

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps. Each original is also photographed in one exposure and is included in reduced form at the back of the book.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.



Bell & Howell Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UN MAILLEUR HYBRIDE STRUCTURÉ/NON STRUCTURÉ
EN TROIS DIMENSIONS

FRANÇOIS GUIBAULT
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 1998



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38719-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

UN MAILLEUR HYBRIDE STRUCTURÉ/NON STRUCTURÉ
EN TROIS DIMENSIONS

présentée par: GUIBAULT François

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., président

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

Mme VALLET Marie-Gabrielle, Ph.D., membre

M. FORTIN André, Ph.D., membre

*À mon épouse Isabelle, à mon fils Raphaël,
et à mes parents.*

Remerciements

Nous tenons à remercier très sincèrement nos codirecteurs, M. Ricardo Camarero et M. André Garon pour le support, les idées et les conseils qu'ils ont su nous prodiguer tout au long de l'élaboration de ce travail.

Nous voulons également exprimer notre reconnaissance à M. Paul Labbé pour son excellent esprit d'équipe et ses commentaires toujours pertinents ; ce travail s'inscrivant dans un projet d'équipe, n'aurait pu être mené à bien sans son aide précieuse. Nous remercions également les professionnels de recherche et les étudiants du CERCA pour leur support.

Un merci spécial va par ailleurs à M. Thi Cong Vu de chez GE Hydro. Non seulement nous a-t-il aidé durant toute la phase de validation du mailleur, mais il nous a de plus permis d'intégrer le mailleur dans un cycle d'analyse réel en industrie et nous a fait bénéficier de son expérience tant en ce qui concerne la génération de maillage que l'analyse de solutions.

Enfin nous tenons à remercier de tout coeur Mme Isabelle Naud pour sa patiente compréhension et son support indéfectible.

Résumé

Cette thèse présente une nouvelle méthode de génération de maillage adaptée aux contraintes imposées par la résolution des équations décrivant le comportement d'écoulements visqueux, particulièrement à l'intérieur de composantes hydrauliques.

L'approche présentée est basée sur la génération de maillages hybrides, c'est-à-dire composés de plusieurs zones, certaines structurées et d'autres non structurées. Elle se fonde sur une décomposition automatique du domaine de calcul en blocs dont la caractéristique principale est de faciliter la génération de couches structurées d'éléments très minces et étirés près des parois solides. Cette approche repose par ailleurs sur une description complète des frontières du domaine à mailler, qui comprend non seulement la position physique des frontières dans l'espace, mais également l'information de connexion des frontières les unes avec les autres.

Cette distinction intrinsèque dans la description des frontières entre la position physique ou la géométrie, et les connexions ou topologie, a permis de décomposer le processus de génération de maillage en trois types distincts d'opérations : géométriques, topologiques et de discrétisation. Ces opérations s'agencent en une suite d'algorithmes de transformation du modèle géométrique servant à partitionner le domaine en zones, suivis d'algorithmes de discrétisation des zones.

La séparation explicite des phases de zonage et de maillage du domaine permet à l'utilisateur d'exercer un meilleur contrôle sur l'ensemble du processus de génération de maillage.

Abstract

This thesis presents a novel mesh generation method well suited to the constraints imposed by the solution of the viscous flow governing equations, particularly within hydraulics components.

The presented approach is based on the generation of hybrid meshes, that is meshes that are composed of multiple zones, some discretized using a structured approach and others discretized using an unstructured approach. This mesh generation method is based on the automatic decomposition of the computational domain in blocs whose main characteristic is to help in producing thin layers of highly stretched elements near the solid walls. It relies on a complete description of the domain boundaries comprising not only the position of boundaries in physical space, but also the information concerning the connections among the boundaries.

This intrinsic distinction in the description of the boundaries between the physical position, or geometry, and their connections, or topology, has permitted the decomposition of the mesh generation process in three distinct types of operations : geometric, topologic and discretization operations. These operations are gathered in a suite of transformation algorithms that perform the domain partition in zones, followed by discretization algorithms of the zones.

The explicit separation in blocking and discretization phases ensures that the end-user can exert enhanced control over the complete mesh generation process.

Table des matières

Dédicace	iv
Remerciements	v
Résumé	vi
Abstract	viii
Table des matières	x
Liste des tableaux	xiii
Liste des figures	xiv
Liste des sigles et abréviations	xviii
Liste des notations	xix
Introduction	1
CHAPITRE 1 La génération de maillage	7
1.1 Les maillages structurés	7
1.2 Les maillages non structurés	9

1.3	Les maillages hybrides	10
1.3.1	La progression hyperbolique	13
1.3.2	La méthode d'avance de couches	16
1.3.3	Les maillages superposés	18
1.3.4	Génération en arbre	20
1.3.5	Le zonage automatique	22
CHAPITRE 2	Modélisation géométrique 3D	25
2.1	Représentation des modèles géométriques	26
2.1.1	Les entités géométriques	26
2.1.2	Les entités topologiques	30
2.2	Algorithmes géométriques	33
2.2.1	Évaluation	34
2.2.2	Optimisation	35
2.2.3	Intégration de la longueur	40
2.2.4	Recherche spatiale	44
2.2.5	Intersection	46
2.2.6	Transformations	55
2.2.7	Fusion d'entités topologiques	63
CHAPITRE 3	Génération de maillages hybrides	67
3.1	Zonage automatique	70
3.1.1	Structure de données	70
3.1.2	Algorithme général de zonage automatique	73
3.1.3	Zonage bidimensionnel	77
3.1.4	Retour sur l'algorithme en trois dimensions	85
3.2	Les opérations de discrétisation	88

CHAPITRE 4 Applications	90
4.1 Validation	91
4.1.1 Tube en U	92
4.1.2 Diffuseur conique	96
4.2 Applications industrielles	99
4.2.1 Aspirateur coudé sans obstacle – maillage hybride	101
4.2.2 Aspirateur coudé avec obstacle – maillage hybride	104
4.2.3 Contrôle du maillage dans un aspirateur coudé par zonage automatique	106
4.2.4 Contrôle du maillage par insertion de faces internes	112
4.2.5 Contrôle du maillage par enrichissement du patron minimal	113
4.2.6 Contrôle du maillage par croissance de peau	116
4.2.7 Solutions et discussion	116
Conclusion	120
Bibliographie	124

Liste des tableaux

Tableau 1.1	Comparaison des approches de génération de maillages hybrides	24
Tableau 2.1	Relation entre les entités géométriques et topologiques	31
Tableau 3.1	Nomenclature des classes de base des mues	72
Tableau 3.2	Notation utilisée pour désigner les entités topologiques . . .	73

Liste des figures

Figure 1.1	Schéma d'avance hyperbolique	14
Figure 1.2	Maillages structurés autour de chaque composante	19
Figure 1.3	Maillages structurés reconnectés par un maillage non structuré	20
Figure 1.4	Couche d'éléments structurés construite à l'aide d'une approche en arbre	21
Figure 2.1	Exemple de géométrie	31
Figure 2.2	Illustration des aspects topologiques de la géométrie	32
Figure 2.3	Relations entre les entités topologiques du modèle	32
Figure 2.4	Exemple de face contenant plusieurs boucles et de volume conte- nant plusieurs coquilles	33
Figure 2.5	Projection d'un point sur une courbe	36
Figure 2.6	Détermination du paramètre u pour une longueur d'arc L donnée	38
Figure 2.7	Détermination du paramètre pour une longueur de corde donnée	39
Figure 2.8	Détermination du paramètre pour une longueur de corde pro- jetée donnée	40
Figure 2.9	Calcul des césures d'une courbe dans l'espace physique	42
Figure 2.10	Calcul des césures d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface	43

Figure 2.11 Calcul des positions paramétriques de césure d'une section de courbe d'un carreau à l'autre dans l'espace paramétrique de la surface	45
Figure 2.12 Intersection d'un triangle de la surface S_1 avec quelques tri- angles de la surface S_2	51
Figure 2.13 Détection d'un point de contrôle superflu	54
Figure 2.14 Déplacement d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface	57
Figure 2.15 Calcul de la direction de déplacement dans l'espace paramé- trique de la surface	58
Figure 2.16 Déplacement d'une surface près d'un coin obtus	61
Figure 2.17 Extrapolation d'une surface déplacée	62
Figure 3.1 Volume initial d'un canal qui sera subdivisé par zonage auto- matique	75
Figure 3.2 Zonage avec trois faces et une arête déplacées	76
Figure 3.3 Zonage automatique de la face de sortie du canal	77
Figure 3.4 Déplacement d'un sommet dans une face	78
Figure 3.5 Déplacement de l'arête Γ_j	80
Figure 3.6 Quatre configurations pour le déplacement du sommet Σ_i . . .	82
Figure 3.7 Étapes de déplacement d'une face	86
Figure 3.8 Étapes d'intégration des bords à une face	87
Figure 4.1 Modèle géométrique et zonage du tube en U	93
Figure 4.2 Maillage hybride à l'intérieur du tube en U – maillage grossier	94
Figure 4.3 Comparaison du maillage obtenu pour deux zonages à l'intérieur du tube en U – maillage grossier	95
Figure 4.4 Vecteurs de vitesse sur le maillage hybride dans le tube en U .	95
Figure 4.5 Géométrie du diffuseur conique	96

Figure 4.6	Zonage dans le diffuseur conique	97
Figure 4.7	Maillage hybride à l'intérieur du diffuseur conique – maillage grossier	98
Figure 4.8	Maillage hybride à l'intérieur du diffuseur conique	98
Figure 4.9	Vecteurs de vitesse dans le diffuseur conique	99
Figure 4.10	Zonage avec peau sur les parois solides d'un diffuseur	101
Figure 4.11	Maillage de peau sur les parois solides d'un diffuseur, vue globale	102
Figure 4.12	Maillage de peau sur les parois solides d'un diffuseur, détail . .	102
Figure 4.13	Solution dans l'aspirateur sans obstacle, coupe du maillage hybride	103
Figure 4.14	Solution dans l'aspirateur sans obstacle, vecteurs vitesse . . .	103
Figure 4.15	Zonage dans le diffuseur avec obstacle	104
Figure 4.16	Maillage hybride dans le diffuseur avec obstacle	105
Figure 4.17	Vecteurs de vitesse dans l'aspirateur avec obstacle, maillage hybride grossier	106
Figure 4.18	Information géométrique de base sur l'aspirateur	107
Figure 4.19	Zonage minimal de l'aspirateur	109
Figure 4.20	Zonage minimal de l'aspirateur – Vue de plan	110
Figure 4.21	Intégration du zonage et de la discrétisation à l'entrée de l'as- pirateur	111
Figure 4.22	Zonage enrichi par insertion de faces	113
Figure 4.23	Vu d'élévation des maillages obtenus pour les zonages 4.19a et 4.22a	114
Figure 4.24	Zonage enrichi par insertion d'un patron autour de l'obstacle .	115
Figure 4.25	Vue de plan des maillages générés à l'aide des patrons de zo- nage 4.24a and 4.24b	115
Figure 4.26	Zonage enrichi par l'ajout de peau sur les parois solides	116

Figure 4.27 Solutions pour le patron en 'H'	118
Figure 4.28 Solutions pour le patron en 'C'	118
Figure 4.29 Solutions pour le patron en 'O'	119

Liste des sigles et abréviations

ADT	Alternate Digital Tree
B-Rep	Boundary Representation
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CFD	Computational Fluid Dynamics
NURBS	Non Uniform Rational B-Splines

Liste des notations

Caractères usuels

$\mathcal{B}$	ensemble des entités topologiques à déplacer
k	ordre des entités géométriques
n	nombre de points de contrôle des entités géométriques
$N_{i,k}$	fonction de base B-Splinaire
r	dimension de l'espace paramétrique des entités géométriques
$R_{i,k}$	fonction de base B-Splinaire rationnelle
s	dimension de l'espace physique des entités géométriques
t	paramètre d'une courbe
t_i	noeud du vecteur nodal selon une direction paramétrique t
u	premier paramètre d'une surface
u_i	noeud du vecteur nodal selon une direction paramétrique u
v	second paramètre d'une surface
v_j	noeud du vecteur nodal selon une direction paramétrique v

Caractères grecs

Γ	arête (entité topologique)
Ω	face (entité topologique)
Π	volume (entité topologique)
Σ	sommet (entité topologique)

Indices

i	du point de contrôle (direction paramétrique u)
j	du point de contrôle (direction paramétrique v)

Symboles

'	entité topologique déplacée
*	entité topologique complément

Introduction

À mesure que la puissance des ordinateurs augmente et que les techniques de modélisation et de résolution des systèmes physiques s'améliorent, à mesure, donc, que les problèmes simulés croissent en complexité et en précision, le rôle des maillages dans le processus de simulation tend à s'affiner et à gagner en importance. En effet, du rôle accessoire qu'il occupait il y a vingt ans, le domaine de la génération de maillage, tend aujourd'hui à acquérir une position centrale dans la plupart des systèmes de résolution numérique, et particulièrement en dynamique des fluides numérique («*Computational Fluid Dynamics*» ou CFD).

Autrefois considérée comme accessoire et de moindre importance tant au plan strictement scientifique qu'au plan de son impact réel sur le domaine de la simulation numérique, la génération de maillage tend désormais à concentrer une part croissante des efforts de recherche et de développement investis en simulation. À l'origine de ce revirement se trouvent des tendances lourdes qui influencent tout le domaine de la simulation. En effet, l'utilisation de la CFD, en se généralisant, a fait passer son statut de domaine de recherche académique à celui d'outil industriel de modélisation et d'analyse. Ce changement de statut s'est accompagné d'une redéfinition de plusieurs enjeux fondamentaux du domaine; alors que le milieu académique était principale-

ment préoccupé par les aspects de modélisation des phénomènes et de précision des schémas, l'industrie s'intéresse en premier lieu à l'efficacité du processus d'analyse dans son ensemble et à son applicabilité à des problèmes réels.

La mise en œuvre d'algorithmes de simulation performants sur des modèles géométriques complexes est ainsi devenue l'une des préoccupations majeures des numériciens, ce qui a généré de plus en plus de demande pour des algorithmes de discrétisation efficaces des modèles géométriques. Alors que les résolveurs permettent depuis plusieurs années de résoudre des problèmes comportant des dizaines, voire des centaines, de milliers d'inconnues, et donc de simuler des phénomènes industriels réalistes, ce n'est que tout récemment que le milieu de la CFD a commencé à réaliser l'importance de rendre disponible des outils de maillage robustes et faciles à utiliser.

Dans la très grande majorité des groupes de recherche en milieu industriel, la plus grande partie du temps d'ingénieur est toujours consacrée à la préparation et la discrétisation des domaines de calcul avant la simulation. Alors qu'il existe des dizaines de programmes permettant de résoudre, de visualiser et d'analyser les résultats de simulations, les outils de maillage sont à peu près inexistant sur le marché.

Parallèlement à cette poussée des industries vers la mise au point d'outils plus efficaces en terme de temps d'utilisation, s'est développé un axe de recherche s'intéressant à la précision des solutions numériques calculées, qui a eu, lui aussi, une forte influence sur le domaine de la génération de maillage – l'estimation d'erreur. Ces recherches sur l'estimation d'erreur ont démontré de façon rigoureuse ce que les praticiens du domaine savaient intuitivement depuis longtemps : les caractéristiques du maillage, telles la position des sommets, la taille ou l'élancement des éléments, influencent directement la précision des solutions obtenues. Il ne suffit donc pas de discrétiser le

domaine de calcul à l'aide d'un maillage quelconque, mais dans bien des cas il est même indispensable de placer ou de replacer correctement les sommets du maillage pour garantir un niveau de précision acceptable, sinon la convergence des calculs.

Ces questions de précision liées à la discrétisation prennent d'autant plus d'importance que les modèles utilisés pour représenter la physique des phénomènes gagnent en finesse. Par exemple, dans le domaine de l'aéronautique, le passage des modèles basés sur les équations d'Euler à des modèles basés sur les équations de Navier-Stokes a remis au premier plan de l'actualité toute une série de problèmes en génération de maillage qui paraissaient dans une large mesure réglés. Ce constat semble également s'appliquer aux développements actuels dans le domaine des modèles de turbulence : à mesure que les modèles de turbulence se développent et s'affinent, les contraintes qu'ils imposent sur les caractéristiques du maillage vont croissantes.

Les effets combinés de ces poussées vers l'automatisation des analyses et l'intégration de techniques avancées de discrétisation permettent d'identifier des niches intéressantes de recherche dans la conception d'outils performants de discrétisation pour des créneaux spécialisés de l'industrie. On peut penser, par exemple, aux fabricants de composantes hydrauliques, qui, dans un processus d'optimisation du design d'une seule composante, doivent effectuer des dizaines, voire des centaines d'analyses de cette composante avant d'arrêter leur choix sur un design final. Ce type d'usager des méthodes numériques reste constamment à l'affût de méthodes plus efficaces, plus précises ou plus facilement automatisables à tous les niveaux du processus de simulation. Ceci est particulièrement vrai en ce qui a trait au transfert des modèles géométriques des systèmes CAO vers les résolveurs et à leur discrétisation.

Ces constats nous ont naturellement amené à identifier le sujet de recherche sur lequel

nous nous pencherons spécifiquement dans le reste de cet ouvrage, soit la génération de maillage pour les fins de simulation d'écoulements visqueux internes. Une revue de la littérature pertinente, présentée au § 1, nous a en effet permis de conclure qu'un apport significatif pouvait être proposé dans ce domaine, pour le cas des composantes internes. Ce type de composantes présente des caractéristiques distinctives, surtout sur le plan géométrique, qui rendent les méthodes déjà publiées soit difficilement applicables, soit carrément inutilisables.

L'objectif principal de ce travail est donc la conception d'un outil qui permette la construction a priori d'une discrétisation initiale d'un domaine de calcul présentant des caractéristiques de concentration et de positionnement des sommets d'une qualité suffisante pour permettre un premier calcul. L'idée n'est évidemment pas de produire un maillage optimal, mais plutôt un maillage de qualité suffisante pour initialiser le processus d'optimisation. Les caractéristiques principales de la méthode de génération de maillage doivent donc être les suivantes :

- être applicable à des géométries complexes de type industriel,
- permettre la construction de zones d'éléments très étirés près des parois,
- être facilement automatisable.

Nous proposons donc une nouvelle approche pour la génération de maillages pour les écoulements visqueux qui repose en grande partie sur des techniques de modélisation géométrique et de zonage automatique. Les aspects de modélisation et de traitement géométrique constituent en fait une part suffisamment importante de la méthode pour faire l'objet d'une présentation séparée, au § 2.

En se basant sur ces fondations géométriques, nous présentons, au § 3, la méthode de zonage automatique qui constitue le cœur de notre approche de discrétisation. Cette

approche vise à produire de la manière la plus automatique possible des maillages initiaux satisfaisant les contraintes qu'impose le calcul d'un écoulement visqueux à haut nombre de Reynolds. Les principaux avantages de cette méthode par rapport aux méthodes déjà publiées sont : d'abord le fait qu'elle soit explicitement conçue pour traiter aussi bien le cas de écoulements internes que celui des écoulements externes ; ensuite, qu'elle soit applicable aussi bien pour la génération de maillages initiaux multiblocs structurés, que de maillages hybrides ou que de maillages non structurés ; et finalement, qu'elle fournisse un cadre de développement d'outils génériques de maillage et de zonage qui peuvent ensuite être réutilisés dans des contextes d'application spécialisés.

L'application de la technique de génération de maillage à une série de cas réels est présentée au § 4 et les avantages de notre approche y sont illustrés. Enfin, ce chapitre se conclut par une démonstration de l'utilisation des algorithmes de zonage automatique dans le contexte spécifique de la génération de maillage à l'intérieur d'une composante hydraulique industrielle — le diffuseur coudé.

Les principales contributions de cette thèse se situent d'une part dans la proposition d'une méthode originale de génération de maillage hybride, et d'autre part dans une mise en œuvre complète de la méthode et son application à des cas complexes, d'intérêt pour l'industrie. L'approche proposée pour la génération des zones d'éléments étirés près des parois utilise en effet une suite d'algorithmes opérant au niveau géométrique et topologique sur le domaine à discrétiser, qui n'a pas d'équivalent publié dans la littérature actuelle (§ 1). Toutes les méthodes de génération de maillage hybride documentées consistent en effet à modifier une approche connue de génération de maillage et non à opérer directement sur le modèle géométrique du domaine à mailler.

Par ailleurs, au delà de la conception de la méthode, son implémentation sous forme d'un mailleur utilisable dans un contexte industriel a nécessité le développement de toute une suite d'algorithmes originaux de traitement géométrique et topologique. Ces algorithmes, documentés au § 2, constituent en soi une contribution tant au domaine de la génération de maillage qu'à celui de la modélisation géométrique pour la simulation numérique.

Chapitre 1

La génération de maillage

Fondamentalement, on distingue trois approches à la génération de maillage : la génération de maillages structurés, de maillages non structurés, et de maillages hybrides (structurés et non structurés). Ce chapitre présente une revue des concepts sous-jacents à chaque type de maillage, et s'intéresse plus spécifiquement aux principales approches de génération de maillages hybrides publiées. Bien que la majorité de ces approches aient été développées dans le contexte d'applications à des écoulements externes, certaines d'entre elles fournissent des éléments de solution au problème de la génération de maillage pour la simulation d'écoulements visqueux qui pourraient être adaptés aux configurations internes.

1.1 Les maillages structurés

Un maillage structuré se distingue par un arrangement des éléments de maillage en un ou plusieurs blocs (ou groupes) selon un certain nombre de directions logiques.

Par exemple, en trois dimensions, un maillage complètement structuré est composé de blocs d'éléments hexaédriques disposés côte à côte selon trois directions logiques. Les frontières géométriques sont définies par les limites externes des blocs et peuvent être ainsi transformées en une grille de calcul cubique dans le résolveur. Les principaux avantages des maillages structurés tiennent à l'efficacité du stockage des données et à la précision accrue fournie par les éléments très étirés. Les données conservées sur un maillage structuré peuvent en effet être disposées en mémoire de façon à profiter de la structure implicite fournie par le maillage, et ne nécessitent donc pas l'utilisation d'un système explicite d'indexage comme pour les maillages non structurés. Par ailleurs, un maillage structuré fournit une précision accrue, pour un nombre de sommets et d'éléments donné, en permettant l'utilisation d'éléments ayant un très grand élanement. Des éléments très étirés permettent de bien capturer certains phénomènes anisotropes, comme, par exemple, les couches limites près des parois solides.

Il existe plusieurs algorithmes de génération de maillages structurés, qui sont maintenant bien connus et documentés (Thompson et al. (1985); Jones (1988); Thompson et Weatherill (1993)). Tous ces algorithmes sont caractérisés par un modèle de transformation d'un espace physique en un espace logique à l'aide d'une relation soit connue, soit issue d'une équation aux dérivées partielles. Les trois principales méthodes de génération de maillages structurés étant :

- la méthode algébrique,
- la méthode elliptique,
- la méthode hyperbolique.

En général, il est impossible de générer un bon maillage autour ou à l'intérieur d'une composante industrielle typique sans utiliser quelques dizaines, voire quelques centaines de blocs. Le principal problème inhérent à l'utilisation de maillages structurés

tient donc à la tâche colossale que représente la définition des blocs nécessaires à l'initialisation du processus de maillage.

Certains outils interactifs relativement généraux font leur apparition sur le marché pour la génération de tels maillages (GridPro, ICEM-CFD, GUM-B, etc.), il reste que leur utilisation demande temps et expérience, et que des modifications au modèle géométrique, même relativement simples, entraînent souvent un travail considérable de reconnexion et de redéfinition des blocs.

1.2 Les maillages non structurés

La seconde approche à la génération de maillage est l'approche non structurée. Celle-ci vise à remplir l'espace à mailler en plaçant les éléments sans tenter de maintenir de relation d'ordre entre les voisins; un maillage non structuré ne peut donc pas être transformé en une grille de calcul régulière (structurée) au niveau du résolveur. Dans la majorité des cas, les algorithmes de génération de maillages non structurés construisent des éléments basés sur des formes géométriques de type simplex (par exemple des tétraèdres en trois dimensions), mais il existe également quelques algorithmes de génération de maillages non structurés utilisant des quadrilatères (Blacker et Stephenson (1991)) ou des hexaèdres (Biswas (1996)).

Les techniques de génération de maillages non structurés se regroupent en deux principales classes d'algorithmes, la méthode de Delaunay (George (1992)) et la méthode de l'avance frontale (Peraire et al. (1987)). La première, qui repose sur un fondement mathématique très rigoureux, semble maintenant l'emporter en fiabilité et en performance sur la seconde, basée elle, sur une approche heuristique. Ces deux méthodes

sont certainement de loin les plus populaires, mais la recherche demeure très active dans ce domaine, et les méthodes de génération de maillages non structurés combinant différents aspects des méthodes de Delaunay et de l'avance frontale sont pléthore (Coupez (1991); Pirzadeh (1993)).

Contrairement aux méthodes de génération de maillages structurés, l'approche non structurée permet d'automatiser facilement le traitement de géométries même très complexes, et les maillages ainsi générés se prêtent bien au remaillage local ou à l'adaptation de maillage. Par contre, la résolution des équations de Navier-Stokes reste difficile sur ce type de maillage, en particulier à cause des élancements extrêmement élevés nécessaires dans les éléments près des parois, et de façon générale dans les régions où l'écoulement est fortement cisailé. La précision des résultats dépend en effet, dans une large mesure, du contrôle des angles maximum à l'intérieur des éléments (voir Babuska (1976)) et du rapport de taille entre éléments adjacents; deux critères de qualité du maillage qui sont plus difficiles à contrôler dans le cas de maillages non structurés.

1.3 Les maillages hybrides

À la lumière de ces recherches, il appert qu'une voie mitoyenne permettant de tirer avantage des forces respectives de chaque type de maillage (structuré et non structuré) permettrait peut-être de satisfaire plus rapidement les exigences de qualité issues de la résolution des équations de Navier-Stokes pour des applications industrielles. Cette approche hybride, qui tente de combiner des zones maillées de façon structurées et d'autres maillées de façon non structurée commence à susciter un certain intérêt dans

le milieu de la recherche sur la génération de maillage (Banks (1996); Kallinderis et al. (1995); Soetrismo et al. (1996)).

Nous présentons ici une revue des travaux les plus récents dans le domaine de la génération de maillages hybrides, et plus généralement des travaux dans le domaine de la génération de maillage pour la résolution de problèmes d'écoulements visqueux. Un certain nombre de travaux tente en effet de modifier directement les méthodes classiques de génération de maillages non structurés afin de les adapter aux besoins spécifiques des écoulements visqueux. Bien que ces approches produisent en général des maillages complètement non structurés, la majorité de ces travaux emprunte plusieurs idées aux approches hybrides.

Notre attention se portera particulièrement sur les méthodes suffisamment développées pour être applicables à des configurations tridimensionnelles complexes. En plus de la possibilité d'appliquer ces méthodes à des cas réels, deux critères principaux ont été utilisés dans la classification des méthodes présentées :

- le type d'algorithme utilisé pour générer les portions structurées du maillage,
- le potentiel de la méthode à traiter des problèmes d'écoulements internes et des problèmes couplés entre des milieux aux propriétés physiques distinctes.

L'algorithme de génération des couches structurées de maillage a en effet un impact considérable sur les propriétés du maillage obtenu. Un aspect particulièrement critique de ces algorithmes est la technique mise en œuvre afin de résoudre les conflits potentiels entre différentes zones structurées. Par ailleurs, aux vues des applications envisagées pour notre mailleur, soit les écoulements visqueux dans des composantes hydrauliques, et les problèmes couplés d'écoulements et de transfert de chaleur, la

capacité d'une méthode à produire des maillages dont les caractéristiques sont bien adaptées à la résolution de ce type de problème constitue un facteur discriminant très important.

Plusieurs années de recherches dans le domaine de la résolution des équations de Navier-Stokes ont en effet démontré de façon non équivoque l'importance d'utiliser une discrétisation du domaine capable de capturer les caractéristiques fondamentales des écoulements visqueux fortement convectifs. Ces écoulements, qu'ils soient laminaires ou turbulents, présentent entre autre des couches limites très minces près des parois solides, et des régions où l'écoulement est fortement cisailé, par exemple dans le sillage des corps (Batchelor (1973); Lakshminarayana (1996)). Ainsi, construire une discrétisation capable de bien capturer ces phénomènes implique de placer un nombre suffisant de sommets pour décrire correctement les forts gradients présents dans ces régions. D'autre part, comme il s'agit de phénomènes très directionnels, une économie considérable en terme de nombre d'inconnues peut-être réalisée en utilisant des éléments très étirés, alignés avec les caractéristiques de l'écoulement. Puisque la position des parois et des corps solides est connue pour un problème donné, il est possible, dans une certaine mesure de construire a priori des maillages présentant des caractéristiques adéquate pour une résolution des équations.

Plusieurs méthodes de génération de maillage ont été proposées qui tentent de satisfaire ces contraintes de concentration et d'étirement. Alors que certaines d'entre-elles produisent des prismes, d'autres produisent directement des tétraèdres, mais toutes essaient de construire, près des parois, des couches d'éléments étirés, très concentrés dans la direction perpendiculaire à la paroi. De façon générale, les couches d'éléments près des parois possèdent ainsi une structure au moins dans la direction perpendiculaire à la paroi, quelque soit l'algorithme utilisé pour produire cette couche. Dans ce

contexte, les approches de génération de maillage peuvent être classées en fonction de la méthode spécifique utilisée pour produire ces couches d'éléments étirés.

Par contre, le type d'algorithme utilisé pour la génération du maillage non structuré, à l'extérieur des blocs semi structurés, nous paraît un aspect moins critique de chaque méthode. Dans la mesure où, si cet algorithme est implémenté correctement, l'on peut supposer que l'influence du maillage généré dans le cœur de l'écoulement n'aura qu'une influence marginale sur la solution calculée. De plus, à court terme, des outils d'optimisation de maillage doivent être intégrés au processus de génération, qui permettront de contrôler directement les caractéristiques du maillage dans les régions non structurées.

1.3.1 La progression hyperbolique

La méthode de génération de maillages hybrides la plus étudiée et la plus utilisée est certainement la combinaison d'une méthode de progression hyperbolique pour la génération des couches structurées et d'une méthode de Delaunay ou d'avance frontale pour les régions non structurées. Plusieurs variantes de cette méthode sont utilisées dans des applications tridimensionnelles industrielles, décrites entre autre dans Kallinderis et al. (1995); Marcum (1995); Banks (1996); Soetrismo et al. (1996) et Chappel et al. (1996).

La méthode d'avance hyperbolique, initialement présentée par Cordova (1991), consiste à placer les sommets du maillage en fonction du volume V des éléments désirés, et des angles internes θ des éléments. Soit un front initial à déplacer Φ_0 , issu par exemple d'un maillage de surface, l'avance hyperbolique du front débute par la cons-

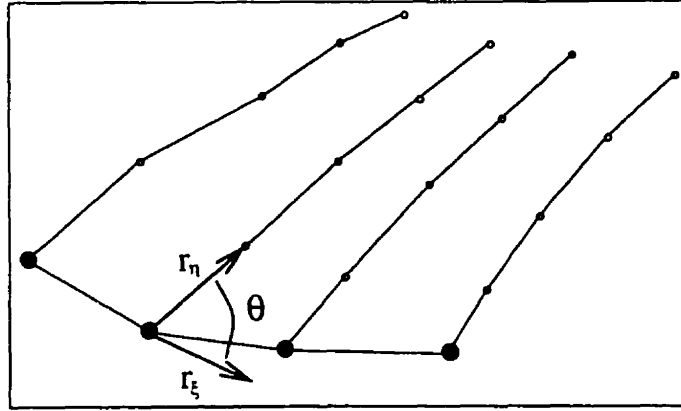


FIG. 1.1: Schéma d'avance hyperbolique

truction d'un vecteur de déplacement r_η à partir du vecteur tangent à la surface r_ξ (voir la figure 1.1) tel que :

$$\frac{r_\xi \cdot r_\eta}{|r_\xi| |r_\eta|} = \cos \theta \quad (1.1)$$

et

$$|r_\xi \times r_\eta| = \Delta V. \quad (1.2)$$

Ces conditions produisent un schéma d'avance hyperbolique du front initial :

$$r_{\eta+\delta\eta} = r_\eta + ds(\eta)Q(\theta)r_\xi \quad (1.3)$$

où $ds(\eta)$ est l'espacement désiré entre les couches d'éléments et $Q(\theta)$ est la matrice de rotation d'un angle θ .

Chaque point est ainsi déplacé de r_η pour former un nouveau front Φ_1 , puis un second front Φ_2 , etc. Cette propagation purement hyperbolique du front doit cependant être lissée pour éviter que des chocs ne se produisent durant la propagation. Cordova

propose un opérateur elliptique de lissage

$$\alpha r_{\xi\xi} - 2\beta r_{\xi\eta} + \gamma r_{\eta\eta} = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = r_{\eta} \cdot r_{\eta}, \quad \beta = r_{\xi} \cdot r_{\eta}, \quad \gamma = r_{\xi} \cdot r_{\xi} \quad (1.4)$$

qui, introduit à l'intérieur d'un algorithme prédicteur-correcteur et appliqué sur une couche (Φ_0, Φ_1, Φ_2) , permet de calculer une nouvelle position au front Φ_1 en quelques cycles de correction.

Plusieurs variantes et améliorations de cet algorithme ont été proposées (Chan et Steger (1992); Kim (1994)) et plusieurs travaux en génération de maillage s'inspirent directement ou indirectement de ceux-ci (Sethian (1994)).

La difficulté principale de cette approche réside dans la résolution des conflits se produisant lors de collisions entre des fronts issus d'objets distincts maillés simultanément. Par exemple, dans le cas d'un maillage autour d'une section d'aile d'avion comportant plusieurs éléments, l'application de cet algorithme pour le calcul de la croissance de couches structurées autour de chaque élément fonctionne bien dans la mesure où les couches n'entrent pas en conflit les unes avec les autres. La majorité des auteurs ignorent le problème et présentent des résultats pour des configurations ne présentant pas de conflit, comme c'est souvent le cas pour les configurations externes.

Kallinderis et al. (1995) présentent une approche systématique de détection des conflits et de repositionnement local des sommets sur les normales pour éliminer les collisions de fronts lorsqu'elles se produisent. Il reste que ce traitement des conflits consiste à diminuer l'épaisseur des couches structurées dans les régions posant problème ; cette approche, en définitive, ne donne pas nécessairement le maillage demandé par l'utilisateur, et ne permet pas non plus de traiter, par exemple, les cas de contact

entre parois distinctes.

Ainsi, la méthode de croissance hyperbolique se prête bien à la génération de maillages dans le cas de configurations d'écoulements externes, particulièrement lorsque la distance séparant les différents éléments géométriques sur lesquels doivent croître les peaux structurées est suffisante pour éviter les conflits entre les fronts. Par contre, cette approche ne propose pas de solution systématique au problème inévitable que représente l'interférence entre deux couches d'éléments structurés. L'approche par croissance hyperbolique se prête ainsi très bien aux cas de corps isolés, comme une aile constituée d'un profil simple, mais nécessite un traitement ad hoc pour des configurations plus complexes, comme celle d'une aile comportant plusieurs composantes.

De plus, la génération de la couche d'éléments structurés est liée au mécanisme de génération du maillage lui-même ; en fait, cette méthodologie de maillage néglige complètement la règle tactique fondamentale de "diviser pour mieux conquérir", que l'approche multibloc structurée avait pourtant fort bien assimilée. La grande force des méthodes structurées tient en effet au contrôle très fin que procure une génération par "zone" du maillage, qui permet de moduler les paramètres de génération de maillage, et même les algorithmes, aux besoins spécifiques de chaque région du domaine de calcul. La grande faiblesse de ces mêmes méthodes, est de forcer l'utilisateur à construire, souvent à la main, des blocs qui couvrent tout le domaine de calcul.

1.3.2 La méthode d'avance de couches

La méthode d'avance de couches (*advancing layers method*) décrite par Pirzadeh (1996) s'apparente à la méthode d'avance hyperbolique décrite à la section précédente

dans son approche. Elle utilise en effet comme point de départ une triangulation des surfaces et calcule le vecteur normal aux surfaces en chaque point de la triangulation pour construire les couches d'éléments près des parois. Par contre, le processus de croissance des éléments étirés diffère sensiblement de l'approche hyperbolique, dans la mesure où cet algorithme est implémenté comme une variante de l'approche d'avance de front.

La méthode d'avance de couches génère directement des tétraèdres étirés, et il ne s'agit donc pas d'un processus de maillage hybride à strictement parler ; son objectif reste cependant le même que celui des techniques hybrides, soit la génération de couches d'éléments très étirés près des parois et dans les régions de sillage.

Les principales différences entre la méthode d'avance de couches et la méthode classique d'avance frontale résident d'une part dans la façon de choisir la position des sommets candidats pour former les nouveaux tétraèdres, et d'autre part dans la façon de choisir les faces du front. Dans les régions proches des parois, les sommets sont placés sur des vecteurs normaux à la surface, qui sont précalculés et gardés constants pour toute la zone dans laquelle les éléments étirés doivent être construits. Les sommets sont placés le long des vecteurs normaux à l'aide d'une fonction d'étirement spécifique pour la zone près des parois. Par ailleurs, toutes les faces d'un niveau du front sont traitées avant de passer au niveau suivant, d'où l'idée d'avance de couches. Cette avance se poursuit tant que la fonction d'étirement pour la couche ne correspond pas, localement, à la fonction de densité fournie sur un maillage de fond pour l'ensemble du domaine.

Parallèlement au travaux de Pirzadeh, Connell et Braaten (1994) ont développé une approche de croissance de couches d'éléments étirés qui combine les idées de l'avance

hyperbolique et de l'avance de couches pour produire des éléments prismatiques sur les parois solides, et les subdiviser en tétraèdres par la suite. Dans cette méthode, les conflits entre les couches adjacentes dans les coins concaves sont traités par une technique de détection des collisions qui utilise l'algorithme d'intersection des éléments provenant de la méthode d'avance de front. Comme dans le cas de Pirzadeh, le reste du domaine est maillé à l'aide de la méthode d'avance de front en utilisant comme front initial la dernière couche de triangles provenant de la croissance des prismes.

La méthode d'avance de couches a été utilisée avec succès principalement dans le contexte d'applications à des écoulements externes. Il n'en demeure pas moins, comme l'explique Connell en conclusion, que le traitement des collisions d'éléments dans la couche durant le processus de croissance reste un processus coûteux et complexe.

Tout comme l'approche basée sur l'avance hyperbolique, la méthode d'avance des couches intègre directement dans un processus unique de génération de maillage la construction des couches d'éléments étirés et la génération du maillage dans le cœur du domaine. Dans ce sens, la région près des parois est définie implicitement par le processus de maillage lui-même, ce qui peut rendre le contrôle de ses caractéristiques moins direct.

1.3.3 Les maillages superposés

Une autre approche pour la génération de maillages hybrides, issue encore une fois du domaine des écoulements externes, consiste à générer un maillage structuré, souvent cartésien, sur tout le domaine de calcul, puis à générer des maillages explicitement superposés au premier, autour de chaque composante à mailler. Une fois cet ensemble

de maillages générés, deux approches distinctes peuvent être utilisées : soit une approche de type *Chimera* (Steger et al. (1983)) où la solution est calculée sur chaque maillage et l'information est transférée d'un maillage à l'autre par un processus d'interpolation ; soit une approche d'insertion des maillages autour de chaque composante à l'intérieur du maillage global.

Clairement, la première approche simplifie grandement le processus de génération de maillage, et fait reposer toute la tâche de gestion des conflits sur le résolveur ; dans les faits cette approche n'est pas à proprement parler une approche hybride. Par contre, la seconde approche, proposée par Weatherill (1993-94) et utilisée par Koomullil et al. (1996), qui consiste à insérer les maillages associés à chaque composante dans un maillage global (figure 1.2), et à reconnecter ces maillages à l'aide d'un algorithme non structuré (figure 1.3), produit effectivement des maillages hybrides.

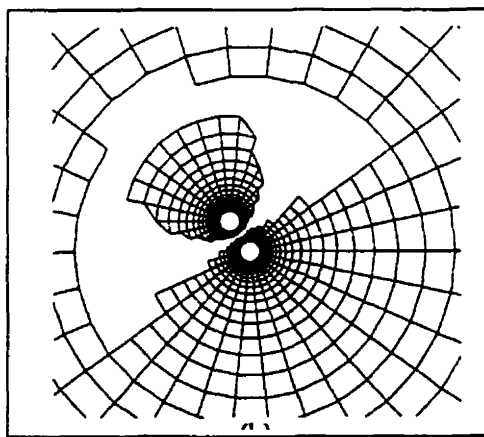


FIG. 1.2: Maillages structurés autour de chaque composante ¹

Les limites de cette méthode dans le contexte des écoulements internes sont sensiblement les mêmes que celles de la méthode hyperbolique. En effet, cette méthode est efficace dans la mesure où chaque élément à analyser est bien séparé physiquement

¹Tiré de Koomullil et al. (1996)

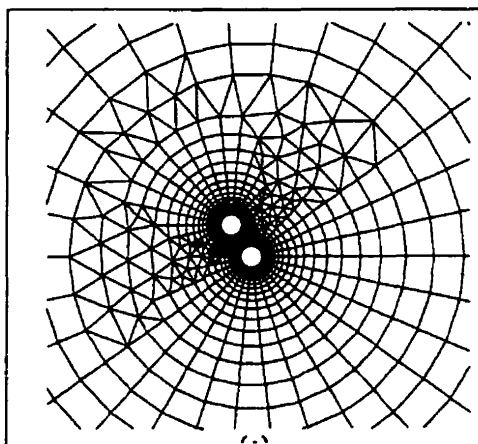


FIG. 1.3: Maillages structurés reconnectés par un maillage non structuré ²

de ceux qui l'entourent, et que les maillages structurés restant, après la reconnexion, satisfont aux critères minimums d'épaisseur de couche demandés par l'utilisateur. Cette méthode est difficilement envisageable dans le cas d'écoulements internes, où toutes les parois solides sont nécessairement connectées les unes aux autres.

1.3.4 Génération en arbre

Une approche relativement courante de génération de maillages non conformes utilise la structure implicitement construite par la construction d'un arbre binaire à n -dimensions (*quadtree* en 2D, *octree* en 3D) dans lequel se trouve stockée la définition de la géométrie à une résolution spécifiée. Tout comme les approches de maillage non structuré, les approches en arbre permettent la mise au point d'algorithmes automatiques capables de traiter des géométries très complexes.

Récemment, Smith et Leschziner (1996) ont proposé une approche pour la génération de maillages avec une couche structurée d'éléments près des parois solides et utilisant

²Tiré de Koomullil et al. (1996)

cette approche en arbre (figure 1.4). Les applications présentées appartenaient toutes au domaine de l'aérodynamique externe, mais cette méthode pourrait être utilisée avec autant de succès pour les écoulements internes.

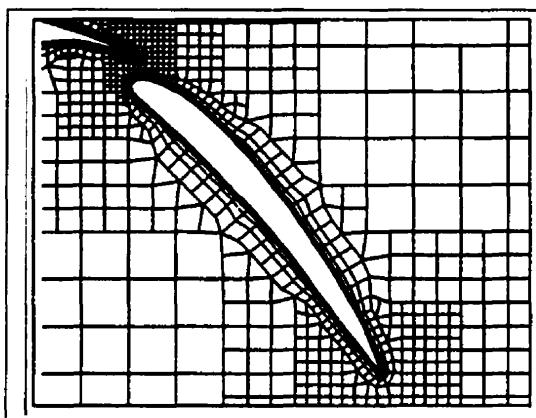


FIG. 1.4: Couche d'éléments structurés construite à l'aide d'une approche en arbre ³

Cette technique présente toutefois certains désavantages dans le contexte des applications que nous envisageons. En effet, le maillage généré à l'extérieur des couches structurées est un maillage non conforme, qui devrait nécessairement être traité en vue d'être utilisé par un résolveur par éléments finis. Comme tel, cela ne présente pas une difficulté insurmontable, par contre, le fait de générer un maillage non conforme pour définir les surfaces de la géométrie implique que le maillage surfacique n'est pas une donnée fournie au mailleur volumique, mais bien un résultat du processus de maillage. Les connexions conformes entre différentes zones de maillages ne sont donc pas assurées par cette méthode, ce qui rend difficile l'utilisation de ces maillages pour des applications où la physique varie d'une zone à l'autre, et donc, où la présence des zones est nécessaire.

³Tiré de Smith et Leschziner (1996)

1.3.5 Le zonage automatique

Le chapitre 3 présente une description complète de l'approche développée dans ce travail afin de construire des maillages hybrides. Dans le contexte de cette revue de la littérature, il paraît cependant pertinent de décrire succinctement l'approche proposée, et de la comparer aux différentes approches déjà publiées.

Brièvement, l'approche que nous proposons pour la génération de maillages hybrides consiste non pas à modifier une technique de maillage existante, mais plutôt à développer une technique a priori de zonage des modèles géométriques, qui pourra ensuite être complétée par différentes techniques de maillage déjà existantes. Les techniques de zonage, utilisées de façon courante dans le domaine de la génération de maillages structurés, ont toujours comme objectif de procéder à une partition initiale du domaine à mailler qui facilite le processus de discrétisation. L'approche proposée ici poursuit les mêmes objectifs, mais se distingue des approches classiques de zonage sous deux aspects : d'une part, chaque zone du domaine ne doit pas nécessairement être maillée de façon structurée, et d'autre part, les zones sont construites de façon automatique en appliquant au modèle géométrique représentant le domaine une suite d'algorithmes de partition utilisant des opérations géométriques et topologiques.

En permettant la construction de certaines zones qui ne pourront pas être discrétisées de façon structurée, le processus de zonage se trouve simplifié, ce qui permet son automatisation complète. De plus, en utilisant une représentation complète du modèle géométrique à mailler qui tienne compte tant des aspects géométriques que topologiques de description des frontières, une approche formelle de zonage a pu être développée. Cette approche permet de tenir compte de façon explicite des situations complexes apparaissant durant la phase de zonage, et permet d'offrir, dans certains

cas, différentes solutions en cas de conflit.

Contrairement aux approches basées sur des modifications aux techniques de maillage présentées précédemment, l'approche de génération de maillages hybrides par zonage automatique consiste à construire explicitement la frontière entre les éléments semi structurés et non structurés. Cette approche fournit ainsi un cadre formel de résolution des conflits inhérents à la construction de zones semi structurées sur plusieurs parois adjacentes. De plus, comme le processus de zonage précède la phase de discrétisation, les interfaces entre les zones sont toutes construites explicitement avant d'être discrétisées, ce qui permet d'assurer une discrétisation conforme des frontières partout où la physique l'exige.

Ces différentes caractéristiques de l'approche par zonage automatique, reprises et explicitées dans les prochains chapitres, en font une technique particulièrement bien adaptée au traitement de domaines de calcul pour les configurations d'écoulements internes. La table 1.1 compare les différentes approches discutées, en résumant leur principales caractéristiques et en indiquant si elles sont applicables ou non aux problèmes envisagés dans ce travail, selon les cinq critères suivants :

- méthode applicable à des géométries tridimensionnelles complexes,
- méthode applicable à des configurations d'écoulements internes,
- méthode applicable à des problèmes présentant des régions distinctes mais une physique couplée au travers des interfaces,
- méthode fournissant une approche formelle de résolution des conflits entre couches adjacentes,
- méthode fournissant une définition explicite des frontières entre les régions semi structurées et non structurées.

Approche	géométries 3D complexes	écoulements internes	régions distinctes continues	résolution formelle des conflits	frontières explicites
avance hyperbolique	•	◦	•	◦	×
avance de couches	•	•	•	◦	×
maillages superposés	◦	×	×	•	•
arbres	◦	◦	×	◦	•
zonage automatique	•	•	•	•	•
• possible dans cette approche, résultats démontrés ◦ pourrait être possible dans cette approche, résultats non démontrés × ne fait pas partie de l'approche telle que décrite					

TAB. 1.1: Comparaison des approches de génération de maillages hybrides

À la lumière des informations présentées à la table 1.1, il appert donc qu'aucune des approches déjà publiées ne présente toutes les caractéristiques recherchées pour la construction des maillages dans le contexte de ce travail. Il est donc apparu souhaitable de développer une approche originale de génération de maillage pour les écoulements internes visqueux : la génération de maillages hybrides par zonage automatique.

Chapitre 2

Modélisation géométrique 3D

La méthode de génération de maillage que nous proposons repose en grande partie sur la séparation des opérations géométriques et topologiques ; le mode de représentation utilisé pour la géométrie revêt donc une importance centrale dans toute la démarche de conception du mailleur. Nous décrirons ici les principales caractéristiques d'un modèle géométrique tel qu'il est utilisé par le mailleur, de même que les principaux algorithmes de manipulation géométrique qui ont dû être implémentés pour réaliser le mailleur.

La représentation géométrique du domaine de calcul repose sur un formalisme relativement courant de description des frontières, le formalisme *B-REP* ("*Boundary Representation*", voir Gaither (1994) ou ACIS (1992)), comprenant tant la description des courbes et des surfaces bornant le modèle, que les connexions topologiques entre ces courbes et ces surfaces. Alors que l'information géométrique permet de connaître la description exacte des frontières dans l'espace physique (par exemple, la définition mathématique d'une surface bornant une pièce), l'information topologique

permet d'établir les relations unissant ces entités géométriques les unes aux autres.

Nous voulons concevoir un mailleur qui acceptera en entrée un modèle géométrique complet, contenant à la fois une description géométrique des frontières et une description topologique entre celles-ci. Comme cette information constitue la fondation sur laquelle repose toute la structure du mailleur, nous décrirons ici avec un certain niveau de détail chaque entité géométrique ou topologique utilisée, en insistant sur la nomenclature des liens les unissant.

2.1 Représentation des modèles géométriques

2.1.1 Les entités géométriques

En premier lieu, un modèle géométrique, ou une géométrie, est constitué d'entités paramétriques servant à décrire un morceau de la frontière d'un objet. Ces entités définissent une relation entre un espace paramétrique à r dimensions et un espace physique à s dimensions. Présentement, nous utilisons des entités géométriques à zéro, un et deux paramètres : les *points*, les *courbes* et les *surfaces* respectivement.

Un mode uniforme de représentation a été adopté pour toutes les entités géométriques, qui repose en fait sur le formalisme servant à décrire les B-splines rationnelles non uniformes (*Non Uniform Rational B-Splines* ou NURBS). Le mode de représentation NURBS tend à devenir un standard de facto dans la plupart des systèmes CAO. Les NURBS permettent en effet de représenter, sous une forme unique, pratiquement tous les types de courbes et de surfaces couramment utilisés pour la modélisation géométriques de composantes industrielles. Qu'il s'agisse des courbes ou des surfaces

linéaires par morceaux, des coniques, des surfaces réglées, des surfaces de révolution, ou de nombreuses autres classes de courbes et de surfaces, elles peuvent toutes être représentées sous la forme mathématique unique d'une NURBS.

Par ailleurs, la formulation NURBS prévoit qu'une entité géométrique puisse être soit polynômiale, soit rationnelle mais qu'elle est nécessairement décrite par une série de points de contrôle. Dans le cas d'une entité géométrique polynômiale, les coordonnées des points de contrôle ont le même nombre de composantes que la dimension de l'espace dans lequel est définie l'entité; dans le cas d'une entité rationnelle, chaque point de contrôle a une composante supplémentaire, représentant le poids du point. Pour chaque paramètre de l'entité, on doit définir :

1. le nombre n de points de contrôle associés à ce paramètre,
2. l'ordre k de l'entité selon ce paramètre,
3. une plage de validité du paramètre (min .. max),
4. une série monotone croissante de $n + k$ valeurs du paramètre comprises à l'intérieur de la plage de validité, appelée vecteur nodal.

Évidemment, le cas du point est spécial dans la mesure où il s'agit d'une entité à zéro paramètre pour laquelle on ne spécifie qu'un seul point de contrôle; dans ce cas, la position du point dans l'espace physique est tout simplement donnée par les coordonnées du point de contrôle.

Les courbes et les surfaces, par contre, sont des entités paramétriques décrites mathématiquement par la pondération des points de contrôle à l'aide des fonctions de base B-splines ou B-splines rationnelles. Dans le cas d'une courbe, par exemple,

la représentation choisie est la suivante :

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) P_i \quad (2.1)$$

ou

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,k}(u) P_i \quad (2.2)$$

avec u le paramètre de la courbe, $N_{i,k}(u)$ et $R_{i,k}(u)$ les fonctions de base pour le cas polynômial et rationnel respectivement, et P_i les points de contrôle.

Il existe plusieurs façons de définir les fonctions de base B-splinaires ; nous utilisons ici la forme proposée par de Boor, Cox et Mansfield, telle que publiée dans Piegl et Tiller (1995), qui se prête particulièrement bien à une implémentation informatique.

Soit $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ une séquence non décroissante de nombres réels, c'est-à-dire $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-1$. Les u_i sont appelés les nœuds, et U est le vecteur nodal. La i ème fonction de base B-Splinaire d'ordre k (de degré $k-1$), notée $N_{i,k}(u)$ est définie par la formule de récurrence :

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \text{ et } k = 1, \\ 0 & \text{si } u_i \notin [u_i, u_{i+1}[\text{ et } k = 1, \\ \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_{i,k-1}(u) & \\ + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) & \text{si } k > 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans le cas des courbes rationnelles, les fonctions de base sont modifiées pour tenir compte de l'influence d'un poids h_i associé à chaque point de contrôle. Dans la représentation que nous utilisons, ce poids est stocké comme une composante supplémentaire de chaque point. Les fonctions de base des courbes rationnelles peuvent être

écrites en terme des fonctions de base B-splinaires et des poids comme :

$$R_{i,k} = \frac{N_{i,k}(u)h_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(u)h_j} \quad (2.4)$$

Les surfaces sont construites par produit tensoriel des formes introduites pour les courbes, et peuvent également être polynômiales ou rationnelles. Suivant la notation introduite pour les courbes, on aura pour les surfaces polynômiales, avec le nombre de points de contrôle m dans la direction du second paramètre (v) :

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n N_{j,kv}(v) N_{i,ku}(u) \mathbf{P}_{ij} \quad (2.5)$$

et pour les surfaces rationnelles :

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n R_{j,kv}(v) R_{i,ku}(u) \mathbf{P}_{ij} \quad (2.6)$$

Bien que les NURBS soient le mode privilégié de représentation des entités géométriques, nous utilisons également, à l'occasion, un mode de représentation facetté des courbes et des surfaces permettant d'accélérer certaines opérations géométriques.

De façon générale dans le mailleur, la représentation NURBS est utilisée dans la description des entités géométriques originales d'un modèle, par exemple les entités provenant d'un système CAO externe, alors que la représentation facettée est principalement utilisée lors de la construction d'entités géométriques internes servant à contrôler le processus de génération du maillage.

2.1.2 Les entités topologiques

Dans un modèle géométrique tel que nous l'utilisons, les entités géométriques servant à décrire la frontière des pièces sont définies de façon indépendante les unes des autres ; du strict point de vue géométrique, en effet, un modèle est un ensemble de surfaces, de courbes et de points sans relation entre eux. Cette description des frontières des modèles n'est pas suffisante pour la majorité des applications d'analyse, et en particulier pour fins de maillage. On introduit donc une seconde couche d'entités servant à établir uniquement les relations entre les entités géométriques : ce sont les entités topologiques.

Alors que les entités géométriques servent à décrire les frontières d'un modèle dans l'espace physique, les entités topologiques, elles, fournissent une représentation abstraite du modèle dans un espace logique en ignorant les aspects géométriques et en ne conservant que les connexions entre les entités. Les entités topologiques établissent ainsi les liens entre les entités géométriques en définissant deux types de relation :

- une relation reliant une entité topologique à une entité géométrique,
- une relation reliant une entité topologique de dimension supérieure à des entités topologiques de dimension inférieure.

Chaque entité géométrique a donc son pendant topologique, le tableau 2.1 résume cette correspondance entre les entités de l'espace physique (ou géométrique) et celles de l'espace logique (ou topologique).

Dans un modèle géométrique complet, et donc maillable, toutes les relations entre les entités définissant les frontières des pièces doivent être fournies. En particulier, en trois dimensions, un modèle sera composé d'un ou plusieurs volumes, et chaque volume sera composé de plusieurs faces ; à leur tour, les faces seront bornées par

TAB. 2.1: Relation entre les entités géométriques et topologiques

dimension	entité géométrique	entité topologique
0	point	sommet
1	courbe	arête
2	surface	face
3	(espace)	volume

des arêtes, qui seront terminées par des sommets. La figure 2.1 illustre un modèle géométrique tridimensionnel borné par six surfaces et douze courbes, qui peut être ramené à un cube dans l'espace logique, tel qu'illustré à la figure 2.2. Les relations entre les différentes entités topologiques du modèle sont quant à elles décrites à la figure 2.3.

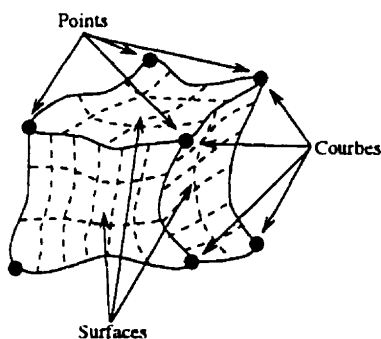


FIG. 2.1: Exemple de géométrie

Afin de prévoir la présence de trous dans les faces et de cavités dans les volumes, des entités intermédiaires sont introduites : les arêtes d'une face sont regroupées en *boucles*, et les faces d'un volume en *coquilles* (figure 2.4).

En plus de stocker les relations vers les entités topologiques de dimension inférieure, chaque entité topologique maintient également un lien vers une entité géométrique décrivant sa position dans l'espace physique. Un sommet conserve donc une relation vers une position de dimension zéro dans l'espace physique, qui est représentée à l'aide

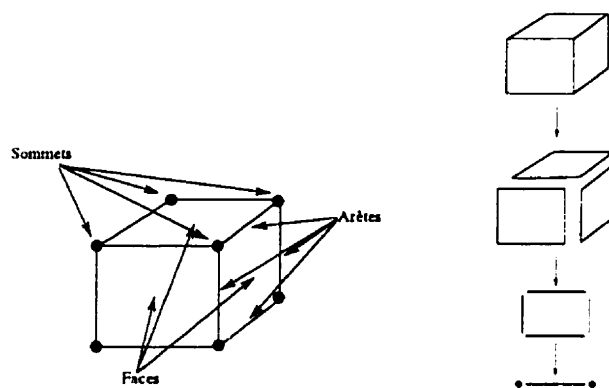


FIG. 2.2: Illustration des aspects topologiques de la géométrie

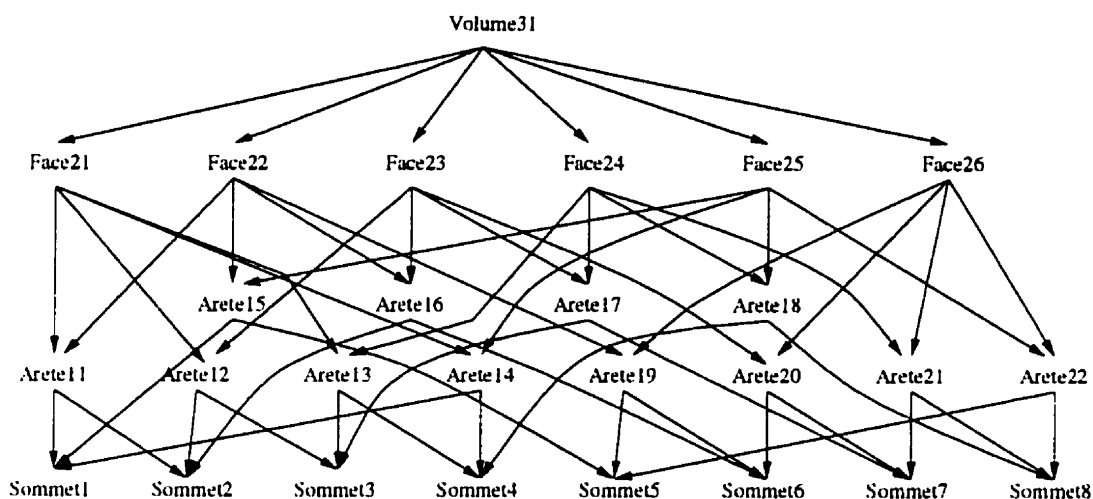


FIG. 2.3: Relations entre les entités topologiques du modèle

d'une entité géométrique, par exemple par un point, ou par une valeur du paramètre sur une courbe, etc. De même, les arêtes conservent une relation vers une position unidimensionnelle dans l'espace physique, par exemple une portion de courbe entre deux valeurs de paramètre, et les faces conservent une relation vers une position bidimensionnelle, par exemple une surface.

Cette séparation très nette entre les aspects de représentation et les aspects relationnels du modèle géométrique permet une grande flexibilité au niveau de la spécification

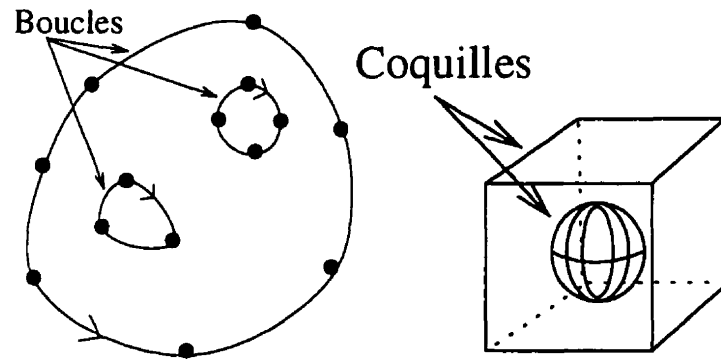


FIG. 2.4: Exemple de face contenant plusieurs boucles et de volume contenant plusieurs coquilles

des opérations de traitement du modèle. En effet, la grande majorité des opérations sur le modèle géométrique nécessaire durant un processus d'analyse numérique peut être conçue pour ne dépendre que de la topologie du modèle; à titre d'exemple, citons le cas de l'imposition des conditions limites, qui peut très bien être décrite en terme des caractéristiques topologiques du domaine. Beaucoup d'opérations de maillage peuvent également être exprimées en terme de données topologiques, ce qui permet l'élaboration d'algorithmes très génériques, par exemple pour la génération automatique de blocs; cette idée sera reprise en détail au § 3 dans le contexte de la génération de maillages hybrides.

2.2 Algorithmes géométriques

Afin de réaliser le mailleur hybride, il est apparu essentiel de disposer non seulement d'un mode de représentation du modèle géométrique, mais aussi d'un certain nombre d'algorithmes de manipulation du modèle qui, dans certains cas, sont spécifiquement dédiés au processus de discrétisation. Cette section présente ces algorithmes sans tenter d'établir de liens avec le processus de discrétisation lui-même. Le chapitre suivant,

sur la croissance de peau et le zonage automatique, se chargera d'expliquer le processus de discrétisation, et établira les liens nécessaires entre les différents algorithmes. Pour l'instant, chaque algorithme est décrit, comme les membres d'une boîte à outils qui pourront par la suite être utilisés à différentes fins.

2.2.1 Évaluation

Le premier type d'algorithmes, nécessaire à quelque manipulation que ce soit d'un modèle géométrique, est l'opération d'évaluation des entités géométriques et de leurs dérivées. D'un point de vue théorique, les équations 2.1 et 2.2 définissent complètement le processus d'évaluation, si l'on tient compte de la définition des fonctions de base $N_{i,k}$ et $R_{i,k}$ fournies par les équations 2.3 et 2.4.

Dans une implémentation informatique efficace de ces fonctions, il est cependant crucial de tenir compte du fait que seul un nombre limité de fonctions sont non nulles pour une valeur de paramètre donné. De nombreux algorithmes très efficaces pour l'évaluation des courbes et des surfaces B-splines ont été publiés, et la version que nous avons choisie d'implémenter est due à Piegl et Tiller (1995).

Cette implémentation s'assure non seulement d'identifier exactement quelles fonctions de base sont non nulles pour une valeur donnée du paramètre, mais également de ne calculer qu'une seule fois les termes communs aux différentes fonctions de base.

Les mêmes remarques s'appliquent à l'implémentation des algorithmes d'évaluation des dérivées des fonctions de base, pour le calcul des dérivées des entités géométriques. Piegl et Tiller (1995) proposent un algorithme efficace de calcul des dérivées d'ordre n des fonctions de base non nulles pour une valeur de paramètre donné, que nous

avons également choisi d'implémenter.

2.2.2 Optimisation

Si l'on conçoit une entité géométrique comme une application d'un espace paramétrique vers un espace physique, les opérations d'évaluation présentées à la section précédente consistent à calculer l'image d'un domaine connu tel qu'il est transformé par cette application. Ces opérations d'évaluations sont relativement simples étant donné la forme paramétrique choisie comme mode de représentation. Dans bien des cas, cependant, l'opération inverse, qui consiste à retrouver le domaine paramétrique sur l'entité géométrique d'une image physique connue, est également d'intérêt.

Sous sa forme la plus simple, cette opération se réduit à une projection d'un point physique sur l'entité géométrique, mais dans plusieurs circonstances, cette projection doit être faite sous contrainte. Cette section présente une série d'algorithmes apparentés à des projections, qui ont en commun d'utiliser un algorithme d'optimisation. L'implémentation de toutes ces opérations utilise effectivement un seul et même algorithme d'optimisation, rendu robuste et efficace grâce à une cascade d'algorithmes de résolution connus.

Les algorithmes de projection sont des algorithmes courants, leur description et leur implémentation sont directement inspirées de Piegls et Tiller (1995), alors que les algorithmes subséquents ont été développés strictement dans le contexte des algorithmes de discrétisation.

2.2.2.1 Projection d'un point sur une courbe

Le premier algorithme d'optimisation est celui de la projection d'un point quelconque $\mathbf{P}$ sur une courbe $\mathbf{C}(u)$. Géométriquement, projeter le point $\mathbf{P}$ sur la courbe se réduit à trouver le paramètre u_p sur la courbe tel que le segment $\overline{\mathbf{P}\mathbf{C}(u_p)}$ soit perpendiculaire à la tangente à la courbe au point $\mathbf{C}(u_p)$ (voir la figure 2.5).

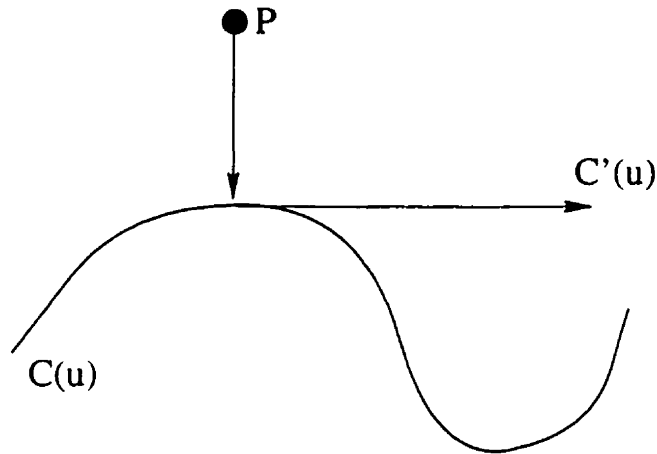


FIG. 2.5: Projection d'un point sur une courbe

Mathématiquement, cette projection s'exprime comme l'optimisation de la fonction $f(u)$, représentant le produit scalaire du vecteur $\overline{\mathbf{P}\mathbf{C}(u)}$ et de la tangente $\mathbf{C}'(u)$:

$$f(u) = \mathbf{C}'(u) \cdot (\mathbf{C}(u) - \mathbf{P}). \quad (2.7)$$

La valeur optimale de u peut être trouvée à l'aide de l'algorithme de Newton, pour lequel la fonction itérante devient :

$$u_{i+1} = u_i - \frac{f(u_i)}{f'(u_i)} = u_i - \frac{\mathbf{C}'(u_i) \cdot (\mathbf{C}(u_i) - \mathbf{P})}{\mathbf{C}''(u_i) \cdot (\mathbf{C}(u_i) - \mathbf{P}) + |\mathbf{C}'(u_i)|^2}. \quad (2.8)$$

Il est à noter que chaque itération de Newton implique l'évaluation de la courbe et de ses dérivées première et seconde.

2.2.2.2 Projection d'un point sur une surface

La projection d'un point sur une surface suit une démarche strictement analogue mais implique la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Soit $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ le vecteur reliant le point $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ au point à projeter $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{P}. \quad (2.9)$$

Le système d'équations non linéaires à optimiser s'écrit :

$$f(u, v) = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad (2.10)$$

$$g(u, v) = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.11)$$

où $\mathbf{S}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est la dérivée de $\mathbf{S}$ par rapport à u .

Les valeurs optimales de u et v peuvent être trouvées à l'aide de l'algorithme de Newton, pour laquelle la fonction itérante s'écrit sous forme d'une correction $(\Delta u, \Delta v)^T$ solution de :

$$\begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(u_i, v_i) \\ g(u_i, v_i) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

avec les dérivées des équations scalaires :

$$f_u = |\mathbf{S}_u|^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_{uu}, \quad (2.13)$$

$$f_v = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v + \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_{uv}, \quad (2.14)$$

$$g_u = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v + \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_{vu}, \quad (2.15)$$

$$g_v = |\mathbf{S}_v|^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_{vv}. \quad (2.16)$$

2.2.2.3 Valeur du paramètre pour une longueur d'arc donnée

Le prochain algorithme d'optimisation, développé cette fois-ci spécifiquement pour les besoins des algorithmes de discrétisation, consiste à calculer la valeur du paramètre u d'une courbe correspondant à un déplacement donné en terme de longueur d'arc à partir du début de la courbe (voir la figure 2.6).

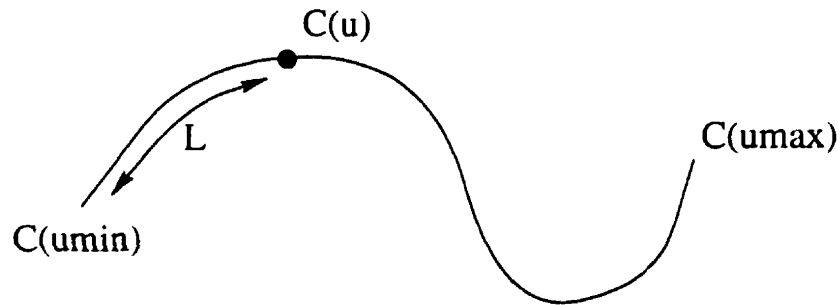


FIG. 2.6: Détermination du paramètre u pour une longueur d'arc L donnée

Mathématiquement, la fonction à optimiser s'écrit comme :

$$f(u) = \int_{u_{\min}}^u dl(u) du - L \quad (2.17)$$

avec

$$dl(u) = \sqrt{C'(u) \cdot C'(u)} \quad (2.18)$$

et L la longueur d'arc pour laquelle on cherche le paramètre. Il est important de noter que l'algorithme d'optimisation fonctionne indifféremment tant pour les courbes dans l'espace que pour celles reposant sur une surface, la distinction entre ces courbes résidant au niveau du calcul de l'intégrant de longueur dl , qui tient compte de la déformation de l'espace s'il y a lieu.

2.2.2.4 Valeur du paramètre pour une longueur de corde donnée

Un algorithme apparenté au précédent consiste à déterminer le paramètre le long d'une courbe de façon non pas à ce que la longueur d'arc, mais plutôt la longueur de corde entre le point de départ et le point cherché soit égale à une valeur donnée. La figure 2.7 illustre cette situation.

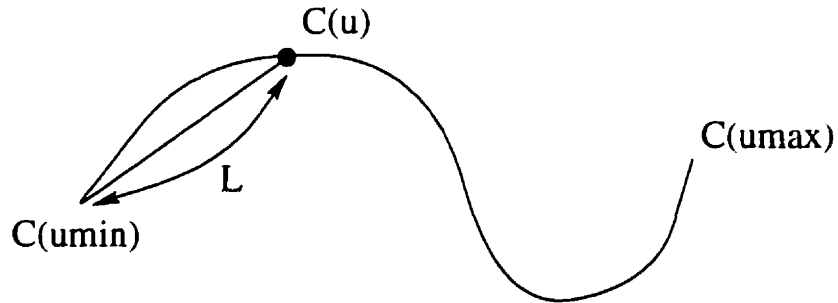


FIG. 2.7: Détermination du paramètre pour une longueur de corde donnée

Dans ce cas, la fonction à optimiser devient simplement :

$$f(u) = |C(u) - C(u_{\min})| - L \quad (2.19)$$

où L est la longueur de corde cherchée.

2.2.2.5 Valeur du paramètre pour une longueur de corde projetée donnée

Dans la veine de l'algorithme précédent, il est parfois utile de déterminer le paramètre le long d'une courbe non pas directement selon une longueur d'arc donnée, mais plutôt de façon à ce que la projection de la corde mesure une longueur donnée une fois projetée sur un vecteur connu. La figure 2.8 illustre une cette situation.

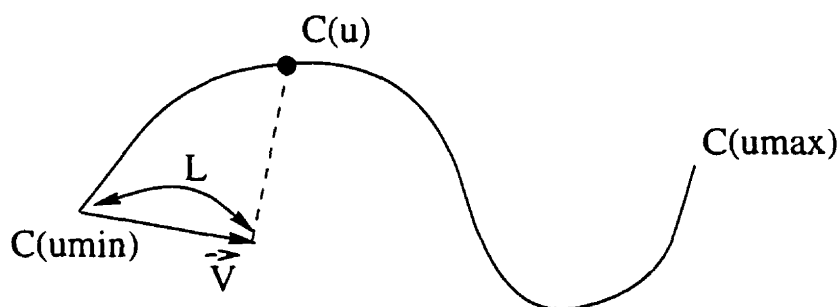


FIG. 2.8: Détermination du paramètre pour une longueur de corde projetée donnée

Dans ce cas, la fonction à optimiser devient :

$$f(u) = ((C(u) - C(u_{min})) \cdot V) - L \quad (2.20)$$

où L est la longueur cherchée de la projection de la corde sur le vecteur V .

2.2.3 Intégration de la longueur

La troisième classe d'algorithmes de manipulation géométrique développés afin de supporter le développement du mailleur est celle des fonctions d'intégration de la longueur. Bien que l'algorithme présenté à la § 2.2.2.3 impliquait implicitement la

capacité de calculer la longueur d'arc d'une courbe pour une valeur de paramètre donnée, les détails d'implémentation de cet algorithme restent à présenter. Sur le plan théorique, l'intégration de la longueur d'une courbe paramétrique quelconque est un problème bien posé se résolvant relativement simplement ; en pratique, cependant, les implémentations initiales basées sur des algorithmes classiques (Press et al. (1992)) se sont avérées inacceptables au plan de la performance.

Même une revue bibliographique des journaux spécialisés n'offre que peu d'alternatives efficaces aux algorithmes classiques, la majorité des auteurs se contentant d'améliorer les techniques d'intégration (Guenter et Parent (1990)). Nous avons donc dû développer de toute pièce un nouvel algorithme d'intégration de la longueur spécifiquement dédié aux courbes B-Splines et NURBS.

En étudiant le comportement de l'algorithme d'intégration classique de Romberg avec extrapolation de Richardson pour différents types de courbes, nous avons constaté que les problèmes de performance se produisaient lors de l'intégration de courbes comportant soit des discontinuités dans les dérivées, soit reposant sur une surface, et traversant plusieurs carreaux de la surface. La représentation NURBS permet en effet de construire des courbes d'ordre élevé présentant des points de discontinuité dans les dérivées. Par exemple, pour chaque répétition d'un même point de contrôle, ou chaque répétition d'un même nœud interne dans le vecteur nodal, la courbe perd un ordre de continuité dans ses dérivées. De plus, il est connu que l'algorithme de Romberg aura de bonnes performances dans la mesure où l'intégrant ne présente pas de trop grandes discontinuités.

La solution à ce problème a donc consisté à procéder à l'intégration de la longueur d'arc des courbes en les subdivisant en sections de spline, de façon à ce que l'intégrant

reste continu sur chaque section de courbe. Cette solution, assez simple à implémenter dans le cas de courbes spécifiées directement dans l'espace physique, présente des difficultés nettement plus importantes dans le cas des courbes spécifiées dans l'espace paramétrique d'une surface. Il devient en effet nécessaire de considérer non seulement la transition d'une section de spline à une autre au niveau de la courbe, mais également la transition d'un carreau (*patch*) B-splinaire à l'autre de la surface. L'algorithme d'intégration d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface consiste donc d'abord à subdiviser la courbe en sections de spline continues, puis à subdiviser chaque section de spline en portions reposant chacune sur un seul carreau B-splinaire de la surface.

Cette opération, baptisée *calcul des césures* de la courbe, repose en fait sur la définition du vecteur nodal de la courbe, et accessoirement sur le vecteur nodal de la surface dans le cas d'une courbe dans l'espace paramétrique. La figure 2.9 illustre la position des nœuds intérieurs d'une courbe comprenant trois sections de spline, telle que défini par le vecteur nodal de la courbe. Pour le cas illustré, l'algorithme de calcul de la longueur d'arc procède à une séparation de la courbe en quatre segments, sur lesquels la longueur est évaluée séparément.

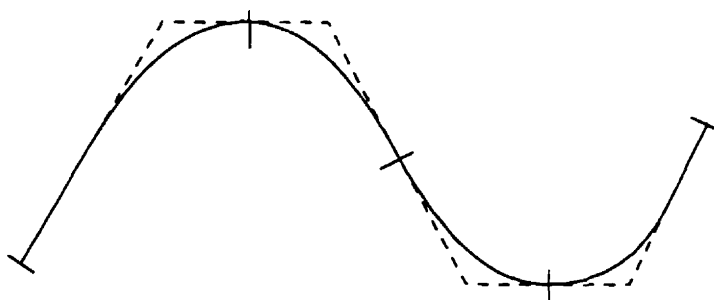


FIG. 2.9: Calcul des césures d'une courbe dans l'espace physique

Dans le cas d'une courbe définie dans l'espace paramétrique d'une surface, l'algo-

l'ordre de calcul des césures doit tenir compte non seulement des nœuds imposés par le vecteur nodal de la courbe, mais également des nœuds provenant de la paramétrisation de la surface. La figure 2.10 illustre le cas d'une courbe comportant un seul nœud interne, reposant sur une surface comportant elle aussi un nœud, qui nécessite l'introduction d'une césure supplémentaire lors du calcul de la longueur. Le calcul de la position des césures de la courbe dues aux nœuds de la surface se fait en parcourant chaque section de spline de la courbe d'une extrémité à l'autre et en détectant précisément la position de chaque transition de la courbe d'un carreau à l'autre sur la surface.

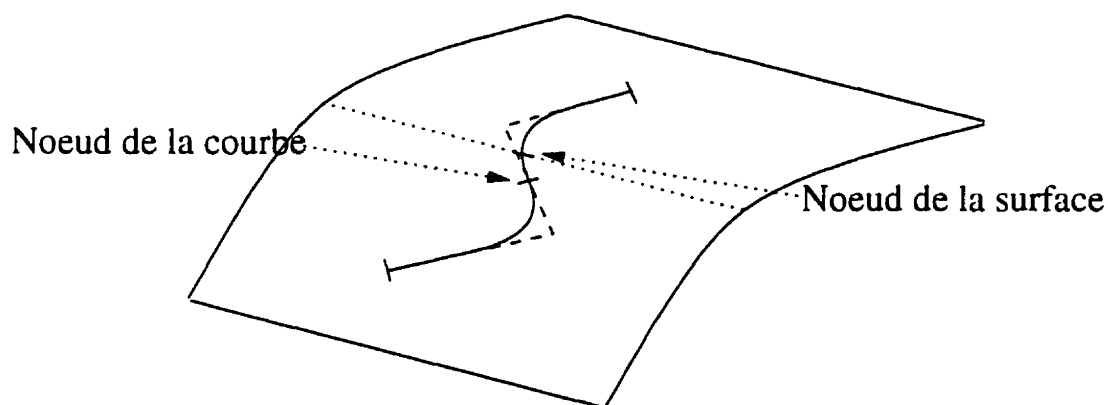


FIG. 2.10: Calcul des césures d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface

Une surface NURBS est composée d'un ensemble structuré de carreaux que l'on peut logiquement indexer comme les éléments d'un maillage de quadrilatères, en utilisant une structure logique (i, j) . Le nombre de transitions franchies par un segment de spline donné peut ainsi être déterminé a priori en comparant les index (i, j) de son point de départ et de son point d'arrivée, de même que la position des transitions en terme de coordonnées dans l'espace paramétrique de la surface.

Une fois la position des transitions déterminée dans l'espace paramétrique de la sur-

face, il reste à déterminer la position de la transition en terme du paramètre de la courbe. Pour ce faire, il faut résoudre un système non linéaire selon un algorithme très semblable à ceux décrits à la section précédente. Trois cas peuvent se poser :

1. la transition se fait dans la direction logique i , c'est-à-dire que le nœud à considérer appartient au vecteur nodal de la direction paramétrique u de la surface,
2. la transition se fait dans la direction logique j , c'est-à-dire que le nœud à considérer appartient au vecteur nodal de la direction paramétrique v de la surface,
3. la transition se fait selon les deux index en même temps, et il faut déterminer laquelle se produit la première.

Dans ce dernier cas, les valeurs des paramètres d'intersection sont calculées séparément pour chaque direction paramétrique de la surface (u et v), puis ordonnées de façon à former une séquence monotone croissante de valeurs de paramètres. La figure 2.11 illustre les deux cas possibles, avec les u_i les nœuds de la surface dans la direction paramétrique u , les v_j les nœuds de la surface dans la direction v , et t_1 et t_2 , les positions d'intersection en terme de valeurs de paramètres sur la courbe.

2.2.4 Recherche spatiale

Plusieurs algorithmes de manipulation géométrique nécessitent une méthode de stockage et de recherche spatiale efficace qui permette, par exemple, de retrouver rapidement tous les éléments géométriques d'un type donné dans une région déterminée de l'espace. Au cours du développement des algorithmes de traitement géométrique destinés au mailleur, ce besoin est apparu suffisamment répandu pour justifier l'implémentation d'une solution générique et réutilisable.

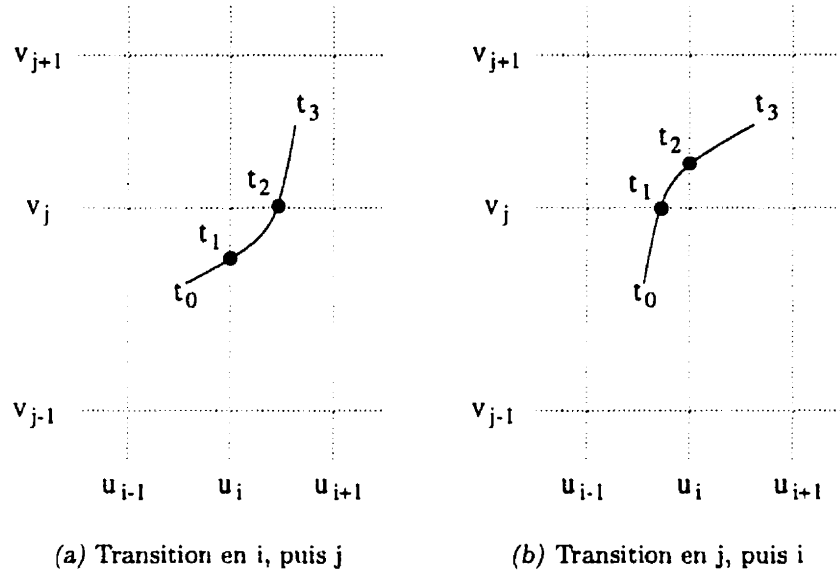


FIG. 2.11: Calcul des positions paramétriques de césure d'une section de courbe d'un carreau à l'autre dans l'espace paramétrique de la surface

Ce genre de problème de localisation se retrouve dans plusieurs types d'applications et des solutions astucieuses ont été découvertes pour le résoudre. Essentiellement, ces solutions reposent sur la construction d'une structure de données spécialisée, généralement en arbre, qui permet de sélectionner rapidement les éléments dont la boîte englobante intersecte avec une région donnée de l'espace. Dans le contexte du mailleur, plusieurs types d'éléments géométriques devaient pouvoir être ainsi stockés et récupérés. C'est pourquoi une structure de données générique a été implémentée, basée sur la structure d'arbre digital alterné (ADT) proposée par Bonnet et Peraire (1991).

En tirant avantage des possibilités offertes par le langage C++ au niveau de la construction de classes paramétrisées (*templates*), nous avons pu développer des algorithmes génériques de stockage et de recherche d'objets géométriques de façon indépendante du type de l'objet. En particulier, cette structure de données a été utili-

sée dans la mise au point des algorithmes d'intersection (courbe-courbe et surface-surface), de même que pour la mise au point d'algorithmes de localisation de points dans un maillage.

2.2.5 Intersection

Le développement d'algorithmes d'intersection précis, robustes et efficaces dans le contexte général de courbes et de surfaces paramétriques de type NURBS constitue un domaine de recherche en soit. De plus, très peu d'information vraiment utilisable est disponible sur ce sujet, puisque le module d'intersection des modeleurs géométriques est généralement considéré par ses auteurs comme le moteur du modeleur, qui, de ce fait, gardent ses principes d'implémentation secrets.

D'autre part, l'objectif principal de notre travail n'étant pas la mise en œuvre d'un système complet de modélisation géométrique, mais bien la mise au point d'un mailleur, nous avons opté pour une solution de compromis, à la fois robuste et efficace, mais légèrement moins précise. Cette solution consiste tout simplement à discrétiser les entités géométriques avant de procéder à leur intersection.

Comme nous le verrons lors de notre discussion sur les algorithmes de maillage eux-mêmes (§ 3), les intersections servent essentiellement à déterminer la position de points et de courbes internes, qui serviront de support aux algorithmes de maillage. Ces positions ne représentent donc pas des éléments géométriques réels, dans la plupart des cas, et une approximation linéaire de ces positions constitue donc un compromis tout à fait raisonnable.

Par ailleurs, la précision de la discrétisation peut être contrôlée à deux niveaux.

L'algorithme de discrétisation des courbes utilise en effet l'information construite lors du calcul des césures (§ 2.2.3) pour déterminer le nombre et la position des points de discrétisation à utiliser. Comme nous l'avons indiqué précédemment, lors de l'intégration de la longueur d'une courbe, une structure de données est construite, qui subdivise la courbe en sections de spline (sur lesquelles l'intégrant de longueur est continu). Durant le processus d'intégration, chaque section de spline est ensuite subdivisée de façon uniforme par l'algorithme de Romberg afin d'obtenir le niveau de précision spécifié pour l'intégration. Le nombre de subdivisions uniformes requis par l'intégration est stocké dans les césures, et utilisé par l'algorithme de discrétisation.

L'usage a cependant démontré que l'utilisation directe de cette information pour la discrétisation produit souvent des discrétisations exagérément fines, qui sont par la suite très lourdes à traiter. Un algorithme d'élimination des points internes superflus a donc été mis au point, qui permet d'éliminer, pour un degré de précision donné, les points internes générés inutilement par l'algorithme de discrétisation une fois l'intersection calculée.

Nous présentons ici les quatre principaux algorithmes développés pour les besoins d'intersection du mailleur, soit l'intersection de deux courbes, l'intersection de deux surfaces, la poursuite d'une intersection de triangle en triangle sur deux surfaces, et l'élimination des points internes superflus d'une courbe d'intersection.

2.2.5.1 Intersection de deux courbes

L'algorithme d'intersection de deux courbes utilise les structures de données décrites aux § 2.2.3, les césures, et § 2.2.4, l'ADT. Schématiquement, l'algorithme s'écrit :

1. Discrétiser les deux courbes en tenant compte de l'information contenue dans leurs césures, pour former un ensemble de segments de droite pour chacune,
2. Placer les segments de la première courbe dans un ADT,
3. Pour chaque segment de la deuxième courbe :
 - (a) Calculer la boîte englobante du segment,
 - (b) Sélectionner dans l'ADT tous les segments de la première courbe dont la boîte intersecte le segment courant de la deuxième courbe,
 - (c) Pour chaque candidat (segment sélectionné de la première courbe) :
 - i. Vérifier l'intersection du candidat avec le segment courant de la deuxième courbe,
 - ii. S'il y a effectivement intersection :
 - A. convertir les paramètres de l'intersection entre les segments en paramètres sur leurs courbes respectives,
 - B. stocker l'information sur l'intersection.
4. Libérer l'arbre et les segments de chacune des courbes.
5. Retourner l'information sur les intersections trouvées.

En pratique, cet algorithme s'est avéré extrêmement robuste, et il permet de détecter efficacement les cas difficiles où plusieurs intersections se produisent entre deux courbes.

2.2.5.2 Intersection de deux surfaces

Tout comme pour l'intersection de deux courbes, l'algorithme d'intersection de deux surfaces s'appuie directement sur les structures de données des césures et de l'ADT.

Par contre, des structures de données spécialisées ont dû être développées lors de la mise en œuvre de l'algorithme, afin par exemple, de stocker temporairement la position des intersections sur chaque surface à mesure qu'elles sont identifiées. L'algorithme procède en effet en trois phases principales :

1. on tente d'abord d'identifier un point initial (ou une source) à une courbe d'intersection,
2. si une telle source a été trouvée, on suit de triangle en triangle cette intersection simultanément sur les deux surfaces,
3. on convertit l'information accumulée lors de la poursuite des intersections, en paramètres globaux sur les surfaces.

Schématiquement, l'algorithme s'écrit :

1. Discrétiser chacune des surfaces sous forme de triangles,
2. Placer chaque triangle de la première surface dans un ADT,
3. Tant que tous les triangles de la seconde surface n'ont pas été traités :
 - (a) **PHASE I** – Pour chaque triangle de la seconde surface pas encore traité, chercher une première intersection :
 - i. Calculer la boîte englobante du triangle,
 - ii. Sélectionner dans l'ADT tous les triangles de la première surface dont la boîte intersecte avec la boîte englobante du triangle courant de la seconde surface,
 - iii. Pour chaque candidat :
 - A. Vérifier si le candidat intersecte avec le triangle courant de la deuxième surface,

B. S'il y a intersection :

- stocker l'intersection trouvée comme source,
- indiquer qu'une source a été trouvée,
- passer à la seconde phase de l'algorithme.

C. Sinon

- passer au prochain candidat.

(b) **PHASE II** – Si une source d'intersection a été trouvée, suivre l'intersection sur chaque surface :

(c) Initialiser une liste liée pour stocker les données sur la nouvelle intersection,

(d) Suivre vers l'avant l'intersection de triangle en triangle sur chaque surface, en stockant en chemin la suite des triangles et les paramètres de l'intersection sur chaque triangle, tant qu'une frontière n'a pas été rencontrée (§ 2.2.5.3),

(e) Suivre vers l'arrière l'intersection de triangle en triangle sur chaque surface, en stockant en chemin la suite des triangles et les paramètres de l'intersection sur chaque triangle, tant qu'une frontière n'a pas été rencontrée (§ 2.2.5.3),

(f) Éliminer de l'ADT tous les triangles de la première surface impliqués dans l'intersection qui vient d'être identifiée.

4. Éliminer l'ADT,

5. **PHASE III** – Convertir les données des intersections, stockées en termes des triangles de chaque surfaces, en valeurs de paramètres des surfaces,

6. Éliminer les points superflus des courbes d'intersection (§ 2.2.5.4).

Cet algorithme s'est avéré relativement robuste, dans la mesure où il permet même de détecter des intersections multiples entre deux surfaces. Par contre, il est facile de montrer que l'ordre d'entrée des deux surfaces a une influence sur le résultat dans certains cas d'intersections multiples. Il reste que pour le type d'application envisagé dans le mailleur, ce genre de limite n'a tendance à se produire que dans des cas dégénérés, qui trahissent généralement des problèmes en amont de l'algorithme d'intersection.

2.2.5.3 Poursuite d'une intersection sur deux surfaces

Le cœur de l'algorithme d'intersection consiste à suivre d'un triangle à l'autre sur chacune des surfaces un premier segment d'intersection trouvé à l'aide d'un autre algorithme. Sans entrer dans tous les détails de l'algorithme de poursuite, nous présentons ici les grandes idées nécessaires à son implémentation.

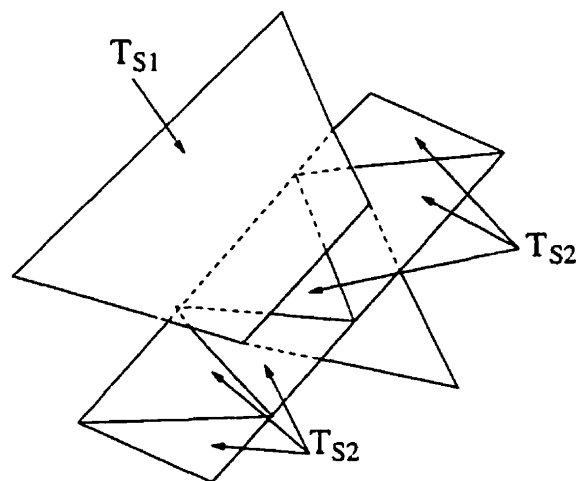


FIG. 2.12: Intersection d'un triangle de la surface $S1$ avec quelques triangles de la surface $S2$

Comme données de base, l'algorithme de poursuite utilise les coordonnées barycen-

triques du point de début et de fin du segment afin de caractériser le segment de droite le long duquel s'intersectent deux triangles, et l'information de voisinage entre les triangles discrétisant chacune des surfaces. L'idée clef de l'algorithme est donc de déterminer les deux prochains triangles qui formeront l'intersection en analysant les valeurs des coordonnées barycentriques des extrémités du segment courant.

La figure 2.12, illustrant l'intersection d'un triangle T_{S1} , reposant sur la surface $S1$ avec quelques triangles T_{S2} de la surface $S2$, présente quelques unes des nombreuses configurations d'intersection entre deux triangles qui peuvent se présenter en pratique. Afin de traiter le plus uniformément possible toutes ces configurations, une structure de données spécialisée a été développée, qui consiste à stocker, pour chaque segment de droite formant l'intersection, les informations suivantes :

- une référence au triangle reposant sur la première surface T_{S1} ,
- la position du point de départ du segment exprimée en coordonnées barycentriques dans le triangle T_{S1} ,
- la position du point d'arrivée du segment exprimée en coordonnées barycentriques dans le triangle T_{S1} ,
- une référence au triangle reposant sur la deuxième surface T_{S2} ,
- la position du point de départ du segment exprimée en coordonnées barycentriques dans le triangle T_{S2} ,
- la position du point d'arrivée du segment exprimée en coordonnées barycentriques dans le triangle T_{S2} .

Ces données sur l'intersection entre deux triangles forment le maillon de base d'une liste ordonnée de segments, qui une fois complétée, décrit de façon discrète l'intersection des deux surfaces. Un algorithme spécialisé d'intersection de triangles sert à

déterminer s'il existe effectivement une intersection entre deux candidats, et le cas échéant permet de calculer les informations décrivant cette intersection.

L'algorithme de poursuite est ainsi en mesure de déterminer la prochaine paire de triangle à intersecter en vérifiant quelle coordonnée barycentrique de l'intersection courante est nulle. Certains cas de figure demandent plus de traitement, par exemple lorsque le segment courant passe par un sommet d'un des triangles (deux coordonnées barycentriques sont nulles), il faut alors former une liste de candidats avec tous les triangles de la surface connectés à ce sommet, et vérifier l'intersection avec chacun.

Par ailleurs, le sens de parcourt du premier segment trouvé est arbitraire, et il n'est pas garanti que ce premier segment se trouve à l'une ou l'autre des extrémités de la courbe d'intersection. L'algorithme de poursuite doit donc être utilisé deux fois pour chaque courbe d'intersection, c'est-à-dire, en utilisant chaque extrémité du premier segment comme point de départ, tout en s'assurant bien sûr de placer chaque maillon dans la chaîne de façon à ce que les maillons forment une courbe continue lorsqu'ils seront parcourus du premier au dernier. Il peut ainsi devenir nécessaire d'insérer au début plutôt qu'à la fin de la liste liée, ou d'inverser le sens de parcourt d'un segment pour qu'il se connecte correctement au précédent.

2.2.5.4 Élimination des points superflus d'une courbe d'intersection

Tel que mentionné lors de la discussion initiale sur les algorithmes d'intersection, le fait d'utiliser une discrétisation très fine des surfaces, basée sur un calcul des césures, tend à construire des courbes d'intersection contenant un nombre très élevé de points de contrôle. Lorsque ces courbes sont ensuite utilisées pour reconstruire des surfaces, un nombre trop élevé de points de contrôle devient un handicap majeur en terme de

coût de traitement. Nous avons donc dû mettre au point un algorithme d'élimination de points de contrôle interne des courbes d'intersection, qui puisse tenir compte d'un paramètre de tolérance fourni de façon externe.

Le principe de l'algorithme est, a priori, relativement simple, et repose sur le fait qu'une représentation discrète est utilisée pour les courbes d'intersection. Puisque la courbe à traiter est formée de segments de droite, elle passe nécessairement par tous les points de contrôle, et l'influence de chaque point est donc facilement quantifiable. Un algorithme simple permettant de déterminer si un point est nécessaire ou non consiste donc à mesurer la distance normale séparant un point du segment formé par le point précédent et le point suivant. Si cette distance normale, comparée de façon relative à la longueur du segment à partir duquel elle est mesurée, est plus petite qu'une tolérance donnée, le point peut être éliminé.

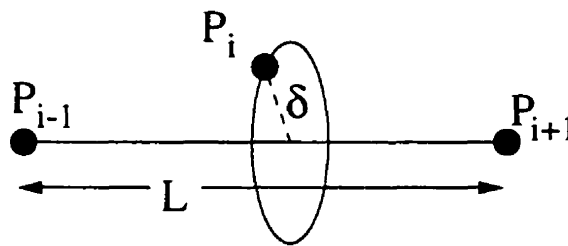


FIG. 2.13: Détection d'un point de contrôle superflu

La figure 2.13 illustre la distance δ séparant un point de contrôle P_i du segment formé par les points de contrôle P_{i-1} et P_{i+1} . Si le rapport $\delta/L < \varepsilon$, où ε est la tolérance, le point de contrôle ne fait pas dévier la courbe de plus de ε en valeur relative, et il peut donc être éliminé.

Le seul détail d'implémentation qui ne doit pas être négligé est le fait qu'il s'agit d'une courbe représentant l'intersection entre deux surfaces, et que de ce fait, le calcul de tolérance doit être effectué non seulement dans l'espace physique (3D), mais aussi

dans l'espace paramétrique de chacune des surfaces. Ce n'est que dans la mesure où le point satisfait à la tolérance dans les trois espaces qu'il peut être éliminé.

2.2.6 Transformations

Comme nous le verrons lors de la description de la méthode de zonage automatique, le mailleur, doit être en mesure de déplacer ou de modifier des courbes et des surfaces afin de fournir un support géométrique à certaines entités topologiques construites automatiquement. Ces modifications ne se font évidemment pas en appliquant une matrice de transformation constante aux points de contrôle, mais comme il s'agit d'opérations agissant uniquement sur la position des points de contrôle, nous les regroupons toutes en une section portant sur les transformations, prises au sens large du terme.

Plusieurs types de transformations se sont avérés utiles au sein du mailleur, et pour chaque type, plusieurs algorithmes sont envisageables, et ont, dans bien des cas, été implémentés. Faire une description exhaustive de tous ces algorithmes de transformation serait sans doute fastidieux et n'apporterait que peu de lumière supplémentaire sur la méthodologie utilisée, nous avons donc choisi de retenir uniquement les quelques algorithmes soit les plus originaux soit les plus utiles, et de mentionner l'existence des autres sans les décrire.

On peut catégoriser les algorithmes de transformation en quelques grandes classes, dont les principales sont :

- les algorithmes de déplacement sous contrainte,
- les algorithmes d'intégration de bords,

- les algorithmes de régularisation.

Chaque type d'algorithme peut s'appliquer soit aux courbes, soit aux surfaces. De plus, les courbes font l'objet d'un traitement différent selon l'espace dans lequel elles sont spécifiées : espace physique 3D, ou espace paramétrique d'une surface.

La catégorie des fonctions de déplacement sous contrainte est certainement celle contenant le plus grand nombre d'algorithmes, et les algorithmes les plus sophistiqués. L'objectif de ce type de fonctions est de construire une nouvelle entité géométrique à partir des points de contrôle d'une entité géométrique originale, d'une fonction de déplacement, et possiblement de contraintes. Afin d'illustrer ces fonctions, nous décrivons ici deux algorithmes, l'un servant à déplacer une courbe exprimée dans l'espace paramétrique d'une surface en restant sur la surface, et l'autre servant à déplacer une surface de façon normale en tenant compte d'une fonction d'épaisseur.

Les fonctions d'intégration de bords permettent, de leur côté, de faire *passer* une entité géométrique de dimension supérieure *par* une entité géométrique de plus petite dimension. Il s'agit donc de faire *passer* une courbe *par* un point, ou une surface *par* une série de courbes. Fondamentalement, durant un processus de subdivision géométrique et topologique, ces fonctions servent à ajuster les nouvelles entités géométriques qui sont créées afin de s'assurer que le modèle géométrique reste parfaitement fermé.

La troisième catégorie regroupe quelques fonctions de régularisation ou de lissage. Ces fonctions, un peu à l'image de la fonction d'élimination des points superflus présentée au § 2.2.5.4, sont invoquées en cours de construction des entités géométriques et servent à lisser ou à éliminer les replis.

2.2.6.1 Déplacement d'une courbe sur une surface

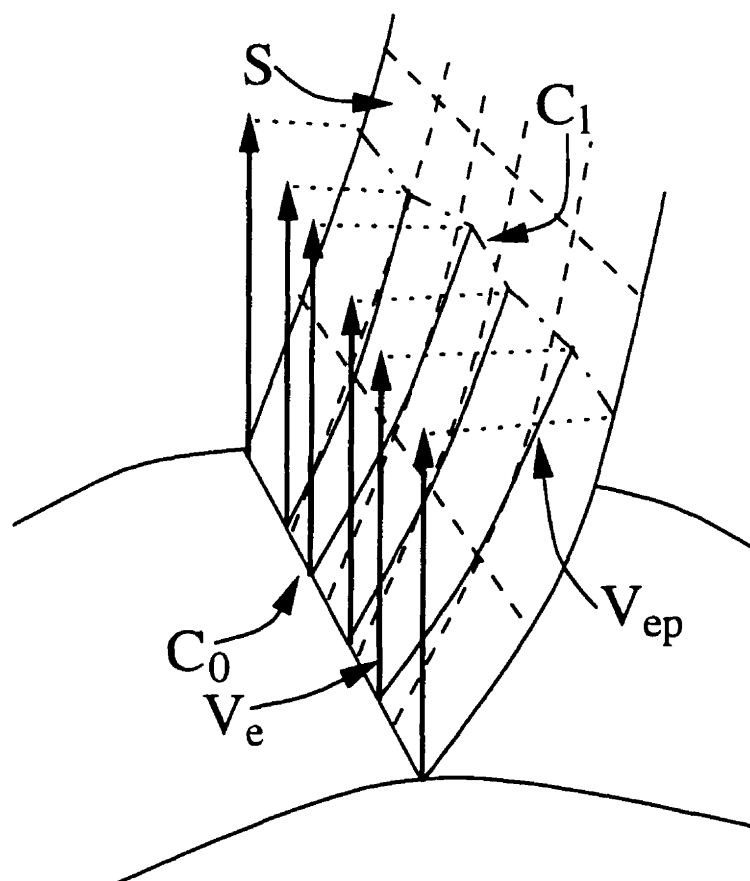


FIG. 2.14: Déplacement d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface

La figure 2.14 illustre le déplacement d'une courbe, définie dans l'espace paramétrique d'une surface, du bord vers l'intérieur de la surface. Tout comme la majorité des algorithmes géométriques présentés jusqu'ici, l'algorithme de déplacement d'une courbe dans l'espace paramétrique d'une surface utilise une représentation discrétisée de la courbe dans sa mise en œuvre. Dans un premier temps, il paraît important de décrire les données fournies en entrée à l'algorithme; tel qu'illustré à la figure 2.14, l'algorithme sert en effet à déplacer la courbe C_0 dans la surface S , mais de façon à ce que la distance de déplacement, une fois projetée sur un vecteur V_e fourni en entrée,

corresponde à une épaisseur spécifiée par une fonction scalaire également fournie en entrée.

Les données nécessaires au déplacement comprennent donc :

- la surface dans laquelle doit se déplacer la courbe,
- la courbe elle-même,
- une structure de données appelée "vecteur d'extrusion" comprenant :
 - une fonction vectorielle (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$), définissant la direction du vecteur le long duquel doit être mesurée la distance de déplacement à partir de tout point de la courbe initiale,
 - une fonction scalaire (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), définissant l'épaisseur du déplacement le long du vecteur pour tout point de la courbe initiale.

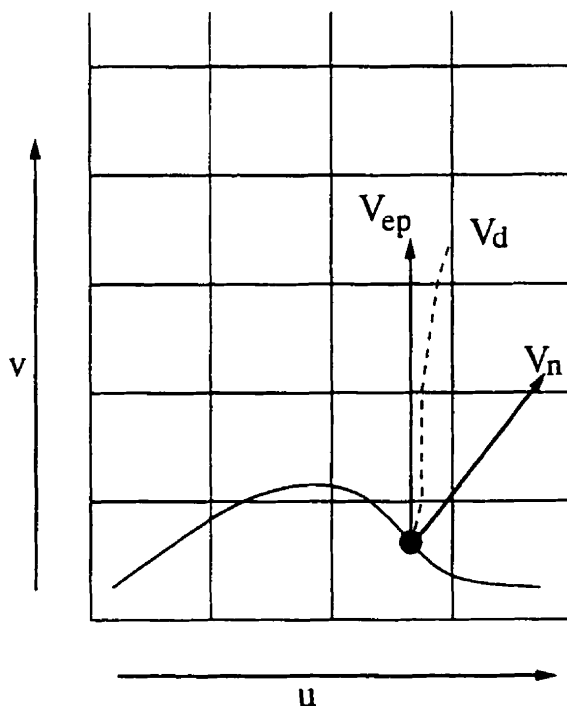


FIG. 2.15: Calcul de la direction de déplacement dans l'espace paramétrique de la surface

Théoriquement, la projection du vecteur V_e , notée V_{ep} à la figure 2.14, devrait suffire à déterminer la direction de déplacement des points de la courbe. En pratique, cependant, il est apparu que dans certains cas, cette projection n'est pas suffisamment fiable, ou n'est tout simplement pas bien définie, la projection peut par exemple sortir de la plage paramétrique de la surface. L'algorithme de déplacement utilise donc une direction V_d , obtenue en combinant V_{ep} et la direction V_n , calculée comme la normale à la courbe dans l'espace paramétrique. Cette combinaison est obtenue à l'aide de la pondération suivante :

$$V_d = \alpha V_{ep} + (1 - \alpha) V_n \quad (2.21)$$

avec α la fiabilité de la projection du vecteur V_e sur la surface, calculée comme le cosinus de l'angle entre V_e et V_{ep} .

L'algorithme de déplacement consiste donc à progresser d'une césure de la surface à l'autre, le long de V_d , en mesurant la distance parcourue dans l'espace physique depuis le départ. Tant que la distance parcourue n'est pas suffisante, à chaque intersection avec une césure de la surface, le vecteur V_e est reprojété, sa fiabilité est évaluée, et un nouveau vecteur V_d est calculé. Tel qu'illustré à la figure 2.15, la trajectoire de déplacement V_d produit une courbe d'ordre 2 dans l'espace paramétrique de la surface. Dès qu'une distance suffisante a été parcourue, la position exacte du nouveau point, correspondant au déplacement demandé, est évaluée en reprojétant le vecteur V_e sur la courbe V_d .

2.2.6.2 Déplacement normal d'une surface

L'algorithme central permettant de réaliser le mailleur par zonage automatique est l'algorithme de déplacement d'une surface. Conceptuellement, c'est cet algorithme

qui fait le lien entre toutes les méthodes de maillage destinées à produire des discrétisations pour les écoulements visqueux. Dans le contexte de notre mailleur par zonage automatique, c'est également cet algorithme qui permet de reconfigurer le mailleur pour passer du domaine du maillage de peau à celui du zonage automatique (voir § 4).

L'objectif de cet algorithme est donc de construire une surface déplacée par rapport à une autre, selon une direction et une distance fournies par l'utilisateur. La solution à ce problème de déplacement est loin d'être unique, et en fait, une grande partie de la recherche sur le maillage hybride cherche spécifiquement à résoudre ce problème dans des contextes particuliers d'application.

Dans notre cas, étant donné que la surface est construite uniquement en vue de supporter ultérieurement la génération de maillage, l'approche proposée consiste à discrétiser la surface originale selon une tolérance définie par l'utilisateur, puis à déplacer la surface ainsi discrétisée.

Le déplacement de la surface discrétisée se fait selon un algorithme s'apparentant fortement à celui de la génération de maillage selon la méthode hyperbolique présenté au § 1.3.1, cependant seule la surface finale est conservée. Tout comme dans le cas de l'algorithme de maillage hyperbolique, la surface ainsi obtenue peut devoir être lissée lorsque le rayon de courbure de la surface est plus petit que la distance de déplacement. Dans le contexte de maillages destinés à des écoulements visqueux, les distances de déplacement sont généralement très faibles, et ce problème n'apparaît que rarement. Par contre, lorsque le même algorithme est utilisé en vue de produire automatiquement des zonages, par exemple afin de supporter un processus de maillage structuré multiblocs, ce problème peut devenir suffisamment important pour forcer

le recours à un autre algorithme de déplacement.

En faisant reposer l'implémentation du mailleur sur une approche orientée-objet, il devient relativement facile de surcharger la méthode de déplacement afin de fournir un autre type d'algorithme si le besoin s'en fait sentir. Toutes les possibilités n'ont cependant pas encore été explorées à ce niveau : tout en restant dans le contexte d'une approche basée sur le découpage topologique, nous pourrions par exemple penser récupérer des algorithmes de déplacement comme l'avance hyperbolique (§ 1.3.1), l'avance de couche (§ 1.3.2) ou les *level sets* (Sethian (1994)) pour construire la surface déplacée.

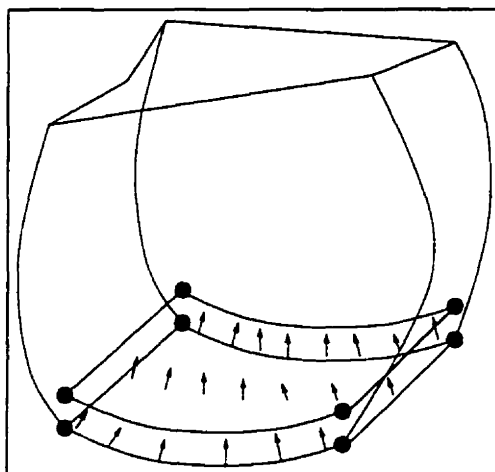


FIG. 2.16: Déplacement d'une surface près d'un coin obtus

Le déplacement d'une surface, tel qu'illustré à la figure 2.16 peut donner naissance à un autre type de problèmes : dans les coins formant des angles obtus, la surface déplacée n'intersecte pas forcément les surfaces adjacentes et doit donc être étendue. En effet, il est essentiel que chaque nouveau volume créé par le processus de subdivision soit fermé, de façon à ce que le modèle géométrique demeure géométriquement et topologiquement valide. Cette observation a suscité entre autre le développement d'un algorithme spécialisés d'extrapolation d'une surface.

2.2.6.3 Extrapolation d'une surface déplacée

Cet algorithme a été développé afin de garantir que les volumes créés par le processus de déplacement soit fermés. Comme nous le verrons au § 3, il est parfois nécessaire d'agrandir une surface déplacée afin de la faire passer par une courbe donnée.

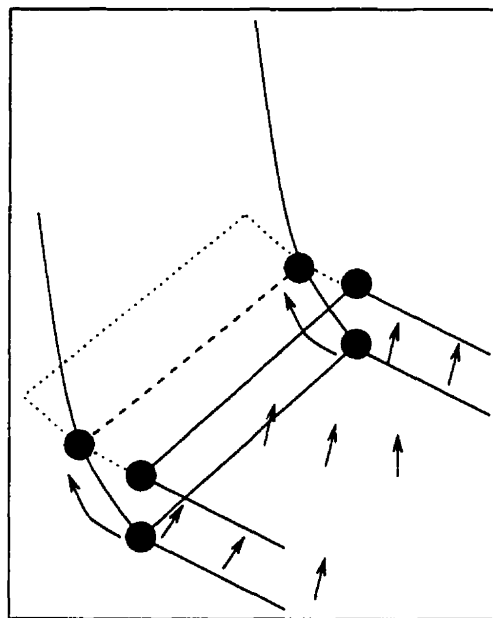


FIG. 2.17: Extrapolation d'une surface déplacée

On peut déterminer si la surface déplacée doit être extrapolée en vérifiant si la projection de la courbe se trouve ou non à l'intérieur de la paramétrisation de la surface. Si ce n'est pas le cas, de nouvelles positions pour les points de contrôle au bord de la surface sont calculées en extrapolant la surface tangentiellement. Ceci nous assure que la surface déplacée originale est complètement contenue à l'intérieur de la surface extrapolée.

2.2.6.4 Lissage d'une surface déplacée

Tel que mentionné au § 2.2.6.2, lorsque la distance de déplacement spécifiée pour une surface dépasse son rayon de courbure, la surface résultante doit être lissée. Dans ce cas, la surface déplacée a en effet tendance à plisser dans les régions de forte courbure ; le rayon de courbure constitue ainsi un bon indicateur permettant d'identifier les régions d'une surface où il peut être nécessaire d'intervenir.

Pour l'instant, les surfaces que l'on suppose plissées sont lissées en diminuant directement leur rayon de courbure. En effet, étant donné que la courbure de la surface en un point est reliée au Hessien de la surface à ce point, le simple fait de moyenner la position du point par rapport à ses voisins diminuera la courbure de la surface. La véritable solution à ce problème, lorsque les distances de déplacement deviennent très grandes, passe par l'utilisation d'un autre algorithme de déplacement des surfaces, tel que discuté au § 2.2.6.2

2.2.7 Fusion d'entités topologiques

Comme nous le verrons au § 4 lors de la présentation des applications, certains modes d'utilisation du mailleur hybride peuvent entraîner la construction, à l'intérieur du domaine de calcul, de zones adjacentes discrétisées avec un même type d'élément. Dans un contexte de génération de maillage a priori et de calcul sur le seul maillage initial, le nombre de zones dans le domaine n'a que très peu d'influence sur le processus de résolution. Par contre, dans un contexte de résolution utilisant le maillage construit par notre mailleur comme point de départ d'une suite de calculs où le maillage est adapté à la solution avant chaque nouveau calcul, le nombre de zone, ou plus

spécifiquement la présence de faces internes peut contraindre inutilement le processus d'optimisation du maillage. Ces faces internes devraient donc être éliminées dans la mesure du possible.

Par ailleurs, toujours en vue de faciliter l'insertion de nos maillages dans un processus général de résolution (comprenant entre autre l'optimisation du maillage), une attention particulière a été portée, lors de l'implémentation du mailleur, au maintien d'une information cohérente décrivant la relation entre les entités topologiques et leur discrétisation. Durant toute l'exécution du mailleur, chaque entité conserve la liste des sommets et des éléments qui la discrétisent, et lors de la sauvegarde finale du maillage, chaque sommet et chaque zone du maillage conserve une relation vers l'entité topologique qu'ils servent à discrétiser.

C'est afin, d'une part, d'éliminer les contraintes qu'impose la présence de faces ou d'arêtes internes entre des zones discrétisées avec un même type d'éléments et, d'autre part, de maintenir la cohérence des relations entre les sommets de maillage et les entités topologique, que nous avons développé un outil permettant de fusionner des entités topologiques et de mettre à jour les données du maillage correspondant. Ironiquement, cet outil de fusion peut donc servir, en quelque sorte, à défaire ce que le processus de zonage automatique accomplit. La pertinence de l'ensemble de cette démarche ne fait cependant aucun doute dans notre esprit, dans la mesure où la fusion se fait souvent entre des zones adjacentes issues de la partition de volumes initialement distincts, et étant donné que le processus de zonage et de fusion répondent à des objectifs complémentaires mais distincts. Tous le processus de zonage automatique est en effet conçu pour fournir un contrôle maximum sur la génération du maillage initial, alors que la fusion est conçue pour faciliter la transition entre le mode de résolution initial et la résolution au sein d'un processus adaptatif.

Sur le plan technique, l'outil de fusion des entités topologiques ne fait appel à aucun algorithme particulièrement novateur, si ce n'est l'utilisation intensive de toutes les techniques de recherche, de sélection ou de mise à jour de structures de données en arbre. Sur le plan des structures de données, et comme l'illustre éloquemment la figure 2.3, les relations entre les différentes entités topologiques d'un modèle forment en effet un arbre.

L'algorithme de fusion consiste en fait à considérer, pour chacune des zones d'une liste de zone à fusionner, l'entité topologique qui lui est associée, puis à identifier, dans l'arbre des relations, les entités topologiques de dimension inférieure partagées par au moins deux des entités à fusionner. Lorsqu'une telle entité partagée est trouvée, les deux entités partageant cette entité peuvent être fusionnées et l'entité partagée peut être éliminée. Par exemple, dans le cas d'un maillage 3D, chaque zone est associée à un volume ; si les volumes de deux zones partagent une face, les deux volumes peuvent être fusionnés en un seul, et la face interne peut être éliminée.

L'algorithme de fusion va cependant plus loin, il tente en effet d'éliminer non seulement les entités topologiques directement partagées entre deux zones, mais également les entités de plus petite dimension au bord de ces entités partagées. Par exemple, dans le cas de la fusion de deux volumes, l'élimination de la face interne produit un volume dans lequel certaines arêtes et certains sommets pourraient peut-être être éliminés. Si deux faces du nouveau volume reposent sur la même surface, l'arête séparant ces deux faces peut être enlevée, et une nouvelle face formée à partir des deux anciennes. Il en va de même pour deux arêtes reposant sur la même courbe, qui peuvent être réunies en une seule par l'élimination d'un sommet.

Durant tout le processus de fusion des entités topologiques, l'outil doit s'assurer de

construire une table de traduction dans laquelle chaque entité éliminée est enregistrée ainsi que l'entité qui la remplace. Cette table est utilisée, une fois le processus de fusion complété, pour mettre à jour les relations entre le maillage et les nouvelles entités topologiques du modèle géométrique.

Chapitre 3

Génération de maillages hybrides

La démarche proposée pour la génération de maillages hybrides repose principalement sur des principes de zonage automatique, s'apparentant fortement à ceux utilisés pour la génération de maillage multi-blocs structurés (Shaw et Weatherill (1992); Noble et Cordova (1992)). L'originalité de la méthode tient non seulement au fait qu'elle fait apparaître explicitement la frontière entre les mailles semi structurées et non structurées, mais également au fait que ces zones semi structurées et non structurées sont d'abord générées comme des entités géométriques, qui sont ensuite maillées. De plus, notre méthode s'appuie sur une représentation des modèles à mailler comprenant tant une description géométrique que topologique des frontières (§ 2). À l'opposé, toutes les approches recensées jusqu'ici font appel à des techniques ne modifiant que le processus de génération de maillage, et qui ne recourent à aucune forme d'opération géométrique ou topologique pour la construction du maillage près des parois solides. Qu'il s'agisse de techniques d'avance hyperbolique comme celles proposées par Kallinderis et al. (1995) ou Chappel et al. (1996), ou de techniques d'avances de couches comme celles de Pirzadeh (1996) ou Connell et Braaten (1994), toutes ces techniques

font apparaître les couches minces d'éléments près des parois comme une particularité du processus de maillage.

Par contre, notre représentation moderne du domaine à mailler permet de décomposer le problème de la génération d'un maillage hybride en trois classes d'actions complètement distinctes :

- les opérations topologiques
- les opérations géométriques
- les opérations de discrétisation

Globalement, la méthode que nous proposons consiste à partitionner le domaine de calcul en régions distinctes, maillables chacune séparément, tout en respectant les interfaces entre les zones de manière à assurer la continuité du maillage d'une zone à l'autre si nécessaire. Chaque nouvelle zone est issue du déplacement d'une frontière du domaine vers l'intérieur. Étant donné que cette définition des régions – structurées ou semi structurées près des parois, et non structurées dans le reste du domaine – est faite a priori, avant toute opération de maillage, on peut l'assimiler à un processus classique de zonage.

La partition se fait automatiquement, mais l'utilisateur contrôle le processus de croissance des zones, en indiquant au mailleur la liste des frontières qui doivent donner naissance nouvelles aux zones. Chaque zone peut ensuite être maillée selon un algorithme choisi par l'utilisateur, qui conserve ainsi le contrôle non seulement sur le processus de construction des zones structurées, mais également sur tous les aspects de génération du maillage dans chaque zone.

Cette méthode de génération de maillages hybrides permet de prévoir de façon systématique les algorithmes de résolution des conflits entre les zones structurées issues,

par exemple, de parois adjacentes, et même, dans certains cas, de donner le choix à l'utilisateur parmi plusieurs solutions. À la base, il s'agit donc d'une méthode basée sur des opérations topologiques appliquées directement au modèle géométrique, qui permet de construire des faces en 2D et des volumes en 3D. La définition des zones structurées du maillage reste ainsi un attribut géométrique du domaine, et non, comme dans les approches publiées précédemment (Kallinderis et al. (1995); Pirzadeh (1996)), une propriété intrinsèque du maillage. Dans toutes les autres approches recensées (voir § 1), les zones structurées sont définies indirectement par le processus de maillage lui-même, ce qui ne laisse à l'utilisateur que peu de contrôle sur la discrétisation de ces zones.

Notre démarche de génération de maillage se décompose en trois types d'opérations, topologiques, géométriques et de discrétisation. Alors que les opérations topologiques et géométriques se combinent au sein d'un algorithme passablement élaboré (§ 3.1.2), les opérations de discrétisation sont, quant à elles, enclenchées à la toute fin du processus de maillage, lorsque le modèle géométrique a été enrichi de toute l'information de zonage. Techniquement, le processus de maillage se décompose donc en deux phases distinctes :

1. une phase de zonage automatique,
2. une phase de discrétisation des zones.

La phase de zonage automatique constitue l'une des contributions majeures de cette recherche, dans la mesure où aucune publication connue ne présente ce type d'opération appliquée à la génération de maillage. C'est aussi de loin la phase la plus complexe, puisqu'une fois cette première phase accomplie, toute l'information nécessaire à la discrétisation des entités a été regroupée et traitée de façon à être accessible directement. La tâche principale de la phase de zonage automatique est d'enrichir

un domaine de calcul, spécifié sous la forme d'un modèle géométrique initial, par la construction de volumes internes qui fourniront le support nécessaire à la phase subséquente de discrétisation. Une prémisses au bon fonctionnement de la phase de zonage est la spécification d'un modèle initial qui soit à la fois géométriquement et topologiquement valide.

3.1 Zonage automatique

3.1.1 Structure de données

L'algorithme de zonage automatique, à la base de l'approche de maillage hybride proposée, repose sur la construction dynamique d'une structure de données capable de représenter le modèle géométrique à chaque étape du processus de subdivision. Cette structure de données, implémentée sous forme d'une série de classes C++, complète et augmente les classes de base construites pour représenter les entités topologiques décrites au § 2.1.2. Sans entrer dans les détails informatiques de la description de ces classes, une présentation générale de ces structures permettra de mieux saisir la généralité et l'extensibilité de l'approche proposée.

Tel que décrit au § 2.1.2, une entité topologique sert à définir deux types de relations :

- une relation reliant une entité topologique à une entité géométrique
- une relation reliant une entité topologique de dimension supérieure à des entités topologiques de dimension inférieure.

Dans le contexte du mailleur hybride, cette information n'est pas suffisante pour le processus de zonage automatique. Elle est donc enrichie de façon à stocker d'une part

l'information qui résultera du processus de discrétisation, et d'autre part l'information nécessaire au processus de partition. C'est cette deuxième catégorie de données qui sera maintenant décrite.

On peut imaginer le procédé de zonage automatique comme un processus de déplacement de certaines frontières vers l'intérieur du domaine de calcul. Durant ce processus de déplacement, chaque entité balaie l'espace en subdivisant le domaine initial en sous-domaines bornés par de nouvelles entités géométriques. Les structures de données enrichies doivent donc être en mesure de conserver, entre autre, des relations vers les nouvelles entités topologiques de même dimension, construite lors du déplacement des entités topologiques originales. Le processus de déplacement construit également des entités topologiques auxiliaires pour toutes les entités reposant au bord d'une entité déplacée ; les structures de données enrichies doivent donc stocker aussi ces entités auxiliaires. Finalement, lorsque le processus de zonage est complété, le domaine initial a donné naissance à un ou plusieurs sous-domaines issus du déplacement des frontières, et à un sous-domaine complément, constitué de la portion restante du domaine initial duquel ont été retranché tous les nouveaux sous-domaines. Tous les nouveaux sous-domaines et le sous-domaine complément sont bien sûr toujours de la même dimension que le domaine initial, et leur union couvre entièrement et uniquement le domaine initial. Le domaine complément doit donc être représenté à l'aide d'une entité topologique, qui est conservée, elle aussi, dans la structure de données enrichie.

Les données supplémentaires à stocker durant le processus de zonage, pour une entité topologique donnée, se divisent ainsi en deux catégories :

- les données décrivant les transformations subies par les entités topologiques formant le bord d'une entité topologique donnée,

- la relation de l'entité topologique originale vers son complément.

Les classes servant à décrire les transformations subies par les entités topologiques au bord d'une entité topologique de dimension supérieure sont collectivement désignées par le terme de *mue*. Chaque entité topologique est enrichie afin de stocker les mues pour chaque type d'entité de dimension inférieure formant son bord. Des classes spécialisées ont été définies pour chaque type d'entité topologique. Le tableau 3.1 présente la nomenclature des classes de base servant à stocker l'information sur les transformations; chaque classe est complétée par une ou plusieurs sous-classes permettant de tenir compte des différentes configurations topologiques rencontrées en cours de traitement.

entité transformée	mues stockées dans une arête	mues stockées dans une face	mues stockées dans un volume
sommet	MUE1D_SOMMET	MUE2D_SOMMET	MUE3D_SOMMET
arête		MUE2D_ARETE	MUE3D_ARETE
face			MUE3D_FACE

TAB. 3.1: Nomenclature des classes de base des mues

Les frontières à déplacer sont identifiées par l'utilisateur sous la forme d'une liste d'entités topologiques du bord du modèle initial. Dans le cas d'un modèle géométrique à n dimensions, les entités déplacées sont des entités de dimension $n - 1$ ou moins. Par exemple, en 3D, ce sont les faces, et accessoirement les arêtes et les sommets qui sont déplacés. Dans le cas d'un modèle tridimensionnel, une fonction spécifiant la direction et l'amplitude du déplacement est associée uniquement aux faces qui se déplacent, mais toutes les entités présentes dans la liste des bords à déplacer engendrent un volume. Cette approche, où l'utilisateur spécifie explicitement les entités topologiques qui doivent engendrer des volumes, offre un plein contrôle sur le processus de zonage. Elle constitue par ailleurs un mode de spécification cohérent et simple à maîtriser, qui peut s'automatiser facilement.

3.1.2 Algorithme général de zonage automatique

dimension	type d'entité	entité originale	entité déplacée	entité complément
0	sommet	Σ_i	Σ'_i	Σ_i^*
1	arête	Γ_j	Γ'_j	Γ_j^*
2	face	Ω_k	Ω'_k	Ω_k^*
3	volume	Π_l		

TAB. 3.2: Notation utilisée pour désigner les entités topologiques

Dans la notation présentée au tableau 3.2, les lettres grecques indiquent le type de l'entité topologique (sa dimension), et les indices la position d'une entité parmi une liste ordonnée d'entités semblables. L'algorithme de zonage automatique d'un modèle tridimensionnel se présente schématiquement, pour chaque volume Π_l qui doit être partitionné, sous la forme suivante :

1. Pour chaque face Ω_k , sur le bord de Π_l :
 - (a) Allouer et conserver dans Π_l , la *MUE3D_FACE* de Ω_k , construire Ω'_k ,
 - (b) Allouer et conserver dans les faces voisines de Ω_k , la *MUE2D_ARETE* de chaque arête de Ω_k ,
 - (c) Allouer et conserver dans les arêtes perpendiculaires à Ω_k , la *MUE1D_SOMMET* de chaque sommet de Ω_k .
2. Pour chaque arête Γ_j , sur le bord de Π_l :
 - (a) Allouer et conserver dans Π_l , la *MUE3D_ARETE* de Γ_j , construire Γ'_j
 - (b) Si nécessaire, allouer et conserver dans Ω'_k , la *MUE2D_ARETE* de Γ_j .
3. Pour chaque sommet Σ_i , sur le bord de Π_l :
 - (a) Allouer et conserver dans Π_l , la *MUE3D_SOMMET* de Σ_i , construire Σ'_i
 - (b) Si nécessaire, allouer et conserver dans Ω'_k , la *MUE2D_SOMMET* de Σ_i ,

- (c) Si nécessaire, allouer et conserver dans Γ'_j , la $MUEID_SOMMET$ de Σ_i .
-

4. Pour chaque sommet Σ_i , stocké dans Π_l :
 - (a) Si Σ_i engendre un volume, créer le volume et le connecter
 - (b) Si Σ_i engendre une face, créer la face et la connecter
 - (c) Si Σ_i engendre une arête, créer l'arête et la connecter
5. Pour chaque arête Γ_j stockée dans Π_l :
 - (a) borner Γ_j en se servant de l'information construite pour les Σ_i
 - (b) Si Γ_j engendre un volume ou une face :
 - borner Γ'_j en se servant de l'information construite pour les Σ_i
 - (c) Si Γ_j engendre un volume, créer le volume et le connecter
 - (d) Si Γ_j engendre une face, créer la face et la connecter
6. Pour chaque face Ω_k stockée dans Π_l :
 - (a) borner Ω_k en se servant de l'information construite pour les Γ_j
 - (b) Si Ω_k engendre un volume
 - borner Ω'_k en se servant de l'information construite pour les Γ_j
 - créer le volume et le connecter
7. borner Π_l en se servant de l'information construite pour les Ω_k

Cet algorithme se subdivise en deux phases. La première phase, couvrant les étapes (1) à (3), consiste à parcourir la hiérarchie des entités topologiques associées à un volume, des entités de dimension supérieure vers les entités de dimension inférieure. Durant cette première étape, l'information de déplacement, associée aux entités de dimension supérieure, est transmise vers le bas de la hiérarchie. Cette étape permet

à chaque entité de chaque niveau de connaître précisément le type de configuration topologique dans laquelle elle est impliquée, et d'allouer la bonne classe de mue, selon les besoins précis du zonage à construire. Une fois cette première phase franchie, toute l'information topologique et géométrique nécessaire au zonage est construite.

La seconde phase de l'algorithme, couvrant les étapes (4) à (7), consiste à remonter la hiérarchie des entités topologiques et à connecter et fermer les entités topologiques de dimension supérieure à l'aide de l'information construite lors de la descente.

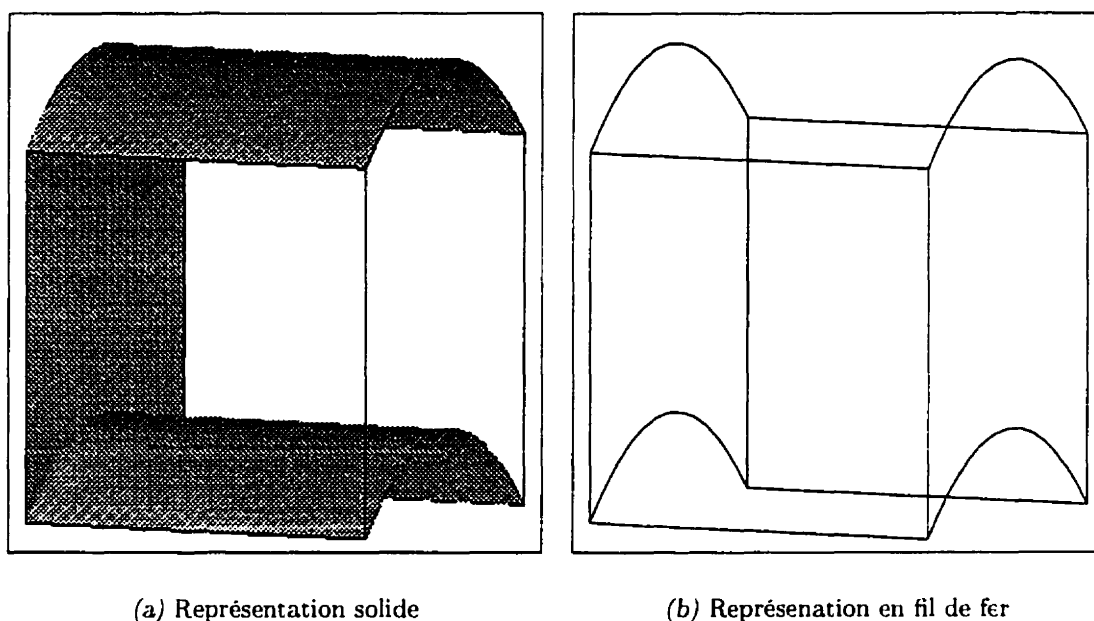


FIG. 3.1: Volume initial d'un canal qui sera subdivisé par zonage automatique

Afin d'illustrer le processus de zonage en terme des transformations appliquées aux différentes entités topologiques, nous présentons ici le détail des opérations de subdivision d'un volume simple. Cet exemple servira de base de discussion pour décrire, dans le reste du chapitre, chacune des étapes des algorithmes tant bidimensionnels que tridimensionnels. La figure 3.1 montre le volume initial à subdiviser ; il s'agit d'un

canal à section carrée, dont le plancher et le plafond sont courbés.

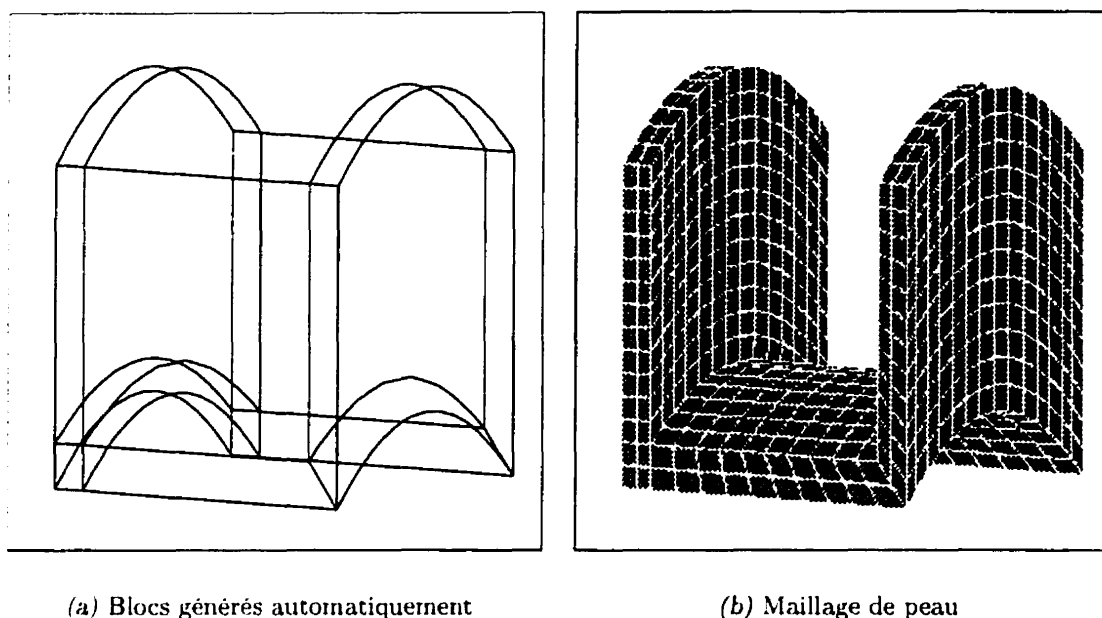


FIG. 3.2: Zonage avec trois faces et une arête déplacées

Trois faces représentant chacune une paroi solide du canal sont déplacées vers l'intérieur du domaine de façon à produire une couche mince d'éléments concentrés là où l'on s'attend à observer une couche limite visqueuse dans l'écoulement. Normalement, dans ce type de composantes, toutes les faces reposant sur des parois solides seraient déplacées, y compris la face reposant au plafond du canal, mais nous avons choisi de ne pas déplacer la face du plafond afin de montrer quelques configurations topologiques supplémentaires. Pour les mêmes raisons, l'une des arêtes joignant la face du plancher à l'une des faces de côté engendre un nouveau volume, alors que l'arête joignant le plancher à l'autre côté n'en engendre pas.

Une vue globale des blocs produits par le processus de zonage automatique est présentée à la figure 3.2a, et le maillage de peau résultant est illustré à la figure 3.2b.

3.1.3 Zonage bidimensionnel

Avant d'examiner plus en détails le processus de zonage en trois dimensions, considérons sa restriction au cas bidimensionnel. La figure 3.3b présente le résultat du zonage du canal obtenu en ne considérant que la face de sortie. La trace du nouveau zonage tridimensionnel subdivise en effet la face initiale de sortie en cinq nouvelles faces. Trois de ces faces proviennent du déplacement, dans la face initiale, de trois arêtes bornant les faces déplacées en 3D, l'une provient du déplacement d'un sommet, alors que la cinquième est construite comme le complément des quatre premières.

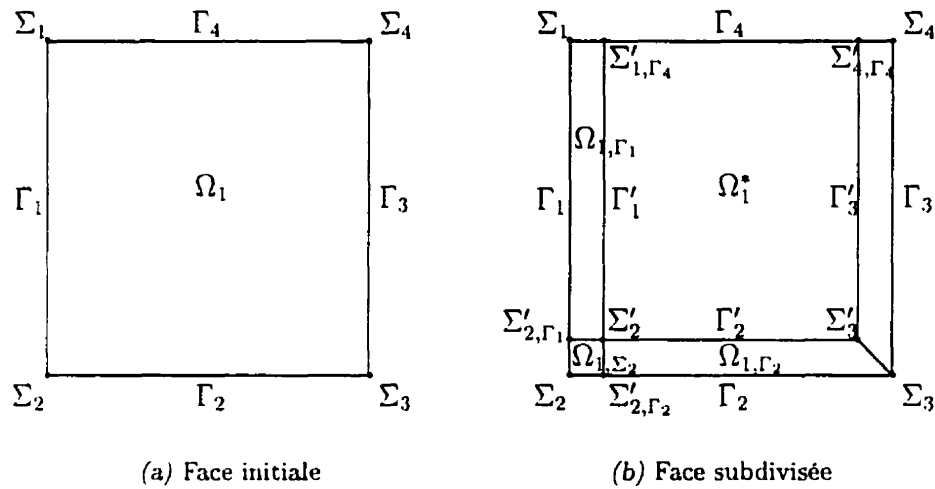


FIG. 3.3: Zonage automatique de la face de sortie du canal

En terme de la notation présentée au tableau 3.2, la face Ω_1 est bornée par une série d'arêtes Γ_j ($j = 1 \dots 4$), et ces arêtes se rencontrent en une série de sommets Σ_i ($i = 1 \dots 4$) (Fig. 3.3a). Chaque entité topologique bornant la face peut être inscrite ou non dans la liste des entités à déplacer. Dans le cas d'entités 2D représentant la trace d'entités 3D, ce choix s'exerce en 3D, et les entités 2D héritent automatiquement des caractéristiques de déplacement de leurs parents tridimensionnels. Spécifiquement,

dans le cas de la face de sortie du canal courbé, l'utilisateur n'a pas directement choisi de déplacer les arêtes bornant cette face, mais il a plutôt choisi de déplacer trois des faces adjacentes à la face de sortie, qui ont entraîné les arêtes dans leur déplacement.

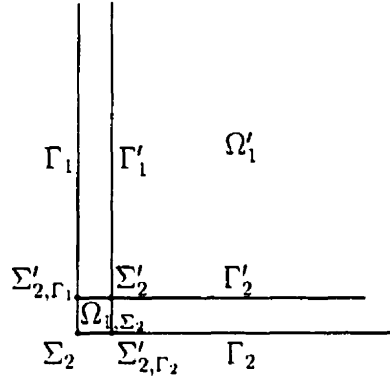


FIG. 3.4: Déplacement d'un sommet dans une face

Alors qu'en 2D le sens de ce choix est évident pour les arêtes, il n'en va pas exactement de même pour les sommets. En effet, on entend par *déplacer* une entité topologique, l'action de créer une nouvelle entité topologique résultant de la partition de l'entité topologique originale, et de conserver dans l'entité originale la portion complément résultant de cette partition. Toutes les entités créées par ce processus ont la même dimension que l'entité topologique originale, c'est-à-dire que les entités topologiques de plus petite dimension se trouvant aux différentes interfaces ne sont pas considérées. Dans ce contexte, le déplacement d'un sommet aura un sens dans la mesure où les deux arêtes se rencontrant à ce sommet sont aussi déplacées, ce qui donnera naissance à la nouvelle configuration illustrée à la figure 3.4.

Nous reprenons ici les étapes centrales (étapes (2) à (6)) de l'algorithme présenté à la section précédente en les limitant aux opérations 2D, afin d'illustrer leur application à la configuration de la face de sortie :

1. Pour chaque arête Γ_j :
 - (a) Si nécessaire, allouer et conserver dans Ω'_k , la *MUE2D_ARETE* de Γ_j .
2. Pour chaque sommet Σ_i :
 - (a) Si nécessaire, allouer et conserver dans Ω'_k , la *MUE2D_SOMMET* de Σ_i ,
 - (b) Si nécessaire, allouer et conserver dans Γ'_j , la *MUE1D_SOMMET* de Σ_i .
3. Pour chaque sommet Σ_i :
 - (a) Si Σ_i engendre une face, créer la face et la connecter
 - (b) Si Σ_i engendre une arête, créer l'arête et la connecter
4. Pour chaque arête Γ_j :
 - (a) borner Γ_j en se servant de l'information construite pour les Σ_i
 - (b) Si Γ_j engendre une face :
 - borner Γ'_j en se servant de l'information construite pour les Σ_i
 - créer la face et la connecter
5. Pour chaque face Ω_k :
 - (a) borner Ω_k en se servant de l'information construite pour les Γ_j

Nous allons maintenant décrire chaque étape en terme d'opérations topologiques de base, en utilisant $\mathcal{B} = \{ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Sigma_2 \}$, l'ensemble des entités topologiques bornant la face qui doivent être déplacées.

3.1.3.1 Déplacement des arêtes

La première étape dans l'algorithme de déplacement 2D consiste à parcourir la liste des arêtes de la face, en vérifiant pour chacune si elle doit être déplacée ou non.

Lorsqu'elle doit être déplacée, deux nouveaux sommets sont construits, reposant respectivement sur l'arête précédente et suivante de la boucle, et une nouvelle arête est construite et limitée par les deux nouveaux sommets (Fig. 3.5). La courbe supportant l'arête déplacée est construite en même temps, à l'aide de l'algorithme présenté au § 2.2.6.1, et la position des sommets sur les courbes adjacentes est déterminée grâce à l'algorithme de la section 2.2.2.5 ; les positions des sommets sont par ailleurs explicitement intégrées à la courbe, afin de s'assurer que l'arête repose bien sur une courbe reliant les deux sommets.

À la figure 3.5 et dans le reste de ce chapitre, chaque nouveau sommet est identifié par l'identificateur du sommet original, auquel on ajoute, dans l'indice, l'identificateur de l'entité topologique sur laquelle il s'est déplacé (dans ce cas-ci une arête), et le symbole ' (prime) pour indiquer le déplacement. Σ_i devient, par exemple, Σ'_{i,Γ_j} s'il se déplace sur Γ_j ou $\Sigma'_{i,\Gamma_{j+1}}$ s'il se déplace sur Γ_{j+1} .

Toute l'information ainsi construite est stockée dans un objet d'une classe dérivée de la classe de base *MUE2D_ARETE*, conservé au niveau de la face.

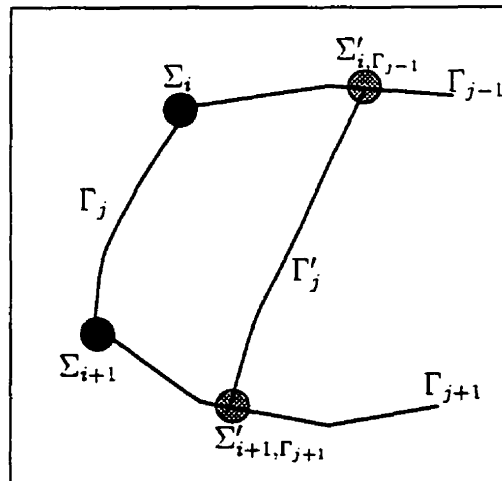


FIG. 3.5: Déplacement de l'arête Γ_j

Formellement, nous avons :

$\forall \Gamma_j \in \mathcal{B}$

1. construire Σ'_{i,Γ_j-1} .
2. construire Σ'_{i+1,Γ_j+1} .
3. construire Γ'_j .
4. borner Γ'_j avec Σ'_{i,Γ_j-1} et Σ'_{i+1,Γ_j+1} .

Dans le cas de la face de sortie illustrée à la figure 3.3, les arêtes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 sont déplacées pour former les arêtes Γ'_1 , Γ'_2 et Γ'_3 , qui sont respectivement connectées temporairement aux sommets Σ'_{1,Γ_4} et Σ'_{2,Γ_2} , Σ'_{2,Γ_1} et Σ'_{3,Γ_3} (non illustré), et Σ'_{3,Γ_2} (non illustré) et Σ'_{4,Γ_4} .

3.1.3.2 Déplacement des sommets

La seconde étape de l'algorithme bidimensionnel consiste à boucler sur tous les sommets Σ_i , et à déterminer, pour chaque sommet, la nouvelle configuration topologique qui lui est associée. Selon que les deux arêtes connectées au sommet ont été déplacées ou non, et selon que le sommet lui-même doit être déplacé ou non, on peut distinguer quatre cas, tel qu'illustrés à la figure 3.6.

Dans les deux premiers cas (3.6a et 3.6b), où une seule des deux arêtes a été déplacée, et donc où le sommet n'est pas déplacé dans la face, l'arête fixe est divisée en deux par un nouveau sommet placé sur cette arête. Une structure de données appropriée d'un type dérivé de la classe *MUE2D_SOMMET* est allouée et stockée dans la face pour indiquer le type de configuration topologique associé au sommet. L'arête fixe est également mise à jour de façon à contenir un objet d'une classe dérivée de

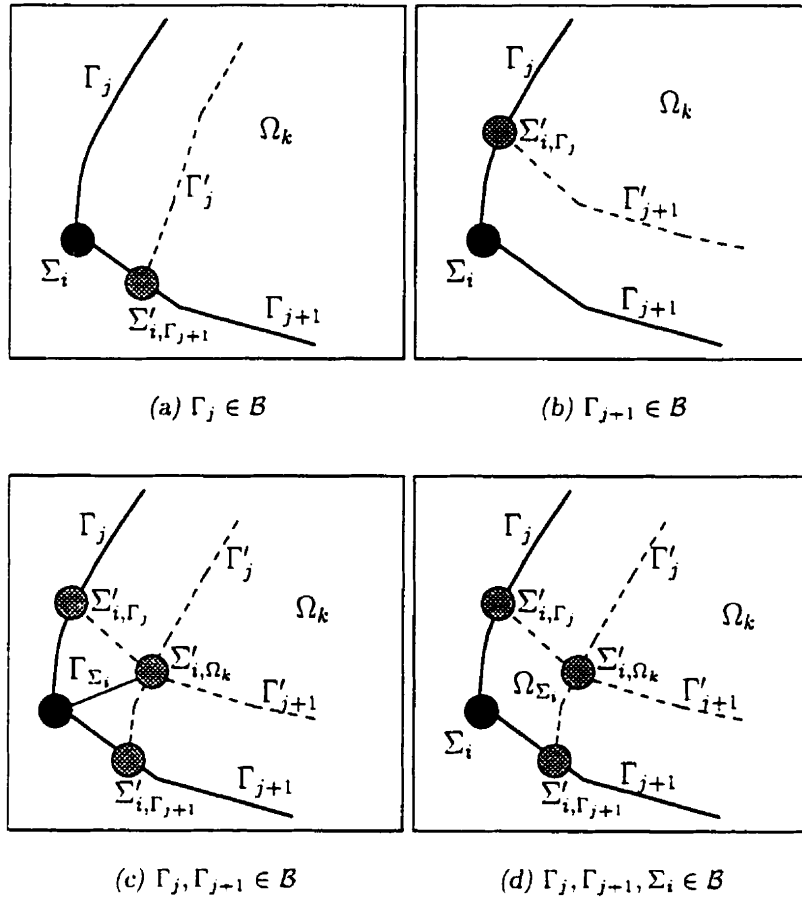


FIG. 3.6: Quatre configurations pour le déplacement du sommet Σ_i

MUE1D_SOMMET indiquant la subdivision. Enfin, l'arête déplacée est mise à jour pour indiquer que le sommet, pour elle, n'est pas déplacé.

Dans les deux autres cas (3.6c et 3.6d), les deux arêtes sont déplacées, et trois nouveaux sommets doivent être considérés. Un sommet déplacé est identifié sur chaque arête (Σ'_{i,Γ_j} et $\Sigma'_{i,\Gamma_{j+1}}$), et un nouveau sommet Σ'_{i,Ω_k} , associé à la face, est construit à l'intersection des arêtes Γ'_j et Γ'_{j+1} (intersection de courbes, § 2.2.5.1). Comme dans les deux premiers cas, chaque entité topologique de dimension supérieure doit être mise à jour, afin de conserver l'information qui lui est pertinente au sujet de la

nouvelle configuration topologique : la face est mise à jour pour conserver le type approprié de *MUE2D_SOMMET*, déterminé en considérant si le sommet forme une arête (cas 3.6c) ou une nouvelle face (cas 3.6d).

Dans le cas de la face de sortie illustrée à la figure 3.3, les quatre sommets de la face sont déplacés pour former chacun l'une des quatre configurations présentées : Σ_1 est placé dans la configuration 3.6b, Σ_2 dans la configuration 3.6d, Σ_3 dans la configuration 3.6c, et Σ_4 dans la configuration 3.6a,

À cette étape de l'algorithme, toute l'information de configuration des entités topologiques a été passée des entités de dimension supérieure vers les entités de dimension inférieure, et le rôle de chaque entité dans la nouvelle topologie est déterminé. La direction de propagation de l'information va maintenant s'inverser : la suite de l'algorithme *remonte* l'information des entités de dimension inférieure vers les entités de dimension supérieure, en reconnectant toutes les entités. Pour l'instant, toutes les entités déplacées ont été construites, il faut maintenant les connecter les unes aux autres.

3.1.3.3 Connexion des sommets

Après la construction des entités déplacées et des configurations topologiques, il reste à construire certaines entités de reconnexion, propre à chaque configuration.

Pour les sommets, la tâche de reconnexion consiste à construire les entités topologiques de dimension supérieure issue directement des déplacements du sommet lui-même. Par exemple, pour les cas illustrés en 3.6a et 3.6b, une nouvelle arête doit être construite, entre le sommet original et le sommet déplacé.

Dans le cas des configurations 3.6c et 3.6d, deux arêtes reliant Σ_i à Σ'_{i,Γ_j} et $\Sigma'_{i,\Gamma_{j+1}}$ doivent être construites. De plus, dans le cas 3.6c il faut construire l'arête Γ_{Σ_i} , alors que dans le cas 3.6d, deux arêtes supplémentaires reliant Σ'_i à Σ'_{i,Γ_j} et $\Sigma'_{i,\Gamma_{j+1}}$ et la face Ω_{Σ_i} peuvent immédiatement être construites.

3.1.3.4 Connexion des arêtes

La quatrième étape consiste à rassembler l'information sur les arêtes construites lors des trois étapes précédentes afin de construire la boucle externe de chaque nouvelle face. L'algorithme peut se résumer comme suit :

$\forall \Gamma_j \in \mathcal{B}$ construire une nouvelle boucle :

1. insérer Γ_j dans la boucle,
2. interroger Σ_i afin de connaître le véritable Γ_{j+1} et l'insérer dans la boucle,
3. insérer Γ'_i dans la boucle,
4. interroger Σ'_{i-1} afin de connaître le véritable Γ_{j-1} et l'insérer dans la boucle.

Cette étape permet de construire toutes les faces Ω_{Γ_j} associées aux arêtes déplacées.

3.1.3.5 Connexion de la face

La dernière étape de l'algorithme de déplacement en 2D consiste à construire la nouvelle face qui est le complément, dans la face originale, de toutes les faces construites par le processus de déplacement. Cette face, identifiée par Ω^* à la figure 3.3b est construite en interrogeant toutes les arêtes des boucles de la face originale, et en insérant les arêtes elles-mêmes si elles n'ont pas été déplacées, ou leur arête déplacée si elles l'ont été.

3.1.4 Retour sur l'algorithme en trois dimensions

Si nous réexaminons l'algorithme de la section § 3.1.2 à la lumière de la discussion sur le cas bidimensionnel, nous pouvons constater que l'algorithme bidimensionnel constitue en fait le cœur de l'algorithme général de zonage. Essentiellement, l'algorithme général consiste à encadrer l'algorithme bidimensionnel par une étape préalable de déplacement de faces, et une étape subséquente de connexion du volume. Chaque étape de l'algorithme doit également tenir compte de l'impact du processus de division non plus simplement sur la face, mais aussi sur le volume ; en trois dimensions, un niveau supplémentaire de structures de données doit donc être maintenu au niveau du volume, pour qu'à la fin du processus de zonage, toutes les nouvelles coquilles puissent être reconnectées.

Sans reprendre le détail de chaque étape pour le cas tridimensionnel, nous compléterons notre discussion sur l'algorithme général de zonage par une description des deux étapes qui lui sont propres.

3.1.4.1 Déplacement des faces

Sur le plan topologique, la première phase de l'algorithme tridimensionnel, qui consiste à déplacer chaque face identifiée par l'utilisateur ne présente pas de difficulté particulière. Sur le plan géométrique, cependant, cette étape constitue certainement la partie la plus complexe de la mise en œuvre de l'algorithme de zonage. L'origine de cette complexité réside dans la nécessité non seulement de déplacer la face, mais de le faire en s'assurant que la nouvelle face insérée rejoigne les faces adjacentes à la face déplacée, de façon à former un nouveau volume qui soit fermé.

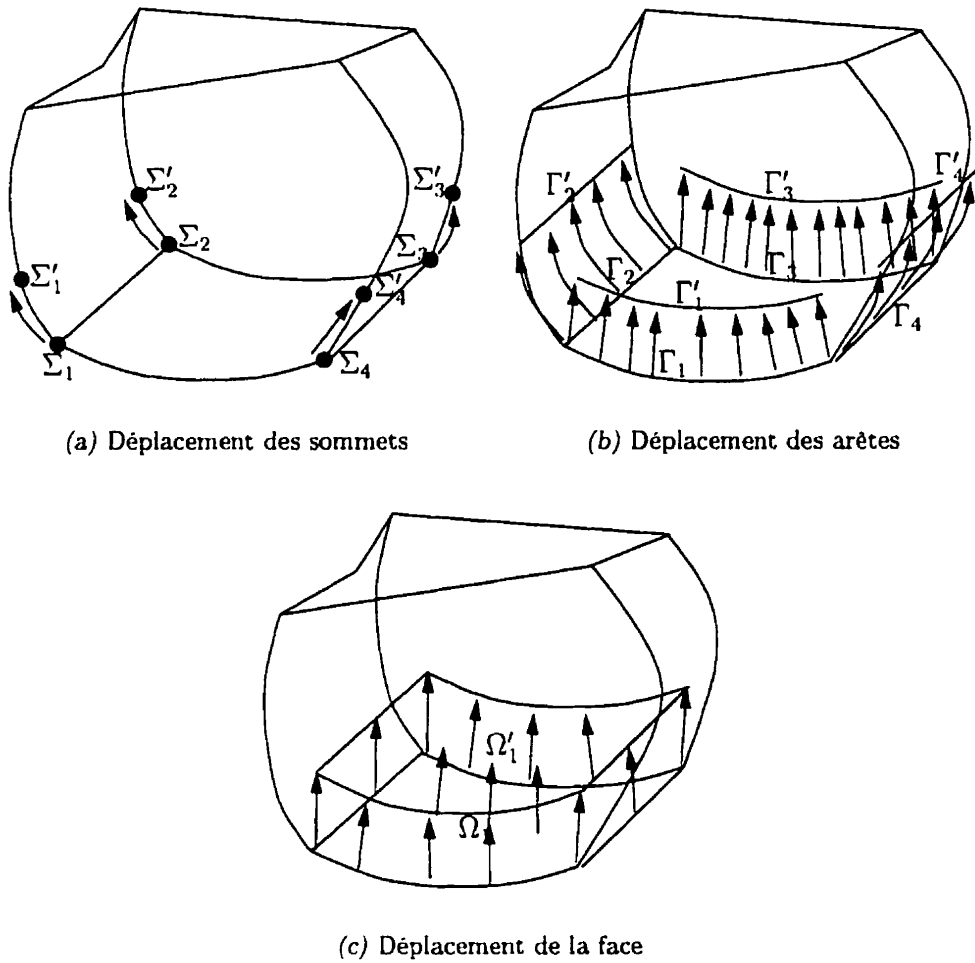


FIG. 3.7: Étapes de déplacement d'une face

La construction du support géométrique de la face déplacée se fait donc en cinq sous-étapes :

1. Le déplacement des sommets le long des arêtes perpendiculaires à la face,
2. Le déplacement des arêtes dans les faces adjacentes à la face,
3. Le déplacement de la face comme tel,
4. L'intégration des sommets déplacés aux arêtes déplacées,
5. L'intégration des arêtes déplacées à la face déplacée.

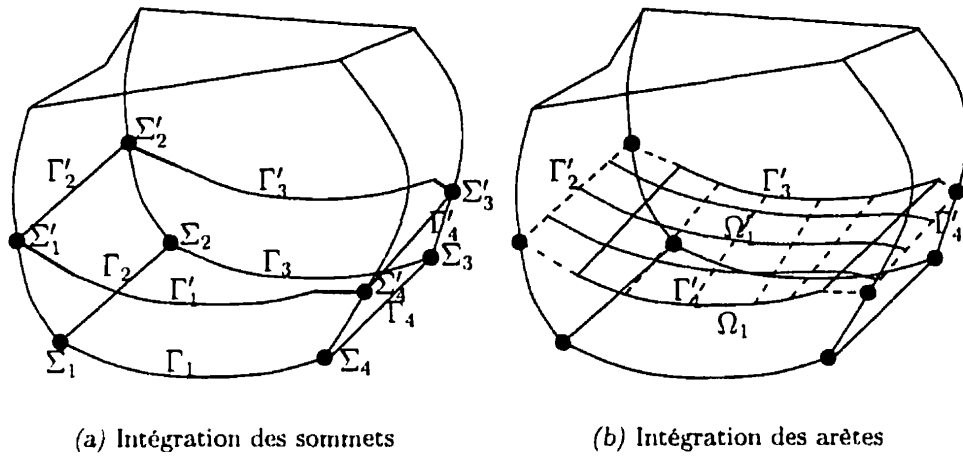


FIG. 3.8: Étapes d'intégration des bords à une face

Chacune de ces sous-étapes, illustrées aux figures 3.7 et 3.8, est à l'origine d'un algorithme spécialisé de traitement géométrique décrit au § 2. En l'occurrence, le déplacement des sommets se fait à l'aide de l'algorithme du § 2.2.2.5 (figure 3.7a), le déplacement des arêtes à l'aide de l'algorithme du § 2.2.6.1 (figure 3.7b), et le déplacement de la face elle-même se fait en utilisant l'algorithme décrit au § 2.2.6.2 (figure 3.7c). Pour ce qui est de l'intégration des sommets aux arêtes, il s'agit d'un algorithme de transformation s'apparentant à ceux décrits au § 2.2.6 (figure 3.8a), et l'intégration des arêtes à la face déplacée incorpore entre autre l'algorithme d'extrapolation d'une surface, décrit au § 2.2.6.3 (figure 3.8b).

L'algorithme de déplacement des faces peut donc se résumer comme suit : $\forall \Omega_k \in \mathcal{B}$:

1. $\forall \Sigma_i$ au bord de Ω_k , construire Σ'_i
2. $\forall \Gamma_j$ au bord de Ω_k , construire Γ'_j
3. construire Ω'_k
4. borner Γ'_j avec $\Sigma'_{i,\Gamma_j,-1}$ et $\Sigma'_{i+1,\Gamma_j,+1}$.
5. borner Ω'_k avec les Γ'_j

3.1.4.2 Connexion du volume

L'étape finale de l'algorithme général de zonage consiste à former la coquille pour les volumes compléments associés aux volumes affectés par le zonage. Cette étape s'apparente fortement à l'étape de connexion de la face présentée dans le cadre de l'algorithme bidimensionnel.

Dans ce cas, il s'agit de borner le volume Π_i^* en interrogeant toutes les faces des coquilles du volume original, et d'insérer les faces elles-mêmes si elles n'ont pas été déplacées, ou leur face déplacée si elles l'ont été.

3.2 Les opérations de discrétisation

Une fois contruites la topologie et la géométrie des nouvelles zones, il ne reste plus qu'à appliquer à chacune un algorithme de discrétisation approprié, choisi par l'utilisateur. Soulignons que toutes les opérations de zonage décrites précédemment, et liées à la définition des zones structurées, sont faites de façon complètement indépendante de l'algorithme de discrétisation qui sera ultimement employé dans chaque zone. Le travail de zonage peut donc être effectué et contrôlé de façon indépendante de celui du maillage proprement dit.

Les opérations de discrétisation proprement dites consistent à générer un maillage à l'intérieur de chaque zone, en fonction des paramètres fournis par l'utilisateur. La principale contrainte imposée au mailleur est qu'il puisse fournir des zones ayant des maillages conformes au travers de leurs interfaces, de façon à ce qu'un résolveur par éléments finis puisse être facilement utilisé sur le maillage résultant. Cette contrainte

impose presque d'elle-même un algorithme de discrétisation où les frontières sont maillées avant l'intérieur des zones. Quel que soit l'algorithme de génération de maillage utilisé, le processus de maillage d'une zone associée à un volume doit donc toujours se dérouler de la façon suivante :

1. discrétiser chaque arête qui n'a pas déjà été discrétisée,
2. discrétiser chaque face qui n'a pas déjà été discrétisée en respectant la discrétisation des arêtes,
3. discrétiser l'intérieur du volume en respectant la discrétisation des faces.

Pour l'instant, seul l'algorithme de maillage par interpolation transfinie est utilisé pour discrétiser les faces et les volumes. On envisage cependant d'ajouter prochainement un algorithme de génération de maillage non structuré par reconnexion des sommets sur les frontières ainsi qu'un algorithme d'adaptation de maillage, qui devrait permettre de construire automatiquement des maillages tridimensionnels dans des géométries quelconques.

Chapitre 4

Applications

Le mailleur de peau proposé, basé sur l'approche par zonage automatique, a permis de discrétiser un grand nombre de modèles géométriques puis de calculer des solutions aux équations de Navier-Stokes sur ces discrétisations. Nous présentons ici quelques uns des résultats obtenus, pour deux modes d'utilisation distincts du mailleur. Dans un premier temps, nous présentons l'application du mailleur de peau à la génération de maillages hybrides formés de prismes et de tétraèdres dans des modèles géométriques caractérisés par un niveau croissant de complexité ; puis, dans un second temps, nous présentons l'utilisation des mêmes algorithmes de maillage non seulement pour la génération de couches minces d'éléments, mais également pour le contrôle automatique de la qualité du maillage dans le contexte de la génération de maillages multiblocs structurés.

Ce second mode d'utilisation des algorithmes de zonage illustre la généricité et la versatilité des algorithmes développés. Cette application des techniques de discrétisation au contexte du maillage structuré multibloc a permis une généralisation inattendue

de la méthodologie de zonage, initialement développée dans un contexte de maillage non-structuré.

Toute la démarche de validation et de mise en production du mailleur dans un contexte industriel s'inscrit dans le cadre d'une collaboration étroite entre GE Hydro et le CERCA pour le développement d'outils d'analyse de composantes hydrauliques. Le choix des cas tests, tout comme celui des applications proprement dites, s'est donc fait en collaboration avec l'industrie, chez qui ont été effectuées toutes les simulations.

4.1 Validation

La première série de résultats a pour but la validation du mailleur hybride dans le contexte d'écoulements internes, où il est utilisé afin de construire une couche mince d'éléments semi-structurés sur les parois de différents modèles géométriques.

La technique de génération du maillage hybride reste la même pour tous les cas soit :

- identifier les parois solides du modèle sur lesquelles doivent croître des zones d'éléments semi-structurés,
- construire automatiquement un zonage servant de support à la croissance,
- discrétiser chaque zone,
- réunir les zones adjacentes discrétisées avec le même type d'élément.

Comme nous l'avons indiqué au § 3.2, le seul algorithme de discrétisation présentement disponible est l'algorithme transfini. Ceci impose une importante contrainte d'utilisation du mailleur : toutes les faces à discrétiser, tant celles du modèle géométrique initial que celles qui sont générées automatiquement durant le processus de

zonage, doivent être bornées par exactement quatre arêtes, alors que tous les volumes doivent être bornés par exactement six faces. En pratique, cette contrainte impose la construction de modèles géométriques comportant un certain nombre de faces internes de façon à fournir un zonage initial qui peut ensuite être enrichi puis discrétisé.

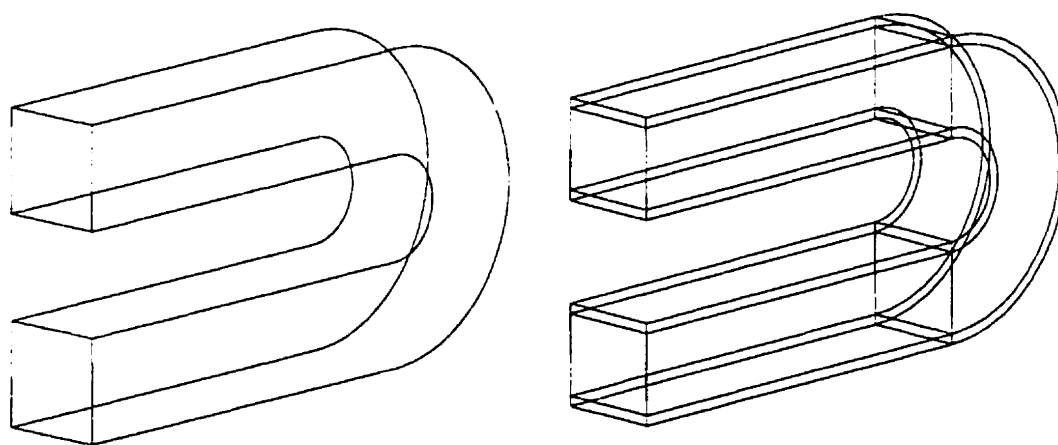
Cette contrainte sera certainement levée dans un futur relativement proche ; mais pour l'instant, et comme nous le verrons dans la seconde partie de ce chapitre, la quasi totalité des applications industrielles que nous avons traitées étaient destinées à être résolues en utilisant des maillages multiblocs structurés.

4.1.1 Tube en U

Le calcul de l'écoulement turbulent à l'intérieur d'un tube en forme de U est un test classique permettant de caler les modèles de turbulence. Il s'agit en fait d'un canal très large et de faible hauteur qui revient sur lui-même, formant un coude à 180°. Le profil de vitesse du fluide est imposé à l'entrée, et le calcul est fait en imposant des conditions de symétrie sur les faces latérales du coude. Étant donné la symétrie imposée sur les faces latérales, seules les faces intérieure et extérieure du coude sont considérées comme des parois solides où adhère le fluide, et sur lesquelles nous ferons pousser une couche semi-structurée d'éléments. Le modèle géométrique du tube en U est présenté à la figure 4.1a.

Par ailleurs, afin de mieux contrôler le maillage dans le coude, nous avons utilisé les capacités du mailleur de peau dans la construction automatique de zones, en identifiant les faces d'entrée et de sortie du tube comme des faces à déplacer, bien qu'il ne s'agisse pas de parois solides. En choisissant la distance de déplacement de façon

à ce qu'elle corresponde exactement à la longueur des sections droites du tube, nous forçons le mailleur à diviser le tube en trois sections. Ceci a pour effet d'isoler la section courbe du tube en une zone séparée qui peut ainsi être maillée indépendamment des sections droites d'entrée et de sortie. La figure 4.1b illustre le zonage ainsi obtenu. Pour obtenir le zonage tel qu'il est illustré dans cette figure, il faut associer une zone non seulement aux quatre faces (entrée, sortie, intérieur du coude et extérieur du coude), mais aussi aux quatre arêtes se trouvant aux intersections de ces quatre faces. Le mailleur divise donc automatiquement le volume initial en neuf volumes distincts, soit trois volumes dans la section d'entrée, trois dans la section courbe et trois dans la section de sortie.



(a) Modèle géométrique original

(b) Zonage

FIG. 4.1: Modèle géométrique et zonage du tube en U

Chacune des neuf zones est discrétisée à l'aide de l'algorithme transfini (§ 3.2), puis, les hexaèdres résultants sont subdivisés soit en tétraèdres, soit en prismes, tel que spécifié par l'utilisateur pour chaque zone. La figure 4.2 montre un maillage grossier ainsi

obtenu, dans lequel chacune des six zones adjacentes à une paroi solide a été divisée en prismes, et où les trois zones centrales ont été divisées en tétraèdres.

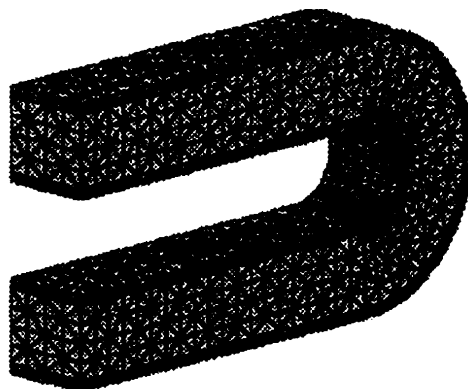


FIG. 4.2: Maillage hybride à l'intérieur du tube en U – maillage grossier

Par ailleurs, à titre indicatif, la figure 4.3 présente une comparaison des maillages obtenus avec et sans zonage automatique dans les sections d'entrée et de sortie du tube, pour un nombre identique de points. Clairement, les arêtes des éléments du maillage 4.3b sont beaucoup plus orthogonales aux parois que celles du maillage 4.3a, et les lignes de maillage dans les zones près des parois sont beaucoup mieux réparties, particulièrement dans la portion courbe du tube.

En augmentant le nombre de points dans chaque direction, un maillage initial possédant exactement la même structure que celle du maillage illustré à la figure 4.2, peut être obtenu avec la finesse souhaitée. Par contre, si l'on envisage ce maillage comme une discrétisation initiale à l'intérieur d'un processus itératif de résolution et d'adaptation du maillage, il devient presque indispensable de réduire au minimum le nombre de zones, et en particulier d'éliminer les faces internes entre les zones d'élément d'un même type. Les faces internes imposent en effet des contraintes inutiles aux outils d'optimisation du maillage qu'il vaut mieux éliminer dès le départ. L'étape

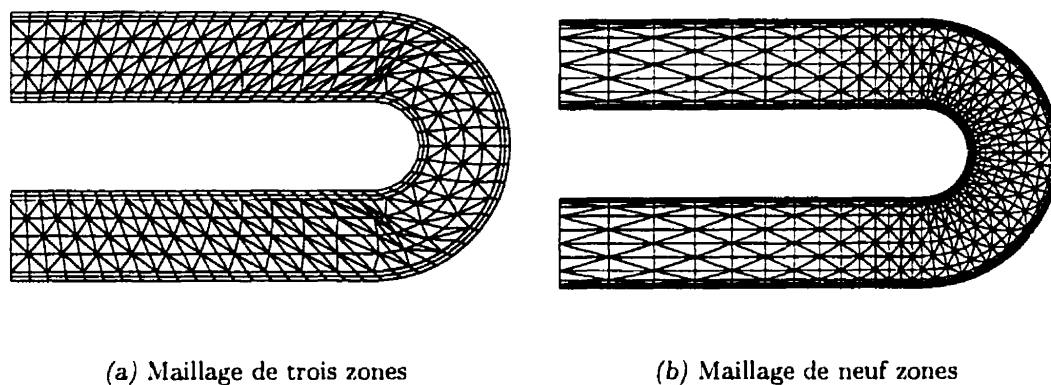


FIG. 4.3: Comparaison du maillage obtenu pour deux zonages à l'intérieur du tube en U – maillage grossier

finale de préparation du maillage consiste donc à réunir les zones adjacentes discrétisées à l'aide d'éléments de même type. Cette dernière étape s'effectue en utilisant les algorithmes décrits au § 2.2.7.

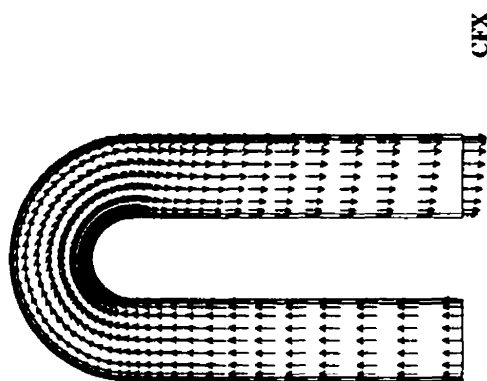


FIG. 4.4: Vecteurs de vitesse sur le maillage hybride dans le tube en U

La figure 4.4 présente les vecteurs de vitesse pour la solution obtenue à l'aide du résolveur *CFX* (version 5.2) sur le maillage présenté à la figure 4.3b réuni en trois zones. La solution a été calculée en utilisant les conditions décrites par Monson et

Seegmiller (1990), c'est-à-dire en imposant un profil de vitesse et d'énergie de turbulence à l'entrée, pour un nombre de Reynolds de 10^5 , des conditions de symétrie sur les parois latérales du tube, et une loi de paroi sur les surfaces intérieure et extérieure.

4.1.2 Diffuseur conique

Le cas du diffuseur conique est un autre test classique servant à caler les modèles de turbulence. La figure 4.5 présente le modèle géométrique du diffuseur tel qu'il est utilisé afin d'amorcer le processus de zonage hybride.

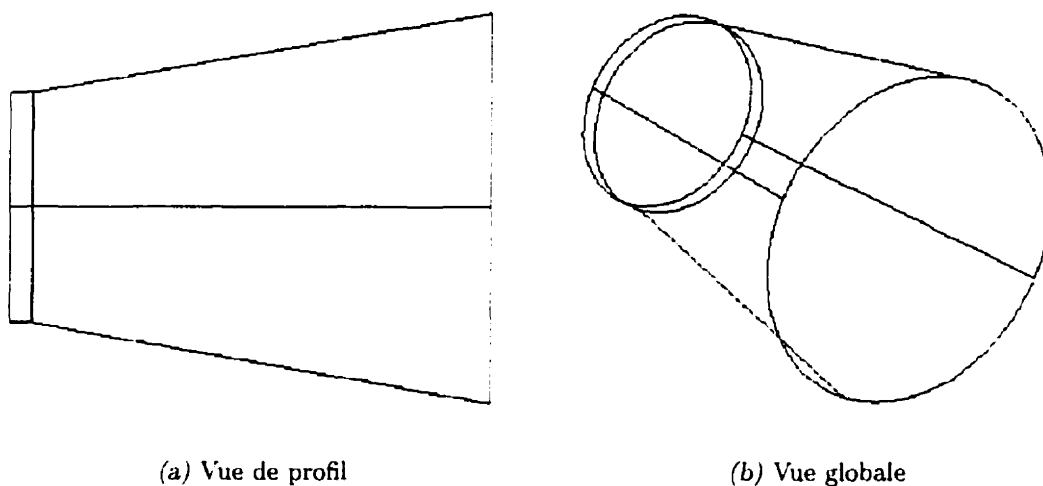


FIG. 4.5: Géométrie du diffuseur conique

Encore une fois, afin de mieux contrôler la génération de maillage, le modèle géométrique, en plus d'être partitionné de façon à produire un maillage de peau près des parois solides, est également zoné au sens classique du terme. Étant donné que la croissance de peau et le zonage impliquent les mêmes faces, la partition du domaine s'est faite en deux étapes distinctes. Dans un premier temps, les faces formant la coquille extérieure du diffuseur sont fortement déplacées vers l'intérieur du domaine,

afin de produire le zonage de type papillon, illustré à la figure 4.6a. Dans un second temps, le modèle géométrique construit lors de la première phase est rezone, cette fois-ci afin de produire des zones minces près des parois, le zonage final est illustré à la figure 4.6b.

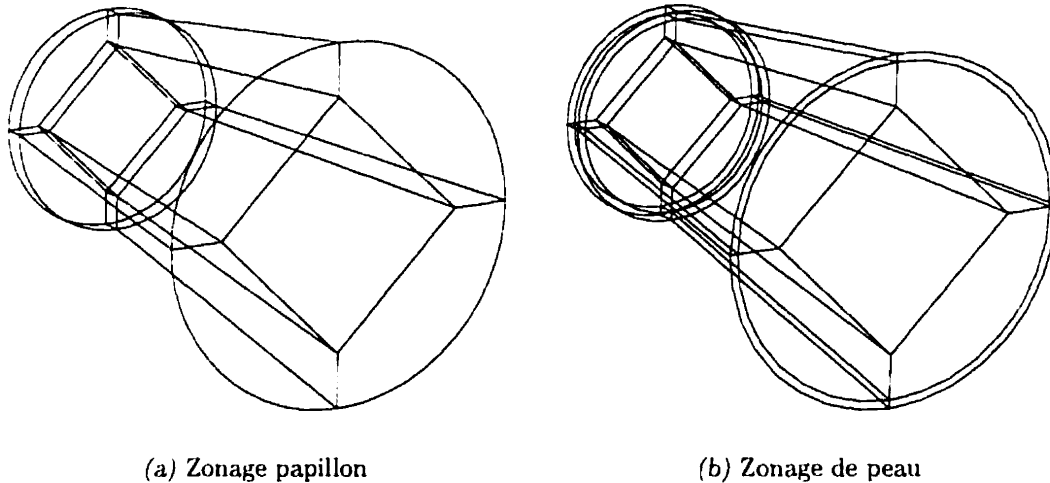


FIG. 4.6: Zonage dans le diffuseur conique

Le maillage grossier obtenu après la discrétisation de chaque zone et la réunion des zones contenant des éléments de même type est illustré à la figure 4.7.

Une solution a été calculée sur le maillage illustré à la figure 4.8 pour des conditions s'apparentant à celle décrites par Clausen et Koh (1993). Les conditions exactes de l'expérience n'ont, pour l'instant, pas pu être reproduite, en raison de difficultés rencontrées lors de l'imposition de profils expérimentaux comme conditions limites dans la version 5.2 du résolveur *CFX*. Nous avons dû remplacer ces conditions limites par une approximation du type rotation d'un corps solide. Le résultat est illustré à la figure 4.9.

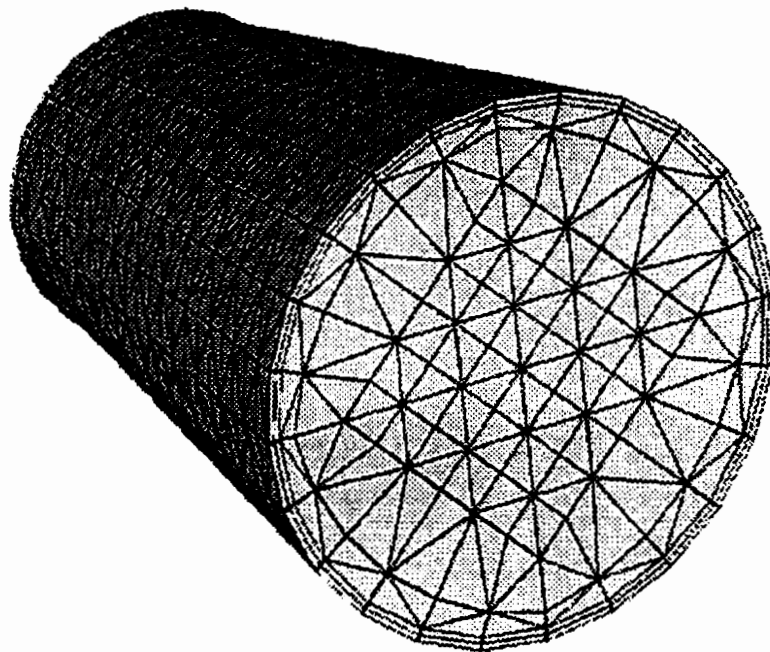
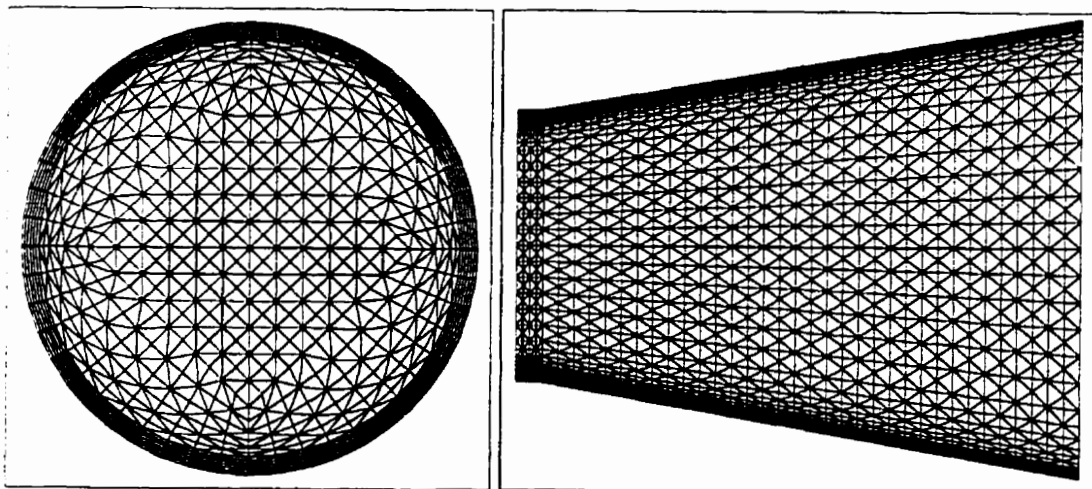


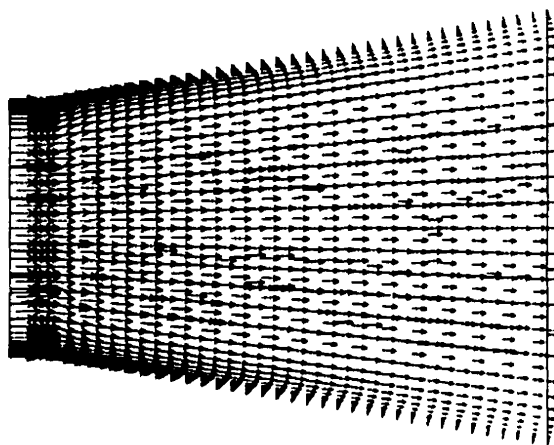
FIG. 4.7: Maillage hybride à l'intérieur du diffuseur conique – maillage grossier



(a) Maillage à l'entrée

(b) Maillage dans la direction axiale

FIG. 4.8: Maillage hybride à l'intérieur du diffuseur conique



CFX

FIG. 4.9: Vecteurs de vitesse dans le diffuseur conique

4.2 Applications industrielles

Dans le domaine de l'analyse des machines hydrauliques, la modélisation du diffuseur à la sortie de la turbine constitue un point central, sur lequel est concentrée une large part des efforts de calcul et de recherche. Le diffuseur coudé, souvent nommé aspirateur en raison de sa forme, est en effet l'une des composantes de la machine hydraulique sur laquelle les concepteurs ont le plus de latitude durant le processus de conception. De ce fait, la performance globale d'une machine peut dépendre en grande partie de la qualité de conception du diffuseur. La possibilité de comparer rapidement les performances de différents designs de diffuseurs représente donc un avantage compétitif important, sur lequel misent les fabricants durant l'évaluation des soumissions afin d'offrir les meilleures garanties de performance possible, et, à terme, être en mesure de décrocher les contrats.

Bien que sur le plan topologique, les diffuseurs coudés soient tous semblables, ils sont néanmoins très différents sur le plan géométrique. Topologiquement, on peut assimiler un diffuseur à un canal, qui peut être partiellement obstrué par un ou deux obstacles dans la section de sortie. Ces obstacles, nommés *piles* dans le jargon des fabricants, servent à supporter le diffuseur au plan structurel, et la conception hydraulique cherche essentiellement à minimiser l'impact de leur présence sur le rendement du diffuseur.

Initialement, l'approche proposée pour l'analyse de l'aspirateur consistait à produire un maillage hybride au sens strict du terme, c'est-à-dire comportant des éléments prismatiques dans les couches proches des parois solides, et des éléments tétraédriques dans le reste du domaine. Cette proposition de recherche, à l'origine du présent travail, a été réalisée. Cependant, en cours de développement, une approche complémentaire s'est imposée. Cette approche repose essentiellement sur la méthodologie qui a déjà été utilisée pour la génération de maillage hybride, et permet de récolter des dividendes supplémentaires sur l'investissement engagé dans la mise au point du mailleur hybride.

Techniquement, cette approche alternative consiste à adapter les algorithmes présentés pour la génération de maillages hybrides pour la production de zonages multiblocs présentant les caractéristiques nécessaires à la résolution des équations de Navier-Stokes. Comme tel, les algorithmes de zonage automatique sont parfaitement génériques et en mesure de traiter n'importe quel modèle géométrique valide ; par contre, lorsqu'ils sont utilisés dans un contexte de maillage multibloc structuré, ces algorithmes doivent être combinés de façon à produire uniquement des volumes à six faces, qui peuvent ensuite être discrétisés en briques. Pour ce faire, un outil spécialisé de zonage automatique des diffuseurs a été développé, qui permet de construire un zonage initial dans un diffuseur à 0, 1 ou 2 piles, qui peut ensuite être enrichi

automatiquement à l'aide du mailleur de peau.

Cet outil de zonage, qui utilise les structures de données et les algorithmes développés pour le mailleur hybride, sera présenté comme une extension de notre technique de zonage automatique, qui permette, pour une application industrielle typique, d'exploiter toute la puissance des algorithmes présentés précédemment.

Auparavant, nous présentons quelques applications des algorithmes de maillage hybride, toujours dans le contexte de l'analyse de diffuseurs, dans le mode d'utilisation pour lequel ils avaient été prévus initialement, soit la génération directe de maillages de peau.

4.2.1 Aspirateur coudé sans obstacle – maillage hybride

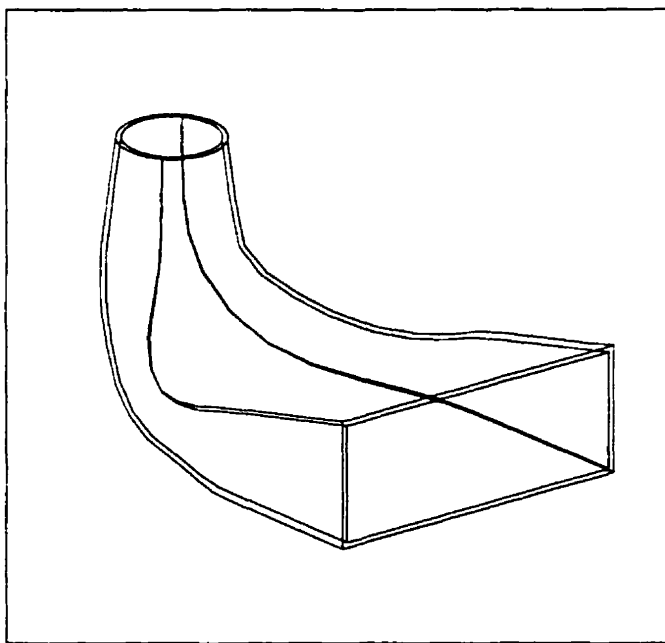


FIG. 4.10: Zonage avec peau sur les parois solides d'un diffuseur

En première analyse, il est intéressant d'évaluer la performance d'un diffuseur en

l'absence de tout obstacle, dans la mesure où ce type d'analyse fournit, à toute fins utiles, la limite supérieure de rendement d'un diffuseur donné. Pour ce type de géométrie, l'utilisation du mailleur de peau est directe, et donne un maillage hybride initial sur lequel une première analyse de rendement peut être effectuée.

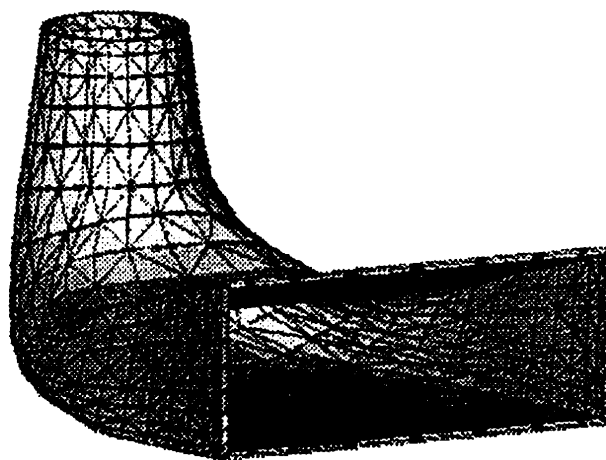


FIG. 4.11: Maillage de peau sur les parois solides d'un diffuseur, vue globale

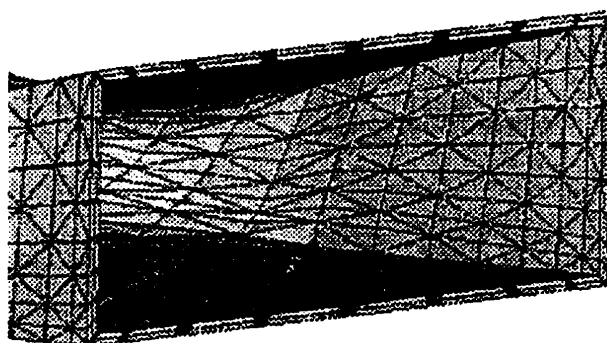
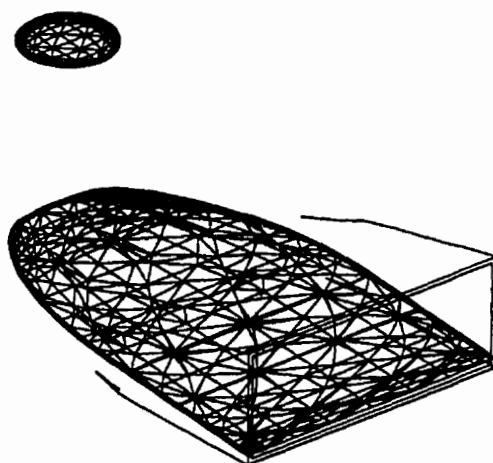


FIG. 4.12: Maillage de peau sur les parois solides d'un diffuseur, détail

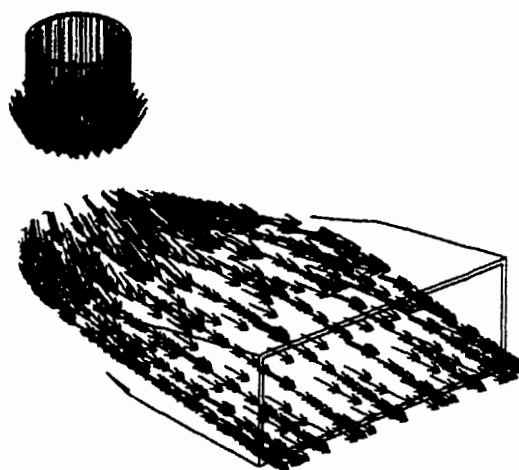
La figure 4.10 présente le zonage construit automatiquement par déplacement des parois de chaque côté du diffuseur, du plancher et du plafond. Il est à noter que les

arêtes où s'intersectent les faces n'ont pas été déplacées, ce qui correspond, dans le plan de sortie, à la configuration (c) de la figure 3.6. Les figures 4.11 et 4.12 montrent le maillage hybride généré dans ces zones.



CFX

FIG. 4.13: Solution dans l'aspirateur sans obstacle, coupe du maillage hybride



CFX

FIG. 4.14: Solution dans l'aspirateur sans obstacle, vecteurs vitesse

La solution obtenue sur le maillage illustré à la figure 4.11 a été calculée à l'aide du résolveur *CFX*, en imposant un champ uniforme de vitesse à l'entrée, en utilisant le

modèle de turbulence $k - \varepsilon$, et pour un nombre de Reynolds d'un million (10^6), basé sur le diamètre d'entrée. Le maillage hybride et les vecteurs vitesse sont illustrés à l'entrée et sur un plan de coupe aux figures 4.13 et 4.14.

4.2.2 Aspirateur coudé avec obstacle – maillage hybride

Une fois la première analyse de rendement complétée, des situations plus réalistes peuvent être envisagées. La seconde analyse présentée ici, tente de tenir compte de la présence d'un obstacle, et de construire un maillage hybride semblable à celui de la section précédente.

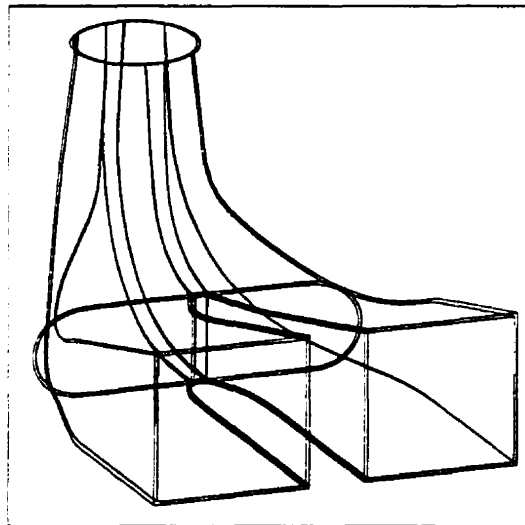
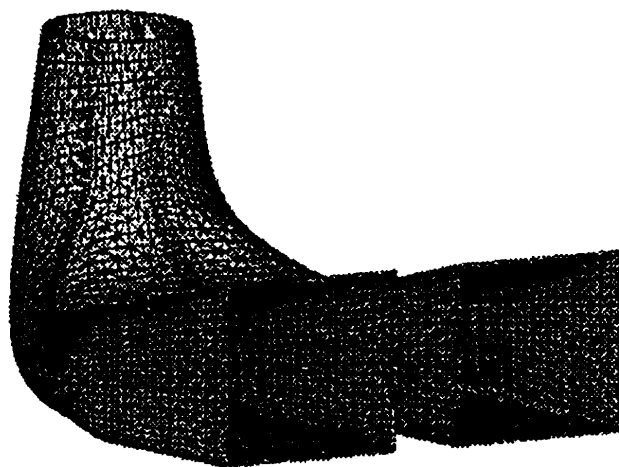


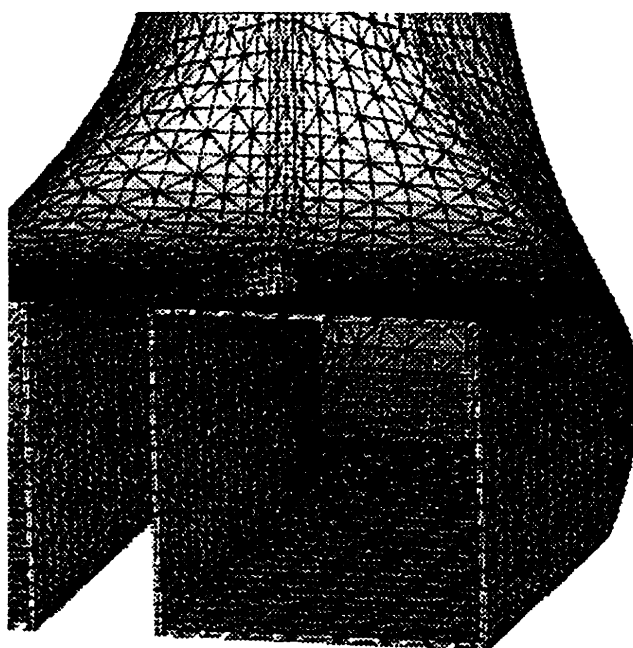
FIG. 4.15: Zonage dans le diffuseur avec obstacle

La figure 4.15 illustre les zones générées automatiquement à l'intérieur du diffuseur présenté à la section précédente, dans lequel a été ajouté un obstacle. La figure 4.16 présente une vue globale et le détail du maillage de peau près de la pile. Une solution pour des conditions identiques à celles de la section précédente a été calculée, et la figure 4.17 montre les vecteurs de vitesse sur un plan de coupe intersectant l'obstacle

à mi-hauteur.

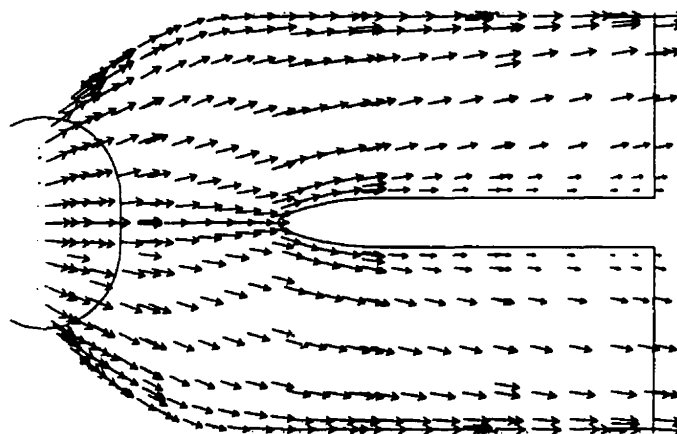


(a) Vue globale



(b) Détail de la peau près de la pile

FIG. 4.16: Maillage hybride dans le diffuseur avec obstacle



CFX

FIG. 4.17: Vecteurs de vitesse dans l'aspirateur avec obstacle, maillage hybride grossier

4.2.3 Contrôle du maillage dans un aspirateur coudé par zonage automatique

Le second type d'utilisation envisagée des algorithmes de zonage automatique est d'appliquer le concept de déplacement de parois dans le processus de génération de maillages multiblocs structuré. Il est en effet souvent utile, dans un contexte de génération de maillage structuré, de construire des zones supplémentaires dont le seul rôle est de faciliter la génération du maillage. Cette approche permet par exemple de mieux contrôler l'orthogonalité du maillage généré près des parois en le forçant à respecter certaines surfaces internes construites à cette fin.

Afin d'automatiser le plus possible la procédure de zonage et de maillage des aspirateurs, nous avons développé une application dédiée, utilisant les mêmes classes et méthodes que celles utilisées par le mailleur de peau. Cette application sert spécifi-

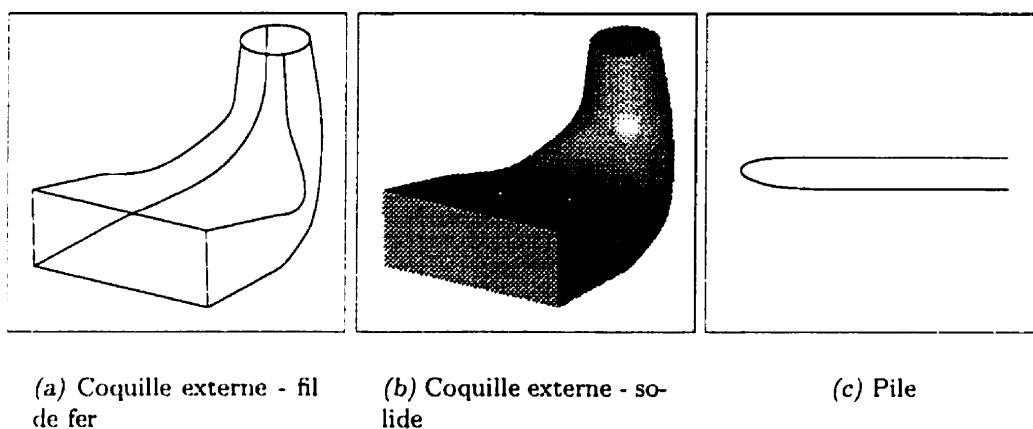


FIG. 4.18: Information géométrique de base sur l'aspirateur

quement à préparer l'information géométrique et topologique ainsi que l'information de contrôle du mailleur, de façon à construire un fichier d'entrée qui puisse être fourni directement au mailleur de peau. Cette étape de préparation consiste en fait à construire un modèle géométrique maillable à partir d'informations géométriques de base. La figure 4.18 présente cette information, qui consiste en une coquille à six faces et en une ou deux courbes bidimensionnelles représentant les obstacles à intégrer à la coquille.

Les avantages d'une approche consistant à développer une application spécialisée pour le zonage et le maillage d'une composante hydraulique spécifique sont multiples. En effet, dans un contexte industriel donné, la gamme des types de composantes à analyser est souvent limitée, et l'un des principaux soucis des concepteurs demeure le temps total requis pour procéder à l'analyse d'une nouvelle composante. L'automatisation complète du processus d'analyse apparaît ainsi comme la seule véritable avenue qui permette de réaliser des gains de temps appréciables.

Par ailleurs, puisque le nombre de type de composantes à analyser est relativement

faible, il peut être plus rapide et plus simple de développer quelques outils spécialisés, parfaitement adapté à chaque type de composante, qu'un seul outil très générique capable de traiter toutes les composantes. Évidemment, cette approche n'empêche absolument pas le développement d'algorithmes génériques qui pourront être réutilisés par toutes les applications spécialisées. C'est précisément cet esprit de mise en commun et de réutilisation d'algorithmes génériques qui a présidé à la conception et à l'implémentation du mailleur de peau. Les fruits de ce choix de design se concrétisent par une mise en œuvre extrêmement simplifiée des outils spécialisés.

Le niveau de confiance avec lequel deux solutions obtenues dans deux géométries distinctes peuvent être comparées est une autre préoccupation majeure des ingénieurs procédant à des analyses en milieu industriel. Il est en effet crucial, par exemple dans le cadre d'une soumission, de pouvoir comparer avec confiance différents types de géométries pour des conditions d'opérations identiques, et de rapidement identifier celles offrant potentiellement le meilleur rendement. L'automatisation du processus d'analyse, et particulièrement de la génération du maillage, favorise une comparaison fiable des solutions obtenues, en standardisant toutes les étapes menant à ces solutions.

Notre approche de génération de maillage, qui intègre explicitement les opérations géométriques et topologiques au processus de discrétisation, permet de pousser davantage encore le niveau de standardisation. En développant un outil spécialisé de zonage et de maillage d'une composante donnée, nous pouvons utiliser notre connaissance a priori des caractéristiques géométriques et topologiques de la composante afin de produire des discrétisations qui aient le plus possible des caractéristiques communes d'une composante à l'autre.

Par exemple, dans le cas des aspirateurs, certaines caractéristiques géométriques fon-

damentales tel le diamètre d'entrée ou l'épaisseur de la pile à la sortie peuvent servir directement à paramétrer le zonage. Cette approche permet de définir une série de patrons de zonage, qui intègrent, dans la construction des éléments géométriques de support, certains paramètres intrinsèques de l'aspirateur.

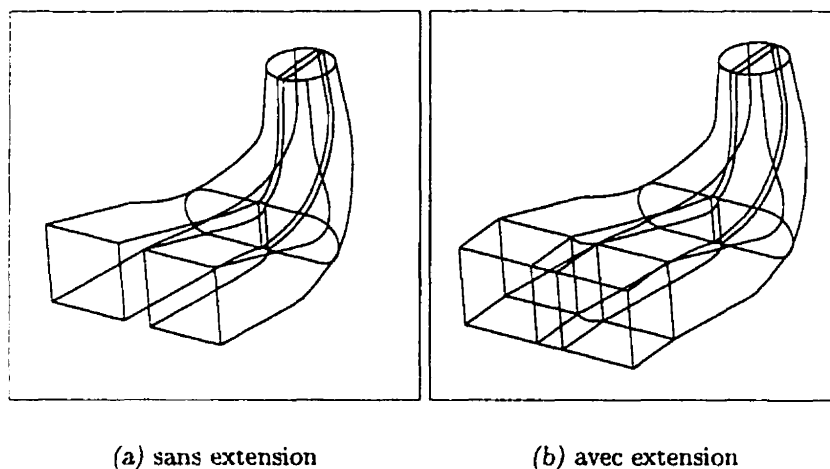


FIG. 4.19: Zonage minimal de l'aspirateur

Essentiellement, il s'agit de préparer un zonage minimal et tous les paramètres de contrôle qui sont ensuite passés directement au mailleur de peau présenté précédemment. La figure 4.19 montre deux versions du zonage minimal construit à partir de la coquille et d'une définition bidimensionnelle de la pile ; la figure 4.20 présente, quant à elle, une vue de plan du zonage minimal, où sont indiqués les paramètres géométriques servant à contrôler la construction du zonage. La longueur de l'extension – c'est à dire la série de blocs en aval de la pile – est ainsi spécifiée comme une fraction du diamètre d'entrée (noté D sur la figure), alors que la position des points d'ancrage du zonage près du bord d'attaque de la pile est déterminée automatiquement de façon à ce que l'épaisseur du bloc ainsi formé soit égale à une fraction de l'épaisseur de la pile à la sortie (noté E sur la figure).

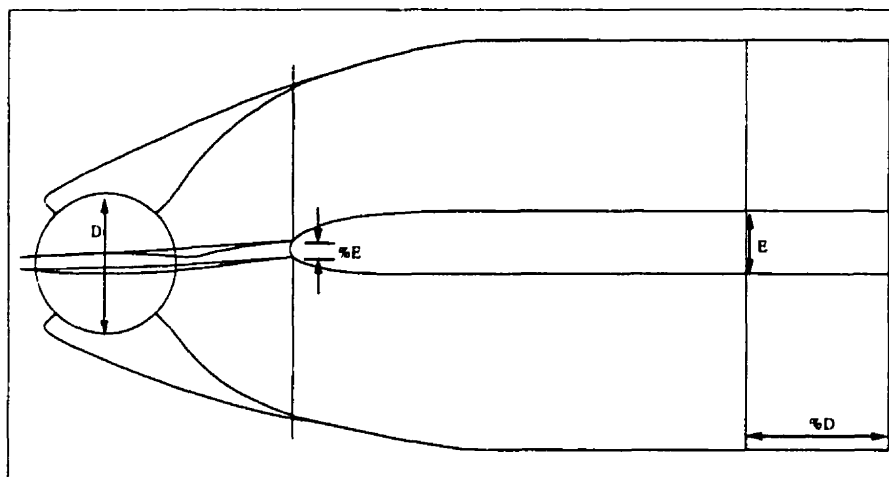


FIG. 4.20: Zonage minimal de l'aspirateur – Vue de plan

Comme l'objectif de l'outil de zonage est de fournir au mailleur de peau une description complète du travail à effectuer, toutes les données de contrôle du processus de discrétisation sont fournis par l'utilisateur à l'outil de zonage, qui les transforme et les adapte avant de les transmettre au mailleur. Cette transmission des paramètres présente des avantages et des inconvénients. En rendant accessibles les lois de concentration à l'outil de zonage, cette étape permet de construire un zonage mieux adapté à la discrétisation qui suivra. Par exemple, la figure 4.21 montre la parfaite intégration du zonage avec la loi de concentration utilisée à l'entrée de l'aspirateur. Puisqu'il connaît la loi de concentration appliquée sur l'arête d'entrée de l'aspirateur, l'outil de zonage est en mesure de choisir la position du point d'ancrage du zonage à l'entrée de façon à ce qu'elle corresponde exactement au nœud du maillage qui serait calculé si l'arête n'était pas divisée en trois par le zonage, mais discrétisée selon la loi de concentration spécifiée.

Par contre, une modification même mineure des paramètres de contrôle de la discrétisation impose une reconstruction complète du zonage, ce qui, dans certaines

circonstances, augmente les coûts de calcul.

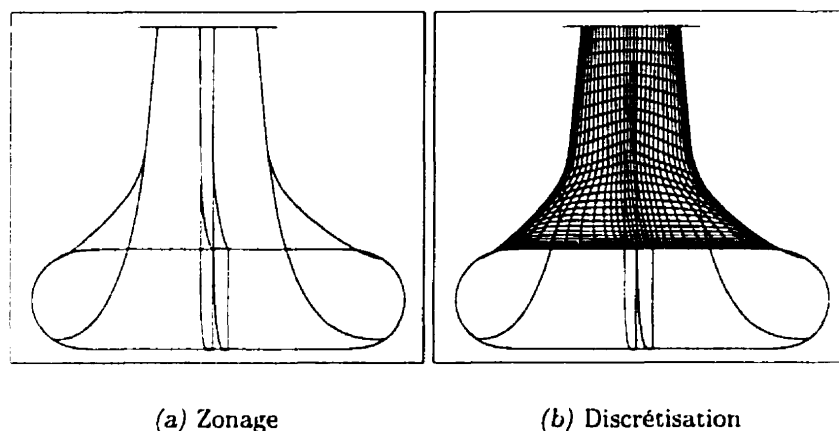


FIG. 4.21: Intégration du zonage et de la discrétisation à l'entrée de l'aspirateur

Une fois le zonage minimal construit, l'outil de zonage identifie les faces à partir desquelles le mailleur de peau doit construire des nouvelles zones. Cette phase d'enrichissement automatique du zonage est réalisé dans le mailleur de peau, et ne dépend pas du type de composante traitée. Ceci permet de réutiliser directement tous les algorithmes présentés précédemment. Deux objectifs distincts peuvent justifier l'enrichissement du zonage initial :

- Mieux contrôler le processus de discrétisation structurée en introduisant des faces internes,
- Produire des zones d'éléments minces et étirés près des parois ou dans le sillage des obstacles.

Ces objectifs sont complémentaires, et selon le type d'analyse recherchée, peuvent être pertinents ou non. Par exemple, les campagnes d'analyses préliminaires exigent que chaque cas test puisse être analysé en une heure ou moins ; dans un tel contexte, il est

clair que la complexité topologique du maillage doit être limitée le plus possible, et optimalement, restreinte à une seule zone. À l'autre extrémité du spectre, des analyses détaillées doivent permettre de choisir parmi quelques configurations déjà optimisées celle qui permettra de gagner les derniers centièmes de pourcent de rendement. Alors, la finesse du maillage devient critique pour améliorer la précision du calcul, et le temps d'exécution devient un facteur secondaire.

En choisissant automatiquement les paramètres de contrôle du mailleur de peau, l'outil de zonage facilite énormément la spécification d'un ensemble valide de paramètres et permet ainsi de tirer pleinement profit des algorithmes disponibles. Les prochaines sections illustrent comment l'outil de zonage permet de tirer avantage de la fonctionnalité du mailleur de peau selon le type d'objectif visé.

4.2.4 Contrôle du maillage par insertion de faces internes

Le premier objectif d'un zonage reste l'amélioration du contrôle sur la discrétisation. Dans ce sens, et comme nous l'avons vu dans le cas du tube en U (§ 4.1.1), l'insertion de faces internes bien placées reste une méthode simple et très efficace pour améliorer la qualité d'un maillage. En fait, dans n'importe quel modèle géométrique où des sections droites se connectent à des sections courbes, l'introduction de faces de séparation perpendiculaires aux jonctions améliore grandement le contrôle sur la discrétisation.

Dans le cas d'un aspirateur, la section courbe est précédée d'une section conique et suivie d'une section droite contenant possiblement un ou des obstacles. Un premier mécanisme de contrôle de la discrétisation consiste donc à forcer une division explicite

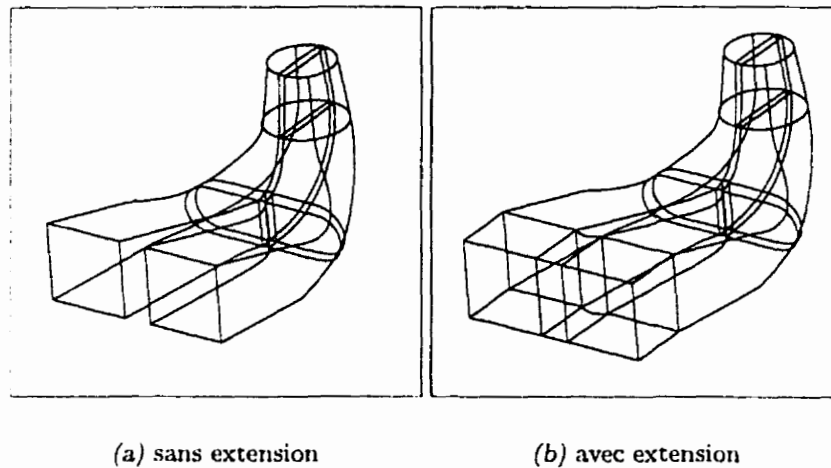


FIG. 4.22: Zonage enrichi par insertion de faces

de la section en amont de l'obstacle en trois sections : la section du cône, la section du coude, et la section droite en amont du bord d'attaque de la pile. Cette division peut être faite automatiquement à l'aide des algorithmes de déplacement présentés précédemment, en indiquant simplement que les faces d'entrée et les faces de séparation du zonage minimale doivent engendrer une peau. Le résultat de ce processus de croissance est illustré à la figure 4.22, et la différence de qualité des maillages obtenus est illustré à la figure 4.23.

4.2.5 Contrôle du maillage par enrichissement du patron minimal

Les patrons de zonage initiaux et enrichis par insertion de faces présentés à la section précédente s'apparentent à des patrons en 'H'. Cependant, une approche classique de zonage en présence d'un obstacle consiste plutôt à utiliser un patron de zonage en 'C' ou en 'O'. Le principal désavantage de cette méthode tient au fait qu'elle augmente

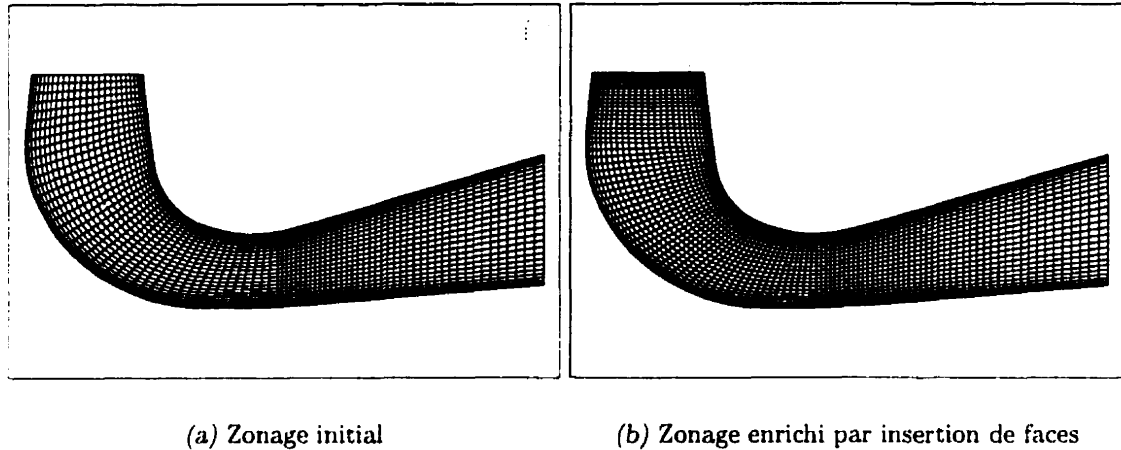


FIG. 4.23: Vu d'élévation des maillages obtenus pour les zonages 4.19a et 4.22a

la complexité topologique du maillage, et ne permet donc plus une recombinaison des blocs en une seule zone. Par contre, ce type de patron, en améliorant le contrôle sur la génération du maillage près du bord d'attaque de la pile, devrait aider l'utilisateur à standardiser le processus de discrétisation et faciliter d'autant la comparaison des solutions ainsi obtenues.

Contrairement à l'insertion de faces, qui pouvait être obtenue directement par un contrôle des paramètres d'entrée du mailleur de peau, l'enrichissement du patron en 'H' par un patron en 'C' ou en 'O' doit se faire sous le contrôle de l'outil de zonage. C'est donc l'outil de zonage qui doit faire appel aux différents algorithmes de croissance et de reconnexion, bien que ces algorithmes soient ceux utilisés par le mailleur de peau.

La figure 4.24 présente les zonages obtenus pour deux types d'enrichissement impliquant un changement de patron près de l'obstacle. Comme dans le cas de l'insertion de faces internes, le processus de zonage est contrôlé à l'aide de paramètres caractéristiques de la géométrie initiale : dans ce cas-ci, l'épaisseur du bloc en 'C' ou en 'O'

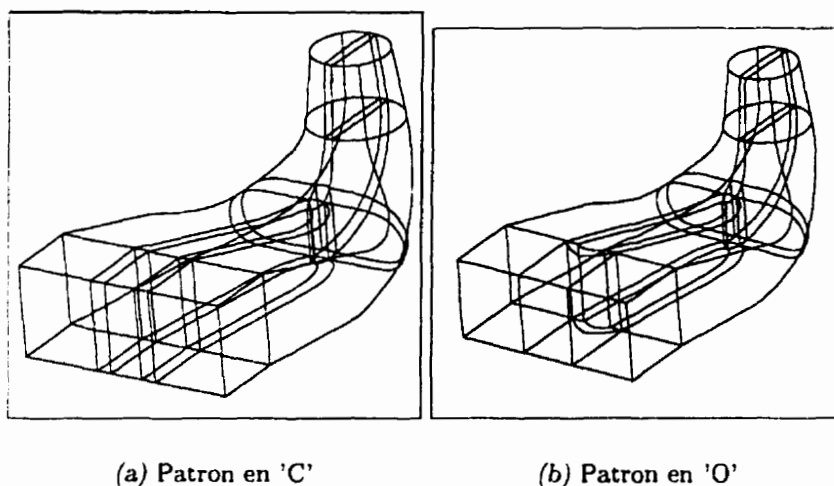


FIG. 4.24: Zonage enrichi par insertion d'un patron autour de l'obstacle

construit autour de l'obstacle est spécifiée comme une fraction du diamètre d'entrée. On note que l'enrichissement du zonage près de l'obstacle peut être combiné ou non à l'insertion de faces, ce qui élargit d'autant les possibilités d'expérimentation dans les cas difficiles.

La figure 4.25 illustre le maillage obtenu pour les deux types de patron d'enrichissement autour de l'obstacle.

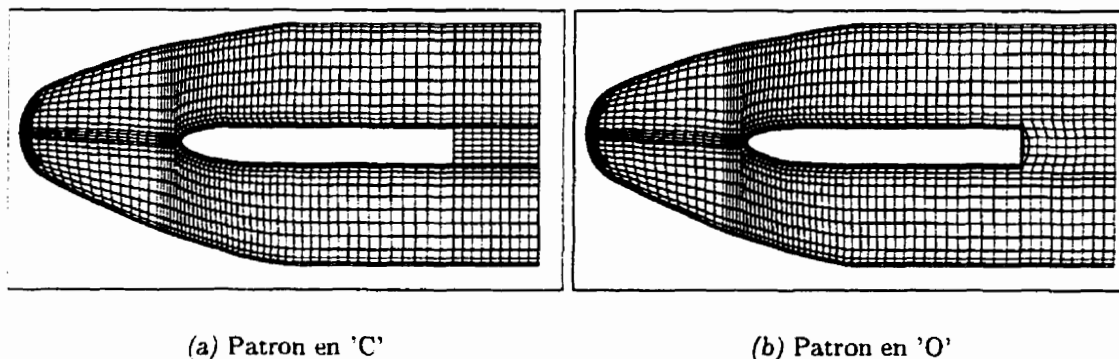


FIG. 4.25: Vue de plan des maillages générés à l'aide des patrons de zonage 4.24a and 4.24b

4.2.6 Contrôle du maillage par croissance de peau

Le dernier mode d'enrichissement proposé par l'outil de zonage automatique consiste à faire croître de la peau sur les parois solides en plus ou au lieu de recourir aux techniques présentées précédemment. L'avantage d'utiliser un outil automatique pour construire le fichier d'entrée au mailleur reste toutefois indéniable, dans la mesure où c'est l'outil qui détermine automatiquement quelles faces doivent être déplacées, et qui se charge de distribuer tous les paramètres de contrôle du processus de discrétisation aux différentes entités topologiques, et ce quel que soit le patron choisi.

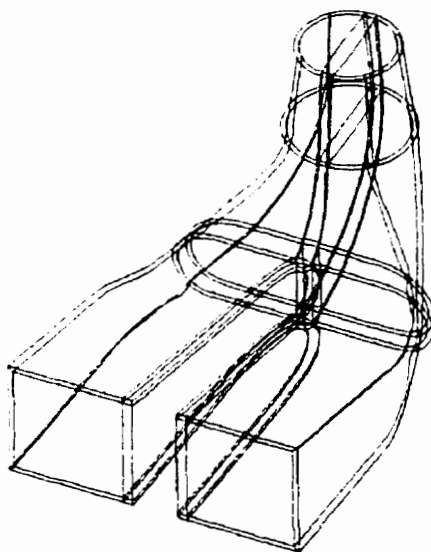


FIG. 4.26: Zonage enrichi par l'ajout de peau sur les parois solides

4.2.7 Solutions et discussion

Des solutions ont été calculées pour plusieurs modèles d'apirateurs avec chacun des types de patrons de blocs présentés. Afin de démontrer les possibilités du mailleur à obtenir des solutions pour des cas industriels complexes, nous avons choisi de présenter

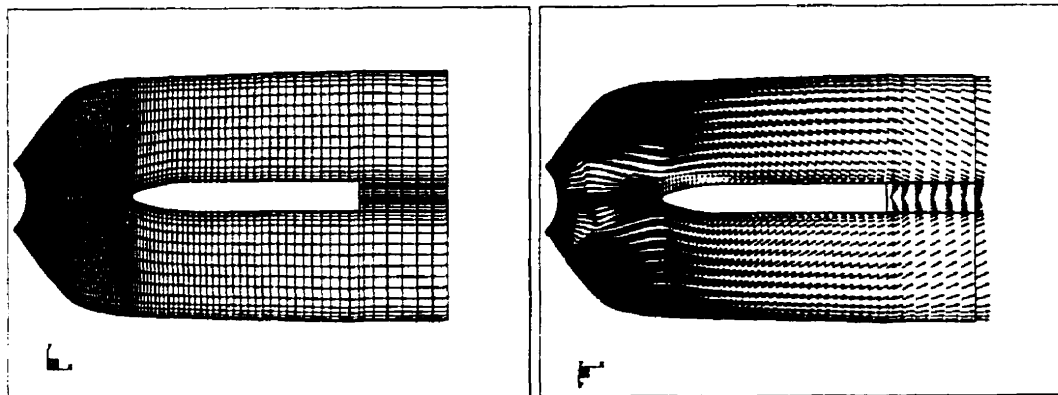
quelques résultats d'une campagne de validation mené sur un aspirateur typique de chez GE, pour lequel des dizaines de maillages et de solutions ont été produits.

Lors de cette campagne de validation, des maillages de dimensions à peu près identiques ont été construits pour tous les patrons, et utilisés afin de déterminer la colline de rendement de l'aspirateur pour chaque patron. La colline de rendement est obtenue en évaluant les pertes de l'aspirateur pour une plage la plus étendue possible de conditions d'opération. L'un des objectifs de cette campagne était de vérifier la sensibilité de ces analyses aux différents types de maillages qui peuvent être produits, et de déterminer le patron de zonage le plus approprié pour effectuer les calculs en mode de production.

Nous présentons ici les solutions obtenues pour les mêmes conditions d'opération, soit la pleine charge, sur différents types de maillages. Toutes les solutions ont été calculées avec les mêmes conditions limites, les même paramètres d'écoulement et le même résolveur. En l'occurrence, le résolveur TascFlow a été utilisé pour obtenir des solutions à un nombre de Reynolds de un million (10^6), un profil de vitesse à l'entrée ayant les caractéristiques d'un tourbillon solide, une intensité turbulente de cinq pourcents et un modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec loi de paroi.

Chaque solution est illustrée dans la vue de plan, à l'aide des vecteurs de vitesse immédiatement en dessous du plafond de l'aspirateur. Le haut de l'aspirateur est en effet une région où la solution est particulièrement sensible aux caractéristiques du maillage, et où se développent des zones de recirculation secondaires exigeant une bonne résolution pour être capturées.

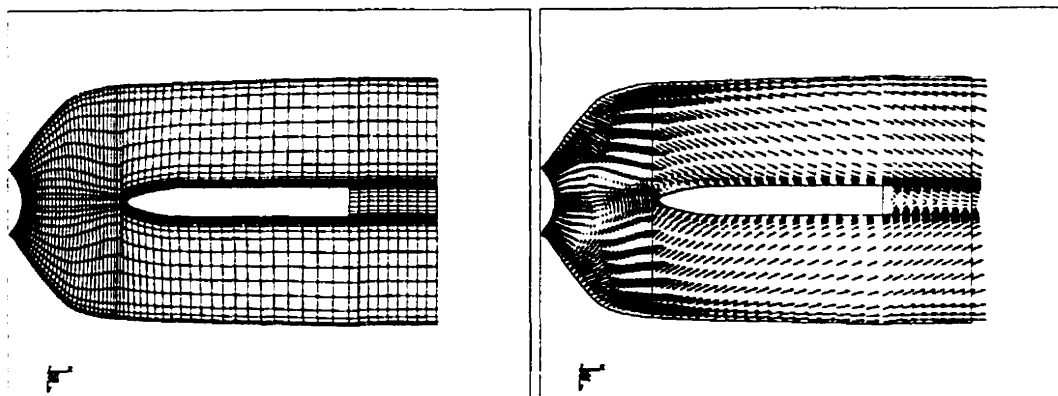
TascFlow, le résolveur utilisé pour ces analyses, est par ailleurs très sensible à la configuration du maillage à la sortie de l'aspirateur. Cette campagne d'analyse nous a



(a) Maillage

(b) Solution près du plafond

FIG. 4.27: Solutions pour le patron en 'H'

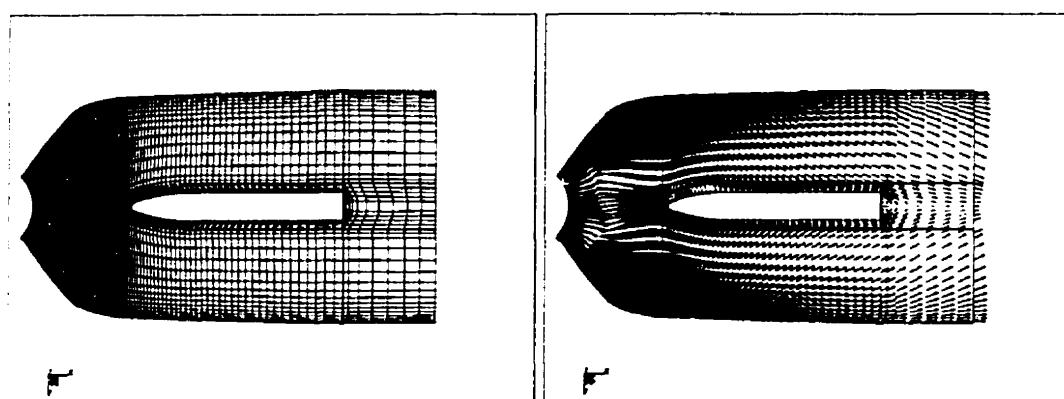


(a) Maillage

(b) Solution près du plafond

FIG. 4.28: Solutions pour le patron en 'C'

par exemple permet de découvrir, pour un nombre équivalent de maille, que l'utilisation d'un patron en 'O' à la sortie de l'aspirateur permet d'économiser près de la moitié du temps de calcul par rapport aux configurations en 'H' et en 'C'. Cette différence importante est liée à la façon qu'a le résolveur de traiter les conditions limites de sortie.



(a) Maillage

(b) Solution près du plafond

FIG. 4.29: Solutions pour le patron en 'O'

Conclusion

Nous avons présenté une méthode générale de construction de maillages hybrides, applicable à des géométries complexes de type industriel. Cette méthode a par ailleurs fait l'objet d'une mise en œuvre informatique sous forme d'une bibliothèque de classes et d'un programme de maillage, qui s'inscrivent dans un projet plus large de résolution intégrée et de remaillage adaptatif de problèmes numériques.

Cette approche de génération de maillage permet non seulement de produire des maillages hybrides comportant des couches minces d'éléments près des parois solides tel que requis pour la résolution des équations de Navier-Stokes, mais elle peut également être adaptée afin de construire des outils spécialisés de zonage en vue de produire des maillages multiblocs structurés.

Toute la méthodologie de génération de maillage repose sur un processus de subdivision des volumes à mailler en zones spécialisées, qui sont ensuite discrétisées séparément selon des critères propres à chaque zone. Cette méthodologie suppose donc en entrée la spécification d'un modèle géométrique valide, comportant un ou plusieurs volumes fermés qui sont ensuite subdivisés.

Bien qu'un nombre appréciable de cas tests et de cas industriels aient pu être maillés

avec succès à l'aide des outils de maillage développés dans le cadre de ce travail, le projet est loin d'être complété. Plusieurs aspects essentiels de l'intégration du mailleur dans un cycle industriel d'analyse n'ont été abordés que partiellement. Mentionnons d'abord le problème capital du transfert de géométries industrielles quelconques vers le mailleur ; en soi, ce problème constitue probablement l'un des principaux obstacles à une utilisation plus large et efficace des outils de simulation et d'analyse. Il s'agit d'un problème auquel doivent faire face tous les intervenants dans le domaine de l'analyse numérique, pour lequel il n'existe actuellement aucune solution parfaitement générale.

Dans le contexte spécifique du mailleur, les problèmes de conversion des formats de représentation des données géométriques se trouvent en quelque sorte amplifiés par la nécessité de fournir au mailleur un modèle valide sur le plan topologique. Alors que les protocoles de transfert de données géométriques commencent à être relativement bien supportés par les systèmes CAO, le transfert des données topologiques reste très déficient, et beaucoup de travail reste à accomplir dans ce domaine.

Une approche porteuse, dans le contexte d'une collaboration industrielle ciblée, reste par ailleurs l'intégration de certains aspects de modélisation géométrique directement au processus de zonage et de maillage. Dans la mesure où le nombre de composantes à traiter reste petit, et où les outils de zonage permettent de développer des algorithmes génériques de traitement topologique et géométrique qui peuvent être récupérés, cette méthodologie permet d'éliminer une grande partie des problèmes associés au transfert de géométries complexes. D'une part, la quantité d'information géométrique à transférer se trouve grandement réduite, et d'autre part, le contexte du transfert permet d'associer une grande quantité d'information sémantique aux données brutes qui sont transmises. Il devient ainsi beaucoup plus facile de reconstruire un modèle géométrique valide à partir de certaines données convenues, que de transférer un modèle

géométrique qui soit complet a priori.

L'expérience acquise dans la mise en œuvre d'outils de modélisation et de zonage automatique de composantes permet par ailleurs d'envisager le développement d'autres "métap patrons de zonage" semblables à celui développé pour le mailleur de peau. En effet, tout comme il a été possible de produire des algorithmes génériques de zonage capables de subdiviser et de traiter toutes les configurations topologiques s'exprimant comme le déplacement d'une frontière vers l'intérieur du domaine, nous pourrions envisager développer d'autres modes d'interaction topologique avec un modèle. Un de ces modes, qui vient immédiatement à l'esprit, pourrait par exemple consister à insérer un obstacle dans un volume existant. L'outil de zonage automatique développé pour le diffuseur coudé pourrait ainsi être construit en combinant deux métap patrons de zonage : celui de l'intersection de la pile avec la coquille, et celui du déplacement de certaines frontières.

Étendre les champs d'applications du mailleur implique également le développement de nouveaux algorithmes de traitement géométrique. Si l'on pense par exemple aux algorithmes de déplacement de courbes et de surfaces, qui avaient été initialement prévus pour des déplacements de faibles amplitudes, les utiliser pour des opérations de zonage classique les pousse souvent à la limite de leur robustesse. Il paraît ainsi pertinent d'envisager le développement de nouveaux algorithmes spécifiquement destinés, par exemple, à déplacer les entités géométriques sur de grandes distances. Il en va de même pour certains algorithmes d'optimisation, prévus eux aussi pour des faibles déplacements, qui auraient avantage à être revus dans un contexte de zonage proprement dit.

L'ensemble de ce travail a, par ailleurs, fait apparaître la grande convergence au niveau

des objectifs, de deux techniques de génération de maillage apparemment éloignées : la génération de maillages hybrides pour les écoulements visqueux, et la génération de maillages multiblocs structurés. Chaque méthode tente en effet, de façon implicite ou explicite, de particulariser certaines zones du domaine à mailler, afin d'appliquer soit des techniques de discrétisation ou des paramètres de contrôle spécifiques, en fonction des caractéristiques locales du maillage désiré.

En réunissant ces deux approches au sein d'un même outil de discrétisation, il a été possible de développer des algorithmes génériques s'appliquant aussi bien à une méthode qu'à l'autre, et de faire profiter chaque méthode de façons de faire et d'algorithmes issus de l'autre. Cette synergie entre les méthodes de génération de maillage a finalement permis le développement d'outils dédiés, qui, à moyen terme, pourront eux aussi enrichir la base de connaissances et d'algorithmes déjà construite.

Bibliographie

- ACIS (1992). *ACIS, Interface guide*. Spatial technologies.
- BABUSKA, I. AND AZIZ, A. K. (1976). On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 13, 214–226.
- BANKS, D. (1996). An object oriented approach to hybrid structured/unstructured grid generation. *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-96-0032.
- BATCHELOR, G. K. (1973). *Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BISWAS, R. (1996). A dynamic mesh adaptation procedure for unstructured hexahedral grids. *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-96-0027.
- BLACKER, T. D. et STEPHENSON, M. B. (1991). Paving : A new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, 811–847.
- BONNET, J. et PERAIRE, J. (1991). An alternating digital tree (adt) algorithm for 3d geometric searching and intersection problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- CHAN, W. et STEGER, J. L. (1992). Enhancement of a three-dimensional hyperbolic grid generation scheme. *Applied Mathematics and Computation*.
- CHAPPEL, J. A., SHAW, J. A. et LEATHAM, M. (1996). The generation of hybrid grids incorporating prismatic regions for viscous flow calculations. *Proceedings of*

the 5th international conference on numerical grid generation in computational field simulations.

- CLAUSEN, P. D. et KOH, S. G. (1993). Measurements of a swirling turbulent boundary layer developing in a conical diffuser. *Exp. Thermal and Fluid Science*.
- CONNELL, S. et BRAATEN, M. (1994). Semi-structured mesh generation for 3d navier-stokes calculations. Rapport technique 94CRD154, GE Research & Development Center.
- CORDOVA, J. Q. (1991). Advances in hyperbolic grid generation. *4th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*.
- COUPEZ, T. (1991). *Grandes transformations et remaillage automatique*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines de Paris.
- GAITHER, A. (1994). A topology model for numerical grid generation. *Proceedings of the 4th international conference on numerical grid generation in computational fluid dynamics and related fields*.
- GEORGE, P. L. (1992). Génération de maillages par une méthode de type voronoï, partie 2 : le cas tridimensionnel. Rapport technique RR-1664, INRIA.
- GUENTER, B. et PARENT, R. (1990). Motion control, computing the arc length of parametric curves. *IEEE Computer Graphics and applications*.
- JONES, G. A. (1988). *Surface Grid Generation for Composite Blocks Grids*. Thèse de doctorat, Mississippi State University.
- KALLINDERIS, Y., KHAWAJA, A. et MCMORRIS, H. (1995). Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries. *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-95-0211.
- KIM, B. (1994). *Automatic Multi-Block Grid Generation about Complex Geometries*. Thèse de doctorat, University of Washington.

- KOOMULLIL, R., SONI, B. et HUANG, C.-T. (1996). Navier-Stokes simulation on hybrid grids. *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-96-0768.
- LAKSHMINARAYANA, B. (1996). *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*. Wiley—Interscience.
- MARCUM, D. L. (1995). Generation of unstructured grids for viscous flow applications. *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-95-0212.
- MONSON, D. J. et SEEGLER, H. L. (1990). Comparison of experiment with calculations using curvature-corrected zero and two equation turbulence models for a two-dimensional u-duct. *AIAA 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*. No. AIAA-90-1484.
- NOBLE, S. S. et CORDOVA, J. Q. (1992). Blocking algorithms for structured mesh generation. *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-92-0659.
- PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. et ZIENKIEWICZ, O. C. (1987). Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*.
- PIEGL, L. et TILLER, W. (1995). *The NURBS Book*. Springer.
- PIRZADEH, S. (1993). Unstructured viscous grid generation by advancing-layers method. *AIAA 11th Applied Aerodynamics Conference*. No. AIAA-93-3453.
- PIRZADEH, S. (1996). Viscous unstructured three dimensional grids by the advancing layers method. *AIAA journal*.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. et FLANNERY, B. P. (1992). *Numerical recipes in C : The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- SETHIAN, J. A. (1994). Curvature flow and entropy conditions applied to grid generation. *Journal of Computational Physics*, 115, 440–454.

- SHAW, J. et WEATHERILL, N. P. (1992). Automatic topology generation for multi-block grids. *Applied Mathematics and computation*, 52, 355–388.
- SMITH, R. J. et LESCHZINER, M. A. (1996). A novel cartesian grid method for complex aerodynamic CFD applications. *Proceedings of the 5th international conference on numerical grid generation in computational field simulations*.
- SOETRISMO, M., IMLAY, S. T., ROBERTS, D. W. et TAFLIN, D. E. (1996). Development of a 3-d zonal implicit procedure for hybrid structured–unstructured grids. *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-96-0167.
- STEGER, J., DOUGHERTY, F. C. et BENEK, J. (1983). A chimera grid scheme. K. Ghia et U. Ghia, éditeurs, *Advances in grid generation*. vol. 5.
- THOMPSON, J. et WEATHERILL, N. P. (1993). Aspects of numerical grid generation : Current science and art. *AIAA 11th Applied Aerodynamics Conference*.
- THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A. et MASTIN, C. (1985). *Numerical Grid Generation, Foundations and Applications*. North-Holland, New York.
- WEATHERILL, N. (1993–94). Grid generation by Delaunay triangulation. *Lecture Series*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics.