

**Titre:** Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard  
Title: aléatoire et solutions exactes d'équations différentielles à retard

**Auteur:** Ibrahim Toure  
Author:

**Date:** 2025

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Toure, I. (2025). Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard  
aléatoire et solutions exactes d'équations différentielles à retard [Master's thesis,  
Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/65806/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/65806/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Mario Lefebvre  
Advisors:

**Programme:** Mathématiques appliquées  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard aléatoire et  
solutions exactes d'équations différentielles à retard**

**IBRAHIM TOURE**

Département de mathématiques et génie industrielle

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Mathématiques appliquées

Mai 2025

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard aléatoire et  
solutions exactes d'équations différentielles à retard**

présenté par **Ibrahim TOURE**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Luc ADJENGUE**, président

**Mario LEFEBVRE**, membre et directeur de recherche

**Antoine SAUCIER**, membre

## DÉDICACE

 $\hat{A}$ 

*ma mère pour son constant support  
et à mon père, mon inspiration.*

## REMERCIEMENTS

J'aimerais principalement remercier mon directeur de recherche monsieur Mario Lefebvre pour son aide dans l'établissement de ce mémoire. J'aimerais le remercier pour les idées qui ont fortement impacté la direction de cette recherche. Je voudrais, aussi, le remercier pour le temps dédié à la relecture du mémoire.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire traite, dans un premier temps, de l'instant de premier passage d'un mouvement brownien observé après un délai aléatoire suivant une loi d'Erlang. L'instant de premier passage d'un mouvement brownien observé après un délai aléatoire suivant une loi exponentielle suit la distribution Ex-Wald. Cette variable aléatoire est utilisée en psychologie pour modéliser les temps de réponse. Le but de cette recherche est de généraliser ce résultat en trouvant une formule explicite de la fonction de densité de cet instant de premier passage dans le cas d'un délai suivant une loi d'Erlang. Nous appliquerons la méthodologie utilisée pour établir la distribution Ex-Wald pour trouver l'expression de la fonction de densité dans le cas d'un délai Erlang. Nous avons trouvé une formule explicite de la fonction de densité de l'instant de premier passage d'un mouvement brownien observé après un délai aléatoire suivant une loi d'Erlang. Elle peut être exprimée comme la somme des termes d'une série par récurrence dépendant des paramètres du mouvement brownien et de ceux de la distribution du délai.

Dans un deuxième temps, nous donnerons des solutions exactes à des équations différentielles à retard avec différents arguments. Nous considérons des équations du premier degré et de degré supérieur. Nous donnerons également les conditions sur les arguments pour lesquelles les solutions sont effectivement des solutions des équations différentielles retardées.

Deux articles de recherche basés sur ce mémoire ont été soumis pour publication. Le premier article porte sur l'instant de premier passage d'un mouvement brownien observé après un délai aléatoire suivant une loi d'Erlang. Le deuxième article couvre les solutions exactes aux équations différentielles à retard abordées dans ce mémoire.

## ABSTRACT

In this paper, we first suppose that a Brownian motion can only be observed after a random time  $\tau$ . We are interested in the distribution of the time  $T$  required to record the first visit to a given threshold. In the case of the random variable  $\tau$  following the exponential distribution, the distribution of the first hitting time is known as the Ex-Wald distribution. This random variable is used in psychology to model response times. The aim of this research is to generalize this result by finding a closed formula in the case of a delay following an Erlang distribution. Using the methodology used to find the closed formula for the density function of the Ex-Wald distribution, we will establish the expressions for the density function in the case of delay following an Erlang distribution.

In the second part, we will give exact solutions to first-order and higher-order linear and non-linear delayed differential equations with different arguments. We will also give the conditions on the arguments for which the solutions are indeed solutions of the delayed differential equations.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xii
CHAPITRE 1 Introduction . . . . .	1
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	1
1.1.1 Instant de premier passage d'un mouvement brownien . . . . .	1
1.1.2 Équations différentielles à retard . . . . .	2
1.2 Éléments de la problématique . . . . .	3
1.2.1 Convolution avec la fonction de densité gaussienne inverse . . . . .	3
1.2.2 Retard en fonction du temps . . . . .	4
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	5
1.4 Plan du mémoire . . . . .	5
CHAPITRE 2 Revue de littérature . . . . .	6
2.1 Mouvement brownien et convolutions de distributions inverses gaussiennes généralisées . . . . .	6
2.2 Équations différentielles à retard . . . . .	7
CHAPITRE 3 Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard aléatoire	9
3.1 Définitions et relations préliminaires . . . . .	9
3.1.1 Cas général . . . . .	9
3.1.2 Relations préliminaires . . . . .	10
3.1.3 Cas d'un délai exponentiel . . . . .	11

3.2	Cas d'un délai Erlang . . . . .	12
3.2.1	Résultats des intégrales lorsque $\kappa \in \mathbb{R}$ . . . . .	16
3.2.2	Résultats des intégrales lorsque $\kappa \in \mathbb{C}$ . . . . .	19
3.3	Illustration des résultats . . . . .	21
CHAPITRE 4 Solutions exactes d'équations différentielles à retard . . . . .		27
4.1	Définitions . . . . .	27
4.2	Équations du premier ordre . . . . .	28
4.3	Équations d'ordre supérieur . . . . .	31
CHAPITRE 5 Conclusion . . . . .		35
5.1	Synthèse des travaux . . . . .	35
5.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	35
5.3	Améliorations futures . . . . .	35
RÉFÉRENCES . . . . .		37
ANNEXES . . . . .		39

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 3.1	Paramètres constants lors de la variation de $k$ .	22
Tableau 3.2	Paramètres constants lors de la variation de $d$ .	23
Tableau 3.3	Paramètres constants lors de la variation de $\lambda$ .	25

**LISTE DES FIGURES**

Figure 3.1	Fonction de densité en fonction de différentes valeurs de $k$ . . . . .	22
Figure 3.2	Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de $k$ . . . . .	23
Figure 3.3	Fonctions de densité en fonction de différentes valeurs de $d$ . . . . .	24
Figure 3.4	Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de $d$ . . . . .	24
Figure 3.5	Fonction de densité en fonction de différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	25
Figure 3.6	Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	26

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Code de la fonction de densité . . . . .	39
----------	--	----

## CHAPITRE 1 Introduction

### 1.1 Définitions et concepts de base

Le concept de délai est un concept qui apparaît dans un grand nombre de dynamiques en sciences. Les raisons de sa présence et sa nature peuvent varier. Le délai peut être positif comme négatif. Il peut être fixe, variable ou même aléatoire. Cette recherche tente d'aborder deux sujets mathématiques où le concept de délai intervient :

- instant de premier passage d'un mouvement brownien ;
- équations différentielles.

Nous commencerons par donner les définitions de base de ces concepts pour ensuite donner les éléments de la problématique qui nous concernent. Nous finirons par donner les objectifs de notre recherche ainsi que le plan du mémoire.

#### 1.1.1 Instant de premier passage d'un mouvement brownien

Un mouvement brownien, aussi appelé processus de Wiener, est un mouvement aléatoire historiquement utilisé pour décrire le mouvement de grains de pollen suspendus dans l'eau. Son nom est en l'honneur du botaniste écossais Robert Brown qui aurait observé ce mouvement au microscope. Formellement, un mouvement brownien est un processus stochastique  $\{B(t), t \geq 0\}$  qui possède les propriétés suivantes :

- le processus est nul à l'instant 0 ( $B(0) = 0$ ) ;
- le processus possède des accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour tout instants  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , les variables aléatoires  $B(t_2) - B(t_1)$  et  $B(t_4) - B(t_3)$  sont indépendantes ;
- le processus possède des accroissements stationnaires et suivant un loi normale, c'est-à-dire que pour tout instants  $t_1 < t_2$  et  $s$ , les variables aléatoires  $B(t_2) - B(t_1)$  et  $B(t_2+s) - B(t_1+s)$  possèdent la même fonction de distribution qui est la distribution normale de paramètres 0 et  $\sigma^2 t$  ;

Son application s'est depuis étendue à plusieurs domaines, de la finance à la physique. En physique, il a été utilisé pour modéliser la trajectoire des molécules de gaz dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. En finance, les mouvements browniens sont utilisés, entre autres, pour l'évaluation de produits dérivés ou encore pour expliquer la dynamique des taux d'intérêts.

De ce fait, l'analyse de ce processus a été exhaustive. Un élément étudié de ce mouvement

est l'instant de premier passage à un certain niveau  $d$ . L'instant de premier passage est le temps pris par le processus pour passer de sa valeur initiale à la valeur (ou niveau)  $d$  pour la première fois. Cet instant est, par définition, une variable aléatoire étant donné la nature aléatoire du mouvement. L'importance de cette variable aléatoire est rapidement apparente pour certaines applications. Dans le cadre de la finance, en considérant qu'un actif (ou sa variation) suit un mouvement brownien, on peut rapidement comprendre l'importance de l'instant de premier passage (par exemple dans l'évaluation de la valeur d'un contrat dont l'actif est le sous-jacent). Cette variable aléatoire est la variable d'intérêt à laquelle sera rajouté un délai aléatoire.

Nous prenons pour hypothèse que le délai qui sera appliqué à notre mouvement brownien suivra une distribution d'Erlang. La distribution d'Erlang est une généralisation de la loi exponentielle. La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement. La propriété d'absence de mémoire se traduit mathématiquement par le fait que la distribution de la durée de vie du phénomène est indépendante du temps déjà écoulé. Plus formellement :  $\forall t > 0, P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$

La loi d'Erlang est une loi formée de la somme de  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) variables indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de même paramètre  $\lambda$ .

### 1.1.2 Équations différentielles à retard

Une équation différentielle représente une relation entre une fonction et ses dérivées successives. Plus formellement, une équation différentielle peut être généralement définie de la sorte :

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y'(t), y(t), t), \quad (1.1)$$

avec  $y^{(n)}(t)$ , la  $n$ -ième dérivée de la fonction inconnue  $y(t)$ .

Elle est utilisée en pratique pour modéliser la dynamique de phénomènes physiques, sociaux, biologiques et autres. Plusieurs équations différentielles possèdent des solutions explicites connues. Par exemple, les fonctions de Bessel sont des solutions des équations différentielles de Bessel. Cependant, il reste une infinité d'équations différentielles dont les solutions exactes ne sont pas connues. Comme on peut l'observer dans la relation définie plus haut, la dérivée de plus haut degré de la fonction inconnue à un certain instant est donnée en fonction des valeurs de la fonction à ce même instant.

Cependant, pour certaines applications/dynamiques, la relation entre la fonction inconnue et ses dérivés se présente avec un retard. Les équations modélisant ces relations sont appelées équations différentielles à retard. Elles sont, similairement aux équations différentielles, uti-

lisées dans une variété de domaines d'applications. Des exemples de domaines d'applications sont en épidémiologie et en biologie mathématique ; voir Smith [1] et Rihan [2]. Formellement, une équation différentielle à retard peut être définie comme suit :

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t - \tau_{n-1}), y^{(n-2)}(t - \tau_{n-2}), \dots, y'(t - \tau_1), y(t - \tau_0), t), \quad (1.2)$$

avec  $\tau_i$  pour  $i \in \{n-1, n-2, \dots, 0\}$ , les retards pouvant être positifs comme négatifs.

## 1.2 Éléments de la problématique

### 1.2.1 Convolution avec la fonction de densité gaussienne inverse

La problématique de l'instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard aléatoire est équivalente à l'analyse d'une nouvelle variable aléatoire constituée de la somme d'une variable suivant une distribution gaussienne inverse et la variable du retard aléatoire [3]. Dans cette problématique, nous supposons que le retard et la variable gaussienne inverse sont indépendants. Avec cette hypothèse, trouver la fonction de densité de cette nouvelle variable peut être ramené au produit de convolution de la fonction de densité gaussienne inverse avec celle de la distribution du retard.

Supposant un retard aléatoire suivant une distribution d'Erlang, la problématique devient le produit de convolution entre la fonction de densité de la loi d'Erlang et celle de la loi gaussienne inverse.

Plus formellement, la problématique peut être définie de la façon suivante : soit un mouvement brownien observé après un temps continu aléatoire  $\tau$  et soit  $T$  le temps requis pour visiter le seuil  $d$  pour la première fois, tel que :

$$T := \tau + T_d, \quad (1.3)$$

avec  $T_d$  défini comme le temps pris par le mouvement brownien pour passer du point initial au seuil  $d$  (c'est-à-dire le temps de premier passage sans délai).

En supposant que les variables aléatoires  $\tau$  et  $T_d$  sont indépendantes, nous pouvons écrire que la fonction de densité de probabilité de  $T$  est le produit de convolution des fonctions de densité de  $\tau$  et de  $T_d$  :

$$f_T(t) = f_\tau(t) * f_{T_d}(t) := \int_0^t f_\tau(s) * f_{T_d}(t-s) ds = \int_0^t f_\tau(t-s) * f_{T_d}(s) ds. \quad (1.4)$$

L'intérêt de cette convolution est lié aux applications de ces deux distributions.

La convolution de la fonction de densité de la distribution gaussienne inverse et de celle de la distribution exponentielle (connue comme la distribution Ex-Wald) est appliquée à la modélisation des temps de réponses en psychologie [4] [5]. Cette distribution présente aussi une application en logistique. Elle peut être appliquée comme modèle du temps de transfert total métro-bus avec le temps estimé de marche modélisé via une distribution gaussienne inverse et le temps d'attente via une distribution exponentielle [6].

Un autre exemple d'application de ces distributions est pour la modélisation des réclamations d'assurances automobiles [7]. Dans cet article, l'auteur considère le produit de convolution entre la distribution gamma et une transformation de la distribution gaussienne inverse basée sur sa longueur pour modéliser ces phénomènes.

Donc, trouver une formule explicite de la fonction de densité est aussi important pour deux raisons. La première raison est qu'elle est utilisée pour vérifier la précision de méthodes approximatives. La deuxième raison est que la formule explicite peut être utilisée pour des approches statistiques sur des phénomènes qui pourraient être modélisés par cette variable aléatoire. Par exemple, effectuer un maximum de vraisemblance comme dans des distributions de Wald et Ex-Wald appliquées aux temps de réponses [4].

Toutefois, la généralisation de la distribution Ex-Wald est une raison suffisante pour justifier l'importance de notre problématique.

### 1.2.2 Retard en fonction du temps

Les retards d'une équation différentielle à retard peuvent être décrits de différentes manières. Les délais peuvent être constants ou une fonction d'autres variables. Lorsqu'un délai est défini dans une équation différentielle à retard, il impacte la définition des conditions initiales de cette dernière. Par exemple, en prenant un délai constant positif  $\tau$ , nous avons besoin de définir les valeurs de  $y(t)$  sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ . Dans le cadre de notre mémoire, nous considérons un délai  $\tau$  variable qui est une fonction linéaire de  $t$ . Un avantage de cette considération est qu'il est seulement nécessaire dans ce cas de définir la valeur à l'instant  $t = 0$ ,  $y(t = 0)$ . En effet, en prenant un retard de la forme  $\tau = ct$  avec  $c$  une constante, la fonction inconnue est définie à partir de 0 dans l'équation différentielle.

Bien que les équations différentielles à retard soient résolues en grande partie numériquement, il est parfois possible de trouver des solutions exactes à ces équations. Ces solutions exactes peuvent ensuite être utilisées pour évaluer certaines solutions numériques comme c'est le cas dans l'article d'Evans et Raslan [8]. En considérant une équation générale, il est aussi possible de déterminer les conditions pour lesquelles une certaine fonction est solution. Trouver des

solutions à certains types d'équations est utile non seulement pour l'étude d'équations plus générales, mais aussi pour étudier les méthodes numériques ou d'approximation en comparant leurs résultats aux solutions connues.

### 1.3 Objectifs de recherche

Cette recherche comporte deux objectifs principaux en lien avec ses deux sujets d'étude. Le premier objectif principal est de trouver une formule explicite de la fonction de densité de l'instant de passage d'un mouvement brownien standard avec un retard aléatoire suivant une distribution gamma. L'idée est de généraliser les résultats de la recherche existante sur ce sujet. Pour atteindre cet objectif, nous nous inspirerons de la méthode utilisée par Schwarz [9] dans le cadre de la distribution exponentielle ainsi que de relations de fonctions connues (par exemple dans Abramowitz et Stegun [10]).

Le deuxième objectif principal de cette recherche est de trouver des solutions exactes à des ensembles d'équations différentielles à retard. Les équations considérées sont inspirées de celles étudiées par M. Lefebvre dans son article [11].

### 1.4 Plan du mémoire

Le mémoire est divisé en quatre parties. La première partie fera une revue de littérature sur les deux sujets.

En deuxième partie, nous aborderons le sujet de la distribution de l'instant de premier passage d'un mouvement brownien avec un retard suivant une distribution d'Erlang. Nous débuterons par l'établissement du cas général, les relations nécessaires pour répondre à la problématique ainsi que la méthode et les résultats soulignés par Schwarz dans le cas d'un délai suivant une distribution exponentielle. Nous finirons la section, en utilisant cette méthode et ses résultats, par montrer les résultats trouvés dans le cas de la distribution d'Erlang.

La troisième partie traitera d'équations différentielles à retard et de leurs solutions exactes. Nous présenterons, en premier lieu, les équations différentielles de premier ordre et leurs solutions. Dans un deuxième temps, nous attaquerons les équations d'ordre supérieur pour lesquelles des solutions ont été trouvées.

Nous conclurons par une synthèse des résultats. Nous discuterons aussi des limites des résultats, les avenues d'amélioration et de généralisation des résultats.

## CHAPITRE 2 Revue de littérature

### 2.1 Mouvement brownien et convolutions de distributions inverses gaussiennes généralisées

Considérons  $\{B(t), t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard. Un mouvement brownien  $\{X(t), t \geq 0\}$  avec dérive  $\mu$  est défini comme suit :

$$X(t) := \mu t + \sigma B(t),$$

avec  $\mu$  le paramètre de dérive et  $\sigma^2$  le paramètre de variance.

Pour ce processus stochastique, le temps de premier passage à un niveau  $d$ ,  $T_d$  du processus  $X(t)$  est défini comme le temps pris par le processus  $X(t)$  pour passer de  $X(0) = 0$  à  $X(t) = d$  :

$$T_d := \inf\{t > 0 : X(t) = d\}.$$

On peut montrer que la variable aléatoire  $T_d$  suit une loi *gaussienne inverse*. Étant donné les paramètres du mouvement brownien  $X(t)$ , on peut écrire que la fonction de densité de la variable  $T_d$  est donnée par [3] :

$$f_{T_d}(t) := \frac{d}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(d - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \text{ pour } t > 0.$$

La loi gaussienne inverse et la loi d'Erlang sont des cas particuliers de la loi inverse gaussienne généralisée [12]. Cette famille de distributions est souvent utilisée pour la modélisation de la durée de vie [13].

Des travaux ont aussi été effectués sur des convolutions de variantes de la distribution gaussienne inverse et de la loi gamma. Shanoja, dans son article [7], s'intéresse à la convolution entre la distribution inverse gaussienne basée sur la longueur et la distribution gamma.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une certaine distribution avec un premier moment fini  $\mu = E(X) < \infty$  et positif ( $\mu > 0$ ) et sa fonction de densité  $f(x)$ , la fonction de densité  $p(x)$  de la distribution basée sur la longueur de  $X$  est définie comme suit :

$$p(x) = \frac{xf(x)}{\mu}. \quad (2.1)$$

Cette transformation appliquée à la distribution gaussienne inverse (une distribution créée

à partir de l'équation 2.1 avec  $x$  suivant une loi gaussienne inverse) permet de trouver une nouvelle distribution dont la forme de la fonction de densité ne dépend d'aucune relation entre les paramètres de la loi gaussienne inverse et la loi gamma.

Un autre résultat important sur les convolutions avec la distribution gaussienne inverse, est celui décrit par Schwarz. En effet, Schwarz présente la solution de la convolution entre la loi gaussienne inverse et la loi exponentielle. La forme explicite de ce résultat dépend de la valeur des paramètres de chacune de ces lois. Le but de cette recherche est de généraliser ses résultats. Ainsi, l'approche utilisée et les détails de ses résultats sont présentés au chapitre 3 ainsi que la méthode utilisée pour généraliser ce résultat.

## 2.2 Équations différentielles à retard

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée de la fonction inconnue dépend de la fonction inconnue et d'une fonction de la variable moins un délai  $\tau$ . Mathématiquement, une équation différentielle à retard de premier degré peut être définie de la façon suivante :

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau), t). \quad (2.2)$$

Plusieurs méthodes existent pour la résolution de ces équations. Les méthodes pour la majorité des équations sont des solutions approximatives ou numériques. Par exemple, la méthode de décomposition d'Adomian est une de ces méthodes (Voir [8]). Dans l'article présentant cette méthode ([8]), une solution exacte est donnée pour l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y\left(t - \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}y(t).$$

Cette solution exacte  $y = e^t$  est ensuite utilisée pour étudier la convergence de la méthode. Cette équation est généralisée dans l'article [11] de la façon suivante :

$$y'(t) = c_1e^{c_2t}y(c_0t) + c_3y(t).$$

L'article donne par la suite les conditions pour avoir  $y(t) = ke^t$ . Notamment  $y(t) = ke^t$  est la solution de cette équation avec la condition initiale  $y(0) = 1$  si et seulement si :

$$k = \frac{c_2}{1 - c_0} \quad \text{et} \quad k = c_1 + c_3.$$

Une autre équation dont la solution est donnée en fonction des coefficients  $c_n$  dans l'article

est l'équation suivante :

$$y'(t) = c_0 + c_1 y^2(c_2 t).$$

En s'inspirant de ces équations et de leurs solutions, nous allons considérer de nouvelles équations différentielles à retard et trouver des solutions à ces dernières de manière similaire à l'article [11]. De plus, nous généraliserons encore plus ces équations à des degrés supérieurs.

## CHAPITRE 3 Instant de passage d'un mouvement brownien avec un retard aléatoire

### 3.1 Définitions et relations préliminaires

#### 3.1.1 Cas général

Soit  $\{X(t), t \geq 0\}$  un mouvement brownien commençant à  $X(0) = 0$  avec un paramètre de dérive  $\mu > 0$  et un paramètre de variance  $\sigma^2$ . La fonction de densité de probabilité de l'instant de premier passage :

$$T_d := \inf\{t > 0 : X(t) = d > 0\}, \quad (3.1)$$

est connue et donnée par [3] :

$$f_{T_d}(t) = \frac{d}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(d - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \text{ pour } t > 0. \quad (3.2)$$

Supposons maintenant que le mouvement brownien est observé après un temps continu aléatoire  $\tau$  et soit  $T$  le temps requis pour visiter le seuil  $d$  pour la première fois, tel que :

$$T := \tau + T_d. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, si on suppose que les variables aléatoires  $\tau$  et  $T_d$  sont indépendantes, alors nous pouvons écrire que la fonction de densité de probabilité de  $T$  est le produit de convolution des fonctions de densité de probabilité de  $\tau$  et de  $T_d$  :

$$f_T(t) = f_\tau(t) * f_{T_d}(t) := \int_0^t f_\tau(s) * f_{T_d}(t-s) ds = \int_0^t f_\tau(t-s) * f_{T_d}(s) ds. \quad (3.4)$$

Dans les sections suivantes, nous tenterons de trouver la distribution de ce temps aléatoire  $T$  dépendant de la distribution de la variable aléatoire  $\tau$ . Nous débuterons par présenter un exemple simple de la variable  $\tau$  suivant une distribution normale. Nous présenterons ensuite les résultats de Schwarz lorsque la variable aléatoire  $\tau$  suit une loi exponentielle, qui ont motivé notre recherche. Nous terminerons en présentant une généralisation de ce résultat lorsque la variable aléatoire suit une distribution d'Erlang.

### 3.1.2 Relations préliminaires

Ces résultats sont déduits de plusieurs relations trouvées dans Abramowitz et Stegun (7.4.33) [10]. Nous présentons des identités importantes qui seront utilisées pour généraliser les résultats de Schwarz. D'abord :

$$\int \exp \left\{ -a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2} \right\} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left[ e^{2ab} \operatorname{erf} \left( ax + \frac{b}{x} \right) + e^{-2ab} \operatorname{erf} \left( ax - \frac{b}{x} \right) \right], \quad a \neq 0, \quad (3.5)$$

où

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition cumulative de la distribution normale centrée réduite  $N(0, 1)$ .

La relation précédente (3.5) est valable lorsque  $x \in \mathbb{R}$ . Comme nous le verrons dans les sections suivantes, nous avons besoin d'une expression de la fonction d'erreur lorsque  $x$  est complexe. Pour cela, on utilisera la fonction complexe  $w(z)$  étroitement liée à la fonction d'erreur  $\operatorname{erf}(z)$ . La définition de la fonction  $w(z)$  peut être trouvée dans Abramowitz et Stegun (7.1.3) :

$$w(z) = e^{-z^2} [1 - \operatorname{erf}(-iz)]. \quad (3.7)$$

La fonction complexe  $w$  satisfait aussi aux relations de symétrie suivantes (Abramowitz et Stegun [10] (7.1.12), (7.1.11)) :

$$w(\bar{z}) = \overline{w(-z)}, \quad (3.8)$$

$$w(-z) = 2e^{-z^2} - w(z). \quad (3.9)$$

En utilisant ces deux relations, nous pouvons réexprimer la fonction  $w(z)$ .

**Proposition 1** Pour un nombre complexe  $z = x + iy$  et la fonction d'erreur de ce nombre complexe définie comme suit :

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.10)$$

où les fonctions  $u$  et  $v$  sont les parties réelle et imaginaire, respectivement, de la fonction d'erreur. La partie réelle et la partie imaginaire de la fonction complexe  $w(z)$  définies par l'équation (3.8) peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$\Re[w(z)] = [\cos(2xy)[1 - u(y, x)] + \sin(2xy)v(y, x)] \exp \{y^2 - x^2\}, \quad (3.11)$$

$$\Im[w(z)] = [\sin(2xy)[u(y, x) - 1] + \cos(2xy)v(y, x)] \exp\{y^2 - x^2\}. \quad (3.12)$$

**Preuve** Tout d'abord, trouvons l'expression de  $\operatorname{erf}(-iz)$  en fonction des parties réelle  $u$  et imaginaire  $v$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(-iz) &= \operatorname{erf}(y - ix) \\ &= \overline{\operatorname{erf}(y + ix)} \text{ car } \overline{\operatorname{erf}(z)} = \operatorname{erf}(\bar{z}) \\ \operatorname{erf}(-iz) &= u(y, x) - iv(y, x). \end{aligned}$$

On peut ensuite utiliser la relation entre  $w(z)$  et  $\operatorname{erf}(z)$  :

$$\begin{aligned} w(z) &= e^{-z^2}[1 - \operatorname{erf}(-iz)] \\ w(z) &= e^{-(x^2-y^2)-2ixy}[1 - u(y, x) + iv(y, x)] \\ w(z) &= e^{y^2-x^2}[\cos(2xy) - i \sin(2xy)][1 - u(y, x) + iv(y, x)] \text{ car } e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ w(z) &= e^{y^2-x^2} \left[ \cos(2xy)(1 - u(y, x)) \right. \\ &\quad \left. + \sin(2xy)v(y, x) + i[\sin(2xy)(u(y, x) - 1) + \cos(2xy)v(y, x)] \right]. \end{aligned}$$

### 3.1.3 Cas d'un délai exponentiel

Dans l'article [9], Schwarz approche le cas de  $\tau$  ayant une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Dans ce cas, on peut écrire la fonction de densité de  $\tau$  comme suit :

$$f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (3.13)$$

Essentiellement, Schwarz considère deux cas :

- dans le premier cas  $\mu^2 \geq 2\lambda\sigma^2$ ,
- dans le deuxième cas  $\mu^2 < 2\lambda\sigma^2$ .

Dans le premier cas, il montre le résultat suivant :

**Proposition 2** Soit  $T$  la v.a. définie comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes  $\tau$  et  $T_d$  avec  $T_d$  suivant une loi inverse gaussienne de paramètres  $(d, \mu$  et  $\sigma)$  et  $\tau$  une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Si  $\mu^2 \geq 2\lambda\sigma^2$  alors la fonction de densité  $f_T(t)$  de  $T$  est définie comme suit :

$$f_T(t) = \lambda \exp\left\{-\lambda t + \frac{d\mu}{\sigma^2}\right\} \left[ \exp\left\{-\frac{\kappa d}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{\kappa t - d}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{\frac{\kappa d}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{-\kappa t - d}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] \quad (3.14)$$

pour  $t > 0$ , où

$$\kappa := \sqrt{\mu^2 - 2\lambda\sigma^2} \quad (3.15)$$

et  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition cumulative de la distribution normale centrée réduite  $N(0, 1)$ .

Dans le cas où  $\mu^2 < 2\lambda\sigma^2$ , Schwarz obtient le résultat suivant :

**Proposition 3** Soit  $T$  la v.a. définie comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes  $\tau$  et  $T_d$  avec  $T_d$  suivant une loi inverse gaussienne de paramètres  $(d, \mu)$  et  $\tau$  une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . En supposant  $\mu^2 < 2\lambda\sigma^2$ , alors la fonction de densité  $f_T(t)$  de  $T$  est définie comme suit :

$$f_T(t) = \lambda \exp \left\{ -\frac{(d - \mu t)^2}{2\sigma^2 t} \right\} \Re \left[ w \left( \frac{\kappa' \sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma} + i \frac{d}{\sigma \sqrt{2t}} \right) \right] \quad \text{pour } t > 0, \quad (3.16)$$

où  $\Re$  représente la partie réelle et :

$$\kappa' := \sqrt{2\lambda\sigma^2 - \mu^2}. \quad (3.17)$$

Le résultat de cette proposition est une réécriture de l'équation (3.14). En effet, même lorsque la variable  $\kappa$  est un nombre imaginaire (lorsque  $\mu < 2\lambda\sigma^2$ ), la fonction  $f_T(t)$  reste réelle. La réexpression de la fonction en termes de la partie réelle (ou imaginaire comme on le verra dans les sections suivantes) vise à faciliter l'évaluation de la fonction  $f_T(t)$ . De ce fait, comme mentionné par Schwarz [9], d'excellentes représentations en séries des fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  qui convergent rapidement existent (voir Abramowitz et Stegun 7.1.29 [10]). Donc, la partie réelle peut être exprimée en fonction de ces représentations en séries (voir l'équation (3.11)).

La méthode illustrée par Schwarz est utilisée dans la section suivante pour répondre à notre problématique principale. La section suivante traite de l'extension des propositions de cette section dans le cas d'un délai  $\tau$  suivant une loi d'Erlang.

### 3.2 Cas d'un délai Erlang

La loi exponentielle  $\lambda$  modélise le temps de vie d'un phénomène. Dans cette section, nous considérons que le mouvement brownien n'est observable qu'après l'occurrence de  $k$  phénomènes dont les temps d'attente d'occurrence sont tous indépendants et distribués selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . En considérant cette modélisation du temps d'attente,  $\tau$

suit une loi d'Erlang. En effet, la distribution d'Erlang de paramètres  $\lambda$  et  $k$  peut être définie comme la somme de  $k$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Soit  $\tau$  une variable aléatoire suivant une distribution *Erlang* et  $f_\tau$  sa fonction de densité :

$$\tau \sim \text{Erlang}(k, \lambda) \quad (3.18)$$

$$f_\tau(\tau) = \frac{\lambda^k \tau^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{-\lambda\tau\} \quad \text{pour } \tau > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Le problème revient à déterminer la fonction de densité de la variable aléatoire  $T = \tau + T_d$ .

**Proposition 4** *Soit  $T$  une variable aléatoire définie comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes  $\tau$  et  $T_d$  avec  $T_d$  suivant une loi inverse gaussienne de paramètres  $(d, \mu$  et  $\sigma)$  et  $\tau$  une loi d'Erlang de paramètres  $(k$  et  $\lambda)$ . Alors, la fonction de densité  $f_T$  de  $T$  est définie comme suit :*

$$f_T(t) = \frac{d\lambda^k}{\sigma\sqrt{2\pi}(k-1)!} \exp\left\{\frac{d\mu - \lambda\sigma^2 t}{\sigma^2}\right\} \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} t^{k-1-n} (-1)^n I_n(t) \quad \text{pour } t > 0, \quad (3.20)$$

avec  $I_{n,n>0}(t)$  respectant la relation de récurrence suivante :

$$\alpha^2 I_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2} I_n(t) + \beta^2 I_{n-1}(t) - t^{\frac{2n-1}{2}} \exp\left\{-\alpha^2 z - \frac{\beta^2}{z}\right\}, \quad (3.21)$$

avec comme conditions initiales :

$$I_0(t) = \int_0^t x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2}\right\} dx,$$

$$I_1(t) = \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2}\right\} dx,$$

où :

$$\kappa := \sqrt{\mu^2 - 2\lambda\sigma^2}, \quad (3.22)$$

$$\alpha := \frac{\kappa}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (3.23)$$

$$\beta := \frac{d}{\sqrt{2}\sigma}. \quad (3.24)$$

**Preuve** Nous commençons, tout d'abord, par utiliser la formule de convolution

$$f_T(t) = \int_0^t f_\tau(t-x) f_{T_d}(x) dx = \int_0^t \frac{d\lambda^k (t-x)^{k-1}}{\sigma \sqrt{2\pi t^3} (k-1)!} \exp \left\{ -\lambda(t-x) - \frac{(d-\mu x)^2}{2\sigma^2 x} \right\} dx, \quad x > 0 \quad (3.25)$$

En développant cette expression on obtient :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d\lambda^k}{\sigma \sqrt{2\pi} (k-1)!} \int_0^t (t-x)^{k-1} x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\lambda(t-x) - \frac{(d-\mu x)^2}{2\sigma^2 x} \right\} dx \\ &= \frac{d\lambda^k}{\sigma \sqrt{2\pi} (k-1)!} \exp \left\{ -\lambda t \right\} \int_0^t (t-x)^{k-1} x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ \lambda x - \frac{d^2 - 2d\mu x + \mu^2 x^2}{2\sigma^2 x} \right\} dx \\ &= \frac{d\lambda^k}{\sigma \sqrt{2\pi} (k-1)!} e^{-\lambda t} \exp \left\{ \frac{d\mu}{\sigma^2} \right\} \\ &\quad \cdot \int_0^t \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} z^{k-1-n} x^{n-\frac{3}{2}} (-1)^n \exp \left\{ \lambda x - \frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{\mu^2 x}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \frac{d\lambda^k}{\sigma \sqrt{2\pi} (k-1)!} \exp \left\{ \frac{d\mu - \lambda \sigma^2 t}{\sigma^2} \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1}{n} t^{k-1-n} (-1)^n \int_0^t x^{n-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

On pose  $I_n(t) = \int_0^t x^{n-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx$

Nous considérons le changement de variable  $s = \sqrt{x}$ ,  $dx = 2\sqrt{x}ds$  dans le cas de  $n > 0$ . On obtient

$$I_{n,n>0}(t) = \int_0^{\sqrt{t}} 2s^{2n-2} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} ds$$

On pose ensuite :

$$u = \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\}; \quad dv = 2s^{2n-2} ds \quad (3.26)$$

$$du = \left( 2 \frac{d^2}{2\sigma^2 s^3} - 2 \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s \right) \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} ds; \quad v = \frac{2}{2n-1} s^{2n-1} \quad (3.27)$$

On a :

$$\begin{aligned}
I_{n,n>0}(t) &= [uv]_0^{\sqrt{t}} - \int_0^{\sqrt{t}} v du \\
I_{n,n>0}(t) &= \left[ \frac{2}{2n-1} s^{2n-1} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} \right]_0^{\sqrt{t}} \\
&\quad - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2}{2n-1} s^{2n-1} \left( 2 \frac{d^2}{2\sigma^2} - 2 \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s \right) \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} ds \\
I_{n,n>0}(t) &= \frac{2}{2n-1} t^{\frac{2n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 t} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} t \right\} - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2}{2n-1} \\
&\quad \cdot \left( 2 \frac{d^2}{2\sigma^2} s^{2n-4} - 2 \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^{2n} \right) \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} ds \\
I_{n,n>0}(t) &= \frac{2}{2n-1} t^{\frac{2n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 t} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} t \right\} - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2}{2n-1} \\
&\quad \cdot \left( \frac{d^2}{2\sigma^2} 2s^{2n-4} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} 2s^{2n} \right) \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 s^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} s^2 \right\} ds \\
I_{n,n>0}(t) &= \frac{2}{(2n-1)} \left[ t^{\frac{2n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} t \right\} - \frac{d^2}{2\sigma^2} I_{n-1}(t) + \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2} I_{n+1}(t) \right]
\end{aligned}$$

En définissant les variables  $\kappa, \alpha, \beta$  par les expressions (3.22), (3.23), (3.24), on obtient l'équation (3.21). Pour l'intégrale  $I_1(t)$ , il suffit d'utiliser l'expression initiale de  $I_{n,n>0}(t)$  pour  $n = 1$ . Dans le cas de l'intégrale  $I_0(t)$ , nous considérons le changement de variable  $s = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $dx = -2x^{\frac{3}{2}}ds$  (comme dans l'article de Wolf Schwarz [9]) :

$$I_0(t) = \int_{+\infty}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} -2 \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2} s^2 - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2 s^2} \right\} ds = \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{+\infty} 2 \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2} s^2 - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda)}{2\sigma^2 s^2} \right\} ds$$

À partir de la proposition 4, on peut voir qu'il suffit de déterminer les expressions des intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  et utiliser la relation de récurrence de deuxième ordre (3.21). On peut observer que les intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  dépendent du signe de  $\kappa^2$ . Similairement à la méthodologie utilisée par Schwarz, deux cas peuvent être considérés. le cas où  $\kappa$  est réel ( $\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda \geq 0$ ) et le cas où  $\kappa$  est complexe ( $\mu^2 - 2\sigma^2 \lambda < 0$ ). Dans la section suivante, nous présenterons les résultats des intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  dans ces deux cas.

### 3.2.1 Résultats des intégrales lorsque $\kappa \in \mathbb{R}$

Lorsque  $\mu^2 > 2\sigma^2\lambda$  est réel, l'équation (3.6) peut être utilisée pour réexprimer les expressions de  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$ . En combinaison avec la relation (3.5), on obtient le résultat suivant lorsque  $\kappa$  est réel.

**Proposition 5** *Les intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  définies par :*

$$I_0(t) = \int_0^t x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx$$

$$I_1(t) = \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx$$

peuvent être réécrites de la façon suivante lorsque  $\mu^2 > 2\sigma^2\lambda$  :

$$I_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \quad (3.28)$$

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ -\exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \quad (3.29)$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la distribution normale centrée réduite  $N(0, 1)$

**Preuve** Tout d'abord, en utilisant l'équation (3.6), nous pouvons réécrire les intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  en fonction de la fonction d'erreur. Pour  $I_1(t)$  :

$$I_1(t) = \int_0^{t^{\frac{1}{2}}} 2 \exp \left\{ -\alpha^2 x^2 - \frac{\beta^2}{x^2} \right\} dx$$

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha} 2 \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \operatorname{erf} \left( \alpha\sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \operatorname{erf} \left( \alpha\sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - \exp \{2\alpha\beta\} + \exp \{-2\alpha\beta\} \right] \text{ (utilisant 3.5)}$$

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha t + \beta}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha t - \beta}{\sqrt{t}} \right) \right) \right]. \quad (3.30)$$

On peut ensuite utiliser le fait que  $\kappa \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left[ 2 \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{2}\alpha t + \beta}{\sqrt{t}} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{2}\alpha t - \beta}{\sqrt{t}} \right) - 2e^{2\alpha\beta} \right] \text{(utilisant 3.6)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( \Phi \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} + d}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{t}} \right) - 1 \right) + e^{-2\alpha\beta} \Phi \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} - d}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \\
I_1(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ -e^{2\alpha\beta} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-2\alpha\beta} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Similairement à  $I_1(t)$ , on peut trouver l'expression de  $I_0(t)$  :

$$\begin{aligned}
I_0(t) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{+\infty} 2 \exp \left\{ -\beta^2 x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} \right\} dx \\
I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta}{\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta}{\sqrt{t}} - \alpha\sqrt{t} \right) \right) \right] \text{(utilisant 3.5)} \\
I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta + \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta - \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) \right] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( 1 - 2\Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta + \alpha t}{\sqrt{t}} \right) + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 1 - 2\Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta - \alpha t}{\sqrt{t}} \right) + 1 \right) \right] \text{(utilisant 3.5)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( 2 - 2\Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta + \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 2 - 2\Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta - \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta + \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{2} \frac{\beta - \alpha t}{\sqrt{t}} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\sqrt{2} \frac{\beta + \alpha t}{\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \sqrt{2} \frac{\alpha t - \beta}{\sqrt{t}} \right) \right] \\
I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda t} - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

À partir de ces résultats, on peut évaluer les intégrales successives. Par exemple  $I_2$  :

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \frac{1}{2\alpha^2} I_1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} I_0 - \frac{1}{\alpha^2} t^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \\
 I_2(t) &= \frac{1}{2\alpha^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[ -\exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha^2} t^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \\
 I_2(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2} \left[ \exp \{2\alpha\beta\} \Phi \left( -\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t + d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \left( \beta - \frac{1}{2\alpha} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \exp \{-2\alpha\beta\} \Phi \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\lambda}t - d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \left( \beta + \frac{1}{2\alpha} \right) \right] - \frac{1}{\alpha^2} t^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\alpha^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\}
 \end{aligned}$$

Lorsque  $\kappa = 0$ , il n'est plus nécessaire d'avoir  $I_1(t)$  comme condition initiale pour la relation de récurrence (3.21). Il est suffisant d'évaluer l'expression de  $I_0(t)$ . En effet, la relation de récurrence devient :

$$I_{n,n>0}(t) = \frac{2}{(2n-1)} \left[ t^{\frac{2n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 t} \right\} - \beta^2 I_{n-1} \right]$$

On peut donc donner l'expression de l'intégrale  $I_0(t)$  :

**Proposition 6** *Lorsque  $\kappa = 0$ , l'intégrale  $I_0(t)$  définie par :*

$$I_0(t) = \int_0^t x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} \right\} dx$$

*peut être réécrite de la manière suivante :*

$$I_0(t) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \quad (3.32)$$

**Preuve** On peut simplement utiliser l'expression (3.31) :

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ \Phi \left( -\frac{d}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \Phi \left( -\frac{d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] \\ I_0(t) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta} \Phi \left( -\frac{d}{\sigma\sqrt{t}} \right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{d}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Résultats des intégrales lorsque $\kappa \in \mathbb{C}$

Lorsque  $\kappa$  est complexe, il nous faut une autre méthode pour exprimer la fonction d'erreur. La proposition 1 peut être utilisée pour résoudre ce problème. À partir de cette proposition, il est possible d'exprimer les intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  en termes de la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe  $w(z)$ . La proposition suivante montre l'expression  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  en fonction de la fonction complexe  $w(z)$ .

**Proposition 7** *Lorsque  $\mu^2 < 2\sigma^2\lambda$ , les intégrales  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  définies par :*

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \int_0^t x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx \\ I_1(t) &= \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\sigma^2 x} - \frac{(\mu^2 - 2\sigma^2\lambda)x}{2\sigma^2} \right\} dx \end{aligned}$$

peuvent être réécrites, en posant  $\alpha = ia$ , de la façon suivante :

$$I_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp \left\{ a^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ \Re \left[ w \left( a\sqrt{t} + i \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right] \right], \quad (3.33)$$

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left\{ a^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ \Im \left[ w \left( a\sqrt{t} + i \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right] \right], \quad (3.34)$$

où  $\Re$  et  $\Im$  sont les parties réelle et imaginaire respectivement  $N(0, 1)$ . et  $w$  la fonction complexe définie comme suit :

$$1 - \operatorname{erf}(z) = e^{-z^2} w(iz)$$

**Preuve** Nous commençons par utiliser les relations (3.31) et (3.30). Pour  $I_0(t)$ , l'idée est similaire à celle utilisée par Schwarz [9].

En partant de la relation de symétrie (3.9), on a pour un nombre complexe  $z$  :

$$1 - \operatorname{erf}(z) = e^{-z^2} w(iz) \quad (3.35)$$

et

$$w(-z) = e^{-z^2} (1 + \operatorname{erf}(-iz)), \quad (3.36)$$

$$1 + \operatorname{erf}(z) = e^{-z^2} w(-iz). \quad (3.37)$$

On peut maintenant utiliser ces relations pour exprimer  $I_0(t)$  et  $I_1(t)$  en fonction de la fonction complexe  $w(z)$ . Pour  $I_0(t)$ , en posant  $\alpha = ia$  :

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \{2ia\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta}{\sqrt{t}} + ia\sqrt{t} \right) \right) + \exp \{-2ia\beta\} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\beta}{\sqrt{t}} - ia\sqrt{t} \right) \right) \right] \\ I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \left[ \exp \left\{ 2ia\beta - \frac{\beta^2}{t} - 2ia\beta + a^2t \right\} w \left( i \frac{\beta}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -2ia\beta - \frac{\beta^2}{t} + 2ia\beta + a^2t \right\} w \left( i \frac{\beta}{\sqrt{t}} + a\sqrt{t} \right) \right] \\ I_0(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \exp \left\{ a^2t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ w \left( i \frac{\beta}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t} \right) + w \left( i \frac{\beta}{\sqrt{t}} + a\sqrt{t} \right) \right]. \end{aligned}$$

On peut, ensuite, montrer que l'intégrale  $I_0(t)$  est réelle en utilisant la relation de symétrie (3.8) :

$$\begin{aligned} w(\bar{z}) &= \overline{w(-z)} \text{ pour } z = -x - iy : \\ w(-x + iy) &= \overline{w(x + iy)} \text{ en rajoutant } w(x + iy) : \\ w(-x + iy) + w(x + iy) &= \overline{w(x + iy)} + w(x + iy) \\ w(-x + iy) + w(x + iy) &= 2\Re[w(x + iy)]. \end{aligned}$$

En appliquant cette relation on obtient :

$$I_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp \left\{ a^2t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ \Re \left[ w \left( a\sqrt{t} + i \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right] \right].$$

Pour l'intégrale  $I_1(t)$ , on a :

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2ia} \left[ \exp \{2ia\beta\} \left( \operatorname{erf} \left( ia\sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right) + \exp \{-2ia\beta\} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( ia\sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right) \right] \\ I_1(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2ia} \left[ \exp \left\{ 2ia\beta + a^2t - 2ia\beta - \frac{\beta^2}{t} \right\} w \left( i \frac{\beta}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left\{ -2ia + \beta a^2t + 2ia\beta - \frac{\beta^2}{t} \right\} w \left( - \left( -a\sqrt{t} - i \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2ia} \exp \left\{ a^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ w \left( a\sqrt{t} + i\frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - w \left( i\frac{\beta}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t} \right) \right].$$

Similairement à l'intégrale  $I_0(t)$ , on peut montrer que l'intégrale  $I_1(t)$  est réelle en utilisant la relation de symétrie (3.8) :

$$\begin{aligned} w(\bar{z}) &= \overline{w(-z)} \text{ pour } z = -x - iy : \\ w(-x + iy) &= \overline{w(x + iy)} \\ -w(-x + iy) &= -\overline{w(x + iy)} \text{ en rajoutant } w(x + iy) : \\ w(x + iy) - w(-x + iy) &= w(x + iy) - \overline{w(x + iy)} \\ w(x + iy) - w(-x + iy) &= 2i\Im[w(x + iy)]. \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left\{ a^2 t - \frac{\beta^2}{t} \right\} \left[ \Im \left[ w \left( a\sqrt{t} + i\frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right] \right].$$

### 3.3 Illustration des résultats

Dans cette section, nous illustrons les résultats du produit de convolution entre la distribution gaussienne inverse et la distribution d'Erlang présentés dans la section précédente. Nous analysons l'impact des différents paramètres sur la distribution. Comme nous verrons dans cette section, l'impact des paramètres sur la distribution trouvée correspond à celui attendu basé sur les propriétés des distributions qui la composent. On vérifiera aussi que la fonction trouvée dans chaque cas est effectivement une fonction de densité de probabilité (la fonction de répartition allant de 0 à 1).

La fonction de densité est calculée à l'aide d'un programme Python. Ce programme est en annexe.

### Variation du paramètre $k$

Le paramètre  $k$  est un paramètre de la distribution d'Erlang. Pour  $k = 1$ , nous retrouvons la distribution Ex-Wald présentée par Schwarz [9]. La figure 3.1 présente les résultats de la fonction de densité pour différentes valeurs de  $k$ . Le tableau 3.1 comporte les valeurs des autres paramètres utilisés pour l'évaluation des fonctions de densité et de répartition. Une augmentation du paramètre  $k$  devrait déplacer le mode et la moyenne de la distribution vers la droite. En prenant tous les autres paramètres constants, une augmentation du nombre d'événements dans notre délai devrait entraîner un plus long délai en moyenne.

Les changements dans les fonctions de densité présentés dans la figure 3.1 sont ceux attendus étant donné la définition du paramètre  $k$ .

TABLEAU 3.1 Paramètres constants lors de la variation de  $k$ .

Paramètres	Valeurs
$\lambda$	3
$\mu$	$\sqrt{2}$
$d$	2
$\sigma$	1

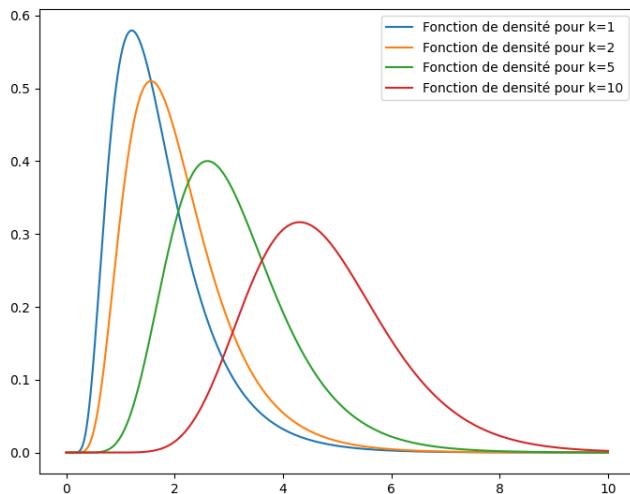


FIGURE 3.1 Fonction de densité en fonction de différentes valeurs de  $k$ .

On peut voir sur la figure 3.2 que les fonctions cumulatives sont comprises entre 0 et 1.

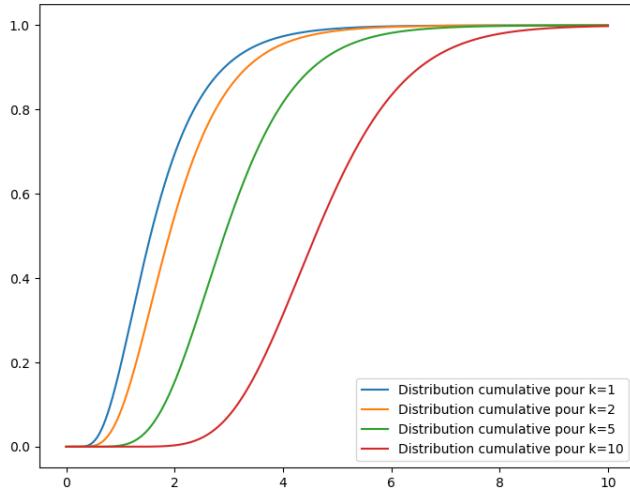


FIGURE 3.2 Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de  $k$ .

### Variation du paramètre $d$

Les figures 3.3 et 3.4 présentent les fonctions de densité et de répartition en fonction du paramètre  $d$ . Le paramètre  $d$  représente le niveau de passage du mouvement brownien. Une augmentation de ce paramètre devrait déplacer la fonction de densité vers la droite. Comme on peut le voir sur la figure 3.3, ce comportement est respecté.

Le tableau 3.2 contient les valeurs des autres paramètres utilisés pour évaluer les fonctions de densité et de répartition pour la variation du paramètre  $d$ .

TABLEAU 3.2 Paramètres constants lors de la variation de  $d$ .

Paramètres	Valeurs
$k$	3
$\mu$	$\sqrt{8}$
$\lambda$	3
$\sigma$	1

On peut à nouveau voir sur la figure 3.2 que les fonctions de répartition sont bien comprises entre 0 et 1.

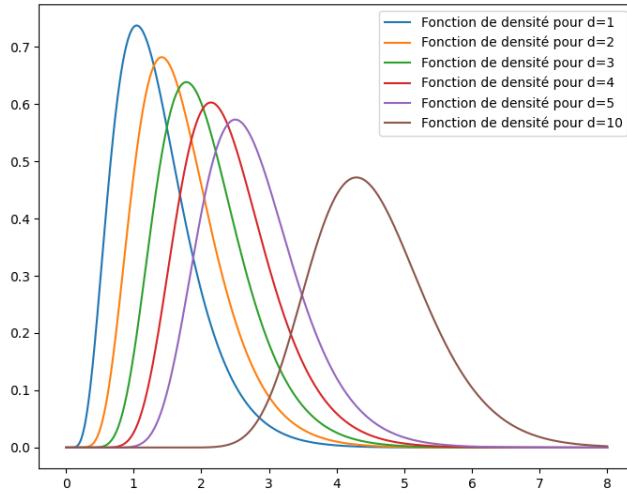


FIGURE 3.3 Fonctions de densité en fonction de différentes valeurs de  $d$ .

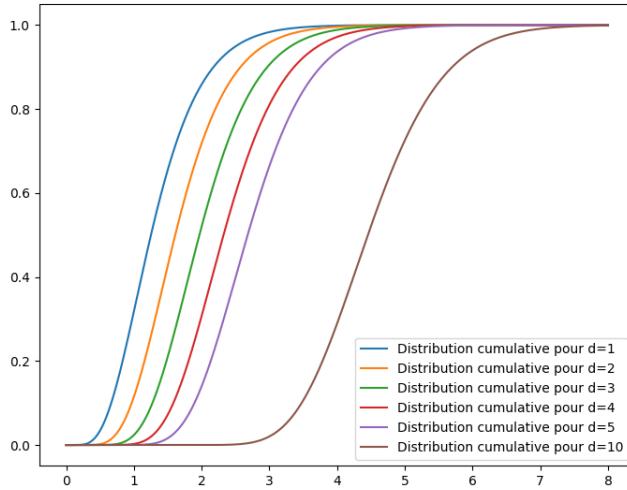


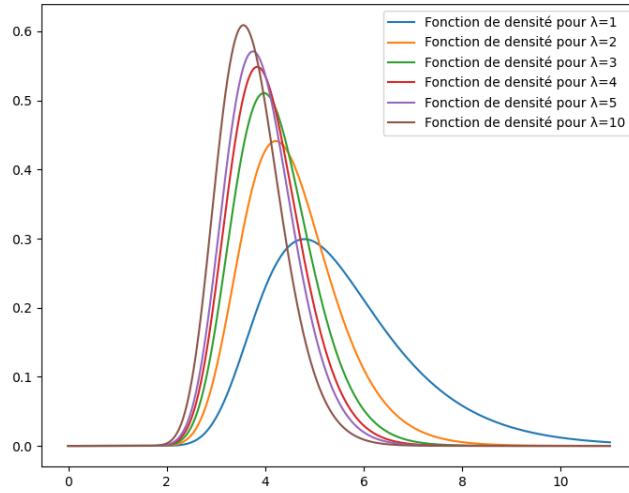
FIGURE 3.4 Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de  $d$ .

### Variation du paramètre $\lambda$

Finalement, les figures 3.5 et 3.6 présentent les fonctions de densité et de répartition en fonction du paramètre  $\lambda$ . Le tableau 3.3 répertorie les valeurs des autres paramètres utilisés pour évaluer les fonctions de densité et de répartition pour le paramètre  $\lambda$ . Encore une fois, les fonctions de répartition sont bien comprises entre 0 et 1.

TABLEAU 3.3 Paramètres constants lors de la variation de  $\lambda$ .

Paramètres	Valeurs
$k$	2
$\mu$	$\sqrt{8}$
$d$	2
$\sigma$	1

FIGURE 3.5 Fonction de densité en fonction de différentes valeurs de  $\lambda$ .

Avec l'augmentation du paramètre  $\lambda$ , la variable  $\kappa = \sqrt{\mu^2 - 2\lambda\sigma^2}$  passe du domaine réel au domaine complexe. On peut tout de même voir que les fonctions de densité résultantes sont en accord avec celles attendues par les variations de  $\lambda$  et que les fonctions de densité restent réelles.

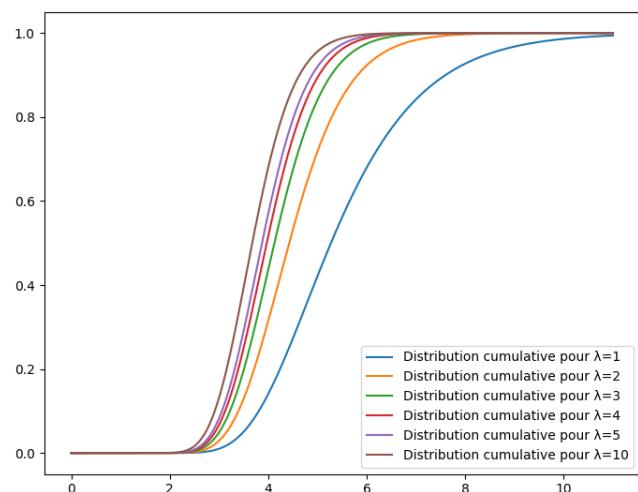


FIGURE 3.6 Fonctions de répartition en fonction de différentes valeurs de  $\lambda$ .

## CHAPITRE 4 Solutions exactes d'équations différentielles à retard

### 4.1 Définitions

De manière générale, une équation différentielle à retard du premier degré peut être écrite de la forme

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau), t), \quad (4.1)$$

où le retard  $\tau$  peut être négatif.

Cette expression générale peut être réécrite, en prenant  $\tau$  comme une fonction de  $t$ , de la façon équivalente suivante :

$$y'(t) = f(y(t), y(c_0 t), t), \quad (4.2)$$

où  $c_0 \neq 1$ .

Cette expression est équivalente à l'équation générale (4.1) pour  $\tau = (1 - c_0)t$ . La raison principale de la considération d'un délai linéaire en fonction de  $t$  est d'éliminer la nécessité de définir des conditions initiales de la fonction que nous recherchons sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ .

Dans son article [11], M. Lefebvre établit les généralisations des équations différentielles à retard apparaissant dans les divers articles [8] et [14]. Il considère les équations différentielles à retard présentant les formes suivantes :

$$y'(t) = c_1 e^{c_2 t} y(c_0 t) + c_3 y(t), \quad (4.3)$$

et

$$y'(t) = c_0 + c_1 y^2(t/2), \quad (4.4)$$

pour  $t \geq 0$ , et  $c_i$  est une constante pour  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Par exemple, dans le cas de l'équation (4.3), le terme  $y(c_0 t)$  (avec  $c_0 \neq 1$ ) peut être écrit comme suit :

$$y(c_0 t) = y(t - (1 - c_0)t). \quad (4.5)$$

Ainsi, le retard  $\tau = (1 - c_0)t$  est une fonction de  $t$ . Similairement pour le terme  $y^2(t/2)$  dans l'équation (4.4).

Dans cette partie, nous allons étendre les équations différentielles à retard abordées dans l'article [11] et proposer des solutions qui répondent aux conditions initiales spécifiées. Dans un premier temps, la section 4.2 traitera des nouvelles équations du premier ordre et nous

considérerons ensuite les équations d'ordre supérieur dans la section 4.3.

## 4.2 Équations du premier ordre

Dans l'article [11], il est montré que  $y(t) = e^{kt^2}$  est une solution exacte de l'équation du premier ordre suivante :

$$y'(t) = c_1 t y(c_2 t) e^{c_3 t^2} \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.6)$$

avec  $y(0) = 1$ , où  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 1$  and  $c_3 \neq 0$ , si et seulement si :

$$k = \frac{c_1}{2} \quad \text{et} \quad k = \frac{c_3}{1 - c_2^2}. \quad (4.7)$$

Cette équation (4.6) peut être généralisée comme suit :

$$y'(t) = c_1 t^{n-1} y(c_2 t) e^{c_3 t^n} \quad \text{for } t \geq 0, \quad (4.8)$$

où  $n \in \mathbb{N}$ .

Une solution à cette équation est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 8** *La fonction  $y(t) = e^{kt^n}$  est une solution de l'équation différentielle avec retard sous la condition initiale  $y(0) = 1$  :*

$$y'(t) = c_1 t^{n-1} y(c_2 t) e^{c_3 t^n} \quad \text{for } t \geq 0, \quad (4.9)$$

où  $n \in \mathbb{N}$ . si et seulement si :

$$k = \frac{c_1}{n} \quad \text{and} \quad k = \frac{c_3}{1 - c_2^n}. \quad (4.10)$$

**Preuve** En prenant  $y(t) = e^{kt^n}$ , on a  $y'(t) = knt^{n-1}e^{kt^n}$  et ensuite :

$$c_1 t^{n-1} y(c_2 t) e^{kc_3 t^n} = c_1 t^{n-1} e^{kc_2^n t^n + c_3 t^n}.$$

On peut alors voir que :

$$knt^{n-1}e^{kt^n} = c_1 t^{n-1} e^{kc_2^n t^n + c_3 t^n}.$$

On obtient les deux conditions :

$$kn = c \text{ et } k = kc_2^n + c_3.$$

Nous pouvons aussi reconsidérer l'équation (4.4) qui possède la fonction  $y(t) = \sin(kt)$  comme solution pour  $t \geq 0$  tel que  $y(0) = 0$  si et seulement si  $k = c_0 = -c_1/2$  ([11]). Cette solution peut être trouvée à partir de la relation  $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ .

En utilisant la relation  $\cosh(2t) = 1 + 2\sinh^2(t)$ , on peut également affirmer que  $y(t) = \sinh(kt)$  est aussi une solution de l'équation si et seulement si  $k = c_0 = c_1/2$ .

En se basant sur cette relation, on peut déduire la proposition suivante :

**Proposition 9** *Soit l'équation différentielle à retard :*

$$[y'(t)]^2 = c_1 + c_2 y(2t) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.11)$$

*sujet à la condition initiale  $y(0)=0$ . La fonction  $y(t) = \sinh(kt)$  est une solution de cette équation si et seulement si*

$$k = \sqrt{2c_2} \quad \text{et} \quad c_1 = -c_2 < 0.$$

**Preuve** On utilise l'identité

$$\cosh(2t) = 2\cosh^2(t) - 1$$

et similairement à équation (17) dans [11], on peut voir qu'en prenant  $y(t) = \sinh(kt)$  on obtient :

$$k^2 \cosh^2(kt) = c_1 + 2c_2 \cosh^2(kt) - c_2$$

On a donc les contraintes donnée par la proposition.

On peut aussi vérifier que la fonction  $y(t) = \sinh(kt)$  respecte la condition initiale.

Une autre équation à retard dont la solution peut être trouvée est celle donnée par la proposition suivante :

**Proposition 10** *Soit l'équation différentielle à retard :*

$$y'(t) = c_0 + 4y'(t/2) + c_1 y^4(t/4) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.12)$$

*sujet à la condition initiale  $y(0) = 0$ . La fonction  $y(t) = \sin(kt)$  est une solution de cette équation si et seulement si*

$$k = -c_0/3 = c_1/8. \quad (4.13)$$

**Preuve** La solution peut être trouvée en utilisant l'identité trigonométrique suivante :

$$8\sin^4(x) = 3 - 4\cos(2x) + \cos(4x). \quad (4.14)$$

Cette identité peut être obtenue à partir des formules  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$  et  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ . En posant  $y(t) = \sin(kt)$ , on peut voir que la condition initiale est respectée. De plus :

$$c_0 + 4y'(t/2) + c_1 y^4(t/4) = c_0 + 4k \cos(kt/2) + c_1 \sin^4(kt/4).$$

Nous avons donc,  $y(t) = \sin(kt)$  est une solution à l'équation différentielle (4.12) si :

$$\begin{aligned} k \cos(k4t/4) &= c_0 + 4k \cos(kt/2) + c_1 \sin^4(kt/4), \\ 8k \sin^4(t/4) - 3k + 4k \cos(kt/2) &= c_0 + 4k \cos(2kt/4) + c_1 \sin^4(t/4). \end{aligned}$$

On a donc  $k = -c_0/3 = c_1/8$ . De même, si  $k = -c_0/3 = c_1/8$ , on peut voir grâce à l'identité trigonométrique que  $y(t) = \sin(kt)$  est une solution à notre équation différentielle.

On trouve donc que  $y(t) = \sin(kt)$  est la solution de l'équation différentielle (4.12) si et seulement si  $k = -c_0/3 = c_1/8$ .

Finalement, la dernière équation du premier ordre que nous considérons est la suivante :

$$\cos^2(kt) y'(t) = c_0 + c_1 \frac{\sin(kt)}{1 - \cos(kt)} y(t/2) \quad \text{pour } 0 < t < \pi/2. \quad (4.15)$$

Une solution de cette équation peut être trouvée grâce à la relation suivante :

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} \quad (4.16)$$

**Proposition 11** *Soit l'équation différentielle à retard :*

$$\cos^2(kt) y'(t) = c_0 + c_1 \frac{\sin(kt)}{1 - \cos(kt)} y(t/2) \quad \text{pour } 0 < t < \pi/2, \quad (4.17)$$

*sujet à la condition initiale  $y(0)=0$ . La fonction  $y(t) = \operatorname{tg}(kt)$  est une solution de cette équation si et seulement si*

$$c_0 + c_1 = k, \quad \text{où} \quad k > 0. \quad (4.18)$$

**Preuve** Premièrement, on peut voir que la fonction  $y(t) = \operatorname{tg}(kt)$  respecte la condition initiale  $y(0) = 0$

En supposant que  $y(t) = \operatorname{tg}(kt)$  est solution de l'équation (4.17), on obtient :

$$\cos^2(kt) y'(t) = k \left( \cos^2(kt) + \sin^2(kt) \right) = k.$$

Et en partant de l'identité (4.16), on obtient que  $y(t) = \operatorname{tg}(kt)$  si  $c_0 + c_1 = k$ , où  $k > 0$ .

De plus, l'équation (4.17) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\cos^2(kt)y'(t) = c_0 + c_1 \frac{1 + \cos(kt)}{\sin(kt)} y(t/2) \quad \text{pour } 0 < t < \pi/2. \quad (4.19)$$

### 4.3 Équations d'ordre supérieur

Cette section aborde des extensions aux équations différentielles mentionnées plus haut. Nous débuterons par une variante de l'équation (4.4).

**Proposition 12** *Soit l'équation différentielle à retard :*

$$y''(t) = c_1 + c_2 y^2(t/2) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.20)$$

*sujette aux conditions initiales  $y(0)=1$  et  $y'(0)=0$ . La fonction  $y(t) = \cos(kt)$  est une solution de cette équation si et seulement si :*

$$c_1 = k^2 \quad \text{et} \quad c_2 = -2k^2.$$

**Preuve** On peut utiliser la relation trigonométrique :

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

pour trouver le résultat donné. En reprenant l'équation (4.20), avec  $y(t) = \cos(kt)$  comme solution, on obtient :

$$-2k^2 \cos^2(t/2) + k^2 = c_2 \cos^2(t/2) - c_1$$

ce qui nous donne bien :

$$c_1 = k^2 \quad \text{et} \quad c_2 = -2k^2.$$

Nous pouvons même considérer le cas général

$$y^{(n)}(t) = c_1 + c_2 y^2(t/2) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.21)$$

avec les conditions initiales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , ... si  $n$  est impair, et  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , ... si  $n$  est pair.

Lorsque  $n$  est impair, alors  $y(t) = \sin(kt)$  est une solution de l'équation générale considérée.

On peut alors généraliser la proposition précédente de la façon suivante :

**Proposition 13** *Soit l'équation différentielle à retard :*

$$y^{(n)}(t) = c_1 + c_2 y^2(t/2) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (4.22)$$

*sujette aux conditions initiales  $y(0)=1$  et  $y'(0)=0$ . La fonction  $y(t) = \cos(kt)$  est une solution de cette équation si et seulement si  $n = 2a$  est pair et*

$$c_1 = (-1)^{1+a} k^n \quad \text{et} \quad c_2 = (-1)^a 2k^n.$$

*La même équation (4.22) sujette aux conditions  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1, \dots$  à la fonction  $y(t) = \sin(kt)$  pour solution si et seulement si  $n = 2a + 1$  est impair et*

$$c_1 = (-1)^a k^n \quad \text{et} \quad c_2 = (-1)^{a+1} 2k^n.$$

**Preuve** Premièrement, on peut voir que les solutions données respectent leurs conditions initiales respectives.

Deuxièmement, pour trouver les contraintes sur les paramètres, on considère les cas de  $n$  pair et impair.

Dans le cas pair, on peut réutiliser la relation trigonométrique et la logique utilisée dans la proposition 12.

Dans le cas impair, on peut utiliser la relation trigonométrique :

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2(t).$$

Avec  $y(t) = \sin(kt)$  comme solution, on a :

$$(-1)^a k^n - 2(-1)^a k^n \sin^2(t/2) = c_1 - c_2 \sin^2(t)$$

et on obtient :

$$c_1 = (-1)^a k^n \quad \text{et} \quad c_2 = (-1)^{a+1} 2k^n.$$

L'équation (4.3) peut à nouveau être généralisée en une équation d'ordre supérieur. Une solution de cette nouvelle équation sous les contraintes appropriées est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 14** Soit l'équation différentielle à retard :

$$y'(t) = c_1 e^{c_2 t} y(c_0 t) + c_3 y(t) + \sum_{j=2}^m d_j y^{(j)}(t), \quad (4.23)$$

sujette aux conditions initiales  $y^{(j)}(0) = k^j$  pour  $j = 0, \dots, m-1$ . La fonction  $y(t) = e^{kt}$  est une solution de cette équation si :

$$k = \frac{c_2}{1 - c_0} \quad \text{et} \quad k = c_1 + c_3 + \sum_{j=2}^m d_j k^j. \quad (4.24)$$

**Preuve** La fonction  $y(t) = e^{kt}$  a pour dérivées,  $\forall j > 0$ ,  $y^{(j)}(t) = k^j e^{kt}$ . Nous avons donc :

$$c_1 e^{c_2 t} e^{c_0 k t} + c_3 e^{kt} + \sum_{j=2}^m d_j k^j e^{kt} = \left( c_3 + \sum_{j=2}^m d_j k^j \right) e^{kt} + c_1 e^{(c_2 + c_0 k)t}.$$

En posant  $y(t) = e^{kt}$  comme solution :

$$k e^{kt} = \left( c_3 + \sum_{j=2}^m d_j k^j \right) e^{kt} + c_1 e^{(c_2 + c_0 k)t}.$$

En supposant que  $c_2 + c_0 k \neq 0$ , on obtient ainsi les conditions de la proposition :

$$c_2 + c_0 k = k \quad \text{et} \quad k = c_1 + c_3 + \sum_{j=2}^m d_j k^j. \quad (4.25)$$

Lorsque  $k = 1$ , on a :

$$c_0 + c_2 = 1 \quad \text{et} \quad c_1 + c_3 + \sum_{j=2}^m d_j = 1. \quad (4.26)$$

Finalement, nous pouvons généraliser l'équation (4.4) d'une manière différente.

**Proposition 15** Soit l'équation différentielle à retard :

$$y''(t) = c_0 + c_1 y^2(t/2) + c_2 y^{(4)}(t). \quad (4.27)$$

sujette aux conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -k^2$  et  $y'''(0) = 0$ . La fonction  $y(t) = \cos(kt)$  est une solution de cette équation si :

$$c_0 + \frac{c_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad -k^2 = \frac{c_1}{2} + c_2 k^4. \quad (4.28)$$

**Preuve** Ce résultat peut être trouvé à partir de la même relation trigonométrique utilisée pour l'équation (4.4) :

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 + \cos(t)}{2}. \quad (4.29)$$

La fonction  $y(t) = \cos(kt)$  respecte les conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -k^2$  et  $y'''(0) = 0$ . Aussi,  $y^{(2a)}(t) = k^{2a} \cos(kt)$  si  $a$  est pair et  $y^{(2a)}(t) = -k^{2a} \cos(kt)$  si  $a$  est impair. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} -k^2 \cos(kt) &= c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 \cos(kt)}{2} + c_2 k^4 \cos(kt), \\ -k^2 \cos(kt) &= \left(c_0 + \frac{c_1}{2}\right) + \left(\frac{c_1}{2} + c_2 k^4\right) \cos(kt), \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien les contraintes :

$$c_0 + \frac{c_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad -k^2 = \frac{c_1}{2} + c_2 k^4. \quad (4.30)$$

Par exemple, si l'on suppose que  $c_0 = -1$ ,  $c_1 = 2$  et  $c_2 = -3/4$ , on trouve que  $k = \pm\sqrt{2}$ .

Ce résultat peut être généralisé encore plus. En effet, la fonction  $y(t) = \cos(kt)$  est aussi la solution de l'équation suivante :

$$y''(t) = c_0 + c_1 y^2(t/2) + c_2 y^{(4)}(t) + c_3 y^{(6)}(t) + \dots + c_m y^{(2m)}(t) \quad (4.31)$$

pour  $m \in \{2, 3, \dots\}$ , sujette aux conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -k^2$  et  $y'''(0) = 0$  et sous les contraintes suivantes :

$$c_0 + \frac{c_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad -k^2 = \frac{c_1}{2} + \sum_2^m (-1)^m c_m k^m. \quad (4.32)$$

## CHAPITRE 5 Conclusion

### 5.1 Synthèse des travaux

En somme, dans la première partie, nous avons trouvé une expression pour la fonction de densité de l'instant de premier passage d'un mouvement brownien retardé par un délai suivant une loi d'Erlang. Cette fonction peut être trouvée par la somme des termes d'une série par récurrence dépendant des paramètres du mouvement brownien et ceux de la distribution du délai. En se basant sur la méthodologie utilisée dans l'article de Schwarz [9], nous avons établi deux cas pour lesquels les expressions explicites des termes de cette série sont de formes différentes. Nous avons donné, par la suite, les expressions explicites de ces termes pour les deux différents cas. Nous avons terminé par une illustration de cette fonction de densité en faisant varier les différents paramètres de la loi d'Erlang et du mouvement brownien.

Dans la deuxième partie nous avons commencé par établir plusieurs formes générales d'équations différentielles à retard. En utilisant les résultats établis par M. Lefebvre [11], nous avons ensuite donné des solutions à ces équations différentielles à retard et les conditions sous lesquelles ces fonctions sont bien solutions de ces équations. Les conditions sont trouvées en utilisant des relations trigonométriques. De ce fait, les solutions trouvées sont des fonctions trigonométriques.

### 5.2 Limitations de la solution proposée

L'expression de la fonction de densité reste cependant une expression d'une somme des termes d'une série. Cela rend son évaluation plus complexe qu'une méthode approximative/numérique pour une valeur de  $k$  élevé. Une autre limitation est que, par la nature de l'expression, le paramètre  $k$  doit être fixé pour obtenir une expression qui peut être utilisée pour une méthode statistique qui nécessite l'utilisation de la fonction de densité comme la méthode de maximum de vraisemblance.

Quant aux équations différentielles à retard étudiées, les solutions proposées sont données selon certaines contraintes et donc ne sont pas des solutions générales de ces équations.

### 5.3 Améliorations futures

Une avenue d'amélioration du temps de passage retardé consiste à résoudre la relation de récurrence afin d'exprimer les termes de la série en fonction de leurs indices. Nous pourrions

aussi considérer d'autres processus stochastiques tel que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Une autre avenue est de traiter une version discrète du problème en considérant une chaîne de Markov et en supposant que la distribution du délai  $\tau$  est discrète.

Pour les équations différentielles à retard, une amélioration future serait de faire le même travail avec des équations différentielles partielles à retard. Aussi, les fonctions trouvées sont élémentaires. Il serait intéressant d'explorer des solutions qui seraient des fonctions spéciales tel que les fonctions de Bessel.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. New York : Springer, 2011. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7646-8>
- [2] F. A. Rihan, *Delay Differential Equations and Applications to Biology*. Singapore : Springer, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1007/978-981-16-0626-7>
- [3] J. L. Folks et R. S. Chhikara, “The inverse gaussian distribution and its statistical application—a review,” *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, vol. 40, n°. 3, p. 263–275, 12 2018. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1978.tb01039.x>
- [4] A. Heathcote, “Fitting wald and ex-wald distributions to response time data : an example using functions for the s-plus package,” *Behavior Research Methods, Instruments, Computers*, vol. 36, n°. 4, p. 678 – 94, 2004/11/, ex-Wald distribution ;exponential random variables ;S-PLUS package ;maximum likelihood estimates ;ex-Gaussian distributions ;Monte Carlo study ;shifted Wald estimation ;Schwarz data ;. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.3758/BF03206550>
- [5] A. Golubev, “Exponentially modified peak functions in biomedical sciences and related disciplines,” *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2017, 2017, biomedical science ;Coefficient of variance ;Data approximation ;Gamma distribution ;Gaussian components ;Intermediate state ;Negative exponential distribution ;Physiological response ;. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1155/2017/7925106>
- [6] S. Yin et Y. Wang, “Decomposing metro-bus transfer time with smart card data,” vol. 7, Seattle, WA, United states, 2022, p. 109 – 121, bus services ;Bus stop ;Bus transfer ;Last mile ;Metro services ;Metro-bus ;Service Quality ;Total transfer ;Transfer time ;Urban mobility ;. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1061/9780784484371.011>
- [7] S. Naik, “On the convoluted gamma to length-biased inverse gaussian distribution and application in financial modeling,” *Journal of Statistics and Management Systems*, vol. 24, n°. 7, p. 1581–1600, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1080/09720510.2021.1974578>
- [8] D. J. Evans et K. R. Raslan, “The adomian decomposition method for solving delay differential equation,” *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 82, n°. 1, p. 49–54, 2005. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1080/00207160412331286815>
- [9] W. Schwarz, “On the convolution of inverse gaussian and exponential random

- variables,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 31, n°. 12, p. 2113–2121, 2002. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1081/STA-120017215>
- [10] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing éd. New York : Dover, 1964.
- [11] M. Lefebvre, “Exact solutions to differential equations with different arguments,” *Buletinul Academiei de Stiintă a Republicii Moldova. Matematica*, n°. 3(103), p. 96 – 102, 2023. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.56415/basm.y2023.i3.p96>
- [12] K. Podgórski et J. Wallin, “Convolution-invariant subclasses of generalized hyperbolic distributions,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 45, n°. 1, p. 98–103, 2016. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1080/03610926.2013.821489>
- [13] B. Jørgensen, *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*. Springer New York, 1982. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-5698-4>
- [14] Y. M. Rangkuti et M. S. M. Noorani, “The exact solution of delay differential equations using coupling variational iteration with taylor series and small term,” 2012. [En ligne]. Disponible : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:96459091>
- [15] M. Lefebvre et I. Touré, “First and higher-order differential equations with different arguments,” soumis pour publication to the *Journal of optimization, differential equations and their applications* en juillet 2024.
- [16] ——, “First-passage time distributions of a brownian motion observed after a random delay,” soumis pour publication à *Communications in Statistics : Theory and Methods* en juillet 2024.

## ANNEXE A CODE DE LA FONCTION DE DENSITÉ

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import norm,kurtosis,mode,skew
from scipy.special import binom,wofz
import math
import scipy.integrate as it

def function_density(t,k,d,lamb,mu,sigma):
    result = 0
    kappa_squared = (mu**2) - 2*lamb*(sigma**2)
    if kappa_squared>=0:
        for i in range(k):
            result = result + ((-1)**i)*binom(k-1,i)*(
                t**(k-1-i))*integral_density\
                (i,t,d,lamb,mu,sigma)
    return result*((d*(lamb**k))/(np.sqrt(2*np.pi)*
                    sigma*math.factorial(k-1)))\
                    *np.exp(((d*mu)/(sigma**2))-lamb*t)
    else:
        for i in range(k):
            result = result + ((-1)**i)*binom(k-1,i)*(t**(k-1-i))\
                *integral_density_complex(i,t,d,lamb,mu,sigma)
    return result*((d*(lamb**k))/(np.sqrt(2*np.pi)*
                    sigma*math.factorial(k-1)))\
                    *np.exp(((d*mu)/(sigma**2))-lamb*t)

def integral_density(n,t,d,lamb,mu,sigma):
    kappa = np.sqrt((mu**2) - 2*lamb*(sigma**2))
    alpha = kappa / (np.sqrt(2)*sigma)
    beta = d / (np.sqrt(2)*sigma)
    if n==0:

```

```

result = (np.sqrt(np.pi)/beta)*(np.exp(2*alpha*beta)*
                                 norm.cdf(-(kappa*t+d)/(
                                         sigma*np.sqrt(t))))
                                 + np.exp(-2*alpha*beta)*
                                 norm.cdf((kappa*t-d)/(
                                         sigma*np.sqrt(t))))
                                

elif n==1:
    result = (np.sqrt(np.pi)/alpha)*(-np.exp(2*alpha*beta)*\
                                         norm.cdf(-(kappa*t+d)/(
                                         sigma*np.sqrt(t)))+
                                         + np.exp(-2*alpha*beta)*\
                                         norm.cdf((kappa*t-d)/(
                                         sigma*np.sqrt(t)))))

else:
    result = (2*(n-1)-1)/(2*(alpha**2))*integral_density(int(n-1),t,d
                                                          ,lamb,mu,sigma) \
    + ((beta**2)/(alpha**2)) * integral_density(int(n-2),t,d,
                                                lamb,mu,sigma) - \
    (1/(alpha**2))*(t**((n-1)-(1/2)))* \
    np.exp(-1*alpha**2*t - (beta**2/t)))
return result

def integral_density_complex(n,t,d,lamb,mu,sigma):
    kappa_inv = np.sqrt(2*lamb*(sigma**2) - (mu**2))
    a = kappa_inv / (np.sqrt(2)*sigma)
    beta = d / (np.sqrt(2)*sigma)
    kappa_squared = (mu**2) - 2*lamb*(sigma**2)
    alpha_squared = kappa_squared / (2*(sigma**2))

    if n==0:
        x = a * np.sqrt(t)
        y = beta / np.sqrt(t)
        z = complex(x,y)
        result = (np.sqrt(np.pi)/beta)*np.exp(((a**2)*t)-((beta**2)/t))*(wofz(z).real)
    else:
        result = (2*(n-1)-1)/(2*(alpha**2))*integral_density(int(n-1),t,d
                                                          ,lamb,mu,sigma) \
        + ((beta**2)/(alpha**2)) * integral_density(int(n-2),t,d,
                                                    lamb,mu,sigma) - \
        (1/(alpha**2))*(t**((n-1)-(1/2)))* \
        np.exp(-1*alpha**2*t - (beta**2/t)))
return result

```

```

elif n==1:
    x = a * np.sqrt(t)
    y = beta / np.sqrt(t)
    z = complex(x,y)
    result = (np.sqrt(np.pi)/a)*np.exp(((a**2)*t)-((beta**2)/t))*\
              (wofz(z).imag)
else:
    result = (2*(n-1)-1)/(2*(alpha_squared))*\
              integral_density_complex(int(n-1),t,d,lamb,mu,sigma) \
              + ((beta**2)/(alpha_squared)) * \
              integral_density_complex(int(n-2),t,d,lamb,mu,sigma) - \
              (1/(alpha_squared))*(t**((n-1)-(1/2))*\
              np.exp(-alpha_squared*t -(beta**2/t)))
return result

if __name__=='__main__':
    d=2
    lamb=3
    mu=np.sqrt(2)
    sigma=1
    ks=[1,2,5,10]
    t_space = np.linspace(10**(-8),10,1000)
    fig, ax = plt.subplots()
    fig1, ax1 = plt.subplots()
    print('-----ks variation-----')
    for k in ks:
        print(f'k={k}')
        f_space = [function_density(t,k,d,lamb,mu,sigma) for t in t_space]
        cum_prod = it.cumulative_trapezoid(f_space,t_space,initial=0)
        # plot
        ax1.plot(t_space,f_space, '--',label=f'Fonction de densité'
                  f' pour k={k}')
        ax.plot(t_space, cum_prod, '--',label=f'Distribution '
                  f'cumulative pour k={k}')
    ax.legend(loc="lower right")
    ax1.legend(loc="upper right")

```

```

ds=[1,2,3,4,5,10]
lamb=3
mu=np.sqrt(8)
sigma=1
k=3
t_space = np.linspace(10**(-8),8,1000)
fig2, ax2 = plt.subplots()
fig3, ax3 = plt.subplots()
print('-----ds variation-----')
for d in ds:
    print(f'd={d}')
    f_space = [function_density(t,k,d,lamb,mu,sigma) for t in t_space]
    cum_prod = it.cumulative_trapezoid(f_space,t_space,initial=0)
    # plot
    ax2.plot(t_space,f_space, '--',label=f'Fonction de densité pour'
              f' d={d}')
    ax3.plot(t_space, cum_prod, '--',label=f'Distribution cumulative'
              f' pour d={d}')
ax2.legend(loc="upper right")
ax3.legend(loc="lower right")

```

```

d=2
lambs=[1,2,3,4,5,10]
mu=np.sqrt(8)
sigma=1
k=2
t_space = np.linspace(10**(-8),11,1000)
fig4, ax4 = plt.subplots()
fig5, ax5 = plt.subplots()
print('-----lambdas variation-----')
for lamb in lambs:

```

```
print(f'lamb={lamb}')
```

```
f_space = [function_density(t,k,d,lamb,mu,sigma) for t in t_space]
```

```
cum_prod = it.cumulative_trapezoid(f_space,t_space,initial=0)
```

```
# plot
```

```
ax4.plot(t_space,f_space, '-',label=f'Fonction de densité'
```

```
    f' pour \u03bb={lamb}')
```

```
ax5.plot(t_space, cum_prod, '-',label=f'Distribution cumulative '
```

```
    f'pour \u03bb={lamb}')
```

```
ax4.legend(loc="upper right")
```

```
ax5.legend(loc="lower right")
```

```
plt.show()
```