

Titre: Problèmes fondamentaux de contrôle et d'estimation optimals dans l'espace de Hilbert
Title: l'espace de Hilbert

Auteurs: Romano M. De Santis, Richard Saeks, & Leonard J. Tung
Authors:

Date: 1978

Type: Rapport / Report

Référence: De Santis, R. M., Saeks, R., & Tung, L. J. (1978). Problèmes fondamentaux de contrôle et d'estimation optimals dans l'espace de Hilbert. (Rapport technique n° EP-R-78-08). <https://publications.polymtl.ca/6237/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6237/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-78-08
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

SECTION AUTOMATIQUE, COMMUNICATION, INFORMATIQUE

Rapport Technique EP78-R-8

Classification: Library of Congress no.....

PROBLEMES FONDAMENTAUX DE CONTROLE ET D'ESTIMATION OPTIMALS

DANS L'ESPACE DE HILBERT*

par

Professeur Romano M. De Santis

Professeur Richard Saeks

Professeur Leonard J. Tung

8 mars 1978

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP4
78R08
FRE

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7



Bibliothèque
Ecole
Polytechnique
MONTRÉAL

CLASSIFICATION

CA2PQ

UP4
78 R08 FRE

No D'ENTRÉE

103011

14 MARS 1978

PROBLEMES FONDAMENTAUX DE CONTROLE ET D'ESTIMATION OPTIMALS
DANS L'ESPACE DE HILBERT*

par

Professeur Romano M. De Santis
Ecole Polytechnique de Montréal

Professeur Richard Saeks
Texas Tech. University, Lubbock, Texas

Professeur Leonard J. Tung
University of Texas

PROBLEMES FONDAMENTAUX DE CONTROLE ET D'ESTIMATION OPTIMALS

DANS L'ESPACE DE HILBERT*

DeSantis[#], R. M., Saeks⁺, R., Tung, ⁺ L. J.O. RESUME

On utilise les nouvelles mathématiques des processus stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert dit de résolution pour formuler et résoudre un problème abstrait d'optimisation quadratique. Ce problème est des plus intéressants car une description appropriée des opérateurs présents dans les équations de l'énoncé et de la solution nous permet de retrouver et de généraliser la plupart des énoncés et résultats classiques de problèmes reliés à la théorie du contrôle et de l'estimation. On en arrive entre autres aux résultats du filtre de Wiener, du régulateur de Kalman et du filtre Kalman-Bucy ainsi qu'au principe du découplage en contrôle stochastique et à la toute récente solution Youla-Jabr-Bongiorno au problème de l'asservissement optimal.

Ecole Polytechnique de Montréal, Université de Montréal, Montréal

+ Texas Tech. University, Lubbock, Texas

* Ce travail a été effectué grâce à une subvention (AFOSR 74-2631) de la U. S. A. Air Force Office of Scientific Research et à une subvention (CNRC 8244) du Conseil national de recherches du Canada.

	<u>Page</u>
0. RESUME.....	ii
LISTE DES SYMBOLES.....	iv
1. INTRODUCTION.....	1
2. BASES MATHEMATIQUES.....	4
3. CAUSALITE ET ETAT.....	7
3.1 Définitions et propriétés fondamentales.....	7
3.2 Décompositions additive et multiplicative de causalité....	9
3.3 Décomposition causale et réalisation de l'état.....	11
4. DEUX PROBLEMES FONDAMENTAUX.....	14
4.1 Le problème de l'approximation du meilleur causal.....	14
4.2 Le problème fondamental de l'optimisation stochastique....	17
5. L'ESTIMATION ET LE CONTROLE OPTIMA PAR RELATION ENTREE-SORTIE.....	20
5.1 Le problème du filtre de Wiener.....	20
5.2 Le problème de l'asservissement optimal.....	21
5.3 Le problème fondamental de l'optimisation déterministe....	24
6. ESTIMATION ET CONTROLE OPTIMA DE L'ETAT.....	27
6.1 Le problème du régulateur optimal.....	27
6.2 Le problème de l'estimation optimale de l'état.....	31
6.3 Le problème du contrôle stochastique optimal.....	33
CONCLUSION.....	37
BIBLIOGRAPHIE.....	39
LEGENDE DES FIGURES.....	43
FIGURES.....	44

LISTE DES SYMBOLES

<u>Symbol</u>	<u>Signification</u>	<u>Utilisé pour la première fois dans la section</u>
EHR	espace de Hilbert de résolution	-
P, P^t, P_t	opérateurs de projection orthogonale sur un EHR	2
H	espace de Hilbert	2
x, y, z	éléments de H	2
x	la norme de x	2
R	résolution de l'identité	2
v	ensemble ordonné linéairement (habituellement les nombres réels)	2
t_0, t_∞	éléments minimum et maximum de v	2
t, k, ℓ , i	éléments de v	2
$[H, P^t]$	espace de Hilbert de résolution avec $R = \{P^t, t \in v\}$	2
(H, Σ, \mathbb{Q})	processus stochastique à valeurs dans un espace de Hilbert	2
Σ	tribu d'ensembles boreliens en H	2
\mathbb{Q}	mesure de probabilité sur Σ	2
$\rho, \beta, \alpha, \eta, \pi$	éléments de (H, Σ, \mathbb{Q})	2
Q_ρ	opérateur de covariance associé au processus stochastique ρ	2
$Q_{\alpha\beta}$	opérateur de covariance croisée associé aux processus stochastiques α et β	2
m_ρ	la moyenne du processus stochastique ρ	2
$E [f(\rho)]$	espérance de la variable aléatoire $f(\rho)$	2
L, T, N, D	opérateurs agissant sur H	2
T^*	adjoint de T	2
$tr (T)$	trace de l'opérateur T	2
$\{e_i\}$	base orthonormale de H	2

$(\Psi(t), H_T(t), \xi(t))$	réalisation de l'état (coétat) de T	3
(k_T, x_T, g_T)	réalisation de la trajectoire de l'état (coétat) de T	3
$\mathcal{A} = (A, C, M, \bar{A}, \bar{C}, Co, St)$	code alphabétique d'état et de causalité	3
$[T]_C$	partie causale de T	3
T_α	T est α , avec $\alpha \in \{A, C, M, \bar{A}, \bar{C}\}$	3
$\ T\ _{HS}$	norme Hilbert-Schmidt de T	3
F, B	opérateurs sans mémoire sur $[H, P^t]$	3
v_1, v_2	éléments d'une décomposition multiplicative de la causalité	3
M_R, M_e	opérateurs sans mémoire associés à la réalisation de la trajectoire de l'état (coétat) de v_1 (v_2)	3
Ω, Λ	facteurs associés à la décomposition multiplicative de la causalité d'un opérateur auto-adjoint	4
Φ_0	solution au problème de l'approximation du meilleur causal	4
Π	un opérateur non causal	4
$J(\Phi)$	la fonctionnelle à minimiser dans le problème du contrôle optimal	4
D_0	la solution causale à un problème d'optimisation à boucle ouverte	5
N_0	la solution au problème de l'asservissement optimal	6.2
$\$$	l'opérateur de sensibilité	7.1

PROBLEMES FONDAMENTAUX DE CONTROLE ET D'ESTIMATION OPTIMALS
DANS L'ESPACE DE HILBERT[#]

1. INTRODUCTION

Qu'elle soit classique (Wi 1) ou moderne (Yo 1), la méthode Wiener-Kolmogorov d'optimisation linéaire au sens des moindres carrés est basée en grande partie sur des opérations reliées à la théorie des fonctions analytiques et des domaines de fréquence. De ce fait, elle a été utilisée surtout pour l'étude de systèmes stationnaires, de systèmes aux paramètres discrets et de systèmes à intervalle de temps infini (Ne 1) (Ch 1). Toutefois, Bode et Shannon (Bo 1) ont attiré l'attention sur le fait que les étapes de calcul comprises dans ces opérations peuvent être interprétées physiquement en termes d'opérations ayant trait à la causalité et de représentations de signaux stochastiques et que le sens de cette interprétation ne dépend aucunement de propriétés propres à une telle utilisation. Il est donc tout à fait normal de vouloir repenser la méthode Wiener-Kolmogorov afin de l'utiliser pour l'étude de systèmes d'un type plus général. Dans ce contexte, les questions suivantes ont un intérêt particulier: peut-on obtenir une méthode Wiener-Kolmogorov généralisée qui soit indépendante de la théorie des fonctions analytiques? cette généralisation comprendra-t-elle les cas à variables multiples utilisant l'équation algébrique de Riccati et les résultats en domaines de fréquence qui leur sont associés? cette méthode généralisée peut-elle être utilisée pour résoudre des problèmes reliés à des systèmes en évolution, à des intervalles de temps finis et à des espaces d'état infinis?

En utilisant les idées les plus récentes concernant la causalité (De 1) (De 4) (Sa 1) (Sa 2), l'état (Sa 6) (Sch 1) (St 1) et la représentation de signaux stochastiques (Kay 1) (Kay 2) (Sa 3) (Ba 2), nous voulons démontrer que

Par DeSantis, R. M., Saeks, R. et Tung, J. L.

la réponse aux questions précédentes est bel et bien affirmative. En effet, on peut élaborer une méthode Wiener-Kolmogorov généralisée qui, tout en menant aux résultats classiques de l'estimation et du contrôle optima, nous permet d'étudier les systèmes en évolution, les systèmes à intervalle de temps fini ainsi que les systèmes à paramètres distribués. Cette généralisation offre plusieurs avantages. Elle permet de mieux percevoir les relations entre divers problèmes et diverses techniques, de bien établir le rôle joué par les concepts de causalité et d'état ainsi que par les concepts théoriques associés au système et elle mène à des résultats dont le champ d'application est plus vaste.

La méthode généralisée est obtenue en combinant les idées classiques de Wiener et Kolmogorov ((Wi) et le tout nouveau concept des espaces abstraits de Hilbert de résolution (Go 2). En premier lieu, deux problèmes simples d'optimisation sont formulés et solutionnés (énoncés P1 et P2, théorèmes 1 et 2). Par la suite, on démontre qu'une description appropriée des opérateurs présents dans les équations de l'énoncé et de la solution de ces problèmes nous permet de retrouver et de généraliser les solutions de la plupart des problèmes intéressants d'estimation et de contrôle optima, soit le filtre de Wiener (théorème 3), le compensateur optimal Youla-Jabr-Bongiorno (théorème 4), la formule d'optimisation de Porter (théorème 5), le régulateur optimal de Kalman et le principe d'optimalité (théorème 6), le filtre Kalman-Bucy (théorème 7) et le principe du découplage (théorème 8).

Notre étude fait suite à de nombreuses études du sujet. Porter (Po 1) fut le premier à formuler et à étudier la question. Les mathématiques sont basées sur les techniques des opérateurs non auto-adjoints de Volterra développées par Gohberg et Krein (Go 1) (Go 2) et sur les concepts des processus stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert émis par Balakrishnan (Ba 1). Quant aux résultats, la solution à notre problème fondamental d'optimisation découle d'idées et de techniques de Porter (Po 1), de Bode et Shannon (Bo 1), de

Kaylath (Kay 1), de Balakrishnan (Ba 1) et de Youla (Yo 1). Les travaux de Steinberger, Schumitzky et Silverman (St 1) sur la notion abstraite d'espace d'état ont joué un rôle important dans l'obtention de nos résultats sur l'estimation et le contrôle de l'état.

2. BASES MATHEMATIQUES

Au départ, on suppose que le lecteur connaît les notions usuelles associées aux espaces de Hilbert et de Banach (Po 2, chap. 1) (Ba 2, chap. 1).

On utilisera également les concepts reliés à l'espace de Hilbert de résolution.

- (Go 1, chap. 1) et (Sa 2) traitent de ces concepts - ainsi que les concepts de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert (Ba 2, chap. 6) (Sa 3).

Les paragraphes suivants traitent brièvement de ces derniers.

Un opérateur linéaire borné P défini sur un espace de Hilbert est un opérateur de projection orthogonale si $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ et $P(Px) = Px$ pour toute paire $x, y \in H$. Soit un ensemble ν ordonné linéairement et comprenant les éléments minimum et maximum t_0 et t_∞ ; une famille d'opérateurs de projection orthogonale $R = \{P^t : t \in \nu\}$ constitue une résolution de l'identité si elle possède les deux propriétés suivantes:

i) $P^0 H = 0$, $P^\infty H = H$ et $P^k H \supseteq P^\ell H$ lorsque $k > \ell$, et

ii) $P \in R$ lorsque $\{P^i\}$ est une séquence d'opérateurs de projection orthogonale dans R et qu'un opérateur de projection orthogonale

P est tel que $\{P^i x\} \rightarrow Px$ pour tout $x \in H$.

Un espace de Hilbert H muni d'une résolution de l'identité $R = \{P^t : t \in \nu\}$ est un espace de Hilbert de résolution $[H, P^t]$.

La notation (H, Σ, \mathbf{P}) , qui utilise l'espace de Hilbert H , la tribu borelienne Σ et la mesure de probabilité \mathbf{P} , désigne un espace de processus stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert. Il est bien connu (Ba 2, chap. 6) qu'un élément $m \in H$ (valeur moyenne de \mathbf{P}) et qu'un opérateur $Q_\rho : H \rightarrow H$ (covariance de \mathbf{P}) sont associés à tout processus stochastique $\mathbf{P} \in (H, \Sigma, \mathbf{P})$ possédant un premier et un second moment finis. Cet élément et cet opérateur satisfont

$$E(x, \rho) = (x, m_\rho), \quad \forall x \in H$$

et $E(x, \rho - m_\rho)(y, \rho - m_\rho) = (x, Q_\rho y), \quad \forall x, y \in H$

où le symbole " $E f(\rho)$ " désigne l'espérance de la variable aléatoire scalaire $f(\rho)$

On dira que les processus stochastiques ρ et $\pi \epsilon (H, \Sigma, \mathcal{F})$ sont statistiquement indépendants si $Q_{\rho\pi} = 0$. Dans notre exposé, nous utiliserons le fait que les transformations linéaires de processus stochastiques indépendants sont indépendantes et que $Q_{\rho+\pi} = Q_\rho + Q_\pi$ si ρ et π sont indépendants. Sauf avis contraire, nous ne traiterons que de processus stochastiques à valeur moyenne nulle.

3. CAUSALITE ET ETAT

Dans ce qui suit, les concepts de causalité et d'état jouent un rôle primordial. Bien que plusieurs auteurs aient traité de ces sujets en détail ((entre autres (De 1), (Sa 2), (Sa 6), Sch 1) et (Se 1)), il serait utile de revoir certaines définitions et certains résultats fondamentaux.

3.1 Définitions et propriétés fondamentales

L'opérateur $T: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ est causal si $P^t x = P^t y$ signifie $P^t T x = P^t T y$.

L'opérateur T est strictement causal s'il est causal et si on a, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, une partition $\{t_0 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = t_\infty\}_{\varepsilon \in \mathbb{V}}$ telle que

$$\sup_i |\Delta_i T \Delta_i| < \varepsilon$$

où $\Delta_i = P_{\xi_{i-1}}^t P_{\xi_i}^t$. T est anticausal (strictement anticausal) si T^* est causal (strictement causal). T est sans mémoire s'il est simultanément causal et anticausal.

Il est facile de démontrer la validité des énoncés suivants.

Lemme 1: Les énoncés suivants sont équivalents: T est causal; $P^t x = 0$ signifie $P^t T x = 0$; $T P_t = P_t T P_t$; $P^t T = P^t T P^t$; T^* est anticausal.

Lemme 2: Soit T_1 causal et T_2 strictement causal. $T_1 T_2$ et $T_2 T_1$ sont alors strictement causal.

Bien que notre définition de stricte causalité soit plus restrictive que nécessaire, nous l'utiliserons en raison de sa commodité. En effet, pour nos besoins, $\sup_i |\Delta_i T \Delta_i| < \varepsilon$ peut souvent être substitué à $\sup_i |\Delta_i T \Delta_i| < \varepsilon$ lorsque la partition est choisie pour une paire (x, ε) donnée. Toutefois, cette substitution ne peut être effectuée lorsque l'on traite du cas décrit par le lemme suivant. On doit alors utiliser la définition de stricte causalité dans sa forme la plus restrictive.

Lemme 3: Soit un opérateur strictement causal T . Dans un tel cas, $I + T$ peut être inversé et $(I + T)^{-1} = I + K$ où K est strictement causal et tel que $K = \sum (-1)^n T^n$.

Soit un causal strict (anticausal strict) $T: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$. La réalisation de l'état (réalisation du coétat) de T est effectuée par le triplet $(\Psi(t), H_T(t), \xi(t))$ de telle façon que pour tout $t \in \mathbb{V}$:

$H_T(t)$ est un espace de Hilbert

$\psi_T(t) : P_{H \rightarrow H_T}^t(t), (P_t^{H \rightarrow H_T}(t)),$

$\xi_T(t) : H_T(t) \rightarrow P_t^H, (H_T(t) \rightarrow P_t^H),$

et pour tout $u \in H$, $\xi(t)T\psi(t)u = P_t^T P_t^H u$ ($= P_t^H P_t^T u$). L'appellation "réalisation de l'état" provient du fait que pour tout $t \in \mathbb{V}$, nous avons la relation:

$$P_t^T u = \xi(t) x(t) + P_t^H P_t^T u$$

où $x(t) = \psi(t)u$. L'élément $x(t)$, c'est-à-dire l'état de T à t , contient toute l'information requise pour évaluer l'influence des valeurs antérieures de l'input sur les valeurs futures de l'output. (Sch 1) a démontré que tout opérateur strictement causal entraîne une réalisation de l'état.

Soit un causal strict (anticausal strict) $T : [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ et une réalisation de l'état (réalisation du coétat) $(\psi_T(t), H_T(t), \xi_T(t))$. La paire (k_T, g_T) est la réalisation de la trajectoire de l'état (réalisation de la trajectoire du coétat) si $T = g_T k_T$ et si

$k_T : [H, P^t] \rightarrow X_T$, k_T strictement causal (strictement anticausal);

$g_T : X_T \rightarrow [H, P^t], g_T$ sans mémoire et

$X_T = [L_2 [\mathbb{V}, H_T], P^t]$ où $H_T = \bigcup_{t \in \mathbb{V}} H_T(t)$

L'appellation trajectoire de l'état est juste car l'élément $x = k_T u$, c'est-à-dire la trajectoire de l'état associée à u , peut être considérée comme une représentation $x(\cdot) : \mathbb{V} \rightarrow H_T(t)$ où $x(t)$ est l'état de T à t . L'espace des trajectoires X_T est construit à partir de \mathbb{V} et de H_T en utilisant la méthode décrite en (Ba 2, section 3.5); on suppose alors que l'ensemble linéaire \mathbb{V} est un sous-ensemble mesurable de l'axe des réels. Pour de plus amples détails à ce sujet, le lecteur peut consulter (St 1). Entre autres, cet article démontre que tout T strictement causal entraîne une réalisation de la trajectoire de l'état.

L'utilisation de ces concepts d'état et de causalité peut être simplifiée si on emploie le code alphabétique $A = \{A, C, M, \bar{A}, \bar{C}, Co, St\}$; en voici la signification:

$A = \text{anticausal}$

$\bar{C} = \text{strictement causal}$

$C = \text{causal}$

$Co = \text{coétat}$

$M = \text{sans mémoire}$

$St = \text{état}$

$\bar{A} = \text{strictement anticausal}$

Ce code peut être utilisé pour exprimer le principe de la dualité causale comme suit:

Lemme 4: Soit un énoncé ou une égalité exprimé à l'aide de relations utilisant des concepts associés à l'alphabet $\mathbb{A} = \{A, C, M, \bar{A}, \bar{C}, St, Co\}$ ainsi que la famille des opérateurs de projection $\{P^t\}$ et $\{P_t^t\}$. L'énoncé ou égalité est valable même si on effectue les changements de symboles suivants:

$$\begin{array}{llll} P^t \rightarrow P_t^t, & P_t^t \rightarrow P^t, & \bar{C} \rightarrow \bar{A}, & \bar{A} \rightarrow \bar{C}, \\ C \rightarrow A, & A \rightarrow C, & St \rightarrow Co, & Co \rightarrow St. \end{array}$$

3.2 Décompositions additive et multiplicative de causalité

On dit que l'opérateur T peut subir une décomposition additive de causalité s'il correspond à une somme d'une composante causale et d'une composante anticausale (D 1), (Sa 2); T peut subir une décomposition canonique de causalité s'il correspond à une somme d'une composante strictement causale, d'une composante strictement anticausale et d'une composante sans mémoire. Le lemme suivant établit l'unicité d'une telle décomposition ainsi qu'une propriété utile servant à relier la décomposition de causalité de T à celles de FT et de TF où F est un système sans mémoire.

Lemme 5: Supposons que l'opérateur T peut subir une décomposition canonique (additive) de causalité, $T = T_{\bar{A}} + T_{\bar{C}} + T_M$. La définition des éléments T_α , $\alpha \in \{\bar{A}, \bar{C}, M\}$ est alors unique. Si T est sans mémoire et $T = T_{\bar{A}} + T_{\bar{C}} + T_M$, alors les opérateurs $T_1 = TF$ et $T_2 = FT$ sont tels que

$$T_i = T_{i\bar{A}} + T_{i\bar{C}} + T_{iM}, \quad i = 1, 2$$

où $T_{1\alpha} = T_\alpha F$ et $T_{2\alpha} = F T_\alpha$, $\alpha \in \{\bar{A}, \bar{C}, M\}$.

En vertu du lemme 5, on peut parler de la composante causale (strictement causale, anticausale,...) d'un opérateur T : $[H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$. Par exemple, soit

$T = T_{\bar{A}} + T_{\bar{C}} + T_M$. La composante causale de T est donnée par $T_{\bar{C}} + T_M$ et on la désigne habituellement par T_C ou $[T]_C$. La composante causale d'un opérateur T (tout comme la composante strictement causale, la composante sans mémoire,...) peut ne pas exister. (De 1), (Sa 2) et (Re 3) ont étudié les conditions globales nécessaires et suffisantes d'existence ainsi qu'un certain nombre de propriétés intéressantes reliées à la décomposition de la causalité. Dans le cadre de cette étude, nous sommes intéressés surtout à une de ces propriétés. Afin de bien la caractériser, supposons une partition $\Omega = \{\xi_0 = t_0, \xi_1, \dots, \xi_n = t_\infty\}$ et une fonction d'opérateurs qui lui est associée:

$$\Phi(\Omega) = \sum_{i=1}^n \Delta_i T P^i$$

 où $\Delta_i = P^i - P^{i-1}$; $P^i = P^i$. Si $[T]_C$ est bien défini, alors pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut avoir une partition Ω_ε telle que pour chaque Ω_ε on ait:

$$| [T]_C - \Phi(\Omega) | < \varepsilon$$

où la norme vaut soit pour la topologie uniforme soit pour la topologie forte des opérateurs. Cette propriété peut s'exprimer à l'aide des symboles suivants:

$$\{\sum \Delta_i T P^i\} \rightarrow (M) \text{dPTP}^S \rightarrow [T]_C$$

Pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt, la décomposition canonique de la causalité est toujours bien définie. Et en plus les composantes découlant de cette décomposition sont mutuellement orthogonales. Tout ceci est établi par le lemme suivant.

Lemme 6: Causalité et opérateurs de Hilbert-Schmidt

- i) la classe des opérateurs causals (anticausals, sans mémoire) de Hilbert-Schmidt est un espace de Hilbert;
- ii) dans la topologie des produits internes de Hilbert-Schmidt, on a $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle = 0$ lorsque $\alpha \neq \beta \in \{\bar{A}, \bar{C}, M\}$;
- iii) si T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors

$$T = T_{\bar{A}} + T_{\bar{C}} + T_M$$

où les T_α , $\alpha \in \{\bar{A}, \bar{C}, M\}$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt bien définis tels que

$$\|T - T_\alpha\| = \min_{\tilde{T}} \|\tilde{T} - \tilde{T}_\alpha\|$$

où \tilde{T}_α est tout autre opérateur α et où le symbole $\|\cdot\|$ signifie la norme de Hilbert-Schmidt.

Le concept de la décomposition multiplicative de causalité, ou mise en facteurs causale, est tout aussi important que celui de la décomposition additive de causalité. Un opérateur $Q: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ peut subir une mise en facteurs causale si Q peut être exprimé en termes d'une composition cascade formée d'un opérateur causal (anticausal) suivi d'une composante anticausale (causale). Dans ce qui suit, nous traiterons surtout d'opérateurs Q hermitiens positifs ($\langle Qx, x \rangle \geq 0$, $Q = Q^*$) et de mises en facteurs causales du type illustré dans le lemme suivant (Sa 3).

Lemme 7: Si $Q: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ est un hermitien positif, alors

i) il y a un $\Omega: [H, P^t] \rightarrow [\tilde{H}, \tilde{P}^t]$ causal, inversible à gauche bijectif et

tel que

$$Q = \Omega \Omega^*$$

ii) il y a un $\Lambda: [H, P^t] \rightarrow [\tilde{H}, \tilde{P}^t]$ causal, inversible à droite bijectif et

tel que

$$Q = \Lambda \Lambda^*$$

3.3 Décomposition causale et réalisation de l'état

Les deux lemmes suivants sont une généralisation de résultats linéaires et indépendants du temps bien connus ((Bar 1), (Ma 1)). Ils établissent des relations des plus importantes concernant une décomposition multiplicative spéciale de la causalité, la partie causale d'un opérateur qui en découle et le concept de la trajectoire de l'état. Grâce à ces relations, il sera possible de comprendre les liens reliant une structure d'état et de causalité d'un système et la structure du filtre optimal ou du compensateur. La preuve de la première partie de ces lemmes se trouve en (St 1). La seconde partie en découle en utilisant le principe de la dualité causale. Pour ces lemmes, les symboles F et B désigneront deux opérateurs sans mémoire et G un système strictement causal. On supposera que (GB, F) est une

réalisation de la trajectoire d'état pour FGB et que (G^*F^*, B^*) est une réalisation de la trajectoire du coétat pour $B^*G^*F^*$.

Lemme 8:

i) Supposons un V_1 strictement causal tel que

$$I + B^*G^*F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

alors (\dagger)

$$[(I + V_1^*)^{-1} B^*G^*F^* FGB]_C = V_1$$

ii) Si on a un V_2 strictement causal tel que

$$I + FGBB^*G^*F^* = (I + V_2) (I + V_2^*)$$

alors

$$[FGBB^*G^*F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C = V_2$$

Lemme 9:

i) Supposons V_1 strictement causal tel que

$$I + B^*G^*F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

Alors $V_1 = M_R GB$ où M_R est bien défini et sans mémoire

ii) Si on a V_2 strictement causal tel que

$$I + FGBB^*G^*F^* = (I + V_2) (I + V_2^*)$$

Alors $V_2^* = M_e^*G^*F^*$ où M_e est bien défini et sans mémoire.

Le lemme suivant est à la base du principe du découplage du contrôle stochastique (section 6).

Lemme 10: Supposons V_1 strictement causal et V_2 strictement causal tels que

$$I + B^*G^*F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

et

$$I + FGBB^*F^* = (I + V_2) (I + V_2^*)$$

Alors

$$[(I + V_1^*)^{-1} B^*G^*F^* FGBB^*G^*F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C = M_R G M_e$$

où M_R et M_e sont sans mémoire et tels que

$$V_1 = M_R GB \text{ et } V_2 = FGM_e$$

(†) Le symbole $[T]_C$ signifie toujours la composante causale de T .

Démonstration: En vertu de la nature strictement anticausale de $G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}$:
 $[(I + v_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGBB^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C = [[(I + v_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]]_C B^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C$

De plus, en vertu du lemme 8i):

$$[(I + v_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]_C = v_1$$

et en vertu du lemme 8ii):

$$[FGBB^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C = v_2$$

En utilisant ces équations et le lemme 9, on obtient:

$$[(I + v_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]_C = M_R GB$$

et

$$[FGBB^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C = FGM_e$$

Enfin, on obtient:

$$[[(I + v_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]_C B^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C = M_R F^{-1} [FGBB^* G^* F^* (I + v_2^*)^{-1}]_C = M_R GM_e$$

où F^{-1} est le pseudo-inverse de F .

4. DEUX PROBLEMES FONDAMENTAUX

Dans le cadre de cette étude, nous démontrerons que plusieurs des problèmes de contrôle optimal quadratique rencontrés dans la littérature technique ne sont en fait que des cas particuliers d'un "problème fondamental de contrôle optimal stochastique"; une étape importante de la solution de ce problème consiste à résoudre ce que nous appellerons "le problème de l'approximation du meilleur causal". La marche à suivre est donc la suivante. En premier lieu, nous allons énoncer et solutionner le problème de l'approximation du meilleur causal. Ensuite, nous discuterons du problème fondamental du contrôle optimal stochastique. Dans les sections subséquentes, nous verrons qu'il est possible d'utiliser ces résultats préliminaires pour résoudre toute une gamme de problèmes intéressants.

4.1 Le problème de l'approximation du meilleur causal

Le problème de l'approximation du meilleur causal peut être énoncé comme suit (voir la figure 1),

Énoncé P1: problème de l'approximation du meilleur causal

Soit $\Pi: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ pas nécessairement causal, un processus stochastique $z \in (H, \Sigma, \mathcal{P})$ et l'opérateur de covariance Q_z . Trouvez un causal Φ_0 qui, pour tout autre causal Φ , satisfasse:

$$J(\Phi_0) \leq J(\Phi)$$

où

$$J(\Phi) = E \{ \| (\Phi - \Pi) z \|^2 \} = \text{tr} \{ (\Phi - \Pi) Q_z (\Phi - \Pi)^* \}.$$

Le théorème suivant est la condition suffisante pour que le problème de l'approximation du meilleur causal ait une solution.

Théorème 1: Pour qu'un causal Φ_0 soit une solution du problème de l'approximation du meilleur causal, il suffit que

$$\Omega \Phi_0 = [\Pi \Omega]_C$$

où Ω est causal et tel que

$$Q_z = \Omega \Omega^*$$

Démonstration: Au départ, supposons que $Q_z = I$, c'est-à-dire que z est un bruit blanc stochastique. Pour toute partition $\{\xi_0 = t_0, \xi_1, \dots, \xi_N = t_\infty\}_{\mathcal{E}V}$, on a:

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= E \{ |(\Pi - \Phi)z|^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^N E \{ |\Delta_i (\Pi P^i - \Phi)z + \Delta_i \Pi P_i z|^2 \} \end{aligned}$$

où $P^i = P_i$ et $\Delta_i = P^i P_{i-1}$.

Puisque $P^i z$ est statistiquement indépendant de $P_i z$:

$$J(\Phi) = \sum_{i=1}^N E \{ |\Delta_i (\Pi P^i - \Phi)z|^2 \} + \sum_{i=1}^N E \{ |\Delta_i \Pi P_i z|^2 \}$$

L'affinage à l'aide d'une partition fait converger $\sum_{i=1}^N \Delta_i \Pi P^i$ vers $[\Pi]_C$ et on a:

$$J(\Phi) = E \{ |([\Pi]_C - \Phi)z|^2 \} + E \{ |(\Pi - [\Pi]_C)z|^2 \}$$

Le second terme de cette somme étant indépendant de Φ , le minimum de $J(\Phi)$ est obtenu en rendant le premier terme minimum. On y arrive en choisissant $\Phi_0 = [\Pi]_C$.

Dans le cas plus général, $Q_z = \Omega^*$ $\neq I$ et z est un bruit coloré. Il est possible de ramener ce cas à celui du bruit blanc en considérant que z est l'output du filtre causal Ω ayant pour input un bruit blanc ω . En écrivant $\Pi' = \Pi \Omega$ et $\Phi' = \Phi \Omega$, on obtient:

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= E \{ |(\Pi - \Phi) \Omega \omega|^2 \} \\ &= E \{ |(\Pi' - \Phi') \omega|^2 \} \end{aligned}$$

En reprenant la démonstration utilisée pour le bruit blanc, on s'aperçoit que $J(\Phi)$ est bel et bien minimum lorsque $\Phi' = \Phi \Omega = [\Pi \Omega]_C$.

Il faut noter que le théorème 1 ne signifie pas que $J(\Phi_0) < \infty$. Toutefois, si $J(\Phi)$ n'est pas fini, aucun autre Φ ne rendra $J(\Phi)$ fini. On peut éviter ces difficultés en supposant que certains opérateurs sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt. De cette façon, il est possible de prouver le théorème 1 d'une façon plus directe tout en voyant mieux l'évolution mathématique. Cette méthode montre bien le rôle joué par les opérateurs de Hilbert-Schmidt ainsi que leurs propriétés particulières; elle vaut donc la peine d'être discutée.

Une autre démonstration du théorème 1: En supposant que Φ et Π sont des opérateurs

de Hilbert-Schmidt, on note que:

$$J(\Phi) = E \{ |(\Phi - \Pi)z|^2 \} = \text{tr} \{ (\Phi - \Pi)Q_z (\Phi - \Pi)^* \}$$

A l'aide de $Q_z = \Omega^*$, où Ω est causal, et $\{e_i\}$, un ensemble orthonormal complet dans H , on obtient:

$$\begin{aligned} J(\Phi) &= \text{tr} \{ (\Phi - \Pi)\Omega\Omega^* (\Phi - \Pi)^* \} \\ &= \{ \sum_i \langle (\Phi - \Pi)\Omega e_i, (\Phi - \Pi)\Omega e_i \rangle \} \\ &= \|(\Phi - \Pi)\Omega\|^2 \end{aligned}$$

où le symbole $\| \cdot \|$ signifie la norme de Hilbert-Schmidt. En notant que $\Phi\Omega$ est causal et que les parties causale et strictement anticausale d'un opérateur de Hilbert-Schmidt sont bien définies et mutuellement orthogonales (lemme 6), on a:

$$J(\Phi) = \|[\Phi\Omega - [\Pi\Omega]]_C\|^2 + \|[\Pi\Omega]_{\bar{A}}\|^2.$$

$\|[\Pi\Omega]_{\bar{A}}\|^2$ étant indépendant de Φ , la condition suffisante pour que Φ_o soit la solution désirée est que:

$$\Phi_o\Omega = [\Pi\Omega]_C$$

Le corollaire suivant traite d'un important cas particulier du problème de l'approximation du meilleur causal.

Corollaire 1: Pour un $P^0 \in R$ donné, supposons que

$$Q_z: P_o G (I + P^0 Q_\omega P^0) G^* P_o$$

où G est causal. Dans un tel cas, la condition suffisante pour que Φ_o soit une solution du problème de l'approximation du meilleur causal est que:

$$\Phi_o P_o G = [\Pi P_o G]_C$$

Démonstration: Il faut noter que dans un tel cas:

$$J(\Phi) = J_1(\Phi_1) + J_2(\Phi_2)$$

$$\text{où } J_1(\Phi_1) = \|(\Phi_1 - \Pi)P_o G\|^2$$

$$\text{et } J_2(\Phi_2) = \text{tr} \{ (\Phi_2 - \Pi)P_o G P^0 Q_\omega P^0 G^* P_o (\Phi_2 - \Pi)^* \}.$$

Il reste à vérifier que la condition suffisante pour que ces deux fonctionnelles soient simultanément minimisées est bien:

$$\Phi_{o1} G = \Phi_{o2} G = [\Pi P_o G]_C$$

On y arrive en notant que:

$$J_1(\Phi_1) = ||P_o(\Phi_1 P_o^G - [\Pi P_o^G]_C)||^2 + ||P^o[\Pi P_o^G]_C||^2 + ||[\Pi P_o^G]_A||^2$$

et que

$$\begin{aligned} J_2(\Phi_2) &= \text{tr} \{ P_o(\Phi_2 P_o^G - [\Pi P_o^G]_C) P^o Q_\omega P^o G^* P_o (\Phi - P_o \Pi)^* \} \\ &\quad + \text{tr} \{ P^o \Pi P_o^G P^o Q_\omega P^o G^* P_o \Pi^* P^o \} \end{aligned}$$

La dernière équation découle de

$$P_o \Pi P_o^G P^o = P_o [\Pi P_o^G]_C P^o$$

et de

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ P^o \Pi P_o^G P^o Q_\omega P^o G^* P_o (\Phi - P_o \Pi)^* P_o \} &= 0 \\ \text{tr} \{ P_o (\Phi_2 - P_o \Pi) P_o^G P^o Q_\omega P^o G^* P_o \Pi^* P^o \} &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Le problème fondamental de l'optimisation stochastique

Ce problème découle du problème déterministe "fondamental" de Porter (Po 1).

Nous conserverons le qualificatif "fondamental" de Porter car les sections subséquentes de notre étude serviront à démontrer que ce problème comprend plusieurs autres problèmes fondamentaux comme le filtre de Wiener, le régulateur optimal de Kalman et le problème de l'estimation optimale de l'état de Kalman-Bucy.

Enoncé P2: le problème fondamental de l'optimisation stochastique (figure 2)

Soit quatre systèmes $L_i: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$, $i = 1, 2, 3, 4$, qui ne sont pas nécessairement causals et deux processus stochastiques $\alpha, \beta \in (H, \Sigma, \mathcal{G})$. Trouvez un contrôleur causal D_o tel que pour tout autre causal D , on ait:

$$J(D_o) \leq J(D)$$

où $J(D) = E\{|e|^2 + |r|^2\}$

et $e = L_3 D (L_1 \alpha + \beta) - L_2 \alpha$

$$r = L_4 D (L_1 \alpha + \beta).$$

La solution est basée sur le théorème suivant. Celui-ci dit qu'en faisant certaines hypothèses appropriées, on ramène le problème fondamental d'optimisation à un problème d'approximation du meilleur causal; sa solution est alors obtenue en utilisant le théorème 1.

Théorème 2: Soit deux causals Ω et Λ avec Ω^{-1} et Λ^{-1} bien définis et causals et tels que

$$Q = L_1 Q_\alpha L_1^* + Q_\beta + L_1 Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} L_1^* = \Omega \Omega^*$$

et $L_3^* L_3 + L_4^* L_4 = \Lambda^* \Lambda$

Le problème fondamental d'optimisation devient alors un problème d'approximation du meilleur causal avec

$$Q_z = Q$$

et

$$\Pi = \Lambda^{*-1} L_3^* (L_2 Q_\alpha L_1^* + L_2 Q_{\alpha\beta}) Q^{-1}$$

La solution au problème fondamental d'optimisation est alors:

$$D_0 = \Lambda^{-1} [\Lambda^{*-1} L_3^* (L_2 Q_\alpha L_1^* + L_2 Q_{\alpha\beta}) \Omega^{-1}]_C \Omega^{-1}$$

Démonstration: On note que

$$J(D) = E \{ |(L_3 D L_1 - L_2) \alpha + L_3 D_\beta|^2 + E \{ |L_4 D L_1 \alpha + L_4 D_\beta|^2 \} = \text{tr } X_1 + \text{tr } X_2$$

où

$$X_1 = L_3 D L_1 Q_\alpha L_1^* D^* L_3^* + L_3 D Q_\beta D^* L_3^* + L_3 D L_1 Q_{\alpha\beta} D^* L_3^* + L_3 D Q_{\beta\alpha} L_1^* D^* L_3^* + L_4 D L_1 Q_\alpha L_1^* D^* L_4^* + L_4 D Q_\beta D^* L_4^*$$

et

$$X_2 = -L_3 D L_1 Q_\alpha L_2 - L_2 Q_\alpha L_1^* D^* L_3^* - L_2 Q_{\alpha\beta} D^* L_3^* - L_3 D Q_{\beta\alpha} L_2 + L_4 D L_1 Q_{\alpha\beta} D^* L_4^* + L_4 D Q_{\beta\alpha} L_1^* D^* L_4^* + L_2 Q_\alpha L_2^*.$$

On note également que

$$\text{tr } X_1 = \text{tr } \{ (L_3^* L_3 + L_4^* L_4) D Q D^* \}$$

où

$$Q = L_1 Q_\alpha L_1^* + Q_\beta + L_1 Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} L_1^*$$

En utilisant

$$L_3^* L_3 + L_4^* L_4 = \Lambda^* \Lambda$$

on peut réécrire $J(D)$ de la façon suivante:

$$J(D) = \text{tr } \{ \Lambda D Q D^* \Lambda^* + X_2 \}$$

Ensuite, à l'aide de certaines opérations algébriques et d'une opération reliée

au carré et semblable à l'opération utilisée par (Bo 1), on obtient:

$$J(D) = J_o(D) + \text{tr} \{ \Pi_o Q \Pi_o^* + L_2 Q \alpha L_2^* \}$$

où

$$\Pi_o = \Lambda^{*-1} L_3^* (L_2 Q \alpha L_1^* + L_2 Q \alpha \beta) Q^{-1}$$

et

$$J_o(D) = \text{tr} \{ (\Lambda D - \Pi_o) Q (\Lambda D - \Pi_o)^* \}$$

Le terme $\text{tr} \{ -\Pi_o Q \Pi_o^* + L_2 Q \alpha L_2^* \}$ étant indépendant de D , le minimum de $J(D)$ est bel et bien le minimum de $J_o(D)$. Il est évident que la solution non causale de ce problème est donnée par $D = \Lambda^{-1} \Pi_o$. La solution causale correspond à la solution au problème de l'approximation du meilleur causal avec $\Phi = \Lambda D$, $Q_z = Q$ et $\Pi = \Pi_o$.

Cette solution peut être obtenue en utilisant le théorème 1.

Le corollaire suivant est intéressant car il établit une relation utile entre le problème de l'approximation du meilleur causal et une version particulière du problème fondamental de l'optimisation. Ce résultat sera utilisé lors de l'étude du problème du régulateur optimal de Kalman (théorème 5).

Corollaire 2: Si $\alpha = \beta$, $L_1 = 0$ et qu'il y a un causal Λ possédant un inverse et tel que

$$L_3^* L_3 + L_4^* L_4 = \Lambda^* \Lambda$$

Alors une condition suffisante pour que D_o soit une solution du problème fondamental d'optimisation est que

$$\Lambda D_o = \Phi_o$$

où Φ_o est une solution du problème de l'approximation du meilleur causal avec $Q_z = Q_\alpha$ et $\Pi = \Lambda^{*-1} L_3^* L_2$.

Remarque 1: En utilisant le lemme 7, on s'aperçoit que les exigences d'inversion envers $L_3^* L_3 + L_4^* L_4$, Ω et Λ ne sont pas nécessaires pour que le théorème 2 et le corollaire 2 soient valables. On ne les a utilisés que pour simplifier la notation. Si ces exigences ne sont pas satisfaites, il faut remplacer Λ^{-1} par Λ^{-R} (inverse à droite) et Λ^{*-1} par Λ^{*-1} (inverse à gauche).

5. L'ESTIMATION ET LE CONTROLE OPTIMA PAR RELATION ENTREE-SORTIE

Dans cette section, nous utiliserons les théorèmes 1 et 2 afin d'obtenir la solution à trois problèmes fondamentaux d'estimation et de contrôle optima du type entrée-sortie. Pour en savoir plus au sujet de ces problèmes et de leur pourquoi, le lecteur peut consulter (Bo 1), (Yo 1) et (Po 3).

5.1 Le problème du filtre de Wiener

L'énoncé suivant est celui d'une version généralisée du problème du filtre de Wiener.

Enoncé 3: Le problème du filtre de Wiener (figure 3)

Soit deux systèmes $L_1, L_2: [H, P^t]$ qui ne sont pas nécessairement causals et deux processus stochastiques $\alpha, \beta \in (H, \Sigma, \mathcal{Q})$. Trouvez un filtre causal D_0 qui, pour tout autre causal D , entraîne $J(D_0) \leq J(D)$ où

$$J(D) = E \{ |L_2 \alpha - D(L_1 \alpha + \beta)|^2 \}.$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que l'on ait une solution au problème généralisé du filtre de Wiener.

Théorème 3: Supposons que l'opérateur

$$Q = L_1 Q_\alpha L_3^* + Q_\beta + L_1 Q_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} L_1^*$$

peut être inversé. La solution non causale au problème du filtre de Wiener est alors donnée par

$$\Pi_0 = L_\alpha (Q_\alpha L_1^* + Q_{\alpha\beta}) Q^{-1},$$

Si on a un causal Ω tel que $Q = \Omega \Omega^*$ et pouvant être inversé, une solution causale est alors donnée par

$$D_0 = [L_2 (Q_\alpha L_1^* + Q_{\alpha\beta}) \Omega^{*-1}]_C \Omega^{-1}$$

La démonstration du théorème 3 découle du théorème 2 si on traite le problème du filtre de Wiener comme une version particulière du problème fondamental de l'optimisation en utilisant $L_3 = I$ et $L_4 = 0$.

Tout comme pour le cas classique ((Bo 1), p. 424), les étapes menant à la solution au problème généralisé du filtre de Wiener sont basées sur les étapes physiques suivantes:

- i) le calcul d'un filtre qui ramène le problème du type "bruit coloré" à un problème du type "bruit blanc", soit Ω ;
- ii) le calcul du filtre non causal optimal associé au problème du type "bruit blanc", soit $\Pi = (L_2 Q_\alpha^* L_1 + Q_{\alpha\beta}) \Omega^{*-1}$;
- iii) le calcul de l'approximation du meilleur causal de Π , soit $[\Pi]_C$;
- iv) l'élaboration du filtre causal optimal en reliant en cascade l'inverse du filtre de blanchissement Ω^{-1} suivi de $[\Pi]_C$, soit $D_o = [\Pi]_C \Omega^{-1}$.

On voit que notre généralisation dans l'espace abstrait de Hilbert du filtre de Wiener peut être interprétée en pratique de la même façon que le développement classique à l'aide de la fonction de transfert.

Notez également qu'en posant $L_1 = 0$ et $L_2 = I$, le théorème 3 donne la solution au problème d'estimation optimale suivant (figure 4):

Soit α et β . Trouvez un causal D_o qui rende $E \{ | \alpha\beta - \alpha |^2 \}$ minimum. Ce problème a déjà été énoncé et étudié par (Sa 3). La solution était alors erronée mais le corollaire suivant la corrige.

Corollaire 2: Soit un causal Ω , avec Ω^{-1} bien défini et causal, et tel que

$$Q_\beta = \Omega \Omega^*$$

Alors, la condition suffisante pour que D_o soit une solution au problème de l'estimation optimale est que

$$D_o = [Q_{\alpha\beta} \Omega^{*-1}]_C \Omega^{-1}$$

5.2 Le problème de l'asservissement optimal

Nous allons maintenant étudier une version plus générale du problème de l'asservissement optimal étudié entre autres par Newton, Gould et Kaiser (Ne 1), Chang (Ch 1) et Youla (Yo 1). Notre formulation du problème et nos résultats sont identiques à ceux de Youla (comparez notre théorème 4 au corollaire 1 de (Yo 1, partie II)). Nous énonçons formellement le problème de la façon suivante:

Énoncé P4: Le problème de l'asservissement optimal (figure 5).

Soit les processus stochastiques statistiquement indépendants d , l , m et $u \in$

(H, Σ, Ψ) et les systèmes causals F, F_o, L, L_o, T, T_o et T_s , tous dans la topologie $[H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$. Trouvez un contrôleur causal par feedback N_o tel que

- i) N_o est causal
- ii) $(I + FTN_o)$ a un inverse causal borné
- iii) pour tout autre contrôleur causal N remplissant les conditions i) et ii), on ait

$$J(N_o) \leq J(N)$$

où

$$\begin{aligned} J(N) &= E \{ |u - y|^2 + k^2 |r|^2 \} \\ y &= TN (I + FTN)^{-1} [u + L_o \ell - F_o m + (L - FT_o) d] + T_o d \\ r &= T_s N (I + FTN)^{-1} [u + L_o \ell - F_o m + (L - FT_o) d]. \end{aligned}$$

Le lemme suivant établit une équivalence entre le problème de l'asservissement optimal et le problème fondamental de l'optimisation.

Lemme 11: Supposons que D_o est une solution au problème fondamental de l'optimisation pour lequel

$$\beta = L_o \ell - F_o m + u + (L - FT_o) d$$

$$\alpha = u - T_o d$$

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 1$$

$$L_3 = T$$

$$L_4 = kT_s$$

Alors une condition suffisante pour que le causal N_o soit une solution au problème de l'asservissement optimal est que $(I + FTN_o)$ ait un inverse causal borné et que

$$(I - FT D_o) N_o = D_o$$

Démonstration: De la figure 5, on voit bien que

$$\begin{aligned} y &= TN (I + FTN)^{-1} [u + L_o \ell - F_o m + (L - FT_o) d] + T_o d \\ r &= T_s N (I + FTN)^{-1} [u + L_o \ell - F_o m + (L - FT_o) d] \end{aligned}$$

En utilisant

$$\beta = u + L_o \ell - F_o m + (L - FT_o) d$$

$$\alpha = u - T_o d$$

on obtient

$$e = u - y = \alpha - TN_o (I + FTN_o)^{-1} \beta$$

$$r = T_s N_o (I + FTN_o)^{-1} \beta$$

En posant $D_o = N_o (I + N_o FT)^{-1}$, on a

$$N_o = D_o (I - FTD_o)^{-1}$$

d'où

$$N_o (I + FTN_o)^{-1} = D_o$$

Et finalement on obtient

$$J(N) = E \{ |e|^2 + k^2 |r|^2 \} = E \{ |\alpha - TD_o|^2 + |kT_s D_o \beta|^2 \} = J(D_o)$$

Supposons maintenant que D_o est une solution au problème fondamental de l'optimisation mais que N_o n'est pas une solution au problème de l'asservissement optimal. En se basant sur les équations précédentes, ceci signifie qu'il y a un \tilde{N} tel que

$$\tilde{J}(N) < J(N_o) = J(D_o)$$

En posant $\tilde{D} = \tilde{N} (I + \tilde{F} \tilde{N})^{-1}$, on a alors

$$\tilde{J}(\tilde{D}) = \tilde{J}(\tilde{N}) < J(D_o)$$

et ceci contredit l'hypothèse selon laquelle D_o est une solution au problème fondamental de l'optimisation.

Le lemme suivant établit une condition suffisante pour que la solution au problème fondamental de l'optimisation soit celle que le lemme 10 associe au problème de l'asservissement optimal. La démonstration découle directement du théorème 2.

Lemme 12: Soit deux causals Λ et Ω , avec Ω^{-1} et Λ^{-1} bien définis et causals, et tels que

$$T^* T + k T_s^* T_s = \Lambda^* \Lambda$$

$$L_o^* Q_o L_o + F_o^* Q_m F_o + Q_u + (L + FT_o) Q_d (L + FT_o)^* = \Omega^* \Omega$$

Alors le problème fondamental de l'optimisation associé au problème de l'asservissement optimal a comme solution:

$$D_o = \Lambda^{-1} [\Lambda^{*-1} Q_{\alpha\beta} \Omega^{*-1}] C \Omega^{-1}$$

où

$$Q_{\alpha\beta} = Q_u + T_o Q_d (L + F T_o)$$

Le théorème suivant établit les conditions nécessaires pour que la solution au problème de l'asservissement de Youla, Jabr et Bongiorno puisse non seulement s'appliquer à la fonction rationnelle de transfert mais qu'elle puisse être utilisée dans le cadre plus général de notre espace de Hilbert. La démonstration est une conséquence directe des lemmes 11 et 12.

Théorème 4: Supposons que l'hypothèse du lemme 12 est juste et que $(I - F T D_o)^{-1}$ possède un inverse causal.

Alors la solution au problème de l'asservissement optimal est

$$N_o = D_o (I - F T D_o)^{-1}$$

pourvu que $(I + F T N_o)$ possède un inverse causal borné.

Remarque 2: On note qu'en utilisant la notation $W_o = D_o \Omega$, la solution proposée par le théorème précédent devient

$$N_o = W_o (\Omega - F T W_o)^{-1}$$

Cette solution est formellement identique à la solution de (Yo 2). A cause de cette comparaison, nous nous devons de mentionner que notre méthode est à la fois plus générale et plus spécifique que celle de Youla. Elle est plus générale car elle s'applique aux systèmes en évolution de dimensions et de temps infinis; elle est plus spécifique car elle ne s'applique pas si la boucle ouverte est instable.

5.3 Le problème fondamental de l'optimisation déterministe

Le raisonnement que nous avons utilisé pour en arriver à la solution du problème fondamental de l'optimisation peut également servir lorsque les hypothèses d'inversion ne sont pas toutes vérifiées. Nous allons en faire la

preuve en énonçant et en solutionnant une version quelque peu plus généralisée du problème fondamental (déterministe) de l'optimisation étudié par Porter (Po 3). Nous énonçons le problème de la façon suivante.

Enoncé P5: Problème fondamental de l'optimisation déterministe de Porter (figure 6)
 Soit trois systèmes causals $G_i: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$, $i = 1, 2, 3$ et un élément $z \in H$ tel que $P_o z = z$ pour un $P^0 = (I - P_o) \in R$ quelconque. Trouvez un contrôleur causal D_o tel que pour tout autre causal D on ait:

$$J(D_o) \leq J(D)$$

où

$$J(D) = |(G_2 - G_1 D)z|^2 + |G_3 \Pi z|^2$$

Le théorème suivant mène au résultat principal de Porter (théorème 2, (Po 3)) tout en utilisant l'approche du problème fondamental de l'optimisation.

Théorème 5: Soit un causal Λ avec Λ^{-1} bien défini et causal et tel que

$$G_1^* G_1 + G_3^* G_3 = \Lambda^* \Lambda$$

Alors la condition suffisante pour que D_o soit une solution au problème fondamental de l'optimisation déterministe est que

$$D_o z = \Lambda^{-1} P_o [\Lambda^{*-1} G_1^* G_2 z].$$

Démonstration: Notez que le problème fondamental de l'optimisation déterministe de Porter est un cas particulier de notre problème fondamental (stochastique) d'optimisation, soit lorsque $L_1 = 0$ et $\alpha = \beta = z$. Nous en avons parlé sous le titre de corollaire 2. En utilisant ce corollaire et en faisant correspondre la notation, c'est-à-dire $L_2 = G_2$, $L_3 = G_1$ et $L_4 = G_3$, on découvre que si le causal Φ_o est une solution au problème de l'approximation du meilleur causal, lorsque $z = z$ et $\Pi = \Lambda^{*-1} G_1^* G_2$, alors $D_o = \Lambda^{-1} \Phi_o$ est une solution au problème fondamental de l'optimisation déterministe.

On note également que si $Q_z = \Omega^*$, une condition suffisante pour qu'un causal Φ_o soit une solution au problème de l'approximation du meilleur causal est que $\Phi_o \Omega = \Pi \Omega$ (ceci découle de la seconde équation de la démonstration du théorème 1).

Dans le cas qui nous occupe, $Q_z = (\cdot, z)z$, et $\Omega = \frac{(\cdot, z)}{|z|} z$ est tel que $Q_z = \Omega^*$.

Il s'ensuit que la condition suffisante pour qu'un causal Φ_o soit une solution au problème de l'approximation du meilleur causal est que

$$(\cdot, z)\Phi_o z = (\cdot, z) \Lambda^{*-1} G_1^* G_2 z.$$

En outre, en se basant sur la causalité de Φ_o et sur l'hypothèse $z = P_o z$, on a (lemme 1):

$$\Phi_o P_o z = P_o \Phi_o z$$

ou

$$\Phi_o z = P_o \Lambda^{*-1} G_1^* G_2 z$$

et de là

$$\Lambda^{-1} \Phi_o z = \Lambda^{-1} P_o [\Lambda^{*-1} G_1^* G_2 z].$$

Cette dernière équation signifie que la condition suffisante pour que le causal D_o soit une solution au problème de l'optimisation déterministe est que

$$D_o z = \Lambda^{-1} P_o [\Lambda^{*-1} G_1^* G_2 z].$$

6 . ESTIMATION ET CONTROLE OPTIMA DE L'ETAT

Tout comme dans la section précédente, nous allons utiliser les théorèmes 1 et 2 pour traiter de trois problèmes fondamentaux du type estimation ou contrôle optimal de l'état. La méthode habituelle recherche un feedback d'état optimal.

Nous préférons, tout comme (St 1), parler de problèmes à boucle ouverte. La conséquence de nos résultats est que la solution de la boucle ouverte peut être mise en pratique au moyen d'une configuration à feedback de l'état sans mémoire.

Le pourquoi physique de ces problèmes et les applications qui en découlent ont été traités par (Ka 1), (Ka 2) et (An 1).

6.1 Le problème du régulateur optimal

Nous débutons par une version généralisée du problème du régulateur optimal énoncé et solutionné par Kalman (Ka 1). Notre énoncé abstrait du problème et la solution qui en découle peuvent être interprétés comme une extension normale de résultats semblables de Steinberger, Schumitzky et Silverman (St 1); les propos de ces auteurs concernant le pourquoi et les avantages de l'utilisation de l'espace de Hilbert dit de résolution face à ce problème ne font que renchérir nos propres propos.

Enoncé P6: Le problème du régulateur optimal (figure 7).

Soit deux processus stochastiques statistiquement indépendants $\omega, \pi \in (H_2, \Sigma_2, \mathfrak{G}_2)$ avec $Q_\omega = I$ et trois systèmes causals

$$B: [H_1, P_1^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$G: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$F: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_3, P_3^t]$$

avec B, F sans mémoire, G strictement causal et tous étant tels que (GB, F) est la réalisation de la trajectoire de l'état de FGB. Trouvez un régulateur optimal causal à boucle ouverte $D_o: [H_3, P_3^t] \rightarrow [H_1, P_1^t]$ tel que pour tout autre causal D , on ait:

$$J(D_o) \leq J(D)$$

où

$$J(D) = E \{ |y|^2 + |u|^2 \}$$

et

$$y = FGB(\omega + P^0 \pi - u)$$

$$u = D_O P_O FGB(\omega + P^0 \pi)$$

Notre solution au problème du régulateur optimal est formalisée par le théorème suivant.

Théorème 6: Le principe de l'optimalité et le régulateur de Kalman.

Supposons V_1 strictement causal et tel que

$$I + B^* G^* F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

Alors une condition suffisante pour que D_O soit un régulateur optimal à boucle ouverte est que

$$D_O F = (I + M_R GB)^{-1} M_R$$

où M_R est un opérateur bien défini sans mémoire. Le contrôle optimal de ce régulateur peut être mis en oeuvre en utilisant la loi suivante du feedback sans mémoire de l'état:

$$x = GB(\omega + P^0 \pi - u)$$

$$u = M_R x.$$

Démonstration: En utilisant les notations équivalentes suivantes:

$$\alpha = \beta = P_O F G B (\omega + P^0 \pi)$$

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = I$$

$$L_3 = F G B P_O$$

$$L_4 = I$$

on s'aperçoit que le problème du régulateur optimal n'est qu'un cas particulier du problème fondamental de l'optimisation (figure 8). De plus, en notant que

$$I + B^* G^* F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

signifie

$$I + P_o B^* G^* F^* FGBP_o = (I + P_o V_1^*) (I + V_1 P_0)$$

on s'aperçoit également que ce cas particulier est précisément celui qui a été étudié dans le corollaire 1.

En utilisant ce résultat, on voit que la condition suffisante pour que le causal D_o soit le régulateur optimal est que

$$\Lambda D_o = (I + V_1 P_o) D_o = \Phi_o$$

où Φ_o est une solution au problème de l'approximation du meilleur causal lorsque

$Q_z = Q_\alpha$ et lorsque Π est donné par

$$\Pi = \Lambda^{*-1} L_3^* L_2 = (I + P_o V_1^*)^{-1} P_o B^* G^* F^* = P_o (I + V_1^*)^{-1} B^* G^* F^*$$

Tentons maintenant d'obtenir un tel Φ_o . En vertu de l'indépendance statistique de ω et π , on a

$$Q_\alpha = Q_z = P_o FGB(Q_\omega + P^0 Q_\pi P^0) G^* F^* B^* P_o$$

et en utilisant le corollaire 1, on s'aperçoit que la condition suffisante pour que Φ_o soit une solution au problème de l'approximation du meilleur causal que nous étudions est que

$$\Phi_o FGB = [\Pi P_o FGB]_C$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Phi_o FGB &= [(I + P_o V_1^*)^{-1} P_o B^* G^* F^* P_o FGB]_C \\ &= P_o [(I + V_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]_C \end{aligned}$$

Notez qu'en utilisant le lemme 8i), on obtient

$$[\Pi P_o FGB]_C = P_o [(I + V_1^*)^{-1} B^* G^* F^* FGB]_C = P_o V_1$$

où (d'après le lemme 8) $V_1 = M_R G B$ avec M_R un opérateur sans mémoire bien défini.

En utilisant ce résultat, on a:

$$[\Pi P_o FGB]_C = M_R P_o G B$$

Donc, une condition suffisante pour Φ_o est

$$[\Pi P_o FGB]_C = \Phi_o FGB = P_o M_R G B$$

Des équations précédentes, on peut conclure que la condition suffisante pour que D_o soit un régulateur optimal est que

$$D_o F = (I + M_R^G B)^{-1} M_R$$

Cette équation signifie que la loi du contrôle optimal u donnée par D_o satisfait à l'équation suivante:

$$u = (I + M_R^G B)^{-1} M_R^P G B (\omega_o + P^0 \pi)$$

et donc que

$$u + M_R^G B u = M_R^P G B (\omega + P^0 \pi)$$

De ceci, on obtient les valeurs relatives au feedback sans mémoire de l'état désirées, soit

$$u = M_R^P x$$

$$x = P_o^G B (\omega + P^0 \pi - u)$$

L'interprétation physique de cette solution est donnée à l'aide du diagramme fonctionnel de la figure 9.

Il est intéressant de noter que selon le théorème précédent la solution au problème du régulateur optimal peut être utilisée soit à l'aide d'une configuration à boucle ouverte soit à l'aide d'une configuration à boucle fermée avec un feedback de l'état. De façon générale, la configuration optimale à boucle fermée offre une meilleure sensibilité que la configuration à boucle ouverte. A titre de preuve, notez que si γH est l'effet d'une perturbation donnée sur l'état de la boucle ouverte optimale, alors $(I + M_R^G B)^{-1} \gamma$ sera l'effet de la même perturbation sur l'état du système optimal à boucle fermée. En utilisant la notation $\$ = (I + M_R^G B)^{-1}$, le système optimal à boucle fermée offrira une meilleure sensibilité que le système optimal à boucle ouverte si et seulement si $|\$| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $I - \$^* \$ > 0$ (Po 1).

On note que

$$I - \$^* \$ = \$^* \{ \$^{*-1} \$^{-1} - I \} \$$$

En utilisant $V_1 = M \frac{G}{R} B$, on obtient:

$$I - \frac{G^*}{R} B = (I + V_1^*)^{-1} \{ B^* G^* F^* FGB \} (I + V_1)^{-1} > 0$$

On peut donc conclure que la configuration à boucle fermée du régulateur optimal offre bel et bien une meilleure sensibilité que la solution à boucle ouverte.

6.2 Le problème de l'estimation optimale de l'état

Le problème de l'estimation optimale de l'état trouve son origine chez Kalman (Ka 1) et Kalman et Bucy (Ka 2). Nous l'énonçons comme suit.

Énoncé P7: Le problème de l'estimation optimale de l'état (figure 10).

Soit quatre processus stochastiques statistiquement indépendants $\omega \in (H_1, \Sigma_1, \mathcal{G}_1)$, $\pi \in (H_2, \Sigma_2, \mathcal{G}_2)$ et $\eta \in (H_3, \Sigma_3, \mathcal{G}_3)$, avec $Q_\omega = I$ et $Q_\eta = I$ et trois systèmes causals

$$B: [H_1, P_1^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$G: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$F: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_3, P_3^t]$$

avec B et F sans mémoire, G strictement causal et tous tels que (GB, F) et $(G^* F^*, B^*)$ sont respectivement les réalisations de la trajectoire de l'état et du coétat de FGB et de $B^* G^* F^*$. Trouvez un filtre causal $D_o = (D_{o1}, D_{o2})$ avec

$$D_{o1}: [H_3, P_3^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$D_{o2}: [H_1, P_1^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

tel que pour tout autre $D = (D_1, D_2)$ causal, on ait

$$J(D_o) \leq J(D)$$

où

$$J(D) = E \{ | x - \hat{x} |^2 \}$$

avec

$$x = GB(u + \omega + P^0 \pi)$$

$$\hat{x} = D_1 z + D_2 u$$

et

$$z = P_o [FGB(u + \omega + P^0 \pi) + u]$$

Le théorème suivant démontre que le problème de l'estimation optimale de l'état peut être solutionné à l'aide d'un filtre de Kalman-Bucy généralisé.

Théorème 7: Soit V_2 strictement causal et tel que

$$I + FGBB^* G^* F^* = (I + V_2) (I + V_2^*)$$

Alors, une solution au problème de l'estimation optimale de l'état est donnée par

$$D_{o1} = GM_e (I + FGM_e)^{-1}$$

$$D_{o2} = (I - GM_e (I + FGM_e)^{-1} F) GB$$

où M_e est un opérateur sans mémoire tel $V_2 = FGM_e$. L'estimation optimale de l'état peut être mise en oeuvre à l'aide du système avec retour d'état suivant:

$$\hat{x} = G [M_e [z - F\hat{x}] - Bu]$$

$$z = FGB(u + \omega + P^0\pi) + \eta$$

Démonstration: Pour fins de simplicité, nous étudierons le cas pour lequel $\pi = 0$; la démonstration concernant les cas pour lesquels $\pi \neq 0$ peut être faite en utilisant le corollaire 1 et des arguments identiques aux arguments contenus dans la démonstration du théorème 5. Nous avons donc

$$\begin{aligned} J(D) &= E \{ | D_1 (FGBu + FGB\omega + \eta) + D_2 u - GB(u - \omega) |^2 \} \\ &= E \{ | D_1 (FGB\omega + \eta) - GB\omega - (D_2 + (D_1 F - I) GB) u |^2 \} \end{aligned}$$

c'est-à-dire (en vertu de l'indépendance statistique de u , ω et η)

$$J(D) = E \{ | D_1 (FGB\omega + \eta) - GB\omega |^2 \} + E \{ | (D_2 + (D_1 F - I) GB) u |^2 \}$$

On obtient

$$J(D) \leq \min_{D_1} J_1(D_1) + \min_{D_1, D_2} J_o(D_1, D_2)$$

où

$$J_1(D_1) = E \{ | D_1 (FGB\omega + \eta) - GB\omega |^2 \}$$

et

$$J_o(D_1, D_2) = E \{ | (D_2 + (D_1 F - I) GB) u |^2 \}$$

On note que la fonctionnelle $J_o(D_1, D_2)$ est minimum pour toute paire (D_1, D_2) telle que

$$D_2 = (I - D_1 F) GB$$

Le problème de rendre $J(D_1, D_2)$ minimum est donc celui de rendre $J_1(D_1)$ minimum. Ce dernier problème est en fait un problème fondamental de l'optimisation lorsque $L_3 = I$ et $L_4 = 0$. Avec l'hypothèse du théorème, on retourne au problème déjà traité à l'aide du théorème 3. En posant $Q_\alpha = I$, $Q_\beta = I$, $Q_{\alpha\beta} = 0$, $Q_{\beta\alpha} = 0$, $L_1 = FGB$ et $L_2 = GB$ et en utilisant le résultat antérieur découlant du théorème 3, on obtient:

$$D_{o1} = [GBB^* G^* F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C (I + V_2)^{-1}$$

En vertu du fait que F est sans mémoire, on a

$$FD_{o1} = [FGBB^* G^* F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C (I + V_2)^{-1}$$

En notant que (voir le lemme 8)

$$[FGBB^* G^* F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C = V_2$$

on obtient

$$FD_{o1} = V_2 (I + V_2)^{-1}$$

En utilisant le lemme 9, on a $V_2^* = M_e^* G^* F^*$ et donc $V_2 = FGM_e$. Il s'ensuit que

$$FD_{o1} = FGM_e (I + FGM_e)^{-1}$$

donc que

$$D_{o1} = GM_e (I + FGM_e)^{-1}$$

et que

$$D_{o2} = (I - GM_e (I + FGM_e)^{-1} F) GB.$$

L'estimateur optimal avec retour d'état est

obtenu si on reconnaît que l'estimation optimale fournie par (D_{o1}, D_{o2}) est équivalente à l'estimation fournie par le diagramme fonctionnel de la figure 11.

Ensuite, on vérifie que ce diagramme fonctionnel est équivalent à celui de la figure 12.

6.3 Le problème du contrôle stochastique optimal

Dans ce qui suit, nous allons traiter à nouveau du problème du régulateur optimal mais cette fois-ci lorsque l'output du système est entaché de bruit.

Enoncé P8: Le problème du régulateur optimal en présence de bruit de mesure (figure 13).

Soit trois processus stochastiques statistiquement indépendants ω , $\pi \in (H_1, \Sigma_1, \mathcal{B}_1)$ et $\eta \in (H_3, \Sigma_3, \mathcal{B}_3)$ avec $Q_\omega = I$ et $Q_\eta = I$, et trois systèmes causals:

$$B: [H_1, P_1^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$G: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_2, P_2^t]$$

$$F: [H_2, P_2^t] \rightarrow [H_3, P_3^t]$$

avec B et F sans mémoire, avec G strictement causal et tous tels que (GB, F) et $(G^* F^*, B^*)$ sont respectivement des réalisations valables de la trajectoire d'état et de co'état de FGB et de $B^* G^* F^*$. Trouvez un régulateur causal

$$D_o: [H_3, P_3^t] \rightarrow [H_1, P_1^t] \text{ tel que pour tout autre causal } D, \text{ on ait:}$$

$$J(D_o) \leq J(D)$$

où

$$J(D) = E \{ |u|^2 + |y|^2 \}$$

et

$$u = Dz$$

$$z = P_o [FGB\omega + P^0\pi] + \eta$$

$$y = z - FGBu$$

Notre dernier théorème servira à établir que le problème du contrôle stochastique optimal peut être résolu en utilisant le principe classique du découplage: le contrôleur stochastique optimal est la combinaison en cascade du filtre de Kalman-Bucy suivi du régulateur de Kalman.

Théorème 8: Soit V_1 et V_2 strictement causals et tels que

$$I + B^* G^* F^* FGB = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

et

$$I + FGBB^* G^* F^* = (I + V_2^*) (I + V_2)$$

Alors la solution au problème du régulateur optimal en présence de bruit est

$$D_o = (I + M_R GB)^{-1} M_R G M_e (I + FGM_e)^{-1}$$

où M_R et M_e sont sans mémoire et sont respectivement les solutions aux problèmes du régulateur optimal (théorème 6) et de l'estimateur optimal de l'état (th. 7). La loi du contrôle optimal provenant de ce régulateur peut être mise en application en

combinant en cascade l'estimateur optimal de l'état suivi du régulateur optimal, c'est-à-dire

$$\hat{x} = G_e (\hat{M}_e (\hat{z} - F \hat{x}) - Bu)$$

$$u = M_R \hat{x}$$

$$\hat{z} = FGB (u + \omega + P^0 \pi) + \eta$$

Démonstration: En utilisant les notations équivalentes suivantes

$$\alpha = P_o F G B (\omega + P^0 \pi)$$

$$\beta = P_o F G B (\omega + P^0 \pi) + \eta$$

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 1$$

$$L_3 = F G B P_o$$

$$L_4 = 1$$

on voit immédiatement que ce problème est en fait notre problème fondamental de l'optimisation. Pour fins de simplicité sans pour autant perdre de généralité, nous n'étudierons que le cas pour lequel $\pi = 0$ (tout comme pour les théorèmes 6 et 7, la démonstration pour les cas $\pi \neq 0$ nécessite des arguments plus poussés basés sur le corollaire 1 et semblables aux arguments utilisés lors de la démonstration du théorème 6).

Nous allons donc utiliser le théorème 2. On note que

$$I + B^* G^* F^* F G B = (I + V_1^*) (I + V_1)$$

et

$$I + F G B B^* G^* F^* = (I + V_2) (I + V_2^*)$$

signifient que

$$I + P_o B^* G^* F^* F G B P_o = (I + P_o V_1^*) (I + V_1 P_o)$$

et que

$$I + P_o F G B B^* G^* F^* = (I + V_2 P_o) (I + P_o V_2^*)$$

A l'aide de ces relations, on utilise le théorème 2 et on obtient:

$$D_o = (I + V_1 P_o)^{-1} [(I + P_o V_1^*)^{-1} P_o B^* G^* F^* F G B P_o (I + P_o V_2^*)^{-1}] C (I + V_2 P_o)^{-1}$$

En vertu du lemme 9, on note que $V_1 = M_R GB$ et que $V_2 = FGM_e$. De la même façon, à l'aide du lemme 10, on obtient:

$$[(I + V_1^*)^{-1} B^* G^* F^* G B B^* G^* F^* (I + V_2^*)^{-1}]_C = M_R G M_e$$

Il s'ensuit que le régulateur optimal est donné par:

$$D_o = P_o (I + M_R GB)^{-1} M_R GM_e (I + FGM_e)^{-1}$$

On peut démontrer facilement que la loi du contrôle optimal peut être mise en force par l'utilisation d'une boucle de feedback formée de l'estimateur optimal de l'état suivi du régulateur optimal; il suffit d'examiner les diagrammes fonctionnels des figures 14, 15 et 16. On voit qu'ils sont tous équivalents.

Remarque 3 : Les énoncés des problèmes et les théorèmes 6, 7 et 8 qui s'y rapportent deviennent quelque peu plus généraux si on suppose que $Q_\omega = Q$ et que $Q_\eta = R$ avec Q et R sans mémoire et positifs définis. Afin d'illustrer la façon de procéder, notez par exemple que si $Q_\omega = Q \neq I$ et $Q_\eta = R \neq I$ pour le système de la figure 7, on passe au problème du contrôle optimal pour le système équivalent, montré dans la figure 17, avec $Q_\omega^- = I$, $Q_\eta^- = I$ et $\bar{B} = Q^{-\frac{1}{2}} B$, $\bar{G} = G Q^{\frac{1}{2}}$, $\bar{F} = R^{-\frac{1}{2}} F$. On note que \bar{B} , \bar{G} et \bar{F} possèdent les mêmes propriétés de causalité et d'état que B , G et F .

CONCLUSION

En utilisant la notion de processus stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert de résolution (élaborée par (Sa 3)) ainsi que les plus récents résultats ayant trait à la causalité et l'état (De 1) (St 1), nous avons posé et résolu un problème fondamental d'optimisation stochastique et un problème d'approximation du meilleur causal. Les solutions à ces problèmes nous permettent de mieux comprendre certains résultats de la théorie de l'estimation classique et du contrôle automatique; elles permettent également de généraliser ces mêmes résultats. Dans le cadre des problèmes d'optimisation du type input-output, nos résultats mènent à une version généralisée du filtre de Wiener (comparez (Bo 1) et le théorème 3), de la solution de Youla- Jabr-Bongiorno au problème de l'asservissement (comparez le théorème 4 et (Y1, partie II, corollaire 1)) et de la solution de Porter au problème déterministe fondamental du contrôle optimal (comparez (Po 1), théorème 3) et notre théorème 5). Pour ce qui est des problèmes d'estimation et de contrôle du type feedback de l'état, nos résultats mènent à une version généralisée du régulateur optimal de Kalman (comparez (Ka 1, théorème 4) à notre théorème 6), du filtre de Kalman-Bucy (comparez le théorème de (Ka 2) à notre théorème 7) et du théorème du découplage du contrôle stochastique (comparez le théorème de (Ka 2) à notre théorème 8).

Ces généralisations, c'est-à-dire l'utilisation de la plupart des résultats classiques de la théorie du contrôle et de l'estimation optima dans le cadre d'études portant sur des systèmes à plusieurs variables, à paramètres répartis et en évolution, ne sont pas du tout surprenantes. Certaines ont déjà fait l'objet d'articles dans la littérature technique. Par exemple, Falb (Fa 1), en utilisant la théorie de l'intégration de Dunford et Schwartz pour les fonctions à valeurs dans l'espace de Banach, a donné une généralisation du filtre de Kalman-Bucy. Kailath (Kai 2) en a également donné une en utilisant une approche dite "processus d'innovation"; quant à Balakrishnan (Ba 3), il a utilisé des générateurs infinitésimaux définis dans

des groupes fortement continus. Une version déterministe du principe de l'optimalité a déjà été proposée, entre autres, par Porter (Po 1); une version encore plus généralisée a même été proposée par Steinberger, Schumitzky et Silverman (St 1). Plusieurs, dont Kailath (Kai 2) et Balakrishnan (ba 1), ont proposé une version généralisée du filtre de Wiener. Enfin, Balakrishnan (Ba 1), Wohnam (Wo 1) et Curtain (Cu 1) ont proposé un principe de découplage généralisé.

Cet article démontre surtout que notre approche d'espace de Hilbert de résolution est une heureuse addition aux méthodes actuelles: elle donne les mêmes résultats et d'autres encore en tant que cas particuliers d'un résultat principal; elle possède le caractère intuitif et physique des approches de Bode et Shannon (Bo 1) et de Kalman (Ka 1); elle permet de mieux voir les relations entre les propriétés de la structure du système asservi en ce qui a trait à des concepts comme l'état, la causalité stricte et la décomposition de la causalité, et les propriétés de la structure du contrôleur optimal ou observateur. Enfin, elle suscite des questions intéressantes concernant la mise en facteurs causale, le contrôle optimal et les équations différentielles de Riccati.

BIBLIOGRAPHIE

- A 1 Anderson, B.D.Q., Moore, J.B., Linear Optimal Control, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971.
- Ba 1 Balakrishnan, A.V., Stochastic Filtering and Control of Linear Systems: A General Theory, Control Theory of Systems Governed by Partial Differential Equations, Academic Press, 1977.
- Ba 2 Balakrishnan, A.V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, N.Y., 1976.
- Ba 3 Balakrishnan, A.V., Lions, State Estimation for Infinite Dimensional Systems", J. Computer and Systems Sciences, Vol. 1, pp. 391-403, 1967.
- Bar 1 Barrett, J.F., Construction of Linear Quadratic Regulators Using Spectral Factorization and the Return Difference Matrix, Techn. Report CN/75/4, The University of Cambridge, May 1975.
- Bo 1 Bode, H.W., Shannon, C.E., A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory, Proc. IRE, Vol. 38, pp. 417-425, Apz. 1950.
- Ch 1 Chang, S.S.L., Synthesis of Optimum Control Systems, McGraw-Hill, New York, 1961.
- Cu 1 Curtain, R.F., Estimation and Stochastic Control for Linear Infinite Dimensional Systems, Probabilistic Analysis and Related Topics, Vol. 1, (Bharucha-Reid Editor), Academic Press (to appear).
- De 1 DeSantis, R.M., Causality Theory in Systems Analysis, IEEE Proc., 64 (1976), pp. 36-44.
- De 2 DeSantis, R.M., Porter, W.A., On the Generalization of the Volterra Principle of Inversion, J. Appl. Math. Anal., 48 (1974), pp. 743-748.
- De 3 DeSantis, R.M., Causality Structure of Engineering Systems, SEL Tech, Rep. 67, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, Sept. 72.
- De 4 DeSantis, R.M., Porter, W.A., On Time Related Properties of Non-Linear Systems, SIAM J. Appl. Math., Vol. 24, pp. 188-206, 1973.
- De 5 DeSantis, R.M., On A Generalized Volterra Equation in Hilbert Space, Proc. AMS, Vol. 38, pp. 563-570, 1973.

- Du 1 Duttweiler, D., Reproducing Kernel Hilbert Space Techniques for Detection and Estimation Problems, Ph. D. Thesis, Stanford Univ., Stanford, 1970.
- Fa 1 Falb, P. Infinite Dimensional Filtering: the Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space, Information and Control, Vol. 11, pp. 102-137, 1967.
- Go 1 Gohberg, I.Z., Krein, M.G., Theory of Volterra Operators in Hilbert Space and Applications, (translation), Amer. Math. Soc., Vol. 18, 1969.
- Ka 1 Kalman, R.E., Contributions to the Theory of Optimal Control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, Vol. 5, No. 1, 1960, pp. 102-119.
- Ka 2 Kalman, R.E., Bucy, R.S., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, Vol. 82, 1961.
- Kai 1 Kailath, T., Duttweiler, D., An RKHS Approach to Detection and Estimation Problems - Part III: Generalized Innovations Representations and a Likelihood Ratio Formula, IEEE Trans. on Information Theory, Vol. IT-18, No. 6, November 1972, pp. 730-745.
- Kai 2 Kailath, T., An Innovation Approach to Least-Squares Estimation, Parts I and II, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, No. 6, December 1968, pp. 646-660.
- Kw 1 Kwakernaak, H., Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, 1972.
- Le 1 Leake, R.J., Duality condition established in the frequency domain, IEEE Transactions Information Theory, (correspondence), Vol. IT-11, p. 461, July 1965.
- Ma 1 MacFarlane, A.G.J., Return Difference Matrix Properties for Optimal Stationary Kalman-Bucy Filter, Proc. IEEE 1971, Vol. 118, No. 2, pp. 373-376.
- Ne 1 Newton, G.C., Gould, L.A., Kaiser, J.F., Analytical Design of Linear Feedback Controls, Wiley, New York, 1957.
- Po 1 Porter, W.A., A Basic Optimization Problem in Linear Systems, Math. Systems Theory, 5 (1971), pp. 20-44.
- Po 2 Porter, W.A., Modern Foundations of Systems Theory, New York: MacMillan, 1966.
- Po 3 Porter, W.A., Zahm, C.L., Basic Concepts in System Theory, SEL Tech. Rep. 33, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1969.

- Po 4 Porter, W.A., Some Circuit Theory Concepts Revisited
Intern. Journal of Control, Vol. 12, pp. 433-448, 1970.
- Po 5 Porter, W.A., Nonlinear Systems in Hilbert Space, Intern. Journal of Control, Vol. 13, pp. 593-602, 1971.
- Sa 1 Saeks, R., The Factorization Problem - A Survey, IEEE Proc., 64 (1974), pp. 90-95.
- Sa 2 Saeks, R., Resolution Space Operators and Systems, Springer-Verlag, N.Y., 1973.
- Sa 3 Saeks, R., Reproducing Kernel Resolution Space and Its Applications, Journal of the Franklin Institute, Vol. 302, No. 4, October 1976.
- Sa 4 Saeks, R., Causal Factorization, Shift Operators, and the Spectral Multiplicity Function, Vector and Operator Valued Measures, (D.H. Tucker Ed.), Academic Press, New York, pp. 319-335, 1973.
- Sa 5 Saeks, R., Causality in Hilbert Space, SIAM Rev., Vol. 12, pp. 357-383, 1970.
- Sa 6 Saeks, R., State in Hilbert Space, SIAM Rev., Vol. 15, pp. 283-308, 1973.
- Sa 7 Saeks, R., Fourier Analysis in Hilbert Space, SIAM Review, Vol. 15, pp. 604-638, 1973.
- Sc 1 Schumitzky, A., On the Equivalence Between Matrix Riccati Equations and Fredholm Resolvents, J. Comp. and Systems Sciences, 2 (1968), pp. 76-87.
- Sch 1 Schnure, W.K., System Identification: A State Approach, SEL Tech. Rys., 80, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1974.
- St 1 Steinberger, M., Schumitzky, A., Silverman, L., Optimal Causal Feedback Control of Linear Infinite-Dimensional Systems, (SIAM Journal on Control: to appear).
- Tu 1 Tung, L.J., Saeks, R., Wiener-Hopf Techniques in Resolution Space, Proc. of the 2nd OTNS International Symposium, Texas Tech University, August 1977.
- Tu 2 Tung, L.J., Random Variables, Wiener-Hopf Filtering and Control Formulated in Abstract Space, Ph. D. Thesis, Texas Tech University, Lubbock, Texas, July 1977.
- Wi 1 Wiener, N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, MIT Press, 1966.

- Wo 1 Wohnam, W.M., "On the Separation Theorem of Stochastic Control", SIAM J. Control, Vol. 6, 1968, pp. 312-326.
- Yo 1 Youla, D.C., Jabr, H.A., Bongiorno, J.J., Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, Parts I and II, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No. 1, pp. 3-13, No. 3, pp. 319-337, Feb. and June 1976.

LEGENDE DES FIGURES

1. Le problème de l'approximation du meilleur causal
2. Le problème fondamental de l'optimisation
3. Le problème du filtre de Wiener
4. Le problème de l'estimation stochastique
5. Le problème de l'asservissement optimal
6. Le problème fondamental de l'optimisation de Porter
7. Le problème du régulateur optimal
8. Comment obtenir l'équivalence entre le problème du régulateur optimal et le problème fondamental de l'optimisation?
9. Le régulateur optimal de Kalman
10. Le problème de l'estimation optimale de l'état
11. Le filtre de Wiener comme estimateur optimal de l'état
12. Le filtre de Kalman-Bucy
13. Le problème du régulateur optimal en présence de bruit
14. Le régulateur optimal à boucle ouverte en présence de bruit
15. Le régulateur optimal à boucle fermée en présence de bruit
16. Le régulateur optimal en présence de bruit tel que fourni par le théorème du découplage
17. Problème équivalent du type "bruit blanc" associé à un problème originel du type "bruit coloré"

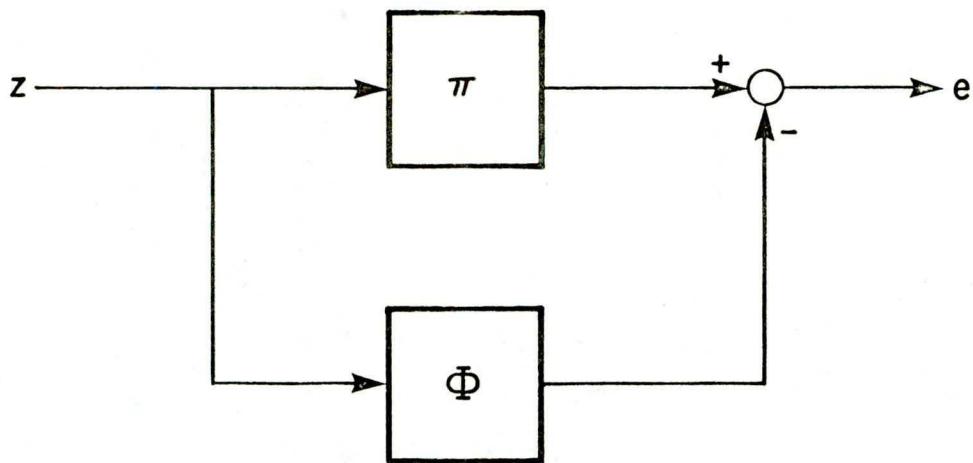


FIGURE 1: Le problème de l'approximation du meilleur causal

Soit π non causal et le processus stochastique z ,

trouvez un causal Φ qui minimise $E \{ |e|^2 \}$.

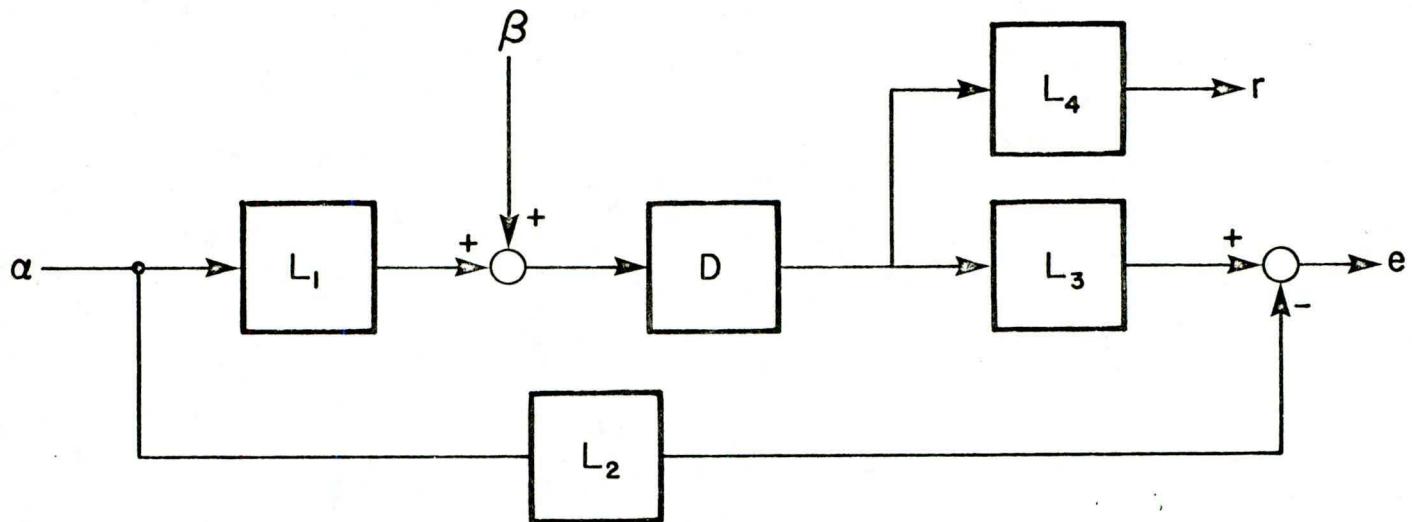


FIGURE 2: Le problème fondamental de l'optimisation

Soit L_1 , a et β , trouvez un causal D qui minimise
 $E \{ |r|^2 + |e|^2 \}$.

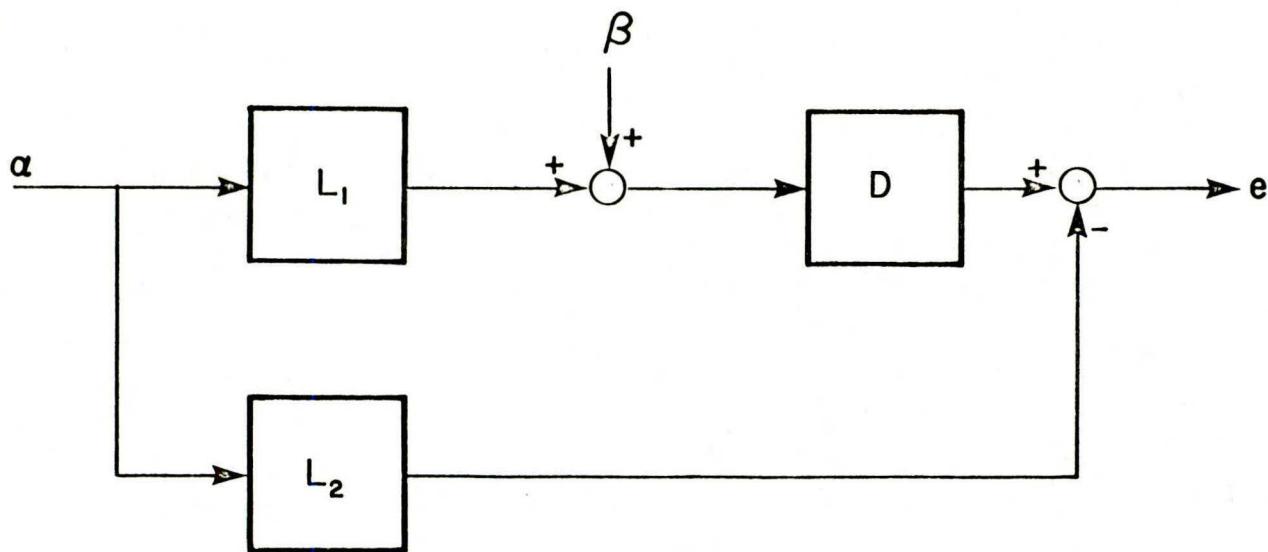


FIGURE 3: Le problème du filtre de Wiener

Soit L_1 , L_2 et α et β , trouvez un causal D qui
qui minimise $E \{ |e|^2 \}$.

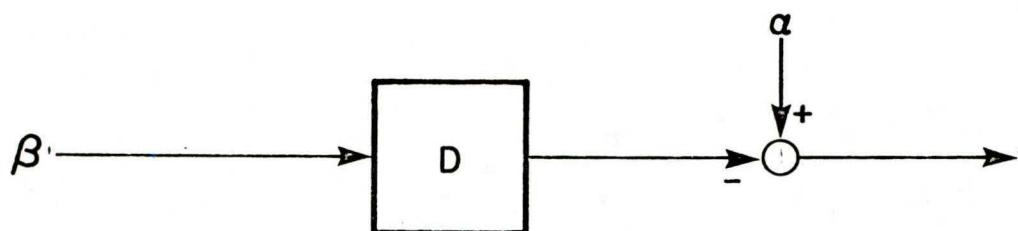
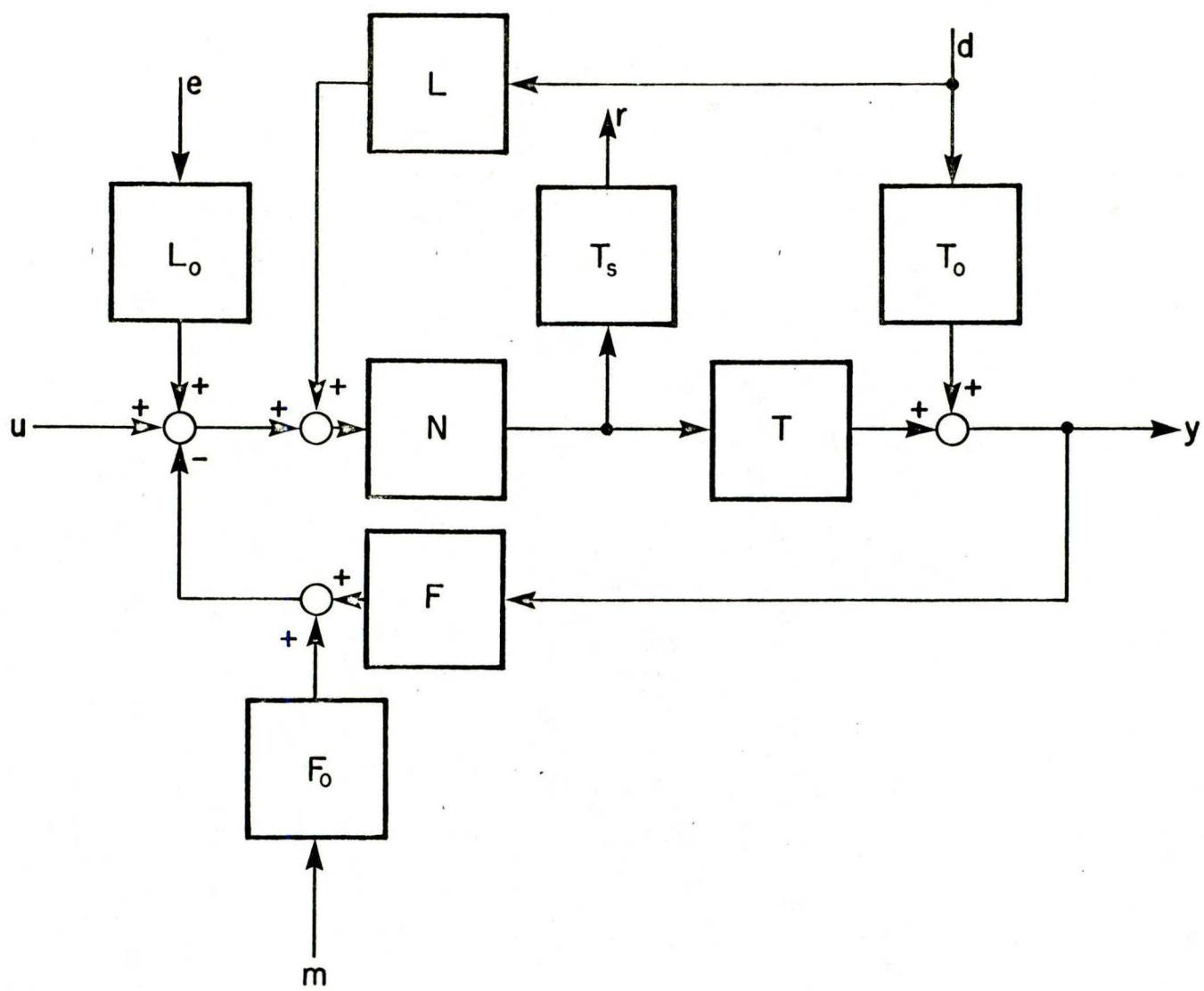


FIGURE 4: Le problème de l'estimation stochastique

Soit α et β , trouvez un causal D qui minimise $E \{ | D\beta - \alpha |^2 \}$.



d = perturbation

T = système asservi

1, m = bruit d'instruments

F = système du transducteur

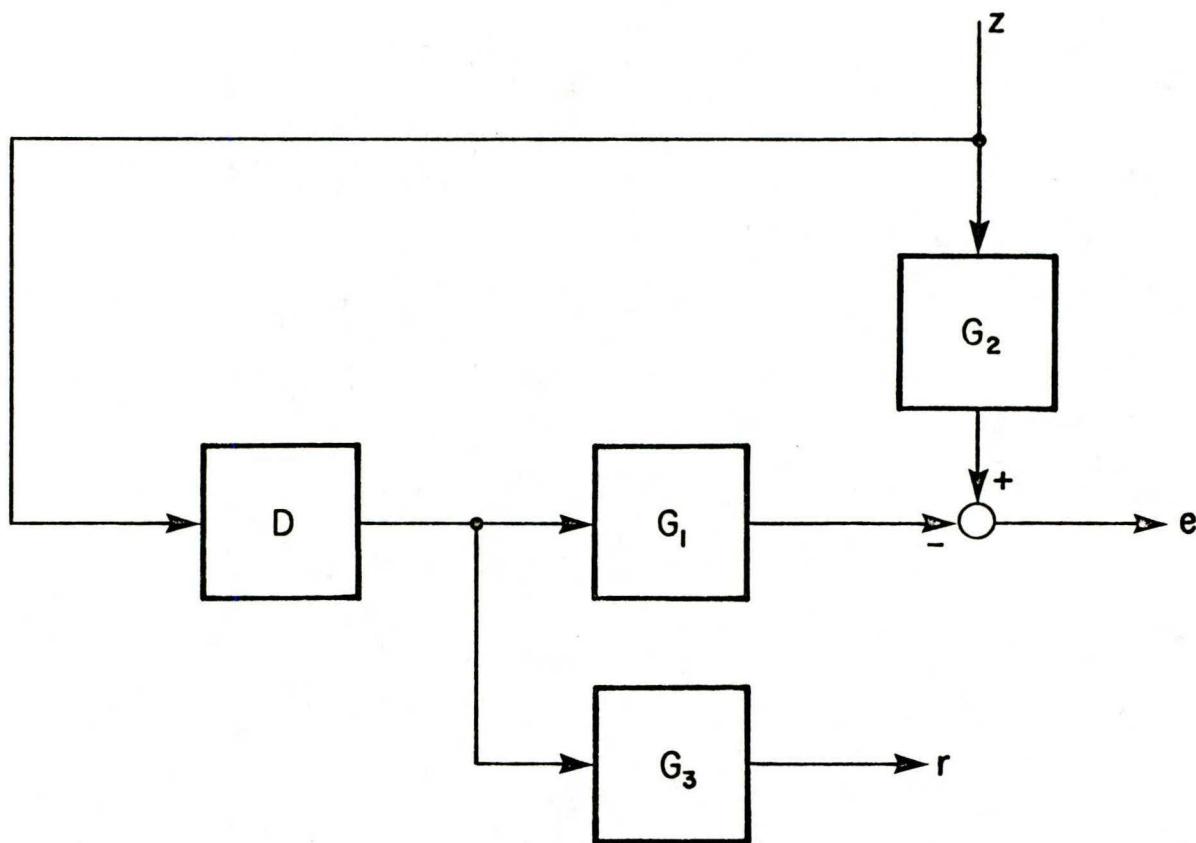
r = signal associé à la saturation L , L_o , F , T = système associé au bruit

u = output voulu

y = output actuel

FIGURE 5: Le problème de l'asservissement optimal

Soit L_o , L , T_o , T , T_s , F , F_o et u , trouvez un causal N qui minimise $E \{ |u - y|^2 + k^2 |r|^2 \}$.



e = signal d'erreur

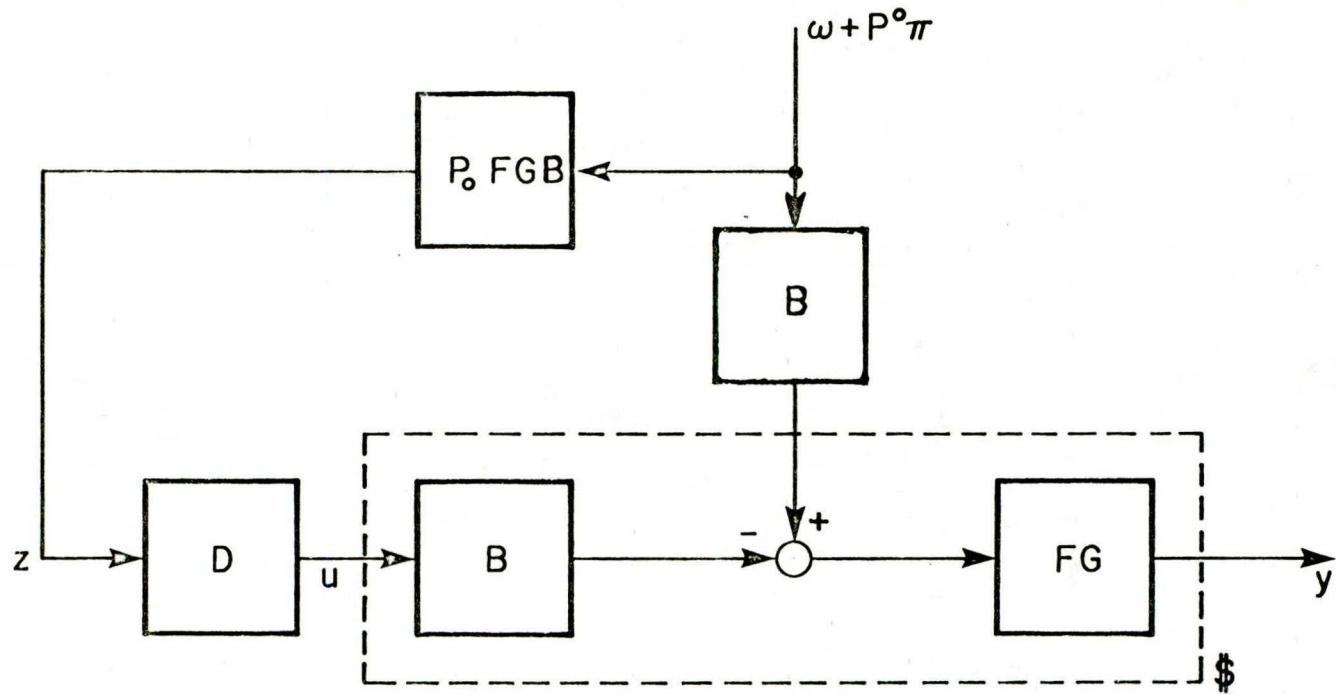
G_1 = système asservi

r = signal associé à la saturation G_2 = système voulu

z = input

FIGURE 6: Le problème fondamental de l'optimisation de Porter

Soit G_i , $i = 1, 2, 3$, et z , trouvez D afin de minimiser
 $E \{ |e|^2 + |r|^2 \}$.



z = influence sur l'output futur du système asservi
de l'input antérieur $P^0\pi$ et de la perturbation ω ;

$$z = P_0 FGB(\omega + P^0\pi)$$

y = output du système asservi

D = régulateur à boucle ouverte

u = contrôle

$\$$ = système asservi

FIGURE 7: Le problème du régulateur optimal

Connaissant $\$$ et z , trouvez D pour minimiser $E \{ | u |^2 + | y |^2 \}$.

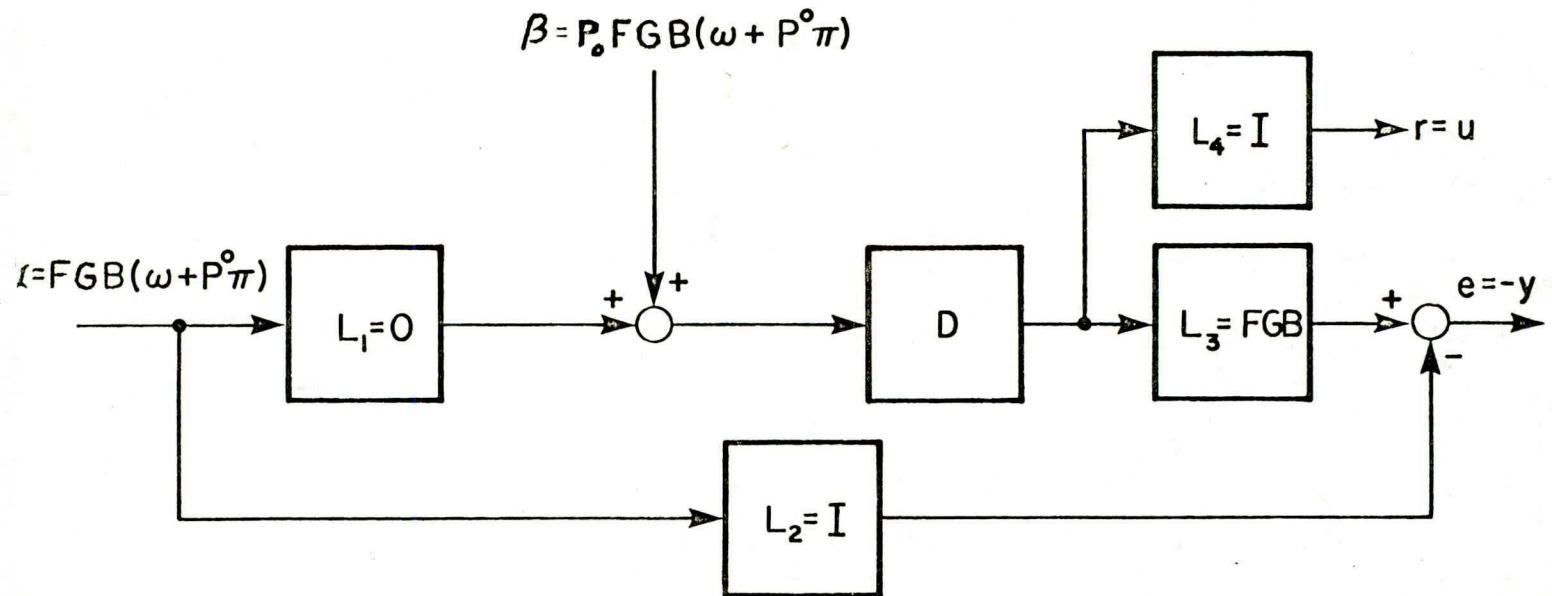


FIGURE 8: Comment obtenir l'équivalence entre le problème du régulateur optimal et le problème fondamental de l'optimisation?

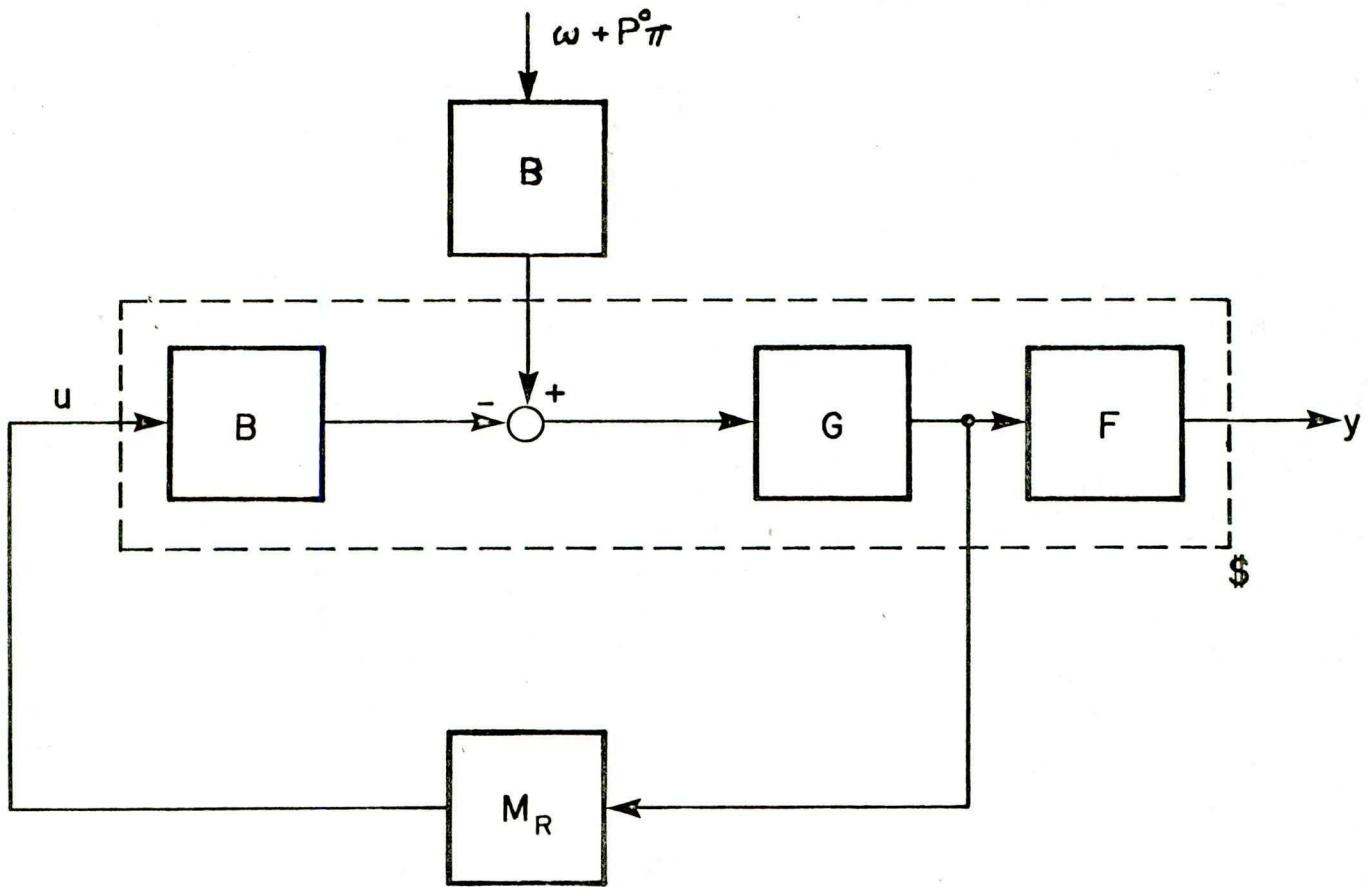
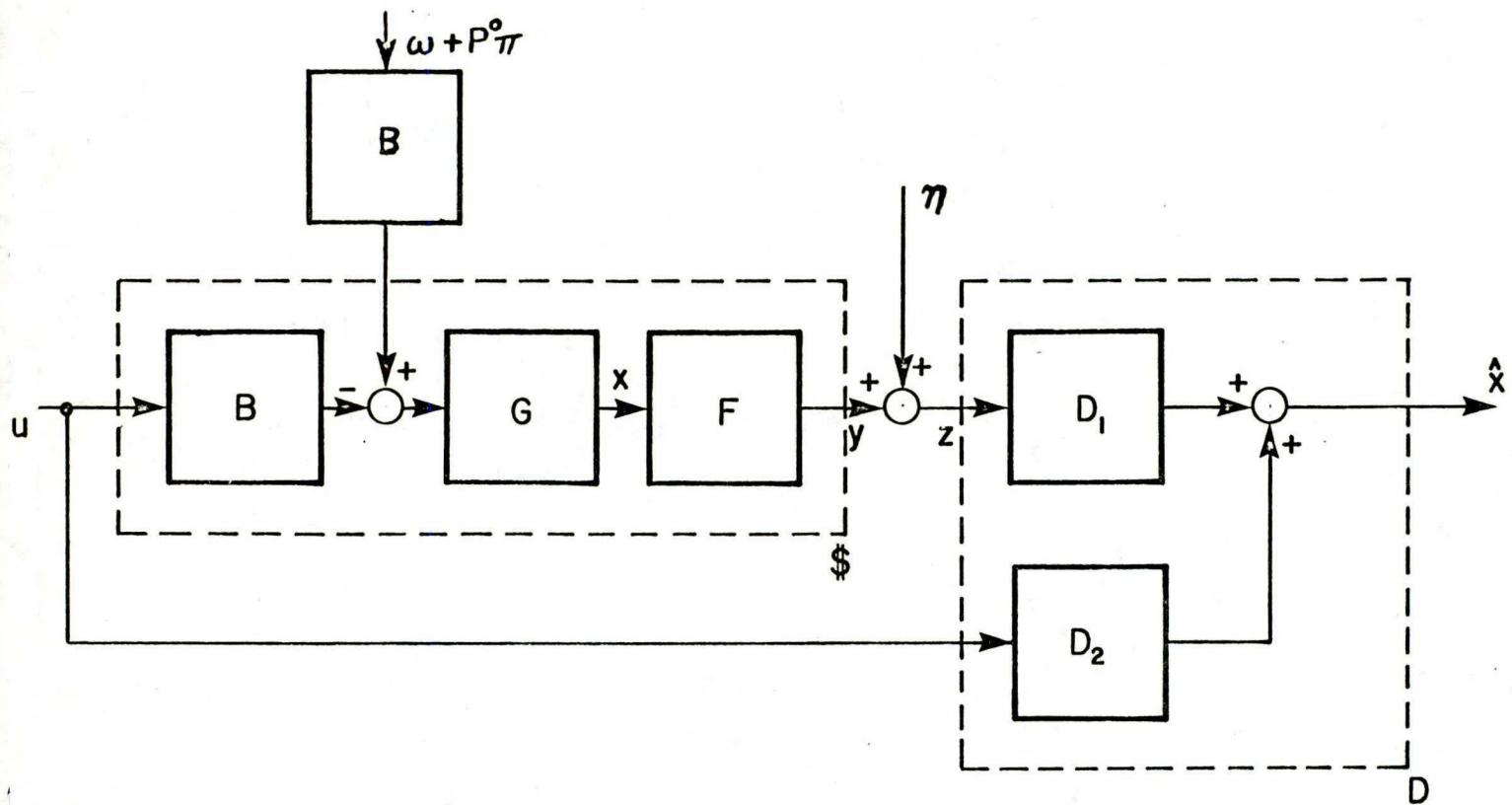


FIGURE 9: Le régulateur optimal de Kalman



u = input du système asservi

ω = perturbation

$P^0 \pi$ = input antérieur

x = état du système asservi

y = input du système asservi

v = bruit de mesure

\hat{x} = données pouvant être obtenues à l'output

\hat{x} = état évalué

D = estimateur de l'état

$\$$ = système asservi

FIGURE 10: Le problème de l'estimation optimale de l'état

Connaissant $\$$, \hat{x} et u , trouvez un causal D qui minimise
 $E \{ | \hat{x} - x |^2 \}.$

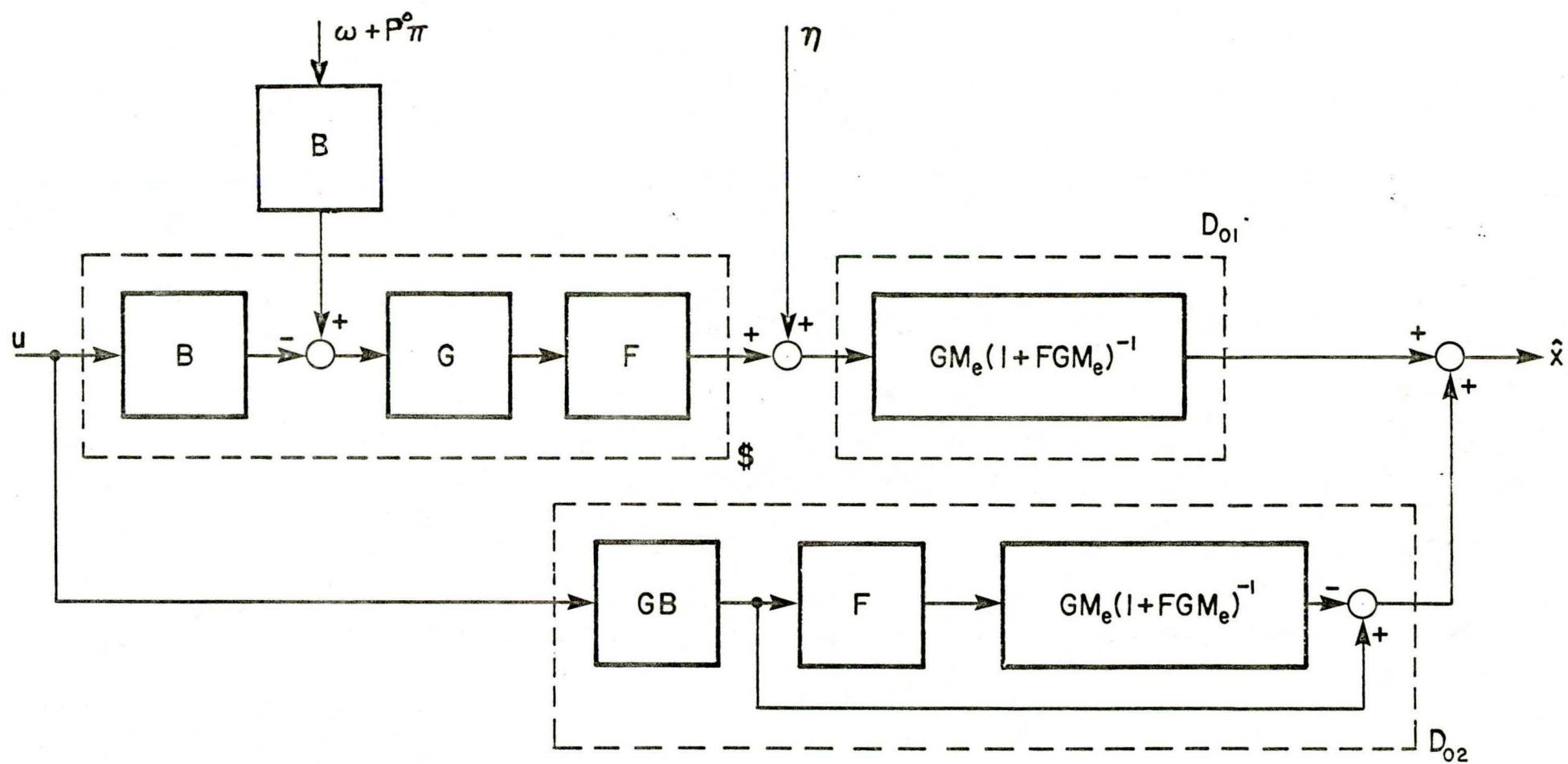


FIGURE 11: Le filtre de Wiener comme estimateur optimal de l'état

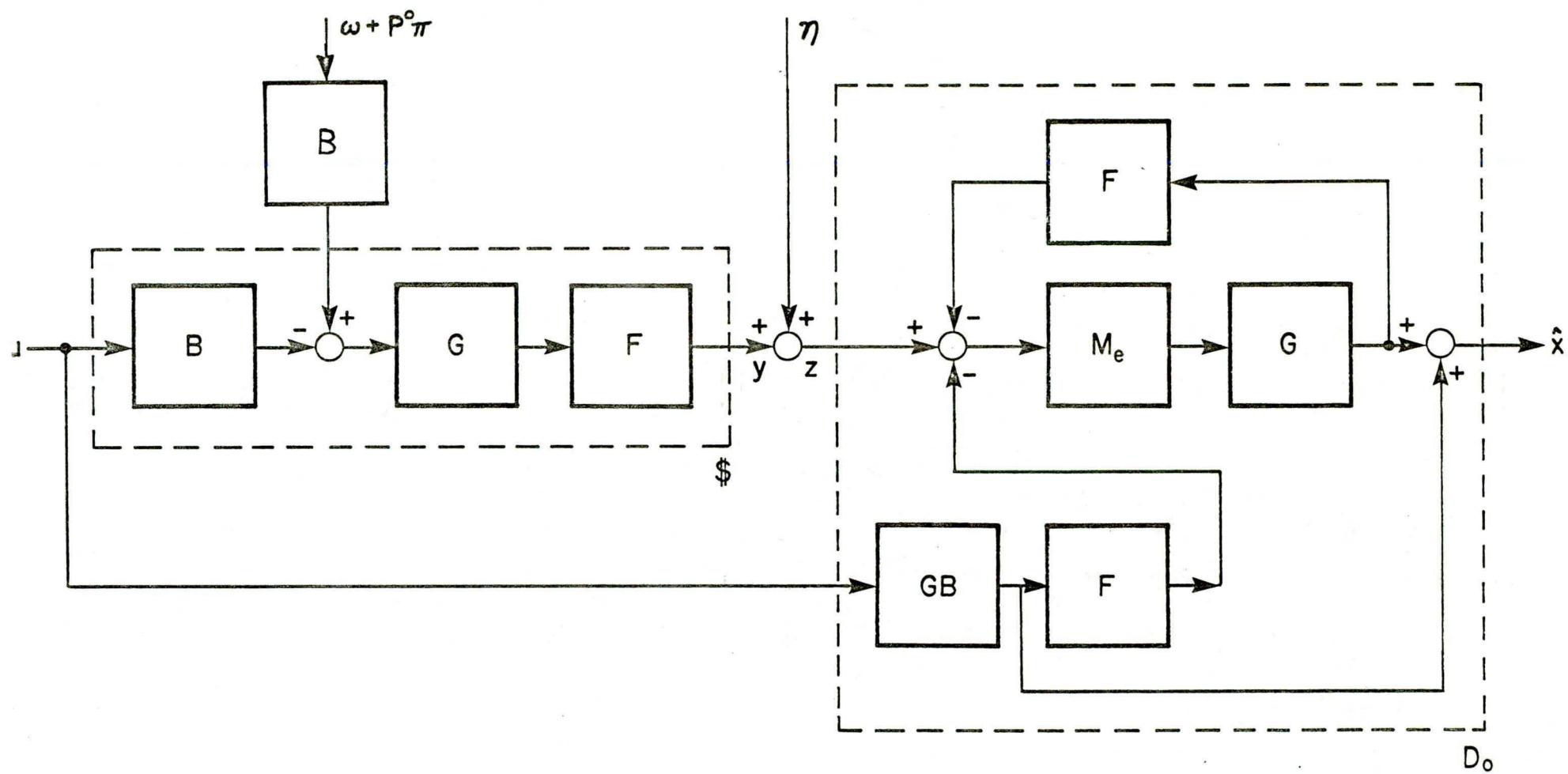
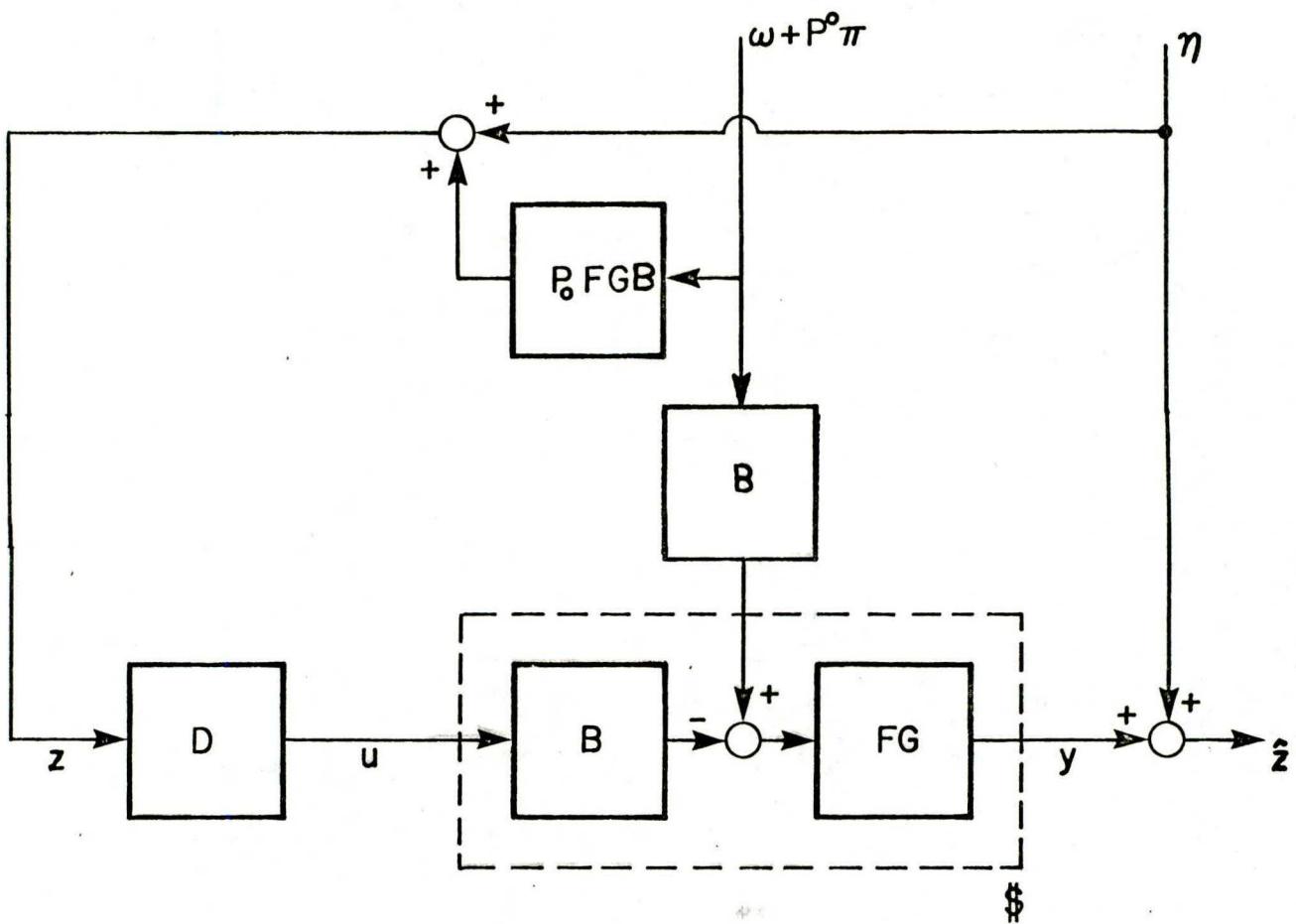


FIGURE 12: Le filtre de Kalman-Bucy



z = influence sur l'output futur du système asservi de l'input

antérieur $P_o \pi$, de la perturbation ω et du bruit η

$$z = P_o F G B(\omega + P_o \pi) + \eta$$

y = output du système asservi D = régulateur à boucle ouverte

u = contrôle

$\$$ = système asservi

FIGURE 13: Le problème du régulateur optimal en présence de bruit

Connaisant $\$$ et z , trouvez D qui minimise $E \{ |u|^2 + |y|^2 \}$.

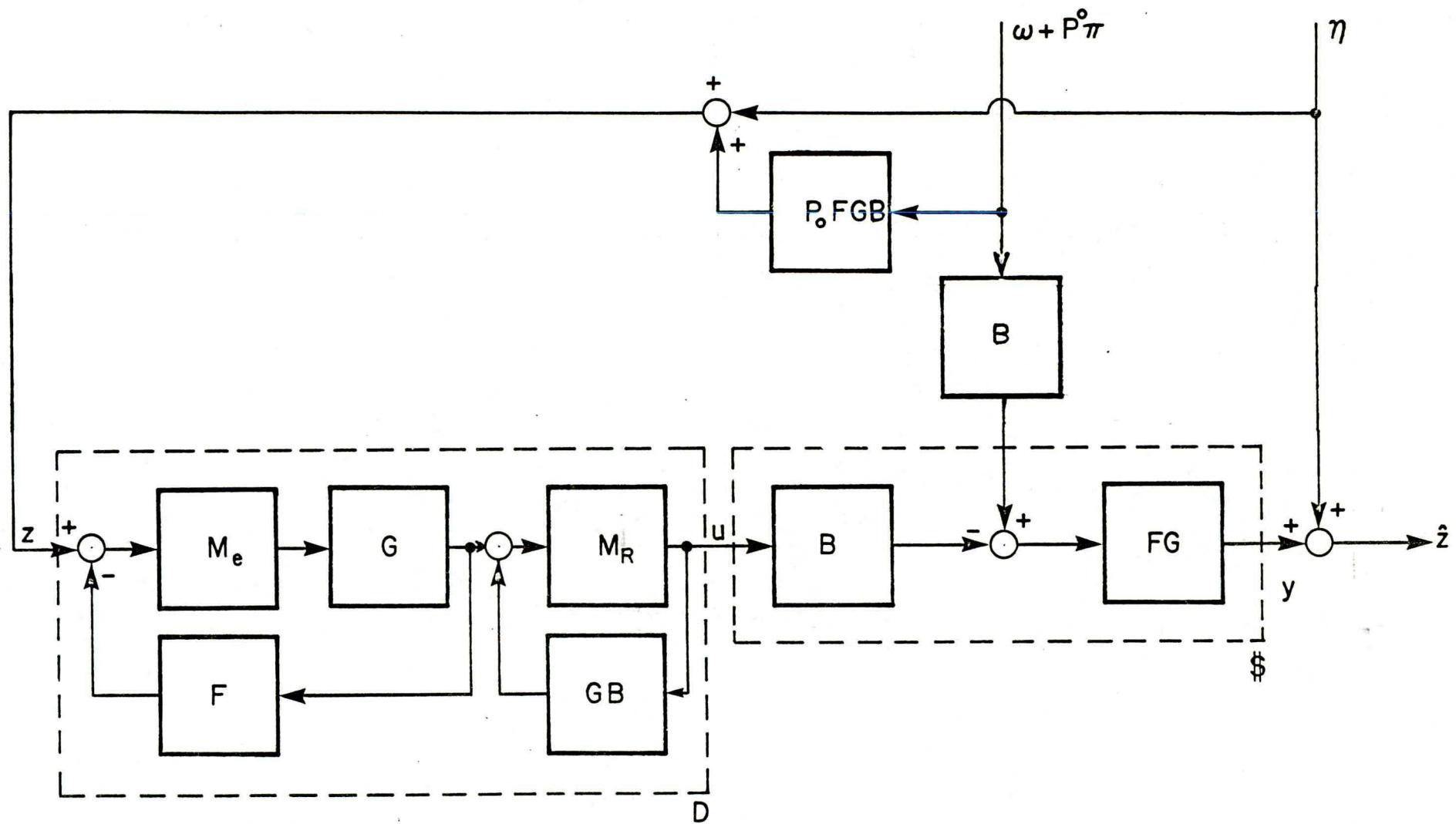


FIGURE 14: Le régulateur optimal à boucle ouverte en présence de bruit

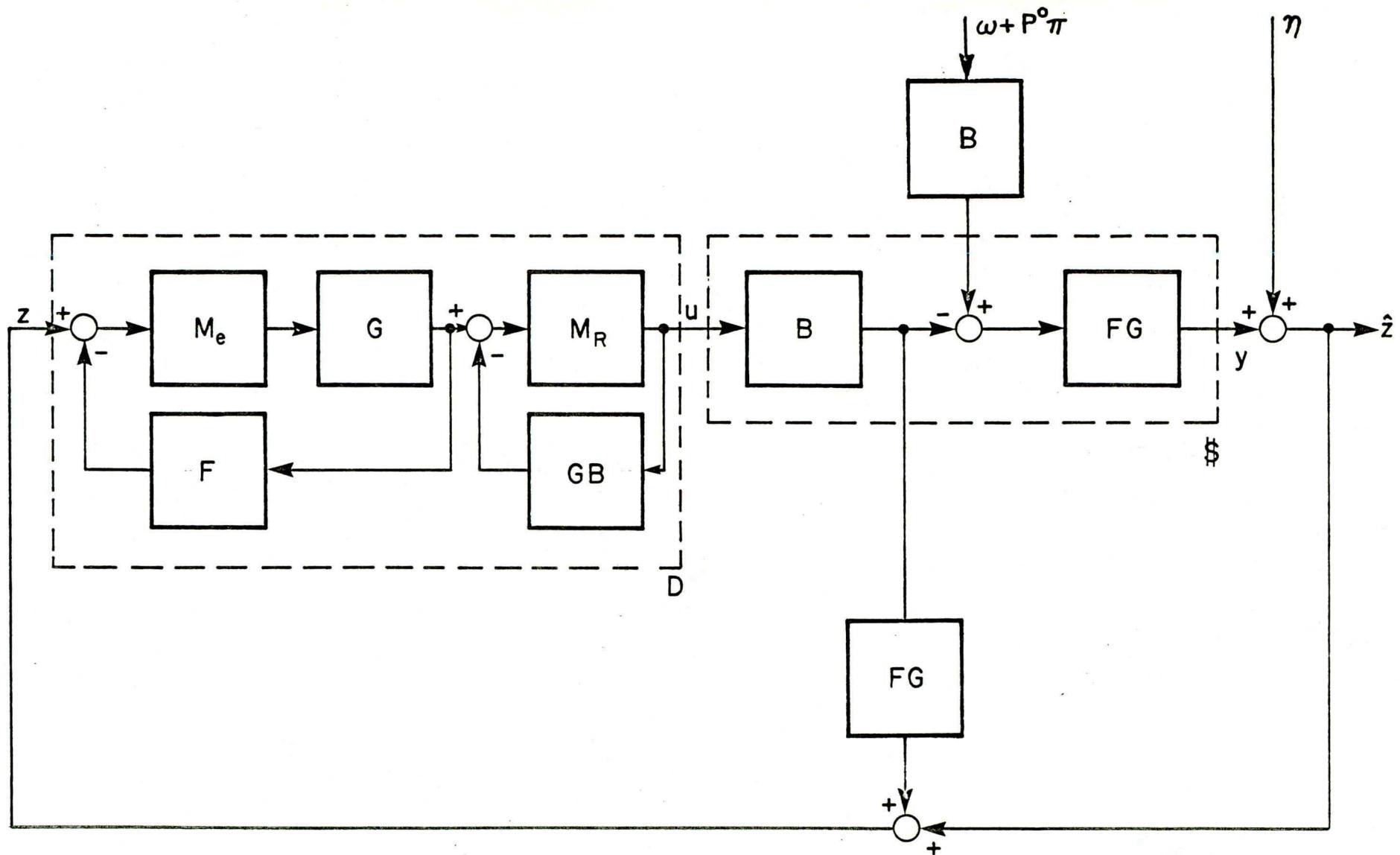


FIGURE 15: Le régulateur optimal à boucle fermée en présence de bruit

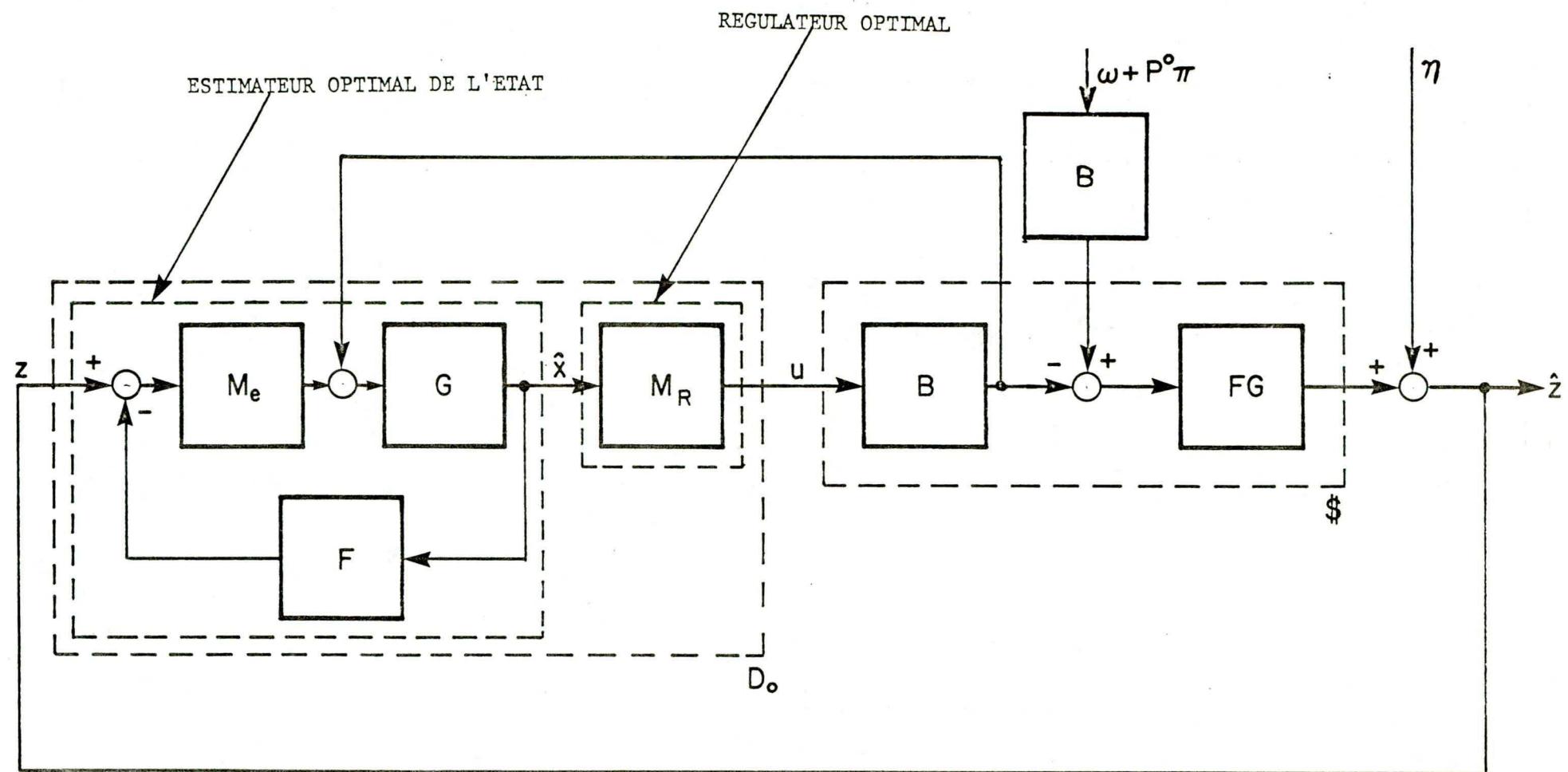


FIGURE 16: Le régulateur optimal en présence de bruit tel que fourni par le théorème du découplage

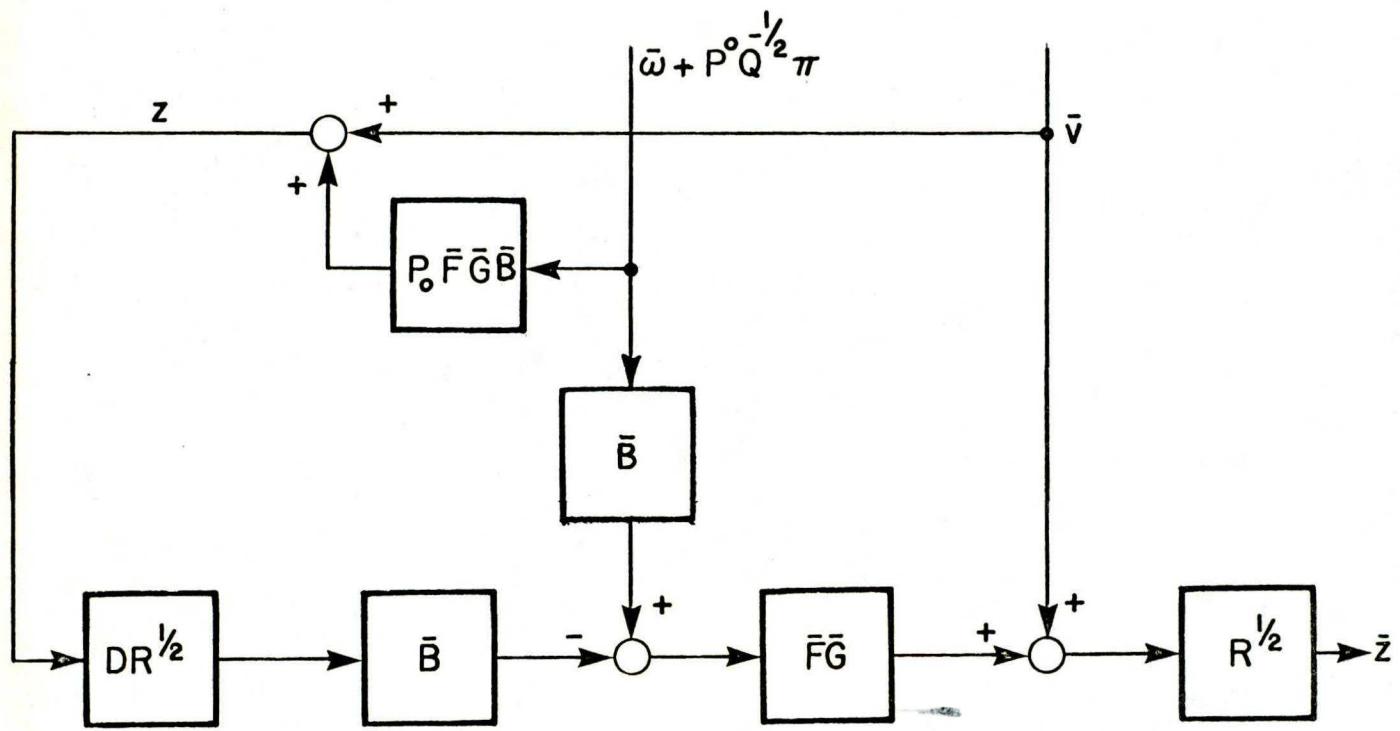


FIGURE 17: Problème équivalent du type "bruit blanc" associé à
un problème original du type "bruit coloré"

A CONSULTED
SURFACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288895 4