

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE D'UN MODÈLE
POROÉLASTIQUE ET COMPOSITE DU CARTILAGE

JULIEN SOULHAT

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JUIN 1997

©Julien Soulhat, 1997.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33188-1

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé

DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE D'UN MODÈLE
POROÉLASTIQUE ET COMPOSITE DU CARTILAGE

présenté par: SOULHAT Julien

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. McINTYRE, Georges, M.Sc.A., président

M. SHIRAZI-ADL, Aboulfazl, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BUSCHMANN, Michael D., Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CARREAU, Pierre, Ph.D., membre

À ma mère, à mon père et à toute ma famille

REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus sincères vont naturellement aux deux professeurs qui m'ont encadré pendant la durée de mes études de maîtrise, le Professeur Aboulfazl Shirazi-Adl du département du Génie mécanique et le Professeur Michael D. Buschmann de l'Institut de Génie Biomédical, mes directeur et codirecteur de recherche respectifs. Les deux années de travail que j'ai passées sous leurs directions ont été très enrichissantes sur le plan scientifique. Je les remercie tout d'abord de m'avoir accueilli en 1995 au sein de la Section de Mécanique Appliquée et au sein du Groupe de Recherche en Biomécanique et Biomatériaux (GRBB) où j'ai passé la plus part de mon temps. Je les remercie ensuite de m'avoir si bien encadré dans la réalisation de ce travail, tout en m'ayant donné l'autonomie dont je désirais et en laissant leur porte de bureau toujours ouverte quand j'arrivais avec mes questions (j'espère qu'elles n'ont pas été trop désespérantes). J'espère, quant à moi, avoir été à la hauteur de leurs espérances comme ils ont eux-mêmes été à la hauteur des miennes.

Je remercie le Professeur Georges McIntyre de la Section de Mécanique Appliquée, dont j'ai pu apprécier la qualité de l'enseignement pendant mon année d'échange à Poly en 1994, d'avoir accepté la présidence de mon jury. Je remercie également le Professeur Pierre Carreau du département de Génie Chimique, qui a accepté d'être l'examineur externe de mon jury, et que je sais être très occupé.

Je remercie les étudiants et le personnel du GRBB pour la sympathique ambiance qui règne dans ce laboratoire et qui a contribué à rendre les conditions de travail agréables. Mes remerciements vont également aux étudiants et au personnel de la Section de Mécanique Appliquée, où vous êtes certains de toujours rencontrer quelqu'un, même le dimanche soir à 23h00, sauf les soirs de hockey.

Je remercie également le service de l'entretien qui a assuré un service (pratiquement) continu des escaliers électriques, pour me permettre d'encaisser moins brutalement les 20 aller-retours quotidiens entre les 1er et 6ème étages (et vice versa).

Je remercie également Mrs B. Ramon et J.F. Chrétien de l'Université de Technologie de Compiègne qui m'ont apporté leur soutien pour mon inscription à Poly.

Enfin je remercie ma famille et mes amis qui m'ont soutenu et encouragé pendant mes trois années d'expatriation (volontaire) dans ce beau pays qu'est le Québec.

RÉSUMÉ

Le cartilage est un tissu biologique dont la compréhension sur les plans biologiques, biochimiques et biomécaniques fait l'objet de nombreuses recherches depuis plusieurs décennies. Le bon fonctionnement de ce tissu que l'on retrouve aux extrémités des os est très important pour le bien-être de toute la population parce que le cartilage permet aux articulations et aux membres de se mouvoir avec facilité grâce à ses propriétés de lubrification.

Quand ce mince tissu se dégrade, soit par trauma ou par maladie dégénérative chronique, les fonctions naturelles de l'articulation ne sont plus assurées et c'est malheureusement synonyme de souffrances et de douleurs pour la personne concernée quand elle se déplace. Une des maladies diagnostiquées comme étant responsable de la dégénération du cartilage est l'ostéoarthrose, maladie qui concerne une grande partie de la population vieillissante.

Un des facteurs responsables de l'apparition de cette maladie est l'effet de chargements mécaniques qui entraînent des réponses physiologiques dégénératives dans le cartilage. Une étape essentielle avant la compréhension des mécanismes physicobiologiques qui entraînent cette dégradation sous des sollicitations mécaniques est de connaître le comportement mécanique du cartilage, c'est-à-dire la manière dont les chargements mécaniques externes sont redistribués à l'intérieur du tissu et la manière dont on peut caractériser le tissu à l'aide de paramètres mécaniques. Des modèles analytiques et numériques, ainsi que des protocoles expérimentaux, ont donc été développés depuis le début des années 80 pour tenter de comprendre et de prédire le comportement mécanique du cartilage. L'utilité de ces modèles et de ces protocoles expérimentaux est aussi de pouvoir déterminer des paramètres mécaniques qui caractérisent et représentent le comportement du cartilage, en effectuant des corrélations entre les modèles et les données expérimentales (*curve fit*). La majorité des modèles sont basés sur une description

biphasique du cartilage, c'est-à-dire que le cartilage est décrit comme un matériau poreux gorgé d'eau, formé d'une phase solide et d'une phase fluide incompressible, comme une éponge. Depuis toujours, la phase solide du cartilage était décrite comme étant homogène et continue.

Dans cette étude, nous proposons qu'une description non homogène et composite de la phase solide est nécessaire pour décrire adéquatement le comportement mécanique du cartilage tel que observé dans des études expérimentales. Cette approche est justifiée par la composition physiologique du cartilage où un réseau de fibres de collagène (qui résiste aux efforts en tension) vient emprisonner un gel de protéoglycane (qui supporte des efforts en compression), formant ainsi une structure composite.

Dans un premier temps, à partir des équations constitutives de la théorie biphasique, dérivées elles-mêmes de la théorie de poroélasticité de Biot, nous avons développé un modèle analytique que nous avons validé pour le cas du test de relaxation de contraintes en compression non confinée, qui est un test très répandu pour l'étude des propriétés mécaniques du cartilage et pour l'étude des réponses biologiques induites par chargements mécaniques. L'originalité de notre étude tient donc dans le fait que nous décrivons un disque de cartilage comme étant constitué d'une structure composite formée d'une matrice biphasique isotrope et homogène emprisonnée dans un réseau de fibres de collagène distribué de façon homogène sur le volume et qui a la particularité de n'avoir aucune rigidité quand il est soumis à des efforts en compression. Chacun de ces deux constituants solides est décrit par des paramètres mécaniques indépendants. Le modèle composite est décrit par quatre paramètres qui sont la rigidité du réseau des fibres de collagène, le module de Young et le coefficient de Poisson de la matrice formée du gel de protéoglycanes et enfin la perméabilité hydraulique de la matrice.

A l'aide de ce modèle, une analyse du comportement mécanique du cartilage est présentée pour le cas de la relaxation de contrainte en compression non confinée, ainsi qu'une comparaison avec un modèle homogène orthotropique qui avait déjà été développé. Nous

avons étudié le comportement mécanique du cartilage en relaxation de contrainte et pour des chargements cycliques. Il apparaît ainsi que le modèle composite décrit la réalité expérimentale de manière très satisfaisante et que ce modèle peut capter des phénomènes mécaniques que les modèles homogènes ne peuvent pas capter, notamment au niveau de la prédiction des contraintes dans le tissu.

Dans un deuxième temps, cette description non homogène et composite du cartilage est étendue à un modèle numérique en utilisant la méthode des éléments finis. L'utilisation d'un modèle numérique permet de prendre en compte dans l'analyse du comportement mécanique du cartilage des phénomènes non linéaires complexes, tels que la non linéarité géométrique, la non linéarité de la résistance des fibres de collagènes ou de la perméabilité, et d'en étudier les effets. Nous avons donc utilisé un modèle élément fini pour étudier l'influence de ces effets non linéaires sur la réponse du cartilage et pour déterminer les effets non linéaires qui prédominent, en s'appuyant sur des résultats expérimentaux. Nous avons également étudié la manière dont le modèle analytique linéaire interprète ces non linéarités dans l'objectif d'évaluer ces effets sur les paramètres mécaniques obtenus par *curve fit* de données expérimentales à l'aide du modèle analytique. Il apparaît que la non linéarité du réseau des fibres (ou fibrilles) de collagène couplée à une perméabilité non linéaire a un effet prédominant dans le comportement mécanique du cartilage. Il apparaît de plus que le modèle composite, dont le concept est relativement simple, s'avère être un outil très prometteur pour la caractérisation mécanique du cartilage. Ce modèle peut aussi capter certains phénomènes qui n'étaient pas perçus avec les anciens modèles, notamment au niveau des contraintes. Des recommandations sont finalement données afin d'améliorer la performance de ces modèles analytique et numérique.

ABSTRACT

Articular cartilage forms the articulating surfaces in diarthroidal joints. With synovial fluid, it endows a joint with low-friction surfaces and, in conjunction with ligaments and menisci, transmits and distributes forces to the underlying bone. Loss of joint mechanical function resulting from severe cartilage degeneration is the common endpoint of the Osteoarthritis. A major factor in the etiology and pathogenesis of Osteoarthritis is believed to be the influence of mechanical loading on tissue and cell behavior. The understanding of the mechanical phenomena occurring in loaded articular cartilage is therefore an important step for the study of Osteoarthritis.

The mechanical properties of articular cartilage result from its heterogeneous and anisotropic composition constituted of cells (1-10% of tissue volume) and an extracellular matrix, most generally described as a cross-linked collagen fibrillar network (mainly types II) and a proteoglycan (aggrecan) gel, both being saturated with water containing diffusible ions. In general, the rope-like collagen fibrillar network provides resistance in tension, whereas the electrically charged proteoglycans gel supports compression. Hence cartilage mechanical function relies on its microstructural composition, i.e. a composite structure of a collagen fibrillar network entrapping a proteoglycan matrix.

The current mathematical descriptions of cartilage mechanical behavior come from the biphasic theory derived from poroelasticity theory of Biot. In the biphasic theory, the complex dynamics of the material arises from the interactions between solid and fluid phases involving relative motion and associated hydrodynamic drag. In the previously developed models, the solid phase was described as homogeneous and isotropic or orthotropic. In this study, we propose a nonhomogeneous composite representation of this structure which, based on the above physiological considerations, is essential to accurately model tissue's mechanical behavior. Using the classical biphasic theory, a

nonhomogeneous analytical composite model of the articular cartilage is developed and validated for the case of unconfined compression with frictionless and impermeable platen/cartilage interface. This model considers the medium to be constituted of an isotropic biphasic matrix homogeneously reinforced by a rod-like fibrils network having no resistance in compression. This model was initially compared to experimental data and to demonstrate the performance of a nonhomogeneous composite representation. The comparison to an equivalent homogeneous transversely-isotropic model has also been made. This latter comparison demonstrates that despite identical displacements, strains and fluid pressures, the stresses are different, depending on the homogeneous or nonhomogeneous model used. This could have consequences in the efforts to understand the mechanical signals which determine cellular and extracellular biological responses to mechanical loads in cartilage. An analysis of cartilage is also presented using this developed model, for in unconfined compression. The cartilage response for the stress relaxation and for dynamic sinusoidal loadings has been studied.

The nonhomogeneous composite approach has subsequently been incorporated in a finite element model to investigate the effects of certain nonlinear phenomena (geometric and material non linearities) for the unconfined compression configuration. We also investigated the way curve fit using our analytical composite model interprets these non linearities. Based on the analysis of articular cartilage in unconfined compression using this finite element model and comparison with experimental data, it appears that the fibrils material non linearity's combined with a nonlinear permeability play an important role in the mechanical behavior of cartilage. Additionally, this composite model can describe mechanical phenomena, such as the stresses in both the matrix and the fibrils, that weren't captured by previously developed homogeneous models. Finally, we propose further developments that may be pursued in analytical and numerical models to enhance their ability to describe the mechanical phenomenon in cartilage.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ.....	vii
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xii
LISTE DES TABLEAUX	xvi
LISTES DES FIGURES	xviii
LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS	xxviii
LISTE DES ANNEXES	xxxiii
 1. INTRODUCTION, ETATS DES CONNAISSANCES ET OBJECTIFS.....	 1
1.1 Introduction	1
1.2 Contexte	3
1.3 Composition du cartilage.....	4
1.3.1 Les chondrocytes.....	4
1.3.2 Les fibrilles de collagènes.....	5
1.3.3 Les protéoglycanes.....	5
1.3.4 Le fluide interstitiel.....	5
1.4 Structure et organisation dans le cartilage.....	6
1.5 Les différents types de tests existants.....	7
1.5.1 Le test de compression confinée	7
1.5.2 Le test de compression non confinée	8

1.5.3 Le test d'indentation	8
1.6 Les propriétés mécaniques du cartilage.....	9
1.6.1 Variation des propriétés mécaniques avec la profondeur dans le tissu.....	9
1.6.2 Variation des propriétés mécaniques avec la direction et l'orientation	10
1.6.3 Variation des propriétés mécaniques avec la concentration en composants..	11
1.6.4 Variation des propriétés mécaniques avec l'âge.....	12
1.6.5 Propriétés mécaniques qualitatives.....	12
1.7 Les modèles existants.....	14
1.7.1 La formulation biphasique	15
1.7.2 Obtention du modèle biphasique isotrope	17
1.7.3 Le modèle biphasique transverse isotrope.....	19
1.7.4 Autres modèles proposés	20
1.7.5 Les modèles numériques.....	21
1.7.6 Le potentiel du logiciel Abaqus	22
1.7.7 La description non homogène et composite du cartilage.....	24
1.8 Propriétés mécaniques quantitatives	24
1.9 Objectifs	26
1.10 Structure du mémoire	27
2. DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE DU MODÈLE ANALYTIQUE COMPOSITE NONHOMOGENE EN COMPRESSION NON CONFINÉE	28
2.1 Principes généraux	28
2.2 Hypothèses prises en compte pour l'élaboration du modèle.....	30
2.2.1 Hypothèses sur les conditions limites.....	30
2.2.2 Hypothèses sur la description mécanique du cartilage	30

2.2.3 Hypothèses sur les déformations et les contraintes.....	31
2.2.4 Interprétation des hypothèses.....	32
2.3 Développement et validation du modèle analytique et analyse du cartilage en compression non confinée (Article 1).....	34
2.3.1 Summary	37
2.3.2 Introduction.....	38
2.3.3 Theoretical Methods	39
2.3.4 Experimental Methods.....	46
2.3.5 Results.....	47
2.3.6 Discussion.....	62
2.3.7 References.....	65
2.3.8 Autres résultats	68
3. DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE ELEMENTS FINIS.....	71
3.1 Introduction	71
3.2 Elaboration du modèle par éléments finis en compression non confinée	72
3.2.1 Principes de modélisation	72
3.2.2 Modèle, maillage, conditions limites et chargement	76
3.2.3 Calcul des rigidités des ressorts	78
3.3 Propriétés de matériaux	81
3.3.1 Modules de Young et coefficient de Poisson de la matrice.....	81
3.3.2 Perméabilité de la matrice.....	82
3.3.3 Module de Young équivalent du réseau des fibrilles.....	85
3.3.4 Méthodologie d'analyse.....	86
3.4 Résultats	87

3.4.1 Réponse en contrainte: comparaison entre une AEF linéaire et le modèle analytique.....	87
3.4.2 Prédiction des profils: comparaison entre une AFE linéaire et le modèle composite	88
3.4.3 Réponse en contrainte: comparaison entre une AEF non linéaire (avec déformation finies) et les modèles linéaires (analytiques et numériques)	88
3.4.4 Prédiction des profils: comparaison entre une AEF non linéaire (avec déformation finies) et les modèles linéaires (analytiques et numériques)	89
3.4.5 Effet d'une interface cartilage/plaque adhésive.....	89
3.4.6 Effet des déformations finies sur la réponse	94
3.4.7 Effet de la perméabilité non linéaire sur la réponse.....	97
3.4.8 Effet de la non linéarité des fibres	98
3.4.9 Effet combiné des non linéarités de la perméabilité et des fibres.....	103
3.5 Discussion	104
4. DISCUSSION ET PERSPECTIVES	107
4.1 Discussion générale sur l'approche non homogène composite.....	107
4.2 Discussion sur l'utilisation des modèles analytiques et numériques	109
4.3 Perspectives pour le développement du modèle composite	110
CONCLUSION.....	113
RÉFÉRENCES	114
ANNEXES.....	121

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Gammes de variation des propriétés mécaniques qualitatives du cartilage 25

Table 2.1: Composite model expressions in the Laplace domain. Dimensional quantities have overbars. s is the Laplace variable, r the radial position in the disk, r_0 the peripheral disk radius, and α the solid to fluid volume fraction (solid-volume/fluid-volume). $\bar{\varepsilon}_z(s)$ is the Laplace transform of the surface-to-surface axial deformation (change-in-thickness/original-thickness vs. time). The average surface stress $\bar{\sigma}_a(s)$, the radial displacement $\bar{u}(s)$, the fluid pressure $\bar{p}(s)$, and the relative fluid velocity $\bar{v}_r(s)$ are normalized to E_{33} , r_0 , $\frac{E_{33}}{(1+\alpha)}$, $\frac{k(1+\alpha)E_{33}}{r_0}$ respectively. Radial and circumferential strains, $\bar{\varepsilon}_r(s)$ and $\bar{\varepsilon}_\theta(s)$, are also shown. I_m is the modified Bessel function of order m..... 44

Table 2.2: Composite model expressions in the time domain. The expressions of Table 1 have been transformed into the time domain using a ramp function (amplitude $\bar{u}_0$ in time $\bar{t}_0$ at constant velocity) for the axial surface-to-surface displacement to define a time-dependent axial strain (which is independent of z). Normalization factors are similar to those of Table 1 with the addition of $\varepsilon_0 = \bar{u}_0/h$ in some expressions, where h is the original ($\bar{t} = 0$) disk thickness. a_n is the n^{th} root of the characteristic equation $(a_n/\sqrt{s_0})J_0(a_n/\sqrt{s_0}) - AJ_1(a_n/\sqrt{s_0}) = 0$, where J_m is the Bessel function of order m 45

Table 2.3: Composite model parameters used in Figures 3-7. E_{33} , the unconfined compression equilibrium modulus, and k , the hydraulic permeability were fixed to values typical of articular cartilage. E_f , the fibril network tensile stiffness, and ν_{eff} , the effective Poisson's ratio (ratio of radial to axial strain at equilibrium)

were varied to demonstrate the dependence of model predictions on these parameters. Once these four model parameters are defined several other dependent parameters can be calculated including the elastic constants of the isotropic matrix, E_m and ν_m , a transverse plane modulus, S_{11} , a characteristic angular frequency, s_0 , and a characteristic relaxation time, $1/s_0$, the latter two using $r_0 = 1.4$ mm... 50

Tableau 3.1: Paramètres de matériaux utilisés dans l'analyse du cartilage à l'aide du modèle par élément finis	82
---	----

LISTES DES FIGURES

Figure 1.1: L'articulation du genoux.....	3
Figure 1.2: La compression confinée	8
Figure 1.3: La compression non confinée	9
Figure 1.4: Le test d'indentation.....	9
Figure 1.5: Tests de relaxation de contraintes et de fluage: réponses caractéristiques.....	18
Figure 2.1: Hypothèse en compression non confinée.....	32
Figure 2.2: Nonhomogeneous composite description of cartilage. A fibril network (collagen) is homogeneously distributed in the r , θ , z directions to reinforce an isotropic biphasic (proteoglycan) matrix. Four model parameters are required: 3 drained elastic coefficients (Young's modulus E_m and Poisson's ratio ν_m of the matrix, Young's modulus E_f of the fibril network) and a permeability coefficient (k). The fibrils in the network behave nonlinearly like thin rods, with no or little resistance to compression due to buckling	40
Figure 2.3: The dependence of elastic matrix parameters E_m (A, Eq 5a normalized to E_{33}) and ν_m (B, Eq 5b) on the effective Poisson's ratio, ν_{eff} , for several values of E_f (normalized to E_{33}). For increasing fibril network stiffness, E_f , the admissible maximum value for ν_{eff} is diminished in order to keep ν_m and E_m within physically acceptable ranges (< 0.5 and > 0 , respectively). This maximum value for ν_{eff} can be equivalently expressed as a maximum value of E_f (Eq 6), which is also required to retain positive definiteness of the compliance and rigidity matrices (Eqs 2 and 3).....	48

Figure 2.4: Composite model predictions of unconfined compression dynamic stiffness (Eq c in Table 1 with s replaced by $i2\pi f/s_0$, $i = \sqrt{-1}$, and where f is the frequency) using model parameters of Table 3 and $r_0=1.4$ mm. Increased fibril network stiffness in tension increases the high frequency dynamic stiffness and shifts the characteristic transition frequency (peak in the phase) upwards 51

Figure 2.5: Composite model predictions of unconfined compression stress relaxation profiles (Eqs i and j in Table 2) normalized to the equilibrium stress, $E_{33}\epsilon_0$, with $r_0 = 1.4$ mm, $t_0 = 5$ s, and model parameters as defined in Table 3. The isotropic model prediction is shown for the case of $E_f = 0$. Increased fibril network stiffness in tension increases the magnitude of the transient stress and reduces the relaxation time..... 52

Figure 2.6: Radial strain amplitude, normalized to the axial strain $\epsilon_0 = \bar{u}_z/h$ where $\bar{u}_z$ is the amplitude of the sinusoidal displacement imposed about the average thickness h , and radial strain phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq e in Table 1 with s replaced by $i2\pi f/s_0$ and with $\bar{\epsilon}_z(s)$ replaced with ϵ_0) using model parameters as defined in Table 3 and $r_0=1.4$ mm. The following sign convention has been used - compressive axial strain and tensile radial strain are positive. A normalized radial strain amplitude of 0.5 indicates local conservation of solid matrix volume. Local values of radial strain exceeding 0.5 (near $r = 0$ for higher values of E_f) indicate that solid volume increases locally during the compressive phase due to out of phase fluid flow (Fig 7) into that local region occurring also during the compressive phase of the cycle..... 54

Figure 2.7: Fluid pressure amplitude and phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq g in Table 1) using model parameters of Table 3 and $r_0=1.4$ mm. The same sign convention as that in Fig 5 has been used. Increased fibril network stiffness increases fluid pressure amplitudes..... 55

Figure 2.8: Fluid velocity amplitude and phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq h in Table 1) using model parameters of Table 3 and $r_0=1.4$ mm. The same sign convention as that in Fig 5 has been used. Increased fibril network stiffness increases fluid velocity amplitudes and creates significant out of phase fluid flow in central regions at 0.01 Hz..... 56

Figure 2.9: Radial solid stresses of the nonhomogeneous composite (COMP) and the homogeneous transversely isotropic (TIP) models. Amplitude and phase of the stress in the matrix and fibril network of the COMP model and stress in the matrix of the TIP model (Eq 3; Cohen et al., 1992) for sinusoidal compression at 0.01 Hz (A & B) and for stress relaxation (Eq 11) at $r = 0$ with a ramp time $t_0 = 5$ s (C & D). COMP model parameters are $E_f=10.0$ MPa, $v_{eff}=0.0$ (A & C) or 0.05 (B & D), $E_{33} = 1.0$ MPa and $k = 1.0 \times 10^{-15}$ mm⁴/N-s. The equivalent TIP parameters (Eqs 7a,b,c,d) are $E_3 = 1.0$ MPa, $E_l = 10.73$ MPa, $v_{2l} = 0.0$ (A & C) or 0.024 (B & D), $v_{3l} = 0.0$ (A & C) or 0.05 (B & D) and $k = 1.0 \times 10^{-15}$ mm⁴/N-s. When the effective Poisson's ratio is zero (A & C), radial stress in the matrix and fibril network in the COMP model are in the same sense (tensile) and when added together equal the stress in the single solid phase TIP model. However, when the effective Poisson's ratio is non-zero (B & D) the stress in the matrix of the COMP model can be opposite in sense (compressive) to that in the fibril network (tensile)..... 59

Figure 2.10: Best fit of the composite model to stress relaxation data. The average of stress relaxation profiles (normalized to equilibrium stress) experimentally obtained by applying a 5μm amplitude ramp at a velocity of 1μm/s starting from a ~10% (100μm) static offset compression. $E_{33} = 1.01$ MPa was obtained from the equilibrium stress and we assumed $v_{eff} = 0.0$. The best fit resulted in $E_f = 11.0$ MPa and $k = 1.11 \times 10^{-15}$ mm⁴/N-s. The composite model can reasonably capture stress relaxation behavior in unconfined compression, while the non-reinforced

isotropic model is unable to predict a peak load which is more than 50% higher than the equilibrium load increment (Fig 3)..... 60

Figure 2.11: Uniqueness of the fitted composite model parameters obtained in Fig 9. Contour plot of the merit function, χ^2 (Eq 8), as a function of fitted parameters k and E_f showing a well defined minimum 61

Figure 2.12: Exemple d'une série de 20 pas de déplacements en compression et de la réponse en relaxation de contrainte. La charge indiquée est celle qui est lue directement par la cellule de charge. La position indiquée est le déplacement compressif qui est contrôlé et appliqué par le contrôleur de déplacement. Pour passer au pas suivant, on s'assure qu'un état d'équilibre a été atteint au niveau du pas courant. Cet équilibre est défini en terme d'une variation minimale de la charge par minute, fixée par l'utilisateur 69

Figure 2.13: Modules de la matrice (●) et des fibres (▲) et perméabilité hydraulique (■) en fonction de la déformation compressive appliquée. Ces points sont obtenus par curve fit de chacun des pas de relaxation de contrainte comme ceux montrés à la Figure 2.12. Le curve fit s'effectue sur les valeurs relative du déplacement et de la relaxation de contrainte du pas considéré par rapport aux pas précédents. D'après M. Fortin, J. Soulhat, A. Shirazi-Adl, E.B. Hunziker, M.D. Buschmann (soumis) 70

Figure 3.1: Élément continu axisymétrique à 8 noeuds (de type CA8XP dans Abaqus) utilisé pour modéliser la matrice. Cet élément permet une variation quadratique du champ de déplacement et une variation linéaire du champ de pression du fluide 74

Figure 3.2: Répartition sur un élément des ressorts orientés dans les directions radiale et axiale, formant un réseau globale homogène 75

Figure 3.3: Répartition d'une charge linéique uniforme q sur un coté de longueur L d'un élément quadratique. Les forces concentrées aux noeuds selon le ratio 1-4-1 sont équivalentes au chargement linéique q 75

Figure 3.4: Modélisation non homogène de la structure composite. Celle-ci est constituée d'éléments continus homogènes, biphasiques et isotropes mélangés à des ressorts de rigidités K_i dont la répartition globale est homogène et équivalente à un réseau de fibrilles de collagène de module de Young E_f 76

Figure 3.5: Maillage et conditions aux limites 77

Figure 3.6: Élaboration du modèle. Pour respecter la condition d'une distribution homogène du réseau des ressorts sur tout le volume, on considère que, après simplification au cas axisymétrique, la déformation radiale est uniforme sur le rayon à l'équilibre (mais pas nécessairement pendant la relaxation), c'est-à-dire que l'on a: $\varepsilon_r^{equilibre} = \frac{u_i - u_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i}$ 79

Figure 3.7: Types de perméabilité non linéaire utilisée dans l'étude. Les perméabilités k , normalisées par rapport à leur valeurs initiales k_0 sont fonction du *voids ratio* e , normalisé par rapport à la valeur initial e_0 . La perméabilité obtenue par la méthode #1 est calculée selon l'équation empirique proposé par Lai et al. (1980). La perméabilité obtenue par la méthode #2 est déterminée par calcul de la constante de Darcy de l'écoulement au niveau microstructural 84

Figure 3.8: courbe σ/ε pour un spécimen chargé uniaxialement. Cette allure est obtenue pour une variation linéaire du module de Young avec la déformation 85

Figure 3.9: Prédiction du module de Young équivalent du réseau des fibrilles de collagène en fonction de la déformation radiale à partir des données de Fortin et al. (●), où E_f a été déterminé pour chacun des 20 pas de relaxation (voir Figure 2.12) à partir du

modèle développé au chapitre 2. Un coefficient de Poisson effectif constant et égale à 0.125 (Jurvelin et al. 1997) a été considéré pour chaque pas. La regression linéaire de ces données (—) donne $E_f = a\varepsilon_r + b$ avec $a=747,2$ et $b=4,93$ 86

Figure 3.10: Comparaison entre des AEF linéaires, non linéaire (déformation finies), le modèle composite analytique et une AEF non linéaire avec une interface adhésive, pour la prédiction de la contrainte moyennée à la surface, sous l'effet d'une compression axiale sous forme de rampe d'amplitude de 0.5%, dans le domaine de temps (A, B) et dans le domaine de Laplace (AA, BB). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A et AA) et au cas 8 (B et BB) du Tableau 3.1 sont pris en compte. L'effet d'un coefficient de Poisson non nul est apprécié en comparant les figures A, AA ($v_m=0$) avec les figure B, BB ($v_m=0,3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$. Les résultats sont mormalisés par rapport à la valeur à l'équilibre (A et B) ou par rapport à la valeur à basse fréquence (AA et BB)..... 90

Figure 3.11: Comparaison entre des AEF linéaires, non linéaire (déformation finies), le modèle composite analytique et une AEF non linéaire avec une interface adhésive, pour la prédiction de la contrainte moyennée à la surface, sous l'effet d'une compression axiale sous forme de rampe d'amplitude 10%, dans le domaine de temps (A, B) et dans le domaine de Laplace (AA, BB). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A et AA) et au cas 8 (B et BB) du Tableau 3.1 sont pris en compte. L'effet d'un coefficient de Poisson non nul est apprécié en comparant les figures A, AA ($v_m=0$) avec les figure B, BB ($v_m=0,3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$. Les résultats sont mormalisés par rapport à la valeur à l'équilibre (A et B) ou par rapport à la valeur à basse fréquence (AA et BB)..... 91

Figure 3.12: Profil de la déformation radiale, pression et vitesse relative du fluide en fonction du rayon. Comparaison entre les types d'AEF (linéaire ou non linéaire avec déformations finies), la prédiction du modèle analytique et une AEF avec des conditions adhésives pour le test de relaxation en compression non confinée avec une amplitude de 0,5% pour des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A) et au cas 8 (B) du Tableau 3.1. Les comparaisons sont effectuées dans le domaine de temps à $t=5$ s (t_0) et $t=65,6$ s ($t_g/3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1$ mm. La normalisation des résultats est identique à celle du Table 2.2..... 92

Figure 3.13: Profil de la déformation radiale, pression et vitesse relative du fluide en fonction du rayon. Comparaison entre les types d'AEF (linéaire ou non linéaire avec déformations finies), la prédiction du modèle analytique et une AEF avec des conditions adhésives pour le test de relaxation en compression non confinée avec une amplitude de 10% pour des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A) et au cas 8 (B) du Tableau 3.1. Les comparaisons sont effectuées dans le domaine de temps à $t=5$ s (t_0) et $t=65,6$ s ($t_g/3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1$ mm. La normalisation des résultats est identique à celle du Table 2.2..... 93

Figure 3.14: Réponse en contrainte simulée à partir d'une série de 20 pas de déplacements consécutifs à 0.5% de déformation, jusqu'à une déformation accumulée de 10%. Comparaison entre la prédiction d'une AEF linéaire (---) et non linéaire (—). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 8 du Tableau 3.1 ont été utilisés..... 94

Figure 3.15: Effets des déformations finies sur la prédiction des paramètres mécaniques, E_m (○ ou ●), E_f (△ ou ▲), ν_m (◇ ou ◆) et k (□ ou ■), par le modèle analytiques linéaires. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non

linéaire (déformations finies) sont interprétés individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les paramètres prédits sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. Les paramètres initiaux sont constants et correspondent aux cas 6, 7, 8, 9 et 10 du tableaux 3.1. L'effet de différentes valeurs initiales pour k (A), E_f (B) et E_m (C) est également étudié. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$ 96

Figure 3.16: Effet de la non linéarité de la perméabilité sur la réponse en contrainte (en pointillé) pour une série de 20 pas de compression (0,5% de déformation) jusqu'à 10% de déformation sur l'axe (en A). La réponse pour le cas d'une perméabilité constante (cas 8 du Tableau 3.1) est montrée en trait plein. Les paramètres de matériaux sont identiques au cas 8 mais la perméabilité non linéaire est calculée selon la méthode #1 (voir Figure 3.7). Les 1er et le 20ème pas de relaxation sont montrés en B et C 97

Figure 3.17: Effet de la non linéarité de la perméabilité sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) sont interprétés individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les paramètres prédits sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. La perméabilité de la méthode #1 est calculée selon l'équation empirique 3.7 (Lai et al., 1980) et celle de la méthode #2 est calculée selon l'équation 3.8 qui décrit l'écoulement au niveau microstructural. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que la perméabilité est non linéaire. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$ 98

Figure 3.18: Exemple de réponse en contrainte simulée par une AEF non linéaire (déformations finies) avec le module du réseau des ressorts non linéaires (courbes en pointillés), suite à une série de 20 pas de déplacements consécutifs (0.5% déformation chacun) en compression jusqu'à 10 % déformation (en A). Le réponse

avec E_f linéaire (cas 8) est montrée en trait plein. Les paramètres de matériaux sont identiques au cas 8 mais on a pris $E_f = 5000\varepsilon_r + 5$ MPa. Les 1er et le 20ème pas de relaxation sont montrés en B et C 99

Figure 3.19: Effet de la non linéarité du réseau des ressorts sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) est interprété individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les paramètres prédits (E_m en A, ν_m en B et k en C) sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f est non linéaire. On étudie ici 3 cas où la variation de E_f avec la déformation est plus ou moins importante: $a=200$ (◆), 747 (●) et 5000 (▲) MPa avec $b=5$ (voir l'équation 3.10). Les variations du coefficient de Poisson effectif ν_{eff} (D) et du module de compression non confinée à l'équilibre E_{33} (E) sont également montrées. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10$, $n_B=30$, $\beta=0$, $h=1$ mm 101

Figure 3.20: Effet de la non linéarité du réseau des ressorts sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) est interprété individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et la prédiction de E_f (●) est comparée avec l'allure initiale (—) de la variation de E_f avec la déformation radiale injectée dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f est non linéaire. Les Figures A, B, C correspondent aux cas a, b et c définis précédemment. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10$, $n_B=30$, $\beta=0$, $h=1$ mm 102

Figure 3.21: Variation de E_f à l'intérieur des pas #1 (▲) (0.5% déformation accumulée) et #20 (▼) (10% de déformation accumulée), à $r = 0$ pour le cas b. de la Figure 3.5

..... 102

Figure 3.22: Effet combiné de la non linéarité de k et E_f . Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies + k non linéaire + E_f non linéaire) est interprété individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les prédictions de E_f (●) et de k (■) sont comparées avec leur allure initiale injectée dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f et la perméabilité k sont non linéaires. Ici on a $E_f = 747E_r + 5$ et k varie selon la méthode #1 (équation 3.7). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10, n_B=30, \beta=0, h=1\text{mm}$ 103

Figure 3.23: Variation de E_f et de k à l'intérieur des pas #1 (0.5% déformation accumulée) et #20 (10% de déformation accumulée) à $r = 0$, d'une série de 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies + k non linéaire + E_f non linéaire)..... 104

LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

AEF:	Analyse par éléments finis
COMP:	Nonhomogeneous composite description
GAG:	glycoaminoglycan
HKS:	Hibbit, Karlson et Sorensen
MEF:	Modèle par éléments finis
Norm.:	Normalized
TIP:	Transverse isotropic poroélasticity
a	= rayon des GAG
a	= coefficient
a_n	= n^{th} racine de $(a_n/\sqrt{s_0})J_0(a_n/\sqrt{s_0}) - AJ_1(a_n/\sqrt{s_0}) = 0$
α	= rapport du volume de solide sur le volume de fluide
A, B, C	= coefficients
b	= <i>intercharge distance</i> (calcul de la perméabilité)
b	= coefficient
β	= définit la transition entre les zones A et B (< 1)
C	= tenseur d'élasticité de 4 ^{ème} ordre pour le modèle TIP
C_{ij}	= composantes de la matrice de souplesse
C_{pg}	= concentration en protéoglycane
χ	= rapport du volume du réseau de fibrilles sur le volume total
E_1	= module de Young dans le plan (modèle TIP)
E_3	= module de Young sur l'axe de compression (modèle TIP)
E_{33}	= module de compression non confinée

- E_m = module de Young de la matrice écoulee
 E_s = module de Young , modèle biphasique isotrope
 E_f = Module de Young équivalent réseau des fibrilles ($= \chi e_f / 3$)
 $E_{f_{\max}}$ = Module de Young équivalent du réseau des fibrilles maximum admissible
 e_f = Module de Young d'une fibril de collagène individuelle
 e = *voids ratio* définit par V_f / V_s
 e_0 = *voids ratio* initial
 e = dilatation
 ε = tenseur des déformations
 ε_r = déformation radiale normalisée
 $\bar{\varepsilon}^{matrice}$ = déformations dans la matrice (dimensionnelles)
 $\bar{\varepsilon}^{fibrils}$ = déformations dans le réseau des fibrilles (dimensionnelles)
 $\bar{\varepsilon}$ = déformations dans le cartilage (dimensionnelle)
 $E_r(s)$ = fonction de transfert de la déformation radiale
 $E'_r(j\omega)$ = réponse en fréquence de la déformation radiale
 ε_θ = déformation circonférencielle normalisée
 $E_\theta(s)$ = fonction de transfert de la déformation circonférencielle
 $E'_\theta(j\omega)$ = réponse en fréquence de la déformation circonférencielle
 $\bar{\varepsilon}_r$ = déformation radiale dimensionnelle
 $\bar{\varepsilon}_\theta$ = déformation circonférencielle dimensionnelle
 $\bar{\varepsilon}_z$ = déformation axiale imposée dimensionnelle
 ε_0 = $\bar{u}_0 / h$
 H_a = module de compression confinée
 $H(s)$ = fonction de transfert de la contrainte à la surface
 $H'(j\omega)$ = réponse en fréquence de la contrainte à la surface
 h = épaisseur du disque de cartilage

- J_i = fonction de Bessel d'ordre i
 I_i = fonction de Bessel modifiée d'ordre i
 K = coefficient de traînée dynamique
 K_{paral} = constante de Darcy pour un écoulement parallèle aux GAG
 K_{perp} = constante de Darcy pour un écoulement perpendiculaire aux GAG
 $K_{\text{nk}}^{\text{radial}}$ = rigidité totale des ressorts radiaux contenus dans un élément
 $K_{1a}, K_{1b}, K_{3a}, K_{3b}, K_2$ = rigidité des ressorts radiaux contenus dans un élément
 K_r = rigidité axiale
 $K_{4a}, K_{4b}, K_{6a}, K_{6b}, K_5$ = rigidité des ressorts axiaux contenus dans un élément
 k = perméabilité hydraulique
 k_0 = perméabilité hydraulique initiale
 λ = coefficient
 λ_s, μ_s = coefficients de Lamé pour un matériau isotrope
 M_0, M = coefficient
 M_{cs} = poids moléculaire d'un *chondroïtin sulfate disaccharide* dissocié
 m = nombre de rangées d'éléments
 μ = viscosité dynamique
 N = constante d'Avogadro
 n_A = nombre d'éléments dans la zone A
 n_B = nombre d'éléments dans la zone B
 ν_{21} = coefficient de Poisson dans le plan transverse(modèle TIP)
 ν_{31} = coefficient de Poisson hors plan (modèle TIP)
 ν_m = coefficient de Poisson de la matrice
 ν_{eff} = coefficient de Poisson effectif
 ν_s = coefficient de Poisson, modèle biphasique isotrope
 p_{abaqus} = pression du liquide dans Abaqus

- $P(s)$ = fonction de transfert de la pression du fluide
 $P'(j\omega)$ = réponse en fréquence de la pression du fluide
 p = pression relative du fluide normalisée
 $\bar{p}$ = pression relative du fluide dimensionnelle
 R = E_f / E_m
 R = *cell radius* (calcul de la perméabilité)
 r_0 = rayon du disque de cartilage
 r = rayon normalisé
 $\bar{r}$ = rayon dimensionnel
 S_{ij} = composantes de la matrice d'élasticité
 s = variable de Laplace
 s_0 = fréquence caractéristique
 σ^s, σ^f = contraintes dans les phases solide et fluide
 σ^t = $\sigma^s + \sigma^f$
 σ^E = tenseur des contraintes élastiques
 $\bar{\sigma}_i^E$ = composante dimensionnelle dans la direction i de la forme vectorielle contractée du tenseur des contraintes élastiques
 σ_{abaqus}^t = contrainte totale dans Abaqus
 σ_{abaqus}^* = contrainte effective dans Abaqus
 $\bar{\sigma}_i^{matrix}$ = contrainte élastique dimensionnelle dans la matrice dans la direction i
 $\bar{\sigma}_i^{fibrils}$ = contrainte élastique dimensionnelle dans le réseau des fibrilles dans la direction i
 $\bar{\sigma}_{i\text{équivalents}}^{fibrils}$ = contrainte équivalente dimensionnelle dans le réseau des fibrilles ($= \chi \bar{\sigma}_i^{fibrils}$).
 σ_a = contrainte moyenne à la surface normalisée
 $\bar{\sigma}_a$ = contrainte moyenne à la surface dimensionnelle (*load intensity*)
 $\bar{\sigma}_0$ = contrainte incrémentale dimensionnelle à l'équilibre pour les mesures expérimentales

t	= temps normalisé
$\bar{t}$	= temps dimensionnel
t_0	= temps de rampe normalisé
$\bar{t}_0$	= temps de rampe dimensionnel
t_g	= temps caractéristique défini par $1/s_0$
t_g^{max}	= temps caractéristique maximal
$U(s)$	= fonction de transfert du déplacement radial
$U'(j\omega)$	= réponse en fréquence du déplacement radial
$u, \bar{u}_r$	= déplacement radial normalisé
$\bar{u}$	= déplacement radial dimensionnel
u_0	= amplitude du déplacement incrémental ou sinusoïdal imposé
$\bar{u}_\theta$	= déplacement circonférenciel dimensionnel
$V(s)$	= fonction de transfert de la vitesse radiale relative du fluide
$V'(j\omega)$	= réponse en fréquence de la vitesse radiale relative du fluide
v_r	= vitesse relative normalisée du fluide dans la direction radiale
$\bar{v}_r$	= vitesse relative dimensionnelle du fluide dans la direction radiale
V^s, V^f	= volume des phases solides et fluides
ω	= pulsation
z	= coordonnées sur l'axe z

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I : DETERMINATION DES MATRICES DE RIGIDITÉ ET DE SOUPLESSE.....	121
ANNEXE II : MANIPULATION DES EQUATIONS DE BASE.....	131
ANNEXE III : RESOLUTION MATHEMATIQUE DANS LE DOMAINE DE LAPLACE.....	135
ANNEXE IV : INVERSION DANS LE DOMAINE DE TEMPS ET REPONSES POUR UNE FONCTION RAMPE ET POUR UN DÉPLACEMENT DYNAMIQUE SINUSOÏDAL.....	143
ANNEXE V : CALCUL DES RIGIDITÉS DES RESSORTS.....	148

1. INTRODUCTION, ETATS DES CONNAISSANCES ET OBJECTIFS

1.1 Introduction

Les articulations de type diarthroïdale, comme l'articulation du genoux ou de l'épaule, qui permettent des mouvements relatifs de grandes amplitudes, ont pour rôle de faciliter les déplacements et les mouvements du corps humain dans l'espace qui l'entoure. Durant une grande partie de la vie, ces articulations présentent des caractéristiques excellentes de faible friction, de bonne lubrification, de capacité à transmettre les charges mécaniques (le poids du corps par exemple) vers les os et à absorber les chocs divers. Un des composants essentiels à la présence et au maintien de ces caractéristiques dans l'articulation est le cartilage articulaire, dont la caractérisation sur les plans biologiques, biochimiques et biomécaniques a fait l'objet de nombreuses études depuis les 3 dernières décennies. Le cartilage articulaire est un tissu biologique connectif dense, de couleur blanchâtre, de quelques millimètres d'épaisseur, qui couvre les extrémité des os mis en jeu dans l'articulation. Le cartilage articulaire est aussi un matériau dont la composition, l'organisation et la structure sont complexes.

Malheureusement, ce tissu peut être affecté et dégradé par trauma ou par des maladies chroniques dégénératives progressives. Dans les cas extrêmes où la surface articulaire et le cartilage sont détruits dans l'articulation, un remplacement partiel ou total de cette dernière par une prothèse peut être envisageable. Ce remplacement de l'articulation est une intervention chirurgicale lourde, qui peut ne pas redonner entièrement au patient, le confort et les caractéristiques d'une articulation naturelle saine. Malgré les progrès considérables accomplis pour améliorer sans cesse cette intervention chirurgicale, celle-ci reste un traitement irréversible, qui intervient au stade final de dégradation de l'articulation quand les thérapies alternatives se sont montrées insuffisantes.

De nombreuses recherches sont menées afin de comprendre et d'enrayer l'apparition et l'évolution de ces maladies dégénératives du cartilage. Une des maladies impliquées dans la dégradation du cartilage est la maladie de l'ostéoarthrose (*osteoarthritis*), qui touche un grand nombre de la population vieillissante. Les facteurs responsables de l'apparition de cette maladie sont méconnus. Un des facteurs considérés comme stimuli de la réponse dégénérative est l'effet de certains chargements mécaniques sur le cartilage induisant des réponses biologiques dégénératives. Une des premières étapes vers une compréhension de la corrélation entre les chargements mécaniques et les réponses dégénératives induites s'impose comme étant l'étude des phénomènes mécaniques qui surviennent dans le cartilage suite à un chargement mécanique, c'est-à-dire l'étude des forces, des contraintes, de la pression du fluide, des déformations, des vitesses d'écoulements du fluide dans le cartilage. C'est pourquoi, des modèles (analytiques et numériques) ont été développés pour prédire ces phénomènes mécaniques dans le cartilage. Ces modèles sont basés sur des lois de comportement spécifiques ainsi que sur différentes hypothèses proposées par les différents travaux. Dans la majorité des études proposées sur ce sujet, le cartilage était considéré comme un matériau biphasique, homogène et uniforme.

Dans cette étude, on propose qu'une description biphasique non homogène et composite du cartilage est essentielle pour modéliser adéquatement le comportement mécanique du cartilage. Cette description non homogène et composite est justifiée par la structure physiologique du cartilage. Après une revue de l'état des connaissances sur le cartilage, nous allons développer, dans un premier temps, une solution analytique de cette description non homogène composite pour une géométrie simple ayant des conditions aux limites particulières, à partir des équations fondamentales du modèle biphasique et à partir des relations contrainte/déformation infinitésimales. Ce modèle analytique va ensuite être validé par des résultats expérimentaux. Puis, cette description va être incorporée dans un modèle numérique en utilisant le code commercial d'éléments finis "Abaqus, version 5.5", où une étude de différents types de non linéarités (géométriques et du matériau) va être effectuée. Enfin, des perspectives de développement seront

proposées pour améliorer cette modélisation des phénomènes mécaniques dans le cartilage.

1.2 Contexte

L'étude du cartilage est un domaine où de nombreuses recherches sont menées, motivées par l'étude des maladies qui mènent à la dégénération du cartilage, dont l'ostéoarthrose. Ces études se situent aussi bien sur le plan biologique et biochimique pour la compréhension des phénomènes de synthèse et de dégradation du tissu, que sur le plan biomécanique pour la détermination des propriétés mécaniques du cartilage et la compréhension des phénomènes mécaniques dans ce tissu.

Le cartilage articulaire forme une surface à faible friction dans les articulations diarthroïdale. Un exemple d'articulation diarthroïdale peut être l'articulation du genou (voir Figure 1.1). Le cartilage est un tissu biologique particulier. Bien qu'il ne contient pas de nerfs, ni de vaisseaux sanguins et qu'il reste insensible à toute réaction immunitaire, il est capable d'assurer seul son bon fonctionnement.

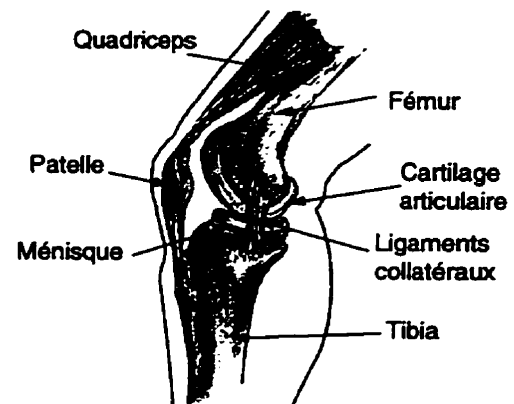


Figure 1.1: L'articulation du genou.

Alors que les compositions biologique et chimique du cartilage sont relativement bien connues, les propriétés mécaniques du tissu sont difficiles à établir. Celles-ci sont en effet le résultat de complexes interactions électrochimico-mécaniques des divers composants présents dans le cartilage. Ces propriétés mécaniques peuvent en plus varier avec un grand nombre de facteurs tels que l'âge, la profondeur dans le tissu, les différentes directions, la concentration des composés, la nature de l'articulation, etc...

Certains mécanismes biologiques de dégénération du tissu ont été identifiés, le problème étant de déterminer les stimuli qui déclenchent et contrôlent ces mécanismes. Des facteurs mécaniques ayant été envisagés comme déclencheur de ces mécanismes de dégénération, des modèles ont été développés pour tenter de comprendre et de prédire le comportement mécanique du cartilage, sous l'action de différentes sollicitations. Différents types de tests expérimentaux ont été proposés pour étudier les propriétés mécaniques du cartilage, et pour éventuellement valider les différents modèles proposés.

Dans les paragraphes qui suivent, les différents points énoncés plus haut vont être passés en revue.

1.3 Composition du cartilage

Le cartilage articulaire peut être considéré comme étant un matériau biologique composé d'une matrice organique, composite et poreuse, saturée par un fluide qui peut s'écouler à travers le matériau. La composition spécifique du cartilage peut varier avec l'âge, la position sur la surface articulaire et à travers l'épaisseur, et le type d'articulation. De manière générale, le cartilage est composé d'une matrice extra cellulaire et de cellules, les chondrocytes. Cette matrice extra cellulaire est elle-même composée de fibres de collagènes organisées en réseau, de protéoglycane (*proteoglycan*), d'eau, ainsi que d'autres éléments en très faibles quantités (des protéines).

1.3.1 Les chondrocytes

Les chondrocytes sont des cellules qui représentent moins de 10% du volume de tissu total. Elles ont pour rôle la génération d'une grande quantité de matrice extra cellulaire pendant la croissance et elles en assurent le maintien pendant la période adulte. Ces cellules sont actives sur le plan métabolique et peuvent répondre à toute une série de stimuli environnementaux comme des facteurs de croissance, des agents chimiques, des interleukines (qui transmet des informations dans la cellule), la composition de la

matrice, des changements de pression et des chargements mécaniques. Certains de ces facteurs peuvent mener à une dégradation du cartilage.

1.3.2 Les fibrilles de collagènes

Les fibrilles de collagène sont des composants prédominants dans la composition de la matrice organique extra cellulaire. Leur rôle est principalement structural, supportant les efforts mécaniques en tension (effet comparable à des cordes) et elles retiennent les protéoglycanes immobilisées dans leur réseau entrelacé. Elles représentent 50% de la masse sèche du tissu et sont principalement de type II. Les fibrilles de collagènes s'organisent autour d'ensembles de molécule de collagène. Ces molécules de collagène sont des protéines constituées de 3 chaînes de polypeptides (les chaînes α) qui s'organisent en hélices. Ces chaînes de polypeptides sont constituées d'une succession de séquences d'acides aminés spécifiques et ont des longueurs de l'ordre de 300 nm.

1.3.3 Les protéoglycanes

Les protéoglycanes sont des macro molécules complexes qui s'organisent autour d'un noyau de protéine sur lequel viennent se fixer des polysaccharides. Elles représentent approximativement de 20 à 30% de la masse sèche totale du cartilage normal. Ces protéoglycanes contiennent des ions chargés négativement (COO^- , SO_3^-) qui lui confèrent une bonne résistance aux efforts en compression, comme ces charges sont à l'origine de forces répulsives.

1.3.4 Le fluide interstitiel

L'eau est le composant le plus abondant dans le cartilage articulaire normal, représentant de 65 à 80% de la masse de tissu humide. Une petite quantité d'eau est présente dans les milieux intracellulaire, alors que près de 30% de la masse d'eau se concentre dans les espaces intrafibrillaire et la partie restante se situe dans les pores de la matrice extra cellulaire. La présence de fluide est très importante car elle permet le transport de

nutriments et elle est source de lubrification dans l'articulation. L'eau présente dans le cartilage contient des ions chargés positivement (Ca^{2+} , Na^+) qui balancent les ions négatifs situés dans les protéoglycanes. Cette présence d'ions est à l'origine de la pression osmotique qui agit dans le cartilage quand une quantité de fluide est chassée à l'extérieur du tissu lorsqu'un gradient de pression est appliqué ou lorsque la matrice est comprimée.

1.4 Structure et organisation dans le cartilage

La composition mais aussi l'organisation des composants du cartilage peuvent varier à l'intérieur du cartilage. Ces variations peuvent inclure des différences de forme et de volume pour les cellules, des orientations et des dimensions différentes pour les fibres de collagène ainsi que la concentration en protéoglycane. Le cartilage peut être divisé en 4 zones distincts: la zone superficielle, la zone transitionnelle, la zone profonde et la zone calcifiée (près de l'os). La zone superficielle forme la surface articulaire où vient glisser la seconde partie de l'articulation. Les fibrilles de collagènes y sont organisées parallèlement à la surface et leur diamètre est y le plus faible (Hedlund et al., 1993). Dans cette zone, les cellules de chondrocytes sont déformées alors que la concentration de protéoglycane est la plus faible et la concentration en eau la plus élevée. Dans la zone intermédiaire, les fibrilles de collagène sont distribuées de manière aléatoire sans direction préférentielle et la concentration en protéoglycanes augmente alors que leur répartition est plus homogène. Dans la zone profonde, les fibrilles de collagène sont distribuées verticalement par rapport à la surface de l'os sous-jacent. Dans cette zone, la concentration en protéoglycane est la plus grande. Enfin, dans la zone calcifiée, la structure devient plus opaque et se confond avec la structure de l'os. Trois autres zones ont également été définies en fonction de la proximité de cellules de chondrocytes: les zones péri-cellulaire, territoriale et inter-territoriale. Là encore dans ces 3 zones, certains facteurs peuvent varier comme le diamètre de fibrilles de collagènes qui augmente avec la proximité de cellules de chondrocyte (Hedlund et al., 1993).

1.5 Les différents types de tests existants

Différents types de test ont été proposés pour étudier les propriétés mécaniques du cartilage et pour extraire des paramètres mécaniques soit par mesures directes, soit par l'intermédiaire de modèles.

1.5.1 Le test de compression confinée

La configuration typique du test en compression confinée est illustrée à la Figure 1.2. Un filtre poreux et rigide compresse un disque de cartilage, confiné entre les parois rigides et imperméables d'un support. Le fluide peut s'écouler à travers le filtre dans la direction axiale. Selon le type de compression, le filtre peut être à déplacement contrôlé (relaxation de

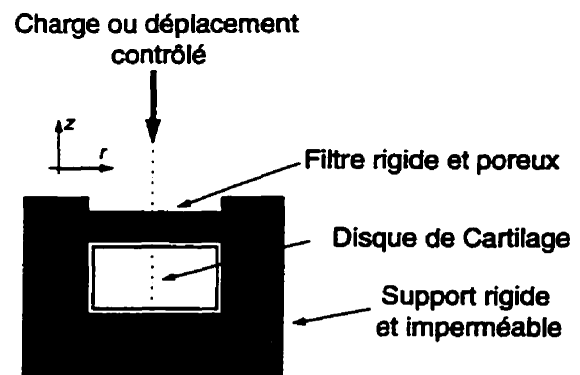


Figure 1.2: La compression confinée

contraintes) ou à charge contrôlée (fluage). La réponse temporelle du cartilage est mesurée par l'intermédiaire d'une cellule de charge placée au niveau du filtre et qui peut mesurer H_a , le module de compression confinée à l'équilibre (*aggregate modulus*). Pour ce type de test, des auteurs (Buschmann et al., 1995) ont rapporté que le phénomène de pénétration du cartilage dans les pores du filtre à l'interface peut venir modifier la réponse du cartilage.

1.5.2 Le test de compression non confinée

La configuration typique du test en compression non confinée est présentée à la Figure 1.3. Deux plaques rigides et imperméables viennent comprimer un disque de cartilage. Le fluide peut s'écouler à la surface périphérique du cartilage. Le mouvement des plaques peut être à déplacement contrôlé (relaxation de contraintes) ou à charge contrôlée (fluage). La réponse temporelle du cartilage est mesurée par l'intermédiaire d'une cellule de charge au niveau d'une des plaques et qui mesure directement à l'équilibre le module de compression non confinée.

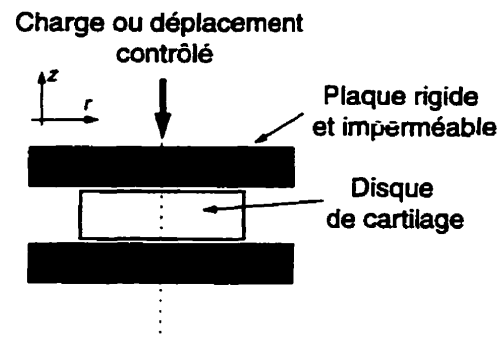


Figure 1.3: la compression non confinée

1.5.3 Le test d'indentation

Le test d'indentation est considéré par certains auteurs comme bien représentatif des conditions in situ du cartilage (Suh et al., 1994). La Figure 1.4 décrit ce type de test. Un indenteur cylindrique vient comprimer avec un déplacement ou une charge contrôlée, un disque de cartilage de rayon largement supérieur à celui de l'indenteur. L'indenteur peut être poreux ou imperméable. La réponse du cartilage est mesurée par l'intermédiaire d'une cellule de charge placée au niveau de l'indenteur.

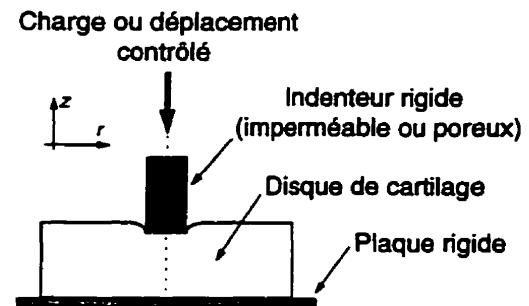


Figure 1.4: Le test d'indentation

Dans notre étude, nous avons utilisé la configuration du test de compression non confinée.

1.6 Les propriétés mécaniques du cartilage

L'étude des propriétés mécaniques du cartilage fait l'objet de nombreux travaux. Le cartilage peut être considéré comme un matériau poreux, anisotrope, saturé par un fluide. Les propriétés mécaniques qui découlent de ce matériau sont le résultat non seulement des interactions des composants qui le constituent, mais aussi d'une organisation structurale complexe. Comme nous l'avons déjà dit, ces propriétés mécaniques varient qualitativement et quantitativement avec différents facteurs. Néanmoins, des comportements qualitatifs ont été notés et des gammes quantitatives de paramètres mécaniques peuvent être énoncées, en fonction des modèles utilisés.

1.6.1 Variation des propriétés mécaniques avec la profondeur dans le tissu

Kempton et al. (1973) ont été parmi les premiers à étudier les propriétés mécaniques en tension du cartilage humain issu de chondyles fémoraux, dans des plans parallèles à la surface articulaire, en fonction de la profondeur. Ils ont montré que la rigidité en tension du tissu diminue avec la profondeur et ils attribuent ce phénomène à la diminution de la concentration en collagène. Depuis, de nombreux travaux ont confirmé cette constatation.

Une étude de Woo et al. (1979) constate également une variation des propriétés mécaniques dans le cartilage et suggère même d'utiliser des propriétés de matériaux différentes pour des profondeurs différentes afin de modéliser de manière efficace le matériau.

Schinagl et al. (1996) ont étudié récemment l'effet de la profondeur sur les propriétés mécaniques du cartilage patello-fémoral en compression, à l'aide d'une méthode par vidéo-épifluorescence microscopique. Cette méthode permet de visualiser des particules marquées pendant la compression et de mesurer ainsi des déformations locales. Ils ont ainsi relevé que la zone superficielle supporte des déformations plus importantes que les zones inférieures et que la rigidité en compression augmente avec la profondeur.

Une autre constatation récente de la variation des propriétés mécaniques du cartilage avec la profondeur a été faite par Jurvelin et al. (1997) où une méthode optique a été employée pour déterminer le coefficient de Poisson d'un disque de cartilage d'épaule. Il a été observé que l'expansion latérale est hétérogène à travers la profondeur du tissu suggérant des propriétés mécanique différentes. Ces études montrent l'importance de la profondeur dans le tissu pour les caractéristiques mécaniques du cartilage

1.6.2 Variation des propriétés mécaniques avec la direction et l'orientation

Kempson et al. (1973) ont également étudié l'effet de l'orientation des fibres de collagène sur la rigidité en tension du cartilage. Ils sont arrivés à la conclusion que la rigidité en tension est plus grande quand les fibres de collagène sont orientées parallèlement à l'axe de chargement que par rapport à une orientation perpendiculaire à cet axe. Woo et al. (1979) trouvent également que le cartilage est plus rigide en tension dans la direction des fibres de collagène pour les zones superficielles et transitionnelles. Ils notent cependant que cet effet devient moins important dans les zones profondes. Roth et al. (1980) ont également noté cet effet pour du cartilage provenant d'articulation patello-fémorale. De plus, Hedlung et al. (1993) suggèrent que la rigidité du tissu en tension décroît quand la distance avec des cellules de chondrocyte augmente, c'est-à-dire quand on atteint les zones territoriales et inter-territoriales.

Akizuki et al. (1986) ont évalué les propriétés mécaniques du cartilage du genou en tension. Ils ont observé que le tissu était plus rigide dans les régions où les charges mécaniques extérieures appliquées sont faibles (*low weight-bearing areas*) que dans les zones où les charges sont élevées (*high weight-bearing areas*). Ils attribuent ce phénomène à la différence de concentration en collagène et en protéoglycane dans ces régions.

Jurvelin et al. (1996) ont, quant à eux, effectué des tests mécaniques en compression sur des cartilages du genou selon 2 directions: l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la

surface articulaire. Ils ont constaté que le module à l'équilibre ainsi que la perméabilité du tissu sont plus grands pour les spécimens orientés parallèlement à la surface articulaire que ceux orientés perpendiculairement. Ainsi, toutes ces études montrent le caractère anisotrope du cartilage.

1.6.3 Variation des propriétés mécaniques avec la concentration en composants

Kempson et al. (1973) ont aussi étudié l'effet de la concentration des composants. Ils ont montré une bonne corrélation entre la concentration en collagène et la rigidité en tension ainsi que la contrainte à la rupture. Par contre, ils n'ont relevé aucune corrélation entre la rigidité en tension et la concentration en protéoglycane. Akizuki et al. (1986) ont également mis en évidence que la rigidité en tension du cartilage est liée au ratio quantité de collagène sur quantité de protéoglycane. Ils ont également fait la constatation intéressante que cette rigidité était plus faible dans une solution saline à 0,15 molaire de NaCl que dans de l'eau déionisée, montrant l'effet de la présence de composants ionisés. Eisenberg and Grodzinsky (1985) ont aussi observé la dépendance de la rigidité en compression du cartilage avec la concentration de composants ioniques. Ils ont attribué ce phénomène à la présence de forces électrostatiques qui apparaissent pendant la compression et qui varient avec la présence d'ions.

L'étude de Armstrong et al. (1982) a montré la grande corrélation entre la concentration en eau et la rigidité en compression ainsi que la perméabilité du tissu, par le biais de test de fluage en compression sur du cartilage patello-fémoral. Lorsque la concentration en eau augmente, ils ont observé que le tissu devenait plus perméable et moins rigide.

Bader et al. (1981) ont pour leur part étudié l'effet de la présence d'une enzyme, l'élastase leucocytaire, sur les propriétés mécaniques du cartilage en tension. Ils ont remarqué que cette enzyme a pour effet de réduire considérablement la rigidité en tension ainsi que la résistance à la rupture du cartilage. En fait, cette enzyme vient dégrader le réseau des fibres de collagènes, en détruisant les liaisons covalentes dans les fibres.

Comme on vient de le voir, les propriétés mécaniques peuvent varier en fonction de la concentration en collagène, en protéoglycanes et en eau, de la présence d'éléments ionisés et d'enzymes.

1.6.4 Variation des propriétés mécaniques avec l'âge

Roth et al. (1980) ont observé que l'âge avait de l'influence dans les propriétés mécaniques du cartilage. En effet, ils ont montré que du cartilage de l'articulation patello-fémorale immature avait une rigidité en tension supérieure à celle d'un cartilage adulte. Ils suggèrent également que cette rigidité diminue avec l'âge dans les zones transitionnelles et profondes mais pas dans la zone superficielle. Les travaux de Kempson et al. (1982), menés sur des cartilages issus de chondyles fémoraux âgés de 8 à 91 ans, suggèrent même que la rigidité en tension et la résistance à la rupture du cartilage dans la zone superficielle augmentent avec l'âge pour atteindre des valeurs maximales vers l'âge de 30-40 ans et qu'après cette période, celles-ci diminuent avec l'âge, comme constaté par Roth et al. (1980). Par contre, comme suggéré par ces derniers, Kempson et al. (1982) remarquent que la rigidité en tension et la résistance à la rupture dans les zones plus profondes diminuent continuellement avec l'âge.

Contrairement à ce qu'avaient observé ces 2 précédentes études, Armstrong et al. (1982) remarquent que l'âge n'a qu'une faible influence sur la rigidité du cartilage en compression, et aucune influence sur la perméabilité du tissu. Plus récemment, Akizuki et al. (1986) ont même observé que l'âge ne semble pas du tout avoir d'influence sur la rigidité en tension du tissu, suggérant que l'influence de l'âge remarquée dans les études précédentes serait plutôt due à des dégénération liées à une fibrillation du tissu ou à un processus d'ostéoarthrose plutôt qu'à l'effet intrinsèque de l'âge.

1.6.5 Propriétés mécaniques qualitatives

Une des premières propriétés mécaniques de cartilage qui a été observée, par l'intermédiaire de tests d'indentation in situ (Kempson et al., 1971; Coletti et al., 1972),

est le caractère viscoélastique de la déformation du cartilage, c'est-à-dire que le cartilage montre une réponse instantanée élastique suite à l'application soudaine d'une charge compressive, suivie d'une réponse lente en fluage qui atteint un équilibre pour des temps suffisamment long. Il a été proposé que ce caractère viscoélastique du cartilage est dominé par l'écoulement du fluide interstitiel dans le cartilage.

Une étude de Mansour et al. (1976) ont remarqué que la perméabilité du cartilage variait avec la déformation en compression, la première diminuant quand la dernière augmentait. Ils ont attribué ce phénomène à la réorganisation du réseau des fibre de collagène et des protéoglycanes au fur et à mesure de la compression, modifiant ainsi la configuration de l'écoulement. Une étude de Lai et al. (1980) a quantifié ce phénomène et propose que la perméabilité intrinsèque du cartilage (différente de la perméabilité apparente mesurable par expérimentation) soit une fonction de la dilatation:

$$k_{\text{intrinsèque}} = k_0 \exp(M_0 e) \quad (1.1)$$

où k_0 est la perméabilité initiale (avant déformation), M_0 une constante et e la dilatation.

Roth et al. (1980), ayant effectué des tests en tension sur du cartilage bovin ont rapporté un comportement non linéaire de la contrainte en tension à l'équilibre avec la déformation pour des valeurs de cette dernière s'élevant jusqu'à 80%. Cependant, Akizuki et al. (1986) ont quant à eux noté, contrairement à l'étude précédente, un comportement linéaire de la contrainte à l'équilibre avec la déformation en tension jusqu'à 15% de déformation. Mow et al. (1980) ont également relevé un comportement linéaire de la contrainte en compression à l'équilibre avec la déformation jusqu'à environ 22% de déformation, pour des tests en compression non confinée sur des spécimens bovin.

Un comportement intéressant à été remarqué par Mow et al. (1992). Ceux ci ont souligné un comportement non linéaire entre la rigidité en tension et la rigidité en compression à l'équilibre. En effet, la rigidité en tension du cartilage à l'équilibre peut être de 5 à 10 fois

plus élevée que la rigidité en compression. De plus, une étude de Buschmann et al. (1995) a étudié la linéarité de réponse temporelle en contrainte du cartilage en compression confinée (voir le paragraphe 1.5.1). Ces derniers ont remarqué que la réponse en contrainte du cartilage à des déplacements de faibles amplitudes en compression était linéaire, mais que cette réponse était non linéaire pour des déplacements de faibles amplitudes en relâche. Une des explications possibles de ce phénomène pouvait être l'effet de la pénétration du cartilage dans les pores du filtre. Cette éventualité a été étudiée dans l'étude de Buschmann et al. (soumis) et s'impose comme étant une cause possible de modification et de perturbation de la réponse du cartilage. Cependant, le même phénomène de non linéarité entre compression et relâche pour la réponse en contrainte été observé par une autre étude (Fortin et al, 1997), mais pour le cas de la compression non confinée (voir le paragraphe 1.5.2), ce qui révèle que ce comportement est intrinsèque au cartilage et qu'il n'est pas lié au système expérimental ou à la configuration du test en compression confinée.

1.7 Les modèles existants

Comme nous l'avons vu, le développement de modèles est nécessaire pour comprendre et prédire les phénomènes mécaniques dans cartilage suite à des sollicitations mécaniques. De plus, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, le cartilage est un tissu mou contenant une grande quantité de fluide qui peut s'écouler. La présence de ce fluide donne au cartilage des propriétés viscoélastiques (voir paragraphe 1.6.5). De plus, le cartilage comporte une structure complexe. Il va donc être important de développer des modèles qui vont être capable de prendre en compte toutes ces spécificités.

Dans les années soixante, le cartilage fut d'abord décrit comme un milieu monophasé purement élastique. Puis, devant l'insuffisance de ce type de modèle, une description considérant un milieu monophasé viscoélastique fut proposée. Bien vite, les limitations de ce type de modèle apparurent, et des approches tenant compte directement de la présence de fluide dans le cartilage furent développées.

Une façon de décrire le comportement mécanique des tissus mous en utilisant des modèles continus incluant la présence de fluide est d'utiliser la formulation poroélastique, comme le rappelle une étude de Simon (1992). Cette formulation, issue directement de la mécanique des sols et proposée par Biot (1941) considère un solide poreux saturé en fluide et elle est basée sur la détermination de deux paramètres inconnus: le déplacement du solide et le déplacement relatif du fluide. Une autre façon de décrire le comportement mécanique des tissus mous est la formulation de la théorie des mixtures (*theory of mixtures*). Mow et al., (1980) ont adapté cette formulation à l'étude du cartilage et ils ont proposé la formulation biphasique. Cette formulation considère le cartilage comme étant un milieu continu constitué d'une phase solide et d'une phase fluide incompressibles et homogènes. Elle est basée sur la détermination du champ de déplacement du solide et du champ de déplacement absolu (et non relatif) du fluide. Les formulations poroélastique et biphasique diffèrent par le fait que la première spécifie une distribution continue des pores dans la matrice solide alors que la dernière spécifie une distribution continue des phases solides et fluides. La formulation biphasique est très fréquemment utilisée pour la description de la mécanique du cartilage.

1.7.1 La formulation biphasique

La formulation biphasique est à la base de beaucoup de modèles conçus pour l'étude du cartilage. Cette formulation va également être à la base du modèle non homogène composite que nous proposons dans cette étude. Ce modèle, considérant le cartilage comme étant constitué d'une phase solide et d'une phase fluide incompressibles et homogènes est basé sur six équations fondamentales formulées à partir des lois universelles d'équilibre et de continuité. D'après Armstrong (1984), le tenseurs des contraintes dans les phases solide et fluide, σ^s et σ^f , respectivement, s'expriment par:

$$\sigma^s = -\alpha p I + \sigma^E \quad (1.2)$$

$$\sigma^f = -pI \quad (1.3)$$

où I est la matrice identité, p est la pression réelle relative du fluide dans les pores, α est le ratio de volume de solide sur le volume de fluide dans le cartilage, σ^E est le tenseur des contraintes élastiques dans le solide. Les équations 1.2 et 1.3 représentent les lois constitutives dans chacune des deux phases. Ici, le fluide est considéré non visqueux, ainsi, sa contrainte est décrite par la pression hydrostatique p . On remarque dans la relation constitutive de la phase solide (équation 1.2), qu'une proportion α de la pression réelle p est transmise au solide. En effet, cette pression (microscopique dans les pores) s'applique au niveau du solide sur une plus grande aire (niveau macroscopique), ce qui modifie la pression réelle pour donner la pression macroscopique αp . L'hypothèse d'incompressibilité et d'homogénéité intrinsèques dans chacune des phases solide et fluide mène à l'équation de continuité suivante:

$$\nabla \cdot (\bar{v}^f + \alpha \bar{v}^s) = 0 \quad (1.4)$$

où $\bar{v}^f$ et $\bar{v}^s$ sont les vecteurs de vitesse du fluide et du solide respectivement. Si on avait considéré qu'une seule phase (solide par exemple), l'incompressibilité du milieu se serait exprimée par $\nabla \cdot \bar{v}^s = 0$. Avec deux phases, même chacune incompressible, cette expression n'est plus valide et l'équation 1.4 est nécessaire pour décrire la continuité dans le matériau. Cette équation exprime simplement le fait que si une phase sort en un point, alors la seconde doit entrer. Le coefficient α pondère cet échange en exprimant la proportion entre les deux phases. Les vitesses d'écoulement du fluide étant très faibles (de l'ordre du micromètre par seconde), on peut négliger les effets d'inertie. Les équations d'équilibre pour les phases solides et fluides s'écrivent alors respectivement:

$$-\alpha \nabla p + \nabla \cdot \sigma^E + K(\bar{v}_f - \bar{v}_s) = 0 \quad (1.5)$$

$$-\nabla p - K(\bar{v}_f - \bar{v}_s) = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{et donc } \nabla \cdot (\sigma') = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{avec } \sigma' = \sigma^s + \sigma^f \quad (1.8)$$

où K est le coefficient de traînée de diffusion (*diffusive drag coefficient*) directement relié à la perméabilité k du tissu par $K = [k(1 + \alpha)^2]^{-1}$ (Biot, 1941; Lai et al. 1980) et σ' est la contrainte totale.

Les équations (1.5) et (1.6) représentent en fait la 2ème loi de Newton en ayant négligé les termes d'inertie. Le terme en $K(\bar{v}_f - \bar{v}_s)$ représente la force d'interaction du solide sur le fluide exprimée selon la loi de Darcy qui lit la vitesse relative d'écoulement dans le cartilage proportionnellement au gradient de la pression dans les pores du tissu. Le terme $-\alpha \nabla p + \nabla \cdot \sigma^E$ de l'équation 1.5 et le terme $-\nabla p$ de l'équation 1.6 qui expriment la divergence des contraintes dans les phases solide et fluide respectivement représentent les forces qui résultent de l'action de ces deux contraintes dans ces deux phases respectives.

Pour le cas du test de relaxation de contrainte en compression non confinée, une cellule de charge placée sur une des plaques compressives (voir Figure 1.3) permet de mesurer la contrainte à la surface, σ_a définit par:

$$\sigma_a(t) = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi r \sigma'_z(t) dr \quad (1.9)$$

où r_0 est le rayon du disque de cartilage.

1.7.2 Obtention du modèle biphase isotrope

Les équations montrées au paragraphe 1.7.1 peuvent être résolues pour des géométries et des conditions limites simples. Mow et al. (1980) résolurent ces équations pour la compression confinée (voir Figure 1.2) appliquée à des tests de fluage et de relaxation de contraintes. Pour cette configuration, un écoulement unidimensionnel selon l'axe de

compression z a été considéré et les effets de frottement avec les bords du support ont été négligés. Armstrong et al. (1984) ont pour leur part résolu ces équations pour la compression non confinée (voir Figure 1.5) également appliquée à des tests de fluage et de relaxation de contraintes. Ils ont aussi considéré une interface parfaitement lubrifiée (sans frottements) entre le cartilage et les plaques et ont considéré un écoulement du fluide dans le plan $r\theta$ indépendant de z . Mak et al. (1987) ont, quant à eux, proposé une solution de ces équations pour des test d'indentation (voir Figure 1.4). Ces 3 études ont considérées la phase solide du cartilage comme étant élastique isotrope (modèle biphasique isotrope). C'est-à-dire qu'ils ont considéré la relation contrainte/déformation suivante pour l'expression du tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide:

$$\sigma^E = \lambda, \text{trace}(\varepsilon)I + 2\mu, \varepsilon \quad (1.10)$$

où ε est le tenseur de déformation, $\lambda,$ et $\mu,$ sont les coefficients de Lamé pour la matrice solide élastique. Ainsi, le modèle biphasique isotrope décrit le cartilage avec 3 paramètres de matériau composé de 2 paramètres élastiques (équivalents aux 2 coefficients de

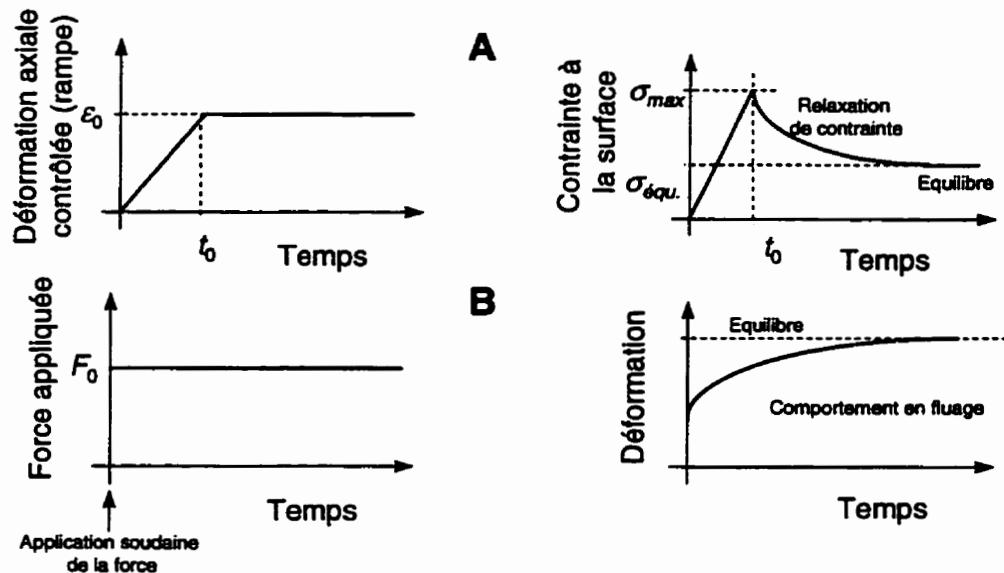


Figure 1.5: Tests de relaxation de contrainte (A) et de fluage (B).

Lamé): un module de Young E_s et coefficient de Poisson ν_s , et la perméabilité hydraulique de tissu k . La Figure 1.5 montre des courbes de relaxation de contrainte et de fluages typiques d'un comportement viscoélastique prédit par le modèle biphasique. Pour le cas de la relaxation de contrainte, un déplacement avec une fonction de rampe est appliqué linéairement jusqu'à un temps t_0 pour atteindre une déformation d'amplitude ϵ_0 , puis cette amplitude est maintenue pour des temps supérieurs à t_0 . Pour le test de fluage classiquement utilisé, une force constante est appliquée à $t=0$. Les réponses du cartilage sont caractéristiques d'un matériau viscoélastique.

Il est reconnu que le modèle biphasique isotrope obtenu pour la compression confinée décrit de manière satisfaisante la réalité expérimentale, après comparaison avec des résultats expérimentaux obtenus pour la même configuration. Cependant, une étude de Buschmann et al. (soumis) souligne le fait que la pénétration du cartilage dans les pores du filtre poreux peut modifier et affecter la réponse expérimentale du cartilage et son interprétation par le modèle biphasique. Quant au modèle biphasique isotrope pour la compression non confinée, Brown and Singerman (1986) ont reporté certaines insuffisances. En effet, il ont remarqué que pour des essais expérimentaux de relaxation de contrainte en compression non confinée, le rapport de la contrainte maximale sur la contrainte à l'équilibre $\sigma_{max}/\sigma_{equ}$ pouvait atteindre des valeurs de l'ordre de 4-5. Seulement, le modèle biphasique isotrope ne permet pas des valeurs de rapport plus grandes que 1,5 (cette valeur est d'ailleurs obtenue pour $\nu_s=0,0$), ce qui montre la limitation de ce modèle.

1.7.3 Le modèle biphasique transverse isotrope

Cohen et al. (1992) ont alors étendu le modèle biphasique en proposant une description isotrope transverse de la matrice solide pour le cas de la compression non confinée. Cette description isotrope transverse est justifiée par le fait qu'il est largement reconnu que le cartilage qui est un tissu fibreux, possède des propriétés différentes en tension et en

compression (voir paragraphes 1.6.5). Or, en compression non confinée, le cartilage, étant comprimé selon l'axe z (voir Figure 1.3), devient en tension dans le plan $r\theta$ à cause de la contraction latérale et met ainsi en évidence cette particularité. Ainsi, Cohen propose l'expression suivante pour le tenseur des contraintes dans la phase solide dans l'équation (1.2):

$$\sigma^E = C \cdot \varepsilon \quad (1.11)$$

où C est le tenseur de 4ème ordre décrivant un matériau transverse isotrope selon l'axe z et dont les composantes C_{ij} sont fonction de 5 paramètres: le module de Young et le coefficient de Poisson dans le plan transverse, E_1 et ν_{21} ($\approx \nu_{12}$) respectivement, le module de Young le long de l'axe z , E_3 , le coefficient de Poisson hors plan ν_{31} ($\approx \nu_{13}E_3/E_1$) et le module de cisaillement hors plan G_{13} . (1, 2, 3 représente les directions r , θ , z respectivement). L'utilisation de ce modèle transverse isotrope permet de prédire des grandes valeurs du rapport contrainte maximale sur la contrainte à l'équilibre $\sigma_{max}/\sigma_{\text{éq}}$ (voir Figure 1.5) et décrit bien la réalité expérimentale. Pour le cas de la compression non confinée, si on considère une interface plaque/cartilage imperméable et sans frottement, il n'y a pas de cisaillement dans les directions r , θ , z (ce sont alors des directions principales) et le module de cisaillement G_{13} n'intervient pas.

Les modèles biphasiques isotrope et transverse isotrope sont des modèles basés sur une description homogène uniforme de la matrice solide du cartilage. Cette description ne prend pas en compte l'aspect composite de la phase solide du cartilage, composée de fibres et d'autres substances non fibreuses.

1.7.4 Autres modèles proposés

Des modèles incluant des phénomènes électromécaniques ont également été développés. Lai et al. (1991) ont proposé une théorie triphasique, qui inclut les 2 phases solide et fluide (biphasique) et comprend aussi une phase ionique, pour la description des champs

de déformation et de contrainte du cartilage sous des charges mécaniques ou chimiques. Ce modèle est une extension du modèle biphasique isotrope (voir paragraphe 1.7.2). Cette théorie se justifie par la présence de composée ionique dans les protéoglycanes et dans le fluide interstitiel. Buschmann et Grodzinsky (1995) ont proposé également un modèle basée sur une représentation des forces électrostatiques dues aux charges ioniques présentes dans le cartilage.

Mak (1986) propose quant à lui un modèle où le cartilage est décrit comme un matériau biphasique poroviscoélastique, c'est-à-dire qu'il envisage que le comportement viscoélastique apparent du cartilage provienne, non seulement de l'écoulement d'un fluide interstitiel - comme nous l'avons noté au paragraphe 1.6.5 - mais aussi d'une viscoélasticité intrinsèque de la matrice solide.

1.7.5 Les modèles numériques

De nombreux modèles utilisant la méthode des éléments finis ont été développés, la majorité étant basée sur le modèle biphasique proposée par Mow et al. (1980). Spilker et al. (1987) développèrent un modèle éléments finis basé sur les travaux de l'équipe de Mow. Ce modèle éléments finis, s'appuyant sur les équations 1.2-7 était linéaire et reposait sur une formulation basée sur la détermination du champ de déplacement du solide et du champ de déplacement absolu du fluide. Puis, Suh et al. (1991) améliorèrent ce modèle éléments finis en tenant compte d'une perméabilité non linéaire (Lai et al., 1980, voir paragraphe 1.6.5) et de l'effet des déformations finies. Celles-ci étaient incorporées par le biais d'une relation contrainte/déformation de la matrice solide isotrope définie en terme d'une fonction d'énergie libre de déformation. Holmes et Mow (1990) ont proposé une forme exponentielle pour cette fonction d'énergie libre. Wayne et al. (1991) ont pour leur part élaboré un modèle éléments finis, également basé sur le modèle biphasique et incorporant une perméabilité non linéaire et l'effet des déformations finies, mais en le basant sur la détermination du champ de déplacement du solide et du champ des pressions. Ces modèles axisymétriques ont été testé en

compression confinée et non confinée, où des solutions analytiques étaient disponibles. Suh et al. (1994) proposèrent une analyse en indentation du cartilage, en incorporant également des phénomènes non linéaires. Levenston et al. (1997) proposèrent un modèle éléments finis incorporant non seulement la formulation biphasique isotrope, mais aussi des phénomènes électromécaniques, basés sur les travaux de Frank et Grodzinsky (1987). Enfin, Almeida et al. (1995) ont incorporé dans un modèle éléments finis une loi constitutive hyperélastique basée sur une description transverse isotrope de la matrice solide du cartilage, inspirée du modèle biphasique transverse isotrope (voir paragraphe 1.7.3) et de la fonction d'énergie libre proposée par Holmes et Mow (1990). Ce modèle est peut-être celui qui est le plus élaboré à ce jour. D'autres modèles éléments finis ont été développés, basés sur une formulation poroélastique (Simon et al., 1990).

1.7.6 Le potentiel du logiciel Abaqus

Les modèles numériques présentés ci-dessus proviennent de codes directement programmés par les différents auteurs. Nous nous sommes cependant interrogé sur la possibilité d'utiliser le code d'éléments finis "Abaqus" développé par HKS Inc. pour modéliser le comportement mécanique de tissus mous. En effet, ce logiciel disponible dans le commerce permet d'effectuer des analyses de consolidation des sols (*soil consolidation*). Ce logiciel permet en particulier d'effectuer des analyses de problèmes où les effets de diffusion du fluide dans les pores et les contraintes résultantes sont couplés, impliquant des écoulements du fluide en milieu saturé ou partiellement saturé. Ces conditions sont très semblables à l'écoulement du fluide interstitiel dans les pores du cartilages. La formulation dans "Abaqus" est basée sur le principe de la contrainte effective qui suppose que, en milieu saturé de fluide, la contrainte totale (*total stress*), σ'_{abacus} , agissant en un point est fonction d'une contrainte moyenne de pression dans le fluide saturant, p_{abacus} (*wetting liquid pressure*) et d'une contrainte effective moyenne σ^*_{abacus} (*effective stress*) dans la partie solide, c'est-à-dire (Abaqus, 1995):

$$\sigma_{abaqus}^f = \sigma_{abaqus}^* - p_{abaqus} I \quad (1.12)$$

où I est la matrice identité. On remarque la similitude de cette équation avec l'équation 1.2.

Goldsmith et al. (1995) ont étudié la possibilité d'utiliser le logiciel "Abaqus" pour modéliser le cartilage en comparant les résultats prédits par le logiciel avec des résultats disponibles dans la littérature. Ils sont arrivés à la conclusion que l'analyse de consolidation des sols disponibles dans "Abaqus" a le potentiel d'être utilisé pour des analyses du comportement mécanique du cartilage et du comportement des tissus mous en général. Une étude de Van der Voet et al. (1993) ont également étudié la possibilité d'utiliser le logiciel "Abaqus" pour l'étude des tissus mous hydratés et sont arrivés aux mêmes conclusions.

De plus, une étude préliminaire au commencement de ce projet était d'évaluer la possibilité d'utiliser "Abaqus" pour ce type d'analyse. De même, nous avons effectué des comparaisons avec les prédictions de modèles numériques disponibles dans la littérature, en respectant les conditions employées dans ces diverses études (maillage, conditions limites, chargements, incrémentation). Nous sommes également arrivés à la conclusion que le logiciel "Abaqus" est adéquat pour effectuer des analyses mécaniques du cartilage. Il permet en outre d'incorporer facilement des effets non linéaires de géométrie et du matériau.

Une étude de Prendergast et al. (1996) a étudié la possibilité d'utiliser d'autres logiciels permettant d'effectuer des analyses poroélastiques et disponibles dans le commerce, pour l'étude des tissus mous et hydratés: les logiciels MARC (Palo Alto, California, USA), DIANA (TNO, Delft, The Netherlands) et SWANDYNE (Swansea, UK). Les auteurs ont comparé les prédictions de ces codes à des résultats disponibles dans la littérature pour conclure que l'utilisation de ces 3 codes est également possible pour l'étude des tissus mous hydratés.

1.7.7 La description non homogène et composite du cartilage

Ce type de description où on décrit la phase solide comme étant une matrice poreuse renforcée par des fibres n'a pas encore été appliquée à l'étude du cartilage. Cependant, ce type d'approche a déjà été utilisé avec succès pour étudier le comportement mécanique de disques intervertébraux (Shirazi-Adl, 1991; Argoubi et Shirazi-Adl, 1996).

1.8 Propriétés mécaniques quantitatives

Comme décrit au paragraphe 1.6, les propriétés mécaniques du cartilage peuvent varier avec un grand nombre de facteurs, les principaux étant la profondeur et la direction ou l'orientation dans le tissu. Néanmoins, on peut fixer des gammes entre lesquelles certains paramètres du matériaux peuvent varier. Ces paramètres peuvent être obtenus par une mesure directe ou après l'interprétation de modèles (par *curve fit*). De nombreuses études ont été menées pour extraire des paramètres mécaniques du cartilage.

Armstrong et al. (1982) ont étudié les propriétés mécaniques de disques cartilage de patelle humaine en compression confinée. En utilisant le modèle biphasique isotrope décrit au paragraphe 1.7.2, auquel ils ont fait correspondre leurs données expérimentales (par *curve fit*), ils ont déterminé la perméabilité du tissu ainsi que le module de compression confinée H_a . Ils ont rapporté les valeurs suivantes: $k = 4,7 \pm 3,6 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$ et $H_a = 0,79 \pm 0,36 \text{ MPa}$.

Akizuki et al. (1986), ayant effectué des tests de rigidité en tension sur du cartilage du genou humain, rapportent des valeurs du module en tension à l'équilibre, issues de mesures directes, toujours inférieures à 30 MPa pour du cartilage normal et des valeurs inférieure à 2 MPa pour du cartilage atteint d'ostéoarthritis.

Brown et Singerman (1986) ont utilisé le modèle biphasique isotrope en compression non confinée pour déterminer la perméabilité de disque de cartilage fémoraux humain. Ils ont trouvé une perméabilité moyenne d'environ $2,51 \pm 1,59 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$. La valeur du

module de compression non confinée a également été déterminée dans cette étude comme étant égale à $0,69 \pm 0,35$ MPa.

Cohen et al. (1992) ont pour leur part utilisé le modèle biphasique transverse isotrope (voir paragraphe 1.7.3) pour déterminer les propriétés mécaniques anisotropiques de disque de cartilage de cubitus de veaux en compression non confinée. Ils ont trouvé les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle isotrope transverse: $E_1 = 1,07 \pm 0,27$ MPa, $E_3 = 10,63 \pm 2,72$ MPa, $\nu_{21} = 0,3 \pm 0,2$, $\nu_{31} = 0$, $k = 2,1 \pm 1,0 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$.

Jurvelin et al. (1997) ont observé optiquement la compression de disques de cartilage huméral bovin en compression non confinée. Ils ont ainsi obtenu des mesures directes du coefficient de Poisson du tissu à l'équilibre. La valeur moyenne obtenue pour le coefficient de Poisson était de $0,185 \pm 0,065$. Ils ont également obtenu des valeurs du module de compression non confinée (équivalent à E_s du modèle biphasique isotrope), du module de compression confinée H_a (en effectuant des test de compression confinée), respectivement égales à $0,754 \pm 0,198$ MPa et $0,677 \pm 0,223$ MPa.

Les gammes de variation des propriétés mécaniques qualitatives du cartilage (bovin et humain) peuvent être résumée dans le Tableau 1.1.

Paramètres:	Gamme:
H_a , MPa	0,4-1,5
E_s, E_3 , Mpa (en compression)	0,3-1,3
E_1 , MPa (en tension)	3-13
ν_s, ν_{31}	0-0,3
ν_{21}	0,1-0,5
$k, 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$	0,5-8,0

Tableau 1.1: Gammes de variation des propriétés mécaniques qualitatives du cartilage

1.9 Objectifs

Les objectifs de cette étude sont:

1. d'incorporer dans un modèle biphasique une description non homogène et composite du cartilage,
2. de développer et de valider un modèle analytique avec ce type de description pour la compression non confinée d'un disque de cartilage,
3. de développer un modèle éléments finis avec ce type de description et d'étudier les effets non linéaires (du matériau et géométriques) sur la réponse pour la géométrie de compression non confinée,
4. d'effectuer une analyse du comportement mécanique du cartilage avec les modèles analytiques et numériques mentionnés ci-dessus.

Les objectifs à moyen et long termes (hors du cadre de cette étude) seraient:

1. de développer un modèle complet du cartilage qui incorporerait non seulement des phénomènes mécaniques complexes (non linéarités de géométrie et de matériau, hétérogénéité), mais aussi des phénomènes électrochimiques (potentiels d'écoulement, ...),
2. de caractériser du cartilage normal à l'aide de paramètres de matériaux représentatifs de la mécanique du tissu,
3. de caractériser du cartilage anormal à l'aide des mêmes paramètres mécaniques.

1.10 Structure du mémoire

Les chapitres 2 et 3 présentent le corps du travail effectué pendant cette maîtrise. Une discussion générale, ainsi que les perspectives proposées à l'issue de la recherche sont présentées au chapitre 4.

Le chapitre 2 décrit l'élaboration et l'analyse d'un modèle analytique qui décrit le comportement mécanique en compression non confinée d'un disque de cartilage. Après une description de ces principes et l'énumération des hypothèses, l'élaboration du modèle et l'analyse du cartilage est présentée dans l'article 1.

Le chapitre 3 présente l'élaboration d'un modèle éléments finis basé sur les mêmes principes. Une analyse du cartilage en compression non confinée est ensuite présentée en utilisant ce modèle qui peut prendre en compte des phénomènes non linéaires dont on étudie les effets sur la réponse.

Certains détails de l'élaboration des modèles analytique et numérique sont présentés en annexe.

2. DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE DU MODÈLE ANALYTIQUE COMPOSITE NONHOMOGÈNE EN COMPRESSION NON CONFINÉE

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les modèles qui ont été proposés pour prédire les phénomènes mécaniques dans le cartilage sont basés sur une description homogène et continue de la phase solide du cartilage. Dans notre étude, nous proposons qu'une description non homogène et composite est nécessaire pour décrire adéquatement le comportement mécanique du cartilage. Dans un premier temps, un modèle analytique tenant compte de ce type de description est développé pour la compression non confinée. Les différentes étapes de l'élaboration de ce modèle analytique non homogène et composite sont présentées en détail aux Annexes 1 à 4. Après la présentation des principes généraux d'une description non homogène composite, les hypothèses prises en compte pour l'élaboration sont exposées. Puis, une analyse du cartilage en utilisant ce modèle est effectuée par l'intermédiaire de l'article 1 et enfin, des résultats supplémentaires sont présentés.

2.1 Principes généraux

Les principes fondamentaux du modèle non homogène et composite proviennent de considérations physiologiques et de l'observation de la structure du cartilage. Nous avons vu au chapitre précédent que le cartilage est composé de cellules de chondrocytes et d'une matrice extra cellulaire qui conditionne les caractéristiques mécaniques et structurales du tissu. En effet, cette matrice extra cellulaire joue un rôle très important dans la capacité du cartilage à absorber, transmettre et distribuer les charges mécaniques externes. Cette matrice extracellulaire est composée principalement d'eau ionisée et d'agrégats de protéoglycanes emprisonnés dans un réseau enchevêtré de fibrilles de collagène.

Il est largement reconnu que le réseau de fibrilles de collagène développe de la résistance pour des sollicitations en tension, mais qu'il n'oppose que peu de résistance pour des efforts en compression (une des explications pourraient être que les fibrilles de collagène flambent quand elles sont sollicitées en compression, par analogie avec des cordes ou du fil). Le gel formé des agrégats de protéoglycanes donne au cartilage de la résistance aux efforts en compression, à cause de forces électrostatiques développées par la présence de substances ionisées et par la résistance du gel à l'écoulement du fluide. Ces résistances en tension et compression ont des ordres de grandeurs différents, mettant en avant une caractéristique mécanique intéressante.

Dans cette étude, nous proposons de décrire directement cette structure composite non homogène (un réseau de fibrilles de collagène emprisonnant une matrice de protéoglycanes), contrairement aux approches précédentes qui considéraient une structure homogène et continue de la phase solide, pour bien capter les caractéristiques mécaniques du tissu. Nous proposons donc une approche physiologique pour étudier le comportement mécanique du cartilage. Cette approche est également basée sur une description biphasique du tissu, c'est-à-dire que l'on considère le cartilage comme étant constitué du mélange de deux phases distinctes, incompressibles, non miscibles: une phase fluide et une phase solide composite.

Pour modéliser une structure du cartilage réaliste, la description composite non homogène nécessite la connaissance de nombreux paramètres comme la rigidité des fibrilles de collagène ou de la matrice de protéoglycanes, ainsi que l'orientation des fibrilles et leur distribution, leur répartition et la perméabilité du matériau. De plus, ces paramètres peuvent varier avec la déformation, la profondeur dans le tissu, ou encore avec la concentration en composants. Des simplifications doivent donc être posées avant l'élaboration d'un quelconque modèle, pour que des solutions approchées (analytiques ou numériques), mais néanmoins relativement simples, puissent être obtenues.

Le principe du test de compression non confinée est brièvement résumé à la figure 1.3. Une solution analytique peut être obtenue pour cette configuration. Pour le test de relaxation de contrainte, le disque de cartilage est comprimée selon l'axe z entre deux plaques selon un déplacement prescrit. Le disque est libre de se déformer et de s'étendre dans la direction radiale dans le plan $r\theta$. La réponse temporelle du cartilage est appréciée à travers l'évaluation de la contrainte moyennée à la surface, qui peut être mesurée expérimentalement par l'intermédiaire d'une cellule de charge.

2.2 Hypothèses prises en compte pour l'élaboration du modèle

Les hypothèses suivantes, numérotées de a) à j) ont été prises en compte pour l'élaboration du modèle composite non homogène.

2.2.1 Hypothèses sur les conditions limites

- a) Pour la compression non confinée, on considère que les plaques qui compressent le disque de cartilage sont imperméables et qu'elles sont parfaitement lubrifiées.
- b) Pour le test de relaxation de contrainte, on considère que le déplacement axial imposé est uniforme dans les directions radiale et circonférentielle.

2.2.2 Hypothèses sur la description mécanique du cartilage

- c) Pour la description mécanique du disque de cartilage, on considère que le réseau de fibrilles de collagène est distribué de façon homogène dans les directions r , θ et z .
- d) On considère également que les fibrilles de collagène se comportent de manière linéaire élastique quand elles sont sollicitées en tension, mais qu'elles n'ont pas de rigidité quand elle sont sollicitées en compression.

- e) On considère que les fibrilles de collagène sont mélangées à une matrice biphasique, homogène et isotropique (qui représente le gel de protéoglycane).
- f) On considère que les effets d'inertie sont négligeables.
- g) On considère que le cartilage est un système linéaire et indépendant du temps, c'est-à-dire, dont les propriétés n'évoluent pas dans le temps.

2.2.3 Hypothèses sur les déformations et les contraintes

- h) On considère des déplacements infinitésimaux.
- i) On suppose que, selon la direction des fibrilles, la déformation dans la matrice, $\bar{\epsilon}^{matrice}$, et celle dans les fibrilles, $\bar{\epsilon}^{fibrils}$, sont identiques, c'est-à-dire:

$$\bar{\epsilon}^{matrice} = \bar{\epsilon}^{fibrils} = \bar{\epsilon} \quad (2.1)$$

Le signe $\bar{}$ précise que la fonction scalaire considérée est dimensionnelle et non normalisée. Ceci va avoir de l'importance par la suite.

- j) On suppose que les forces dans la matrice et dans les fibres s'ajoutent pour donner naissance au tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide, σ^E .

2.2.4 Interprétation des hypothèses

Les hypothèses a) et b) sont identiques à celles de Armstrong et al. (1984). L'hypothèse b) implique que le problème peut être considéré comme axisymétrique, c'est-à-dire qu'il peut être réduit à un problème bidimensionnel en fonction des coordonnées r et z . L'hypothèse a) et f) implique intuitivement que le fluide va s'écouler dans la direction radiale indépendamment de la direction z . Ces hypothèses sont représentées à la Figure 2.1. L'axisymétrie du problème implique que $\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_\phi = 0$, $\partial(X)/\partial\theta = 0$ pour tout X , et que le déplacement dans la direction circonférentielle $\bar{u}_\theta$ est nul.

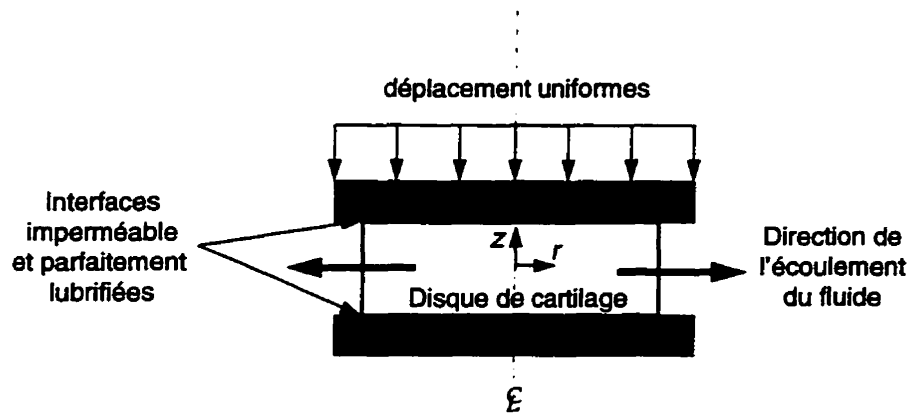


Figure 2.1: Hypothèse en compression non confinée

D'après les hypothèses d) et e), on peut décrire le réseau des fibrilles de collagène avec le module de Young des fibrilles individuelles, e_f , et par une fraction de volume des fibrilles χ qui représente le rapport entre le volume des fibrilles et le volume total. De même, on peut décrire la matrice biphase isotrope par les coefficients élastiques de la matrice écoulée (*drained elastic coefficients*), c'est-à-dire avec un module Young E_m , et un coefficient de Poisson ν_m , et avec un coefficient de perméabilité hydraulique k . La Figure 2.2 de l'article 1 montre la représentation composite non homogène que l'on considère dans notre étude.

L'hypothèse a) et l'axisymétrie du problème permettent d'affirmer que le déplacement de la phase solide dans la direction radiale, $\bar{u}_r$, est indépendant de z et de θ . L'hypothèse b) permet quant à elle, d'affirmer que le déplacement de la phase solide dans la direction axiale, $\bar{u}_z$, est indépendant de r et de θ . C'est-à-dire que: $\bar{u}_r = \bar{u}_r(r, t)$ et $\bar{u}_z = \bar{u}_z(z, t)$. Ceci a pour conséquence que le cisaillement $\bar{\epsilon}_{rz}$ est nul à tout instant. En effet:

$$\bar{\epsilon}_{rz} = \frac{\partial \bar{u}_r(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z(r, t)}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

Les directions r et z sont donc principales.

L'Annexe I présente les différentes étapes pour l'obtention des matrices d'élasticité et de souplesse présentées aux équations 2.4 et 2.5 qui apparaissent plus loin dans l'article 1. L'originalité de notre étude réside dans le fait que nous proposons que le tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide σ^E qui apparaît à l'équation 1.2 ait une forme telle que son expression vectorielle contractée soit définie plus loin à l'équation 2.4.

Après divers manipulations sur les équations gouvernantes (équations 1.2 à 1.7), celles-ci peuvent être résolues après leur transformation dans le domaine de Laplace et une normalisation des paramètres. On peut obtenir l'expression du déplacement normalisée dans la direction radiale exprimé dans le domaine de Laplace. A partir de là, les expressions normalisées de la contrainte à la surface, de la déformation radiale, de la déformation circonférencielle, de la pression du fluide et de la vitesse relative du fluide peuvent être obtenues toujours dans le domaine de Laplace. On obtient ces expression dans le domaine de temps en effectuant leurs transformations inverses.

L'Annexe II présente les manipulations mathématiques des équations gouvernantes. L'Annexe III présente la résolution des équations différentielles linéaires dans le domaine de Laplace. L'Annexe IV présente la procédure pour obtenir les expressions dans le domaine de temps à l'aide du théorème de l'inversion pour le cas où le déplacement imposé est une fonction rampe (voir Figure 1.5A).

Les algorithmes pour la génération des profils, pour les procédures de *curve fit* et pour l'analyse des données expérimentales ont été édités à l'aide du logiciel "Mathematica". Les données expérimentales utilisées pour valider le modèle étaient disponibles.

2.3 Développement et validation du modèle analytique et analyse du cartilage en compression non confinée (Article 1).

Dans ce paragraphe, une analyse du cartilage en compression non confinée est présentée en utilisant le modèle composite non homogène développé précédemment. Dans un premier temps, une analyse générale est présentée, contenue dans l'article 1. Dans cette article, après une brève description du modèle dont les étapes d'élaboration sont détaillées en annexe, certains résultats sont montrés et discutés. Ces résultats comprennent, entre autres, une analyse de la réponse temporelle de la contrainte moyennée à la surface $\sigma_a(t)$ ainsi qu'une analyse de sa réponse en fréquence $H'(j\omega)$, une analyse de la réponse en fréquence des profils de déformation radiale ($E'_r(j\omega)$), pression ($P'(j\omega)$) et vitesse du fluide ($V'(j\omega)$) (voir Annexe 4). Puis une comparaison entre les modèles homogène transverse isotrope et non homogène composite va être effectuée sur le plan de la prédiction des contraintes radiales. Enfin, la validation du modèle va être présentée en comparant ses prédictions avec des résultats expérimentaux. Dans un deuxième temps, des résultats supplémentaires vont être montrés.

ARTICLE 1

**A FIBRIL-NETWORK REINFORCED BIPHASIC MODEL OF ARTICULAR
CARTILAGE IN UNCONFINED COMPRESSION**

Soumis pour publication à ASME Journal of Biomechanical Engineering.

**A Fibril-Network Reinforced Biphasic Model of
Cartilage in Unconfined Compression**

J. Soulhat, M.D. Buschmann, A. Shirazi-Adl,

Biomedical Engineering Institute and
Department of Mechanical Engineering,
Ecole Polytechnique,
Montreal, Quebec, Canada

2.3.1 Summary

Cartilage mechanical function relies on a composite structure of a collagen fibrillar network entrapping a proteoglycan matrix. Previous biphasic or poroelastic models of this tissue which have approximated its composite structure using a homogeneous solid phase have experienced difficulties in describing measured material responses, leading to the use of different constitutive laws for different tests. In this study, we hypothesize that a nonhomogeneous composite representation of cartilage can predict measured material responses using a single unified constitutive description. To explore this hypothesis we developed and solved analytically a fibril reinforced biphasic model for the case of uniaxial unconfined compression with frictionless compressing platens, where the fibrils were considered to provide stiffness in tension only. The lateral stiffening provided by the fibril network dramatically increased the frequency dependence of disk rigidity in dynamic sinusoidal compression and the magnitude of the stress relaxation transient, in qualitative agreement with previously published data. Fitting newly obtained experimental stress relaxation data to the composite model allowed extraction of mechanical parameters from these tests, such as the rigidity of the fibril network, in addition to the elastic constants and the hydraulic permeability of the remaining matrix. Model calculations further highlight a potentially important difference between homogeneous and nonhomogeneous composite models. In the latter type of model, the stresses carried by different constituents can be dissimilar, even in sign (compression vs. tension) even though strains can be identical. Such behavior, resulting only from a structurally physiological description, could have consequences in the efforts to understand the mechanical signals which determine cellular and extracellular biological responses to mechanical loads in cartilage.

2.3.2 Introduction

The role of articular cartilage is primarily mechanical in transmitting forces of articulation to bone and in providing low friction joint surfaces. These functional properties are a consequence of a heterogeneous and anisotropic composition of cells (1-10% of tissue volume) and an extracellular matrix, most generally described as a cross-linked collagen fibrillar network (mainly type II) entrapping a proteoglycan (aggrecan) gel, both being saturated with water containing diffusible ions. The rope-like collagen network provides strength in tension, whereas the electrically charged proteoglycan gel supports compression. When deformed, cartilage develops relatively large deformation-resistant forces due to pressures generated in redistributing the water through the extracellular matrix.

The current mathematical description of cartilage mechanical behavior comes from biphasic or poroelastic theory (Mow et al., 1980; Biot, 1941). The complex dynamics of the material arises from the interaction between solid and fluid phases involving relative motion and associated hydrodynamic drag. The homogeneous isotropic model has described cartilage mechanical behavior when the tissue is compressed with a porous, permeable metal surface in a confined compression well (Mow et al., 1980; Frank and Grodzinsky, 1987; Buschmann et al, 1997). On the other hand, this model can not describe the mechanical response of cartilage compressed with smooth impermeable surfaces in unconfined compression, a geometry which may more closely simulate in vivo loading (Armstrong et al., 1984; Brown and Singerman, 1986). Recently, an extension of the model using a transversely isotropic material description has adequately described behavior in unconfined compression (Cohen et al., 1992), by stiffening the lateral plane of the disk during expansion. The need to use these two different constitutive laws for the same material subjected to two different test geometries is a consequence of the composite structure of cartilage; the proteoglycan matrix resists compression in both tests

while the tensile-load-carrying collagen network resists lateral expansion in the unconfined test only.

We hypothesized that, in order to develop a general unified theory which can describe both confined and unconfined tests, as well as other more complex loading conditions (e.g., indentation, in vivo geometries), a physiological nonhomogeneous composite description of the collagen fibril-reinforced biphasic proteoglycan gel is required. A similar composite poroelastic description has already been successfully implemented to study the creep response of spinal motion segments (Shirazi-Adl, 1991; Argoubi and Shirazi-Adl, 1996). The objectives of the current work were 1) to develop an analytical nonhomogeneous composite poroelastic model of cartilage and to explore its applicability in unconfined compression via comparison with experimental data, 2) to compute intratissue profiles of stresses, strains, fluid pressures and relative fluid velocities in cartilage undergoing unconfined compression and 3) to compare the behavior obtained using the nonhomogeneous composite and the homogeneous orthotropic models.

2.3.3 Theoretical Methods

The nonhomogeneous composite model is an extension of the previously developed isotropic homogeneous biphasic model, by reinforcing the latter with a network of nonlinear fibrils distributed homogeneously in the r , θ , z directions and which resist extension only (Fig 2.2). The isotropic matrix is described by the drained elastic constants E_m (Young's modulus) and ν_m (Poisson's ratio) and a hydraulic permeability k . The fibril network is described by the Young's modulus of individual fibrils e_f which combined with a fibril volume fraction χ (fibrils-volume/total-volume) results in an equivalent tensile modulus of the fibril network, $E_f = \frac{1}{3} \chi e_f$ (since 1/3 of the fibrils are oriented in each of three mutually orthogonal directions).

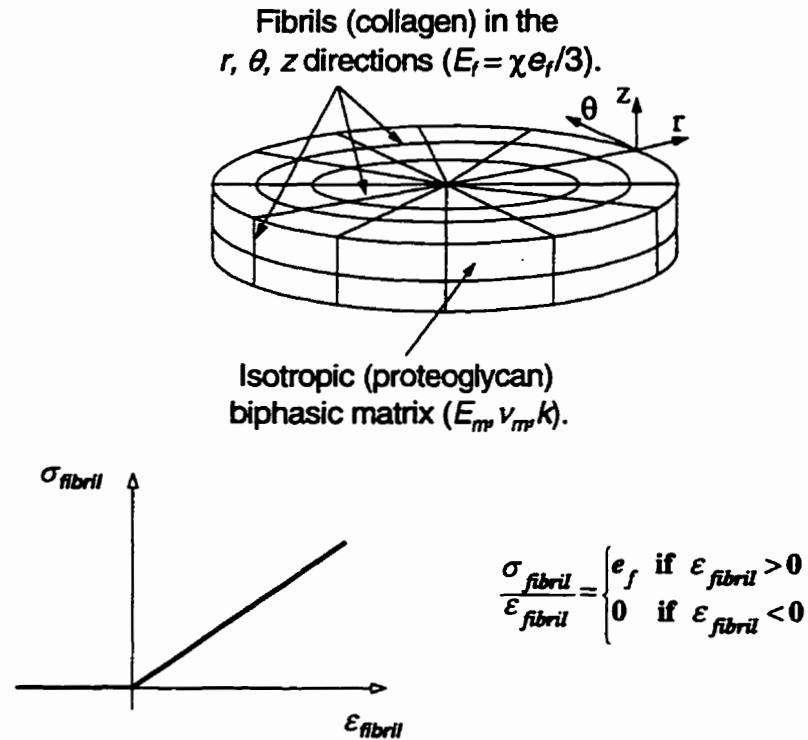


Figure 2.2: Nonhomogeneous composite description of cartilage. A fibril network (collagen) is homogeneously distributed in the r, θ, z directions to reinforce an isotropic biphasic (proteoglycan) matrix. Four model parameters are required: 3 drained elastic coefficients (Young's modulus E_m and Poisson's ratio ν_m of the matrix, Young's modulus E_f of the fibril network) and a permeability coefficient (k). The fibrils in the network behave nonlinearly like thin rods, with no or little resistance to compression due to buckling.

In unconfined compression with frictionless platens, infinitesimal deformations, and a homogeneous distribution of collagen fibrils in global directions, the radial and axial displacements are independent of the (z, θ) and (r, θ) coordinates, respectively, and the (r, z) directions are principal, as no shear stress occurs in this configuration. Strains are assumed identical in the fibril network and matrix while dissimilar forces in each solid constituent add to give rise to the total solid stress tensor. At equilibrium, in unconfined

compression, the total stress in the solid skeleton, $\bar{\sigma}_i^E$ (contracted form), may be decomposed into two parts supported by the matrix and fibrils network:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r^E &= \bar{\sigma}_r^{matrix} + \frac{\chi}{3} \bar{\sigma}_r^{fibrils} \\ \bar{\sigma}_\theta^E &= \bar{\sigma}_\theta^{matrix} + \frac{\chi}{3} \bar{\sigma}_\theta^{fibrils} \\ \bar{\sigma}_z^E &= \bar{\sigma}_z^{matrix}\end{aligned}\tag{2.3a,b,c}$$

where $\bar{\sigma}_i^{matrix}$ and $\bar{\sigma}_i^{fibrils}$ are the normal stress in the matrix and fibrils network, respectively. The fibril network stress term is absent in Eq 2.3c since, in unconfined compression, the axial z direction experiences compressive deformation for which the fibrils have no resistance (Fig 2.2). It is this decomposition of fibril nonlinearity into different directions, each of which then becomes linear, which allows an analytical solution to be easily obtained in the present case. Starting from infinitesimal stress-strain relations at equilibrium, the non-zero total stress and strain components in the solid skeleton may be written as

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_r^E \\ \bar{\sigma}_\theta^E \\ \bar{\sigma}_z^E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_r \\ \bar{\epsilon}_\theta \\ \bar{\epsilon}_z \end{pmatrix} \text{ where } \begin{cases} S_{11} = S_{22} = \frac{(E_f + E_m)(1 - \nu_m) - 2E_f\nu_m^2}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \\ S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = \frac{E_m\nu_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \\ S_{33} = \frac{E_m(1 - \nu_m)}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \end{cases}\tag{2.4 a,b,c}$$

The equilibrium confined modulus is S_{33} . The compliance matrix $[C_{ij}]$ is obtained by inverting $[S_{ij}]$:

$$[S_{ij}]^{-1} = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{cases} C_{11} = C_{22} = \frac{E_f + E_m - E_f \nu_m^2}{E_f^2 + 2E_f E_m + E_m^2 - E_f^2 \nu_m^2} \\ C_{12} = C_{21} = \frac{-E_m \nu_m}{E_f^2 + 2E_f E_m + E_m^2 - E_f^2 \nu_m^2} \\ C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = \frac{-\nu_m}{E_f + E_m - E_f \nu_m} \\ C_{33} = \frac{E_f + E_m - E_f \nu_m - 2E_f \nu_m^2}{E_m(E_f + E_m - E_f \nu_m)} \end{cases} \quad (2.5 \text{ a,b,c,d})$$

The equilibrium unconfined modulus, $E_{33} = 1/C_{33}$, and the ratio of lateral strain to imposed axial strain at equilibrium, defined here as the effective Poisson's ratio, ν_{eff} , are:

$$E_{33} = \frac{1}{C_{33}} = \frac{E_m[E_m + E_f(1 - \nu_m)]}{E_m + E_f(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \quad \nu_{eff} = \frac{-C_{13}}{C_{33}} = \frac{\nu_m}{1 + (1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)E_f/E_m} \quad (2.6 \text{ a,b})$$

Eq 2.6 may be solved to alternatively express the matrix drained parameters as

$$E_m = \frac{E_{33}^2 + E_f E_{33} \nu_{eff} - 2E_f^2 \nu_{eff}^2}{E_{33} + E_f \nu_{eff} + 2E_f \nu_{eff}^2} \quad \nu_m = \frac{(E_f + E_{33})\nu_{eff}}{E_{33} + E_f \nu_{eff} + 2E_f \nu_{eff}^2} \quad (2.7 \text{ a,b})$$

Thus the composite biphasic model can be described equivalently by either of two interrelated sets of four intrinsic parameters: $\{E_m, \nu_m, E_f, k\}$ or $\{E_{33}, \nu_{eff}, E_f, k\}$. In order that the stiffness matrix $[S_{ij}]$ remains positive definite (i.e., condition for stability of the material) the values of E_m , ν_m , and E_f must remain in reasonable physical ranges, that is : $0 \leq \nu_m \leq 0.5$, $0 \leq E_m$ and $0 \leq E_f$. When the model is alternatively expressed in terms of $\{E_{33}, \nu_{eff}, E_f, k\}$ these conditions yield:

$$E_f \leq \frac{E_{33}}{\nu_{eff}} = E_{f \max} \quad (2.8)$$

The method of solution of Armstrong et al (1984) for unconfined compression of a homogeneous isotropic material can now be applied here by replacing the homogeneous isotropic elasticity matrix with the nonhomogeneous composite elasticity matrix of Eq 2.4. The resulting expressions in the Laplace domain are shown in Table 2.1 and after inversion into the time domain using a ramp function for the displacement in Table 2.2. These expressions necessarily coincide with those of Armstrong when $E_f = 0$ (after taking into account the different normalization convention used here).

A mapping between the parameters of the transversely isotropic biphasic model¹ (Cohen et al., 1992) and the composite model parameters can be found by equating the stiffness components of both models (Eq 2.4 here with Eq 4 from Cohen):

$$E_1 = \frac{E_{33}(E_{33} + E_f)}{E_{33} + E_f \nu_{eff}^2}; \quad E_3 = E_{33}; \quad \nu_{31} = \nu_{eff}; \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{eff}(E_{33} - E_f \nu_{eff})}{E_{33} + E_f \nu_{eff}^2} \quad (2.9a,b,c,d)$$

¹ Note that the shear modulus plays no role in unconfined compression with frictionless surfaces in this model.

$\sigma_a(s) = \frac{\bar{\sigma}_a(s)}{E_{33}}; u(s) = \frac{\bar{u}(s)}{r_0}; p(s) = \frac{\bar{p}(s)(1+\alpha)}{E_{33}};$ $v_r(s) = \frac{\bar{v}_r(s)r_0}{k(1+\alpha)E_{33}}; r = \frac{\bar{r}}{r_0}; s = \frac{\bar{s}}{s_0}; s_0 = \frac{kS_{11}}{r_0^2};$ Eq a	$A = \frac{(2\nu_m - 1)(1 + R + R\nu_m)}{R\nu_m + \nu_m - R - 1 + 2R\nu_m^2}; C = A + 2(B - 1);$ $B = \frac{(-1 - R + R\nu_m + 2R\nu_m^2)(3 + R + R\nu_m)}{2(-1 - \nu_m - R + R\nu_m^2)}; R = \frac{E_f}{E_m}$ Eq b
$\frac{\sigma_a(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = \frac{BI_0(\sqrt{s}) - C \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}{I_0(\sqrt{s}) - A \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}$ Eq c	$\frac{u(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = -\frac{1}{2}r \left[1 - \frac{\frac{I_1(r\sqrt{s})}{r\sqrt{s}}}{\frac{1}{A}I_0(\sqrt{s}) - \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right]$ Eq d
$\frac{\bar{\epsilon}_r(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{I_0(r\sqrt{s}) - \frac{I_1(r\sqrt{s})}{r\sqrt{s}}}{\frac{1}{A}I_0(\sqrt{s}) - \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}} \right]$ Eq e	$\frac{\bar{\epsilon}_\theta(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{I_1(r\sqrt{s})}{r\sqrt{s}}}{\frac{1}{A}I_0(\sqrt{s}) - \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right]$ Eq f
$\frac{p(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = \frac{S_{11}}{2E_{33}} \left[\frac{I_0(r\sqrt{s}) - I_0(\sqrt{s})}{\frac{1}{A}I_0(\sqrt{s}) - \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right]$ Eq g	$\frac{v_r(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = -\frac{S_{11}}{2E_{33}} \left[\frac{\sqrt{s}I_1(r\sqrt{s})}{\frac{1}{A}I_0(\sqrt{s}) - \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right]$ Eq h

Table 2.1: Composite model expressions in the Laplace domain. Dimensional quantities have overbars. s is the Laplace variable, r the radial position in the disk, r_0 the peripheral disk radius, and α the solid to fluid volume fraction (solid-volume/fluid-volume). $\bar{\epsilon}_z(s)$ is the Laplace transform of the surface-to-surface axial deformation (change-in-thickness/original-thickness vs. time). The average surface stress $\bar{\sigma}_a(s)$, the radial displacement $\bar{u}(s)$, the fluid pressure $\bar{p}(s)$, and the relative fluid velocity $\bar{v}_r(s)$ are normalized to E_{33} , r_0 , $\frac{E_{33}}{(1+\alpha)}$, $\frac{k(1+\alpha)E_{33}}{r_0}$ respectively. Radial and circumferential strains, $\bar{\epsilon}_r(s)$ and $\bar{\epsilon}_\theta(s)$, are also shown. I_m is the modified Bessel function of order m .

$\sigma_a(t) = \frac{\bar{\sigma}_a(t)}{E_{33}\epsilon_0}; u(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\epsilon_0 r_0}; \epsilon_{r,\theta}(t) = \frac{\bar{\epsilon}_{r,\theta}(t)}{\epsilon_0}; p(t) = \frac{\bar{p}(t)(1+\alpha)}{E_{33}\epsilon_0}; v_r(t) = \frac{\bar{v}_r(t)r_0}{(1+\alpha)kE_{33}\epsilon_0}; r = \frac{\bar{r}}{r_0}; t = \bar{t}s_0; t_0 = \bar{t}_0s_0; \epsilon_0 = \frac{\bar{u}_0}{h}$	
$0 \leq t \leq t_0$	$t_0 \leq t$
$\sigma_a(t) = \frac{1-B}{4(A-2)t_0} + \frac{t}{t_0} + \frac{(B-1)(1-2/A)}{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t)}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1)}$ Eq i	$\sigma_a(t) = 1 + \frac{(B-1)(1-2/A)}{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \exp(a_n^2 t_0)) \exp(-a_n^2 t)}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1)}$ Eq j
$u(t) = \frac{r^3}{16(2/A-1)t_0} + \frac{(4/A-1)r}{16t_0(1-2/A)^2} + r \frac{A-1}{A-2} \frac{t}{t_0} - \frac{A}{2t_0} \times$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) J_1(a_n r)}{a_n^3(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq k	$u(t) = \frac{(A-1)}{(A-2)} r - \frac{A^2}{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) (1 - \exp(a_n^2 t_0)) J_1(a_n r)}{a_n^3(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq l
$\epsilon_r(t) = \frac{3r^2}{16(1-2/A)t_0} + \frac{(4/A-1)}{16t_0(2/A-1)^2} + \frac{A-1}{A-2} \frac{t}{t_0} - \frac{1}{2t_0} A \times$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) [J_0(a_n r) - (1/a_n r) J_1(a_n r)]}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq m	$\epsilon_r(t) = \frac{A-1}{A-2} - \frac{A}{2t_0} \times$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) (1 - \exp(a_n^2 t_0)) [J_0(a_n r) - (1/a_n r) J_1(a_n r)]}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq n
$\epsilon_\theta(t) = \frac{Ar^2}{16(A-2)t_0} + \frac{A(4-A)}{16t_0(2-A)^2} + \frac{t(A-1)}{t_0(A-2)} - \frac{A}{2t_0 r} \times$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) J_1(a_n r)}{a_n^3(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq o	$\epsilon_\theta(t) = \frac{A-1}{A-2} - \frac{A}{2t_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) (1 - \exp(a_n^2 t_0)) J_1(a_n r)}{a_n^3(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq p
$p(t) = \frac{S_{13} - S_{11}}{2E_{33}t_0} \left[\frac{(r^2 - 1)}{2(2-A)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) [J_0(a_n r) - J_0(a_n)]}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)} \right]$ Eq q	$p(t) = \frac{S_{13} - S_{11}}{2E_{33}t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) (1 - \exp(a_n^2 t_0)) [J_0(a_n r) - J_0(a_n)]}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq r
$v_r(t) = \frac{S_{13} - S_{11}}{2E_{33}t_0} \left[\frac{r}{(A-2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) J_1(a_n r)}{a_n(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)} \right]$ Eq s	$v_r(t) = \frac{S_{13} - S_{11}}{2E_{33}t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a_n^2 t) (1 - \exp(a_n^2 t_0)) J_1(a_n r)}{a_n(a_n^2/2A + A/2 - 1) J_0(a_n)}$ Eq t

Table 2.2: Composite model expressions in the time domain. The expressions of Table 2.1 have been transformed into the time domain using a ramp function (amplitude $\bar{u}_0$ in time $\bar{t}_0$ at constant velocity) for the axial surface-to-surface displacement to define a time-dependent axial strain (which is independent of z). Normalization factors are similar to those of Table 2.1 with the addition of $\epsilon_0 = \bar{u}_0/h$ in some expressions, where h is the original ($\bar{r} = 0$) disk thickness. a_n is the n^{th} root of the characteristic equation $(a_n/\sqrt{s_0})J_0(a_n/\sqrt{s_0}) - AJ_1(a_n/\sqrt{s_0}) = 0$, where J_m is the Bessel function of order m .

2.3.4 Experimental Methods

Full thickness articular cartilage disks (1.02-1.09) mm thick and 2.8 mm in diameter were isolated from 12-14 month old bovine humeral heads as described previously (Jurvelin et al 1997). A sequence of 20 ramp displacements each of 5 μm amplitude and 1 $\mu\text{m/s}$ velocity was applied to the specimens, assuring attainment of equilibrium before each step according to the criterion that the slope of the force vs. time curve be less than 0.1 g/min. The displacement and load data were digitized and stored for analysis. Five specimens were tested.

The last (20th) stress relaxation curve of each specimen was normalized to the unconfined compression equilibrium modulus found from the equilibrium stress increment, $\bar{\sigma}_0$, of the step according to $E_{33} = \bar{\sigma}_0/\varepsilon_0$, where ε_0 is the amplitude of the increment in surface-to-surface strain imposed by the ramp. These normalized stress relaxation curves were then averaged in the time domain. The stress and strain time domain signals were also transformed to the Laplace domain (Buschmann, 1997) to yield the stiffness function (corresponding to the model prediction Eq c in Table 2.1) for each specimen, which were then averaged for all specimens. By assuming $v_{eff} = 0$, the remaining two model parameters, E_f and k , were found by fitting the averaged stiffness function to the model expression (Eq c in Table 2.1) using a nonlinear Levenberg-Marquardt algorithm to minimize the χ^2 merit function

$$\chi^2(E_f, k) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i, E_f, k)}{y_i} \right]^2 \quad (2.10)$$

in the frequency region 0.0001-0.01 Hz, where y_i is the experimentally determined stiffness function in the Laplace domain, x_i is the corresponding frequency, and y is the stiffness function of the model (Eq c in Table 2.1) where the normalized Laplace variable s is replaced by $2\pi x/s_0$.

2.3.5 Results

Equilibrium Mechanical Behavior

The fibril network resists radial expansion of the matrix, thereby stiffening equilibrium stiffness (Eq 2.6a) and reducing the effective Poisson's ratio (Eq 2.6b). For example, in the limit of an infinitely stiff fibril network in tension, Eq 2.6 becomes:

$$\lim_{E_f \rightarrow \infty} E_{33} = \frac{E_m(1 - \nu_m)}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \quad \lim_{E_f \rightarrow \infty} \nu_{eff} = 0 \quad (2.11a,b)$$

showing, in particular, no lateral expansion of the disk at equilibrium, $\nu_{eff} = 0$ (provided that $\nu_m < 0.5$). Eq 2.11 also demonstrates that an infinitely stiff fibril network, combined with an incompressible matrix, $\nu_m = 0.5$, produces an infinite equilibrium stiffness,

$\lim_{\substack{E_f \rightarrow \infty \\ \nu_m \rightarrow 0.5}} E_{33} \rightarrow \infty$. If $\nu_m = 0$, lack of matrix expansion allows the fibrils to carry no load at

equilibrium so that Eq 2.6 shows $\nu_{eff} = 0$ as well as $E_{33} = E_m$. The stability condition of a maximum value of E_f , if $\nu_{eff} \neq 0$ is fixed (Eq 2.8), can be appreciated through Eq 2.6b where continually increasing E_f towards infinity would force $\nu_{eff} = 0$ (as in Eq 2.11b). The mapping between the two possible model parametrizations of Eq 2.7 also demonstrates the existence of maximum values of E_f or ν_{eff} depending on which one is considered fixed, in order to keep the drained matrix coefficients in reasonable physical ranges, i.e. $0 \leq \nu_m \leq 0.5$ and $0 \leq E_m$ (Fig 2.3).

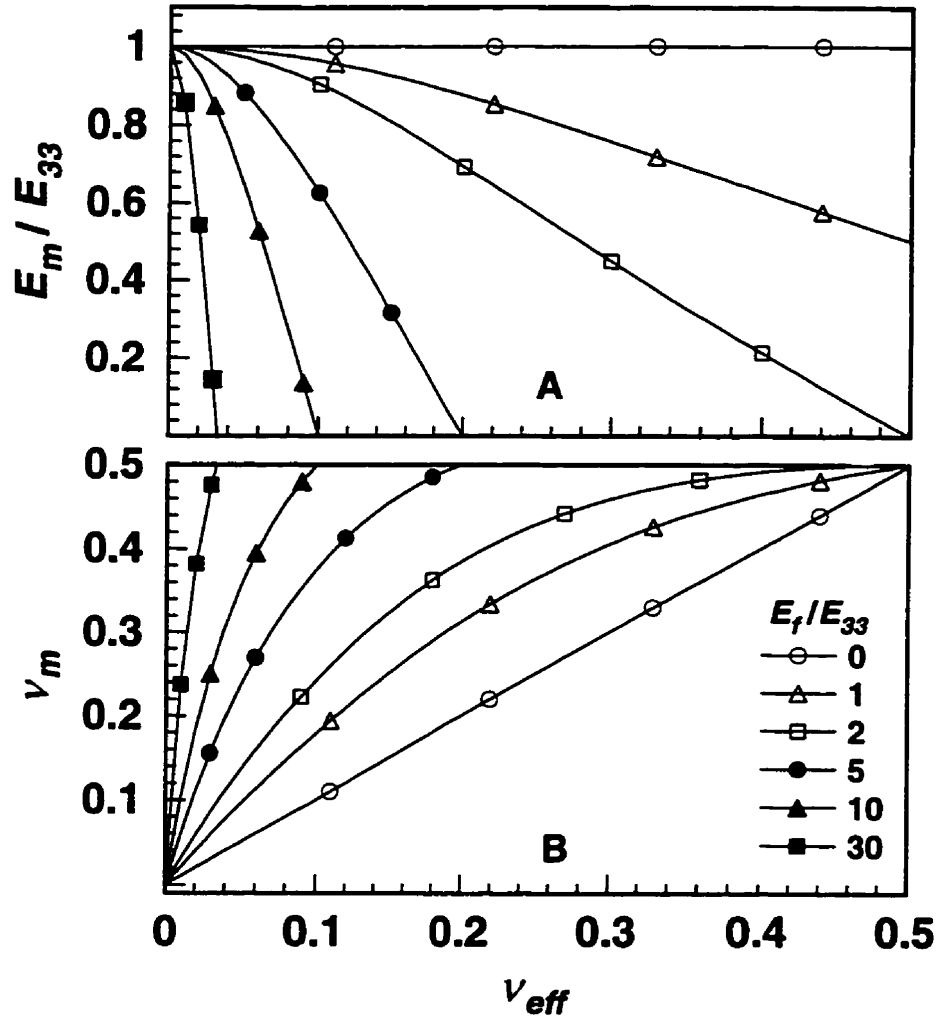


Figure 2.3: The dependence of elastic matrix parameters E_m (A, Eq 5a normalized to E_{33}) and v_m (B, Eq 5b) on the effective Poisson's ratio, v_{eff} , for several values of E_f (normalized to E_{33}). For increasing fibril network stiffness, E_f , the admissible maximum value for v_{eff} is diminished in order to keep v_m and E_m within physically acceptable ranges (< 0.5 and > 0 , respectively). This maximum value for v_{eff} can be equivalently expressed as a maximum value of E_f (Eq 6), which is also required to retain positive definiteness of the compliance and rigidity matrices (Eqs 2 and 3).

Dynamic and Transient Mechanical Behavior

Reinforcement of the biphasic matrix by the tension-resisting fibril network (effectively in the lateral direction only due to fibril nonlinearity) significantly increased high frequency dynamic stiffness (Fig 2.4 for parameter values shown in Table 2.3), in the absence of friction at the cartilage/platen interfaces, thus creating a strong frequency dependent disk rigidity which is absent in the isotropic homogeneous model (Fig 2.4 with $E_f = 0$). In particular, if $\nu_{\infty} = 0$, the high frequency stiffness is dramatically increased as E_f is increased, even though equilibrium behavior is unaffected, due to dynamic radial pressure gradients generating dynamic radial expansion and thus bringing into play the fibril network. Increasing the effective Poisson's ratio while maintaining $\{E_{33}, E_f, k\}$ constant reduces the ratio of high-frequency to low-frequency stiffness (equal to the coefficient B in Eq b in Table 2.1) since part of the contractile stress produced in the fibril network now opposes solid matrix expansive stress, in addition to generating fluid pressure gradients. An upward shift in the characteristic frequency, s_0 (Table 2.3) also occurs as E_f increases (peak in the phase of Fig 2.4); this characteristic frequency is a function of the rigidity in the direction of fluid flow, S_{11} , (Eq a in Table 2.1), which is itself strongly influenced by E_f (Eq 2.4a).

Fibril network reinforcement also creates large stress relaxation transients (Fig 2.5) which are not obtained by the homogeneous isotropic model with any parameter choices. Patterns of behavior discussed above for the dynamic stiffness are also reflected in the stress relaxation transients, where the ratio of peak to equilibrium load corresponds approximately to the ratio of high to low frequency stiffness, and the relaxation times are the inverse of the characteristic frequencies (Table 2.3).

Specified parameters $E_{33}=1$ MPa and $k=10^{-15}$ m ⁴ /Ns			Dependent parameters				
	E_f (MPa)	ν_{eff}	E_m (MPa)	ν_m	S_{11}	s_0	$1/s_0$
●	10.0	0.00	1.00	0.00	11.0	0.0057	178
◆	10.0	0.05	0.65	0.36	11.1	0.0057	177
■	5.0	0.00	1.00	0.00	6.0	0.0031	327
▲	5.0	0.05	0.88	0.26	6.1	0.0031	323
▼	0.0	0.00	1.00	0.00	1.0	0.0005	1960
★	0.0	0.05	1.00	0.05	1.0	0.0005	1950

Table 2.3: Composite model parameters used in Figures 3-7. E_{33} , the unconfined compression equilibrium modulus, and k , the hydraulic permeability were fixed to values typical of articular cartilage. E_f , the fibril network tensile stiffness, and ν_{eff} , the effective Poisson's ratio (ratio of radial to axial strain at equilibrium) were varied to demonstrate the dependence of model predictions on these parameters. Once these four model parameters are defined several other dependent parameters can be calculated including the elastic constants of the isotropic matrix, E_m and ν_m , a transverse plane modulus, S_{11} , a characteristic angular frequency, s_0 , and a characteristic relaxation time, $1/s_0$, the latter two using $r_0 = 1.4$ mm.

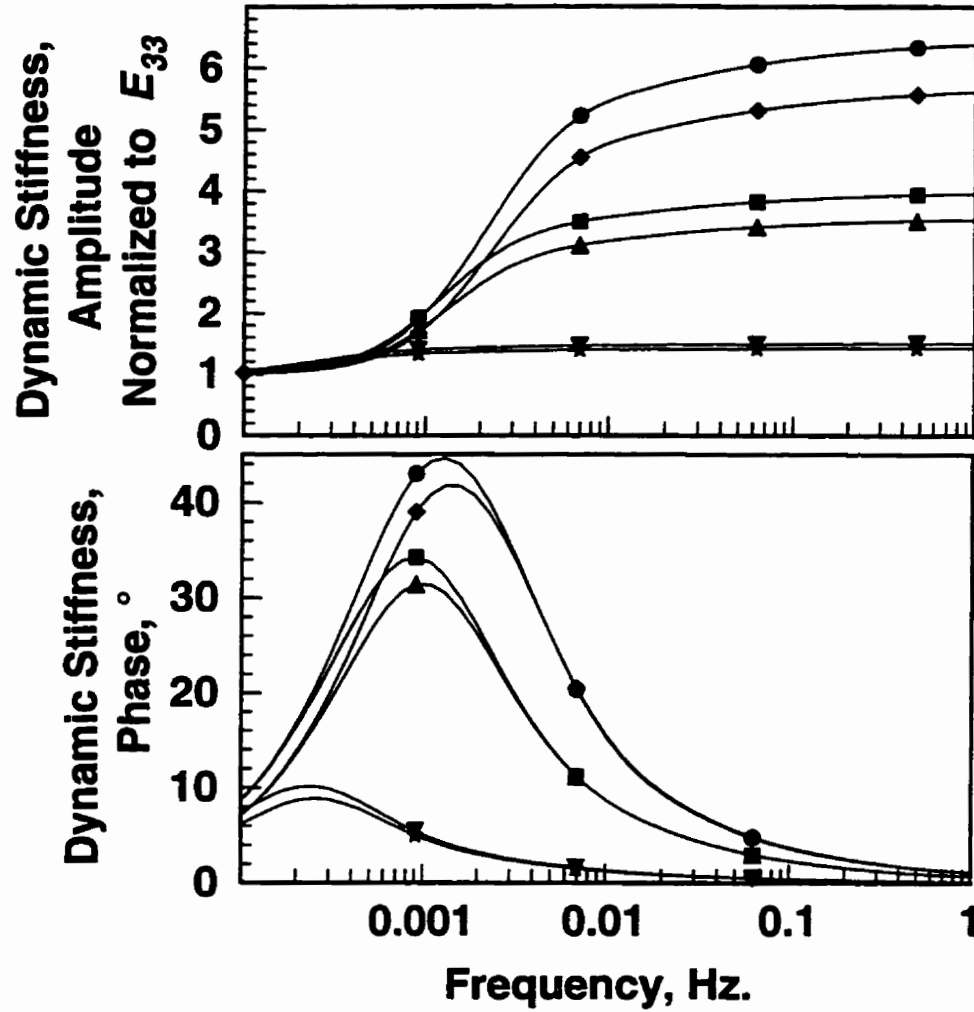


Figure 2.4: Composite model predictions of unconfined compression dynamic stiffness (Eq c in Table 2.1 with s replaced by $i2\pi f/s_0$, $i = \sqrt{-1}$, and where f is the frequency) using model parameters of Table 2.3 and $r_0=1.4$ mm. Increased fibril network stiffness in tension increases the high frequency dynamic stiffness and shifts the characteristic transition frequency (peak in the phase) upwards.

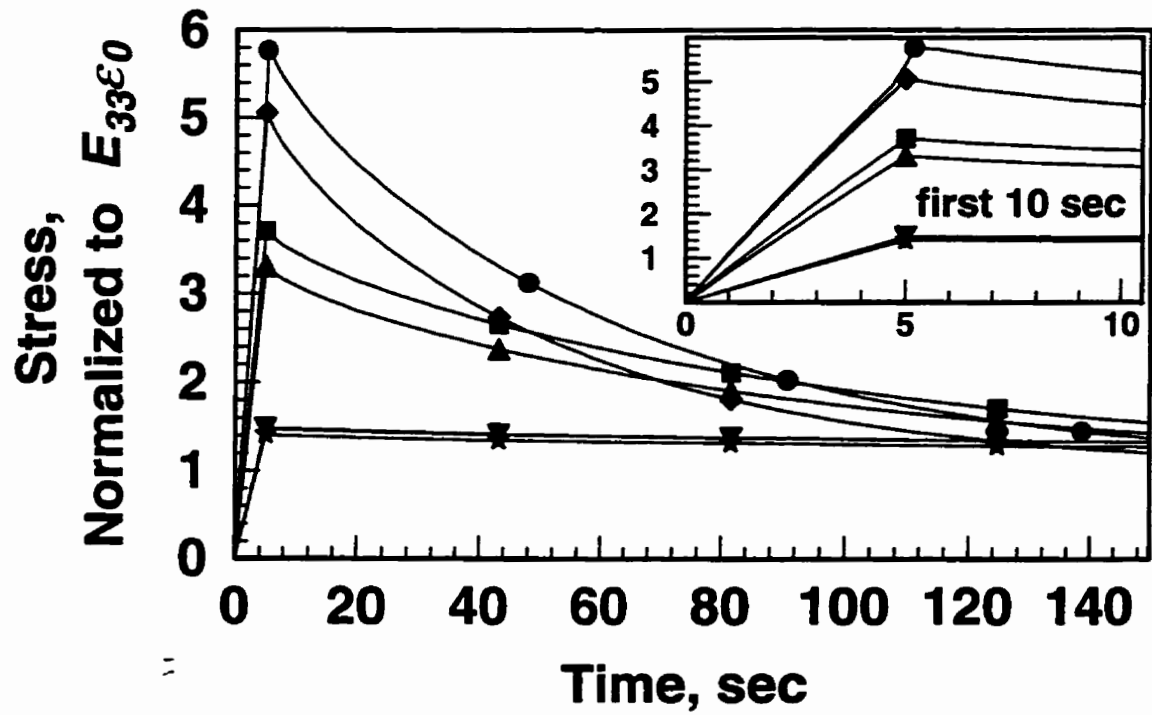


Figure 2.5: Composite model predictions of unconfined compression stress relaxation profiles (Eqs i and j in Table 2.2) normalized to the equilibrium stress, $E_{33}\epsilon_0$, with $r_0 = 1.4$ mm, $t_0 = 5$ s, and model parameters as defined in Table 2.3. The isotropic model prediction is shown for the case of $E_f = 0$. Increased fibril network stiffness in tension increases the magnitude of the transient stress and reduces the relaxation time.

Radial Profiles of Intratissue Physical Phenomena

Fibril reinforcement of the biphasic matrix has important consequences for the nature of the intratissue profiles of solid strain, fluid pressure and fluid velocity. The frequency dependence of these profiles is qualitatively similar to that of the previous nonreinforced model, in that amplitudes of strains, pressures, and velocities increase with increasing frequency, especially in the region near the characteristic frequency, s_0 . There are two quantitative differences between the reinforced and non-reinforced models: 1) the characteristic frequency at which the amplitudes of these profiles begin to increase is higher in the reinforced model (Figs 2.6, 2.7 and 2.8), as discussed above, and 2) the maximal fluid pressure and fluid velocity amplitudes are higher in the reinforced model (Figs 6 and 7) since they are proportional to the rigidity of the total solid matrix that produces them (the factor S_{11}/E_{33} in Eqs g,h in Table 2.1).

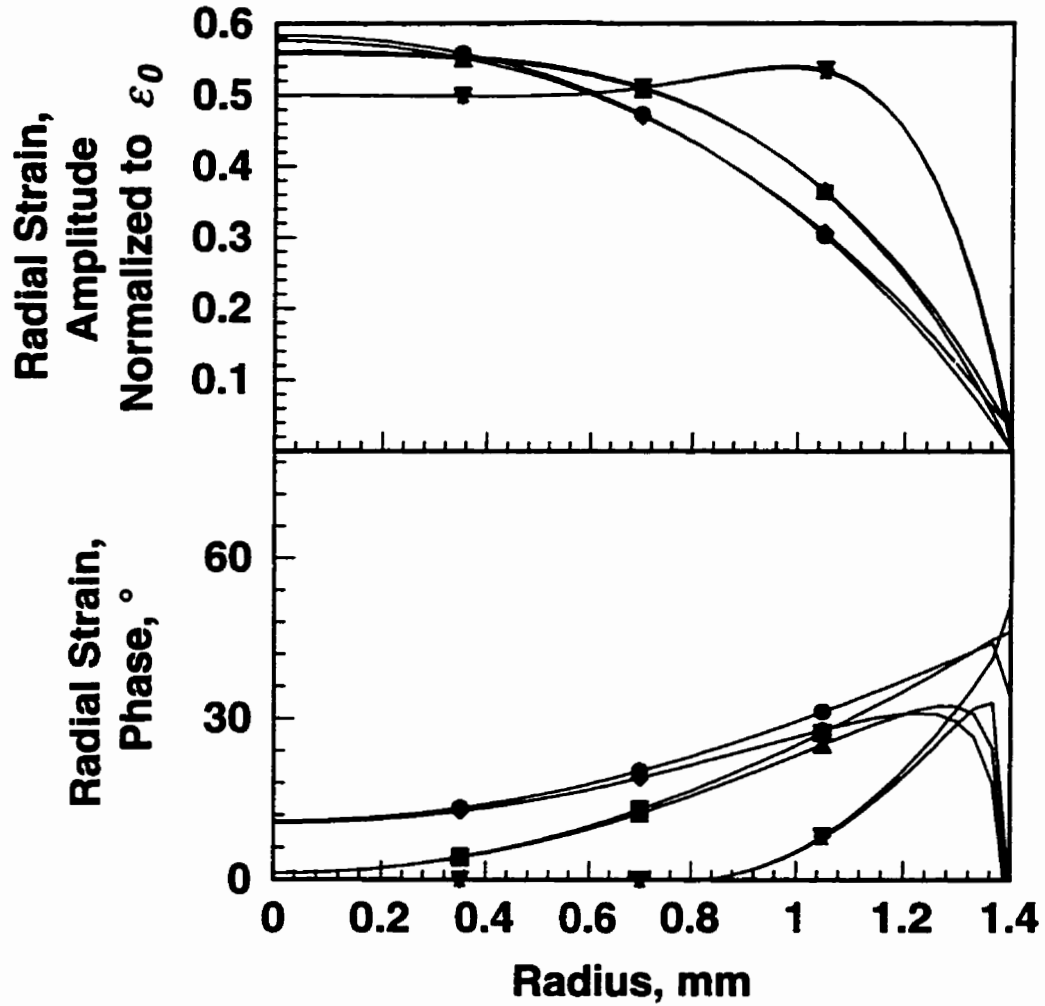


Figure 2.6: Radial strain amplitude, normalized to the axial strain $\varepsilon_0 = \bar{u}_z/h$ where $\bar{u}_z$ is the amplitude of the sinusoidal displacement imposed about the average thickness h , and radial strain phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq e in Table 2.1 with s replaced by $i2\pi f/s_0$ and with $\bar{\varepsilon}_z(s)$ replaced with ε_0) using model parameters as defined in Table 2.3 and $r_0=1.4$ mm. The following sign convention has been used - compressive axial strain and tensile radial strain are positive. A normalized radial strain amplitude of 0.5 indicates local conservation of solid matrix volume. Local values of radial strain exceeding 0.5 (near $r = 0$ for higher values of E_f) indicate that solid volume increases locally during the compressive phase due to out of phase fluid flow (Fig 7) into that local region occurring also during the compressive phase of the cycle.

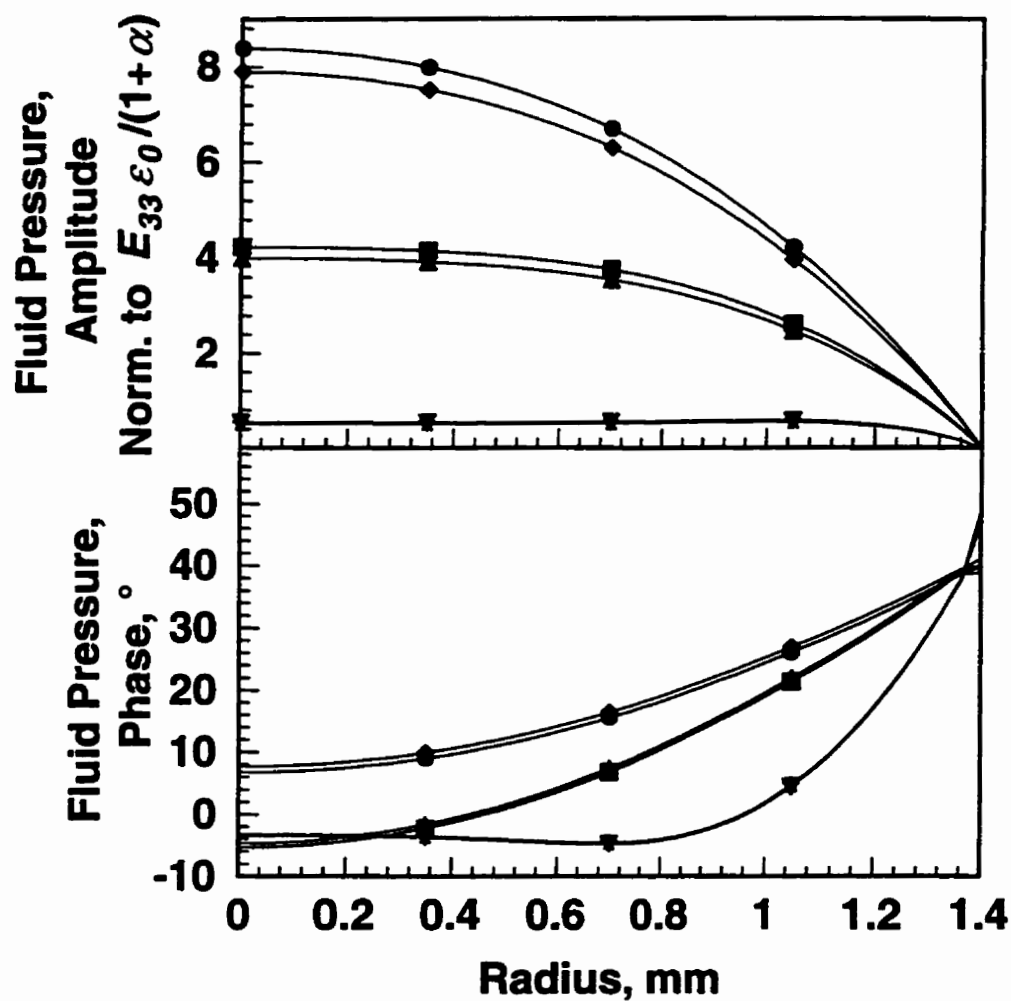


Figure 2.7: Fluid pressure amplitude and phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq g in Table 2.1) using model parameters of Table 2.3 and $r_0=1.4$ mm. The same sign convention as that in Fig 5 has been used. Increased fibril network stiffness increases fluid pressure amplitudes.

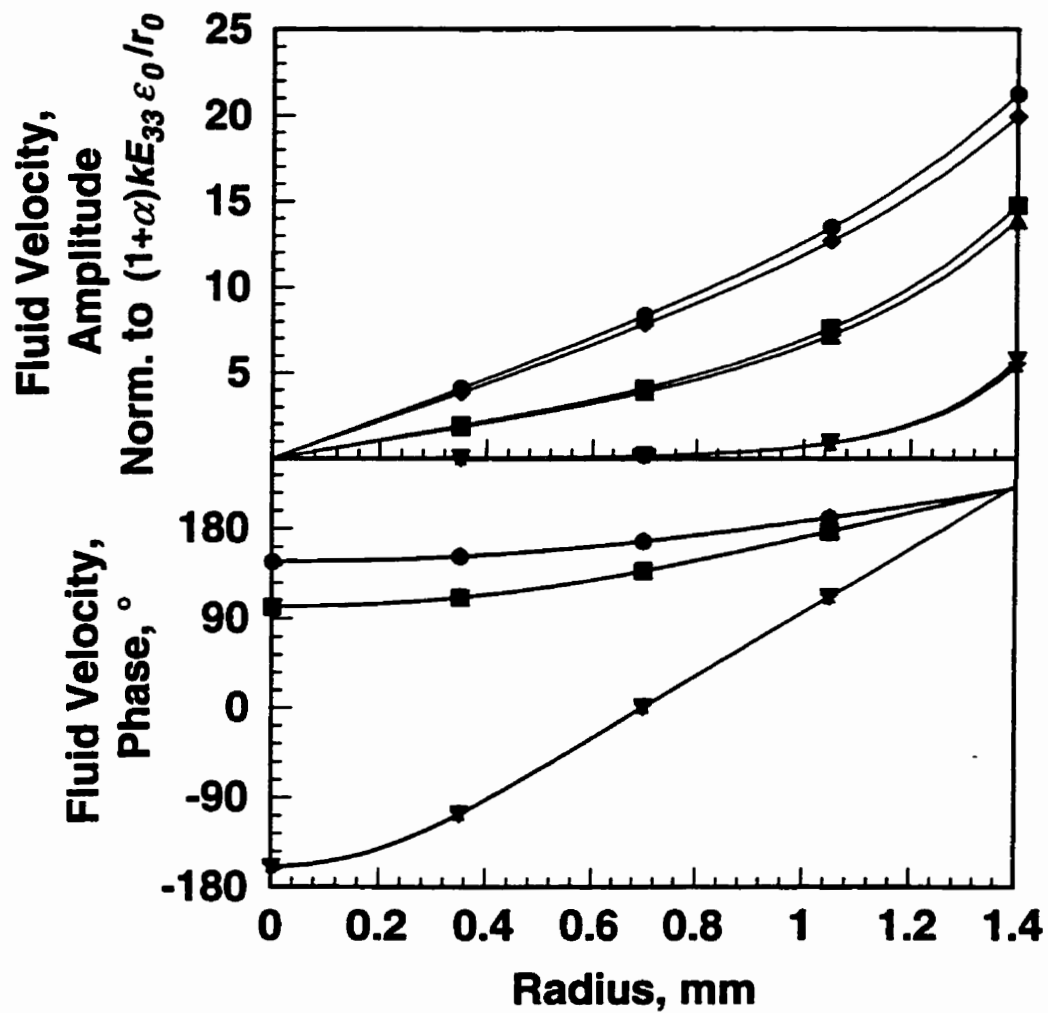
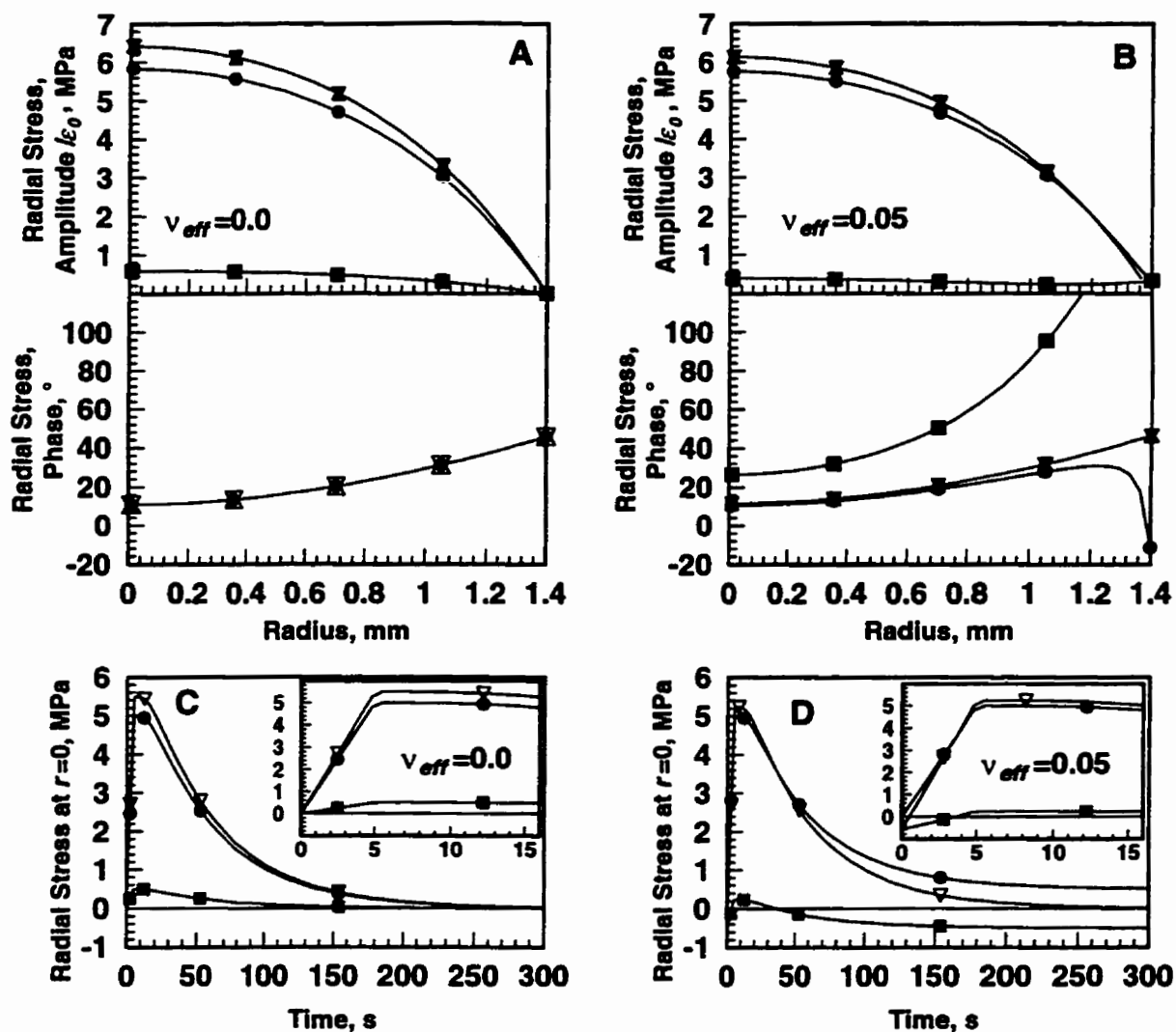


Figure 2.8: Fluid velocity amplitude and phase under sinusoidal displacement at 0.01 Hz (Eq h in Table 2.1) using model parameters of Table 2.3 and $r_0=1.4$ mm. The same sign convention as that in Fig 5 has been used. Increased fibril network stiffness increases fluid velocity amplitudes and creates significant out of phase fluid flow in central regions at 0.01 Hz.

Stress Carriage is Fundamentally Different in Homogeneous versus Composite Models

When the mapping of Eq 2.9 is used to connect the nonhomogeneous composite model and the homogeneous transversely isotropic model, they predict identical behaviors (profiles, stiffness etc.) in unconfined compression, in the absence of platen/cartilage friction or spatial heterogeneities, with the exception of the sharing of radial and circumferential stresses carried in the solid phase. The total solid stresses $\bar{\sigma}_i^E$ given in Eq 2.3 (matrix+fibril network) is identical to the solid matrix stress of the transversely isotropic model. When the effective Poisson's ratio is zero the solid stress in the composite model is shared by the matrix and the fibrils by the ratio of their relative stiffness' (Fig 2.9 A,C for the radial stresses). With a non-zero effective Poisson's ratio the behavior of the composite model becomes more complex, where for certain times or disk regions, the equivalent tensile radial and circumferential stresses in the fibril network ($\chi \bar{\sigma}_{r,\theta}^{fibrils} / 3$) can exceed the total solid radial stress (that of the transversely isotropic model) and the matrix can simultaneously experience a compressive stress even though both constituents undergo equivalent tensile deformations (Figs 8B in terms of phase and Fig 2.9 D for the radial stresses).

Figure 2.9 (page suivante): Radial solid stresses of the nonhomogeneous composite (COMP) and the homogeneous transversely isotropic (TIP) models. Amplitude and phase of the stress in the matrix and fibril network of the COMP model and stress in the matrix of the TIP model (Eq 3; Cohen et al., 1992) for sinusoidal compression at 0.01 Hz (A & B) and for stress relaxation (Eq 11) at $r = 0$ with a ramp time $t_0 = 5$ s (C & D). COMP model parameters are $E_f = 10.0$ MPa, $\nu_{eff} = 0.0$ (A & C) or 0.05 (B & D), $E_{33} = 1.0$ MPa and $k = 1.0 \times 10^{-15}$ mm⁴/N-s. The equivalent TIP parameters (Eqs 7a,b,c,d) are $E_3 = 1.0$ MPa, $E_l = 10.73$ MPa, $\nu_{2l} = 0.0$ (A & C) or 0.024 (B & D), $\nu_{3l} = 0.0$ (A & C) or 0.05 (B & D) and $k = 1.0 \times 10^{-15}$ mm⁴/N-s. When the effective Poisson's ratio is zero (A & C), radial stress in the matrix and fibril network in the COMP model are in the same sense (tensile) and when added together equal the stress in the single solid phase TIP model. However, when the effective Poisson's ratio is non-zero (B & D) the stress in the matrix of the COMP model can be opposite in sense (compressive) to that in the fibril network (tensile).



The Nonhomogeneous Composite Model Can Describe Stress Relaxation Experiments

The average unconfined compression equilibrium modulus determined from the equilibrium stress increment of the last 5 μm step executed at a 9.5% static compression was $E_{33} = (1.01 \pm 0.25)$ MPa (mean $\pm$ sd; $n=5$). The best fit (Fig 2.10), assuming $\nu_{\text{eff}} = 0.0$, provided the values $E_f = 11.0$ MPa and $k = 1.11 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N}\cdot\text{s}$. This best fit was unique since the χ^2 merit function displayed a distinct minimum at this point (Fig 2.11).

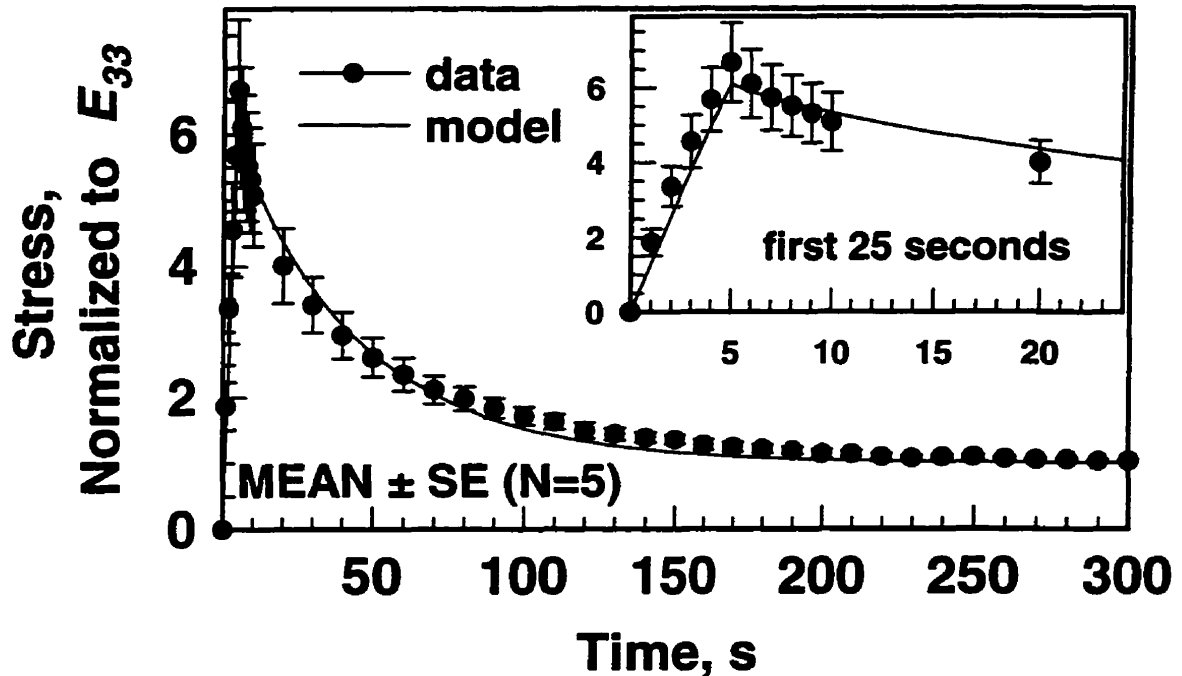


Figure 2.10: Best fit of the composite model to stress relaxation data. The average of stress relaxation profiles (normalized to equilibrium stress) experimentally obtained by applying a 5 μm amplitude ramp at a velocity of 1 $\mu\text{m}/\text{s}$ starting from a $\sim 10\%$ (100 μm) static offset compression. $E_{33} = 1.01$ MPa was obtained from the equilibrium stress and we assumed $\nu_{\text{eff}} = 0.0$. The best fit resulted in $E_f = 11.0$ MPa and $k = 1.11 \times 10^{-15} \text{ mm}^4/\text{N}\cdot\text{s}$. The composite model can reasonably capture stress relaxation behavior in unconfined compression, while the non-reinforced isotropic model is unable to predict a peak load which is more than 50% higher than the equilibrium load increment (Fig 2.5).

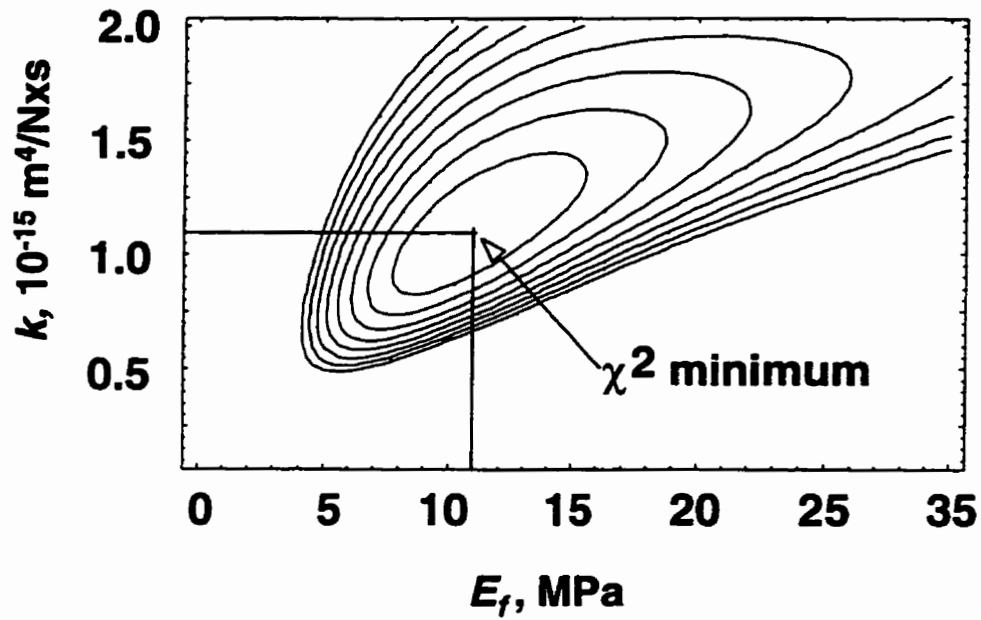


Figure 2.11: Uniqueness of the fitted composite model parameters obtained in Fig 2.10. Contour plot of the merit function, χ^2 (Eq 2.9), as a function of fitted parameters k and E_f showing a well defined minimum.

2.3.6 Discussion

A nonhomogeneous composite model based on a structurally physiological description of cartilage succeeded in describing stress relaxation behavior in unconfined compression. This model is described by two drained matrix elastic coefficients (E_m and ν_m), an equivalent Young's modulus E_f of the fibril network and a hydraulic permeability coefficient, k . The model is conceptually simple, being essentially the homogeneous isotropic biphasic model with the addition of a tension-resisting fibril network. The non-linear material description of the fibril network, with no resistance to compression, is the key element to the model's success. In the case of confined compression, where theoretically the cartilage experiences compression only, the composite model is identical to the existing biphasic model. However, the composite model can also adequately describe behavior in unconfined compression by stiffening the lateral (r, θ) plane in tension.

In previous studies, friction between the specimen and platen was suggested to be the cause of the large stress relaxation amplitude in unconfined compression (Armstrong and al., 1984; Brown and al., 1986; Spilker and al., 1990, Kim et al., 1995), even though specification of perfectly adhesive boundaries could not entirely account for the large stress relaxation transient. In our study, no friction between the specimen and platen was required to describe the stress relaxation transient, provided sufficient stiffness of the fibril network was specified (Fig 2.10). A minor role of friction as a determinant of the stress response in unconfined compression is further supported by direct microscopic observations of disk lateral expansion, showing little visual evidence of adhesion at the cartilage/platen interfaces (Jurvelin et al., 1997). Our composite model does however experience a limitation, in that it is only capable of describing the stress relaxation transient (or equivalently a strongly frequency dependent dynamic stiffness) when the effective Poisson's ratio is smaller (in the range $0.00 \leq \nu_{eff} \leq 0.05$) than the value

obtained for similar tissue by direct optical methods ($0.12 \leq \nu_{eff} \leq 0.25$ from Jurvelin et al., 1997). This limitation may be removed in future work where the effects material nonlinearities and spatial heterogeneities will be considered.

The previously developed transversely isotropic biphasic model can also predict the large experimentally observed stress relaxation transient (Cohen et al., 1992). The composite model, however, may enjoy some advantages in comparison to the homogeneous transversely isotropic model : 1) Constituents of the composite structure can be related to biochemical composition (i.e. fibrils $\rightarrow$ collagen, matrix $\rightarrow$ proteoglycan) 2) Spatial heterogeneities and material nonlinearities of these biochemical constituents can be directly incorporated into the model. For example our best fit value of $E_f = 11.0$ MPa may be further interpreted to estimate the tensile modulus of collagen fibrils in cartilage; using a fibril volume fraction estimate of 30%, the relation $E_f = \frac{\chi e_f}{3}$ supplies 110 MPa as an estimate of fibril rigidity, within the range of independently obtained values (Haut and Little, 1972; Sanjeevi, 1982; Shirazi-Adl et al., 1986). The best fit value of $E_f = 11.0$ MPa is also in the range of values previously measured by equilibrium tensile testing of cartilage strips (Roth and Mow, 1980).

As demonstrated in previous studies (Shirazi-Adl, 1989; Shirazi-Adl, 1991), a basic difference exists between homogeneous orthotropic and nonhomogeneous composite models - while there is a distinction between the matrix and the fibril network in the composite model, no such distinction exists in the homogeneous transversely isotropic model. Hence, although displacements, strains, pore pressures and total stresses can be identical in both models which have equivalent bulk mechanical properties, the stresses in the matrices are dissimilar. As an example, at equilibrium under identical strains, for non-zero Poisson's ratio, the isotropic matrix of the nonhomogeneous composite model undergoes a compressive radial stress whereas no stress is experienced by the transversely isotropic homogeneous matrix. The radial stress and strain in the isotropic matrix of the composite model at equilibrium for the nonhomogeneous

composite model in unconfined compression can be expressed as follows (from Eqs 3d, 4a and 4b):

$$(\bar{\sigma}_r^{matrix})_{equilibrium} = -\frac{E_m(C_{13}E_{33} + \nu_m)}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}\epsilon_0 = -E_f\epsilon_0\nu_{eff} \leq 0; \quad (\bar{\epsilon}_r)_{equilibrium} = \epsilon_0\nu_{eff} \geq 0 \quad (2.12a,b)$$

The time-dependent elastic radial stress in the isotropic matrix and the equivalent radial stress in the fibrils network of the composite model during the transient phase for the nonhomogeneous composite model in unconfined compression can be expressed as:

$$\bar{\sigma}_r^{matrix} = \frac{E_m\epsilon_0}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}[(\nu_m - 1)\bar{\epsilon}_r - \nu_m(1 + \bar{\epsilon}_\theta)]; \quad \bar{\sigma}_{r_{equivalent}}^{fibrils} = \chi\bar{\sigma}_r^{fibrils} = E_f\epsilon_0\bar{\epsilon}_r \geq 0 \quad (2.13a,b)$$

where the normalized expressions of $\bar{\epsilon}_r$ and $\bar{\epsilon}_\theta$ are given in Table 2.2. Thus, the time-dependent elastic radial stress in the matrix for the composite model can be tensile or compressive depending on the rate of compression and the material parameters, whereas the time-dependent elastic radial stress in the matrix for the homogeneous orthotropic model is always tensile and with a much higher amplitude (Fig 2.9). These differences in the matrix stresses may be important as determinants of biological responses to tissue loading and serve to further highlight possible advantages of the physiological approach of composite theories.

Acknowledgment : This research was supported by MRC (Canada), NSERC (Canada) and the Arthritis Society (Canada).

2.3.7 References

- Argoubi M and Shirazi-Adl A (1996) Poroelastic Creep Response Analysis of a Lumbar Motion Segment in Compression *J. Biomechanics* 29:1331-1339.
- Armstrong CG, Lai WM, Mow VC (1984) An Analysis of The Unconfined Compression of Articular Cartilage *J. Biomechanical Engineering* 106:165-173.
- Biot MA (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *J. Applied Physics* 12:155-64.
- Brown TD and Singerman RJ (1986) Experimental Determination of the Linear Biphasic Constitutive Coefficients of Human Fetal Proximal Femoral Chondroepiphysis *J. Biomechanics* 19:597-605.
- Buschmann MD, Jurvelin JS, Hunziker EB (1995) Confined Compression of Articular Cartilage: Small-amplitudes Linear and Nonlinear Stress Responses and the Effect of the Porous Compressing Platen. *Trans. American Society of Mechanical Engineering: Bioengineering Division* 31:307-8.
- Buschmann MD, Soulhat J, Shirazi-Adl A, Jurvelin JS, Hunziker EB. Confined Compression of Cartilage: Linearity and Alternative Boundary Conditions. *J Biomechanics*, Submitted, May 1996.
- Buschmann MD (1997) Numerical Conversion of Transient to Harmonic Response Functions For Linear Viscoelastic Materials. *J. Biomechanics* 30(2):197-202.
- Cohen B, Lai WM, Chorney GS, Dick HM, Mow VC (1992) Unconfined Compression of Transversely-isotropic Biphasic Tissues *Trans. American Society of Mechanical Engineering* 187-190.

- Frank EH and Grodzinsky AJ (1987) Cartilage Electromechanics-II. A Continuum Model of Cartilage Electrokinetics and Correlations with Experiments *J. Biomechanics* 20(6):629-639.
- Haut RC and Little RW (1972) A Constitutive Equation for Collagen Fibres. *J. Biomechanics* 5:423-430.
- Jurvelin JS, Buschmann MD, Hunziker EB (1997) Optical and Mechanical Determination of Poisson's Ratio of Adult Bovine Humeral Articular Cartilage. *J. Biomechanics* 30(3):235-241.
- Kim YJ, Bonassar LJ, Grodzinsky AJ (1995) The Role of Cartilage Streaming Potential, Fluid Flow and Pressure in the Stimulation of Chondrocyte Biosynthesis during Dynamic Compression. *J. Biomechanics* 28: 1055-66.
- Lai WM and Mow VC (1980) Drag Induced Compression of Articular Cartilage during a Permeation Experiment. *Biorheology*, 17:111-123.
- Mow VC, Kuei SC, Lai WM, Armstrong CG (1980) Biphasic Creep and Stress Relaxation of Articular Cartilage in Compression: Theory and Experiments. *J. Biomechanical Engineering* 102(1):73-84.
- Roth V, Mow VC (1980) The Intrinsic Tensile Behavior of the Matrix of Bovine Articular Cartilage and its Variation with Age. *J. Bone Joint Surg. (Am)* 62: 1102-17.
- Sanjeevi R (1982) A Viscoelastic Model for the Mechanical Properties of Biological Materials. *J. Biomechanics* 15:107-109.
- Shirazi-Adl A, Ahmed AM, Shrivastava SC (1986) A Finite Element Study of a Lumbar Motion Segment Subjected to Pure Sagittal Plane Moments Stresses *J. Biomechanics* 19(4):331-350.

- Shirazi-Adl A (1989) On the Fibre Composite Material Models of Disc Annulus. Comparison of Predicted Stresses *J. Biomechanics* 22:357-365.
- Shirazi-Adl A (1991) Mechanical Role of Disc Annulus Fibres and Matrix in Poroelastic Creep Response of Human Lumbar Disc *Trans. 37th Annual Meeting Orthopaedic Research Society* 16(1):241.
- Spilker RL, Suh J-K, Mow VC (1990) Effects of Friction on the Unconfined Compressive Response of Articular Cartilage: A Finite Element Analysis *J. Biomechanical Engineering* 112:138-149.

2.3.8 Autres résultats

Dans la Figure 2.10, le modèle composite que l'on a développé interprète par *curve fit* les données expérimentales de relaxation de contrainte pour le dernier pas d'une série consécutive de 20 pas de déplacements (Figure 2.12), et prédit certaines valeurs pour les paramètres de matériaux E_m , E_f et k . Chaque pas correspond à un incrément de déformation de 0,5% et l'ensemble des 20 pas amène une déformation axiale finale de 10%. On pourrait également faire interpréter l'ensemble de ces 20 pas par notre modèle, et ainsi obtenir une prédiction des paramètres de matériaux en fonction de la déformation du tissu, ce qui pourrait donner des informations quant à la non linéarité des paramètres. L'idée ici est de faire interpréter par notre modèle linéaire une série consécutive de pas infinitésimaux (0,5% de déformation) dont l'accumulation amène une déformation axiale de 10% et ainsi d'obtenir une approximation du profile non linéaire des paramètres du matériaux. Ceci est montré à la Figure 2.13.

On peut s'interroger sur la validité des résultats présentés à la Figure 2.13. En effet, les résultats présentés sur cette figure ont été obtenus par *curve fit* en utilisant un modèle linéaire basé sur des déformations infinitésimales, alors que la déformation axiale qui peut monter jusqu'à 10% de déformation, n'est plus infinitésimale à cette valeur. Cependant, il faut insister sur le fait que chaque point obtenu à la Figure 2.13 provient d'un *curve fit* pour un pas infinitésimal (0.5% de déformation) et donc, l'utilisation de notre modèle (basé sur des déformations infinitésimales) est justifiée. Cependant, un effet qui aurait été négligé dans ce cas pourrait être l'effet des contraintes résiduelles compressives sur l'axe z et en tension dans le plan $r\theta$ qui s'accumulent après chaque pas en augmentant au fur et à mesure de la compression et qui pourraient modifier de façon non négligeable la rigidité du matériaux. Un autre aspect qui pourrait être également discuté est le fait de pouvoir considérer qu'une déformation de 0,5% est infinitésimale. Le problème est maintenant d'évaluer qualitativement et quantitativement l'influence de ces effets. Pour cela, nous avons recourt aux méthodes numériques.

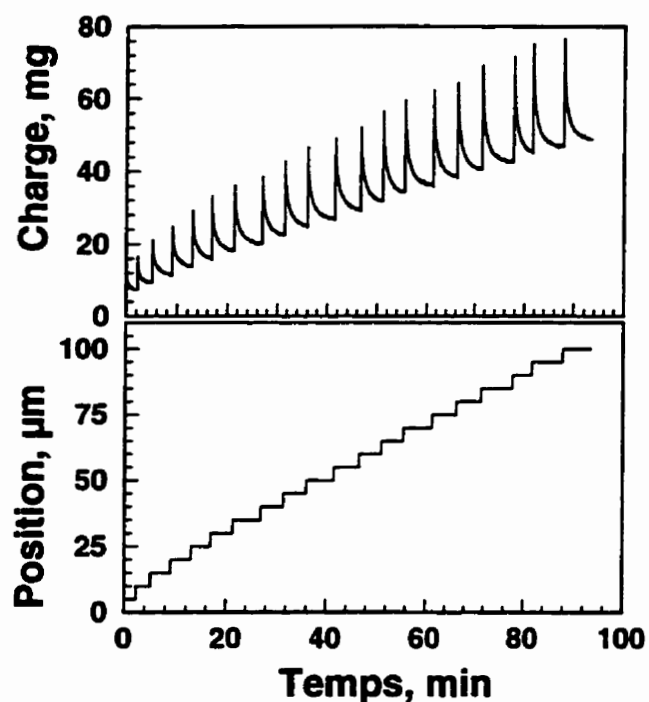


Figure 2.12: Exemple d'une série de 20 pas de déplacements en compression et de la réponse en relaxation de contrainte obtenue expérimentalement. La charge indiquée est celle qui est lue directement par la cellule de charge. La position indiquée est le déplacement compressif qui est contrôlé et appliqué par le contrôleur de déplacement. Pour passer au pas suivant, on s'assure qu'un état d'équilibre a été atteint au niveau du pas courant. Cet équilibre est défini en terme d'une variation minimale de la charge par minute, fixée par l'utilisateur.

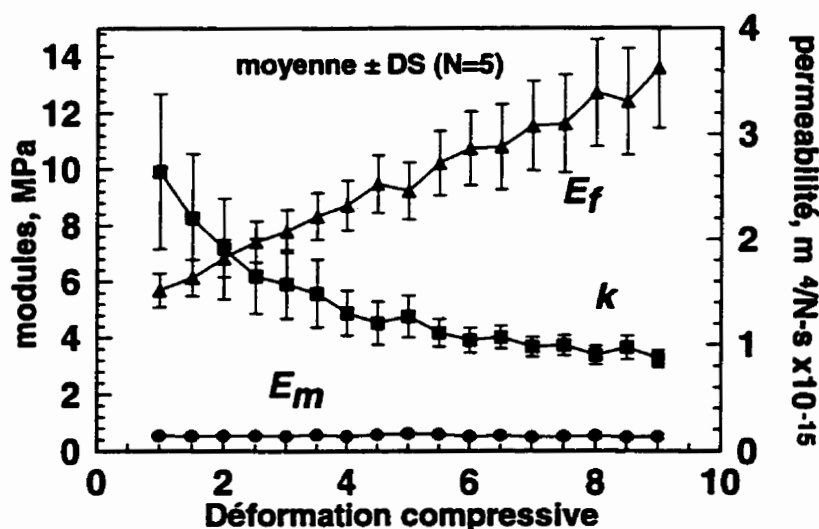


Figure 2.13: Modules de la matrice (●) et des fibres (▲) et perméabilité hydraulique (■) en fonction de la déformation compressive appliquée. Ces points sont obtenus par *curve fit* de chacun des pas de relaxation de contrainte comme ceux montrés à la Figure 2.12. Le *curve fit* s'effectue sur les valeurs relative du déplacement et de la relaxation de contrainte du pas considéré par rapport aux pas précédents. D'après M. Fortin, J. Soulhat, A. Shirazi-Adl, E.B. Hunziker, M.D. Buschmann (1997).

3. DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS

3.1 Introduction

Nous avons développé au chapitre 2 un modèle analytique biphasique non homogène et composite pour l'étude du comportement mécanique du cartilage en compression non confinée. Ce modèle a été validé par comparaison entre la prédiction de la contrainte moyennée à la surface $\bar{\sigma}_s$ et ses mesures expérimentales. Nous avons illustré à la Figure 2.13 que ce modèle analytique pouvait donner des informations quantitatives et qualitatives quant aux paramètres mécaniques du cartilage qui décrivent le modèle, par *curve fit* avec des données expérimentales. Ce modèle a l'avantage d'être conceptuellement simple, facile à obtenir, facile à mettre en oeuvre et il permet très facilement d'obtenir des paramètres de matériaux par simple *curve fit*.

Cependant, le modèle analytique présenté au chapitre 2 est limité au cas de la compression non confinée, qui reste une géométrie relativement simple. D'autre part, des solutions analytiques pour des géométries plus complexes seraient très difficiles, voire impossibles à obtenir, étant donné qu'il faudrait résoudre les équations gouvernantes 1.2 à 1.7 avec des conditions limites particulières à chaque géométrie. De plus, le modèle analytique que nous avons développé ne prend en compte que des phénomènes mécaniques simples où les déformations sont infinitésimales, les propriétés mécaniques du matériau sont homogènes et où les chargement appliqués sont simples. Par exemple, la résolution analytique de ces équations gouvernantes pour un problème qui n'aurait pas été axisymétrique aurait été plus complexe. De même, l'introduction de grandes déformations, ainsi que des non linéarités du matériau dans ce modèle analytique n'aurait pas été une mince affaire.

Un moyen d'obtenir un modèle qui pourrait prendre en compte des phénomènes mécaniques plus complexes comme les grandes déformations, les non linéarités du

matériau ou l'hétérogénéité du tissu pour des géométries plus complexes est d'avoir recourt à des solutions numériques approchées. La méthode des éléments finis est une méthode numérique très populaire, qui permet d'obtenir relativement facilement des solutions approchées à des problèmes complexes, le problème étant de définir et d'élaborer son modèle le plus adéquatement possible et surtout d'interpréter correctement les résultats obtenus.

Dans notre cas, nous avons développé un modèle éléments finis (MEF) basé, comme le modèle analytique, sur une description biphasique, non homogène et composite du cartilage, à l'aide du logiciel commercial "Abaqus" qui permet d'effectuer des analyses poroélastiques.

Les objectifs de ce chapitre sont de développer un MEF pour la géométrie de compression non confinée et d'étudier l'influence de certains effets non linéaires sur la réponse du cartilage. Ceci va également nous donner des informations quant à l'importance de certains phénomènes non linéaires sur la réponse et d'évaluer les prédictions de notre modèle analytique qui permet d'obtenir facilement des informations sur les paramètres mécaniques du cartilage (par *curve fit*), mais qui néglige les effets non linéaires mentionnés plus haut.

3.2 Elaboration du modèle par éléments finis en compression non confinée

Les problèmes qui se posent maintenant sont de déterminer la manière d'implémenter le concept d'une description composite non homogène, de choisir un type de maillage, de déterminer les conditions aux limites.

3.2.1 Principes de modélisation

- Description du problème:

Comme dans le chapitre 2, dans la configuration de la compression non confinée (voir Figure 1.3), un disque de cartilage est comprimé entre 2 plaques rigides, lisses et imperméables dans la direction z . Le disque de cartilage est libre de s'étendre dans le plan $r\theta$. Les hypothèses a) et b) du paragraphe 2.2 sont appliquées également ici, c'est à dire que le déplacement compressif des plaques est supposé uniforme sur le rayon. Nous avons également envisagé le cas où l'interface entre les plaques et le cartilage sont parfaitement adhésive. Le problème peut être également considéré comme axisymétrique. Le logiciel Abaqus version 5.5 a été utilisé. Comme pour la solution analytique, on considère le cartilage comme étant constitué d'un réseau de fibrils de collagène distribué de façon uniforme dans les 3 directions et décrit par E_f (le module de Young équivalent égal à $\chi e_f/3$), qui emprisonne un gel de protéoglycane représenté par une matrice solide biphasique décrite par un coefficient de Poisson sec ν_m , par un module de Young sec E_m , et par une perméabilité hydraulique k (voir Figure 2.2).

- Modélisation de la structure composite:

La matrice est modélisée par des éléments continus axisymétriques à 8 noeuds permettant une variation quadratique du champ de déplacement et une variation linéaire du champ de pression du fluide dans les pores (voir Figure 3.1). Le réseau des fibrils de collagène est modélisé par des ressorts non linéaires distribués de façon homogène dans les 3 directions sans résistance en compression. On applique également ici l'hypothèse i) du paragraphe 2.2 qui spécifie que la déformation dans la matrice et dans le réseau de ressorts, dans la direction de ces derniers, sont identiques. Cela signifie que les ressorts formant le réseau sont connectés aux noeuds des éléments continus axisymétriques qui forment la matrice et donc que les déplacements dans la matrice et dans les ressorts sont identiques. Comme le cartilage peut supporter de grands déplacements, des nonlinéarités géométriques ainsi que des non linéarités du matériau vont être considérées. Les non linéarités du matériau vont inclure les dépendances de la perméabilité k et de la rigidité du réseau de ressorts avec la déformation.

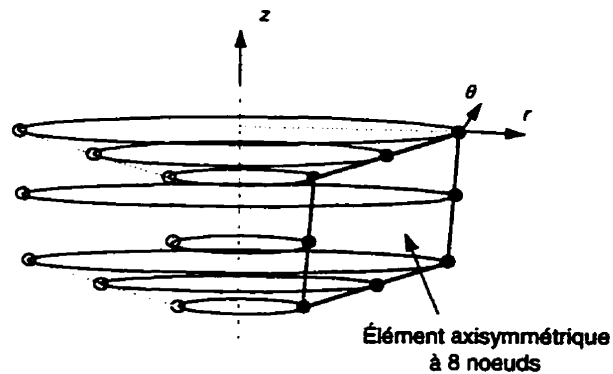


Figure 3.1: Élément continu axisymétrique à 8 noeuds utilisé pour modéliser la matrice. Cet élément permet une variation quadratique du champ de déplacement et une variation linéaire du champ de pression du fluide. Les éléments quadratiques sont définis pour 2π radian.

● Conditions sur la rigidité des ressorts:

Le problème qui se pose maintenant est de déterminer la rigidité de chaque ressort de manière à satisfaire la condition d'une répartition homogène du réseau des fibrils de collagène et sachant que le module de Young équivalent du réseau des fibrils est égal à E_f , pour la géométrie de compression non confinée. Nous avons dit que le réseau de ressorts est distribué de façon homogène dans les directions r , θ et z ; c'est à dire que l'on considère qu'il peut être décrit par un ensemble de ressorts orientés dans la direction r , d'un ensemble de ressorts orientés dans la direction θ et d'un autre ensemble de ressorts orientés dans la direction z . Pour le problème axisymétrique, la contribution de l'ensemble des ressorts orientés dans la direction circonférencielle à la rigidité globale du réseau est équivalente à de la rigidité qui agit dans la direction radiale et qui s'ajoute à celle apportée par l'ensemble des ressorts orientés dans la direction radiale. Par conséquent, une distribution homogène du réseau de ressorts dans les 3 directions r , θ et z peut être représentée par un premier ensemble de ressorts orienté selon r et d'un second ensemble orienté selon z . L'orientation des ressorts est représentée à la Figure 3.2.

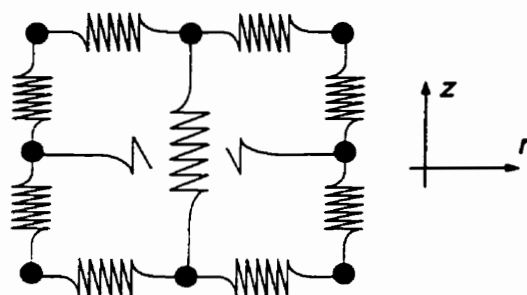


Figure 3.2: Répartition sur un élément des ressorts orientés dans les directions radiale et axiale, formant un réseau globale homogène.

En plus de respecter la condition d'une répartition homogène du réseau de ressort, il faut être vigilant dans le calcul des rigidités individuelles des ressort étant donné que chaque ressort (défini par 2 noeuds) est connecté entre des noeuds qui définissent un élément à interpolation quadratique du champ de déplacement. En effet, si on avait une charge linéique uniforme q appliquée sur un des bords d'un élément quadratique, cela serait équivalent à l'application de 3 forces, aux 3 noeuds formant le bord, réparties selon le ratio 1-4-1 (voir Figure 3.3). Donc la rigidité de chaque ressort doit être déterminée de manière à satisfaire la condition d'une répartition homogène globale du réseau de ressorts en prenant en compte l'interpolation quadratique du champ de déplacement au noeuds des éléments continus.

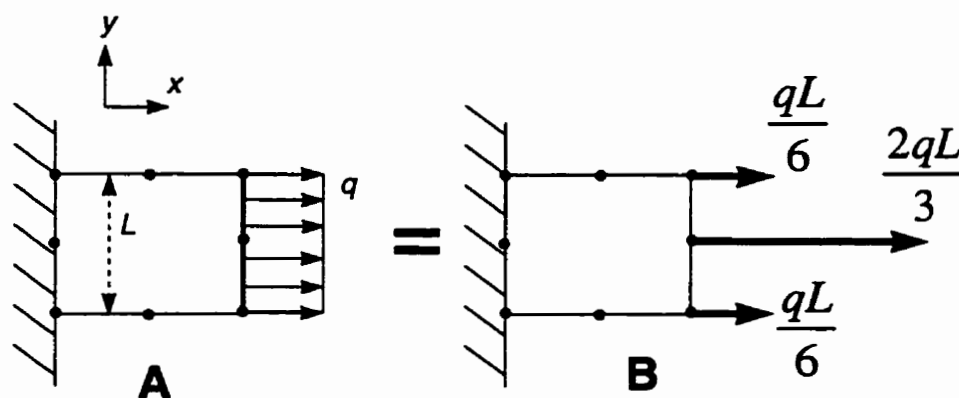


Figure 3.3: Répartition d'une charge linéique uniforme q sur un coté de longueur L d'un élément quadratique (A). Les forces concentrées aux noeuds selon le ratio 1-4-1 (B) sont équivalentes au chargement linéique q .

3.2.2 Modèle, maillage, conditions limites et chargement

Le concept du modèle est représenté à la Figure 3.4 où la structure composite est modélisée par des éléments continus (représentant la matrice) aux noeuds desquels se connectent les ressorts (représentant le réseau de fibrils) de rigidité à déterminer.

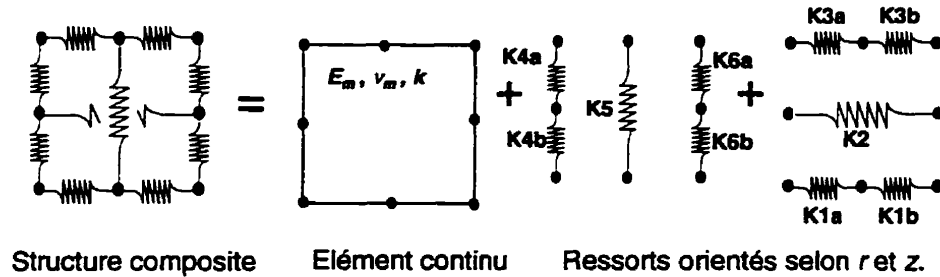


Figure 3.4: Modélisation non homogène de la structure composite. Celle-ci est constituée d'éléments continus homogènes, biphasiques et isotropes mélangés à des ressorts de rigidités K_i dont la répartition globale est homogène et équivalente à un réseau de fibrils de collagène de module de Young E_f .

Le type maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 où $n_A \times m$ éléments axisymétriques ont été utilisés dans la zone A (définie par $0 \leq r \leq \beta r_0$) et où $n_B \times m$ éléments axisymétriques ont été utilisés dans la zone B, où n_A est le nombre de colonne d'élément dans la zone A et n_B est le nombre d'élément dans la zone B, m est le nombre de rangées et $\beta < 1$ définit la transition entre les zones A et B (dans cette étude, $\beta = 2/3$, $n_A = 6$, $n_B = 10$, $m = 8$ ou $\beta = 0$, $n_A = 0$, $n_B = 30$, $m = 10$). Les conditions aux limites sont également montrées sur cette figure. Celles ci sont typiques au problème de compression non confinée: la pression relative du fluide est nulle à la paroi, le déplacements axiale $\bar{u}_z$ est nul sur le coté bas, le déplacements radial $\bar{u}_r$ est nul sur l'axe z et le déplacement axial est prescrit sur le coté supérieur. Dans cette étude, on considère que le déplacement axial imposé est sous la forme d'une fonction rampe définie par le temps de rampe t_0 et la déformation axiale ε_0 (voir Figure 1.5A). Nous avons également étudié le cas où le déplacement axial imposé

consiste en une série de 20 déplacements sous forme de fonction rampe comme montré à la Figure 2.12. De plus, pour le cas où on considère une interface adhésive entre les plaques et le cartilage, on a la condition supplémentaire que les déplacements radiaux aux interfaces sont nuls. Une zone raffinée (zone B) a été considérée parce que on s'attend à rencontrer des gradients importants dans cette zone pour les profils (déformation radiale, pression et vitesse du fluide), comme on peut le constater aux Figures 2.6, 2.7, 2.8.

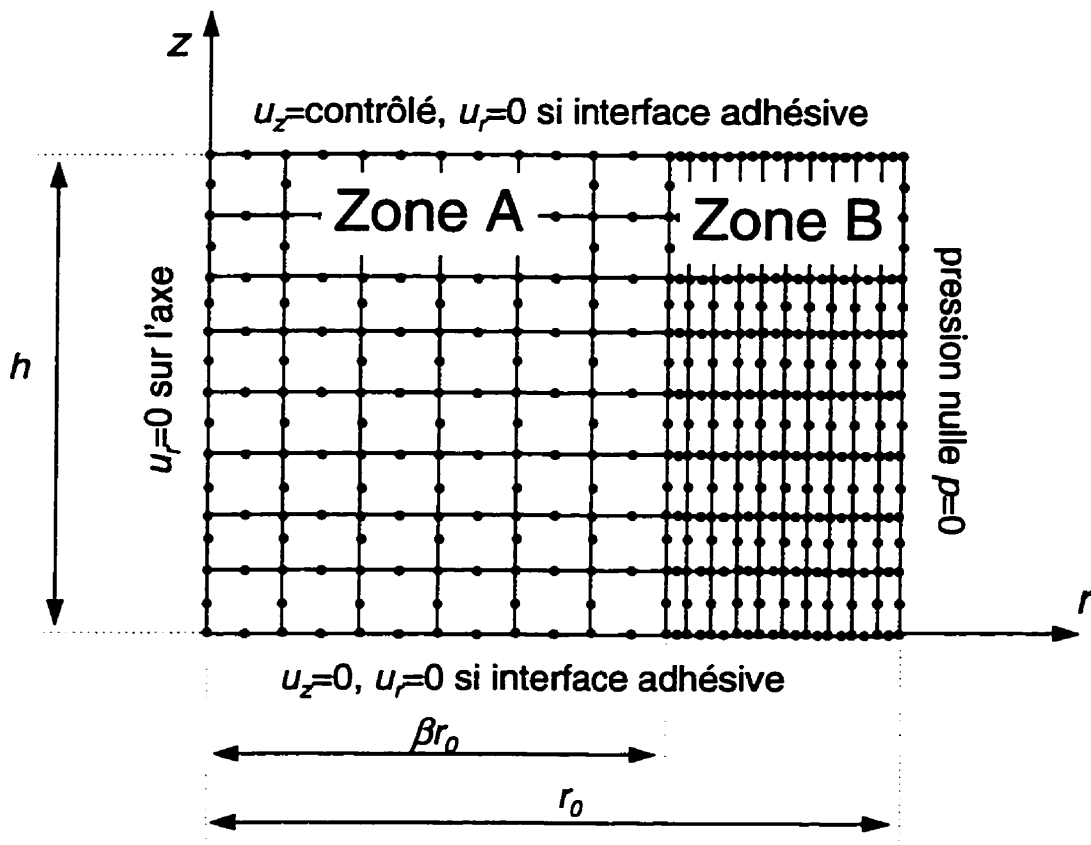


Figure 3.5: Maillage et conditions aux limites.

Des incréments de temps fixes ont été choisis dans cette étude, dépendamment des valeurs des temps caractéristiques $t_g = S_{11}k/r_0^2$ suggérées par le modèle analytique (voir

chapitre 2) pour un total de 250 incréments pour un déplacement contrôlé sous forme de rampe unique et 4000 incréments pour le cas où une série de 20 déplacements sous forme de rampe est considérée. Les incréments de temps ont été choisis comme suit: - pour un déplacement rampe unique: 30 incréments égaux entre $t=0$ et $t=t_0$, 20 incréments égaux entre $t=t_0$ et $t=t_g/3$ et 200 incréments égaux entre $t=t_g/3$ and $t=4t_g$; - pour une serie de 20 déplacements sous forme de rampe: 20 incréments égaux entre $t=0$ et $t=t_0$, 80 incréments égaux entre $t=t_0$ et $t=t_g^{max}/3$, 50 incréments égaux entre $t=t_g^{max}/3$ et $t=t_g^{max}$, et 50 incréments égaux entre $t=t_g^{max}$ et $t=4t_g^{max}$ où t_g^{max} est le temps caractéristique maximale, comme t_g peut varier au cour de l'analyse dans le cas où la non linéarité de la perméabilité ou du réseau des ressorts est considérée.

3.2.3 Calcul des rigidités des ressorts

- rigidité des ressorts orientés dans la direction radiale:

Le module de Young équivalent du réseau global des ressorts est donné par: $E_f = \frac{1}{3} \chi e_f$ (voir Figure 2.2) où e_f peut varier avec la déformation. En considérant la condition d'une distribution homogène du réseau des fibrils de collagène, la rigidité radiale des ressorts contenus dans un élément individuel K_{el}^{radial} est donnée par (voir Annexe V pour les détails):

$$\begin{aligned} K_{el}^{radial} &= \frac{2\pi h n_A}{m\beta} E_f && \text{dans la zone A (voir Figure 3.5)} \\ K_{el}^{radial} &= \frac{2\pi h n_B}{m(1-\beta)} E_f && \text{dans la zone B (voir Figure 3.5)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où h est l'épaisseur du disque de cartilage (=1mm). Cette expression est valide pour (voir Figure 3.6):

$$\begin{aligned}
r_{i+1} - r_i &= r_i - r_{i-1} = \frac{\beta r_0}{n_A} && \text{en zone A} \\
r_{i+1} - r_i &= r_i - r_{i-1} = \frac{(1-\beta)r_0}{n_B} && \text{en zone B} \\
z_{i+1} - z_i &= z_i - z_{i-1} = \frac{h}{m} && \text{en zones A et B}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où r_{i+1} , r_i , r_{i-1} , z_{i+1} , z_i et z_{i-1} sont les rayons et les coordonnées dimensionnelles sur l'axe z qui définissent 4 éléments adjacents dans une même zone, à l'équilibre.

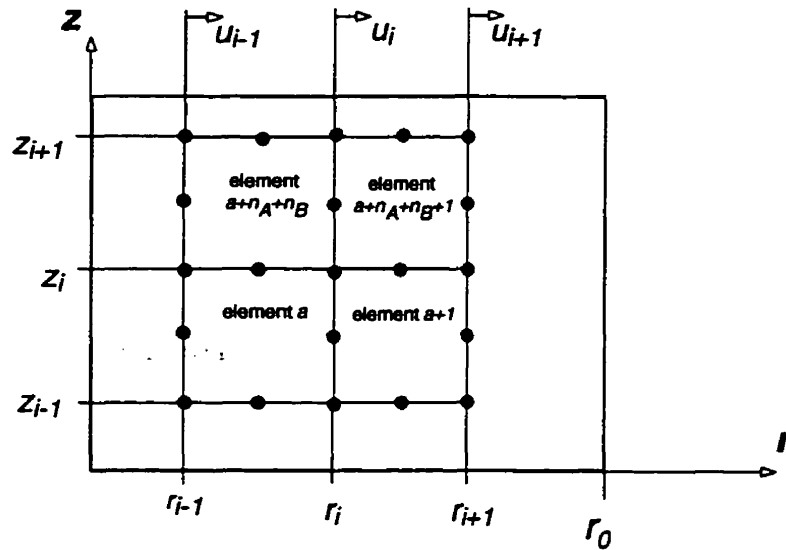


Figure 3.6: Élaboration du modèle. Pour respecter la condition d'une distribution homogène du réseau des ressorts sur tout le volume, on considère que, après simplification au cas axisymétrique, la déformation radiale est uniforme sur le rayon à l'équilibre (mais pas nécessairement pendant la relaxation), c'est à dire que l'on a :

$$\varepsilon_r^{\text{equilibre}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i}.$$

La rigidité radiale $K_{\text{de}}^{\text{radial}}$ est redistribuée aux 5 ressorts orientés dans la direction radiale et contenus dans un élément individuel. Nous avons donc (voir Figure 3.4):

$$K_{1a} = K_{1b} = K_{3a} = K_{3b} = K_r \text{ et } K_2 = 2 K_r \tag{3.3}$$

Cette équation remplit la condition sur la rigidité des ressorts horizontaux connectés aux noeuds d'un élément quadratique en respectant la proportion 1:4:1 pour la rigidité des ressorts connectés sur les noeuds d'un coté de l'élément quadratique. La rigidité K_{ar}^{radial} des ressorts horizontaux dans un éléments est:

$$K_{ar}^{radial} = \frac{K_{1a} \times K_{1b}}{K_{1a} + K_{1b}} + \frac{K_{3a} \times K_{3b}}{K_{3a} + K_{3b}} + K_2 = 3K_r \quad (3.4)$$

A partir de l'équation 3.1, on obtient:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{2\pi h n_A}{3m\beta} E_f && \text{en zone A (Figure 3.5)} \\ K_r &= \frac{2\pi h n_B}{3m(1-\beta)} E_f && \text{en zone B (Figure 3.5)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La valeur de K_r est constante pour chaque élément pris individuellement, ne change pas avec le rayon, et elle est valide pour les 5 ressorts horizontaux contenus dans un élément. Les rigidités des ressorts pour un élément individuel doivent être assemblées pour donner la rigidité globale de l'ensemble de ressorts orientés dans la direction radiale. On rappelle, d'après le paragraphe 3.2.1, que les rigidités exprimées aux équations 3.5 prennent en compte l'effet des ressorts orientés dans la direction circonférencielle.

- rigidité des ressorts orientés dans la direction axiale:

De même, les rigidités des ressorts orientés dans la direction axiales doivent respecter les mêmes conditions. Pour respecter une distribution homogène de l'ensemble des ressorts orientés dans la direction axiale en prenant en compte que les éléments continus sont quadratiques, les rigidités axiale contenues dans un élément individuel s'écrivent (voir Figures 3.4 et 3.6 et Annexe V):

$$\begin{aligned}
K_{4a} = K_{4b} &= \frac{2}{3} r_i \times \frac{\pi(r_{i+1} - r_i)}{h / m} E_f \\
K_5 &= \frac{2}{3} \times \frac{\pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)}{h / m} E_f \\
K_{6a} = K_{6b} &= \frac{2}{3} r_{i+1} \times \frac{\pi(r_{i+1} - r_i)}{h / m} E_f
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tous les ressort sont définis de manière à ce qu'ils ne procurent aucune rigidité s'ils sont sollicité en compression, c'est à dire si la déformation le long de leurs lignes d'action est compressive. Pour le cas de la compression non confinée avec une interface plaque/cartilage parfaitement lubrifiée, la ligne d'action des ressorts axiaux reste orientée selon l'axe z et reste donc en compression. Par conséquent, les ressorts axiaux n'amènent aucune rigidité au système. Pour une interface adhésive, cela peut être différent.

3.3 Propriétés de matériaux

On rappelle que le modèle est contrôlé par 4 paramètres de matériau: le module de Young équivalent du réseau des fibrils E_f , le module de Young, le coefficient de Poisson et la perméabilité de la matrice E_m , ν_f et k . Plusieurs propriétés de matériaux ont été considérées (voir Tableau 3.1), comprenant la non linéarité de la perméabilité et/ou du réseau des fibrils de collagène.

3.3.1 Modules de Young et coefficient de Poisson de la matrice

Dans cette étude, nous avons considéré les valeurs suivante pour E_m : 0,5 ou 2,0 MPa selon les cas (voir Tableau 3.1). Pour le coefficient de Poisson de la matrice ν_m , nous avons considéré les valeurs suivante: 0,0 ou 0,3 selon les cas (voir Tableau 3.1).

	E_f MPa	E_m MPa	k $\times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$	ν_m
Case 1	10,0	0,5	0,5	0,0
Case 2	10,0	0,5	1,5	0,0
Case 3	10,0	0,5	1,0	0,0
Case 4	20,0	0,5	1,0	0,0
Case 5	10,0	2,0	1,0	0,0
Case 6	10,0	0,5	0,5	0,3
Case 7	10,0	0,5	1,5	0,3
Case 8	10,0	0,5	1,0	0,3
Case 9	20,0	0,5	1,0	0,3
Case 10	10,0	2,0	1,0	0,3

Tableau 3.1: Paramètres de matériaux utilisés dans l'analyse du cartilage à l'aide du modèle par élément finis.

3.3.2 Perméabilité de la matrice

Selon les cas précisés au Tableau 3.1, la perméabilité a été considérée constante avec des valeurs typiques de 0,5, 1,0 ou 1,5 $\times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$, ou non linéaire en variant avec la déformation. Plusieurs cas de variation de la perméabilité avec la déformation ont été considérés. La première non linéarité de perméabilité utilisée est celle proposée par Lai et al. (1980) où ces auteurs proposent une relation empirique qui lie la perméabilité avec la dilatation. Cette non linéarité de perméabilité est montrée à l'équation 1.1. Une étude de Argoubi et Shirazi-Adl (1996) a exprimé cette non linéarité en fonction du *voids ratio* e (le rapport du volume de fluide sur le volume de solide) au lieu de la dilatation, à partir de l'équation de Lai et al. (1980) (équation 1.1) pour donner:

$$k = k_0 \left[\frac{e(1+e_0)}{e_0(1+e)} \right]^2 \exp \left[M \left(\frac{1+e}{1+e_0} - 1 \right) \right] \quad (3.7)$$

où k_0 est la perméabilité initiale que nous avons considérée égale à $1,0 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N.s}$, e_0 est le *voids ratio* initial ($=1/\alpha$ dans l'étude Armstrong et al., 1984) et M est un paramètre de matériau fixé expérimentalement. Pour la cartilage, nous avons fixé M à 10, d'après Suh et al. (1991) et nous avons considéré $e_0 = 4$ (Armstrong et al. 1984).

Une autre non linéarité de la perméabilité provient de considérations microstructurales, où la constante de Darcy K , pour un disque en compression non confinée formé d'une matrice biphasique renforcée par des fibres, est donnée par (Buschmann et Grodzinsky, 1995):

$$K = \lambda K_{\text{perp}} + (1 - \lambda) K_{\text{paral}} \quad (3.8)$$

où K_{perp} est la constante de Darcy pour un écoulement microstructural perpendiculaire à la structure des *glycosaminoglycans* (GAG), K_{paral} est la constante de Darcy pour un écoulement microstructural parallèle à la structure des GAG, $\lambda=1/3$ (Buschmann et Grodzinsky, 1995) est un coefficient relatant l'homogénéité de la répartition des GAG et qui pondère la relation entre ces constantes de Darcy en fonction de la géométrie. Dans le cas de la compression non confinée, l'écoulement est plutôt parallèle aux GAG dans la direction r, θ et il est perpendiculaire aux GAG orientées dans la direction z . K_{perp} et K_{paral} s'expriment par (Happel and Brenner, 1993):

$$\begin{aligned} K_{\text{perp}} &= \frac{R^2}{4} \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R^4 - a^4}{R^4 + a^4} \right) \right] \\ K_{\text{paral}} &= \frac{1}{8R^2} \left[4a^2 R^2 - a^4 - 3R^4 + 4R^4 \ln\left(\frac{R}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $a = 0,55$ nm est le rayon des GAG contenus dans le gel qui forme la matrice et R est le rayon du cylindre formant le volume de contrôle (*cell radius*) qui peut être défini comme une fonction du *voids ratio* e par la relation $R = a\sqrt{e+1}$. Le *voids ratio* initial e_0 est calculé comme suit: $e_0 = \frac{R_0^2}{a^2} - 1$ où $R_0 = \left(\pi 2bN \frac{C_{pg}}{M_{cs}} \right)^{-1/2}$ est le rayon initial qui est une fonction de l'*intercharge distance* b ($\approx 0,64$ nm), de la concentration en protéoglycane

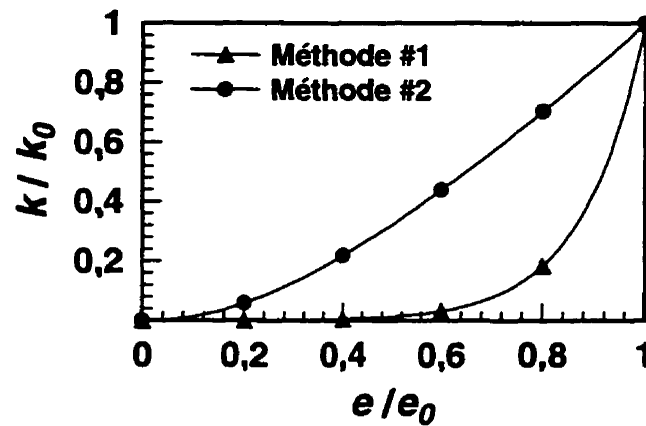


Figure 3.7: Types de perméabilité non linéaire utilisée dans l'étude. Les perméabilités k , normalisées par rapport à leur valeur initiale k_0 sont fonction du *voids ratio* e , normalisé par rapport à la valeur initial e_0 . La perméabilité obtenue par la méthode #1 est calculé selon l'équation empirique proposé par Argoubi et Shirazi-Adl (1996) à partir de Lai et al. (1980). La perméabilité obtenue par la méthode #2 est obtenue par calcul de la constante de Darcy de l'écoulement au niveau microstructural (Buschmann et Grodzinsky, 1995).

C_{pg} , du poids moléculaire d'un *chondroïtin sulfate disaccharide* dissocié M_{cs} (≈ 458 g/mol), et de la constante d'Avogadro N ($\approx 6,02 \times 10^{23}$) (Buschmann and Grodzinsky, 1995). Finalement, la perméabilité k est donnée par: $k = K/\mu$ où $\mu \approx 0.001$ Pa.s et K est donné à l'équation 3.8. Pour $C_{pg} = 49,65$ mg/ml (état initial), on trouve une perméabilité initiale de $k_0 = 1,0006 \times 10^{-15}$ m⁴/N.s et le *voids ratio* initial correspondant est $e_0 \approx 11,53$.

L'allure de ces 2 différentes non linéarité de la perméabilité sont montrées à la Figure 3.7

3.3.3 Module de Young équivalent du réseau des fibrils

Nous avons envisagé le cas où le module équivalent du réseau des fibrils E_f varie linéairement avec la déformation en tension, c'est à dire:

$$E_f(\varepsilon) = a \times \varepsilon + b \quad (3.10)$$

où ε est la déformation en tension le long de la ligne d'action des fibrils, a et b sont 2 coefficients. Pour un spécimen uniaxial, la contrainte s'exprime par: $\bar{\sigma}_{\text{équivalent}}^{\text{fibrils}} = E_f \varepsilon_r = a \varepsilon_r^2 + b \varepsilon_r$. La variation linéaire de E_f avec la déformation est équivalente à l'allure de la courbe contrainte/déformation présentée à la Figure 3.8, qui correspond à ce qui a déjà été observé pour des fibres de collagène.

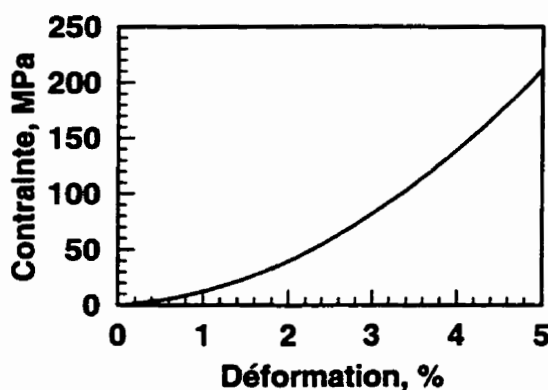


Figure 3.8: courbe σ/ε pour un spécimen chargé uniaxialement. Cette allure est obtenue pour une variation linéaire du module de Young avec la déformation où $E_f = 4,9 + 747,2 \times \varepsilon_r$ (voir Figure 3.9) obtenue à partir des données de Fortin et al. (1997).

La variation linéaire de E_f avec la déformation comme montré à la Figure 3.10 est également justifiée par l'étude de Fortin et al. (1997) où la variation de certains paramètres mécaniques avec la compression a été évaluée en utilisant le modèle analytique développé au chapitre 2. Une variation linéaire de E_f avec la compression

axiale a été observée (voir Figure 2.13). Si on suppose que le coefficient de Poisson effectif est constant et égale à 0,125 (Jurvelin et al., 1997) du 1er au 20ème pas, alors, E_f varie également linéairement avec la déformation radiale. On peut déterminer les coefficient a et b qui correspondent aux résultats de Fortin et al., en effectuant une regression linéaire sur les données. On trouve alors: $a=747,3$ MPa et $b=4,93$ MPa (voir Figure 3.8)

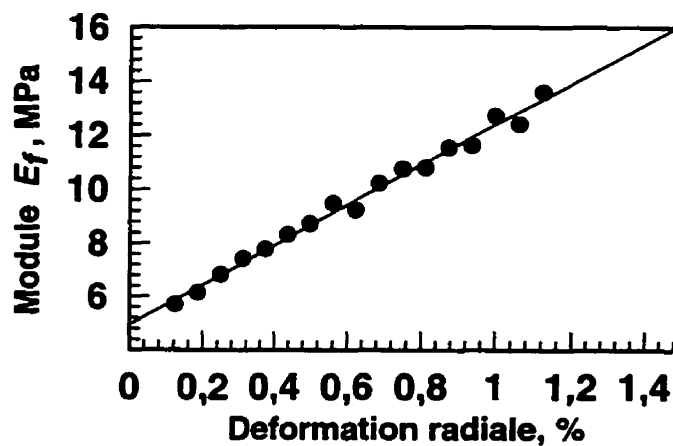


Figure 3.9: Prédiction du module de Young équivalent du réseau des fibrils de collagène en fonction de la déformation radiale à partir des données de Fortin et al. (●), où E_f a été déterminé pour chacun des 20 pas de relaxation (voir Figure 2.12) à partir du modèle développé au chapitre 2. Un coefficient de Poisson effectif constant et égale à 0.125 (Jurvelin et al. 1997) a été considéré pour chaque pas. La regression linéaire de ces données (—) donne $E_f = a\epsilon_r + b$ avec $a=747,2$ MPa et $b=4,93$ MPa.

Dans cette étude, nous avons étudié l'effet de différentes valeurs du coefficient a sur la réponse et nous avons considéré les cas où $a=200, 747$ et 5000 MPa et $b=5$ MPa.

3.3.4 Méthodologie d'analyse

Pour évaluer l'effet des non linéarités (géométriques et de matériau), nous allons faire interpréter les réponses des analyses par éléments finis (AEF) par notre modèle linéaire analytique pour extraire les paramètres de matériaux. La façon dont le modèle analytique

va prédire les paramètres de matériau va donner des informations directes sur la manière dont le modèle analytique interprète ces non linéarités, en comparant les paramètres prédits avec ceux introduits dans l'AEF.

Quand on obtient la réponse temporelle des simulations numériques, on peut la transformer dans le domaine de Laplace en utilisant la procédure détaillée dans l'étude de Buschmann (1997), pour obtenir la réponse en fréquence correspondante.

3.4 Résultats

Dans un premier temps, nous allons effectuer une comparaison entre les prédictions du MEF avec le modèle analytique pour des compressions sous forme de rampe à 0.5% et à 10 % d'amplitude et pour différentes propriétés matériaux. Nous allons ensuite évaluer l'effet des déformation finies pour une série de 20 pas consécutifs identique à ceux de la Figure 2.12 pour des paramètres de matériaux constant. Puis, nous évaluerons l'effet de la non linéarité de la perméabilité et des fibres.

3.4.1 Réponse en contrainte: comparaison entre une AEF linéaire et le modèle analytique.

Quand on considère des compressions de petites amplitude (0,5%, voir Figure 3.10) ou de grandes amplitudes (10% voir Figure 3.11) avec des paramètres de matériaux constant, la comparaison entre les 2 modèles linéaires, l'un analytique (●) et l'autre numérique (v), est excellente aussi bien dans le domaine de temps que dans le domaine de Laplace pour des fréquences inférieurs à 0,1 Hz pour des petites compression et inférieurs à 0,01 Hz pour des grandes compressions, pour la prédiction de la contrainte à la surface moyennée (σ_a). La réponse analytique est légèrement plus rigide dans les hautes fréquences aussi bien pour les petites que pour les grandes déformations (4% plus rigide à 10 Hz pour des petites compression et 7% plus rigide à 1 Hz et 12% plus rigide à 10 Hz pour de grandes

compressions). Une valeur non nulle pour le coefficient de Poisson de la matrice induit une réponse en relaxation de contrainte de plus faible amplitude.

3.4.2 Prédiction des profils: comparaison entre une AFE linéaire et le modèle composite

Une comparaison qualitative des modèles analytique (●) et numérique linéaire (v) est très satisfaisante pour la prédiction des profils normalisés (déformation radiale, pression et vitesse relative du fluide) pour des rayons variant de 0 à 96% aussi bien pour des petite compressions (Figure 3.12) que pour des grandes compressions (Figure 3.13). Pour des petites compression (0,5%), la comparaison qualitative est bonne, alors que les différences ne sont pas significatives. Pour des grandes compression (10%), bien que des comportement qualitatifs similaires sont prédits par les modèles analytiques et numériques, de légères différences quantitatives apparaissent, notamment pour la prédiction de la déformation radiale proche du centre du disque de cartilage.

3.4.3 Réponse en contrainte: comparaison entre une AEF non linéaire (avec déformations finies) et les modèles linéaires (analytiques et numériques)

Pour des petites compression (Figure 3.10), la prediction de la contrainte moyennée à la surface est identique aussi bien qualitativement que quantitativement pour les analyses linéaires (v)-déformations infinitésimales- et non linéaires (Δ) -déformations finies-, dans le domaine de temps (A et B) et dans le domaine de Laplace (AA et BB) pour des fréquences inférieurs à 0,1 Hz. Cependant, pour une compression de grande amplitude (Figure 3.11), les comportements prédits sont quantitativement différents. L'AEF à grandes déformation (Δ) prédit un pic de contrainte plus élevé (~20% plus élevé que AFE linéaire) dans le domaine de temps (voir Figure 3.11 A et B) et une rigidité plus grande pour les fréquences basses dans le domaine de Laplace (voir Figure 3.11 AA et BB). Le modules compression non confinée E_{33} prédits par l'AEF non linéaire sont légèrement plus grands que pour l'AEF linéaire.

3.4.4 Prédiction des profils: comparaison entre une AEF non linéaire (avec déformations finies) et les modèles linéaires (analytiques et numériques)

Encore un fois, pour des compressions de faible amplitude (voir Figure 3.12), les profils prédits sont identiques pour les 2 types d'analyses. Pour des compressions de grande amplitude (voir Figure 3.13), les profils prédits par les modèles sont qualitativement semblables, mais de grandes différences quantitatives apparaissent sur les valeurs prédites. En effet, des plus grandes valeurs numériques sont prédites par le modèle non linéaire ($\blacktriangle$) aussi bien pour la déformation radiale que pour la pression et la vitesse relative du fluide.

3.4.5 Effet d'une interface cartilage/plaque adhésive

Les effets d'une interface adhésive ont été considérés dans les Figures 3.10 A et AA, 3.11 A et AA, 3.12 A et 3.13 A pour les paramètres de matériaux du cas 3 du Tableau 3.1 (cas où $v_m = 0$), avec une AEF permettant les grandes déformations. En général, pour la prédiction de la réponse en contrainte (Figures 3.10 et 3.11), la condition d'adhésivité ($\blacklozenge$) prédit un pic de contrainte plus élevé dans le domaine de temps et une rigidité plus grande du cartilage dans le domaine de Laplace, par rapport au cas où on considère une interface parfaitement lubrifiée ($\triangle$). Cette différence est plus importante pour le cas où la compression est de faible amplitude. Comme on a $v_m = 0$, les module de compression non confinée E_{33} prédit par l'AEF avec adhésion est identique à ceux prédits par les analyses avec lubrification parfaite. Avec cette condition d'adhésion, les profils prédits (Figures 3.12 et 3.13) varient sur l'axe z et ne sont plus uniformes selon la direction axiale (comme c'est le cas pour la condition de lubrification). Les Figures 3.12 et 3.13 montrent les profils pour $z = h/2$, où les valeurs numériques pour le cas où l'adhésion est considérée sont maximales. Le long de cette trajectoire, les profils prédits avec une condition d'adhésion ont des comportements qualitatifs semblables à la condition de

lubrification mais les valeurs numériques sont plus grandes au temps de rampe (■) ($t=5$ s à la Figure 3.12 et $t=80$ s à la Figure 3.13) et plus faibles pendant la relaxation (★).

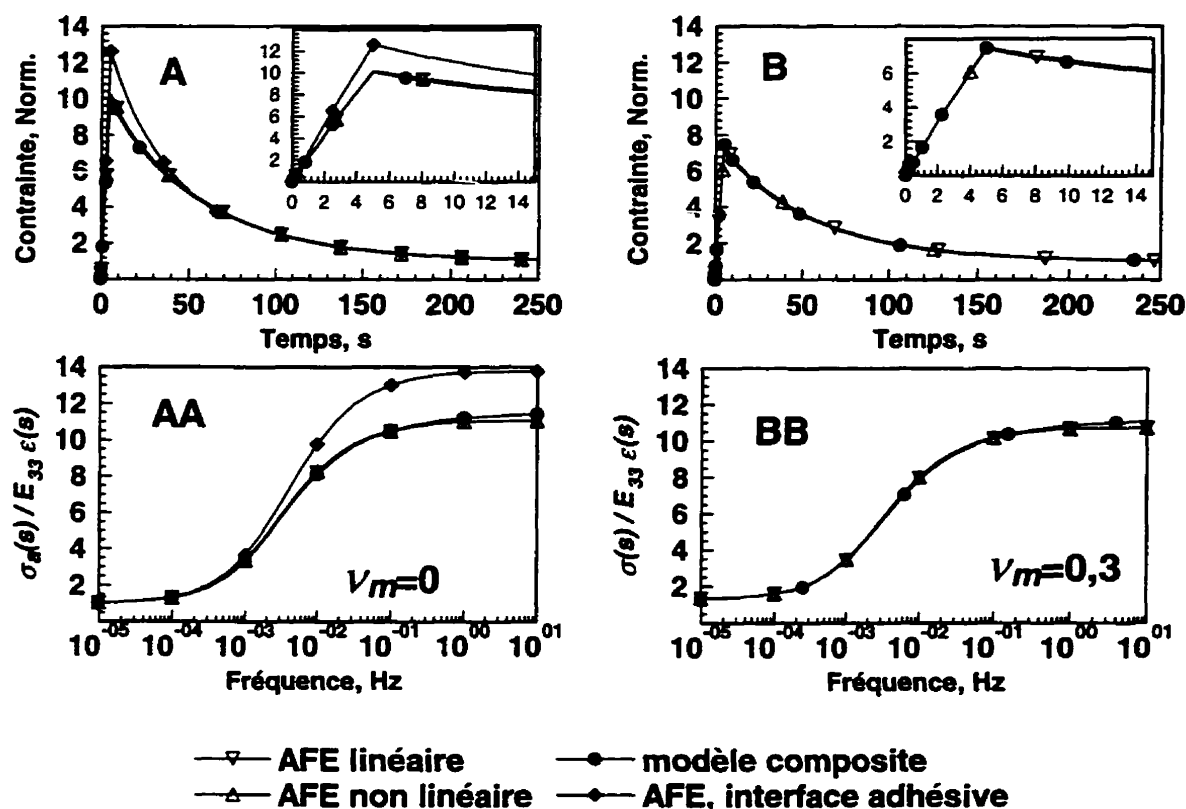


Figure 3.10: Comparaison entre des AEF linéaires, non linéaire (déformations finies), le modèle composite analytique et une AEF non linéaire avec une interface adhésive, pour la prédiction de la contrainte moyennée à la surface, sous l'effet d'une compression axiale sous forme de rampe d'amplitude de 0.5%, dans le domaine de temps (A, B) et dans le domaine de Laplace (AA, BB). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A et AA) et au cas 8 (B et BB) du Tableau 3.1 sont pris en compte. L'effet d'un coefficient de Poisson non nul est apprécié en comparant les figures A, AA ($\nu_m = 0$) avec les figure B, BB ($\nu_m = 0,3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1$ mm. Les résultats sont normalisés par rapport à la valeur à l'équilibre (A et B) ou par rapport à la valeur à basse fréquence (AA et BB).

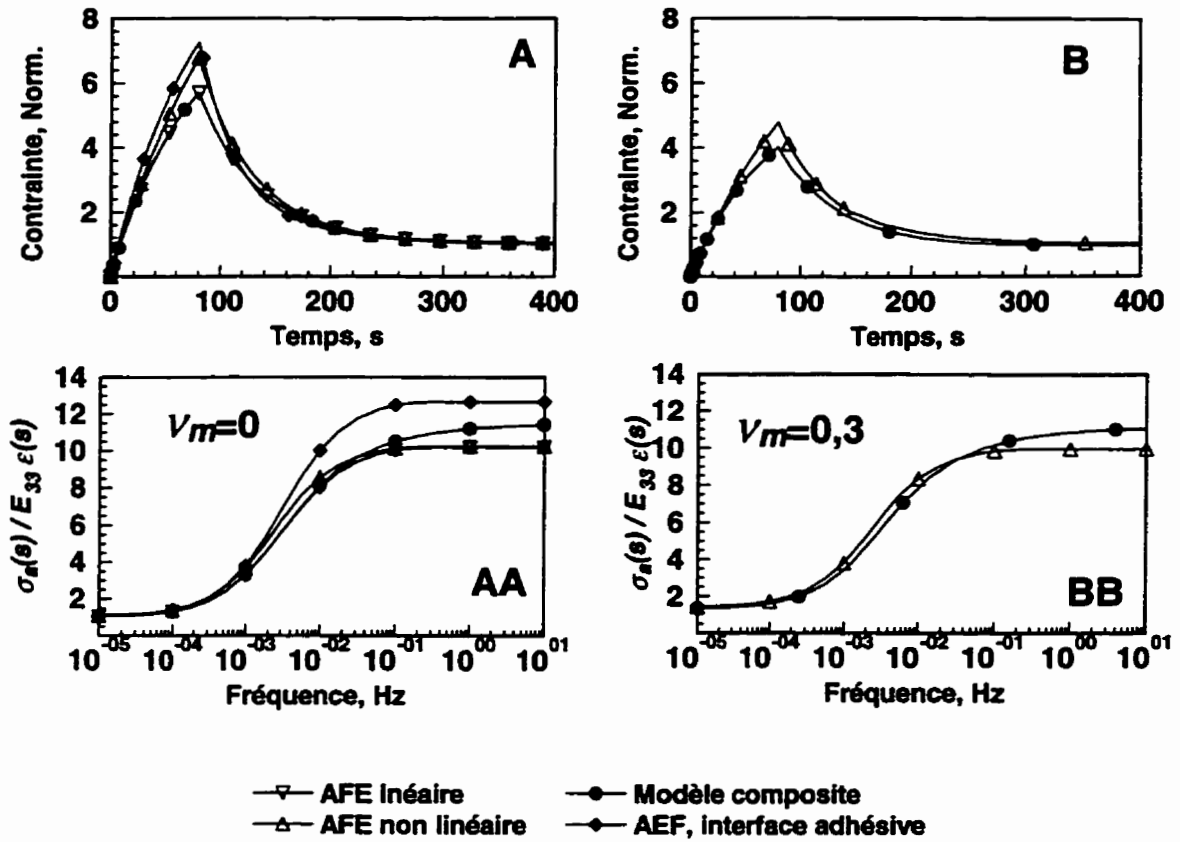


Figure 3.11: Comparaison entre des AEF linéaires, non linéaire (déformation finies), le modèle composite analytique et une AEF non linéaire avec une interface adhésive, pour la prédiction de la contrainte moyennée à la surface, sous l'effet d'une compression axiale sous forme de rampe d'amplitude 10%, dans le domaine de temps (A, B) et dans le domaine de Laplace (AA, BB). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A et AA) et au cas 8 (B et BB) du Tableau 3.1 sont pris en compte. L'effet d'un coefficient de Poisson non nul est apprécié en comparant les figures A, AA ($\nu_m=0$) avec les figure B, BB ($\nu_m=0,3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$. Les résultats sont normalisés par rapport à la valeur à l'équilibre (A et B) ou par rapport à la valeur à basse fréquence (AA et BB).

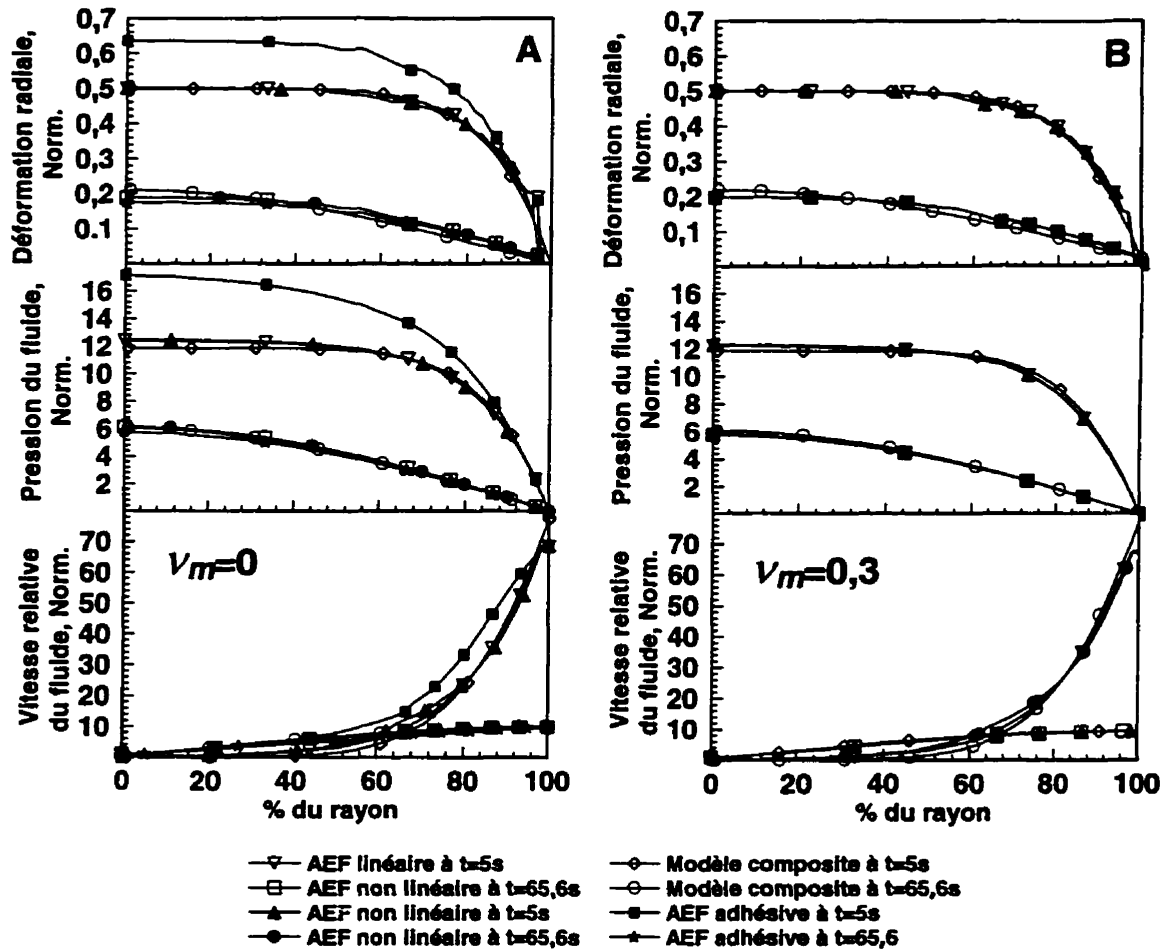


Figure 3.12: Profil de la déformation radiale, pression et vitesse relative du fluide en fonction du rayon. Comparaison entre les types d'AEF (linéaire ou non linéaire avec déformations finies), la prédiction du modèle analytique et une AEF avec des conditions adhésives pour le test de relaxation en compression non confinée avec une amplitude de 0,5% pour des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A) et au cas 8 (B) du Tableau 3.1. Les comparaisons sont effectuées dans le domaine de temps à $t=5$ s (t_0) et $t=65,6$ s ($t_g/3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1$ mm. La normalisation des résultats est identique à celle du Table 2.2.

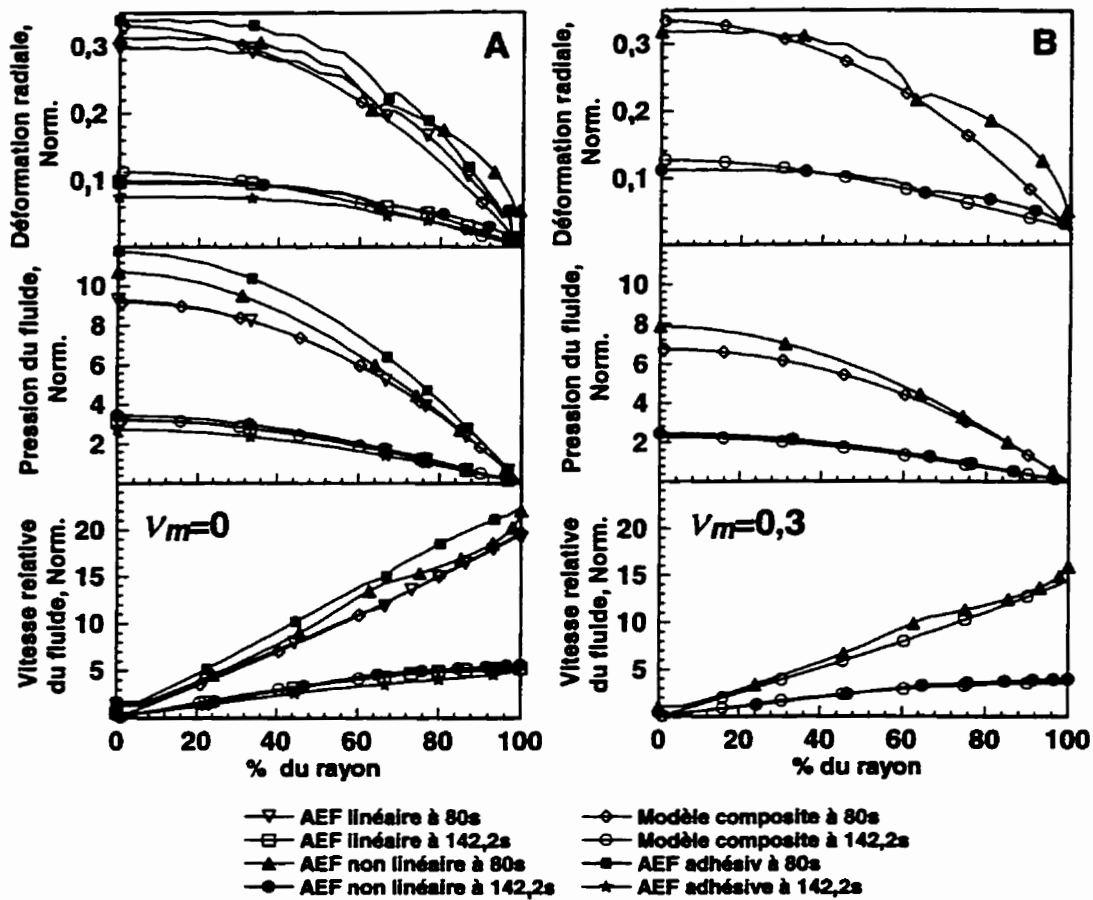


Figure 3.13: Profil de la déformation radiale, pression et vitesse relative du fluide en fonction du rayon. Comparaison entre les types d'AEF (linéaire ou non linéaire avec déformations finies), la prédiction du modèle analytique et une AEF avec des conditions adhésives pour le test de relaxation en compression non confinée avec une amplitude de 10% pour des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 3 (A) et au cas 8 (B) du Tableau 3.1. Les comparaisons sont effectuées dans le domaine de temps à $t=5$ s (t_0) et $t=65,6$ s ($t_g/3$). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1$ mm. La normalisation des résultats est identique à celle du Table 2.2.

3.4.6 Effet des déformations finies sur la réponse

La comparaison entre les prédictions d'une AEF linéaire et non linéaire sont montrés à la figure 3.14 où la réponse en contrainte d'une série de 20 pas de compression consécutifs a été simulée. Chacun des pas de relaxation d'une série de 20 pas consécutifs en compression prédits par une AEF non linéaire à coefficients constants est interprété ("curve fit") par le modèle linéaire analytique développé au chapitre 2. Par comparaison entre les paramètres prédits par fittage et ceux injectés initialement dans l'AEF, il apparaît que le modèle analytique et le modèle éléments finis sont identiques pour les petites déformations en compression (voir Figure 3.15, pour 0.5% déformation), bien qu'une faible différence pour la prédiction de la perméabilité existe.

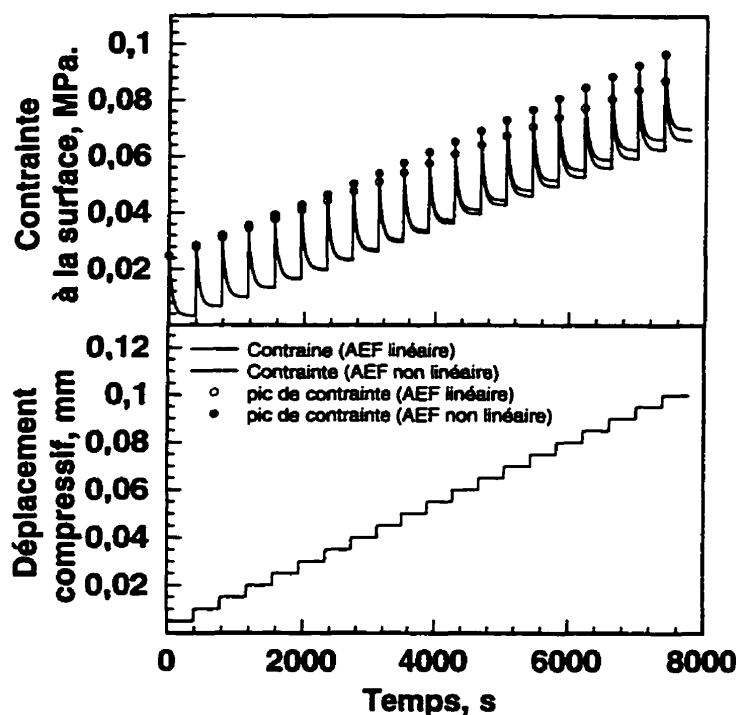


Figure 3.14: Réponse en contrainte simulée à partir d'une série de 20 pas de déplacements consécutifs à 0.5% de déformation, jusqu'à une déformation accumulée de 10%. Comparaison entre la prédiction d'une AEF linéaire (—) et non linéaire (—). Des paramètres de matériaux constants correspondant au cas 8 du Tableau 3.1 ont été utilisés.

Les prédictions module de Young et du coefficient de Poisson de la matrice semblent être indépendant de l'effet des déformations finies, comme leurs valeurs prédites par le modèle analytique demeurent identiques à leurs valeurs initiales injectées dans l'AEF. D'une manière générale, le modèle analytique interprète l'effet des déformations finies par une diminution progressive de la perméabilité et par une augmentation du module de Young équivalent du réseau des ressorts avec la compression. Les valeurs initiales de la perméabilité (voir Figure 3.15 A) et du module équivalent du réseau de fibrils (Figure 2.15 B) semblent ne pas avoir d'influence sur la manière dont les déformations finies affectent les prédictions de l'ensemble des paramètres mécaniques. Par contre, la valeur initiale du module de Young de la matrice semble avoir beaucoup d'importance sur la manière dont les déformations finies affectent les prédictions du modèle analytique. En effet, d'après la Figure 2.15 C, plus la valeur initiale de E_m est grande, plus important est l'effet de la déformation finies sur la prédiction de E_f et k . Par exemple, pour $E_m=0,5$ MPa initialement (cas 8 du Tableau 3.1), on a environ 12% d'erreur sur la prédiction de E_f par le modèle analytique; pour $E_m=2,0$ Mpa (cas 10 du Tableau 3.1), cette erreur est environ 18% (elle a augmenté de 50%).

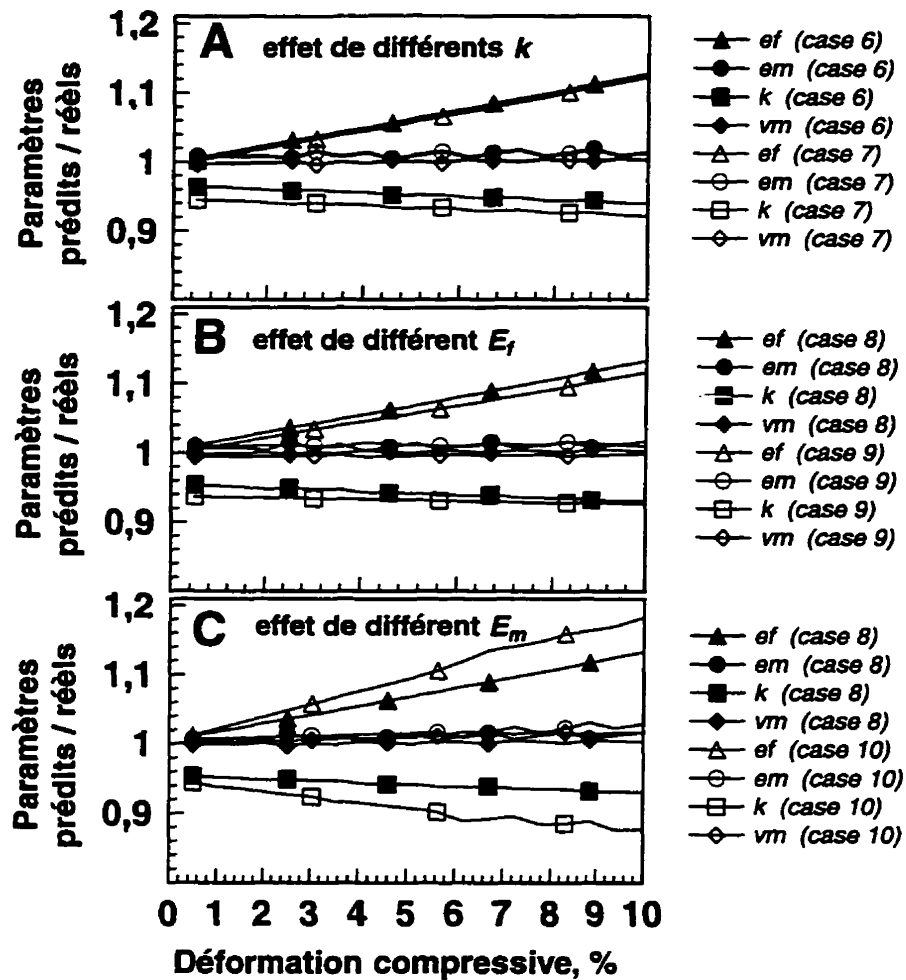


Figure 3.15: Effets des déformations finies sur la prédiction des paramètres mécaniques, E_m ($\circ$ ou $\bullet$), E_f ($\triangle$ ou $\blacktriangle$), ν_m ($\diamond$ ou $\blacklozenge$) et k ($\square$ ou $\blacksquare$), par le modèle analytiques linéaires. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) sont interprétés individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les paramètres prédits sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. Les paramètres initiaux sont constants et correspondent aux cas 6, 7, 8, 9 et 10 du tableaux 3.1. L'effet de différentes valeurs initiales pour k (A), E_f (B) et E_m (C) est également étudié. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{mm}$.

3.4.7 Effet de la perméabilité non linéaire sur la réponse

L'effet de la non linéarité de la perméabilité est montré à la Figure 3.16. Cet effet non linéaire semble ne pas avoir d'influence sur l'amplitude des relaxation de contraintes. Par contre, cette non linéarité influence le temps de relaxation qui augmente au fur et à mesure de la compression (voir B et C).

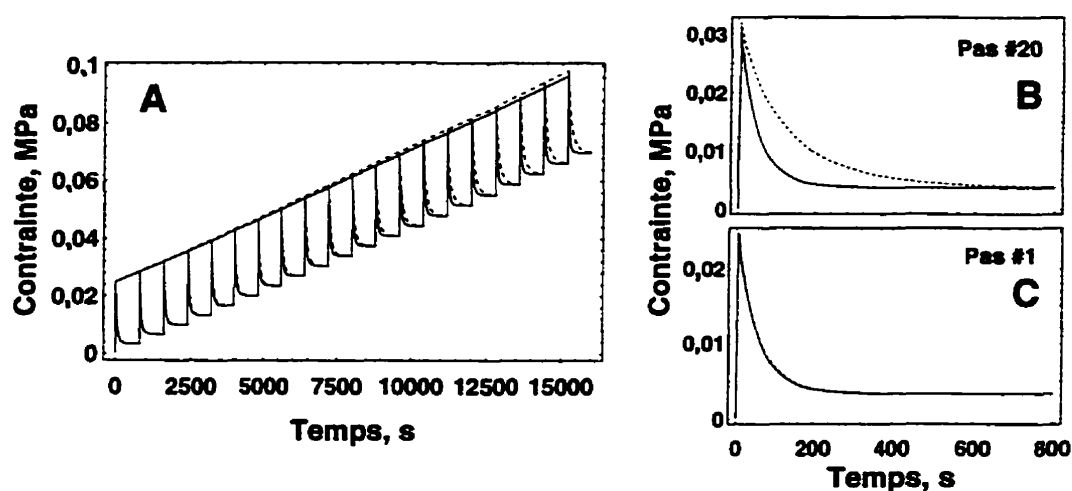


Figure 3.16: Effet de la non linéarité de la perméabilité sur la réponse en contrainte (en pointillé) pour une série de 20 pas de compression (0,5% de déformation) jusqu'à 10% de déformation sur l'axe (en A). La réponse pour le cas d'une perméabilité constante (cas 8 du Tableau 3.1) est montrée en trait plein. Les paramètres de matériaux sont identiques au cas 8 mais la perméabilité non linéaire est calculée selon la méthode #1 (voir Figure 3.7). Les 1er et le 20ème pas de relaxation sont montrés en B et C.

D'après la Figure 3.17, les deux types de non linéarité de perméabilité semblent ne pas avoir d'influence sur la prédiction du modèle analytique. Le modèle réussi a capter la non linéarité de la perméabilité et les autres paramètres prédits (E_f , E_m et ν_m) sont identiques à ceux obtenus avec une perméabilité constante (cas 8, Tableau 3.1).

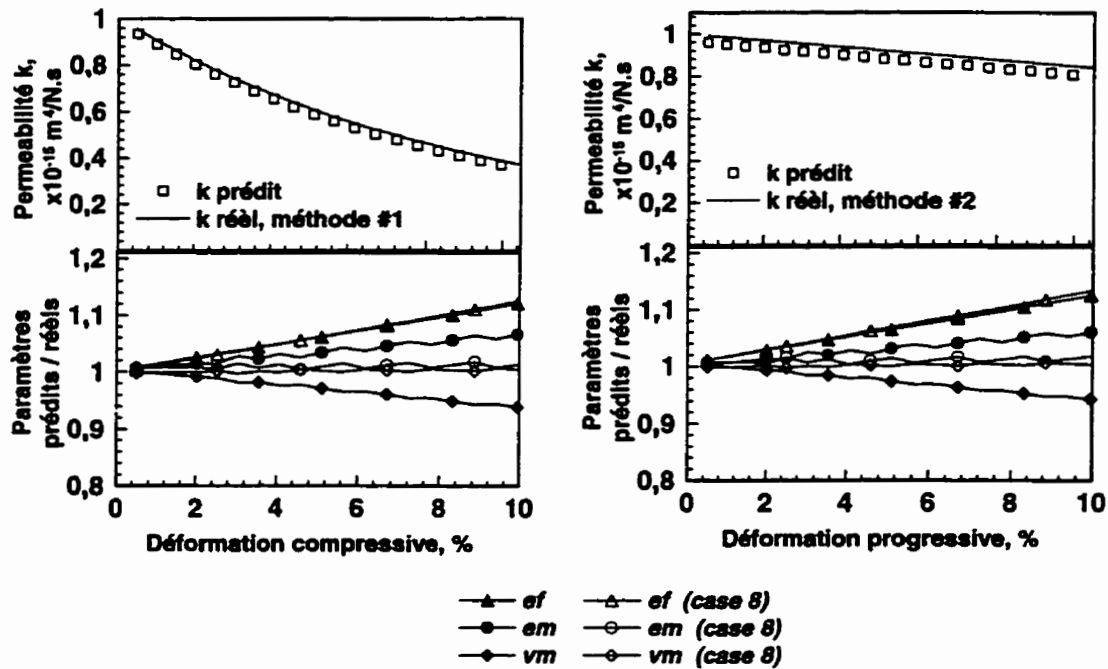


Figure 3.17: Effet de la non linéarité de la perméabilité sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) sont interprétés individuellement par curve fit par le modèle analytique et les paramètres prédits sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. La perméabilité de la méthode #1 est calculée selon l'équation empirique 3.7 (Lai et al., 1980) et celle de la méthode #2 est calculée selon l'équation 3.8 qui décrit l'écoulement au niveau microstructural. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que la perméabilité est non linéaire. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=8$, $n_A=6$, $n_B=10$, $\beta=2/3$, $h=1\text{ mm}$.

3.4.8 Effet de la non linéarité des fibres

Comme précédemment, chacun des pas de relaxation d'une série de 20 pas consécutifs en compression prédits par une AEF non linéaire est interprété (*curve fit*) par le modèle linéaire analytique. Ici, les paramètres mécaniques sont constants (cas 8 Tableau 3.1) sauf le module équivalent du réseau des ressorts E_f qui peut varier avec la déformation. Un exemple de réponse en contrainte simulée par l'AEF non linéaire (déformations finies + réseau des ressorts non linéaire), suite à l'application de 20 pas (0.5% déformation chacun) compression consécutifs (jusqu'à 10 % déformation) est montrée à la figure 3.18.

On remarque que l'allure de la réponse est très identique à la courbe expérimentale montrée à la Figure 2.12. Les Figures 3.19 et 3.20 montrent que l'effet de la non linéarité du réseau des ressorts sur la prédiction de la réponse en contrainte du disque de cartilage en compression non confinée par le modèle analytique est très important.

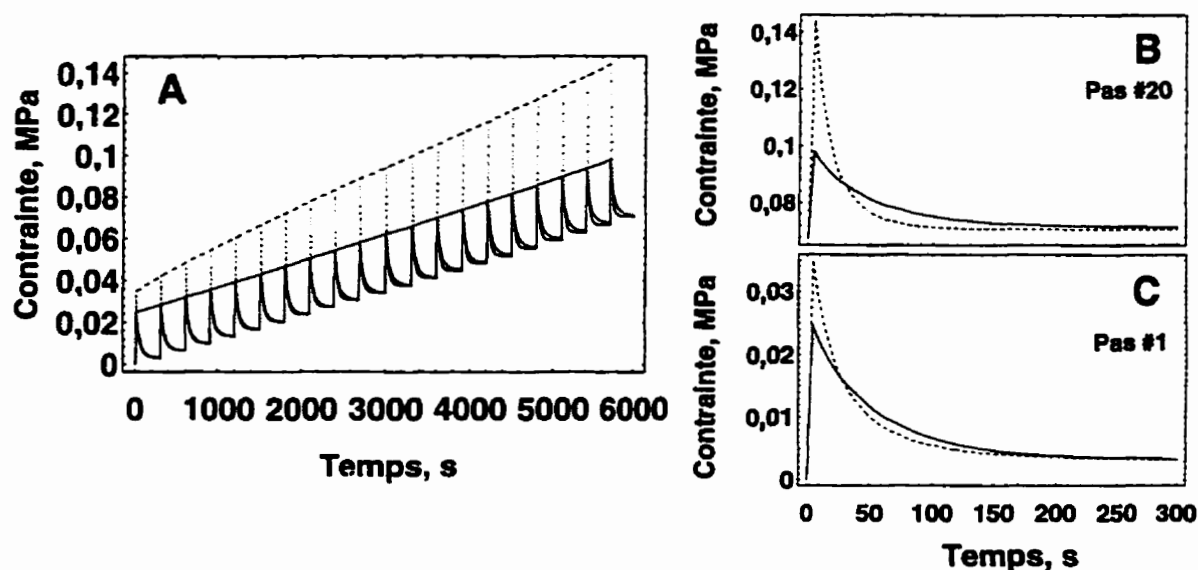


Figure 3.18: Exemple de réponse en contrainte simulée par une AEF non linéaire (déformations finies) avec le module du réseau des ressorts non linéaires (courbes en pointillés), suite à une série de 20 pas de déplacements consécutifs (0.5% déformation chacun) en compression jusqu'à 10 % déformation (en A). Le réponse avec E_f linéaire (cas 8) est montrée en trait plein. Les paramètres de matériaux sont identiques au cas 8 mais on a pris $E_f = 5000\varepsilon_r + 5$ MPa. Les 1er et le 20ème pas de relaxation sont montrés en B et C.

La Figure 3.19 montre que plus la variation de E_f est importante avec la déformation, plus les prédictions du modèle linéaire sont mauvaises pour le module de Young et le coefficient de Poisson de la matrice (voir A et B). Par contre, il ressort que ces différences deviennent moins importantes avec l'augmentation de la compression accumulée. Par exemple pour le cas c ($\blacktriangle$) de la Figure 3.19A où la variation de E_f avec la déformation radiale est importante, on voit qu'à 0,5% de déformation, l'erreur sur la

prédiction de E_m est de 1000% environ et que cette erreur tombe à 15% à 10% de déformation. La Figure 3.19C montre par contre que la prédiction de la perméabilité n'est pas perturbée par la non linéarité des fibres et que la légère augmentation de l'erreur de prédiction avec la déformation est due aux effets des déformations finies comme on l'avait observé à la Figure 3.15. La Figure 3.19D montre que plus la variation de E_f avec la déformation radiale est importante, plus faible est le coefficient de Poisson effectif. D'un autre coté, on voit dans la Figure 3.19E que le module de compression non confinée à l'équilibre reste constant à chacun des pas et qu'il est pratiquement insensible à la non linéarité de E_f .

La Figure 3.20 montre la difficulté du modèle analytique à prédire l'allure de la non linéarité de E_f . Les données sont montrées en fonction de la déformation radiale (et non axiale comme précédemment) à l'équilibre. Plus la variation de E_f avec la déformation radiale est importante, plus grande est l'erreur sur la prédiction de E_f .

La Figure 3.21 souligne le fait que, à l'intérieur de chaque pas, la valeur de E_f varie beaucoup parce que la déformation radiale varie pour présenter une valeur maximale au temps de rampe et pour atteindre un équilibre pour des temps suffisamment long. Cette variation de E_f est plus grande au pas #1 (0,5% de déformation accumulée) où E_f varie de 30% environ entre les valeurs au pic et à l'équilibre alors que cette variation est de 20% environ au pas #20 (10% de déformation accumulée).

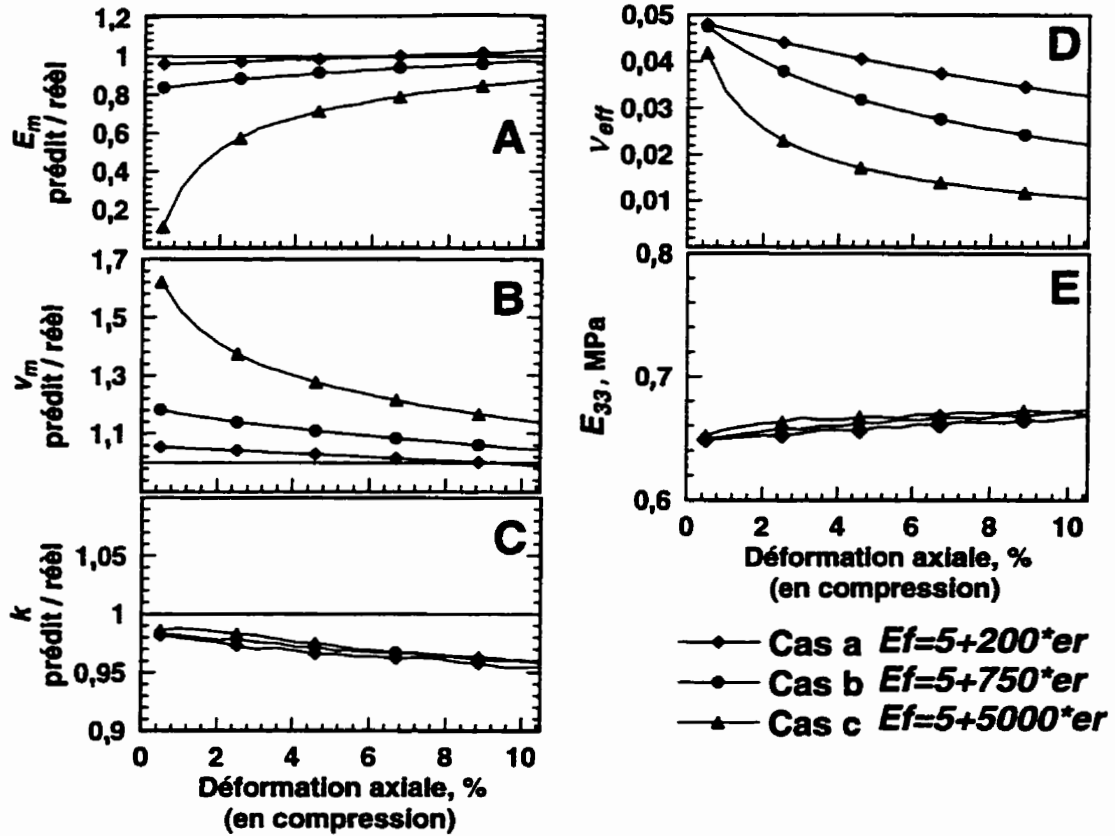


Figure 3.19: Effet de la non linéarité du réseau des ressorts sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) est interprété individuellement par curve *fit* par le modèle analytique et les paramètres prédits (E_m en A, v_m en B et k en C) sont comparées avec les paramètres réels initiaux injectés dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f est non linéaire. On étudie ici 3 cas où la variation de E_f avec la déformation est plus ou moins importante: a=200 ($\blacklozenge$), 747 ($\bullet$) et 5000 ($\blacktriangle$) avec $b=5$ MPa (voir l'équation 3.10). Les variations du coefficient de Poisson effectif v_{eff} (D) et du module de compression non confinée à l'équilibre E_{33} (E) sont également montrées. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10$, $n_B=30$, $\beta=0$, $h=1$ mm.

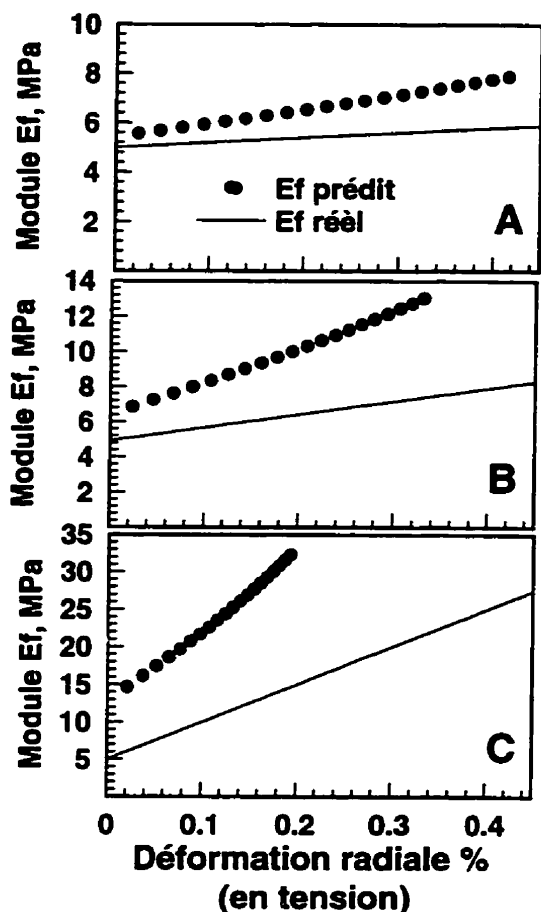


Figure 3.20: Effet de la non linéarité du réseau des ressorts sur la réponse. Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies) est interprété individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et la prédiction de E_f (●) est comparée avec l'allure initiale (—) de la variation de E_f avec la déformation radiale injectée dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f est non linéaire. Les Figures A, B, C correspondent aux cas a, b et c définis précédemment. Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10$, $n_B=30$, $\beta=0$, $h=1\text{mm}$

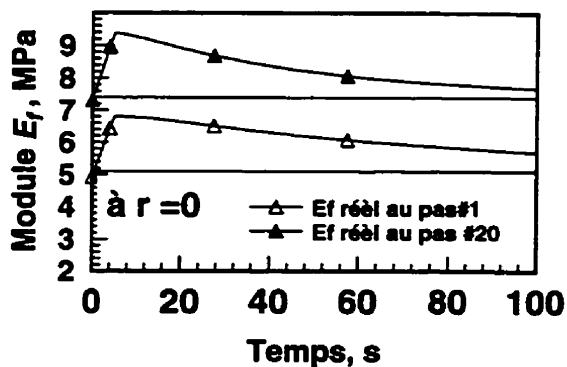


Figure 3.21: Variation de E_f à l'intérieur des pas #1 (Δ) (0.5% déformation accumulée) et #20 ($\blacktriangle$) (10% de déformation accumulée) à $r=0$ pour le cas b.

3.4.9 Effet combiné des non linéarités de la perméabilité et des fibres

En combinant ces deux effets, la réponse en contrainte simulée par l'AEF non linéaire (déformations finies + réseau des ressorts non linéaire + perméabilité non linéaire), suite à l'application de 20 pas (0.5% déformation chacun) compression consécutifs (jusqu'à 10 % déformation) est identique à la réponse montrée à la figure 3.18, sauf que les temps de relaxation pour chaque pas sont plus longs. Dans ce cas, les remarques présentées aux paragraphes 3.4.8 et 3.4.9 s'appliquent. C'est à dire que le modèle analytique arrive à capter la non linéarité de la perméabilité avec une bonne précision mais ce modèle analytique surestime la valeur de E_f pour chaque pas (voir Figure 3.22). La Figure 3.23

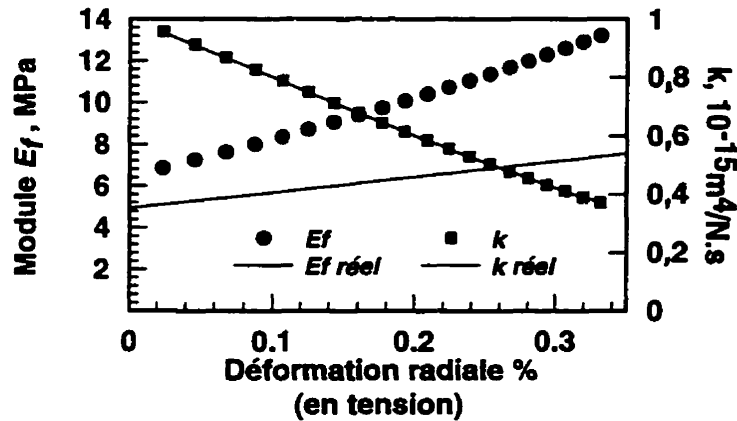


Figure 3.22: Effet combiné de la non linéarité de k et E_f . Chacun des 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies + k non linéaire + E_f non linéaire) est interprété individuellement par *curve fit* par le modèle analytique et les prédictions de E_f (●) et de k (■) sont comparées avec leur allure initiale injectée dans l'AEF. Les paramètres mécaniques utilisés sont les mêmes qu'au cas 8 du Tableau 3.1 sauf que le module de Young équivalent E_f et la perméabilité k sont non linéaires. Ici on a $E_f = 747\varepsilon_f + 5$ et k varie selon la méthode #1 (équation 3.7). Le maillage utilisé est montré à la Figure 3.5 avec $m=10$, $n_B=30$, $\beta=0$, $h=1$ mm.

montre que E_f varie à l'intérieur d'un même pas mais que, par contre, la perméabilité k varie très peu à l'intérieur de ce même pas.

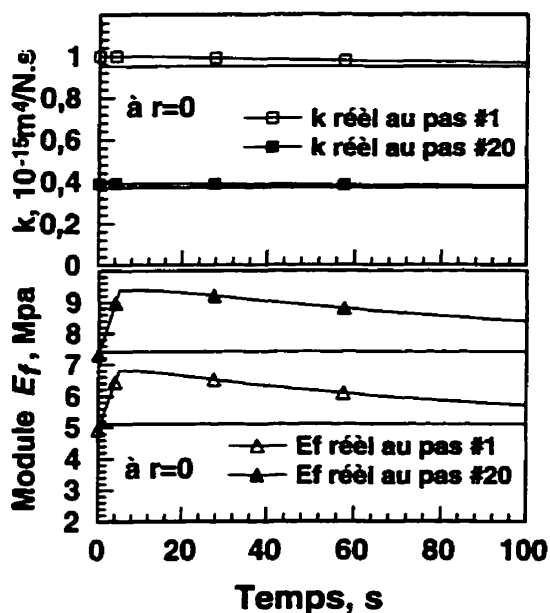


Figure 3.23: Variation de E_f et de k à l'intérieur des pas #1 (0.5% déformation accumulée) et #20 (10% de déformation accumulée) à $r = 0$, d'une série de 20 pas de relaxation de contrainte simulés avec une AEF non linéaire (déformations finies + k non linéaire + E_f non linéaire). Les paramètres de matériaux de la Figure 3.22 ont été utilisés.

3.5 Discussion

L'originalité du modèle éléments finis que nous proposons réside dans le fait que nous avons utilisé une approche non homogène et composite pour décrire le comportement mécanique du cartilage, afin de distinguer la matrice représentant le gel de protéoglycane du réseau des fibrils de collagène. Cette distinction entre la matrice et le réseau des fibrils est un élément clé dans le succès de cette approche car elle permet d'attribuer des propriétés mécaniques distincts à ces 2 constituants et d'en étudier les effets résultants. Dans notre modèle, nous avons utilisé une approche structurale en modélisant le réseau des fibrils de collagène par des ressorts non linéaires mélangés à la matrice.

Les résultats montrés au paragraphe 3.4.2 et 3.4.3 montrent que la comparaison avec le modèle analytique est excellente pour des analyses par éléments finis linéaires, et de ce

fait, ces résultats valident le modèle par éléments finis que nous proposons dans cette étude, pour le test de relaxation de contraintes en compression non confinée.

Dans ce travail, nous avons étudié les effets de la prise en compte de phénomènes non linéaires dans notre modèle tels que la non linéarité géométrique (déformations finies) et des non linéarités du matériau (non linéarité de la perméabilité et du réseau des fibrils). Il apparaît dans cette étude que la non linéarité du réseau des fibrils de collagène joue un rôle important dans l'explication de l'augmentation consécutive de l'amplitude des courbes expérimentales de relaxation de contrainte, tel que montré à la Figure 2.12. De plus, la non linéarité du réseau des fibrils de collagène contribue à la diminution du temps de relaxation entre chaque pas. Ceci peut s'expliquer par analogie avec le modèle analytique où le temps caractéristique définit par $t_g = 1/s_0 = r_0^2/kS_{11}$ diminue si E_f augmente, comme S_{11} augmente lui aussi. La perméabilité non linéaire exprimée à l'équation 3.7 est responsable de l'augmentation du temps de relaxation entre les pas, plus la déformation compressive s'accumule (cela s'explique comme précédemment), mais n'influence pas l'amplitude de la relaxation pour une compression sous forme de rampe avec une vitesse rapide ($t_0 \ll t_g$). D'après la Figure 2.12 où des résultats expérimentaux ont été obtenus, il semblerait que les effets de non linéarité du réseau des fibrils de collagène et de la perméabilité sont couplés, parce qu'on remarque que le temps de relaxation reste plus ou moins constant.

Nous avons également étudié la manière dont le modèle analytique linéaire que nous avons développé au chapitre 2 interprète ces effets non linéaires. Ceci est très utile pour tirer des informations sur les paramètres mécaniques obtenus aisément par ce modèle analytique à partir de données expérimentales telles que celles obtenues à la Figure 2.13. Il advient que le modèle analytique reste peu sensible à l'effet des déformations finies, comme l'erreur introduite dans la prédiction des paramètres mécaniques est de l'ordre de 10% (voir paragraphe 3.4.7). Le modèle analytique arrive, de plus, à capter avec une bonne précision la non linéarité de la perméabilité, parce que celle-ci ne varie pas

beaucoup à l'intérieur d'un même pas (voir Figure 3.23). Cependant, le modèle analytique est sensible à la non linéarité de E_f parce que E_f varie beaucoup à l'intérieur d'un même pas (voir Figures 3.21 et 3.23) et des grandes erreurs de prédictions sont introduites. Il semblerait que la valeur de E_f prédit par le modèle linéaire correspond à la valeur maximale de sa variation à l'intérieur de ce pas, et par conséquent, cette valeur de E_f obtenue grâce au modèle analytique correspondrait plus à la déformation radiale maximale rencontrée pendant le pas de relaxation plutôt qu'à la déformation à l'équilibre. Il est également intéressant de remarquer que l'erreur introduite dans l'estimation des paramètres mécanique E_m et ν_m diminue plus la compression s'accumule.

Le fait que les prédictions du modèle linéaire analytique sont relativement peu sensibles à l'effet des déformations finies s'explique par la constatation que les déformations radiales restent faibles (de l'ordre de 1% dans la partie dynamique de la relaxation), même si les déformations axiales sont grandes (10%). On remarque aussi que les coefficients de Poisson effectif (à l'équilibre) restent faibles (de l'ordre de 0,05), par rapport à ceux observé expérimentalement (compris entre 0,12 et 0,25, d'après Jurvelin et al., 1997).

4. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

4.1 Discussion générale sur l'approche non homogène composite

Dans cette étude, un modèle analytique et un modèle numérique ont été développés en utilisant une description biphasique, nonhomogène et composite du cartilage. Cette description se justifie par l'observation de la structure physiologique de ce tissu où un gel formé principalement d'agrégats de protéoglycanes, de substances ionisées et d'eau (la matrice) est emprisonné dans un réseau enchevêtré de fibrils de collagène. Cette description, une fois incorporée dans un modèle, permet de considérer non seulement les comportements mécaniques distincts des phases solide et fluide (description biphasique) mais aussi les comportements mécaniques distincts des composants de la phase solide (description nonhomogène) qui lui confèrent son comportement élastique, chacun de ces deux composants (la matrice et le réseau des fibres) pouvant être caractérisés par des paramètres mécaniques indépendants qui les décrivent (description composite).

Dans cette étude les modèles analytiques et numériques ont été développés pour le cas de la compression non confinée d'un disque de cartilage en considérant une interface cartilage/plaques compressives parfaitement lubrifiée et en supposant l'application de la compression uniforme sur la surface des plaques. Nous avons considéré le réseau des fibrils de collagène comme étant distribué de façon homogène sur tout le volume et se comportant comme un réseau de barres uniaxiales avec un comportement mécanique globale en tension contrôlé par un module de Young équivalent E_f et sans aucune résistance en compression. Nous avons considéré le comportement mécanique élastique de la matrice comme étant isotrope uniforme et contrôlé par E_m et ν_m , alors que son comportement poroélastique est contrôlé par la perméabilité k .

L'élément clé qui fait le succès de cette description est la non linéarité du réseau des fibrils de collagène en tension (grande rigidité) et en compression (rigidité nulle). Pour le

cas de la compression non confinée, cette particularité rentre en jeu car le cartilage est en compression dans la direction axiale alors qu'il est en tension dans la direction radiale. L'interaction entre la matrice et le réseau des fibres amène donc une rigidification dans le plan $r\theta$ par rapport à la direction axiale grâce à la présence des fibrils qui s'opposent à l'expansion de la matrice dans la direction radiale. Dans la phase transitoire de la relaxation, cette rigidification qui s'oppose à l'écoulement du fluide va créer une augmentation de la pression du fluide et de son gradient qui vont tendre vers zéros pour des temps suffisamment long. Cette augmentation de pression est responsable du pic de relaxation de contrainte que l'on peut observer à la Figure 2.5 à $t = t_0$. Plus cette rigidification est grande, plus l'amplitude de ce pic est grand, même sans considérer l'effet de la friction à l'interface, ce qui avait été envisagé comme explication possible de la grande amplitude de la relaxation de contrainte (Spilker et al., 1990).

Pour le cas de la compression confinée (voir Figure 1.2), un modèle utilisant l'approche non homogène et composite que nous avons utilisée en compression non confinée serait équivalent au modèle biphasique isotrope parce que le cartilage est sollicité uniquement en compression. Une limitation de ce modèle cependant pour le cas de la compression non confinée est le fait que les coefficients de Poisson effectifs considérés pour simuler la relaxation de contrainte sont faibles (inférieur à 0,05) comparés à ceux fournis par des observations expérimentales optiques et directes ($0,12 < \nu_{eff} < 0,25$, Jurvelin et al., 1997). Mais l'approche composite a l'avantage d'être conceptuellement simple, facile à mettre en oeuvre et surtout elle est basée sur une observation de la structure physiologique du cartilage, comparativement aux approches homogènes et orthotropes où le matériau est plutôt considéré comme une boîte noire et qui ne s'intéressent pas à l'interaction des composants qui forment le tissu. De plus, le modèle non homogène composite est capable de capter des phénomènes qui n'étaient pas perçus par les modèles homogènes, au niveau des contraintes radiales et circonférencielles comme montré à la Figure 2.9. Ceci peut être important pour effectuer des corrélations entre les phénomènes mécaniques et les réponses biologiques induites. De telles corrélations ont déjà été faites dans des études où

il a été remarqué que le taux de synthèse des cellules de chondrocyte (voir paragraphe 1.1.1) qui conditionne les propriétés mécaniques du tissu varie selon le type de compression (dynamique ou statique) dans des zones où les vitesses d'écoulement sont élevées.

4.2 Discussion sur l'utilisation des modèles analytiques et numériques

L'incorporation de phénomène non linéaire dans l'étude du comportement mécanique du cartilage est importante parce qu'elle contribue à décrire le tissu d'une manière plus précise. D'après cette étude, il s'avérerait que la non linéarité des propriétés du réseau des fibrils de collagène joue un rôle important dans la réponse en contrainte du cartilage, de même que la non linéarité de la perméabilité. L'utilisation des méthodes numériques facilite la prise en compte de tels phénomènes alors que l'incorporation de ces non linéarités dans un modèle analytique serait une tâche plus difficile. Cependant, l'utilisation d'un modèle analytique est très simple donc très pratique pour venir extraire des paramètres de matériaux par fittage de données expérimentales alors qu'il faut avoir recours à des méthodes lourdes et complexes pour venir ajuster un modèle numérique à des données expérimentales. Il serait donc très intéressant de connaître la manière dont un modèle linéaire interprète les phénomènes non linéaires qui n'ont pas été pris en compte pendant son élaboration. Pour notre cas, nous avons donc étudié la manière dont notre modèle linéaire développé au chapitre 2 interprète la réponse du modèle numérique développé au chapitre 3, qui peut incorporer des phénomènes non linéaire, pour la compression non confinée. En faisant interpréter les réponses en relaxation de contrainte du MEF suite à une série de 20 pas de déplacements sous forme de rampe d'amplitude individuelle infinitésimale (0.5% de déformation) jusqu'à 10% de déformation, on peut effectuer la comparaison entre les paramètres mécaniques du modèle linéaire extraits par fittage et les paramètres initiaux injectés dans le MEF. Il est apparu que le modèle linéaire est capable de suivre la non linéarité de la perméabilité et qu'il reste peu sensible aux effets de non linéarité géométriques (déformations finies) parce que les déformations

radiales sont faibles ($<1\%$). Par contre, le modèle analytique est sensible à la non linéarité du module de Young équivalent du réseau des fibrils E_f . En effet, il apparaît que dans un pas de relaxation de contrainte, le module E_f , varie entre une valeur minimale qui correspond à la déformation radiale à l'équilibre et une valeur maximal qui correspond à la déformation radiale maximale à $t = t_0$. Il semblerait que le modèle analytique prédit la valeur maximal de E_f dans le pas. Ces constatations sont basées uniquement sur les résultats de cette étude qui est préliminaire et devront être approfondies par d'autres études.

4.3 Perspectives pour le développement du modèle composite

- Équation de base

Les relations de base montrées aux équations 1.2 à 1.8 ne prennent pas en compte certains effets comme les inerties de la phase fluide et de la phase solide. L'inertie de la phase fluide a été négligée parce que les vitesses d'écoulement du fluide sont faibles. Cependant, l'inertie de la phase solide n'est peut être pas négligeable pour des vitesses de compression élevées. Il serait alors intéressant d'étudier l'influence de ces effets d'inertie sur la réponse du tissu. Pour cela, l'utilisation d'un modèle numérique comme un MEF pourrait être envisageable pour effectuer des analyses où les effets d'inertie sont incorporés en considérant la présence d'une matrice masse dans la formulation de l'équilibre des forces, en plus de considérer une matrice de rigidité. Mais le problème réside à trouver un logiciel qui permet d'effectuer des analyses de consolidation dynamiques incluant les effets d'inertie.

Les relations de base montrées aux équations 1.2 à 1.8 arrivent à prédire une relaxation de contrainte pour le cas où le matériau subit un changement de volume, c'est à dire quand le matériau subit un champs de déformation où la trace du tenseur des déformations est non nulle. Par contre, si le matériaux subit des déformations où la variation de son volume est nulle, c'est à dire où le tenseur des déformations est déviatorique, alors, ces équations

gouvernantes ne prédisent pas de relaxation, bien que dans la réalité, il existe vraisemblablement un écoulement du fluide local à l'intérieur du volume qui induirait une réponse de relaxation en cisaillement, même si aucune quantité de fluide ne s'échappe à l'extérieur de ce volume. Pour prendre en compte ce phénomène, il faudrait peut être exprimer différemment la force d'interaction fluide/solide qui est exprimée à présent selon la loi de Darcy.

- Modèle analytique

Un élément intéressant qui pourrait être amené au modèle analytique est d'essayer d'effectuer la résolution des équations gouvernantes (équation 1.2 à 1.8) en incorporant une variation linéaire de E_f avec la déformation (comme on l'a fait pour le modèle numérique au chapitre 3) pour incorporer l'effet non linéaire du réseau des fibrils. Il faudrait alors effectuer la résolution d'un système d'équations différentielles couplées.

Il serait intéressant également d'étudier plus en détail la manière dont le modèle analytique linéaire interprète les non linéarités du tissu et de proposer des facteurs de correction par rapport aux paramètres prédits par le modèle pour des déformations plus importantes, cela en utilisant un modèle numérique, comme on l'a fait brièvement au chapitre 3.

- Modèle numérique

L'étape suivante dans l'élaboration d'un MEF composite serait d'incorporer les différentes hétérogénéités du tissu comme la variation des propriétés mécaniques avec la profondeur ou la direction, comme on a vu au chapitre 1. Dans un premier temps, on pourrait facilement modéliser les zones superficielle, transitoire et profonde du cartilage. La modélisation du réseau des fibrils de collagène à l'aide de ressorts indépendant les uns des autres permet d'incorporer facilement la direction et la résistance de chaque groupe des fibrils de collagène.

Pour la compression non confinée, on pourrait modéliser l'interface entre les plaques compressive et le cartilage par un problème de contact avec frottement en utilisant des éléments de contact disponibles dans Abaqus. Cela permettrait de modéliser le fait que le cartilage peut glisser le long de la paroi de la plaque avec un certain frottement.

- Protocole expérimental

Afin d'extraire des propriétés de matériaux plus précises à l'aide du modèle analytique linéaire, il apparaît que, à partir des remarques des paragraphes 3.4.7 à 3.4.10, il serait intéressant que des données expérimentales soient obtenues pour des séries de pas de compression où l'amplitude relative de compression serait plus petite que 0,5% de déformation afin de diminuer la variation de la déformation radiale dans un même pas et pour que le modèle puisse prédire plus précisément le paramètre E_f . Il serait intéressant d'augmenter le nombre de pas pour atteindre une compression totale accumulée supérieure à 10% de déformation et de regarder les effets sur la prédiction des paramètres.

A la suite de cette étude, nous proposons que l'analyse et l'étude des interactions des contraintes dans la matrice et dans les fibres soient prises en considération dans les tentatives de corrélation entre les phénomènes biologiques et les phénomènes mécaniques.

CONCLUSION

Dans cette étude, un modèle analytique et un modèle numérique ont été développés, basés sur une description non homogène et composite du cartilage, pour la description des phénomènes mécaniques dans le cartilage en compression non confinée. Cette description qui n'avait jamais été considérée pour l'étude mécanique du cartilage se justifie par la structure physiologique de ce tissu où un réseau de fibrils de collagène emprisonne un gel formé de protéoglycanes. Après comparaison de ces modèles avec des données expérimentales, il apparaît que cette description est excellente pour décrire la relaxation de contrainte en compression non confinée. De plus, les modèles que nous avons développés sont sensibles à certains phénomènes mécaniques qui étaient ignorés par les modèles homogènes classique, notamment au niveau de la prédiction des contraintes dans les constituants. Ces deux modèles sont des outils intéressants et complémentaires pour l'étude du comportement mécanique du cartilage, l'un (le modèle analytique) étant très pratique pour extraire des paramètres de matériaux du cartilage par *curve fit* à partir de données expérimentales de relaxation de contrainte en compression non confinée, l'autre (le modèle numérique) pour étudier l'influence de certains effets non linéaires sur la réponse du tissu. Dans cette étude, les objectifs qui avaient été fixés au départ ont été atteints. Il reste cependant du travail à faire au niveau de la compréhension de la corrélation entre les phénomènes mécaniques et les réponses biologiques induites du cartilage.

RÉFÉRENCES

ABAQUS (1995). Abaqus, theory manual, version 5.5. HIBBITT, KARLSSON and SORENSEN, Inc.

AKIZUKI, S., MOW, V.C., MÜLLER, F., PITA, J.C., HOWELL, D.S., MANICOURT, D.H. (1986). Tensile properties of human knee joint cartilage: I. Influence of ionic conditions, weight bearing and fibrillation on the tensile modulus. Journal of Orthopaedic Research, 4, 379-392.

ALMEIDA, E.S., SPILKER, R.L., HOLMES, M.H. (1995). A transversely isotropic constitutive law for the solid matrix of articular cartilage. Bioengineering Conference ASME BED, 29, 161-162.

ARMSTRONG, C.G., MOW, V.C. (1982). Variation in the intrinsic mechanical properties of human articular cartilage with age, degeneration, and water content. Journal of Bone and Joint Surgery, 64A, 88-94.

ARGOUBI, M., SHIRAZI-ADL, A. (1996). Poroelastic creep response analysis of a lumbar motion segment in compression. Journal of Biomechanics, 29, 1331-1339.

BADER, D.L., KEMPSON, G.E., BARETT, A.J., WEBB, W. (1981). The effects of leucocyte elastase on the mechanical properties of adult human articular cartilage in tension. Biochemica and Biophysica Acta, 677, 103-108.

BIOT, M.A. (1941). General theory of three dimensional consolidation. Journal of Applied Physics, 12, 155-164.

BROWN, T.D., SINGERMAN, R.J. (1986). Experimental determination of the linear biphasic constitutive coefficients of human fetal proximal femoral chondroepiphysis. Journal of Biomechanics, 19, 597-605.

BUSCHMANN, M.D., GRODZINSKY, A.J. (1995). A molecular model of proteoglycan-associated electrostatic forces in cartilage mechanics. Journal of Biomechanical Engineering, 117, 179-191.

BUSCHMANN, M.D., JURVELIN, J.S., HUNZIKER, E.B. (1995). Confined compression of articular cartilage: small-amplitude linear and nonlinear stress responses and the effect of the porous compressing platen. ASME BED, 31, 307-308.

BUSCHMANN, M.D., SOULHAT, J., SHIRAZI-ADL, A., JURVELIN, J.S., HUNZIKER, E.B. Confined compression of articular cartilage: linearity in ramp and sinusoidal tests and the importance of interdigitation and incomplete confinement. Journal of Biomechanics, soumis en mai 1996.

BUSCHMANN, M.D. (1997). Numerical conversion of transient to harmonic response functions for linear viscoelastic materials. Journal of Biomechanics, 30, 197-202.

COHEN, B., LAI, W.M., CHORNEY, G.S., DICK, H.M., MOW, V.C. (1992). Unconfined compression of transversely-isotropic biphasic tissues. ASME BED Advances in Bioengineering, 22, 187-190.

COLETTI, J.M., AKESON, W.H., WOO, S.I-Y. (1972). A comparison of the physical behavior of normal articular cartilage and the athroplasty surface. Journal of Bone and Joint Surgery, 54A, 147-160.

COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. Wiley & Sons, Third Edition.

EISENBERG, S.R., GRODZINSKI, A.J. (1985). Swelling of articular cartilage and other connective tissues. Journal of Orthopaedic Research, 3, 148-159.

FRANK, E.H., GRODZINSKY, A.J. (1987). Cartilage electromechanics: II. A continuum model of cartilage electrokinetics and correlation with experiments. Journal of Biomechanics, 20, 629-639.

FORTIN, M., SOULHAT, J., SHIRAZI-ADL, A., HUNZIKER, E.B., BUSCHMANN, M.D. (1997). Dynamic and transient nonlinear behavior of articular cartilage in unconfined compression. *In press*.

GOLDSMITH, A.A.J., HAYES, A., CLIFT, S.E. (1995). Modelling the response of biomaterials and soft, hydrated biological tissues using soils consolidation theory. Abaqus Users' Conference, Paris, France, May 1995, 305-319.

HAUT R.C., LITTLE R.W. (1972). A Constitutive Equation for Collagen Fibres. Journal of Biomechanics, 5, 423-430.

HEDLUNG, H., MENGARELLI-WIGHOLM, S., REINHOLT, F.P., SVENSSON, O. (1993). Stereologic studies on collagen in bovine articular cartilage. APMIS, 101, 133-140.

HOLMES, M.H., MOW, V.C. (1990). The nonlinear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration. Journal of Biomechanics, 23, 1145-1156.

JURVELIN, J.S., BUSCHMANN, M.D., HUNZIKER, E.B. (1996). Mechanical anisotropy of human knee articular cartilage in compression. Transaction of the Orthopaedic Research Society, 7, 10

JURVELIN, J.S., BUSCHMANN, M.D., HUNZIKER, E.B. (1997). Optical and mechanical determination of Poisson's ratio of adult bovine humeral articular cartilage. Journal of Biomechanics, 30, 235-241.

KEMPSON, G.E., FREEMAN, M.A., SWANSON, S.A.V. (1971). The determination of a creep modulus for articular cartilage from indentation tests on the human femoral head. Journal of Biomechanics, 4, 239-250.

KEMPSON, G.E., MUIR, H., POLLARD, C., TUKE, M. (1973). The tensile properties of the cartilage of human femoral condyles related to the content of collagen and glycosaminoglycans. Biochemica and Biophysica Acta, 297, 456-472.

KEMPSON, G.E. (1982). Relationship between the tensile properties of articular cartilage from human knee and age. Annals of Rheumatic Diseases, 41, 508-511.

KIM Y.J., BONASSAR L.J., GRODZINSKY A.J. (1995). The Role of Cartilage Streaming Potential, Fluid Flow and Pressure in the Stimulation of Chondrocyte Biosynthesis during Dynamic Compression. Journal of Biomechanics, 28, 1055-66.

LAI, W.M., MOW, V.C. (1980). Drag-induced compression of articular cartilage during a permeation experiment. Biorheology, 17, 111-123.

LEVENSTON, M.E., FRANK, E.H., GRODZINSKY, A.J. (1997). Nonuniform spatial profiles of compression-induced electromechanical fields: relevance to chondrocyte biosynthesis. Transaction of the Orthopaedic Research Society, 2, ?

MAK, A.F. (1986). The apparent viscoelastic behavior of articular cartilage - The contributions from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows. Journal of Biomechanical Engineering, 108, 123-130.

MAK, A.F., LAI, W.M., MOW, V.C. (1987). Biphasic indentation of articular cartilage-I. Theoretical analysis. Journal of Biomechanics, 20, 703-714.

MANSOUR, J.M., MOW, V.C. (1976). The permeability of articular cartilage under compressive strain and at high pressures. Journal of Bone and Joint Surgery, 58A, 509-516.

MOW, V.C., KUEL, S.C., LAI, W.M., ARMSTRONG, C.G. (1980). Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiment. Journal of Biomechanical Engineering, 102, 73-84.

MOW, V.C., RATCLIFFE, A., POOLE, A.R. (1992). Cartilage and diarthrodial joints as paradigms for hierarchical materials and structures. Biomaterials, 13, 67-97.

PRENDERGAST, P.J., KUIPER J-H. (1996). A comparison of finite element codes for the solution of biphasic poroelastic problems. Journal of Engineering in Medicine, 210, 131-136.

ROTH, V., MOW, V.C. (1980). The intrinsic tensile behavior of the matrix of bovine articular cartilage and its variation with age. Journal of Bone and Joint Surgery, 62A, 1102-1117.

SANJEEVI R. (1982). A Viscoelastic Model for the Mechanical Properties of Biological Materials. Journal of Biomechanics, 15, 107-109.

SCHINAGL, R.M., GURSKIS, D.W., CHEN, A.C., SAH, R.L. (1996). Depth- and stress-dependence of the confined compression modulus of full-thickness bovine articular cartilage. Transaction of the Orthopaedic Research Society, 21, 10

SHIRAZI-ADL A., AHMED A.M., SHRIVASTAVA S.C. (1986). A Finite Element Study of a Lumbar Motion Segment Subjected to Pure Sagittal Plane Moments Stresses Journal of Biomechanics, 19, 331-350.

SHIRAZI-ADL A (1989). On the Fibre Composite Material Models of Disc Annulus. Comparison of Predicted Stresses Journal of Biomechanics, 22, 357-365.

SHIRAZI-ADL, A. (1991). Mechanical role of disc annulus fibres and matrix in poroelastic creep response of human lumbar disc. Transaction of the Orthopaedic Research Society, 16, 241.

SIMON, B.R. (1990). Chapter 4: poroelastic finite element models for soft tissue structures. Connective Tissue Matrix, part 2, D. Hukins (ed), John Wiley & Sons, Ltd, London, 515-533.

SIMON, B.R. (1992). Multiphase poroelastic finite element models for soft tissue structures. ASME Appl. Mech. Rev., 45, 191-218.

SOULHAT, J., BUSCHMANN, M.D., SHIRAZI-ADL, A. (1997). A nonhomogeneous composite model of articular cartilage: développement and validation in unconfined compression. Transaction of the Orthopaedic Research Society, 22, 822.

SOULHAT, J., BUSCHMANN, M.D., SHIRAZI-ADL, A. A fibril-network reinforced biphasic model of cartilage in unconfined compression. Journal of Biomechanical Engineering, soumis en mai 1997.

SPLKER, R.L., SUH, J.K., MOW, V.C. (1987). A finite element formulation for the linear biphasic representation of soft tissues. ASME biomechanical symposium, 13-16.

SPLKER R.L., SUH J-K., MOW V.C. (1990). Effects of Friction on the Unconfined Compressive Response of Articular Cartilage: A Finite Element Analysis. Journal of Biomechanical Engineering, 112, 138-149.

SUH, J.K., SPLKER, R.L., HOLMES, M.H. (1991). A penalty finite element analysis for nonlinear mechanics of biphasic hydrated soft tissue under large deformation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32, 1411-1439.

SUH, J.K., SPLKER, R.L. (1994). Indentation analysis of biphasic articular cartilage: nonlinear phenomena under finite deformation. Journal of Biomechanical Engineering, 116, 1-9.

VAN DER VOET, A.F., SHRIVE, N.G., SCHACHAR, N.S. (1993). Numerical modelling of articular cartilage in synovial joints -poroelasticity and boundary conditions.

Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Eds J. Middleton, G.N. Pandle and K.R. Williams, 200-209

WAYNE, J.S., WOO, S.L-Y., KWAN, M.K. Application of the u-p finite element method to the study of articular cartilage. Journal of Biomechanical Engineering, 113, 397-403.

WOO, S.L-Y., LUBOCK, P., GOMEZ, M.A., JEMMOTT, G.F., KUEL, S.C., AKESON, W.H. (1979). Large deformation nonhomogeneous and directional properties of articular cartilage in uniaxial tension. Journal of Biomechanics, 12, 437-446.

ANNEXE I . DETERMINATION DES MATRICES D'ÉLASTICITÉ ET DE SOUPLESSE

Pour obtenir les matrices d'élasticité et de souplesse du disque de cartilage décrit comme étant constitué d'une matrice poroélastique isotropique (représentant le gel de protéoglycanes) emprisonnée dans un réseau de fibrils de collagène (voir Figure 2.2), en compression non confinée, nous allons établir les relations contraintes/déformations dans cette structure composite à partir desquelles nous allons exprimer le tenseur des contraintes élastiques dans cette même structure.

1 . Relation contrainte/déformation dans les deux phases

On obtient la matrice d'élasticité en écrivant les relations contrainte/déformation pour chacun des 2 composants, à l'aide de la loi de Hook généralisée pour le cas axisymétrique. Ainsi, les composants du tenseur des contraintes élastiques dans la matrice $\bar{\sigma}_{ij}^{matrice}$ peuvent s'écrire, en tenant compte de l'équation 2.1 et 2.2:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{rr}^{matrice} &= \frac{E_m}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)} (\bar{\epsilon}_{rr}(1-\nu_m) + \nu_m(\bar{\epsilon}_{\theta\theta} + \bar{\epsilon}_{zz})) \\
 \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{matrice} &= \frac{E_m}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)} (\bar{\epsilon}_{\theta\theta}(1-\nu_m) + \nu_m(\bar{\epsilon}_{rr} + \bar{\epsilon}_{zz})) \\
 \bar{\sigma}_{zz}^{matrice} &= \frac{E_m}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)} (\bar{\epsilon}_{zz}(1-\nu_m) + \nu_m(\bar{\epsilon}_{\theta\theta} + \bar{\epsilon}_{rr})) \\
 \bar{\sigma}_{rz}^{matrice} &= \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \bar{\epsilon}_{rz} = 0 \\
 \bar{\sigma}_{\theta r}^{matrice} &= \bar{\sigma}_{r\theta}^{matrice} = 0
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

Les contraintes en cisaillement dans les directions θr , et θz sont nuls à cause de l'axisymétrie du problème.

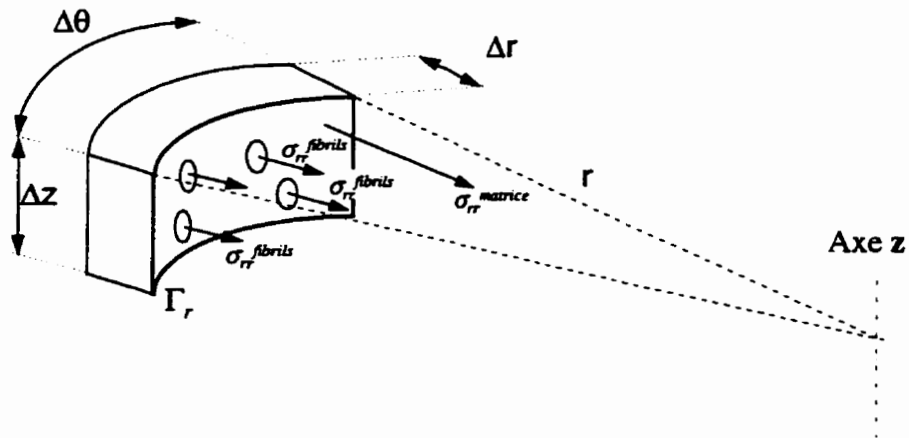
De même les composantes du tenseur des contraintes dans le réseau de fibrils $\bar{\sigma}_{ij}^{fibrils}$ peuvent s'écrire, en prenant compte de l'équation (2.1) et (2.2):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rr}^{fibrils} &= e_f \times \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{fibrils} &= e_f \times \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\sigma}_{zz}^{fibrils} &= 0 \times \bar{\varepsilon}_{zz} = 0 \\ \bar{\sigma}_{rz}^{fibrils} &= \bar{\sigma}_{r\theta}^{fibrils} = \bar{\sigma}_{\theta z}^{fibrils} = 0\end{aligned}\tag{I.2}$$

la contrainte $\bar{\sigma}_{zz}^{fibrils}$ est nulle parce que les fibrils sont sollicités en compression dans la direction z (voir remarque au paragraphe 1.5.3) due à la compression non confinée et que l'on considère que $e_f = 0$ en compression (voir Figure 2.2). Les contraintes de cisaillement dans les fibrils sont nulles parce que l'on considère que les fibrils se comportent comme des barres (sans rigidité en compression).

2. Détermination du tenseur des contraintes élastiques

L'hypothèse j) du paragraphe 2.2 suppose que les forces dans la matrice et dans les fibres s'ajoutent pour donner naissance au tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide, σ^E . La figure de la page suivante montre les contraintes radiales qui s'appliquent sur la face Γ_r d'un élément de volume dans la phase solide. La force radiale présente dans la matrice, $F_r^{matrice}$, due à la contrainte radiale dans la matrice et la force radiale présente dans les fibrils, $F_r^{fibrils}$, due à la contrainte radiale les fibrils, sont, sur la face Γ_r d'un élément de volume:



contraintes radiales qui s'appliquent sur la face Γ_r d'un élément de volume de la phase solide

$$\begin{aligned} F_r^{matrice} &= r \Delta \theta \Delta z \times \bar{\sigma}_{rr}^{matrice} \\ F_r^{fibrils} &= n_r a_f \times \bar{\sigma}_{rr}^{fibrils} \end{aligned} \quad (I.3)$$

où n_r est le nombre de fibrils orientée dans la direction r dans l'élément de volume et a_f est l'aire de section d'une fibril. D'autre part, comme on a par définition: $\chi = V^{fibrils} / V^{total}$ et comme on considère une répartition homogène des fibrils dans les 3 directions, on peut dire que le volume des fibrils orientées dans la direction radiale, $V_r^{fibrils}$ est exprimé par: $V_r^{fibrils} = \frac{\chi}{3} V^{total}$. Dans l'élément de volume de la figure ci-dessus, on suppose que le volume des fibrils orientées selon r , $(V_r^{fibrils})_{\Delta V}$, est égale à $(V_r^{fibrils})_{\Delta V} = \frac{\chi}{3} \Delta V$ où le volume de l'élément de volume ΔV s'exprime par: $\Delta V = r \Delta r \Delta \theta \Delta z$ si les dimensions de l'éléments sont infinitésimales. On a donc $(V_r^{fibrils})_{\Delta V} = \frac{\chi}{3} r \Delta r \Delta \theta \Delta z$. De plus, on peut calculer $(V_r^{fibrils})_{\Delta V}$ comme étant égale à $n_r a_f \Delta r$. En définitive, on obtient l'expression:

$$n_r a_f = \frac{\chi}{3} r \Delta \theta \Delta z \quad (\text{I.4})$$

Les équations I.3 et I.4 donnent donc:

$$\begin{aligned} F_r^{matrice} &= r \Delta \theta \Delta z \times \overline{\sigma}_{rr}^{matrice} \\ F_r^{fibrils} &= r \Delta \theta \Delta z \times \frac{\chi}{3} \overline{\sigma}_{rr}^{fibrils} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Par l'hypothèse b) du paragraphe 2.2, on a $F_r^{matrice} + F_r^{fibrils} = r \Delta \theta \Delta z \times \overline{\sigma}_{rr}^E$ ce qui donne que:

$$\overline{\sigma}_{rr}^E = \overline{\sigma}_{rr}^{matrice} + \frac{\chi}{3} \overline{\sigma}_{rr}^{fibrils} \quad (\text{I.6})$$

On peut répéter le même raisonnement pour la direction θ et on obtient, considérant qu'il n'y pas de cisaillement dans cette configuration:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{rr}^E &= \overline{\sigma}_{rr}^{matrice} + \frac{\chi}{3} \times \overline{\sigma}_{rr}^{fibrils} \\ \overline{\sigma}_{\theta\theta}^E &= \overline{\sigma}_{\theta\theta}^{matrice} + \frac{\chi}{3} \times \overline{\sigma}_{\theta\theta}^{fibrils} \\ \overline{\sigma}_{zz}^E &= \overline{\sigma}_{zz}^{matrice} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

avec $\overline{\sigma}_{ij}^E = 0$ pour $i \neq j$. Définissons Les modules de Young du réseau de fibrils équivalent, E_f , par

$$E_f = \frac{\chi}{3} e_f \quad (\text{I.8})$$

On a donc, d'après l'équation I.2: $\frac{\chi}{3} \bar{\sigma}_r^{fibrils} = E_f \bar{\epsilon}_r$ et $\frac{\chi}{3} \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{fibrils} = E_f \bar{\epsilon}_{\theta\theta}$.

Le tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide σ^E et le tenseur des déformations peuvent être mis sous des formes vectorielles contractées de composantes σ_i^E et ϵ_i , respectivement:

$$\sigma^E = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_r^E & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\theta\theta}^E & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_z^E \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{\bar{\sigma}_i^E\} = \begin{cases} \bar{\sigma}_r^E = \bar{\sigma}_r^E \\ \bar{\sigma}_{\theta}^E = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^E \\ \bar{\sigma}_z^E = \bar{\sigma}_z^E \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_r & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{\bar{\epsilon}_i\} = \begin{cases} \bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon}_r \\ \bar{\epsilon}_{\theta} = \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\epsilon}_z = \bar{\epsilon}_z \end{cases}$$

3. Les matrices d'élasticité et de souplesse

La relation contrainte/déformation de la structure formée de la matrice et du réseau de fibrils peut alors être obtenue en combinant les équations I.1, I.2, I.7 et I.8:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_r^E \\ \bar{\sigma}_{\theta}^E \\ \bar{\sigma}_z^E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_r \\ \bar{\epsilon}_{\theta} \\ \bar{\epsilon}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } S_{11} = S_{22} &= \frac{(E_f + E_m)(1 - \nu_m) - 2E_f \nu_m^2}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \\
S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} &= \frac{E_m \nu_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \\
S_{33} &= \frac{E_m(1 - \nu_m)}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}
\end{aligned}$$

où $[S_{ij}]$ est la matrice d'élasticité de dimension 3×3 , comme il n'y a pas de cisaillement. Cette matrice de rigidité est valide pour la configuration de la compression non confinée seulement. On peut déterminer la matrice de souplesse $[C_{ij}]$ en inversant la matrice $[S_{ij}]$:

$$[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } C_{11} = C_{22} &= \frac{E_f + E_m - E_f \nu_m^2}{E_f^2 + 2E_f E_m + E_m^2 - E_f^2 \nu_m^2} \\
C_{12} = C_{21} &= \frac{-E_m \nu_m}{E_f^2 + 2E_f E_m + E_m^2 - E_f^2 \nu_m^2} \\
C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} &= \frac{-\nu_m}{E_f + E_m - E_f \nu_m} \\
C_{33} &= \frac{E_f + E_m - E_f \nu_m - 2E_f \nu_m^2}{E_m(E_f + E_m - E_f \nu_m)}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que la matrice d'élasticité $[S_{ij}]$ définit à l'équation I.10 est caractéristique des matériaux transverse isotrope, c'est à dire qu'on a $S_{11} = S_{22}$ et $S_{13} = S_{23}$ avec plus $S_{12} = S_{13}$. En effet, $[S_{ij}]$ se met sous la forme:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{13} \\ S_{13} & S_{22} & S_{13} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} \end{bmatrix}$$

4. Module de compression non confinée et coefficient de Poisson effectif

En compression non confinée, le disque de cartilage est libre de s'étendre dans les directions radiale et circonférencielle (voir Figure 2.2). La paroi extérieure latérale du disque de cartilage est une surface libre. Par conséquent, les contraintes élastiques $\bar{\sigma}_r^E$ et $\bar{\sigma}_\theta^E$ sont nulles sur cette surface (à $r = r_0$, r_0 rayon du disque de cartilage). On a donc la relation suivante à la surface (à $r = r_0$):

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\varepsilon}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\sigma}_z^E \end{Bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

donc $\bar{\varepsilon}_z = C_{33} \bar{\sigma}_z^E$. A l'équilibre, quand le fluide ne s'écoule plus, i.e. quand le gradient de pression est nul sur le rayon et quand la pression relative est nulle ($\bar{p} = 0$), on a $(\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}^E)_{\text{équilibre}}$ où σ' est le tenseur des contraintes totales défini à l'équation (1.8). En particulier, on a $(\bar{\sigma}'_{zz} = \bar{\sigma}^E_{zz} = \text{cste})_{\text{équilibre}}$. On obtient le module de compression non confinée à l'équilibre, E_{33} , défini par $(\bar{\sigma}'_{zz} = \bar{\sigma}^E_{zz} = E_{33} \bar{\varepsilon}_z)_{\text{équilibre}}$ où:

$$E_{33} = \frac{1}{C_{33}} = \frac{E_m [E_m + E_f (1 - \nu_m)]}{E_m + E_f (1 + \nu_m) (1 - 2\nu_m)} \quad (\text{I.13})$$

On remarque que pour les gammes admissibles de E_m, ν_m et E_f ($E_f \geq 0, E_m \geq 0$ et $0 \leq \nu_m \leq 0,5$), le module de compression non confinée E_{33} est positif ou nul.

Ainsi, la contrainte à la surface $\bar{\sigma}_a$ définit à l'équation (1.9) que l'on mesure avec une cellule de charge est égale, à l'équilibre, quand $t \rightarrow \infty$, à:

$$(\bar{\sigma}_a)_{\text{équilibre}} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi r (\bar{\sigma}_z^t)_{\text{équilibre}} dr = (\bar{\sigma}_z^t)_{\text{équilibre}} = E_{33}(\bar{\epsilon}_z)_{\text{équilibre}}$$

et elle permet donc de déterminer une mesure expérimentale directe du module de compression non confiné E_{33} , connaissant la valeur de $(\bar{\epsilon}_z)_{\text{équilibre}}$ que l'on impose.

De même, on pourrait déterminer que le module de compression confinée en relaxation de contrainte (voir Figure 1.2) est égale à S_{33} .

À l'équilibre, on peut aussi définir le rapport entre la déformation radiale $(\bar{\epsilon}_r)_{\text{équilibre}}$ et la valeur absolue de la déformation axiale imposée $(\bar{\epsilon}_z)_{\text{équilibre}}$ que l'on appelle le coefficient de Poisson effectif ν_{eff} . En compression non confinée, à $r = r_0$, on a, d'après l'équation I.11:

$$(\bar{\epsilon}_r)_{\text{équilibre}} = C_{13}(\bar{\sigma}_z^E)_{\text{équilibre}} \text{ et } (\bar{\epsilon}_z)_{\text{équilibre}} = C_{33}(\bar{\sigma}_z^E)_{\text{équilibre}}$$

d'où:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{(\bar{\epsilon}_r)_{\text{équilibre}}}{|(\bar{\epsilon}_z)_{\text{équilibre}}|} = -\frac{C_{13}}{C_{33}} = \frac{\nu_m}{1 + (1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)E_f/E_m} \quad (\text{I.14})$$

En compression non confinée, on a la déformation selon z qui est compression et la déformation selon r qui est en tension, ce qui explique la présence du signe - dans le 2nd

terme de l'expression ci-dessus. Le coefficient de Poisson effectif ν_{eff} peut être lui aussi expérimentalement déterminé (Jurvelin et al., 1997).

On remarque également que pour les gammes admissibles de E_m, ν_m et E_f ($E_m \geq 0, E_m \geq 0$ et $0 \leq \nu_m \leq 0,5$), le coefficient de Poisson effectif ν_{eff} demeure lui aussi dans la gamme admissible typique des coefficients de Poisson: $0 \leq \nu_{eff} \leq 0,5$.

On peut maintenant exprimer le module de Young et la coefficient de Poisson de la matrice en terme du module de compression non confinée E_{33} et du coefficient de Poisson effectif ν_{eff} à partir des équations I.13 et I.14:

$$E_m = \frac{E_{33}^2 + E_f E_{33} \nu_{eff} - 2 E_f^2 \nu_{eff}^2}{E_{33} + E_f \nu_{eff} + 2 E_f \nu_{eff}^2} \quad (I.15)$$

$$\nu_m = \frac{(E_f + E_{33}) \nu_{eff}}{E_{33} + E_f \nu_{eff} + 2 E_f \nu_{eff}^2} \quad (I.16)$$

5. Paramètres mécaniques qui décrivent le modèle

Le modèle composite peut être décrit de façon équivalente par l'un ou l'autre de ces 2 ensembles de 4 paramètres: $\{E_m, \nu_m, E_f, k\}$ ou $\{E_{33}, \nu_{eff}, E_f, k\}$. Pour passer d'un ensemble de paramètres à l'autre, on utilise les équations I.13 à I.16. Cependant, quand on utilise l'ensemble de paramètres suivant: $\{E_{33}, \nu_{eff}, E_f, k\}$, il faut faire attention à ce que les paramètres équivalents E_m et ν_m restent dans leurs gammes physiques admissibles. Pour cela, à partir des équations I.15 et I.16, il apparait que:

$$\left. \begin{array}{l} E_m \geq 0 \\ 0 \leq \nu_m \leq 0,5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow E_f \leq \frac{E_{33}}{\nu_{eff}} = E_f^{\max} \quad (I.17)$$

Cette équation montre l'existence d'une valeur critique $E_f^{\max}$ pour le module de Young du réseau de fibrils, qui ne pas être dépassée de manière à ce que les autres paramètres restent dans des gammes physiques admissibles. On doit donc respecter la relation suivante: $0 \leq E_f \leq E_f^{\max}$. De plus, sous cette condition, les matrices d'élasticité et de souplesse demeurent définies positives et garantissent ainsi la stabilité du matériau. Pour le cas où $\nu_{eff} = 0$ (ce qui implique aussi que $\nu_m = 0$), il n'existe pas de valeur critique pour le module de Young équivalent du réseau de fibrils comme $\lim_{\nu_{eff} \rightarrow 0} E_f^{\max} \rightarrow \infty$ d'après l'équation I.17.

A ce niveau de l'étude, nous avons obtenu les matrices d'élasticité et de souplesse qui correspondent à la description composite axisymétrique d'un disque de cartilage en compression non confinée.

ANNEXE II . MANIPULATION DES EQUATIONS DE BASE

1 . Equations de base

Pour notre étude nous reprenons les équations de la formulation biphasique de Mow et al. (1980) que nous avons présentées aux équations (1.2) à (1.7). Voici, ci-dessous un rappel de ces 6 équations gouvernantes qui décrivent les phases solide et fluide (sans normalisation):

$$\sigma^s = -\alpha \bar{p} \mathbf{I} + \sigma^E \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma^f = -\bar{p} \mathbf{I} \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla \cdot (\bar{v}^f + \alpha \bar{v}^s) = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$-\alpha \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \sigma^E + K(\bar{v}_f - \bar{v}_s) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$-\nabla \bar{p} - K(\bar{v}_f - \bar{v}_s) = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\nabla \cdot (\sigma^s) = 0 \quad (\text{II.6})$$

avec $\sigma' = \sigma^s + \sigma^f$ et où σ^s et σ^f sont les tenseurs des contraintes dans les phases solide et fluide respectivement, $\bar{p}$ est la pression relative du fluide, α est le rapport du volume de solide sur le volume de fluide, σ^E est le tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide, $\bar{v}^f$ et $\bar{v}^s$ sont les vecteurs des vitesses absolues du solide et du fluide respectivement, σ' est la contrainte totale et K est le coefficient de trainée de diffusion directement relié à la perméabilité k (voir paragraphe 1.5.1).

L'originalité de notre étude réside dans le fait que nous proposons que le tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide σ^E ait une forme telle que son expression vectorielle contractée soit définie à l'équation I.10.

Les hypothèses a), b) et h) du paragraphe 2.2 vont permettre de simplifier considérablement la résolution de ce système linéaire d'équations différentielles. En effet, comme on l'a déjà dit, ces hypothèses permettent d'affirmer que le déplacement radiale u_r va être uniforme sur l'axe z et qu'il va uniquement dépendre de la position r et du temps t .

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r(r, t) \quad (\text{II.7})$$

L'axisymétrie amène que: $\frac{\partial(X)}{\partial\theta} = 0$ pour toute fonction X et $\bar{u}_\theta = 0$.

2 . Manipulation et transformation dans le domaine de Laplace

Comme dans le test de relaxation de contrainte on impose le déplacement axial $\bar{u}_z$, que l'on fixe à une certaine valeur qui peut varier en fonction du temps, et d'après l'hypothèse d'imperméabilité et de non frictionnalité à l'interface cartilage/plaque compressive, on a la déformation axiale $\bar{\varepsilon}_z$, qui est indépendante de z . Les déformations radiale, circonférencielle et axiale sont donc:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} = \bar{\varepsilon}_r(r, t) \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\bar{u}_r}{r} = \bar{\varepsilon}_\theta(r, t) \quad \bar{\varepsilon}_z = \bar{\varepsilon}_z(t) \quad (\text{II.8})$$

Si on choisit l'origine du système de coordonnées axisymétrique rz au centre du disque de cartilage, on a alors: $\bar{u}_z = z\bar{\varepsilon}_z(t)$. Les vecteurs des vitesses absolues du solide et du fluide s'expriment de la manière suivante, en prenant en compte les différentes hypothèses:

$$\bar{v}_s = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} = z \frac{\partial \bar{\varepsilon}_z}{\partial t} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \bar{v}_f = \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_r^f \\ \bar{v}_\theta^f = 0 \\ \bar{v}_z^f = \bar{v}_z^s = z \frac{\partial \bar{\varepsilon}_z}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (\text{II.9})$$

L'équation de continuité II.3 s'écrit, en utilisant l'expression de la divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial \bar{v}_r^f(t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}_r^f(t)}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_z(t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \bar{u}_r(t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r(t)}{\bar{r}} + \bar{\varepsilon}_z(t) \right] = 0 \quad (\text{II.10})$$

En multipliant par $\bar{r}$ (dimensionnel) et en transformant cette expression dans le domaine de Laplace, on obtient:

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{v}_r^f(\bar{s}))}{\partial \bar{r}} + \bar{s}\bar{r}\bar{\varepsilon}_z(s)(1+\alpha) + \alpha\bar{s} \frac{\partial(\bar{r}\bar{u}(s))}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (\text{II.11})$$

où $\bar{s}$ est la variable de Laplace, $\bar{u}(\bar{s})$, $\bar{\varepsilon}_z(\bar{s})$, $\bar{v}^f(\bar{s})$ sont les transformées de Laplace de $\bar{u}_r(t)$, $\bar{\varepsilon}_z(t)$ et de $\bar{v}_r^f(t)$ respectivement. On rappelle que la transformée de Laplace $f(\bar{s})$ d'une fonction $f(t)$ s'exprime par: $f(\bar{s}) = \int_0^{\infty} \exp(-\bar{s}t) f(t) dt$.

En intégrant l'expression de l'équation I.2 par rapport à $\bar{r}$ et en utilisant les conditions de déplacements nul et de vitesse nulle sur l'axe de symétrie (à $\bar{r} = 0$) (conditions d'axisymétrie), on obtient l'expression de la transformée de la vitesse du fluide dans la direction radiale en fonction des transformées du déplacement radial et de la déformation axiale imposée:

$$\bar{v}'(\bar{s}) = -\alpha \bar{s} \bar{u}(\bar{s}) - \frac{\bar{r}}{2} \bar{s} \bar{\varepsilon}_z(s)(1 + \alpha) \quad (\text{II.12})$$

En transformant l'équation II.5 dans le domaine de Laplace et en y injectant l'équation ci-dessus, on obtient, dans la direction radiale:

$$\frac{\partial \bar{p}(s)}{\partial \bar{r}} = \frac{\bar{s}}{k(1 + \alpha)} \left[\bar{u}(\bar{s}) + \frac{\bar{r} \bar{\varepsilon}_z(s)}{2} \right] \quad (\text{II.13})$$

où $\bar{p}(s)$ est la transformée de p dans le domaine de Laplace. En injectant de nouveau cette expression ci-dessus dans l'équation II.4, en l'ayant préalablement transformée dans le domaine de Laplace, on peut obtenir l'équation différentielle qui régit $\bar{u}(s)$, la transformée du déplacement radiale. Calculons d'abord l'expression de la divergence du tenseur des contraintes élastiques dans la phase solide dans notre système de coordonnées cylindrique. A partir de l'expression de ce tenseur donnée aux équations I.9 et I.10, sa divergence s'exprime dans la direction r par:

$$(\nabla \cdot \sigma^E)_r = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \sigma_r^E)}{\partial \bar{r}} - \frac{\sigma_\theta^E}{\bar{r}} = S_{11} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

En incorporant dans l'équation II.4, une fois transformée dans le domaine de Laplace, les expressions données dans les équations I.3, I.4 et I.5, on obtient donc l'équation différentielle qui régit $\bar{u}(s)$, la transformée du déplacement radiale:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(\bar{s})}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}(\bar{s})}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}(\bar{s})}{\bar{r}^2} = \frac{\bar{s}}{k S_{11}} \left(\bar{u}(s) + \frac{\bar{r} \bar{\varepsilon}_z(s)}{2} \right) \quad (\text{II.15})$$

$\bar{r}$ représente le rayon dimensionnel (à ce stade de l'étude, r est également dimensionnel). Nous allons voir dans l'Annexe suivante que cette équation peut être résolue.

ANNEXE III . RESOLUTION MATHEMATIQUE DANS LE DOMAINE DE LAPLACE

1 . Expression du déplacement radial dans le domaine de Laplace

Avant d'aller plus loin, nous allons définir des paramètres normalisés, afin de rendre plus commodes les diverses manipulations mathématiques. Considérons la normalisation suivante, qui prend effet à ce niveau de l'étude:

$$u(s) = \frac{\bar{u}_r(s)}{r_0}; r = \frac{\bar{r}}{r_0}; p(s) = \frac{\bar{p}(s)}{E_{33}}; \sigma_a(s) = \frac{\bar{\sigma}_a(s)}{E_{33}}; s = \frac{\bar{s}}{s_0}; s_0 = \frac{kS_{11}}{r_0^2} \quad (\text{III.1})$$

On rappelle que le signe $-$ signifie que la grandeur considérée est dimensionnelle. Maintenant, r représente le rayon normalisé (par exemple, à la surface, $r = 1$).

Après cette normalisation, les équations II.13 et II.15 deviennent :

$$\frac{\partial p(s)}{\partial r} = \frac{S_{11}}{E_{33}} \frac{s}{(1+\alpha)} \left[u(s) + \frac{r\bar{\varepsilon}(s)}{2} \right] \text{ et } \frac{\partial^2 u(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(s)}{\partial r} - \frac{u(s)}{r^2} = s \left(u(s) + \frac{r\bar{\varepsilon}(s)}{2} \right) \quad (\text{III.2})$$

Les conditions limites à la surface périphérique (à $\bar{r} = r_0$ où $r = 1$) sont:

$$\bar{\sigma}_r^E = S_{11} \frac{\partial u(s)}{\partial r} + S_{13} \left(\frac{u(s)}{r} + \varepsilon_z(s) \right) = 0 \text{ à } r' = 1 \text{ (condition de surface libre), } p(s) = 0 \text{ à } r = 1. \text{ (pression nulle à la surface), et on avait } u(s) = 0 \text{ sur l'axe de symétrie (à } r = 0) \text{ à cause de la condition d'axisymétrie.}$$

Si on effectue le changement de variable suivant: $x = r\sqrt{s}$ et $y = u(s)$, l'équation ci-dessus devient:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - y(1 + x^2) = \frac{x^3 \varepsilon_z(s)}{2\sqrt{s}} \quad (\text{III.3})$$

Cette équation est en fait une équation de Bessel modifiée non homogène, dont la solution est la somme de la solution homogène, y_h , avec la solution particulière y_p . Les conditions limites sont cette fois: $\bar{\sigma}_r^E = S_{11}\sqrt{s} \frac{\partial y}{\partial x} + S_{13} \left(\sqrt{s} \frac{y}{x} + \varepsilon_z(s) \right) = 0$ à $x = \sqrt{s}$ et $y=0$ à $x = 0$. Les solutions homogène, particulière et générale sont (Kreyszig, 1993) :

$$\left. \begin{array}{l} y_p = -\frac{\varepsilon_z(s)x}{2\sqrt{s}} \\ y_h = \beta_1 I_1(x) + \beta_2 K_1(x) \end{array} \right\} \Rightarrow y = y_p + y_h = \beta_1 I_1(x) + \beta_2 K_1(x) - \frac{\varepsilon_z(s)x}{2\sqrt{s}} \quad (\text{III.4})$$

où I_1 est la fonction de Bessel modifiée de la 1^{ère} espèce d'ordre 1 et K_1 est la fonction modifiée de Bessel de la 3^{ème} espèce d'ordre 1. La condition que $y = 0$ à $x = 0$, puis la condition que $\bar{\sigma}_r^E = S_{11}\sqrt{s} \frac{\partial y}{\partial x} + S_{13} \left(\sqrt{s} \frac{y}{x} + \varepsilon_z(s) \right) = 0$ impliquent que:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\varepsilon_z(s)(S_{11} - S_{13})}{2\sqrt{s}[S_{11}I_0(s) - I_1(s)(S_{11} - S_{13})/\sqrt{s}]} \\ \beta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

On obtient donc la solution pour y :

$$y = -\frac{\varepsilon_z(s)x}{2\sqrt{s}} \left[1 - \frac{(S_{11} - S_{13})I_1(x)/x}{[S_{11}I_0(s) - I_1(s)(S_{11} - S_{13})/\sqrt{s}]} \right]$$

Si on retourne aux variables normalisée initiales, on trouve l'expression de la déformation radiale normalisée exprimée dans le domaine de Laplace (également montrée à l'équation d de la Table 2.1):

$$u(s, r) = -\frac{\varepsilon_z(s)r}{2} \left[1 - \frac{I_1'(r\sqrt{s})/r\sqrt{s}}{\frac{1}{A}I_0(s) - I_1(s)/\sqrt{s}} \right] \quad \text{avec} \quad A = \frac{S_{11} - S_{13}}{S_{11}} \quad (\text{III.6})$$

On définit la fonction de transfert suivante:

$$U(r, s) = \frac{u(r, s)}{\bar{\varepsilon}_z(\bar{s})} = -\frac{r}{2} \left[1 - \frac{I_1(r\sqrt{s})/r\sqrt{s}}{\frac{1}{A}I_0(s) - I_1(s)/\sqrt{s}} \right] \quad (\text{III.7})$$

Cette fonction de transfert $U(s, r)$ représente la réponse normalisée du déplacement radiale pour le système que l'on suppose linéaire. Comme on a supposé à l'hypothèse g) le cartilage comme représentant un système linéaire dont les propriétés intrinsèques sont indépendantes du temps, alors, la réponse du déplacement radiale temporelle $\bar{u}_r(t, r)$ de ce matériau viscoélastique linéaire est complètement déterminée par la fonction de transfert $U(s, r)$, si on connaît $\bar{\varepsilon}_z(t)$ que l'on impose. Pour cela, après avoir transformé $\bar{\varepsilon}_z(t)$ dans le domaine de Laplace pour obtenir $\bar{\varepsilon}_z(\bar{s})$, il faut effectuer la transformée inverse de $U(s, r) \times \bar{\varepsilon}_z(\bar{s})$ pour passer dans le domaine de temps.

2. Expression de la pression dans le domaine de Laplace

On peut maintenant déterminer l'expression du gradient de pression normalisé exprimé dans le domaine de Laplace en incorporant l'équation III.6 dans la 1ère équation de l'expression III.2. Ainsi:

$$\frac{\partial p(s, r)}{\partial r} = s \varepsilon_z(s) \frac{S_{11} A}{2(1+\alpha) E_{33}} \times \frac{I_1(r\sqrt{s})/\sqrt{s}}{I_0(s) - A I_1(s)/\sqrt{s}} \quad (\text{III.8})$$

En intégrant par rapport à r avec la condition limite $p(s) = 0$ à $r = 1$, on obtient l'expression de la pression normalisée du fluide exprimée dans le domaine de Laplace 11 (également montrée à l'équation g de la Table 2.1):

$$p(s, r) = \int \frac{\partial p(s, r)}{\partial r} dr = \frac{S_{11} A}{2 E_{33} (1+\alpha)} \left[\frac{I_0(r\sqrt{s}) - I_0(\sqrt{s})}{I_0(\sqrt{s}) - A \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right] \varepsilon_z(s) \quad (\text{III.9})$$

Comme précédemment, on définit la fonction de transfert suivante:

$$P(s, r) = \frac{p(s, r)}{\bar{\varepsilon}_z(\bar{s})} = \frac{S_{11} A}{2 E_{33} (1+\alpha)} \left[\frac{I_0(r\sqrt{s}) - I_0(\sqrt{s})}{I_0(\sqrt{s}) - A \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right] \quad (\text{III.10})$$

Cette fonction de transfert $P(s, r)$ représente la réponse normalisée de la pression du fluide pour le système que l'on suppose linéaire. Évidemment, comme précédemment, la réponse de la pression du fluide temporelle $\bar{p}(t, r)$ de ce matériau viscoélastique linéaire

est complètement déterminée par la fonction de transfert $P(s, r)$, si on connaît $\bar{\varepsilon}_z(t)$ que l'on impose.

3. Expression de la contrainte moyennée à la surface

La contrainte moyennée à la surface est donnée par l'équation 1.9. En utilisant les équations I.10, II.1 et II.2, on a

$$\bar{\sigma}_a(t) = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint \bar{\sigma}'_z(t) \bar{r} d\bar{r} d\theta = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left[-(\alpha + 1) \bar{p}(t) + S_{13} \left(\frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_z(t)}{\bar{r}} \right) + S_{33} \bar{\varepsilon}_z(t) \right] \bar{r} d\bar{r}$$

que l'on calcule dans un premier temps dans le domaine de Laplace sous une forme normalisée, à l'aide des équations III.6 et III.9:

$$\sigma_a(s) = \frac{\sigma_a(s)}{E_{33}} = 2 \int_0^1 r \sigma'_z(s) dr = 2 \int_0^1 \left[-(\alpha + 1) p(s) + \frac{S_{13}}{E_{33}} \left(\frac{\partial u(s)}{\partial r} + \frac{u(s)}{r} \right) + \frac{S_{33}}{E_{33}} \varepsilon_z(s) \right] r dr$$

$$\Rightarrow \sigma_a(s) = \varepsilon_z(s) \frac{B \times I_0(\sqrt{s}) - C \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}{I_0(\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \quad (\text{III.11})$$

$$\text{avec } A = \frac{S_{11} - S_{13}}{S_{11}}; B = \frac{S_{11} - 3S_{13} + 2S_{33}}{2E_{33}}; C = \frac{S_{11}^2 + S_{11}S_{33} - 3S_{11}S_{13} - S_{13}S_{33} + 2S_{13}^2}{S_{11}E_{33}}$$

où les coefficients S_{ij} sont exprimés à l'équation 2.4 (équivalente à l'équation I.10) en fonction de E_m , E_f et ν_m . Ce qui donne:

$$A = \frac{(2\nu_m - 1)(1 + R + R\nu_m)}{R\nu_m + \nu_m - R - 1 + 2R\nu_m^2}; \quad C = A + 2(B - 1);$$

$$B = \frac{(-1 - R + R\nu_m + 2R\nu_m^2)(3 + R + R\nu_m)}{2(-1 - \nu_m - R + R\nu_m^2)}, \quad R = \frac{E_f}{E_m}$$

L'expression qui est donnée à l'équation III.11 (également montrée à l'équation c de la Table 2.1) est la transformée de Laplace du signal temporel recueilli par la cellule de charge, divisé par la surface supérieur du disque de cartilage et normalisé par rapport au module de compression non confinée, pour n'importe quel déplacement axial imposé. On définit la fonction de transfert suivante:

$$H(s) = \frac{\sigma_a(s)}{\bar{\epsilon}_z(s)} = \frac{B \times I_0(\sqrt{s}) - C \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}{I_0(\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \quad (\text{III.12})$$

Cette fonction de transfert $H(s)$ représente la réponse de la contrainte moyennée à la surface pour le système que l'on suppose linéaire. Évidemment, toujours comme précédemment, la réponse temporelle de la contrainte moyennée à la surface $\bar{\sigma}_a(t)$ de ce matériau viscoélastique linéaire est complètement déterminée par la fonction de transfert $H(s)$, si on connaît $\bar{\epsilon}_z(t)$ que l'on impose.

Si on avait considéré le cartilage comme homogène et isotrope, on aurait $E_f = 0$ et la composante élastique du comportement mécanique du cartilage serait décrit par seulement 2 paramètres: E_m and ν_m (ou bien λ_s et μ_s). Dans ce cas, si $E_f = 0$, les composantes de la matrice de souplesse s'écrivent, d'après l'équation I.11:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{1}{E_m} \quad \text{et} \quad C_{12} = C_{23} = C_{13} = -\frac{\nu_m}{E_m}$$

ce qui est caractéristique d'un matériau isotrope et nous avons en plus d'après les équations I.10, I.13 et I.14:

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} = S_{33} &= \frac{(1 - \nu_m)E_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} = H_A & \text{et} & \quad E_{33} = E_m \\ S_{13} &= \frac{\nu_m E_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} = \lambda_s & & \quad \nu_{eff} = \nu_m \end{aligned}$$

Pour la contrainte moyennée à la surface, on aurait donc, d'après l'équation III.11

$$A = \frac{2\mu_s}{H_A}, \quad B = \frac{3\mu_s}{E_m}, \quad C = \frac{8\mu_s^2}{H_A E_m} \quad \text{où B et C sont normalisé par rapport à } E_{33} = E_m. \text{ Si on}$$

normalisait ces coefficients par μ_s au lieu $E_{33} = E_m$, on trouverait des coefficients identiques à ceux proposés dans l'étude de Armstrong et al. (1984) où le cas d'une description isotrope homogène du cartilage a été résolu. De même, avec cette même normalisation, les profils obtenus dans les paragraphes suivant seraient identiques à ceux proposés dans cette étude. Ces remarques valident en partie le modèle que nous proposons dans cette étude.

4 . Expression des autres profils

A partir de la détermination du déplacement radial normalisé (équation III.6), on peut déterminer les expressions normalisées de la déformation radiale $\bar{\epsilon}_r(s, r)$, de la déformation circonférencielle $\bar{\epsilon}_\theta(s, r)$ et de la vitesse relative du fluide $\bar{v}_r(s, r)$, exprimées dans le domaine de Laplace. On peut déterminer comme précédemment les fonctions de transferts correspondantes: $E_r(s, r) = \frac{\bar{\epsilon}_r(s, r)}{\bar{\epsilon}_z(s)}$, $E_\theta(s, r) = \frac{\bar{\epsilon}_\theta(s, r)}{\bar{\epsilon}_z(s)}$, $V(s) = \frac{\bar{v}_r(s, r)}{\bar{\epsilon}_z(s)}$ où

$\bar{v}_r(s, r)$ est la vitesse relative dimensionnelle exprimée dans le domaine de Laplace définie par: $\bar{v}_r(s, r) = \bar{v}_r^f(s, r) - \bar{v}_r^s(s, r)$. Toutes les expressions des profils données ci-dessous dans le domaine de Laplace sont montrées dans la Table 2.1 dans l'article 1 au paragraphe 2.3

$$\bar{\varepsilon}_r(s, r) = \frac{\partial \bar{u}_r(s, r)}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial u(s, r)}{\partial r} = -\frac{\varepsilon_z(s)}{2} \left[1 - \frac{A \times I_0(r\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(r\sqrt{s})}{r\sqrt{s}}}{I_0(\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right] \quad (\text{III.15})$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta(s, r) = \frac{\bar{u}(s, r)}{\bar{r}} = \frac{u(s, r)}{r} = -\frac{\varepsilon_z(s)}{2} \left[1 - \frac{A \times \frac{I_1(r\sqrt{s})}{r\sqrt{s}}}{I_0(\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right] \quad (\text{III.16})$$

$$\bar{v}_r(s, r) = \bar{v}_r^f(s, r) - \bar{v}_r^s(s, r) = -\varepsilon_z(s) \frac{k(1+\alpha)A \times S_{11}}{2r_0} \left[\frac{\sqrt{s} \times I_1(r\sqrt{s})}{I_0(\sqrt{s}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}} \right] \quad (\text{III.17})$$

ANNEXE IV . INVERSION DANS LE DOMAINE DE TEMPS ET REponses POUR UNE FONCTION RAMPE ET POUR UN CHARGEMENT DYNAMIQUE SINUSOÏDAL

Les expressions aux équations III.6, III.9, III.11, III.15, III.16, et III.17 sont exprimées dans le domaine de Laplace. On peut obtenir des équations équivalentes exprimées dans le domaine de temps à l'aide du théorème de l'inversion. La réponse temporelle des différents profils va dépendre de la forme de $\bar{\varepsilon}_z(t)$. Pour le test de relaxation de contraintes, on va considérer que cette fonction a la forme d'une fonction rampe. On va également considérer le cas où le déplacement imposé a la forme d'une sinusoïde.

1 . Théorème de l'inversion:

On peut obtenir les équations III.6, III.9, III.11, III.15, III.16, et III.17 qui sont exprimées dans le domaine de Laplace, dans le domaine de temps à l'aide du théorème de l'inversion résumé dans l'expression suivante (Kreyszig, 1993):

$$g(t) = L^{-1}\{\hat{g}(s)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}\{\exp(tz)g(z); a_k\} \quad (\text{IV.1})$$

où $L^{-1}\{\hat{g}(s)\}$ est la transformée de Laplace inverse de la fonction $\hat{g}(s)$, a_k est le $k^{\text{ème}}$ pôle de $\exp(tz)g(z)$ et $\text{Res}\{\exp(tz)g(z); a_k\}$ est le résidu de $\exp(tz)g(z)$ au pôle a_k . Ce résidu peut être déterminé de la façon suivante:

$$\text{Res}\left\{\frac{p(z)}{q(z)}; a_k\right\} = \frac{p(a_k)}{q'(a_k)} \text{ si } a_k \text{ est un pôle d'ordre 1}$$

$$\text{Res}\{e^{tz}g(z); a_k\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a_k} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a_k)^m e^{tz}g(z)] \right\} \text{ si } a_k \text{ est un pôle d'ordre } m > 1.$$

L'expression dans le domaine de temps des différents profils exprimés ci dessus s'obtient en posant la fonction g dans l'équation IV.1 égale à la fonction de transfert du profil correspondant multiplié par la transformée de la déformation axial imposée $\varepsilon_z(t)$. La réponse temporelle va donc dépendre de la forme de $\varepsilon_z(t)$. Pour le test de relaxation de contraintes, on va considérer que cette fonction a la forme d'une fonction rampe. On va également considérer le cas où le déplacement imposé a la forme d'une sinusoïde.

2. Profils temporels pour une déformation axiale en fonction rampe

Pour un déplacement sous la forme d'une fonction rampe, on a $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 t / t_0$ pour $0 \leq t \leq t_0$ et $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ pour $t \geq t_0$. La transformée de Laplace de ce signal donne:

$$\varepsilon_z(\bar{s}) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{s}t} \varepsilon(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-\bar{s}t} \frac{\varepsilon_0}{t_0} t dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-\bar{s}t} \varepsilon_0 dt = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \left(\frac{1 - e^{-\bar{s}t_0}}{\bar{s}^2} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Dans ce cas, l'expression de $\exp(tz)g(z)$ dans l'équation IV.1 a la forme suivante pour le cas de la contrainte moyennée à la surface (équation III.11) sans normalisation:

$$e^z g(z) = \frac{E_{33} \varepsilon_0}{t_0} \times \frac{e^z \left(B \times I_0(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}) - C \times \frac{I_1(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}})}{\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}} \right)}{s^2 \left(I_0(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}})}{\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}} \right)} = \bar{G}_1(z) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0 \text{ et}$$

$$e^z g(z) = \frac{E_{33} \varepsilon_0}{t_0} \times \frac{e^z (1 - e^{-t_0 z}) \left(B \times I_0(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}) - C \times \frac{I_1(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}})}{\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}} \right)}{z^2 \left(I_0(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}})}{\sqrt{z r_0^2 / k S_{11}}} \right)} = \bar{G}_2(z) \text{ pour } t \geq t_0.$$

Ces expressions ont un pôle d'ordre 2 en $z = 0$ et n pôles d'ordre 1 en $z = z_n$ où les z_n sont les racines de l'expression $I_0(\sqrt{zr_0^2/kS_{11}}) - A \times \frac{I_1(\sqrt{zr_0^2/kS_{11}})}{\sqrt{zr_0^2/kS_{11}}}$. Ces pôles z_n sont considérés réels et négatifs pour assurer la stabilité de la réponse et on écrit: $z_n = -a_n^2$ où a_n est réel. Les résidu à $z = 0$ de $\bar{G}_1(z)$ et $\bar{G}_2(z)$ sont:

$$\begin{aligned}\text{Res}\{\bar{G}_1(z); 0\} &= \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 \times \bar{G}_1(z)) = \frac{E_{33}\epsilon_0}{t_0} \times \left(\frac{r_0^2}{kS_{11}} \frac{(1-B)}{4(A-2)} + t \right) \\ \text{Res}\{\bar{G}_2(z); 0\} &= \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 \times \bar{G}_2(z)) = E_{33}\epsilon_0\end{aligned}$$

Les n résidus $G_1(z)$ et $G_2(z)$ à $z_n = -a_n^2$ avec n variant de 1 vers l'infini sont:

$$\begin{aligned}\text{Res}\{\bar{G}_1(z); -a_n^2\} &= \frac{E_{33}\epsilon_0}{t_0} \times \frac{r_0^2}{kS_{11}} \times 2(2-A)(B-1) \frac{\exp(-a_n^2 kS_{11}t/r_0^2)}{a_n^2(2A-A^2-a_n^2)} \\ \text{Res}\{\bar{G}_2(z); -a_n^2\} &= \frac{E_{33}\epsilon_0}{t_0} \times \frac{r_0^2}{kS_{11}} \times 2(A-2)(B-1) \frac{[\exp(a_n^2 kS_{11}t_0/r_0^2) - 1] \exp(-a_n^2 kS_{11}t/r_0^2)}{a_n^2(2A-A^2-a_n^2)}\end{aligned}$$

A partir de l'équation (2.51), on obtient donc la contrainte moyennée à la surface en réponse à un déplacement axial sous forme de fonction rampe dans le domaine de temps:

pour $0 \leq t \leq t_0$:

$$\bar{\sigma}_a(t) = \frac{E_{33}\epsilon_0}{t_0} \frac{r_0^2}{kS_{11}} \left[\frac{1-B}{4(A-2)} + t \frac{kS_{11}}{r_0^2} + (B-1)(1-2/A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-a_n^2 \frac{kS_{11}}{r_0^2} t\right)}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1)} \right]$$

et pour $t_0 \leq t$:

$$\bar{\sigma}_a(t) = \frac{E_{33}\epsilon_0}{t_0} \frac{r_0^2}{kS_{11}} \left[t_0 \frac{kS_{11}}{r_0^2} + (B-1)(1-2/A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \exp\left(a_n^2 \frac{kS_{11}}{r_0^2} t_0\right)\right) \exp\left(-a_n^2 \frac{kS_{11}}{r_0^2} t\right)}{a_n^2(a_n^2/2A + A/2 - 1)} \right]$$

Avec le même raisonnement, on obtient les expressions dans le domaine de temps des autres profils qui sont montrées dans la Table 2 de l'article 1 du paragraphe 2.3.

3 . Profils pour une déformation axiale sinusoïdale

Au lieu d'appliquer un déplacement contrôlé sous forme d'une fonction rampe, on peut appliquer un déplacement dynamique sinusoïdal d'amplitude ε_0 et de fréquence f et on mesure au niveau de la cellule de charge, une réponse en contrainte dynamique. Si le système est linéaire, cette réponse est également sinusoïdale. Pour ce type de déplacement contrôlé, notre modèle prédit donc une réponse sinusoïdale, comme on a considéré que le cartilage formait un système linéaire.

Un signal temporel sinusoïdal est caractérisé par une amplitude et un déphasage par rapport au signal sinusoïdal en entrée. Si on était pas certain de la linéarité du système, on pourrait également caractériser la réponse dynamique par un taux de distorsion harmonique, mais ce n'est pas le cas d'une étude analytique linéaire.

Pour notre modèle, la réponse temporelle en contrainte a une forme sinusoïdal caractérisée par une amplitude σ_0 et un déphasage ϕ constant pour une fréquence donnée. On voit donc que pour un déplacement sinusoïdal imposé, il est plus intéressant d'exprimer la réponse en fonction de la fréquence f ou de la pulsation $\omega (= 2\pi f)$ plutôt qu'en fonction du temps. Cette remarque s'applique d'ailleurs pour tous les types de déplacements dynamiques qui sont périodiques. On représente la réponse dynamique sous la forme d'une fonction complexe $F(j\omega)$.

Le problème consiste maintenant à déterminer la fonction $F(j\omega)$ qui représente la forme de la réponse en fonction de la pulsation ω . Les réponses étudiées peuvent être la contrainte moyennée à la surface caractérisée par $H'(j\omega)$, le déplacement radial caractérisée par $U'(j\omega)$, la déformation radiale ou circonférentielle caractérisées par

$E_r'(j\omega)$ et $E_\theta'(j\omega)$, la pression et la vitesse relative du fluide caractérisées par $P'(j\omega)$ et $V'(j\omega)$.

D'après Buschmann (1997), les fonctions montrées ci-dessus qui expriment la réponse dynamique des différents profils sont directement liées à leur fonction de transfert exprimées dans le domaine de Laplace que l'on a défini aux équations III.7, III.10, III.12 et au paragraphe 4 de l'Annexe III. Le passage de l'une à l'autre s'effectue par un changement de variable en remplaçant s (normalisé par rapport à $\frac{kS_{11}}{r_0^2}$) par $j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}$.

Ainsi, on a:

$$H'(j\omega) = [H(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}}$$

$$U'(j\omega) = [U(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}}$$

$$E_r'(j\omega) = [E_r(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}}$$

$$E_\theta'(j\omega) = [E_\theta(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}} \quad (\text{IV.3})$$

$$P'(j\omega) = [P(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}}$$

$$V'(j\omega) = [V(s)]_{s \rightarrow j\omega \frac{r_0^2}{kS_{11}}}$$

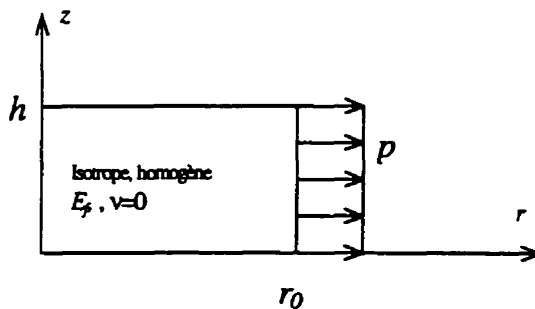
L'amplitude de la fonctions complexe $F(j\omega)$ s'obtient en calculant son module $|F(j\omega)|$ et sa phase s'obtient en calculant son argument.

ANNEXE V . CALCUL DES RIGIDITÉS DES RESSORTS

1 . Rigidités radiales

Comme on a la condition d'une répartition homogène du réseau global des ressorts, on a aussi une répartition homogène du réseau des ressorts dans la direction radiale. De ce fait, on peut comparer le comportement élastique du réseau de ressort homogène de notre modèle composite au comportement d'un modèle équivalent, isotrope et homogène avec un module de Young égal à E_f et un coefficient de Poisson nul. Ces 2 modèles, sous un même chargement doivent présenter des déformations identiques. Ils doivent donc avoir les mêmes rigidités.

On applique une pression uniforme p dans la direction radiale à la surface latérale d'un cylindre isotrope et homogène, comme montré à la figure ci dessous. Cette pression



provoque un déplacement u_r à la surface (à $r = r_0$). Si le modèle est isotrope et homogène avec un coefficient de Poisson nul, la déformation radiale ε_r est constante sur le rayon et égale à u_r/r_0 la contrainte radiale s'écrit: $\sigma_r = E_f \varepsilon_r = \frac{E_f}{r_0} u_r$. Or la

contrainte radiale est également égal à la pression appliquée p , donc: $p = E_f u_r / r_0$. En intégrant sur la circonférence et l'épaisseur du disque, on obtient la force exercée sur la surface extérieure du disque qui est égale à $2\pi h E_f u_r$. On obtient donc la rigidité dans la direction radiale du disque isotrope: $K^{radiale} = 2\pi h E_f$ qui est également celle de notre réseau de ressorts.

Si notre maillage est telle que l'on ait n colonnes et m rangée d'éléments et si les dimensions de ces éléments sont identiques (si l'équation 3.2 est satisfaite avec $\beta = 0$), alors, la rigidité dans la direction radiale de chaque élément pris individuellement est $K_{ele}^{radiale} = 2\pi h E_f n / m$.

Si on a une zone raffinée comme à la Figure 3.5 et si l'équation 3.2 est satisfaite avec $\beta \neq 0$, la rigidité globale reste égale à $K^{radiale} = 2\pi h E_f$ et on a $K^{radiale} = K_{zoneA}^{radiale} K_{zoneB}^{radiale} / (K_{zoneA}^{radiale} + K_{zoneB}^{radiale})$ où $K_{zoneA}^{radiale}$ et $K_{zoneB}^{radiale}$ sont les rigidités radiales des zones A et B. D'autre part, la déformation radiale doit être la même dans ces 2 zones:

$$\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i} \right)_{zoneA} = \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i} \right)_{zoneB}$$

Ce qui implique:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i} \right)_{zoneA} &= \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{r_{i+1} - r_i} \right)_{zoneB} \Leftrightarrow \frac{u_{i+1} - u_i}{\beta r_0} n_A = \frac{u_{i+1} - u_i}{(1-\beta)r_0} n_B \\ \Leftrightarrow \frac{2\pi h E_f u_e}{K_{zoneA}^{radiale} \beta} &= \frac{2\pi h E_f u_e}{K_{zoneB}^{radiale} (1-\beta)} \Leftrightarrow \frac{1}{K_{zoneA}^{radiale} \beta} = \frac{1}{K_{zoneB}^{radiale} (1-\beta)} \\ \Rightarrow K_{zoneA}^{radiale} &= \frac{K_{zoneB}^{radiale} (1-\beta)}{\beta} \end{aligned}$$

On a donc le système à 2 inconnues:

$$\begin{aligned} 2\pi h E_f &= K_{zoneA}^{radiale} K_{zoneB}^{radiale} / (K_{zoneA}^{radiale} + K_{zoneB}^{radiale}) \\ K_{zoneA}^{radiale} &= \frac{K_{zoneB}^{radiale} (1-\beta)}{\beta} \end{aligned}$$

Dont la solution est:

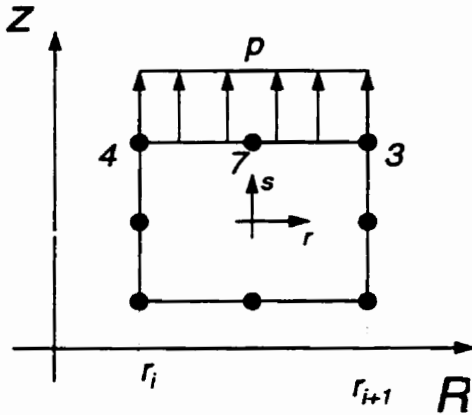
$$K_{zoneA}^{radiale} = \frac{2\pi h E_f}{\beta} \text{ et } K_{zoneB}^{radiale} = \frac{2\pi h E_f}{1-\beta}$$

Comme on a m rangée d'éléments dans les zones A et B, n_A et n_B éléments dans les zones A et B respectivement, il advient que la rigidité radiale comprise dans un élément individuel s'exprime dans chaque zone par:

$$K_{\text{et}}^{\text{radial}} = \frac{2\pi h n_A}{m\beta} E_f \quad \text{dans la zone A (voir Figure 3.5)}$$

$$K_{\text{et}}^{\text{radial}} = \frac{2\pi h n_B}{m(1-\beta)} E_f \quad \text{dans la zone B (voir Figure 3.5)}$$

2. Rigidités axiales



De même, on applique une pression uniforme p dans la direction axiale à la surface supérieure d'un élément quadratique isotrope avec un coefficient de Poisson nul, comme montré à la figure ci dessous. Dans ce cas, on peut calculer le vecteur des charges équivalent aux noeuds 3, 4 et 7 (Cook et al., 1989):

On a:
$$R = \frac{1}{2}(r+r^2)R_3 + \frac{1}{2}(r^2-r)R_4 + (1-r^2)R_7 = \frac{1}{2}(1+r)R_3 + \frac{1}{2}(1-r)R_4, \quad \text{et}$$

$$\{R_{eq}\} = \int_A [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} dS = \frac{R_3 - R_4}{2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(r+r^2) \\ \frac{1}{2}(r^2-r) \\ 1-r^2 \end{Bmatrix} R dr = \pi p (r_{i+1} - r_i) \begin{Bmatrix} r_{i+1}/3 \\ r_i/3 \\ \frac{2}{3}(r_{i+1} + r_i) \end{Bmatrix}$$

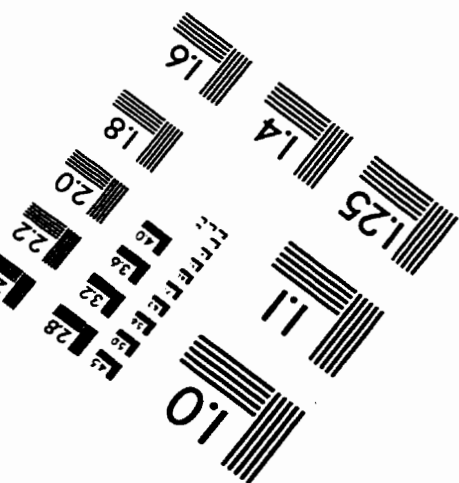
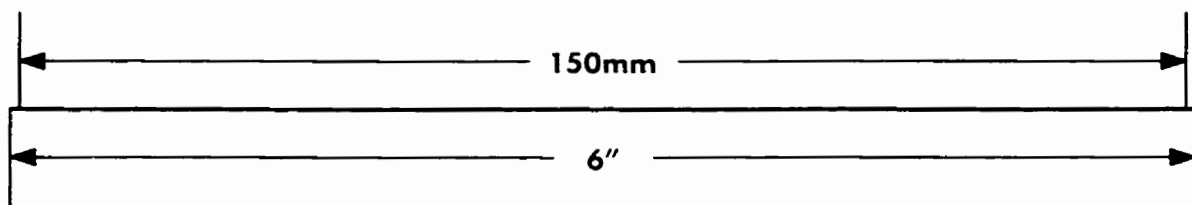
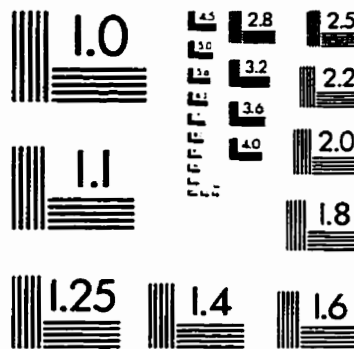
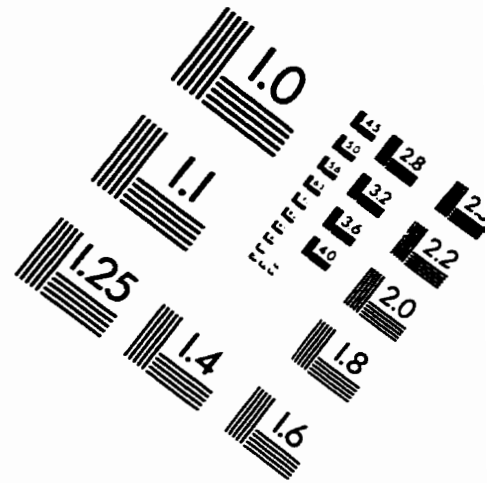
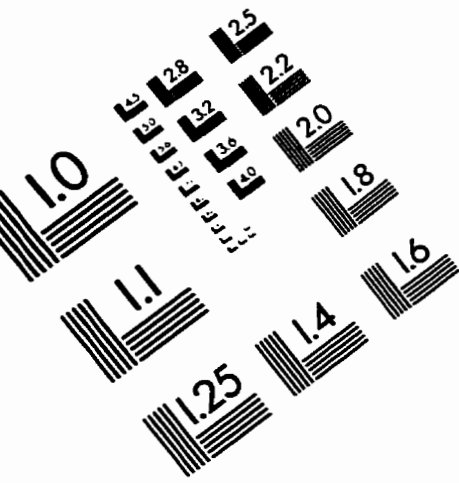
Si la répartition des ressorts est homogène, alors cette pression p amène une déformation axiale constante égale à u/h et on a la contrainte axiale qui est constante et égale à: $\sigma_z = E_f \epsilon_r = E_f u/h = p$. En remplaçant p dans l'expression ci dessus par la valeur ci-contre on obtient les rigidités axiales pour une colonne d'éléments:

$$\begin{Bmatrix} K_{colonne}^3 \\ K_{colonne}^4 \\ K_{colonne}^7 \end{Bmatrix} = \pi \frac{E_f}{h} (r_{i+1} - r_i) \begin{Bmatrix} r_{i+1}/3 \\ r_i/3 \\ \frac{2}{3}(r_{i+1} + r_i) \end{Bmatrix}$$

Pour un seul élément, sachant que l'on a 5 ressorts axiaux par éléments (voir Figure 3.4), on a donc:

$$\begin{Bmatrix} K_{4a}(=K_{4b}) \\ K_{6a}(=K_{6b}) \\ K_5 \end{Bmatrix} = \pi \frac{E_f}{h} m(r_{i+1} - r_i) \begin{Bmatrix} 2r_{i+1}/3 \\ 2r_i/3 \\ \frac{2}{3}(r_{i+1} + r_i) \end{Bmatrix}$$

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

