

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE
DE FILES D'ATTENTE AVEC PRIORITÉ

SYLVAIN DELAS

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUIN 1998

© Sylvain Delas, 1998.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37438-6

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE
DE FILES D'ATTENTE AVEC PRIORITÉ

présenté par: DELAS Sylvain

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., président

Mme ROSENBERG Catherine, Doc.Sc., directrice de recherche

M. GIRARD André, Doc., membre

à Tuyết Nga

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier ma directrice de recherche, le Dr Catherine Rosenberg, pour son encadrement dynamique tout au long de ma maîtrise. Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir permis de voyager et de découvrir l'univers de l'industrie à travers Nortel (Northern Telecom). Mon travail a beaucoup profité de la vision globale de Catherine ainsi que de son sens critique constructif. J'ai trouvé dans son enthousiasme communicatif une grande source de motivation.

Cette maîtrise a été faite en étroite collaboration avec le Dr Ravi Mazumdar qui m'a donné la chance de découvrir les subtilités du sujet sur lequel lui et le Dr Nikolay Likhanov ont travaillé. Ravi a su me communiquer avec une grande générosité sa passion pour la recherche.

Le Dr Nikolay Likhanov de l'IPIT de Moscou m'a brillamment présenté son travail lors de son passage en Angleterre, ce qui m'a permis d'entrer rapidement dans le vif du sujet, et je lui en suis reconnaissant.

Je souhaite remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail de recherche : Dr Roland Malhamé, président du jury, Dr André Girard de l'INRS-Télécommunications, membre du jury, et Dr Rosenberg qui a dirigé cette maîtrise.

Merci à John Thistle, codirecteur de cette maîtrise, pour ses conseils d'organisation lors du séminaire de recherche.

Merci aux étudiants du laboratoire de communications qui m'ont aidé à découvrir toutes les facettes de Polytechnique et avec lesquels j'ai passé de bons moments. Merci en particulier à Aref Meddeb qui a accepté à plusieurs reprises de faire pour moi des démarches lorsque j'étais en Angleterre.

Merci à Guray Acar pour son aide lors de mes recherches bibliographiques.

Je tiens également à remercier le personnel administratif et les secrétaires du département de génie électrique et informatique, et tout particulièrement Martine Pinsonneault qui a toujours si gentiment accepté de m'aider.

Je suis reconnaissant à la société Nortel de m'avoir fourni à Harlow un environnement de travail exceptionnel et en particulier une puissance de calcul adéquate pour réaliser mes simulations numériques.

Merci à toute l'équipe de "Traffic Engineering and Satellite Networking" à Nortel pour vos nombreux conseils et votre soutien. Merci en particulier à Serge Halberstadt qui a bien voulu me faire bénéficier de son expérience des réseaux ATM et m'a aidé à corriger ce mémoire.

RÉSUMÉ

Le projet de maîtrise décrit dans ce mémoire porte sur l'étude d'un système de files d'attente avec priorité et son application au contrôle d'admission de connexions (CAC) dans les réseaux utilisant le mode de transfert asynchrone (ATM).

En acceptant une nouvelle connexion, un réseau ATM s'engage à lui accorder un certain niveau de qualité de service (QS) tout en maintenant le niveau de QS accordé aux connexions déjà établies. Parmi les critères utilisés pour mesurer le niveau de qualité de service, on trouve la probabilité de perte de cellules (Cell Loss Ratio ou CLR) qu'il faut être capable de prédire afin de gérer efficacement les ressources du réseau. Les systèmes possédant plusieurs niveaux de priorité sont très intéressants car ils permettent d'adapter la gestion du trafic au type de service correspondant (selon que le service est plus sensible aux délais ou aux pertes d'information par exemple). Ils sont utilisés dans un grand nombre de commutateurs ATM. Peu d'études existent cependant sur ces systèmes car leur analyse est beaucoup plus complexe que dans le cas d'une file unique.

Nous proposons dans un premier temps une méthode pour évaluer le CLR dans des files à plusieurs niveaux de priorité, en fonction des caractéristiques des sources. Divers outils mathématiques sont utilisés dans ce but, dont des techniques basées sur la théorie des grandes déviations et des intégrales de Laplace. Nous obtenons alors une borne supérieure asymptotique pour le CLR, c'est à dire une borne valable pour des grands systèmes, comme par exemple un commutateur ATM. En comparant cette borne à des simulations numériques, nous mettons en

évidence sa grande précision, et donc son potentiel pour des applications pratiques basées sur les technologies ATM.

Ces applications sont l'objet de la suite du mémoire. Nous étudions en particulier comment une connaissance des sources au niveau appel peut être exploitée à travers le concept de la configuration de perte la plus probable. Nous proposons enfin différents algorithmes de réalisation de la CAC utilisant les résultats qui précèdent.

ABSTRACT

The project described in this report is a study of a queueing system with priorities and the application of this study to Call Admission Control (CAC) in Asynchronous Transfer Mode (ATM) networks.

When accepting a new connection, the ATM network has a commitment to provide it with a certain level of quality of service (QoS) without affecting the QoS of previously accepted connections. The cell loss ratio (CLR) is one of the criteria used to measure the level of QoS. The network must be able to forecast the impact that accepting a new call will have on the CLR in order to efficiently manage resources. Systems using different levels of priorities are very interesting because they provide a flexible traffic management scheme, adapted to the specific requirements of a given service (whether the service is more sensitive to delay or information loss for example). They are used in many ATM switches. However, few results exist on such systems because their study is much more complicated than in the case of a single queue.

We start by proposing a method to evaluate the CLR in queues with different levels of priorities, taking into consideration the characteristics of the sources. Several mathematical tools are used to achieve this goal, including techniques based on the theory of large deviations and Laplace integrals. We then obtain an asymptotic upper bound for the CLR. By asymptotic, we mean that the bound is valid for large systems such as an ATM switch. Comparing this bound with numeric simulations, we show its great accuracy, and therefore its potential for

practical applications based on ATM technology.

These applications are the topic of the rest of the report. In particular, we study how a knowledge of the sources at the call level can be used with the concept of the most likely cell loss configuration. We finally propose several CAC algorithms based on the previous results.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ.....	vii
ABSTRACT.....	ix
TABLE DES MATIÈRES.....	xi
LISTE DES FIGURES.....	xiv
CHAPITRE 1 Introduction.....	1
1.1 Le réseau numérique à intégration de services large bande....	1
1.2 Les garanties de qualité de service pour l'ATM.....	3
1.3 Nos objectifs.....	5
CHAPITRE 2 Revue de littérature.....	6
2.1 Introduction.....	6
2.2 Travaux sur la probabilité de perte de cellules.....	6
2.3 Travaux sur la CAC.....	10
CHAPITRE 3 Le système de files d'attente.....	14

3.1 Introduction	14
3.2 Cadre général	14
3.3 Explication de nos choix	16
3.4 Etude du système	20
3.4.1 Notations	20
3.4.2 Résultats Préliminaires	23
3.4.3 Mémoire de stockage II infinie	28
3.4.4 Mémoire II de capacité finie	29
3.4.5 Généralisation à trois files	31
3.4.6 Comparaison des formules théoriques aux simulations	32
3.4.6.1 Deux files	32
3.4.6.2 Trois files	34
 CHAPITRE 4 Gestion de ressources dans les réseaux large bande	35
4.1 Introduction	35
4.2 Définitions	35
4.3 Simplifications	40
4.4 Résultats préliminaires	41
4.4.0.3 Calcul de $\partial \tau_T / \partial n^I$	41
4.4.0.4 Calcul de $\partial J_T(G) / \partial n^I$	42
4.5 Convexité par coordonnées du domaine d'admission	43

4.6 Configuration de perte la plus probable	45
4.7 Réalisation de la CAC	49
4.7.1 Cadre général	49
4.7.2 Les différentes approches	50
 CHAPITRE 5 Conclusions et recherches futures.....	56
 BIBLIOGRAPHIE.....	58

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE 1	1
1.1 Le Réseau RNIS	2
 CHAPITRE 2	 6
 CHAPITRE 3	 14
3.1 Le système étudié	15
3.2 Trajectoire de débordement pour une file	18
3.3 Trajectoires de débordement pour deux files	18
3.4 Restriction à une zone de probabilité dominante	19
 CHAPITRE 4	 35
4.1 Domaine d'admission	37
4.2 Une région convexe par coordonnées	38
4.3 Une région convexe mais non convexe par coordonnées	39
4.4 Simplification du domaine d'admission par une tangente	51
4.5 Interpolation linéaire pour le domaine d'admission	52
4.6 Simulation du domaine d'admission	53
4.7 Calcul de F^{II} à partir de nos formules théoriques pour CLR^{II} . .	54
 CHAPITRE 5	 56

CHAPITRE 1

Introduction

1.1 Le réseau numérique à intégration de services large bande

Jusqu'au début des années 90, parallèlement à la diversification des services de télécommunications, des réseaux à applications spécifiques se sont développés. Ainsi coexistent aujourd'hui le réseau téléphonique, les réseaux de transmission de données, les réseaux de télévision par câble... A ces divers réseaux correspondent de nombreux protocoles et infrastructures d'où des problèmes de compatibilité qui engendrent des surcoûts considérables. De plus, les opérateurs veulent pouvoir offrir rapidement des nouveaux services de caractéristiques variées. Une multitude de réseaux séparés à usage spécifique ne permet pas de répondre à ce besoin. On peut dans certains cas offrir un nouveau service "au dessus" d'un réseau existant comme le fax qui utilise le réseau téléphonique par exemple. Cependant, ce procédé n'est efficace que dans la mesure où le réseau sous-jacent dispose d'une souplesse suffisante (i.e. diversité des choix de largeur de bande, adaptabilité à divers contraintes de qualité de service en terme de délai, perte d'information, variation du délai etc.).

Pour répondre à ces questions, l'UIT-T (Union Internationale des Télécommunications) a défini à travers les Avis de la serie I les caractéristiques du réseau numérique à intégration de services (RNIS, ISDN en anglais). En substance, ce

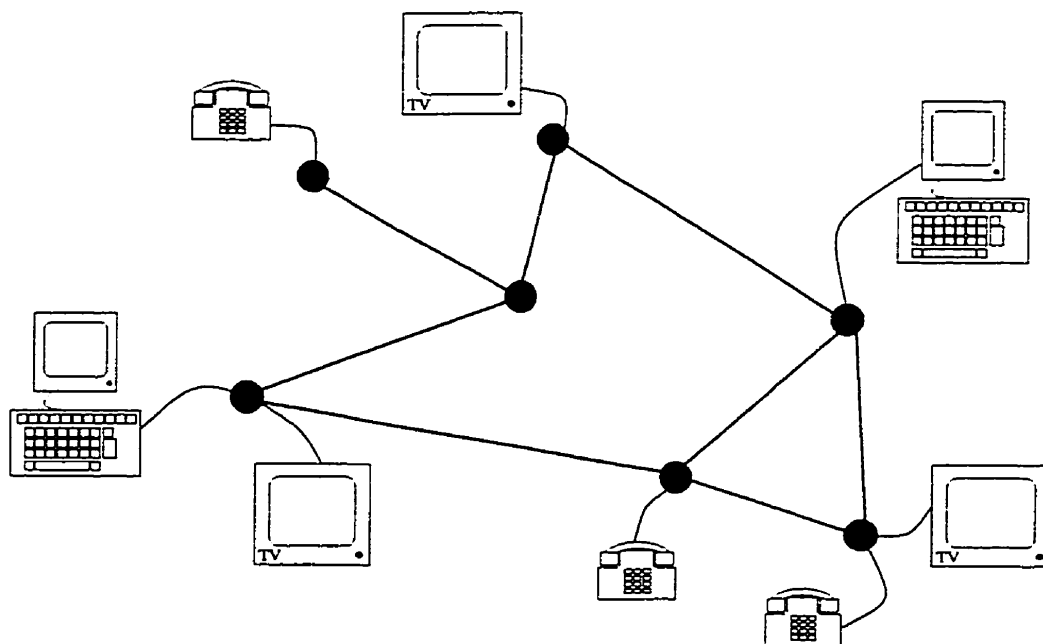


Figure 1.1 Le Réseau RNIS

réseau est conçu pour offrir un large éventail de services de bout en bout avec un nombre limité d'interfaces (voir figure 1.1). Le RNIS doit, entre autres, être capable de transmettre des communications téléphoniques à un débit de base de 64 kbit/s. Le RNIS large bande peut, comme son nom l'indique, offrir une largeur de bande supérieure à ce débit de base pour offrir des services qui demandent une grande capacité de transmission comme la vidéo haute résolution ou les interconnexions de LAN (Local Area Network). Une grande largeur de bande est par ailleurs nécessaire au cœur du réseau pour transmettre le trafic associé au multiplexage d'un grand nombre de sources.

1.2 Les garanties de qualité de service pour l'ATM

Aux différents services offerts par le RNIS vont correspondre des critères de qualité de service (QS, Quality of Service ou QoS en anglais). Un des défis technologiques associés à la mise en place du RNIS est de parvenir à gérer efficacement les ressources du réseau tout en maintenant le niveau de qualité de service promis à chaque connexion. Bien que la description du RNIS ne spécifie pas de technologie particulière pour sa réalisation physique, le mode de transmission qui s'est imposé est le Mode de Transfert Asynchrone (Asynchronous Transfer Mode) basé sur la division de l'information en unités élémentaires appelées cellules, composées de 53 octets.

ATM devant à terme être utilisé pour une grande gamme de services, il doit pouvoir s'adapter à des contraintes diverses, spécifiques à chaque type d'application. Du trafic téléphonique par exemple sera très sensible au délai, mais pourra supporter des pertes de cellules. En revanche, un transfert de fichier doit être effectué avec une perte d'information minimale, sinon nulle, mais peut en général s'accommoder de délais de quelques secondes.

D'une manière générale, tandis que le nombre de services proposés par les opérateurs se multiplie, le besoin d'établir différents niveaux de QS devient absolument crucial. Ceci n'est d'ailleurs pas spécifique à ATM. En effet, un des objectifs majeurs de l'industrie des télécommunications aujourd'hui est de mettre en place une gamme flexible et robuste de niveaux de QS pour le trafic utilisant IP (Internet Protocol). L'enjeu commercial est considérable, en particulier avec

le développement de la Toile (Word Wide Web) qui propose déjà au grand public des services aussi divers que les banques à domicile, les achats par correspondance, les jeux vidéos, les agences de voyages etc.

Le niveau de qualité d'un service offert par le réseau est mesuré à l'aide de contraintes sur un grand nombre de paramètres dont, entre autres, le délai maximal entre l'émission et la réception de cellules, la variation de ce délai (gigue), la probabilité qu'une cellule (ou un paquet) a d'être perdue, le taux d'erreur dans l'information transmise, etc.

Le réseau doit donc être capable d'évaluer ces divers paramètres afin de gérer efficacement ses ressources tout en respectant le niveau de qualité de service accordé à chaque connexion. Notre étude se concentre sur l'évaluation de la probabilité de perte des cellules (Cell Loss Ratio ou CLR en anglais). De telles pertes interviennent lorsque le taux instantané de transmission des sources est supérieur à la capacité d'un lien et lorsque les mémoires de stockage intermédiaire (buffer en anglais) destinées à contenir temporairement le surplus de paquets débordent. Nos résultats pourraient par ailleurs être utilisés pour les calculs de délais.

Une approche possible pour différencier en terme de QS offerte les services du RNIS consiste à accorder un niveau prioritaire à certains types de trafic. On peut alors mettre en place plusieurs contraintes de CLR (et/ou délai maximum) distinctes. Cette approche est aujourd'hui très largement utilisée dans les commutateurs ATM qui offrent pratiquement tous de nombreux niveaux de priorité.

1.3 Nos objectifs

Notre premier objectif est de fournir des outils d'évaluation des probabilités de perte de cellules pour un système de files d'attentes avec priorités.

Dans ce but, nous avons développé un modèle et établi des formules théoriques d'estimation du CLR en utilisant des techniques de grandes déviations (voir annexe A). Ces techniques requièrent l'utilisation d'un certain nombre d'hypothèses dont en particulier la présence d'un grand nombre de sources. La contribution principale du travail de maîtrise présenté dans ce mémoire est la généralisation des résultats établis par Likhanov et Mazumdar [17] pour une file d'attente au cas complexe d'un système de plusieurs files avec priorités.

Nous avons ensuite évalué la validité de nos résultats par comparaison à des simulations.

Un autre objectif est d'appliquer nos résultats à l'étude du contrôle d'admission de connexions (CAC). Nous proposons différentes approches pour établir un algorithme de CAC efficace.

CHAPITRE 2

Revue de littérature

2.1 Introduction

Le calcul des probabilités de perte de cellules dans des systèmes de files d'attente et son application à la CAC ont fait l'objet d'un très grand nombre de publications. Nous présentons ici une liste d'articles dans ce domaine qui sont en rapport avec notre travail. Cette liste ne se veut pas exhaustive mais doit simplement permettre de situer notre recherche dans un contexte plus large, et de comparer nos contributions à l'état de l'art. Notre revue de littérature est divisée en deux parties qui portent respectivement sur les calculs de perte et sur la CAC.

2.2 Travaux sur la probabilité de perte de cellules

Cette partie porte sur les articles traitant de l'estimation des probabilités de débordement de buffers et de perte de cellules.

Notre travail a pour point de départ l'article de Likhanov et Mazumdar [17]. Cet article traite le cas d'une file d'attente de buffer B et de serveur de capacité C dans laquelle différents types de sources coexistent. Chaque type de source émet des cellules selon un processus qui lui est propre. Les auteurs adoptent un modèle à temps discret c'est à dire dans lequel la variable de temps prend des valeurs

entières. Un facteur de multiplication N est introduit pour représenter la taille du système : la capacité du buffer est NB , celle du serveur est NC et le nombre de sources de type i est Nn^i . L'article traite le cas asymptotique $N \rightarrow +\infty$, c'est à dire le cas d'un grand système. Les auteurs calculent, sous des hypothèses générales pour les fonctions taux des processus d'arrivée, un équivalent asymptotique de la probabilité qu'a un buffer infini de dépasser un niveau de remplissage donné. Ils montrent ensuite que le dépassement d'un niveau non nul du buffer se fait en une durée déterministe lorsque N est grand. Utilisant cette propriété ainsi que des techniques d'intégrales de Laplace, les auteurs en déduisent un équivalent asymptotique de la probabilité de perte de cellules pour un buffer de capacité finie.

Dans [7], Elwalid et Mitra étudient un système à deux priorités qui est similaire au nôtre. Ils se limitent cependant au cas particulier de sources fluides modulées par une chaîne de Markov (Markov Modulated Fluid Sources). Les auteurs commencent par construire un système équivalent à une seule file. Le serveur de cette file reçoit la somme du trafic de la file à faible priorité et du trafic Ω_t sortant du serveur en provenance de la file prioritaire. En comparant les équations d'état de ce système et du système initial, on constate que le buffer de la file de faible priorité a un contenu identique au buffer de ce système à une file. L'étude de la file à faible priorité est donc ramenée à un problème avec une seule file d'attente. Ce changement de point de vue ne résout pas la difficulté principale qui est la caractérisation du trafic Ω_t . Les auteurs caractérisent ce trafic comme un processus d'arrivée fluide contrôlé par une chaîne de Markov dont ils limitent le nombre d'états pour simplifier les calculs. Appliquant la borne de Chernoff à ce processus, ils obtiennent finalement, pour la probabilité que le contenu B^{II} du deuxième buffer dépasse le niveau x , une expression de la forme

$P(B^H > x) \approx L_0 e^{zx}$. L_0 et z sont deux constantes calculées dans l'article à l'aide de techniques développées par Elwalid et Mitra dans [8]. Ce travail présente plusieurs aspects intéressants dont en particulier la méthode de réduction du nombre d'états de la chaîne de Markov sous-jacente au processus Ω_t qui est donnée explicitement. Plusieurs limites de l'article sont cependant à noter. Premièrement, les sources ne sont pas d'un type général. D'autre part, la quantité évaluée est la probabilité de débordement du buffer et non la probabilité de perte de cellules sur laquelle la qualité de service est pourtant basée. On remarque en particulier l'absence du facteur $1/\sqrt{N^3}$ que notre démarche met en évidence. Les résultats sont donc en général peu précis.

Abate et Whitt [1] étudient la file de faible priorité dans un système à deux files. Ils se limitent au cas où le processus d'arrivée est de type Poisson, mais adoptent une distribution du temps de service générale. Leur système est donc $M/G/1$ tandis que le nôtre est $G/D/1$. Leur travail porte non pas sur le CLR mais sur la distribution du temps d'attente des paquets, qui est également un critère utile pour l'établissement du niveau de QS. Leur approche très technique prouve l'existence de plusieurs types de régimes pour la queue de la distribution du temps d'attente dans la file de faible priorité: des régimes de décroissance exponentielle et non-exponentielle.

Zhang [21] quant à lui considère une discipline de service de type GPS (Generalized Processor Sharing) pour un système de deux files d'attentes. Le GPS (voir par exemple [4]) consiste à partager la capacité du serveur entre différentes sources selon des proportions données tout en rendant disponible la capacité attribuée à une source lorsqu'elle est inactive. Notons que ce système n'est pas à

proprement parler à priorité, sauf dans le cas limite où la fraction de la capacité du serveur attribuée à la première file tend vers 1.

Courcoubetis et al. [5] étudient la perte de paquets pour une seule file mais leurs techniques ont un intérêt pour un système à deux files ou plus. Ils utilisent une approximation simple de type $P(BII > x) \simeq CLR \simeq e^{-NI}$ qui n'est pas très précise. En revanche, ils proposent une heuristique astucieuse qui leur permet de caculer simplement la probabilité de perte de cellules dans un buffer de petite dimension. Ils se limitent pour cela au cas de sources On-Off périodiques. Le principe de leur heuristique est de remarquer que pour un buffer de petite dimension, le débordement se fait sur une période de temps courte par rapport à la période ON d'une source. On peut alors simplifier les calculs en considérant que le nombre de sources ON est constant pendant la période de débordement du buffer. Les auteurs développent également des calculs pour un système sans buffer pour lequel ils montrent que la synchronisation des sources au niveau cellule a un effet important sur le taux de perte. En combinant leurs deux modèles, ils parviennent à mettre en évidence une valeur critique de la taille du buffer qui sépare les domaines dans lesquels le niveau cellule ou le niveau rafale domine (une congestion au niveau rafale correspond à une arrivée importante de trafic soutenue sur une durée plus longue qu'une congestion au niveau cellule qui provient quant à elle de la synchronisation des sources).

Duffield et al. [6] proposent d'utiliser une estimation empirique de la fonction taux des grandes déviations afin d'évaluer des critères de qualité de service dont le CLR. Leur méthode consiste à commencer par estimer la fonction génératrice de moments $\phi(\tau)$, puis à en déduire la fonction taux à l'aide de la relation

$$I(g) = \sup_{\tau > 0} \{\tau g - \ln(\phi(\tau))\}.$$

Mentionnons enfin que le principe de l'utilisation des développements fins basés sur la borne de Chernoff pour le calcul de la distribution du contenu d'un buffer remonte à Hui [11].

2.3 Travaux sur la CAC

Il existe un nombre considérable de travaux sur la CAC et nous ne donnerons ici qu'un survol représentatif. Hormis Elwalid et Mitra, la plupart des auteurs ne traitent pas explicitement le cas de notre système. Cependant, les méthodes basées sur la notion de largeur de bande efficace (Effective Bandwidth encore appelée Equivalent Bandwidth, Equivalent Capacity etc.) pour une file peuvent être adaptées au cas de plusieurs files.

Commençons par décrire les procédures de CAC basées sur la notion de largeur de bande efficace. Ces méthodes consistent à résumer le comportement d'une source par une unique caractéristique sensée représenter la largeur de bande nécessaire pour servir cette source sous des contraintes de QS données. Une telle simplification est en effet nécessaire car un compromis doit être adopté dans le commutateur entre la précision des calculs et leur rapidité. Elle est de plus indispensable à la synthèse des réseaux. Dans le cas d'une source unique, la largeur de bande efficace est égale à la valeur minimale de la capacité du serveur pour laquelle une au moins des contrainte de QS est atteinte. Pour une seule source, le calcul de la capacité efficace peut se faire explicitement dans les cas simples. En

revanche, la situation devient beaucoup plus complexe lorsque plusieurs sources alimentent le serveur.

Guérin et al. [10] proposent une approximation simple de la largeur de bande efficace qui semble de plus relativement précise. Leur approximation est basée sur la combinaison d'un calcul de type modèles fluides (Markov Modulated Fluid Sources) lorsque les rafales sont de taille modérée et d'un calcul de type probabilité de dépassement de capacité dans le cas de longues rafales. Les auteurs obtiennent ainsi deux estimations par excès C_1 et C_2 de la capacité équivalente, et adoptent comme valeur finale $\min\{C_1, C_2\}$. La première estimation est $C_1 = \sum_{i=1}^N C_i$ où C_i est la capacité équivalente de la source i seule, calculée selon un modèle fluide. C_2 est calculée en approchant la probabilité de débordement par la probabilité p_N que la somme des débits instantanés des N sources dépasse la capacité du serveur (ce qui est légitime si les rafales sont longues). Ainsi, C_2 est définie par $p_N < \epsilon$. Les auteurs montrent alors que $C_2 \simeq m + \alpha' \sigma$ où m et σ sont le débit moyen et l'écart type de la somme des N sources et $\alpha' = \sqrt{-2 \ln(\epsilon) - \ln(2\pi)}$.

Kulkarni et al. [15] étudient le problème de la capacité équivalente de deux sources qui partagent un serveur selon une discipline FIFO (First In First Out) mais avec un système de priorité pour l'utilisation du buffer. La source de faible priorité ne peut accéder au buffer de capacité B_0 que lorsque son niveau d'occupation est inférieur à un seuil B_1 , avec $B_1 < B_0$. L'article calcule les capacités efficaces dans ce système pour des sources On-Off exponentielles. L'optimisation de B_1 pour minimiser les capacités équivalentes est alors étudiée.

Elwalid et Mitra [8] proposent une méthode de calcul de la capacité efficace

pour des sources de type processus fluide modulé par une chaîne de Markov. λ_s désigne le taux de transmission d'une source dans l'état s et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_s)$. On note M le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov, K la capacité du buffer et p la borne supérieure dans l'inégalité $\Pr[X \geq B] \leq p$. Les auteurs montrent alors que la capacité efficace peut être approchée par la plus grande valeur propre réelle de la matrice $\Lambda - \frac{1}{\zeta} M$ où $\zeta = \ln p/B$. Dans [7], Elwalid et Mitra appliquent cette méthode pour réaliser la CAC dans un système de deux files avec priorités. Les auteurs calculent différents points sur la frontière du domaine d'admission à l'aide des approximations précédentes. Ils relient ensuite ces points entre eux selon des segments de droites, construisant ainsi un domaine d'admission approché sur lequel ils basent leur CAC. Cette technique est intéressante car elle nécessite peu de calculs. Elle est particulièrement précise lorsque les frontières du domaine d'admission sont quasi-linéaires.

Une discussion intéressante sur la capacité efficace de sources VBR (Variable Bit Rate, sources à débit variable) peut être trouvée dans [3]. Signalons également les travaux de Kelly [13] et de Kesidis, Walrand et Chang [14].

Il existe de nombreuses autres techniques qui ont été proposées pour la CAC. Il existe bien sûr l'allocation du débit crête (valeur maximale du débit instantané) qui ne permet cependant pas de bénéficier des avantages du multiplexage temporel. On trouve aussi des méthodes basées sur des fenêtres temporelles durant lesquelles une source ne peut pas transmettre plus d'un certain nombre de paquets déterminé à l'avance [9]. Il existe par ailleurs des méthodes d'allocation

rapide de capacité de buffer ou de serveur qui permettent aux sources de renégotier leur contrat avec le réseau après la connection initiale, voir par exemple [20].

En conclusion, le problème du calcul des probabilités de perte de cellules dans un système avec priorités pour des sources générales n'a pas encore été traité et c'est pourquoi nous allons l'étudier.

CHAPITRE 3

Le système de files d'attente

3.1 Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude d'un système de files d'attente avec plusieurs niveaux de priorité. Nous commençons par décrire le contexte de notre travail puis nous expliquons nos choix en fonction des objectifs annoncés. Nous établissons ensuite des bornes asymptotiques pour la probabilité de perte de cellules et nous comparons nos résultats à des simulations.

3.2 Cadre général

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, nous voulons évaluer les probabilités de perte de cellules. Commençons par remarquer qu'une cellule peut être perdue pour plusieurs raisons. Il se peut par exemple qu'un lien soit brisé : les cellules transmises sur ce lien n'arriveront pas à destination. D'autre part, l'adresse de destination contenue dans une cellule peut être altérée dans le canal de transmission physique et cette cellule arrivera à une destination erronée ou n'arrivera pas du tout.

Un autre cas, qui est celui auquel nous nous intéressons exclusivement, est la perte par débordement de mémoires de stockage intermédiaire (buffers). En un point donné du réseau, un port de sortie d'un commutateur ATM par exemple

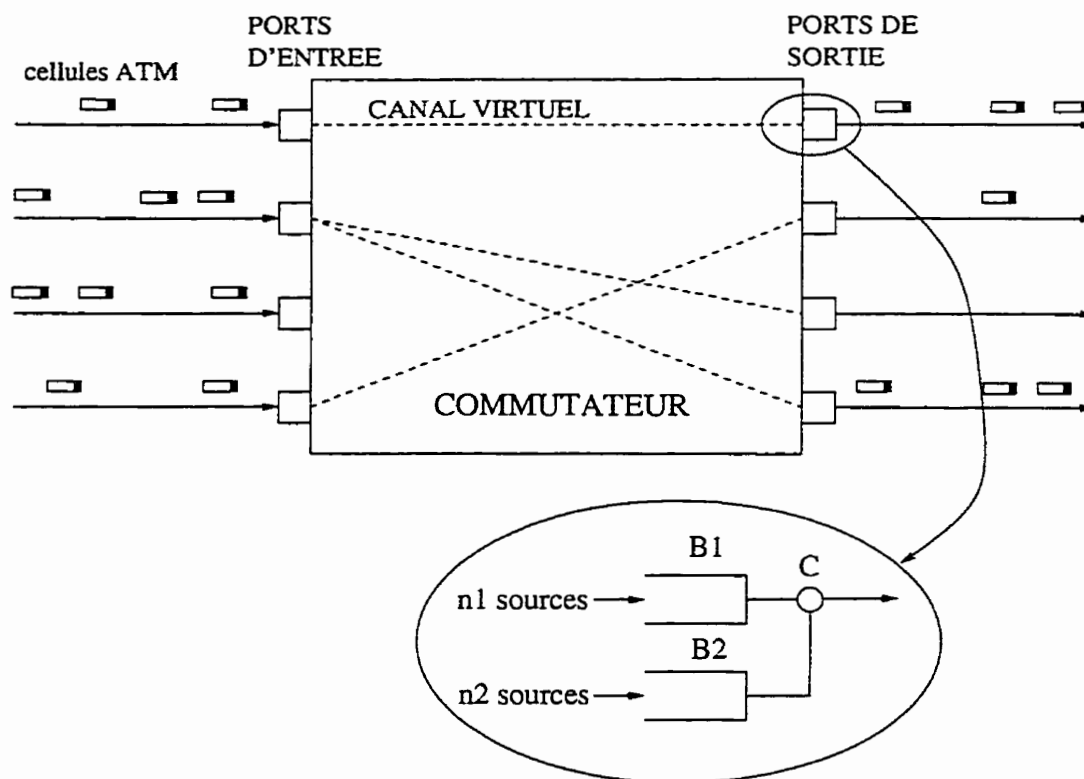


Figure 3.1 Le système étudié

(figure 3.1), le débit du trafic offert à un lien peut être supérieur à sa capacité de transmission pendant une certaine période. En effet, le trafic aggloméré à l'entrée d'un canal peut varier en intensité lorsque les sources qui le constituent ont un débit variable (comme la vidéo compressée par exemple) ou lorsque le nombre de ces sources varie. Dans une telle situation, afin d'éviter de perdre des paquets, des mémoires de stockage intermédiaire sont utilisées pour conserver les paquets en attendant que la capacité de transmission soit disponible. Ces mémoires ont une capacité limitée et des paquets sont perdus lorsqu'elles débordent.

Le point d'entrée du canal de transmission est modélisé par un serveur de capacité C . En donnant priorité à la première file sur la seconde lors de l'accès

au serveur (puis à la seconde sur la troisième etc.) et en choisissant différentes tailles de buffers pour chaque file, on crée un système dans lequel le niveau du CLR peut être adapté au type de trafic et donc à divers services. Le problème est alors de calculer les valeurs du CLR dans chaque file.

De plus, le délai engendré par la traversée de ce système est égal à la durée du séjour de la cellule dans un buffer. Dans le cas de la file avec priorité maximale, cette durée est proportionnelle au niveau de remplissage du buffer numéro 1 lors de l'arrivée de la cellule (car nous supposons la capacité du serveur constante). Les résultats que nous développons sur la probabilité qu'a le buffer de dépasser un niveau donné peuvent alors servir à calculer la distribution des délais dans la file 1. On constate par exemple que le choix d'un buffer de petite dimension dans la file 1 permet d'obtenir un délai maximum faible. La file 1 peut ainsi être utilisée pour la transmission d'applications en temps réel (voix, vidéo) tandis que les autres peuvent transmettre des applications moins sensibles au délai (comme le transfert de fichiers).

3.3 Explication de nos choix

Le problème à résoudre, tel qu'il est décrit dans la section précédente, entre dans le cadre général de la théorie des files d'attente. Nous allons à présent mettre en avant les éléments qui font la difficulté de notre problème et présenter les choix que nous avons adoptés.

Commençons par le cas d'un seul buffer auquel on associe un serveur de capacité constante. Il s'agit de la file G/D/1 et nous supposons que les cellules

sont de taille uniforme. Cette file est trop complexe pour être analysée directement sous forme explicite. Cependant, nous allons utiliser le fait que les réseaux à large bande transportent un grand nombre de sources. Nous adoptons l'hypothèse habituelle et naturelle de l'indépendance de ces sources. Nous supposons également que ces sources sont identiques. On pourrait sans trop de difficulté théorique (mais au prix de notations plus lourdes) traiter le cas plus général de plusieurs groupes de sources multiplexées dans chaque file. Le fait de disposer d'un grand nombre de sources identiques permet de simplifier considérablement le problème en utilisant la théorie des grandes déviations (voir annexe A). En effet, au lieu de devoir étudier le problème G/D/1 dans toute sa généralité, les arrivées de notre système ont une forme relativement régulière.

Pour s'en convaincre on peut faire une analogie avec le théorème de la limite centrale. Soit en effet un grand nombre de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées) $X_{j \in \{1,2,\dots,N\}}$ où X_j a pour espérance m et pour écart type σ . Alors $(\sum_{j=1}^N X_j - Nm) / \sigma\sqrt{N}$ converge en loi vers une distribution normale. Une forme de régularité apparaît ainsi dans la somme normalisée d'un grand nombre de variables i.i.d. et c'est ce type de régularité que nous exploitons à travers les techniques de grandes déviations.

De nombreux auteurs ont adopté cette approche. L'intérêt principal de la démarche de Likhanov et Mazumdar [17] est qu'ils sont parvenus à calculer précisément le CLR, tandis que la plupart des autres travaux se contentent d'approximer le CLR par la probabilité de débordement du buffer. Le projet de maîtrise décrit dans ce mémoire a permis de généraliser ces résultats au cas de plusieurs files d'attente avec priorités.



Figure 3.2 Trajectoire de débordement pour une file

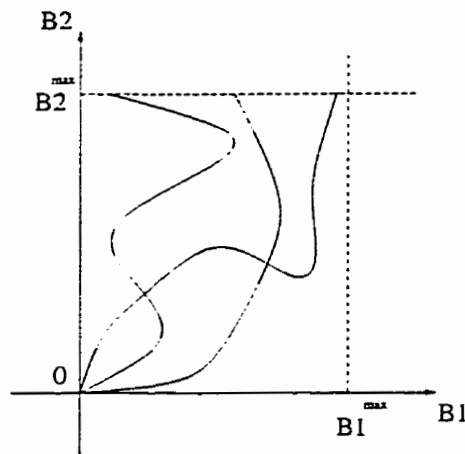


Figure 3.3 Trajectoires de débordement pour deux files

Le passage de une à plusieurs files représente une augmentation considérable de la complexité du système. Ce phénomène provient du fait que la topologie de $\mathbb{R}^2$ est beaucoup plus riche que celle de $\mathbb{R}$.

Nous supposons dans tous les cas que le système est stable. La capacité du serveur est alors supérieure au volume total du trafic en moyenne, et les buffers sont vides pendant une grande fraction du temps. Nous représentons l'état du système par le contenu des buffers $B1$ et $B2$ en fonction du temps. On peut alors étudier les trajectoires qui conduisent au débordement d'un buffer donné à partir de l'état où tous les buffers sont vides. Dans le cas d'une seule file d'attente, ces trajectoires sont relativement simples car incluses dans une droite (figure 3.2). Dans le cas de deux files ces trajectoires peuvent prendre des formes diverses et

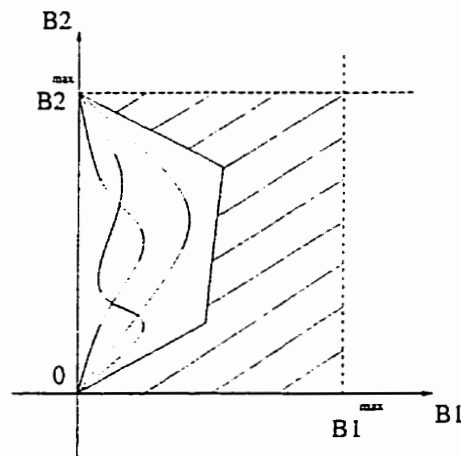


Figure 3.4 Restriction à une zone de probabilité dominante

complexes (figure 3.3) et le calcul de la probabilité de débordement d'un buffer est alors très délicat. Une des forces de la théorie des grandes déviations est de restreindre le choix des trajectoires à un sous-ensemble dont la probabilité est dominante pour de grands systèmes (figure 3.4).

Malgré la complexité des systèmes à deux files d'attente et plus, nous sommes parvenus à établir des bornes supérieures non seulement pour la probabilité de débordement des buffers, mais aussi pour les CLR. Comme le montrent les simulations numériques incluses dans la section 3.4.6, ces bornes sont très serrées et constituent donc très une bonne approximation. Par ailleurs, les bornes obtenues sont conservatives, c'est à dire qu'elles conduisent à une légère sur-estimation des probabilités de perte. Cette tendance est préférable à une sous-estimation des CLR car elle permet de mieux garantir les QS.

Nos simulations numériques ont été faites pour des sources On-Off déterministes qui sont considérées comme le pire cas d'une source dont on connaît le

débit crête, le débit moyen et la durée des rafales. Ces caractéristiques peuvent être obtenues à l'aide d'une estimation basée sur des mesures du trafic, ou simplement à travers un contrat entre le réseau et les sources dans lequel ces dernières annoncent leurs paramètres avant d'être connectées (c'est le cas des sources à débit variable VBR).

Rappelons que nos résultats théoriques sont valables pour des sources très générales et pas uniquement pour des sources On-Off. Par ailleurs, notre méthode ne nécessite pas de grande capacité de calcul et peut donc être appliquée en temps réel dans un commutateur (c'est à dire à l'échelle de temps d'inter-arrivée des appels).

3.4 Etude du système

Cette section porte sur l'étude quantitative du système de la figure 3.1 et l'établissement de résultats sur les probabilités de perte de cellules.

3.4.1 Notations

Nous présentons ci-dessous les notations qui seront utilisées dans la suite de ce chapitre.

On considère un système de files d'attente dans lequel un serveur unique est utilisé par deux files. La file I a priorité absolue sur la file II pour l'accès au serveur (sans préemption). Le temps t est à valeurs discrètes. La file I (resp. II) sert N^I (resp. N^{II}) sources stationnaires, indépendantes et identiquement

distribuées. Les sources de la file I sont également indépendantes de celles de la file II (mais pas forcément identiques à ces dernières).

Nous nous intéressons à de grands systèmes et nous introduisons un facteur de changement d'échelle $N \in \{1, 2, \dots\}$. On définit les constantes B^I , B^{II} , C et les entiers n^I , n^{II} de sorte que pour une valeur donnée de N , le système possède $N^I = Nn^I$ (resp. $N^{II} = Nn^{II}$) sources dans la file I (resp. II), des buffers de capacité NB^I et NB^{II} pour les files I et II et une capacité du serveur constante égale à NC .

Nous donnons les notations pour la file I et nous utiliserons des notations semblables pour la file II . Soit $\lambda_{t,i}^I$ le nombre de cellules offertes par la source $i \in \{1, \dots, Nn^I\}$ à l'instant $t \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. La quantité totale de travail offert à la file I par la source i durant l'intervalle de temps $] -T; 0]$ est :

$$X_{T,i}^I = \sum_{t=-T+1}^0 \lambda_{t,i}^I$$

Le travail offert à la file I par toutes les sources est donc :

$$X_T^{I,N} = \sum_{i=1}^{Nn^I} X_{T,i}^I$$

On note $\phi_T^{I,N}(\tau)$ la fonction génératrice de moments de la variable aléatoire $X_T^{I,N}$:

$$\phi_T^I(\tau) = E[e^{\tau X_{T,i}^I}].$$

λ^I est défini par $\lambda^I = E[X_{1,i}^I]$ et ne dépend pas de i car les sources d'une même file sont identiquement distribuées.

On pose les définitions suivantes pour tout $G > E(X_{T,i}^I) = \lambda^I T$:

◊ $\tau_T^I(G)$ est l'unique $\tau > 0$ solution de l'équation $\phi_T^{I'}(\tau)/\phi_T^I(\tau) = G$ (voir remarque (3.4.1))

$$\diamond J_T^I(G) = G\tau_T^I(G) - \ln(\phi_T^I(\tau_T^I(G)))$$

$$\diamond \sigma_T^{I^2}(G) = \phi_T^{I'}(\tau_T^I)/\phi_T^I(\tau_T^I) - G^2$$

Remarque 3.4.1 Soit $\phi(\tau)$ la fonction génératrice de moments d'une variable aléatoire X . Nous allons prouver l'unicité de la solution de l'équation $\phi'(\tau)/\phi(\tau) = G$. On pose $f(\tau) = \phi'(\tau)/\phi(\tau)$. On a $f'(\tau) = \phi''(\tau)/\phi(\tau) - [\phi'(\tau)/\phi(\tau)]^2 = E[X^2 e^{\tau X}]/E[e^{\tau X}] - [E[X e^{\tau X}]/E[e^{\tau X}]]^2$.

On désigne par $p(x)$ la densité de probabilité de X et par Y la variable aléatoire dont la densité de probabilité est $p(x)e^{\tau x}/\int p(x)e^{\tau x}dx$. On obtient alors $f'(\tau) = E[Y^2] - E^2[Y] = \text{Var}[Y] > 0$ (car X non constante $\Rightarrow Y$ non constante). Ce dernier résultat prouve l'unicité de la solution τ de $f(\tau) = G$.

On suppose enfin que le système n'est pas surchargé :

$$n^I \lambda^I + n^{II} \lambda^{II} < C \text{ où } \lambda^I = E[\lambda_{t,i}^I], \lambda^{II} = E[\lambda_{t,i}^{II}].$$

3.4.2 Résultats Préliminaires

Nous commençons par étudier le cas où le buffer II a une capacité infinie. Nous voulons estimer la probabilité qu'a le buffer II de dépasser le niveau de remplissage NB^{II} .

Pour un entier T donné, on désigne par $X_T^{II,N}$ la quantité de travail arrivant dans la file II pendant l'intervalle de temps $] - T; 0]$. On note E_T^N l'événement : $\{X_T^{I,N} + X_T^{II,N} > N(B^{II} + CT) \text{ et } X_T^{II,N} > NB^{II}\}$. Comme $X_T^{I,N}$ et $X_T^{II,N}$ sont des variables aléatoires indépendantes, on a :

$$Pr(E_T^N) = N \int_{v=0}^{+\infty} Pr(X_T^{I,N} > N(CT - v)) P^{X_T^{II,N}}(N(B^{II} + v)) dv \quad (3.4.1)$$

où $P^{X_T^{II,N}}(\cdot)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire $X_T^{II,N}$ et $W_T^{II,N}$ désigne le contenu du buffer II à l'instant T . On a alors le lemme suivant:

Lemme 3.4.1 *Si $W_0^{II,N} > NB^{II}$ alors il existe $T \in \{1, 2, 3, \dots\}$ tel que E_T^N soit vrai.*

Démonstration: Supposons que $W_0^{II,N} > NB^{II}$.

Soit $-T$ le premier instant avant $t = 0$ tel que les buffers I et II soient simultanément vides. Un tel instant existe car le système n'est pas surchargé. De plus $T \neq 0$ parce que nous avons supposé $W_0^{II,N} > NB^{II} > 0$. Comme à chaque instant pendant $] - T; 0]$, au moins un buffer n'est pas vide, on en déduit que le serveur travaille à pleine capacité : la quantité de travail effectuée par le serveur pendant $] - T; 0]$ est NCT . Le stockage total par les buffers I et II est inférieur au travail non traité par le serveur pendant $] - T; 0]$ et on a donc :

$$W_0^{I,N} + W_0^{II,N} \leq X_T^{I,N} + X_T^{II,N} - NCT$$

comme $W_0^{I,N} \geq 0$ et $W_0^{II,N} \geq NB^{II}$ on a :

$$X_T^{I,N} + X_T^{II,N} > N(B^{II} + CT)$$

Par ailleurs, comme le buffer II est vide à l'instant $-T$, $W_0^{II,N} \leq X_T^{II,N}$ et :

$$X_T^{II,N} > NB^{II}$$

On conclut alors en combinant les deux derniers résultats.

Le lemme suivant est une application du théorème de Bahadur-Rao [2]

Lemme 3.4.2 Soit $T \in \{1, 2, 3, \dots\}$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$:

Pour $v < (C - n^I \lambda^I)T$:

$$Pr \left(X_T^{I,N} > N(CT - v) \right) = \frac{e^{-Nn^I J_T^I}}{\tau_T^I \sqrt{2\pi \sigma_T^{I^2} N n^I}} \left(1 + O \left(\frac{1}{N} \right) \right) \quad (3.4.2)$$

Où J_T^I , τ_T^I et σ_T^I désignent $J_T^I(\frac{CT-v}{n^I})$, $\tau_T^I(\frac{CT-v}{n^I})$ et $\sigma_T^I(\frac{CT-v}{n^I})$.

Pour $v \in]-\infty; +\infty[$:

$$P^{X_T^{II,N}} \left(N(v + B^{II}) \right) = \frac{e^{-Nn^{II} J_T^{II}}}{\sqrt{2\pi \sigma_T^{II^2} N n^{II}}} \left(1 + O \left(\frac{1}{N} \right) \right) \quad (3.4.3)$$

Où J_T^{II} et σ_T^{II} désignent $J_T^{II}(\frac{v+B^{II}}{n^{II}})$ et $\sigma_T^{II}(\frac{v+B^{II}}{n^{II}})$.

Dans les deux équations $O(\frac{1}{N})$ est uniforme par rapport à v .

Remarque 3.4.2 Lorsque $X_T^{I,N}$ est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{..-2d, -d, 0, d, 2d..\}$ le résultat qui précède est encore valable à condition de remplacer τ_T^I au dénominateur par $(1 - e^{-d\tau_T^I})/d$.

Remarque 3.4.3 Pour $v > (C - n^I \lambda^I)T$, $E[X_T^{I,1}] > CT - v$ donc d'après le théorème de Bahadur-Rao on en déduit qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $Pr(X_T^{I,N} \leq N(CT - v)) = O(e^{-NK})$. On a par conséquent $Pr(X_T^{I,N} > N(CT - v)) = 1 + O(e^{-NK})$.

On peut alors définir le taux exponentiel $K_T^I(v)$ auquel $Pr(X_T^{I,N} > N(CT - v))$ décroît lorsque $N \rightarrow +\infty$ par : $K_T^I(v) = n^I J_T^I(\frac{CT-v}{n^I})$ pour $v < (C - n^I \lambda^I)T$ et $K_T^I(v) = 0$ autrement.

Le taux exponentiel auquel $Pr(X_T^{I,N} > N(CT - v)) \times P^{X_T^{II,N}}(N(B + v))$ décroît lorsque $N \rightarrow +\infty$ est alors : $J_T(v) = K_T^I(v) + n^{II} J_T^{II}(\frac{v+B^{II}}{n^{II}})$. Notons que $J_T(v)$ est une fonction convexe comme somme de fonctions convexes.

Lemme 3.4.3 Soit $\theta_N = \int_{-1}^1 a(v) e^{-Nb(v)} dv$ et $\beta_N = \int_0^1 a(v) e^{-Nb(v)} dv$

On fait les hypothèses suivantes sur a et b :

- $a(\cdot)$ est C^1 sur $[-1; 1]$, et $a(0) \neq 0$
- $b(\cdot)$ est C^3 sur $[-1; 1]$
- $b(v)$ atteint son minimum 0 pour $v = 0$ et $b(v) > 0$ ailleurs.

On a à présent deux cas :

Cas 1, si $\frac{\partial b}{\partial v}(0) = 0$ et $\frac{\partial^2 b}{\partial v^2}(0) \neq 0$ alors :

$$\theta_N = \int_{-1}^1 a(v) e^{-Nb(v)} dv = \sqrt{\frac{2\pi}{b''(0)}} a(0) \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \quad (3.4.4)$$

Cas 2, si $\frac{\partial b}{\partial v}(0) \neq 0$ alors :

$$\beta_N = \int_0^1 a(v) e^{-Nb(v)} dv = \frac{a(0)}{Nb'(0)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (3.4.5)$$

Démonstration : Cas 1 :

En utilisant les hypothèses qui précèdent, $b(v)$ peut s'écrire $b(v) = \alpha v^2(1 + \epsilon(v))$

Avec $\epsilon(v) = O(v)$ et $\alpha = \frac{b''(0)}{2} \neq 0$

Nous avons à présent :

$$\theta_N = \int_{-1}^1 a(v) e^{-N\alpha v^2(1+\epsilon(v))} dv$$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{N\alpha} v$:

$$\theta_N = \frac{1}{\sqrt{N\alpha}} \lambda_N$$

avec

$$\lambda_N = \int_{-\sqrt{N\alpha}}^{\sqrt{N\alpha}} a\left(\frac{u}{\sqrt{N\alpha}}\right) e^{-u^2(1+\epsilon(\frac{u}{\sqrt{N\alpha}}))} du$$

On en déduit alors:

$$\lambda_N = a(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) = a(0) \sqrt{\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

Ce qui conclut le cas 1.

La preuve du cas 2 repose sur le même principe que celle du cas 1 et nous l'omettrons donc.

Lemme 3.4.4 Soit $T \in \{1, 2, 3, \dots\}$. On suppose qu'il existe une unique valeur v_T^* de v pour laquelle :

$$J_T(v_T^*) = \min_{v \in [0; +\infty[} J_T(v) = \min_{v \in [0; +\infty[} K_T^I(v) + n^{II} J_T^{II} \left(\frac{v + B^{II}}{n^{II}} \right) > 0$$

On suppose également que $J_T(v)$ vérifie les hypothèses générales de $b(v)$ dans le lemme 3.4.3.

Si $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I})$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$:

$$Pr(E_T^N) = \frac{e^{-NJ_T^*}}{\tau_T^I \sqrt{2\pi(n^I \sigma_T^I + n^{II} \sigma_T^{II})} N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (3.4.6)$$

où J_T^* , τ_T^I , σ_T^I et σ_T^{II} désignent $J_T(v_T^*)$, $\tau_T^I(\frac{CT-v_T^*}{n^I})$, $\sigma_T^I(\frac{CT-v_T^*}{n^I})$ et $\sigma_T^{II}(\frac{v_T^*+B^{II}}{n^{II}})$.

Si $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) > \tau^I(\frac{CT}{n^I})$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$:

$$Pr(E_T^N) = \frac{e^{-NJ_T^*}}{2\pi \tau_T^I (\tau_T^{II} - \tau_T^I) N \sqrt{n^I \sigma_T^I n^{II} \sigma_T^{II}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (3.4.7)$$

où $J_T^* = J^T(0)$, $\tau_T^I = \tau_T^I(\frac{CT}{n^I})$, $\sigma_T^I(\frac{CT}{n^I})$, $\tau_T^{II} = \tau_T^{II}(\frac{B^{II}}{n^{II}})$ et $\sigma_T^{II}(\frac{B^{II}}{n^{II}})$.

Démonstration : Commençons par le cas $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I})$.

$$J'_T(v) = \tau^{II}(\frac{v+B^{II}}{n^{II}}) - \tau^I(\frac{CT-v}{n^I}).$$

Donc si $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I})$, $J'_T(0) < 0$ et comme $J_T(v)$ est convexe, on en déduit que $v_T^* > 0$. Par conséquent, $J'_T(v_T^*) = 0$ et on peut appliquer le cas 1 du Lemme 3.4.3. On conclut en utilisant le fait que $J''_T(v) = \frac{1}{n^I \sigma_T^I (\frac{CT-v}{n^I})} + \frac{1}{n^{II} \sigma_T^{II} (\frac{v+B^{II}}{n^{II}})}$.

Regardons à présent le cas $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) > \tau^I(\frac{CT}{n^I})$. On a $J'_T(0) > 0$ et donc $v_T^* = 0$. On peut appliquer le cas 2 du Lemme 3.4.3. On conclut en utilisant le fait que $J'_T(0) = \tau^{II}(\frac{B^{II}}{n^{II}}) - \tau^I(\frac{CT}{n^I})$.

3.4.3 Mémoire de stockage II infinie

Dans la proposition suivante, on suppose que la mémoire de stockage II a une capacité infinie.

Proposition 3.4.1 *Soit $T \in \{1, 2, 3, \dots\}$. On suppose les conditions du lemme 3.4.4 satisfaites. On suppose également que :*

- *Il existe un unique $T_0 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ tel que : $J_{T_0}^* = \min_{T \in \{1, 2, 3, \dots\}} J_T^* > 0$ où $J_T^* = J_T(v_T^*)$.*
- *$\liminf_{T \rightarrow +\infty} I_T(CT + B^{II})/\log(T) > 0$ où $I_T(v)$ est la fonction taux de la variable aléatoire $X_T^{I,1} + X_T^{II,1}$.*

On obtient alors:

Si $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I})$:

$$Pr(W_0^{II,N} > NB^{II}) \leq \frac{e^{-NJ_{T_0}^*}}{\tau_{T_0}^I \sqrt{2\pi(n^I \sigma_{T_0}^{I^2} + n^{II} \sigma_{T_0}^{II^2})} N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

Si $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) > \tau^I(\frac{CT}{n^I})$:

$$Pr(W_0^{II,N} > NB^{II}) \leq \frac{e^{-NJ_{T_0}^*}}{2\pi \tau_{T_0}^I (\tau_{T_0}^{II} - \tau_{T_0}^I) N \sqrt{n^I \sigma_{T_0}^{I^2} n^{II} \sigma_{T_0}^{II^2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

Remarque 3.4.4 *Les conditions ci-dessus ne sont pas très contraignantes et sont satisfaites par une grande variété de sources dont en particulier des sources possédant une corrélation à long terme (voir [17] pour une preuve).*

Démonstration : D'après le lemme 3.4.1 on a :

$$Pr(W_0^{II,N} > NB^{II}) \leq \sum_{T=1}^{+\infty} Pr(E_T^N).$$

De plus, par définition de E_T^N , $Pr(E_T^N) \leq Pr(X_T^{I,N} + X_T^{II,N} > N(B + CT))$. On applique alors la borne de Chernoff à $X_T^{I,1} + X_T^{II,1}$ et on obtient :

$Pr(X_T^{I,N} + X_T^{II,N} > N(B + CT)) \leq e^{-NI_T(B+CT)}$. D'autre part, comme T_0 est unique, il existe $\epsilon > 0$ tel que $J_{T_0}^* + 2\epsilon \leq J_T^*$ pour tout $T \neq T_0$. Donc, en utilisant le lemme 3.4.4 on obtient :

$$\frac{Pr(E_T)}{Pr(E_{T_0})} = O(e^{-N\epsilon})$$

L'hypothèse $\liminf_{T \rightarrow +\infty} I_T(CT + B^{II})/\log(T) > 0$ implique qu'il existe $T_1 > T_0$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall T \geq T_1$ on ait $I_T(CT + B^{II}) > \alpha \log(T) > I_{T_0}(CT_0 + B^{II})$. Donc pour tout $N > \frac{1}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \sum_{T=1}^{\infty} Pr(E_T^N) &\leq \sum_{T=1}^{T_1} Pr(E_T^N) + \sum_{T=T_1+1}^{\infty} Pr(E_T^N) \\ &\leq Pr(E_{T_0}^N)(1 + O(e^{-N\epsilon})) + \sum_{T=T_1+1}^{\infty} e^{-N\alpha \log T} \\ &\leq Pr(E_{T_0}^N)(1 + O(e^{-N\epsilon})) + \frac{e^{-(N\alpha-1)\log T_1}}{N\alpha - 1} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{e^{-(N\alpha-1)\log T_1}}{N\alpha-1} = O(Pr(E_{T_0}^N))$ on obtient :

$$Pr(W_0^{II,N} > NB^{II}) \leq Pr(E_{T_0}^N)(1 + O(e^{-N\epsilon})) \text{ ce qui permet de conclure.}$$

3.4.4 Mémoire II de capacité finie

On veut maintenant estimer la probabilité de perte de cellules dans la mémoire de stockage intermédiaire II en supposant que sa capacité est finie et égale à NB^{II} . Le contenu de la mémoire II à l'instant t sera alors noté $Y_t^{II,N}$.

$Y_t^{II,N}$ vérifie:

$$Y_t^{II,N} = \min[\max(0, Y_{t-1}^{II,N} + \lambda_t^{II,N} - C_t^{II,N}), NB^{II}]$$

où $C_t^{II,N}$ est la capacité du serveur non utilisée par la file I à l'instant t et donc disponible pour la file II .

Le taux de perte de cellules (CLR) dans la file II , qui, dans l'état stationnaire, est égal à la probabilité de perte de cellules, est donné par :

$$CLR^{II} = \frac{\mathbf{E} \left[\max \left(0, Y_{t-1}^{(II,N)} + \lambda_t^{(II,N)} - NB^{II} - C_t^{II,N} \right) \right]}{\mathbf{E} \lambda_t^{(II,N)}}$$

Remarque : Cette formule représente le rapport du nombre de paquets perdus sur le nombre de paquets qui arrivent dans la file II en moyenne par intervalle de temps.

Proposition 3.4.2 *Sous les hypothèses de la proposition 3.4.1 mais en considérant à présent un buffer II de capacité finie NB^{II} , on a :*

$$\text{Si } \tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I}) :$$

$$CLR^{II} \leq \frac{e^{-NJ_{T_0}^*}}{n^{II} \lambda^{II} \tau_{T_0}^I \tau_{T_0}^{II} \sqrt{2\pi(n^I \sigma_{T_0}^2 + n^{II} \sigma_{T_0}^{II2})} N^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (3.4.8)$$

$$\text{Si } \tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) > \tau^I(\frac{CT}{n^I}) :$$

$$CLR^{II} \leq \frac{e^{-NJ_{T_0}^*}}{2\pi n^{II} \lambda^{II} \tau_{T_0}^I \tau_{T_0}^{II} (\tau_{T_0}^{II} - \tau_{T_0}^I) N^2 \sqrt{n^I \sigma_{T_0}^2 n^{II} \sigma_{T_0}^{II2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (3.4.9)$$

Démonstration: Tout d'abord, pour une même réalisation de λ_t^N , on a quel que soit t :

$$Y_t^{(II,N)} \leq W_t^{(II,N)} \quad p.s.$$

où $W_t^{(II,N)}$ est le contenu d'un buffer infini. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\max \left(0, Y_{t-1}^{(II,N)} + \lambda_t^{(II,N)} - NB - C^{II,N} \right) \right] &\leq \mathbb{E} \left[\max \left(0, W_{t-1}^{(II,N)} + \lambda_t^{(II,N)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - NB - C^{II,N} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\max \left(0, W_t^{(II,N)} - NB \right) \right] \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\mathbb{E} \left[\max \left(0, W_t^{(II,N)} - NB \right) \right] = \int_{NB}^{\infty} \Pr \{ W_t^{(II,N)} > x \} dx$$

En utilisant les résultats de la proposition 3.4.1 on conclut par intégration par parties.

3.4.5 Généralisation à trois files

Nous étudions à présent un système de trois files qui partagent un serveur unique. La première file a la priorité maximale, suivie de la seconde et la troisième a la plus faible priorité. Nous montrons ici comment utiliser une analogie avec le cas de deux files pour calculer une borne supérieure sur la probabilité de perte de cellules dans la troisième file.

Nous généralisons naturellement les notations précédentes pour la troisième file. Soit F_T^N l'événement $\{X_T^{I,N} + X_T^{II,N} + X_T^{III,N} > N(B^{III} + CT) \text{ et } X_T^{III,N} > NB^{III}\}$

Lemme 3.4.5 *Si $W_0^{III,N} > NB^{III}$ alors il existe $T \in \{1, 2, 3, \dots\}$ tel que F_T^N soit vrai.*

Démonstration: En reprenant le même argument que dans le lemme 3.4.1, on sait que le premier instant $-T$ avant 0 tel que les trois mémoires soient simultanément vides satisfait :

$$X_T^{III,N} > NB^{III}$$

et

$$W_0^{I,N} + W_0^{II,N} + W_0^{III,N} \leq X_T^{I,N} + X_T^{II,N} + X_T^{III,N} - NCT$$

On conclut alors en remarquant que $W_0^{I,N} + W_0^{II,N} \geq 0$ et $W_0^{III,N} \geq NB^{III}$.

Le lemme précédent est formellement équivalent au lemme 3.4.1 lorsqu'on substitue $X_N^I + X_N^{II}$ à X_N^I et X_N^{III} à X_N^{II} . On peut donc mener les mêmes calculs que précédemment et la proposition 3.4.2 reste valide pour trois files si on y substitue la fonction taux de $X_1^I + X_1^{II}$ à la place de $n^I J_T^I(\frac{CT-v}{n^I})$.

3.4.6 Comparaison des formules théoriques aux simulations

Afin d'illustrer la précision des formules qui précèdent, nous donnons ici les résultats de nos applications numériques que nous comparons à des simulations.

3.4.6.1 Deux files

Les deux files reçoivent des sources On-Off déterministes à phases aléatoires distribuées uniformément. Les débits crêtes de ces sources exprimés en cellules par unité de temps sont $K^I = 10$, $K^{II} = 1$ et leurs probabilités d'être actives sont $P_{On}^I = .10$ et $P_{On}^{II} = .33$. La capacité du serveur pour le système élémentaire (i.e.

$N = 1$) est $C = 12$. On a aussi $n^I = 10$ et $n^{II} = 4$ et les capacités des mémoires sont $B^I = 3$ et $B^{II} = 8$. Les résultats sont donnés dans les deux tables suivantes, qui fournissent le logarithme en base 10 de CLRI et CLRII, obtenu par application numérique de nos formules théoriques et par simulations. Nos simulations ont été faites pour des valeurs de CLRI et CLRII supérieures à 10^{-5} car pour des valeurs plus faibles il devient difficile d'obtenir des simulations précises. Nos résultats montrent que la précision augmente avec N , conformément au reste en $O(1/N)$ de nos formules, ce qui n'est pas le cas en revanche de la borne de Chernoff pour la probabilité de débordement. Les résultats de simulations correspondent à un intervalle de confiance de 90%.

CLRI			
N	Simulation	Borne de Chernoff	Formule
50	(-3.4,-3.3)	-1.5	-3.2
70	(-4.3,-4.2)	-2.1	-4.0
90	(-4.9,-4.8)	-2.7	-4.7
110	(-5.6,-5.5)	-3.3	-5.5

CLRII			
N	Simulation	Borne de Chernoff	Formule
50	(-2.4,-2.3)	-1.2	-1.8
70	(-3.0,-2.9)	-1.7	-2.5
90	(-3.5,-3.4)	-2.2	-3.1
110	(-4.1,-4.0)	-2.7	-3.7

3.4.6.2 Trois files

Nous considérons ici un système de trois files et calculons la probabilité de perte de cellules CLRIII dans la file de plus faible priorité. Chaque file reçoit des sources On-Off déterministes à phases aléatoires dont les caractéristiques sont, en reprenant les notations de la section qui précède, $K^I = 8$, $K^{II} = 5$, $K^{III} = 12$, $P_{On}^I = .13$, $P_{On}^{II} = .20$ et $P_{On}^{III} = .10$. On a de plus $C = 11$, $n^I = 3$, $n^{II} = 5$, $n^{III} = 2$, $B^I = 12$, $B^{II} = 8$ et $B^{III} = 10$. Les résultats de simulations correspondent à un intervalle de confiance de 90%.

CLRIII			
N	Simulation	Borne de Chernoff	Formule
50	(-2.4,-2.3)	-1.2	-1.9
75	(-3.2,-2.9)	-1.8	-2.8
100	(-3.8,-3.6)	-2.4	-3.5
125	(-4.7,-4.2)	-3.0	-4.3

Remarque 3.4.5 *L'application numérique des formules théoriques fait intervenir d'une part le calcul de la fonction génératrice de moments, et d'autre part une dichotomie pour le calcul des fonctions taux J et de la variable τ qui leur est associée.*

CHAPITRE 4

Gestion de ressources dans les réseaux large bande

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux applications possibles des développements précédents à la gestion de ressources dans des réseaux à large bande de type ATM.

Nous commençons par définir la CAC ainsi que le domaine d'admission. Nous formulons ensuite nos définitions dans le cadre spécifique d'un système de files d'attente avec priorités. Nous démontrons dans ce cadre la propriété de convexité par coordonnées du domaine d'admission. Une méthode d'approximation basée sur la notion de configuration de perte la plus probable de Likhanov, Mazumdar et Thériberge [16] est alors présentée. Enfin, nous proposons différentes options pour réaliser la CAC, que nous illustrons par des exemples numériques.

4.2 Définitions

Il existe un compromis entre l'utilisation intense des ressources du réseau, qui permet de maximiser les revenus, et le respect des contraintes nécessaires pour respecter les niveaux de QS annoncés. Ainsi, lorsqu'un nouvel appel se présente au serveur (qui est un port de sortie d'un commutateur, voir figure 3.1), ce dernier doit décider si il peut ou non l'accepter. Le mécanisme qui permet de prendre

cette décision s'appelle la contrôle d'admission de connexions CAC. Plus précisément, un nouvel appel sera accepté si les ressources sont suffisantes pour garantir le niveau de QS demandé par cet appel sans toutefois affecter le niveau de QS négocié avec les appels acceptés précédemment. Précisons par ailleurs que le mécanisme que nous décrivons ici est interne à un commutateur : la CAC que nous étudions est dite locale. Il faut également un procédé qui permette d'intégrer les informations obtenues à chaque noeud d'un chemin allant de l'origine à la destination d'un appel; on parle dans ce dernier cas de CAC globale.

On appelle **domaine d'admission** l'ensemble des configurations en nombre d'appels de différents types pour lesquelles tous les critères de qualité de service sont respectés. Le mécanisme de CAC consiste idéalement à vérifier que le fait d'accepter un nouvel appel maintient la configuration du système dans le domaine d'admission. Cependant, le domaine d'admission est en général trop complexe pour être calculé exactement (et rapidement) et on a recours à des approximations.

Dans le modèle développé au chapitre 3, les ressources sont mesurées en fonction de la capacité du serveur et les dimensions des buffers, le revenu provient de la maximisation du nombre des sources et les contraintes de QS sont des bornes supérieures sur les CLR.

Nous allons nous limiter au cas de deux files d'attente pour simplifier nos notations mais les cas de plus de deux files peuvent être traités de la même façon. On définit deux critères de qualité de service : le CLR pour chaque file. On désigne par ϵ^I et ϵ^{II} les valeurs maximales du CLR pour les files I et II

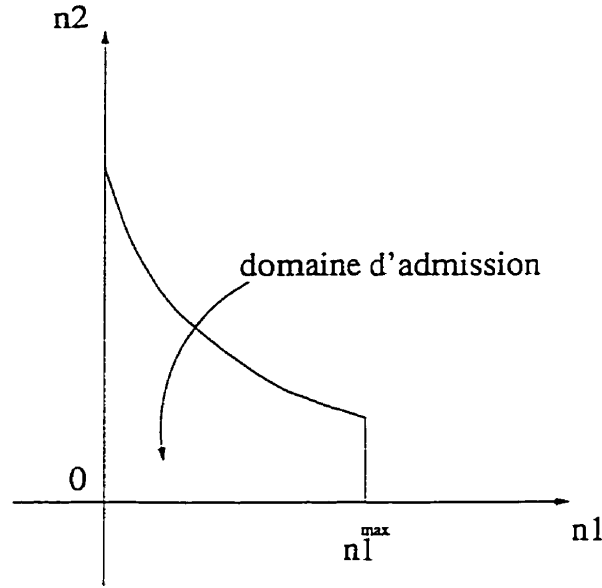


Figure 4.1 Domaine d'admission

respectivement. Pour les réseaux ATM, des valeurs typiques de ϵ^I et ϵ^{II} sont de l'ordre de 10^{-9} . Notons (n^I, n^{II}) une configuration pour laquelle Nn^I sources sont actives dans la file I et Nn^{II} dans la file II . Dans cette configuration, la probabilité de perte de cellules telle que calculée par les formules établies précédemment est notée $\Pi^I(Nn^I, Nn^{II})$ pour la file I et $\Pi^{II}(Nn^I, Nn^{II})$ pour la file II . Le domaine d'admission (voir figure 4.1) du système nominal est défini par :

$$D_\epsilon = \{(n^I, n^{II}) \mid (\Pi^I(Nn^I, Nn^{II}) < \epsilon^I) \cap (\Pi^{II}(Nn^I, Nn^{II}) < \epsilon^{II})\}$$

avec $\epsilon = (\epsilon^I, \epsilon^{II})$

Définition : Soit $\mathfrak{R}$ une région dans le quart de plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\mathfrak{R}$ est dite convexe par coordonnées si la propriété suivante est satisfaite :

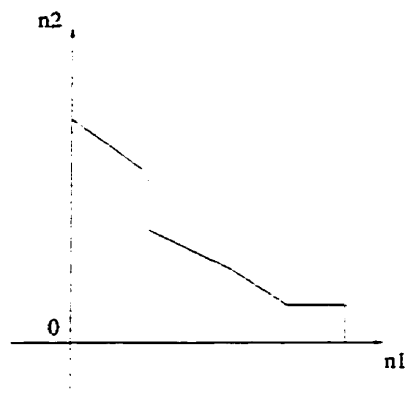


Figure 4.2 Une région convexe par coordonnées

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R} \begin{cases} x > 0 \Rightarrow (x - 1, y) \in \mathcal{R} \\ y > 0 \Rightarrow (x, y - 1) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

La propriété de convexité par coordonnées est très utile pour le calcul de distributions de probabilités comme nous le verrons plus loin.

Notons au passage qu'une région convexe par coordonnées n'est pas nécessairement convexe et réciproquement. Ainsi, la figure 4.2 montre une région convexe par coordonnées mais non convexe tandis que la figure 4.3 illustre la réciproque (car le point A de la figure 4.3 ne satisfait pas les conditions de convexité par coordonnées).

Nous allons montrer que le domaine d'admission est convexe par coordonnées pour N grand. Cela signifie qu'il possède la propriété naturelle suivante : lorsqu'un appel se termine, le système reste dans le domaine d'acceptation. En

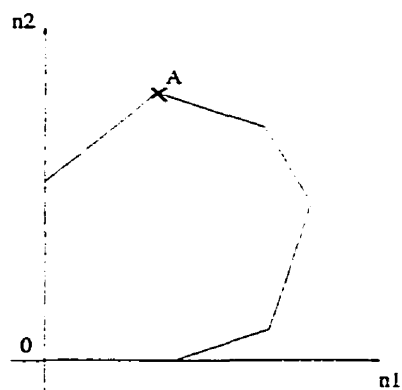


Figure 4.3 Une région convexe mais non convexe par coordonnées

d'autres termes, le fait de diminuer le nombre d'appels d'un type donné n'augmente pas les probabilités de pertes de cellules. Avant de fournir cette démonstration, quelques simplifications et résultats préliminaires sont donnés dans les deux sections suivantes.

4.3 Simplifications

Dans toute la suite, et ce afin de simplifier les calculs, la quantité $CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})$ sera approchée par la borne supérieure obtenue par l'équation (3.4.9) pour $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) < \tau^I(\frac{CT}{n^I})$:

$$CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II}) = \frac{e^{-NJ_{T_0}^*}}{n^{II}\lambda^{II}\tau_{T_0}^I\tau_{T_0}^{II}\sqrt{2\pi(n^I\sigma_{T_0}^2 + n^{II}\sigma_{T_0}^{II2})}N^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

Cette borne supérieure est toujours valable, bien que pour $\tau^{II}(\frac{B}{n^{II}}) > \tau^I(\frac{CT}{n^I})$ nous ayons établi une borne plus précise. De plus, cette approximation est raisonnable car les simulations nous ont confortés dans l'idée que la borne est très précise lorsque N est grand.

L'hypothèse qui précède va nous permettre de simplifier les notations et d'alléger les calculs qui vont suivre. Nous allons exprimer la formule précédente en termes des caractéristiques de la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X_T &= X_T^{I,1} + X_T^{II,1} \\ &= \sum_{i=1}^{n^I} X_{T,i}^I + \sum_{j=1}^{n^{II}} X_{T,j}^{II} \end{aligned}$$

où $X_T^{I,1}$ et $X_T^{II,1}$ sont les arrivées dans les files I et II pendant l'intervalle $[0; T]$.

Notons ϕ_T la fonction génératrice de moments de X_T . On définit $\tau_T(G)$ et $\sigma_T(G)$ par :

$$\frac{\phi_T'(\tau_T)}{\phi_T(\tau_T)} = G \tag{4.3.1}$$

et

$$\sigma_T^2(G) = \frac{\phi_T''(\tau_T)}{\phi_T(\tau_T)} - G^2 \tag{4.3.2}$$

$J_T(G)$ est donnée par

$$J_T(G) = \tau_T G - \ln \phi_T(\tau_T) \quad (4.3.3)$$

L'expression de CLR^{II} s'écrit à présent:

$$CLR^{II} = \frac{e^{-NJ_{T_0}(G)}}{n^{II} \lambda^{II} \tau_{T_0}^2 \sqrt{2\pi \sigma_{T_0}^2 N^3}}. \quad (4.3.4)$$

4.4 Résultats préliminaires

Nous allons établir dans cette section quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Etant donné que $(X_{T,i}^I)_i$ et $(X_{T,j}^{II})_j$ sont deux familles de variables i.i.d. on a :

$$\phi_T(\tau_T) = \prod_{k=I,II} (\phi_T^k(\tau_T))^{n^k}$$

La caractérisation 4.3.1 de τ_T peut donc s'écrire :

$$\sum_{k=I,II} n^k \frac{\phi_T^{k'}(\tau_T)}{\phi_T^k(\tau_T)} = G \quad (4.4.5)$$

4.4.0.3 Calcul de $\partial \tau_T / \partial n^I$

Dérivons les deux membres de (4.4.5) par rapport à n^I . On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=I,II} \left[n^k \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} \frac{\partial}{\partial \tau_T} \left(\frac{\phi_T^{k'}(\tau_T)}{\phi_T^k(\tau_T)} \right) \right] + \frac{\phi_T^{I'}(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} \frac{\partial}{\partial \tau_T} \sum_{k=I,II} n^k \frac{\phi_T^{k'}(\tau_T)}{\phi_T^k(\tau_T)} &= - \frac{\phi_T^{I'}(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} \\ \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} \frac{\partial}{\partial \tau_T} \frac{\phi_T^I(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} &= - \frac{\phi_T^{I'}(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} \\ \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} \left(\frac{\phi_T^I(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} - \left(\frac{\phi_T^I(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} \right)^2 \right) &= - \frac{\phi_T^{I'}(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} = -\frac{1}{\sigma_T^2} \frac{\phi_T^{II'}(\tau_T)}{\phi_T^I(\tau_T)} \quad (4.4.6)$$

4.4.0.4 Calcul de $\partial J_T(G)/\partial n^I$

Dérivons les deux membres de 4.3.3 par rapport à n^I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_T(G)}{\partial n^I} &= -\ln \phi_T^I(\tau) + G \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} - \sum_{k=I,II} n^k \frac{\partial \ln \phi_T^k(\tau_T)}{\partial n^I} \\ &= -\ln \phi_T^I(\tau_T) + \frac{\partial \tau_T}{\partial n^I} \left(G - \sum_{k=I,II} n^k \frac{\phi_T^{k'}(\tau_T)}{\phi_T^k(\tau_T)} \right) \\ \frac{\partial J_T(G)}{\partial n^I} &= -\ln \phi_T^I(\tau_T) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

où la dernière étape provient du résultat 4.4.5.

4.5 Convexité par coordonnées du domaine d'admission

Proposition : Quel que soit le niveau de QS donné ϵ , D_ϵ est convexe par coordonnées lorsque le système est grand (i.e. pour $N \rightarrow +\infty$).

Démonstration : Notre démonstration est une généralisation au cas de deux files des résultats de Likhanov, Mazumdar et Théberge [16]. Commençons par remarquer que l'intersection de deux régions convexes par coordonnées est elle-même convexe par coordonnées. Or D_ϵ est défini comme l'intersection de deux domaines qui correspondent aux conditions $P^{N,I}(n^I, n^{II}) < \epsilon^I$ et $P^{N,II}(n^I, n^{II}) < \epsilon^{II}$. Il suffit donc de prouver que chacune de ces conditions définit un domaine convexe par coordonnées.

Nous allons prouver ce résultat pour la condition $P^{N,II}(n^I, n^{II}) < \epsilon^{II}$, la preuve pour l'autre condition étant similaire. Il nous suffit de prouver que pour $n^I > 0$:

$$CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II}) > CLR^{II}(Nn^I - 1, Nn^{II})$$

(et de même pour la deuxième coordonnée).

De plus, lorsque $N \rightarrow +\infty$, la "perturbation" d'une unité dans $Nn^I - 1$ est infiniment petite par rapport à Nn^I et on peut calculer la dérivée partielle de $CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})$ par rapport à Nn^I . On est donc ramené à prouver que, pour $N \rightarrow +\infty$: $\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II}) / \partial Nn^I > 0$

Reprenons la formule 4.3.4, en négligeant le terme $O(\frac{1}{N})$ on obtient :

$$\frac{\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})}{\partial Nn^I} = CLR^{II} \left[-\frac{\partial J_{T_0}(G)}{\partial n^I} - \frac{1}{NX} \frac{\partial X}{\partial n^I} \right]$$

où $G = CT_0 + B^{II}$ et X représente le dénominateur dans l'équation (4.3.4) :

$$X = n^{II} \lambda^{II} \tau_{T_0}^2 \sqrt{2\pi \sigma_{T_0}^2 N^3}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{NX} \frac{\partial X}{\partial n^I} &= \frac{2}{N\tau_{T_0}} \frac{\partial \tau_{T_0}}{\partial n^I} + \frac{1}{N\sigma_{T_0}} \frac{\partial \sigma_{T_0}}{\partial n^I} \\ &= -\frac{2}{N\tau_{T_0}\sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}'(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^I(\tau_{T_0})} + \frac{1}{N\sigma_{T_0}} \frac{\partial \sigma_{T_0}}{\partial n^I} \end{aligned}$$

La dernière étape du calcul qui précède est une application de la relation 4.4.6. En utilisant également la relation 4.4.7 on obtient finalement :

$$\frac{\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})}{\partial Nn^I} = CLR^{II} \left[\ln \phi_T^I(\tau_T) + \frac{2}{N\tau_{T_0}\sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}'(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^I(\tau_{T_0})} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right].$$

Comme $\tau_{T_0} > 0$, $\phi_{T_0}^I(\tau) = E(e^{\tau X_{T_0}}) > 1$ et $\ln \phi_T^I(\tau_T) > 0$. Le deuxième terme dans la somme qui précède est lui aussi positif, et le troisième négatif mais négligeable par rapport aux deux autres lorsque $N \rightarrow +\infty$. On en conclut que les termes positifs dominent et que :

$$\frac{\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})}{\partial Nn^I} > 0.$$

Le calcul de $\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})/\partial Nn^{II}$ est identique au précédent à une unique différence près : le terme supplémentaire $\frac{1}{Nn^{II}}$ apparaît dans le développement de $\frac{1}{NX} \frac{\partial X}{\partial n^{II}}$, mais comme ce terme est lui-même de l'ordre de $O(\frac{1}{N})$, le résultat final reste inchangé : $\partial CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II})/\partial Nn^{II} > 0$.

4.6 Configuration de perte la plus probable

Nous allons montrer dans cette section comment calculer la configuration de perte dans laquelle le système se trouve le plus souvent lorsqu'il y a débordement des buffers. La connaissance de cette configuration est utile car elle permet de localiser la partie de la frontière du domaine d'acceptation qui doit être calculée avec le plus de précision. En se limitant au calcul du CLR dans le voisinage de cette partie, l'objectif de notre démarche est de permettre d'effectuer la CAC en temps réel.

Dans la partie qui précède, on a considéré le nombre de connexions de chaque type comme constant. Nous allons à présent tenir compte du comportement des sources au niveau appel. On suppose que les connexions de type $k \in \{I, II\}$ arrivent suivant un processus de Poisson de taux $N\gamma^k$ et ont une durée exponentielle de moyenne 1. Les appels sont acceptés si la nouvelle configuration (n^I, n^{II}) appartient à D_ϵ . Nous avons par ailleurs prouvé que D_ϵ est convexe par coordonnées. On peut alors affirmer (voir [12]) que la distribution de probabilité de (n^I, n^{II}) lorsque le système atteint son état stationnaire peut se mettre sous forme factorisée. Plus précisément, on a :

$$P(n^I, n^{II}) = \frac{1}{G} \prod_{k=I, II} \frac{(N\gamma^k)^{n^k}}{n^k!} \quad (4.6.8)$$

où G est une constante de normalisation donnée par :

$$G = \sum_{(n^I, n^{II}) \in D_\epsilon} \prod_{k=I, II} \frac{(N\gamma^k)^{n^k}}{n^k!}$$

Soit à présent ∂D_ϵ la frontière de D_ϵ . ∂D_ϵ est l'ensemble des configurations (n^I, n^{II}) pour lesquelles une au moins des contraintes sur CLR^I et CLR^{II} est

atteinte.

Définition : On appelle configuration de perte la plus probable la configuration :

$$(n^{I^*}, n^{II^*}) = \arg \max_{(n^I, n^{II}) \in \partial D_\epsilon} P(n^I, n^{II})$$

Nous nous limiterons au cas où la configuration la plus probable appartient à la frontière définie par $CLR^{II} < \epsilon^{II}$ (le cas de la frontière $CLR^I = \epsilon^I$ étant trivial). (n^{I^*}, n^{II^*}) est alors solution du problème d'optimisation avec contrainte non linéaire :

$$\max_{\Pi^{II}(Nn^I, Nn^{II}) = \epsilon^{II}} P(Nn^I, Nn^{II}) \quad (4.6.9)$$

Etant donnée la grande dimension du système, nous allons considérer une variation d'une unité comme un infiniment petit, et approcher ce problème d'optimisation à valeurs entières par son équivalent à valeurs réelles (qui est plus simple à résoudre).

Multiplions $P(Nn^I, Nn^{II})$ par la constante $\prod_{k=I,II} e^{-N\gamma^k} G$, ce qui ne change pas le point où le maximum est atteint. De plus, nous allons utiliser le développement de Stirling : $n! \approx \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{e^{-n+n \ln n}}{\sqrt{2\pi n}}$.

La quantité à optimiser s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \prod_{k=I,II} \frac{e^{-N\gamma^k} (N\gamma^k)^{Nn^k}}{(Nn^k)!} &\approx \prod_{k=I,II} \frac{e^{-N\gamma^k + Nn^k \ln(N\gamma^k) + Nn^k - Nn^k \ln(Nn^k)}}{\sqrt{2\pi Nn^k}} \\ &= \prod_{k=I,II} \frac{e^{-N\gamma^k \left[1 + \frac{n^k}{\gamma^k} \ln \frac{n^k}{\gamma^k} - \frac{n^k}{\gamma^k} \right]}}{\sqrt{2\pi Nn^k}} \\ &= \prod_{k=I,II} \frac{e^{-N\gamma^k f(\beta^k)}}{\sqrt{2\pi Nn^k}} \end{aligned}$$

avec $\beta^k = \frac{n^k}{\gamma^k}$ et $f(x) = x \ln x - x + 1$.

Le problème à résoudre devient :

$$\max_{\Pi^{II}(Nn^I, Nn^{II}) = \epsilon^{II}} \prod_{k=I, II} \frac{e^{-N\gamma^k f(\beta^k)}}{\sqrt{2\pi Nn^k}} \quad (4.6.10)$$

On introduit le multiplicateur de Lagrange y pour se ramener au problème de minimisation sans contrainte suivant :

$$\min_{\beta} \sum_{k=I, II} N\gamma^k f(\beta^k) - y [\ln CLR^{II}(N\gamma\beta) - \ln \epsilon^{II}] + \sum_{k=I, II} \frac{1}{2} \ln(2\pi N\gamma^k \beta^k) \quad (4.6.11)$$

où $\ln CLR^{II}(N\gamma\beta) = -NJ_{T_0} - \frac{1}{2} \ln(2\pi N^3) - 2 \ln(\tau_{T_0} \sqrt{\sigma_{T_0}}) - \ln n^{II} \lambda^{II}$

En négligeant les termes qui ne dépendent pas de (n^I, n^{II}) , il nous suffit de savoir minimiser la fonction :

$$F(Nn^I, Nn^{II}, y) = \sum_{k=I, II} N\gamma^k f(\beta^k) + \frac{1}{2} \ln(N\gamma^k \beta^k) - y [\ln CLR^{II}(N\gamma\beta) - \ln \epsilon^{II}]$$

Les conditions du premier ordre sur (n^I, n^{II}) sont alors (voir par exemple [18]) :

$$\gamma^k \frac{\partial}{\partial n^k} f(\beta^k) + \frac{1}{2Nn^k} - y \left. \frac{\partial \ln CLR^{II}(N\gamma\beta)}{\partial Nn^k} \right|_{n=n^*} = 0 \quad \forall k \in \{I, II\} \quad (4.6.12)$$

Remarque : Ces conditions expriment simplement la colinéarité des gradients de la fonction à optimiser et de la fonction contrainte.

Calculons les différents termes des équations (4.6.12) pour $k = I, II$.

$$\gamma^k \partial f(\beta^k) / \partial n^k = \gamma^k \partial \beta^k / \partial n^k f'(\beta^k) = \ln(n^k / \beta^k) \text{ car } f'(x) = \ln x.$$

D'autre part :

$$\frac{\partial \ln CLR^{II}(N\gamma\beta)}{\partial Nn^k} = \ln \phi_{T_0}^k(\tau_{T_0}) + \frac{2}{N\tau_{T_0} \sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}^{k'}(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0})}$$

Les conditions 4.6.12 deviennent $\forall k = I, II$:

$$\begin{aligned} \ln \frac{n^k}{\beta^k} + \frac{1}{2Nn^k} &= y \ln \phi_{T_0}^k(\tau_{T_0}) - \frac{2y}{N\tau_{T_0}\sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}^{k'}(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0})} \\ Nn^k e^{\frac{1}{2Nn^k}} &= N\gamma^k \left(\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0}) \right)^y e^{\frac{2y}{N\tau_{T_0}\sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}^{k'}(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0})}} \\ Nn^k &= N\gamma^k \left(\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0}) \right)^y e^{\frac{2y}{N\tau_{T_0}\sigma_{T_0}^2} \frac{\phi_{T_0}^{k'}(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0})}} \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Remarque : On a utilisé le fait que pour N grand, $e^{\frac{1}{2Nn^k}} \approx 1$.

Aux deux conditions 4.6.13 s'ajoutent les conditions suivantes sur τ_{T_0} et y respectivement :

$$\sum_{k=I,II} n^k \frac{\phi_{T_0}^{k'}(\tau_{T_0})}{\phi_{T_0}^k(\tau_{T_0})} = CT_0 + B \quad (4.6.14)$$

et

$$CLR^{II}(Nn^I, Nn^{II}) = \epsilon^{II} \quad (4.6.15)$$

Nous avons ainsi établi un système de quatre équations (4.6.13 pour $k = I$ et $k = II$, 4.6.14 et 4.6.15) à quatre inconnues $(n^I, n^{II}, \tau_{T_0}, y)$.

Remarque : Les conditions du premier ordre nous ont ainsi permis d'obtenir les équations qui caractérisent le point associé à la configuration de perte la plus probable.

Remarque : En toute rigueur il faudrait également montrer que le Hessien H associé au problème est défini positif et donc que les conditions du premier ordre correspondent bien à un minimum.

4.7 Réalisation de la CAC

Nous proposons dans cette partie différents algorithmes de CAC. Ces algorithmes utilisent les estimations du CLR développées au chapitre 3. Nous décrivons la méthode générale d'approximation linéaire des frontières du domaine d'admission que nous adoptons pour la CAC. Nous présentons ensuite plusieurs approches pour réaliser ces approximations en pratique.

4.7.1 Cadre général

Reprenons les hypothèses de la section 4.2. La frontière du domaine d'admission est constituée de deux courbes F^I et F^{II} associées respectivement aux contraintes sur CLR^I et CLR^{II} . La courbe F^I est très simple puisqu'il s'agit d'une droite. En revanche F^{II} est complexe et il est nécessaire de lui associer une approximation pour que les calculs de CAC puissent être faits en temps réel. Soit $F^{II'}$ une approximation linéaire de F^{II} dont l'équation est donnée par $C^I * n^I + C^{II} * n^{II} = C$. Notons que C^I et C^{II} peuvent être interprétées comme les largeurs de bande équivalentes (equivalent bandwidth) associées aux sources I et II pour la contrainte sur CLR^{II} . L'équation de F^I peut s'écrire $n^I = n_{max}^I$ où n_{max}^I est le nombre maximal de connexions de type I satisfaisant la contrainte sur CLR^I .

Soit à un instant donné (n^I, n^{II}) la configuration du système. Nous définissons la procédure de CAC par :

- Un nouvel appel de type I est accepté si :

$$n^I + 1 \leq n_{max}^I \text{ et } C^I * (n^I + 1) + C^{II} * n^{II} \leq C$$

• Un nouvel appel de type II est accepté si :

$$C^I * n^I + C^{II} * (n^{II} + 1) \leq C.$$

4.7.2 Les différentes approches

Nous proposons deux types de méthodes pour obtenir une approximation linéaire de la frontière F^{II} : par tangente ou par interpolation entre plusieurs points.

Une première méthode consiste à tracer la tangente à F^{II} au point correspondant à la configuration de perte la plus probable. Cette méthode a pour avantage de fournir une approximation précise de F^{II} dans la zone de la région d'admission qui est la plus souvent occupée. La figure 4.4 illustre la région ainsi obtenue.

On peut simplifier davantage cette méthode en traçant la tangente à F^{II} en un point arbitraire. On évite ainsi d'avoir à déterminer la configuration de perte la plus probable avec en contrepartie une diminution de précision qui est cependant faible lorsque F^{II} est quasi-linéaire.

Poussant encore plus loin la simplification, on peut envisager des méthodes d'interpolation linéaire. Plusieurs points sont calculés sur F^{II} et on adopte une approximation linéaire par morceaux ou simplement linéaire. Cette méthode est particulièrement attrayante parce qu'elle peut être réalisée avec peu de calculs et

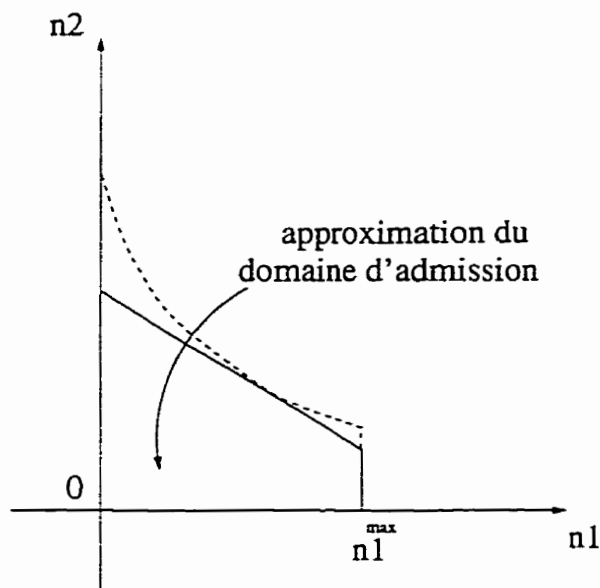


Figure 4.4 Simplification du domaine d'admission par une tangente

donc rapidement, ce qui est une des contraintes essentielles de la CAC. Ce type d'approximation a été utilisé avec succès par [19] dans le cas d'un mélange de trafic pour une seule file. Un autre avantage de cette méthode est sa robustesse. En effet, une erreur sur le calcul d'un des points n'est pas amplifiée lors du tracé du domaine d'admission alors que c'est le cas d'une erreur dans le calcul de la pente pour les méthodes par tangentes.

Le choix des points à utiliser pour l'approximation linéaire, basé sur les propriétés précédentes de simplicité et de robustesse des calculs, est assez naturel. On peut par exemple calculer les points A , B et D tels qu'indiqués sur la figure 4.5. Ce choix est également suggéré par Elwalid et Mitra dans [7]. Remarquons par ailleurs qu'il n'est pas possible d'utiliser le point C sur l'axe $n^{II} = 0$ dans l'approximation de F^{II} car CLR^{II} n'est pas défini pour $n^{II} = 0$. Une méthode visant à utiliser le point C devrait se placer un peu avant, pour n^{II} faible mais

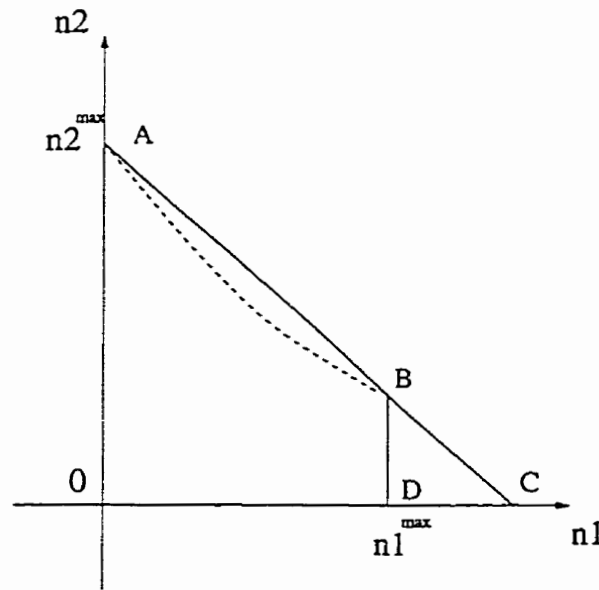


Figure 4.5 Interpolation linéaire pour le domaine d'admission

non nul.

Afin d'évaluer l'efficacité des méthodes qui précèdent, nous présentons ci-dessous quelques résultats numériques.

La figure 4.6 représente les domaines d'admission obtenus par simulation pour un système de sources On-Off déterministes avec différentes contraintes sur CLR^{II} . Les sources dans ce système sont les mêmes pour la file I et la file II . Le débit crête des sources est $K = 10$, la probabilité d'être active est $P_{on} = 0.17$, la capacité du serveur est $C = 85$ et les capacités des buffers sont $B^I = B^{II} = 100$. On constate que pour cet exemple F^{II} est quasi-linéaire.

Traçons à présent F^{II} à partir d'applications numériques des formules théoriques du chapitre 2 pour CLR^{II} . La figure 4.7 représente F^{II} pour différentes valeurs de B^{II} et la contrainte sur CLR^I n'est pas représentée. Les sources ont

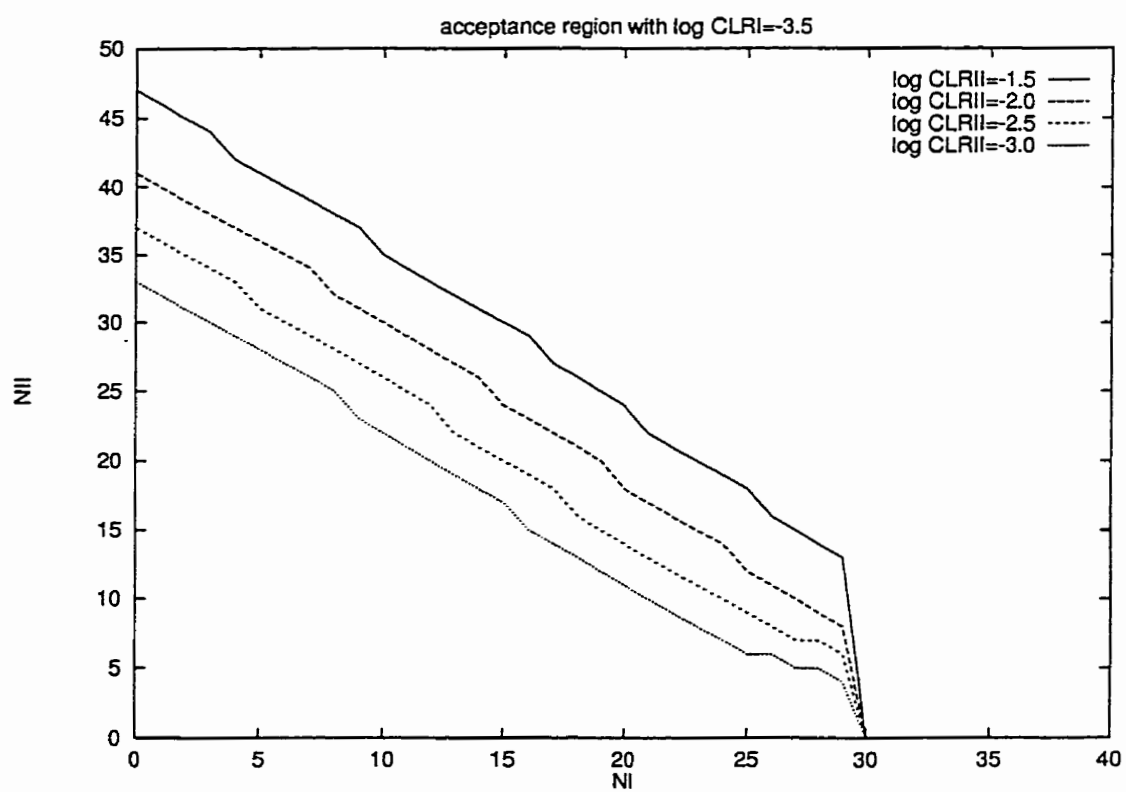


Figure 4.6 Simulation du domaine d'admission

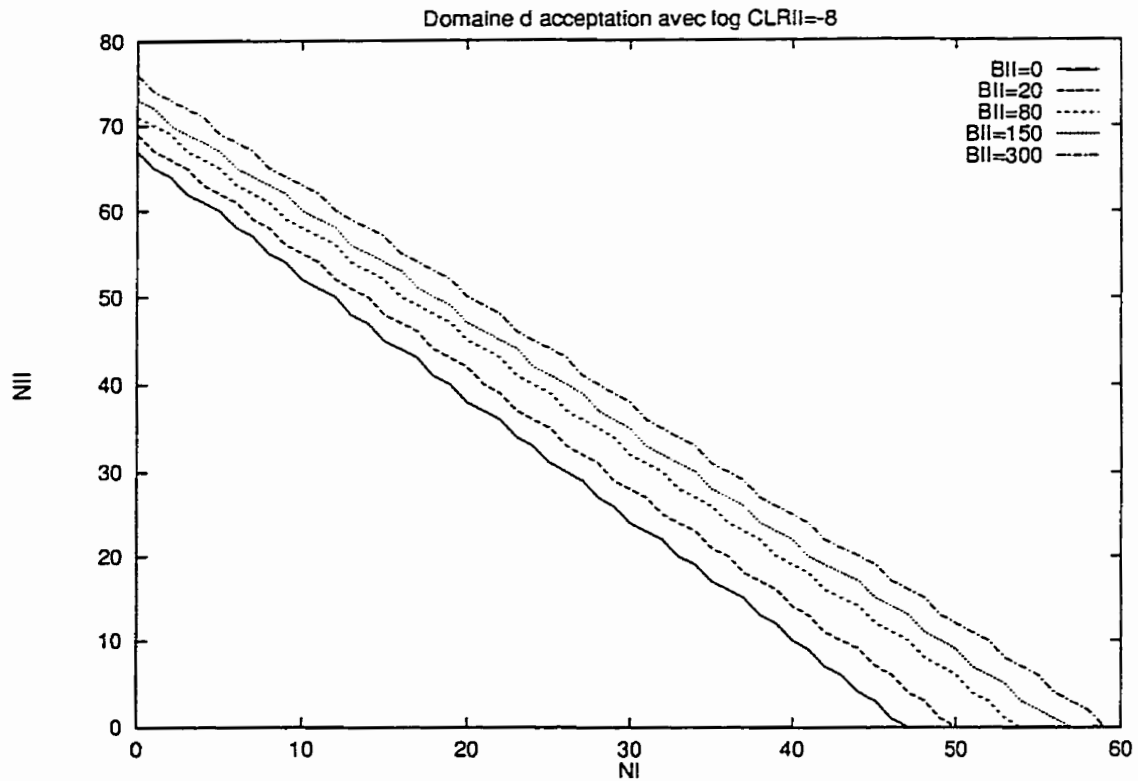


Figure 4.7 Calcul de F^{II} à partir de nos formules théoriques pour CLR^{II}

les caractéristiques suivantes : probabilité d'être active $P_{on}^I = 0.17$, $P_{on}^{II} = 0.40$, débit crête $K^I = 30$, $K^{II} = 10$, période $T^I = T^{II} = 60$. Les buffers ont pour capacité $B^I = 30$ et $B^{II} = 40$; le serveur a pour capacité $C = 150$, la contrainte sur CLR^{II} est $CLR^{II} < 10^{-8}$ et le système est multiplié par un facteur d'homothétie $N = 100$ (c'est à dire que la capacité des buffers, du serveur, ainsi que le nombre de sources sont multipliés par $N = 100$). Là encore on constate que F^{II} est presque linéaire. Cette observation est en fait générale pour toutes les applications numériques que nous avons effectuées. Les approximations linéaires de F^{II} qui ont été suggérées dans cette partie semblent donc légitimes.

Notons enfin qu'il faut tenir compte de la complexité des calculs lors de

l'implémentation de nos formules dans un système réel. La première étape est l'évaluation des fonctions génératrices de moments. Sa complexité dépend beaucoup de la nature des sources, mais pas de la taille du système (N). On peut par ailleurs envisager de calculer ces fonctions à l'avance et de les stocker dans des tables de la mémoire interne du commutateur. Le calcul des fonctions taux nécessite une optimisation par rapport à un paramètre, mais la fonction à optimiser étant convexe, on peut utiliser une méthode de dichotomie, ce qui est très rapide. La minimisation de la fonction taux par rapport au paramètre T est plus difficile à simplifier et peut augmenter sensiblement le temps de calcul. Dans le cas de sources périodiques on peut utiliser le fait que T est majoré par la période.

CHAPITRE 5

Conclusions et recherches futures

Nous avons présenté à travers ce mémoire une méthode de calcul des probabilités de perte de cellules (Cell Loss Ratio ou CLR en anglais) pour un système de files d'attente avec priorité, ainsi qu'une application de ces calculs au contrôle d'admission de connexions (CAC) dans les réseaux ATM.

Notre étude a permis d'obtenir une expression qui approche avec une grande précision la valeur du CLR dans des files ayant différents niveaux de priorité. Un tel système de priorités permet de mettre en place différents services en tenant compte de leurs contraintes spécifiques en terme de délai et de perte d'information.

Nous avons ensuite montré comment une connaissance du processus d'arrivée des appels peut être prise en compte dans de grands systèmes à l'aide du concept de la configuration de perte la plus probable. Enfin, nous avons proposé différentes méthodes pour réaliser la CAC en utilisant les formules développées précédemment.

La précision des estimations du CLR obtenues ainsi que les propriétés de régularité de la frontière du domaine d'admission nous permettent d'avoir confiance en l'efficacité des procédures de CAC présentées. Cependant, un sujet de recherche future intéressant pourrait être la comparaison de l'efficacité numérique de notre approche avec celle de Elwalid et Mitra [7].

Il serait également intéressant d'étudier la généralisation possible de notre travail à d'autres critères de QoS et à d'autres disciplines de service. On pourrait par exemple analyser des problèmes de délai ou de gigue, ou encore traiter le cas de la discipline GPS (Generalised Processor Sharing).

Un autre sujet de recherche future qui prolonge naturellement notre travail est l'application de nos calculs à IP (Internet Protocol). Une telle étude devra en particulier tenir compte du fait qu'IP utilise des paquets de taille variable et non des cellules de taille fixe comme ATM. Par ailleurs, les probabilités de perte de paquets acceptables avec IP sont en général plus élevées que pour ATM. Il faudra donc évaluer la précision des techniques de grandes déviations dans ce contexte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABATE, J., and WHITT, W. (1997). *Asymptotics for M/G/1 low-priority waiting-time tail probabilities*, Queueing Systems 25 pp. 173-233
- [2] BAHADUR, R.R., and RANGA RAO, R. (1960). *On deviations of the sample mean*, Annals of mathematical statistics
- [3] COST 224 (octobre 1991). *Performance Evaluation and Design of Multi-service Networks*, Final Report pp. 36-44
- [4] COST 242 (4-5 juin 1996). Closing Seminar pp. 165-180
- [5] COURCOUBETIS, C., SIRIS, V. A., and WEBER, R. (juillet 1997). Proceedings of UKPEW'97, Ilkley, R.U.
- [6] DUFFIELD, N.G., LEWIS, J.T., O'CONNEL, N., RUSSELL, R. and TOOMEY, F. (août 1995). *Entropy of ATM Traffic Streams : A Tool for Estimating QoS Parameters*, IEEE JSAC vol. 13, no. 6, pp. 981-990
- [7] ELWALID, A. and MITRA, D. (1995). *Analysis, approximations and admission control of a multi-service multiplexing system with priorities*, IEEE INFOCOM'95 Proceedings vol. 2, pp. 463-472
- [8] ELWALID, A. and MITRA, D. (1993). *Effective Bandwidth of general Markovian traffic sources and admission control of high speed networks*, IEEE/ACM Trans. Networking 1(3), pp. 329-343
- [9] GOLESTANI, S.J. (1991). *Congestion-free communication in broadband packet networks*, IEEE Transactions on Communications, vol. 39, pp. 1802-1812

- [10] GUERIN, R., AHMADI, H. and NAGHSHINEH, M. (septembre 1991). *Equivalent Capacity and Its Application to Bandwidth Allocation in High-Speed Networks*, IEEE JSAC, vol. 9, no. 7, pp. 968-981
- [11] HUI, J. Y. (décembre 1988). *Resource Allocation for Broadband Networks*, IEEE JSAC, vol. 6, no. 9, pp. 1598-1608
- [12] KAUFMAN, J.S. (29 octobre 1981). *Blocking in a shared resource environment*, IEEE Transactions on Communications
- [13] KELLY, F.P. (1991). *Effective Bandwidth at Multi-Class Queues*, Queueing Systems 9, pp. 5-16
- [14] KESIDIS, G., WALRAND, J. and CHANG, C.S. (août 1993). *Effective Bandwidths for Multiclass Markov Fluids and Other ATM sources*, IEEE Trans. Networking, vol. 1, no. 4, pp. 424-428
- [15] KULKARNI, V., GUN, L. and CHIMENTO, P. (1994). *Effective Bandwidth Vector for Two-Priority ATM traffic*, Proceedings INFOCOM'94 pp. 1056-1064
- [16] LIKHANOV, N., MAZUMDAR, R. and THEBERGE, F. (juin 1996). *Calculation of cell loss probabilities in large unbuffered multiservice systems*, Proceedings of the IEEE ICC, Montréal
- [17] LIKHANOV, N. and MAZUMDAR, R. (1998). *Cell loss asymptotics for buffers fed with a large number of independent stationary sources*, INFOCOM'98 Proceedings, 3C-1
- [18] LUENBERGER, D.G. (1984). *Linear and non-linear programming*, second edition, Addison-Wesley Publ.

- [19] MIGNAULT, J., ROSENBERG, C. and GRAVEY, A. (1997). *A reference resource allocation method for ATM Statistical Bit Rate services*
- [20] TRANCHIER, D.P. et al. (1992). *Fast Bandwidth Allocation in ATM Networks*, Technical Report, CNET-Lannion
- [21] ZHANG, Z.L. (1997). *Large deviations and the generalized processor sharing scheduling for a two-queue system*, Queueing Systems 26 pp. 229-254

Annexe A Théorie des Grandes Déviations

Nous présentons dans cette annexe une introduction aux principes de base de la théorie des grandes déviations.

Annexe A.1 Introduction

La théorie des grandes déviations a pour objet l'étude d'événements rares, et le calcul de leur probabilité. Dans la vie quotidienne de tels événements ont parfois une importance considérable. Pensez par exemple à une catastrophe naturelle ou, pour être plus optimiste, à la chance de gagner la cagnote à la loterie. La théorie des grandes déviations trouve de nombreuses applications dans l'assurance, la finance, la physique statistique et bien sûr les télécommunications.

Il n'existe malheureusement pas d'approche universelle pour l'estimation des probabilités d'événements rares. Cependant, dans le cas où l'on dispose d'un grand nombre d'échantillons, une structure assez générale se dégage. C'est justement cette structure que formalise la théorie des grandes déviations. Le nombre N d'échantillons est en fait un paramètre clé : tous les résultats (à l'exception de quelques rares expressions explicites) de grandes déviation que nous allons présenter sont des expressions asymptotiques pour les grandes valeurs de N .

Dans beaucoup de cas, la probabilité des événements décroît exponentiellement avec N , selon un taux I (c'est à dire que la probabilité est du type $K(N)e^{-NI}$ où $K(N)$ est une fonction à variations lentes). L'objectif principal des techniques de grandes déviations est la détermination du paramètre I . Dans certains cas,

dont celui qui nous interesse, on veut obtenir une estimation numérique des probabilités et pas uniquement leur comportement exponentiel. On verra par la suite qu'une telle estimation est possible au prix d'un petit effort supplémentaire pour évaluer $K(N)$.

Annexe A.2 Cadre général

Commençons par nous donner une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées : $X_1, X_2, \dots, X_n$. Définissons alors M_n comme la moyenne des n premières variables :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

On suppose que $m = E[X_i]$, l'espérance de X_i , existe et est finie. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m = 0$. D'après la loi faible des grands nombres, S_n converge en probabilité vers m :

Pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P[|M_n| > \epsilon] = 0$. Par conséquent, pour $g > 0$ donné :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[M_n > g] = 0.$$

Le nombre ng représente ici l'écart entre la valeur de la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et son espérance. On utilise le terme de grande déviation car cet écart ng est grand pour n grand.

Nous voulons à présent obtenir une estimation plus précise de $P[M_n > g]$. On peut commencer par établir des bornes supérieure et inférieure de cette quantité. Supposons que $P[X_i > g] > 0$ (sans quoi $P[M_n > g] = 0$ pour tout n). Une condition suffisante (mais pas nécessaire à priori) pour que $M_n > g$ est que

$X_i > g$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Il en résulte que :

$$P[M_n > g] \geq (P[X_i > g])^n$$

La vitesse de convergence est donc au plus exponentielle.

Pour tout réel positif τ , l'inégalité de Chebycheff permet d'obtenir une borne supérieure :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq ng) &= P(e^{\tau(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} \geq e^{\tau ng}) \\ &\leq e^{-\tau ng} \mathbf{E}[e^{\tau(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}] \\ &= e^{-\tau ng} (\mathbf{E}[e^{\tau X_1}])^n \\ &= (e^{-\tau g} \mathbf{E}e^{\tau X_1})^n \end{aligned}$$

De plus, il existe des valeurs de τ pour lesquelles $e^{-\tau g} \mathbf{E}e^{\tau X_1} < 1$.

Preuve : Définissons $f(\tau)$ par :

$$f(\tau) = e^{-\tau g} \mathbf{E}[e^{\tau X_1}]$$

On a $f(0) = 1$ et $f'(\tau) = -ge^{-\tau g} \mathbf{E}[e^{\tau X_1}] + e^{-\tau g} \mathbf{E}[X_1 e^{\tau X_1}]$.

Donc $f'(0) = -g < 0$. Ceci prouve que pour τ positif suffisamment proche de 0, $f(\tau) < f(0) = 1$

Nous pouvons encore améliorer la borne ci-dessus en choisissant la "meilleure" valeur possible pour τ , c'est à dire celle qui minimise $e^{-\tau g} \mathbf{E}e^{\tau X_1}$. On obtient alors une borne connue sous le nom de **borne de Chernoff** :

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > g\right) \leq e^{-nI}$$

Avec $I = \sup_{\tau} \{\tau g - \log \phi(\tau)\}$, où $\phi(\tau) = \mathbf{E}e^{\tau X_1}$.

Remarque : Nous avons ainsi prouvé que la vitesse de convergence de la moyenne arithmétique vers l'espérance des X_i se situe entre deux taux exponentiels. La borne de Chernoff possède par ailleurs la propriété remarquable suivante: il n'existe pas de réel $J > I$ tel que la borne reste vraie pour n arbitrairement grand en substituant J à I . En d'autres termes, I représente la vitesse de convergence exponentielle de $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Annexe A.3 La fonction taux

Nous allons ici reprendre la définition du coefficient I introduit précédemment, énoncer certaines de ses propriétés puis donner quelques exemples.

Définition : Soit X_1 une variable aléatoire réelle d'espérance m (on ne suppose plus $m = 0$) et $\phi(\tau)$ sa fonction génératrice de moments : $\phi(\tau) = \mathbf{E}e^{\tau X_1}$. On appelle fonction taux associée à X_1 la fonction :

$$I(g) = \sup_{\tau} \{\tau g - \log \phi(\tau)\}$$

Le point τ_0 pour lequel ce supremum est atteint est caractérisé par $f'(\tau_0) = 0$ c'est à dire :

$$\frac{\mathbf{E}[X_1 e^{\tau_0 X_1}]}{\mathbf{E}[e^{\tau_0 X_1}]} = g.$$

Remarque : Le point τ_0 n'existe que pour les valeurs de g pour lesquelles $I(g)$ est définie. Pour une preuve de l'unicité de τ_0 , voir la remarque (3.4.1).

La figure A.1 illustre la construction de la fonction $I(g)$.

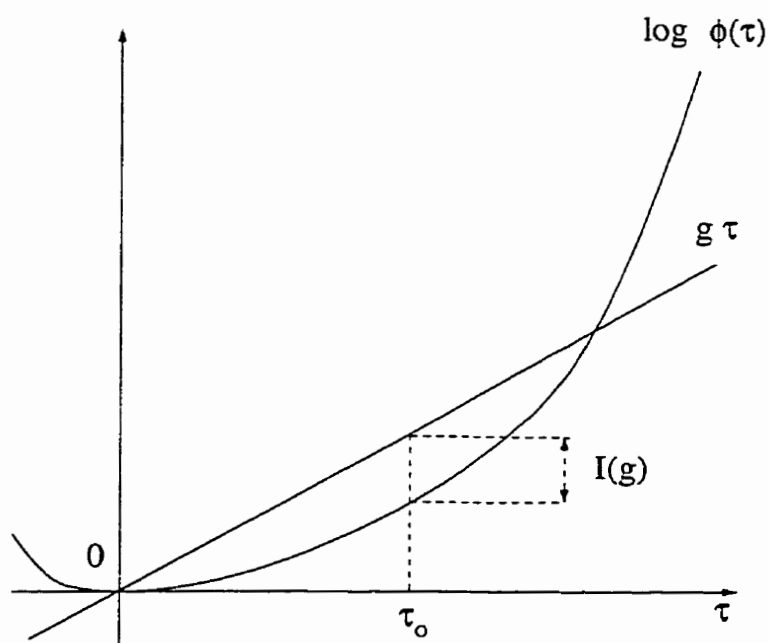


Figure A.1 Construction de la fonction taux

Remarque : Si on suppose que $\phi(\tau)$ existe et est finie pour tout $\tau > 0$, alors $I(g)$ peut être définie pour toute valeur de g (mais peut éventuellement prendre la valeur $+\infty$).

Propriété : $I(g)$ est une fonction convexe.

Démonstration : Pour a et b deux nombre réels donnés et $\gamma > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 I(\gamma a + (1 - \gamma)b) &= \sup_{\tau} \tau(\gamma a + (1 - \gamma)b) - \log \phi(\tau) \\
 &= \sup_{\tau} \gamma[\tau a - \log \phi(\tau)] + (1 - \gamma)[\tau b - \log \phi(\tau)] \\
 &\leq \sup_{\tau} \gamma[\tau a - \log \phi(\tau)] + \sup_{\tau} (1 - \gamma)[\tau b - \log \phi(\tau)] \\
 &= \gamma I(a) + (1 - \gamma)I(b)
 \end{aligned}$$

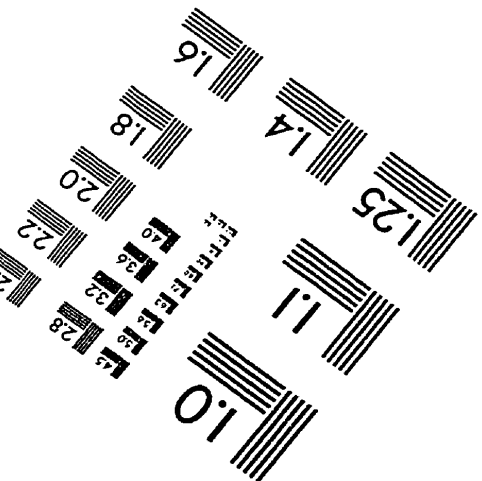
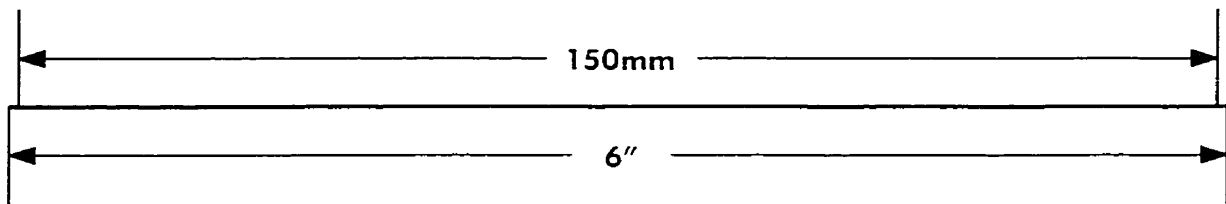
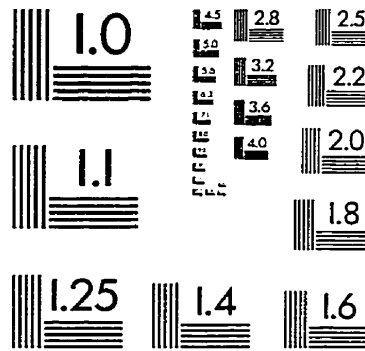
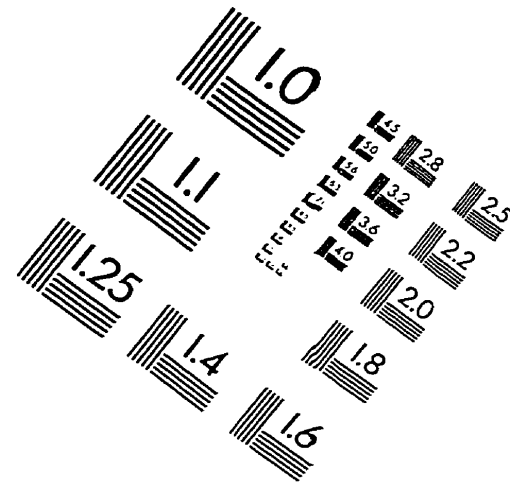
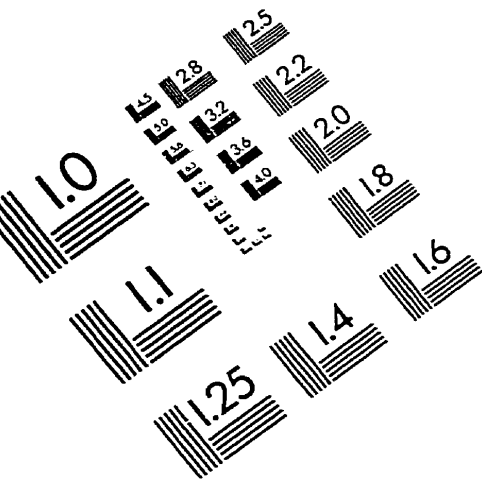
Propriété : $I(g)$ atteint son minimum en $g = m$ et $I(m) = 0$.

Démonstration : Tout d'abord, pour $\tau = 0$, $\tau g - \log \phi(\tau) = 0$ donc $I(g) \geq 0$. De plus, l'inégalité de Jensen donne pour tout τ , $\phi(\tau) \geq e^{\tau m}$ donc $\tau m - \log \phi(\tau) \leq 0$. On en déduit que $I(m) = 0$ et $I(g) \geq 0 = I(m)$ pour tout g .

Propriété : $I'(g) = \tau_0(g)$

Démonstration : $I(g) = \tau_0(g)g - \log \phi(\tau_0(g))$ donc : $I'(g) = \tau'_0(g)g + \tau_0(g) - \tau'_0(g) \frac{\phi'(\tau_0(g))}{\phi(\tau_0(g))}$. Mais par définition de τ_0 , $g - \frac{\phi'(\tau_0(g))}{\phi(\tau_0(g))} = 0$, donc $I'(g) = \tau_0(g)$.

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

