

**Titre:** Étude des systèmes dynamiques à caractéristiques périodiques et  
Title: des rotors asymétriques

**Auteur:** Florentin Oncescu  
Author:

**Date:** 1998

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Oncescu, F. (1998). Étude des systèmes dynamiques à caractéristiques  
Citation: périodiques et des rotors asymétriques [Mémoire de maîtrise, École  
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6702/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6702/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Aouni A. Lakis, & Germain Ostiguy  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES  
À CARACTÉRISTIQUES PÉRIODIQUES  
ET DES ROTORS ASYMÉTRIQUES

FLORENTIN ONCESCU  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JANVIER 1998

© Florentin Oncescu, 1998.



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

0-612-33166-0

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES  
À CARACTÉRISTIQUES PÉRIODIQUES  
ET DES ROTORS ASYMÉTRIQUES

présenté par: ONCESCU Florentin

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. ROUSSELET Jean, Ph.D., président

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre et directeur de recherche

M. OSTIGUY Germain, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. NGUYEN T. Hung, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, Monsieur Aouni A. Lakis, pour les conseils et pour le soutien constant qu'il m'a accordés tout au long de la période d'études de maîtrise.

Je remercie également le codirecteur de recherche, Monsieur Germain Ostiguy, pour ses suggestions et pour sa précieuse aide accordée à la rédaction du mémoire.

Je désire aussi remercier les professeurs Lakis et Ostiguy pour le support financier qui a rendu possible la réalisation de ce travail.

Enfin, je remercie tous mes collègues de département, pour l'ambiance de travail agréable qu'ils ont créée.

## SOMMAIRE

Ce mémoire présente la mise en équation du comportement des rotors dont tant la partie en rotation que la partie fixe sont asymétriques, ainsi qu'une méthode pour analyser la stabilité et pour déterminer la réponse stationnaire d'un pareil système périodique.

L'essentiel de la méthode choisie pour analyser les solutions du système des équations à coefficients périodiques réside dans l'évaluation numérique de la matrice de transfert sur une période et dans l'utilisation des résultats de la théorie de Floquet. Nous avons considéré la procédure développée par Friedmann, Hammond et Woo, qui utilise un schéma d'intégration numérique de type Runge-Kutta.

Le système des équations de mouvement pour un modèle général de rotor asymétrique est obtenu par la méthode des éléments finis. Afin de prendre en compte l'asymétrie de l'arbre, nous avons apporté des corrections à la procédure élaborée par Nelson et McVaugh pour des rotors à arbres symétriques.

La présentation détaillée des équations de mouvement par rapport à un repère fixe, ainsi que par rapport à un repère en rotation, a été accompagnée de l'étude des cas particuliers importants.

Nous avons également développé plusieurs programmes informatiques, dont un pour le modèle général de rotor asymétrique. L'influence de l'asymétrie de la partie en rotation, de l'asymétrie de la partie fixe, de l'amortissement externe et de la masse de l'arbre sur le comportement des rotors a été évaluée numériquement.

Les résultats obtenus nous permettent de conclure que la méthode de la matrice de transfert est un outil adéquat pour prédire le comportement des rotors asymétriques.

## ABSTRACT

This thesis presents the derivation of the governing equations for asymmetrical rotors and a method for stability analysis and steady-state response computation for such periodic systems.

The method considered to deal with periodic differential equations of motion is based on the numerical evaluation of the transfer matrix over one period and the utilization of the results of Floquet theory. The development given by Friedmann, Hammond and Woo, with a Runge-Kutta integration scheme, is considered.

The temporal equations of motion for a general model of asymmetrical rotors are obtained by utilizing finite element formulation. Modifications were made to accommodate the effect of shaft asymmetry to the finite element procedure developed by Nelson and McVaugh for rotors with symmetrical shaft.

The detailed presentation of the equations of motion, both in a rotating frame of reference and in a fixed one, is accompanied with the analysis of the important particular cases.

Several programs, among which one for the general model of asymmetrical rotors, were developed. Numerical examples were considered to investigate effects of the rotating part asymmetry, fixed part asymmetry, external damping and shaft mass.

The results show that transfer matrix method is satisfactory when applied to asymmetrical rotors.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iv
SOMMAIRE .....	v
ABSTRACT .....	vi
TABLE DES MATIÈRES .....	vii
LISTE DES TABLEAUX .....	x
LISTE DES FIGURES .....	xi
LISTE DES ANNEXES .....	xiii
LISTE DES NOTATIONS .....	xiv

## CHAPITRE I: INTRODUCTION

1.1 Généralités .....	1
1.2 Étude bibliographique .....	2
1.2.1 Problématique des systèmes périodiques .....	2
1.2.2 Problématique des rotors asymétriques .....	4
1.3 Objectif du présent travail .....	7
1.4 Plan du mémoire .....	8

## CHAPITRE II

## THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES PÉRIODIQUES

2.1 Systèmes linéaires non autonomes .....	10
2.2 Systèmes linéaires périodiques .....	12
2.2.1 Théorie de Floquet et analyse de la stabilité .....	12
2.2.2 Réponse stationnaire .....	16



## CHAPITRE III

## MÉTHODE DE LA MATRICE DE TRANSFERT

3.1	Évaluation de la matrice de transfert sur une période .....	19
3.2	Évaluation de la réponse stationnaire .....	23

## CHAPITRE IV

## ROTORS ASYMÉTRIQUES - UN MODÈLE SIMPLE

4.1	Modèle mathématique .....	26
4.2	Équations de mouvement .....	27
4.2.1	Énergie cinétique, énergie de déformation, travail virtuel des forces externes .....	27
4.2.2	Déplacements de l'arbre .....	28
4.2.3	Équations de mouvement par rapport au repère fixe .....	29
4.2.4	Équations de mouvement par rapport au repère mobile .....	32
4.3	Cas particuliers .....	33
4.3.1	Arbre à section symétrique .....	33
4.3.2	Paliers symétriques .....	34
4.4	Application de la méthode de la matrice de transfert .....	36
4.5	Analyse de la stabilité du mouvement par une méthode de perturbation .....	38
4.6	Réponse stationnaire par la méthode de balance harmonique .....	42

## CHAPITRE V

## ROTORS ASYMÉTRIQUES - MODÈLE GÉNÉRAL

5.1	Modèle mathématique .....	47
5.2	Cinématique des éléments du rotor .....	48
5.2.1	Vitesse angulaire de la section de l'arbre .....	48

5.2.2	Déplacements .....	50
5.3	Équations de mouvement des éléments du rotor .....	51
5.3.1	Disque .....	51
5.3.2	Arbre .....	54
5.3.3	Paliers .....	59
5.4	Système des équations de mouvement .....	63
5.4.1	Cas général .....	63
5.4.2	Arbre de masse négligeable .....	65
5.4.3	Arbre à section symétrique .....	67
5.4.4	Paliers symétriques, d'amortissement négligeable .....	67
 CHAPITRE VI		
CALCUL ET DISCUSSION		
6.1	Programmes informatiques .....	71
6.2	Rotor asymétrique - modèle simple .....	72
6.2.1	Définition du modèle de base .....	72
6.2.2	Analyse de la stabilité du mouvement .....	73
6.2.3	Réponse stationnaire .....	76
6.3	Rotor asymétrique - modèle général .....	78
6.3.1	Définition des modèles de base .....	78
6.3.2	Résultats - modèle "Rotor 2" .....	80
6.3.3	Résultats - modèle "Rotor 3" .....	82
 CHAPITRE VII: CONCLUSION .....		
		96
 RÉFÉRENCES .....		
		99
 ANNEXES .....		
		103

## LISTE DES TABLEAUX

6.1	Détails du modèle Rotor 1 .....	73
6.2	Choix du nombre d'intervalles par période	
	Modèle simple - Stabilité .....	74
6.3	Choix du nombre d'intervalles par période	
	Modèle simple - Réponse stationnaire .....	76
6.4	Détails du modèle Rotor 2 .....	78
6.5	Détails du modèle Rotor 3 .....	79

## LISTE DES FIGURES

4.1	Rotor, modèle simple .....	45
4.2	Déplacements du centre de la section de l'arbre .....	45
4.3	Disque et balourd .....	46
4.4	Palier, modèle simple .....	46
5.1	Rotor, modèle général .....	69
5.2	Palier, modèle général .....	69
5.3	Repère lié à la section de l'arbre .....	70
5.4	Déplacements .....	70
6.1	Région d'instabilité, par une méthode de perturbation et par la méthode de la matrice de transfert. Variation de l'asymétrie des paliers. Rotor 1 .....	83
6.2	Région d'instabilité, par une méthode de perturbation et par la méthode de la matrice de transfert. Variation de l'asymétrie de l'arbre. Rotor 1 .....	84
6.3	Région d'instabilité, par la méthode de la matrice de transfert. Variation de l'amortissement et de l'asymétrie des paliers. Rotor 1 .....	85
6.4	Région d'instabilité, par la méthode de la matrice de transfert. Variation de l'amortissement et de l'asymétrie de l'arbre. Rotor 1 .....	86
6.5	Réponse stationnaire, par la méthode de balance harmonique et par intégration numérique. Rotor 1 .....	87
6.6	Réponse stationnaire, par intégration numérique. Variation de l'asymétrie de l'arbre. Rotor 1 .....	88
6.7	Réponse stationnaire, par intégration numérique. Variation de l'asymétrie des paliers. Rotor 1 .....	89
6.8	Modèle "Rotor 2" .....	90
6.9	Modèle "Rotor 3" .....	90

6.10	Réponse stationnaire, par calcul direct et par intégration numérique	
	Variation du nombre des éléments finis. Rotor 2 .....	91
6.11	Réponse stationnaire, par intégration numérique	
	Variation de l'asymétrie de l'arbre. Rotor 2 .....	92
6.12	Réponse stationnaire, par intégration numérique. Variation de	
	l'asymétrie de l'arbre. Masse de l'arbre et amortissement des paliers	
	négligés. Rotor 2 .....	93
6.13	Réponse aux balourds, par calcul direct. Effet de la masse de	
	l'arbre. Rotor 3 .....	94
6.14	Réponse aux balourds, par intégration numérique (repère mobile)	
	et par calcul direct (repère fixe). Rotor 3 .....	95

## LISTE DES ANNEXES

A-1	Expression de l'énergie cinétique du modèle simple .....	103
A-2	Transformation des équations de mouvement du modèle simple .....	104
A-3	Matrices .....	107
A-4	Équations de mouvement de l'élément d'arbre .....	112
A-5	Réponse stationnaire, dans le cas de l'arbre à section symétrique .....	117
A-6	Programmes informatiques .....	118

## LISTE DES NOTATIONS

## CHAPITRES IV et V

$c$	Constante de l'amortissement externe (N.s/m)
$c_u, c_{uw}, c_{wu}, c_w$	Constantes d'amortissement du palier (N.s/m)
$d, \beta$	Rayon et angle de phase qui définissent la position du balourd
$E, \rho$	Module d'élasticité et densité du matériau de l'arbre
$I_x, I_z$	Moments d'inertie principaux de la section de l'arbre ( $m^4$ )
$I_p$	Moment polaire de la section de l'arbre ( $m^4$ )
$I_d$	Demi-différence des moments d'inertie de la section de l'arbre
$I_m$	Moment d'inertie moyen de la section de l'arbre
$J_x, J_y, J_z$	Moments d'inertie du disque ( $kg.m^2$ )
$k_x, k_z$	Rigidités de l'arbre (N/m)
$k_d$	Demi-différence des rigidités de l'arbre
$k_m$	Rigidité moyenne de l'arbre
$k_u, k_{uw}, k_{wu}, k_w$	Constantes d'élasticité du palier (N/m)
$L, A$	Longueur et aire de la section de l'élément d'arbre
$\delta L$	Travail virtuel des forces externes
$m, m_b$	Masse du disque, masse du balourd (masse excentrique)
$T$	Énergie cinétique
$U$	Énergie de déformation
$u, w / \bar{u}, \bar{w}$	Déplacements par rapport au repère fixe / mobile
$XYZ$	Repère fixe
$xyz$	Repère mobile (en rotation)
$\varphi, \Omega$	Angle de rotation et vitesse angulaire du rotor
$\theta, \psi / \bar{\theta}, \bar{\psi}$	Déplacements angulaires par rapport au repère fixe / mobile

## MATRICES ET VECTEURS

## CHAPITRE IV

$[\bar{C}]$	Matrice définie par la relation (4.2.22)
$[K]$	Matrice définie par la relation (4.2.20)
$[\bar{K}]$	Matrice définie par la relation (4.2.23)
$[K_A]$	Matrice définie par la relation (4.2.17)
$[\bar{K}_A]$	Matrice définie par la relation (4.2.25)
$[K_P]$	Matrice définie par la relation (4.2.16)
$[\bar{K}_P]$	Matrice définie par la relation (4.2.26)
$\{Q\}$	Vecteur donné par (4.2.18)
$\{\bar{Q}\}$	Vecteur donné par (4.2.24)

## CHAPITRE V

$[\bar{C}_A]$	Matrice définie par la relation (5.3.28.b)
$[C_D]$	Matrice donnée par (5.3.7.b)
$[\bar{C}_D]$	Matrice définie par la relation (5.3.10.b)
$[C_P]$	Matrice donnée par (5.3.33)
$[\bar{C}_P]$	Matrice définie par la relation (5.3.36.a)
$[D]$	Matrice définie par la relation (5.3.17)
$[G]$	Matrice définie par la relation (A-4.2.f)



$[H_2]$	Matrice donnée par (A-3.4)
$[H_4]$	Matrice donnée par (A-3.5)
$[H_8]$	Matrice donnée par (A-3.6)
$[K_A]$	Matrice définie par la relation (5.3.26.b)
$[\bar{K}_A]$	Matrice définie par la relation (5.3.28.c)
$[K_d]$	Matrice définie par la relation (A-4.9.c)
$[K_{d,c}]$	Matrice définie à la relation (A-4.13)
$[K_{d,s}]$	Matrice définie par la relation (A-4.14)
$[\bar{K}_D]$	Matrice définie par la relation (5.3.10.c)
$[K_m]$	Matrice définie par la relation (A-4.9.b)
$[K_P]$	Matrice donnée par (5.3.33)
$[\bar{K}_P]$	Matrice définie par la relation (5.3.36.b)
$[M_A]$	Matrice définie par la relation (5.3.26.a)
$[\bar{M}_A]$	Matrice définie par la relation (5.3.28.a)
$[M_d]$	Matrice définie à la relation (A-4.5.f)
$[M_{d,c}]$	Matrice définie par la relation (A-4.2.d)
$[M_{d,s}]$	Matrice définie par la relation (A-4.2.e)
$[M_D]$	Matrice donnée par (5.3.7.a)
$[\bar{M}_D]$	Matrice définie par la relation (5.3.10.a)
$[M_r]$	Matrice définie par la relation (A-4.2.c)
$[M_t]$	Matrice définie par la relation (A-4.2.b)
$[N]$	Matrice définie par la relation (5.3.16)

$\{Q_A\}$	Vecteur défini à la relation (A-4.1)
$\{\bar{Q}_A\}$	Vecteur défini par la relation (A-4.5.d)
$\{Q_D\}$	Vecteur donné par (5.3.7.c)
$\{\bar{Q}_D\}$	Vecteur défini par la relation (5.3.10.d)
$[T_2]$	Matrice définie par la relation (5.2.5)
$[T_4]$	Matrice définie par la relation (5.3.2)
$[T_8]$	Matrice définie par la relation (5.3.13)
$\{\delta_0\}$	Vecteur donné par (5.3.1.a)
$\{\bar{\delta}_0\}$	Vecteur donné par (5.3.1.b)
$\{\delta_e\}$	Vecteur donné par (5.3.12.a)
$\{\bar{\delta}_e\}$	Vecteur donné par (5.3.12.b)
$\{\delta_p\}$	Vecteur donné par (5.3.29.a)
$\{\bar{\delta}_p\}$	Vecteur donné par (5.3.29.b)

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### 1.1 GÉNÉRALITÉS

L'évolution de divers systèmes dynamiques peut être décrite par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. C'est le cas des pales d'hélicoptère en vol avec avancement, des rotors asymétriques, des tuyaux élastiques à fluide pulsatif, du liquide en balancement paramétrique dans des réservoirs flexibles, des missiles flexibles à propulsion pulsative, etc.

Les rotors sont des systèmes dynamiques composés d'une partie en rotation (l'arbre et un ou plusieurs disques) et d'une partie fixe (deux ou plusieurs paliers). Quand on parle de l'asymétrie des rotors, on doit faire la différence entre l'asymétrie de la partie en rotation et l'asymétrie de la partie fixe.

Si seulement une des deux parties est asymétrique, on peut trouver un repère par rapport auquel le système des équations de mouvement a des coefficients constants. Il s'agit d'un repère fixe, pour le cas où la partie fixe est asymétrique, et d'un repère en rotation, dans l'autre cas.

Si les deux parties du rotor sont asymétriques, nous serons confrontés à un système d'équations de mouvement à coefficients périodiques.

Les problèmes les plus importants liés aux rotors asymétriques sont la stabilité du mouvement et la réponse aux balourds.

## 1.2 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.2.1 Problématique des systèmes périodiques

Les principales méthodes utilisées pour étudier la stabilité des systèmes périodiques peuvent être groupées en trois: des méthodes de perturbation, des variantes de la méthode du déterminant infini de Hill et la méthode de la matrice de transfert.

Les deux derniers types de méthodes mentionnées s'appuient sur la théorie de Floquet, dont on peut trouver la présentation dans Meirovitch ([20]). Il existe aussi des méthodes de perturbations qui prennent en compte la forme particulière des solutions d'un système périodique déduite par la théorie de Floquet.

#### Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation sont applicables seulement si l'amplitude des coefficients périodiques est petite, donc s'il existe un paramètre petit  $\epsilon$  qui multiplie les termes périodiques.

Une expansion de la solution en série de puissances du petit paramètre  $\epsilon$  est considérée. En substituant cette série dans le système d'équations et en effectuant la balance des coefficients des différentes puissances en  $\epsilon$ , on obtient un système d'équations différentielles. La résolution successive de ces équations permet l'obtention des termes qui composent la solution recherchée.

L'applicabilité de ces méthodes est limitée par la condition qui exige que l'amplitude des coefficients périodiques soit petite. En plus, une connaissance préalable du comportement du système dynamique est requise, l'analyse de la stabilité étant menée séparément pour différents domaines dans l'espace des paramètres.

On peut trouver une présentation détaillée des méthodes de perturbation dans Nayfeh ([21]), [23]), ainsi que dans Nayfeh et Mook ([22]).

### Méthode du déterminant infini de Hill

Cette méthode est utilisée pour déterminer les courbes de transition qui séparent les domaines de stabilité et ceux d'instabilité dans l'espace des paramètres.

Une expansion de la solution en série de Fourier est substituée dans le système d'équations. En effectuant la balance des coefficients des termes trigonométriques, on obtient un nombre infini d'équations algébriques linéaires. Le déterminant de ce système algébrique est égal à zéro seulement sur les courbes de transition.

En pratique, pour la série de Fourier, on considère un nombre fini de termes. Si on veut avoir des évaluations de plus en plus précises du point de transition recherché (ou si on veut contrôler l'erreur de l'évaluation), on augmente progressivement le nombre de termes.

On peut trouver la présentation de la méthode du déterminant infini de Hill, pour un système périodique à un degré de liberté, dans Meirovitch ([20]).

Des généralisations de la méthode du déterminant infini de Hill pour les systèmes ayant un nombre élevé de degrés de liberté ont été apportées, parmi d'autres, par Noah et Hopkins (1982, [25]), ainsi que par Weyh (1989, [30]). Généralement, pour les systèmes ayant un nombre élevé de degrés de liberté, l'effort de calcul demandé par ces méthodes est comparable à celui demandé par la méthode de la matrice de transfert.

### Méthode de la matrice de transfert

Il s'agit de techniques réunies sous le nom de "méthode numérique de Floquet-Liapunov", ou bien "méthode de la matrice de transfert", ou encore "théorie de Floquet avec intégration numérique". L'essentiel de ces techniques réside dans l'évaluation numérique de la matrice de transfert sur une période et dans l'analyse de la stabilité en utilisant les résultats de la théorie de Floquet.

Dans Friedmann, Hammond et Woo (1977, [7]), ainsi que dans Friedmann (1990, [8]), on divise la période en un nombre d'intervalles égaux et on obtient la matrice de transfert sur une période comme produit des matrices de transfert élémentaires, obtenues pour chaque intervalle, par intégration numérique.

Dans Shinha et autres (1991, [27]), (1996, [28]), on considère l'expansion du vecteur solution dans une série de polynômes de Chebyshev. Le système différentiel est converti dans un système algébrique, avec lequel les solutions sur une période peuvent être obtenues facilement. La matrice de transfert sur une période est obtenue en utilisant un système complet de solutions linéairement indépendantes.

L'inconvénient de cette méthode réside dans l'effort de calcul élevé. On obtient des renseignements sur la stabilité du système pour un seul point seulement dans l'espace des paramètres. Pour déterminer les courbes de transition qui délimitent les domaines de stabilité de ceux d'instabilité, on doit établir un réseau de travail dans l'espace des paramètres et évaluer la stabilité dans chaque nœud du réseau ou bien utiliser une procédure Newton-Raphson. Mais l'augmentation continue de la puissance des ordinateurs fait que l'importance de cet inconvénient diminue.

Son grand avantage est donné par son degré élevé de généralité. Les systèmes des équations de mouvement ne doivent pas satisfaire à des conditions particulières (le cas des méthodes de perturbation) et ne nécessitent pas des étapes préparatoires fastidieuses avant l'application des algorithmes de calcul numérique (le cas des deux autres groupes de méthodes).

### 1.2.2 Problématique des rotors asymétriques

De nombreux auteurs traitent le cas des rotors ayant une asymétrie partielle, c'est-à-dire soit une asymétrie de la partie fixe (paliers), soit une asymétrie de la partie en rotation (arbre et disques). Dans ce cas on arrive à trouver un système d'équations à coefficients constants qui gouverne le mouvement du rotor.

En considérant seulement l'asymétrie de la partie fixe, El-Marhomy (1991, [6]), Kang et Hwang (1996, [16]), ainsi que Kang et Lee (1996, [17]) étudient l'influence des paramètres qui modélisent la rigidité et l'amortissement des paliers sur la stabilité du mouvement. Par contre, Ardayfio et Frohrib (1976, [1]) considèrent seulement l'asymétrie de l'arbre et du disque et analysent l'influence de cette asymétrie sur la stabilité du mouvement. Dans Chong-Won (1993, [5]) les deux types d'asymétrie sont étudiés séparément.

De nombreux travaux considèrent des modèles simples de rotors asymétriques (arbre élastique à section constante, disque en mouvement plan, paliers élastiques identiques, avec l'ajout éventuel de l'amortissement externe). On classifie certains de ces travaux en fonction de la méthode utilisée pour analyser la stabilité du mouvement.

Brosens et Crandall (1961, [4]), qui ont donné un des premiers travaux sur ce sujet, ainsi que Kotera et Yano (1980, [18]), analysent la stabilité par la méthode du déterminant infini de Hill.

Tondl (1965, [29]) transforme le système des équations différentielles de mouvement dans un système d'équations intégrales de type Volterra et ensuite, pour étudier la stabilité, développe une méthode de perturbation qui tient compte des résultats de la théorie de Floquet.

Black et McTernan (1968, [2]), Black (1969, [3]), ainsi que Iwatsubo, Kawai et Miyaji (1980, [14]) utilisent la méthode de perturbation de Hsu (1963, [12]) pour étudier la stabilité du mouvement.

Ganesan (1996, [9]) analyse la réponse stationnaire lors de la résonance primaire, en utilisant une méthode de perturbation (la méthode des échelles de temps multiples).

Guilhen et autres (1988, [11]) appliquent la méthode de la matrice de transfert à un modèle de rotor peu intéressant de point de vue pratique (paliers rigides aux extrémités de l'arbre, palier élastique intermédiaire).

L'adoption d'un modèle de rotor asymétrique simple présente l'avantage de permettre une compréhension facile des phénomènes traités, mais l'utilité pratique de ces études reste limitée.

Inagaki, Kanki et Shiraki (1980, [13]) ont étudié un rotor asymétrique multi-disques et avec non-uniformité longitudinale de l'arbre. Pour établir le système des équations temporelles du mouvement, ils ont utilisé la technique des matrices de transfert (le "transfert" intervenant entre deux sections voisines de l'arbre). La réponse aux balourds est déduite en appliquant la méthode de balance harmonique.

Une modélisation des rotors par éléments finis, qui prend en compte l'inertie de rotation et l'effet gyroscopique pour les disques ainsi que pour l'arbre, a été développée par Nelson et McVaugh (1976, [24]). Il s'agit d'un rotor à arbre symétrique et à paliers asymétriques. Cette modélisation peut être trouvée aussi dans Lalanne et Ferraris (1990, [19], chapitre 3).

Genta (1988, [10]) applique la méthode des éléments finis aux rotors asymétriques et utilise des coordonnées complexes, pour réduire l'ordre du problème matriciel. Pour analyser la stabilité du mouvement, il adopte la méthode du déterminant infini de Hill.

Kang, Shih et Lee (1992, [15]) appliquent également la méthode des éléments finis aux rotors asymétriques, en considérant en plus la déformation de cisaillement de



l'arbre. Ils utilisent ensuite la méthode de balance harmonique pour déduire la réponse aux balourds.

### 1.3 OBJECTIF DU PRÉSENT TRAVAIL

Dans le présent travail nous allons présenter la mise en équation du comportement des rotors asymétriques et une méthode capable de déterminer les vitesses critiques et la réponse stationnaire de ces rotors. Ensuite, nous élaborerons un ou plusieurs programmes informatiques, utilisables pour l'analyse dynamique des rotors asymétriques.

Les équations de mouvement des rotors asymétriques vont être déduites premièrement pour un modèle relativement simple, ensuite pour un modèle comportant un degré de généralité élevé.

Le modèle simple choisi est représentatif dans de nombreux cas pratiques. La présentation détaillée de ses équations de mouvement sera accompagnée de l'étude des cas particuliers importants.

Pour le modèle complexe, nous déduirons le système des équations temporelles du mouvement en appliquant la méthode des éléments finis. Nous suivrons la procédure développée par Nelson et McVaugh [24] pour des rotors à arbres symétriques et nous introduirons les modifications nécessaires pour prendre en compte l'asymétrie de l'arbre.

Pour analyser la stabilité du mouvement et pour déterminer la réponse stationnaire, nous considérerons la méthode de la matrice de transfert sous la forme

développée par Friedmann, Hammond et Woo [7]. Cette méthode a été utilisée pour l'étude du mouvement de la pale du rotor d'hélicoptère en vol avec avancement.

À une exception près, à savoir Guilhen et autres [11], la méthode de la matrice de transfert n'a pas été utilisée pour l'étude du comportement des rotors asymétriques. Dans [11], un modèle simple de rotor asymétrique est traité en détail et une application industrielle (un rotor à arbre symétrique et paliers asymétriques) est présentée brièvement.

#### 1.4 PLAN DU MÉMOIRE

Après l'introduction, nous donnons au chapitre 2 les résultats théoriques concernant l'analyse de la stabilité du mouvement et l'évaluation de la réponse stationnaire pour un système dynamique périodique supposé linéaire.

Au chapitre 3, nous présentons des méthodes pour l'évaluation numérique de la matrice de transfert sur une période, parmi lesquelles celle de Friedmann, Hammond et Woo [7], qu'on retiendra. Ensuite, nous donnons la méthode considérée pour l'évaluation numérique de la réponse stationnaire.

Dans le chapitre 4, nous déduisons les équations de mouvement pour un modèle relativement simple de rotor asymétrique. Pour l'analyse de la stabilité, nous donnons les résultats obtenus par une méthode de perturbation, tandis que pour l'évaluation de la réponse stationnaire, nous appliquons la méthode de balance harmonique.

Au chapitre 5, nous déduisons les équations de mouvement pour un modèle de rotor asymétrique comportant un degré de généralité élevé. La détermination des

matrices de masse, d'amortissement et de rigidité est présentée en détail. Nous identifions des cas particuliers pour lesquelles d'importantes simplifications dans l'étude numérique sont possibles.

Dans le chapitre 6, nous présentons les programmes informatiques et nous vérifions la validité de l'approche numérique considérée.

Finalement, les conclusions de cette étude sont données au chapitre 7.

## CHAPITRE II

### THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES PÉRIODIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats théoriques concernant l'analyse de la stabilité du mouvement et l'évaluation de la réponse stationnaire pour un système dynamique périodique supposé linéaire.

Si  $n$  est le nombre de degrés de liberté, le mouvement sera gouverné par un système de  $m=2n$  équations différentielles de premier ordre

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\} + \{f(t)\} \quad (2.0.1)$$

dont les éléments  $A_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) de la matrice  $[A(t)]$  et les éléments  $f_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) du terme libre  $\{f(t)\}$  sont des fonctions périodiques de période  $T$ .

La présentation qui suit s'appuie sur les exposés donnés par Meirovitch ([20], chapitres 6 et 7), Nayfeh et Mook ([22], chapitre 5) et Friedmann [8].

#### 2.1 SYSTÈMES LINÉAIRES NON AUTONOMES

Considérons un système linéaire non autonome homogène de  $m$  équations différentielles de premier ordre:

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\} \quad (2.1.1)$$

##### Matrice fondamentale

Une matrice fondamentale du système (2.1.1) est donnée par

$$[\Phi(t)] = [\{\Phi_1(t)\} \quad \dots \quad \{\Phi_m(t)\}] \quad (2.1.2)$$

où

$\{\Phi_k(t)\}_{k=1,2,\dots,m}$  sont des solutions linéairement indépendantes du système (2.1.1).

N'importe quelle solution du système (2.1.1) peut être mise sous la forme

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)]\{c\} \quad (2.1.3)$$

où  $\{c\}$  est un vecteur non nul, uniquement déterminé par les conditions initiales  $\{x(t_0)\}$ .

### Matrice de transfert

Une conséquence immédiate de (2.1.3) c'est que la solution du système (2.1.1) satisfait à la relation

$$\{x(t_2)\} = [\Phi(t_2, t_1)]\{x(t_1)\}, \quad (2.1.4)$$

avec

$$[\Phi(t_2, t_1)] = [\Phi(t_2)][\Phi(t_1)]^{-1}, \quad (2.1.5)$$

où  $[\Phi(t)]$  est une matrice fondamentale.

$[\Phi(t_2, t_1)]$  assure le "transfert" entre les valeurs de la solution à deux moments différents.

Nous utilisons toujours la matrice fondamentale qui satisfait à la condition

$$[\Phi(t_0)] = [I_m], \quad (2.1.6)$$

où  $[I_m]$  est la matrice unitaire de dimensions  $m \times m$ . Dans ce cas, (2.1.5) implique

$$[\Phi(t, t_0)] = [\Phi(t)]. \quad (2.1.7)$$

Donc, nous allons utiliser pour  $[\Phi(t)]$  l'appellation de matrice de transfert.

### Solution générale du système non homogène

Pour le système linéaire non autonome de  $m$  équations différentielles de premier ordre

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\} + \{f(t)\}, \quad (2.1.8)$$

la solution générale est donnée par

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)]\{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t [\Phi(t,s)]\{f(s)\}ds, \quad (2.1.9)$$

où  $[\Phi(t)]$  est la matrice de transfert du système et

$$[\Phi(t,s)] = [\Phi(t)][\Phi(s)]^{-1}.$$

## 2.2 SYSTÈMES LINÉAIRES PÉRIODIQUES

### 2.2.1 Théorie de Floquet et analyse de la stabilité

Nous considérons le système linéaire homogène de  $m$  équations différentielles de premier ordre

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\}, \quad (2.2.1)$$

en imposant à la matrice du système la condition qu'elle soit périodique, de période  $T$ :

$$[A(t+T)] = [A(t)] \quad (2.2.2)$$

Le résultat de base de la théorie de Floquet (généralement présenté comme un théorème) nous donne la forme de la matrice de transfert du système (2.2.1):

$$[\Phi(t)] = [Q(t)]e^{t[R]}, \quad (2.2.3)$$

où

$[Q(t)]$  est une matrice périodique de période  $T$ ,

et  $[R]$ , une matrice constante, donnée par

$$e^{T[R]} = [\Phi(T)]. \quad (2.2.4)$$

Une conséquence de la relation (2.2.3) consiste en l'existence d'une transformation de variables (appelée la transformation Liapunov-Floquet) qui remplace le système périodique (2.2.1) par un système à coefficients constants. Il s'agit de

$$\{x(t)\} = [Q(t)]\{z(t)\}, \quad (2.2.5)$$

où  $[Q(t)]$  est la matrice périodique qui intervient dans (2.2.3). Il est possible de démontrer qu'en substituant (2.2.5) dans (2.2.1), on arrive à:

$$\{\dot{z}\} = [R]\{z\}, \quad (2.2.6)$$

où  $[R]$  est la matrice constante qui intervient dans (2.2.3).

Une autre conséquence de la relation (2.2.3) c'est que la matrice de transfert satisfait à la relation

$$[\Phi(t + kT)] = [\Phi(t)]e^{kT[R]} \quad (k = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots) \quad (2.2.7)$$

où  $[R]$  est la matrice constante qui intervient dans (2.2.3).

La relation (2.2.7) montre que la matrice de transfert  $[\Phi(t)]$  est entièrement connue si on connaît sa variation sur une période. De plus, (2.2.7) et (2.1.3) montrent que la solution du système périodique (2.2.1) est entièrement connue si on connaît les valeurs de  $[\Phi(t)]$  sur une période.

### Exposants et multiplicateurs caractéristiques

On appelle exposants caractéristiques du système périodique les valeurs propres de la matrice  $[R]$ , notées  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

On appelle multiplicateurs caractéristiques du système périodique les valeurs propres de la matrice  $[\Phi(T)]$ , notées  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

La relation (2.2.4) implique

$$\lambda_j = e^{T\rho_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.2.8)$$

et aussi

$$\operatorname{Re}(\rho_j) = \frac{1}{T} \ln |\lambda_j|, \quad \operatorname{Im}(\rho_j) = \frac{1}{T} (\arg \lambda_j + 2k\pi), \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.2.9)$$

On voit que la partie imaginaire de  $\rho_j$  est déterminée à l'exception d'un multiple entier de  $\frac{2\pi}{T}$ .

### Analyse de la stabilité

L'état de stabilité ou d'instabilité du système (2.2.1) est entièrement défini par les valeurs des exposants caractéristiques (ou des multiplicateurs caractéristiques) du système.

Autrement dit, pour pouvoir analyser la stabilité du système périodique (2.2.1), il suffit de connaître la matrice de transfert sur une période  $[\Phi(T)]$ .

Nous disposons des résultats suivants:



1. Si tous les exposants caractéristiques ont des parties réelles négatives, le système (2.2.1) est asymptotiquement stable (toutes ses solutions tendent vers la solution nulle).

2. S'il existe un exposant caractéristique ayant la partie réelle positive, le système (2.2.1) est instable (il y a des solutions qui s'éloignent indéfiniment de la solution nulle).

3. S'il existe des exposants caractéristiques ayant la partie réelle nulle tandis que tous les autres ont la partie réelle négative, le système a un comportement critique. Il peut être stable (il n'y a pas de solution qui s'éloigne indéfiniment de la solution nulle) ou instable.

Pour établir les conditions qui correspondent à chacun des deux cas, on doit introduire quelques notions.

Les exposants caractéristiques sont les racines du polynôme caractéristique:

$$\det([R] - \rho[I]) = r_0 \rho^m + r_1 \rho^{m-1} + \dots + r_m = 0$$

Si  $\rho_i$  est une racine multiple, on peut écrire

$$\det([R] - \rho[I]) = (\rho - \rho_i)^{\mu_i} P_i(\rho)$$

où  $\mu_i$  est l'ordre de multiplicité de  $\rho_i$ ,  $(\rho - \rho_i)^{\mu_i}$  est le diviseur élémentaire du polynôme caractéristique qui correspond à  $\rho_i$  et  $P_i(\rho)$  est un polynôme qui satisfait à la condition  $P_i(\rho_i) \neq 0$ .

Soit  $\nu_i$  l'ordre de nullité de la racine  $\rho_i$  (le nombre de vecteurs propres indépendants associées à  $\rho_i$ ). En général,  $\nu_i \leq \mu_i$ . Si  $\nu_i = \mu_i$ ,  $(\rho - \rho_i)^{\mu_i}$  est un diviseur élémentaire simple du polynôme caractéristique.

Revenons maintenant à l'analyse de la stabilité du système périodique (2.2.1), dans le cas du comportement critique. Si les diviseurs caractéristiques qui correspondent aux exposants caractéristiques ayant la partie réelle nulle sont simples, le système est stable. Autrement, le système est instable.

4. Une solution périodique est possible seulement s'il existe un exposant caractéristique nul (ou "presque" nul, sa partie imaginaire étant nulle à l'exception d'un multiple entier de  $\frac{2\pi}{T}$ ).

La relation (2.2.8) permet de réécrire les résultats donnés ci-haut en nous rapportant aux multiplicateurs caractéristiques. Par exemple, la condition de stabilité asymptotique

$$\operatorname{Re}(\rho_j) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

est équivalente à

$$|\lambda_j| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

### 2.2.2 Réponse stationnaire

Nous considérons maintenant le système linéaire non homogène de  $m$  équations différentielles de premier ordre:

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\} + \{f(t)\} \quad (2.2.10)$$

avec

$$[A(t+T)] = [A(t)] \quad \text{et} \quad \{f(t+T)\} = \{f(t)\}, \quad (2.2.11)$$

où  $T$  représente la période commune de  $[A(t)]$  et  $\{f(t)\}$ .

Nous cherchons la réponse stationnaire, c'est-à-dire la solution périodique.

L'expression de la solution générale du système (2.2.10) est donnée par (2.1.9).

Si on prend  $t_0 = 0$ , on a

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)]\{x(0)\} + \int_0^t [\Phi(t,s)]\{f(s)\}ds \quad (2.2.12)$$

où  $[\Phi(t)]$  est la matrice de transfert du système.

Nous devons choisir la condition initiale  $\{x(0)\}$  de manière que la solution (2.2.12) soit périodique, de période  $T$ . En imposant à la solution (2.2.12) la condition

$$\{x(T)\} = \{x(0)\}, \quad (2.2.13)$$

on obtient un système algébrique ayant  $\{x(0)\}$  comme inconnue:

$$([I_m] - [\Phi(T)])\{x(0)\} = \int_0^T [\Phi(T,s)]\{f(s)\}ds. \quad (2.2.14)$$

Le système (2.2.14) a une solution unique seulement si

$$\det([I_m] - [\Phi(T)]) \neq 0, \quad (2.2.15)$$

donc seulement si tous les exposants caractéristiques sont non nuls, c'est-à-dire si le système n'a pas un comportement critique (voir les résultats de l'analyse de la stabilité).

En substituant  $\{x(0)\}$  donné par (2.2.14) dans (2.2.12), on obtient:

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)]([I_m] - [\Phi(T)])^{-1} \int_0^T [\Phi(T,s)]\{f(s)\}ds + \int_0^t [\Phi(t,s)]\{f(s)\}ds \quad (2.2.16)$$

Nous disposons des résultats suivants:

1. La solution (2.2.16) est périodique, de période  $T$ . La démonstration utilise les conditions (2.2.11) et les propriétés de la matrice de transfert  $[\Phi(t)]$  données à la section 2.2.1.

2. La solution (2.2.16) est la seule solution périodique du système (2.2.10).

Si le système est instable, la solution (2.2.16) n'a pas de sens physique. Si le système est asymptotiquement stable, la solution (2.2.16) est la réponse stationnaire recherchée.

## CHAPITRE III

### MÉTHODE DE LA MATRICE DE TRANSFERT

#### 3.1 ÉVALUATION DE LA MATRICE DE TRANSFERT SUR UNE PÉRIODE

Nous considérons de nouveau le système linéaire périodique de  $m$  équations différentielles de premier ordre (2.0.1). Pour analyser la stabilité des solutions, il suffit de connaître les multiplicateurs caractéristiques, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice de transfert sur une période  $[\Phi(T)]$ .

On peut déterminer la matrice  $[\Phi(T)]$  en calculant numériquement, sur la période  $T$ , un système fondamental de solutions du système périodique homogène, avec les conditions initiales

$$\{\Phi_k(0)\} = \{e_k\}, \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1.1)$$

où  $\{e_k\}$  est le vecteur unitaire de dimension  $m$ , dont le  $k^e$  élément est égal à 1.

La matrice  $[\Phi(T)]$  sera donnée par

$$[\Phi(T)] = [\{\Phi_1(T)\} \quad \dots \quad \{\Phi_m(T)\}]. \quad (3.1.2)$$

Cette méthode nécessite  $n$  intégrations numériques du système homogène, sur une période. Afin de diminuer l'effort de calcul, une technique numérique qui permet l'évaluation de  $[\Phi(T)]$  par un seul passage sur une période a été développée par Hsu (1972), ainsi que par Friedmann, Hammond et Woo (1977).

La période  $T$  de la matrice  $[A(t)]$  est divisée en  $n$  intervalles de longueur égale  $h = T/n$ , les points de division étant:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T. \quad (3.1.3)$$

Entre les valeurs de la solution  $\{x(t)\}$  du système homogène aux extrémités de l'intervalle  $\tau_i = (t_i, t_{i+1})$  il existe la relation:

$$\{x(t_{i+1})\} = [\Phi(t_{i+1}, t_i)] \{x(t_i)\} \quad (3.1.4)$$

où  $[\Phi(t_{i+1}, t_i)]$  est la matrice de transfert élémentaire.

En considérant les relations analogues qui lient  $\{x(T)\}$  et  $\{x(t_i)\}$ , ainsi que  $\{x(T)\}$  et  $\{x(t_{i+1})\}$ , on obtient:

$$[\Phi(T, t_i)] = [\Phi(T, t_{i+1})][\Phi(t_{i+1}, t_i)]. \quad (3.1.5)$$

La matrice  $[\Phi(T)]$  peut être obtenue par un calcul itératif, basé sur la relation (3.1.5). On part avec  $[\Phi(T, T)] = [I_m]$  et on obtient, progressivement,  $[\Phi(T, t_{n-1})]$ ,  $[\Phi(T, t_{n-2})]$ , ...  $[\Phi(T, 0)] = [\Phi(T)]$ .

Pour déterminer la matrice de transfert élémentaire  $[\Phi(t_{i+1}, t_i)]$ , plusieurs méthodes ont été proposées.

#### Méthode de Newmark

Cette méthode est utilisée dans Guilhen et autres ([11]). Nous présentons ici la forme trapézoïdale de la méthode de Newmark.

Nous considérons l'approximation:

$$\{\dot{x}_{i+1}\} \approx -\{\dot{x}_i\} + \frac{2}{h}(\{x_{i+1}\} - \{x_i\}) \quad (3.1.6)$$

où  $\{x_i\}$  est la valeur de la solution du système homogène au moment  $t_i$ .

Mais

$$\{\dot{x}_i\} = [A(t_i)]\{x_i\} \quad \text{et} \quad \{\dot{x}_{i+1}\} = [A(t_{i+1})]\{x_{i+1}\}. \quad (3.1.7)$$

En substituant (3.1.7) dans (3.1.6) et en tenant compte de (3.1.4), on obtient:

$$[\Phi(t_{i+1}, t_i)] \approx \left( \frac{2}{h}[I_m] - [A(t_{i+1})] \right)^{-1} \left( \frac{2}{h}[I_m] + [A(t_i)] \right) \quad (3.1.8)$$

### Expansion en série de Taylor

Cette méthode est proposée dans Pipes et Hovanessian ([26], chapitre 4).

En considérant l'expansion en série de Taylor de la matrice  $[\Phi(t)]$

$$[\Phi(t+h)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hD)^k}{k!} [\Phi(t)], \quad (3.1.9)$$

où  $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$ , pour la matrice de transfert élémentaire on obtient

$$[\Phi(t_{i+1}, t_i)] = [\Phi(t_i + h)][\Phi(t_i)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} [\alpha_k(t_i)], \quad (3.1.10)$$

avec les matrices  $[\alpha_k(t)]$  données par

$$[\alpha_1(t)] = [A(t)], \quad (3.1.11)$$

$$[\alpha_k(t)] = D[\alpha_{k-1}(t)] + [\alpha_{k-1}(t)]A(t). \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Si on retient seulement deux termes de dérivation dans (3.1.9), on obtient:

$$[\Phi(t_{i+1}, t_i)] \approx [I_m] + h[A(t_i)] + \frac{h^2}{2} \left( [\dot{A}(t_i)] + [A(t_i)]^2 \right). \quad (3.1.12)$$

### Intégration numérique

Nous appliquons au système périodique homogène, sur l'intervalle  $\tau_i = (t_i, t_{i+1})$ , un schéma d'intégration numérique.

Si on considère le schéma d'intégration numérique de Euler, défini, pour l'équation

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.1.13)$$

$$\text{par } x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i), \quad (3.1.14)$$

on arrive à

$$[\Phi(t_{i+1}, t_i)] \approx [I_m] + h[A(t_i)]. \quad (3.1.15)$$

Un schéma d'intégration numérique très performant, de type Runge-Kutta de 4<sup>e</sup> ordre (le schéma avec les coefficients de Gill), est présenté dans Friedmann, Hammond et Woo [7]. Pour l'équation (3.1.13), ce schéma est défini par

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} \left[ K_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)K_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)K_3 + K_4 \right], \quad (3.1.16)$$

avec

$$K_1 = f(t_i, x_i),$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hK_1\right),$$



$$K_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hK_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hK_2\right),$$

$$K_4 = f\left(t_i + h, x_i - \frac{1}{\sqrt{2}}hK_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)hK_3\right).$$

Si on applique ce schéma d'intégration numérique au système périodique homogène, sur l'intervalle  $\tau_i = (t_i, t_{i+1})$ , on obtient:

$$\begin{aligned} [\Phi(t_{i+1}, t_i)] = [I_m] + \frac{1}{6}h\left[A(t_i)\right] + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[E(t_i)] + \\ + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[F(t_i)] + [G(t_i)], \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

avec

$$\begin{aligned} [E(t)] &= [A(t + \frac{1}{2}h)][[I_m] + \frac{1}{2}h[A(t)]], \\ [F(t)] &= [A(t + \frac{1}{2}h)][[I_m] + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h[A(t)] + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h[E(t)]], \\ [G(t)] &= [A(t + h)][[I_m] - \frac{1}{\sqrt{2}}h[E(t)] + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h[F(t)]]. \end{aligned}$$

### 3.2 ÉVALUATION DE LA RÉPONSE STATIONNAIRE

Premièrement, nous déterminons  $\{x(0)\}$ , comme solution du système algébrique (2.2.14):

$$([I_m] - [\Phi(T)])\{x(0)\} = \int_0^T [\Phi(T, s)]\{f(s)\}ds$$

Le terme libre de ce système peut être obtenu numériquement. Si nous choisissons la méthode de Simpson, en considérant la division de la période T déjà utilisée pour le calcul de  $[\Phi(T)]$ , on obtient:

$$\int_0^T [\Phi(T, s)] \{f(s)\} ds = \frac{1}{3} h \left( [\Phi(T)] \{f(0)\} + 4 \sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} [\Phi(T, t_i)] \{f(t_i)\} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=2,4}^{n-2} [\Phi(T, t_i)] \{f(t_i)\} + \{f(T)\} \right) \quad (3.1.18)$$

Il est nécessaire que le nombre d'intervalles  $n$  soit pair. Les matrices  $[\Phi(T, t_i)]$  ont été déjà obtenues dans l'étape du calcul de  $[\Phi(T)]$ .

Maintenant, nous déterminons la réponse stationnaire. Au lieu d'utiliser l'expression (2.2.16), il est préférable d'intégrer numériquement le système périodique non homogène (2.0.1), en imposant au moment  $t=0$  la valeur  $\{x(0)\}$  obtenue ci-haut.

Nous appliquons le schéma d'intégration numérique de type Runge-Kutta de 4<sup>e</sup> ordre déjà utilisé au calcul de  $[\Phi(T)]$ , en considérant la même division (3.1.3) de la période  $T$ .

Il résulte:

$$\{x(t_{i+1})\} = \{x(t_i)\} + \frac{1}{6} h \left( \{K_1\} + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \{K_2\} + 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \{K_3\} + \{K_4\} \right), \quad (3.1.19)$$

avec

$$\{K_1\} = \left\{ F \left( t_i, \{x(t_i)\} \right) \right\},$$

$$\{K_2\} = \left\{ F \left( t_i + \frac{1}{2} h, \{x(t_i)\} + \frac{1}{2} h \{K_1\} \right) \right\},$$

$$\{K_3\} = \left\{ F \left( t_i + \frac{1}{2} h, \{x(t_i)\} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h \{K_1\} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h \{K_2\} \right) \right\},$$

$$\{K_4\} = \left\{ F \left( t_i + h, \{x(t_i)\} - \frac{1}{\sqrt{2}} h \{K_2\} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) h \{K_3\} \right) \right\},$$

où

$$\{F(t, \{Z\})\} = [A(t)]\{Z\} + \{f(t)\}.$$

Si, à cause des erreurs de calcul numérique,  $\{x(T)\}$  n'est pas suffisamment proche de  $\{x(0)\}$ , nous continuons l'intégration du système périodique sur quelques périodes, jusqu'à ce qu'une condition de type

$$\left| \{x(kT + T)\} - \{x(kT)\} \right| \leq \varepsilon \quad (3.1.20)$$

soit satisfaite.

La solution obtenue est vraiment la réponse stationnaire seulement si le système est stable.

Si le système dynamique a un taux d'amortissement élevé, l'obtention de la réponse périodique peut être faite sans calculer  $\{x(0)\}$ . On lance le processus d'intégration numérique avec un  $\{x(0)\}$  quelconque, par exemple avec  $\{x(0)\} = \{0\}$ . Après un certain nombre de périodes, la solution transitoire s'atténue et on obtient la réponse stationnaire. Mais avec le calcul préalable de  $\{x(0)\}$ , le nombre de périodes nécessaire pour atteindre la condition (3.1.20) est beaucoup plus petit.

## CHAPITRE IV

### ROTORS ASYMÉTRIQUES - UN MODÈLE SIMPLE

#### 4.1 MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le modèle de rotor que nous considérerons maintenant a été étudié, parmi d'autres, par Tondl [29], Black et McTernan [2], ainsi que par Kotera et Yano [18].

Il s'agit d'un rotor composé d'un arbre élastique en position horizontale, d'un disque rigide placé au milieu de l'arbre et de deux paliers élastiques (voir la figure 4.1). Le rotor est supposé tourner à une vitesse de rotation constante  $\Omega$ .

La section de l'arbre est constante mais asymétrique, c'est-à-dire que les rigidités selon les deux directions principales diffèrent. La masse de l'arbre est supposée négligeable par rapport à celle du disque.

Nous considérons le repère fixe XYZ, avec l'axe Y donnant la position de l'arbre pour le système non déformé et l'axe Z donnant la direction verticale (voir la figure 4.2). Nous considérons aussi le repère mobile xyz, avec l'axe y colinéaire à Y et, pour le système non déformé, les axes x et z parallèles aux axes principaux  $x'$  et  $z'$  de chaque section de l'arbre. Les déplacements du centre élastique C de la section de l'arbre sont u, w par rapport au repère fixe et  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  par rapport au repère mobile.

Au point d'attache, le centre de gravité du disque et le centre élastique de la section de l'arbre coïncident. Un balourd (une masse concentrée) est placé sur le disque, son emplacement étant défini par le rayon d et l'angle de phase  $\beta$  par rapport à la direction principale z de la section de l'arbre (voir la figure 4.3). Nous considérons aussi un amortissement environnemental visqueux, agissant sur le disque.

Les deux paliers, placés aux extrémités de l'arbre, sont identiques. Leur élasticité est différente dans les directions horizontale et verticale et leur amortissement est négligeable (voir la figure 4.4). Le mouvement des deux extrémités de l'arbre est identique à cause de la symétrie du rotor.

## 4.2 ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

Nous déterminons premièrement les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail virtuel des forces externes. Pour exprimer les déplacements de l'arbre, nous utilisons la méthode Rayleigh-Ritz. Nous appliquons ensuite le formalisme des équations de Lagrange.

### 4.2.1 Énergie cinétique, énergie de déformation, travail virtuel des forces externes

Si on considère que la masse du balourd est petite par rapport à celle du disque, l'énergie cinétique du rotor est donnée par (voir l'annexe A-1):

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) + m_b d \Omega [\dot{u}_1 \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w}_1 \sin(\Omega t + \beta)] \quad (4.2.1)$$

où

$u_1$  et  $w_1$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère fixe,

$\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor,

$m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd,

$d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd.

L'énergie de déformation de l'arbre, si on néglige l'effet du cisaillement, a l'expression:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EI_z \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 + EI_x \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.2.2)$$

où

$\bar{u}$  et  $\bar{w}$  sont les déplacements du centre de la section dans le repère mobile,

$I_x$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie principaux de la section.

$E$  est le module d'élasticité,  $L$  est la longueur de l'arbre.

Le travail virtuel des forces externes a l'expression:

$$\delta L = -k_u u_0 \delta u_0 - k_w w_0 \delta w_0 - c \dot{u}_1 \delta u_1 - c \dot{w}_1 \delta w_1 - mg \delta w_1 \quad (4.2.3)$$

où

$u_0$  et  $w_0$  sont les déplacements des extrémités de l'arbre par rapport au repère fixe,

$u_1$  et  $w_1$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère fixe.

$k_u$  et  $k_w$  sont les rigidités horizontale et verticale des paliers.

$c$  est la constante de l'amortissement externe,

$m$  est la masse du disque,  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

#### 4.2.2 Déplacements de l'arbre

Les déplacements dans le repère mobile ( $\bar{u}$  et  $\bar{w}$ ) sont liés aux déplacements dans le repère fixe ( $u$  et  $w$ ) par la relation

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (4.2.4)$$

avec la matrice  $[T_2]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3.

Nous appliquons la méthode Rayleigh-Ritz pour approximer les déplacements de l'arbre dans les directions  $x$  et  $z$ . Nous considérons

$$\bar{u}(y, t) = \bar{u}_0(t) + f(y)\bar{q}_x(t) \quad \text{et} \quad \bar{w}(y, t) = \bar{w}_0(t) + f(y)\bar{q}_z(t). \quad (4.2.5)$$

où

$\bar{u}_0$  et  $\bar{w}_0$  sont les déplacements des extrémités de l'arbre par rapport au repère mobile,

$\bar{q}_x(t)$  et  $\bar{q}_z(t)$  sont des coordonnées généralisées indépendantes.

$f(y)$  est la forme modale exacte du premier mode de vibration en flexion d'une poutre à section constante, simplement supportée aux extrémités.

$$f(y) = \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right). \quad (4.2.6)$$

Pour les déplacements dans le repère fixe on a

$$u(y, t) = u_0(t) + f(y)q_x(t) \quad \text{et} \quad w(y, t) = w_0(t) + f(y)q_z(t), \quad (4.2.7)$$

avec les coordonnées  $q_x(t)$  et  $q_z(t)$  définies par

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_z \end{Bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

où  $[T_2]$  est la matrice introduite à la relation (4.2.4).

#### 4.2.3 Équations de mouvement par rapport au repère fixe

En substituant (4.2.5) dans (4.2.2) on obtient

$$U = \frac{1}{2}k_x \bar{q}_x^2 + \frac{1}{2}k_z \bar{q}_z^2 \quad (4.2.9)$$

où  $k_x$  et  $k_z$  sont les rigidités de l'arbre:

$$k_x = \frac{\pi^4}{2} \frac{EI_z}{L^3} \quad \text{et} \quad k_z = \frac{\pi^4}{2} \frac{EI_x}{L^3}. \quad (4.2.10)$$

En considérant la transformation de coordonnées (4.2.8), on obtient

$$U = \frac{1}{2} k_m (q_x^2 + q_z^2) + \frac{1}{2} k_d [(q_x^2 - q_z^2) \cos(2\Omega t) - 2q_x q_z \sin(2\Omega t)], \quad (4.2.11)$$

avec

$$k_m = \frac{1}{2} (k_x + k_z) \quad \text{et} \quad k_d = \frac{1}{2} (k_x - k_z). \quad (4.2.12)$$

Les variables  $u_1(t)$ ,  $w_1(t)$ ,  $u_0(t)$ ,  $w_0(t)$ ,  $q_x(t)$  et  $q_z(t)$  ne sont pas indépendantes. Si on introduit  $y = \frac{1}{2} L$  dans (4.2.7), on obtient:

$$u_0(t) = u_1(t) - q_x(t) \quad \text{et} \quad w_0(t) = w_1(t) - q_z(t). \quad (4.2.13)$$

Nous substituons (4.2.13) dans (4.2.3) et nous déterminons les forces généralisées correspondant aux variables  $u_1$ ,  $w_1$ ,  $q_x$  et  $q_z$ .

Nous appliquons ensuite les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = F_{\xi_i},$$

où  $\xi_i$  sont les quatre variables retenues en haut,  $T$  est l'énergie cinétique définie par (4.2.1),  $U$  est l'énergie de déformation définie par (4.2.11) et  $F_{\xi_i}$  les forces généralisées.

On obtient le système

$$\begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{q}_x \\ \dot{q}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u & & -k_u & \\ & k_w & & -k_w \\ -k_u & & k_u & \\ & -k_w & & k_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ q_x \\ q_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_m + k_d \cos(2\Omega t) & -k_d \sin(2\Omega t) \\ -k_d \sin(2\Omega t) & k_m - k_d \sin(2\Omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_b d \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \\ m_b d \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) - mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

qui est équivalent aux deux équations matricielles suivantes:



$$m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{w}_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \end{Bmatrix} + [K_p] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \{Q(t)\} \quad (4.2.14)$$

et

$$-[K_p] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} + [K_p] \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} + [K_A(t)] \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.15)$$

avec

$$[K_p] = \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_w \end{bmatrix}, \quad (4.2.16)$$

$$[K_A(t)] = k_m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} \cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t \\ -\sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \end{bmatrix}, \quad (4.2.17)$$

et

$$\{Q(t)\} = m_h d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \beta) \\ \cos(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix} - mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.2.18)$$

L'équation (4.2.15) nous permet d'exprimer le vecteur des déplacements généralisés  $q_x$  et  $q_z$  en fonction de celui des déplacements  $u_1$  et  $w_1$ . En substituant la relation obtenue dans (4.2.14), on arrive au système

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{w}_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \end{Bmatrix} + [K(t)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \{Q(t)\}. \quad (4.2.19)$$

où

$$[K(t)] = \left( [K_A(t)]^{-1} + [K_p]^{-1} \right)^{-1}. \quad (4.2.20)$$

L'expression (4.2.20) de la matrice de rigidité  $[K(t)]$  est explicitée à l'annexe A-2. La matrice  $[K(t)]$  a une variation périodique de fréquence  $2\Omega$ , due à l'asymétrie de la section de l'arbre, tandis que le vecteur des forces d'excitation  $\{Q(t)\}$  a une variation périodique de fréquence  $\Omega$ , due au balourd.

#### 4.2.4 Équations de mouvement par rapport au repère mobile

En substituant (4.2.3) dans (4.2.19), on obtient:

$$m \left\{ \begin{matrix} \ddot{\bar{u}}_1 \\ \ddot{\bar{w}}_1 \end{matrix} \right\} + [\bar{C}] \left\{ \begin{matrix} \dot{\bar{u}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_1 \end{matrix} \right\} + [\bar{K}(t)] \left\{ \begin{matrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \end{matrix} \right\} = \{\bar{Q}(t)\} \quad (4.2.21)$$

où

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} c & 2\Omega m \\ -2\Omega m & c \end{bmatrix}, \quad (4.2.22)$$

$$[\bar{K}(t)] = \begin{bmatrix} -\Omega^2 m & \Omega c \\ -\Omega c & -\Omega^2 m \end{bmatrix} + \left( [\bar{K}_A]^{-1} + [\bar{K}_P]^{-1} \right)^{-1}, \quad (4.2.23)$$

$$\{\bar{Q}(t)\} = [T_2]^T \{Q(t)\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} + mg \begin{Bmatrix} \sin \Omega t \\ -\cos \Omega t \end{Bmatrix}. \quad (4.2.24)$$

Les matrices  $[\bar{K}_A]$  et  $[\bar{K}_P(t)]$  sont données par

$$[\bar{K}_A] = \begin{bmatrix} k_x & \\ & k_z \end{bmatrix}. \quad (4.2.25)$$

$$[\bar{K}_P(t)] = k_p^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_p^- \begin{bmatrix} \cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t \\ -\sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \end{bmatrix}. \quad (4.2.26)$$

où

$$k_p^+ = \frac{1}{2}(k_u + k_w) \quad \text{et} \quad k_p^- = \frac{1}{2}(k_u - k_w). \quad (4.2.27)$$

La matrice de rigidité  $[\bar{K}(t)]$  a une variation périodique de fréquence  $2\Omega$ , due à l'asymétrie des paliers, tandis que le vecteur des forces d'excitation  $\{\bar{Q}(t)\}$  a une variation périodique de fréquence  $\Omega$ , due à la gravité.

### 4.3 CAS PARTICULIERS

#### 4.3.1 Arbre à section symétrique

Si les rigidités de l'arbre ( $k_x$  et  $k_y$ ) sont égales et si on note avec  $k_a$  leur valeur commune, la matrice de rigidité  $[K(t)]$  donnée par (4.2.20) se réduira à la forme

$$[K(t)] = \begin{bmatrix} \omega_u^2 & 0 \\ 0 & \omega_w^2 \end{bmatrix}, \quad (4.3.1)$$

avec

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k_a k_u}{m(k_a + k_u)}} \quad \text{et} \quad \omega_w = \sqrt{\frac{k_a k_w}{m(k_a + k_w)}}, \quad (4.3.2)$$

où  $k_u$  et  $k_w$  sont les rigidités des paliers et  $m$  est la masse du disque.

Le système des équations du mouvement par rapport au repère fixe (4.2.19) s'écrit alors comme suit:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega_u^2 u = \frac{m_b}{m} d \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \quad (4.3.3)$$

$$\ddot{w} + \frac{c}{m} \dot{w} + \omega_w^2 w = \frac{m_b}{m} d \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) - g$$

où  $u$  et  $w$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère fixe,

$\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor,

$m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd,

$d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd,

$c$  est la constante de l'amortissement externe,  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

Le mouvement du disque sera stable pour n'importe quel  $\Omega$  ("asymptotiquement stable" pour  $c > 0$  et "stable" pour  $c = 0$ ).

La réponse stationnaire du système (4.3.3) est donnée par

$$u = \frac{m_h}{m} d \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega_u^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_u^2 \omega_u^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \beta) \quad (4.3.4)$$

et 
$$w = \frac{m_h}{m} d \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega_w^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_w^2 \omega_w^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \beta) - \frac{g}{\omega_w^2},$$

où  $\zeta_u = \frac{c}{2m\omega_u}$  et  $\zeta_w = \frac{c}{2m\omega_w}$  sont les facteurs d'amortissement.

L'amplitude de la solution (4.3.4) présente des pics pour  $\Omega$  proche de  $\omega_u$  et  $\omega_w$ . Les pics n'apparaissent plus pour des facteurs d'amortissement plus grands que  $\sqrt{2}/2$ .

#### 4.3.2 Paliers symétriques

Si les deux rigidités des paliers ( $k_u$  et  $k_w$ ) sont égales et si on note avec  $k_p$  leur valeur commune, la matrice de rigidité  $[\bar{K}(t)]$  donnée par (4.2.23) se réduira à la forme

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} -\Omega^2 m & \Omega c \\ -\Omega c & -\Omega^2 m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x^2 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 \end{bmatrix}. \quad (4.3.5)$$

avec

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x k_p}{m(k_x + k_p)}} \quad \text{et} \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k_z k_p}{m(k_z + k_p)}}. \quad (4.3.6)$$

où  $k_x$  et  $k_z$  sont les rigidités de l'arbre et  $m$  est la masse du disque.

En l'absence de l'amortissement, le système des équations de mouvement par rapport au repère mobile (4.2.26) s'écrit comme suit:

$$\ddot{\bar{u}} + 2\Omega\dot{\bar{w}} + (\omega_x^2 - \Omega^2)\bar{u} = \frac{m_b}{m}d\Omega^2 \sin \beta + g \sin \Omega t \quad (4.3.7)$$

$$\ddot{\bar{w}} - 2\Omega\dot{\bar{u}} + (\omega_z^2 - \Omega^2)\bar{w} = \frac{m_b}{m}d\Omega^2 \cos \beta - g \cos \Omega t$$

où  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère mobile,  
 $\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor,  
 $m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd,  
 $d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd,  
 $g$  est l'accélération gravitationnelle.

Si, pour le système homogène associé à (4.3.7), on considère des solutions ayant la forme  $\bar{u}_1 = Ue^{\eta t}$  et  $\bar{w}_1 = We^{\eta t}$ , on arrive à l'équation caractéristique

$$r^4 + (\omega_x^2 + \omega_z^2 + 2\Omega^2)r^2 + (\omega_x^2 - \Omega^2)(\omega_z^2 - \Omega^2) = 0. \quad (4.3.8)$$

Les racines de (4.3.8) sont

$r_{1,2} = \pm iA$  et  $r_{3,4} = \pm iB$  pour  $\Omega$  située à l'extérieur de l'intervalle délimité par  $\omega_x$  et  $\omega_z$ ,

$r_{1,2} = \pm C$  et  $r_{3,4} = \pm iD$  pour  $\Omega$  située à l'intérieur de cet intervalle,

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des constantes réelles et  $i = \sqrt{-1}$ .

Donc le mouvement du disque est instable pour la vitesse angulaire  $\Omega$  située à l'intérieur de l'intervalle délimitée par  $\omega_x$  et  $\omega_z$  et stable en dehors de cet intervalle.

Dans (4.3.7), les termes libres proportionnels à  $m_b$  représentent l'effet du balourd et les autres, proportionnels à l'accélération gravitationnelle  $g$ , l'effet de la gravité.

La solution stationnaire due au balourd est donnée par

$$\bar{u} = \frac{m_b}{m} d \frac{\Omega^2}{(\omega_x^2 - \Omega^2)^2} \sin \beta \quad \text{et} \quad \bar{w} = \frac{m_b}{m} d \frac{\Omega^2}{(\omega_z^2 - \Omega^2)^2} \cos \beta. \quad (4.3.9)$$

L'amplitude de la solution stationnaire due au balourd devient infinie pour  $\Omega$  égale à  $\omega_x$  et  $\omega_z$ . Même si l'amortissement peut faire disparaître l'intervalle d'instabilité, on s'attend à ce que l'amplitude de la réponse au balourd présente des pics pour  $\Omega$  proche de  $\omega_x$  et  $\omega_z$ .

La solution stationnaire du système (4.3.7) due à la gravité est donnée par

$$\bar{u} = -g \frac{4\Omega^2 - \omega_z^2}{D(\Omega)} \sin \Omega t \quad \text{et} \quad \bar{w} = g \frac{4\Omega^2 - \omega_x^2}{D(\Omega)} \cos \Omega t, \quad (4.3.10)$$

avec

$$D(\Omega) = \omega_x^2 \omega_z^2 - 2(\omega_x^2 + \omega_z^2)\Omega^2.$$

L'amplitude de la réponse stationnaire due à la gravité présente une crête pour  $\Omega$  proche de la racine de l'équation  $D(\Omega) = 0$ . Si on note avec  $\bar{\omega}$  la moyenne de  $\omega_x$  et  $\omega_z$ , la racine de cette équation est à-peu-près égale à  $\bar{\omega} / 2$ .

#### 4.4 APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA MATRICE DE TRANSFERT

Considérons le système d'équations (4.2.19), qui décrit le mouvement du rotor par rapport au repère fixe, dans la variable  $\varphi = \Omega t$ :

$$\begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix} + \frac{c}{m\Omega} \begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix} + \frac{1}{m\Omega^2} [K(\varphi)] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \frac{m_b d}{m} \begin{Bmatrix} \sin(\varphi + \beta) \\ \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix} - \frac{g}{\Omega^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.4.1)$$

où

$u$  et  $w$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère fixe,

$\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor,

$m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd,

$d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd,

$c$  est la constante de l'amortissement externe,  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

Nous transformons ce système dans un système de 4 équations différentielles de premier ordre:

$$\{x'\} = [A(\varphi)]\{x\} + \{f(\varphi)\} \quad (4.4.2)$$

avec

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ u' \\ w' \end{Bmatrix}, \quad \{f(\varphi)\} = \frac{m_b d}{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi + \beta) \\ \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix} - \frac{g}{\Omega^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

et

$$[A(\varphi)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{3,1}(\varphi) & a_{3,2}(\varphi) & -c/(m\Omega) & 0 \\ a_{4,1}(\varphi) & a_{4,2}(\varphi) & 0 & -c/(m\Omega) \end{bmatrix},$$

où

$$a_{2+i,j}(\varphi) = -\frac{1}{m\Omega^2} k_{i,j}(\varphi) \quad (i,j = 1,2)$$

La période de la matrice du système  $[A(\varphi)]$  est  $T = \pi$ . La période du terme libre  $\{f(\varphi)\}$  est  $T = 2\pi$ .

Pour analyser la stabilité du mouvement, nous évaluons la matrice de transfert sur une période  $[\Phi(T)]$  du système homogène associé à (4.4.2), par une des méthodes données à la section 3.1. Nous appliquons ensuite les résultats de la théorie de Floquet (voir la section 2.2.1). Pour l'étude de la stabilité seulement, il suffit de considérer la période de la matrice du système  $T = \pi$ .

Pour déterminer la réponse stationnaire, on obtient premièrement la condition initiale  $\{x(0)\}$  appropriée, comme solution du système algébrique (2.2.14). Ensuite on considère l'intégration numérique du système périodique (4.4.2) (voir la section 3.2). On doit prendre en compte la période commune de la matrice du système et du terme libre, c'est-à-dire  $T = 2\pi$ .

#### 4.5 ANALYSE DE LA STABILITÉ DU MOUVEMENT PAR UNE MÉTHODE DE PERTURBATION

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus par Black et McTernan [2], pour le même modèle de rotor que le nôtre, en appliquant la méthode de Hsu [12].

Hsu [12] développe une méthode qui combine la méthode de variation des paramètres et la méthode de perturbation pour étudier la stabilité d'un système dynamique ayant  $n$  degrés de liberté, gouverné par le système d'équations:

$$\{\ddot{x}\} + \varepsilon[C(t)]\{\dot{x}\} + ([B_0] + \varepsilon[B(t)])\{x\} = \{0\} \quad (4.5.1)$$

où

$[B(t)]$  et  $[C(t)]$  sont des matrices périodiques de période  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

$[B_0]$  est une matrice diagonale, avec  $b_{0,ii} = \omega_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),



$\varepsilon$  est un paramètre petit.

Pour le cas où  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont distinctes, la conclusion de l'étude de Hsu est que l'instabilité peut apparaître pour  $\Omega$  proche de:

$$\frac{\omega_i + \omega_j}{s}, \frac{\omega_i - \omega_j}{s} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n \text{ et } s = 2, 3, \dots). \quad (4.5.2)$$

Black et McTernan [2] appliquent la méthode de Hsu au modèle de rotor asymétrique défini à la section 4.1.

En considérant l'asymétrie de l'arbre petite, les équations de mouvement du rotor par rapport au repère fixe sont mises sous la forme (4.5.1), avec la matrice  $[B_0]$  donnée par

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \omega_u^2 & \\ & \omega_w^2 \end{bmatrix}, \quad (4.5.3)$$

où  $\omega_u$  et  $\omega_w$  sont les fréquences naturelles pour l'arbre de section symétrique (voir la section 4.3.1):

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k_m k_u}{m(k_m + k_u)}} \quad \text{et} \quad \omega_w = \sqrt{\frac{k_m k_w}{m(k_m + k_w)}}, \quad (4.5.4)$$

avec  $k_u$  et  $k_w$  - les rigidités des paliers,  $k_m$  - la rigidité moyenne de l'arbre et  $m$  - la masse du disque.

On donne plus loin la conclusion de l'étude de Black et McTernan pour  $\omega_u$  et  $\omega_w$  distinctes (on considère  $\omega_u > \omega_w$ ).

1. On peut avoir résonance aux alentours des fréquences  $\frac{\omega_i \pm \omega_j}{s}$  ( $i, j = 1, 2$  et  $s = 2, 3 \dots$ ), c'est à dire  $\omega_u, \omega_w$  (fréquences naturelles),  $\frac{\omega_u \pm \omega_w}{2}, \frac{\omega_u \pm \omega_w}{3} \dots$  (fréquences combinées).

2. L'instabilité apparaît seulement aux alentours des fréquences  $\frac{\omega_i + \omega_j}{2}$  ( $i, j = 1, 2$ ), c'est à dire  $\omega_u, \omega_w$  et  $\frac{\omega_u + \omega_w}{2}$ .

Les régions d'instabilité sont des bandes de fréquence disposées symétriquement par rapport aux trois fréquences mentionnées ci-haut. La largeur de ces bandes est donnée par:

$$\frac{\Delta\Omega}{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \eta (1 - \mu)^3 \quad \text{pour} \quad \Omega = \omega_w, \quad (4.5.5)$$

$$\frac{\Delta\Omega}{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \eta (1 + \mu)^3 \quad \text{pour} \quad \Omega = \omega_u,$$

$$\frac{\Delta\Omega}{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \eta (1 - \mu^2)^{3/2} \quad \text{pour} \quad \Omega = \frac{\omega_u + \omega_w}{2}.$$

où

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_u + \omega_w}{2}, \quad (4.5.6)$$

$\mu$  est un facteur qui mesure l'asymétrie des paliers ( $\mu=0$  pour des paliers symétriques) donné par

$$\mu = \frac{\omega_u - \omega_w}{\omega_u + \omega_w} \quad (4.5.7)$$

et  $\eta$  est un facteur qui mesure l'asymétrie de l'arbre, donné par

$$\eta = m \bar{\omega}^2 \frac{k_x - k_z}{2k_x k_z} \quad (4.5.8)$$

avec  $k_x$  et  $k_z$  - les rigidités de l'arbre.

Une analyse à part est faite pour le cas où  $\omega_u$  et  $\omega_w$  sont proches (le facteur d'asymétrie des paliers  $\mu$  étant très petit). La conclusion est que les trois bandes d'instabilité sont confondues dans une seule région, centrée sur la fréquence

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_u + \omega_w}{2} \text{ et de largeur } \frac{\Delta\Omega}{\bar{\omega}} = \eta. \quad (4.5.9)$$

Dans le cas particulier des paliers symétriques, (4.5.9) nous donne une région d'instabilité délimitée par  $\bar{\omega}(1 - \frac{1}{2}\eta)$  et  $\bar{\omega}(1 + \frac{1}{2}\eta)$ .

Pour une asymétrie de l'arbre petite (on néglige les termes en  $\eta^2$ ), on peut démontrer que

$$\bar{\omega}(1 - \frac{1}{2}\eta) \approx \bar{\omega} \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \approx \omega_{\dot{z}} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}(1 + \frac{1}{2}\eta) \approx \bar{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-\eta}} \approx \omega_x,$$

où  $\omega_x$  et  $\omega_{\dot{z}}$  sont les fréquences définies par (4.3.6). On retrouve donc le résultat donné à la section 4.3.2.

Dans le cas particulier de l'arbre à section symétrique, on a  $\eta = 0$ , donc les largeurs des régions d'instabilité définies par (4.5.5) ou (4.5.9) sont nulles, c'est-à-dire que le mouvement du rotor est stable pour n'importe quelle vitesse de rotation. On retrouve ainsi le résultat donné à la section 4.3.1.

On retient que les résultats de Black et McTernan sont obtenus dans l'hypothèse d'une asymétrie de l'arbre petite. Par contre, il n'y a pas de restriction pour l'asymétrie des paliers.

#### 4.6 RÉPONSE STATIONNAIRE PAR LA MÉTHODE DE BALANCE HARMONIQUE

Dans cette section nous présentons la méthode d'évaluation de la réponse stationnaire développée par Tondl ([29]), pour le même modèle de rotor que le nôtre. Mentionnons toutefois que nous avons apporté des corrections aux expressions des coefficients du système utilisé par Tondl (détaillées à l'annexe A-2).

Tondl met le système d'équations (4.2.19), qui décrit le mouvement du rotor par rapport au repère fixe, sous la forme (voir l'annexe A-2):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + 2\delta \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 + a_0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - a_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_k \cos 2k\Omega t & d_k \sin 2k\Omega t \\ d_k \sin 2k\Omega t & b_k \cos 2k\Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \\ = \frac{m_b d}{m} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \beta) \\ \cos(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix} - g \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

où

$u$  et  $w$  sont les déplacements du centre du disque par rapport au repère fixe.

$\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor,

$m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd.

$d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd.

$\delta = \frac{c}{2m}$ , avec  $c$  - la constante de l'amortissement externe.

$g$  est l'accélération gravitationnelle,

$\omega$  et les coefficients  $a_0, a_n, b_n, d_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sont donnés à l'annexe A-2,

leurs valeurs étant fonction de la masse du disque  $m$ , des rigidités de l'arbre  $k_x$  et  $k_z$  ainsi que des rigidités des paliers  $k_u$  et  $k_w$ .

Le rapport entre la période des éléments de la matrice de rigidité et la période des éléments du terme libre étant un nombre entier, on considère, pour la solution périodique de ce système, l'expression:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ P_0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \begin{Bmatrix} M_n \\ P_n \end{Bmatrix} \cos n\Omega t + \begin{Bmatrix} N_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \sin n\Omega t \right). \quad (4.6.2)$$

En substituant (4.6.2) dans (4.6.1) et en effectuant la balance des coefficients des termes trigonométriques, on obtient un nombre infini d'équations algébriques linéaires, ayant comme inconnus les coefficients  $M_n$ ,  $N_n$ ,  $P_n$  et  $Q_n$ . Les équations qui contiennent les coefficients à indices pairs sont indépendantes de celles qui contiennent les coefficients à indices impairs, donc le système peut être découpé en deux.

En limitant l'expansion de la solution à  $n = 2$ , les deux systèmes algébriques sont:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 2\delta\Omega & \frac{1}{2}d_1 \\ -2\delta\Omega & A_2 & \frac{1}{2}d_1 \\ \frac{1}{2}d_1 & \frac{1}{2}d_1 & A_3 & 2\delta\Omega \\ -\frac{1}{2}d_1 & -2\delta\Omega & A_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ N_1 \\ P_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \frac{m_b d}{m} \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \\ \cos \beta \\ -\sin \beta \end{Bmatrix} \quad (4.6.3)$$

avec

$$A_1 = \omega^2 - \Omega^2 + a_0 + \frac{1}{2}a_1, \quad A_2 = \omega^2 - \Omega^2 + a_0 - \frac{1}{2}a_1,$$

$$A_3 = \omega^2 - \Omega^2 + b_0 + \frac{1}{2}b_1, \quad A_4 = \omega^2 - \Omega^2 + b_0 - \frac{1}{2}b_1$$

et

$$\begin{bmatrix} B_1 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}d_1 \\ & B_2 & \frac{1}{2}d_1 & \frac{1}{2}b_1 \\ a_1 & & B_3 & 4\delta\Omega & \frac{1}{2}d_2 \\ & d_1 & -4\delta\Omega & B_4 & \frac{1}{2}d_2 \\ & b_1 & \frac{1}{2}d_2 & B_5 & 4\delta\Omega \\ d_1 & \frac{1}{2}d_2 & -4\delta\Omega & B_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ P_0 \\ M_2 \\ N_2 \\ P_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6.4)$$

avec

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \omega^2 + a_0, & B_2 &= \omega^2 + b_0, \\
 B_3 &= \omega^2 - 4\Omega^2 + a_0 + \frac{1}{2}a_2, & B_4 &= \omega^2 - 4\Omega^2 + a_0 - \frac{1}{2}a_2, \\
 B_5 &= \omega^2 - 4\Omega^2 + b_0 + \frac{1}{2}b_2, & B_6 &= \omega^2 - 4\Omega^2 + b_0 - \frac{1}{2}b_2.
 \end{aligned}$$

On voit que le système (4.6.3) donne la réponse au balourd, tandis que le système (4.6.3) donne la réponse à la gravité.

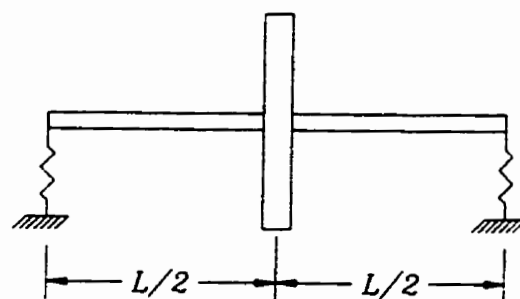


FIGURE 4.1  
Rotor, modèle simple.

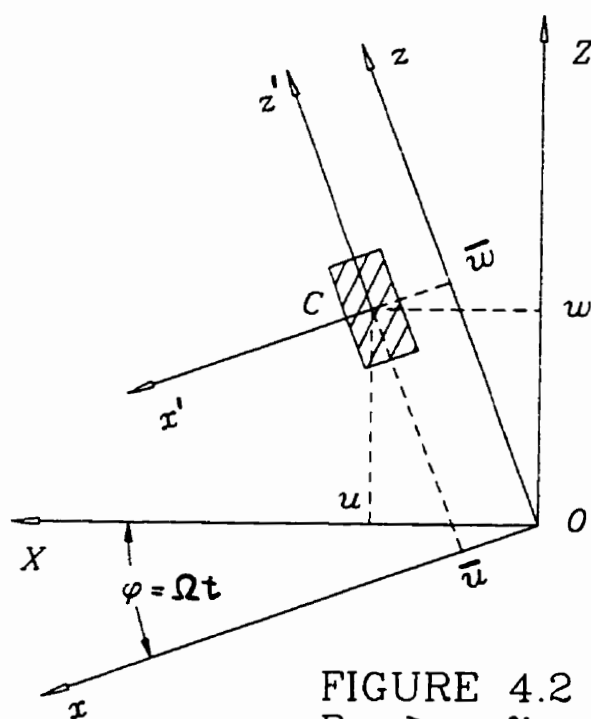


FIGURE 4.2  
Repère fixe et repère mobile.  
Déplacements du centre  
de la section de l'arbre.

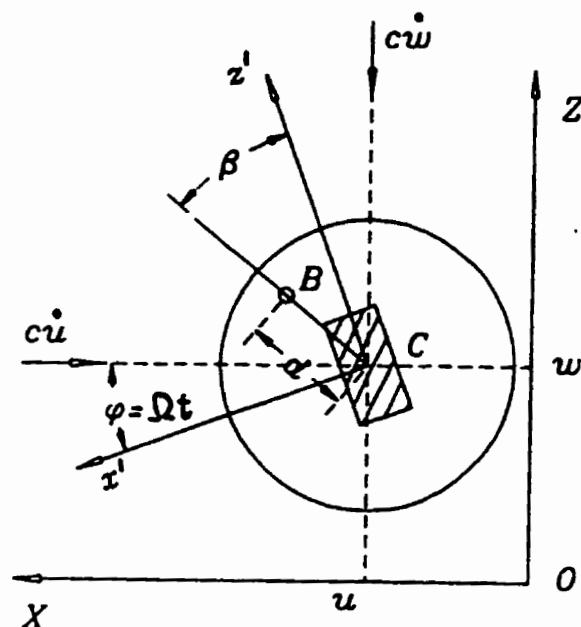


FIGURE 4.3  
Disque et balourd.

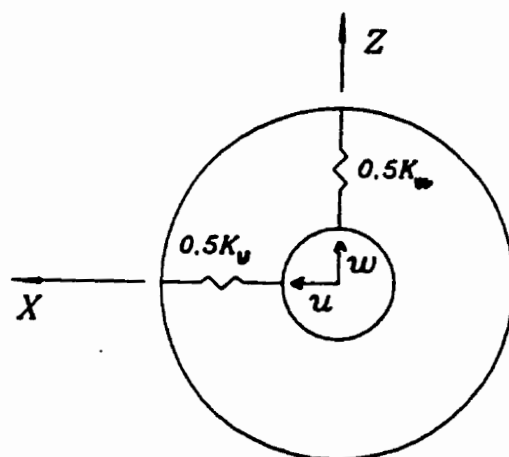


FIGURE 4.4  
Palier, modèle simple.



## CHAPITRE V

### ROTORS ASYMÉTRIQUES - MODÈLE GÉNÉRAL

#### 5.1 MODÈLE MATHÉMATIQUE

Dans ce chapitre, nous allons établir les équations de mouvement pour un rotor composé d'un ou plusieurs disques rigides, d'un arbre élastique en position horizontale et de deux ou plusieurs paliers (voir la figure 5.1). Le rotor est supposé tourner à une vitesse de rotation constante  $\Omega$ .

La section de l'arbre est asymétrique, c'est-à-dire que ses moments d'inertie principaux diffèrent (voir la figure 4.2). Nous considérons néanmoins que les directions principales de la section ne changent pas le long de l'arbre. Cette limitation va nous permettre de considérer un unique repère mobile  $xyz$  qui, pour le système non déformé, a les axes parallèles aux axes principaux  $x'y'z'$  de chaque section (voir la figure 4.2). Nous considérons aussi un repère fixe  $XYZ$ , dont l'axe  $Y$  donne la position de l'arbre non déformé (étant donc colinéaire à l'axe  $y$ ) et l'axe  $Z$  donne la direction verticale.

Pour prendre en compte la non-uniformité longitudinale de la rigidité et de la masse de l'arbre, nous utiliserons la méthode des éléments finis. Nous suivrons la procédure développée par Nelson et McVaugh [24] pour des rotors à arbres symétriques et nous introduirons les corrections nécessaires pour prendre en compte l'asymétrie de l'arbre. La modélisation de l'arbre inclut l'effet de l'inertie de rotation et l'effet gyroscopique. Par contre, les effets du cisaillement et de l'amortissement interne seront négligés.

Kang, Shih et Lee [15] ont aussi appliqué la méthode des éléments finis à des rotors à arbres asymétriques, en tenant compte en plus de la déformation en cisaillement

de l'arbre, mais leur étude ne fournit pas les expressions explicites des matrices introduites par l'asymétrie de l'arbre. Contrairement à eux, nous avons préservé la manière de décrire l'orientation de la section de l'arbre utilisée par Nelson et McVaugh [24] (voir la section 5.2).

Un balourd (une masse concentrée) est placé sur chaque disque (voir la figure 4.3). Nous supposons aussi l'existence d'un amortissement environnemental visqueux, agissant sur les disques.

Pour les paliers, nous utilisons un modèle linéaire anisotropique, avec quatre coefficients d'élasticité et quatre coefficients d'amortissement (voir la figure 5.2). Chaque palier a des coefficients différents.

## 5.2 CINÉMATIQUE DES ÉLÉMENTS DU ROTOR

### 5.2.1 Vitesse angulaire de la section de l'arbre

Pour introduire l'effet de l'inertie de rotation et l'effet gyroscopique lors de l'évaluation de l'énergie cinétique, on doit connaître la vitesse angulaire d'une section quelconque de l'arbre. Nous adoptons la manière de Nelson et McVaugh [24], utilisée aussi par Lalanne et Ferraris [19], pour décrire l'orientation de la section de l'arbre.

Nous considérons le repère des axes principaux d'inertie  $x'y'z'$  de la section de l'arbre (voir la figure 5.3). Pour le système dynamique non déformé, les repères  $x'y'z'$  et  $xyz$  (introduit à la section 5.1) ont les axes parallèles.

La liaison entre le repère fixe XYZ et le repère  $x'y'z'$  est faite par les angles d'Euler  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . Pour amener la section de l'arbre de sa position non déplacée à une position quelconque, on lui applique, successivement, une rotation d'angle  $\psi$  par rapport à l'axe Z, une rotation d'angle  $\theta$  par rapport au nouvel axe x, noté  $x_1$ , une rotation d'angle  $\varphi$  par rapport au nouvel axe z, noté  $z_1$ .

Le vecteur vitesse angulaire du repère  $x'y'z'$  a, dans ce même repère, les composantes

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi, \quad (5.2.1)$$

$$\omega_y = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta,$$

$$\omega_z = \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi,$$

ce résultat pouvant être trouvé dans Lalanne et Ferraris [19], chapitre 1.

Pour des petites déformations de l'arbre,  $\theta$  et  $\psi$  sont approximativement égales aux déformations angulaires colinéaires aux axes X et Z respectivement (voir la figure 5.4). De plus,  $\varphi$  est approximativement égal à l'angle de rotation.

En considérant les angles  $\theta$  et  $\psi$  petits et la vitesse de rotation  $\dot{\varphi} = \Omega$  constante, les expressions (5.2.1) deviennent:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \varphi, \quad (5.2.2)$$

$$\omega_y = \Omega + \dot{\psi} \theta,$$

$$\omega_z = \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi.$$

### 5.2.2 Déplacements

Par rapport au repère fixe XYZ, la position de la section de l'arbre est définie par les déplacements  $u$  et  $w$  de son centre élastique et par les pentes  $\psi$  et  $\theta$  (voir la figure 5.4). Les pentes sont liées aux déplacements par les relations

$$\psi = -\frac{\partial}{\partial v} u \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\partial}{\partial v} w. \quad (5.2.3)$$

Par rapport au repère mobile xyz, on a les déplacements  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et les pentes  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\theta}$ , entre lesquels il existe des relations similaires à (5.2.3):

$$\bar{\psi} = -\frac{\partial}{\partial \bar{v}} \bar{u} \quad \text{et} \quad \bar{\theta} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \bar{w}. \quad (5.2.4)$$

La relation existant entre les déplacements  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  et les déplacements  $u$ ,  $w$ ,

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}, \quad (5.2.5)$$

avec la matrice  $[T_2]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3, implique aussi la relation suivante entre les pentes  $\psi$ ,  $\theta$  et les pentes  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\theta}$ :

$$\begin{Bmatrix} \psi \\ \theta \end{Bmatrix} = [T_2]^T \begin{Bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (5.2.6)$$

### 5.3 ÉQUATIONS DE MOUVEMENT DES ÉLÉMENTS DU ROTOR

#### 5.3.1 Disque

Au point d'attache, le centre de masse du disque et le centre élastique de la section de l'arbre coïncident. La position du disque, supposé rigide, est définie par le vecteur des déplacements nodaux du centre du disque, dont l'expression est

$$\{\delta_0\} = \{u_0 \quad w_0 \quad \psi_0 \quad \theta_0\}' \quad (5.3.1.a)$$

dans le repère fixe et

$$\{\bar{\delta}_0\} = \{\bar{u}_0 \quad \bar{w}_0 \quad \bar{\psi}_0 \quad \bar{\theta}_0\}' \quad (5.3.1.b)$$

dans le repère mobile.

La relation (5.2.5) implique

$$\{\delta_0\} = [T_4] \{\bar{\delta}_0\} \quad (5.3.2)$$

avec la matrice  $[T_4]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3.

#### Équations de mouvement dans le repère fixe

L'énergie cinétique du disque est donnée par

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (5.3.3)$$

où

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont les composantes de la vitesse angulaire du disque,

$m$ ,  $J_x = J_z$  et  $J_y$  sont la masse et les moments d'inertie du disque.

En substituant (5.2.2) dans (5.3.3) et en ajoutant aussi l'effet du balourd (voir l'annexe A-1, pour le balourd), nous obtenons:

$$T_D = \frac{1}{2} m (\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + \frac{1}{2} J_x (\dot{\theta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2) + J_y \Omega \dot{\psi}_0 \theta_0 + m_b d \Omega [\dot{u}_0 \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w}_0 \sin(\Omega t + \beta)] \quad (5.3.4)$$

où

$\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor.

$m_b$  est la masse du balourd (supposée petite par rapport à  $m$ ),

$d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle qui définissent l'emplacement du balourd.

Si on compare (5.3.4) à l'expression de l'énergie cinétique dans le cas du modèle simple de rotor, on remarque l'apparition de deux nouveaux termes. Le premier donne l'effet de l'inertie de rotation, tandis que le deuxième donne l'effet gyroscopique.

Le travail virtuel des forces externes a l'expression:

$$\delta L_D = -mg\delta w_0 - c\dot{u}_0\delta u_0 - c\dot{w}_0\delta w_0 \quad (5.3.5)$$

où

$c$  est la constante de l'amortissement externe,

$m$  est la masse du disque,  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

En appliquant le formalisme des équations de Lagrange pour le disque, on obtient:

$$[M_D]\{\ddot{\delta}_0\} + [C_D]\{\dot{\delta}_0\} = \{Q_D\} + \{Q_L\} \quad (5.3.6)$$

où

$$[M_D] = \begin{bmatrix} m & & & \\ & m & & \\ & & J_x & \\ & & & J_x \end{bmatrix}, \quad (5.3.7.a)$$

$$[C_D] = \begin{bmatrix} c & & \\ & c & \\ & & J_v \Omega \\ & -J_v \Omega & \end{bmatrix} \quad (5.3.7.b)$$

et

$$\{Q_D\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \beta) \\ \cos(\Omega t + \beta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.3.7.c)$$

Le vecteur  $\{Q_L\}$  contient des forces de liaison qui disparaîtront à l'assemblage des matrices élémentaires.

#### Équations de mouvement dans le repère mobile

En considérant la transformation de coordonnées (5.3.2), on obtient:

$$\{\dot{\delta}_0\} = [T_4] \{\dot{\bar{\delta}}_0\} + \Omega [T_4] [H_4] \{\bar{\delta}_0\} \quad (5.3.8.a)$$

$$\text{et} \quad \{\ddot{\delta}_0\} = [T_4] \{\ddot{\bar{\delta}}_0\} + 2\Omega [T_4] [H_4] \{\dot{\bar{\delta}}_0\} - \Omega^2 [T_4] \{\bar{\delta}_0\}, \quad (5.3.8.b)$$

avec les matrices  $[T_4]$  et  $[H_4]$  données à la table (1) de l'annexe A-3.

En substituant (5.3.8) dans (5.3.6), nous obtenons le système:

$$[\bar{M}_D] \{\ddot{\bar{\delta}}_0\} + [\bar{C}_D] \{\dot{\bar{\delta}}_0\} + [\bar{K}_D] \{\bar{\delta}_0\} = \{\bar{Q}_D\} + \{\bar{Q}_L\} \quad (5.3.9)$$

où

$$[\bar{M}_D] = [T_4]' [M_D] [T_4], \quad (5.3.10.a)$$

$$[\bar{C}_D] = 2\Omega [\bar{M}_D] [H_4] + [T_4]' [C_D] [T_4], \quad (5.3.10.b)$$

$$[\bar{K}_D] = -\Omega^2 [\bar{M}_D] + \Omega [T_4]' [C_D] [T_4] [H_4] \quad (5.3.10.c)$$

et

$$\{\bar{Q}_D\} = [T_4]^T \{Q_D\}. \quad (5.3.10.d)$$

$\{\bar{Q}_L\}$  contient des forces de liaison qui disparaîtront à l'assemblage des matrices élémentaires.

En introduisant les expressions (5.3.7) dans (5.3.10), on obtient:

$$[\bar{M}_D] = [M_D], \quad (5.3.11.a)$$

$$[\bar{C}_D] = \begin{bmatrix} c & 2\Omega m & & \\ -2\Omega m & c & & \\ & & \Omega(J_v - 2J_r) & \\ & & -\Omega(J_v - 2J_r) & \end{bmatrix}, \quad (5.3.11.b)$$

$$[\bar{K}_D] = \begin{bmatrix} -\Omega^2 m & \Omega c & & \\ -\Omega c & -\Omega^2 m & & \\ & & \Omega^2(J_v - J_r) & \\ & & & \Omega^2(J_v - J_r) \end{bmatrix} \quad (5.3.11.c)$$

$$\text{et} \quad \{\bar{Q}_D\} = m_b d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + mg \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.3.11.d)$$

### 5.3.2 Arbre

L'élément d'arbre a deux nœuds, donc le vecteur des déplacements nœux inclut quatre déplacements et quatre pentes. Son expression est



$$\{\delta_e\} = \{u_1 \quad w_1 \quad \psi_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \psi_2 \quad \theta_2\}' \quad (5.3.12.a)$$

par rapport au repère fixe et

$$\{\bar{\delta}_e\} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\psi}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\psi}_2 \quad \bar{\theta}_2\}' \quad (5.3.12.b)$$

par rapport au repère mobile.

Entre  $\{\delta_e\}$  et  $\{\bar{\delta}_e\}$  il existe la relation de liaison

$$\{\delta_e\} = [T_g] \{\bar{\delta}_e\} \quad (5.3.13)$$

avec la matrice  $[T_g]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3.

Les déplacements et les pentes pour un point quelconque de l'élément ont les expressions

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N(y)] \{\delta_e\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \psi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} u \\ \frac{\partial}{\partial y} w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} [D(y)] \{\delta_e\} \quad (5.3.14)$$

par rapport au repère fixe et

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [N(y)] \{\bar{\delta}_e\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} [D(y)] \{\bar{\delta}_e\} \quad (5.3.15)$$

par rapport au repère mobile, où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.3.16)$$

$$\text{et} \quad [D] = \left[ \frac{\partial}{\partial y} N \right]. \quad (5.3.17)$$

Les fonctions de forme considérées sont celles typiques pour une poutre sollicitée en flexion:

$$\begin{aligned}
N_1(y) &= 1 - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y}^3 \\
N_2(y) &= L\bar{y}(1 - 2\bar{y} + \bar{y}^2) \\
N_3(y) &= 3\bar{y}^2 - 2\bar{y}^3 \\
N_4(y) &= L(-\bar{y}^2 + \bar{y}^3)
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

où  $\bar{y} = y/L$ .

### Énergie cinétique, énergie de déformation, travail virtuel des forces externes

L'expression de l'énergie cinétique de l'élément d'arbre est similaire à celle de l'énergie cinétique du disque:

$$T_A = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L (I_x \omega_x^2 + I_p \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dy \tag{5.3.19}$$

où

$\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont les vitesses angulaires données par (5.2.2),

A est l'aire de la section.

$I_x$ ,  $I_z$  et  $I_p = I_x + I_z$  sont les moments d'inertie principaux de la section.

L est la longueur de l'élément d'arbre,

$\rho$  est la densité du matériau.

En substituant (5.2.2) dans (5.3.18), on obtient

$$T_A = T_t + T_r + T_{d,c} \cos(2\varphi) + T_{d,s} \sin(2\varphi) + T_g, \tag{5.3.20}$$

avec

$$T_t = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy, \quad (\text{t - translation}) \tag{5.3.21.a}$$

$$T_r = \frac{1}{2} \rho I_m \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy, \quad (\text{r - rotation}) \tag{5.3.21.b}$$

$$T_{d,c} = \frac{1}{2} \rho I_d \int_0^L (\dot{\psi}^2 - \dot{\theta}^2) dy, \quad (\text{d,c - déviation, cosinus}) \quad (5.3.21.c)$$

$$T_{d,s} = \rho I_d \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy, \quad (\text{d,s - déviation, sinus}) \quad (5.3.21.d)$$

$$\text{et} \quad T_g = \rho I_p \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy, \quad (\text{g - gyroscopique}) \quad (5.3.21.e)$$

$$\text{où} \quad I_m = \frac{1}{2} (I_z + I_x), \quad (\text{m - moyenne}) \quad (5.3.22)$$

$$I_d = \frac{1}{2} (I_z - I_x) \quad (\text{d - déviation})$$

$$\text{et} \quad I_p = 2I_m. \quad (\text{p - polaire})$$

Le travail virtuel du poids de l'élément d'arbre a l'expression

$$\begin{aligned} \delta L_A &= -g \int_0^L (\rho A \delta w) dy = \\ &= -\rho g A \left( \delta w_1 \int_0^L N_1 dy + \delta \theta_1 \int_0^L N_2 dy + \delta w_2 \int_0^L N_3 dy + \delta \theta_2 \int_0^L N_4 dy \right). \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

où  $N_k(y)$  sont les fonctions de forme données par (5.3.18),  $g$  est l'accélération gravitationnelle et les autres quantités sont définies à la relation (5.3.19).

L'énergie de déformation de l'élément d'arbre, si on néglige l'effet du cisaillement, est donnée par:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_z (\bar{u}'')^2 + EI_x (\bar{w}'')^2] dy \quad (5.3.24)$$

où  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  sont les déplacements du centre de la section dans le repère mobile.

$(\cdot)'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\cdot)$ ,  $I_x$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie principaux de la section,

$E$  est le module d'élasticité,  $L$  est la longueur de l'élément d'arbre.

### Équations de mouvement dans le repère fixe

Nous appliquons le formalisme des équations de Lagrange pour l'élément d'arbre et nous obtenons un système différentiel à coefficients périodiques (pour les détails, voir l'annexe A-4):

$$[M_A(t)]\{\ddot{\delta}_e\} + \Omega[G]\{\dot{\delta}_e\} + [K_A(t)]\{\delta_e\} = \{Q_A\} + \{Q_L\} \quad (5.3.25)$$

avec

$$[M_A(t)] = [M_t] + [M_r] + [M_{d,c}]\cos(2\Omega t) + [M_{d,s}]\sin(2\Omega t), \quad (5.3.26.a)$$

$$[K_A] = [K_m] + [K_{d,c}]\cos(2\Omega t) + [K_{d,s}]\sin(2\Omega t), \quad (5.3.26.b)$$

où

$[M_t]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_{d,c}]$ ,  $[M_{d,s}]$  et  $[G]$  sont les matrices de masse et la matrice gyroscopique données à la table (2) de l'annexe A-3.

$[K_m]$ ,  $[K_{d,c}]$  et  $[K_{d,s}]$  sont les matrices de rigidité données à la table (3) de l'annexe A-3,

$\{Q_A\}$ , représentant l'effet du poids de l'arbre, est un vecteur donné à la table (2) de l'annexe A-3,

$\{Q_L\}$  est un vecteur qui disparaîtra à l'assemblage des matrices élémentaires.

Les éléments des matrices  $[M_{d,c}]$ ,  $[M_{d,s}]$ ,  $[K_{d,c}]$  et  $[K_{d,s}]$  sont proportionnels à la différence des moments d'inertie de la section  $I_d$ . Donc si la section de l'arbre est symétrique, (5.3.25) se réduira à un système différentiel à coefficients constants.

Les matrices  $[M_t]$ ,  $[M_r]$ ,  $[K_m]$  et  $[G]$ , qui correspondent aussi au cas de l'arbre à section symétrique, peuvent être trouvées dans Nelson et McVaugh [24].

### Équations de mouvement dans le repère mobile

Nous obtenons un système différentiel à coefficients constants (pour les détails, voir l'annexe A-4):

$$[\overline{M}_A] \left\{ \ddot{\delta}_e \right\} + [\overline{C}_A] \left\{ \dot{\delta}_e \right\} + [\overline{K}_A] \left\{ \delta_e \right\} = \left\{ \overline{Q}_A(t) \right\} + \left\{ \overline{Q}_L \right\} \quad (5.3.27)$$

avec

$$[\overline{M}_A] = [M_t] + [M_r] + [M_d], \quad (5.3.28.a)$$

$$[\overline{C}_A] = 2\Omega [\overline{M}_A] [H_8] + \Omega [G], \quad (5.3.28.b)$$

$$[\overline{K}_A] = [K_m] + [K_d] - \Omega^2 [\overline{M}_A] + \Omega^2 [G] [H_8], \quad (5.3.28.c)$$

où

$[H_8]$  est une matrice donnée à la table (1) de l'annexe A-3.

$[M_t]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_d]$  et  $[G]$  sont les matrices de masse et la matrice gyroscopique données à la table (2) de l'annexe A-3.

$[K_m]$  et  $[K_d]$  sont les matrices de rigidité données à la table (3) de l'annexe A-3.

$\left\{ \overline{Q}_A(t) \right\}$ , représentant l'effet du poids de l'arbre, est un vecteur périodique, de

période  $\frac{2\pi}{\Omega}$ , donné à la table (2) de l'annexe A-3.

$\left\{ \overline{Q}_L \right\}$  est un vecteur qui disparaîtra à l'assemblage des matrices élémentaires.

#### 5.3.3 Paliers

Un palier est un système ressort-amortisseur, de masse supposée négligeable. Son comportement peut être différent selon les directions horizontale et verticale (en effet, selon deux directions perpendiculaires à la position de l'arbre non déformé, perpendiculaires l'une à l'autre). En plus, un couplage entre les déplacements selon les

directions horizontale et verticale va être considéré (voir la figure 5.2). Ce modèle linéaire et anisotropique à 8 coefficients (4 de rigidité et 4 d'amortissement) a été utilisé aussi par Nelson et McVaugh [24]. L'influence des termes de couplage est analysée par El-Marhomy [6].

Le vecteur des déplacements est

$$\{\delta_p\} = \{u_p \quad w_p\}' \quad (5.3.29.a)$$

dans le repère fixe et

$$\{\bar{\delta}_p\} = \{\bar{u}_p \quad \bar{w}_p\}' \quad (5.3.29.b)$$

dans le repère mobile, les composantes étant les déplacements du centre élastique de la section de l'arbre à l'endroit du palier.

Nous disposons aussi de la relation de liaison

$$\{\delta_p\} = [T_2] \{\bar{\delta}_p\} \quad (5.3.30)$$

avec la matrice  $[T_2]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3.

### Équations de mouvement dans le repère fixe

Le travail virtuel des forces élastiques et d'amortissement introduites par le palier a l'expression

$$\begin{aligned} \delta L_p = & -k_{uu} u_p \delta u_p - k_{uw} w_p \delta u_p - k_{wu} u_p \delta w_p - k_{ww} w_p \delta w_p \\ & -c_{uu} \dot{u}_p \delta u_p - c_{uw} \dot{w}_p \delta u_p - c_{wu} \dot{u}_p \delta w_p - c_{ww} \dot{w}_p \delta w_p \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

où

$k_{uu}$ ,  $k_{uw}$ ,  $k_{wu}$  et  $k_{ww}$  sont les coefficients d'élasticité du palier et  $c_{uu}$ ,  $c_{uw}$ ,  $c_{wu}$  et  $c_{ww}$  sont les coefficients d'amortissement du palier (voir la figure 5.2).

En appliquant le formalisme des équations de Lagrange, on obtient:

$$[C_p]\{\dot{\delta}_p\} + [K_p]\{\delta_p\} = \{Q_L\} \quad (5.3.32)$$

où

$$[K_p] = \begin{bmatrix} k_{uu} & k_{uw} \\ k_{wu} & k_{ww} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C_p] = \begin{bmatrix} c_{uu} & c_{uw} \\ c_{wu} & c_{ww} \end{bmatrix}. \quad (5.3.33)$$

Le vecteur  $\{Q_L\}$  contient des forces de liaison qui disparaîtront à l'assemblage des matrices élémentaires.

### Équations de mouvement dans le repère mobile

La relation (5.3.30) implique:

$$\{\dot{\delta}_p\} = [T_2]\{\dot{\bar{\delta}}_p\} + \Omega[T_2][H_2]\{\bar{\delta}_p\} \quad (5.3.34)$$

avec les matrices  $[T_2]$  et  $[H_2]$  données à la table (1) de l'annexe A-3.

En substituant (5.3.34) et (5.3.30) dans (5.3.32), on obtient

$$[\bar{C}_p]\{\dot{\bar{\delta}}_p\} + [\bar{K}_p]\{\bar{\delta}_p\} = \{\bar{Q}_L\} \quad (5.3.35)$$

où

$$[\bar{C}_p] = [T_2]'[C_p][T_2], \quad (5.3.36.a)$$

$$[\bar{K}_p] = [T_2]'[K_p][T_2] + \Omega[\bar{C}_p][H_2] \quad (5.3.36.b)$$

et  $\{\bar{Q}_L\}$  contient des forces de liaison qui disparaîtront à l'assemblage des matrices élémentaires.

Après des calculs, on peut obtenir les expressions

$$\begin{aligned} [\bar{K}_p] = & \left( \frac{k_{uu} + k_{ww}}{2} - \Omega \frac{c_{uw} - c_{wu}}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \left( \frac{k_{uw} - k_{wu}}{2} + \Omega \frac{c_{uu} + c_{ww}}{2} \right) \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \\ & + \left( \frac{k_{uu} - k_{ww}}{2} - \Omega \frac{c_{uw} + c_{wu}}{2} \right) \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \\ & + \left( \frac{k_{uw} + k_{wu}}{2} + \Omega \frac{c_{uu} - c_{ww}}{2} \right) \begin{bmatrix} -\sin(2\Omega t) & \cos(2\Omega t) \\ \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\bar{C}_p] = & \frac{c_{uu} + c_{ww}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_{uw} - c_{wu}}{2} \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \\ & + \frac{c_{uu} - c_{ww}}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} + \frac{c_{uw} + c_{wu}}{2} \begin{bmatrix} -\sin(2\Omega t) & \cos(2\Omega t) \\ \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En général, les matrices  $[\bar{K}_p]$  et  $[\bar{C}_p]$  sont périodiques, de période  $\frac{\pi}{\Omega}$ .

Il y a des cas particuliers dans lesquels ces deux matrices seront constantes. Le cas le plus général est donné par les conditions:

$$\begin{aligned} k_{uu} = k_{ww} \text{ et } k_{uw} = -k_{wu}, \\ c_{uu} = c_{ww} = 0 \text{ et } c_{uw} = -c_{wu}. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$



## 5.4. SYSTÈME DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

Dans cette section, nous établissons le système global d'équations. Nous traitons premièrement le cas général du rotor défini à la section 5.1, ensuite nous présentons les cas particuliers pour lesquels d'importantes simplifications dans l'étude numérique sont possibles.

### 5.4.1 Cas général

Après l'assemblage des matrices élémentaires provenant des éléments d'arbre, des disques et des paliers, on arrive à un système de  $4N_n$  équations différentielles de 2<sup>e</sup> ordre avec  $4N_n$  fonctions inconnues, où  $N_n$  est le nombre des nœuds de la partition de l'arbre.

Par rapport au repère fixe, le système des équations de mouvement prend la forme

$$[M(t)]\{\ddot{\delta}\} + [C(t)]\{\dot{\delta}\} + [K(t)]\{\delta\} = \{Q_b(t)\} + \{Q_p\}. \quad (5.4.1)$$

où

$[M(t)]$ ,  $[C(t)]$  et  $[K(t)]$  sont des matrices périodiques de période  $T_1 = \pi/\Omega$ ,

dont la dépendance de temps est due à l'asymétrie de la section de l'arbre.

$\{Q_b(t)\}$ , le terme libre dû aux balourds, est un vecteur périodique de période

$$T_2 = 2\pi/\Omega,$$

$\{Q_p\}$ , le terme libre dû au poids des disques et de l'arbre, est un vecteur constant.

Par rapport au repère mobile, nous obtenons le système

$$[\overline{M}]\{\ddot{\delta}\} + [\overline{C}(t)]\{\dot{\delta}\} + [\overline{K}(t)]\{\delta\} = \{\overline{Q}_b\} + \{\overline{Q}_p(t)\} \quad (5.4.2)$$

où

$[\overline{M}]$  est une matrice constante,

$[\overline{C}(t)]$  et  $[\overline{K}(t)]$  sont des matrices périodiques de période  $T_1 = \pi/\Omega$ , dont la dépendance de temps est due à l'asymétrie des paliers.

$\{\overline{Q}_b\}$ , le terme libre dû aux balourds, est un vecteur constant.

$\{\overline{Q}_p(t)\}$ , le terme libre dû au poids des disques et de l'arbre, est un vecteur périodique de période  $T_2 = 2\pi/\Omega$ .

Chacun des deux systèmes peut être mis sous la forme d'un système de  $8N_n$  équations différentielles de 1<sup>er</sup> ordre avec  $8N_n$  fonctions inconnues

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\dot{\delta}\} \end{Bmatrix} = [A(t)] \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\dot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \{f(t)\}, \quad (5.4.3)$$

avec  $[A(t)]$  matrice périodique de période  $T_1 = \pi/\Omega$  et  $\{f(t)\}$  vecteur périodique de période  $T_2 = 2\pi/\Omega$ . La solution de ce système peut être étudiée avec la théorie de Floquet.

De point de vue numérique, il est plus avantageux de considérer le système des équations de mouvement par rapport au repère mobile. Dans ce cas, la matrice de masse étant constante, son inversion ne doit pas être effectuée à chaque moment de temps considéré.

Si, en plus, on passe à la variable  $\varphi = \Omega t$ , on obtient

$$\frac{d}{d\varphi} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta'\} \end{Bmatrix} = [A(\varphi)] \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta'\} \end{Bmatrix} + \{f(\varphi)\}, \quad (5.4.4)$$

avec

$$[A(\varphi)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -\frac{1}{\Omega^2} [\overline{M}]^{-1} [\overline{K}(\varphi)] & -\frac{1}{\Omega} [\overline{M}]^{-1} [\overline{C}(\varphi)] \end{bmatrix}$$

et

$$\{f(\varphi)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \frac{1}{\Omega^2} [\overline{M}]^{-1} \{\overline{Q}(\varphi)\} \end{Bmatrix}.$$

La période de la matrice du système  $[A(\varphi)]$  est  $T_1 = \pi$ . La période du terme libre  $\{f(\varphi)\}$  est  $T_2 = 2\pi$ .

#### 5.4.2 Arbre de masse négligeable

Par rapport au repère fixe, le système des équations de mouvement prend la forme:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K(t)]\{\delta\} = \{Q_b(t)\} + \{Q_r\} \quad (5.4.5)$$

où

$[M]$  et  $[C]$  sont des matrices constantes,

$[K(t)]$  est une matrice périodique de période  $T_1 = \pi/\Omega$ , dont la dépendance de temps est due à l'asymétrie de la section de l'arbre,

$\{Q_b(t)\}$ , le terme libre dû aux balourds, est un vecteur périodique de période

$$T_2 = 2\pi/\Omega,$$

$\{Q_r\}$ , le terme libre dû au poids des disques, est un vecteur constant.

En changeant l'ordre des équations et des inconnues, on peut mettre en évidence la contribution des  $N_d$  disques:

$$\begin{bmatrix} [M_{dd}] & [0_{dr}] \\ [0_{rd}] & [0_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_d \\ \ddot{\delta}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{dd}] & [0_{dr}] \\ [0_{rd}] & [C_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_d \\ \dot{\delta}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{dd}] & [K_{dr}] \\ [K_{rd}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_d \\ \delta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_d \\ 0_r \end{Bmatrix} \quad (5.4.6)$$

où l'indice "d" fait référence au disque (le vecteur  $\{\delta_d\}$  contient les déplacements correspondant aux disques) et l'indice "r", au reste du rotor.

Si l'amortissement des paliers est négligeable (donc  $[C_{rr}] = [0_{rr}]$ ), on peut réduire le nombre des inconnues du système. Dans ce cas, les dernières  $4(N_n - N_d)$  équations du système (5.4.6) permettent d'écrire  $\{\delta_r\}$  en fonction de  $\{\delta_d\}$

$$\{\delta_r\} = -[K_{rr}]^{-1}[K_{rd}]\{\delta_d\} \quad (5.4.7)$$

et, en conséquence, les premières  $4N_d$  équations deviennent

$$[M_{dd}]\{\ddot{\delta}_d\} + [C_{dd}]\{\dot{\delta}_d\} + [K_{dd}^*]\{\delta_d\} = \{Q_d\}, \quad (5.4.8)$$

où

$$[K_{dd}^*] = [K_{dd}] - [K_{dr}][K_{rr}]^{-1}[K_{rd}]. \quad (5.4.9)$$

Le système des équations de mouvement peut être mis sous la forme d'un système périodique de  $8N_d$  équations différentielles de 1<sup>er</sup> ordre avec  $8N_d$  fonctions inconnues.

Nous pouvons donc raffiner le maillage de l'arbre (augmenter le nombre des nœuds), tout en gardant la même dimension du système périodique à résoudre (dimension qui dépend du nombre des disques).

### 5.4.3 Arbre à section symétrique

Dans ce cas, le système des équations de mouvement par rapport au repère fixe a des coefficients constants:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{Q_b(t)\} + \{Q_p\} \quad (5.4.10)$$

où

$[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont des matrices constantes,

$\{Q_b(t)\}$ , le terme libre dû aux balourds, est un vecteur périodique de période

$$T_2 = 2\pi/\Omega,$$

$\{Q_p\}$ , le terme libre dû au poids des disques, est un vecteur constant.

Les détails du calcul de la réponse stationnaire sont donnés à l'annexe A-5. L'étude de la stabilité se réduit à l'analyse des valeurs propres d'une matrice constante.

### 5.4.4 Paliers symétriques, d'amortissement négligeable

Nous considérons, donc, pour les coefficients d'élasticité et d'amortissement des paliers, les conditions

$$k_{uu} = k_{ww} \text{ et } k_{wu} = k_{uw} = 0,$$

ainsi que

$$c_{uu} = c_{uw} = c_{wu} = c_{ww} = 0.$$

Dans ce cas, le système des équations de mouvement par rapport au repère mobile a des coefficients constants, même si la section de l'arbre est asymétrique.

La situation la plus générale pour laquelle l'élasticité et l'amortissement des paliers ne mènent pas à l'apparition des coefficients périodiques dans le système des équations de mouvement par rapport au système mobile est donnée par les relations (5.3.37).

L'évaluation de la réponse stationnaire et l'analyse de la stabilité se font de la même manière que dans le cas de l'arbre à section symétrique.

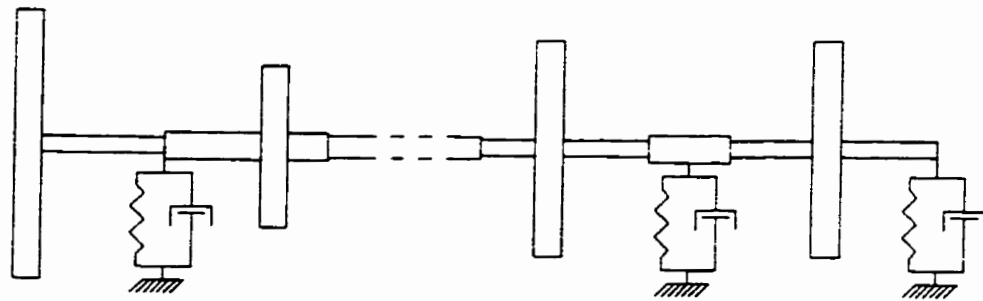


FIGURE 5.1  
Rotor, modèle général.

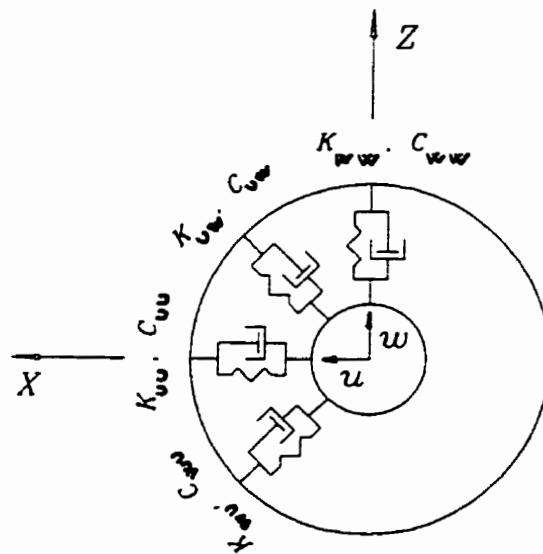


FIGURE 5.2  
Palier, modèle général

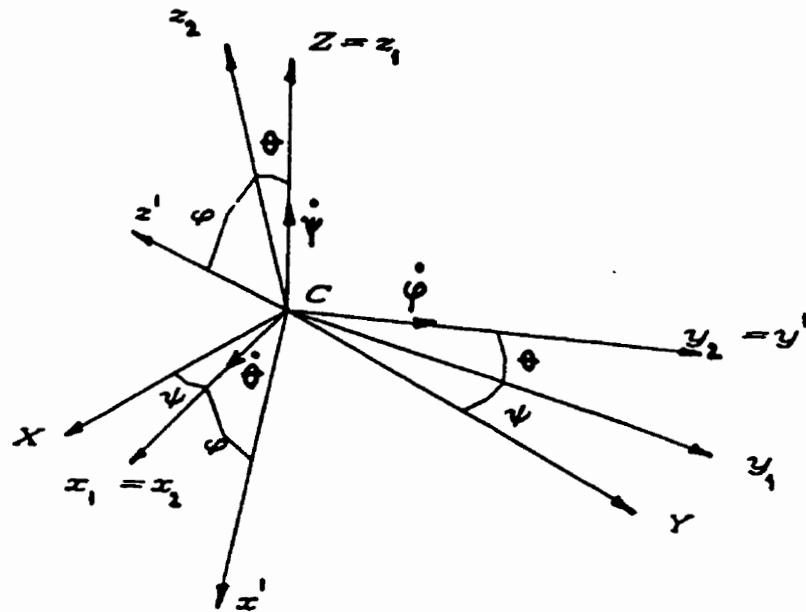


FIGURE 5.3

*Repère lié à la section.*

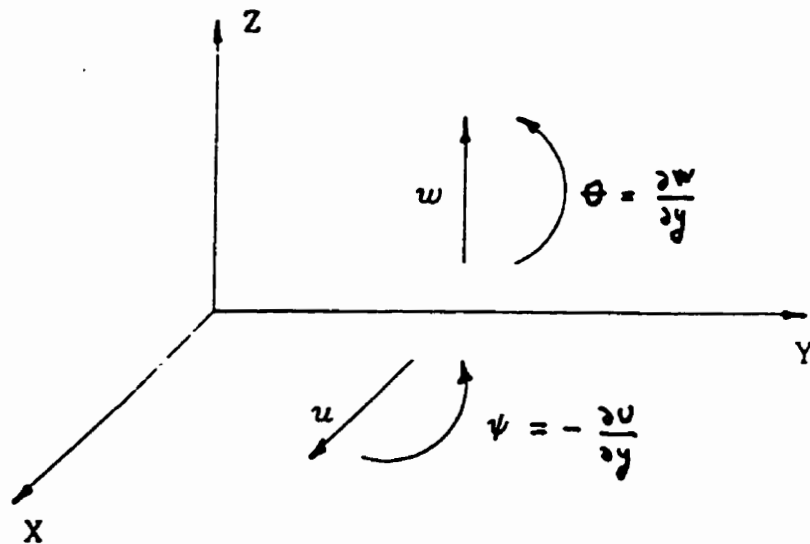


FIGURE 5.4  
Déplacements.



## CHAPITRE VI

### CALCUL ET DISCUSSION

#### 6.1 PROGRAMMES INFORMATIQUES

À partir de la théorie développée dans les chapitres précédents, quatre programmes informatiques en langage Fortran ont été réalisés. Leur présentation est donnée à l'annexe A-6.

Pour le modèle simple, tel qu'il a été défini à la section 4.1, nous avons élaboré le programme ROTOR\_S (S - simple). L'ordre du système périodique pris en compte est  $N = 4$ .

Pour le modèle général, tel qu'il a été défini à la section 5.1, nous avons élaboré les programmes ROTOR\_G (G - général), ROTOR\_G0 (G - général, 0 - masse nulle) et ROTOR\_GS (G - général, S - symétrique).

ROTOR\_G considère le système des équations du mouvement donné à la section 5.4.1. L'ordre du système périodique est  $N = 8N_n$ , où  $N_n$  est le nombre des nœuds du maillage de l'arbre.

ROTOR\_G0 est utilisable pour le cas où la masse de l'arbre est supposée négligeable par rapport aux masses des disques (voir la section 5.4.2). L'ordre du système périodique est  $N = 8N_d$ , où  $N_d$  est le nombre des disques. Une limite importante du modèle utilisé dans ce cas est le manque d'amortissement des paliers. Le seul amortissement dans le système sera donc l'amortissement environnemental agissant sur les disques. On a en échange un très grand avantage à utiliser ce programme au lieu de ROTOR\_G. Le temps de calcul (CPU-time) est approximativement proportionnel au cube de l'ordre  $N$  du système périodique. En utilisant ROTOR\_G0 on peut raffiner le

maillage de l'arbre sans augmenter la dimension du système périodique à résoudre, donc sans augmenter le temps de calcul.

ROTOR\_GS traite le cas de l'arbre à section symétrique. Par rapport au repère fixe, le système des équations de mouvement a des coefficients constants (voir la section 5.4.3).

Les programmes ROTOR\_S, ROTOR\_G et ROTOR\_G0 utilisent pour le calcul de la matrice de transfert et de la réponse stationnaire le schéma d'intégration numérique de type Runge-Kutta de 4<sup>e</sup> ordre présenté au chapitre 3.

## 6.2 ROTOR ASYMÉTRIQUE - MODÈLE SIMPLE

### 6.2.1 Définition du modèle de base

Les caractéristiques fixes du modèle à analyser (voir la figure 4.1), que l'on appellera Rotor 1, sont celles considérées par Tondl [29]. On les présente au tableau 6.1, où  $m$  est la masse du disque,  $m_b$  est la masse du balourd,  $d$  et  $\beta$  sont le rayon et l'angle de phase qui définissent l'emplacement du balourd,  $k_m$  est la rigidité moyenne de l'arbre et  $k_p^*$  est la rigidité moyenne des paliers.

TABLEAU 6.1 Détails du modèle Rotor 1.

Élément	Détails
Disque	$m = 3 \text{ kg}$ , $m_b, d = 0.001 \text{ kg.m}$ , $\beta = 0$ .
Arbre	$k_m = 0,45 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ , ( $L = 0.4 \text{ m}$ , section carrée de côté $7.7 \text{ mm}$ , $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ).
Paliers	$k_p^* = 10^5 \text{ N/m}$ .

Les caractéristiques variables sont les facteurs d'asymétrie de l'arbre et des paliers

$$\frac{k_d}{k_m} = \frac{k_x - k_z}{k_x + k_z}, \text{ où } k_x \text{ et } k_z \text{ sont les rigidités de l'arbre,}$$

$$\frac{k_p^-}{k_p^+} = \frac{k_u - k_w}{k_u + k_w}, \text{ où } k_u \text{ et } k_w \text{ sont les rigidités des paliers,}$$

ainsi que le coefficient d'amortissement  $c$ .

Pour le rotor symétrique, on a:

$$\omega_x = \omega_z = \omega_u = \omega_w = \sqrt{\frac{k_m k_p^+}{m(k_m + k_p^+)}} = 101.71 \text{ rad/sec.}$$

avec  $\omega_x$  et  $\omega_z$  - données à la section 4.3.2,  $\omega_u$  et  $\omega_w$  - données à la section 4.3.1.

Nous nous attendons donc (voir la section 4.5) à ce que l'instabilité apparaisse dans des bandes de fréquences aux alentours de 100 rad/sec. Pour l'amplitude de la réponse stationnaire, nous prévoyons (voir la section 4.3) avoir des crêtes aux alentours de 100 rad/sec (réponse au balourd) et de 50 rad/sec (réponse à la gravité).

Remarquons que, pour le rotor symétrique, le facteur d'amortissement  $\zeta_{u,w} = c/(2m\omega_{u,w})$  est égal à  $\sqrt{2}/2$  pour  $c = 432 \text{ Ns/m}$ . Cette valeur correspond à la limite au-delà de laquelle l'amplitude de la réponse stationnaire ne présente plus un pic aux alentours de la fréquence de résonance principale (voir la section 4.3.1).

### 6.2.2 Analyse de la stabilité du mouvement

Pour la méthode de la matrice de transfert (MMT), le temps de calcul (CPU-time) est proportionnel au nombre d'intervalles par période ( $N_p$ ).

Le tableau 6.2 présente des résultats obtenus pour  $k_d/k_m = 0,1$ ,  $k_p^-/k_p^+ = 0,25$  et amortissement nul, en variant  $N_p$ . Nous avons balayé la zone 90 rad/sec - 110 rad/sec avec un pas de 0,01 rad/sec et nous avons trouvé six vitesses critiques (vitesses de rotations qui marquent le passage d'une zone stable à une zone instable). Le point de départ étant stable, il résulte que nous avons identifié trois intervalles d'instabilité. Nous donnons aussi les résultats obtenus par une méthode de perturbation (MP) (en appliquant les relations de Black et McTernan [2], données à la section 4.5).

Dorénavant, nous allons considérer, pour l'analyse de la stabilité, que  $N_p = 20$ .

TABLEAU 6.2

Choix du nombre d'intervalles par période.

Vitesses critiques (rad/sec).

Méthode	Intervalles /période	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
MMT	4	94,60	97,67	98,89	102,05	103,08	106,85
	6	94,77	97,87	99,07	102,26	103,27	107,07
	10	94,82	97,92	99,12	102,31	103,32	107,13
	20	94,82	97,92	99,12	102,32	103,33	107,13
MP		94,87	98,77	99,20	102,65	103,49	106,55

À la figure 6.1 on compare les limites des régions d'instabilité trouvées par la méthode de la matrice de transfert (MMT) et par la méthode de perturbation de Black et McTernan (MP), pour  $k_d/k_m = 0,1$ ,  $k_p^-/k_p^+$  variable et  $c = 0$ . Pour MMT, le pas de variation de la vitesse angulaire est de 0,01 rad/sec. Mentionnons que le facteur d'asymétrie de l'arbre  $k_d/k_m$  est petit et que les relations de Black et McTernan sont donc censées donner des résultats assez précis.

Les limites de la région d'instabilité obtenues par MMT sont très rapprochées de celles obtenues à l'aide de MP. L'écart maximal entre les résultats des deux méthodes est atteint pour un facteur d'asymétrie des paliers  $k_p^-/k_p^+$  d'environ 0,15. En bas de cette valeur, les fréquences  $\omega_u$  et  $\omega_w$  sont assez proches, par conséquent on doit changer les relations de calcul (voir la section 4.5) pour MP.

À la figure 6.2 on compare les limites des régions d'instabilité trouvées par la méthode de la matrice de transfert (MMT) et par la méthode de perturbation de Black et McTernan (MP), pour  $k_d/k_m$  variable,  $k_p^-/k_p^+ = 0.2$  et  $c = 0$ . Pour MMT, le pas de variation de la vitesse angulaire est de 0,01 rad/sec. Le facteur d'asymétrie des paliers  $k_p^-/k_p^+$  a été choisi suffisamment grand pour que les fréquences  $\omega_u$  et  $\omega_w$  soient suffisamment éloignées.

Pour des facteurs d'asymétrie de l'arbre  $k_d/k_m$  petits, les limites de la région d'instabilité obtenues par MMT sont très rapprochées de celles obtenues à l'aide de MP. L'écart entre les résultats des deux méthodes augmente avec l'augmentation de  $k_d/k_m$ . Ce comportement est normal, compte tenu que les relations de Black et McTernan ont été obtenues dans l'hypothèse d'un facteur d'asymétrie de l'arbre petit.

La figure 6.3 donne l'effet de l'augmentation progressive de l'amortissement sur la région d'instabilité présentée à la figure 6.1 (asymétrie de l'arbre  $k_d/k_m = 0.1$  et asymétrie des paliers  $k_p^-/k_p^+$  variable). Les résultats ont été obtenus avec la méthode de la matrice de transfert.

On observe que la zone d'instabilité se rétrécit avec l'augmentation du taux d'amortissement. On remarque aussi qu'il existe des taux d'amortissement pour lesquels on peut faire disparaître l'instabilité si on augmente l'asymétrie des paliers.

La figure 6.4 présente l'effet de l'augmentation progressive de l'amortissement sur la région d'instabilité, pour une asymétrie de l'arbre  $k_d/k_m$  variable et une asymétrie des paliers  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$ . Les résultats ont été obtenus avec la méthode de la matrice de transfert. Pour une asymétrie de l'arbre fixée, la zone d'instabilité se rétrécit ou même disparaît quand on augmente le taux d'amortissement.

### 6.2.3 Réponse stationnaire

Pour l'intégration numérique du système périodique, le temps de calcul (CPU-time) est proportionnel au nombre d'intervalles par période ( $N_p$ ) et au nombre de périodes nécessaires pour atteindre la condition de convergence.

Le tableau 6.3 présente des résultats obtenus par intégration numérique, pour  $k_d/k_m = 0,15$ ,  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$  et  $c = 30$  Ns/m, en variant  $N_p$ .

TABLEAU 6.3

Choix du nombre d'intervalles par période.

Amplitude de la réponse horizontale ( $10^{-3}$  m); nombre de périodes.

Méthode	Intervalles/ Période	25 rad/s	50 rad/s	75 rad/s	100 rad/s	125 rad/s
intégration numérique	10	0,139 (3)	0,823 (7)	0,541 (13)	38,18 (2)	0,850 (13)
	20	0,149 (6)	1,090 (6)	0,537 (6)	44,15 (1)	0,853 (5)
	90	0,150 (1)	1,118 (1)	0,538 (1)	44,45 (1)	0,853 (1)
balance harmonique		0,150	1,130	0,540	43,29	0,849

Nous avons choisi 5 vitesses de rotation (parmi lesquelles 100 rad/sec et 50 rad/sec, proches des vitesses critiques). Nous avons marqué entre parenthèses le nombre de périodes nécessaires pour atteindre la condition de convergence. Nous donnons aussi les résultats obtenus par la méthode de la balance harmonique présentée à la section 4.6. Dorénavant, nous considérons, pour l'évaluation de la réponse stationnaire, que  $N_p = 90$ .

La figure 6.5 compare les réponses stationnaires obtenues par l'intégration numérique du système périodique et par la méthode de balance harmonique, pour  $k_d/k_m = 0,15$ ,  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$  et un taux d'amortissement  $c = 30$  Ns/m. Le pas de variation de la vitesse angulaire est de 1 rad/sec.

La concordance des résultats obtenus par les deux méthodes est très bonne. On observe l'existence de deux pics de l'amplitude de la réponse. Le premier, proche de 100 rad/sec, est dû au balourd et il survient dans la zone des fréquences de résonance principales ( $\omega_u$ ,  $\omega_w$  et  $\frac{\omega_u + \omega_w}{2}$ ). L'autre, proche de 50 rad/sec, est dû à la gravité et il survient aux alentours d'une fréquence de résonance secondaire ( $\frac{\omega_u + \omega_w}{4}$ ).

À la figure 6.6 on donne l'effet de l'augmentation progressive de l'asymétrie de l'arbre, l'asymétrie des paliers étant fixe. Les résultats ont été obtenus par intégration numérique. On observe que, pour un arbre à section symétrique, il n'y a pas de crête due à la gravité.

La figure 6.7 présente l'effet de l'augmentation progressive de l'asymétrie des paliers sur l'amplitude de la réponse stationnaire, dans le cas d'un taux d'amortissement  $c = 20$  Ns/m (par rapport à l'amortissement critique déduit à la section 6.2.1, cet amortissement reste faible). Voyons ce qui se passe dans la zone des fréquences de résonance principales. S'il n'y a pas d'asymétrie des paliers, on retrouve le phénomène

d'instabilité (voir la figure 6.3). En augmentant l'asymétrie des paliers, on fait disparaître l'instabilité.

### 6.3 ROTOR ASYMÉTRIQUE - MODÈLE GÉNÉRAL

#### 6.3.1 Définition des modèles de base

Nous proposons deux modèles de rotor à analyser, appelés Rotor 2 (voir la figure 6.8) et Rotor 3 (voir la figure 6.9).

Les détails du modèle Rotor 2 sont donnés au tableau 6.4. Pour l'arbre, nous prenons en considération une variante à section symétrique et une autre à section asymétrique. Même si les paliers sont identiques, le mouvement du disque n'est pas plan, vu son emplacement non symétrique sur l'arbre.

TABLEAU 6.4 Détails du modèle Rotor 2.

Élément	Détails
Disque	$m = 1,973 \text{ kg}$ , $J_x = J_z = 4,932 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ , $J_y = 9,864 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ , $m_b.d = 3.946 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}$ , $\beta = 45 \text{ deg}$ .
Arbre	$L_1 = 0,4 \text{ m}$ , $L_2 = 0,6 \text{ m}$ , $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^2$ , $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$ . 1. Section carrée $I_m = 0,3835 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ , $I_d / I_m = 0$ , $A = 0,6784 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ . 2. Section rectangulaire $I_m = 0,3835 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ , $I_d / I_m = 0,25$ , $A = 0,6372 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .
Paliers	$[K_p] = \begin{bmatrix} 3,68 & 0 \\ 0 & 5,52 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$ , $[C_p] = \begin{bmatrix} 0,476 & 0 \\ 0 & 0,714 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$ .



Les caractéristiques du modèle Rotor 3 sont celles considérées dans Guilhen et autres [11] pour une application industrielle. Le tableau 6.5 présente les détails de ce modèle. Il s'agit d'un rotor de compresseur, à vitesse de rotation élevée, pour lequel l'effet de la gravité sur la réponse stationnaire est négligeable par rapport à celui des balourds. La section de l'arbre est symétrique, tandis que les paliers sont asymétriques.

TABLEAU 6.5

Détails du modèle Rotor 3.

Élément	Détails
Disque noeud 1	$m = 1,26 \text{ kg}$ $J_x = J_z = 0,00125 \text{ kg.m}^2$ , $J_y = 0,00249 \text{ kg.m}^2$ (rayon $R \cong 62,3 \text{ mm}$ ) $m_b = 3 \text{ g}$ , $d = 1 \text{ mm}$ , $\beta = 0$ .
Disque noeud 5	$m = 1,134 \text{ kg}$ , $J_x = J_z = 0,0011 \text{ kg.m}^2$ , $J_y = 0,0022 \text{ kg.m}^2$ (rayon $R \cong 62,3 \text{ mm}$ ). $m_b = 3 \text{ g}$ , $d = 1 \text{ mm}$ , $\beta = 180 \text{ deg}$ .
Arbre	$L_1 = L_4 = 0,08 \text{ m}$ , $L_2 = L_3 = 0,07 \text{ m}$ . Section circulaire, rayon extérieur $R = 18,5 \text{ mm}$ , rayon intérieur $r = 5 \text{ mm}$ . $I_x = I_z = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = 0,91507 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ , $A = \pi(R^2 - r^2) = 0,99667 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^2$ , $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$ .
Palier noeud 2	$[K_p] = \begin{bmatrix} 0,796 & -0,119 \\ -0,594 & 1,1 \end{bmatrix} 10^8 \text{ N/m}$ , $[C_p] = \begin{bmatrix} 0,84 & -0,32 \\ -0,32 & 1,26 \end{bmatrix} 10^4 \text{ N.s/m}$ .
Palier noeud 4	$[K_p] = \begin{bmatrix} 0,525 & -0,0229 \\ -0,385 & 0,71 \end{bmatrix} 10^8 \text{ N/m}$ , $[C_p] = \begin{bmatrix} 0,61 & -0,16 \\ -0,16 & 0,85 \end{bmatrix} 10^4 \text{ N.s/m}$ .

### 6.3.2 Résultats - Modèle Rotor 2

Pour le maillage de l'arbre, nous avons pris en compte 2 éléments finis (voir la figure 6.8). Nous avons considéré aussi 4 éléments finis (en ajoutant un noeud de plus au milieu de chaque élément de la figure 6.8), mais les résultats obtenus pour l'arbre à section symétrique n'ont pas changé (dans la limite de 4 chiffres significatifs), à l'exception du point de crête (voir la figure 6.10).

Le nombre d'intervalles par période utilisé a été  $N_p = 180$  pour l'analyse de la stabilité et  $N_p = 360$  pour l'évaluation de la réponse stationnaire. Ces valeurs ont été choisies de la même manière que pour le modèle simple (tableaux 6.2 et 6.3).

Pour l'arbre à section symétrique, nous pouvons observer le mouvement du rotor par rapport au repère fixe et par rapport au repère mobile. Dans le premier cas, la réponse stationnaire est obtenue par un calcul direct (programme ROTOR\_GS), dans le deuxième cas il s'agit de l'intégration numérique d'un système périodique (programme ROTOR\_G). La figure 6.10 présente les résultats, pratiquement les mêmes, obtenus par les deux méthodes. Nous obtenons, donc, une validation de la méthode d'évaluation de la réponse stationnaire d'un système périodique.

La figure 6.11 présente l'effet de l'asymétrie de l'arbre sur la réponse stationnaire.

Les résultats ont été obtenus par intégration numérique (programme ROTOR\_G), avec un pas de variation de la vitesse de 10 rad/sec.

On peut remarquer la bifurcation de la crête correspondant à la résonance principale ainsi que l'apparition d'une nouvelle crête, à une demie de la fréquence de résonance principale, lors de l'introduction de l'asymétrie.

La nouvelle crête est due à la gravité. On a déjà vu ce phénomène au modèle simple (voir la figure 6.6).

Pour comprendre l'autre changement (la bifurcation de la crête principale), il est nécessaire d'analyser la stabilité du mouvement.

Nous avons balayé la zone 100 rad/sec - 400 rad/sec avec un pas de 1 rad/sec. Pour l'arbre à section symétrique, on n'a identifié aucun intervalle d'instabilité (cela démontre qu'il n'existe pas un intervalle d'instabilité de largeur supérieure à 1 rad/sec, mais un éventuel point critique, vers 280 rad/sec, reste non décelé). Pour l'arbre à section asymétrique, le mouvement devient instable de 251 rad/sec à 319 rad/sec. Donc la bifurcation de la crête principale lors de l'introduction de l'asymétrie signifie l'apparition d'un intervalle d'instabilité. La réponse stationnaire est dépourvue de signification physique à l'intérieur de cet intervalle (voir la section 2.2.1).

À la figure 6.12 nous présentons l'effet de l'asymétrie de l'arbre sur la réponse stationnaire, dans le cas où la masse de l'arbre ainsi que l'amortissement des paliers sont négligés. Nous introduisons en échange un amortissement externe  $c = 50 \text{ Ns/m}$ .

Les résultats ont été obtenus par intégration numérique (programme ROTOR\_G0). Toutefois, pour l'arbre à section symétrique, la réponse stationnaire peut être obtenue aussi par un calcul direct (programme ROTOR\_GS).

On remarque l'importance de la prise en compte de la masse de l'arbre. En négligeant la masse de l'arbre, la résonance principale passe de 280 rad/sec à 440 rad/sec, pour l'arbre à section symétrique. Il faut mentionner toutefois que la masse de l'arbre est 2,5 fois plus grande que la masse du disque.

L'effet de l'asymétrie de l'arbre est le même que dans le cas où on ne néglige pas la masse de l'arbre (figure 6.11).

L'analyse de la stabilité montre que, pour l'arbre à section asymétrique, le mouvement devient instable de 385 rad/sec à 487 rad/sec. Évidemment, on peut faire disparaître cette zone d'instabilité si on augmente l'amortissement.

### 6.3.3 Résultats - Modèle Rotor 3

Pour le maillage de l'arbre nous avons considéré premièrement 5 nœuds (voir la figure 6.9) et ensuite seulement 4 nœuds, en renonçant au nœud 3. Les résultats obtenus étant pratiquement identiques (dans la limite de 4 chiffres significatifs), nous avons considéré dès lors 4 nœuds (donc 3 éléments finis) pour la partition de l'arbre.

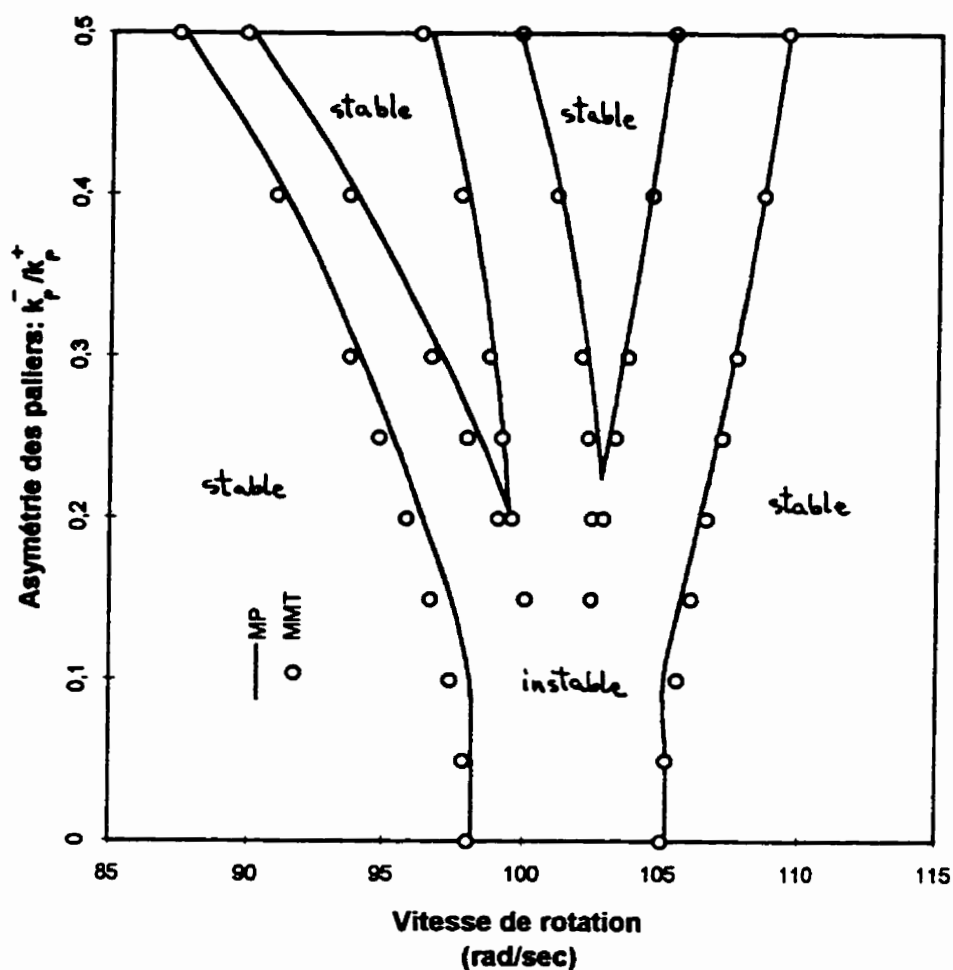
La figure 6.13 présente l'effet de la masse de l'arbre. L'amplitude de la réponse stationnaire au nœud 1 a été obtenue par calcul direct (programme ROTOR\_GS).

Le pas de variation de la vitesse est de 50 rpm.

On voit l'importance de la prise en compte de la masse de l'arbre. Si on néglige la masse de l'arbre, les deux crêtes seront déplacées vers des vitesses de rotation plus élevées.

À la figure 6.14 nous comparons les résultats obtenus par calcul direct (programme ROTOR\_GS) et par l'intégration numérique du système périodique (programme ROTOR\_G). Pour le calcul direct, le pas de variation de la vitesse est de 500 rpm. Pour l'intégration numérique, le nombre d'intervalles par période utilisé est  $N_p = 360$ . On remarque la très bonne concordance existant entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

Pour analyser la stabilité de mouvement, nous avons balayé la zone 20000 rpm - 40000 rpm avec un pas de 10 rad/sec. Nous n'avons identifié aucun intervalle d'instabilité.



**FIGURE 6.1**

Région d'instabilité, par une méthode de perturbation (MP) et par la méthode de la matrice de transfert (MMT).

Variation de l'asymétrie des paliers.

Rotor 1;  $k_d/k_m = 0,1$ ;  $c=0$ .

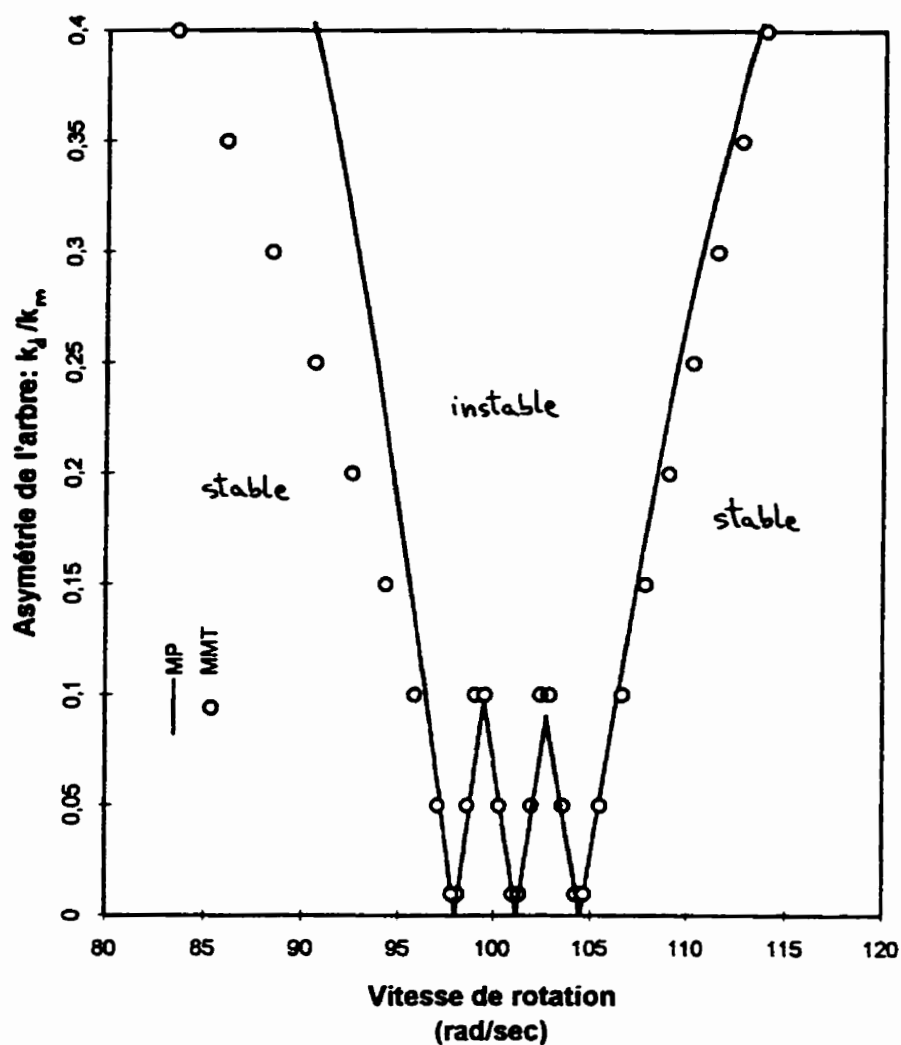
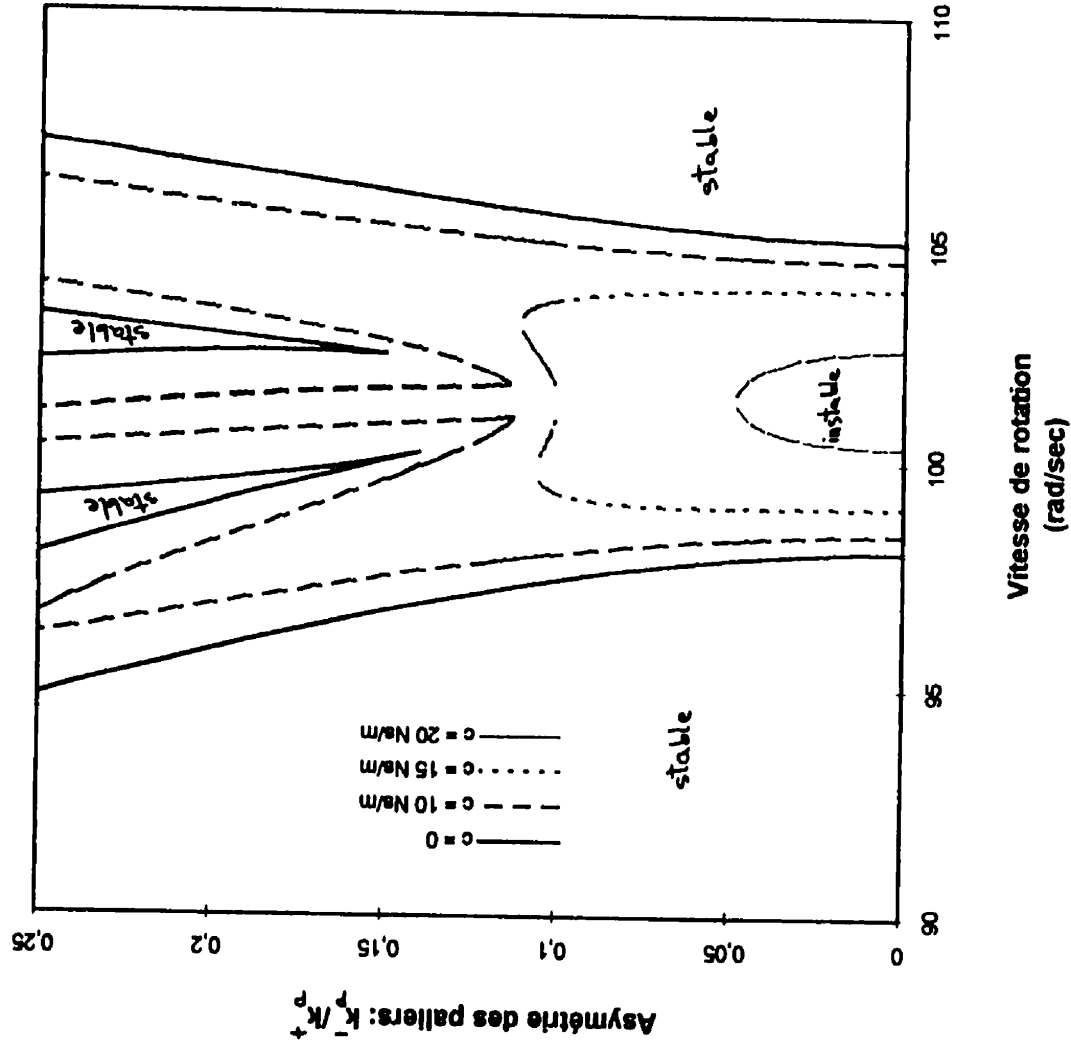


FIGURE 6.2

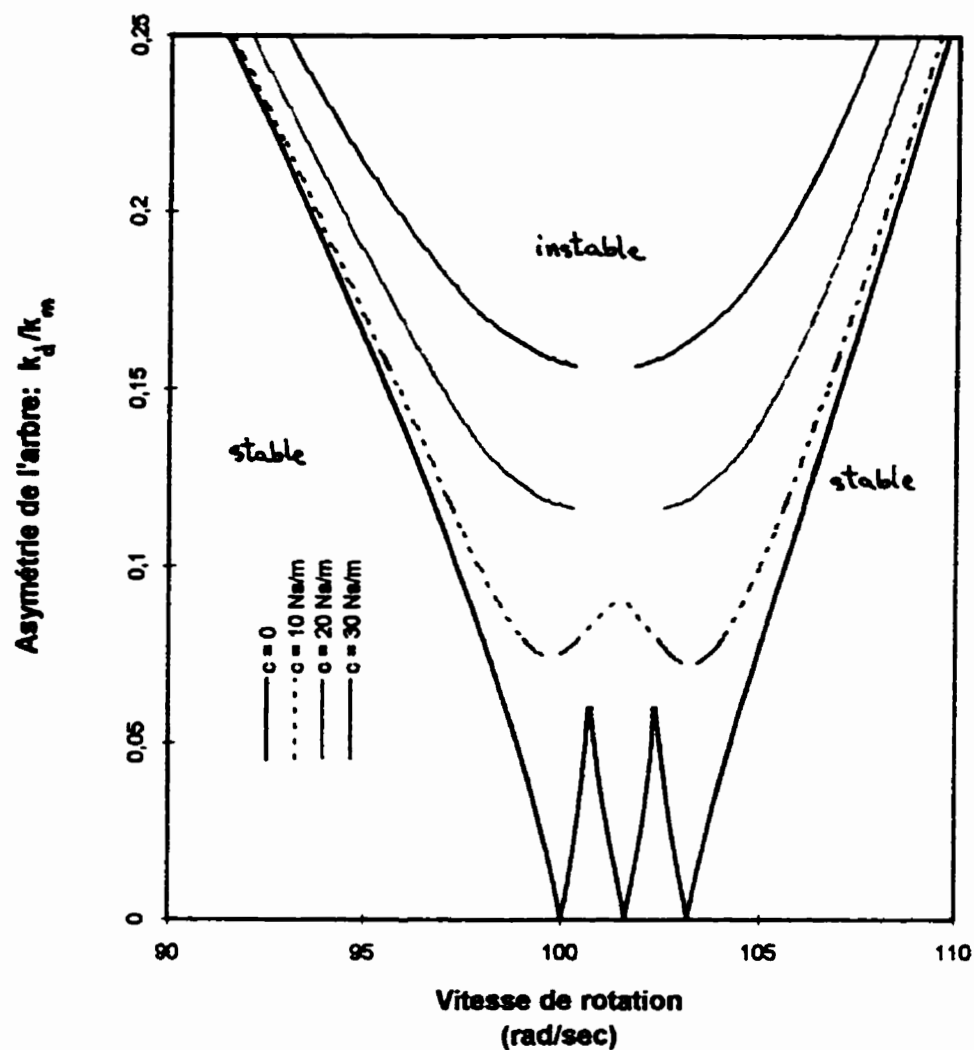
Région d'instabilité, par une méthode de perturbation (MP) et par la méthode de la matrice de transfert (MMT).

Variation de l'asymétrie de l'arbre.

Rotor 1;  $k_p^-/k_p^+ = 0,2$ ;  $c=0$ .



**FIGURE 6.3**  
 Région d'instabilité, par la méthode  
 de la matrice de transfert.  
 Variation de l'amortissement et de  
 l'asymétrie des paliers.  
 Rotor 1;  $k_d/k_m = 0,1$ .



**FIGURE 6.4**

Région d'instabilité, par la méthode de la matrice de transfert.

Variation de l'amortissement et de l'asymétrie de l'arbre.

Rotor 1;  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$ .



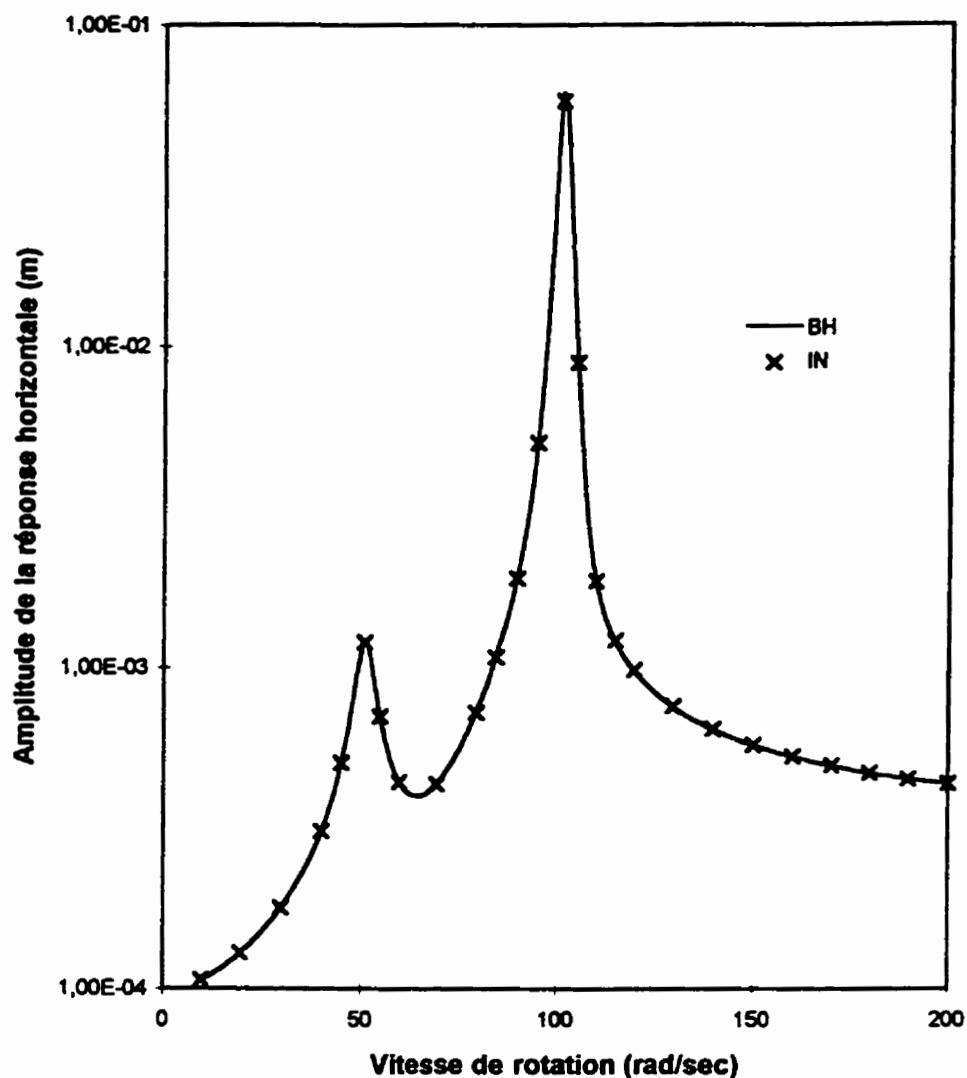
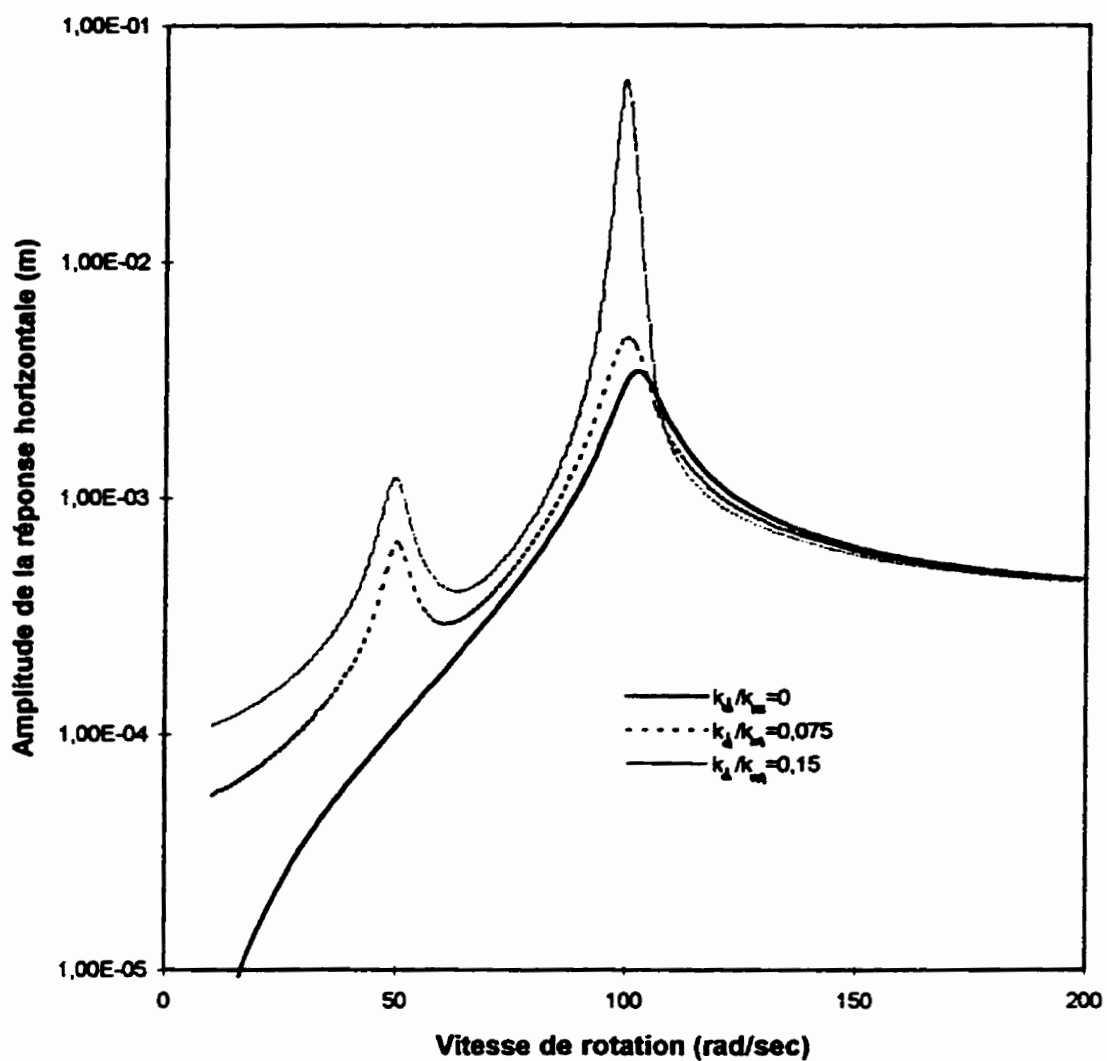


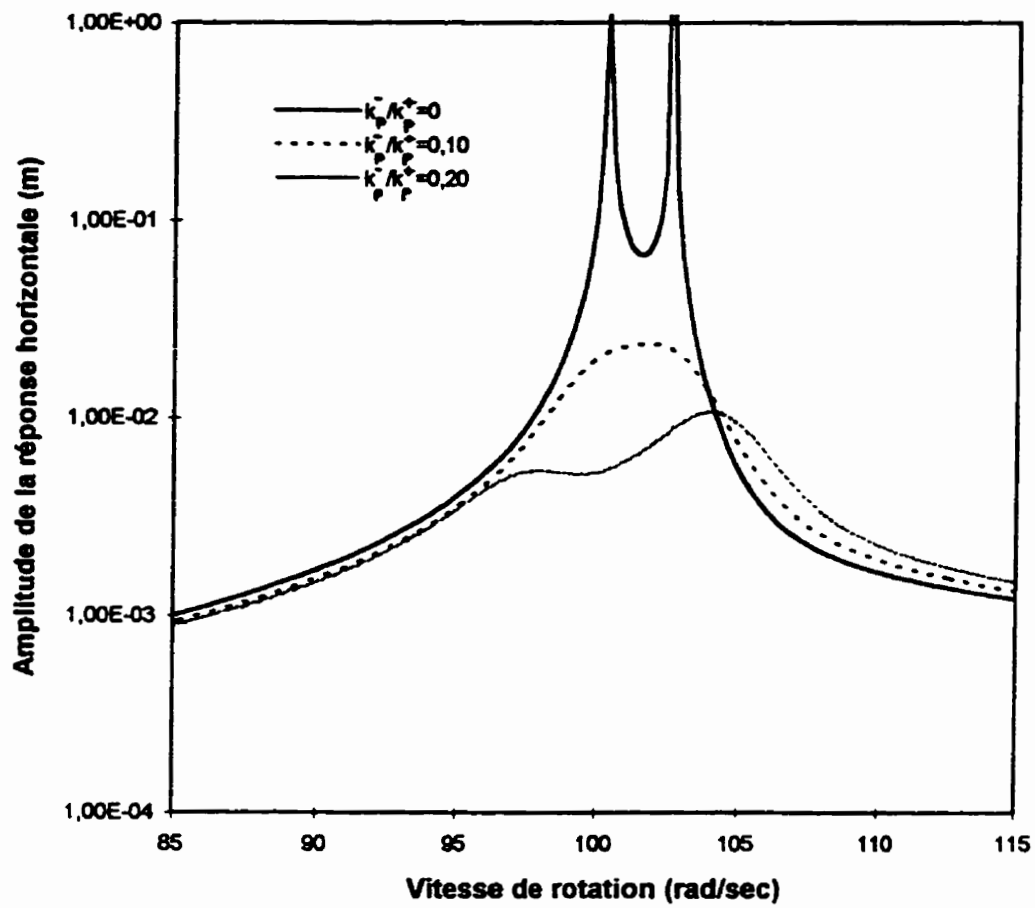
FIGURE 6.5

Réponse stationnaire, par la méthode de balance harmonique (BH) et par intégration numérique (IN).

Rotor 1;  $k_d/k_m = 0,15$  ;  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$  ;  $c = 30$  Ns/m.



**FIGURE 6.6**  
 Réponse stationnaire, par intégration numérique.  
 Variation de l'asymétrie de l'arbre.  
 Rotor 1;  $k_p^-/k_p^+ = 0,1$  ;  $c = 30$  Ns/m.



**FIGURE 6.7**  
 Réponse stationnaire, par intégration numérique.  
 Variation de l'asymétrie des paliers.  
 Rotor 1;  $k_d/k_m = 0,1$  ;  $c = 20$  Ns/m.

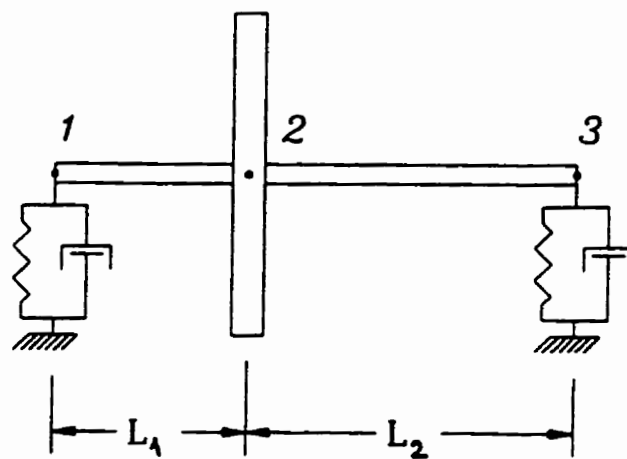


FIGURE 6.8  
Modèle "Rotor 2".

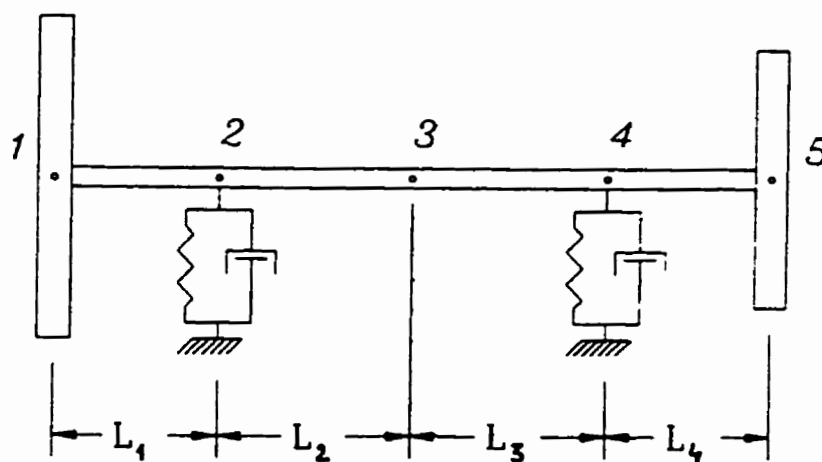
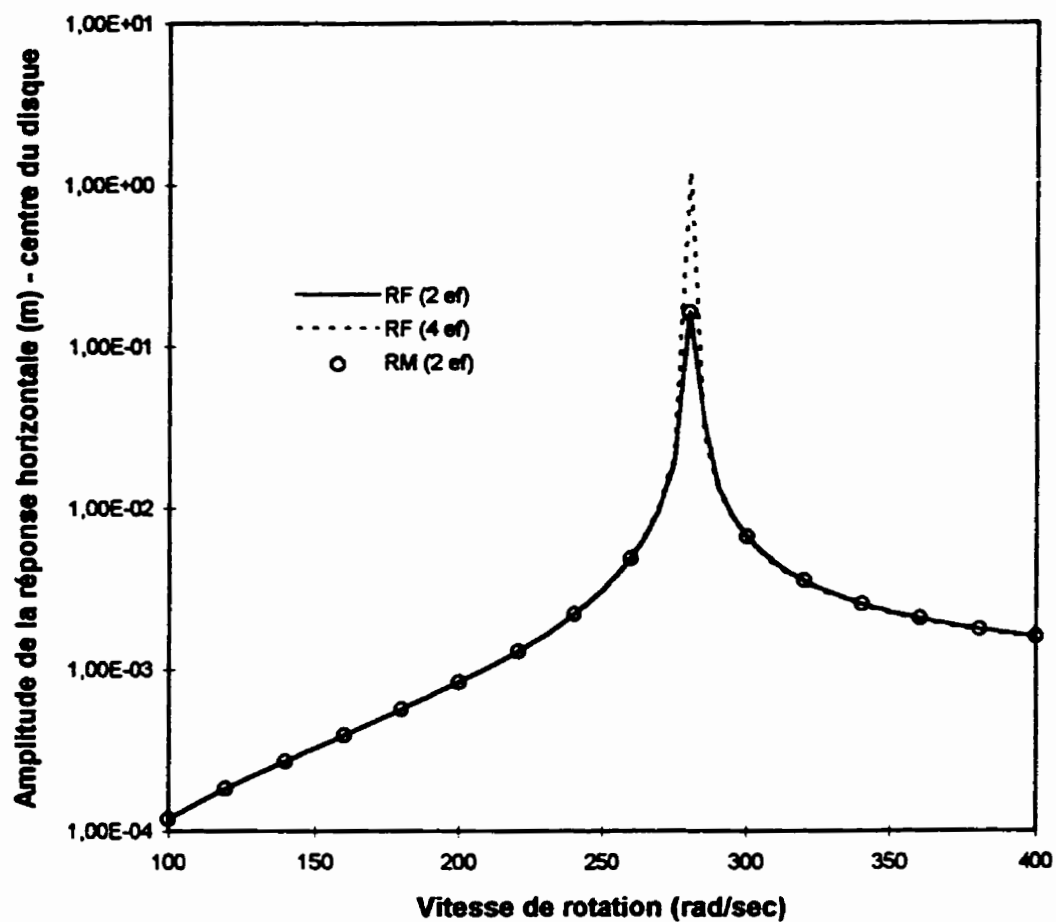


FIGURE 6.9  
Modèle "Rotor 3".



**FIGURE 6.10**  
 Réponse stationnaire,  
 par calcul direct (RF - repère fixe) et  
 par intégration numérique (RM - repère mobile).  
 Variation du nombre d'éléments finis (ef). Rotor 2.

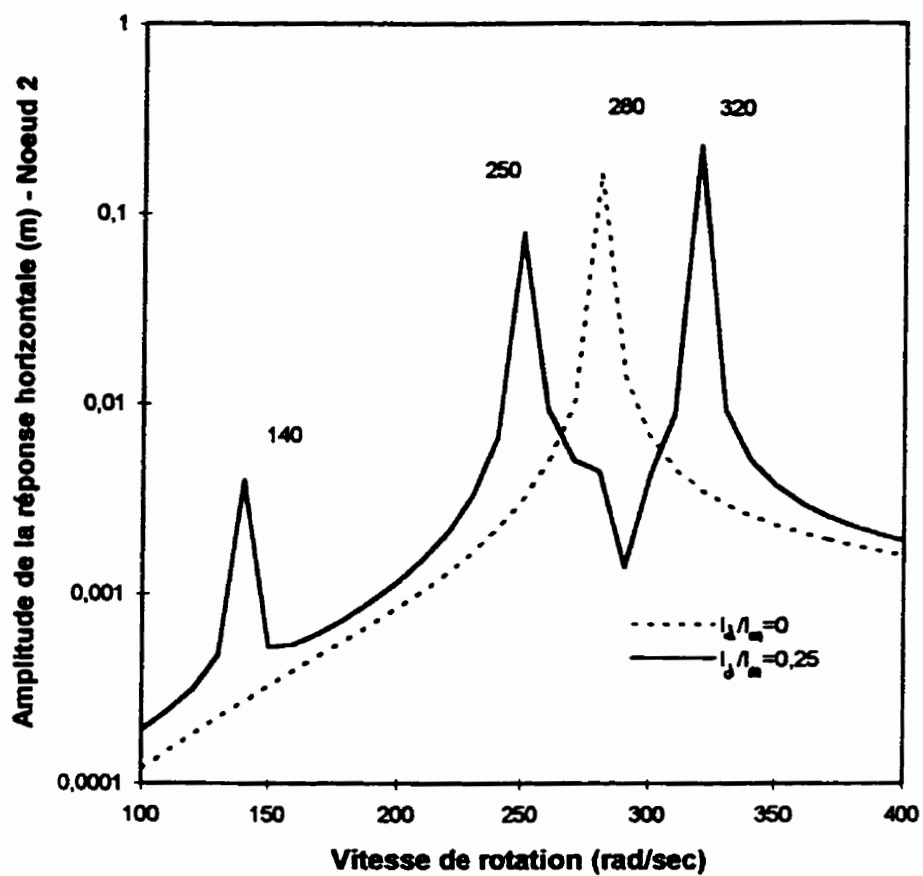
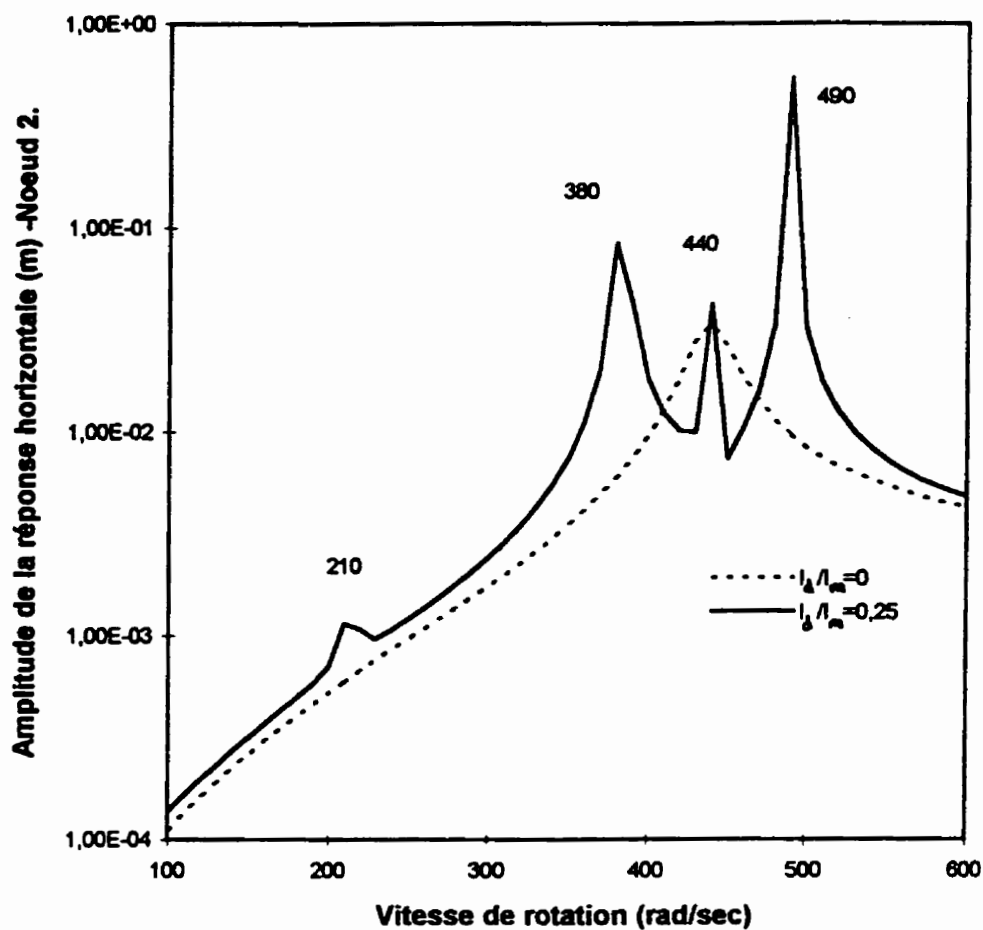


FIGURE 6.11

Réponse stationnaire, par intégration numérique.

Variation de l'asymétrie de l'arbre ( $I_d/I_m = 0$  et  $I_d/I_m = 0,25$ ).

Rotor 2.



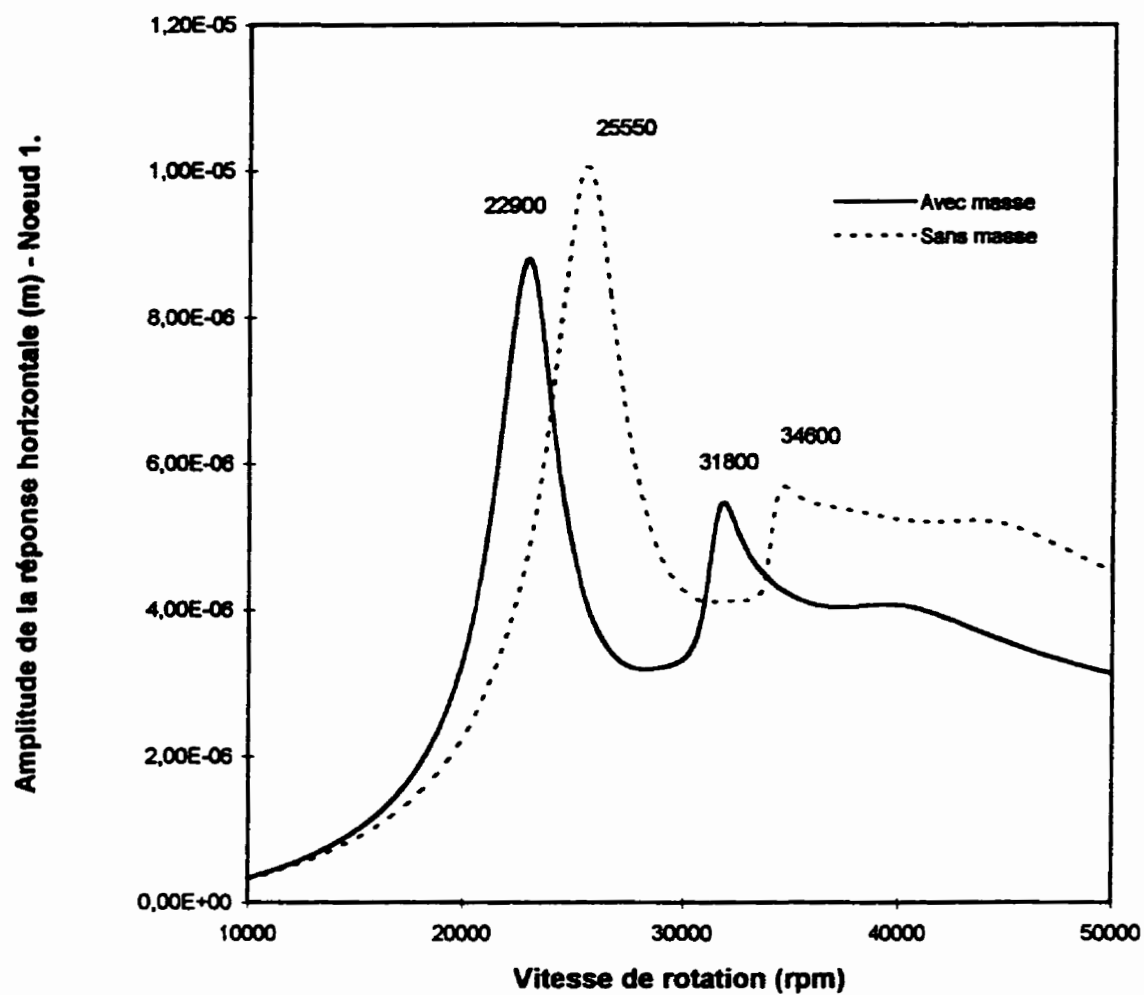
**FIGURE 6.12**

Réponse stationnaire par intégration numérique.

Variation de l'asymétrie de l'arbre ( $I_d/I_m = 0$  et  $I_d/I_m = 0,25$ ).

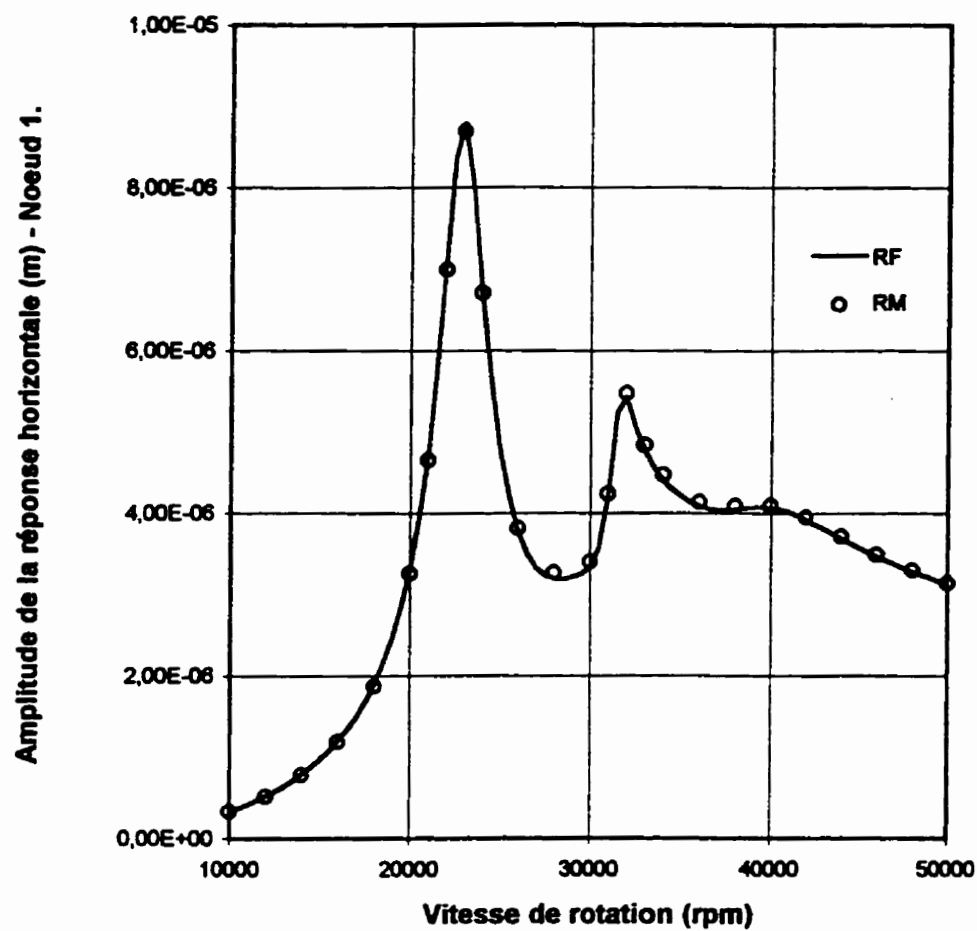
Masse de l'arbre et amortissement des paliers négligés.

Amortissement externe  $c = 50$  Ns/m. Rotor 2.



**FIGURE 6.13**  
Réponse aux balourds, par calcul direct.  
Effet de la masse de l'arbre.  
Rotor 3.





**FIGURE 6.14**  
**Réponse aux balourds, par intégration numérique**  
**(RM - repère mobile) et par calcul direct (RF - repère fixe).**  
**Rotor 3.**

## CHAPITRE VII

### CONCLUSION

Ce mémoire avait pour but: la présentation de la mise en équation du comportement des rotors asymétriques, pour un modèle simple ainsi que pour un modèle comportant un degré élevé de généralité; l'application de la méthode de la matrice de transfert à l'analyse de la stabilité et à l'évaluation de la réponse stationnaire des rotors asymétriques.

La procédure d'application de la méthode de la matrice de transfert est donnée au chapitre 3. Les équations de mouvement des deux modèles de rotor ont été présentées aux chapitres 4 et 5.

Pour le modèle général, nous avons élargi la procédure de modélisation par éléments finis élaborée par Nelson et McVaugh [24] pour des rotors à arbres symétriques, afin de prendre en compte l'asymétrie de l'arbre.

Pour le modèle simple, nous avons corrigé la technique de balance harmonique développée par Tondl [29] pour l'évaluation de la réponse stationnaire.

La présentation détaillée des équations de mouvement par rapport à un repère fixe, ainsi que par rapport à un repère en rotation, a été accompagnée de l'étude des cas particuliers importants. Pour le modèle général, dans le cas de l'arbre de masse négligeable, nous avons développé une méthode de réduction de la dimension du système des équations de mouvement.

L'utilisation de la méthode de la matrice de transfert aux rotors asymétriques s'est avérée fort satisfaisante, tant pour l'analyse de la stabilité que pour l'évaluation de la réponse stationnaire (voir le chapitre 6).

Trois programmes informatiques en langage Fortran, qui utilisent pour le calcul de la matrice de transfert et de la réponse stationnaire le schéma d'intégration numérique de type Runge-Kutta de 4<sup>e</sup> ordre présenté au chapitre 3, ont été réalisés: ROTOR\_S pour le modèle simple, ROTOR\_G et ROTOR\_G0 pour le modèle complexe (le deuxième pour le cas de l'arbre à masse supposée négligeable par rapport aux masses des disques).

Pour le modèle simple, tel qu'il a été défini à la section 4.1, les résultats numériques calculés à l'aide du programme informatique ROTOR\_S sont en très bonne concordance avec: les résultats obtenus en appliquant une méthode de perturbation, pour l'analyse de la stabilité; les résultats obtenus en appliquant une méthode de balance harmonique, pour l'évaluation de la réponse stationnaire.

Pour le modèle général, tel qu'il a été défini à la section 5.1, les résultats numériques calculés à l'aide des programmes informatiques ROTOR\_G et ROTOR\_G0 ont été confrontés avec les résultats obtenus par calcul direct, pour le cas particulier de l'arbre à section symétrique, où le calcul direct devient possible. Les résultats du programme ROTOR\_G0 ont été confrontés, aussi, avec les résultats du programme ROTOR\_S, pour le cas du modèle simple de rotor asymétrique. La concordance des résultats ainsi obtenus a été très bonne.

L'influence de l'asymétrie de la partie en rotation (arbre) et de l'asymétrie de la partie fixe (paliers), ainsi que l'influence de l'amortissement externe et de la masse de l'arbre sur le comportement des rotors ont été évaluées. Nous donnons ci-dessous les principales remarques:

- il n'y a pas d'intervalle d'instabilité pour un rotor dont la partie en rotation est symétrique, même si la partie fixe est asymétrique (voir les figures 6.4, 6.10, 6.14);
- l'asymétrie de la partie en rotation peut causer l'apparition d'un ou plusieurs intervalles d'instabilité aux alentours de la vitesse de résonance principale (voir les figures 6.4, 6.11 et 6.12);
- si la partie en rotation est asymétrique, l'augmentation de l'asymétrie de la partie fixe peut avoir soit un effet déstabilisateur (en l'absence de l'amortissement externe - voir la figure 6.1), soit un effet stabilisateur (si on suppose l'existence d'un faible amortissement externe - voir les figures 6.3 et 6.7);
- l'amortissement externe agissant sur les disques a un effet stabilisateur, contribuant à la diminution sinon à la disparition des intervalles d'instabilité (voir les figures 6.3 et 6.4);
- en négligeant la masse de l'arbre, les vitesses critiques seront surévaluées (voir la figure 6.13).

Nous pouvons dire que nous disposons d'une méthode adéquate pour prédire le comportement des rotors asymétriques.

Une poursuite logique de cette étude serait l'augmentation du degré de généralité du modèle de rotor asymétrique. Premièrement, en considérant l'asymétrie des disques, le cisaillement de la section de l'arbre, le non-balancement de la section de l'arbre, l'amortissement interne de l'arbre. Ensuite, en renonçant à l'hypothèse que les directions principales de la section soient fixes le long de l'arbre. L'effet de l'élasticité des disques reste aussi à évaluer.

## RÉFÉRENCES

- [1] ARDAYFIO, D., FROHRIB, D.A. (1976). «Instabilities of an Asymmetric Rotor with Asymmetric Shaft Mounted on Symmetric Elastic Supports». J. Engineering for Industry, 1161-1165.
- [2] BLACK, H.F., McTERNAN, A.J. (1968). «Vibration of a Rotating Asymmetric Shaft supported in Asymmetric Bearings». J. Mech. Eng. Sci., 10, 252 -261.
- [3] BLACK, H.F. (1969). «Parametrically Excited Lateral Vibrations of an Asymmetric Slender Shaft in Asymmetrically Flexible Bearings». J. Mech. Eng. Sci., 11, 57 -67.
- [4] BROSENS, P.J., CRANDALL, S.H. (1961). «Whirling of Unsymmetrical Rotors». J. Appl. Mech., pp. 355-362.
- [5] CHONG-WON, L. (1993). «Vibration Analysis of Rotors». Kluwer Academic Publishers.
- [6] EL-MARHOMY, A.A. (1991). «Dynamic Stability of Elastic Rotor-Bearing Systems via Liapunov's Direct Method». J. Appl. Mech., 58, 1056-1063.
- [7] FRIEDMANN, P., HAMMOND, C.E., WOO, T.H. (1977). «Efficient Numerical Treatment of Periodic Systems with Applications to Stability Problems». Int. J. Numerical Methods in Engineering, 11, 1117-1136.

- [8] FRIEDMANN, P. (1990). «Numerical Methods for the Treatment of Periodic Systems with Applications to Structural Dynamics and Helicopter Rotor Dynamics». *Computers and Structures*, 35, 329-347.
- [9] GANESAN, R. (1996). «Effects of Bearing and Shaft Asymmetries on the Resonant Oscillations of a Rotor-Dynamic System». *J. Engineering for Gas Turbines and Power*, 118, 107-114.
- [10] GENTA, G. (1988). «Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach based on Complex Coordinates». *J. Sound and Vibration*, 124, 27-53.
- [11] GUILHEN, P.M., BERTHIER, P., FERRARIS, G., LALANNE, M. (1988). «Instability and Unbalance Response of Dissymmetric Rotor-Bearing Systems». *J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110, 288-294.
- [12] HSU, C.S. (1963). «On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom». *J. Appl. Mech.*, 367-372.
- [13] INAGAKI, T., KANKI, H., SHIRAKI, K. (1980). «Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing System». *J. Mechanical Design*, 102, 147-157.
- [14] IWATSUBO, T., KAWAI, R., MIYAJI, T. (1980). «On the Stability of a Rotating Asymmetric Shaft supported by Asymmetric Bearings». *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23, 934-937.
- [15] KANG, Y., SHIH, Y.-P., LEE, A.-C. (1992). «Investigation on the Steady-State Responses of Asymmetric Rotors». *J Vibration and Acoustics*, 114, 194-208.

- [16] KANG, Y., HWANG, W.-W. (1996). «Influence of Bearing Damping on Instability of Asymmetric Shafts - Part I. Stabilizing and Destabilizing Effects». *Int. J. Mech. Sci.*, 38, 1349-1365.
- [17] KANG, Y., LEE, Y.-G. (1996). «Influence of Bearing Damping on Instability of Asymmetric Shafts - Part II. Mode Veering». *Int. J. Mech. Sci.*, 38, 1349-1365.
- [18] KOTERA, T., YANO, S. (1980). «Instability of Motion of a Disc supported by an Asymmetric Shaft in Asymmetric Bearings (Influence of External Damping)». *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23, 1194-1199.
- [19] LALANNE, M., FERRARIS, G. (1990). «Rotordynamics Prediction in Engineering». John Wiley, New York.
- [20] MEIROVITCH, L. (1970). «Methods of Analytical Dynamics». McGraw-Hill Book Co., New York.
- [21] NAYFEH, A.H. (1973). «Perturbation Methods». John Wiley, New York.
- [22] NAYFEH, A.H., MOOK, D.T. (1979). «Nonlinear Oscillations». John Wiley, New York.
- [23] NAYFEH, A.H. (1981). «Introduction to Perturbation Techniques». John Wiley, New York.
- [24] NELSON, H.D., McVAUGH, J.M. (1976). «The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements». *J. Engineering for Industry*, 593-600.

- [25] NOAH, S.T., HOPKINS, G.R. (1982). «A Generalized Hill's Method for the Stability Analysis of Parametrically Excited Dynamic Systems». J. Appl. Mech., 49, 217-223.
- [26] PIPES, L.A., HOVANESSIAN, S.A. (1969). «Matrix-Computers Methods in Engineering». John Wiley, New York.
- [27] SINHA, S.C., WU, D-H., JUNEJA, V., JOSEPH, P. (1991). «Analysis of Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Chebyshev Polynomials». Structural Vibration and Acoustics, 34, 225-233.
- [28] SINHA, S.C., PANDIYAN, R., BIBB, J.S. (1996). «Liapunov-Floquet Transformation: Computation and Applications to Periodic Systems». J. Vibration and Acoustics, 118, 209-219.
- [29] TONDL, A. (1965). «Some Problems of Rotordynamics». Chapman and Hall.
- [30] WEYH, B. (1989). «Calculation of Stability Maps of Time Varying Systems». Transaction of ASME.



# ANNEXE A-1 EXPRESSION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DU MODÈLE SIMPLE

Le mouvement du disque étant plan, son énergie cinétique sera

$$T_D = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2). \quad (\text{A-1.1})$$

On doit ajouter l'énergie cinétique du balourd (voir la figure 4.3):

$$T_B = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_B^2 + \dot{z}_B^2), \quad (\text{A-1.2})$$

avec  $x_B$  et  $z_B$ , les composantes du vecteur de position du balourd par rapport au repère fixe XYZ, données par

$$x_B = u_1 + \sin(\Omega t + \beta) \quad \text{et} \quad z_B = w_1 + \cos(\Omega t + \beta). \quad (\text{A-1.3})$$

En substituant (A-1.3) dans (A-1.2) et en ajoutant  $T_B$  à  $T_D$ , on obtient l'expression de l'énergie cinétique totale:

$$T = \frac{1}{2} (m + m_b) (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) + m_b d \Omega [\dot{u}_1 \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w}_1 \sin(\Omega t + \beta)] \quad (\text{A-1.4})$$

Plusieurs auteurs ont préféré introduire le non-balancement du rotor d'une manière différente, en considérant que le disque est attaché excentriquement à l'arbre. Dans ce cas, le rayon  $d$  et l'angle de phase  $\beta$  définissent l'emplacement du centre de masse du disque par rapport aux axes principaux de la section de l'arbre, au point d'attache. Il est facile de montrer que l'énergie cinétique du disque aura l'expression:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) + m d \Omega [\dot{u}_1 \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w}_1 \sin(\Omega t + \beta)] \quad (\text{A-1.5})$$

Si dans (A-1.4) on néglige la masse du balourd  $m_b$  par rapport à la masse du disque  $m$ , (A-1.4) et (A-1.5) prennent la même forme:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) + b \Omega [\dot{u}_1 \cos(\Omega t + \beta) - \dot{w}_1 \sin(\Omega t + \beta)] \quad (\text{A-1.6})$$

avec  $b$ , le moment de la masse excentrique.

ANNEXE A-2  
TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT  
DU MODÈLE SIMPLE

Considérons le système d'équations qui décrit le mouvement du disque par rapport au repère fixe:

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + [K(t)] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \{F(t)\}, \quad (\text{A-2.1})$$

avec

$$[K(t)] = \left( [K_a(t)]^{-1} + [K_p]^{-1} \right)^{-1}, \quad (\text{A-2.2})$$

où

$$[K_p] = \begin{bmatrix} k_u & 0 \\ 0 & k_w \end{bmatrix} \quad (\text{A-2.3})$$

et 
$$[K_a(t)] = k_m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} \cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t \\ -\sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \end{bmatrix}. \quad (\text{A-2.4})$$

En substituant (A-2.3) et (A-2.4) dans (A-2.2), on obtient:

$$[K(t)] = \frac{1}{\Delta(t)} [K_1(t)], \quad (\text{A-2.5})$$

avec

$$\Delta(t) = (k_m + k_u)(k_m + k_w) - k_d^2 - k_d(k_u - k_w)\cos(2\Omega t) \quad (\text{A-2.6})$$

et

$$[K_1(t)] = k_m k_u k_w \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + k_x k_z \begin{bmatrix} k_u & \\ & k_w \end{bmatrix} + k_d k_u k_w \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & -\sin(2\Omega t) \\ -\sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{A-2.7})$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{\beta}(1 - \alpha \cos 2\Omega t) \quad (\text{A-2.8})$$

avec  $\beta = \frac{1}{(k_m + k_u)(k_m + k_w) - k_d^2}$  et  $\alpha = \beta k_d(k_u - k_w)$

et on considère l'expansion en série de Fourier de  $1/\Delta$ :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cos 2k\Omega t \right) \quad (\text{A-2.9})$$

avec  $p = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$ .

En substituant (A-2.9) dans (A-2.5), on obtient

$$\begin{aligned} [K] = m \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k \cos 2k\Omega t \right) & \left( \begin{bmatrix} \omega^2 + \mu^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \mu^2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \nu^2 \begin{bmatrix} \cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t \\ -\sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-2.10})$$

où

$$\omega^2 = \frac{\beta}{m\sqrt{1 - \alpha^2}} \left( k_m k_u k_w + k_x k_z \frac{k_u + k_w}{2} \right), \quad (\text{A-2.11})$$

$$\nu^2 = \frac{\beta}{m\sqrt{1 - \alpha^2}} k_d k_u k_w, \quad (\text{A-2.12})$$

$$\mu^2 = \frac{\beta}{m\sqrt{1 - \alpha^2}} k_x k_z \frac{k_u - k_w}{2} \quad (\text{on suppose } k_u > k_w). \quad (\text{A-2.13})$$

En effectuant le produit des deux parenthèses dans (A-2.10), on arrive à l'expression

$$[K] = m \begin{bmatrix} \omega^2 + a_0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + b_0 \end{bmatrix} + m \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_k \cos 2k\Omega t & d_k \sin 2k\Omega t \\ d_k \sin 2k\Omega t & b_k \cos 2k\Omega t \end{bmatrix}, \quad (\text{A-2.14})$$

avec

$$a_0 = p v^2 + \mu^2, \quad (\text{A-2.15})$$

$$a_1 = 2p(\omega^2 + \mu^2) + (1 + p^2)v^2,$$

$$a_n = p a_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots),$$

$$b_0 = -a_0,$$

$$b_1 = 2p(\omega^2 + \mu^2) - (1 + p^2)v^2,$$

$$b_n = p b_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots),$$

$$d_1 = -(1 - p^2)v^2,$$

$$d_n = p d_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

Le système d'équations (A-2.1) prend donc la forme:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \frac{c}{m} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 + a_0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + b_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_k \cos 2k\Omega t & d_k \sin 2k\Omega t \\ d_k \sin 2k\Omega t & b_k \cos 2k\Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2.16})$$

Mentionnons que nous avons apporté une correction à l'expression (A-2.10) de la matrice  $[K]$ , par rapport à l'expression similaire de Tondl, en introduisant le facteur  $\mu$ , défini par (A-2.13). Par conséquent, les expressions (A-2.15) des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ , et  $d_i$  deviennent identiques aux expressions similaires de Tondl seulement si on considère  $\mu=0$ .

## ANNEXE A-3

## MATRICES

Cette annexe contient des matrices utilisées dans le chapitre 5 (à l'exception de  $[T_2]$ , utilisée aussi dans le chapitre 4).

Table 1: Matrices  $[T_2]$ ,  $[T_4]$ ,  $[T_8]$ ,  $[H_2]$ ,  $[H_4]$  et  $[H_8]$

Table 2: Matrices  $[M_i]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_{d,c}] = [M_d]$ ,  $[M_{d,s}]$  et  $[G]$   
Vecteurs  $\{Q_A\}$  et  $\{\overline{Q}_A\}$

Table 3: Matrices  $[K_m]$ ,  $[K_d] = [K_{d,c}]$  et  $[K_{d,s}]$ .

Table 1: Matrices  $[T_2]$ ,  $[T_4]$ ,  $[T_8]$ ,  $[H_2]$ ,  $[H_4]$  et  $[H_8]$ 

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad (\text{A-3.1})$$

$$[T_4] = \begin{bmatrix} [T_2] & \\ & [T_2]' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ 0 & 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad (\text{A-3.2})$$

$$[T_8] = \begin{bmatrix} [T_4] & \\ & [T_4] \end{bmatrix}, \quad (\text{A-3.3})$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A-3.4})$$

$$[H_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A-3.5})$$

$$[H_8] = \begin{bmatrix} [H_4] & \\ & [H_4] \end{bmatrix}. \quad (\text{A-3.6})$$

Table 2: Matrices  $[M_i]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_{d,c}] = [M_d]$ ,  $[M_{d,s}]$  et  $[G]$ Vecteurs  $\{Q_A\}$  et  $\{\bar{Q}_A\}$ 

$$[M_i] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22L & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ & 156 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 22L & 0 \\ (sym) & & & & & 156 & 0 & -22L \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (A-3.7)$$

$$[M_r] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & -3L & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ & 36 & 0 & 3L & 0 & -36 & 0 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 3L & 0 \\ (sym) & & & & & 36 & 0 & -3L \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (A-3.8)$$

$$[M_{d,c}] = [M_d] = \frac{\rho I_d}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & -3L & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ & -36 & 0 & -3L & 0 & 36 & 0 & -3L \\ & & 4L^2 & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 \\ & & & -4L^2 & 0 & 3L & 0 & L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 3L & 0 \\ (sym) & & & & & -36 & 0 & 3L \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2 \end{bmatrix}, \quad (A-3.9)$$

$$[M_{ds}] = \frac{\rho I_d}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 0 & -3L & 0 & 36 & 0 & -3L \\ & 0 & 3L & 0 & 36 & 0 & 3L & 0 \\ & & 0 & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 0 & 3L \\ & (sym) & & & & 0 & -3L & 0 \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-3.10)$$

$$[G] = \frac{\rho I_p}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 0 & -3L & 0 & 36 & 0 & -3L \\ & 0 & -3L & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ & & 0 & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & -3L & 0 & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 0 & 3L \\ & (antisym) & & & & 0 & 3L & 0 \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-3.11)$$

$$\{Q_A\} = -\frac{1}{2} \rho g A L \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{6} L \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{6} L \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\bar{Q}_A\} = -\frac{1}{2} \rho g A L \begin{Bmatrix} -\sin \Omega t \\ \cos \Omega t \\ \frac{1}{6} L \sin \Omega t \\ \frac{1}{6} L \cos \Omega t \\ -\sin \Omega t \\ \cos \Omega t \\ -\frac{1}{6} L \sin \Omega t \\ -\frac{1}{6} L \cos \Omega t \end{Bmatrix}. \quad (A-3.12)$$



Table 3: Matrices  $[K_m]$ ,  $[K_d] = [K_{d,c}]$  et  $[K_{d,s}]$ .

$$[K_m] = \frac{EI_m}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & 0 & -12 & 0 & -6L & 0 \\ & 12 & 0 & 6L & 0 & -12 & 0 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & 6L & 0 & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 0 & -6L & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 6L & 0 \\ (sym) & & & & & 12 & 0 & -6L \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (A-3.13)$$

$$[K_d] = [K_{d,c}] = \frac{EI_d}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & 0 & -12 & 0 & -6L & 0 \\ & -12 & 0 & -6L & 0 & 12 & 0 & -6L \\ & & 4L^2 & 0 & 6L & 0 & 2L^2 & 0 \\ & & & -4L^2 & 0 & 6L & 0 & -2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 6L & 0 \\ (sym) & & & & & -12 & 0 & 6L \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2 \end{bmatrix}, \quad (A-3.14)$$

$$[K_{d,s}] = \frac{EI_d}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & 0 & -6L & 0 & 12 & 0 & -6L \\ & 0 & 6L & 0 & 12 & 0 & 6L & 0 \\ & & 0 & 4L^2 & 0 & -6L & 0 & 2L^2 \\ & & & 0 & 6L & 0 & 2L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -12 & 0 & 6L \\ (sym) & & & & & 0 & -6L & 0 \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (A-3.15)$$

## ANNEXE A-4

### ÉQUATIONS DE MOUVEMENT DE L'ÉLÉMENT D'ARBRE

Étudions premièrement l'effet de la masse de l'arbre et de la gravité, ensuite l'effet de l'élasticité de l'arbre. Dans chaque cas, nous déterminons la contribution aux équations de mouvement dans le repère fixe et dans le repère mobile.

#### Effet de la masse de l'arbre et de la gravité

Considérons l'expression de l'énergie cinétique de l'élément d'arbre (5.3.20) et l'expression du travail virtuel du poids de l'arbre (5.3.23). En appliquant le formalisme des équations de Lagrange, on obtient

$$[M_A(t)]\{\ddot{\delta}_e\} + \Omega[G]\{\dot{\delta}_e\} + \dots = \{Q_A\} + \{Q_L\}, \quad (\text{A-4.1})$$

où  $[M_A]$  est la matrice de masse, ayant l'expression

$$[M_A(t)] = [M_t] + [M_r] + [M_{r,c}]\cos(2\Omega t) + [M_{r,s}]\sin(2\Omega t), \quad (\text{A-4.2.a})$$

avec

$$[M_t] = \rho A \int_0^L [N]^T [N] dy, \quad (\text{t - translation}) \quad (\text{A-4.2.b})$$

$$[M_r] = \rho I_m \int_0^L [D]^T [D] dy, \quad (\text{r - rotation}) \quad (\text{A-4.2.c})$$

$$[M_{d,c}] = \rho I_d \int_0^L [D]^T \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} [D] dy, \quad (\text{d,c - déviation, cosinus}) \quad (\text{A-4.2.d})$$

$$[M_{d,s}] = -\rho I_d \int_0^L [D]^T \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} [D] dy, \quad (\text{d,s - déviation, sinus}) \quad (\text{A-4.2.e})$$

$[G]$  est la matrice gyroscopique, ayant l'expression

$$[G] = \frac{1}{2} \rho I_p \int_0^L [D]^T \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} [D] dy, \quad (\text{A-4.2.f})$$

$\{Q_A\}$ , déduit à partir de l'expression du travail virtuel du poids de l'arbre,

représente l'effet de la gravité,

$\{Q_L\}$  contient des forces de liaison, qui disparaîtront à l'assemblage des matrices élémentaires.

Dans les expressions (A-4.2),

$[N]$  est la matrice des fonctions de forme et  $[D] = \left[ \frac{e}{\Delta v} N \right]$ ,

$I_m = \frac{1}{2}(I_z + I_x)$ ,  $I_d = \frac{1}{2}(I_z - I_x)$  et  $I_p = I_z + I_x$ , où  $I_x$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie principaux de la section,

$L$  est la longueur de l'élément d'arbre,  $A$  est l'aire de la section,  $\rho$  est la densité du matériau.

Les matrices  $[M_i]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_{d,c}]$ ,  $[M_{d,s}]$  et  $[G]$ , ainsi que le vecteur  $\{Q_A\}$ , sont donnés à la table (2) de l'annexe A-3.

Pour écrire le système des équations de mouvement par rapport au repère mobile, on prend en compte la transformation de coordonnées  $\{\delta_e\} = [T_8] \{\bar{\delta}_e\}$ , avec  $[T_8]$  donnée à la table (1) de l'annexe A-3, et on obtient

$$\{\dot{\delta}_e\} = [T_8] \{\dot{\bar{\delta}}_e\} + \Omega [T_8] [H_8] \{\dot{\bar{\delta}}_e\} \quad (\text{A-4.3.a})$$

$$\text{et} \quad \{\ddot{\delta}_e\} = [T_8] \{\ddot{\bar{\delta}}_e\} + 2\Omega [T_8] [H_8] \{\dot{\bar{\delta}}_e\} - \Omega^2 [T_8] \{\bar{\delta}_e\}, \quad (\text{A-4.3.b})$$

avec  $[H_8]$  donnée aussi à la table (1) de l'annexe A-3.

En substituant les relations (A-4.3) dans (A-4.1), on obtient:

$$[\overline{M}_A]\{\ddot{\delta}_e\} + [\overline{C}_A]\{\dot{\delta}_e\} + [\overline{K}_A^{(m)}]\{\delta_e\} + \dots = \{\overline{Q}_A\} + \{\overline{Q}_L\} \quad (\text{A-4.4})$$

avec

$$[\overline{M}_A] = [T_8]' [M_A(t)] [T_8], \quad (\text{A-4.5.a})$$

$$[\overline{C}_A] = 2\Omega [\overline{M}_A] [H_8] + \Omega [\overline{G}], \quad (\text{A-4.5.b})$$

$$[\overline{K}_A^{(m)}] = -\Omega^2 [\overline{M}_A] + \Omega^2 [\overline{G}] [H_8] \quad (\text{rigidité due à la masse}) \quad (\text{A-4.5.c})$$

$$\text{et} \quad \{\overline{Q}_A\} = [T_8]' \{Q_A\}, \quad (\text{A-4.5.d})$$

où

$$[\overline{G}] = [T_8]' [G] [T_8]. \quad (\text{A-4.5.e})$$

Si on introduit l'expression (A-4.2.a) de  $[M_A]$  dans (A-4.5.a), on arrive à:

$$[\overline{M}_A] = [M_i] + [M_r] + [M_d], \quad (\text{A-4.5.f})$$

avec  $[M_i]$  donnée par (A-4.2.b),  $[M_r]$  donnée par (A-4.2.c) et  $[M_d] = [M_{d,c}]$ , où  $[M_{d,c}]$  est donnée par (A-4.2.d).

En substituant (A-4.2.f) dans (A-4.5.e), on obtient:

$$[\overline{G}] = [G]. \quad (\text{A-4.5.g})$$

Les matrices  $[M_i]$ ,  $[M_r]$ ,  $[M_d]$  et  $[G]$ , ainsi que le vecteur  $\{\overline{Q}_A\}$ , sont donnés à la table (2) de l'annexe A-3.

### Effet de l'élasticité de l'arbre

L'expression de l'énergie de déformation (5.3.24) peut être mise sous la forme

$$U = \frac{1}{2} EI_m \int_0^L \left\{ \begin{matrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \end{matrix} \right\}^t \left\{ \begin{matrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \end{matrix} \right\} dy + \frac{1}{2} EI_d \int_0^L \left\{ \begin{matrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \end{matrix} \right\}^t \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \end{matrix} \right\} dy. \quad (\text{A-4.6})$$

$$\text{Mais } \left\{ \begin{matrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{matrix} \right\} = [N(y)] \{\bar{\delta}_e\} \text{ implique}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{u}'' \\ \bar{w}'' \end{matrix} \right\} = [B] \{\bar{\delta}_e\}, \quad \text{avec} \quad [B] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N]. \quad (\text{A-4.7})$$

En substituant (A-4.7) dans (A-4.5), on obtient

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{\delta}_e\}^t [\bar{K}_A^{(d)}] \{\bar{\delta}_e\} \quad (\text{A-4.8})$$

où  $[\bar{K}_A^{(d)}]$  est la matrice de rigidité due à la déformation (on lui a mis l'exposant «d» pour la distinguer de la matrice de rigidité due à la masse), ayant l'expression

$$[\bar{K}_A^{(d)}] = [K_m] + [K_d], \quad (\text{A-4.9.a})$$

avec

$$[K_m] = EI_m \int_0^L [B]^t [B] dy \quad (\text{m - moyenne}) \quad (\text{A-4.9.b})$$

$$\text{et} \quad [K_d] = EI_d \int_0^L [B]^t \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} [B] dy. \quad (\text{d - déviation}) \quad (\text{A-4.9.c})$$

Les matrices  $[K_m]$  et  $[K_d]$  sont données à la table (3) de l'annexe A-3.

Pour déduire la matrice de rigidité par rapport au repère fixe, on substitue

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad \text{dans (A-4.6) et on obtient}$$

$$U = \frac{1}{2} EI_m \int_0^L \begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix} dy + \frac{1}{2} EI_d \int_0^L \begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \cos(2\Omega t) & -\sin(2\Omega t) \\ -\sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix} dy. \quad (\text{A-4.10})$$

On a une relation analogue à (A-4.7)

$$\begin{Bmatrix} u'' \\ w'' \end{Bmatrix} = [B] \{\delta_e\}, \quad (\text{A-4.11})$$

que l'on introduit dans (A-4.10). Il résulte

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [K_A] \{\delta_e\}, \quad (\text{A-4.12})$$

avec

$$[K_A] = [K_m] + [K_{d,c}] \cos(2\Omega t) + [K_{d,s}] \sin(2\Omega t), \quad (\text{A-4.13})$$

où

$[K_m]$  est donnée par (A-4.9.b),  $[K_{d,c}] = [K_d]$ , avec  $[K_d]$  donnée par (A-4.9.c), et

$[K_{d,s}]$  a l'expression

$$[K_{d,s}] = -EI_d \int_0^L [B]^t \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} [B] dy. \quad (\text{A-4.14})$$

Les matrices  $[K_m]$ ,  $[K_{d,c}]$  et  $[K_{d,s}]$  sont données à la table (3) de l'annexe A-3.

ANNEXE A-5  
RÉPONSE STATIONNAIRE  
DANS LE CAS DE L'ARBRE À SECTION SYMÉTRIQUE

On reprend le système (5.4.10):

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{Q_b(t)\} + \{Q_p\} \quad (\text{A-5.1})$$

La réponse stationnaire due au poids est la solution du système algébrique

$$[K]\{\delta_p\} = \{Q_p\} \quad (\text{A-5.2})$$

Vu que  $\begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \beta) \\ \cos(\Omega t + \beta) \end{Bmatrix} = \text{Re} \left( \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{i(\Omega t + \beta)} \right)$ , le terme libre  $\{Q_b(t)\}$  peut être mis sous la forme  $\{Q_b(t)\} = \text{Re}(\{V_b\} e^{i(\Omega t + \beta)})$ , où  $\{V_b\}$  est un vecteur dont les éléments sont des constantes complexes. La réponse stationnaire due aux balourds sera  $\{\delta_b(t)\} = \text{Re}\{z(t)\}$ , où  $\{z(t)\}$  est la solution périodique du système en variable complexe

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{V_b\} e^{i(\Omega t + \beta)} \quad (\text{A-5.3})$$

En introduisant l'expression  $\{z\} = \{z_0\} e^{i\Omega t}$  dans le système d'en haut, on obtient un système algébrique ayant  $\{z_0\}$  comme inconnue:

$$([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])\{z_0\} = \{V_b\} e^{i\beta} \quad (\text{A-5.4})$$

À la fin on obtient donc la réponse stationnaire recherchée:

$$\{\delta(t)\} = \text{Re}(\{z_0\} e^{i\Omega t}) + \{\delta_p\} \quad (\text{A-5.4})$$

## ANNEXE A-6

### PROGRAMMES INFORMATIQUES

À la figure A-6.1, nous présentons l'organigramme condensé des trois programmes conçus pour l'analyse de la stabilité et le calcul de la réponse stationnaire des rotors ayant une double asymétrie: de la partie en rotation (arbre) et de la partie fixe (paliers).

ROTOR\_S est utilisable dans le cas du modèle simple de rotor, tel qu'il a été défini à la section 4.1.

ROTOR\_G et ROTOR\_G0 sont utilisables dans le cas du modèle complexe de rotor, tel qu'il a été défini à la section 5.1. ROTOR\_G0 ne prend pas en compte la masse de l'arbre et l'amortissement des paliers. Il est utile surtout quand la complexité du rotor impose la considération d'un trop grand nombre de nœuds pour le maillage de l'arbre.

Les figures A-6.2, A-6.3, A-6.4 et A-6.5 présentent les sous-programmes des trois programmes mentionnés ci-haut, plus ceux du programme ROTOR\_GS.

ROTOR\_GS calcule la réponse stationnaire des rotors dont seulement la partie fixe (les paliers) est asymétrique, tandis que la partie en rotation (l'arbre, les disques) est symétrique. Ce programme est utilisable tant pour le modèle simple que pour le modèle complexe de rotor.

Les tableaux A-6.1 et A-6.2 présentent les fichiers de données des quatre programmes (SIM.DAT pour ROTOR\_S, GEN.DAT pour les trois autres programmes).



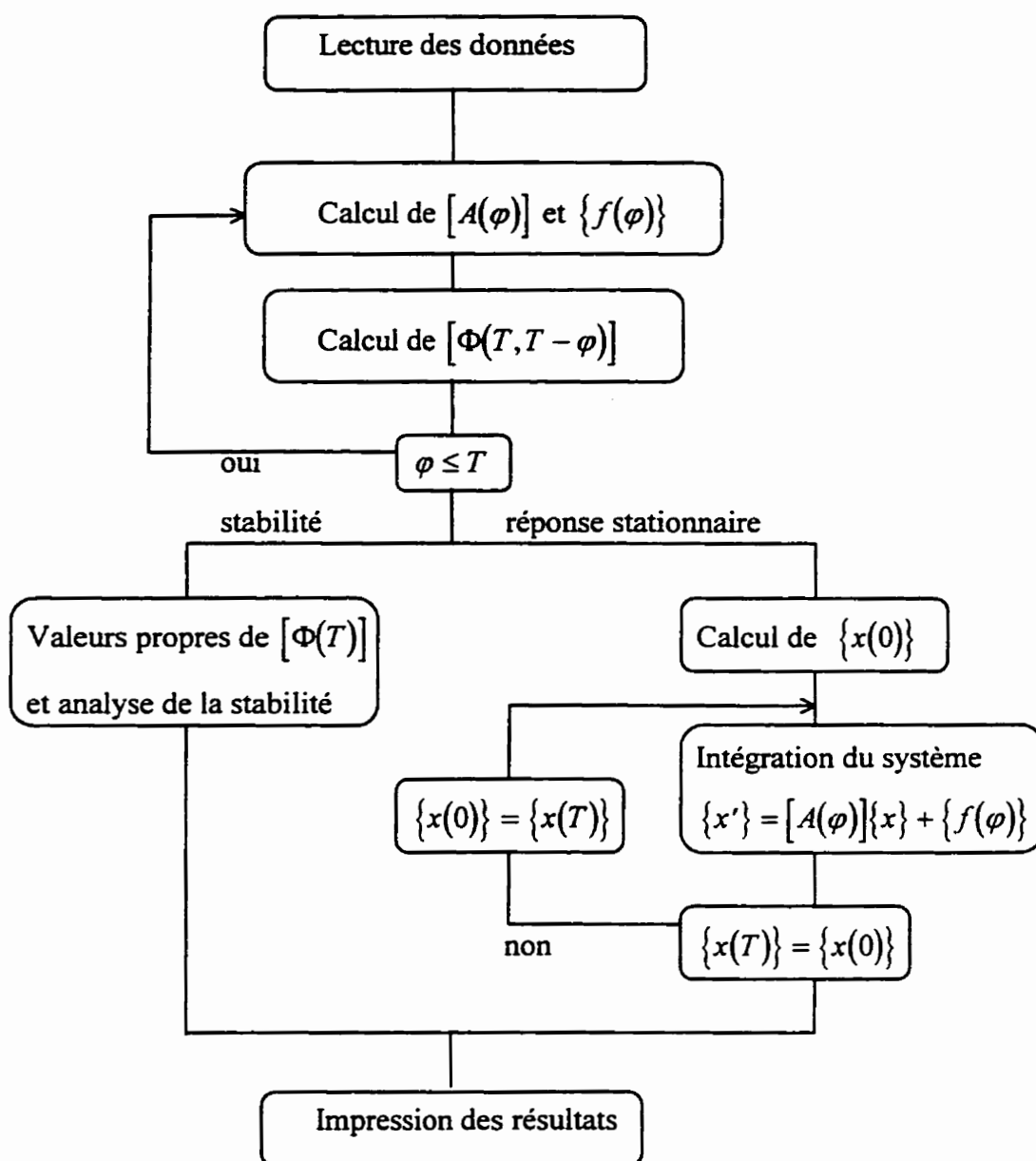


FIGURE A-6.1

Organigramme condensé des programmes

ROTOR\_S, ROTOR\_G et ROTOR\_G0

(le calcul est réitéré pour chaque vitesse de rotation).

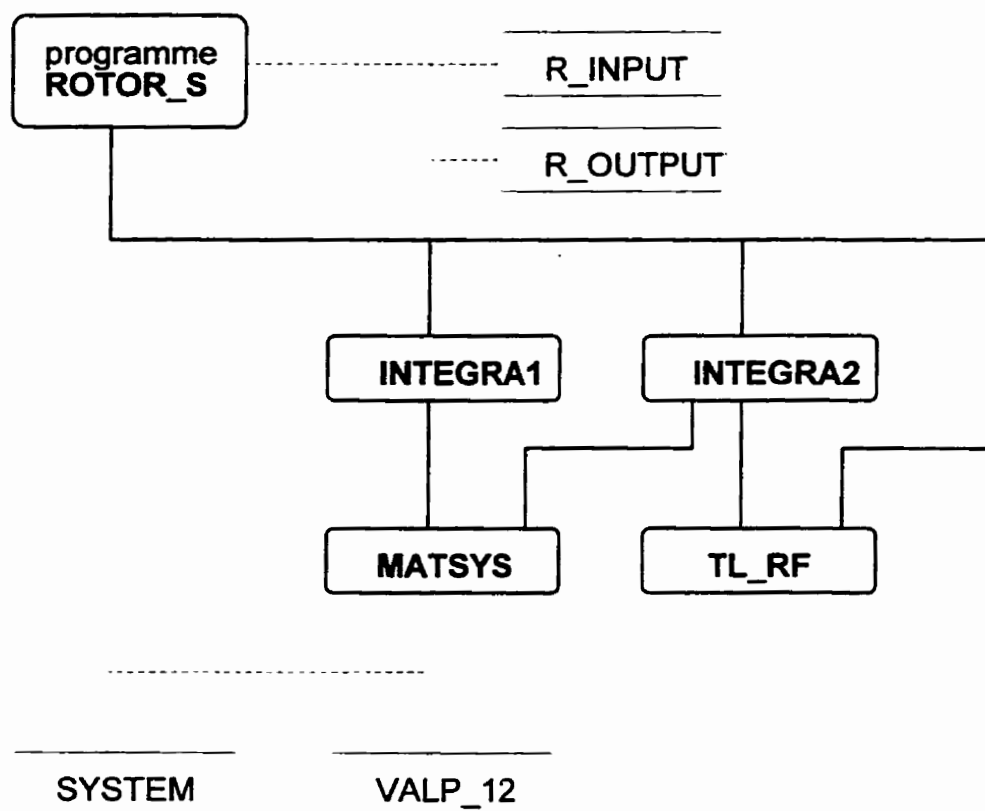


FIGURE A-6.2

Sous-programmes principaux du programme ROTOR\_S

R_INPUT	Lecture des données
R_OUTPUT	Impression des données
INTEGRA 1	Calcul de la matrice de transfert élémentaire $[\Phi(\varphi, \varphi + h)]$
INTEGRA 2	Intégration numérique du système non homogène $\{x'\} = [A(\varphi)]\{x\} + \{f(\varphi)\}$
MATSYS	Calcul de la matrice du système $[A(\varphi)]$
TL_RF	Calcul du terme libre $\{f(\varphi)\}$ (RF = repère fixe)
SYSTEM	Résolution d'un système algébrique linéaire
VALP_12	Calcul des valeurs propres

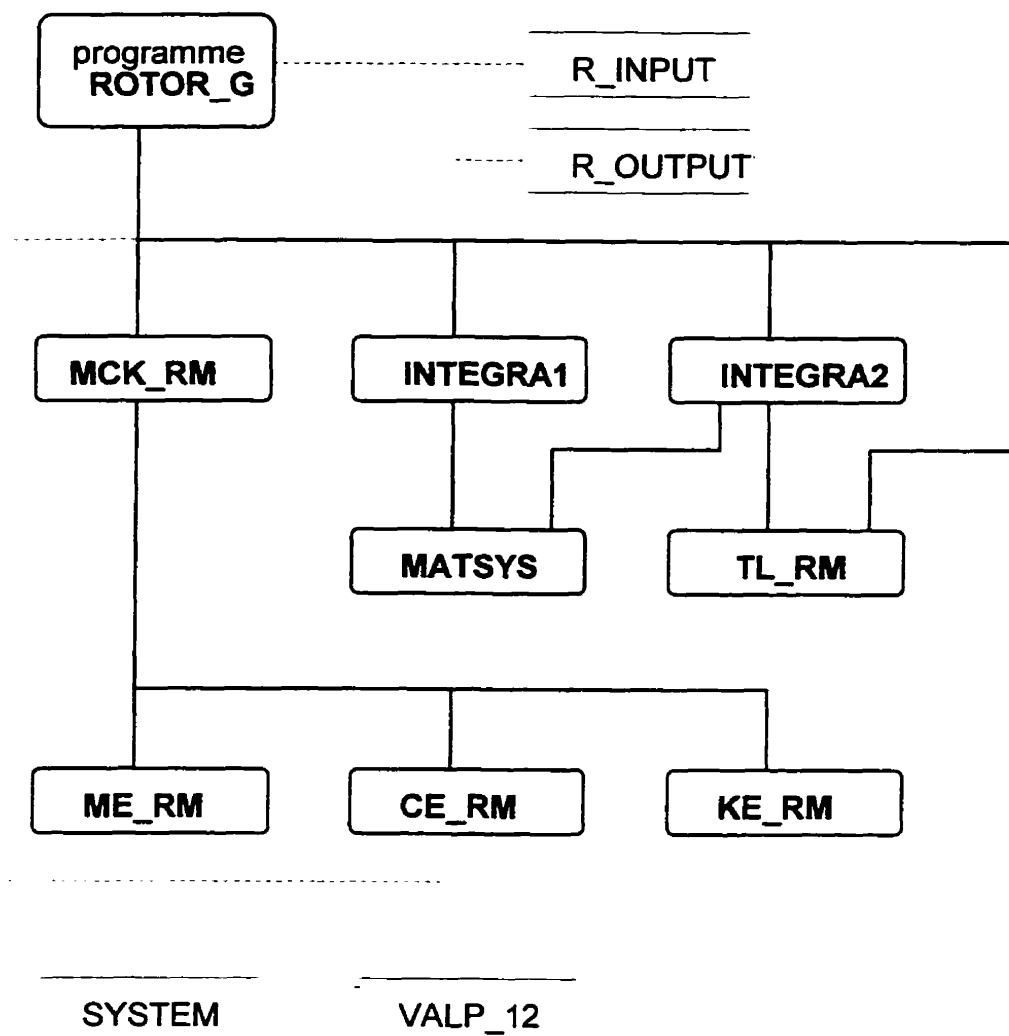


FIGURE A-6.3 Sous-programmes principaux du programme ROTOR\_G

**MCK\_RM** Assemblage des matrices élémentaires de masse, d'amortissement et de rigidité (RM = repère mobile)

**ME\_RM** Calcul de la matrice de masse de l'élément d'arbre

**CE\_RM** Calcul de la matrice gyroscopique de l'élément d'arbre

**KE\_RM** Calcul de la matrice de rigidité de l'élément d'arbre

Voir la figure A-6.2 pour le reste.

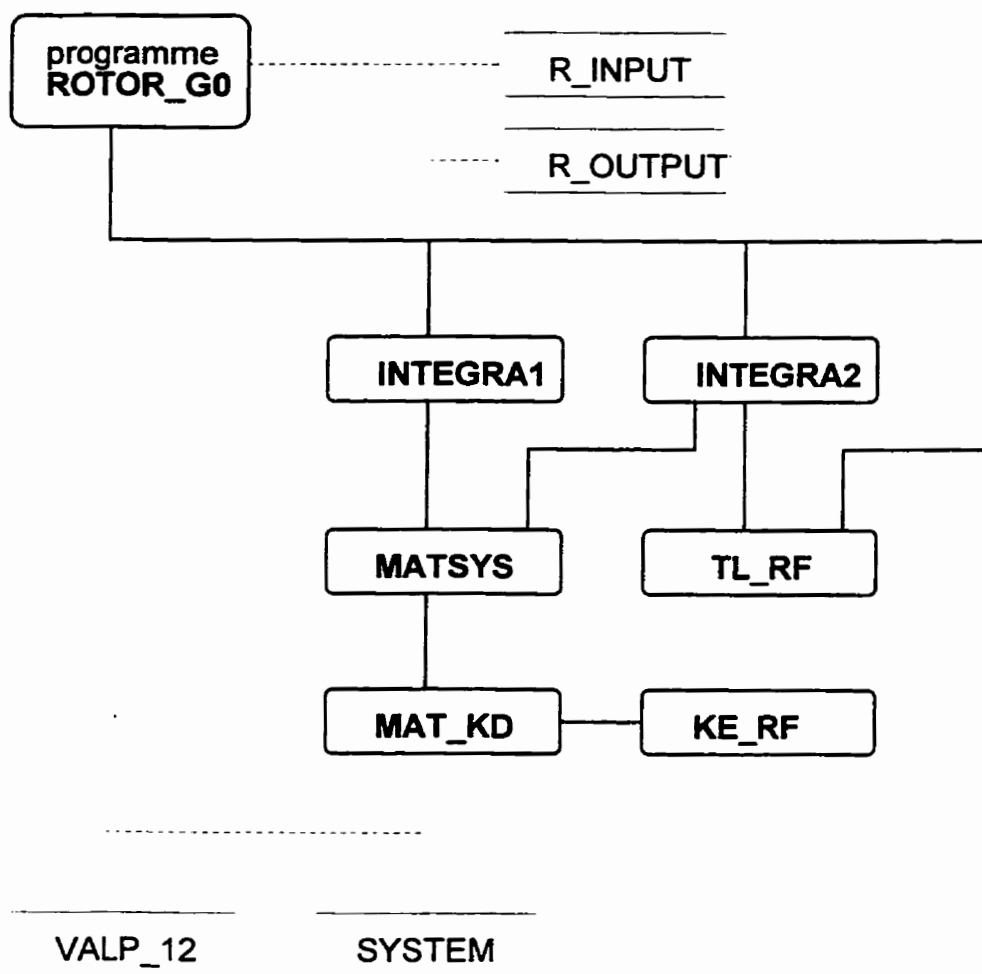


FIGURE A-6.4 Sous-programmes principaux du programme ROTOR\_G0

**MAT\_KD** Calcul de la matrice de rigidité réduite, donnée par la relation (5.4.9)

**KE\_RF** Calcul de la matrice de rigidité de l'élément d'arbre (RF = repère fixe)

Voir la figure A-6.2 pour le reste.

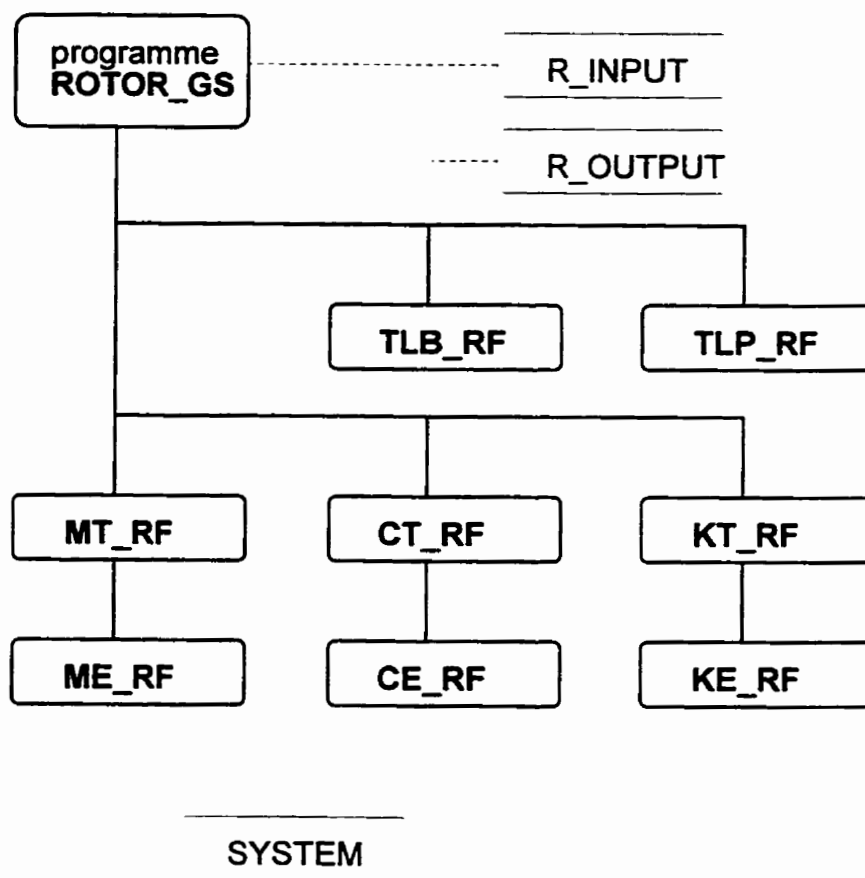


FIGURE A-6.5 Sous-programmes principaux du programme ROTOR\_GS

TLB_RF	Calcul du terme libre dû au balourd (RF = repère fixe)
TLP_RF	Calcul du terme libre dû aux poids des disques et de l'arbre
MT_RF	Assemblage des matrices élémentaires de masse
ME_RF	Calcul de la matrice de masse de l'élément d'arbre
CT_RF	Assemblage des matrices élémentaires d'amortissement
CE_RF	Calcul de la matrice gyroscopique de l'élément d'arbre
KT_RF	Assemblage des matrices élémentaires de rigidité
KE_RF	Calcul de la matrice de rigidité de l'élément d'arbre

Voir la figure A-6.2 pour le reste.

## TABLEAU A-6.1      Fichier informatique SIM.DAT

## FICHER DE DONNÉES - ROTOR\_S.

\*\*\*\*\*

## ARBRE:

Kx, Kz (N/m)

.495e5, .405e5

## DISQUE:

m (kg), mb.d (kg.m), beta (deg)

3., 0.001, 0.,

## AMORTISSEMENT EXTERNE (NS/m)

30.,

## PALIERS:

Ku, Kw (N/m)

.550e5, .450e5,

## NOMBRE D'INTERVALLES DANS UNE PÉRIODE: NIP

90

## VITESSES DE ROTATION: nombre, minimum, maximum (rad/sec)

71, 10., 80.,

## STABILITÉ / AMPLITUDE DE LA RÉPONSE PÉRIODIQUE ? (1/2)

2

## CALCUL DE LA RÉPONSE PÉRIODIQUE:

Avec/sans l'effet du poids ? (1/0)

1

## Nombre de périodes maximal, erreur relative

10, 1.e-4

TABLEAU A-6.2 Fichier informatique GEN.DAT

## FICHER DE DONNÉES - ROTOR\_G, ROTOR\_G0, ROTOR\_GS

\*\*\*\*\*

N\_noe. (max.5), N\_disques (1 ou 2), N\_paliers (2 ou 3)

5, 1, 2

## ARBRE:

Module de Young (N/m<sup>2</sup>), masse spécifique (kg/m<sup>3</sup>)

2.e11, 7750.

L, Ix, Iz, A (m, m4, m2) pour l'élément (i,i+1), i=1, N\_noe.-1

0.2, .479375e-7, .287625e-7, 0.6372e-3,

0.2, .479375e-7, .287625e-7, 0.6372e-3,

0.3, .479375e-7, .287625e-7, 0.6372e-3,

0.3, .479375e-7, .287625e-7, 0.6372e-3,

## DISQUES:

Noeud, m (kg), Jx, Jy (kgm<sup>2</sup>), mb (kg), d (m), beta (deg)

3, 1.973, 0.4932e-2, 0.9864e-2, 1.973, 0.002, 45.

## AMORTISSEMENT EXTERNE (Ns/m)

0.

## PALIERS:

Noeud / Kxx, Kxz, Kzx, Kzz (N/m) / Cxx, Cxz, Czx, Czz (N.s/m)

1,

0.368e7, 0., 0., 0.552e7,

0.476, 0., 0., 0.714,

5,

0.368e7, 0., 0., 0.552e7,

0.476, 0., 0., 0.714,

## NOMBRE D'INTERVALLES DANS UNE PÉRIODE: NIP

360

VITESSES DE ROTATION: nombre, minimum, maximum, IUM (1-rad/s;2-rpm)

31, 100., 400., 1

## STABILITE / AMPLITUDE DE LA RÉPONSE PÉRIODIQUE ? (1/2)

2

## CALCUL ITÉRATIF DE LA RÉPONSE PÉRIODIQUE:

Noeud

3

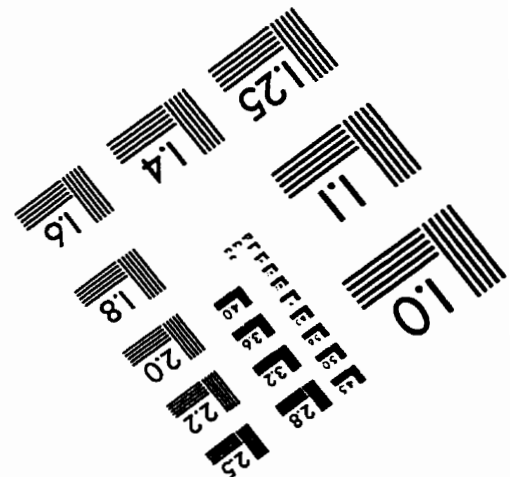
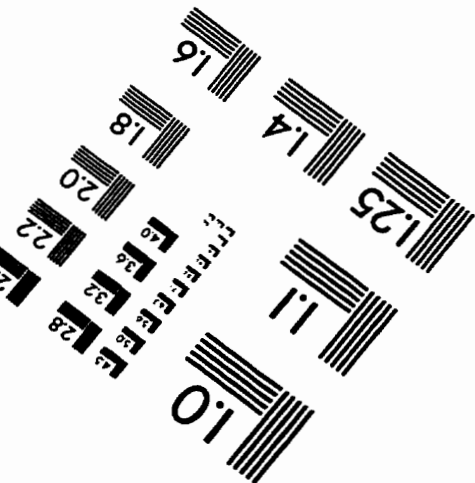
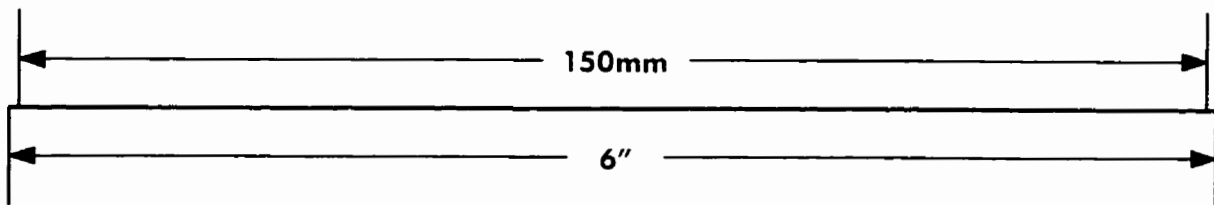
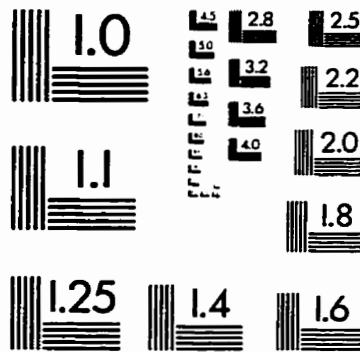
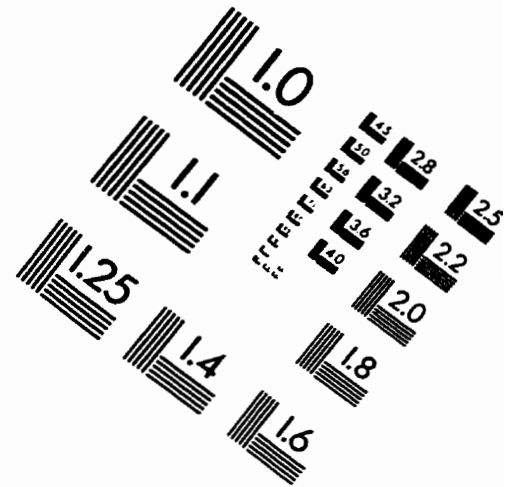
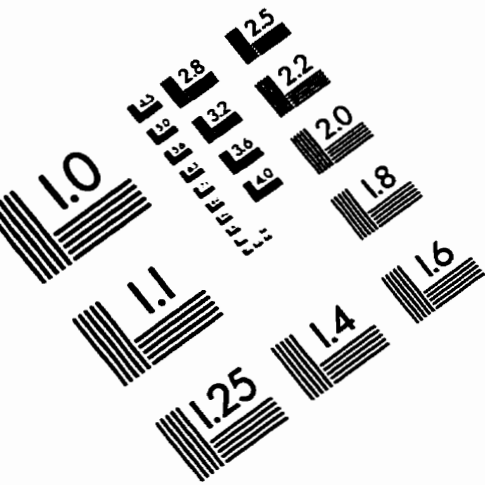
Avec/sans l'effet du poids ? (1/0)

1

Nombre de périodes maximal, erreur relative

3, 1.e-4

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved