UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SUIVI DE TRAJECTOIRES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL D'UNE CLASSE DE MANIPULATEURS FLEXIBLES

PASCAL BIGRAS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
OCTOBRE 1997

© Pascal Bigras, 1997.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-32991-7

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

SUIVI DE TRAJECTOIRES DANS L'ESPACE DE TRAVAIL D'UNE CLASSE DE MANIPULATEURS FLEXIBLES

présentée par BIGRAS Pascal

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le Jury d'examen constitué de:

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., président

M. O'SHEA Jules, D. Ing., membre et directeur de recherche

M. SAAD Maarouf, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. DE SANTIS Romano M., Ph.D., membre

M. PIEDBOEUF Jean-Claude, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

D'abord, je tiens à remercier mes codirecteurs de recherche, le professeur Jules O'Shea et le professeur Maarouf Saad pour la confiance qu'ils m'ont témoignée ainsi que pour leur soutien tout au long de mes études de doctorat.

Aussi, j'aimerais remercier le Professeur Lahcen Saydy pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie également ma compagne Isabelle pour l'aide et les encouragements qu'elle m'a apportés durant ces longues années d'études.

De plus, je remercie mes collègues de travail pour les nombreuses discussions auxquelles ils m'ont si souvent convié à participer.

Je tiens finalement à exprimer ma reconnaissance envers le fonds FCAR pour son soutien financier et envers l'École de technologie supérieure, qui par son support technique, a contribué à faciliter mon travail.

RÉSUMÉ

Cette thèse présente une stratégie de commande qui assure la stabilité exponentielle de l'erreur de suivi dans l'espace des articulations virtuelles d'une classe de systèmes mécaniques formés d'une chaîne de corps rigides terminée par une poutre flexible. Étant donné que les espaces des articulations et de travail des manipulateurs flexibles sont liés par des relations cinématique et dynamique, les articulations virtuelles sont définies de façon à être liées à l'espace de travail par une simple relation cinématique. Ainsi, lorsque cette cinématique est non singulière, la trajectoire désirée peut facilement être transformée d'un espace à l'autre. Le suivi d'une trajectoire dans l'espace des articulations virtuelles est alors équivalent à son suivi dans l'espace de travail. Pour obtenir ce suivi, la trajectoire désirée est d'abord transformée de l'espace des articulations virtuelles à celui des articulations et des variables de déformation. Parce que le système est à non-minimum de phase dans l'espace des articulations virtuelles, cette transformation nécessite la résolution d'une équation différentielle non linéaire et instable qui est obtenue par une méthode itérative basée sur une intégration causale-anticausale. Le contrôleur est ensuite formé d'une loi de commande linéarisante, par rapport aux articulations, suivie de deux retours d'état linéaires invariants. Dans ce contexte, une étude basée sur le théorème de passivité, sur la stabilité des systèmes hiérarchiques et sur les systèmes d'inégalités matricielles linéaires permet de calculer les gains du contrôleur qui assurent la stabilité exponentielle et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi dans l'espace des articulations, des variables de déformation et des articulations virtuelles.

Ensuite, étant donné la sensibilité du système par rapport aux incertitudes de la charge, la structure de commande proposée est modifiée de façon à assurer la robustesse du suivi. Ces modifications sont obtenues par un ajustement des paramètres des lois de commande basé sur une adaptation indirecte et une étude de robustesse utilisant le principe des applications gardiennes.

Des simulations permettent de comparer la structure de commande proposée avec certaines autres rencontrées dans la littérature. Les résultats obtenus avec la structure de commande proposée sont plus intéressants puisque cette méthode permet de faire converger rapidement les erreurs de suivi à zéro avec des efforts de commande plus faibles sans vibration de l'outil.

ABSTRACT

This thesis presents a control strategy which ensures the exponential stability of the tracking error in the virtual joint space of a class of mechanical systems made up of rigid links that form a chain which ends with a flexible beam. The virtual joints are defined so as to be related kinematically to the workspace. Thus, when the inverse kinematics is non-singular, trajectory tracking in the virtual joint space is equivalent to trajectory tracking in the workspace. The method proposed calls for the transformation of the trajectory from the virtual joint space to the joint and deformation space. Because it is a non-minimum phase system in the virtual joint space, this transformation, which involves the dynamics of the flexible part, can be solved using a causal-anticausal iterative approach. The controller is then designed using an input-output feedback linearization scheme, with regard to the joints, and two linear control laws with regard to the joint and to the deformation variable tracking errors. Analysis based on the passivity theorem, hierarchical systems stability and Linear Matrix Inequalities then allows one to calculate the controller gains which ensure that the tracking errors in the virtual joint space are well damped and exponentialy stable. Since the system is sensitive to the load uncertainties, the proposed controller is modified to ensure the robustness of the tracking error. The control law parameters are then adjusted according to an indirect adaptive control law. Moreover, an additional robustness analysis must be considered using guardian and semi-guardian maps. All the proposed control laws are illustrated by means of simulations.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS IV

RÉSUMÉ V

ABSTRACT VII

TABLE DES MATIÈRES VIII

LISTE DES FIGURES XII

LISTE DES TABLEAUX XX

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES XXI

LISTE DES ACRONYMES XXIII

LISTE DES ANNEXES XXIV

CHAPITRE I: INTRODUCTION 1

1.1 Revue de la littérature 3

1.1.1 Régulation dans l'espace des articulations 4

1.1.2 Suivi de trajectoires dans l'espace des articulations 5

1.1.2.1 Perturbations singulières 5

1.1.2.2 La linéarisation par retour d'état 7

1.1.2.3 Les commandes adaptatives et robustes 8

1.1.3 Suivi de trajectoires dans l'espace de travail 11

1.1.3.1 Inversion du modèle dynamique 12

1.1.3.2 Linéarisation par retour d'état 14

1.1.4 Mesure et estimation des variables d'état associés à la déformation 16

1.2 Problématique et méthodologie 17

1.3 Originalité 20

1.4 Organisation de la thèse 21

CHAPITRE II: MODELISATION DES MANIPULATEURS FLEXIBLES 24

2.1 Introduction 24

2.2 Méthode des modes assumés 25

2.3 Modélisation par éléments finis 27

2.4 Classe de manipulateurs flexibles 29

2.4.1 Hypothèse de modélisation 30

2.4.2 Propriétés du modèle 34

2.4.2.1 Modélisation de la partie flexible 36

2.4.2.2 Modélisation de l'amortissement 42

2.5 Exemple de modélisation d'un manipulateur flexible 43

2.5.1 Fonctions de forme 49

2.6 Conclusion 52

CHAPITRE III: TRANSFORMATIONS DE LA TRAJECTOIRE 54

3.1 Introduction 54

3.2 Définition des coordonnées généralisées rigides virtuelles 55

3.3 Transformations de la trajectoire désirée 56

3.3.1 Approximation de la transformation par la méthode quasi-statique 58

3.3.2 Solution de la transformation par la méthode proposée 60

3.3.2.1 Solution non périodique 62

3.3.2.2 Solution périodique 68

3.4 Exemple de transformations d'une trajectoire désirée 70

3.4.1 Première transformation 72

3.4.2 Deuxième transformation 73

3.5 Conclusion 76

CHAPITRE IV: LOIS DE COMMANDE 78

4.1 Introduction 78

4.2 Linéarisation par retour d'état 79

4.2.1 Linéarisation par rapport aux CGR 85

4.2.2 Linéarisation par rapport aux CGRV 86

4.2.3 Linéarisation par rapport aux CGRVA 87

4.2.3.1 Simulation de la loi de commande 88

4.3 Stratégie de commande proposée 90

4.3.1 Lois de commande 92

4.3.2 Stabilité des erreurs de suivi 94

4.3.3 Optimisation du temps de réponse 103

4.3.4 Simulation du système de commande 112

4.4 Conclusion 121

CHAPITRE V: ROBUSTESSE DES LOIS DE COMMANDE 123

5.1 Introduction 123

5.2 Hypothèses concernant les incertitudes du système 124

5.3 Modèle linéaire en fonction des paramètres incertains 125

5.4 Estimation des paramètres 126

5.5 Loi de commande linéarisante par rapport aux CGRVA 129

5.5.1 Loi de commande modifiée 130

5.5.2 Étude de robustesse: application gardienne 136

5.5.3 Estimation de la constante $\wp$ 141

5.5.4 Simulation de la loi de commande 143

5.6 Stratégie de commande proposée 148

5.6.1 Modification de la loi de commande 148

5.6.2 Mise à jour de la trajectoire désirée 150

5.6.3 Conditions de robustesse du suivi de trajectoires 152

5.6.4 Étude de robustesse: applications gardienne et semi-gardienne 156

5.6.5 Estimation de la constante $\wp$ 164

5.6.6 Simulations de la loi de commande 166

5.7 Conclusion 175

CHAPITRE VI: CONCLUSION 177

6.1 Résumé, limitations et apports de la thèse 177

6.2 Recommandations 181

6.3 Travaux Futurs 182

RÉFÉRENCES 184

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Classe de systèmes mécaniques. 29

Figure 2.2 Cinématique de la poutre flexible. 37

Figure 2.3 Manipulateur flexible. 44

Figure 3.1 Définition de la dernière CGRV. 56

Figure 3.2 Transformations de la trajectoire désirée. 58

Figure 3.3 Trajectoires désirées de l'outil. 71

Figure 3.4 Trajectoire désirée dans l'espace de travail: a) position x (---) et y (—); b) vitesse $\dot{x}$ (---) et $\dot{y}$ (—). 71

Figure 3.5 Trajectoire désirée dans l'espace des CGRV: a) position ${}^{1}\overline{q}_r^d$ (---) et ${}^{2}\overline{q}_r^d$ (—); b) vitesse ${}^{1}\dot{\overline{q}}_r^d$ (---) et ${}^{2}\dot{\overline{q}}_r^d$ (—). 73

Figure 3.6 Trajectoire désirée dans l'espace des CGR par la méthode quasi-statique: a) position ${}^{1}q_r^d$ (---) et ${}^{2}q_r^d$ (—); b) vitesse ${}^{1}\dot{q}_r^d$ (---) et ${}^{2}\dot{q}_r^d$ (—). 74

Figure 3.7 Trajectoire désirée dans l'espace des CGF par la méthode quasi-statique: a) position $\mu^d(l_2)$; b) vitesse $\dot{\mu}^d(l_2)$. 75

Figure 3.8 Trajectoire désirée dans l'espace des CGR par la méthode proposée: a) position ${}^{1}q_r^d$ (---) et ${}^{2}q_r^d$(—); b) vitesse ${}^{1}\dot{q}_r^d$ (---) et ${}^{2}\dot{q}_r^d$ (—). 75

Figure 3.9 Trajectoire désirée dans l'espace de déformation avec la méthode proposée: a) position $\mu^d(l_2)$; b) vitesse $\dot{\mu}^d(l_2)$ 76

Figure 4.1 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail. 89

Figure 4.2 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) déformation ${}^{1}\overline{q}_r$ 89

Figure 4.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation..... 90

Figure 4.4 Stratégie de commande proposée..... 91

Figure 4.5 Résultats pour la situation 1: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 113

Figure 4.6 Résultats pour la situation 2: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail..... 114

Figure 4.7 Résultats pour la situation 2: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 115

Figure 4.8 Résultats pour la situation 2: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 115

Figure 4.9 Résultats pour la situation 3: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail..... 116

Figure 4.10 Résultats pour la situation 3: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 118

Figure 4.11 Résultats pour la situation 3: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 118

Figure 4.12 Résultats pour la situation 4: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail..... 119

Figure 4.13 Résultats pour la situation 4: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 119

Figure 4.14 Résultats pour la situation 4: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 120

Figure 4.15 Résultats pour la situation 5: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail 120

Figure 4.16 Résultats pour la situation 5: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 121

Figure 4.17 Résultats pour la situation 5: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 121

Figure 5.1 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail lorsque $m_c = 0{,}25\,\mathrm{Kg}$ 145

Figure 5.2 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) déformation μ lorsque $m_c = 0{,}25\,\mathrm{Kg}$. 145

Figure 5.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation lorsque $m_c = 0{,}25\,\mathrm{Kg}$. 146

Figure 5.4 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail lorsque $m_c = 0{,}75\,\mathrm{Kg}$ 146

Figure 5.5 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) déformation μ lorsque $m_c = 0{,}75\,\mathrm{Kg}$. 147

Figure 5.6 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation lorsque $m_c = 0{,}75\,\mathrm{Kg}$. 147

Figure 5.7 Résultats pour la situation 1: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail 168

Figure 5.8 Résultats pour la situation 1: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 169

Figure 5.9 Résultats pour la situation 1: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 169

Figure 5.10 Résultats pour la situation 2: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail. 170

Figure 5.11 Résultats pour la situation 2: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 171

Figure 5.12 Résultats pour la situation 2: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 171

Figure 5.13 Résultats pour la situation 3: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail. 172

Figure 5.14 Résultats pour la situation 3: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 172

Figure 5.15 Résultats pour la situation 3: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 173

Figure 5.16 Résultats pour la situation 4: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail. 174

Figure 5.17 Résultats pour la situation 4: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$ (- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$ (—) et b) erreur de suivi de la déformation μ 174

Figure 5.18 Résultats pour la situation 4: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation. 175

Figure C.1 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.1) 211

Figure C.2 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.2) 211

Figure C.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.3)..... 212

Figure C.4 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.9)..... 212

Figure C.5 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.10)..... 213

Figure C.6 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.11)..... 213

Figure C.7 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.12)..... 214

Figure C.8 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.13)..... 214

Figure C.9 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.14)..... 215

Figure C.10 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec $m_c = 0.25$ Kg (Figure 5.1)..... 215

Figure C.11 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.2). 216

Figure C.12 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.3). 216

Figure C.13 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.4)..... 217

Figure C.14 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.5). 217

Figure C.15 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.6). 218

Figure C.16 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c=0.25Kg (Figure 5.7). 218

Figure C.17 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.8)..... 219

Figure C.18 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.9). 219

Figure C.19 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c=0.75Kg (Figure 5.10)..... 220

Figure C.20 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.11)..... 220

Figure C.21 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.12). 221

Figure C.22 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.13)..... 221

Figure C.23 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.14)..... 222

Figure C.24 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.15). 222

Figure C.25 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.16). 223

Figure C.26 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.17). 223

Figure C.27 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.18). 224

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Valeurs numériques associées aux fonctions de forme. 52

Tableau 2.2 Paramètres nominaux du manipulateur. 53

Tableau 5.1 Amortissement additionnel. 167

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

q_{ri}	ième coordonnée généralisée de la partie rigide.
q_{ei}	ième coordonnée généralisée de la partie flexible.
n_r	Nombre de coordonnées généralisées de la partie rigide.
n_e	Nombre de coordonnées généralisées de la partie flexible.
$\boldsymbol{q}_r$	Vecteur des coordonnées généralisées de la partie rigide.
$\bar{\boldsymbol{q}}_r$	Vecteur des coordonnées généralisées virtuelles de la partie rigide.
$\boldsymbol{q}_r^*$	Vecteur des coordonnées généralisées virtuelles approximatives de la partie rigide.
${}^1\boldsymbol{q}_r$	Vecteur des n_r-1 premières coordonnées généralisées de la partie rigide.
${}^2q_r$	dernière coordonnée généralisée de la partie rigide.
$\boldsymbol{q}_e$	Vecteur des coordonnées généralisées de la partie flexible.
τ	Vecteur des couples ou des forces d'entrée du système mécanique
$\boldsymbol{x}_1$	Vecteur d'état de la partie rigide partielle.
$\boldsymbol{x}_2$	Vecteur d'état de la partie flexible augmentée.
$\boldsymbol{x}_e$	Vecteur d'état de la partie flexible.
ϕ_i	Fonction de forme associée à la ième coordonnée généralisée flexible.
μ	Déformation de la poutre flexible.
${}^j_i\boldsymbol{R}$	Matrice de projection du repère {i} dans le repère {j}.
${}^j\boldsymbol{v}_i$	Vitesse linéaire du repère {i} par rapport au repère inertiel projeté dans le repère {j}.
${}^j\Omega_i$	Vitesse angulaire du repère {i} par rapport au repère inertiel projeté dans le repère {j}.

$'$	Désigne une dérivée partielle par rapport à x.
$\cdot$	Désigne une dérivée par rapport au temps t.
$\hat{}$	Désigne une estimation ou un vecteur unitaire.
$\sim$	Désigne une erreur de suivi ou d'estimation.
^{d}	Désigne une quantité désirée.
$L\{\ \}$	Opérateur de la transformée de Laplace
$\|[.]\|_p$	Norme p vectorielle ou matricielle.
$\|\|[.]\|\|_p$	Norme p d'un vecteur de signaux ou d'un système.
$\boldsymbol{L}_p$	Espace des vecteurs de signaux de dimension appropriée dont la norme p est bornée.
$(\boldsymbol{L}_p)(t)$	Vecteur de fonction de dimension appropriée appartenant à l'espace $\boldsymbol{L}_p$.
$\mathbf{I}$	Matrice identité de dimension appropriée.
$\mathbf{0}$	Matrice de dimension appropriée dont tous les éléments sont nuls.
$[a,b]$	Intervalle fermé.
$\{a,b\}$	Ensemble incluant les éléments a et b.
$\times$	Produit cartésien.
$\otimes$	Produit de Kronecher.
$\oplus$	Somme de Kronecher.
sup	Supremum
inf	Infinimum
min	Minimum
max	Maximum

LISTE DES ACRONYMES

CGR	Coordonnée généralisée de la partie rigide.
CGF	Coordonnée généralisée de la partie flexible.
CGRV	Coordonnée généralisée virtuelle de la partie rigide.
CGRVA	Coordonnée généralisée virtuelle approximative de la partie rigide.
IML	Inégalité matricielle linéaire
PRP	Partie rigide partielle
PFA	Partie flexible augmentée

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A: Calcul de l'énergie cinétique 199

ANNEXE B: Démonstration du lemme 6.1 204

ANNEXE C: Simulation avec un modèle incluant l'effet de raccourcissement 208

CHAPITRE I
INTRODUCTION

Depuis la fin des années soixante-dix, les méthodes de commande assurant la précision des manipulateurs robotiques ont extrêmement évoluées. En effet plusieurs algorithmes de commandes adaptatives et robustes assurant la stabilité de l'erreur de suivi de trajectoires dans l'espace de travail ont été proposés. Ainsi, plusieurs tâches qui étaient anciennement réservées à l'homme, peuvent maintenant être confiées à des robots. Entre autres les manipulateurs d'aujourd'hui peuvent non seulement transporter des pièces d'un point à un autre, mais ils peuvent également découper, souder, polir et même peindre avec une habileté qui dépasse souvent celle de l'homme. Malgré cela, durant toutes ces années, un problème est demeuré omniprésent: les manipulateurs robotiques sont très massifs; c'est-à-dire que leur charge utile est très petite comparée à leur propre poids. À titre d'exemple, la charge utile d'un manipulateur robotique S10 fabriqué par la compagnie GMF est de 10 Kg tandis que sa propre masse est d'environ 200 Kg. En fait, on estime que la charge utile d'un robot ne dépasse guère 10% de sa propre masse (Kopacek et al., 1988). Ce problème est particulièrement important lorsque le manipulateur doit être régulièrement transporté d'un point à un autre. Par exemple, les manipulateurs dotés d'une base mobile peuvent être appelés à se déplacer régulièrement. Les véhicules spatiaux, telle la navette Colombia, sont également soumis à des contraintes de masse qui sont extrêmement sévères. Le rapport entre la masse d'un manipulateur et sa charge peut également prendre une grande importance dans certaines applications particulières pour lesquelles on exige que le dernier membre du robot soit très long. En effet dans ce cas, le dernier membre doit être très massif de façon à ce qu'il ne se déforme

pas sous l'effet des forces d'accélération et de gravité. À cause de cela, les autres membres du manipulateur doivent être extrêmement massifs et les actionneurs nécessaires pour déplacer cet ensemble de corps doivent être d'une puissance démesurée.

En général, les problèmes soulevés dans le paragraphe précédent peuvent être grandement réduits lorsque les membres du manipulateur sont plus délicats et qu'ils sont fabriqués à partir de matériaux plus légers. On ne peut alors plus supposer que les membres du robot sont rigides. En effet dans ce cas, les membres se déforment sous l'effet des forces d'accélération et de gravité. Ces manipulateurs pour lesquels l'hypothèse de rigidité des membres n'est plus acceptable sont communément appelés **robots flexibles** ou **manipulateurs flexibles**. Par contre, les manipulateurs conventionnels pour lesquels l'hypothèse de rigidité des membres est viable peuvent être appelés **robots rigides** ou **manipulateurs rigides**. Finalement, une troisième catégorie de manipulateurs pour lesquels l'hypothèse de rigidité des articulations n'est pas acceptable peuvent être dénommés **robots élastiques** ou **manipulateurs élastiques** ou encore, **manipulateurs avec articulations élastiques**.

Depuis le début des années quatre-vingt, plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de la modélisation et du contrôle des manipulateurs rigides, flexibles et élastiques. Malheureusement, les recherches dans le domaine des robots flexibles ont évoluées de façon beaucoup moins marquée que celles effectuées dans le domaine des robots rigides et élastiques. En fait, la plupart de ces recherches portent sur le suivi de trajectoires dans l'espace des articulations des manipulateurs flexibles. Ainsi, le suivi de trajectoires dans l'espace de travail est un domaine pour lequel il existe peu de solutions. La robustesse de la stabilité de l'erreur de suivi est un sujet qui est également très mal

couvert par la littérature. Le lecteur peut constater cela en consultant la revue de la littérature présentée à la section suivante. Le travail présenté dans cette thèse porte donc essentiellement sur une structure de commande qui assure la stabilité de l'erreur de suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'une classe de manipulateurs dont le dernier membre est flexible. Cette méthode de contrôle permet également d'assurer la robustesse du système par rapport à l'incertitude de sa charge. Elle permet finalement d'obtenir une vitesse de convergence souhaitable des erreurs de suivi.

L'intérêt que suscite cette recherche peut se rencontrer dans plusieurs applications telles que: la robotique spatiale qui requière une minimisation de la masse du manipulateur; les robots de décapage d'avion qui utilisent un membre principal d'une longueur de plusieurs mètres; les girafes d'entretien qui utilisent également un très long membre pour manipuler les objets en hauteur et d'autre applications nécessitant une faible masse ou une très grande porté.

1.1 Revue de la littérature

Depuis plusieurs années, la nécessité de tenir compte du modèle nonlinéaire des manipulateurs robotiques lors de la conception d'algorithmes de commande qui assure la stabilité du système a été mise en évidence à plusieurs reprises (Spong et Vidyasagar, 1989). Cette nécessité est particulièrement importante lorsque le manipulateur comporte plusieurs degrés de liberté et des actionneurs à entraînement direct. Étant donné que le modèle dynamique des manipulateurs flexibles est tout aussi nonlinéaire que celui des manipulateurs rigides, nous avons ciblé la revue de la littérature sur la commande nonlinéaire des robots flexibles. Le lecteur intéressé par les algorithmes de commande

basés sur la théorie des systèmes linéaires pourra tout de même consulter les quelques références suivantes: (Book et al., 1975 ; Balas, 1978 ; Cannon et Schitz, 1984 ; Hastings et Book, 1987 ; Dancose et al., 1989 ; Wells et al., 1990 ; Chen et Yang, 1993). De façon générale, le problème de la commande nonlinéaire des manipulateurs flexibles peut être divisé en quatre parties:

- la régulation dans l'espace des articulations;
- le suivi de trajectoires dans l'espace des articulations;
- le suivi de trajectoires dans l'espace de travail;
- la mesure et l'estimation des variables d'état associées à la déformation.

Dans les sections qui suivent, chacun de ces aspects de la littérature sera brièvement revu et commenté.

1.1.1 Régulation dans l'espace des articulations

Le problème de régulation dans l'espace des articulations consiste à définir une loi de commande de façon à ce que les articulations du manipulateur se stabilisent à une position désirée. Pour les manipulateurs rigides, Arimoto (Spong et Vidyasagar, 1989) démontre qu'une commande PD accompagnée d'un terme servant à compenser la gravité suffit pour assurer la stabilité asymptotique globale de l'erreur de position. Pour arriver à ce résultat, il utilise la théorie de Lyapunov et la propriété très connue d'antisymétrie associée au modèle dynamique des manipulateurs rigides. Dans le contexte des manipulateurs flexibles, Yuan et al. (1993) font ressortir la même propriété d'antisymétrie et ils obtiennent le même résultat qu'Arimoto. Cependant, la convergence de l'erreur est

assurée par l'amortissement naturel des membres flexibles. Cet amortissement étant généralement faible, certains auteurs proposent différentes approches pour accélérer la décroissance de l'erreur. Par exemple, Chevallereau et Aoustin (1992) proposent une loi de commande qui minimise l'erreur entre une dynamique linéaire désirée et la dynamique du manipulateur. Malheureusement, le faible amortissement de la flexibilité n'est pas le seul inconvénient qui est associé à la loi de commande proposée par Yuan et al. (1993). En effet, il peut arriver que le terme de gravité ne soit pas bien connu. Pour surmonter cette difficulté, il est alors possible d'utiliser une méthode itérative d'estimation du terme de gravité (De Luca et Panzieri, 1993).

1.1.2 Suivi de trajectoires dans l'espace des articulations

Le problème de suivi de trajectoires dans l'espace des articulations consiste à définir une loi de commande de façon à ce que les articulations du manipulateur suivent une trajectoire désirée. Pour les manipulateurs flexibles, cette loi de commande doit du même coup assurer une déformation bornée durant le suivi. Ce problème de suivi peut être abordé par différentes approches: les commandes utilisant la théorie des perturbations singulières; la linéarisation par retour d'état et finalement, les commandes adaptatives et robustes.

1.1.2.1 Perturbations singulières

La méthode des perturbations singulières est utilisée pour séparer un système dynamique en une partie évoluant lentement et une autre partie évoluant rapidement. Évidement plus le facteur de perturbation est petit, plus l'approximation est valable. Cette approche est également à la base de la commande composite qui permet un contrôle indépendant des

parties lentes et rapides d'un système à l'aide d'une même variable de commande (Kokotovic, 1984). Pour les manipulateurs flexibles, la plus petite constante de rigidité des membres flexibles est habituellement utilisée pour définir le facteur de perturbation (Siciliano et Book, 1988; Aoustin et Chevallereau, 1993). Avec cette approche, la loi de commande associée à la partie rigide est un couple pré-calculé conventionnel (Spong et Vidyasagar, 1989) tandis que la loi de commande associée à la partie rapide est un retour d'état linéaire. L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle consiste en une généralisation de la commande des manipulateurs flexibles et rigides. En effet, lorsque les membres deviennent rigides, le facteur de perturbation tend vers zéro et la commande devient celle d'un robot rigide. D'un autre côté le désavantage de cette approche vient de ce que l'erreur entre la dynamique réelle et celle approximée par la méthode des perturbations singulières est d'ordre un par rapport au paramètre de perturbation. À cause de cela l'erreur de suivi et la déformation ne convergent pas nécessairement vers zéro. Pour améliorer cette situation, l'approche des variétés (manifolds) rapide et lente (Kokotovic, 1985) peut être utilisée. Dans ce cas, la variété lente est obtenue en solutionnant une équation aux dérivées partielles. Pour les manipulateurs flexibles, cette solution ne peut être trouvée analytiquement parce que l'équation aux dérivées partielles du système est nonlinéaire. Pour cette raison, la commande et la variété lente peuvent être approximées par une série de puissance du facteur de perturbation (Kokotovic, 1985). Dans ce contexte, Siciliano et al. (1986a) obtiennent une approximation d'ordre un de la variété lente pour un manipulateur flexible à un degré de liberté. Malgré que cette approximation soit supérieure, l'exactitude du suivi et la convergence vers zéro de la déformation ne peuvent être assurées. En fait, il n'est pas surprenant que l'on ne puisse garantir la stabilité asymptotique de l'erreur de suivi et de la déformation. En effet, intuitivement, le mouvement des articulations est engendré par une accélération qui doit

certainement causer une déformation des membres flexibles. Il n'est donc pas envisageable de suivre une trajectoire qui varie et d'espérer que la déformation devienne nulle.

1.1.2.2 La linéarisation par retour d'état

Contrairement à la méthode des perturbations singulières, la linéarisation par retour d'état (Isidori, 1989) est une méthode exacte. À cause de cela, elle a connue beaucoup de succès pour la commande des manipulateurs rigides et élastiques (Spong et Vidyasagar, 1989). En effet, pour ces deux classes de manipulateurs, la dynamique du système peut être complètement linéarisée par une première loi de commande et l'erreur de suivi peut facilement être stabilisée à l'aide d'une seconde loi de commande. Malheureusement, pour les manipulateurs à membrures flexibles, la dynamique ne peut être complètement linéarisée (Wang et Vidyasagar, 1991a). En fait, elle ne peut être linéarisée que par rapport à une certaine variable à commander. Dans le cas qui nous intéresse, la linéarisation par retour d'état peut être considérée par rapport aux articulations (De Schutter et al., 1988 ; De Luca et Siciliano, 1989). La dynamique obtenue se divise alors en deux parties: la dynamique des articulations qui est linéaire et la dynamique de déformation qui est nonlinéaire. Une seconde loi de commande peut alors être utilisée pour stabiliser la dynamique de l'erreur. À ce moment, il est nécessaire que le système soit à minimum de phase pour que la déformation soit bornée durant le suivi (Sastry et Isidori, 1989). Pour que cette condition soit satisfaite, la dynamique des zéros (Isidori, 1989), définie comme celle correspondant à une sortie nulle, doit être asymptotiquement stable. Cette condition est en général vérifiée lorsque l'on considère une linéarisation par rapport aux articulations (De Luca et Siciliano, 1989). La linéarisation par retour d'état résout

donc assez bien le problème de suivi de trajectoires dans l'espace des articulations. Une étude expérimentale réalisée par Aoustin et al. (1994) montre d'ailleurs assez bien l'efficacité et la précision de cette approche comparée aux méthodes de commande linéaire et de commande utilisant l'approche des perturbations singulières.

1.1.2.3 Les commandes adaptatives et robustes

Plusieurs auteurs ont appliqué des commandes adaptatives sur des modèles linéarisés sans tenir compte des nonlinéarités du système. Étant donné l'objectif du travail, nous ne citons que les références rencontrées à ce sujet (Siciliano et al., 1986b ; Hwang et Eltimsahy, 1991 ; Wu et Cetinkunt, 1992). Considérons donc les méthodes de commandes adaptatives nonlinéaires. D'abord, Slotine et Li (1987) ont proposé une approche relativement simple pour résoudre le problème de la commande adaptative directe des manipulateurs rigides. En effet, en se basant sur l'idée de la commande par mode de glissement, ils définissent une fonction s de façon à ce que si s=0, la dynamique des erreurs de suivi de position et de vitesse converge vers zéro. Puis, ils trouvent une loi de commande et une loi d'adaptation qui stabilisent la dynamique décrite par la fonction s. De nombreux auteurs ont par la suite tenté d'appliquer ce principe aux manipulateurs flexibles. Ainsi, Pham et al. (1993) définissent la fonction s de façon à ce que si s=0, l'erreur de suivi et la déformation convergent vers zéro. Le problème dans ce cas est que la dérivée de la fonction de Lyapunov, utilisée pour l'étude de la stabilité, est formée d'un terme négatif et d'un terme qui peut être négatif ou positif selon l'état du système. Les auteurs considèrent alors que le terme non défini est négligeable devant le terme négatif. À notre avis, cette hypothèse est inacceptable puisque, dans certains cas, le terme non défini peut rendre la dérivée positive. Dans le même contexte, Yang et al. (1994; 1995)

proposent une loi de commande pour résoudre ce problème. Cependant, cette dernière comporte un terme qui est divisé par la norme de s. Par conséquent lorsque s tend vers zéro la commande tend vers l'infini. Pour corriger cette situation, les auteurs suggèrent d'ajouter une petite constante à la norme de s de façon à borner la division. Cette suggestion résout le problème de la loi de commande mais elle détruit complètement la preuve de stabilité. Dans ce contexte, lorsque la trajectoire désirée varie, l'objectif visé par Pham et al. (1993) ainsi que par Yang et al. (1994) (1995) (i.e. convergence vers zéro de l'erreur de suivi et de la déformation) devient irréalisable. Récemment, Lammerts et al. (1995) ont proposé une autre approche pour surmonter ce problème. Ils ont choisi une fonction s qui est telle que si s=0, les erreurs de suivi des articulations et de déformation convergent vers zéro. L'objectif n'est donc pas de faire converger la déformation vers zéro mais plutôt vers une trajectoire désirée de déformation. Cette trajectoire désirée de déformation est fonction des variables d'état du système de façon à être compatible avec le mouvement du manipulateur. Elle doit donc être calculée, en ligne, en même temps que la loi de commande. Avec cette approche, Lammerts et al. (1995) démontrent que l'erreur de suivi est asymptotiquement stable et que la déformation est bornée. Le problème de la commande adaptative directe associée au suivi de trajectoires dans l'espace des articulations est donc relativement bien couvert.

La littérature rencontrée sur le sujet de la commande adaptative indirecte concerne presqu'essentiellement l'estimation des fréquences modales associées à la déformation. Ces fréquences modales sont utilisées pour calibrer des filtres coupes bandes appliqués au signal de commande (Singer et Seering, 1990). De cette façon, les composantes fréquentielles qui seraient susceptibles d'exciter la déformation sont pratiquement éliminées. Pour les manipulateurs flexibles à un degré de liberté, Tzes et Yurkovich

(1993) proposent l'utilisation d'une méthode fréquentielle d'estimation. Cette méthode consiste à appliquer une transformée de Fourier rapide sur une séquence d'entrées-sorties et à identifier la réponse fréquentielle à l'aide d'un algorithme moindre carré standard (Franklin et al., 1990). Cette méthode a également été appliquée pour commander un manipulateur flexible à deux degrés de liberté (Khorrami et al., 1995). Dans ce cas, la commande est réalisée en utilisant la méthode des perturbations singulières, puis l'estimation des fréquences modales ainsi que le filtrage des signaux de commande sont réalisés selon l'approche présentée dans Tzes et Yurkovich (1993). Dans un autre ordre d'idée, Tornambè (1992) propose une approche différente pour estimer les constantes de rigidité associées à un manipulateur flexible. Sa stratégie consiste à augmenter l'espace d'état du système en considérant les paramètres à estimer comme des variables d'état supplémentaires. Ces variables sont ensuite estimées en utilisant un observateur d'état nonlinéaire (Krener et Respondek, 1985 ; Nicosia et al., 1989). Cette approche a l'avantage de permettre l'étude de la stabilité du système de commande et de l'observateur de façon indépendante grâce à la théorie des perturbations singulières. Récemment, une approche de commande adaptative composite a été proposée par Lin et Yeh (1996). Cette approche est basée sur une adaptation de la partie lente du système décomposé par la méthode des perturbations singulières. L'avantage de cette méthode est que l'estimation des paramètres permet de compenser, en ligne, la déformation des membres flexibles qui est estimée par l'approche quasi-statique qui consiste à négliger la dynamique de la partie flexible du système (Pfeiffer et Gebler, 1988).

Les méthodes de commandes par mode de glissement et de commandes robustes nonlinéaires (DeCarlo et al., 1988) appliquées aux manipulateurs flexibles ont également suscité l'intérêt de quelques auteurs. Entre autres, Yeung et Chen (1989) suggèrent une

commande par mode de glissement pour exécuter le suivi de trajectoires désirées dans l'espace des articulations d'un manipulateur flexible nonlinéaire à un degré de liberté. Pour ce faire, ils définissent une fonction de glissement formée par les erreurs de suivi des articulations et les variable d'état de déformation. Cette fonction de glissement est telle qu'en négligeant certains termes quadratiques de vitesse, la loi de commande utilisée pour stabiliser la fonction de glissement assure du même coup la stabilité de l'erreur de suivi et de la déformation. Évidemment, l'avantage de cette approche est la robustesse par rapport aux perturbations reproductibles causées par les incertitudes du modèle. De façon similaire, Alunni et al. (1991) utilisent une commande par mode de glissement pour assurer le suivi de trajectoires des articulations d'un manipulateur comportant un membre rigide et un membre flexible. Cependant, ces auteurs négligent complètement la dynamique associée aux forces centrifuges et de Coriolis. Dans un autre ordre d'idée, Nathan et Singh (1991) définissent une fonction de glissement formée seulement par les erreurs de suivi des articulations. Avec cette approche, ils assurent le suivi de la trajectoire des articulations sans se préoccuper de la déformation. Puis, lorsque la trajectoire désirée constante est atteinte, les auteurs proposent d'ajouter une commande qui stabilise la déformation sans perturber la position des articulations. Les désavantages de cette approche sont les suivants: la trajectoire désirée des articulations doit tendre vers une constante lorsque le temps tend vers l'infini et la déformation des membres n'est pas atténuée durant la première phase de l'algorithme de commande.

1.1.3 Suivi de trajectoires dans l'espace de travail

Le problème de suivi de trajectoires dans l'espace de travail consiste à définir une loi de commande de façon à ce que l'outil du manipulateur suive une trajectoire désirée. Pour

les manipulateurs flexibles, cette loi de commande doit en même temps garantir que la déformation est bornée durant le suivi.

Pour les manipulateurs rigides, le suivi dans l'espace de travail est équivalent au suivi dans l'espace des articulations à condition que la cinématique soit non singulière. En effet, il s'agit d'utiliser la cinématique inverse pour transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des articulations. On peut alors considérer une commande qui assure le suivi de la trajectoire désirée des articulations. Pour les manipulateurs flexibles, le problème est différent puisque l'espace des articulations et l'espace de travail sont non seulement liés par une transformation cinématique mais également par la dynamique de la déformation. Pour éviter cette relation dynamique, on définit généralement un ensemble de variables qui sont liées à l'espace de travail seulement par une relation cinématique. Si l'on suppose que la déformation des membres est faible, ces variables que nous désignons pour l'instant par **articulations virtuelles** sont une combinaison linéaire des variables d'articulations et des variables de déformation (Asada et Tokumaru, 1990 ; Wang et Vidyasagar, 1991a ; Zhao et Chen, 1993 ; Lucibello et Di Benedetto, 1993). Ainsi, le suivi dans l'espace de travail est équivalent au suivi dans l'espace des articulations virtuelles à condition que la cinématique inverse qui lie ces espaces existe.

1.1.3.1 Inversion du modèle dynamique

Une première approche pour effectuer un suivi de trajectoires consiste à utiliser l'inverse du modèle dynamique comme élément clé d'une loi de commande linéaire. Même si cette approche est intuitivement correcte, il n'en demeure pas moins que dans ce cas, la stabilité asymptotique de l'erreur de suivi peut être difficile à démontrer. En plus de cela, parce

que les actionneurs et les capteurs utilisés pour mesurer la déformation ne sont pas localisés aux mêmes endroits, le système est à non-minimum de phase (Isidori, 1989). L'inverse de la dynamique du système est par conséquent instable.

Pour contourner cette difficulté, Bayo (1988) propose d'inverser le modèle dynamique d'un manipulateur flexible à l'aide d'une méthode fréquentielle itérative. Quoique générale, cette méthode est très exigeante au point de vue des calculs. Pour Asada et Tokumaru (1990) le modèle inverse d'un manipulateur planaire peut être obtenu de façon approximative en exprimant la dynamique par rapport aux articulations virtuelles. Ils démontrent alors que chaque entrée du système peut être obtenue de façon indépendante. Suite à cela, Kwon et Book (1990) proposent une solution temporelle pour inverser le modèle dynamique linéaire d'un manipulateur flexible à un degré de liberté. Cette méthode consiste d'abord à transformer le système de façon à séparer les parties stable et instable, puis, à intégrer la partie stable de façon causale en partant de la condition initiale et la partie instable de façon anticausale en partant de la condition finale. Xia et Menq (1993) utilisent également cette approche, de façon approximative, pour réaliser un suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'un manipulateur composé de deux membres flexibles. Récemment, Chen (1993) propose une généralisation de la méthode de Kwon et Book (1990) pour une classe de systèmes nonlinéaires à non-minimum de phase. Se basant sur le principe de linéarisation par retour d'état, Chen (1993) démontre que l'inverse du système peut être obtenu en solutionnant un problème de conditions aux limites associé à la dynamique non-observable du système. Il obtient la solution de cette équation de façon itérative en cherchant la solution du système linéarisé autour de la solution obtenue à l'étape précédente. Quoique générale, cette approche souffre de plusieurs inconvénients. D'abord, il n'existe aucune étude de convergence de la procédure

itérative. Puis, la méthode est valable seulement si la trajectoire désirée de sorties converge vers zéro lorsque le temps converge vers l'infini. Enfin, les calculs mis en cause à chaque itération sont extrêmement laborieux. Malgré cela, Zhao et Chen (1993) utilisent cette approche pour obtenir un suivi de trajectoires dans l'espace des articulations virtuelles d'un manipulateur comportant deux membres flexibles. Les résultats qu'ils obtiennent sont très intéressants mais il n'y a aucune preuve de stabilité de l'erreur de suivi.

1.1.3.2 Linéarisation par retour d'état

En utilisant une linéarisation par retour d'état, Singh et Schy (1986) démontrent que la stabilité asymptotique de l'erreur de suivi et de la déformation peut être assurée pour une classe de manipulateurs flexibles si on considère que le manipulateur est muni d'un actionneur pouvant agir directement sur l'outil. Évidement, cette considération n'est pas réalisable. Par ailleurs, De Luca et Siciliano (1989) ainsi que Madhavan et Singh (1991) étudient le problème de la stabilité de la dynamique des zéros (i.e. la traduction littérale de "zero dynamics") par rapport au choix des variables à linéariser. Lorsque les variables choisies sont les articulations virtuelles, la dynamique des zéros est instable. Le suivi de trajectoires des articulations virtutelles engendre alors une dynamique non observable non bornée. D'un autre côté, si les variables à linéariser sont les articulations, le suivi de trajectoires des articulations engendre une dynamique non-observable bornée. Les auteurs suggèrent donc de faire un compromis entre ces deux choix de façon à ce que la dynamique des zéros soit à la limite de la stabilité. Le suivi dans l'espace des articulations virtuelles peut alors être approximé tout en garantissant une dynamique non-observable bornée. Dans le même ordre d'idées, Yim (1993) applique ce principe pour obtenir un

suivi de trajectoires directement dans l'espace de travail sans avoir recours à l'espace des articulations virtuelles. Évidement, le problème avec ce type d'approche vient de ce que le suivi n'est pas exact. Pour surmonter ce problème, Lucibello et Di Benedetto (1993) proposent une approche ayant pour but d'obtenir un suivi exact de la trajectoire de sorties (articulations virtuelles) tout en garantissant une dynamique non observable bornée. Cette approche consiste d'abord à trouver une trajectoire de déformation désirée bornée correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles. Ensuite, l'approche consiste à appliquer une première loi de commande qui linéarise la dynamique du système par rapport à l'espace des articulations virtuelles et une seconde loi de commande qui stabilise localement la dynamique des erreurs de suivi des articulations virtuelles et de déformation. Cette approche permet ainsi d'assurer la stabilité asymptotique locale de l'erreur de suivi des articulations virtuelles ainsi qu'une déformation bornée. En fait, dans ce cas, la recherche d'une trajectoire désirée de déformation correspondant à la trajectoire désirée des articulations virtuelles équivaut à trouver l'inverse du modèle dynamique du système. À cet effet, Lucibello et Di Benedetto (1993) et Lucibello (1989) proposent plusieurs méthodes. Bien qu'intéressantes, ces méthodes ne s'appliquent qu'à des manipulateurs et des trajectoires spécifiques. Récemment, une approche pour rendre la stabilité de l'erreur de suivi robuste par rapport à des incertitudes paramétriques a été proposée. Cette approche est basée sur l'hypothèse que l'incertitude des paramètres du système est relativement faible de sorte que l'erreur de suivi demeure bornée. Un mécanisme d'estimation des paramètres est alors ajouté pour permettre une mise à jour continue de la loi de commande et de la trajectoire désirée de déformation (Lucibello et Belleza, 1996). Encore une fois, cette approche n'assure qu'une stabilité locale des erreurs de suivi et d'estimation et elle ne s'applique qu'à des manipulateurs et des trajectoires très spécifiques.

1.1.4 Mesure et estimation des variables d'état associés à la déformation

Plusieurs approches utilisant la théorie de la commande nonlinéaire nécessitent la connaisssance de toutes les variables d'état du système. Or, les variables d'état associées à la déformation ne peuvent être mesurées si le modèle dynamique du manipulateur est obtenu à partir de la méthode des modes assumés (Book, 1984). Ces variables d'état ne sont en fait carrément pas des variables physiques. Les quantités mesurables sont le plus souvent des fonctions de ces variables d'état. Par exemple, la position de l'extrémité d'un membre flexible peut être mesurée à l'aide d'un capteur optique (De Luca et al., 1990 ; Cannon et Schitz, 1984) tandis que la déflexion peut être mesurée à l'aide de jauges de contraintes (Aoustin et al., 1994 ; Hastings et Book, 1987; Yuan et al., 1993). Dans ce contexte, les variables d'état pourront généralement être obtenues à l'aide d'un observateur d'état nonlinéaire.

À cet effet, Wang et Vidyasagar (1991b) utilisent le principe d'observateurs nonlinéaires proposé par Krener et Respondek (1985). Cette approche consiste à trouver une transformation difféomorphe telle que la partie nonlinéaire de la dynamique transformée soit uniquement fonction de l'entrée et de la sortie. Un observateur linéaire peut alors être utilisé pour obtenir une estimation des variables d'état dans l'espace transformé. Il suffit finalement d'utiliser la transformation pour obtenir l'estimation des variables d'état de déformation dans l'espace original. Une autre approche proposée par Nicosia et al. (1989) consiste à utiliser le principe de pseudo-linéarisation. Cette méthode est plus simple et elle permet d'obtenir une approximation de premier ordre de l'observateur de Krener et Respondek (1985).

1.2 Problématique et méthodologie

Comme nous l'avons déjà mentionné, le but de ce travail est de proposer une stratégie de commande qui assure la stabilité de l'erreur de suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'une classe de manipulateurs dont le dernier membre est flexible. Cette approche doit en plus assurer la robustesse du système par rapport à l'incertitude de la charge. Elle doit également permettre une vitesse de convergence souhaitable des erreurs de suivi.

Selon la revue de la littérature présentée à la section 1.1, nous savons que le suivi de trajectoires dans l'espace des articulations peut être obtenu à l'aide d'une linéarisation par retour d'état. La dynamique interne est alors habituellement bornée puisque le système est à minimum de phase. Cette stratégie n'apparaît cependant pas d'une grande utilité puisque l'espace de travail et l'espace des articulations sont liés par des relations cinématique et dynamique. La cinématique inverse seule ne peut donc servir à transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des articulations. Le suivi peut alors être considéré directement par rapport à l'espace de travail ou par rapport à un espace d'articulations virtuelles défini de façon à être lié à l'espace de travail par une relation cinématique. Pour obtenir ce suivi, une linéarisation par retour d'état peut également être utilisée. Malheureusement, le système est alors à non-minimum de phase et cela implique une dynamique interne non bornée. Pour contourner ce problème, un suivi approximatif assurant la stabilité de la dynamique interne peut être obtenu si on considère une linéarisation par retour d'état par rapport à un compromis entre les articulations et les articulations virtuelles. Il est également possible d'obtenir un suivi exact qui assure la stabilité du système et une dynamique interne bornée. Malheureusement, cette approche

n'assure qu'une stabilité locale et elle ne s'applique qu'à des manipulateurs et des trajectoires très spécifiques.

La stratégie de commande que nous proposons concerne une classe importante de manipulateurs dont le dernier membre est flexible. La définition de cette classe est primordiale pour déduire certaines propriétés qui sont essentielles pour prouver le bon fonctionnement du système. L'approche que nous proposons se divise en quatres étapes:

1. La première étape consiste à transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des articulations virtuelles. Si on suppose que la cinématique qui lie ces deux espaces est non-singulière, cette transformation est fort simple.

2. La deuxième étape consiste à transformer la trajectoire désirée de l'espace des articulations virtuelles à l'espace des articulations et des variables de déformation. Cette transformation est, d'une certaine façon, inspirée de l'approche quasi-statique (Pfeiffer et Gebler, 1988) puisqu'elle consiste à corriger la trajectoire désirée des articulations de façon à tenir compte de la flexibilité de la poutre. Cependant, contrairement à la méthode quasi-statique, nous verrons qu'avec l'approche proposée, la dynamique de la flexibilité n'est pas négligée et la stabilité exponentielle est garantie. Pour obtenir cette transformation, une équation différentielle nonlinéaire et instable doit être solutionnée. La méthode d'intégration causale-anticausale, proposée par Kwon et Book (1994) pour inverser le modèle linéaire d'un manipulateur flexible, est alors utilisée de façon itérative.

3. Cette étape consiste à définir un ensemble de lois de commande qui assure la stabilité des erreurs de suivi. Une première loi de commande est d'abord utilisée pour

linéariser le système par rapport aux articulations (partie rigide). Une seconde loi de commande permet ensuite de stabiliser l'erreur de suivi de la partie rigide à l'exception de la dernière articulation. Finalement, une troisième loi de commande est définie dans le but de stabiliser l'erreur de suivi de la partie flexible incluant la dernière articulation. Cette stabilisation est relativement complexe pour trois raisons: i) une seule variable de commande est disponible pour assurer le suivi de trajectoires de la dernière articulation et de toutes les variables de déformation; ii) le système est fortement nonlinéaire et couplé avec la partie rigide; iii) si la partie nonlinéaire est considérée comme une perturbation, celle-ci n'est pas reproductible par l'entrée. Notre stratégie consiste alors à utiliser, judicieusement, les propriétés du modèle, le théorème de passivité, l'étude de stabilité des systèmes hiérarchiques et la méthode des Inégalités Matricielles Linéaires (IML) pour calculer les gains du système qui assurent la stabilité exponentielle et une vitesse de convergence souhaitable des erreurs.

4. La dernière étape consiste à modifier les lois de commande proposées à l'étape 3 de façon à assurer la robustesse du système face aux incertitudes de la charge. Pour obtenir cette robustesse, une commande adaptative indirecte est utilisée. Une étude de robustesse basée sur les applications gardiennes doit alors être considérée pour ajuster les paramètres des lois de commande de façon à assurer une dynamique interne robustement bornée. Un mécanisme de mise à jour de la transformation de la trajectoire désirée doit également être ajouté pour tenir compte des variations des paramètres estimés du système.

1.3 Originalité

Pour bien dégager les aspects de ce travail qui ont été apportés par l'auteur de ceux qui ont été puisés dans la littérature, nous avons regroupé de façon succincte, toutes les parties du travail qui sont à notre meilleure connaissance des contributions. La liste de ces contributions se dresse comme suit:

1. Plusieurs propriétés du modèle dynamique d'une classe de manipulateurs flexibles formés d'une chaîne de corps rigides et terminés par une poutre flexible sont démontrées dans le second chapitre.

2. Une méthode itérative pour transformer les trajectoires désirées de l'espace des articulations virtuelles à l'espace des variables de déformation et des articulations est proposée au chapitre III. Une étude de convergence de cette procédure itérative est également présentée.

3. Grâce aux propriétés du modèle dynamique, la limite de stabilité de la dynamique interne associée à une linéarisation par retour d'état par rapport à un compromis entre les articulations et les articulations virtuelles est obtenue par une procédure simplifiée.

4. Une nouvelle approche pour assurer la stabilité des erreurs de suivi de trajectoires dans l'espace de travail est proposée au chapitre IV. Cette approche permet non seulement d'assurer la stabilité du système mais également d'obtenir un

amortissement souhaitable des erreurs de suivi et une minimisation du module des valeurs propres de la partie linéaire du système.

5. Une approche pour assurer la robustesse de la stabilité des erreurs par rapport à l'incertitude de la charge est finalement proposée au chapitre V. Cette approche utilise un mécanisme d'adaptation indirecte similaire à ceux utilisés pour la commande des manipulateurs rigides. Il doit cependant être accompagné d'une étude de robustesse additionnelle qui permet d'ajuster les paramètres de la loi de commande de façon à assurer une dynamique interne bornée de façon robuste.

1.4 Organisation de la thèse

Le chapitre II est d'abord consacré à une brève description des deux principales méthodes de modélisation des manipulateurs flexibles: la méthode des modes assumés et celle des éléments finis. On y présente ensuite la définition de la classe de manipulateurs flexibles considérée dans cette étude et les propriétés s'y rattachant. Cette classe de manipulateurs est principalement caractérisée par une chaîne de corps rigides terminée par une poutre flexible. Un exemple de modélisation d'un manipulateur formé d'un membre rigide et d'un dernier membre flexible y est finalement présenté.

Le chapitre III est consacré aux transformations de la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des articulations virtuelles puis de l'espace des articulations virtuelles à celui des articulations et des variables de déformation. Parce que les espaces de travail et des articulations des manipulateurs flexibles sont liés par des relations cinématique et dynamique, les articulations virtuelles sont d'abord définies de façon à être liées à l'espace

de travail par une simple relation cinématique. Une première transformation de l'espace de travail à l'espace des articulation virtuelles est alors obtenue à partir de la cinématique du système. La deuxième transformation, de l'espace des articulations virtuelles à celui des articulations et des variables de déformation, est ensuite obtenue en solutionnant une équation différentielle nonlinéaire et instable. La solution de cette équation est d'abord approximée à l'aide de la méthode quasi-statique. Elle est ensuite obtenue de façon exacte grâce à une procédure itérative proposée. Une analyse de convergence de cette procédure itérative y est également présentée. Le chapitre se termine enfin par un exemple de transformation de trajectoire désirée.

Le chapitre IV est d'abord consacré à la linéarisation par retour d'état et à la stabilité de la dynamique interne du système. Le dilemme entre la précision du suivi de trajectoires dans l'espace des articulations virtuelles et la stabilité de la dynamique interne du système y est d'abord souligné. La simulation d'une loi de commande qui linéarise le système par rapport à un compromis entre les articulations réelles et virtuelles y est ensuite présentée. Le reste du chapitre est consacré à la structure de commande proposée. Cette structure de commande consiste en une linéarisation par retour d'état par rapport aux articulations suivie de deux lois de commande linéaires invariantes. Une étude de stabilité basée sur le théorème de passivité et sur la stabilité des systèmes hiérarchiques permet alors de prouver l'existence d'un ensemble de gains qui stabilisent les erreurs de suivi dans l'espace des articulations, des variables de déformation et des articulations virtuelles. Une formulation du problème sous forme d'Inégalité Matricielle Linéaire (IML) permet ensuite de trouver les gains des lois de commande qui optimisent le temps de réponse du système et qui minimisent l'amplitude des valeurs propres de la partie linéaire du système. Des

simulations de l'approche proposée y sont également présentées et comparées de façon à en évaluer les performances.

Le chapitre V est finalement consacré à la robustification des lois de commande présentées au chapitre IV. La robustification de la linéarisation par retour d'état par rapport à un compromis entre les articulations réelles et virtuelles, est d'abord basée sur le principe d'une loi de commande adaptative indirecte. Elle nécessite cependant une étude de robustesse supplémentaire qui permet d'ajuster les gains de la loi de commande de façon à assurer la stabilité de la dynamique interne du système. Cette étude est principalement basée sur le principe des applications gardiennes et semi-gardiennes. Une simulation de cette loi de commande est ensuite présentée dans le but d'en évaluer les performances. La robustification de la structure de commande proposée est ensuite développée. La loi de commande est une fois de plus basée sur une adaptation indirecte et nécessite une étude de robustesse additionnelle basée sur le principe des applications gardiennes. Un mécanisme utilisé pour réévaluer la trajectoire désirée selon l'évolution des paramètre estimés y est également présenté. Ce mécanisme permet d'assurer une convergence vers zéro des erreurs de suivi. Le chapitre se termine finalement par des simulations qui permettent d'évaluer et de comparer les performances du système de commande proposé.

CHAPITRE II

MODÉLISATION DES MANIPULATEURS FLEXIBLES

2.1 Introduction

Lorsque l'on désire commander un système dynamique, il faut tout d'abord obtenir son modèle mathématique. À cause de la flexibilité de leurs membres, les manipulateurs flexibles sont des systèmes qui peuvent être modélisés de façon exacte par l'entremise d'équations aux dérivées partielles (Benati et Morro, 1994; Piedboeuf, 1989). Mais parce que la plupart des algorithmes de commande sont développés pour des systèmes comportant uniquement des équations différentielles ordinaires, il existe plusieurs méthodes d'approximation utilisées pour modéliser les manipulateurs flexibles. Parmi ces méthodes, la modélisation par éléments finis (Meirovitch, 1975; Theodore et Ghasal, 1995) et la modélisation à l'aide des modes assumés (Book, 1984 ; Piedboeuf, 1992) sont sans aucun doute les plus populaires. Souvent, lorsque la modélisation est obtenue dans un objectif de commande, on utilise la méthode des modes assumés. En effet, malgré que cette approche soit difficilement applicable sur des manipulateurs constitués de plusieurs membres flexibles agencés de façon complexe, elle permet d'obtenir des modèles relativement précis et peu coûteux au point de vue du temps de calcul. En contrepartie, la méthode des éléments finis peut offrir une très grande précision pour la modélisation de manipulateurs extrêmement complexes. Les modèles obtenus sont cependant très coûteux au niveau du temps de calcul (Kopacek et al., 1988 ; Hohenbichler et al., 1988).

Étant donné que cette thèse ne vise pas essentiellement la modélisation des manipulateurs flexibles, ce chapitre n'a pas comme objectif de présenter une description complète et exhaustive de ce sujet. Il se veut cependant d'un grand intérêt pour bien définir la classe de manipulateurs flexibles considérée dans cette étude et les propriétés du modèle dynamique s'y rattachant. Dans cette optique, les deux premières sections seront consacrées à une brève description de la modélisation par la méthode des modes assumés et par la méthode des éléments finis. À la section suivante, la classe de manipulateurs flexibles considérée dans cette étude sera décrite. Plusieurs propriétés spécifiques à cette classe seront ensuite démontrées en regard avec les hypothèses de modélisation. Finalement, le chapitre se terminera par un exemple de modélisation d'un manipulateur formé d'un membre rigide et d'un membre flexible.

2.2 Méthode des modes assumés

La méthode des modes assumés (Book, 1984 ; Piedboeuf, 1992) est basée sur l'hypothèse que la déformation de chaque membre flexible peut être modélisée par une somme de coordonnées généralisées ne dépendant que du temps pondérées par des fonctions de forme ne dépendant que de l'espace. Selon cette hypothèse, le modèle dynamique du système peut être obtenu en utilisant la méthode de Lagrange. Cette méthode consiste à calculer les énergies cinétique et potentielle et à remplacer leurs expressions dans l'équation d'Euler-Lagrange. Le principal avantage de cette approche est qu'elle n'exige pas que les fonctions de forme solutionnent l'équation différentielle et les conditions aux frontières naturelles associées aux membrures flexibles (Moroveich, 1967). En effet, d'une part le théorème d'expansion modale nous indique que les fonctions propres du système flexible peuvent être exprimées sous la forme d'une somme de fonctions orthogonales

quelconques. D'autre part, les conditions aux frontières naturelles des membrures flexibles sont implicitement respectées lors du calcul des énergies. Les fonctions de forme doivent donc être au moins admissibles: elles doivent respecter les conditions aux frontières géométriques. Par le fait même les fonctions de forme sont beaucoup moins difficiles à obtenir que les fonctions propres. Elles ont en plus l'avantage de respecter certaines propriétés d'orthogonalités qui simplifient le modèle dynamique obtenu. Malgré cela, la principale difficulté de cette méthode est d'obtenir les fonctions de forme admissibles qui respectent exactement les conditions aux frontières géométriques. Pour cette raison, il existe plusieurs choix de fonctions de forme approximatives. Ces différentes catégories de fonctions sont principalement caractérisées par leurs conditions aux frontières simplifiées. À titre d'exemple, les fonctions de forme de type poutre **encastrée-libre** sans charge (Piedboeuf, 1989) sont des plus utilisées à cause de leur grande simplicité. Ces dernières sont en fait les fonctions propres d'une poutre d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Une variante de ces fonctions de forme, qui sont aussi très populaire, sont celles de type poutre **encastrée-charge** (Piedboeuf, 1989). Ces dernières sont les fonctions propres d'une poutre d'Euler-Bernoulli encastrée à une extrémité et munie d'une charge à l'autre extrémité. Ces fonctions de forme sont relativement précises lorsque l'inertie du pivot[1] du membre flexible est beaucoup plus grande que l'inertie du membre sans le pivot. Cette particularité survient habituellement lorsque les actionneurs sont munis de réducteurs harmoniques. En effet dans ce cas, l'inertie du pivot transformé du côté basse vitesse est approximativement égale à l'inertie du rotor de l'actionneur divisé par le carré de la réduction. Parce que les engrenages harmoniques offrent généralement des réductions de l'ordre de 1/50 à 1/200, l'inertie du pivot transformée du côté basse

---

[1]On considère que le pivot d'un membre est formé du rotor de l'actionneur et de la pièce mécanique qui lie le rotor au reste du membre.

vitesse peut être très élevée. L'approximation peut donc être relativement valable. Les fonctions propres d'une poutre d'Euler-Bernoulli attachée aux deux extrémités peuvent également servir de fonctions de forme. Elles offrent l'avantage de simplifier l'inversion du modèle dynamique du manipulateur (Assada et Tokumaru, 1990).

Lorsque les membres flexibles sont munis d'actionneurs rotoïdes, les fonctions de forme énumérées jusqu'à présent ne tiennent pas compte du pivotement de la base du membre. Pour tenir compte de cet aspect, qui prend toute son importance lorsque les actionneurs sont à entraînement direct, les fonctions de forme de type **pseudo-encastré** et **pseudo-attaché** peuvent être utilisées (Bellezza et al., 1990 ; Piedboeuf, 1989). En plus de tenir compte du pivotement de la base, ces fonctions de forme tiennent compte de la charge. Elles permettent également de démontrer l'invariance des fonctions de forme par rapport au choix des repères utilisés pour la modélisation. Ces fonctions de forme ont d'ailleurs été validées de façon expérimentale par plusieurs auteurs (Bellezza et al., 1990 ; De Luca et al., 1990).

2.3 Modélisation par éléments finis

La modélisation par éléments finis (Meirovitch, 1975; Theodore et Ghasal, 1995) est basée sur une discrétisation spatiale des membres flexibles. Tout comme la méthode des modes assumés, cette discrétisation fait ressortir la déformation des membres comme une somme de coordonnées généralisées pondérées par des fonctions de forme. Les fonctions de forme et les coordonnées généralisées sont cependant de nature très différentes. En effet les fonctions de forme servent d'interpolation entre les différents noeuds de la discrétisation de chacun des membres tandis que les coordonnées généralisées servent à

caractériser le déplacement et l'orientation de chaque noeud. Avec la méthode des modes assumés, les fonctions de forme sont plutôt définies pour toute la longueur de chaque membre et les coordonnées généralisées servent seulement à pondérer les différentes fonctions de forme. En général, on associe six coordonnées généralisées pour chaque noeud de la discrétisation: trois pour la translation et trois pour la rotation. Les fonctions de forme sont alors définies pour assurer la continuité spatiale et l'équilibre des forces aux noeuds de discrétisation. Dans la majorité des cas, des polynômes sont utilisés comme fonctions de forme (Meirovitch, 1975). Une fois que les fonctions de forme sont correctement définies, les énergies cinétique et potentielle peuvent être calculées de la même façon que pour la méthode des modes assumés. Il s'agit alors d'appliquer l'équation d'Euler-Lagrange pour obtenir le modèle dynamique du système. Mise à part la définition des fonctions de forme et des coordonnées généralisées, la méthode des éléments finis est donc tout à fait similaire à celle des modes assumés. L'avantage de cette approche, comparée à la méthode des modes assumés, est que le choix des fonctions de forme n'est pas lié à la géométrie des membres et à leur agencement. On peut par conséquent modéliser des manipulateurs très complexes par une procédure relativement simple et unifiée. D'un autre côté, le désavantage, qui devient extrêmement important lorsque la modélisation est obtenue dans un objectif de commande, est que pour obtenir une précision comparable, la méthode des éléments finis exige la plupart du temps une quantité plus importante de coordonnées généralisées. Elle n'a pas non plus l'avantage associé à la propriété d'orthogonalité des fonctions de forme. Le modèle dynamique obtenu avec cette approche est donc souvent beaucoup plus complexe que celui obtenu avec la méthode des modes assumés (Kopacek et al., 1988 ; Hohenbichler et al., 1988). Il est toute fois possible d'allier plusieurs avantages de la méthode des éléments finis et de la méthode des modes assumés. Il s'agit pour cela de discrétiser les membres flexibles par

éléments finis en considérant des fonctions d'interpolation cubiques. Le nombre de coordonnées généralisées utilisées pour décrire le mouvement de chaque noeud peut alors être divisé par deux si on impose la continuité des fonctions d'interpolation de leurs dérivées premières et de leurs dérivées secondes (Dancose et al., 1989).

2.4 Classe de manipulateurs flexibles

L'étude présentée dans cette thèse est valide pour une classe de systèmes formés de deux parties: une chaîne de p corps rigides d'une part et une poutre flexible comportant une charge à son extrémité d'autre part. Comme l'indique la figure 2.1 les corps (p-1) et p de la partie rigide sont liés par une articulation rotoïde. Cette articulation est fixée sur le corps (p-1) d'une part et au centre de masse du corps p d'autre part. Puis, l'extrémité sans charge de la poutre flexible est également fixée au centre de masse du corps p.

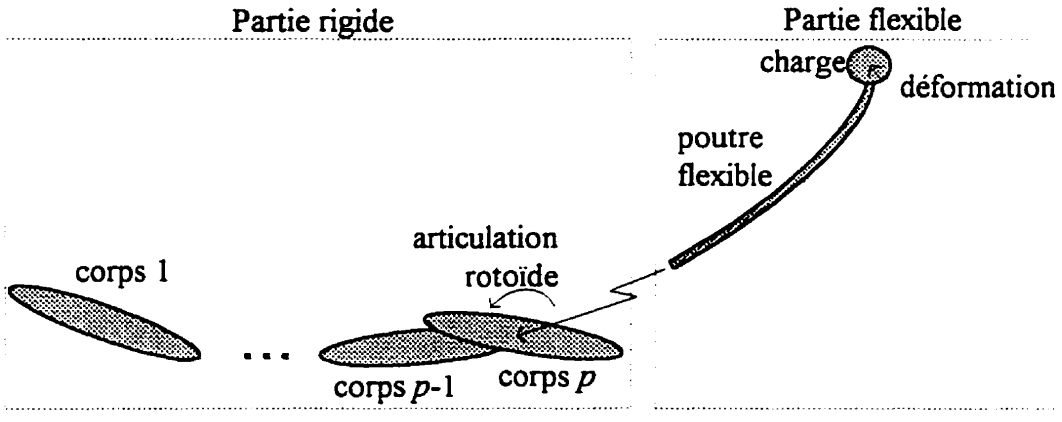


Figure 2.1 Classe de systèmes mécaniques.

Dans les sections qui suivent, nous verrons que cette classe de systèmes est particulièrement intéressante parce que la dynamique de la partie flexible respecte plusieurs propriétés qui facilitent le contrôle. Ces propriétés ne sont malheureusement pas

vérifiées si on considère une classe de systèmes différente de celle décrite dans cette section (i.e. systèmes comportant un ou plusieurs corps flexibles qui ne sont pas nécessairement situés à l'extrémité de la chaîne). D'autre part, le fait de considérer le dernier corps comme flexible est intuitivement justifiable puisque c'est lui qui comporte la plus petite charge à son extrémité. Il peut donc être fabriqué de façon plus délicate et à partir de matériaux plus légers. En fait, la plupart des manipulateurs, qu'ils soient flexibles ou rigides, comportent des membres plus délicats à leurs extrémités. Même les humains sont dotés de cette caractéristique.

Cette classe de systèmes mécaniques peut non seulement inclure la plupart des manipulateurs dont le dernier membre est flexible mais également d'autres types de systèmes mécaniques tels que:

1. un manipulateur dont le dernier membre est flexible combiné à une base mobile;

2. un véhicule spatial combiné à un manipulateur dont le dernier membre est flexible.

2.4.1 Hypothèse de modélisation

Pour permettre une meilleure caractérisation de la classe de systèmes considérée, nous allons maintenant énumérer les hypothèses de modélisation des parties rigide et flexible du système.

Hypothèse 2.1: *Toutes les contraintes mécaniques de la partie rigide sont honolomes.*

Hypothèse 2.2: *Un actionneur muni d'un frottement visqueux est associé à chacune des n_r Coordonnées Généralisées de la partie Rigide (CGR)*[2].

Hypothèse 2.3: *La masse par unité de longueur de la poutre flexible (ρ) est constante et le modèle de la poutre respecte les hypothèses d'Euler-Bernoulli: i) les sections restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre; ii) le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligeable; iii) l'inertie de rotation d'une section est négligeable.*

Hypothèse 2.4: *Seule la flexibilité dans le plan orthogonal à l'axe de l'articulation rotoïde liant les corps p et p-1 est considérée.*

Hypothèse 2.5: *La flexibilité peut être approximée par une somme de n_e fonctions de forme dépendant uniquement de l'espace pondérées par des Coordonnées Généralisées Flexibles (CGF)*[3] *dépendant uniquement du temps. Les fonctions de forme ainsi que leurs dérivées première et seconde doivent en plus être linéairement indépendantes entre elles.*

Hypothèse 2.6: *L'amortissement interne de la poutre flexible respecte le modèle de Voigt-Kelvin (Piedboeuf, 1989) de sorte qu'il prenne la forme d'un frottement linéaire invariant proportionnel aux vitesses des CGF.*

---

[2]Dans un contexte de robotique, les CGR sont simplement les articulations du manipulateur. Par contre, dans un contexte plus général, cet acronyme peut désigner autre chose qu'une articulation.

[3]Les CGF sont les coordonnées généralisées qui servent à modéliser l'évolution de la déformation de la poutre flexible par rapport au temps.

Hypothèse 2.7: *La déformation de la poutre est faible de sorte que i) la cinématique de la déformation est approximée à l'ordre un et ii) l'énergie cinétique associée aux termes quadratiques de flexibilité est négligeable lors du calcul des termes centrifuges de Coriolis et de rigidité.*

Hypothèse 2.8: *Le centre de masse de la charge est fixé à l'extrémité libre de la poutre flexible.*

Remarque 2.1: *La plupart des auteurs négligent l'énergie cinétique associée aux termes quadratiques de déformation lors de la modélisation du manipulateur flexible. Cette approximation engendre un problème important: la matrice de masse n'est pas toujours définie positive. Pour éviter ce problème, il s'agit de négliger les termes quadratiques de déformation uniquement pour le calcul des termes centrifuges, de Coriolis et de rigidité. Cette particularité est soulignée par l'hypothèse 2.7 qui sous-entend, que les termes quadratiques de déformation ne sont pas négligés pour le calcul de la matrice de masse.*

□

D'autres auteurs ont défini des classes de systèmes mécaniques similaires à celle-ci. Par exemple, Wang et Vidyasagar (1991a) ont défini une classe de manipulateurs comportant trois articulations et un dernier membre flexible. La grande différence entre la classe définie par ces auteurs et la nôtre réside principalement dans l'hypothèse de flexibilité du dernier membre. En effet, pour éviter que le dernier membre ne se déforme sous l'effet de la gravité, ils supposent que la flexibilité se situe dans le plan orthogonal à l'axe de rotation de la première articulation plutôt que dans celui qui est orthogonal à l'axe de la dernière articulation. Ils supposent également que le manipulateur comporte au plus trois

articulations et que ses deux derniers membres forment un plan horizontal. Dans notre cas, il n'y a pas de restriction sur le nombre d'articulations ni sur l'agencement des membres rigides entre eux.

Voyons maintenant comment cette classe de systèmes peut être modélisée. Selon l'hypothèse 2.5, la déformation du membre flexible peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$\mu(x_p) = \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(x_p) q_{e_i} \tag{2.1}$$

où ϕ_i est la fonction de forme associée à la CGF q_{e_i} et n_e est le nombre de CGF considéré. Les hypothèses 2.1 et 2.5 nous permettent ainsi d'utiliser la méthode des modes assumés ou la méthode des éléments finis pour obtenir le modèle dynamique du système. Il suffit pour cela de choisir des fonctions de forme appropriées, de calculer les énergies du système et d'appliquer l'équation d'Euler-Lagrange pour chaque coordonnée généralisée. Selon les hypothèses 2.2 et 2.6, le modèle dynamique est par conséquent obtenu en développant les relations suivantes:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{r_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_{r_i}} = \tau_i - f_{r_i}\dot{q}_{r_i} \quad , \quad i = 1 \ldots n_r \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{e_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_{e_i}} = -\sum_{j=1}^{n_e} f_{e_{ij}}\dot{q}_{e_j} \quad , \quad i = 1 \ldots n_e \tag{2.3}$$

où L est le Lagrangien, q_{r_i} est la i^{ième} CGR et f_{r_i} ainsi que $f_{e_{ij}}$ sont respectivement les coefficients de frottement associés aux vitesses des CGR et des CGF. Finalement, τ_i est la i^{ième} force généralisée de la partie rigide. Le développement des relations (2.2) et (2.3) nous conduit à un modèle dynamique de la forme suivante (Yuan et al., 1993; Theodore et Ghasal, 1995):

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{B}\tau \tag{2.4}$$

où $q = \left[q_{r_1} \cdots q_{r_{n_r}}\ q_{e_1} \cdots q_{e_{n_e}}\right]^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées, M est la matrice des inerties, V est la matrice des forces centrifuges et de Coriolis, $F = diag(F_r, F_e)$, F_r est la matrice des forces de frottement de la partie rigide qui est diagonale non négative, F_e est la matrice des forces de frottement de la partie flexible, $K = diag(0_{n_r \times n_r}, K_e)$, K_e est la matrice de rigidité, G est le vecteur des forces de gravité et $B^T = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{0}\right]$ est une matrice qui caractérise le couplage entre les actionneurs et la dynamique. De façon plus spécifique, la dynamique peut être réexprimée en une partie rigide et une partie flexible de la façon suivante:

$$M_r(q)\ddot{q}_r + M_{re}(q)\ddot{q}_e + V_r(q,\dot{q})\dot{q}_r + V_{re}(q,\dot{q})\dot{q}_e + F_r\dot{q}_r + G_r(q) = \tau \qquad (2.5)$$

$$M_{re}^T(q)\ddot{q}_r + M_e(q)\ddot{q}_e + V_{er}(q,\dot{q})\dot{q}_r + V_e(q,\dot{q})\dot{q}_e + F_e\dot{q}_e + K_e q_e + G_e(q) = 0 \qquad (2.6)$$

où les indices *re* et *er* indiquent le couplage entre la dynamique de la partie rigide et celle de la partie flexible. Finalement, la dynamique de la partie flexible donnée par la relation (2.6) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &{}^1M_{re}^T(q)\,{}^1\ddot{q}_r + {}^2M_{re}^T(q)\,{}^2\ddot{q}_r + M_e(q)\ddot{q}_e + {}^1V_{er}(q,\dot{q})\,{}^1\dot{q}_r + {}^2V_{er}(q,\dot{q})\,{}^2\dot{q}_r + V_e(q,\dot{q})\dot{q}_e \\ &+ F_e\dot{q}_e + K_e q_e + G_e(q) = 0 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

où ${}^1q_r$ est le vecteur des n_r-1 premières CGR, ${}^2q_r$ est la dernière CGR qui est en fait l'articulation rotoïde qui lie les deux derniers corps de la partie rigide, ${}^1M_{re}$ est une matrice formée des n_r-1 premières lignes de la matrice M_{re}, ${}^2M_{re}$ est la dernière ligne de la matrice M_{re}, ${}^1V_{er}$ est une matrice formée des n_r-1 premières colonnes de la matrice V_{er} et ${}^2V_{er}$ est la dernière colonne de la matrice V_{er}.

2.4.2 Propriétés du modèle

De façon générale, le modèle dynamique décrit par la relation (2.4) respecte les propriétés suivantes.

Propriété 2.1: *La matrice $M(q)$ est symétrique et définie positive.*

Propriété 2.2: *Les matrices $M_r(q)$ et $M_e(q)$ sont symétriques et définies positives.*

Propriété 2.3: *Si on définit la matrice*

$$H(q) = \begin{bmatrix} H_r(q) & H_{re}(q) \\ H_{re}^T(q) & H_e(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_r(q) & M_{re}(q) \\ M_{re}^T(q) & M_e(q) \end{bmatrix}^{-1} = M^{-1}(q),$$

alors, les matrices $H(q)$, $H_r(q)$ et $H_e(q)$ sont symétriques et définies positives.

Propriété 2.4: *La matrice K_e est symétrique et définie positive.*

Preuve des propriétés 2.1 à 2.4: La propriété 2.1 découle de ce que l'énergie cinétique est une forme quadratique des dérivées des CGR et des CGF et de ce que l'énergie potentielle dépend seulement des CGR et des CGF (Spong et Vidyasagar, 1989, p.141). Passons aux propriétés 2.2 et 2.3. D'abord, la symétrie et la positivité de $M_r(q)$ et de $M_e(q)$ sont une conséquence directe de celles de $M(q)$ (Golub et Van Loan, 1989). Puis, de la même façon, la symétrie et la positivité de $H(q)$ sont une conséquence directe de celles de $M(q)$ et la symétrie et la positivité des matrices $H_r(q)$ et $H_e(q)$ sont une conséquence directe de celles de $H(q)$. Considérons maintenant la Propriété 2.4. Au paragraphe 2.4.2.1, nous verrons que les éléments de la matrice de rigidité K_e sont donnés par

$$k_{e_{ij}} = EI_a \int_0^l \phi_i''(x)\phi_j''(x)dx$$

$\boldsymbol{K}_e$ est donc symétrique. Puis, parce que selon l'hypothèse 2.6, les dérivées secondes des fonctions de forme sont linéairement indépendantes entre elles, $\boldsymbol{K}_e$ est définie positive (Chen, 1984, p.171). □

Dans un contexte moins général pour lequel on suppose que toutes les hypothèses 2.1 à 2.8 sont vérifiées, il est possible de faire ressortir plusieurs autres propriétés associées à la partie flexible du modèle dynamique donnée par la relation (2.7). Pour ce faire, trouvons d'abord le modèle dynamique associé à cette partie de la dynamique du système.

2.4.2.1 Modélisation de la partie flexible

Sachant que le Lagrangien du système peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$L = L_e + \sum_{i=1}^{p} L_{r_i}$$

où L_{r_i} est le Lagrangien du i^{ième} corps rigide et L_e est le Lagrangien de la poutre flexible, il est clair que L_{r_i} est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$. Par conséquent, la relation (2.3) peut être réexprimée de la façon suivante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_{e_i}} - \frac{\partial L_e}{\partial q_{e_i}} = -\sum_{j=1}^{n_e} f_{e_{ij}} \dot{q}_{e_j} \quad , \quad i = 1 \ldots n_e \tag{2.8}$$

où $L_e = \overline{\mathrm{K}}_e - U_e$, $\overline{\mathrm{K}}_e$ et U_e sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la poutre flexible. Nous nous référons maintenant à la figure 2.2 pour obtenir les énergies cinétique et potentielle de la poutre. Selon les hypothèses 2.3 et 2.8, l'énergie cinétique de la poutre flexible est donnée par

$$\overline{\mathrm{K}}_e = \frac{1}{2}\left[\rho\int_0^l {}^0\boldsymbol{v}_e^T(x_p)\,{}^0\boldsymbol{v}_e(x_p)dx_p + m_c\,{}^0\boldsymbol{v}_e^T(l)\,{}^0\boldsymbol{v}_e(l) + {}^e\Omega_e^T(l)\boldsymbol{I}_c\,{}^e\Omega_e(l)\right] \tag{2.9}$$

où ${}^0\boldsymbol{v}_e(x_p)$ est la vitesse de l'origine du repère {e} par rapport au repère {0} en fonction de x_p, ${}^e\Omega_e(x_p)$ est la mesure relative au repère {e} de la vitesse angulaire du repère {e} par rapport au repère {0} en fonction de x_p, ρ est la masse par unité de longueur de la poutre flexible, l est sa longueur et m_c ainsi que $\boldsymbol{I}_c$ sont respectivement la masse et la matrice d'inertie de la charge.

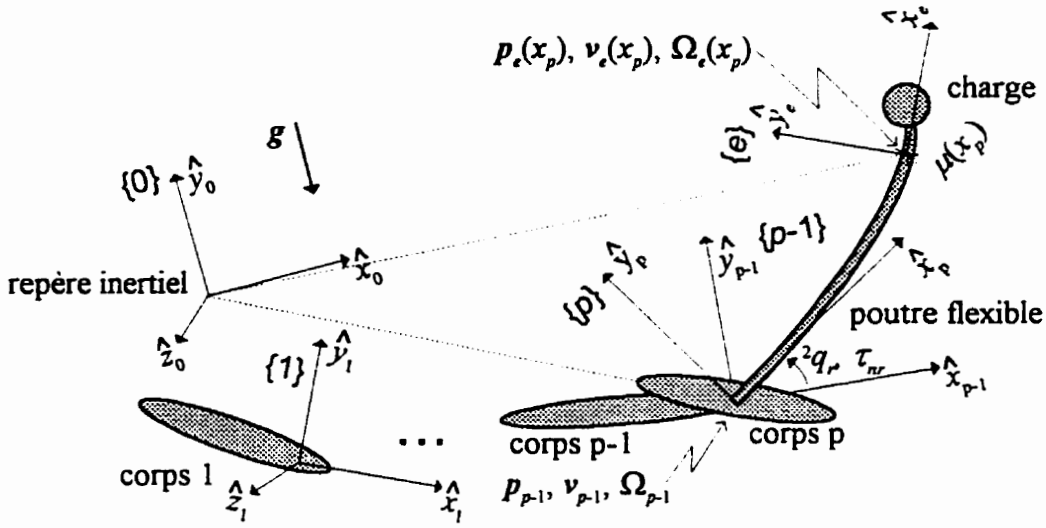


Figure 2.2 Cinématique de la poutre flexible.

En observant la figure 2.2, nous obtenons les relations cinématiques suivantes:

$$ {}^0\boldsymbol{p}_e(x_p) = {}^0\boldsymbol{p}_{p-1} + {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) \tag{2.10} $$

$$ {}^0\boldsymbol{v}_e(x_p) = \frac{d}{dt}\left[{}^0\boldsymbol{p}_{p-1} + {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p)\right] = {}^0\boldsymbol{v}_{p-1} + {}_{p-1}^{0}\dot{\boldsymbol{R}}\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) + {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\ {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p) $$

où ${}^0\boldsymbol{p}_{p-1}$ est la position de l'origine du repère {p-1} exprimée dans le repère {0}, ${}^0\boldsymbol{p}_e(x_p)$ est la position de l'origine du repère {e} exprimée dans le repère {0} en fonction de x_p, ${}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} c_2 x_p - s_2\mu(x_p) & s_2 x_p + c_2\mu(x_p) & 0 \end{bmatrix}^T$ est la position de l'origine du repère {e} exprimée dans le repère {p-1} en fonction de x_p, $\mu(x_p)$ est la déformation de la poutre en fonction de x_p, $c_2 = \cos({}^2q_r)$, $s_2 = \sin({}^2q_r)$, et ${}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}$ est la matrice de rotation servant

à projeter un vecteur exprimé dans le repère $\{p\text{-}1\}$ dans le repère $\{0\}$. Ensuite, en utilisant une propriété des vitesses angulaires (Craig, 1989, p.163), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\boldsymbol{v}_e(x_p) &= {}^{0}\boldsymbol{v}_{p-1} + \boldsymbol{S}\left({}^{0}\Omega_{p-1}\right){}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) + {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\ {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p) \\
{}^{0}\boldsymbol{v}_e(x_p) &= {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\left[{}^{p-1}\boldsymbol{v}_{p-1} + \boldsymbol{S}\left({}^{p-1}\Omega_{p-1}\right)\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) + {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p)\right] \\
{}^{0}\boldsymbol{v}_e(x_p) &= {}_{p-1}^{0}\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{J}_v({}^{1}\boldsymbol{q}_r){}^{1}\dot{\boldsymbol{q}}_r + \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{J}_\Omega({}^{1}\boldsymbol{q}_r){}^{1}\dot{\boldsymbol{q}}_r\right)\ {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) + {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p)\right]
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

où

$$
\boldsymbol{S}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix},
$$

${}^{p-1}\Omega_{p-1}$ ainsi que ${}^{p-1}\boldsymbol{v}_{p-1}$ sont respectivement les mesures relatives au repère $\{p\text{-}1\}$ des vitesses angulaire et linéaire du repère $\{p\text{-}1\}$ par rapport au repère $\{0\}$ et $\boldsymbol{J}_v({}^{1}\boldsymbol{q}_r)$ ainsi que $\boldsymbol{J}_\Omega({}^{1}\boldsymbol{q}_r)$ sont respectivement les matrices jacobiennes associées aux vitesses linéaire et angulaire ${}^{p-1}\boldsymbol{v}_{p-1}$ et ${}^{p-1}\Omega_{p-1}$. De façon similaire, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
{}^{e}\Omega_e(x_p) &= \left({}^{2}\dot{q}_r + \dot{\mu}'(x_p)\right)\hat{z}_e + {}^{p-1}_{e}R^T(x_p){}^{p-1}\Omega_{p-1} \\
{}^{e}\Omega_e(x_p) &= \left({}^{2}\dot{q}_r + \dot{\mu}'(x_p)\right)\hat{z}_e + {}^{p-1}_{e}R^T(x_p)\boldsymbol{J}_\Omega({}^{1}\boldsymbol{q}_r){}^{1}\dot{\boldsymbol{q}}_r
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

où $(.)'$ indique la dérivée partielle par rapport à x_p et où ${}^{p-1}_{e}R(x_p)$ est la matrice de rotation servant à projeter un vecteur exprimé dans le repère $\{e\}$ dans le repère $\{p\text{-}1\}$ en fonction de x_p. Selon l'hypothèse 2.7, cette matrice de rotation est approximée par

$$
{}^{p-1}_{e}R(x_p) = \begin{bmatrix} c_2 - s_2\mu'(x_p) & -s_2 - c_2\mu'(x_p) & 0 \\ s_2 + c_2\mu'(x_p) & c_2 - s_2\mu'(x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

En remplaçant (2.11) et (2.12) dans (2.9) et en utilisant la relation (2.1), nous obtenons

l'énergie cinétique de la poutre flexible qui est donnée par la relation suivante:

$$\overline{K}_e = \overline{K}_0 + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}}\dot{q}_{e_i}\dot{q}_{e_j} + 2\left({}^2\dot{q}_r + J_6\,{}^1\dot{q}_r\right)\sum_{i=1}^{n_e} w_i\dot{q}_{e_i} + 2\left(c_2J_2 - s_2J_1\right){}^1\dot{q}_r\sum_{i=1}^{n_e} v_i\dot{q}_{e_i}\right]$$

$$+{}^1\dot{q}_r^T\left[s_2c_2\left(J_4^TJ_4 - J_5^TJ_5\right) - \left(c_2^2 - s_2^2\right)J_4^TJ_5\right]{}^1\dot{q}_r\sum_{i=1}^{n_e}\left(w_i + (I_y - I_x - I_z)\phi_i'(l)\right)q_{e_i}$$

$$+\left[{}^1\dot{q}_r^T\left[s_2\left(J_3^TJ_5 - J_2^TJ_6\right) + c_2\left(J_3^TJ_4 - J_1^TJ_6\right)\right]{}^1\dot{q}_r - {}^2\dot{q}_r\left(c_2J_1 + s_2J_2\right){}^1\dot{q}_r\right]\sum_{i=1}^{n_e} v_iq_{e_i}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(m_{e_{ij}} - I_z\phi_i(l)\phi_j(l)\right)q_{e_i}q_{e_j}\left[\left(J_6\,{}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2 + \left(\left(c_2J_4 + s_2J_5\right){}^1\dot{q}_r\right)^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\phi'_i(l)\phi'_j(l)q_{e_i}q_{e_j}\left[I_x\left(\left(s_2J_4 - c_2J_5\right){}^1\dot{q}_r\right)^2 + I_y\left(\left(c_2J_4 + s_2J_5\right){}^1\dot{q}_r\right)^2\right] \qquad (2.13)$$

où $\overline{K}_0$ est une partie de l'énergie cinétique qui est indépendante de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$,, $\begin{bmatrix}J_1^T & J_2^T & J_3^T\end{bmatrix}^T = \boldsymbol{J}_v({}^1\boldsymbol{q}_r)$, $\begin{bmatrix}J_4^T & J_5^T & J_6^T\end{bmatrix}^T = \boldsymbol{J}_\Omega({}^1\boldsymbol{q}_r)$, $diag(I_x, I_y, I_z) = \boldsymbol{I}_c$,

$$m_{e_{ij}} = \rho\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l)\phi_j(l) + I_z\phi'_i(l)\phi'_j(l), \qquad (2.14)$$

$$w_i = \rho\int_0^l x\phi_i(x)dx + m_cl\phi_i(l) + I_z\phi'_i(l) \qquad (2.15)$$

$$v_i = \rho\int_0^l \phi_i(x)dx + m_c\phi_i(l). \qquad (2.16)$$

Pour plus de détails concernant le calcul de l'énergie cinétique, le lecteur peut consulter l'annexe A. En se référant une fois de plus à la figure 2.2, nous obtenons l'énergie potentielle de la poutre flexible qui est donnée par

$$U_e = U_{ref} - \left[\rho\int_0^l {}^0P_e^T(x)dx + m_c\,{}^0P_e^T(l)\right]\boldsymbol{g} + \frac{1}{2}EI_a\int_0^l\left(\mu''(x)\right)^2dx \qquad (2.17)$$

où U_{ref} est l'énergie potentielle de référence, E est le module d'élasticité de Young de la poutre, I_a est le moment d'aire d'une section de la poutre et $\boldsymbol{g}$ est le vecteur de gravité exprimé dans le repère$\{0\}$. En remplaçant (2.10) et (2.1) dans (2.17), on obtient

$$U_e = U_0 + \begin{bmatrix}s_2 & -c_2 & 0\end{bmatrix}_{p-1}{}^0\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{g}\sum_{i=1}^{n_e} v_iq_{e_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}}q_{e_i}q_{e_j} \qquad (2.18)$$

où U_o est une partie de l'énergie potentielle qui est indépendante de $\boldsymbol{q}_e$ et

$$k_{e_{ij}} = EI_a \int_0^l \phi_i''(x)\phi_j''(x)dx. \tag{2.19}$$

En remplaçant (2.13) et (2.18) dans (2.8) et en prenant soin de négliger les termes quadratiques de déformation pour le calcul des termes centrifuges, de Coriolis et de rigidité (hypothèse 2.7), on obtient la dynamique de la partie flexible du système qui est alors donnée par

$$\begin{aligned}&\left[w_i J_6 + v_i\left(c_2 J_2 - s_2 J_1\right)\right]{}^1\ddot{\boldsymbol{q}}_r + w_i\,{}^2\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}}\ddot{\boldsymbol{q}}_{e_j} + {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\,\overline{\Psi}_i(\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\ &+\sum_{j=1}^{n_e} f_{e_{ij}}\dot{\boldsymbol{q}}_{e_j} + \sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}} q_{e_j} + \begin{bmatrix} s_2 & -c_2 & 0\end{bmatrix}_{p-1}{}^0\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{g} v_i = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad i = 1\ldots n_e\end{aligned} \tag{2.20}$$

où

$$\overline{\Psi}_i(\boldsymbol{q}_r) = \tfrac{1}{2}\left(\Psi_i(\boldsymbol{q}_r) + \Psi_i^T(\boldsymbol{q}_r)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_i(\boldsymbol{q}_r) = &\frac{\partial J_6}{\partial\,{}^1\boldsymbol{q}_r} w_i + \left[\left(J_5^T J_5 - J_4^T J_4\right)c_2 s_2 + J_4^T J_5\left(c_2^2 - s_2^2\right)\right]\left[w_i + \left(I_y - I_x - I_z\right)\phi_i'(l)\right] \\ &+\left[c_2\frac{\partial J_2}{\partial\,{}^1\boldsymbol{q}_r} - s_2\frac{\partial J_1}{\partial\,{}^1\boldsymbol{q}_r} + s_2\left(J_2^T J_6 - J_3^T J_5\right) + c_2\left(J_1^T J_6 - J_3^T J_4\right)\right]v_i\end{aligned} \tag{2.21}$$

En considérant l'égalité terme à terme entre les relations (2.20) et (2.7), les propriétés suivantes sont déduites.

Propriété 2.5: *La matrice $\boldsymbol{M}_e(\boldsymbol{q})$ est constante et elle dépend de façon affine des paramètres m_c et I_z.*

Propriété 2.6: *La matrice ${}^1\boldsymbol{M}_{re}(\boldsymbol{q})$ est indépendante de $\boldsymbol{q}_e$ et elle peut toujours s'exprimer sous la forme suivante*:

$${}^1\boldsymbol{M}_{re}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{M}_0({}^1\boldsymbol{q}_r) + \boldsymbol{M}_1({}^1\boldsymbol{q}_r)\sin({}^2q_r) + \boldsymbol{M}_2({}^1\boldsymbol{q}_r)\cos({}^2q_r)$$

Propriété 2.7: *La matrice* ${}^{2}M_{re}(q)$ *est constante et elle dépend de façon affine des paramètres* m_c *et* I_z.

Propriété 2.8: *Les matrices* $V_e(q,\dot{q})$ *et* ${}^{2}V_{er}(q,\dot{q})$ *sont nulles.*

Propriété 2.9: *La matrice* ${}^{1}V_{er}(q,\dot{q})$ *est indépendante de* q_e, *de* $\dot{q}_e$ *et de* ${}^{2}\dot{q}_r$ *et peut toujours s'exprimer sous la forme suivante*:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}V_{er}(q_r,\dot{q}_r) = {} & V_0({}^{1}q_r,{}^{1}\dot{q}_r) + V_1({}^{1}q_r,{}^{1}\dot{q}_r)\sin({}^{2}q_r) + V_2({}^{1}q_r,{}^{1}\dot{q}_r)\cos({}^{2}q_r) \\
& + V_3({}^{1}q_r,{}^{1}\dot{q}_r)\sin(2\,{}^{2}q_r) + V_4({}^{1}q_r,{}^{1}\dot{q}_r)\cos(2\,{}^{2}q_r)
\end{aligned}
$$

Propriété 2.10: *L'égalité* ${}^{1}V_{er}(q_r,{}^{1}\dot{q}_r^{a})\,{}^{1}\dot{q}_r^{b} = {}^{1}V_{er}(q_r,{}^{1}\dot{q}_r^{b})\,{}^{1}\dot{q}_r^{a}$ *est vérifiée* $\forall\ {}^{1}\dot{q}_r^{a},\ {}^{1}\dot{q}_r^{b} \in \Re^{n_r-1}$.

Propriété 2.11: *Le vecteur* $G_e(q)$ *est indépendant de* q_e *et il peut toujours s'exprimer sous la forme suivante:*

$$
G_e(q) = G_1({}^{1}q_r)\sin({}^{2}q_r) + G_2({}^{1}q_r)\cos({}^{2}q_r)
$$

Preuve des propriétés 2.5 à 2.11: Du fait que J_t et ${}_{p-1}^{0}R$ ne dépendent que de ${}^{1}q_r$, les propriétés 2.5, 2.6, 2.7 et 2.11 se déduisent par simple inspection. Pour ce qui est des propriétés 2.8 et 2.9, l'égalité entre (2.20) et (2.7) nous permet d'écrire:

$$
\begin{bmatrix} {}^{1}V_{er}(q,\dot{q}) & {}^{2}V_{er}(q,\dot{q}) & V_e(q,\dot{q}) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} {}^{1}\dot{q}_r \\ {}^{2}\dot{q}_r \\ \dot{q}_e^{T} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} {}^{1}\dot{q}_r^{T}\,\overline{\Psi}_1(q_r) \\ \vdots \\ {}^{1}\dot{q}_r^{T}\,\overline{\Psi}_{n_e}(q_r) \end{bmatrix}
{}^{1}\dot{q}_r \qquad (2.22)
$$

Pour que cette égalité soit vraie, les matrices $V_e(q,\dot{q})$ et ${}^{2}V_{er}(q,\dot{q})$ doivent être nulles et la matrice ${}^{1}V_{er}(q,\dot{q})$ doit être indépendante de q_e, de $\dot{q}_e$ et de ${}^{2}\dot{q}_r$. À cause de cela, nous

avons

$$ {}^{1}V_{er}(q_r, {}^{1}\dot{q}_r) = \begin{bmatrix} {}^{1}\dot{q}_r^T \, \overline{\Psi}_1(q_r) \\ \vdots \\ {}^{1}\dot{q}_r^T \, \overline{\Psi}_{n_e}(q_r) \end{bmatrix}. \tag{2.23} $$

Parce que $\overline{\Psi}_i(q_r)$ est symétrique, il est clair que la propriété 2.10 est vérifiée. Ensuite, pour prouver la propriété 2.9, remplaçons $c_2 s_2 = \frac{1}{2}\sin(2\ {}^{2}q_r)$ et $c_2^2 - s_2^2 = \cos(2\ {}^{2}q_r)$ dans la relation (2.21). $\overline{\Psi}_i(q_r)$ peut alors s'exprimer sous la forme suivante

$$ \begin{aligned} \overline{\Psi}_i(q_r) = {} & \overline{\Psi}_{0_i}({}^{1}q_r) + \overline{\Psi}_{1_i}({}^{1}q_r)\sin({}^{2}q_r) + \overline{\Psi}_{2_i}({}^{1}q_r)\cos({}^{2}q_r) \\ & + \overline{\Psi}_{3_i}({}^{1}q_r)\sin(2\ {}^{2}q_r) + \overline{\Psi}_{4_i}({}^{1}q_r)\cos(2\ {}^{2}q_r) \end{aligned} \tag{2.24} $$

En remplaçant (2.24) dans (2.23), nous obtenons le résultat escompté. □

Remarque 2.2: *En observant la relation* (2.13), *il apparaît clairement que les propriétés* 2.5 *à* 2.11 *sont invariantes à l'effet de négliger où de ne pas négliger l'énergie cinétique associée aux termes quadratiques de déformation pour le calcul de la matrice de masse. Rappelons toutefois que ces termes quadratiques ne sont pas négligés dans le seul but d'assurer la positivité de la matrice de masse en tout temps (Propriété 2.1).* □

2.4.2.2 Modélisation de l'amortissement

Selon l'hypothèse 2.6, l'amortissement interne de la poutre flexible doit respecter le modèle de Voigt-Kelvin (PiedBoeuf, 1989). De façon générale cette modélisation est appropriée seulement pour certains matériaux qui sont caractérisés par un amortissement très faible (e.g. l'aluminium). D'autre part, l'amortissement élevé qui caractérise certains autres matériaux se modélise de façon plus appropriée en utilisant les dérivées

fractionnaires (PiedBoeuf, 1989). Malheureusement ce type d'amortissement rend le modèle beaucoup plus complexe de sorte que la stratégie de commande proposée dans cette thèse n'est pas applicable. Pour cette raison, nous sommes contraint à utiliser des matériaux de faible amortissement. Nous verrons cependant qu'avec l'approche proposée, un amortissement actif, n'augmentant d'aucune façon la complexité du système de commande, sera ajouté pour surmonter ce problème. Ainsi, l'hypothèse 2.6 nous permet d'obtenir les coefficients de la matrice de frottement $\boldsymbol{F}_e$ qui sont donnés par (PiedBoeuf, 1989):

$$f_{e_{ij}} = \varsigma_e EI_a \int_0^l \phi_i''(x)\phi_j''(x)dx \tag{2.25}$$

où ς_e est le coefficient d'amortissement interne qui est fonction du matériel utilisé.

Dans les chapitres qui suivent, les propriétés démontrées dans cette section seront essentielles pour prouver la stabilité des erreurs de suivi de trajectoires et la convergence des algorithmes de calcul des trajectoires désirées. Voyons maintenant un exemple de modélisation d'un manipulateur appartenant à la classe de systèmes mécaniques caractérisée par les hypothèses 2.1 à 2.8.

2.5 Exemple de modélisation d'un manipulateur flexible

Dans cette section, le modèle dynamique du manipulateur flexible illustré par la figure 2.3 sera développé. Ce manipulateur planaire est formé d'un premier membre rigide et d'un dernier membre flexible en aluminium 6061-T6. Il comporte une charge dont le centre de gravité est fixé à l'extrémité du membre flexible. Aussi, ce manipulateur est dans un plan vertical de sorte que la force de gravité terrestre influence ses mouvements et la

déformation de son membre flexible. Dans les chapitres qui suivent, tous les exemples de simulation seront réalisés pour ce modèle de manipulateur flexible.

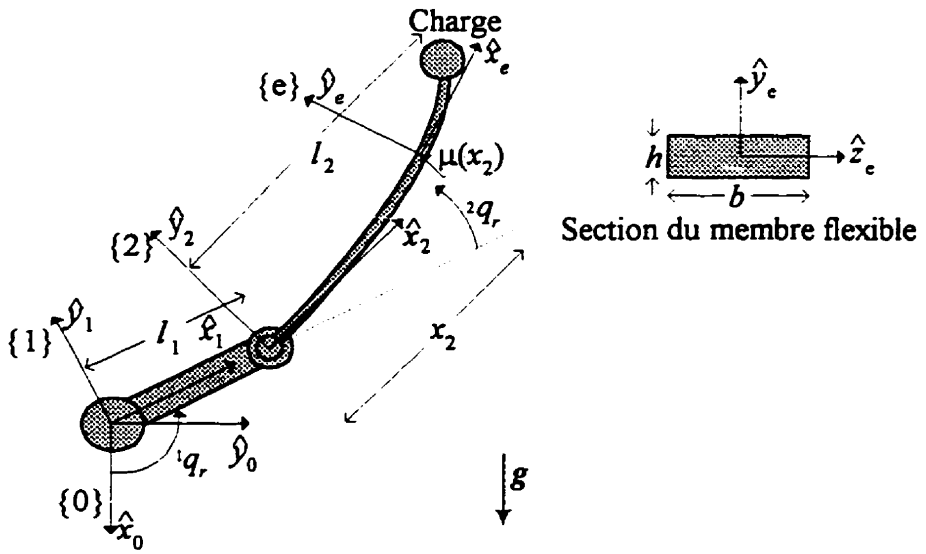


Figure 2.3 Manipulateur flexible.

Pour obtenir le modèle dynamique de ce manipulateur, considérons d'abord sa cinématique. Selon la figure 2.3, la position du repère {2} par rapport à la base est donnée par

$$^0P_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 \\ s_1 l_1 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

où $s_1 = \sin(^1q_r)$, $c_1 = \cos(^1q_r)$ et l_1 est la longueur du premier membre. De même, la position du repère {e} par rapport à la base est donnée par

$$^0P_e(x_2) = {}^0P_2 + \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 + c_{12} x_2 - s_{12}\mu(x_2) \\ s_1 l_1 + s_{12} x_2 + c_{12}\mu(x_2) \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

où $s_2 = \sin({}^2q_r)$, $c_2 = \cos({}^2q_r)$, $s_{12} = \sin({}^1q_r + {}^2q_r)$, $c_{12} = \cos({}^1q_r + {}^2q_r)$ et $\mu(x_2)$ est la déformation du membre flexible donnée par la relation (2.1). Ainsi, la vitesse linéaire du repère {2} par rapport à la base est donnée par

$$ {}^0v_2 = \begin{bmatrix} -s_1 l_1 \, {}^1\dot{q}_r \\ c_1 l_1 \, {}^1\dot{q}_r \end{bmatrix} \tag{2.28} $$

et la vitesse linéaire du repère {e} par rapport à la base est donnée par

$$ {}^0v_e(x_2) = \begin{bmatrix} -s_1 l_1 \, {}^1\dot{q}_r - s_{12} x_2 \left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r \right) - c_{12}\mu(x_2)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r \right) - s_{12}\dot{\mu}(x_2) \\ c_1 l_1 \, {}^1\dot{q}_r + c_{12} x_2 \left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r \right) - s_{12}\mu(x_2)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r \right) + c_{12}\dot{\mu}(x_2) \end{bmatrix} \tag{2.29} $$

Finalement, la vitesse angulaire du repère {2} par rapport à la base projetée dans le repère {2} est donnée par

$$ {}^2\omega_2 = {}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r \tag{2.30} $$

Parce que l'on suppose que la déformation est faible, la vitesse angulaire du repère {e} par rapport à la base projetée dans le repère {e} est donnée par

$$ {}^e\omega_e(x_2) = {}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r + \dot{\mu}'(x_2) \tag{2.31} $$

Obtenons maintenant les énergies du système. D'abord, selon l'hypothèse 2.3, l'énergie cinétique est donnée par

$$ \begin{aligned} \mathrm{K} = \frac{1}{2} \Big[& {}^1\dot{q}_2^2 I_1 + m_h \, {}^0v_2^T \, {}^0v_2 + I_h \, {}^2\omega_2^2 + \rho \int_0^{l_2} {}^0v_e^T(x) \, {}^0v_e(x) dx \\ & + m_c \, {}^0v_e^T(l_2) \, {}^0v_e(l_2) + I_c \, {}^e\omega_e^2(l_2) \Big] \end{aligned} \tag{2.32} $$

où I_1 est l'inertie totale du premier membre de son pivot et du stator de l'actionneur du second membre par rapport à l'axe $\hat{z}_1$, ρ est la masse par unité de longueur du membre flexible, l_2 est sa longueur, m_h est la masse du pivot du second membre, I_h est son inertie par rapport à $\hat{z}_2$, m_c est la masse de la charge et I_c est son inertie par rapport à son centre de masse. En remplaçant les relations (2.28), (2.29), (2.30) et (2.31) dans l'expression

(2.32), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K} = \frac{1}{2}\Big\{ & I_1\,{}^1\dot{q}_r^2 + I_h\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2 + I_c\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r + \dot{\mu}'(l_2)\right)^2 + m_h l_1^2\,{}^1\dot{q}_r^2 \\
& + \rho\int_0^{l_2} l_1^2\,{}^1\dot{q}_r^2 + \left(x^2 + \mu^2(x)\right)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2 + \dot{\mu}^2(x) \\
& + 2\Big[l_1\left(c_2 x - s_2\mu(x)\right)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + \left(l_1 c_2\,{}^1\dot{q}_r + x\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)\right)\dot{\mu}(x)\Big]dx \\
& + m_c\Big[l_1^2\,{}^1\dot{q}_r^2 + \left(l_2^2 + \mu^2(l_2)\right)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2 + \dot{\mu}^2(l_2)\Big] \\
& + 2m_c\Big[l_1\left(c_2 l_2 - s_2\mu(l_2)\right)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + \left(l_1 c_2\,{}^1\dot{q}_r + l_2\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)\right)\dot{\mu}(l_2)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Ensuite, en remplaçant μ par la relation (2.1) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K} = \frac{1}{2}\Big\{ & \left(I_1 + l_1^2\left(m_h + m_2 + m_c\right)\right){}^1\dot{q}_r^2 + \left(I_h + I_c + l_2^2\left(m_2/3 + m_c\right)\right)\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2 \\
& + \left(m_2 + 2m_c\right) l_1 l_2 c_2\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}}\dot{q}_{e_i}\dot{q}_{e_j} \\
& + 2\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)\sum_{i=1}^{n_e} w_i\dot{q}_{e_i} - 2l_1 s_2\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r\sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i} + 2l_1 c_2\,{}^1\dot{q}_r\sum_{i=1}^{n_e} v_i\dot{q}_{e_i} \\
& + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(m_{e_{ij}} - I_c\phi'_i(l_2)\phi'_j(l_2)\right)q_{e_i}q_{e_j}\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)^2\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

où

$$
m_{e_{ij}} = \rho\int_0^{l_2}\phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l_2)\phi_j(l_2) + I_c\phi'_i(l_2)\phi'_j(l_2) \tag{2.35}
$$

$$
w_i = \rho\int_0^{l_2} x\phi_i(x)dx + m_c l_2\phi_i(l_2) + I_c\phi'_i(l_2) \tag{2.36}
$$

$$
v_i = \rho\int_0^{l_2}\phi_i(x)dx + m_c\phi_i(l_2) \tag{2.37}
$$

et où $m_2 = \rho L_2$ est la masse du membre flexible seul. Trouvons maintenant l'énergie potentielle du système. En accord avec la figure 2.3, nous obtenons

$$
U = U_{ref} - m_1\begin{bmatrix} c_1\bar{l}_1 \\ s_1\bar{l}_1 \end{bmatrix}g - \rho\int_0^{l_2}{}^0P_e(x)g\,dx + m_h{}^0P_2 g + \frac{1}{2}EI_a\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial^2\mu(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx \tag{2.38}
$$

où U_{ref} est l'énergie potentielle maximale, m_1 est la masse totale du premier membre incluant son pivot et le stator de l'actionneur du second membre, $\bar{l}_1$ est la distance entre

l'axe $\hat{z}_1$ et le centre de masse du premier membre incluant son pivot et le stator de l'actionneur du second membre, $g = [g \quad 0]^T$ est le vecteur d'accélération gravitationnelle, E est le module de Young du membre flexible et I_a est le moment d'aire d'une section du membre flexible par rapport à l'axe $\hat{z}_e$. En remplaçant les relations (2.1), (2.26) et (2.27) dans l'expression de l'énergie potentielle, nous avons

$$U = U_{ref} - g\left[c_1\left(\bar{l}_1 m_{t_1} + l_1(m_h + m_2 + m_c)\right) + c_{12} l_2 (m_2/2 + m_c) - s_{12}\sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}} q_{e_i} q_{e_j} \tag{2.39}$$

où

$$k_{e_{ij}} = EI_a \int_0^{l_2} \phi_i''(x)\phi_j''(x)dx \tag{2.40}$$

Selon les Hypothèses 2.1, 2.2 et 2.6, le modèle dynamique peut maintenant être obtenu en remplaçant les expressions (2.34) et (2.39) dans les équations de Lagrange suivantes:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\, {}^i\dot{q}_r} - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial\, {}^i q_r} + \frac{\partial U}{\partial\, {}^i q_r} = \tau_i - f_{r_i}\, {}^i\dot{q}_r \quad , \quad i = 1,2 \tag{2.41}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_{e_i}} - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_{e_i}} + \frac{\partial U}{\partial q_{e_i}} = -\sum_{j=1}^{n_e} f_{e_{ij}} \dot{q}_{e_j} \quad , \quad i = 1,\ldots,n_e \tag{2.42}$$

où, selon les relations (2.25) et (2.40), $f_{e_{ij}} = \varsigma_e k_{e_{ij}}$ et ς_e est le coefficient d'amortissement interne du membre flexible. Selon l'hypothèse 2.7 les termes quadratiques de déformation doivent être négligés pour le calcul des termes centrifuges, de Coriolis et de rigidité. Le

modèle dynamique du manipulateur est alors donné par

$$\tau_1 = M_{r_{11}}\,{}^1\ddot{q}_r + M_{r_{12}}\,{}^2\ddot{q}_r + \sum_{i=1}^{n_e} M_{re_{1i}}\,\ddot{q}_{e_i} + V_{r_{11}}\,{}^1\dot{q}_r + V_{r_{12}}\,{}^2\dot{q}_r + \sum_{i=1}^{n_e} V_{re_{1i}}\,\dot{q}_{e_i} + f_{r_1}\,{}^1\dot{q}_r + G_{r_1}$$

$$\tau_2 = M_{r_{21}}\,{}^1\ddot{q}_r + M_{r_{22}}\,{}^2\ddot{q}_r + \sum_{i=1}^{n_e} M_{re_{2i}}\,\ddot{q}_{e_i} + V_{r_{21}}\,{}^1\dot{q}_r + f_{r_2}\,{}^2\dot{q}_r + G_{r_2} \tag{2.43a}$$

et pour $i = 1,\cdots,n_e$,

$$0 = M_{re_{i1}}\,{}^1\ddot{q}_r + M_{re_{i2}}\,{}^2\ddot{q}_r + \sum_{j=1}^{n_e} m_{e_{ij}}\,\ddot{q}_{e_j} + V_{er_{i1}}\,{}^1\dot{q}_r + \sum_{j=1}^{n_e} f_{e_{ij}}\,\dot{q}_{e_j} + \sum_{j=1}^{n_e} k_{e_{ij}}\,q_{e_j} + G_{e_i} \tag{2.43b}$$

où

$$M_{r_{11}} = I_1 + I_h + I_c + l_1^2(m_h + m_2 + m_c) + l_2^2\left(\tfrac{m_2}{3} + m_c\right) + l_1 l_2(m_2 + 2m_c)c_2$$
$$-2l_1 s_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i} + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(m_{e_{ij}} - I_c\phi'_i(l_2)\phi'_j(l_2)\right)q_{e_i}q_{e_j}\,,$$

$$M_{r_{12}} = M_{r_{21}} = I_h + I_c + l_2^2\left(\tfrac{m_2}{3} + m_c\right) + l_1 l_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right)c_2$$
$$-l_1 s_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i} + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(m_{e_{ij}} - I_c\phi'_i(l_2)\phi'_j(l_2)\right)q_{e_i}q_{e_j}\,,$$

$$M_{r_{22}} = I_h + I_c + l_2^2\left(\tfrac{m_2}{3} + m_c\right) + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(m_{e_{ij}} - I_c\phi'_i(l_2)\phi'_j(l_2)\right)q_{e_i}q_{e_j}\,,$$

$$M_{re_{ii}} = w_i + l_1 v_i c_2\,, \qquad M_{re_{2i}} = w_i\,,$$

$$V_{r_{11}} = -\left[l_1 l_2 s_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right) + l_1 c_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\right]{}^2\dot{q}_r - l_1 s_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{q}_{e_i}\,,$$

$$V_{r_{12}} = -\left[l_1 l_2 s_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right) + l_1 c_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\right]\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right) - l_1 s_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{q}_{e_i}\,,$$

$$V_{r_{21}} = \left[l_1 l_2 s_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right) + l_1 c_2 \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\right]{}^1\dot{q}_r\,,$$

$$V_{re_{1i}} = -l_1 s_2\left({}^1\dot{q}_r + {}^2\dot{q}_r\right)v_i\,, \qquad V_{er_{i1}} = l_1 v_i\,{}^1\dot{q}_r s_2\,,$$

$$G_{r_1} = \left(\bar{l}_1 m_1 + l_1(m_h + m_2 + m_c)\right)s_1 g + l_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right)s_{12}g + c_{12}g\sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\,,$$

$$G_{r_2} = l_2\left(\tfrac{m_2}{2} + m_c\right)s_{12}g + c_{12}g\sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{e_i}\,,$$

$$G_{e_i} = s_{12}v_i g = \left[v_i g c_1\right]s_2 + \left[v_i g s_1\right]c_2\,.$$

Pour valider ce modèle, nous l'avons comparé au modèle d'un manipulateur similaire mais dans un plan horizontal (De Luca et al. 1990). Mis à part le terme de gravité et les termes quadratiques de déformation dans la matrice de masse, qui ne sont pas pris en compte dans le manipulateur horizontal, les deux modèles s'avèrent identiques à un changement de variable près.

2.5.1 Fonctions de forme

Le modèle dynamique décrit par la relation (2.43) peut être aussi bien associé à une modélisation par éléments finis qu'à une modélisation par la méthode des modes assumés. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, la distinction entre ces deux approches se situe essentiellement dans le choix des fonctions de forme $\phi_i(x)$ et des CGF. Pour la méthode par éléments finis, les fonctions de forme sont des polynômes d'interpolation entre les différents noeuds de discrétisation et les CGF sont choisies de façon à caractériser le déplacement et l'orientation de chaque noeud. Pour la méthode des modes assumés, les fonctions de forme sont choisies de façon à respecter les conditions aux frontières géométriques de la poutre flexible et les CGF sont utilisées pour pondérer chacune des fonctions de forme. Les fonctions de forme que nous avons choisies sont associées à une modélisation par éléments finis nécessitant environ la moitié des CGF requises par l'approche conventionnelle (Dancose et al., 1989). En effet, les coefficients des polynômes d'interpolation sont choisis de façon à assurer leur continuité et celle de leurs dérivées première et seconde aux noeuds de discrétisation. Les déplacements et les flexions aux noeuds de discrétisation sont alors liés de sorte que l'on peut choisir l'une ou l'autre de ces quantités comme CGF. Dans ce travail, nous avons choisi les flexions comme CGF parce qu'elles sont directement mesurables à partir de jauges de contraintes

et parce que ce choix engendre généralement une meilleure approximation (Saad et al., 1997). Ainsi, lorsque l'on considère que le déplacement au noeud de discrétisation situé à x_i est donné par y_i et que sa flexion est donnée par $\ddot{y}_i$ pour $i = 1, \ldots, n_e$,, alors, le déplacement en fonction de x peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\mu(x,t) = p_{n_e-1}(x,t)u_s(x - x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n_e-2} p_i(x,t)\left[u_s(x - x_i) - u_s(x - x_{i+1})\right] \tag{2.44}$$

où $u_s(x)$ est la fonction échelon et où $p_i(x,t)$ est le polynôme d'interpolation de l'intervalle $[x_i\ x_{i+1}]$ donné par la relation suivante:

$$p_i(x,t) = a_i(t)(x - x_i)^3 + b_i(t)(x - x_i)^2 + c_i(t)(x - x_i) + d_i(t) \tag{2.45}$$

En imposant, pour $i = 1, \ldots, n_e$-2, le déplacement y_{i+1} et la flexion $\ddot{y}_{i+1}$ au point x_{i+1} des polynômes p_i et p_{i+1}, les coefficients des polynômes d'interpolation prennent les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
a_i(t) &= \frac{1}{6h_i}\left(\ddot{y}_{i+1}(t) - \ddot{y}_i(t)\right) \\
b_i(t) &= \tfrac{1}{2}\ddot{y}_i(t) \\
c_i(t) &= \frac{1}{h_i}\left(y_{i+1}(t) - y_i(t)\right) - \frac{h_i}{6}\left(2\ddot{y}_i(t) + \ddot{y}_{i+1}(t)\right) \\
d_i(t) &= y_i(t)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

où $h_i = x_{i+1} - x_i$. Ensuite, en imposant la continuité des dérivées premières des polynômes aux noeuds de dicrétisation 2, ..., n_e-1, en imposant un encastrement de la base $(\mu(x_1,t) = \dot{\mu}(x_1,t) = 0)$ et en imposant la flexion $\ddot{y}_{n_e}$ au point x_{n_e} du polynôme p_{n_e-1},

nous obtenons la relation suivante qui lie les déplacements aux flexions:

$$6\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n_e-2}} & \frac{1}{h_{n_e-2}}-\frac{1}{h_{n_e-1}} & \frac{1}{h_{n_e-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n_e-2} \\ y_{n_e-1} \\ y_{n_e} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n_e-2} & 2(h_{n_e-2}+h_{n_e-1}) & h_{n_e-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \vdots \\ \ddot{y}_{n_e-2} \\ \ddot{y}_{n_e-1} \\ \ddot{y}_{n_e} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Cette expression permet de réexprimer les coefficients des polynômes d'interpolation, donnés par la relation (2.46), de façon à ce qu'ils dépendent seulement des flexions aux noeuds de discrétisation. Parce que $\mu(x,t)$ est alors linéaire par rapport aux $\ddot{y}_i$ et indépendant des y_i, les fonctions de forme sont données par la relation suivante:

$$\varphi_i(x) = \frac{\partial \mu}{\partial \ddot{y}_i} \quad \text{pour} \quad i = 1,\ldots,n_e. \quad (2.48)$$

Les différentes valeurs numériques associées à ces fonctions de forme sont données dans le tableau 2.1 pour l_2 = 1 et n_e= 2. Ces valeurs, qui sont nécessaires pour calculer le modèle dynamique du manipulateur, ont été obtenues numériquement à l'aide du logiciel MATLAB. Aussi, le tableau 2.2 donne l'ensemble des paramètres physiques nominaux du système qui sont, à l'exception de ceux du membre flexible, à peu de chose près, ceux d'un robot expérimental de l'École de technologie supérieure (Saad et al., 1994). Nous avons choisi ces paramètres dans le seul but de faciliter une éventuelle étude

expérimentale. Dans les chapitres qui suivent, ce modèle sera régulièrement utilisé pour la simulation des algorithmes de commande présentés. Pour toutes ces simulations, par souci de simplicité, nous avons choisi de considérer seulement deux modes de vibration ($n_e = 2$).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement expliqué la modélisation des manipulateurs flexibles par la méthode des éléments finis ainsi que par la méthode des modes assumés. Nous avons ensuite décrit la classe de manipulateurs considérée dans cette thèse et nous avons démontré plusieurs propriétés du modèle dynamique de cette classe de systèmes. La dernière section du chapitre a finalement été consacrée à un exemple de modélisation d'un manipulateur planaire dont le dernier membre est flexible. Dans le prochain chapitre, une approche pour transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à celle des CGR et des CGF sera proposée. Une condition suffisante pour assurer la convergence de cette procédure itérative sera également présentée.

Tableau 2.1 Valeurs numériques associées aux fonctions de forme.

i	$\phi_i(l_2)$	$\phi'_i(l_2)$	$\int_0^{l_2} \phi_i(x)dx$	$\int_0^{l_2} x\phi_i(x)dx$
1	0,3333	0,5000	0,1250	0,09167
2	0,1667	0,5000	0,04167	0,03333
	$\int_0^{l_2} \phi_i(x)\phi_1(x)dx$	$\int_0^{l_2} \phi_i(x)\phi_2(x)dx$	$\int_0^{l_2} \ddot{\phi}_i(x)\ddot{\phi}_1(x)dx$	$\int_0^{l_2} \ddot{\phi}_i(x)\ddot{\phi}_2(x)dx$
1	0,02619	0,00992	0,3333	0,1667
2	0,00992	0,00397	0,1667	0,3333

Tableau 2.2 Paramètres nominaux du manipulateur.

Symbole	Valeur	Description
l_1	0.5 m	Longueur du premier membre
m_1	40 kg	Masse du premier membre
I_1	3.85 kg m^2	Inertie totale du premier membre
$\bar{l}_1$	0.15 m	Distance entre la base et le centre de masse du premier membre
f_{v1}	0	Frottement visqueux associé au premier joint
f_{v2}	0	Frottement visqueux associé au deuxième joint
E	73,1 G pa	Module de Young du membre flexible
ρ	0,675 kg / m	Masse par unité de longueur du membre flexible
h	0,005 m	Épaisseur du membre flexible
b	0,05 m	Largeur du membre flexible
I_a	0,0521 cm^4	Moment d'aire d'une section du membre flexible
l_2	1 m	Longueur du membre flexible
I_h	0,0075 kg m^2	Inertie du pivot du membre flexible
m_h	3 kg	Masse du pivot du membre flexible
ς_e	0.001	Coefficient d'amortissement interne du membre flexible
I_c	0 kg m^2	Inertie de la charge
m_c	0,5 kg	Masse de la charge

CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS DE LA TRAJECTOIRE

3.1 Introduction

Rappelons d'abord que l'objectif de ce travail est de proposer une stratégie de commande qui assure la stabilité du suivi de trajectoires dans l'espace de travail de la classe de manipulateurs flexibles définie au chapitre II. Comme nous l'avons déjà expliqué, les espaces de travail et des CGR d'un manipulateur flexible sont liés par des relations cinématique et dynamique. La cinématique inverse seule ne peut donc être utilisée pour transformer la trajectoire désirée d'un espace à l'autre. Pour contourner ce problème plusieurs auteurs ont défini des articulations virtuelles qui ont l'avantage d'être liées à l'espace de travail par simple cinématique (De Luca et Siciliano, 1989; Asada et Tokumaru, 1990). Pour être consistant avec la notation adoptée dans cette thèse, nous désignerons les articulations virtuelles par Coordonnées Généralisées Rigides Virtuelles (CGRV). Dans ce contexte, si l'on suppose que la cinématique qui lie l'espace de travail à l'espace des CGRV est non singulière, la trajectoire désirée peut facilement être transformée d'un espace à l'autre. Le suivi de la trajectoire dans l'espace des CGRV est alors équivalent au suivi de la trajectoire dans l'espace de travail. La difficulté est que le système est à non-minimum de phase par rapport aux CGRV. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons l'utilisation d'une deuxième transformation de la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à celle des CGR et des CGF. Cette deuxième transformation est beaucoup plus complexe que la première puisqu'elle nécessite la solution d'une équation différentielle non linéaire instable. Ce chapitre est donc en grande

partie consacré à la solution de cette transformation qui est obtenue grâce à une procédure itérative basée sur la méthode d'intégration causale-anticausale proposée par Kwon et Book (1994). Grâce à sa méthodologie, ce chapitre permet également de présenter l'approche quasi-statique comme une approximation de la méthode proposée.

Le reste du chapitre est organisé de la façon suivante. La deuxième section est consacrée à la définition de l'espace des CGRV. La troisième section est ensuite destinée à définir la transformation de la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Cette section présente également une solution approximative de cette transformation à l'aide de l'approche quasi-statique et une solution exacte à l'aide de la l'approche proposée. Une condition suffisante pour assurer la convergence de la procédure proposée y est également présentée. La dernière section est finalement consacrée à un exemple de transformation d'une trajectoire désirée.

3.2 Définition des coordonnées généralisées rigides virtuelles

Par définition, les CGRV doivent être au même nombre que les CGR. Aussi, elles doivent être définies de façon à être liées à l'espace de travail par une relation cinématique. Ainsi, parce que la classe de manipulateurs flexibles considérée n'admet que la flexibilité du dernier membre, les n_r-1 premières CGRV sont identiques aux n_r-1 premières CGR. Il reste donc à définir la dernière CGRV. Selon le schéma de la figure 3.1 la dernière CGRV peut être définie par la relation suivante

$$^{2}\overline{q}_r = {}^{2}q_r + \arctan(\mu(l)/l)$$

où $^{2}\overline{q}_r$ est la dernière CGRV et l est la longueur du membre flexible. Selon l'hypothèse

2.7 et la relation (2.1), ${}^2\overline{q}_r$ peut alors être approximée par

$$ {}^2\overline{q}_r = {}^2q_r + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n_e}\phi_i(l)q_{e_i} $$

Le vecteur des CGRV est donc approximé par:

$$ \overline{q}_r = q_r + \Gamma q_e = \begin{bmatrix} {}^1\overline{q}_r \\ {}^2\overline{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1q_r \\ {}^2q_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2\Gamma \end{bmatrix} q_e \tag{3.1a} $$

et le vecteur des vitesses des CGRV par

$$ \dot{\overline{q}}_r = \dot{q}_r + \Gamma \dot{q}_e = \begin{bmatrix} {}^1\dot{\overline{q}}_r \\ {}^2\dot{\overline{q}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\dot{q}_r \\ {}^2\dot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2\Gamma \end{bmatrix} \dot{q}_e \tag{3.1b} $$

où ${}^2\Gamma = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}\phi_1(l) & \cdots & \phi_{n_e}(l)\end{bmatrix}$.

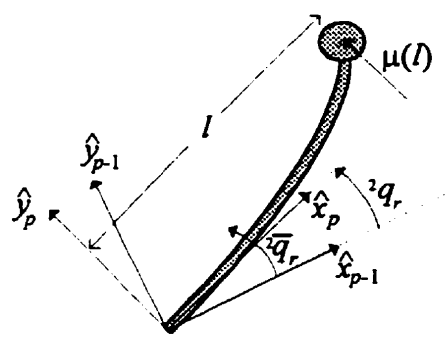


Figure 3.1 Définition de la dernière CGRV.

3.3 Transformations de la trajectoire désirée

La première transformation de la trajectoire désirée qui s'applique de l'espace de travail à l'espace des CGRV s'appuie sur les hypothèses suivantes:

Hypothèse 3.1: *La cinématique qui lie les espaces de travail et des CGRV est non singulière lisse et bornée.*

Hypothèse 3.2: *La trajectoire désirée dans l'espace de travail est lisse et uniformément bornée.*

Si on considère que l'hypothèse 3.1 est satisfaite, cette transformation est normalement très simple à obtenir puisqu'elle invoque uniquement la cinématique inverse du système. Si on considère en plus que l'hypothèse 3.2 est satisfaite, la trajectoire désirée dans l'espace des CGRV est alors lisse[1] et uniformément bornée. Dans le chapitre IV, nous verrons que cette caractéristique de la trajectoire désirée est essentielle pour prouver la stabilité du système.

Considérons maintenant la deuxième transformation qui s'applique de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Pour obtenir cette transformation et pour bien se rappeler qu'elle s'applique à la trajectoire désirée, réexprimons la relation (3.1a) en remplaçant toutes les variables par des variables désirées:

$$\boldsymbol{q}_r^d = \bar{\boldsymbol{q}}_r^d - \Gamma \boldsymbol{q}_e^d = \begin{bmatrix} {}^1\boldsymbol{q}_r^d \\ {}^2\boldsymbol{q}_r^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\bar{\boldsymbol{q}}_r^d \\ {}^2\bar{\boldsymbol{q}}_r^d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^2\Gamma \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e^d \tag{3.2a}$$

où $\boldsymbol{q}_r^d$ est le vecteur des CGR désirées, $\bar{\boldsymbol{q}}_r^d$ est le vecteur des CGRV désirées et $\boldsymbol{q}_e^d$ est le vecteur des CGF désirées. En faisant de même pour (3.1b), nous obtenons

$$\dot{\boldsymbol{q}}_r^d = \dot{\bar{\boldsymbol{q}}}_r^d - \Gamma \dot{\boldsymbol{q}}_e^d \tag{3.2b}$$

---

[1]Dans cette thèse, on entend par fonction lisse une fonction qui est continuement dérivable au moins deux fois. Cet abus de langage n'a d'autre but que de simplifier l'écriture.

où $\dot{q}_r^d$, $\ddot{q}_r^d$ et $\dot{q}_e^d$ sont respectivement les dérivées des CGR désirées, des CGRV désirées et des CGF désirées. Ensuite, en utilisant les propriétés 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 et 2.11 et en remplaçant toutes les variables par des variables désirées dans la relation (2.7), nous obtenons:

$$\ddot{q}_e^d = -M_e^{-1}\left[F_e\dot{q}_e^d + K_e q_e^d + G_e(q_r^d) + {}^1V_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d + {}^1M_{re}^T(q_r^d)\,{}^1\ddot{q}_r^d + {}^2M_{re}^T\,{}^2\ddot{q}_r^d\right] \quad (3.3)$$

La trajectoire désirée dans l'espace des CGRV étant connue, il suffit de résoudre les relations (3.2) et (3.3) pour obtenir la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF. En bref, les deux transformations de trajectoire sont illustrées par la figure 3.2.

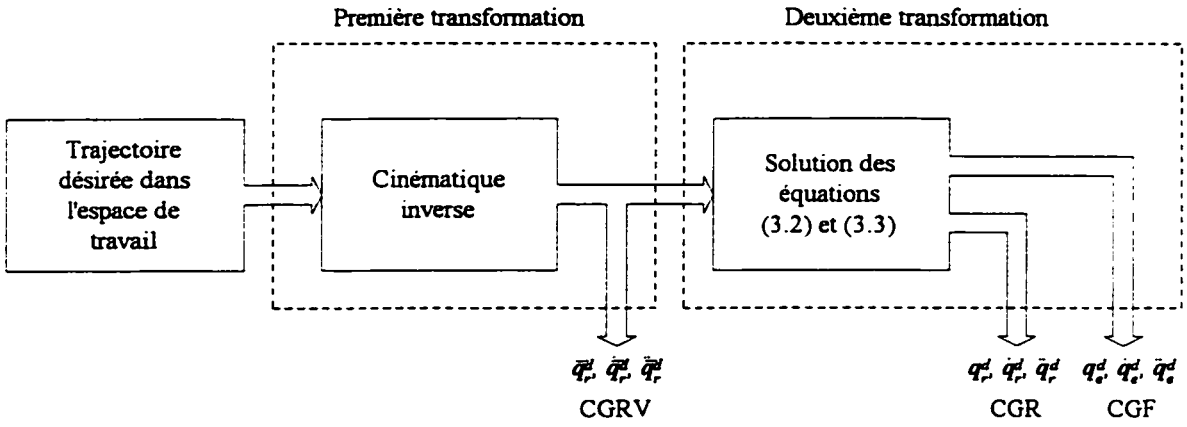


Figure 3.2 Transformations de la trajectoire désirée.

3.3.1 Approximation de la transformation par la méthode quasi-statique

La méthode quasi-statique (Pfeiffer, 1989) consiste à corriger la trajectoire désirée des CGR de façon à tenir compte uniquement de la partie statique de la déformation. Cette approche a l'avantage de ne pas nécessiter d'intégration puisque la dynamique de la flexibilité est négligée. Elle peut cependant occasionner d'importantes erreurs lorsque la vitesse et l'accélération désirée dans l'espace des CGF ne sont pas négligeables. La

méthode quasi-statique peut être utilisée pour trouver une approximation de la solution des équations (3.2) et (3.3). Il suffit pour cela de remplacer $\dot{q}_e$ et $\ddot{q}_e$ par zéro dans ces expressions. La solution des relations suivantes

$$q_r^d = \bar{q}_r^d - \Gamma q_e^d \tag{3.4a}$$

$$\dot{q}_r^d = \dot{\bar{q}}_r^d \tag{3.4b}$$

$$K_e q_e^d + G_e(q_r^d) + {}^1V_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d + {}^1M_{re}^T(q_r^d)\,{}^1\ddot{q}_r^d + {}^2M_{re}^T\,{}^2\ddot{q}_r^d = 0 \tag{3.5}$$

peut alors être obtenue en remplaçant (3.4) dans (3.5). En effet la solution de l'expression qui suit

$$q_e^d = -K_e^{-1}\left[G_e(\bar{q}_r^d - \Gamma q_e^d) + {}^1V_{er}(\bar{q}_r^d - \Gamma q_e^d, {}^1\dot{\bar{q}}_r^d)\,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d + {}^1M_{re}^T(\bar{q}_r^d - \Gamma q_e^d)\,{}^1\ddot{\bar{q}}_r^d + {}^2M_{re}^T\,{}^2\ddot{\bar{q}}_r^d\right] \tag{3.6}$$

est une approximation de la trajectoire désirée dans l'espace des CGF. La trajectoire désirée dans l'espace des CGR peut alors être obtenue en remplaçant la trajectoire désirée des CGRV et des CGF dans la relation (3.4). Le problème se résume donc à résoudre l'expression (3.6). À cet effet, il existe dans la littérature une quantité appréciable de méthodes itératives: à titre d'exemple, la méthode du point fixe (Khalil, 1992).

Comparons maintenant la solution de la transformation obtenue par l'approximation quasi-statique avec la solution exacte. Sachant que l'approximation solutionne les relations (3.4) et (3.5) et que la solution exacte doit satisfaire les relations (3.2) et (3.3), les erreurs de l'approximation peuvent être obtenues en comparant ces équations. Ainsi, l'approximation quasi-statique n'est pas solution des relations (3.2) et (3.3) mais plutôt des relations suivantes:

$$q_r^d = \bar{q}_r^d - \Gamma q_e^d \tag{3.7a}$$

$$\dot{q}_r^d = \dot{\bar{q}}_r^d - \Gamma \dot{q}_e^d + P_1 \tag{3.7b}$$

$$\ddot{q}_e^d = -M_e^{-1}\left[F_e \dot{q}_e^d + K_e q_e^d + G_e(q_r^d) + {}^1V_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d + {}^1M_{re}^T(q_r^d)\,{}^1\ddot{q}_r^d + {}^2M_{re}^T\,{}^2\ddot{q}_r^d\right] + P_2 \tag{3.8}$$

où

$$P_1 = \Gamma \dot{q}_e^d$$

$$P_2 = \ddot{q}_e^d + M_e^{-1} F_e \dot{q}_e^d$$

Cette formulation sera particulièrement utile lorsque viendra le temps d'analyser la stabilité du système. Elle permettra notamment de faire ressortir les erreurs d'approximation introduites par la méthode quasi-statique comme une perturbation de la dynamique des erreurs de suivi.

3.3.2 Solution de la transformation par la méthode proposée

Pour obtenir la solution de la deuxième transformation, il suffit de résoudre les équations (3.2) et (3.3). Pour faciliter les comparaisons entre la méthode proposée et la méthode quasi-statique, on peut également considérer que la transformation est solution des relations (3.7) et (3.8) avec $P_1(t) = P_2(t) = \mathbf{0}$. Quoi qu'il en soit, pour obtenir cette solution, on remplace d'abord l'équation (3.2) dans l'équation (3.3) en supposant que la matrice $\left(M_e - {}^2M_{re}^T\, {}^2\Gamma\right)$ est non singulière. Les propriétés 2.6, 2.9 et 2.11 nous permettent alors d'obtenir l'équation d'état suivante:

$$\dot{x}^d = A\dot{x}^d + B f^d(q_e^d, t) \quad , \quad q_e^d = Cx^d \tag{3.9}$$

où $C = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,

$$x^d = \begin{bmatrix} q_e^d \\ \dot{q}_e^d \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\left(M_e - {}^2M_{re}^T\, {}^2\Gamma\right)^{-1} K_e & -\left(M_e - {}^2M_{re}^T\, {}^2\Gamma\right)^{-1} F_e \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\left(M_e - {}^2M_{re}^T\, {}^2\Gamma\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} f^d(q_e^d, t) = {} & {}^2M_{re}^T\, {}^2\ddot{\overline{q}}_r^d + \bar{f}_0({}^1\overline{q}_r^d(t), t) \\ & + \bar{f}_1({}^1\overline{q}_r^d(t), t)\sin\left({}^2\overline{q}_r^d(t) - {}^2\Gamma q_e^d\right) + \bar{f}_2({}^1\overline{q}_r^d(t), t)\cos\left({}^2\overline{q}_r^d(t) - {}^2\Gamma q_e^d\right) \\ & + \bar{f}_3({}^1\overline{q}_r^d(t), t)\sin\left(2\,{}^2\overline{q}_r^d(t) - 2\,{}^2\Gamma q_e^d\right) + \bar{f}_4({}^1\overline{q}_r^d(t), t)\cos\left(2\,{}^2\overline{q}_r^d(t) - 2\,{}^2\Gamma q_e^d\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$\bar{f}_0(y,t) = M_0^T(y)\,{}^1\ddot{\bar{q}}_r^d(t) + V_0\left(y,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t)\right){}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t),$$

$$\bar{f}_1(y,t) = M_1^T(y)\,{}^1\ddot{\bar{q}}_r^d(t) + V_1\left(y,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t)\right){}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t) + G_1(y),$$

$$\bar{f}_2(y,t) = M_2^T(y)\,{}^1\ddot{\bar{q}}_r^d(t) + G_2(y) + V_2\left(y,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t)\right){}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t),$$

$$\bar{f}_3(y,t) = V_3\left(y,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t)\right){}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t),$$

$$\bar{f}_4(y,t) = V_4\left(y,{}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t)\right){}^1\dot{\bar{q}}_r^d(t).$$

L'équation différentielle (3.9) possède un ensemble de solutions uniques puisque $f^d(q_e^d,t)$ est uniformément bornée et globalement Lipschitz par rapport à q_e^d. En effet $f^d(q_e^d,t)$ dépend de t par l'entremise de la trajectoire désirée des CGRV qui est supposée uniformément bornée et dépend de q_e^d par l'entremise de fonctions sinusoïdales. La trajectoire désirée des CGF peut donc être obtenue en solutionnant cette équation différentielle. Cette dernière est malheureusement non linéaire et instable parce que le système est à non-minimum de phase par rapport aux CGRV. Dans ce contexte, la méthode causale-anticausale proposée par Kwon et Book (1994) pour les systèmes linéaires peut être utilisée de façon itérative pour obtenir une solution bornée de l'équation. En effet, la méthode de Kwon et Book (1994) est basée sur le principe qu'il existe une transformation de similarité telle que l'équation d'état (3.9) puisse être réexprimée sous la forme suivante:

$$\dot{\bar{x}}_s^d = \bar{A}_s\bar{x}_s^d + \bar{B}_s f^d(q_e^d(t),t) \tag{3.11}$$

$$\dot{\bar{x}}_u^d = \bar{A}_u\bar{x}_u^d + \bar{B}_u f^d(q_e^d(t),t) \tag{3.12}$$

$$q_e^d = Cx^d = C\left(\bar{C}_s\bar{x}_s^d + \bar{C}_u\bar{x}_u^d\right) \tag{3.13}$$

où $\bar{A}_s$ est une matrice caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle et $\bar{A}_u$ est une matrice caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle positive. La solution causale de l'équation différentielle (3.11) est alors

obtenue en imposant une condition initiale $\bar{x}_s^d(t\ ) = \bar{x}_{s0}^d$ tandis que la solution anticausale de l'équation (3.12) est obtenue en imposant une condition finale $\bar{x}_u^d(t_f) = \bar{x}_{uf}^d$. Ainsi,

$$\bar{x}_s^d(t) = e^{\bar{A}_s(t-t_0)}\bar{x}_{s0}^d + \int_{t_0}^{t} e^{\bar{A}_s(t-\tau)}\bar{B}_s f^d(q_e^d(\tau),\tau)d\tau \tag{3.14}$$

$$\bar{x}_u^d(t) = e^{\bar{A}_u(t-t_f)}\bar{x}_{uf}^d + \int_{t_f}^{t} e^{\bar{A}_u(t-\tau)}\bar{B}_u f^d(q_e^d(\tau),\tau)d\tau \tag{3.15}$$

Pour faciliter l'intégration par des méthodes numériques, les changements de variables $t = t_f - t$ et $\tau = t_f - \tau^*$ peuvent être appliqués à la relation (3.15) de sorte que

$$\bar{x}_u^d(t_f - t^*) = e^{-\bar{A}_u t^*}\bar{x}_{uf}^d - \int_0^{t^*} e^{-\bar{A}_u(t^*-\tau^*)}\bar{B}_u f^d(q_e^d(t_f - \tau^*), t_f - \tau^*)d\tau^* \tag{3.16}$$

Parce que les équations (3.14) et (3.16) dépendent implicitement de q_e^d, une solution peut être obtenue de façon itérative. Cependant, selon la nature de la trajectoire désirée des CGRV, la solution recherchée peut être périodique ou non périodique.

3.3.2.1 Solution non périodique

Lorsque la trajectoire désirée des CGRV est non périodique, on suppose qu'elle est définie dans l'intervalle $[t_0\ t_f]$ où t_0 est le temps initial et t_f est le temps final. On impose alors des conditions initiales et finales et on utilise les relations (3.14) et (3.16) de façon itérative pour trouver une solution bornée de l'équation d'état (3.9). Cette procédure est résumée par l'algorithme 3.1.

Algorithme 3.1:

i) *Trouver la transformation de similarité Q telle que*

$$AQ = Q\begin{bmatrix} \bar{A}_s & 0 \\ 0 & \bar{A}_u \end{bmatrix}$$

où A est donnée à la relation (3.9), $\overline{A}_s$ *est caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle et* $\overline{A}_u$ *est caractérisée uniquement par des valeurs propres à partie réelle positive. Cette transformation peut être obtenue par diagonalisation de la matrice A.*

ii) *Calculer la forme similaire donnée par les équations* (3.11) *à* (3.13) *en utilisant les relations suivantes:*

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_s & 0 \\ 0 & \overline{A}_u \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \quad , \quad \begin{bmatrix} \overline{B}_s \\ \overline{B}_u \end{bmatrix} = Q^{-1}B \quad et \quad \begin{bmatrix} \overline{C}_s & \overline{C}_u \end{bmatrix} = Q$$

où A et B sont données à la relation (3.9).

iii) *Poser* $k = 0$, $q_e^{d(0)}(t) = 0$ *et choisir des conditions initiales* $\overline{x}_{s0}^d$ *et finales* $\overline{x}_{uf}^d$.

iv) *Calculer, pour* $t \in [t_0 \quad t_f]$, *la solution de l'itération* $k+1$ *à l'aide des relations suivantes*:

$$\overline{x}_s^{d(k+1)}(t) = e^{\overline{A}_s(t-t_0)}\overline{x}_{s0}^d + \int_{t_0}^{t} e^{\overline{A}_s(t-\tau)}\overline{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau),\tau)\,d\tau \tag{3.17}$$

$$\overline{x}_u^{d(k+1)}(t_f - t^*) = e^{-\overline{A}_u t^*}\overline{x}_{uf}^d - \int_0^{t^*} e^{-\overline{A}_u(t^*-\tau^*)}\overline{B}_u f^d(q_e^{d(k)}(t_f - \tau^*), t_f - \tau^*)\,d\tau^* \tag{3.18}$$

$$x^{d(k+1)}(t) = \overline{C}_s\overline{x}_s^{d(k+1)}(t) + \overline{C}_u\overline{x}_u^{d(k+1)}(t) \tag{3.19}$$

$$q_e^{d(k+1)} = Cx^{d(k+1)}(t). \tag{3.20}$$

v) *Poser* $k = k + 1$ *et retourner à l'étape* iv. □

Remarque 3.1: *À l'étape* ii) *de l'algorithme* 3.1, *des conditions initiales et finales doivent être choisies. En général, les vitesses initiales et finales des CGF peuvent être*

considérées comme nulles. Ce n'est cependant pas le cas des positions initiales et finales des CGF. En effet, ces dernières ne peuvent être considérées comme nulles puisque la force de gravité peut occasionner une déformation statique du membre flexible. Ainsi, parce que les vitesses initiales et finales des CGF sont supposées nulles, les positions des CGF initiales et finales peuvent être déterminées à l'aide de la méthode quasi-statique présentée à la section 3.3.1.

Voyons maintenant une condition suffisante pour assurer la convergence de l'algorithme 3.1.

Proposition 3.1: *Si on suppose que la trajectoire désirée des CGRV est lisse et uniformément bornée et si on définit*

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \gamma \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T \\ -\gamma \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^T \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

et

$$\gamma = \sup_t \left[\sigma_{\max} \left(\frac{\partial f^d(\boldsymbol{q}_e^d(t), t)}{\partial \boldsymbol{q}_e^d} \right) \right] \tag{3.22}$$

où $\sigma_{\max}([.])$ *est la plus grande valeur singulière de* $[.]$, *alors, lorsque* $k \to \infty$, *l'algorithme* 3.1 *fait converger* $\boldsymbol{x}^{d(k)}(t)$ *vers une solution lisse et uniformément bornée de l'équation différentielle* (3.9) *si les valeurs propres de* $\boldsymbol{A}$ *et de* $\boldsymbol{H}$ *ont toutes une partie réelle non nulle.*

Remarque 3.2: *Selon les conditions de la proposition* 3.1, *l'algorithme* 3.1 *converge après un nombre infini d'itérations. Pour implanter cet algorithme, il faudra évidement interrompre la procédure après un nombre fini d'itérations ou selon la norme de la différence entre les solutions aux itérations* $k+1$ *et* k.

Pour établir la preuve de la proposition 3.1, il est nécessaire d'utiliser le résultat suivant (Boyd et al., 1989) qui donne une façon de vérifier que la norme infinie d'une matrice de transfert est plus petite qu'un certain facteur.

Lemme 3.1: *Soit une représentation d'état* $(A,B,C,0)$ *ayant comme matrice de transfert* $G(s)$. *Dans ce contexte, si* γ *est une constante positive,* H *est définie par la relation* (3.21), $\|G\|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}(s)\geq 0} \sigma_{\max}[G(s)]$ *et* $\|G\|_{L_\infty} = \sup_{\omega\in R} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$, *alors,* i) *si les valeurs propres de* A *ont toutes une partie réelle négative,* $\gamma\|G\|_\infty < 1$ *si et seulement si* H *n'a pas de valeurs propres à partie réelle nulle*; ii) *si les valeurs propres de* A *n'ont pas de partie réelle nulle,* $\gamma\|G\|_{L_\infty} < 1$ *si et seulement si* H *n'a pas de valeurs propres à partie réelle nulle.*

Remarque 3.3: *La définition de* $\|G\|_{L_\infty}$ *diffère légèrement de celle de* $\|G\|_\infty$. *En effet,* $\|G\|_\infty$ *existe si et seulement si les valeurs propres commandables et observables de* A *ont une partie réelle négative tandis que* $\|G\|_{L_\infty}$ *existe si et seulement si les valeurs propres commandables et observables de* A *ont une partie réelle non nulle (positive ou négative).*

Preuve de la proposition 3.1: La preuve de la proposition sera établie à l'aide du théorème de contraction (Khalil, 1992, pp. 70). En effet l'algorithme 3.1 peut être vu comme une recherche de la solution d'un point fixe de la forme $q_e^d = T(q_e^d)$ à l'aide de $q_e^{d(k+1)} = T(q_e^{d(k)})$ avec l'application T de L_2 à L_2 où de façon générale L_p est l'espace des

vecteurs qui respecte l'inégalité suivante:

$$\|(.)\|_p = \int_{t_0}^{\infty} |(.)(t)|_p^p dt = \left(\int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} |(.)_i(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

où $\|(.)\|_p$ désigne la norme signal p de (.), $|(.)(t)|_p$ désigne sa norme vecteur p et p est un entier compris entre 1 et l'infini. Ainsi, la procédure itérative $\boldsymbol{q}_e^{d(k+1)} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^{d(k)})$ converge vers une solution unique si la condition de contraction suivante

$$\left\| \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^{d(k)}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^{d(\ell)}) \right\|_2 \leq \alpha \left\| \boldsymbol{q}_e^{d(k)} - \boldsymbol{q}_e^{d(\ell)} \right\|_2 \quad , \quad \alpha < 1$$

est vérifiée. D'abord, nous savons que la solution recherchée concerne seulement l'intervalle $[t_0 \; t_f]$. Du point de vue de l'analyse de convergence, les relations (3.14) et (3.15) peuvent donc être substituées par

$$\overline{\boldsymbol{x}}_s^{d(k+1)}(t) = u_T(t) \left[e^{\overline{A}_s(t-t_0)} \overline{\boldsymbol{x}}_{s0}^d + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\overline{A}_s(t-\tau)} \overline{\boldsymbol{B}}_s u_s(t-\tau) \boldsymbol{f}_T^d(\boldsymbol{q}_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \right] \tag{3.23}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_u^{d(k+1)}(t) = u_T(t) \left[e^{\overline{A}_u(t-t_f)} \overline{\boldsymbol{x}}_{uf}^d + \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{\overline{A}_u(t-\tau)} \overline{\boldsymbol{B}}_u u_s(\tau - t) \boldsymbol{f}_T^d(\boldsymbol{q}_e^{d(k)}(\tau), \tau) d\tau \right] \tag{3.24}$$

où u_s(t) est la fonction échelon , u_T(t) = 1 si $t \in [t_0 \; t_f]$ et u_T(t) = 0 ailleurs et $\boldsymbol{f}_T^d(t) = \boldsymbol{f}^d(t) u_T(t)$. Ainsi, les relations (3.19), (3.20), (3.23) et (3.24) impliquent que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^d)(t) = {} & u_T(t) \boldsymbol{C} \left[\overline{\boldsymbol{C}}_s e^{\overline{A}_s(t-t_0)} \overline{\boldsymbol{x}}_{s0}^d + \overline{\boldsymbol{C}}_u e^{\overline{A}_u(t-t_f)} \overline{\boldsymbol{x}}_{uf}^d \right] \\ & + u_T(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{C} \left[\overline{\boldsymbol{C}}_s e^{\overline{A}_s(t-\tau)} \overline{\boldsymbol{B}}_s u_s(t-\tau) - \overline{\boldsymbol{C}}_u e^{\overline{A}_u(t-\tau)} \overline{\boldsymbol{B}}_u u_s(\tau - t) \right] \boldsymbol{f}_T^d(\boldsymbol{q}_e^d(\tau), \tau) \, d\tau \end{aligned}$$

Puis, parce que les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ ont toutes une partie réelle non nulle, le théorème de convolution et le théorème de Parseval nous permettent d'écrire

$$\left\| \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^{d(k)}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}_e^{d(\ell)}) \right\|_2 \leq \|\boldsymbol{G}\|_{L_\infty} \left\| \left[\boldsymbol{f}_T^{d(k)} - \boldsymbol{f}_T^{d(\ell)} \right] \right\|_2 \tag{3.25}$$

où

$$\|\boldsymbol{G}\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max} \left[\boldsymbol{G}(j\omega) \right]$$

avec

$$\boldsymbol{G}(j\omega) = \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{C}}_s \left[j\omega \mathbf{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_s \right]^{-1} \overline{\boldsymbol{B}}_s + \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{C}}_u \left[j\omega \mathbf{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_u \right]^{-1} \overline{\boldsymbol{B}}_u = \boldsymbol{C} \left[j\omega \mathbf{I} - \boldsymbol{A} \right]^{-1} \boldsymbol{B}$$

Ensuite, de la relation (3.10) et du théorème des accroissements finis ("mean value theorem"), nous avons

$$\left\| \left[f_T^{d(k)} - f_T^{d(\ell)} \right] \right\|_2 \leq \gamma \left\| q_e^{d(k)} - q_e^{d(\ell)} \right\|_2 \tag{3.26}$$

où γ est donnée par la relation (3.22). À partir des relations (3.25) et (3.26), nous obtenons la condition de contraction suivante

$$\gamma \| G \|_{L_\infty} < 1 \tag{3.27}$$

Ainsi, grâce au lemme 3.1, la condition de la proposition 3.1 établit la convergence de $q_e^{d(k)}$ vers la solution unique de q_e^d dans L_2. Mais parce que la solution de l'équation différentielle (3.9) est unique dans l'espace des fonctions continues, il s'ensuit que dans l'intervalle $[t_0, t_f]$, $q_e^{d(k)}$ ne peut que converger dans l'espace des fonctions continues. La solution obtenue est donc continue dans l'intervalle $[t_0, t_f]$. Aussi, parce que $f^d(q_e, t)$ est uniformément bornée, l'intégration causale-anticausale assure une solution bornée à chaque itération. En particulier, $x_e^{d(k)}$ et $q_e^{d(k)}$ sont bornés lorsque k tend vers l'infini. Puis, parce que $q_e^{d(k)}$ est continue sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ et la trajectoire désirée des CGRV est continue par hypothèse, f^d est continue sur l'intervalle $[t_0, t_f]$. Ainsi, selon les relations (3.17), (3.18) et (3.19), cela implique que lorsque k tend vers l'infini, $x_e^{d(k)}$ tend vers la solution unique, continue et bornée de l'équation différentielle (3.9). Il reste à prouver que la solution obtenue est lisse. Parce que la trajectoire désirée des CGRV est lisse par hypothèse, $f^d(q_e, t)$ est lisse par rapport à t. Selon les relations (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20), il est donc clair que $x_e^{d(k+1)}$ et $q_e^{d(k+1)}$ sont continûment dérivables une fois de plus que $q_e^{d(k)}$ dans l'intervalle $[t_0, t_f]$. Par induction, puisqu'à l'étape 3) $q_e^{d(0)}$ est continue, $x_e^{d(k)}$ est lisse dans l'intervalle $[t_0, t_f]$ lorsque k tend vers l'infini. □

3.3.2.2 Solution périodique

Lorsque la trajectoire désirée des CGRV est périodique, on considère d'une part que sa période est donnée par $T = t_f - t_0$ et d'autre part que les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle non nulle. Il s'agit alors d'imposer une solution périodique à l'équation différentielle (3.9). Pour ce faire, on impose des conditions initiales et finales identiques dans les relations (3.14) et (3.16). On utilise ensuite ces relations de façon itérative pour trouver la solution de l'équation d'état (3.9). Cette procédure est résumée par l'algorithme 3.2.

Algorithme 3.2: *Identique à l'algorithme 3.1 mises à part les relations* (3.17) *et* (3.18) *qui doivent être substituées par*

$$\bar{x}_s^{d(k+1)}(t) = e^{\bar{A}_s(t-t_0)}\bar{x}_{s0}^{d(k+1)} + \int_{t_0}^{t} e^{\bar{A}_s(t-\tau)}\bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau),\tau)d\tau \tag{3.28}$$

$$\bar{x}_u^{d(k+1)}(t_f - t^*) = e^{-\bar{A}_u t^*}\bar{x}_{uf}^{d(k+1)} - \int_0^{t^*} e^{-\bar{A}_u(t^*-\tau^*)}\bar{B}_u f^d(q_e^{d(k)}(t_f-\tau^*), t_f-\tau^*)d\tau^* \tag{3.29}$$

où les conditions initiales et finales sont données par les relations suivantes

$$\bar{x}_{s0}^{d(k+1)} = \left[\left(I - e^{\bar{A}_s T}\right)^{-1}\int_0^T e^{\bar{A}_s(T-\tau)}\bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(\tau+t_0),\tau+t_0)d\tau\right]$$

et

$$\bar{x}_{uf}^{d(k+1)} = -\left[\left(I - e^{-\bar{A}_u T}\right)^{-1}\int_0^T e^{-\bar{A}_u(T-\tau^*)}\bar{B}_s f^d(q_e^{d(k)}(T-\tau^*), T-\tau^*)d\tau^*\right]$$

Proposition 3.2: *Identique à la proposition 3.1 mais en considérant l'algorithme 3.2.*

Preuve de la proposition 3.2: Une fois de plus, la preuve de la proposition sera établie à l'aide du théorème de contraction. Cependant, nous considérons l'application

$T: L_2[t_0\ t_f] \rightarrow L_2[t_0\ t_f]$ où $L_2[t_0\ t_f]$ est l'espace des vecteurs qui sont de puissance finie dans l'intervalle $[t_0\ t_f]$. Dans ce contexte, nous considérons la norme signal

$$\|(.)\|_T = \frac{1}{T}\sqrt{\int_{t_0}^{t_f} |(.)(\tau)|_2^2 d\tau}$$

qui représente la puissance du vecteur (.). Parce que les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle non nulle, les valeurs propres de e^{AT} sont certainement toutes différentes de 1. À cause de cela, $\mathbf{I} - e^{AT}$ est non singulière et cela implique que la solution périodique $q_e^{d(k+1)}$ est unique (Deo, et Raghavendra, 1980, pp.95) à chaque itération. Cette solution continue peut donc être obtenue de façon tout à fait équivalente si on exprime $f^{d(k)}$ et $q_e^{d(k+1)}$ sous forme de séries de Fourier. Dans ce cas, nous savons que les vecteurs de coefficients des séries sont liés par la relation suivante:

$$a_n^{(k+1)} = G(nj\omega)b_n^{(k)}$$

où $a_n^{(k+1)}$ et $b_n^{(k)}$ sont respectivement les vecteurs de coefficients des séries $q_e^{d(k+1)}$ et $f^{d(k)}$. Ainsi, le théorème de Parseval nous permet d'écrire

$$\left\|T(q_e^{d(k)}) - T(q_e^{d(\ell)})\right\|_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|a_n^{(k+1)} - a_n^{(\ell+1)}\right|_2 \leq \|G\|_{L_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|b_n^{(k)} - b_n^{(\ell)}\right|_2 = \|G\|_{L_\infty}\left\|\left[f^{d(k)} - f^{d(\ell)}\right]\right\|_T$$

qui est similaire à ce que nous avions obtenu à l'expression (3.25). Le reste de la démonstration est identique à ce qui a été présenté pour la démonstration de la proposition 3.1. □

Ainsi, (l'algorithme 3.1)[2] ((l'algorithme 3.2)) nous permet de transformer la trajectoire désirée (non périodique) ((périodique)), lisse et uniformément bornée de l'espace des CGRV à l'espace des CGF si la condition de convergence de la (proposition 3.1) ((proposition 3.2)) est satisfaite. Si cette condition n'est pas satisfaite, il suffit de considérer des trajectoires désirées impliquant des vitesses et des accélérations plus faibles ou tout simplement, un temps final plus grand. Le facteur γ, donné par la relation (3.22), s'en trouvera alors nécessairement réduit et la condition de convergence pourra être satisfaite.

Une fois la trajectoire désirée dans l'espace des CGF obtenue, il suffit d'utiliser la relation (3.2) pour obtenir la trajectoire désirée dans l'espace des CGR. La méthode décrite dans cette section permet donc de transformer la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Les hypothèses 3.1 et 3.2 nous assurent en plus que ces trajectoires désirées sont lisses et uniformément bornées. Dans la prochaine section, un exemple de transformations de trajectoire sera présenté.

3.4 Exemple de transformations d'une trajectoire désirée

Dans cette section, la trajectoire désirée illustrée par les figures 3.3 et 3.4 est d'abord transformée de l'espace de travail à l'espace des CGRV du manipulateur flexible décrit à la section 2.5. Cette trajectoire périodique, qui est formée de quatre polynômes de

---

[2]Les paranthèses simples suivi des paranthèses doubles sont utilisées pour simplifier l'écriture. En effet une première lecture d'un paragraphe peut être fait en considérant seulement le contenu des parathèses simples et une seconde lecture en considérant seulement le contenu des parathèses doubles.

cinquième ordre et de quatre constantes est ensuite transformée, par la méthode quasi-statique et la méthode proposée, de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Au prochain chapitre, cette trajectoire désirée sera régulièrement utilisée pour évaluer les performances du système de commande proposée.

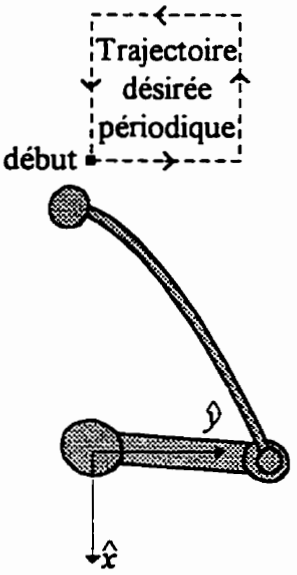


Figure 3.3 Trajectoires désirées de l'outil.

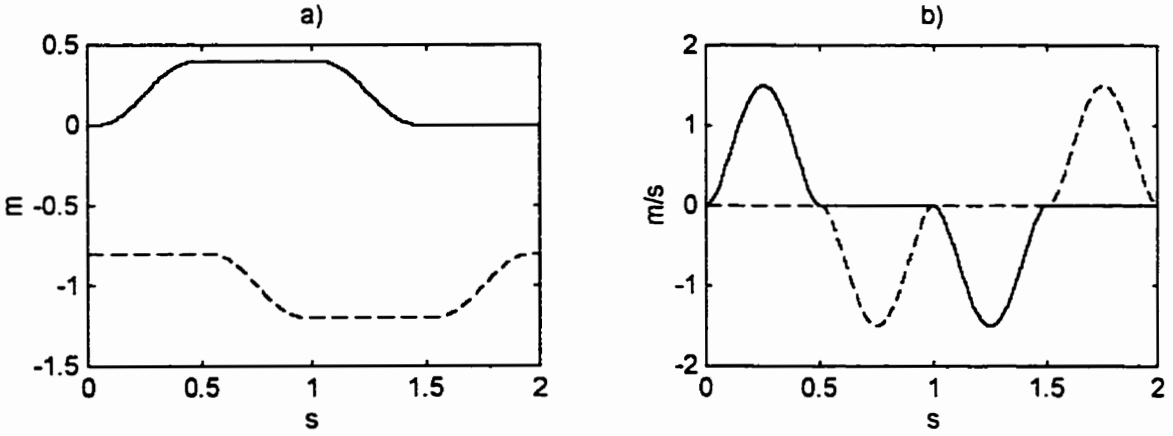


Figure 3.4 Trajectoire désirée dans l'espace de travail: a) position x (---) et y (—); b) vitesse $\dot{x}$ (---) et $\dot{y}$ (—).

3.4.1 Première transformation

Des figures 2.3 et 3.1 on déduit directement la première transformation (i.e. cinématique inverse) qui est donnée par

$$\bar{q}_r = \begin{bmatrix} {}^1\bar{q}_r \\ {}^2\bar{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan 2(y,x) - \arctan 2(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2) \\ \arctan 2(s_2, c_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{q}}_r = \begin{bmatrix} {}^1\dot{\bar{q}}_r \\ {}^2\dot{\bar{q}}_r \end{bmatrix} = J^{-1}(\bar{q}_r)\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\bar{q}}_r = \begin{bmatrix} {}^1\ddot{\bar{q}}_r \\ {}^2\ddot{\bar{q}}_r \end{bmatrix} = J^{-1}(\bar{q}_r)\left\{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \dot{J}(\bar{q}_r)\dot{\bar{q}}_r\right\}$$

où x et y décrivent la position dans l'espace de travail, arctan2(y,x) est une fonction arc tangente qui tient compte des quatre quadrants, s_2 ainsi que c_2 sont respectivement le sinus et le cosinus de ${}^2\bar{q}_r$ qui sont donnés par

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \quad , \quad s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

et $J(\bar{q}_r)$ est la matrice jacobienne qui est donnée par

$$J(\bar{q}_r) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

où $s_1 = \sin({}^1\bar{q}_r)$, $c_1 = \cos({}^1\bar{q}_r)$, $s_{12} = \sin({}^1\bar{q}_r + {}^2\bar{q}_r)$ et $c_{12} = \cos({}^1\bar{q}_r + {}^2\bar{q}_r)$. En appliquant cette transformation à la trajectoire désirée dans l'espace de travail, nous obtenons, à l'aide du logiciel MATLAB, la trajectoire désirée dans l'espace des CGRV décrite par la figure 3.5.

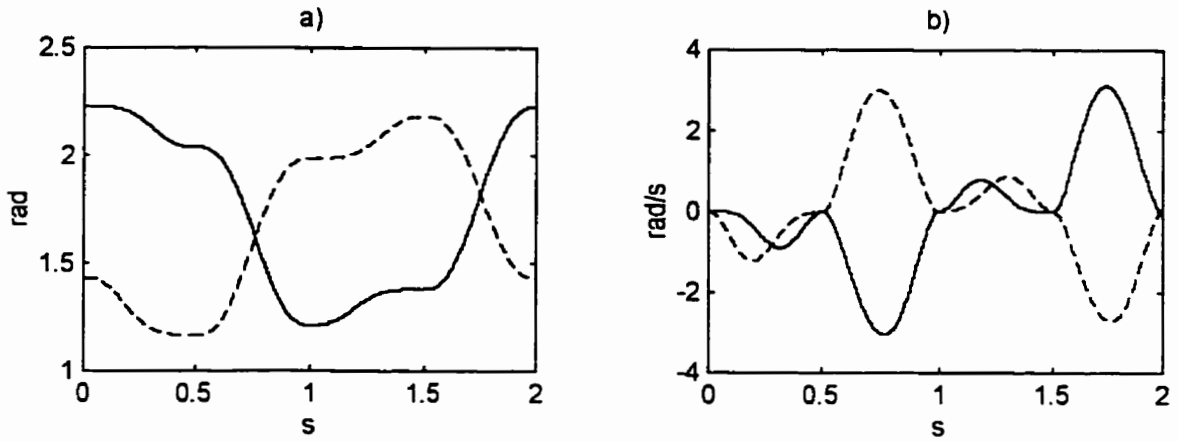


Figure 3.5 Trajectoire désirée dans l'espace des CGRV: a) position ${}^{1}\overline{q}_r^{\,d}$ (---) et ${}^{2}\overline{q}_r^{\,d}$ (—); b) vitesse ${}^{1}\dot{\overline{q}}_r^{\,d}$ (---) et ${}^{2}\dot{\overline{q}}_r^{\,d}$ (—).

3.4.2 Deuxième transformation

Comme nous l'avons expliqué à la section 3.3, la deuxième transformation peut être obtenue de façon approximative par la méthode quasi-statique, ou bien, de façon exacte par la méthode proposée. La condition de convergence de l'algorithme 3.2 doit cependant être préalablement vérifiée. Pour ce faire, nous avons d'abord obtenu le facteur γ de la relation (3.22) qui est donné par

$$\gamma = \sigma_{\max}\left[\nu\ {}^{2}\Gamma\right]\sup_{t}\sqrt{\left[l_1\ {}^{1}\dot{\overline{q}}_r^{\,d2}(t) + g\cos\left({}^{1}\overline{q}_r^{\,d}(t)\right)\right]^2 + \left[l_1\ {}^{1}\ddot{\overline{q}}_r^{\,d}(t) + g\sin\left({}^{1}\overline{q}_r^{\,d}(t)\right)\right]^2}$$

où $\nu = \left[\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_{n_e}\right]^T$, ν_i est donnée par la relation (2.37) et ${}^{2}\Gamma$ est définit à la relation (3.1). Nous avons ensuite vérifié la condition de convergence qui s'est avérée satisfaite. Les deux méthodes ont ensuite été appliquées pour transformer la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Les résultats de cette transformation, obtenus à l'aide du logiciel MATLAB, sont illustrés par les figures 3.6 à 3.9. En observant ces figures, on peut remarquer que les CGF désirées ainsi que leurs vitesses ne

sont pas illustrées. Nous avons plutôt choisi de présenter les graphiques de la déformation désirée $\mu^d(l_2) = \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(l_2) q_{e_i}^d$ et de sa vitesse $\dot{\mu}^d(l_2) = \sum_{i=1}^{n_e} \phi_i(l_2) \dot{q}_{e_i}^d$ qui ont une représentation physique beaucoup plus intéressante que les CGF. La figure 3.9 nous permet d'ailleurs de constater qu'un suivi exact de la trajectoire désirée occasionnera une déformation maximale d'environs 6 cm (soit 6% de la longueur du membre flexible). En général, on considère qu'une déformation de 10% à 15 % de la longueur du membre flexible est acceptable. En comparant les figures 3.7 et 3.9, on peut également remarquer, qu'au niveau de la déformation, la trajectoire obtenue avec l'approche quasi-statique est relativement proche de celle obtenue avec l'approche proposée. La méthode quasi-statique ne permet cependant pas d'obtenir la vitesse de la déformation qui n'est visiblement pas négligeable dans ce cas. Au chapitre suivant, des simulations du système de commande permettront de mieux apprécier les différences de performance relativement aux trajectoires choisies.

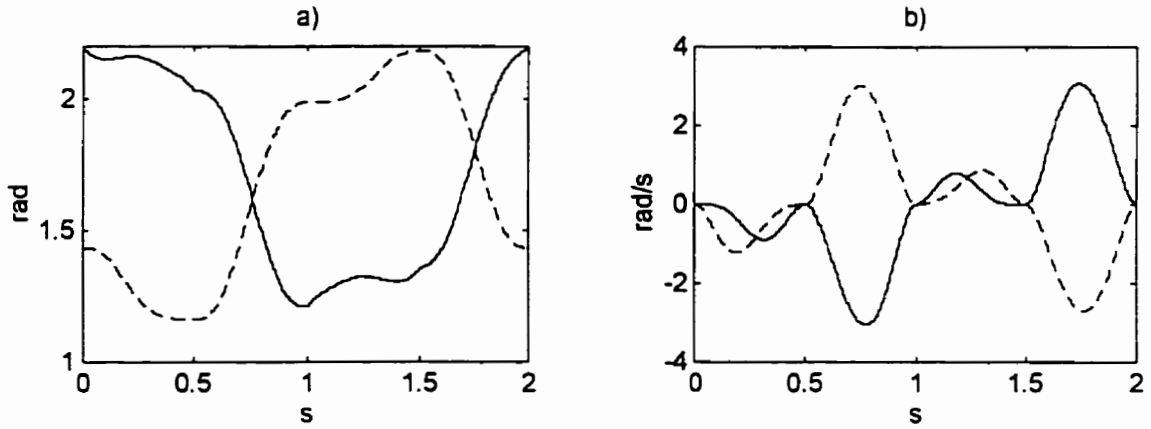


Figure 3.6 Trajectoire désirée dans l'espace des CGR par la méthode quasi-statique: a) position ${}^1q_r^d$ (---) et ${}^2q_r^d$ (—); b) vitesse ${}^1\dot{q}_r^d$ (---) et ${}^2\dot{q}_r^d$ (—).

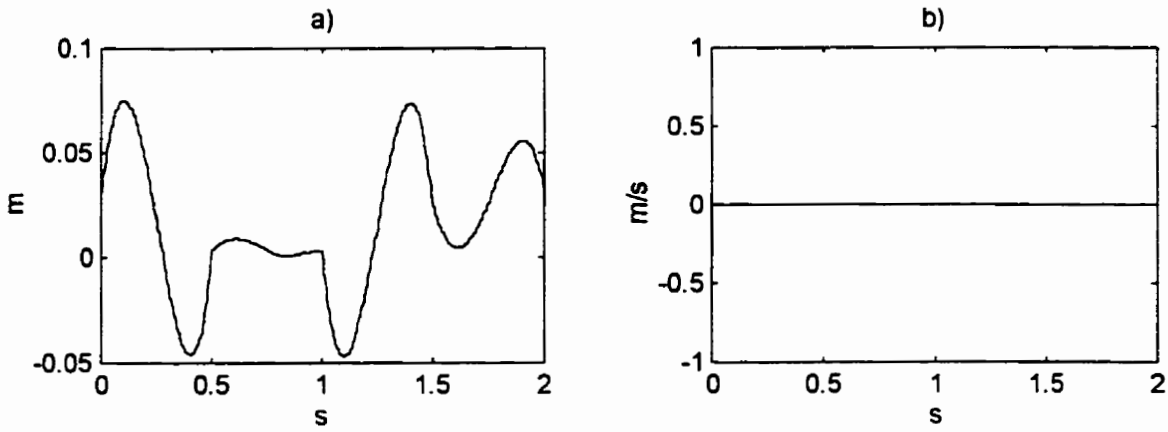


Figure 3.7 Trajectoire désirée dans l'espace des CGF par la méthode quasi-statique: a) position $\mu^d(l_2)$; b) vitesse $\dot{\mu}^d(l_2)$.

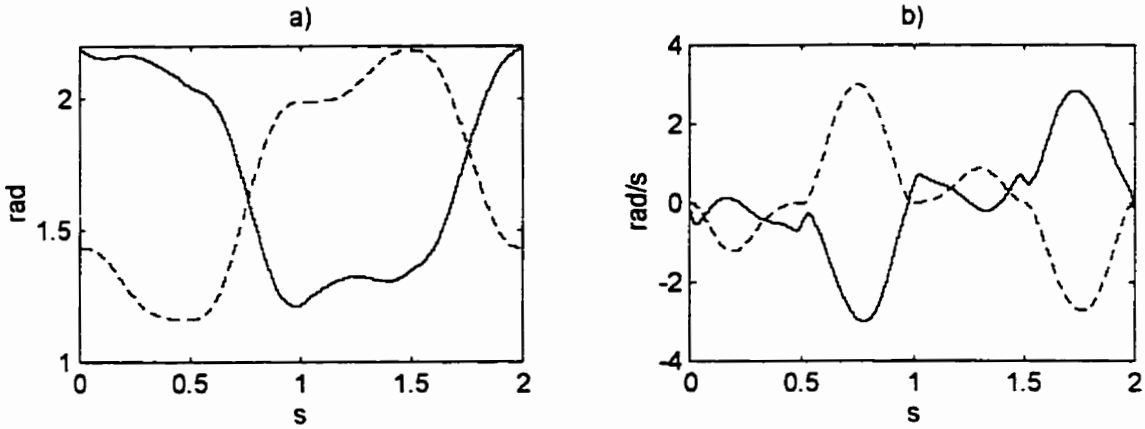


Figure 3.8 Trajectoire désirée dans l'espace des CGR par la méthode proposée: a) position ${}^1q_r^d$ (---) et ${}^2q_r^d$ (—); b) vitesse ${}^1\dot{q}_r^d$ (---) et ${}^2\dot{q}_r^d$ (—).

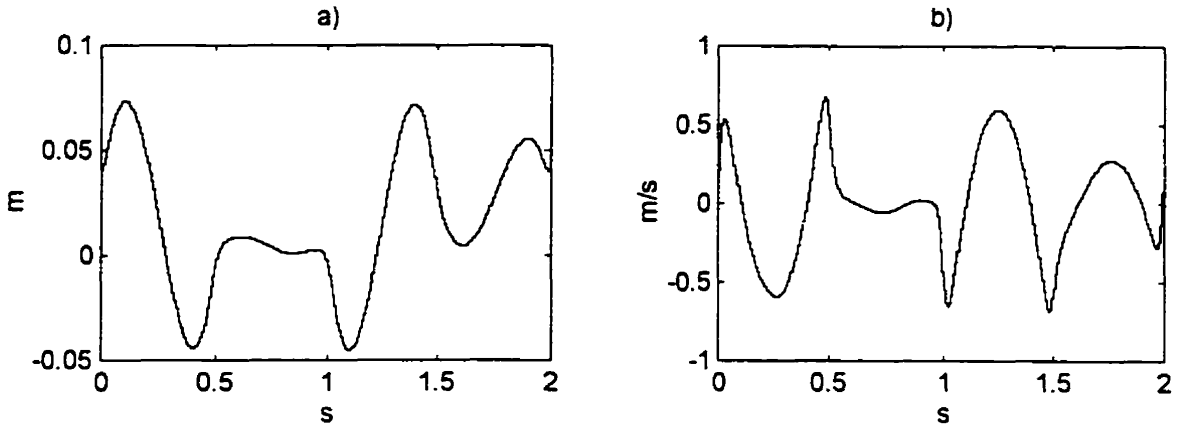


Figure 3.9 Trajectoire désirée dans l'espace de déformation avec la méthode proposée: a) position $\mu^d(l_2)$; b) vitesse $\dot{\mu}^d(l_2)$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons expliqué que pour les manipulateurs flexibles, l'espace de travail et l'espace des CGR sont liés non seulement par une relation cinématique mais également par la dynamique de la déformation. Pour contourner ce problème, les CGRV ont été définies de façon à être liées à l'espace de travail par une simple relation cinématique. Ensuite, nous avons considéré le problème de transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des CGRV, puis, de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et des CGF. Nous avons vu que la première transformation est simple puisqu'elle est obtenue en inversant la cinématique du système. Pour ce qui est de la deuxième transformation, elle s'avère beaucoup plus complexe puisqu'elle invoque la résolution d'une équation différentielle non linéaire et instable. Deux approches de solution ont alors été présentées: l'approximation quasi-statique qui consiste à négliger la dynamique de la déformation et la méthode proposée qui consiste à utiliser l'intégration causale-anticausale de façon itérative. Une analyse de convergence de la méthode

proposée a également été présentée. Enfin, le dernier paragraphe du chapitre a été consacré à un exemple de transformation d'une trajectoire désirée périodique. Au chapitre suivant, une stratégie de commande est proposée pour assurer la stabilité ainsi qu'une décroissance exponentielle souhaitable des erreurs de suivi de trajectoires. Cette stratégie de commande utilisera la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF.

CHAPITRE IV
LOIS DE COMMANDE

4.1 Introduction

Dans le chapitre III, nous avons présenté deux approches pour transformer la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à l'espace des CGR et de CGF. Dans ce chapitre, nous allons proposer une stratégie de commande utilisant les trajectoires désirées dans l'espace des CGR et des CGF. Nous verrons que cette stratégie assure la stabilité exponentielle et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi de la trajectoire dans l'espace des CGRV. Cette approche est essentiellement caractérisée par une loi de commande non linéaire qui linéarise le système par rapport aux CGR et de deux retours d'état linéaires invariants qui stabilisent la dynamique des erreurs de suivi des CGR et des CGF. La difficulté est alors de stabiliser la dynamique des erreurs de suivi des CGF et de la dernière CGR qui est non linéaire, variante et couplée avec le reste du système. Dans cette optique, nous serons en mesure premièrement de démontrer qu'il existe un ensemble de gains du contrôleur qui stabilise le système et deuxièmement d'établir une méthode pour calculer ces gains de façon à stabiliser les erreurs dans un temps souhaitable. Cette procédure sera basée sur une utilisation particulière de l'étude de stabilité des systèmes hiérarchiques, du théorème de passivité et des systèmes d'IML.

Pour mieux situer l'approche proposée par rapport aux autres rencontrées dans la littérature, nous allons d'abord présenter les méthodes connues qui ont le plus de similitudes avec celle proposée. Le chapitre est donc organisé de la façon suivante.

D'abord, la section 4.2 est consacrée à la linéarisation par retour d'états par rapport aux CGR, par rapport aux CGRV et par rapport à un compromis entre les CGR et les CGRV. Cette section fait également ressortir le dilemme entre la précision du suivi de trajectoires dans l'espace des CGRV et l'instabilité de la dynamique des zéros. La section 4.3 est ensuite consacrée à la méthode proposée. Elle présente d'abord les lois de commandes puis, l'étude de stabilité qui permet de calculer les gains du contrôleur qui assurent une stabilité exponentielle et un amortissement souhaitable des erreurs de suivi. La démarche présentée permet également de prouver que les erreurs obtenues en utilisant la trajectoire désirée calculée avec l'approche quasi-statique sont ultimement bornées. Pour chacune des méthodes présentées, des résultats de simulation sont donnés en considérant la trajectoire désirée obtenue à la fin du chapitre III et le modèle dynamique du manipulateur donné à la fin du chapitre II.

4.2 Linéarisation par retour d'état

Pour une classe de systèmes mécaniques similaire à celle définie au chapitre II, Wang et Vidyasagar (1991) ont montré que la linéarisation par retour d'état de type entrée-état n'est pas réalisable. Par contre, la linéarisation de type entrée-sorties par retour d'état est réalisable pour plusieurs catégories de sorties (Bigras et al., 1995a; Lucibello et Di Benedetto, 1993; Yim, 1994). En particulier, la linéarisation peut être obtenue en considérant comme sortie: le vecteur des CGR (Bigras et al., 1995a; De Schutter et al., 1988; De Luca et Siciliano, 1989), le vecteur des CGRV (Lucibello et Di Benedetto, 1993) ou un compromis entre le vecteur des CGR et celui des CGRV (De Luca et Siciliano, 1989).

Pour unifier le développement des différentes lois de commandes associées à ces différents choix de sorties, nous allons utiliser le changement de variable suivant:

$$q^* = \begin{bmatrix} q_r^* \\ q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\bar{q}_r + (1-\alpha)q_r \\ q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_r + \alpha\Gamma q_e \\ q_e \end{bmatrix} = Tq \tag{4.1}$$

où q_r est le vecteur des CGR, $\bar{q}_r$ est le vecteur des CGRV définit par la relation (3.1) et q_r^* est un vecteur qui prend une signification différente selon la valeur de α. En effet, lorsque $\alpha = 0$, q_r^* est le vecteur des CGR tandis que lorsque $\alpha = 1$, q_r^* est le vecteur des CGRV. Dans le cas ou α est compris entre zéro et un, q_r^* est un vecteur de coordonnées généralisées qui sont un compromis entre les CGR et les CGRV. On définit ces coordonnées généralisées comme les Coordonnées Généralisées Rigides Virtuelles Approximatives (CGRVA). Ainsi, plus α est près de 1, plus les CGRVA sont une bonne approximation des CGRV. Par contre lorsque α est près de zéro, les CRGVA sont une mauvaise approximation des CGRV.

Trouvons maintenant une loi de commande qui linéarise le système par rapport à la sortie définie par le vecteur q_r^*. Pour obtenir cette linéarisation, appliquons d'abord le changement de variable décrit par la relation (4.1) à la dynamique du manipulateur flexible décrit par les relations (2.5) et (2.6). Les propriétés 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 et 2.11 nous permettent alors d'obtenir le modèle dynamique suivant:

$$M_r^*(q^*)\ddot{q}_r^* + M_{re}^*(q^*)\ddot{q}_e + F_r^*(q^*, \dot{q}^*) = \tau \tag{4.2}$$

$$M_{er}^*(q^*)\ddot{q}_r^* + M_e^*\ddot{q}_e + F_e^*(q^*, \dot{q}^*) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e = 0 \tag{4.3}$$

où

$$M_r^*(q^*) = M_r\left(\left[q_r^* - \alpha\Gamma q_e, \quad q_e\right]\right)$$

$$M_{re}^*(q^*) = M_{re}(q_r^* - \alpha\Gamma q_e) - \alpha M_r^*(q^*)\Gamma$$

$$F_r^*(q^*,\dot{q}^*) = V_r\left(\left[q_r^* - \alpha\Gamma q_e,\ \ q_e\right],\left[\dot{q}_r^* - \alpha\Gamma\dot{q}_e,\ \ \dot{q}_e\right]\right)\left(\dot{q}_r^* - \alpha\Gamma\dot{q}_e\right)$$
$$+V_{re}\left(\left[q_r^* - \alpha\Gamma q_e,\ \ q_e\right],\left[\dot{q}_r^* - \alpha\Gamma\dot{q}_e,\ \ \dot{q}_e\right]\right)\dot{q}_e + F_r\left(\dot{q}_r^* - \alpha\Gamma\dot{q}_e\right) + G_r\left(\left[q_r^* - \alpha\Gamma q_e,\ \ q_e\right]\right)$$
$$M_{er}^*(q^*) = M_{re}^T\left(q_r^* - \alpha\Gamma q_e\right)$$
$$M_e^* = M_e - \alpha\,{}^2M_{re}^T\,{}^2\Gamma \tag{4.3a}$$
$$F_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) = {}^1V_{er}\left(q_r^* - \alpha\Gamma q_e,\ {}^1\dot{q}_r^*\right){}^1\dot{q}_r^* + G_e(q_r^* - \alpha\Gamma q_e)$$

Pour faciliter l'obtention de la loi de commande linéarisante, nous allons isoler l'accélération des CGF dans la relation (4.3) et la remplacer dans la relation (4.2). Si on suppose que la matrice M_e^* est non singulière (cette hypothèse sera vérifiée un peu plus loin), le modèle du manipulateur flexible s'exprime sous la forme suivante:

$$\left[M_r^*(q^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}M_{er}^*(q^*)\right]\ddot{q}_r^* + F_r^*\left(q^*,\dot{q}^*\right)$$
$$-M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}\left[F_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right] = \tau \tag{4.4}$$
$$M_{er}^*(q^*)q_r^* + M_e^*\ddot{q}_e + F_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e = 0 \tag{4.5}$$

La loi de commande peut maintenant être facilement déduite en dérivant la sortie q_r^* jusqu'à ce que l'entrée τ apparaisse. Cette loi de commande est donnée par:

$$\tau = F_r^*(q^*,\dot{q}^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}\left[F_e^*(q^*,\dot{q}^*) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right]$$
$$+\left(M_r^*(q^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}M_{er}^*(q^*)\right)u^* \tag{4.6}$$

où u^* est la nouvelle variable de commande du système. Évidement, cette loi de commande exige la connaissance de toutes les variables d'états du système. Dans cette thèse, nous supposerons que ces variables sont toutes disponibles. Pour que la loi de commande (4.6) puisse correctement linéariser le système, il faut bien sûr que la matrice $\left(M_r^*(q^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}M_{er}^*(q^*)\right)$ soit non singulière.

Proposition 4.1: La matrice $\left(M_r^*(q^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}M_{er}^*(q^*)\right)$ est non singulière si M_e^* est non singulière.

preuve de la proposition 4.1: Selon la transformation non singulière T définie par la relation (4.1),

$$M^*(q^*) = \begin{bmatrix} M_r^*(q^*) & M_{re}^*(q^*) \\ M_{er}^*(q^*) & M_e^* \end{bmatrix} = M(T^{-1}q)T^{-1} .$$

Grâce à la propriété 2.2, cette matrice est non singulière. Ainsi, parce que M_e^* est non singulière par hypothèse, le complément de Schur de M_e^*, qui est justement donné par $M_r^*(q^*) - M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}M_{er}^*(q^*)$, est certainement une matrice non singulière. □

Ainsi, si on suppose que M_e^*, est non singulière, la loi de commande (4.6) linéarise la dynamique décrite par les relations (4.4) et (4.5) de sorte que

$$\ddot{q}_r^* = u^* \tag{4.7}$$

$$\ddot{q}_e = \Omega(x_r^*, x_e, u^*) = -M_e^{*-1}\left[M_{er}^*(q^*)u^* + F_e^*(q^*, \dot{q}^*) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right] \tag{4.8}$$

où $x_r^* = \begin{bmatrix} q_r^{*T} & \dot{q}_r^{*T} \end{bmatrix}^T$ et $x_e = \begin{bmatrix} q_e^T & \dot{q}_e^T \end{bmatrix}^T$. La relation (4.7) représente donc la dynamique linéarisée du système tandis que la relation (4.8) représente sa dynamique interne ou non observable. Le suivi de trajectoires dans l'espace des CGRVA peut alors être obtenu en appliquant la seconde loi de commande suivante:

$$u^* = \ddot{q}_r^{*d} + K_d^*\dot{\tilde{q}}_r^* + K_p^*\tilde{q}_r^* \tag{4.9}$$

où q_r^{*d} est la trajectoire désirée, $\tilde{q}_r = q_r^{*d} - q_r^*$ est le vecteur des erreurs de suivi et K_d^* ainsi que K_p^* sont des matrices de gains qui doivent être symétriques et définies positives. En fait, les matrices de gains K_d^* ainsi que K_p^* caractérise entièrement les valeurs propres de la dynamique des erreurs de suivi. Cette dynamique peut donc être arbitrairement imposée. Le problème est alors de s'assurer que la dynamique interne du système reste bornée. Pour ce faire, on s'assure habituellement que le système est à minimum de phase. Par définition, le système est à minimum de phase si la dynamique des zéros, obtenue en imposant la sortie q_r^* à zéro (Isidori, 1989), est asymptotiquement stable. Pour la

dynamique interne décrite par la relation (4.8), la dynamique des zéros est donnée par la relation suivante:

$$\ddot{q}_e = \Omega(0, x_e, 0) = -M_e^{*-1}\left[F_e\dot{q}_e + K_e q_e + G(-\alpha\Gamma q_e)\right] \tag{4.10}$$

Malheureusement, cette condition de stabilité de la dynamique des zéros n'est pas suffisante pour garantir une dynamique interne bornée. En effet, dans le cas général, la dynamique interne est bornée si (Sastry et Isidori, 1989): 1) la trajectoire désirée x_r^{*d} et le vecteur des erreurs de suivi $\tilde{x}_r^*$ sont uniformément bornés; 2) la dynamique des zéros est exponentiellement stable et 3) $\Omega(x_r^*, x_e, u^*)$ est globalement Lipschitz par rapport à x_r^* et x_e. En se basant sur ce qui est présenté dans Sastry et Isidori (1989), nous allons maintenant démontrer que pour notre système, il suffit simplement que la dynamique décrite par la relation suivante:

$$\ddot{q}_e = -M_e^{*-1}\left[F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right] \tag{4.11}$$

soit asymptotiquement stable pour assurer une dynamique interne bornée. Le lecteur pourra remarquer que cette proposition est intéressante parce que la dynamique décrite par la relation (4.11) est linéaire.

Proposition 4.2 *Si on suppose que la trajectoire désirée x_r^{*d} est uniformément bornée, que son suivi est exponentiellement stable grâce à la loi de commande* (4.9) *et que les conditions initiales $x_r^*(t_0)$ sont bornées, alors, la dynamique interne décrite par la relation* (4.8) *est bornée si la dynamique décrite par la relation* (4.11) *est asymptotiquement stable.*

Preuve de la proposition 4.2: Parce que la dynamique décrite par la relation (4.11) est asymptotiquement stable par hypothèse et parce qu'elle est linéaire invariante, nous

savons que pour toute matrice Q symétrique et définie positive, il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que:

$$PA_e + A_e^T P = -Q \tag{4.12}$$

où

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -M_e^{*-1}K_e & -M_e^{*-1}F_e \end{bmatrix}$$

En utilisant la fonction de Lyapunov $v = x_e^T P\, x_e$, pour étudier la stabilité de la dynamique interne décrite par la relation (4.5), nous obtenons

$$\dot{v} = 2x_e^T P \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -M_e^{*-1}K_e & -M_e^{*-1}F_e \end{bmatrix} x_e + 2x_e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ -M_e^{*-1}\left[M_{er}^*(q^*)u^* + F_e^*\left(q^*, \dot{q}^*\right)\right] \end{bmatrix}$$

d'où selon la relation (4.12), nous avons

$$\dot{v} = -x_e^T Q\, x_e + 2x_e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ -M_e^{*-1}\left[M_{er}^*(q^*)u^* + F_e^*\left(q^*, \dot{q}^*\right)\right] \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Ensuite, selon la relation (4.3),

$$M_e^{*-1}\left[M_{er}^*(q^*)u^* + F_e^*\left(q^*, \dot{q}^*\right)\right] = M_e^{*-1}\left[M_{re}^T(q_r^* - \alpha\Gamma q_e)u^* + {}^1V_{er}\left(q_r^* - \alpha\Gamma q_e, {}^1\dot{q}_r^*\right){}^1\dot{q}_r^* + G_e(q_r^* - \alpha\Gamma q_e)\right]$$

Puis, nous savons que x_r^* et u^* sont uniformément bornées puisque x_r^{*d} et $x_r^*(t_0)$ sont uniformément bornées et que le vecteur des erreurs de suivi $\tilde{x}_r^*$ est exponentiellement stable par hypothèse. Les propriétés 2.6, 2.7, 2.9 et 2.11 ainsi que les relations (3.1) et (4.3) nous permettent alors d'obtenir

$$\left|M_e^{*-1}\left[M_{er}^*(q^*)u^* + F_e^*\left(q^*, \dot{q}^*\right)\right]\right|_2 \le \alpha_1^* \tag{4.14}$$

où α_1^* est une constante positive bornée. Ainsi, des relations (4.13) et (4.14), nous obtenons

$$\dot{v} \le -\alpha_3^* |x_e|_2^2 + 2\alpha_1^*\alpha_2^* |x_e|_2$$

où α_2^* et α_3^* sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de P et Q.

Nous obtenons donc

$$\dot{v} \leq 0 \quad \text{lorsque} \quad |x_e|_2 \geq \alpha_4^* = \frac{2\alpha_1^*\alpha_2^*}{\alpha_3^*} \tag{4.15}$$

La dynamique interne est donc bornée puisque, selon la relation (4.15), $|x_e|_2$ décroît en fonction du temps lorsque $|x_e|_2 \geq \alpha_4^*$. □

Maintenant que nous avons établi une condition suffisante simple pour garantir une dynamique interne bornée, nous allons vérifier cette condition pour différentes valeurs de α correspondant à différentes sorties.

4.2.1 Linéarisation par rapport aux CGR

Pour que la linéarisation par retour d'état obtenue par la loi de commande (4.6) soit définie par rapport aux CGR, il suffit de choisir α=0. La loi de commande (4.6) prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned}\tau = {} & \left(V_r(q,\dot{q}) + F_r\right)\dot{q}_r + V_{re}(q,\dot{q})\dot{q}_e + G_r(q) + \left(M_r(q) - M_{re}(q_r)M_e^{-1}M_{re}^T(q_r)\right)u \\ & - M_{re}(q_r)M_e^{-1}\left[{}^1V_{er}(q_r,{}^1\dot{q}_r)\,{}^1\dot{q}_r + F_e\dot{q}_e + G_e(q_r) + K_e q_e\right]\end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour que cette loi de commande soit bien définie, M_e doit être non singulière. Cette condition est vérifiée grâce à la propriété 2.2. Conséquemment, la proposition 4.1 nous assure également que cette loi de commande linéarise correctement le système.

Remarque 4.1: *Grâce à la propriété* 2.5, *la seule matrice qui doit être inversée dans la loi de commande* (4.16) *est constante. Cette dernière peut donc être préalablement inversée de façon à ce qu'il n'y ait aucune matrice à inverser lors de l'implantation en temps réel. Ainsi, cette loi commande est, à toute fin pratique, du même ordre de*

complexité de calcul qu'une loi de commande de type couple pré-calculé régulièrement utilisée pour la commande des manipulateurs rigides.

Vérifions maintenant la stabilité de la dynamique décrite par la relation (4.11). Pour ce faire, il suffit de choisir la fonction de Lyapunov suivante $v = \frac{1}{2}\dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e + \frac{1}{2} q_e^T K_e q_e$ de sorte que $\dot{v} = -\dot{q}_e^T F_e \dot{q}_e$. Parce que selon l'hypothèse 2.6, F_e est symétrique et définie positive, le théorème de Lasalle nous permet de conclure que la dynamique décrite par la relation (4.11) est asymptotiquement stable. Grâce à la proposition 4.2, la loi de commande (4.6) suivie de la loi de commande (4.9) assurent donc la stabilité exponentielle des erreurs de suivi dans l'espace des CGR et une dynamique interne bornée. Malheureusement, notre objectif n'est pas d'obtenir le suivi dans l'espace des CGR mais plutôt dans l'espace des CGRV. Pour surmonter ce problème, considérons maintenant une linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRV.

4.2.2 Linéarisation par rapport aux CGRV

Pour que la linéarisation par retour d'état obtenue par la loi de commande (4.6) soit définie par rapport aux CGRV, il suffit de choisir α=1. La dynamique décrite par la relation (4.11) est dans ce cas habituellement instable. La dynamique interne est alors non bornée. Pour résoudre ce problème, De Luca et Lucibello (1993) proposent premièrement de calculer la trajectoire désirée des CGF qui correspond à la trajectoire désirée des CGRV et deuxièmement de stabiliser localement les erreurs de suivi des CGRV et des CGF. Cette approche ne s'applique cependant qu'à des manipulateurs et des trajectoires désirées très spécifiques.

4.2.3 Linéarisation par rapport aux CGRVA

Pour que la linéarisation par retour d'état soit définie par rapport aux CGRVA, il suffit de choisir α entre zéro et un. La matrice $\boldsymbol{M}_e^*$ doit alors être non singulière pour que la loi de commande donnée par la relation (4.6) soit bien définie. Grâce à la proposition 4.1, cette condition permet également d'assurer que la loi de commande linéarise correctement le système. Heureusement, la non singularité de la matrice $\boldsymbol{M}_e^*$ est très facilement vérifiable puisque $\boldsymbol{M}_e^* = \boldsymbol{M}_e - \alpha\, {}^2\boldsymbol{M}_{re}^T\, {}^2\Gamma$ et que $\boldsymbol{M}_e$ et ${}^2\boldsymbol{M}_{re}^T\, {}^2\Gamma$ sont des matrices constantes.

Ainsi, avec ce choix de sorties, plus α est près de un plus les CGRVA sont semblables aux CGRV et plus on se rapproche d'un suivi dans l'espace des CGRV. Le problème est que lorsque α est trop près de un, le système est à non-minimum de phase. L'idée que plusieurs auteurs ont utilisée pour contourner ce problème est de choisir α de façon à ce que la dynamique des zéros soit à la limite de la stabilité (De Luca et Siciliano, 1989; Yim, 1994). Avec cette approche, la meilleure approximation du suivi de trajectoire dans l'espace des CGRV est obtenue avec une dynamique des zéros asymptotiquement stable. La dynamique interne est alors habituellement bornée. En général, la dynamique des zéros est non linéaire et sa stabilité peut être difficilement caractérisée par le paramètre α. Des approximations numériques sont alors appliquées pour déterminer α (Yim, 1994). Pour notre classe de manipulateurs flexibles, cette procédure est grandement simplifiée grâce à la proposition 4.2. En effet, cette proposition établit que la dynamique interne est bornée si la dynamique décrite par la relation (4.11) est asymptotiquement stable. Or, la dynamique décrite par la relation (4.11) est linéaire. On peut donc, en quelque itérations, trouver une valeur de α qui est relativement proche de la marge de stabilité. De plus,

nous verrons au chapitre V que cette particularité nous permettra d'assurer une dynamique interne robustement bornée par rapport à l'incertitude de la charge.

4.2.3.1 Simulation de la loi de commande

Nous allons maintenant simuler la loi de commande décrite par les relations (4.6) et (4.9) en considérant le manipulateur flexible de la section 2.5 et la trajectoire désirée de la section 3.4. Pour ce faire, nous avons d'abord trouvé la valeur maximum de α qui assure une dynamique interne bornée. Même si cette valeur maximum est 0.93 nous avons choisi de fixer α à 0.88 pour assurer une marge de stabilité de 5%. Puis, pour obtenir un temps de réponse d'environ 0.5 seconde, nous avons choisi les gains de la loi de commande (4.9) de façon à imposer toutes les valeurs propres du système à -10. Nous avons alors simulé le système en considérant les conditions initiales suivantes: les vitesses de toutes les coordonnées généralisées nulles, les CGF nulles et les CGR fixées de façon à obtenir des erreurs de suivi initiales d'une valeur de 0.05 rad (environ 3 degrés). Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 4.1 à 4.3. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Même si les erreurs de suivi obtenues ne sont pas démesurément grandes, la figure 4.2 nous montre clairement que l'extrémité du membre flexible vibre avec une fréquence d'environ 8 Hz. Pour plusieurs applications, cette vibration peut être extrêmement indésirable. L'approche proposée à la section suivante corrige ce problème et assure une convergence plus rapide des erreurs de suivi. En fait, nous verrons que, dans la mesure du possible, la constante de temps associée à la décroissance des erreurs pourra être imposée. Cette approche permettra également de minimiser l'amplitude maximum des valeurs propres de la partie linéaire du système.

Ainsi, les hautes fréquences de vibration de la poutre flexible, qui ne sont normalement pas prises en compte dans la modélisation, seront davantage atténuées.

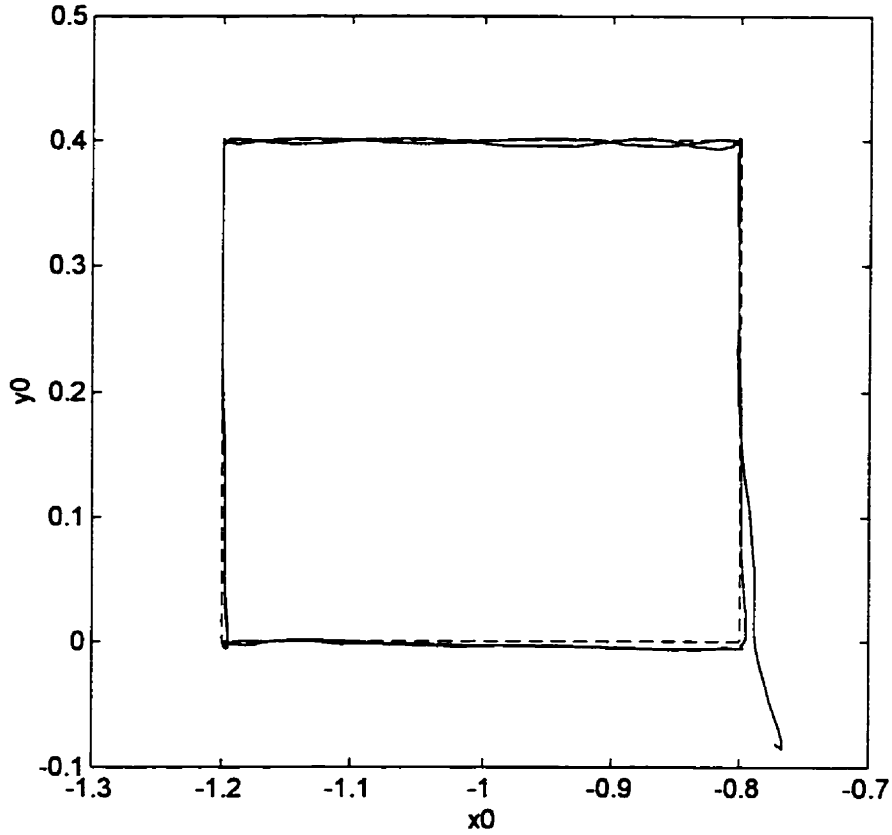


Figure 4.1 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

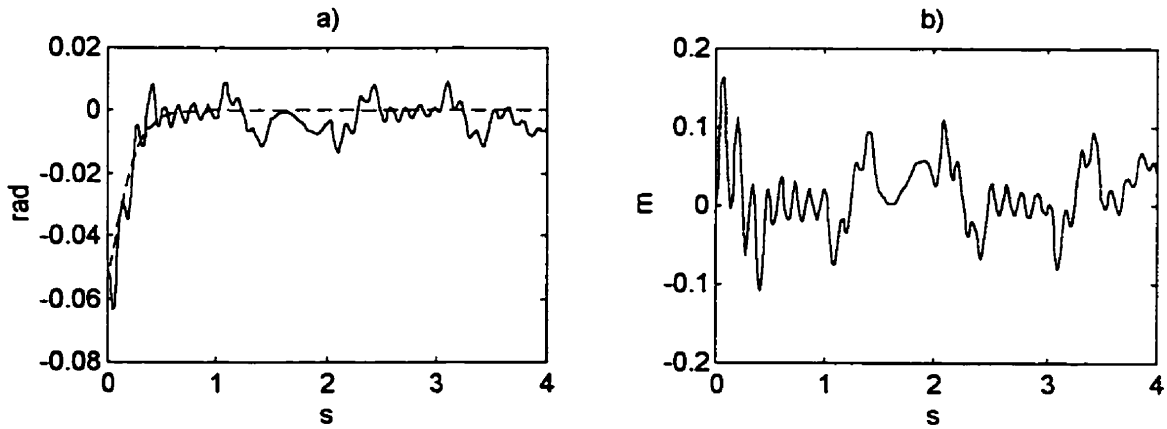


Figure 4.2 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) déformation μ.

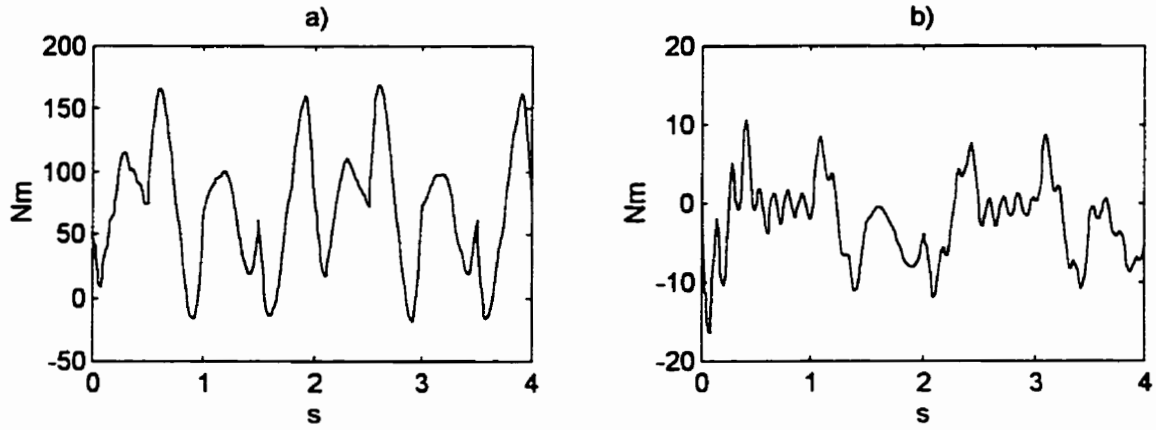


Figure 4.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

4.3 Stratégie de commande proposée

La stratégie de commande proposée dans cette section consiste d'abord à transformer la trajectoire désirée de l'espace de travail à l'espace des CGRV puis, de l'espace des CGRV à celui des CGR et des CGF. Ces transformations sont décrites en détail à la section 3.3. L'objectif est alors de trouver une loi de commande qui stabilise les erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGVR. Pour ce faire, une loi de commande qui linéarise le système par rapport aux CGR est d'abord considérée parce qu'elle assure aisément une dynamique interne bornée. La dynamique linéarisée par rapport aux CGR est alors divisée en deux parties: la dynamique des n_r-1 premières CGR que nous appelerons ***partie rigide partielle*** (PRP), et la dynamique de la dernière CGR et des CGF que nous appellerons ***partie flexible augmentée*** (PFA). Même si la dernière CGR n'est pas une variable utilisée pour modéliser la flexibilité, nous l'avons regroupé avec les CGF parce que toutes ces coordonnés généralisées sont commandées par la même entrée. Dans ce contexte, il est fort simple de définir une loi de commande linéaire qui stabilise les erreurs de suivi de la

PRP. D'autre part la stabilisation des erreurs de suivi de la PFA est plus complexe parce que sa dynamique est non linéaire et couplée avec la PRP. Par surcroît, si on considère ce couplage comme une perturbation, cette dernière n'est malheureusement pas reproductible par l'entrée (elle ne satisfait pas le "matching condition"). Les méthodes classiques de commande non linéaire robuste (Khalil, 1992) ne peuvent donc être utilisées pour stabiliser ce système. Nous verrons toutefois que cette stabilisation peut être assurée grâce à une simple loi de commande linéaire. En effet, le théorème de passivité, le théorème de stabilité des systèmes hiérarchiques et une formulation du problème sous la forme d'IML, nous permettront de calculer les gains de cette loi de commande de façon à assurer la stabilité du système et une vitesse de convergence souhaitable des erreurs de suivi. En bref, la stratégie de commande proposée est illustrée par la figure 4.4.

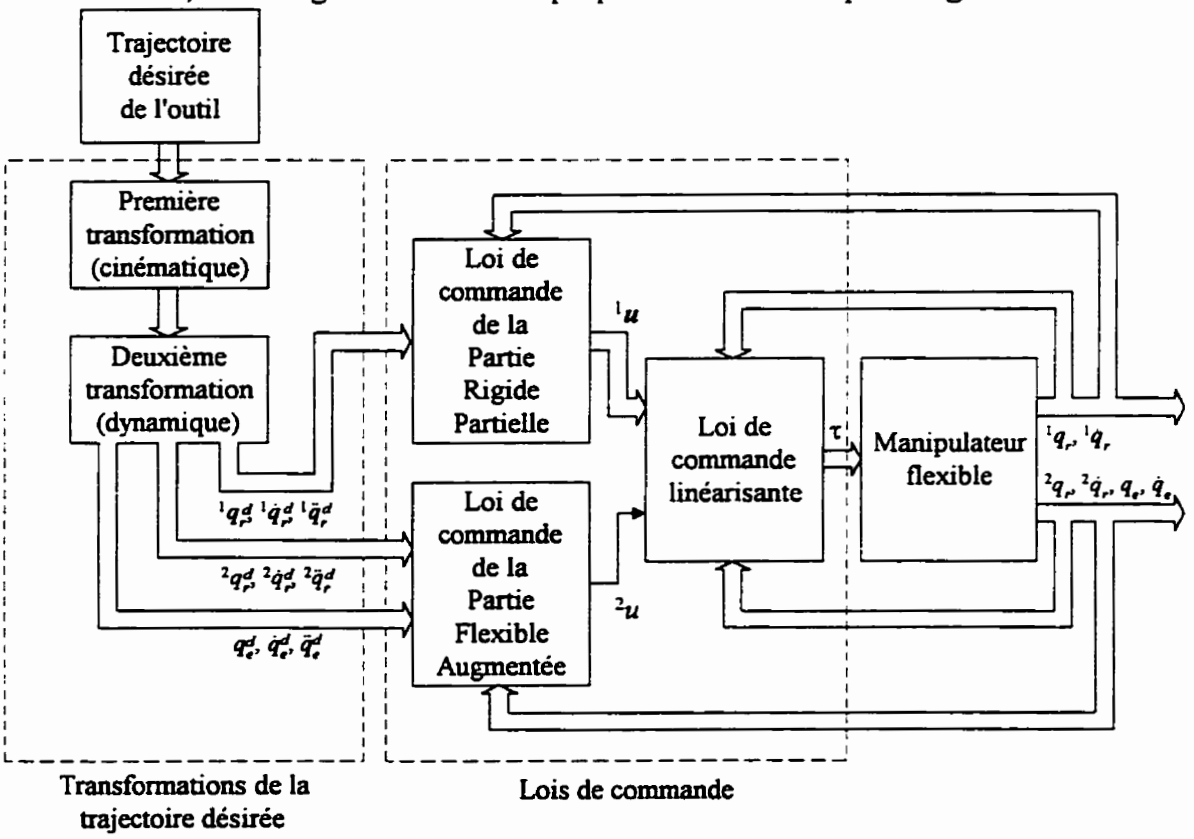


Figure 4.4 Stratégie de commande proposée.

4.3.1 Lois de commande

La première loi de commande, qui est donnée par la relation (4.16), linéarise le système par rapport aux CGR. Le système prend alors la forme donnée par les relations (4.7) et (4.8) avec $\alpha = 0$. Selon les relations (4.2) et (4.3), cette dynamique peut être réécrite sous la forme suivante:

$$ {}^{1}\ddot{q}_r = {}^{1}u \tag{4.18} $$

$$ {}^{2}\ddot{q}_r = {}^{2}u \tag{4.19a} $$

$$ \ddot{q}_e = -M_e^{-1}\left[F_e\dot{q}_e + K_e q_e + G_e(q_r) + {}^{1}V_{er}(q_r, {}^{1}\dot{q}_r)\,{}^{1}\dot{q}_r + {}^{1}M_{re}^{T}(q_r)\,{}^{1}u + {}^{2}M_{re}^{T}\,{}^{2}u\right] \tag{4.19b} $$

Selon ce qui a été mentionné dans le paragraphe précédent, la relation (4.18) représente la dynamique de la PRP tandis que la relation (4.19) représente celle de la PFA. Les variables ${}^{1}u$ et ${}^{2}u$ sont donc les nouvelles variables de commande de la PRP et de la PFA. Obtenons maintenant la dynamique des erreurs de suivi de la PRP. Pour ce faire, on soustrait l'accélération désirée des n_r-1 premières CGR de part et d'autre de la relation (4.18). La dynamique des erreurs de suivi de la PRP prend alors la forme suivante:

$$ {}^{1}\ddot{\tilde{q}}_r = {}^{1}\ddot{q}_r^{d} - {}^{1}u \tag{4.20} $$

où ${}^{1}\ddot{q}_r^{d}$ est l'accélération désirée des n_r-1 premières CGR et ${}^{1}\ddot{\tilde{q}}_r = {}^{1}\ddot{q}_r^{d} - {}^{1}\ddot{q}_r$ est le vecteur des erreurs de suivi des accélérations des n_r-1 premières CGR. Les erreurs de suivi de la PRP peuvent alors être facilement stabilisées grâce à la loi de commande suivante:

$$ {}^{1}u = {}^{1}\ddot{q}_r^{d} + K_{1d}\,{}^{1}\dot{\tilde{q}}_r + K_{1p}\,{}^{1}\tilde{q}_r \tag{4.21} $$

où ${}^{1}q_r^{d}$ est la trajectoire désirée des n_r-1 premières CGR, ${}^{1}\tilde{q}_r = {}^{1}q_r^{d} - {}^{1}q_r$ est le vecteur des erreurs de suivi et K_{1d} ainsi que K_{1p} sont des matrices de gains qui doivent être symétriques et définies positives. La PRP peut ainsi être modélisée comme suit:

$$ \dot{x}_1 = \overline{A}_1 x_1 \tag{4.22} $$

où le polynôme caractéristique de la matrice $\overline{A}_1$ est Hurwitz et où $x_1^T = \left[{}^1\bar{q}_r^T \quad {}^1\dot{\bar{q}}_r^T \right]$.

Trouvons maintenant la dynamique des erreurs de suivi de la PFA. Pour ce faire, soustrayions d'abord l'accélération désirée de la dernière CGR de part et d'autre de la relation (4.19a). Puis nous savons que la trajectoire désirée des CGR et des CGF est solution de la relation (3.8) dans laquelle la perturbation P_2 peut être nulle ou non nulle. En effet, P_2 est nulle si la transformation de la trajectoire désirée de l'espace des CGRV à celle des CGR et des CGF est obtenue par la méthode exacte et non nulle si la transformation est obtenue par la méthode quasi-statique. Pour obtenir les erreurs de suivi de la partie flexible, nous effectuons donc la différence entre les relations (3.8) et (4.19b). La dynamique des erreurs de suivi de la PFA est alors donnée par la relation suivante:

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2({}^2\ddot{q}_r^d - {}^2u) - \overline{B}_2 g_0(t) + \overline{B}_2 P_2(t) \tag{4.23}$$

où

$$x_2 = \begin{bmatrix} {}^2\bar{q}_r \\ {}^2\dot{\bar{q}}_r \\ \bar{q}_e \\ \dot{\bar{q}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2q_r^d - {}^2q_r \\ {}^2\dot{q}_r^d - {}^2\dot{q}_r \\ q_e^d - q_e \\ \dot{q}_e^d - \dot{q}_e \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -M_e^{-1}K_e & -M_e^{-1}F_e \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -M_e^{-1}\,{}^2M_{re}^T \end{bmatrix}, \; \overline{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_e^{-1} \end{bmatrix},$$

$$g_0(t) = {}^1M_{re}^T(q_r^d)\,{}^1\ddot{q}_r^d - {}^1M_{re}^T(q_r)\,{}^1u + {}^1V_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d - {}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r)\,{}^1\dot{q}_r + G_e(q_r^d) - G_e(q_r)$$

et où P_2 est nulle lorsque la transformation de la trajectoire est obtenue par la méthode exacte et est définie à la relation 3.8 lorsque la transformation est obtenue par la méthode quasi-statique. En remplaçant ${}^1\dot{q}_r = {}^1\dot{q}_r^d - {}^1\dot{\bar{q}}_r$ et en utilisant la propriété 2.10, g_0(t) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$g_0(t) = {}^1M_{re}^T(q_r)\left({}^1\ddot{q}_r^d - {}^1u\right) + 2\,{}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{\bar{q}}_r - {}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{\bar{q}}_r)\,{}^1\dot{\bar{q}}_r$$
$$\quad {}^1M_{re}^T(q_r^d)\,{}^1\ddot{q}_r^d - {}^1M_{re}^T(q_r)\,{}^1\ddot{q}_r^d + {}^1V_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d - {}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d + G_e(q_r^d) - G_e(q_r) \tag{4.24}$$

La perturbation $g_o(t)$ est bornée par rapport à x_1 uniformément par rapport à t puisqu'elle dépend seulement des trois ensembles de variables suivants: 1) la trajectoire désirée qui

est supposée uniformément bornée; 2) les vecteurs ${}^1q_r$ et ${}^1\dot{q}_r$ qui sont bornés puisque x_1 est exponentiellement stable grâce à la loi de commande (4.21); 3) le scalaire ${}^2q_r$ qui est sollicité seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales (propriétés 2.6 , 2.9 et 2.11).

Remarque 4.1: *Dans la relation (4.23), la perturbation g_o ne satisfait pas la condition de reproductibilité ("matching condition"). Pour cette raison, les méthodes classiques de commande robuste non linéaire* (Khalil, 1992, p.304) *ne peuvent être utilisées pour assurer la stabilité asymptotique du système.*

4.3.2 Stabilité des erreurs de suivi

Dans les paragraphes qui suivent nous verrons que, malgré la remarque 4.1, la stabilité du système peut être assurée avec une décroissance exponentielle des erreurs grâce à une simple loi de commande linéaire de la forme suivante:

$$ {}^2u = {}^2\ddot{q}_r^d + K_2 x_2 \tag{4.25} $$

où ${}^2\ddot{q}_r^d$ est l'accélération désirée de la dernière CGR. Mais pour l'instant, nous allons démontrer que la matrice de gain K_2 peut facilement être obtenue de façon à ce que les erreurs de suivi soient ultimement bornées.

Proposition 4.1: *Si la matrice de gains K_2 est choisie de façon à ce que le polynôme caractéristique de $(A_2 - B_2K_2)$ soit Hurwitz, alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR des CGF et des CGRV est ultimement bornée.*

Preuve de la proposition 4.1: Parce que le polynôme caractéristique de $(A_2 - B_2K_2)$ est Hurwitz par hypothèse, la dynamique des erreurs de suivi de la PFA, donnée par la

relation (4.23), prend la forme d'un système linéaire exponentiellement stable perturbé par g_o et P_2. Or, g_o est bornée et, puisque x_1 est exponentiellement stable, la borne de g_o devient indépendante de x_1 lorsque t tend vers l'infini. La perturbation P_2 est également bornée puisqu'elle est fonction de la trajectoire désirée lorsque la transformation est obtenue par la méthode quasi-statique et nulle lorsque la transformation est obtenue par la méthode exacte. De façon similaire à la preuve de la proposition 4.2, on peut alors démontrer que les erreurs de suivi de la PFA sont ultimemement bornées. Finalement, les erreurs de suivi des CGRV et de leurs dérivées sont certainement bornées de la même façon puisque selon les relations (3.1) et (3.7), ces erreurs sont une combinaison linéaire des CGR, des CGF et de leurs dérivées perturbées par P_1 qui est nulle ou bornée de la même façon que P_2. □

La borne ultime des erreurs de suivi dépend d'une part de la perturbation g_0 et d'autre part des perturbations P_1 et P_2. Pour leur part, les perturbations P_1 et P_2 ne peuvent occasionner une borne ultime démesurée. Elles ne peuvent qu'inciter la borne ultime à être proportionnelle aux erreurs de transformation de la trajectoire désirée qui surviennent lorsque la méthode quasi-statique est utilisée. D'autre part, la perturbation g_0, qui dépend de la variable d'état ${}^2q_r$ par l'entremise de fonctions sinusoïdales, peut déstabiliser localement le système. Même si dans ce cas, les erreurs restent bornées, la borne ultime peut être tellement grande que le système apparaisse, à toute fin pratique, comme un système instable. À la section 4.3.4, un exemple illustre cette situation. Pour surmonter ce problème, nous allons contraindre le choix de la matrice des gains de la loi de commande (4.25) de façon à obtenir un système exponentiellement stable perturbé seulement par P_1 et P_2. La borne ultime des erreurs de suivi sera alors proportionnelle aux erreurs introduites par la transformation de la trajectoire désirée lorsque la méthode

quasi-statique sera utilisée et nulle lorsque ce sera la méthode exacte qui sera utilisée. Les erreurs de suivi seront alors exponentiellement stables ou, comme l'explique la définition 4.1, exponentiellement ultimement bornées.

Définition 4.1: *Un système est exponentiellement ultimement borné si et seulement si il existe* $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ *telles que le vecteur d'état du système respecte la condition suivante*:

$$|x(t)| \leq \alpha_0 |x(t_0)| e^{-(t-t_0)/\tau} + \alpha_1$$

où $x(t_0)$ *est la condition initiale et* α_1 *est la borne ultime.* □

Pour obtenir ce résultat, utilisons d'abord les propriétés 2.6, 2.9 et 2.11 pour réécrire $g_0(t)$ de la façon suivante:

$$g_0(t) = g_1(t) + g_2(t) \tag{4.26a}$$

où

$$\begin{aligned} g_1(t) = {}&{}^1M_{rr}^T(q_r)\left({}^1\ddot{q}_r^d - {}^1u\right) + 2\,{}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{\bar{q}}_r - {}^1V_{er}(q_r, {}^1\dot{\bar{q}}_r)\,{}^1\dot{\bar{q}}_r + \bar{f}_0({}^1q_r^d, t) - \bar{f}_0({}^1q_r, t) \\ &+ \left(\bar{f}_1({}^1q_r^d, t) - \bar{f}_1({}^1q_r, t)\right)\sin({}^2q_r) + \left(\bar{f}_2({}^1q_r^d, t) - \bar{f}_2({}^1q_r, t)\right)\cos({}^2q_r) \\ &+ \left(\bar{f}_3({}^1q_r^d, t) - \bar{f}_3({}^1q_r, t)\right)\sin(2\,{}^2q_r) + \left(\bar{f}_4({}^1q_r^d, t) - \bar{f}_4({}^1q_r, t)\right)\cos(2\,{}^2q_r) \end{aligned} \tag{4.26b}$$

$$\begin{aligned} g_2(t) = {}&{}\bar{f}_1({}^1q_r^d, t)\left(\sin({}^2q_r^d) - \sin({}^2q_r)\right) + \bar{f}_2({}^1q_r^d, t)\left(\cos({}^2q_r^d) - \cos({}^2q_r)\right) \\ &+ \bar{f}_3({}^1q_r^d, t)\left(\sin(2\,{}^2q_r^d) - \sin(2\,{}^2q_r)\right) + \bar{f}_4({}^1q_r^d, t)\left(\cos(2\,{}^2q_r^d) - \cos(2\,{}^2q_r)\right) \end{aligned} \tag{4.26c}$$

et où les fonctions $\bar{f}_i$ sont définies à la relation (3.10). Le lecteur pourra remarquer que ces fonctions dépendent directement du temps t seulement par l'entremise de la trajectoire désirée. Nous allons maintenant réexprimer g_1 et g_2 de façon à faire ressortir leurs dépendances respectives aux erreurs de suivi des n_r-1 premières CGR (PRP) et de la dernière CGR (PFA). Pour ce faire, remplaçons la relation (4.21) dans l'expression

(4.26b) et utilisons le théorème des accroissements finis ("mean value theorem") pour obtenir:

$$g_1(x_1,t) = -{}^1M_{re}^T(q_r)\left(K_{1d}\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r + K_{1p}\,{}^1\tilde{q}_r\right) + 2\,{}^1V_{er}(q_r,{}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r - {}^1V_{er}(q_r,{}^1\dot{\tilde{q}}_r)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r + \left[Q_0(t)\right.$$
$$\left. + Q_1(t)\sin({}^2q_r) + Q_2(t)\cos({}^2q_r) + Q_3(t)\sin(2\,{}^2q_r) + Q_4(t)\cos(2\,{}^2q_r)\right]{}^1\tilde{q}_r \quad (4.27)$$

où x_1 est défini à la relation (4.22),

$$Q_i(t) = \left.\frac{\partial \bar{f}_i({}^1q_r^d,t)}{\partial\,{}^1q_r^d}\right|_{{}^1q_r^d = z_i(t)}$$

et

$$z_i(t) \in \left\{z(t) \,|\, z(t) = \alpha\,{}^1q_r^d(t) + (1-\alpha)\,{}^1q_r(t); 0 < \alpha < 1\right\}$$
$$= \left\{z(t) \,|\, z(t) = {}^1q_r^d(t) - (1-\alpha)\,{}^1\tilde{q}_r(t); 0 < \alpha < 1\right\}$$

Parce que la relation (4.27) est dérivable partout par rapport à x_1, parce qu'elle dépend de t seulement par l'entremise de la trajectoire désirée et de ${}^2q_r$(t) et parce que ${}^2q_r$(t) est sollicité seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales (propriétés 2.6 et 2.9), il est clair que pour n'importe quelle constante ϑ_1 positive bornée, il existe une constante positive bornée ϑ_2 telle que

$$\sup_{t>0}\sup_{|x_1|_2<\vartheta_1}\left|\frac{\partial g_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right|_2 \le \vartheta_2 \quad (4.28a)$$

Selon la relation (4.27), il est également clair que

$$g_1(0,t) = 0 \quad (4.28b)$$

La relation (4.28) sera très utile pour simplifier l'étude de stabilité de notre système. Mais auparavant, nous devons réexprimer g_2 de façon à faire ressortir sa dépendance à l'erreur de suivi de ${}^2q_r$. Pour ce faire, nous utilisons de nouveau le théorème des accroissements finis ("mean value theorem"). La perturbation g_2 prend alors la forme suivante:

$$g_2({}^2\tilde{q}_r,t) = \left[\left.\frac{\partial g_2(t)}{\partial\,{}^2q_r^d}\right|_{{}^2q_r^d = z(t)}\,{}^2\tilde{q}_r\right] = Q(t)\;{}^2\tilde{q}_r \quad (4.29a)$$

où $z(t) \in \{\zeta(t) | \zeta(t) = \alpha\ {}^2q_r^d(t) + (1-\alpha)\ {}^2q_r(t); 0 < \alpha < 1\}$ et où la matrice $Q(t)$ est uniformément bornée puisqu'elle dépend de la trajectoire désirée qui est uniformément bornée et de $z(t)$ qui intervient seulement par l'entremise de fonctions sinusoïdales. Ainsi,

$$\sup_{t>0} |Q(t)|_2 = \gamma < \infty. \tag{4.29b}$$

Grâce à la décomposition de la perturbation g_o, la dynamique décrite par la relation (4.23) et la loi de commande (4.25) peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \overline{A}_2 x_2 + \overline{B}_2 \overline{u} - \overline{B}_2 g_1(x_1, t) + \overline{B}_2 P_2(t) \\ y &= \overline{C}_2 x_2 \quad , \quad \overline{u} = -g_2(y, t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

où $\overline{A}_2 = A_2 - B_2 K_2$ et $\overline{C}_2 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$. Intuitivement, la stabilité de ce système est indépendante de la perturbation g_1 parce que x_1 est exponentiellement stable de sorte que g_1 tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Notre objectif est alors, non seulement de prouver cette déduction intuitive mais également de montrer que la stabilité de ce système non linéaire peut être déduite seulement à partir de sa partie linéaire commandable et observable. Pour atteindre cet objectif, nous considérons une transformation similaire $\left[\overline{x}_{\bar{c}}^T \quad \overline{x}_{co}^T \quad \overline{x}_{c\bar{o}}^T\right]^T = \overline{T}_2 x_2$ telle que la dynamique décrite par la relation (4.30) puisse prendre la forme suivante (Chen, 1984, p. 204):

$$\dot{\overline{x}}_{\bar{c}} = \overline{A}_{\bar{c}} \overline{x}_{\bar{c}} \tag{4.31}$$

$$\dot{\overline{x}}_{co} = \overline{A}_{co} \overline{x}_{co} + \overline{A}_{21} \overline{x}_{\bar{c}} + \overline{B}_{co} \overline{u} - \overline{B}_{co} g_1(x_1, t) + \overline{B}_{co} P_2(t) \tag{4.32}$$

$$\dot{\overline{x}}_{c\bar{o}} = \overline{A}_{c\bar{o}} \overline{x}_{c\bar{o}} + \overline{A}_{31} \overline{x}_{\bar{c}} + \overline{A}_{12} \overline{x}_{co} + \overline{B}_{c\bar{o}} \overline{u} - \overline{B}_{c\bar{o}} g_1(x_1, t) + \overline{B}_{c\bar{o}} P_2(t) \tag{4.33}$$

$$y = \overline{C}_{co} \overline{x}_{co} + \overline{C}_{\bar{c}} \overline{x}_{\bar{c}} \quad , \quad \overline{u} = -g_2(y, t) \tag{4.34}$$

où l'indice co indique la partie commandable et observable, l'indice $c\bar{o}$ indique la partie commandable et non observable et l'indice $\bar{c}$ indique la partie non commandable. La proposition suivante établit alors le résultat cherché.

Proposition 4.2: *Si la transformation de la trajectoire désirée est obtenue à partir de la méthode (exacte) ((quasi-statique)), la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est (exponentiellement stable) ((exponentiellement ultimement bornée)) pour n'importe quelle condition initiale bornée si et seulement si:* i) *dans la relation* (4.30), *le polynôme caractéristique de* $\overline{A}_2$ *est Hurwitz et* ii) *la dynamique linéaire commandable et observable extraite des relations* (4.31) *à* (4.34) *et donnée par*

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_{co} &= \overline{A}_{co}\overline{x}_{co} + \overline{B}_{co}\overline{u} \\ y &= \overline{C}_{co}\overline{x}_{co} \quad , \quad \overline{u} = -g_2(y,t) \end{aligned} \tag{4.35}$$

est exponentiellement stable pour n'importe quelle condition initiale bornée. □

Pour prouver la proposition 4.2, nous avons besoin du résultat suivant qui porte sur la stabilité des systèmes hiérarchiques.

Lemme 4.1: *Soit le système hiérarchique décrit par la relation suivante*:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_1 &= f_1(\overline{x}_1,t) + p_1(t) \\ \dot{\overline{x}}_2 &= f_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2,t) + p_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{\overline{x}}_\ell &= f_\ell(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_\ell,t) + p_\ell(t) \end{aligned} \tag{4.36}$$

où les f_i *sont des fonctions continûment différentiables par rapport à* $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_i$ *et* t *et où les* p_i *sont des perturbations. Si on suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées*:

i) $$f_1(0,t) = 0,\ f_2(0,0,t) = 0,\ \ldots,\ f_\ell(0,0,\cdots,0,t) = 0 \tag{4.37}$$

ii) $\forall \vartheta_1$ *positive bornée, il existe une constante* ϑ_2 *positive bornée telle que*

$$\sup_{t>0}\sup_{|\bar{x}_1|_2<\vartheta_1}\left|\frac{\partial f_2(\bar{x}_1,t)}{\partial \bar{x}_1}\right|_2 \le \vartheta_2 \;,\cdots,\; \sup_{t>0}\sup_{\left\|\bar{x}_1^T\ \bar{x}_2^T\ \cdots\ \bar{x}_\ell^T\right\|_2<\vartheta_1}\left|\frac{\partial f_\ell(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_\ell,t)}{\partial\left[\bar{x}_1^T\ \ \bar{x}_2^T\ \ \cdots\ \ \bar{x}_\ell^T\right]^T}\right|_2 \le \vartheta_2$$

alors, si ($p_i = 0$) ((p_i *est uniformément bornée*)) *pour* $i = 1,\cdots,\ell$, *le système hiérarchique décrit par la relation* (4.36) *est* (*exponentiellement stable*) ((*exponentiellement ultimement borné*)) *pour n'importe quelle condition initiale bornée si et seulement si la dynamique décrite par la relation* (4.38) *est exponentiellement stable pour n'importe quelle condition initiale bornée*.

$$\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1,t) \quad , \quad \dot{\bar{x}}_2 = f_2(0,\bar{x}_2,t) \quad ,\cdots, \quad \dot{\bar{x}}_\ell = f_\ell(0,0,\ldots,\bar{x}_\ell,t) \qquad (4.38)$$

Preuve du lemme 4.1: La preuve du lemme 4.1 est donnée à l'annexe B de cette thèse. Quoiqu'adapté pour le contexte de notre étude, ce lemme est similaire au résultat présenté dans Vidyasagar (1993, p.261).

Preuve de la proposition 4.2: La proposition 4.2 peut être prouvée en appliquant directement le résultat du lemme 4.1. En effet, en posant $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_{\bar{c}}$, $\bar{x}_3 = \bar{x}_{co}$, $\bar{x}_4 = \bar{x}_{c\bar{o}}$, $f_1(\bar{x}_1,t) = A_1\bar{x}_1$, $f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,t) = \bar{A}_{\bar{c}}\bar{x}_2$, $f_3(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,t) = \bar{A}_{co}\bar{x}_3 - \bar{B}_{co}Q(t)\bar{C}_{co}\bar{x}_3 - \bar{B}_{co}Q(t)\bar{C}_{\bar{c}}\bar{x}_2 + \bar{A}_{21}\bar{x}_2 - \bar{B}_{co}g_1(\bar{x}_1,t)$, $f_4(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4,t) = \bar{A}_{c\bar{o}}\bar{x}_4 + \bar{A}_{31}\bar{x}_2 + \bar{A}_{12}\bar{x}_3 - \bar{B}_{c\bar{o}}Q(t)\bar{C}_{\bar{c}}\bar{x}_2 - \bar{B}_{c\bar{o}}Q(t)\bar{C}_{co}\bar{x}_3 - \bar{B}_{c\bar{o}}g_1(\bar{x}_1,t)$, $p_1(t) = p_2(t) = 0$, $p_3(t) = \bar{B}_{co}P_2(t)$ et $p_4(t) = \bar{B}_{c\bar{o}}P_2(t)$, la dynamique décrite par l'équation (4.22) et les équations (4.31) à (4.34) est de la forme de celle décrite par la relation (4.36). Les conditions i) et ii) du lemme 4.1 sont alors satisfaites grâce aux équations (4.28) et (4.29). Il suffit donc de prouver la dynamique décrite par la relation (4.38) est exponentiellement stable si et seulement si les conditions i et ii sont satisfaites. D'abord les équations caractéristiques de

A_c et $A_{c\bar{o}}$ sont Hurwitz si et seulement si, dans l'équation (4.38), l'équation caractéristique de $\overline{A}$ est Hurwitz. $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(0,\bar{x}_2,t)$ et $\dot{\bar{x}}_4 = f_4(0,0,0,\bar{x}_4,t)$ sont donc exponentiellement stable si et seulement si la condition i est satisfaite. Aussi, nous savons que $\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1,t)$ est exponentiellement stable grâce à la loi de commande (4.21). Finalement, parce que $\dot{\bar{x}}_3 = f_3(0,0,\bar{x}_3,t)$ est la dynamique décrite par la relation (4.35), elle est exponentiellement stable pour n'importe quelle condition initiale bornée si et seulement si la condition ii est satisfaite. Le lemme 4.1 nous permet donc de conclure que si la transformation de la trajectoire désirée est obtenue à partir de la méthode exacte ($\boldsymbol{p}_i(t)=\boldsymbol{P}_1(t)=\boldsymbol{P}_2(t)=\mathbf{0}$), les erreurs de suivi des CGR et des CGF sont exponentiellement stables pour n'importe quelle condition initiale bornée si et seulement si les conditions de la proposition 4.2 sont satisfaites. Puis, il en est de même pour les erreurs de suivi des CGRV puisque dans ce cas, selon les relations (3.1) et (3.7) avec $\boldsymbol{P}_1(t)=\mathbf{0}$, les CGRV sont une combinaison linéaire des CGR et des CGF. Le lemme 4.1 nous permet également de conclure que si la transformation de la trajectoire désirée est obtenue à partir de la méthode quasi-statique ($\boldsymbol{p}_i(t),\boldsymbol{P}_1(t)$ et $\boldsymbol{P}_2(t)$ sont uniformément bornées), les erreurs de suivi des CGR et des CGF sont exponentiellement ultimement bornés pour n'importe quelle condition initiale bornée si et seulement si les conditions de la proposition 4.2 sont satisfaites. Puis, il en est de même pour les erreurs de suivi des CGRV et de leurs dérivées puisque dans ce cas, les erreurs des CGRV et de leurs dérivées sont une combinaison linéaire des erreurs des CGR, des CGF et de leurs dérivées perturbées par $\boldsymbol{P}_1(t)$. □

La stabilité du système peut maintenant être assurée par une condition suffisante beaucoup plus simple si on utilise le théorème de passivité. Une interprétation particulière du théorème de passivité est donnée par le lemme suivant.

Lemme 4.2: *Si pour le système décrit par la relation* (4.35), *on considère que* $G_{co}(s)$ *est la matrice de transfert correspondant à la représentation d'états* $(\overline{A}_{co}, \overline{B}_{co}, \overline{C}_{co}, 0)$ et γ *est définie par la relation* (4.29b), *alors, le système décrit par la relation* (4.35) *est globalement exponentiellement stable si* i) $(\overline{A}_{co}, \overline{B}_{co}, \overline{C}_{co}, 0)$ *est une réalisation minimale et* ii) $\gamma \|G_{co}\|_\infty < 1$. □

Le lemme 4.2 peut également être interprété comme une application spécifique du théorème du petit gain. La preuve de ce lemme est donnée sous la forme d'un exemple dans Khalil (1992, p.245). Le lecteur pourra cependant remarquer que même si dans cette référence, l'auteur parle de stabilité absolue (globale, uniforme et asymptotique), il n'en demeure pas moins que les conditions invoquées sont suffisantes pour assurer une stabilité exponentielle. Le lecteur pourra également remarquer que contrairement à ce qui est présenté dans Khalil, le système décrit par la relation (4.35) n'est pas carré (i.e. le nombre de sorties n'est pas égal au nombre d'entrées). Cette particularité n'affecte en rien le résultat donné par le lemme 4.2. En effet, cette particularité peut être éliminée en complétant le système par un vecteur de sorties y_2 nul de façon à le rendre carré. Les conditions du lemme 4.2 ne sont alors modifiées d'aucune façon.

En appliquant le résultat du lemme 4.2 à la proposition 4.2, nous obtenons la proposition suivante qui fournit un moyen très simplifié de vérifier la stabilité du système.

Proposition 4.3: *Si* i) *l'équation caractéristique de* $\overline{A}_2$ *est Hurwitz et* ii) $\gamma \|G\|_\infty < 1$ où $G(s)$ est *la matrice de transfert de la partie linéaire du système décrit par la relation* (4.30) *et* γ *est la constante définie par la relation* (4.29b), *alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est* (*exponentiellement stable*)

((*exponentiellement ultimement bornée*)) *pour n'importe quelle condition initiale bornée si la transformation de la trajectoire désirée est obtenue à partir de la méthode* (*exacte*) ((*quasi-statique*)). □

Preuve de la proposition 4.3: La première condition de la proposition 4.2 est satisfaite puisque l'équation caractéristique de $\overline{A}_2$ est Hurwitz par hypothèse. Il reste à vérifier la stabilité de la dynamique décrite par la relation (4.35). Pour ce faire, il suffit de vérifier les hypothèses du lemme 4.2. D'abord, la réalisation associée à la dynamique décrite par la relation (4.35) est minimale puisqu'elle est commandable et observable. Puis, parce que la matrice de transfert associée à la partie commandable et observable est la même que celle du système complet et parce qu'elle est insensible aux transformations de similarité, la condition $\gamma\|G_{co}\|_\infty < 1$ est équivalente à celle de la proposition 4.3. □

4.3.3 Optimisation du temps de réponse

Le problème consiste maintenant à trouver une matrice de gains K_2 qui satisfait les conditions de stabilité de la proposition 4.3 et qui assure une bonne performance au niveau du suivi de la trajectoire (Bigras et al., 1995b). En d'autres termes, si on considère que Ξ est l'ensemble de toutes les matrices de gains K_2 qui satisfont les conditions de stabilité de la proposition 4.3, l'objectif est de trouver $K_2 \in \Xi$ de façon à minimiser un certain critère de performance. Évidemment, ce problème d'optimisation ne peut être résolu que si l'ensemble Ξ existe. C'est justement l'objet de la proposition suivante (Bigras et al., 1996).

Proposition 4.4: *Il existe un ensemble connecté* Ξ *tel que* $\forall K_2 \in \Xi$ *les conditions de la proposition* 4.3 *sont satisfaites.*

Preuve de la proposition 4.4: D'abord le lemme 3.1 nous indique que les conditions de stabilité de la proposition 4.3 équivalent à ce que la matrice $\overline{A}_2$ possède seulement des valeurs propres à parties réelles négatives et à ce que la matrice $\overline{H}_2$, définie de la même façon que la matrice H de la relation (3.21), ne possède pas de valeur propre à partie réelle nulle. Ainsi, parce que les valeurs propres de $\overline{A}_2$ et de $\overline{H}_2$ sont des fonctions continues de K_2, il suffit de prouver qu'il existe une matrice de gains K_2^* particulière qui satisfait les conditions de la proposition 4.3 pour prouver l'existence d'un ensemble connecté Ξ^*. Comme matrice de gains particulière, on choisi $K_2^* = \begin{bmatrix}(\lambda_1\lambda_2) & (-\lambda_1 - \lambda_2) & 0 & 0\end{bmatrix}$ où λ_1 et λ_2 sont des nombres réels ou conjugués complexes à parties réelles négatives. Avec ce choix, l'équation caractéristique de $\overline{A}_2$ (équations 4.23 et 4.30), est donnée par

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\Delta_e(\lambda, \eta) \tag{4.39}$$

où $\Delta_e(\lambda)$ est l'équation caractéristique de la matrice suivante:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -M_e^{-1}K_e & -M_e^{-1}F_e \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

Parce que les matrices M_e, K_e et F_e sont symétriques et définies positives, l'équation caractéristique de A_e est Hurwitz. L'équation caractéristique (4.39) est par conséquent Hurwitz. Il suffit alors de prouver que $\gamma\|G\|_\infty < 1$. Sachant que $G(s) = \overline{C}_2\left[s\mathrm{I} - \overline{A}_2\right]^{-1}\overline{B}_2 = \overline{C}_2\left[s\mathrm{I} - (A_2 - B_2K_2^*)\right]^{-1}\overline{B}_2$, où $\overline{A}_2, \overline{B}_2, \overline{C}_2, A_2$ et B_2 sont données par les relations (4.23) et (4.30), il est clair que $G(s)=0$. En effet, parce que les derniers éléments de K_2^* sont nuls, la matrice $\overline{A}_2$ est triangulaire par blocs et cela implique que $\left[s\mathrm{I} - \overline{A}_2\right]$ est également triangulaire par blocs. La structure des matrices

$\overline{B}_2$ et $\overline{C}_2$ est alors telle que $G(s)=0$. À cause de cela, $\gamma\|G\|_\infty = 0 < 1$. Ainsi, pour chaque valeur particulière λ_1^i et λ_2^j il existe un ensemble connecté Ξ_{ij}^*. L'ensemble connecté total Ξ est donc simplement l'union de tous les ensembles Ξ_{ij}^*. □

Comme nous l'avons mentionné dans la preuve de la proposition 4.4, la matrice de gains $K_2 = [(\lambda_1\lambda_2) \quad (-\lambda_1 - \lambda_2) \quad 0 \quad 0]$ satisfait les conditions de stabilité de la proposition 4.3. Malheureusement, avec un tel choix de gains, l'amortissement des erreurs de suivi des CGF est très similaire à l'amortissement naturel de la poutre flexible. Cet amortissement est généralement très faible. En fait, l'hypothèse 2.6 sous entend que l'amortissement de la poutre flexible est faible puisque les amortissements élevés ne peuvent généralement pas être modélisés de façon adéquate par une relation linéaire invariante (PiedBoeuf, 1989). À cause de cela, il convient de choisir la matrice de gains $K_2 \in \Xi$ de façon à augmenter l'amortissement, ou préférablement, de façon à diminuer la constante de temps associée à la décroissance des erreurs de suivi. En fait, nous savons que $\forall K_2 \in \Xi$ le système est exponentiellement stable $\left(\text{i.e.}\,|x(t)| \le \alpha_0 e^{-(t-t_0)/\tau}|x(t_0)|\right)$ ou exponentiellement ultimement borné (Définition 4.1). L'objectif est donc de choisir $K_2 \in \Xi$ de façon à réduire, voir même à imposer, la constante de temps τ. Pour arriver à mieux formuler ce problème d'optimisation, nous allons maintenant caractériser la stabilité du système par rapport à la constante de temps associée à la décroissance des erreurs de suivi. Pour ce faire, considérons d'abord la définition suivante.

Définition 4.2: *On désigne par* (τ_0-*exponentiellement stable*) ((τ_0-*exponentiellement ultimement borné*)) *un système qui est* (*exponentiellement stable*) ((*exponentiellement ultimement borné*)) *avec une constante de temps inférieure ou égale à* τ_0.

La proposition suivante fournit alors une condition suffisante pour garantir que le vecteur des erreurs de suivi est (τ_0-exponentiellement stable) ((τ_0-exponentiellement ultimement borné)).

Proposition 4.5: *Si* i) *les matrices de gains* $\boldsymbol{K}_{1p}$ *et* $\boldsymbol{K}_{1d}$, *associées à la loi de commande* (4.21), *sont choisies de façon à ce que le polynôme caractéristique de* $(\boldsymbol{A}_1 + \mathbf{I}/\tau_0)$ *soit Hurwitz et* ii) *la matrice de gains* $\boldsymbol{K}_2$, *associée à la loi de commande* (4.25), *est choisie de façon à ce que l'équation caractéristique de* $(\overline{\boldsymbol{A}}_2 + \mathbf{I}/\tau_0)$ *soit Hurwitz et de façon à ce que* $\gamma\|\boldsymbol{G}_{\tau_0}\|_\infty < 1$ *où* $\boldsymbol{G}_{\tau_0}(s) = \overline{\boldsymbol{C}}_2\left[s\mathbf{I} - (\overline{\boldsymbol{A}}_2 + \mathbf{I}/\tau_0)\right]^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}_2$ *et* γ *est la constante définie par la relation* (4.29b), *alors, la dynamique des erreurs de suivi des CGR, des CGF et des CGRV est* (τ_0-*exponentiellement stable*) ((τ_0-*exponentiellement ultimement bornée*)) *pour n'importe quelle condition initiale bornée si la transformation de la trajectoire désirée est obtenue à partir de la méthode* (*exacte*) ((*quasi-statique*)).

Preuve de la proposition 4.5: En considérant le changement de variables suivant $\overline{\boldsymbol{x}}(t) = e^{(t-t_0)/\tau_0}\boldsymbol{x}(t)$, souvent utilisé pour assurer une certaine marge de stabilité (Anderson et Moore, 90, pp.60), nous obtenons:

$$|\boldsymbol{x}(t)| \le e^{-(t-t_0)/\tau_0}|\overline{\boldsymbol{x}}(t)|.$$

Il est alors clair que si $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ est (exponentiellement stable) (exponentiellement ultimement bornée)), $\boldsymbol{x}(t)$ est (τ_0-exponentiellement stable) ((τ_0-exponentiellement ultimement bornée)). En substituant ce changement de variable dans les relations (4.22) et (4.30), nous obtenons l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}_1 &= (\boldsymbol{A}_1 + \mathbf{I}/\tau_0)\overline{\boldsymbol{x}}_1 \\
\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}_2 &= (\overline{\boldsymbol{A}}_2 + \mathbf{I}/\tau_0)\overline{\boldsymbol{x}}_2 + \overline{\boldsymbol{B}}_2\overline{\boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{B}}_2\overline{\boldsymbol{g}}_1(\overline{\boldsymbol{x}}_1, t) \\
\overline{\boldsymbol{y}} &= \overline{\boldsymbol{C}}_2\overline{\boldsymbol{x}}_2 \quad , \quad \overline{\boldsymbol{u}} = -\overline{\boldsymbol{g}}_2(\overline{\boldsymbol{y}}, t)
\end{aligned}$$

où $\bar{g}_1(\bar{x}_1,t) = e^{(t-t_0)/\tau_0} g_1(e^{-(t-t_0)/\tau_0}\bar{x}_1,t)$ et $\bar{g}_2(\bar{x}_2,t) = e^{(t-t_0)/\tau_0} g_2(e^{-(t-t_0)/\tau_0}\bar{y},t)$. Ainsi, de façon identique à ce que nous avons obtenu à la relation (4.28), pour n'importe quelle constante ϑ_1 positive bornée, il existe une constante positive bornée ϑ_2 telle que

$$\sup_{t>0} \sup_{|\bar{x}_1|_2<\vartheta_1} \left| \frac{\partial \bar{g}_1(\bar{x}_1,t)}{\partial \bar{x}_1} \right|_2 \leq \vartheta_2$$

Aussi, de la relation (4.29), nous obtenons

$$\bar{g}_2(\bar{y},t) = g_2(y,t).$$

Le reste de la preuve est identique aux preuves des propositions 4.2 et 4.3. □

Parce que les matrices de gains K_{1p} et K_{1d} peuvent très facilement être choisies de façon à imposer arbitrairement l'équation caractéristique de $(A_1 + \mathrm{I}/\tau_0)$, la proposition 4.5 nous permet de formuler notre problème d'optimisation sous la forme suivante:

Minimiser $$\tau_0 - \tau_0^d \tag{4.41a}$$

Sujet à:

$$\begin{aligned} &K_2 \in \Xi_{\tau_0} \\ &\tau_0 - \tau_0^d \geq 0 \end{aligned} \tag{4.41b}$$

où τ_0^d est la constante de temps que l'on souhaite imposer à la décroissance des erreurs et où Ξ_{τ_0} est l'ensemble de toutes les matrices de gains K_2 qui sont telles que le polynôme caractéristique de $(\bar{A}_2 + \mathrm{I}/\tau_0)$ est Hurwitz et que $\gamma\|G_{\tau_0}\|_\infty < 1$. Parce que $\tau_0 = \infty$ implique que $\Xi_{\tau_0} = \Xi$, selon des arguments de continuité similaires à ceux de la preuve de la proposition 4.4, il est clair qu'il existe $\tau_0 < \infty$ telle que Ξ_{τ_0} existe. À cause de cela, la solution du problème d'optimisation (4.41) existe toujours. Ce problème peut cependant être difficile à résoudre parce que l'ensemble Ξ_{τ_0} n'est pas nécessairement convexe. Pour surmonter cette difficulté, nous allons, dans les paragraphes qui suivent, transformer le problème d'optimisation décrit par la relation (4.41) sous la forme d'IML. Le problème

obtenu pourra alors être résolu grâce au "LMI Toolbox" du logiciel MATLAB. Pour obtenir ce problème transformé, considérons d'abord le résultat suivant (Zhou et Khargonekar, 1988).

Lemme 4.3: *Si $G(s)$ est la matrice de transfert correspondant à la représentation d'état $(A,B,C,0)$, alors, les deux énoncés suivants sont équivalents*: i) *l'équation caractéristique de A est Hurwitz et $\gamma\|G\|_\infty < 1$*; ii) *il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que l'inégalité suivante est vérifiée*:

$$PA + A^T P + \gamma^2 PBB^T P + C^T C < 0$$

où $[.] < 0$ *signifie que la matrice* $[.]$ *est définie négative.*

Grâce au lemme 4.3, le problème d'optimisation (4.41) peut se réexprimer sous la forme équivalente suivante:

Minimiser $$\tau_0 - \tau_0^d \tag{4.42a}$$

Sujet à:

$$\begin{aligned} & P_1(A_2 - B_2K_2 + \mathrm{I}/\tau_0) + (A_2 - B_2K_2 + \mathrm{I}/\tau_0)^T P_1 + \gamma^2 P_1\overline{B}_2\overline{B}_2^T P_1 + \overline{C}_2^T\overline{C}_2 < 0 \\ & P_1 > 0 \\ & \tau_0 - \tau_0^d \geq 0 \end{aligned} \tag{4.42b}$$

où $[.] > 0$ signifie que la matrice $[.]$ est définie positive. Pour obtenir les contraintes sous la forme d'IML, on considère d'abord le changement de variables suivant:

$$\eta_1 = -2/\tau_0 \tag{4.43a}$$

$$Y_1 = P_1^{-1} \tag{4.43b}$$

$$W_1 = KP_1^{-1} \tag{4.43c}$$

Le problème d'optimisation (4.42b) peut alors prendre la forme équivalente suivante:

Minimiser η_1

Sujet à:

$$\eta_1 Y_1 - \left(A_2 Y_1 - B_2 W_2 + Y_1 A_2^T - W_2^T B_2^T + \gamma^2 \overline{B}_2 \overline{B}_2^T\right) - Y_1 \overline{C}_2^T \overline{C}_2 Y_1 > 0$$
$$Y_1 > 0$$
$$\eta_1 < 0$$
$$-\tfrac{2}{\tau_0^d} < \eta_1$$

Ce problème d'optimisation peut ensuite être transformé sous forme d'IML en utilisant le complément de Schur. En effet, l'équivalence suivante (Boyd et al., 1993):

$$R > 0 \quad \text{et} \quad Q - SR^{-1}S^T > 0 \ \text{ si et seulement si } \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0$$

où Q et R sont des matrices symétriques, nous permet de transformer notre problème d'optimisation sous la forme équivalente suivante:

Minimiser η_1 (4.44a)

Sujet à:

$$\begin{bmatrix} A_2 Y_1 + Y_1 A_2^T - B_2 W_1 - W_1^T B_2^T + \gamma^2 \overline{B}_2 \overline{B}_2^T & -Y_1 \overline{C}_2^T \\ -\overline{C}_2 Y_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \eta_1 \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$0 < Y_1 \qquad (4.44b)$$
$$\eta_1 < 0$$
$$-\tfrac{2}{\tau_0^d} < \eta_1$$

Le problème d'optimisation (4.44) est communément désigné par Problème de Valeurs Propres Généralisées (PVPG). Il peut facilement être résolu, de façon globale, à l'aide du "LMI ToolBox" du logiciel MATLAB (Gahinet et al., 1995). Malheureusement, la solution de ce PVPG n'est pas toujours unique. Pour cette raison, il peut arriver que la matrice de gains K_2 obtenue soit telle que certaines valeurs propres de la matrice $\overline{A}_2$ soit suffisamment grandes pour exciter les modes de vibration haute fréquence de la poutre

flexible. Cette situation est généralement indésirable puisque l'on ne tient pas compte de ces modes lors de la modélisation du manipulateur flexible. Pour surmonter cette difficulté, il s'agit de contraindre davantage le problème d'optimisation (4.44) de façon à limiter l'amplitude des valeurs propres de $\overline{A}_2$. Cette spécification additionnelle peut être obtenue en contraignant les valeurs propres de $\overline{A}_2$ dans une région appropriée du plan complexe. Le résultat publié dans Chilali et Gahinet (1996) permet justement de transformer une telle contrainte sous forme d'IML à condition que la région choisie soit convexe et symétrique par rapport à l'axe réel. Pour satisfaire nos exigences spécifiques, nous choisissons d'utiliser un cercle de rayon r centré à l'origine comme région de contrainte. Le résultat spécifique suivant est alors extrait du résultat beaucoup plus général donné dans Chilali et Gahinet (1996).

Lemme 4.4: *Les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur d'un cercle de rayon r centré à l'origine du plan complexe si et seulement si il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que l'IML suivante est vérifiée*:

$$\begin{bmatrix} -rP & AP \\ PA^T & -rP \end{bmatrix} < 0$$

Grâce au lemme 4.4, le changement de variables suivant:

$$Y_2 = P_2^{-1} \tag{4.45b}$$

$$W_2 = KP_2^{-1} \tag{4.45c}$$

nous permet donc d'obtenir une IML qui est une condition nécessaire et suffisante pour que le module des valeurs propres de $\overline{A}_2$ soit inférieur à r. Cette IML est donnée par:

$$\begin{bmatrix} -rY_2 & Y_2A_2 - W_2^TB_2^T \\ A_2^TY_2 - B_2W_2 & -rY_2 \end{bmatrix} < 0$$

$$0 < Y_2 \tag{4.46}$$

Il suffit maintenant d'ajouter cette nouvelle contrainte au problème d'optimisation (4.44). C'est ce que l'on appelle un problème d'IML à objectifs multiples. Dans ce cas, même si chacune des IML est une condition nécessaire et suffisante pour l'objectif qui lui correspond, les IML regroupées ne constituent qu'une condition suffisante parce qu'une contrainte supplémentaire doit être ajoutée pour préserver la linéarité du système. En fait, les relations (4.43) et (4.45) impliquent que

$$W_1 Y_1^{-1} = W_2 Y_2^{-1} \tag{4.47}$$

Parce que cette contrainte détruit la linéarité, on ajoute la contrainte additionnelle suivante:

$$Y_1 = Y_2 \tag{4.48}$$

Même si la contrainte (4.48) rétablit la linéarité du système, il n'en demeure pas moins qu'elle ajoute un certain degré de conservatisme. Le système d'IML obtenu ne constitue donc plus qu'une condition suffisante aux objectifs visés. Malgré cela, le résultat qui suit nous permettra d'assurer l'existence de la solution de notre problème à objectifs multiples.

Proposition 4.6: *Si on suppose que* η_1^*, Y_1^* et W_1^* *est la solution du problème* (4.44), *alors, il existe une constante r telle que l'IML suivante est satisfaite:*

$$\begin{bmatrix} -rY_1^* & Y_1^* A_2 - W_1^{*T} B_2^T \\ A_2^T Y_1^* - B_2 W_1^* & -rY_1^* \end{bmatrix} < 0 \tag{4.49}$$

Preuve de la proposition 4.6: Utilisant le complément de Schur, l'IML (4.49) prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} rY_1^* &> 0 \\ r^2 Y_1^* - \left(Y_1^* A_2 - W_1^{*T} B_2^T\right) Y_1^{*-1} \left(Y_1^* A_2 - W_1^{*T} B_2^T\right)^T &> 0 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Parce que la matrice Y_1^* est solution du problème (4.44), elle est définie positive. La première partie de l'inégalité (4.50) est donc automatiquement satisfaite. Aussi, il existe

certainement une valeur de r qui est telle que la deuxième partie de l'inégalité est respectée puisque r^2 multiplie la partie définie positive de son membre de gauche. □

En regard au résultat de la proposition 4.6, notre stratégie d'optimisation est la suivante. Parce que notre objectif principal est d'optimiser la constante de temps associée à la décroissance des erreurs de suivi, la solution du problème (4.44) est d'abord obtenue. Puis, cette solution optimale η_1^*, Y_1^* et W_1^* est utilisée comme condition initiale pour résoudre le second problème d'optimisation à objectifs multiples suivant:

Minimiser η_2 (4.51a)

Sujet à:

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_1A_2 - W_1^TB_2^T \\ A_2^TY_1 - B_2W_1 & 0 \end{bmatrix} < \eta_2 \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_2Y_1 + Y_1A_2^T - B_2W_1 - W_1^TB_2^T + \gamma^2\overline{B}_2\overline{B}_2^T - \eta_1^*Y_1 & -Y_1\overline{C}_2^T \\ -\overline{C}_2Y_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.51b)$$

$$0 < Y_1$$

L'existence de la solution de ce PVPG est assurée grâce à la Proposition 4.6.

4.3.4 Simulation du système de commande

Nous allons maintenant simuler le système de commande proposé. Pour faciliter la comparaison des résultats, le robot flexible, la trajectoire désirée ainsi que les conditions initiales sont ceux considérés à la section 4.2.2. Pour permettre une bonne analyse des performances, nous avons simulé le système dans cinq situations différentes.

Situation 1: Les gains des lois de commande (4.21) et (4.25) ont d'abord été obtenus de façon à imposer toutes les valeurs propres de $\overline{A}_1$ et de $\overline{A}_2$ à -10. Puis, le système a été simulé en considérant la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF obtenue par la méthode exacte (figures 3.8 et 3.9). Les résultats de cette simulation sont illustrés par la figure 4.5. Comme l'indique la proposition 4.1, la dynamique des erreurs de suivi est alors ultimement bornée puisque l'équation caractéristique de $\overline{A}_2$ est Hurwitz. Comme le témoigne la figure 4.5, la borne ultime est cependant tellement importante que le système se comporte, à toutes fins pratiques, comme un système instable. Cette situation désastreuse est causée par une instabilité locale engendrée par la perturbation $\mathbf{g}_0$ de l'équation 4.26, qui rappelons le, provient du couplage non linéaire entre la PFA et la PRP. Les résultats obtenus dans cette situation nous permettent donc de constater que ce couplage n'est généralement pas négligeable.

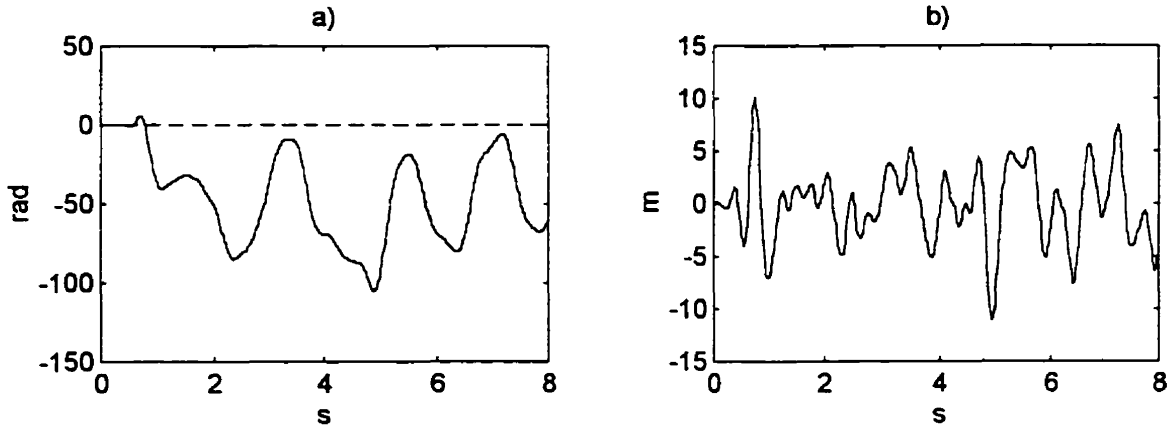


Figure 4.5 Résultats pour la situation 1: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^1\overline{q}_r$(- -) et ${}^2\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

Situation 2: Les gains des lois de commande (4.21) et (4.25) ont d'abord été obtenus de façon à imposer toutes les valeurs propres de $\overline{A}_1$ à -10 et de façon à ce que l'équation

caractéristique de $\overline{A}_2$ soit donnée par la relation (4.39) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$. Puis, le système a été simulé en considérant la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF obtenue par la méthode exacte (figures 3.8 et 3.9). Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 4.6 à 4.8. Comme nous l'avons expliqué à la suite de la proposition 4.4, le système est alors exponentiellement stable. Mais en contrepartie, l'amortissement de certaines erreurs de suivi est comparable à l'amortissement naturel du membre flexible. En effet, selon la figure 4.7, les erreurs de suivi convergent en 40 secondes environ; soit 20 fois la période de la trajectoire désirée.

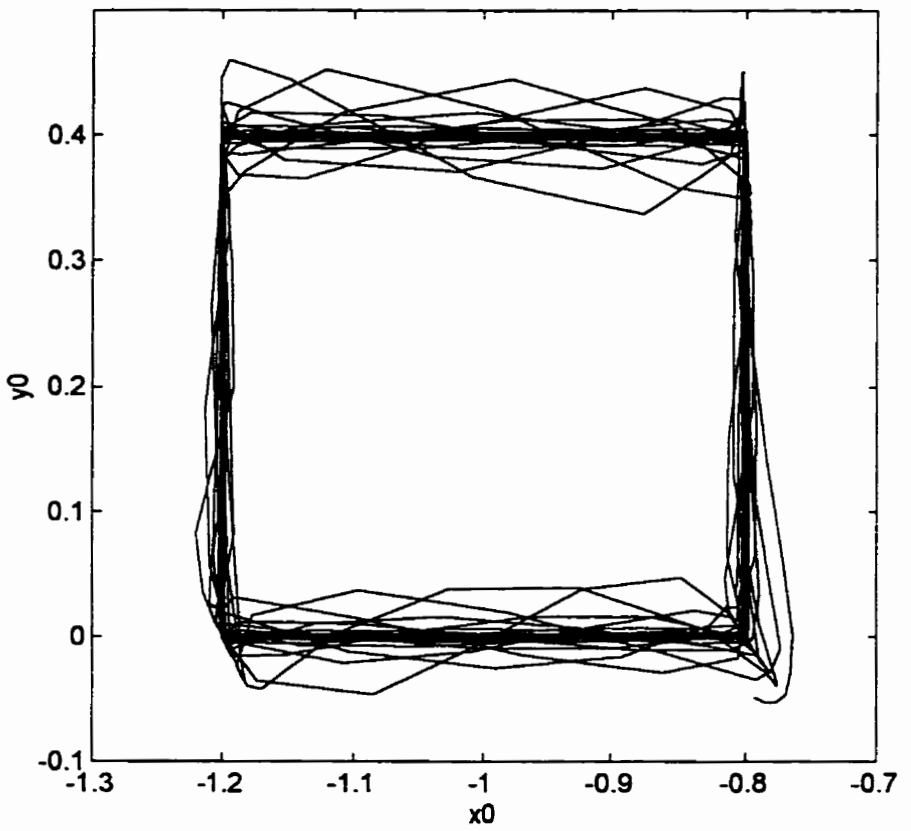


Figure 4.6 Résultats pour la situation 2: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

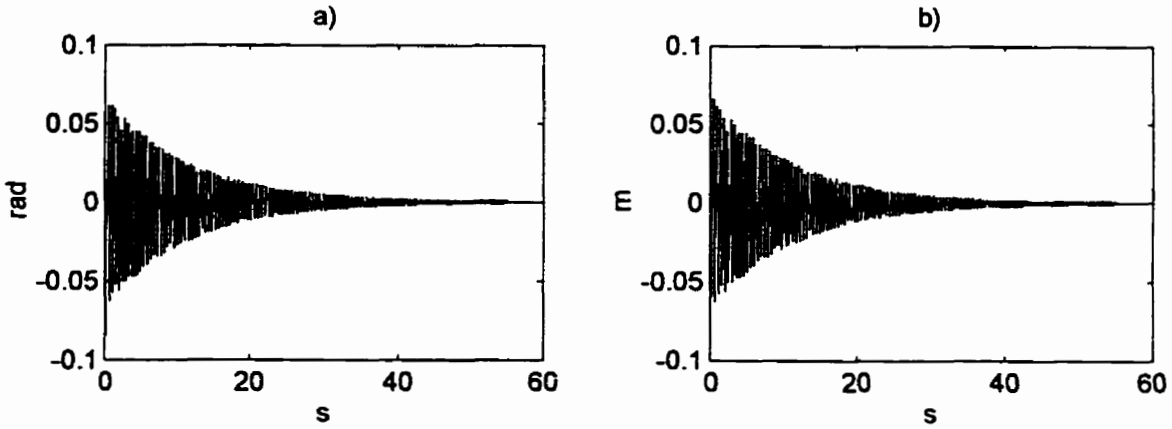


Figure 4.7 Résultats pour la situation 2: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

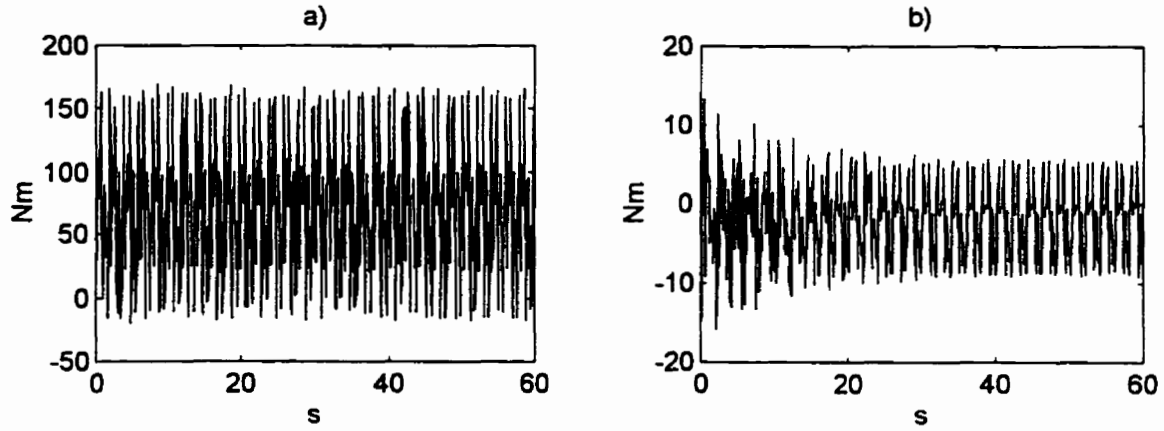


Figure 4.8 Résultats pour la situation 2: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

Situation 3: Les gains de la loi de commande (4.21) ont d'abord été obtenus de façon à imposer toutes les valeurs propres de $\overline{A}_1$ à -10. Les gains de la loi de commande (4.25) ont ensuite été obtenus par l'approche présentée à la section 4.3.3. Cette procédure nous a permis d'imposer une constante de temps $\tau_0 = 0.1$ seconde et de restreindre l'amplitude maximum des valeurs propres de $\overline{A}_2$ à une valeur optimale inférieure à 81. Cette valeur

est nettement inférieure à la dernière fréquence modale qui a été prise en compte dans le modèle du système. En effet, la fréquence associée au deuxième mode de vibration de la poutre flexible est de 198 rad/sec. Le système a finalement été simulé en considérant la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF obtenue par la méthode quasi-statique (figures 3.6 et 3.7). Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 4.9 à 4.11. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C.

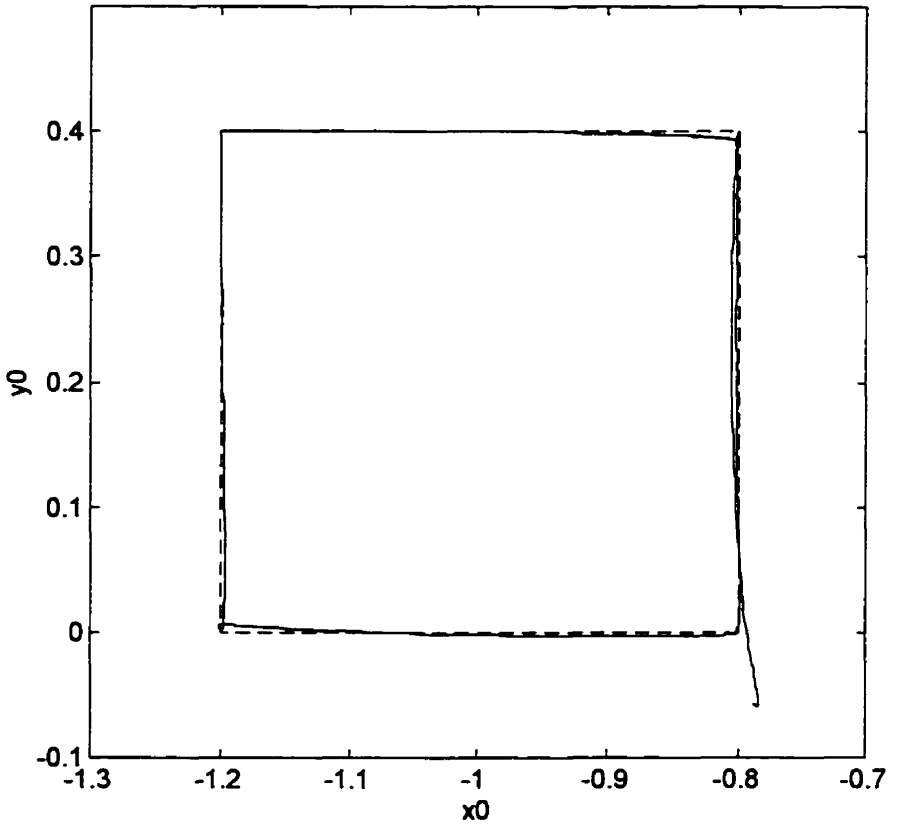


Figure 4.9 Résultats pour la situation 3: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

Comme nous l'avons expliqué à la section 4.3.3, le système est alors τ_0-exponentiellement ultimement borné avec une borne qui est proportionnelle à la déficience de la méthode quasi-statique. Le vecteur des erreurs de suivi converge donc à l'intérieur de la borne ultime dans 0.5 seconde environ. Malgré le fait que la méthode quasi-statique soit généralement imprécise face à des vitesses désirées non négligeables, les figures 4.9 et 4.10 nous montrent des erreurs de suivi relativement faibles. En fait, ces erreurs sont comparables à celles obtenues avec la loi de commande linéarisante par rapport aux CGRVA (figure 4.1 et 4.2). Aussi, l'extrémité du membre flexible ne vibre pas et l'effort de commande de la deuxième articulation est plus faible que celui obtenu avec la linéarisation par rapport aux CGRVA.

Situation 4: Cette situation est identique à la situation 3 mise à part la trajectoire désirée des CGR et des CGF qui a été obtenue à l'aide de la méthode exacte (figures 3.8 et 3.9) plutôt qu'avec l'approche quasi-statique. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 4.12 à 4.14. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Comme nous l'avons expliqué à la section 4.3.3, le système est alors τ_0-exponentiellement stable. Les erreurs de suivi convergent donc vers zéro dans environ 0.5 seconde. Le temps de réponse du système est alors environ 100 fois plus petit que celui obtenu à la situation 2. Malgré cette diminution appréciable du temps de réponse, les figures 4.8 et 4.14 nous montrent des efforts de commande d'amplitudes comparables.

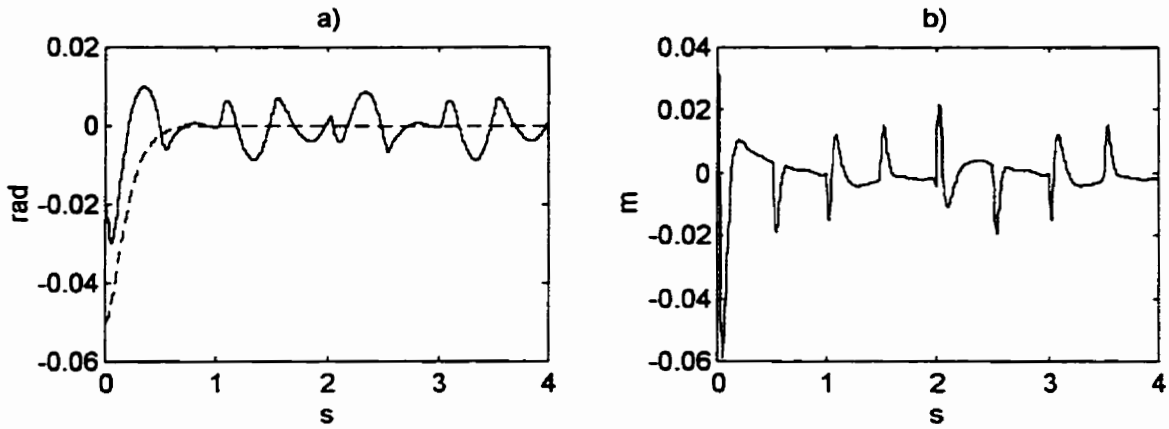


Figure 4.10 Résultats pour la situation 3: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

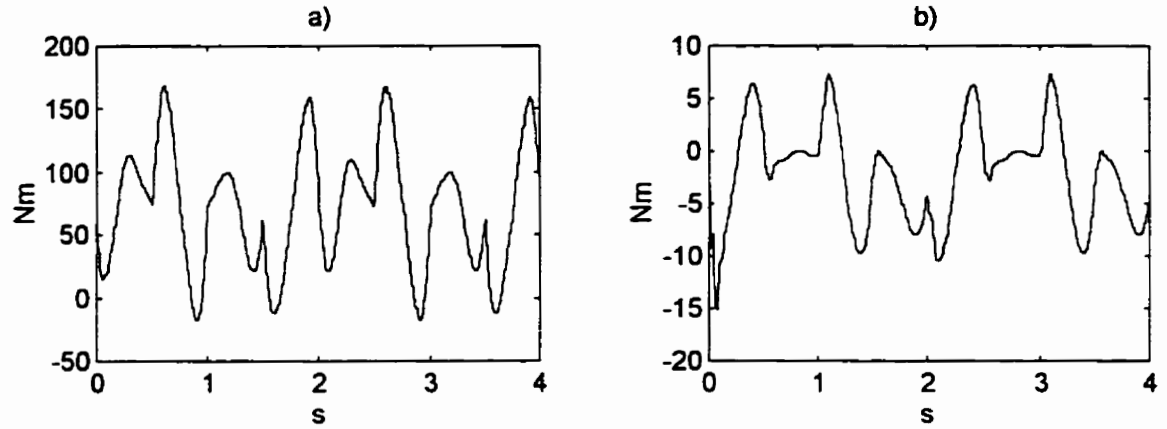


Figure 4.11 Résultats pour la situation 3: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

Situation 5:

Cette situation est identique à la situation 4 à l'exception près que la masse de la charge a subi une diminution de 50%; c'est-à-dire qu'elle est passée de 0.5 Kg à 0.25 Kg. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 4.15 à 4.17 qui nous montrent clairement la sensibilité du système par rapport à l'incertitude de la charge.

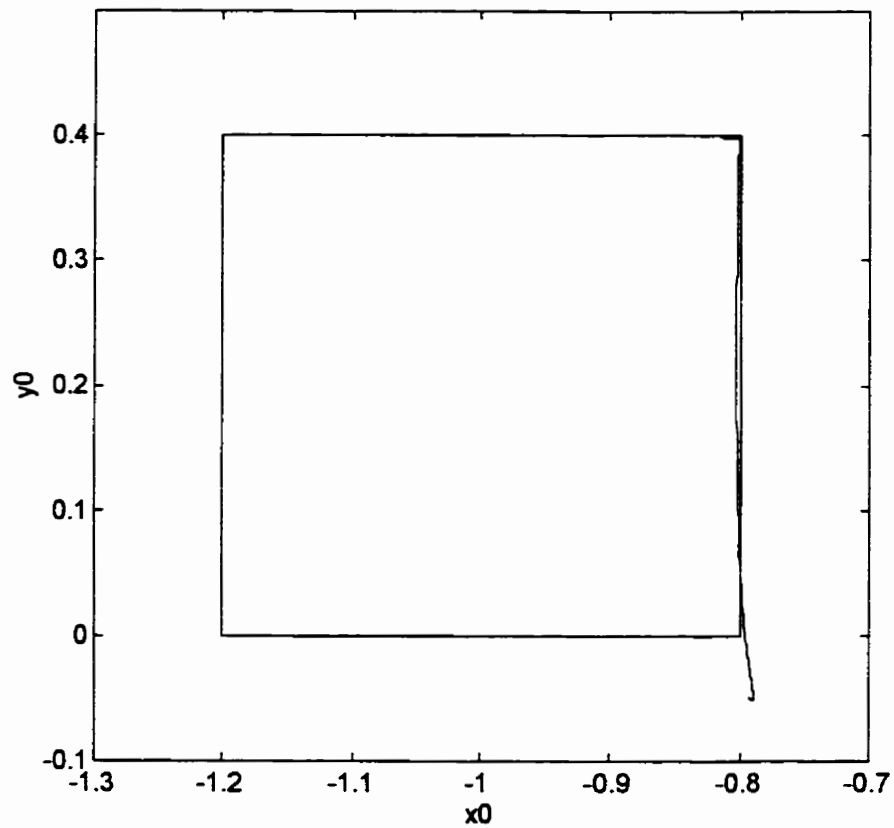


Figure 4.12 Résultats pour la situation 4: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

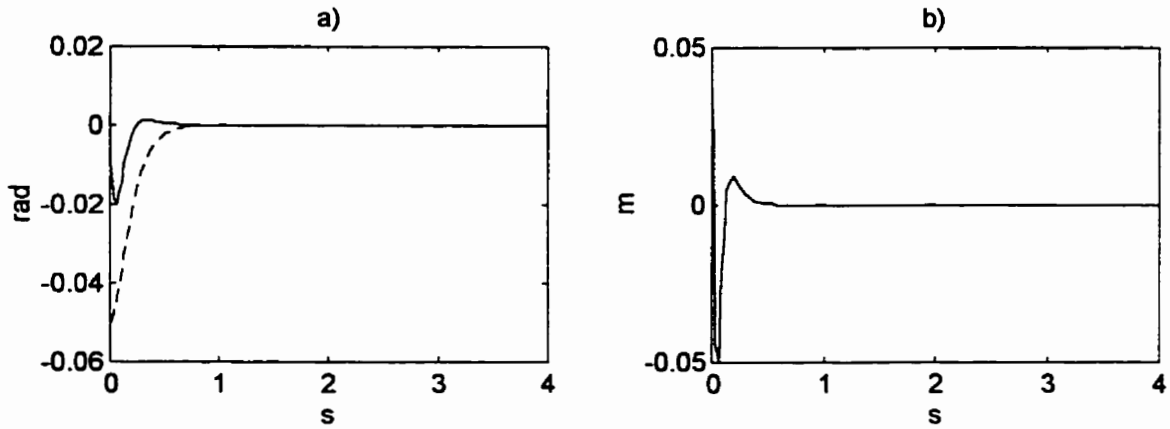


Figure 4.13 Résultats pour la situation 4: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

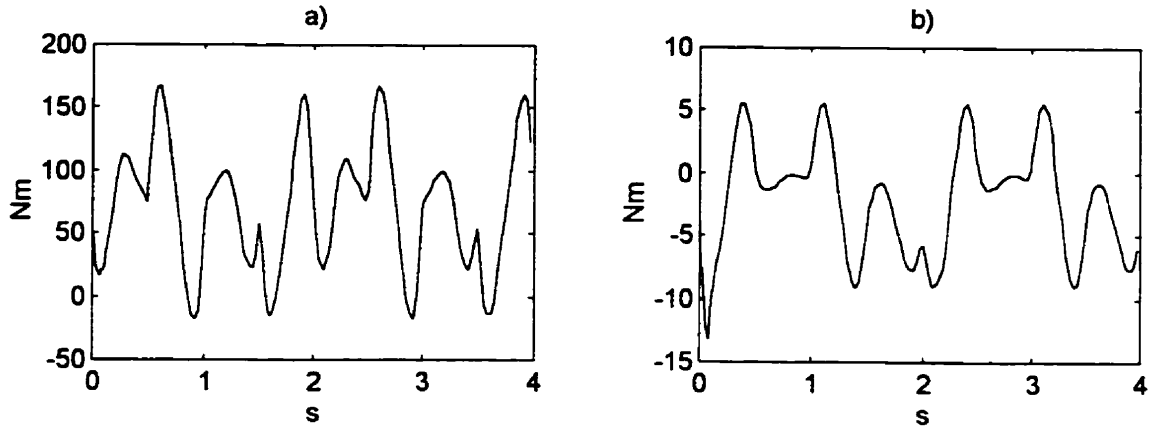


Figure 4.14 Résultats pour la situation 4: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

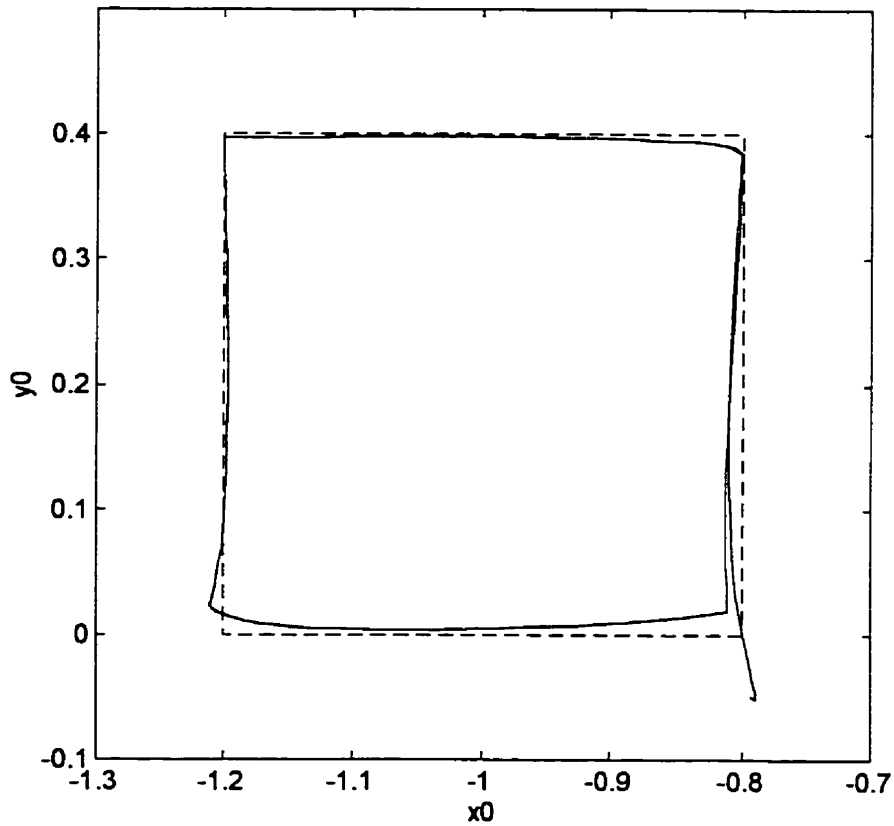


Figure 4.15 Résultats pour la situation 5: Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

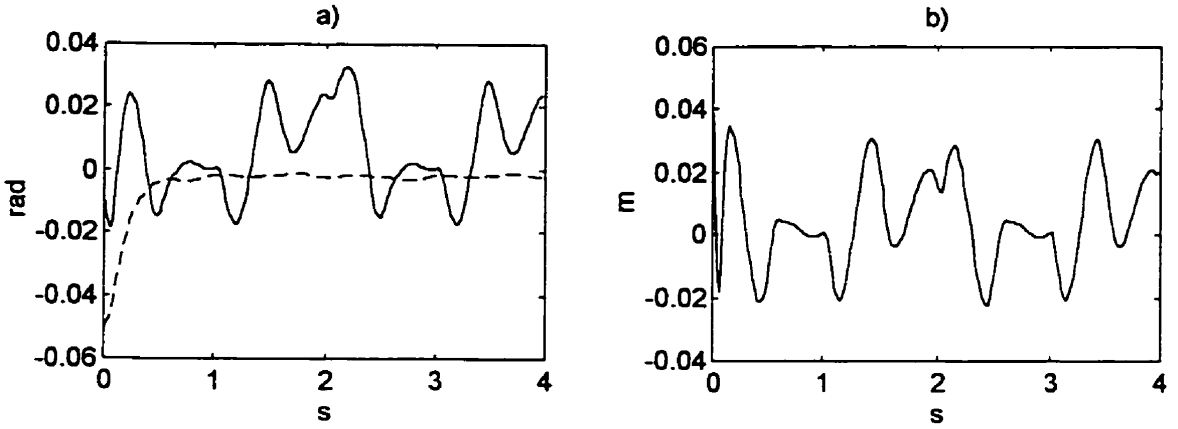


Figure 4.16 Résultats pour la situation 5: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

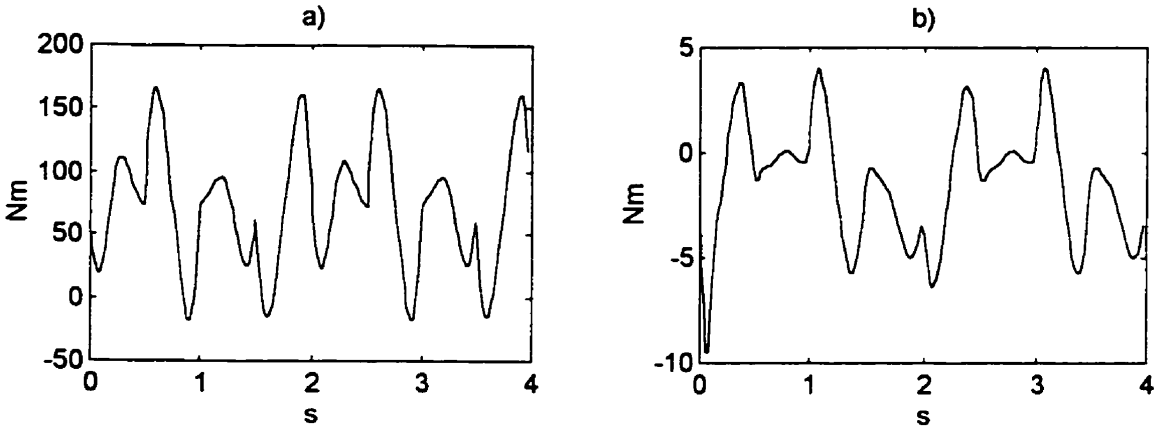


Figure 4.17 Résultats pour la situation 5: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une stratégie de commande qui permet d'assurer la stabilité du système avec une décroissance exponentielle des erreurs selon une constante de temps prescrite. Nous avons également expliqué que cette approche permet de minimiser l'amplitude maximum des valeurs propres de la partie linéaire du système de

façon à éviter d'exciter les modes de vibration haute fréquence qui ne sont pas prises en compte lors de la modélisation. Préalablement, nous avons présenté la méthode de linéarisation par retour d'états par rapport à différents choix de sorties. Le dilemme entre la précision du suivi et la stabilité de la dynamique des zéros a également été souligné. Aussi, des simulations nous ont permis de comparer les différentes approches présentées. Elles nous ont permis entre autres de constater que la linéarisation par retour d'états par rapport au CGRVA cause une vibration de l'extrémité du membre flexible. Nous avons également constater que, pour la stratégie de commande proposée, le couplage entre la PFA et la PRP n'est pas négligeable puisqu'il peut déstabiliser localement le système. Nous avons également observé que la méthode proposée, de paire avec une trajectoire désirée obtenue à l'aide de l'approche quasi-statique, permettent d'obtenir des erreurs de suivi relativement faibles sans vibration de l'extrémité du membre flexible. Les résultats de simulation de cette approche, de paire avec une trajectoire désirée obtenue à l'aide de la méthode exacte, nous ont ensuite permis de confirmer la stabilité exponentielle des erreurs de suivi avec un temps de réponse prescrit. Finalement, une simulation de ce système avec une diminution de 50% de la masse de sa charge nous a permis d'observer sa sensibilité par rapport aux incertitudes. À la lumière de ces résultats, le chapitre V présente des modifications des lois de commande qui permettent d'assurer la robustesse du système par rapport aux incertitudes de la charge.

CHAPITRE V

ROBUSTESSE DES LOIS DE COMMANDE

5.1 Introduction

Au chapitre IV, plusieurs lois de commande qui assurent le suivi de trajectoires dans l'espace de travail ont été étudiées. Dans ce chapitre nous allons modifier ces lois de commande de façon à rendre le suivi robuste par rapport à l'incertitude de la charge. En fait, cette robustesse sera obtenue en ajoutant un mécanisme d'adaptation des lois de commande. Ce mécanisme indirect, basé sur une estimation des paramètres, est similaire à ceux utilisés pour commander les manipulateurs rigides (Middleton et Goodwin, 1988; Li et Slotine, 1989). Cependant, à cause de la flexibilité du dernier membre, cette adaptation devra être accompagnée d'une étude de robustesse additionnelle permettant d'ajuster les paramètres des lois de commande de façon à assurer une dynamique interne robustement bornée. Par surcroît, la transformation de trajectoires étudiée au chapitre III et utilisée dans la structure de commande proposée au chapitre IV devra être recalculée, en ligne, selon l'évolution des paramètres estimés du système. Lorsque cette mise à jour de la trajectoire désirée des CGR et des CGF sera obtenue à l'aide de la méthode exacte, la convergence vers zéro des erreurs de suivi sera assurée.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, la section 5.2 présente les hypothèses concernant les incertitudes du système. La section 5.3 est ensuite vouée à exprimer le modèle dynamique sous une forme linéaire en fonction des paramètres incertains. L'estimateur de paramètres ainsi que ses caractéristiques sont alors présentées

à la section 5.4. La section 5.5 est consacrée à la robustification de la loi de commande linéarisante par rapport aux CGRVA présentées à la section 4.2.3. Finalement, la section 5.6 présente les modifications de la stratégie de commande proposée à la section 4.3. Ces modifications permettront de rendre le suivi de trajectoire robuste par rapport à l'incertitude de la charge.

5.2 Hypothèses concernant les incertitudes du système

Pour ne pas rendre le problème insurmontable et pour être consistant avec les hypothèses présentées au chapitre II, nous considérons que l'incertitude respecte les hypothèses suivantes.

Hypothèse 5.1: *Les incertitudes du système concerne uniquement la masse m_c et les composantes principales de l'inerties I_x, I_y, et I_z. Ces incertitudes sont constantes et peuvent s'exprimer sous la forme suivante:*

$$0 \le \underline{m}_c \le m_c \le \overline{m}_c,$$

$$I_x \ge 0,$$

$$I_y \ge 0,$$

$$0 \le \underline{I}_z \le I_z \le \overline{I}_z$$

où $\underline{m}_c$, $\overline{m}_c$, $\underline{I}_z$ et $\overline{I}_z$ sont des constantes connues. Ces incertitudes peuvent également s'exprimer sous la forme compacte suivante:

$$\boldsymbol{p}^T = \begin{bmatrix} m_c & I_x & I_y & I_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{U}_p^T$$

où $\boldsymbol{U}_p$ est un hyper-cube de dimension appropriée.

Hypothèse 5.2: *Les fonctions de forme utilisées pour modéliser la flexibilité du dernier membre sont invariantes par rapport à l'incertitude de la charge.*

Remarquer que selon l'hypothèse 5.1 les bornes de l'incertitude des parametres I_x et I_y n'ont pas à être connues. Cette particularité vient de ce que la dynamique interne du système est indépandante de ces paramètres. Dans les paragraphes qui suivent, nous verrons que relativement aux hypothèses 5.1 et 5.2, les gains des lois de commande qui stabilisent le système existent et pourront être obtenus par des procédures relativement simples.

5.3 Modèle linéaire en fonction des paramètres incertains

Selon les hypothèses 2.8, 5.1 et 5.2, le modèle dynamique décrit par les relations (2.5) et (2.6) peut être réécrit sous une forme linéaire en fonction des paramètres incertains. Le système prend alors la forme suivante:

$$\boldsymbol{Y}_r(\ddot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})\boldsymbol{p} + \tau_{rk} = \tau \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{Y}_e(\ddot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})\boldsymbol{p} + \tau_{ek} = 0 \tag{5.2}$$

où τ_{rk} et τ_{ek} sont les parties du système qui sont indépendantes des paramètres incertains et $\boldsymbol{p}$ est le vecteur des paramètres incertains qui est donné par

$$\boldsymbol{p}^T = \begin{bmatrix} m_c & I_x & I_y & I_z \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

où m_c est la masse de la charge et I_x, I_y et I_z sont les composantes principales de sa matrice d'inertie. Parce que les relations (5.1) et (5.2) sont des fonctions linéaires des paramètres incertains, le vecteur $\boldsymbol{p}$ peut être estimé, en ligne, avec la loi de commande. Le problème avec l'estimation des paramètres basée sur la relation (5.2) est d'obtenir une mesure des accélérations. En effet, l'accélération est généralement difficile à obtenir de façon précise. Pour

éliminer ce problème, il est bien connu que le modèle dynamique décrit par les relations (5.1) et (5.2) peut être filtré de part et d'autre par une fonction de transfert de premier ordre de la forme suivante (Middleton et Goodwin, 1988):

$$G_f(s) = \frac{\xi}{s+\xi} \tag{5.4}$$

où ξ est une constante qui caractérise la fréquence de coupure du filtre. Le modèle filtré du système s'exprime alors sous la forme suivante:

$$W_r(\dot{q},q)p + \tau_{rk}^f = \tau^f \tag{5.5}$$

$$W_e(\dot{q},q)p + \tau_{ek}^f = 0 \tag{5.6}$$

où τ^f, τ_{rk}^f et τ_{ek}^f sont respectivement les quantités τ, τ_{rk} et τ_{ek} filtrées. Ainsi, le vecteur des erreurs de prédiction peut être donné par l'expression qui suit:

$$e = \begin{bmatrix} e_r \\ e_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^f - \tau_{rk}^f - W_r(\dot{q},q)\hat{p} \\ -\tau_{ek}^f - W_e(\dot{q},q)\hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_r(\dot{q},q)\tilde{p} \\ W_e(\dot{q},q)\tilde{p} \end{bmatrix} = W\tilde{p} \tag{5.6}$$

où $\tilde{p} = p - \hat{p}$ est le vecteur des erreurs d'estimation, $\hat{p}$ est le vecteur des paramètres estimés et W est le régresseur filtré correspondant à

$$Y = W + \tfrac{1}{\xi}\dot{W} \tag{5.7}$$

où $Y = \begin{bmatrix} Y_r^T & Y_e^T \end{bmatrix}^T$ est le régresseur non filtré défini aux relations (5.1) et (5.2).

5.4 Estimation des paramètres

Il existe une quantité appréciable d'approches permettant d'obtenir une estimation en temps réel des paramètres d'un système. Évidemment, ces approches se différencient par des propriétés qui peuvent être avantageuses ou désavantageuses selon le contexte d'utilisation. Dans cette étude, nous avons opté pour une méthode de moindre carré classique parce que ces propriétés nous aiderons à prouver la stabilité du système et parce que les paramètres à

estimer sont, de toute façon, supposés constants. Cette méthode est caractérisée par le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} &= -\varsigma \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{e} \quad , \quad \hat{p}(t_0) = \hat{p}_0 \\ \dot{\boldsymbol{P}} &= -\varsigma \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{P} \quad , \quad \boldsymbol{P}(t_0) = \boldsymbol{P}_0 > 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

où $\boldsymbol{W}$ est le régresseur filtré, $\boldsymbol{P}$ est la matrice de gains de l'estimateur et ς est un scalaire positif qui permet d'ajuster la vitesse de convergence de l'estimateur. Les caractéristiques de cet estimateur sont énoncées par le Lemme suivant.

Lemme 5.1: *Si on suppose que les paramètres à estimer sont constants, alors, l'estimateur caractérisé par la relation* (5.8) *nous assure que*: i) $\tilde{p}$ *est borné et* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{L}_2$; ii) *si* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W} + \frac{1}{\xi}\dot{\boldsymbol{W}}$ *est bornée, alors,* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{L}_\infty$, $\boldsymbol{e} \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$, $\dot{\tilde{p}} \in \boldsymbol{L}_2 \cap \boldsymbol{L}_\infty$, $\dot{\tilde{p}} \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$.

Nous allons maintenant énoncer un autre lemme qui sera, non seulement utilisé pour la démonstration du lemme 5.1, mais également pour d'autres résultats présentés dans ce chapitre.

Lemme 5.2: *Soit le système filtré* $L\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{H}(s)L\{\boldsymbol{u}\}$ *avec* $\boldsymbol{y}$ *le vecteur de sortie,* $\boldsymbol{u}$ *le vecteur d'entrée,* $\boldsymbol{H}$ *une matrice de transfert exponentiellement stable et strictement propre et* $L\{\ \}$ *l'opérateur de la transformée de Laplace. Dans ce contexte:* i) *si* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_2$ *alors* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_2$ et $\boldsymbol{y} \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$; ii) *si* $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{L}_1) + (\boldsymbol{L}_2) + (\boldsymbol{L}_\infty)$ *où* $(\boldsymbol{L}_p)$ *est utilisé pour désigner une fonction qui appartient à* $\boldsymbol{L}_p$, *alors,* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}_\infty$.

La partie i du lemme 5.2 est démontrée dans Li et Slotine (1989) tandis que la partie ii est démontrée dans Middleton et Goodwin (1988).

Preuve du lemme 5.1: La démonstration est similaire à ce qui est présenté dans Middleton et Goodwin (1988). En effet, il suffit de choisir la fonction de Lyapunov suivante:

$$v = \tilde{p}^T P^{-1} \tilde{p} \tag{5.9}$$

de sorte que

$$\dot{v} = -\varsigma e^T e. \tag{5.10}$$

Parce que la fonction v est définie positive et que la fonction $\dot{v}$ est définie semi-négative, le vecteur $\tilde{p}$ est borné. Puis, selon les relations (5.9) et (5.10),

$$\int_{t_0}^{\infty} e^T e \, dt = \tfrac{1}{\varsigma}\big(v(t_0) - v(\infty)\big) \le \tfrac{1}{\varsigma} v(t_0) = \tfrac{1}{\varsigma} \tilde{p}_0^T P_0^{-1} \tilde{p}_0 \tag{5.11}$$

de sorte que $e \in L_2$. Aussi, la relation (5.8) nous indique que P est bornée puisque $\frac{d}{dt} P^{-1} = -P^{-1} \dot{P} P^{-1} = \varsigma W W^T$ de sorte que P^{-1}est monotonement non décroissante et bornée vers le bas par P_0^{-1}. Supposons maintenant que $Y = W + \frac{1}{\xi} \dot{W}$ est bornée de sorte que, selon le lemme 5.2, W et $\dot{W}$ sont bornées. Dans ce cas, la relation (5.8) nous indique que $e = W \tilde{p}$ et $\dot{e}$ sont bornés et que $\dot{\tilde{p}} \in L_2$, $\dot{\tilde{p}} \in L_\infty$ puisque $\tilde{p}$, P, W et $\dot{W}$ sont bornés et que $e \in L_2$. Il s'ensuit que

$$\ddot{v} = -2\varsigma e^T \dot{e} \tag{5.12}$$

est bornée de sorte que $\dot{v}$ est uniformément continue. Pour cette raison et parce que la fonction v est monotonement non croissante ($\dot{v} \le 0$) et bornée vers le bas de sorte qu'elle converge lorsque $t \to \infty$, le Lemme de Barbalat nous permet de conclure que $e \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Ainsi, selon la relation (5.8), $\dot{\tilde{p}} \to 0$ lorsque $t \to \infty$ puisque W est bornée. □

Pour les démonstrations à venir, nous devrons utiliser certaines propriétés déduites au chapitre 2. Ces propriétés seront non seulement utilisées pour le modèle dynamique du système mais

également pour son modèle estimé. Pour que ces propriétés soient vérifiées en regard avec le modèle estimé, nous considérons que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 5.3: *L'hypothèse* 5.1 *est vérifiée pour les paramètres estimés aussi bien que pour les vrais paramètres.*

Cette hypothèse est souvent vérifiée sans prendre aucune mesure particulière; c'est-à-dire en utilisant l'estimateur de paramètre décrit par la relation (5.8). Il est toutefois possible de modifier légèrement cet estimateur pour qu'il puisse, à coup sûr, assurer le respect de l'hypothèse 5.3. En effet, la modification proposée dans Goodwin et Mayne (1987) permet de contraindre les paramètres estimés dans un ensemble convexe sans affecter les caractéristiques de l'estimateur.

5.5 Loi de commande linéarisante par rapport aux CGRVA

Nous allons maintenant reconsidérer la loi de commande présentée à la section 4.3.2. Rappelons que cette loi de commande linéarise le système par rapport aux CGRVA qui sont un compromis entre les CGR et les CGRV. Utilisons d'abord les relations (4.2), (4.3), (5.1) et (5.2) en remplaçant les vrais paramètres par les paramètres estimés pour obtenir le modèle estimé suivant:

$$\hat{M}_r^*(q^*)\ddot{q}_r^* + \hat{M}_{re}^*(q^*)\ddot{q}_e + \hat{F}_r^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) = Y_r(\ddot{q},\dot{q},q)\hat{p} + \tau_{rk} \tag{5.13}$$

$$\hat{M}_{er}^*(q^*)\ddot{q}_r^* + \hat{M}_e^*\ddot{q}_e + \hat{F}_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e = Y_e(\ddot{q},\dot{q},q)\hat{p} + \tau_{ek} \tag{5.14}$$

où le symbole ^ indique que les paramètres sont remplacés par les paramètres estimés. Les relations (5.1), (5.2), (5.13) et (5.14) nous permettent ensuite d'obtenir le modèle dynamique

sous la forme suivante:

$$\hat{M}_r^*(q^*)\ddot{q}_r^* + \hat{M}_{re}^*(q^*)\ddot{q}_e + \hat{F}_r^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + Y_r(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p} = \tau \tag{5.15}$$

$$\hat{M}_{er}^*(q^*)\ddot{q}_r^* + \hat{M}_e^*\ddot{q}_e + \hat{F}_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e + Y_e(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p} = 0 \tag{5.16}$$

Si on suppose que la matrice $\hat{M}_e^*$ est non singulière (cette hypothèse sera vérifiée dans les paragraphes qui suivent), l'accélération $\ddot{q}_e$ peut être isolée de la relation (5.16) et remplacée dans la relation (5.15). La dynamique de la partie rigide est alors donnée par la relation suivante:

$$\begin{aligned}&\hat{\bar{M}}_r^*(q^*)\ddot{q}_r^* + \hat{F}_r^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + Y_r(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p}\\ &-\hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}\left[\hat{F}_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e + Y_e(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p}\right] = \tau\end{aligned} \tag{5.17}$$

où

$$\hat{\bar{M}}_r^*(q^*) = \hat{M}_r^*(q^*) - \hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}\hat{M}_{er}^*(q^*) \tag{5.18}$$

5.5.1 Loi de commande modifiée

La loi de commande décrite par la relation (4.6) peut maintenant être modifiée de façon à tenir compte de l'estimation des paramètres. De façon similaire à ce qui est présenté dans Li et Slotine (1989) pour les manipulateurs rigides, la loi de commande donnée par les relations (4.6) et (4.9) est modifiée de la façon suivante:

$$\tau = \hat{\bar{M}}_r^*(q^*)u^* + \hat{F}_r^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + v - \hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}\left[\hat{F}_e^*\left(q^*,\dot{q}^*\right) + F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right] \tag{5.19}$$

où

$$u^* = \ddot{q}_r^{*d} + 2\lambda\dot{\tilde{q}}_r^* + \lambda^2\tilde{q}_r^* \tag{5.20}$$

et

$$\begin{aligned}v = {} & \dot{\hat{\bar{M}}}_r^*(q^*)S + \left(1 - \tfrac{\lambda}{\xi}\right)\left(e_r - \hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}e_e\right)\\ &+ \tfrac{1}{\xi}\left(W_r(\dot{q}^*,q^*)\dot{\bar{p}} - \hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}W_e(\dot{q}^*,q^*)\dot{\bar{p}} + \tfrac{d}{dt}\left(\dot{\hat{M}}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}\right)e_e\right)\end{aligned} \tag{5.21}$$

avec ξ la fréquence de coupure du filtre décrit par la relation (5.4),λ une constante positive qui caractérise la réponse du système et

$$S = \dot{\tilde{q}}_r^* + \lambda \tilde{q}_r^*. \tag{5.22}$$

Avec cette loi de commande, la convergence des erreurs de suivi et la stabilité robuste de la dynamique interne peuvent être assurées grâce à un choix approprié des constantes ξ et α (la fréquence de coupure du filtre et la constante qui caractérise le compromis entre les CGR et les CGRV). La proposition suivante formalise ce résultat (Bigras et al., 1997a).

Proposition 5.1: *Si* i) *les hypothèses* 5.1 *à* 5.3 *sont vérifiées;* ii) *la matrice* M_e^* *est non singulière de façon robuste;* iii) *la dynamique décrite par la relation* (4.11) *est asymptotiquement stable de façon robuste;* iv) *l'estimateur de paramètres utilisé est celui décrit par la relation* (5.8)*;* v) *la trajectoire désirée des CGRVA est uniformément bornée et* vi) *la fréquence de coupure du filtre décrit par la relation* (5.4) *respecte la condition suivante:*

$$\xi > \wp$$

où $\wp$ *est défini, plus loin, par la relation* (5.43)*, alors,* i) *le vecteur des erreurs de suivi des CGRVA* $\tilde{q}_r^*$ *et celui des vitesses des CGRVA* $\dot{\tilde{q}}_r^*$ *ainsi que le vecteur des erreurs de prédiction e convergent à zéro lorsque* $t \to \infty$ *et* ii) *la dynamique interne est bornée de façon robuste.*

Pour prouver la proposition 5.1, nous avons d'abord besoin de la proposition suivante.

Proposition 5.2: *Si la matrice* M_e^* *est non singulière, les matrices* $\overline{M}_r^{*-1}(q^*)$ *et* $\overline{M}_r^{*-1}(q^*)M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1}$ *sont bornées.*

Preuve de la proposition 5.2: Selon la propriété 2.1 et la transformation non singulière définie par la relation (4.1), la matrice suivante

$$H^*(q^*) = \begin{bmatrix} H_r^*(q^*) & H_{re}^*(q^*) \\ H_{er}^*(q^*) & H_e^*(q^*) \end{bmatrix} = M^{*-1}(q^*) = TM^{-1}(T^{-1}q)$$

est non singulière et bornée. Ensuite, selon la proposition 4.1, $\overline{M}_r^*(q^*)$ est non singulière puisque M_e^* est non singulière par hypothèse. Le lemme d'inverse matriciel présenté dans Ogata (1995, p.637) nous permet alors d'obtenir explicitement la matrice H^*:

$$H^* = \begin{bmatrix} M_r^* & M_{re}^* \\ M_{er}^* & M_e^* \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{M}_r^{*-1} & -\overline{M}_r^{*-1}M_{re}^*M_e^{*-1} \\ -M_e^{*-1}M_{er}^*\overline{M}_r^{*-1} & M_e^{*-1}M_{er}^*\overline{M}_r^{*-1}M_{re}^*M_e^{*-1} + M_e^{*-1} \end{bmatrix}$$

$\overline{M}_r^{*-1}(q^*) = H_r^*(q^*)$ et $\overline{M}_r^{*-1}(q^*)M_{re}^*(q^*)M_e^{*-1} = -H_{re}^*(q^*)$ sont donc bornées puisque $H^*(q^*)$ est bornée. □

Preuve de la proposition 5.1: Les hypothèses i et ii assurent la robustesse de la non singularité de la matrice $\hat{M}_e^*$. Par le fait même, la proposition 4.1 assure la robustesse de la non singularité de la matrice décrite par la relation (5.18). La loi de commande décrite par la relation (5.19) appliquée au système décrit par la relation (5.17) nous conduit alors à l'équation différentielle suivante:

$$S = f_e(t) / \xi \tag{5.23}$$

où

$$f_e(t) = \hat{\overline{M}}_r^{*-1}(q^*)e_r(t) - \hat{\overline{M}}_r^{*-1}(q^*)\hat{M}_{re}^*(q^*)\hat{M}_e^{*-1}e_e(t) \tag{5.24}$$

Dans ce contexte, les hypothèses ii et iv, le lemme 5.1 ainsi que la proposition 5.2 nous assurent que $f_e \in L_2$. Ainsi, le lemme 5.2 et les relations (5.22) et (5.23) nous assurent que $\tilde{q}_r^* \in L_\infty$, $\dot{\tilde{q}}_r^* \in L_2$ et $\tilde{q}_r^* \to 0$ à $t \to \infty$. L'hypothèse v nous permet donc d'écrire

$$q_r^* = (L_\infty) \tag{5.25}$$

$$\dot{q}_r^* = (L_2) + (L_\infty) \tag{5.26}$$

Les relations (5.22) et (5.23) nous permettent maintenant de réécrire la dynamique interne décrite par la relation (4.3) sous la forme suivante:

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e\left(-\tfrac{1}{\xi} M_{er}^*(q^*)\dot{f}_e + M_{er}^*(q^*)\left(\ddot{q}_r^{*d} + \lambda\dot{\tilde{q}}_r^*\right) + F_e^*(q^*, \dot{q}^*)\right) \tag{5.27}$$

où

$$A_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M_e^{*-1}K_e & -M_e^{*-1}F_e \end{bmatrix}, \tag{5.27a}$$

$B_e^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -M_e^{-1} \end{bmatrix}$ et où le vecteur $\frac{1}{\xi} M_{er}^*(q^*)\dot{f}_e$ peut être réécrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\xi} M_{er}^*(q^*)\dot{f}_e &= \tfrac{1}{\xi}\frac{d}{dt}\left(M_{er}^*(q^*)f_e\right) - \tfrac{1}{\xi}\dot{M}_{er}^*(q^*)f_e \\ &= \tfrac{1}{\xi}\frac{d}{dt}\left(M_{er}^*(q^*)f_e\right) - \tfrac{1}{\xi}\left(\sum_{i=1}^{n_r}\dot{q}_{r_i}^* J_r^{*(i)} + \sum_{i=1}^{n_e}\dot{q}_{e_i} J_e^{(i)}\right)f_e \end{aligned} \tag{5.28}$$

Selon les relations (3.1) et (4.3) et les propriétés 2.6 et 2.7, $J_r^{*(i)} = \partial M_{er}^* / \partial q_{r_i}^*$ et $J_e^{(i)} = \partial M_{er}^* / \partial q_{e_i}$ sont bornées puisque q_r^* est borné selon la relation (5.25). Pour arriver à prouver la robustesse de la dynamique interne, nous définissons maintenant la trajectoire de référence de la dynamique interne de la façon suivante:

$$\dot{x}_e^r = A_e x_e^r + B_e\left(-\tfrac{1}{\xi}\tfrac{d}{dt}\left[M_{er}^*(q^*)f_e\right]\right) \tag{5.29}$$

Les conditions initiales associées à l'équation différentielle (5.29) sont considérées comme étant nulles. En utilisant la transformée de Laplace, cette expression peut être réécrite sous la forme suivante:

$$L\{x_e^r\} = G_e^r(s)L\left\{-\tfrac{1}{\xi}\left[M_{er}^*(q^*)f_e(t)\right]\right\} \tag{5.30}$$

où

$$G_e^r(s) = s(s\mathbf{I} - A_e)^{-1}B_e = B_e + A_e(s\mathbf{I} - A_e)^{-1}B_e \tag{5.31}$$

Parce que $f_e \in L_2$ et $q_r^* \in L_\infty$, les relations (3.1) et (4.3), les propriétés 2.6 et 2.7,

l'hypothèse iii et le lemme 5.2 nous assurent que

$$x_e^r \in L_2 \tag{5.32}$$

La dynamique des erreurs entre les variables internes et les variables de référence est alors obtenue en utilisant les relations (5.27), (5.28) et (5.29). Cette dynamique est donnée par la relation suivante:

$$\dot{\tilde{x}}_e = A_e\tilde{x}_e + B_e g_{e1}(t) + B_e g_{e2}(t,\dot{\tilde{q}}_e) \tag{5.33}$$

où $\tilde{x}_e = x_e^r - x_e$ est le vecteur des erreurs,

$$g_{e1}(t) = -M_{er}^*(q^*)\left(\ddot{q}_r^{*d} + \lambda\dot{\tilde{q}}_r^*\right) - F_e^*(q^*,\dot{q}^*) - \tfrac{1}{\xi}\left(\sum_{i=1}^{n_r}\dot{q}_{r_i}^* J_r^{*(i)} + \sum_{i=1}^{n_e}\dot{q}_{e_i}^r J_e^{(i)}\right)f_e(t) \tag{5.34}$$

et

$$g_{e2}(t,\dot{\tilde{q}}_e) = \tfrac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n_e}\dot{\tilde{q}}_{e_i} J_e^{(i)} f_e(t) \tag{5.35}$$

En utilisant les mêmes arguments que Middleton et Goodwin (1988), on peut alors démontrer que

$$g_{e1}(t) = (L_1)(t) + (L_2)(t) + (L_\infty)(t) \tag{5.36}$$

Ainsi, la transformée de Laplace nous permet d'écrire la dynamique du vecteur des erreurs de vitesses $\dot{\tilde{q}}_e$ sous la forme suivante:

$$L\left\{\dot{\tilde{q}}_e\right\} = G_e(s)L\{g_{e1}(t)\} + G_e(s)L\left\{g_{e2}(t,\dot{\tilde{q}}_e)\right\} + G_e^0(s)L\{\delta(t)\tilde{x}_e(t_0)\} \tag{5.37}$$

où

$$G_e(s) = G_e^0(s)B_e = [0 \quad \mathrm{I}](sI - A_e)^{-1}B_e, \tag{5.38}$$

$\delta(t)$ est une impulsion de Dirac et $\tilde{x}_e(t_0)$ est le vecteur des conditions initiales. Selon l'hypothèse iii, la relation (5.36) et le lemme 5.2, la relation (5.37) peut être réécrite de la façon suivante:

$$L\left\{\dot{\tilde{q}}_e\right\} = L\{(L_\infty)(t)\} + G_e(s)L\left\{g_{e2}(t,\dot{\tilde{q}}_e)\right\} \tag{5.39}$$

En appliquant la norme infinie de part et d'autre de la relation (5.39) et en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'hypothèse 5.1, nous obtenons (Doyle et al., 1992) :

$$\left\|\dot{\tilde{q}}_e\right\|_\infty \leq \left\|(L_\infty)\right\|_\infty + \sup_{p\in U_p}\left\|G_e\right\|_2 \sup_{p\in U_p}\left\|g_{e2}\right\|_2 \tag{5.40}$$

où $\left\|G_e\right\|_2$ est la norme système 2 de $G_e(s)$ qui est définie de la façon suivante:

$$\left\|G_e\right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\operatorname{Trace}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_e(jw)G_e^*(jw)\,dw\right]}$$

Aussi, selon la relation (5.35), $\left\|g_{e2}\right\|_2$ peut être bornée par l'expression suivante:

$$\left\|g_{e2}\right\|_2 \leq \frac{1}{\xi}\sqrt{n_e}\sup_{t\geq 0}\sup_{p\in U_p}\left[\max_{1\leq i\leq n_e}\left|J_e^{(i)}(t)\right|_2\right]\sup_{\tilde{p}\in U_p}\left\|f_e\right\|_2\left\|\dot{\tilde{q}}_e\right\|_\infty \tag{5.41}$$

où $\left|J_e(t)\right|_2$ est la norme matricielle 2 de $J_e(t)$. En substituant la relation (5.41) dans la relation (5.40) nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\left\|\dot{\tilde{q}}_e\right\|_\infty \leq \left\|(L_\infty)\right\|_\infty + \frac{\wp}{\xi}\left\|\dot{\tilde{q}}_e\right\|_\infty \tag{5.42}$$

où

$$\wp = \sqrt{n_e}\sup_{t\geq 0}\sup_{p\in U_p}\left[\max_{1\leq i\leq n_e}\left|J_e^{(i)}(t)\right|_2\right]\sup_{\tilde{p}\in U_p}\left\|f_e\right\|_2\sup_{p\in U_p}\left\|G_e\right\|_2 \tag{5.43}$$

Parce que $J_e^{(i)}$ est bornée, $f_e(t) \in L_2$ et $G_e(s)$ est stable (hypothèse iii) et strictement propre, la constante $\wp$ existe. La condition de petit gain décrite par l'hypothèse vi nous assure donc que le vecteur $\dot{\tilde{q}}_e$ est borné. Du même coup, les relations (5.33), (5.35), (5.36) et (5.41) ainsi que l'hypothèse iii et le lemme 5.2 nous assurent que le vecteur $\tilde{x}_e$ est borné. Ainsi, selon la relation (5.32),

$$q_e = (L_\infty) + (L_2) \tag{5.44}$$

$$\dot{q}_e = (L_\infty) + (L_2) \tag{5.45}$$

d'où

$$\dot{q}_e + q_e = (L_\infty) + (L_2) \tag{5.46}$$

Le lemme 5.2 nous permet donc de conclure que le vecteur q_e est borné de sorte que, selon les relations (5.25) et (5.26),

$$q^* = (L_\infty) \tag{5.47}$$

$$\dot{q}^* = (L_\infty) + (L_2) \tag{5.48}$$

Les arguments utilisés par Middleton et Goodwin (1988) nous permettent alors de déduire que $\dot{q}^*$ et $\ddot{q}^*$ sont bornés. La dynamique interne et le regresseur Y sont donc bornés. Ainsi, le lemme 5.1 nous permet de conclure que $e \to 0$ lorsque $t \to \infty$ et les relations (5.22), (5.23) et (5.24) ainsi que la proposition 5.2 et le lemme 5.2 nous permettent de conclure que $\tilde{q}_r^* \to 0$ et $\dot{\tilde{q}}_r^* \to 0$ lorsque $t \to \infty$. □

Remarque 5.1: *La condition du petit gain décrite par l'hypothèse* vi *de la proposition* 5.1 *peut toujours être assurée puisqu'il n'y a aucune autre contrainte associée à la fréquence de coupure* ξ *du filtre passe bas décrit par la relation* (5.4). □

5.5.2 Étude de robustesse: application gardienne

Grâce à la proposition 5.1, le problème de robustesse est transformé sous une forme linéaire simple. En effet, les hypothèses ii et iii de cette proposition nous indiquent que la matrice M_e^* doit être robustement non singulière et que la dynamique décrite par la relation (4.11) doit être robustement asymptotiquement stable. La robustesse de la non singularité de la matrice M_e^* peut être facilement vérifiée puisque selon la relation (4.3a) et les propriétés 2.5 et 2.7, M_e^* est une fonction affine des paramètres incertains m_c et I_z. D'autre part, la robustesse de la stabilité de la dynamique décrite par la relation (4.11) pourrait être vérifiée grâce à une formulation sous forme d'inégalités matricielles. Malheureusement, parce que les paramètres incertains sont supposés constants, les

inégalités matricielles mises en cause sont non linéaires et ne peuvent être transformées sous forme linéaire qu'en ajoutant un certain degré de conservatisme (Gahinet et al., 1996; Haddad et al., 1991). Ce type d'approche ne vérifie donc que des conditions suffisantes sur la robustesse du système. Or, nous verrons que l'existence d'une solution ne peut être assurée que si les conditions de stabilité robuste sont nécessaires et suffisantes. Pour cette raison, on choisit plutôt de vérifier la stabilité robuste de la dynamique décrite par la relation (4.11) à l'aide de l'approche des applications gardiennes (Saydy et al, 1990). Cette approche permet de vérifier facilement la stabilité généralisée robuste de matrices ou de polynômes à condition que leurs dépendances aux paramètres incertains soient sous une forme polynomiale. Ainsi, avant de présenter plus en détails l'approche des applications gardiennes, nous allons transformer le problème de stabilité de la dynamique décrite par la relation (4.11) et le problème de la non singularité de la matrice M_e^* sous la forme d'un seul problème de stabilité d'une matrice avec une dépendance affine des paramètres incertains. La proposition suivante présente cette transformation.

Proposition 5.3: *La matrice M_e^* est non singulière et la dynamique décrite par la relation* (4.11) *est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice suivante*

$$\overline{A}_e = \begin{bmatrix} -K_e^{-1}F_e & -K_e^{-1}M_e^* \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

ont toutes une partie réelle négative. □

Preuve de la proposition 5.3: D'abord, nous savons que la dynamique décrite par la relation (4.11) est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice suivante

$$A_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M_e^{*-1}K_e & -M_e^{*-1}F_e \end{bmatrix}$$

ont toutes une partie réelle négative. Aussi, la matrice A_e est visiblement non singulière si et seulement si M_e^* est non singulière. La stabilité de (4.11) et la non singularité de M_e^* sont donc vérifiées si et seulement si les valeurs propres de la matrice A_e ont toutes une partie réelle négative. Finalement, il est clair que les valeurs propres de A_e ont toutes une partie réelle négative si et seulement si les valeurs propres de A_e^{-1}, qui est donnée par la relation (5.49), ont toutes une partie réelle négative. □

Pour simplifier les explications nous allons maintenant supposer que le paramètre I_z n'admet pas d'incertitude. Cette hypothèse peut facilement être levée en introduisant le concept d'application gardiennes biparamétriques (Saydy et al., 1990). Avec cette hypothèse, l'incertitude de la matrice décrite par la relation (5.49) est paramétrisée de façon affine uniquement par m_c. Une application gardienne appropriée peut alors être utilisée pour vérifier la stabilité robuste de cette matrice. L'étude de stabilité (d'une matrice) ((d'un polynôme)) avec l'approche des applications gardiennes consiste à détecter le passage de ses (valeurs propres) ((racines)) par la frontière d'un ensemble de stabilité qui doit être ouvert et qui est généralement symétrique par rapport à l'axe réel du plan complexe. Dans notre cas, l'ensemble de stabilité est bien sûr la moitié gauche du plan complexe. Plus précisément, l'application gardienne ν est définie de façon à être nulle si et seulement si au moins une (valeur propre de la matrice) ((racine du polynôme)) est sur la frontière de l'ensemble de stabilité. Parce que les (valeurs propres d'une matrice) ((racines d'un polynôme)) sont des fonctions continues de ses coefficients qui sont également des fonctions continues des paramètres incertains par hypothèse, le passage des (valeurs propres) ((racines)) par la frontière de l'ensemble de stabilité peut facilement

être détecté en posant $v = 0$. Dans Saydy et al. (1990), plusieurs applications gardiennes correspondant à plusieurs ensembles de stabilité sont disponibles. En particulier, l'application gardienne appliquée à la matrice donnée par la relation (5.49) et correspondant à l'ensemble de stabilité défini par le demi plan complexe gauche est donnée par

$$v(\Delta m_c) = \left|\overline{A}_e(\Delta m_c) \oplus \overline{A}_e(\Delta m_c)\right| \tag{5.50}$$

où $\oplus$ désigne l'addition de Kronecher définie de la façon suivante:

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{B})$$

et où $\otimes$ désigne le produit de Kronecher défini de la façon suivante:

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Dans la relation (5.50), $\overline{A}_e(\Delta m_c)$ est une fonction affine de Δm_c qui peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$\overline{A}_e(\Delta m_c) = \overline{A}_{e0} + \Delta m_c\ \overline{A}_{e1} \tag{5.51}$$

où $\overline{A}_{e0}$ est la matrice $\overline{A}_e$ correspondant à la masse nominale $m_{c0} = (\underline{m}_c + \overline{m}_c)/2$ et $\Delta m_c \in [-\Delta\overline{m}_c \quad \Delta\overline{m}_c]$ est l'incertitude avec $\Delta\overline{m}_c = (\overline{m}_c - \underline{m}_c)/2$. Les propriétés de l'application gardienne décrites par la relation (5.50) nous permettent alors d'obtenir le résultat suivant (Saydy et al., 1990).

Proposition 5.4: *Les valeurs propres de la matrice $\overline{A}_e$ ont toutes une partie réelle négative $\forall \Delta m_c \in [-\Delta\overline{m}_c \quad \Delta\overline{m}_c]$ si et seulement si* i) *les valeurs propres de $\overline{A}_{e0}$ ont toutes une partie réelle négative et* ii) *il n'existe pas de valeurs propres réelles de $(\overline{A}_{e0} \oplus \overline{A}_{e0})^{-1}(\overline{A}_{e1} \oplus \overline{A}_{e1})$ dont l'inverse appartient à l'intervalle $[-\Delta\overline{m}_c \quad \Delta\overline{m}_c]$.*

Les propositions 5.3 et 5.4 nous donnent maintenant des conditions nécessaires et suffisantes simples pour vérifier la robustesse invoquée par les hypothèses ii et iii de la proposition 5.1. Notre objectif est maintenant de maximiser le paramètre α tout en s'assurant de la stabilité robuste du système. Rappelons que le paramètre α caractérise les CGRVA qui sont un compromis entre les CGR et les CGRV. En maximisant ce paramètre, on se trouve donc à minimiser l'erreur d'approximation entre les CGRVA et les CGRV et du même coup, les erreurs de suivi dans l'espace de travail. Cet objectif peut certainement être atteint puisque l'existence de la solution de ce problème est assuré comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 5.5: *Il existe $\alpha > 0$ tel que la condition de la proposition 5.4 est satisfaite.*

Preuve de la proposition 5.5: Selon la relation (4.3a), $\boldsymbol{M}_e^* = \boldsymbol{M}_e$ lorsque $\alpha = 0$. Les propriétés 2.2, 2.4 et la relation (2.25) nous indiquent alors que $\boldsymbol{M}_e^*$, $\boldsymbol{K}_e$ et $\boldsymbol{F}_e$ sont symétriques et définies positives de sorte que la dynamique décrite par la relation (4.11) est asymptotiquement stable. Par nécessité, les conditions des propositions 5.3 et 5.4 sont alors satisfaites. Parce que selon la relation (4.3a), $\boldsymbol{M}_e^*$ est une fonction continue de α, il existe certainement $\alpha > 0$ tel que les conditions de la proposition 5.4 sont satisfaites. □

Pour maximiser le paramètre α, il suffit donc de démarrer avec $\alpha = 0$ et de l'augmenter graduellement pour autant que les conditions de la proposition 5.4 soient satisfaites. Les hypothèses ii et iii de la proposition 5.1 sont alors satisfaites.

Nous devons finalement choisir le paramètre ξ du filtre décrit par la relation (5.4) de façon à ce que la condition de petit gain décrite par l'hypothèse vi de la proposition 5.1 soit satisfaite. Pour ce faire, il suffit d'obtenir la constante $\wp$ décrite par la relation (5.43).

5.5.3 Estimation de la constante $\wp$

La constante $\wp$ décrite par la relation (5.43) peut être difficile à obtenir de façon exacte. Pour cette raison, on cherche plutôt à obtenir une estimation $\hat{\wp}$ telle que $\hat{\wp} \geq \wp$ de sorte que si l'hypothèse vi de la proposition 5.1 est satisfaite pour $\hat{\wp}$, elle le sera également pour $\wp$. Le premier terme de $\wp$ peut facilement être estimé en regard avec la modèle du système. Considérons alors le deuxième terme de $\wp$. Selon les arguments invoqués par la preuve de la proposition 5.2, le vecteur f_e, donné par la relation (5.24), peut être réécrit de la façon suivante:

$$f_e = H_r^* e_r + H_{re}^* e_e = [\mathrm{I} \quad 0] T M^{-1} e$$

d'où

$$\|f_e\|_2 \leq |T|_2 \sup_{p \in U_p} \sup_q \max_i \lambda_i\left[M^{-1}(q)\right] \|e\|_2 \leq |T|_2 \frac{1}{\inf\limits_{p \in U_p} \inf\limits_q \min\limits_i \lambda_i\left[M(q)\right]} \|e\|_2$$

De la relation (5.11), nous obtenons ensuite

$$\|f_e\|_2 \leq |T|_2 \frac{1}{\inf\limits_{p \in U_p} \inf\limits_q \min\limits_i \lambda_i\left[M(q)\right]} \sup_{p \in U_p} \sqrt{\tfrac{1}{\varsigma} p^T P_0^{-1} p}$$

Parce que l'énergie cinétique est donnée par

$$\overline{K} = \tfrac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left[M(q)\right] \dot{q}_i^2$$

et parce que les vitesses généralisées $\dot{q}_i$ sont indépendantes, choisir q de façon à minimiser $\overline{K}$ est équivalent à choisir q de façon à minimiser les valeurs propres de M. Physiquement, il est alors clair que l'énergie cinétique associée à la vitesses généralisée $\dot{q}_i$ est supérieure à l'énergie obtenue en considérant seulement l'inertie du membre i. En

d'autre termes, l'énergie cinétique associée à $\dot{q}_i$ est supérieure à celle obtenue en négligeant l'inertie des membres i+1 à n. Une estimation conservatrice de l'énergie minimale peut alors être obtenue à l'aide d'une matrice de masse $\boldsymbol{M}$ diagonale. Une estimation de la valeur propre minimale de $\boldsymbol{M}$ peut donc être aisément obtenue. Le troisième terme de $\wp$ peut être estimé grâce à la résolution d'un problème d'IML. En effet il s'agit d'utiliser le résultat suivant (Boyd et Barratt, 1991).

Lemme 5.3: *Si $G(s)$ est la matrice de transfert correspondant à la représentation d'état $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\mathbf{0})$ et si la matrice symétrique $\boldsymbol{P}$ respecte l'IML suivante*:

$$\boldsymbol{PA}^T + \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{BB}^T < \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{P} > \mathbf{0}$$

alors,

$$\|\boldsymbol{G}\|_2 \leq \sqrt{\mathrm{trace}(\boldsymbol{CPC}^T)}$$

Selon les relations (5.27a) et (5.38), la représentation d'état associée à la matrice de transfert $\boldsymbol{G}_e(s)$ peut prendre la forme suivante $\left(\boldsymbol{E}^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_e, \boldsymbol{E}^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_e, \boldsymbol{C}_e, \mathbf{0}\right)$ avec

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_e^* \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{A}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{K}_e & -\boldsymbol{F}_e \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\boldsymbol{B}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Selon la relation (4.3a) et les propriétés 2.5 et 2.7, les matrices $\tilde{\boldsymbol{A}}_e$, $\tilde{\boldsymbol{B}}_e$ et $\boldsymbol{C}_e$ sont indépendantes des paramètres incertains et la matrice $\boldsymbol{E}$ est une fonction affine des paramètres incertains m_c et I_z. L'ensemble de l'incertitude de m_c et I_z peut alors être divisée en N_e^2 parties égales $\boldsymbol{U}_{ij} = \left[m_{ci}, m_{ci+1}\right] x \left[I_{zj}, I_{zj+1}\right]$ pour i,j = 1, ..., N_e. Si on définit $\boldsymbol{E}_{ij}$ comme étant la matrice $\boldsymbol{E}$ évaluée à m_{ci} et I_{zj}, le lemme 5.3 et le fait que $\boldsymbol{E}$ soit une fonction affine de m_c et I_z nous permet d'affirmer que s'il existe une matrice symétrique $\boldsymbol{P}_{ij}$

qui respecte l'IML suivante:

$$\begin{aligned} E_{ij}P_{ij}\tilde{A}_e^T + \tilde{A}_e P_{ij} E_{ij}^T + \tilde{B}_e \tilde{B}_e^T &< 0 \\ E_{i+1,j}P_{ij}\tilde{A}_e^T + \tilde{A}_e P_{ij} E_{i+1,j}^T + \tilde{B}_e \tilde{B}_e^T &< 0 \\ E_{i,j+1}P_{ij}\tilde{A}_e^T + \tilde{A}_e P_{ij} E_{i,j+1}^T + \tilde{B}_e \tilde{B}_e^T &< 0 \\ E_{i+1,j+1}P_{ij}\tilde{A}_e^T + \tilde{A}_e P_{ij} E_{i+1,j+1}^T + \tilde{B}_e \tilde{B}_e^T &< 0 \\ P_{ij} &> 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

alors,

$$\sup_{\{m_c, I_z\} \in U_{ij}} \|G_e\|_2 \leq \sqrt{\mathrm{trace}(CP_{ij}C^T)}$$

Si on suppose que la matrice A_e est robustement stable (cette hypothèse est préalablement vérifiée par l'approche des applications gardiennes expliquée à la section précédente), alors, il s'ensuit qu'il existe un entier N_e tel que pour i,j=1, ..., N_e il existe une matrice P_{ij} qui satisfait L'IML (5.52). Ainsi, pour N_e suffisamment grand,

$$\sup_{p \in U_p} \|G_e\|_2 \leq \max_{i,j=1,\ldots,N_e} \sqrt{\mathrm{trace}(CP_{ij}C^T)} \tag{5.53}$$

de sorte qu'une surestimation du troisième et dernier terme de $\wp$ peut être obtenue.

5.5.4 Simulation de la loi de commande

Nous allons maintenant présenter des résultats de simulation de la loi de commande décrite par les relations (5.19) à (5.22) accompagnée de l'estimateur de paramètre décrit par la relation (5.8). Pour cette simulation, nous avons considéré le manipulateur flexible modélisé à la section 2.5 avec l'incertitude de la charge suivante: $m_c \in [0{,}25\ 0{,}75]$. Tout comme les simulations du chapitre précédent, la trajectoire désirée est celle décrite à la section 3.4. Avant de simuler le système, selon l'approche décrite à la section 5.5.2, nous avons trouvé la valeur maximum de α qui assure le respect des conditions ii et iii de la proposition 5.1. Même si cette valeur maximum est 0,86 nous avons choisi de fixer α à

0,82 pour assurer une marge de stabilité de 5%. Pour être consistant avec la simulation de la section 4.2.3.1, nous avons choisi de fixer λ à une valeur de 10. Aussi, les conditions initiales de l'estimateur ont été choisies comme suit: $\boldsymbol{P}(t_0) = 100000$, $\hat{\boldsymbol{p}}(t_0) = \boldsymbol{m}_{c0} = 0,5$ et $\varsigma = 1$. La constante $\wp$ a ensuite été surestimée grâce à l'approche décrite à la section 5.5.3. La valeur obtenue étant de 345, nous avons choisi de fixer la fréquence de coupure du filtre décrit par la relation (5.4) à $\xi = 380$ de façon à assurer le respect de la condition vi de la proposition 5.1. Le système a ensuite été simulé avec les mêmes conditions initiales qu'à la section 4.2.3.1 en considérant dans un premier temps une charge $\boldsymbol{m}_c$ = 0.25 Kg et dans un deuxième temps une charge $\boldsymbol{m}_c$ = 0.75 Kg. Les résultats de ces simulations sont illustrés par les figures 5.1 à 5.6. Nous n'avons pas cru bon de présenter les graphiques de la masse estimée en fonction du temps puisque, dans les deux simulations, elle converge très rapidement vers la vraie masse du système. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Les résultats des simulations nous montrent des erreurs de suivi qui augmentent considérablement selon la charge du système. Les erreurs de suivi obtenues avec la charge maximum sont environ trois fois supérieures à celles obtenues avec la charge minimum. Ces résultats sont attribuables à la nature approximative des CGRVA. En effet, lorsque la charge augmente, la déformation du membre flexible augmente et, par conséquent, la différence entre les CGRVA et les CGRV augmente. La vibration de l'outil du manipulateur est également beaucoup plus présente lorsque la charge du manipulateur est à son maximum. Ce phénomène est attribuable à la diminution des fréquences modales du système par rapport à l'augmentation de la charge. En effet, lorsque la charge augmente, les fréquences modales diminuent et sont ainsi moins atténuées par le filtrage naturel et artificiel introduit par la loi de commande.

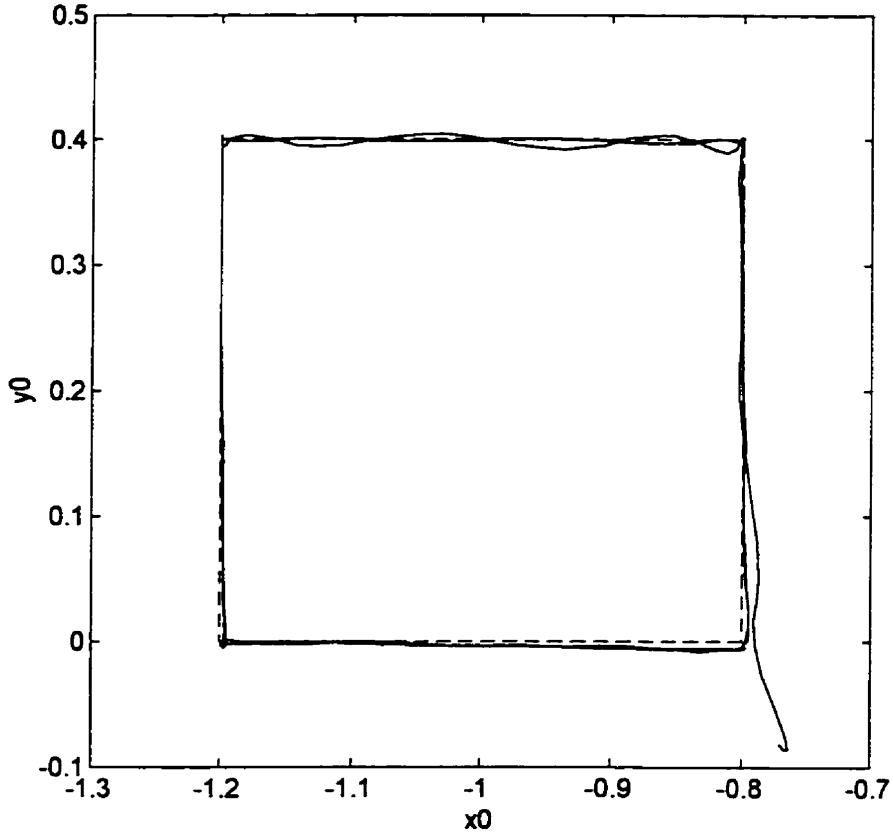


Figure 5.1 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail lorsque $m_c = 0,25\,\mathrm{Kg}$.

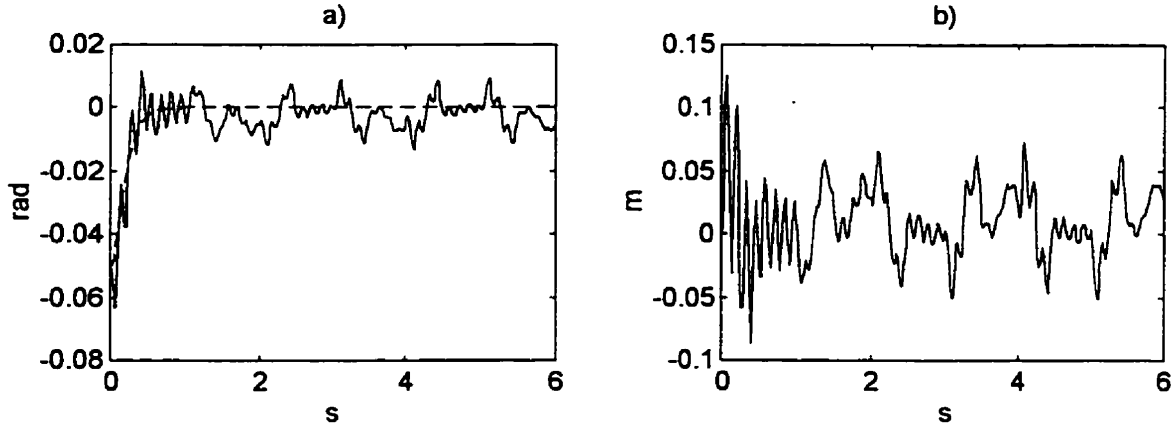


Figure 5.2 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) déformation μ lorsque $m_c = 0,25\,\mathrm{Kg}$.

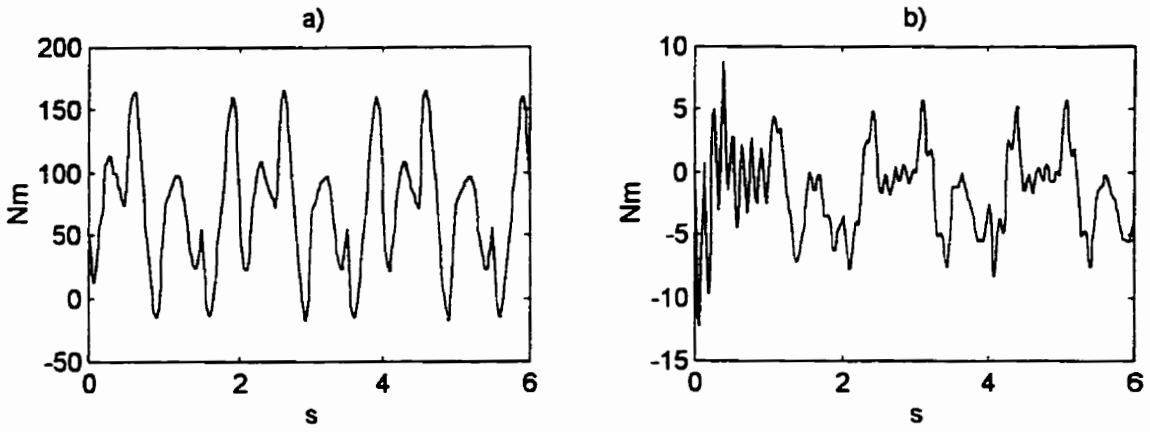


Figure 5.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation lorsque $m_c = 0,25\,\text{Kg}$.

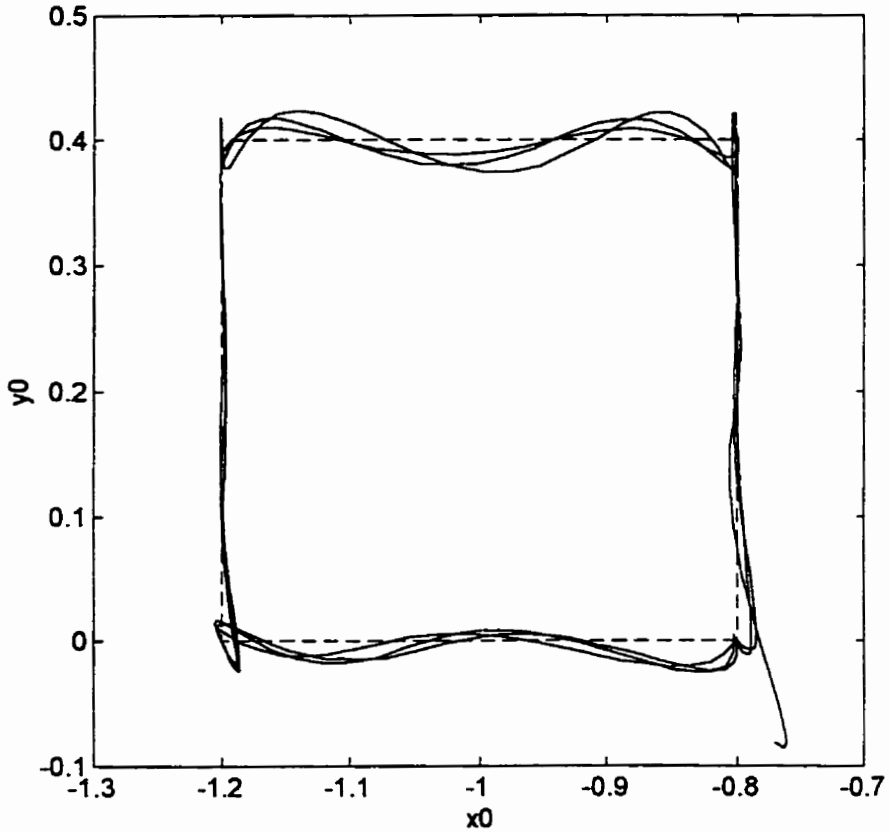


Figure 5.4 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail lorsque $m_c = 0,75\,\text{Kg}$.

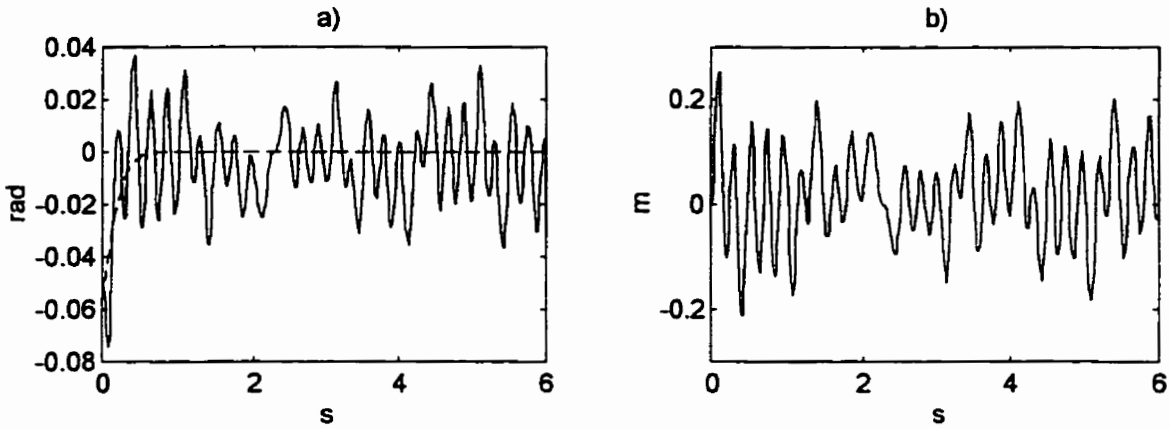


Figure 5.5 a) Erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) déformation μ lorsque $m_c = 0,75\,\mathrm{Kg}$.

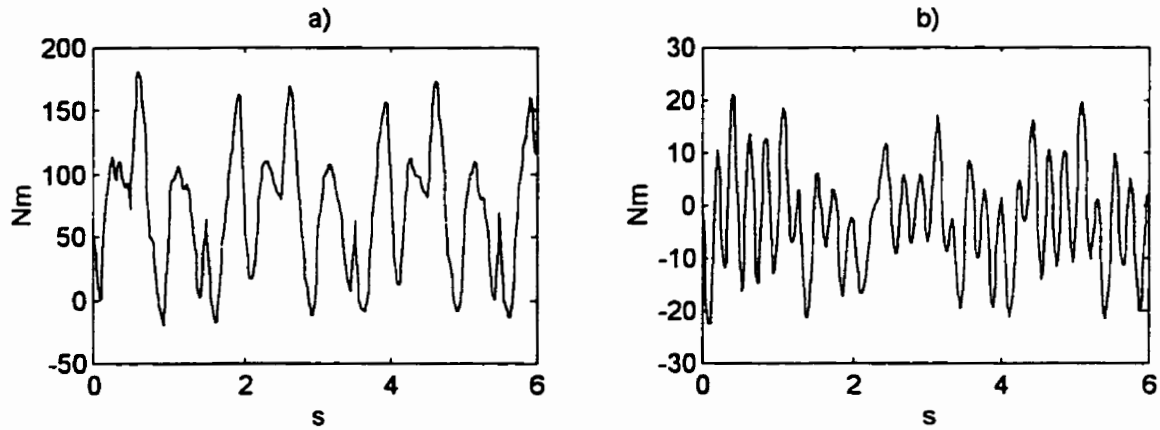


Figure 5.6 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation lorsque $m_c = 0,75\,\mathrm{Kg}$.

5.6 Stratégie de commande proposée

Nous allons maintenant reconsidérer la stratégie de commande présentée à la section 4.3. Pour ce faire, réécrivons d'abord le modèle dynamique décrit par les relations (5.15) et (5.16) en remplaçant α par zéro:

$$\hat{M}_r(q)\ddot{q}_r + \hat{M}_{re}(q)\ddot{q}_e + \hat{V}_r(q,\dot{q})\dot{q}_r + \hat{V}_{re}(q,\dot{q})\dot{q}_e + F_r\dot{q}_r + Y_r(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p} = \tau \qquad (5.54)$$

$$\hat{M}_{er}(q)\ddot{q}_r + \hat{M}_e\ddot{q}_e + {}^1\hat{V}_{er}\left(q_r, {}^1\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + F_e\dot{q}_e + K_e q_e + Y_e(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p} = 0 \qquad (5.55)$$

Selon l'hypothèse 5.3 et la propriété 2.2, la matrice $\hat{M}_e$ est non singulière. Le vecteur d'accélérations $\ddot{q}_e$ peut donc être isolé de l'expression (5.55) et substitué dans l'expression (5.54). La dynamique de la partie rigide du système prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned}&\hat{\bar{M}}_r(q)\ddot{q}_r + \hat{V}_r(q,\dot{q})\dot{q}_r + \hat{V}_{re}(q,\dot{q})\dot{q}_e + F_r\dot{q}_r + Y_r(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p}\\ &-\hat{M}_{re}(q)\hat{M}_e^{-1}\left[{}^1\hat{V}_{er}\left(q_r, {}^1\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + F_e\dot{q}_e + K_e q_e + Y_e(\ddot{q},\dot{q},q)\bar{p}\right] = \tau\end{aligned} \qquad (5.56)$$

où

$$\hat{\bar{M}}_r(q) = \hat{M}_r(q) - \hat{M}_{re}(q)\hat{M}_e^{-1}\hat{M}_{re}^T(q) \qquad (5.57)$$

5.6.1 Modification de la loi de commande

En se basant sur ce qui est présenté dans Middleton et Goodwin (1988) (i.e. une commande adaptative indirecte pour les manipulateurs rigides), nous modifions la loi de commande donnée par les relations (4.16), (4.21) et (4.25) de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\tau = {}&\hat{\bar{M}}_r(q)(u + w_1) + \hat{V}_r(q,\dot{q})\dot{q}_r + \hat{V}_{re}(q,\dot{q})\dot{q}_e + F_r\dot{q}_r + w_2\\ &-\hat{M}_{re}(q)\hat{M}_e^{-1}\left[{}^1\hat{V}_{er}\left(q_r, {}^1\dot{q}_r\right){}^1\dot{q}_r + F_e\dot{q}_e + K_e q_e\right]\end{aligned} \qquad (5.58)$$

où

$$u = \begin{bmatrix} {}^1u \\ {}^2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\ddot{q}_r^d + 2\lambda\ {}^1\dot{\tilde{q}}_r + \lambda^2\ {}^1\tilde{q}_r \\ {}^2\ddot{q}_r^d + K_2 x_2 \end{bmatrix} \qquad (5.59)$$

$x_2 = \left[{}^2\tilde{q}_r \quad {}^2\dot{\tilde{q}}_r \quad \tilde{q}_e^T \quad \dot{\tilde{q}}_e^T\right]^T$ est le vecteur des erreurs de suivi de la dernière CGR, de sa dérivée, des CGF et de leurs dérivées. Finalement, λ est une constante positive et les termes de correction w_1 et w_2 sont donnés par les relations suivantes:

$$w_1 = -\tfrac{1}{\xi}\tfrac{d}{dt}\left(\hat{\overline{M}}_r^{-1}(q)\right)W_r(\dot{q},q)\tilde{p} + \tfrac{1}{\xi}\tfrac{d}{dt}\left(\hat{\overline{M}}_r^{-1}(q)\hat{M}_{re}(q)\hat{M}_e^{-1}\right)W_e(\dot{q},q)\tilde{p} \tag{5.60}$$

et

$$w_2 = -\tfrac{1}{\xi}W_r(\dot{q},q)\dot{\tilde{p}} + \tfrac{1}{\xi}\hat{M}_{re}(q)\hat{M}_e^{-1}W_e(\dot{q},q)\dot{\tilde{p}} \tag{5.61}$$

Le résultat suivant peut alors être obtenu en se basant sur des arguments très similaires à ceux invoqués par la preuve de la proposition 5.1.

Proposition 5.6 *Si* i) *les hypothèses* 5.1 *à* 5.3 *sont vérifiées;* ii) *la matrice de gains* K_2 *de la loi de commande* (5.59) *est choisie de façon à assurer la robustesse de la stabilité (Hurwitz) de la matrice* $\overline{A}_2$ *définie aux relations* (4.23) *et* (4.30); iii) *l'estimateur de paramètres utilisé est celui décrit par la relation* (5.8); iv) *la trajectoire désirée des CGR et des CGF est uniformément bornée et* v) *la fréquence de coupure du filtre décrit par la relation* (5.4) *respecte la condition suivante:*

$$\xi > \wp$$

où $\wp$ *est donnée par la relation suivante*

$$\wp = \sup_{t\geq 0}\sup_{p\in U_p}\left|\tfrac{\partial}{\partial\, {}^2q_r}\left({}^1M_{re}^T\right)\right|_2 \sup_{\tilde{p}\in U_p}\|f\|_2 \sup_{p\in U_p}\|G\|_2 \tag{5.62}$$

et où $G(s)$ *est la matrice de transfert associée à la représentation d'états* $\left(\overline{A}_2, \overline{B}, \overline{C}, 0\right)$, $\overline{B} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad -M_e^{-1}\right]^T$, $\overline{C} = \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right]$ *et* f *est donnée par la relation suivante:*

$$f(t) = \hat{\overline{M}}_r^{-1}(q)\,e_r(t) - \hat{\overline{M}}_r^{-1}(q)\hat{M}_{re}(q_r)\hat{M}_e^{-1}\,e_e(t). \tag{5.63}$$

alors, i) *les vecteurs des erreurs de suivi* ${}^1\tilde{q}_r$ *et* ${}^1\dot{\tilde{q}}_r$ *ainsi que le vecteur des erreurs de prédiction* e *et le vecteur* f *convergent robustement à zéro lorsque le temps tend vers l'infini.* ii) *les vecteurs de variables d'état* x_2, ${}^1\tilde{q}_r$ *et* ${}^1\dot{\tilde{q}}_r$ *sont robustement bornés.*

5.6.2 Mise à jour de la trajectoire désirée

Comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre IV, la stratégie de commande proposée nécessite une double transformation de la trajectoire désirée. La première transformation de l'espace de travail à l'espace des CGRV et la seconde de l'espace des CGRV à celui des CGR et des CGF. Parce que la première transformation dépend seulement de la cinématique du système, elle n'est pas affectée par l'incertitude de la charge. Par opposition, la deuxième transformation est affectée de façon significative par l'incertitude de la charge puisqu'elle invoque la dynamique de la partie flexible du système. Pour cette raison, la deuxième transformation doit être mise à jour, en ligne, selon l'évolution des paramètres estimés. Lorsque cette transformation est obtenue à partir de la méthode quasi-statique, elle peut être mise à jour de façon continue. Par contre, lorsque qu'elle est obtenue par la méthode exacte, sa mise à jour doit être considérée pour toute la période de la trajectoire désirée. En effet l'approche causale-anticausale nécessite l'intégration de la partie stable du système à partir des conditions initiales et l'intégration à rebours de la partie instable à partir des conditions finales. Pour cette raison, la mise à jour ne peut être exécutée de façon continue. Ainsi, les paramètres utilisés pour la mise à jour sont définis de la façon suivante:

$$\bar{p}(t) = \hat{p}(t^*) \tag{5.64}$$

où t^* est une fonction en escalier du temps t définie de la façon suivante:

$$t^* = \text{floor}(t / T_t)T_t \tag{5.65}$$

où floor(x) est le plus grand entier plus petit que x et T_t est la période de la mise à jour. De cette façon, le vecteur de paramètres $\bar{p}$ prend la valeur du vecteur des paramètres estimés au début de chaque mise à jour et demeure constant pour toute sa durée T_t. On obtient alors la mise à jour de la trajectoire désirée (non périodique) ((périodique)) dans

l'espace des CGR et des CGF en exécutant (l'algorithme 3.1) ((l'algorithme 3.2)) en remplaçant les paramètres $\boldsymbol{p}$ par les paramètres $\tilde{\boldsymbol{p}}$. Une condition suffisante pour la convergence robuste de (l'algorithme 3.1) ((l'algorithme 3.2)) est alors donnée par la (proposition 5.7) ((proposition 5.8)).

Proposition 5.7: *Si on suppose que la trajectoire désirée des CGRV est lisse et uniformément bornée et si on considère la matrice* $\boldsymbol{A}$ *définie à la relation* (3.9) *et la matrice* $\boldsymbol{H}$ *définie par la relation* (3.21) *avec le facteur* γ *redéfini de la façon suivante*:

$$\gamma = \sup_{p \in U_p} \sup_{t>0} \left[\sigma_{\max} \left(\frac{\partial f^d(\boldsymbol{q}_e^d(t),t)}{\partial \boldsymbol{q}_e^d} \right) \right] \tag{5.66}$$

alors, lorsque $k \to \infty$, *l'algorithme* 3.1 *fait converger* $\boldsymbol{x}^{d(k)}(t)$ *vers une solution lisse et uniformément bornée de l'équation différentielle* (3.9) *pour n'importe quel* $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}_p$ *si les valeurs propres de* $\boldsymbol{A}$ *et de* $\boldsymbol{H}$ *ont toutes une partie réelle non nulle* $\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}_p$.

Proposition 5.8: *Identique à la proposition 5.7 mais en considérant l'algorithme* 3.2.

La preuve de la (proposition 5.7) ((proposition 5.8)) invoque les mêmes arguments que celle de la (proposition 3.1) ((proposition 3.2)).

Remarque 5.2: *Pour éviter un bon nombre de calculs en ligne, lors de l'implantation ou de la simulation de la structure de commande proposée, il sera plus intéressant de considérer une seule itération de (l'algorithme* 3.1*) ((l'algorithme* 3.2*)) pour chacune des mises à jour. Parce que généralement les paramètres estimés convergent vers des valeurs constantes, cette modification n'affectera pas significativement la convergence de l'algorithme.*

5.6.3 Conditions de robustesse du suivi de trajectoires

De façon similaire à ce qui est présenté au chapitre IV, le suivi de trajectoire dans l'espace des CGRV est obtenu par la loi de commande décrite par les relations (5.58) à (5.61). Cependant, pour assurer la robustesse du suivi, la trajectoire désirée devra être transformée en ligne de l'espace des CGRV à celui des CGR et des CGF selon la procédure de mise à jour décrite à la section 5.6.2. La convergence des erreurs de suivi pourra alors être assurée sous réserve de respecter certaines conditions présentées par la proposition suivante (Bigras et al, 1997b).

Proposition 5.9: *Si* i) *les hypothèses de la proposition* 5.6 *sont vérifiées;* ii) *le vecteur des paramètres estimés* $\hat{\boldsymbol{p}}$ *converge lorsque* $t \to \infty$*;* iii) *la trajectoire désirée (non périodique)((périodique)) dans l'espace des CGR et des CGF est obtenue et mise à jour selon la procédure décrite à la section* 5.6.2 *et les hypothèses de la (proposition* 5.8*)((proposition* 5.9*)) sont vérifiées ;* iv) *la matrice de gains* $\boldsymbol{K}_2$ *est choisie de façon à ce que la condition suivante soit vérifiée de façon robuste:*

$$\overline{\wp}\left\|\boldsymbol{G}_2\right\|_\infty < 1$$

où $\boldsymbol{G}_2(s) = \overline{\boldsymbol{C}}_2\left(s\mathbf{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_2\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}_2$, $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ *est définie aux relations* (4.23) *et* (4.30), $\overline{\boldsymbol{B}}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & \mathbf{0} & -\boldsymbol{M}_e^{-T}\end{bmatrix}^T$, $\overline{\boldsymbol{C}}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^T$ *et* $\overline{\wp}$ *est défini par la relation* (5.75), *alors,*

i) *si la trajectoire désirée est mise à jour par la méthode quasi-statique, lorsque* $t \to \infty$, *les variables d'état sont robustement bornées avec une borne qui est proportionnelle aux erreurs de transformation introduites par la méthode quasi-statique;*

ii) *si la trajectoire désirée est mise à jour par la méthode exacte, les erreurs de suivi dans l'espace des CGRV et les erreurs de suivi dans l'espace des CGR et des CGF convergent robustement vers zéro lorsque* $t \to \infty$.

Preuve de la proposition 5.9: La dynamique des erreurs de suivi des CGR et des CGF peut être obtenue à partir des relations (5.55), (5.56), (5.57), (5.58), (5.59), (5.60) et (5.61). Cette dynamique est donnée par la relation suivante:

$$\dot{x}_2 = \hat{\bar{A}}_2 x_2 + \tfrac{1}{\xi}\hat{B}_2\,{}^2\dot{f}(t) + \hat{B}_2\,{}^2f(t) + \hat{\bar{B}}_2\hat{g}_0(t) + \hat{\bar{B}}_2\dot{\hat{g}}_3(t) + \hat{\bar{B}}_2 P_2(t) \tag{5.67}$$

où

$$\begin{aligned}\hat{g}_0(t) =& {}^1\hat{M}_{re}^T(q_r)\left({}^1f - 2\lambda\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r - \lambda^2\,{}^1\tilde{q}_r\right) + 2\,{}^1\hat{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r - {}^1\hat{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{\tilde{q}}_r)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r \\ &+\left({}^1\hat{M}_{re}^T(q_r^d) - {}^1\hat{M}_{re}^T(q_r)\right){}^1\ddot{q}_r^d + \left({}^1\hat{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d) - {}^1\hat{V}_{er}(q_r, {}^1\dot{q}_r^d)\right){}^1\dot{q}_r^d + \left(\hat{G}_e(q_r^d) - \hat{G}_e(q_r)\right) \\ &-e_e + \tfrac{1}{\xi}W_e\dot{\tilde{p}} - \tfrac{1}{\xi}\,{}^1\dot{\hat{M}}_{re}^T(q_r)\,{}^1f + \hat{M}_e\breve{M}_e^{-1}(\Gamma(t,\breve{p}) - \Gamma(t,\hat{p})) - \left(\breve{M}_e - \hat{M}_e\right)\breve{M}_e^{-1}\Gamma(t,\hat{p})\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\hat{g}_3(t) = \tfrac{1}{\xi}\,{}^1\hat{M}_{re}^T(q_r)\,{}^1f - \tfrac{1}{\xi}e_e \tag{5.69}$$

$$\Gamma(t,\breve{p}) = F_e\dot{q}_e^d + K_e q_e^d + \breve{G}_e(q_r^d) + {}^1\breve{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{q}_r^d + \breve{M}_{re}^T(q_r^d)\ddot{q}_r^d$$

${}^1f$ et ${}^2f$ sont respectivement les n_r-1 première lignes et la dernière ligne du vecteur f défini par la relation (5.63), $\hat{\bar{A}}_2$ est donnée par la relation (4.30) en remplaçant les paramètres p par les paramètres estimés $\hat{p}$, $\hat{\bar{B}}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\hat{M}_e^{-1}\end{bmatrix}^T$ et $\hat{B}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -{}^2\hat{M}_{re}\hat{M}_e^{-1}\end{bmatrix}^T$. Rappelons que le vecteur de perturbation P_2, défini à la relation (3.8), est nul si la mise à jour de la trajectoire désirée est obtenue par la méthode exacte et il est proportionnel aux erreurs de transformation si la mise à jour est obtenue par la méthode quasi-statique. De la même façon qu'à la section 4.3.2 (relation 4.26), le vecteur de perturbation $\hat{g}_0$ peut se décomposer en deux parties de la façon suivante:

$$\hat{g}_0(t) = \hat{g}_1(t) + \hat{g}_2(t) \tag{5.70}$$

où

$$\hat{g}_1(t) = -{}^1\hat{M}_{re}^T(q_r)\left(2\lambda\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r + \lambda^2\,{}^1\tilde{q}_r\right) + 2\,{}^1\hat{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{q}_r^d)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r - {}^1\hat{V}_{er}(q_r^d, {}^1\dot{\tilde{q}}_r)\,{}^1\dot{\tilde{q}}_r + \hat{\bar{f}}_0({}^1q_r^d, t) - \hat{\bar{f}}_0({}^1q_r, t)$$
$$+\left(\hat{\bar{f}}_1({}^1q_r^d, t) - \hat{\bar{f}}_1({}^1q_r, t)\right)\sin({}^2q_r) + \left(\hat{\bar{f}}_2({}^1q_r^d, t) - \hat{\bar{f}}_2({}^1q_r, t)\right)\cos({}^2q_r)$$
$$+\left(\hat{\bar{f}}_3({}^1q_r^d, t) - \hat{\bar{f}}_3({}^1q_r, t)\right)\sin(2\,{}^2q_r) + \left(\hat{\bar{f}}_4({}^1q_r^d, t) - \hat{\bar{f}}_4({}^1q_r, t)\right)\cos(2\,{}^2q_r)$$
$$\left({}^1\hat{M}_{re}^T(q_r) - \tfrac{1}{\xi}\,{}^1\dot{\hat{M}}_{re}^T(q_r)\right){}^1f - e_e + \tfrac{1}{\xi}W_e\dot{\bar{p}} + \hat{M}_e\breve{M}_e^{-1}(\Gamma(t,\bar{p}) - \Gamma(t,\hat{p}))$$
$$-\left(\breve{M}_e - \hat{M}_e\right)\breve{M}_e^{-1}\Gamma(t,\hat{p}) \tag{5.71}$$

$$\hat{g}_2(t) = \hat{\bar{f}}_1({}^1q_r^d, t)\left(\sin({}^2q_r^d) - \sin({}^2q_r)\right) + \hat{\bar{f}}_2({}^1q_r^d, t)\left(\cos({}^2q_r^d) - \cos({}^2q_r)\right)$$
$$+\hat{\bar{f}}_3({}^1q_r^d, t)\left(\sin(2\,{}^2q_r^d) - \sin(2\,{}^2q_r)\right) + \hat{\bar{f}}_4({}^1q_r^d, t)\left(\cos(2\,{}^2q_r^d) - \cos(2\,{}^2q_r)\right) \tag{5.72}$$

Les fonctions $\hat{\bar{f}}_i$ sont définies à la relation (3.10) en remplaçant les paramètres p par les paramètres estimés $\hat{p}$. Parce que selon la proposition 5.6, les variables d'état sont bornées, le théorème des accroissements finis nous permet d'obtenir les deux inégalités suivantes:

$$|\hat{g}_1(t)|_2 \le \alpha_0\left|{}^1\tilde{q}_r(t)\right|_2 + \alpha_1\left|{}^1\dot{\tilde{q}}_r(t)\right|_2 + \alpha_2\left|{}^1\dot{\tilde{q}}_r(t)\right|_2^2 + \alpha_3|e(t)|_2$$
$$+\alpha_4|f(t)|_2 + \alpha_5\left|\dot{\bar{p}}(t)\right|_2 + \alpha_6|\bar{p}(t) - \hat{p}(t)|_2 \tag{5.73}$$

$$|\hat{g}_2(t)|_2 = \left|\hat{Q}(t)\,{}^2\tilde{q}_r\right|_2 < \overline{\wp}\left|{}^2\tilde{q}_r\right|_2 \tag{5.74}$$

où α_i pour $i = 0, \ldots, 6$ est une constante positive bornée et où

$$\overline{\wp} = \sup_{t>0}\left|\hat{Q}(t)\right|_2 = \sup_{\hat{p}\in U_p}\sup_{t>0}\left|\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial\,{}^2q_r^d}\right|_2. \tag{5.75}$$

Ainsi, la proposition 5.6, le lemme 5.1 et l'hypothèse ii nous permettent d'obtenir la relation suivante:

$$|\hat{g}_1(t)|_2 \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty \tag{5.76}$$

Nous définissons maintenant le changement de variables suivant:

$$\bar{x}_2 = x_2 - \tfrac{1}{\xi}\hat{B}^2 f - \hat{\bar{B}}\hat{g}_3(t) \tag{5.77}$$

de sorte que la dynamique décrite par la relation (5.67) prenne la forme suivante

$$\dot{\bar{x}}_2 = \hat{\bar{A}}_2\bar{x}_2 + \hat{\bar{B}}_2\hat{g}_2(t) + \hat{g}_4(t) \tag{5.78}$$

où

$$\hat{g}_4(t) = \tfrac{1}{\xi}\left(\hat{\bar{A}}_2 + \mathbf{I}\right)\hat{B}_2{}^2 f(t) + \hat{\bar{A}}_2\hat{\bar{B}}_2\hat{g}_3(t) - \tfrac{1}{\xi}\dot{\hat{B}}_2{}^2 f(t) - \dot{\hat{\bar{B}}}_2\hat{g}_3(t) + \hat{\bar{B}}_2\hat{g}_1(t) + \hat{\bar{B}}_2 P_2(t) \tag{5.79}$$

Selon la proposition 5.6, la relation (5.69), la relation (5.76) et le lemme 5.1,

$$\left|\hat{g}_4(t)\right|_2 \le \alpha_7\left|P_2(t)\right|_2 \quad \text{lorsque } t \to \infty \tag{5.80}$$

où

$$\alpha_7 = \sup_{\hat{p}\in U_p}\left|\hat{\bar{B}}_2\right|_2$$

Aussi, les matrices $\hat{\bar{A}}_2$, $\hat{B}_2$ et $\hat{\bar{B}}_2$ peuvent être réécrites sous la forme suivante

$$\hat{\bar{A}}_2 = \bar{A}_2^* + \Delta\bar{A}_2 \tag{5.81a}$$

$$\hat{B}_2 = B_2^* + \Delta B_2 \tag{5.81b}$$

$$\hat{\bar{B}}_2 = \bar{B}_2^* + \Delta\bar{B}_2 \tag{5.81c}$$

où X^* est la quantité X dans laquelle le vecteur de paramètres p est remplacé par p^* et $\Delta X = \hat{X} - X^*$ de sorte que, selon l'hypothèse ii,

$$|\Delta X|_2 \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty \tag{5.83}$$

En substituant la relation (5.81) dans la relation (5.78) et en utilisant la relation (5.74) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_2^*\bar{x}_2 + \bar{B}_2^*\hat{g}_2(t,y) + \hat{g}_5(t) \\ y &= \bar{C}_2\bar{x}_2 \end{aligned} \tag{5.84}$$

où $\hat{g}_2(t,y) = \hat{Q}(t)y$ et

$$\hat{g}_5(t) = \hat{g}_4(t) + \Delta\bar{A}_2\bar{x}_2 + \Delta\bar{B}_2\hat{Q}(t)\bar{C}_2 x_2 + \bar{B}_2^*\hat{Q}(t)\bar{C}_2\left(\tfrac{1}{\xi}\hat{B}^2 f(t) + \hat{\bar{B}}\hat{g}_3(t)\right) \tag{5.85}$$

Grâce à la proposition 5.6 et aux relations (5.69), (5.80) et (5.83), nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\left|\hat{g}_5(t)\right|_2 \leq \alpha_7 \left|P_2(t)\right|_2 \quad \text{lorsque } t \to \infty \tag{5.86}$$

La dynamique décrite par la relation (5.84) est alors de la même forme que celle décrite par la relation (4.30). Ainsi, parce que selon l'hypothèse i, $p^* \in U_p$, les hypothèses i et iv nous assurent que $\overline{A}_2^*$ est stable (Hurwitz) et que $\overline{\wp}\left\|G_2^*\right\|_\infty < 1$. Les mêmes arguments que ceux utilisés pour démontrer la proposition 4.3 nous permettent alors de prouver que si la mise à jour de la trajectoire désirée est obtenue par la méthode (exacte) ((quasi-statique)), ($\bar{x}_2 \to \mathbf{0}$ lorsque $t \to \infty$) (($\bar{x}_2$ est bornée proportionnellement aux erreurs introduites par l'approximation quasi-statique lorsque $t \to \infty$)). La proposition 5.6 et les relations (5.69) et (5.77) nous assurent alors que $x_2 \to \bar{x}_2$ lorsque $t \to \infty$. Les conclusions i et ii de la proposition 5.9 sont alors confirmées puisque, selon les relations (3.1) et (3.7), les erreurs de suivi des CGRV et de leurs dérivées sont une combinaison linéaire des erreurs de suivi des CGR, des CGF et de leurs dérivées perturbées par le vecteur P_1 qui est (nul) ((proportionnel aux erreurs de transformation)) lorsque la mise à jour de la trajectoire désirée est obtenue par la méthode (exacte) ((quasi-statique)). □

5.6.4 Étude de robustesse: applications gardienne et semi-gardienne

Le problème consiste maintenant à étudier les conditions de robustesse invoquées par les propositions 5.6, (5.7) ((5.8)) et 5.9. D'abord, il est à noter que la condition v de la proposition 5.6 peut facilement être confirmée en dernier lieu. La confirmation de cette hypothèse sera donc présentée à la section suivante. Le lemme 4.3 peut alors être utilisé pour transformer les conditions des propositions (5.7) ((5.8)) et 5.9 sous forme d'inégalités matricielles. Malheureusement, ces inégalités sont non linéaires et ne peuvent être transformées sous forme linéaire qu'en ajoutant un certain degré de conservatisme (Gahinet et al., 1996; Haddad et al., 1991). Pour cette raison, nous utiliserons plutôt

l'approche des applications gardiennes et semi-gardiennes pour l'étude de ces conditions de robustesse. La nécessité des conditions obtenues par les applications gardienne et semi-gardienne nous permettra alors de démontrer l'existence des gains de la loi de commande qui stabilise les erreurs de suivi avec une amortissement souhaitable.

Pour atteindre cet objectif transformons d'abord les hypothèses ii de la proposition 5.6 et iv de la proposition 5.9 sous la forme d'un problème de stabilité généralisée (Saydy et al. 1990). Pour ce faire, utilisons le lemme 3.1 de façon à obtenir la proposition suivante.

Proposition 5.10: *Les hypothèses* ii *de la proposition* 5.6 *et* iv *de la proposition* 5.9 *sont confirmées si et seulement si*: i) *les valeurs propres de* $\overline{A}_2$ *ont toutes une partie réelle négative* $\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}_p$ *et* ii) *les valeurs propres de*

$$\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} \overline{A}_2 & \overline{\wp}\,\overline{B}_2\overline{B}_2^T \\ -\overline{\wp}\,\overline{C}_2^T\overline{C}_2 & -\overline{A}_2^T \end{bmatrix} \tag{5.87}$$

ont toutes une partie réelle non nulle $\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{U}_p$.

Les hypothèses de la proposition 5.10 sont alors de la même forme que celles de la proposition (5.7) ((5.8)) qui peuvent être vérifiées grâce à une démarche tout à fait similaire à celle décrite dans les paragraphes suivants. Si les conditions de la proposition (5.7) ((5.8)) ne sont pas satisfaites, il suffira de considérer des trajectoires désirées impliquant des vitesses et des accélérations plus faibles ou tout simplement, un temps final plus grand. Le facteur γ de la relation (5.66) s'en trouvera alors nécessairement réduit de sorte que les conditions de convergence robuste pourront être satisfaites.

Considérons donc le problème qui consiste à vérifier les conditions de robustesse de la proposition 5.10. Pour simplifier les explications nous allons supposer que le paramètre I_z n'admet pas d'incertitude. Les conditions de robustesse seront alors paramétrisées seulement par la masse m_c. Remarquer que l'incertitude de I_z peut être réintroduite par une utilisation appropriée des tests de positivité de polynômes multivariables décrits dans Walach et Zeheb (1980).

Les conditions de robustesse de la proposition 5.10 peuvent être étudiées à l'aide d'applications gardienne et semi-gardienne. Comme nous l'avons expliqué à la section 5.5.3, l'application gardienne v doit être définie de façon à être nulle si et seulement si au moins une (valeurs propre de la matrice considérée) ((racine du polynôme considéré)) pour l'étude de stabilité est sur la frontière de son ensemble de stabilité. Parce que les (valeurs propres d'une matrice) ((racines d'un polynôme)) sont des fonctions continues de ses coefficients qui sont également des fonctions continues des paramètres incertains par hypothèse, le passage des (valeurs propres) ((racines)) par la frontière de l'ensemble de stabilité peut facilement être détecté en posant $v = 0$. Malheureusement, pour plusieurs ensembles de stabilité, il s'avère impossible de trouver une application gardienne. Pour plusieurs de ces ensembles il est toutefois possible d'obtenir une application semi-gardienne. L'application semi-gardienne doit être définie de la même façon que l'application gardienne excepté qu'elle peut être nulle même si aucune (valeur propre) ((racine)) est sur la frontière de l'ensemble de stabilité. L'ensemble des zéros de l'application semi-gardienne pour lesquels il n'y a pas de (valeur propre) ((racine)) sur la frontière de stabilité est alors désigné par "*blind spots*".

Parce que la matrice $\overline{\boldsymbol{H}}_2$ définie par la relation (5.87) est hamiltonienne (valeurs propres symétriques par rapport à l'axe imaginaire), il n'existe, à notre connaissance, aucune application gardienne correspondant à son ensemble de stabilité (tout le plan complexe à l'exception de l'axe imaginaire). Par surcroît, les matrices $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ et $\overline{\boldsymbol{H}}_2$ ne sont pas caractérisées par une dépendance pôlynomiale des paramètres incertains. Pour surmonter cette difficulté, nous allons transformer les conditions de la proposition 5.10 sous une forme polynomiale. Parce que, $\forall m_c \geq 0$, la matrice $\boldsymbol{M}_e$ est définie positive (propriété 2), lorsque $m_c \geq 0$, les racines des polynômes caractéristiques de $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ et $\overline{\boldsymbol{H}}_2$ sont identiques aux racines des polynômes suivants:

$$\Delta_a(\lambda, m_c) = \left|\boldsymbol{E}_a\lambda - \boldsymbol{E}_a\overline{\boldsymbol{A}}\right| \tag{5.88}$$

où

$$\boldsymbol{E}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_e \end{bmatrix}$$

et

$$P_h(s, m_c) = \left|\boldsymbol{E}_{hl}\boldsymbol{E}_{hr}s - \boldsymbol{E}_{hl}\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{E}_{hr}\right| \tag{5.89}$$

où

$$\boldsymbol{E}_{hl} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{E}_{hr} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_a \end{bmatrix}$$

Puis, parce que la matrice $\overline{\boldsymbol{H}}_2$ est réelle et hamiltonienne, ces valeurs propres sont symétriques par rapport aux axes réel et imaginaire. Lorsque $m_c \geq 0$, le polynôme décrit par la relation (5.89) peut donc s'exprimer sous la forme suivante:

$$P_h(s, m_c) = c(m_c)\prod_{i=1}^{(2n_e+2)}\left(s - \lambda_i(m_c)\right)\left(s + \lambda_i(m_c)\right) = c(m_c)\prod_{i=1}^{(2n_e+2)}\left(s^2 - \lambda_i^2(m_c)\right) \tag{5.90}$$

où λ_i est la ième racine de P_h. Ainsi, lorsque $m_c \geq 0$, les racines du polynôme décrit par la relation (5.89) ont toutes une partie réelle non nulle si et seulement si le polynôme défini comme suit

$$\Delta_h(\lambda, m_c) = P_h(s, m_c)\big|_{s^2=-\lambda} \tag{5.91}$$

n'a pas de racine réelle positive. Parce que, selon l'hypothèse 5.1, $m_c \geq \underline{m}_c \geq 0$, la transformation du problème de robustesse est synthétisée par la proposition suivante.

Proposition 5.11: *Les conditions de la proposition* 5.10 *sont vérifiées si et seulement si* $\forall m_c \in [\underline{m}_c, \overline{m}_c]$, *les racines du polynôme* (5.88) *ont toutes une partie réelle négative et le polynôme* (5.91) *n'a pas de racine réelle positive*.

Des applications gardienne et semi-gardienne peuvent alors être utilisées pour vérifier la stabilité robuste des polynômes (5.88) et (5.91). En effet, l'application gardienne appliquée au polynôme (5.88) et correspondant à l'ensemble de stabilité formé par le demi-plan complexe gauche est donnée par (Saydy et al., 1990):

$$v_a(m_c) = |\aleph(\Delta_a)| \tag{5.92}$$

où $|[\cdot]|$ est le déterminant de la matrice $[\cdot]$, $\Delta_a(\lambda, m_c) = a_0(m_c) + a_1(m_c)\lambda^1 + \cdots + a_{n_a}(m_c)\lambda^{n_a}$ est le polynôme défini par la relation (5.88) et $\aleph(\Delta_a)$ est la matrice de Hurwitz qui est définie de la façon suivante:

$$\aleph(\Delta_a) = \begin{bmatrix} a_{n_a-1} & a_{n_a-3} & a_{n_a-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n_a} & a_{n_a-2} & a_{n_a-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n_a-1} & a_{n_a-3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n_a} & a_{n_a-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Aussi, l'application semi-gardienne appliquée au polynôme (5.91) et correspondant à l'ensemble de stabilité formé par tout le plan complexe à l'exception de l'axe réel positif est donnée par (Saydy et al. 1990):

$$v_h(m_c) = \left|\mathrm{B}\left(\dot{\Delta}_h(\lambda, m_c), \Delta_h(\lambda, m_c)\right)\right| \Delta_h(0, m_c) \tag{5.93}$$

où $\dot{\Delta}_h$ est la dérivée partielle de Δ_h par rapport à λ et $\mathrm{B}(p_1(\lambda), p_2(\lambda))$ est le Bezousian défini par

$$\mathrm{B}(p_1(\lambda), p_2(\lambda)) = \bar{S}(p_1(\lambda))\bar{S}(\hat{p}_2(\lambda))\boldsymbol{P} - \bar{S}(p_2(\lambda))\bar{S}(\hat{p}_1(\lambda))\boldsymbol{P}$$

avec $\boldsymbol{P}$ une matrice de permutation,

$p_i(\lambda) = p_{i0} + p_{i1}\lambda + \cdots + p_{in_i}\lambda^{n_i}$, $\hat{p}_i(\lambda) = \lambda^{n_i} p_i(\lambda^{-1})$ et

$$\bar{S}(p_i) = \begin{bmatrix} p_{i1} & p_{i2} & \cdots & \cdots & p_{in_i} \\ p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{in_i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{in_i} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Parce que, selon les propriétés 2.5 et 2.7 et les relations (4.23), (4.30) et (5.87), les polynômes (5.88) et (5.91) ont une dépendance polynomiale du paramètre incertain m_c, les applications gardienne (5.92) et semi-gardienne (5.93) sont des polynômes en m_c. Pour cette raison, les propriétés des applications gardiennes et semi-gardiennes (Saydy et al., 1990) nous permettent d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 5.12: *Les conditions de la proposition* 5.11 *sont satisfaites si et seulement si* i) *il existe une valeur nominale* $m_{c0} \in [\underline{m}_c, \overline{m}_c]$ *telle que les racines du polynôme* (5.88) *ont toutes une partie réelle négative et le polynôme* (5.91) *n'a pas de racine réelle positive* ii) v_a *n'a pas de racine réelle appartenant à l'intervalle* $[\underline{m}_c, \overline{m}_c]$ *et* iii) *les racines de* v_h *qui sont dans l'intervalle* $[\underline{m}_c, \overline{m}_c]$ *sont des "blind spot".*

La proposition 5.12 établit donc des conditions relativement simples pour vérifier la robustesse du système. Il s'agit maintenant de choisir la matrice de gains $\boldsymbol{K}_2$ de façon à satisfaire ces conditions. Pour ce faire, nous proposons de choisir la matrice de gains $\boldsymbol{K}_2$ de façon à ce que l'équation caractéristique de $\overline{\boldsymbol{A}}_0$, donnée par les relations (4.23) et (4.30) en remplaçant la masse m_c par sa valeur nominale m_{c0}, soit donnée par la relation suivante:

$$\Delta_{a0}(\lambda) = \left|\lambda I - \overline{\boldsymbol{A}}_{20}\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\Delta_{e0}(\lambda, \eta) \tag{5.94}$$

où λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres appartenant au demi-plan complexe gauche et où le polynôme $\Delta_{e0}(\lambda, \eta)$ est donné par la relation suivante:

$$\Delta_{e0}(\lambda, \eta) = \prod_{i=1}^{n_e} (\lambda^2 + 2(\xi_i + \eta)\omega_{ei}\lambda + \omega_{ei}^2) \tag{5.95}$$

où $\Delta_{e0}(\lambda, 0)$ est l'équation caractéristique de la matrice nominale

$$\boldsymbol{A}_{e0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{M}_{e0}^{-1}\boldsymbol{K}_e & -\boldsymbol{M}_{e0}^{-1}\boldsymbol{F}_e \end{bmatrix} \tag{5.96}$$

et $\boldsymbol{M}_{e0}$ est la matrice $\boldsymbol{M}_e$ dans laquelle le paramètre m_c est remplacé par le paramètre nominal m_{c0}. Ainsi, ω_{ei} et ξ_i sont respectivement la ième fréquence modale et le ième facteur d'amortissement du membre flexible terminé par la charge nominale m_{c0}. Dans ce contexte, η est l'amortissement additionnel que l'on souhaite imposer au système. Notre objectif est donc le suivant:

Minimiser $\qquad \eta^d - \eta \qquad$ (5.97a)

Sujet à:

$$\begin{aligned} &\eta^d - \eta \geq 0 \\ &\text{Respecter les conditions de la proposition 5.12} \end{aligned} \tag{5.97b}$$

où η^d est le facteur d'amortissement additionnel désiré. Selon la proposition suivante, la solution de ce problème d'optimisation existe.

Proposition 5.13: *Il existe* $\eta > 0$ *tel que les conditions de robustesse de la proposition* 5.12 *sont satisfaites.*

Preuve de la proposition 5.13: La matrice de gains $\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix}(\lambda_1\lambda_2) & -(\lambda_1+\lambda_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ est telle que l'équation caractéristique de $\overline{\boldsymbol{A}}_{20}$ est donnée par la relation (5.94) avec $\eta = 0$. Les arguments invoqués lors de la preuve de la proposition 4.4 nous permettent alors de déduire que le polynôme caractéristique de $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ est Hurwitz et que $\overline{\wp}\|\boldsymbol{G}_2\|_\infty = 0 < 1$. Les hypothèses ii de la proposition 5.6 et iv de la proposition 5.9 sont alors satisfaites. Par nécessité, les hypothèses des propositions 5.10, 5.11 et 5.12 sont donc satisfaites. Ainsi, parce que les applications gardienne et semi-gardienne décrites par les relations (5.92) et (5.93) sont des fonctions continues de η, il existe certainement $\eta > 0$ telle que les hypothèses de la proposition 5.12 sont satisfaites. □

Une approximation de la solution du problème (5.97) peut donc être obtenue en quelques itérations. En effet, il suffit de démarrer avec $\eta = \eta^d$ et de le diminuer graduellement jusqu'à ce que les conditions de la proposition 5.12 soient satisfaites. Les hypothèses ii de la proposition 5.6 et iv de la proposition 5.9 sont alors satisfaites.

Nous devons finalement choisir le paramètre ξ du filtre décrit par la relation (5.4) de façon à ce que la condition du petit gain décrite par l'hypothèse v de la proposition 5.6 soit satisfaite. Pour ce faire, il suffit d'obtenir la constante $\wp$ décrite par la relation (5.62).

5.6.5 Estimation de la constante $\wp$

Les deux premiers termes de la constante $\wp$ décrite par la relation (5.62) peuvent être surestimés de façon tout à fait similaire à ce qui est présenté à la section 5.5.3. Le dernier terme doit cependant être surestimé par une méthode légèrement différente de celle déjà présentée. Pour surestimer la norme $\|G\|_2$, la représentation d'état $\left(\overline{A}_2, \overline{B}, \overline{C}, 0\right)$ définie à la relation (5.62) peut d'abord s'exprimer sous la forme suivante $\left(E^{-1}\,\tilde{A}_2, E^{-1}\,\tilde{B}, \overline{C}, 0\right)$. Grâce aux propriétés 2.5 et 2.7, les matrices E et $\tilde{A}_2$ sont alors des fonctions affines des paramètres m_c et I_z tandis que les matrices $\tilde{B}$ et $\overline{C}$ sont indépendantes de m_c et I_z. Divisons maintenant l'ensemble de l'incertitude des paramètres m_c et I_z en N_2^2 parties égales $U_{ij} = \left[m_{ci}, m_{ci+1}\right] \times \left[I_{zj}, I_{zj+1}\right]$ pour $i,j = 1, \ldots, N_2$. Le lemme 5.3 nous permet alors d'affirmer que s'il existe des matrices symétriques P_{ij}, Q_i et Q_j telles que l'inégalité matricielle suivante:

$$\begin{aligned} & EP_{ij}\tilde{A}_2^T + \tilde{A}_2 P_{ij} E^T + \tilde{B}\tilde{B}^T + m_c^2 Q_i + I_z^2 Q_j < 0 \\ & P_{ij} > 0 \\ & Q_i > 0 \\ & Q_j > 0 \end{aligned} \tag{5.98}$$

est vérifiée $\forall \{m_c, I_z\} \in U_{ij}$, alors,

$$\sup_{\{m_c, I_z\} \in U_{ij}} \|G\|_2 \leq \sqrt{\operatorname{trace}(\overline{C} P_{ij} \overline{C}^T)}$$

Parce que l'inégalité matricielle (5.98) est non linéaire par rapport aux paramètres incertains, on peut difficilement obtenir sa solution. Le lemme suivant nous permettra toutefois d'ajouter des contraintes qui rendrons l'inégalité facile à résoudre (Gahinet et al., 1996).

Lemme 5.4:*Si on considère $F(p)$ une fonction quadratique de la forme suivante*:

$$F(p) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i F_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n_p} p_i p_j \overline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{n_p} p_i^2 \overline{\overline{F}}_i$$

qui respecte la propriété de multiconvexité suivante:

$$2\overline{\overline{F}}_i = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} \geq 0 \quad pour \quad i = 1,\ldots,n_p$$

où F_i, $\overline{F}_{ij}$ *et* $\overline{\overline{F}}_i$ *sont des matrices symétriques et où* $p \in U = \left[\underline{p}_1, \overline{p}_1\right] \times \left[\underline{p}_2, \overline{p}_2\right] \times \cdots \times \left[\underline{p}_{n_p}, \overline{p}_{n_p}\right]$, *alors, la matrice* $F(p)$ *est définie semi-négative* $\forall p \in U$ *si et seulement si elle est définie semi-négative* $\forall p \in \left\{\underline{p}_1, \overline{p}_1\right\} \times \left\{\underline{p}_2, \overline{p}_2\right\} \times \cdots \times \left\{\underline{p}_{n_p}, \overline{p}_{n_p}\right\}$.

Si on définit E_{ij} comme étant la matrice E évaluée à m_{ci} et I_{zj}, le lemme 5.4 et le fait que E et $\overline{A}_2$ soient des fonctions affines de m_c et I_z nous permettent d'affirmer que s'il existe des matrices symétriques P_{ij}, Q_i et Q_j qui respectent l'IML suivante:

$$\begin{aligned}
E_{ij}P_{ij}\tilde{A}_{2_{ij}}^T + \tilde{A}_{2_{ij}}P_{ij}E_{ij}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T + m_{c_i}^2 Q_i + I_{zj}^2 Q_j &< 0 \\
E_{i+1,j}P_{ij}\tilde{A}_{2_{i+1,j}}^T + \tilde{A}_{2_{i+1,j}}P_{ij}E_{i+1,j}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T + m_{c_{i+1}}^2 Q_i + I_{z_j}^2 Q_j &< 0 \\
E_{i,j+1}P_{ij}\tilde{A}_{2_{i,j+1}}^T + \tilde{A}_{2_{i,j+1}}P_{ij}E_{i,j+1}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T + m_{c_i}^2 Q_i + I_{z_{j+1}}^2 Q_j &< 0 \\
E_{i+1,j+1}P_{ij}\tilde{A}_{2_{i+1,j+1}}^T + \tilde{A}_{2_{i+1,j+1}}P_{ij}E_{i+1,j+1}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T + m_{c_{i+1}}^2 Q_i + I_{z_{j+1}}^2 Q_j &< 0 \\
\left(E_{i+1,j} - E_{ij}\right)P_{ij}\left(\tilde{A}_{2_{i+1,j}} - \tilde{A}_{2_{ij}}\right)^T + \left(\tilde{A}_{2_{i+1,j}} - \tilde{A}_{2_{ij}}\right)P_{ij}\left(E_{i+1,j} - E_{ij}\right)^T + Q_i &> 0 \\
\left(E_{i,j+1} - E_{ij}\right)P_{ij}\left(\tilde{A}_{2_{i,j+1}} - \tilde{A}_{2_{ij}}\right)^T + \left(\tilde{A}_{2_{i,j+1}} - \tilde{A}_{2_{ij}}\right)P_{ij}\left(E_{i,j+1} - E_{ij}\right)^T + Q_j &> 0 \\
Q_i &> 0 \\
Q_i &> 0 \\
P_{ij} &> 0
\end{aligned} \tag{5.99}$$

alors,

$$\sup_{\{m_c, J_z\} \in U_q} \|G\|_2 \leq \sqrt{\text{trace}(\overline{C} P_{ij} \overline{C}^T)}$$

Si on suppose que la matrice $\overline{A}_2$ est robustement stable (cette hypothèse est préalablement vérifiée par l'approche gardienne expliquée à la section précédente), alors, il s'ensuit qu'il existe un entier N_2 tel que pour i,j=1, ..., N_2, il existe des matrices symétriques P_{ij}, Q_i et Q_j qui satisfont L'IML (5.99). Ainsi, pour N_2 suffisamment grand,

$$\sup_{p \in U_p} \|G\|_2 \leq \max_{i,j=1,\ldots,N_e} \sqrt{\text{trace}(\overline{C} P_{ij} \overline{C}^T)} \tag{5.100}$$

de sorte qu'une surestimation du troisième et dernier terme de $\wp$ peut être obtenue.

5.6.6 Simulations de la loi de commande

Nous allons maintenant présenter des résultats de simulations de la loi de commande décrite par les relations (5.19) à (5.22) accompagnée de l'estimateur de paramètres décrit par la relation (5.8). Pour ces simulations, nous avons considéré le manipulateur flexible modélisé à la section 2.5 avec l'incertitude de la charge suivante: $m_c \in [0{,}25\ 0{,}75]$. Tout comme pour les simulations précédentes, la trajectoire désirée est celle décrite à la section 3.4. Pour permettre de comparer les résultats de simulations de cette section avec ceux obtenus à la section 5.5.4, nous avons considéré les mêmes conditions initiales et les mêmes paramètres pour l'estimateur décrit par la relation (5.8). Pour la même raison, nous avons fixé le paramètre λ associé à la relation (5.59) à une valeur de 10. Ensuite, selon l'approche gardienne décrite à la section 5.6.4, nous avons vérifié les conditions de la proposition 5.8. Ces conditions de robustesse de la mise à jour de la trajectoire désirée dans l'espace des CGR et des CGF se sont avérées satisfaites. Ensuite, selon la procédure décrite à la section 5.6.4, nous avons trouvé la solution approximative du problème d'optimisation (5.97) pour différentes valeurs de λ_1 et λ_2 associées à l'équation

caractéristique (5.94). Toutes les manipulations symboliques nécessaires pour exécuter cette procédure ont été obtenues à l'aide du logiciel symbolique MAPLE. Les solutions obtenues pour $\eta^d = 0,7$ sont données dans le tableau 5.1. Pour obtenir le facteur d'amortissement additionnel désiré, nous avons donc choisi la matrice de gains K_2 correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = 90$ et $\eta = 0,70$. La constante $\wp$ a ensuite été surestimée grâce à l'approche décrite à la section 5.6.5. La valeur obtenue étant de 45, nous avons choisi de fixer la fréquence de coupure du filtre décrit par la relation (5.4) à $\xi = 50$ de façon à assurer le respect de la condition v de la proposition 5.1. Le système a ensuite été simulé pour quatre situations différentes.

Tableau 5.1 Amortissement additionnel.

λ_1	λ_2	η^*
10	10	0,07
30	30	0,24
50	50	0,40
70	70	0,57
90	90	0,70

Situation 1: Le système a été simulé avec une charge $m_c = 0,25$ Kg en considérant une mise à jour de la trajectoire désirée obtenue à partir de la méthode quasi-statique à toute les 0,5 seconde. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 5.7 à 5.9. Dans toutes les simulations qui suivent, nous n'avons pas cru bon de présenter les graphiques de la masse estimée en fonction du temps puisqu'elle converge très rapidement vers la vraie masse du système. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à

l'annexe C. Les figures 5.7 et 5.8 nous indiquent que les erreurs de suivi obtenues avec la mise à jour quasi-statique sont comparables à celles obtenues à la section 5.5.4 avec la linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA. La vibration de l'extrémité du membre flexible est cependant pratiquement nulle avec l'approche proposée avec une mise à jour quasi-statique tandis qu'elle est relativement importante pour la linéarisation par rapport aux CGRVA. Aussi, les figures 5.3 et 5.9 nous montrent des efforts de commande supérieurs avec la linéarisation par rapport aux CGRVA qu'avec l'approche proposée avec une mise à jour quasi-statique.

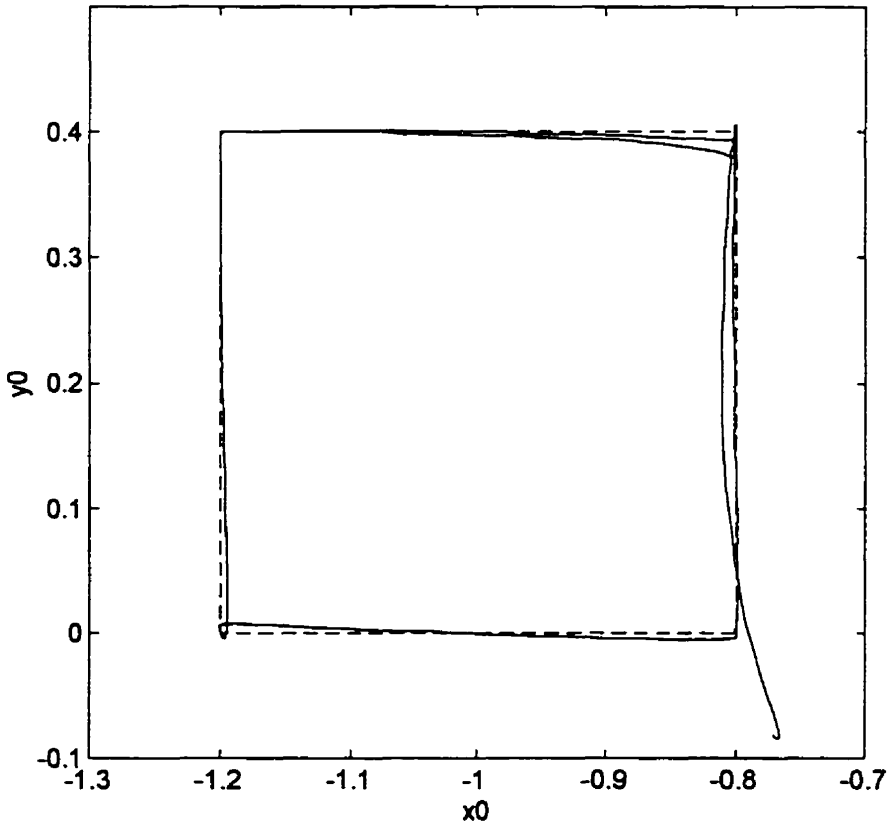


Figure 5.7 Résultats pour la situation 1: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

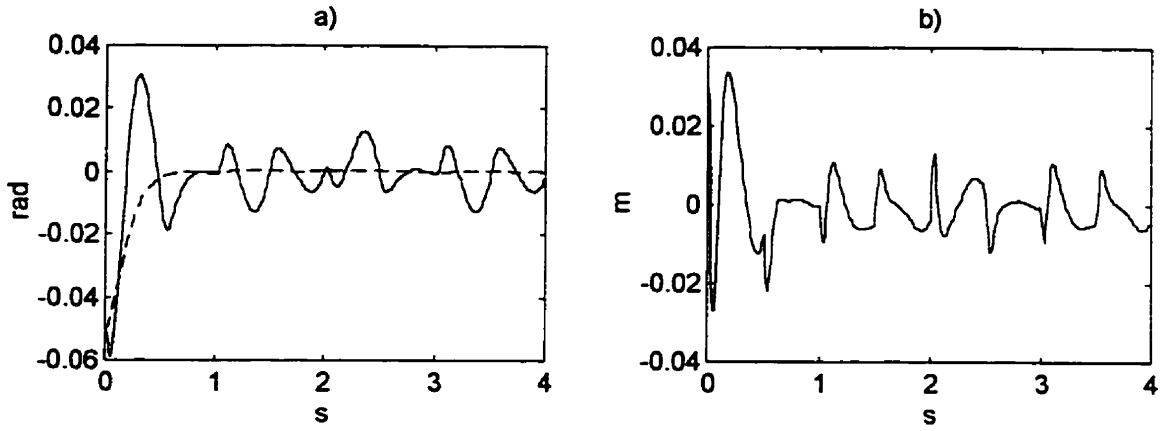


Figure 5.8 Résultats pour la situation 1: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

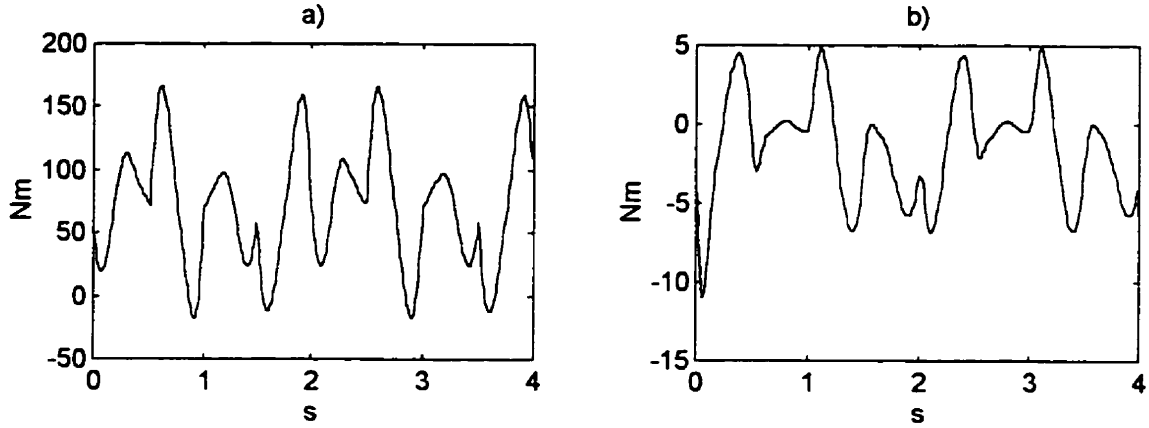


Figure 5.9 Résultats pour la situation 1: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

Situation 2: Le système a été simulé avec une charge m_c = 0,75 Kg en considérant une mise à jour de la trajectoire désirée obtenue à partir de la méthode quasi-statique à toute les 0,5 seconde. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 5.10 à 5.12. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Évidement, les erreurs de suivi et les efforts de commande sont dans ce cas plus

importants que dans la situation 1 à cause de l'augmentation de la charge. Ces erreurs sont une fois de plus approximativement comparables à celles obtenues avec la linéarisation par rapport aux CGRVA.

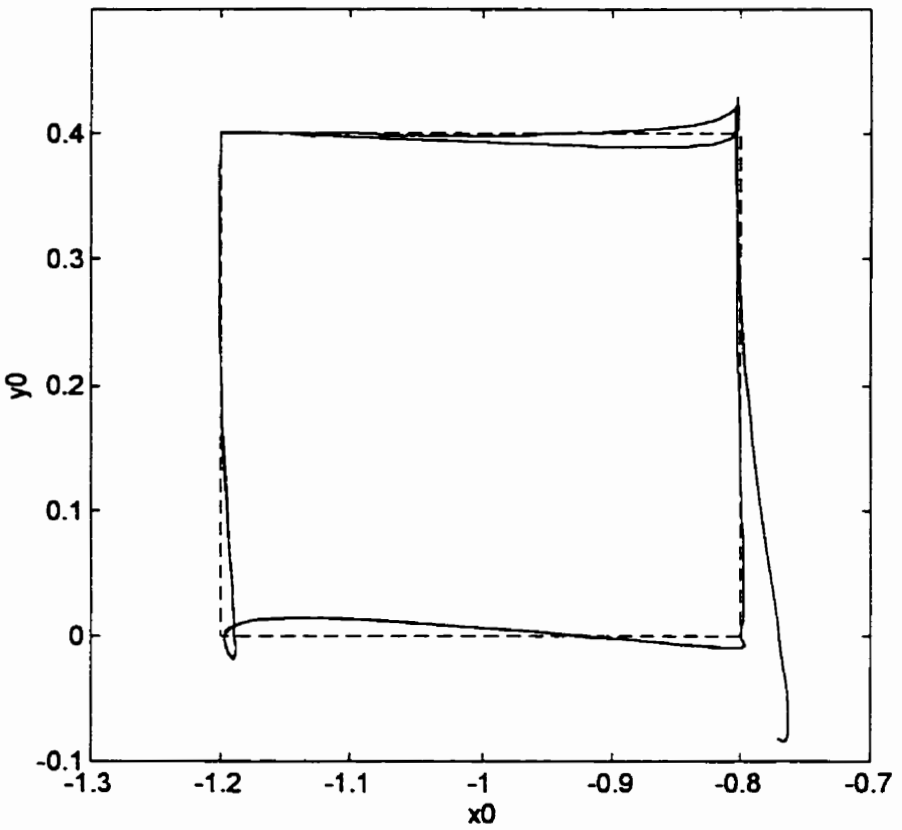


Figure 5.10 Résultats pour la situation 2: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

Situation 3: Le système a été simulé avec une charge m_c = 0,25 Kg en considérant une mise à jour de la trajectoire désirée obtenue à partir de la méthode exacte à toutes les 0,5 seconde. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 5.13 à 5.15. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Les figures 5.13 et 5.14

confirment la convergence vers zéro des erreurs de suivi. Ces figures nous montrent également un amortissement relativement rapide des erreurs de suivi. Finalement, malgré la convergence à zéro des erreurs de suivi, la figure 5.15 nous montre des efforts comparables à ceux obtenus avec la mise à jour quasi-statique.

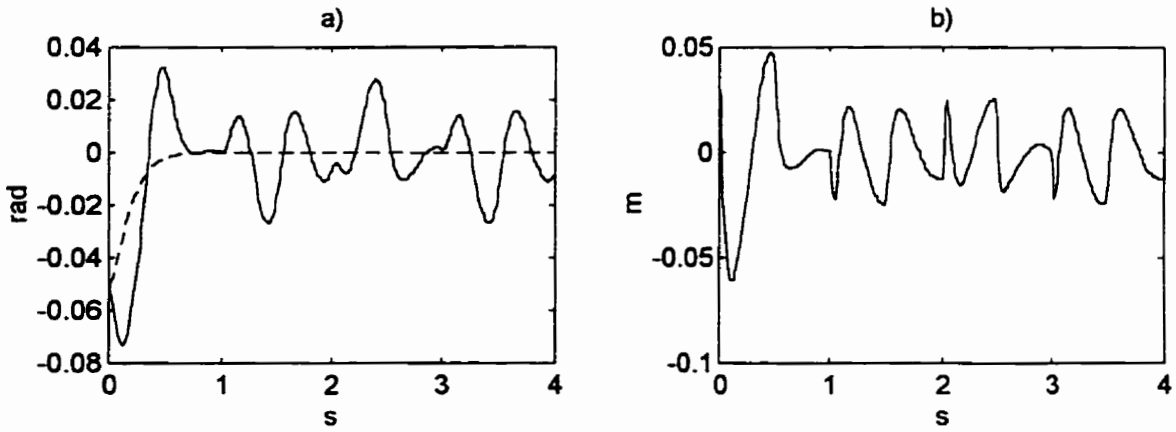


Figure 5.11 Résultats pour la situation 2: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

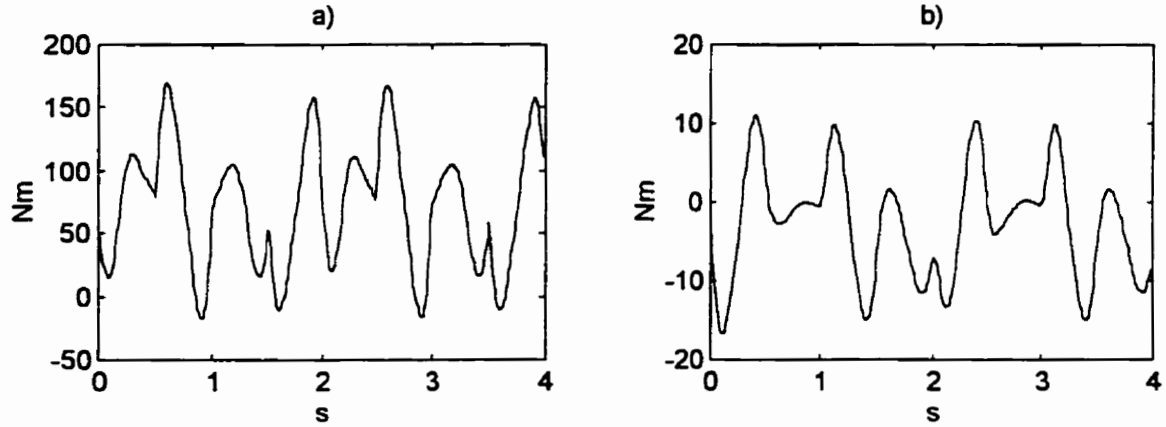


Figure 5.12 Résultats pour la situation 2: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

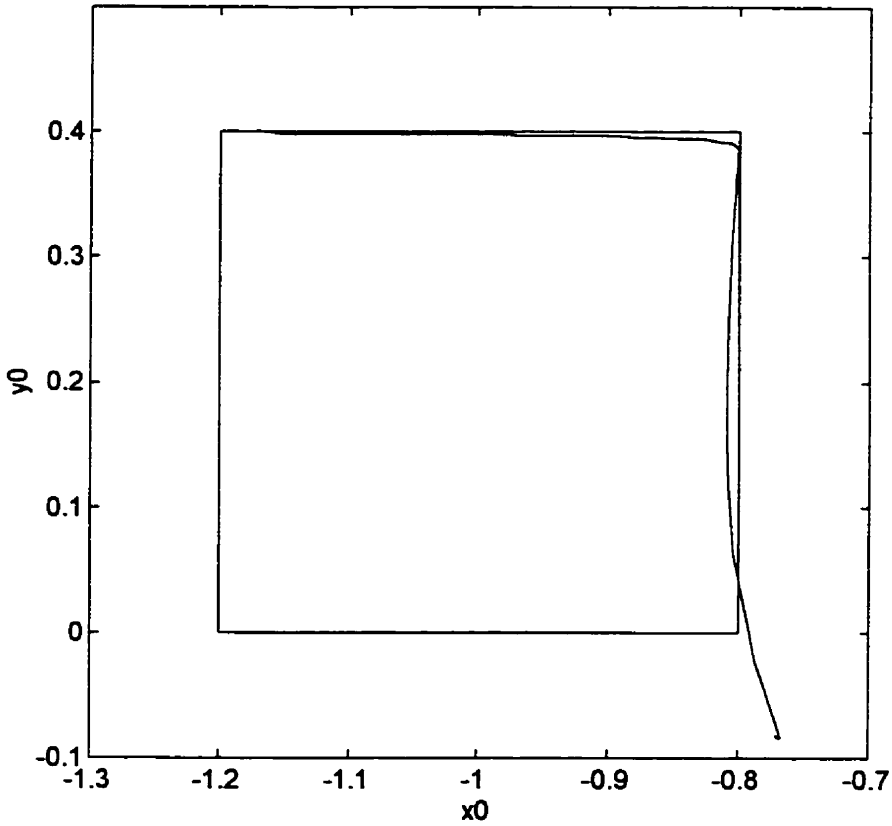


Figure 5.13 Résultats pour la situation 3: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

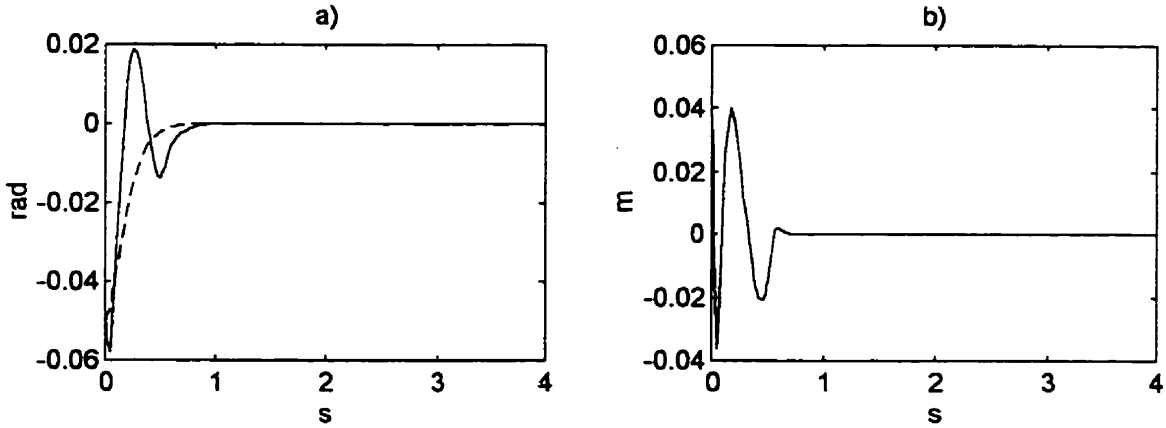


Figure 5.14 Résultats pour la situation 3: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

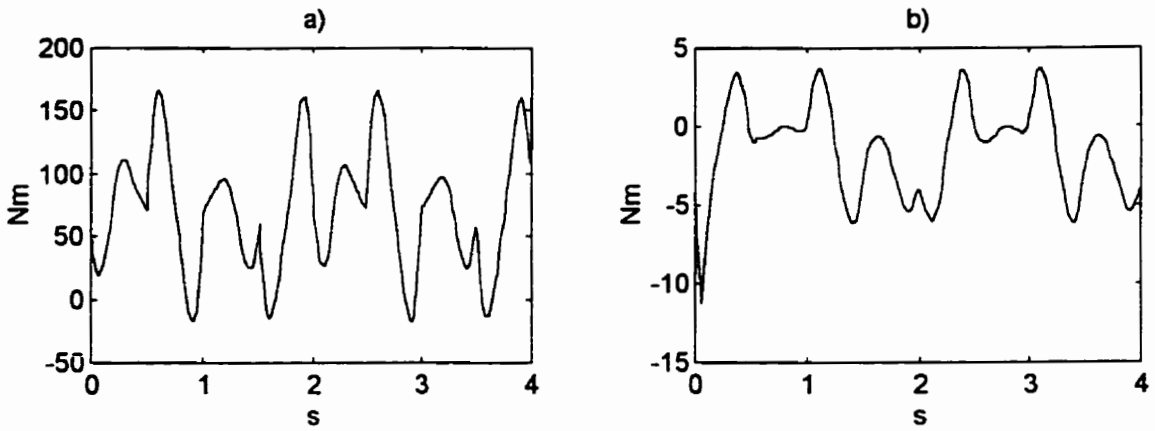


Figure 5.15 Résultats pour la situation 3: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

Situation 4: Le système a été simulé avec une charge m_c = 0,75 Kg en considérant une mise à jour de la trajectoire désirée obtenue à partir de la méthode exacte à toutes les 0,5 seconde. Les résultats de cette simulation sont illustrés par les figures 5.16 à 5.18. Des résultats de simulations avec un modèle de validation incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible sont également présentés à l'annexe C. Malgré l'augmentation substantielle de la charge, les erreurs de suivi convergent vers zéro avec un temps de réponse comparable à celui correspondant à une charge de 0,25 Kg. En effet, selon les figures 5.14 et 5.17 le temps de réponse est environ 1 seconde dans les deux cas.

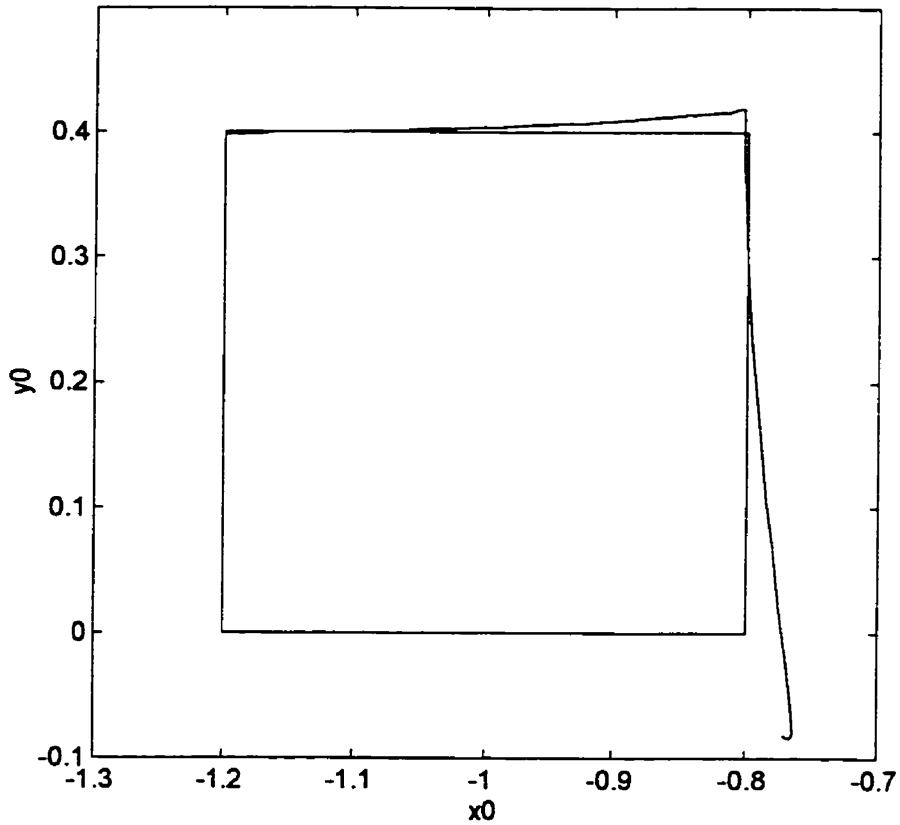


Figure 5.16 Résultats pour la situation 4: trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail.

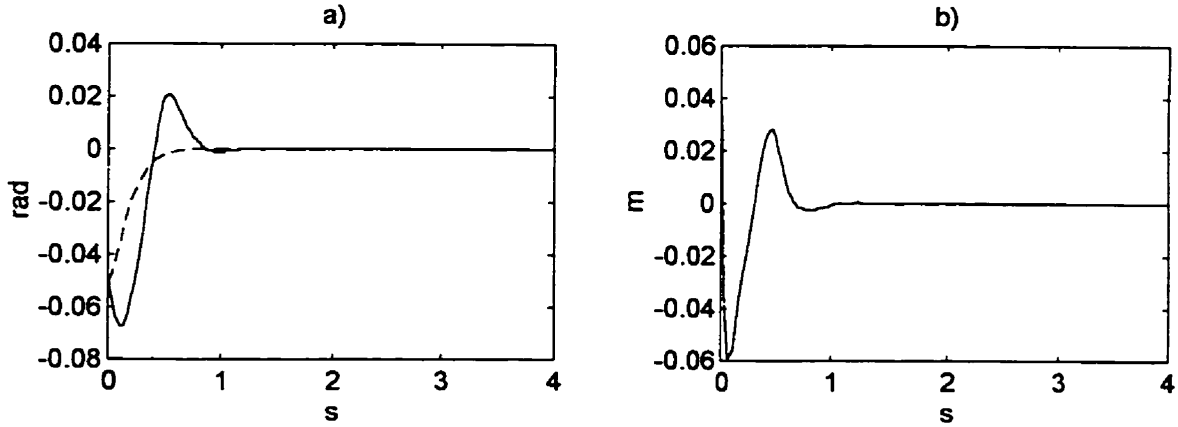


Figure 5.17 Résultats pour la situation 4: a) erreurs de suivi des CGRV ${}^{1}\overline{q}_r$(- -) et ${}^{2}\overline{q}_r$(—) et b) erreur de suivi de la déformation μ.

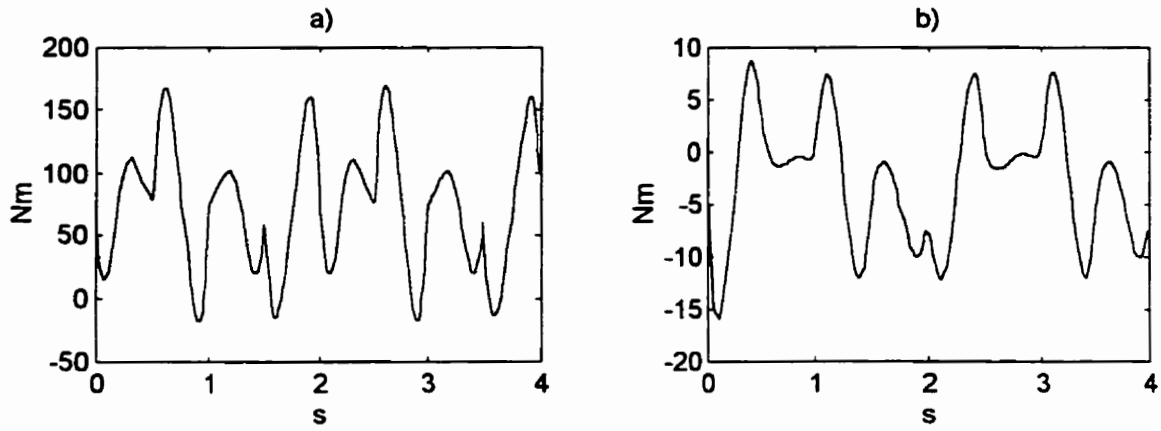


Figure 5.18 Résultats pour la situation 4: a) effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modifié les lois de commande présentées au chapitre IV de façon à rendre le système robuste face aux incertitudes de la charge. Nous avons vu que cette robustesse pouvait être obtenue en partie grâce à un processus d'adaptation indirecte. Nous avons également montré que la robustesse de la dynamique interne du système pouvait être obtenue par un choix approprié des paramètres du contrôleur. Deux procédures de calcul des paramètres basées sur le principe des applications gardiennes et sur le théorème du petit gain ont été présentées: une pour les paramètres de la loi de commande qui linéarise le système par rapport aux CGRVA et l'autre pour ceux de la loi de commande proposée. Les deux stratégies de commande ont ensuite été comparées au moyen de simulations. La loi de commande proposée de pair avec la mise à jour de la trajectoire désirée par l'approche quasi-statique offre des erreurs de suivi comparables à celles obtenues avec la loi de commande linéarisante par rapport aux CGRVA. La loi de commande proposée ne fait cependant pas vibrer l'extrémité du membre flexible comme le

fait la linéarisation par retour d'état des CGRVA. Finalement, même si la loi de commande proposée de pair avec une mise à jour de la trajectoire désirée par la méthode exacte exige plus de calculs, elle est nettement plus intéressante puisqu'elle assure une convergence relativement rapide des erreurs de suivi vers zéro.

CHAPITRE VI
CONCLUSION

6.1 Résumé, limitations et apports de la thèse

Cette thèse poursuivait deux objectifs principaux: i) proposer une structure de commande permettant d'assurer la stabilité du suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'une classe de manipulateurs flexibles; ii) modifier la structure de commande proposée de façon à assurer la robustesse du suivi par rapport à l'incertitude de la charge. Aussi, un objectif secondaire consistait à comparer l'approche proposée avec d'autres méthodes rencontrées dans la littérature.

Pour atteindre les objectifs visés, nous avons d'abord, au moyen d'hypothèses, caractérisé la classe de manipulateurs flexibles considérée. Notamment, nous avons supposé que seule le dernier membre du manipulateur est flexible. Nous avons également supposé que le centre de masse de la charge du manipulateur est fixé à l'extrémité du membre flexible. Ces hypothèses nous ont permis de démontrer plusieurs propriétés importantes du modèle dynamique du système.

Parce que les espaces de travail et des CGR sont liés par des relations cinématique et dynamique, les CGRV ont été définies de façon à être liées à l'espace de travail par une simple relation cinématique. La trajectoire désirée pouvait alors être facilement transformée de l'espace de travail à celui des CGRV. Nous avons ensuite proposé une méthode itérative, basée sur une intégration causale-anticausale, pour transformer la

trajectoire désirée de l'espace des CGRV à celui des CGR et des CGF. Les conditions de convergence de cet algorithme ont été démontrées un utilisant le théorème de contraction. Aussi, l'algorithme proposé a été comparé avec la méthode approximative quasi-statique qui consiste à négliger la dynamique de la partie flexible du système pour obtenir les CGF correspondant aux CGRV. Nous avons constaté que la méthode quasi-statique donne des approximations acceptables des CGR et des CGF; en particulier lorsque les vitesses désirées sont faibles. Elle ne permet cependant pas d'obtenir les vitesses et les accélérations des CGR et des CGF.

Une structure de commande permettant d'assurer la stabilité du suivi a ensuite été proposée. Avec cette structure, une première loi de commande linéarise le système par rapport aux CGR et deux retours d'état linéaires invariants servent à stabiliser les erreurs de suivi dans l'espace des CGR et des CGF. Parce que les CGR et les CGF désirées ainsi que leurs dérivées sont obtenues par la transformation de la trajectoire désirée des CGRV, la stabilité dans l'espace des CGRV est du même coup assurée. Nous avons ensuite expliqué que les gains du retour d'état de la PRP sont faciles à obtenir puisque cette partie du système est linéarisée par la première loi de commande. Les gains du retour d'état de la PFA sont cependant beaucoup plus complexes à calculer puisque cette partie du système est non linéaire et perturbée par la PRP; il s'agit de la dynamique interne du système. Nous avons alors démontré que les gains qui assurent la stabilité de la partie linéaire de la PRP assurent du même coup des erreurs de suivi bornées. Cet ensemble de gains peut cependant déstabiliser localement le système de sorte que la borne des erreurs puissent devenir démesurée. En se basant sur le théorème de passivité, sur la stabilité des systèmes hiérarchiques et sur les systèmes d'IML, nous avons donc proposé une approche pour calculer les gains de façon à assurer la stabilité du système avec, si

possible, une décroissance prescrite des erreurs de suivi. Ainsi, dans le pire des cas, lorsque la constante de temps ne peut atteindre la valeur souhaitée, les gains sont automatiquement ajustés de façon à minimiser le temps de réponse du système. Les gains obtenus permettent également de minimiser l'amplitude des valeurs propres de la partie linéaire du système de façon à éviter d'exciter les modes de vibration haute fréquence qui ne sont pas pris en compte lors de la modélisation. Lorsque la trajectoire désirée des CGR et des CGF est obtenue à partir de la méthode quasi-statique les erreurs de suivi sont alors bornées proportionnellement aux erreurs d'approximation de la transformation de la trajectoire. Par des simulations, nous avons constaté que les erreurs obtenues sont comparables à celles obtenues avec une des approches rencontrées dans la littérature: la linéarisation par retour d'état par rapport à un compromis entre les CGR et les CGRV. La structure de commande proposée ne fait cependant pas vibrer l'extrémité du membre flexible comme le fait la linéarisation par rapport aux CGRVA. De plus, lorsque la trajectoire désirée des CGR et des CGF est obtenue à partir de la méthode itérative proposée, la structure de commande proposée assure la stabilité exponentielle des erreurs de suivi. Le calcul approprié des gains permet donc, sans nécessiter d'efforts de commande supplémentaires, de stabiliser rapidement les erreurs de suivi à zéro. En fait, les efforts de commande obtenus sont nettement inférieurs à ceux requis par la linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA.

La dernière partie de la thèse consistait à rendre la structure de commande proposée et la linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA robuste face à l'incertitude de la charge. Des hypothèses sur les incertitudes du modèle ont alors été ajoutées. Notamment, nous avons supposé que les fonctions de forme utilisées pour modéliser la flexibilité sont invariantes par rapport aux incertitudes. Cette hypothèse additionnelle

nous à permis d'exprimer le système sous une forme linéaire par rapport aux paramètres incertains. Une commande adaptative indirecte, similaire à celles utilisées pour commander les manipulateurs rigides, a donc pu être utilisée pour assurer la stabilité du système. Une étude de robustesse supplémentaire, basée sur l'approche des applications gardiennes, a cependant dû être considérée pour nous permettre d'ajuster les paramètres des lois de commande de façon à assurer la stabilité de la dynamique interne. Pour cette étude de robustesse, nous avons supposé que seule la masse de la charge est incertaine. Un mécanisme de mise à jour des trajectoires désirées dans l'espace des CGR et des CGF a finalement dû être ajouté pour tenir compte des variations des paramètres estimés. Nous avons alors démontré que les erreurs de suivi convergent à zéro si la mise à jour est obtenue avec la méthode proposée et sont bornées si la mise à jour est obtenue par la méthode quasi-statique. Nous avons également expliqué comment l'amortissement de la partie linéaire du système pouvait, si possible, être fixé à une valeur prescrite ou dans le pire des cas maximisé. Finalement, des simulations nous ont permis de comparer les trois approches. Une fois de plus, les erreurs de suivi obtenues avec l'approche proposée de pair avec une mise à jour quasi-statique sont comparables avec celles obtenues avec la linéarisation par rapport aux CGRVA. L'approche proposée ne fait cependant pas vibrer l'extrémité du membre flexible. Évidemment l'approche proposée avec la mise à jour proposée est plus intéressante parce qu'elle assure une convergence vers zéro des erreurs de suivi. Elle est cependant plus exigeante au point de vue des calculs en ligne. En effet, la mise à jour par la méthode proposée exige de recalculer toute la trajectoire désirée tandis que la mise à jour quasi-statique exige seulement de recalculer la trajectoire désirée au temps t. La linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA n'exige pour sa part aucune mise à jour de la trajectoire. En contrepartie, la linéarisation par rapport aux

CGR, utilisée dans la structure de commande proposée, est grandement simplifiée par rapport à la linéarisation par rapport aux CGRVA.

6.2 Recommandations

Pour une application nécessitant que l'outil d'un manipulateur, dont le dernier membre est flexible, suive une trajectoire désirée dans l'espace de travail, il pourrait exister plusieurs choix de stratégies de contrôle. En effet, à la lumière des résultats que nous avons obtenus, nous serions tenté de faire les recommandations suivantes:

1. Si les trajectoires que doit suivre l'outil du manipulateur sont lentes et que l'amortissement naturel du membre flexible est faible, nous pensons que la structure de commande proposée avec une transformation de la trajectoire désirée selon l'approche quasi-statique serait appropriée.

2. Si les trajectoires que doit suivre l'outil du manipulateur invoquent des vitesses non négligeables (comparables ou supérieures à celles utilisées pour les simulations présentées dans cette thèse) et que l'amortissement naturel du membre flexible est faible, nous suggérons d'utiliser la structure de commande proposée avec une transformation de la trajectoire désirée selon l'approche proposée.

3. Si l'amortissement naturel du membre flexible est important, nous suggérons d'utiliser la linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA. Cette structure de commande, plus simple que la structure proposée, permettra alors d'obtenir un suivi

approximatif satisfaisant avec une atténuation considérable de la vibration de l'extrémité du membre flexible.

6.3 Travaux futurs

Dans cette thèse, plusieurs problèmes importants ont été soulevés. Premièrement, la méthode proposée ne s'applique qu'à une classe de manipulateurs dont le dernier membre est flexible. Il serait intéressant de généraliser l'approche pour une classe de manipulateurs comportant plusieurs membres flexibles. Une structure hiérarchique permettrait peut être cette généralisation. Il s'agirait dans ce cas de stabiliser d'abord la dynamique du dernier membre flexible et de son articulation en supposant que le reste du système converge de façon appropriée; puis de stabiliser l'avant dernier membre flexible de la même façon et ainsi de suite.

Il serait également intéressant de trouver une approche qui permettrait d'ajuster les gains du contrôleur par l'approche des IML de façon à prendre en compte les critères de robustesse étudiés au chapitre V. On pourrait alors facilement ajouter des incertitudes paramétriques au système.

Une autre avenue de recherche serait d'étudier la possibilité d'appliquer la méthode proposée dans le cadre d'un contrôle hybride de la force et de la position. En fait, la flexibilité des membres du manipulateur pourrait, dans ce cas, être un avantage pour rendre le système plus robuste face aux incertitudes de la surface de contact.

Finalement, une implantation de la méthode proposée serait fort souhaitable pour évaluer son efficacité dans un contexte réel. L'utilisation d'un microprocesseur dédié aux traitement numérique des signaux serait probablement de mise pour réaliser la loi de commande, l'estimation des paramètres et la mise à jour de la trajectoire désirée en temps réel.

REFERENCES

ALUNNI, A., LA CAVA, M., ET MURACA, P. (1991). Variable Structure Control of a Robot with Elastic Links. Proceedings of the 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, vol.1, pp.543-546.

ANDERSON, B.D.O. ET MOORE, J.B. (1990). Optimal Control: linear quadratic method, Prentice Hall, NewYork.

AOUSTIN, Y., CHEVALLEREAU, C., GLUMINEAU, A. ET MOOG, C.H. (1994). Experimental Results for the End-Effector Control of a Single Flexible Robotic Arm. IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 2(no. 4), pp 371-381.

AOUSTIN, Y., ET CHEVALLEREAU, C. (1993). The singular perturbation control of a two-flexible-link robot. IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol.3, pp.737-742.

ASADA, H., MA, Z.-D., ET TOKUMARU, H. (1990). Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms: Modeling and Computation for Trajectory Control. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.112, pp.177-185.

BALAS, M. J. (1978). Feedback Control of Flexible Systems. IEEE Transaction on Automatic Control, vol.ac-23(no.4), pp.673-679.

BAYO, E. (1988). Computed Torque for The Position Control of Open-Chain Flexible Robots. IEEE international conference on Robotics and Automation, vol.1, pp.316-321.

BELLEZZA, F., LANARI, L. ET ULIVI, G. (1990). Exact modeling of the flexible slewing link, Proc. on int. conf. on Robotics and Automation, vol.1, pp.734-739.

BENATI, M. ET MORRO, A. (1994). Formulation of Equations of Motion for a Chain of Flexible Links Using Hamilton's Principle. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.116, pp.81-88.

BIGRAS, P., SAAD, M. ET O'SHEA, J. (1995a). Suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'un manipulateur flexible. 2 ième Conférence Internationale sur l'Automatisation Industrielle, vol.1, Nancy, pp.337-342.

BIGRAS, P., SAAD, M. ET O'SHEA, J. (1995b). Suivi de trajectoires dans l'espace de travail d'une classe de manipulateurs flexibles: Étude de stabilité. Congrès canadien en génie électrique et informatique, vol.1, Montréal, pp.67-70.

BIGRAS, P. SAAD, M. ET O'SHEA, J. (1996). Exponential Trajectory Tracking Control in the Workspace of a Class of Flexible Robots, Soumis à Journal of Robotic Systems.

BIGRAS, P., SAAD, M. ET O'SHEA, J. (1997a). Adaptive Trajectory Tracking in the Workspace of a Class of Flexible Robots, Accepté dans SYROCO'97, Nantes.

BIGRAS, P., SAAD, M. ET O'SHEA, J. (1997b). Robust and Fast Convergence of Trajectory Tracking in the Workspace of a Class of Flexible Robots, Soumis à International Journal of Robust and Nonlinear Control.

BOOK, W. J. (1984). Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. The International Journal of Robotics Research, vol.3(no.3), pp.87-101.

BOOK, W. J., MAIZZA-NETO, O. ET WHITNEY, D. E. (1975). Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.97(no.4), pp.424-431.

BOYD, S. ET BARRATT, C.H., (1991). Linear Controller Design Limits of Performance, Prentice Hall, New Jersey.

BOYD, S., BALAKRISHNAN, V., FERON, E. ET ELGHAOUI, L. (1993). Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities, proc. ACC, pp.2147-2154.

BOYD, S., BALAKRISHNAN, V. ET KABAMBA, P. (1989). A Bisection Method for Computing the H Norm of a Transfer Matrix and Related Problems, Mathematics of Control, Signals, and Systems, vol.2, pp.207-219.

CANNON, R. H. ET SCHITZ, J. E. (1984). Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot. International Journal of Robotics Research, vol.3(no.3), pp.62-75.

CHEN, B.-S. ET YANG, T.-Y. (1993). Robust Optimal Model Matching Control Design for Flexible Manipulators. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.115, pp.173-178.

CHEN, C.-T. (1984). Linear system theory and design. Hols, Rinehart and Winston, New York.

CHEN, D. (1993). An iterative Solution to Stable Inversion of Nonminimum Phase Systems. Proceedings of the American Control Conference, pp.2960-2964.

CHEVALLEREAU, C. ET AOUSTIN, Y. (1992). Nonlinear Control Laws For A 2 Flexible Link Robot: Comparison Of Applicability Domains. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol.1, p.748-753.

CHILALI, M. ET GAHINET, P. (1996). H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, no.3, pp.358-367.

CRAIG, J.J., (1989). Introduction to Robotics, 2nd Edition, Addison-Wesley, New York.

DANCOSE, S. ET ANGELES, J., HORI, N., (1989). Optimal Vibration Control of a Rotating Flexible Beam., ASME Conference on Diagnostics, Vehicule Dynamics and Special Topics, pp. 259-264.

DECARLO, R. A., ZAK, S.H. ET MATTHEWS, G.P. (1988). Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems:A Tutorial. Proceedings of the IEEE, vol.76(no.3), pp.212-232.

DE LUCA, A. ET PANZIERI, S. (1993). Learning Gravity Compensation in Robot:Rigid Arms, Elastic Joints, Flexible Links. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol.7, p.417-433.

DE LUCA, A. ET SICILIANO, B. (1989). Trajectory Control of Non-linear One-link Flexible Arm. International Journal of Control, vol.50 (no.5), pp.1699-1715.

DE LUCA, A., LANARI, L., LUCIBELLO, P., PANZIERI, S. ET ULIVI, G. (1990). Control Experiments on a Two-Link Robot with a Flexible Forearm. IEEE Conference on Decision and Control, vol.2, pp.520-527.

DOYLE, J.C., FRANCIS, B.A. ET TANNENBAUM, A.R. (1992). Feedback Control Theory, Macmillan, New York.

DEO, S.G. ET RAGHAVENDRA, V. (1980). Ordinary Differential Equations and Stability Theory, Tata McGraw-Hill, New Delhi.

DE SCHUTTER, J., VAN BRUSSEL, H., ADAMS, M., FROMENT, A. ET FAILLOT, J. L. (1988). Control of Flexible Robots Using Generalized Nonlinear Decoupling. SYROCO'88, pp.113-118.

FRANKLIN, G. F. ET POWELL, J. D. (1990). Digital Control of dynamic systems, Addison-Wesley.

GAHINET, P., APKARIAN, P. ET CHILALI, M. (1996). Affine Parameter-Dependent Lyapunov Function and Real Parametric Uncertainty, IEEE Transaction on Automatic Control, vol.41, pp.436-442.

GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J. ET CHILALI, M., (1995). The LMI Control Toolbox, MathWorks Inc.

GOLUB, G.H. ET VAN LOAN, C.F. (1989). Matrix Computations, 2ed Edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

GOODWIN, G.C. ET MAYNE, D.Q. (1987). A Parameter Estimation Perspective of Continuous Time Adaptive Control, Automatica, vol.23, pp.57-70.

HADDAD, W.H. ET BERNSTEIN, D.S. (1991). Parameter-Dependent Lyapunov Function, Constant Parameter Uncertainty and Popov Criteria in Robust Analysis and Synthesis Part 1 and Part 2, Proceeding of the 30th Conference on Decision and Control, pp. 3374-2279. & pp.2632-2633.

HASTINGS, G. G. ET BOOK, W. J. (1987). A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators. IEEE Control Systems Magazine, vol.7(no.1), pp.61-64.

HOHENBICHLER, G., PLOCKINGER, P. ET LUGNER, P. (1988). Comparison of Modal-Expension and a Finite-Element-Model for a two-Beam Flexible Robot Arm. SYROCO'88, pp.35-39.

HWANG, S.-T. ET ELTIMSAHY, A., (1991). Effect of Link Flexibility on Adaptive Tracking Controller for a Robot Manipulator, IECON'91, pp. 1289-1294.

ISIDORI, A. (1989). Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag, Berlin.

KHALIL, H. (1992). Nonlinear Systems. Macmillan, New York.

KHORRAMI, F., JAIN, S. ET TZES, A. (1995). Experimental Results on Adaptive Nonlinear Control and Input Preshaping for Multi-link Flexible Manipulators. Automatica, vol. 31 (no. 1), pp.83-97.

KOKOTOVIC, P. (1984). Applications of Singular Perturbation Techniques to Control Problems. SIAM Review, vol.26(no.4), pp.501-550.

KOKOTOVIC, P. V. (1985). Recent Trends in Feedback Design:An Overview. Automatica, vol.21(no.3), pp.225-236.

KOPACEK, P., DESOYER, K. ET LUGNER, P. (1988). Modelling of Flexible Robots - An Introduction. SYROCO'88, pp.21-28.

KRENER, J. ET RESPONDEK, W. (1985). Nonlinear Observers with Linearizable error Dynamics. SIAM journal on Control and Optimization, vol.23(no.2), pp.197-216.

KWON, D. S. ET BOOK, W. J. (1990). An Inverse Dynamic Method Yielding Flexible Manipulator State Trajectories. Proc. of American Control Conference, vol.1, pp.186-193.

KWON, D. S. ET BOOK, W. J. (1994). An Inverse Dynamic Method Yielding Flexible Manipulator State Trajectories. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.116, pp.193-200.

LAMMERTS, I. M. M., VELDPAUS, F.E., VAN DE MOLENGRAFT, M. J. G. ET KOK, J. J. (1995). Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.117, pp.31-36.

LI, W. ET SLOTINE, J-J. E. (1989). An indirect adaptive robot controller, Systems et Control Letters, vol.12, pp.259-266.

LIN, L.-C. ET YEH, S.-L., (1996). A Composite Adaptive Control with Flexible Quantity Feedback for Flexible-Link Manipulators. Journal of Robotic Systems, vol.13, pp.289-302

LUCIBELLO, P. (1989). Nonlinear Regulation, With Internal Stability, of a Two Link Flexible Robot Arm. IEEE Conference on Decision and Control, vol.2, pp.1645-1650.

LUCIBELLO, P. ET BELLEZZA, F., (1996). Adaptive Output Regulation of a Flexible Arm, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, vol.118, pp.167-172.

LUCIBELLO, P. ET DI BENEDETTO, M. D. (1993). Output Tracking for a Nonlinear Flexible Arm. Journal of Dynamic Systems, Measurment, and Control, vol.115, pp.78-85.

MADHAVAN, S. K. ET SINGH, S.N. (1991). Inverse Trajectory Control and Zero Dynamics Sensitivity of an Elastic Manipulator. Proceeding of American Control Conference, vol.2, pp.1879-1890.

MIDDLETON, R. H. ET GOODWIN, G.C. (1988). Adaptive Computed Torque Control for Rigid Link Manipulators, Systems Control Lett., vol.10, pp.9-16.

MEIROVITCH, L. (1967). Analytical Methods in Vibrations. MacMillan, New York.

MEIROVITCH, L. (1975). Elements of vibration Analysis. McGraw-Hill, New York.

NATHAN, P. J. ET SINGH, S. N. (1991). Sliding Mode Control and Elastic Mode Stabilization of a Robotic Arm With Flexible Links. Journal of Dynamic Systems,Measurement, and Control, vol.113, pp.669-676.

NICOSIA, S., TOMEI, P. ET TORNAMBE, A. (1989). Nonlinear Control and Observation Algorithms for a Single-link Flexible Robot Arm. international journal of control, vol.49(no.3), pp.827-840.

OGATA, K. (1995). Discrete-Time Control System, second edition, Prentice Hall, New Jersey.

PHAM, C. M., KHALIL W. ET CHEVALLEREAU, C. (1993). A Nonlinear Model-Based Control of Flexible Robots. Robotica, vol.11, pp.73-82.

PFEIFFER, F. ET GEBLER, B. (1988). A Multistage-Approach to the Dynamics and Control of Elastic Robots, IEEE international conference on the Robotics and Automation, vol.1, pp.2-8.

PIEDBOEUF, J.C. (1996a). Modelling Flexible Robots with Maple. MapleTech: The Maple Technical Newsletter, vol. 3, pp 38-47.

PIEDBOEUF, J.C. (1996b). Symbolic Modelling of Flexible Manipulators. Accepted in The Journal of Astronautical Science.

PIEDBOEUF, J.C. (1989). Étude du modèle non-linéaire d'un manipulateur avec membrure flexible, thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

PIEDBOEUF, J.C. (1992). Introduction à la Modélisation des robots flexibles, rapport technique, École Polytechnique de Montréal.

SAAD M.,PIEDBOEUF, J.C., AKHRIF O., SAYDY L. (1997). A Comparison of Different Shape Function in Assumed-Mode Models of Flexible Slewing Beam, soumis à International Journal of Robotics Research.

SAAD, M., BIGRAS, B., DESSAINT, L.-A. ET AL-HADDAD, K. (1994) Adaptive Robot Control Using Neural Networks, IEEE Transaction on Industrial Electronics, vol.41, no.2, pp.,173-181.

SASTRY, S. S. ET ISIDORI, A. (1989). Adaptive Control of Linearizable Systems. IEEE Transaction on Automatic Control, vol.34 (no.11), p.1123-1131.

SAYDY, L., TITS, A. L. ET ABED, E.H. (1990). Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials, Mathematics of Control, Signals, and Systems, vol. 3, pp.345-371.

SICILIANO, B. ET BOOK, W. J. (1988). A Singular Perturbation Approach to Control Lightweight Flexible Manipulators. International Journal of Robotics Research, vol.7(no.4), pp.79-90.

SICILIANO, B., BOOK, W. J. ET DE MARIA, G. (1986a). An Integral Manifold Approach to Control of One Link Flexible Arm. IEEE Conference on Decision and Control, vol.2, pp.1131-1134.

SICILIANO, B., YUAN, B.-S. ET BOOK, J. (1986b). Model Reference Adaptive Control of One Link Flexible Arm. IEEE Conference on Decision and Control, vol.1, pp.91-95.

SINGER, N. C. ET SEERING, W. P. (1990). Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.112, pp.76-82.

SINGH, S. N. ET SCHY, A. A. (1986). Control of Elastic Robotic Systems by Nonlinear Inversion and Modal Damping. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.108, pp.180-189.

SLOTINE, J. J. E. ET LI, W. (1987). On the Adaptive Control of Robot Manipulators. International Journal of Robotics Research, vol.6(no.3)

SLOTINE, J.-J. E. ET LI, W. (1991). Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, New Jersey.

SPONG, M.W. ET VIDYASAGAR, M. (1989). Robot Dynamics and Control. Wiley, New York.

THEODORE, R.J. ET GHASAL, A., (1995). Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators, International Journal of Robotics Research, vol. 14, pp.91-111.

TORNAMBE, A. (1992). Control Laws Based on Parameter Observation. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.114, pp.186-195.

TZES, A. ET YURKOVICH, S. (1993). An Adaptive Input Shaping Control Scheme for Vibration Suppression in Slewing Flexible Structure. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol.1 (no. 2), pp.114-121.

VIDYASAGAR, M. (1993). Nonlinear Systems Analysis, second edition. Prentice Hall, New Jersey.

WALACH, E., ZEHEB, E. (1980). Sign Test of Multivariable Real Polynomial, IEEE Transaction on Circuits and Systems, vol.cas-27, pp.619-625.

WANG, D. ET VIDYASAGAR, M. (1991a). Control of Class of Manipulators With a Single Flexible Link-Part 1: Feedback Linearization. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.113, pp.655-661.

WANG, D. ET VIDYASAGAR, M. (1991b). Control of a Class of Manipulators With a Single Flexible Link-Part 2: Observer-Controller Stabilisation. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.113, pp.662-668.

WELLS, R. L., SCHUELLER, J. K. ET TLUSTY, J. (1990). Feedforward and Feedback Control of a Flexible Robotic Arm. IEEE Control Systems Magazine, vol.10(no.1), pp.9-15.

WU, S. ET CETINKUNT, S. (1992). Model Reference Adaptive Inverse Control of a Single Link Flexible Robot. Journal of Computers & Structures, vol. 47 (no. 2), pp.213-223.

XIA, J. Z. ET MENQ, C. H. (1993). Real Time Estimation of Elastic Deformation for End-Point Tracking Control of Flexible Two-Link Manipulators. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.115, pp.385-393.

YANG, J. H., LIU, F. C. ET FU, L.,C. (1994). Nonlinear Control for Flexible Manipulators. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.327-332.

YANG, J. H., LIAN, F.-G. ET FU, L.-C. (1995). Adaptive Robust Control for Flexible Manipulators. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1223-1228.

YEUNG, K. S., ET CHEN, Y. P. (1989). Regulation of a One-link Flexible Robot Arm Using Sliding-mode Technique. International Journal of Control, vol.49(no.6), pp.1965-1978.

YIM, W. (1993). End-Point Trajectory Control, Stabilization, and Zero Dynamics of a Tree-Link Flexible Manipulator. proc. IEEE conf. on Robotics and Automation, pp.468-473.

YIM, W. (1994). Inverse Cartesian Trajectory Control and Stabilisation of a Three-Axis Flexible Manipulator. Journal of Robotic Systems, vol.11, no.4, pp.311-326.

YUAN, B.-S., BOOK, W. J. ET HUGGINS, J. D. (1993). Dynamics of Flexible Manipulator Arms: Alternative Derivation, Verification, and Characteristics for Control. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol.115, pp.394-404.

ZHAO, H. ET CHEN, D. (1993). Exact and Stable Tip Trajectory Tracking for Multi-Link Flexible Manipulator. Proceedings of IEEE conferance Decision and Control, vol.2, p.1371-1376.

ZHOU, K. ET KHARGONEKAR, P.P. (1988). An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, Systemes & Control Letters, vol.11, pp.85-91.

ANNEXE A
Calcul de l'énergie cinétique

Cette annexe présente les détails du calcul de l'énergie cinétique de la poutre flexible. Selon la relation (2.9) nous savons que cette énergie est donnée par la relation suivante:

$$\overline{\mathrm{K}}_e = \frac{1}{2}\left[\rho\int_0^l {}^0\boldsymbol{v}_e^T(x_p)\,{}^0\boldsymbol{v}_e(x_p)dx_p + m_c\,{}^0\boldsymbol{v}_e^T(l)\,{}^0\boldsymbol{v}_e(l) + {}^e\Omega_e^T(l)\boldsymbol{I}_c\,{}^e\Omega_e(l)\right] \qquad \text{(A.1)}$$

Nous allons maintenant décomposer l'équation (A.1) de façon à simplifier les calculs. D'abord, la relation (2.11) nous permet d'écrire

$$ {}^0\boldsymbol{v}_e^T(x_p)\,{}^0\boldsymbol{v}_e(x_p) = k_1 + k_2(x_p) + k_3(x_p) + k_4(x_p) + k_5(x_p) \qquad \text{(A.2)}$$

où

$$k_1 = {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\boldsymbol{J}_v^T({}^1\boldsymbol{q}_r)\boldsymbol{J}_v({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \qquad \text{(A.3)}$$

$$k_2(x_p) = {}^{p-1}\boldsymbol{p}_e^T(x_p)\boldsymbol{S}^T\left(\boldsymbol{J}_w({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\right)\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{J}_w({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\right)^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) \qquad \text{(A.4)}$$

$$k_3(x_p) = {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e^T(x_p)\,{}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p) \qquad \text{(A.5)}$$

$$k_4(x_p) = 2\left[\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\boldsymbol{J}_v^T({}^1\boldsymbol{q}_r) + {}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e^T(x_p)\right]\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{J}_w({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\right)^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) \qquad \text{(A.6)}$$

$$k_5(x_p) = 2\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\boldsymbol{J}_v^T({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^{p-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p) \qquad \text{(A.7)}$$

Puis, grâce à l'hypothèse 2.8, la matrice d'inertie de la charge peut s'exprimer sous la forme diagonale suivante: $\boldsymbol{I}_c = diag(I_x, I_y, I_z)$. La relation (2.12) prend alors la forme suivante:

$$ {}^e\Omega_e^T(l)\boldsymbol{I}_c\,{}^e\Omega_e(l) = \bar{k}_6 + \bar{k}_7 + \bar{k}_8 \qquad \text{(A.8)}$$

où

$$\bar{k}_6 = \left({}^2\dot{q}_r + \dot{\mu}'(l)\right)^2 I_z \qquad \text{(A.9)}$$

$$\bar{k}_7 = {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\boldsymbol{J}_\Omega^T({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^{p-1}_{e}R(l)\boldsymbol{I}_c\,{}^{p-1}_{e}R^T(l)\boldsymbol{J}_\Omega({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \qquad \text{(A.10)}$$

$$\bar{k}_8 = 2\left({}^2\dot{q}_r + \dot{\mu}'(l)\right)\hat{z}_e^T\boldsymbol{I}_c\,{}^{p-1}_{e}R^T(l)\boldsymbol{J}_\Omega({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \qquad \text{(A.11)}$$

En remplaçant (A.2) et (A.8) dans (A.1), on obtient

$$\overline{K}_e = \frac{1}{2}\left[\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4 + \bar{k}_5 + \bar{k}_6 + \bar{k}_7 + \bar{k}_8\right] \qquad \text{(A.12)}$$

où

$$\bar{k}_i = \rho\int_0^l k_i(x_p)dx_p + m_c k_i(l) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, 5 \tag{A.13}$$

et où $\bar{k}_6$, $\bar{k}_7$ et $\bar{k}_8$ sont données par les relations (A.9), (A.10) et (A.11). Nous allons maintenant considérer le calcul de chaque terme de la relation (A.12).

Calcul du terme $\bar{k}_1$:

Selon les relations (A.3) et (2.1), ce terme est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$. Il est donc tout à fait inutile de le calculer puisque, de toute façon, il disparaîtra lors du développement de l'équation dynamique donnée par la relation (2.8).

Calcul du terme $\bar{k}_2$:

Calculons d'abord $k_2(x_p)$. Sachant que

$$^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} c_2 x_p - s_2\mu(x_p) & s_2 x_p + c_2\mu(x_p) & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{A.14}$$

si on définit $\begin{bmatrix} J_4^T & J_5^T & J_6^T \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{J}_\Omega(^1\boldsymbol{q}_r)$, nous obtenons

$$S\left(J_\Omega(^1\boldsymbol{q}_r)^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\right)\,^{p-1}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} 0 & -J_6\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r & J_5\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\ J_6\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r & 0 & -J_4\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\ -J_5\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r & J_4\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 x_p - s_2\mu(x_p) \\ s_2 x_p + c_2\mu(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

En remplaçant (A.15) dans (A.4) , on obtient

$$\begin{aligned} k_2(x_p) = {} & x_p^2\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[J_6^T J_6 + s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5 - 2 s_2 c_2 J_4^T J_5\right]^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\ & + 2x_p\mu(x_p)\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[s_2 c_2\left(J_4^T J_4 - J_5^T J_5\right) - \left(c_2^2 - s_2^2\right)J_4^T J_5\right]^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\ & + \mu^2(x_p)\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[J_6^T J_6 + c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5 - s_2 c_2\left(J_4^T J_5 + J_5^T J_4\right)\right]^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \end{aligned} \tag{A.16}$$

Finalement, en remplaçant (A.16) dans (A.13) puis en utilisant la relation (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \bar{k}_2 = {} & 2\,^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[s_2 c_2\left(J_4^T J_4 - J_5^T J_5\right) - \left(c_2^2 - s_2^2\right)J_4^T J_5\right]^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \sum_{i=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l x\phi_i(x)dx + m_c l\phi_i(l)\right)q_{ei} \\ & + \bar{k}_{20} + {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[J_6^T J_6 + c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5 - s_2 c_2\left(J_4^T J_5 + J_5^T J_4\right)\right] \\ & {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l)\phi_j(l)\right)q_{ei}q_{ej} \end{aligned} \tag{A.17}$$

où $\bar{k}_{20}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_3$:

Calculons d'abord $k_3(x_p)$. De la relation (A.14), on déduit que

$$
{}^{P-1}\dot{\boldsymbol{p}}_e(x_p) = \begin{bmatrix} -s_2 x_p\, {}^2\dot{q}_r - c_2\mu(x_p)\, {}^2\dot{q}_r - s_2\dot{\mu}(x_p) \\ c_2 x_p\, {}^2\dot{q}_r - s_2\mu(x_p)\, {}^2\dot{q}_r + c_2\dot{\mu}(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.18}
$$

Puis, en remplaçant (A.18) dans (A.5), on obtient

$$
k_3(x_p) = x_p^2\, {}^2\dot{q}_r^2 + \dot{\mu}^2(x_p) + 2x_p\dot{\mu}(x_p) + \mu^2(x_p)\, {}^2\dot{q}_r^2 \tag{A.19}
$$

En remplaçant (A.19) dans (A.13) puis en utilisant la relation (2.1), on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_3 = \bar{k}_{30} &+ \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l)\phi_j(l)\right)\dot{q}_{ei}\dot{q}_{ej} \\
&+2\, {}^2\dot{q}_r\sum_{i=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l x\phi_i(x)dx + m_c l\phi_i(l)\right)\dot{q}_{ei} \\
&+{}^2\dot{q}_r^2\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l)\phi_j(l)\right)q_{ei}q_{ej}
\end{aligned} \tag{A.20}
$$

où $\bar{k}_{30}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_4$:

Calculons d'abord $k_4(x_p)$. Si on pose $\begin{bmatrix} J_1^T & J_2^T & J_3^T \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{J}_v({}^1\boldsymbol{q}_r)$ et qu'on remplace la relation (A.15) dans la relation (A.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
k_4(x_p) = 2x_p^2\, {}^2\dot{q}_r J_6\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r &+ 2x_p\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[s_2\left(J_3^T J_4 - J_1^T J_6\right) + c_2\left(J_2^T J_6 - J_3^T J_5\right)\right]{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\
&+2\mu(x_p)\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[s_2\left(J_3^T J_5 - J_2^T J_6\right) + c_2\left(J_3^T J_4 - J_1^T J_6\right)\right]{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r \\
&+2x_p\dot{\mu}(x_p)J_6\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r + 2\mu^2(x_p)\, {}^2\dot{q}_r J_6\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

En remplaçant (A.21) dans (A.13) puis en utilisant la relation (2.1), on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_4 = \bar{k}_{40} &+ 2\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r^T\left[s_2\left(J_3^T J_5 - J_2^T J_6\right) + c_2\left(J_3^T J_4 - J_1^T J_6\right)\right]{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{ei} \\
&+2J_6\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\sum_{i=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l x\phi_i(x)dx + m_c l\phi_i(l)\right)\dot{q}_{ei} \\
&2\, {}^2\dot{q}_r J_6\, {}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r\sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e}\left(\rho\int_0^l \phi_i(x)\phi_j(x)dx + m_c\phi_i(l)\phi_j(l)\right)q_{ei}q_{ej}
\end{aligned} \tag{A.22}
$$

où $\bar{k}_{40}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_5$:

Calculons d'abord $k_5(x_p)$. En remplaçant (A.18) dans (A.7), on obtient

$$k_5(x_p) = 2\begin{bmatrix} J_1\,{}^1\dot{q}_r \\ J_2\,{}^1\dot{q}_r \\ J_3\,{}^1\dot{q}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s_2 x_p\,{}^2\dot{q}_r - c_2\mu(x_p)\,{}^2\dot{q}_r - s_2\dot{\mu}(x_p) \\ c_2 x_p\,{}^2\dot{q}_r - s_2\mu(x_p)\,{}^2\dot{q}_r + c_2\dot{\mu}(x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.23}$$

En remplaçant (A.23) dans (A.13) puis en utilisant la relation (3.1), on obtient donc

$$\bar{k}_5 = \bar{k}_{50} - 2\,{}^2\dot{q}_r\left[c_2 J_1 + s_2 J_2\right]{}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i q_{ei} + 2\left[-s_2 J_1 + c_2 J_2\right]{}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} v_i \dot{q}_{ei} \tag{A.24}$$

où $\bar{k}_{50}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_6$:

Ce terme est obtenu directement en remplaçant (3.1) dans (A.9) de sorte que

$$\bar{k}_6 = \bar{k}_{60} + \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l)\phi'_j(l)\dot{q}_{ei}\dot{q}_{ej} + 2\,{}^2\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l)\dot{q}_{ei} \tag{A.25}$$

où $\bar{k}_{60}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_7$:

Selon la relation (3.12), nous avons

$$\begin{aligned} {}^{p-1}_{e}R^T(x_p)J_\Omega({}^1\boldsymbol{q}_r)\,{}^1\dot{\boldsymbol{q}}_r &= \begin{bmatrix} c_2 - s_2\mu'(x_p) & s_2 + c_2\mu'(x_p) & 0 \\ -s_2 - c_2\mu'(x_p) & c_2 - s_2\mu'(x_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_4\,{}^1\dot{q}_r \\ J_5\,{}^1\dot{q}_r \\ J_6\,{}^1\dot{q}_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(c_2 - s_2\mu'(x_p)\right)J_4\,{}^1\dot{q}_r + \left(s_2 + c_2\mu'(x_p)\right)J_5\,{}^1\dot{q}_r \\ -\left(s_2 + c_2\mu'(x_p)\right)J_4\,{}^1\dot{q}_r + \left(c_2 - s_2\mu'(x_p)\right)J_5\,{}^1\dot{q}_r \\ J_6\,{}^1\dot{q}_r \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.26}$$

Ensuite, en remplaçant (A.26) dans (A.10), on obtient

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_7 = {} & {}^1\dot{q}_r^T\left[c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5 + 2 s_2 c_2 J_4^T J_5\right]{}^1\dot{q}_r I_x \\
& + {}^1\dot{q}_r^T\left[s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5 - 2 s_2 c_2 J_4^T J_5\right]{}^1\dot{q}_r I_x + {}^1\dot{q}_r^T J_6^T J_6\, {}^1\dot{q}_r I_z \\
& + 2\, {}^1\dot{q}_r^T\left[-s_2 c_2 (I_x - I_y) J_4^T J_4 + s_2 c_2 (I_x - I_y) J_5^T J_5 + (c_2^2 - s_2^2)(I_x - I_y) J_4^T J_5\right]{}^1\dot{q}_r \mu'(l) \\
& + {}^1\dot{q}_r^T\left[I_x (s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5) + I_y (c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5)\right]{}^1\dot{q}_r \mu'^2(l) \\
& - {}^1\dot{q}_r^T\left[s_2 c_2 (I_x - I_y)(J_4^T J_5 + J_5^T J_4)\right]{}^1\dot{q}_r \mu'^2(l)
\end{aligned}
$$

La relation (2.1) nous permet donc d'obtenir

$$
\begin{aligned}
\bar{k}_7 = {} & 2\, {}^1\dot{q}_r^T\left[-s_2 c_2 (I_x - I_y) J_4^T J_4 + s_2 c_2 (I_x - I_y) J_5^T J_5 + (c_2^2 - s_2^2)(I_x - I_y) J_4^T J_5\right]{}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} \phi'_i(l) q_{ei} \\
& + \bar{k}_{70} + {}^1\dot{q}_r^T\left[I_x (s_2^2 J_4^T J_4 + c_2^2 J_5^T J_5) + I_y (c_2^2 J_4^T J_4 + s_2^2 J_5^T J_5)\right]{}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} \phi'_i(l)\phi'_j(l) q_{ei} q_{ej} \\
& - {}^1\dot{q}_r^T\left[s_2 c_2 (I_x - I_y)(J_4^T J_5 + J_5^T J_4)\right]{}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_e} \phi'_i(l)\phi'_j(l) q_{ei} q_{ej}
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

où $\bar{k}_{70}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Calcul du terme $\bar{k}_8$:

En remplaçant (A.26) dans (A.11) on obtient

$$\bar{k}_8 = 2\left({}^2\dot{q}_r + \dot{\mu}'(l)\right) I_z J_6\, {}^1\dot{q}_r$$

Puis, selon la relation (2.1), nous avons

$$\bar{k}_8 = \bar{k}_{80} + 2 J_6\, {}^1\dot{q}_r \sum_{i=1}^{n_e} I_z \phi'_i(l) \dot{q}_{ei} \tag{A.28}$$

où $\bar{k}_{80}$ est indépendant de $\boldsymbol{q}_e$ et de $\dot{\boldsymbol{q}}_e$.

Enfin, l'énergie cinétique donnée par la relation (2.13) est obtenue en remplaçant les relations (A.17), (A.20), (A.22), (A.24), (A.25), (A.27) et (A.28) dans la relation (A.12).

ANNEXE B
Démonstration du lemme 6.1

Cette annexe présente la démonstration du lemme 6.1. Cette démonstration est fortement inspirée de la démonstration du lemme sur la stabilité exponentielle des systèmes hiérarchiques (Vidyasagar, 1993, p.261).

Nécessité: Supposons d'abord que les hypothèses i) et ii) sont satisfaites et que pour $p_j = \hat{0}$ avec $j = 1,\cdots,\ell$, le système décrit par la relation (4.36) est exponentiellement stable pour n'importe quelles conditions initiales bornées. En particulier, lorsque $\bar{x}^T(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^T(t_0) & \cdots & x_\ell^T(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_{i0}^T & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, il est clair que selon l'hypothèse i), $\dot{\bar{x}}_i = f_i(0,\cdots,\bar{x}_i,\cdots,\bar{x}_\ell,t)$ est exponentiellement stable. Le système décrit par la relation (4.38) est donc forcément exponentiellement stable puisque i peut prendre n'importe quelles valeurs comprises entre 1 et ℓ. Il en est de même lorsque le système est exponentiellement ultimement borné puisque l'on peut toujours choisir en particulier $p_j = 0$ pour $j = 1,\cdots,\ell$.

Suffisance: D'abord, nous savons que, par hypothèse, $\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1,t)$ est exponentiellement stable et $\partial f_1(\bar{x}_1,t) / \partial \bar{x}_1$ est bornée pour n'importe quelle $\bar{x}_1$ bornée. Le théorème converse nous permet alors d'affirmer qu'il existe une fonction $v_1(\bar{x}_1,t)$ continûment différentiable qui respecte les conditions suivantes (Vidyasagar, 1993, p.246):

$$c_{11}|\bar{x}_1|_2^2 \le v_1(\bar{x}_1,t) \le c_{12}|\bar{x}_1|_2^2 \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}_1} f_1(\bar{x}_1,t) \le -c_{13}|\bar{x}_1|_2^2 \tag{B.3}$$

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}_1}\right|_2 \le c_{14}|\bar{x}_1|_2 \tag{B.4}$$

Ainsi, en dérivant v_1 le long de la trajectoire décrite par x_1, nous obtenons

$$\dot{v}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}_1}\left[f_1(\bar{x}_1,t) + p_1(t)\right]$$

Puis, en utilisant les relations (B.2), (B.3) et (B.4), nous obtenons

$$\dot{v}_1 \le -c_{13}|\bar{x}_1|_2^2 + c_{14}|\bar{x}_1|_2|p_1(t)|_2 \le -\frac{c_{13}}{c_{12}}v_1 + \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}}}\sqrt{v_1}\,|p_1(t)|_2$$

On considère ensuite le changement de variable $w_1 = \sqrt{v_1}$ de sorte que

$$\dot{w}_1 \le \frac{\dot{v}_1}{\sqrt{v_1}} = -\frac{c_{13}}{c_{12}}w_1 + \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}}}|p_1(t)|_2$$

En intégrant cette équation, nous trouvons

$$\begin{aligned} w_1(t) &\le e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}w_1(t_0) + \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{11}}}\int_{t_0}^{t} e^{-\bar{\gamma}_1(t-\tau)}|p(\tau)|_2\,d\tau \\ &\le e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}w_1(t_0) + \frac{c_{14}}{\bar{\gamma}_1\sqrt{c_{11}}}\left(1-e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}\right)\sup_t|p_1(t)|_2 \end{aligned}$$

où

$$\bar{\gamma}_1 = c_{13}\,/\,c_{12}$$

Puis, selon la relation (B.2), nous obtenons

$$|\bar{x}_1(t)|_2 \le \sqrt{\frac{c_{12}}{c_{11}}}e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}|\bar{x}_1(t_0)|_2 + \frac{c_{14}}{\bar{\gamma}_1 c_{11}}\left(1-e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}\right)\sup_t|p_1(t)|_2$$

Ainsi,

$$|\bar{x}_1(t)|_2 \le \beta_{11}e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)}|\bar{x}_1(t_0)|_2 + \beta_{10} \tag{B.5}$$

où

$$\beta_{11} = \sqrt{\frac{c_{12}}{c_{11}}} \quad \text{et} \quad \beta_{10} = \frac{c_{14}}{\bar{\gamma}_1 c_{11}}\sup_t|p_1(t)|_2$$

Aussi, par hypothèse, la dynamique décrite par $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(0,\bar{x}_2,t)$ est exponentiellement stable et la matrice jacobienne de $f_2(0,\bar{x}_2,t)$ est bornée pour n'importe quelle $\bar{x}_2$ bornée. Le théorème converse nous permet alors d'affirmer qu'il existe une fonction $v_2(\bar{x}_2,t)$ continûment différentiable qui respecte les conditions suivantes (Vidyasagar, 1993, p.246):

$$c_{21}|\bar{x}_2|_2^2 \le v_2(\bar{x}_2,t) \le c_{22}|\bar{x}_2|_2^2 \tag{B.6}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2}f_2(0,\bar{x}_2,t) \le -c_{23}|\bar{x}_2|_2^2 \tag{B.7}$$

$$\left|\frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2}\right|_2 \le c_{24}|\bar{x}_2|_2 \tag{B.8}$$

Si on dérive la fonction de Lyapunov $v_2(\bar{x}_2,t)$ le long de la trajectoire décrite par $\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,t) + p_2(t)$, nous obtenons,

$$\dot{v}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} f_2(0,\bar{x}_2,t) + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2}\left[f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,t) - f_2(0,\bar{x}_2,t)\right] + \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}_2} p_2(t)$$

En utilisant la condition 3) et les relations (B.7) et (B.8), nous avons

$$\begin{aligned}\dot{v}_2 &\le -c_{23}|\bar{x}_2|_2^2 + c_{24}|\bar{x}_2|_2|p_2(t)|_2 + c_{24}\vartheta_2|\bar{x}_2|_2|\bar{x}_1|_2 \\ &\le -\frac{c_{23}}{c_{22}}v_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}}\sqrt{v_2}\,|p_2(t)|_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}}\sqrt{v_2}\,\vartheta_2|\bar{x}_1|_2\end{aligned}$$

En considérant le changement de variable $w_2 = \sqrt{v_2}$, nous obtenons

$$\dot{w}_2 = \frac{\dot{v}_2}{\sqrt{v_2}} \le -\frac{c_{23}}{c_{22}}w_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}}|p_2(t)|_2 + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}}\vartheta_2|\bar{x}_1|_2$$

En solutionnant cette équation différentielle, nous trouvons

$$w_2(t) \le e^{-\gamma_2(t-t_0)}w_2(t_0) + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}}\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_2(t-\tau)}\left(|p_2(\tau)|_2 + \vartheta_2|\bar{x}_1(\tau)|_2\right)d\tau \tag{B.9}$$

où

$$\gamma_2 = c_{13} / c_{12}$$

En remplaçant (B.5) dans (B.9), nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned}w_2(t) \le\ & e^{-\gamma_2(t-t_0)}w_2(t_0) + \frac{c_{24}}{\sqrt{c_{21}}\,\gamma_2}\left[\sup_{t>0}|p_2(t)|_2 + \vartheta_2\beta_{10}\right] \\ & + \frac{c_{24}\vartheta_2\beta_{11}}{\sqrt{c_{21}}(\gamma_2-\gamma_1)}\left[e^{-\gamma_1(t-t_0)} - e^{-\gamma_2(t-t_0)}\right]|\bar{x}_1(t_0)|_2\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation (B.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}|\bar{x}_2(t)|_2 \le\ & \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}}e^{-\gamma_2(t-t_0)}|\bar{x}_2(t_0)|_2 + \frac{c_{24}}{c_{21}\gamma_2}\left[\sup_{t>0}|p_2(t)|_2 + \vartheta_2\beta_{10}\right] \\ & + \frac{c_{24}\vartheta_2\beta_{11}}{c_{21}(\gamma_2-\gamma_1)}\left[e^{-\gamma_1(t-t_0)} - e^{-\gamma_2(t-t_0)}\right]|\bar{x}_1(t_0)|_2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\bar{x}_2(t)|_2 \le e^{-\bar{\gamma}_2(t-t_0)}\left(\beta_{21}|\bar{x}_1(t_0)|_2 + \beta_{22}|\bar{x}_2(t_0)|_2\right) + \beta_{20} \qquad \text{(B.10)}$$

où

$$\bar{\gamma}_2 = \min(\bar{\gamma}_1, \gamma_2),\ \beta_{22} = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{21}}},\ \beta_{21} = \frac{c_{24}\vartheta_2\beta_{11}}{c_{21}|\gamma_2 - \bar{\gamma}_1|} \text{ et } \beta_{20} = \frac{c_{24}}{\gamma_2 c_{21}}\left[\sup_t |\boldsymbol{p}_2(t)|_2 + \vartheta_2\beta_{10}\right]$$

De façon similaire, par induction, on peut déterminer l'inégalité suivante:

$$|\bar{x}_n(t)|_2 \le e^{-\gamma_n(t-t_0)}\left(\beta_{n1}|\bar{x}_1(t_0)|_2 + \beta_{n2}|\bar{x}_2(t_0)|_2 + \cdots + \beta_{nn}|\bar{x}_n(t_0)|_2\right) + \beta_{n0} \text{ (B.11)}$$

Ainsi, à partir des relations (B.5), (B.10) et (B.11), nous obtenons

$$\left\|\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_\ell(t) \end{bmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} |\bar{x}_1(t)|_2 \\ |\bar{x}_2(t)|_2 \\ \vdots \\ |\bar{x}_\ell(t)|_2 \end{bmatrix}\right\|_2 \le \left\|\begin{bmatrix} \beta_{11}e^{-\bar{\gamma}_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21}e^{-\bar{\gamma}_2(t-t_0)} & \beta_{22}e^{-\bar{\gamma}_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{\ell 1}e^{-\bar{\gamma}_\ell(t-t_0)} & \beta_{\ell 2}e^{-\bar{\gamma}_\ell(t-t_0)} & \cdots & \beta_{\ell\ell}e^{-\bar{\gamma}_\ell(t-t_0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |\bar{x}_1(t)|_2 \\ |\bar{x}_2(t)|_2 \\ \vdots \\ |\bar{x}_\ell(t)|_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{\ell 0} \end{bmatrix}\right\|_2$$

Nous avons donc

$$\left\|\left[\bar{x}_1^T(t), \cdots, \bar{x}_\ell^T(t)\right]\right\|_2 \le \beta_1 e^{-\gamma(t-t_0)}\left\|\left[\bar{x}_1^T(t_0), \cdots, \bar{x}_\ell^T(t_0)\right]\right\|_2 + \beta_0$$

où

$$\gamma = \min_i \bar{\gamma}_i\ ,\quad \beta_0 = \left\|\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{\ell 0} \end{bmatrix}\right\|_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = \left\|\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{\ell 1} & \beta_{\ell 2} & \cdots & \beta_{\ell\ell} \end{bmatrix}\right\|_2$$

Selon la définition (4.1), le système est alors exponentiellement ultimement borné lorsque β_0 est uniformément borné et exponentiellement stable lorsque $\beta_0 = 0$. Il se trouve justement que selon les relations (B.5) et (B.10), $\beta_0 = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \ldots = \boldsymbol{p}_l = \mathbf{0}$ et β_0 est uniformément borné si et seulement si $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$,..., $\boldsymbol{p}_l$ sont uniformément bornés.

ANNEXE C

Simulation avec un modèle incluant l'effet de raccourcissement

Dans cette annexe, les différents contrôleurs étudiés dans cette thèse sont validés sur un modèle incluant plusieurs termes de couplage entre les parties rigide et flexible qui ont été négligés lors du développement des contrôleurs. À notre meilleure connaissance, ces termes sont négligés dans la majorité des publications qui concernent la commande des manipulateurs flexibles. Ils proviennent de la prise en compte de la cinématique à l'ordre deux de la déformation (Piedboeuf, 1992). Cette dernière permet d'inclure l'effet de raccourcissement de la membrure flexible.

C.1 Cinématique à l'ordre deux

Si on divise la membrure flexible en éléments infinités décimaux, la déformation de chaque élément peut être projetée dans le repère de la base du membre. Selon la figure 2.2, en faisant l'intégrale de tous ces éléments, on obtient la position du membre flexible projeté dans le repère $\{p\}$ en fonction de x_p (Piedboeuf, 1992):

$$ {}^{p}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \int_0^{x_p} {}^{p}_{e}\boldsymbol{R}(\xi)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}d\xi $$

où ${}^{p}_{e}\boldsymbol{R}(x)$ est la matrice de projection suivante:

$$ {}^{p}_{e}\boldsymbol{R}(x) = \begin{bmatrix}\cos(u'(x)) & \sin(u'(x))\\ -\sin(u'(x)) & \cos(u'(x))\end{bmatrix} $$

La matrice de projection ${}^{p}_{e}\boldsymbol{R}(x)$ peut être approximée à l'ordre n en retenant les n+1 premiers termes de sa série de Taylor. Lorsque l'approximation est à l'ordre un, la

position du membre en fonction de x_p devient celle que nous avons considérée au chapitre II:

$$^{p}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} x_p & \mu(x_p) \end{bmatrix}^T$$

tandis qu'avec l'approximation à l'ordre deux, la position en fonction de x_p devient:

$$^{p}\boldsymbol{p}_e(x_p) = \begin{bmatrix} x_p - \frac{1}{2}\int_0^{x_p} \mu'^2(\xi)d\xi & \mu(x_p) \end{bmatrix}^T$$

La différence entre l'approximation à l'ordre un et celle à l'ordre deux est le terme $\frac{1}{2}\int_0^{x_p} \mu'^2(\xi)d\xi$ qui caractérise le raccourcissement de la membrure.

C.2 SIMULATIONS

Afin de valider l'efficacité de la stratégie de commande proposée, nous avons repris la plupart des simulations considérées dans les différents chapitres de cette thèse en remplaçant le modèle de simulation du manipulateur par un modèle incluant l'effet de raccourcissement de la membrure flexible. Ce modèle, plus conforme à la réalité que celui utilisé pour développer les lois de commande nous a été fourni par Monsieur Jean-Claude Piedboeuf de l'Agence spatiale canadienne. La fonction MATLAB (compilée) de ce modèle a été générée de façon automatique à l'aide du programme symbolique SYMOFROS (Piedboeuf, 1996a; Piedboeuf, 1996b).

De façon à faciliter la comparaison des résultats obtenus du modèle de validation avec ceux obtenus du modèle utilisé pour développer les lois de commande, la légende des figures suivantes fait toujours mention, entre parenthèses, de la figure associée aux résultats de simulation obtenus avec le modèle n'incluant pas le terme de raccourcissement. Les situations simulées, étant déjà décrites dans les chapitres de cette thèse, ne sont pas réexpliquées dans cette annexe.

Les résultats obtenus nous montrent que la linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA est significativement affectée par la différence entre le modèle de validation et celui utilisé pour développer la loi de commande. En fait, dans le contrôleur non robuste, le facteur α (compromis entre les CGR et les CGRV) obtenu lors de l'analyse a dû être légèrement réduit pour assurer la stabilité du système. Il est passé de 0.88 à 0.85. Les erreurs de suivi obtenues avec le modèle de validation sont alors nettement supérieures à celles obtenues avec le modèle utilisé pour développer la loi de commande. Cette dégradation peut s'expliquer par le fait que cette méthode consiste à augmenter le facteur α jusqu'à la limite de stabilité de la dynamique interne du système. Le système possède donc une marge de stabilité très mince qui peut facilement être franchie lorsque le modèle est perturbé.

Pour la structure de commande proposée, on remarque que même si le modèle de simulation ne correspond pas exactement au modèle utilisé pour développer les lois de commande, le système réagit bien; en particulier avec le contrôleur robuste. On peut cependant noter que la méthode de commande proposée de pair avec la transformation quasi-statique donne des résultats presque identiques dans les deux cas tandis que l'utilisation de la transformation exacte est d'avantage affectée par l'inexactitude du modèle. On peut expliquer cette différence par le fait que la méthode quasi-statique est basée sur une approximation du modèle utilisé pour développer les lois de commande tandis que l'approche exacte est basée sur l'exactitude de ce modèle. Il n'en demeure pas moins que la structure de commande proposée de pair avec la transformation exacte donne des erreurs de suivi nettement plus petites qu'avec la transformation quasi-statique.

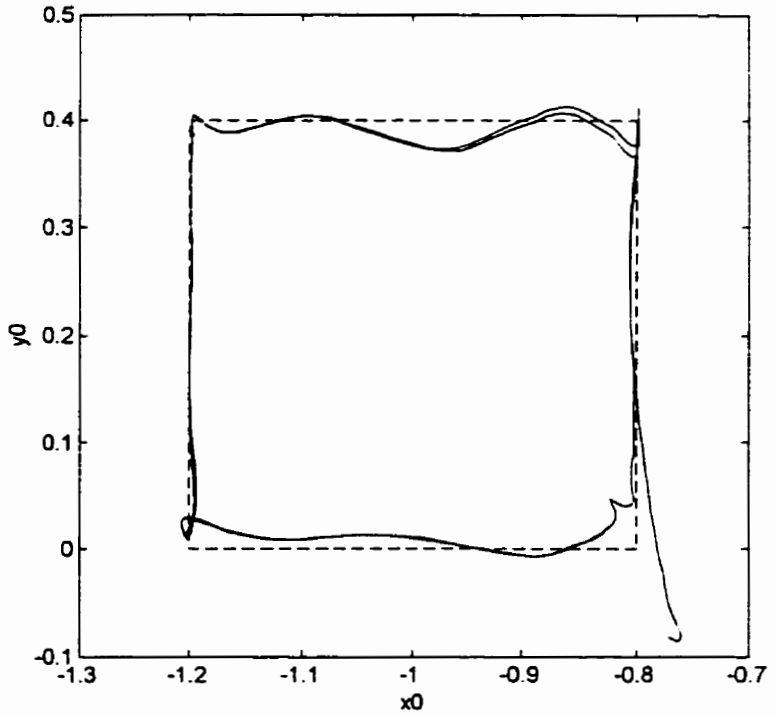


Figure C.1 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.1).

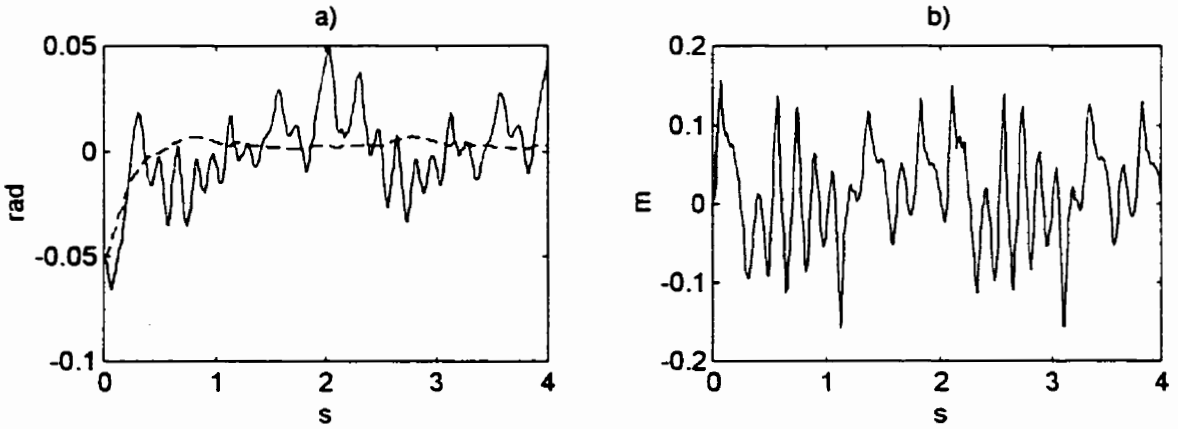


Figure C.2 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.2).

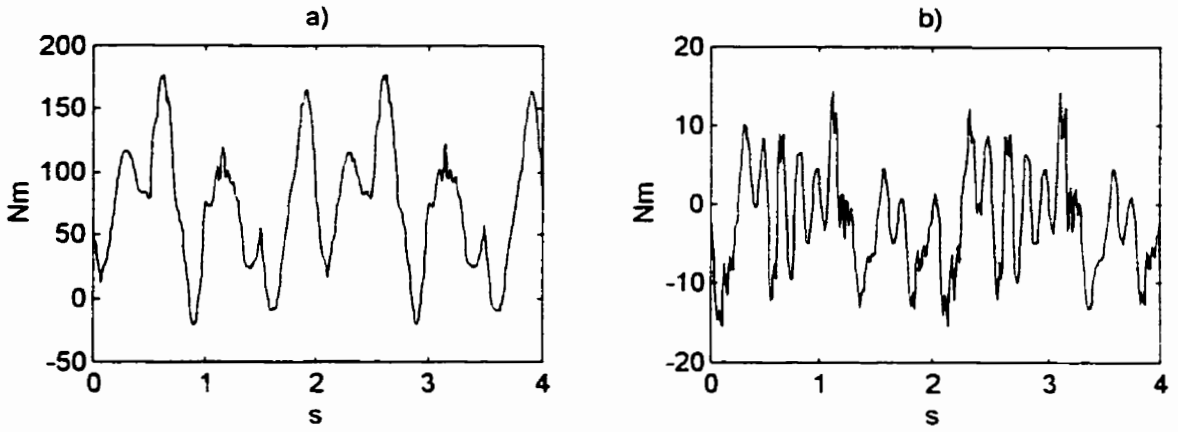


Figure C.3 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état par rapport aux CGRVA (Figure 4.3).

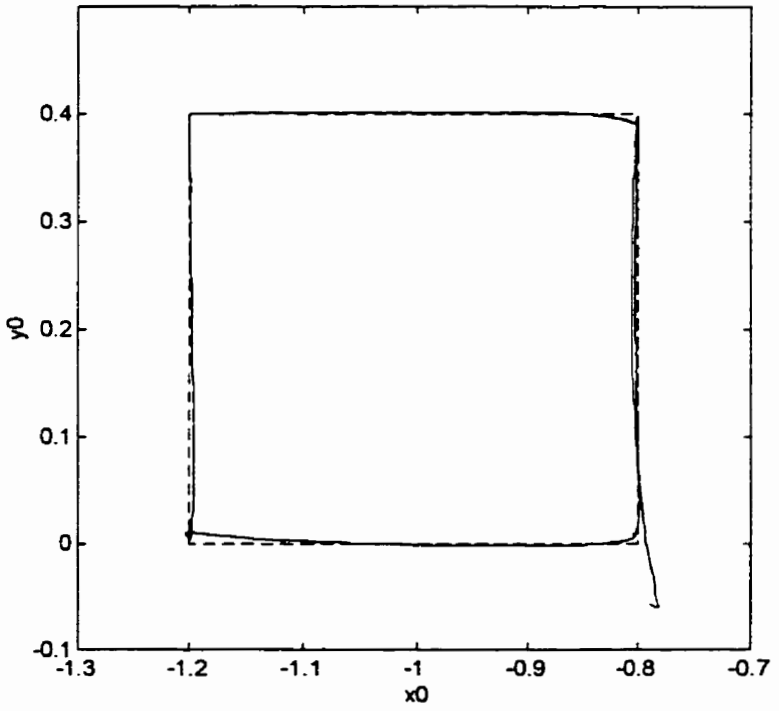


Figure C.4 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.9).

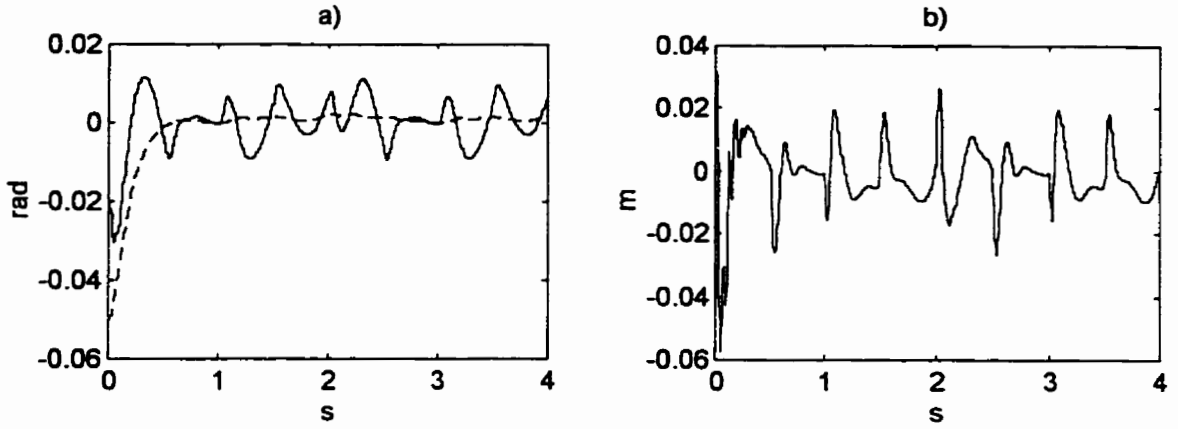


Figure C.5 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.10).

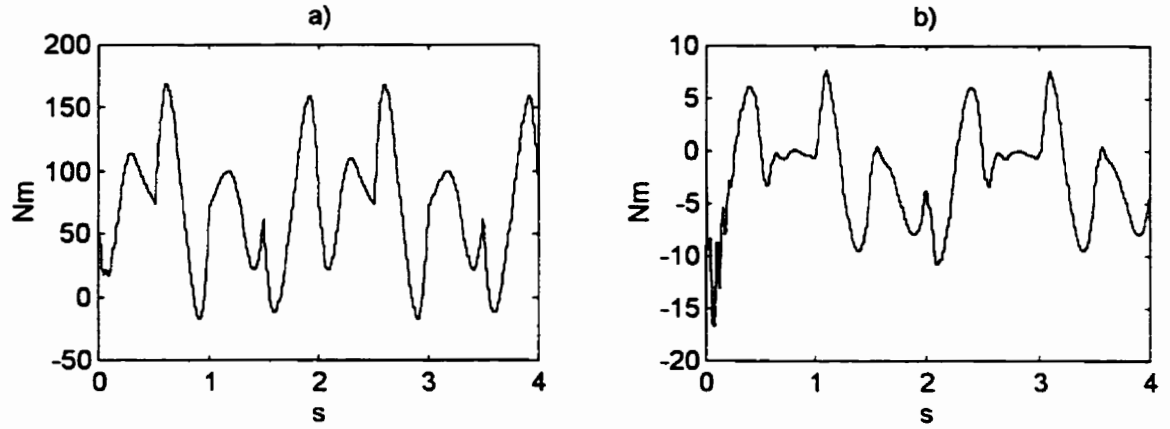


Figure C.6 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation quasi-statique (Figure 4.11).

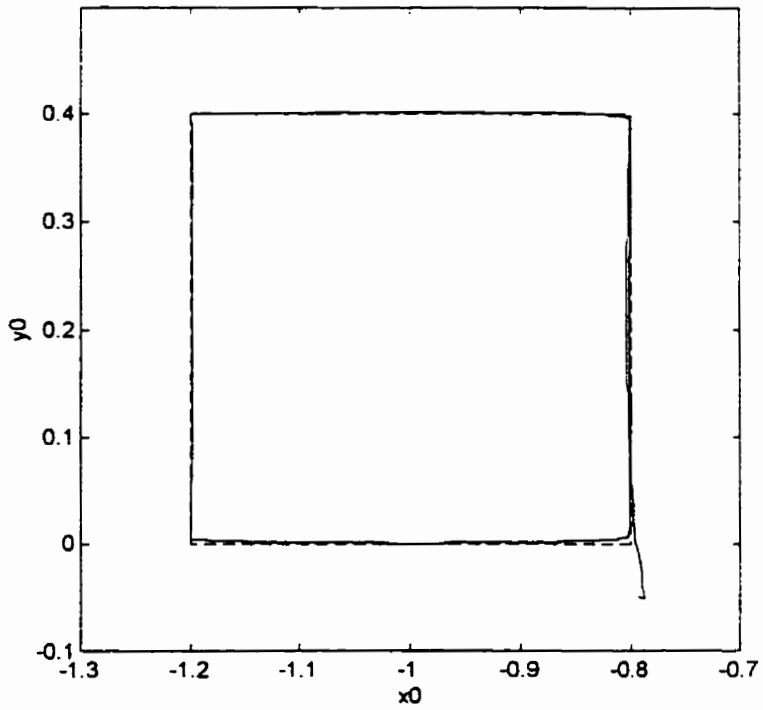


Figure C.7 Trajectoire désirée (- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.12).

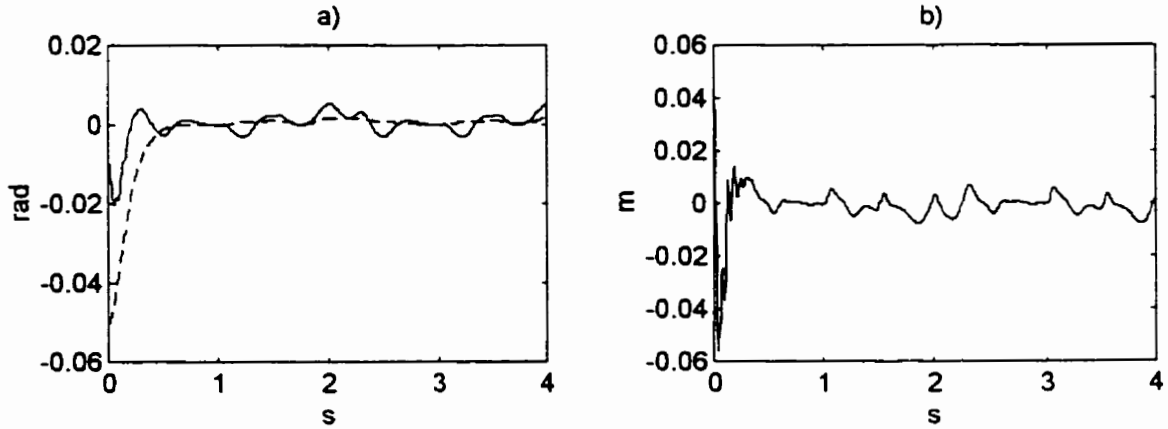


Figure C.8 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.13).

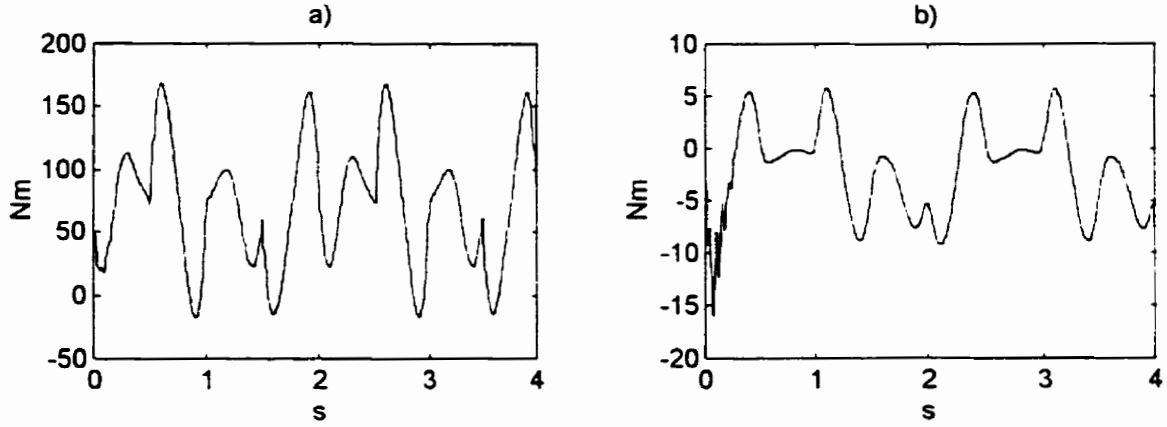


Figure C.9 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée de pair avec la transformation exacte (Figure 4.14).

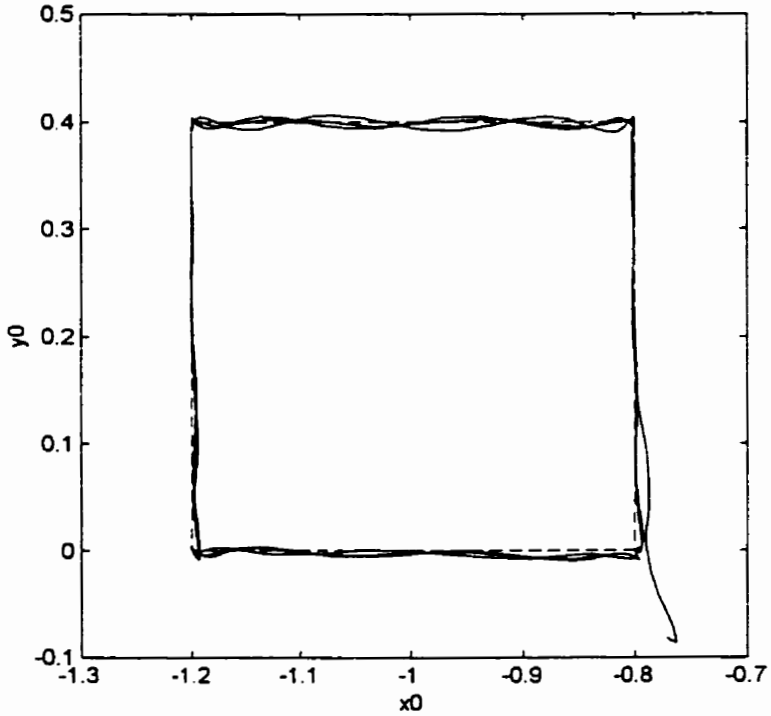


Figure C.10 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.1).

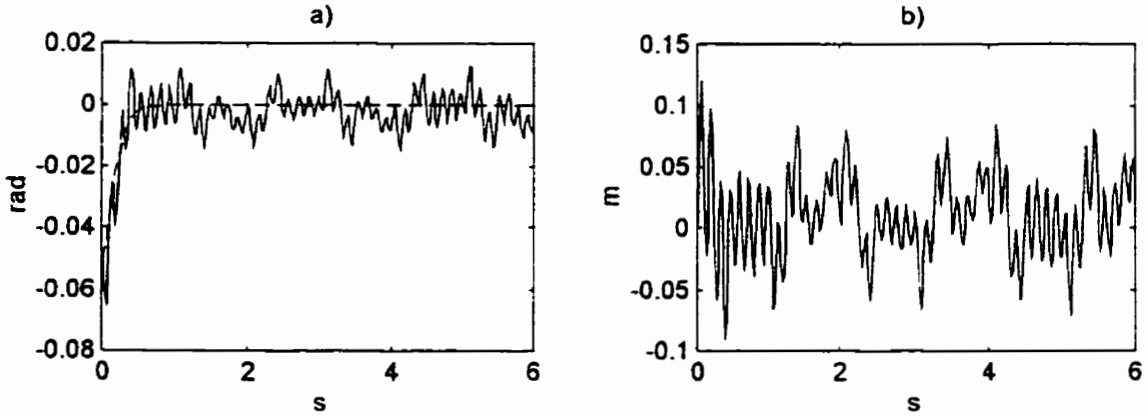


Figure C.11 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec $m_c = 0.25$ Kg (Figure 5.2).

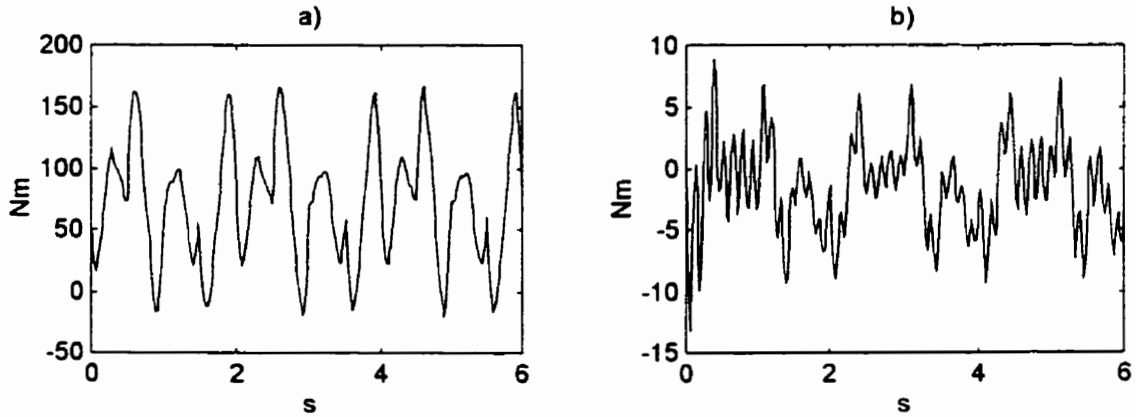


Figure C.12 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec $m_c = 0.25$ Kg (Figure 5.3).

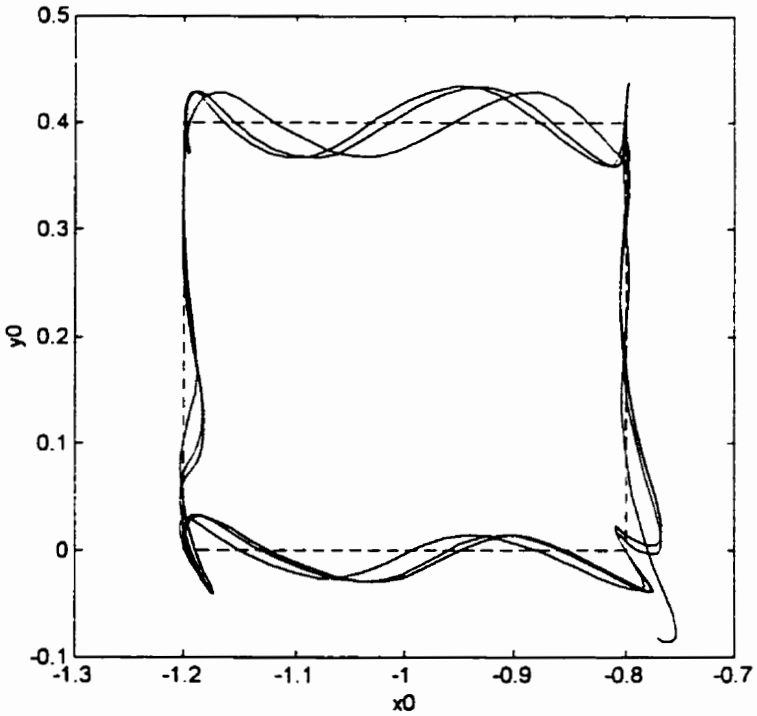


Figure C.13 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.4).

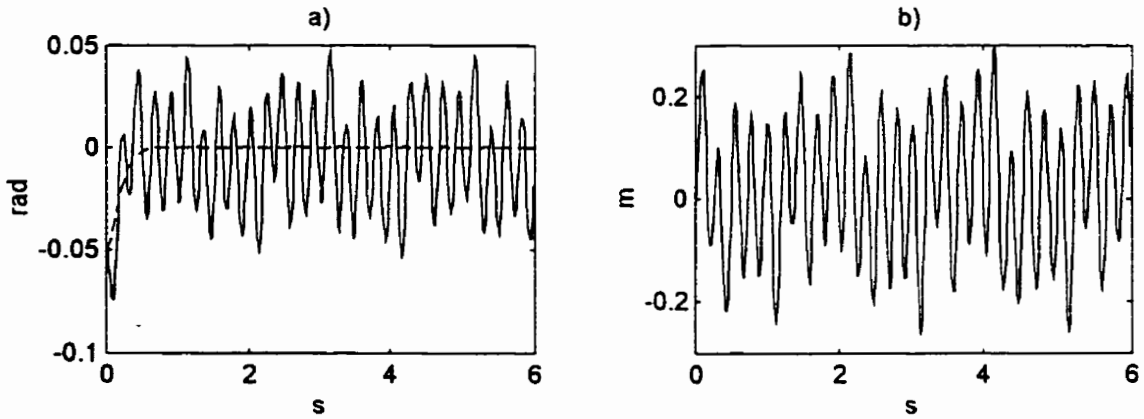


Figure C.14 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) déformation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.5).

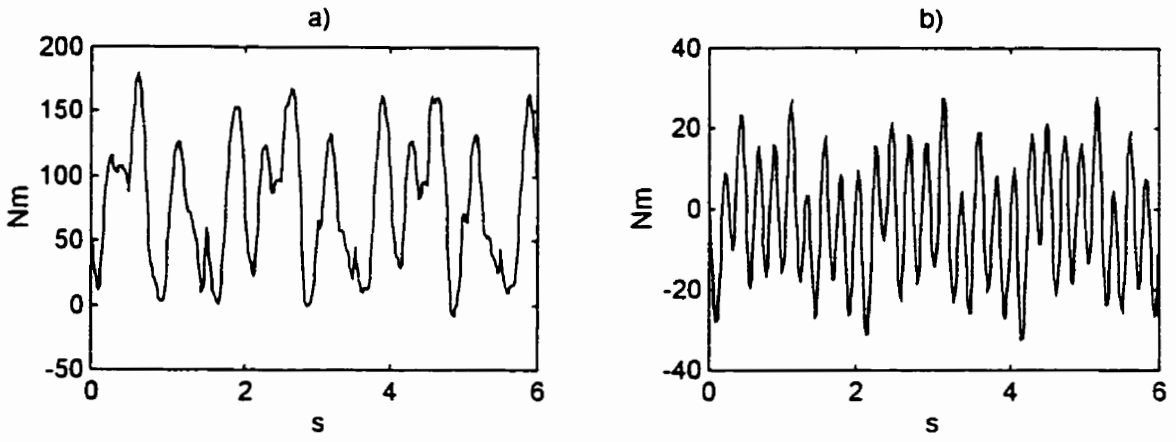


Figure C.15 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode de linéarisation par retour d'état robuste par rapport aux CGRVA avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.6).

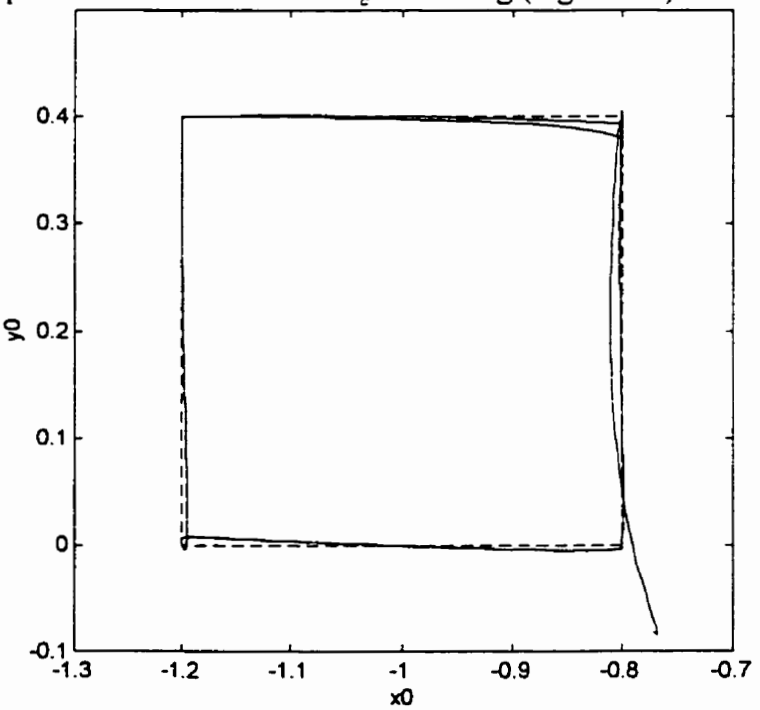


Figure C.16 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c=0.25Kg (Figure 5.7).

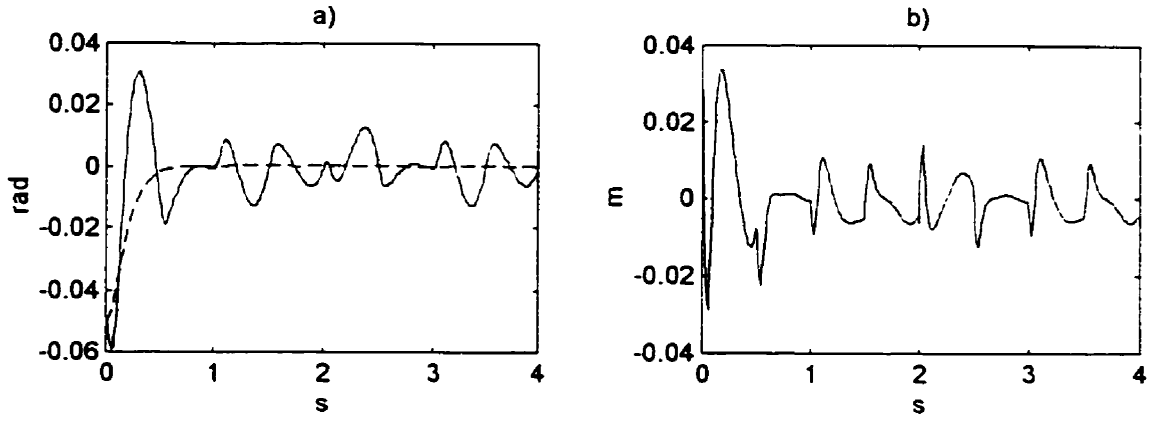


Figure C.17 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.8).

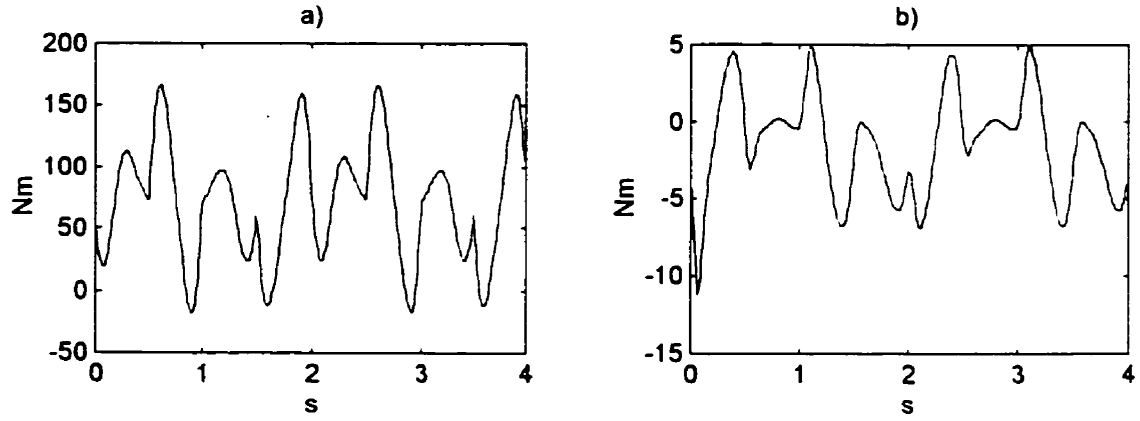


Figure C.18 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.9).

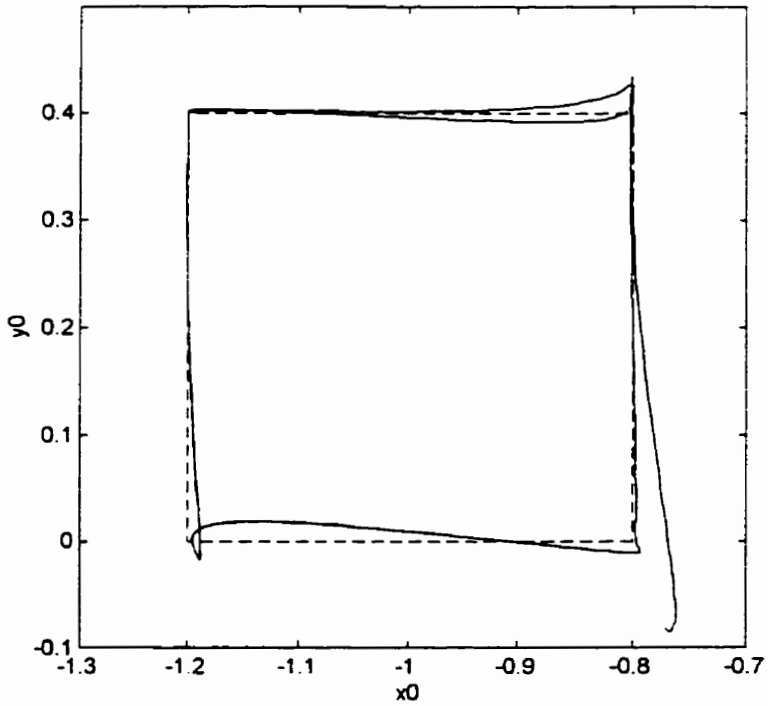


Figure C.19 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c=0.75Kg (Figure 5.10).

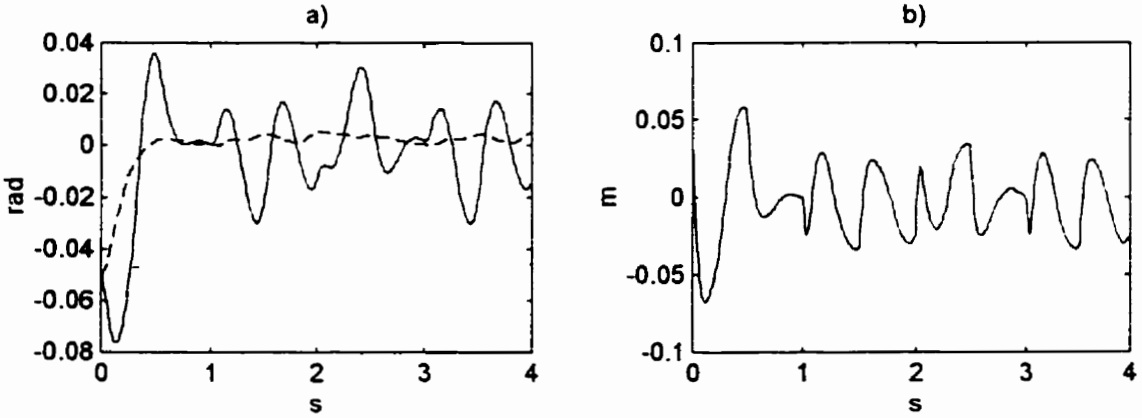


Figure C.20 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.11).

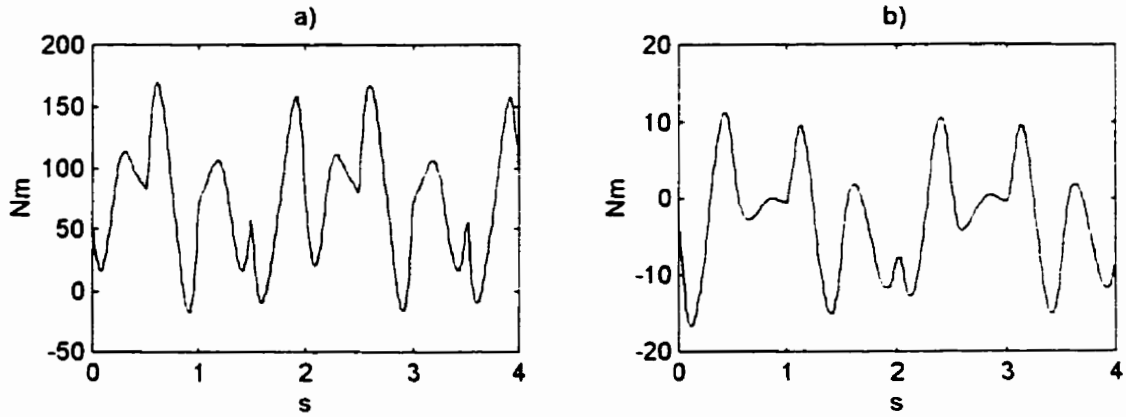


Figure C.21 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation quasi-statique avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.12).

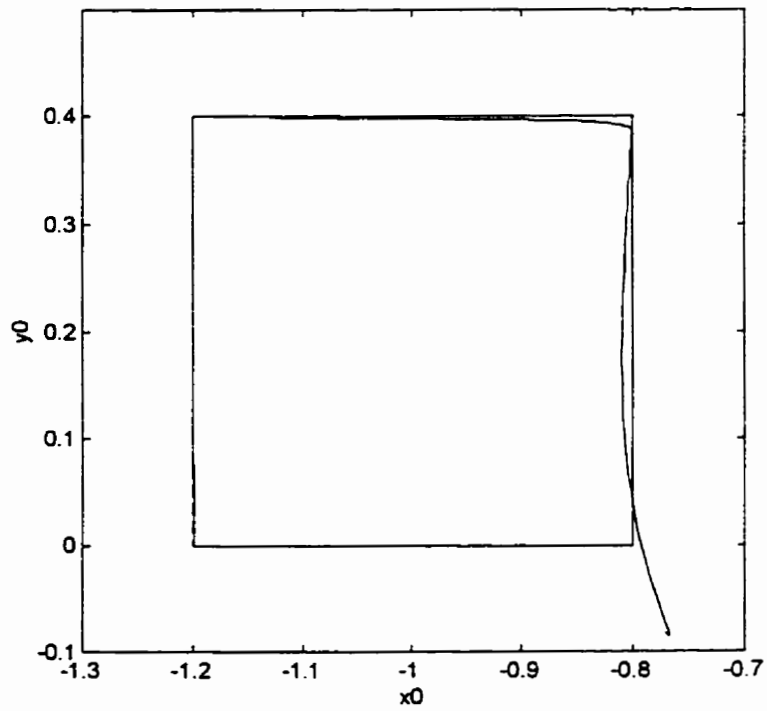


Figure C.22 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.25 Kg (Figure 5.13).

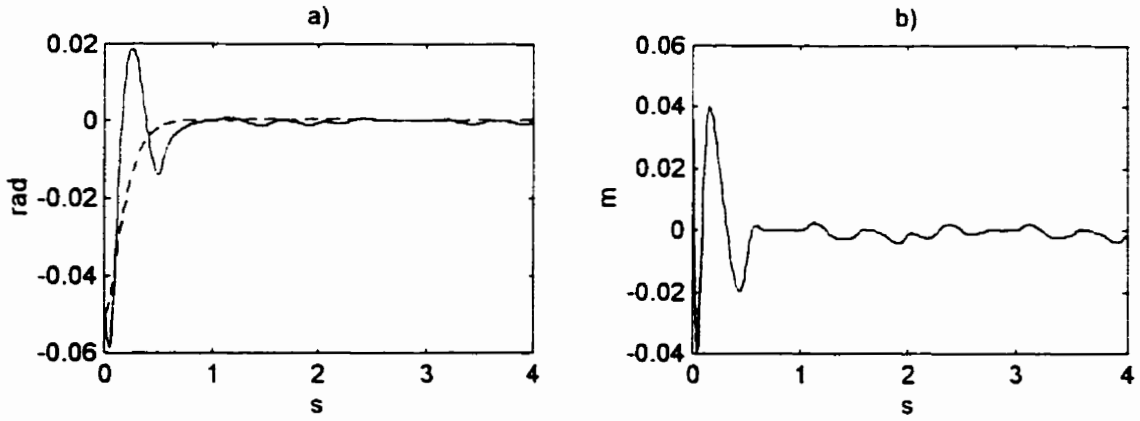


Figure C.23 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec $m_c = 0.25$ Kg (Figure 5.14).

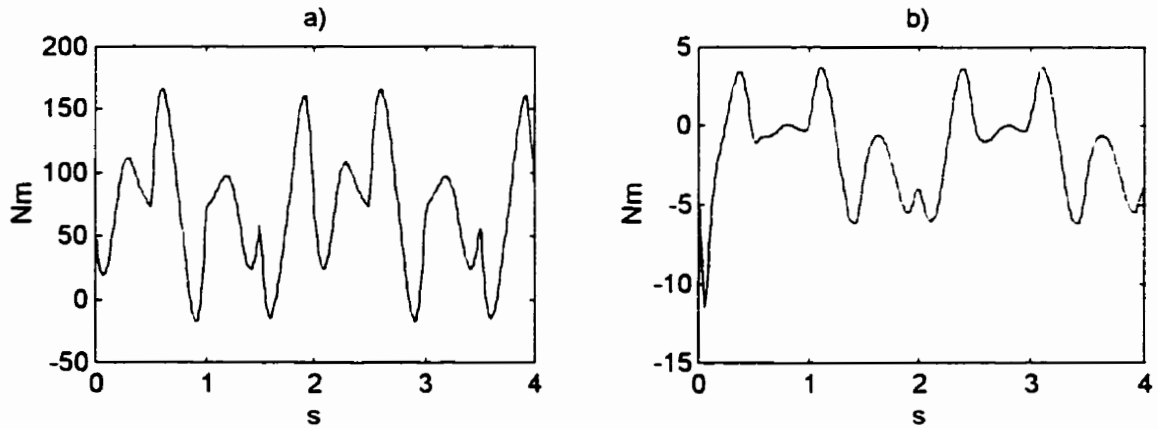


Figure C.24 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec $m_c = 0.25$ Kg (Figure 5.15).

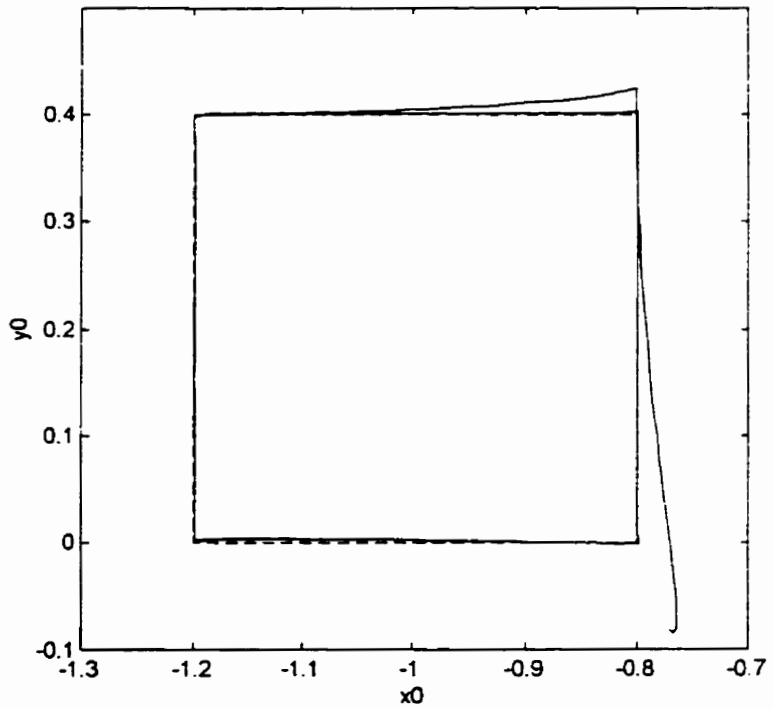


Figure C.25 Trajectoire désirée(- -) et obtenue (—) dans l'espace de travail avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.16).

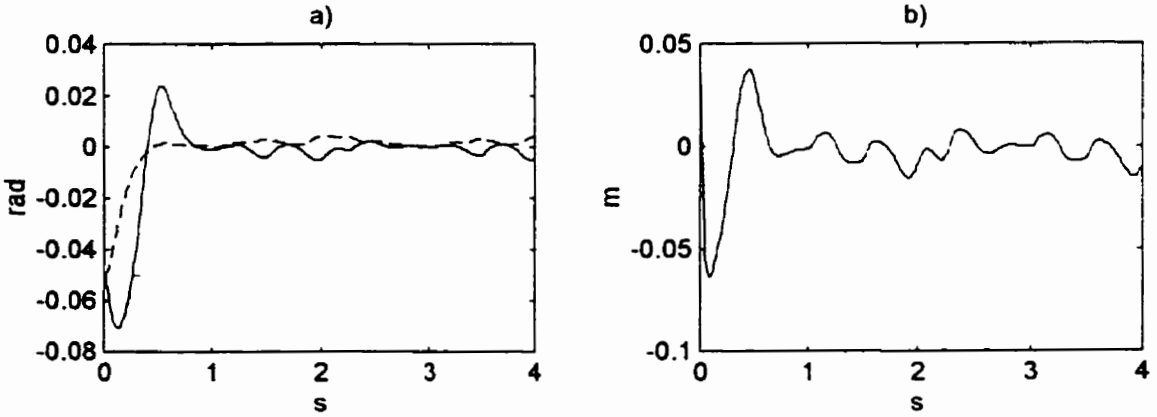


Figure C.26 a) Erreur de suivi des CGRV 1(- -) et 2(—) et b) erreur de suivi de déformation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.17).

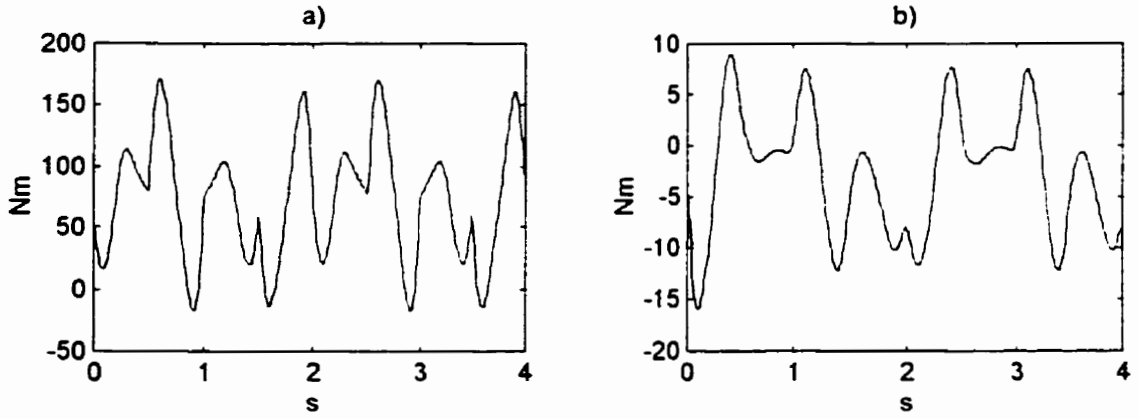
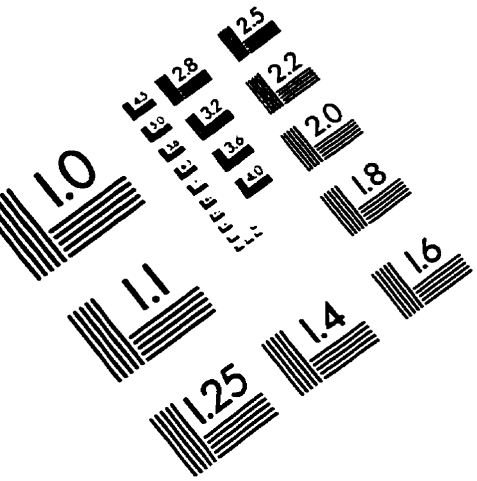
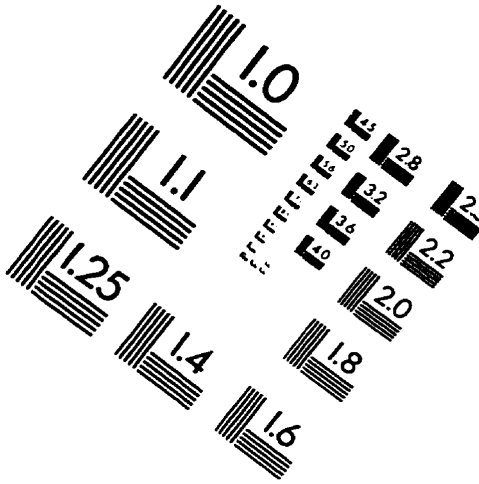
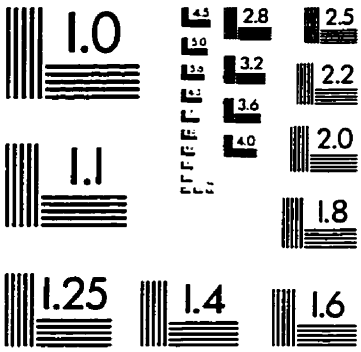


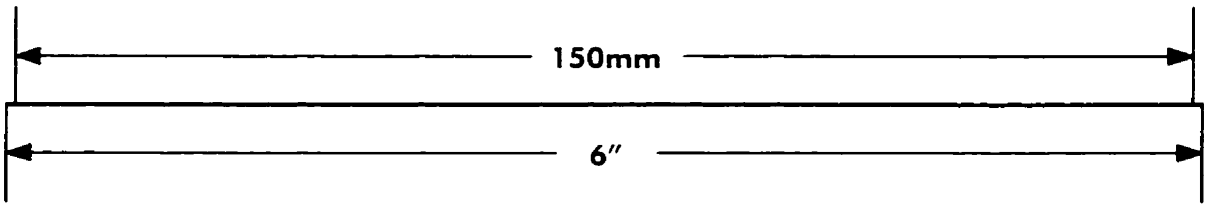
Figure C.27 a) Effort de commande de la première articulation et b) effort de commande de la seconde articulation obtenue avec la méthode proposée robuste de pair avec la transformation exacte avec m_c = 0.75 Kg (Figure 5.18).

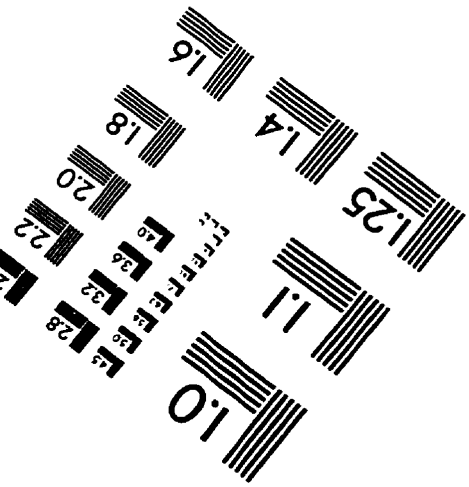
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

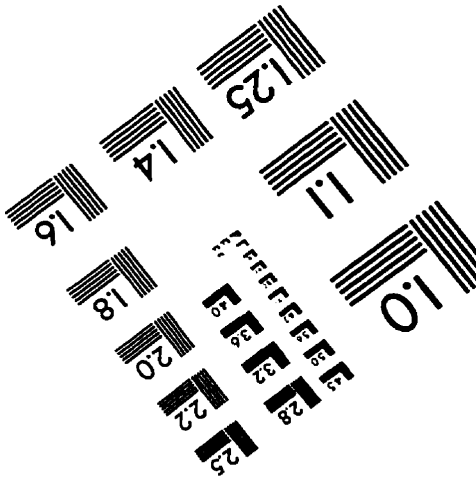












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved