POLYPUBLIE

Etude des points d'équilibre des jeux bimatriciels

Sabrina Gomez Canovas

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	1998
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/6770/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Gomez Canovas, S. (1998). Etude des points d'équilibre des jeux bimatriciels [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/6770/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Brigitte Jaumard
Programme Program	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DES POINTS D'ÉQUILIBRE DES JEUX BIMATRICIELS

SABRINA GOMEZ CANOVAS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
MARS 1998

© Sabrina Gomez Canovas, 1998.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37444-0

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE DES POINTS D'ÉQUILIBRE DES JEUX BIMATRICIELS

présenté par: GOMEZ CANOVAS Sabrina

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GAUVIN JACQUES, Ph.D., président

Mme JAUMARD Brigitte, T.Doct., T.Hab., membre et directrice de recherche

M. HANSEN Pierre, D.Agr., membre et codirecteur de recherche

Mme BRETON Michèle, Ph.D., membre

RÉSUMÉ

Nous étudions, dans un premier temps, les équilibres extrêmes des jeux bimatriciels. Les équilibres de Nash sont des équilibres corrélés et par conséquent appartiennent au polytope des distributions d'équilibres corrélés. Notre étude du polyèdre des équilibres corrélés met en évidence deux polytopes (P_1) et (P_2). Ces derniers sont respectivement satisfaits par chacune des stratégies mixtes formant un équilibre de Nash. L'étude de ces deux polytopes nous permet d'établir certaines des propriétés des équilibres de Nash extrêmes. Nous présentons une preuve alternative et originale du théorème de S. Evangelista et T.E.S. Raghavan (1996), à savoir les équilibres de Nash extrêmes sont des équilibres corrélés extrêmes. Nous montrons de plus que les jeux ayant un nombre différent de stratégies pour les deux joueurs ne possèdent pas d'équilibre de Nash extrême complet. D'autres propriétés sont présentées ainsi qu'une classe de jeux ne possédant pas d'équilibre de Nash complet.

Dans un deuxième temps, nous énumérons les distributions des équilibres de Nash et corrélés extrêmes pour des jeux générés aléatoirement dont les paiements sont des réels compris entre 0 et 1. Pour ce faire, nous avons utilisé le logiciel *cdd* de K. Fukuda pour l'énumération des points extrêmes d'un polyèdre et le logiciel *bimatrix* de C. Audet *et al.* pour l'énumération des équilibres de Nash extrêmes. Les équilibres de Nash sont présentés suivant leur nature (purs, complets, mixtes et efficaces). Nous avons également énuméré les équilibres corrélés efficaces. Ces plans d'expériences ont pour objet de déterminer l'efficacité relative des équilibres de Nash et de comparer leur nombre par rapport au nombre des équilibres corrélés efficaces.

Des résultats surprenants sur le nombre des équilibres sont observés et se traduisent par des conjectures.

ABSTRACT

We first study extreme equilibria of bimatrix games. Nash equilibria are correlated equilibria and thus belong to the correlated equilibria distribution polytope. Our study of this polyhedra leads to two polytopes (P_1) and (P_2). These are respectively satisfied by each player's mixed strategy in a Nash equilibrium. We then study this two polytopes in order to study properties of extreme Nash equilibria. We give an alternative and self-contained proof of Evangelista and Raghavan Theorem (1996), i.e. extreme Nash equilibria are extreme correlated equilibria. Furthermore, we show that games with different numbers of strategies for each player have no completely mixed extreme equilibria. Some further properties are presented as well as a class of games which have no completely mixed equilibrium.

We also study by computer the distributions of extreme Nash and correlated equilibria of random games with real payoffs between 0 and 1. To this effect, we compute correlated equilibria with *cdd* software of F. Fukuda for the vertex enumeration of polyhedra and Nash equilibria with *bimatrix* software of C. Audet *et al.*. Particular Nash equilibria such as completely mixed, pure or efficient ones are identified, as well as efficient correlated equilibria. This experimental design is built in order to determine the relative efficiency properties of Nash equilibria as well as their number in comparison with the number of efficient correlated equilibria. Some surprising results on the numbers of equilibria are observed and several conjectures derived from them.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ iv

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIERES vii

LISTE DES TABLEAUX x

LISTE DES FIGURES xii

LISTE DES SYMBOLES xiv

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 Une introduction à la théorie des jeux 4

1.1 Les jeux bimatriciels 4

1.1.1 Un exemple : le dilemme du prisonnier 6

1.1.2 Les hypothèses de rationalité 7

1.2 Stratégie pure - Stratégie mixte 7

1.3 Les équilibres de Nash 10

1.4 Propriétés des équilibres de Nash 12

1.5 Ensemble de Nash maximal 13

1.6 Equilibres de Nash extrêmes 16

1.7 Les équilibres corrélés 17

1.7.1 Stratégie corrélée 17

1.7.2 Distribution d'équilibre corrélé 18

CHAPITRE 2 Les équilibres extrêmes 21

2.1 Propriétés des équilibres de Nash extrêmes 21

2.2 Les ensembles de Nash maximaux 30

2.3 Les jeux faiblement complets 32

2.4 Les équilibres de Nash complets 34

CHAPITRE 3 Etudes empiriques 40

3.1 Propriétés du polyèdre des équilibres corrélés 40

3.2 Calcul des équilibres corrélés extrêmes 43

3.2.1 La méthode de double description : version standard 44

3.2.2 Calcul des points et des rayons extrêmes 47

3.3 Calcul des équilibres de Nash 48

3.4 Les équilibres efficaces ou de Pareto 51

3.5 Résultats numériques 53

3.5.1 Les jeux bimatriciels 2×2 53

3.5.2 Les jeux bimatriciels 3×3 59

3.5.3 Les jeux bimatriciels 4×4 65

3.5.4 Les jeux bimatriciels non-carrés 68

CONCLUSION **73**

BIBLIOGRAPHIE **75**

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Jeu "Pierre, Feuille, Ciseaux" 5

1.2 Dilemme du prisonnier 6

1.3 Pile ou face 11

3.1 Exemple de jeu 2×2 dégénéré 56

3.2 Répartition des équilibres de Nash en stratégies pures - 500 jeux 2×2 57

3.3 Répartition des équilibres de Nash complets - 500 jeux 2×2 58

3.4 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux 2×2 58

3.5 Exemple de jeu 3×3 dégénéré 62

3.6 Répartition des équilibres de Nash complets - 500 jeux 3×3 63

3.7 Répartition des équilibres de Nash complets et efficaces - 500 jeux 3×3 64

3.8 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux 3×3 65

3.9 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 200 jeux 4×4 68

3.10 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 200 jeux 5×3 71

3.11 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux 4×3 72

3.12 Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux 3×2 72

LISTE DES FIGURES

3.1 Matrice des contraintes d'incitation issue du joueur 1 42

3.2 Matrice des contraintes d'incitation issue du joueur 2 43

3.3 Jeux 3×3 - Répartition des paiements 52

3.4 Répartition des équilibres corrélés sur 500 jeux 2×2 53

3.5 Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux 2×2 54

3.6 Répartition des équilibres de Nash sur 500 jeux 2×2 54

3.7 Répartition des équilibres corrélés sur 500 jeux 3×3 60

3.8 Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux 3×3 60

3.9 Répartition des équilibres de Nash sur 500 jeux 3×3 61

3.10 Répartition des équilibres corrélés sur 200 jeux 4×4 66

3.11 Répartition des équilibres efficaces sur 200 jeux 4×4 66

3.12 Répartition des équilibres de Nash sur 200 jeux 4×4 67

3.13 Répartition des équilibres efficaces sur 200 jeux 5×3 69

3.14 Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux 4×3 70

3.15 Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux 3×2 70

LISTE DES SYMBOLES

m : nombre de stratégies du joueur 1

n : nombre de stratégies du joueur 2

A : matrice $m \times n$ des paiements du joueur 1

B : matrice $m \times n$ des paiements du joueur 2

a_{ij} : élément de la matrice A

b_{ij} : élément de la matrice B

(A, B) : jeu bimatriciel défini par les matrices A et B

S^i : ensemble dénombrable des stratégies du joueur 1

$|S^i|$: cardinalité de l'ensemble S^i

E^m : ensemble des stratégies mixtes du joueur 1

E^n : ensemble des stratégies mixtes du joueur 2

(x, y) : couple de stratégies mixtes

M: ensemble des indices des stratégies pures du joueur 1

N: ensemble des indices des stratégies pures du joueur 2

$M(x)$: support du joueur 1 pour la stratégie mixte x

$N(y)$: support du joueur 2 pour la stratégie mixte y

$conv\{\}$: désigne l'enveloppe convexe d'un nombre de points

$E(A, B)$: ensemble des équilibres de Nash du jeu (A, B)

S : ensemble de Nash

Γ : espace de probabilité fini

Γ^i : espace de probabilité associé à la stratégie mixte du joueur i

f : fonction de Γ vers $S^1 \times S^2$

A_i^t : i-ème vecteur ligne de A

B_j : j-ème vecteur colonne de B

p_{ij} : distribution de probabilité sur $S^1 \times S^2$

$ext(P)$: ensemble des indices des points extrêmes de P

$(x^p)_{p \in ext(P)}$: points extrêmes de P

$\mathbb{1}_m$: vecteur $m \times 1$ dont toutes les composantes sont égales à 1

$\mathbb{1}_n$: vecteur $n \times 1$ dont toutes les composantes sont égales à 1

e_1 : vecteur unitaire de taille m ou n dont la première composante vaut 1

$rg(A)$: rang de la matrice A

$S(y)$: ensemble des stratégies mixtes en équilibre avec y

INTRODUCTION

"Qui cherche la vérité doit être prêt à l'inattendu, car elle est difficile à trouver et, quand on la rencontre, déconcertante."

Héraclite

Ce projet de maîtrise est né d'une collaboration entre le professeur R. Nau de Duke University et le professeur P. Hansen des Hautes Études Commerciales de Montréal. Cette collaboration traduit une des applications de la Recherche Opérationnelle à la théorie des jeux. Imaginons un jeu à deux joueurs et plaçons nous du côté du joueur 1. Ce dernier a le choix entre trois stratégies et avant d'arrêter son choix il se demandera quelle stratégie son adversaire est susceptible de choisir. Le joueur 1 peut alors résoudre son problème de choix par un simple programme linéaire permettant de maximiser son gain étant donné ses croyances sur les stratégies de son adversaire. Bien entendu, le joueur 2 adoptera une démarche similaire. Les deux joueurs auront donc intérêt à bâtir un modèle en fonction de leurs différentes croyances lesquelles peuvent aboutir à une situation d'équilibre.

Nous avons brièvement décrit ce que l'on appelle un jeu bimatriciel et ce qui pourrait être une situation d'équilibre. Nous présentons au chapitre 1 une introduction à la théorie des jeux. Celle-ci ne couvre que les jeux bimatriciels et présente deux solutions d'équilibres : les équilibres de Nash et les équilibres corrélés.

John F. Nash a obtenu en 1994 conjointement avec John C. Harsanyi et Reinhard Selten le prix Nobel d'Économie pour leurs contributions novatrices en analyse des équilibres dans le domaine des jeux non coopératifs.

Si les équilibres de Nash représentent un des concepts universels de la théorie des jeux, il y a cependant de nombreux problèmes qui leur sont associés tant dans leur calcul et leur nombre que dans les hypothèses de jeux qu'ils requièrent. Si un jeu possède plusieurs équilibres de Nash, le critère d'équilibre ne peut pas être utilisé afin de prédire directement le résultat du jeu. De plus, chaque joueur est supposé détenir l'information complète sur la situation des autres joueurs. De nombreux raffinements ont été développés par la suite afin de pallier à l'un ou l'autre de ces problèmes. R.J. Aumann en 1974 introduit le concept d'équilibre corrélé, plus large que celui de J.F. Nash et qui du point de vue du calcul est plus simple à résoudre. En effet, les équilibres corrélés correspondent à un polytope dont la caractérisation algébrique sera énoncée en 1987 par R.J Aumann.

Si le problème de calcul semble être résolu, celui du nombre d'équilibres s'agrave. Cependant, un équilibre de Nash est un équilibre corrélé. Nous étudions au chapitre 2, les équilibres de Nash du point de vue des équilibres corrélés en utilisant la théorie polyédrale. Cette approche nous permet d'analyser les propriétés des équilibres de Nash. De nouveaux résultats ont été démontrés et des preuves alternatives et plus courtes sont données pour des résultats existants. L'originalité de notre approche réside en la linéarisation des équations définissant un équilibre de Nash à l'aide du polytope des équilibres corrélés.

Des études empiriques sont présentées au chapitre 3 sur le nombre et la nature des équilibres de Nash et des équilibres corrélés auxquels nous ajoutons les équilibres corrélés efficaces ou de Pareto. Entre 200 et 500 jeux sont générés aléatoirement pour différentes situations. Pour chacun des jeux sont calculés les équilibres corrélés, les équilibres de Nash complets, purs, mixtes et efficaces, ainsi que les équilibres corrélés efficaces. Ces études sont menées afin de déterminer quel pourrait être l'intérêt pour

les joueurs de jouer un équilibre plutôt qu'un autre. Enfin, certains de nos résultats numériques se traduisent par des conjectures.

CHAPITRE 1

Une introduction à la théorie des jeux

1.1 Les jeux bimatriciels

Avant d'entamer la partie, essayons de comprendre les règles du jeu. Un jeu peut se définir de différentes façons, en particulier comme la description d'une interaction stratégique entre plusieurs joueurs. Cette description inclut les stratégies que les différents joueurs peuvent choisir ainsi que leurs intérêts dans la partie, mais ne spécifie pas les stratégies que les joueurs devraient adopter. Avant de donner une définition plus formelle d'un jeu, un certain nombre d'hypothèses sont nécessaires. Les intérêts des joueurs dans les différentes situations du jeu sont supposés être quantifiables. L'ensemble des stratégies de chacun des joueurs est fini et il est possible d'énumérer chacune d'entre elles. Prenons l'exemple d'un jeu auquel nous avons tous joué au moins une fois : "Pierre, Feuille et Ciseaux". Les deux joueurs ont chacun le choix parmi trois stratégies possibles. Le choix simultané d'une stratégie par les joueurs conduit un joueur à la victoire et l'autre à la défaite. Les gains des joueurs peuvent alors être quantifiés de la manière suivante : celui qui perd paye une certaine

Tableau 1.1 – *Jeu "Pierre, Feuille, Ciseaux"*

	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	0	-10	10
Feuille	10	0	-10
Ciseaux	-10	10	0

somme d'argent à celui qui gagne. Les gains, pour un joueur donné, sont spécifés dans la matrice du tableau 1.1.

Il est très important dans ce jeu que le choix des stratégies par les deux joueurs se fasse de façon simultanée. Il est clair que la connaissance par un des joueurs du choix de l'adversaire lui confère une victoire assurée. Toute communication entre les joueurs est formellement interdite, soit parce que les règles du jeux sont ainsi définies, soit parce que les intérêts des différents joueurs sont inconciliables. Nous nous intéressons aux jeux dits non coopératifs.

Dans le cas qui nous préoccupe, les jeux à deux joueurs, un jeu est défini par une paire de matrices réelles $m \times n$ dites matrices de paiements, soit (A, B) où $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. On fait correspondre les lignes au joueur 1 et les colonnes au joueur 2. Ainsi, le paiement du joueur 1 dans la situation où il choisit la stratégie i et son adversaire la stratégie j est a_{ij}, celui du joueur 2, b_{ij}. On distingue deux classes de jeux bimatriciels : les jeux à somme nulle et les jeux à somme non nulle. Les jeux à somme nulle sont tels que les paiements de chacun des joueurs sont opposés, c'est à dire que $A = -B$. Ces jeux sont donc strictement compétitifs. L'autre classe de jeux, que l'on peut aussi définir comme les jeux non strictement compétitifs, ne vérifie donc pas cette condition.

1.1.1 Un exemple : le dilemme du prisonnier

Nous allons illustrer les jeux non strictement compétitifs par un exemple qui est devenu aujourd'hui un classique en théorie des jeux et qui est du à A. W. Tucker (de nombreuses variantes du jeu ont été formulées, on peut se référer à [8]).

Tableau 1.2 – *Dilemme du prisonnier*

	ne pas avouer	avouer
ne pas avouer	(1, 1)	(10, 0)
avouer	(0, 10)	(3, 3)

La formalisation matricielle du jeu est donnée au tableau 1.2. On peut interpréter le jeu comme suit : deux suspects sont arrêtés par la police et mis dans deux pièces séparées. Le procureur est persuadé de leur culpabilité, mais n'a aucune preuve. Il va donc dire à chacun des suspects qu'ils ont deux alternatives possibles : avouer ou ne pas avouer. Si les deux suspects n'avouent pas, ils seront incarcérés chacun pour un an. Si l'un deux avoue et l'autre non, celui qui avoue sera utilisé comme témoin contre l'autre, auquel cas il sera libéré et l'autre incarcéré pour dix ans. Enfin, si les deux avouent, ils seront incarcérés chacun pour trois ans. Les suspects devront donc choisir entre avouer ou non. Dans les conditions de l'interrogatoire tel qu'il est précisé par l'avocat général, un suspect a tout intérêt à avouer quoi que fasse son complice. On voit ici que l'issue du jeu serait complètement différente si les deux suspects pouvaient communiquer. Ils choisiraient alors conjointement de ne pas avouer.

1.1.2 Les hypothèses de rationalité

L'exemple précédent illustre d'une certaine manière les choix des comportements humains : la rationalité individuelle ou bien la démarche collective. Nous n'entrerons pas dans les débats quelque peu philosophiques sur ces thèmes, qui ont suscité de nombreuses discussions en théorie des jeux. Néanmoins, il nous paraît important de définir le cadre dans lequel sont placés nos deux joueurs.

Nous considérons donc les jeux où toute communication est interdite. Chaque joueur choisit sa stratégie indépendamment des autres. Chaque joueur agit de façon à maximiser l'espérance de son gain. Les joueurs sont donc rationnels au sens de Bayes (se référer à [3]). Enfin, un joueur est conscient de son propre objectif mais aussi de celui de l'autre joueur, qu'il suppose lui aussi rationnel. On dit que la rationalité est une connaissance commune : le premier joueur sait que l'autre est rationnel, il sait que l'autre le sait rationnel, etc...
Ajoutons toutefois une dernière hypothèse qui nous permettra de définir le concept d'équilibre corrélé. On supposera qu'un joueur forme des croyances, exprimées sous forme de loi de probabilité, sur tout ce qui est inconnu, croyances compatibles avec son information a priori. En d'autres termes, les joueurs sont conformes à la théorie de Savage (se référer à [3]).

1.2 Stratégie pure - Stratégie mixte

Jusqu'à présent, chaque joueur choisit simultanément une stratégie parmi un ensemble dénombrable de stratégies : S^i pour le joueur i. Supposons maintenant que

le joueur i puisse choisir comme stratégie non seulement un point de l'ensemble S^i, mais aussi une distribution de probabilité sur cet ensemble. Une telle distribution est appelée une *stratégie mixte*. De nombreuses interprétations ont été formulées au sujet des stratégies mixtes et font toujours l'objet de nombreux débats tant théoriques qu'empiriques. Certains diront qu'il s'agit d'une idée due à Borel pour éliminer la ruse dans certains jeux, mais cette notion repose surtout sur une axiomatique des choix dans l'incertain développée par Von Neumamm et Morgenstern. L'ouvrage de M.J. Osborne et A.Rubinstein [19] présente les différentes interprétations et sur certains points les auteurs ne partagent pas le même avis. Nous ne considérerons les stratégies mixtes que sous leur aspect purement mathématique.

Définition 1.1 *Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S^i de ses stratégies.*

Si $|S^1| = m$ et $|S^2| = n$, on note alors $x = (x_i)_{1\leq i\leq m}$ et $y = (y_j)_{1\leq j\leq n}$ deux stratégies mixtes du joueur 1 et du joueur 2 respectivement. De même, x et y sont des éléments des simplexes $E^m = \{x \in \mathcal{R}^m | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0\}$ et $E^n = \{y \in \mathcal{R}^m | \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{ et } y_j \geq 0\}$ respectivement. Remarquons qu'un point de l'ensemble S^1 correspond à une stratégie mixte particulière où la distribution de probabilité x est telle que : $\exists i_0 \in \{1, 2, ...m\}$ tel que $x_{i_0} = 1$ et $x_i = 0$ pour $i \neq i_0$. Autrement dit, la stratégie numérotée i_0 est choisie avec une probabilité de 1 par le joueur 1 . Par abus de langage, on parlera de la stratégie i_0 du joueur 1. Il en va de même si l'on considère l'ensemble S^2 des stratégies du joueur 2. Les stratégies de S^i sont appelées *stratégies pures.*

Le jeu initial vient d'être étendu par prolongement mixte. Nous verrons plus loin

l'intérêt d'un tel prolongement. Néanmoins, remarquons d'ores et déjà que le prolongement mixte du jeu nous permet de disposer d'un ensemble convexe de stratégies pour chacun des joueurs.

Reprenons notre partie, mais cette fois en jouant des stratégies mixtes. Nous avons vu que le résultat d'un jeu était symbolisée par une case (i, j) des matrices de paiements. Le résultat du jeu en stratégie mixte correspond cette fois au couple (x, y) défini précédemment. Le paiement des joueurs est alors associé à un résultat aléatoire et est égal à son espérance. Soient respectivement pour les joueurs 1 et 2, les paiements $z_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ et $z_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j$. Si chaque joueur tire au sort sa stratégie indépendamment des autres, l'issue (i, j) se réalise avec une probabilité x_iy_j.

Choisir une stratégie mixte revient pour un joueur à attribuer une probabilité non nulle à certaines de ses stratégies pures. Celles ci constituent alors le *support* de la stratégie mixte considérée.

Définition 1.2 *On appelle le support d'un joueur pour une stratégie mixte x, l'ensemble d'indices $\delta(x) = \{i | x_i > 0\}$.*

Le support du joueur 1 sera noté $M(x)$, celui du joueur 2 $N(y)$.

1.3 Les équilibres de Nash

Supposons que chaque joueur ait fait son choix de stratégie mixte de sorte qu'aucun des deux joueurs n'ait intérêt à changer son choix si l'autre ne le fait pas. En d'autres termes, toute déviation unilatérale de stratégie d'un joueur ne lui apporte aucun gain supplémentaire. Chaque joueur a donc choisi une stratégie comme étant la meilleure réponse possible à celle de l'autre. Une telle situation peut se définir comme une situation d'équilibre stable. On ne s'intéresse pas ici à la façon d'atteindre cette situation d'équilibre, mais aux propriétés de cette situation privilégiée. Ceci nous conduit à une définition plus mathématique de l'équilibre de Nash.

Définition 1.3 *Le couple* $(\overline{x}, \overline{y})$ *de stratégies mixtes d'un jeu bimatriciel défini par une paire* (A, B) *de matrices réelles* $m \times n$ *est appelée un équilibre de Nash si :*

$\overline{x}^t A\overline{y} \geq x^t A\overline{y}$ *pour toute stratégie mixte* x *et*
$\overline{x}^t B\overline{y} \geq \overline{x}^t By$ *pour toute stratégie mixte* y.

Dans le cadre des jeux à n joueurs, et sous certaines conditions, en particulier de convexité sur les ensembles de stratégies des joueurs, l'existence d'un équilibre est assurée par un célèbre théorème de J.F. Nash [17]. Le prolongement mixte d'un jeu satisfait les hypothèses du théorème de Nash. Ainsi, tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Il n'en est pas de même si l'on considère uniquement les équilibres en stratégies pures comme le montre le jeu du tableau 1.3. Ce jeu n'admet pas d'équilibres en stratégies pures, mais un unique équilibre en stratégies mixtes. Notons x_1 (resp. y_1) la probabilité que le joueur 1 (resp. 2) choisisse Pile. D'après la définition d'un équilibre de Nash, on doit calculer les meilleures réponses du joueur

Tableau 1.3 – *Pile ou face*

	Pile	Face
Pile	(1, -1)	(-1, 1)
Face	(-1, 1)	(1, -1)

1 (resp. 2) étant donné y_1 (resp. x_1). En regroupant les termes en x_1 on obtient le paiement espéré du joueur 1 :

$$z_1(y_1) = argmax_{x_1 \in [0,1]}\{x_1(4y_1 - 2) - 2y_1 + 1\},$$

ou encore :

$$z_1(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_1 > 1/2 \\ [0,1] & \text{si } y_1 = 1/2 \\ 0 & \text{si } y_1 < 1/2 \end{cases}.$$

On obtient de même le paiement espéré du joueur 2 :

$$z_2(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 1/2 \\ [0,1] & \text{si } x_1 = 1/2 \\ 0 & \text{si } x_1 < 1/2 \end{cases}.$$

Ce jeu admet donc un unique équilibre de Nash où $x = (1/2, 1/2)$ et $y = (1/2, 1/2)$. Remarquons que l'introduction de stratégies mixtes dans ce jeu a permis, d'une part d'assurer l'existence d'un équilibre de Nash, et d'autre part d'éliminer la ruse. En effet, la connaissance par l'un des joueurs de la stratégie mixte de l'autre joueur ne lui apporte plus aucun avantage. Il ne sait pas quelle stratégie pure ce joueur va privilégier.

Parmi les équilibres de Nash, on distingue les équilibres dits *complets* dans lesquels aucune stratégie pure, pour chacun des deux joueurs, ne se voit attribuer une probabilité nulle. L'équilibre de l'exemple précédent est un équilibre de Nash complet.

1.4 Propriétés des équilibres de Nash

La définition d'un équilibre de Nash peut s'interpréter comme suit : toute stratégie pure utilisée avec une probabilité non nulle par un des joueurs à l'équilibre est une meilleure réponse à la stratégie mixte de l'autre. Les stratégies pures dans le support du joueur lui rapportent chacune le même paiement étant donné la stratégie mixte de l'autre joueur. Le paiement pour une stratégie pure i_0 dans le support du joueur 1 à l'équilibre s'écrit donc $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} y_j$. Le joueur est donc indifférent entre toutes les stratégies pures du support qu'il utilise à l'équilibre, mais aussi entre toutes les combinaisons convexes de ces stratégies. Cependant, il doit choisir une combinaison particulière, sinon l'autre joueur aura intérêt à dévier. La sélection de cette stratégie mixte dépend donc de la matrice des paiements de l'autre joueur et non pas de celle du joueur considéré. C'est cette particularité qui rend difficile le calcul des équilibres de Nash - ce "partenariat" qui lie x et y à l'équilibre. Nous verrons au chapitre 2 où se situe ce lien. Bien sur, l'énumération de tous les supports possibles des joueurs permet de calculer les équilibres du jeu. Pour un jeu bimatriciel $m \times n$, le nombre de supports possibles est de l'ordre de 2^{n+m}.

1.5 Ensemble de Nash maximal

Un jeu bimatriciel possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes, mais il peut aussi en avoir une infinité. Examinons attentivement le jeu 4x2 suivant :

$$\begin{bmatrix} (3,1) & (0,1) \\ (2,0) & (1,1) \\ (1,1) & (2,3) \\ (1,2) & (2,1) \end{bmatrix}$$

et considérons les stratégies mixtes :

$$x^1 = (0,0,1,0) \quad x^2 = (0,0,\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}) \quad x^3 = (0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}) \quad x^4 = (1,0,0,0)$$
$$y^1 = (0,1) \qquad y^2 = (1,0) \qquad y^3 = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$

Alors, ce jeu a pour équilibres de Nash tout couple de stratégies mixtes (x,y) appartenant aux ensembles suivants :

$S^1 = conv\{x^1, x^2\} \times \{y^2\}$,
$S^2 = conv\{x^2, x^3, x^4\} \times \{y^1\}$,
$S^3 = \{x^4\} \times conv\{y^1, y^3\}$, et
$S^4 = \{x^2\} \times conv\{y^2, y^3\}$.

Nous venons d'introduire la notion d'ensemble de Nash. Nous verrons au chapitre 3 un algorithme nous permettant de calculer l'ensemble $E(A,B)$ des équilibres de Nash d'un jeu bimatriciel (A,B).

Avant de définir de manière formelle un ensemble de Nash, nous allons introduire la

notion d'interchangeabilité des équilibres.
Toutes les définitions sont données pour un jeu bimatriciel défini par la paire (A, B) de matrices réelles $m \times n$.

Définition 1.4 *Soit $S \subset E(A, B)$. On dit que deux équilibres de Nash (x^1, y^1) et (x^2, y^2) sont S-interchangeables si $(x^1, y^2) \in S$ et $(x^2, y^1) \in S$.*

D'une manière générale, on dit qu'une paire d'équilibres est interchangeable si elle est $E(A, B)$-interchangeable.

Définition 1.5 *On appelle ensemble de Nash, un ensemble $S \subset E(A, B)$ dont toute paire d'équilibres est S-interchangeable.*

Remarquons que si la relation d'interchangeabilité entre deux équilibres est une relation reflexive et symétrique, elle n'est pas pour autant transitive. L'exemple précédent nous le confirme. Considérons les trois équilibres suivants : (x^1, y^2), (x^2, y^2) et (x^2, y^3). Si l'on note par $\sim$ la relation d'interchangeabilité, on a : $(x^1, y^2) \sim (x^2, y^2)$ et $(x^2, y^2) \sim (x^2, y^3)$. Néanmoins, (x^1, y^3) n'est pas un équilibre de Nash, la relation $(x^1, y^2) \sim (x^2, y^3)$ n'est donc pas vérifiée.

G.A. Heuer et C.B. Millham [11] ont été les premiers à explorer certaines propriétés des ensembles de Nash. Ils ont introduit, en particulier, le concept d'ensemble de Nash maximal, maximal étant pris au sens de l'inclusion.

Définition 1.6 *Un ensemble de Nash est dit maximal s'il n'est pas strictement inclus dans tout autre ensemble de Nash.*

Les ensembles de Nash donnés pour l'exemple précédent représentent les ensembles de Nash maximaux du jeu. On constate que ceux-ci forment des ensembles convexes et fermés et que certains ont en commun des points extrêmes. Ceci nous conduit au théorème de G.A. Heuer et C.B. Millham [11] suivant :

Théorème 1.7 *(Heuer et Millham). Les ensembles de Nash maximaux sont des sous-ensembles convexes et fermés de* $E^m \times E^n$.

Considérons à nouveau les résultats de notre jeu 4x2. Remarquons que chacun des ensembles de Nash maximaux possède un nombre fini de points extrêmes et que la réunion des ces ensembles permet de déterminer l'ensemble des équilibres du jeu. En fait, quelque soit le jeu bimatriciel considéré, les ensembles de Nash maximaux présentent toujours cette même structure, à savoir le produit cartésien de deux polytopes et leur réunion constitue l'ensemble des équilibres du jeu. Ces résultats sont dus à M.J.M. Jansen [12]. Citons en particulier celui qui permet de caractériser l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu bimatriciel.

Théorème 1.8 *(Jansen) L'ensemble des points d'équilibres d'un jeu bimatriciel est l'union (non nécessairement disjointe) d'un nombre fini d'ensembles de Nash maximaux.*

Notons qu'on peut facilement montrer que les équilibres d'un jeu bimatriciel appartiennent toujours à un ensemble de Nash maximal.

En effet, soit $(x, y) \in E(A, B)$, alors l'ensemble $\{(x, y)\}$ est un ensemble de Nash. Si celui-ci n'est pas maximal, alors il est contenu dans un ensemble de Nash maximal.

1.6 Equilibres de Nash extrêmes

Les résultats de la section précédente montrent que la connaissance d'un nombre fini d'équilibres de Nash permet de caractériser l'ensemble des équilibres du jeu. Ces équilibres sont appelés équilibres extrêmes. Bien sûr, il faut avant tout reconstituer les ensembles de Nash maximaux. Pour ce faire, on utilise les propriétés d'interchangeabilité des équilibres d'un même ensemble de Nash.

Définition 1.9 *Un équilibre de Nash d'un jeu bimatriciel est appelé un équilibre extrême si il est un point extrême d'un ensemble de Nash maximal pour le jeu considéré.*

Précisons cette définition par rapport au produit cartésien des deux polytopes P_1 et P_2 constituant un ensemble de Nash maximal. Alors, (x, y) est un équilibre extrême, si x et y sont les points extrêmes de P_1 et P_2 respectivement. Nous verrons au chapitre 2, quelles sont les inégalités qui définissent les polytopes P_1 et P_2.

Les équilibres de Nash extrêmes sont propres aux jeux bimatriciels et les résultats précédents ne peuvent être étendus pour les jeux à plus de 2 joueurs. En effet, un exemple de jeu de poker de J.F. Nash [18] montre l'existence d'un unique équilibre de Nash qui se trouve être irrationnel. Par ailleurs, H. Chin, T. Parthasarathy et T.E.S.

Raghavanan [4] présentent un jeu à trois joueurs dont l'ensemble des équilibres est la réunion d'un nombre infini d'ensembles de Nash maximaux.

1.7 Les équilibres corrélés

Quittons momentanément les équilibres de Nash, pour introduire une nouvelle notion d'équilibre, due à R.J. Aumann [2].

1.7.1 Stratégie corrélée

Nous avons jusqu'ici évoqué le concept de stratégie mixte comme étant une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies d'un joueur. Qu'adviendrait-il si les deux joueurs se basaient sur la même variable aléatoire pour choisir leur stratégies? On obtiendrait alors une *stratégie corrélée.* Afin de mieux comprendre cette notion, imaginons un espace de probabilité fini Γ. On définit alors une stratégie corrélée comme étant une fonction f dont l'ensemble de départ est Γ et l'ensemble d'arrivée est $S^1 \times S^2$, c'est-à-dire que $f = (f_1, f_2)$ est une variable aléatoire dont les valeurs correspondent à des couples de stratégies pures.
La notion de stratégie corrélée comme le souligne R.J. Aumann [3] est une notion plus large que la notion de stratégie mixte. En fait, il s'agit d'obtenir d'une manière ou d'une autre une certaine distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies d'un joueur. Dans les deux cas, les joueurs basent leur choix de stratégie pure sur l'observation d'un événement aléatoire, en stratégie mixte les observations sont indépendantes, alors qu'en stratégie corrélée cette condition n'est pas nécessaire. Il est alors aisé de

voir qu'une stratégie mixte est une stratégie corrélée particulière. En effet, si l'on considère l'espace de probabilité Γ^i associé à la stratégie mixte du joueur i, alors Γ correspond au produit cartésien de Γ^1 et Γ^2.

Reprenons notre exemple de jeu "le dilemme du prisonnier" définit au tableau 1.1. Nous avons vu que l'issue du jeu correspond au couple de stratégies *(avouer, avouer)*. Si les deux prisonniers observent cette fois-ci simultanément une pièce de monnaie qui est lancée et jouent *(avouer, ne pas avouer)* si c'est pile ou bien *(ne pas avouer, avouer)* si c'est face, on obtient deux stratégies corrélées qui ne se réduisent pas à des produits de stratégies mixtes.
Dans le cas des stratégies corrélées, les joueurs choisissent une stratégie pure qui leur est suggérée par la réalisation de l'événement qu'ils observent, ils ne doivent pas choisir une distribution de probabilité sur leur ensemble de stratégies. La nature probabiliste des stratégies est due à la méconnaissance d'un joueur sur le choix de stratégie de l'autre joueur.

1.7.2 Distribution d'équilibre corrélé

Nous allons à présent, pour des raisons pratiques, associer une stratégie corrélée (f_1, f_2) avec sa distribution de probabilité sur $S^1 \times S^2$. En d'autres termes, étant donné un élément $s \in S^1 \times S^2$, on associe une stratégie corrélée avec le nombre $\text{Prob}\{f^{-1}(s)\}$. Cette association nous permet de définir plus simplement un équilibre corrélé. Considérons un jeu bimatriciel (A, B). Notons A_i^t le i-ème vecteur ligne de A et B_j le j-ème vecteur colonne de B. Le mn-tuple (p_{ij}) désigne une distribution de probabilité sur $S^1 \times S^2$. Nous utilisons une proposition de R. J. Aumann [1] pour

définir une distribution d'équilibre corrélé.

Proposition 1.10 *(Aumann): Une distribution de probabilité* (p_{ij}) *définit une distribution d'équilibre corrélé pour le jeu bimatriciel* (A, B) *si et seulement si*

$$(A_i - A_k)^t p_{i\cdot} \geq 0 \qquad i \in M,\ k \in M \tag{1.1}$$

$$p_{\cdot j}^t (B_j - B_\ell) \geq 0 \qquad j \in N,\ \ell \in N. \tag{1.2}$$

Ces inégalités sont communément appelées les *contraintes d'incitation.* Si on leur associe les contraintes liées aux distributions de probabilité, soit $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ et $p_{ij} \geq 0$, on obtient le polytope des équilibres corrélés.

Afin de mieux comprendre la définition d'un équilibre corrélé, imaginons une tierce personne, disons un arbitre, qui annonce à nos deux joueurs quels sont Γ et f. Un événement se produit, $w \in \Gamma$. L'arbitre calcule $f(w)$ et révèle seulement $f_i(w)$ au joueur i. Un équilibre corrélé se produit alors, si aucun des joueurs n'a intérêt à dévier de la recommandation de l'arbitre, en supposant bien sûr que l'autre joueur ne changera pas non plus la stratégie qui lui a été recommandée.

L'existence des équilibres corrélés est assurée par celle des équilibres de Nash. En effet, l'ensemble des équilibres de Nash est inclus dans celui des corrélés. Etant donné un équilibre de Nash (x, y) celui-ci induit une distribution d'équilibre corrélé en posant $p_{ij} = x_i y_j$. Les équations définissant un équilibre de Nash ont été en quelque sorte linéarisées.

L'ensemble des équilibres corrélés correspond à un polytope, la connaissance de ses points extrêmes est donc suffisante pour déterminer tous les équilibres corrélés

du jeu. Il est beaucoup plus facile de reconstituer ce polytope que les ensembles de Nash maximaux.

Définition 1.11 *Un équilibre corrélé d'un jeu bimatriciel est appelé un équilibre corrélé extrême si il est un point extrême du polytope des équilibres corrélés pour le jeu considéré.*

CHAPITRE 2

Les équilibres extrêmes

2.1 Propriétés des équilibres de Nash extrêmes

Nous savons que l'ensemble des équilibres de Nash est inclus dans l'ensemble des équilibres corrélés. Nous allons donc considérer les équilibres de Nash extrêmes du point de vue des équilibres corrélés et appliquer la théorie polyédrale afin d'étudier les propriétés de ces équilbres. Notre premier résultat a été établi de façon indépendante des travaux de M.W. Cripps [6] en 1995 et de S. Evangelista et T.E.S. Raghavan [7] en 1996. Ces auteurs montrent en effet le même résultat de manière différente. Néanmoins, notre approche diffère en de nombreux points de celle de ces auteurs. Qui plus est, elle nous a permis, comme nous allons le voir, d'obtenir d'autres résultats originaux.

Théorème 2.1 *Les équilibres de Nash extrêmes d'un jeu bimatriciel sont des équilibres corrélés extrêmes.*

Démonstration Soit $(x, y) \in E(A, B)$ un équilibre de Nash extrême. Alors la distribution $(p_{ij} = x_i y_j)$ satisfait les inégalités du polytope des équilibres corrélés,

c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{n}(A_i - A_k)_j \, x_i y_j \geq 0 \qquad i \in M,\ k \in M \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_j \, (B_j - B_\ell)_i \geq 0 \qquad j \in N,\ \ell \in N. \tag{2.2}$$

Si l'on divise la première inégalité par x_i et la seconde par y_j, pour les indices i et j appartenant respectivement à $M(x)$ et $N(y)$, il s'ensuit que x et y satisfont à :

$$(P_1) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i \, (B_j - B_\ell)_i &= 0 && j \in N(y), \ell \in N(y) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i \, (B_j - B_\ell)_i &\geq 0 && j \in N(y), \ell \in N \setminus N(y) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\ x_i &= 0 && i \in M \setminus M(x) \\ x_i &\geq 0 && i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

et

$$(P_2) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(A_i - A_k)_j \, y_j &= 0 && i \in M(x), k \in M(x) \\ \sum_{j=1}^{n}(A_i - A_k)_j \, y_j &\geq 0 && i \in M(x), k \in M \setminus M(x) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\ y_j &= 0 && j \in N \setminus N(y) \\ y_j &\geq 0 && j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Suite à ces préliminaires, la démonstration comprend deux étapes. Dans un premier temps, nous montrons que x et y sont des points extrêmes des polytopes P_1 et P_2 respectivement. Dans un second temps, nous montrons que la distribution $(p_{ij} = x_i y_j)$ est en conséquence un point extrême du polytope des équilibres corrélés. Pour ce faire, il suffit de trouver mn vecteurs lignes linéairement indépendants dans le système d'inégalités définissant ce polytope qui sont satisfaites à égalité.

Supposons que x ne soit pas un point extrême de (P_1). Il s'ensuit que x peut s'écrire comme une combinaison convexe des points extrêmes de (P_1), soient $(x^p)_{p\in ext(P_1)}$. Chacun des points extrêmes x^p est tel que $M(x^p) \subseteq M(x)$. Si l'on multiplie chacune des lignes de (P_2) par x_i^p et chacune des lignes de (P_1) par y_j, alors la distribution de stratégie corrélée définie par $(x_i^p y_j)$ satisfait les inégalités (2.1) et (2.2), et par conséquent $(x^p y)$ correspond à un équilibre de Nash.

D'après ce qui précède l'ensemble $S = conv\{(x^p)_{p\in ext(P_1)}\} \times \{y\}$ définit un ensemble de Nash. Donc (x, y) s'écrit comme une combinaison convexe d'éléments de S, ce qui contredit le fait que (x, y) est un équilibre de Nash extrême. On en conclut donc que x est un point extrême de (P_1) et l'on montre de façon similaire que y est un point extrême de (P_2).

Il existe alors $m-1$ inégalités de (P_1) excepté $\mathbb{1}_m^t x = 1$ qui forment $m-1$ vecteurs lignes linéairement indépendants et qui sont vérifiées à égalité par x. Notons alors B^*, la matrice $(m-1) \times m$ obtenue à partir de ces $m-1$ vecteurs lignes linéairement indépendants. De façon similaire, on obtient une matrice $(n-1) \times n$, notée A^* constituée à partir des $n-1$ vecteurs lignes de (P_2) excepté $\mathbb{1}_n^t y = 1$ qui sont des inégalités de (P_2) vérifiées à égalité par y.

Multiplions chaque ligne de $A^* y$ par x_i pour tout i appartenant à M. Nous obtenons alors, une structure diagonale par blocs dans l'espace des p_{ij}, où il y a exactement m blocs tous égaux à A^*. Il s'ensuit que nous avons $mn - m$ vecteurs lignes correspondant à des inégalités du polytope des équilibres corrélés qui forment des vecteurs linéairement indépendants. Ces $mn - m$ inégalités sont vérifiées à égalité par (p_{ij}). Il nous reste donc à trouver m vecteurs lignes additionnels, afin d'obtenir un système

de mn équations de rang mn. Si nous multiplions chaque ligne de $x^t B^*$ par y_1, nous obtenons $m-1$ vecteurs lignes de (1.2) linéairement indépendants. Nous allons montrer que ces $m-1$ vecteurs sont linéairement indépendants des $mn-m$ précédents.

Ainsi, nous disposons de $m-1$ vecteurs lignes dont la structure est la suivante :

$$(B^*_{\ell 1}\, 0 \ldots 0\, B^*_{\ell i}\, 0 \ldots 0\, B^*_{\ell m}\, 0 \ldots 0) \qquad \ell = 1, \ldots, m-1 \tag{2.3}$$

Considérons un des vecteurs lignes de (2.3) et supposons que $(B^*_{\ell i}\, 0 \ldots 0)$ correspond à un de ses blocs non nul. Etant donné que $rg(A^*) = n-1$, supposons sans perte de généralité que le vecteur unitaire e_1 et les vecteurs lignes de A^* forment un système linéairement indépendant. Il s'ensuit que le $i$ème bloc correspondant ne peut générer le vecteur non nul $(B^*_{\ell i}\, 0 \ldots 0)$. Ceci étant vrai pour tous les vecteurs de (2.3).
Le dernier vecteur ligne nécessaire pour compléter notre système nous est fourni par $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Finalement, si (x, y) est un équilibre de Nash extrême, alors $(p_{ij} = x_i y_j)$ est une distribution d'équilibre corrélé extrême. ∎

Remarque 2.2 Un équilibre de Nash, soit (x, y), qui induit un équilibre corrélé extrême est un équilibre de Nash extrême. En effet, supposons que tel n'est pas le cas. Il s'ensuit que cet équilibre peut s'écrire comme une combinaison convexe de certains équilibres de Nash extrêmes. Ainsi, l'équilibre corrélé correspondant, soit $(p_{ij} = x_i y_j)$, peut s'écrire comme une combinaison convexe des équilibres corrélés définis par les équilibres de Nash extrêmes, ce qui est une contradiction.

Remarque 2.3 Le théorème 2.1 ne peut être généralisé au cas des jeux à plus de deux joueurs, pour les raisons que nous avons évoqué au chapitre 1, à savoir, l'existence d'un jeu à trois joueurs où l'unique équilibre de Nash est irrationnel.

L'approche de M.W. Cripps, pour prouver le résultat précédent est également une approche directe, faisant néanmoins intervenir un jeu intermédiaire appelé jeu dérivé. Celui-ci est du à S. Hart et D. Schmeidler [9]. Ils construisent un jeu à somme nulle à partir des paiements du jeu initial. Le jeu dérivé est donné par la matrice G décrite comme suit :

$$G = [G_1|G_2]$$

où

$$G_1 = \begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & \dots & a_{11}-a_{m1} & & & \\ a_{12}-a_{12} & \dots & a_{12}-a_{m2} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{1n}-a_{1n} & \dots & a_{1n}-a_{mn} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{m1}-a_{11} & \dots & a_{m1}-a_{m1} \\ & & & & a_{m2}-a_{12} & \dots & a_{m2}-a_{m2} \\ & & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{mn}-a_{1n} & \dots & a_{mn}-a_{mn} \end{bmatrix}$$

et

$$G_2 = \begin{bmatrix}
b_{11}-b_{11} & \dots & b_{11}-b_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & b_{12}-b_{11} & \dots & b_{12}-b_{1n} & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & 0 & \dots & 0 & b_{13}-b_{11} \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
b_{21}-b_{21} & \dots & b_{21}-b_{2n} & \vdots & & \vdots & \\
0 & \dots & 0 & b_{22}-b_{21} & \dots & b_{22}-b_{2n} & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & 0 & \dots & 0 & b_{23}-b_{21} \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
b_{1m}-b_{m1} & \dots & b_{m1}-b_{mn} & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \dots & 0 & b_{m2}-b_{m1} & \dots & b_{m2}-b_{mn} & \dots \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \vdots & & & \vdots & &
\end{bmatrix}$$

Le jeu dérivé est tel que les distributions d'équilibres du jeu initial (A, B) sont des stratégies optimales du joueur en colonne dans le jeu $(G, -G)$. Cripps utilise également le théorème de L.S. Shapley et R.N. Snow [22] sur les jeux à somme nulle.

Evangelista et Raghavan proposent une preuve par contradiction. Ils supposent qu'un équilibre de Nash extrême n'induit pas un équilibre corrélé extrême et font

appel à certains des résultats de M.J.M.Jansen [12], T. Parthasarathy et T.E.S. Raghavan [20].

Notre approche est une approche directe et courte qui met en évidence deux polytopes (P_1) et (P_2). Ceci est du à la division des contraintes d'incitation par les composantes du support des stratégies mixtes des deux joueurs. Ces deux polytopes, dont la structure est particulière nous ont permis dans différentes situations de mettre en évidence certaines propriétés des équilibres de Nash extrêmes ou non.

La proposition suivante révèle une caractéristique importante des équilibres de Nash extrêmes, en particulier si le jeu n'est pas carré, à savoir, si $m > n$.

Proposition 2.4 *Si $(x, y) \in E(A, B)$ est un équilibre extrême, alors $|M(x)| \leq n$.*

Démonstration Soit $(x, y) \in E(A, B)$, un équilibre extrême. Il s'ensuit, d'après la démonstration du théorème 2.1, que x est un point extrême du polytope défini par (P_1). A partir des trois ensembles de contraintes de (P_1), on ne peut obtenir plus de n vecteurs lignes linéairement indépendants. Par conséquent, chacun des points extrêmes de (P_1) a au moins $m - n$ composantes nulles. ∎

Dans le cas où $m > n$, chaque stratégie mixte extrême du joueur 1 à l'équilibre a au moins $m - n$ composantes nulles. En d'autres termes, $m - n$ stratégies pures ne sont pas choisies. Ceci nous conduit au résultat suivant :

Corollaire 2.5 *Si $m > n$, ou si $m \geq n$ et $rg(B) < n - 1$, alors il n'existe pas d'équilibre de Nash extrême complet.*

Démonstration Le cas où $m > n$ se déduit de la proposition 2.4. Si $m \geq n$ et si $rg(B) < n-1$, on ne peut obtenir à partir des trois ensembles de contraintes de (P_1) plus de $n-1$ vecteurs lignes linéairement indépendants. Il s'ensuit que chacun des points extrêmes de (P_1) possède au moins une composante nulle. ∎

Une condition supplémentaire s'ajoute à ce corollaire pour garder comme hypothèse $rg(B) \leq n-1$.

Corollaire 2.6 *Si $m \geq n$, $rg(B) = n-1$ et si un des vecteurs colonnes de B est tel que la somme des coefficients de sa combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes est égale à 1, alors il n'existe pas d'équilibre de Nash extrême complet.*

Démonstration Supposons sans perte de généralités que les $n-1$ premiers vecteurs de B sont linéairement indépendants. On a alors $B_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k B_k$ et d'après les hypothèses $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = 1$. Il s'ensuit qu'on ne peut obtenir plus de $n-2$ vecteurs linéairement indépendants à partir des deux premiers ensembles de contraintes de (P_1). En effet, considérons la combinaison linéaire suivante :

$$B_n - B_i + \sum_{k=1}^{n-1}(B_i - B_k) = B_i(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k - 1).$$

Celle-ci conduit, d'après les hypothèses, au vecteur nul. ∎

Des résultats similaires peuvent être obtenus en considérant le polytope défini par (P_2) et le rang de la matrice A.

2.2 Les ensembles de Nash maximaux

Nous avons vu au chapitre 2 que les ensembles de Nash extrêmes correspondent au produit cartésien de deux polytopes. Nous allons dans ce qui va suivre expliciter les inégalités qui définissent ces polytopes à partir d'un point de l'intérieur relatif d'un ensemble de Nash maximal. Le résultat suivant généralise un théorème de M.J.M. Jansen [12].

Théorème 2.7 *Soient $S \subset E(A,B)$, un ensemble de Nash maximal et $(\mathring{x},\mathring{y})$ un point de l'intérieur relatif de S. Alors S est donné par le produit cartésien des polytopes suivants :*

$$(P_1max)\qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i\,(B_j - B_\ell)_i &= 0 && j \in N(\mathring{y}),\ \ell \in N(\mathring{y}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i\,(B_j - B_\ell)_i &\geq 0 && j \in N(\mathring{y}),\ \ell \in N \setminus N(\mathring{y}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 && \\ x_i &= 0 && i \in M \setminus M(\mathring{x}) \\ x_i &\geq 0 && i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

et

$$(P_2max)\qquad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k)_j\, y_j &= 0 && i \in M(\mathring{x}),\ k \in M(\mathring{x}) \\ \sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k)_j\, y_j &\geq 0 && i \in M(\mathring{x}),\ k \in M \setminus M(\mathring{x}) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 && \\ y_j &= 0 && j \in N \setminus N(\mathring{y}) \\ y_j &\geq 0 && j = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Démonstration Soient $(x^p)_{p\in ext(P_1max)}$ et $(y^q)_{q\in ext(P_2max)}$. Considérons un point extrême (x, y) de S. Etant donné que $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ est dans l'intérieur relatif de S, il s'ensuit que $M(x) \subseteq M(\overset{\circ}{x})$ et $N(y) \subseteq N(\overset{\circ}{y})$. Puisque tous les équilibres de S sont interchangeables, x est en équilibre avec $\overset{\circ}{y}$ et d'après ce qui précède satisfait les contraintes de (P_1max). De façon similaire, y satisfait les contraintes de (P_2max). D'après la démonstration du théorème 2.1, x et y sont des points extrêmes respectivement de (P_1max) et (P_2max). Ainsi, tous les points extrêmes de S sont des points extrêmes du produit cartésien de (P_1max) et (P_2max). En utilisant la même approche que pour la démonstration du théorème 2.1, $conv\{(x^p)_{p\in ext(P_1max)}\}\times conv\{(y^q)_{q\in ext(P_2max)}\}$ définit un ensemble de Nash. S étant un ensemble de Nash maximal, il n'est pas strictement inclus dans tout autre ensemble de Nash. Ainsi, S est donné par le produit cartésien des polytopes (P_1max) et (P_2max). ∎

Remarque 2.8 Tous les équilibres dans l'intérieur relatif de S définissent les deux mêmes polytopes (P_1max) et (P_2max).

Remarque 2.9 Nous avons vu lors de la démonstration du théorème 2.1, qu'un équilibre de Nash extrême définissait deux polytopes (P_1) et (P_2). Ceux-ci ne peuvent constituer un ensemble de Nash. Les points extrêmes de (P_1) ne sont pas tous en "partenariat" avec ceux de (P_2). Ce partenariat est assuré, si l'on considère un point dans l'intérieur relatif de S qui garantit que son support est maximum par rapport aux points extrêmes de S.

2.3 Les jeux faiblement complets

Nous nous intéressons ici, à une classe de jeux bimatriciels ayant certaines propriétés.

Définition 2.10 *Un jeu bimatriciel (A, B) est dit faiblement complet si il existe un ensemble de Nash maximal $S \subset E(A, B)$ tel que tous les équilibres de S sont des équilibres complets.*

Nous utilisons la technique de preuve du théorème 2.1 pour donner une démonstration alternative et plus courte du théorème 3 de A.P. Jurg *et al.* [13] incluant également le résultat de leur Proposition 1.

Nous supposerons sans perte de généralité que les coefficients des matrices A et B sont strictement positifs. En effet, l'addition d'une constante à tous les coefficients des matrices A et B ne modifie pas le polytope des équilibres corrélés et par conséquent les équilibres de Nash. Pour une matrice M, on notera par abus de notation $M > 0$, lorsque les coefficients de la matrice M sont tous strictement positifs.

Théorème 2.11 *(Jurg* et al.*). Soient $A > 0$ et $B > 0$. Alors, le jeu (A, B) est faiblement complet si et seulement si :*

(i) A et B sont des matrices carrées $n \times n$;

(ii) A et B sont de rang plein;

(iii) tous les coefficients des vecteurs $\mathbb{1}_n^t B^{-1}$ and $A^{-1}\mathbb{1}_n$ sont positifs.

Démonstration (1) Soit (A, B) un jeu faiblement complet et soit $S \in E(A, B)$ un ensemble de Nash maximal complet. D'après le corollaire 2.5 et son dual, nous avons que $m = n$ et que $rg(A) \geq n - 1$ et $rg(B) \geq n - 1$. Soit $(x, y) \in S$, alors x et y satisfont les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, (B_j - B_\ell)_i = \; 0 \qquad j \in N, \; \ell \in N \tag{2.4}$$

$$\mathbb{1}_n^t \, x = \; 1 \tag{2.5}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k)_j \, y_j = \; 0 \qquad i \in N, \; k \in N \tag{2.6}$$

$$\mathbb{1}_n^t \, y = \; 1. \tag{2.7}$$

Supposons que $rg(B) = n - 1$, d'après le corollaire 2.6 et sa démonstration, le système (2.4) est équivalent à $x^t B = 0$, ce qui est impossible avec x et B strictement positifs. Ainsi, $rg(B) = n$ et on a de façon similaire $rg(A) = n$.

Chaque stratégie dans le support du joueur 1, lui rapporte le même paiement λ, c'est-à-dire que $x^t B = \lambda \mathbb{1}_n^t$. L'équation (2.7) devient alors $\lambda(\mathbb{1}_n^t B^{-1} \mathbb{1}_n) = 1$. Finalement, nous avons que $x^t = \dfrac{\mathbb{1}_n^t B^{-1}}{\mathbb{1}_n^t B^{-1} \mathbb{1}_n}$. Il s'ensuit que tous les coefficients du vecteur $\mathbb{1}_n^t B^{-1}$ sont strictement positifs. On montre de façon similaire que $y = \dfrac{A^{-1}\mathbb{1}_n}{\mathbb{1}_n^t A^{-1} \mathbb{1}_n}$.

(2) Supposons que les conditions $(i), (ii)$ et (iii) sont remplies. Les équations (2.4) à (2.7) doivent être satisfaites par n'importe quel équilibre de Nash complet. Etant donné les hypothèses, les systèmes définis par (2.4) à (2.7) ont une solution unique. Il s'ensuit qu'un jeu faiblement complet possède un unique équilibre complet.

■

Remarque 2.12 Supposons que la matrice B est une matrice singulière avec $rg(B) = n-1$ et n'ayant pas tous ses coefficents strictement positifs, les conditions du théorème 2.11 peuvent alors être remplacées pour la matrice B par :

(i) B est une matrice carrée $n \times n$;

(ii) $rg(B) = n - 1$;

(iii) B possède un vecteur propre associé à la valeur propre 0 strictement positif et qui n'est pas perpendiculaire à $\mathbb{1}$.

Par ailleurs, on a $B_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k B_k$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \neq 1$. Ces mêmes conditions peuvent s'appliquer à la matrice A.

2.4 Les équilibres de Nash complets

Nous présentons ici une étude sur les équilibres de Nash complets, extrêmes ou non. Nous nous intéressons en particulier aux jeux où un des joueurs a au moins une stratégie de plus que l'autre. Dans ce contexte, nous introduisons une classe de jeux

n'ayant pas d'équilibre de Nash complet. Par ailleurs, l'approche présentée, à savoir l'étude des équilibres de Nash du point de vue des corrélés, nous permet de généraliser et de fournir des démonstrations alternatives aux résultats de T.E.S. Raghavan [21] et G. A. Heuer [10].

Nous supposerons sans perte de généralité, que lorsque $rg(A) = n$, les n premiers vecteurs lignes de A sont linéairement indépendants. Nous notons donc, A_n la matrice carrée $n \times n$, obtenue à partir de la matrice A en éliminant les $m - n$ dernières lignes.

Proposition 2.13 *Soit $m > n$ et $rg(A) = n$. Si il existe une stratégie $i_0 \in \{n+1, \ldots, m\}$ telle que $A_{i_0}^t A_n^{-1} \mathbb{1} \neq 1$, alors le jeu (A, B) ne possède aucun équilibre de Nash complet.*

Démonstration Posons $\mu^t = A_{i_0}^t A_n^{-1}$. On a alors, d'après les hypothèses $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \neq 1$. Supposons qu'il existe un équilibre de Nash complet (x, y). Il s'ensuit que y doit satisfaire les égalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k) y_j = 0 \qquad i \in M, \quad k \in M.$$

Afin de déterminer le rang de ce système linéaire, considérons la combinaison linéaire suivante :

$$A_{i_0} - A_i + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \mu_k (A_i - A_k) = A_i \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k - 1\right).$$

Ce système est donc de rang n et est équivalent à $A_n y = 0$ dont l'unique solution est $y = 0$. Ceci contredit donc notre hypothèse sur l'existence d'un équilibre complet. ∎

Cette dernière proposition nous permet de généraliser le dual du théorème 2 de G.A. Heuer [10], en particulier dans le cas où $m > n$.

Théorème 2.14 *Soit $(x, y) \in E(A, B)$ et $rg(A) = n$. Si x est une stratégie mixte complète, alors*

(i) y est l'unique stratégie mixte en équilibre avec x;

(ii) $A_i^t A_n^{-1} \mathbb{1} = 1$ pour $i = n+1, \ldots, m$.

Par ailleurs, y est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k)_j \, y_j = \;& 0 \qquad i \in N,\ k \in N \\ \mathbb{1}_n^t y = \;& 1. \end{aligned}$$

Démonstration Considérons le cas $m > n$ pour lequel (ii) s'applique. D'après la proposition 2.13, nous avons $A_i^t A_n^{-1} \mathbb{1}_n = 1$ pour $i = n+1, \ldots, m$. Il s'ensuit que y doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (A_i - A_k)_j \, y_j = \;& 0 \qquad i \in N,\ k \in N \\ \mathbb{1}_n^t y = \;& 1, \end{aligned}$$

lequel est de rang n, et donc admet une solution unique. ∎

Remarque 2.15 $y = \dfrac{A_n^{-1} \mathbb{1}_n}{\mathbb{1}_n^t A_n^{-1} \mathbb{1}_n}$ satisfait le système précédent et par conséquent nous pouvons ajouter que les coefficients de $A_n^{-1} \mathbb{1}_n$ sont tous positifs ou nuls.

Nous avons mentionné précédemment l'existence de stratégies extrêmes pour les joueurs, comme étant les points extrêmes des polytopes (P_1max) et (P_2max) définis au paragraphe 2.2. Ceci nous permet de préciser le théorème 3 de G.A. Heuer [10].

Théorème 2.16 *Soit $(x, y) \in E(A, B)$. Alors, il existe une stratégie extrême $\overline{x}$ en équilibre avec y telle que $|M(\overline{x})| \leq n$.*

Démonstration Si (x, y) est un équilibre extrême, alors le résultat est donné par la proposition 2.4. Si tel n'est pas le cas, alors il existe un équilibre extrême $(\overline{x}, \overline{y})$ appartenant au même ensemble de Nash maximal que (x, y). Il s'ensuit que $(\overline{x}, \overline{y})$ vérifie la proposition 2.4 et de plus $\overline{x}$ est en équilibre avec y. ∎

L'existence d'une stratégie complète pour l'un des joueurs augmente le nombre de contraintes vérifiées à égalité dans l'un des polytopes définissant les stratégies extrêmes de l'autre joueur. Ceci confère des propriétés intéressantes quant aux stratégies de l'autre joueur qui forment un équilibre.

Théorème 2.17 *Soit $(x, y) \in E(A, B)$ tel que x n'est pas une stratégie extrême et soit l'ensemble $S(y) = \{x : (x, y) \in E(A, B)\}$.*

(i) Si y est une stratégie mixte complète, alors $S(y)$ contient au moins deux stratégies extrêmes x^1 et x^2 non complètes;

(ii) Si y possède une seule composante nulle, alors $S(y)$ contient au moins une stratégie mixte non complète.

Démonstration

(i) Supposons que y est une stratégie mixte complète. Il s'ensuit que $S(y)$ est inclus dans le polytope suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i \left(B_j - B_\ell\right)_i = \; & 0 \qquad && j \in N,\ \ell \in N \\ \mathbb{1}_n^t \, x = \; & 1 \\ x_i \geq \; & 0 \qquad && i \in M. \end{aligned}$$

Puisque x n'est pas une stratégie extrême, ce polytope possède au moins deux points extrêmes x^1 et x^2 en équilibre avec y. De plus ces deux stratégies sont telles que $x_j^1 = x_k^2 = 0$ pour $j \neq k$.

(ii) Supposons sans perte de généralité que $y_n = 0$. Alors $S(y)$ est inclus dans le polytope suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i \left(B_j - B_\ell\right)_i = \; & 0 \qquad && j \in N \setminus \{n\},\ \ell \in N \setminus \{n\} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i \left(B_j - B_n\right)_i \geq \; & 0 \qquad && j \in N \setminus \{n\} \\ \mathbb{1}_n^t \, x = \; & 1 \\ x_i \geq \; & 0 \qquad && i \in M. \end{aligned}$$

Supposons que x est une stratégie mixte complète. D'après la démonstration du (i), ce polytope possède au moins deux points extrêmes x^1 et x^2 en équilibre avec y. Les contraintes d'égalités forment au plus un système de rang $n-1$. Si une des contraintes d'incitation est vérifiée à égalité, alors elles le sont toutes. Ainsi, pour que les deux points extrêmes diffèrent, un des deux à au moins une composante nulle. ∎

Remarque 2.18 Ce théorème est une généralisation du théorème 4 de G.A. Heuer [10]. Les hypothèses avancées par Heuer sur $S(y)$ sont différentes de celles énoncées ci-dessus. Celui-ci suppose que $S(y)$ n'est pas un singleton alors que nous supposons que x est une stratégie non extrême. Remarquons que si $S(y)$ n'est pas un singleton dans (i) alors nous avons $m > n$ ou encore $rg(B) \leq m - 1$.

CHAPITRE 3

Etudes empiriques

Cette partie est consacrée au calcul des équilibres corrélés, des équilibres de Nash et des équilibres efficaces. Un plan d'expériences a été établi en vue de faire ressortir certaines particularités des jeux bimatriciels. En particulier, nous étudions la nature des équilibres de Nash, complets, purs et efficaces, le nombre des équilibres corrélés et des équilibres efficaces. Nous faisons au préalable une brève étude du polyèdre des équilibres corrélés et donnons une description des algorithmes utilisés pour le calcul des différents équilibres.

3.1 Propriétés du polyèdre des équilibres corrélés

Il s'agit en fait du polytope des équilibres corrélés. En effet, l'ensemble des équilibres corrélés forme un ensemble compact. La définition de la distribution des équilibres corrélés, donnée au chapitre 1, est la suivante :

$$(A_i - A_k)^t p_{i.} \geq 0 \qquad i \in M,\ k \in M \tag{3.1}$$

$$p_{.j}^t (B_j - B_\ell) \geq 0 \qquad j \in N,\ \ell \in N \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \tag{3.3}$$

$$p_{ij} \geq 0 \qquad i \in M,\ j \in N. \tag{3.4}$$

Une interprétation géométrique peut se définir comme suit : l'ensemble des équilibres corrélés correspond à l'intersection d'un cône ayant pour point extrême l'origine et d'un simplexe. Le cône est défini par les contraintes d'incitation. On peut également y inclure les contraintes de non négativité. Il est aisé de voir que ce polyèdre ne présente pas de rayon extrême. En effet, ceux-ci sont définis par le système suivant :

$$(A_i - A_k)^t\, r_{i\cdot} \geq 0 \qquad i \in M,\ k \in M \tag{3.5}$$

$$r_{\cdot j}^{t}\,(B_j - B_\ell) \geq 0 \qquad j \in N,\ \ell \in N \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = 0 \tag{3.7}$$

$$r_{ij} \geq 0 \qquad i \in M,\ j \in N. \tag{3.8}$$

Ce système a pour solution unique le vecteur nul. Nous avons vu au chapitre 1 que l'ensemble des équilibres corrélés n'est pas vide. Chaque équilibre corrélé correspond à l'intersection des rayons extrêmes du cône précédemment défini avec l'hyperplan $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

La structure du polytope des équilibres corrélés est assez particulière. Une représentation matricielle des contraintes d'incitation fait apparaître une structure diagonale par blocs pour les contraintes issues du joueur 1. Si l'on considère la matrice pour les contraintes d'incitation issues du joueur 2, on retrouve une structure de contraintes couplantes. La première série de contraintes d'incitation est donnée par la matrice

$$C_1 = \begin{bmatrix}
A_1^t & - & A_2^t & & & & & & & & & \\
A_1^t & - & A_3^t & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \\
A_1^t & - & A_m^t & & & & & & & & & \\
 & & & A_2^t & - & A_1^t & & & & & & \\
 & & & A_2^t & - & A_3^t & & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & & & \\
 & & & A_2^t & - & A_m^t & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & A_m^t & - & A_1^t \\
 & & & & & & & & A_m^t & - & A_2^t \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & A_m^t & - & A_{m-1}^t
\end{bmatrix}$$

Figure 3.1 – *Matrice des contraintes d'incitation issue du joueur 1*

$m(m-1) \times mn$ notée C_1 (voir figure 3.1).

La deuxième série de contraintes d'incitation est donnée par la matrice $n(n-1) \times mn$ C_2 représentée par la figure 3.2.

$$c_2 = \begin{bmatrix}
b_{11}-b_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{m1}-b_{m2} & 0 & \dots & 0 \\
b_{11}-b_{13} & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{m1}-b_{m3} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \\
b_{11}-b_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{m1}-b_{mn} & 0 & \dots & 0 \\
0 & b_{12}-b_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{m2}-b_{m1} & \dots & 0 \\
0 & b_{12}-b_{13} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{m2}-b_{m3} & \dots & 0 \\
 & \vdots & & & & & \vdots & & \\
0 & b_{12}-b_{1n} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{m2}-b_{mn} & \dots & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
0 & \dots & 0 & b_{1n}-b_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{mn}-b_{m1} \\
0 & \dots & 0 & b_{1n}-b_{12} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{mn}-b_{m2} \\
 & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & b_{1n}-b_{1(n-1)} & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{mn}-b_{m(n-1)}
\end{bmatrix}$$

Figure 3.2 – *Matrice des contraintes d'incitation issue du joueur 2*

3.2 Calcul des équilibres corrélés extrêmes

Nous avons utilisé le logiciel *cdd* de K. Fukuda [14] pour énumérer l'ensemble des points extrêmes du polytope des équilibres corrélés. Le programme *cdd* est une implantation en langage C de la méthode de double description de T.S. Motzkin *et al.* [16] qui permet de traiter des problèmes fortement dégénérés. Si l'on considère le nombre et la structure des contraintes d'incitation, on voit que le polytope des équilibres corrélés peut être très dégénéré. En particulier, un équilibre de Nash extrême complet vérifie à égalité l'ensemble des contraintes d'incitation.

3.2.1 La méthode de double description : version standard

La méthode de double description permet l'énumération de tous les rayons extrêmes d'un cône polyédral. Nous verrons par la suite comment adapter cette méthode afin d'énumérer l'ensemble des points extrêmes et des rayons extrêmes d'un polyèdre. Rappelons au préalable le théorème pour un cône polyédral de Minkowski.

Théorème 3.1 *(Minkowski, 1911) Pour chaque système défini par* $Ax \geq 0$ *où* A *est une matrice réelle* $m \times d$*, il existe une matrice réelle* $d \times n$ *notée* R *ayant la propriété suivante : un vecteur* x^* *satisfait le système* $Ax^* \geq 0$ *si et seulement si*

$$x^* = R\lambda$$

pour λ *donné positif ou nul.*

Par souci de simplification, nous utiliserons le terme *cône* pour désigner un cône polyédral. Ainsi, le cône défini par $\{x \in \mathcal{R}^d : Ax \geq 0\}$ est simultanément représenté par $\{x \in \mathcal{R}^d : x = R\lambda, \lambda \geq 0\}$. Le couple (A, R) est une double description du cône. Les vecteurs colonnes de R représentent les rayons extrêmes du cône. La matrice R est une représentation minimale du cône, lorsqu'aucune sous-matrice issue de R ne peut représenter le cône.

Nous supposerons que l'origine est un point extrême du cône et que le système $Ax \geq 0$ n'est pas redondant. Considérons alors le sous-ensemble K des indices de lignes de A et notons A_K la matrice issue de A ne contenant que les lignes dont les indices appartiennent à K. Supposons alors que l'on a déjà trouvé une matrice R représentant le cône défini par A_K. Si $A = A_K$, le problème est résolu. Sinon, choisissons une ligne d'indice i n'appartenant pas à K. L'idée consiste en la construction de

la matrice R' représentant le cône défini par $A_{K+\{i\}}$ à partir de l'information fournie par le couple (A_K, R).

Considérons les trois partitions de $\mathcal{R}^d$ définies comme suit :

$$H_i^+ = \{x \in \mathcal{R}^d : A_i x > 0\} \tag{3.9}$$

$$H_i^0 = \{x \in \mathcal{R}^d : A_i x = 0\} \tag{3.10}$$

$$H_i^- = \{x \in \mathcal{R}^d : A_i x < 0\} \tag{3.11}$$

où A_i correspond à la ligne de A précédemment mentionnée. Notons par J l'ensemble des indices des colonnes de la matrice R et considérons cette fois-ci les trois partitions suivantes :

$$J^+ = \{j \in J : r_j \in H_i^+\} \tag{3.12}$$

$$J^0 = \{j \in J : r_j \in H_i^0\} \tag{3.13}$$

$$J^- = \{j \in J : r_j \in H_i^-\} \tag{3.14}$$

où r_j $(j \in J)$ sont les vecteurs colonnes de R. Pour construire la matrice R' à partir de la matrice R, il suffit de générer $|J^+| \times |J^-|$ nouveaux rayons extrêmes satisfaisant H_i^0 en considérant une combinaison adéquate des rayons r_j $(j \in J^+)$ et $r_{j'}$ $(j' \in J^-)$ et en éliminant les rayons de H_i^-. Le Lemme principal de la méthode de double description [16], nous assure que la matrice R' représente le cône défini par $A_{K+\{i\}}$.

Lemme 3.2 *Soit (A_K, R) une double description du cône défini par A_K et soit i l'indice d'une ligne de A n'appartenant pas à K. Alors le couple $(A_{K+\{i\}}, R')$ est une*

double description du cône défini par $A_{K+\{i\}}$, *où* R' *est une matrice réelle* $d \times |J'|$ *dont les vecteurs colonnes* r_j $(j \in J')$ *sont définis comme suit :*

$J' = J^+ \cup J^0 \cup (J^+ \times J^-)$, *et*

$r_{jj'} = (A_i r_j) r_{j'} - (A_i r_{j'}) r_j$ *pour* $(j, j') \in J^+ \times J^-$.

L'algorithme de la méthode de double description peut alors s'énoncer comme suit :

début

Déterminer un couple initial (A_k, R);

tant que $K \neq \{1, 2, ..., m\}$ **faire**

début

Choisir un indice $i \in \{1, 2, ..., m\} \setminus K$;

Construire la matrice R' en utilisant le Lemme 3.2;

$R := R'$; $K := K + \{i\}$;

fin;

Donner R;

fin.

Reste cette fois à déterminer le couple (A_K, R) initial. Nous avons supposé au départ que le rang de la matrice A était maximal. Il suffit donc de choisir d vecteurs lignes de A linéairement indépendants pour former A_K. Il s'ensuit que R est donnée par A_K^{-1}, puisque $A_K x \geq 0$ est équivalent à $x = A_K^{-1}\lambda, \quad \lambda \geq 0$.

Le logiciel *cdd* de K. Fukuda est une implantation de la méthode de double description révisée, de sorte à améliorer le temps d'exécution et à éviter la génération

de rayons redondants. Le logiciel met également à profit certaines structures particulières de la matrice A, comme les matrices diagonales par blocs.

3.2.2 Calcul des points et des rayons extrêmes

Considérons le polyèdre défini par $P = \{x \in \mathcal{R}^d : Ax \leq b\}$. Le logiciel *cdd* permet de calculer les points et les rayons extrêmes de ce polyèdre tout en utilisant la méthode de double description décrite précédemment. Rappelons au préalable le théorème sur le nombre de bases fini de Minkowski.

Théorème 3.3 *(Minkowski 1896) Pour chaque système défini par $Ax \leq b$, il existe des vecteurs colonnes $v^1, v^2, ..., v^M$ et $r^1, r^2, ..., r^N$ tels que : un vecteur x satisfait le système $Ax \leq b$ si et seulement si :*

$$x = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k v^k + \sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell r^\ell$$

où $\alpha \geq 0$, $\sum_{k=1}^{M} \alpha_k = 1$ *et* $\beta \geq 0$.

Ainsi, un vecteur x appartient à P si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} \in \text{cône} \left\{ \begin{pmatrix} v^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v^M \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} r^N \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.15}$$

D'après le théorème inverse de 3.1, le cône défini par 3.15 est équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} : -Ax + b\gamma \geq 0 \right\}, \tag{3.16}$$

pour une matrice A et un vecteur b donnés. Il suffit donc d'appliquer la méthode de double description au système 3.16 pour obtenir les points et les rayons extrêmes d'un polyèdre défini par $P = \{x \in \mathcal{R}^d : Ax \leq b\}$.

3.3 Calcul des équilibres de Nash

Nous utilisons le programme *bimatrix* de C. Audet *et al.*, afin d'énumérer les équilibres de Nash extrêmes. Celui-ci est une implantation en langage C de l'algorithme *EEE* (Enumération des Equilibres Extrêmes) de C. Audet *et al.* [1]. La définition d'un équilibre de Nash est reformulée à l'aide de deux programmes linéaires et de leurs programmes duals respectifs. Ainsi, le couple (x^*, y^*) est un équilibre de Nash si et seulement si il existe α^* et β^* tels que :

$$(x^*, \beta^*) \in X = \{(x, \beta) : x^t B \leq \beta \mathbb{1}^t, \quad x^t \mathbb{1} = 1, \quad x \geq 0\},$$
$$(y^*, \alpha^*) \in Y = \{(y, \alpha) : Ay \leq \mathbb{1}\alpha, \quad \mathbb{1}^t y = 1, \quad y \geq 0\}$$

et les conditions des écarts complémentaires sont satisfaites.

L'algorithme *EEE* propose une énumération de l'ensemble des points extrêmes de X et de Y satisfaisant les conditions de complémentarité de la programmation linéaire, soient $x^t(\mathbb{1}\alpha - Ay) = 0$ et $(\beta \mathbb{1}^t - x^t B)y = 0$.

Pour ce faire, considérons les programmes linéaires paramétrisés suivants :

$$P(y) \equiv \max_{(x,\beta)\in X} x^t Ay - \beta \text{ et}$$
$$Q(x) \equiv \max_{y,\alpha)\in Y} x^t By - \alpha.$$

Ceux-ci correspondent à une addition des fonctions objectives des programmes primals et duals. L'algorithme génère une séquence de sous-problèmes $\tilde{P}(y)$ et $\tilde{Q}(x)$ identiques à $P(y)$ et $Q(x)$ à ceci près que certaines des contraintes sont vérifiées à égalité. A chaque nœud de l'arbre de recherche formé par les sous-problèmes peuvent se présenter les trois cas suivants :

(i) Un des deux sous-problèmes $\tilde{P}(y)$ ou $\tilde{Q}(x)$ est irréalisable;

(ii) Les deux sous-problèmes $\tilde{P}(y)$ et $\tilde{Q}(x)$ sont réalisables et l'on peut définir un point extrême;

(iii) Les deux sous-problèmes $\tilde{P}(y)$ et $\tilde{Q}(x)$ sont réalisables, mais l'on ne peut pas définir un point extrême.

Dans le premier cas le nœud est sondé. Dans les deux autres cas, on ouvre de nouvelles branches par l'ajout d'une nouvelle contrainte vérifiée à égalité.

L'algorithme *EEE* peut alors s'ennoncer comme suit :

Etape a. Initialisation

L'ensemble des nœuds $T = \{(x, \tilde{P}(\cdot), \tilde{Q}(\cdot)\}$ est initialisé à partir d'une valeur arbitraire de x comme par exemple $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Aller à l'étape b.

Etape b. Sélection d'un nœud

Si l'ensemble T est vide, arrêter. Sinon, choisir un nœud N. Si $N = \{(x, \tilde{P}(\cdot), \tilde{Q}(\cdot)\}$ aller l'étape c. Si $N = \{(y, \tilde{P}(\cdot), \tilde{Q}(\cdot)\}$ aller à l'étape d.

Etape c. Test de faisabilité $(Q(\cdot))$

Si $\tilde{Q}(x)$ est irréalisable aller à l'étape b. Sinon, choisir $(y, \alpha) \in argmax\tilde{Q}(x)$, mettre à jour $(x, \beta) \in argmax\tilde{P}(y)$ et aller à l'étape e.

Etape d. Test de faisabilité $(P(\cdot))$

Si $\tilde{P}(y)$ est irréalisable aller à l'étape b. Sinon, choisir $(x, \beta) \in argmax\tilde{P}(y)$, mettre à jour $(y, \alpha) \in argmax\tilde{Q}(x)$ et aller à l'étape e.

Etape e. Branchement

Soit i l'indice pour lequel le produit $x_i(\alpha - A_i^t y)$ est le plus grand et où la variable x_i n'est pas égale à 0. La contrainte $A_i^t y \leq \alpha$ de $\tilde{Q}(\cdot)$ n'est pas nécessairement satisfaite à égalité. De même, soit j l'indice pour lequel le produit $(\beta - x^t B_j)y_j$ est le plus grand et où la variable y_j n'est pas égale à 0. La contrainte $x^t B_j \leq \beta$ de $\tilde{P}(\cdot)$ n'est pas nécessairement satisfaite à égalité.

Si de tels indices i ou j n'existent pas, alors (x, y) est un équilibre de Nash. Mettre à jour la liste des équilibres. Ouvrir de nouvelles branches à partir de cet équilibre comme suit : Mettre $x_i = 0$ si $x_i > 0$, ou $A_i y = \alpha$ si $A_i y < \alpha$, ou $y_j = 0$ si $y_j > 0$ et ou $x^t B_j = \beta$ si $x^t B_j < \beta$.
Si $x_i(\alpha - A_i y) \geq (\beta - x^t B_j) y_j$ (si les indices i et j existent), ou si l'indice j n'existe pas, alors brancher suivant $x_i = 0$ et $A_i y = \alpha$.
Si $x_i(\alpha - A_i y) < (\beta - x^t B_j) y_j$ (si les indices i et j existent), ou si l'indice i n'existe pas, alors brancher suivant $y_j = 0$ et $x^t B_j = \beta$.

L'efficacité de cet algorithme réside dans l'utilisation des conditions de complémentarité. Les jeux résolus par cet algorithme ont des tailles pouvant aller jusqu'à 29×29.

3.4 Les équilibres efficaces ou de Pareto

Le terme équilibre efficace s'emploie pour distinguer une sous-classe d'équilibres parmi les équilibres corrélés. Nous nous intéressons aux équilibres efficaces et aux éventuels équilibres de Nash appartenant à cette classe d'équilibres.

Un équilibre corrélé est dit efficace si il n'existe pas d'autre équilibre rapportant au moins le même paiement à chaque joueur et un paiement supérieur à au moins un des deux joueurs. Pour illustrer la notion d'équilibre efficace, considérons la répartition des paiements d'un jeu 3×3 représentée sur la figure 3.3. Les équilibres efficaces correspondent à l'enveloppe non nécessairement convexe de la répartition des paiements. Leur calcul peut se faire en considérant la programmation linéaire

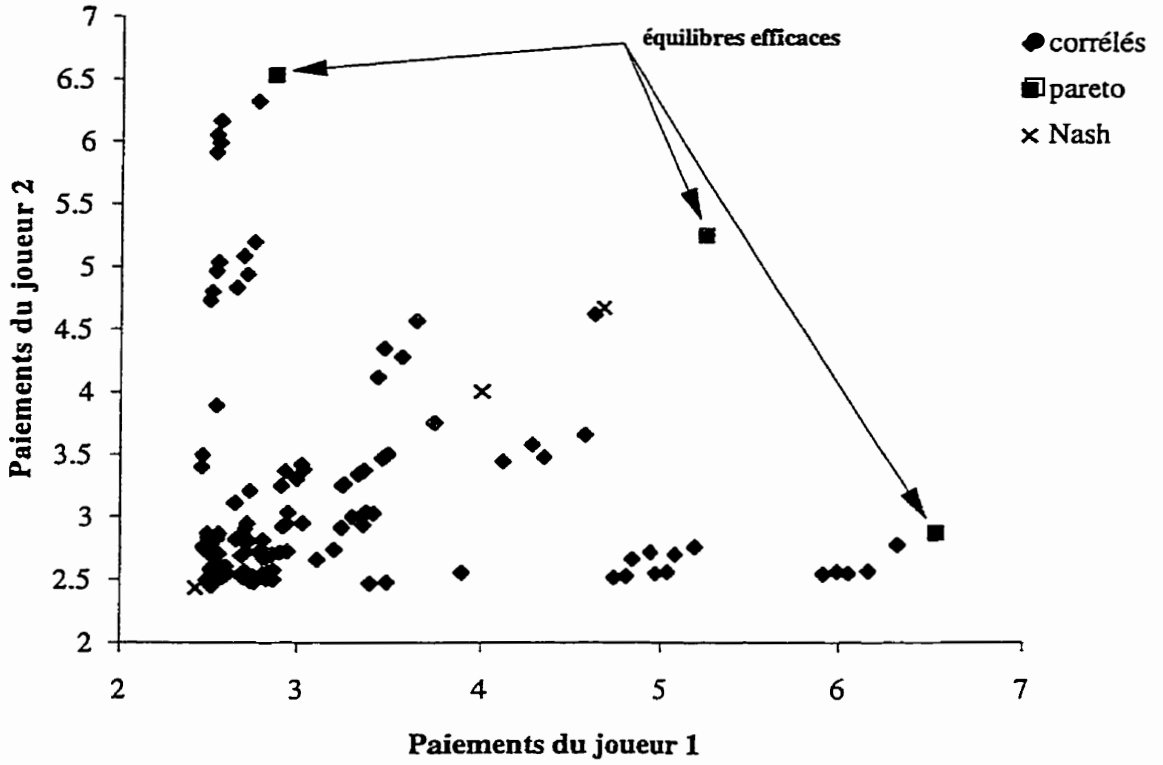


Figure 3.3 – *Jeux* 3×3 - *Répartition des paiements*

multi-objectifs. Les deux fonctions objectifs correspondent à la maximisation des paiements des deux joueurs sous les contraintes du polytope des équilibres corrélés. Cette approche présente néanmoins des inconvénients dans le cas des jeux bimatriciels et demanderait la création d'un programme spécifique. En effet, la plus part des algorithmes de programmation linéaire multi-objectifs ne considèrent que l'enveloppe convexe de la répartition des paiements et ne sont pas stables pour les problèmes dégénérés. Le polytope des équilibres corrélés, comme nous l'avons vu précédemment correspond à l'intersection d'un cône avec un simplexe, le cône pouvant être fortement dégénéré. Nous avons donc déterminé les équilibres efficaces à partir des équilibres corrélés calculés par énumération des points extrêmes d'un polytope.

3.5 Résultats numériques

L'étude porte sur un ensemble de jeux bimatriciels générés aléatoirement dont les paiements sont compris entre 0 et 1. La distribution adoptée est uniforme. Pour chaque jeu, nous avons énuméré les équilibres de Nash et leur structure (complet, pur, efficace et complet efficace), les équilibres corrélés et les équilibres efficaces.

3.5.1 Les jeux bimatriciels 2×2

Les résultats suivants portent sur un ensemble de 500 jeux 2×2. Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 nous montrent la répartition des différents types d'équilibres.

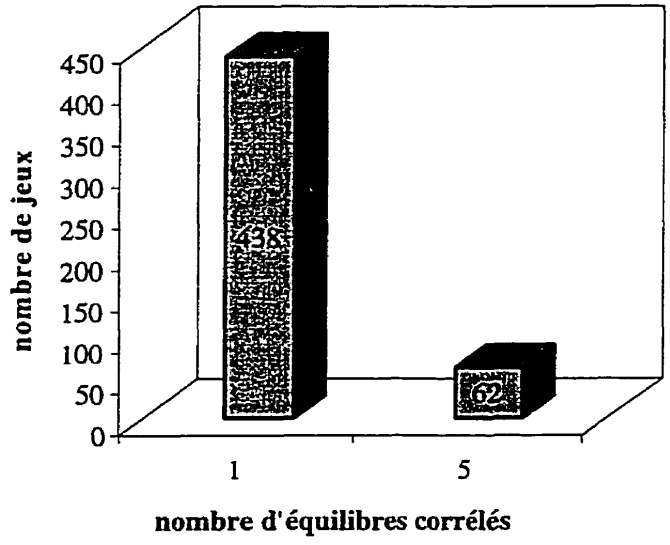


Figure 3.4 – *Répartition des équilibres corrélés sur 500 jeux* 2×2

Observons que les jeux ayant un unique équilibre de Nash ont ici un unique équilibre corrélé. Nous verrons pourtant que ce n'est pas toujours le cas lorsque le

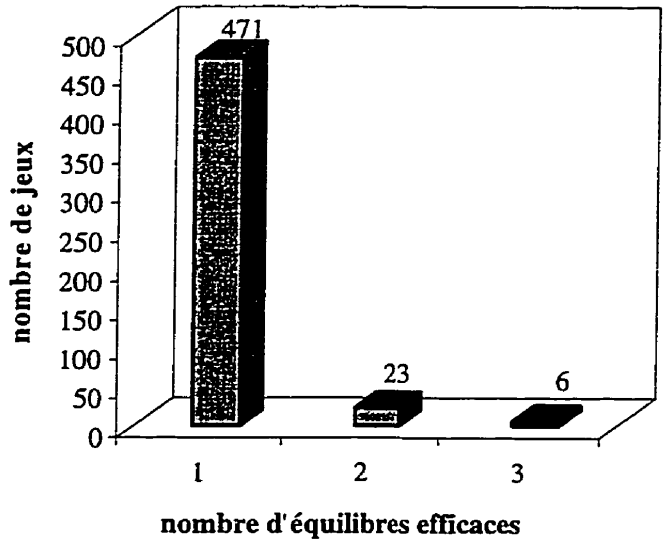


Figure 3.5 – *Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux* 2×2

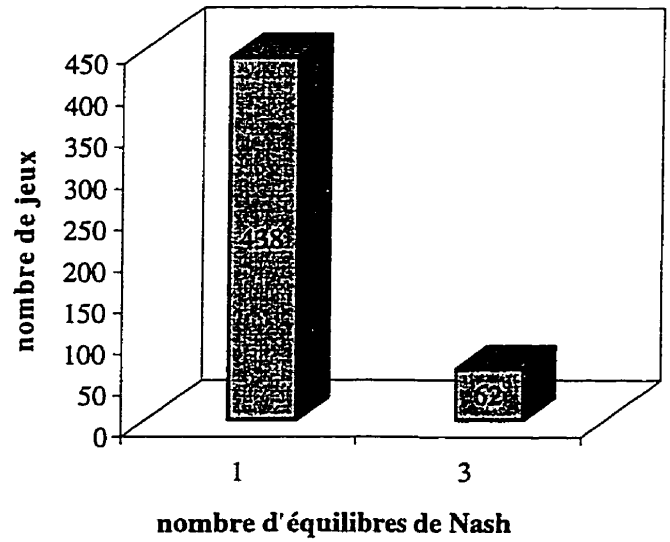


Figure 3.6 – *Répartition des équilibres de Nash sur 500 jeux* 2×2

nombre de stratégies pour les deux joueurs est supérieur ou égal à 3. Néanmoins cette règle peut se vérifier pour les jeux 2×2. Prenons le cas d'un jeu 2×2 ayant un unique équilibre de Nash en stratégies pures. Le polytope des équilibres corrélés peut alors s'écrire comme suit :

$$ap_{11} + bp_{12} \geq 0 \tag{3.17}$$

$$-ap_{21} - bp_{22} \geq 0 \tag{3.18}$$

$$cp_{11} + dp_{21} \geq 0 \tag{3.19}$$

$$-cp_{12} - dp_{22} \geq 0 \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = 1 \tag{3.21}$$

$$p_{ij} \geq 0 \tag{3.22}$$

Supposons, sans perte de généralité, que le seul équilibre de Nash en stratégies pures est $p_{11} = 1$. Cette condition est assurée si a et c sont strictement positifs et si b ou d est négatif. En effet, si a ou c prend une valeur nulle il apparaît un équilibre de Nash en stratégies mixtes ou pures. La vérification est simple en énumérant les différents cas de figure. Considérons le cas où $c = 0$, $a > 0$, $b < 0$ et d quelconque, alors l'équilibre de Nash $\{(1,0), (\frac{b}{b-a}, \frac{-a}{b-a})\}$ est un équilibre extrême.
Examinons alors la possibilité qu'un autre équilibre corrélé puisse exister. Si il existe, il ne peut pas avoir la structure d'un équilibre de Nash. Les seules possibilités sont alors (p_{11}, p_{22}), (p_{12}, p_{21}), (p_{11}, p_{21}, p_{22}) et enfin (p_{12}, p_{21}, p_{22}). Or, chacune de ses possibilités ne satisfait pas au moins une des contraintes du polytope des équilibres corrélés. Ainsi, les jeux 2×2 ayant un unique équilibre de Nash en stratégies pures ont un unique équilibre corrélé.

Avant d'analyser plus en détail la nature des équilibres de Nash, remarquons que les jeux possédant plus d'un équilibre corrélé en ont au moins 5. Cette caractéristique intéressante se retrouve, comme nous le verrons, dans les essais de jeux où le nombre de stratégies est supérieur à deux. Il faut cependant ajouter que l'ensemble des jeux générés ont tous un nombre d'équilibres de Nash qui est impair. On peut donc se demander si les 500 jeux sont réellement représentatifs de ce qui se passe dans la nature. En fait, les jeux générés sont tous des jeux que l'on nomme des jeux non-dégénérés.

Définition 3.4 *Un jeu bimatriciel est dit non-dégénéré si le nombre de meilleures réponses en stratégies pures à une stratégie mixte ne dépasse pas la taille de son support.*

Tous les jeux que nous avons générés ont cette particularité. C.E. Lemke et J.T. Howson [15] ont montré que le nombre d'équilibres de Nash pour les jeux bimatriciels non-dégénérés est impair. Les résultats trouvés confirment donc cette propriété. Les observations que nous faisons ne sont donc valables que dans le cas de jeux non-dégénérés. Prenons comme contre-exemple au nombre minimum d'équilibres corrélés, soit 5 si il y a plus d'un équilibre, le jeu dégénéré donné au tableau 3.1.

Tableau 3.1 – *Exemple de jeu* 2×2 *dégénéré*

(2, 1)	(1, 1)
(1, 3)	(2, 1)

Ce jeu a exactement 2 équilibres corrélés correspondant à deux équilibres de Nash. Soient les équilibres extrêmes (x^1, y^1) et (x^2, y^2) définis comme suit :

$$x^1 = (1,0) \quad y^1 = (1,0)$$
$$x^2 = (1,0) \quad y^2 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

On voit ici que la stratégie mixte x^2 qui n'a qu'un élément dans son support à deux meilleures réponses en stratégies pures données par le support de y^2. Ceci nous conduit au résultat suivant :

Lemme 3.5 *Les jeux bimatriciels 2×2 non-dégénérés ne possèdent que des équilibres en stratégies pures ou complets.*

La démonstration est immédiate, d'après ce qui précède.

Les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 montrent la nature des équilibres de Nash pour l'ensemble des 500 jeux. Ces résultats nous permettent d'affiner les observations précédentes et illustrent le lemme 3.5. Lorsqu'il y a un unique équilibre de Nash, celui-ci est, soit en stratégies pures, soit complet.

Tableau 3.2 – *Répartition des équilibres de Nash en stratégies pures - 500 jeux* 2×2

Nombre de jeux	équilibres purs			
Nombre de Nash	0	1	2	Total
1	66	372		438
3			62	62
Total	66	372	62	500

Tableau 3.3 – *Répartition des équilibres de Nash complets - 500 jeux* 2×2

Nombre de jeux	équilibres complets		
Nombre de Nash	0	1	Total
1	372	66	438
3		62	62
Total	372	128	500

Tableau 3.4 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux* 2×2

Nombre de jeux	équilibres efficaces		
Nombre de Nash	1	2	Total
1	372	66	438
3	62		
Total	434	66	500

Les jeux ayant plus d'un équilibre de Nash possèdent tous deux équilibres en stratégies pures et un équilibre complet. Cette configuration n'est pas unique lorsque le jeu est dégénéré. Prenons le cas d'un jeu où le polytope des équilibres corrélés est donné par les équations 3.17 à 3.22. Nous avons vu que ce jeux possède un équilibre en stratégies mixtes $\{(1,0),(\frac{b}{b-a},\frac{-a}{b-a})\}$, dans le cas où $c = 0$, $a > 0$,$b < 0$ et d quelconque. Lorsque $c = 0$, le jeu devient dégénéré. La probabilité d'obtenir un jeu généré aléatoirement ayant une redondance dans deux paiements adjacents est très faible.

Le meilleur concept d'équilibre d'un jeu devrait entre autre assurer l'unicité de la solution. Les raffinements des équilibres de Nash ou corrélés visent à réduire le nombre des solutions pour un jeu. Le nombre d'équilibres efficaces est ici inférieur au nombre d'équilibres de Nash. Néanmoins, chaque jeu possède au moins un équilibre de Nash efficace. Si cet équilibre n'est pas unique, alors on observe qu'il n'est jamais complet. Les équilibres de Nash complets ne sont donc pas de "bons candidats" en termes de paiements.

3.5.2 Les jeux bimatriciels 3×3

Les résultats suivants portent sur un ensemble de 500 jeux 3×3. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 nous montrent la répartition des différents types d'équilibres. Le nombre d'équilibres corrélés atteint 211. Pour des raisons de clarté, nous avons regroupé dans une même catégorie les jeux possédant plus de 16 équilibres corrélés.

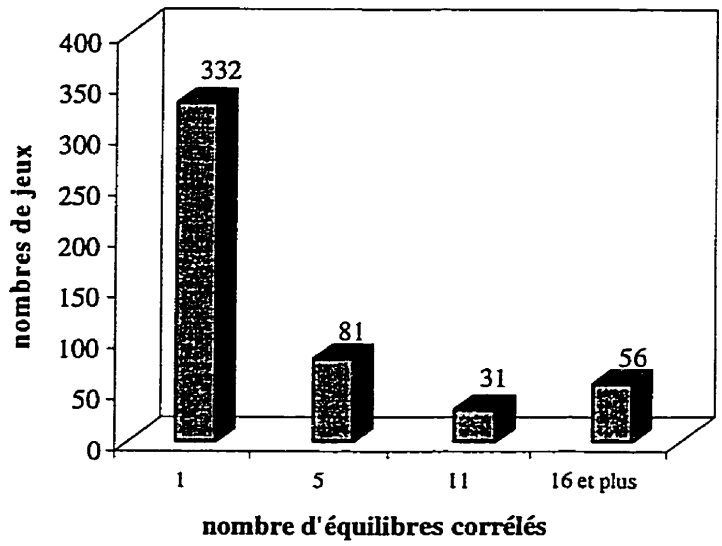


Figure 3.7 – *Répartition des équilibres corrélés sur 500 jeux* 3×3

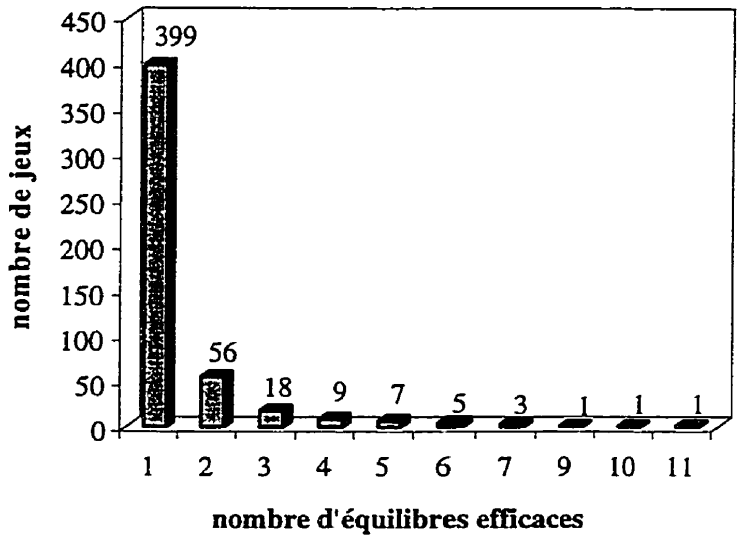


Figure 3.8 – *Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux* 3×3

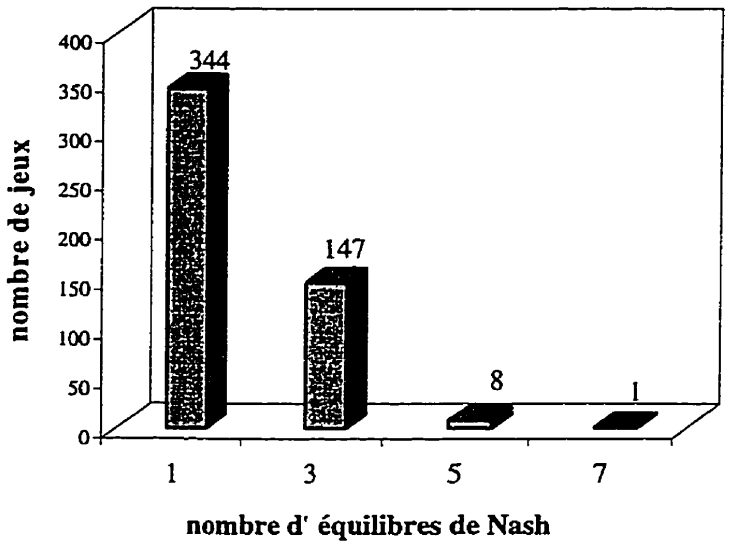


Figure 3.9 – *Répartition des équilibres de Nash sur 500 jeux* 3×3

Tableau 3.5 – *Exemple de jeu* 3×3 *dégénéré*

(2,1)	(1,4)	(2,2)
(1, 3)	(2, 3)	(2,1)
(1,1)	(2,3)	(3,2)

Nous retrouvons à nouveau un nombre d'équilibres de Nash impair. En effet, les 500 jeux sont des jeux non dégénérés.Il s'agit plus particulièrement de jeux dits génériques. Un jeu générique est tel que chacun des paiements est généré aléatoirement et de façon indépendante à partir d'une distribution continue. Les jeux génériques sont des jeux non dégénérés avec une probabilité de 1. On observe également que si le jeu ne possède pas un unique équilibre corrélé, alors il en possède au moins 5. A nouveau, cette situation n'est pas garantie dans le cas d'un jeu dégénéré. Considérons le jeu donné au tableau 3.5. Ce jeu dégénéré possède exactement 3 équilibres corrélés correspondant à trois équilibres de Nash, paradoxalement un nombre impair. Les trois équilibres sont les suivants :

$$x^1 = (0,0,1) \quad y^1 = (0,1,0)$$
$$x^2 = (0,1,0) \quad y^2 = (0,1,0)$$
$$x^3 = (0,1,0) \quad y^3 = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)$$

En relation avec le lemme 3.5, nous pouvons ajouter pour les jeux non-dégénérés que tout équilibre de Nash en stratégie mixte (x, y) est tel que les supports $M(x)$ et $N(y)$ ont même cardinalité.

Tableau 3.6 – *Répartition des équilibres de Nash complets - 500 jeux* 3×3

Nombre de jeux	équilibres complets		
Nombre de Nash	0	1	Total
1	333	11	344
3	129	18	147
5	5	3	8
7		1	1
Total	467	33	500

Par ailleurs, remarquons que le nombre de jeux ayant un unique équilibre corrélé est inférieur au nombre de jeux ayant un unique équilibre de Nash. Comme nous l'avons souligné, les jeux ayant un unique équilibre de Nash n'ont pas forcement un unique équilibre corrélé dès lors que le nombre de stratégies pour les joueurs est supérieur à 3. Il serait intéressant de vérifier par contre si les jeux dégénérés carrés partagent le même nombre d'équilibres de Nash et corrélés. Nous avons généré une dizaine de jeux dégénérés carrés et ils possèdent tous le même nombre d'équilibres de Nash que de corrélés.

Considérons à présent les équilibres de Nash complets dont la répartition est donnée au tableau 3.6 et leur nature en terme d'efficacité donnée au tableau 3.7. Si le nombre d'équilibres de Nash est supérieur à 1, aucun équilibre complet n'est efficace. Par ailleurs, le nombre de jeux possédant un équilibre de Nash complet est passé de 128 pour les jeux 2×2 à 33 pour les jeux 3×3. Plus le nombre de stratégies pour chacun des joueurs est élevé, moins nous avons de chance d'obtenir un équilibre de Nash complet. En effet, l'augmentation du nombre de stratégies, augmente le nombre

Tableau 3.7 – *Répartition des équilibres de Nash complets et efficaces - 500 jeux* 3×3

Nombre de jeux	équilibres complets efficaces		
Nombre de Nash	0	1	Total
1	337	7	344
3	147		147
5	8		8
7	1		1
Total	493	7	500

de contraintes d'incitation qui doivent toutes être vérifiées à égalité par l'équilibre complet, ce qui réduit considérablement les chances d'existence. Nous verrons que sur 200 jeux 4×4, seulement deux jeux possèdent un équilibre de Nash complet.

Si le nombre de jeux possédant un unique équilibre efficace est de 399, soit supérieur au nombre de jeux possédant un unique équilibre de Nash, il existe néanmoins des jeux qui présentent jusqu'à 11 équilibres efficaces. Plus le nombre d'équilibres corrélés est élevé, et pour des points extrêmes "proches", plus le nombre d'équilibres efficaces a des chances d'être élevé. Enfin, la répartition des équilibres de Nash efficaces est donnée au tableau 3.8. Le nombre de jeux ayant un équilibre de Nash efficace unique reste élevé et supérieur par contre au nombre de jeux ayant un unique équilibre efficace.

Tableau 3.8 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux* 3×3

Nombre de jeux	équilibres efficaces			
Nombre de Nash	0	1	2	Total
1	10	334		344
3	7	84	56	147
5		4	4	8
7		1		1
Total	17	423	60	500

3.5.3 Les jeux bimatriciels 4×4

Le nombre d'équilibres corrélés pour des jeux 4×4 peut atteindre 107.533 équilibres, l'énumération des point extrêmes du polytope des équilibre corrélés est alors d'autant plus longue. Nous avons donc limité notre étude à un ensemble de 200 jeux 4×4. Les répartitions des différents types d'équilibres sont données par les figures 3.10, 3.11 et 3.12.

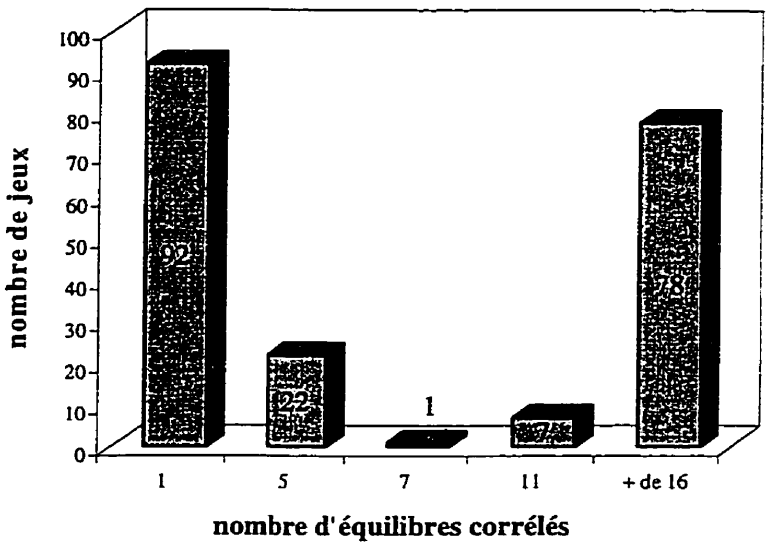


Figure 3.10 – *Répartition des équilibres corrélés sur 200 jeux* 4×4

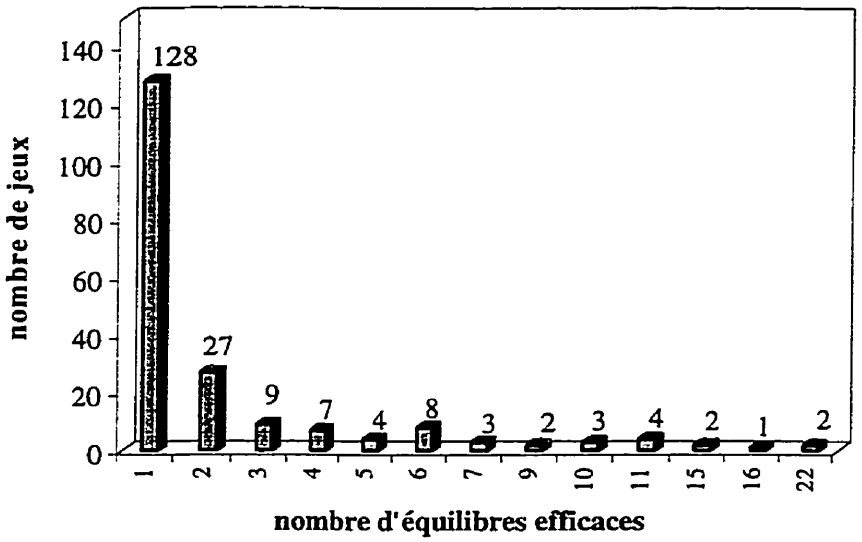


Figure 3.11 – *Répartition des équilibres efficaces sur 200 jeux* 4×4

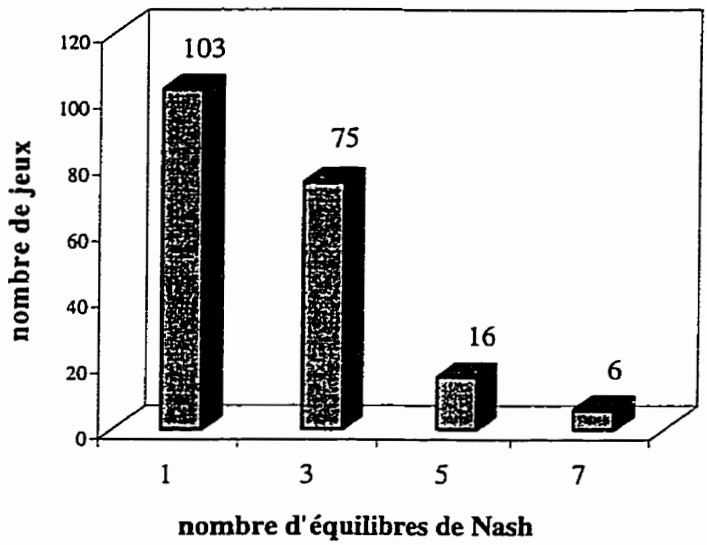


Figure 3.12 – *Répartition des équilibres de Nash sur 200 jeux* 4×4

Les jeux 4×4 présentent les mêmes caractéristiques que les jeux 3×3. Le nombre maximum d'équilibres de Nash semble se stabiliser à 7, alors que le nombre maximum d'équilibres efficaces augmente jusqu'à atteindre 22. Soit deux fois plus que pour les jeux 3×3. Proportionnellement le nombre de jeux ayant un unique équilibre de Nash efficace reste élevé comme le montre le tableau 3.9. On constate que le nombre maximum d'équilibres de Nash efficaces est passé de 2 pour des jeux 2×2 et 3×3 à 3 pour des jeux 4×4. Aucun des équilibres de Nash complets n'est efficace et comme nous l'avons déjà mentionné leur nombre est très faible.

Tableau 3.9 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 200 jeux* 4×4

Nombre de jeux	équilibres efficaces				
Nombre de Nash	0	1	2	3	Total
1	5	98			103
3	8	47	20		75
5	1	8	7		16
7		2	3	1	6
Total	14	155	30	1	500

3.5.4 Les jeux bimatriciels non-carrés

Nous présentons ici différents résultats concernant des ensembles de 500 jeux 3×2, 4×3 et 200 jeux 5×3. Nous sommes intéressés par le comportement des équilibres efficaces et des équilibres de Nash efficaces. Les équilibres complets ne peuvent être des équilibres extrêmes, comme nous l'avons démontré au chapitre 2.

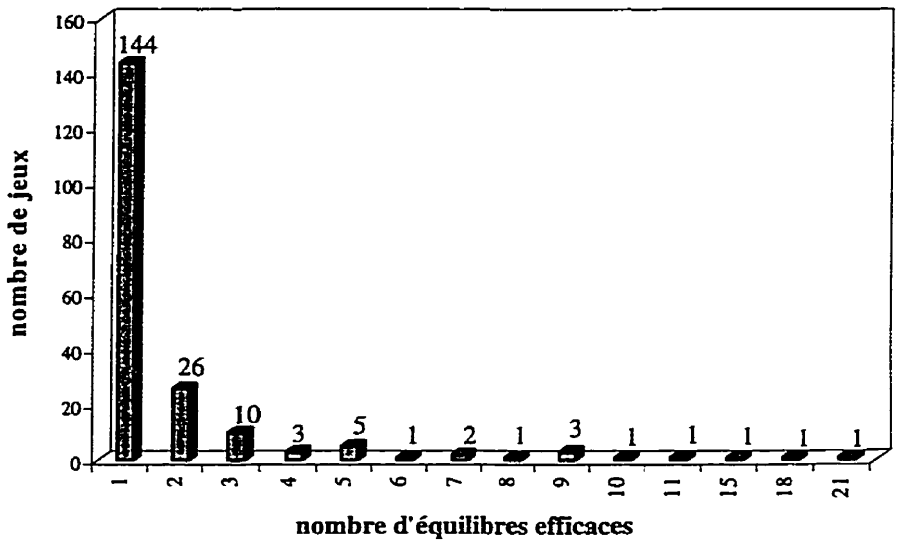


Figure 3.13 – *Répartition des équilibres efficaces sur 200 jeux* 5×3

Tous les jeux générés, s'ils possèdent plus d'un équilibre corrélé en possèdent au moins cinq. Encore une fois, cette caractéristique semble être liée aux jeux non-dégénérés. En reprenant un des exemples de jeux dégénérés précédents, on peut facilement construire un jeu 4×3 possédant 4 équilibres corrélés. Les figures 3.13, 3.14 et 3.15 nous montrent la répartition des équilibres efficaces pour les différents jeux non-carrés. Leur nombre augmente en fonction du nombre d'équilibres corrélés, soit en fonction du nombre de stratégies des deux joueurs.

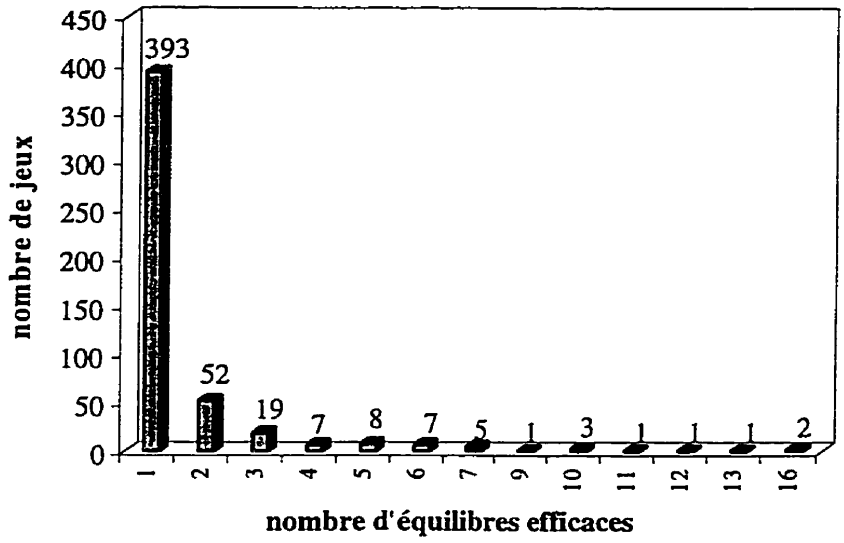


Figure 3.14 – *Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux* 4×3

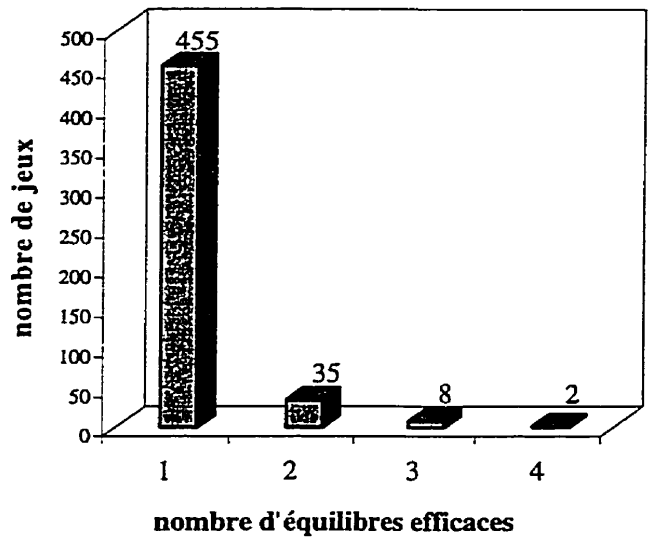


Figure 3.15 – *Répartition des équilibres efficaces sur 500 jeux* 3×2

Tableau 3.10 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 200 jeux* 5×3

Nombre de jeux	équilibres efficaces			
Nombre de Nash	0	1	2	Total
1	7	105		112
3	3	53	23	79
5		4	2	6
7		2	1	3
Total	10	164	26	200

En comparaison avec les équilibres de Nash efficaces, le nombre de jeux possédant un unique équilibre de Nash efficace est toujours plus élevé que celui des jeux possédant un unique équilibre efficace (voir tableau 3.10, 3.11 et 3.12). Plus le nombre de stratégies pour les deux joueurs est élevé, plus le concept d'équilibre de Nash efficace peut s'avérer être intéressant. Il faut cependant garder à l'esprit que leur calcul devient alors d'autant plus complexe. En effet, il s'agirait alors de résoudre un problème à deux fonctions objectifs sous des contraintes quadratiques. De ce point de vue, le calcul des équilibres efficaces, malgré les contraintes pratiques liées à la dégénérescence est plus aisé.

Tableau 3.11 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux* 4×3

Nombre de jeux	équilibres efficaces				
Nombre de Nash	0	1	2	3	Total
1	11	311			322
3	9	103	49		161
5		8	5		13
7		1	2	1	4
Total	20	423	56	1	500

Tableau 3.12 – *Répartition des équilibres de Nash efficaces - 500 jeux* 3×2

Nombre de jeux	équilibres efficaces		
Nombre de Nash	1	2	Total
1	407		407
3	58	35	93
Total	465	35	500

CONCLUSION

L'analyse des équilibres de Nash et des équilibres corrélés se réduit à celle des équilibres extrêmes qui, nous l'avons vu au chapitre 2, sont les points extrêmes d'un même polytope. Ce résultat nous permet de donner une nouvelle définition pour les équilibres de Nash extrêmes : on appelle équilibre de Nash extrême, un équilibre de Nash ne pouvant s'écrire comme combinaison convexe de deux autres équilibres de Nash. De plus, ce résultat permettrait de penser qu'un équilibre de Nash extrême peut se calculer à l'aide de la programmation linéaire. La difficulté demeure néanmoins quant à la recherche de la ou des fonctions objectifs pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash extrêmes. Cependant, nous avons vu que lorsque le jeu est non carré, soit $m > n$, le joueur 1 a pour chaque équilibre $m - n$ stratégies non choisies. Ces stratégies peuvent être trouvées par la programmation linéaire. Pour chacune des stratégies i du joueur 1, on cherche à minimiser $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ sous les contraintes du polytope des équilibres corrélés.

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter :

1. La solution optimale est telle que la fonction objectif à une valeur non nulle.
On peut dans ce cas aisément conclure que la stratégie i sera dans n'importe lequel des équilibres de Nash choisie avec une probabilité non nulle;

2. La fonction objectif a une valeur nulle et la solution optimale correspond à un équilibre de Nash.
Nous avons alors déterminé dans ce cas au moins un équilibre de Nash extrême et les stratégies $m - n$ non choisies correspondantes;

3. La fonction objectif a une valeur nulle et la solution optimale ne correspond pas à

un équilibre de Nash.
On doit dans ce cas résoudre un ou plusieurs programmes linéaires auxquels on ajoute à la fonction objectif les variables p_{ij} qui sont positives et qui empêchent la structure d'un équilibre de Nash.

L'ensemble des résultats théoriques présentés au chapitre 2, comme nous venons de le faire ci-dessus, ouvre de nouvelles perspectives pour le calcul et l'étude des équilibres de Nash extrêmes ainsi que des ensembles de Nash maximaux. Par ailleurs, la connaissance d'un équilibre de Nash non extrême permet la caractérisation immédiate de l'ensemble de Nash maximal auquel il appartient. On pourrait par exemple rechercher l'ensemble de Nash ayant en son intérieur relatif des équilibres complets. Ceci étant fait exception des jeux n'ayant aucun équilibre complet comme décrit au chapitre 2.

En parallèle, les différentes études empiriques sur des jeux de tailles diverses, nous ont montré que les équilibres de Nash restent toujours une solution avantageuse. Leur nombre pour les jeux non dégénéres reste faible et il semble que de nombreux jeux possèdent un unique équilibre de Nash efficace. Il serait par ailleurs intéressant d'étudier les classes de jeux ayant le même nombre d'équilibres corrélés que d'équilibres de Nash. Une classe de jeux répondant à ce critère est obtenue en considérant pour un des joueurs une matrice de paiements répétant le même vecteur ligne ou colonne si l'on considère respectivement le joueur 1 ou le joueur 2. Ceci réduit au simplexe l'ensemble des stratégies mixtes du joueur en question.

La Recherche Opérationnelle a un rôle important à jouer en théorie des jeux. L'approche polyédrale nous a permis d'analyser les équilibres de Nash plus aisément.

La génération aléatoire de jeux et leur résolution à l'aide d'algorithmes de la programmation mathématique ont mis en évidence certaines tendances qui se traduisent par des conjectures.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUDET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. et SAVARD, G. (1996). "Enumeration of All Extreme Equilibrium Strategies of Bimatrix Games", *Les Cahiers du Gerad* G-96-32 version révisée mai 1997.

[2] AUMANN, R.J. (1974). "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies", *Journal of Mathematical Economics* **1**, pages 67-96.

[3] AUMANN, R.J. (1987). "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality", *Econometrica* Vol. 55, No. 1, pages 1-18.

[4] CHIN, H., PARTHASARATHY, T. et RAGHAVAN, T.E.S. (1974). "Structure of Equilibria in N-Person Non-Cooperative Games", *International Journal of Game Theory* **3**, pages 1-19.

[5] CHVÁTAL, V. (1983). "Linear Programming", Freeman, New York.

[6] CRIPPS, M.W. (1995). "Extreme Correlated and Nash Equilibria in Two-Person Games", mimeo, *University of Warwick, GB.*

[7] EVANGELISTA, F.E. et RAGHAVAN, T.E.S. (1996). "A Note on Correlated Equilibrium ", *International Journal of Game Theory* **25**, pages 35-41.

[8] FUDENBERG, F. et TIROLE, J.. "Game Theory", The MIT press, 1991, cinquième édition 1996.

[9] HART, S. et SCHMEIDLER, D. (1989). "Existence of Correlated Equilibria", *Mathematics of Operations Research"* Vol. 14, No. 1, pages 18-25.

[10] HEUER, G.A. (1975). "On Completely Mixed Strategies in Bimatrix Games", *Journal of the London Mathematical Society* **2**, pages 17-20.

[11] HEUER, G.A. et MILLHAM, C.B. (1976). "On Nash Subsets and Mobility Chains in Bimatrix Games", *Naval Research Logistics Quaterly* **23**, pages 311-319.

[12] JANSEN, M.J.M. (1981). "Maximal Nash Subsets for Bimatrix Games", *Naval Research Logistics Quaterly* **28**, pages 147-151.

[13] JURG, A.P., JANSEN, M.J.M., PARTHASARATHY, T. et TIJS, S.H. (1990). "On Weakly Completely Mixed Bimatrix Games", *Linear Algebra and its Aplications* **141**, pages 61-74.

[14] FUKUDA, F. (1993). "*cdd.c*: C-implementation of the Double Description Method for Computing all Vertices and Extremal Rays of a Convex Polyhedron given by a System of Linear Inequalities", *Departement of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lauzanne, Switzerland*, program available from ifor13.ethz.ch, directory/pub/fukuda/cdd.

[15] LEMKE, C.E. et HOWSON, J.T. (1964). "Equilibrium Points of Bimatrix Games", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* **12**, pages 413-423.

[16] MOTZKIN, T.S., RAIFFA, H., THOMPSON, G.L. et THRALL, R.M. (1953). "The Double Description Method" dans *Contribution to the Theory of Games*, Vol. II, H.W. KUHN et A.W. TUCKER eds. *Annals of Mathematical Studies* **28**, Princeton University Press, pages 81-103.

[17] NASH, J.F. (1950). "Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceeding of the National Academy of Sciences U.S.A.* **36**, pages 48-49.

[18] NASH, J.F. (1951). "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics* **54**, pages 286-295.

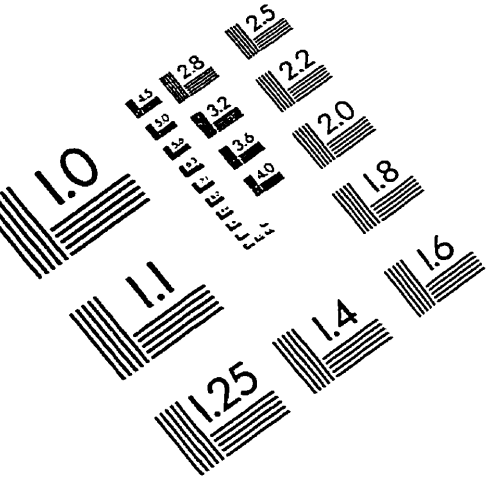
[19] OSBORNE, M.J. et RUBINSTEIN, A.. "A Course in Game Theory", The MIT press, 1994.

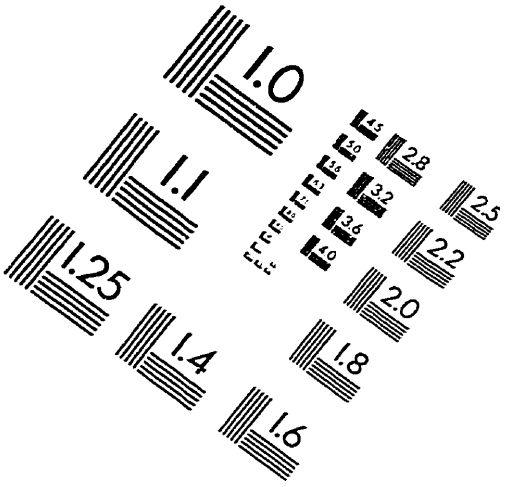
[20] PARTHASARATHY, T. et RAGHAVAN, T.E.S.. "Some Topics in Two-Person Games", *Americam Elsevier Publishing Co New-York*, 1971.

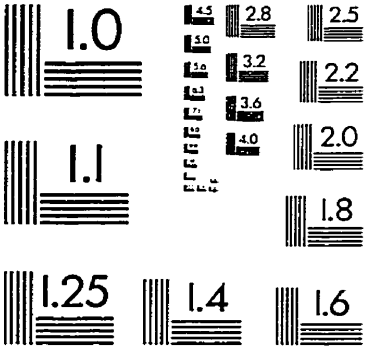
[21] RAGHAVAN, T.E.S. (1970). "Completely Mixed Strategies in Bimatrix Games", *Journal of the London Mathematical Society* **2**, pages 709-712.

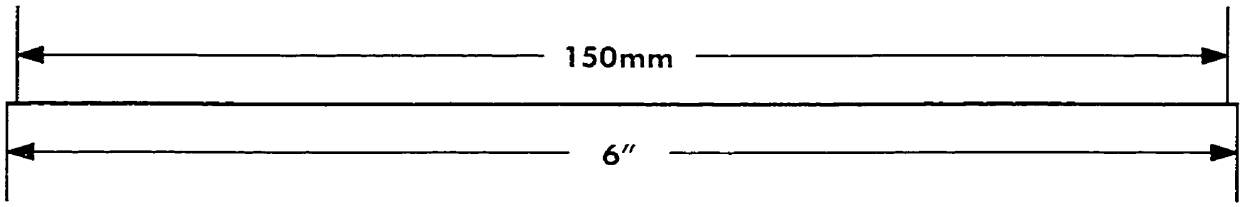
[22] SHAPLEY, L.S. et SNOW, R.N. (1950). "Basic Solutions of Discrete Games" dans *Contribution to the Theory of Games*, Vol. I, H.W. KUHN et A.W. TUCKER eds. Princeton University Press, pages 27-35.

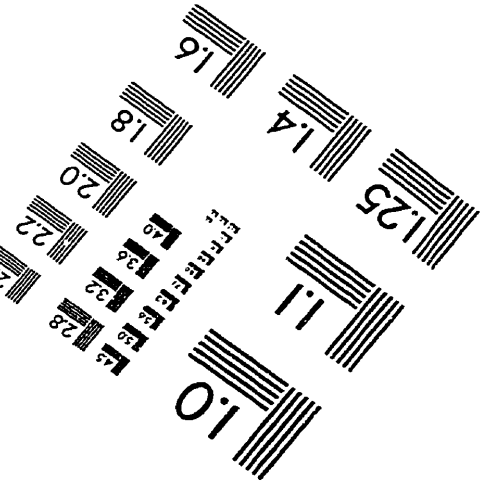
IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (QA–3)

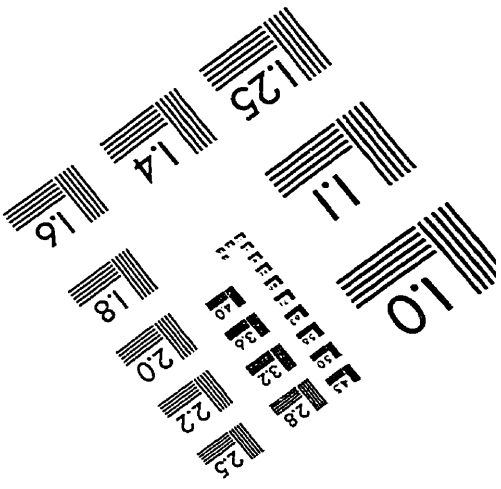












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved