

Titre: Étude de la stabilité hydrodynamique de la convection naturelle
d'une couche verticale d'eau

Auteurs: Michel Buisson
Authors:

Date: 1981

Type: Rapport / Report

Référence: Buisson, M. (1981). Étude de la stabilité hydrodynamique de la convection naturelle d'une couche verticale d'eau. (Rapport technique n° EP-R-81-22).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/6244/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6244/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-81-22
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



SERVICES DE LA RECHERCHE

Rapport technique EP 81-R-22
Classification: Library of Congress No ...

ETUDE DE LA STABILITÉ HYDRODYNAMIQUE
DE LA CONVECTION NATURELLE
D'UNE COUCHE VERTICALE D'EAU

MICHEL BUISSON

Mai 1981

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP 5
R81-22
ex.2

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

BIBLIOTHÈQUE

JUN 29 1981

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTREAL

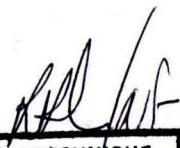
202

ETUDE DE LA STABILITE HYDRODYNAMIQUE
DE LA CONVECTION NATURELLE D'UNE COUCHE
VERTICALE D'EAU

Par

MICHEL BUISSON

Département de Génie Civil
Ecole Polytechnique
Université de Montréal
C.P. 6079, Succursale "A"
Montréal, Québec
Canada H3C 3A7


ÉCOLE POLYTECHNIQUE

18 JUIN 1981

BUREAU DU DIRECTEUR

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude à Lucie Azancot pour la dactylographie de ce rapport, à Gaston Paquenaude pour la réalisation des figures des spectres de célérité, et à tout le personnel de la bibliothèque de l'Ecole Polytechnique, en pensant plus particulièrement à Mireille Landry et Louise Prud'Homme, sans qui cette étude n'aurait jamais aboutie.

AVANT-PROPOS

Paris - Juin 1980. A la terrasse d'un café entre le Panthéon et le Luco, dans le cadre que je ne savais pas encore enchanteresque du Quartier Latin, je fis connaissance avec M. Robillard.

Celui-ci, qui depuis quelques années, a entrepris à l'Ecole Polytechnique de Montréal en compagnie de M. Vasseur, l'étude des écoulements de convection libre de l'eau par résolution numérique sur ordinateur, terminait un voyage d'étude en France, où il avait été fort impressionné par divers laboratoires de recherche hydraulique, tels ceux de Marseille, Bordeaux ou Meudon. Au cours de son périple, il avait notamment appris que certaines bizarretés observées dans ses simulations numériques, pouvaient être liées à la naissance de la turbulence et n'avaient aucune raison de prendre directement le chemin du panier. Fort de cette fraîche connaissance il avait l'intention d'étendre son activité vers cet attirant phénomène qui de part son importance monopolise beaucoup de savants, et devrait trouver une explication satisfaisante vers le début du prochain millénaire.

Fin septembre 1980. Quand, accompagné de ma seule valise mais le cœur rempli d'espoir, je franchissai le seuil du bureau d'immigration de Mirabel-Montréal, ultime étape avant de découvrir le Nouveau Monde, l'équipe de recherche, animée par M. Robillard s'était enrichie d'un troisième membre, M. N'Guyen, qui devait plus particulièrement se charger des travaux sur l'instabilité des écoulements fluides.

Aussi lorsque ce dernier me proposa d'étudier "La stabilité de la convection naturelle d'une couche verticale d'eau, soumise à un gradient horizontal de température", j'acceptai.

Le domaine était entièrement vierge, tant pour l'équipe de recherche de Robillard, que pour moi: ma formation, très généraliste mais très poussée, reçue au cours de mes deux premières années à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, ne m'avait pas spécialement préparé à son approche, mais devait la faciliter. Nonobstant, il me fallait partir de zéro.

Les équations de Navier-Stockes qui régissent les écoulements fluides datent du début du XIX siècle, toutefois leur complexité due à leur caractère non linéaire, ne permet de les résoudre analytiquement que dans des cas particuliers fort simples et peu nombreux. Quant aux principales théories de la stabilité, elles furent établies au début du siècle, et se heurtent aux mêmes difficultés: elles sont généralement inapplicables. Cependant certaines de ces barrières ont été levées grâce à l'apparition, il y a plus de vingt ans, de l'ordinateur et de sa formidable capacité de calcul, qui a permis aux chercheurs de considérablement progresser, en résolvant d'anciens problèmes tout en développant de nouvelles théories.

En un peu plus de six mois je n'ai pas pu accomplir tout ce trajet et arriver au top niveau, aussi mon étude est loin d'être exhaustive. J'ai néanmoins acquis le potentiel théorique indispensable: la théorie linéaire et la théorie de l'énergie, me réservant l'avenir pour

aborder la théorie non-linéaire et surtout la théorie des bifurcations, véritable révélation des années 70.

En conséquence ce rapport ne constitue qu'une introduction à l'étude de la stabilité, et ce à partir d'un exemple bien déterminé, mais j'espère qu'il servira d'ouvrage de référence pour l'équipe de M. Robillard, mon éventuel successeur au sein de cette équipe, et pour toute personne qui désirerait se familiariser avec les instabilités.

Il aurait dû être soumis en vue de l'obtention d'un grade d'études supérieures, mais contrairement à mon prédecesseur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Jean-Marc Moulinier, qui avait auparavant séjourné quelque temps à l'X, l'Ecole Polytechnique de Montréal a refusé mon inscription. Aussi est-ce en tant qu'associé professionnel de recherche et sous le titre de "Rapport Technique" que je le présente.

Montréal, le 15 mai 1980

Michel Buisson

Elève-Ingénieur de 3ème année des Ponts et Chaussées
Associé Professionnel de Recherche de
l'Ecole Polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
Avant-propos	iii
Notations	x
Introduction	1
 I L'ETAT DE CONVECTION LIBRE	6
1.1 Description du problème	6
1.2 Formulation mathématique	7
1.2.1 Les approximations d'Oberbeck-Boussinesq	7
1.2.2 Les équations d'Oberbeck-Boussinesq	8
1.3 Adimensionnalisation	9
1.3.1 Grandeurs et équations adimensionnelles ..	9
1.3.2 Le nombre de Prandtl et le nombre de Grashof	11
1.4 Simplification et résolution	11
1.4.1 L'unicité et la stabilité du régime permanent	11
1.4.2 Ecoulement bidimensionnel	11
1.4.3 Le champ de température et le champ de vitesse	12
1.5 Cas d'un fluide présentant un maximum de densité: représentation parabolique	13
1.5.1 La vitesse: polynôme du quatrième degré ..	13
1.5.2 La variable dzêta	14
1.6 L'évolution du profil des vitesses et la définition du nombre de Grashof	15
1.6.1 Le profil de vitesse antisymétrique - le nombre de Grashof "linéaire"	15
1.6.2 Le profil de vitesse intermédiaire	17
1.6.3 Le profil de vitesse symétrique - le nombre de Grashof "parabolique"	19
1.6.4 Remarques	21

	Page
II LA STABILITE DE L'ETAT DE CONVECTION LIBRE	23
2.1 L'introduction d'une perturbation	23
2.1.1 Généralités	23
2.1.2 Une perturbation infiniment petite	24
2.1.3 Une perturbation quelconque	25
2.2 L'écoulement perturbé	26
2.3 La théorie linéaire	27
2.3.1 Le premier principe de Liapounov	27
2.3.2 Linéarisation des équations de la perturbation	28
2.3.3 La forme de la solution: une onde	28
2.3.4 Onde spatiale ou temporelle ?	29
2.3.5 Le problème de valeurs propres: aspect tridimensionnel	30
2.3.6 La stabilité neutre - définition de Gr_L	31
2.3.7 Le théorème de Squire	32
2.3.8 Le problème de valeurs propres: aspect bidimensionnel	33
2.3.9 Les instabilités hydrodynamiques	36
2.4 La théorie de l'énergie	38
2.4.1 Historique et généralités	38
2.4.2 L'équation de Reynolds-Orr	39
2.4.3 Définition de Gr_E et propriétés	41
2.4.4 Le problème de valeurs propres	42
2.4.5 Résolution du problème de valeurs propres	44
2.4.6 La perturbation la plus destabilisante	46
III LA SOLUTION NUMÉRIQUE	48
3.1 La méthode de Galerkin	49
3.2 La théorie linéaire: le problème de valeurs propres	50
3.3 La théorie linéaire: le spectre des célérités	52

NOTATION

	Page
Larina	
Annexe I - L'écoulement plan de Couette-Poiseuille ...	117
Annexe II - L'équation d'Orr-Sommerfeld adjointe	120
Annexe III - Majoration du terme dissipatif -	
$\int \int \int \bar{v}u ^2$ de l'équation de Reynolds-Orr	122
Annexe IV - Cas d'un nombre de Prandtl non nul	124
Annexe V - Remarques concernant les figures XVI à XXIX	128

Gr Nombre de Grashof défini par

$$Gr_1 = -Gr \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{2} (T_1 + T_2) / \Delta T$$

$$\text{ou } Gr_2 = \frac{3}{2} \ln \frac{d\theta}{dt} (\Delta T)$$

épaisseur de la couche fluide

pression

pression détaillée $P^* = P + p_{gr}$

perturbation de pression

pression perturbée

nombre de Prandtl $Pr = \frac{\rho c}{\lambda}$

température

température de référence

température du maximum de densité

température sur frontière

température perturbée

température

NOTATION

Latine

C	chaleur massique
c	célérité de la perturbation - se décompose en $c = c_r + i c_i$
c_r	célérité effective
c_i	facteur d'amplification
\mathcal{D}	tenseur vitesse de déformation: $\mathcal{D} = \frac{1}{2} (\text{grad } W + \text{grad}^T W)$
\vec{F}	forces extérieures
\vec{g}	accélération de la pesanteur
Ga	Nombre de Galilée $Ga = g \frac{\rho_0^2 c^2 H^3}{\lambda^2 \text{Pr}^2}$
Gr	Nombre de Grashof défini par
	$Gr_1 = -Ga \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right _{(T_1+T_2)/2} \Delta T$
	ou $Gr_2 = -\frac{1}{2} Ga \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right (\Delta T)^2$
H	épaisseur de la couche fluide
P	pression
P^*	pression déjaugée $P^* = P + \rho g z$
p^*	perturbation de pression
\tilde{P}^*	pression perturbée
Pr	Nombre de Prandtl $\text{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda}$
T	température
T_o	température de référence
T_M	température du maximum de densité
T_1, T_2	températures aux frontières
\tilde{T}	température perturbée
t	temps

\vec{v}	vitesse
\vec{v}^*	perturbation de vitesse, ayant pour composantes (u, v, w)
\vec{V}	vitesse perturbée
\vec{w}	vitesse du régime permanent $\vec{V} = \text{Gr} \cdot \vec{W}$
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	vecteurs unitaires de la base orthonormée
(x, y, z)	coordonnées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Grecque

α	alpha constante de propagation
γ	gamma défini par $\phi(T-T_0) = \gamma(T-T_M)^2$
ΔT	delta différence de température entre les parois
ζ	dzeta scalaire défini par $\zeta = \frac{T_2 - T_M}{T_M - T_1}$
θ	thêta angle de la direction de la perturbation avec l'écoulement de base
λ	lambda conductivité thermique
μ	mu viscosité dynamique
ξ	ksi énergie de la perturbation
π	pi scalaire intervenant dans l'équation d'Euler
ρ	rô masse volumique
ρ_0	masse volumique à la température de référence T_0
ρ_c	masse volumique considérée comme constante
τ^*	tau perturbation de température
ϕ	phi fonction définie par $\phi(T-T_0) = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$
ψ	psi fonction de courant

Opérateurs et autres.

∇	opérateur nabla
grad	opérateur gradient
div	opérateur divergence
rot	opérateur rotationnel
∇^2	opérateur laplacien
$\overline{\nabla}$	opérateur gradient vectoriel
D	différenciation par rapport à x
$\underline{\quad}$	désigne les vraies grandeurs
$\bar{\quad}$	désigne le complexe conjugué

INTRODUCTION

Tout français, je le suis, attribue les premières observations de ce que l'on pourrait appeler la naissance de la turbulence à Henri Bénard - 1900-1901, (les Anglais se réfèreront à Lord Reynolds - 1883), qui découvrit, en chauffant à sa partie inférieure une mince couche fluide (huile de baleine ou spermaceti), la partie supérieure étant à l'air libre, un phénomène fort étrange. Au-delà d'un certain gradient de température, une structure périodique stationnaire, constituée de cellules hexagonales créées par des mouvements convectifs dans le fluide, se développe.

Ces observations historiques trouvent leurs explications, - Rayleigh - 1916 en donne une première interprétation -, dans une réaction complexe à l'interface liquide-air. Supprimons cette interface en modifiant quelque peu le dispositif original de Bénard, à savoir, en insérant le fluide entre deux plaques, bonnes conductrices de la chaleur, permettant un contrôle du gradient de température avec une honnête précision.

Pour une différence de température très faible entre les deux plaques, le liquide reste au repos : la chaleur se transfert par conduction. L'échauffement de la plaque inférieure provoque une augmentation de la température des couches les plus basses du fluide, qui devenant moins denses que les couches supérieures ont tendance à monter alors que le fluide plus dense du haut de la couche tendra à descendre. Mais la viscosité du fluide et la diffusivité thermique

contrecarrent l'effet destabilisant du gradient de température. Au-delà d'une valeur critique de ce dernier, l'état conductif, état de repos, cède la place au régime convectif, c'est-à-dire à un mouvement de matière. La convection de Rayleigh-Bénard est caractérisée non par des cellules (Bénard), mais par des rouleaux stationnaires horizontaux agencés de manière parfaitement périodique.

Si nous augmentons encore le gradient de température, ces rouleaux, au-delà d'un certain seuil, se déforment périodiquement. Ainsi rencontrons-nous une succession de divers régimes qui nous mènent à l'état final de turbulence.

L'instabilité de Rayleigh-Bénard, abordée au début du siècle par Rayleigh-1916, Jeffreys-1926, puis une multitude de physiciens constitue l'un des deux prototypes des instabilités des mouvements fluides. (L'autre, étant le flux de Couette, écoulement obtenu entre deux cylindres concentriques qui tournent autour de leur axe à des vitesses angulaires différentes).

En effet le caractère non linéaire des équations de Navier-Stockes, régissant l'écoulement des fluides, ne permet pas de les résoudre analytiquement de façon générale. De même, les expériences requièrent de grandes précautions dans leurs réalisations, aussi les écoulements les plus simples, écoulements typiques, servent tout à la fois de cas d'école (Chandrasekhar-1961) et de plate-forme pour la recherche fondamentale.

Mais entre ces deux extrêmes, la recherche moins "fondamentale"

s'est emparée des concepts de la stabilité hydrodynamique et les a appliqués à toute une série d'écoulements générés par les conditions les plus diverses.

Le travail présenté ici, se situe dans cette deuxième voie.

- Faisons pivoter de 90 degrés, la couche horizontale de Rayleigh-Bénard, pour considérer une couche fluide, maintenant verticale, soumise à un gradient horizontal de température. Gershuni-1953 détermina le régime permanent ainsi que la stabilité de ce nouvel écoulement. Batchelor-1954 étudia un problème similaire mais plus réel puisqu'il considéra la couche d'air enfermée dans une double fenêtre, c'est-à-dire une cavité verticale fermée, où il montra l'existence de deux types de convection libre, dépendant du nombre de Rayleigh, nombre sans dimension fonction de la géométrie de la cavité (rapport d'aspect), des caractéristiques du fluide et proportionnel au gradient de température.

Les travaux de Gershuni furent repris par Birikh-1966 et Rudakov-1967 qui étudièrent la forme et le comportement des perturbations susceptibles de naître dans l'écoulement permanent et donc de le déstabiliser, tandis que la stabilité des deux régimes de convection mis en évidence par Batchelor fut analysée et vérifiée expérimentalement par Vest et Arpaci-1969.

En 1963, Veronis, considérant les couches atmosphériques, enrichit le problème de Rayleigh-Bénard en remplaçant le fluide à priori quelconque, par de l'eau prise aux basses températures. En effet, contrairement aux fluides généralement considérés, qui ont une relation

densité-température linéaire, l'eau présente vers 4°C un maximum de densité. Entre 0°C et 8°C une parabole, $d=d_0 [1 - 7.68 \cdot 10^{-6} (T-4^{\circ})^2]$ représente sa courbe de densité avec une approximation de 4%, l'approximation est de 10% entre 0°C et 14°C . Ses travaux furent complétés par de nombreux auteurs, voir Merker-Waas-Grigull-1979, qui modifièrent les conditions sur les parois et surtout apportèrent une plus grande précision dans l'expression de la densité.

- Le but de notre étude est de réexaminer le problème de la stabilité de l'écoulement libre dans une couche verticale, mais pour un fluide ayant une densité non linéaire, nous l'avons prise simplement du second ordre.

Dans la première partie, nous déterminons la vitesse de l'écoulement de base qui est une combinaison d'un profil antisymétrique, obtenu dans le cas d'une relation densité-température linéaire, et d'un profil symétrique dû au maximum de densité.

Diverses connaissances générales sur la stabilité des écoulements sont exposées dans la deuxième partie tandis que la suivante est consacrée à l'application de la théorie linéaire, et à l'application de la théorie de l'énergie. Dans les deux cas, le traitement numérique est réalisé par la méthode de Galerkin (voir Finlayson-1972), qui présente une très grande simplicité et s'est vue particulièrement développée depuis l'avènement des ordinateurs. Signalons enfin que nous nous sommes restreints aux seules instabilités hydrodynamiques (flux de Couette), les instabilités de nature thermohydrodynamique (instabilité

de Bénard-Rayleigh) seront abordées dans une, nous espérons, prochaine étape. Les résultats obtenus par les deux théories sont comparés et discutés, confrontés à l'expérience quand celle-ci existe. Divers domaines d'investigations futures sont suggérés dans la conclusion.

I ETAT DE CONVECTION LIBRE

Un parallélépipède posé sur sa petite base et rempli de fluide, à travers lequel la chaleur se transfert par convection naturelle, représente un modèle simplifié de réalisations pratiques aux multiples applications, comme l'isolation thermique qu'un tel système procure. Nous nous intéresserons au cas où le fluide est de l'eau.

Bien que physiquement tout problème occupe une région limitée de l'espace, il est souvent plus aisément mathématiquement de l'étendre à un domaine infini, aussi dans cette étude nous remplaçons le parallélépipède par une couche verticale infinie fluide, tout en sachant que nous ne représentons que les phénomènes se développant à mi-hauteur de notre cavité originelle. Nous pouvons d'ailleurs comparer nos résultats de convection naturelle à ceux de Watson-1972 qui réalisa numériquement les calculs pour une cavité fermée.

1.1 Description du problème

Considérons, dans le champ d'accélération de la pensanteur \vec{g} , une couche d'eau, verticale, infinie, d'épaisseur H , encadrée par deux parois planes immobiles, désignées par $\$,$ dont les températures sont maintenues respectivement à T_1 et T_2 , avec T_1 inférieure à T_2 . Remarquons dès à présent que le caractère visqueux de l'eau nous fournit une deuxième condition frontière: la vitesse doit être nulle sur les parois.

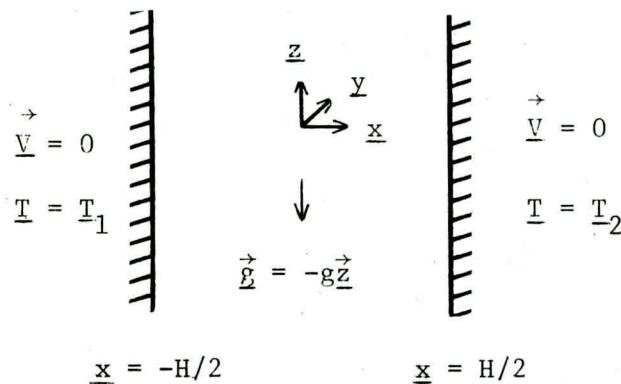


Figure I - modélisation

Les axes de référence sont choisis comme suit:

- \underline{x} est orthogonal aux parois
- \underline{z} est vertical dirigé vers le haut
- \underline{y} complète le repère $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ afin qu'il soit direct.

L'origine du repère orthonormé est située dans le plan équidistant des deux parois.

1.2 Formulation mathématique

1.2.1 Approximations d'Oberbeck-Boussinesq

Supposons que la différence de température entre les deux parois soit assez faible, pour nous placer dans le cadre des approximations de Oberbeck-1879 Boussinesq-1903, dont la validité n'est toujours pas définitivement prouvée (Gray-Giorgini-1976). Celles-ci nous permettent:

- de considérer que la masse volumique ne dépend que de la température
- de ne pas prendre en compte, les variations de la masse volumique, sauf bien entendu dans le terme des forces extérieures de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. (En effet, la variation de la masse volumique en fonction de la température et donc du lieu,

constitue le moteur du mouvement).

- Et enfin de négliger, dans l'équation de conservation de l'énergie, la dissipation visqueuse produite par les frottements internes.

De plus nous tenons les caractéristiques thermo-physiques du fluide, à savoir la viscosité μ , la chaleur massique C et la conductivité thermique λ pour constantes.

1.2.2 Equations d'Oberbeck-Boussinesq

- Les équations fondamentales de l'hydrodynamique se présentent alors sous la forme très simple:

- Equation de conservation de la masse, dite équation de continuité:

$$\underline{\text{div}} \vec{\underline{V}} = 0 \quad (001a)$$

- Equation de conservation de l'énergie, qui se réduit, vu les hypothèses formulées, à la conservation de la chaleur:

$$\rho_c C \frac{d\underline{T}}{dt} = \lambda \nabla^2 \underline{T} \quad (001b)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho_c \frac{d\vec{\underline{V}}}{dt} = - \underline{\text{grad}} P + \rho \vec{\underline{F}} + \mu \nabla^2 \vec{\underline{V}} \quad (001c)$$

où $\vec{\underline{F}}$ désigne l'ensemble des forces extérieures; dans notre cas, la force de gravité $\vec{\underline{F}} = -g\vec{\underline{z}}$ (001d)

- La masse volumique du fluide est donnée par la fonction d'état:

$$\rho = \rho_0 [1 - \underline{\phi}(\underline{T} - \underline{T}_0)] \quad (001e)$$

ρ_0 étant la masse volumique à la température de référence \underline{T}_0 .

- Transformons l'équation de conservation de la quantité de mouvement en introduisant la pression déjaugée \underline{P}^* , somme de la pression \underline{P} et de l'énergie potentielle $\rho_0 g \underline{z}$, soit:

$$\rho_c \frac{\vec{d}\underline{V}}{dt} = -\underline{\text{grad}} \underline{P}^* + \rho_0 \phi (\underline{T} - \underline{T}_0) \underline{g} \underline{z} + \mu \underline{V}^2 \underline{V} \quad (001 \text{ c}')$$

1.3 Adimensionnalisation

1.3.1 Grandeurs et équations adimensionnelles

- Suivant un processus classique en dynamique des fluides, nous réduisons le nombre des variables intervenant dans le problème, en adimensionnalisant les équations par l'introduction des grandeurs réduites suivantes:

$$\text{Longueurs} \quad \underline{x} = x \cdot H \quad ; \quad \underline{y} = y \cdot H \quad ; \quad \underline{z} = z \cdot H \quad (002a)$$

$$\text{Température} \quad \underline{T} = (\underline{T}_1 + \underline{T}_2) / 2 + T (\underline{T}_2 - \underline{T}_1) \quad (002b)$$

$$\text{Vitesse} \quad \underline{\vec{V}} = \vec{V} \frac{\mu}{\rho_c H} \quad (002c)$$

$$\text{Temps} \quad \underline{t} = t \frac{\rho_c H^2}{\mu} \quad (002d)$$

$$\text{Pression} \quad \underline{P}^* = P^* \frac{\mu^2}{\rho_c H^2} \quad (002e)$$

La fonction d'état se transforme en

$$\rho = \rho_0 [1 - \phi(\underline{T} - \underline{T}_0)] = \rho_0 [1 - \phi(T - T_0)] \quad (002f)$$

et, en explicitant la dérivation par rapport au temps $\frac{d}{dt} \dots = \frac{\partial}{\partial t} \dots + (\vec{V} \cdot \nabla) \dots$ les équations sous forme adimensionnelle s'écrivent alors:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (003a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (003b)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\operatorname{grad} P^* + Ga \phi(T - T_0) \cdot \vec{z} + \nabla^2 \vec{V} \quad (003c)$$

où nous avons fait apparaître

$$\text{le nombre de Prandtl} \quad Pr = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (004a)$$

$$\text{le nombre de Galilée} \quad Ga = g \frac{\rho_0^2 H^3}{\mu} \quad (004b)$$

(Nous avons supposé la température de référence T_0 , suffisamment proche de T_1 et T_2 pour pouvoir confondre ρ_0 et ρ_c).

Le problème se schématisé alors sous la forme:

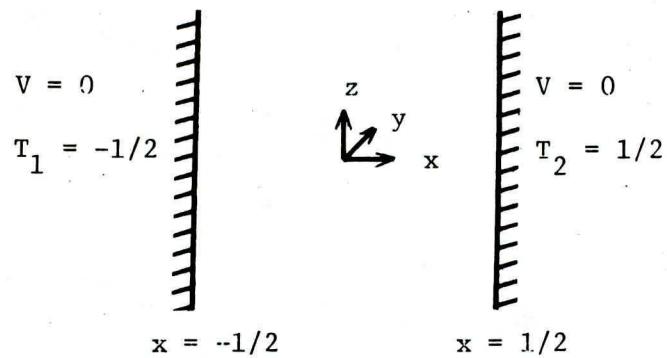


Figure II - modélisation adimensionnelle

1.3.2 Nombre de Prandtl et nombre de Galilée

Le nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique et de la diffusivité thermique, ne dépend que des propriétés du fluide, et permet de prévoir si l'énergie dissipée par les forces de viscosité dans la couche limite est transmise au sein du fluide (Pr petit) ou stockée au voisinage des parois (Pr grand). On peut dire aussi qu'il compare l'épaisseur de la couche limite thermique et celle de la couche limite visqueuse.

Le nombre de Galilée caractérise le rapport entre les forces de gravité et les forces de viscosité.

1.4 Simplifications et résolution

1.4.1 Unicité et stabilité du régime permanent

- Les équations (003) associées aux conditions frontières traduites sur la figure II ont quelle que soit la valeur de la différence de température entre les parois, une solution indépendante du temps.

De plus pour des valeurs suffisamment petites de la différence de température, cette solution est unique et stable: c'est-à-dire que, toute perturbation surimposée décroît et le système reprend son équilibre (Sattinger-1973).

Nous chercherons la solution du régime permanent.

1.4.2 Ecoulement bidimensionnel

- En outre, l'observation dans le cas d'un fluide ayant une relation densité-température linéaire nous enseigne que l'écoulement est

plan, c'est-à-dire que la solution est bidimensionnelle (les dérivées partielles par rapport à y sont nulles) et que la vitesse n'admet qu'une seule composante, celle-ci étant verticale.

La symétrie du problème nous invite d'ailleurs à retenir cette forme de solution, soit

$$\vec{V} = V \vec{z} \quad (005)$$

1.4.3 Champ de température - champ de vitesse

- Afin d'éliminer une variable, la pression, nous prenons le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement:

Les équations du régime permanent s'écrivent sous forme scalaire:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (006a)$$

$$\text{Pr.V. } \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (006b)$$

$$0 = G_a \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \quad (006c)$$

ou en réintroduisant la masse volumique:

$$G_a \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \quad (006c')$$

- D'après l'équation de continuité, V n'est fonction que de l'unique variable x . Montrons qu'il en va de même pour notre autre inconnue T , en dérivant la dernière équation (006c') par rapport à z , soit $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial z} = 0$. Rappelons-nous que la température est constante le long des parois, en conséquence la masse volumique et donc la température ne peuvent pas dépendre de z .

Le problème se résume très simplement en:

T est fonction linéaire de x , ce qui correspond aux mesures expérimentales.

$$\text{La vitesse vérifie: } \frac{1}{\rho_0} G_a \frac{d\rho}{dx} = - \frac{d^3 V}{dx^3} \quad (007a)$$

avec les conditions aux frontières:

$$T(-1/2) = -1/2 \quad T(1/2) = 1/2 \quad (007\alpha)$$

$$V(-1/2) = 0 \quad V(1/2) = 0 \quad (007\beta)$$

De plus nous considérerons que le débit à travers toute section horizontale est nul, soit $\int_{-1/2}^{1/2} V dx = 0 \quad (007\gamma)$

- Nous pouvons d'ores et déjà résoudre l'équation du champ de température: $T = x$

Par contre, la vitesse dépend intimement de la connaissance de la masse volumique: si nous approximons ρ par un polynôme de degré n , V sera donné par un polynôme de degré $(n+2)$.

1.5 Cas d'un fluide présentant un maximum de densité:

représentation parabolique

1.5.1 Vitesse: polynôme du 4e degré

- En choisissant pour température de référence, T_0 , la température T_M , liée au maximum de densité, la masse volumique, en vraie grandeur, peut être représentée par la parabole suivante:

$$\rho = \rho_M [1 - \gamma (T - T_M)^2] \quad (008)$$

soit

$$\rho = \rho_M [1. - \gamma \left(\frac{T_1 + T_2}{2} + x \cdot \Delta T - \frac{T_M}{2} \right)^2] \quad (008')$$

La dérivation par rapport à x nous donne:

$$\frac{1}{\rho_M} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\gamma \Delta T \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_M}{2} \right) - 2\gamma (\Delta T)^2 x \quad (008'')$$

d'où l'expression de la vitesse:

$$V = -2\gamma \Delta T \left| \begin{array}{l} + \Delta T \frac{x^4}{24} \\ + \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_M}{2} \right) \frac{x^3}{6} \\ - \Delta T \frac{x^2}{80} \\ - \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_M}{2} \right) \frac{x}{24} \\ + \Delta T \frac{1}{1920} \end{array} \right. \quad (009)$$

La vitesse, au rapport homothétique $(\Delta T)^2$ près possède une partie paire et une partie impaire pondérées par le facteur

$$\frac{\frac{T_1 + T_2 - 2T_M}{2}}{2\Delta T}$$

1.5.2 Variable dzeta

Introduisons la nouvelle variable proportionnelle à $T_2 - T_M$

$$\zeta = \frac{\frac{T_2 - T_M}{2}}{\frac{T_M - T_1}{2}} \quad (010a)$$

Pour T_1 inférieur à T_M , ζ appartient à l'intervalle $[-1., +\infty[$

Pour T_1 supérieur à T_M , ζ appartient à l'intervalle $]-\infty, -1.]$

Les deux égalités

$$\underline{T}_2 - \underline{T}_1 = (1 + \zeta)(\underline{T}_M - \underline{T}_1) \quad (010b)$$

$$\underline{T}_2 + \underline{T}_1 - 2\underline{T}_M = (\zeta - 1)(\underline{T}_M - \underline{T}_1) \quad (010c)$$

nous permettent d'exprimer la vitesse en fonction de ζ

$$V = -2 \cdot \gamma \cdot G_a (1 + \zeta) (\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2 \left| \begin{array}{l} (1 + \zeta) \frac{x^4}{24} \\ \frac{\zeta - 1}{2} \frac{x^3}{6} \\ -(1 + \zeta) \frac{x^2}{80} \\ -\frac{\zeta - 1}{2} \frac{x}{24} \\ (1 + \zeta) \frac{1}{1920} \end{array} \right. \quad (011)$$

1.6 Evolution du profil des vitesses et définition du nombre de Grashof

- Prenons notre système au repos, la couche fluide et les deux parois étant à la température \underline{T}_1 , inférieure à \underline{T}_M et chauffons l'une des deux parois, très lentement, afin de nous assurer d'être toujours en régime permanent. Étudions l'évolution du profil de vitesse en fonction de ζ , qui va décrire l'intervalle $[-1, +\infty[$.

1.6.1 Nombre de Grashof "linéaire" - Profil de vitesse antisymétrique

- Introduisons le nombre de Grashof Gr_1 , rapport du nombre de Galilée et du nombre de Gay-Lussac :

$$-1/\gamma(\zeta-1)(\zeta+1)(\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2$$

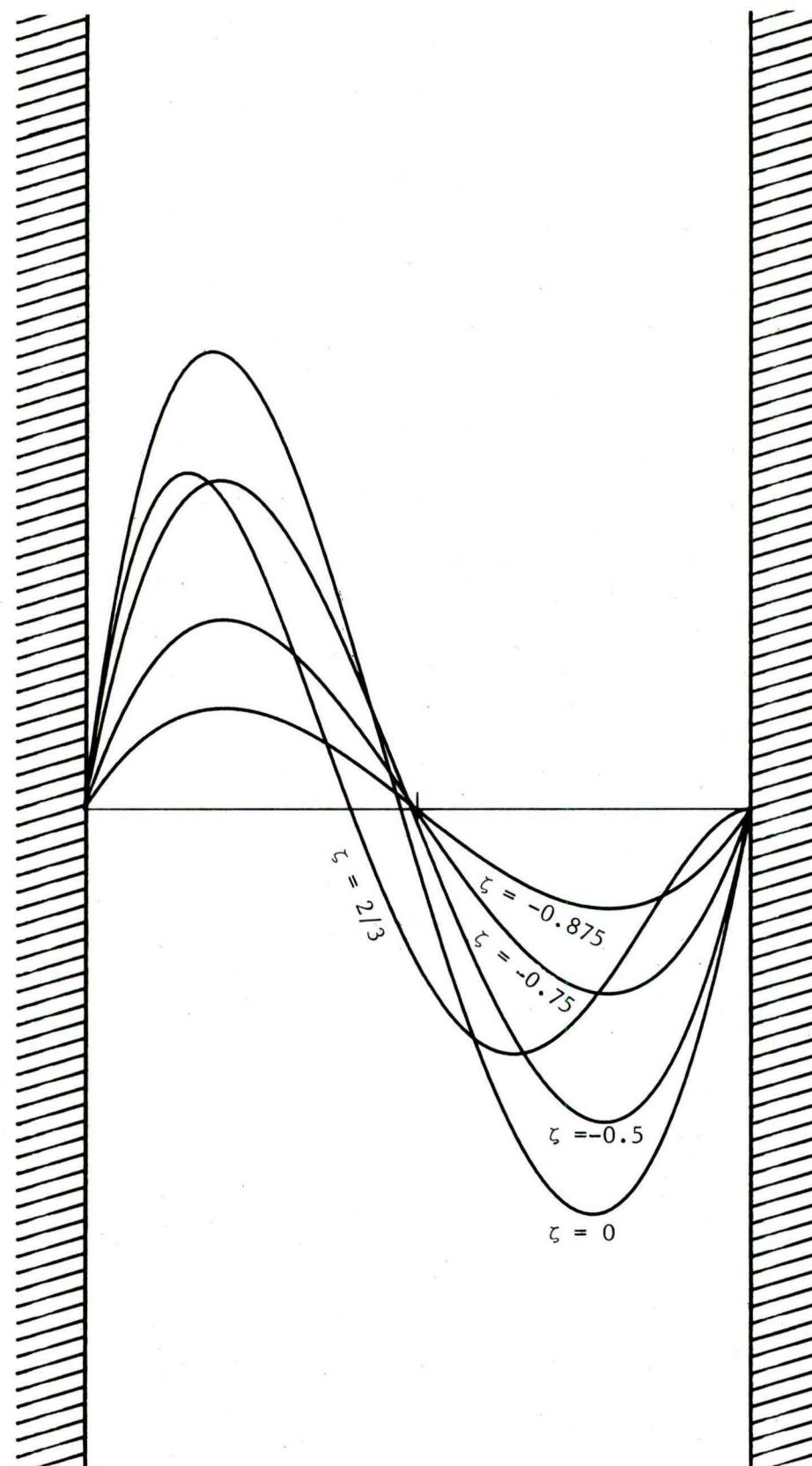


Figure III - Evolution du profil de vitesse

ζ compris entre -1 et $2/3$

Echelle: e

soit

$$Gr_1 = -Ga \gamma (\zeta-1)(\zeta+1)(T_M - T_1)^2 \quad (012a)$$

défini à partir du coefficient d'expansion thermique au point médian, qui a pour température $(T_1 + T_2)/2$

$$Gr_1 = -Ga \frac{\partial \rho}{\partial T} \left| \frac{T_1 + T_2}{2} \right. \Delta T \quad (012b)$$

Le nombre de Grashof exprime le rapport des forces d'Archimède qui agissent sur un élément fluide porté à une température différente de celle du milieu qui l'entoure et des forces de viscosité. Gr élevé caractérise une augmentation du coefficient de convection.

- Dans le cas limite $\zeta = -1$, les températures des deux parois sont égales, la vitesse réelle de l'écoulement est nulle; mais si nous la divisons par Gr_1 , nous obtenons un polynôme impair de l'abscisse x .

$$V = Gr_1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{24} \right) \quad (013)$$

La vitesse s'annule, outre sur les parois, au point P_1 , milieu de la couche.

L'opposé de ce profil s'obtient dans le cas classique d'une relation densité-température linéaire.

1.6.2 Profil de vitesse intermédiaire

Le débit à travers toute section horizontale étant nul, nous observons, lorsque la paroi chaude s'échauffe, la perte du caractère antisymétrique du profil, conjointement avec le déplacement du point

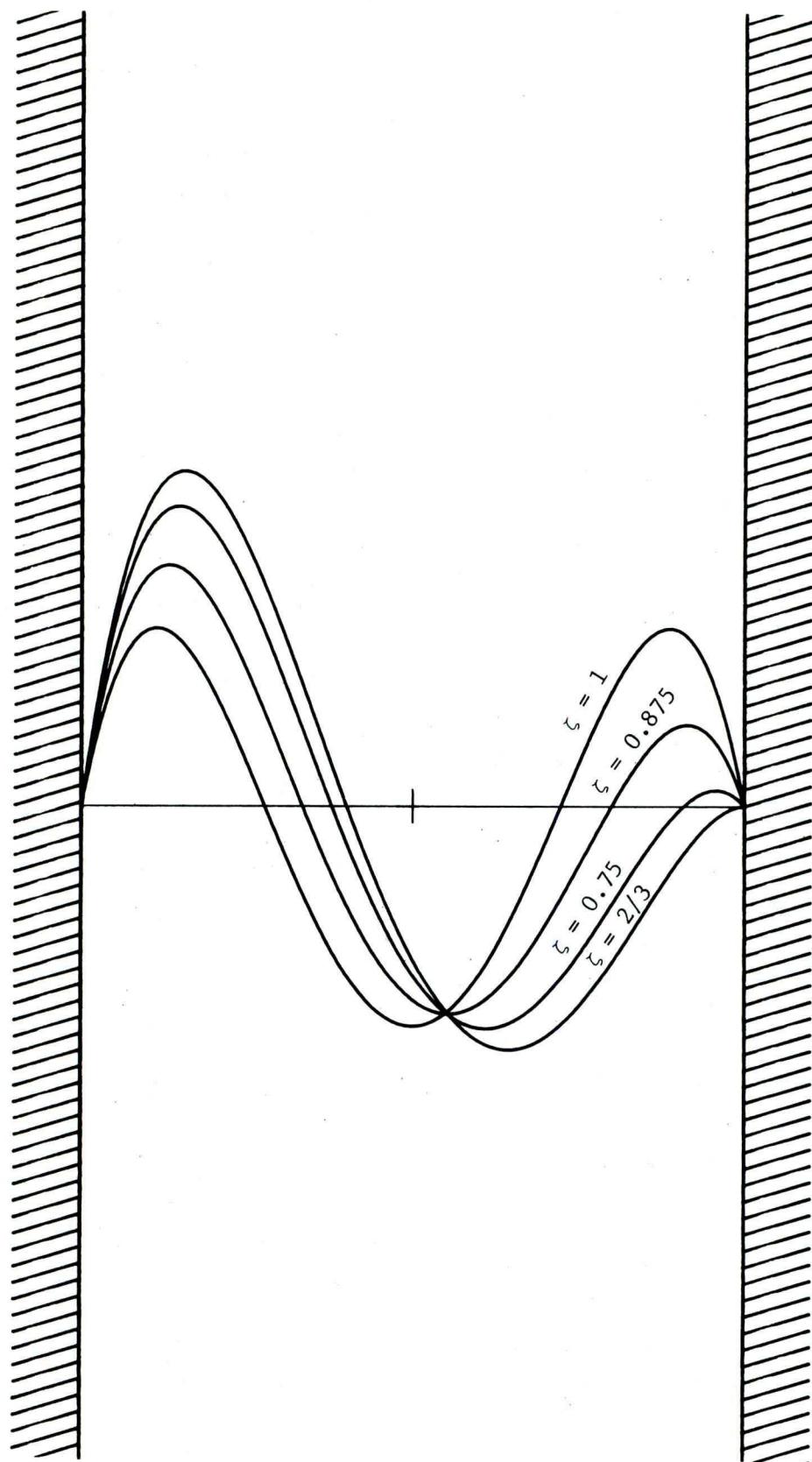


Figure IV - Evolution du profil de vitesse

ζ compris entre $2/3$ et 1

Echelle: e

P_1 , de vitesse nulle, vers la paroi froide: la vitesse maximale croît plus vite que ne décroît la vitesse minimale (figure III).

L'extrémum de la vitesse minimale est atteint pour ζ légèrement inférieur à zéro, tandis que l'extrémum de la vitesse maximale apparaît pour ζ légèrement supérieur à zéro.

L'extrémum de la vitesse minimale étant dépassé, la tangente sur la paroi chaude se gauchit, jusqu'à s'annuler pour $\zeta = 2/3$.

Nous constatons alors (figure IV) l'apparition d'un quatrième point de vitesse nulle, soit P_2 , le profil tendant vers sa forme symétrique obtenue pour $\zeta = 1$.

1.6.3 Nombre de Grashof "parabolique" - Profil de vitesse symétrique

A l'image de Batchelor-1954, définissons le nombre de Grashof

$$\begin{aligned} Gr_2 &= -\gamma \cdot Ga(1+\zeta)^2 (T_M - T_1)^2 & (014a) \\ &= -\gamma \cdot Ga(\Delta T)^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} Ga(\Delta T)^2 \quad (014b)$$

construit à partir de la dérivée seconde de la masse volumique.

La vitesse s'exprime en fonction de ce nouveau nombre:

$$V = -2 \cdot Gr_2 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{80} + \frac{1}{1920} \right) \quad (015)$$

opposée de l'expression obtenue dans le cas d'une couche fluide verticale infinie, possédant des sources de chaleur internes.

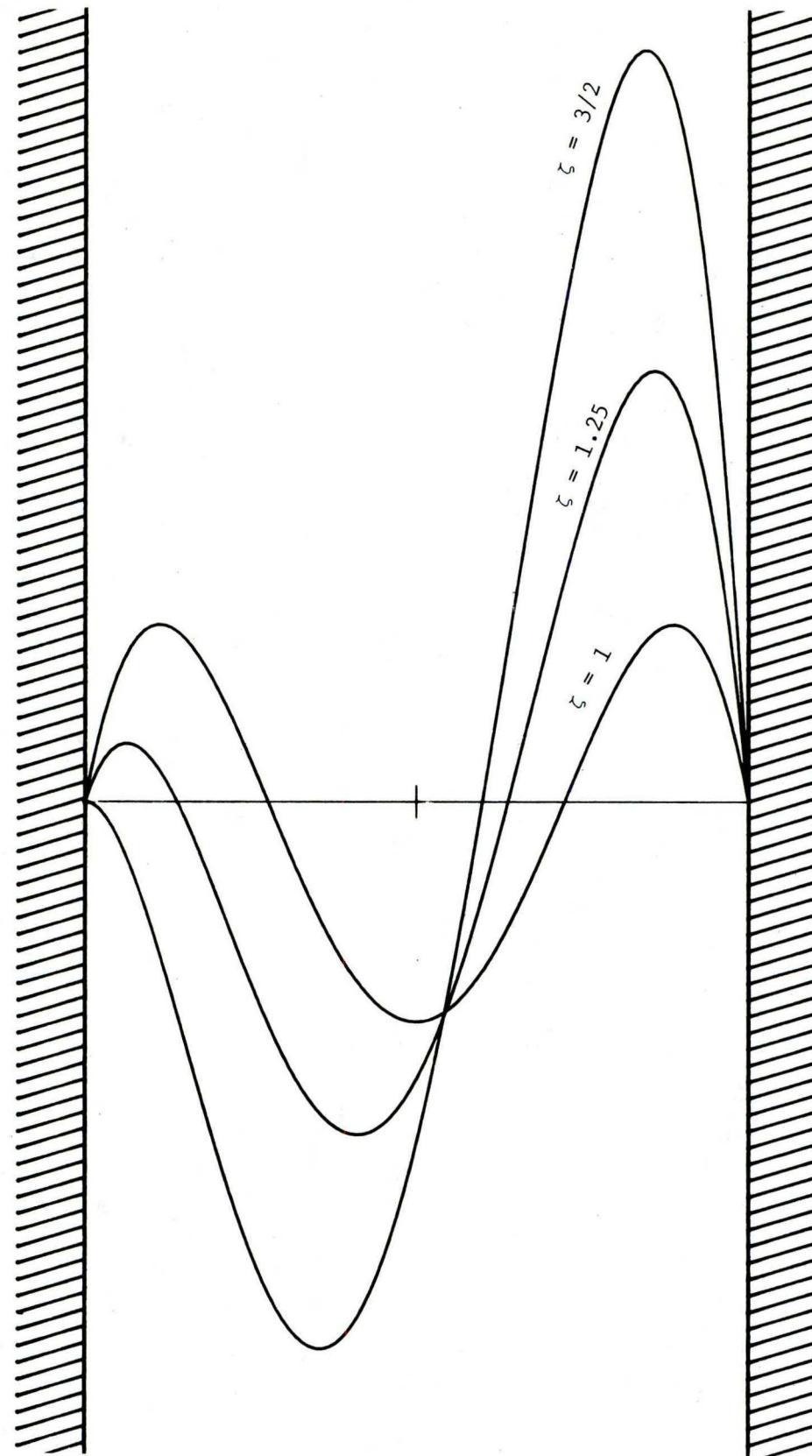


Figure V - Evolution du profil de vitesse

ζ compris entre 1 et $3/2$

Echelle: e

Les points P_1 et P_2 sont situés aux abscisses respectives $-1./\sqrt{20}$ et $+1./\sqrt{20}$.

1.6.4 Remarques

- Notons enfin que pour ζ inférieur à $3./7$ le profil ne présente qu'un seul point d'inflexion, pour ζ supérieur à $3./7$, il en possède deux. Le deuxième naît bien sûr sur la paroi chaude.

Dans le cas symétrique et le cas antisymétrique, le(s) point(s) d'inflexion est(sont) confondu(s) avec le(s) point(s) intermédiaire(s), n'appartenant pas aux parois, de vitesse nulle P_1 (et P_2).

- Si nous continuons à chauffer la paroi chaude (figure V et figure VI), nous nous éloignons du profil symétrique et retrouvons les profils précédents à un facteur homothétique et à une symétrie par rapport à l'axe médian, près.

Les profils sont ainsi "égaux" pour ζ et $1./\zeta$.

Ceci pourrait nous inciter à prendre pour variable décrivant le profil

$$\frac{1}{\zeta+1/\zeta} = \frac{\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2} \frac{(\zeta+1/\zeta-1)^2-1}{(\zeta+1/\zeta-1)^2+1}$$

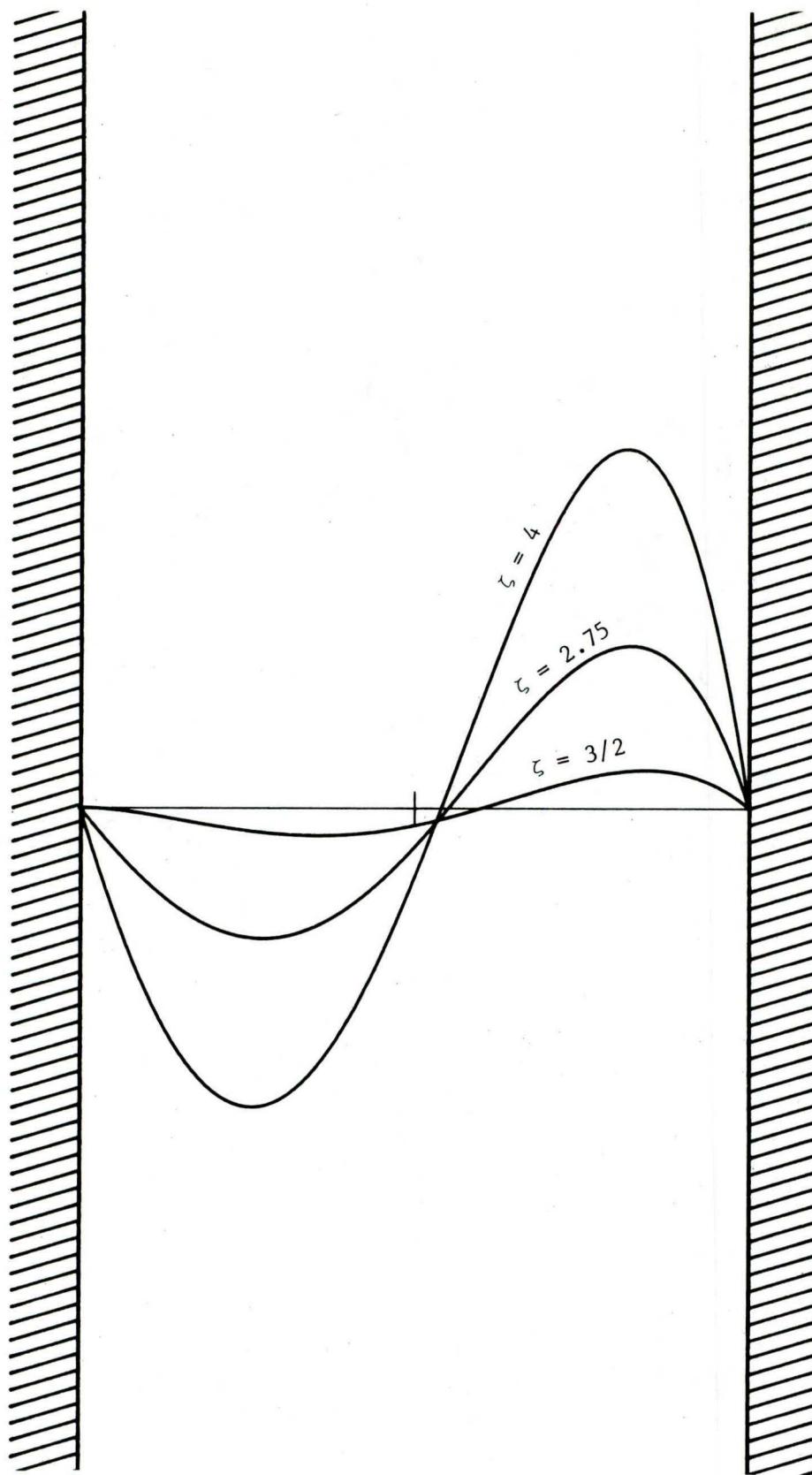


Figure VI - Evolution du profil de vitesse

ζ supérieur à $3/2$

Echelle: $e/20$

II STABILITE DE L'ETAT DE CONVECTION LIBRE

Au chapitre précédent, nous avons étudié l'évolution de notre écoulement quand nous chauffions l'une des deux plaques contenant notre couche fluide, tout en maintenant l'autre à sa température initiale. Quelle que soit la température de la paroi chaude nous avons été capable, sans grande difficulté, de résoudre les équations fondamentales de l'hydrodynamique (001), mais il nous faut nous demander si cette solution mathématique, est physiquement acceptable.

2.1 Introduction d'une perturbation

2.1.1 Généralités

La théorie de la stabilité prend comme point de départ la constatation qu'un écoulement laminaire, tel celui que nous avons déterminé, correspond à des conditions de réalisation trop idéalisées: tout d'abord, notre écoulement infini n'est qu'une approximation de celui observé dans une cavité parallélépipédique posée sur sa petite base, ensuite il suppose que les parois de notre installation sont parfaitement parallèles, planes et lisses sans la moindre rugosité. De plus il nous fait admettre qu'il n'existe à l'entour de notre système, aucune source déstabilisante.

Dans le monde physique, des fluctuations de quelque nature qu'elles soient sont inévitablement présentes et il convient d'en tenir compte. On considère donc que l'écoulement réel combine l'écoulement de base et une perturbation.

Le but de la théorie de la stabilité est d'étudier l'évolution des perturbations en fonction du temps.

2.1.2 Perturbation infiniment petite

Une première approche consiste à supposer que nous sommes capables de filtrer ces perturbations et que seules, celles infiniment petites, non contrôlées, s'introduiront dans notre écoulement. Nous pouvons alors nous servir d'une théorie linéaire: nous négligeons les termes non linéaires dans les équations et les conditions frontières.

Notre problème linéarisé, admet, si le temps n'apparaît pas explicitement, des solutions dépendant de façon exponentielle du temps. L'instabilité est caractérisée par l'existence de perturbations dont l'amplitude croît avec le temps. Dans le cas de la stabilité, toute perturbation tend vers zéro. Entre ces deux états, la situation limite de la "stabilité neutre" survient quand il existe une perturbation qui, après introduction, conserve une amplitude constante, toutes les autres disparaissant.

Considérons un écoulement instable: l'amplitude de la perturbation va donc croître exponentiellement avec le temps. Aussi nous devons admettre que la théorie linéaire n'est valide qu'à la naissance de la perturbation, pendant un laps de temps assez court, son amplitude devant, de toute évidence, restée finie.

Remarquons également que nous pouvons introduire autant de perturbations que nous le désirons et dans l'ordre qu'il nous plaît, la linéarité du problème nous permet de les dissocier, ce qui physiquement

n'est pas réaliste.

C'est pourquoi l'analyse linéaire de la stabilité doit être considérée comme la première étape d'une étude plus complète. Bien plus, elle constitue le point de départ d'une analyse non-linéaire, analyse qui doit être développée quand la théorie linéaire devient inadéquate et que nous devons tenir compte des termes non-linéaires des équations.

2.1.3 Perturbation quelconque

La théorie linéaire est une approche locale de la stabilité, dans le sens où nous étudions des perturbations infiniment petites, mais celles du monde physique sont certainement de taille finie, aussi nous pouvons concevoir une approche globale ne tenant pas compte de la taille des perturbations: c'est ce que réalise la théorie de l'énergie.

Nous dirons alors qu'un écoulement est stable si toute perturbation introduite, ayant une énergie initiale quelconque, s'annule en fonction du temps. Par contre, s'il existe une perturbation dont l'énergie reste finie, l'écoulement sera instable.

Mais le fait de considérer des perturbations, sans préciser leur taille initiale, nous conduit à simplifier les équations du problème et ne nous permet pas de suivre le processus de destabilisation.

Néanmoins les deux théories, que nous venons brièvement d'exposer, se complètent admirablement, puisque l'une nous assure la stabilité de l'écoulement (la théorie de l'énergie) et l'autre son instabilité

(la théorie linéaire).

Nous allons les étudier toutes deux plus en détail.

2.2 Ecoulement perturbé

Pour étudier la stabilité du régime de base, c'est-à-dire la stabilité de l'état de convection libre précédemment obtenu pour des conditions frontières données, nous introduisons dans l'écoulement une perturbation et allons analyser son comportement.

Nous partons donc de l'état initial (équations de l'écoulement de base (003)) auquel nous ajoutons des perturbations de vitesse \vec{v}^* , de température τ^* et de pression p^* :

$$\vec{v} = \vec{v} + Gr \vec{v}^* \quad (016a)$$

$$\tau = T + \tau^* \quad (016b)$$

$$\mathcal{P} = P^* + p^* \quad (016c)$$

avec $\vec{v} = Gr \vec{W}$, la définition de \vec{W} étant liée à celle du nombre de Grashof: Gr .

L'écoulement perturbé vérifie bien sûr les conditions frontières

$$\vec{v}|_{\$} = 0 \quad \text{et} \quad \tau|_{\$} = 0 \quad (016\alpha)$$

Les trois équations fondamentales se présentent sous forme perturbée:

$$\text{div}(\vec{W} + \vec{v}^*) = 0 \quad (017a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (T + \tau^*) + Gr [(\vec{W} + \vec{v}^*) \cdot \vec{v}] (T + \tau^*) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 (T + \tau^*) \quad (017b)$$

$$\text{Gr} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{W} + \vec{v}^*) + \text{Gr}^2 (\vec{W} + \vec{v}^*) \cdot \nabla (\vec{W} + \vec{v}^*) = -\text{grad}(P^* + p^*) + \text{Ga} \cdot \phi(T + \tau^* - T_0) \vec{z} + \text{Gr} \nabla^2 (\vec{W} + \vec{v}^*) \quad (017c)$$

Sachant que W , T et P vérifient les équations non perturbées, nous obtenons les équations de la perturbation:

$$\text{div } \vec{v}^* = 0 \quad (018a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau^* + \text{Gr} [(\vec{W} + \vec{v}^*) \cdot \nabla \tau^* + (\vec{v}^* \cdot \nabla) T] = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \tau^* \quad (018b)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + \text{Gr} [(\vec{W} + \vec{v}^*) \cdot \nabla \vec{v}^* + (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{W}] = -\frac{1}{\text{Gr}} \text{grad } p^* + \frac{\text{Ga}}{\text{Gr}} [\phi(T + \tau^* - T_0) - \phi(T - T_0)] \vec{z} + \nabla^2 \vec{v}^* \quad (018c)$$

L'objectif des deux théories, théorie linéaire et théorie de l'énergie, est de déterminer les conditions critiques d'apparition d'un écoulement autre que celui de base, conditions caractérisées par le dépassement d'une certaine valeur du nombre de Grashof (ou de Rayleigh).

2.3 Théorie linéaire

2.3.1 Premier principe de Liapounov

En supposant la perturbation infiniment petite, il est toujours possible de linéariser les équations du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Les équations obtenues sont celles d'un oscillateur linéaire associées à la position d'équilibre. La stabilité de la position d'équilibre est liée à celle de l'oscillateur linéaire associé.

On démontre le premier principe de Liapounov: si toutes les

racines caractéristiques de l'oscillateur linéaire ont leur partie réelle négative, la position d'équilibre est stable. Si une au moins des racines a sa partie réelle positive, la position d'équilibre est instable.

Ce principe n'est valide que dans le cas d'un mouvement régi par un système d'équations différentielles ordinaires, nous allons néanmoins l'utiliser dans le cas des équations différentielles partielles de l'hydrodynamique.

2.3.2 Linéarisation des équations de la perturbation

Dans les équations de la perturbation (018) nous développons ϕ en série de Taylor-Young et ne tenons compte que des termes du premier ordre, en supposant que \vec{v}^* , τ^* et p^* , ainsi que leurs dérivées premières, sont des infiniment petits.

$$\text{div } \vec{v}^* = 0 \quad (019a)$$

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} + \text{Gr} [(\vec{W} \cdot \nabla) \tau^* + (\vec{v}^* \cdot \nabla) T] = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \tau^* \quad (019b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + \text{Gr} [(\vec{W} \cdot \nabla) \vec{v}^* + (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{W}] = \\ - \frac{1}{\text{Gr}} \text{grad } p^* + \frac{\text{Ga}}{\text{Gr}} \tau^* \left. \frac{\partial \phi}{\partial T} \right|_{T=T_0} \vec{z} + \nabla^2 \vec{v}^* \end{aligned} \quad (019c)$$

2.3.3 Forme de la solution: onde

Les perturbations se propagent dans le fluide sous forme d'onde.

Aussi choisissons-nous pour résoudre les équations (019) des solutions du type:

$$q^*(x, y, z, t) = q(x) e^{i\alpha(y \sin \theta + z \cos \theta - ct)}$$

où q est le vecteur (vitesse, température, pression).

La perturbation générale sera obtenue par superposition de telles solutions.

Si nous considérons une seule onde et ses harmoniques nous obtiendrons une perturbation périodique. Une série de Fourier nous donnera une perturbation quasi-périodique et une intégrale de Fourier une fonction L^2 intégrable.

Enfin n'oublions pas que l'écoulement étudié n'est qu'une modélisation d'un écoulement de laboratoire et que la schématisation mathématique est l'extension à un domaine infini, de l'écoulement observable dans la partie centrale d'une cavité parallélépipédique finie. Pour les perturbations se développant dans le fluide, agissons de même et considérons des perturbations qui coïncident avec les perturbations réelles observées au milieu de notre parallélépipède, petit domaine fini.

De toute façon, quelle que soit la forme adoptée, une analyse spectrale des équations linéarisées nous permet de séparer chaque mode.

2.3.4 Onde spatiale ou temporelle ?

Dans la représentation $q(x) = q^*(x) e^{i\alpha(y \sin \theta + z \cos \theta - ct)}$, on choisit généralement α réel, la solution est ainsi finie tout le long de la couche fluide, c est alors complexe. L'onde est spatialement périodique, et croît ou décroît avec le temps.

Certains chercheurs estiment que la perturbation observée expérimentalement, telle dans l'écoulement de Blasius, écoulement obtenu en chauffant une plaque verticale qui limite un fluide semi-infini, serait périodique en fonction du temps et croîtrait ou décroîtrait spatialement. Gaster-1965 a montré que les résultats des deux représentations sont comparables.

En toute rigueur nous devrions prendre α et c complexes, mais l'onde n'a alors aucune signification physique et cette approche ne sert qu'à développer une technique de calcul (Gaster et Jordinson-1975).

Notre choix se porte donc sur $q^*(x) = q(x) e^{i\alpha(z_1 - ct)}$ où \vec{z}_1 est la direction de la perturbation, située dans le plan (\vec{y}, \vec{z}) à angle θ avec \vec{z} .

α , réel, est la constante de propagation de la perturbation, c en général complexe est sa célérité.

2.3.5 Problème tridimensionnel

Nous effectuons alors une rotation du repère initial $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ autour de x , pour nous placer dans le nouveau repère $(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

où la vitesse de base est $\vec{W} = \begin{cases} 0 \\ \sin\theta \cdot W \\ \cos\theta \cdot W \end{cases}$ (020a)

et la perturbation $\vec{v}^* = \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$ (020b)

Réécrivons nos équations de la perturbation, en décomposant l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur les trois axes de notre nouveau repère:

$$Du + i\alpha w = 0 \quad (021a)$$

$$-i\alpha c\tau + Gr [i\alpha \cos\theta \cdot W \cdot \tau + u \cdot DT] = \frac{1}{Pr} (D^2 - \alpha^2) \tau \quad (021b)$$

$$-i\alpha cu + Gr [i\alpha \cos\theta \cdot W \cdot u] = -\frac{1}{Gr} Dp + (D^2 - \alpha^2) u \quad (021c)$$

$$-i\alpha cv + Gr [i\alpha \cos\theta \cdot W \cdot v + u \sin\theta \cdot DW] = \frac{Ga}{Gr} \tau \frac{\partial \phi}{\partial T} \sin\theta + (D^2 - \alpha^2) v \quad (021d)$$

$$-i\alpha cw + Gr [i\alpha \cos\theta \cdot W \cdot w + u \cos\theta \cdot DW] = -\frac{i\alpha}{Gr} p + \frac{Ga}{Gr} \tau \frac{\partial \phi}{\partial T} \cos\theta + (D^2 - \alpha^2) w \quad (021e)$$

où D représente la dérivation par rapport à la variable x .

N'oublions pas les conditions frontières:

$$u(\pm 1/2) = 0 \quad v(\pm 1/2) = 0 \quad w(\pm 1/2) = 0 \quad (021\alpha)$$

$$\tau(\pm 1/2) = 0 \quad p(\pm 1/2) = 0 \quad (021\beta)$$

2.3.6 La stabilité neutre - définition de Gr_L

Pour un profil W de vitesse donné, ainsi qu'une constante de propagation α et un nombre de Grashof Gr (ou de Galilée Ga), le système formé des équations (021 indices latins) associées aux conditions frontières (021 indices grecs) n'admettra de solutions autres que la solution triviale nulle, que pour certaines valeurs propres de la célérité c .

Nous avons signalé précédemment que la célérité est en général complexe. Les perturbations introduites vont évoluer d'après sa valeur, ou plus précisément d'après le signe de sa partie imaginaire, c_i , appelée facteur d'amplification.

Si le facteur d'amplification est positif, la perturbation va, dans le temps, s'amplifier de manière exponentielle, et modifiera l'écoulement de base. Si le facteur d'amplification est négatif, on devrait alors l'appeler facteur d'amortissement, la perturbation s'atténuerait jusqu'à disparition complète.

Pour un facteur d'amplification nul, la célérité est égale à la célérité effective, et la perturbation sera de forme sinusoïdale d'amplitude constante avec le temps.

La courbe de stabilité, représentation du plus petit nombre de Grashof correspondant à un point de stabilité neutre, en fonction de la constante de propagation, (figure VII) nous permet de déterminer le nombre de Grashof critique (minimum de la courbe) et la constante de propagation critique associée.

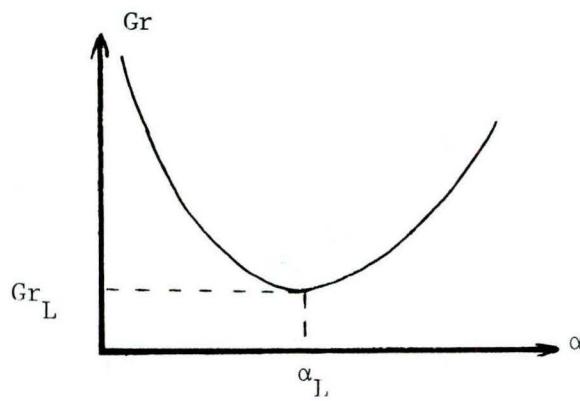


Figure VII – courbe de stabilité neutre

Le dépassement de ce nombre de Grashof critique Gr_L marque la rupture de la stabilité de l'écoulement de base, vis-à-vis des perturbations infiniment petites. Il correspond donc à une condition suffisante d'instabilité.

2.3.7 Théorème de Squire

Examinons les équations (021) et remarquons leur invariance pour les transformations suivantes:

$$\begin{array}{ccc}
 (\theta, v) & / & (-\theta, v) \\
 (\theta, u, w, \tau, p) & / & (-\theta, -u, -w, -\tau, -p) \\
 (\theta, c, u, v, w, \tau, p) & / & (\pi -\theta, -\bar{c}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\tau}, \bar{p}) \\
 (Gr, Ga, c, u, v, w, \tau, p) & / & (-Gr, -Ga, -\bar{c}, -\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\tau}, \bar{p})
 \end{array}$$

La deuxième composante de la vitesse, v , n'apparaît que dans la quatrième équation (021d), elle n'intervient donc pas à proprement parler dans le processus de destabilisation.

Les quatre autres équations, faisant intervenir les quatre inconnues u, w, p et τ s'écrivent alors, en remplaçant $\tau \cos \theta$ par τ et $p \cos \theta$ par p .

$$Du + i\omega w = 0 \quad (022a)$$

$$-i\omega c\tau + Gr \cos \theta [i\omega w \cdot \tau + uDT] = \frac{1}{Pr} (D^2 - \alpha^2) \tau \quad (022b)$$

$$-i\omega cu + Gr \cos \theta [i\omega w \cdot u] = - \frac{1}{Gr \cos \theta} Dp + (D^2 - \alpha^2) u \quad (022c)$$

$$\begin{aligned}
 -i\omega cw + Gr \cos \theta [i\omega w \cdot w + uDW] = & \\
 - \frac{i\omega}{Gr \cos \theta} p + \frac{Ga}{Gr} \tau \frac{\partial \phi}{\partial T} + (D^2 - \alpha^2) w & \quad (022d)
 \end{aligned}$$

Nous cherchons à déterminer le nombre de Grashof minimum au-delà duquel une perturbation va se développer; or le nombre de Grashof n'intervient que dans le groupement $Gr \cos\theta$, il sera donc minimum pour $\theta=0$, c'est-à-dire pour une perturbation se propageant suivant la direction de l'écoulement de base, comme l'a montré Lin-1955 en proposant une extension du théorème de Squire-1933.

La résolution de l'équation (021d) pour $\theta=0$ nous indique alors que la perturbation est bidimensionnelle.

2.3.8 Problème bidimensionnel

La formulation tridimensionnelle du problème de perturbation se ramène, dans le cas le plus défavorable, à une formation bidimensionnelle.

$$Du + i\alpha w = 0 \quad (023a)$$

$$-i\alpha c\tau + Gr [i\alpha W\tau + uDT] = \frac{1}{Pr} (D^2 - \alpha^2) \tau \quad (023b)$$

$$-i\alpha cu + Gr [i\alpha Wu] = - \frac{1}{Gr} Dp + (D^2 - \alpha^2) u \quad (023c)$$

$$\begin{aligned} -i\alpha cw + Gr [i\alpha W.w + u.DW] = & - \frac{i\alpha}{Gr} p + \frac{Ga}{Gr} \tau \frac{\partial \phi}{\partial T} \\ & + (D^2 - \alpha^2) w \end{aligned} \quad (023d)$$

- Afin d'éliminer la pression, nous considérons le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ce qui revient à additionner les équations (023c) et (023d) après les avoir multipliées respectivement par les opérateurs $-i\alpha$ et D :

$$\begin{aligned}
 -\alpha c(\alpha u + iDw) + \alpha Gr W [\alpha u + iDW] + Gr [i\omega \cdot DW + Du \cdot DW + u D^2 W] = \\
 \frac{Ga}{Gr} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \cdot D\tau + D \frac{\partial \phi}{\partial T} \cdot \tau \right) - i(D^2 - \alpha^2)(\alpha u + iDw) \quad (023c')
 \end{aligned}$$

- Introduisons la fonction de courant

$$\psi^* = \psi(x) e^{i\alpha(z-ct)} \quad (024a)$$

telle que:

$$u = -\frac{\partial \psi^*}{\partial z} = -i\alpha \psi \cdot e^{i\alpha(z-ct)} \quad (024b)$$

$$w = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = D\psi \cdot e^{i\alpha(z-ct)} \quad (024c)$$

L'équation de continuité est alors satisfaite, et il ne nous reste donc que deux équations à vérifier, (notons que $\frac{\partial}{\partial T} \dots = D \dots$), soit

$$-i\alpha c\tau + i\alpha Gr [W \cdot \tau - \psi \cdot DT] = \frac{1}{Pr} (D^2 - \alpha^2) \tau \quad (025a)$$

$$\begin{aligned}
 -i\alpha c(D^2 - \alpha^2) \psi + i\alpha Gr W (D^2 - \alpha^2) \psi - i\alpha Gr \psi D^2 W = \\
 \frac{Ga}{Gr} (D\phi \cdot D\tau + D^2 \phi \cdot \tau) + (D^2 - \alpha^2)^2 \psi \quad (025b)
 \end{aligned}$$

avec les conditions frontières:

$$\psi(\pm 1/2) = 0 \quad ; \quad D\psi(\pm 1/2) = 0 \quad ; \quad \tau(\pm 1/2) = 0 \quad (025a)$$

Ce système présenté pour la première fois en 1953 par Gershuni pour ϕ linéaire, comprend l'équation de conservation de la quantité de mouvement, du type Orr-Sommerfeld, couplée avec l'équation de conservation de la chaleur.

Les expressions de $D\phi$ et $D^2\phi$ sont:

$$D\phi = 2\gamma \cdot \Delta T \left[\frac{\underline{T}_1 + \underline{T}_2}{2} + x \Delta T - \underline{T}_M \right] \quad (026a)$$

$$D^2\phi = 2\gamma (\Delta T)^2 \quad (026a')$$

où:

$$D\phi = 2\gamma(1+\zeta)(\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2 \left[\frac{\zeta-1}{2} + x(1+\zeta) \right] \quad (026b)$$

$$D^2\phi = 2\gamma(1+\zeta)^2(\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2 \quad (026b')$$

à comparer avec celles du nombre de Grashof (012) et (014).

2.3.9 Instabilités hydrodynamiques

Afin de mieux observer le mécanisme hydrodynamique de destabilisation quand on passe progressivement du profil antisymétrique ($\zeta=-1.$) au profil symétrique ($\zeta=1.$), nous ne tenons point compte de l'équation de conservation de la chaleur et négligeons dans celle de conservation de la quantité de mouvement, les termes dus à la force d'Archimède.

L'étude de la stabilité hydrodynamique se réduit donc à un simple problème de valeurs propres, associé à l'équation de Orr-Sommerfeld

$$-i\alpha c(D^2 - \alpha^2)\psi + i\alpha Gr.W.(D^2 - \alpha^2)\psi - i\alpha Gr.\psi.D^2W = (D^2 - \alpha^2)^2\psi \quad (027a)$$

$$\text{avec } \psi(\pm 1/2) = D\psi(\pm 1/2) = 0 \quad (027a)$$

Pour chaque profil de vitesse W , chaque constante de propagation α , il nous faut déterminer le nombre de Grashof minimum qui nous permettra d'obtenir une célérité ayant un facteur d'amplificateur nul.

- Remarquons que nous obtenons l'équation de Orr-Sommerfeld en prenant, dans les équations (024) un nombre de Prandtl égal à zéro:

on vérifie alors que la perturbation de température, τ , est identiquement nulle.

Dans le cas de faible nombre de Prandtl, pouvons-nous espérer représenter avec la seule équation de Orr-Sommerfeld, la réalité physique du problème ? Le profil antisymétrique a été étudié par Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-Rudakov-1972 et effectivement tant que le nombre de Prandtl est inférieur à 11.4, les instabilités thermiques ne jouent aucun rôle. Par contre dans le cas du profil symétrique, il semblerait que nous ne puissions pas nous permettre de négliger les instabilités de nature thermique: Gershuni-Zhukhovitskii-Yakimov-1974 ont étudié la stabilité de l'écoulement d'une couche de géométrie similaire à la nôtre, dont la convection est créée par des sources internes de chaleur. Le profil de vitesse est alors identique, mais le profil de température et le couplage thermo-hydrodynamique sont différents.

Leur première hypothèse, Gershuni-Zhukhovitskii-Yakimov-1970, s'est avérée fausse: les instabilités thermiques ne peuvent être négligées.

2.4 Théorie de l'énergie

2.4.1 Historique - généralités

Considérons un écoulement quelconque caractérisé par son nombre de Grashof. Nous dirons qu'il est stable, si la limite pour un temps infini, de l'énergie de toute perturbation est nulle. Cette condition nous permet de définir un seuil d'instabilité Gr_G , seuil que nous sommes incapables de calculer. Aussi nous ~~tentons~~ de le cerner au plus près.

Dans le paragraphe précédent, la théorie linéaire nous a fourni un critère d'instabilité pour les perturbations infiniment petites, mais quel sera le comportement du fluide face à une perturbation de taille finie ?

La méthode de l'énergie, traitée dans cette deuxième partie, répond partiellement à cette question, en nous fixant un seuil de stabilité Gr_E .

- Employée à l'origine par Reynolds-1895 et Orr-1907, la méthode de l'énergie fut considérée pendant de longues années comme singulièrement inadaptée: elle fournissait des résultats particulièrement drastiques, sans comparaison possible avec l'expérience. Après avoir été abandonnée, elle fut redécouverte par Serrin-1959, Joseph-1965-1966 et ses étudiants: elle constitue aujourd'hui, dans de nombreux cas, un excellent partenaire de la théorie linéaire de la stabilité. Malheureusement les contributions modernes à son développement nous ont aussi appris qu'elle ne convient qu'à certains types d'écoulements.

Si l'écoulement possède un nombre de Grashof strictement inférieur à Gr_E , l'énergie de toute perturbation d'amplitude arbitraire sera nulle au crépuscule des temps, et bien plus, va décroître à tout instant.

Par contre pour un nombre de Grashof supérieur ou égal à Gr_E , il existe des perturbations pour lesquelles l'énergie, au moins pendant un instant donné, croît avec le temps.

Ce nombre de Grashof Gr_E , nécessairement inférieur au nombre Gr_L , déterminé par la théorie linéaire de la stabilité, et plus restrictif que Gr_G , apparaît tel Gr_L , comme valeur propre minimum d'un problème linéaire, ce qui autorise un calcul relativement aisé.

Gr_L constitue donc une condition suffisante d'instabilité tandis que Gr_E , constitue une condition suffisante de stabilité. (Pour $Gr \geq Gr_L$, nous pouvons affirmer que l'écoulement de base est instable, pour $Gr < Gr_G$ - à plus forte raison pour $Gr < Gr_E$ - qu'il est stable).

Il nous a semblé utile de donner, à ce stade de l'exposé, les explications nécessaires à la bonne compréhension et donc interprétation de la théorie, ainsi qu'à son formalisme. On trouvera un exposé complet dans Joseph-1976. Les développements mathématiques paraîtront longs et fastidieux à nous d'un lecteur, mais nous avons préféré pécher par excès de détails, au risque de perdre en clarté, plutôt que par manque.

2.4.2 Equations de Reynolds-Orr

Reprendons les équations de la perturbation (018), en ne considé-

rant que les instabilités hydrodynamiques, puisque nous n'avons traité numériquement que ce cas dans le cadre de la théorie linéaire. Nous ne retenons donc que l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dans laquelle nous annulons les termes faisant intervenir la température.

$$\operatorname{div}(\vec{v}^*) = 0 \quad (028a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + \operatorname{Gr}[(\vec{W} + \vec{v}^*) \cdot \vec{\nabla} \vec{v}^* + (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}] = - \frac{1}{\operatorname{Gr}} \operatorname{grad} p^* + \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* \quad (028b)$$

Multiplions cette dernière égalité par \vec{v}^* et faisons apparaître l'énergie cinétique locale $e = \frac{1}{2} \vec{v}^{*2}$, ce qui nous donne

$$\frac{de}{dt} + \operatorname{Gr} \vec{v}^* \cdot \vec{\nabla} \vec{W} \cdot \vec{v}^* = - \frac{1}{\operatorname{Gr}} \operatorname{grad} p^* \cdot \vec{v}^* + \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \quad (029)$$

Intégrons sur toute la couche fluide, pour obtenir l'énergie totale:

$$\frac{d\xi}{dt} = - \frac{1}{\operatorname{Gr}} \iiint \operatorname{grad} p^* \cdot \vec{v}^* - \operatorname{Gr} \iiint \vec{v}^* \cdot \vec{\nabla} \vec{W} \cdot \vec{v}^* + \iiint \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \quad (030)$$

où $\xi = \frac{1}{2} \iiint \vec{v}^{*2}$ est l'énergie de la perturbation.

Etudions chaque terme de l'égalité:

. En tenant compte de l'équation de continuité:

$$(\operatorname{grad} p^*) \vec{v}^* = \operatorname{div}(p^* \vec{v})$$

Par analogie avec l'étude de la stabilité linéaire, nous supposerons que le problème admet une solution périodique en y et en z , la perturbation étant constituée de cellules de convection. En prenant une cellule, nous appliquons le théorème d'Ostrogradski à un domaine fini et :

$$\iiint \operatorname{div} p^* \vec{v}^* = \iint p^* \vec{n} \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (031a)$$

. De même en utilisant la périodicité de la solution et la condition de vitesse nulle sur les parois:

$$\iiint \nabla^2 \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* = - \iiint |\nabla \vec{v}^*|^2 \quad (031b)$$

$\nabla \vec{v}^*$ = grad \vec{v}^* étant la matrice de coefficients $\nabla \vec{v}_{ij}^* = v_{i,j}^*$

. Enfin $\vec{v}^* \cdot \nabla \cdot \vec{v}^*$ peut s'exprimer sous la forme $\vec{v}^* \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^*$ avec tenseur, vitesse de déformation

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} (\text{grad } W + \text{grad}^T W) \quad (031c)$$

L'égalité donnant la dérivée de l'énergie, généralement désignée sous le nom d'équation de l'énergie de Reynolds-Orr, s'écrit alors:

$$\frac{d\xi}{dt} = - \text{Gr} \iiint \vec{v}^* \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^* - \iiint |\nabla \vec{v}^*|^2 \quad (032)$$

où $-\iiint |\nabla \vec{v}^*|^2$ est un terme dissipatif d'énergie et

$+\text{Gr} \iiint \vec{v}^* \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^*$ est en général un terme productif.

2.4.3 Définition de Gr_E et propriétés

Divisons l'égalité précédente par $\iiint |\nabla \vec{v}^*|^2$

$$\frac{1}{\iiint |\nabla \vec{v}^*|^2} \frac{d\xi}{dt} = -\text{Gr} \frac{\iiint \vec{v}^* \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^*}{\iiint |\nabla \vec{v}^*|^2} - 1 \quad (033)$$

et définissons Gr_E par $\frac{1}{\text{Gr}_E} = \max \left(- \frac{\iiint \vec{v}^* \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^*}{\iiint |\nabla \vec{v}^*|^2} \right)$ (034)

Pour un écoulement ayant un nombre de Grashof strictement inférieur à Gr_E , toute perturbation, à tout instant, perd de l'énergie.

Bien plus nous allons montrer avec la même condition $Gr < Gr_E$ que l'énergie va s'annuler, c'est-à-dire que toute perturbation meurt et que l'écoulement est parfaitement stable.

L'équation de Reynolds-Orr (032) est successivement majorée par:

$$\frac{d\xi}{dt} < \iiint |\bar{v}v^*|^2 \left(-1 + \frac{Gr}{Gr_E} \right) \quad (035a)$$

$$\frac{d\xi}{dt} < \pi^2 \iiint v^{*2} \left(-1 + \frac{Gr}{Gr_E} \right) \quad (035b)$$

en utilisant la propriété $\iiint |\bar{v}u|^2 \geq \frac{1}{\pi^2} \iiint |u|^2$ vraie pour toute vitesse de perturbation (voir Annexe III). Nous obtenons l'inégalité différentielle $\frac{d\xi}{dt} < \pi^2 \cdot \xi(t) \cdot (-1 + \frac{Gr}{Gr_E})$ (036)

que nous intégrons, pour obtenir un majorant de l'énergie:

$$\xi(t) < \xi(0) e^{\pi^2 (-1 + \frac{Gr}{Gr_E}) t} \quad (037)$$

Gr étant strictement inférieur à Gr_E , la perturbation va disparaître.

2.4.4 Problème aux valeurs propres

Nous avons défini Gr_E par:

$$\frac{1}{Gr_E} = \max \left(- \frac{\iiint v^* \mathcal{D}v^*}{\iiint |\bar{v}v^*|^2} \right)$$

$$\text{soit } \frac{1}{Gr_E} = \max \frac{F}{G} \quad (038a)$$

Le maximum devrait être pris sur le champ des vitesses dynamiquement admissibles (satisfaisant les équations de la perturbation).

Mais nous sommes incapables de résoudre l'équation de Navier-Stockes; d'ailleurs si nous connaissons sa solution, nous ne nous casserions pas autant la tête. Aussi nous agrandissons notre champ pour considérer celui des perturbations cinématiquement admissibles, c'est-à-dire, vérifiant les conditions frontières et l'équation de continuité.

Soit \hat{v} , la vitesse où le maximum est atteint.

$$\frac{F}{G} \Big|_{\hat{v}} = \frac{1}{Gr_E} \quad (038b)$$

La dérivée de la fonctionnelle $\frac{F}{G}$ doit donc être nulle en \hat{v} ,

$$\frac{1}{Gr_E} \delta F - \delta G \Big|_{\hat{v}} = 0 \quad (038c)$$

ce qui nous donne

$$\iiint \delta v (\nabla^2 \hat{v} - Gr_E \mathcal{D} \cdot \hat{v}) = 0 \quad (039)$$

La divergence de δv étant nulle, δv peut être pris égal au rotationnel d'un vecteur A quelconque.

$$\text{En posant } \Gamma = \nabla^2 \hat{v} - Gr_E \mathcal{D} \cdot \hat{v} \quad (040)$$

l'égalité (039) s'écrit:

$$\iiint \text{rot } A \cdot \Gamma = 0 \quad (041a)$$

qui se transforme en:

$$\iiint \text{div}(A \wedge \Gamma) + \iiint A \cdot \text{rot } \Gamma = 0 \quad (041b)$$

ou en utilisant le théorème d'Ostrogradski sur une cellule

$$\iint_S n(A \wedge \Gamma) + \iiint A \cdot \text{rot } \Gamma = 0 \quad (041c)$$

Pour l'ensemble des A vérifiant $A \Big|_S = 0$ (nous avons alors

$\delta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ en tout point de la surface S de la cellule), nous obtenons

$$\iiint A \cdot \text{rot } \Gamma = 0 \quad (042a)$$

$$\text{soit} \quad \text{rot } \Gamma = 0 \quad (042b)$$

ce qui nous donne l'équation d'Euler:

$$\nabla^2 \vec{v} - \text{Gr} \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v} = \nabla \Pi \quad (043)$$

avec les conditions frontières:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}|_{\$} = 0 \quad (044)$$

Cette équation présente une analogie frappante avec l'équation de Orr-Sommerfeld.

$$(\text{Rappel: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{Gr} [(W \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) W] = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v})$$

La caractérisation du nombre de Grashof critique Gr_E se ramène donc à un problème de valeur propre, à savoir: déterminer la valeur propre minimum Gr_E de l'équation d'Euler:

$$\nabla^2 \vec{v}^* - \text{Gr}_E \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^* - \nabla \Pi^* = 0$$

$$\text{avec} \quad \text{div } \vec{v}^* = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}^*|_{\$} = 0.$$

Remarque: Nous aurions également pu établir cette équation en considérant que la vitesse de la perturbation et ses dérivées premières sont L^2 intégrables. La perturbation est alors une intégrale de Fourier.

2.4.5 Résolution du problème aux valeurs propres

Nous cherons la solution de l'équation

$$\Delta^2 \vec{v}^* - \text{Gr}_E \cdot \mathcal{D} \cdot \vec{v}^* = \nabla \Pi^* \quad (045)$$

sous forme d'une onde se propageant dans la direction \vec{z}_1 du plan (\vec{y}, \vec{z}) . Nous définissons un nouveau repère orthonormé construit à partir de la direction de propagation de la perturbation, soit $(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans lequel nous avons:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \sin\theta \cdot W & & \\ \cos\theta \cdot W & & \end{bmatrix} \quad (046a)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta \cdot DW & \cos\theta \cdot DW \\ \sin\theta \cdot DW & 0 & 0 \\ \cos\theta \cdot DW & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (046b)$$

$$\vec{v}^* = \begin{bmatrix} u(x) e^{i\alpha z_1} \\ v(x) e^{i\alpha z_1} \\ w(x) e^{i\alpha z_1} \end{bmatrix} \quad (046c)$$

Π est alors de la forme:

$$\Pi = (x) e^{i\alpha z_1} \quad (046d)$$

qui, injectés dans l'équation de continuité et la décomposition de l'équation (045) suivant les trois axes, nous fournissent

$$Du + i\alpha w = 0 \quad (047a)$$

$$(D^2 - \alpha^2) u - \frac{Gr}{2} v \cdot \sin\theta \cdot DW - \frac{Gr}{2} w \cdot \cos\theta \cdot DW = D\Pi \quad (047b)$$

$$(D^2 - \alpha^2) v - \frac{Gr}{2} u \sin\theta \cdot DW = 0 \quad (047c)$$

$$(D^2 - \alpha^2) w - \frac{Gr}{2} u \cos\theta \cdot DW = i\alpha \Pi \quad (047d)$$

Eliminons Π des équations

$$Du + i\alpha w = 0 \quad (048)$$

$$(D^2 - \alpha^2) Dw - i\alpha (D^2 - \alpha^2) u - \frac{Gr}{2} \cdot Du \cdot \cos\theta \cdot DW - \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \cos\theta \cdot D^2 w$$

$$+ i\alpha \frac{Gr}{2} \cdot v \cdot \sin\theta \cdot DW + i\alpha \frac{Gr}{2} \cdot w \cdot \cos\theta \cdot DW = 0 \quad (048b)$$

$$(D^2 - \alpha^2) v - \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \sin\theta \cdot DW = 0 \quad (048c)$$

puis w , pour obtenir

$$(D^2 - \alpha^2)v - \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \sin\theta \cdot DW = 0 \quad (049a)$$

$$(D^2 - \alpha^2)^2 u + i\alpha \cdot Gr \cdot Du \cdot \cos\theta \cdot DW + i\alpha \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \cos\theta \cdot D^2 W$$

$$+ \alpha^2 \frac{Gr}{2} \cdot v \cdot \sin\theta \cdot DW = 0 \quad (049b)$$

sans oublier les conditions frontières:

$$v(\pm 1/2) = 0 \quad u(\pm 1/2) = Du(\pm 1/2) = 0 \quad (049a)$$

- Notons l'invariance des équations pour les transformations suivantes:

$$\begin{array}{ccc} (\theta, u) & / & (-\theta, -u) \\ (\theta, v) & / & (-\theta, -v) \\ (\theta, u, v) & / & (\pi - \theta, \bar{u}, \bar{v}) \\ (Gr, u, v) & / & (-Gr, \bar{u}, \bar{v}) \end{array}$$

aussi il nous suffit de les étudier pour θ appartenant à l'intervalle $[0, \pi/2]$.

2.4.6 Perturbation la plus destabilisante

Contrairement à ce que croyaient Orr et les premiers utilisateurs de la méthode de l'énergie, la direction de la perturbation la plus destabilisante (qui nous fournit le nombre de Grashof minimum) n'est pas parallèle à l'écoulement de base ($\theta=0$),

Il n'existe pas d'équivalent du théorème de Squire-1933, qui valide dans le cadre de la théorie linéaire, fut employé avant d'être démontré. Pourtant il semblerait que la perturbation la plus destabilisante ait une direction orthogonale à l'écoulement de base (Carmi-1969).

D'après les symétries énoncées ci-dessous: $\theta=0.$ et $\theta=\pi/2$ sont des extrêums: nous ne pouvons en dire plus.

Selon les cas abordés par Carmi-1969, $\theta=0.$ correspond à un maximum et $\theta=\pi/2$ un minimum. La démonstration de cette propriété existe, moyennant quelques hypothèses généralement satisfaites, dans le cas bien particulier d'un écoulement de base antisymétrique (Büsse-1972). Aussi nous avons traité le problème complet en faisant varier θ .

III SOLUTION NUMERIQUE

L'étude des instabilités hydrodynamiques a longtemps buté sur l'irrésolvabilité des équations les gouvernant. En effet l'une des clés du problème, pour prendre un exemple, l'équation de Orr-1907 Sommerfeld-1908, fut établie, d'ailleurs indépendamment par les deux hommes, dès le début du siècle. Le premier calcul de seuil d'instabilité ne fut réalisé que vingt-deux ans plus tard par Tollmien-1929, en appliquant de nouvelles techniques mathématiques: le calcul asymptotique. Continuons notre bref aperçu historique en notant la contribution fondamentale de Lin-1945, qui assura les bases des calculs asymptotiques d'instabilité.

Le milieu des années 50 marqué par l'apparition de l'ordinateur bouleversa le monde de la science. Aujourd'hui il existe sur le marché un tel foisonnement de méthodes numériques, qui n'auraient aucune raison d'être sans ordinateur, et qui nous permettent non pas de résoudre analytiquement les équations, mais d'en donner des solutions numériques exactes, qu'il serait inexcusable de s'en tenir à des solutions approchées.

Malheureusement cette révolution présente le danger d'être accompagnée de l'apparition d'une génération de scientifiques, qui oublient que l'ordinateur n'est qu'un instrument de calcul, don du ciel et d'IBM, mis à notre disposition pour faciliter l'interprétation physique. D'ailleurs nous assistons, ces années-ci, à une scission entre les théoriciens et la masse des exécutants. Tentons de suivre la bonne voie.

3.1 Méthode de Galerkin

L'analyse de la stabilité de notre écoulement, que ce soit par la théorie linéaire ou par la théorie de l'énergie, nous conduit à résoudre une équation linéaire $\mathcal{L}(X)=0$ dont les coefficients dépendent du paramètre λ , X étant une fonction de la variable x , définie sur l'intervalle I et vérifiant les conditions frontières F . Pour déterminer les solutions de notre équation, nous emploierons une méthode de résidus pondérés, la méthode de Galerkin-1915, dont voici le principe.

La fonction inconnue X est décomposée suivant une base de fonctions d'essai, fonctions vérifiant les conditions frontières et dont la base complète engendre l'espace solution.

Cependant nous devons limiter notre décomposition de X à un nombre fini de fonctions d'essai: $X = \sum_n a_n X_n$.

X vérifie donc les conditions frontières mais pas l'équation \mathcal{L} , soit $\mathcal{L}(X) = R$, où R , le résidu, est généralement non nul.

Nous allons ajuster les nouvelles inconnues $\{a_n\}$, afin de minimiser le résidu. Pour cela nous multiplions l'égalité $\mathcal{L}(X) = R$ par X_i et intégrons sur l'intervalle de variation de x soit I . De plus nous posons que $\int_I R \cdot X_i$ est nul. Cette opération, répétée pour chaque X_i , nous permet de déterminer les a_n : nous obtenons N équations linéaires à N inconnues. Nous cherchons pour X , inconnue de notre problème, une solution non identiquement nulle et devons donc annuler le déterminant de notre système d'équations en a_n ce qui nous permet de calculer λ .

Généralement l'opérateur lié à l'équation linéaire \mathcal{L} est auto-adjoint, et la matrice des coefficients du système vérifiée par les a_n est symétrique. Ceci constitue le principal avantage de la méthode de Galerkin sur ses concurrentes.

Mais l'utilisation d'une telle méthode est, bien entendu, liée à la vérification de sa convergence: n'oublions pas de nous assurer que solution λ_N , obtenue par N fonctions d'essai diffère peu de la solution λ_{N+1} et que la série λ_N converge vers la valeur λ_0 .

Soyons plus pragmatiques et appliquons la méthode de Galerkin à l'étude de la stabilité linéaire, puis à celle de la stabilité par la théorie de l'énergie.

Les personnes intéressées trouveront de plus amples explications sur la méthode des résidus pondérés et plus précisément sur la méthode de Galerkin dans Finlayson-1972.

3.2 Théorie linéaire: le problème de valeurs propres

- Rappelons les données du problème. Nous devons déterminer le nombre de Grashof minimum, tel que l'équation de Orr-Sommerfeld

$$-i\alpha c(D^2 - \alpha^2)\psi = (D^2 - \alpha^2)^2 \psi - i Gr W(D^2 - \alpha^2)\psi + i\alpha Gr \psi D^2 W \quad (050a)$$

liée aux conditions frontières:

$$\psi(\pm 1/2) = \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad (050\alpha)$$

admette une célérité c ayant un facteur d'amplification nul. Pour chaque couple (constante de propagation, nombre de Grashof), soit (α, Gr) nous

allons calculer les valeurs propres de c et retenir parmi les couples liées à une célérité vérifiant la condition de facteur d'amplification nulle, qui forment la courbe de stabilité neutre, celui qui présente le nombre de Grashof minimum.

- La fonction ψ est donc décomposée sur un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, constituant une base, et satisfaisant les conditions limites, les fonctions d'essai. On ne considère en fait qu'une somme tronquée de fonctions d'essai.

$$\psi = \sum_1^N a_m \psi_m$$

les a_m étant des complexes à déterminer.

Introduisons l'expression de ψ dans l'équation de Orr-Sommerfeld, que nous multiplions par ψ_n . Après intégration sur l'épaisseur de la couche on obtient:

$$\begin{aligned} -i\alpha c \sum a_m \int \psi_n (D^2 - \alpha^2) \psi_m = \\ \sum a_m [\int \psi_n (D^2 - \alpha^2)^2 \psi_m - i\alpha G \int \psi_n W (D^2 - \alpha^2) \psi_m + i\alpha G \int \psi_n D^2 W \psi_m] \end{aligned} \quad (051)$$

Pour faciliter les dérivations et les intégrations, nous choisissons des fonctions d'essai polynomiales, soit:

$$\psi_m = (x^2 - 1/4)^2 x^{m-1} \quad (052)$$

avec $m = (1, 2, 3, \dots, N)$

Finlayson-1972 donne pour ces fonctions quelques intégrales qui apparaissent dans leur emploi.

Soit a , le vecteur formé des inconnues du système, les a_m .

L'équation (051) s'écrira sous forme matricielle.

$$cCa = (A + iB)a \quad (053)$$

avec

$$c_{mn} = -i\alpha \int \psi_n (D^2 - \alpha^2) \psi_m \quad (054a)$$

$$A_{mn} = \int \psi_n (D^2 - \alpha^2) \psi_m \quad (054b)$$

$$B_{mn} = -\alpha Gr \int \psi_n W (D^2 - \alpha^2) \psi_m + \alpha Gr \int \psi_n D^2 W \psi_m \quad (054c)$$

Les températures aux frontières étant fixées (le profil de vitesse est alors déterminé), à chaque valeur de la constante de propagation α et du nombre de Grashof Gr , le système admettra une solution autre que la solution nulle, pour les valeurs spectrales ou valeurs propres (ici mathématiquement égales) de la matrice $C^{-1}(A+iB)$.

Nous pouvons alors représenter le spectre de la célérité en fonction du nombre de Grashof.

L'étude des spectres de célérité, nous permettra de porter sur un graphe le plus petit nombre de Grashof correspondant à un point de stabilité neutre (point où la célérité se réduit à sa partie effective), soit la courbe de stabilité neutre, dont le minimum nous fournit le nombre de Grashof recherché, Gr_L (figure VII).

3.3 Théorie linéaire: le spectre des célérités

Nous avons recherché pour quelques écoulements de base, le spectre des célérités, en nous plaçant dans chaque cas, à la constante de

propagation critique, la célérité étant donnée en fonction du rapport du nombre de Grashof au nombre de Grashof critique.

3.3.1 Lecture des schémas - précision

Avec 24 fonctions d'essai, nous sommes capables de représenter sur le graphique supérieur de chacune des figures suivantes (figures VIII à XIII), les neuf niveaux les plus hauts des facteurs d'amplification, numérotés par ordre décroissant de 0 à 8, et ce avec une bonne approximation. La précision se perd avec la croissance du nombre de Grashof et surtout avec le degré du niveau d'amplification. Nous l'avons testé avec 26 fonctions d'essai. Dans le cas antisymétrique ($\zeta = -1.$), elle se dégrade très vite pour les quatre niveaux supérieurs (5 à 8), quand le rapport des nombres de Grashof est supérieur à 5. Elle est alors de 10%. Dans le cas symétrique ($\zeta = 1.$) elle reste très bonne, supérieure à 1% dans le pire des cas.

Sur le graphique inférieur, on trouve, à titre d'indication, les célérités effectives correspondant à certains des facteurs d'amplification représentés plus haut. Deux remarques à ce propos. Premièrement, la variable étudiée est en fait le ratio de la célérité et de la vitesse maximale, nonobstant son signe, obtenue sur le profil considéré, soit:

$$C^* = \frac{C_r}{|V_M|} = \frac{C_r}{G_r |W_M|} \quad (055)$$

ce qui nous permet de comparer la vitesse de propagation de la perturbation et la vitesse maximale du courant: elles sont égales pour un ratio unitaire. Deuxièmement, soulignons l'expression, à titre d'indication,

car les célérités effectives portées sur la figure ont pour seule propriété d'être associées aux niveaux d'amplification les plus hauts, et, pour conserver une certaine clarté, ne sont d'ailleurs pas toutes présentes.

3.3.2 Célérités pour un nombre de Grashof nul

L'équation d'Orr-Sommerfeld se réduit à :

$$-i\alpha c (D^2 - \alpha^2) \psi = (D^2 - \alpha^2)^2 \psi \quad (056)$$

En multipliant par le complexe conjugué de la fonction de courant, et en intégrant sur une section, tout en tenant compte des conditions frontières, nous obtenons que $i\alpha c$ est un réel positif, posons-le égal à λ^2 . Toutes les perturbations sont donc stationnaires.

Les solutions de l'équation

$$-\lambda^2 (D^2 - \alpha^2) \psi = (D^2 - \alpha^2)^2 \psi \quad (057a)$$

avec

$$\psi(\pm 1/2) = \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad (057)$$

sont soit paires, soit impaires :

$$\psi_i = \frac{ch\alpha x}{ch\alpha} - \frac{\cos \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} x}{\cos \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2}} \quad (058a)$$

$$i = 0, 2, \dots, 3n, \dots$$

avec

$$\sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} \quad \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} + \alpha \operatorname{th} \alpha = 0 \quad (058b)$$

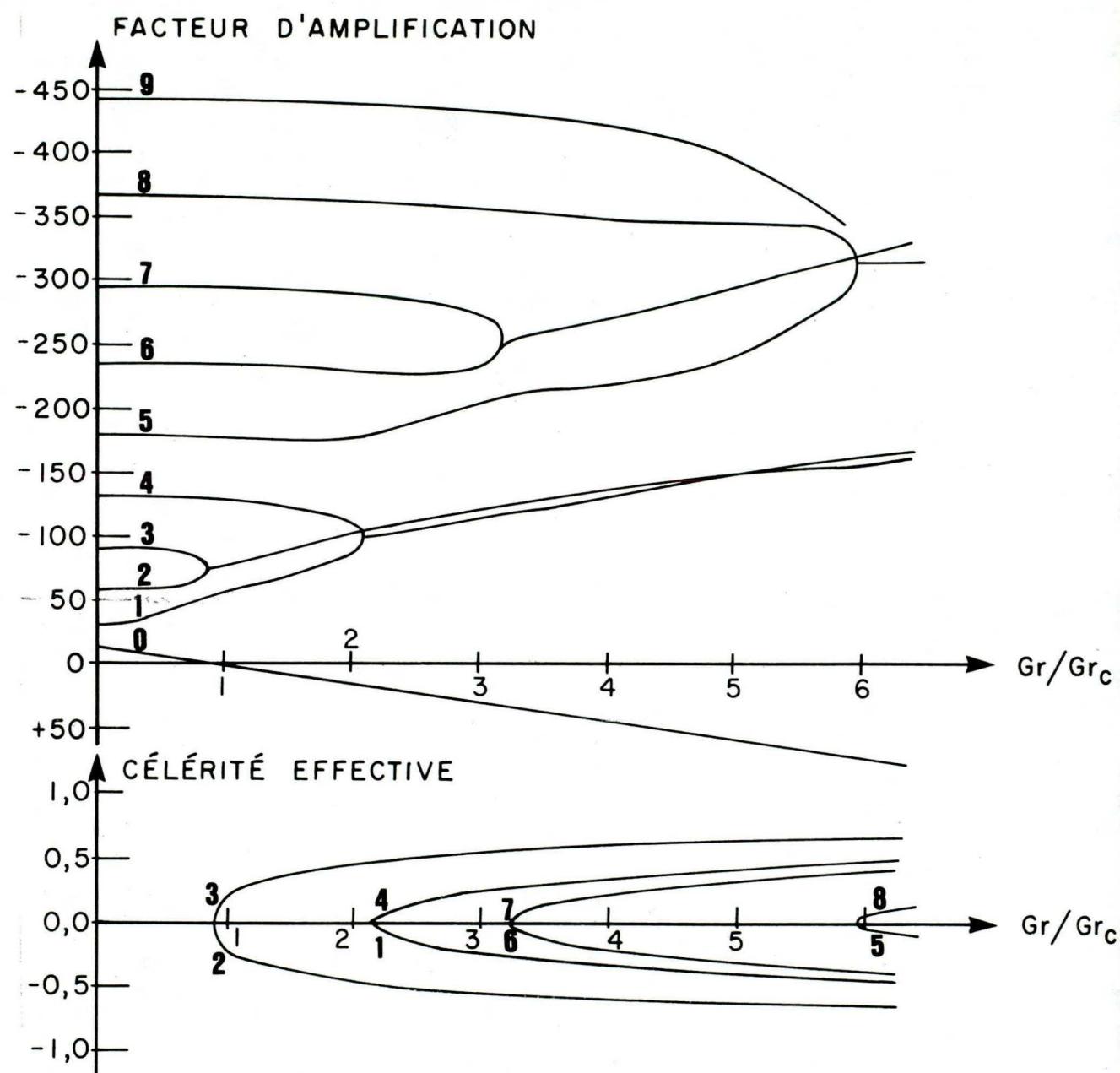
$$\psi_i = \frac{sh\alpha x}{sh\alpha} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} x}{\sin \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2}} \quad (058c)$$

Figure VIII

Spectre des célérités

 $\zeta = -1$

Cas antisymétrique



$i = 1, 3, \dots, 2n+1, \dots$

$$\text{avec } \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} \cotg \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} - \alpha \coth \alpha = 0 \quad (058d)$$

Les valeurs de λ_i^2 croissent en fonction de i .

Suivant la parité de ψ , ou de i , nous considérons donc que les niveaux d'amplification sont pairs ou impairs. Il va s'en dire que cette parité est factice, puisqu'elle est vraie seulement pour Gr nul.

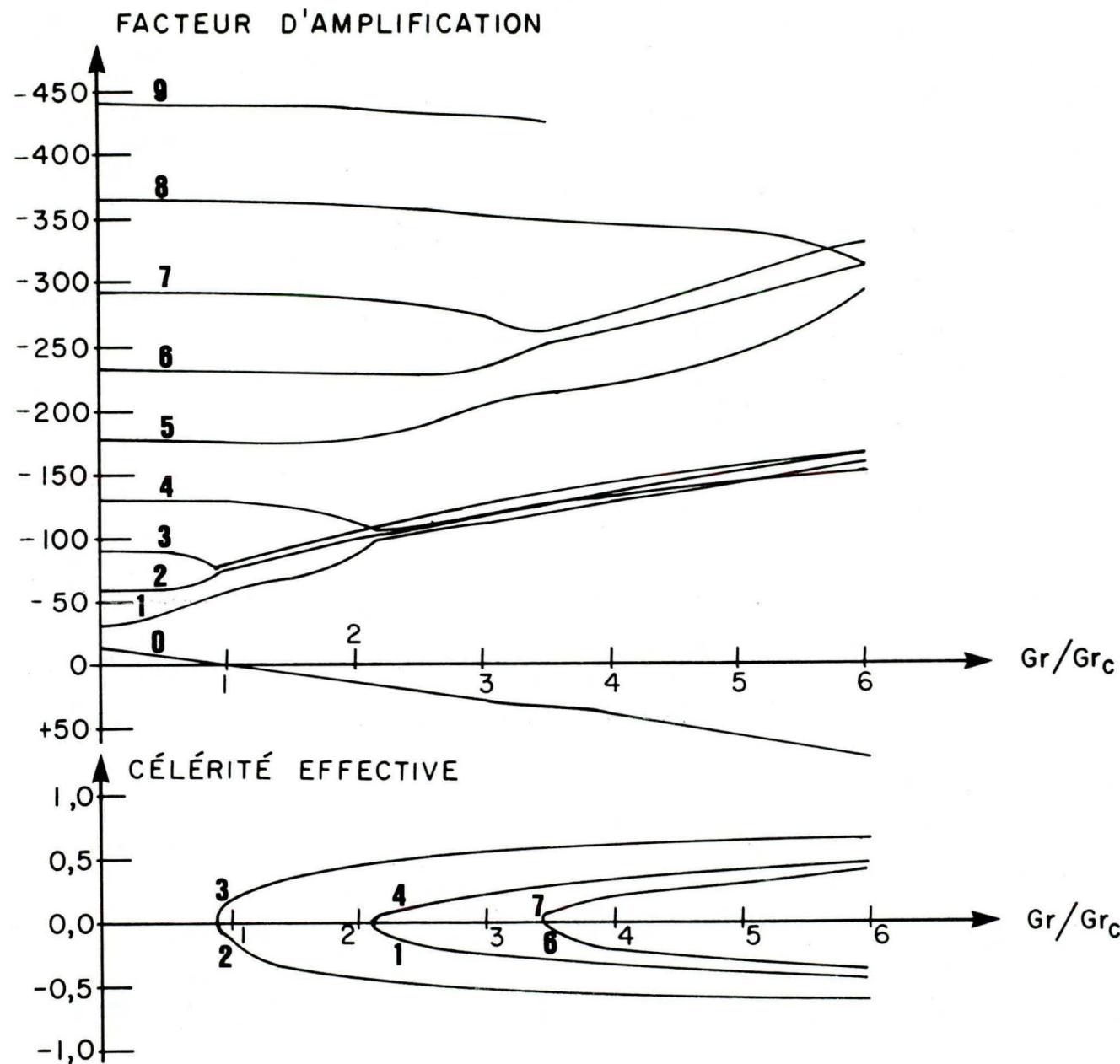
3.3.3 Profil antisymétrique

La figure VIII (profil de base antisymétrique) a été précédemment obtenue par Birikh-1966 et Rudakov-1967 dans le cas d'une relation densité-température linéaire, tandis que la figure XIII, correspond au cas d'un écoulement vertical plan possédant des sources internes de chaleur: Gershuni-Zhukhovitskii-Iakimov-1970.

Pour des températures de parois égales, $\zeta = -1$, (figure VIII) et pour un nombre de Grashof suffisamment petit, les perturbations sont stationnaires. La célérité se réduit à sa composante imaginaire, c'est-à-dire, au facteur d'amplification.

Avec la croissance du nombre de Grashof, les célérités s'accouplent. Après accouplement, elles possèdent des facteurs d'amplification égaux, mais des célérités effectives opposées: les deux perturbations correspondantes se propagent avec la même vitesse mais l'une dans le sens des z positifs, l'autre des z négatifs.

Tous les profils de vitesse antisymétriques présentent cette



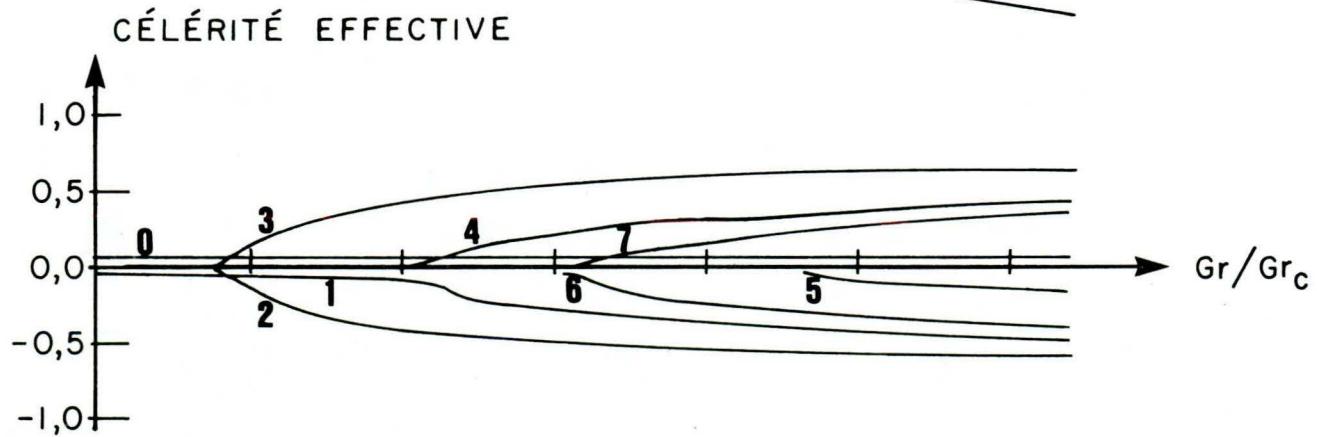
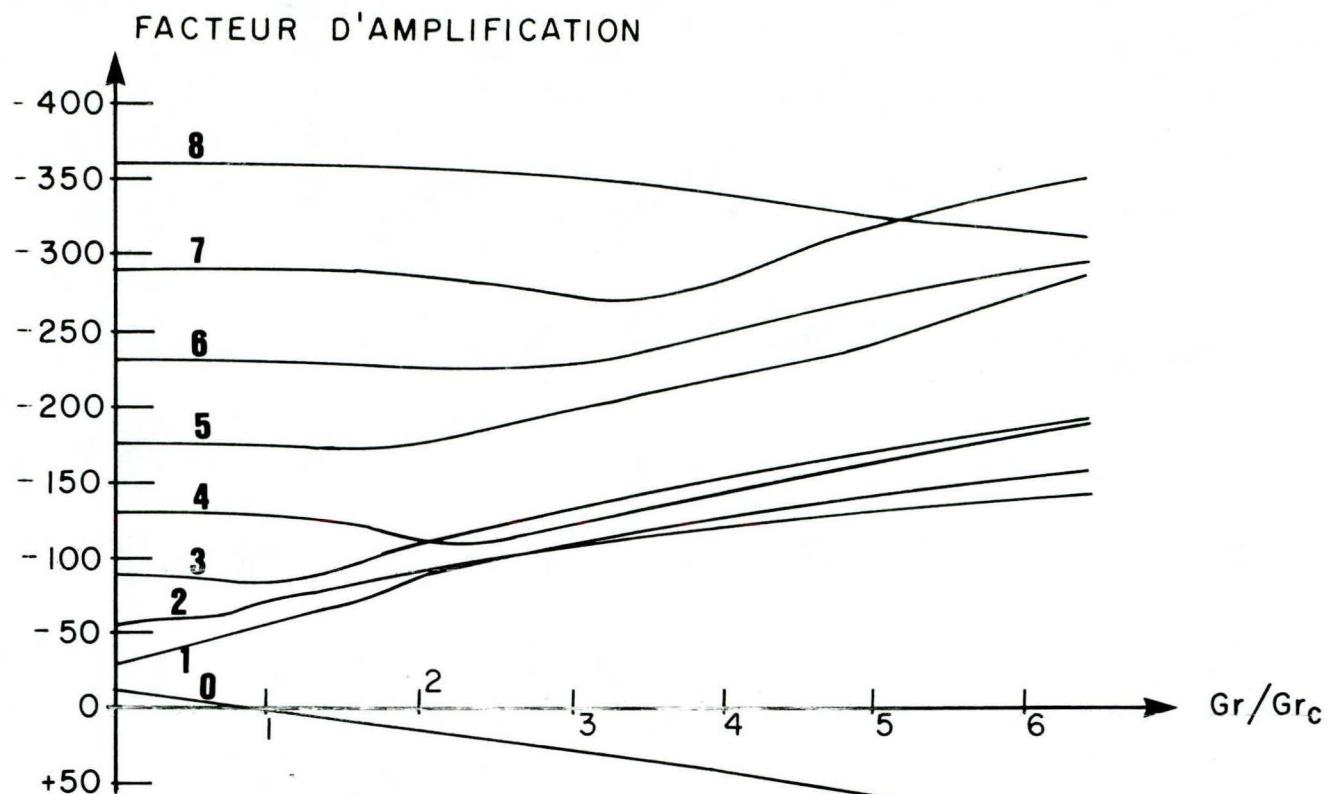
particularité. En effet, si pour un facteur de propagation et un nombre de Grashof donné, on a une solution (c_1, ψ_1) ; nous pouvons construire une deuxième solution (c_2, ψ_2) définie par $c_2 = -\bar{c}_1$ et $\psi_2(y) = \bar{\psi}_1(-y)$. Quand les deux solutions sont confondues, c'est alors imaginaire pur (la célérité effective est nulle) et la perturbation vérifie $\psi(y) = a\bar{\psi}(-y)$, a étant un facteur complexe de proportionnalité. Les perturbations n'étant connues qu'à un rapport d'homothétie près, en prenant $a=1$, nous pouvons, sans perte de généralité, considérer que la partie réelle de ψ est paire et que sa partie imaginaire est impaire.

Utilisant les propriétés du problème adjoint et effectuant un développement limité de la célérité c et de la perturbation ψ en fonction de (α Gr) Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-1965 ont confirmé que les petits nombres de Grashof étaient associées à des perturbations stationnaires. Quand le nombre de Grashof croît, nous observons l'accroissement des facteurs d'amplification suivant le processus décrit ci-dessus. Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii ont également prouvé que le couple est toujours constitué de deux niveaux de différentes parités.

Dans notre cas, seul le niveau le plus haut refuse de frayer, continuant solitaire son chemin et s'annulant pour le nombre de Grashof critique. La perturbation donnant naissance à l'instabilité est donc stationnaire.

Toutes les propriétés précédemment décrites ne sont vraies que dans le cas limite des parois ayant des températures égales, cas assimilable, rappelons-le, à une relation densité-température linéaire.

Figure X
Spectre des célérités
 $\zeta = 0.00$



3.3.4 Profil intermédiaire

Dès qu'une paroi s'échauffe, les perturbations observées, quelque soit le nombre de Grashof et leurs facteurs d'amplification, sont instationnaires. Bien sûr pour de petites différences de température, et pour de petits nombres de Grashof, les célérités effectives demeurent très faibles - aussi nous ne les avons pas toujours représentées - et ne prennent de l'importance que quand deux niveaux se côtoient.

Quand la paroi chaude s'échauffe nous observons un tassement des niveaux d'amplification, dû à la croissance de la constante de propagation critique (voir l'expression de λ^2 dans les équations 058b et 058d). Parallèlement les célérités effectives maximum observées s'amodrissent.

Pour $\zeta = 0.75$ (figure XI) le niveau 1 semble se stabiliser à l'horizontal, en fait il décroît très légèrement, et nous pouvons envisager l'apparition d'un deuxième seuil critique.

Rappelons que la théorie linéaire n'est valide que pour des perturbations infiniment petites. Si le facteur d'amplification est négatif, nous savons que les perturbations infiniment petites ne peuvent se développer. Par contre, s'il est positif, nous ne sommes sûrs que de la naissance de la perturbation et des conditions critiques nécessaires à cet heureux évènement, rien ne nous renseigne sur l'évolution ultérieure.

Aussi, en supposant que la première instabilité modifie peu l'écoulement originel, un deuxième nombre de Grashof critique pourrait correspondre à une deuxième instabilité.

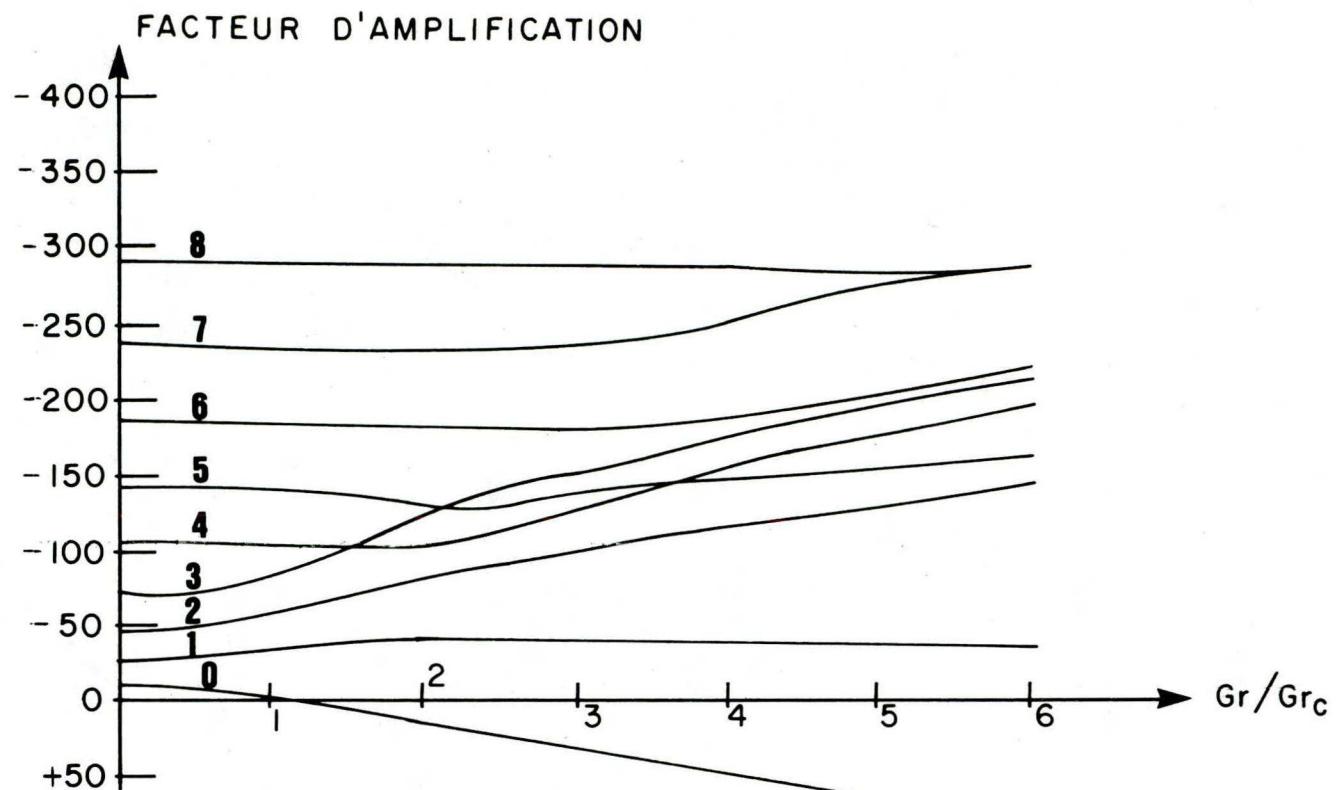
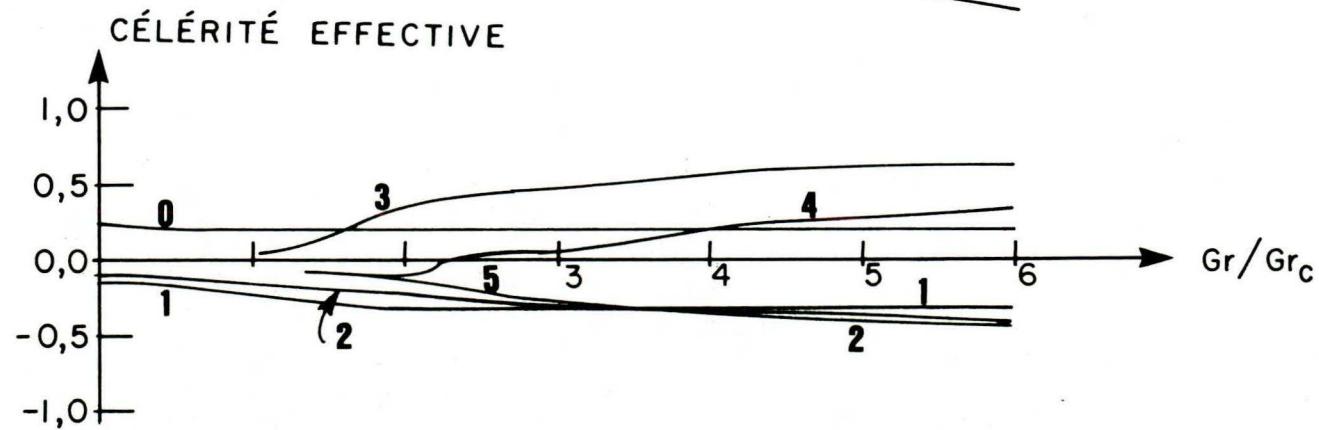


Figure XI

Spectre des célérités

$$\zeta = 0.75$$



FACTEUR D'AMPLIFICATION

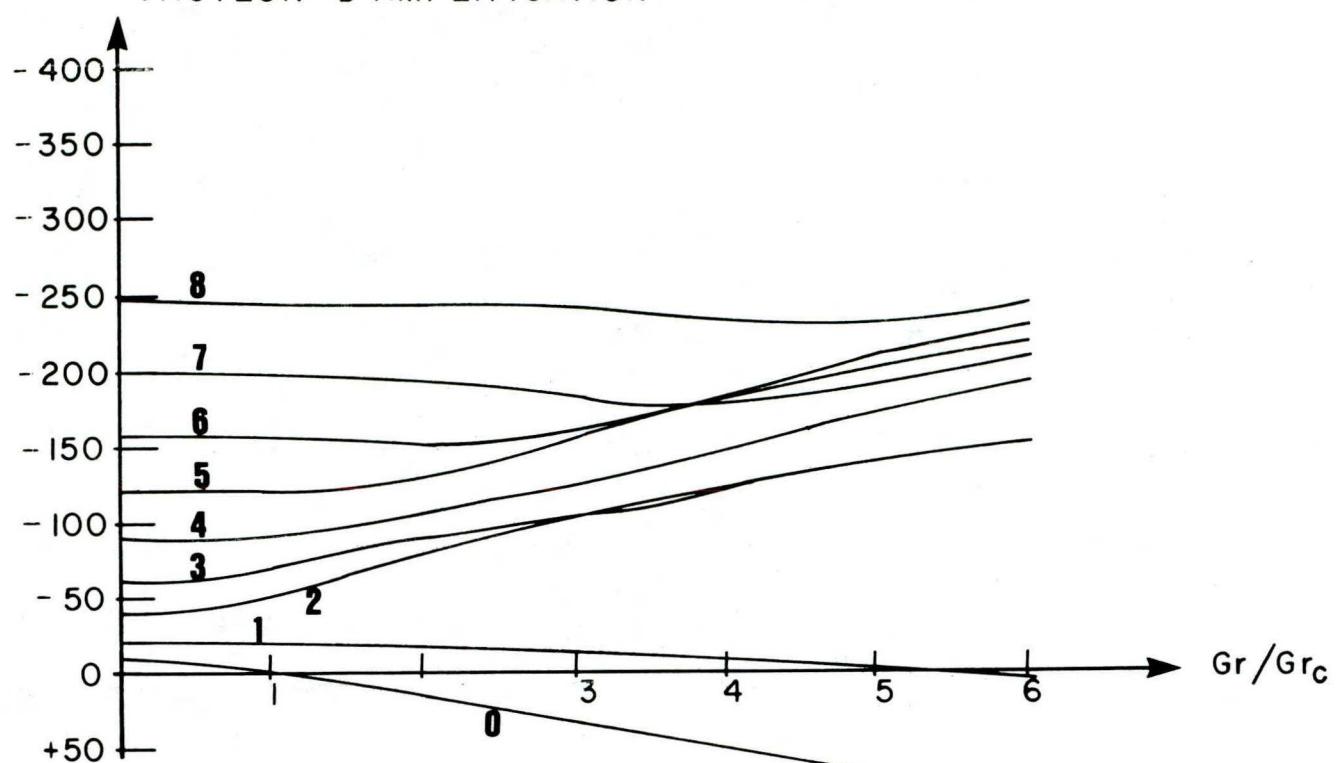
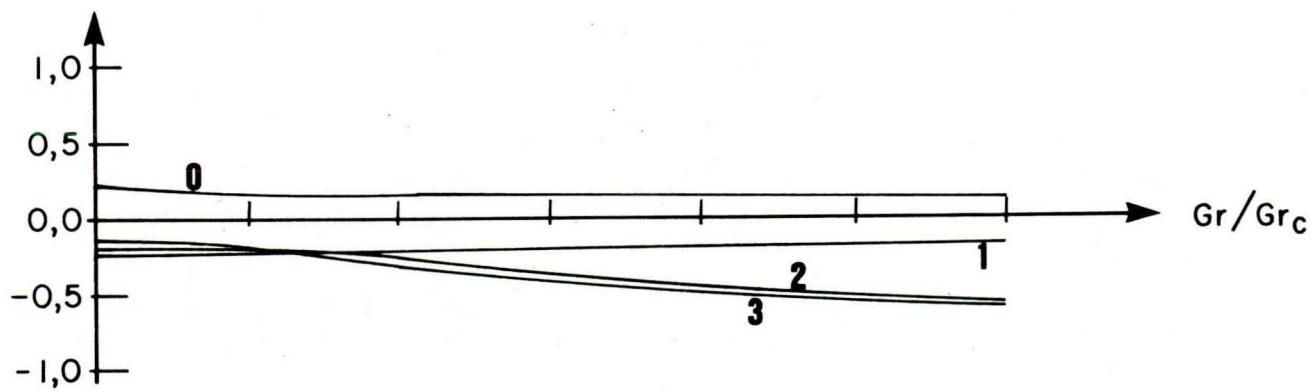


Figure XII

Spectre des célérités

$$\zeta = 0.9375$$

CÉLÉRITÉ EFFECTIVE



L'hypothèse de l'existence d'un deuxième nombre de Grashof critique devient certitude pour des différences de température, entre les parois, plus importantes mais ce deuxième seuil est associé à une constante de propagation différente de celle du premier.

3.3.5 Profil symétrique

Le spectre des célérités du profil symétrique, $\zeta = 1$ (figure XIII) ne présente guère de singularités, si ce n'est le regroupement des niveaux 2 et 3, qui possèdent des célérités (facteurs d'amplification et célérités effectives) presque égales. Les niveaux 5 et 6 présentent un cas semblable mais dans une moindre mesure.

Dans le cas de l'écoulement plan de Poiseuille, Grosh et Salwen-1968 ont décrit le même comportement pour les niveaux 3-4 et 5-6. Mais Grosh et Salwen ont considéré que les niveaux impliqués se fondaient en un seul. Ceci est inexact. L'équation de Orr-Sommerfeld, pour un écoulement de base symétrique, permet de dissocier la partie paire d'une perturbation, soit ψ_e et sa partie impaire ψ_o .

$$-i\alpha c(D^2 - \alpha^2)\psi_e + i\alpha Gr W(D^2 - \alpha^2)\psi_e - i\alpha Gr \psi_e D^2 W = (D^2 - \alpha^2)^2 \psi_e \quad (059a)$$

$$-i\alpha c(D^2 - \psi_o^2)\psi_o + i\alpha Gr W(D^2 - \alpha^2)\psi_o - i\alpha Gr \psi_o D^2 W = (D^2 - \alpha^2)^2 \psi_o \quad (059b)$$

Retranchons les deux inégalités membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par ψ_o et ψ_e :

$$\psi_o D^2 \psi_e - \psi_e D^2 \psi_o = 0 \quad (060)$$

En conséquence, le Wronskian $\psi_o D\psi_e - \psi_e D\psi_o$ est constant. Pris sur

FACTEUR D'AMPLIFICATION

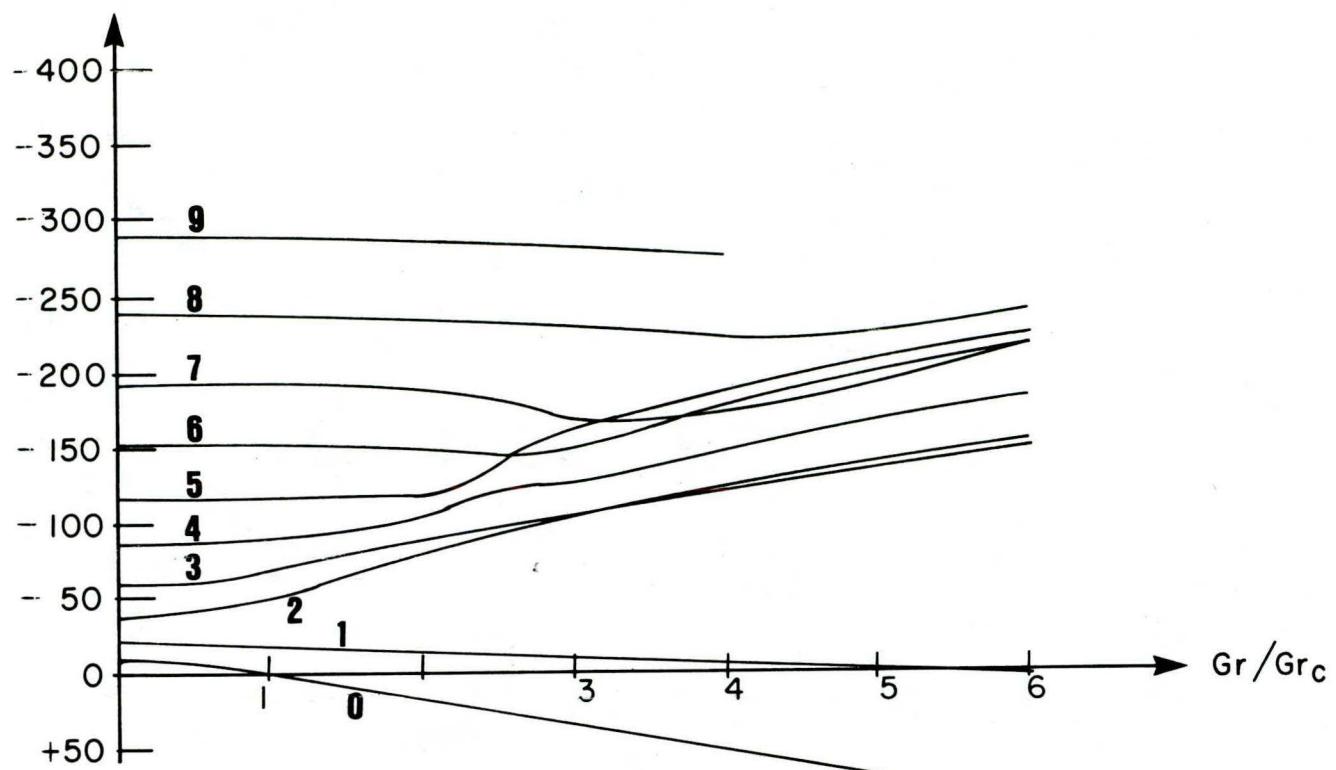


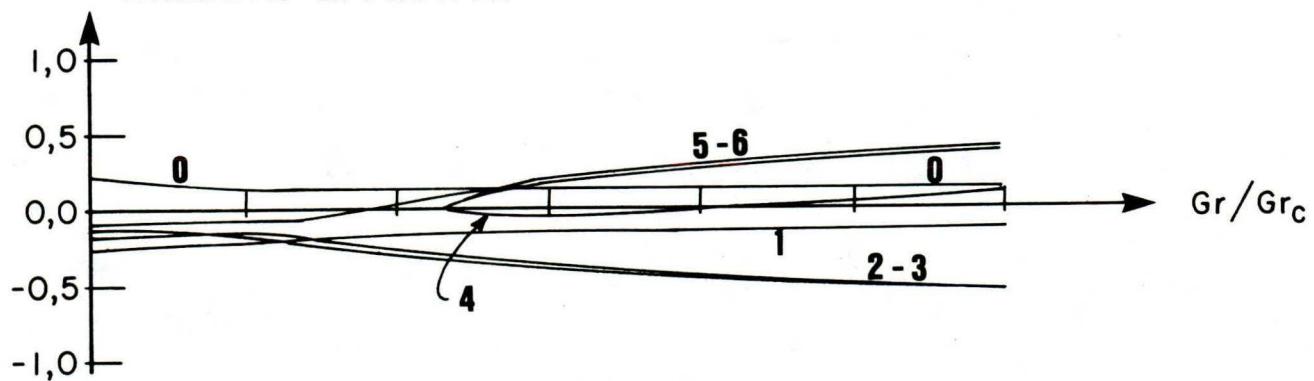
Figure XIII

Spectre des célérités

 $\zeta = 1.00$

Cas symétrique

CÉLÉRITÉ EFFECTIVE



les parois, il est égal à zéro. L'une des deux parties de la perturbation, paire ou impaire, est donc nulle.

Aussi par continuité, les niveaux d'amplification conservent leurs parités originelles, et deux niveaux de différentes parités ne peuvent fusionner.

3.3.6 Bornes de la célérité effective

Nous avons pu remarquer que toutes les célérités effectives, que nous avons consigné décroissent avec la symétrisation de l'écoulement de base, et surtout qu'elles sont inférieures à 1. Rappelons brièvement notre savoir à ce sujet.

Pour un fluide non visqueux - l'équation de Orr-Sommerfeld se réduit à l'équation de Rayleigh:

$$(V-c)(D^2 - \alpha^2)\psi = \psi D^2 V \quad (061)$$

Dès 1893, Rayleigh démontra que pour un facteur d'amplification non nul, la célérité effective vérifie la propriété: $V_{\min} < c_r < V_{\max}$ dont la forme moderne est fournie par le théorème de Howard-1961

$$|c - \frac{1}{2} (V_{\max} + V_{\min})|^2 \leq | \frac{1}{2} (V_{\max} - V_{\min})|^2 \quad (062)$$

Nos connaissances ne sont pas aussi concises pour un fluide visqueux.

Suivant le signe de la dérivée seconde de la vitesse, Joseph-1968 a montré que nous avions:

$$\text{pour } V''_{\min} \geq 0 \quad V_{\min} < c_r < V_{\max} + \frac{V''_{\max}}{2(\pi^2 + \alpha^2)} \quad (063a)$$

$$\text{pour } V''_{\min} \leq 0 \leq V''_{\max} \quad V_{\min} + \frac{V''_{\min}}{2(\pi^2 + \alpha^2)} < c_r < V_{\max} + \frac{V''_{\max}}{2(\pi^2 + \alpha^2)} \quad (063b)$$

$$\text{pour } V''_{\max} \leq 0 \quad V_{\min} + \frac{V''_{\min}}{2(\pi^2 + \alpha^2)} < c_r < V_{\max} \quad (063c)$$

laissant ouverte la possibilité d'une célérité effective dépassant les bornes de la vitesse de l'écoulement (Joseph-1969).

Yin-193 a apporté quelques précisions:

$$\text{si } c_i > 0 \quad \text{et } V'' \geq 0 \quad \text{et } V^{iv} \leq 0 \quad c_r < V_{\max} \quad (064a)$$

$$\text{si } c_i > 0 \quad \text{et } V'' \leq 0 \quad \text{et } V^{iv} \geq 0 \quad V_{\min} < c_r \quad (064b)$$

(pour $c_i = 0$, les inégalités strictes deviennent larges), et plus précisément pour l'écoulement plan de Couette-Poiseuille:

$$V_{\min} < c_r < V_{\max} \quad \text{quand } c_i \geq 0 \quad (065)$$

(Dans le cas de l'écoulement plan de Couette, la relation est vraie quelque soit le facteur d'amplification, Synge-1938).

3.4 Théorie linéaire. Stabilité de l'écoulement de base -

Nombre de Grashof critique

- L'étude pour un écoulement de base donné, de l'annulation du facteur d'amplification, nous permet de supposer les conditions critiques d'apparition de la première instabilité: nombre de Grashof et constante de propagation associée.

En fait, lors de la réalisation pratique de la recherche, les processus ont été inversés: nous avons déterminé le seuil d'instabilité avant d'exhiber le spectre des célérités.

- Précédemment nous avons défini deux nombres de Grashof:
le premier correspondant à un écoulement antisymétrique:

$$Gr = -Ga\gamma(\zeta-1)(\zeta+1)(\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2$$

$$= -Ga \frac{\frac{\partial \rho}{\partial \underline{T}} \Big|_{\frac{\underline{T}_1 + \underline{T}_2}{2}} \cdot \Delta T}{2}$$

et le deuxième à un écoulement symétrique:

$$Gr = -Ga \gamma(1+\zeta)^2 (\underline{T}_M - \underline{T}_1)^2$$

$$= -Ga \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial \underline{T}^2} (\Delta T)^2}{\frac{\partial \rho}{\partial \underline{T}}}$$

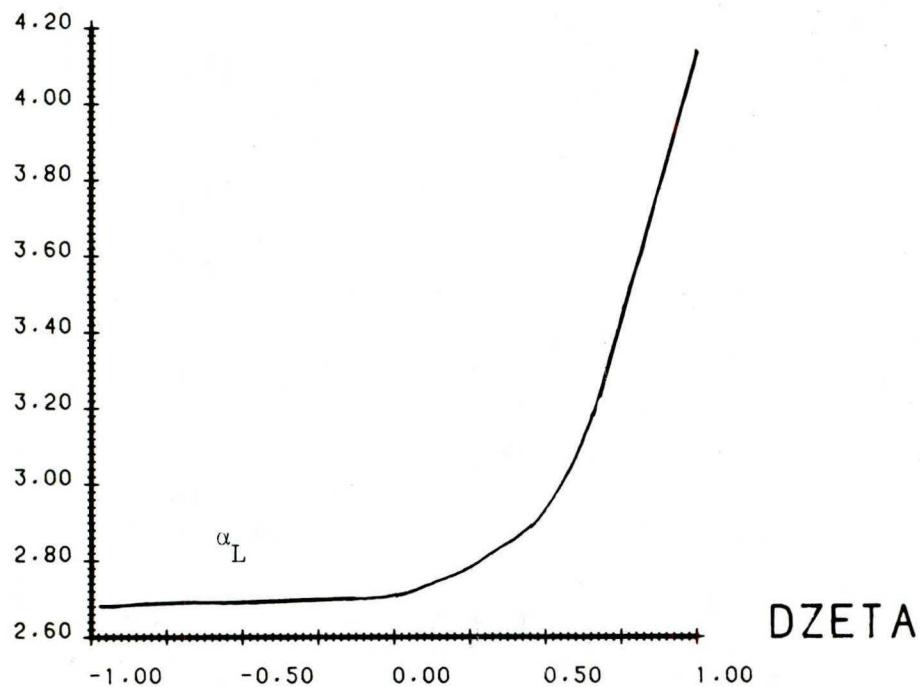
Les deux nombres sont liés par la relation $(1+\zeta) Gr_1 = (\zeta-1) Gr_2$.

3.4.1 Comparaison avec la littérature

Pour l'écoulement antisymétrique ($\zeta=-1$), nous avons obtenu
 $Gr_{L1} = 7930$, Gr_{L2} est alors nul et une constante de propagation
 $\alpha_L = 2.68$; pour l'écoulement symétrique ($\zeta=1$) $Gr_{L2} = 55010$
avec Gr_{L1} nul et $\alpha_L = 4.14$.

Ces résultats sont en parfait accord avec ceux existant déjà,
soit pour l'écoulement symétrique Gershuni - Zukhovitskii - Iakimov-1970,
soit pour l'écoulement antisymétrique - le premier auteur a s'être intéressé au problème, Gershuni-1953 ne possédait pas la puissance des ordinateurs et ses travaux en sont très affectés - Kapus et Lehmann-1965, Rudakov-1967, Vest et Arpaci-1969, Gotoh et Ikeda-1972. Les trois premiers cités employèrent une méthode de Galerkin mais avec des fonctions d'essai différentes pour chacun d'entre eux; nous-mêmes employons

CONSTANTE DE PROPAGATION CRITIQUE



NOMBRE DE GRASHOF CRITIQUE

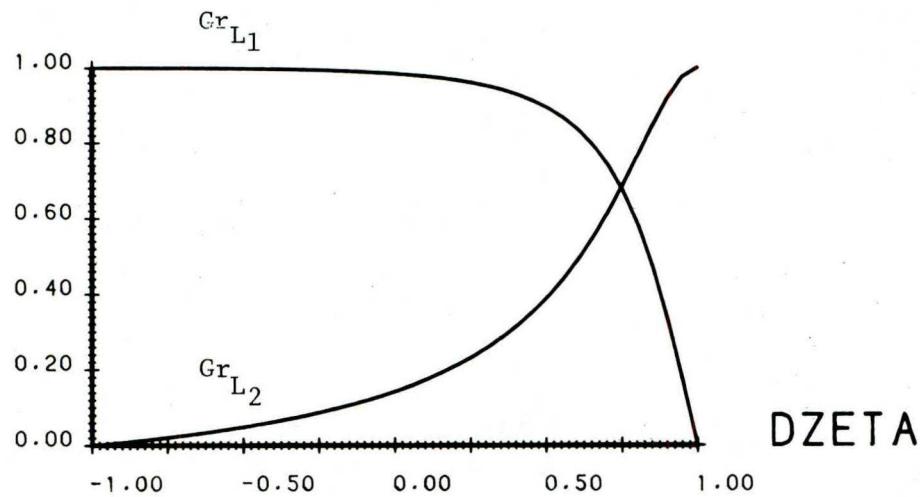


Figure XIV - Conditions critiques d'instabilité

Gr_{L1} est nommé par rapport à $Gr_{L1} \Big|_{\zeta=-1}$

Gr_{L2} est nommé par rapport à $Gr_{L2} \Big|_{\zeta=+1}$

un quatrième type de fonctions. Gotoh et Ikeda développèrent, quant à eux, une méthode asymptotique. Notons qu'au premier regard, tous les résultats diffèrent, mais n'oublions pas l'adimensionnalisation.

3.4.2 Nombre de Grashof critique

Sur la figure XIV nous avons représenté en partie supérieure la constante de propagation critique, et en partie inférieure le nombre de Grashof critique Gr_{L_1} , normalisé par rapport à sa valeur en $\zeta = -1$ soit $Gr_{L_1}^* = Gr_{L_1} / 7930$ et le nombre Gr_{L_2} , normalisé par rapport à sa valeur en $\zeta = 1$ soit $Gr_{L_2}^* = Gr_{L_2} / 55010$.

Avec dix fonctions d'essai, nous assurons une précision supérieure à 0.5% (la précision est calculée en comparant les résultats avec ceux obtenus pour 12 et 16 fonctions d'essai).

La fonction:

$$Gr_{L_1}(\zeta) = \frac{7930}{\left[1 + \left(\frac{7930}{55010} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^{1.8} \right]^{1/1.8}} \quad (066)$$

décrit nos valeurs numériques avec une précision supérieure à 1%, mais la constante 1.8 n'est reliable à aucune grandeur physique.

3.4.3 Nombre de Galilée critique

L'un des buts de notre étude était d'essayer de mettre en évidence une relation simple entre ζ et la variation du nombre de Grashof critique, permettant d'interpréter la contribution des deux écoulements: symétrique et antisymétrique, lors de la destabilisation. Ceci nous a été impossible.

NOMBRE DE GALILEE CRITIQUE

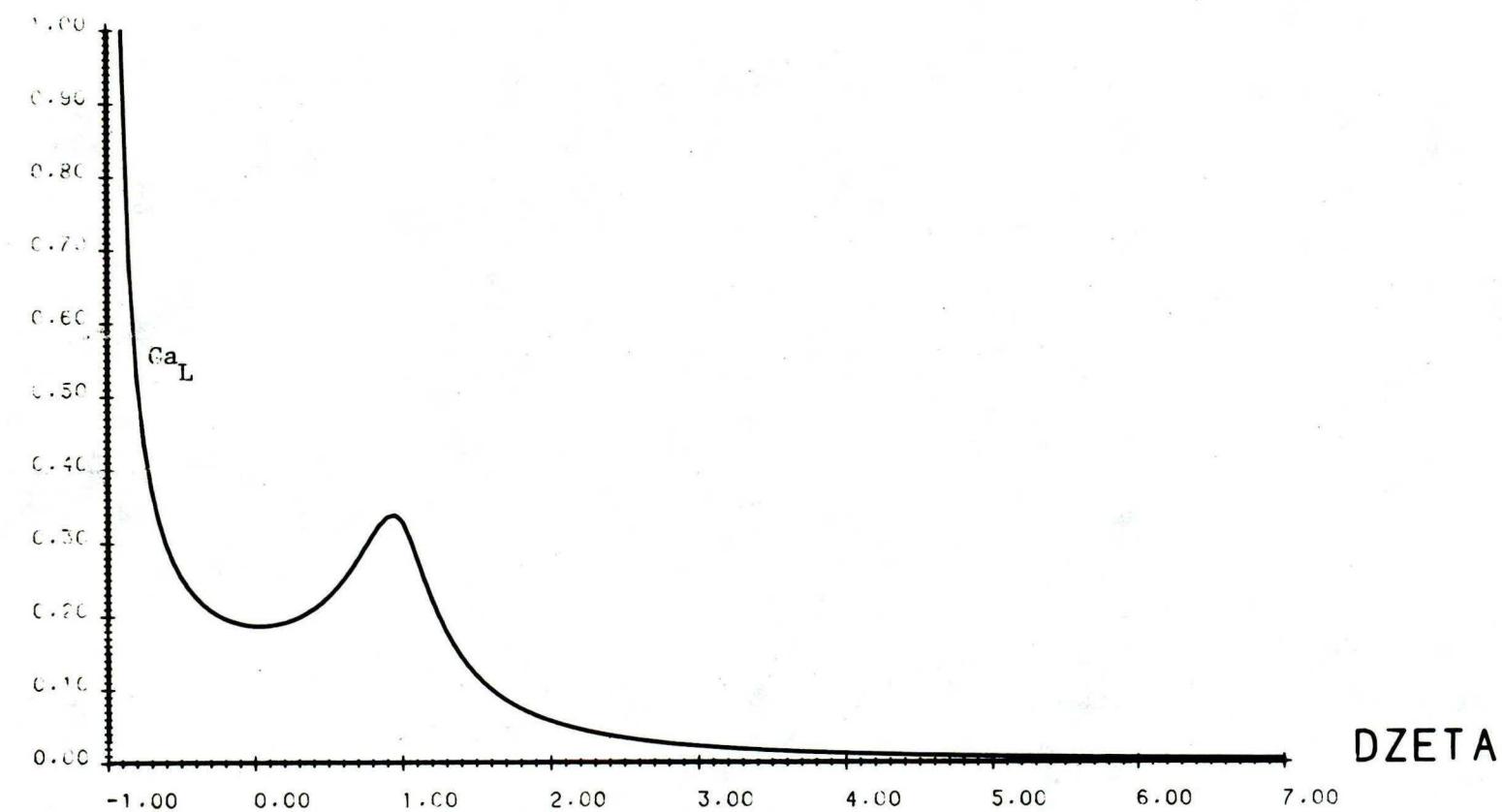


Figure XV - Nombre de Galilée critique: g_a

D'ailleurs le nombre de Grashof, bien qu'il soit toujours fini, ne paraît pas être le nombre sans dimension idéal, pour caractériser notre écoulement, cependant dans toute étude classique - relation densité-température linéaire - de la convection libre c'est lui qui apparaît et nous n'avons pas voulu nous singulariser.

Néanmoins pour clore ce paragraphe, il nous semble nécessaire de donner la variation du nombre de Galilée critique, qui rappelons-le est directement proportionnel au cube de la distance séparant les plaques et ne fait pas intervenir la température, en fonction de ζ (figure XV). Dire que le profil antisymétrique est plus stable que le profil symétrique n'a guère de sens, les conditions d'obtention sont différentes, mais par contre nous devons noter la partie ascendante de la courbe entre 0 et -1 qui nous montre indéniablement que l'inclusion dans notre profil de température, de la température du maximum de densité, stabilise la couche.

3.5 Théorie linéaire: les perturbations donnant naissance à l'instabilité

- Connaissant les conditions d'instabilité (nombre de Grashof critique, constante de propagation critique et célérité correspondante), l'équation (053) nous fournit, à une homothétie près, les coefficients de l'expansion de la perturbation suivant les fonctions d'essai. Toutefois nous n'avons aucun renseignement sur l'intensité de la perturbation.

Nous pouvons malgré tout, la construire, ainsi que l'écoulement perturbé en prenant un coefficient multiplicateur arbitraire entre le régime permanent et la perturbation.

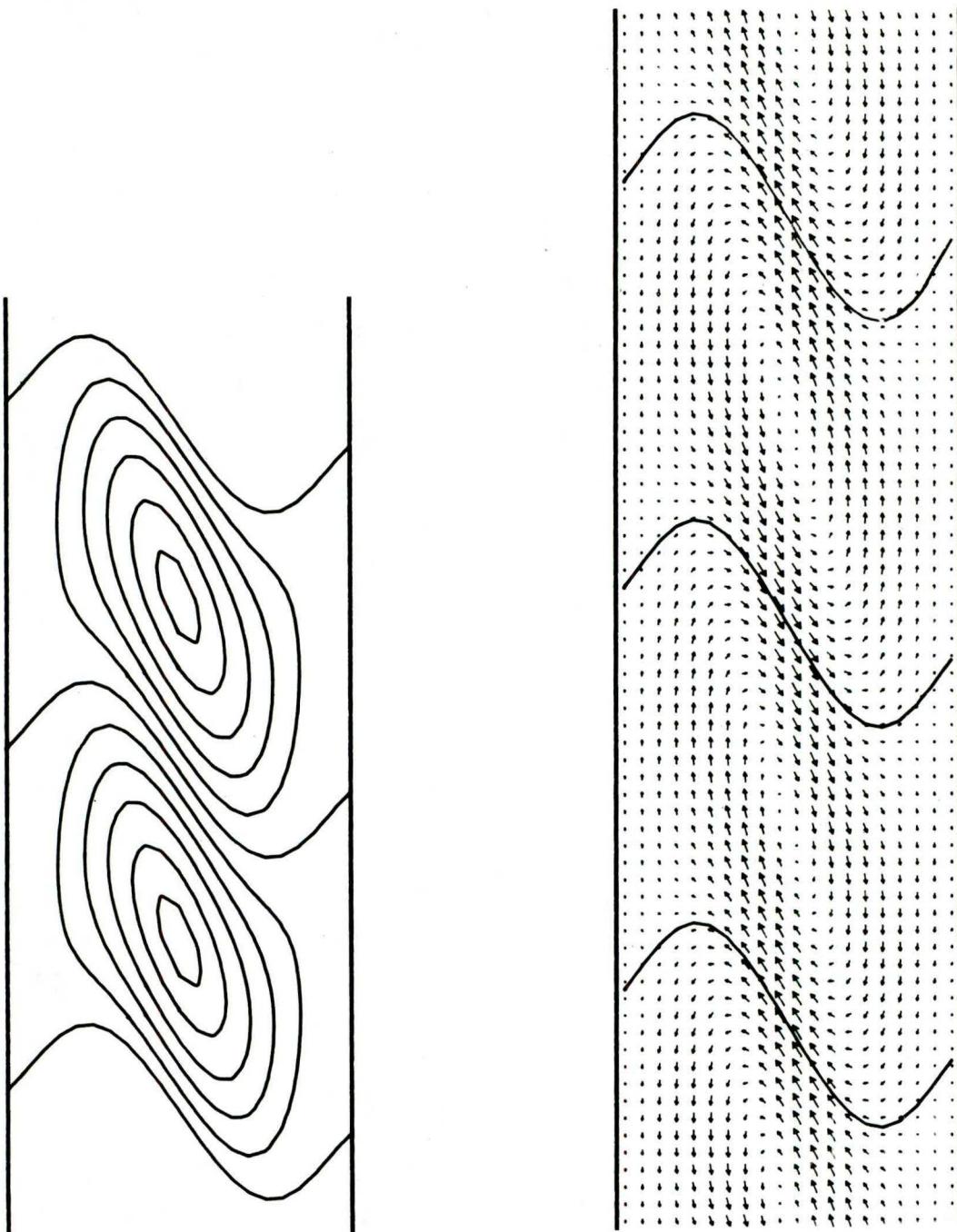


Figure XVI - Perturbation

$\zeta = -1$, cas antisymétrique
(voir Annexe V)

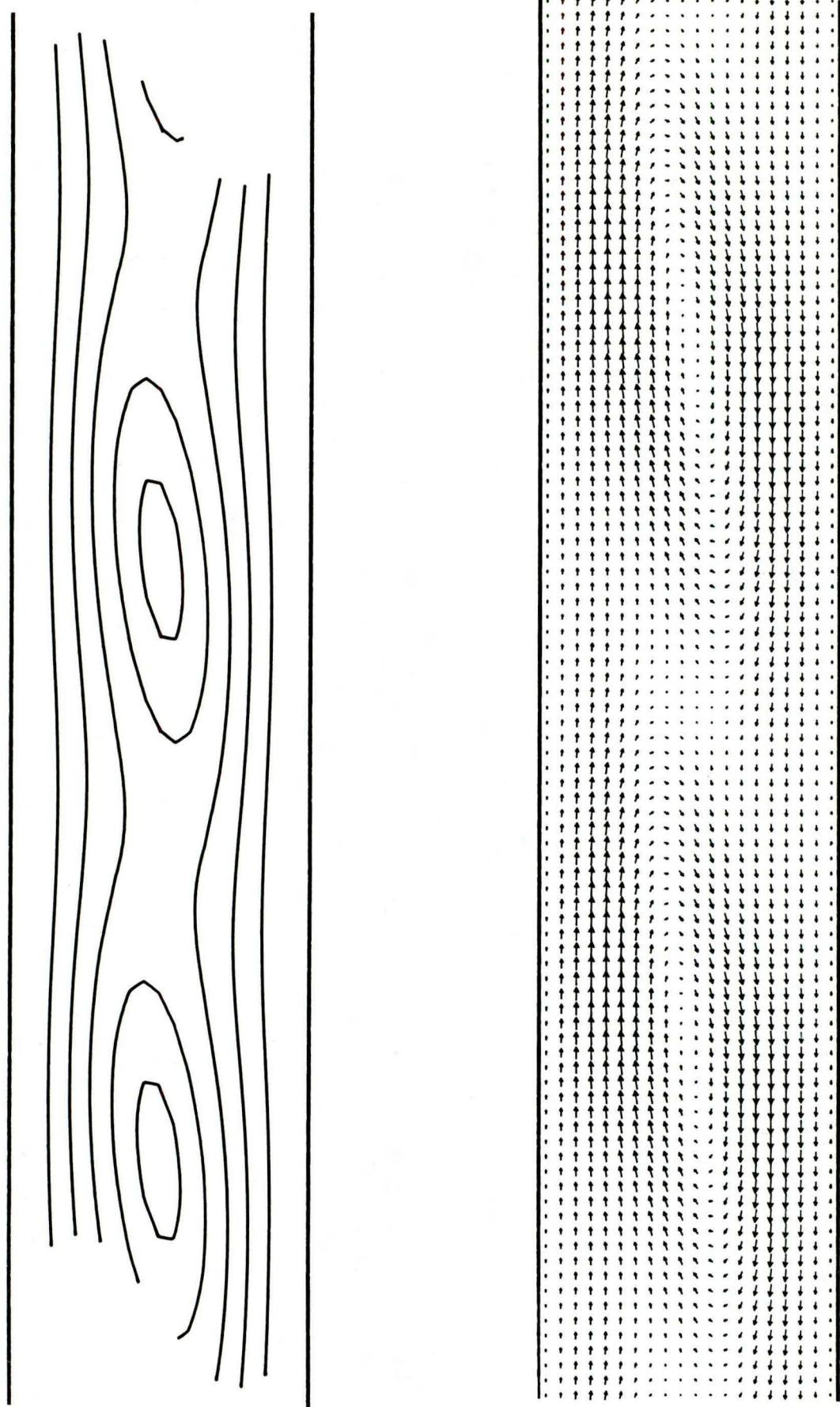


Figure XVII - Ecoulement perturbé

$\zeta = -1$, cas antisymétrique
(voir Annexe V)

- Nous pensions ne visualiser les perturbations et écoulements perturbés que par l'intermédiaire de leurs vitesses, plutôt que par leurs lignes de courant, les premières s'entourant d'un aspect nébuleux qui nous permettait de rester sur nos réserves. En effet les lignes de courant obtenues par divers auteurs sus-cités Kappus-Lehmann-1965, Rudakov-1967, Vest-Arpaci-1969, Gotoh-Ikeda-1972, bien que de forme générale semblable, présentent des dissimilarités.

Cependant l'interprétation de l'écoulement étant considérablement plus aisée à l'aide de lignes de courant, nous utiliserons également ces dernières.

Dans la représentation à l'aide des vitesses, le rapport des dimensions a été respecté, par contre dans la représentation par lignes de courant, il a été normalisé. Un coefficient égal à 5 a été choisi entre la valeur maximale de la fonction de courant du régime permanent et celle de la perturbation, coefficient réduit à 2.5 pour les vitesses. Enfin les lignes de courant ont été calculées de la valeur minimum -1 à la valeur maximum +1 par pas de 0.2, les extrêmes étant remplacés par les valeurs -0.95 et +0.95.

3.5.1 Profil antisymétrique

Pour le cas antisymétrique (figure XVI), le cœur de la cellule convective de la perturbation est de forme ovoidale allongée, son axe d'elongation étant "oblique", et présente une symétrie par rapport à son centre.

Certains auteurs, Rudakov-1967, Gotoh-Ikeda-1972 seraient en son

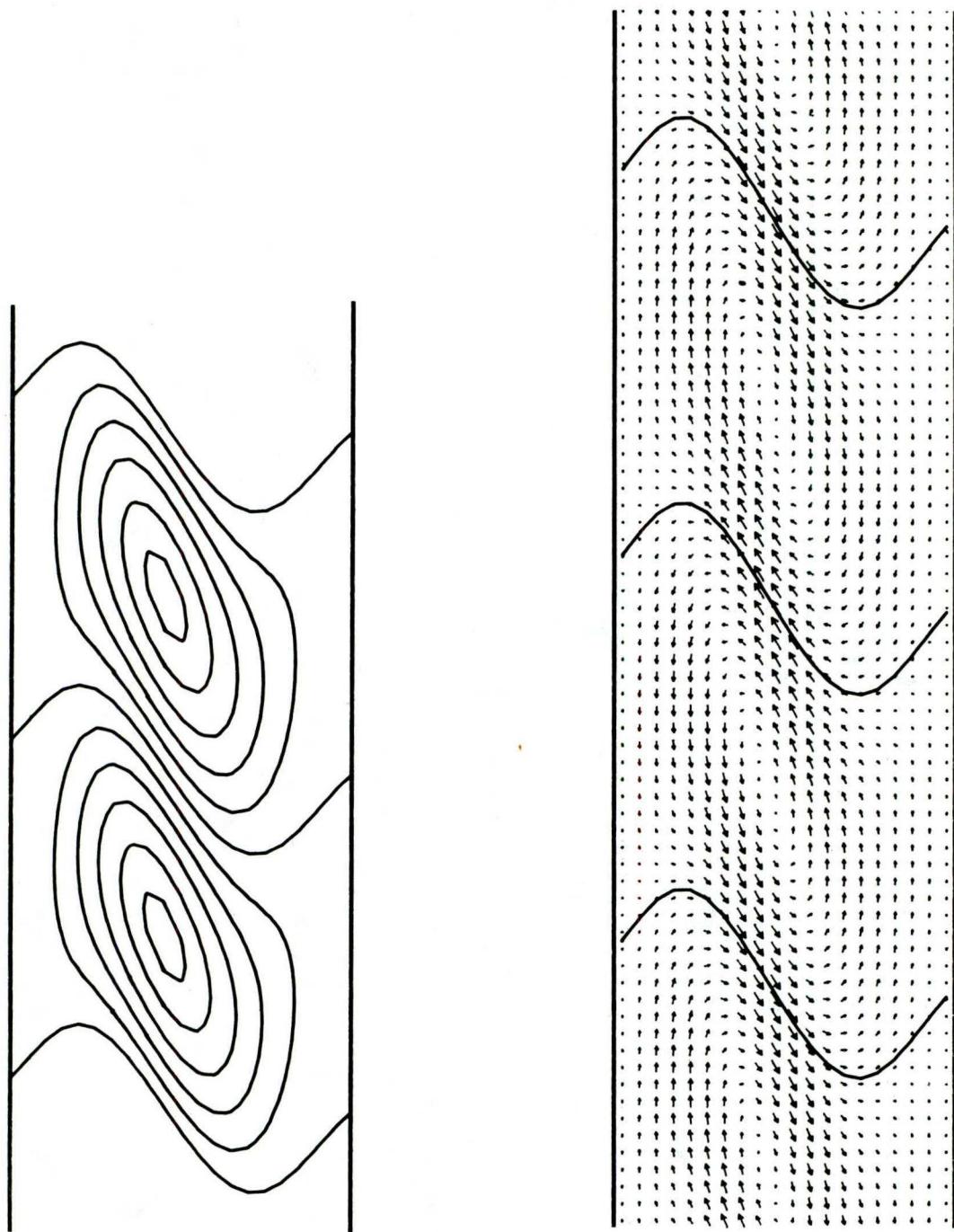


Figure XVIII - Perturbation

$$\zeta = 0.25$$

(voir Annexe V)

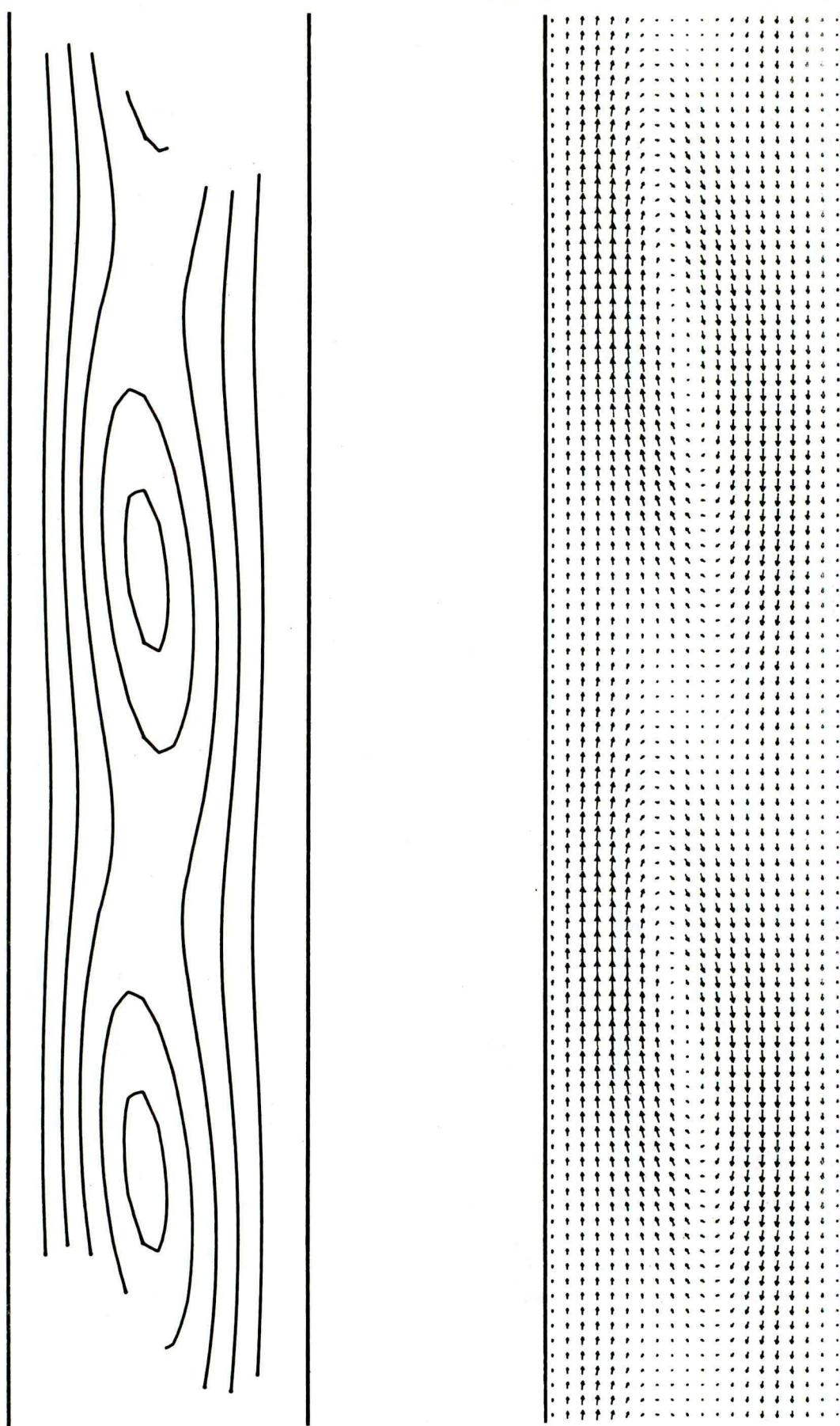


Figure XIX - Ecoulement perturbé

$$\zeta = 0.25$$

(voir Annexe V)

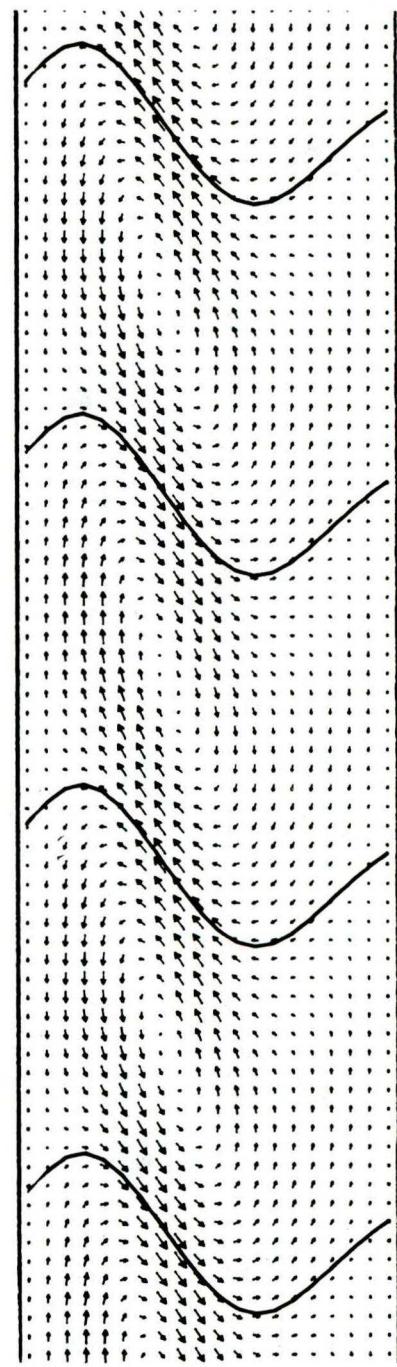
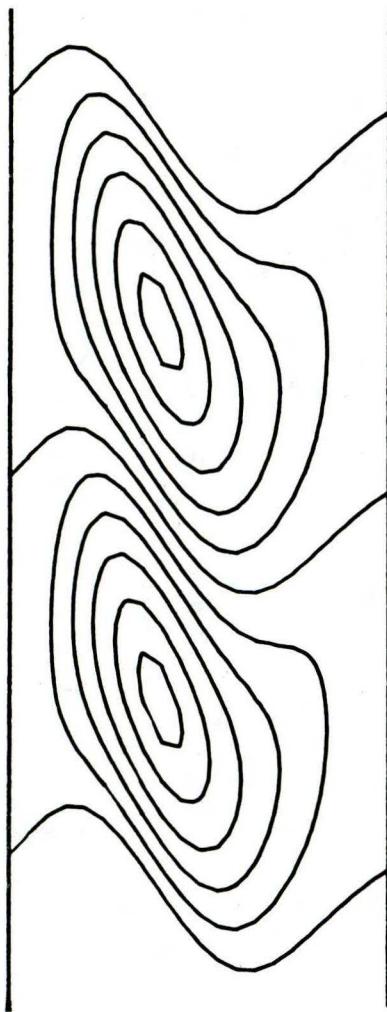


Figure XX - Perturbation

$$\zeta = 2/3$$

(voir Annexe V)

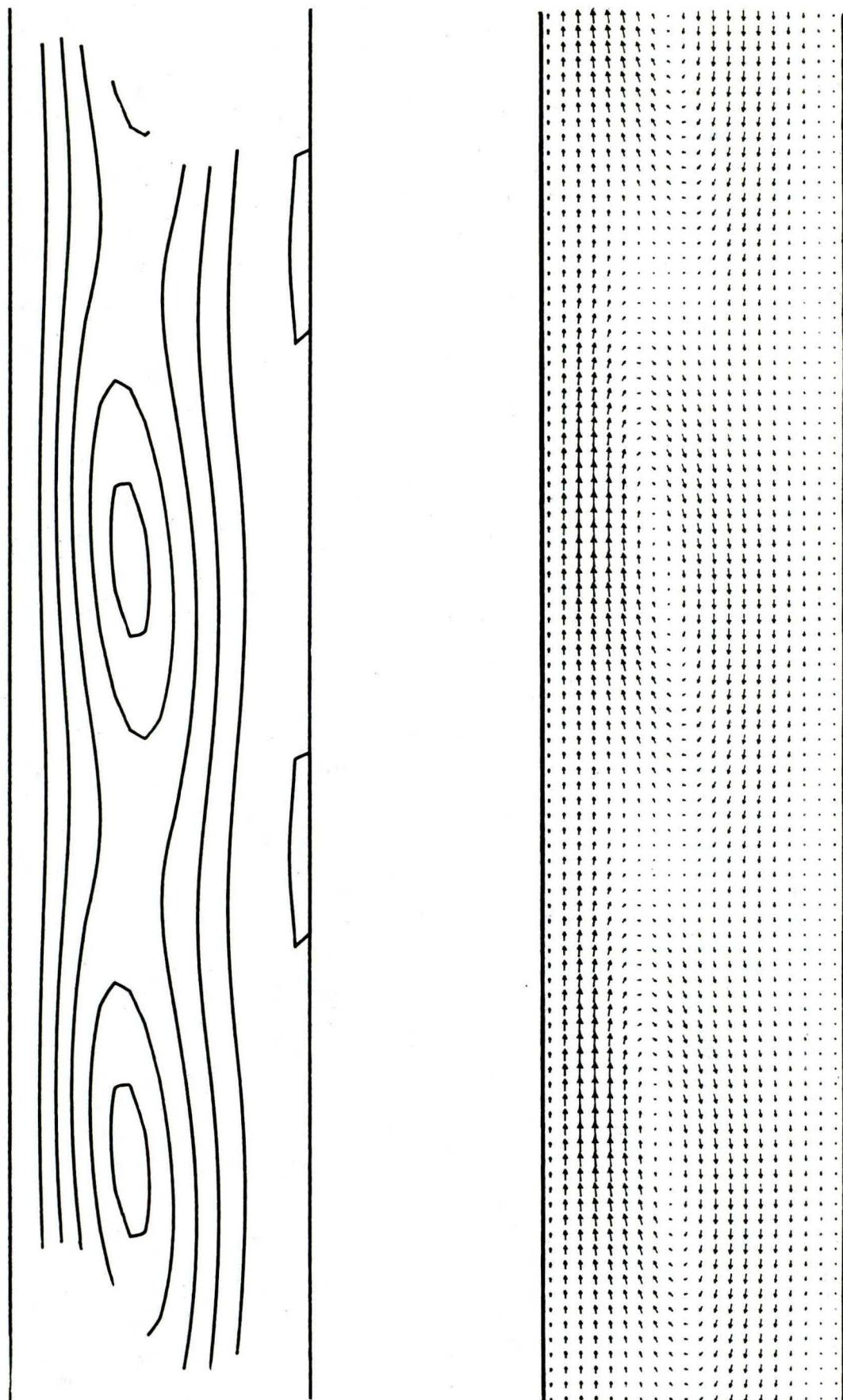


Figure XXI - Ecoulement perturbé

$\zeta = 2/3$
(voir Annexe V)

sein deux petits tourbillons, tandis que nous n'en obtenons qu'un, mais les vitesses, ici très faibles, n'autorisent pas de jugement sentenceux.

Nous appelons tourbillon, toute zone de la cellule délimitée par une ligne de courant. Dire qu'il existe deux tourbillons dans une cellule, signifie que deux lignes de courant de même intensité, indépendantes l'une de l'autre, se mordent la queue.

L'axe médian de l'écoulement perturbé (figure XVII) est constitué d'une chaîne de tourbillons, de forme très allongée et légèrement inclinés sur la verticale.

3.5.2 Profil intermédiaire

L'échauffement de la paroi chaude repousse le cœur de la cellule convective vers la paroi froide (figures XVIII, XX, XXII, XXIV, XXVI). Contre la paroi chaude, une protubérance prend naissance qui tend à symétriser la cellule par rapport à l'axe médian de l'écoulement. La corrélation entre le déplacement du cœur de la cellule et le glissement du point P_1 (voir paragraphe "évolution du profil des vitesses et définition du nombre de Grashof" : P_1 est le premier point du profil de l'écoulement de base, n'appartenant pas aux parois et admettant une vitesse nulle), semble très claire.

Néanmoins nous décelons un infime retard, qui s'accentue, puis diminuera jusqu'à s'annuler pour le cas symétrique, du centre de la cellule sur le point P_1 , dans leur progression vers la paroi froide, qui nous prouve que ces points ne sont pas confondus.

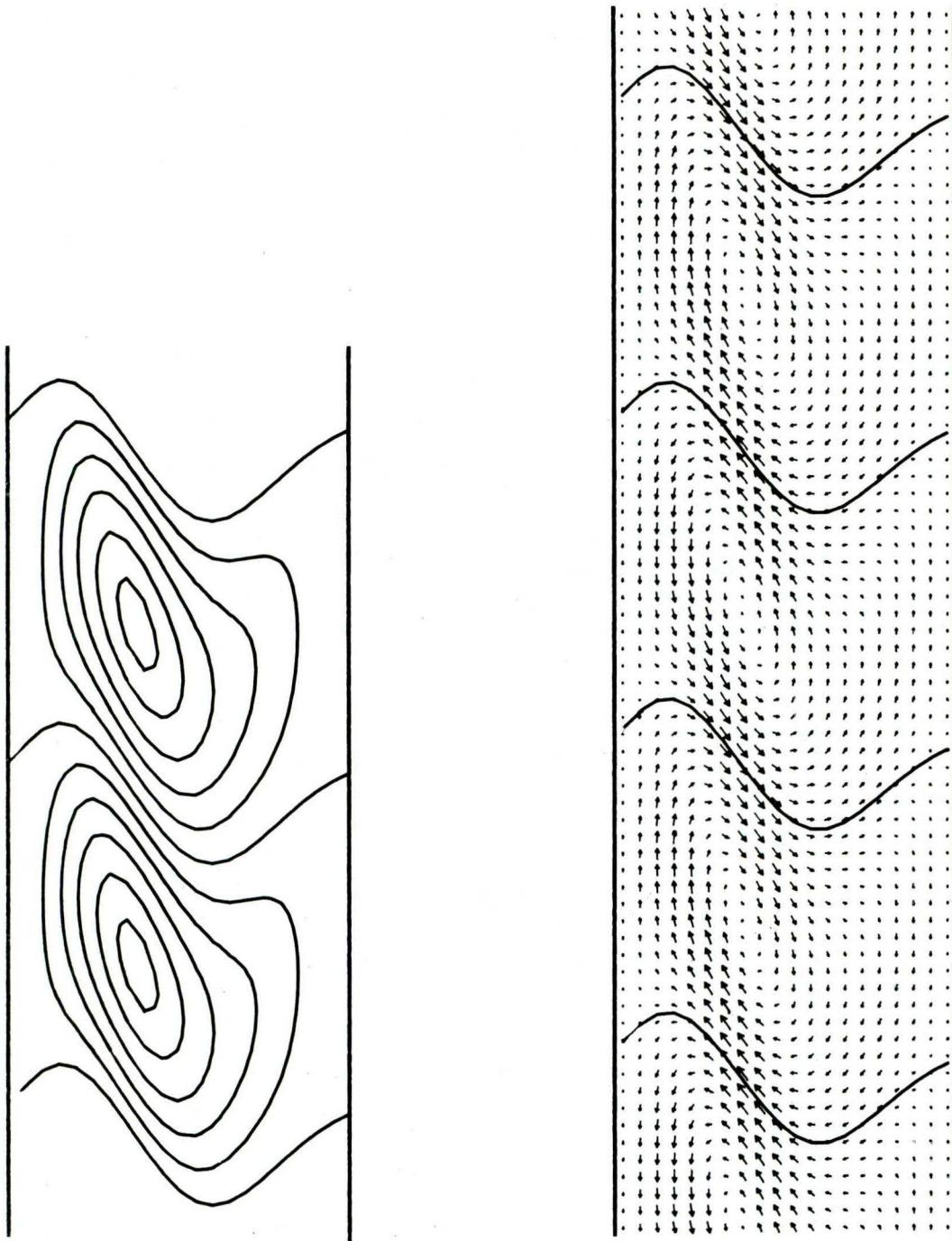


Figure XXII - Perturbation

$$\zeta = 0.75$$

(voir Annexe V)

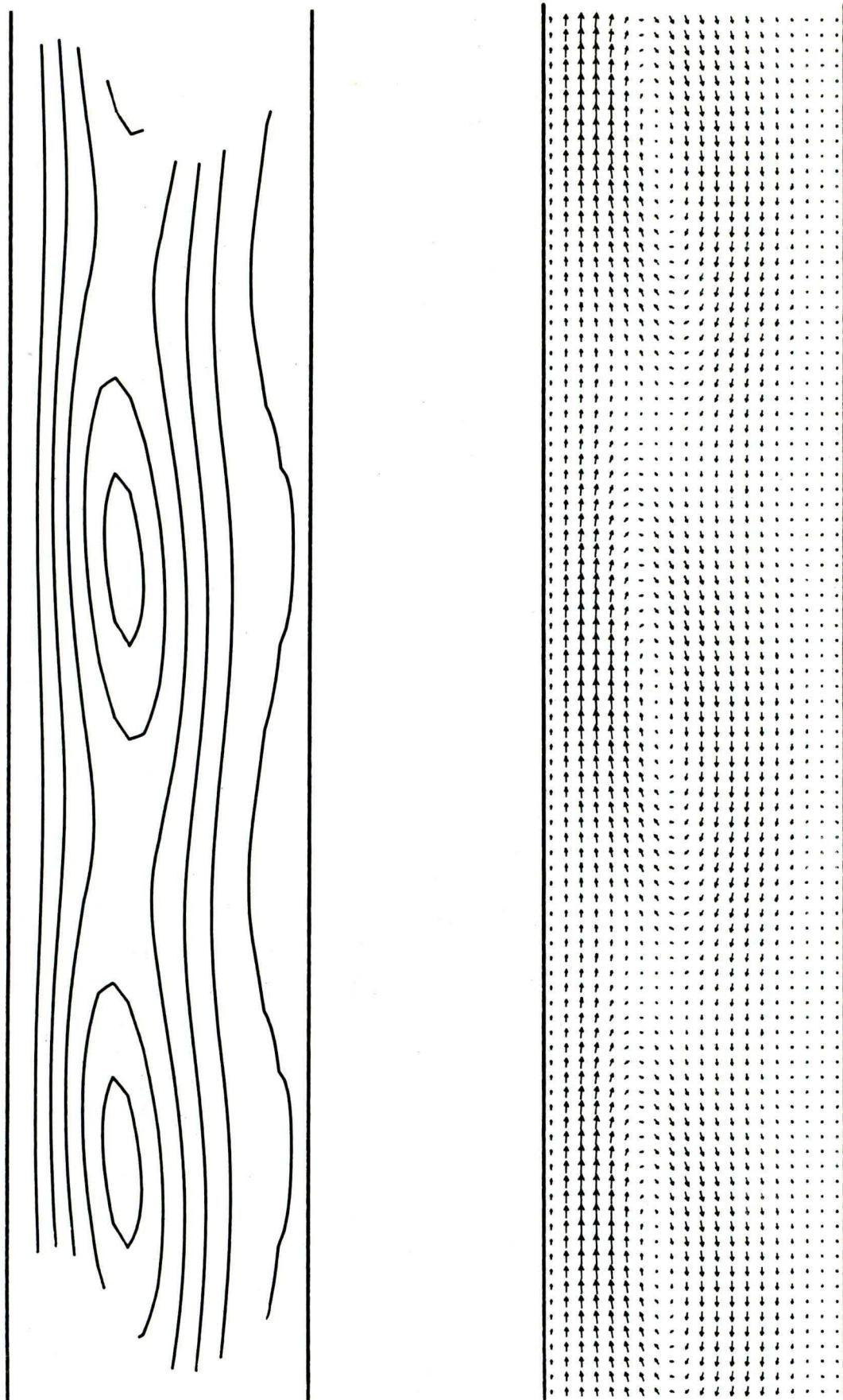


Figure XXIII - Ecoulement perturbé
 $\zeta = 0.75$
(voir Annexe V)

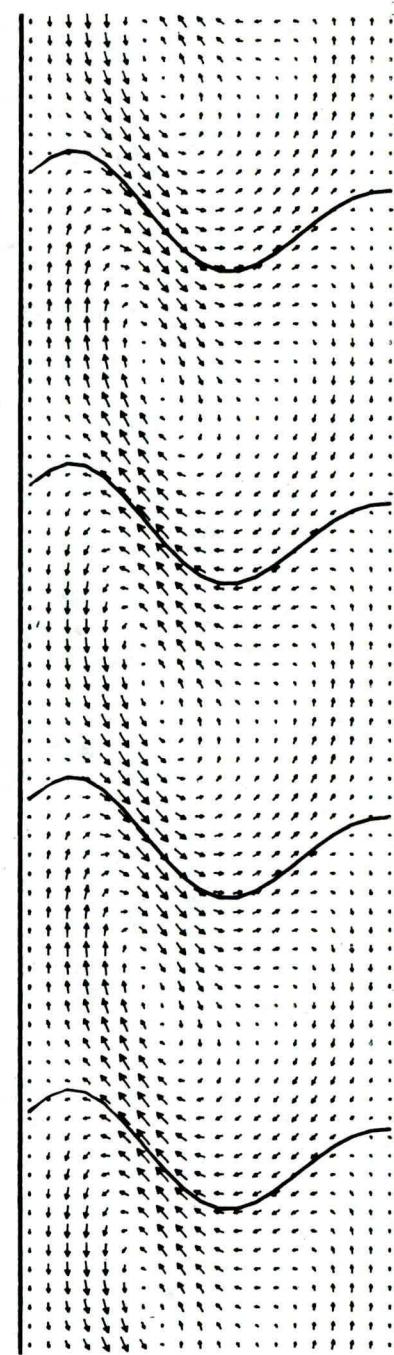
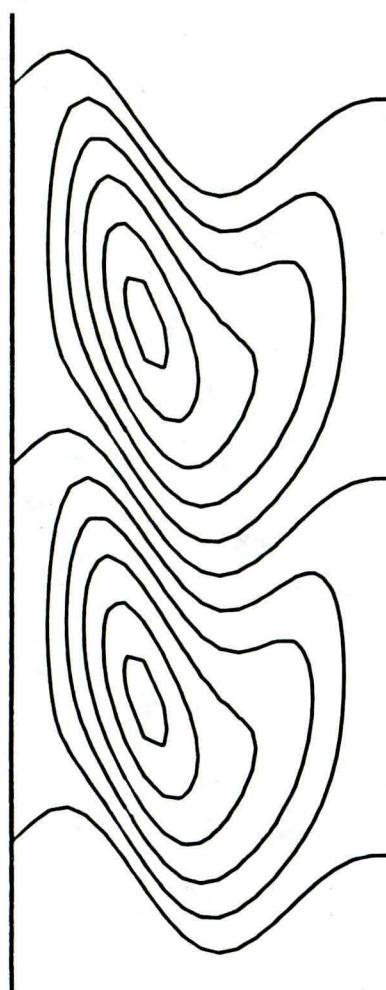


Figure XXIV - Perturbation

$$\zeta = 0.875$$

(voir Annexe V)

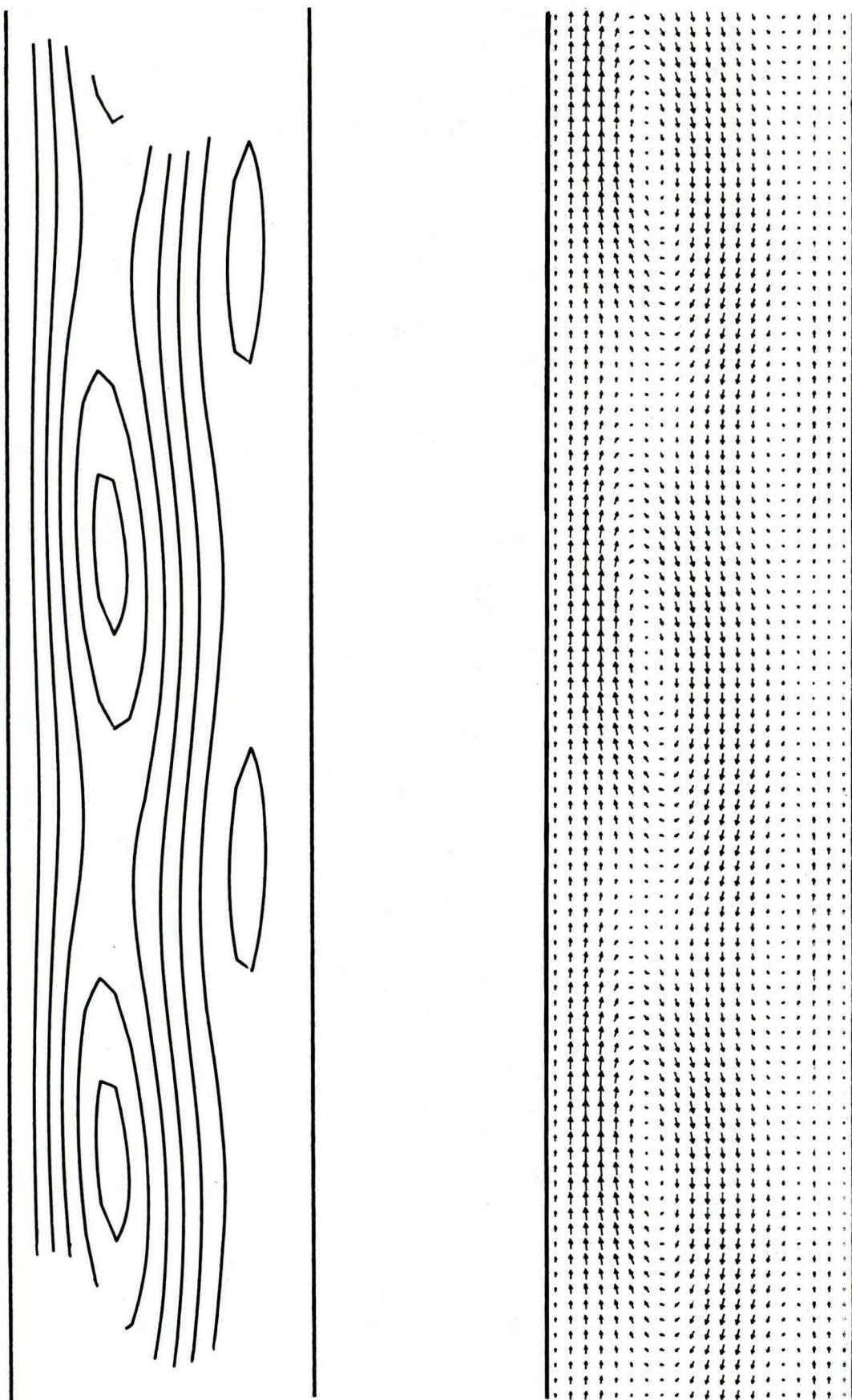


Figure XXV - Ecoulement perturbé

$$\zeta = 0.875$$

(voir Annexe V)

- D'ailleurs l'équation de conservation de la quantité de mouvement de l'écoulement perturbé:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + Gr \cdot -W \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + W \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + u \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

pour une vitesse de perturbation nulle, $u=w=0$, ne nous donne pas W égal à zéro.

- Pour une température de la paroi chaude suffisante, la cellule génère un deuxième tourbillon qui apparaît au coeur de la protubérance (figure XXVI).

3.5.3 Profil symétrique

La cellule convective de la perturbation de l'écoulement symétrique (figure XXVIII) présente des propriétés particulières dues au fait que les fonctions d'essai contribuant à l'expression de la fonction de courant sont toutes paires, subséquemment la composante horizontale de la vitesse de perturbation est paire, et la composante verticale est impaire. Rappelons que pour le deuxième niveau d'amplification, les fonctions d'essai sont impaires. Ceci s'explique par la parité de l'écoulement de base, qui dissocie les perturbations paires et les perturbations impaires (voir paragraphe "Théorie linéaire, spectre des célerités").

L'écoulement perturbé correspondant (figure XXIX) laisse apparaître deux chaînes verticales de tourbillons, décalées d'une demi-phase l'une par rapport à l'autre et centrées sur les points de vitesse nulle, qui sont aussi les points d'inflexion de l'écoulement de base.

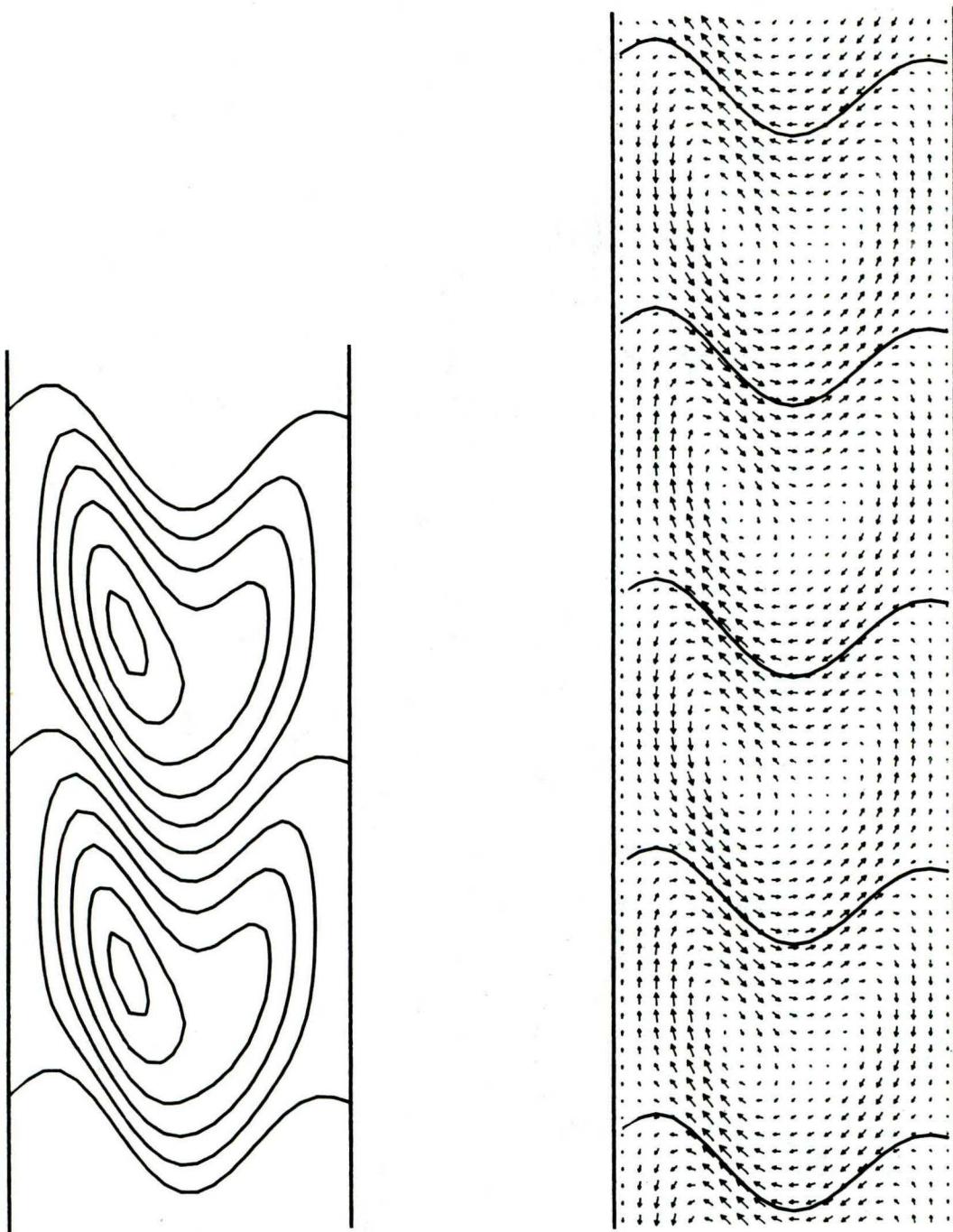


Figure XXVI - Perturbation

$$\zeta = 0.9375$$

(voir Annexe V)

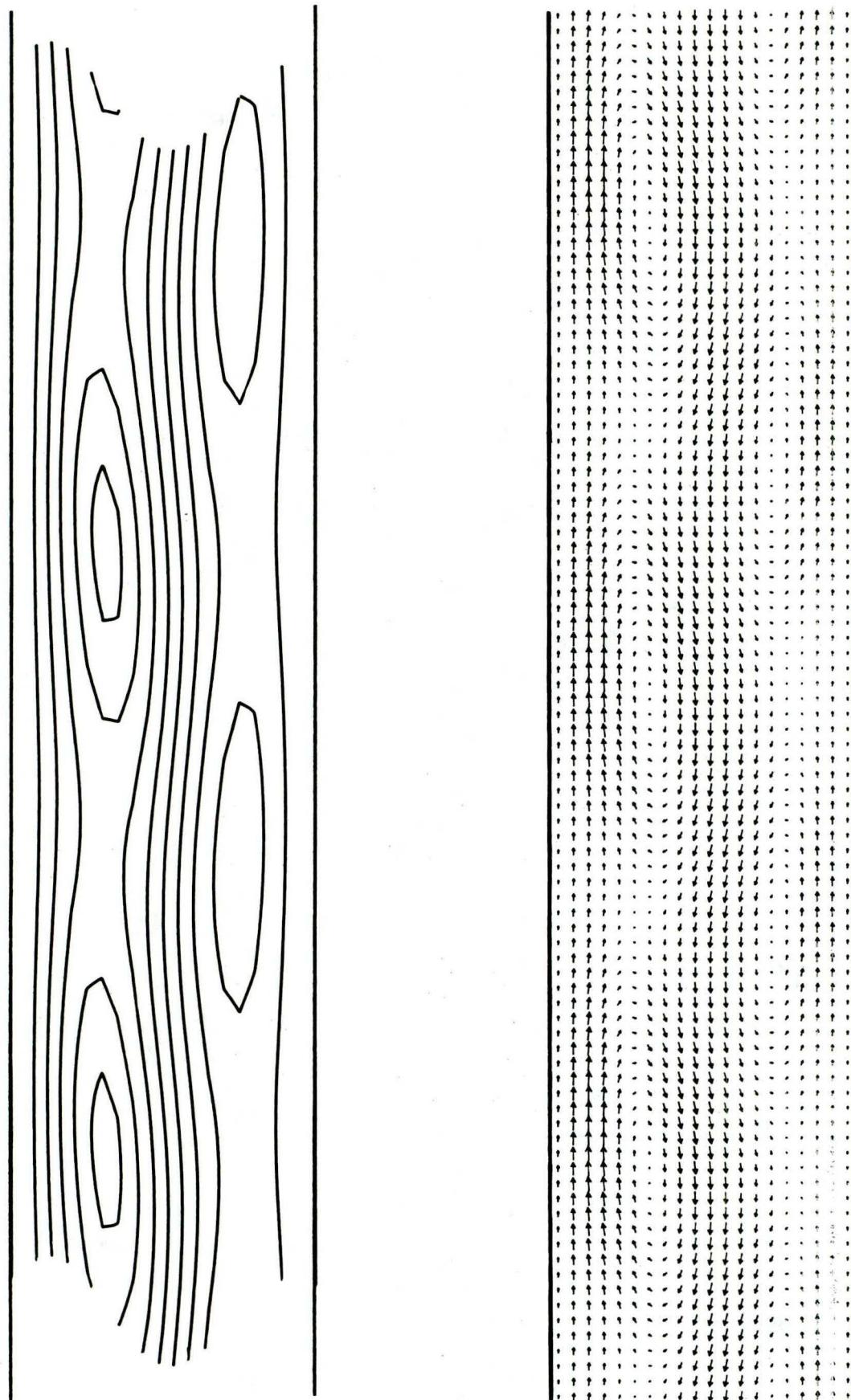


Figure XXVII - Ecoulement perturbé

$$\zeta = 0.9375$$

(voir Annexe V)

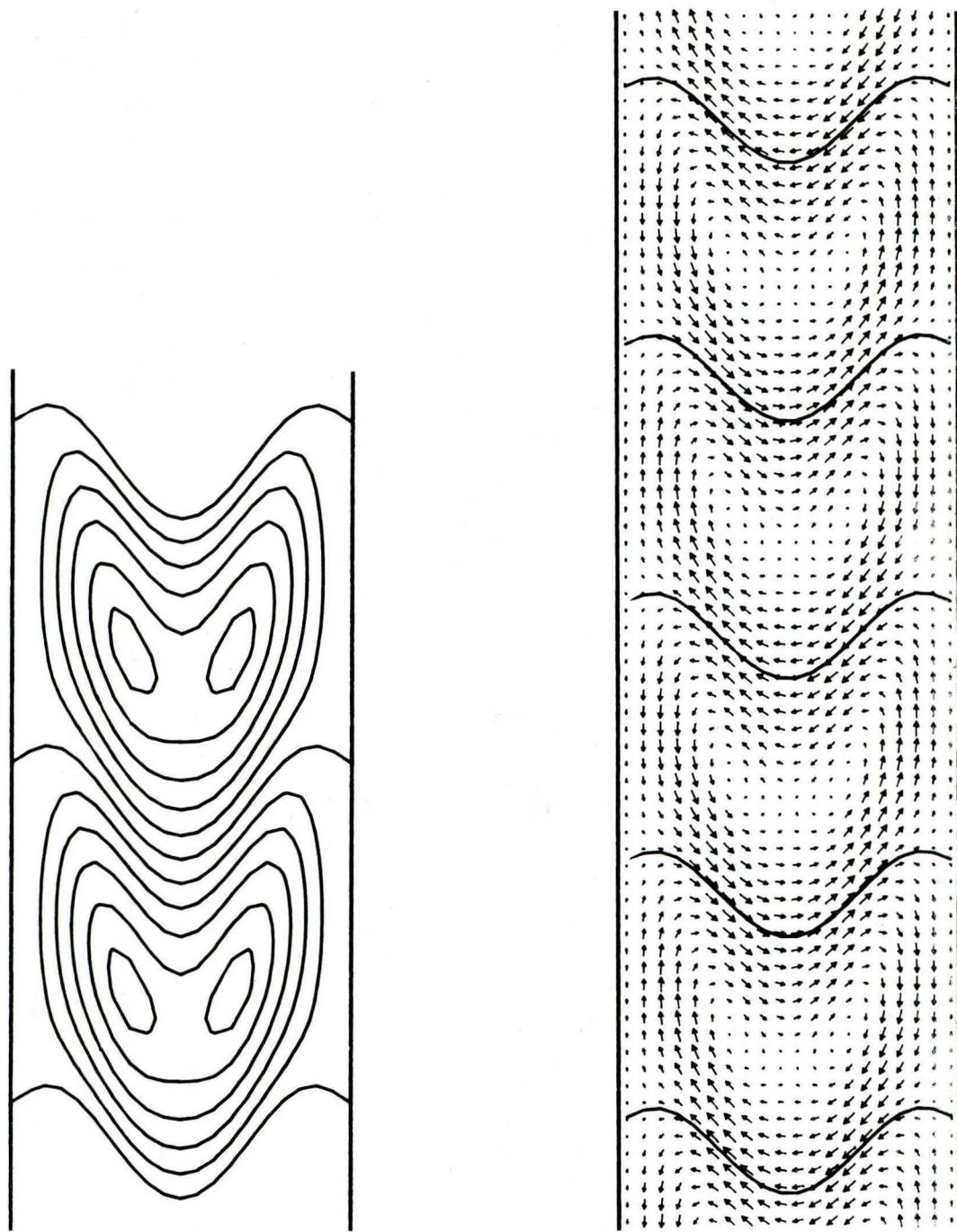


Figure XXVIII - Perturbation

$\zeta = +1$, cas symétrique

(voir Annexe V)

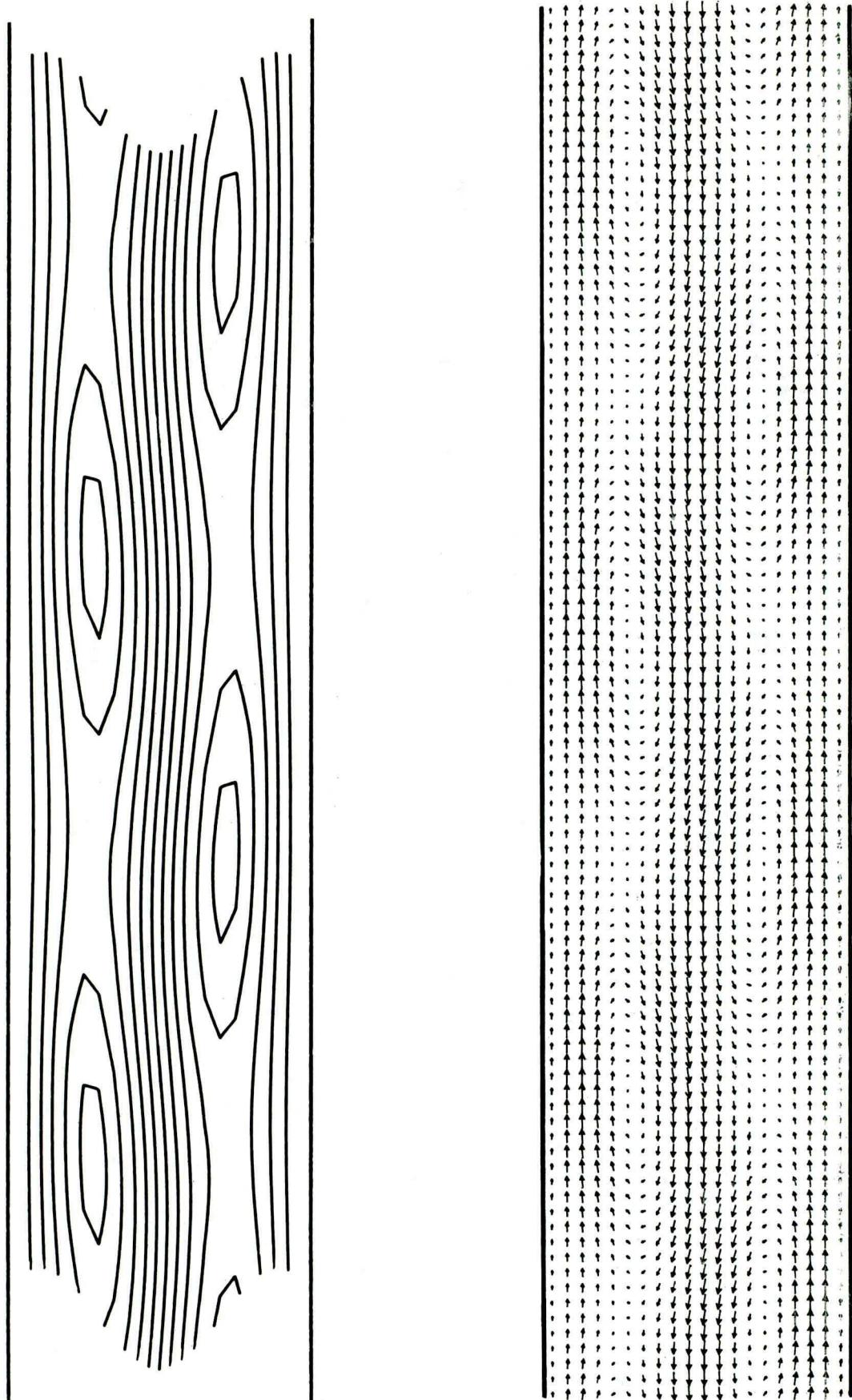
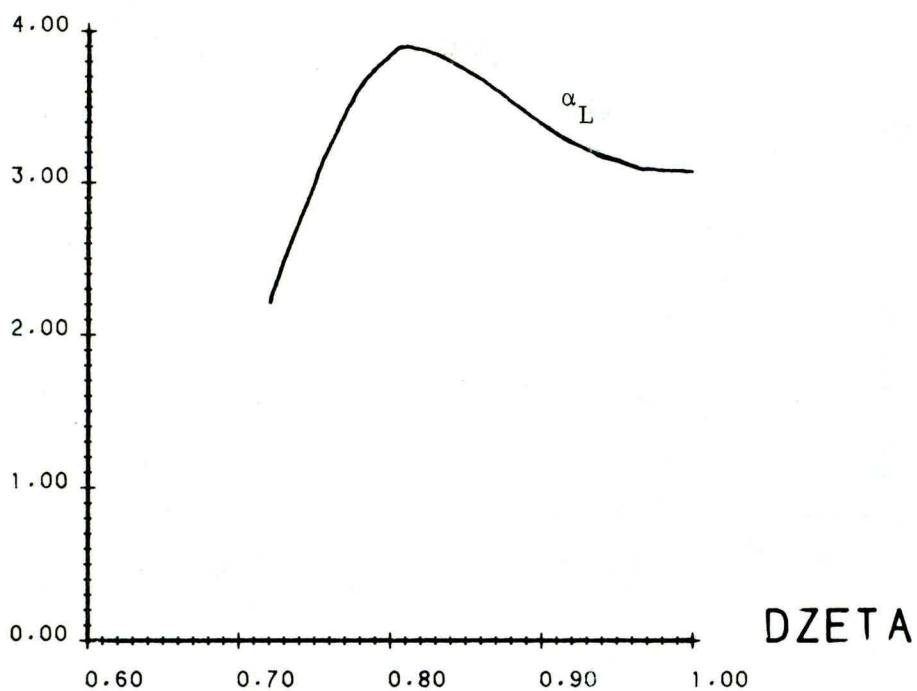


Figure XXIX - Ecoulement perturbé

$\zeta = +1$, cas symétrique

(voir Annexe V)

CONSTANTE DE PROPAGATION CRITIQUE



NOMBRE DE GRASHOF CRITIQUE

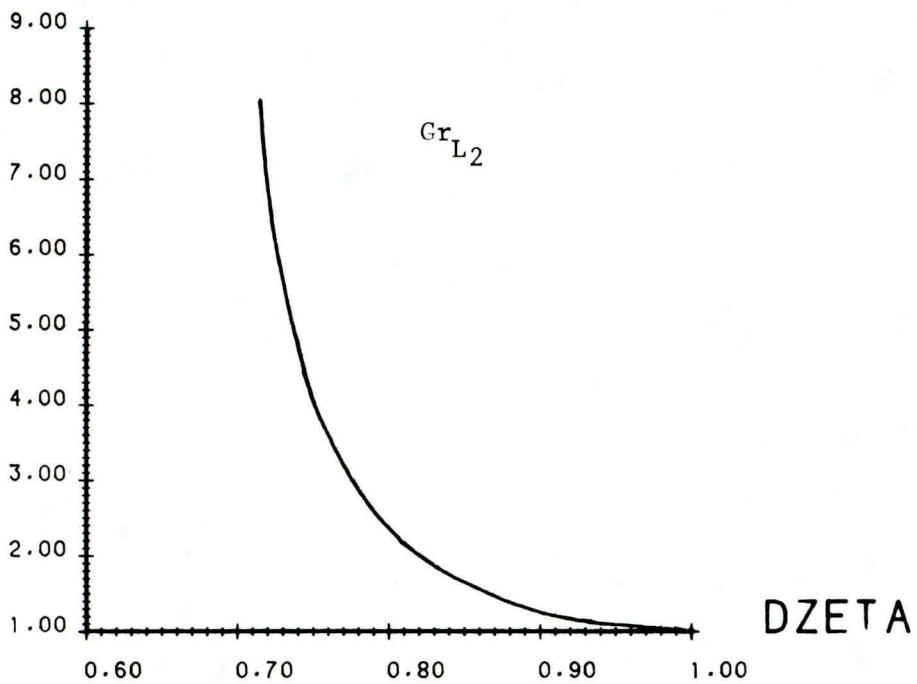


Figure XXX - Deuxième seuil d'instabilité

Le nombre de Grashof critique Gr_{L2}
est divisé par 232 800.

- Une confrontation de ces résultats avec l'expérience serait bien venue: nous saurions ainsi si nous n'avons développé que l'aspect mathématique du problème ou si celui-ci a une réalité physique.

3.6 Théorie linéaire: deuxième seuil d'instabilité

Nous avons constaté précédemment que le profil de vitesse symétrique admettait deux seuils d'instabilité: un premier pour une perturbation paire et un second pour une perturbation impaire (la parité est relative à la fonction de courant), admettant respectivement pour nombre de Grashof critique et constante de propagation critique (55010,4.14) et (232 800, 3.05). En effet la perturbation la plus dangereuse pour la stabilité d'un écoulement symétrique est toujours paire (pour un fluide non visqueux voir Drazin-Howard-1966), la perturbation impaire étant plus exposée à la dissipation visqueuse (Betchov-Criminale-1967). Nous avons cherché à savoir si tout profil de vitesse admettait un deuxième seuil d'instabilité. Très vite nous dûmes effectuer la recherche avec 24 fonctions d'essai, mais pour $\zeta < 0.71425$, la précision nécessaire n'était plus assurée.

La perte de symétrisation du profil de vitesse s'accompagne d'une croissance très rapide du deuxième nombre de Grashof critique (voir figure XXX). Ce dernier semble devenir infini pour $\zeta \approx 0.6$. Malheureusement nous sommes incapables de déterminer avec plus de précision sa plage d'existence et ainsi de la relier à une propriété du profil.

3.7 Théorie linéaire: équation de Rayleigh

Les études de Rayleigh sur l'instabilité hydrodynamique ne portèrent pas sur l'équation d'Orr-Sommerfeld mais sur une simplification de cette équation: l'équation dite de Rayleigh qui est l'équation d'Orr-Sommerfeld d'un fluide non visqueux, soit:

$$-c(D^2 - \alpha^2)\psi + GrW(D^2 - \alpha^2)\psi - Gr \cdot D^2 W \cdot \psi = 0 \quad (067)$$

Cette équation n'étant que du second ordre se prête assez facilement à une analyse mathématique. Elle nous fournit deux conditions nécessaires très simples pour qu'un écoulement plan non visqueux offre un caractère instable. Le profil de vitesse doit posséder un point d'infexion (Rayleigh-1880) et si x_s est un tel point, la quantité $D^2 W [W - W(x_s)]$ doit être strictement négative sur un domaine de l'écoulement (Fjortoft-1950).

Malgré l'effet stabilisant de la viscosité, tout écoulement instable pour l'équation de Rayleigh, l'est également pour l'équation d'Orr-Sommerfeld; bien plus, l'écoulement plan de Poiseuille non-visqueux est stable (la dérivée seconde de la vitesse a un signe constant) mais visqueux, est instable (Thomas-1953).

En fait nous devons distinguer deux mécanismes d'instabilités: celui associé au(x) point(s) d'infexion du profil de vitesse ou plus physiquement au maximum de vorticité; celui créé par l'effet destabilisant de la viscosité. Dans l'étude d'une couche fluide verticale que nous menons, les profils de vitesse ont toujours au moins un point d'infexion et la simplification fluide non visqueux paraît justifiée.

Aussi, d'après Howard-1964, les profils de vitesse considérés ne peuvent avoir plus de modes instables que de points d'inflexion, soit un mode d'instabilité pour $-1 \leq \zeta \leq 3/7$ et deux modes pour $3/7 < \zeta \leq 1$. Nous en avons exhibé deux pour ζ variant de 0.7 à 1.

Remarquons que si nous admettons que l'écoulement antisymétrique ne possède qu'un seul mode d'instabilité la célérité effective de la perturbation critique doit être nulle sinon nous aurions deux perturbations critiques $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(-x)$ (voir paragraphe: "Théorie de la stabilité linéaire: spectre des célérités").

Cependant n'oublions pas que nous nous sommes placés dans le cadre d'une théorie linéaire. Pour une telle théorie, l'écoulement plan de Couette est absolument stable (Gallagher et Mercer-1962-1964) alors que chacun sait qu'il peut devenir turbulent.

3.8 Théorie de l'énergie

Le problème aux valeurs propres, tout à fait semblable à celui obtenu par la théorie linéaire de la stabilité -mais ici le système comprend deux équations au lieu d'une seule, à savoir:

$$(D^2 - \alpha^2)v - \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \sin\theta \cdot Dw = 0 \quad (068a)$$

$$(D^2 - \alpha^2)^2 u + i\alpha Gr \cdot Du \cdot \cos\theta \cdot Dw + i\alpha \frac{Gr}{2} \cdot u \cdot \cos\theta \cdot D^2 w + \alpha^2 \frac{Gr}{2} \cdot v \cdot \sin\theta \cdot Dw = 0 \quad (068b)$$

avec les conditions frontières:

$$v(\pm 1/2) = 0 \quad u(\pm 1/2) = Du(\pm 1/2) = 0 \quad (068\alpha)$$

est également résolu par la méthode de Galerkin. Aussi nous nous bornerons à rappeler très brièvement son principe.

3.8.1 Le problème de valeurs propres

La composante u (de même v) de la vitesse est décomposée en somme finie de fonctions d'une famille complète respectant les conditions frontières, soit:

$$u = \sum_m^N a_m u_m \quad \text{avec} \quad u_m = (x^2 - 1/4)^2 x^{m-1}$$

$$v = \sum_m^N b_m v_m \quad \text{avec} \quad v_m = (x^2 - 1/4) x^{m-1}$$

expressions reportées dans les équations (068a) et (068b) qui sont respectivement multipliées par u_n et v_n , puis intégrées sur la section horizontale de la couche.

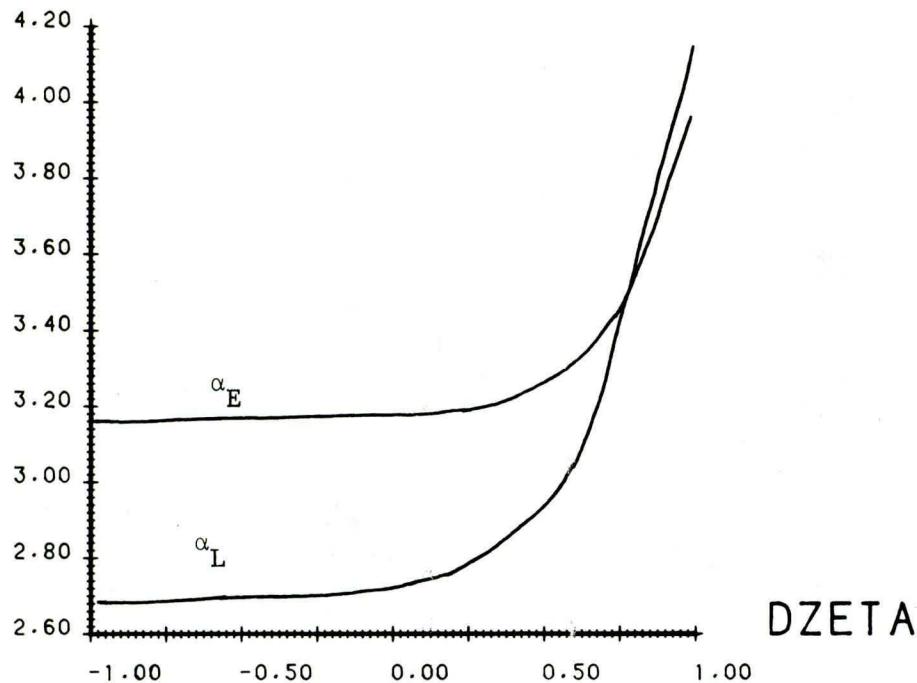
Nous obtenons ainsi un système d'équations d'ordre $2N$ à $2N$ inconnues, les a_m et b_m , système qui admet une solution non nulle si et seulement si son déterminant est égal à zéro. Cette dernière condition nous permet de calculer les valeurs propres de Gr , dont nous retenons la plus petite.

3.8.2 Nombre de Grashof critique

La méthode converge assez rapidement: pour $N=6$, la précision est supérieure à $1^0/oo$.

En parfait accord avec les résultats de Carmi-1969, nous constatons que pour un écoulement donné, ainsi qu'une constante de propagation, la courbe Gr , valeur propre minimum du système, fonction de l'angle

CONSTANTE DE PROPAGATION CRITIQUE



NOMBRE DE GRASHOF CRITIQUE

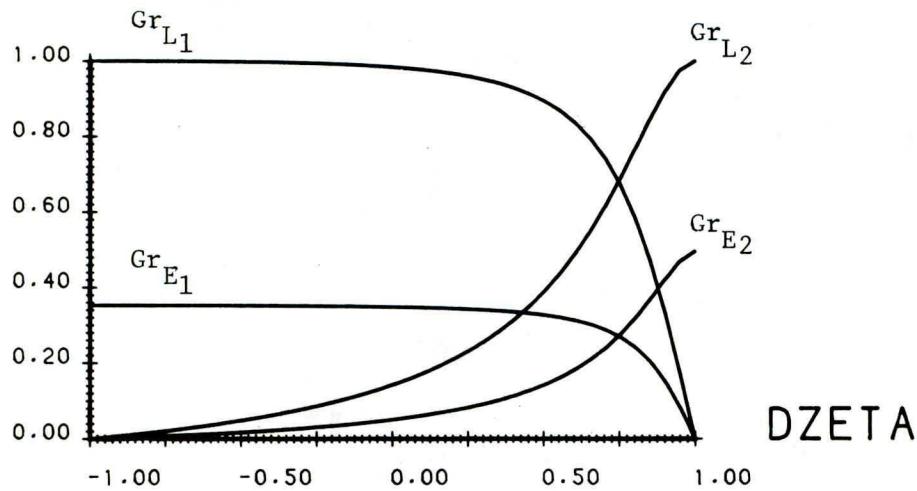


Figure XXXI - Conditions critiques d'instabilité

Comparaison de la théorie linéaire et de la théorie de l'énergie

Gr_{L1} et Gr_{E1} sont divisés par 7930.

Gr_{L2} et Gr_{E2} sont divisés par 55010.

de la perturbation θ , présente deux extrêmes: un maximum en $\theta=0$ et un minimum en $\theta=\pi/2$.

Le nombre de Grashof ainsi déterminé, Gr_E , obtenu pour $\theta=\pi/2$, est environ deux à trois fois plus petite que le nombre de Grashof critique Gr_L équivalent (figure XXXI). Entre autre, pour l'écoulement symétrique, $\zeta=1$, nous obtenons $Gr_{E_2} = 27,300$ avec $\alpha = 3.96$ et pour l'écoulement antisymétrique, $\zeta = -1$, $Gr_{E_1} = 2790$ avec une constante de propagation associée $\zeta = 3.16$, à l'instar d'Ayyaswany-1974, dont, signalons-le, l'article n'est valide que pour une couche verticale (voir Birikh-Gershuni -Zhukhovitskii-Rudakov-1968).

Tout comme dans le cas de la théorie linéaire, nous avons déni-
ché une fonction:

$$Gr_{E_1} = \frac{2790}{\left[1 + \left(\frac{2790}{27300} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^{1.7} \right]^{1/1.7}} \quad (069)$$

qui extrapole nos valeurs numériques avec une précision de l'ordre du centième.

3.8.3 Nombre de Galilée critique

Nous ferons ici référence au paragraphe "Nombre de Galilée critique" de la partie consacrée à la théorie linéaire, les conclusions à tirer étant les mêmes.

La figure XXXII nous apporte la comparaison entre les valeurs critiques obtenues par les deux théories. Les deux courbes ont même allure et présentent un minimum pour $\zeta=0$ et un maximum pour $\zeta=1$, aussi

NOMBRE DE GALILEE CRITIQUE

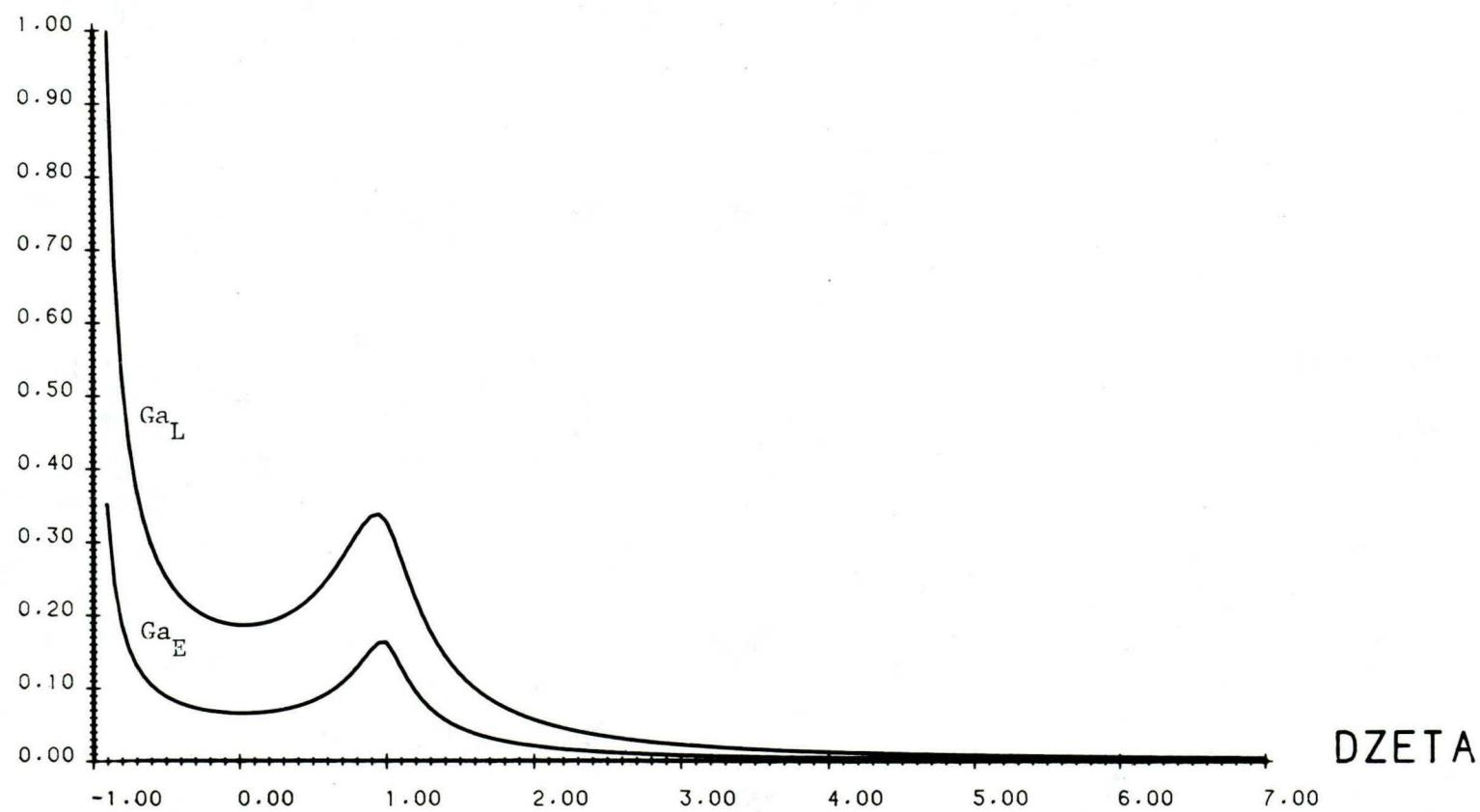


Figure XXXII - Nombres de Galilée critiques

Comparaison de la théorie linéaire et de la théorie de l'énergie

notons une nouvelle fois que si les températures des deux parois sont prises de part et d'autre de la température du maximum de densité, l'écoulement gagne en stabilité.

Ces courbes ne sont pas sans rappeler celle du transfert thermique obtenue par Watson-1972, dans sa schématisation bidimensionnelle d'une cavité parallélépipédique emplie d'eau, dont une paroi est maintenue à 0°C , tandis que la paroi lui faisant vis-à-vis est chauffée à T_2 , les autres faces de la cavité étant adiabatiques. Le flux de chaleur traversant la cavité passe par un maximum pour $T_2 = T_M$ ($\zeta=0$) et un minimum pour $T_2 = 2 \cdot T_M$, ($\zeta=1$). Dans ce dernier cas il se fait essentiellement par conduction.

3.9 Comparaison des théories et de leurs résultats

En vue d'étudier la stabilité de notre écoulement initial, nous avons distingué deux seuils de stabilité-instabilité, basés sur des théories différentes. Aussi pour pouvoir comparer les résultats fournis par ces deux théories, il apparaît nécessaire de redéfinir le concept de stabilité afin de se référer à une théorie plus unifiée.

3.9.1 Stabilité d'un écoulement

Un écoulement caractérisé par son profil de vitesse et son nombre de Grashof Gr , est conditionnellement stable avec un rayon attracteur δ , si toute perturbation dont l'énergie initiale est inférieure à δ , disparaît, soit:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall v \quad / \quad \xi_v(0) < \delta \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_v(t) = 0$$

L'écoulement est globalement stable si la propriété précédente est vraie quelque soit le rayon attracteur δ , c'est-à-dire pour toute perturbation finie.

Si de plus nous imposons la condition $\frac{d\xi}{dt} < 0$, c'est-à-dire que l'énergie de toute perturbation décroît avec le temps, l'écoulement est globalement monotoniquement stable.

Le véritable seuil de stabilité correspond à la condition de stabilité globale qui nous permet de définir le nombre de Grashof Gr_G , tel que si Gr est inférieur à Gr_G , la stabilité globale est vérifiée; mais nous le savons, Gr_G est inconnu. Aussi par la théorie de l'énergie nous avons calculé Gr_E de façon à ce que tout écoulement ayant un nombre de Grashof inférieur à Gr_E soit globalement monotoniquement stable.

D'autre part nous avons linéarisé les équations de la perturbation et obtenu la limite de stabilité Gr_L , en étudiant les facteurs d'amplification des perturbations: si tous les facteurs sont négatifs nous avons dit que l'écoulement était stable, si l'un est positif que l'écoulement est instable.

Deux questions se posent: quel est le lien entre la théorie linéaire et nos définitions de la stabilité? Pouvons-nous négliger le terme $u\nabla u$? En effet pour ce, nous avons supposé que les dérivées premières de u étaient du même ordre que u , hypothèse fort contestable.

Le principe de la stabilité linéaire de Sattinger-1970, établit sur un domaine borné, mais qui s'étend à un domaine infini, en supposant les perturbations périodiques, répond à ces deux questions.

En effet si Gr est inférieur à Gr_L , moyennant un rayon attracteur suffisamment petit, l'écoulement est conditionnellement stable, par contre pour Gr supérieur à Gr_L , il est instable suivant la proposition:

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0 \quad \text{et} \quad \exists t_0 / \xi(0) < \delta \quad \text{et} \quad \xi(t_0) \geq \varepsilon$$

c'est-à-dire qu'il existe une barre énergétique qui sera franchie par au moins une perturbation et ce quelque soit la limite que l'on impose à son énergie initiale, aussi verrons-nous une perturbation se développer et atteindre une certaine taille, malgré cela nous ne connaissons pas son évolution ultérieure.

Ainsi Gr_E constitue un critère de stabilité, et Gr_L , dans les termes énoncés ci-dessus, un critère d'instabilité, et nous avons la double inégalité: $Gr_E \leq Gr_G \leq Gr_L$

3.9.2 Plage d'instabilité subcritique

Nous aimerais que la plage délimitée par les deux valeurs Gr_E et Gr_L , improprement appelée plage d'instabilité subcritique, la véritable plage d'instabilité subcritique étant comprise entre Gr_G et Gr_L , soit aussi reserrée que possible. Nos valeurs de Gr_E sont environ deux à trois fois plus petites que celles de Gr_L . Comparons cette plage à d'autres existant dans la littérature. Nous appelerons R , le nombre sans dimension caractérisant l'écoulement: il peut s'agir du nombre de Grashof, de Rayleigh, ou de Reynolds.

- Pour un écoulement plan de Poiseuille, les valeurs critiques sont les suivantes:

$$R_E = 99.20 \quad (\text{Busse-1969})$$

$$R_L = 11544 \quad (\text{Orszag-1971})$$

La valeur expérimentale est approximativement 21 00 (Davies-White-1928), valeur que nous pouvons assimiler à Gr_G .

Joseph-1976 donne une revue complète des résultats des différentes méthodes pour les écoulements de Poiseuille. La plage d'instabilité subcritique la plus petite est obtenue pour l'écoulement plan, aussi vu sa taille, nous avons toutes les raisons d'être fiers de nous. Mais nous devons noter que l'introduction d'un point d'infexion dans un profil de vitesse fait décroître le seuil énergétique R_E et littéralement chuter le seuil linéaire R_L (Carmi-1969).

- Pour les flots développés entre deux sphères concentriques, les résultats sont équivalents aux nôtres: le rapport R_L/R_E est d'environ 3 (Munson et Menguturk-1975).

- Par contre les deux méthodes donnent des résultats très proches pour certains types d'écoulement tels:

- . la convection naturelle dans une couche fluide comprise entre deux cylindres coaxiaux horizontaux (Motjali-Caltagirone-1979), le rapport R_L/R_E varie entre 1 et 1.25 pour un rapport des rayons des deux cylindres n'excédant pas 2;
- . ou la conduction dans une couche fluide horizontale chauffée par le bas et possédant des sources internes de chaleur (Joseph-1971). Quand celles-ci sont suffisamment petites, le rapport est inférieur à 1.5.

Ces derniers résultats demandent une explication.

Si nous considérons la stabilité d'un écoulement de conduction (il n'y a pas de mouvement de matière) pour lequel l'opérateur associé à la partie linéaire des équations perturbées est auto-adjoint, (le principe d'échange des stabilités est alors valide, c'est-à-dire que la stabilité neutre est atteinte pour une célérité nulle), les équations de la théorie linéaire et celles de la théorie de l'énergie sont identiques, aussi les deux valeurs critiques du nombre R , à savoir R_E et R_L sont égales (Davies-1971). Ces conditions sont vérifiées à la limite dans les deux exemples cités ci-dessus: on obtient alors l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Si nous nous écartons un peu de ce cas idéal, les valeurs R_E et R_L vont être certes différentes mais par continuité, rester voisines.

- Pour un écoulement plan entre deux plaques infinies, dont le profil de vitesse présente au moins un point d'infexion, il existe une plage d'instabilité subcritique que nous qualifierons de moyenne. Comment l'interpréter ?

Considérons notre écoulement permanent pour un nombre de Grashof très petite: il est alors unique et stable (globalement) tant que le nombre de Grashof reste inférieur à Gr_G . Mais si nous dépassons cette fatidique valeur, il existera vraisemblablement plusieurs régimes stables (conditionnellement), chacun ayant une zone d'attraction propre. A priori, notre écoulement se fera toujours suivant le régime permanent, mais si nous introduisons volontairement ou non, une perturbation trop forte, l'écoulement va brutalement, c'est-à-dire sans continuité, quitter la zone d'attraction du régime permanent et basculer dans celle d'un autre régime.

Est-ce à dire que pour un nombre de Grashof voisin de Gr_L , le régime permanent ne sera jamais observable ?

3.9.3 Résultat expérimental

A notre connaissance il n'existe qu'une seule expérience qui puisse illustrer notre étude, celle menée par Vest-Arpaci-1969 dans le cas d'un fluide ayant une relation densité-température linéaire.

Le régime permanent fut établi dans une cavité parallélépipédique de hauteur 25 pouces, de largeur 0.75 pouces, et de profondeur 4.5 pouces, contenant de l'air, dont le nombre de Prandtl est 0.71. De la fumée de cigarette introduite au sommet de la cavité permettait à l'aide d'un éclairage adéquat, de visualiser les lignes de courant. Deux circulations extérieures d'eau assuraient les températures des parois verticales dont la différence fut très progressivement accentuée jusqu'à obtention de cellules de convection. La première instabilité loin des bornes de la cavité apparut pour $Gr_1 = 8700 \pm 10\%$. (Rappelons la valeur du nombre de Grashof critique $Gr_{L1} = 7930$) avec une constante de propagation égale à 2.74.

Le dispositif assez précaire de visualisation du flot, explique la grosse incertitude sur la détermination du nombre de Grashof critique. Bien que nous ne sachions pas si l'instabilité s'est naturellement développée ou si elle fut introduite artificiellement (par exemple à l'aide d'un poinçon vibreur) il ne fait aucun doute qu'elle est surcritique, c'est-à-dire qu'elle apparaît pour un nombre de Grashof supérieur ou égal à Gr_L .

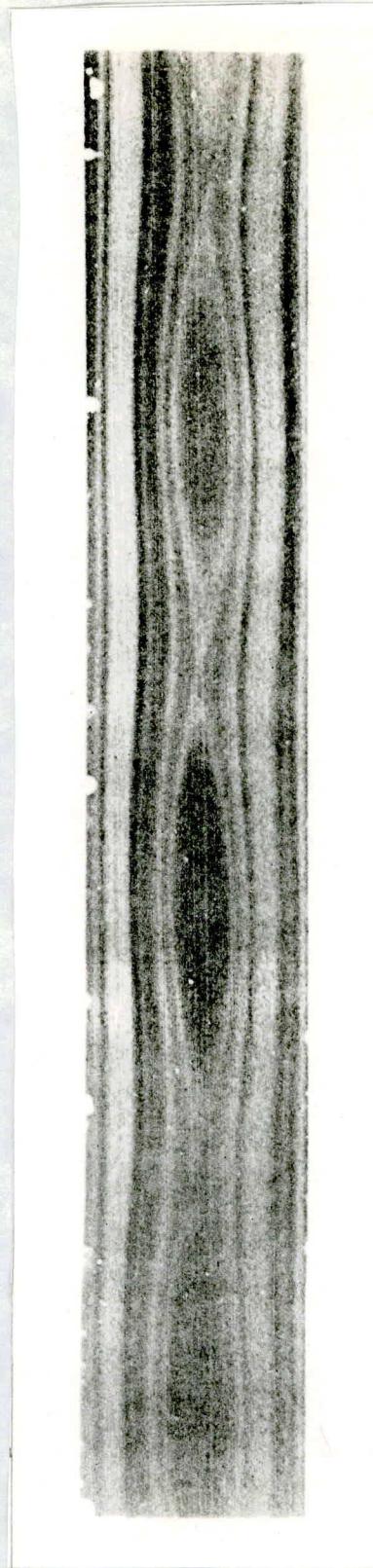


Figure XXXIII - Photographie de l'écoulement perturbé
dans une cavité verticale de rapport d'aspect 33
contenant de l'air (Nombre de Pradtl = 0.71)
pour un nombre de Grashof $Gr_{L_1} = 9500$.

Laissons le lecteur s'attarder sur la figure XXXIII, image de la photographie de l'écoulement perturbé, obtenu par un nombre de Grashof égal à 9500, et que confirme la validité de la théorie linéaire. Pour connaître le régime qui s'établit alors, il est nécessaire d'utiliser la théorie non-linéaire autour du point critique. La solution est à nouveau décomposée suivant une série de Fourier, mais le terme non linéaire de l'équation de la perturbation introduit un couplage entre les différents modes. Après la période de croissance exponentielle, le mode fondamental, lié à la constante de propagation critique, est saturé. Il en va de même de ses harmoniques, toutefois leurs amplitudes restent très petites devant celles du fondamental, ce qui explique que l'on n'observe que le mode fondamental.

Il semblerait donc qu'en prenant suffisamment de précautions, le régime permanent puisse être maintenu jusqu'à la valeur critique du nombre de Grashof Gr_L , et qu'ensuite se développe la solution périodique fournie par la théorie linéaire.

CONCLUSION

Le grand nombre de laboratoires scientifiques dont les travaux sont liés à l'apparition de la turbulence, constitue l'une des meilleures preuves que cette question fondamentale, reste une énigme pour la physique actuelle, mais qui, par ses implications techniques, appelle une réponse.

Aussi, bien que notre objectif ne soit pas d'expliquer la turbulence, restons modestes, nous lancer de but en blanc dans l'étude de la stabilité des écoulements fluides ayant des anomalies de densité, paraît être une gageure: en fait il s'agissait d'ignorance. Cependant la chance ne sourit-elle pas aux innocents ?

Il nous a donc fallu tout à la fois tenter d'acquérir le potentiel théorique et méthodologique nécessaire pour mener à bien toute étude de stabilité et appliquer notre nouveau savoir, au cas spécifique d'un fluide présentant un maximum de densité. Dans chacune de ces deux voies nous avons fait de notre mieux. Rétrospectivement la tâche paraît bien trop ardue pour que l'on eut pu espérer une parfaite maîtrise du phénomène d'instabilité. Tirons donc un premier bilan.

Notre propos initial était d'étudier la stabilité de la convection naturelle d'une couche verticale infinie, d'un fluide présentant un maximum de densité et soumis à un gradient horizontal de température. Le fluide de référence, possédant cette anomalie, et qui est aussi le fluide le plus commun est l'eau.

Malheureusement les résultats présentés dans ce mémoire ne peu-

vent s'appliquer à son cas: en effet nous avons négligé les perturbations d'origine thermique, en considérant un nombre de Prandtl nul. Or le nombre de Prandtl de l'eau, compris entre 13.4 et 10.2 sur le champ de température 0° - 8° C, ne peut pas être annulé, il atteint une valeur où les perturbations hydrodynamiques ne régissent plus seules la stabilité de l'écoulement.

Néanmoins nous pouvons d'ores et déjà tirer quelques enseignements. Tout d'abord, nous devons tenter de ranger notre écoulement dans une classe dont les représentants possèdent des caractéristiques semblables. En effet nous distinguons grossièrement trois types d'écoulements:

- ceux pour lesquels le régime de base est stationnaire, illustrés par le problème de Rayleigh-Bénard, et pour lesquels le principe d'échange des stabilités est généralement valide;
- les écoulements plans, c'est-à-dire les jets, les couches limites, les couches infinies, les écoulements dans les canaux;
- les autres ou plus précisément ceux qui ont les lignes de courant courbes, tels les écoulements entre parois non planes, entre sphères ...

Dans la deuxième classe, nous devons distinguer outre les écoulements dans les milieux bornés (couches) et ceux dans les milieux semi-infinis (jets, écoulements le long d'une plaque), les écoulements dont le profil de vitesse n'a pas de point d'infexion et ceux qui en possèdent au moins un.

L'exemple que nous avons traité se situe dans cette dernière catégorie : la stabilité est alors liée au maximum de vorticité.

A priori, il existe deux processus menant à la chute du régime de base: le développement des instabilités surcritiques, tel qu'il a été observé par Vest-Arpaci-1969 et l'apparition brutale des instabilités subcritiques dont nous pouvons supposer l'existence d'après la notable différence entre les valeurs critiques obtenues par la théorie de l'énergie et la théorie linéaire.

Pour en savoir plus sur les régimes susceptibles de succéder à l'écoulement permanent, il faudrait employer une théorie non linéaire (Stuart-1971) ou si seuls des renseignements qualitatifs et non quantitatifs suffisent, la théorie de la bifurcation (Joseph-1981). Les deux théories s'appuient sur les résultats de l'analyse linéaire de la stabilité (nombre de Grashof et constante de propagation critiques) mais ne s'utilisent pas dans le même esprit. La théorie non-linéaire nécessite une connaissance très détaillée de l'écoulement dont on étudie la stabilité, et nous fournit des résultats quantitatifs très précis sur son successeur. Par contre, la théorie de la bifurcation ne requiert que quelques renseignements sur l'écoulement de base et ne nous fournit que des indications qualitatives sur le nouveau régime, mais là est sa force, elle permet de suivre les divers changements de régime de l'écoulement alors que la théorie non-linéaire deviendrait impuissante.

Il serait alors particulièrement utile de se tourner vers l'expérimentation, apportant ainsi un support à notre recherche. Mais modérons notre enthousiasme et revenons au cas d'un fluide avec maximum de densité à T_M , tel que nous l'avons abordé. (Rappelons d'ailleurs que l'instabilité n'est pas due au maximum de densité), Si nous maintenons

la paroi froide à $0^{\circ}\text{C} < T_M$, l'écoulement est plus **stable** pour une paroi chaude portée à $2T_M$ plutôt qu'à T_M . Cette propriété vraie pour un nombre de Prandtl nul, est fort intéressante et demande à être vérifiée quelque soit le nombre de Prandtl.

Il paraît donc nécessaire de reprendre notre programme (voir Annexe IV: cas d'un nombre de Prandtl non nul) soit en l'utilisant directement, soit en le modifiant ou le transformant d'après les derniers travaux en date, contribuant à la renommée de la méthode de Galerkin (Buse-1981 et Gottlieb-Orszag-1978).

Les résultats obtenus seront-ils alors valides pour l'eau ? Si l'on est peu exigeant, oui. Sinon ... En effet dans le cadre des approximations d'Oberbeck-Boussinesq, nous avons considéré que les caractéristiques thermophysiques du fluide étaient constantes, or la viscosité de l'eau varie entre 0°C et 10°C de 35%. Cette variation est pourtant généralement négligée.

Dans un avenir plus lointain, nous pourrons envisager la stabilité de la convection libre de l'eau dans toutes sortes de géométries des plus variées: couche d'inclinaison quelconque, géométrie sphérique, cylindrique ...

Mais l'étude de la stabilité et de l'apparition de la turbulence n'est pas une chasse gardée de la mécanique des fluides. Ces phénomènes interviennent dans tout système ayant un nombre suffisant de degrés de liberté, et intéressent de nombreux domaines tels le déplacement de tout corps dans un fluide, la prévision météorologique, la physique des

plasmas, la dynamique des populations, la géophysique, l'écologie, la biologie, l'économie, ... (Swinney-Gollub-1978) et surtout la chimie, comme le montre la récente vulgarisation effectuée par Vidal-Roux-1981.

Il existe un si grand nombre d'équipes qui travaillent sur ce problème depuis tant d'années que l'on peut se demander s'il ne serait pas souhaitable de sortir du capharnaum du laboratoire d'hydraulique de Polytechnique, dominé par un continual hydatisme d'où s'élève de temps à autre l'hourvari des clameurs estudiantines, pour, d'une part, essayer de susciter des vocations à Polytechnique même, et d'autre part aller à la rencontre d'autres chercheurs, afin de confronter nos points de vue, connaître leurs égarements, apprendre leurs difficultés et espoirs, éviter inutilement certaines erreurs, ...

L'échange des idées a toujours été une source féconde de réflexion.

BIBLIOGRAPHIE

- Ayyaswamy, 1974. On the Stability of Plane Parallel Flow between differentially Heated, tilted Planes. ASME Transactions: Journal of Applied Mechanisc, Vol. 41, p. 554.
- Batchelor, 1954. Heat Transfer by free Convection across a closed Cavity between vertical Boundaries at different Temperatures. Quaterly of Applied Mathematics. Vol. 12, no. 3, p. 209.
- Bénard, 1900. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées, Vol. 2, p. 1261.
- Bénard, 1901. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. Annales de Chimie et de Physique, Vol. 23, p. 62.
- Bergholz, 1978. Instability of Steady Natural Convection in a vertical Fluid Layer. Journal of Fluid Mechanic, Vol. 84, p. 743.
- Betchov-Criminale, 1967. Stability of Parallel Flows. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 10.
- Birikh, 1966. On small Perturbations of a Plane parallel Flow with cubic velocity Profile. Prikladnai~~a~~ Matematika Mekhanica, Vol. 30, no. 2, p. 356
Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 30, no. 2, p. 432.
- Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii, 1965. On the Spectrum of Perturbations of Plane Parallel Flows at low Reynolds Number. Prikladnai~~a~~ Matematika Mekhanica, Vol. 29, no. 1, p. 88
Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 29, no. 1, p. 93.
- Birkh-Gershuni-Zhukhovitskii-Rudakov, 1968. Hydrodynamic and Thermal Instability of a steady convective Flow. Prikladnai~~a~~ Methematika Mekhanica, Vol. 32, no. 2, p. 256.
Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 32, no. 2, p. 246.
- Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-Rudakov, 1972. On Oscillatory Instability of plane parallel Convective Motion in a vertical Channel. Prikladnai~~a~~ Matematika Mekhanica, Vol. 36, no. 4, p. 745.
Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 36, no. 4, p. 707.
- Boussinesq , 1903. Théorie analytique de la chaleur, Vol. 2, Gauthier-Villars.
- Busse, 1969. Bounds on the Transport of Mass and Momentum by Turbulent Flow between Parallel Plates. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 20, p. 1.

- Busse, 1972. A Property of the Energy Stability limit for Plane Parallel Shear Flow. Archive for Rational Mechanics and Analysis Vol. 47, p. 28.
- Busse, 1981. Transition to Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection dans: Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer-Verlag.
- Carmi, 1969. Energy Stability of Channel Flows. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 20, p. 487.
- Chandrasekhar, 1961. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford.
- Davies-White, 1928. An Experimental Study of the Flow of Water in Pipes of rectangular Section. Proceedings of the Royal Society of London A. Vol. 119, p. 92.
- Davies, 1971. On the Possibility of Subcritical Instabilities dans: Instability of Continuous Systems, Symposium Herrenhalb (Germany), Septembre 1969. Springer-Verlag.
- Drazin-Howard, 1966. Hydrodynamic Stability of Parallel Flow of Inviscid Fluid. Advances in Applied Mechanics, Vol. 9.
- Finlayson, 1972. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press.
- Fjortoft, 1950. Application of Integral Theorems in Deriving Criteria of Stability of Laminar Flow and for the Baroclinic Circular Vortex. Geofysiske Publikasjoner, Vol. 17, no. 6, p. 1.
- Galerkin, 1915. Series Development for some cases of Equilibrium of Plates and Beams. Wjestnik Ingenerow Petrograd.
- Gallagher-Mercer, 1962. On the Behavior of small Disturbances in Plane Couette Flow. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, p. 91.
- Gallagher-Mercer, 1964. On the Behavior of small Disturbances in Plane Couette Flow. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 18, p. 350.
- Gaster, 1965. The Role of Spatially Growing Waves in the Theory of Hydrodynamic Stability. Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 6, p. 251.
- Gaster-Jordinson, 1975. On the Eigenvalues of the Orr-Sommerfeld equation. Journal of Fluid Mechanic, Vol. 72, p. 121.
- Gershuni, 1953. On the Stability of Plane convective motion of a Fluid. Zhurnal Teknishevski Fiziki, Vol. 23, no. 10, p. 1838.

- Gershuni -Zhukhovitskii- Iakimov, 1970. On the Stability of Steady Convective Motion Generated by internal heat Sources. *Prikladnaia Matematika Mekhanika*, Vol. 34, no. 4, p. 700. *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 34, no. 4, p. 669.
- Gershuni-Zhukhovitskii-Iakimov, 1974. On Stability of Plane Parallel Convective Motion due to internal heat Sources. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 17, p. 717.
- Gershuni-Zhukhovitskii, 1976. Convective Stability of Incompressible Fluids. *Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalem. Keter Publications.
- Gill-Davey , 1969. Instabilities in a buoyancy-driven System. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 35, p. 775.
- Gill-Kirkham, 1970. A Note on the Stability of Convection in a Vertical Slot. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, p. 125.
- Gotoh-Ikeda, 1972. Asymptotic Solution of the Instability Problem of Channel Flows with Antisymmetric Velocity Profile. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 32, no. 3, p. 845.
- Gottlieb-Orszag, 1978. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia.
- Gray-Giorgini, 1976. The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, p. 545.
- Grosh-Salwen, 1968. The Stability of Steady and Time dependent Plane Poiseuille Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 34, p. 177.
- Howard, 1961. Note on a Paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 10, p. 509.
- Howard, 1964. The Number of Unstable modes in Hydrodynamic Stability Problems. *Journal de Mécanique*, Vol. 3, no. 4, p. 433.
- Jeffreys, 1926. The Stability of a Layer of Fluid Heated from below. *Philosophical Magazine*, Vol. 2, p. 833.
- Joseph, 1965. On the Stability of the Boussinesq Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 20, p. 59.
- Joseph, 1966. Non-linear Stability of the Boussinesq Equations by the Method of Energy. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 22, p. 165.
- Joseph, 1968. Eigenvalue Bounds for the Orr-Sommerfeld Equation. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 33, no. 3, p. 617.

- Joseph, 1969. Eigenvalue Bounds for the Orr-Sommerfeld Equation. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 36, no. 4, p. 721.
- Joseph, 1971. On the Place of Energy Methods in a Global Theory of Hydrodynamic Stability. Dans: *Instability of Continuous Systems* Symposium Herrenhalb (Germany), Sept. 1969.
- Joseph, 1976. *Stability of Fluid Motions*. Springer-Verlag.
- Joseph, 1981. Hydrodynamic Stability and Bifurcation dans: *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Springer-Verlag.
- Kappus-Lehmann, 1965. Über stehende Wellen in einer Konvektionsströmung zwischen vertikalen Wänden verschiedener Temperatur. Deutsche Luft und Raumfahrt Forschungsbericht 65-15
- Korpela-Gözüm-Baxi, 1973. On the Stability of the Conduction regime of Natural Convection in a Vertical Slot. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 16, p. 1683.
- Lin, 1945. On the Stability of two-dimensional Parallel Flows. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, pp. 117, 218, 277.
- Lin, 1955. *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- Merker-Waas-Grigull, 1978. Onset of Convection in a Horizontal Water Layer with maximum Density Effects.. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 22, p. 505.
- Mojtabi-Caltagirone, 1979. Energy Stability of a Natural Convective Flow in a horizontal annular Space. *Physics of Fluids*, Vol. 22, part 6, p. 1208.
- Munson-Menguturk, 1975. Viscous Incompressible Flow between concentric rotating Spheres. Part 3. Linear Stability and Experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 69, p. 705.
- Oberbeck, 1879. Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperatur Differenzen. *Annalen der Physik und Chemie*, Vol. 7, p. 271.
- Orr-1907. The Stability or Instability of the Steady Motions of a liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy A*. Vol. 27, p. 69.
- Orszag, 1971. Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 50, p. 689.
- Orszag-Kells, 1980. Transition to Turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 96, p. 159.

- Rayleigh, 1880. On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 9, p. 57.
- Rayleigh, 1894. The Theory of Sound. Dover, New York.
- Rayleigh, 1916. On convective Currents in a horizontal Layer of Fluid when the higher Temperature is on the under side. Philosophical Magazine, Vol. 32, p. 529.
- Reynolds, 1883. An experimental investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in Parallel Channels. Philosophical Transactions of the Royal Society A. Vol. 174, p. 935 et dans: Papers on Mechanical and Physical Subjects, Vol. 11, p. 51, Cambridge University Press, 1901.
- Reynolds, 1895. On the dynamical Theory of incompressible viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Philosophical Transactions of the Royal Society A. Vol. 186, p. 123.
- Rudakov, 1967. Spectrum of Perturbations and Stability of Convective Motion between vertical Planes. Prikladnaia Matematika Mekhanika, Vol. 30, no. 2, p. 356 Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 30, no. 2, p. 432.
- Sattinger, 1970. The mathematical Problem of Hydrodynamic Stability. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 19, p. 797.
- Sattinger, 1973. Topics in Stability and Bifurcation Theory. Springer-Verlag.
- Schensted, 1960. Contributions to the Theory of Hydrodynamic Stability Ph.D. Thesis, Department of Physics, University of Michigan.
- Serrin, 1959. On the Stability of Viscous Fluid Motions. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 3, p. 1.
- Sommerfeld, 1908. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. dans: Proceedings of the Fourth International Congress of Mathematicians, Rome, p. 116.
- Squire, 1933. On the Stability for three-dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow between parallel Walls. Proceedings of the Royal Society of London A. Vol. 142, p. 621.
- Stuart, 1971. Non-linear Stability Theory. Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 3, p. 347.
- Swinney-Collub, 1978. The Transition to Turbulence. Physics Today, August, 1978, p. 41.

- Swinney-Gollub, 1981. Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer-Verlag.
- Synge, 1938. Hydrodynamical Stability. Semi-centennial Publications of the American Mathematical Society, Vol. 2, p. 227.
- Thomas, 1953. The Stability of Plane Poisseuille Flow. The Physical Review, Vol. 91, p. 780.
- Tollmien, 1929. Über die Entstehung der Turbulenz.
Gesselschaft der Wissenschaften Göttingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse Nachrichten, p. 21.
- Veronis, 1963. Penetrative Convection. Astrophysical Journal, Vol. 137, no. 2, p. 641.
- Vest-Arpaci, 1969. Stability of Natural Convection in a vertical Slot. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, no. 1, p. 1.
- Vidal-Roux, 1981. Comment nait la turbulence. Pour la Science, Vol. 39, p. 50.
- Watson, 1972. The Effect of the Inversion Temperature on the Convection of Water in an Enclosed rectangular Cavity.
Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 25, p. 423.
- Yih, 1973. Wave Velocity in parallel Flows of a viscous Fluid. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 58, no. 4, p. 703.

Comme introduction à la convection naturelle et aux problèmes de la stabilité, nous recommandons les ouvrages suivants:

Drazin-Howard, 1966, consacré aux fluides non visqueux
Betchov-Criminale, 1967 ainsi que
Gershuni-Zhukhovitskii, 1976, très simples et tournés vers l'utilisation de l'ordinateur mais traitant uniquement la théorie linéaire et l'équation de Orr-Sommerfeld.

Enfin n'oublions pas la bible, peu aisée lors d'une première approche, de Joseph, 1976.

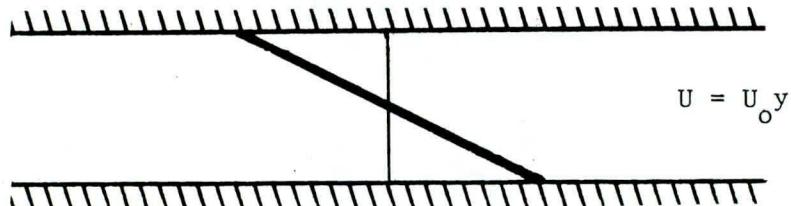
Les plus récents développements seront trouvés dans Swinney-Gollub, 1981, recueil réalisé par différents auteurs, constituant la plus récente mise au point et, nouveauté oblige, difficile à se procurer.

ANNEXE I

ÉCOULEMENT PLAN DE COUETTE-POISEUILLE

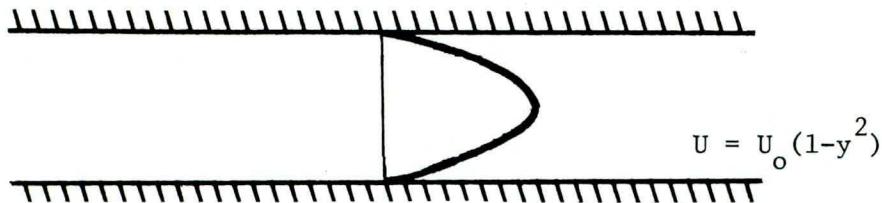
Tout au long de ce rapport, il est abondamment fait référence aux écoulements plans de Couette et de Poiseuille: ce sont parmi les régimes convectifs d'une couche fluide entre deux plaques parallèles infinies, les plus étudiées.

- L'écoulement de Couette se développe lors du glissement relatif des deux plaques l'une par rapport à l'autre:



Le fluide, visqueux, adhère aux parois et son profil de vitesse est linéaire.

- Si nous imposons un gradient longitudinal de pression, nous créons une force motrice, qui va forcer le fluide à se déplacer, mais sa viscosité le retient le long des parois. Le profil de vitesse est alors parabolique. Nous obtenons l'écoulement de Poiseuille.



- Un écoulement de Couette-Poiseuille sera constitué par une combinaison linéaire des deux précédents. Sa vitesse, du second degré,

ne présente pas de points d'infexion (il n'y a pas de maximum de vorticité), et par le critère de Rayleigh, l'écoulement de Couette-Poiseuille est parfaitement stable.

La théorie de l'énergie nous donne un seuil de stabilité, caractérisé par une valeur critique du nombre de Reynolds, $Re = \frac{\rho U L}{\mu}$, rapport des forces d'inertie, aux forces de viscosité. En effet la température et le champ de gravité n'interviennent pas dans les écoulements de Couette-Poiseuille.

L'étude de leurs stabilités par la théorie linéaire les dépareage. L'écoulement de Couette ne présentant pas de fluctuations de vorticité, apparaît quelque soit le mode considéré, comme tout à fait stable. Par contre, l'écoulement de Poiseuille présente un critère d'instabilité, il faut l'avouer, 115 fois plus grand que son critère de stabilité. L'instabilité de l'écoulement de Poiseuille vis-à-vis de la théorie linéaire s'expliquerait par le rôle destabilisant de la viscosité.

- L'écoulement de Couette-Poiseuille possède donc une immense plage d'instabilité subcritique (elle est même infinie pour un élément de Couette pur), et il est inutile de préciser que les perturbations surcritiques ne furent jamais observées.

Les expériences sur ces écoulements menèrent à des nombres de Reynolds critiques, tout aussi éloignés du seuil de stabilité que du seuil d'instabilité. Nous sommes devant un exemple où ni la théorie linéaire, ni la théorie de l'énergie ne donnent des résultats utilisables et bon nombre de chercheurs jetèrent trop vite la pierre aux écoulements

plans.

(Pour en savoir plus sur la stabilité des écoulements plans de Couette et de Poiseuille, consultez Orszag-Kells-1980).

ANNEXE II

EQUATION D'ORR-SOMMERFELD ADJOINTE

Rappelons l'équation d'Orr-Sommerfeld, fondement de notre étude de la stabilité linéaire:

$$-i\alpha c(D^2 - \alpha^2)\psi + i\alpha Gr W(D^2 - \alpha^2)\psi - i\alpha Gr \psi D^2 W - (D^2 - \alpha^2)^2 \psi = 0$$

associée aux conditions frontières $\psi(\pm 1/2) = D\psi(\pm 1/2) = 0$

En posant $\Delta = (D^2 - \alpha^2)$

$$\lambda = i\alpha c$$

et en définissant l'opérateur L par

$$L\psi = i\alpha Gr W(D^2 - \alpha^2)\psi - i\alpha Gr D^2 W \psi - (D^2 - \alpha^2)^2 \psi$$

l'équation d'Orr-Sommerfeld peut s'écrire:

$$L\psi = \lambda \Delta \psi$$

$$\psi(\pm 1/2) = D\psi(\pm 1/2) = 0$$

- Soit H , l'espace de Hilbert des solutions de l'équation que nous munissons du produit interne:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \bar{\phi} \cdot \psi$$

- Nous définissons alors l'opérateur L^* adjoint de L par

$$\langle \phi, L\psi \rangle = \langle L^* \phi, \psi \rangle, \text{ relation qui doit être vérifiée quels}$$

que soient les éléments de H .

En tenant compte des conditions frontières, nous obtenons l'expression de L^* :

$$L^* \phi = -i\alpha Gr (D^2 - \alpha^2) (W\phi) + i\alpha Gr \cdot D^2 W \cdot \phi - (D^2 - \alpha^2)^2 \phi$$

- Chacun sait, mais aucun ne se remémore la démonstration, que λ est valeur propre de l'opérateur L - il existe une fonction ψ , telle que $L\psi = \lambda \Delta\psi$ - si et seulement si $\bar{\lambda}$ est valeur propre de L^* .

Nous pouvons alors exprimer une condition d'orthogonalité entre les vecteurs propres. Considérons deux couples (vecteur propre, valeur propre) l'un de l'opérateur L , l'autre de son adjoint L^* , soit (ψ_i, λ_i) et $(\phi_j, \bar{\lambda}_j)$ et calculons

$$\langle \phi_j, L\psi_i \rangle = \langle L^* \phi_j, \psi_i \rangle$$

pour obtenir d'une part

$$\langle \phi_j, L\psi_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle \phi_j, \Delta\psi_i \rangle$$

d'autre part:

$$\langle L^* \phi_j, \psi_i \rangle = \bar{\lambda}_j \langle \Delta\phi_j, \psi_i \rangle$$

ce qui nous fournit l'égalité:

$$(\lambda_i - \bar{\lambda}_j) \int \bar{\phi}_j \Delta\psi_i = 0$$

soit en normant adéquatement les fonction ϕ_j et ψ_i , et en utilisant les symboles de Kronecker

$$\int \bar{\phi}_j \Delta\psi_i = \delta_{ij}$$

- L'emploi de l'opérateur adjoint et de ses propriétés s'avère particulièrement efficace dans toute analyse mathématique de l'équation de Orr-Sommerfeld, citons simplement la contribution de Schensted-1960 à la théorie de la stabilité hydrodynamique et son utilisation par Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-1965 pour l'étude du spectre des célérités.

ANNEXE III

MAJORATION DU TERME DISSIPATIF $-\iiint |\nabla u|^2$ DE L'EQUATION DE REYNOLDS-ORR

Considérons une couche fluide visqueuse limitée par deux plans parallèles, la vitesse u du fluide (ou d'une perturbation) sera alors nulle le long des parois. Nous supposerons de plus qu'elle, ainsi que que ses dérivées premières est continue et L^2 -intégrable, alors $\iiint |\nabla u|^2$ sera minoré par $\pi^2 \iiint |u|^2$.

- Nous démontrerons d'abord le théorème préliminaire:
soit f une fonction scalaire de la variable x , définie sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, continue et L^2 -intégrable ainsi que sa dérivée, et s'annulant sur les bornes de son domaine de définition,

$$\text{alors } \int f^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int f'^2 dx$$

Le problème précédent se ramène au calcul du maximum de la fonctionnelle $\int_{-1/2}^{1/2} f^2 dx / \int_{-1/2}^{1/2} f'^2 dx$

ou \hat{f} étant la fonction où est atteint le maximum, à la recherche de la valeur propre minimale de l'équation

$$\int \hat{f}'^2 dx - \lambda^2 \int \hat{f}^2 dx = 0$$

La dérivée de cette expression doit donc être nulle,

$$\int \delta f \cdot \hat{f}'' dx + \lambda^2 \int \delta f \cdot \hat{f} dx = 0$$

et ce quelque soit δf , ce qui nous donne $\hat{f}'' + \lambda^2 \hat{f} = 0$ avec la condition frontière $\hat{f}(\pm 1/2) = 0$.

- La solution générale de l'équation précédente est:

$$f = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x.$$

Les conditions frontières nous imposent

$$\lambda = (1 + 2k)\pi \quad \text{et} \quad b = 0$$

$$\text{ou} \quad \lambda = 2k\pi \quad \text{et} \quad a = 0$$

La valeur propre minimum ne nous fournissant pas la solution identiquement nulle est donc π , et nous obtenons la relation:

$$\int f^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int f'^2 dx$$

- La propriété précédente se généralise alors successivement
. à une fonction scalaire de plusieurs variables s'annulant en $x = \pm 1/2$:

$$\int f^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx$$

ce qui nous donne

$$\int f^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int |\nabla f|^2 dx$$

ou en intégrant sur la couche complète de fluide:

$$\iiint f^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \iiint |\nabla f|^2 dx$$

. à une fonction vectorielle

$$\iiint |u|^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} |\bar{\nabla} u|^2$$

où u est la vitesse de notre écoulement.

ANNEXE IV

CAS D'UN NOMBRE DE PRANDTL NON NUL

Le travail original qui me fut confié s'intitulait étude de la stabilité de la convection naturelle d'une couche verticale d'eau; or en cours d'étude, nous avons restreint notre recherche aux seules instabilités hydrodynamiques. Comment justifier une telle décision ?

En effet cette limitation du sujet, bien que fort utile puisqu'elle assure une base solide pour aborder le mécanisme des instabilités handicape considérablement les conclusions du rapport. Aussi, on s'en doute, l'introduction de cette simplification ne se fit pas par un choix librement consenti, mais par contrainte.

Lors de la présentation de la méthode numérique de Galerkin, nous avons insisté sur la nécessité, dans son emploi, de vérifier la convergence en comparant les résultats obtenus pour des nombres différents de fonctions d'essai, soit pour différents ordres de résolution. (Dans la suite de l'annexe, une solution d'ordre N , comportera N fonctions d'essai pour la fonction de courant, et N pour la température).

Ainsi fut fait dès les premiers calculs numériques, dont les résultats présentèrent un comportement assez étrange: partant à l'ordre 2 d'une valeur critique raisonnable, ils oscillaient ensuite autour de cette dernière avec une amplitude de plus en plus grande, en un mot ils divergeaient, laissant les observateurs muets et perplexes.

Le programme ne révéla point d'erreurs et ne fut donc employé que dans la seule situation qui inspirait confiance, celle du nombre de Prandtl nul.

L'hypothèse d'un fluide possédant une relation densité-température linéaire a déjà été abondamment traitée dans la littérature. Rappelons les auteurs, qui, pour étudier la stabilité linéaire, adoptèrent la méthode de Galerkin: Kappus-Lehmann-1965, Birikh-1966, Rudakov-1967, Vest-Arpaci-1969, Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-Rudakov-1972, auxquels nous devons ajouter Korpela-Gozum-Baxi - 1973 et Bergholz-1978.

Connurent-ils des difficultés semblables aux nôtres ?

Kappus-Lehmann-1965 ne considérèrent que les perturbations stationnaires, - le titre de leur article l'annonce très clairement: "Über die stehende Wellen ..." - , c'est-à-dire des perturbations pour lesquelles la célérité effective est nulle; néanmoins notons que pour $Pr = 0.72$ ils employèrent l'ordre 10 avec une précision supérieure à 0.1% , et pour $Pr = 40$, les ordres 22 et 24, les autres ne sont pas donnés, avec une précision de 1% .

Birikh-1966, oserions-nous dire, à notre image, négligea les perturbations thermiques et ne retint que les perturbations hydrodynamiques.

Le premier à signaler la mauvaise convergence de la méthode, Rudakov-1967, recourut pour un nombre de Prandtl égal à 10, à l'ordre 14, l'ordre 10 étant nécessaire pour stabiliser la solution, mais il ne poussa pas ses calculs plus en avant et ne présenta des résultats que pour les nombres de Prandtl inférieurs à 10.

Vest-Arpaci-1969, à la suite d'une explication assez maladroite assumèrent le principe d'échange des stabilités, et envisagèrent des nombres de Prandtl variant de 0 à 10^3 . La précision entre l'ordre 4 et l'ordre 6 est de 3,2%. Notons qu'au début de notre étude, nous ne possédions que cet article et qu'il nous induisit fortement en erreur.

Avec l'ordre 14, Birikh-Gershuni-Zhukhovitskii-Rudakov-1972, estimèrent que la convergence était assurée sur une large gamme du nombre de Prandtl, soit pour Pr variant de 0 à 100.

Korpela-Gözüm-Basci-1973, employèrent l'ordre 16 pour $Pr=10$, et pour $Pr=1000$ atteignèrent l'ordre 20.

Le dernier travail en date, et le plus complet, celui de Bergholz-1978 couvre les nombres de Prandtl de 0.73 à 1000 et pulvérise les records avec l'ordre 30.

Nous avons donc nous aussi augmenté l'ordre de résolution de notre problème, jusqu'à l'obtention d'une solution convergente, qui s'est fait quelque peu attendre. En effet, traitant l'exemple $Pr=10$, notre précision n'atteind 1% qu'avec l'ordre 18.

Une nouvelle difficulté apparaît donc: comment sélectionner les fonctions d'essai afin d'assurer une convergence optimum ?

Pour les instabilités stationnaires (dont la célérité effective est nulle), le choix des fonctions d'essai serait de peu d'importance, par contre pour les instabilités possédant une célérité effective, il deviendrait primordial (communication personnelle de Vest), pourtant dans

le cas de notre profil de vitesse symétrique la convergence était très rapide.

Il conviendrait alors de comparer les résultats obtenus avec les différentes fonctions d'essai, mais compulsé les articles préalablement cités ne nous apprend pas grand-chose, chaque auteur appliquant son critère de stabilité à un cas particulier, qui n'est d'ailleurs pas toujours explicitement formulé.

Cependant tous utilisent des fonctions d'essai orthogonales, bien que ceci ne constitue pas une caution de bonne convergence (Korpela-Gozum-Baxi - 1973).

Nous n'apporterons pas ici de réponse, mais nous nous bornerons à signaler les travaux d'Orszag sur les polynômes de Chebyshev, qui semblent très performants (Gottlieb-Orszag-1978).

En conclusion de cette annexe, notre programme numérique, malgré sa faible convergence, est tout à fait adapté à l'étude complète pour laquelle il a été conçu et ne demande qu'à être exploité. Pour les nombres de Prandtl très grands, la convergence devenant difficile à atteindre, il semble souhaitable de simplifier les équations linéarisées de la perturbation à l'image de Gill-Davery-1969 dont le travail fut repris par Gill-Kirkham-1970 pour la convection naturelle dans une cavité verticale.

ANNEXE V

REMARQUES CONCERNANT LES FIGURES XVI à XXIX

Ces figures présentent la perturbation et l'écoulement perturbé sous forme de leurs lignes de courant et de leurs vitesses.

- Dans la représentation par les vitesses, le rapport des dimensions a été respecté, tandis que dans la représentation par lignes de courant il a été modifié.

Les lignes de courant ont été calculées par pas de 0.2, entre les deux extrêmes -1 et +1, valeurs auxquelles ont été rajoutées -0.95 et +0.95.

- Figures XXII, XIX, XXI, XXIII, XXV, XXVII, XXIX

Dans la représentation par les lignes de courant, le maximum de la fonction de courant du régime permanent est cinq fois plus grand que celui de la perturbation.

Dans la représentation par les vitesses, le rapport des deux précédents maximum n'est plus que de 2.5.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00276572 3