

**Titre:** Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluides confinés  
Title: confined

**Auteur:** Mahmoud Mamou  
Author:

**Date:** 1998

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mamou, M. (1998). Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluides confinés [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/6793/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6793/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Patrick Vasseur, & Ertugrul Bilgen  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

## **INFORMATION TO USERS**

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

**The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.** Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps. Each original is also photographed in one exposure and is included in reduced form at the back of the book.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.



Bell & Howell Information and Learning  
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA  
800-521-0600



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**CONVECTION THERMOSOLUTALE DANS DES MILIEUX  
POREUX ET FLUIDES CONFINÉS**

**MAHMOUD MAMOU**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**  
**ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
(GÉNIE MÉCANIQUE)**

**JANVIER 1998**

**© Mahmoud Mamou, 1998.**



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Your file Your reference

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38725-9

Canada



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

**CONVECTION THERMOSOLUTALE DANS DES MILIEUX  
FLUIDES ET POREUX CONFINÉS**

présentée par : MAMOU Mahmoud  
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ROBILLARD Luc, D. Sc. A., président  
M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre et directeur de recherche  
M. BILGEN Ertugrul, Ph.D., membre et codirecteur de recherche  
M. PLATTEN Jean Karl, Ph.D., membre  
M. NGUYEN Hung The, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À mes très chers parents

À ma femme

À mes enfants

À mes frères et soeurs

À ma famille

À mes amis

## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au Département de génie mécanique, section aérothermique de l'École Polytechnique de Montréal. Le présent travail de recherche a été mené sous la direction des professeurs **Patrick Vasseur**, comme directeur de recherche, et **Ertugrul Bilgen**, comme codirecteur de recherche. Qu'ils veuillent bien recevoir nos vifs et sincères remerciements pour la contribution, l'aide et le soutien permanent qu'ils nous ont offerts. Nos remerciements les plus chaleureux vont plus particulièrement au professeur **Patrick Vasseur** pour sa disponibilité permanente, pour sa contribution majeure à l'orientation de nos recherches et pour les idées originales qu'il nous a suggérées de développer dans cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Monsieur le professeur **Luc Robillard** pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Nous remercions également les professeurs **Jean Karl Platten** et **The Hung Nguyen** pour avoir bien voulu participer à notre jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

Nous adressons nos remerciements au Département de génie mécanique de l'École Polytechnique et à son personnel sans oublier le Gouvernement du Québec pour son aide financière et l'Ambassade de l'Algérie au Canada pour nous avoir exempté des frais de scolarité au début de nos études doctorales.

Nous remercions vivement notre épouse Karima et nos enfants Ilyes et Hamza pour leur encouragement et leur patience, et surtout pour leur présence qui nous a été d'un grand réconfort durant nos études. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre

profonde gratitude.

Nous tenons également à remercier nos chers parents pour le soutien et les encouragements qu'ils nous ont témoignés durant toutes nos études. Ô mon Seigneur, fais-leur, à tous deux, miséricorde comme ils nous ont élevé tout petit.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et en particulier au professeur Hasnaoui Mohammed et au Dr. Mbaye Moustapha pour les commentaires et les suggestions qu'ils ont apportés sur cet ouvrage et à nos amis et collègues du groupe thermique, Dr. Aboubi Kheira, M. Mahidjiba Ahmed et M. Kalla Lamine, pour leur solidarité et l'ambiance de travail qu'ils ont su créer.

Enfin, nous remercions le Bon Dieu qui nous a donné du courage, de l'endurance et de la volonté jusqu'à l'accomplissement de ce travail. Nous disons : louange à Dieu, Seigneur de l'univers.

## RÉSUMÉ

Le transfert de chaleur et de masse est fréquemment rencontré aussi bien dans la nature que dans l'industrie. Les domaines d'applications sont nombreux et variés. La métallurgie, les procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, de thermochimie, d'électrochimie et de stockage des gaz liquides en sont quelques exemples.

Dans cette thèse, les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluides et poreux confinés ont été étudiés analytiquement et numériquement. La géométrie considérée est une cavité rectangulaire inclinée de rapport de forme variable. Les parois actives sont soit soumises à des flux constants de chaleur et de masse, soit maintenues à des températures et à des concentrations constantes. Le phénomène de la convection thermosolutale est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration. L'écoulement convectif est régi par différents paramètres de contrôle, à savoir le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$  (ou  $R_T$ ), le rapport des forces de volume thermiques et solutales,  $N$  ( $N = Ra_T/Ra_S$ ,  $Ra_S$  est le nombre de Rayleigh solutal), le nombre de Prandtl,  $Pr$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport de forme de la cavité,  $A$ , l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ , de la cavité par rapport au plan horizontal et la porosité normalisée,  $\epsilon$ , de la matrice poreuse.

En général, la solution des problèmes envisagés est obtenue par des voies numériques. La méthode des volumes de contrôle a été employée pour résoudre les équations de base en milieu fluide. Les méthodes des différences finies et des éléments finis ont été utilisées en milieu poreux. Lorsque les parois actives de la

cavité sont soumises à des flux constants de chaleur et de masse, une solution analytique, basée sur le concept de l'écoulement parallèle, a été dérivée dans le cas des cavités élancées ou aplatis.

Pour étudier la stabilité de certaines configurations géométriques, une nouvelle technique numérique générale, basée sur la théorie de la stabilité linéaire et sur les méthodes des éléments finis et des résidus pondérés, a été développée. La validité de cette nouvelle technique a été obtenue par comparaison avec certains résultats disponibles dans la littérature. De plus, le modèle de Lorenz, en conjonction avec les méthodes des éléments finis et de Galerkin, a été utilisé pour l'analyse de la stabilité non linéaire dans des couches fluide et poreuse horizontales.

Les principaux résultats obtenus sont résumés ci-dessous.

En premier lieu, nous avons examiné les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans une cavité inclinée soumise à des flux constants de chaleur et de masse. Dans les cas où la cavité présente de grands ou de petits rapports de forme, une solution analytique a été dérivée en se basant sur le concept de l'écoulement parallèle. En résolvant numériquement les équations de base dans leur intégrité, l'accord obtenu entre les solutions analytiques et numériques s'est avéré excellent. Selon le signe de la valeur du rapport des forces de volume,  $N$ , deux types d'écoulements convectifs ont été étudiés : la convection coopérante ( $N > 0$ ) et la convection opposée ( $N < 0$ ). Pour chacun des types d'écoulements, trois régimes convectifs ont été examinés : le régime de force de volume d'origine thermique dominante ( $|N| \ll 1$ ), le régime intermédiaire dans lequel les forces de volume thermique et solutale sont comparables ( $|N| \sim O(1)$ ) et le régime de force de volume d'origine solutale dominante ( $|N| \gg 1$ ). Selon la valeur de l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ , trois cas ont été examinés.

Le premier cas concerne la cavité verticale. Pour cette situation, les effets des paramètres de contrôle sur les transferts de chaleur et de masse ont été examinés.

En régime de force de volume d'origine thermique dominante, le taux du transfert de chaleur dépendant uniquement du nombre de Rayleigh thermique. Cependant, le transfert de masse dépend non seulement du nombre de Rayleigh thermique mais aussi du nombre de Lewis. En régime de force de volume d'origine solutale dominante, les résultats montrent que le taux du transfert de masse est proportionnel à  $Ra_S^{2/9}$  et que, lorsque le nombre de Lewis est élevé, le transfert thermique devient purement conductif. Dans le cas où les forces de volume sont égales ( $N = 1$ ), pour une valeur donnée de  $Ra_T$ , les transferts de chaleur et de masse deviennent indépendants du nombre de Lewis, lorsque celui-ci est très élevé. Lorsque les forces de volume sont opposées ou coopérantes, que ce soit dans le régime thermique dominant ou solutal dominant, les taux de transfert de chaleur et de masse demeurent pratiquement inchangés et une symétrie par rapport à  $N = -1$  a été observée.

Dans le régime intermédiaire, où les forces de volume sont opposées et du même ordre de grandeur, les résultats tant numériques qu'analytiques, obtenus en milieu poreux, montrent que la transition du régime solutal vers le régime thermique se produit avec un renversement brusque de l'écoulement convectif à une valeur de  $N$  qui dépend des autres paramètres de contrôle. Cependant, la transition du régime thermique vers le régime solutal se produit graduellement et le renversement de l'écoulement convectif est caractérisé par l'apparition d'une structure multicellulaire. Dans la zone de transition, la multiplicité des solutions a été démontrée.

Le second cas concerne la couche fluide (ou poreuse) horizontale pour laquelle nous avons déterminé le seuil de la convection en terme d'un nombre de Rayleigh supercritique. Lorsque les forces de volume sont opposées ( $Ra_S < 0$ ), deux types de bifurcations ont été observées lorsque  $Le > 1$  : une bifurcation supercritique et une bifurcation souscritique. Pour cette dernière, la solution convective bifurque de l'état de repos du fluide avec une amplitude finie. Le nombre de Rayleigh souscritique a été déterminé en fonction des nombres de Rayleigh solutal et de Lewis. La multiplicité

de solutions a été démontrée.

Dans le troisième cas, l'effet de l'angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal a été étudié. Des résultats obtenus en milieu poreux montrent que l'effet de l'inclinaison sur les transferts de chaleur et de masse est considérable.

En second lieu, la stabilité de certains systèmes a été étudiée sur la base de la théorie de la stabilité linéaire et non linéaire. Les résultats montrent que, lorsque la cavité est en position horizontale, la solution de la conduction pure est une solution possible. Il existe cependant un nombre de Rayleigh supercritique au-delà duquel la convection est possible. À l'aide du modèle de Lorenz, nous avons démontré l'existence de quatre régimes distincts. Ces derniers sont : le régime conductif stable, le régime convectif souscritique, le régime convectif oscillant surstable et le régime convectif direct.

Dans le cas d'une cavité inclinée, lorsque les forces de volume sont égales et opposées, l'existence d'un seuil de convection a été démontrée. Les régimes convectifs souscritique et surstable oscillant ont été mis en évidence. La structure de l'écoulement au seuil de la convection a été déterminée numériquement en fonction des paramètres de contrôle. En milieu fluide, lorsque  $Le = 1$ , le fluide est inconditionnellement stable. Cependant, en milieu poreux, vu que la porosité de la matrice poreuse est inférieure à l'unité, l'existence de l'écoulement convectif est possible au-delà d'un seuil de convection.

## ABSTRACT

Natural thermosolutal convective flows are due mainly to density variation caused by combined thermal and solutal gradients. Such flows are commonly met in nature as well as in many industrial applications. The typical ones are: metallurgy, drying processes, electrochemistry, thermochemical processes and storage of liquid gaz.

In this thesis, the heat and mass transfer by natural convection in confined fluid and porous media has been studied analytically and numerically. The investigation is conducted in an inclined rectangular enclosure of variable aspect ratio. Two of its parallel walls are subject to constant heat and mass fluxes or maintained at constant and different temperatures and concentrations. The other two walls are impermeable and well insulated. The thermosolutal convective phenomenon inside the enclosure is described by the Navier Stokes equations, the energy and species conservation equations. The convective flow is governed by the thermal Rayleigh number,  $Ra_T$  (or  $R_T$ ), the buoyancy ratio,  $N$  ( $N = Ra_T/Ra_S$ ,  $Ra_S$  is the solutal Rayleigh number), the Prandtl number,  $Pr$ , the Lewis number,  $Le$ , the aspect ratio of the enclosure,  $A$ , the inclination angle,  $\Phi$ , of the cavity with respect to the horizontal plane and the normalized porosity,  $\varepsilon$ , of the porous matrix.

In general, the solution of the problem is obtained numerically. The control volume approach is employed to solve the governing equations in fluid medium and both finite difference and finite element methods are used for porous medium. However, for small or large aspect ratio of the enclosure, an analytical solution is developed on the basis of the parallel flow approximation when the enclosure is subject to constant heat and mass fluxes.

To study the convective instability problem, a new numerical technique is developed on the basis of the finite element and the Galerkin methods. The validation of the numerical technique is obtained by comparison with the classical results available in the literature. For horizontal fluid or porous layers, the Lorenz model is employed to study the weak non-linear stability problem.

The main results obtained by the present investigation are summarized as :

In chapter IV, we have studied the heat and mass transfer in a slender enclosure subject to constant heat and mass fluxes. Using a parallel flow approximation, an analytical solution is derived for any of the controlling parameters. A good agreement is obtained between the analytical results and those obtained with the numerical simulation of the fully governing equations. The aiding and the opposing flows have been studied. In each case, three convective regimes are considered : the heat-driven flow regime, the solute-driven flow regime and the intermediate flow regime. The transition between the two extreme cases is also studied.

According to the value of the inclination angle,  $\Phi$ , three situations are considered.

First, we have considered the case of a vertical enclosure. In the boundary layer regime for aiding flow, the heat and mass transfer rates are observed to vary linearly with  $Ra_f^{2/9}$  in the fluid medium (with  $R_T^{2/5}$  in the porous medium). Due to the high value of the Lewis number, the mass transfer rate was found to be more important than the heat transfer one. In the heat-driven flow regime, it was demonstrated that the heat transfer depends only on the thermal Rayleigh number; on the other hand, the mass transfer rate is a function of the thermal Rayleigh number and the Lewis number. However, in the solute-driven flow regime, the mass transfer rate is proportional to  $Ra_s^{2/9}$  and when the Lewis number is very large, the heat transfer becomes purely diffusive. Also, in the intermediate flow regime, it was observed that the heat and mass transfer rates become independent of the Lewis number when the

latter is very large.

In the intermediate opposing flow regime, it was found analytically and numerically that the evolution of the flow structure and the heat and mass transfer rates with the buoyancy ratio,  $N$ , is completely different from that obtained in the aiding flow regime. The numerical results, obtained for the porous medium, show that the transition from the solute-driven opposing flow regime to the heat-driven opposing flow regime occurs suddenly by a complete reversal of the convective flow from a clockwise to a counterclockwise circulation. However, the transition from the heat-driven opposing flow regime to the solute-driven opposing flow regime occurs gradually with the presence of a multicellular flow. The existence of multiple solutions with different flow structures has been demonstrated.

Second, the case of a horizontal fluid (or porous) layer has been examined. Similarly to the well known Bénard problem, the onset of convection has been determined in terms of a supercritical Rayleigh number. For opposing flow, when  $Le > 1$ , two kinds of bifurcation have been observed, namely the supercritical and the subcritical ones. The latter occurs through finite amplitude convection and the corresponding critical Rayleigh number was determined as a function of the solutal Rayleigh and the Lewis number. Multiple solutions with different flow structures are found to exist.

Finally, the inclination angle effect has been investigated. Analytical and numerical results obtained in porous medium showed that the inclination angle has a strong effect on the heat and mass transfer rates.

In chapter V, the stability analysis was carried out to study the stability of the fluid. On the basis of the finite element and Galerkin methods, a new general numerical technique was developed to solve the linear problem. It was demonstrated that for a horizontal cavity, the pure diffusive state is a possible solution of the present problem and there exists a threshold above which this solution becomes

unstable. The critical Rayleigh number and the flow structure at the onset of convection are determined in terms of the governing parameters. In the opposing flow regime, when  $Le > 1$  and by using the Lorenz model, the results show the existence of four distinct regimes, which are pure diffusive regime, subcritical convective regime, convective overstable regime and unstable direct convective regime.

For an inclined enclosure, when the buoyancy forces are of equal intensity and in opposite direction, the supercritical Rayleigh number for the onset of convection is determined. The existence of a subcritical convection was demonstrated and the corresponding critical Rayleigh number was determined. The flow structure is determined in terms of the governing parameters. When  $Le = 1$ , the overstable regime does not exist in fluid medium and the rest state solution is unconditionally stable. However, in porous media since the normalized porosity is smaller than unity, the overstable and direct convective flow regimes are found to exist.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS .....	v
RÉSUMÉ .....	vii
ABSTRACT .....	xi
TABLE DES MATIÈRES .....	xv
LISTE DES FIGURES .....	xxii
LISTE DES TABLEAUX .....	xxxi
NOMENCLATURE .....	xxxii
<b>CHAPITRE I: INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités .....	1
1.2 Problème physique .....	2
1.2.1 Définition .....	2
1.2.2 Méthodes de solution .....	3
1.3 Contenu de la thèse .....	3
1.4 Revue bibliographique .....	4
<b>CHAPITRE II: MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE</b>	<b>17</b>
2.1 Description du problème .....	17

2.1.1	Hypothèses simplificatrices . . . . .	19
2.2	Formulation mathématique . . . . .	20
2.2.1	Convection en milieux fluides . . . . .	20
2.2.1.1	Équation de continuité . . . . .	21
2.2.1.2	Équation de conservation de la quantité de mouvement	21
2.2.1.3	Équation de conservation de l'énergie . . . . .	21
2.2.1.4	Équation de conservation de la masse . . . . .	21
2.2.1.5	Conditions aux frontières hydrodynamiques . . . . .	24
2.2.1.6	Conditions aux frontières thermiques et massiques .	24
2.2.2	Convection dans des milieux poreux . . . . .	25
2.2.2.1	Équation de continuité . . . . .	26
2.2.2.2	Équations de mouvement : Loi de Darcy . . . . .	27
2.2.2.3	Équation de conservation de l'énergie . . . . .	27
2.2.2.4	Équation de conservation de la masse . . . . .	27
2.2.2.5	Conditions aux frontières hydrodynamiques . . . . .	29
2.2.2.6	Conditions aux frontières thermiques et massiques .	29
2.3	Transferts thermique et massique . . . . .	30
<b>CHAPITRE III: MÉTHODES DE SOLUTIONS . . . . .</b>		32
3.1	Solution numérique : milieu fluide . . . . .	32
3.2	Solution numérique : milieu poreux . . . . .	35

3.2.1	Méthode des différences finies . . . . .	35
3.2.2	Méthode des éléments finis . . . . .	38
3.2.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	40
3.2.2.2	Discrétisation et choix de l'élément . . . . .	41
3.2.2.3	Résolution . . . . .	43
3.3	Validation des codes numériques . . . . .	45
3.4	Méthodes analytiques . . . . .	46
3.4.1	Concept de l'écoulement parallèle . . . . .	47
3.4.1.1	Cavité élancée : $A \gg 1$ . . . . .	47
3.4.1.2	Cavité aplatie : $A \ll 1$ . . . . .	52
3.4.2	Validation du concept de l'écoulement parallèle . . . . .	55
<b>CHAPITRE IV: SOLUTIONS ET ANALYSE DES RÉSULTATS</b>		58
4.1	Solution analytique : milieu fluide . . . . .	58
4.1.1	Solution pour $R > 0$ . . . . .	58
4.1.1.1	Régime de couche limite . . . . .	60
4.1.1.2	Résultats et discussion . . . . .	68
4.1.2	Solution pour $R < 0$ . . . . .	73
4.1.3	Solution pour $R < 0$ : $N = -1$ et $\Phi = 90^\circ$ . . . . .	75
4.1.3.1	Cavité élancée : $A \gg 1$ . . . . .	76
4.1.3.2	Cavité aplatie : $A \ll 1$ . . . . .	78

4.1.3.3 Résultats et discussion . . . . .	79
4.1.4 Solution pour $R = 0$ . . . . .	85
4.1.4.1 Cavité élancée : $A \gg 1$ et $\Phi = 0^\circ$ . . . . .	87
4.1.4.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$ et $\Phi = 0^\circ$ . . . . .	87
4.2 Solution analytique : milieu poreux . . . . .	93
4.2.1 Solution pour $\bar{R} > 0$ . . . . .	93
4.2.2 Solution pour $\bar{R} < 0$ . . . . .	95
4.2.3 Analyse des résultats : cavité verticale élancée . . . . .	95
4.2.3.1 Régime de couche limite . . . . .	95
4.2.3.4 Analyse des résultats : cavité verticale carrée . . . . .	104
4.2.5 Solution pour $\bar{R} < 0$ : $N = -1$ et $\Phi = 90^\circ$ . . . . .	115
4.2.5.1 Cavité élancée : $A \gg 1$ . . . . .	115
4.2.5.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$ . . . . .	117
4.2.5.3 Discussion des résultats : $N = -1$ et $\Phi = 90^\circ$ . . . . .	118
4.2.5.4 Discussion des résultats : $0^\circ \leq \Phi \leq 180^\circ$ . . . . .	119
4.2.6 Solution pour $\bar{R} = 0$ . . . . .	121
4.2.7 Cavité élancée : $A \gg 1$ et $\Phi = 0^\circ$ . . . . .	122
4.2.8 Cavité aplatie : $A \ll 1$ et $\Phi = 0^\circ$ . . . . .	123
4.2.9 Discussion des résultats . . . . .	124
4.2.10 Cavité horizontale chauffée et salée par le haut . . . . .	135

4.3 Conclusion . . . . .	136
<b>CHAPITRE V: ÉTUDE DU PROBLÈME DE STABILITÉ . . . . .</b>	<b>138</b>
5.1 Introduction . . . . .	138
5.2 Analyse de la stabilité : milieu fluide . . . . .	142
5.3 Théorie de la stabilité linéaire . . . . .	142
5.3.1 Solution numérique : éléments finis . . . . .	143
5.3.1.1 Formulation variationnelle . . . . .	143
5.3.1.2 Discrétisation . . . . .	144
5.3.1.3 Méthode d'intégration de Gauss . . . . .	147
5.3.1.4 Introduction des conditions aux frontières . . . . .	148
5.3.2 Stabilité marginale : $p = 0$ . . . . .	148
5.3.3 Stabilité transitoire : $p \neq 0$ . . . . .	150
5.3.3.1 Cavité horizontale : $\Phi=0^\circ$ ou $180^\circ$ . . . . .	152
5.3.3.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$ . . . . .	154
5.3.3.3 Algorithme de calcul . . . . .	155
5.3.3.4 Validation . . . . .	155
5.3.3.5 Effet du maillage . . . . .	156
5.3.4 Stabilité non linéaire : cavité horizontale . . . . .	157
5.3.4.1 Solution permanente . . . . .	160
5.3.4.2 Stabilité linéaire transitoire : $p \neq 0$ . . . . .	162

5.3.5 Résultats et discussion . . . . .	162
5.3.5.1 Cavité horizontale : $\Phi = 0^\circ$ ou $= 180^\circ$ . . . . .	162
5.3.5.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$ . . . . .	169
5.4 Analyse de la stabilité : milieu poreux . . . . .	180
5.4.1 Théorie de la stabilité linéaire . . . . .	182
5.4.2 Solution numérique : éléments finis . . . . .	182
5.4.2.1 Formulation variationnelle . . . . .	182
5.4.2.2 Discrétisation . . . . .	183
5.4.3 Stabilité marginale : $p = 0$ . . . . .	183
5.4.4 Stabilité transitoire : $p \neq 0$ . . . . .	184
5.4.4.1 Cavité horizontale . . . . .	187
5.4.4.2 Cavité incliné . . . . .	188
5.4.4.3 Validation . . . . .	189
5.4.4.4 Effet du maillage . . . . .	190
5.4.5 Stabilité non linéaire : cavité horizontale . . . . .	192
5.4.5.1 Solution permanente . . . . .	193
5.4.6 Discussion des résultats . . . . .	194
5.4.6.1 Cavité horizontale : $\Phi = 0^\circ$ et $180^\circ$ . . . . .	194
5.4.6.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$ . . . . .	202
5.5 Conclusion . . . . .	230

<b>CHAPITRE VI: CONCLUSIONS GÉNÉRALES . . . . .</b>	<b>231</b>
<b>6.1 Cavité soumise à des flux constants de chaleur et de masse . . . . .</b>	<b>232</b>
<b>6.1.1 Cavité verticale . . . . .</b>	<b>232</b>
<b>6.1.2 Cavité horizontale . . . . .</b>	<b>234</b>
<b>6.1.3 Cavité inclinée . . . . .</b>	<b>234</b>
<b>6.2 Cavité soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales variées . . . . .</b>	<b>234</b>
<b>6.2.1 Cavité horizontale . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>6.2.2 Cavité inclinée . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>6.3 Recommandations . . . . .</b>	<b>236</b>
<b>RÉFÉRENCES . . . . .</b>	<b>237</b>

## LISTE DES FIGURES

2.1	Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées. . . . .	18
3.1	Représentation schématique : a) du domaine de calcul discrétilisé et b) de l'élément fini de Lagrange. . . . .	42
3.2	Représentation schématique d'une : a) cavité élancée, b) cavité aplatie. . . . .	48
3.3	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues en milieu fluide pour $Ra_T = 10^6$ , $N = 1$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) $A = 1$ , $\Psi_{max} = 3.501$ , $\Psi_{min} = 0$ , $\overline{Nu} = 3.578$ et $\overline{Sh} = 13.598$ , b) $A = 8$ , $\Psi_{max} = 4.446$ , $\Psi_{min} = 0$ , $\overline{Nu} = 6.883$ et $\overline{Sh} = 12.548$ . . . . .	50
3.4	Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues en milieu poreux pour $\kappa = 1$ : a) $R_T = 50$ , $N = 10$ , $Le = 10$ , $A = 4$ et $\Phi = 90^\circ$ ; $\overline{\Psi}_{max} = 1.182$ , $\overline{\Psi}_{min} = 0$ , $\overline{Nu} = 2.060$ et $\overline{Sh} = 19.068$ , b) $R_T = 50$ , $N = 1$ , $Le = 0.5$ , $A = 1/8$ et $\Phi = 90^\circ$ ; $\overline{\Psi}_{max} = 3.370$ , $\overline{\Psi}_{min} = 0$ , $\overline{Nu} = 5.855$ et $\overline{Sh} = 2.332$ , c) $R_T = 100$ , $N = 1$ , $Le = 10$ , $A = 8$ et $\Phi = 0^\circ$ ; $\overline{\Psi}_{max} = 3.916$ , $\overline{\Psi}_{min} = 0$ , $\overline{Nu} = 6.139$ et $\overline{Sh} = 6.166$ . . . . .	54
3.5	Influence du rapport de forme de la cavité sur les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_T = 10^6$ , $N = 1$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ . . . . .	57
4.1	Profils de la vitesse, $v$ , de la température, $T$ , et de la concentration, $S$ , dans le plan médian horizontal pour $Ra_T = 10^6$ , $N = 1$ , $Pr = 7$ , $Le = 0.1$ , $1$ et $10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ . . . . .	64

4.2 Influence du nombre de Rayleigh sur les transferts de chaleur et de masse pour $N = 1$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	69
4.3 Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_T = 10^5$ , $N = 1$ , $Pr = 7$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	71
4.4 Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_T = 10^5$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	72
4.5 Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_T = 1$ , $N = 10^5$ , $Pr = 7$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	74
4.6 Influence du nombre de Rayleigh sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse pour $N = -1$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	80
4.7 Influence du nombre de Lewis sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_T = 10^4$ , $N = -1$ , $Pr = 7$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	82
4.8 Profils de la vitesse, $v$ , de la température, $T$ , et de la concentration, $S$ , dans le plan médian horizontal pour $Ra_T = 5 \times 10^3$ et $5 \times 10^4$ , $N = -1$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	84
4.9 Influence du nombre de Rayleigh sur : a) l'intensité de l'écoulement pour $Ra_S^0 = -50$ , $Pr = 7$ , $Le = 0.5, 2, 5$ et $10$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ , b) les transferts de chaleur et de masse pour $Ra_S^0 = -50$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ .	92
4.10 Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour $R_T = 500$ , $N = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	99
4.11 Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour $R_T = 100$ , $Le = 10$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ .	100



4.16 Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour $R_T = 100$ , $Le = 10$ , $A = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) $N = -2$ , $\bar{\Psi}_{max} = 0$ , $\bar{\Psi}_{min} = -0.131$ , $\bar{Nu} = 1.009$ et $\bar{Sh} = 1.854$ , b) $N = -1.85$ , $\bar{\Psi}_{max} = 0$ , $\bar{\Psi}_{min} = -0.123$ , $\bar{Nu} = 1.008$ et $\bar{Sh} = 1.726$ , c) $N = -1.5$ , $\bar{\Psi}_{max} = 0$ , $\bar{\Psi}_{min} = -0.109$ , $\bar{Nu} = 1.005$ et $\bar{Sh} = 1.432$ , d) $N = -1.35$ , $\bar{\Psi}_{max} =$ $0.010$ , $\bar{\Psi}_{min} = -0.132$ , $\bar{Nu} = 1.003$ et $\bar{Sh} = 1.303$ . . . . .	111
4.17 Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour $R_T = 100$ , $Le = 10$ , $A = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ . . . . .	113
4.18 Transferts de chaleur et de masse pour $N = -1.8$ , $A = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) effet du nombre de Lewis pour $R_T = 10$ , b) effet du nombre de Rayleigh pour $Le = 10$ . . . . .	114
4.19 Influence de l'inclinaison sur les transferts de chaleur et de masse pour $R_T = 100$ , $N = 1$ , $Le = 0.1$ , $1$ et $10$ et $\kappa = 1$ . . . . .	120
4.20 Courbes de bifurcations pour $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ : effet du nombre de Rayleigh sur l'intensité de l'écoulement, a) $N = -0.1$ et $Le = 2, 5$ et $10$ , b) $R_S = -100$ et $Le = 1, 2, 5$ et $10$ . . . . .	127
4.21 Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour $R_T = 100$ , $N = -0.1$ et $-0.8$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ . . . . .	129
4.22 Solutions multiples pour $R_T = 100$ , $N = -0.8$ , $Le = 10$ , $A = 5$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ ; lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : a) écoulement parallèle, $\bar{\Psi}_{max} = 3.689$ , $\bar{\Psi}_{min} = 0$ , $\bar{Nu} = 3.635$ et $\bar{Sh} = 6.739$ , b) écoulement de Bénard, $\bar{\Psi}_{max} = 3.412$ , $\bar{\Psi}_{min} = -3.412$ , $\bar{Nu} = 2.459$ et $\bar{Sh} = 8.288$ , écoulement transitoire (lignes de courant) à : c) $t = 5.150$ , d) $t = 6.741$ , e) $t = 7.000$ , f) $t = 7.093$ , g) $t = 7.187$ , h) $t = 7.276$ , i) $t = 7.364$ , j) $t = 7.535$ et k) $t = 8.692$ . . . . .	131

4.23 Évolution dans le temps des taux de transfert de chaleur et de masse et de la valeur minimale et maximale de la fonction de courant pour $R_T = 100$ , $N = -0.8$ , $Le = 10$ , $A = 5$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ .	132
4.24 Transferts de chaleur et de masse dans une cavité poreuse horizontale : a) effet du nombre de Rayleigh pour $Le = 10$ , $N = 1$ et -0.8 et $\kappa = 1$ , b) effet du rapport des forces de volume pour $R_T = 20$ , $Le = 1$ et 10 et $\kappa = 1$ .	134
5.1 a) Domaine de calcul discrétréisé, b) élément fini cubique de Hermite.	145
5.2 Effet du rapport de forme de la cavité sur : a) la constante $Ra^{sup}$ , b) les constantes $\gamma_\psi$ et $\gamma$ pour $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 0$ .	164
5.3 Effet du rapport de forme de la cavité sur : a) la constante $Ra^{sup}$ , b) les constantes $\gamma_\psi$ et $\gamma$ , pour $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 0$ .	166
5.4 a) Diagramme de stabilité pour $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $A = 1$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ , b) variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de $Ra_T^0$ pour $Ra_S^0 = -50$ , $Pr = 7$ , $Le = 10$ , $A = 1$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ .	168
5.5 Structures de l'écoulement correspondant aux valeurs propres $\lambda_i$ obtenues pour $A = 1$ , $\kappa = 0$ : a'-j') $\Phi = 0^\circ$ et a-t) $\Phi = 90^\circ$ .	172
5.6 a) Effet de l'inclinaison sur la constante $Ra^{sup}$ pour $A = 1$ et $\kappa = 0$ et 1, structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ et $\kappa = 1$ : b) $Ra^{sup} = 1684.54$ , c) $Ra^{sup} = 2366.47$ , d) $Ra^{sup} = 19718.19$ , e) $Ra^{sup} = 484403.48$ et pour $Le > 1$ et $\kappa = 0$ : f) $Ra^{sup} = -431929.00$ , g) $Ra^{sup} = -17166.63$ , h) $Ra^{sup} = -3573.72$ , i) $Ra^{sup} = -2585.10$ .	174

5.7	Effet de l'inclinaison sur $Ra^{sup}$ , $A_C$ et la structure de l'écoulement pour $A = \infty$ et $\kappa = 1$ : a) variation de $Ra^{sup}$ en fonction de $\Phi$ , b) variation de $A_C$ en fonction de $\Phi$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ : c) $A_C = 4.66$ , $Ra^{sup} = 2696.43$ , d) $A_C = 2.48$ , $Ra^{sup} = 6511.19$ , e) $A_C = 5.25$ , $Ra^{sup} = 218881.98$ . . . . .	176
5.8	Effet de l'inclinaison sur $Ra^{sup}$ , $A_C$ et la structure de l'écoulement pour $A = \infty$ $\kappa = 0$ : a) variation de $Ra^{sup}$ en fonction de $\Phi$ , b) variation de $A_C$ en fonction de $\Phi$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le > 1$ : c) $A_C = 2.09$ , $Ra^{sup} = 2971.10$ , d) $A_C = 2.48$ , $Ra^{sup} = 6511.19$ , e) $A_C = 5.09$ , $Ra^{sup} = 28036.64$ . . . . .	178
5.9	Effet du rapport de forme sur la constante $Ra^{sup}$ et la structure de l'écoulement pour $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 0$ et 1; a) variation de $Ra^{sup}$ en fonction de $A$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ et $\kappa = 1$ : b) $Ra^{sup} = 7043.66$ , c) $Ra^{sup} = 7043.66$ et pour $Le > 1$ et $\kappa = 0$ : d) $Ra^{sup} = -6993.85$ , e) $Ra^{sup} = -6993.84$ . . . . .	179
5.10	a) Diagramme de stabilité pour $N = -1$ , $A = \infty$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ , b) variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de $Ra_T$ pour $N = -1$ , $Le = 10$ , $A = \infty$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ . . . . .	181
5.11	Effet du rapport de forme sur les constantes $R^{sup}$ et $\gamma$ pour $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 0$ : a) $R^{sup}$ en fonction de $A$ , b) $\gamma$ en fonction de $A$ . . . . .	198
5.12	Effet du rapport de forme sur les constantes $R^{sup}$ et $\gamma$ pour $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) $R^{sup}$ en fonction de $A$ , b) $\gamma$ en fonction de $A$ . . . . .	200
5.13	a) Diagramme de stabilité pour $Le = 10$ , $\varepsilon = 0.2$ et $\Phi = 0^\circ$ , b) variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de $R_T^0$ pour $R_S^0 = -20$ , $Le = 10$ et $\Phi = 0^\circ$ . . . . .	201

5.14 Effet de l'angle de l'inclinaison sur la constante $R^{sup}$ pour $A = 1$ : a) $\kappa = 0$ , b) $\kappa = 1$	203
5.15 Effet de l'angle de l'inclinaison sur la structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ , $A = 1$ et $\kappa = 0$ : a) $R^{sup} = 39.48$ , b) $R^{sup} = 44.92$ , c) $R^{sup} = 70.36$ , d) $R^{sup} = 184.07$ , e) $R^{sup} = 754.96$ , f) $R^{sup} = 9387.30$ et pour $Le > 1$ , $A = 1$ et $\kappa = 1$ : g) $R^{sup} = -32.20$ , h) $R^{sup} = -44.85$ , i) $R^{sup} = -107.58$ , j) $R^{sup} = -209.62$ , k) $R^{sup} =$ -209.62, l) $R^{sup} = -311.46$ , m) $R^{sup} = -831.08$ , n) $R^{sup} = -2219.54$ .	205
5.16 Effet du rapport de forme sur la constante $R^{sup}$ pour $\Phi = 90^\circ$ : a) $\kappa = 0$ , b) $\kappa = 1$	207
5.17 a) Évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement pour $R_T = 15$ , $N = -1$ , $Le = 10$ , $\varepsilon = 1$ , $A = 5$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ , lignes de courant à b) $t = 80$ et c) $t = 200$	209
5.18 Effet de l'inclinaison sur : a) la constante $R^{sup}$ , b) la longueur d'onde $A_C$ pour $A = \infty$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ , $A = \infty$ et $\kappa = 0$ : c) $\Phi = 40^\circ$ , $R^{sup} = 47.28$ , $A_C = 2.05$ , d) $\Phi = 90^\circ$ , $R^{sup} = 105.36$ , $A_C = 2.50$ , e) $\Phi = 140^\circ$ , $R^{sup} = 561.44$ , $A_C = 5.53$ .	210
5.19 Effet de l'inclinaison sur : a) la constante $R^{sup}$ , b) la longueur d'onde $A_C$ , pour $A = \infty$ et $\kappa = 1$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour $Le < 1$ , $A = \infty$ et $\kappa = 1$ : c) $\Phi = 80^\circ$ , $R^{sup} = 63.57$ , $A_C = 4.07$ , d) $\Phi = 90^\circ$ , $R^{sup} = 105.36$ , $A_C = 2.50$ , e) $\Phi = 150^\circ$ , $R^{sup} = 1600.88$ , $A_C = 4.87$ .	212
5.20 a) Diagramme de stabilité pour $\Phi = 90^\circ$ , a) $\varepsilon = 0.2$ et $\kappa = 0$ , b) $A = \infty$ , $\varepsilon = 0.1$ et $\kappa = 1$	214

5.21	Évolution temporelle de : a) l'intensité de l'écoulement, b) des transferts de chaleur et de masse, c-h) la structure de l'écoulement pour $R_T = 400$ , $N = -1$ , $Le = 1$ , $\varepsilon = 0.2$ , $A = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 0$ .	215
5.22	Diagramme de bifurcation : variation de $\bar{\Psi}_0$ en fonction de $R_T$ pour $N = -1$ , $\varepsilon = 0.1$ , $A = \infty$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) $Le = 10$ , b) $Le = 2$ .	217
5.23	Effet de $R_T$ sur : a) l'intensité de l'écoulement, b) les transferts de chaleur et de masse pour $N = -1$ , $Le = 10$ , $\varepsilon = 1$ , $A = 1$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 0$ , et sur les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : c) $R_T = 25$ , $\bar{Nu} = 1.015$ , $\bar{Sh} = 1.480$ , d) $R_T = 25$ , $\bar{Nu} = 1.001$ , $\bar{Sh} = 1.047$ , e) $R_T = 100$ , $\bar{Nu} = 1.164$ , $\bar{Sh} = 4.595$ .	219
5.24	Effet de $R_T$ sur : a) l'intensité de l'écoulement, b) les transferts de chaleur et de masse pour $N = -1$ , $Le = 10$ , $\varepsilon = 1$ , $A = 4$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 0$ , et sur les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour c) $R_T = 13$ , $\bar{Nu} = 1.004$ , $\bar{Sh} = 1.268$ , d) $R_T = 40$ , $\bar{Nu} = 1.135$ , $\bar{Sh} = 2.595$ , e) $R_T = 40$ , $\bar{Nu} = 1.074$ , $\bar{Sh} = 2.135$ .	220
5.25	a) Effets du nombre de Rayleigh et de la porosité normalisée sur le transfert de masse moyen $\bar{Sh}$ pour $N = -1$ , $Le = 10$ , $A = 4$ , $\Phi = 90^\circ$ , $\kappa = 1$ et $\varepsilon = 0.3$ , $0.6$ et $0.9$ , b) évolution temporelle de $\bar{Sh}$ pour $R_T = 70$ , $N = -1$ , $Le = 10$ , $A = 4$ , $\Phi = 90^\circ$ , $\kappa = 1$ et $\varepsilon = 0.3$ , $0.6$ et $0.9$ .	222
5.26	Évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement pour $R_T = 50$ , $N = -1$ , $Le = 10$ , $A = 4$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 1$ : a) $\varepsilon = 0.4$ , b) $\varepsilon = 0.2$ , c) $\varepsilon = 0.1$ .	224



## LISTE DES TABLEAUX

5.1	Points de Gauss (Dhatt et Touzot 1981). . . . .	147
5.2	Effet du maillage sur la précision de la valeur de $Ra^{sup}$ pour $A = 2^{1/2}$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 0$ . . . . .	157
5.3	Effet du maillage sur la longueur d'onde, $A_C$ , et la valeur supercritique, $Ra^{sup}$ , pour $Le < 1$ , $A = \infty$ , $\Phi = 90^\circ$ et $\kappa = 0$ . . . . .	158
5.4	Valeurs de $Ra^{sup}$ pour $A = 1$ , $\Phi = 0^\circ$ et $90^\circ$ et $\kappa = 0$ . . . . .	171
5.5	Effet du maillage sur la précision de la valeur de $R^{sup}$ pour $Le < 1$ , $A = 1$ , $\Phi = 0^\circ$ et $\kappa = 0$ . . . . .	191
5.6	Effet de l'inclinaison sur la constante $R^{sup}$ pour $A = 1$ et $\kappa = 0$ : $N_{ex} = N_{ey} = 16$ ( $m = 1089$ ). . . . .	191

## NOMENCLATURE

$A$	rapport de forme de la cavité, $H'/L'$
$A_x$	rapport de forme suivant la direction $x$ , $L'/\ell^*$
$A_y$	rapport de forme suivant la direction $y$ , $H'/\ell^*$
$D$	diffusivité solutale
$D_p$	diffusivité solutale en milieu poreux saturé
$Da$	nombre de Darcy, $K/\ell^{*2}$
$g$	accélération de la pesanteur
$H'$	hauteur du système
$j'$	flux de masse constant (par unité de surface)
$k_f$	conductivité thermique du fluide
$k_p$	conductivité thermique du milieu poreux saturé
$\kappa$	constante égale à 0 et 1 pour des conditions aux frontières de types Dirichlet et Neuman, respectivement
$K$	perméabilité du milieu poreux
$\ell^*$	longueur caractéristique du système
$L'$	largeur du système
$Le$	nombre de Lewis, $\alpha/D$
$m$	nombre de noeuds total, $4(N_{ex} + 1)(N_{ey} + 1)$
$m$	nombre de noeuds total, $(2N_{ex} + 1)(2N_{ey} + 1)$
$N^e$	nombre de noeuds dans un élément
$N_{ex}$	nombre d'éléments dans la direction $x$
$N_{ey}$	nombre d'éléments dans la direction $y$
$N$	rapport des forces de volume, $\beta_S \Delta S^* / \beta_T \Delta T^*$

$Nu$	nombre de Nusselt
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen
$q'$	flux de chaleur constant (par unité de surface)
$P$	pression hydrodynamique adimensionnelle, $P' / (\rho_0 U_0^2)$
$P^*$	pression caractéristique, $\rho_0 U^{*2}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/\alpha$
$R^{sup}$	constante supercritique utilisée en milieu poreux
$R_0^{sup}$	constante, $A_x R^{sup}$
$R^{sous}$	constante souscritique utilisée en milieu poreux
$R_0^{sous}$	constante, $A_x R^{sous}$
$R_T$	nombre de Rayleigh-Darcy thermique, $g\beta_T K \Delta T^* \ell^* / \nu \alpha$
$R_S$	nombre de Rayleigh-Darcy solutal, $g\beta_S K \Delta S^* \ell^* / \nu D$
$Ra^{sup}$	constante supercritique utilisée en milieu fluide
$Ra_0^{sup}$	constante, $A_x Ra^{sup}$
$Ra^{sous}$	constante souscritique utilisée en milieu fluide
$Ra_0^{sous}$	constante, $A_x Ra^{sous}$
$Rat$	nombre de Rayleigh thermique, $g\beta_T \Delta T^* \ell^{*3} / \nu \alpha$
$Ras$	nombre de Rayleigh solutal, $g\beta_S \Delta S^* \ell^{*3} / \nu D$
$S$	concentration adimensionnelle, $(S' - S'_0) / \Delta S^*$
$S'_0$	concentration de référence à $x' = y' = 0$
$\Delta S'$	écart de concentration
$\Delta S^*$	écart caractéristique de concentration
$S'_H$	concentration de la paroi chaude
$S'_F$	concentration de la paroi froide
$Sh$	nombre de Sherwood
$\overline{Sh}$	nombre de Sherwood moyen
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_0) / \Delta T^*$
$T'_0$	température de référence à $x' = y' = 0$

$\Delta T'$	écart de température
$\Delta T^*$	écart caractéristique de température
$T'_C$	température de la paroi chaude
$T'_F$	température de la paroi froide
$t$	temps adimensionnel, $t'U^*/\ell^*$
$U^*$	vitesse caractéristique
$u$	vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ , $u'/U^*$
$\bar{u}$	vitesse adimensionnelle de filtration dans la direction $x$ , $\bar{u}'/U^*$
$v$	vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ , $v'/U^*$
$\bar{v}$	vitesse adimensionnelle de filtration dans la direction $y$ , $\bar{v}'/U^*$
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, $(x'/\ell^*, y'/\ell^*)$
$W'$	longueur de la cavité dans la direction $z'$

### Symboles grecques

$\alpha$	diffusivité thermique du fluide
$\alpha_p$	diffusivité thermique du milieu poreux saturé
$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique du fluide
$\beta_S$	coefficient d'expansion solutale du fluide
$\Phi$	angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\rho$	densité du fluide
$\epsilon$	porosité du milieu poreux
$\varepsilon$	porosité normalisée du milieu poreux, $\varepsilon = \epsilon/\sigma$
$\lambda$	valeur propre
$(\rho c)_f$	capacité calorifique du fluide
$(\rho c)_p$	capacité calorifique du milieu poreux saturé
$(\rho c)_s$	capacité calorifique de la matrice solide

$\sigma$	rapport des capacités calorifiques, $(\rho c)_p / (\rho c)_f$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle en milieu fluide, $\Psi' / \alpha$
$\bar{\Psi}$	fonction de courant adimensionnelle en milieu poreux, $\bar{\Psi}' / \alpha_p$

### Exposants

<i>sous</i>	valeur au seuil de la convection souscritique
<i>sup</i>	valeur au seuil de la convection supercritique
<i>sur</i>	valeur au seuil de la convection surstable
<i>osc</i>	valeur exprimant la transition du régime oscillant vers le régime direct
'	variable dimensionnelle

### Indices

<i>max</i>	maximum
<i>min</i>	minimum

### Opérateurs

$$\mathcal{F}(f) = \sin \Phi \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \Phi \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\mathcal{J}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}$$

### Autres

{ }	vecteur
[ ]	matrice
[ ] <sup>-1</sup>	inverse de la matrice

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par la convection naturelle, dans des espaces confinés ou semi-confinés, est généralement dû à la présence des gradients de température et de concentration. Ces gradients causent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Le contenu des espaces peut être un milieu fluide ou un milieu poreux saturé par un fluide. Dans la plupart des situations, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, le fluide est constitué de deux ou plusieurs composants. Ainsi, les écoulements naturels engendrés portent le nom de convection naturelle en double diffusion lorsque le fluide est binaire ou bien de convection thermosolutale lorsque le fluide est composé de deux ou plusieurs constituants.

Le phénomène de la convection thermosolutale est fréquemment rencontré dans la nature. Les exemples sont multiples et nous pouvons en citer quelques-uns : les mouvements convectifs dans les océans qui sont dûs, d'une part, à la présence de gradient de température et, d'autre part, à la distribution non uniforme de la concentration du sel, la dispersion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs) et dans le sol (déchets nucléaires) et la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans

les sols. Par ailleurs, les transferts de chaleur et de masse par convection sont aussi omniprésents. Ces phénomènes interviennent, par exemple, lors des mécanismes de changement de phases des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermophysiques des alliages, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, au cours de divers procédés thermochimiques et électrochimiques, lors du stockage des gaz liquides, dans les pompes à chaleur à absorption ou à adsorption, dans les réacteurs chimiques, dans les procédés d'oxydation ou de traitement des surfaces métalliques et lors de la migration de l'humidité dans les fibres destinées à l'isolation thermique.

## 1.2 Problème physique

### 1.2.1 Définition

La présente thèse est consacrée à l'étude de la convection naturelle d'origine thermosolutale dans une enceinte rectangulaire, remplie d'un fluide binaire ou d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire, soumise à des gradients de température et de concentration. Ces derniers sont engendrés par des conditions limites thermiques et solutales de types Dirichlet ou Neuman, imposées sur les parois actives du système. Bien entendu, la configuration géométrique de l'enceinte et les conditions limites imposées à ses frontières ont une influence majeure sur la structure de l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de matière résultants. L'investigation porte essentiellement sur les effets des paramètres de contrôle du problème, sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de matière au sein du système.

### 1.2.2 Méthodes de solution

En général, les écoulements d'origine thermosolutale sont régis par un système d'équations différentielles non linéaires fortement couplées. Dans la plupart des cas, la solution n'est possible que par des voies numériques. Cependant, il existe certaines situations où des solutions analytiques sont possibles. Ces dernières sont importantes car, même si elles s'appliquent à des situations idéalisées, elles aident énormément à la compréhension physique des phénomènes impliqués dans ce type de problèmes.

Dans cette investigation, plusieurs méthodes numériques et analytiques ont été utilisées pour résoudre les problèmes envisagés. En milieu fluide, nous avons considéré la méthode des volumes de contrôle pour intégrer les équations de base. En milieu poreux, nous avons utilisé la méthode des différences finies et celle des éléments finis pour la résolution des équations de base en milieu poreux. Pour l'étude de certains problèmes de stabilité, les méthodes de Galerkin et des éléments finis ont été utilisées tant pour les milieux fluides que poreux. Finalement, dans le cas d'enceintes élancées ou aplatis exposées à des flux constants de chaleur et de masse, nous avons développé des solutions analytiques sur la base du concept de l'écoulement parallèle.

## 1.3 Contenu de la thèse

La thèse comporte six chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons le problème étudié et nous le situons par rapport aux travaux antérieurs. Le deuxième chapitre est consacré à la définition du modèle physique et à la formulation mathématique de ce dernier. Dans le troisième chapitre, nous décrivons les méthodes numériques utilisées pour la résolution générale des problèmes envisagés. Dans le quatrième chapitre, nous développons la solution analytique basée sur l'approche

de l'écoulement parallèle et nous confrontons les résultats de cette approche à ceux obtenus numériquement. Le cinquième chapitre est consacré à l'élaboration d'une nouvelle technique numérique générale, basée sur les méthodes de Galerkin et des éléments finis, pour l'étude de problèmes de stabilité. Une comparaison des résultats ainsi obtenus sera faite avec ceux prédis par les méthodes classiques. Le sixième chapitre fait l'objet de la conclusion générale sur les résultats obtenus. Quelques recommandations pour les études futures sont finalement émises.

## 1.4 Revue bibliographique

Dans cette section, nous effectuons une recherche bibliographique sur la convection thermosolutale en milieux confinés ou semi-confinés remplis de fluides ou de milieux poreux saturés par des fluides. La synthèse des travaux disponibles sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluides et poreux est consignée dans les livres de Bejan 1984, Platten et Legros 1984 et Nield et Bejan 1992.

Jusqu'à présent, la majorité des études analytiques, numériques et expérimentales concernant la convection thermosolutale, en milieux fluide et poreux, portent sur les cas d'enceintes de formes rectangulaires ou cylindriques. Parmi les premières études portant sur le sujet, nous pouvons citer les travaux de Nield parus en 1967 (milieu fluide) et 1968 (milieu poreux). Ces travaux ont été menés dans des couches horizontales soumises à des gradients opposés de température et de concentration. Le nombre de Rayleigh supercritique, marquant le seuil de l'apparition de la convection, a été prédit par cet auteur pour divers types de conditions limites. Lorsque le soluté joue le rôle d'un stabilisant (et la chaleur d'un déstabilisant), il a été montré que des écoulements convectif oscillants peuvent se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur au nombre de Rayleigh supercritique. Similaire-

ment, Turner 1968 a conduit une investigation théorique et expérimentale sur les mouvements convectifs induits dans une couche fluide initialement stratifiée avec un gradient de soluté. En appliquant un chauffage par le bas, une formation successive de couches convectives a été observée.

Par la suite, Thorpe et al. 1969 ont mené des études théoriques et expérimentales sur le problème d'une couche fluide inclinée soumise à des gradients de température et de concentration. Le cas spécial où les forces de volume sont égales et opposées a été considéré. Les résultats numériques et expérimentaux indiquent l'existence d'un seuil de déclenchement de la convection. La structure de l'écoulement résultant est caractérisée par un empilement périodique de cellules de convection contra-rotatives. Les mêmes observations ont été rapportées par la suite par Chen et al. 1971 pour le cas d'une cavité verticale. Le nombre de Rayleigh supercritique marquant le seuil de la convection a été déterminé expérimentalement. L'existence de la convection souscritique a également été démontrée. Taunton et Lightfoot 1972 ont, de leur côté, étudié le problème de la stabilité dans une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire. Les parois horizontales étaient maintenues à des températures et à des concentrations constantes. En utilisant la théorie de la stabilité linéaire, ces auteurs ont déterminé les Rayleigh critiques délimitant trois régimes convectifs différents. Le premier régime, stable, est caractérisé par l'état de repos du fluide. Cet état peut être maintenu jusqu'à un nombre de Rayleigh critique surstable au-dessus duquel débute la convection oscillante (deuxième régime). Ce dernier peut être maintenu jusqu'au nombre de Rayleigh oscillant qui marque la transition du régime oscillant vers le régime direct (troisième régime). Le troisième nombre de Rayleigh critique caractérise le seuil de la convection marginale. Dans le même ordre d'idée, Legros et al. 1972, Platten et Chavepeyer 1973 et Caldwell 1974 ont étudié la convection doublement diffusive dans une couche fluide horizontale. Les effets de Soret ont été pris en considération. Les études tant expérimentales que théoriques ont prédit les différents régimes mentionnés dans les travaux de Taunton et Lightfoot.

1972.

Huppert et Moore 1976 ont utilisé les théories de la stabilité linéaire et non linéaire pour étudier la convection souscritique au sein d'une couche fluide horizontale à parois libres (forces de cisaillement nulles). Ils ont montré que, lorsque les forces de volume sont opposées, l'état de repos du fluide devient instable au-dessous du nombre de Rayleigh supercritique. Des régimes convectifs oscillants ont été identifiés en fonction des paramètres de contrôle. En outre, ils ont mis en évidence l'existence d'un seuil de convection souscritique dont la bifurcation se produit à une amplitude finie. Enfin, il ont montré qu'un effet d'hystérésis se manifeste lorsque le nombre de Rayleigh augmente à partir d'une certaine valeur puis diminue jusqu'à cette dernière. Ces constatations ont été aussi rapportées par Platten et Chaveyron 1977.

Paliwal et Chen 1980a et 1980b ont étudié l'effet de l'inclinaison d'une couche fluide (par rapport au plan horizontal) sur le seuil de la convection thermosolutale. Une stratification solutale initiale était imposée dans la direction verticale. Un chauffage latéral était ensuite appliqué sur les parois verticales de la couche. L'étude, menée expérimentalement et théoriquement, démontre la formation périodique des cellules convectives dont la structure et le régime dépendent fortement de l'angle d'inclinaison du système. Parallèlement, Ostrach 1980 a identifié différents modes de convection possibles selon l'intensité et le sens des forces de volume (convection coopérante, convection opposée, convection croisée). La transition entre le régime convectif oscillant et le régime convectif stationnaire a été investiguée par Da Costa et al. 1981 dans une couche fluide horizontale. Dans le même ordre d'idée, Proctor 1981 a montré que la convection thermosolutale à amplitude finie pouvait se produire à un nombre de Rayleigh bien inférieur à celui correspondant au seuil de la convection oscillante. Thangam et al. 1982 ont reconstruit le problème étudié par Paliwal et Chen 1980b en étudiant cette fois-ci la stabilité non linéaire. Leurs résultats

ont montré que l'écoulement convectif débutait avec une structure multicellulaire conformément aux résultats prédis par la théorie de la stabilité linéaire. Mais, rapidement, ces cellules fusionnent et forment une structure monocellulaire.

En étudiant le problème de Rayleigh-Bénard dans une cavité horizontale remplie d'un fluide binaire,  $^3He - ^4He$ , Lee et al. 1983 ont mis en évidence l'existence de la convection oscillante quand le chauffage se fait par le bas. Lorsque le chauffage est appliqué par le haut, seul la convection stationnaire a été observée. Similairement, Brand et al. 1984 ont examiné le cas d'une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire,  $^3He-^4He$ , ou par un mélange d'eau et d'alcool. Ces auteurs ont considéré la convection au voisinage du point d'intersection de la ligne de la stabilité neutre et de celle de la stabilité oscillante. L'effet Soret a été pris en considération. Dans le cas d'une cavité à faible rapport de forme, Kamotani et al. 1985 ont étudié la convection thermosolutale dans une solution de sulfate de cuivre. Un dispositif électrochimique a été employé pour imposer un gradient de concentration. En raison d'une grande différence entre les diffusivités thermique et massique, des écoulements complexes multicellulaires ont été observés.

Bejan et Khair 1985 ont présenté une étude fondamentale sur la convection thermosolutale au voisinage d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Une analyse d'échelle a été développée en régime de couche limite. Quatre régimes possibles ont été identifiés selon les valeurs du rapport des forces de volume,  $N$ , et le nombre de Lewis,  $Le$ . Des corrélations pour les nombres de Nusselt et de Sherwood ont été déterminées pour chacun des régimes. Trevisan et Bejan 1985 ont également examiné la convection en double diffusion dans une cavité poreuse dont les parois verticales étaient maintenues à des températures et à des concentrations constantes. L'ordre de grandeur des taux de transfert de chaleur et de masse a été déterminé en fonction du nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , du rapport des forces de volume,  $N$ , et du nombre de Lewis,  $Le$ . Ces résultats

sont en accord avec ceux obtenus numériquement. Par ailleurs, ils ont noté une disparition totale de l'écoulement convectif lorsque  $N = -1$  et  $Le = 1$ . Le même problème a été reconcidéré par Trevisan et Bejan 1986, mais cette fois dans une couche poreuse, et par Trevisan et Bejan 1987a, dans une couche fluide. Des flux de chaleur et de masse ont été imposés sur les parois verticales des cavités. En raison d'une mauvaise compréhension du mécanisme du transfert de chaleur et de masse à l'extérieur des couches limites thermique et solutale, ces auteurs ont développé une solution analytique de type Oseen qui s'est avérée valide uniquement pour un nombre de Lewis égal à l'unité. Une solution afine, basée sur l'hypothèse que les épaisseurs des couches limites hydrodynamique, thermique et solutale sont différentes les unes des autres, les a conduit à des relations incorrectes pour les nombres de Nusselt et de Sherwood. Plus tard, Trevisan et Bejan 1987b ont étudié l'effet du transfert de chaleur sur le transfert de masse dans une cavité chauffée par le bas. La force de volume d'origine solutale a été négligée.

Le problème de la convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale a été considéré par Poulikakos 1986 sur la base du modèle de Brinkman. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, cet auteur a déterminé le seuil des écoulements convectifs oscillant et stationnaire en fonction du nombre de Darcy. Mehta et Nandakumar 1987 ont étudié l'effet de l'hétérogénéité du milieu poreux, dans une cavité verticale, sur le transfert de chaleur et de masse. Ceux-ci ont trouvé que des variations importantes de la perméabilité ont une grande influence sur les écoulements convectifs lorsque les nombres de Rayleigh et de Lewis sont assez grands.

Linz et Lücke 1987 ont utilisé la méthode de Galerkin pour étudier la convection dans une couche horizontale contenant un fluide binaire. Un modèle de Lorenz à huit modes a été utilisé pour démontrer l'existence de la convection souscritique en bas du seuil de la convection oscillante. Knobloch et Moore 1988 ont utilisé la théorie de la stabilité linéaire pour étudier la convection naturelle induite dans une couche

fluide horizontale dont les parois inférieure et supérieure sont rigides. Deux types de conditions aux limites ont été envisagés : 1) des températures constantes sur les parois inférieure et supérieure, 2) un flux de chaleur imposé sur la paroi inférieure et une température constante sur la paroi supérieure. Les seuils et les longueurs d'ondes des écoulements convectifs oscillants et stationnaires ont été déterminés en fonction du coefficient de séparation connu sous le nom d'effet Soret.

Une étude analytique et numérique de la convection au sein d'une cavité carrée, remplie d'un gaz binaire et soumise à des gradients combinés de température et de concentration, a été présentée par Ranganathan et Viskanta 1988. Ceux-ci ont observé que le renversement du sens de l'écoulement se produit à  $N = -1$ , c'est-à-dire, lorsque les forces de volumes sont égales et opposées. Lee et al. 1988 ont examiné la convection thermosolutale dans une cavité remplie d'eau salée. Selon la valeur du rapport des forces de volume, ils ont observé deux types de mouvements convectifs : l'un avec une structure monocellulaire et l'autre avec une structure multicellulaire. En outre, le nombre de cellules dans le cas de la convection opposée est beaucoup plus grand que celui observé dans le cas la convection coopérante. Krishnan 1989 a démontré que lorsque les forces de volume sont égales et opposées, la bifurcation du régime conductif vers le régime convectif se produisait avec une amplitude finie. La formation d'un écoulement multicellulaire a été observée juste au début de la convection. Au-delà du point de bifurcation, l'écoulement convectif permanent pouvait être maintenu jusqu'à un nombre de Rayleigh donné, après quoi il devenait oscillant. Dans une cavité poreuse soumise à des gradients verticaux de température et de concentration, Zhang 1989 a constaté que lorsque les forces de volume sont opposées, l'agent stabilisant (la concentration) engendre des petites cellules de convection, alors que l'agent destabilisant (la température) engendre des grandes cellules de convection. Des écoulements convectifs souscritiques et oscillants ont été observés.

La convection transitoire dans une cavité carrée a été étudiée par Lin et al. 1990. L'évolution de la structure de l'écoulement associée aux transferts de chaleur et de masse a été illustrée dans le cas de la convection coopérante. Par ailleurs, Lee et Hyun 1990 ont étudié la convection dans une cavité rectangulaire soumise à des gradients opposés de température et de concentration. Les résultats obtenus montrent que lorsque le rapport des forces de volume augmente à partir d'une faible valeur, le nombre de Nusselt décroît d'une façon monotone vers l'unité. Le nombre de Sherwood, quant à lui, passe par une valeur minimale et croît par la suite. Dans une cavité remplie d'une solution stratifiée stable à base de sel et d'eau, le mouvement convectif induit par un chauffage latéral a été considéré par Lee et al. 1990. Selon la valeur de  $N$ , quatre régimes d'écoulements ont été identifiés. Par la suite, Hyun et Lee 1990 ont examiné la convection coopérante dans une cavité rectangulaire verticale. L'évolution dans le temps de la structure de l'écoulement multicellulaire a été présentée.

La convection dans une cavité soumise à des gradients croisés de température et de concentration a été investiguée par Lee et Hyun 1991. Ils ont démontré l'existence de trois régimes distincts : un régime convectif monocellulaire, un régime convectif multicellulaire et un régime de conduction pure. Ensuite, Han et Kuehn 1991a et 1991b ont mené des études expérimentale et théorique sur les transferts de chaleur et de masse dans une cavité verticale. Les structures des écoulements multicellulaires observées expérimentalement ont été simulées numériquement avec succès. Moore et al. 1991 ont étudié la convection dans une enceinte rectangulaire chauffée par le bas. Les parois inférieure et supérieure étaient maintenues à des températures et des concentrations différentes. Des écoulements oscillants, ayant une structure non centro-symétrique, ont été observés et différents types de bifurcations ont été identifiés. Par la suite, Lin et al. 1992 ont examiné la double diffusion dans une cavité verticale soumise à des gradients horizontaux opposés de température et de concentration. Quand le rapport des forces de volume est voisin de l'unité, ces

auteurs ont obtenu des écoulements convectifs oscillants pour  $Le = 400$ . Une perte de la centro-symétrie des solutions a été constatée. Pour le même type de problème, Béghein et al. 1992 ont considéré la convection thermosolutale coopérante. Des corrélations ont été proposées pour les taux de transfert de chaleur et de masse en fonction des paramètres de contrôle.

Rosenberg et Spera 1992 ont démontré par voie numérique que, lorsqu'une couche fluide binaire est chauffée et salée par le bas, la dynamique de l'écoulement change considérablement lorsqu'on augmente le rapport des forces de volume. Ils ont constaté que l'écoulement évoluait d'un régime convectif permanent vers un régime oscillant chaotique, puis vers l'état de repos. La convection naturelle due à des flux de chaleur et de masse imposés sur une couche poreuse verticale a été étudiée par Alavyoon 1993, Alavyoon et Masuda 1993 et Alavyoon et al. 1994. En se basant sur le concept de l'écoulement parallèle, ces auteurs ont développé des solutions analytiques concordant bien avec les simulations numériques, si on exclut le cas où les forces de volume sont égales et opposées ( $N = -1$ ). Pour cette situation, la solution analytique de Alavyoon et al. 1994 indique un état de diffusion pure, alors que leur solution numérique prédit une solution convective. Les cas limites où les forces de volume d'origine thermique et d'origine solutale sont dominantes ont également été examinés.

Le problème d'une cavité verticale dont les parois sont maintenues à des températures et à concentrations constantes a été étudié numériquement par Lin 1993. Cet auteur a considéré les effets du nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , du nombre de Lewis,  $Le$ , et du rapport des forces de volume,  $N$ , sur les nombres de Nusselt et de Sherwood. Il a montré que ces nombres augmentent avec  $Ra_T$  et  $N$  et que le temps nécessaire pour atteindre le régime permanent diminue d'une façon significative lorsque  $Ra_T$  ou  $N$  augmente. Chen et Chen 1993 ont considéré la convection dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Le modèle de Darcy ainsi que

les termes de Brinkman et de Forchheimer, qui tiennent compte des effets visqueux et d'inertie, ont été utilisés dans l'équation de mouvement. La solution numérique, basée sur les méthodes de Galerkin et des différences finies, révèle l'existence de trois régimes de convection : un régime permanent, un régime oscillant périodique et un régime oscillant chaotique.

Chang et al. 1993 ont étudié le développement de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse dans une enceinte carrée pour un nombre de Lewis égal à 100. Le développement graduel d'un écoulement multicellulaire a été observé. Ensuite, Chang et Lin 1993 ont reconcidéré le même problème. Ces auteurs se sont intéressés à l'étude du mode de la convection oscillante. En raison de la compétition des effets thermiques et solutaux, l'analyse spectrale montre que l'écoulement convectif est fortement instable.

La convection au sein d'une couche fluide verticale soumise à un gradient de concentration vertical et à un chauffage latéral a été considérée par Tsitverblit 1994. En supposant que le régime convectif était permanent, cet auteur a montré que le problème admettait une seule solution pour des nombres de Rayleigh,  $Ra_T$ , faibles. Pour des valeurs intermédiaires de  $Ra_T$ , la multiplicité des solutions avec différentes structures d'écoulement a été observée. En étudiant le même problème, Kranenborg et Djiksta 1994 ont démontré que certaines des solutions multiples trouvées par Tsitverblit 1994 étaient instables.

La convection naturelle dans des cavités contenant des bains d'alliages de métaux liquides à faibles nombres de Prandtl a été étudiée par Hyun et al. 1995. Deux types d'alliages ont été considérés dans l'étude : un mélange de Al-Cu riche en aluminium et un mélange de Pb-Sn riche en plomb. La paroi verticale chaude était maintenue à une grande concentration en Cu ou en Sn alors que la paroi froide était maintenue à une faible de concentration de ces produits (Cu ou Sn). Ils ont constaté que les effets thermiques et solutaux dans la solution Al-Cu sont coopérants, alors que ceux dans

la solution Pb-Sn sont opposés. Après l'établissement de l'écoulement convectif, la solution Al-Cu devenait solutairement stratifiée en Cu et une faible circulation d'origine thermique occupait l'ensemble de la cavité. Par ailleurs, dans la solution de Pb-Sn, les effets thermiques apparaissaient au centre de la cavité sous la forme d'une petite cellule de convection entourée de deux cellules d'origine solutale.

La convection thermosolutale coopérante induite dans une cavité rectangulaire a été considérée par Bennacer et Gobin 1996 et Gobin et Bennacer 1996. Une analyse d'échelle suivie d'une simulation numérique des écoulements convectifs a été menée. Des corrélations en termes des nombres de Nusselt et de Sherwood ont été proposées en fonction des différents paramètres de contrôle ( $Ra_T$ ,  $Pr$ ,  $Le$  et  $N$ ). La transition du régime thermique dominant vers un régime solutal dominant a été étudiée en fonction du paramètre  $N$ . Des écoulements monocellulaires et multicellulaires ont été observés. Dans le même genre d'étude, Goyeau et al. 1996 ont considéré la convection thermosolutale coopérante dans un milieu poreux de Brinkman. Les prédictions de la simulation numérique se sont avérées en accord avec celles obtenues par une analyse d'échelles en régime de couche limite. Des corrélations de  $Nu$  et de  $Sh$  ont été proposées.

Mamou et al. 1995a ont examiné les écoulements dans une enceinte carrée exposée à des flux horizontaux de chaleur et de masse. Dans le cas où les forces de volume sont opposées et de même ordre de grandeur, ( $-1 > N > -2$ ), l'existence de solutions multiples a été démontrée. Les résultats numériques révèlent que la gamme des valeurs de  $N$  correspondant à la coexistence des solutions multiples dépend fortement des nombres de Rayleigh thermique et de Lewis. Mamou et al. 1995b ont reconcidéré le même problème mais cette fois-ci dans une cavité élancée et inclinée. Les résultats analytiques obtenus avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle étaient en bon accord avec les résultats de la simulation numérique. Dans le cas de la convection opposée ( $N < 0$ ), l'existence de solutions multiples a été démontrée

analytiquement et numériquement. Dans le cas d'une cavité horizontale, les seuils de la convection souscritique et supercritique ont été déterminés en fonction du nombre de Lewis et du rapport des forces de volume. Mamou et al. 1996 ont également examiné le cas d'une couche fluide verticale soumise à des flux de chaleur et de masse constants. Les régimes de pseudo-conduction et de couche limite ont été étudiés numériquement et analytiquement.

Nithiarasu et al. 1996 ont étudié la double diffusion dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les termes d'inertie de Forchheimer et de Navier Stokes ainsi que le terme visqueux de Brinkman ont été considérés. Il a été montré numériquement que les effets de la porosité du milieu poreux sur les taux de transfert de chaleur et de masse deviennent plus importants lorsque la valeur du nombre de Darcy est élevée. Au voisinage de  $N = -1$ , ils ont trouvé que l'écoulement convectif disparaissait complètement. En utilisant le même modèle, Karimi-Fard et Charrier-Mojtabi 1997 se sont penchés sur les effets des termes de Forchheimer et de Brinkman sur l'écoulement convectif. En faisant varier le nombre de Darcy, ils ont montré que les termes d'inertie et visqueux ont une grande influence sur l'écoulement convectif et, par conséquent, doivent être pris en considération lors des simulations numériques. En considérant un milieu de Darcy, Angirasa et Peterson 1997 ont simulé numériquement les écoulements convectifs au voisinage d'une plaque verticale placée dans un milieu poreux. Les résultats numériques révèlent que la porosité du milieu poreux est sans effet sur la solution convective permanente.

Récemment, Ghorayeb et Mojtabi 1997 ont mené une étude sur les écoulements convectifs dans une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. Les forces de poussée sont supposées égales et opposées. L'analyse de la stabilité linéaire démontre l'existence d'un nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection supercritique. D'autre part, les résultats de la convection non linéaire révèlent l'existence de la

convection souscritique. Il a été aussi montré que le problème admettait des solutions multiples. Des résultats similaires ont été obtenus par Mamou et al. 1997a dans le cas d'une couche fluide verticale soumise à des flux de chaleur et de masse constants. En étudiant la stabilité linéaire et non linéaire, ces auteurs ont déterminé d'une façon précise les seuils de bifurcations souscritique et supercritique en fonction du nombre de Rayleigh solutal et du nombre de Lewis. Dans le même ordre d'idée, Amahmid et al. 1987 ont étudié le problème de stabilité dans une couche poreuse verticale soumise à des forces de volume égales et opposées. Le modèle de Brinkman a été adopté par ces derniers. L'existence d'un seuil de convection a été démontré par ces auteurs. Mamou et al. 1997b et 1997c ont étudié la stabilité d'une couche fluide horizontale exposée à des flux verticaux de chaleur et de masse. Ils ont montré que l'existence de la convection souscritique est liée directement aux valeurs du nombre de Rayleigh solutal et du nombre de Lewis.

Pour une solution ternaire composée d'eau, d'isopropanol et d'éthanol, Larre et al. 1997 ont investigué la stabilité du mélange pour le problème de Bénard. Des études expérimentale et théorique ont été menées. En tenant compte des effets Soret, ces auteurs ont obtenu un bon accord entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par la théorie de la stabilité linéaire.

Finalement, dans des cavités verticales poreuses, Charrier-Mojtabi et al. 1997 ont étudié la stabilité du système en utilisant la théorie linéaire. Le nombre de Rayleigh supercritique caractérisant la naissance du régime convectif a été prédit en fonction du nombre de Lewis. Leur étude demeure incomplète, puisqu'ils ont supposé que le principe d'échange de stabilité est applicable. Mamou et al. 1997d, 1998a et 1998b ont développé une méthode numérique qui leur a permis d'étudier la stabilité linéaire transitoire. Ces auteurs ont démontré que le principe de l'échange de stabilité n'est valide que lorsque la porosité du milieu poreux était égale à l'unité. Étant donné que la porosité des milieux poreux est en pratique inférieure à l'unité,

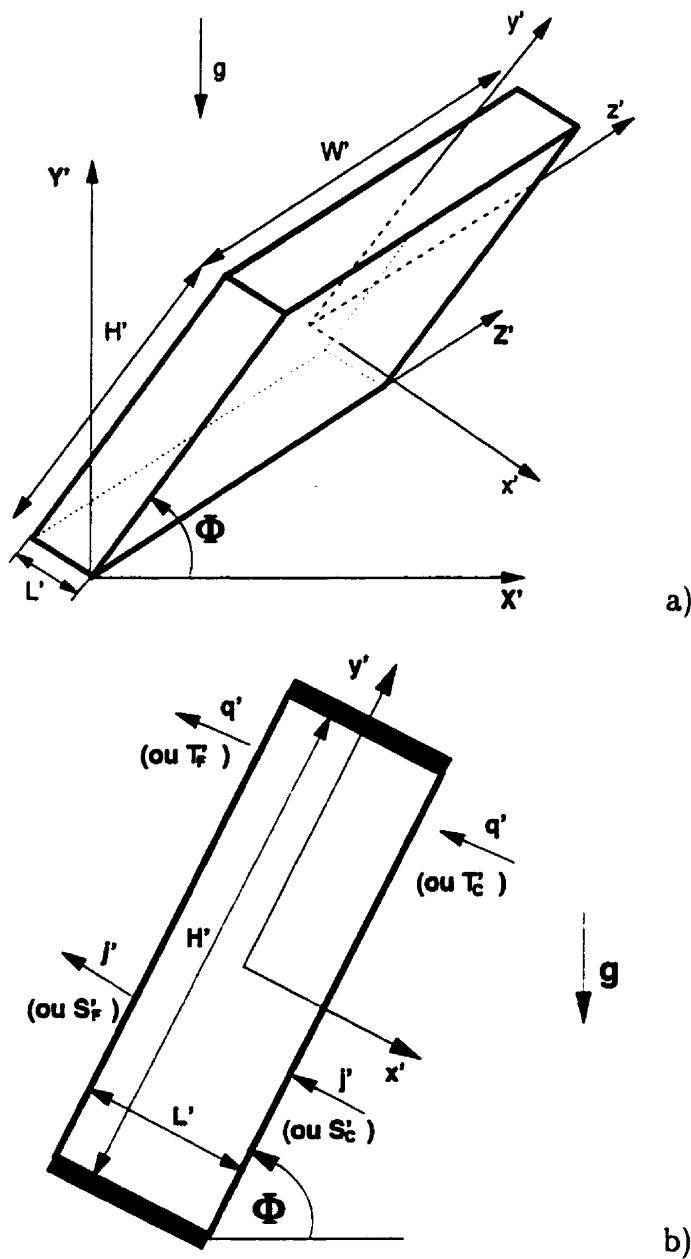
il existe toujours un seuil de la convection même si le nombre de Lewis est égal à l'unité.

## CHAPITRE II

# MODÈLES PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE

### 2.1 Description du problème

Dans cette thèse, nous allons étudier le phénomène de la convection thermosolutale dans des espaces confinés contenant des fluides binaires ou des milieux poreux saturés par des fluides binaires. La configuration spatiale de l'écoulement est illustrée sur la figure 2.1. Il s'agit d'une enceinte de géométrie parallélépipédique de longueur  $W'$ , de hauteur  $H'$  et de largeur  $L'$ , inclinée d'un angle  $\Phi$  par rapport au plan horizontal. Les parois actives (parois parallèles au plan  $y' - z'$ ) sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes ( $1^{\text{er}}$  cas) ou à des températures et des concentrations constantes ( $2^{\text{e}}$  cas). Les autres parois sont supposées imperméables et adiabatiques. Dans la présente étude, les gradients de température et de concentration imposés au système sont positifs relativement à l'axe des  $x$ .



**Figure 2.1 :** Représentation schématique du modèle physique et du système de coordonnées.

### 2.1.1 Hypothèses simplificatrices

Pour une formulation simple du modèle mathématique, nous allons considérer quelques approximations, entre autres les approximations de Boussinesq (Gray et Giorgini 1976), qui sont souvent retenues dans l'étude de la convection naturelle. Nous supposons alors que :

1. La longueur de l'enceinte est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions ( $W'/L'$  et  $W'/H' \gg 1$ ) de façon à ce que les effets de borts deviennent négligeables. Ceci nous ramène alors à un problème bidimensionnel comme le montre la figure 2.1b.
2. La solution binaire est un fluide newtonien et incompressible.
3. L'écoulement engendré est laminaire et transitoire.
4. Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
5. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
6. Les interactions entre les transferts de chaleur et de masse, connues sous le nom d'effets Soret et Dufour respectivement, sont négligeables.
7. Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur ou de masse.
8. Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence. Cependant, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température et la concentration. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T' - T'_0) - \beta_S (S' - S'_0)] \quad (2.1)$$

où  $T'$  et  $S'$  représentent la température du mélange fluide et la concentration du soluté en un point donné du système, respectivement. La concentration  $S'$  est définie par :

$$S' = \rho_0 C' \quad (2.2)$$

où  $\rho_0$  est la densité du mélange et  $C'$  représente la fraction massique du soluté.  $T'_0$  et  $S'_0$  sont des grandeurs de référence qui représentent généralement les valeurs moyennes de la température et de la concentration dans le système.

Dans la relation (2.1),  $\beta_T$  et  $\beta_S$  sont les coefficients d'expansion volumique thermique et solutal du fluide, respectivement. Ils sont définis par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', S'} \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial S'} \right)_{P', T'} \quad (2.3)$$

En général,  $\beta_T$  est positif pour tous les fluides, sauf l'eau en dessous de  $4^\circ C$ , tandis que  $\beta_S$  peut être positif ou négatif selon le soluté considéré. Par exemple, dans le cas où l'eau est considéré comme un solvant et le sel comme un soluté, le coefficient  $\beta_S$  est négatif car le sel contribue à l'augmentation de la densité de l'eau. Dans le cas d'un mélange non saturé, air-vapeur d'eau, le coefficient  $\beta_S$  est positif car l'air humide est moins dense que l'air sec.

## 2.2 Formulation mathématique

Pour la mise en équations du problème, nous considérons d'abord le cas du milieu fluide. Nous examinerons ensuite le cas du milieu poreux.

### 2.2.1 Convection en milieux fluides

Les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont données respectivement par :

### 2.2.1.1 Équation de continuité

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.4)$$

### 2.2.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = - \frac{\partial P'}{\partial x'} + \mu \nabla^2 u' - \rho_0 g [\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)] \cos \Phi \quad (2.5)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = - \frac{\partial P'}{\partial y'} + \mu \nabla^2 v' + \rho_0 g [\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)] \sin \Phi \quad (2.6)$$

### 2.2.1.3 Équation de conservation de l'énergie

$$(\rho C)_f \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_f \nabla^2 T' \quad (2.7)$$

### 2.2.1.4 Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D \nabla^2 S' \quad (2.8)$$

Pour mettre les équations (2.4)-(2.8) sous une forme adimensionnelle, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \left( \frac{x'}{\ell^*}, \frac{y'}{\ell^*} \right), & (u, v) &= \left( \frac{u'}{U^*}, \frac{v'}{U^*} \right) \\ t &= \frac{t'}{t^*}, & P &= \frac{P'}{P^*} \\ S &= \frac{(S' - S'_0)}{\Delta S^*}, & T &= \frac{(T' - T'_0)}{\Delta T^*} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

où  $\ell^*$ ,  $P^*$ ,  $t^*$ ,  $U^*$  sont la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristiques, respectivement. Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \ell^* = L' \quad \text{si} \quad A \geq 1 \\ \ell^* = H' \quad \text{si} \quad A < 1 \\ P^* = \rho_0 U^{*2} \\ t^* = \frac{\ell^*}{U^*} \\ U^* = \frac{\alpha}{\ell^*} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Le paramètre  $A$ , quand à lui, désignant le rapport de forme de la cavité, est défini par :

$$A = \frac{H'}{L'} \quad (2.11)$$

Par ailleurs,  $\Delta T^*$  et  $\Delta S^*$  sont des différences caractéristiques de température et de concentration respectivement. Dans la présente étude, les valeurs de  $T'_0$ ,  $S'_0$ ,  $\Delta T^*$  et  $\Delta S^*$  sont définies par :

$$\left. \begin{array}{l} T'_0 = T'_{(0,0)}, \quad \Delta T^* = \frac{q'L'}{k_f} \\ S'_0 = S'_{(0,0)}, \quad \Delta S^* = \frac{j'L'}{D} \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

quand les parois actives de l'enceinte sont exposées à des flux constants de chaleur et de masse, ou par :

$$\left. \begin{array}{l} T'_0 = \frac{T'_C + T'_F}{2}, \quad \Delta T^* = (T'_C - T'_F) \\ S'_0 = \frac{S'_C + S'_F}{2}, \quad \Delta S^* = (S'_C - S'_F) \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

quand ces dernières sont soumises à des températures et à des concentrations constantes.

En introduisant les variables adimensionnelles (2.9) dans (2.4)-(2.8), les équations de conservation adimensionnelles s'obtiennent comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + Pr \nabla^2 u - Pr Ra_T (T + N S) \cos \Phi \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + Pr \nabla^2 v + Pr Ra_T (T + N S) \sin \Phi \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.18)$$

Dans les équations ci-dessus, nous notons la présence de cinq paramètres caractéristiques, à savoir le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ , le rapport des forces de volume,  $N$ , le nombre de Prandtl,  $Pr$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , et l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ . Ces paramètres sont définis par :

$$Ra_T = \frac{g \beta_T \Delta T^* \ell^{*3}}{\alpha \nu}, \quad N = \frac{\beta_S \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad (2.19)$$

Dans la présente étude, les écarts caractéristiques de la température et de la concentration,  $\Delta T^*$  et  $\Delta S^*$  ainsi que le coefficient d'expansion thermique,  $\beta_T$ , sont considérés positifs. Tous les paramètres de contrôle énoncés ci-dessus sont donc positifs, sauf le paramètre  $N$  qui peut être positif ou négatif selon le signe du coefficient  $\beta_S$ . Dans le cas où  $\beta_S > 0$  ( $N > 0$ ), les effets thermiques et solutaux coopèrent et l'écoulement convectif engendré est appelé la convection coopérante. Cependant, lorsque  $\beta_S < 0$  ( $N < 0$ ), les effets thermiques et solutaux s'opposent et l'écoulement convectif résultant est appelé la convection opposée.

Le problème reste incomplet sans l'introduction des conditions aux frontières que nous spécifions ci-dessous.

### 2.2.1.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques

Ces conditions expriment l'imperméabilité et le non-glissement des particules fluides sur les parois rigides de la cavité. Elles s'écrivent comme suit :

$$u = v = 0 \quad (2.20)$$

### 2.2.1.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières sur les parois adiabatiques et imperméables de la cavité sont exprimées par :

$$y = \pm \frac{A_y}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

Par ailleurs, les conditions thermiques et massiques sur les parois actives sont :

$$x = \pm \frac{A_x}{2}, \quad \kappa A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm (1 - \kappa) \varphi = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (2.22)$$

où  $\varphi$  est une variable physique représentant la température,  $T$ , ou la concentration,  $S$ , et  $\kappa$  un paramètre constant qui vaut 1 lorsque les parois actives sont soumises à des flux constants de chaleur et de masse et 0 lorsqu'elles sont maintenues à des températures et à des concentrations constantes.

Dans les relations (2.21) et (2.22),  $A_x$  et  $A_y$  sont les rapports de forme de la cavité dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement. Ils sont définis par :

$$\left. \begin{array}{l} A_x = 1 \text{ et } A_y = A \text{ lorsque } A \geq 1 \\ A_x = \frac{1}{A} \text{ et } A_y = 1 \text{ lorsque } A < 1 \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

Pour des raisons que nous verrons ultérieurement, nous introduisons la fonction de courant,  $\Psi$ , définie par :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.24)$$

cette dernière satisfait donc automatiquement l'équation de continuité (2.14).

En termes de la fonction de courant, les équations (2.14)-(2.18) prennent les formes suivantes :

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} - \mathcal{J}(\Psi, \nabla^2 \Psi) = Pr \nabla^4 \Psi - Pr Ra_T \mathcal{F}(T + NS) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \mathcal{J}(\Psi, T) = \nabla^2 T \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \mathcal{J}(\Psi, S) = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.27)$$

où les opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{J}$  sont définis dans la nomenclature.

Les conditions aux frontières pour la fonction de courant, d'après (2.20) et (2.24), sont données par :

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

## 2.2.2 Convection dans des milieux poreux

Pour l'étude de la convection naturelle dans des milieux poreux, nous supposons que la matrice poreuse est solide, perméable, isotrope et saturée par le fluide. Le modèle de Darcy, qui néglige les forces d'inertie et visqueuses, est adopté. Selon Nield et Bejan 1992 et Vasseur et al. 1989, les forces d'inertie et visqueuses peuvent être négligées lorsque

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon < 0.8 \\ Da \leq 10^{-6} \\ Re < 1 \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

où  $\epsilon$  est la porosité du milieu poreux,  $Da$  et  $Re$  sont les nombres de Darcy et de Reynold. Ces derniers sont définis par

$$\left. \begin{aligned} Da &= \frac{K}{\ell^*} \\ Re &= \frac{V' \sqrt{K}}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

où  $V'$  est la vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide,  $K$  la perméabilité du milieu poreux,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide et  $\sqrt{K}$  une longueur représentative du diamètre des pores.

À partir de la relation (2.30), le nombre de Reynold peut être mis sous la forme suivante :

$$Re = \frac{V \sqrt{Da}}{Pr} \quad (2.31)$$

où  $V = V'/U^*$  est la vitesse moyenne des particules de fluide.

Pour que les résultats obtenus soient valides, il faut que la porosité du milieu poreux soit inférieur à 0.8 et que la vitesse moyenne de chaque particule de fluide vérifie la relation suivante:  $V < Pr/\sqrt{Da}$ . Dans le cas contraire, les forces d'inertie et visqueuses (connues sous les noms de termes de Forchheimer et de Brinkman) doivent être prises en considération.

Les équations de base régissant l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont énumérées ci-dessous :

### 2.2.2.1 Équation de continuité

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.32)$$

### 2.2.2.2 Équations de mouvement : Loi de Darcy

$$\bar{u}' = -\frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial P'}{\partial x'} - \rho_0 g [\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)] \cos \Phi \right] \quad (2.33)$$

$$\bar{v}' = -\frac{K}{\mu} \left[ \frac{\partial P'}{\partial y'} + \rho_0 g [\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)] \sin \Phi \right] \quad (2.34)$$

### 2.2.2.3 Équation de conservation de l'énergie

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \left( \bar{u}' \frac{\partial T'}{\partial x'} + \bar{v}' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_p \nabla^2 T' \quad (2.35)$$

### 2.2.2.4 Équation de conservation de la masse

$$\epsilon \frac{\partial S'}{\partial t'} + \bar{u}' \frac{\partial S'}{\partial x'} + \bar{v}' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D_p \nabla^2 S' \quad (2.36)$$

où  $k_p$  est la conductivité thermique du milieu poreux saturé,  $D_p$  la diffusivité massique moyenne de la masse dans la matrice poreuse saturée,  $(\rho C)_p = \epsilon(\rho C)_f + (1 - \epsilon)(\rho C)_s$ , la chaleur massique de la matrice poreuse saturée,  $(\rho C)_f$  et  $(\rho C)_s$  sont respectivement les chaleurs massiques du fluide et de la matrice poreuse et  $\epsilon$  la porosité de la matrice poreuse.

Pour écrire les équations (2.32) - (2.36) sous une forme adimensionnelle, les variables sans dimensions (2.9) sont introduites. Ici, les paramètres  $P^*$ ,  $t^*$  et  $U^*$  sont définis par :

$$P^* = \frac{Pr}{Da} \rho_0 U^{*2}, \quad t^* = \sigma \frac{\ell^*}{U^*}, \quad U^* = \frac{\alpha_p}{\ell^*} \quad (2.37)$$

où  $\alpha_p$  et  $\sigma$  désignent la diffusivité thermique du fluide et le rapport des chaleurs

massiques. Ils sont définis par :

$$\alpha_p = \frac{k_p}{(\rho C)_f}, \quad \sigma = \frac{(\rho C)_p}{(\rho C)_f}, \quad (2.38)$$

En introduisant les variables sans dimensions (2.9) dans les équations (2.32)-(2.36), nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

$$\bar{u} = -\frac{\partial P}{\partial x} - R_T(T + NS) \cos \Phi \quad (2.40)$$

$$\bar{v} = -\frac{\partial P}{\partial y} + R_T(T + NS) \sin \Phi \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.42)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial S}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.43)$$

Cinq groupements adimensionnels émergent dans les équations ci-dessus, à savoir le nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , le rapport des forces de volume,  $N$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , la porosité normalisée,  $\varepsilon$ , de la matrice poreuse et l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ . Ces paramètres sont définis par :

$$R_T = \frac{g \beta_T K \Delta T^* \ell^*}{\alpha_p \nu}, \quad N = \frac{\beta_S \Delta S^*}{\beta_T \Delta T^*}, \quad Le = \frac{\alpha_p}{D_p}, \quad \varepsilon = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (2.44)$$

D'après les relations (2.38) et (2.44), nous avons :

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon + (1 - \epsilon)\sigma_o} \quad \text{avec} \quad \sigma_o = \frac{(\rho C)_s}{(\rho C)_f} \quad (2.45)$$

À partir de cette relation, il est clair que les valeurs du paramètre  $\varepsilon$  sont comprises entre zéro et un ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

Les conditions aux frontières associées aux équations adimensionnelles (2.39)-(2.43) sont énoncées ci-dessous :

### 2.2.2.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques

Ces conditions expriment l'imperméabilité des parois de la cavité, elles sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{A_x}{2} \\ \bar{v} = 0 \text{ pour } y = \pm \frac{A_y}{2} \end{array} \right\} \quad (2.46)$$

Dans un milieu de Darcy, le glissement des particules fluides sur les parois est permis.

### 2.2.2.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières thermiques et massiques imposées au système sont données par les équations (2.21) et (2.22). Maintenant, nous allons écrire les équations de base en termes de la fonction de courant :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \quad (2.47)$$

En portant les définitions (2.47) dans les équations de base (2.39)-(2.43), nous obtenons les équations suivantes :

$$\nabla^2 \bar{\Psi} = -R_T \mathcal{F}(T + NS) \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \mathcal{J}(\bar{\Psi}, T) = \nabla^2 T \quad (2.49)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} - \mathcal{J}(\bar{\Psi}, S) = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.50)$$

Les conditions aux frontières pour la fonction de courant, selon les conditions aux limites (2.46), sont :

$$\bar{\Psi} = 0 \quad (2.51)$$

## 2.3 Transferts thermique et massique

Dans la présente étude, nous nous intéressons particulièrement au calcul des taux de transfert de chaleur et de masse à une position  $y$  donnée. Ces derniers sont exprimés par les nombres de Nusselt et de Sherwood définis par :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{q'}{k_f \frac{\Delta T'}{L'}} = \frac{1}{T_{(A_z/2,y)} - T_{(-A_z/2,y)}} \quad (a) \\ Sh &= \frac{j'}{D \frac{\Delta S'}{L'}} = \frac{1}{S_{(A_z/2,y)} - S_{(-A_z/2,y)}} \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

dans le cas où les parois actives sont exposées à des flux constants de chaleur ( $q'$ ) et de masse ( $j'$ ).

Par ailleurs, quand les parois sont maintenues à des températures et à des concentrations constantes, les nombres de Nusselt et de Sherwood ont pour expressions respectives :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{k_f \frac{\partial T'}{\partial x'}}{k_f \frac{\Delta T'}{L'}} \Big|_{x'=\pm L'/2} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm A_z/2} \quad (a) \\ Sh &= \frac{D \frac{\partial S'}{\partial x'}}{D \frac{\Delta S'}{L'}} \Big|_{x'=\pm L'/2} = \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=\pm A_z/2} \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

En milieu poreux, les propriétés  $k_f$  et  $D$  doivent être remplacées par  $k_p$  et  $D_p$  respectivement.

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood, sur les parois

actives sont exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{1}{A_y} \int_{-A_y/2}^{A_y/2} Nu \, dy \quad (a) \\ \overline{Sh} &= \frac{1}{A_y} \int_{-A_y/2}^{A_y/2} Sh \, dy \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Dans le chapitre suivant, nous décrivons les méthodes de solutions utilisées pour résoudre les équations de base énoncées dans ce chapitre.

## CHAPITRE III

### MÉTHODES DE SOLUTIONS

Dans ce chapitre nous décrivons les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de base formulées dans le Chapitre II. Dans le cas d'un milieu fluide, la solution numérique est obtenue avec l'approche des volumes de contrôle. Dans le cas d'un milieu poreux, elle est obtenue avec les méthodes des différences finies et des éléments finis.

#### 3.1 Solution numérique : milieu fluide

Les équations gouvernantes (2.14)-(2.18), écrites en termes des variables primitives ( $u$ ,  $v$ ,  $P$ ,  $T$  et  $S$ ), sont discrétisées avec la méthode des volumes finis (volumes de contrôle), et la solution est obtenue en utilisant la procédure itérative "SIMPLER" de Patankar 1980. Cette méthode de calcul étant bien connue, nous nous contentons ici d'apporter que quelques brèves précisions. Le domaine de calcul, figure 2.1b, est divisé en un nombre fini de volumes de contrôle ou mailles. Le maillage est structuré et uniforme. Les équations de base sont intégrées sur chaque volume de contrôle. Pour éviter la divergence de la solution lorsque les vitesses en jeu sont élevées, le schéma en loi de puissance est utilisé pour évaluer les flux aux interfaces des volumes de contrôle. Un maillage décalé est employé pour discrétiser les équations de Navier-Stokes afin d'écartier les solutions non physiques. Autrement dit, les com-

posantes de la vitesse sont calculées aux interfaces des volumes de contrôle, alors que la pression, la température et la concentration sont évaluées au centre des volumes. Pour obtenir plus de détails sur la procédure numérique utilisée ici, se référer à la thèse de Mamou 1993.

Les termes temporels dans les équations de base sont discrétisés avec un schéma aux différences finies. Nous avons utilisé un schéma amont du premier ordre pour la première itération sur le temps et du deuxième ordre pour le reste des itérations. Il s'ensuit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t^n} &= \frac{\varphi^n - \varphi^o}{\Delta t^o} + O(\Delta t^j) \\ \varphi^o &= \varphi^{n-1} \text{ et } \Delta t^o = \Delta t && \text{pour } j = 1 \\ \varphi^o &= \frac{4}{3}\varphi^{n-1} - \frac{1}{3}\varphi^{n-2} \text{ et } \Delta t^o = \frac{2}{3}\Delta t && \text{pour } j = 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

l'exposant  $j$  indique l'ordre du schéma,  $n$ ,  $n-1$  et  $n-2$  correspondent respectivement aux temps  $t^n$ ,  $t^{n-1} = t^n - \Delta t$  et  $t^{n-2} = t^n - 2\Delta t$  avec  $\Delta t$  représentant le pas de temps et  $\varphi$  l'une des variables  $u$ ,  $v$ ,  $T$  ou  $S$ .

La discrétisation de chaque équation de base donne lieu à un système matriciel tridiagonal qu'on peut résoudre à l'aide de l'algorithme de Thomas (Voir Patankar 1980).

La solution numérique est obtenue avec l'algorithme SIMPLER à chaque étape de temps. Les séquences de calcul sont les suivantes :

1. Estimer les champs des vitesses, de la pression, de la température et de la concentration (prendre, par exemple, les champs de l'étape de temps précédente).
2. Calculer les champs des pseudo-vitesses (à partir des équations de Navier-Stokes sans le terme de pression).
3. Résoudre l'équation de la pression.

4. Résoudre les équations du mouvement pour obtenir le champ de vitesse (les termes de la pression sont évalués avec les résultats de l'étape 3).
5. Résoudre l'équation de correction de pression.
6. Corriger le champ de vitesse en utilisant la correction de pression prédite à l'étape 5.
7. Retourner à l'étape 2 et répéter les opérations 2-6 jusqu'à la convergence.
8. Résoudre l'équation de l'énergie et de la concentration pour obtenir les champs de la température et de la concentration.
9. Vérifier la convergence. Si cette dernière est atteinte, passer à l'étape 10 sinon retourner à l'étape 2.
10. Passer à l'étape de temps suivante  $t = t + \Delta t$  et retourner à l'étape 2.  
Répéter les calculs jusqu'à l'obtention de la solution permanente ou de la solution transitoire périodique.

Le critère de la convergence mentionné à l'étape 9 est basé sur le terme source dans l'équation de correction de pression. Il est donné par :

$$\sum_i \sum_j |b_{ij}| \leq 10^{-6} \quad (3.2)$$

Cependant, le critère de convergence utilisé à chaque étape de temps est :

$$\frac{\sum_i \sum_j |\varphi_{i,j}^k - \varphi_{i,j}^{k-1}|}{\sum_i \sum_j |\varphi_{i,j}^k|} \leq 10^{-6} \quad (3.3)$$

où  $\varphi$  est l'une des variables physiques  $u$ ,  $v$ ,  $T$  et  $S$ , et  $k$  représente la  $k^e$  itération.

Pour accélérer la convergence du programme et éviter la divergence de la solution à chaque pas de temps, nous avons utilisé la technique de sous-relaxation. Pour minimiser le temps de calcul, nous avons employé la méthode multigrille ainsi que l'initialisation du code de calcul à partir de solutions proches de celles cherchées.

Dans le cas des solutions permanentes, les termes temporels ont été court-circuités de façon à sauver le plus de temps de calcul possible. Dans l'équation de correction de pression, Patankar 1980 a suggéré de prendre une solution initiale nulle pour la correction de pression, puisque cette dernière tend vers zéro quand on s'approche de la solution. Après quelques essais numériques, nous avons trouvé qu'il était plus avantageux d'utiliser comme conditions initiales la solution de l'itération précédente. Ceci permet d'améliorer considérablement la vitesse de convergence de l'algorithme de Thomas.

## 3.2 Solution numérique : milieu poreux

### 3.2.1 Méthode des différences finies

Les équations de conservation (2.48)-(2.50), présentées dans le chapitre précédent, sont discrétisées avec la méthode de différences finies et résolues numériquement avec la méthode implicite aux directions alternées (ADI), modifiée par Peaceman et Rachford en 1955. Cette méthode a été largement utilisée dans le passé pour résoudre les problèmes de la convection naturelle en régime transitoire. Le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme suivant les deux directions de l'espace. Ainsi, les équations de l'énergie (2.49) et de la concentration (2.50) sont discrétisées avec un schéma centré du deuxième ordre en utilisant la forme conservatrice des termes convectifs. Pour chaque pas de temps, la méthode ADI donne lieu à deux systèmes matriciels tridiagonaux à résoudre, l'un résultant de la discrétisation implicite en  $x$  et l'autre de la discrétisation implicite en  $y$ . Autrement dit, pour chaque étape de temps, la solution est obtenue en balayant le domaine de calcul dans la direction des  $x$  puis dans celle des  $y$ . En général, les équations de l'énergie

et de la concentration peuvent être écrites sous la forme générique :

$$\Gamma_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Gamma_d \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

où  $\varphi$  représente la température,  $T$ , ( $\Gamma_t = \Gamma_d = 1$ ) ou la concentration,  $S$ , ( $\Gamma_t = \epsilon$  et  $\Gamma_d = Le^{-1}$ ).

La forme discrète implicite en  $x$  de l'équation générique est :

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\bar{u}_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i-1,j}^{n+1/2} + \left( \frac{2\Gamma_t}{\Delta t} + \frac{2\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i,j}^{n+1/2} + \\ & \left( \frac{\bar{u}_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i+1,j}^{n+1/2} = \left( \frac{\bar{v}_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j-1}^n + \\ & \left( \frac{2\Gamma_t}{\Delta t} - \frac{2\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j}^n + \left( -\frac{\bar{v}_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors que la forme discrète implicite en  $y$  est :

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\bar{v}_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j-1}^{n+1} + \left( \frac{2\Gamma_t}{\Delta t} + \frac{2\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j}^{n+1} + \\ & \left( -\frac{\bar{v}_{i,j+1}^n}{2\Delta y} + \frac{\Gamma_d}{\Delta y^2} \right) \varphi_{i,j+1}^{n+1} = \left( \frac{\bar{u}_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i-1,j}^{n+1/2} + \\ & \left( \frac{2\Gamma_t}{\Delta t} - \frac{2\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i,j}^{n+1/2} + \left( -\frac{\bar{u}_{i+1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\Gamma_d}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i+1,j}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les conditions aux frontières de type Neuman sont discrétisées avec un schéma décentré en aval ou en amont selon la paroi considérée.

L'équation de la fonction de courant, Éq. (2.48), une fois discrétisée avec un schéma centré classique, est résolue avec la méthode de surrelaxation successive par point. La valeur de la fonction de courant aux noeuds est alors calculée à l'aide de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{i,j}^{(n+1),(k+1)} = & (1 - w) \bar{\Psi}_{i,j}^{(n+1),k} + w \left\{ a_1 (\bar{\Psi}_{i,j+1}^{(n+1),k} + \bar{\Psi}_{i,j-1}^{(n+1),k}) + \right. \\ & a_2 (\bar{\Psi}_{i+1,j}^{(n+1),k} + \bar{\Psi}_{i-1,j}^{(n+1),k}) + a_3 \left[ (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}) + N(S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}) \right] + \\ & \left. a_4 \left[ (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}) + N(S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les constantes  $a_i$  sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, & a_3 &= R_T \sin \Phi \frac{\Delta x \Delta y^2}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \\ a_2 &= \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, & a_4 &= R_T \cos \Phi \frac{\Delta x^2 \Delta y}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Le coefficient de surrelaxation est représenté par  $w$ , sa valeur optimale étant (Roache 1985) :

$$w_{\text{opt}} = \frac{2}{\zeta^2} [1 - \sqrt{1 - \zeta^2}] \quad (3.9)$$

où

$$\zeta = \frac{\cos(\pi/m_x) + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \cos(\pi/m_y)}{1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}} \quad (3.10)$$

Les vitesses  $\bar{u}_{i,j}^n$  et  $\bar{v}_{i,j}^n$  sont évaluées à partir de la définition de la fonction de courant (2.47). Il s'ensuit :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^{n+1} &= \frac{\bar{\Psi}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{\Psi}_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \\ \bar{v}_{i,j}^{n+1} &= -\frac{\bar{\Psi}_{i+1,j}^{n+1} - \bar{\Psi}_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

L'algorithme de calcul à chaque étape de temps peut se résumer de la façon suivante :

1. Estimer les champs de température et de concentration (prendre, par exemple, les champs de l'étape de temps précédente).
2. Résoudre l'équation de la fonction de courant (3.7).
3. Calculer les vitesses  $\bar{u}_{i,j}$  et  $\bar{v}_{i,j}$  à partir de (3.11).
4. Résoudre les équations de l'énergie et de la concentration, Éq. (3.5)-(3.6), avec la méthode ADI.
5. Retourner à l'étape 2 et répéter les opérations 2-4 jusqu'à la convergence.

6. Passer à l'étape de temps suivante  $t = t + \Delta t$  et retourner à l'étape 2.

Répéter les calculs jusqu'à l'obtention de la solution permanente ou de la solution transitoire établie.

### 3.2.2 Méthode des éléments finis

Les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont obtenus à partir des équations gouvernantes (2.48)-(2.50) en utilisant, cette fois-ci, la méthode des éléments finis. Cette méthode est beaucoup plus flexible que la méthode ADI. Elle permet de travailler avec un maillage uniforme ou non uniforme sans changer le schéma de discréétisation. Le domaine de calcul  $\Omega$  est divisé en sous-domaines appelés éléments. Chaque élément est présenté par son domaine  $\Omega^e$  et sa frontière  $\partial\Omega^e$ . La forme discrète des équations de base nécessite l'utilisation de la formulation variationnelle de Galerkin, qui porte aussi le nom de formulation faible. Pour le présent problème, nous allons définir deux cadres fonctionnels,  $\mathcal{V}^2(\Omega)$  et  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ .  $\mathcal{V}^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions de carré sommable. Il est défini par :

$$\mathcal{V}^2(\Omega) = \{ f \text{ tel que } \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty \} \quad (3.12)$$

et  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions de carré sommable dont les dérivées sont aussi de carré sommable. Il est défini par :

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{ f \in \mathcal{V}^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{V}^2(\Omega) \} \quad (3.13)$$

Avant de passer à la formulation variationnelle, nous allons d'abord décomposer la solution du problème  $(\bar{\Psi}, T, S)$  en la somme d'une solution conductive

$(\bar{\Psi}_C, T_C, S_C)$  et d'une solution convective  $(\bar{\psi}, \theta, \phi)$ . Ainsi, nous écrivons :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_C + \bar{\psi}(t, x, y) \\ T = T_C + \theta(t, x, y) \\ S = S_C + \phi(t, x, y) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Les profils de  $\bar{\Psi}_C$ ,  $T_C$  et  $S_C$  à l'état de conduction pure sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Psi}_C = 0 \\ T_C = \frac{x}{A_x} \\ S_C = \frac{x}{A_x} \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

En portant les équations (3.14) et (3.15) dans les équations de base (2.48)-(2.50), nous obtenons :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{\psi} = -R_T \mathcal{F}(\theta + N \phi) - R_T \frac{(1+N)}{A_x} \sin \Phi \quad (a) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{A_x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \mathcal{J}(\bar{\psi}, \theta) = \nabla^2 \theta \quad (b) \\ \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{A_x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \mathcal{J}(\bar{\psi}, \phi) = \frac{1}{Le} \nabla^2 \phi \quad (c) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Les conditions aux frontières pour  $\theta(t, x, y)$  et  $\phi(t, x, y)$ , d'après Éq. (2.21) et (2.22), s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{ll} x = \pm \frac{A_x}{2} & \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\kappa - 1) \varphi = 0 \\ y = \pm \frac{A_y}{2} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

où  $\varphi$  représente  $\theta(t, x, y)$  ou  $\phi(t, x, y)$ .

Les nouvelles conditions hydrodynamiques aux frontières sont exprimées par :

$$\bar{\psi} = 0 \quad (3.18)$$

L'espace fonctionnel de  $\bar{\psi}$  est :

$$\mathcal{V}_1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \quad f = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\} \quad (3.19)$$

alors que l'espace fonctionnel pour  $\theta$  et  $\phi$  est :

$$\mathcal{V}_2(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \{f \in H^1(\Omega)\} & \text{si } \kappa = 1 \\ \{f \in H^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad f = 0 \quad \text{sur} \quad x = \pm \frac{1}{2}\} & \text{si } \kappa = 0 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Les termes temporels sont discrétisés avec la méthode des différences finies et la forme discrète est donnée par la relation (3.1).

### 3.2.2.1 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (3.16a) par  $w(x, y)$  et les équations (3.16b) et (3.16c) par  $\vartheta(x, y)$  et intégrons sur le domaine  $\Omega$ . En appliquant le théorème de la divergence nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla w \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} w \, d\Gamma = \int_{\Omega} R_T \mathcal{F}(\theta + N \phi) w \, d\Omega + \int_{\Omega} R_T \frac{(1+N)}{A_x} \sin \Phi w \, d\Omega \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial t} \vartheta \, d\Omega + \frac{1}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \vartheta \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{J}(\bar{\psi}, \theta) \vartheta \, d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \theta}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \vartheta \, d\Omega + \frac{1}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \vartheta \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{J}(\bar{\psi}, \phi) \vartheta \, d\Omega = \\ - \frac{1}{Le} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega + \frac{1}{Le} \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la frontière  $\partial\Omega$  et  $d\Gamma$  est un élément infinitésimal de la frontière  $\partial\Omega$ .

D'après les conditions aux frontières de  $\bar{\psi}(t, x, y)$ ,  $\theta(t, x, y)$  et  $\phi(t, x, y)$  et les définitions des espaces  $\mathcal{V}_1(\Omega)$  et  $\mathcal{V}_2(\Omega)$  nous pouvons montrer que les intégrales de bord figurant dans la formulation variationnelle sont toutes nulles.

### 3.2.2.2 Discrétisation et choix de l'élément

Comme la géométrie du domaine de calcul est rectangulaire nous choisissons alors des éléments quadrilatéraux de Lagrange à neuf noeuds (voir figure 3.1). Sur chaque élément, les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont quadratiques et continus. Ils sont approximés par :

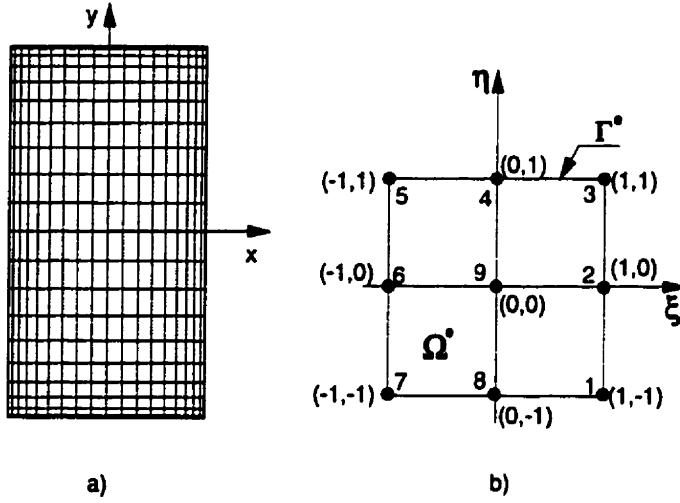
$$\begin{Bmatrix} \bar{\psi}^e(x, y) \\ \theta^e(x, y) \\ \phi^e(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^9 \mathcal{N}_j(x, y) \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_j^e \\ \theta_j^e \\ \phi_j^e \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

où  $\mathcal{N}_j(x, y)$  représentent des fonctions d'interpolation de l'élément de Lagrange et  $\bar{\psi}_j^e$ ,  $\theta_j^e$  et  $\phi_j^e$  les vecteurs des inconnues aux noeuds. Sur l'élément de référence, les fonctions d'interpolation  $\hat{\mathcal{N}}_i(\xi, \eta)$  sont exprimées par :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathcal{N}}_i = \frac{1}{4}\xi\xi_i(1 + \xi\xi_i)\eta\eta_i(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 3, 5, 7 \\ \hat{\mathcal{N}}_i = \frac{1}{2}\xi\xi_i(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2), \quad i = 4, 8 \\ \hat{\mathcal{N}}_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\eta\eta_i(1 + \eta\eta_i), \quad i = 2, 6 \\ \hat{\mathcal{N}}_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad i = 9 \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées barycentriques.

En portant les approximations (3.24) dans la formulation variationnelle (3.21)-(3.23) et en substituant  $w(x, y)$  et  $\vartheta(x, y)$  par  $\mathcal{N}_i(x, y)$ , nous obtenons, après



**Figure 3.1 :** Représentation schématique : a) du domaine de calcul discrétré et b) de l'élément fini de Lagrange.

intégration, trois systèmes matriciels élémentaires pour chaque élément du domaine. Après assemblage, les trois systèmes matriciels globaux suivants sont obtenus :

$$[K_{\bar{\psi}}]\{\bar{\psi}_k^n\} = R_T [B] \{\theta_{k-1}^n + N\phi_{k-1}^n\} + R_T \frac{(1+N)}{A_x} \sin \Phi \{F_{\bar{\psi}}\} \quad (3.26)$$

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^o} [M] - [C] + [K_\theta] \right] \{\theta_k^n\} = \frac{1}{\Delta t^o} [M] \{\theta^o\} + \frac{1}{A_x} [L] \{\bar{\psi}_k^n\} \quad (3.27)$$

$$\left[ \frac{\varepsilon}{\Delta t^o} [M] - [C] + Le^{-1} [K_\phi] \right] \{\phi_k^n\} = \frac{\varepsilon}{\Delta t^o} [M] \{\phi^o\} + \frac{1}{A_x} [L] \{\bar{\psi}_k^n\} \quad (3.28)$$

Les matrices  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[K_{\bar{\psi}}]$ ,  $[K_\theta]$ ,  $[K_\phi]$ ,  $[L]$  et  $[M]$  sont de dimensions  $m \times m$  où  $m$  est le nombre de noeuds dans le domaine de calcul. Les vecteurs des inconnues  $\{\bar{\psi}_k^n\}$ ,  $\{\theta_k^n\}$  et  $\{\phi_k^n\}$  sont de dimensions  $m$ . Les matrices  $[K_{\bar{\psi}}]$ ,  $[K_\theta]$  et  $[K_\phi]$  sont toutes égales. Cependant, après avoir introduit les conditions aux frontières, elles deviennent différentes les unes des autres. Par ailleurs,  $[K_\theta] = [K_\phi]$ , puisque les conditions

aux frontières thermiques et solutales sont similaires. Les matrices élémentaires correspondantes sont définies comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{B}]^e = \int_{\Omega}^e \mathcal{F}(N_j) N_i d\Omega^e, \quad [C]^e = \int_{\Omega}^e \mathcal{J}(\bar{\psi}_k^n, N_j) N_i d\Omega^e \\ [K_\psi]^e = \int_{\Omega}^e \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega^e, \quad [K_\phi]^e = [K_\phi] = \int_{\Omega}^e \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega^e \\ [L]^e = -\frac{1}{A_x} \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i d\Omega^e, \quad [M]^e = \int_{\Omega}^e N_j N_i d\Omega^e \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

et le vecteur élémentaire  $\{\mathbf{F}_{\bar{\psi}}\}^e$  est défini par :

$$\{\mathbf{F}_{\bar{\psi}}\}^e = \int_{\Omega}^e N_i d\Omega^e \quad (3.30)$$

Pour des raisons de simplicité, les intégrales figurant dans les matrices ci-dessus sont d'abord exprimées dans l'élément de référence puis calculées par la suite avec la méthode d'intégration de Gauss.

### 3.2.2.3 Résolution

Le découplage entre l'équation de la fonction de courant, Éq. (3.26), et les équations de l'énergie et de la concentration, Éq. (3.27) et (3.28), est obtenu par l'évaluation du terme source dans l'équation (3.26) avec les profils de température et de concentration obtenus à l'itération précédente. Une procédure similaire est utilisée pour évaluer la fonction de courant dans les équations (3.27) et (3.28).

Le système d'équations résultant de la discrétisation de l'équation de la fonction de courant (3.26) est résolu avec la méthode de surrelaxation successive (S.O.R.). Par ailleurs, les systèmes (3.27) et (3.28) sont résolus avec une méthode basée sur l'algorithme P.D.M.A. (penta-diagonal method algorithm).

Chacun des deux systèmes d'équations (3.27) et (3.28) peut être réduit à la forme simple suivante :

$$[\mathbf{E}]\{\varphi\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3.31)$$

où  $[E]$  est la matrice résultante,  $\{F\}$  est le membre droit du système d'équations et  $\{\varphi\}$  est le vecteur des inconnues.

Le choix de l'élément de Lagrange pour la discréétisation du domaine de calcul donne lieu à une matrice,  $[E]$ , contenant cinq matrices penta-diagonales successives, qui peut se décomposer en deux matrices :

$$[E] = [PD] + [LU] \quad (3.32)$$

où  $[PD]$  est la penta-diagonale principale de  $[E]$  et  $[LU]$  sa partie résiduelle.

Pour résoudre le système (3.31), nous avons utilisé une méthode itérative basée sur l'algorithme de la matrice penta-diagonale (P.D.M.A.) qui est moins coûteuse en temps de calcul. L'équation (3.31) peut être alors exprimée comme :

$$[PD]\{\varphi^k\} = \{F\} - [LU]\{\varphi^{k-1}\} \quad (3.33)$$

où  $k$  représente la  $k^e$  itération.

Pour accélérer la convergence du programme, nous avons sous-relaxé la solution de la manière suivante :

$$[PD]\{\varphi^k\} = [PD]\{\varphi^{k-1}\} + w(\{F\} - [E]\{\varphi^{k-1}\}) \quad (3.34)$$

La valeur du coefficient de sous-relaxation  $w$  est comprise entre 0 et 1.

Cette méthode de calcul est inspirée de l'algorithme de Thomas (T.D.M.A.) (Patankar 1980).

En résumé, l'algorithme de calcul s'écrit de la manière suivante :

1. Initialiser la solution à  $t = 0$ .
2. Résoudre l'équation de la fonction de courant (3.26).
3. Résoudre les équations de l'énergie et de la concentration (3.27) et (3.28).

4. Retourner à l'étape 2 et répéter les opérations 2 et 3 jusqu'à la convergence.
5. Incrémenter le temps  $t = t + \Delta t$  et retourner à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à l'obtention de la solution permanente ou de la solution transitoire périodique.

### 3.3 Validation des codes numériques

Les programmes que nous avons élaborés pour résoudre les équations de base tant en milieux fluides qu'en milieux poreux ont été validés en prenant comme références certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats de Bennacer 1993, obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire contenant un fluide binaire, ont été utilisés comme référence pour tester notre code numérique concernant le milieu fluide. Par ailleurs, nos programmes pour les milieux poreux ont été validés à l'aide des résultats de Alavyoon 1993 et Alavyoon et al. 1994. En général, les résultats numériques de ces auteurs ont été reproduits avec une erreur maximale inférieure à 0.5 %. Nous avons aussi utilisé la solution analytique, décrite dans le Chapitre IV, pour la validation de nos programmes tant en milieux fluides que poreux.

Dans le cas d'une cavité horizontale, chauffée et salée par le bas, il existe un nombre de Rayleigh critique caractérisant la naissance de la convection naturelle. Une analyse de stabilité linéaire indique que ce Rayleigh critique est fonction du rapport de forme de la cavité  $A$ , du nombre de Lewis  $Le$  et du rapport des forces de volume  $N$ . Au voisinage du point de bifurcation, les résultats de la théorie de la stabilité linéaire ont été utilisés pour tester nos programmes.

Il est évident que la précision des résultats numériques est fonction de la taille du maillage. Le choix de ce dernier dépend à son tour des valeurs des paramètres de contrôle. Dans la présente étude, les résultats numériques ont été obtenus avec des

rapports de forme  $A$  variant entre 0.1 et 20. Pour des rapports de forme proches de l'unité, un maillage de  $80 \times 80$  a été adopté. Cependant, pour de grands ou de petits rapports de forme, par exemple  $A = 10$  ou  $A = 0.1$ , la taille du maillage pouvait atteindre  $80 \times 200$  ou  $200 \times 80$ .

D'autres détails sur les méthodes numériques utilisées seront abordés lors de la discussion des résultats obtenus.

### 3.4 Méthodes analytiques

L'écoulement convectif dans le système (figure 2.1) est régi par les équations de base (2.25)-(2.27) pour les milieux fluides et (2.48)-(2.50) pour les milieux poreux. Ces dernières sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et elles sont fortement couplées. En général, une solution analytique est impossible, sauf dans certains cas limites pour lesquels les équations se simplifient considérablement. Ainsi, dans le cas de cavités élancées,  $A \gg 1$ , ou aplatis,  $A \ll 1$ , (voir figure 3.2), lorsque les parois actives sont exposées à des flux constants de chaleur et de masse, il est possible de trouver une solution analytique approximée. Cette dernière peut être obtenue en utilisant le concept de l'écoulement parallèle. Notons que la solution analytique s'applique pour des situations rarement rencontrées dans la pratique; néanmoins, elle donne un aperçu général et une description qualitative sur les transferts de chaleur et de masse impliqués dans des cavités à rapport de forme fini. Grâce à sa flexibilité et à sa manipulation facile, la solution analytique permet une compréhension rapide des phénomènes physiques impliqués dans la convection naturelle doublement diffusive.

### 3.4.1 Concept de l'écoulement parallèle

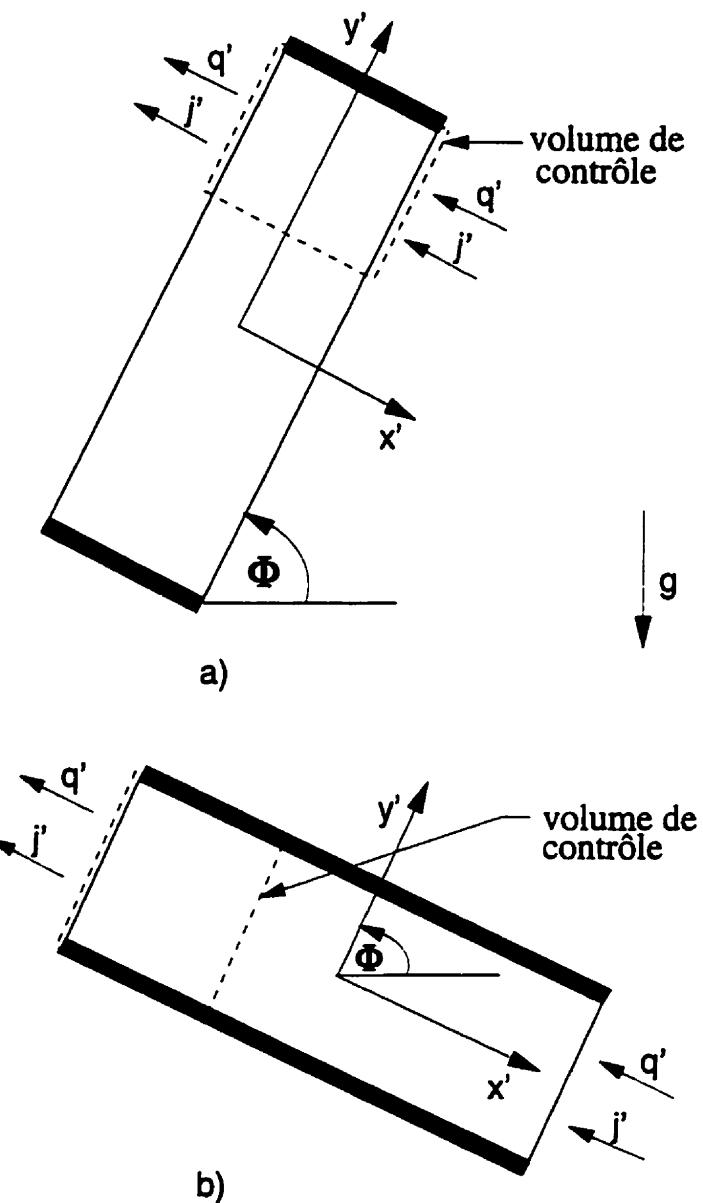
Le concept de l'écoulement parallèle a été utilisé avec succès dans le passé par plusieurs auteurs pour l'étude de la convection naturelle dans des cavités élancées ou aplatis. Parmi ces auteurs, nous pouvons citer; Sen et al. 1987, Vasseur et al. 1989, Alavyoon 1993 et Mamou et al. 1995b dans des milieux poreux et Cormack et al. 1974, Hasnaoui 1991, Mamou 1993 et Mamou et al. 1996 dans des milieux fluides. Ce concept suppose que lorsqu'une cavité présente un grand rapport de forme, l'écoulement engendré devient parallèle relativement aux longues parois de la cavité. Ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois.

#### 3.4.1.1 Cavité élancée : $A \gg 1$

Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme,  $H' \gg L'$ , (voir figure 3.2a), les lignes de courant, au centre de la cavité, deviennent parallèles à l'axe des  $y$ . Autrement dit, la fonction de courant  $\Psi$  (ou  $\bar{\Psi}$ ) devient fonction de la coordonnée  $x$  seulement. Nous pouvons alors écrire :

$$\Psi(x, y) \simeq \Psi(x) \quad (3.35)$$

En portant l'approximation (3.35) dans les équations de mouvement (2.25) et (2.48), nous pouvons montrer que, en régime stationnaire,  $\partial T / \partial x$ ,  $\partial T / \partial y$ ,  $\partial S / \partial x$  et  $\partial S / \partial y$  sont fonction seulement de  $x$ , puisque les équations (2.25) et (2.48) sont valables pour n'importe quelle valeur de  $y$ . Les profils de la température et de la concentration peuvent s'écrire alors sous la forme  $T(x, y) = \Theta_T(x) + f_T(y)$  et  $S(x, y) = \Theta_S(x) + f_S(y)$  respectivement. En outre, dans le cas d'une cavité soumise à des flux constants de chaleur et de masse, les bilans de l'énergie et de la matière dans le volume de contrôle (figure 3.2a) s'écrivent sous les formes suivantes (Trevisan



**Figure 3.2 :** Représentation schématique d'une : a) cavité élancée, b) cavité aplatie.

et Bejan 1986) :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial y} dx + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} T dx = 0 \quad (3.36)$$

et

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial y} dx + Le \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} S dx = 0 \quad (3.37)$$

respectivement.

Puisque les relations (3.36) et (3.37) sont vérifiées à n'importe quelle section  $y$ , nous pouvons conclure que  $\partial T / \partial y$  et  $\partial S / \partial y$  sont des constantes. Autrement dit,  $f_T(y)$  et  $f_S(y)$  sont des fonctions linéaires de  $y$ . Donc, nous avons  $f_T(y) = C_T y$  et  $f_S(y) = C_S y$ , où  $C_T$  et  $C_S$  sont les gradients de température et de concentration dans la direction  $y$ . Les profils de la température et de la concentration s'écrivent alors :

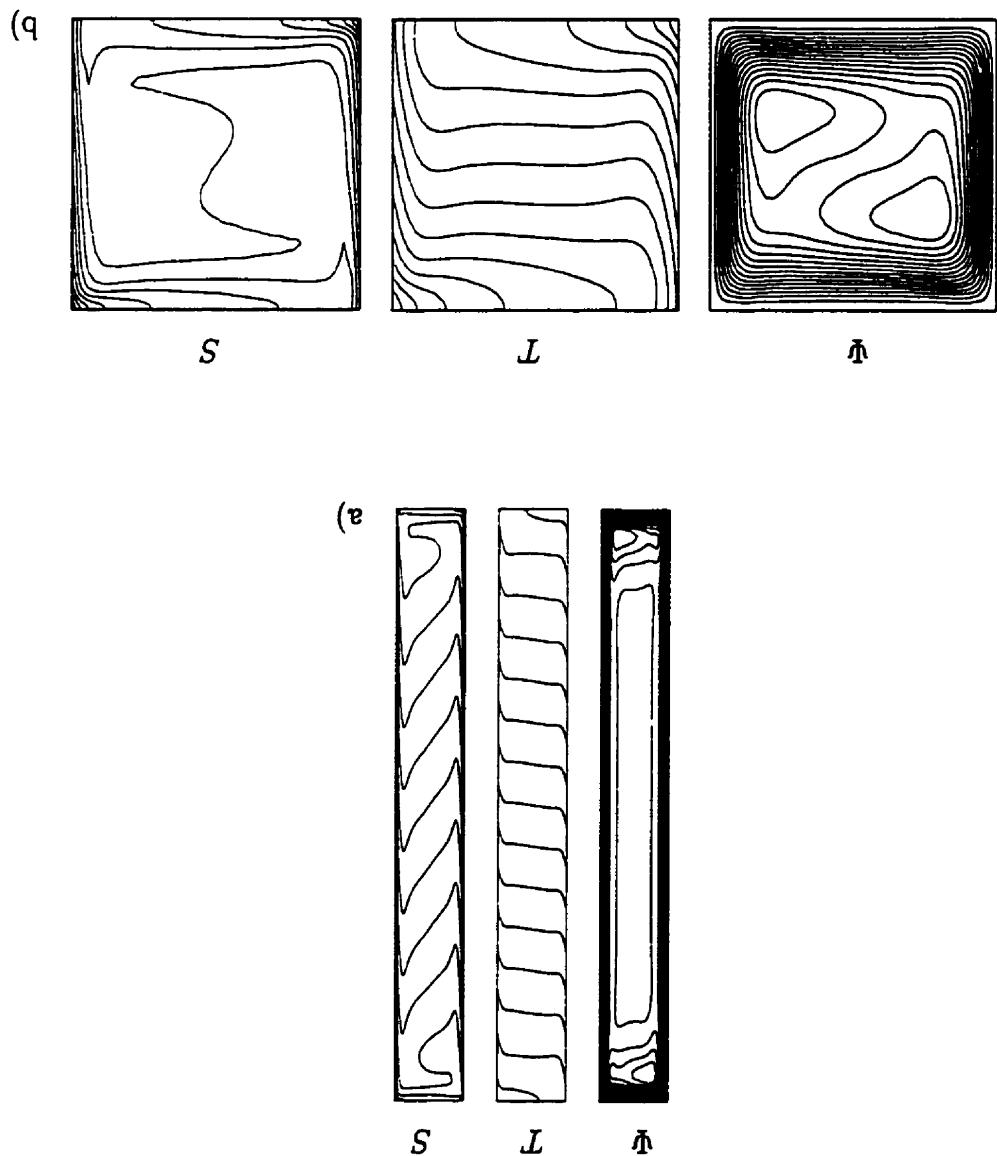
$$\left. \begin{array}{l} T(x, y) = C_T y + \Theta_T(x) \\ S(x, y) = C_S y + \Theta_S(x) \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

Pour vérifier le bien-fondé de ce type d'approximation nous avons présenté des résultats numériques typiques sur la figure 3.3 pour  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$  et  $8$  et  $\Phi = 90^\circ$ . En examinant l'effet du rapport de forme de la cavité sur la structure de l'écoulement et sur les profils de la température et de la concentration, nous constatons qu'il y a une dépendance de la solution envers  $A$ . Ainsi, pour de grands rapports de forme, par exemple  $A = 8$ , la figure 3.3a montre que l'écoulement est parallèle dans la partie centrale de la cavité et que la température et la concentration sont linéairement stratifiées dans la direction verticale. Ces prédictions numériques sont en parfait accord avec le concept de l'écoulement parallèle. Des résultats similaires ont été obtenus en milieu poreux (voir figure 3.4a et c).

Dans le milieu fluide, après avoir substitué les approximations (3.35) et (3.38) dans les équations (2.25)-(2.27), nous obtenons le système d'équations différentielles

b)  $A = 8$ ,  $\Psi_{max} = 4.446$ ,  $\Psi_{min} = 0$ ,  $Nu = 6.883$  et  $Sh = 12.548$ .  
 a)  $A = 1$  : a)  $A = 1$ ,  $\Psi_{max} = 3.501$ ,  $\Psi_{min} = 0$ ,  $Nu = 3.578$  et  $Sh = 13.598$ ,  
 en milieu fluidé pour  $Ray = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  
 $k = 1$

Figure 3.3 : Figures de courant, isothermes et isocencentractions obtenues



ordinaires suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4\Psi}{d^4x} &= Ra_T \left[ \frac{d}{dx}(\Theta_T + N\Theta_S) \sin \Phi + (C_T + NC_S) \cos \Phi \right] & (a) \\ \frac{d\Theta_T}{dx} &= -C_T \Psi + 1 & (b) \\ \frac{d\Theta_S}{dx} &= -Le C_S \Psi + 1 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Notons que les équations (3.39b) et (3.39c) ont été obtenues en intégrant les équations de conservation de l'énergie et de la masse par rapport à  $x$ , tout en respectant les conditions aux frontières de la fonction de courant (2.28), de la température et de la concentration (2.22).

En substituant les équations (3.39b) et (3.39c) dans l'équation (3.39a), l'équation de mouvement se réduit alors à :

$$\frac{d^4\Psi}{d^4x} + Ra_T(C_T + NLeC_S) \sin \Phi \Psi = Ra_T[(1 + N) \sin \Phi + (C_T + NC_S) \cos \Phi] \quad (3.40)$$

Similairement, dans un milieu poreux, après avoir porté les approximations (3.35) et (3.38) dans les équations de base (2.48)-(2.50), nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\bar{\Psi}}{d^2x} &= -R_T \left[ \frac{d}{dx}(\Theta_T + N\Theta_S) \sin \Phi - (C_T + NC_S) \cos \Phi \right] & (a) \\ \frac{d\Theta_T}{dx} &= -C_T \bar{\Psi} + 1 & (b) \\ \frac{d\Theta_S}{dx} &= -Le C_S \bar{\Psi} + 1 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

En substituant les équations (3.41b) et (3.41c) dans l'équation (3.41a), l'équation de mouvement devient :

$$\frac{d^2\bar{\Psi}}{d^2x} - R_T (C_T + NLeC_S) \sin \Phi \bar{\Psi} = -R_T[(1 + N) \sin \Phi + (C_T + NC_S) \cos \Phi] \quad (3.42)$$

Les équations différentielles (3.39) et (3.41) représentent les équations de base simplifiées. Il est à noter que les conditions aux frontières de  $\Psi$ ,  $T$  et  $S$  sur les petites parois de la cavité ne sont pas vérifiées. En général, ce fait, n'a pas beaucoup d'influence sur les transferts de chaleur et de masse puisque les effets de bouts, lorsque  $A \gg 1$ , sont pratiquement négligeables. En outre, il convient de souligner que les conditions aux frontières sur les bouts sont prises en considération indirectement lors de la formulation des bilans de l'énergie et de la matière (3.36) et (3.37).

### 3.4.1.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$

Pour le cas des cavités rectangulaires aplaties,  $H' \ll L'$ , (voir figure 3.2b), la fonction de courant  $\Psi$  (ou  $\bar{\Psi}$ ) dépend de la coordonnée  $y$  seulement (c'est-à-dire que la composante de la vitesse  $v$  est nulle). Ceci se traduit par les relations suivantes :

$$\Psi(x, y) \simeq \Psi(y) \quad (3.43)$$

À partir des équations de base (2.25) et (2.48) et des bilans de conservation de l'énergie et de la masse dans le volume de contrôle (figure 3.2b), nous pouvons montrer facilement que les profils de la température et de la concentration s'écrivent sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} T(x, y) = C_T x + \Theta_T(y) \quad (a) \\ S(x, y) = C_S x + \Theta_S(y) \quad (b) \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

Les bilans de l'énergie et de la masse dans le volume de contrôle (figure 3.2b) sont exprimés par :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} T dy = \frac{1}{A_x} \quad (3.45)$$

et

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} dy - Le \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} S dy = \frac{1}{A_x} \quad (3.46)$$

respectivement.

Pour valider l'approximation de l'écoulement parallèle dans une cavité aplatie, la figure 3.4b montre des résultats numériques obtenus pour  $R_T = 50$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 0.5$ ,  $A = 1/8$  et  $\Phi = 90^\circ$  pour un milieu poreux. La structure de l'écoulement et les profils de la température et de la concentration illustrent clairement le parallélisme des lignes de courant dans la partie centrale de la cavité et la stratification linéaire de la température et de la concentration dans la direction horizontale. Des résultats similaires, non présentés ici, ont été obtenus en milieu fluide.

Dans un milieu fluide, après avoir substitué les approximations (3.43) et (3.44) dans les équations de base (2.25)-(2.27), nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^4\Psi}{dy^4} = Ra_T \left[ \frac{d}{dy}(\Theta_T + N\Theta_S) \cos \Phi + (C_T + NC_S) \sin \Phi \right] \\ \frac{d\Theta_T}{dy} = C_T \Psi \\ \frac{d\Theta_S}{dy} = Le C_S \Psi \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

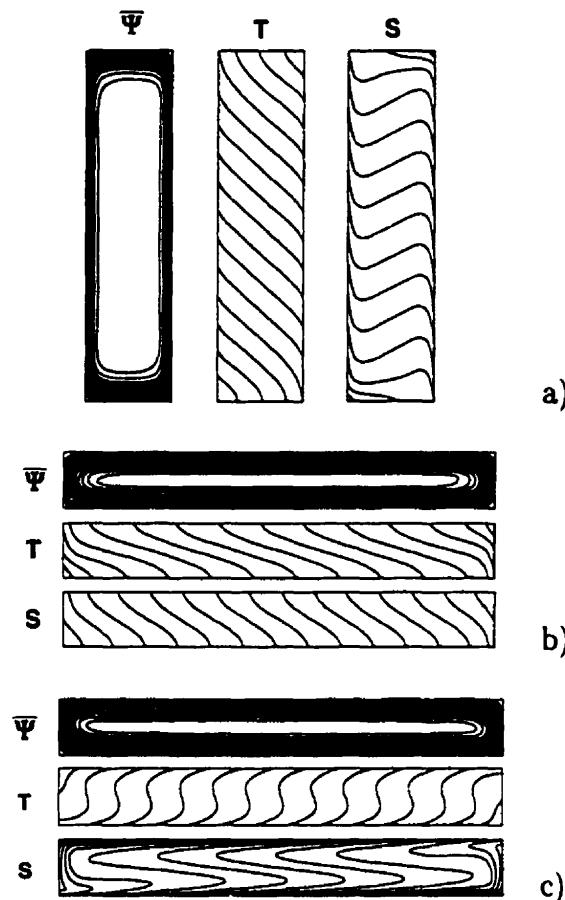
où les équations (3.47b) et (3.47c) ont été obtenues par une seule intégration par rapport à  $y$ .

Substituant les équations (3.47b) et (3.47c) dans l'équation (3.47a), on obtient :

$$\frac{d^4\Psi}{dy^4} - Ra_T(C_T + NLeC_S) \cos \Phi \Psi = Ra_T(C_T + NC_S) \sin \Phi \quad (3.48)$$

une équation différentielle de mouvement de quatrième ordre.

Par ailleurs, dans un milieu poreux, la substitution des approximations (3.43) et (3.44) dans les équations de base (2.48)-(2.50) donne les équations différentielles



**Figure 3.4 :** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenues en milieu poreux pour  $\kappa = 1$  : a)  $R_T = 50$ ,  $N = 10$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 4$  et  $\Phi = 90^\circ$ ;  $\bar{\Psi}_{max} = 1.182$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = 0$ ,  $\bar{Nu} = 2.060$  et  $\bar{Sh} = 19.068$ , b)  $R_T = 50$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 0.5$ ,  $A = 1/8$  et  $\Phi = 90^\circ$ ;  $\bar{\Psi}_{max} = 3.370$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = 0$ ,  $\bar{Nu} = 5.855$  et  $\bar{Sh} = 2.332$ , c)  $R_T = 100$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 8$  et  $\Phi = 0^\circ$ ;  $\bar{\Psi}_{max} = 3.916$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = 0$ ,  $\bar{Nu} = 6.139$  et  $\bar{Sh} = 6.166$ .

suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2\bar{\Psi}}{dy^2} = -R_T \left[ \frac{d}{dy}(\Theta_T + N\Theta_S) \cos \Phi - (C_T + NC_S) \sin \Phi \right] \quad (a) \\ \frac{d\Theta_T}{dy} = C_T \bar{\Psi} \quad (b) \\ \frac{d\Theta_S}{dy} = Le C_S \bar{\Psi} \quad (c) \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

D'après les équations (3.49b) et (3.49c), l'équation (3.49a) peut être découpée des fonctions  $\Theta_T$  et  $\Theta_S$  pour donner l'équation de mouvement en fonction de  $\bar{\Psi}$  seulement. On obtient ainsi :

$$\frac{d^2\bar{\Psi}}{dy^2} + R_T (C_T + NLeC_S) \cos \Phi \bar{\Psi} = -R_T(C_T + NC_S) \sin \Phi \quad (3.50)$$

### 3.4.2 Validation du concept de l'écoulement parallèle

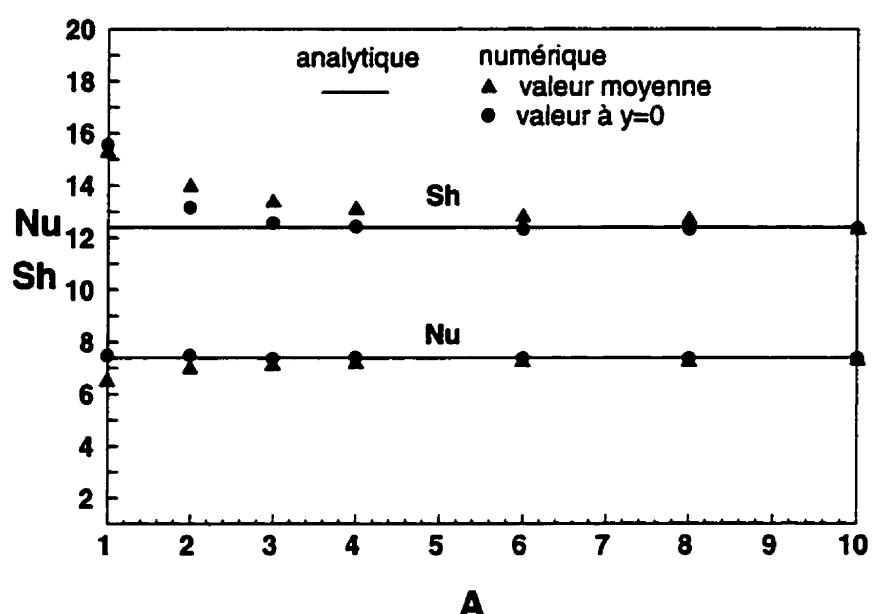
La solution analytique présentée dans le quatrième chapitre a été obtenue pour le cas d'une cavité infiniment longue,  $A \rightarrow \infty$ , ou infiniment aplatie,  $A \rightarrow 0$ . Dans le cas de la simple diffusion,  $N = 0$ , Vasseur et al. 1987, Hasnaoui 1991 et Mamou 1993 ont démontré que, dans le cas d'une cavité chauffée avec un flux de chaleur constant, la solution analytique obtenue avec l'hypothèse de l'écoulement parallèle était satisfaisante à condition que le rapport de forme de la cavité soit supérieur à quatre ( $A \geq 4$ ) et que le nombre de Prandtl,  $Pr$ , soit supérieur à 0.7. Pour  $A < 4$  et pour des valeurs modérées du nombre de Rayleigh, les résultats numériques s'écartent de la solution analytique et les lignes de courant perdent leur parallélisme. Cependant, pour des nombres de Rayleigh très élevés, Trevisan et Bejan 1986 ont montré que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats analytiques (prédits par la méthode de linéarisation d'Oseen lorsque  $Le = 1$ ) pour un rapport de forme égal à l'unité. Nous pouvons donc conclure qu'il existe une valeur de  $A$ ,  $A_o$ , au-delà de laquelle l'hypothèse de l'écoulement parallèle est valide. Dans le cas de la double diffusion, cette valeur est fonction du nombre de Rayleigh thermique,

du rapport des forces de volume, du nombre de Lewis et de l'angle d'inclinaison de la cavité.

Après quelques tests numériques, en milieu fluide (ou poreux), nous avons trouvé que lorsque  $Ra_T$  et  $N$  sont suffisamment grands ( $Ra_T \geq 10^5$  et  $|N| \geq 20$ ), les caractéristiques de l'écoulement parallèle apparaissent au-delà de  $A_o = 2$ . Pour des valeurs intermédiaires de  $N$  ( $N \sim 1$ ), cette valeur doit être augmentée jusqu'à 20 lorsque le nombre de Lewis est grand ( $Le \geq 50$ ) ou petit ( $Le \leq 0.01$ ). En général, nous avons observé que pour  $0.1 \leq Le \leq 10$ , les résultats numériques deviennent indépendants du rapport de forme lorsque  $A \geq A_o = 8$ . La figure 3.5 montre l'effet du rapport de forme sur les taux de transfert de chaleur et de masse obtenu pour  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ . La solution analytique obtenue pour  $A \gg 1$  est indiquée sur la figure (trait plein). Pour  $A = 1$ , on observe que la solution numérique (cercle plein) s'écarte considérablement de la solution analytique et que la structure de l'écoulement (voir figure 3.3b) ne correspond pas aux prédictions de l'écoulement parallèle. Cependant, en augmentant progressivement le rapport de forme, les résultats de la solution numérique s'approchent de plus en plus de la solution analytique et un bon accord est observé au-delà de  $A = 8$ . Les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations présentées sur la figure 3.3a illustrent clairement les caractéristiques de l'écoulement parallèle.

Dans la présente étude, selon les valeurs des paramètres de contrôle, les résultats numériques ont été obtenus avec un maillage variant de  $50 \times 50$  à  $200 \times 200$ . Par exemple, pour  $\Phi = 90^\circ$ ,  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$  et  $Le = 10$ , nous avons considéré un maillage de  $80 \times 80$  lorsque  $A = 1$  et de  $80 \times 200$  lorsque  $A = 8$ .

Dans ce chapitre, nous avons introduit les méthodes numériques et analytiques pour la résolution des équations de base régissant l'écoulement convectif. Dans le chapitre suivant, des solutions et des résultats analytiques et numériques seront présentés et analysés.



**Figure 3.5 :** Influence du rapport de forme de la cavité sur les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

## CHAPITRE IV

# SOLUTIONS ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des solutions analytiques et numériques obtenus en milieux fluide et poreux.

### 4.1 Solution analytique : milieu fluide

Dans cette section, nous présentons la solution analytique stationnaire du problème pour un milieu fluide. Notons que la forme de la solution des équations différentielles (3.39) dépend du paramètre  $R$ , défini par :

$$R = Ra_T(C_T + NLeC_S) \sin \Phi \quad (4.1)$$

Ainsi, selon la valeur de  $R$  et de son signe, il existe quatre types de solutions possibles. Ces dernières sont décrites ci-dessous.

#### 4.1.1 Solution pour $R > 0$

En général, d'un point de vue physique, la constante  $R$  est positive lorsque les forces de volume sont coopérantes,  $N > 0$ , ou opposées, tel que  $|N| \ll 1$  ou  $|N| \gg 1$ . Pour cette situation, la solution des équations différentielles, Éq. (3.39),

est de la forme :

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= -\frac{B}{2\Omega}[(1 + \gamma_o) \cosh(\Omega x) \cos(\Omega x) + (1 - \gamma_o) \sinh(\Omega x) \sin(\Omega x)] + G & (a) \\ \Theta_T &= \frac{C_T B}{2\Omega^2}[\cosh(\Omega x) \sin(\Omega x) + \gamma_o \sinh(\Omega x) \cos(\Omega x)] + (1 - C_T G)x & (b) \\ \Theta_S &= \frac{LeC_S B}{2\Omega^2}[\cosh(\Omega x) \sin(\Omega x) + \gamma_o \sinh(\Omega x) \cos(\Omega x)] + (1 - LeC_S G)x & (c) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

les constantes  $B$ ,  $G$  et  $\Omega$  étant données par :

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \sqrt{Ra_T(C_T + LeNC_S) \sin \Phi / 4}, \quad \Omega_o = \Omega / 2, \quad \gamma_o = \tanh \Omega_o \cot \Omega_o \\ B &= 2\Omega G[(1 + \gamma_o) \cosh \Omega_o \cos \Omega_o + (1 - \gamma_o) \sinh \Omega_o \sin \Omega_o]^{-1} \\ G &= \frac{1}{4\Omega^4} Ra_T[(1 + N) \sin \Phi + (C_T + NC_S) \cos \Phi] \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Les constantes  $C_T$  et  $C_S$  sont obtenues en substituant les profils de  $\Psi$ ,  $T$  et  $S$  dans les relations (3.36) et (3.37). Il s'ensuit :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= C_T F + (1 - C_T G)(G - E) & (a) \\ C_S &= Le^2 C_S F + Le(1 - LeC_S G)(G - E) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

où  $E$  et  $F$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{B}{\Omega^2}[\cosh \Omega_o \sin \Omega_o + \gamma_o \sinh \Omega_o \cos \Omega_o] \\ F &= \frac{B^2}{16\Omega^3}[(\gamma_o^2 + 2\gamma_o - 1) \sinh \Omega \cos \Omega - (\gamma_o^2 - 2\gamma_o - 1) \cosh \Omega \sin \Omega - 4\Omega \gamma_o] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Les taux de transfert de chaleur et de matière, exprimés en termes des nombres de Nusselt et de Sherwood, Éq. (2.52), peuvent être calculés à partir de :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= [C_T E + (1 - C_T G)]^{-1} & (a) \\ Sh &= [LeC_S E + (1 - LeC_S G)]^{-1} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

#### 4.1.1.1 Régime de couche limite

Nous examinons maintenant le régime de couche limite dans une cavité verticale ( $\Phi = 90^\circ$ ) pour le cas où les forces de volume sont coopérantes ( $N > 0$ ). Ce régime est caractérisé par la concentration de l'écoulement en une fine couche au voisinage des parois. Lorsque les paramètres de contrôle  $Ra_T$ ,  $N$  et  $Le$  sont suffisamment grands, de telle manière que  $e^\Omega \gg 1$  ( $\Omega \geq 6$ ), les profils de la vitesse, de la température et de la concentration se réduisent aux expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= -2\xi_0 \Omega \Psi_0 e^{\Omega X} \sin(\Omega X) \\ T &= C_T y + \xi_0 \frac{C_T \Psi_0}{\Omega} e^{\Omega X} \cos(\Omega X) + (1 - C_T \Psi_0)x \\ S &= C_S y + \xi_0 \frac{Le C_S \Psi_0}{\Omega} e^{\Omega X} \cos(\Omega X) + (1 - Le C_S \Psi_0)x \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

où  $X = \xi_0 x - 1/2$  et  $\xi_0$  est une constante, valant 1 pour la paroi verticale droite de la cavité et  $-1$  pour la paroi verticale gauche.  $\Psi_0$  est la valeur de la fonction de courant à l'origine des axes. Elle est donnée par la relation :

$$\Psi_0 = \frac{Ra_T(1+N)}{4\Omega^4} \quad (4.8)$$

Les expressions des gradients de température et de concentration  $C_T$  et  $C_S$  se réduisent à :

$$C_T = \frac{\Psi_0(1 - \frac{2}{\Omega})}{1 + \Psi_0^2(1 - \frac{5}{2\Omega})}, \quad C_S = \frac{Le\Psi_0(1 - \frac{2}{\Omega})}{1 + Le^2\Psi_0^2(1 - \frac{5}{2\Omega})} \quad (4.9)$$

Par ailleurs, les nombres de Nusselt et de Sherwood, d'après les équations (4.6), ont pour expressions :

$$Nu = \frac{1 + \Psi_0^2(1 - \frac{5}{2\Omega})}{1 + \frac{3}{2}\frac{\Psi_0^2}{\Omega}(1 - \frac{8}{3\Omega})}, \quad Sh = \frac{1 + Le^2\Psi_0^2(1 - \frac{5}{2\Omega})}{1 + \frac{3}{2}\frac{Le^2\Psi_0^2}{\Omega}(1 - \frac{8}{3\Omega})} \quad (4.10)$$

En combinant les expressions de  $C_T$  et de  $C_S$ , Éq. (4.9), avec la définition de  $\Psi_0$ , Éq. (4.8), nous obtenons :

$$a^2 \Psi_0^4 - 2a\Omega(b - c) \Psi_0^2 + \Omega^2[(b - c)^2 - (b + c)^2(1 - \varepsilon_0)] = 0 \quad (4.11)$$

où

$$\left. \begin{aligned} a &= (1 + N)(2\Omega - 5)L e^2, & b &= (2\Omega - 5)(N + L e^2) \\ c &= (1 + N L e^2), & \varepsilon_0 &= 4N(2\Omega - 5)(L e^2 - 1)^2 (b + c)^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

En général, pour des valeurs données des paramètres de contrôle, la valeur de  $\Psi_0$  peut être calculée numériquement à partir de l'équation (4.11). Cependant, il est possible de trouver une solution analytique approximative qui donne explicitement la valeur de  $\Psi_0$  en terme des paramètres  $Ra_T$ ,  $N$  et  $Le$ . À la suite de quelques tests numériques, nous avons observé qu'en général la valeur du paramètre  $\varepsilon_0$  est très petite devant l'unité ( $\varepsilon_0 \ll 1$ ). Ainsi, en négligeant  $\varepsilon_0$  dans l'équation (4.11), nous obtenons la relation suivante :

$$\Psi_0 = (\eta_0 \Omega)^{1/2} \quad (4.13)$$

dans laquelle la valeur de  $\eta_0$ , donnée par :

$$\eta_0 = 2 (1 + N L e^2)^{-1} (1 + N) \quad (4.14)$$

est une bonne approximation pour de grandes valeurs de  $N$  et  $Le$  vérifiant la relation  $N L e^{-2} \ll 1$ . Dans le cas contraire, la valeur de  $\eta_0$  peut être approximée par :

$$\eta_0 = 2 (1 + N L e^{-2}) (1 + N)^{-1} \quad (4.15)$$

À partir de la définition de  $\Psi_0$ , Éq. (4.8), et de la relation (4.13) pour  $\Psi_0$ , nous obtenons :

$$\Omega = Ra_T^{2/9} (1 + N)^{2/9} / (16\eta_0)^{1/9} \quad (4.16)$$

Il est à remarquer que le paramètre  $\Omega$  représente l'échelle de l'épaisseur des couches limites. D'après l'équation (4.7), il est clair que les épaisseurs des couches limites hydrodynamique, thermique et solutale sont toutes identiques. Cela résulte de l'imposition des flux constants de chaleur et de masse sur les parois verticales de la cavité. Dans le cas où ces parois sont maintenues à des températures et à des concentrations constantes, Bennacer 1993 et Bennacer et Gobin 1996 ont montré que les épaisseurs des couches limites étaient différentes les unes des autres lorsque  $Pr \neq 1$  et  $Le \neq 1$ .

Notons qu'un écoulement de type couche limite hydrodynamique n'implique pas nécessairement la présence simultanée de couches limites thermique et solutale. Ainsi, pour  $Ra_T \gg 1$  et  $N > 0$ , la vitesse et la température ont toutes deux des profils de type couche limite. La concentration, quant à elle, a un profil de type couche limite pour des valeurs élevées de  $Le$  et carrément linéaire ( $S = x$ ) lorsque  $Le$  est très petit ( $Le \ll 1$ ). Dans cette dernière situation, le transfert de la masse se fait par conduction pure.

Examinons maintenant les profils de la vitesse, de la température et de la concentration en dehors des couches limites. Dans la région centrale de la cavité, désignée par le symbole  $\infty$ , ces profils sont exprimés par :

$$\left. \begin{array}{l} v_\infty = 0 \\ T_\infty = C_T y + C_{Tx}x \\ S_\infty = C_S y + C_{Sx}x \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

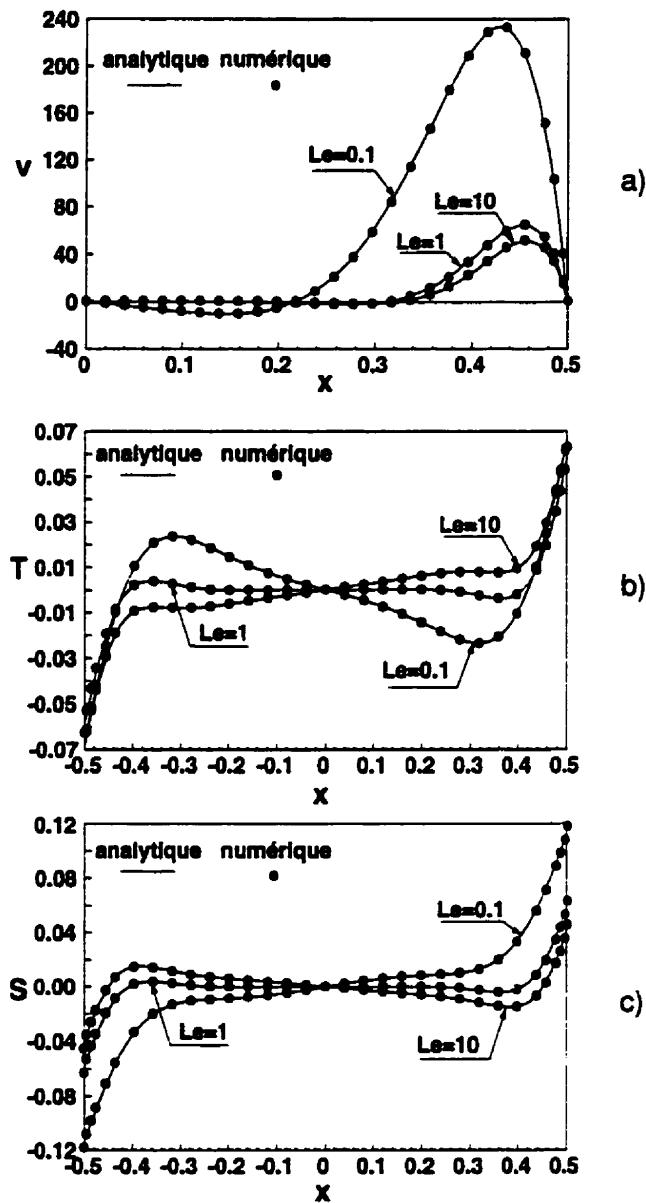
où  $C_{Tx} = (1 - C_T \Psi_0)$  et  $C_{Sx} = (1 - LeC_S \Psi_0)$  représentent les gradients horizontaux de la température et de la concentration, respectivement.

Les profils de  $v_\infty$ ,  $T_\infty$  et  $S_\infty$  montrent que, dans la partie centrale de l'enceinte, le fluide est stagnant et que la température et la concentration sont linéairement

stratifiées dans les directions horizontale et verticale du système. À partir des profils de  $T_\infty$  et  $S_\infty$  et des expressions de  $C_T$  et  $C_S$ , nous pouvons montrer que le gradient horizontal de la température,  $C_{Tx}$ , est positif lorsque  $\Omega < \Omega_T$  et négatif lorsque  $\Omega > \Omega_T$  où  $\Omega_T = 2^{-5/9}[(1 + N)Ra_T]^{2/9}$ . De même, le gradient solutal horizontal,  $C_{Sz}$ , est positif lorsque  $\Omega < \Omega_S$  et négatif lorsque  $\Omega > \Omega_S$  où  $\Omega_S = 2^{-5/9}[(1 + N)LeRa_T]^{2/9}$ . Dans le cas où  $Le = 1$ , nous obtenons  $C_{Tx} = C_{Sz} = 0$ . Il en résulte que les profils de la température et de la concentration sont alors linéairement stratifiés dans la direction verticale uniquement. Dans le passé, Trevisan et Bejan 1987a ont étudié le présent problème, en régime de couche limite, en utilisant la technique de linéarisation d'Oseen. Ayant pris comme hypothèse l'existence de gradients horizontaux de température et de concentration nuls en dehors de la couche limite, leur solution analytique s'est avérée valide seulement pour le cas trivial  $Le = 1$ . De plus, ces auteurs, en supposant que les épaisseurs des couches limites étaient différentes les unes des autres, ont obtenu de mauvaises corrélations pour les nombres de Nusselt et de Sherwood.

Dans la figure 4.1, nous avons présenté des profils de la vitesse,  $v$ , de la température,  $T$ , et de la concentration,  $S$ , dans le plan médian de la cavité pour  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et différentes valeurs de  $Le$ . Pour  $Le = 1$ , nous constatons que, dans la partie centrale de la cavité, les gradients horizontaux de la température et de la concentration sont nuls. Cependant, pour  $Le \neq 1$  ( $Le = 0.1$  ou  $10$ ), les profils de  $T$  et  $S$  montrent une stratification linéaire dans la direction horizontale. Cela indique qu'au centre de la cavité, il y a des transferts de chaleur et de masse purement conductifs dans la direction horizontale. Selon la valeur de  $Le$ , ces transferts peuvent se faire de la couche limite droite vers la couche limite gauche ou vice versa.

De façon à expliquer physiquement ce phénomène, prenons le cas  $N = 1$  et  $Le = 0.1$ . Dans cette situation, la diffusivité massique est dix fois plus grande que



**Figure 4.1 :** Profils de la vitesse,  $v$ , de la température,  $T$ , et de la concentration,  $S$ , dans le plan médian horizontal pour  $Ra_T = 10^6$ ,  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 0.1$ ,  $1$  et  $10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

la diffusivité thermique, et il en résulte que le gradient massique dans la direction horizontale est beaucoup plus important que le gradient thermique. Puisque la poussée, résultant des forces de volume, est contrôlée par les gradients horizontaux de température et de concentration, le mouvement convectif est alors dominé principalement par les effets solutaux. En passant de  $Le = 1$  à  $Le = 0.1$  et sans altérer le flux de chaleur imposé ( $Ra_T = cte = 10^6$ ), l'intensité de la vitesse s'accentue, ce qui provoque une augmentation du transfert de chaleur dans la couche limite. Puisque le flux de chaleur imposé reste constant, alors on a un déficit de la chaleur au voisinage de la couche limite formée sur la paroi verticale droite et un surplus au voisinage de la paroi verticale gauche. Pour compenser le déficit et ajuster le surplus, une quantité de chaleur est transférée par conduction de la couche limite gauche vers la couche limite droite. C'est la raison pour laquelle le gradient de température dans la direction horizontale est négatif (voir figure 4.1). Pour  $Le > 1$  (par exemple  $Le = 10$ ), la diffusivité thermique est plus grande que la diffusivité massique et le gradient horizontal dominant est celui de la température. Donc, l'écoulement convectif est dominé par les effets thermiques et l'existence d'un gradient solutal horizontal négatif, au centre de la cavité, est provoqué par le déficit et le surplus de la masse au voisinage des parois verticales droite et gauche de la cavité, respectivement. Des résultats similaires ont été rapportés par Alavyoon 1993 en milieu poreux.

Maintenant, selon la valeur du rapport des forces de volume,  $N$ , trois régimes convectifs sont discutés ci-dessous.

#### *Régime de force de volume d'origine thermique dominante*

Lorsque  $N$  est très petit ( $N \ll 1$ ), l'écoulement convectif est dominé par les

effets thermiques. À partir des équations (4.14)-(4.16), nous pouvons montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = 2^{-5/9} Ra_T^{2/9} \\ C_T = 2^{-2/9} Ra_T^{-1/9} \\ Nu = 2^{-14/9} Ra_T^{2/9} \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Dans le cas limite où  $Le \gg 1$ , on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} C_S = 2^{-2/9} Le^{-1} Ra_T^{-1/9} (1 + \epsilon_1) \\ Sh = \frac{2^{4/9}}{3} Ra_T^{2/9} (1 + \epsilon_2) \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

où  $\epsilon_1 = 1/[2\Omega - 5]$  et  $\epsilon_2 = 1/[6\Omega - 16]$ .

D'un autre côté lorsque  $Le \ll 1$  on a :

$$\left. \begin{array}{l} C_S = 2^{2/9} Le Ra_T^{1/9} (1 - \epsilon_3) \\ Sh = 1 + 2^{4/9} Le^2 Ra_T^{2/9} (1 - \epsilon_4) \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

où  $\epsilon_3 = [2/\Omega + Le^2(2\Omega - 5)]/[1 + Le^2(2\Omega - 5)]$

et  $\epsilon_4 = [4/\Omega + 4/\Omega^2 - Le^2(3 - 8/\Omega)]/[1 + Le^2(3 - 8/\Omega)]$ .

En se basant sur la méthode d'Oseen, Trevisan et Bejan 1987a ont obtenu la corrélation  $Nu = 0.34 Ra_T^{2/9}$ , laquelle est en parfait accord avec l'expression de  $Nu$  donnée par l'équation (4.18). Cependant, en utilisant la méthode affine, ils ont trouvé que le taux du transfert de masse était donné par  $Sh = 0.445 Ra_T^{5/27} Le^{1/3} A^{-1/3}$  (pour  $Le \gg 1$ ), lequel est en désaccord avec les résultats prédicts par la présente étude. Tel que déjà mentionné, cela est dû au fait qu'ils ont supposé à tort que les gradients horizontaux de la température et de la concentration étaient nuls dans la direction horizontale.

### *Régime de force de volume d'origine solutale dominante*

Pour de grands rapports des forces de volume ( $N \gg 1$ ), l'écoulement convectif est dominé par les effets solutaux. Pour cette situation, à partir des équations (4.14)-(4.16), nous déduisons que :

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 2^{-5/9} Ra_S^{2/9} \\ C_S &= 2^{-2/9} Ra_S^{-1/9} \\ Sh &= 2^{-14/9} Ra_S^{2/9} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Dans le cas où  $Le \gg 1$ , nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= 2^{2/9} Le^{-1} Ra_T^{1/9} (1 - \epsilon_5) \\ Nu &= 1 + 2^{4/9} Le^{-2} Ra_T^{2/9} (1 - \epsilon_6) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

où  $\epsilon_5 = [2/\Omega + Le^{-2}(2\Omega - 5)]/[1 + Le^{-2}(2\Omega - 5)]$

et  $\epsilon_6 = [4/\Omega + 4/\Omega^2 - Le^{-2}(3 - 8/\Omega)]/[1 + Le^{-2}(3 - 8/\Omega)]$ .

D'un autre côté, dans le cas où  $Le \ll 1$  on peut montrer que :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= 2^{-2/9} Le^{-1} Ra_T^{-1/9} (1 + \epsilon_7) \\ Nu &= \frac{2^{4/9}}{3} Ra_T^{2/9} (1 + \epsilon_8) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

où  $\epsilon_7 = 1/[2\Omega - 5]$  et  $\epsilon_8 = 1/[6\Omega - 16]$ .

Pour  $N \gg 1$  et  $Le \ll 1$ , Trevisan et Bejan 1987a ont montré que  $Nu = 0.445 Ra_S^{5/27} Le^{-14/27} A^{-1/3}$  et  $Sh = 0.34 Ra_S^{2/9}$ . Le nombre de Nusselt est différent de celui donné par l'équation (4.23). Cela est dû aux raisons évoquées antérieurement.

### *Régime intermédiaire*

Le régime intermédiaire correspond au cas où les forces de volume thermique et solutale sont comparables ( $N \sim O(1)$ ). Pour cette situation, les nombres de Nus-

selt et de Sherwood sont donnés, en général, par l'équation (4.10). Lorsque  $Le$  est suffisamment grand, de telle manière que  $NLe^{-2} \ll 1$ , l'échelle de l'épaisseur de la couche limite peut être approximée par  $\delta \sim \Omega^{-1} = 2^{5/9} (N + 1)^{-1/3} Ra_T^{-2/9}$ , celle-ci étant indépendante de  $Le$ . Le paramètre  $\eta_0$  se réduit alors à  $\eta_0 = 2(1 + N)^{-1}$ . D'un autre côté, lorsque  $Le$  est suffisamment petit, de telle sorte que  $NLe^{-2} \gg 1$ , l'échelle de l'épaisseur de la couche limite devient  $\delta \sim \Omega^{-1} = 2^{5/9} (1+N^{-1})^{-1/3} Ra_S^{-2/9}$  et le paramètre  $\eta_0$  est approximé par  $\eta_0 = (1+N)^{-1} NLe^{-2}$ . Pour  $Le = 1$ , l'équation (4.16) indique que  $\Omega = 2^{-5/9} (N + 1)^{2/9} Ra_T^{2/9}$ , laquelle est en accord avec la valeur rapportée par Trevisan et Bejan 1987a.

#### 4.1.1.2 Résultats et discussion

Nous allons maintenant discuter de l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le mécanisme du transfert de chaleur et de masse. Les résultats numériques obtenus avec les méthodes décrites dans le chapitre précédent seront aussi discutés.

L'influence du nombre de Rayleigh sur les taux de transfert de chaleur et de masse est illustrée sur la figure 4.2 pour  $N = 1$  et  $Le = 10$ . Comme le montre la figure, les résultats analytiques, représentés par des lignes, sont en bon accord avec les résultats numériques indiqués par des cercles pleins. Pour les valeurs choisies des paramètres  $N$  et  $Le$ , le régime de couche limite commence environ à  $Ra_T \simeq 10^4$ . À partir de ce nombre de Rayleigh, la solution analytique approximative obtenue en régime de couche limite coïncide bien avec la solution analytique générale. Lorsque  $Ra_T$  est suffisamment petit ( $Ra_T \leq 10$ ), on constate que le transfert de chaleur et de masse est pratiquement conductif ( $Nu \simeq 1$  et  $Sh \simeq 1$ ). Par ailleurs, lorsque  $Ra_T$  augmente, les nombres de Nusselt et de Sherwood s'accroissent et l'écoulement convectif s'accentue. En régime de couche limite ( $Ra_T > 10^4$ ), on observe une augmentation monotone de  $Nu$  et de  $Sh$  avec un taux d'accroissement de  $2/9$ . On

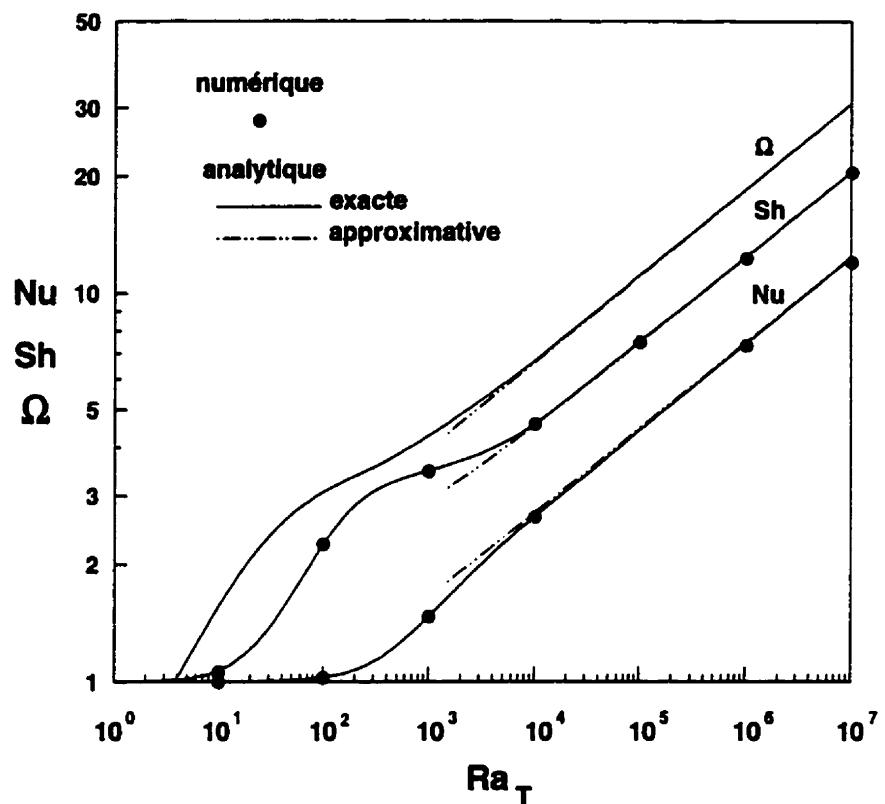
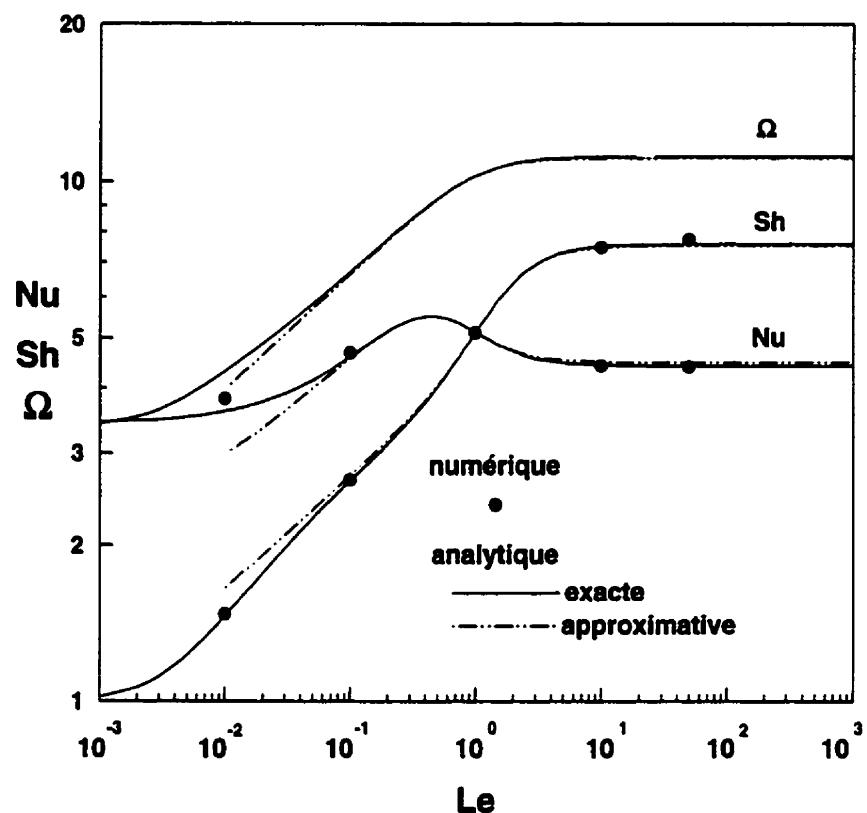


Figure 4.2 : Influence du nombre de Rayleigh sur les transferts de chaleur et de masse pour  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

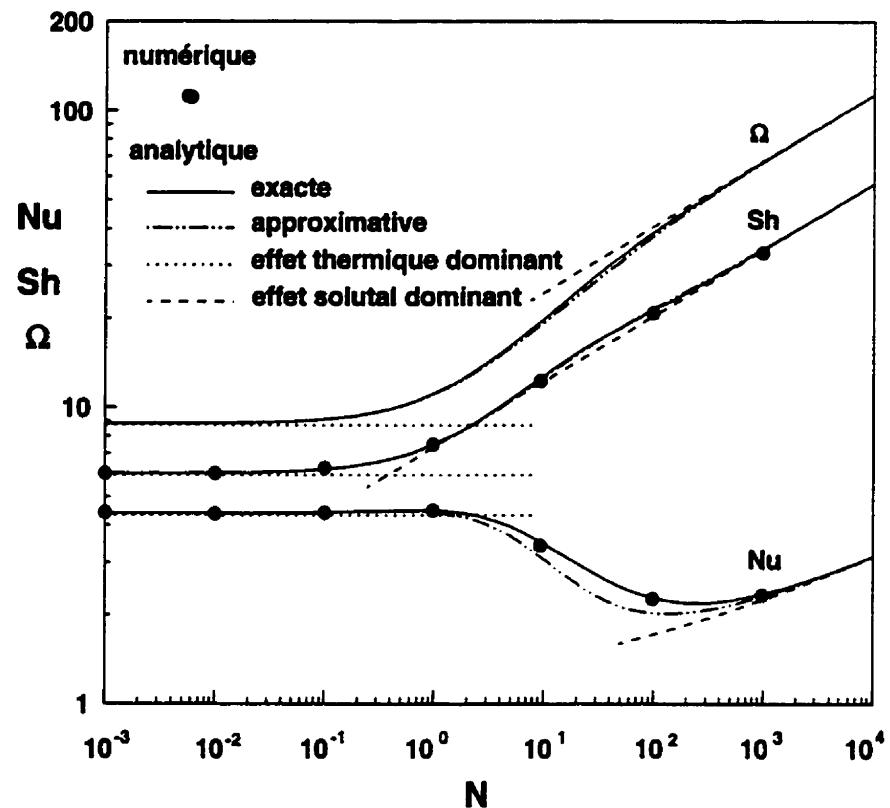
note également que le transfert convectif de la masse est beaucoup plus élevé que celui de la chaleur. Ceci est dû au fait que la diffusivité thermique est dix fois plus grande que la diffusivité massique.

Les effets du nombre de Lewis sur les taux de transfert de chaleur et de masse sont illustrés sur la figure 4.3 pour  $Ra_T = 10^5$ ,  $N = 1$  et  $\Phi = 90^\circ$ . On constate que lorsque  $Le \leq 10^{-3}$ , le transfert de la masse se fait pratiquement par la conduction pure ( $Sh \simeq 1$ ), et ceci malgré la domination des effets solutaux sur l'écoulement convectif. Puisque le gradient horizontal de la concentration est dominant, ce dernier donne naissance à un écoulement convectif qui accentue à son tour le transfert de la chaleur. Au fur et à mesure que  $Le$  augmente,  $Sh$  s'accroît jusqu'à  $Le \simeq 10$  et, par la suite, demeure presque constant. Le nombre de Nusselt, quant à lui, augmente légèrement avec  $Le$ , passe par un maximum à  $Le \simeq 0.5$ , puis diminue asymptotiquement vers une valeur constante. En général, le transfert thermique convectif demeure toujours élevé, et ceci pour toutes les valeurs de  $Le$ . Sur la figure, nous observons, de plus, que le régime de la couche limite est atteint approximativement à  $Le = 0.1$ . Le bon accord entre la solution analytique et la solution numérique est également noté.

Les variations des taux de transfert de chaleur et de masse en fonction de  $N$  sont présentées sur la figure 4.4 pour  $Ra_T = 10^5$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $Le = 10$ . La transition du régime convectif thermique dominant ( $N \ll 1$ ) vers le régime solutal dominant ( $N \gg 1$ ) est clairement illustrée. La solution analytique générale et la solution approximative sont présentées sur le graphe. D'après ces courbes, lorsque  $N$  augmente de  $10^{-3}$  à  $10^3$ ,  $Sh$  s'accroît d'une façon monotone. D'un autre côté,  $Nu$  demeure presque constant jusqu'à  $N = 1$ . Puis il diminue d'une façon significative jusqu'à  $N \simeq 300$  pour augmenter par la suite asymptotiquement avec  $N$ . Nous notons sur la figure que le régime de force de volume d'origine thermique dominante couvre la gamme  $0 \leq N \leq 0.1$ , alors que le régime de force de volume d'origine



**Figure 4.3 :** Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_T = 10^5$ ,  $N = 1$ ,  $Pr = 7$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .



**Figure 4.4 :** Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_T = 10^5$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

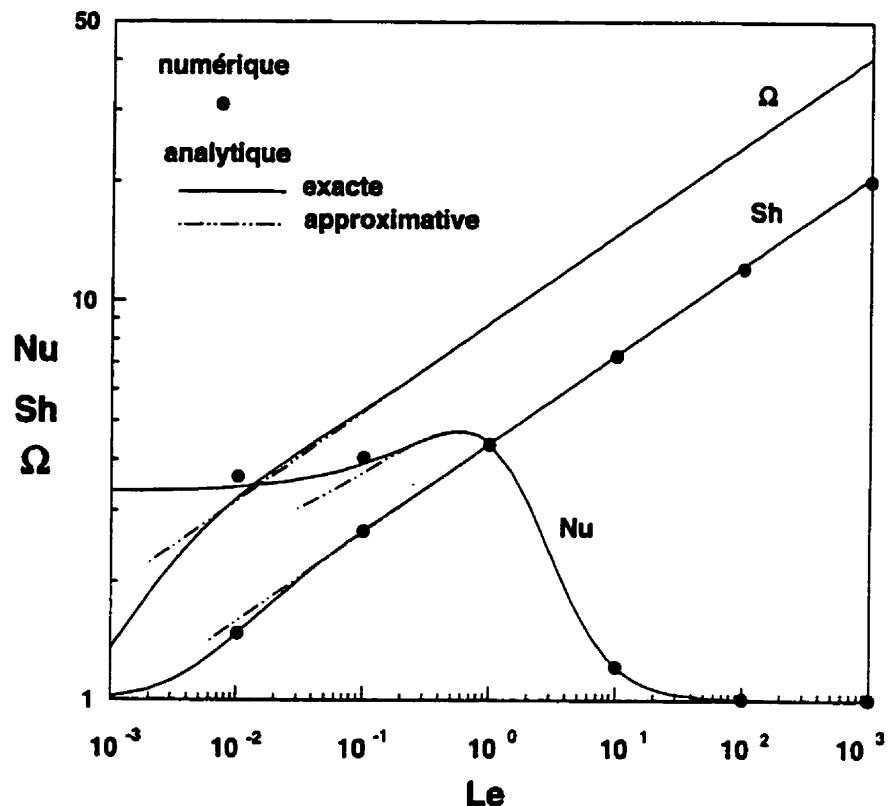
solutale dominante commence à se faire sentir à partir de  $N \simeq 500$ .

Le cas où la force de volume solutale est dominante est présenté sur la figure 4.5. Le graphe illustre l'influence de  $Le$  sur  $Nu$  et  $Sh$  pour  $Ra_T = 1$ ,  $N = 10^5$  et  $\Phi = 90^\circ$ . La solution analytique approximative pour le régime d'écoulement de type couche limite est présentée en lignes discontinues. On constate que pour de petites valeurs de  $Le$ , le transfert de masse est pratiquement diffusif, même si l'écoulement est essentiellement induit par les effets solutaux. Lorsque  $Le$  varie de  $10^{-3}$  à  $10^3$ ,  $Sh$  augmente continuellement avec  $Le$ . Par contre,  $Nu$ , qui est assez élevé pour  $Le < 10^{-3}$ , commence par augmenter légèrement, passant par un maximum à  $Le \simeq 0.5$ , diminue ensuite asymptotiquement vers l'unité. Nous notons, sur la figure 4.5, qu'à des valeurs élevées de  $Le$ , le transfert de chaleur se fait alors par conduction pure. Ce comportement a été observé et expliqué dans le passé par Bennacer 1993.

#### 4.1.2 Solution pour $R < 0$

Quand les forces de volume sont opposées et du même ordre de grandeur ( $N \sim O(-1)$ ), le paramètre  $R$  peut prendre une valeur négative. Cette situation est également possible dans le cas d'une cavité légèrement inclinée par rapport au plan horizontal ( $\Phi \sim 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ). La forme de la solution des équations (3.39) est alors donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= B[\cosh(\omega x) + \gamma_o \cos(\omega x)] - G & (a) \\ T &= C_T y - \frac{C_T B}{\omega} [\sinh(\omega x) + \gamma_o \sin(\omega x)] + (1 + C_T G)x & (b) \\ S &= C_S y - \frac{Le C_S B}{\omega} [\sinh(\omega x) + \gamma_o \sin(\omega x)] + (1 + Le C_S G)x & (c) \end{aligned} \right\} (4.24)$$



**Figure 4.5 :** Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_T = 1$ ,  $N = 10^5$ ,  $Pr = 7$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

dans lequel :

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{-Ra_T(C_T + LeNC_S) \sin \Phi}, & \omega_o &= \frac{\omega}{2} \\ B &= G[\cosh \omega_o + \gamma_o \cos \omega_o]^{-1}, & \gamma_o &= \frac{\sinh \omega_o}{\sin \omega_o} \\ G &= \frac{Ra_T}{\omega^4} [(1+N) \sin \Phi + (C_T + NC_S) \cos \Phi] \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

En portant les profils de  $\Psi$ ,  $T$  et  $S$  dans les relations (3.36) et (3.37) et après intégration nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} C_T + C_T F - (1 + C_T G)E &= 0 & (a) \\ C_S + Le^2 C_S F - Le(1 + LeC_S G)E &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

où  $E$  et  $F$  sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} E &= B \left[ \frac{2}{\omega} (\sinh \omega_o + \gamma_o \sin \omega_o) - \cosh \omega_o - \gamma_o \cos \omega_o \right] \\ F &= \frac{B^2}{2\omega} [\omega(\gamma_o^2 + 1) - \sinh \omega + \gamma_o^2 \sin \omega] \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Les relations (4.26) permettent de calculer les gradients de température et de concentration,  $C_T$  et  $C_S$ .

À partir des relations (2.52) et des profils (4.24) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} Nu^{-1} &= (1 + C_T G) - \frac{2C_T B}{\omega} [\sinh(\omega_o) + \gamma_o \sin(\omega_o)] & (c) \\ Sh^{-1} &= (1 + LeC_S G) - \frac{2LeC_S B}{\omega} [\sinh(\omega_o) + \gamma_o \sin(\omega_o)] & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

#### 4.1.3 Solution pour $R < 0$ : $N = -1$ et $\Phi = 90^\circ$

Pour cette situation, nous allons considérer deux cas. Le premier concerne la cavité élancée,  $A \gg 1$ , et le deuxième la cavité aplatie,  $A \ll 1$ .

#### 4.1.3.1 Cavité élancée : $A \gg 1$

Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \frac{\Psi_0}{(1 - \gamma_o)} [\cosh(\omega x) - \gamma_o \cos(\omega x)] \\ T = C_T y - \frac{C_T \Psi_0}{\omega(1 - \gamma_o)} [\sinh(\omega x) - \gamma_o \sin(\omega x)] + x \\ S = C_S y - \frac{C_S L e \Psi_0}{\omega(1 - \gamma_o)} [\sinh(\omega x) - \gamma_o \sin(\omega x)] + x \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (4.29)$$

où  $\Psi_0$  est la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité et  $\omega$  est définie par :

$$\omega = \sqrt[4]{Ra_T(LeC_S - C_T)} \quad (4.30)$$

Comme la fonction de courant  $\Psi$  est nulle sur les parois, il s'ensuit que :

$$\gamma_o = \frac{\cosh \omega/2}{\cos \omega/2} \quad (4.31)$$

À partir des conditions de non glissement sur les parois ( $\partial\Psi/\partial x = 0$ ) et du profil de  $\Psi$ , Éq. (4.29), nous pouvons montrer qu'il existe deux solutions possibles. La première est la solution de l'état de conduction pure (c'est-à-dire  $\omega = 0$ ); elle correspond à :

$$\Psi_0 = 0 \quad (4.32)$$

et la deuxième est une solution convective ( $\Psi_0 \neq 0$ ) pour laquelle  $\omega$  est une constante positive, pouvant être obtenue en résolvant numériquement l'équation suivante :

$$\tanh \omega/2 + \tan \omega/2 = 0 \quad (4.33)$$

Il existe plusieurs solutions possibles non nulles vérifiant cette équation. Elles sont données approximativement par :

$$\omega_1 = 4.73 \quad \text{et} \quad \omega_n \simeq \frac{\pi}{2}(4n - 1); \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

Chaque valeur de  $\omega$  correspond à un mode différent de convection. Ainsi, pour  $\omega = \omega_1$ , on a un mode unicellulaire, alors que les autres valeurs de  $\omega$  correspondent à des modes d'écoulements multicellulaires. Le nombre de cellules pour chaque mode est égal à  $(2n + 1)$ .

Dans le régime convectif, les gradients de température,  $C_T$ , et de concentration,  $C_S$ , sont déterminés à partir des bilans (3.36) et (3.37). Nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= \frac{b\Psi_0}{1 + a\Psi_0^2} & (a) \\ C_S &= \frac{bLe\Psi_0}{1 + aLe^2\Psi_0^2} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Par ailleurs, les taux de transfert de chaleur et de masse ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{a\Psi_0^2 + 1}{(a - b^2)\Psi_0^2 + 1} & (a) \\ Sh &= \frac{aLe^2\Psi_0^2 + 1}{(a - b^2)Le^2\Psi_0^2 + 1} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes données par :

$$a = \frac{1 + \gamma_o^2}{2(1 - \gamma_o)^2}, \quad b = \frac{4 \sinh \omega_o}{\omega(1 - \gamma_o)} \quad (4.37)$$

À partir de l'équation (4.35) et de la définition de  $\omega$ , Éq. (4.30), nous obtenons la relation :

$$a^2Le^2\Psi_0^4 + a(Le^2 + 1)\Psi_0^2 - 2\sqrt{a}Ra_T^0(Le^2 - 1)\Psi_0 + 1 = 0 \quad (4.38)$$

où

$$Ra_T^0 = \frac{Ra_T}{Ra_{sous}} \quad \text{avec} \quad Ra_{sous} = \frac{2\sqrt{a}}{b}\omega_1^4 = 1204.9274 \quad (4.39)$$

L'équation (4.38) permet de calculer numériquement la valeur de  $\Psi_0$  une fois que les valeurs de  $Ra_T$  et de  $Le$  sont données.

#### 4.1.3.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$

Le comportement de la solution pour des cavités aplaties est pratiquement similaire à celui du cas précédent. Ainsi, la solution est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi(x, y) = \Psi_0(16y^4 - 8y^2 + 1) \\ T(x, y) = C_T x + \frac{\Psi_0}{15} C_T (48y^5 - 40y^3 + 15y) \\ S(x, y) = C_S x + \frac{Le\Psi_0}{15} C_S (48y^5 - 40y^3 + 15y) \end{array} \right\} \quad (4.40)$$

où

$$\Psi_0 = \frac{1}{384} Ra_T (C_T - C_S) \quad (4.41)$$

Les gradients de température et de concentration suivant la direction  $x$  sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} C_T = \frac{1/A_x}{1 + a\Psi_0^2} \\ C_S = \frac{1/A_x}{1 + aLe^2\Psi_0^2} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

dans lequel  $a = 128/315$ .

La combinaison des expressions de  $C_T$  et  $C_S$ , Éq. (4.42), avec celle de  $\Psi_0$ , Éq. (4.41), nous donne :

$$\Psi_0[a^2 Le^2 \Psi_0^4 + a(Le^2 + 1) \Psi_0^2 - 2\sqrt{a} Ra_T^0 (Le^2 - 1) \Psi_0 + 1] = 0 \quad (4.43)$$

où

$$Ra_T^0 = \frac{Ra_T}{Ra_0^{sous}} \quad \text{avec} \quad Ra_0^{sous} = A_x Ra^{sous} \quad \text{et} \quad Ra^{sous} = \frac{768}{\sqrt{a}} = 1204.7904 \quad (4.44)$$

Dans le cas où  $N = -1$ , que ce soit dans une cavité élancée ou dans une cavité aplatie, le problème admet deux solutions. La première correspond à la conduction pure ( $\Psi_0 = 0$ ). Celle-ci demeure stable jusqu'à un nombre de Rayleigh qu'on appelle

souscritique,  $Ra_{TC}^{sous}$ . La deuxième est une solution convective ( $\Psi \neq 0$ ) dont la bifurcation de l'état de repos se fait avec une amplitude finie à  $Ra_T = Ra_{TC}^{sous}$ . Le nombre de Rayleigh souscritique est donné par :

$$Ra_{TC}^{sous} = \frac{Ra_0^{sous} \sqrt{a}}{(Le^2 - 1)} \left[ 2aLe^2\Psi_C^3 + (Le^2 + 1)\Psi_C \right] \quad (4.45)$$

où  $\Psi_C$  est la valeur souscritique de  $\Psi$  à l'origine des axes. Elle est fonction de  $Le$  seulement et a pour valeur :

$$\Psi_C = \pm \frac{1}{Le\sqrt{6a}} \left[ \sqrt{(Le^2 + 1)^2 + 12Le^2} - (Le^2 + 1) \right]^{1/2} \quad (4.46)$$

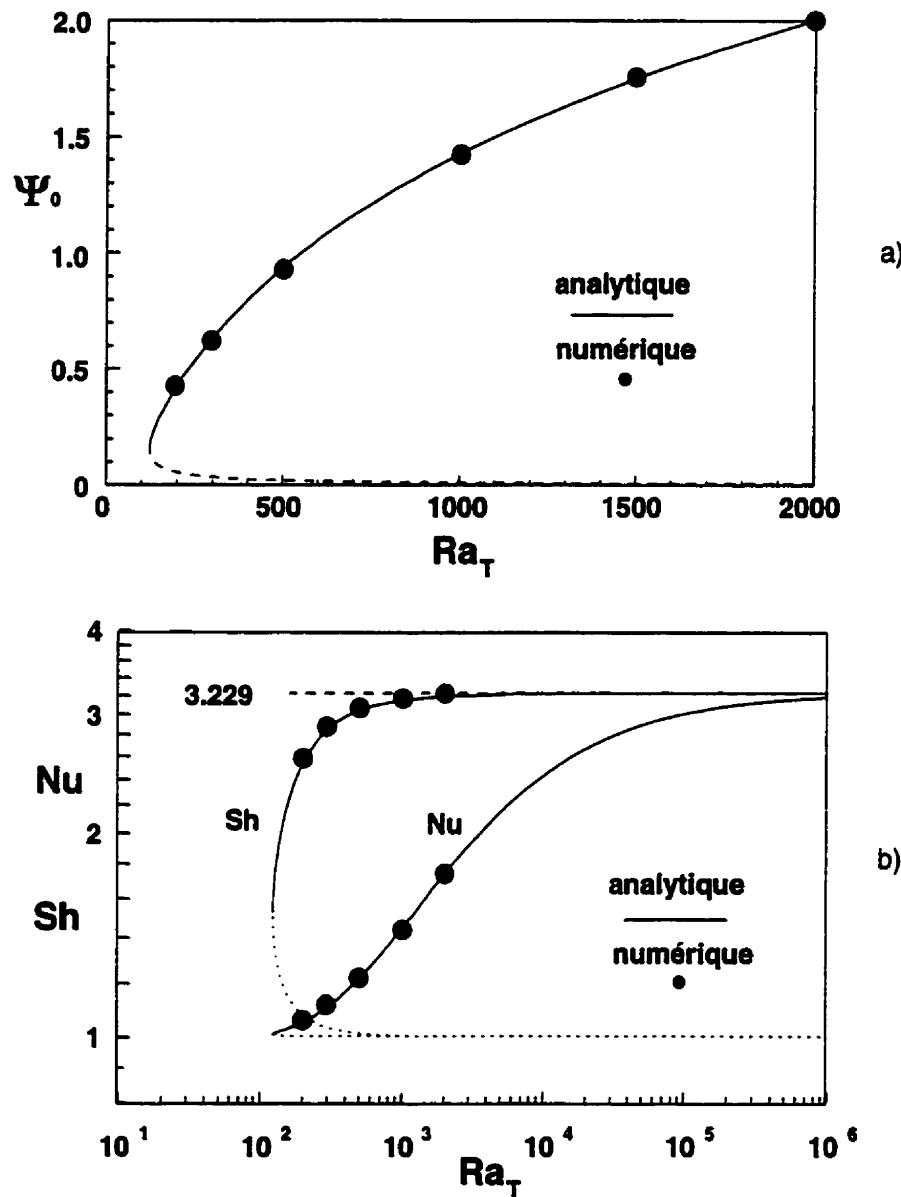
avec  $Ra^{sous} = 1204.93$  et  $a = 0.5$  dans le cas où  $A \gg 1$  et  $Ra^{sous} = 1204.7904$  et  $a = 128/315$  dans le cas où  $A \ll 1$ .

Pour de petites ou grandes valeurs de Lewis ( $Le \ll 1$  ou  $Le \gg 1$ ), l'expression du nombre de Rayleigh souscritique se réduit à :

$$Ra_{TC}^{sous} = \frac{Ra_0^{sous}}{1 - Le} \quad (4.47)$$

#### 4.1.3.3 Résultats et discussion

La figure 4.6 illustre l'évolution de l'amplitude de l'écoulement et des nombres de Nusselt et de Sherwood avec  $Ra_T$  pour  $Le = 10$  et  $A \gg 1$ . Pour cette valeur de Lewis, le nombre de Rayleigh souscritique est  $Ra_{TC}^{sous} = 122.9$ . Au-dessous de cette valeur, la solution du problème est purement diffusive ( $Nu = Sh = 1$ ). Au-dessus de cette valeur, deux solutions convectives bifurquent de l'état de repos du fluide : l'une stable (trait plein), l'autre instable (ligne discontinue). Nous observons également que  $\Psi_0$  s'accroît d'une manière monotone avec  $Ra_T$  alors que  $Nu$  et  $Sh$  augmentent asymptotiquement vers la constante 3.229. Pour des valeurs modérées de  $Ra_T$ , on constate un excellent accord entre les résultats numériques et analytiques. Cependant, pour des valeurs élevées de  $Ra_T$ , la tendance asymptotique de la solution analytique n'est pas vérifiée numériquement. Ceci est dû au fait que les

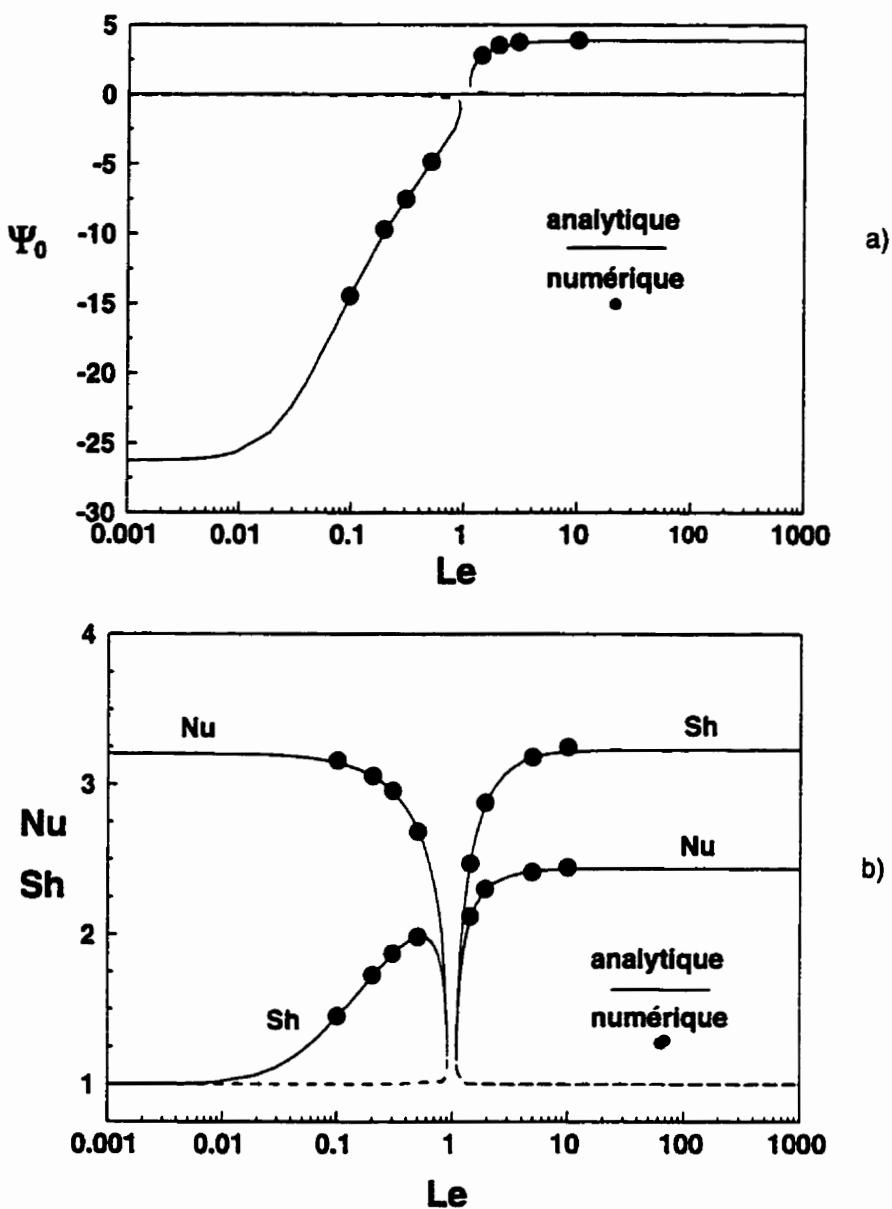


**Figure 4.6 :** Influence du nombre de Rayleigh sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse pour  $N = -1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

résultats numériques ont été obtenus avec un rapport de forme fini  $4 \leq A \leq 10$ . Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, les effets des bouts se font de plus en plus sentir et, par conséquent, la solution numérique s'écarte de la solution analytique. De plus, à des valeurs élevées de  $Ra_T$ , la naissance d'instabilités convectives oscillatoires a été observée.

Les variations de  $\Psi_0$ , de  $Nu$  et de  $Sh$  en fonction de  $Le$ , pour  $Ra_T = 10^4$ , sont présentées sur la figure 4.7. Pour la valeur choisie de  $Ra_T$ , les valeurs souscritiques de  $Le$  sont respectivement 0.907 et 1.093. Entre ces deux valeurs, le transfert de la chaleur et de la masse est dû à la conduction pure. En dehors de ces deux valeurs, deux solutions convectives bifurquent de l'état de repos avec une amplitude finie. Pour  $Le \leq 0.01$ , on remarque que le transfert de la masse est purement diffusif ( $Sh = 1$ ); malgré ce fait, ce sont les effets solutaux qui dominent l'écoulement convectif et accentuent le transfert de chaleur. Pour  $Le > 1.093$ , l'amplitude de l'écoulement ainsi que les taux de transfert de chaleur et de masse augmentent avec  $Le$  et tendent par la suite vers des valeurs constantes. Le sens de rotation de l'écoulement est lié directement à la valeur du nombre de Lewis. Comme le montre la figure 4.7a, le sens de rotation de l'écoulement est horaire ( $\Psi_0 < 0$ ) lorsque  $Le < 1$  et trigonométrique ( $\Psi_0 > 0$ ) lorsque  $Le > 1$ .

Pour expliquer le sens de rotation de l'écoulement, considérons le cas avec  $Le > 1$ . Dans cette situation, la diffusivité thermique,  $\alpha$ , est plus grande que la diffusivité massique,  $D$ , et les solutions tant analytique que numérique révèlent que la circulation de l'écoulement se fait dans le sens trigonométrique. Comme  $\alpha > D$ , la quantité de la masse transportée par la convection le long des parois verticales de la cavité est plus importante que celle de la chaleur. Par conséquent, la quantité de chaleur transférée à travers le système est automatiquement plus grande que celle de la masse. Le gradient horizontal dominant est donc celui de la température. Puisque les effets thermiques ont tendance à diminuer la densité dans la partie droite de la

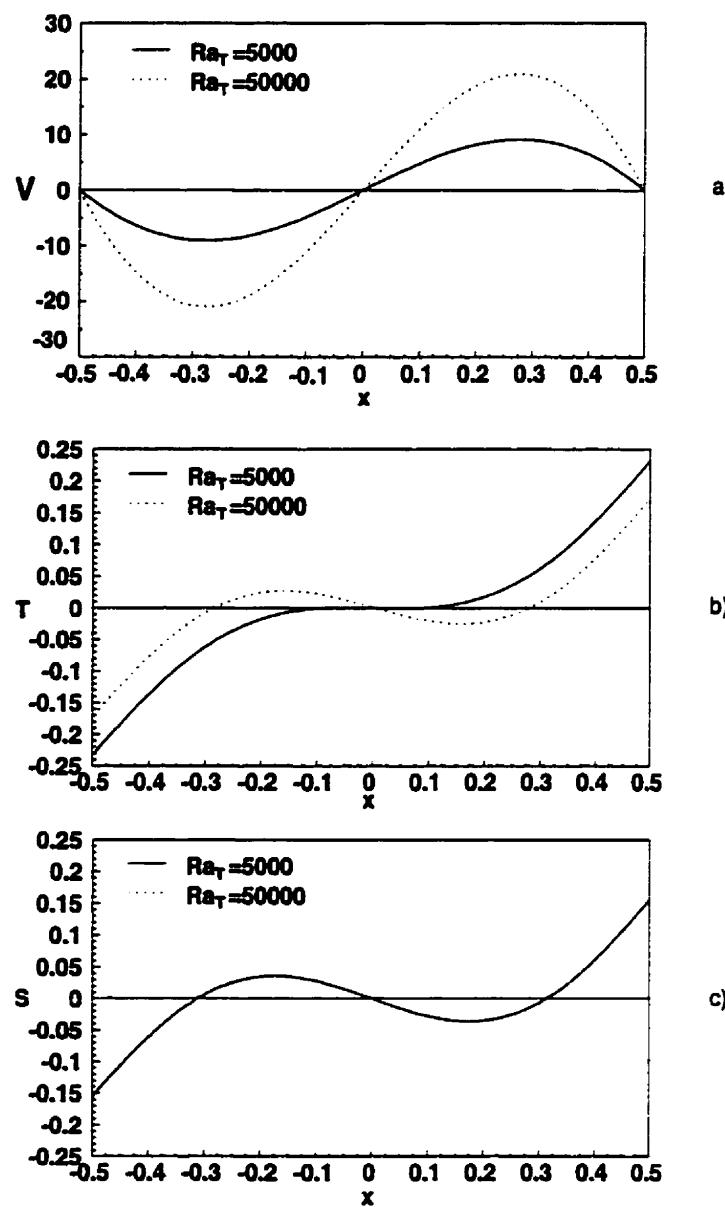


**Figure 4.7 :** Influence du nombre de Lewis sur l'intensité de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_T = 10^4$ ,  $N = -1$ ,  $Pr = 7$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

cavité et à l'augmenter dans la partie gauche, une circulation trigonométrique de l'écoulement est engendrée.

Du fait que le profil de la vitesse est accentué par les effets thermiques, le transfert de masse inverse engendre un gradient horizontal négatif de la concentration dans la région centrale de la cavité. Ainsi, les effets thermiques et solutaux s'opposent au voisinage des parois mais coopèrent dans la région centrale de la cavité. Pour illustrer ce phénomène, des profils de vitesse, de température et de concentration sont présentés sur la figure 4.8 pour  $Ra_T = 5 \times 10^3$  et  $5 \times 10^4$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 10$  et  $\Phi = 90^\circ$ . On constate que l'intensité de l'écoulement augmente lorsque  $Ra_T$  passe de  $5 \times 10^3$  à  $5 \times 10^4$ , alors que le transfert de la masse demeure pratiquement constant. Dû à la valeur élevée de  $Le$ , la figure 4.8c indique que le gradient horizontal de la concentration est négatif dans la partie centrale de la cavité, alors que celui de la température (pour  $Ra_T = 5 \times 10^3$ ) est pratiquement nul (figure 4.8b). Toutefois, comme le montre la figure 4.8b, le transfert de chaleur au centre de la cavité est dans le sens du flux imposé lorsque le nombre de Rayleigh est faible. À des valeurs élevées de  $Ra_T$ , par exemple pour  $Ra_T = 5 \times 10^4$ , la vitesse de l'écoulement s'accentue et le transfert de chaleur, au centre de la cavité, s'inverse pour compenser le déficit de chaleur créé au voisinage de la paroi droite et le surplus au voisinage de la paroi gauche. À de grandes valeurs de  $Ra_T$ , les profils de la température et de la concentration se rapprochent et  $Nu$  et  $Sh$  deviennent pratiquement identiques ( $Nu = Sh = 3.229$ ) malgré la valeur élevée de  $Le$ .

Le problème de la convection thermosolutale, dans une cavité verticale soumise à des flux constants de chaleur et de masse et dans laquelle les forces de volume sont égales et opposées, ne présente pas de régime de couche limite. Pour expliquer cela, nous rappelons que la formation de la couche limite sur les parois verticales de la cavité se produit à des valeurs très élevées des paramètres  $Ra_T$ ,  $N$  et  $Le$  et à condition que le gradient de densité du fluide soit fini sur les parois en question et



**Figure 4.8 :** Profils de la vitesse,  $v$ , de la température,  $T$ , et de la concentration,  $S$ , dans le plan médian horizontal pour  $Ra_T = 5 \times 10^3$  et  $5 \times 10^4$ ,  $N = -1$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

perpendiculaire au champ de gravité. Dans le cas où  $N = -1$ , en régime convectif, il est évident que le gradient de densité est nul sur les parois verticales, relativement faible dans le milieu avoisinant et plus important dans la région centrale de la cavité. Alors, il est impossible d'obtenir une stagnation du fluide au centre de la cavité. En fait, l'écoulement convectif au voisinage des parois est entraîné par celui du centre de la cavité là où le gradient de densité est le plus important.

#### 4.1.4 Solution pour $R = 0$

Lorsque la cavité est en position horizontale,  $\Phi = 0$  ou  $180^\circ$ , la paramètre  $R$  prend la valeur nulle. Dans le cas d'une cavité inclinée avec un angle quelconque, cette situation peut avoir lieu lorsque les forces de volume sont opposées, de telle façon que  $N = -C_T/(LeCs)$ . La solution des équations différentielles (3.39) est alors donnée par les profils suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \Psi_0(16x^4 - 8x^2 + 1) \\ T = C_T y - \frac{C_T \Psi_0}{15}(48x^5 - 40x^3 + 15x) + x \\ S = C_S y - \frac{LeCs \Psi_0}{15}(48x^5 - 40x^3 + 15x) + x \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (4.48)$$

où  $\Psi_0$  est la valeur de la fonction de courant à l'origine des axes. Elle est donnée par :

$$\Psi_0 = \frac{15}{8}Ra_T^0[(1 + N)\sin \Phi + (C_T + NC_S)\cos \Phi] \quad (4.49)$$

dans lequel  $Ra_T^0 = \frac{Ra_T}{Ra^{sup}}$  et  $Ra^{sup} = 720$ .

Les gradients  $C_T$  et  $C_S$  sont obtenus par substitution des profils (4.48) dans les

relations (3.36) et (3.37). Il s'ensuit que :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= \frac{16a\Psi_0}{15(2a + \Psi_0^2)} & (a) \\ C_S &= \frac{16aLe\Psi_0}{15(2a + Le^2\Psi_0^2)} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

où  $a = 315/256$ .

Après avoir combiné les équations (4.49) et (4.50) nous avons :

$$\sum_{i=0}^5 a_i \Psi_0^i = 0 \quad (4.51)$$

où les coefficients  $a_i$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -\frac{15}{2}a^2 Ra_T^0 \sin \Phi(1 + N) \\ a_1 &= -4a^2 [Ra_T^0 \cos \Phi(1 + NL_e) - 1] \\ a_2 &= -\frac{15}{4}a Ra_T^0 \sin \Phi(1 + Le^2)(1 + N) \\ a_3 &= -2a [Ra_T^0 \cos \Phi Le(N + Le) - (1 + Le^2)] \\ a_4 &= -\frac{15}{8}Le^2 Ra_T^0 \sin \Phi(1 + N) \\ a_5 &= Le^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Portant les profils de  $\Psi$ ,  $T$  et  $S$  dans les expressions (2.52), il s'ensuit que :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{10}{3} \left( \frac{\Psi_0^2 + 2a}{\Psi_0^2 + 20a/3} \right) & (a) \\ Sh &= \frac{10}{3} \left( \frac{Le^2\Psi_0^2 + 2a}{Le^2\Psi_0^2 + 20a/3} \right) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

#### 4.1.4.1 Cavité élancée : $A \gg 1$ et $\Phi = 0^\circ$

Dans le cas d'une cavité horizontale, l'équation (4.51) se réduit alors à un polynôme de quatrième ordre :

$$\Psi_0 [Le^4 \Psi_0^4 - 2ad_1 Le^2 \Psi_0^2 - a^2 d_2] = 0 \quad (4.54)$$

où  $a$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{315}{256} \simeq 1.2305 \\ d_1 &= Ra_T^0 Le(N + Le) - (Le^2 + 1) \\ d_2 &= 4Le^2 [Ra_T^0(1 + NLe) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

et

$$Ra_T^0 = \frac{Ra_T}{Ra^{sup}} \quad \text{avec} \quad Ra^{sup} = 720 \quad (4.56)$$

La solution de l'équation (4.54) est donnée explicitement par :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= 0 && (a) \\ \Psi_0 &= \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2} && (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

#### 4.1.4.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$ et $\Phi = 0^\circ$

Examinons maintenant le cas où la cavité présente de petit rapport de forme ( $A \ll 1$ ). Pour cette situation, le comportement de l'écoulement convectif est pratiquement semblable à celui du cas précédent. La solution des équations

différentielles (3.39) est de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \frac{\Psi_0}{(1 - \gamma_o)} [\cosh(\omega y) - \gamma_o \cos(\omega y)] \\ T = C_T x - \frac{C_T \Psi_0}{\omega(1 - \gamma_o)} [\sinh(\omega y) - \gamma_o \sin(\omega y)] \\ S = C_S x - \frac{C_S L e \Psi_0}{\omega(1 - \gamma_o)} [\sinh(\omega y) - \gamma_o \sin(\omega y)] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (4.58)$$

où  $\Psi_0$  est la valeur de  $\Psi$  au centre de l'enceinte,  $\omega$  est donnée par (4.25) et  $\gamma_o$  par (4.31). Comme il a été discuté dans le cas d'une cavité verticale élancée, il existe deux solutions: la solution de la conduction pure ( $\omega = 0; \Psi_0 = 0$ ) donnée par (4.32) et la solution convective correspondant à  $\omega \neq 0$  par (4.33).

Les gradients de température et de concentration sont déterminés à partir des équations (3.45) et (3.46) :

$$\left. \begin{array}{l} C_T = \frac{2a/A_x}{2a + \Psi_0^2} \\ C_S = \frac{2a/A_x}{2a + L e^2 \Psi_0^2} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (4.59)$$

où  $a$  est une constante définie par :

$$a = \frac{(1 - \gamma_o)^2}{1 + \gamma_o^2} \simeq 1.2611 \quad (4.60)$$

En combinant l'équation (4.59) et la définition de  $\omega$ , Éq. (4.25), nous obtenons :

$$L e^4 \Psi_0^4 - 2 a d_1 L e^2 \Psi_0^2 - a^2 d_2 = 0 \quad (4.61)$$

où  $a$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} a = 1.2611 \\ d_1 = R a_T^0 L e (N + L e) - (L e^2 + 1) \\ d_2 = 4 L e^2 [R a_T^0 (1 + N L e) - 1] \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

et

$$Ra_T^0 = \frac{Ra_T}{Ra_0^{sup}} \text{ avec } Ra_0^{sup} = A_x Ra^{sup} \text{ et } Ra^{sup} = \omega^4 = 500.5639 \quad (4.63)$$

la solution est donnée explicitement par :

$$\Psi_0 = \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2} \quad (4.64)$$

Les résultats (4.57) et (4.64) indiquent que, dans le cas d'une cavité horizontale, le problème admet cinq solutions différentes. La première solution correspond à l'état de repos du fluide ( $\Psi_0 = 0$ ). Les quatre autres sont des solutions convectives. Dans les équations (4.57) et (4.64), le signe ( $\pm$ ) à l'extérieur des crochets, indique que le sens de rotation de l'écoulement peut être horaire ou trigonométrique. De plus, le signe ( $\pm$ ) à l'intérieur des crochets implique qu'il existe deux solutions convectives possibles de différentes amplitudes. Nous avons trouvé numériquement que la solution avec le signe + était stable (pouvant être entretenue), alors que celle avec le signe - était instable. D'un point de vue mathématique, une solution convective existe seulement si les expressions dans les racines sont simultanément positives. Dans le cas contraire, la seule solution possible est celle correspondant à l'état de repos du fluide ( $\Psi_0 = 0$ ).

En étudiant le signe des expressions  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2}$  et  $d_1^2 + d_2$ , on constate qu'il existe deux types de bifurcations :

Le premier est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle ( $\Psi_0 = 0$ ). Le seuil de convection est donné par le nombre de Rayleigh supercritique,  $Ra_{TC}^{sup}$ , correspondant à  $d_2 = 0$  et  $d_1 < 0$  :

$$Ra_{TC}^{sup} = \frac{Ra_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{ou bien} \quad Ra_{TC}^{sup} = -Ra_S + Ra_0^{sup} \quad (4.65)$$

Dans le cas de la simple diffusion ( $N = 0$ ;  $Ra_S = 0$ ), le nombre de Rayleigh supercritique est donné par  $Ra_{TC}^{sup} = Ra_0^{sup}$ . Dans le cas d'une cavité élancée,  $Ra_0^{sup} = 720$ .

Cette valeur est en accord avec les résultats de Sparrow et al. 1964, Platten et Legros 1984, Hasnaoui 1991 et de Mamou 1993.

Le second est une bifurcation souscritique pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie ( $\Psi_0 \neq 0$ ). Le nombre de Rayleigh souscritique, qui marque le seuil de la convection, est déterminé pour les conditions  $d_1^2 + d_2 = 0$  et  $d_1 > 0$ . On obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} Ra_{TC}^{sous} &= \frac{(Le^2 - 1)}{Le(Le + N)^2} \left[ (Le - N) + 2\sqrt{-NLe} \right] Ra_0^{sup} \\ \text{ou bien} \\ Ra_{TC}^{sous} &= Le^{-2} \left[ (Le^2 - 1)Ra_0^{sup} - Ra_S + 2\sqrt{-(Le^2 - 1)Ra_0^{sup}Ra_S} \right] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (a) \\ (b) \end{aligned} \quad (4.66)$$

L'amplitude de la fonction de courant au point de bifurcation est donnée par :

$$\Psi_0 = \pm \frac{\sqrt{ad_1}}{Le} \quad (4.67)$$

Pour de grandes valeurs de Lewis ( $Le \gg 1$ ), le nombre de Rayleigh souscritique devient :

$$Ra_{TC}^{sous} = Ra_0^{sup} \quad (4.68)$$

Lorsque  $Le \gg 1$ , la chaleur diffuse plus rapidement que la concentration. Dans ce cas, l'écoulement convectif engendré est dominé entièrement par les effets thermiques. En effet, pour des valeurs élevées de  $Le$ , la concentration devient pratiquement uniforme au centre de la cavité et le transfert massique se fait dans une couche très mince au voisinage des parois. Cette dernière devient de plus en plus mince au fur et à mesure que  $Le \rightarrow \infty$ . Pour cette raison, le nombre de Rayleigh souscritique tend vers la valeur du nombre de Rayleigh supercritique correspondant au cas de la simple diffusion ( $N = 0$ ).

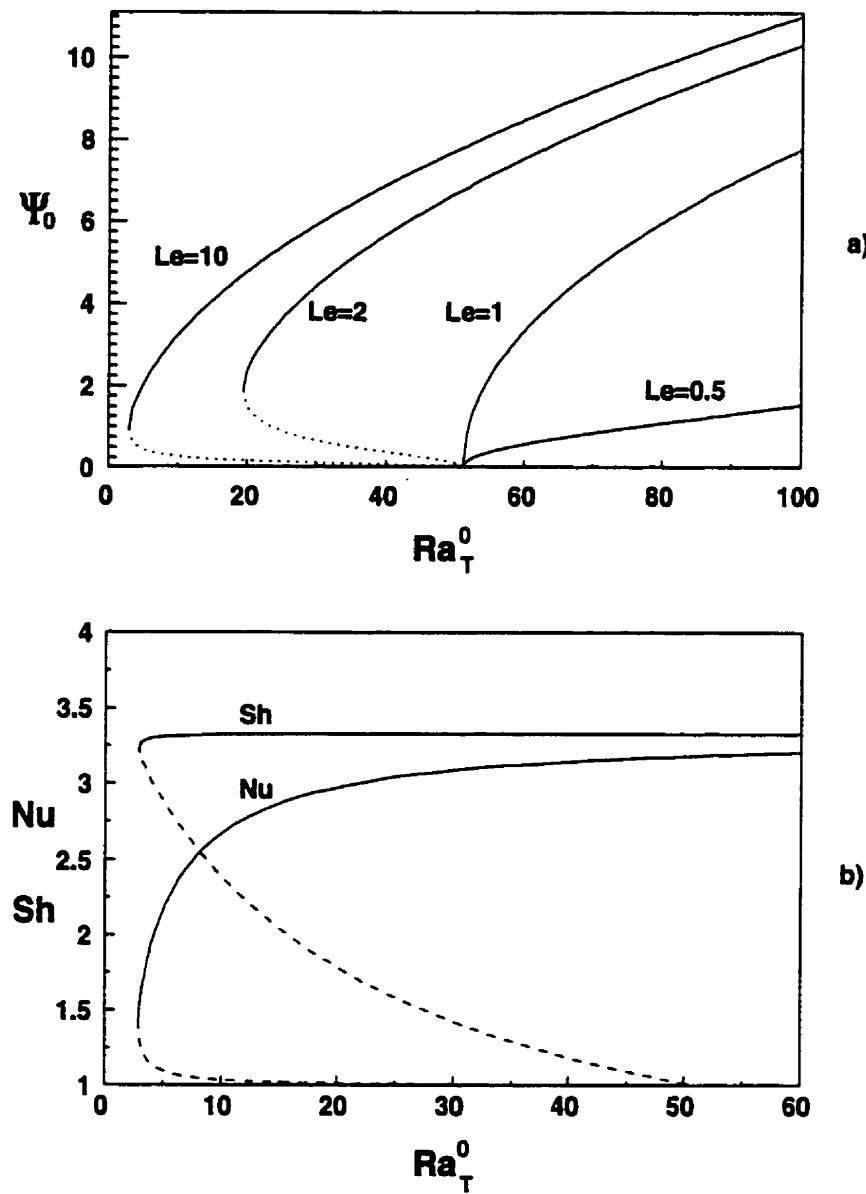
En général, la convection souscritique n'existe que lorsque les forces de volume thermique et solutale sont opposées ( $N < 0$  ou  $Ra_S < 0$ ). Un examen attentif des

solutions (4.57) et (4.64) montre que l'existence de la convection souscritique est liée non seulement à  $Ra_S$  mais aussi à  $Le$ . Ainsi, pour  $\Phi = 0^\circ$ , les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la convection souscritique sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} Ra_S < 0 \\ Le > \sqrt{\frac{Ra_S - Ra_0^{sup}}{Ra_S}} \end{array} \right\} \quad (4.69)$$

Notons que la valeur de Lewis donnée par  $Le_t = \sqrt{(Ra_S - Ra_0^{sup})/Ra_S}$  marque la transition de la bifurcation souscritique vers la bifurcation supercritique. C'est-à-dire que pour  $Le \leq Le_t$ , la convection est supercritique et que pour  $Le > Le_t$  elle est souscritique.

La figure 4.9 illustre les variations de  $\Psi_0$ , de  $Nu$  et de  $Sh$  en fonction de  $Ra_T^0$  pour  $Ra_S^0 = -50$  et différentes valeurs de  $Le$ . Pour cette situation, la valeur de  $Le_t$  est 1.01. Dans le cas de la bifurcation supercritique ( $Le \leq 1.01$ ), le seuil de la convection est exprimé par la relation (4.65). Sur la figure 4.9, pour  $Le = 0.5$ , nous constatons qu'à partir du seuil de convection, l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec le nombre de Rayleigh. Dans le cas de la convection souscritique ( $Le > 1.01$ ), le seuil de bifurcation est donné par la relation (4.66). Avant ce seuil ( $Ra_T < Ra_{TC}^{sous}$ ), le transfert de chaleur et de masse se fait par la conduction pure ( $\Psi_0 = 0$ ,  $Nu = 1$  et  $Sh = 1$ ). Au-delà de ce seuil ( $Ra_T \geq Ra_{TC}^{sous}$ ), deux solutions à amplitudes finies bifurquent de l'état de repos. Notons que la solution instable, représentée en pointillés, existe seulement pour  $Ra_{TC}^{sous} \leq Ra_T \leq Ra_{TC}^{sup}$ . L'amplitude de cet écoulement, qui est maximale au point de bifurcation à  $Ra_T = Ra_{TC}^{sous}$ , diminue avec l'augmentation de  $Ra_T$  et s'annule au-delà de  $Ra_T = Ra_{TC}^{sup}$ . L'amplitude de la solution stable,  $\Psi_0$  quant à elle, augmente continuellement avec  $Ra_T$ . D'autre part,  $Nu$  et  $Sh$  augmentent considérablement au début et convergent par la suite vers une valeur constante égale à 10/3. Dans le cas de la simple diffusion ( $N = 0$ ), Vasseur et al. 1989 ont observé que  $Nu$  devient indépendant de  $R_T$  lorsque ce dernier est



**Figure 4.9 :** Influence du nombre de Rayleigh sur : a) l'intensité de l'écoulement pour  $Ra_S^0 = -50$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 0.5, 2, 5$  et  $10$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ , b) les transferts de chaleur et de masse pour  $Ra_S^0 = -50$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

assez élevé et converge vers la constante 10/3.

Dans le cas où les forces de volume sont coopérantes ( $N > 0$  ou bien  $Ra_S > 0$ ), nous avons uniquement de la convection supercritique. Puisque les forces de volume agissent dans le même sens et qu'elles tendent toutes deux à déstabiliser le système, la convection est dite coopérante. Dans cette situation, d'après la relation (4.65), le nombre de Rayleigh supercritique caractérisant le seuil de la convection thermosolutal est bien inférieur à celui correspondant à la convection thermique lorsque  $Ra_S > 0$  (simple diffusion).

Les effets du rapport de force de volume (ou de  $Ra_S$ ) et du nombre de Lewis sur l'intensité de l'écoulement et les nombres de Nusselt et de Sherwood sont similaires à ceux obtenus en milieu poreux. Pour cette raison, ils ne sont pas présentés ici. Pour en savoir plus sur ces effets, le lecteur peut se référer à la section 4.2.9 de ce chapitre.

## 4.2 Solution analytique : milieu poreux

Dans cette section, nous présentons la solution analytique résultant de l'hypothèse de l'écoulement parallèle dans le cas d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire. Les équations régissant l'écoulement sont données par (3.41). Comme dans le cas du fluide, la forme de la solution dépend de la valeur du paramètre  $\bar{R} = R_T (C_T + NLeC_S) \sin \Phi$  et de son signe. Il existe également quatre formes possibles.

### 4.2.1 Solution pour $\bar{R} > 0$

Comme dans le cas d'un milieu fluide, cette situation peut avoir lieu lorsque le rapport des forces de volume est positif ( $N > 0$ ) ou négatif (de telle façon que

$|N| \ll 1$  ou  $|N| \gg 1$ ). La solution du système d'équations (3.41), satisfaisant les conditions aux frontières (2.22) et (2.51), est alors donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi} &= -B\Omega \cosh(\Omega x) + G & (a) \\ T &= C_T y + B C_T \sinh(\Omega x) + (1 - C_T G)x & (b) \\ S &= C_S y + B Le C_S \sinh(\Omega x) + (1 - Le C_S G)x & (c) \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \sqrt{R_T(C_T + NLeC_S) \sin \Phi}, & \Omega_0 &= \Omega/2 \\ B &= G[\Omega \cosh \Omega_o]^{-1} \\ G &= R_T[(C_T + NC_S) \cos \Phi + (1 + N) \sin \Phi]\Omega^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

Les gradients de température et de concentration,  $C_T$  et  $C_S$ , sont donnés implicitement par :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= B^2 C_T e + B (1 - C_T G) d & (a) \\ C_S &= B^2 L e^2 C_S e + B L e (1 - L e C_S G) d & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

$$\text{où } e = \Omega(\sinh \Omega - \Omega)/2.$$

Les valeurs de  $C_T$  et  $C_S$  peuvent être déterminées numériquement en utilisant, par exemple, la méthode de la sécante.

À partir des équations (2.52), on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} Nu = [1 - B C_T d]^{-1} \quad (a) \\ Sh = [1 - B Le C_S d]^{-1} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (4.73)$$

$$\text{où } d = \Omega \cosh \Omega_g - 2 \sinh \Omega_g.$$

### 4.2.2 Solution pour $\bar{R} < 0$

Dans le cas où les forces de volume sont opposées et de même ordre de grandeur ( $N \sim -1$ ), le paramètre  $\bar{R}$  peut prendre des valeurs négatives. Autrement dit, la valeur de  $\Omega$ , Éq. (4.71), devient un nombre imaginaire pur ( $\Omega = i\omega$  tel que  $i^2 = -1$ ). Du fait que  $\sinh(i\omega) = i \sin \omega$  et  $\cosh(i\omega) = \cos \omega$ , la solution analytique peut être déduite de la solution précédente en remplaçant simplement les fonctions hyperboliques par des fonctions trigonométriques et  $\Omega$  par  $i\omega$ . Cette solution n'est pas présentée ici pour éviter des répétitions, mais elle sera considérée dans le texte comme la solution imaginaire du problème.

Ce genre de solution est aussi possible pour des cavités ayant des faibles inclinaisons ( $\Phi \sim 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ).

### 4.2.3 Analyse des résultats : cavité verticale élancée

Dans cette partie, nous présentons des résultats numériques et analytiques pour le cas où la cavité est verticale ( $\Phi = 90^\circ$ ). La convection coopérante ( $N > 0$ ) et opposée ( $N < 0$ ) sera considérée. Le régime de couche limite et la transition du régime thermique dominant vers le régime solutal dominant seront étudiés.

#### 4.2.3.1 Régime de couche limite

Dans le cas où les valeurs du nombre de Rayleigh et du rapport des forces de volume sont suffisamment grandes ( $R_T \gg 1$ ,  $|N| \gg 1$ ), les profils de la vitesse, de la température et de la concentration peuvent être de type couche limite. Cette situation, dans laquelle  $\Omega \gg 1$ , a été discutée récemment par Alavyoon 1993. Pour plus de détails sur le régime de couche limite le lecteur peut consulter Alavyon 1993 et Mamou et al. 1995b.

Dans le régime de couche limite, les nombres de Nusselt et de Sherwood sont approximés par :

$$Nu = \frac{1 + \bar{\Psi}_0^2(1 - 3/\Omega)}{1 + \bar{\Psi}_0^2(1 - 4/\Omega)/\Omega}; \quad Sh = \frac{1 + Le^2\bar{\Psi}_0^2((1 - 3/\Omega)}{1 + Le^2\bar{\Psi}_0^2(1 - 4/\Omega)/\Omega} \quad (4.74)$$

où

$$\bar{\Psi}_0 = R_T(1 + N)/\Omega^2 \quad (4.75)$$

En combinant les expressions de  $C_T$  et  $C_S$  avec la définition de  $\Omega$  et après simplification, nous obtenons :

$$c_1 \bar{\Psi}_0^4 - \Omega(c_2 - c_3) \bar{\Psi}_0^2 + c_4 = 0 \quad (4.76)$$

où

$$c_1 = (\Omega - 3)(1 + N)Le^2, \quad c_2 = (\Omega - 3)(Le^2 + N), \quad c_3 = (1 + NLe^2), \quad c_4 = -(1 + N)\Omega^2$$

En général, la valeur de  $\Omega$  doit être calculée numériquement à partir de la relation (4.76). Pour éliminer toute procédure itérative et trouver une solution explicite, nous introduisons le paramètre  $\varepsilon_0 = \frac{4N(\Omega - 3)(Le^2 - 1)^2}{(c_2 + c_3)^2}$ . La solution de l'équation (4.76) montre que  $\varepsilon_0 \ll 1$  pour des gammes assez larges des valeurs de  $R_T$ ,  $N$  et  $Le$ . En supposant que  $\varepsilon_0 \ll 1$ , la solution approximative du polynôme (4.76) est alors donnée par :

$$\bar{\Psi}_0^2 = \eta_0 \Omega \quad \text{avec} \quad \eta_0 = \frac{1 + NLe^{-2}}{1 + N} \quad (4.77)$$

De l'équation (4.75) nous déduisons que :

$$\Omega \simeq R_T^{2/5}(1 + N)^{3/5}(1 + NLe^{-2})^{-1/5} \quad (4.78)$$

Pour une valeur de  $Le = 1$ , nous avons  $\Omega = [R_T(1 + N)]^{2/5}$ . En outre, lorsque le paramètre  $N$  prend de petites ou de grandes valeurs, l'expression de  $\Omega$  se réduit à  $\Omega \simeq R_T^2$  et à  $\Omega \simeq [NLeR_T]^{2/5}$  respectivement. Ces résultats sont en accord avec ceux de Trevisan et Bejan 1986.

### *Régime de force de volume d'origine thermique dominante*

Lorsque le paramètre  $N$  prend de petites valeurs ( $|N| \ll 1$ ), les effets thermiques dus au chauffage latéral l'emportent sur les effets solutaux. Pour cette situation,  $Nu$  et  $Sh$  ont pour expressions :

$$Nu = \Omega/2, \quad Sh \simeq \Omega + \sum_{i=0}^2 \left(\frac{4}{\Omega}\right)^i \quad \text{lorsque } Le \gg 1 \quad (4.79)$$

et

$$Nu = \Omega/2, \quad Sh \simeq 1 + Le^2\Omega(1 - 3/\Omega) \quad \text{lorsque } Le \ll 1 \quad (4.80)$$

où  $\Omega = R_T^{2/5}$ .

### *Régime de force de volume d'origine solutale dominante*

Lorsque la force de volume solutale est plus importante que la force de volume thermique ( $|N| \gg 1$ ), l'écoulement convectif est dominé par les effets solutaux. Dans ce cas, les expressions de  $Nu$  et de  $Sh$  deviennent :

$$Nu \simeq 1 + \eta_0[\Omega - 4], \quad Sh \simeq 1 + 4\eta_1(\eta_1 - 1) + \eta_1\Omega \quad \text{lorsque } Le \gg 1 \quad (4.81)$$

où  $\eta_1 = \eta_0 Le^2 / (\eta_0 Le^2 + 1)$  et

$$Nu \simeq 1 + \eta_2\Omega + 4\frac{\eta_2}{\Omega}, \quad Sh \simeq \eta_1\Omega \quad \text{lorsque } Le \ll 1 \quad (4.82)$$

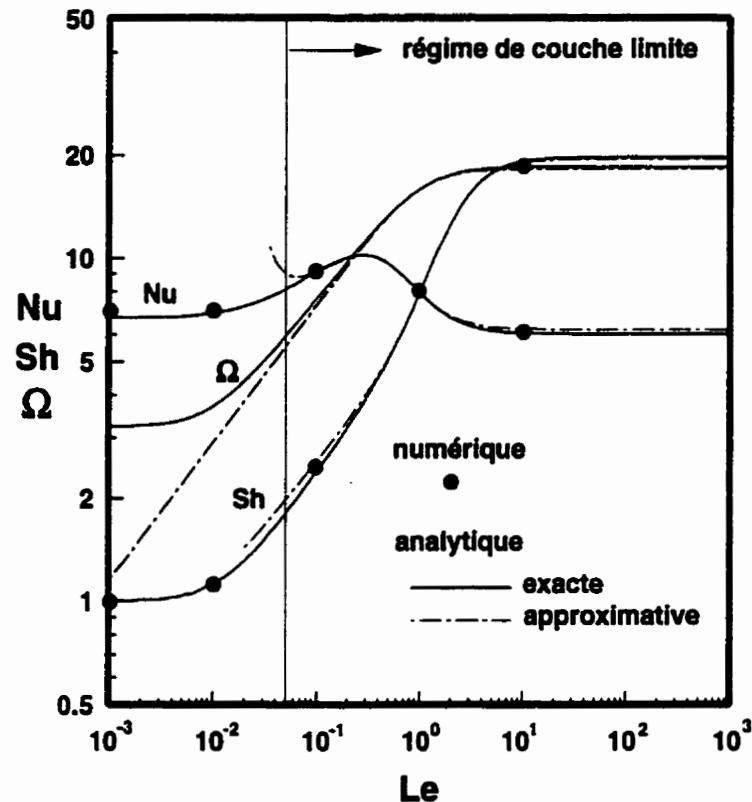
où  $\eta_2 = \eta_0 / (\eta_0 + 1)$ .

Les solutions approximatives décrites ci-dessus sont plus précises que celles rapportées par Alavyoon 1993, plus particulièrement lorsque le paramètre  $\Omega$  n'est pas trop grand. Par exemple, pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$  et  $N = 10^{-3}$ , l'équation (4.79) donne un nombre de Sherwood  $Sh = 8.35$  qui est en parfait accord avec la valeur prédite par la solution exacte,  $Sh = 8.37$ . D'un autre côté, le nombre de Sherwood prédit par Alavyoon 1993 est  $Sh = 6.31$  (environ 25 % d'erreur). En outre, il convient de mentionner que la présente solution approximative couvre des gammes assez larges des valeurs des paramètres  $Le$  et  $N$ , ce dernier pouvant même

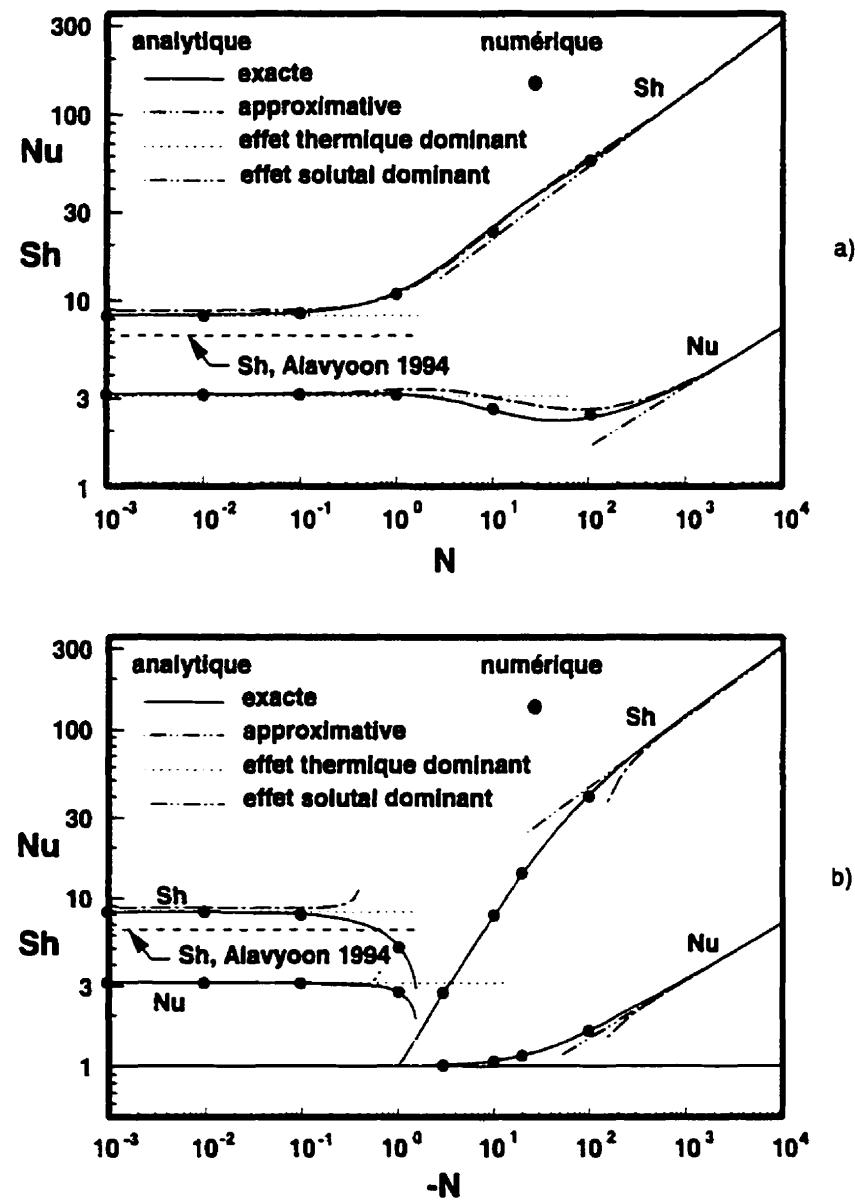
être voisin de l'unité. Les études disponibles dans la littérature traitent seulement des développements asymptotiques pour les cas extrêmes correspondant au régime de force de volume d'origine thermique dominante ( $|N| \ll 1$ ) ou au régime de force de volume d'origine solutale dominante ( $|N| \gg 1$ ).

La figure 4.10 montre l'effet du nombre de Lewis sur le transfert de chaleur et de masse pour  $R_T = 500$ ,  $N = 1$  et  $\Phi = 90^\circ$ . La solution analytique (traits pleins) est en bon accord avec la solution numérique des équations de bases. En général, on observe que, lorsque  $Le$  est suffisamment faible,  $Sh$  devient égal à l'unité. Cependant, lorsque  $Le$  s'accroît,  $Sh$  augmente considérablement au début et tend par la suite vers une valeur constante.  $Nu$ , quant à lui, augmente légèrement en passant par un maximum pour ensuite décroître vers une valeur constante. Dans le régime de couche limite ( $Le \geq 0.05$ ), la solution approximative (traits discontinus) s'accorde bien avec la solution exacte. D'après la solution analytique, Éq. (4.78), pour une valeur donnée de  $R_T$ , le paramètre  $\Omega$  dépend fortement de la valeur du groupement  $NLe^{-2}$ . Lorsque la valeur de  $NLe^{-2}$  est grande (par exemple  $Le = 0.1$  et  $N = 1$ ),  $\Omega \simeq [(N + 1)^3 N^{-1} Le^2 R_T^2]^{1/5}$  et  $Sh = 2 + \Omega/2$ . Cependant, lorsque la valeur  $NLe^{-2}$  est très petite (par exemple  $Le = 10$  et  $N = 1$ ),  $\Omega \simeq [(N + 1)^3 R_T^2]^{1/5}$  et  $Sh = 1 + \Omega$ . Dans ce dernier cas,  $Nu$  et  $Sh$  sont alors indépendants de  $Le$ .

Les effets de  $N$  sur le transfert de chaleur et de masse sont présentés sur la figure 4.11 pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Les cas de la convection coopérante ( $N > 0$ ) et de la convection opposée ( $N < 0$ ) sont considérés dans la figure 4.11a et b respectivement. Comme on peut le constater, lorsque les forces de volume coopèrent ( $N > 0$ ), la solution approximative (traits discontinus) est en bon accord avec la solution exacte (traits pleins) et la solution numérique et ceci pour toutes les valeurs de  $N$ . Cependant, dans le cas contraire ( $N < 0$ ), la solution approximative est une bonne approximation seulement pour  $0 \leq N \leq 10^{-1}$  et  $N \geq 500$ .



**Figure 4.10 :** Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 500$ ,  $N = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .



**Figure 4.11 :** Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

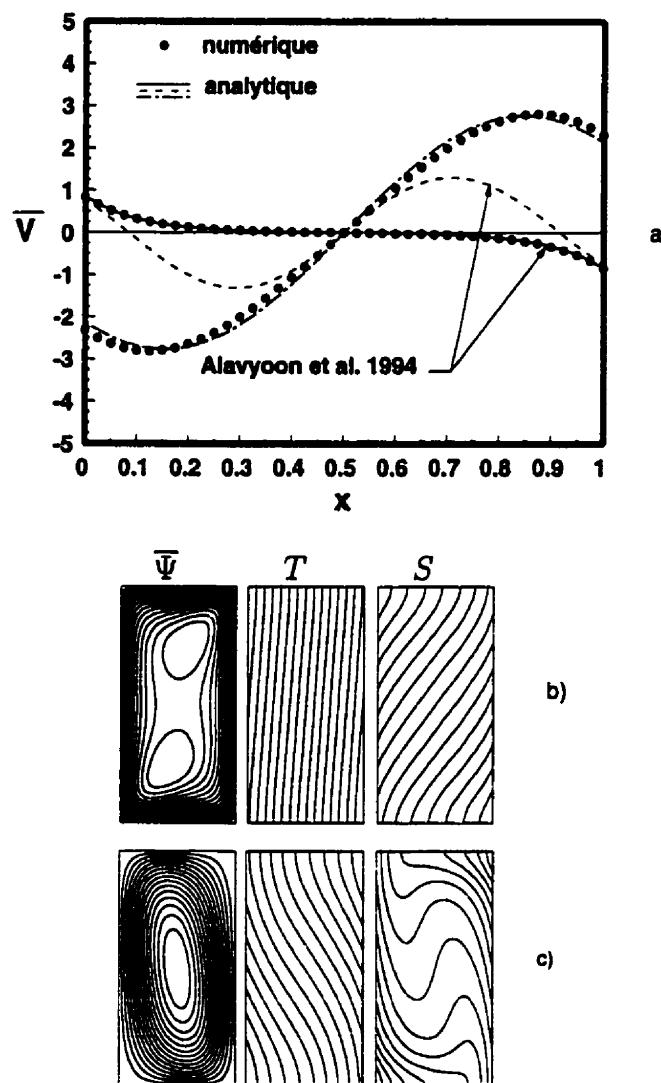
Comme il a été discuté auparavant, le phénomène de la convection thermosoliale peut être divisé en trois régimes : dans le premier, la convection est dominée par les effets thermiques, dans le second par les effets solutaux, alors que dans le troisième, les deux effets sont comparables. Sur la figure 4.11a et b, nous observons que le premier régime est atteint lorsque  $|N| \leq 10^{-1}$ .  $Nu$  et  $Sh$  sont alors indépendants de  $N$ . Le second régime apparaît pour  $|N| \geq 500$ . Les résultats d'Alavyoon 1993 sont présentés sur la figure en termes du nombre de Sherwood. Comme nous pouvons le constater, ses prédictions sous-estiment nos résultats tant numériques qu'analytiques.

### *Régime intermédiaire*

L'évolution de  $Nu$  et  $Sh$  entre le régime thermique dominant et le régime solutal dominant dépend étroitement du signe de  $N$ . La figure 4.11a indique que, pour la convection coopérante ( $N > 0$ ),  $Sh$  augmente d'une façon monotone avec  $N$ . Cependant  $Nu$ , quant à lui, demeure presque constant au début et diminue légèrement par la suite vers un minimum, à partir duquel il augmente continuellement avec  $N$ . D'un autre côté, dans le cas de la convection opposée, l'évolution de  $Nu$  et  $Sh$  est complètement différente du cas précédent et plus particulièrement au voisinage de  $N = -1$ . Dans cette région, les forces de volume thermique et solutale sont comparables et opposées. Leur résultante est donc pratiquement nulle. La transition du régime thermique dominant vers le régime solutal dominant se produit quelque part au voisinage de  $N = -1$ . D'après les résultats numériques et analytiques, la coexistence des deux régimes est possible. En fait, on a trouvé que, dans cette région, il pouvait exister une multiplicité de solutions. La solution finale du problème dépend en fait des conditions initiales, c'est-à-dire de la façon d'amorcer l'écoulement convectif.

Récemment, l'existence de solutions analytiques multiples a été discutée par Alavyoon et al. 1994. Ceux-ci ont démontré que, pour  $R_T = 12$ ,  $Le = 10$  et

$N = -5/3$ , il existe deux solutions possibles, l'une correspondant à la solution réelle (solution- $\Omega$ ), et l'autre à la solution imaginaire (solution- $\omega$ ). La première solution, dont l'écoulement monocellulaire circule dans le sens horaire, est dominée par les effets solutaux. Pour la deuxième solution, la structure de l'écoulement est plus complexe. Elle est constituée d'une grande cellule de convection d'origine thermique située entre deux cellules de convection d'origine solutale. Numériquement, Alavyoon et al. 1994 ont confirmé uniquement l'existence de la première solution. Cette situation a été reconsidérée dans la présente étude et nous avons trouvé en fait l'existence de trois solutions analytiques possibles au lieu de deux. Sur la figure 4.12a, ces trois solutions sont illustrées en termes de profils de la vitesse à la mi-hauteur de la cavité. En plus des deux solutions analytiques trouvées par Alavyoon et al. 1994, il existe une troisième solution (imaginaire) correspondant à une structure d'écoulement monocellulaire. Comme les effets thermiques sont prédominants, la circulation de cet écoulement est dans le sens trigonométrique. Sur la figure, nous remarquons que les résultats de la solution numérique, obtenus avec un rapport de forme  $A = 2$ , s'accordent bien avec ceux de la solution analytique correspondant à des structures d'écoulements monocellulaires. Cependant, indépendamment des conditions initiales, il a été impossible de simuler numériquement la solution correspondant à une structure d'écoulement multicellulaire. Les champs d'écoulement, d'isothermes et d'isoconcentrations des deux solutions entretenues numériquement sont illustrés sur la figure 4.12b et c. Comme on peut le constater, les deux solutions obtenues pour les mêmes paramètres de contrôle, mais avec des conditions initiales différentes, présentent des structures d'écoulement différentes l'une de l'autre et un sens de rotation opposé. Les lignes de courant de la solution dominée par les effets solutaux (figure 4.12b) sont concentrées au voisinage des parois. Malgré cela, l'intensité de l'écoulement est relativement faible et le transfert de chaleur et de masse se fait pratiquement par conduction. Cependant, pour la solution dominée par les effets thermiques (figure 4.12c), l'écoulement convectif



**Figure 4.12 :** Solutions multiples pour  $R_T = 12$ ,  $N = -5/3$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a) profil de la vitesse,  $\bar{v}$ , dans le plan médian horizontal, b) lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $\bar{R} > 0$  :  $A = 2$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.097$ ,  $Nu = 1.004$  et  $Sh = 1.473$ , c) lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $\bar{R} < 0$  :  $A = 2$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0.981$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.001$ ,  $Nu = 1.263$  et  $Sh = 4.755$ .

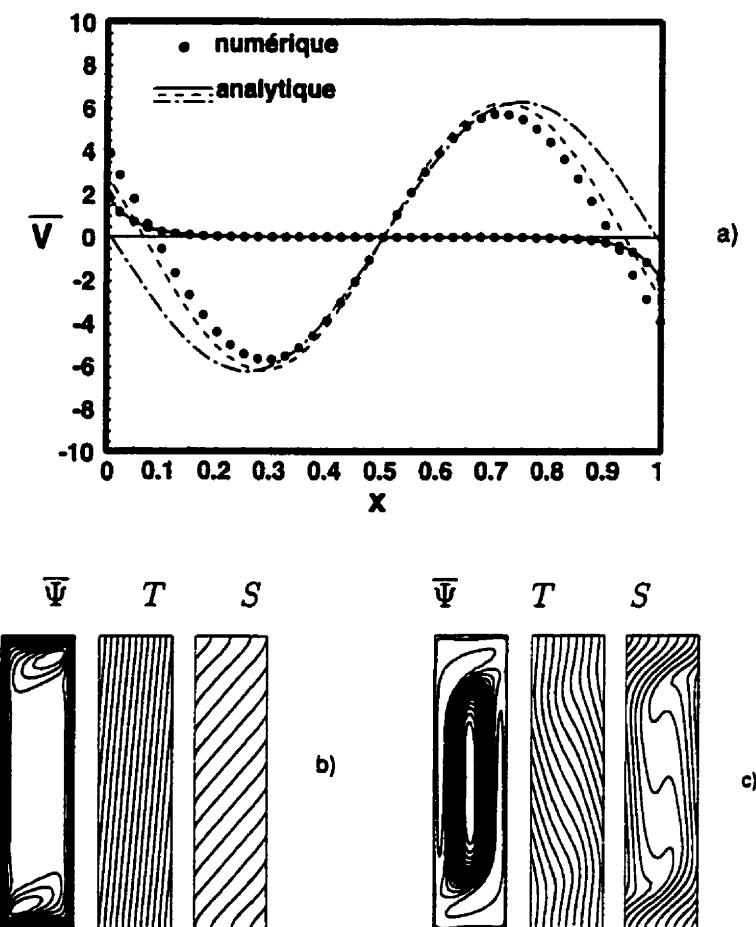
occupe l'ensemble de la cavité et on constate que le transfert de chaleur et de masse est relativement plus important.

La figure 4.13a montre des résultats similaires obtenus pour  $R_T = 50$ ,  $Le = 10$ ,  $N = -1.8$ . Les résultats numériques obtenus avec  $A = 4$  et différentes conditions initiales sont présentés sur la figure 4.13a, b et c. Contrairement au cas précédent, on observe que la solution dont la structure de l'écoulement est multicellulaire peut être entretenue, alors que celle dominée par les effets thermiques est instable. En traçant les profils de vitesse à mi-hauteur de la cavité, nous constatons que les solutions numériques sont en bon accord avec les solutions analytiques de l'écoulement parallèle.

À partir de la solution analytique, on peut montrer qu'au fur et à mesure que  $R_T$  augmente, avec  $Le$  et  $N$  fixes, le nombre de solutions possibles augmente. Par exemple, pour  $R_T = 50$ ,  $Le = 10$  et  $N = -1.8$ , nous avons trouvé l'existence de trois solutions possibles. Par ailleurs, quand la valeur de  $R_T$  passe de 50 à 100, le nombre de solutions passe de trois à sept. La première correspond à la solution réelle et les six autres à des solutions imaginaires. La solution réelle donne un écoulement monocellulaire dominé par les effets solutaux et les six solutions imaginaires consistent en des écoulements multicellulaires dans lesquels les effets thermiques et solutaux interagissent. Naturellement, en l'absence d'une étude de la stabilité des solutions imaginaires, leur existence reste à démontrer.

#### 4.2.4 Analyse des résultats : cavité verticale carrée

Dans une cavité carrée, dans le cas de la convection opposée, nous avons démontré numériquement l'existence de solutions multiples. Le domaine d'existence de ces solutions dépend énormément des paramètres de contrôle  $R_T$ ,  $N$  et  $Le$ . Dans ce qui suit, nous allons présenter des résultats numériques obtenus pour  $A = 1$ ,



**Figure 4.13 :** Solutions multiples pour  $R_T = 50$ ,  $N = -1.8$ ,  $Le = 10$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a) profil de la vitesse,  $\bar{v}$ , dans le plan médian horizontal, b) lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $\bar{R} > 0$  :  $A = 4$ ,  $\bar{\Psi}_{max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = -0.116$ ,  $Nu = 1.007$  et  $Sh = 1.682$ , c) lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $\bar{R} < 0$  :  $A = 4$ ,  $\bar{\Psi}_{max} = 1.339$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = -0.222$ ,  $Nu = 1.671$  et  $Sh = 1.770$ .

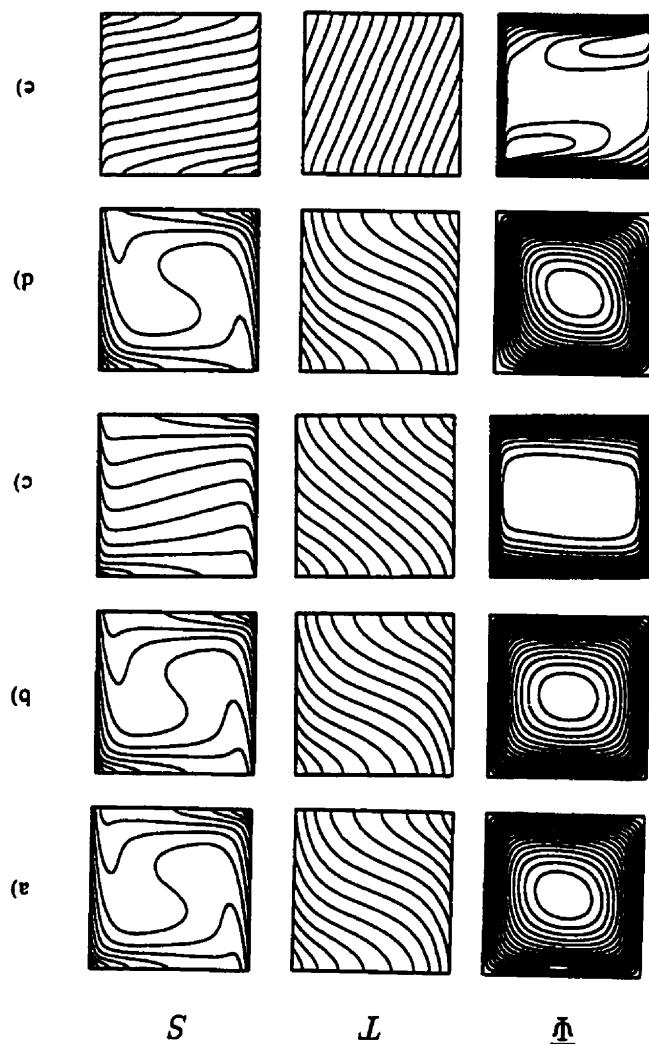
$\varepsilon = 1$  et différentes valeurs de  $R_T$ ,  $N$  et  $Le$ . Plus particulièrement, la transition du régime de force de volume d'origine solutale dominante vers le régime de force de volume d'origine thermique dominante sera étudiée.

Les effets du rapport des forces de volume sont illustrés sur la figure 4.14 pour  $R_T = 100$  et  $Le = 10$ . Lorsque  $N = 0$ , l'écoulement convectif résultant circule dans le sens trigonométrique, car il est entraîné uniquement par la force de volume thermique. Les champs d'écoulement et d'isothermes résultant, figure 4.14a, ont été discutés en détails dans le passé par Trevisan and Bejan 1986.

La figure 4.14b montre que les résultats ( $\Psi_{max}$ ,  $Nu$  et  $Sh$ ) pour  $N = 1$  sont pratiquement similaires à ceux obtenus avec  $N = 0$  et une légère amélioration du transfert de chaleur et de masse a été observée. On aurait pu s'attendre à ce que les forces thermique et solutale coopèrent afin d'intensifier le transfert de chaleur et de masse. Ceci n'est pas le cas dû au fait qu'il y a un transfert inverse de la masse dans la région centrale de la cavité, tel qu'illustré sur la figure 4.14b. Ce dernier, qui s'oppose au flux de masse imposé, provoque un gradient de masse horizontal négatif qui affaiblit la force de volume. Nous constatons aussi que, lorsque  $N$  augmente de 1 à 20,  $Sh$  augmente considérablement, alors que  $Nu$  demeure presque constant. La formation de couches limites hydrodynamique et solutale est observée sur les parois verticales de la cavité (voir figure 4.14c). Pour plus de détails sur ces résultats voir les sections 4.1.1.1 et 4.2.3.1. Pour le cas où les forces de volume sont opposées, des résultats sont présentés sur la figure 4.14d et e pour  $N = -1$  et  $-20$  respectivement. En passant de  $N = 0$  à  $N = -1$ , les forces de volume deviennent égales et opposées et on s'attend à une diminution considérable de l'intensité de l'écoulement et des taux des transferts de chaleur et de masse. Au contraire, la structure de l'écoulement demeure presque la même, alors que les transferts de chaleur et de masse subissent une légère diminution. Cela est dû au fait qu'il y a un transfert inverse de la masse dans la région centrale de la cavité. Sur la figure 4.14e, nous observons des

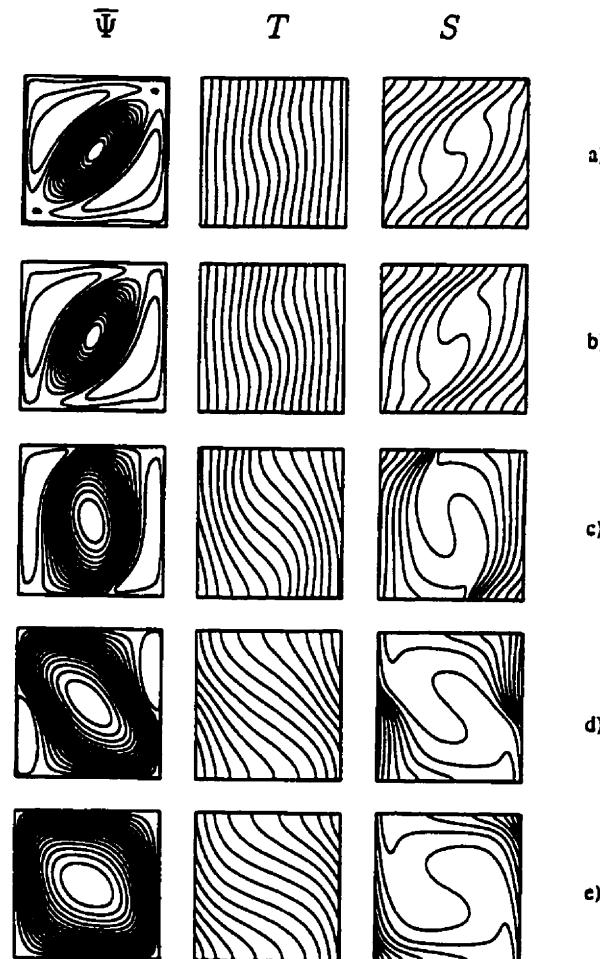
$Nu = 1.153$  et  $Sh = 13.022$ ,  
 $Nu = 2.231$  et  $Sh = 9.686$ , e)  $N = -20$ ,  $\Psi_{max} = 0$ ,  $\Psi_{min} = -0.497$ ,  
 $Nu = 2.089$  et  $Sh = 29.148$ , d)  $N = -1$ ,  $\Psi_{max} = 2.259$ ,  $\Psi_{min} = 0$ ,  
 $Nu = 2.327$  et  $Sh = 13.093$ , c)  $N = 20$ ,  $\Psi_{max} = 1.329$ ,  $\Psi_{min} = 0$ ,  
 $\Psi_{min} = 0$ ,  $Nu = 2.301$  et  $Sh = 11.583$ , b)  $N = 1$ ,  $\Psi_{max} = 2.103$ ,  $\Psi_{min} = 0$ ,  
 $Rr = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $k = 1$ : a)  $N = 0$ ,  $\Psi_{max} = 2.186$ ,

Figure 4.14 : Lignes de courant, isothermes et isocencentrations pour



résultats typiques obtenus pour  $N = -20$ . Pour cette situation, les effets solutaux sont dominants et l'écoulement circule dans le sens horaire. L'apparition de deux recirculations secondaires à l'intérieur de l'écoulement principal est constatée. Nous avons alors un écoulement circulant dans le sens trigonométrique pour  $N = -1$  et dans le sens horaire pour  $N = -20$ . La transition du régime convectif thermique au régime convectif solutal se produit donc entre ces deux valeurs.

Pour étudier la transition entre le régime thermique dominant et le régime solutal dominant nous fixons  $R_T = 100$  et  $Le = 10$  et faisons varier  $N$  entre  $-1$  et  $-20$ . Les résultats numériques montrent que la transition entre les deux régimes se produit dans une gamme de valeur de  $N$  très étroite ( $-2 \leq N \leq -1.35$ ). En prenant le cas du régime solutal dominant obtenu avec  $N = -20$  comme conditions initiales, les résultats numériques obtenus pour  $N = -2$  (voir figure 4.15a) montrent que la structure de l'écoulement est complexe. Les effets thermiques engendrent une cellule de convection dans la région centrale de la cavité tournant dans le sens trigonométrique. Les effets solutaux, quant à eux, donnent naissance à deux cellules de convection tournant dans le sens horaire. Ces dernières sont situées au voisinage du coin inférieur droit et du coin supérieur gauche de la cavité. En augmentant  $N$  de  $-2$  à  $-1.85$ , on constate que trois solutions différentes sont possibles selon les conditions initiales utilisées pour amorcer les calculs numériques. La première solution, illustrée sur la figure 4.15b, a été obtenue en prenant comme conditions initiales les résultats de la figure 4.15a. Cette solution est pratiquement similaire à celle du cas précédent ( $N = -2$ ). La deuxième solution (figure 4.15c) a été obtenue en prenant comme conditions initiales les résultats de  $N = -1.8$  (non présentés ici). Sur cette figure, nous constatons que les effets thermiques deviennent plus importants, donnant ainsi naissance à une cellule occupant une grande partie de la cavité. D'un autre côté, les effets solutaux engendrent deux petites cellules verticales de faibles intensités situées au voisinage des parois verticales. La troisième solution, obtenue avec  $\Psi(x, y, 0) = T(x, y, 0) = S(x, y, 0) = 0$  comme conditions initiales,

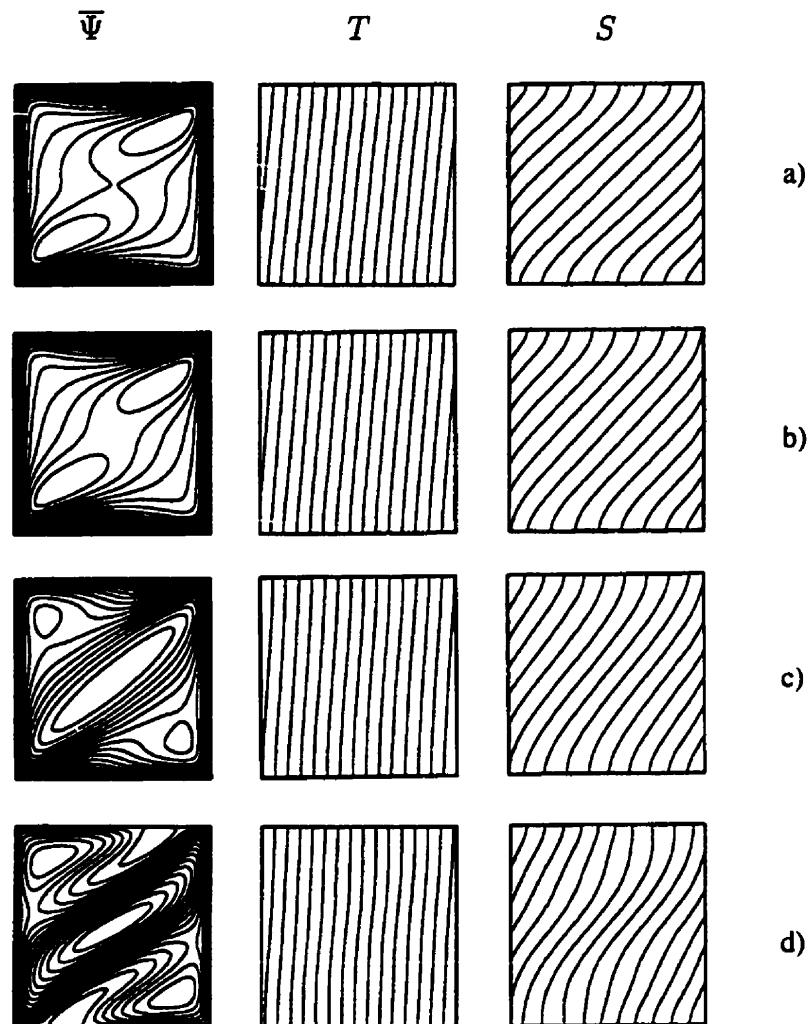


**Figure 4.15 :** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a)  $N = -2$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0.737$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.216$ ,  $\bar{Nu} = 1.020$  et  $\bar{Sh} = 1.839$ , b)  $N = -1.85$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 1.042$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.221$ ,  $\bar{Nu} = 1.035$  et  $\bar{Sh} = 1.729$ , c)  $N = -1.85$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 1.931$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.221$ ,  $\bar{Nu} = 1.252$  et  $\bar{Sh} = 2.161$ , d)  $N = -1.85$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 2.250$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.174$ ,  $\bar{Nu} = 1.683$  et  $\bar{Sh} = 3.952$ , e)  $N = -1.5$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 2.291$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.002$ ,  $\bar{Nu} = 2.155$  et  $\bar{Sh} = 8.266$ .

est montrée sur la figure 4.15d. Dans ce dernier cas, les effets thermiques dominent pratiquement toute la cavité et les effets solutaux sont très faibles. Il est à remarquer que cette solution nécessite énormément de temps pour atteindre le régime permanent ( $t_{max} \simeq 45$ ). En augmentant le paramètre  $N$  à  $-1.5$ , les effets solutaux disparaissent complètement, comme le montre la figure 4.15e, et le renversement complet de l'écoulement est alors obtenu.

Nous allons maintenant démontrer que l'évolution de la transition décrite ci-dessus n'est pas unique. La figure 4.16a montre des résultats pour  $N = -2$  obtenus en faisant varier progressivement le paramètre  $N$  de  $-20$  à  $-2$ . Comme on peut le voir sur la figure, les effets solutaux demeurent toujours dominants et l'écoulement convectif résultant consiste en une seule cellule de convection tournant dans le sens horaire. L'écoulement principal est concentré en une fine couche au voisinage des parois, et on remarque que deux petites cellules de convection tournant dans le sens de l'écoulement principal sont présentées dans les deux coins de la cavité. En augmentant  $N$  à  $-1.85$ , la figure 4.16b montre que la structure de l'écoulement demeure approximativement la même et que  $Nu$  et  $Sh$  diminuent faiblement. Quand  $N$  prend la valeur de  $-1.5$ , (figure 4.16c), les deux petites cellules secondaires disparaissent et une grande cellule de convection prend place. Nous observons également l'apparition de deux petites recirculations dans les deux autres coins de la cavité. Ces dernières deviennent plus importantes quand  $N$  atteint  $-1.35$  (voir figure 4.16d). Les résultats numériques (non présentés ici) montrent qu'en augmentant  $N$  de  $-1.35$  à  $-1.34$ , les effets thermiques l'emportent sur les effets solutaux et l'écoulement se renverse complètement pour donner naissance à une structure monocellulaire circulant dans le sens trigonométrique. Pour ce type d'évolution, la transition entre les deux types d'écoulements est brusque.

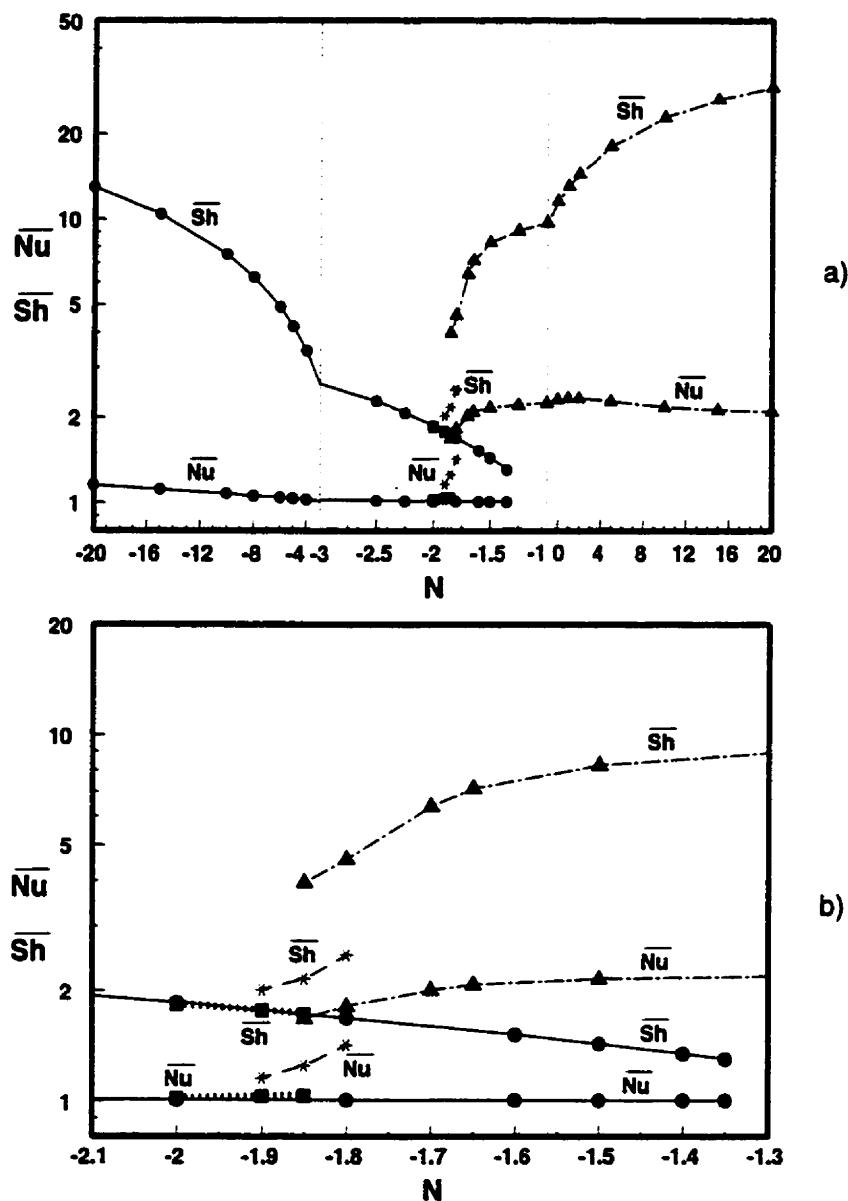
Les effets de  $N$  sur  $Nu$  et  $Sh$  sont présentés sur la figure 4.17 pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Dans le cas de la convection opposée, les résultats indiquent



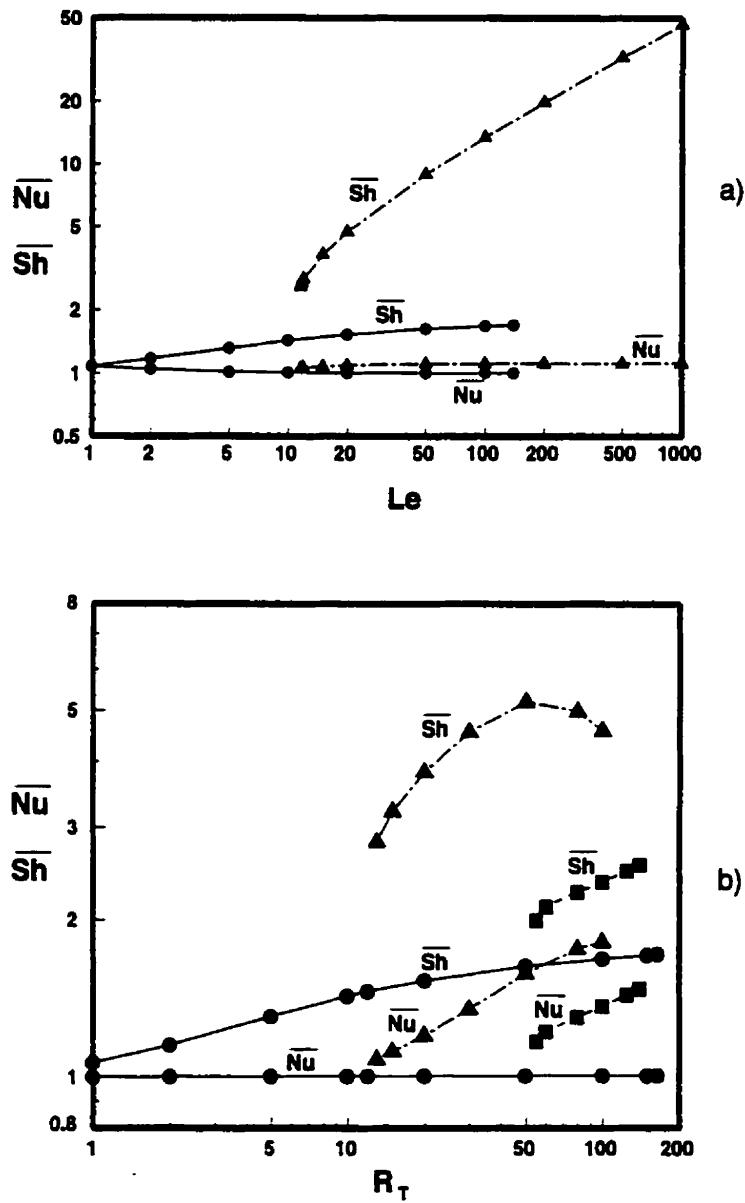
**Figure 4.16 :** Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a)  $N = -2$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.131$ ,  $\bar{Nu} = 1.009$  et  $\bar{Sh} = 1.854$ , b)  $N = -1.85$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.123$ ,  $\bar{Nu} = 1.008$  et  $\bar{Sh} = 1.726$ , c)  $N = -1.5$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.109$ ,  $\bar{Nu} = 1.005$  et  $\bar{Sh} = 1.432$ , d)  $N = -1.35$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0.010$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} = -0.132$ ,  $\bar{Nu} = 1.003$  et  $\bar{Sh} = 1.303$ .

que, pour  $N = -20$ ,  $Sh$  est relativement plus élevé que  $Nu$  à cause de la grande valeur de  $Le$ . En augmentant le paramètre  $N$  jusqu'à  $-1.35$ , l'écoulement reste entièrement dominé par les effets solutaux. On observe que  $Sh$  décroît considérablement, alors que  $Nu$  diminue légèrement vers l'unité. Dans le cas de la convection coopérante, on peut voir que  $Sh$  augmente d'une façon monotone lorsque  $N$  passe de  $0$  à  $20$ , alors que  $Nu$  demeure pratiquement inchangé. En général, les résultats indiquent que  $Nu$  et  $Sh$  sont beaucoup plus importants dans le cas de la convection coopérante que dans le cas de la convection opposée. L'existence de solutions multiples est clairement illustrée sur le graphique. Ainsi, pour  $N \in [-20, -2[U] - 1.35, 20]$ , la solution du problème est unique. Cependant, pour  $N \in [-2, -1.35]$ , deux à quatre solutions sont possibles. La première solution, correspondant au régime solutal dominant (dont la structure de l'écoulement est similaire à celle indiquée sur la figure 4.16a-d), existe pour  $N \leq -1.35$ . La deuxième, ressemblant à celle montrée sur la figure 4.15d, existe pour  $N \geq -1.85$ . La troisième, du même type que celle illustrée par la figure 4.15a, est entretenue pour  $-2 \leq N \leq -1.85$ . La quatrième, qui existe lorsque  $-1.9 \leq N \leq -1.8$ , est similaire à celle représentée sur la figure 4.15c. Ces quatre solutions sont respectivement identifiées, sur la figure 4.17, par des symboles : des cercles, des triangles, des carrés et des étoiles.

L'effet de  $Le$  sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens, dans le cas de la convection opposée ( $N = -1.8$ ) est illustré par la figure 4.18a pour  $R_T = 10$ . Les courbes montrent que, pour  $Le < 11.6$ , les effets solutaux contrôlent entièrement l'écoulement convectif et il n'existe alors qu'une seule solution permanente. Au-delà de  $11.6$ , cette solution peut être entretenue jusqu'à  $Le = 145$ , la valeur au-dessus de laquelle se produit le renversement de l'écoulement qui est alors induit par les effets thermiques. La figure 4.18a montre que pour  $11.6 \leq Le \leq 145$ , il existe deux solutions possibles, l'une dominée par les forces de poussée d'origine solutale, l'autre par les forces thermiques. La deuxième solution, comme le montre la figure 4.18a,



**Figure 4.17 : Influence du rapport des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .**



**Figure 4.18 :** Transferts de chaleur et de masse pour  $N = -1.8$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a) effet du nombre de Lewis pour  $R_T = 10$ , b) effet du nombre de Rayleigh pour  $Le = 10$ .

peut être entretenue au-dessus de  $Le = 11.6$ .

La figure 4.18b illustre l'influence de  $R_T$  sur l'existence de la multiplicité de solutions et sur l'évolution de la transition entre les deux régimes. Les résultats sont obtenus pour  $Le = 10$  et  $N = -1.8$ . Lorsque  $R_T < 12$ , l'écoulement résultant (semblable à celui de la figure 4.14a) est contrôlé uniquement par les effets solutaux. Il est possible d'entretenir ce type d'écoulement jusqu'à  $R_T = 165$ , mais au-delà de cette valeur, l'écoulement devient oscillant et des instabilités convectives s'installent. De plus, pour  $12 \leq R_T \leq 100$ , une solution similaire à celle de la figure 4.15d est possible. Dans la zone d'existence de cette solution,  $Nu$  augmente avec  $R_T$ , alors que  $Sh$  augmente jusqu'à  $R_T = 50$  et diminue par la suite. Également, pour  $R_T \geq 55$ , une autre solution semblable à celle indiquée sur la figure 4.15c est possible. Au-delà de la valeur 140, ce type d'écoulement devient oscillant.

#### 4.2.5 Solution pour $\bar{R} < 0$ : $N = -1$ et $\Phi = 90^0$

La solution du problème pour le cas où les forces de volume sont égales et opposées est maintenant discutée.

##### 4.2.5.1 Cavité élancée : $A \gg 1$

Pour cette situation, la solution est de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0 \cos(\omega x) \\ T = C_T y - \frac{\bar{\Psi}_0}{\omega} C_T \sin(\omega x) + x \\ S = C_S y - \frac{\bar{\Psi}_0}{\omega} Le C_S \sin(\omega x) + x \end{array} \right\} \quad (4.83)$$

où  $\bar{\Psi}_0$  est la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité, et le paramètre  $\omega$  est défini par :

$$\omega = \sqrt{R_T(LeC_S - C_T)} \quad (4.84)$$

À partir des conditions aux frontières de  $\bar{\Psi}$ , Éq. (2.51), nous obtenons :

$$\bar{\Psi}_0 \cos(\omega/2) = 0 \quad (4.85)$$

D'après l'équation ci-dessus, il existe deux solutions possibles. La première est une solution correspondant à l'état de conduction pure, elle est donnée par ( $\bar{\Psi}_0 = 0$ ) :

$$\omega = 0 \quad (4.86)$$

et la deuxième est une solution convective ( $\bar{\Psi}_0 \neq 0$ ) dont la valeur de  $\omega$  est :

$$\omega = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.87)$$

où  $n$  est un entier positif correspondant aux modes de convection. Pour  $n = 0$ , l'écoulement est unicellulaire. Des résultats numériques, rapportés par Alavyoon et al. 1994, ont montré que, lorsque  $N \rightarrow -1$ , la valeur de  $\omega \rightarrow \pi$ , ce qui est en accord avec la présente solution lorsque  $n = 0$ .

À partir des profils de  $\bar{\Psi}$ ,  $T$  et  $S$ , Éq. (4.83), les constantes  $C_T$  et  $C_S$  peuvent être déterminées en utilisant les relations (3.36) et (3.37). Ainsi, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} C_T &= 2 \sin \omega_o \frac{\bar{\Psi}_0}{\omega(a\bar{\Psi}_0^2 + 1)} & (a) \\ C_S &= 2 \sin \omega_o \frac{Le \bar{\Psi}_0}{\omega(aLe^2\bar{\Psi}_0^2 + 1)} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

où  $\omega_o = \omega/2$  et  $a = 1/2$ .

Les taux de transfert de chaleur et de masse peuvent être déterminés à partir

des équations (4.83) et (2.52) :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{\omega^2 \bar{\Psi}_0^2 + 2\omega^2}{(\omega^2 - 8)\bar{\Psi}_0^2 + 2\omega^2} & (a) \\ Sh &= \frac{\omega^2 Le^2 \bar{\Psi}_0^2 + 2\omega^2}{(\omega^2 - 8)Le^2 \bar{\Psi}_0^2 + 2\omega^2} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.89)$$

En combinant les expressions de  $C_T$  et  $C_S$ , Éq. (4.88), et la définition de  $\omega$ , Éq. (4.84), on obtient :

$$a^2 Le^2 \bar{\Psi}_0^4 + a(Le^2 + 1)\bar{\Psi}_0^2 - 2\sqrt{a} R_T^0 (Le^2 - 1)\bar{\Psi}_0 + 1 = 0 \quad (4.90)$$

où

$$R_T^0 = \frac{R_T}{R^{sous}} \quad \text{avec} \quad R^{sous} = \frac{w^3}{2\sqrt{a} \sin \omega_0} = 21.9246 \quad (4.91)$$

L'équation (4.90) permet de calculer indirectement la valeur de  $\bar{\Psi}_0$  une fois que les valeurs de  $R_T$  et  $Le$  sont données.

#### 4.2.5.2 Cavité aplatie : $A \ll 1$

Dans le cas des cavités aplaties, la solution est :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}(x, y) &= \bar{\Psi}_0(1 - 4y^2) & (a) \\ T(x, y) &= C_T x + \frac{\bar{\Psi}_0}{3} C_T (4y^3 - 3y - 1) & (b) \\ S(x, y) &= C_S x + \frac{Le\bar{\Psi}_0}{3} C_S (4y^3 - 3y - 1) & (c) \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

où  $\bar{\Psi}_0$  est définie par :

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{1}{8} R_T (C_T - C_S) \quad (4.93)$$

Les gradients de température et de concentration suivant la direction  $x$  sont

donnés explicitement par :

$$\left. \begin{array}{l} C_T = \frac{1/A_x}{1 + a\bar{\Psi}_0^2} \quad (a) \\ C_S = \frac{1/A_x}{1 + aLe^2\bar{\Psi}_0^2} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (4.94)$$

et  $a = 8/15$ .

La combinaison des expressions de  $C_T$  et  $C_S$  et de la définition de  $\bar{\Psi}_0$ , Éq. (4.93), nous donnent la valeur de  $\bar{\Psi}_0$  :

$$\bar{\Psi}_0[a^2Le^2\bar{\Psi}_0^4 + a(Le^2 + 1)\bar{\Psi}_0^2 - 2\sqrt{a}R_T^0(Le^2 - 1)\bar{\Psi}_0 + 1] = 0 \quad (4.95)$$

où

$$R_T^0 = \frac{R_T}{R_0^{sous}} \quad \text{avec} \quad R_0^{sous} = A_x R^{sous} \quad \text{et} \quad R^{sous} = \frac{16}{\sqrt{a}} = 21.9089 \quad (4.96)$$

#### 4.2.5.3 Discussion des résultats : $N = -1$ et $\Phi = 90^\circ$

Quand les forces de volume sont égales et opposées ( $N = -1$ ), la stabilité du fluide devient neutre. Ceci est dû au fait que, dans cette situation, les forces de volume s'annulent et la densité du fluide devient uniforme. Pour  $Le = 1$ , l'état de repos demeure inconditionnellement stable (nous verrons dans le Chapitre V que ceci est vrai uniquement lorsque la porosité normalisée,  $\varepsilon$ , est égale à l'unité. En général,  $Le$  est différent de l'unité et l'imposition d'une perturbation hydrodynamique engendre un profil de température différent de celui de la concentration. La force de volume résultante devient non nulle et un mouvement convectif peut être initié. Dans ce cas, il existe alors un nombre de Rayleigh souscritique à partir duquel la solution convective non nulle est possible.

À partir des relations (4.90) et (4.95), nous pouvons déduire le nombre de Rayleigh souscritique comme :

$$R_{TC}^{sous} = \frac{R_0^{sous}\sqrt{a}}{Le^2 - 1} \left[ 2aLe^2\bar{\Psi}_{0C}^3 + (Le^2 + 1)\bar{\Psi}_{0C} \right] \quad (4.97)$$

où  $\bar{\Psi}_{0C}$  est la valeur souscritique de la fonction de courant à l'origine des axes. Elle est donnée par :

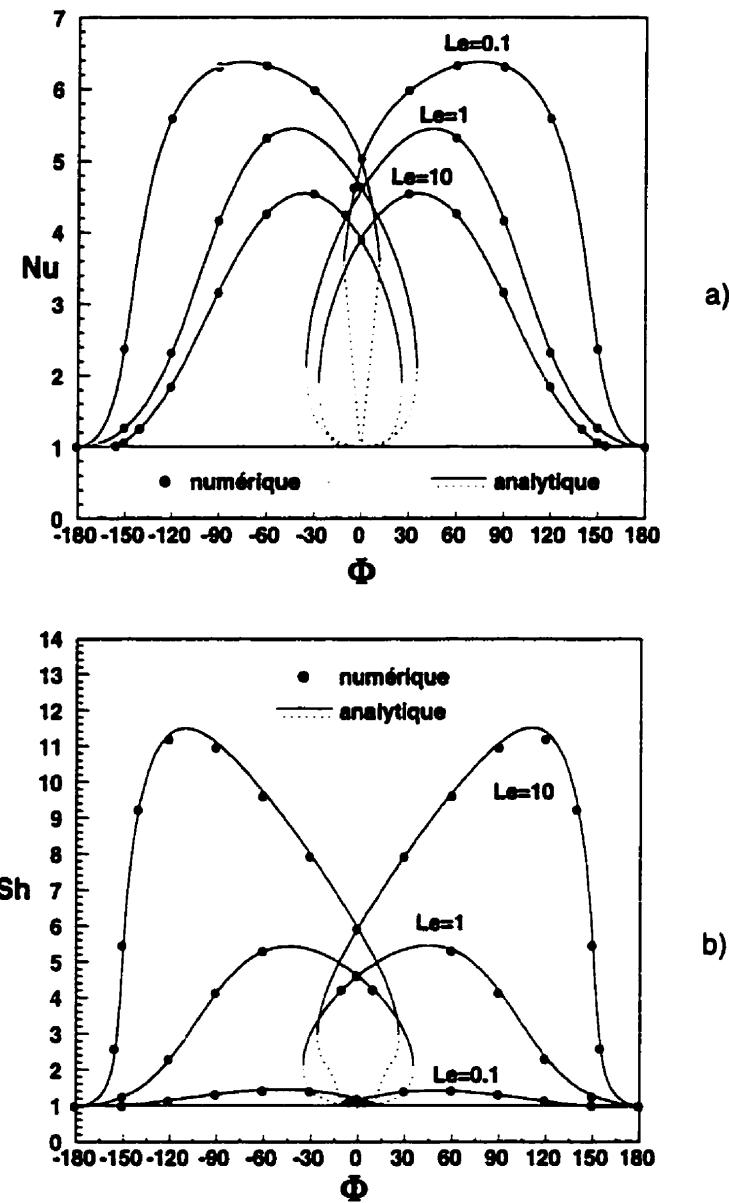
$$\bar{\Psi}_{0C} = \pm \frac{1}{Le\sqrt{6a}} \left[ \sqrt{(Le^2 + 1)^2 + 12Le^2} - (Le^2 + 1) \right]^{1/2} \quad (4.98)$$

dans lequel  $a = 1/2$  et  $R^{sous} = 21.9246$  pour  $A >> 1$  et  $a = 8/15$  et  $R^{sous} = 21.9089$  pour  $A << 1$ .

Nous constatons que les expressions (4.97) et (4.98) obtenues en milieu poreux et les expressions (4.45) et (4.46) obtenues en milieu fluide sont pratiquement identiques. Pour plus d'explication sur ces résultats, le lecteur peut se référer à la section 4.1.3. ou consulter Mamou et al. 1998b.

#### 4.2.5.4 Discussion des résultats : $0^\circ \leq \Phi \leq 180^\circ$

Les taux de transfert de chaleur et de masse sont présentés sur la figure 4.19a et b en fonction de  $\Phi$  (variant de  $-180^\circ$  à  $180^\circ$ ) pour  $R_T = 100$ ,  $N = 1$  et  $Le = 0.1$ , 1 et 10. Le transfert de chaleur et de masse se fait par conduction pure lorsque  $\Phi$  s'approche de  $\pm 180^\circ$ . Dans cette situation, le fluide avoisinant la paroi supérieure est plus chaud et plus concentré donc moins dense, tandis que le fluide qui se trouve au voisinage de la paroi inférieure est moins chaud et moins concentré donc plus dense. Dans ce dernier cas, le gradient de densité est stable et, par conséquent, la convection naturelle est impossible. En variant  $\Phi$  de  $180^\circ$  à  $0^\circ$ , nous constatons que  $Nu$  et  $Sh$  augmentent au début, passent par un maximum, puis décroissent. Tel que discuté par Sen et al. 1987, des solutions multiples existent au voisinage de  $\Phi = 0^\circ$ . Parmi ces solutions, certaines sont instables; elles sont indiquées sur la figure 4.19 par des lignes discontinues. En général, les résultats montrent que les évolutions de  $Nu$  et de  $Sh$  sont pratiquement semblables, mais leurs valeurs dépendent énormément de  $Le$ . Pour  $Le < 1$ , le transfert de chaleur est beaucoup plus important que le transfert de la masse et inversement lorsque  $Le > 1$ . Nous



**Figure 4.19 :** Influence de l'inclinaison sur les transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 100$ ,  $N = 1$ ,  $Le = 0.1$ , 1 et 10 et  $\kappa = 1$ .

observons également que, pour une valeur donnée de  $Le \neq 1$ , les transferts de chaleur et de masse maximums se produisent à des angles d'inclinaison différents. Ainsi, pour  $Le = 0.1$ ,  $Nu$  est maximum à  $\Phi \simeq 75^\circ$ , alors  $Sh$  est maximum à  $\Phi \simeq 45^\circ$ . Pour  $Le = 10$ , le maximum du transfert de chaleur est obtenu à  $\Phi = 45^\circ$  et celui du transfert de masse à  $\Phi \simeq 105^\circ$ .

#### 4.2.6 Solution pour $\bar{R} = 0$

Du point de vue physique, cette situation correspond au cas d'une cavité horizontale,  $\Phi = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , ou au cas où  $N = -C_T/(LeC_S)$ . À partir des équations différentielles (3.41), la solution analytique du problème est :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Psi} = -\bar{\Psi}_0(4x^2 - 1) \\ \Theta_T = C_T y + \frac{C_T \bar{\Psi}_0}{3}(4x^3 - 3x) + x \\ \Theta_S = C_S y + \frac{C_S Le \bar{\Psi}_0}{3}(4x^3 - 3x) + x \end{array} \right\} \quad (4.99)$$

où

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{3}{2} R_T^0 [(C_T + NC_S) \cos \Phi + (1 + N) \sin \Phi] \quad (4.100)$$

et

$$R_T^0 = \frac{R_T}{R^{sup}} \quad \text{avec} \quad R^{sup} = 12 \quad (4.101)$$

Les valeurs de  $C_T$  et  $C_S$  sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} C_T = \frac{4a \bar{\Psi}_0}{3(2a + \bar{\Psi}_0^2)} \\ C_S = \frac{4a Le \bar{\Psi}_0}{3(2a + Le^2 \bar{\Psi}_0^2)} \end{array} \right\} \quad (4.102)$$

où  $a = 15/16$ .

En introduisant les expressions de  $C_T$  et  $C_S$  dans la définition de  $\bar{\Psi}_0$ , Éq. (4.100),

on a :

$$\sum_{i=0}^{i=5} a_i \bar{\Psi}_0^i = 0 \quad (4.103)$$

où

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -6a^2 R_T^0 (1 + N) \sin \Phi \\ a_1 &= -4a^2 [R_T^0 \cos \Phi (1 + NLe) - 1] \\ a_2 &= -3a(Le^2 + 1) R_T^0 \sin \Phi (1 + N) \\ a_3 &= -2a[R_T^0 \cos \Phi Le(Le + N) - (Le^2 + 1)] \\ a_4 &= -\frac{3}{2}Le^2 R_T^0 (1 + N) \sin \Phi \\ a_5 &= Le^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

En ce qui concerne  $Nu$  et  $Sh$ , ils sont déterminés en portant la solution (4.99) dans les expressions (2.52). On obtient :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= 6 \left( \frac{\bar{\Psi}_0^2 + 2a}{\bar{\Psi}_0^2 + 12a} \right) & (a) \\ Sh &= 6 \left( \frac{Le^2 \bar{\Psi}_0^2 + 2a}{Le^2 \bar{\Psi}_0^2 + 12a} \right) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

#### 4.2.7 Cavité élancée : $A \gg 1$ et $\Phi = 0^\circ$

Reprendons la solution ci-dessus pour la cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ). L'équation (4.103) se réduit alors à un polynôme du quatrième degré :

$$\bar{\Psi}_0 [Le^4 \bar{\Psi}_0^4 - 2ad_1 Le^2 \bar{\Psi}_0^2 - a^2 d_2] = 0 \quad (4.106)$$

où  $a$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{15}{16} \simeq 0.9375 \\ d_1 &= R_T^0 Le(N + Le) - (Le^2 + 1) \\ d_2 &= 4Le^2[R_T^0(1 + NLe) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

La solution est donnée explicitement par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_0 &= 0 & (a) \\ \bar{\Psi}_0 &= \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

#### 4.2.8 Cavité aplatie : $A \ll 1$ et $\Phi = 0^\circ$

Maintenant, nous reprenons la solution pour le cas d'une cavité aplatie; dans ce cas, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}(x, y) &= \bar{\Psi}_0 \cos(\omega y) & (a) \\ T(x, y) &= C_T x + \frac{\bar{\Psi}_0}{\omega} C_T \sin(\omega y) & (b) \\ S(x, y) &= C_S x + \frac{Le\bar{\Psi}_0}{\omega} C_S \sin(\omega y) & (c) \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

où  $\omega = \sqrt{R_T (C_T + NLeC_S)}$ .

À partir des conditions aux frontières de  $\bar{\Psi}$ , Éq. (2.51), on déduit que :

$$\bar{\Psi}_0 \cos(\omega/2) = 0 \quad (4.110)$$

D'après l'équation ci-dessus, il existe deux solutions possibles. La première est une solution de l'état de conduction pure :

$$\bar{\Psi}_0 = 0 \quad (4.111)$$

et la deuxième est une solution convective dont la valeur de  $\omega$  est :

$$\omega = \sqrt{R_T (C_T + NLeC_S)} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.112)$$

À partir des équations (3.45) et (3.46), on peut montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} C_T = \frac{1/A_x}{2 + \bar{\Psi}_0^2} \quad (a) \\ C_T = \frac{1/A_x}{2 + Le^2\bar{\Psi}_0^2} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (4.113)$$

La combinaison des expressions de  $C_T$  et  $C_S$  avec celle de  $\omega$  nous conduit à un polynôme du quatrième degré :

$$Le^4\bar{\Psi}_0^4 - 2ad_1Le^2\bar{\Psi}_0^2 - a^2d_2 = 0 \quad (4.114)$$

où  $a$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ d_1 = R_T^0Le(N + Le) - (Le^2 + 1) \\ d_2 = 4Le^2[R_T^0(1 + NLe) - 1] \end{array} \right\} \quad (4.115)$$

et

$$R_T^0 = \frac{R_T}{R_0^{sup}} \quad \text{avec} \quad R_0^{sup} = A_x R^{sup} \quad \text{et} \quad R^{sup} = \omega^2 = \pi^2 = 9.8696 \quad (4.116)$$

À partir de l'équation (4.114) on obtient :

$$\bar{\Psi}_0 = \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left[ d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{1/2} \quad (4.117)$$

#### 4.2.9 Discussion des résultats

Dans le cas d'une cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ), le gradient thermique est déstabilisant, alors que le gradient de concentration est déstabilisant si  $N > 0$  et

stabilisant si  $N < 0$ . Ainsi, pour  $N > 0$ , les deux forces de volume (thermique et solutale) contribuent à l'augmentation de l'intensité de l'écoulement. Lorsque ces forces sont opposées ( $N < 0$ ), les effets de la concentration sont de ralentir l'écoulement convectif ou même de le freiner complètement.

Dans une cavité élancée ( $A \gg 1$ ) ou aplatie ( $A \ll 1$ ), la solution est donnée par les équations (4.108) et (4.117) respectivement. Nous constatons que la solution est similaire à celle obtenue en milieu fluide, Éq. (4.57), et (4.64). Donc, tel que déjà mentionné dans le cas du fluide, il existe cinq solutions possibles : une solution correspondant à l'état de repos, deux solutions convectives de forte intensité et deux solutions convectives de faible intensité. Ces dernières sont instables. Pour certaines valeurs des paramètres  $R_T$ , de  $N$  et de  $Le$ , la coexistence de solutions multiples est possible mais uniquement lorsque les forces de volume sont opposées. En outre, il existe deux types de bifurcations, la première étant supercritique et la deuxième souscritique. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la section 4.1.4. Les seuils de ces deux bifurcations sont donnés respectivement par les relations suivantes :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{ou bien} \quad R_{TC}^{sup} = -R_S + R_0^{sup} \quad (4.118)$$

et

$$\left. \begin{aligned} R_{TC}^{sous} &= \frac{(Le^2 - 1)}{Le(Le + N)^2} \left[ (Le - N) \pm 2\sqrt{-NLe} \right] R_0^{sup} \\ &\text{ou bien} \\ R_{TC}^{sous} &= Le^{-2} \left[ (Le^2 - 1)R_0^{sup} - R_S \pm 2\sqrt{-(Le^2 - 1)R_0^{sup}R_S} \right] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (a) \\ (b) \end{aligned} \quad (4.119)$$

La convection souscritique existe seulement dans le cas où les forces de volume

sont opposées ( $N < 0$ ), plus précisément lorsque :

$$\left. \begin{array}{l} R_S < 0 \\ Le > \sqrt{\frac{R_S - R_0^{sup}}{R_S}} \end{array} \right\} \quad (4.120)$$

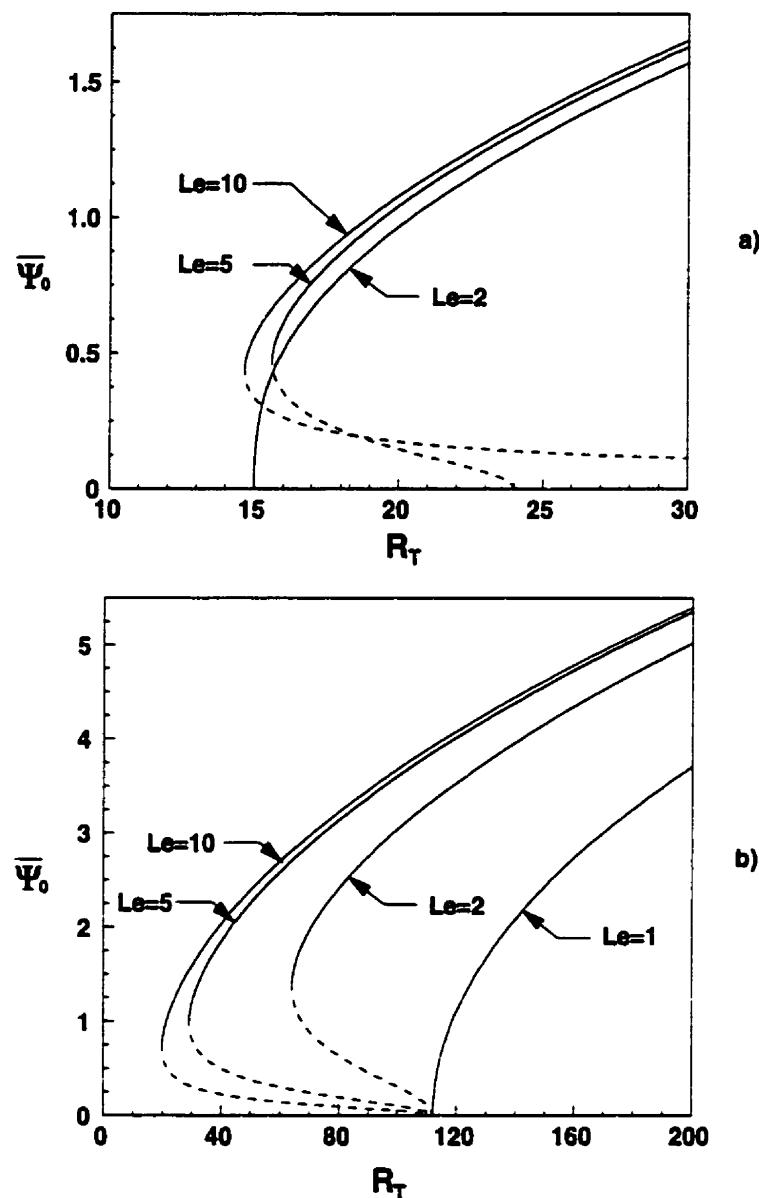
Rappelons que la valeur de Lewis, donnée par  $Le_t = \sqrt{(R_S - R_0^{sup})/R_S}$ , marque la transition d'une bifurcation souscritique vers une bifurcation supercritique.

Dans le passé, Nield 1968 a étudié la convection naturelle dans une couche poreuse horizontale chauffée par le bas par un flux de chaleur constant ( $N = 0$ ). Il a démontré qu'au seuil de la convection,  $R_{TC}^{sup} = 12$ , l'écoulement convectif résultant est caractérisé par une longueur d'onde nulle. En utilisant le concept de l'écoulement parallèle, Vasseur et al. 1989 ont reconstruit le problème sur la base d'un milieu poreux de Brinkman. Pour le cas limite  $Da \rightarrow 0$  (milieu de Darcy pur), ces auteurs ont également obtenu le seuil  $R_{TC}^{sup} = 12$ . Dans la présente étude, le nombre de Rayleigh supercritique caractérisant le seuil de la convection thermosolutale est donné par la relation (4.118). D'après cette relation, il est clair que les résultats de Nield 1968 sont obtenus lorsque  $N = 0$  et  $A \gg 1$ .

L'influence des nombres de Rayleigh et de Lewis sur l'intensité de l'écoulement est illustrée sur la figure 4.20. Pour  $N = -0.1$ , la figure 4.20a montre la variation de  $\bar{\Psi}_0$  en fonction de  $R_T$  pour différentes valeurs de  $Le$ . Les nombres de Rayleigh supercritique et souscritique (en fonction de  $N$  et  $Le$ ) sont donnés par les relations (4.118) et (4.119a). Dans ce cas, les conditions d'existence de la convection souscritique sont :

$$\left. \begin{array}{l} N < 0 \\ Le > \frac{1}{\sqrt[3]{-N}} \end{array} \right\} \quad (4.121)$$

Dans cette situation, le nombre de Lewis marquant la transition entre les régimes convectifs souscritique et supercritique est  $Le = \sqrt[3]{10} \simeq 2.154$ . Ainsi, pour  $Le = 2$ ,

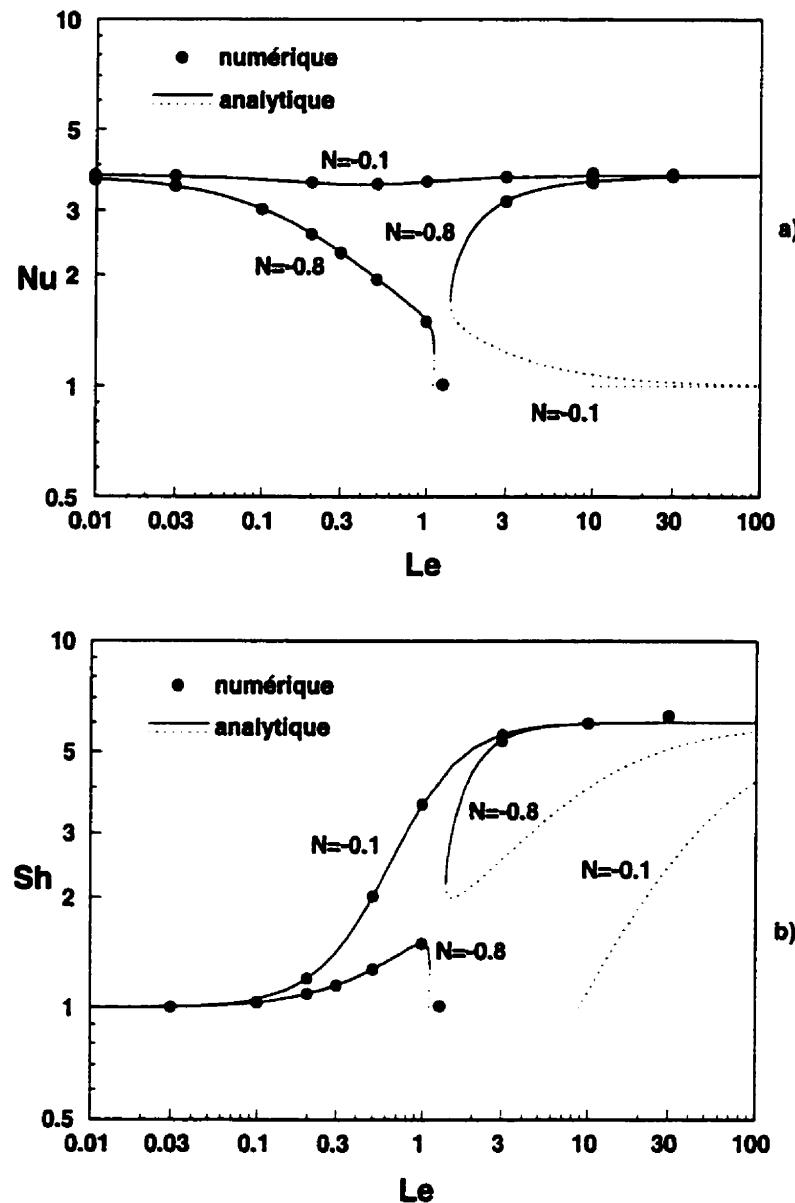


**Figure 4.20 :** Courbes de bifurcations pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$  : effet du nombre de Rayleigh sur l'intensité de l'écoulement, a)  $N = -0.1$  et  $Le = 2, 5$  et  $10$ , b)  $R_S = -100$  et  $Le = 1, 2, 5$  et  $10$ .

nous avons une bifurcation supercritique et pour  $Le = 5$  et  $10$  une bifurcation souscritique. Notons que, d'après la relation (4.118), pour  $Le \geq 1/\sqrt[3]{-N}$ , le nombre de Rayleigh supercritique devient infini ou négatif. Malgré cela, le concept de l'écoulement parallèle prédit une solution convective (figure 4.20a pour  $Le = 10$ ).

Le cas présenté sur la figure 4.20b a été déjà discuté pour le milieu fluide. Pour la valeur choisie de  $R_S = -100$ , la bifurcation est souscritique lorsque  $Le > 1.06$  et supercritique lorsque  $Le < 1.06$ . Pour une discussion plus détaillée de ces résultats, le lecteur pourra se référer à la section 4.1.4 et à la figure 4.9a de ce chapitre.

Les variations  $Nu$  et  $Sh$  en fonction de  $Le$  sont présentées sur la figure 4.21a et b respectivement pour  $R_T = 100$ ,  $N = -0.8$  et  $-0.1$  et  $\Phi = 0^\circ$ . Les solutions numériques (cercles pleins), analytiques stables (traits pleins) et analytiques instables (pointillés) sont indiquées sur la figure. Un bon accord entre les résultats numériques et analytiques est observé. La figure 4.21a montre que  $Nu$  n'est pas affecté par les effets solutaux lorsque  $Le$  prend des valeurs très petites ou très grandes, pour lesquelles le gradient horizontal de la concentration est très faible. Pour  $N = -0.1$ , on observe que  $Nu$  reste pratiquement constant lorsque  $Le$  varie de  $0.01$  à  $100$ . Cependant, pour  $N = -0.8$ , le cas où les forces de volume sont opposées et du même ordre de grandeur, il est clair que le transfert de chaleur diminue considérablement avec l'augmentation de  $Le$ . Il devient purement diffusif à  $Le = 1.11$ , la valeur au-delà de laquelle les effets solutaux dominent et freinent complètement l'écoulement convectif. La prépondérance de la force solutale persiste jusqu'à  $Le = 1.38$ . Au-delà de cette valeur, les effets thermiques reprennent le contrôle de l'écoulement convectif par le biais d'une bifurcation souscritique. Le nombre de Nusselt augmente avec  $Le$  au début, puis tend vers une valeur constante. Cette dernière dépend uniquement de  $R_T$ . D'un autre côté, la figure 4.21b indique que le transfert de masse est quasiment conductif à de faibles valeurs de  $Le$ , et ceci indépendamment de  $N$ . Pour  $N = -0.1$ , lorsque  $Le$  augmente, on observe que  $Sh$

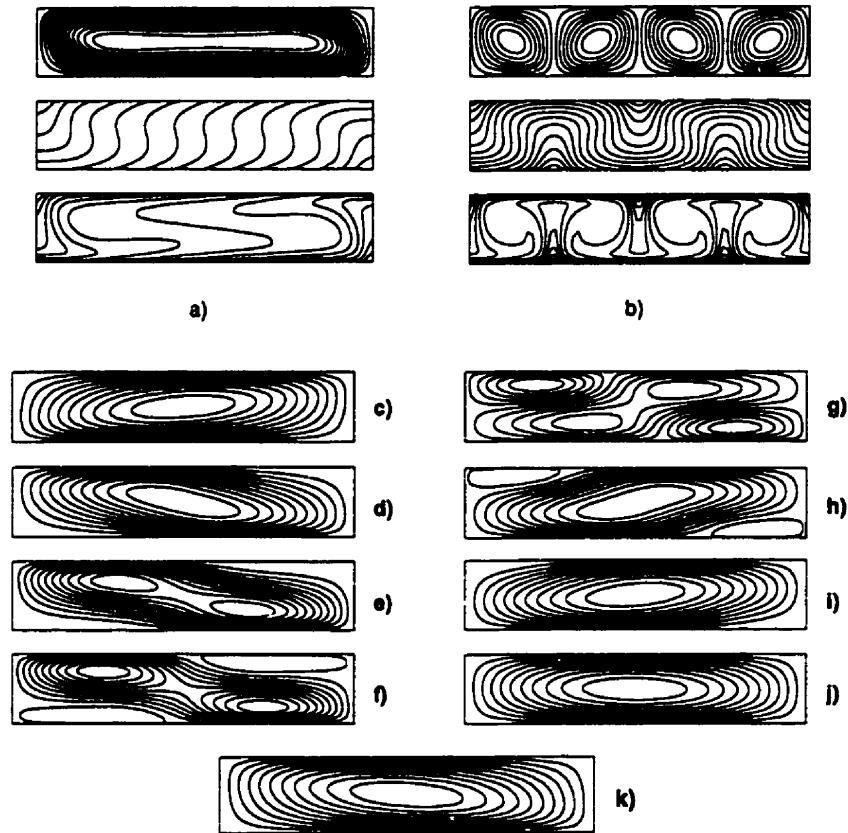


**Figure 4.21 :** Influence du nombre de Lewis sur les transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 100$ ,  $N = -0.1$  et  $-0.8$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

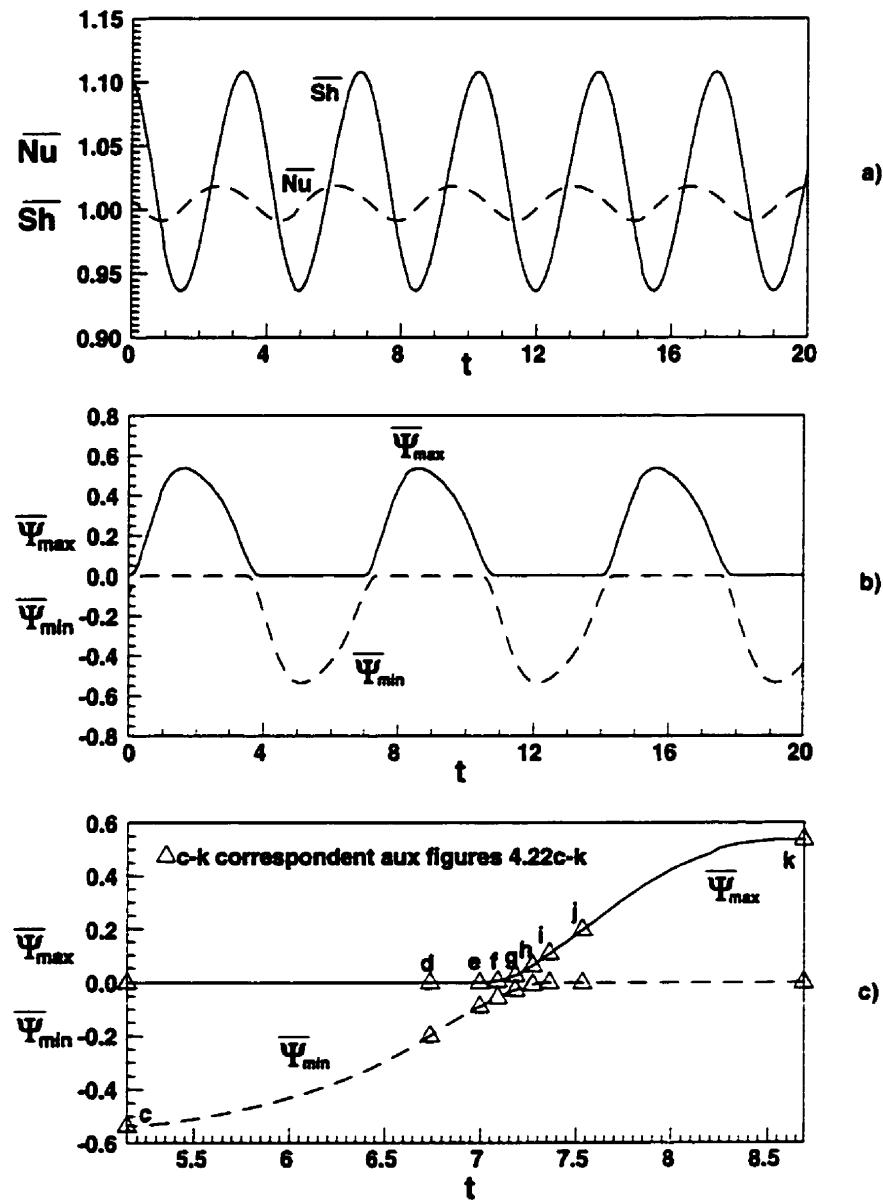
s'accroît d'abord pour tendre par la suite vers la valeur de 6. Dans

le cas où  $N = -0.8$ , l'évolution de  $Sh$  en fonction de  $Le$  est totalement différente. Ceci est dû au fait que la force solutale est plus importante que la force thermique. Ainsi, lorsque  $Le$  augmente, les effets solutaux prennent de l'ampleur et ralentissent progressivement l'écoulement convectif jusqu'à ce que l'état de repos soit atteint à  $Le = 1.11$ . Cet état de repos persiste jusqu'à  $Le = 1.38$ , puis  $Sh$  augmente asymptotiquement jusqu'à la valeur de 6.

Tous les résultats présentés sur la figure 4.21a et b sont associés à un écoulement monocellulaire. Ce type d'écoulement n'est pas unique et les résultats numériques révèlent, pour  $Le > 1.38$ , l'existence d'une multiplicité de solutions avec différentes structures d'écoulements. Par exemple, lorsque  $A = 5$ ,  $R_T = 100$ ,  $N = -0.8$  et  $Le = 10$ , nous avons observé l'existence de quatre solutions numériques (voir figure 4.22). La première solution, montrée sur la figure 4.22a, a été obtenue en utilisant un écoulement monocellulaire comme conditions initiales. La solution résultante est en parfait accord avec le modèle analytique. La deuxième solution, obtenue avec un écoulement multicellulaire de Bénard comme conditions initiales, indique que cette structure est une solution possible (voir figure 4.22b). La troisième solution (non présentée ici), correspondant à l'état de la conduction pure, a été obtenue en prenant l'état de repos du fluide comme conditions initiales. Finalement, la quatrième solution (voir figure 4.22c-k) a été générée en utilisant une solution de faible amplitude comme conditions initiales (par exemple, la solution instable). Comme le montre la figure 4.22c-k, l'écoulement résultant oscille d'une façon périodique. L'évolution temporelle de la valeur maximale et minimale de la fonction de courant et de  $Nu$  et  $Sh$  est présentée sur la figure 4.23. Dans un premier temps (figure 4.22c), la structure de l'écoulement est monocellulaire et la circulation se fait dans le sens horaire. Au fur et à mesure qu'on avance dans le temps, cette cellule s'étrangle petit à petit pour former deux cellules secondaires dans les coins inférieur à gauche et supérieur à droite de la cavité. À  $t = 7.093$ , on note la naissance de deux cellules de convection circulant dans le sens trigonométrique (voir figure 4.22e-f). Ces deux



**Figure 4.22 :** Solutions multiples pour  $R_T = 100$ ,  $N = -0.8$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 5$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ ; lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : a) écoulement parallèle,  $\bar{\Psi}_{max} = 3.689$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = 0$ ,  $\bar{Nu} = 3.635$  et  $\bar{Sh} = 6.739$ , b) écoulement de Bénard,  $\bar{\Psi}_{max} = 3.412$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = -3.412$ ,  $\bar{Nu} = 2.459$  et  $\bar{Sh} = 8.288$ , écoulement transitoire (lignes de courant) à : c)  $t = 5.150$ , d)  $t = 6.741$ , e)  $t = 7.000$ , f)  $t = 7.093$ , g)  $t = 7.187$ , h)  $t = 7.276$ , i)  $t = 7.364$ , j)  $t = 7.535$  et k)  $t = 8.692$ .

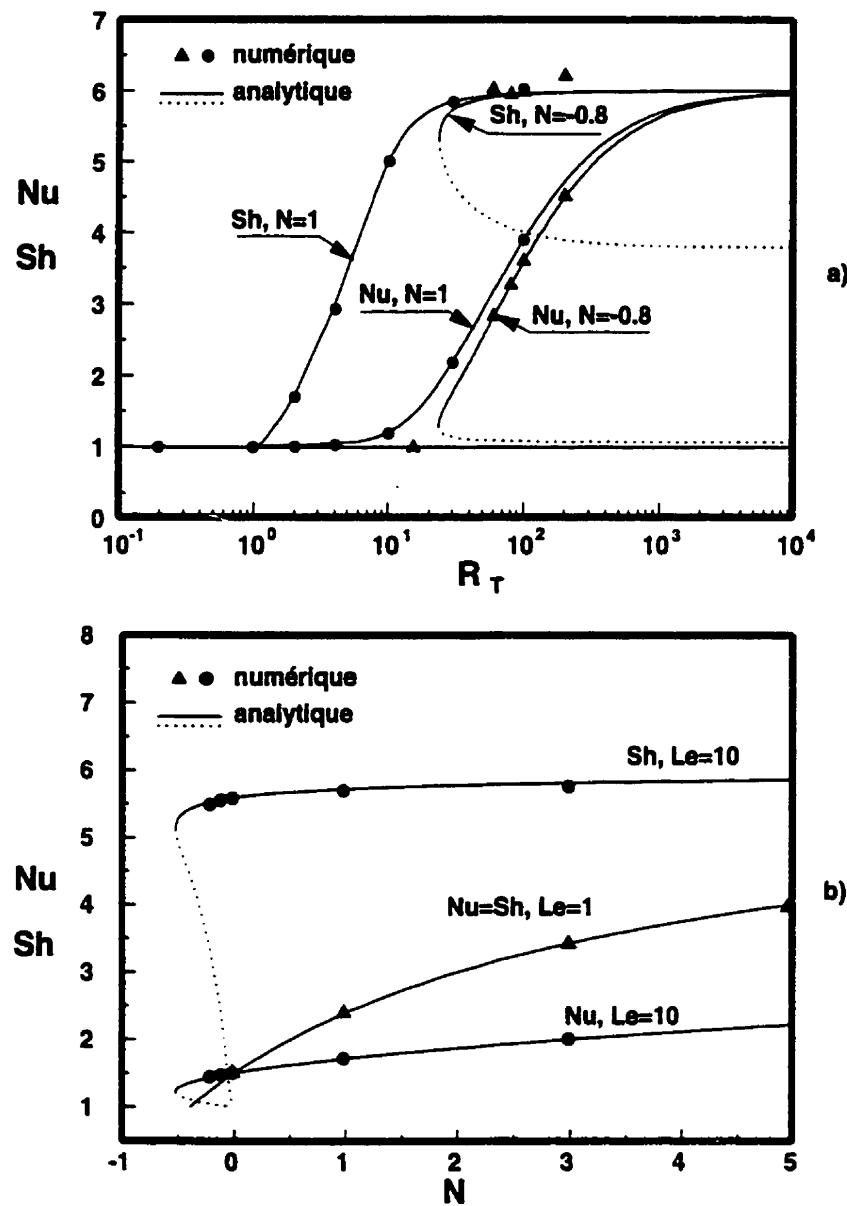


**Figure 4.23 :** Évolution dans le temps des taux de transfert de chaleur et de masse et de la valeur minimale et maximale de la fonction de courant pour  $R_T = 100$ ,  $N = -0.8$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 5$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

cellules prennent de l'ampleur et étranglent complètement la cellule principale (voir figure 4.22f et g). Cette dernière donne naissance alors à deux cellules de convection dont l'intensité diminue progressivement (voir figures 4.22h et i). Par la suite, on observe les deux cellules restantes fusionnent pour former une structure d'écoulement monocellulaire circulant dans le sens trigonométrique (voir figure 4.22j et k). Après avoir parcouru une demi-période, ce processus se renverse d'une façon symétrique jusqu'à ce qu'on retrouve la configuration donnée par la figure 4.22c.

L'influence de  $R_T$  sur les taux de transfert de chaleur et de masse est illustrée sur la figure 4.24a pour  $Le = 10$ ,  $N = 1$  et  $-0.8$  et  $\Phi = 0^\circ$ . Pour  $N = 1$ , la figure 4.24a montre que la solution convective bifurque (bifurcation supercritique) de l'état de repos à  $R_{TC}^{sup} = 1.09$ . En augmentant  $R_T$  au-dessus de cette valeur,  $Nu$  et  $Sh$  augmentent d'une façon monotone et, à des valeurs élevées de  $R_T$ , ces deux paramètres tendent asymptotiquement vers 6. Toutefois, vu que  $Le \gg 1$ , l'augmentation de  $Sh$  à partir du point de bifurcation est plus considérable que celle de  $Nu$ . Les résultats obtenus pour  $N = -0.8$  montrent une bifurcation souscritique dont le seuil se produit à  $R_T = R_{TC}^{sous} = 23.13$ . Naturellement, lorsque  $R_T$  augmente au-dessus de 23.13,  $Nu$  et  $Sh$  augmentent au début et tendent asymptotiquement par la suite vers 6. Pour une valeur donnée de  $A \geq 4$ , les résultats numériques révèlent que lorsque  $R_T$  est grand, la solution numérique s'écarte de la solution analytique et l'écoulement convectif résultant devient oscillant.

Les effets du rapport des forces de volume sur  $Nu$  et  $Sh$  sont illustrés sur la figure 4.24b pour  $R_T = 20$ ,  $Le = 1$  et  $10$  et  $\Phi = 0^\circ$ . Pour  $Le = 1$ ,  $Nu$  et  $Sh$  sont identiques et une bifurcation supercritique dont le seuil se produit à  $N = -0.4$  ( $R_{TC}^{sup} = 20$ ) est observée. Pour  $Le = 10$ , la figure montre l'existence d'une bifurcation souscritique à  $N = -0.53$ . Pour  $N \geq -0.2$ , la solution numérique est en parfait accord avec la solution prédictive par l'écoulement parallèle. Il faut noter qu'au-dessous de  $N = -0.2$ , l'écoulement devient oscillant et évolue vers le régime de conduction pure.



**Figure 4.24 :** Transferts de chaleur et de masse dans une cavité poreuse horizontale : a) effet du nombre de Rayleigh pour  $Le = 10$ ,  $N = 1$  et  $-0.8$  et  $\kappa = 1$ , b) effet du rapport des forces de volume pour  $R_T = 20$ ,  $Le = 1$  et  $10$  et  $\kappa = 1$ .

#### 4.2.10 Cavité horizontale chauffée et salée par le haut

Le cas d'une cavité horizontale soumise à des flux de chaleur et de masse dans la direction de la gravité correspond à la situation où  $\Phi = 180^\circ$ . Pour ce cas, la température est stabilisante et la concentration est déstabilisante si  $N < 0$  et stabilisante si  $N > 0$ . Lorsque les forces de volume coopèrent ( $N > 0$ ), le gradient de densité du fluide est inconditionnellement stable et le fluide demeure au repos. Cependant, lorsque ces forces s'opposent ( $N < 0$ ), un écoulement convectif est possible et il existe un seuil marquant le début de la convection. À partir de la solution analytique décrite ci-dessus, nous pouvons déduire la solution, pour le cas où  $\Phi = 180^\circ$ , en attribuant un signe négatif à  $R_T$ . Ceci résulte du fait que  $\cos \Phi = -1$ . Par exemple, pour une bifurcation supercritique, le nombre de Rayleigh supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = -\frac{R_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{ou bien} \quad R_{TC}^{sup} = -R_S - R_0^{sup} \quad (4.122)$$

et pour une bifurcation souscritique, le nombre de Rayleigh souscritique est donné par :

$$\left. \begin{aligned} R_{TC}^{sous} &= \frac{(1 - Le^2)}{Le(Le + N)^2} \left[ (Le - N) \pm 2\sqrt{-NLe} \right] R_0^{sup} \\ \text{ou bien} \\ R_{TC}^{sous} &= Le^{-2} \left[ (1 - Le^2)R_0^{sup} - R_S \pm 2\sqrt{(Le^2 - 1)R_0^{sup}R_S} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.123)$$

À partir de la relation (4.122), la condition nécessaire pour l'existence de la convection supercritique est  $R_T < R_{TC}^{sup}$  (c'est-à-dire que l'écoulement convectif existe au-dessous du nombre de Rayleigh supercritique et non pas au-dessus, comme il a été déjà constaté pour le cas où  $\Phi = 0^\circ$ ). Plus précisément,  $R_T$  est positif dans la présente étude, et le seuil de la convection n'existe que lorsque  $NLe < -1$  ou bien  $R_S < -R_0^{sup}$ . Pour la convection souscritique, la condition d'existence est donnée

par :

$$\left. \begin{array}{l} R_S < -R_0^{sup} \\ Le < \sqrt{\frac{R_S + R_0^{sup}}{R_S}} \end{array} \right\} \quad (4.124)$$

Donc, lorsque la cavité est chauffée et salée par le haut, la convection souscritique n'est possible que lorsque  $Le < 1$ .

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des solutions analytiques et numériques obtenues pour le cas d'une cavité inclinée soumise à des flux constants de chaleur et de masse. Pour le cas où la cavité est verticale, le régime de couche limite ainsi que la transition du régime d'origine thermique dominant vers le régime d'origine solutale dominant ont été étudiés. Les effets des paramètres de contrôle sur les transferts de chaleur et de masse et sur la structure de l'écoulement ont été présentés pour différentes situations. Lorsque les forces de volume sont opposées et du même ordre de grandeur, la multiplicité de solutions a été démontrée. Également, lorsque ces forces sont égales et opposées  $N = -1$ , les solutions analytiques et numériques montrent l'existence d'un seuil pour le début de la convection souscritique. Dans le cas d'une cavité horizontale, la stabilité du fluide en fonction des paramètres de contrôle a été étudiée, et l'existence de bifurcations supercritiques et souscritiques ainsi que leur domaine d'existence ont été discutés. L'effet de l'angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal sur les transferts de chaleur et de masse a été étudié en faisant varier  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ .

Dans le chapitre suivant, nous présentons une méthode numérique générale pour l'étude de la stabilité du fluide dans une cavité inclinée soumise à des gradients de température et de concentration. La structure de l'écoulement au seuil de bifurcation

ainsi que les modes instables directs et oscillants seront déterminés en fonction des paramètres de contrôle. Des conditions aux frontières thermiques et solutales de types Dirichlet et Neuman seront considérées.

## CHAPITRE V

# ÉTUDE DU PROBLÈME DE STABILITÉ

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité dynamique d'un fluide soumis à des forces de poussée thermosolutales. La configuration géométrique du système considéré est présentée sur la figure 2.1. Les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de matière sont décrites au Chapitre II (voir Éq. (2.25)-(2.27) pour le milieu fluide et Éq. (2.48)-(2.50) pour le milieu poreux). Les conditions aux limites thermiques et solutales associées aux équations de base sont stipulées dans le même chapitre par (2.21) et (2.22), et les conditions hydrodynamiques sont données par (2.28) pour le milieu fluide et par (2.51) pour le milieu poreux. Le but principal de cette étude est de déterminer les nombres de Rayleigh critiques correspondant au seuil de la convection et la forme structurale des mouvements convectifs résultants.

Dans le cas d'une couche horizontale soumise à diverses conditions aux limites, plusieurs auteurs comme Nield 1967, 1968, Taunton et Lightfoot 1972, Huppert et Moore 1976, Da Costa et al. 1981, Platten et Legros 1984, Poulikakos 1986, Nield et Bejan 1992 et Mamou et al. 1995b ont montré l'existence de nombres de Rayleigh supercritiques caractérisant le seuil de la convection. Le régime de la convection surstable et ses conditions d'existence ont été étudiés par ces auteurs.

Dans le cas d'une couche inclinée ou verticale, il est également possible que le fluide se trouve dans un état de repos lorsque les forces de volume thermique et solutale sont égales et opposées ( $N = -1$ ). La stabilité de ce type de configuration a été très peu étudiée dans le passé. Ceci est dû à la complexité des équations de base pour lesquelles il est difficile de trouver des solutions analytiques. Dans le cas d'une couche fluide verticale d'extension infinie, soumise à des températures et concentrations constantes, Thorpe et al. 1969, Krishnan 1989 et Gobin et Bennacer 1994 ont déterminé le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}^{sup} = Ra^{sup}/(Le - 1)$ , caractérisant le seuil de la convection. Il a été trouvé par ces auteurs que la constante  $Ra^{sup}=6122$ , 6486 et 6269, respectivement. Notons que ces valeurs sont toutes approximatives. D'une façon plus rigoureuse il a été montré par Ghorayeb et Mojtabi 1997, sur la base de la stabilité linéaire, que  $Ra^{sup} = 6509$ . Dans le cas d'une couche poreuse verticale, Charrier-Mojtabi et al. 1997 ont trouvé que  $R_{TC}^{sup} = 105.33/(Le - 1)$ , la longueur d'onde de l'écoulement étant de 2.51.

Dans ce qui suit, les conditions pour lesquelles l'état de repos du fluide est une solution possible du problème sont déterminées. Pour cette situation, la solution des équations de base est celle du régime de la conduction pure. Cette dernière est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_C = \bar{\Psi}_C = 0 \\ T_C = \frac{x}{A_x} \\ S_C = \frac{x}{A_x} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

À partir des équations de mouvement (2.15) et (2.16), on peut déduire facilement que si la solution de la conduction pure est une solution du problème alors la relation suivante doit être satisfaite

$$\nabla \times \nabla P + \Gamma_0 \nabla \times (T_C + NS_C) \vec{g} = 0 \quad (5.2)$$

où  $\vec{g} = g(\cos \Phi \vec{i} - \sin \Phi \vec{j})$  et le paramètre  $\Gamma_0$  est défini comme  $\Gamma_0 = Pr Ra_T$  pour le

milieu fluide et  $\Gamma_0 = R_T$  pour le milieu poreux.

Comme la pression,  $P$ , est un scalaire, il s'ensuit que  $\nabla \times \nabla P = 0$ . De plus, le paramètre  $\Gamma_0$  étant une constante non nulle, l'équation (5.2) se réduit alors à :

$$(1 + N) \sin \Phi = 0 \quad (5.3)$$

Ce résultat montre que la condition nécessaire pour que le fluide peut se maintenir au repos, est que le gradient de la densité du fluide soit parallèle au champ de la gravité (c'est le cas d'une couche horizontale  $\Phi = 0$  ou  $180^\circ$ ) ou qu'il soit nul (c'est le cas d'une cavité inclinée soumise à des forces de volumes égales et opposées,  $N = -1$ ). Dans le cas d'une cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ), lorsque les forces de volumes thermique et solutale sont coopératives ( $N > 0$ ), la température et la concentration déstabilisent toutes deux le système, et le nombre de Rayleigh supercritique est alors inférieur à la valeur critique correspondant à la simple diffusion. Par ailleurs, lorsque les forces de volume sont opposées ( $N < 0$ ), la concentration stabilise le système et contribue ainsi à retarder le déclenchement de la convection. Dans le cas d'une cavité inclinée, le fluide peut se maintenir au repos seulement lorsque les forces de volume sont égales et opposées ( $N = -1$ ). Dans cette situation, la densité du fluide est uniforme dans la cavité et la force de poussée résultante est nulle. Comme le nombre de Lewis est différent de l'unité, la convection est possible mais seulement au-delà d'un seuil.

Pour déterminer le nombre de Rayleigh critique ainsi que la structure de l'écoulement au seuil de la convection, nous utilisons l'approche classique de la stabilité linéaire. Pour ce faire, on perturbe hydrodynamiquement l'état de repos du système et on étudie l'évolution de cette perturbation dans le temps.

Au début de la convection, la solution du problème est de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \Psi_C + \psi(t, x, y) \\ T = T_C + \theta(t, x, y) \\ S = S_C + \phi(t, x, y) \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

elle est donc la somme de la solution de conduction pure, Éq. (5.1), et de la perturbation hydrodynamique ( $\psi, \theta, \phi$ ).

Portant les profils (5.4) dans les équations de base (2.25)-(2.27), nous obtenons :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) = Pr \nabla^4 \psi - Pr Ra_T \mathcal{F}(\theta + N \phi) \quad (a) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{A_x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathcal{J}(\psi, \theta) = \nabla^2 \theta \quad (b) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{A_x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathcal{J}(\psi, \phi) = \frac{1}{Le} \nabla^2 \phi \quad (c) \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Les conditions aux frontières pour  $\theta$  et  $\phi$  d'après (2.21) et (2.22) s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{ll} x = \pm \frac{A_x}{2} & \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1 - \kappa) \varphi = 0 \\ y = \pm \frac{A_y}{2} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

où  $\varphi$  représente  $\theta$  ou  $\phi$ .

À partir de l'équation (2.28), les conditions aux frontières hydrodynamiques sont :

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

Dans le cas d'un milieu poreux, les équations de perturbation ainsi que les conditions aux frontières sont données dans le Chapitre III par (3.16), (3.17) et (3.18), respectivement.

## 5.2 Analyse de la stabilité : milieu fluide

Dans cette section, nous présentons les méthodes de Galerkin et d'éléments finis pour l'étude de la stabilité linéaire dans une couche inclinée et de la stabilité non linéaire dans une couche horizontale soumise à différentes conditions limites.

## 5.3 Théorie de la stabilité linéaire

Dans cette section, l'analyse de la stabilité linéaire est appliquée à des milieux fluides. En admettant la séparation des variables, l'évolution dans le temps de la perturbation est exprimée par :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t, x, y) = \psi_0 e^{pt} F(x, y) \\ \theta(t, x, y) = \theta_0 e^{pt} G(x, y) \\ \phi(t, x, y) = \phi_0 e^{pt} H(x, y) \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

- où  $\psi_0$ ,  $\theta_0$  et  $\phi_0$  sont des constantes,  $p$  est un paramètre exprimant le taux de croissance de l'amplitude de la perturbation et  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont les profils de la fonction de courant,  $\psi$ , de la température,  $\theta$ , et de la concentration,  $\phi$ , au seuil de la convection. Au début de la convection, les amplitudes  $\psi_0$ ,  $\theta_0$  et  $\phi_0$  sont très petites. Par conséquent, les termes d'ordre supérieur à un peuvent être négligés. En substituant les profils (5.8) dans (5.5), les équations de perturbation linéarisées s'écrivent alors :

$$\left. \begin{array}{l} p \psi_0 \nabla^2 F = Pr \psi_0 \nabla^4 F - Pr Ra_T (\theta_0 + N \phi_0) \mathcal{F}(G) \quad (a) \\ p \theta_0 G + \frac{\psi_0}{A_x} \frac{\partial F}{\partial y} = \theta_0 \nabla^2 G \quad (b) \\ p \phi_0 G + \frac{\psi_0}{A_x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\phi_0}{Le} \nabla^2 G \quad (c) \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

En général, la solution de ces équations n'est possible que par des voies numériques.

### 5.3.1 Solution numérique : éléments finis

La solution numérique des équations de perturbation peut être obtenue par la méthode des éléments finis.

#### 5.3.1.1 Formulation variationnelle

En utilisant la méthode des résidus pondérés de Galerkin, la formulation variationnelle des équations dans (5.9) est donnée par :

$$\begin{aligned} -p\psi_0 \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla w \, d\Omega + p\psi_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma &= \psi_0 Pr \int_{\Omega} \nabla^2 F \cdot \nabla^2 w \, d\Omega - \\ Pr\psi_0 \int_{\Gamma} \nabla^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} \right) w \, d\Gamma + Pr\psi_0 \int_{\Gamma} \nabla^2 F \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma - \\ Pr Ra_T (\theta_0 + N\phi_0) \int_{\Omega} \mathcal{F}(G) w \, d\Omega &\quad \forall w \in \mathcal{V}_\psi(\Omega) \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $w(x, y)$  est la fonction admissible et  $\mathcal{V}_\psi(\Omega)$  est un espace fonctionnel de  $F(x, y)$ .

Les conditions aux frontières de la fonction  $F(x, y)$  données par (5.7) sont des conditions essentielles homogènes. Donc  $\mathcal{V}_\psi(\Omega)$  peut être défini comme suit :

$$\mathcal{V}_\psi(\Omega) = \{ f \in H^2(\Omega) \text{ tel que } f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad (5.11)$$

et  $H^2(\Omega)$  est un cadre fonctionnel tel que :

$$H^2(\Omega) = \{ f \in V^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \in V^2(\Omega) \} \quad (5.12)$$

où  $V^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel défini par la relation (3.12).

Les formulations variationnelles des équations de perturbation de l'énergie et de la concentration sont données respectivement par :

$$p\theta_0 \int_{\Omega} G\vartheta \, d\Omega + \frac{\psi_0}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \vartheta \, d\Omega = -\theta_0 \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega +$$

$$\theta_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V}_2(\Omega) \quad (5.13)$$

et

$$p \phi_0 \int_{\Omega} G v \, d\Omega + \frac{\psi_0}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \vartheta \, d\Omega = -\frac{\phi_0}{Le} \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega + \frac{\phi_0}{Le} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \quad \forall \vartheta \in \mathcal{V}_2(\Omega) \quad (5.14)$$

où  $\vartheta(x, y)$  est une fonction admissible et  $\mathcal{V}_2(\Omega)$  est le cadre fonctionnel de la température et de la concentration donné par (3.20).

### 5.3.1.2 Discrétisation

Pour la discrétisation des équations (5.10), (5.13) et (5.14) et du domaine de calcul, l'élément fini cubique de haute précision de Hermite a été choisi (voir Figure 5.1). Cet élément dont la géométrie est rectangulaire est formé de quatre noeuds représentant les sommets du rectangle. À chaque noeud, la fonction inconnue possède quatre degrés de liberté; la fonction elle-même, ses deux dérivées premières et sa dérivée croisée. Dans l'élément de référence, les fonctions d'interpolation de l'élément de Hermite sont données par les expressions suivantes (voir Reddy 1993) :

$$\left. \begin{array}{l} f : \quad \hat{N}_i = \frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} : \quad \hat{N}_{i+4} = -\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} : \quad \hat{N}_{i+8} = -\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} : \quad \hat{N}_{i+12} = \frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \end{array} \right\} i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.15)$$

où  $(\xi_i, \eta_i) = (-1, -1), (1, -1), (1, 1)$  et  $(-1, 1)$  respectivement pour  $i = 1, 2, 3$  et  $4$ .

Dans chaque élément, désigné par  $e$ , les profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$

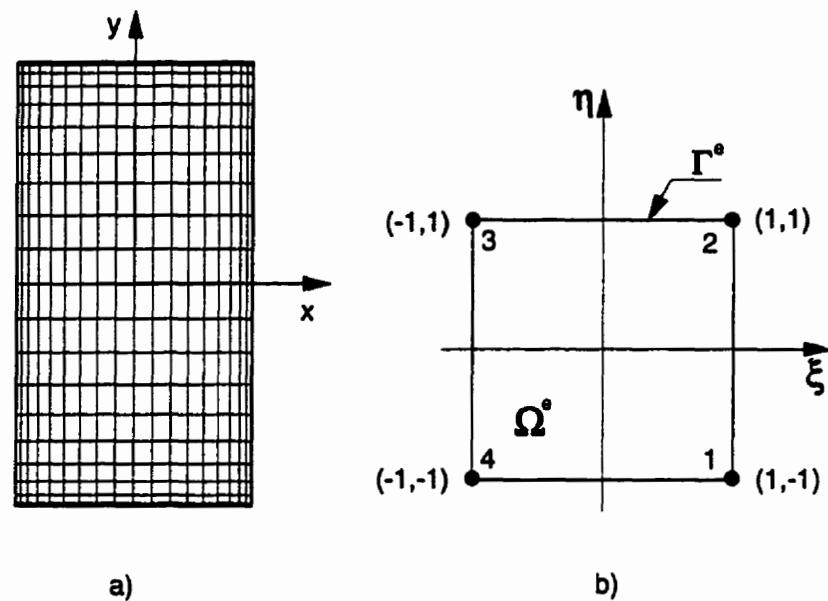


Figure 5.1 : a) Domaine de calcul discréteisé, b) élément fini cubique de Hermite.

sont approximés par :

$$\begin{Bmatrix} F \\ G \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} F_j & \frac{\partial F_j}{\partial x} & \frac{\partial F_j}{\partial y} & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x \partial y} \\ G_j & \frac{\partial G_j}{\partial x} & \frac{\partial G_j}{\partial y} & \frac{\partial^2 G_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} N_j(x, y) \\ N_{j+4}(x, y) \\ N_{j+8}(x, y) \\ N_{j+12}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

où  $N_i(x, y)$  est la fonction d'interpolation correspondant au noeud  $i$  de l'élément.

En introduisant (5.16) dans (5.10), (5.13) et (5.14), en substituant les fonctions  $w(x, y)$  et  $\vartheta(x, y)$  par  $N_i$  et après intégration sur l'élément de référence, on obtient pour chaque équation un système matriciel élémentaire. L'assemblage des matrices élémentaires résultant de chaque élément du domaine de calcul nous donne un système matriciel global pour chaque équation de perturbation :

$$p \psi_0 [M_\psi] \{F\} = Pr \psi_0 [K_\psi] \{F\} - Pr Ra_T (\theta_0 + N\phi_0) [B] \{G\} \quad (5.17)$$

$$p \theta_0 [M_\theta] \{G\} - \frac{\psi_0}{A_x} [L] \{F\} = -\theta_0 [K_\theta] \{G\} \quad (5.18)$$

$$p \phi_0 [M_\phi] \{G\} - \frac{\psi_0}{A_x} [L] \{F\} = -\frac{\phi_0}{Le} [K_\phi] \{G\} \quad (5.19)$$

où  $[B]$ ,  $[K_\psi]$ ,  $[K_\theta]$ ,  $[K_\phi]$ ,  $[L]$ ,  $[M_\psi]$ ,  $[M_\theta]$  et  $[M_\phi]$  sont des matrices carrées de dimension  $m \times m$ ,  $m$  est un entier égal à quatre fois le nombre total des noeuds et  $\{F\}$  et  $\{G\}$  sont des vecteurs inconnus de dimension  $m$ . Les matrices élémentaires correspondantes sont définies par :

$$\left. \begin{array}{l} [B]^e = \int_{\Omega} \mathcal{F}(N_j) N_i \, d\Omega, \quad [K_\psi]^e = \int_{\Omega} \nabla^2 N_j \cdot \nabla^2 N_i \, d\Omega \\ [K_\theta]^e = [K_\phi]^e = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, d\Omega, \quad [L]^e = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i \, d\Omega \\ [M_\psi]^e = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, d\Omega, \quad [M_\theta]^e = [M_\phi]^e = \int_{\Omega} N_j N_i \, d\Omega \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

Les intégrales ci-dessus sont évaluées avec la méthode de Gauss que nous décrivons ci-dessous.

**Tableau 5.1 : Points de Gauss (Dhatt et Touzot 1981).**

$i$	$\xi_i$ ou $\eta_i$	$w_i$
1	$-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
2	$-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
3	$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$
4	$\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$

### 5.3.1.3 Méthode d'intégration de Gauss

Après avoir transformé les intégrales dans l'élément de référence, les expressions dans les intégrales se réduisent à des polynômes de degré 6 au maximum. La méthode d'intégration de Gauss permet de calculer exactement les intégrales en utilisant quatre points de Gauss dans les deux directions des coordonnées barycentriques ( $\xi$  et  $\eta$ ). Chaque intégrale peut être calculée de la manière suivante :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (5.21)$$

où  $\xi_i$  et  $\eta_j$  sont les coordonnées des points d'intégrations de Gauss et  $w_i$  sont les coefficients de pondération de Gauss. Ils sont donnés par le tableau 5.1.

### 5.3.1.4 Introduction des conditions aux frontières

Les conditions aux limites naturelles sont introduites directement dans les intégrales de bord. D'après la définition des cadres fonctionnels de  $\psi(x, y)$ ,  $\theta(x, y)$  et  $\phi(x, y)$ , Éq. (3.20) et (5.11), et de leurs conditions aux frontières, Éq. (5.6) et (5.7), les intégrales de bord sont toutes nulles. Par ailleurs, les conditions aux limites essentielles sont introduites dans les systèmes matriciels (5.17)-(5.19) sans altérer la dimension des matrices. Par exemple, si nous considérons une cavité avec des parois rigides, alors à chaque noeud situé sur la frontière de la cavité,  $\Gamma$ , nous avons  $F_i = \partial F / \partial x|_i = \partial F / \partial y|_i = 0$  (l'indice  $i$  désignant les noeuds sur la frontière  $\Gamma$ ). Donc, dans la matrice  $[K_\psi]$  de l'équation (5.17), nous posons tous les éléments de la ligne  $i$  et de la colonne  $i$  égaux à zéro ( $[K_\psi]_{i,j} = [K_\psi]_{j,i} = 0$ ,  $j = 1, m$ ) sauf l'élément de la diagonale que nous posons égal à l'unité ( $[K_\psi]_{i,i} = 1$ ). Cependant, dans le membre droit de l'équation (5.17) nous posons tous les éléments de la ligne  $i$  de la matrice  $[B]_{i,j}$  égaux à zéro ( $[B]_{i,j} = 0$ ,  $j = 1, m$ ). La même démarche est appliquée aux systèmes d'équations (5.18) et (5.19).

Pour des couches fluides infiniment longues ( $A \rightarrow 0$  ou  $A \rightarrow \infty$ ), dans lesquelles la structure de l'écoulement révèle une formation périodique des cellules de convections tournant alternativement dans un sens et dans l'autre, nous avons considéré des conditions aux frontières périodiques :

$$\left. \begin{array}{lll} f(x, y) = f(x + A_C, y) & \text{lorsque} & A \rightarrow 0 \\ f(x, y) = f(x, y + A_C) & \text{lorsque} & A \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

### 5.3.2 Stabilité marginale : $p = 0$

Dans le cas de la stabilité marginale ( $p = 0$ ), nous pouvons déduire, à partir des équations de perturbation de la température et de la concentration, Éq. (5.18) et

(5.19), que :

$$\phi_0 = Le \theta_0 \quad (5.23)$$

En utilisant la relation ci-dessus, les équations (5.17)-(5.19) peuvent être combinées pour aboutir au système d'équations suivant :

$$[[\mathbf{E}] - \lambda [\mathbf{I}]]\{\mathbf{F}\} = 0 \quad (5.24)$$

où  $[\mathbf{I}]$  est la matrice d'identité,  $\{\mathbf{F}\}$  le vecteur des inconnues,  $[\mathbf{E}]$  est une matrice de dimension  $m \times m$  définie par :

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{K}_\psi]^{-1} [\mathbf{B}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{L}] \quad (5.25)$$

et  $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_\theta] = [\mathbf{K}_\phi]$ . Le paramètre  $\lambda$  est donné par :

$$\lambda = \frac{A_x}{Ra_T(1 + NLe)} \quad (5.26)$$

Du point de vue mathématique, l'équation (5.24) représente un problème aux valeurs propres. Le système d'équations admet une solution non triviale si, et seulement si, le déterminant de la matrice  $[\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I}]$  est égal à zéro. Ceci nous conduit à chercher toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres  $\{\mathbf{F}\}_i$  vérifiant l'équation (5.24). Ces derniers sont déterminés en utilisant les sous-routines de la librairie IMSL. Une fois que les vecteurs propres  $\{\mathbf{F}\}_i$  sont connus, le profil de la fonction  $G(x, y)$  peut être calculé à partir de la relation suivante :

$$\{G\}_i = \frac{\psi_0}{A_x \theta_0} [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{L}] \{\mathbf{F}\}_i \quad (5.27)$$

Si les valeurs propres  $\{\lambda_i\}$  peuvent être classées de manière à satisfaire la relation suivante :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \lambda_m \quad (5.28)$$

alors le nombre de Rayleigh supercritique,  $Ra_{TC}^{sup}$ , caractérisant le seuil de la convection est donné par :

$$Ra_{TC}^{sup} = \frac{Ra_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{avec} \quad Ra_0^{sup} = A_x Ra^{sup} \quad (5.29)$$

où la constante  $Ra^{sup}$  est définie comme :

$$\left. \begin{array}{l} Ra^{sup} = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{si } (1 + NLe) < 0 \\ Ra^{sup} = \frac{1}{\lambda_m} \quad \text{si } (1 + NLe) > 0 \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

Rappelons que le rapport des forces de volume  $N$  peut varier de  $-\infty$  à  $+\infty$  pour des cavités horizontales ( $\Phi = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ) et vaut  $-1$  pour des cavités inclinées ( $0^\circ < \Phi < 180^\circ$ ). Le reste des valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 2, m - 1$ , représente les seuils des différentes bifurcations supercritiques possibles.

Des études antérieures (Nield 1967 et Platten et Legros 1984) révèlent la possibilité d'existence de régimes de convection oscillante au-dessous du nombre de Rayleigh supercritique. Pour déterminer les modes stable, instable oscillant, et instable direct, une analyse de la stabilité linéaire transitoire du problème est requise.

### 5.3.3 Stabilité transitoire : $p \neq 0$

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté la méthode des éléments finis pour calculer les profils de la fonction de courant  $F(x, y)$ , de la température et de la concentration  $G(x, y)$  ainsi que la valeur de la constante  $Ra^{sup}$  correspondant au seuil de la convection supercritique. Dans ce qui suit, nous allons utiliser la méthode des résidus pondérés pour étudier la stabilité du fluide au-dessous de ce seuil. Comme les fonctions admissibles,  $w(x, y)$  et  $\vartheta(x, y)$ , figurant dans la formulation variationnelle (Éq. (5.10), (5.13) et (5.14)) sont des fonctions arbitraires, alors nous pouvons prendre les fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  comme fonctions admissibles. Ainsi, la forme intégrale faible des équations de perturbations (5.10), (5.13) et (5.14) se réduit aux équations linéaires suivantes :

$$p \mathcal{M}_\psi \psi_0 + Pr \mathcal{K}_\psi \psi_0 = Pr Ra_T \mathcal{B} (\theta_0 + N\phi_0) \quad (5.31)$$

$$p \mathcal{M} \theta_0 - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 = -\mathcal{K} \theta_0 \quad (5.32)$$

$$p \mathcal{M} \phi_0 - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 = -\frac{\mathcal{K}}{Le} \phi_0 \quad (5.33)$$

où  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{K}_\psi$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}_\psi$  et  $\mathcal{M}$  sont des constantes définies par :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(G) F \, d\Omega, \quad \mathcal{K} = \int_{\Omega} (\nabla G)^2 \, d\Omega, \quad \mathcal{K}_\psi = \int_{\Omega} (\nabla^2 F)^2 \, d\Omega \\ \mathcal{L} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} G \, d\Omega, \quad \mathcal{M} = \int_{\Omega} G^2 \, d\Omega, \quad \mathcal{M}_\psi = \int_{\Omega} (\nabla F)^2 \, d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Les intégrales ci-dessus sont discrétisées avec la méthode des éléments finis et calculées avec la méthode d'intégration de Gauss. Les constantes  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{K}_\psi$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}_\psi$  et  $\mathcal{M}$  peuvent donc être déduites directement de la méthode des éléments finis décrite dans le paragraphe précédent. Il vient ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} [B]_{i,j}^e G_j^e F_i^e \right)_k, & \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} [L]_{i,j}^e F_j^e G_i^e \right)_k \\ \mathcal{K}_\psi &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} [K_\psi]_{i,j}^e F_j^e F_i^e \right)_k, & \mathcal{K} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} [K]_{i,j}^e G_j^e G_i^e \right)_k \\ \mathcal{M} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} [M]_{i,j}^e G_j^e G_i^e \right)_k \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

où  $N^e$  est le nombre total des noeuds et l'exposant  $e$  désigne un élément du domaine de calcul.

En résolvant les équations (5.32) et (5.33) pour  $\theta_0$  et  $\phi_0$  et après avoir substitué les expressions de ces dernières dans (5.31), nous obtenons un polynôme de troisième ordre en termes du paramètre  $p$  :

$$Lep^3 + p_2 p^2 - \gamma(\gamma_\psi Pr p_1 - \gamma) p - \gamma^2 \gamma_\psi Pr p_0 = 0 \quad (5.36)$$

où

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= Ra_T^0 + Ra_S^0 - 1 \\ p_1 &= Ra_T^0 Le + Ra_S^0 - (1 + Le) \\ p_2 &= \gamma(Le + 1) + \gamma_\psi Pr Le \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\psi &= \frac{\mathcal{K}_\psi}{\mathcal{M}_\psi}, & \gamma &= \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}} \\ Ra_T^0 &= \frac{Ra_T}{Ra_0^{sup}}, & Ra_S^0 &= \frac{Ra_S}{Ra_0^{sup}} \\ Ra_0^{sup} &= A_x Ra^{sup}, & Ra^{sup} &= \frac{\mathcal{K}_\psi \mathcal{K}}{\mathcal{B}\mathcal{L}} \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Dans ce qui suit, les modes stable, instable oscillant et instable direct seront discutés.

### 5.3.3.1 Cavité horizontale : $\Phi=0^\circ$ ou $180^\circ$

Dans le cas d'une cavité horizontale, le problème de stabilité existe pour n'importe quelles valeurs des paramètres  $Ra_S$  ou  $N$ . Du point de vue mathématique, d'après l'équation (5.36), l'échange de stabilité se produit quand le paramètre  $p$  s'annule. Ainsi, le nombre de Rayleigh thermique supercritique peut être déduit de l'expression  $p_0 = 0$ . On obtient ainsi de l'équation (5.37) :

$$Ra_{TC}^{sup} = -Ra_S + Ra_0^{sup} \quad (5.39)$$

En général, le paramètre  $p$  est un nombre complexe. Il peut être décomposé comme suit :

$$p = p_r + i p_i \quad (5.40)$$

où  $p_r$  et  $p_i$  sont respectivement la partie réelle et imaginaire de  $p$ . La surstabilité survient quand la partie réelle de  $p$  devient nulle ( $p_r = 0$ ). En substituant la relation

(5.40) dans l'équation (5.36) et après avoir séparé la partie imaginaire de la partie réelle, on trouve les deux expressions de  $p_i$  suivantes :

$$p_i^2 = -\frac{\gamma}{Le}(\gamma_\psi Pr p_1 - \gamma) \quad (5.41)$$

et

$$p_i^2 = -\frac{\gamma^2 \gamma_\psi Pr}{p_2} p_0 \quad (5.42)$$

En égalisant les équations (5.41) et (5.42), nous obtenons l'expression du nombre de Rayleigh thermique critique correspondant au seuil du régime surstable :

$$Ra_{TC}^{sur} = -\frac{\gamma + \gamma_\psi Pr Le}{Le^2(\gamma + \gamma_\psi Pr)} Ra_S + \frac{(Le + 1)(\gamma + \gamma_\psi Pr Le)}{Le^2 \gamma_\psi Pr} Ra_0^{sup} \quad (5.43)$$

Dans ce régime, l'amplitude de la perturbation imposée augmente avec le temps en oscillant. Les parties réelle et imaginaire de  $p$  sont alors toutes les deux positives.

Il reste maintenant à déterminer la valeur du nombre de Rayleigh thermique oscillant,  $Ra_{TC}^{osc}$ , qui marque la transition du régime oscillant surstable vers le régime direct. Ici le mot direct signifie que l'amplitude de la perturbation augmente d'une façon exponentielle avec le temps. Cette transition se produit quand  $p_i = 0$  (c'est-à-dire  $p = p_r$ ). À partir de l'équation (5.36),  $Ra_{TC}^{osc}$  peut être calculé à partir de :

$$Le p_r^3 + p_2 p_r^2 - \gamma(\gamma_\psi Pr p_1 - \gamma) p_r - \gamma^2 \gamma_\psi Pr p_0 = 0 \quad (5.44)$$

où

$$p_r = \frac{1}{3Le} \left( -p_2 + \sqrt{p_2^2 + 3 Le \gamma (\gamma_\psi Pr p_1 - \gamma)} \right) \quad (5.45)$$

Au-dessus de  $Ra_T = Ra_{TC}^{osc}$ , l'amplitude de l'écoulement croît d'une façon monotone. Pour cette situation, la partie réelle de  $p$  est positive alors que sa partie imaginaire est nulle.

Pour des valeurs données de  $Ra_S$ ,  $Le$ ,  $Pr$ ,  $A$  et  $\kappa$ , la valeur de  $Ra_{TC}^{osc}$  peut être obtenue numériquement à partir des expressions (5.44) en utilisant, par exemple, la méthode de la sécante.

Dans le plan  $Ra_T - Ra_S$ , les trois nombres de Rayleigh critiques, donnés par (5.39), (5.43) et (5.44) se rencontrent en un point ayant les coordonnées suivantes :

$$Ra_T = \frac{\gamma_\psi Pr Le + \gamma}{\gamma_\psi Pr(Le - 1)} Ra_0^{sup}, \quad Ra_S = -\frac{\gamma_\psi Pr + \gamma}{\gamma_\psi Pr(Le - 1)} Ra_0^{sup} \quad (5.46)$$

Ce point d'intersection nous donne les critères pour l'existence du régime surstable. Ainsi, à partir des expressions (5.46) nous pouvons déduire que ce régime existe lorsque :

$$\left. \begin{array}{l} Le > 1 \\ Ra_S < -\frac{\gamma_\psi Pr + \gamma}{\gamma_\psi Pr(Le - 1)} Ra_0^{sup} \\ Ra_{TC}^{sur} < Ra_T < Ra_{TC}^{osc} \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

### 5.3.3.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$

Pour le cas d'une cavité inclinée, le problème de stabilité existe seulement lorsque  $N = -1$ . Le nombre de Rayleigh supercritique,  $Ra_{TC}^{sup}$ , est alors donné par :

$$Ra_{TC}^{sup} = \frac{Ra_0^{sup}}{1 - Le} \quad (5.48)$$

Le seuil de la convection oscillante ou surstable peut être déduit de la relation (5.43) en posant  $Ra_S = -LeRa_T$ . On obtient alors :

$$Ra_{TC}^{sur} = -\frac{(Le + 1)(\gamma + \gamma_\psi Pr Le)(\gamma + \gamma_\psi Pr)}{Le \gamma \gamma_\psi Pr} Ra_{TC}^{sup} \quad (5.49)$$

À partir des équations (5.48) et (5.49), on observe que le signe de  $Ra_{TC}^{sur}$  est toujours opposé à celui de  $Ra_{TC}^{sup}$ . De plus, nous constatons que  $Ra_{TC}^{sup} < |Ra_{TC}^{sur}|$ , puisque tous les paramètres contenus dans la fraction de (5.49) sont positifs. Nous pouvons donc conclure que, pour une cavité inclinée avec  $N = -1$ , le régime oscillant surstable n'existe pas. La relation (5.48) montre que le nombre de Rayleigh supercritique est infini lorsque  $Le = 1$  et que le fluide est inconditionnellement stable.

Nous rappelons que pour une cavité inclinée avec  $N = -1$ , comme il a été déjà démontré au Chapitre IV, il existe un nombre de Rayleigh souscritique qui caractérise le seuil de la convection souscritique.

### 5.3.3.3 Algorithme de calcul

La procédure de calcul des profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  et des constantes  $Ra^{sup}$ ,  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$  est donnée par l'algorithme suivant :

1. Choisir un élément fini cubique de haute précision de Hermite.
2. Calculer les éléments des matrices  $[B]$ ,  $[K_\psi]$ ,  $[K_\theta]$ ,  $[K_\phi]$ ,  $[L]$  et  $[M]$ .
3. Calculer la matrice  $[E]$ , Éq. (5.24).
4. Calculer les valeurs et les vecteurs propres  $\lambda_i$  et  $\{F\}_i$ .
5. Chercher la valeur minimale et maximale des valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.
6. Calculer la valeur supercritique de  $Ra^{sup}$ , Éq. (5.30).
7. Calculer le profil de la fonction  $G(x, y)$ , Éq. (5.27).
8. Calculer les constantes  $B$ ,  $K_\psi$ ,  $K$ ,  $L$  et  $M$ , Éq. (5.35).
9. Recalculer la valeur de  $Ra^{sup}$ , Éq. (5.38), et la comparer avec celle déterminée en 6.
10. Calculer les valeurs de  $\gamma$  et  $\gamma_\psi$ .
11. Tracer les profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  au besoin.

### 5.3.3.4 Validation

La méthode numérique décrite ci-dessus est générale et s'applique quel que soit l'angle d'inclinaison, le rapport de forme de la cavité et le type de conditions imposées

aux limites. Pour la validation de la procédure, nous avons considéré le cas d'une cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ) infiniment longue dont les parois horizontales sont libres et maintenues à des températures et concentrations constantes ( $\kappa = 0$ ). La solution exacte de la stabilité linéaire pour ce problème est rapportée par Rayleigh 1916, Chandrasekhar 1961, Nield 1967, Huppert et Moore 1976 et Platten et Legros 1984. L'expression analytique des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  est donnée par :

$$F(x, y) = \cos(\pi x) \cos(r\pi y) \quad G(x, y) = \cos(\pi x) \sin(r\pi y) \quad (5.50)$$

où  $r = 1/\sqrt{2}$  est la longueur d'onde.

En utilisant la méthode de Galerkin, les valeurs exactes des constantes  $\gamma_\psi$ ,  $\gamma$  et  $Ra^{sup}$ , Éq. (5.38), sont données par :

$$\gamma_\psi = \gamma = \frac{3\pi^2}{2} \simeq 14.80441, \quad Ra^{sup} = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657.51136 \quad (5.51)$$

Avec un maillage de  $(16 \times 16)$  éléments, la présente procédure numérique nous donne les valeurs suivantes :

$$\gamma_\psi = 14.80442, \quad \gamma = 14.80441, \quad Ra^{sup} = 657.51212 \quad (5.52)$$

qui sont en bon accord avec celles déterminées analytiquement en (5.51).

### 5.3.3.5 Effet du maillage

Dans la présente étude, le domaine de calcul est discréteisé avec un maillage uniforme. La précision des résultats dépend évidemment de la finesse du maillage. En utilisant différents maillages, des tests numériques ont été faits pour une cavité horizontale dont les parois horizontales sont maintenues à des températures et concentrations constantes ( $\kappa = 0$ ). Les résultats numériques (voir Tableau 5.2) sont comparés à la solution exacte  $27\pi^4/4$  obtenue pour  $A = \sqrt{2}$ .

**Tableau 5.2 : Effet du maillage sur la précision de la valeur de  $Ra^{sup}$  pour  $A = 2^{1/2}$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ .**

$N_{ex} \times N_{ey}$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$12 \times 12$	$16 \times 16$	Rayleigh 1916
$Ra^{sup}$	657.70992	657.52352	657.51376	657.51212	657.51136
Error (%)	$3.02 \times 10^{-2}$	$1.85 \times 10^{-3}$	$3.64 \times 10^{-4}$	$1.15 \times 10^{-4}$	

D'après ces résultats, nous pouvons montrer que l'erreur varie linéairement avec la taille des éléments ( $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ) à la puissance quatre ( $erreur \sim a h^4$ ). Par extrapolation, la valeur de  $Ra^{sup}$  correspondant à une taille nulle des éléments (c'est-à-dire  $h \rightarrow 0$ ) est égale à 657.5113645 qui est proche de la valeur exacte 657.51136447. En se basant sur les essais numériques, nous avons adopté un maillage de  $10 \times 10$  pour des cavités ayant un rapport de forme proche de l'unité. Cependant, pour  $A \simeq 8$ , un maillage de  $10 \times 35$  a été choisi lorsque la structure de l'écoulement est multicellulaire.

Dans le cas d'une cavité verticale élancée ( $A = \infty$ ), l'effet du maillage sur la longueur d'onde  $A_C$  et sur la valeur supercritique  $Ra^{sup}$  est illustré au tableau 5.3. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Ghorayeb et Mojtabi 1997.

### 5.3.4 Stabilité non linéaire : cavité horizontale

La théorie de la stabilité linéaire permet de prédire le seuil de la convection, la forme des cellules de convection et leur évolution dans le temps juste au début de la convection. Cette méthode cependant n'indique rien sur l'amplitude de l'écoulement

**Tableau 5.3 :** Effet du maillage sur la longueur d'onde,  $A_C$ , et la valeur supercritique,  $Ra^{sup}$ , pour  $Le < 1$ ,  $A = \infty$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

Maillage	$2 \times 5$	$4 \times 10$	$8 \times 20$	$12 \times 30$
$A_C \pm 10^{-4}$	2.4081	2.4811	2.4816	2.4817
$Ra^{sup}$	9080.16	6597.65	6514.28	6510.06

et n'est pas en mesure de prédire l'existence possible de la convection souscritique à amplitude finie. Une analyse de la stabilité non linéaire, au voisinage du point de bifurcation supercritique, est donc nécessaire pour compléter l'étude.

Dans le passé, plusieurs auteurs comme Rudraiah et al. 1982, Platten et Legros 1984, Ahlers et Lücke 1987 et Lhost 1990 ont utilisé le modèle de Lorenz pour étudier la convection à amplitude finie. Lorsque les parois horizontales de la cavité sont libres et maintenues à des températures constantes, il est possible de développer les profils des fonctions de courant,  $\psi$ , et de la température,  $\theta$ , et de la concentration,  $\phi$ , en séries de Fourier. Selon ces auteurs, un terme de Fourier pour la fonction de courant et deux termes pour la température sont suffisants pour une description approximative du phénomène. En général, les premiers termes de Fourier utilisés pour la fonction de courant, la température et la concentration correspondent aux profils obtenus au point de l'échange de la stabilité. Comme ces profils ne sont pas toujours faciles à déterminer, spécialement lorsque les parois de la cavité sont rigides, plusieurs auteurs, entre autres Lhost 1990, ont utilisé des fonctions approximatives satisfaisant les conditions aux frontières du problème.

Dans la présente étude, les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration au seuil de la convection sont déterminés numériquement (voir

section 5.2.2). Les profils de  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  peuvent être approximés par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \psi(t, x, y) = \psi_0(t) F(x, y) \\ \theta(t, x, y) = \theta_0(t) G(x, y) + \theta_1(t) h(x) \\ \phi(t, x, y) = \phi_0(t) G(x, y) + \phi_1(t) h(x) \end{array} \right\} \quad (5.53)$$

où  $\psi_0(t)$ ,  $\theta_0(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\phi_0(t)$  et  $\phi_1(t)$  sont fonctions du temps,  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont des fonctions d'espace décrivant les profils de  $\psi$ ,  $\theta$  et de  $\phi$  au seuil de la convection et  $h(x)$  est une fonction satisfaisant les conditions aux frontières de la température et de concentration. Ainsi, selon Platten et Legros 1984, Ahlers et Lücke 1987 et Lhost 1990, la fonction  $h(x)$ , est définie par :

$$h(x) = \sin(2r_x \pi x) \quad (5.54)$$

pour des conditions aux frontières de type Dirichlet ( $\kappa = 0$ ) et par :

$$h(x) = \sin(r_x \pi x) \quad (5.55)$$

pour des conditions aux frontières de type Neuman ( $\kappa = 1$ ), où  $r_x = 1/A_x$ .

En substituant (5.53) dans les équations de perturbation (5.5), en prenant  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  et  $h(x)$  comme fonctions admissibles et en appliquant la méthode de Galerkin, nous obtenons les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\mathcal{M}_\psi \frac{d\psi_0}{dt} + \mathcal{K}_\psi \psi_0 = \mathcal{B} (Ra_T \theta_0 + \frac{Ra_S}{Le} \phi_0) \quad (5.56)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} \frac{d\theta_0}{dt} - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 - \mathcal{L}_1 \psi_0 \theta_1 = -\mathcal{K} \theta_0 \\ \mathcal{M}_1 \frac{d\theta_1}{dt} - \mathcal{L}_2 \psi_0 \theta_0 = -\mathcal{K}_1 \theta_1 \end{array} \right\} \quad (5.57)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} \frac{d\phi_0}{dt} - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 - \mathcal{L}_1 \psi_0 \phi_1 = -\frac{\mathcal{K}}{Le} \phi_0 \\ \mathcal{M}_1 \frac{d\phi_1}{dt} - \mathcal{L}_2 \psi_0 \phi_0 = -\frac{\mathcal{K}_1}{Le} \phi_1 \end{array} \right\} \quad (5.58)$$

où  $B$ ,  $K_\psi$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_\psi$ ,  $M$  et  $M_1$  sont des scalaires obtenus à partir des intégrales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} B &= \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial y} F \, d\Omega, & K &= \int_{\Omega} (\nabla G)^2 \, d\Omega, & K_\psi &= \int_{\Omega} (\nabla^2 F)^2 \, d\Omega \\ K_1 &= \int_{\Omega} (\nabla h)^2 \, d\Omega, & L &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} G \, d\Omega, & L_1 &= \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dh}{dx} G \, d\Omega \\ L_2 &= \int_{\Omega} J(F, G) h \, d\Omega, & M_\psi &= \int_{\Omega} (\nabla F)^2 \, d\Omega, & M &= \int_{\Omega} G^2 \, d\Omega \\ M_1 &= \int_{\Omega} h^2 \, d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

#### 5.3.4.1 Solution permanente

Maintenant, nous considérons la solution permanente des équations (5.56)-(5.58). Après avoir posé les dérivées temporelles égales à zéro, la solution de (5.57) et de (5.58) en termes de  $\theta_0$  et  $\phi_0$  est :

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{L \psi_0 / A_x}{K + \frac{L_2 L_1}{K_1} \psi_0^2} \\ \phi_0 &= \frac{L L e \psi_0 / A_x}{K + \frac{L_2 L_1}{K_1} L e^2 \psi_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

En substituant les expressions de  $\theta_0$  et  $\phi_0$  dans (5.56) et après simplification, il s'ensuit que :

$$\psi_0 (L e^4 \psi_0^4 - 2a L e^2 d_1 \psi_0^2 - a^2 d_2) = 0 \quad (5.61)$$

où

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= Ra_T^0 Le^2 + Ra_S^0 - (Le^2 + 1), & Ra_T^0 &= \frac{Ra_T}{Ra_0^{sup}} \\ d_2 &= 4Le^2(Ra_T^0 + Ra_S^0 - 1), & Ra_S^0 &= \frac{Ra_S}{Ra_0^{sup}} \\ Ra_0^{sup} &= A_x Ra^{sup}, & Ra^{sup} &= \frac{\kappa \psi \mathcal{K}}{BL} \\ a &= \frac{\kappa \mathcal{K}_1}{2\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Résolvant (5.61) pour  $\psi_0$ , on obtient :

$$\psi_0 = 0 \quad (5.63)$$

ou :

$$\psi_0 = \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left( d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right)^{1/2} \quad (5.64)$$

Il est à noter que la forme de l'expression de  $\psi_0$  est indépendante des conditions aux limites, du rapport de forme de la cavité et de la forme des fonctions  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  et  $h(x)$ . Seuls les paramètres  $a$  et  $Ra^{sup}$  en dépendent.

D'après les relations (4.57) et (4.64), nous constatons que la solution, dans le cas d'une cavité infiniment longue ( $A \gg 1$ ), soumise à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ), est une solution particulière de la solution générale résultant de l'analyse de la stabilité non linéaire. Pour cette situation, l'expression de  $\psi_0$ , Éq. (5.64), est identique aux expressions de  $\Psi_0$ , Éq. (4.57) et (4.64). Donc, en général, nous pouvons conclure que le seuil de la convection souscritique peut être exprimé par :

$$\left. \begin{aligned} Ra_{TC}^{sous} &= \frac{(Le^2 - 1)}{Le(Le + N)^2} \left[ (Le - N) + 2\sqrt{-NLe} \right] Ra_0^{sup} & (a) \\ \text{ou bien} \\ Ra_{TC}^{sous} &= Le^{-2} \left[ (Le^2 - 1)Ra_0^{sup} - Ra_S + 2\sqrt{-(Le^2 - 1)Ra_0^{sup} Ra_S} \right] & (b) \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

et les conditions d'existence de la convection souscritique par :

$$\left. \begin{array}{l} Ra_S < 0 \\ Le > \sqrt{\frac{Ra_S - Ra_0^{sup}}{Ra_S}} \end{array} \right\} \quad (5.66)$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la section 4.1.4.

#### 5.3.4.2 Stabilité linéaire transitoire : $p \neq 0$

Les résultats de la stabilité linéaire (5.39)-(5.44) peuvent être déduits à partir des équations (5.56)-(5.58) en posant :

$$\psi_0(t) = \psi_0 e^{pt}, \quad \theta_0(t) = \theta_0 e^{pt}, \quad \phi_0(t) = \phi_0 e^{pt}, \quad \theta_1(t) = \phi_1(t) = 0 \quad (5.67)$$

#### 5.3.5 Résultats et discussion

Dans cette partie, nous discutons de l'influence des paramètres de contrôle (à savoir le rapport de forme,  $A$ , et l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ , de la cavité et le type de conditions aux frontières thermiques et solutales,  $\kappa$ ) sur la structure de l'écoulement au seuil de la convection et sur la constante  $Ra^{sup}$  correspondant au nombre de Rayleigh supercritique. Les résultats de la convection souscritique sont aussi présentés. Nous commençons d'abord par le cas où les parois horizontales de la cavité sont rigides et maintenues à des températures et concentrations constantes ( $\kappa = 0$ ).

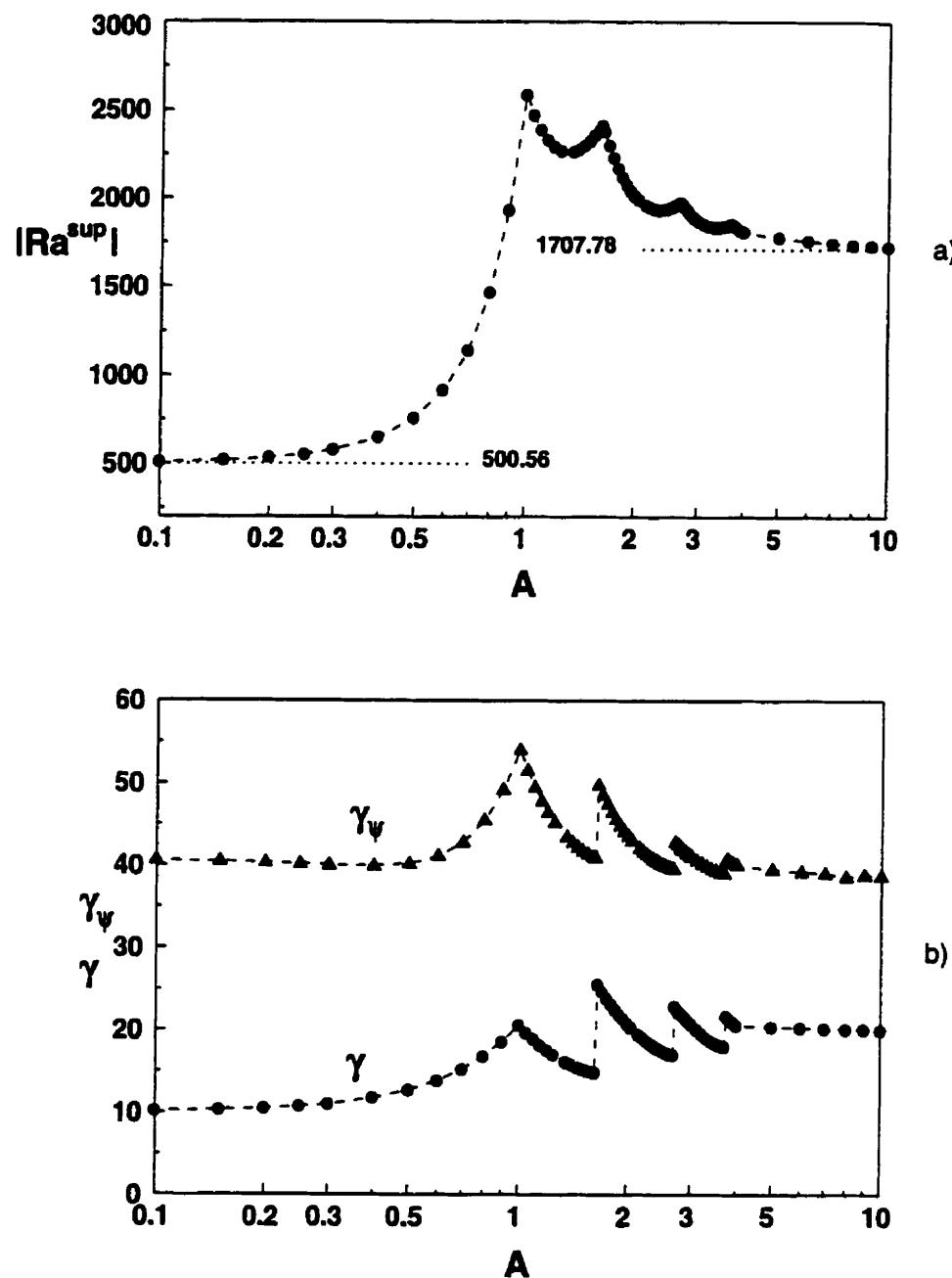
##### 5.3.5.1 Cavité horizontale : $\Phi = 0^\circ$ ou $= 180^\circ$

Les résultats numériques sont obtenus pour un rapport de forme de la cavité,  $A$ , variant de 0.1 à 10 et pour  $A = \infty$ . Le domaine de calcul est discréteisé avec

un maillage variant de  $20 \times 10$  à  $10 \times 40$  selon la valeur du rapport de forme  $A$  et la structure de l'écoulement. Les résultats numériques sont présentés en termes des constantes  $Ra^{sup}$ ,  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$  en fonction de  $A$  et  $\Phi$  sous la forme de diagrammes de stabilité et de bifurcation.

La figure 5.2a illustre l'effet du rapport de forme de la cavité sur la constante supercritique  $Ra^{sup} = 1/\lambda_m$  pour  $NLe > -1$ . D'après l'équation (5.30), nous rappelons que lorsque  $NLe < -1$ , la valeur de la constante  $Ra^{sup} = 1/\lambda_1$  devient infinie. Pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ), les résultats numériques obtenus avec un maillage de  $16 \times 16$  montrent que  $Ra^{sup} = 2585.08$  (pour  $NLe > -1$ ). Ce résultat est en bon accord avec celui obtenu par Platten et Legros 1984 dans le cas de la simple diffusion. La constante  $Ra^{sup}$ , d'un autre côté, tend vers la valeur 500.56 lorsque le rapport de forme tend vers zéro et vers 1707.78 lorsqu'il tend vers l'infini. On remarque également que la constante  $Ra^{sup}$  varie d'une façon monotone avec  $A$  lorsque celui-ci est inférieur à l'unité. Ceci est dû au fait que la structure de l'écoulement reste toujours monocellulaire. Par ailleurs, lorsque  $A$  est supérieur à l'unité, la figure 5.2a montre une variation complexe de la constante  $Ra^{sup}$  en fonction de  $A$ . Ces résultats ont déjà été rapportés dans le passé par plusieurs auteurs (voir, par exemple, Platten et Legros 1984). À chaque pic, le nombre de cellules de convection augmente de  $n$  à  $n + 1$ . Dans le cas d'une cavité infiniment longue ( $A \gg 1$ ), les résultats numériques obtenus avec des conditions de périodicité indiquent que la longueur d'onde de la structure de l'écoulement est  $A_C = 2.016$  ( $2\pi/A_C = 3.1167$ ) et que la constante supercritique correspondante est  $Ra^{sup} = 1707.78$ . Ces résultats, obtenus avec un maillage de  $16 \times 32$ , sont en bon accord avec ceux obtenus par Reid et Haris 1958 ( $Ra^{sup} = 1707.765$ ,  $A_C = 3.12$ ), Chandrasekhar 1961 ( $Ra^{sup} = 1707.762$ ,  $A_C = 3.117$ ) et Platten et Legros 1984 ( $Ra^{sup} = 1707.762$ ,  $A_C = 3.117$ ).

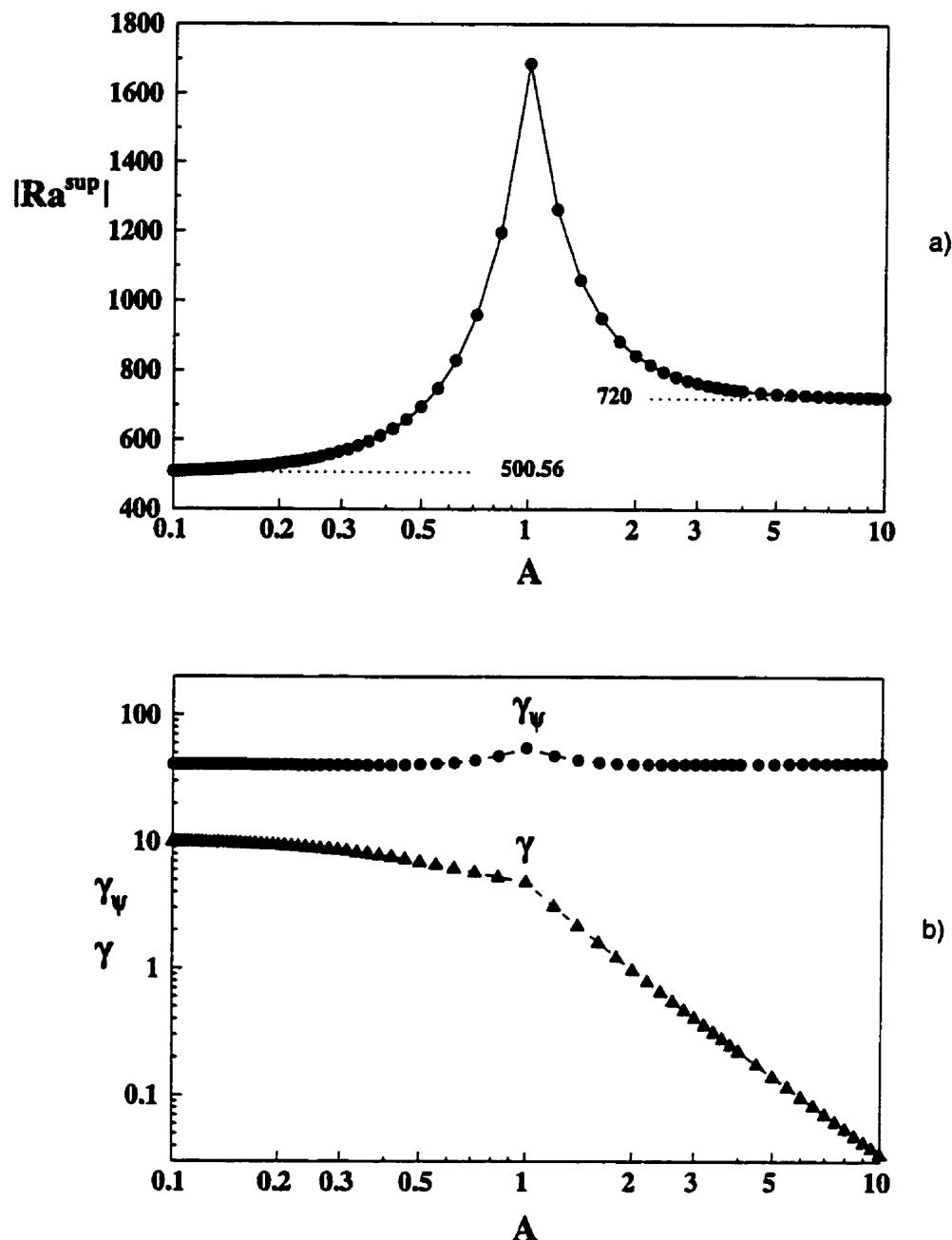
La figure 5.2b présente les variations des constantes  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$ , Éq. (5.38), en



**Figure 5.2 :** Effet du rapport de forme de la cavité sur : a) la constante  $Ra^{sup}$ , b) les constantes  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$  pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

fonction du rapport de forme de la cavité. Ces deux constantes permettent d'étudier d'une façon quantitative la stabilité transitoire du fluide (voir l'équation (5.36)). Les résultats indiquent que la constante  $\gamma_\psi$  est toujours supérieure à  $\gamma$ . L'évolution de ces deux constantes est monotone lorsque  $A < 1$  et elles tendent vers des valeurs constantes quand  $A \rightarrow 0$ . Pour  $A > 1$ , les constantes diminuent graduellement avec  $A$  jusqu'au point  $A \simeq 1.625$  où un saut brusque est observé. Ce saut correspond à un changement dans la structure de l'écoulement, le nombre de cellules augmentant de un à deux. Ce comportement se répète au fur et à mesure que la valeur du rapport de forme augmente. Toutefois, on observe que l'amplitude des sauts devient de plus en plus faible et que les deux constantes tendent vers des valeurs constantes. Les résultats montrent que le paramètre  $p$ , Éq. (5.36), augmente également d'une façon brusque au point de transition. Ceci implique que le taux d'accroissement de l'amplitude de l'écoulement est plus grand après le saut qu'avant le saut. Les résultats numériques indiquent que  $\gamma = 20.58$  et  $\gamma_\psi = 53.96$  pour  $A = 1$  et que  $\gamma = 19.65$  et  $\gamma_\psi = 38.40$  pour  $A = \infty$ . On observe également que la transition d'un écoulement monocellulaire à un écoulement bicellulaire se produit à  $A \simeq 1.625$ , alors que la transition d'un écoulement bicellulaire à un écoulement tricellulaire se produit à  $A \simeq 2.675$ , etc.

Dans le cas où les parois horizontales sont soumises à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ), les variations de  $Ra^{sup}$ ,  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$  en fonction de  $A$  sont présentées sur la figure 5.3. Les résultats numériques montrent qu'au seuil de la convection, la structure de l'écoulement demeure toujours nonocellulaire, et ceci indépendamment de la valeur du rapport de forme  $A$ . Pour  $A = 1$ , nous avons obtenus  $Ra^{sup} = 1684.58$ ,  $\gamma = 4.79$  et  $\gamma_\psi = 55.15$  avec un maillage  $10 \times 10$ . À partir de  $A = 1$ , la figure 5.3a et b montre que  $Ra^{sup}$  décroît asymptotiquement vers 500.56 lorsque  $A$  diminue, et vers 720 lorsque  $A$  augmente. Cette tendance asymptotique est en parfait accord avec les prédictions de l'écoulement parallèle (voir Éq. (4.56) et (4.63)) et avec les résultats de Sparrow et al. 1964 et de Vasseur et al. 1989. Par

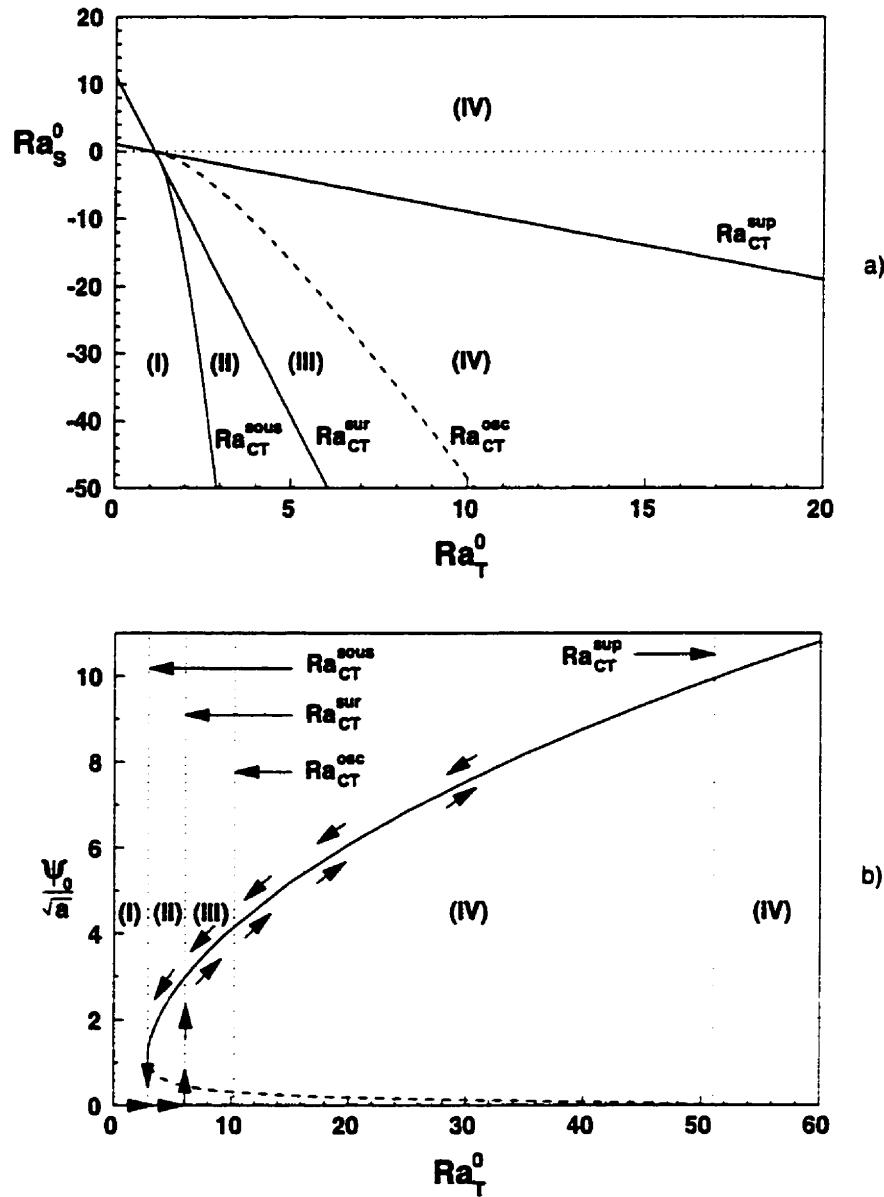


**Figure 5.3 :** Effet du rapport de forme de la cavité sur : a) la constante  $Ra^{sup}$ , b) les constantes  $\gamma_\psi$  et  $\gamma$ , pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

ailleurs,  $\gamma_\psi$  demeure presque constante lorsque  $A$  varie, alors que  $\gamma$  décroît vers zéro lorsque  $A$  augmente. Cela montre que la fréquence des oscillations tend vers zéro lorsque  $A$  tend vers des grandes valeurs.

Le diagramme de stabilité et la courbe de bifurcation, dans le cas d'une cavité carrée soumise à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ), sont illustrés sur la figure 5.4 . Les résultats correspondants à des conditions aux frontières isothermes et isosolutales sont similaires et ne sont donc pas présentés ici. La figure 5.4a présente le diagramme de stabilité pour  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$  et  $\kappa = 1$ . Sur la figure nous distinguons quatre régions qui sont délimitées par les courbes correspondant aux expressions de  $Ra_{TC}^{sous}$  (Éq. (5.65)),  $Ra_{TC}^{sur}$  (Éq. (5.43)),  $Ra_{TC}^{osc}$  (Éq. (5.44)) et  $Ra_{TC}^{sup}$  (Éq. (5.39)). Dans la première région (I) ( $Ra_T < Ra_{TC}^{sous}$  et  $Ra_T < Ra_{TC}^{sup}$ ), le fluide est inconditionnellement stable. La partie réelle du paramètre  $p$  est négative, ce qui implique que toute fluctuation, grande ou petite, imposée au système est toujours amortie et que le fluide retourne au repos. La deuxième région (II) ( $Ra_{TC}^{sous} < Ra_T < Ra_{TC}^{sur}$ ) correspond au régime de la convection souscritique dont le seuil se produit à un nombre de Rayleigh inférieur au nombre de Rayleigh surstable  $Ra_{TC}^{sur}$ . Dans cette région, la stabilité linéaire prédit que toutes les fluctuations arbitrairement petites sont amorties dans le temps. Cependant la théorie de la stabilité non linéaire indique que le fluide est instable aux grandes fluctuations. Le régime oscillant surstable est représenté par la région (III) ( $Ra_{TC}^{sur} < Ra_T < Ra_{TC}^{osc}$ ). Dans cette région, l'état de repos du fluide est instable en présence de fluctuations, aussi petites soient-elles. L'analyse de la stabilité linéaire indique que toutes les fluctuations hydrodynamiques oscillent et que leurs amplitudes augmentent avec le temps. La quatrième région (IV) ( $Ra_T > Ra_{TC}^{osc}$ ) ou  $Ra_T > Ra_{TC}^{sup}$ ) désigne le régime de la convection directe. Dans cette région, la théorie de la stabilité linéaire indique que l'amplitude des perturbations augmente d'une façon monotone dans le temps.

La figure 5.4b présente l'évolution de l'amplitude de l'écoulement,  $\psi_0$ , en



**Figure 5.4 :** a) Diagramme de stabilité pour  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ , b) variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de  $Ra_T^0$  pour  $Ra_S^0 = -50$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

fonction de  $Ra_T^0$  pour  $Ra_S^0 = -50$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 1$  et  $\kappa = 1$ . Pour ces valeurs des paramètres, nous avons  $Ra_{TC}^{sous} = 2.90 \times Ra^{sup}$ ,  $Ra_{TC}^{sur} = 6.05 \times Ra^{sup}$ ,  $Ra_{TC}^{osc} = 10.22 \times Ra^{sup}$  et  $Ra_{TC}^{sup} = 51 \times Ra^{sup}$  où  $Ra^{sup} = 1684.6$ . La solution convective stable (trait plein) et la solution convective instable (pointillés) sont indiquées sur le graphe. Pour les valeurs de  $Ra_S^0$  et de  $Le$  données, la bifurcation de la solution convective de l'état de repos est souscritique. La boucle d'hystérisis est indiquée sur le graphe par des flèches. Ces dernières indiquent le comportement de la solution du problème quand  $Ra_T^0$  augmente de zéro à 60 et diminue de 60 à zéro.

### 5.3.5.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$

Dans ce qui suit, nous allons étudier les effets des paramètres de contrôle sur le nombre de Rayleigh supercritique et sur la structure de l'écoulement au seuil de la convection.

#### *Valeurs et vecteurs propres*

Comme il a été discuté antérieurement, la solution du problème donne  $m$  valeurs propres et  $m$  vecteurs propres. Le nombre  $m$  est lié directement au nombre total d'éléments finis dans le domaine de calcul. Du point de vue théorique, ce nombre est égal à l'infini puisque le problème admet une infinité de solutions. Nous avons indiqué ci-dessus que la valeur maximale et minimale des valeurs propres et les vecteurs propres correspondants représentent les nombres de Rayleigh supercritiques et les formes des structures de l'écoulement convectif au seuil de la convection. De façon à comprendre ce que représentent les autres valeurs et vecteurs propres, c'est-à-dire  $\lambda_i$  et  $\{F\}_i$ , avec  $i = 2, m - 1$ , nous avons considéré le cas d'une cavité carrée,  $A = 1$ , avec des parois isothermes et isosolutales ( $\kappa = 0$ ). La solution est obtenue avec un maillage de  $20 \times 20$  ( $m = 1764$ ). Sur la figure 5.5 nous avons présenté les structures de l'écoulement correspondant aux dix premières et aux dix dernières

valeurs propres. Le seuil de la convection pour chaque structure d'écoulement  $\{F\}_i$ , est donné par :

$$Ra_{TCi}^{sup} = \frac{Ra_i^{sup}}{(1 - Le)} \quad \text{avec} \quad Ra_i^{sup} = \frac{1}{\lambda_i} \quad (5.68)$$

Les valeurs des constantes  $Ra_i^{sup}$  sont rapportées dans le tableau 5.4

La figure 5.5a'-j' représentent les structures de l'écoulement pour les dix dernières valeurs propres ( $\lambda_i$ ,  $i = m, m - 9$ ) obtenues pour le cas d'une cavité horizontale. On observe que les structures de l'écoulement correspondant aux valeurs propres sont différentes les unes des autres. Les résultats numériques indiquent que les dix premières valeurs propres sont nulles.

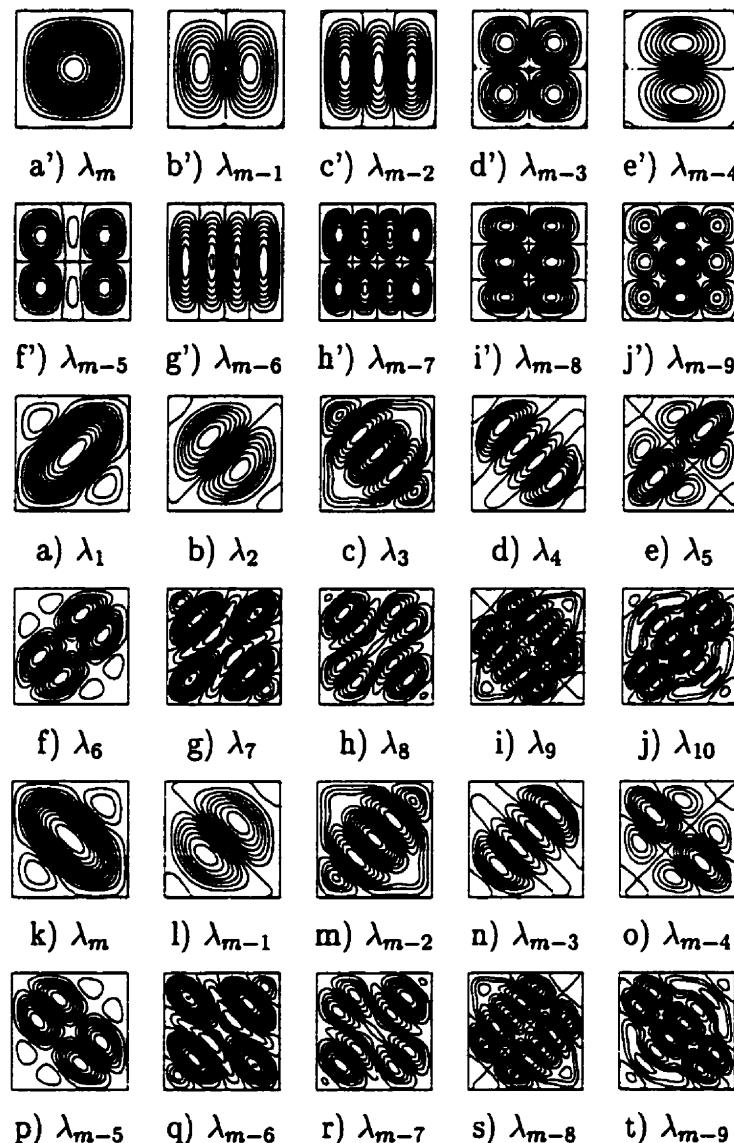
Dans le cas d'une cavité verticale, la figure 5.5a-t illustre les structures de l'écoulement correspondant aux valeurs propres  $\lambda_i$  avec  $i = 1, 10$  et  $i = m, m - 9$ , respectivement. Les résultats numériques montrent que  $\lambda_i = -\lambda_{m-i+1}$ ,  $i = 1, m/2$  et que les dix premières solutions (figure 5.5a-j) sont des images miroirs des dix dernières (figure 5.5k-t).

Dans le cas d'une cavité carrée, la figure 5.6 illustre l'effet de l'angle d'inclinaison de la cavité sur le nombre de Rayleigh supercritique et sur la structure de l'écoulement au seuil de la convection pour des conditions aux frontières de types Dirichlet ( $\kappa = 0$ ) et Neuman ( $\kappa = 1$ ). Comme le montre la figure 5.6a, lorsque  $\Phi$  varie de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , la constante  $Ra^{sup}$  (pour  $Le < 1$ ) augmente continuellement avec  $\Phi$  et tend vers l'infini lorsque ce paramètre s'approche de  $180^\circ$ . Cependant,  $|Ra^{sup}|$

**Tableau 5.4 :** Valeurs de  $Ra_i^{sup}$  pour  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $90^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

$\Phi = 0^\circ$				$\Phi = 90^\circ$			
$i$	$Ra_i^{sup} = \frac{1}{\lambda_i}$	$i$	$Ra_i^{sup} = \frac{1}{\lambda_i}$	$i$	$Ra_i^{sup} = \frac{1}{\lambda_i}$	$i$	$Ra_i^{sup} = \frac{1}{\lambda_i}$
1	$\infty$	1755	94334.99	1	-17164.75	1755	586827.60
2	$\infty$	1756	86171.29	2	-25899.59	1756	581527.41
3	$\infty$	1757	74728.67	3	-119504.59	1757	342857.92
4	$\infty$	1758	47367.78	4	-136862.41	1758	280877.44
5	$\infty$	1759	41713.50	5	-142772.70	1759	153757.88
6	$\infty$	1760	25704.36	6	-153757.88	1760	142772.70
7	$\infty$	1761	23321.38	7	-280877.44	1761	136862.41
8	$\infty$	1762	19636.40	8	-342857.92	1762	119504.59
9	$\infty$	1763	6742.55	9	-581527.41	1763	25899.59
10	$\infty$	1764	2585.04	10	-586827.60	1764	17164.75

pour  $Le > 1$  décroît de l'infini vers les valeurs correspondant à la cavité horizontale chauffée par le haut. Comme les résultats sont symétriques par rapport à  $\Phi = 90^\circ$  (c'est-à-dire que  $Ra_i^{sup}$  obtenu pour un angle  $\Phi$  et un nombre de Lewis  $Le < 1$  est égal à  $-Ra_i^{sup}$  obtenu pour  $\Phi - 180^\circ$  et  $Le > 1$ ), nous avons présenté sur la figure



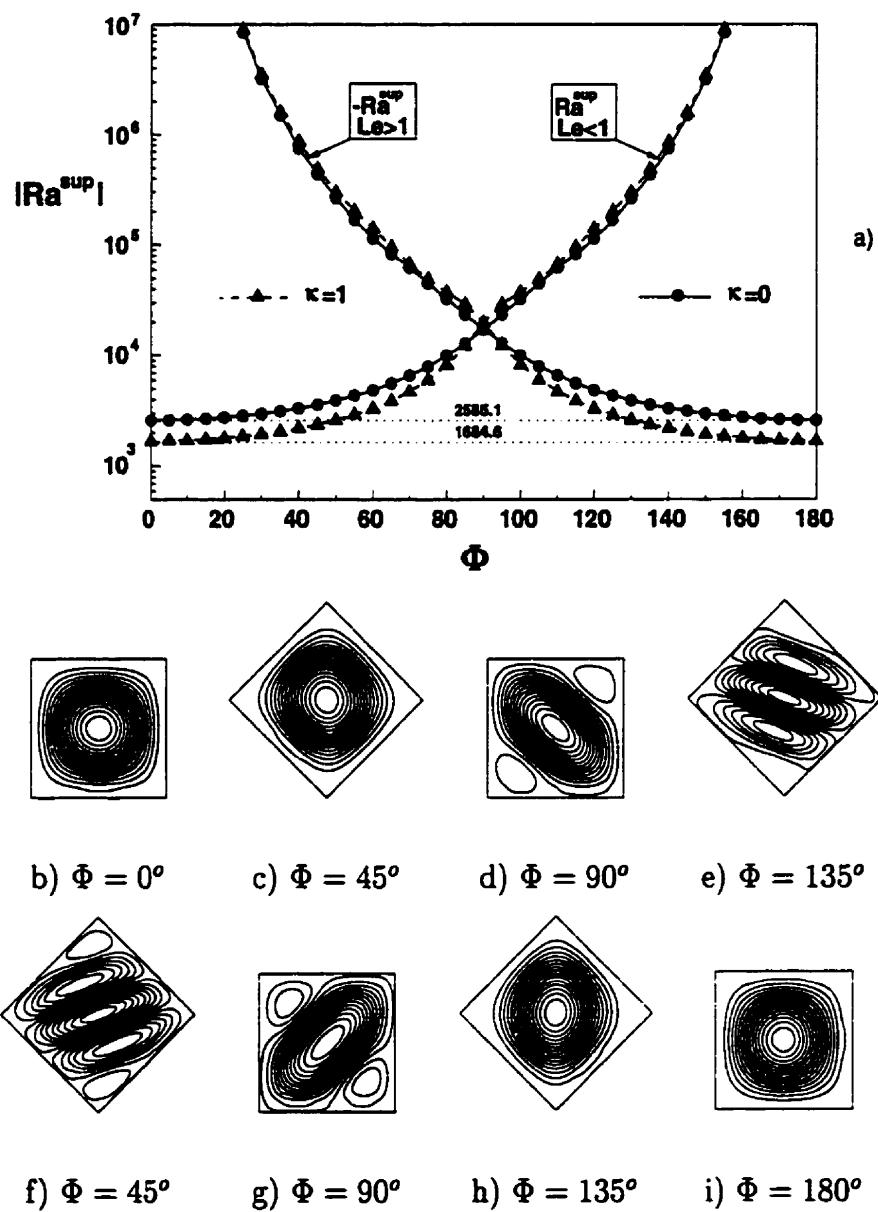
**Figure 5.5 :** Structures de l'écoulement correspondant aux valeurs propres  $\lambda_i$  obtenues pour  $A = 1$ ,  $\kappa = 0$  : a'-j')  $\Phi = 0^\circ$  et a-t)  $\Phi = 90^\circ$ .

5.6b-e seulement les structures de l'écoulement correspondant à  $\lambda_m$  pour  $\kappa = 1$  et  $\Phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  et  $135^\circ$ . Similairement, la figure 5.6f-i montre seulement les structures de l'écoulement correspondant à  $\lambda_1$  pour  $\kappa = 0$  et  $\Phi = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  et  $180^\circ$ , respectivement.

Dans le cas d'une cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ), la figure 5.6b montre que la structure de l'écoulement est monocellulaire. Cette structure reste monocellulaire lorsque  $\Phi$  varie de  $0^\circ$  à  $45^\circ$  (voir figure 5.6c). En s'approchant de la position verticale ( $\Phi = 90^\circ$ ), la cellule de convection s'incline et se rétrécit pour faire place à deux petites cellules de convection qui apparaissent aux coins supérieur droit et inférieur gauche de la cavité (voir figure 5.6d). En augmentant  $\Phi$  de  $90^\circ$  à  $135^\circ$ , la figure 5.6e montre que la structure de l'écoulement est alors composée de trois cellules de convection contra-rotatives. Au fur et à mesure que  $\Phi$  augmente au-dessus de  $135^\circ$ , les cellules de convection deviennent de plus en plus nombreuses et s'inclinent graduellement vers la position horizontale. Ces résultats correspondent à  $Le < 1$ . Un scénario inverse se produit pour le cas où  $Le > 1$ . Des solutions similaires obtenues avec  $\kappa = 0$  sont présentées sur la figure 5.6f-i pour  $\Phi = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  et  $180^\circ$  respectivement.

Les résultats concernant une cavité infiniment longue ( $A = \infty$ ) sont présentés sur la figure 5.7 et 5.8 pour  $\kappa = 1$  et  $\kappa = 0$  respectivement. Les calculs numériques ont été effectués avec un maillage de  $10 \times 20$ . Des conditions aux frontières de périodicité ont été appliquées dans la direction  $y$  lorsque la structure de l'écoulement est multi-cellulaire périodique. Les valeurs de la constante  $Ra^{sup}$  sont alors déterminées pour plusieurs valeurs de rapport de forme de la cavité. La valeur minimale de  $Ra^{sup}$  ainsi obtenue correspond alors au nombre de Rayleigh supercritique. La valeur du rapport de forme correspondante, désignée par  $A_C$ , représente la longueur d'onde de la structure de l'écoulement convectif.

La figure 5.7 illustre des résultats obtenus avec des conditions aux frontières de



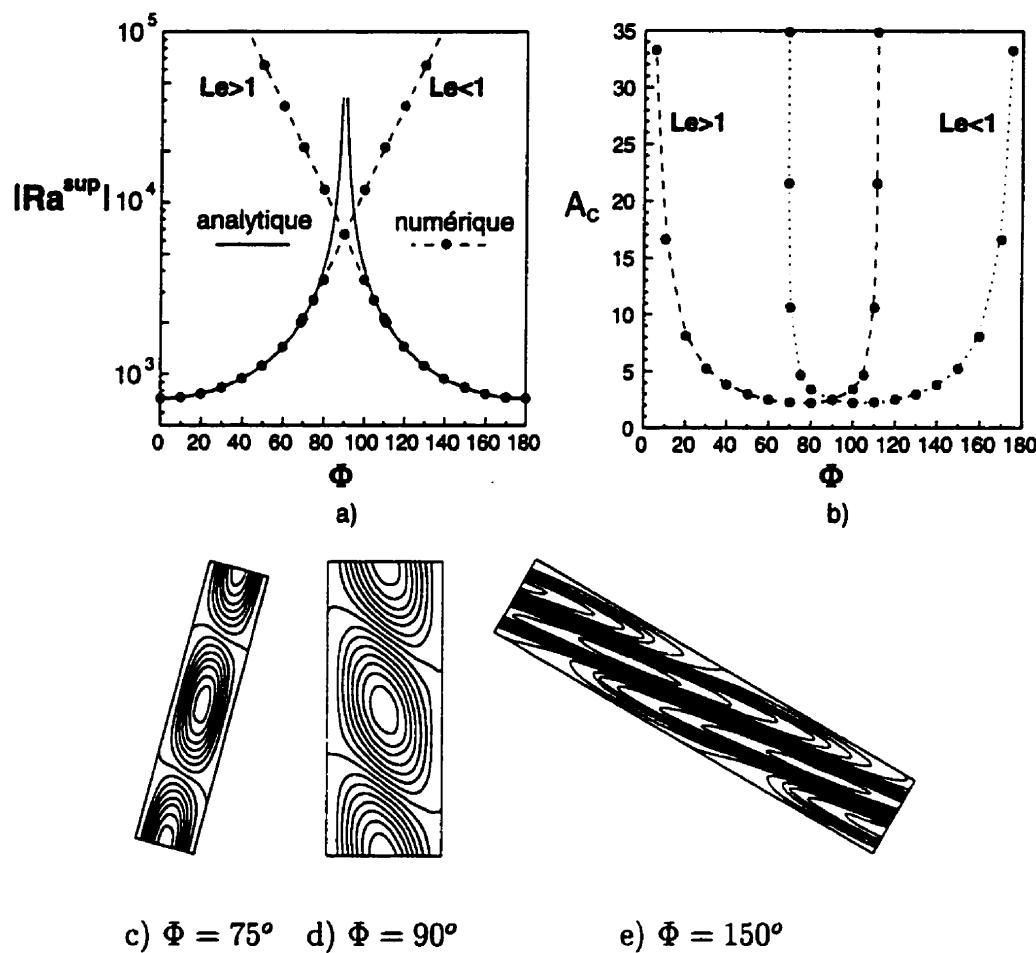
**Figure 5.6 : a)** Effet de l'inclinaison sur la constante  $Ra^{sup}$  pour  $A = 1$  et  $\kappa = 0$  et  $1$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$  et  $\kappa = 1$  : b)  $Ra^{sup} = 1684.54$ , c)  $Ra^{sup} = 2366.47$ , d)  $Ra^{sup} = 19718.19$ , e)  $Ra^{sup} = 484403.48$  et pour  $Le > 1$  et  $\kappa = 0$  : f)  $Ra^{sup} = -431929.00$ , g)  $Ra^{sup} = -17166.63$ , h)  $Ra^{sup} = -3573.72$ , i)  $Ra^{sup} = -2585.10$ .

type Neuman ( $\kappa = 1$ ). Selon les valeurs de  $\Phi$  et  $Le$ , la structure de l'écoulement peut être monocellulaire ou multicellulaire. En utilisant le concept de l'écoulement parallèle, le développement asymptotique de la solution analytique (4.4) ou (4.26) autour de  $C_T \rightarrow 0$  et  $C_S \rightarrow 0$  montre que le nombre de Rayleigh correspondant au seuil de la convection supercritique est donné par :

$$Ra_{TC}^{sup} = \frac{Ra^{sup}}{(1 - Le)} \quad \text{avec} \quad Ra^{sup} = \frac{720}{\cos \Phi} \quad (5.69)$$

Notons que la relation (5.69) est valide pour  $Le < 1$  lorsque  $0^\circ \leq \Phi < 90^\circ$  et pour  $Le > 1$  lorsque  $90^\circ < \Phi \leq 180^\circ$ . Cette solution est présentée sur la figure 5.7a en traits pleins.

Pour  $Le < 1$ , les résultats montrent que la structure de l'écoulement est monocellulaire pour  $0^\circ \leq \Phi < 68.7^\circ$ , et un bon accord est observé entre les solutions analytique et numérique (voir figure 5.7a). Au-delà de  $\Phi = 68.7^\circ$ , les résultats numériques indiquent que la structure de l'écoulement devient multicellulaire périodique. Les résultats numériques s'écartent alors de la solution analytique. Pour  $68.8^\circ \leq \Phi \leq 180^\circ$ , la variation de la longueur d'onde  $A_C$  est présentée sur la figure 5.7b. En faisant varier  $\Phi$  de  $68.7^\circ$  à  $68.8^\circ$ , cette dernière passe de l'infini à 34.85. Elle diminue ensuite à 2.25 lorsque  $\Phi$  atteint approximativement  $110^\circ$  pour s'accroître graduellement jusqu'à l'infini lorsque  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$ . Les structures de l'écoulement obtenues pour  $\Phi = 75^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $150^\circ$  sont illustrées sur la figure 5.7c-e respectivement. Au voisinage de  $\Phi = 70^\circ$  (voir figure 5.7c), l'écoulement est composé de cellules pratiquement rectangulaires, alignées dans la direction  $y$ . Pour  $\Phi = 90^\circ$ , la figure 5.7d montre que la forme des cellules de convection n'est plus rectangulaire. On observe une légère inclinaison de celles-ci par rapport à la verticale. En augmentant  $\Phi$  à  $150^\circ$ , les cellules de convection, comme le montre la figure 5.7e, s'allongent et s'imbriquent les unes dans les autres et deviennent infiniment longues lorsque  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$ . Pour des raisons de symétrie par rapport à  $\Phi = 90^\circ$ , les résultats pour  $Le > 1$  peuvent être déduits de ceux pour  $Le < 1$  (voir

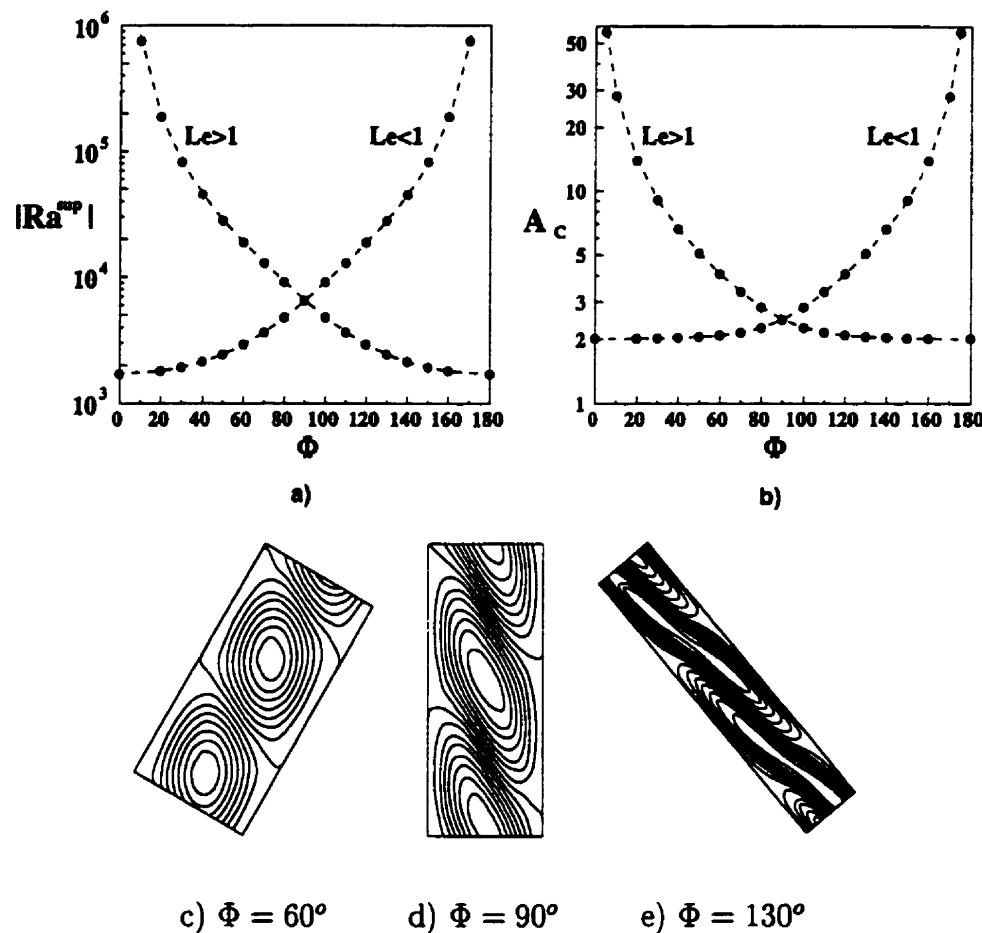


**Figure 5.7 :** Effet de l'inclinaison sur  $Ra^{sup}$ ,  $A_C$  et la structure de l'écoulement pour  $A = \infty$  et  $\kappa = 1$  : a) variation de  $Ra^{sup}$  en fonction de  $\Phi$ , b) variation de  $A_C$  en fonction de  $\Phi$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$  : c)  $A_C = 4.66$ ,  $Ra^{sup} = 2696.43$ , d)  $A_C = 2.48$ ,  $Ra^{sup} = 6511.19$ , e)  $A_C = 5.25$ ,  $Ra^{sup} = 218881.98$ .

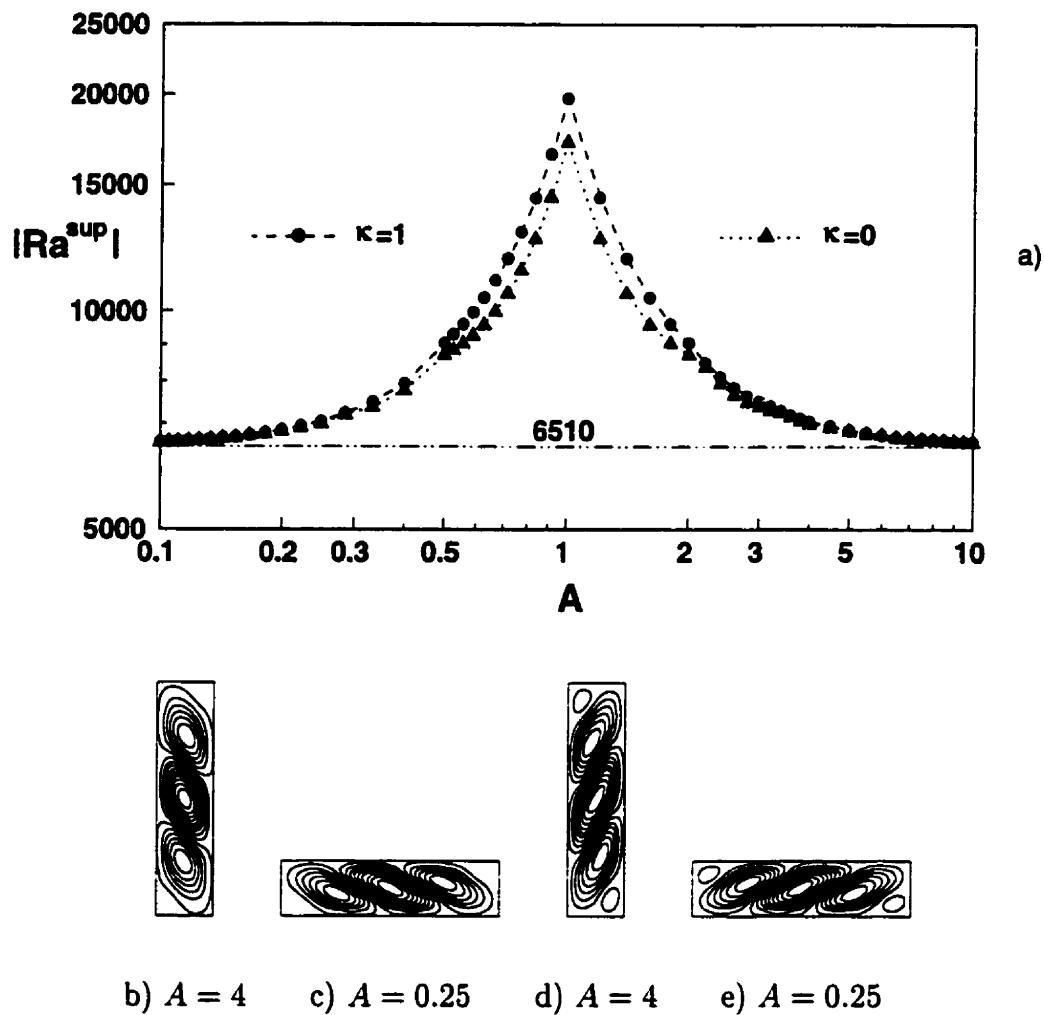
figure 5.7a et b).

Des résultats similaires obtenus avec les conditions aux frontières de Dirichlet ( $\kappa = 0$ ) sont présentés sur la figure 5.8. L'évolution de la constante  $Ra^{sup}$  en fonction de  $\Phi$  (voir figure 5.8a) est identique à celle obtenue avec les conditions de Neuman ( $\kappa = 1$ ). Cependant, les résultats numériques indiquent que la structure de l'écoulement est toujours multicellulaire périodique, indépendamment de la valeur de  $\Phi$ . La variation de la longueur d'onde  $A_C$  en fonction de  $\Phi$  est présentée sur la figure 5.8b. On observe que lorsque  $\Phi$  augmente de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , la longueur d'onde augmente de 2.016 (problème de Bénard) à l'infini. Quelques exemples de structures d'écoulements sont présentés sur la figure 5.8c-e pour  $Le > 1$  et  $\Phi = 60^\circ, 90^\circ$  et  $130^\circ$ , respectivement. On constate qu'au fur et à mesure que  $\Phi$  augmente, les cellules de convection s'allongent et s'imbriquent.

Dans le cas d'une cavité verticale,  $\Phi = 90^\circ$ , ayant un rapport de forme fini,  $0.1 \leq A \leq 10$ , l'évolution de la constante  $Ra^{sup}$  en fonction de  $A$  est présentée sur la figure 5.9a. Rappelons que la longueur caractéristique dans la présente étude est choisie comme  $\ell' = L'$  lorsque  $A \geq 1$  et  $\ell' = H'$  lorsque  $A < 1$ . Sur la figure 5.9a, on constate une symétrie par rapport à  $A = 1$ . Ainsi, les résultats numériques montrent que lorsque  $A$  augmente, la constante  $Ra^{sup}$  diminue graduellement et devient indépendante de  $A$  lorsque  $A \geq 10$ . Une évolution similaire est observée lorsque  $A$  décroît vers zéro. Des résultats typiques présentés sous forme de lignes de courant sont montrés sur la figure 5.9b-c pour  $\kappa = 1$  et  $A = 0.25, 4$  et sur la figure 5.9d-e pour  $\kappa = 0$  et  $A = 0.25, 4$ , respectivement. On constate que lorsque  $A$  augmente ou diminue, le nombre de cellules de convection augmente graduellement et s'empilent dans la direction  $y$  lorsque  $A > 1$  et dans la direction  $x$  lorsque  $A < 1$ . D'après la figure 5.9, il est clair que la valeur de  $Ra^{sup}$  obtenue pour  $A$  est identique à celle obtenue pour  $1/A$ .



**Figure 5.8 :** Effet de l'inclinaison sur  $Ra^{sup}$ ,  $A_C$  et la structure de l'écoulement pour  $A = \infty$   $\kappa = 0$  : a) variation de  $Ra^{sup}$  en fonction de  $\Phi$ , b) variation de  $A_C$  en fonction de  $\Phi$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le > 1$  : c)  $A_C = 2.09$ ,  $Ra^{sup} = 2971.10$ , d)  $A_C = 2.48$ ,  $Ra^{sup} = 6511.19$ , e)  $A_C = 5.09$ ,  $Ra^{sup} = 28036.64$ .

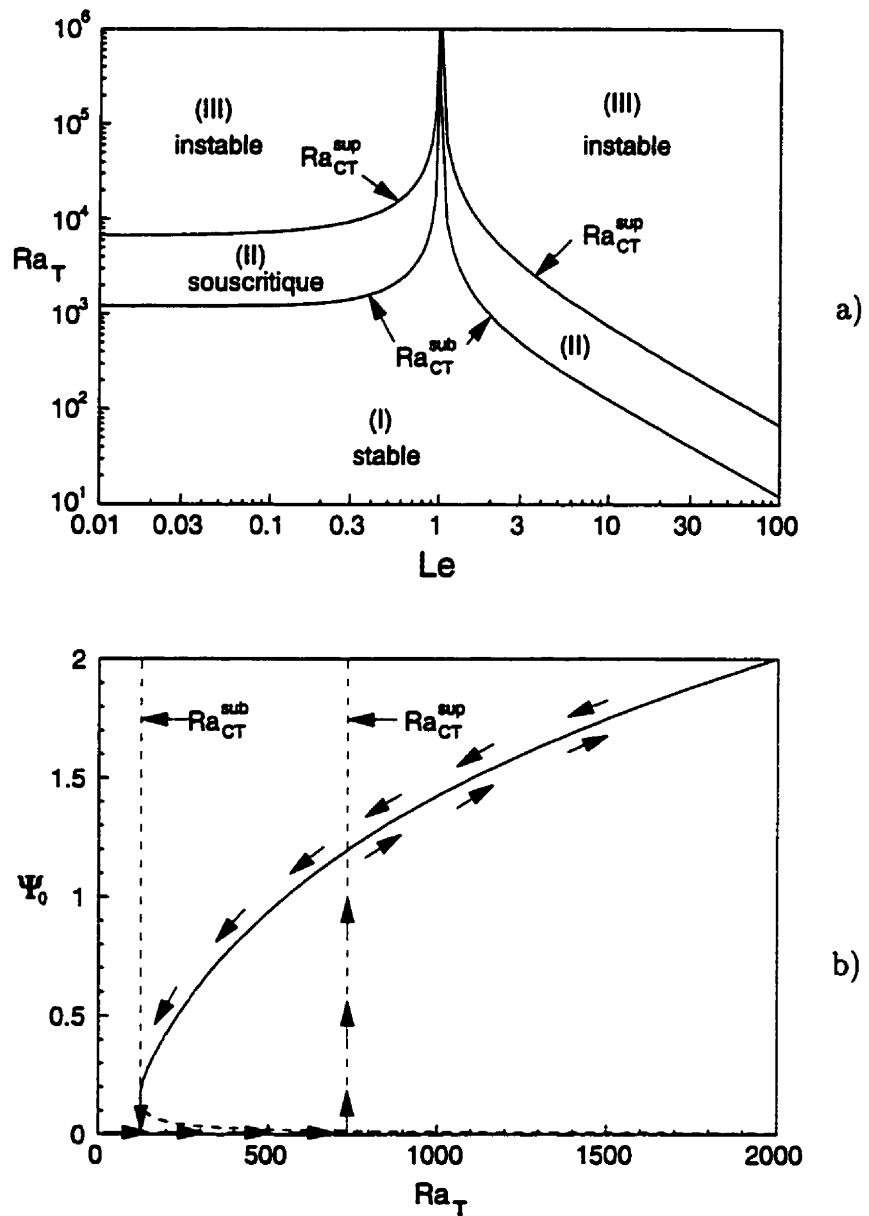


**Figure 5.9 :** Effet du rapport de forme sur la constante  $Ra^{sup}$  et la structure de l'écoulement pour  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$  et 1; a) variation de  $Ra^{sup}$  en fonction de  $A$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$  et  $\kappa = 1$  : b)  $Ra^{sup} = 7043.66$ , c)  $Ra^{sup} = 7043.66$  et pour  $Le > 1$  et  $\kappa = 0$  : d)  $Ra^{sup} = -6993.85$ , e)  $Ra^{sup} = -6993.84$ .

Les résultats de la figure 5.10 correspondent au cas d'une cavité verticale infiniment longue ( $A = \infty$ ), soumise à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ). Le diagramme de la stabilité (voir figure 5.10a) est présenté dans le plan  $Ra_T - Le$ . Les nombres de Rayleigh souscritique, Éq. (4.45), et supercritique, Éq. (5.39), sont indiqués sur le graphe par des lignes pleines. Trois régions distinctes sont aussi obtenues. La première désignée par (I), représente le régime de conduction pure dans lequel le fluide est inconditionnellement stable. La deuxième région (II), correspond au régime de la convection souscritique. Dans la région (III), l'état de repos du fluide est inconditionnellement instable. En prenant la solution de la conduction pure comme conditions initiales, la solution numérique des équations de base révèle que l'écoulement convectif débute avec une structure multicellulaire conformément aux prédictions de l'analyse de la stabilité linéaire. Par la suite, les cellules fusionnent pour aboutir à un écoulement convectif monocellulaire conformément aux prédictions du concept de l'écoulement parallèle. La courbe de bifurcation est illustrée sur la figure 5.10b pour  $Le = 10$ ,  $A = \infty$  et  $\kappa = 1$ . Les zones correspondant aux régimes de la convection souscritique et de la convection supercritique sont indiquées sur le graphe. La boucle d'hystérésis est montrée par des flèches lorsqu'on fait varier  $Ra_T$  de 0 à 2000 ou de 2000 à 0.

## 5.4 Analyse de la stabilité : milieu poreux

Dans cette section, une étude similaire à celle décrite précédemment est consacrée au cas d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Tout d'abord, nous présenterons la méthode des éléments finis associée à la méthode des résidus pondérés pour l'étude numérique de la stabilité linéaire transitoire. Par la suite, nous considérons l'analyse de la stabilité non linéaire dans une couche poreuse horizontale soumise à différentes conditions limites.



**Figure 5.10 : a)** Diagramme de stabilité pour  $N = -1$ ,  $A = \infty$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ , **b)** variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de  $Ra_T$  pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = \infty$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ .

### 5.4.1 Théorie de la stabilité linéaire

L'état de repos du fluide est exprimé par les profils (3.15). Les équations de perturbation sont données par (3.16). Pour le présent problème, les profils de la perturbation ( $\bar{\psi}$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) prennent la forme des fonctions correspondant aux équations (5.8) (en remplaçant  $\psi_0$  par  $\bar{\psi}_0$ ).

En portant la solution (5.8) dans (3.16) et après avoir négligé les termes non linéaires, nous obtenons les équations de perturbation suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}_0 \nabla^2 F = -R_T (\theta_0 + N \phi_0) \mathcal{F}(G) \quad (a) \\ p \theta_0 G + \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} \frac{\partial F}{\partial y} = \theta_0 \nabla^2 G \quad (b) \\ p \epsilon \phi_0 G + \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Le} \phi_0 \nabla^2 G \quad (c) \end{array} \right\} \quad (5.70)$$

Les conditions aux frontières thermiques et solutales sont exprimées par l'équation (3.17) et les conditions aux frontières hydrodynamiques par (3.18).

À ce stade-ci, il convient de mentionner que les profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont inconnus et qu'ils seront déterminés numériquement avec la méthode des éléments finis. Cette dernière permet aussi de calculer le nombre de Rayleigh supercritique au seuil de la convection.

### 5.4.2 Solution numérique : éléments finis

#### 5.4.2.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle des équations (5.70) est donnée par :

$$\bar{\psi}_0 \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla w \, d\Omega - \bar{\psi}_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} w \, d\Gamma = R_T (\theta_0 + N \phi_0) \int_{\Omega} \mathcal{F}(G) w \, d\Omega \quad (5.71)$$

$$p \theta_0 \int_{\Omega} G \vartheta \, d\Omega + \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \vartheta \, d\Omega = -\theta_0 \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega + \theta_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \quad (5.72)$$

$$p \in \phi_0 \int_{\Omega} G \vartheta \, d\Omega + \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \vartheta \, d\Omega = -\frac{\phi_0}{Le} \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \vartheta \, d\Omega + \frac{\phi_0}{Le} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \vartheta \, d\Gamma \quad (5.73)$$

La solution des équations de perturbation est obtenue par la méthode des éléments finis. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au Chapitre III, section 3.2.2.

#### 5.4.2.2 Discrétisation

La forme discrète des équations de perturbation est :

$$\bar{\psi}_0 [K_{\bar{\psi}}] \{F\} = (\theta_0 + N\phi_0) R_T [B]\{G\} \quad (5.74)$$

$$p \theta_0 [M]\{G\} - \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} [L]\{F\} = -\theta_0 [K_{\theta}]\{G\} \quad (5.75)$$

$$p \in \phi_0 [M]\{G\} - \frac{\bar{\psi}_0}{A_x} [L]\{F\} = -\frac{\phi_0}{Le} [K_{\phi}]\{G\} \quad (5.76)$$

où  $[B]$ ,  $[K_{\bar{\psi}}]$ ,  $[K_{\theta}]$ ,  $[K_{\phi}]$ ,  $[L]$  et  $[M]$  sont des matrices carrées données par les équations (3.29).

#### 5.4.3 Stabilité marginale : $p = 0$

Pour le calcul des profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  et de la valeur du nombre de Rayleigh supercritique, nous allons considérer d'abord le cas de la stabilité marginale ( $p = 0$ ) pour lequel le principe d'échange de stabilité est valide. La combinaison des équations (5.74)-(5.76) nous ramène au problème aux valeurs propres suivant :

$$[[E] - \lambda [I]]\{F\} = 0 \quad (5.77)$$

où  $[E]$  est une matrice carrée de dimension  $m \times m$ , donnée par :

$$[E] = [K_{\bar{\psi}}]^{-1} [B] [K]^{-1} [L] \quad (5.78)$$

[I] est une matrice identité, {F} est le vecteur propre et  $\lambda$  représente les valeurs propres définies par :

$$\lambda = \frac{A_x}{R_T(1 + NLe)} \quad (5.79)$$

Les valeurs et les vecteurs propres sont déterminés en utilisant les sous-routines de la librairie IMSL.

Les valeurs propres de la matrice [E] sont représentées par  $\{\lambda_i\}$  où  $i = 1, 2, \dots, m$ . Si ces valeurs propres peuvent être réarrangées de telle manière à satisfaire la relation suivante :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \lambda_m \quad (5.80)$$

alors le nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$  est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0^{sup}}{(1 + NLe)} \quad \text{avec} \quad R_0^{sup} = A_x R^{sup} \quad (5.81)$$

où

$$\left. \begin{array}{l} R^{sup} = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{si} \quad (1 + NLe) < 0 \\ R^{sup} = \frac{1}{\lambda_m} \quad \text{si} \quad (1 + NLe) > 0 \end{array} \right\} \quad (5.82)$$

Notons que si le vecteur propre  $\{F\}_i$  est une solution du problème  $-\{F\}_i$ , l'est aussi. Le profil de la fonction  $G(x, y)$  peut être calculé de la manière suivante :

$$\{G\} = \frac{\bar{\psi}_0}{A_x \theta_0} [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{L}] \{F\} \quad (5.83)$$

Dans ce qui suit, nous allons considérer l'analyse de la stabilité linéaire transitoire.

#### 5.4.4 Stabilité transitoire : $p \neq 0$

En utilisant la méthode de Galerkin, les régimes correspondant aux modes des écoulements convectifs amortis, oscillants et croissants sont déterminés en fonction

des paramètres de contrôle.

Dans la formulation variationnelle des équations linéaires (Éq. (5.71)-(5.73)) les fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont utilisées comme fonctions de pondération. En substituant  $w(x, y)$  par  $F(x, y)$  et  $\vartheta(x, y)$  par  $G(x, y)$  dans (5.71)-(5.73)) on obtient, après intégration, les équations linéaires suivantes :

$$\mathcal{K}_{\bar{\psi}} \bar{\psi}_0 = (\theta_0 + N\phi_0) R_T \mathcal{B} \quad (5.84)$$

$$p \mathcal{M} \theta_0 - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \bar{\psi}_0 = -\mathcal{K} \theta_0 \quad (5.85)$$

$$\varepsilon \mathcal{M} p \phi_0 - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \bar{\psi}_0 = -\frac{\mathcal{K}}{Le} \phi_0 \quad (5.86)$$

où  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{K}_{\bar{\psi}}$ ,  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{M}$  sont des constantes que nous pouvons calculer à partir des intégrales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(G) F d\Omega, & \mathcal{L} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} G d\Omega \\ \mathcal{K}_{\bar{\psi}} &= \int_{\Omega} (\nabla F)^2 d\Omega, & \mathcal{K} &= \int_{\Omega} (\nabla G)^2 d\Omega \\ \mathcal{M} &= \int_{\Omega} G^2 d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

En se servant des résultats de la méthode des éléments finis, Éq. (3.29), et des profils de  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$ , les intégrales (5.87) peuvent être calculées à partir de :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 [B]_{i,j}^e G_j^e F_i^e \right)_k, & \mathcal{L} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 [L]_{i,j}^e F_j^e G_i^e \right)_k \\ \mathcal{K}_{\bar{\psi}} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 [K_{\psi}]_{i,j}^e F_j^e F_i^e \right)_k, & \mathcal{K} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 [K]_{i,j}^e G_j^e G_i^e \right)_k \\ \mathcal{M} &= \sum_{k=1}^{N^e} \left( \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 [M]_{i,j}^e G_j^e G_i^e \right)_k \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

où  $N^e$  est le nombre total des noeuds figurant dans le domaine de calcul et l'exposant  $e$  réfère à chaque élément fini de ce domaine.

À partir des équations (5.85) et (5.86), les inconnues  $\theta_0$  et  $\phi_0$ , une fois exprimées en fonction de  $\bar{\psi}_0$ , ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\mathcal{L} \bar{\psi}_0 / A_x}{p \mathcal{M} + \mathcal{K}} \\ \phi_0 &= \frac{\mathcal{L} Le \bar{\psi}_0 / A_x}{\varepsilon Le \mathcal{M} p + \mathcal{K}} \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

Après avoir substitué  $\theta_0$  et  $\phi_0$  dans (5.84), nous obtenons une équation polynomiale de deuxième degré en terme du paramètre  $p$  :

$$\varepsilon^2 Le^2 p^2 - \gamma \varepsilon Le p_1 p - \gamma^2 p_2 = 0 \quad (5.90)$$

où

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= R_T^0 Le(\varepsilon + N) - (1 + \varepsilon Le) \\ p_2 &= \varepsilon Le[R_T^0(1 + NLe) - 1] \\ R_T^0 &= \frac{R_T}{R_0^{sup}}, \quad R_0^{sup} = A_x R^{sup} \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

et les constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  sont données par :

$$R^{sup} = \frac{\mathcal{K} \bar{\psi} \mathcal{K}}{\mathcal{B} \mathcal{L}}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{M}} \quad (5.92)$$

Résolvant l'équation (5.90) pour  $p$ , il s'ensuit que :

$$p = \frac{\gamma}{2\varepsilon Le} \left( p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + p_2} \right) \quad (5.93)$$

Tel que déjà discuté, le paramètre  $p$  est un nombre complexe qui peut être exprimé par :

$$p = p_r + i p_i \quad (5.94)$$

où  $p_r$  et  $p_i$  sont les parties réelles et imaginaires de  $p$  que nous pouvons déduire à

partir de (5.93) comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} p_r = \frac{p_0}{\varepsilon Le} \left[ p_1 + \sqrt{p_1^2 + p_2} \right] \\ p_i = 0 \\ p_r = \frac{p_0}{\varepsilon Le} p_1 \\ p_i = \frac{p_0}{\varepsilon Le} \sqrt{|p_1^2 + p_2|} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } p_1^2 + p_2 \geq 0 \\ \text{si } p_1^2 + p_2 < 0 \end{array} \quad (5.95)$$

#### 5.4.4.1 Cavité horizontale

L'échange de la stabilité se produit lorsque  $p = 0$ . Pour cette situation, d'après l'équation (5.90),  $p_2 = 0$ . Alors, le nombre de Rayleigh supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{ou bien} \quad R_{TC}^{sup} = -R_S + R_0^{sup} \quad (5.96)$$

Le régime surstable dans lequel la convection est oscillante survient lorsque  $p_1^2 + p_2 < 0$  et  $p_r > 0$ , et le seuil de ce régime est obtenu lorsque  $p_r = 0$  (c'est-à-dire  $p_1 = 0$ ). Ainsi, nous trouvons :

$$R_{TC}^{sur} = \frac{(\varepsilon Le + 1)}{\varepsilon Le(\varepsilon + N)} R_0^{sup} \quad (5.97)$$

ou bien

$$R_{TC}^{sur} = \frac{(\varepsilon Le + 1)R_0^{sup} - R_S}{\varepsilon Le} \quad (5.98)$$

Notons que le régime de la surstabilité commence à une valeur de  $R_T = R_{TC}^{sur}$  et prend fin à une valeur de  $R_T = R_{TC}^{osc}$ . Le nombre  $R_{TC}^{osc}$  représente la valeur du nombre de Rayleigh marquant la transition du régime surstable oscillant à un régime monotone croissant. L'expression du nombre de Rayleigh oscillant  $R_{TC}^{osc}$  est obtenue de  $p_i = 0$  (c'est-à-dire  $p_1^2 + p_2 = 0$ ). Il s'ensuit que :

$$R_{TC}^{osc} = \frac{(\varepsilon Le - 1)}{\varepsilon Le(\varepsilon + N)^2} [\varepsilon - N + 2\sqrt{-\varepsilon N}] R_0^{sup} \quad (5.99)$$

ou bien :

$$R_{TC}^{osc} = \left[ (\varepsilon Le - 1) R_0^{sup} - R_S + 2\sqrt{-(\varepsilon Le - 1) R_0^{sup} R_S} \right] / (\varepsilon Le) \quad (5.100)$$

Sur le plan  $R_T - R_S$ , les trois nombres de Rayleigh se rencontrent à un point d'intersection dont les coordonnées sont :

$$R_T = \frac{\varepsilon Le}{\varepsilon Le - 1} R_0^{sup}, \quad R_S = -\frac{1}{\varepsilon Le - 1} R_0^{sup} \quad (5.101)$$

Pour  $\Phi = 0^\circ$ , à partir des relations (5.100) et (5.101), il est clair que le régime convectif oscillant existe seulement lorsque  $R_S < 0$  ( $N < 0$ ) et, plus précisément, lorsque :

$$\left. \begin{array}{l} R_{TC}^{sur} < R_T < R_{TC}^{osc} \\ R_S < -\frac{R_0^{sup}}{(\varepsilon Le - 1)} \\ Le > \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} \quad (5.102)$$

La procédure de calcul des profils des fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  et des constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  est similaire à celle décrite pour le milieu fluide (voir section 5.3.3.3).

#### 5.4.4.2 Cavité incliné

Dans ce cas il suffit juste de substitué  $N$  par  $-1$ . Le nombre de Rayleigh supercritique est donné alors par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0^{sup}}{1 - Le} \quad (5.103)$$

le nombre de Rayleigh critique surstable par :

$$R_{TC}^{sur} = \frac{(\varepsilon Le + 1)}{Le(\varepsilon - 1)} R_0^{sup} \quad (5.104)$$

et le nombre de Rayleigh critique oscillant par :

$$R_{TC}^{osc} = \frac{(\varepsilon Le - 1)}{Le(\varepsilon - 1)^2} [\varepsilon + 1 + 2\sqrt{\varepsilon}] R_0^{sup} \quad (5.105)$$

#### 5.4.4.3 Validation

Pour la validation de la procédure, nous avons considéré le cas d'une cavité horizontale ( $\Phi = 0^\circ$ ) dont les parois horizontales sont maintenues à des températures et à des concentrations constantes ( $\kappa = 0$ ). La solution exacte de la stabilité linéaire pour ce problème est rapportée par Lapwood 1948 (en simple diffusion) et par Nield 1968 (en double diffusion). Les fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont données analytiquement par :

$$F(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y), \quad G(x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y) \quad (5.106)$$

En procédant avec la méthode de Galerkin, les valeurs exactes des constantes  $B$ ,  $K_{\bar{\psi}}$ ,  $K$ ,  $L$  et  $M$  (Éq. (5.87)) sont obtenues comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} B = L = \frac{\pi}{4} \simeq 0.785398 \\ K_{\bar{\psi}} = K = \frac{\pi^2}{2} \simeq 4.934802 \\ M = \frac{1}{4} = 0.25 \\ R^{sup} = 4\pi^2 \simeq 39.478418 \end{array} \right\} \quad (5.107)$$

Avec un maillage de  $(16 \times 16)$  éléments, les méthodes des éléments finis et de

Galerkin nous donnent les valeurs numériques suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B} = \mathcal{L} = 0.785385 \\ \mathcal{K}_{\bar{\psi}} = \mathcal{K} = 4.934731 \\ \mathcal{M} = 0.249996 \\ R^{sup} = 39.478580 \end{array} \right\} \quad (5.108)$$

qui sont en bon accord avec celles déterminées analytiquement en (5.107).

#### 5.4.4.4 Effet du maillage

Le domaine de calcul est discrétré avec un maillage uniforme ( $N_{ex} \times N_{ey}$ ). En utilisant différents maillages, des résultats numériques, obtenus pour une cavité carrée ( $A = 1$ ), sont présentés dans le tableau 5.5. Pour cette situation, la valeur exacte de  $R^{sup}$  rapportée par Lapwood 1948 et Nield 1968 est  $4\pi^2$ .

Nous constatons que  $R^{sup}$  converge vers la valeur  $4\pi^2$  lorsque le maillage est raffiné. En se basant sur ces essais numériques, un maillage de  $10 \times 10$  a été adopté pour les cas des cavités ayant un rapport de forme proche de l'unité ( $A \simeq 1$ ). Cependant, pour  $A \simeq 8$ , un maillage de  $10 \times 35$  a été utilisé.

Dans le cas d'une cavité carrée inclinée, des résultats numériques ont été obtenus, dans le tableau 5.6, pour différents angles d'inclinaison. Lorsque la cavité est verticale ( $\Phi = 90^\circ$ ), les valeurs des constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$ , Éq. (5.87), sont données par :

$$R^{sup} = \pm 184.069, \quad \gamma = 38.742 \quad (5.109)$$

**Tableau 5.5 :** Effet du maillage sur la précision de la valeur de  $R^{sup}$  pour  $Le < 1$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

$N_{ex} \times N_{ey}$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$12 \times 12$	$16 \times 16$	Nield 1968
$R^0$	39.5183548	39.4809956	39.4789301	39.4785801	39.47841760
Error (%)	$1.01 \times 10^{-1}$	$6.53 \times 10^{-3}$	$1.30 \times 10^{-3}$	$4.12 \times 10^{-4}$	

**Tableau 5.6 :** Effet de l'inclinaison sur la constante  $R^{sup}$  pour  $A = 1$  et  $\kappa = 0$  :  $N_{ex} = N_{ey} = 16$  ( $m = 1089$ ).

$R^0 = \frac{1}{\lambda_i}$	$\Phi = 0^\circ$	$\Phi = 45^\circ$	$\Phi = 90^\circ$
$i = 1$	$\infty$	-2075.093	-184.069
$i = 2$	$\infty$	-2161.500	-227.930
$i = 3$	$\infty$	-3471.134	-489.868
.....	.....	.....	.....
$i = m - 2$	109.695	141.929	489.868
$i = m - 1$	61.688	81.920	227.930
$i = m$	39.479	53.497	184.069

### 5.4.5 Stabilité non linéaire : cavité horizontale

Dans cette partie, l'analyse de la stabilité non linéaire est développée pour le cas d'une cavité horizontale soumise à des conditions aux frontières variées ( $\kappa = 0$  et 1). Le modèle de Lorenz a été considéré (voir section 5.2.4). Les profils de la perturbation sont approchés par les profils de (5.53). En portant ces profils (substituer  $\psi_0$  par  $\bar{\psi}_0$ ) dans la forme faible des équations de base (3.21)-(3.23) et en employant la technique de Galerkin, on obtient :

$$\mathcal{K}_{\bar{\psi}} \bar{\psi}_0 = \left( R_T \theta_0 + \frac{R_S}{Le} \phi_0 \right) \mathcal{B} \quad (5.110)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M} \frac{d\theta_0}{dt} - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 - \mathcal{L}_1 \bar{\psi}_0 \theta_1 &= -\mathcal{K} \theta_0 \\ \mathcal{M}_1 \frac{d\theta_1}{dt} - \mathcal{L}_2 \bar{\psi}_0 \theta_0 &= -\mathcal{K}_1 \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \mathcal{M} \frac{d\phi_0}{dt} - \frac{\mathcal{L}}{A_x} \psi_0 - \mathcal{L}_1 \bar{\psi}_0 \phi_1 &= -\frac{\mathcal{K}}{Le} \phi_0 \\ \varepsilon \mathcal{M}_1 \frac{d\phi_1}{dt} - \mathcal{L}_2 \bar{\psi}_0 \phi_0 &= -\frac{\mathcal{K}_1}{Le} \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

où  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{K}_{\bar{\psi}}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_1$  sont des scalaires déterminés à partir des intégrales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial y} F \, d\Omega, & \mathcal{K} &= \int_{\Omega} (\nabla G)^2 \, d\Omega, & \mathcal{K}_{\bar{\psi}} &= \int_{\Omega} (\nabla F)^2 \, d\Omega \\ \mathcal{K}_1 &= \int_{\Omega} (\nabla h)^2 \, d\Omega, & \mathcal{L} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} G \, d\Omega, & \mathcal{L}_1 &= \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dh}{dx} G \, d\Omega \\ \mathcal{L}_2 &= \int_{\Omega} \mathcal{J}(F, G) h \, d\Omega & \mathcal{M} &= \int_{\Omega} G^2 \, d\Omega & \mathcal{M}_1 &= \int_{\Omega} h^2 \, d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

Nous rappelons que la fonction  $F(x, y)$  représente le profil de la fonction de

courant,  $G(x, y)$  les profils de la température et de la concentration et que la fonction  $h(x)$  est définie par les expressions (5.54) et (5.55).

#### 5.4.5.1 Solution permanente

La solution permanente des équations (5.111) et (5.112) en termes de  $\theta_0$  et  $\phi_0$  est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\mathcal{L} \bar{\psi}_0 / A_x}{\mathcal{K} + \frac{\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1}{\mathcal{K}_1} \frac{\bar{\psi}_0^2}{\psi_0}} \\ \phi_0 &= \frac{\mathcal{L} Le \bar{\psi}_0 / A_x}{\mathcal{K} + \frac{\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1}{\mathcal{K}_1} Le^2 \frac{\bar{\psi}_0^2}{\psi_0}} \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

Nous substituons les expressions de  $\theta_0$  et  $\phi_0$  dans (5.110), après simplification, l'amplitude de l'écoulement peut être obtenue à partir de :

$$\bar{\psi}_0 (Le^4 \bar{\psi}_0^4 - 2a Le^2 d_1 \bar{\psi}_0^2 - a^2 d_2) = 0 \quad (5.115)$$

où

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= R_T^0 Le^2 + R_S^0 - (Le^2 + 1), & R_T^0 &= \frac{R_T}{R_0^{sup}} \\ d_2 &= 4Le^2(R_T^0 + R_S^0 - 1), & R_S^0 &= \frac{R_S}{R_0^{sup}} \\ R_0^{sup} &= A_x R^{sup}, R^{sup} = \frac{\mathcal{K}_\psi \mathcal{K}}{\mathcal{B} \mathcal{L}} \\ a &= \frac{\mathcal{K} \mathcal{K}_1}{2 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

Résolvons (5.115) pour  $\bar{\psi}_0$ , on obtient :

$$\bar{\psi}_0 = 0 \quad (5.117)$$

ou :

$$\bar{\psi}_0 = \pm \frac{\sqrt{a}}{Le} \left( d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right)^{1/2} \quad (5.118)$$

L'expression de  $\bar{\psi}_0$ , Éq. (5.118), est générale. Autrement dit, elle représente une solution qui est valable pour n'importe quels types de conditions aux frontières ( $\kappa = 1$  ou  $0$ ) et pour n'importe quel rapport de forme  $A$  ( $0 < A < \infty$ ).

Les résultats de la stabilité linéaire transitoire, Éq. (5.90)-(5.100), peuvent être déduits du modèle de Lorenz en considérant la définition (5.67) déjà utilisée en milieu fluide.

#### 5.4.6 Discussion des résultats

Dans ce qui suit, nous discuterons de différents résultats obtenus dans une cavité poreuse inclinée. Les effets des paramètres de contrôle sur le seuil de la convection et sur la structure de l'écoulement seront étudiés.

##### 5.4.6.1 Cavité horizontale : $\Phi = 0^\circ$ et $180^\circ$

D'après les expressions (4.108) et (4.117), nous constatons que la solution pour le cas d'une cavité infiniment longue ( $A \gg 1$ ) soumise à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ) est un cas particulier de la solution générale résultant de l'analyse de la stabilité non linéaire. Pour cette situation, l'expression de  $\bar{\psi}_0$  (5.118) est identique aux expressions (4.108) et (4.117) de  $\bar{\Psi}_0$ . Le seuil de la convection supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0^{sup}}{1 + NLe} \quad \text{ou bien} \quad R_{TC}^{sup} = -R_S + R_0^{sup} \quad (5.119)$$

et le seuil de la convection souscritique (en fonction de  $N$  et  $Le$  ou de  $R_S$  et  $Le$ ) par :

$$\left. \begin{aligned} R_{TC}^{sous} &= \frac{(Le^2 - 1)}{Le(Le + N)^2} \left[ (Le - N) + 2\sqrt{-NLe} \right] R_0^{sup} & (a) \\ \text{ou bien} \\ R_{TC}^{sous} &= Le^{-2} \left[ (Le^2 - 1)R_0^{sup} - R_S + 2\sqrt{-(Le^2 - 1)R_0^{sup}R_S} \right] & (b) \end{aligned} \right\} \quad (5.120)$$

Les conditions d'existence de la convection souscritique sont :

$$\left. \begin{aligned} R_S &< 0 \\ Le &> \sqrt{\frac{R_S - R_0^{sup}}{R_S}} \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

où la constante  $R_0^{sup}$ , Éq. (5.116), est une fonction de  $A$  et  $\kappa$ .

Pour le cas d'une cavité horizontale soumise à des températures et des concentrations constantes ( $\kappa = 0$ ), il existe une solution exacte. Selon Nield 1968, les fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  ont pour expressions :

$$F(x, y) = \cos(r_x \pi x) \cos(r_y \pi y), \quad G(x, y) = \cos(r_x \pi x) \sin(r_y \pi y) \quad (5.122)$$

où  $r_x = 1/A_x$  et  $r_y = n/A_y$ . Pour cette situation les constantes dans (5.110)-(5.112) sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= r_y \pi \frac{A_x A_y}{4}, & \mathcal{K} &= (r_x^2 + r_y^2)^2 \pi^2 \frac{A_x A_y}{4}, & \mathcal{K}_{\psi} &= (r_x^2 + r_y^2)^2 \pi^2 \frac{A_x A_y}{4} \\ \mathcal{K}_1 &= 4r_x^2 \pi^2 \frac{A_x A_y}{4}, & \mathcal{L} &= 2r_y \pi A_x A_y, & \mathcal{L}_1 &= r_x r_y \pi^2 \frac{A_x A_y}{4} \\ \mathcal{L}_2 &= r_x r_y \pi^2 \frac{A_x A_y}{4}, & \mathcal{M} &= \frac{A_x A_y}{4}, & \mathcal{M}_1 &= \frac{A_x A_y}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.123)$$

Les constantes  $R^{sup}$  et  $a$  dans (5.116) et (5.117) ont pour expressions :

$$R^{sup} = \frac{(r_x^2 + r_y^2)^2}{r_y^2} \pi^2, \quad a = \frac{4(r_x^2 + r_y^2)}{r_y^2} \quad (5.124)$$

et la constante  $\gamma$  dans (5.90) est donnée par  $\gamma = (r_x^2 + r_y^2)\pi^2$ .

Pour le cas d'une cavité horizontale soumise à des flux constants de chaleur et de masse ( $\kappa = 1$ ), nous pouvons démontrer facilement que les profils exacts de  $F(x, y)$  et de  $G(x, y)$  ont les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= [\cosh(\xi_0 x) - \gamma_0 \cos(\eta_0 x)] \cos(r_y \pi y) \\ G(x, y) &= [\cosh(\xi_0 x) + \gamma_0 \cos(\eta_0 x)] \sin(r_y \pi y) \end{aligned} \right\} \quad (5.125)$$

où  $\gamma_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  et  $r_y$  sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{r_y \pi (\sqrt{R_0^{sup}} + r_y \pi)}, \quad \eta_0 = \sqrt{r_y \pi (\sqrt{R_0^{sup}} - r_y \pi)} \\ \gamma_0 &= \frac{\cosh(\xi_0 A_x / 2)}{\cos(\eta_0 A_x / 2)}, \quad r_y = \frac{1}{A_y} \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

et la constante  $R_0^{sup}$  peut être calculée à partir de la relation suivante :

$$\xi_0 \tanh(\xi_0 A_x / 2) = \eta_0 \tan(\eta_0 A_x / 2) \quad (5.127)$$

Pour cette situation, les constantes dans (5.113) peuvent être évaluées à partir de :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B} &= \pi(a_1 - \gamma_0^2 a_3)/2, & \mathcal{K} &= \pi \sqrt{R_0^{sup}} (a_1 - \gamma_0^2 a_3)/2 \\ \mathcal{K}_{\bar{\psi}} &= \pi \sqrt{R_0^{sup}} (a_1 - \gamma_0^2 a_3)/2, & \mathcal{K}_1 &= \pi^2 (A_y/2) \\ \mathcal{L} &= \pi(a_1 - \gamma_0^2 a_3)/2, & \mathcal{M} &= (a_1 + 2\gamma_0 a_2 + \gamma_0^2 a_3)(A_y/2) \\ \mathcal{M}_1 &= A_y/2, & \mathcal{L}_1 &= \pi^2 (a_4 - \gamma_0^2 a_5)/2 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{4\xi_0^2}{4\xi_0^2 + r_x^2 \pi^2} \cosh(\xi_0 A_x) - \gamma_0^2 \frac{4\eta_0^2}{4\eta_0^2 - r_x^2 \pi^2} \cos(\eta_0 A_x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.128)$$

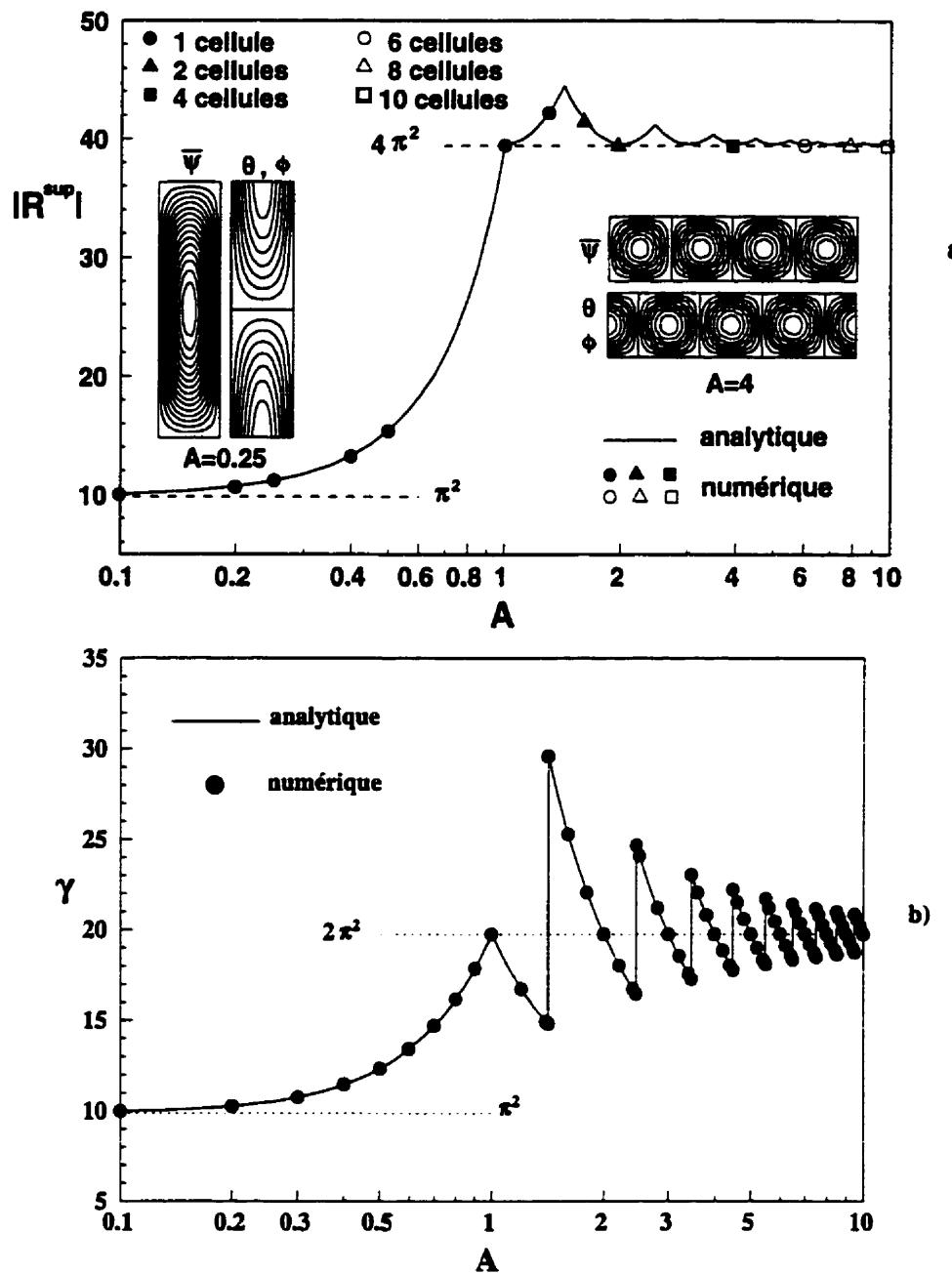
où

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left[ A_x + \frac{\sinh(\xi_0 A_x)}{\xi_0} \right], & a_2 &= \frac{4\xi_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2} \sinh(\xi_0 A_x/2) \cos(\eta_0 A_x/2) \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left[ A_x + \frac{\sin(\eta_0 A_x)}{\eta_0} \right], & a_4 &= \frac{A_x}{\pi} + \frac{r_x \pi}{4\xi_0^2 + r_x^2 \pi^2} \cosh(\eta_0 A_x) \\ a_5 &= \frac{A_x}{\pi} - \frac{r_x \pi}{4\eta_0^2 - r_x^2 \pi^2} \cos(\eta_0 A_x) \end{aligned} \right\} \quad (5.129)$$

À partir de (5.128), la constante  $\gamma$  dans (5.90) et la constante  $a$  dans (5.118) peuvent être calculées comme suit :  $\gamma = \mathcal{K}/\mathcal{M}$  et  $a = \mathcal{K}\mathcal{C}_1/(2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)$ .

### *Effet du rapport de forme A*

Les variations des constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $A$  sont présentées sur la figure 5.11 pour  $\kappa = 0$ . Les résultats numériques (symboles) et les résultats analytiques (traits) sont indiqués sur le graphe et un bon accord entre les deux est observé. On constate que l'écoulement est monocellulaire lorsque  $A \leq \sqrt{2}$  et multicellulaire lorsque  $A > \sqrt{2}$ . Pour  $A < 1$ , les constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  diminuent d'une façon monotone avec  $A$  et tendent vers  $\pi^2$  lorsque ce paramètre s'approche vers zéro. Par ailleurs, pour  $A > 1$ ,  $R^{sup}$  et  $\gamma$  subissent des variations complexes et tendent respectivement vers  $4\pi^2$  et  $2\pi^2$  lorsque  $A$  devient suffisamment grand. Ainsi,  $R^{sup}$  augmente de  $4\pi^2$  à  $9\pi^2/2$  lorsque  $A$  augmente de 1 à  $\sqrt{2}$ , la valeur à partir de laquelle l'écoulement devient bicellulaire. D'un autre côté,  $\gamma$  diminue de  $2\pi^2$  à  $3\pi^2/2$ . L'écoulement devenant bicellulaire à partir de  $A = \sqrt{2}$ ,  $\gamma$  subit alors un saut de  $3\pi^2/2$  à  $3\pi^2$ . Sur la figure 5.11a ou 5.11b, les pics et les sauts de  $R^{sup}$  et  $\gamma$  correspondent à un changement dans la structure de l'écoulement. En général, à chaque valeur de  $A = A_n = \sqrt{n(n+1)}$ , le nombre de cellules passe de  $n$  à  $n+1$ . La constante  $\gamma$  subit une augmentation brusque à chaque valeur de  $A = A_n$ . Ceci montre que le paramètre  $p$ , c'est-à-dire le taux d'accroissement et la fréquence des perturbations, augmente alors d'une façon brusque. Des résultats typiques sous forme de lignes de courant, isothermes et isoconcentrations sont présentés sur la



**Figure 5.11 :** Effet du rapport de forme sur les constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$  : a)  $R^{sup}$  en fonction de  $A$ , b)  $\gamma$  en fonction de  $A$ .

figure 5.11a pour  $A = 1/4$  et 4.

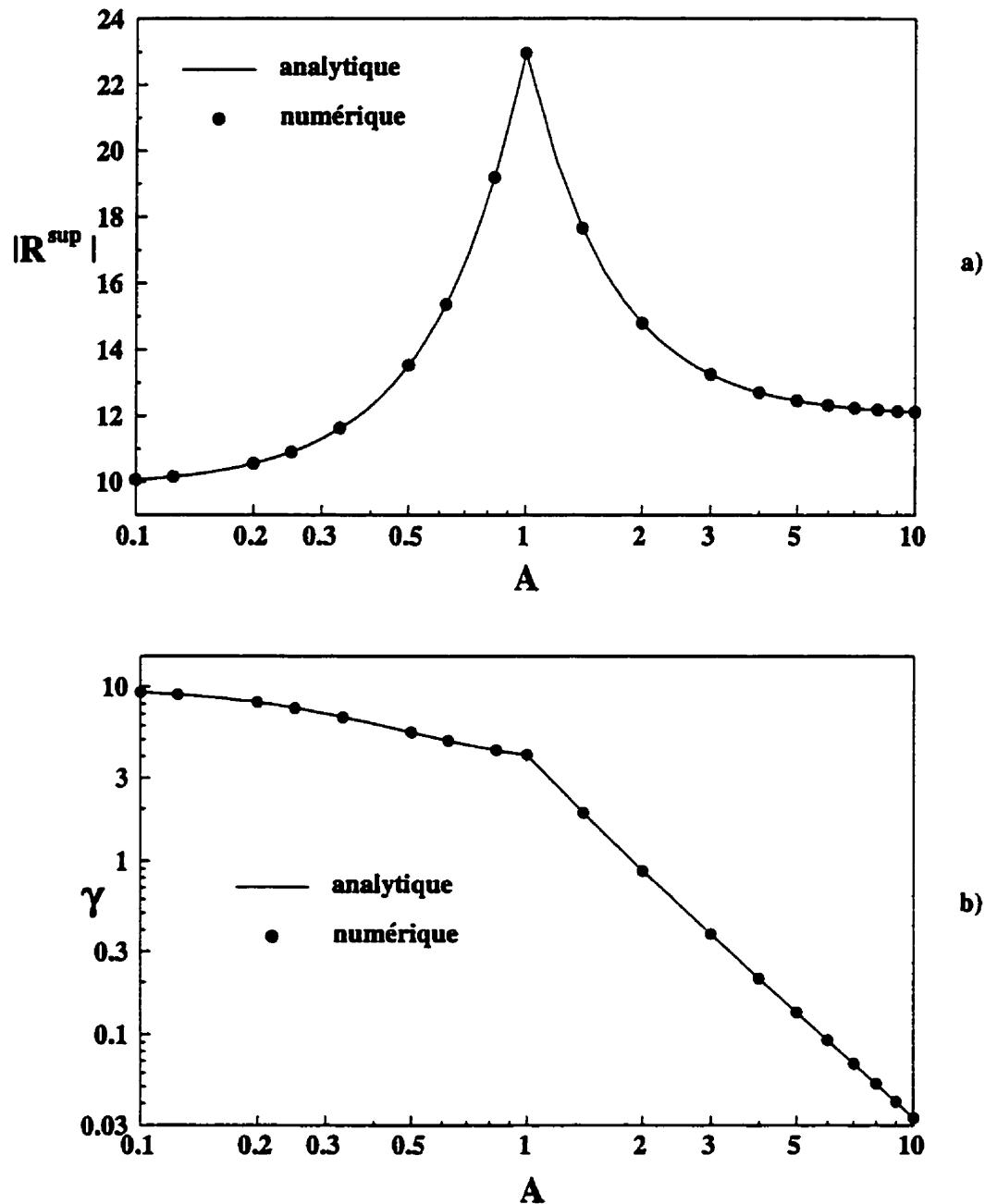
Sur la figure 5.12, des résultats similaires sont présentés pour  $\kappa = 1$ . Contrairement au cas précédent, les résultats montrent que la structure de l'écoulement demeure toujours monocellulaire et ceci indépendamment de  $A$ . Il est à noter que lorsque  $A$  est suffisamment grand ou petit,  $R^{sup}$  tend asymptotiquement vers 12 et  $\pi^2$ , respectivement. Ces valeurs sont en accord avec les résultats de Nield 1968 lorsque  $A \rightarrow \infty$ . Sur la figure 5.12b, on observe que  $\gamma$  diminue et tend vers zéro lorsque  $A$  tends vers l'infini. Cela montre que pour des cavités élancées, le paramètre  $p$  est très faible ( $|p| \ll 1$ ) et la perturbation hydrodynamique prend énormément de temps pour déclencher la convection.

#### *Diagramme de stabilité et courbe de bifurcation*

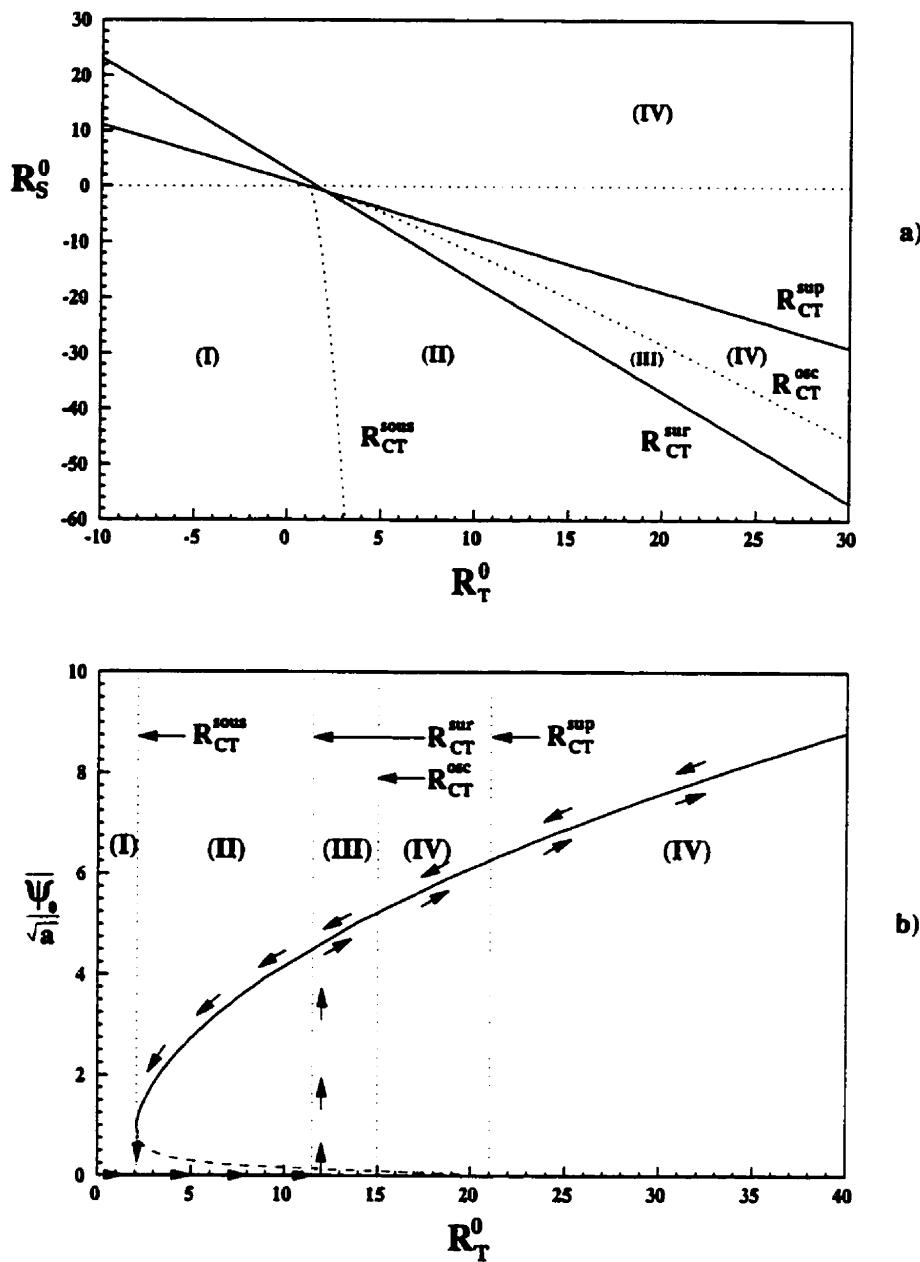
Dans cette étude, les nombres de Rayleigh thermique et solutal sont normalisés par rapport à la constante  $R_0^{sup}$ . Les résultats présentés sous forme de diagramme de stabilité et de courbes de bifurcations sont alors indépendants de  $A$  et  $\kappa$ .

Sur la figure 5.13a, nous avons présenté le diagramme de stabilité dans le plan  $R_T^0 - R_S^0$  pour  $Le = 10$  et  $\varepsilon = 0.2$ , les valeurs pour lesquelles on obtient quatre régions distinctes. Ces dernières sont délimitées par les lignes correspondant aux expressions de  $R_{TC}^{sous}$ ,  $R_{TC}^{sur}$ ,  $R_{TC}^{osc}$  et  $R_{TC}^{sup}$  (voir Éq. (5.96)-(5.100) et (5.120)). Similairement aux résultats obtenus en milieu fluide (figure 5.4), les quatre modes de convection ((I), (II), (III) et (IV)) sont indiqués sur le diagramme (figure 5.13a). En milieu poreux, les conditions d'existence du régime oscillant dépendent du paramètre  $\varepsilon$ ; elles sont données par la relation (5.102). Il est donc évident que lorsque  $R_S > 0$  ou que le groupement  $\varepsilon Le \leq 1$ , ce régime n'existe pas.

L'évolution de l'amplitude de l'écoulement  $\bar{\psi}_0$  en fonction de  $R_T^0$  est présentée sur la figure 5.13b. Les résultats ont été obtenus pour  $R_S^0 = -20$ ,  $Le = 10$  et  $\varepsilon = 0.2$ . Pour ces valeurs, les nombres de Rayleigh critiques sont  $R_{TC}^{sous} = 2.08 \times R^{sup}$ ,



**Figure 5.12 :** Effet du rapport de forme sur les constantes  $R^{sup}$  et  $\gamma$  pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a)  $R^{sup}$  en fonction de  $A$ , b)  $\gamma$  en fonction de  $A$ .



**Figure 5.13 :** a) Diagramme de stabilité pour  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 0.2$  et  $\Phi = 0^\circ$ , b) variation de l'amplitude de l'écoulement en fonction de  $R_T^0$  pour  $R_S^0 = -20$ ,  $Le = 10$  et  $\Phi = 0^\circ$ .

$R_{TC}^{sur} = 11.5 \times R^{sup}$ ,  $R_{TC}^{osc} = 14.97 \times R^{sup}$  et  $R_{TC}^{sup} = 21 \times R^{sup}$ . Les quatre régions discutées ci-dessus sont indiquées sur le graphe. Ainsi, pour  $R_T^0 < 2.08$ , le fluide est inconditionnellement stable. À  $R_T^0 = 2.08$ , deux solutions à amplitudes finies bifurquent de l'état de repos du fluide. La première (trait plein) est stable et la deuxième (pointillés) est instable. La bifurcation est dite souscritique (voir section 4.2.9). Pour  $2.08 \leq R_T^0 < 11.5$ , l'état de la conduction pure est une solution possible du problème, mais elle demeure instable aux fortes perturbations. Pour  $11.5 \leq R_T^0 < 14.97$ , l'état de repos du fluide est instable, toute perturbation pouvant déclencher la convection pour atteindre la solution convective (trait plein). Dans cette gamme de valeurs, l'existence de solutions multiples permanentes ou transitoires est possible. Pour  $R_T \geq 14.97$ , l'état de repos du fluide devient inconditionnellement instable. En faisant varier  $R_T^0$  de 0 à 40 ou de 40 à 0, en prenant toujours la solution précédente comme conditions initiales, la solution du problème suivra le trajet indiqué par des flèches. Ce trajet forme une boucle d'hystérisis.

#### 5.4.6.2 Cavité inclinée : $0^\circ < \Phi < 180^\circ$

##### *Effet de l'angle d'inclinaison*

Des résultats numériques typiques sur la variation de la constante  $R^{sup}$  en fonction de l'angle d'inclinaison sont présentés sur la figure 5.14a-b pour  $A = 1$  et  $\kappa = 0$  et 1 respectivement. On constate que  $R^{sup}$  est une fonction croissante de  $\Phi$  lorsque  $Le < 1$ . Pour  $\kappa = 0$  ( $\kappa = 1$ ),  $R^{sup} = 4\pi^2$  ( $R^{sup} = 22.94$ ), lorsque  $\Phi = 0^\circ$ , cette constante augmente d'une façon monotone vers l'infini lorsque  $\Phi \rightarrow 180^\circ$ . D'un autre côté, pour  $Le > 1$ , lorsque  $\Phi$  augmente de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ ,  $R^{sup}$  augmente de  $-\infty$  à  $\Phi = 0^\circ$  jusqu'à  $-4\pi^2$  pour  $\kappa = 0$  ( $-22.94$  pour  $\kappa = 1$ ). De ces résultats, nous pouvons déduire que l'état de repos du fluide est stable lorsque  $\Phi = 0^\circ$  et  $Le > 1$ . Dans cette situation, l'agent stabilisant est la concentration, et comme la chaleur diffuse plus rapidement que la masse ( $Le > 1$ ), le gradient de densité est stable. Le

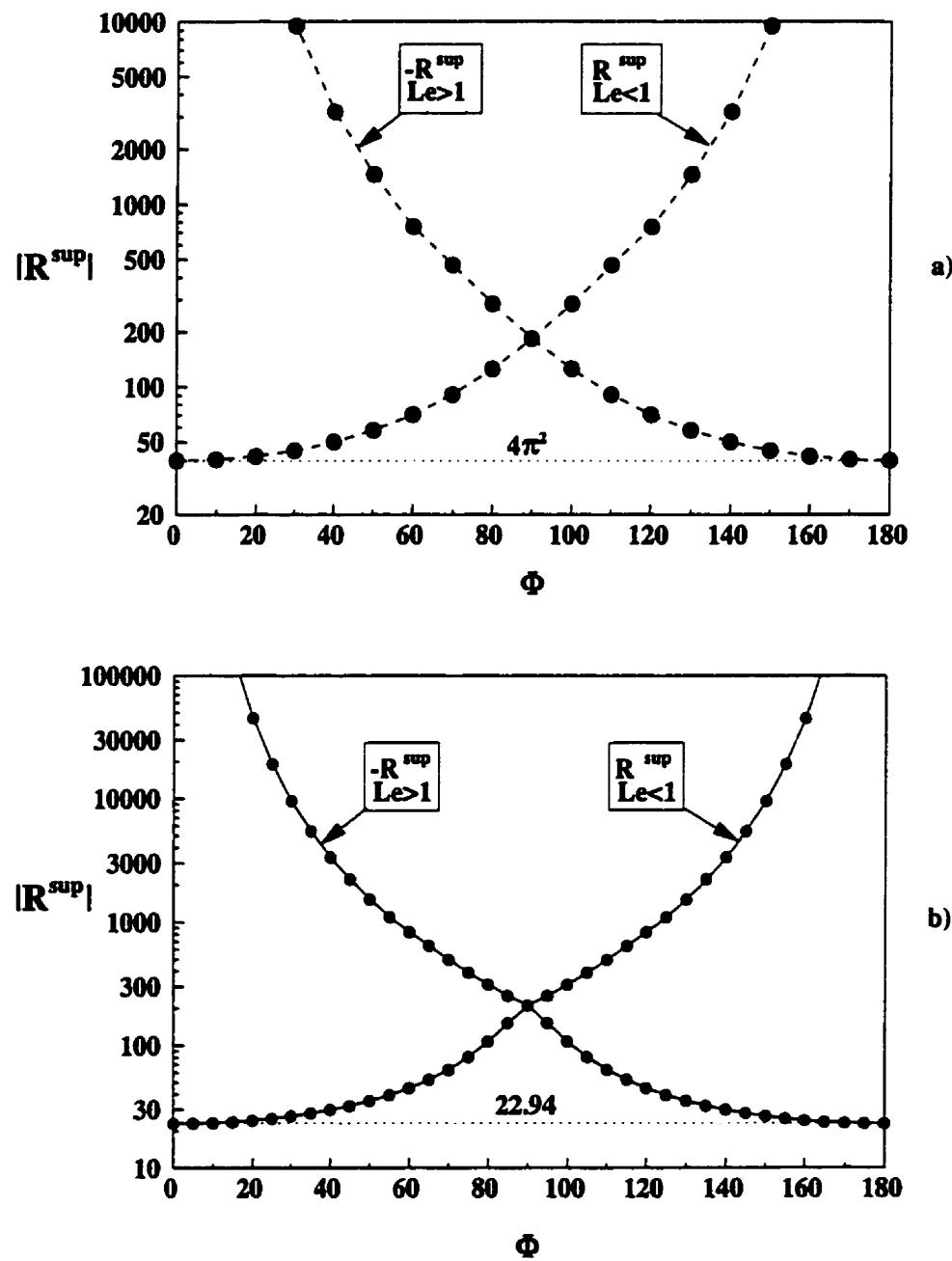


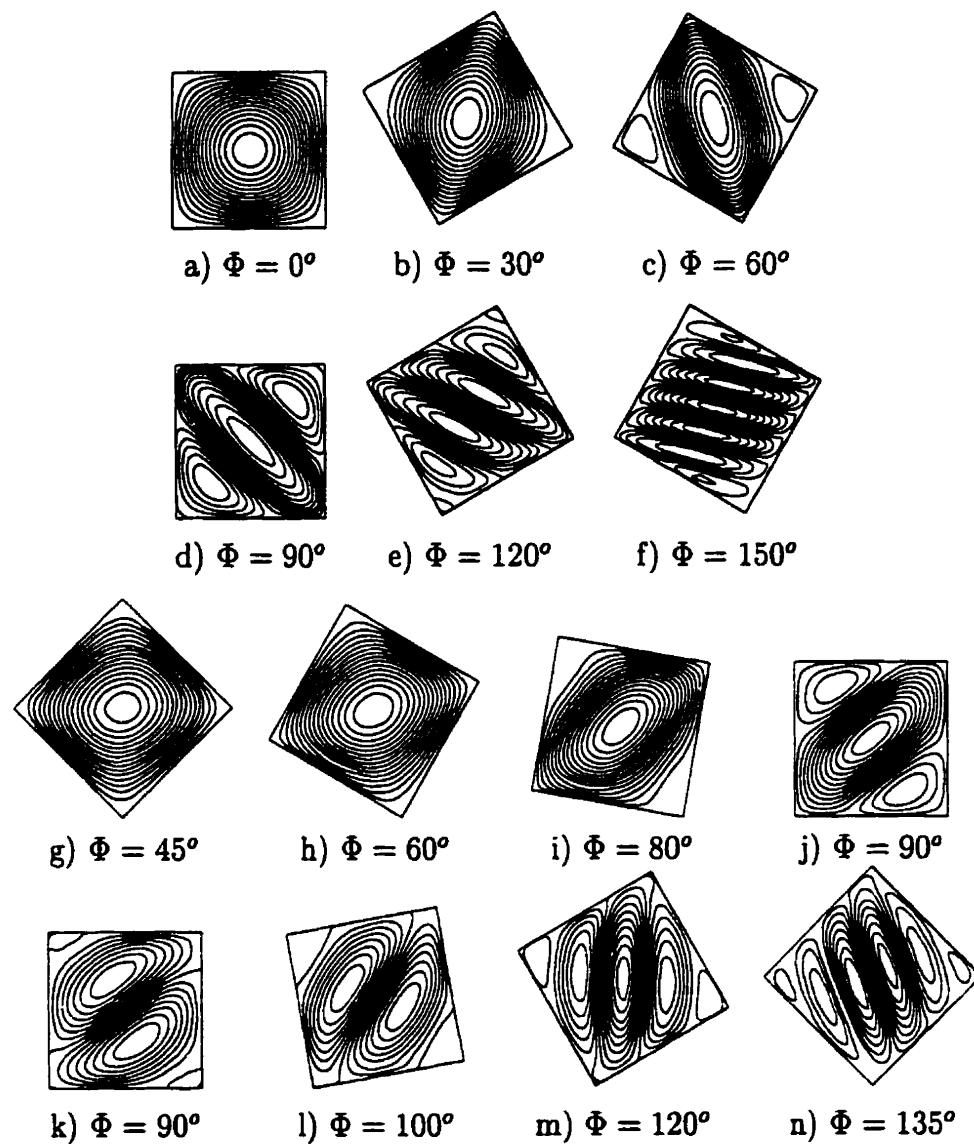
Figure 5.14 : Effet de l'angle de l'inclinaison sur la constante  $R^{sup}$  pour  $A = 1$  : a)  $\kappa = 0$ , b)  $\kappa = 1$ .

cas  $\Phi = 180^\circ$  et  $Le < 1$  est similaire. Nous remarquons sur la figure, qu'à chaque valeur de  $\Phi$ , il existe deux solutions possibles ( $\lambda_1$  et  $\lambda_m$ ), l'une correspondant à  $Le > 1$ , l'autre à  $Le < 1$ . Une symétrie des résultats par rapport à  $\Phi = 90^\circ$  est observée. La solution correspondant à  $Le < 1$  obtenue à un angle  $\Phi$  est une image miroir de celle correspondant à  $Le > 1$  pour un angle  $180^\circ - \Phi$ .

Les résultats numériques montrent que, suivant la valeur de  $\Phi$ , les structures de l'écoulement correspondant aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_m$  peuvent être monocellulaires ou multicellulaires (voir figure 5.15). Ainsi, pour  $Le < 1$  et  $\kappa = 0$ , la figure 5.15a indique que l'écoulement est monocellulaire lorsque  $\Phi = 0^\circ$ . En augmentant graduellement  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , la cellule de convection (observée à  $\Phi = 0^\circ$ ) se rétrécit et s'incline graduellement vers la gauche pour laisser place à la formation de deux petites cellules de convection aux coins inférieur gauche et supérieur droit (voir figure 5.15a-d). En augmentant  $\Phi$  de  $90^\circ$  à  $180^\circ$ , la structure de l'écoulement est alors composée de quatre cellules de convection lorsque  $\Phi = 120^\circ$  et de sept cellules lorsque  $\Phi = 135^\circ$  (voir figure 5.15e-f). Au fur et à mesure que  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$ , les cellules de convection deviennent de plus en plus nombreuses et s'inclinent progressivement vers la position horizontale (voir figure 5.15f). Pour  $Le > 1$ , le même scénario se produit lorsque  $\Phi$  varie de  $180^\circ$  à  $0^\circ$ .

Des résultats similaires ont été obtenus pour le cas  $\kappa = 1$  et  $Le > 1$  (figure 5.15g-n). Lorsque  $\Phi = 90^\circ$  on observe qu'il existe une solution double. La première solution est composée de deux cellules de convection contra-rotatives (voir figure 5.15j) et la deuxième de trois cellules de convection (voir figure 5.15k). Ces deux solutions correspondent au même seuil de convection ( $R^{sup} = -209.84$ ). Après avoir examiné toutes les valeurs propres, nous avons trouvé que ces dernières sont égales deux à deux, c'est-à-dire  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$  avec  $i = 1, 3, \dots, m - 1$ .

L'influence du rapport de forme de la cavité sur le seuil de convection est illustrée sur la figure 5.16 pour  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$  (figure 5.16a) et 1 (figure 5.16b). Pour

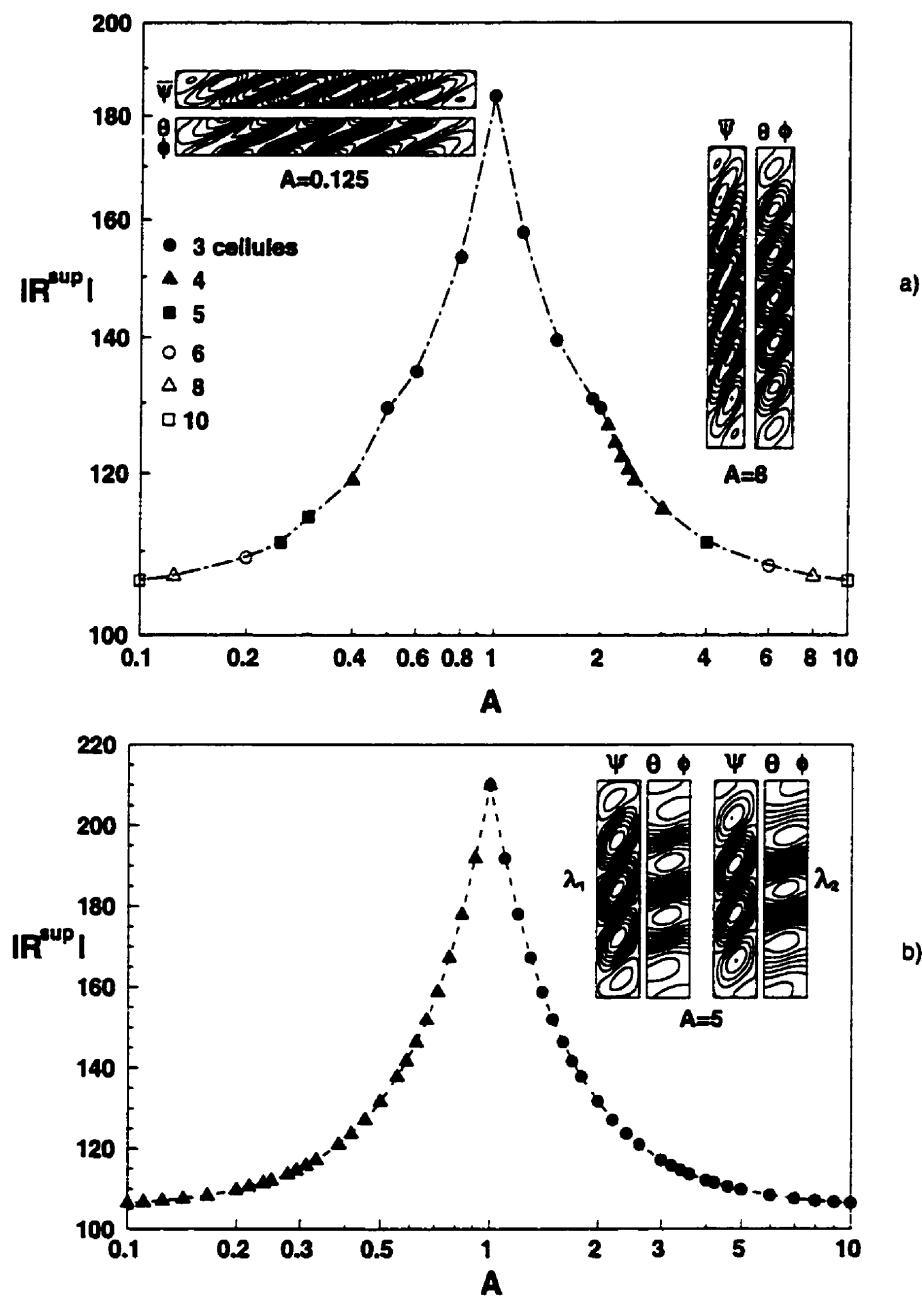


**Figure 5.15 :** Effet de l'angle de l'inclinaison sur la structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$ ,  $A = 1$  et  $\kappa = 0$  : a)  $R^{sup} = 39.48$ , b)  $R^{sup} = 44.92$ , c)  $R^{sup} = 70.36$ , d)  $R^{sup} = 184.07$ , e)  $R^{sup} = 754.96$ , f)  $R^{sup} = 9387.30$  et pour  $Le > 1$ ,  $A = 1$  et  $\kappa = 1$  : g)  $R^{sup} = -32.20$ , h)  $R^{sup} = -44.85$ , i)  $R^{sup} = -107.58$ , j)  $R^{sup} = -209.62$ , k)  $R^{sup} = -209.62$ , l)  $R^{sup} = -311.46$ , m)  $R^{sup} = -831.08$ , n)  $R^{sup} = -2219.54$ .

$A = 1$  et  $\kappa = 0$ ,  $R^{sup} = \pm 184.07$  et la structure de l'écoulement est composée de trois cellules de convection contra-rotatives (figure 5.15d). En augmentant  $A$ , cette structure reste inchangée mais  $R^{sup}$  décroît d'abord d'une façon monotone. À  $A \simeq 2.1$ , on observe un changement brusque du taux de variation de  $R^{sup}$ , cela étant dû à la transition d'une structure de trois cellules à une structure de quatre cellules de convection. Ce régime est maintenu jusqu'à  $A \simeq 3$  au-delà duquel cinq cellules de convection sont formées. Ce processus est répété au fur et à mesure que le rapport de forme augmente, tel qu'illustré par le cas  $A = 8$  (figure 5.16a). Lorsque  $A$  est suffisamment grand,  $R^{sup}$  devient indépendant de ce paramètre et tend asymptotiquement vers la valeur  $\pm 105.36$ . Pour une cavité infiniment longue, la structure d'écoulement révèle une formation périodique de cellules de convection, tournant alternativement dans un sens et dans l'autre, empilées dans la direction verticale. Pour le cas d'une cavité aplatie ( $A \ll 1$ ), des résultats similaires ont été obtenus lorsque  $A$  tend vers de petites valeurs. Pour cette situation, les cellules de convection sont alignées dans la direction horizontale (voir figure 5.15a pour  $A = 1/8$ ). Une symétrie par rapport à  $A = 1$  est observée sur la courbe.

L'effet de  $A$  sur  $R^{sup}$  lorsque  $\kappa = 1$  est pratiquement similaire au cas précédent (voir figure 5.16b). Pour cette situation, nous avons observé que le changement de la structure de l'écoulement se faisait d'une façon graduelle lorsque  $A$  augmente ou diminue. Il est à constater que, indépendamment de  $\kappa$ ,  $R^{sup}$  tend vers 105.36 lorsque  $A$  est suffisamment grand ou petit. Nous rappelons que pour  $\kappa = 1$ , il existe une solution double avec différentes structures d'écoulements. Les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations sont présentées sur la figure 5.16b pour  $A = 5$  et  $Le > 1$ .

En prenant la solution de la conduction pure comme conditions initiales, l'évolution dans le temps de la valeur maximale et minimale de la fonction de courant est présentée sur la figure 5.17 pour  $\Phi = 90^\circ$ ,  $R_T = 15$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 5$

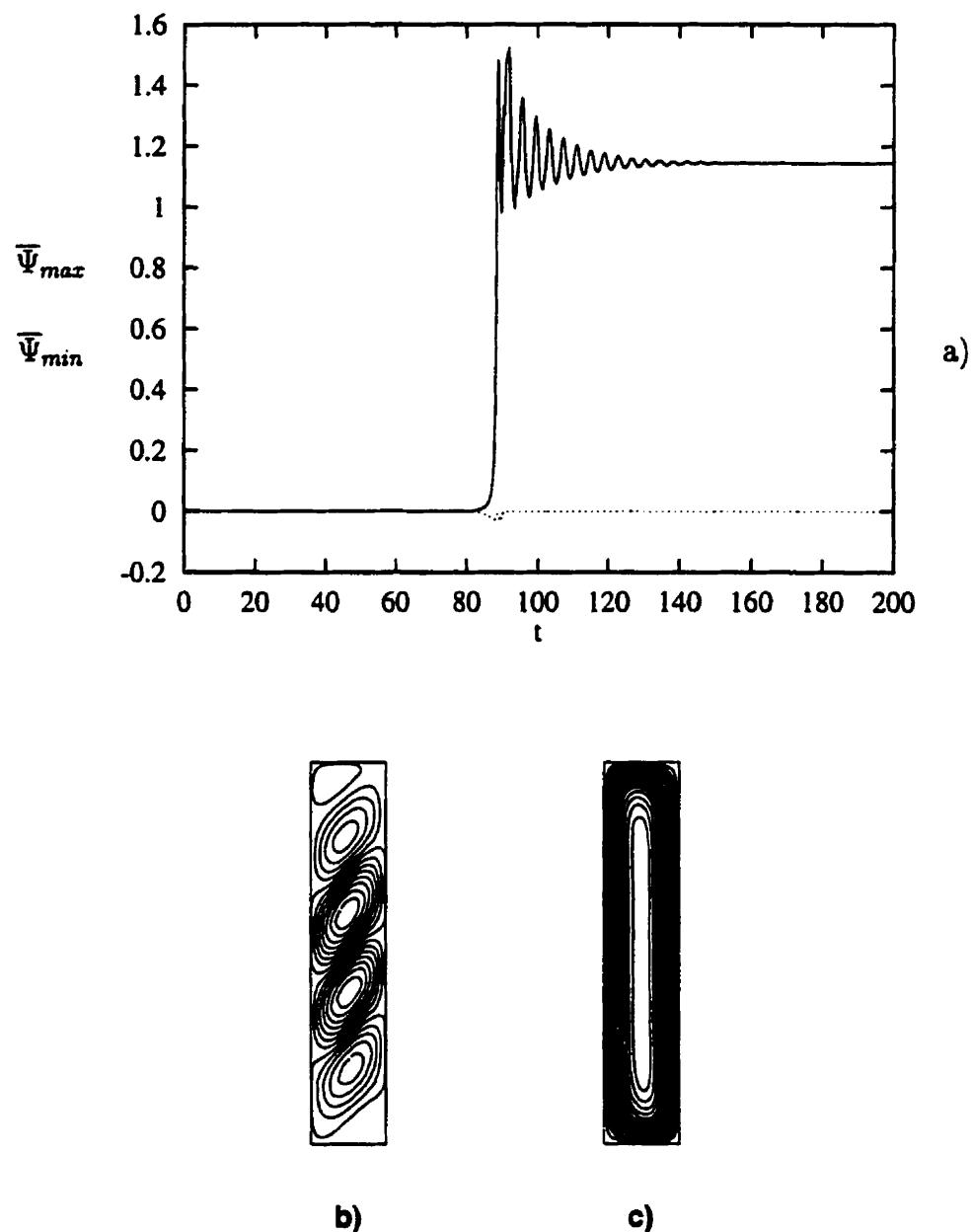


**Figure 5.16 :** Effet du rapport de forme sur la constante  $R^{sup}$  pour  $\Phi = 90^\circ$  : a)  $\kappa = 0$ , b)  $\kappa = 1$ .

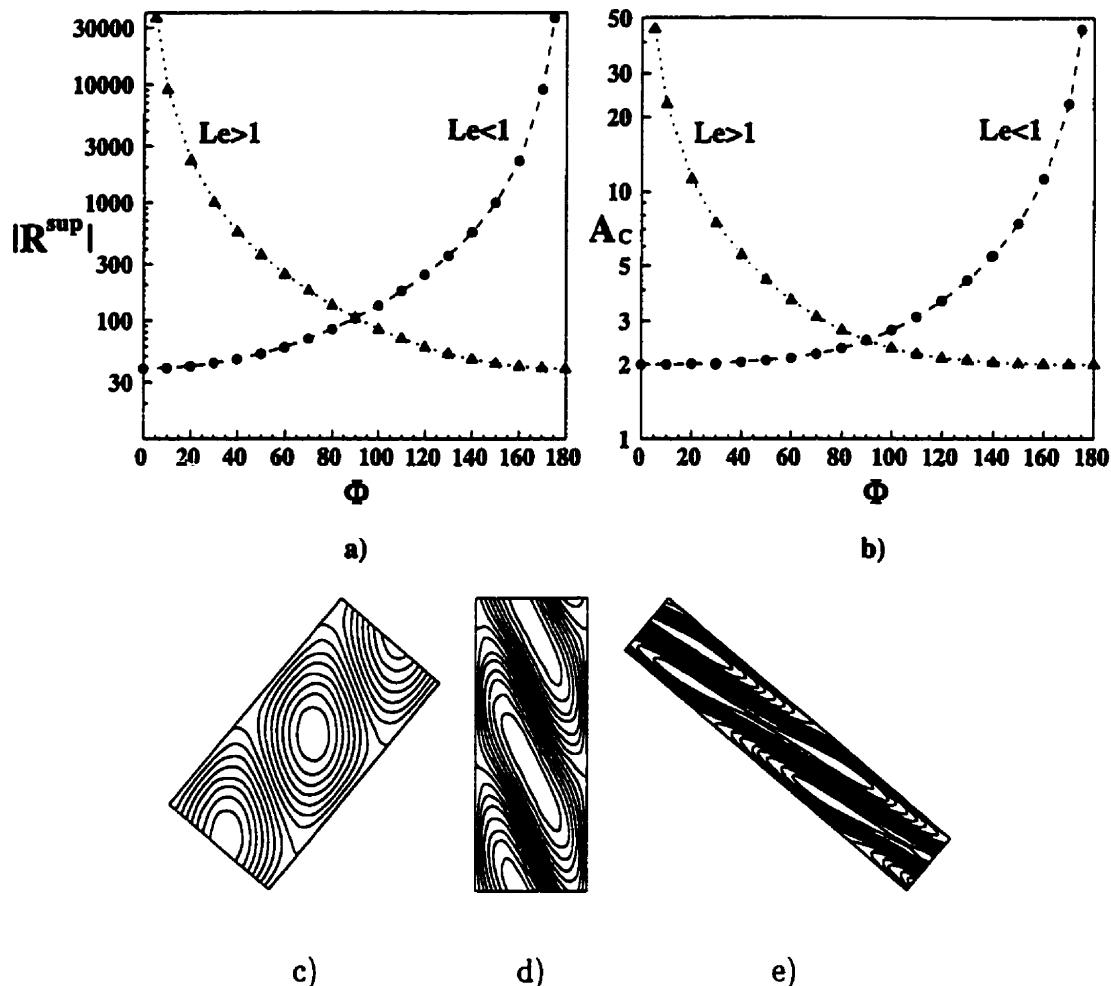
et  $\varepsilon = 1$ . Pour cette situation, le nombre de Rayleigh supercritique est donné par  $R_{TC}^{sup} = 12.19$ . Sur la figure, on constate qu'un écoulement convectif de faible intensité peut être maintenu jusqu'à  $t = 80$ . À  $t = 80$ , le champ de la fonction de courant montre que la structure de l'écoulement est multicellulaire, tel que prédit par la théorie de la stabilité linéaire (comparer les lignes de courant de la figure 5.17b à  $t = 80$  avec celles de la figure 5.16b). Pour  $t > 80$ , les résultats numériques (non présentés ici) indiquent que les cellules de convection fusionnent graduellement pour former un écoulement monocellulaire circulant dans le sens trigonométrique. La solution obtenue à  $t = 200$  (figure 5.17c) est en bon accord avec les prédictions du concept de l'écoulement parallèle. La structure multicellulaire, prédicta par la théorie de la stabilité linéaire, ne peut donc être maintenue que lorsque l'intensité de l'écoulement est très faible. Une fois que cette dernière devient plus importante, les termes convectifs non linéaires dans les équations de bases l'emportent sur les termes linéaires et une bifurcation d'une structure multicellulaire vers une structure monocellulaire se produit.

Pour le cas d'une cavité infiniment longue ( $A \rightarrow \infty$ ), selon la valeur de  $\kappa$  et  $\Phi$ , l'analyse de la stabilité linéaire prédit que la structure de l'écoulement peut être monocellulaire ou multicellulaire. Lorsque cette dernière est multicellulaire, on observe une formation périodique de cellules de convection contra-rotatives dans la direction la plus longue de la cavité. Cette situation est simulée numériquement de la même façon que pour le cas fluide (voir section 5.2.1.4). Ainsi, la valeur de  $R^{sup}$  est calculée pour plusieurs valeurs de  $A$  et la valeur minimale de  $R^{sup}$  donne le seuil de la convection supercritique. Par ailleurs, lorsque l'écoulement est monocellulaire ( $A_C \rightarrow \infty$ ), nous avons pris un rapport de forme  $A = 100$ , cette valeur étant largement suffisante pour simuler le cas d'une cavité infiniment longue.

Sur la figure 5.18, nous présentons l'effet de  $\Phi$  sur la constante  $R^{sup}$  (figure 5.18a) et sur la longueur d'onde  $A_C$  (figure 5.18b) pour  $\kappa = 0$ . À  $\Phi = 0^\circ$ ,  $R^{sup} = 4\pi^2$  et



**Figure 5.17 :** a) Évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement pour  $R_T = 15$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 5$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ , lignes de courant à b)  $t = 80$  et c)  $t = 200$ .



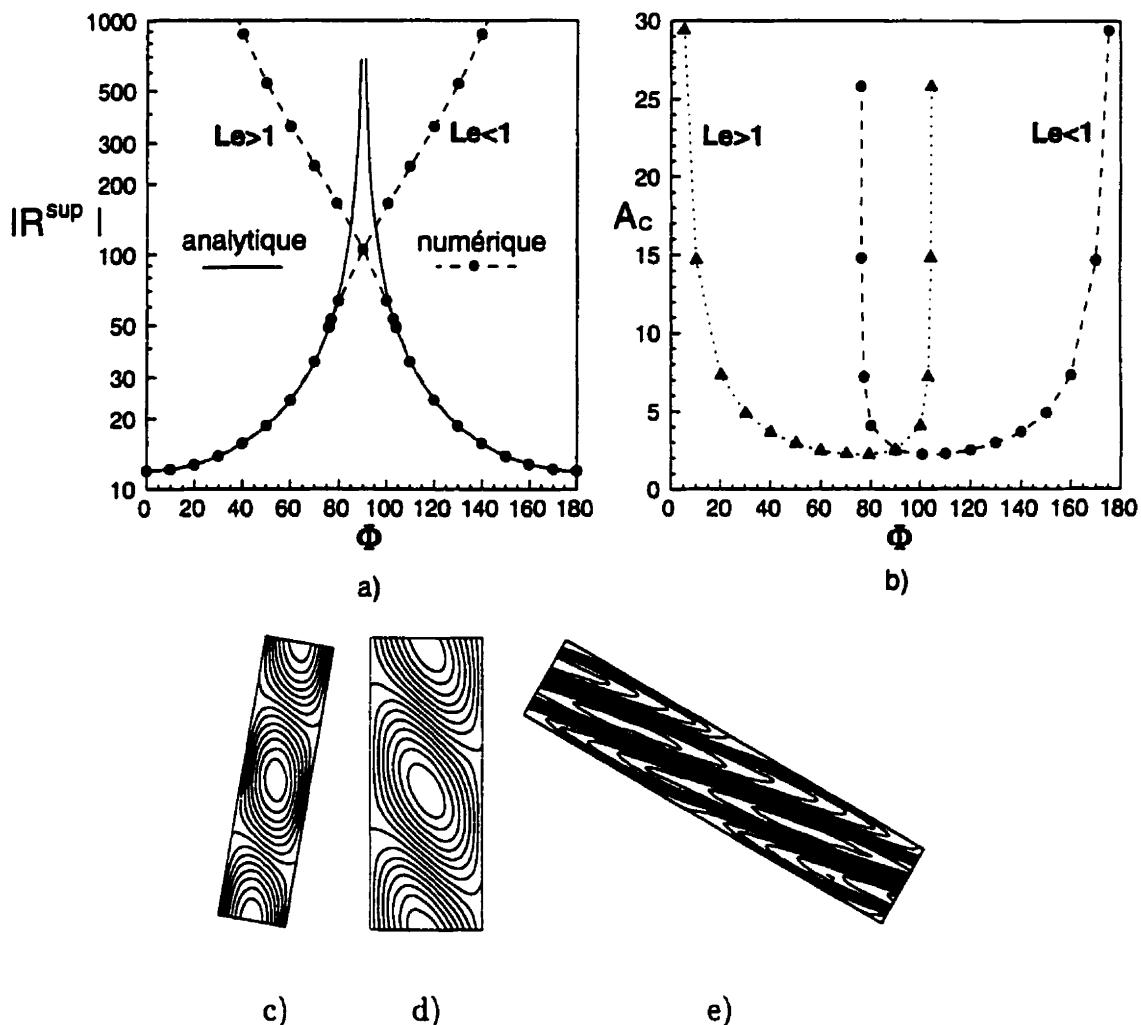
**Figure 5.18 :** Effet de l'inclinaison sur : a) la constante  $R^{sup}$ , b) la longueur d'onde  $A_C$  pour  $A = \infty$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$ ,  $A = \infty$  et  $\kappa = 0$  : c)  $\Phi = 40^\circ$ ,  $R^{sup} = 47.28$ ,  $A_C = 2.05$ , d)  $\Phi = 90^\circ$ ,  $R^{sup} = 105.36$ ,  $A_C = 2.50$ , e)  $\Phi = 140^\circ$ ,  $R^{sup} = 561.44$ ,  $A_C = 5.53$ .

$A_C = 2$  pour  $Le < 1$ , ce qui est en accord avec les résultats de Nield 1968. En augmentant  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ ,  $R^{sup}$  et  $A_C$  augmentent d'une façon monotone et tendent vers l'infini quand  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$  (voir figure 5.18a-b). L'examen des lignes de courants pour différents angles d'inclinaison (voir figure 5.18c-e) montre que lorsque  $\Phi$  varie de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , les cellules de convection, qui sont carrées à  $\Phi \approx 0^\circ$ , s'allongent graduellement, s'imbriquent et deviennent infiniment longues lorsque  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$ . Les résultats obtenus avec  $Le > 1$  sont identiques à ceux obtenus avec  $Le < 1$ . Ils peuvent être déduits par symétrie par rapport à  $\Phi = 90^\circ$ .

La figure 5.19 montre l'influence de  $\Phi$  sur  $R^{sup}$  et  $A_C$  pour le cas d'une cavité infiniment longue lorsque  $\kappa = 1$ . L'évolution de  $R^{sup}$  en fonction de  $\Phi$  est pratiquement similaire à celle du cas précédent ( $\kappa = 0$ ). Cependant, pour  $Le < 1$ , les résultats montrent qu'en faisant varier  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $75.7^\circ$ , la structure de l'écoulement demeure monocellulaire ( $A_C = \infty$ ). Au-delà de  $75.8^\circ$ , l'écoulement devient multicellulaire et on observe que la longueur d'onde décroît de l'infini vers un minimum pour  $\Phi \simeq 110^\circ$  et remonte vers l'infini quand  $\Phi$  s'approche de  $180^\circ$ . Comme le montre la figure 5.19c-e, les cellules de convection sont pratiquement rectangulaires au voisinage de  $80^\circ$ . Elles se rétrécissent graduellement lorsque  $\Phi$  augmente jusqu'à  $110^\circ$  puis s'allongent et s'imbriquent au fur et à mesure qu'il s'approche de  $180^\circ$ . Le même scénario se produit pour le cas  $Le > 1$  lorsque  $\Phi$  varie de  $180^\circ$  à  $0^\circ$ . En se basant sur le concept de l'écoulement parallèle, le développement asymptotique des relations (4.72), lorsque  $C_T$  et  $C_T'$  tendent vers zéro, montre que le nombre de Rayleigh supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R^{sup}}{1 - Le} \quad \text{avec} \quad R^{sup} = \frac{12}{\cos \Phi} \quad (5.130)$$

ce dernier étant valide pour  $0^\circ \leq \Phi < 90^\circ$  lorsque  $Le < 1$  et pour  $90^\circ < \Phi \leq 180^\circ$  lorsque  $Le > 1$ . Lorsque la structure de l'écoulement est monocellulaire, un bon accord est obtenu entre les résultats numériques (cercles pleins) et analytiques (trait plein).



**Figure 5.19 :** Effet de l'inclinaison sur : a) la constante  $R^{sup}$ , b) la longueur d'onde  $A_C$ , pour  $A = \infty$  et  $\kappa = 1$ , structure de l'écoulement au seuil de la convection pour  $Le < 1$ ,  $A = \infty$  et  $\kappa = 1$  : c)  $\Phi = 80^\circ$ ,  $R^{sup} = 63.57$ ,  $A_C = 4.07$ , d)  $\Phi = 90^\circ$ ,  $R^{sup} = 105.36$ ,  $A_C = 2.50$ , e)  $\Phi = 150^\circ$ ,  $R^{sup} = 1600.88$ ,  $A_C = 4.87$ .

### *Diagrammes de stabilité et des bifurcations*

Pour le cas d'une cavité verticale soumise à des forces de volume égales et opposées ( $N = -1$ ), les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.20a-b pour  $\kappa = 0$ . Le diagramme de stabilité (figure 5.20a), présenté dans le plan  $R_T^0 - Le$ , correspond au cas  $\varepsilon = 0.2$  et  $\kappa = 0$  ( $R_T^0$  est le nombre de Rayleigh thermique normalisé :  $R_T^0 = R_T / |R_0^{sup}|$ ). Ce diagramme est donc valide pour des valeurs de  $A$  et  $\Phi$  arbitraires. On constate l'existence de trois régions distinctes délimitées par des lignes correspondant à  $R_{TC}^{sur}$  (Éq. 5.98)),  $R_{TC}^{osc}$  (Éq. 5.100)) et  $R_{TC}^{sup}$  (Éq. 5.96)). Tel que discuté antérieurement, les trois régions correspondent aux régimes conductif stable (I), convectif oscillant (III) et convectif croissant (II). Les résultats de la stabilité linéaire montrent que l'existence du régime oscillant dépend de  $\varepsilon$  et de  $Le$ . Ce régime disparaît complètement lorsque  $\varepsilon$  tend vers l'unité. Pour  $\varepsilon = 0.2$ , on remarque qu'un écoulement convectif est possible même quand  $Le = 1$ . Pour cette situation, le seuil de la convection est donnée par  $R_{TC}^{sur} = R_0^{sup}(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$ . La figure 5.21 illustre l'évolution temporelle périodique de l'intensité de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse pour  $R_T = 400$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 1$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $A = 1$ ,  $\kappa = 0$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Pour ces données, le seuil de la convection est  $R_{TC}^{sur} = 276.1$ . À un instant  $t$  donné, nous constatons que même si  $Le = 1$ , le taux du transfert de chaleur est différent de celui du transfert de masse. Les lignes de courant présentées sur la figure 5.21c-h indiquent que l'évolution dans le temps de l'écoulement convectif est très complexe. Il oscille entre le régime d'écoulement thermiquement dominé (figure 5.21c-e) et le régime d'écoulement solutairement dominé (figure 5.21f-g). À partir des équations de base, nous pouvons démontrer facilement que lorsque  $Le = 1$ , si le problème admet une solution convective, cette dernière est forcément une solution transitoire. C'est le seul type de solution qui engendre une force motrice non nulle.

Pour confirmer les prédictions de la théorie de la stabilité linéaire, des résultats numériques des équations de base, obtenus pour  $A = 1$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$ ,

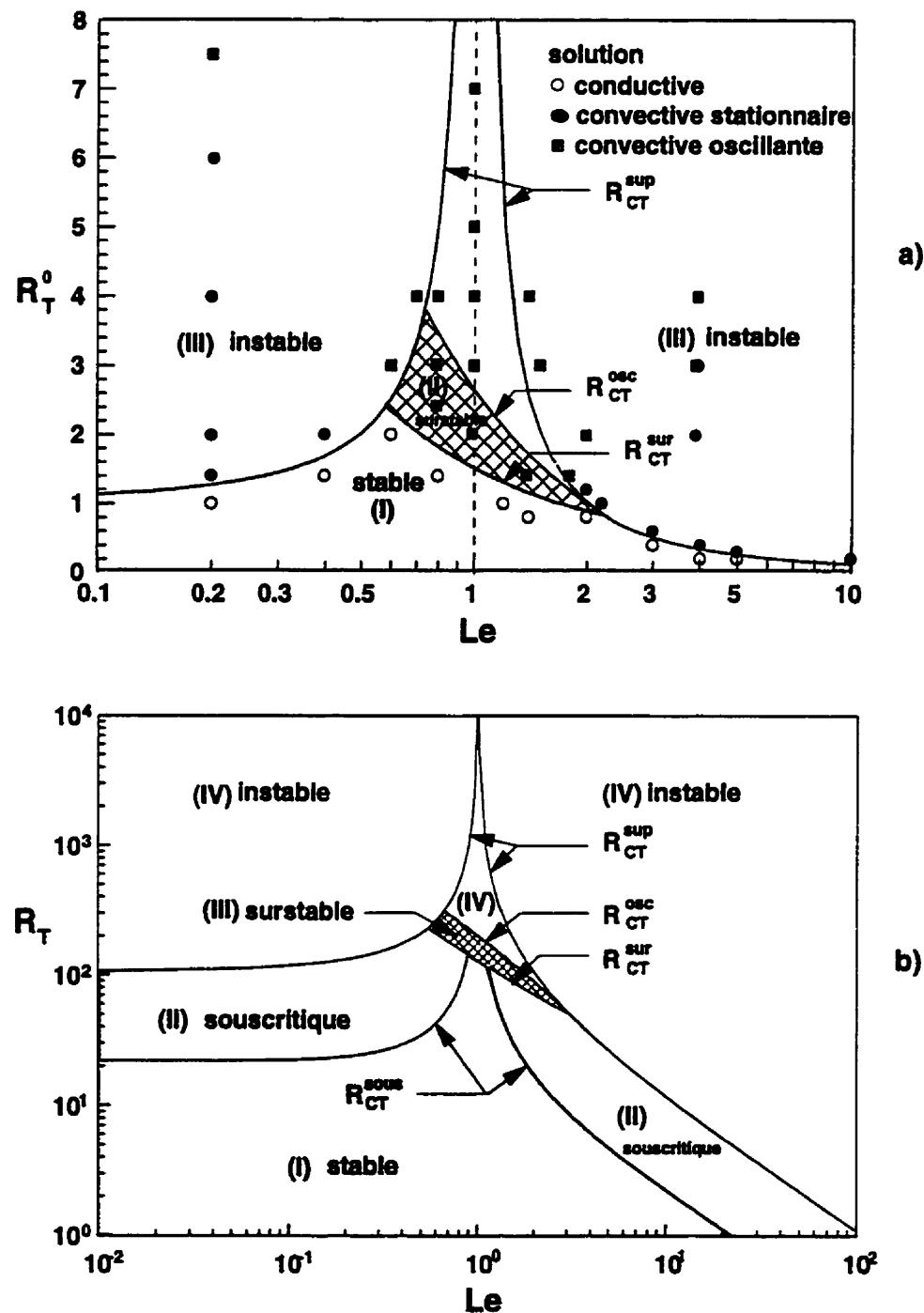
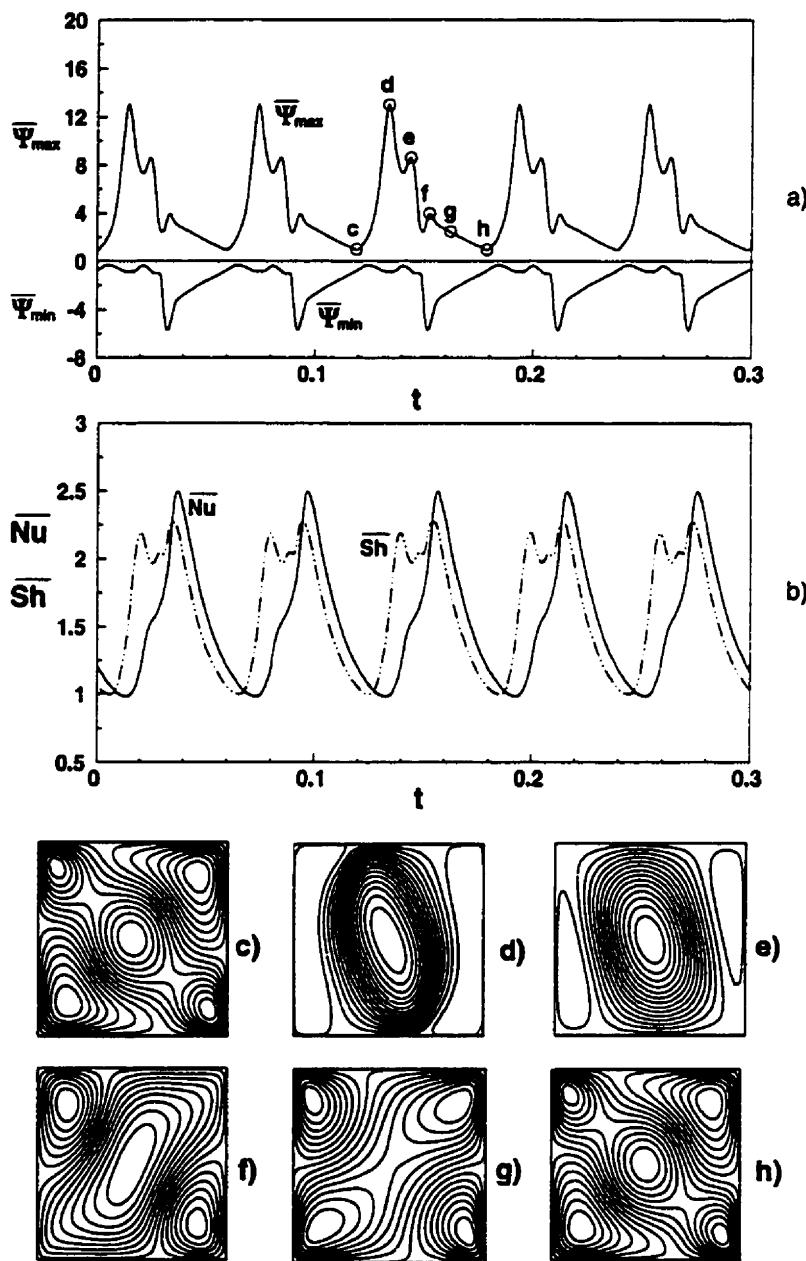


Figure 5.20 : a) Diagramme de stabilité pour  $\Phi = 90^\circ$ , a)  $\varepsilon = 0.2$  et  $\kappa = 0$ , b)  $A = \infty$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et  $\kappa = 1$ .



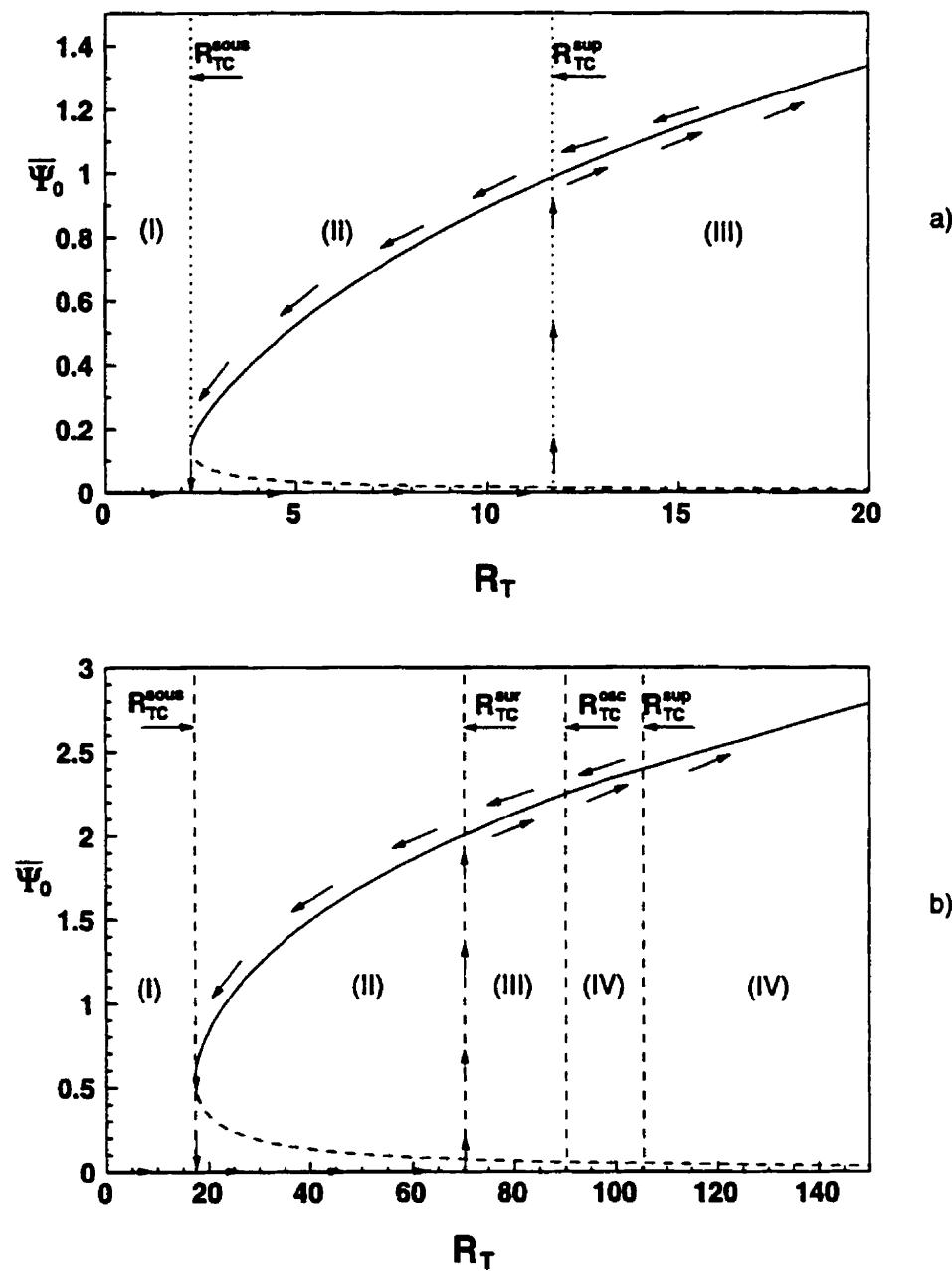
**Figure 5.21 :** Évolution temporelle de : a) l'intensité de l'écoulement, b) des transferts de chaleur et de masse, c-h) la structure de l'écoulement pour  $R_T = 400$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 1$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$ .

sont présentés sur le diagramme de stabilité (figure 5.20a) par des symboles. Ces résultats ont été obtenus en prenant la solution de la conduction pure comme conditions initiales. Toutefois lorsqu'on prend une solution à amplitude finie comme conditions initiales, les résultats ont montré l'existence de la convection souscritique en bas du seuil de convection.

Le diagramme de stabilité, correspondant à la situation  $\kappa = 1$ , est illustré sur la figure 5.20b pour  $A = \infty$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Outre les trois régions décrites dans la figure 5.20a, il existe aussi une quatrième région correspondant au régime de la convection souscritique. Ce dernier est délimité par le nombre de Rayleigh souscritique prédit par le concept de l'écoulement parallèle (Éq. (4.97)) et les nombres de Rayleigh,  $R_{TC}^{sur}$  et  $R_{TC}^{sup}$ , prédits par l'analyse de la stabilité linéaire.

Le diagramme de bifurcation présenté sur la figure 5.22 illustre la variation de l'intensité de l'écoulement en fonction de  $R_T$  pour  $N = -1$ ,  $Le = 2$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $A = \infty$ ,  $\kappa = 1$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Pour ces données,  $R_{TC}^{sous} = 17.36$ ,  $R_{TC}^{sur} = 70.24$ ,  $R_{TC}^{esc} = 90.14$  et  $R_{TC}^{sup} = 105.36$ . Ces valeurs sont indiquées sur le graphique par des lignes verticales. La solution permanente (écoulement parallèle) est représentée en trait plein. Les quatre régions correspondant à celle décrites sur la figure 5.20b sont également indiquées sur la figure 5.22. La solution du problème suit le trajet indiqué par des flèches lorsque  $R_T$  augmente ou diminue. L'effet de la porosité sur l'état final de la solution convective sera discuté dans les prochaines figures.

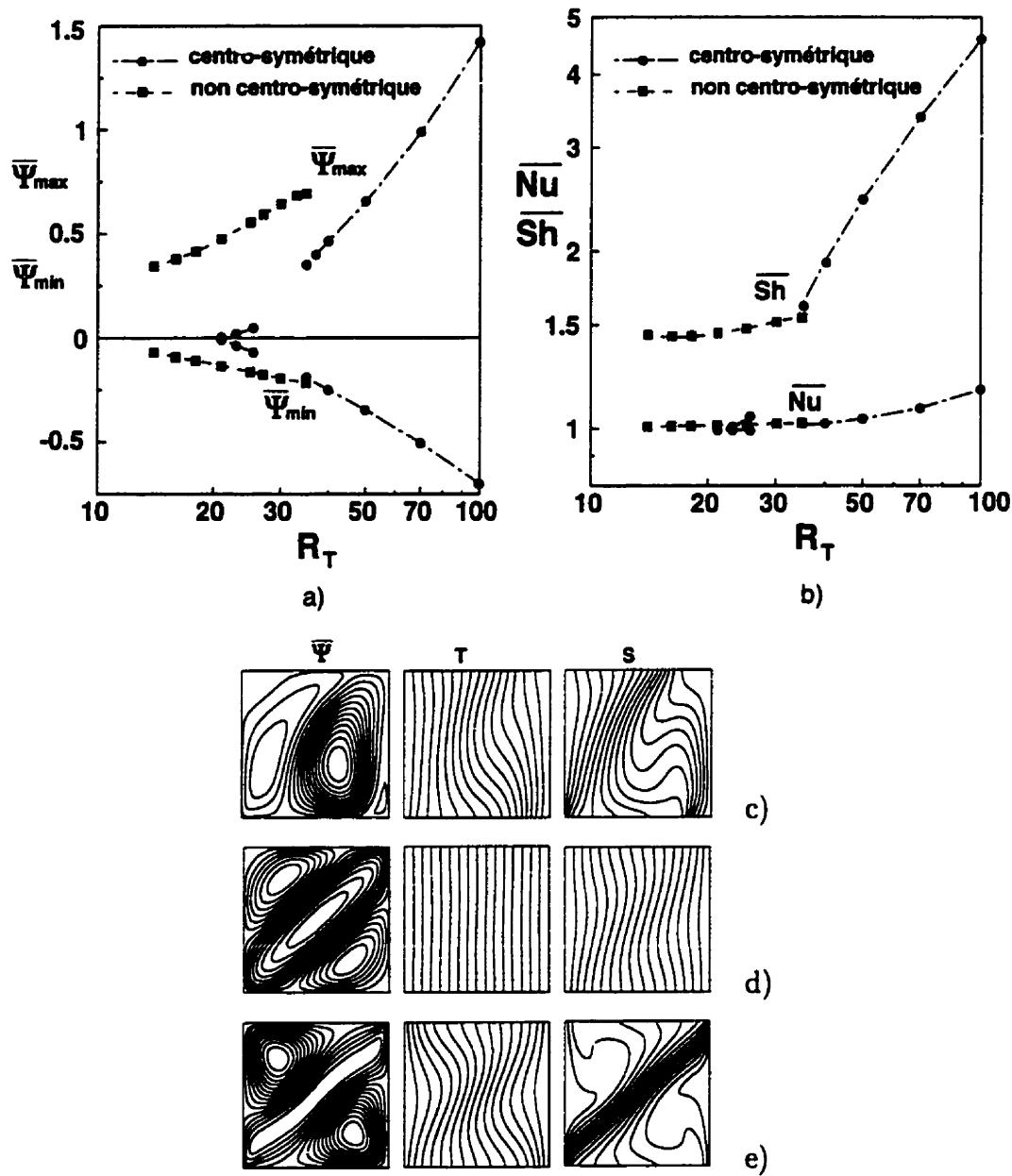
La figure 5.23 illustre l'effet de  $R_T$  sur  $\bar{\Psi}_{min}$  et  $\bar{\Psi}_{max}$  et sur  $\bar{Nu}$  et  $\bar{Sh}$  pour  $Le = 10$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\kappa = 0$ . En prenant la solution de la conduction pure comme conditions initiales, les résultats numériques montrent que cette solution peut être maintenue jusqu'à  $R_T = 20.45$ , cette valeur correspond au nombre de Rayleigh supercritique. Pour  $R_T > R_{TC}^{sup}$ , une solution convective bifurque de l'état de repos. À partir de ce point de bifurcation, on observe que  $\bar{Nu}$  et  $\bar{Sh}$  augmentent avec  $R_T$ . L'écoulement résultant, dont la structure est centro-symétrique, est



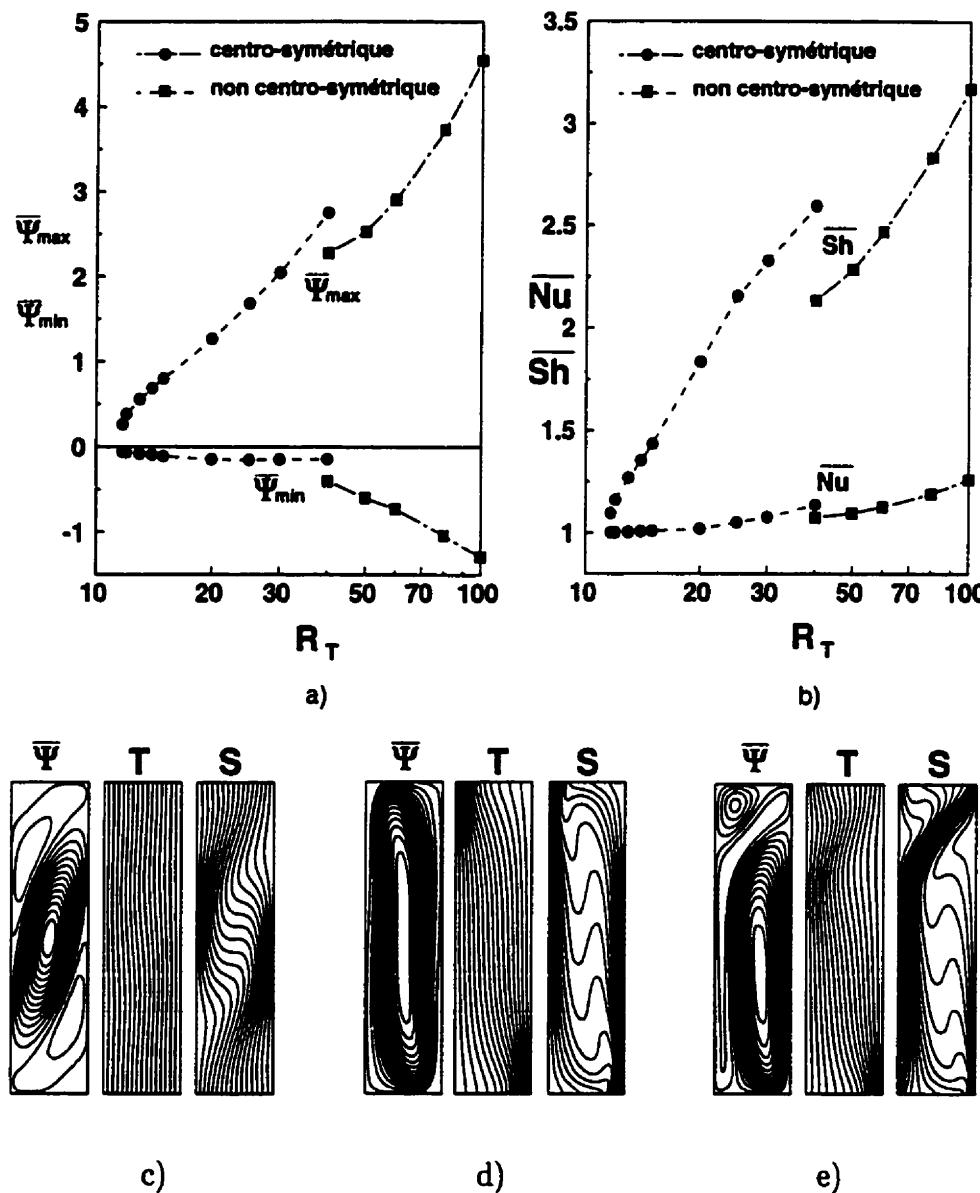
**Figure 5.22 :** Diagramme de bifurcation : variation de  $\bar{\Psi}_0$  en fonction de  $R_T$  pour  $N = -1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $A = \infty$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a)  $Le = 10$ , b)  $Le = 2$ .

composé de trois cellules de convection (voir figure 5.23d pour  $R_T = 25$ ). La structure de cet écoulement est semblable à celle prédictive par la théorie de la stabilité linéaire (voir figure 5.15d). La figure 5.23a-b indique que ce type de solution peut être maintenu jusqu'à  $R_T = 25.5$ . Au-dessus de cette valeur, une solution non centro-symétrique (voir figure 5.23c) bifurque de la solution centro-symétrique. Les résultats obtenus (figure 5.23a-b, carré plein) montrent que l'existence de la solution non centro-symétrique couvre la gamme de valeur  $13 \leq R_T \leq 35$ . Pour  $R_T$  supérieur à 35, une solution convective centro-symétrique (similaire à celle de la figure 5.23d), bifurque (voir figure 5.23e). Nous constatons que pour  $13 \leq R_T \leq 20.45$ , il existe deux solutions possibles : la solution de la conduction pure et la solution convective non centro-symétrique (figure 5.23c). Pour  $20.45 < R_T \leq 25.5$ , il existe deux solutions convectives; une centro-symétrique et l'autre non centro-symétrique (figure 5.23c-d).

La figure 5.24 montre un autre type de bifurcations pour le cas  $A = 4$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\Phi = 90^\circ$ . Au-dessus de  $R_{TC}^{sup} = 12.34$ , les résultats numériques indiquent l'existence d'une solution centro-symétrique (figure 5.24c-d). Nous notons que la structure de l'écoulement est multicellulaire lorsque  $R_T$  a une valeur proche de  $R_{TC}^{sup}$  (figure 5.24c). En augmentant  $R_T$ , les cellules de convection fusionnent graduellement pour former une seule cellule de convection (figure 5.24d). Cette structure monocellulaire est maintenue jusqu'à  $R_T = 40$ , valeur au-delà de laquelle une solution convective multicellulaire et non centro-symétrique apparaît (voir figure 5.24e pour  $R_T = 40$ ). Ce type de solution, comme le montre la figure 5.24a-b, peut être maintenu jusqu'à  $R_T = 100$  et plus. De plus, on observe que les deux types de solutions coexistent à  $R_T = 40$ . Il est à noter qu'il est possible d'entretenir la solution centro-symétrique au-dessous de la valeur supercritique  $R_T = 12.34$ , soit jusqu'à  $R_T = 11.7$ . Cela montre l'existence de la convection souscritique.



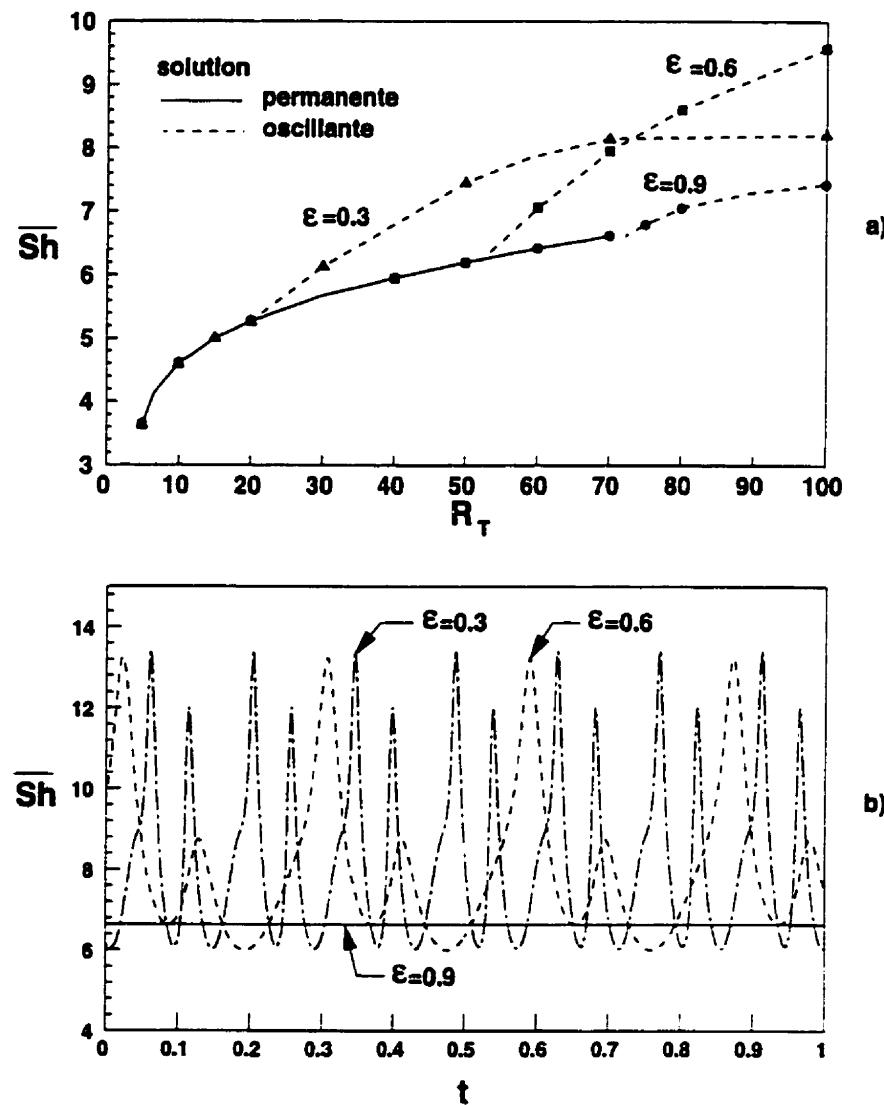
**Figure 5.23 :** Effet de  $R_T$  sur : a) l'intensité de l'écoulement, b) les transferts de chaleur et de masse pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$ , et sur les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : c)  $R_T = 25$ ,  $\overline{Nu} = 1.015$ ,  $\overline{Sh} = 1.480$ , d)  $R_T = 25$ ,  $\overline{Nu} = 1.001$ ,  $\overline{Sh} = 1.047$ , e)  $R_T = 100$ ,  $\overline{Nu} = 1.164$ ,  $\overline{Sh} = 4.595$ .



**Figure 5.24 :** Effet de  $R_T$  sur : a) l'intensité de l'écoulement, b) les transferts de chaleur et de masse pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 0$ , et sur les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour c)  $R_T = 13$ ,  $\bar{Nu} = 1.004$ ,  $\bar{Sh} = 1.268$ , d)  $R_T = 40$ ,  $\bar{Nu} = 1.135$ ,  $\bar{Sh} = 2.595$ , e)  $R_T = 40$ ,  $\bar{Nu} = 1.074$ ,  $\bar{Sh} = 2.135$ .

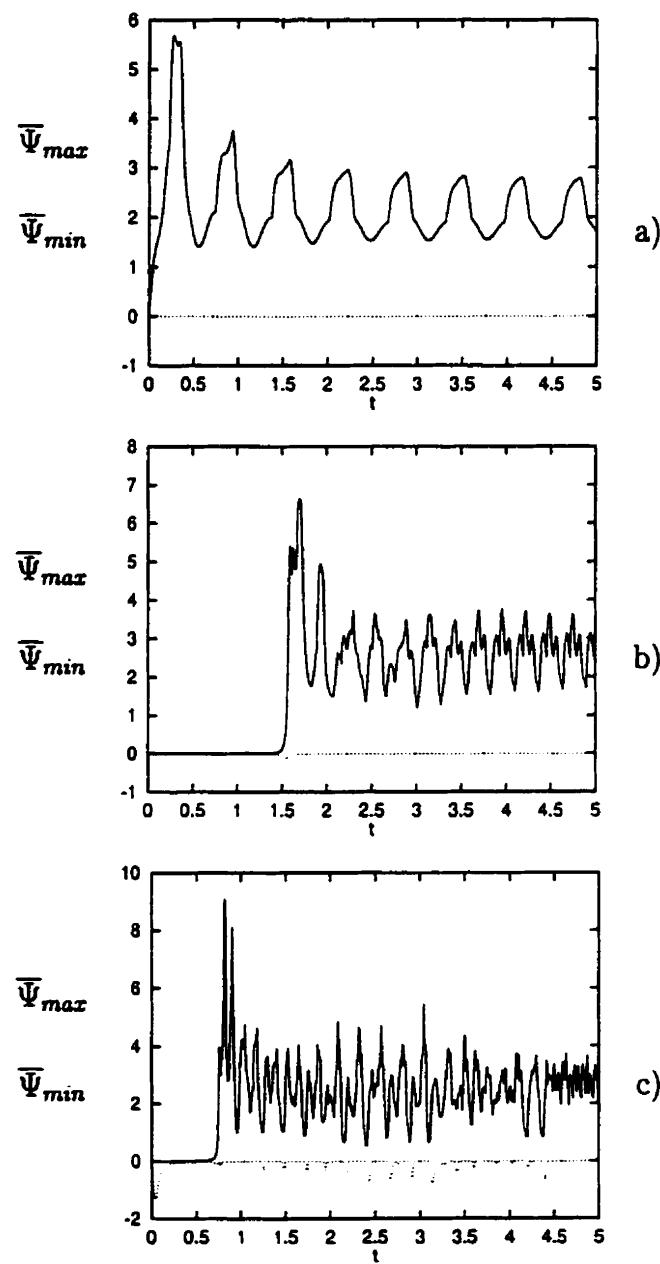
### *Effet de la porosité $\epsilon$*

Dans le passé, Trevisan et Bejan 1986, Alavyoon 1993 et Alavyoon et al. 1994 ont souligné le fait que la porosité normalisée du milieu poreux,  $\epsilon$ , n'avait aucune influence sur l'écoulement convectif lorsque ce dernier était stationnaire. Cela est dû au fait que le terme temporel, contenant le paramètre  $\epsilon$  dans l'équation de conservation de la masse (2.50), devient nul à l'état stationnaire. Lorsque les forces de volume sont opposées ( $N < 0$ ), on a observé numériquement dans la présente étude que, pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle et différentes valeurs de  $\epsilon$ , la solution convective du problème pouvait être stationnaire ou transitoire. L'effet de  $\epsilon$  sur l'état final de la solution convective est illustré sur la figure 5.25, en terme de  $\overline{Sh}$ , en fonction du nombre de Rayleigh et du temps. Les résultats ont été obtenus pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$ . Sur la figure 5.25a, la variation de  $\overline{Sh}$  en fonction de  $R_T$  est présentée pour  $\epsilon = 0.9, 0.6$  et  $0.3$ . La solution permanente et la solution oscillante sont indiquées par des traits plein et discontinu, respectivement. Dans le régime oscillant, selon Chen et Chen 1993, la valeur de  $\overline{Sh}$  peut être évaluée en faisant la moyenne sur une période des oscillations. Le seuil de la bifurcation de la solution permanente vers la solution oscillante est caractérisé par le nombre de Rayleigh critique  $R_{TC}^\epsilon$ . Ce dernier indique l'intersection entre les courbes résultant des solutions permanente et oscillante. Par extrapolation, nous avons obtenu les valeurs  $R_{TC}^\epsilon \approx 20, 52$  et  $72$  pour  $\epsilon = 0.3, 0.6$  and  $0.9$  respectivement. Ainsi, on constate que  $R_{TC}^\epsilon$  dépend énormément de  $\epsilon$ . L'évolution dans le temps de  $\overline{Sh}$  est présenté sur la figure 5.25b pour  $R_T = 70$  et  $\epsilon = 0.3, 0.6$  et  $0.9$ . La solution demeure permanente pour  $\epsilon = 0.9$ , mais elle est oscillante pour  $\epsilon = 0.3$  et  $0.6$ . La période des oscillations est également fonction du paramètre  $\epsilon$ . Pour  $\epsilon = 0.6$ , elle est de  $3.53$ . En diminuant de moitié la valeur de  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.3$ ), la période décroît aussi de moitié. Cette évolution montre que lorsque  $\epsilon$  tend vers de petites valeurs, la période des oscillations tend vers zéro. On a constaté numériquement que l'écoulement oscille d'une façon désordonnée lorsque  $\epsilon$  devient assez faible.



**Figure 5.25 :** a) Effets du nombre de Rayleigh et de la porosité normalisée sur le transfert de masse moyen  $\overline{Sh}$  pour  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\kappa = 1$  et  $\varepsilon = 0.3, 0.6$  et  $0.9$ , b) évolution temporelle de  $\overline{Sh}$  pour  $R_T = 70$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\kappa = 1$  et  $\varepsilon = 0.3, 0.6$  et  $0.9$ .

La figure 5.26 illustre l'évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement pour  $R_T = 50$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 5$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\varepsilon = 0.1$ ,  $0.2$  et  $0.4$ . L'état de repos ( $\bar{\Psi} = T = S = 0$ ) est choisi comme conditions initiales pour démarrer le code de calcul. Pour  $\varepsilon = 0.4$  (voir figure 5.26a) on constate qu'une solution convective, dont la structure est monocellulaire, bifurque immédiatement de l'état de repos. La circulation de l'écoulement est dans le sens trigonométrique. Avec le temps, cet écoulement se développe et converge vers un état oscillant périodique. Au début de la convection, la chaleur diffuse plus vite que la concentration puisque  $\varepsilon Le = 2$  ( $\varepsilon Le > 1$ ). Le gradient thermique horizontal s'établit donc avant le gradient solutal. Les effets thermiques l'emportent alors sur les effets solutaux et donnent naissance à un écoulement convectif thermiquement dominé ( $\bar{\Psi}_{max} > 0$ ,  $\bar{\Psi}_{min} = 0$ ). La figure 5.26b illustre l'évolution temporelle de  $\bar{\Psi}_{max}$  et  $\bar{\Psi}_{min}$  lorsque  $\varepsilon = 0.2$ . Pour cette situation,  $\varepsilon Le = 1$  et les effets thermiques et solutaux sont comparables. Comme ces derniers sont opposés, la force de poussée résultante est pratiquement nulle. Du moment où la théorie de la stabilité linéaire prédit l'accroissement de toute fluctuation arbitrairement petite, les résultats numériques montrent que l'écoulement convectif, engendré par les erreurs de discrétisation, s'amorce avec structure multicellulaire ( $\overline{\Psi}_{max} > 0$ ,  $\overline{\Psi}_{min} < 0$ ). Ceci est en bon accord avec les prédictions de l'analyse de la stabilité linéaire. Comme prévu, l'intensité de l'écoulement convectif augmente d'une façon monotone avec le temps tout en demeurant faible jusqu'à  $t = 1.633$ . Puis graduellement, les termes convectifs non linéaires dans les équations de base prennent de l'ampleur et les cellules de convection fusionnent graduellement pour former une seule cellule de convection. Ensuite, l'écoulement convectif thermiquement dominé ( $Le > 1$ ) évolue vers un état instationnaire périodique (voir figure 5.26b pour  $t > 3$ ). Finalement, le cas où  $\varepsilon = 0.1$  ( $\varepsilon Le = 0.5$ ) est présenté sur la figure 5.26c. Pour cette situation,  $\varepsilon Le < 1$  et, au début de la convection, le soluté diffuse plus rapidement que la chaleur. Le gradient de concentration se

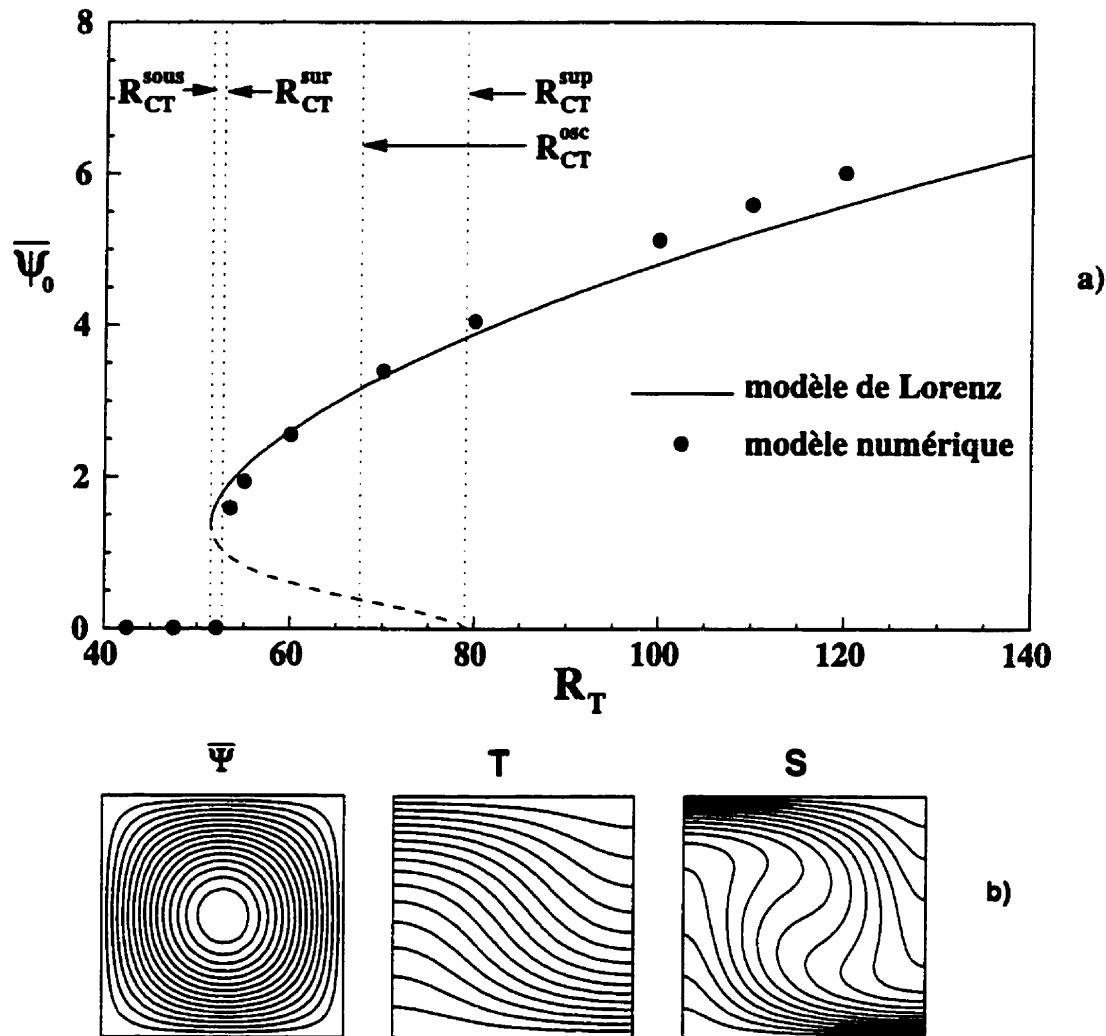


**Figure 5.26 :** Évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement pour  $R_T = 50$ ,  $N = -1$ ,  $Le = 10$ ,  $A = 4$ ,  $\Phi = 90^\circ$  et  $\kappa = 1$  : a)  $\varepsilon = 0.4$ , b)  $\varepsilon = 0.2$ , c)  $\varepsilon = 0.1$ .

développe donc avant le gradient thermique. Il en résulte que l'écoulement convectif est engendré par les effets solutaux et la circulation se fait dans le sens horaire ( $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\bar{\Psi}_{\min} < 0$ ). Avec le temps, l'intensité de l'écoulement augmente, passant par un maximum à  $t = 0.042$  et diminuant par la suite vers l'état de repos. Cette situation est due à l'établissement graduel d'un gradient thermique qui s'oppose au gradient solutal et affaiblit l'écoulement convectif. À partir de  $t = 0.160$ , nous observons l'apparition d'un écoulement multicellulaire qui devient pratiquement identique à celui prédit par la théorie de la stabilité linéaire. Par la suite, les effets thermiques se développent et dominent graduellement les effets solutaux. Ainsi, le nombre de cellules diminue et l'écoulement devient progressivement monocellulaire. Au fur et à mesure que le temps avance, on constate que l'écoulement convectif (parfois monocellulaire et parfois multicellulaire) oscille d'une façon désordonnée.

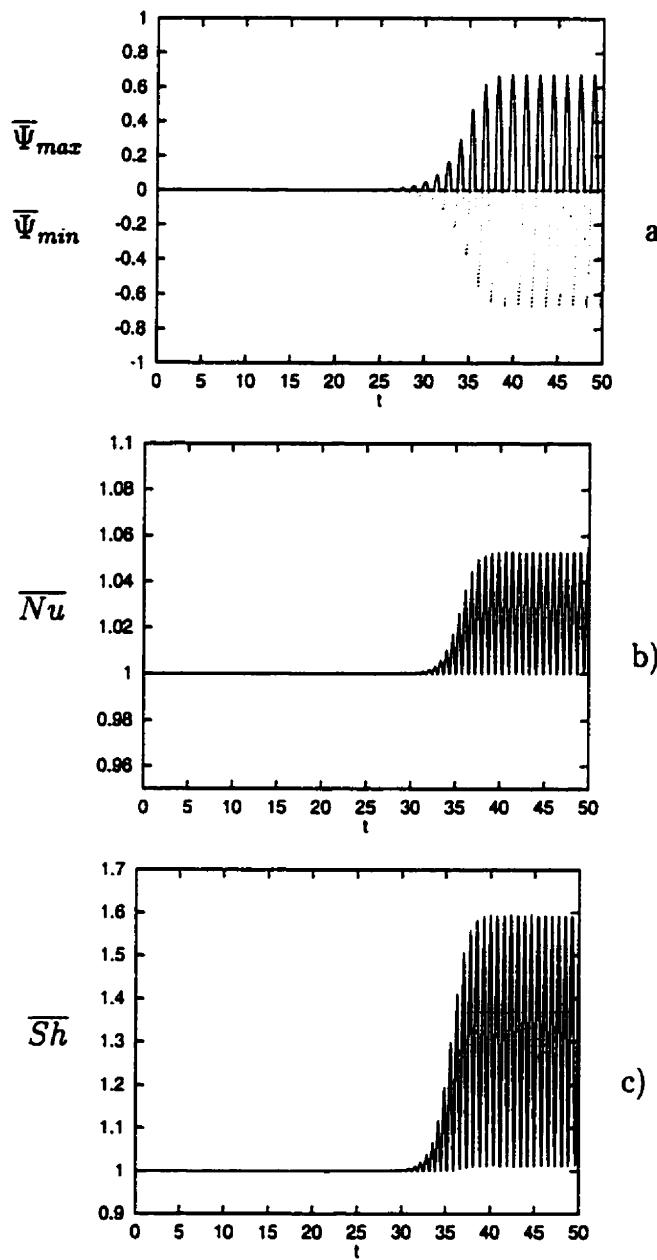
#### *Effet du nombre de Rayleigh*

La variation de l'intensité de l'écoulement  $\bar{\psi}_0$  en fonction de  $R_T$  est présentée sur la figure 5.27. Pour faire apparaître une bifurcation souscritique, les paramètres de contrôle ont été choisis comme suit :  $N = -0.1$ ,  $Le = 5$ ,  $A = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\kappa = 0$  et  $\Phi = 0^\circ$ . La solution numérique des équations de base est indiquée sur le graphe par des cercles pleins et la solution analytique résultant du modèle de Lorenz est présentée par une ligne continue (stable) et discontinue (instable). Comme le montre la figure 5.27, le modèle de Lorenz constitue une bonne approximation de la solution du problème. Pour le cas considéré,  $R_{TC}^{sous} = 51.41$ ,  $R_{TC}^{sur} = 52.64$ ,  $R_{TC}^{osc} = 67.55$  et  $R_{TC}^{sup} = 78.96$ . Ces valeurs sont indiquées sur le graphe par des lignes verticales. Comme on l'a déjà discuté pour la figure 5.13b, les résultats numériques montrent que lorsque  $R_T$  diminue de 120 à 40, la solution convective permanente peut être maintenue jusqu'à  $R_T = 53.5$ . En deçà de cette valeur, l'écoulement devient oscillant, et purement conductif lorsque  $R_T < 52.64$ . Ces résultats sont en accord avec les prédictions du modèle de Lorenz et celles de la théorie de la stabilité linéaire.

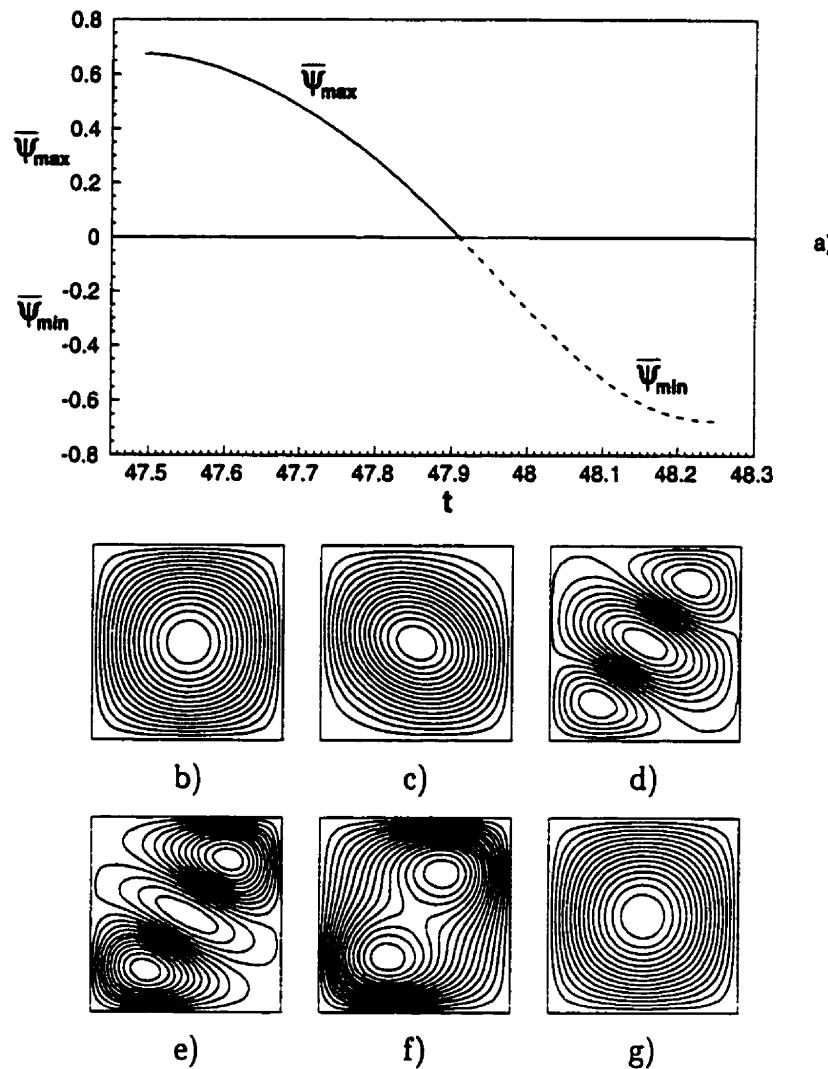


**Figure 5.27 :** a) Diagramme de bifurcation :  $\bar{\Psi}_0$  en fonction de  $R_T$  pour  $N = -0.1$ ,  $Le = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ , b) lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour  $R_T = 55$ ;  $\bar{\Psi}_{\min} = 1.928$ ,  $\bar{\Psi}_{\max} = 0$ ,  $\overline{Nu} = 1.368$ ,  $\overline{Sh} = 3.304$ .

Dans la zone oscillante (c'est-à-dire  $53 < R_T < 67$ ), les résultats numériques indiquent l'existence de deux solutions convectives. En fait, pour  $R_T = 55$ , lorsqu'on prend  $\bar{\psi} = 0$ ,  $T = S = x$  (avec une perturbation ayant une amplitude de  $\bar{\psi}_0 = 10^{-6}$ ) comme conditions initiales, on obtient une solution convective transitoire périodique. L'évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement et des taux des transferts de chaleur et de masse est présentée sur la figure 5.28. Comme prédit par la théorie de la stabilité linéaire, la figure 5.28a-b montre que l'amplitude de la perturbation imposée augmente d'une façon exponentielle en oscillant. Les valeurs des parties réelle et imaginaire du paramètre  $p$  (Éq. (5.95)) sont  $p_r = 0.532$  et  $p_i = 4.833$ . La période des oscillations ( $2\pi/p_i$ ) est donc de 1.30. Au début de la convection ( $t \leq 20$ ), les résultats numériques montrent que la période des oscillations est  $1.301 \pm 0.001$ , ce qui est en parfait accord avec les résultats de la théorie de la stabilité linéaire. Cependant, après la convergence de la solution, la période devient alors de  $1.535 \pm 0.001$ . Les résultats numériques indiquent que l'évolution temporelle de l'écoulement est caractérisée par un renversement de ce dernier du sens horaire au sens trigonométrique et vice versa. L'évolution de la structure de l'écoulement durant une demi-période est présentée sur la figure 5.29. À  $t = 47.492$ , l'écoulement convectif est monocellulaire et circule dans le sens trigonométrique. En augmentant  $t$ , l'intensité de l'écoulement diminue graduellement et, au voisinage de la zone de transition ( $t = 47.906$ ), la cellule de convection se rétrécit et s'incline à  $135^\circ$  (voir figure 5.29c-d). À  $t = 47.906$ , on observe l'apparition de deux petites cellules de convection (circulant dans le sens horaire) dans les coins supérieur à droite et inférieur à gauche. Ces cellules prennent de l'ampleur et écrasent graduellement la cellule centrale (voir figure 5.29e). À  $t = 47.91$  on remarque la disparition totale de cette dernière. Par la suite, les deux cellules de convection fusionnent graduellement en une seule cellule (voir figure 5.29f). À  $t = 48.258$ , la figure 5.29g montre que l'écoulement qui circule maintenant dans le sens horaire est symétrique à celui observé à  $t = 47.492$  (figure 5.29a).



**Figure 5.28 :** Évolution temporelle de : a) l'intensité de l'écoulement, b) le transfert de chaleur, c) le transfert de masse, pour  $R_T = 55$ ,  $N = -0.1$ ,  $Le = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ .



**Figure 5.29 :** a) Évolution temporelle de l'intensité de l'écoulement durant une demi-période de temps pour  $R_T = 55$ ,  $N = -0.1$ ,  $Le = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\Phi = 0^\circ$  et  $\kappa = 0$ , et sur la structure de l'écoulement : b)  $t = 47.492$ , c)  $t = 47.906$ , d)  $t = 47.9086$ , e)  $t = 47.909$ , f)  $t = 47.910$  et g)  $t = 48.258$ .

Par ailleurs, lorsqu'on utilise une solution convective (obtenue par exemple pour  $R_T = 60$ ) comme conditions initiales, on obtient une solution convective permanente stable comme prédit par le modèle de Lorenz. Cette dernière est présentée sur la figure 5.27b.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de stabilité dans une cavité fluide ou poreuse inclinée et de rapport de forme variable. Lorsque la cavité est dans une position horizontale ou lorsque les forces de volume sont égales et opposées, nous avons montré que l'état de repos est une solution possible du problème. La théorie de la stabilité linéaire dans le cas général et le modèle de Lorenz pour une couche horizontale ont été employés pour déterminer le seuil de la convection ainsi que les régimes stable, souscritique, surstable oscillant et instable direct. Le nombre de Rayleigh supercritique et la structure de l'écoulement au seuil de la convection ont été déterminés en fonction des paramètres de contrôle.

La solution du problème a été obtenue par les méthodes des éléments finis et des résidus pondérés. Par comparaison, nous avons constaté que les résultats obtenus par les méthodes de l'analyse de stabilité sont en bon accord avec les prédictions de la solution numérique générale. Pour le cas d'une couche fluide, nous avons démontré que le régime surstable n'existe que lorsque cette couche est en position horizontale. Cependant, comme la porosité normalisée du milieu poreux est inférieure à l'unité, le régime surstable existe pour un angle d'inclinaison arbitraire et la convection (au-delà d'un seuil) est possible même si le nombre de Lewis est égal à l'unité. L'existence de la convection souscritique et de solutions multiples a été démontrée.

## CHAPITRE VI

### CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude sur les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux fluide et poreux. La configuration géométrique du modèle physique est une cavité rectangulaire inclinée soumise à des gradients de température et de concentration. Des conditions aux frontières thermiques et solutales de types Dirichlet (températures et concentrations constantes) et Neuman (flux constants de chaleur et de masse) ont été considérées.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, nous avons développé le modèle mathématique décrivant le phénomène de la convection thermosolutale. Pour résoudre les équations résultantes dans leur intégrité, des méthodes numériques, basées sur les approches des différences finies, des volumes de contrôle et d'éléments finis, ont été utilisées. Pour le cas des cavités élancées ou aplatis soumises à des flux constants de chaleur et de masse, des solutions analytiques, basées sur le concept de l'écoulement parallèle, ont été dérivées. Pour l'étude du problème de la stabilité, une nouvelle technique numérique générale, basée sur la méthode des éléments finis et des résidus pondérés, a été proposée. Le modèle de Lorenz a été utilisé pour investiguer la stabilité non linéaire d'une couche fluide (ou poreuse) horizontale. Les codes de calculs ont été validés en se basant sur les résultats disponibles dans la littérature.

Les principaux résultats obtenus dans cette thèse sont résumés ci-dessous :

## 6.1 Cavité soumise à des flux constants de chaleur et de masse

Dans ce cas, nous avons étudié les effets des paramètres de contrôle sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse. Ces paramètres sont les suivants : le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ , le rapport des forces de volume,  $N$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport de forme de la cavité,  $A$ , l'angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal,  $\Phi$ , et la porosité normalisée de la matrice poreuse,  $\epsilon$ . Dans le cas des cavités élancées ou aplatis, des solutions analytiques approximées ont été dérivées sur la base du concept de l'écoulement parallèle. La validité des modèles analytiques a été confirmée en résolvant numériquement les équations de base dans leur intégrité. En général, nous avons constaté que les évolutions de l'intensité de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse, en fonction des paramètres de contrôle, sont qualitativement identiques pour les milieux fluides et poreux. Selon le signe du rapport des forces de volume, deux types d'écoulement convectif ont été considérés, à savoir la convection coopérante et la convection opposée. Pour chacun de ces cas, trois régimes ont été examinés : le régime de force de volume d'origine thermique dominante, le régime intermédiaire dans lequel les forces de volume thermique et solutale sont comparable et le régime de force de volume d'origine solutale dominante. Selon la valeur de l'angle d'inclinaison  $\Phi$ , les trois situations typiques suivantes ont été considérées.

### 6.1.1 Cavité verticale

En régime de couche limite, indépendamment des paramètres de contrôle  $Ra_T$ ,  $N$  et  $Le$ , les résultats analytiques et numériques montrent que les épaisseurs des couches limites hydrodynamique, thermique et solutale sont identiques. Des corrélations

pour les nombres de Nusselt et de Sherwood ont été obtenues. Dans le cas où les forces de volume sont coopérantes, nous avons observé que, pour  $N = 1$ ,  $Pr \gg 1$  et  $Le \gg 1$ ,  $Nu$  et  $Sh$  varient linéairement avec  $Ra_T^{2/9}$  en milieu fluide (avec  $R_T^{2/5}$  en milieu poreux). Dans le régime de force de volume d'origine thermique dominante,  $Nu$  ne dépend que du nombre de Rayleigh thermique, alors que  $Sh$  dépend des nombres de Rayleigh et de Lewis. Dans le régime de force de volume d'origine solutale dominante, les résultats montrent que le taux du transfert de masse est proportionnel à  $Ra_S^{2/9}$ . Lorsque le nombre de Lewis est élevé, le transfert thermique devient purement conductif. Dans le cas où les forces de volume sont égales, pour une valeur donnée de  $Ra_T$ ,  $Nu$  et  $Sh$  deviennent indépendants de  $Le$  lorsque ce dernier est suffisamment grand.

Dans le régime intermédiaire dans lequel les forces de volume sont opposées et de même ordre de grandeur, les résultats analytiques et numériques indiquent que les évolutions de la structure de l'écoulement et des transferts de chaleur et de masse en fonction des paramètres de contrôle sont complètement différentes de celles observées dans le cas des forces coopérantes. Ainsi, il a été observé que la transition du régime solutal vers le régime thermique se produit avec un renversement brusque du sens de rotation de l'écoulement convectif à une valeur de  $N$  qui dépend des autres paramètres de contrôle. Cependant la transition du régime thermique vers le régime solutal se produit d'une façon graduelle et le renversement de l'écoulement convectif est caractérisé par la formation d'une structure multicellulaire. Dans la zone de transition, la multiplicité de solutions a été démontrée et l'effet d'hystérisis a été observé. Dans le cas où les forces de volume sont égales et opposées, les résultats montrent l'existence d'un nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de convection. L'existence d'écoulements convectifs souscritiques a été également mise en évidence.

### 6.1.2 Cavité horizontale

Pour cette configuration, nous avons déterminé le seuil de la convection en terme du nombre de Rayleigh supercritique. Lorsque les forces de volume sont opposées, deux types de bifurcations ont été observés lorsque  $Le > 1$  : une bifurcation supercritique et une bifurcation souscritique. Pour cette dernière, la solution convective bifurque de l'état de repos avec une amplitude finie. Le nombre de Rayleigh souscritique caractérisant le seuil de la convection souscritique a été déterminé en fonction des nombres de Rayleigh solutal et de Lewis. L'existence de solutions multiples a été démontrée.

### 6.1.3 Cavité inclinée

L'effet de l'angle d'inclinaison de la cavité par rapport au plan horizontal a été étudié. Les résultats obtenus montrent l'importance de ce paramètre sur les transferts de chaleur et de masse. En faisant varier  $\Phi$  de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , pour le cas de la convection coopérante, nous avons constaté que  $Nu$  et  $Sh$  augmentent au début, passent par un maximum, puis diminuent ensuite vers l'état de conduction pure. Les valeurs maximales de  $Nu$  et  $Sh$  sont observées à des angles différents selon la valeur du nombre de Lewis.

## 6.2 Cavité soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales variées

Lorsque la cavité est en position horizontale ou lorsque les forces de volume sont égales et opposées, l'état de repos du fluide est une solution possible du problème et il existe un nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{sup}$  au-delà duquel la convection se

déclenche. Avec la méthode des éléments finis et à l'aide de la théorie de la stabilité linéaire, nous avons déterminé le nombre de Rayleigh supercritique et la structure de l'écoulement au seuil de la convection. Les modes stable, surstable oscillant et instable direct ont été déterminés en fonction des paramètres de contrôle.

### 6.2.1 Cavité horizontale

Dans ce cas, à l'aide du modèle de Lorenz, nous avons démontré que, lorsque  $Ra_S < 0$  et  $Le > 1$ , il existe quatre modes convectifs distincts. Dans le premier mode, le fluide est inconditionnellement stable, toute fluctuation, grande ou petite, est amortie. Le deuxième mode correspond au régime de la convection souscritique. Le troisième mode correspond au régime oscillant surstable dans lequel l'état de repos du fluide est instable. Le quatrième mode décrit le régime convectif direct.

### 6.2.2 Cavité inclinée

Dans le cas d'une cavité inclinée, lorsque les forces de volume sont égales et opposées, la théorie de la stabilité linéaire montre l'existence d'un seuil de convection. Ce dernier est donné par le nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{sup} = Ra^{sup}/(1 - Le)$ . En utilisant le concept de l'écoulement parallèle, nous avons démontré que la convection était possible au-dessous de la valeur supercritique. Le seuil de la convection souscritique à amplitude finie a été déterminé en terme d'un nombre de Rayleigh souscritique. Dans le cas du milieu fluide, nous avons démontré que le régime surstable n'existe pas. Aussi, lorsque le nombre de Lewis est égal à l'unité, la convection est impossible et la seule solution du problème est celle correspondant à l'état de conduction pure. Dans le cas d'un milieu poreux, la théorie de la stabilité linéaire indique que la convection est possible même si  $Le = 1$ , et ce dû au fait que la porosité du milieu poreux est inférieure à l'unité. Le seuil de la

convection est donné par  $R_{TC}^{sur} = R^{sup}(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$  lorsque  $Le = 1$ . L'existence d'un régime surstable est alors possible. Au seuil de la convection, la stabilité linéaire marginale montre que lorsque la cavité présente de grands ou de petits rapports de forme, la structure de l'écoulement est multicellulaire périodique lorsque les parois actives sont soumises à des températures et concentrations constantes. Cependant, lorsque ces parois sont exposées à des flux constants de chaleur et de masse, et selon l'angle d'inclinaison,  $\Phi$ , la structure de l'écoulement peut être monocellulaire ou multicellulaire. Les résultats numériques ont montré que lorsque la structure de l'écoulement est multicellulaire, les cellules de convection carrées, rectangulaires ou inclinées, selon les données du problème, sont alignées d'une façon périodique dans la direction la plus longue de la cavité. La longueur d'onde de l'écoulement résultant dépend alors énormément de l'angle de l'inclinaison.

### 6.3 Recommandations

Dans la présente étude, les modèles mathématiques sont basés sur de nombreuses hypothèses simplificatrices. De façon à vérifier ces modèles, il serait souhaitable d'effectuer des mesures expérimentales. Il serait aussi intéressant de modifier les codes numériques pour tenir compte des effets tridimensionnels ainsi que de la variation des propriétés physiques du fluide.

En outre, dans certaines applications pratiques, les milieux poreux sont anisotropes et les transferts de chaleur et de masse interagissent. L'étude de l'influence des effets d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique, et celle des effets Soret et Dufour est hautement recommandée.

## RÉFÉRENCES

- AHLERS, G. and LÜCKE, M. (1987). Some properties of an Eight-Mode Lorenz Model for Convection in Binary Fluids, Physical Review A, 35, 470-473.
- ALAVYOON, F. (1993). On Natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to Prescribed Fluxes of Heat and Mass at the Vertical Boundaries. Int. J. Heat and Mass Transfer, 36, 2479-2498.
- ALAVYOON, F. and MASUDA, Y. (1993). Free Convection in Vertical Porous Enclosures due to Opposing Fluxes of Heat and Solute at the Vertical Boundaries. 6<sup>th</sup> Int. Symp. on Transport Phenomena in Thermal Engineering, 151-156.
- ALAVYOON, F. MASUDA, Y. and KIMURA, S. (1994). On Natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to Opposing Fluxes of Heat and Mass Prescribed at the Vertical Walls. Int. J. Heat and Mass Transfer, 37, 195-206.
- AMAHMID, A., HASNAOUI, M. and VASSEUR, P. (1997). Analytical and Numerical Study of Double-Diffusive Natural Convection in a Vertical Porous Layer Using the Brinkman-Extended Darcy Model. The Third Int. Thermal Energy and Environment Congress, Marrakech, Morocco, 1, 341-346.
- ANGIRASA, D., PETERSON, G. P. and POP, I. (1997). Combined Heat and Mass Transfer by Natural Convection with Opposing Buoyancy Effects in a Fluid Saturated Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 40, 2755-2773.

- BÉGHEIN, C., HAGHIGHAT, F. and ALLARD, F. (1992). Numerical Study of Double-Diffusive Natural Convection in a Square Cavity. Int. J. Heat Mass Transfer, 35, 833-846.
- BEJAN, A. (1984). Convection Heat Transfer, John Wiley & Sons.
- BEJAN, A. and KHAIR, K. R. (1985). Heat and Mass Transfer by Natural Convection in a Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 28, 909-918.
- BENNACER, R. (1993). Convection naturelle thermosolutale: Simulation numérique des transferts et des structures d'écoulement, Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- BENNACER, R. and GOBIN, D. (1996). Cooperating Thermosolutal Convection in Enclosure-I. Scale Analysis and Mass Transfer. Int. J. Heat Mass Transfer, 39, 2671-2681.
- BRAND, H. R., HOHENBERG, P. C. and STEINBERG V. (1984). Codimension-2 Bifurcation for Convection in Binary Fluid Mixtures. Physical Review A, 30, 2548-2561.
- CALDWELL, D. R. (1974). Experimental Studies on the Onset of Thermohaline Convection. J. Fluid Mechanics, 64, 347-367.
- CHANDRASEHKAR, S. (1961). Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press, London.
- CHANG, J. and LIN, T. F. (1993). Unsteady Thermosolutal Opposing Convection of a Liquid-Water Mixture in a Square Cavity: II Flow Structure and Fluctuation Analysis. Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 1333-1345.
- CHANG, J., LIN, T. F. and CHIEN, C. H. (1993). Unsteady Thermosolutal Opposing Convection of a Liquid-Water Mixture in a Square Cavity: I Flow Forma-

tion and Heat and Mass Transfer Characteristics. Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 1315-1331.

CHARRIER-MOJTABI, M. C., KARIMI-FARD, M. et MOJTABI, A. (1997). Naissance de régimes de convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse. Académie des Sciences/Elsevier, Paris, t. 324, Série II b, 9-17.

CHEN, C. F., BRIGGS, D. G. and WIRTZ, R. A. (1971). Stability of Thermal Convection in a Salinity Gradient Due to Lateral Heating. Int. J. Heat Mass Transfer, 14, 57-65.

CHEN, F. and CHEN, C. F. (1993). Double-Diffusive Fingering Convection in a Porous Medium. Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 798-807.

CORMACK, D. E., LEAL, L. G. and IMBERGER, J. (1974). Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated End Walls, Part 1: Asymptotic Theory. J. Fluid Mechanics, 65, 209-230.

DA COSTA, L. N., KNOBLOCH, E. and WESS N. O. (1981). Oscillations in Double-Diffusive Convection. J. Fluid Mechanics, 109, 25-43.

DHATT, G. et TOUZOT, G. (1981). Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S.A. Éditeur Paris et les presses de l'université Laval Québec.

GHORAYEB, K. et MOJTABI, A. (1997). Étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide. Académie des Sciences/Elsevier, Paris, t. 324, Série II b, 19-27.

GOBIN, D. and BENNACER, R. (1993). Double-Diffusion Convection in a Vertical Fluid Layer, Onset of the Convection Regime. Phys. Fluids, 6, 59-67.

- GOBIN, D. and BENNACER, R. (1996). Cooperating Thermosolutal Convection in Enclosure-II. Heat Transfer and Flow Structure. Int. J. Heat Mass Transfer, 39, 2683-2697
- GOYEAU, B., SONGBE, J. P. and GOBIN, D. (1996). Numerical Study of Double-Diffusive Natural Convection in a Porous Cavity Using the Darcy-Brinkman Formulation. Int. J. Heat Mass Transfer, 40, 1363-1378.
- GRAY, D. D. and GIORGINI, A. (1976). The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases. Int. J. Heat Mass Transfer, 19, 545-551.
- HAN, H. and KUEHN, T. (1991a). Double Diffusive Convection in a Vertical Rectangular Enclosures-I. Experimental Study. Int. J. Heat Mass Transfer, 34, 449-459.
- HAN, H. and KUEHN, T. (1991b). Double Diffusive Convection in a Vertical Rectangular Enclosures-II. Numerical Study. Int. J. Heat Mass Transfer, 34, 461-471.
- HASNAOUI, M. (1991). Étude numérique de la convection dans un champ de cavité. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- HUPPERT, H. E. and MOORE, D. R. (1976). Nonlinear Double-Diffusive Convection. J. Fluid Mechanics, 78, 821-854.
- HYUN, J. H., KUO, D. C., BERGMAN, T. L. and BALL, K. S. (1995). Direct Simulation of Double-Diffusive Convection in Low Prandtl Number Liquids. Num. Heat Transfer, 27, 639-650.
- KAMOTANI, Y., WANG, L. W., OSTRACH, S. and JIANG, H. D. (1985). Experimental Study of Natural Convection in Shallow Enclosures with Horizontal Temperature and Concentration Gradients. Int. J. Heat Mass Transfer, 28, 165-173.

- KARIMI-FARD, M. and CHARIER-MOJTABI, M. C. (1997). Non-Darcian Effects on Double-Diffusive Convection within a Porous Medium. Numerical Heat Transfer A, 31, 837-852.
- KIMURA, S., VYNNYCKY, M. and ALAVYOON, F. (1995). Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated from Below by a Constant Flux. J. Fluid Mech., 294, 231-257.
- KNOBLOCH, E. and MOORE, D. R. (1988). Linear Stability of Experimental Soret Convection. Physical Review A, 37, 860-870.
- KRANENBORG, E. J. and DJIKSTRA, H. A. (1994). The Structure of (Linear) Stable Double Diffusion Flow Patterns in a Laterally Heated Stratified Liquid. Phys. Fluids, 7, 680-682.
- KRISHNAN, R. (1989). A Numerical Study of the Instability of Double-Diffusive Convection in a Square Enclosure With Horizontal Temperature and Concentration Gradients. Heat Transfer in Convective Flows, HTD, 107, 357-368.
- LAPWOOD, E. R. (1948). Convection of a Fluid in a Porous Medium, Proc. Camb. Phil. Soc., 144, 508-521.
- LARRE, J. P., PLATTEN, J. K. and CHAVEPEYER, G. (1997). Soret Effects in Ternary Systems Heated from Below, Int. J. Heat Mass Transfer. 140, 545-555.
- LEE, J. W. and HYUN, J. M. (1990). Double-Diffusive Convection in a Rectangle with Opposing Horizontal Temperature and Concentration Gradients. Int. J. Heat Mass Transfer, 133, 1619-1632.

- LEE, J. and HYUN, J. M. (1991). Double Diffusive Convection in a Cavity under a Vertical Solutal Gradient and a Horizontal Temperature Gradient. Int. J. Heat Mass Transfer, 34, 2423-2430.
- LEE, J., HYUN, M. T. and KIM, K. W. (1988). Natural Convection in Confined Fluids with Combined Horizontal Temperature and Concentration Gradients. Int. J. Heat Mass Transfer, 31, 1969-1977.
- LEE, J., HYUN M. T. and KANG, Y. S. (1990). Confined Natural Convection due to Lateral Heating in a Stably Stratified Solution. Int. J. Heat Mass Transfer, 33, 869-875.
- LEE, G. W., LUCAS, P. and TYLER, A. (1983). Onset of Rayleigh-Bénard Convection in Binary Liquid Mixtures of  $^3He$  in  $^4He$ . J. Fluid Mechanics, 135, 235-259.
- LEGROS, J. C., PLATTEN, J. K. and POTY, P. G. (1972). Stability of a Two-Component Fluid Layer Heated from Below. The Physics of Fluids, 15, 1383-1390.
- LHOST, O. (1990). Étude de la convection libre induite par effet Soret. Thèse de Doctorat, Université de Mons Hainaut, Belgique.
- LIN, D. K. (1993). Unsteady Natural Convection Heat and Mass Transfer in a Saturated Porous Enclosure. Wärme-und Stoffübertragung, 28, 49-56.
- LIN, T. F., CHANG, W. R. and CHANG J. (1992). Unsteady Double-Diffusive Convection with Opposed Buoyancy Forces in a Vertical Enclosure. ASME, HTD, 198, 83-90.
- LIN, T. F., HUANG C. C. and CHANG, T. S. (1990). Transient Binary Mixture Natural Convection in Aquare Enclosures. Int. J. Heat Mass Transfer, 133, 287-299.

LINZ, S. J. and LÜCKE, M. (1987). Convection in Binary Mixture: A Galerkin Model with Impermeable Boundary Conditions. Physical Review A, 35, 3997-4000.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1998a). A Galerkin Finite-Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer, 41, 1513-1529.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1998b). Double Diffusive Convection Instability Problem in a Vertical Porous Enclosure. Journal of Fluid Mechanics, sous presse.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1997a). Onset of Double Diffusive Convection in a Vertical Fluid Layer. The Third Int. Thermal Energy Congress, Kitayushu, Japan, 1, 91-96.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1997b). Finite Element Study of the Onset of Thermohaline Convection in a Confined Enclosure Heated and Salted from Below. The Fifth Annual Conf. of the CFD Society of Canada, Victoria (B.C.). Canada, 6, 19-24.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1997c). Finite Element Study of the Onset of Thermohaline Convection in a Horizontal Fluid Layer, The Third Int. Thermal Energy and Environment Congress, Marrakech, Morocco, 1, 335-340.

MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1997d). A Galerkin Finite-Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in a Vertical Porous Enclosure. Int. Conference on Fluid and Thermal Energy Conversion, Yogyakarta, Indonesia, 91-95.

- MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1996). Analytical and Numerical Study of Double Diffusion Convection in a Vertical Enclosure. Heat and Mass Transfer, 32, 115-125.
- MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1995a). Multiple Solutions for Double-Diffusive Convection in a Vertical Porous Enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer, 38, 1787-1798.
- MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1995b). Double-Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium. Eur. J. Mechanics, B/Fluids, 14, 629-652.
- MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1995c). Thermosolutal Convection Instability in a Vertical Porous Layer. The Second Int. Thermal Energy Congress, Agadir, Morroco, 2, 463-467.
- MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1994a). Double-Diffusion Convection in a Shallow Porous Layer. Proc. 10th Int. Heat Transfer Conference, Brighton, UK, 5, 339-344.
- MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1994b). Double-Diffusion Convection in a Vertical Porous Enclosure. Int. Conference on Fluid and Thermal Energy Conversion'94, Bali, Indonesia, 1, 227-232.
- MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1994c). Double-Diffusion Convection in Porous Media. The Sixth Asian Congress of Fluid Mechanics, Singapore, 2, 1348-1351.
- MAMOU, M. (1993). Convection naturelle dans une cavité inclinée à partitions multiples. Thèse de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

- MEHTA, K. N. and NANDAKUMAR, K. (1987). Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in Non-Homogeneous Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 30, 2651-2656.
- MOORE, D. R., WEISS, N. O. and WILKINS, J. M. (1991). Asymmetric Oscillations in Thermosolutal Convection. J. Fluid Mechanics, 233, 561-585.
- NIELD, D. A. (1968). Onset of Thermohaline Convection in Porous Medium. Water Resources Research, 4, 553-560.
- NIELD, D. A. (1967). The Thermohaline Rayleigh-Jeffreys Problem. J. Fluid Mechanics, 29, 545-558.
- NIELD, D. A. and BEJAN, A. (1992). Convection in Porous Media. Springer Verlag.
- NITHIARASU, P., SEETHARAMU, K. N. and SUNDARARAJAN, T. (1996). Double-Diffusive Natural Convection in an Enclosure Filled with Fluid-Saturated Porous Medium: A Generalized Non-Darcy Approach. Numerical Heat Transfer Part A, 30, 413-426.
- OSTRACH, S. (1980). Natural Convection with Combined Driving Forces, Physico Chem. Hydrodyn, 1, 233-247.
- PALIWAL, R. C. and CHEN, C. F. (1980a). Double-Diffusive Instability in an Inclined Fluid Layer. Part 1. Experimental Investigation. J. Fluid Mechanics, 98, 755-768.
- PALIWAL, R. C. and CHEN, C. F. (1980b). Double-Diffusive Instability in an Inclined Fluid Layer. Part 2. Stability Analysis. J. Fluid Mechanics, 98, 769-785.
- PATANKAR, S. V. (1980). Numerical Heat Transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington D.C.

- PEACEMAN, D. W. and RACHFORD, H. A. (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Difference Equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., 3, 28-43.
- PLATTEN J. K. and CHAVEPEYER, G. (1973). Oscillatory Motion in Bénard Cell due to the Soret Effect. J. Fluid Mechanics, 60, 305-319.
- PLATTEN J. K. and CHAVEPEYER, G. (1977). Nonlinear two Dimensional Bénard Convection with Soret Effect: Free Boundaries. Int. J. Heat Mass Transfer, 20, 113-122.
- PLATTEN, J. K. and LEGROS, J. C. (1984). Convection in Liquids. Springer-Verlag.
- POULIKAKOS, D. (1986). Double Diffusive Convection in a Horizontal Sparcely Packed Porous Layer. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 13, 587-598.
- PROCTOR, M. R. E. (1981). Steady Subcritical Thermohaline Convection. J. Fluid Mechanics, 105, 507-521.
- RAYLEIGH, L. (1916). On Convection Currents in a horizontal Layer of Fluid when the Higher Temperature is on the Under Side. Phil. Mag., 32, 529-546.
- RANGANATHAN, P. and VISKANTA, R. (1988). Natural Convection in a Square Cavity due to Combined Driving Forces. Num. Heat Transfer, 14, 35-59.
- REDDY, J. N. (1993). An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, Inc.
- REID, W. H. and HARRIS, D. L. (1958). Some Further Results on the Bénard Problem. Phys. Fluids, 1, 102-110.
- ROACHE, P. J. (1985). Computational fluid dynamics. Hermosa Publishers.

- ROSENBERG, N. D. and SPERA, F. J. (1992). Thermohaline Convection in a Porous Medium Heated from Below. Int. J. Heat and Mass Transfer, 35, 1261-1273.
- RUDRAIAH, N., SRIMANI, P. K. and FRIEDRICH, R. (1982). Finite Amplitude Convection in a Two-Component Fluid Saturated Porous Layer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 25, 715-722.
- SEN, M., VASSEUR, P. and ROBILLARD, L. (1987). Multiple Steady States for Unicellular Natural Convection in an Inclined Porous Layer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 3, 587-598.
- TAUNTON, J. W. and LIGHTFOOT, E. N. (1972). Thermohaline Instability and Salt Fingers in a Porous Medium. Phys. fluids, 15, 748-753.
- THANGAM, S., ZEBIB, A. and CHEN, C. F. (1982). Double-Diffusive Convection in an Inclined Fluid Layer. J. Fluid Mechanics, 116, 363-378.
- THORPE, S. A., HUTT, P. K. and SOULSBY, R. (1969). The Effect of Horizontal Gradients on Thermohaline Convection. J. Fluid Mechanics, 38, 375-400.
- TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1985). Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 29, 1597-1611.
- TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1986). Mass and Heat Transfer by Natural Convection in a Vertical Slot Filled with Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 29, 403-415.
- TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1987a). Combined Heat and Mass Transfer by Natural Convection in a Vertical Enclosure, Int. J. of Heat Transfer, 109, 104-112.

- TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1987b). Mass and Heat Transfer by High Rayleigh Number Convection in a Porous Medium Heated from Below. Int. J. Heat and Mass Transfer, 30, 2341-2356.
- TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1990). Combined Heat and Mass Transfer by Natural Convection in a Porous Medium. Advances in Heat Transfer, 20, 315-352.
- TSITVERBLIT, N. (1994). Bifurcation Phenomenon in Confined Thermosolutal Convection with Lateral Heating: Commencement of the Double-Diffusive Region. Phys. fluids, 7, 718-736.
- TURNER, J. S. (1968). The Behaviour of a Stable Salinity Gradient Heated From Below. J. Fluid Mechanics, 33, 183-200.
- VASSEUR, P., SATISH, M. G. and ROBILLARD, L. (1987). Natural Convection in a Thin, Inclined, Porous Layer Exposed to a Constant Heat Flux. Int. J. Heat Mass Transfer, 30, 537-549.
- VASSEUR, P., ROBILLARD, L. and SEN, M. (1989). The Brinkman Model for Natural Convection in a Shallow Porous Cavity with Uniform Heat Flux. Numerical Heat Transfer, 15, 221-242.
- VISKANTA, R., BERGMAN, T. L. and INCOPERA, F. P. (1985). Double-Diffusive Natural Convection. In Natural Convection, Fundamentals and Applications (Edited by S. Kabac, W. Aung and R. Viskanta). Hemisphere, Washington DC, 1075.
- Zhang, X. (1989). Wavenumber Selection in Penetrative Convection. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.