

Conclusions générales et recommandations

Dans cette thèse, nous avons étudié les écoulements thermoconvectifs en milieu poreux anisotrope. Deux configurations à géométrie rectangulaire ont servi à la définition de modèles physiques relatifs aux écoulements thermoconvectifs externes (au voisinage d'une plaque verticale chauffée) et confinés (dans des cavités rectangulaires soumises à des conditions thermiques variées). Nous avons envisagé l'anisotropie en perméabilité dont les axes principaux sont orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel et l'anisotropie en conductivité thermique. Dans l'environnement, les milieux poreux sont fortement anisotropes et peuvent être le siège de phénomènes thermoconvectifs naturels. La recherche des sources énergétiques naturelles et l'utilisation de ces dernières pour des applications en ingénierie ont conduit à l'étude de ces phénomènes thermoconvectifs naturels. En effet, la détermination du taux de transfert de chaleur engendrée par le fluide en écoulement à travers les interstices de la matrice solide du milieu poreux a été l'objectif atteint dans chacun des modèles physiques présentés. En outre, l'inexistence à date des solutions analytiques au problème physique d'une part et la rareté des investigations menées sur le sujet d'autre part, ont été la motivation de ce travail de recherche dont les conclusions sont ci-après présentées par chapitre.

Dans le premier chapitre, nous avons posé le problème après avoir rappelé certains éléments de terminologie aidant à la compréhension du thème de recherche.

Nous avons fait le point des différentes applications pratiques de l'étude et passé en revue les principaux travaux disponibles dans la littérature.

Dans le second chapitre, les équations de base décrivant les lois de comportement du phénomène physique et les hypothèses simplificatrices nécessaires ont été rappelées. De même, l'algorithme du calcul itératif basé sur les différences finies a été décrit à travers des étapes où les équations gouvernantes précédemment rendues adimensionnelles ont été traitées.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité et chauffée par une température ou un flux de chaleur uniforme. Les effets des paramètres d'anisotropie sur l'écoulement convectif et le transfert de chaleur sont très significatifs. Nous avons trouvé que, pour $(K^* < 1)$ lorsque $\theta = 0^o$ et pour $(K^* > 1)$ quand $\theta = 90^o$, l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle à la plaque et par conséquent l'intensité de l'écoulement convectif est maximale. Aussi, pour une valeur fixée de θ, lorsque $K^* > 1$, le transfert de chaleur croît en comparaison avec celui correspondant à la situation isotrope et décroît lorsque $K^* < 1$.

Au chapitre 4, la convection naturelle dans une cavité poreuse anisotrope en perméabilité et chauffée isothermiquement par les côtés a été examinée. Nous avons démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et est minimal quand cette orientation est perpendiculaire à ce dernier. Il en est résulté que la meilleure isolation thermique possible est obtenue lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible est parallèle au champ gravitationnel. Aussi avons-nous observé, pour $\theta = 45^o$, une symétrie parfaite par rapport à la situation isotrope $(K^* = 1)$ entre les solutions correspondant à des valeurs

fixées de R^* et de A, de sorte que les résultats pour une valeur de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$. Une solution analytique basée sur une approche intégrale a été proposée et s'est bien accordée avec les résultats numériques.

Dans le chapitre 5, les effets combinés de l'anisotropie en perméabilité et de l'anisotropie en conductivité thermique sur la convection naturelle dans une couche poreuse verticale exposée latéralement à un flux de chaleur constant ont été investigués. Les résultats relatifs aux effets des paramètres de l'anisotropie en perméabilité sur l'écoulement et le transfert de chaleur, qui ont été obtenus au chapitre précédent, sont valables ici, car ils sont indépendants des conditions thermiques aux limites de la cavité. Par ailleurs, lorsque le rapport d'anisotropie en conductivité thermique k^* est assez élevé ($k^* > 1$), l'écoulement convectif est accentué alors que le nombre de Nusselt se rapproche de l'unité. Aussi, lorsque ($k^* < 1$), Nu tend asymptotiquement vers une valeur constante qui dépend de R. Dans cette étude paramétrique, une solution analytique basée sur la théorie de l'écoulement parallèle a été proposée et s'est harmonisée à tous les régimes d'écoulement simulés numériquement.

Au chapitre 6, nous avons analysé les effets visqueux pariétaux, à travers le modèle de Darcy-Brinkman, sur la convection naturelle dans une couche poreuse verticale et anisotrope en perméabilité. Une solution analytique valide en régime de couche limite et basée sur la méthode d'Oseen a été dérivée. La comparaison de celle-ci avec les résultats des simulations numériques a révélé un excellent accord. Nous avons noté que, lorsque $Da \rightarrow 0$ (milieux à porosités faibles où les effets de la viscosité du fluide au voisinage des parois sont négligeables), l'écoulement convectif est identique à celui correspondant au régime de Darcy tel que traité au chapitre 5. Lorsque $Da \rightarrow \infty$ (milieux à porosités élevées), le mouvement convectif est semblable à celui d'un fluide visqueux pur en l'absence des effets

inertiels (écoulement de Stokes). Au fur et à mesure que Da augmente, les effets conjugués de la résistance aux parois et de celle due à la friction induite dans la matrice solide deviennent de plus en plus importants et ralentissent le mouvement convectif. En raison de l'importance graduelle de cette résistance aux parois, avec l'augmentation de Da, les effets de l'anisotropie du milieu poreux sur la convection naturelle dans la couche verticale sont progressivement inhibés.

Recommandations

Les études sur les phénomènes thermoconvectifs en milieu anisotrope viennent de prendre fin dans ce travail qui, en poursuivant le champ de l'investigation, doit combler certaines insuffisances. En effet, nous tenons à rappeler que la loi de Darcy généralisée considérée dans chacune des études abordées dans les différents chapitres de cette thèse, repose sur la théorie quantitative du mouvement des fluides homogènes saturant la matrice solide. En d'autres termes, les perméabilités observées dans toutes les directions sont constantes et diffèrent les unes des autres. Néanmoins, en complément à cette disposition faisant état de l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux, il reste posé le problème de la variation de chacune de ces perméabilités en fonction de la variable spatiale considérée dans la direction d'intérêt ou de l'écoulement, c'est-à-dire *l'inhomogénéité* du milieu poreux. Donc, il va sans dire que l'anisotropie et l'inhomogénéité sont les deux états qui réflètent la réalité physique dont dépend le mouvement des fluides à travers la matrice solide. Par conséquent, la considération simultanée de ces deux états du milieu poreux dans la modelisation des écoulements thermoconvectifs au sein de ce dernier est hautement souhaitable. Physiquement, dans les milieux aquifères étroits qui sont naturellement anisotropes et inhomogènes, les activités géothermiques créent des gradients de température qui engendrent la convection naturelle.

De même, les hypothèses simplificatrices conditionnant la dérivation des lois de comportement traduites par les équations gouvernantes utilisées sont assez nombreuses et entraînent des restrictions qui peuvent altérer la compréhension du phénomène physique. Il est alors souhaitable de limiter ces restrictions en prenant en considération plus de réalisme physique dans la sélection de ces hypothèses. Par exemple, l'extension des études abordées dans le cadre de ce travail aux modèles tridimensionnels pourrait révéler de nouveaux résultats qualitatifs concernant les champs de température et de fonction de courant. Par ailleurs, ce réalisme physique pourrait transparaître à travers les modèles expérimentaux donnant souvent des résultats fiables qui valident au mieux ceux des simulations numériques. Malgré la rapidité de réponse et la puissance de calcul de ces dernières, l'expérience demeure le seul moyen sûr de rendre compte de la nature physique ou réelle des phénomènes étudiés. Donc, la recherche expérimentale des différents modèles rapportés dans cette thèse s'impose et doit faire l'objet d'une observation particulière.

En outre, pour de larges nombres de Reynolds basés sur le diamètre moyen des pores, les effets inertiels deviennent importants. Or, dans la littérature, la plupart des études utilisent le modèle de Forchheimer qui n'est valide qu'en milieu poreux isotrope. Il serait souhaitable de tenir compte de cette réalité physique dans les études subséquentes en milieu poreux anisotrope. Dans ce contexte, les résultats des travaux de *Barak et Bear* (1981) proposant un modèle généralisé qui décrit approximativement le comportement non linéaire de l'écoulement d'un fluide newtonien à travers un milieu poreux anisotrope et homogène, doivent recevoir plus d'attention.

Références

- ABOUBI, K., ROBILLARD, L. and BILGEN, E., 1995, "Natural Convection in Horizontal Annulus Filled With an Anisotropic Porous Medium", *ASME/JSME Thermal Engineering Conference*, Vol. 3, pp. 415–422.

- AZIZ, M., BORIES, S. A. and COMBARNOUS, M. A., 1972a, "The Influence of Natural Convection in Gaz, Oil and Water Reservoirs", *Petrol. Soc. Can. Inst. Mining*, Calgary Pap. 7243.

- BARAK, A. Z. and BEAR, J., 1981, "Flow at High Reynolds Numbers Through Anisotropic Porous Media" *Adv. Water Resources*, Vol. 4, pp. 54-66.

- BEAR, J., 1972, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications.

- BEJAN, A., 1979, "On the Boundary-Layer Regime in a Vertical Enclosure Filled With Porous Medium" *Lett. Heat Mass Transfer*, Vol. 6, pp. 93-102.

- BEJAN, A., 1983, "The Boundary-Layer Regime in a Porous Layer With Uniform Heat Flux From the Side", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1339-1346.

- BEJAN, A., 1984, *Convection Heat Transfer*, Wiley-Interscience Publication.

- BEJAN, A., 1985, "The Method of Scale Analysis: Natural Convection in a Porous Medium". In *Natural convection: Fundamentals and Applications*, S. Kakac et al. (eds), Hemisphere, Bristol, P. A.

- BEJAN, A. and POULIKAKOS, D., 1984, "The Non-Darcy Regime for Vertical Boundary-Layer Natural Convection in a Porous Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 717-722.

- BORIES, S et THIRRIOT, C., 1971, "Phénomènes de convection naturelle dans la neige et dans les aquifères", *Congr. Inst. Ass. Hydrol. Sci.*, Paris.

- BRINKMAN, H. C., 1947, "A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles", *Appl. Sci. Res.*, Vol. A1, pp. 27-34.

- BURNS, P. J., CHOW, L. C. and TIEN, C. L., 1977, "Convection in a Vertical Slot Filled With Porous Insulation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 120, pp. 919-926.

- CASTINEL, G. et COMBARNOUS, M., 1974, "Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope", *C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris B*, Vol. B278, pp. 701-704.

- CHAN, B. K. C., IVEY, C. M. and BARRY, J. M., 1970, "Natural Convection in Enclosed Porous Media With Rectangular Boundaries", *J. Heat Transfer*, Vol. 92, pp. 21-27.

- CHANG, W. J. and HSIAO, C. F., 1993, "Natural Convection in a Vertical Cylinder Filled With Anisotropic Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 361-367.

- CHANG, W. J. and LIN, H. C., 1994, "Natural Convection in a Finite Wall Rectangular Cavity Filled With an Anisotropic Porous Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 303-312.

- CHEN, F. and HSU, L. H., 1991, "Onset of Thermal Convection in an Anisotropic and Inhomogeneous Porous Layer Underlying a Fluid Layer", *J. Appl. Phys.* Vol. 69, pp. 6289-

- CHEN, F. and LU, J. W., 1992, "Onset of Salt-Finger Convection in an Anisotropic and Inhomogeneous Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, No. 12, pp. 3451-3464.

- CHENG, P., 1977, "Constant Surface Heat Flux Solutions for Porous Layer Flows", *Letters Heat Mass Transfer*, Vol. 4, pp. 119-127.

- CHENG, P., 1978, "Heat Transfer in Geothermal Systems", *Adv. Heat Transfer*, Vol. 14, pp. 1-105.

- CHENG, P. and MINKOWYCZ, W. J., 1977, "Free Convection About a Vertical Flat Plate Embedded in a Saturated Porous Medium With Application to Heat Transfer From a Dyke", *J. Geophys. Res.*, Vol. 82, pp. 2040-2044.

- COMBARNOUS, M. A. and BORIES, S. A., 1975, "Hydrothermal Convection in Saturated Porous Medium", *Adv. Hydrosci.*, Vol. 10, pp. 231-307.

- CORMACK, D. E., LEAL, L. G. and IMBERGER, J., 1974, "Natural Convection in a Shallow Cavity With Differentially Heated End Walls. Part 1, Asymptotic Theory", *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, pp. 209-230.

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and BILGEN, E., 1995a, "Convective Heat Transfer in a Vertical Anisotropic Porous Layer", *The Second International Thermal Energy Congress*, Agadir, Morroco, Proceedings ITEC 95, Vol. 2, pp. 427-432.

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and BILGEN, E., 1995b, "Convective Heat Transfer in a Vertical Anisotropic Porous Layer", *Int. J. Heat Mass Transfer*,

Vol. 38, pp. 1975-1987.

- DEGAN, G. and VASSEUR, P., 1995c, "Effects of Anisotropy on the Free Convection from a Concentrated Source in a Porous Medium", *The Second International Thermal Energy Congress*, Agadir, Marroco, Proceedings ITEC 95, Vol. 2, pp. 439-444.

- DEGAN, G. and VASSEUR, P., 1996a, "Natural Convection in a Vertical Slot Filled an Anisotropic Porous Medium With Oblique Principal Axes", *Numerical Heat Transfer*, Part A, Vol. 30, pp. 397-412.

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and GOUJON-DURAND, S., 1996b, "Anisotropic Thermoconvective Effects in a Porous Medium", *The Sixth Australasian Heat and Mass Transfer Conference*, (A paraître).

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and GOUJON-DURAND, S., 1996c, "Natural Convection within a Vertical Cavity Filled with an Anisotropic Porous Medium", *The Sixth International Congress on Fluid Mechanics*, Cairo, Egypt (A paraître).

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and GOUJON-DURAND, S., 1996d, "Effects of Anisotropy on Natural Convection in a Porous Medium Adjacent to a Vertical Heated Impermeable Surface", *International Thermal Energy and Environment Congress*, Marrakesh, Morocco (A paraître).

- DEGAN, G. and VASSEUR, P., 1996e, "The Boundary-Layer Regime in a Vertical Porous Layer with Anisotropic Permeability and Boundary effects", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, sous presse.

- DEGAN, G. and VASSEUR, P., 1996f, "Free Convection Along a Vertical Heated Plate in a Porous Medium with Anisotropic Permeability", *Int. J. Num. Meth. Heat and Fluid Flow*, sous presse.

- DUTTA, P. and SEETHARAMU, K. N., 1987, "Effect of Variable Wall Heat Flux on Free Convection in a Saturated Porous Medium", *Indian J. Technology*, Vol. 25, pp. 567-571.

- DUTTA, P. and SEETHARAMU, K. N., 1993, "Free Convection in a Saturated Porous Medium Adjacent to a Vertical Impermeable Wall Subjected to a Non-Uniform Heat Flux", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 28, pp. 27-32.

- ENE, H. I., 1991, "Effects of Anisotropy on the Free Convection From a Vertical Plate Embedded in a Porous Medium", *Transport in Porous Media*, Vol. 6, pp. 183-194.

- ENE, H. I. and POLISEVSKY, D., 1987, *Thermal Flow in Porous Media*, D. Reidel, Dordrecht.

- EPHERRE, J. F., 1975, "Critère d'Apparition de la Convection Naturelle Dans une Couche Poreuse Anisotrope", *Rev. Gen. Thermique*, Vol. 168, pp. 949-950.

- EVANS, G. H. and PLUMB, O. A., 1978, "Natural Convection from a Vertical Isothermal Surface Embedded in a Saturated Porous Media", *ASME Paper*, Vol. 72-HT-85.

- GILL, A. E., 1966, "The Boundary-Layer Regime for Convection in a Rectangular Cavity", *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp. 515-536.

- HONG, J. T., TIEN, C. L. and KAVIANY, M., 1985, "Non-Darcy Effects on Vertical-Plate Natural Convection in a Porous Media With High Porosities", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 2149-2157.

- HSU, C. T. and CHENG, P., 1985, "The Brinkman Model for Natural Convection About a Semi-Infinite Vertical Flat Plate in a Porous Medium", *Int.*

J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, pp. 663-697.

- INGHAM, D. B., MERKIN, J. H. and Pop, I., 1982, "Flow Past a Suddenly Cooled Vertical Flat Surface in a Saturated Porous Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 1916-1919.

- JOHNSON, C. and CHENG, P., 1978, "Possible Similarity Solutions for Free Convection Boundary Layers Adjacent to Flat Plates in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 709-718.

- KAVIANY, M. and MITTAL, M., 1987, "Natural Convection Heat Transfer From a Vertical Plate to High Permeability Porous Media: An Experiment And an Approximate Solution", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 967-977.

- KIMURA, S. and BEJAN, A., 1984, "The Boundary-Layer Natural Convection Regime in a Rectangular Cavity With Uniform Heat Flux From The Side", *J. Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 98-103.

- KIMURA, S., MASUDA, Y. and KAZUO HAYASHI, T., 1993, "Natural Convection in an Anisotropic Porous Medium Heated from the Side (Effects of Anisotropic Properties of Porous Matrix)", *Heat Transfer Japanese Research*, Vol. 22, pp. 139-153.

- KVERNVOLD, O. and TYVAND, P. A., 1979, "Nonlinear Thermal Convection in Anisotropic Porous Media", *J. Fluid Mech.*, Vol. 90, pp. 609-624.

- LAI, F. C. and KULACKI, F. A., 1988, "Natural Convection Across a Vertical Layered Porous Cavity", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 1247-1260.

- LAURIAT, G. and PRASAD, V., 1987, "Natural Convection in a Vertical Porous Cavity -A Numerical Study for Brinkman-Extended Darcy Formulation", *J. Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 681-696.

- MAHAJAN, R. L. and ANGIRASA, D., 1993, "Combined Heat and Mass Transfer by Natural Convection With Opposing Buoyancies", *J. Heat Transfer*, Vol. 115, pp. 606-612.

- Mc KIBBIN, R. and TYVAND, P. A., 1982, "Anisotropic Modelling of Thermal Convection in Multilayered Porous Media", *J. Fluid Mech.*, Vol. 118, pp. 315-339.

- Mc KIBBIN, R., 1984, "Thermal Convection in a Porous Layer: Effects of Anisotropy and Surface Boundary Conditions", *Transport Porous Media*, Vol. 1, pp. 271-292.

- NAKAYAMA, A. and KOYAMA, H., 1987, "An Integral Method for Free Convection From a Vertical Heated Surface in a Thermally Stratified Porous Medium", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 21, pp. 297-300.

- NEALE, G. and NADER, W., 1974, "Pratical Significance of Brinkman's Extension of Darcy's Law: Coupled Parallel Flows within a Channel and a Bounding Porous Medium", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 52, pp. 475-478.

- NEALE, G., 1977, "Degrees of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous Media", *AIChE J.*, Vol. 23, pp. 56-62.

- NI, J. and BECKERMANN, C., 1991, "Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media", *J. Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 1033-1037.

- NIELD, D. A. and BEJAN, A., 1992, "*Convection in Porous Media*", Springer Verlag.

- NILSEN, T. and STORESLETTEN, L., 1990, "An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic and Anisotropic Porous Channels", *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 396-401.

- PARTHIBAN, C. and PATIL, P. R., 1993, "Effect of Inclined Temperature Gradient on Thermal Instability in an Anisotropic Porous Medium", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 29, pp. 63-69.

- PATIL, P. R., PARVATHY, C. P. and VENKATAKRISHNAN, K. S., 1989, "Thermohaline Instability in a Rotating Anisotropic Porous Medium", *Applied Scientific Research*, Vol. 46, pp. 73-88.

- PLUMB, O. A. and HUENEFELD, J. C., 1981, "Non-Darcy Natural Convection From Heated Surfaces in a Saturated Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 765-778.

- POULIKAKOS, D. and BEJAN, A., 1983, "Natural Convection in Vertically and Horizontally Layered Porous Media Heated from The Side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1805-1814.

- RICHARD, J. P. and GOUNOT, J., 1981, "Critère d'Apparition de la Convection Naturelle Dans des Couches Poreuses Stratifiées", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, No. 8, pp. 1325-1334.

- ROACHE, P. J., 1976, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.

- ROYER, J. J. and FLORES, L., 1994, "Two-dimensional Natural Convection in an Anisotropic and Heterogeneous Porous Medium With Internal Heat

Generation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1387-1399.

- SCHEIDEGGER, A. E., 1974, "*The Physics of Fluid Through Porous Media*", Third Edition, University of Toronto Press.

- SEETHARAMU, K. N. and DUTTA, P., 1990. "Free Convection in a Saturated Porous Medium Adjacent to a Non-Isothermal Vertical Impermeable Wall", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 25, pp. 9-15.

- SEN, A. K., 1987, "Natural Convection in a Shallow Porous Cavity -The Brinkman Model", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 855-868.

- SHIRALKAR, G. S., HAAJIZADEH, M. and TIEN, C. L., 1983, "Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 6, pp. 223-234.

- SIMPKINS, P. G. and P. A. BLYTHE, 1980, "Convection in Porous Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 881-887.

- TONG, T. W. and SUBRAMANIAN, E., 1985, "A Boundary-Layer Analysis for Natural Convection in Vertical Porous Enclosure-Use of The Brinkman-Extended Darcy Model", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 563-571.

- TYVAND, PEDER A., 1980, "Thermohaline Instability in Anisotropic Porous Media", *Water Res. Research*, Vol. 16, No. 2, pp. 325-330.

- TYVAND, P. and STORESLETTEN, L., 1991, "Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium With Oblique Principal Axes", *J. Fluid Mech.*, Vol. 226, 371-382.

- VASSEUR, P., SATISH, M. G. and ROBILLARD, L., 1987, "Natural Convection in a Thin, Inclined Porous Layer Exposed to a Constant Heat Flux", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 537-549.

- VASSEUR, P. and ROBILLARD, L., 1987, "The Brinkman Model for Boundary-Layer Regime in a Rectangular Cavity With Uniform Heat Flux From the Side", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 717-727.

- VASSEUR, P., WANG, C. H. and SEN, M., 1989, "Thermal Instability and Natural Convection in a Fluid Layer Over a Porous Substrate", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 24, 337-347.

- VASSEUR, P. and ROBILLARD, L., 1993, "The Brinkman Model for Natural Convection in a Porous Layer: Effects of Nonuniform Thermal Gradient", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1339-1346.

- WALKER, K. L. and HOMSY, M. G., 1978, "Convection in a Porous Cavity", *J. Fluid Mech.*, Vol. 87, pp. 449-474.

- WEBER, J. E., 1975, "The Boundary-Layer for Convection in a Vertical Porous Layer", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 569-.

- WOODING, R. A., 1978, "Large-scale Geothermal Field Parameters and Convection Theory", *N. Z. J. Sci.*, Vol. 21, pp. 219-227.

- YOO, H. and VISKANTA, R., 1992, "Effect of Anisotropic Permeability on The Transport Process During Solidification of a Binary Mixture", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 2335-2346.

- YÜCEL, C., HASNAOUI, M., ROBILLARD, L. and BILGEN, E., 1993, "Mixed Convection Heat Transfer in Open Ended Inclined Channels With Discrete Isothermal Heating", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 109-126.

- ZHANG, X., NGUYEN, T. H. and KAHAWITA, R., 1993, "Convection Flow and Heat Transfer in an Anisotropic Porous Layer With Principal Axes Non-Coincident With the Gravity Vector", *ASME Winter Annual Meeting, New*

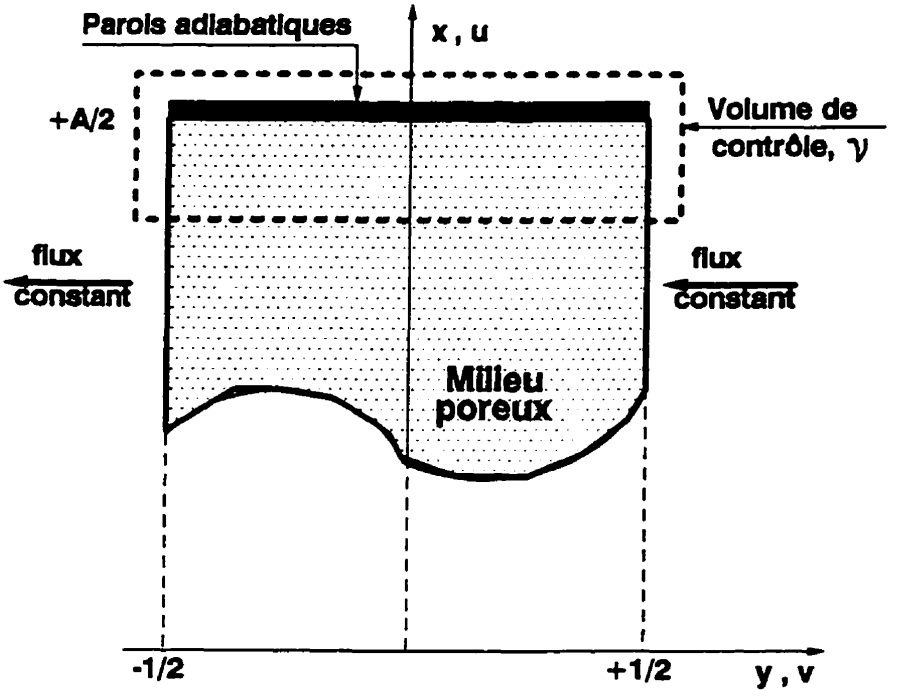
Orleans, Louisiane, U.S.A. Fundamentals of Natural Convection-HTD, Vol. 264, pp. 79-86.

- ZHANG, X., 1993, "Convective Heat Transfer in a Vertical Porous Layer With Anisotropic Permeability", *Proceedings 14th Canadian Congress of Applied Mechanics*, Vol. 2, pp. 579-580.

Annexe

Calcul du gradient thermique vertical C
Bilan énergétique

Considérons le volume de contrôle $\mathcal{V}$ de surface S entourant l'une quelconque des régions extrêmes de la portion de la cavité poreuse illustrée par la figure suivante:



L'intégration sur $\mathcal{V}$ de l'équation d'énergie (2.17) en régime permanent donne:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla . (\vec{V}T)\, d\mathcal{V} = \overline{\overline{\alpha}} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2 T\, d\mathcal{V} \qquad (1)$$

En appliquant le théorème de Gauss, l'équation (1) s'écrit:

$$\iint_S (\vec{V}T).\,\vec{n}dS \;=\; \bar{\bar{\alpha}} \iint_S \nabla T.\,\vec{n}dS \qquad (2)$$

où $\vec{n}$ est la normale à l'élément de surface dS. En développant l'équation (2), il vient:

$$\left.\begin{aligned} &\int_x (vT)|_{y=-1/2}\,dx - \int_x (vT)|_{y=+1/2}\,dx - \int_{-1/2}^{1/2} (uT)|_x\,dy + \\ &\int_{-1/2}^{1/2} (uT)|_{x=A/2}\,dy = \int_x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=-1/2} dx - \int_x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=+1/2} dx - \\ &k^* \int_{-1/2}^{1/2} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x dy + k^* \int_{-1/2}^{1/2} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=A/2} dy \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Comme v=0 sur les parois verticales ($y = \pm 1/2$), nous avons:

$$\int_x (vT)|_{y=-1/2}\,dx = \int_x (vT)|_{y=+1/2}\,dx = 0 \qquad (4)$$

De même, puisque $u = 0$ sur la paroi supérieure, nous obtenons:

$$\int_{-1/2}^{1/2} (uT)|_{x=A/2}\,dy = 0 \qquad (5)$$

Aussi, cette paroi supérieure étant adiabatique, nous avons:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=A/2} dy = 0 \qquad (6)$$

A cause de la condition de flux thermique uniforme spécifiée sur les parois verticales, il vient:

$$\int_x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=-1/2} dx = \int_x \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=+1/2} dx \qquad (7)$$

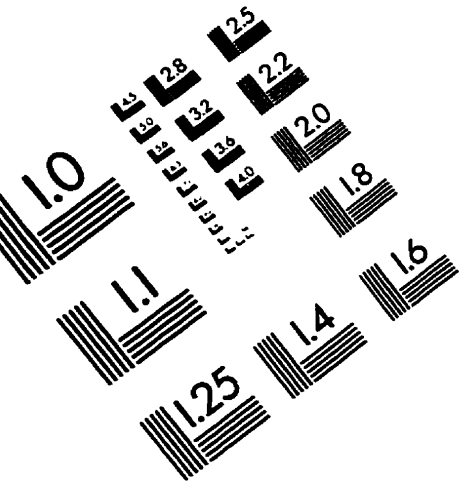
En tenant compte des équations (4)-(7), l'*équation de bilan énergétique* devient:

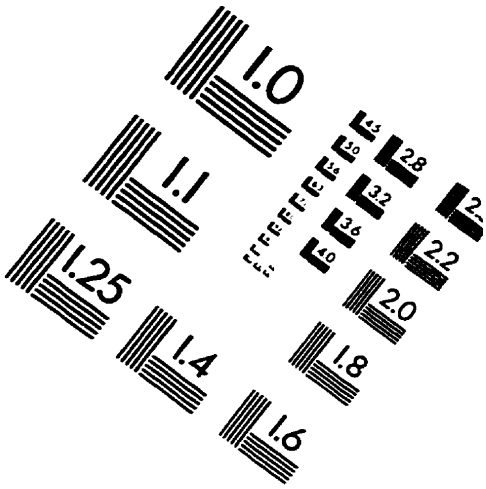
$$\int_{-1/2}^{1/2} (uT)\, dy = k^* \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x}\, dy \qquad (8)$$

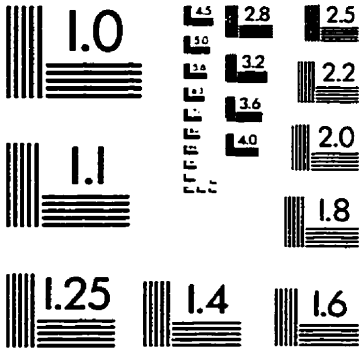
à n'importe qu'elle section x de la cavité.

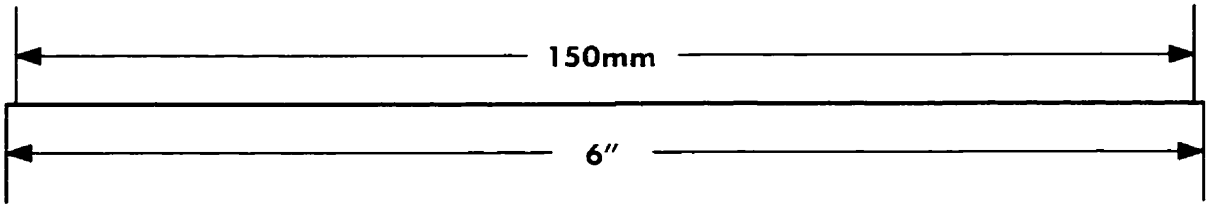
Dans le cas où le milieu poreux est supposé isotrope, $k^* = 1$ et l'équation (8) est identique à celle obtenue dans le passé par *Bejan* (1983).

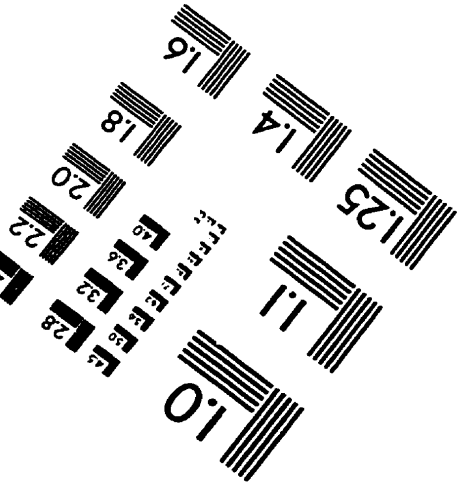
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

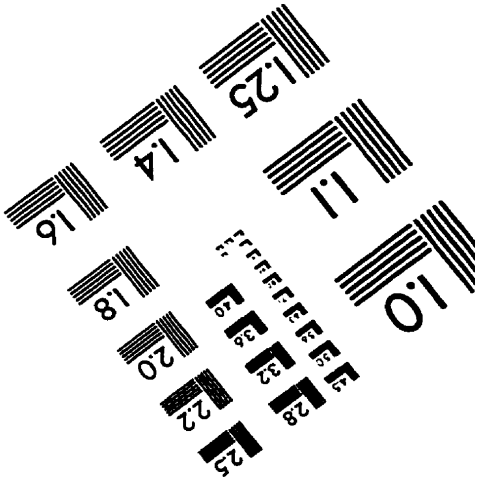












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989