



Titre: Décomposition multirésolution sur un treillis en quinconce
Title: appliquée au codage vidéo à faible débit

Auteur: Eric Carey
Author:

Date: 1995

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Carey, E. (1995). Décomposition multirésolution sur un treillis en quinconce
Citation: appliquée au codage vidéo à faible débit [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6709/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6709/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Pierre Blondeau, & Michel Forest
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

Université de Montréal

*Décomposition multirésolution
sur un treillis en quinconce
appliquée au codage vidéo à faible débit*

Éric Carey
Département de génie électrique et de génie informatique
École Polytechnique de Montréal

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme
de Maîtrise ès Sciences Appliquées (M. Sc. A.)
(Génie Électrique)
Octobre 1995



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33118-0

Canada

Université de Montréal

École Polytechnique de Montréal

Ce mémoire intitulé:

*Décomposition multirésolution
sur un treillis en quinconce
appliquée au codage vidéo à faible débit*

présenté par: CAREY Eric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. COHEN Paul, Ph. D., président

M. BLONDEAU Pierre, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. FORTIER Michel, Ph. D., membre et co-directeur de recherche

M. HOULE Jean-Louis, Ph. D., membre

À mes parents,
Denise et Réjean.

Remerciements

Je tiens à remercier mon codirecteur de recherche, le Dr. Michel Fortier de Nortel, pour les nombreuses suggestions qu'il a apportées tout au long de ce travail. Son expérience dans le domaine du vidéo a grandement facilité mon cheminement et nos nombreuses discussions m'ont permis de résoudre plusieurs problèmes. Je remercie également mon directeur de recherche, le Dr. Pierre Blondeau de Polytechnique, pour avoir rendu possible la réalisation de ce projet de recherche. De plus, je tiens à souligner la contribution du Dr. Jan Radecki de BNR, avec qui j'ai travaillé à la conception des filtres numériques. Ses précieux conseils ont été très appréciés.

J'exprime ma reconnaissance aux laboratoires de recherche Bell-Northern de Montréal, particulièrement au groupe d'applications multimédia, pour m'avoir fourni les ressources techniques nécessaires aux simulations.

Finalement, je remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, l'École Polytechnique de Montréal, et mon directeur de recherche pour m'avoir appuyé financièrement durant ce projet.

Résumé

La décomposition multirésolution du signal vidéo est une technique de pré-traitement qui divise le signal d'entrée en bandes de fréquences. Il est alors possible d'utiliser un sous-ensemble de ces bandes pour reconstruire la séquence vidéo à une résolution donnée. Cette technique permet également de faciliter la compression du signal vidéo en tenant compte des caractéristiques spécifiques de chacune des bandes.

Cette recherche s'intéresse à la décomposition multirésolution du signal vidéo en considérant séparément chacune des images formant la séquence. Idéalement, une décomposition multirésolution n'introduit aucune distorsion visible lors de la reconstruction, même aux frontières des images. De plus, elle n'augmente pas le nombre de pixels nécessaires à sa représentation. Elle permet également l'utilisation de la bande de basses fréquences comme approximation de la séquence initiale à plus faible résolution. Cette étude considère que le signal vidéo sera encodé à faible débit.

Deux systèmes sont proposés: le système rectangulaire et le système en quinconce. Le premier est celui généralement rencontré en pratique. Un étage de décomposition divise l'image en quatre bandes de fréquences, chacune d'elles échantillonnée sur un réseau rectangulaire. Ce système utilise un banc de filtres unidimensionnels qui s'applique successivement sur les lignes et sur les colonnes. Le second système prend en considération les propriétés des images naturelles ainsi que certaines caractéristiques du système visuel humain. Chaque étage de décomposition fait passer un réseau

d'échantillonnage rectangulaire vers un treillis en quinconce et vice-versa, par l'utilisation de filtres en forme de losange. Le caractère multirésolution du système en quinconce est bien défini car une bande de basses fréquences est toujours circonscrite par une bande de plus hautes fréquences, ce qui n'est pas le cas pour le système rectangulaire. Nous suggérons une nouvelle technique pour le traitement des frontières afin d'en éliminer complètement l'effet lors de la reconstruction. Cette approche est basée sur les propriétés de symétrie des filtres à phase nulle et elle n'introduit pas de hautes fréquences artificielles dans chacune des bandes de fréquences prise individuellement.

Des bancs de filtres à reconstruction quasi-parfaite ont été conçus pour chacun des deux systèmes en utilisant différentes méthodes de conception de filtres. De nombreuses simulations comparent l'efficacité des deux systèmes. Elles montrent la validité de la technique pour le traitement des frontières. Il ressort également que la qualité de la reconstruction est limitée par deux types d'erreur: l'erreur de reconstruction du banc de filtres et l'erreur d'arrondi introduite dans chacune des bandes. Pour un système à faible débit, l'erreur de reconstruction peut être négligée face à l'erreur d'arrondi. De plus, les hautes fréquences sont généralement éliminées car elles contiennent peu d'information. Lorsqu'on ne conserve que les fréquences basses et moyennes, le système en quinconce montre sa supériorité car il est mieux adapté aux caractéristiques des images naturelles.

Les principales applications de cette recherche se situent dans les systèmes où l'affichage peut être effectué à différentes résolutions, comme dans les systèmes multimédia.

Abstract

A multiresolution decomposition is a pre-processing technique which splits the input signal in a number of frequency bands. A subset of those bands can be merged together to reconstruct the video sequence at a given resolution. This method permits compression schemes based on the statistical properties of the frequency bands.

This research considers the multiresolution decomposition of the video signal, where each image is processed separately. Ideally, a multiresolution decomposition does not introduce visible distortions after reconstruction, even at the borders. It does not increase the total number of pixels used to represent the initial sequence. Furthermore, its low frequency band can be used as an approximation of the initial video sequence at a lower resolution. This study considers that resulting bands will be coded at low bit rate.

Two systems are presented: the rectangular system and the quincunx system. The first one is based on a rectangular sampling lattice and is generally used in actual design. A unidimensionnal filterbank divides the signal in four frequency bands by filtering successively along rows and columns. The second one takes into consideration the properties of natural images and some characteristics of the human visual system. Its bidimensionnal filterbank uses diamond-shape filters followed by subsampling to change the sampling lattice from rectangular to quincunx. The multiresolution nature of the quincunx system is well defined because a low frequency band is always surrounded by a higher frequency band. We propose a new method to eliminate the boundary effects on

the reconstruction of the signal. It is based on the symmetry properties of zero-phase filters and it does not introduce artificial high frequencies by maintaining the continuity of the signal at the borders.

Quasi-perfect reconstruction filterbanks have been designed for both systems. Simulations show that the new method to eliminate the boundary effects works as expected. The quality of the reconstruction is limited by two kinds of error: the reconstruction error of the filterbank and the rounding error introduced in the subbands. For a low bitrate system, the rounding error is more significant. Usually, the high frequencies are left over because they do not contain much information. The quincunx system gives better results when we keep only the low and medium frequencies because it takes into consideration the properties of natural images.

Applications of this research are mainly in the multimedia area, where the display may need different resolutions, depending on the available bandwidth for the signal or on the size of the display device.

Table des matières

	page
Dédicace	iv
Remerciements	v
Résumé	vi
Abstract	viii
Table des matières	x
Liste des tableaux	xiv
Liste des figures.....	xvi
Liste des sigles et abréviations	xix
 Introduction	 1
 Chapitre 1: Notions de base	 4
1.1 Compression de séquences vidéo	4
1.2 Techniques de compression du signal vidéo	5
1.2.1 PCM.....	5
1.2.2 DPCM.....	6
1.2.3 Transformation discrète en cosinus	7
1.2.4 Décomposition en bandes de fréquences.....	8
1.2.5 Estimation et prédiction de mouvement.....	9
1.2.6 Quantification vectorielle	10
1.3 Normes de compression de l'image et du signal vidéo	10
1.4 Considérations sur le système visuel humain	11

1.5 Présentation des systèmes considérés	13
1.5.1 Système pour réseau rectangulaire.....	15
1.5.2 Système pour treillis en quinconce	16
Chapitre 2: Échantillonnage multidimensionnel	19
2.1 Réseau d'échantillonnage.....	19
2.1.1 Réseau rectangulaire.....	21
2.1.2 Treillis en quinconce.....	23
2.2 Format de couleur.....	27
2.2.1 Conversion des couleurs en format numérique	27
2.2.2 Réseau d'échantillonnage pour la couleur	28
2.3 Traitement du signal multi-débit	30
2.3.1 Sous-échantillonnage.....	31
2.3.2 Sur-échantillonnage.....	31
Chapitre 3: Banc de filtres pour le système rectangulaire	33
3.1 Reconstruction parfaite.....	33
3.2 Conditions aux frontières	37
3.2.1 Bande de basses fréquences.....	39
3.2.2 Bande de hautes fréquences.....	42
3.2.3 Simplification pour la bande de hautes fréquences	45
3.3 Conception des filtres unidimensionnels	47
3.3.1 Méthode d'échantillonnage en fréquence	47
3.3.2 Méthode du recuit simulé.....	51
3.4 Efficacité des bancs de filtres unidimensionnels	53
3.5 Complexité du système rectangulaire.....	54

Chapitre 4: Banc de filtres pour le système en quinconce	57
4.1 Reconstruction parfaite.....	57
4.2 Conditions aux frontières	60
4.2.1 Réseau rectangulaire vers treillis en quinconce.....	62
4.2.2 Treillis en quinconce vers réseau rectangulaire.....	66
4.3 Conception des filtres bidimensionnels.....	70
4.3.1 Méthode d'échantillonnage en fréquence.....	71
4.3.2 Transformation de McClellan.....	73
4.4 Complexité du système en quinconce	77
Chapitre 5: Simulation des systèmes	80
5.1 Décomposition et reconstruction.....	80
5.1.1 Reconstruction en fonction du nombre de bits.....	81
5.1.2 Énergie et entropie des bandes de fréquences.....	84
5.1.3 Reconstruction multirésolution.....	90
5.2 Codage de la bande basse	96
5.2.1 Caractéristiques de compression de la bande basse	97
5.2.2 Reconstruction après décodage de la bande basse	98
5.3 Discussion	106
Conclusion	110
Références	113
Annexe A: Normes de compression	116
A.1 JPEG.....	116
A.2 H.261 (px64)	117
A.3 MPEG.....	118

Annexe B: Coefficients des filtres	121
Annexe C: Extension symétrique pour le treillis en quinconce	125
Annexe D: Démonstration des extensions symétriques bidimensionnelles	130
D.1 Réseau rectangulaire vers treillis en quinconce	130
<i>D.1.1 Frontière du haut</i>	130
<i>D.1.2 Frontière du bas</i>	131
D.2 Treillis en quinconce vers réseau rectangulaire	132
<i>D.2.1 Frontière du haut</i>	132
<i>D.2.2 Frontière du bas</i>	133
Annexe E: Résultats des simulations	134
E.1 Reconstruction en fonction du nombre de bits	135
E.2 Énergie et entropie des bandes de fréquences	136
E.3 Reconstruction multirésolution des séquences	138

Liste des tableaux

page

Chapitre 1

<i>Tableau 1.1: Normes de compression de l'image et du signal vidéo</i>	<i>11</i>
---	-----------

Chapitre 3

<i>Tableau 3.1: Complexité de calculs du système rectangulaire</i>	<i>56</i>
--	-----------

Chapitre 4

<i>Tableau 4.1: Complexité de calculs du système en quinconce</i>	<i>79</i>
---	-----------

Chapitre 5

<i>Tableau 5.1: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction de Susie et de Flower Garden</i>	<i>82</i>
<i>Tableau 5.2: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction des franges de Fresnel</i>	<i>84</i>
<i>Tableau 5.3: Évaluation subjective de Flower Garden pour différents débits de la bande L</i>	<i>102</i>
<i>Tableau 5.4: Évaluation subjective de Susie pour différents débits de la bande L</i>	<i>106</i>

Annexe B

<i>Tableau B.1: Coefficients de E31</i>	<i>121</i>
<i>Tableau B.2: Coefficients de R31</i>	<i>122</i>
<i>Tableau B.3: Coefficients de E15</i>	<i>122</i>
<i>Tableau B.4: Coefficients de E15x15</i>	<i>123</i>
<i>Tableau B.4: Coefficients de M15x15</i>	<i>124</i>

Annexe C

<i>Tableau C.1: Extension symétrique en quinconce</i>	<i>129</i>
---	------------

Annexe E

<i>Tableau E.1: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction</i>	<i>135</i>
<i>Tableau E.2: EQM pour le pire bloc de luminance de 16x16.....</i>	<i>136</i>
<i>Tableau E.3: Énergie normalisée des bandes de fréquences pour Miss America et Susie.....</i>	<i>137</i>
<i>Tableau E.4: Énergie normalisée des bandes de fréquences pour Football et Flower Garden.....</i>	<i>137</i>
<i>Tableau E.5: Entropie des bandes de fréquences.....</i>	<i>138</i>
<i>Tableau E.6: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec R31 de Miss America et de Susie</i>	<i>139</i>
<i>Tableau E.7: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec R31 de Football et de Flower Garden.....</i>	<i>139</i>
<i>Tableau E.8: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec E15x15 de Miss America et de Susie</i>	<i>139</i>
<i>Tableau E.9: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec E15x15 de Football et de Flower Garden.....</i>	<i>140</i>

Liste des figures

page

Chapitre 1

<i>Figure 1.1: Système de compression de séquences vidéo.....</i>	<i>4</i>
<i>Figure 1.2: Encodeur PCM.....</i>	<i>6</i>
<i>Figure 1.3: Décomposition en deux bandes de fréquences.....</i>	<i>8</i>
<i>Figure 1.4: Système d'encodage rectangulaire.....</i>	<i>15</i>
<i>Figure 1.5: Bandes de fréquences pour le réseau rectangulaire.....</i>	<i>16</i>
<i>Figure 1.6: Système d'encodage en quinconce.....</i>	<i>17</i>
<i>Figure 1.7: Bandes de fréquences pour le treillis en quinconce.....</i>	<i>18</i>

Chapitre 2

<i>Figure 2.1: Réseau rectangulaire.....</i>	<i>22</i>
<i>Figure 2.2: Position des spectres du réseau rectangulaire.....</i>	<i>23</i>
<i>Figure 2.3: Spectre du signal passe-bas.....</i>	<i>24</i>
<i>Figure 2.4: Approximation du spectre du signal passe-bas.....</i>	<i>24</i>
<i>Figure 2.5: Répétitions du spectre en quinconce.....</i>	<i>25</i>
<i>Figure 2.6: Treillis en quinconce.....</i>	<i>26</i>
<i>Figure 2.7: Format 4:4:4.....</i>	<i>29</i>
<i>Figure 2.8: Format 4:2:2.....</i>	<i>29</i>
<i>Figure 2.9: Format 4:1:1.....</i>	<i>30</i>
<i>Figure 2.10: Sous-échantillonneur.....</i>	<i>31</i>
<i>Figure 2.11: Sur-échantillonneur.....</i>	<i>32</i>

Chapitre 3

<i>Figure 3.1: Banc de filtres à deux bandes.....</i>	<i>34</i>
<i>Figure 3.2: Types d'extension pour filtres-miroir en quadrature.....</i>	<i>38</i>
<i>Figure 3.3: Signal d'entrée avec extension symétrique.....</i>	<i>39</i>
<i>Figure 3.4: Signal basse fréquence après le filtre d'analyse.....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 3.5: Signal basse fréquence avant le filtre de synthèse.....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 3.6: Signal haute fréquence après le filtre d'analyse.....</i>	<i>44</i>

<i>Figure 3.7: Signal haute fréquence avant le filtre de synthèse</i>	45
<i>Figure 3.8: Signal haute fréquence sans décalage après le filtre d'analyse</i>	46
<i>Figure 3.9: Signal haute fréquence sans décalage avant le filtre de synthèse</i>	46
<i>Figure 3.10: Réponse en fréquence de E31</i>	50
<i>Figure 3.11: Fonction de transfert totale du banc pour E31</i>	50
<i>Figure 3.12: Réponse en fréquence de R31</i>	52
<i>Figure 3.13: Fonction de transfert totale du banc pour R31</i>	52

Chapitre 4

<i>Figure 4.1: Image-source avec extension symétrique rectangulaire</i>	63
<i>Figure 4.2: Image basse fréquence rectangulaire avant le filtre de synthèse</i>	64
<i>Figure 4.3: Image haute fréquence rectangulaire avant le filtre de synthèse</i>	65
<i>Figure 4.4: Image haute fréquence rectangulaire sans décalage avant le filtre de synthèse</i>	66
<i>Figure 4.5: Image-source avec extension symétrique en quinconce</i>	67
<i>Figure 4.6: Image basse fréquence en quinconce avant le filtre de synthèse</i>	68
<i>Figure 4.7: Image haute fréquence en quinconce avant le filtre de synthèse</i>	69
<i>Figure 4.8: Image haute fréquence en quinconce sans décalage avant le filtre de synthèse</i>	70
<i>Figure 4.9: Réponse en fréquence de E15x15</i>	72
<i>Figure 4.10: Lignes de contours de E15x15</i>	72
<i>Figure 4.11: Fonction de transfert totale du banc E15x15</i>	73
<i>Figure 4.12: Réponse en fréquence de E15</i>	75
<i>Figure 4.13: Réponse en fréquence de M15x15</i>	76
<i>Figure 4.14: Lignes de contours de M15x15</i>	76
<i>Figure 4.15: Fonction de transfert totale du banc M15x15</i>	77

Chapitre 5

<i>Figure 5.1: Susie et Flower Garden</i>	81
<i>Figure 5.2: Franges de Fresnel</i>	84
<i>Figure 5.3: Histogramme de Flower Garden</i>	85
<i>Figure 5.4: Caractéristiques des bandes du système rectangulaire pour Flower Garden</i>	86
<i>Figure 5.5: Caractéristiques des bandes du système en quinconce pour Flower Garden</i>	87
<i>Figure 5.6: Énergie normalisée des bandes de fréquences pour Susie et Flower Garden</i>	89
<i>Figure 5.7: Entropie des bandes de fréquences pour Susie et Flower Garden</i>	90

<i>Figure 5.8: Reconstruction multirésolution de Flower Garden.....</i>	<i>91</i>
<i>Figure 5.9: Rapport signal à bruit maximum pour Flower Garden.....</i>	<i>93</i>
<i>Figure 5.10: Rapport signal à bruit maximum pour Susie.....</i>	<i>95</i>
<i>Figure 5.11: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour la bande basse de Susie et Flower Garden après compression.....</i>	<i>98</i>
<i>Figure 5.12: Reconstruction de la 15^e image de Flower Garden à différents débits.....</i>	<i>99</i>
<i>Figure 5.13: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour Flower Garden.....</i>	<i>101</i>
<i>Figure 5.14: Reconstruction de la 16^e image de Susie à différents débits.....</i>	<i>103</i>
<i>Figure 5.15: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour Susie.....</i>	<i>105</i>

Annexe A

<i>Figure A.1: Séquence en zigzag des coefficients.....</i>	<i>117</i>
<i>Figure A.2: Codage inter-image.....</i>	<i>119</i>

Annexe C

<i>Figure C.1: Décomposition du treillis en quinconce en deux réseaux rectangulaires.....</i>	<i>125</i>
<i>Figure C.2: Extension symétrique sur le treillis en quinconce.....</i>	<i>127</i>

Annexe E

<i>Figure E.1: Séquences vidéo utilisées.....</i>	<i>134</i>
---	------------

Liste des sigles et abréviations

AC	<i>Alternating Current</i> (courant alternatif)
BA	Bande d'arrêt
BP	Bande passante
bps	Bits par seconde
CCIR	Comité consultatif international pour la radio
CCITT	Comité consultatif international en télégraphie et en téléphonie
CD-ROM	<i>Compact Disk, Read-only Memory</i>
CIF	<i>Common Intermediate Format</i> (288x352x30; 4:1:1)
DC	<i>Direct current</i> (courant continu)
DPCM	<i>Differential Pulse Code Modulation</i> (modulation par impulsion différentielle codée)
FIR	<i>Finite-impulse response</i> (réponse à l'impulsion finie)
GOP	<i>Group of pictures</i> (groupe d'images)
H.261	Norme du CCITT pour la compression à faible débit (px64)
ITU	<i>International Telecommunications Union</i>
JPEG	<i>Joint Photographic Experts Group</i>
MPEG	<i>Motion Picture Experts Group</i>
MUX	Multiplexeur
PCM	<i>Pulse Code Modulation</i> (modulation par impulsion codée)
QCIF	<i>Quarter Common Intermediate Format</i> (144x176x30; 4:1:1)
RGB	<i>Red-Green-Blue</i> (format de couleur rouge-vert-bleu)
SVH	Système visuel humain
TDC	Transformation discrète en cosinus

Introduction

Depuis le début des années 70, nous assistons à un virage technologique des plus importants. Avec l'avènement d'ordinateurs de plus en plus puissants, il est maintenant possible de traiter numériquement ce qui autrefois nécessitait un système analogique. De nouvelles techniques ont dû être développées, que ce soit dans le domaine de l'audio, du traitement de la parole ou du signal vidéo, pour n'en nommer que quelques-uns.

Le secteur de la vidéo numérique a pris plus de temps à prendre son envol car la quantité d'information qui est produite est très grande (par exemple, une séquence vidéo échantillonnée selon la recommandation 601 du CCIR produit environ 1,5 gigaoctets par minute). De nombreuses applications émergent de ces nouveaux concepts. On pense immédiatement à la télévision haute-définition qui promet une résolution accrue par rapport à la télévision conventionnelle. Cela demande toutefois une largeur de bande importante pour transmettre le signal. Certaines applications à plus faible débit ont également fait leur apparition, comme la vidéophonie. Mais l'arrivée de l'autoroute électronique et des applications multimédia promet un bel avenir à la numérisation du vidéo. En effet, une fois numérisé, le signal vidéo peut être considéré comme tout autre type de données, et ainsi circuler par les mêmes chemins. Il faut toutefois diminuer le débit de ce signal pour empêcher la congestion du réseau qui doit l'acheminer. C'est alors qu'intervient la compression du signal vidéo.

Ce travail s'intéresse à la décomposition en bandes de fréquences dans le plan spatial sous l'hypothèse que le signal d'entrée est un signal vidéo. Cette décomposition est une étape de pré-traitement du signal qui facilite sa compression par des encodeurs vidéo adaptés aux caractéristiques spécifiques de chacune des bandes. Pour fins d'analyse, l'étude suppose que le signal résultant sera "à faible débit", c'est-à-dire entre 64 kbps et 768 kbps. Des séquences vidéo de format CIF (*Common Intermediate Format*), faisant 288 lignes par 352 colonnes à 30 images par seconde, sont ainsi utilisées lors des simulations. La méthode proposée s'applique également aux images fixes et aux séquences vidéo à débit plus élevé.

Deux approches sont considérées. La première est basée sur le réseau d'échantillonnage rectangulaire séparable, que l'on rencontre généralement en pratique. Le système correspondant est composé d'un banc de filtres unidimensionnels à deux étages qui divise le signal en quatre bandes de fréquences. La deuxième approche utilise un treillis en quinconce, prenant en considération le contenu fréquentiel des images naturelles, de même que certaines caractéristiques du système visuel humain. Le système en quinconce possède également deux étages, mais ceux-ci sont composés de filtres bidimensionnels en forme de losange, et il génère trois bandes de fréquences. La relation qui existe entre ces trois bandes simplifie le caractère multirésolution du système en quinconce comparativement au système rectangulaire. Le travail présente une nouvelle approche pour le traitement des problèmes de conditions aux frontières rencontrés lors du filtrage afin d'en éliminer complètement l'effet lors de la reconstruction. Cette nouvelle méthode

est valide aussi bien pour le système en quinconce que pour le système rectangulaire et elle permet de diminuer l'erreur de reconstruction tout en simplifiant le filtrage.

L'étude débute au chapitre 1 par une revue des notions de base en compression des séquences vidéo. Les deux systèmes de pré-traitement considérés dans ce travail y sont présentés sommairement. Le chapitre 2 expose les outils mathématiques nécessaires à l'analyse de l'échantillonnage multidimensionnel. Par la suite, le chapitre 3 s'intéresse au développement du système de décomposition sur réseau rectangulaire, mettant en évidence la propriété de reconstruction quasi-parfaite et la conception du banc de filtres nécessaire à la décomposition. Une approche similaire est alors présentée au chapitre 4 pour le treillis en quinconce, en insistant sur la propriété de non-séparabilité de ce type d'échantillonnage. Dans les deux cas, une importance particulière est accordée au traitement des conditions aux frontières. Finalement, le chapitre 5 compare les deux systèmes entre eux en présentant les résultats obtenus suite aux simulations.

Chapitre 1: Notions de base

Ce chapitre présente une vue d'ensemble du secteur de la compression du signal vidéo. Il expose les principaux termes rencontrés dans ce domaine et il introduit certaines considérations sur le système visuel humain. Il se termine par une description détaillée des deux systèmes de décomposition du signal vidéo considérés dans cette étude.

1.1 Compression de séquences vidéo

La compression de séquences vidéo permet de diminuer le débit du signal en considérant la redondance présente aussi bien dans le plan spatial (**intra-trame**¹) que selon l'axe temporel (**inter-trame**). La figure 1.1 montre un système complet de compression de séquences vidéo. Il est composé d'un encodeur, d'un canal de transmission et d'un décodeur. À l'entrée du système se trouve la séquence originale qui sera comprimée par l'encodeur. La séquence comprimée est alors transmise par le canal de communication, qui peut également être un dispositif de stockage dans certains cas. Pour récupérer le signal vidéo, il suffit d'utiliser un décodeur approprié.

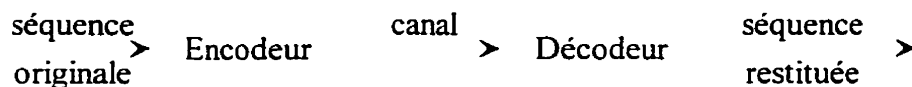


Figure 1.1: Système de compression de séquences vidéo

¹ Une trame est définie comme l'ensemble des lignes horizontales explorées au cours d'un balayage vertical d'une image de télévision.

Il est possible de diviser les techniques pour la compression de séquences vidéo en deux catégories: **sans perte** et **avec perte**. La compression sans perte vient du fait que la séquence obtenue après décompression (à la sortie du décodeur) est en tous points identique à la séquence originale, alors que dans le cas de la compression avec perte, la séquence restituée n'est qu'une approximation de la séquence originale. On conçoit aisément qu'il est possible d'obtenir de meilleurs taux de compression si l'on peut tolérer certaines pertes d'information. Dans ce dernier cas, on tient généralement compte des propriétés du système visuel humain afin que la dégradation de la séquence soit imperceptible.

1.2 Techniques de compression du signal vidéo

Plusieurs méthodes existent pour réduire le débit d'information relié à une séquence vidéo. Cette section explique les principales techniques, en indiquant leurs avantages et inconvénients. Il faut noter que l'efficacité de l'encodeur peut être augmentée en combinant certaines de ces méthodes. De plus, le traitement du plan spatial est souvent effectué séparément de celui suivant l'axe du temps.

1.2.1 PCM

Bien que le PCM (*Pulse Code Modulation*) ne soit pas une technique de compression en tant que tel, il est à la base de tout ce qui concerne la conversion du signal analogique en valeurs numériques. Le PCM consiste à échantillonner un signal analogique et à lui assigner une valeur discrète parmi un nombre fini de valeurs. Le signal analogique, étant continu, peut prendre un nombre infini de valeurs sur un intervalle donné. L'encodeur

PCM est composé d'un échantillonneur-bloqueur, suivi d'un quantificateur, tel qu'illustré à la figure 1.2.

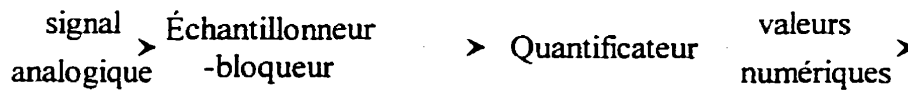


Figure 1.2: Encodeur PCM

L'échantillonneur-bloqueur a pour fonction de maintenir à sa sortie une valeur fixe (par exemple, une tension fixe) pendant l'intervalle d'échantillonnage. Celle-ci est alors convertie en une valeur discrète par le quantificateur.

1.2.2 DPCM

Le DPCM (*Differential Pulse Code Modulation*) est la technique la plus simple pour compresser un signal sans perte d'information. Il consiste à envoyer le signal-différence entre l'échantillon courant et le précédent, plutôt que la valeur elle-même. Si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, l'écart entre deux échantillons successifs est petit et il peut être encodé sur un nombre inférieur de bits. Lorsque le signal est multidimensionnel, on peut généraliser le principe précédent en encodant l'écart entre l'échantillon courant et une combinaison linéaire des échantillons passés. Cette technique est appelée **codage prédictif**. Le principal avantage du DPCM est sa grande simplicité. De plus, il produit un signal sans perte d'information. Par contre, le niveau de compression est faible et la sensibilité aux erreurs de transmission est très grande.

1.2.3 Transformation discrète en cosinus

La transformation discrète en cosinus (TDC) d'un signal a été introduite par Ahmed, Natarajan et Rao en 1974. Ils montrent que la TDC se rapproche plus de la transformation de Karhunen-Loève (optimale pour décorréler les échantillons entre eux) que les transformations de Fourier, de Walsh-Hadamard ou de Haar pour les images. Elle parvient donc à décorréler les échantillons d'une façon semi-optimale, ce qui permet une compression efficace dans le domaine des fréquences (car les échantillons peuvent alors être traités indépendamment les uns des autres sans grande perte de rendement de la part de l'encodeur). Bien que la transformation de Karhunen-Loève soit optimale, elle nécessite la connaissance a priori des statistiques du signal et elle ne possède pas d'algorithme de calcul rapide, ce qui la rend difficile à utiliser dans les applications pratiques. C'est pourquoi la TDC lui est préférée.

Si le réseau d'échantillonnage du signal bidimensionnel est rectangulaire, la TDC peut s'appliquer successivement sur les lignes et les colonnes des trames formant la séquence vidéo. En pratique, l'image ou la séquence est divisée en petits blocs qui verront leur transformée évaluée séparément. Pour plusieurs algorithmes bien connus, ces blocs font 8 pixels par 8 pixels dans le plan spatial. Cette séparation peut toutefois entraîner un effet de quadrillage dans l'image reconstituée, car la quantification du coefficient DC (fréquence nulle) pourrait être différente d'un bloc à l'autre. De plus, les erreurs de transmission sont associées à un bloc en entier. Mais le principal avantage de la TDC est un haut niveau de compression avec de faibles distorsions.

1.2.4 Décomposition en bandes de fréquences

La décomposition en bandes de fréquences a été présentée en 1976 par Croisier, Esteban et Galand. Dans sa forme la plus simple, elle consiste à diviser le signal d'entrée en deux bandes de fréquences: les basses fréquences (canal 0) et les hautes fréquences (canal 1), tel que montré à la figure 1.3.

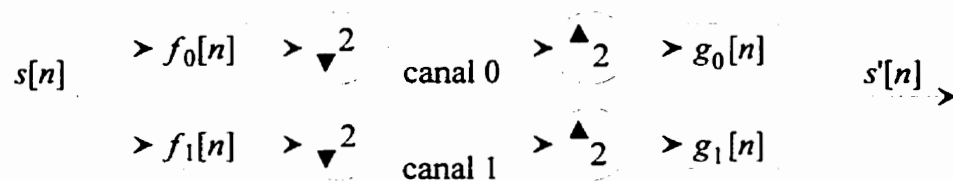


Figure 1.3: Décomposition en deux bandes de fréquences

En choisissant judicieusement les filtres ($f_0[n]$; $f_1[n]$) de l'encodeur et ($g_0[n]$; $g_1[n]$) du décodeur, il est théoriquement possible d'obtenir un signal $s'[n]$ identique au signal-source $s[n]$. Ces résultats sont démontrés au chapitre 3 dans le cas d'un réseau d'échantillonnage séparable et au chapitre 4 pour un réseau non-séparable. Puisque chaque bande de fréquences a des caractéristiques qui lui sont propres, il est souhaitable d'en tenir compte pour arriver à comprimer efficacement chacun des canaux séparément. On peut généraliser la méthode en utilisant des filtres numériques multidimensionnels. Toutefois, la conception de tels filtres est beaucoup plus complexe que pour le cas unidimensionnel. Puisque la séquence est traitée dans son ensemble (et non par blocs), les distorsions engendrées par la quantification sont réparties dans l'intégralité du support de la séquence.

Mallat (1989) a utilisé la théorie des ondelettes pour diviser le plan fréquentiel en régions. La **transformation en ondelettes** est la décomposition du signal sur une famille de fonctions qui est l'ensemble des translations et dilatations d'une seule fonction appelée ondelette mère. Il a montré que cette méthode conduit également à une décomposition multirésolution du signal d'entrée.

1.2.5 Estimation et prédiction de mouvement

La technique d'estimation de mouvement est spécifiquement reliée à l'évolution du contenu de chaque trame de la séquence vidéo selon l'axe temporel (inter-trame). Elle consiste essentiellement à diviser la trame courante en régions et à trouver le déplacement de ces régions dans la trame précédente, en tentant de minimiser un critère de distorsion (par exemple, la valeur absolue de la différence). Ce déplacement est représenté par un vecteur à deux dimensions. On peut également travailler pixel par pixel (plutôt que par régions) en utilisant des algorithmes d'estimation de mouvement récursifs. Musmann, Prisch et Grallert (1985) expliquent en détail divers algorithmes d'estimation de mouvement. Il est possible de générer une image-prédiction en utilisant tous ces vecteurs de déplacement et de ne coder que la différence entre l'image initiale et l'image prédite, comme dans le cas du DPCM. Cette technique est souvent utilisée en conjonction avec d'autres méthodes de compression pour le plan spatial. Elle demande toutefois une grande puissance de calculs lors de l'encodage afin de trouver les meilleurs vecteurs-déplacement possibles, car l'estimation du mouvement doit être répétée pour chacune des régions formant la trame.

1.2.6 Quantification vectorielle

La quantification vectorielle est une généralisation de la quantification scalaire. Plutôt que d'associer un nombre à un intervalle de valeurs, elle relie un vecteur à une région de l'espace. Le vecteur peut être vu comme un ensemble de pixels adjacents. L'encodeur utilise un dictionnaire contenant un nombre représentatif de vecteurs de reconstruction, et il génère à sa sortie le vecteur de reconstruction qui engendre le moins de distorsions considérant un vecteur d'entrée donné. Gray (1984) présente une description exhaustive de la quantification vectorielle, et Cosman *et al.* (1993) font état de son application au traitement des images.

1.3 Normes de compression de l'image et du signal vidéo

Plusieurs normes de compression pour les images (JPEG) et pour les séquences vidéo (H.261, MPEG) ont émergé au cours des dernières années. Les buts poursuivis par les différents comités internationaux chargés de leur développement étaient, entre autres, de simplifier l'interconnexion et l'échange de données entre les appareils, et de permettre la production massive de circuits intégrés pour diminuer les coûts de fabrication. Chacune des normes est conçue pour répondre à une classe spécifique d'applications. Le tableau 1.1 résume leurs caractéristiques, alors que leur fonctionnement est expliqué à l'annexe A.

Tableau 1.1: Normes de compression de l'image et du signal vidéo

Nom	Type	Débit	Niveau de compression	Méthode
JPEG	image	N/A ^a	20:1 ^b	TDC
H.261	vidéo	64 kbps	variable	TDC + mouvement ^d
MPEG-1	vidéo	1.5 Mbps	50:1 ^c	TDC + mouvement ^d
MPEG-2	vidéo	5-20 Mbps	150:1 ^c	TDC + mouvement ^d
MPEG-4	vidéo	< 64 kbps	à déterminer	à déterminer ^e

^a ne s'applique pas pour une image

^b pour une image RGB. Le niveau de compression dépend de la quantification des coefficients de la TDC.

^c pour une séquence en format CCIR-601. Le niveau de compression peut varier en fonction de la quantification des coefficients de la TDC.

^d estimation de mouvement par blocs de 16 par 16 pixels

^e MPEG-4 devrait atteindre le statut de norme internationale vers la fin de 1998. Il fera probablement appel à une méthode de codage de deuxième génération. Voir Schäfer et Sikora (1995).

1.4 Considérations sur le système visuel humain

Il y a généralement deux types d'information qui peuvent être éliminés sans affecter la qualité de la séquence vidéo: l'information pouvant être prédite et l'information que le système visuel humain (SVH) ne peut pas voir. Les sections précédentes portaient principalement sur le premier type de compression. Cette section s'attarde sur les caractéristiques de l'oeil pouvant être utilisées afin d'augmenter le niveau de compression tout en conservant une bonne qualité pour la séquence restituée. Mentionnons que les propriétés qui suivent donnent une indication sur la réponse du SVH et qu'elles peuvent varier selon les conditions de visualisation (distance, clarté...) et selon les individus. Une description plus exhaustive des propriétés du SVH appliquées au signal vidéo a été effectuée par Glenn (1993), de même que par Forchheimer et Kronander (1989).

Propriété 1:

Le SVH a une réponse de type passe-bas dans le plan spatial et selon l'axe temporel. Puisque l'acuité visuelle diminue pour les fréquences élevées, l'encodage de ces fréquences peut utiliser moins de bits.

Propriété 2:

Les distorsions inférieures au seuil de visibilité ne dégradent pas la séquence. Il suffit donc de bien choisir les niveaux des quantificateurs car une reconstruction parfaite n'est pas nécessaire.

Propriété 3:

Les composantes de couleur les plus avantageuses sont la luminance accompagnée de deux chrominances. La majorité de l'énergie est contenue dans la luminance. De plus, le SVH est moins sensible à la chrominance proche du rouge (par un facteur 2) et à la chrominance proche du bleu (par un facteur 4) qu'à la luminance. Les chrominances peuvent donc être sous-échantillonnées.

Propriété 4:

Pour le plan spatial, la sensibilité dans les directions obliques (près de 45°) est inférieure d'environ 3 dB à celle des directions horizontale et verticale. Ainsi, les fréquences horizontales et verticales doivent avoir priorité sur celles aux environs de 45 degrés.

Propriété 5:

Le SVH est très sensible pour détecter les lignes droites et les contours, même si le rapport signal à bruit est relativement faible. Les effets de blocs sont donc très visibles.

Propriété 6:

Les détails de faible amplitude sont masqués dans les régions où il y a du mouvement. La quantification peut être ajustée en conséquence.

1.5 Présentation des systèmes considérés

Dans le cadre de l'étude, nous considérons deux types de système. Le premier est celui généralement rencontré en pratique. Il utilise un réseau d'échantillonnage rectangulaire séparable. Le filtrage dans le plan spatial s'effectue ainsi sur les lignes, puis sur les colonnes, tel qu'expliqué au chapitre 2. Le deuxième système de décomposition tient compte des caractéristiques des images formant la séquence et des propriétés du système visuel humain en utilisant un réseau d'échantillonnage en quinconce. Il s'agit toutefois d'un réseau non-séparable qui doit être traité en deux dimensions.

Dans ce travail, les séquences vidéo considérées ont des dimensions correspondant au format utilisé dans les systèmes de vidéoconférence, soit le format CIF² (*Common Intermediate Format*). Cette hypothèse est utile pour pouvoir comparer les résultats obtenus lors des simulations. La décomposition s'effectue dans le plan spatial, image par image.

Idéalement, une décomposition multirésolution doit posséder les caractéristiques suivantes:

- Elle n'introduit pas de distorsions visibles, même aux frontières de l'image.

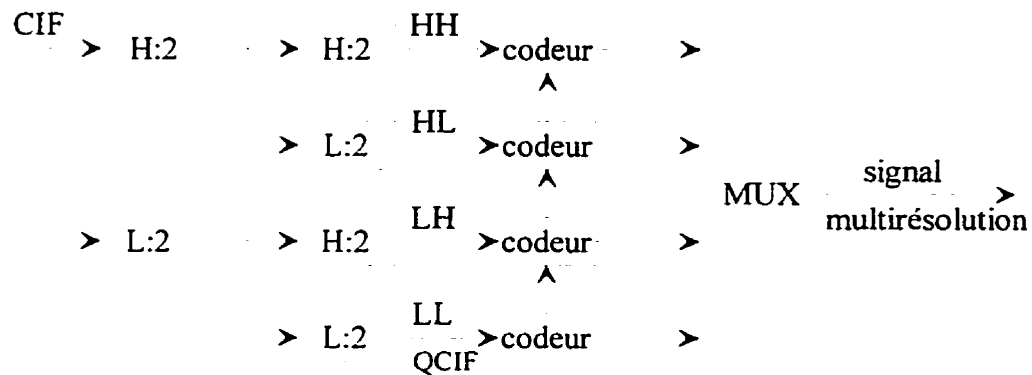
On parle alors de reconstruction parfaite ou quasi-parfaite.

² Les dimensions du format CIF sont de 288 lignes par 352 colonnes pour la luminance et de 144 lignes par 176 colonnes pour chacune des deux composantes de chrominance, le tout à 30 images/sec.

- Elle n'augmente pas le nombre de pixels nécessaires à la représentation du signal.
- Elle permet l'utilisation directe de la bande de basses fréquences comme approximation de la séquence initiale à plus faible résolution. Ainsi, cette bande ne doit pas contenir de déphasage, d'où l'utilisation d'un filtre à phase nulle lors de la décomposition. Ce filtre doit donc être symétrique, de longueur impaire et introduire un minimum de recouvrement spectral lors du sous-échantillonnage.
- Elle n'engendre pas de hautes fréquences artificielles lors du traitement des conditions aux frontières (continuité du signal). Cela facilite la compression des bandes de hautes fréquences.
- Elle permet l'obtention de la séquence à une résolution donnée par l'utilisation d'un sous-ensemble des bandes de fréquences disponibles. Le passage vers une plus haute résolution ne génère aucune ambiguïté quant à la bande à ajouter.
- La complexité du système doit être la plus faible possible. Il faut donc utiliser les mêmes filtres pour l'ensemble des pixels, même aux frontières, et minimiser le nombre de coefficients indépendants de leur réponse à l'impulsion.

1.5.1 Système pour réseau rectangulaire

Ce premier système se sert de la propriété de séparabilité du réseau d'échantillonnage rectangulaire, permettant ainsi l'utilisation de filtres unidimensionnels. Le banc de filtres à la base de la décomposition est illustré à la figure 1.4. Ce banc est utilisé en parallèle pour chacune des trois composantes de couleur.



Lignes Colonnes

Figure 1.4: Système d'encodage rectangulaire

Chacune des lignes est d'abord décomposée en un signal de hautes fréquences et un signal de basses fréquences, tous deux sous-échantillonnés par un facteur deux. Un traitement semblable est alors appliqué sur les colonnes. Il en résulte une division en quatre bandes de fréquences (LL, LH, HL et HH), tel que représenté à la figure 1.5. On remarque que la bande de basses fréquences est en format QCIF (*Quarter Common Intermediate Format*, 144 lignes par 176 colonnes), utilisé en vidéophonie.

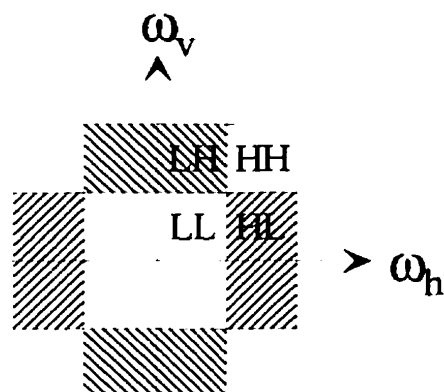


Figure 1.5: Bandes de fréquences pour le réseau rectangulaire

Des codeurs tenant compte des propriétés spécifiques de chacune des bandes peuvent alors servir à compresser les signaux résultants. Ceux-ci seraient combinés pour former un signal de sortie multirésolution. L'information provenant de la bande de basses fréquences pourrait également être utilisée lors de l'encodage des bandes supérieures afin d'utiliser au maximum la redondance présente entre les canaux, particulièrement au niveau du mouvement. L'étude se limite toutefois à la décomposition multirésolution, c'est-à-dire à la section de décomposition en bandes de fréquences. Mais certaines simulations utilisant des codeurs normalisés, comme MPEG-2 et H.261, seront effectuées au chapitre 5.

1.5.2 Système pour treillis en quinconce

Le système précédent ne tient pas compte des caractéristiques des images formant la séquence et des propriétés du système visuel humain. De plus, chaque étage bidimensionnel de décomposition amène la création de quatre bandes de fréquences. En pratique, il serait préférable de n'avoir que deux bandes, car l'ajout d'une bande de haute

résolution à une bande de basse résolution n'entraînerait aucune ambiguïté quant à l'ordre dans lequel devrait s'effectuer la combinaison des bandes. Comme nous le verrons au chapitre 4, la décomposition sur un treillis en quinconce satisfait ces deux exigences. Le système en quinconce considéré se retrouve à la figure 1.6.

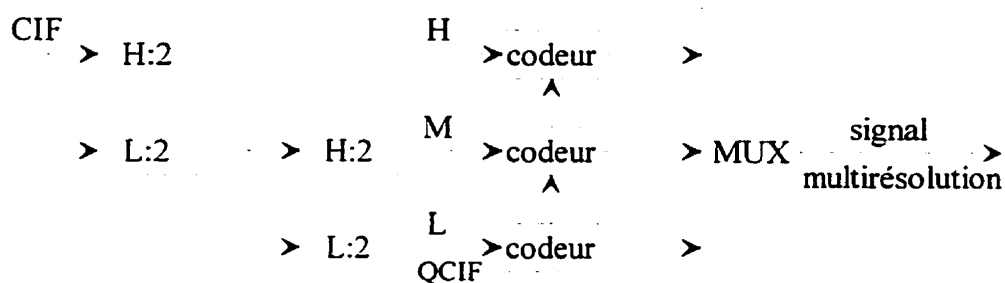


Figure 1.6: Système d'encodage en quinconce

Cette figure montre que la décomposition est effectuée sur deux étages, en trois bandes de fréquences (L, M et H), illustrées à la figure 1.7. Les filtres utilisés dans ce système sont bidimensionnels et non-séparables. Tout comme pour le système rectangulaire, la bande de basses fréquences est ici aussi en format QCIF.

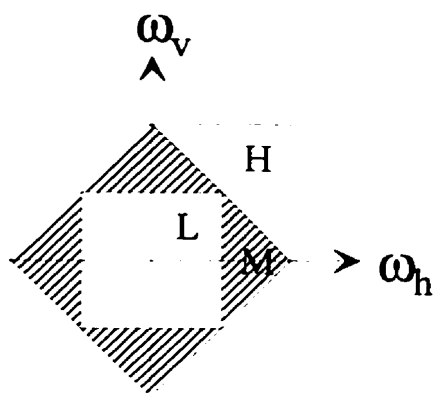


Figure 1.7: Bandes de fréquences pour le treillis en quinconce

La suite du travail s'intéressera principalement à la conception de bancs de filtres unidimensionnels pour le réseau rectangulaire (chapitre 3), et bidimensionnels pour le treillis en quinconce (chapitre 4). Auparavant, la théorie de l'échantillonnage multidimensionnel est abordée.

Chapitre 2: Échantillonnage multidimensionnel

Le chapitre précédent faisait un tour d'horizon du domaine de la compression vidéo. Il est maintenant possible de se concentrer sur le problème d'échantillonnage du signal. La théorie de l'échantillonnage est revue, en développant une notation matricielle adaptée au cas multidimensionnel. Le réseau rectangulaire, utilisé en pratique, est analysé et comparé au treillis en quinconce. Un survol des formats d'échantillonnage pour les séquences vidéo en couleur est alors présenté. Finalement, le traitement multi-débit des signaux est abordé, regroupant tous les outils nécessaires à l'analyse des bancs de filtres présentés aux chapitres subséquents.

2.1 Réseau d'échantillonnage

Soit un signal analogique unidimensionnel $s_a(t)$ échantillonné³ selon une période T . La fréquence d'échantillonnage correspond à l'inverse de la période et elle est donnée par

$$f_s = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

Le signal numérique est alors

$$s[n] = s_a(nT) \quad (2.2)$$

où n est un entier qui doit être positif pour un signal causal. En utilisant la transformée de Fourier⁴, on peut montrer que le spectre du signal numérique donné par (2.2) est

³ On considère ici l'échantillonnage instantané. En pratique, l'échantillonnage naturel introduit une distorsion de type $\sin(x)/x$ sur l'enveloppe du spectre fréquentiel. Cette distorsion doit être compensée par l'utilisation d'un filtre approprié.

⁴ La transformée de Fourier du signal $s[n]$, notée $S(\omega)$, est donnée par $S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j\omega n}$.

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) indique que le spectre du signal échantillonné est la superposition d'un nombre infini de translations du spectre du signal analogique. Ces translations sont situées à des multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage donnée par (2.1). Par conséquent, *il faut que la fréquence d'échantillonnage soit supérieure au double de la fréquence maximale du signal analogique pour empêcher le recouvrement spectral*. Ceci constitue l'énoncé du **théorème de Nyquist**. Il est alors théoriquement possible, en utilisant un filtre approprié, de récupérer le signal analogique à partir du signal numérique.

Le résultat précédent se généralise pour un signal multidimensionnel lorsqu'on utilise une notation matricielle, comme l'expliquent Mersereau et Speake (1983). Soit un signal $s_a(t)$ de dimension N . Il est possible de définir un réseau d'échantillonnage pour ce signal en prenant toutes les combinaisons linéaires entières d'un ensemble de N vecteurs de base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$ linéairement indépendants. Les vecteurs de base sont des vecteurs-colonne regroupés pour former la **matrice d'échantillonnage** \mathbf{V} définie par

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_N] \quad (2.4)$$

En utilisant cette définition, (2.2) devient

$$s[\mathbf{n}] = s_a(\mathbf{V}\mathbf{n}) \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^N \quad (2.5)$$

qui correspond à un signal multidimensionnel numérique. La généralisation de (2.3) pour le cas multidimensionnel⁵ provient de Peterson et Middleton (1962),

$$S(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{V}\|} \sum_{\mathbf{k} \in R^N} S_a(\omega - \mathbf{U}\mathbf{k}) \quad (2.6)$$

$$\text{où } \mathbf{U}^T \mathbf{V} = 2\pi \mathbf{I} \quad (2.7)$$

La matrice \mathbf{U} est appelée **matrice de recouvrement** car elle indique la position des translations du spectre du signal analogique dans l'espace fréquentiel à N dimensions. Par conséquent, il suffit que le spectre du signal analogique soit limité à une région de l'espace telle qu'il ne chevauche pas ses translations pour pouvoir le récupérer à partir du spectre de son équivalent numérique.

2.1.1 Réseau rectangulaire

Le réseau rectangulaire est sans contredit le type d'échantillonnage le plus utilisé pour les images. Il est défini par une période T_1 selon les lignes et T_2 selon les colonnes. Sa matrice d'échantillonnage est donnée par

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La figure 2.1 montre la position des échantillons dans le plan spatial, de même que les périodes d'échantillonnage selon chacun des axes. Puisque les vecteurs formant la base sont orthogonaux et parallèles au système d'axes, les opérations effectuées avec la matrice \mathbf{V}_r sont séparables. C'est-à-dire qu'il est possible d'effectuer l'opération unidimensionnelle sur les lignes, suivie de la même opération sur les colonnes, plutôt que d'avoir à effectuer

⁵ Où $\|\mathbf{V}\|$ dénote la valeur absolue du déterminant de la matrice \mathbf{V} .

directement le calcul en deux dimensions. Cela peut entraîner des simplifications importantes lors des calculs. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir séparabilité est que la matrice d'échantillonnage soit diagonale.

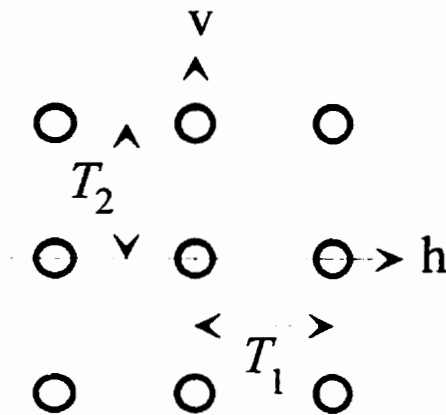


Figure 2.1: Réseau rectangulaire

Il est possible d'obtenir la position des translations de spectres en utilisant (2.6). Appliquant l'équation (2.7) sur la matrice d'échantillonnage, on obtient la matrice de recouvrement rectangulaire donnée par

$$\mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T_2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Utilisant cette dernière matrice, il ressort que les spectres sont positionnés tel qu'illustré à la figure 2.2. La région hachurée, correspondant au spectre de basses fréquences, s'appelle cellule de Voronoi. Le spectre du signal analogique est généralement limité à cette région pour empêcher le recouvrement spectral lors de l'échantillonnage.

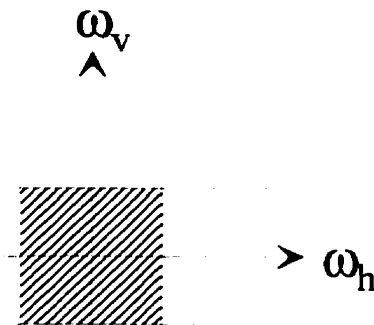


Figure 2.2: Position des spectres du réseau rectangulaire

2.1.2 Treillis en quinconce

Bien que le réseau rectangulaire soit utilisé en pratique, il ne tient pas compte des caractéristiques présentes dans les séquences d'images et il n'exploite pas les propriétés du système visuel développées au chapitre précédent. Tentons d'obtenir un réseau d'échantillonnage mieux adapté à ces caractéristiques. Utilisant la propriété 1 du SVH pour faire l'approximation que l'oeil est un filtre passe-bas idéal sans orientation préférentielle, il ressort que la région correspondante du plan fréquentiel est un cercle, comme le montre la figure 2.3. Mentionnons que pour les images naturelles (ce qui exclut les images de synthèse générées par ordinateur), une grande proportion de l'information est contenue dans les basses fréquences, ce qui est en accord avec le modèle précédent. Cette figure illustre clairement que l'échantillonnage rectangulaire contient plus d'information qu'il n'en faut pour représenter adéquatement le signal passe-bas.

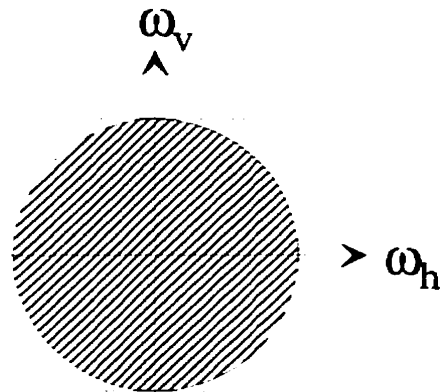


Figure 2.3: Spectre du signal passe-bas

La propriété 4 du SVH indique que la sensibilité de l'oeil atteint un minimum de -3 dB à 45° . Il serait donc avantageux de conserver moins d'information en hautes fréquences selon les diagonales. En première approximation, on peut linéariser les arcs de cercle dans chacun des quatre quadrants pour obtenir le résultat présenté à la figure 2.4.

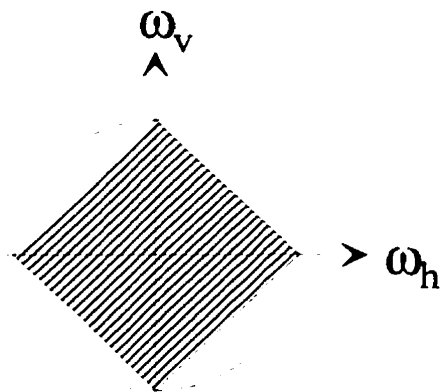


Figure 2.4: Approximation du spectre du signal passe-bas

Il reste à montrer que le spectre ombragé de cette figure correspond à un réseau d'échantillonnage en quinconce. Passant dans le domaine numérique, il y aura répétition du spectre du signal analogique selon la matrice de recouvrement. Puisque l'ensemble du plan fréquentiel doit être couvert sans chevauchement, les translations de spectres doivent être situées de la façon présentée à la figure 2.5.

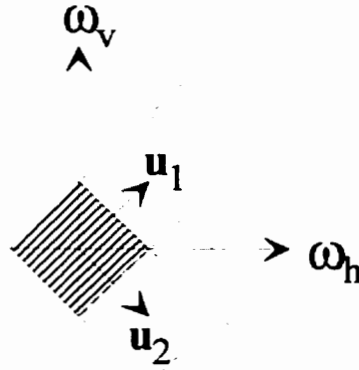


Figure 2.5: Répétitions du spectre en quinconce

On voit sur la figure que les translations de spectres sont positionnées à toutes les combinaisons linéaires entières des vecteurs de base u_1 et u_2 . La matrice de recouvrement normalisée U_q est donnée par

$$U_q = \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ \pi & -\pi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

L'équation (2.7) permet de trouver la matrice d'échantillonnage normalisée V_q .

$$V_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ces dernières matrices sont normalisées par rapport à la période T . La matrice d'échantillonnage de ce réseau n'est pas diagonale. Par conséquent, les opérations doivent être effectuées directement en deux dimensions, sans possibilité de factorisation selon chacun des axes. Le treillis en quinconce est représenté à la figure 2.6. Cette dernière montre qu'il est possible d'obtenir un treillis en quinconce à partir d'un réseau rectangulaire où $T_1=T_2=T$. Pour cela, il suffit de ne conserver que les échantillons pairs sur les lignes paires, et les échantillons impairs sur les lignes impaires. Ce faisant, la quantité d'information se trouve diminuée par deux. Il faut toutefois s'assurer de respecter le théorème de Nyquist.

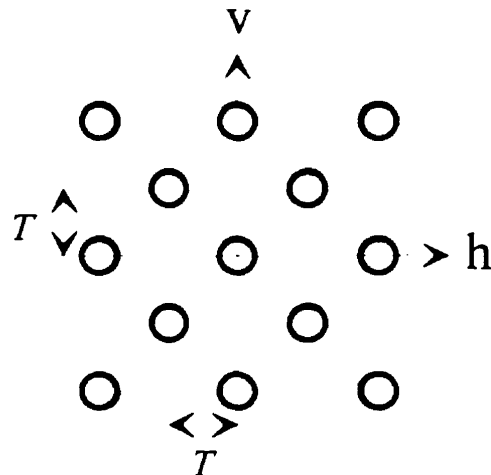


Figure 2.6: Treillis en quinconce

2.2 Format de couleur

Il est possible de tenir compte des propriétés du système visuel humain au niveau du choix des composantes et de l'échantillonnage de la couleur. La rétine de l'oeil humain contient trois types de récepteur de couleur, appelés cônes. Chacun d'eux atteint un sommet de sensibilité pour une longueur d'onde donnée. Le premier sommet est situé aux environs de 445 nm (bleu), le second vers 535 nm (vert) et le dernier près de 570 nm (rouge). Chacun des récepteurs intègre l'énergie de la lumière incidente proportionnellement à sa sensibilité à la longueur d'onde. Ce phénomène est à la base de la théorie trichrome de la vision où la couleur peut être représentée par seulement trois nombres, un pour chacun des trois récepteurs mentionnés précédemment. Ce format de couleur est appelé "rouge-vert-bleu" ou RGB (de l'anglais *red-green-blue*).

2.2.1 Conversion des couleurs en format numérique

Prenant en considération la propriété 3 du SVH, il ressort que la représentation sous forme de luminance/chrominances est plus avantageuse au niveau de la compression de l'image. Définissons le triplet (E'_R, E'_G, E'_B) du format RGB, où $E' \in [0.0; 1.0]$ correspond à la tension normalisée à un volt du signal de couleur, après correction gamma⁶. La recommandation 601-1 du CCIR (*Encoding Parameters of Digital Television for Studios*) donne un ensemble d'équations permettant de passer des tensions (E'_R, E'_G, E'_B) vers une représentation luminance/chrominances (E'_Y, E'_{Cr}, E'_{Cb}) :

⁶ La correction gamma corrige les non-linéarités présentes lors de l'acquisition du signal vidéo par une caméra. Voir Netravali et Haskell (1988).

$$\begin{cases} E'_Y = 0,299 E'_R + 0,587 E'_G + 0,144 E'_B \\ E'_{Cr} = 0,500 E'_R - 0,419 E'_G - 0,081 E'_B \\ E'_{Cb} = -0,169 E'_R - 0,331 E'_G + 0,500 E'_B \end{cases} \quad (2.12)$$

La luminance E'_Y prend seulement des valeurs positives de 0,0 à 1,0, alors que les chrominances ont une représentation avec signe de -0,5 à 0,5. Pour avoir une représentation numérique sur N bits, il suffit de multiplier les valeurs précédentes par 2^{N-2} et d'arrondir à l'entier le plus près⁷. Pour une représentation sur 8 bits, cela mène à

$$\begin{cases} Y \in \{0, 1, \dots, 254\} \\ Cr \in \{-127, -126, \dots, 127\} \\ Cb \in \{-127, -126, \dots, 127\} \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2.2 Réseau d'échantillonnage pour la couleur

Il est possible de diminuer la période d'échantillonnage de la chrominance sans affecter la perception de l'image, comme l'explique la propriété 3 du SVH. Trois types de sous-échantillonnage sont généralement considérés. Ils sont définis par un ensemble de trois nombres qui indiquent la proportion relative des composantes Y , Cr et Cb sur un réseau rectangulaire.

a) Format 4:4:4

Les composantes Y , Cr et Cb sont toutes échantillonnées à la même fréquence. La position des échantillons est illustrée à la figure 2.7. Ce format est obtenu directement lors de la conversion de RGB vers $Y/Cr/Cb$, par l'utilisation de (2.12) et de (2.13).

⁷ Cette méthode utilise la gamme dynamique la plus large possible sans débordement.

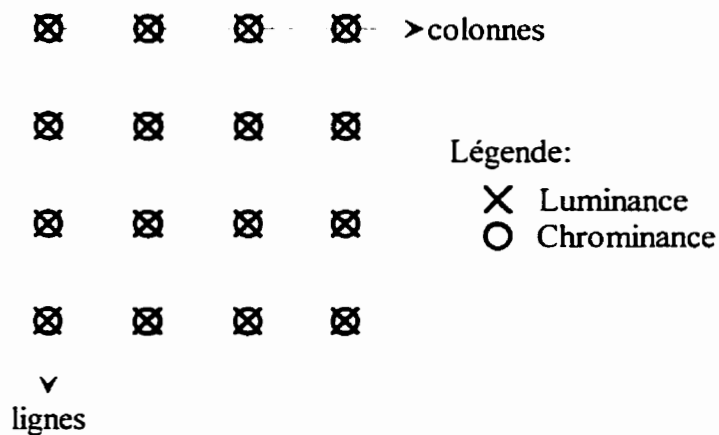


Figure 2.7: Format 4:4:4

b) Format 4:2:2

Les composantes de chrominance sont sous-échantillonnées horizontalement par un facteur deux. La figure 2.8 montre la position des échantillons pour ce format.

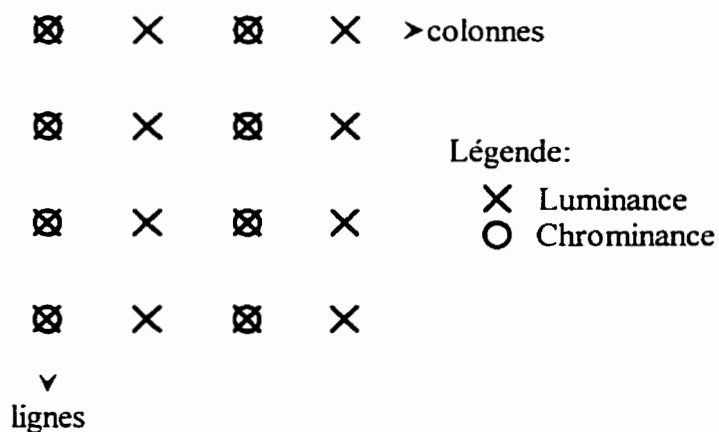


Figure 2.8: Format 4:2:2

c) Format 4:1:1

Les signaux de chrominance sont sous-échantillonnés par deux dans les deux directions. La figure 2.9 indique comment les échantillons doivent être situés les

uns par rapport aux autres. Il faut noter le déphasage d'un demi-pixel pour les chrominances relativement à la luminance. Ce format est utilisé par les séquences vidéo de type CIF et QCIF. Mentionnons que le format 4:2:0, tel que défini par MPEG-2, possède la même densité d'échantillons de chrominance que le format 4:1:1, mais que ceux-ci sont situés sur les mêmes colonnes que les échantillons de luminance. Sur la figure 2.9, cela correspond à décaler vers la gauche les échantillons de chrominance par un demi-pixel.

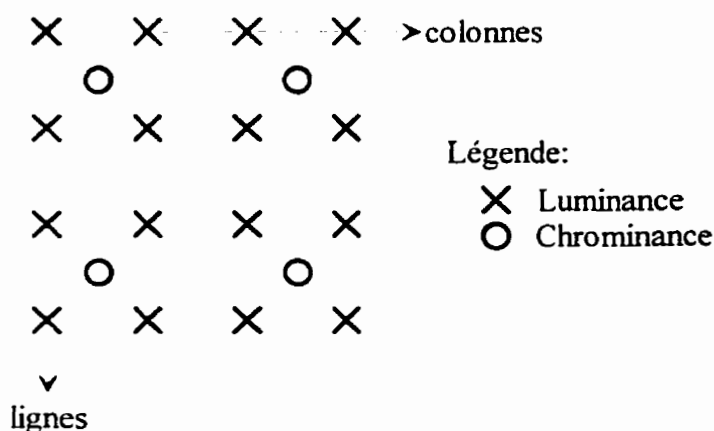


Figure 2.9: Format 4:1:1

2.3 Traitement du signal multi-débit

Pour comprendre la décomposition en bandes de fréquences, il faut d'abord s'intéresser aux processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage du signal multidimensionnel. Ces derniers permettent de changer de réseau d'échantillonnage. Des explications plus détaillées se retrouvent dans l'article de Mersereau et Speake (1983).

2.3.1 Sous-échantillonnage

Le processus de sous-échantillonnage correspond à laisser tomber certains échantillons du signal d'entrée, tel qu'illustré à la figure 2.10. La **matrice de sous-échantillonnage** \mathbf{D} est une matrice non-singulière ayant des coefficients entiers. Le sous-réseau ainsi obtenu possède $\|\mathbf{D}\|$ classes distinctes, où chaque classe est une copie du sous-réseau décalée par un vecteur entier \mathbf{k}_i . L'union des $\|\mathbf{D}\|$ classes donne le réseau d'échantillonnage initial, comme l'explique Dubois (1985).



Figure 2.10: Sous-échantillonneur

Dans le plan spatial, la relation entre le signal d'entrée $x[\mathbf{n}]$ et le signal de sortie $y[\mathbf{n}]$ est

$$y[\mathbf{n}] = x[\mathbf{D}\mathbf{n}] \quad (2.14)$$

En passant au domaine fréquentiel, on obtient

$$Y(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|} \sum_{i=1}^{\|\mathbf{D}\|} X\left(\left[\mathbf{D}^{-1}\right]^T [\omega - 2\pi\mathbf{k}_i]\right) \quad (2.15)$$

2.3.2 Sur-échantillonnage

Le sur-échantillonnage consiste à introduire des zéros dans le signal d'entrée selon

$$y[\mathbf{m}] = \begin{cases} x[\mathbf{n}] & \mathbf{m} = \mathbf{E}\mathbf{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.16)$$

où \mathbf{E} correspond à la **matrice de sur-échantillonnage**, qui est elle aussi non-singulière avec des coefficients entiers. Le système correspondant est représenté à la figure 2.11.



Figure 2.11: Sur-échantillonneur

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, le spectre du signal de sortie devient

$$Y(\omega) = X(\mathbf{E}^T \omega) \quad (2.17)$$

Chapitre 3: Banc de filtres pour le système rectangulaire

Ce chapitre développe un système de décomposition dans un réseau d'échantillonnage rectangulaire pour le plan spatial, tel qu'illustré à la figure 1.4, en utilisant la propriété de séparabilité. Tout d'abord, une classe de filtres unidimensionnels permettant la reconstruction quasi-parfaite du signal est présentée. L'effet des frontières sur le filtrage est alors étudié en détail. Par la suite, deux méthodes de conception de filtres sont abordées: l'échantillonnage en fréquence et le recuit simulé. Chacune d'elles mène à la conception d'un banc de filtres pour effectuer la décomposition multirésolution sur un réseau d'échantillonnage rectangulaire. Finalement, les caractéristiques de chacun des deux bancs ainsi obtenus sont étudiées et comparées.

3.1 Reconstruction parfaite

Le banc de filtres unidimensionnels à deux bandes peut être séparé en deux sections. La première en est une d'analyse qui amène la division du signal en deux bandes ayant chacune une fréquence d'échantillonnage diminuée de moitié relativement au signal d'entrée. La seconde est une section de synthèse qui reconstruit le signal en combinant les bandes de fréquences, comme le montre la figure 3.1.

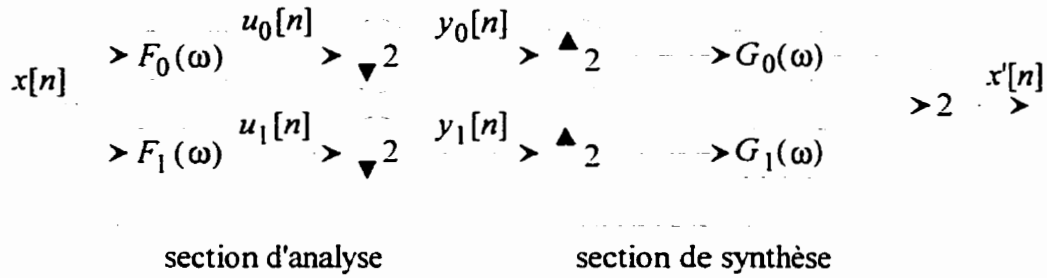


Figure 3.1: Banc de filtres à deux bandes

L'équation du spectre du signal de sortie s'obtient en utilisant les résultats de la section 2.3 sur le traitement de signal multi-débit. Pour la section d'analyse, l'équation (2.15) appliquée sur chacune des deux bandes avec $\mathbf{D} = [2]$ donne

$$Y_i(\omega) = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right) F_i\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) F_i\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \quad i = 0, 1 \quad (3.1)$$

Le premier terme du membre de droite correspond au signal d'entrée à une résolution plus petite, alors que le deuxième terme représente le recouvrement spectral. Le résultat obtenu à la sortie de la section de synthèse par l'utilisation de (2.17) avec $\mathbf{E} = [2]$ devient

$$X'(\omega) = 2Y_0(2\omega)G_0(\omega) + 2Y_1(2\omega)G_1(\omega) \quad (3.2)$$

Remplaçant (3.1) dans (3.2), et regroupant les termes:

$$X'(\omega) = X(\omega)T_1(\omega) + X(\omega + \pi)T_2(\omega) \quad (3.3)$$

$$\text{où } T_1(\omega) = F_0(\omega)G_0(\omega) + F_1(\omega)G_1(\omega) \quad (3.4)$$

$$T_2(\omega) = F_0(\omega + \pi)G_0(\omega) + F_1(\omega + \pi)G_1(\omega) \quad (3.5)$$

Pour obtenir une reconstruction parfaite du signal, il suffit de choisir les filtres $F_0(\omega)$, $F_1(\omega)$, $G_0(\omega)$ et $G_1(\omega)$ de telle sorte que

$$T_1(\omega) = 1 \quad (3.6)$$

$$T_2(\omega) = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) permet d'annuler le recouvrement spectral présent dans (3.3), alors que (3.6) conduit à la reconstruction parfaite du signal d'entrée. Plusieurs possibilités existent afin de respecter ces deux équations (*cf.* Vaidyanathan, 1990). Croisier, Esteban et Galand (1976) ont proposé les filtres-miroir en quadrature qui éliminent le recouvrement donné par (3.5). Mais ces filtres ne permettent qu'une reconstruction quasi-parfaite du signal, car ils se rapprochent de (3.6) par la minimisation d'une fonction d'erreur. Pour maintenir la propriété de reconstruction parfaite, Smith et Barnwell (1986) ont introduit les filtres conjugués en quadrature. Toutefois les filtres-miroir en quadrature et les filtres conjugués en quadrature doivent nécessairement être de longueur paire, comme l'explique Vaidyanathan (1987), ce qui introduit un décalage lors du traitement du plan spatial des séquences vidéo. Puisque le système considéré demande un déphasage nul, il doit utiliser une définition qui permet les filtres de longueur impaire. Simoncelli (1988) a considéré une classe de filtres reliés par:

$$F_0(\omega) = G_0(-\omega) = H(\omega) \quad (3.8)$$

$$F_1(\omega) = G_1(-\omega) = e^{-j\omega} H(-\omega + \pi) \quad (3.9)$$

où $H(\omega)$ est un filtre passe-bas. Cette définition permet d'avoir un filtre $H(\omega)$ à phase nulle. En remplaçant (3.8) et (3.9) dans (3.5),

$$T_2(\omega) = H(\omega + \pi)H(-\omega) + [e^{-j(\omega + \pi)} H(-\omega)] [e^{j\omega} H(\omega + \pi)] = 0$$

Cette dernière équation montre clairement l'élimination du terme correspondant au recouvrement spectral, respectant ainsi (3.7). De plus, effectuant les mêmes substitutions dans (3.4),

$$\begin{aligned} T_1(\omega) &= H(\omega)H(-\omega) + [e^{-j\omega} H(-\omega + \pi)] [e^{j\omega} H(\omega + \pi)] \\ &= H(\omega)H(-\omega) + H(-\omega + \pi)H(\omega + \pi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puisque la réponse à l'impulsion du filtre est réelle:

$$H(\omega) = [H(-\omega)]^* \quad (3.11)$$

Où "*" correspond à la valeur complexe conjuguée du terme entre crochet. L'équation (3.10) se simplifie pour donner

$$T_1(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \quad (3.12)$$

Cette dernière correspond à la fonction de transfert totale du système de décomposition. Et puisque $T_1(\omega) \in \mathbb{R}$, le système pris dans son ensemble n'amène pas de déphasage dans l'image. Il suffit alors de choisir $H(\omega)$ comme un filtre à phase nulle pour que la bande de basses fréquences soit elle aussi exempte de déphasage et respecte les exigences énoncées à la section 1.5. La condition de reconstruction parfaite provenant de (3.6) peut s'écrire comme

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.13)$$

Lors de la conception des filtres, il suffit de minimiser une fonction d'erreur dérivée de (3.13):

$$E = \max_{\omega} \left\{ |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 - 1 \right\} \quad (3.14)$$

On obtient alors reconstruction quasi-parfaite du signal d'entrée. Lors de la minimisation de (3.14), une importance plus grande peut être accordée aux basses fréquences en utilisant une fonction de poids. Cette fonction est habituellement basée sur les statistiques des images formant la séquence et sur les propriétés de l'oeil. En général, une exponentielle décroissante est un choix approprié.

Dans le domaine temporel, les équations (3.8) et (3.9) deviennent

$$f_0[n] = h[n] \quad (3.15)$$

$$g_0[n] = h[-n] \quad (3.16)$$

$$f_1[n] = (-1)^{n-1} h[1-n] \quad (3.17)$$

$$g_1[n] = (-1)^{n+1} h[1+n] \quad (3.18)$$

3.2 Conditions aux frontières

Bien que les équations développées à la section précédente permettent la reconstruction quasi-parfaite du signal, un problème survient pour la décomposition de séquences d'images. En effet, ces équations supposent un signal de longueur infinie, alors qu'une image possède des dimensions finies. Karlsson et Vetterli (1989) ont étudié différents types de conditions aux frontières afin d'optimiser le codage. Leurs travaux montrent que seule l'extension circulaire, illustrée à la figure 3.2, permet d'obtenir une reconstruction quasi-parfaite pour les filtres-miroir en quadrature. Malheureusement, cette technique entraîne des discontinuités aux frontières, introduisant ainsi artificiellement des composantes de hautes fréquences qui réduisent le niveau de compression. Ils en viennent à la conclusion que la méthode de répétition du pixel à la frontière est une solution intéressante pour minimiser l'effet des conditions aux frontières. Cette dernière impose la continuité du signal, mais ne permet pas une reconstruction quasi-parfaite.

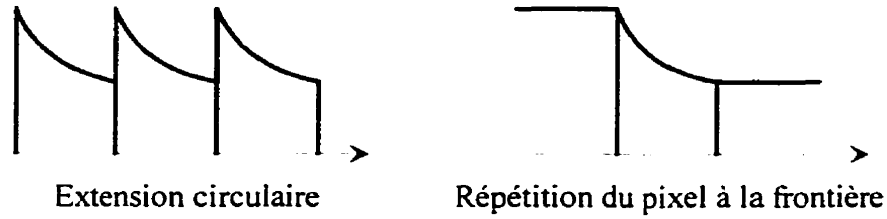


Figure 3.2: Types d'extension pour filtres-miroir en quadrature

Pour éliminer les problèmes aux frontières, il suffit d'utiliser une extension du signal unidimensionnel de longueur finie pour qu'il puisse être considéré de longueur infinie lors du filtrage, et ainsi respecter le développement de la section précédente. La technique proposée dans cette section est basée sur l'hypothèse que le filtre $H(\omega)$ est à phase nulle, c'est-à-dire qu'il est symétrique et de longueur impaire. Soit K le nombre de coefficients indépendants de ce filtre, il s'en suit que

$$h[i] = h[-i] \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \quad (3.19)$$

Le nombre total de coefficients est $2K-1$. Définissons l'**extension symétrique** (cf. Bamberger, Eddins et Nuri, 1994) du signal de longueur finie $x[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} x[-n] & n < 0 \\ x[n] & 0 \leq n < M \\ x[2M-n-2] & n \geq M \end{cases} \quad (3.20)$$

où la longueur du demi-support du filtre est inférieure à la longueur du signal ($K < M$). Puisque le signal sera sous-échantillonné par deux, il doit être de longueur paire. La figure 3.3 montre le signal d'entrée $x[n]$ (avec $M = 6$), où l'extension symétrique (3.20) est appliquée. Ce type d'extension n'engendre pas de discontinuité. Le signal possède deux axes de symétrie indiqués à la figure 3.3.

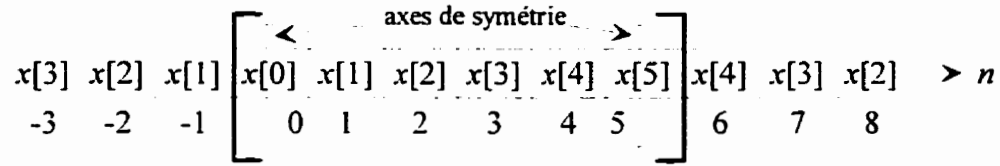


Figure 3.3: Signal d'entrée avec extension symétrique

Sur cette figure, il ressort que tous les échantillons à l'extérieur du support du signal sont associés à un échantillon à l'intérieur du signal. Le signal de longueur finie peut ainsi être considéré de dimension infinie pour le filtrage. Par conséquent, les filtres de la section d'analyse respectent les conditions de la section 3.1 car ils voient une entrée de longueur infinie.

3.2.1 Bande de basses fréquences

Les équations (3.15) et (3.16), combinées à (3.19), montrent que pour la bande de basses fréquences,

$$f_0[n] = g_0[n] = h[n] \quad (3.21)$$

Donc elle ne présente pas de décalage car $h[n]$ est à phase nulle. Le filtrage de la section d'analyse modifie le signal d'entrée pour former $u_0[n]$, tel qu'illustré à la figure 3.1.

Considérant (3.19), l'équation aux différences correspondante est

$$u_0[n] = h[0]x[n] + \sum_{k=1}^{K-1} h[k](x[n-k] + x[n+k]) \quad (3.22)$$

Utilisant (3.20) comme signal d'entrée, nous voulons obtenir une relation pour les échantillons de $u_0[n]$ à l'extérieur du support du signal, à la sortie du filtre d'analyse.

a) Frontière de gauche

Soit l'échantillon $u_0[i]$, où $i < 0$. L'équation (3.22) donne

$$u_0[i] = h[0]x[i] + \sum_{k=1}^{K-1} h[k](x[i-k] + x[i+k]) \quad (3.23)$$

Par la définition de l'extension symétrique à la frontière gauche, donnée par (3.20):

$$\begin{cases} x[i] = x[-i] \\ x[i-k] = x[-i+k] \\ x[i+k] = x[-i-k] \end{cases} \quad (3.24)$$

En substituant ces dernières dans (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} u_0[i] &= h[0]x[-i] + \sum_{k=1}^{K-1} h[k](x[-i+k] + x[-i-k]) \\ u_0[i] &= u_0[-i] \quad \text{avec } i < 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Cette dernière équation montre que le signal $u_0[n]$ possède une extension symétrique à sa frontière gauche.

b) Frontière de droite

Soit l'échantillon $u_0[i]$, avec $i \geq M$. Utilisant la définition de l'extension symétrique pour la bordure de droite provenant de (3.20):

$$\begin{cases} x[i] = x[2M-i-2] \\ x[i-k] = x[2M-i-2+k] \\ x[i+k] = x[2M-i-2-k] \end{cases} \quad (3.26)$$

Remplaçant ces dernières dans (3.23), on trouve

$$\begin{aligned} u_0[i] &= h[0]x[2M-i-2] + \sum_{k=1}^{K-1} h[k](x[2M-i-2+k] + x[2M-i-2-k]) \\ u_0[i] &= u_0[2M-i-2] \quad \text{avec } i \geq M \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donc ce signal est également symétrique à sa frontière de droite.

3.2.2 Bande de hautes fréquences

Dans le cas de la bande de hautes fréquences, les équations (3.17) et (3.18) indiquent la présence d'un décalage lors des opérations de filtrage. Utilisant (3.19), l'équation (3.17) se réécrit comme

$$f_1[n] = (-1)^{n-1} h[1-n] = (-1)^{n-1} h[n-1] = h'[n-1] \quad (3.28)$$

Alors que l'équation (3.18) devient

$$g_1[n] = (-1)^{n+1} h[n+1] = h'[n+1] \quad (3.29)$$

$$\text{où } h'[n] = (-1)^n h[n] \quad (3.30)$$

Les filtres de la bande haute sont donc des versions décalées l'une de l'autre. Pour le filtre d'analyse $f_1[n]$, le décalage du support est d'un échantillon vers la droite. Le signal à sa sortie est donc décalé d'un échantillon vers la gauche. Dans le cas du filtre de synthèse $g_1[n]$, le décalage du signal est d'un échantillon vers la droite. Par conséquent, pour un signal de longueur infinie, on peut filtrer par $h'[n]$ avant d'effectuer le décalage du signal à la sortie. Toutefois, ce raisonnement ne peut s'appliquer pour un signal de longueur finie, car des problèmes surviendraient aux frontières. Il faut donc développer des conditions de symétrie similaires à la bande basse pour pouvoir obtenir une reconstruction quasi-parfaite du signal.

Prenant en considération le décalage du filtre d'analyse donné par (3.28), l'équation aux différences pour la bande de hautes fréquences peut s'écrire comme

$$u_1[n] = h'[0]x[n+1] + \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[n+1-k] + x[n+1+k]) \quad (3.31)$$

a) *Frontière de gauche*

Soit l'échantillon $u_1[i]$, où $i < 0$. L'équation aux différences (3.31) donne

$$u_1[i] = h'[0]x[i+1] + \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[i+1-k] + x[i+1+k]) \quad (3.32)$$

La définition de l'extension symétrique pour le signal $x[n]$ provenant de (3.20) amène

$$\begin{cases} x[i+1] = x[-i-1] \\ x[i+1-k] = x[-i-1+k] \\ x[i+1+k] = x[-i-1-k] \end{cases} \quad (3.33)$$

Remplaçant ces dernières dans (3.32), on obtient

$$\begin{aligned} u_1[i] &= h'[0]x[-i-1] + \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[-i-1+k] + x[-i-1-k]) \\ u_1[i] &= h'[0]x[-(i+2)+1] + \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[-(i+2)+1+k] + x[-(i+2)+1-k]) \\ u_1[i] &= u_1[-(i+2)] \quad \text{où } i < 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

L'équation (3.34) donne la relation de symétrie à appliquer à la frontière gauche du signal passe-haut. Toutefois, un problème survient pour $i = -1$ car de part et d'autre de l'égalité, on obtient le même indice et celui-ci se retrouve à l'extérieur du support du signal: $u_1[-1] = u_1[-1]$.

b) *Frontière de droite*

Un développement semblable est effectué sur (3.32) pour $i \geq M$. Partant de (3.20), on obtient

$$\begin{cases} x[i+1] = x[2M-(i+1)-2] \\ x[i+1-k] = x[2M-(i+1)-2+k] \\ x[i+1+k] = x[2M-(i+1)-2-k] \end{cases} \quad (3.35)$$

Ces équations sont substituées dans (3.32) pour donner

$$\begin{aligned}
 u_1[i] &= h'[0]x[2M - (i+1) - 2] + \\
 &\quad \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[2M - (i+1) - 2 + k] + x[2M - (i+1) - 2 - k]) \\
 u_1[i] &= h'[0]x[2M - (i+2) + 1 - 2] + \\
 &\quad \sum_{k=1}^{K-1} h'[k](x[2M - (i+2) + 1 - 2 + k] + x[2M - (i+2) + 1 - 2 - k]) \\
 u_1[i] &= u_1[2M - (i+2) - 2] \quad \text{où } i \geq M
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Les équations (3.34) et (3.36) donnent les relations de symétrie pour le signal à la sortie du filtre d'analyse de la bande haute.

Partant de la figure 3.3. et prenant en considération les symétries données par (3.34) et (3.36), le signal à la sortie du filtre d'analyse $f_1[n]$ est représenté à la figure 3.6. On remarque que $u_1[3]=u_1[5]$. De plus, la position des axes de symétrie est différente de celle du signal original.

$$\begin{array}{cccccccc}
 u_1[1] & u_1[0] & u_1[-1] & \left[\begin{array}{cccccc} u_1[0] & u_1[1] & u_1[2] & u_1[3] & u_1[4] & u_1[5] \end{array} \right] & u_1[2] & u_1[1] & u_1[0] & > n \\
 -3 & -2 & -1 & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right] & 6 & 7 & 8
 \end{array}$$

Figure 3.6: Signal haute fréquence après le filtre d'analyse

Il manque la valeur $u_1[-1]$ qui est à l'extérieur du support du signal. Considérant l'introduction de zéros par les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, le signal avant le filtre de synthèse $g_1[n]$ est représenté à la figure 3.7. Celui-ci est symétrique, et encore une fois, toute l'information à l'intérieur du signal

permet d'obtenir les échantillons manquants à l'extérieur. On peut alors voir ce signal comme étant de longueur infinie.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & u_1[0] & 0 & & u_1[0] & 0 & u_1[2] & 0 & u_1[4] & 0 & & u_1[2] & 0 & u_1[0] & > n \\ -3 & -2 & -1 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Figure 3.7: Signal haute fréquence avant le filtre de synthèse

En conclusion, puisque les signaux des branches de basses et de hautes fréquences peuvent être considérés de longueur infinie à l'entrée de tous les filtres du système, la reconstruction quasi-parfaite telle que définie à la section 3.1 s'applique pour l'intégralité du signal (même aux frontières). Cette propriété est extrêmement intéressante lorsque la décomposition s'effectue en cascade sur plusieurs étages.

3.2.3 Simplification pour la bande de hautes fréquences

La figure 3.7 montre que les axes de symétrie pour le signal passe-haut sont décalés d'un échantillon vers la gauche par le filtre d'analyse $f_1[n]$. Il est alors impossible de traiter le signal résultant à l'aide d'une formule semblable à (3.20). Une simplification intéressante se produit lorsqu'on considère le décalage vers la droite du signal introduit par le filtre de synthèse $g_1[n]$. Ce dernier annule l'effet du décalage vers la gauche du filtre d'analyse lorsque le signal peut être considéré de dimension infinie. Seule une modification mineure dans les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage permet alors d'éliminer complètement les décalages dans la bande de hautes fréquences. Partant de la figure 3.6, si le décalage d'un échantillon vers la gauche est éliminé dans la section d'analyse, on obtient le signal de la figure 3.8.

signaux, on verrait alors un décalage vers la gauche d'un pixel pour la bande de hautes fréquences.

3.3 Conception des filtres unidimensionnels

La conception du banc de filtres unidimensionnels à reconstruction quasi-parfaite constitue un problème fondamental pour le système de décomposition. En utilisant la théorie développée précédemment, il suffit de concevoir un filtre $h[n]$ passe-bas, symétrique, de longueur impaire et ayant une réponse à l'impulsion finie et d'utiliser les équations (3.21) et (3.37) pour obtenir les réponses à l'impulsion des filtres formant le banc. Ce filtre doit également minimiser la fonction d'erreur donnée par (3.14). Cette section présente deux méthodes de conception: l'échantillonnage en fréquence et le recuit simulé. Chacune d'elle sert à la conception d'un filtre possédant 31 coefficients.

3.3.1 Méthode d'échantillonnage en fréquence

La méthode d'échantillonnage en fréquence (*cf.* Rabiner, Gold et McGonegal, 1970) consiste à positionner les échantillons dans le plan fréquentiel pour ensuite utiliser une transformée inverse de Fourier afin d'obtenir la réponse à l'impulsion correspondante. Il est possible de laisser varier certains échantillons dans la zone de transition afin de minimiser une fonction d'erreur. Dans le cas présent, cette fonction est la somme pondérée de trois termes: déviation du gain unitaire dans la bande passante, déviation de l'atténuation infinie dans la bande d'arrêt et erreur de reconstruction donnée par (3.14). La méthode d'échantillonnage en fréquence prend implicitement en considération l'effet d'une fonction de poids pour augmenter l'importance des basses fréquences relativement

aux hautes fréquences. Ceci provient du phénomène de Gibbs qui apparaît à l'approche de la transition.

Le calcul de l'erreur totale s'effectue comme suit:

- Générer la réponse en fréquence en utilisant un nombre d'échantillons égal au nombre de coefficients de la réponse à l'impulsion. Certains de ces échantillons se trouvent dans la bande de transition et sont libres de varier.
- Calculer la réponse à l'impulsion du filtre de l'étape précédente en utilisant la transformée inverse de Fourier.
- Ajouter des zéros à la fin de la réponse à l'impulsion pour augmenter la résolution dans le plan fréquentiel.
- Calculer la nouvelle réponse en fréquence en utilisant la transformée rapide de Fourier.
- Calculer l'erreur dans la bande passante (BP) en trouvant la plus grande déviation du gain unitaire:

$$E_{BP} = \max_{\omega \in BP} \|H(\omega) - 1\| \quad (3.38)$$

- Calculer l'erreur dans la bande d'arrêt (BA) en trouvant la plus grande déviation de l'atténuation infinie:

$$E_{BA} = \max_{\omega \in BA} |H(\omega)| \quad (3.39)$$

- Calculer l'erreur de reconstruction maximale donnée par (3.14) pour l'ensemble du plan fréquentiel:

$$E_r = \max_{\omega} \left\{ |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 - 1 \right\} \quad (3.40)$$

- Effectuer la somme pondérée des termes d'erreurs (3.38), (3.39) et (3.40). Ceci constitue l'erreur totale:

$$E_{\text{tot}} = w_{\text{BP}} E_{\text{BP}} + w_{\text{BA}} E_{\text{BA}} + w_r E_r \quad (3.41)$$

Connaissant l'erreur totale, il est possible d'utiliser un algorithme de minimisation pour converger vers un minimum de la fonction d'erreur en laissant varier la valeur des échantillons dans la bande de transition. La méthode de "descente du simplex" (*Downhill Simplex Method*) a été utilisée pour effectuer cette minimisation, car elle ne nécessite que l'évaluation de la fonction d'erreur donnée par (3.41). Cette méthode est expliquée par Press *et al.* (1992).

Nous avons utilisé la méthode d'échantillonnage en fréquence pour concevoir un filtre possédant 31 coefficients (ayant une représentation en nombres à virgule flottante) données à l'annexe B. La réponse en fréquence de ce filtre, appelé **E31**, se retrouve à la figure 3.10, alors que la fonction de transfert totale du banc de filtres, provenant de (3.12), est illustrée à la figure 3.11. La réponse à l'échelon donne une valeur maximale de 1,0753 et un minimum de -0,0753. Sur le graphique de la fonction de transfert totale du banc, on peut voir que l'erreur de reconstruction maximale est de 0,662%. Cette erreur est plus faible pour les basses fréquences, prenant ainsi en considération les propriétés des images.

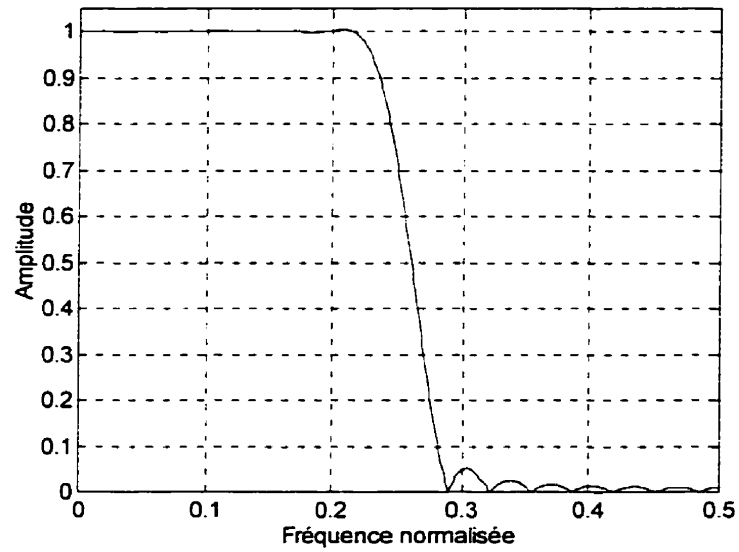


Figure 3.10: Réponse en fréquence de **E31**

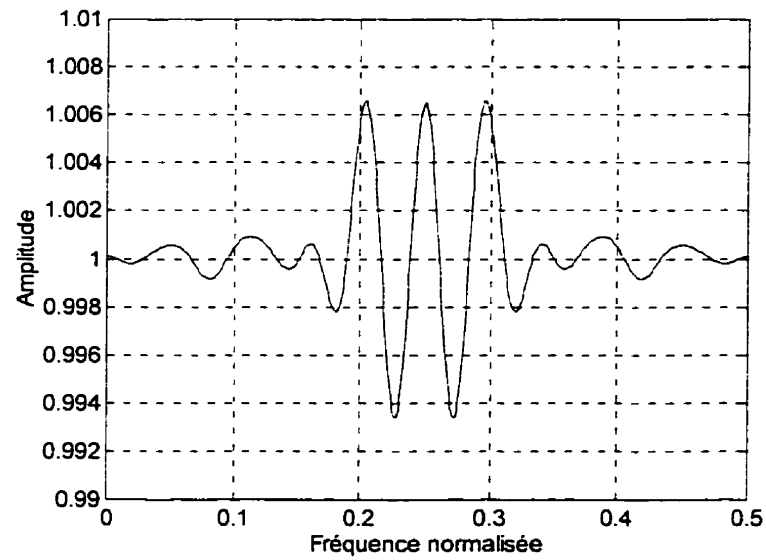


Figure 3.11: Fonction de transfert totale du banc pour **E31**

3.3.2 Méthode du recuit simulé

La méthode du recuit simulé est basée sur la notion d'énergie minimum que l'on retrouve en thermodynamique. C'est une méthode stochastique qui est en mesure de sortir d'un minimum local pour tenter de trouver le minimum global de la fonction d'erreur donnée par (3.41). Toutefois, la convergence vers le minimum absolu n'est pas assurée. Son principal désavantage provient du temps de convergence qui est généralement deux ordres de grandeur plus grand que celui des méthodes déterministes. Une description des principes de cette technique se retrouve dans Press *et al.* (1992).

Le programme conçu par Radecki, Konrad et Dubois (1992) est à la base de la conception du filtre **R31**, dont la fonction de transfert est représentée à la figure 3.12, par la méthode du recuit simulé. Toutefois, il a fallu ajouter l'erreur de reconstruction (3.40) dans l'algorithme de minimisation. Pour tenir compte de l'importance relative des fréquences, la fonction de poids suivante a été utilisée sur l'erreur de reconstruction:

$$w_r(\omega) = Ae^{-b\omega} \quad (3.42)$$

Le paramètre A indique l'amplitude DC, alors que le paramètre b modifie le taux de décroissance. Les coefficients de la réponse à l'impulsion, donnés à l'annexe B, ont une représentation sur 16 bits. Le banc de filtres correspondant a une fonction de transfert totale illustrée à la figure 3.13. La réponse à l'échelon présente une valeur maximale de 1,0770 et une valeur minimale de -0,0763. L'erreur de reconstruction maximale pour ce banc est de 0,582%, ce qui est meilleur que celle obtenue par échantillonnage en fréquence. Toutefois, la largeur de la bande de transition est plus importante pour **R31**, ce

qui augmentera le recouvrement spectral dans chacune des bandes de fréquences prises séparément.

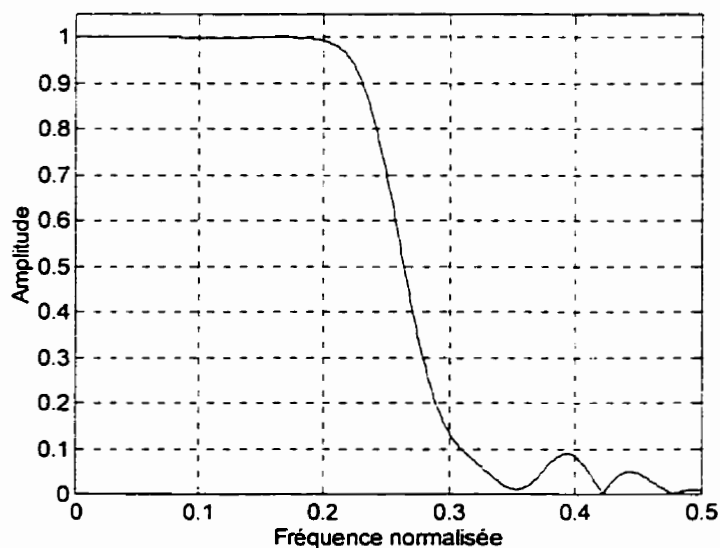


Figure 3.12: Réponse en fréquence de R31

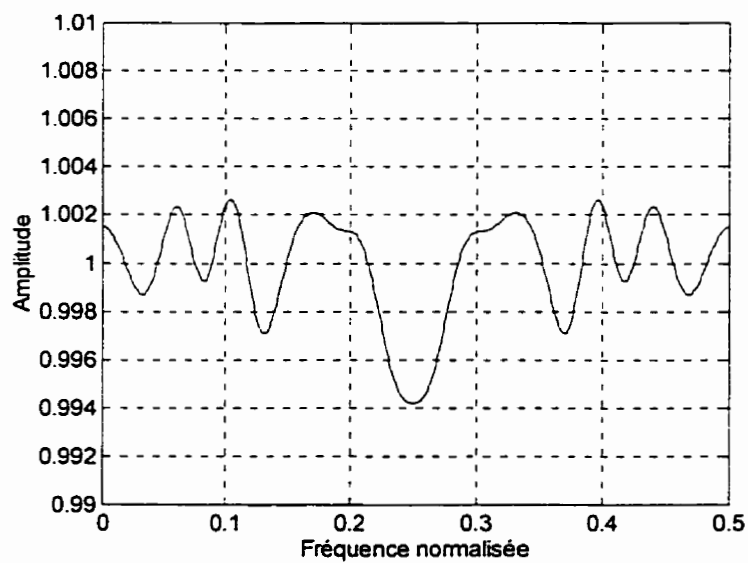


Figure 3.13: Fonction de transfert totale du banc pour R31

$$T_{R31} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0 & 0,001 & 0 & -0,001 & 0 & 0,001 & 0 & -0,002 & \dots \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0,999 & 0 & 0,001 & 0 & -0,001 & 0 & 0,001 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0,001 & 0 & 0,999 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,000 & 0 & 0,001 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -0,001 & 0 & 0,001 & 0 & 1,000 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 & 1,000 & 0 & \dots \\ -0,001 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,000 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

(3.45)

3.5 Complexité du système rectangulaire

La complexité de calculs s'évaluera en considérant le système rectangulaire de la figure 1.4 et l'équation aux différences (3.22). Soit un filtre $h[n]$ possédant K coefficients indépendants, et une séquence vidéo dont les images ont M colonnes sur N lignes (M et N pairs) et ayant un débit de R images par seconde.

a) *Calcul du nombre de pixels à traiter pour la décomposition*

- Pour les modules de filtrage du premier étage servant à traiter les lignes, le nombre total de pixels par seconde est " NMR ", mais il n'est pas nécessaire de filtrer les pixels éliminés par le sous-échantillonneur. Par conséquent

$$\text{nombre pixels/sec.} = \frac{1}{2} NMR \quad (3.46)$$

- Pour ceux du second étage, le nombre de colonnes se trouve diminué par deux à la suite du sous-échantillonnage du premier étage. Donc

$$\text{nombre de pixels/sec.} = \frac{1}{4} NMR \quad (3.47)$$

- Puisqu'il y a deux filtres au premier étage et quatre filtres au second:

$$\text{nombre total de pixels/sec.} = 2NMR \quad (3.48)$$

b) *Calcul du nombre d'opérations par pixel pour la décomposition*

- **Nombre de multiplications:** Pour chaque pixel, il y a autant de multiplications qu'il y a de coefficients indépendants pour le filtre:

$$\text{nombre de multiplications} = K \quad (3.49)$$

- **Nombre d'additions:** Dans l'équation aux différences donnée par (3.22), il y a $2K-2$ additions.

$$\text{nombre d'additions} = 2K-2 \quad (3.50)$$

c) *Calcul du nombre de pixels à traiter pour la reconstruction*

- Contrairement à la section de décomposition, il faut filtrer tous les pixels lors de la reconstruction, ce qui double le nombre de pixels relativement à la section de décomposition:

$$\text{nombre total de pixels/sec.} = 4NMR \quad (3.51)$$

- Il faut tenir compte du sommateur qui combine les deux bandes après les filtres de synthèse. Le nombre d'additions y est égal au nombre de pixels à la sortie des filtres.

d) *Calcul du nombre d'opérations par pixel pour la reconstruction*

Une simplification se produit grâce aux nombreux zéros ajoutés lors du sur-échantillonnage. Deux cas peuvent se présenter: pour la moitié des pixels, le coefficient central du filtre est sur un zéro introduit par le sur-échantillonnage, alors que pour l'autre moitié, il est sur un pixel de l'image.

- Si le coefficient central est sur un zéro introduit par le sur-échantillonnage:

$$\text{nombre de multiplications} = \left\lfloor \frac{2K-3}{4} \right\rfloor + 1 \quad (3.52)$$

$$\text{nombre d'additions} = 2 \left\lfloor \frac{2K-3}{4} \right\rfloor + 1 \quad (3.53)$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénote le plus grand entier inférieur ou égal à x .

- Si le coefficient central est sur un pixel de l'image:

$$\text{nombre de multiplications} = \left\lfloor \frac{2K-1}{4} \right\rfloor + 1 \quad (3.54)$$

$$\text{nombre d'additions} = 2 \left\lfloor \frac{2K-1}{4} \right\rfloor \quad (3.55)$$

Pour une séquence en format CIF 4:1:1 comme celle considérée: $M=352$, $N=288$ et $R=30$ pour la luminance. De plus, prenant $K=16$ (filtre ayant 31 coefficients), nous obtenons les résultats du tableau 3.1. Ils incluent les opérations effectuées pour les composantes de chrominance. Il ressort que la complexité de la décomposition est la même que celle de la reconstruction, comme le montrent les équations (3.46) à (3.55).

Tableau 3.1: Complexité de calculs du système rectangulaire

Section	Nombre de multiplications/sec. (en millions)	Nombre d'additions/sec. (en millions)
Décomposition	146,0	273,7
Reconstruction	146,0	273,7

Chapitre 4: Banc de filtres pour le système en quinconce

Le chapitre précédent a décrit la conception d'un banc de filtres unidimensionnels pour la décomposition d'images en utilisant la propriété de séparabilité. Toutefois, ce réseau d'échantillonnage ne tient pas compte des caractéristiques des images naturelles et des propriétés du système visuel humain. Chaque étage bidimensionnel du système de décomposition rectangulaire engendre quatre bandes de fréquences. Ce chapitre développe un système de décomposition sur un treillis en quinconce. Les matrices de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage utilisées sont

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \quad (4.1)$$

Puisque la valeur absolue du déterminant de \mathbf{D} est deux, l'image est divisée en deux bandes de fréquences à chaque étage. Le système considéré est représenté à la figure 1.6. L'utilisation de la matrice de sous-échantillonnage donnée par (4.1) fait passer un réseau d'échantillonnage rectangulaire vers un treillis en quinconce et vice-versa.

4.1 Reconstruction parfaite

La propriété de reconstruction parfaite pour le réseau d'échantillonnage bidimensionnel non-séparable en quinconce s'obtient d'une façon similaire au cas unidimensionnel. Considérons le schéma de la figure 3.1, où les variables scalaires sont maintenant des vecteurs. Utilisant l'équation (2.15), les signaux à la sortie de la section d'analyse ont des spectres correspondant à

$$Y_i(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 X\left((\mathbf{D}^{-1})^T (\omega - 2\pi \mathbf{k}_j)\right) F_i\left((\mathbf{D}^{-1})^T (\omega - 2\pi \mathbf{k}_j)\right) \quad i = 0, 1 \quad (4.2)$$

où les **vecteurs de décalage** $\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donnent la position des deux classes

engendrées par le réseau d'échantillonnage initial, tel que décrit à la section 2.3.

L'équation (4.2) peut se réécrire comme

$$Y_i(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 X\left((\mathbf{D}^{-1})^T \omega + \tilde{\mathbf{k}}_j\right) F_i\left((\mathbf{D}^{-1})^T \omega + \tilde{\mathbf{k}}_j\right) \quad i = 0, 1 \quad (4.3)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{k}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{k}}_2 = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les **vecteurs de modulation** donnés par (4.4) indiquent la position des spectres dans le plan fréquentiel. Le premier correspond au spectre initial, alors que le second provient du recouvrement spectral. En considérant (2.17) et (4.1), la combinaison des bandes dans la section de synthèse du système donne à la sortie:

$$X'(\omega) = 2 \sum_{i=0}^1 Y_i(\mathbf{D}^T \omega) G_i(\omega) \quad (4.5)$$

En effectuant la substitution de (4.3) dans (4.5), on obtient

$$X'(\omega) = \sum_{j=1}^2 X(\omega + \tilde{\mathbf{k}}_j) \left[\sum_{i=0}^1 G_i(\omega) F_i(\omega + \tilde{\mathbf{k}}_j) \right] \quad (4.6)$$

Posant $\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}}_2$, cette dernière équation peut se développer pour donner

$$X'(\omega) = X(\omega) T_1(\omega) + X(\omega + \tilde{\mathbf{k}}) T_2(\omega) \quad (4.7)$$

$$\text{où } T_1(\omega) = G_0(\omega) F_0(\omega) + G_1(\omega) F_1(\omega) \quad (4.8)$$

$$T_2(\omega) = G_0(\omega) F_0(\omega + \tilde{\mathbf{k}}) + G_1(\omega) F_1(\omega + \tilde{\mathbf{k}}) \quad (4.9)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Le premier terme du membre de droite de (4.7) donne le spectre initial, affecté par la fonction de transfert $T_1(\omega)$, alors que le second correspond au recouvrement spectral. La condition de reconstruction parfaite peut s'écrire comme

$$T_1(\omega) = 1 \quad (4.11)$$

$$T_2(\omega) = 0 \quad (4.12)$$

Il suffit alors de choisir les filtres d'analyse et de synthèse pour respecter ces deux équations. Nous utilisons une variante de la classe de filtres considérée par Simoncelli et Adelson (1990), définie par

$$F_0(\omega) = G_0(-\omega) = H(\omega) \quad (4.13)$$

$$F_1(\omega) = G_1(-\omega) = e^{-j\omega^T \mathbf{s}} H(-\omega + \tilde{\mathbf{k}}) \quad (4.14)$$

où $H(\omega)$ est un filtre bidimensionnel passe-bas en forme de losange, et \mathbf{s} un vecteur approprié. Utilisant ces définitions dans (4.9):

$$T_2(\omega) = H(-\omega)H(\omega + \tilde{\mathbf{k}}) + e^{-j\tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{s}} H(\omega + \tilde{\mathbf{k}})H(-\omega) = 0 \quad (4.15)$$

Pour respecter la contrainte (4.12) et éliminer le recouvrement spectral, il suffit de choisir $e^{-j\tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{s}} = -1$, ce qui mène à

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La fonction de transfert du système est alors donnée par (4.8), qui devient après substitution de (4.13) et (4.14):

$$T_1(\omega) = H(-\omega)H(\omega) + H(\omega + \tilde{\mathbf{k}})H(-\omega + \tilde{\mathbf{k}}) \quad (4.17)$$

Mais la réponse à l'impulsion du filtre est réelle, ce qui conduit à

$$T_1(\omega) = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \tilde{\mathbf{k}})|^2 \quad (4.18)$$

Puisque la fonction de transfert totale du système donnée par (4.18) est réelle, le système n'introduit pas de déphasage dans l'image. De plus, si le filtre $H(\omega)$ est à phase nulle, la bande de basses fréquences ne présentera pas de déphasage. La fonction d'erreur à minimiser lors de la conception des filtres s'obtient en combinant (4.18) à (4.11):

$$E = \max_{\omega} \left\{ |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \tilde{\mathbf{k}})|^2 - 1 \right\} \quad (4.19)$$

Dans le plan spatial, les réponses à l'impulsion des filtres d'analyse et de synthèse provenant de (4.13) et (4.14) sont reliées par

$$f_0[m, n] = h[m, n] \quad (4.20)$$

$$g_0[m, n] = h[-m, -n] \quad (4.21)$$

$$f_1[m, n] = (-1)^{m+n-1} h[-m+1, -n] \quad (4.22)$$

$$g_1[m, n] = (-1)^{m+n+1} h[m+1, n] \quad (4.23)$$

4.2 Conditions aux frontières

Tout comme pour le cas unidimensionnel, il faut apporter une attention particulière au traitement des conditions aux frontières pour permettre la reconstruction quasi-parfaite dans le plan spatial. Deux cas doivent être considérés séparément. Pour le premier étage de décomposition, chaque image passe d'un réseau rectangulaire vers le treillis en quinconce, alors qu'au deuxième étage, c'est l'inverse qui se produit. La méthode que nous proposons pour éliminer l'effet des frontières repose sur l'hypothèse que le filtre $h[\mathbf{n}]$ est à phase nulle et qu'il possède une symétrie octale. C'est-à-dire que

$$h[m, n] = h[-m, n] = h[m, -n] = h[-m, -n] = h[n, m] = h[-n, m] = h[n, -m] = h[-n, -m] \quad (4.24)$$

Par conséquent, la réponse à l'impulsion possède quatre axes de symétrie à 0° , 45° , 90° et 135° . Le support du filtre est carré et il s'étend de la coordonnée $(-K+1, -K+1)$ jusqu'à $(K-1, K-1)$. Pour la bande de basses fréquences, les équations (4.20) et (4.21) combinées à (4.24) deviennent

$$f_0[m, n] = g_0[m, n] = h[m, n] \quad (4.25)$$

Puisque le filtre $h[\mathbf{n}]$ est à phase nulle, la bande de basses fréquences est également sans décalage. Prenant en considération toutes les symétries, l'équation aux différences peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} y[m, n] = & h[0, 0]x[m, n] + \\ & \sum_{i=1}^{K-1} h[i, 0](x[m+i, n] + x[m-i, n] + x[m, n+i] + x[m, n-i]) + \\ & \sum_{i=1}^{K-1} h[i, i](x[m+i, n+i] + x[m-i, n+i] + x[m+i, n-i] + x[m-i, n-i]) + \\ & \sum_{j=1}^{K-2} \sum_{i=j+1}^{K-1} h[i, j] \left(\begin{aligned} & x[m+j, n+i] + x[m-j, n+i] + x[m+j, n-i] + x[m-j, n-i] + \\ & x[m+i, n+j] + x[m-i, n+j] + x[m+i, n-j] + x[m-i, n-j] \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pour la bande de hautes fréquences, l'équation (4.22) indique la présence d'un décalage pour le filtre d'analyse:

$$f_1[m, n] = (-1)^{m-1+n} h[-(m-1), -n] = (-1)^{m-1+n} h[m-1, n] = h'[m-1, n] \quad (4.27)$$

$$\text{où } h'[m, n] = (-1)^{m+n} h[m, n] \quad (4.28)$$

Le support du filtre subit un déplacement d'un pixel dans la direction du premier vecteur de base. Par conséquent, l'image résultante est décalée d'un pixel dans la direction opposée. Par l'utilisation de (4.28), l'équation du filtre de synthèse peut se réécrire comme

$$g_1[m, n] = (-1)^{m+n} h[m+1, n] = h'[m+1, n] \quad (4.29)$$

Cette dernière indique que le support du filtre subit une translation d'un pixel dans la direction opposée au premier vecteur de base. L'effet combiné des filtres d'analyse et de synthèse élimine tout décalage pour la bande de hautes fréquences. Il ressort également que les filtres de la bande haute sont des versions décalées l'une de l'autre.

4.2.1 Réseau rectangulaire vers treillis en quinconce

Le premier étage du système en quinconce décompose l'image-source, échantillonnée sur un réseau rectangulaire, en deux bandes de fréquences sur un treillis en quinconce, comme le montre la figure 1.7. Soit $x[m, n]$ une image de M colonnes par N lignes, avec M et N pairs. Nous définissons l'**extension symétrique rectangulaire** de $x[m, n]$ par

$$x[m, n] = x[i, j] \quad (4.30)$$

$$\text{où } i = \begin{cases} -m & m < 0 \\ m & 0 \leq m < M \\ 2M - m - 2 & m \geq M \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} -n & n < 0 \\ n & 0 \leq n < N \\ 2N - n - 2 & n \geq N \end{cases}$$

La figure 4.1 illustre cette extension pour une image de quatre lignes par quatre colonnes. Soulignons qu'elle n'engendre pas de discontinuité aux frontières. Pour pouvoir utiliser les résultats de la section 4.1, il suffit de montrer que les images à l'entrée des quatre

filtres peuvent être considérées de dimensions infinies. La matrice d'échantillonnage rectangulaire utilisée se représente par

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

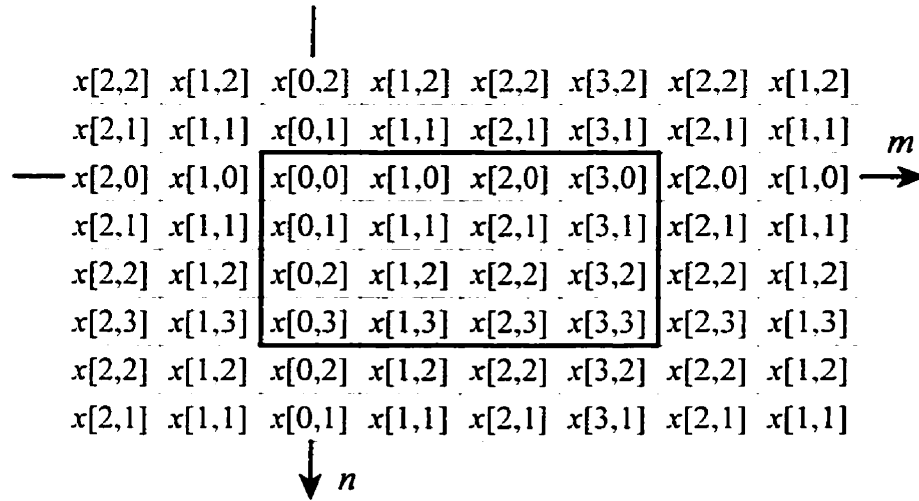


Figure 4.1: Image-source avec extension symétrique rectangulaire

Cette figure montre que tous les échantillons à l'extérieur de l'image sont reliés à un échantillons à l'intérieur de celle-ci. L'image de dimensions finies peut alors être considérée infinie lors du filtrage. Par conséquent, les deux filtres d'analyse voient une entrée de dimensions infinies. Il reste à regarder les entrées des filtres de synthèse.

Bande de basses fréquences

Le signal $u_0[\mathbf{n}]$ à la sortie du filtre d'analyse possède une extension symétrique identique au signal d'entrée car $f_0[\mathbf{n}]$ est symétrique et sans décalage. La démonstration, donnée à l'annexe D, s'effectue d'une façon semblable au cas unidimensionnel en utilisant

l'équation aux différences (4.26) sur le signal d'entrée (4.30). Après les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, on obtient l'image de la figure 4.2. Tous les échantillons à l'extérieur de cette image sont associés à des échantillons à l'intérieur. Le signal d'entrée du filtre de synthèse $g_0[\mathbf{n}]$ est ainsi considéré de grandeur infinie pour le filtrage.

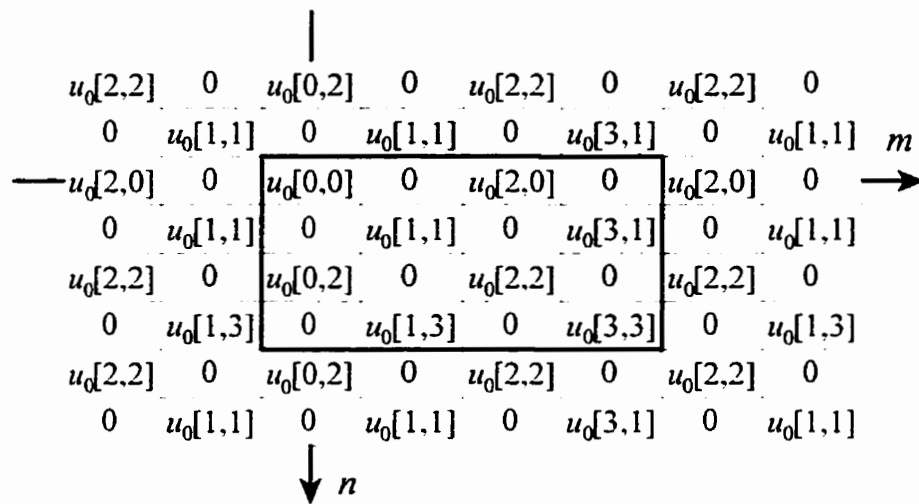


Figure 4.2: Image basse fréquence rectangulaire avant le filtre de synthèse

Bande de hautes fréquences

Prenant en considération les équations (4.27) et (4.31), l'image à la sortie du filtre d'analyse $f_1[\mathbf{n}]$ peut être vue comme l'image-source filtrée par $h'[\mathbf{n}]$, suivie d'un décalage vers la gauche d'un pixel. Puisque $h'[\mathbf{n}]$ est symétrique, un argument semblable à celui développé pour la bande de basses fréquences s'applique. Il suffit d'ajouter l'effet du décalage. Prenant en considération l'introduction des zéros par les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, l'entrée du filtre de synthèse $g_1[\mathbf{n}]$ se retrouve à

la figure 4.3. Une ligne pointillée indique la position du support de l'image initiale après le décalage introduit par le filtre.

Certains échantillons de l'image ont été perdus lors du décalage ($u_1[-1,n]$), alors que ceux des colonnes $M-1$ et $M-3$ sont identiques ($u_1[M-1,n]=u_1[M-3,n]$). Par conséquent, l'application directe de cette technique ne permet pas la reconstruction quasi-parfaite de l'image. Il est toutefois possible de la modifier en considérant l'effet des décalages introduits par les filtres d'analyse et de synthèse qui s'annulent pour des signaux de dimensions infinies. Le raisonnement est similaire à celui de la sous-section 3.2.3 pour le cas unidimensionnel. Les équations (4.27) et (4.29) se simplifient pour donner

$$f_1[m,n] = g_1[m,n] = h'[m,n] \quad (4.32)$$

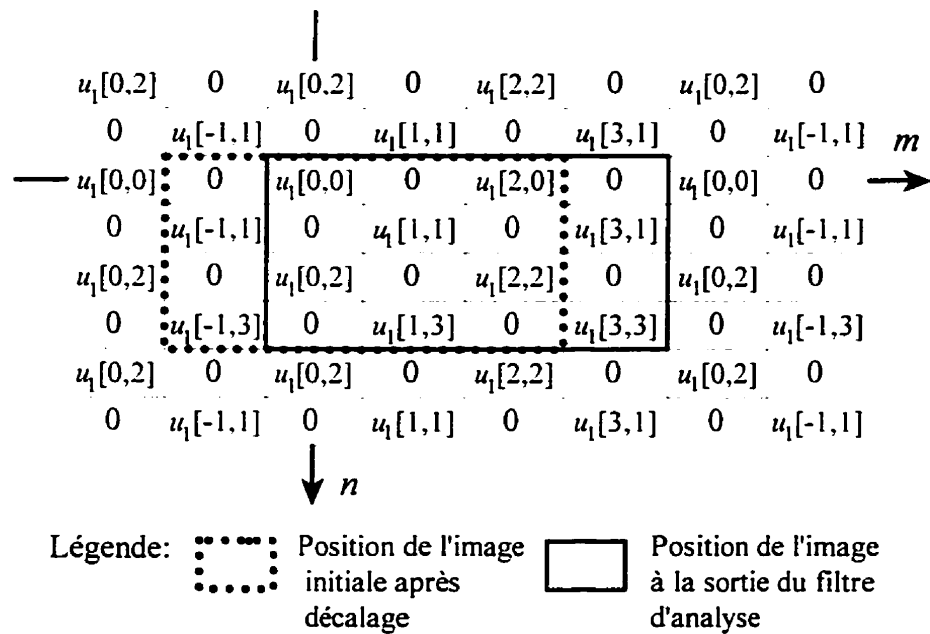


Figure 4.3: Image haute fréquence rectangulaire avant le filtre de synthèse

Lors des processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, *on conserve l'autre échantillon de chaque paire plutôt que le premier*. Il en résulte le signal présenté à la figure 4.4. Cette modification élimine la redondance des colonnes $M-1$ et $M-3$ et elle récupère les échantillons de la première colonne perdue lors du décalage. Sur cette dernière figure, on voit que tous les échantillons nécessaires au filtrage se retrouvent dans le support de l'image. Par conséquent, le signal peut être considéré infini et la reconstruction quasi-parfaite est possible pour le premier étage du système de décomposition en quinconce.

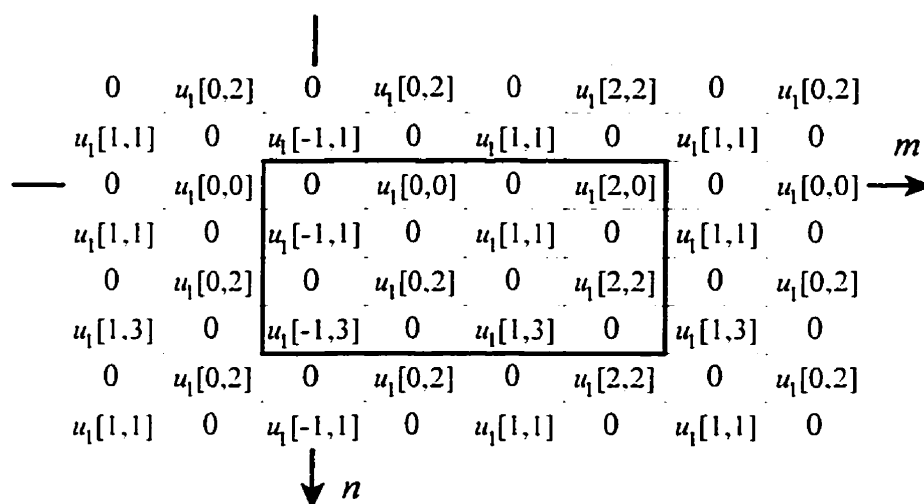


Figure 4.4: Image haute fréquence rectangulaire sans décalage avant le filtre de synthèse

4.2.2 Treillis en quinconce vers réseau rectangulaire

Le deuxième étage du système prend à son entrée une image échantillonnée sur un treillis en quinconce pour générer deux bandes de fréquences sur un réseau rectangulaire. La relation de symétrie utilisée est illustrée à la figure 4.5. Son apparence est la même que

celle de l'extension symétrique rectangulaire, mais il n'existe pas de relation aussi simple que (4.30) pour la caractériser car les vecteurs de base sont à 45° . La matrice d'échantillonnage utilisée est donnée par:

$$\mathbf{V}_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Le développement de l'**extension symétrique en quinconce** se retrouve à l'annexe C. Encore une fois, tous les échantillons à l'extérieur de l'image proviennent d'un échantillon à l'intérieur. L'image peut ainsi être considérée infinie à l'entrée des filtres d'analyse et la théorie de la section 4.1 s'applique directement. Il faut toutefois en démontrer la validité pour la section de synthèse.

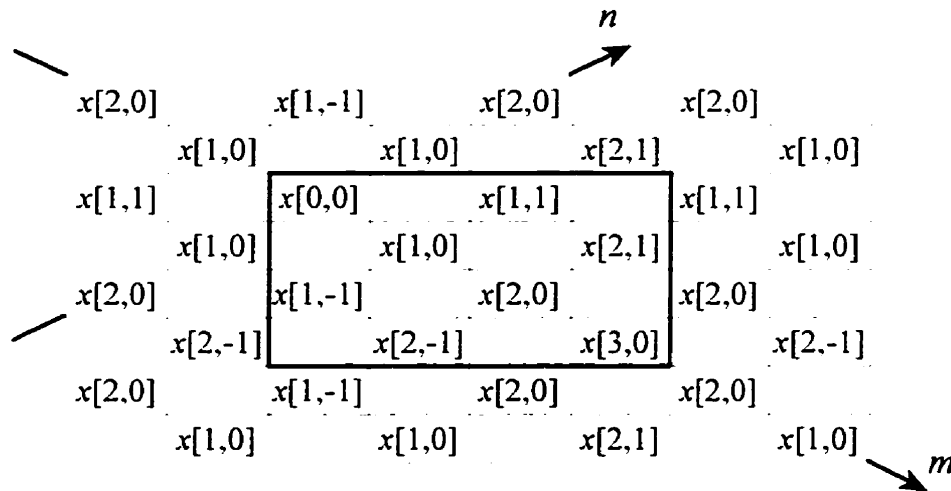


Figure 4.5: Image-source avec extension symétrique en quinconce

Bande de basses fréquences

Pour que l'image à la sortie du filtre d'analyse $f_0[\mathbf{n}]$ possède une extension symétrique en quinconce, il faut absolument que le filtre ait une symétrie octale, telle que définie par

(4.24), et qu'il n'y ait pas de décalage. Mais puisque $f_0[\mathbf{n}]$ a cette symétrie par hypothèse, les relations de l'annexe C jumelées à l'équation aux différences donnée par (4.26) permettent de démontrer (cf. annexe D) que le signal $u_0[\mathbf{n}]$ possède également une extension symétrique en quinconce. Après l'introduction des zéros par les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, l'image résultante a la forme représentée à la figure 4.6. Celle-ci montre clairement que l'ensemble du plan de l'image peut se représenter en utilisant seulement les échantillons à l'intérieur du support de l'image et en considérant les relations de symétrie présentées à l'annexe C. Le filtre de synthèse $g_0[\mathbf{n}]$ voit ainsi une entrée de dimensions infinies lors du filtrage.

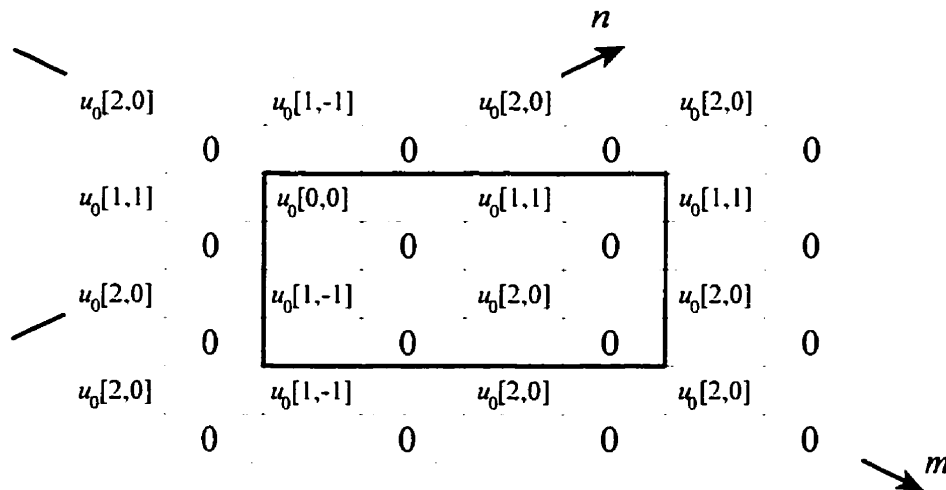


Figure 4.6: Image basse fréquence en quinconce avant le filtre de synthèse

Bande de hautes fréquences

L'équation (4.27) indique que le support du filtre est décalé d'un pixel dans la direction du premier vecteur de base. L'image obtenue à la sortie du filtre est ainsi déplacée dans la direction opposée. En utilisant un argument de symétrie identique à celui de la bande de

basses fréquences, et prenant en considération le décalage subséquent et les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage, l'image à l'entrée du filtre de synthèse $g_1[n]$ se retrouve à la figure 4.7. La position de l'image initiale, après le décalage, est représentée par un contour en pointillé. On voit que le décalage a éliminé l'information contenue dans la première ligne et la première colonne de l'image, alors que la dernière ligne et la dernière colonne sont redondantes. Toutefois, les processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage ont remplacés les valeurs perdues par des zéros. Par conséquent, la reconstruction quasi-parfaite est possible.

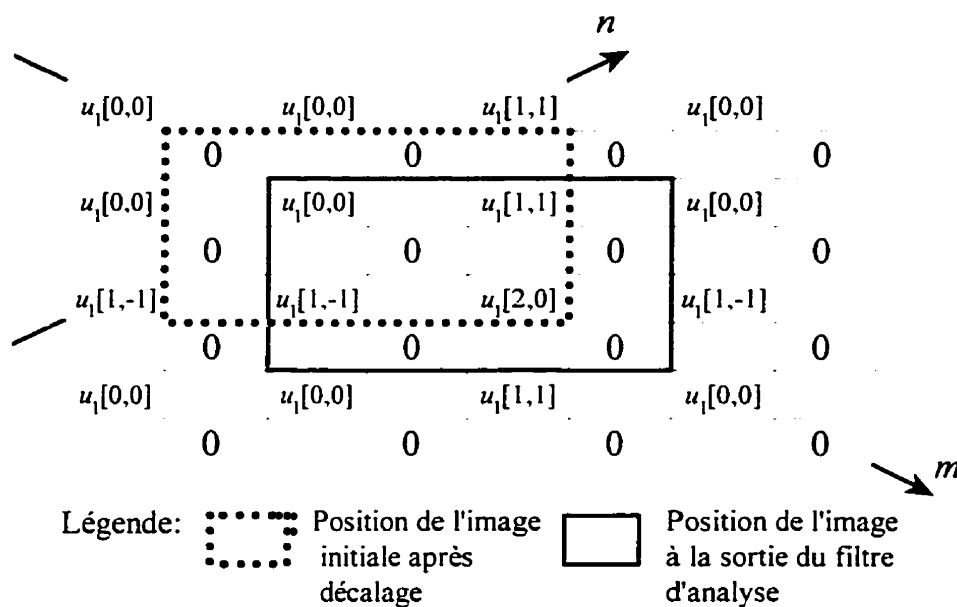


Figure 4.7: Image haute fréquence en quinconce avant le filtre de synthèse

On peut considérer une modification à la technique pour pouvoir utiliser les relations de symétrie de l'annexe C. Celle-ci repose sur l'annulation du décalage en considérant l'effet simultané des filtres d'analyse et de synthèse, et mène à la relation (4.32). Il faut toutefois

conserver l'autre échantillon de chaque paire lors des processus de sous-échantillonnage et de sur-échantillonnage. Le résultat de cette modification se retrouve à la figure 4.8. Puisque tous les échantillons ont des valeurs contenues dans le support de l'image, celle-ci peut être considérée de dimensions infinies pour le filtrage. En conclusion, la reconstruction quasi-parfaite utilisant les relations de la section 4.1 est possible pour les deux étages du système de décomposition en quinconce. L'effet des frontières est donc éliminé.

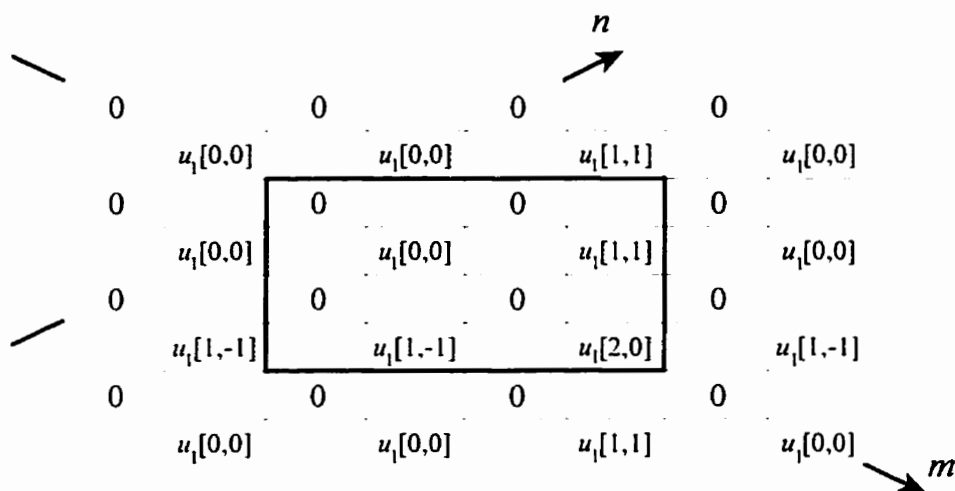


Figure 4.8: Image haute fréquence en quinconce sans décalage avant le filtre de synthèse

4.3 Conception des filtres bidimensionnels

Les équations (4.25), (4.28) et (4.32) relient les différents filtres formant le banc à un filtre passe-bas en forme de losange dont la réponse à l'impulsion est finie, noté $h[\mathbf{n}]$. Ce filtre doit posséder une symétrie octale donnée par (4.24) pour permettre la reconstruction

quasi-parfaite aux frontières. Cette section examine deux méthodes de conception de filtres bidimensionnels permettant d'intégrer l'erreur de reconstruction donnée par (4.19): l'échantillonnage en fréquence et la transformation de McClellan. Deux filtres de 15 par 15 coefficients chacun seront générés. Les réponses à l'impulsion se retrouvent à l'annexe B.

4.3.1 Méthode d'échantillonnage en fréquence

La méthode d'échantillonnage en fréquence utilisée pour la conception des filtres bidimensionnels est la généralisation de la méthode unidimensionnelle présentée à la sous-section 3.3.1, où l'axe fréquentiel devient le plan fréquentiel par l'utilisation de la notation matricielle du chapitre 2. Un filtre de 15 par 15 coefficients, appelé **E15x15**, a été conçu en utilisant cette méthode. Sa réponse en fréquence est donnée à la figure 4.9. Les contours de ce filtre se rapprochent de ceux du filtre idéal en forme de losange, comme le montre la figure 4.10. La fonction de transfert totale du banc de filtres est illustrée à la figure 4.11. Elle s'approche d'un gain unitaire pour l'ensemble du plan fréquentiel et elle montre une erreur de reconstruction maximale de 8,29%. Cette erreur, évaluée sur une grille de 64 par 64 points, est toutefois concentrée dans la zone de transition, près des quatre coins dans la bande passante. Elle est plus faible pour les basses fréquences, respectant ainsi les propriétés des images.

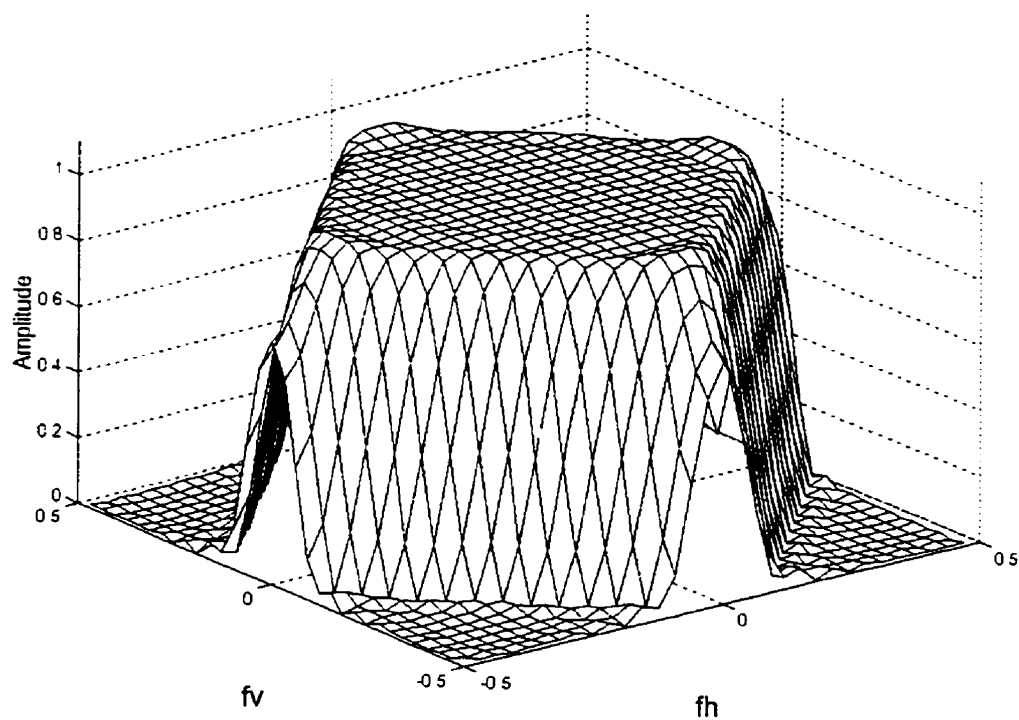


Figure 4.9: Réponse en fréquence de $E15 \times 15$

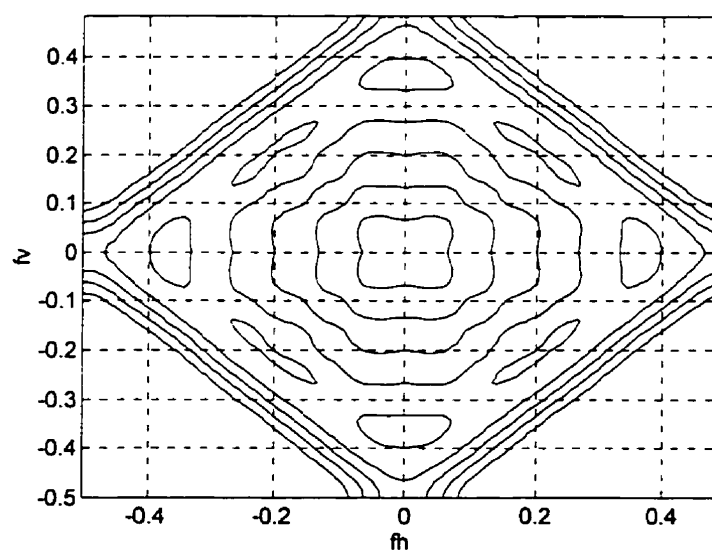


Figure 4.10: Lignes de contours de $E15 \times 15$

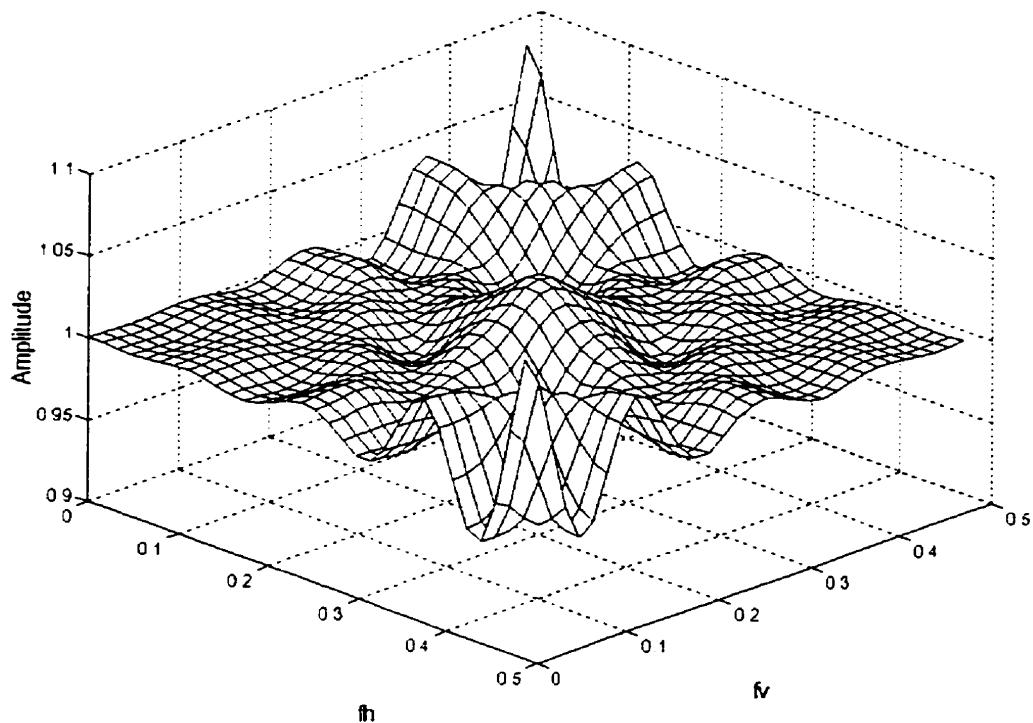


Figure 4.11: Fonction de transfert totale du banc E15x15

4.3.2 Transformation de McClellan

Une méthode très simple de conception de filtres bidimensionnels a été introduite par McClellan en 1973. Elle n'est toutefois valide que pour les filtres de longueur impaire et elle consiste à appliquer une transformation sur un filtre unidimensionnel à phase nulle. La conception du filtre bidimensionnel est alors décomposée en deux parties: conception d'un filtre unidimensionnel à phase nulle et introduction d'un changement approprié de variables. Si le filtre unidimensionnel respecte la contrainte de reconstruction parfaite donnée par (3.14), le filtre résultant en fera autant avec la contrainte (4.19).

Un filtre unidimensionnel à phase nulle ayant K coefficients indépendants possède une transformée de Fourier donnée par

$$H(\omega) = h[0] + \sum_{k=1}^{K-1} h[k] (e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) = \sum_{k=0}^{K-1} a[k] \cos(\omega k) \quad (4.34)$$

$$\text{où } a[k] = \begin{cases} h[0] & k = 0 \\ 2h[k] & k > 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

En utilisant les polynômes de Chebychev, notés $T_k[x]$, on obtient l'égalité suivante:

$$\cos(\omega k) = T_k[\cos(\omega)] \quad (4.36)$$

L'équation (4.34) devient ainsi

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{K-1} a[k] T_k[\cos(\omega)] \quad (4.37)$$

Il suffit d'introduire un changement de variables sur $\cos(\omega)$ pour obtenir un nouveau filtre. Dans notre cas, nous utilisons la transformation suivante:

$$\cos(\omega) \rightarrow \frac{1}{2} [\cos(\omega_h) + \cos(\omega_v)] \quad (4.38)$$

Nous avons conçu un filtre unidimensionnel de 15 coefficients, appelé **E15**, à l'aide de la méthode d'échantillonnage en fréquence. Sa réponse en fréquence est présentée à la figure 4.12. Son erreur de reconstruction maximale, donnée par l'équation (3.14), est de 0.766%.

Par application de la transformation de McClellan (4.38) sur (4.37), nous obtenons le filtre **M15x15** dont la réponse en fréquence se trouve à la figure 4.13. Les lignes de contours associées à ce filtre sont représentées à la figure 4.14. Elles montrent que la transformation utilisée engendre un arrondissement des contours, ce qui entraîne une augmentation du recouvrement spectral dans chacune des bandes prises individuellement.

Ce filtre possède une erreur de reconstruction de 0,764%, comme l'indique la figure 4.15. Cette erreur de reconstruction, évaluée sur une grille de 64 par 64 points, est répartie d'une façon plus uniforme que dans le cas de la méthode d'échantillonnage en fréquence.

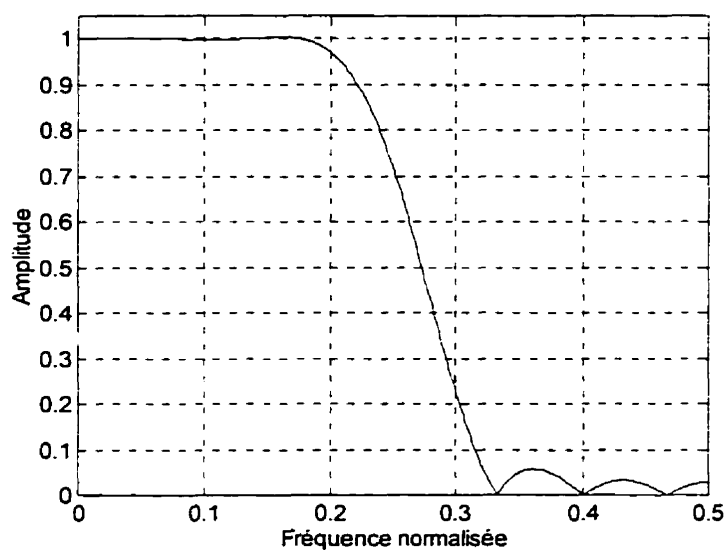


Figure 4.12: Réponse en fréquence de E15

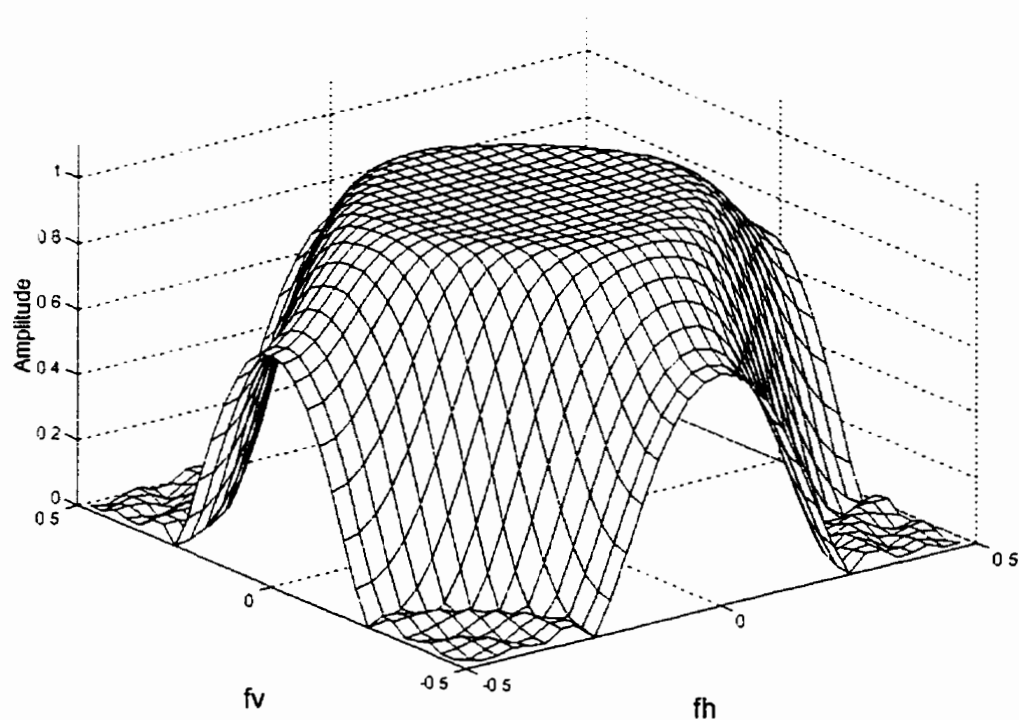


Figure 4.13: Réponse en fréquence de $M_{15 \times 15}$

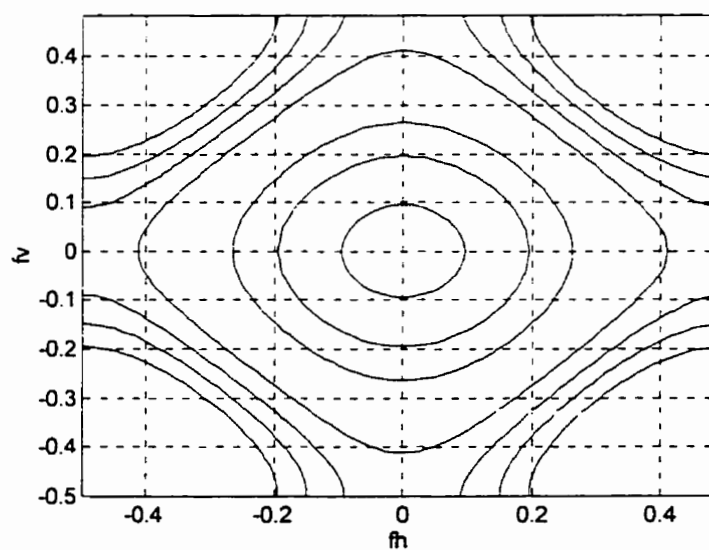


Figure 4.14: Lignes de contours de $M_{15 \times 15}$

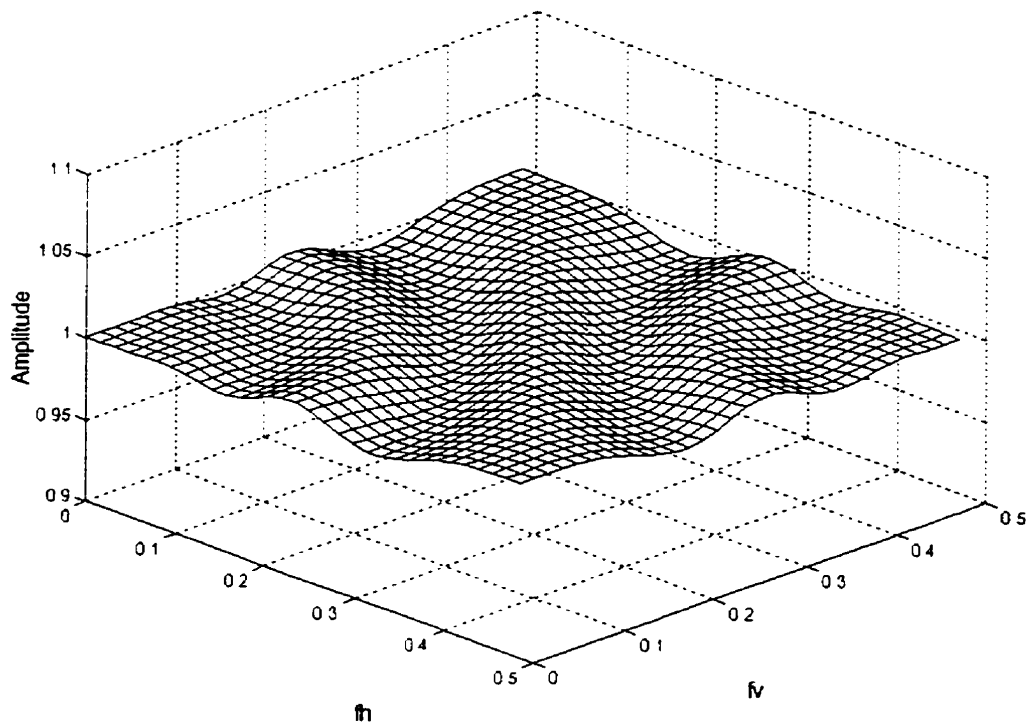


Figure 4.15: Fonction de transfert totale du banc **M15x15**

4.4 Complexité du système en quinconce

La complexité de calculs du système en quinconce s'évalue en considérant l'équation aux différences (4.26) appliquée sur le système illustré à la figure 1.6. Le filtre utilisé possède une symétrie octale et un support de $2K-1$ par $2K-1$ coefficients. Encore une fois, on considère une séquence vidéo dont les images ont M colonnes sur N lignes, avec M et N pairs, et un débit de R images par seconde.

a) Calcul du nombre de pixels à traiter pour la décomposition

- Le premier étage comporte exactement le même nombre de pixels à traiter que pour le système rectangulaire donné par (3.46). Il y a également équivalence pour le second étage qui mène à (3.47).

- Puisqu'il y a deux filtres au premier étage, et deux filtres au deuxième:

$$\text{nombre de pixels/sec.} = 1,5 \text{ NMR} \quad (4.39)$$

b) *Calcul du nombre d'opérations par pixel pour la décomposition*

- **Nombre de multiplications:** En considérant les symétries présentes dans l'équation aux différences (4.26), le nombre de coefficients indépendants pour le filtre est

$$\text{nombre de multiplications} = \sum_{k=1}^K k \quad (4.40)$$

- **Nombre d'additions:** L'équation aux différences (4.26) mène à

$$\text{nombre d'additions} = 8 \sum_{k=1}^{K-1} k = 4(K^2 - K) \quad (4.41)$$

c) *Calcul du nombre de pixels à traiter pour la reconstruction*

- Puisqu'il faut filtrer les zéros ajoutés lors du sur-échantillonnage, la reconstruction nécessite le traitement de deux fois plus de pixels. ce qui donne

$$\text{nombre de pixels/sec.} = 3 \text{ NMR} \quad (4.42)$$

- Il faut tenir compte de la présence de sommateurs qui combinent les bandes à la sortie des filtres de synthèse. Le nombre d'additions supplémentaires est égal au nombre de pixels des images que l'on combine.

d) *Calcul du nombre d'opérations par pixel pour la reconstruction*

Tout comme pour le système rectangulaire, une simplification est introduite par l'ajout des zéros lors du sur-échantillonnage. Deux cas surviennent: pour la moitié des pixels, le coefficient central du filtre est sur un zéro introduit par le sur-échantillonnage, alors que pour l'autre moitié, il est sur un pixel de l'image.

- Si le coefficient central est sur un zéro introduit par le sur-échantillonnage:

$$\text{nombre de multiplications} = \sum_{k=1}^{K-1} \left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad (4.43)$$

$$\text{nombre d'additions} = \left(4 \sum_{k=1}^{K-1} k \right) - 1 \quad (4.44)$$

- Si le coefficient central est sur un pixel de l'image:

$$\text{nombre de multiplications} = \sum_{k=1}^K \left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad (4.45)$$

$$\text{nombre d'additions} = 4 \sum_{k=1}^{K-1} k \quad (4.46)$$

Considérant une séquence en format CIF 4:1:1, c'est-à-dire $M=352$, $N=288$ et $R=30$ pour la luminance, et un filtre ayant $K=8$, la complexité de calculs du système en quinconce correspondant se retrouve au tableau 4.1. Il inclue les opérations nécessaires aux deux composantes de chrominance. Utilisant les équations (4.39) à (4.46), on constate que la complexité de la décomposition est la même que celle de la reconstruction.

Tableau 4.1: Complexité de calculs du système en quinconce

Section	Nombre de multiplications/sec. (en millions)	Nombre d'additions/sec. (en millions)
Décomposition	246,3	1532,8
Reconstruction	246,3	1532,8

Chapitre 5: Simulation des systèmes

Ce chapitre présente les résultats obtenus lors des simulations des systèmes rectangulaire et en quinconce. Les séquences vidéo utilisées sont "*Susie*" et "*Flower Garden*", illustrées à la figure 5.1. Ces séquences sont en format CIF 4:1:1 avec une représentation de 8 bits pour chaque composante⁸. *Susie* est une séquence typique de vidéophonie comportant peu de mouvement, alors que *Flower Garden* est une séquence complexe présentant un grand contenu fréquentiel (autant pour la luminance que pour les chrominances). Les résultats obtenus en utilisant d'autres séquences se retrouvent à l'annexe E. Le chapitre se divise en deux sections. La première section valide les développements de reconstruction quasi-parfaite effectués aux chapitres 3 et 4. La deuxième utilise des codeurs normalisés (MPEG-2 et H.261) pour comprimer la bande de basses fréquences avant de la recombinaison aux autres bandes non-comprimées.

5.1 Décomposition et reconstruction

Cette section se concentre sur la combinaison des bandes de fréquences sans introduire de codage. Dans un premier temps, l'importance du nombre de bits utilisés pour représenter un pixel à la sortie de la section d'analyse est étudiée. Par la suite, l'énergie et l'entropie contenues dans chacune des bandes sont comparées afin d'étudier l'importance des

⁸ Les séquences en format CIF (288 par 352 pixels) sont obtenues à partir des séquences de la banque de l'ITU (faisant 480 par 720 pixels) en sous-échantillonnant par un facteur de 5/3 et en éliminant 40 colonnes de pixels à la gauche et à la droite des images.

différentes bandes de fréquences. Finalement, la reconstruction multirésolution utilisant un sous-ensemble des bandes de fréquences est effectuée.



Figure 5.1: Susie et Flower Garden

5.1.1 Reconstruction en fonction du nombre de bits

Un paramètre important de la décomposition est le nombre de bits alloués à chaque composante de couleur dans les bandes de fréquences générées. Les équations de reconstruction développées aux chapitres précédents supposent une précision infinie pour la représentation. Mais les contraintes matérielles d'un système de codage vidéo entraînent une représentation par un nombre fini de bits. Les simulations sont effectuées pour 16, 12 et 8 bits par composante, chaque représentation incluant un bit de retenue. L'exactitude de la reconstruction est faite à l'aide de la fonction d'erreur quadratique moyenne (EQM) définie par

$$EQM = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (x[i, j] - x'[i, j])^2 \quad (5.1)$$

où N correspond au nombre de lignes dans l'image, M au nombre de colonnes, $x[i,j]$ est le signal-source et $x'[i,j]$ le signal reconstruit. L'analyse est également effectuée pour la luminance en divisant l'image en blocs de 16 par 16 pixels afin de tenir compte des caractéristiques des différentes régions de la scène. Pour la première image de chacune des deux séquences, nous retrouvons l'erreur quadratique moyenne pour chaque composante de couleur, de même que celle du pire bloc de luminance. Trois bancs de filtres sont considérés: **R31** pour le système rectangulaire, de même que **M15x15** et **E15x15** pour le système en quinconce. Les résultats obtenus sont présentés au tableau 5.1 (où 0 correspond à un résultat inférieur à $5 \cdot 10^{-4}$). Pour fins de simulation, chacune des composantes de couleur possède une représentation avec signe.

Tableau 5.1: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction de Susie et de Flower Garden

Banc de filtres et composante	<i>Susie</i>			<i>Flower Garden</i>		
	16 bits	12 bits	8 bits	16 bits	12 bits	8 bits
R31, Y	0	0,010	4,478	0	0,009	4,396
M15x15, Y	0	0	3,195	0,007	0,017	3,272
E15x15, Y	0,002	0,004	3,086	0,158	0,170	3,194
R31, pire bloc de Y	0	0,105	7,203	0,004	0,062	6,496
M15x15, pire bloc de Y	0	0,012	5,395	0,105	0,145	5,340
E15x15, pire bloc de Y	0,090	0,125	5,043	0,781	0,828	5,273
R31, Cr	0	0	4,284	0	0	4,755
M15x15, Cr	0	0	4,330	0	0	3,244
E15x15, Cr	0	0	2,165	0	0,001	3,270
R31, Cb	0	0	5,898	0	0,001	4,472
M15x15, Cb	0	0	2,230	0	0	3,516
E15x15, Cb	0	0	3,970	0,013	0,023	2,957

Ces résultats démontrent clairement la validité de la reconstruction quasi-parfaite: lorsque la précision est de 16 bits, les erreurs quadratiques moyennes sont alors très faibles et

elles sont dictées principalement par l'erreur de reconstruction des bancs de filtres. Mais lorsque la précision est limitée à 8 bits, l'erreur d'arrondi engendrée a une influence plus importante que l'erreur de reconstruction des filtres: malgré son erreur de reconstruction de 8,29%, le banc **E15x15** donne d'aussi bons résultats avec 8 bits que le banc **M15x15** dont l'erreur est de 0,76%. On remarque également que le système en quinconce mène généralement à de meilleurs résultats que le système rectangulaire.

Les franges de Fresnel⁹ de la figure 5.2 donnent une image synthétique monochrome contenant toutes les fréquences du plan spatial. Elles sont donc bien adaptées pour évaluer la reconstruction des deux systèmes. Les résultats ainsi obtenus sont donnés au tableau 5.2. Ils confirment que le banc **E15x15** possède une erreur de reconstruction plus élevée que celle des autres bancs, particulièrement pour les hautes fréquences qui sont nombreuses dans cette image.

Afin d'obtenir des résultats optimaux sur 8 bits pour les simulations à venir, le bit de retenue est éliminé et les valeurs qui débordent de l'intervalle permis sont ramenées au maximum ou au minimum admissible pour une représentation de 8 bits.

⁹ Les franges de Fresnel possèdent une fréquence nulle au centre de l'image, et l'augmentation de fréquence s'effectue linéairement à partir du centre jusqu'à une fréquence normalisée de 0,5 en haut et en bas, vis-à-vis le centre du patron. La formule correspondante pour 8 bits est donnée par

$$s[m,n]=\text{entier}(127 \cos[k((m-m_0)^2+(n-n_0)^2)])$$

où k est une constante appropriée, et (m_0, n_0) donne la coordonnée du centre des franges dans l'image.

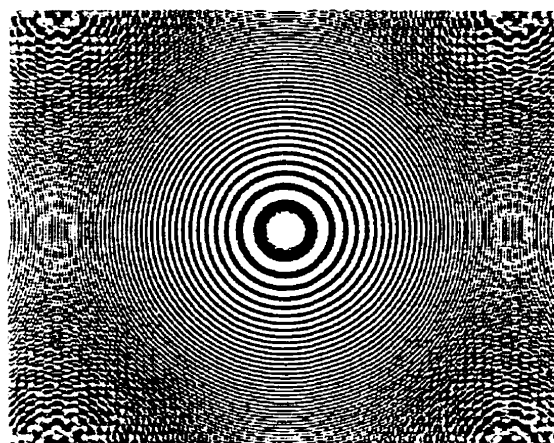


Figure 5.2: Franges de Fresnel

Tableau 5.2: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction des franges de Fresnel

Banc de filtres et composante	Franges de Fresnel		
	16 bits	12 bits	8 bits
R31, Y	0,205	0,233	4,479
M15x15, Y	0,307	0,323	3,378
E15x15, Y	1,865	1,867	4,772
R31, pire bloc de Y	0,746	0,742	6,492
M15x15, pire bloc de Y	1,223	1,133	5,281
E15x15, pire bloc de Y	8,043	7,785	13,602

5.1.2 Énergie et entropie des bandes de fréquences

Les systèmes de décomposition rectangulaire et en quinconce engendrent des bandes de fréquences ayant des caractéristiques spécifiques que l'on peut faire ressortir à l'aide d'histogrammes. Ces derniers donnent la distribution des valeurs des pixels dans l'image, comme le montre la figure 5.3 pour la première image de *Flower Garden*. On remarque que la gamme dynamique de la luminance est plus grande que celle des composantes de

chrominance. En outre, il y a quatre fois plus de pixels de luminance que de l'une ou l'autre des chrominances pour le format CIF.

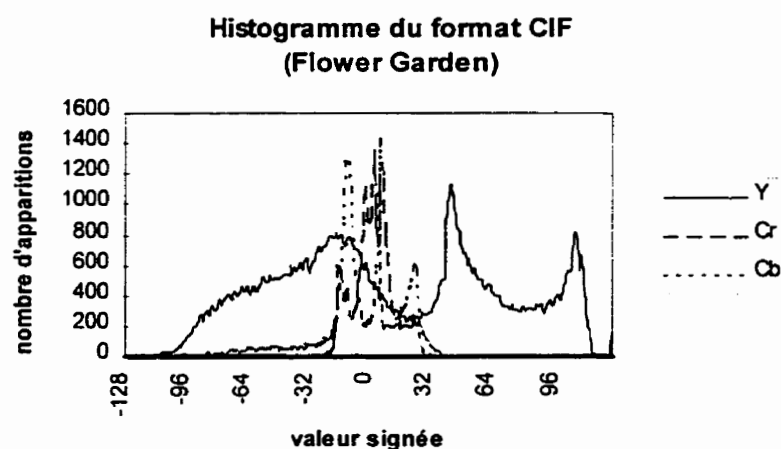
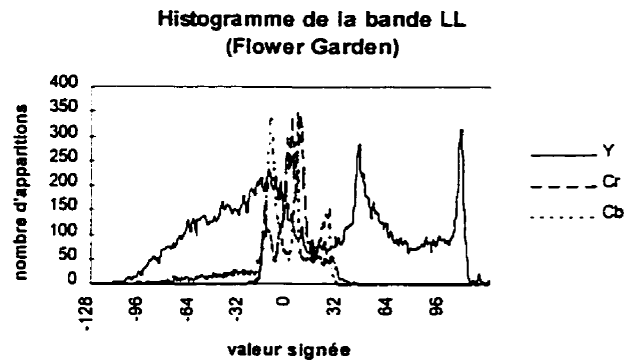


Figure 5.3: Histogramme de Flower Garden

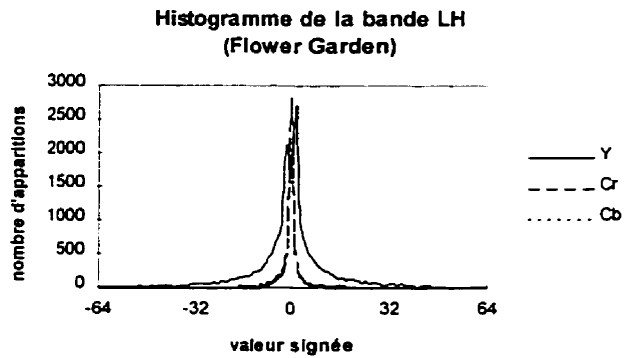
Nous avons utilisé le banc **R31** pour obtenir les quatre bandes du système rectangulaire (sur 8 bits) pour *Flower Garden*, dont les images¹⁰ et les histogrammes sont représentés à la figure 5.4. Cette séquence a été choisie car elle contient beaucoup de hautes fréquences. La bande LL est une représentation de la séquence originale à une résolution plus faible: elle possède un histogramme similaire à celui de l'image originale. Par contre, les autres bandes voient la distribution de leurs valeurs grandement diminuée, ce qui facilite la compression. Une simulation similaire a été effectuée pour le système en quinconce en utilisant le banc **E15x15**, comme le montre la figure 5.5. Ici aussi, la bande basse donne une bonne approximation de la séquence originale, alors que les bandes de

¹⁰ Afin de pouvoir distinguer les formes présentes dans les bandes de hautes fréquences, le contraste a été augmenté à l'impression. L'histogramme donne toutefois la vraie distribution des valeurs.

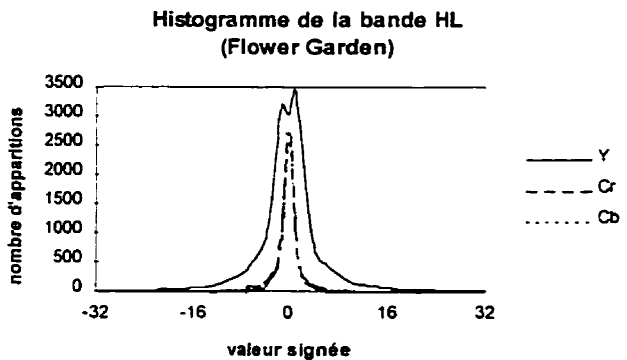
plus hautes fréquences voient leur gamme dynamique réduite. La bande H est illustrée en utilisant la technique présentée à l'annexe C qui sépare le treillis en deux réseaux rectangulaires décalés.



a) bande LL

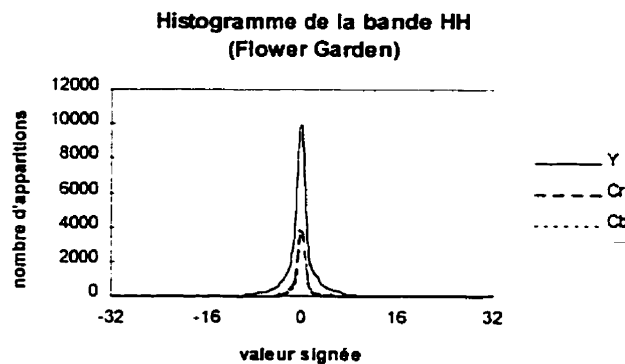


b) bande LH



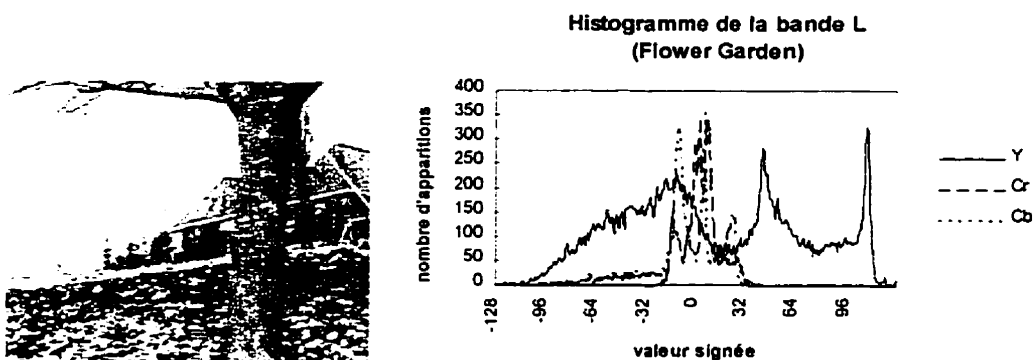
c) bande HL

Figure 5.4: Caractéristiques des bandes du système rectangulaire pour Flower Garden

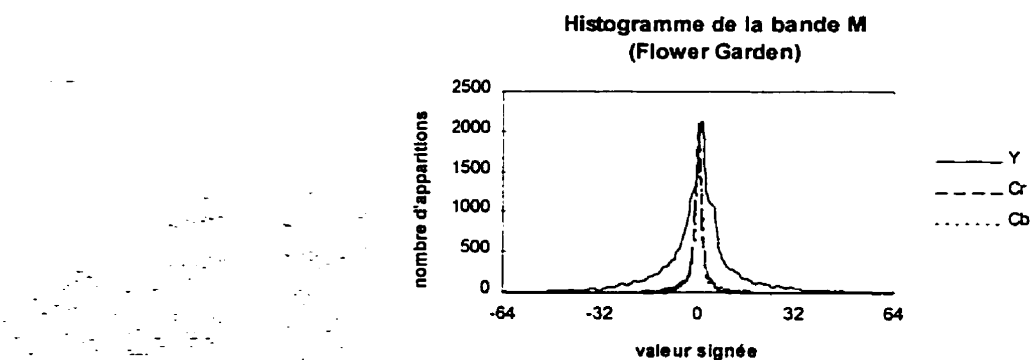


d) bande HH

Figure 5.4: Caractéristiques des bandes du système rectangulaire pour Flower Garden (suite)

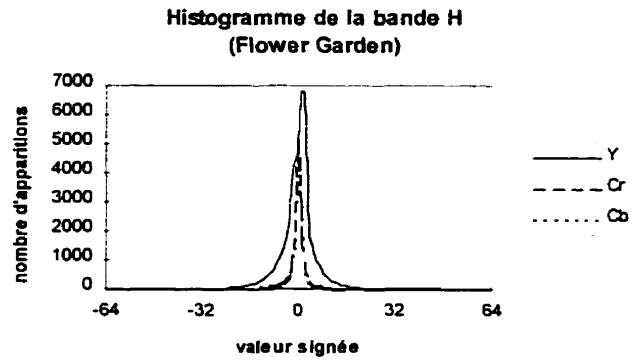


a) bande L



b) bande M

Figure 5.5: Caractéristiques des bandes du système en quinconce pour Flower Garden



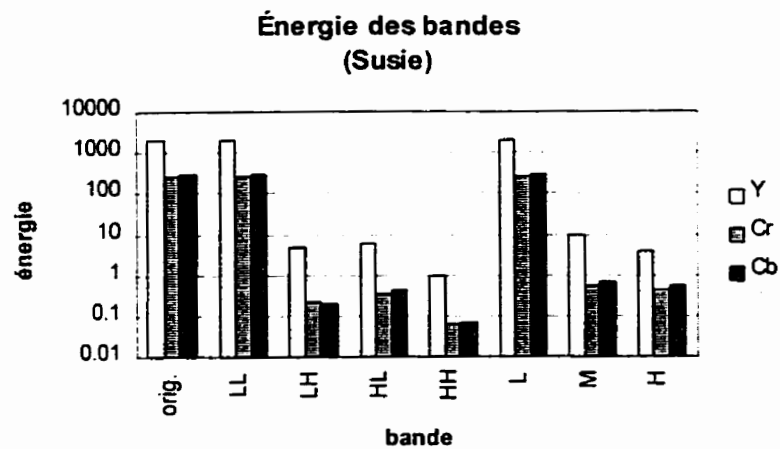
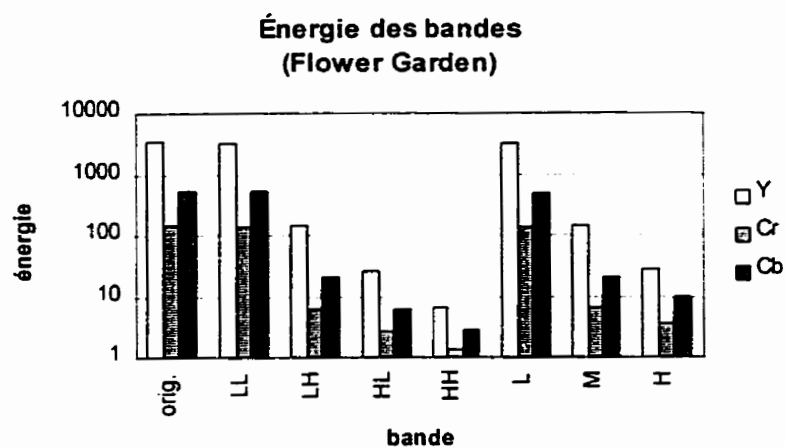
c) bande H

Figure 5.5: Caractéristiques des bandes du système en quinconce pour Flower Garden (suite)

Il est possible d'évaluer l'énergie contenue dans chacune des bandes à partir de l'histogramme. La valeur de l'énergie normalisée de la $k^{\text{ième}}$ bande est donnée par

$$\text{Énergie} = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} y_k^2[i, j] , \quad (5.2)$$

où $y_k[i, j]$ correspond à l'image de la bande considérée. Les résultats obtenus pour la première image de *Susie* et de *Flower Garden* en utilisant les bancs **R31** et **E15x15** se retrouvent à la figure 5.6. Ce sont la séquence originale et les bandes basses qui ont le plus d'énergie. Généralement, plus les fréquences sont élevées, plus l'énergie est faible.

a) *Susie*b) *Flower Garden*

**Figure 5.6: Énergie normalisée des bandes de fréquences
pour Susie et Flower Garden**

La quantité d'information présente dans chacune des bandes peut se mesurer l'aide de l'entropie définie par

$$\text{Entropie} = \sum_{k=0}^{K-1} -p_k \log_2(p_k) \quad (5.3)$$

avec K donnant le nombre total de valeurs disponibles pour représenter un pixel ($K=256$ pour 8 bits) et p_k sa probabilité d'apparition. Cette dernière équation correspond au minimum théorique du nombre de bits par pixel nécessaires pour représenter l'information contenue dans la bande de fréquences. L'entropie de la première image de *Susie* et de *Flower Garden* pour les différentes bandes de fréquences se retrouve à la figure 5.7.

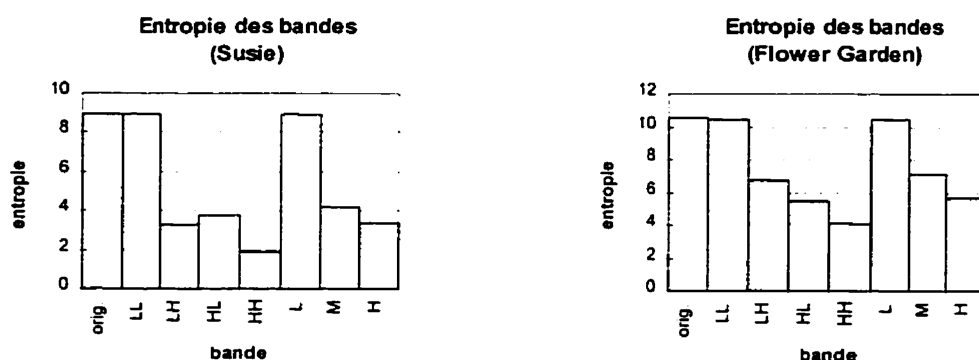
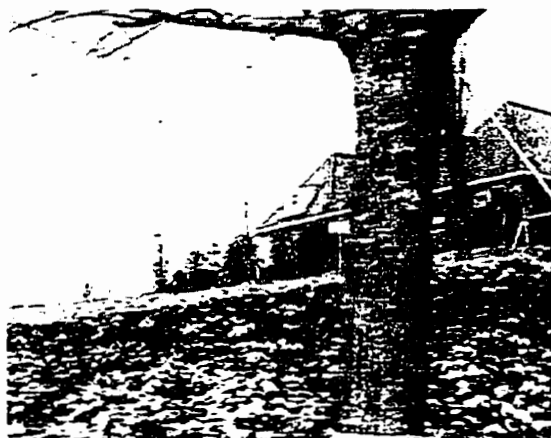


Figure 5.7: Entropie des bandes de fréquences pour *Susie* et *Flower Garden*

5.1.3 Reconstruction multirésolution

Le caractère multirésolution du signal peut être évalué en éliminant certaines bandes de fréquences lors de la reconstruction. Pour le système rectangulaire, cinq combinaisons sont possibles. Il existe toutefois une ambiguïté lorsqu'il faut jumeler une bande de plus hautes fréquences à la bande basse: faut-il prendre LH ou HL? Cette ambiguïté n'apparaît pas pour le système en quinconce car une bande de basses fréquences est complètement circonscrite par une bande de plus hautes fréquences. La reconstruction multirésolution

par 8 bits de *Flower Garden* avec les bancs **R31** et **E15x15** est illustrée à la figure 5.8. En terme de nombre de pixels utilisés, la combinaison L+M pour le treillis en quinconce équivaut à la combinaison LL+LH ou LL+HL.



a) réseau rectangulaire, toutes les bandes

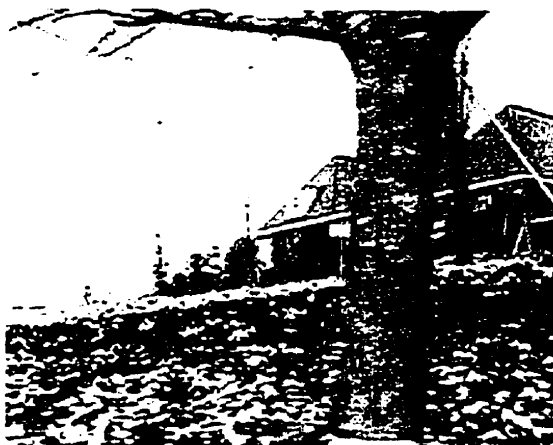


f) treillis en quinconce, toutes les bandes



b) réseau rectangulaire, LL+LH+HL

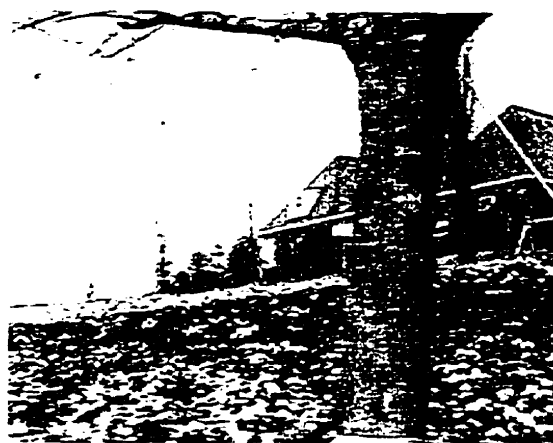
Figure 5.8: Reconstruction multirésolution de *Flower Garden*



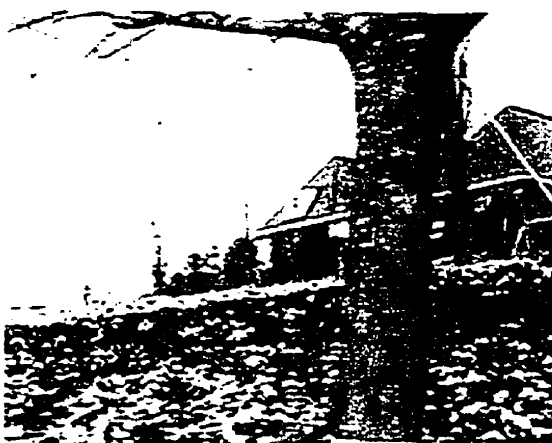
c) réseau rectangulaire, LL+HL



g) treillis en quinconce, L+M



d) réseau rectangulaire, LL+LH



e) réseau rectangulaire, LL



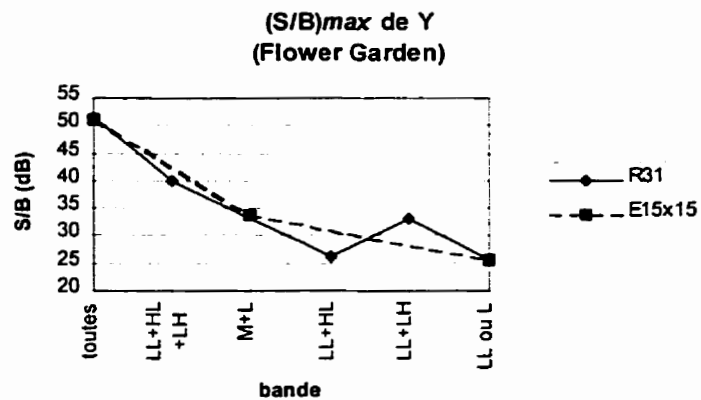
h) treillis en quinconce, L

Figure 5.8: Reconstruction multirésolution de Flower Garden (suite)

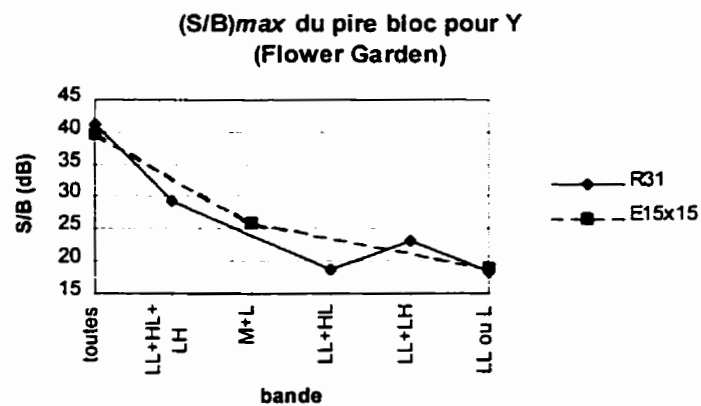
Pour comparer ces images, définissons le rapport signal à bruit maximal pour une représentation de 8 bits comme

$$(S/B)_{\max} = 10 \log \left(\frac{255^2}{EQM} \right) \quad (5.4)$$

où EQM est l'erreur quadratique moyenne donnée par (5.1). Les résultats obtenus pour *Flower Garden* sont représentés à la figure 5.9. Ce rapport signal à bruit est donné en dB.



a) *luminance*



b) *pire bloc de luminance (16x16)*

Figure 5.9: Rapport signal à bruit maximum pour Flower Garden

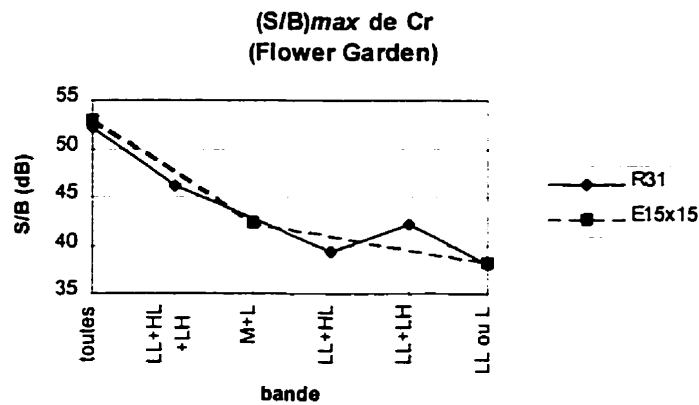
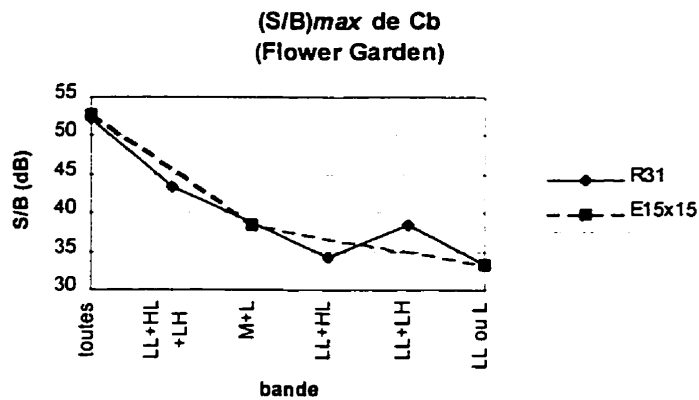
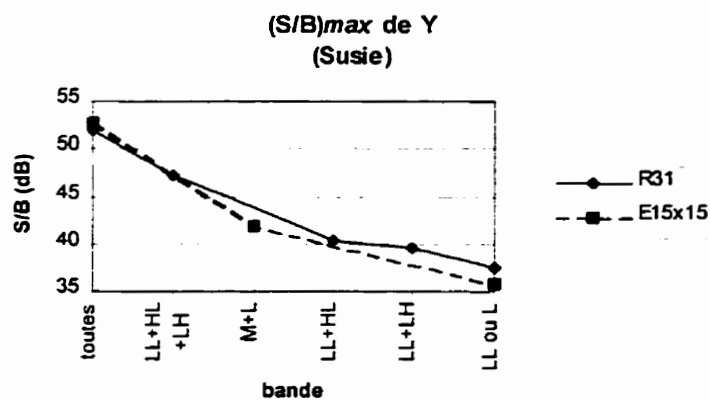
c) *chrominance rouge*d) *chrominance bleue*

Figure 5.9: Rapport signal à bruit maximum pour Flower Garden (suite)

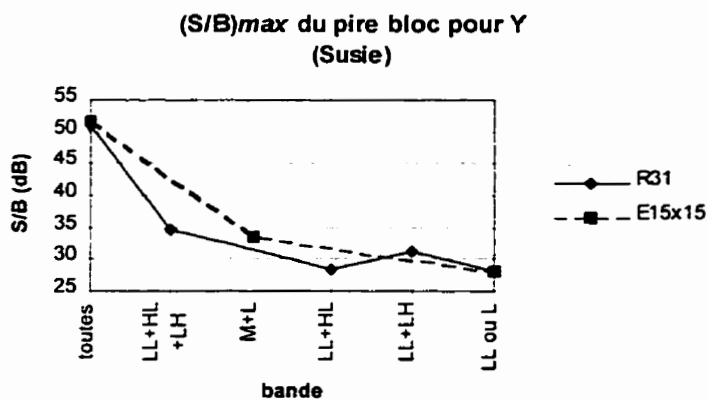
Ces graphiques montrent que la combinaison des bandes M et L du système en quinconce donne généralement des résultats supérieurs à n'importe quelle combinaison de deux bandes du système rectangulaire. Ce dernier résultat est particulièrement significatif pour les systèmes à faible débit où les hautes fréquences sont éliminées.

En comparant avec les résultats de la figure 5.10 obtenus pour la reconstruction multirésolution de *Susie*, l'ambiguïté dans l'ordre des combinaisons pour le système

rectangulaire devient apparente: pour *Flower Garden*, la combinaison LL+LH donne des résultats supérieurs alors que pour *Susie*, c'est LL+HL qui maximise le rapport signal à bruit.

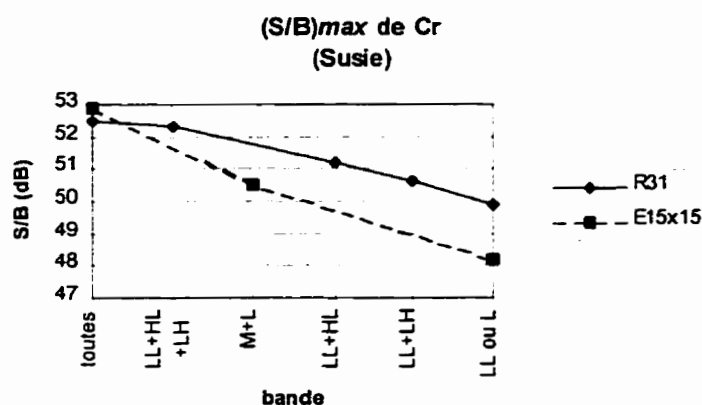


a) *luminance*

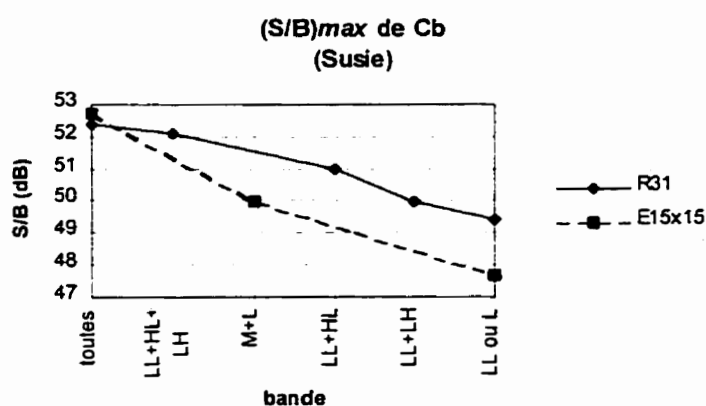


b) *pire bloc de luminance (16x16)*

Figure 5.10: Rapport signal à bruit maximum pour Susie



c) chrominance rouge



d) chrominance bleue

Figure 5.10: Rapport signal à bruit maximum pour Susie (suite)

5.2 Codage de la bande basse

La section précédente a validé la reconstruction quasi-parfaite, aussi bien pour le système rectangulaire que pour le système en quinconce. Dans cette section, nous utilisons les codeurs normalisés MPEG-2 et H.261 sur la bande de basses fréquences (obtenue en employant le banc **E15x15**) pour étudier la compression à faible débit des séquences vidéo. Dans un premier temps, seule cette bande comprimée de basses fréquences sert à l'obtention de la séquence originale. Par la suite, les bandes non-comprimées de hautes

fréquences sont ajoutées afin d'obtenir le plus grand gain de qualité possible. Dans ce travail, nous considérons qu'une séquence dont le débit total se situe entre 64 kbps et 768 kbps est dite "à faible débit"¹¹. Des travaux futurs devront être effectués afin de développer des techniques de compression adaptées aux caractéristiques des bandes de plus hautes fréquences. Mentionnons que la quantification vectorielle a été utilisée à cette fin avec succès pour les applications à faible débit, comme le montrent Podilchuk, Jayant et Farvardin (1995).

5.2.1 Caractéristiques de compression de la bande basse

Les 30 premières images de la bande de basses fréquences de *Susie* et de *Flower Garden* (en format QCIF) ont été comprimées à différents débits. Le codeur MPEG-2 est utilisé pour les débits supérieurs à 128 kbps, alors que le codeur H.261 sert pour les débits de 64 et de 128 kbps. La moyenne des rapports signal à bruit maximum après compression sur les 30 premières images pour chacune des trois composantes de couleur de la bande basse est présentée à la figure 5.11. Une séquence de vidéophonie comme *Susie* est bien adaptée à la compression à faible débit, alors qu'une séquence plus complexe comme *Flower Garden* demande un débit plus élevé.

¹¹ Le débit de la séquence CIF non-comprimée est de 36,5 Mbps. Les débits mentionnés ici sont uniquement ceux de la bande de basses fréquences, car elle seule est comprimée.

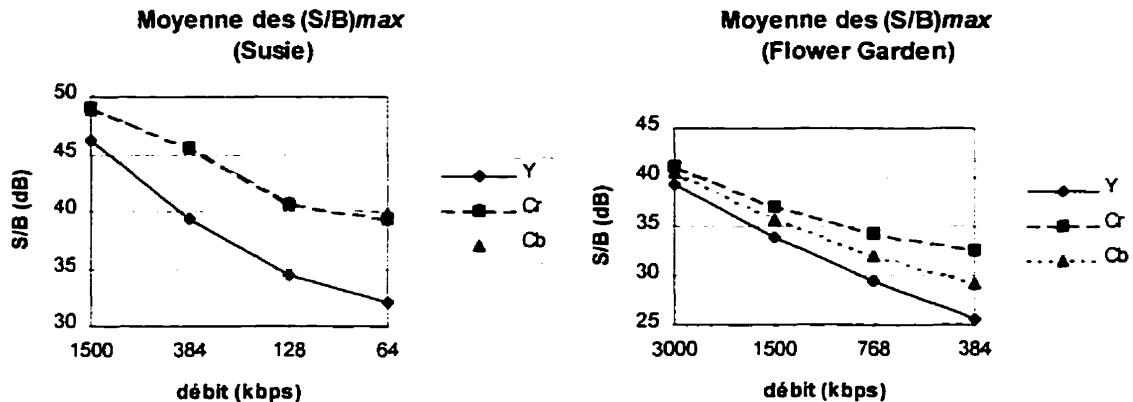


Figure 5.11: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour la bande basse de Susie et Flower Garden après compression

5.2.2 Reconstruction après décodage de la bande basse

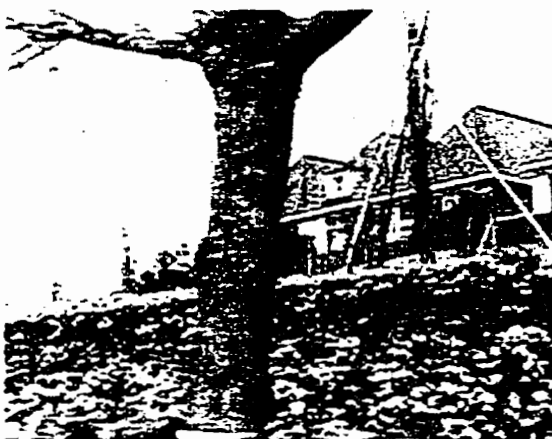
Cette sous-section compare l'effet de l'ajout des bandes de hautes fréquences sur la séquence reconstruite après encodage de la bande basse. La figure 5.12 illustre les résultats obtenus pour la 15^e image de la séquence *Flower Garden*. Les images de la colonne de gauche n'utilise que la bande L du système en quinconce pour la reconstruction, alors que celles de la colonne de droite se servent des trois bandes L, M et H. Les résultats obtenus pour le système rectangulaire sont à toutes fins pratiques identiques, car sa bande de basses fréquences couvre la même région fréquentielle que celle du système en quinconce.



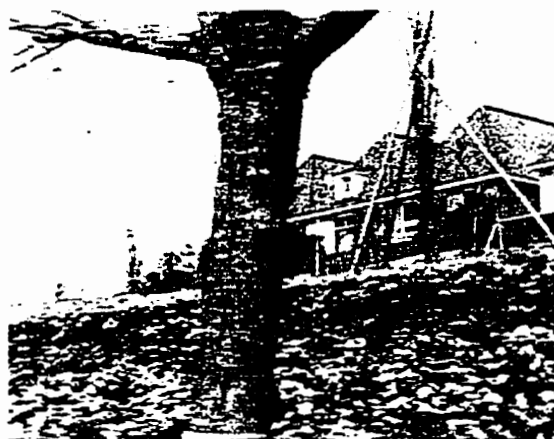
a) bande L, original



f) toutes les bandes, original



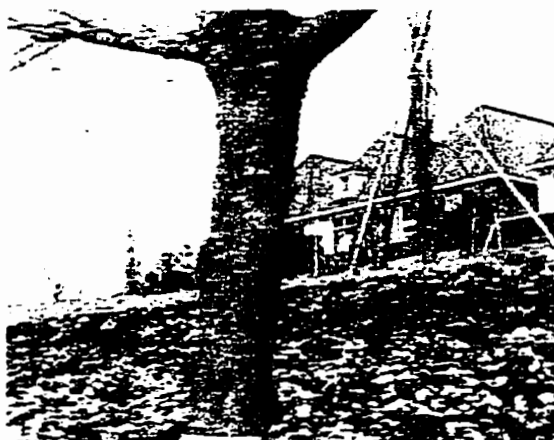
b) bande L, 3000 kbps



g) toutes les bandes, 3000 kbps



c) bande L, 1500 kbps



h) toutes les bandes, 1500 kbps

Figure 5.12: Reconstruction de la 15^e image de Flower Garden à différents débits

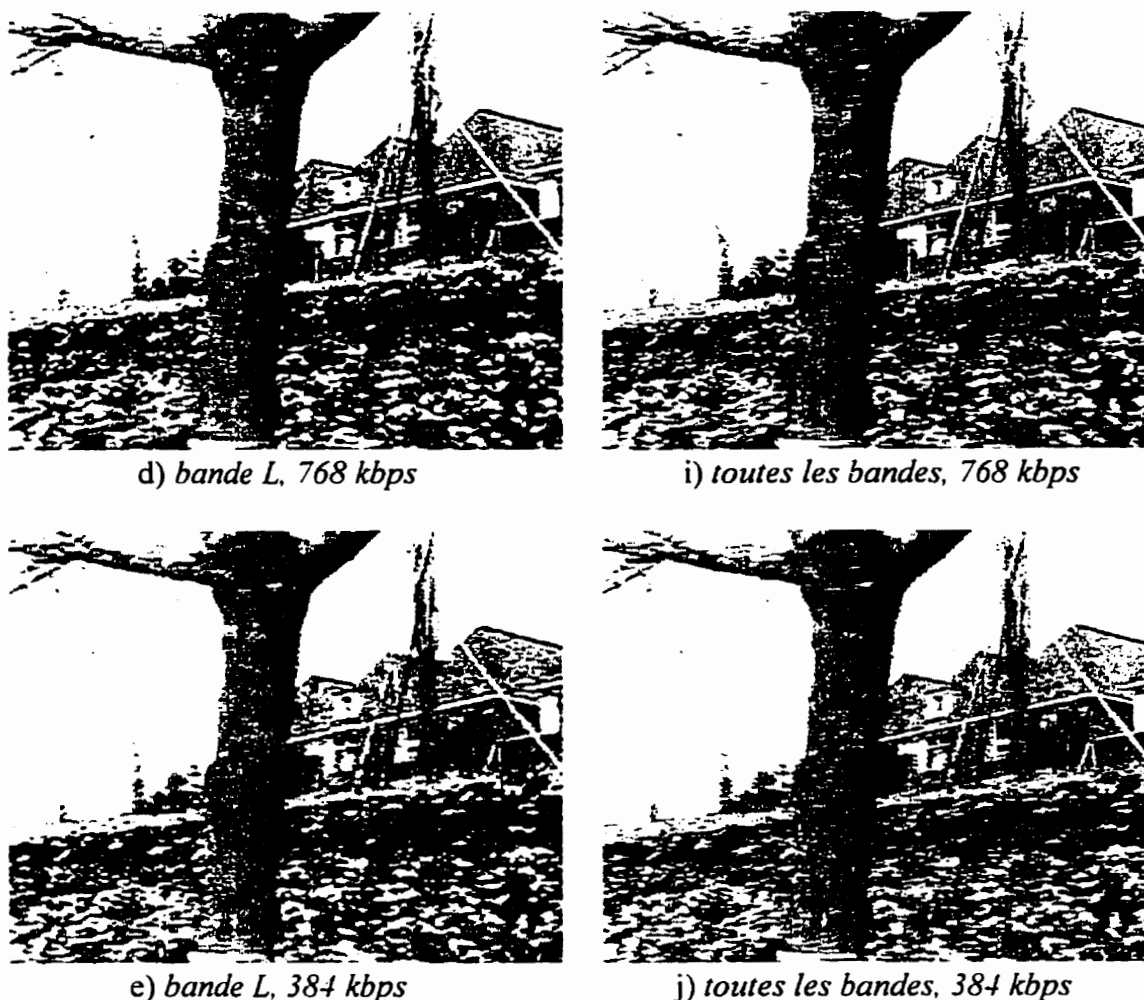


Figure 5.12: Reconstruction de la 15^e image de Flower Garden à différents débits (suite)

Lorsqu'on utilise seulement la bande L, les effets de Gibbs, qui apparaissent comme des images-fantômes, sont visibles près des discontinuités. La moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum est présentée à la figure 5.13. On constate que plus le débit est élevé, plus l'ajout des bandes de hautes fréquences améliore le niveau du rapport signal à bruit. Toutefois, pour de plus faibles débits, le gain de qualité diminue. Si l'on encode les bandes de plus hautes fréquences, le résultat obtenu devrait se retrouver entre les deux courbes qui sont les cas limites. C'est-à-dire que le résultat sera supérieur à celui

de la bande L seule, mais inférieur à celui où les bandes de plus hautes fréquences ne sont pas comprimées. Le tableau 5.3 présente l'évaluation subjective par l'auteur de la qualité de reconstruction de *Flower Garden* pour les séquences illustrées à la figure 5.12. Bien que cette évaluation ne suit pas la notation de la recommandation 500-1 du CCIR (*Method for the Subjective Assessment of the Quality of Television Pictures*), elle fait ressortir les principales dégradations présentes à chacun des débits.

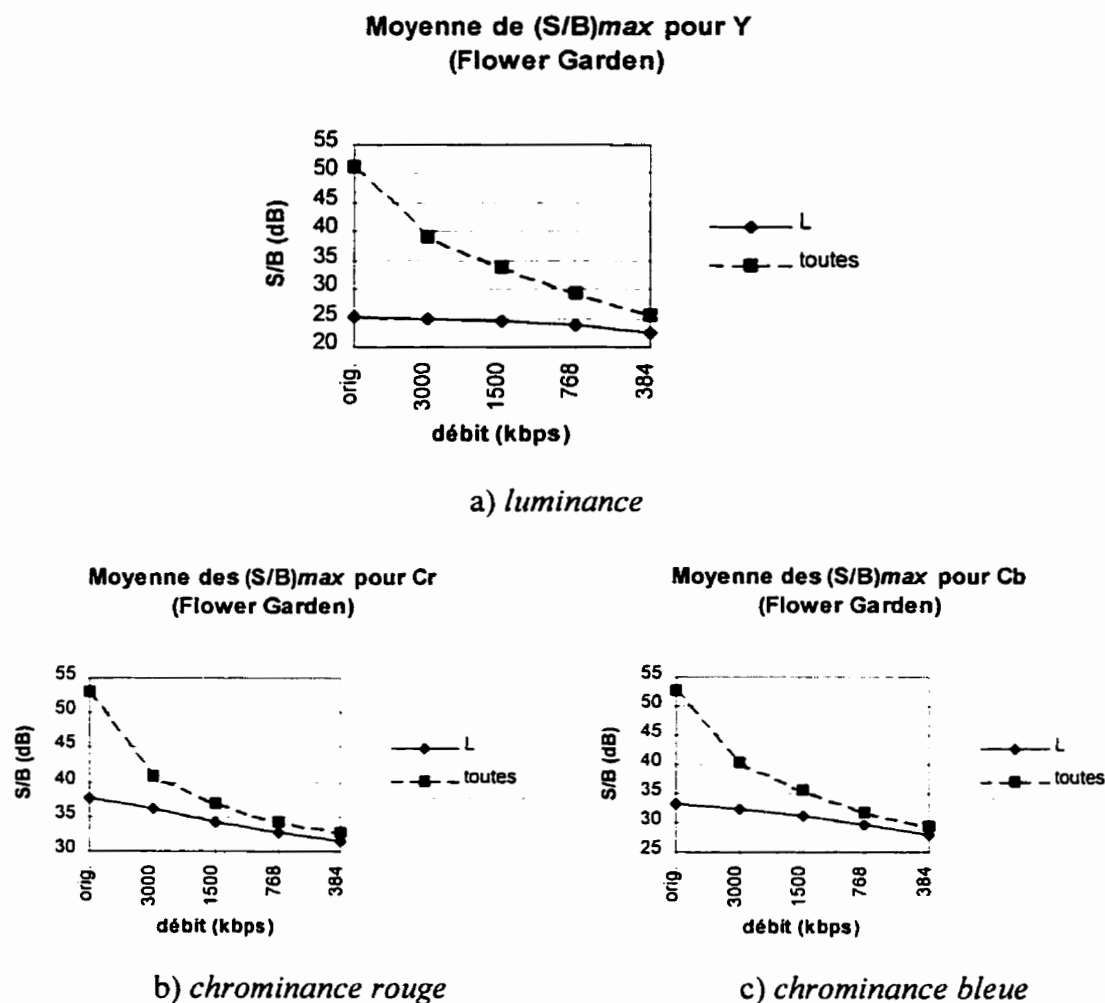


Figure 5.13: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour *Flower Garden*

*Tableau 5.3: Évaluation subjective de Flower Garden
pour différents débits de la bande L*

Débit de L (kbps)	Bande L	Toutes les bandes
original	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de Gibbs bien visibles dans les branches et sur la toiture. 	<ul style="list-style-type: none"> • Indiscernable de la séquence originale CIF.
3000	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de Gibbs; • Bruit de fond visible dans les branches et sur la toiture; • Adoucissement des contours de la maison. 	<ul style="list-style-type: none"> • Léger bruit de fond visible dans les branches.
1500	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de Gibbs; • Bruit de fond s'ajoute sur la maison et dans les fleurs. 	<ul style="list-style-type: none"> • Un peu plus de bruit de fond, particulièrement sur la maison.
768	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de Gibbs; • Bruit de fond très visible; • Pertes marquées dans les hautes fréquences; • À la limite de l'acceptable. 	<ul style="list-style-type: none"> • Bruit de fond visible un peu partout; • Adoucissement des contours.
384	<ul style="list-style-type: none"> • Très grandes pertes dans les hautes fréquences; • Difficulté à distinguer les branches; • Qualité inacceptable 	<ul style="list-style-type: none"> • Beaucoup de bruit de fond; • Effets de Gibbs visibles; • Qualité inacceptable.

Une simulation identique est effectuée pour *Susie*, dont les résultats pour la 16^e image se retrouvent à la figure 5.14.



a) bande L, original



f) toutes les bandes, original



b) bande L, 1500 kbps



g) toutes les bandes, 1500 kbps



c) bande L, 384 kbps



h) toutes les bandes, 384 kbps

Figure 5.14: Reconstruction de la 16^e image de Susie à différents débits



d) bande L, 128 kbps



i) toutes les bandes, 128 kbps



e) bande L, 64 kbps



j) toutes les bandes, 64 kbps

Figure 5.14: Reconstruction de la 16^e image de Susie à différents débits (suite)

Ici aussi, plus le débit diminue, moins les bandes de hautes fréquences améliorent la qualité de la séquence restituée, comme le montre la figure 5.15. La moyenne des rapports signal à bruit maximum est effectuée sur les 30 premières images de la séquence.

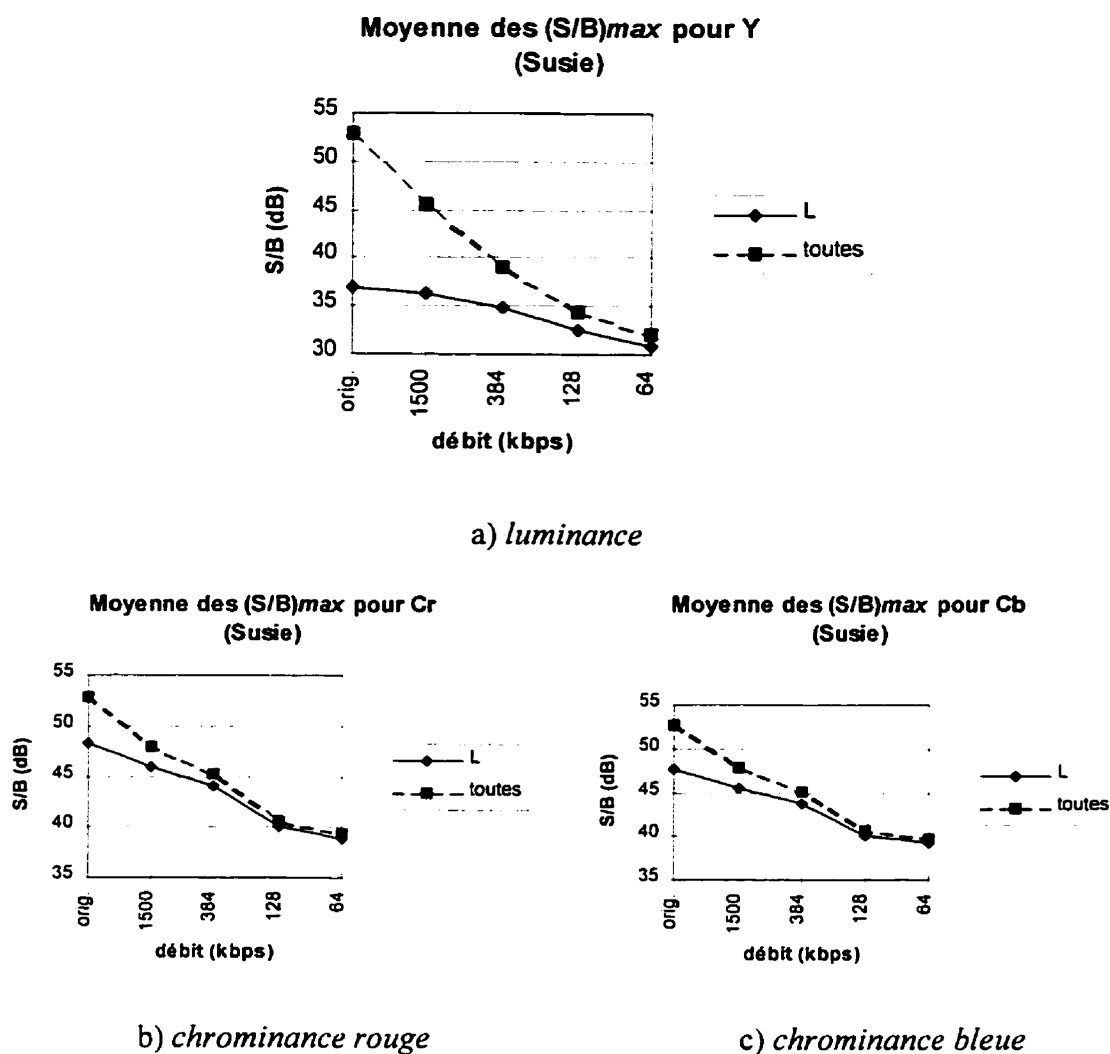


Figure 5.15: Moyenne sur 30 images des rapports signal à bruit maximum pour Susie

Le tableau 5.4 donne une évaluation subjective de la reconstruction de Susie pour les différents débits illustrés à la figure 5.14. Lorsque les effets de blocs deviennent visibles, l'ajout des hautes fréquences n'améliore pas la qualité de la séquence.

Tableau 5.4: Évaluation subjective de Susie pour différents débits de la bande L

Débit de L (kbps)	Bande L	Toutes les bandes
original	<ul style="list-style-type: none"> • Légers effets de Gibbs. 	<ul style="list-style-type: none"> • Impossible de distinguer de la séquence originale CIF.
1500	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de Gibbs près du téléphone; • Distorsions très peu visibles; • Léger adoucissement des contours. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pratiquement impossible de distinguer de la séquence originale CIF.
384	<ul style="list-style-type: none"> • Bruit de fond dans les régions de détails; • Effets de Gibbs plus visibles; 	<ul style="list-style-type: none"> • Présence de bruit de fond;
128	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de blocs très visibles; • Régions de hautes fréquences floues; • Bruit de fond plus important; • Qualité inacceptable. 	<ul style="list-style-type: none"> • Qualité semblable à celle de la bande L seule.
64	<ul style="list-style-type: none"> • Effets de blocs trop visibles; • Présence d'un quadrillage dans l'image; • Qualité inacceptable. 	<ul style="list-style-type: none"> • Qualité semblable à celle de la bande L seule.

5.3 Discussion

Les caractéristiques d'une décomposition multirésolution idéale sont énoncées à la section 1.5. Tout d'abord, elle doit permettre une reconstruction parfaite ou quasi-parfaite du signal d'entrée. Les deux systèmes considérés respectent cette contrainte, même aux frontières des images formant la séquence, en minimisant l'erreur de reconstruction maximale du banc de filtres. Il s'agit donc, dans les deux cas, de reconstruction quasi-parfaite. Les simulations montrent que, pour un nombre suffisant de bits par composante de couleur, l'erreur de reconstruction du banc de filtres est le seul facteur limitant la

qualité de la restitution. Par contre, l'erreur d'arrondi prend une importance plus grande lorsque le nombre de bits utilisés pour la représentation est moindre. Ainsi, pour le codage à faible débit, on peut généralement négliger l'erreur de reconstruction face à l'erreur d'arrondi. La conception des filtres doit donc accorder une importance plus grande à l'élimination du recouvrement spectral, au détriment de l'erreur de reconstruction. Ce point est illustré à la sous-section 5.1.1 en comparant les bancs **M15x15** et **E15x15**.

Nous avons remarqué, au cours des simulations, qu'il est préférable de ne pas inclure un bit de retenue car très peu de valeurs débordent de l'intervalle permis. Ce bit est mieux investi lorsqu'il est employé comme "bit le moins significatif". Il est alors utilisé par l'ensemble des pixels. Contrairement à ce qui est suggéré par (2.13), il vaut mieux se servir de valeurs avec signe pour toutes les composantes de couleur (incluant la luminance) puisque les coefficients de la réponse à l'impulsion des filtres ont une représentation avec signe¹².

Nous avons démontré, en utilisant une extension symétrique du signal, qu'il est possible d'éliminer complètement l'effet des frontières sur la reconstruction, et ce pour les deux systèmes. De plus, ce type d'extension assure la continuité du signal. Les simulations confirment qu'il n'y a pas de hautes fréquences artificielles introduites lors du filtrage aux frontières, comme l'indiquent les histogrammes des figures 5.4 et 5.5. Les bancs de filtres considérés conservent le nombre de pixels nécessaires à la représentation de l'information car ils travaillent en échantillonnage critique (le signal d'entrée est divisé en deux bandes

¹² Le produit d'une quantité avec signe par une quantité sans signe donne un résultat avec signe.

ayant chacune la moitié des échantillons). Les simulations montrent que la bande de basses fréquences est une représentation à une plus faible résolution de la séquence et qu'elle ne contient pas de déphasage, ce qui respecte les contraintes d'un système de décomposition multirésolution énoncées à la section 1.5.

La complexité de calculs du système en quinconce se trouve diminuée au niveau des multiplications par la symétrie octale des filtres d'analyse et de synthèse. Elle demeure toutefois supérieure à celle du système rectangulaire. En considérant un filtre unidimensionnel possédant K_r coefficients indépendants pour le système rectangulaire et un filtre à symétrie octale ayant un support de $2K_q-1$ par $2K_q-1$ coefficients pour le système en quinconce, les facteurs d'augmentation de complexité χ_m et χ_a pour passer du système rectangulaire au système en quinconce sont les suivants. Ils utilisent les résultats des sections 3.5 et 4.4.

$$\text{Pour les multiplications:} \quad \chi_m = 0,75 \frac{\sum_{k=1}^{K_q} k}{K_r} \quad (5.5)$$

$$\text{Pour les additions:} \quad \chi_a = 1,5 \frac{K_q^2 - K_q}{K_r - 1} \quad (5.6)$$

En considérant les filtres que nous avons utilisés lors des simulations ($K_r=16$ et $K_q=8$), nous obtenons un facteur d'augmentation de complexité de 1,7 pour les multiplications et de 5,6 pour les additions. Il faut tenir compte du fait qu'une opération de multiplication est généralement plus complexe qu'une opération d'addition lors de la réalisation d'un système.

Dans le cas du système en quinconce, nous avons montré que la reconstruction multirésolution n'engendre aucune ambiguïté quant à la bande à ajouter, ce qui n'est pas le cas pour le système rectangulaire. De plus, la combinaison des bandes L et M du système en quinconce permet de tenir compte des caractéristiques des images naturelles, de même que des propriétés du système visuel humain. Cette combinaison donne généralement des résultats supérieurs à n'importe quelle combinaison de deux bandes du système rectangulaire. Cette conclusion ressort clairement lorsqu'on compare les rapports signal à bruit maximum des pires blocs de luminance de 16 par 16 pixels, comme c'est fait aux figures 5.9 et 5.10 et aux tableaux E.6 à E.9. On peut considérer cet ensemble de blocs comme une population d'images (au sens statistique) ayant des caractéristiques fréquentielles et directionnelles variées. Il faut noter que l'évaluation du rapport signal à bruit maximal ne tient pas compte des propriétés du système visuel humain. Le gain de qualité perçu est donc légèrement supérieur pour le système en quinconce. Toutefois, le rapport signal à bruit maximal pour une combinaison de deux bandes dépend fortement des caractéristiques directionnelles de la séquence considérée. Une séquence particulière contenant beaucoup de fréquences verticales ou horizontales est mieux représentée en utilisant une combinaison appropriée de bandes du système rectangulaire. Mais en moyenne, le système en quinconce donne des résultats supérieurs.

Prenant en considération les résultats précédents, nous jugeons que l'augmentation de complexité dans les calculs pour le système en quinconce est largement compensée par les avantages inhérents à son utilisation lorsque les hautes fréquences sont éliminées, ce qui est le cas pour les systèmes à faible débit.

Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence l'utilisation de bancs de filtres pour effectuer une décomposition multirésolution du signal vidéo. Deux cas ont été étudiés: un système rectangulaire et un système en quinconce. Pour les deux, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir une reconstruction quasi-parfaite du signal. La qualité de la reconstruction est limitée par deux types d'erreur, soit l'erreur de reconstruction du banc de filtres et l'erreur d'arrondi introduite dans chacune des bandes. Pour un système à faible débit, l'erreur de reconstruction peut être négligée face à l'erreur d'arrondi, car le nombre de bits disponibles pour représenter l'information est très limité. Pour éliminer les problèmes de filtrage aux frontières des images formant la séquence et permettre la reconstruction quasi-parfaite pour l'ensemble du support des images, nous avons suggéré une technique basée sur l'extension symétrique du signal. Cette méthode est simple à réaliser, elle n'introduit pas de hautes fréquences artificielles et elle ne nécessite que l'utilisation de filtres à phase nulle. Aucun décalage n'est alors introduit, que ce soit dans la séquence reconstruite ou dans la bande de basses fréquences.

Le système en quinconce possède plusieurs avantages sur le système rectangulaire. Tout d'abord, le caractère multirésolution du système en quinconce est mieux défini car une bande de basses fréquences est toujours circonscrite par une bande de plus hautes fréquences. De plus, chaque étage de décomposition du système en quinconce amène la division de l'image en un nombre minimum de bandes de fréquences, soit deux. Pour le système rectangulaire, la décomposition bidimensionnelle sur chaque étage produit quatre

bandes de fréquences. Finalement, lorsque la bande de hautes fréquences est éliminée (ce qui est généralement le cas pour les systèmes à faible débit), le système en quinconce conduit à l'échantillonnage sur un treillis en quinconce qui tient compte des caractéristiques des images naturelles et des propriétés du système visuel humain. Le principal désavantage du système en quinconce relativement au système rectangulaire est l'augmentation de la complexité pour les calculs. L'augmentation du nombre de multiplications est moins marquée que celle du nombre d'additions grâce aux nombreuses symétries présentes dans la réponse à l'impulsion des filtres à symétrie octale. Considérant la puissance de calculs des processeurs spécialisés et des architectures dédiées au traitement numérique des signaux, cette augmentation de complexité devient un facteur moins important face aux avantages du système en quinconce pour la décomposition multirésolution.

Des travaux futurs devront s'intéresser à la conception de codeurs de bande adaptés aux caractéristiques fréquentielles et directionnelles des différentes bandes de fréquences. La quantification vectorielle a souvent été utilisée à cette fin pour des systèmes rectangulaires. Ces codeurs devront également intégrer un mécanisme pour tenir compte de la redondance selon l'axe temporel, que ce soit par estimation de mouvement, par décomposition tridimensionnelle en bandes de fréquences ou autrement. De plus, il faudra analyser l'influence du nombre d'étages dans la section de décomposition sur la qualité de la reconstruction. Toutefois, plus le nombre d'étages est grand, plus l'influence des erreurs d'arrondi se fait sentir lors de la reconstruction. Les deux systèmes que nous avons considérés utilisent une décomposition à plusieurs étages pour diviser le plan des

fréquences. Cette cascade d'étages augmente le délai du système car les opérations d'un étage donné nécessitent les résultats de l'étage précédent. On pourrait s'intéresser à un système décomposant le plan des fréquences en un nombre donné de bandes en un seul étage. Cela permettrait d'augmenter le parallélisme lors des calculs, et ainsi de diminuer le délai. L'utilisation de filtres ayant des réponses à l'impulsion infinies pourrait également être considérée.

Références

AHMED, N., NATARAJAN, T. et RAO, K.R., *Discrete Cosine Transform*, IEEE Transactions on Computers, vol. C-23, no. 1, pp. 90-93, Janvier 1974.

BAMBERGER, R.H., EDDINS, S.L. et NURI, V., *Generalized Symmetric Extension for Size-Limited Multirate Filter Banks*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 3, no. 1, pp. 82-87, Janvier 1994.

CCIR, *Method for the Subjective Assessment of the Quality of Television Pictures*, Rec. 500-1, 1978.

CCIR, *Encoding Parameters of Digital Television for Studios*, Rec. 601-1, 1986.

CHALLAPALI, K., LEBEGUE, X., LIM, J.S., PAIK, W.H., SAINT GIRONS, R., PETAJAN, E., SATHE, V., SNOPKO, P.A., et ZDEPSKI, J., *The Grand Alliance System for US HDTV*, Proceedings of the IEEE, vol. 83, no. 2, pp. 158-174, Février 1995.

COSMAN, P.C., OEHLER, K.L., RISKIN, E.A. et GRAY, R.M., *Using Vector Quantization for Image Processing*, Proceedings of the IEEE, vol. 81, no. 9, pp. 1326-1340, Septembre 1993.

CROISIER, A., ESTEBAN, D. et GALAND, C., *Perfect Channel Splitting by Use of Interpolation/Decimation/Tree Decomposition Techniques*, Proceedings of the 1976 IEEE International Conference on Information, Science and Systems, Patras, Grèce, pp. 443-446, Août 1976.

DUBOIS, E., *The Sampling and Reconstruction of Time-Varying Imagery with Application in Video Systems*, Proceedings of the IEEE, vol. 73, no. 4, pp. 502-522, Avril 1985.

FORCHHEIMER, R. et KRONANDER, T., *Image Coding - From Waveforms to Animation*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 37, no. 12, pp. 2008-2023, Décembre 1989.

GLENN, W.E., *Digital Image Compression Based on Visual Perception and Scene Properties*, SMPTE Journal, pp. 392-397, Mai 1993.

GRAY, R.M., *Vector Quantization*, IEEE ASSP Magazine, vol. 1, no. 2, pp. 4-29, Avril 1984.

KARLSSON, G. et VETTERLI, M., *Extension of Finite Length Signals for Sub-band Coding*, Signal Processing, vol. 17, no. 2, pp. 161-168, Juin 1989.

LEGALL, D., *MPEG: A Video Compression Standard for Multimedia Applications*, Communications of the ACM, vol. 34, no. 4, pp. 46-58, Avril 1991.

LIOU, M., *Overview of the px64 kbit/s Video Coding Standard*, Communications of the ACM, vol. 34, no. 4, pp. 59-63, Avril 1991.

MALLAT, S.G., *Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing vol. 37, no. 12, pp. 2091-2110, Décembre 1989.

MCCLELLAN, J.H., *The Design of Two-Dimensional Digital Filters by Transformations*, Proceedings of the Seventh Annual Princeton Conf. Inf. Sci. and Syst., pp. 247-251, 1973.

MERSEREAU, R.M., et SPEAKE, T.C., *The Processing of Periodically Sampled Multidimensional Signals*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 31, no. 1, pp. 188-194, Février 1983.

MUSMANN, H.G., PIRSCH, P. et GRALLERT, H.-J., *Advances in Picture Coding*, Proceedings of the IEEE, vol. 73, no. 4, pp. 523-548, Avril 1985.

NETRAVALI, A.N. et HASKELL, B.G., **Digital Pictures: Representation and Compression**, Plenum Press, 1988, 586 p.

PENNEBAKER, W.B., et MITCHELL, J.L., **JPEG Still Image Data Compression Standard**, Van Nostrand Reinhold, 1993, 638 p.

PETERSON, D.P. et MIDDLETON, D., *Sampling and Reconstruction of Wave-Number-Limited Functions in N-Dimensional Euclidian Spaces*, Information and Control, vol. 5, pp. 279-323, 1962.

PODILCHUK, C.I., JAYANT, N.S. et FARVARDIN, N., *Three-Dimensional Subband Coding of Video*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 4, no. 2, pp. 125-139, Février 1995.

PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. et FLANNERY, B.P., **Numerical Recipes in C**, Deuxième édition, Cambridge University Press, 1992, 994 p.

RABINER, L.R., GOLD, B., et MCGONEGAL, C.A., *An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters*, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. 18, no. 2, pp. 83-106, Juin 1970.

RADECKI, J., KONRAD, J. et DUBOIS, E., *A Comparison of Simulated Annealing and N-Step Newton Methods for Designing 1-D and 2-D Finite Wordlength FIR Filters*, publication de l'INRS-Télécommunication, Verdun, Québec. 1992.

SCHÄFER, R. et SIKORA, T., *Digital Video Coding Standards and Their Role in Video Communications*, Proceedings of the IEEE, vol. 83, no. 6, pp. 907-924, Juin 1995.

SIMONCELLI, E.P., **Orthogonal Sub-band Image Transforms**, Mémoire de maîtrise, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachussets. Mai 1988.

SIMONCELLI, E.P. et ADELSON, E.H., *Non-Separable Extensions of Quadrature Mirror Filters to Multiple Dimensions*, Proceedings of the IEEE, vol. 78, no. 4, pp. 652-663, Avril 1990.

SMITH, M.J.T. et BARNWELL, T.J., *Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 34, no. 3, pp. 434-441, Juin 1986.

VAIDYANATHAN, P.P., *Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect-Reconstruction Techniques*, IEEE ASSP Magazine, vol. 4, pp. 4-20, Juillet 1987.

VAIDYANATHAN, P.P., *Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial*, Proceeding of the IEEE, vol. 78, no. 1, pp. 56-93, Janvier 1990.

WALLACE, G.K., *The JPEG Still Picture Compression Standard*, Communications of the ACM, vol. 34, no. 4, pp. 30-44, Avril 1991.

Annexes

Annexe A: Normes de compression

Cette annexe présente une brève description du fonctionnement de différents algorithmes normalisés pour la compression des images et du signal vidéo. Une vue d'ensemble du rôle de ces différentes normes est présentée par Schäfer et Sikora (1995).

A.1 JPEG

JPEG est l'acronyme de "*Joint Photographic Experts Group*". C'est une norme de compression pour les images à tons continus, qu'elles soient en couleur ou en tons de gris. Il propose un mode avec perte offrant un haut taux de compression (environ 20) et une qualité d'image allant de très bonne à excellente, de même qu'un mode sans perte d'information permettant une reconstruction exacte. Il possède un modèle d'image basé sur la transformation en cosinus utilisant des blocs de 8 par 8 pixels. Lors de la quantification, la priorité est accordée aux coefficients de basses fréquences. Les coefficients DC sont encodés en DPCM, alors que les coefficients AC sont ordonnés en "zigzag" afin de positionner les basses fréquences en début de séquence, tel qu'illustré à la figure A.1. Ce mécanisme facilite le codage par plages (*run-length coding*) qui suivra, car les coefficients de hautes fréquences sont plus susceptibles d'être nuls (après quantification). Le mode de compression sans perte est de type prédictif. L'encodeur peut choisir parmi huit prédictions qui sont de simples combinaisons linéaires des trois pixels voisins en haut et à gauche du pixel courant. Ce mode permet des niveaux de

compression d'environ deux pour un pour les images en couleur. De plus amples informations se retrouvent dans le livre de Pennebaker et Mitchell (1993), de même que dans l'article de Wallace (1991).

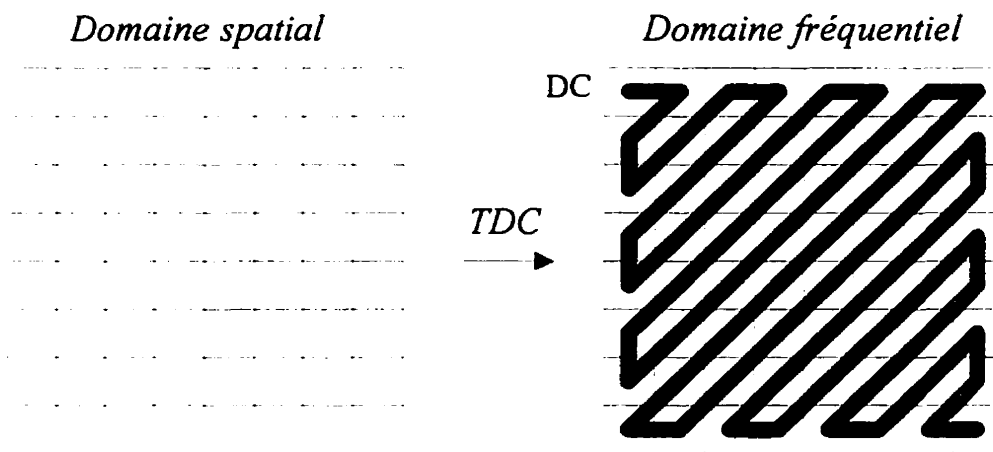


Figure A.1: Séquence en zigzag des coefficients

A.2 H.261 (px64)

Cette norme s'intéresse aux systèmes de vidéophonie et de vidéoconférence. Elle doit pouvoir travailler en temps réel à des débits multiples de 64 kbps (d'où la terminologie px64) avec un délai inférieur à 150 ms. Le format d'entrée est le CIF ou le QCIF. Cette norme utilise à la fois le codage intra-trame pour éliminer la redondance dans le plan spatial, et le codage inter-trame pour la redondance temporelle. Elle est composée d'un codeur hybride utilisant la transformation en cosinus et le DPCM en combinaison avec un algorithme d'estimation de mouvement. Dans le mode intra-trame, l'encodeur DPCM n'est pas opérationnel et la TDC s'effectue sur des blocs de 8 par 8 pixels qui sont alors quantifiés linéairement. Pour des blocs de type inter-trame, la prédiction est générée en

utilisant l'estimation de mouvement pour le bloc en question. Si la différence entre le bloc courant et le bloc équivalent de l'image précédente est inférieure à un seuil prédéterminé, seul le vecteur de déplacement est encodé. Sinon on doit lui ajouter un bloc d'erreur de prédiction qui est lui-même encodé par la TDC. Ce système est brièvement expliqué par Liou (1991).

A.3 MPEG

La norme MPEG (*Moving Picture Experts Group*) se divise en 3 phases, chacune reliée à un type particulier d'applications. C'est certainement le comité qui attire le plus d'attention au niveau de la compression vidéo, car l'ensemble de ces 3 phases couvre la majorité des domaines de la vidéo numérique pour les applications commerciales. La première, MPEG-1 (*Coding of moving pictures and associated audio at up to about 1.5 Mbit/s*), touche la compression du signal vidéo pour l'entreposage sur un médium comme le CD-ROM, à des débits d'environ 1,5 Mbps. La seconde phase (MPEG-2, *Generic coding of moving pictures and associated audio*) se concentre sur le codage vidéo de haute qualité (5-20 Mbps), incluant les séquences entrelacées et la télévision haute-définition¹³. Finalement, MPEG-4 est dirigé vers le codage vidéo à très faible débit (inférieur à 64 kbps), et il devrait atteindre le statut de norme internationale vers la fin de 1998.

Les techniques utilisées par MPEG-1 sont basées sur la transformation en cosinus avec estimation de mouvement. La TDC s'effectue sur des blocs de 8 par 8 pixels alors que

¹³ Pour plus d'informations sur la télévision haute-définition, voir Challapali *et al.* (1995).

l'information relative à l'estimation de mouvement concerne des "macroblochs" de 16 par 16 pixels. Pour permettre un haut niveau de compression, trois types d'images sont considérés: intra-image (I), prédiction unidirectionnelle (P) et prédiction bidirectionnelle (B). Une image de type I possède en elle-même toute l'information nécessaire à sa décompression. Elle ne fait pas appel à l'estimation de mouvement et utilise un algorithme de compression semblable à JPEG. Pour augmenter le niveau de compression, l'image de type P utilise des vecteurs de déplacement de l'image I ou P précédente. Finalement, un meilleur taux de compression peut être atteint par le type d'image B en utilisant des vecteurs de déplacement à la fois d'une image passée et d'une image future. Ces relations sont illustrées à la figure A.2. La norme définit un groupe d'images (GOP, *group of pictures*) caractérisé par 2 paramètres: N et M . Le premier correspond au nombre d'images dans un GOP, alors que M indique la fréquence des images de type I et P. Par exemple, pour la figure A.2, nous retrouvons $N=8$ et $M=4$. Il n'y a qu'une seule image I par GOP.

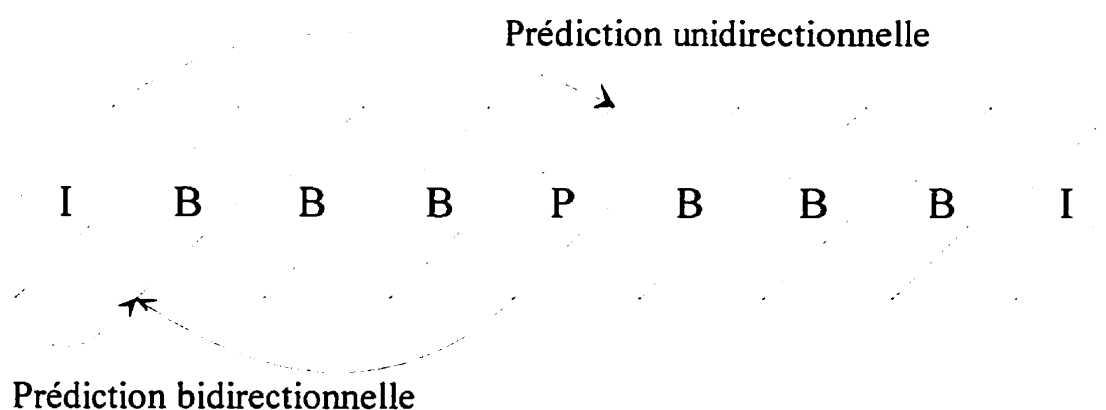


Figure A.2: Codage inter-image

Les vecteurs de déplacement sont obtenus par des techniques de concordance de blocs. Le cas de réduction de redondance spatiale est sensiblement le même que pour JPEG (voir figure A.1). Un résumé de l'effort déployé pour arriver à MPEG-1 est présenté par LeGall (1991). MPEG-2 offre les mêmes fonctions, mais il permet également de travailler avec des séquences entrelacées, et il donne plus de flexibilité au niveau du sous-échantillonnage de la chrominance.

Annexe B: Coefficients des filtres

Cette annexe donne les coefficients des différents filtres conçus pour les systèmes rectangulaire et en quinconce.

a) **E31**: Filtre unidimensionnel à phase nulle de 31 coefficients généré par échantillonnage en fréquence.

Tableau B.1: Coefficients de E31

h[0]	5.178583245E-01	h[±8]	1.475918132E-02
h[±1]	3.163439328E-01	h[±9]	1.897938749E-02
h[±2]	-1.767742201E-02	h[±10]	-1.282262045E-02
h[±3]	-1.002507223E-01	h[±11]	-9.640891838E-03
h[±4]	1.712479004E-02	h[±12]	1.026418106E-02
h[±5]	5.405778187E-02	h[±13]	2.659808235E-03
h[±6]	-1.616917175E-02	h[±14]	-6.958685116E-03
h[±7]	-3.233344786E-02	h[±15]	2.734988031E-03

b) **R31**: Filtre unidimensionnel à phase nulle de 31 coefficients généré par recuit simulé.

Les coefficients ont une représentation sur 16 bits. Cette dernière est donnée à la suite en nombre hexadécimal. Le bit le plus significatif indique le signe et les 15 autres bits sont les coefficients allant de 2^{-1} jusqu'à 2^{-15} (où 2^{-15} correspond au bit le moins significatif).

Tableau B.2: Coefficients de R31

$h[0]$	5.3817749023E-01 (44E3h)	$h[\pm 8]$	1.3824462891E-02 (01C5h)
$h[\pm 1]$	3.0758666992E-01 (275Fh)	$h[\pm 9]$	1.3427734375E-03 (002Ch)
$h[\pm 2]$	-3.1677246094E-02 (840Eh)	$h[\pm 10]$	2.0446777344E-03 (0043h)
$h[\pm 3]$	-8.0810546875E-02 (8A58h)	$h[\pm 11]$	-8.7585449219E-03 (811Fh)
$h[\pm 4]$	1.6174316406E-02 (0212h)	$h[\pm 12]$	3.5095214844E-03 (0073h)
$h[\pm 5]$	4.2114257813E-02 (0564h)	$h[\pm 13]$	4.8217773438E-03 (009Eh)
$h[\pm 6]$	-1.5350341797E-02 (81F7h)	$h[\pm 14]$	-4.9438476563E-03 (80A2h)
$h[\pm 7]$	-2.0233154297E-02 (8297h)	$h[\pm 15]$	1.6174316406E-03 (0035h)

c) **E15**: Filtre unidimensionnel à phase nulle de 15 coefficients généré par échantillonnage en fréquence.

Tableau B.3: Coefficients de E15

$h[0]$	5.370994E-01	$h[\pm 4]$	3.038048E-02
$h[\pm 1]$	3.098028E-01	$h[\pm 5]$	2.518532E-02
$h[\pm 2]$	-3.552215E-02	$h[\pm 6]$	-2.044864E-02
$h[\pm 3]$	-8.143448E-02	$h[\pm 7]$	3.486477E-03

d) **E15x15**: Filtre bidimensionnel à symétrie octale généré par échantillonnage en fréquence. Se référer à l'équation (4.24) pour obtenir les autres coefficients.

Tableau B.4: Coefficients de E15x15

h[0,0]	5.425897E-01	h[5,3]	1.577055E-03
h[1,0]	1.988030E-01	h[5,4]	8.158458E-03
h[1,1]	-2.020549E-02	h[5,5]	-9.246376E-03
h[2,0]	-1.216794E-03	h[6,0]	-2.639239E-03
h[2,1]	-6.117230E-02	h[6,1]	-1.179565E-03
h[2,2]	1.866744E-02	h[6,2]	-1.352633E-03
h[3,0]	1.822994E-02	h[6,3]	-1.137128E-03
h[3,1]	1.321650E-03	h[6,4]	-1.535209E-03
h[3,2]	3.100837E-02	h[6,5]	-3.020386E-03
h[3,3]	-1.534633E-02	h[6,6]	5.271231E-03
h[4,0]	-1.364057E-03	h[7,0]	-1.834015E-04
h[4,1]	-8.669260E-03	h[7,1]	1.501766E-03
h[4,2]	-2.303490E-03	h[7,2]	-6.507802E-04
h[4,3]	-1.670560E-02	h[7,3]	1.069514E-03
h[4,4]	1.298087E-02	h[7,4]	-2.611613E-04
h[5,0]	3.598907E-03	h[7,5]	1.186052E-03
h[5,1]	2.183310E-03	h[7,6]	1.089006E-04
h[5,2]	4.100561E-03	h[7,7]	-1.453938E-03

e) **M15x15**: Filtre bidimensionnel à symétrie octale généré par la transformation de McClellan à partir du filtre **E15** en utilisant (4.38). Se référer à l'équation (4.24) pour obtenir les autres coefficients.

*Tableau B.4: Coefficients de **M15x15***

h[0,0]	5.853288E-01	h[5,3]	0
h[1,0]	1.852487E-01	h[5,4]	0
h[1,1]	-3.678544E-02	h[5,5]	0
h[2,0]	-4.087888E-03	h[6,0]	-3.195100E-04
h[2,1]	-3.821768E-02	h[6,1]	1.906667E-04
h[2,2]	1.906092E-02	h[6,2]	0
h[3,0]	-7.197437E-03	h[6,3]	0
h[3,1]	9.512180E-03	h[6,4]	0
h[3,2]	6.917079E-03	h[6,5]	0
h[3,3]	-6.390200E-03	h[6,6]	0
h[4,0]	-1.935340E-03	h[7,0]	2.723810E-05
h[4,1]	4.125873E-03	h[7,1]	0
h[4,2]	-4.792650E-03	h[7,2]	0
h[4,3]	9.533336E-04	h[7,3]	0
h[4,4]	0	h[7,4]	0
h[5,0]	1.359041E-03	h[7,5]	0
h[5,1]	-1.917060E-03	h[7,6]	0

Annexe C: Extension symétrique pour le treillis en quinconce

Le réseau d'échantillonnage rectangulaire possède deux caractéristiques qui simplifient grandement son utilisation. Il est séparable et il peut se représenter sous la forme d'une matrice de points. Le treillis en quinconce ne correspond pas à une matrice de points car les vecteurs formant la base d'échantillonnage font un angle de 45° avec les bordures de l'image. Il peut toutefois être vu comme la superposition de deux réseaux rectangulaires, un pour les lignes et colonnes paires, l'autre pour celles impaires, tel que représenté à la figure C.1. On suppose que l'image débute dans le coin supérieur gauche.

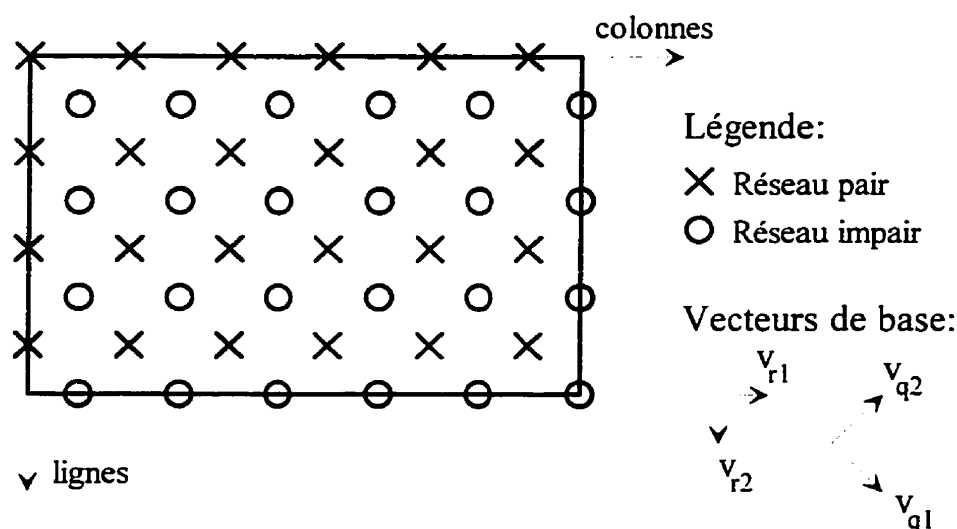


Figure C.1: Décomposition du treillis en quinconce en deux réseaux rectangulaires

Sachant qu'un pixel a une représentation unique comme combinaison linéaire entière des vecteurs de base v_{q1} et v_{q2} de la matrice d'échantillonnage, il peut alors être désigné par

un couple (a,b) indiquant le coefficient de chacun de ces vecteurs, ce qui conduit à la relation

$$\mathbf{v}_q = a\mathbf{v}_{q1} + b\mathbf{v}_{q2} \quad (\text{C.1})$$

Connaissant les valeurs de a et b , nous voudrions obtenir la position dans le réseau rectangulaire approprié de la figure C.1 sous la forme d'un triplet (A,B,P) , où A indique la colonne, B la ligne, et P permet d'identifier s'il s'agit du réseau rectangulaire pair ($P=0$) ou impair ($P=1$). Dénnotant le plus grand entier inférieur ou égal à x par $\lfloor x \rfloor$, les formules de conversion sont données par les deux ensembles d'équations suivants:

$$\begin{cases} A = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor = \frac{a+b-P}{2} \\ B = \left\lfloor \frac{a-b}{2} \right\rfloor = \frac{a-b-P}{2} \\ P = (a+b) \text{ modulo } 2 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{cases} a = A + B + P \\ b = A - B \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Le système d'équations (C.2) permet de déterminer si un pixel se trouve à l'extérieur du support de l'image. Lors du traitement des conditions aux frontières, il suffit de convertir les coordonnées (a,b) dans la base rectangulaire, d'appliquer l'extension symétrique appropriée sur (A,B,P) , et de revenir à la base en quinconce pour obtenir (a',b') .

Le développement qui suit est basé sur une image échantillonnée sur un treillis en quinconce dont les deux matrices de points ont M colonnes par N lignes chacune, où M et N sont pairs. L'échantillon initial (a,b) est situé à l'extérieur de l'image et nous recherchons son équivalent symétrique (a',b') , tel que représenté à la figure C.2 où

$M=N=4$. Les formules qui suivent s'appliquent aussi bien sur le réseau pair que sur le réseau impair. Elles peuvent également être utilisées en succession pour les échantillons à l'extérieur des quatre coins de l'image.

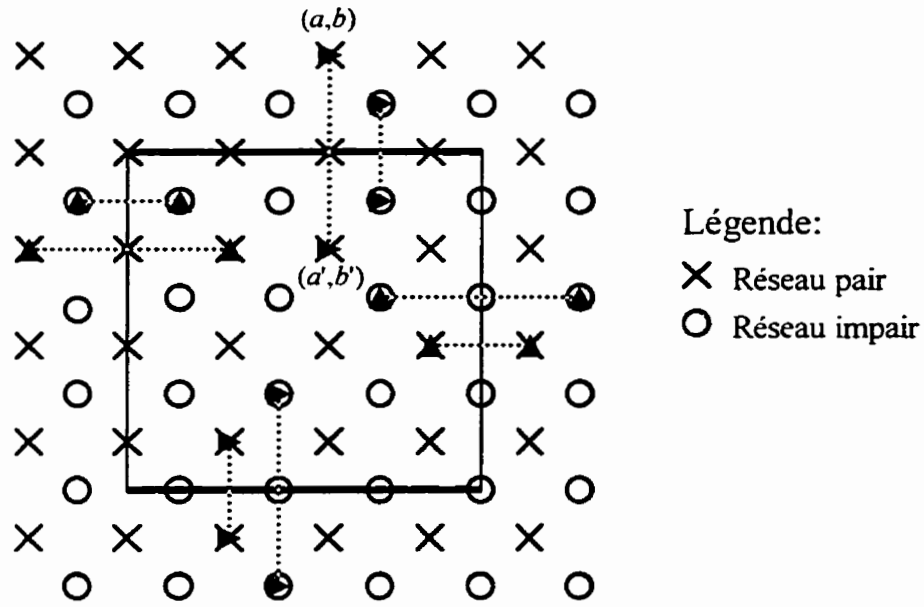


Figure C.2: Extension symétrique sur le treillis en quinconce

a) *Frontière supérieure* ($B < 0$)

Considérant la figure C.2, la relation de symétrie est donnée par

$$\begin{cases} A' = A \\ B' = -B - P \\ P' = P \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

En utilisant (C.2) de part et d'autre de l'égalité, on obtient

$$\begin{cases} a' = b \\ b' = a \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

b) *Frontière de gauche* ($A < 0$)

Pour la frontière de gauche, la symétrie s'exprime comme

$$\begin{cases} A' = -A - P \\ B' = B \\ P' = P \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

L'utilisation de (C.2) sur (C.6) mène à

$$\begin{cases} a' = -b \\ b' = -a \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

c) *Frontière de droite* ($A > M-1$)

Pour les échantillons situés à la droite du support de l'image, nous prenons

$$\begin{cases} A' = 2M - A - P - 1 \\ B' = B \\ P' = P \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

La substitution de (C.2) dans ce système d'équations donne

$$\begin{cases} a' = -b + 2M - 1 \\ b' = -a + 2M - 1 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

d) *Frontière inférieure* ($B > N-1$)

La relation de symétrie à la frontière du bas de l'image est donnée par

$$\begin{cases} A' = A \\ B = 2N - B - P - 1 \\ P' = P \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Après simplification par (C.2), il vient que

$$\begin{cases} a' = b + 2N - 1 \\ b' = a - 2N + 1 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Les résultats précédents sont regroupés dans le tableau C.1.

Tableau C.1: Extension symétrique en quinconce

Frontière	Condition	Extension
haut	$\left\lfloor \frac{a-b}{2} \right\rfloor < 0$	$x[a,b] = x[b,a]$
bas	$\left\lfloor \frac{a-b}{2} \right\rfloor \geq N$	$x[a,b] = x[b+2N-1, a-2N+1]$
gauche	$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor < 0$	$x[a,b] = x[-b, -a]$
droite	$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor \geq M$	$x[a,b] = x[-b+2M-1, -a+2M-1]$

Annexe D: Démonstration des extensions symétriques bidimensionnelles

Le filtre bidimensionnel $h[\mathbf{n}]$ utilisé par (4.20) à (4.23) est à phase nulle et possède une symétrie octale. L'équation aux différences correspondante est donnée par (4.26). Il faut établir le type de symétrie des images de la bande basse et de la bande haute, dénotées par $u_0[\mathbf{n}]$ et $u_1[\mathbf{n}]$ respectivement, à la sortie des filtres d'analyse.

D.1 Réseau rectangulaire vers treillis en quinconce

Le premier étage du système de décomposition en quinconce fait passer le type d'échantillonnage du réseau rectangulaire vers le treillis en quinconce, tel que mentionné à la sous-section 4.2.1. Nous considérons un échantillon $u_0[i, j]$ situé à l'extérieur du support de l'image.

D.1.1 Frontière du haut

À la frontière du haut, $j < 0$ et par la définition de l'extension symétrique rectangulaire (4.30), nous pouvons réécrire (4.26) pour la bande de basses fréquences comme

$$\begin{aligned}
 u_0[i, j] = & h[0, 0]x[i, -j] + \\
 & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, 0] \left(x[i+k, -j] + x[i-k, -j] + x[i, -j-k] + x[i, -j+k] \right) + \\
 & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, k] \left(x[i+k, -j-k] + x[i-k, -j-k] + x[i+k, -j+k] + x[i-k, -j+k] \right) + \\
 & \sum_{l=1}^{K-2} \sum_{k=l+1}^{K-1} h[k, l] \left(\begin{aligned} & x[i+l, -j-k] + x[i-l, -j-k] + x[i+l, -j+k] + x[i-l, -j+k] + \\ & x[i+k, -j-l] + x[i-k, -j-l] + x[i+k, -j+l] + x[i-k, -j+l] \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u_0[i, j] = u_0[i, -j] \quad \text{avec } j < 0 \quad (\text{D.1})$$

D.1.2 Frontière du bas

Pour cette frontière, $j \geq N$ et en remplaçant l'extension symétrique rectangulaire (4.30)

dans (4.26), le signal basse fréquence devient

$$\begin{aligned} u_0[i, j] = & h[0, 0]x[i, 2N - j - 2] + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, 0] \left(x[i + k, 2N - j - 2] + x[i - k, 2N - j - 2] + \right. \\ & \quad \left. x[i, 2N - j - 2 - k] + x[i, 2N - j - 2 + k] \right) + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, k] \left(x[i + k, 2N - j - 2 - k] + x[i - k, 2N - j - 2 - k] + \right. \\ & \quad \left. x[i + k, 2N - j - 2 + k] + x[i - k, 2N - j - 2 + k] \right) + \\ & \sum_{l=1}^{K-2} \sum_{k=l+1}^{K-1} h[k, l] \left(x[i + l, 2N - j - 2 - k] + x[i - l, 2N - j - 2 - k] + \right. \\ & \quad x[i + l, 2N - j - 2 + k] + x[i - l, 2N - j - 2 + k] + \\ & \quad x[i + k, 2N - j - 2 - l] + x[i - k, 2N - j - 2 - l] + \\ & \quad \left. x[i + k, 2N - j - 2 + l] + x[i - k, 2N - j - 2 + l] \right) \end{aligned}$$

Ce qui mène à

$$u_0[i, j] = u_0[i, 2N - j - 2] \quad \text{avec } j \geq N \quad (\text{D.2})$$

Les démonstrations aux frontières de gauche et de droite s'effectuent de la même façon, mais en travaillant sur l'index i . Par conséquent, le signal $u_0[i, j]$ possède une extension symétrique rectangulaire donnée par (4.30). Pour la bande haute, l'équation (4.27) montre qu'il est possible d'utiliser un filtre à phase nulle $h'[\mathbf{n}]$ avant de décaler le résultat. Avant ce décalage, nous avons donc extension symétrique rectangulaire du signal de la bande haute par un raisonnement identique à celui de la bande basse.

D.2 Treillis en quinconce vers réseau rectangulaire

Le deuxième étage de décomposition fait passer l'image d'un treillis en quinconce vers un réseau d'échantillonnage rectangulaire, tel que décrit à la sous-section 4.2.2. Les propriétés de symétrie utilisent les résultats du tableau C.1 sur l'extension symétrique en quinconce. Encore une fois, considérons un échantillon $u_0[i,j]$ situé à l'extérieur du support de l'image.

D.2.1 Frontière du haut

Pour ce cas, l'équation (C.2) mène à $\left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor < 0$. En utilisant le résultat du tableau C.1 à la frontière du haut,

$$x[i,j] = x[j,i]$$

L'équation aux différences (4.26) devient

$$\begin{aligned} u_0[i,j] = & h[0,0]x[j,i] + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k,0] (x[j,i+k] + x[j,i-k] + x[j+k,i] + x[j-k,i]) + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k,k] (x[j+k,i+k] + x[j+k,i-k] + x[j-k,i+k] + x[j-k,i-k]) + \\ & \sum_{l=1}^{K-2} \sum_{k=l+1}^{K-1} h[k,l] \left(\begin{aligned} & x[j+k,i+l] + x[j+k,i-l] + x[j-k,i+l] + x[j-k,i-l] + \\ & x[j+l,i+k] + x[j+l,i-k] + x[j-l,i+k] + x[j-l,i-k] \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$u_0[i,j] = u_0[j,i] \quad \text{avec} \quad \left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor < 0 \quad (\text{D.3})$$

D.2.2 Frontière du bas

À la frontière du bas de l'image, $\left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor \geq N$. Pour ce cas, le tableau C.1 indique que

$$x[i, j] = x[j + 2N - 1, i - 2N + 1] = x[b, a]$$

$$\text{où } \begin{cases} a = i - 2N + 1 \\ b = j + 2N - 1 \end{cases}$$

Remplaçant cette dernière équation dans (4.26),

$$\begin{aligned} u_0[i, j] = & h[0, 0]x[b, a] + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, 0] (x[b, a+k] + x[b, a-k] + x[b+k, a] + x[b-k, a]) + \\ & \sum_{k=1}^{K-1} h[k, k] (x[b+k, a+k] + x[b+k, a-k] + x[b-k, a+k] + x[b-k, a-k]) + \\ & \sum_{l=1}^{K-2} \sum_{k=l+1}^{K-1} h[k, l] \left(\begin{aligned} & x[b+k, a+l] + x[b+k, a-l] + x[b-k, a+l] + x[b-k, a-l] + \\ & x[b+l, a+k] + x[b+l, a-k] + x[b-l, a+k] + x[b-l, a-k] \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

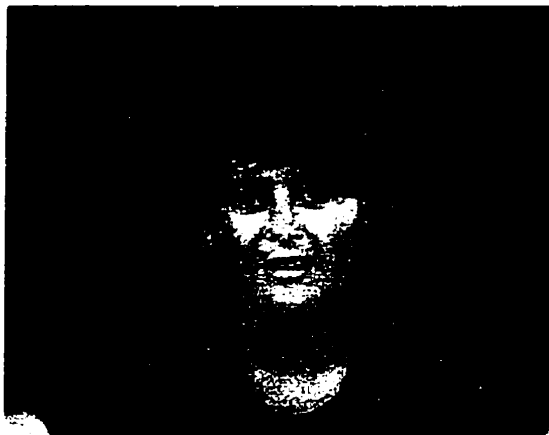
Et finalement,

$$u_0[i, j] = u_0[b, a] = u_0[j + 2N - 1, i - 2N + 1] \quad \text{avec } \left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor \geq N \quad (\text{D.4})$$

Des résultats semblables peuvent être développés aux frontières de gauche et de droite de l'image. Par conséquent, le signal $u_0[i, j]$ possède une extension symétrique en quinconce. Par le même raisonnement, la bande haute possède une extension symétrique en quinconce avant le décalage donné par (4.27).

Annexe E: Résultats des simulations

Cette annexe présente, sous forme de tableaux, les résultats obtenus lors des simulations des systèmes rectangulaire et en quinconce. Quatre séquences ont été retenues: *Miss America*, *Susie*, *Football* et *Flower Garden*. Ces séquences sont représentées à la figure E.1. Seule les résultats obtenus pour la première image sont présentés.



a) *Miss America*



b) *Susie*



c) *Football*



d) *Flower Garden*

Figure E.1: Séquences vidéo utilisées

Les franges de Fresnel de la figure 5.2 sont également considérées pour la propriété de reconstruction quasi-parfaite.

E.1 Reconstruction en fonction du nombre de bits

Le tableau E.1 donne l'erreur quadratique moyenne de la reconstruction en fonction du nombre de bits par composante (incluant un bit de retenue) utilisé pour chacune des bandes. Seule la première image de chaque séquence a été retenue. L'erreur quadratique moyenne est donnée par l'équation (5.1). Ces résultats correspondent à ceux de la sous-section 5.1.1.

Tableau E.1: EQM en fonction du nombre de bits pour la reconstruction

Séquence	R31			M15x15			E15x15		
	Y	Cr	Cb	Y	Cr	Cb	Y	Cr	Cb
<i>Miss America</i> , 16 bits	0	0	0	0	0	0	0,01	0	0
<i>Miss America</i> , 12 bits	0,09	0	0	0	0	0	0,01	0,01	0
<i>Miss America</i> , 8 bits	4,43	4,60	5,31	3,16	3,89	2,80	3,08	2,67	3,78
<i>Susie</i> , 16 bits	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>Susie</i> , 12 bits	0,01	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>Susie</i> , 8 bits	4,48	4,28	5,90	3,20	4,33	2,23	3,09	2,17	3,97
<i>Football</i> , 16 bits	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>Football</i> , 12 bits	0,01	0	0	0	0	0	0,01	0	0
<i>Football</i> , 8 bits	4,41	4,43	4,71	3,20	3,39	3,06	3,07	2,85	3,03
<i>Flower Garden</i> , 16 bits	0	0	0	0,01	0	0	0,16	0	0,01
<i>Flower Garden</i> , 12 bits	0,01	0	0	0,02	0	0	0,17	0	0,02
<i>Flower Garden</i> , 8 bits	4,40	4,76	4,47	3,27	3,24	3,52	3,19	3,27	2,96
<i>Fresnel</i> , 16 bits	0,21			0,31			1,87		
<i>Fresnel</i> , 12 bits	0,23			0,32			1,87		
<i>Fresnel</i> , 8 bits	4,48			3,38			4,77		

L'erreur quadratique moyenne obtenue pour le pire bloc de luminance de 16 par 16 pixels est donnée au tableau E.2.

Tableau E.2: EQM pour le pire bloc de luminance de 16x16

Séquence	R31	M15x15	E15x15
<i>Miss America, 16 bits</i>	0	0	0,27
<i>Miss America, 12 bits</i>	0,18	0	0,25
<i>Miss America, 8 bits</i>	7,12	5,07	5,29
<i>Susie, 16 bits</i>	0	0	0,09
<i>Susie, 12 bits</i>	0,11	0,01	0,13
<i>Susie, 8 bits</i>	7,20	5,40	5,04
<i>Football, 16 bits</i>	0	0	0,08
<i>Football, 12 bits</i>	0,08	0	0,13
<i>Football, 8 bits</i>	6,83	4,82	4,97
<i>Flower Garden, 16 bits</i>	0	0,11	0,78
<i>Flower Garden, 12 bits</i>	0,06	0,15	0,83
<i>Flower Garden, 8 bits</i>	6,50	5,34	5,27
<i>Fresnel, 16 bits</i>	0,75	1,22	8,04
<i>Fresnel, 12 bits</i>	0,74	1,13	7,79
<i>Fresnel, 8 bits</i>	6,49	5,28	13,60

E.2 Énergie et entropie des bandes de fréquences

Les tableaux E.3 et E.4 donnent l'énergie normalisée contenue dans chacune des bandes de fréquences des bancs **R31** (LL, LH, HL et HH) et **E15x15** (L, M et H), de même que dans la séquence originale pour chacune des composantes. L'énergie normalisée est donnée par l'équation (5.2). Ces résultats correspondent à ceux de la sous-section 5.1.2.

Tableau E.3: Énergie normalisée des bandes de fréquences pour Miss America et Susie

Bande	<i>Miss America</i>			<i>Susie</i>		
	Y	Cr	Cb	Y	Cr	Cb
original	7207,94	1121,06	291,46	2000,04	245,98	303,98
LL	7102,61	1136,49	299,96	1993,33	246,22	304,42
LH	4,69	2,20	1,03	4,88	0,21	0,20
HL	3,50	0,43	0,24	6,17	0,34	0,43
HH	1,29	0,01	0,02	0,94	0,06	0,07
L	7083,18	1132,88	298,88	1988,82	245,58	303,61
M	9,29	3,44	1,32	9,82	0,57	0,68
H	8,63	0,89	0,42	3,96	0,44	0,52

Tableau E.4: Énergie normalisée des bandes de fréquences pour Football et Flower Garden

Bande	<i>Football</i>			<i>Flower Garden</i>		
	Y	Cr	Cb	Y	Cr	Cb
original	1482,35	280,35	972,44	3452,37	147,84	537,43
LL	1468,63	279,48	972,94	3286,89	137,85	506,99
LH	9,41	0,99	1,81	145,12	6,11	21,25
HL	6,18	0,69	1,03	26,44	2,60	6,27
HH	0,84	0,27	0,28	6,52	1,32	2,78
L	1465,44	278,77	970,53	3283,05	137,76	506,64
M	13,67	1,38	2,72	150,16	6,39	20,72
H	3,84	0,86	1,46	27,83	3,56	9,51

Le tableau E.5 présente l'entropie totale (en bits par pixel) pour chacune des bandes de fréquences obtenues avec les bancs **R31** (LL, LH, HL et HH) et **E15x15** (L, M et H). Ces résultats correspondent à ceux de la sous-section 5.1.2.

Tableau E.5: Entropie des bandes de fréquences

Bande	<i>Miss America</i> (bits/pixel)	<i>Susie</i> (bits/pixel)	<i>Football</i> (bits/pixel)	<i>Flower Garden</i> (bits/pixel)
original	8,38	8,93	7,95	10,52
LL	8,22	8,90	7,78	10,46
LH	2,90	3,27	4,62	6,76
HL	3,24	3,81	4,22	5,50
HH	2,15	1,89	2,43	4,09
L	8,22	8,90	7,78	10,46
M	3,80	4,21	4,99	7,10
H	3,53	3,36	3,71	5,69

E.3 Reconstruction multirésolution des séquences

Les tableaux E.6, E.7, E.8 et E.9 donnent le rapport signal à bruit maximum, tel que défini par (5.4), pour différentes combinaisons des bandes de fréquences obtenues avec les bancs **R31** (toutes, LL+LH+HL, LL+HL, LL+LH et LL) et **E15x15** (toutes, L+M et M). Les résultats obtenus pour chacune des trois composantes de couleur sont indiqués, de même que celui du pire bloc de luminance de 16 par 16 pixels. Ces résultats correspondent à ceux de la sous-section 5.1.3.

Tableau E.6: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec R31 de Miss America et de Susie

Bandes	Miss America (dB)				Susie (dB)			
	Y	bloc Y	Cr	Cb	Y	bloc Y	Cr	Cb
toutes	51,9	50,4	52,5	52,5	51,9	51,0	52,5	52,4
LL+HL+LH	46,2	38,9	52,5	52,5	47,2	34,7	52,3	52,1
LL+HL	39,7	29,3	43,6	47,2	40,4	28,4	51,2	51,0
LL+LH	41,2	33,4	49,8	51,2	39,6	31,2	50,6	50,0
LL	38,0	29,1	43,2	46,8	37,4	28,1	49,9	49,4

Tableau E.7: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec R31 de Football et de Flower Garden

Bandes	Football (dB)				Flower Garden (dB)			
	Y	bloc Y	Cr	Cb	Y	bloc Y	Cr	Cb
toutes	51,9	50,9	51,9	52,0	51,5	41,0	52,2	52,2
LL+HL+LH	47,7	41,7	50,7	50,6	39,8	29,3	46,1	43,3
LL+HL	38,0	30,1	46,8	44,7	26,3	18,6	39,3	34,3
LL+LH	39,6	29,9	47,9	46,6	33,0	23,1	42,1	38,5
LL	36,0	28,7	45,4	43,3	25,6	18,5	38,1	33,3

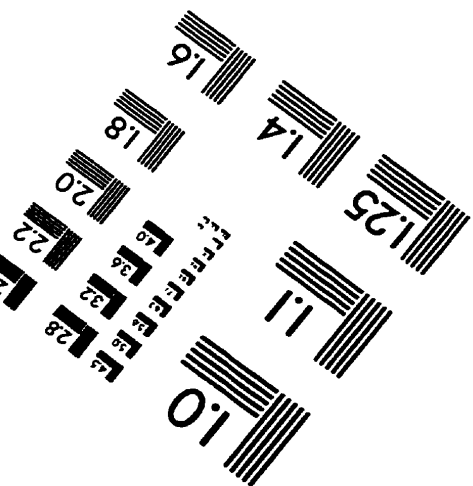
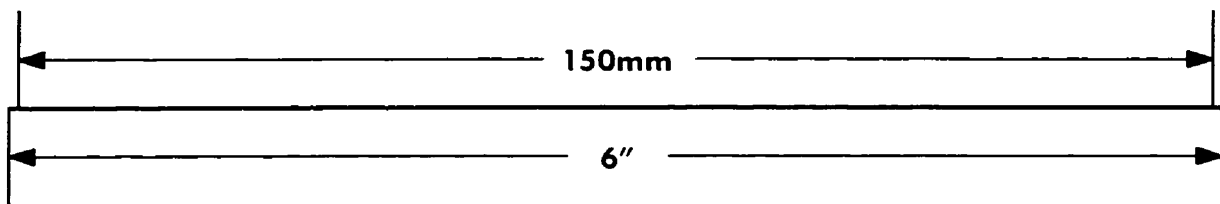
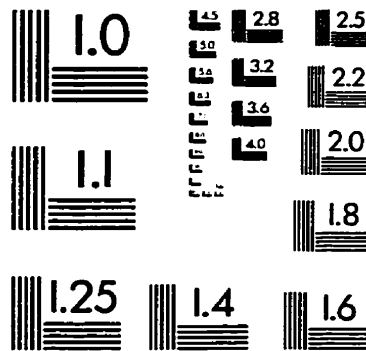
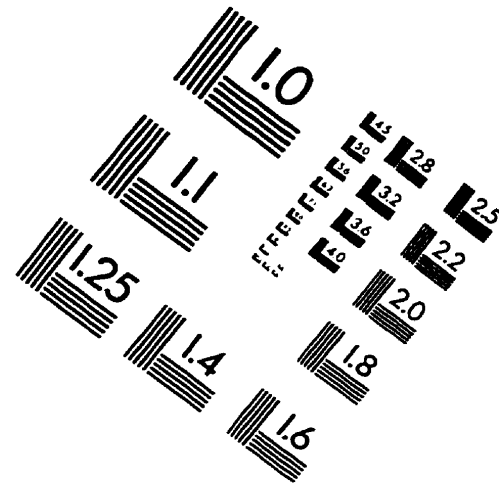
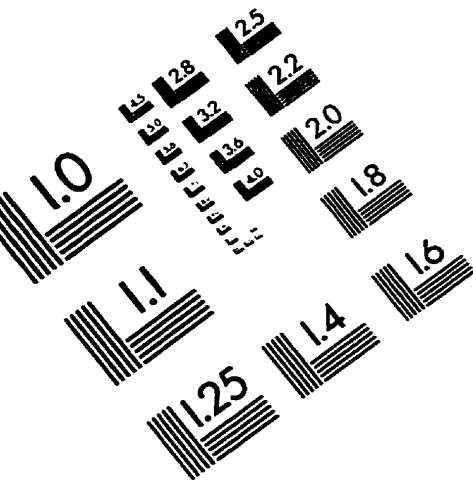
Tableau E.8: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec E15x15 de Miss America et de Susie

Bandes	Miss America (dB)				Susie (dB)			
	Y	bloc Y	Cr	Cb	Y	bloc Y	Cr	Cb
toutes	52,7	50,6	52,8	52,8	52,8	51,7	52,9	52,7
M+L	38,7	33,0	47,8	50,4	41,9	33,6	50,5	50,0
L	35,3	29,0	41,1	45,5	36,7	28,1	48,2	47,7

Tableau E.9: $(S/B)_{\max}$ pour la reconstruction multirésolution avec $E15 \times 15$ de Football et de Flower Garden

Bandes	Football (dB)				Flower Garden (dB)			
	Y	bloc Y	Cr	Cb	Y	bloc Y	Cr	Cb
toutes	52,7	51,3	52,9	52,8	51,1	39,6	53,0	52,7
M+L	42,1	37,6	48,1	46,0	33,6	25,9	42,4	38,3
L	35,7	28,9	44,7	41,9	25,6	18,9	38,2	33,3

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

