

Titre: Contribution à l'identification approchée des systèmes variants pour les applications en temps réel
Title: Contribution to the approximate identification of variant systems for real-time applications

Auteurs: André B. Turgeon, & Quang Tran Vu
Authors:

Date: 1980

Type: Rapport / Report

Référence: Turgeon, A. B., & Vu, Q. T. (1980). Contribution à l'identification approchée des systèmes variants pour les applications en temps réel. (Technical Report n° EP-R-80-19). <https://publications.polymtl.ca/6231/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6231/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-80-19
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

SECTION AUTOMATIQUE

Rapport technique EP80-R-19

Classification: Library of Congress no.....

Contribution à l'identification approchée

des systèmes variants

pour les applications en temps réel

par

A.B. Turgeon et Q.T. Vu

10 avril 1980

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ

UP 5

R80-19

RR80-19

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

ECOLE POLYTECHNIQUE BIBLIOTHEQUE

BIBLIOTHÈQUE

MAI 22 1980

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTREAL

Don

CONTRIBUTION A L'IDENTIFICATION APPROCHEE DES SYSTEMES VARIANTS
POUR LES APPLICATIONS EN TEMPS REEL

A.B. TURGEON * Q.T. VU **

**À CONSULTER
SUR PLACE**

* Professeur Titulaire, Ecole Polytechnique, Université de Montréal, Québec

** Professeur, CEGEP Edouard Montpetit, Longueuil, Québec

Sommaire

Une fonction de pondération exponentielle est utilisée pour étendre les méthodes de Kalman et des moindres carrés généralisés à l'identification des systèmes linéaires variants, en présence des bruits de mesures. Plusieurs propriétés des solutions sont dégagées à l'aide d'études théorique et expérimentale (simulations). L'utilisation des méthodes numériques itératives dans la recherche des solutions rend possible l'application au temps réel des méthodes. Il est démontré qu'il existe une valeur optimale du facteur de pondération correspondant au meilleur compromis entre le filtrage du bruit et la poursuite des paramètres. De plus, l'utilisation d'un coefficient de pondération n'introduit pas un biais systématique dans le cas des systèmes invariants.

Abstract

The exponential weighting function is used to extend the least squares and generalized least squares identification techniques of time invariant systems to the identification of time variant ones, in the presence of measurement noises. Some properties of the solutions are pointed out by theoretical and experimental (simulations) studies. The real time application of the above mentioned techniques is made possible by the use of numerical iterative methods. An optimum value of the weighting factor which corresponds to the best compromise between the filtering of the measurement noises and the pursuit of parameters, is shown to exist. The use of an exponential weighing function does not introduce a systematic by biased solution.

1- INTRODUCTION

Le problème de l'identification des systèmes est traité abondamment dans les revues scientifiques. Une rétrospective de ces travaux [2] [3] [5] [6] [7] montre qu'en général ils se rapportent aux systèmes invariants. L'extension de ces méthodes à l'identification de paramètres variants est un des problèmes fondamental posé par les boucles d'auto-compensation.

Dans ce travail une méthode d'identification [9] [13] qui produit une évaluation non-biaisée des paramètres dans le cas invariant est adaptée au cas variant. Une pondération exponentielle accordant plus d'importance aux mesures récentes [8] sert alors de processus de poursuite des paramètres variants.

Avant tout essai sur les systèmes variants il est établi que l'utilisation de la pondération ne détruit pas les propriétés de convergence asymptotique dans le cas invariant. Ensuite il est démontré que le facteur de pondération doit faire un compromis entre la poursuite des paramètres et le filtrage du bruit.

2- IDENTIFICATION DES SYSTEMES ECHANTILLONNES LINEAIRES INVARIANTS

2.1 Position du problème

Soit

x_i entrée du système et du modèle à l'instant iT

T période d'échantillonnage

y_i sortie réelle du système

y_i^* sortie mesurée du système

z_i sortie du modèle

e_i erreur entre la sortie mesurée du système et la sortie du modèle

ε_i erreur entre la sortie du système et celle du modèle

μ_i bruit de mesure sur la sortie du système.

La représentation fonctionnelle de la figure 1 donne la formulation du problème de l'identification. On recherche alors un modèle linéarisé qui représente le comportement dynamique du système. Pour avoir un intérêt pratique [8] [13] la méthode doit tenir compte des données suivantes:

- la caractérisation du modèle se fait par le choix a priori de l'ordre de sa fonction de transfert,
- les observations des entrées et sorties se font en présence de bruits de mesure,
- le cycle de calcul de remise à jour du modèle doit permettre une solution en temps réel.

Il résulte que l'erreur entre la sortie mesurée du système et du modèle possède deux composantes

$$e_i = y_i^* - z_i \quad (1)$$

$$= y_i + \mu_i - z_i \quad (2)$$

$$= \varepsilon_i + \mu_i \quad (3)$$

soit:

- une composante ε_i tenant compte de l'incapacité du modèle à décrire exactement le comportement dynamique du système;
- une composante μ_i qui dépend des bruits de mesure à la sortie.

D'autre part, si la calculatrice d'identification synthétise aussi le compensateur dans la chaîne d'action du système de commande, les entrées du système et de son modèle sont les mêmes: seules les sorties sont entachées de bruits de mesure. Nous proposons que la comparaison entre le système et son modèle soit réalisée par la minimalisation d'une forme quadratique de l'erreur donnée à l'équation (1). Cette solution doit à la fois minimiser la composante ε_i et filtrer l'effet des bruits de mesure μ_i .

2.2 Présentation de la solution [1] [9] [13]

Proposons l'équation aux différences du modèle

$$b_0 z_i + b_1 z_{i-1} + \dots + b_n z_{i-n} + a_1 x_{i-1} + \dots + a_n x_{i-n} = 0 \quad (4)$$

dans laquelle les a_j ($j = 1, n$) et les b_k ($k = 0, n$) sont les paramètres du modèle d'ordre n . A chaque instant iT , les mesures de la sortie du système

$$y_{i-k}^*, \quad k = 0 \text{ à } n$$

et les entrées

$$x_{i-j}, \quad j = 1 \text{ à } n$$

définissent un point S_i^* dans un espace euclidien E à $(2n + 1)$ dimensions.

On peut décomposer cet espace en deux sous-espaces orthogonaux E_y ($y_k, k = 0, n$) et E_x ($x_j, j = 1, n$) dont l'origine est commune. D'autre part, l'équation aux différences du modèle définit un hyperplan P dans cet espace.

A l'instant iT les entrées et sorties du modèle sont représentées par un point M_i de coordonnées.

$$z_{i-k}, \quad k = 0, n$$

$$x_{i-j}, \quad j = 1, n$$

Etant donné que le système et le modèle reçoivent les mêmes entrées, on propose que les projections des points S_i^* sur l'hyperplan P minimalisant les distances

$$R_i^2 = \sum_{k=0}^n [z_{i-k} - y_{i-k}^*]^2 \quad (5)$$

permettent de définir les points M_i .

On trouve ainsi à l'aide de l'équation (4)

$$R_i^2 = \frac{\left[\sum_{k=0}^n b_k y_{i-k} + \sum_{j=1}^n a_j x_{i-j} \right]^2}{\sum_{k=0}^n b_k^2} \quad (6)$$

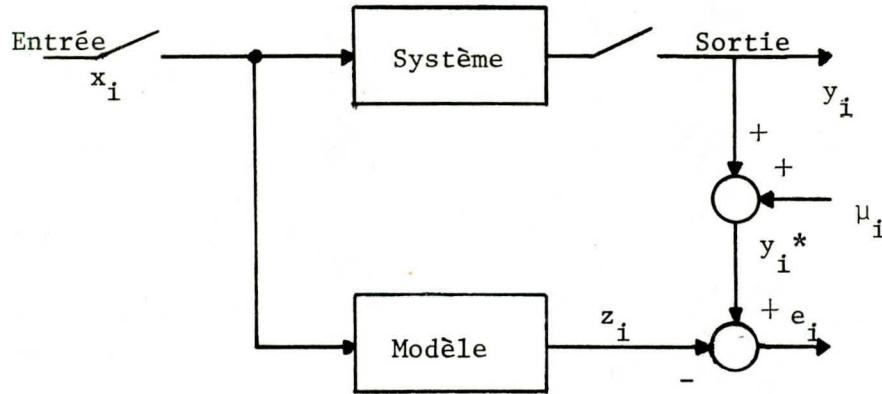


Fig. 1: Comparaison d'un système avec son modèle

Dans une deuxième étape de calcul on trouve le minimum de la forme quadratique

$$F_N(a_j, b_k, \mu) = \sum_{i=n}^N R_i^2 \quad (7)$$

suivant les a_j , b_k . Dans cette relation N représente le nombre total d'instants d'échantillonnage.

On trouve ainsi:

$$\begin{bmatrix} \phi_{km}^{yy*}(N) - F_N \delta_{km} & | & \phi_{kj}^{xy*}(N) \\ \phi_{jk}^{yx*}(N) & | & \phi_{jj}^{xx}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ a_j \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

avec

k, m variant de 0 à n

j variant de 1 à n

et δ_{km} le Kronecker d'ordre $n + 1$

ou plus simplement

$$\phi_N^*(F_N) G = 0 \quad (9)$$

On note ϕ_N^* la matrice solution obtenue à partir des mesures bruitées et ϕ_N la matrice des coefficients de covariance en l'absence de bruit.

G est la matrice colonne

$$G = \begin{bmatrix} b_k \\ a_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

Les coefficients de cette matrice sont établis simplement par la relation

$$\phi_{ds}^{gh}(N) = \sum_{i=n}^N g_{i-d} h_{i-s} \quad (11)$$

Bien sûr il existe la récurrence

$$\phi_{ds}^{gh}(N) = \phi_{ds}^{gh}(N-1) + g_{N-a} h_{N-s} \quad (12)$$

et la symétrie

$$\phi_{sd}^{hg}(N) = \phi_{ds}^{gh}(N) \quad (13)$$

l'équation pseudo-caractéristique conduit aux valeurs propres généralisées

$$|\phi_N^*(F_N)| = 0 \quad (14)$$

Des $n+1$ solutions, la valeur propre minimum est retenue puisqu'elle signifie

$$F_N = (F_N)_{\min} = \text{Min} \left(\sum_{i=n}^N R_i^2 \right) \quad (15)$$

Le vecteur propre généralisé correspondant à cette valeur est la solution au problème.

2.3 Propriétés de la solution

Il est essentiel de mettre en évidence les propriétés de la solution face aux situations pratiques possibles. En particulier

- l'influence du choix a priori de l'ordre du modèle en fonction de celui du système;
- l'influence des bruits de mesure.

Un ensemble d'études théoriques et expérimentales [13] ont démontré que cette méthode conduit à une solution parfaite en l'absence de bruit et lors d'une caractérisation idéale. Avec une caractérisation surabondante [12] [13] la solution est aussi possible car l'identificateur génère des pôles et zéros simplifiables. Un modèle viable est trouvé lorsque l'ordre du modèle est inférieur à celui du système; il faut toutefois que

le modèle ait une structure compatible avec le mode dominant du système. En présence de bruit de mesure, la solution est non biaisée et asymptotique [1] [9] [13] si

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{i-r} \mu_{i-d}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_{i-r} \mu_{i-d} \\ &= 0 \quad \text{si } r \neq d \\ &= \mu^2 \quad \text{si } r = d \end{aligned} \tag{16}$$

De plus, la variance de l'erreur sur les paramètres a_j , b_k décroît progressivement avec le nombre d'échantillons.

Des simulations [14] ont démontré que cette procédure était facilement implantable pour un fonctionnement en temps réel car les cycles de calcul sont courts (de l'ordre de 0.13 sec). La valeur propre minimum est calculée par la méthode de Newton-Raphson et le vecteur propre correspondant par des itérations de Gauss-Seidle.

2.4 Comparaison avec d'autres travaux

Plusieurs études ont porté sur l'application de la méthode des moindres carrés au problème de l'identification. Tous savent que les fondements de ces solutions dérivent des travaux de Gauss. Mais il semble que chronologiquement ce soit Kalman [5] [8] qui ait préconisé l'utilisation de cette méthode pour l'identification des systèmes échantillonnes dans une de ces premières publications antérieures à ces travaux sur les filtres récursifs (voir Annexe I).

Il est toutefois reconnu que la première proposition de Kalman produit une solution biaisée en présence de bruit de mesure et nombreux auteurs se sont attaqués à ce problème [4] [9] [12] [13].

La solution proposée par Clarke [4] corrige le biais par un processus itératif mais la convergence de ce dernier n'est pas démontrée bien que dans les cas pratiques elle semble efficace [5]. Elle exige la régénération des bruits de mesure qui permet d'établir progressivement les coefficients de covariance des entrées et sorties réelles.

Talmon et Van Den Boom [12] ont produit une solution dans le même sens mais en développant une solution directe. Il faut cependant (et c'est quelque peu restrictif) que le bruit soit correlé de façon très particulière à la structure du système. En fait il faut que

$$\sum_{k=0}^n b_k \mu_{i-k} = 0 \quad (17)$$

Notre proposition est similaire à celle de Levin [9] mais elle est présentée dans le cadre d'une méthode des moindres carrés. La présentation que nous avons faite en 1970 [13] a un caractère plus expérimental que théorique. Les travaux de Aoki et Yue [1] établissent mathématiquement les propriétés statistiques de cette solution et établissent son lien avec la représentation dans l'espace d'états.

3- IDENTIFICATION DES SYSTEMES ECHANTILLONNES LINEAIRES VARIANTS

3.1 Extension aux systèmes variants

Suivant une proposition de Kalman [8] la poursuite de paramètres lentement variants peut être accomplie par une pondération adéquate des entrées et sorties du système. Dans ce cas le modèle devient

$$b_0(i) z_i + b_1(i) z_{i-1} + \dots + b_n(i) z_{i-n} + a_1(i) x_{i-1} + \dots + a_n(i) x_{i-n} = 0 \quad (18)$$

les $a_j(i)$ ($j = 1 \text{ à } n$) $b_k(i)$ ($k = 0 \text{ à } n$) étant les paramètres variants du modèle aux instants iT .

En appliquant une fenêtre de pondération exponentielle qui accorde plus d'importance aux données récentes, la forme quadratique à minimiser est alors

$$[a_j(N), b_k(N)] = \sum_{i=0}^N \alpha^{N-i} R_i^2 \quad (19)$$

R_i est donné en (6) et α est la pondération ($0 < \alpha < 1$).

Avec cette formulation la solution (8) se modifie et il vient

$$\begin{bmatrix} \phi_{\alpha km}^{yy^*}(N) - f_{\alpha}(N) \delta_{km} & | & \phi_{\alpha kj}^{xy^*}(N) \\ \hline \phi_{\alpha jk}^{yx^*} & | & \phi_{\alpha jj}^{xx^*}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k(N) \\ a_j(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

avec les mêmes notations qu'en (8).

Une forme abrégée est alors

$$\phi_{\alpha}^*(N) [f_{\alpha}(N)] G_{\alpha}(N) = 0 \quad (21)$$

avec $G_{\alpha}(N)$ le vecteur colonne

$$G_{\alpha}(N) = \begin{bmatrix} b_k(N) \\ a_j(N) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Encore cette fois, la valeur propre $f_{\alpha}(N)$ est la solution recherchée et le vecteur propre $G_{\alpha}(N)$ correspond aux paramètres.

De plus, les coefficients $\phi_{\alpha}(N)$ conservent les propriétés de recurrence

$$\phi_{\alpha ds}^{gh}(N) = \alpha \phi_{\alpha ds}^{gh}(N-1) + g_{N-d} h_{N-s} \quad (23)$$

et les données récentes ont plus de poids que les anciennes. Cette propriété de récurrence économise beaucoup d'espace-mémoire et de temps de calcul pour la remise à jour des coefficients de la matrice $\phi_{\alpha}(N)$.

3.2 Influence de la pondération sur les propriétés statistiques de la solution

Il est mathématiquement ardu d'établir les propriétés statistiques (non biais, convergence, etc) dans le cas des systèmes variants. Chose certaine il faut au préalable démontrer les propriétés statistiques dans le cas invariant. Nous savons que la pondération des coefficients $\phi_{\alpha}(N)$ est surtout employée pour l'amélioration de la convergence dans les processus itératifs [5] [12] ou encore pour limiter la croissance indue des coefficients de covariance. Dans ces cas la pondération est voisine de l'unité. Par contre dans le cas de poursuite de paramètre, la pondération doit faire un compromis entre le filtrage du bruit (α voisin de 1) et la poursuite (α petit). A notre

connaissance il n'y a pas eu d'études qui ont portées sur ce thème. Le paragraphe qui suit donne donc les résultats fondamentaux.

3.3 Cas particulier des systèmes invariants

Il est incontestable qu'une solution au niveau des systèmes variants doit être aussi valable pour les systèmes invariants.

Soit un bruit pseudo-blanc μ_i non correlé à l'entrée x_i d'un système.

De plus,

$$\overline{\mu_i} = 0 \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{i-r} \mu_{i-s}} &= 0 & r \neq s \\ &= \overline{\mu^2} & r = s \end{aligned} \quad (25)$$

$$\overline{\mu_{i-r} y_{i-s}} = 0 \quad \forall r, s \quad (26)$$

Les entrées et sorties ont aussi un caractère aléatoire et ont des valeurs quadratiques moyennes finies: $\overline{x_i^2}$ pour l'entrée et $\overline{y_i^2}$ pour la sortie.

Ainsi on obtient:

$$\overline{\phi_{ars}^{yy*}} = \overline{\phi_{ars}^{yy}(N)} \text{ pour } r \neq s \quad (27)$$

$$\overline{\phi_{ars}^{yy*}} = \overline{\phi_{ars}^{yy}(N)} + \Delta\phi_{ars}^{\mu\mu} \text{ pour } r = s \quad (28)$$

avec

$$\Delta\phi_{ars}^{\mu\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha^2} \overline{\mu^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ddots & \frac{1}{1-\alpha^2} \overline{\mu^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

de même

$$\overline{\phi_{\alpha rs}^{xy*}} = \overline{\phi_{\alpha rs}^{xy}} \quad (30)$$

Ces expressions découlent directement du fait que le bruit est pseudo-blanc et non correlé aux entrées et sorties. Dans ces conditions on a donc d'après la relation (20)

$$\overline{f_{\alpha}(N)} = \frac{1}{1-\alpha^2} \overline{\mu^2} \quad (31)$$

Et de plus sa solution moyenne est

$$\overline{G_{\alpha}(N)} = \begin{bmatrix} b_k \\ a_j \end{bmatrix} \quad (32)$$

Elle est donc non biaisée en valeur moyenne.

Il importe maintenant de produire une expression de la variance des paramètres due à l'introduction d'une fenêtre de pondération. Il est possible de calculer la variance dans le cas de la solution biaisée telle que préconisée par Kalman. Le calcul est assez long mais produit une évaluation simple de la variance [10] [14]

$$V [\overline{G}_K - G_{\alpha K}(N)] \approx k_1 (\overline{\mu^2}, \overline{x^2}, \overline{y^2}, N) \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (33)$$

Il suffit évidemment de calculer les fluctuations amenées par les coefficients entachés de bruit mesure, dans lequel $\overline{G}_{\alpha K}$ est la solution biaisée produite en annexe I.

Etant donné que la solution préconisée corrige en moyenne le biais il est proposé que la variance de la solution au valeur propre sera du même ordre que la solution biaisée

$$V [G - G_{\alpha}(N)] = k_2 (\overline{\mu^2}, \overline{x^2}, \overline{y^2}, N) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (34)$$

Un ensemble d'études expérimentales permettront au moins de vérifier cette hypothèse.

4- SIMULATION

4.1 Systèmes invariants

Des simulations sur un cas particulier sont reproduites. Soit le système du deuxième ordre

$$G(z^{-1}) = \frac{0.185z^{-1} + 0.130z^{-2}}{1 - 1.185z^{-1} + 0.37z^{-2}} \quad (35)$$

Pour la solution biaisée et celle qui utilise une correction du biais, les valeurs moyennes des paramètres ont été calculées à partir de 400 évaluations différentes de $\overline{G_\alpha(N)}$ et $G_{\alpha K}(N)$.

Ensuite les variantes sont données par

$$V[G_\alpha(N)] = \frac{1}{100} = \sum_{i=1}^{100} (G_\alpha(N) - G_{\alpha i}(N))^2 \quad (36)$$

Dans chaque cas le système est comparé aux sorties du modèle générés par l'entrée seulement: EI représente l'erreur vraie.

L'erreur d'identification est définie par

$$EI = \sqrt{\frac{(y_i - z_i)^2}{y_i^2}} \times 100 \quad (37)$$

Cet indice de performance est produite sur 320 échantillons.

Les tableaux 1 et 2 présentent les résultats. La figure 1 permet de constater que la solution non-corrigée possède un biais quasi proportionnel au carré du bruit. La correction du biais par la valeur propre minimum est assez efficace. Evidemment lorsque la fenêtre de pondération est étroite, la variance est grande, et la valeur moyenne du modèle est légèrement affectée par le nombre fini des mesures.

La figure 2 montre que la variance sur les paramètres croît avec la diminution de α comme le propose notre étude théorique. Il semble donc que la méthode de correction du biais s'acquitte de sa tâche et conserve à peu près la même variance aux évaluations des paramètres.

4.2 Identification des systèmes variants

4.2.1 Influence du facteur de pondération sur la poursuite des paramètres

L'étude est faite en absence du bruit de mesure et d'une façon expérimentale vu la complexité du problème. Plusieurs simulations ont été faites. Les résultats présentés aux figures 3 et 4 attestent qu'en absence de bruit de mesure une diminution du facteur de pondération rend l'identification aussi précise qu'on le veut.

4.2.2 Identification en présence des bruits de mesure

La propriété précédente est opposée à celle établie au paragraphe 4.1. Le choix d'un facteur de pondération pour l'identification des systèmes variants en présence des bruits de mesure est ainsi un problème de compromis entre le filtrage du bruit et la poursuite des paramètres. Les figures 5 à 7 illustrent les résultats obtenus à partir de différentes simulations. Pour un niveau de bruit raisonnable le facteur de pondération permettant la meilleure identification devient de plus en plus petit avec une variation de plus en plus rapide des paramètres (fig. 5). La figure 6 montre sous un autre angle le choix judicieux de α . Pour une même variation des paramètres, une augmentation du niveau du bruit de mesure commande un α de plus en plus grand. La figure 7 montre que pour un α adéquat la méthode de correction du biais permet une meilleure identification que la méthode de Kalman. Les figures 8, 9, 10 présentent les solutions en régime établi lorsque le gain est fortement variable. Nous avons là une bonne idée des possibilités de la méthode dans une utilisation en temps réel.

5- CONCLUSION

Ce travail met en évidence plusieurs propriétés concernant une méthode de correction du biais de la solution classique au problème de l'identification préconisée par Kalman. De plus, une étude de l'influence de la pondération exponentielle comme méthode de poursuite des paramètres variants est faite.

En présence de bruit de mesure, pour un système invariant, il est acquis que la solution préconisée est asymptotiquement non-biaisée peu importe le niveau du bruit. Par contre, l'utilisation d'une pondération introduit une variance sur les paramètres du même ordre que la solution de Kalman: la variance est d'autant plus élevée que la pondération est petite.

Pour un système variant la solution préconisée est aussi plus efficace. Il existe une valeur de la pondération qui réalise le meilleur compromis entre la poursuite et le filtrage.

Comparativement aux solutions préconisées par Talman et Van Den Boom [12] notre solution a l'avantage d'enrayer directement le biais d'un bruit blanc. Pour effectuer la même opération, la méthode précitée exigerait une identification complète des coefficients du dénominateur du système à identifier. En fait cette méthode exige un bruit correlé de manière très particulière à la structure du système pour conduire à une solution rapide.

La méthode de Clarke [4] est comparable sur ce point, mais elle regénère progressivement le bruit de manière à en établir les coefficients exacts de correction. Les calculs sont largement plus importants et une application en temps réel semble hors de question.

L'économie substantielle de l'espace mémoire de même que l'utilisation de méthode itérative pour le calcul des valeurs propres et des coefficients rendent notre solution apte à l'identification en temps dans une boucle d'adaptation.

En simulation par programme Fortran sur une machine IBM 360, nous avons identifié les quatre paramètres d'un système du second ordre à l'intérieur d'un cycle de 0.13 seconde à chaque intervalle d'échantillonnage.

ANNEXE I

Présentation de la solution préconisée par Kalman [8]

La méthode proposée par Kalman, on propose pour équation du modèle

$$\sum_{k=0}^n b_k z_{i-k} + \sum_{j=1}^n a_j x_{i-j} = 0 \quad A-1$$

avec $z_{i-k}^* = y_{i-k}$ pour $k = 1, \dots, n$.

Les sorties passées du modèle sont supposées identiques à celles du système.

La solution devient alors

$$\begin{bmatrix} \Phi_{00}^{yy^*}(N) - F_0(N) & \Phi_{0m}^{xy^*}(N) & | & \Phi_{0j}^{xj^*}(N) \\ \Phi_{km}^{yy} & & | & \Phi_{kj}^{xy} \\ \hline & & | & \Phi_{kj}^{xx}(N) \\ \Phi_{km}^{yx^*}(N) & & | & a_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_k \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} \quad A-2$$

avec m variant de 0 à n

et k, j variant de 1 à n

La solution dans le cas de l'utilisation d'une pondération aura même expression mais les coefficients seront de la forme

$$\Phi_{ads}^{gh}(N) = \alpha \Phi_{ds}^{gh}(N-1) + g_{N-d} h_{N-s} \quad A-3$$

On voit que cette solution minimise l'erreur dans la seule direction z_i et il s'en suit une erreur systématique due aux bruits. Etant donné que la bande de fréquence du bruit est dans la pratique beaucoup plus importante que la bande passante du système il est intuitivement justifiable d'apporter une correction qui tienne compte de la valeur que quadratique moyenne du bruit.

REFERENCES

- [1] Aoki A., Yue P.C., "On certain convergence questions in system identification", SIAM, Journal of Control, Vol. 8, pp. 239-255, May 1970.
- [2] Astrom K.J. Eykhoff P., "System identification a survey", Automatica # 7, pp. 123-162, 1971.
- [3] Babbar M., "Distribution of solutions of a set of linear equations (with an application to linear programming)", American Statistical Ass. Vol. 55, September 1955.
- [4] Clarke D.W, "Generalized least squares estimation of the parameters of a dynamic model" IFAC Symposium reprints, pp. 3-17, Prague 1967.
- [5] Eykhoff P., System identification, book, Wiley, 1974.
- [6] Eykhoff P., "Identification and System parameter estimation", Part I and II, IFAC Symposium, North Holland/American Elsevier, 1973.
- [7] Iserman and All., "Comparaison of six on line identification and parameters estimation methods", Automatica , January 1974.
- [8] Kalman R.E., "Design of a self optimizing control system", Trans. ASME Vol. 80, pp. 468-78, Feb. 1958.
- [9] Levin M.J., "Estimation of system pulse transfer function in presence of noise", IEEE Trans. AC-29, pp. 229-235, 1974.
- [10] Papoulis A., "Probability, random variables and stvehastic processes" Mc Graw Hill, Book, 1965.
- [11] Saradis G.N., "Comparaison on six on line identification algorithms," Automatica, January 1974.
- [12] Talmon J.L., Van Den Boom A.J., "On the estimation of the transfer function parameters of process in noise dynamics using a single stage estimation", Reprints IFAC Symposium, part II, The Hague, Netherlands, pp. 711-720, 1973.
- [13] Turgeon A.B., "Identification en temps réel des systèmes échantillonnés en présence de bruits de mesure", Automatisme, pp. 98-103, 1970.
- [14] Vu Q.T., "Identification et auto-compensation des systèmes linéaires variants," thèse de maîtrise, Ecole Polytechnique, décembre 1973.

Alpha	V[B(1)]		V[B(2)]		V[A(1)]		V[A(2)]	
	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.
1.00	0.65×10^{-3}	0.54×10^{-3}	0.57×10^{-3}	0.46×10^{-3}	0.25×10^{-4}	0.26×10^{-4}	0.69×10^{-4}	0.68×10^{-4}
0.90	0.35×10^{-2}	0.34×10^{-2}	0.30×10^{-2}	0.29×10^{-2}	0.20×10^{-3}	0.20×10^{-3}	0.42×10^{-3}	0.42×10^{-3}
0.80	0.78×10^{-2}	0.88×10^{-2}	0.68×10^{-2}	0.77×10^{-2}	0.43×10^{-3}	0.43×10^{-3}	0.96×10^{-3}	0.10×10^{-2}
0.70	0.13×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.14×10^{-2}	0.71×10^{-3}	0.69×10^{-3}	0.15×10^{-2}	0.16×10^{-2}
0.60	0.19×10^{-1}	0.24×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.23×10^{-1}	0.11×10^{-2}	0.10×10^{-2}	0.21×10^{-2}	$0.22 \times 10^{+2}$
0.50	0.31×10^{-1}	0.37×10^{-1}	0.35×10^{-1}	0.40×10^{-1}	0.17×10^{-2}	0.17×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.28×10^{-2}

Tableau 1: Variances des paramètres
(5% de bruit)

Alpha	V[B(1)]		V[B(2)]		V[A(1)]		V[A(2)]	
	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.
1.00	0.26×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.22×10^{-2}	0.17×10^{-2}	0.94×10^{-4}	0.10×10^{-3}	0.24×10^{-3}	0.28×10^{-3}
0.90	0.10×10^{-1}	0.10×10^{-1}	0.87×10^{-2}	0.91×10^{-2}	0.73×10^{-3}	0.81×10^{-3}	0.12×10^{-2}	0.14×10^{-2}
0.80	0.18×10^{-1}	0.22×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.16×10^{-2}	0.18×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.32×10^{-2}
0.70	0.27×10^{-1}	0.37×10^{-1}	0.24×10^{-1}	0.40×10^{-1}	0.26×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.40×10^{-2}	0.50×10^{-2}
0.60	0.42×10^{-1}	0.63×10^{-1}	0.45×10^{-1}	0.76×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.40×10^{-2}	0.55×10^{-2}	0.66×10^{-2}
0.50	0.64×10^{-1}	0.98×10^{-1}	0.76×10^{-1}	0.98×10^{-1}	0.62×10^{-2}	0.62×10^{-2}	0.70×10^{-2}	0.79×10^{-2}

Tableau 2: Variances des paramètres
(10% de bruit)

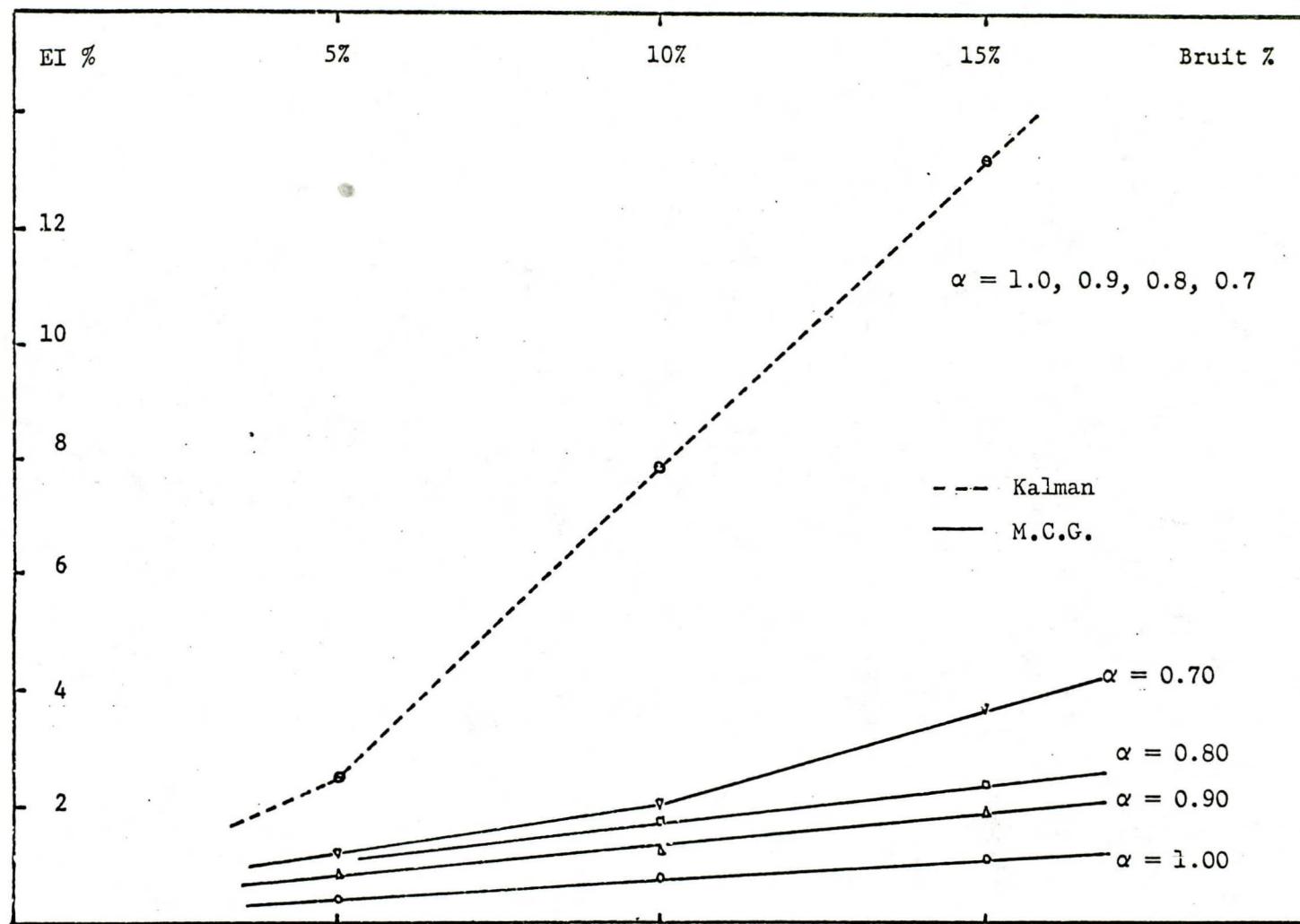


Fig. 1: Influence de α sur les moyennes des modèles.

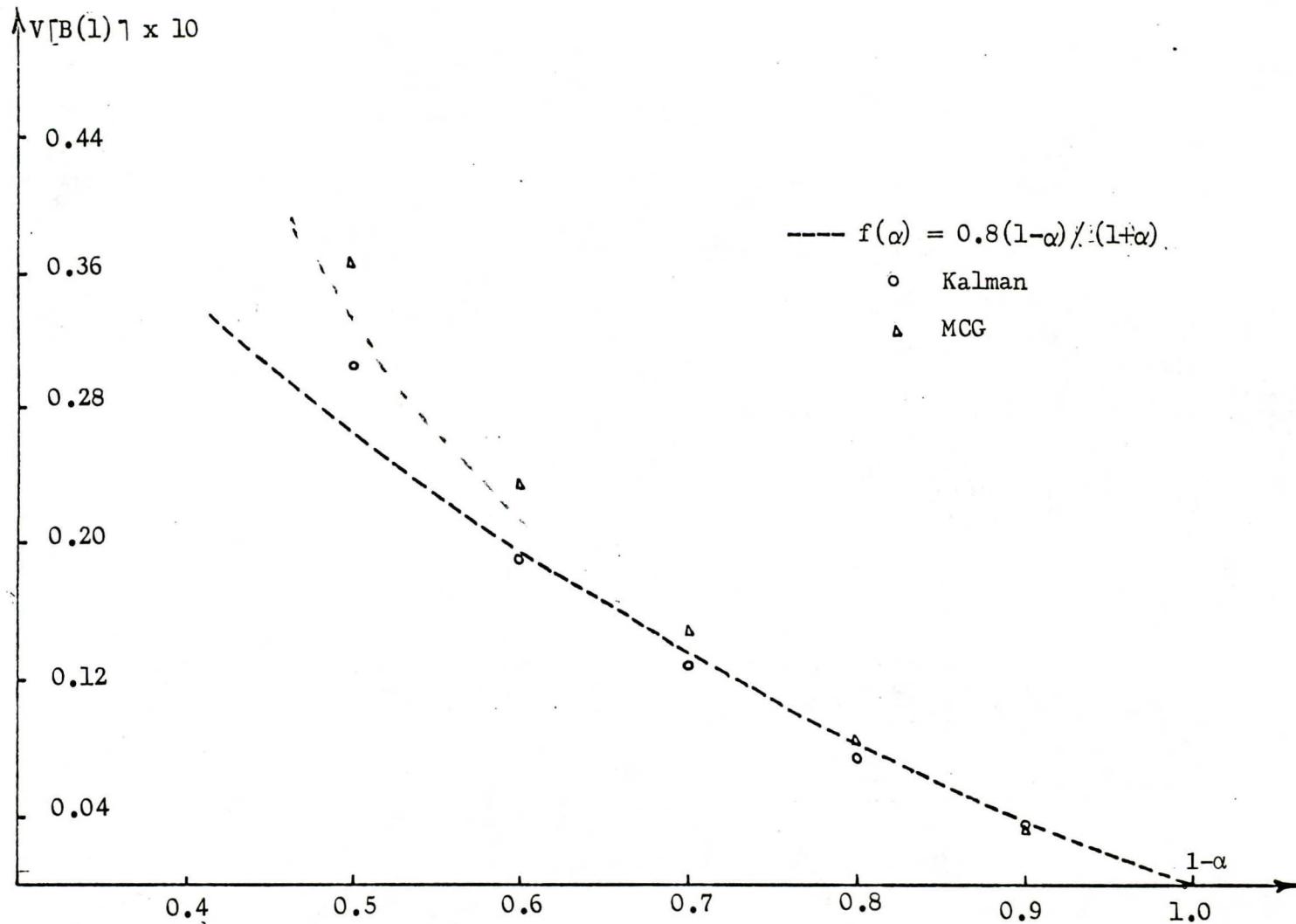


Fig. 2: Variance du paramètre $B(1)$ versus α
(Kalman et MCG)

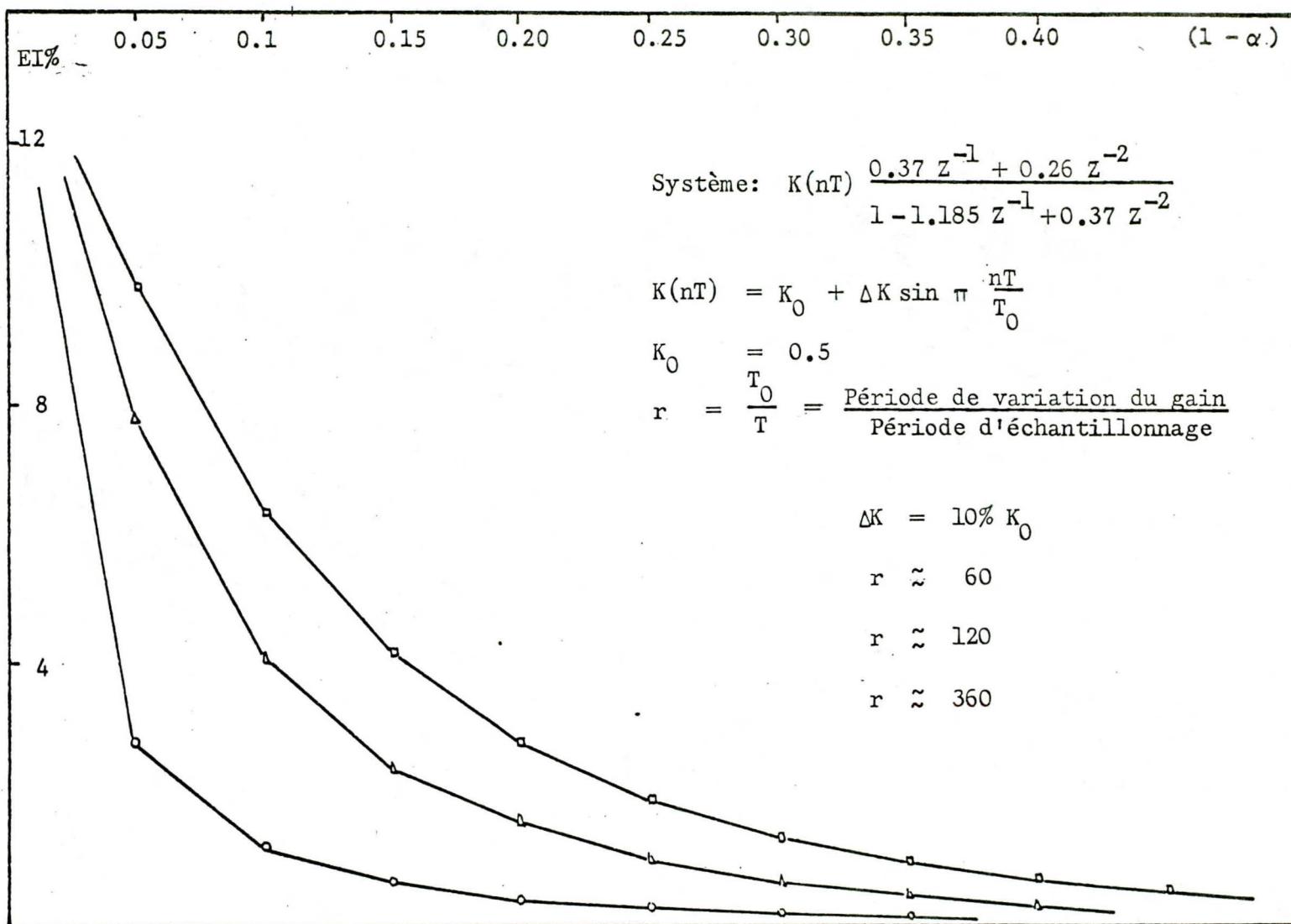


Fig. 3: Identification en absence du bruit de mesure
 (Kalman et M.C.G.)

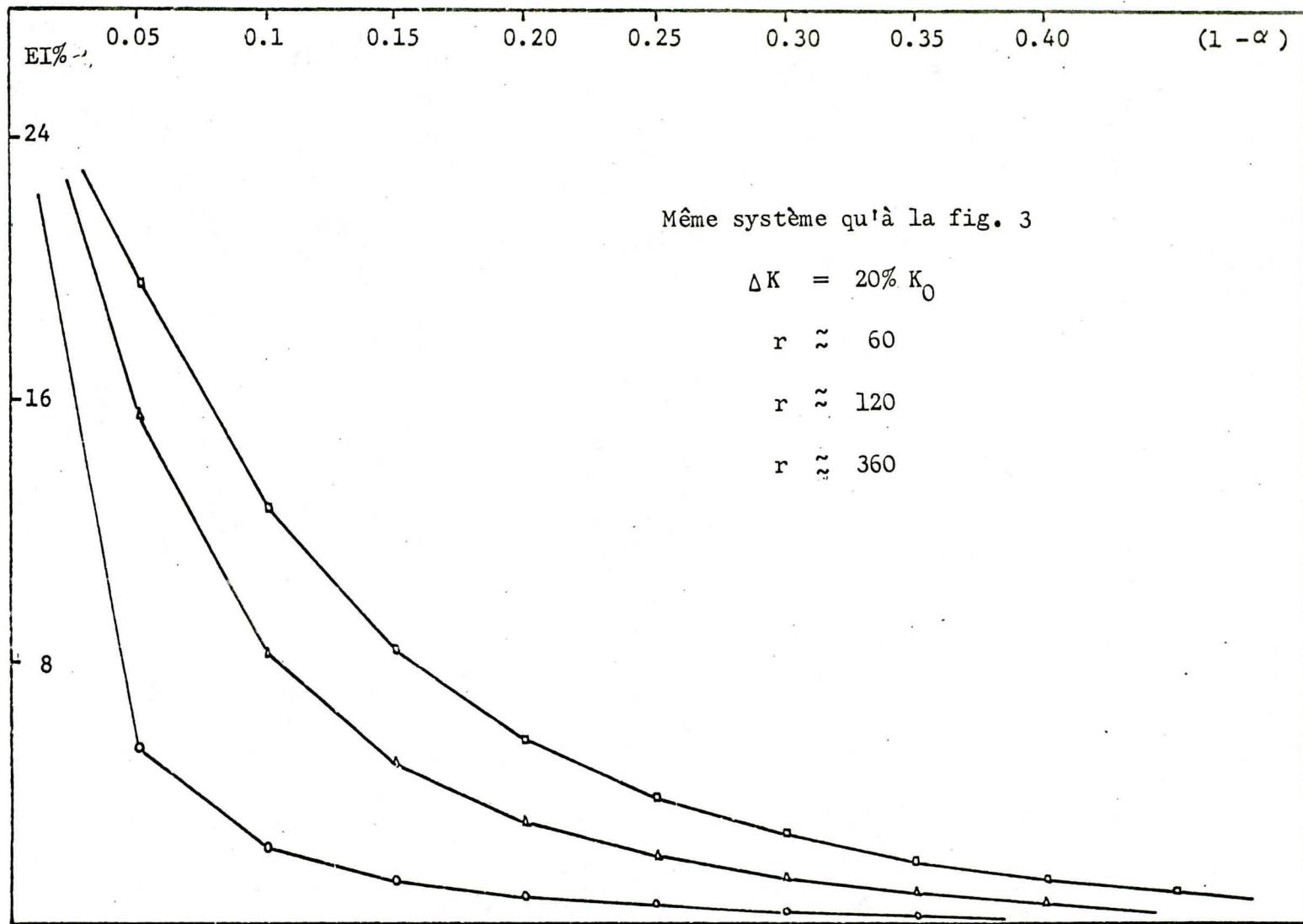


Fig. 4: Identification en absence du bruit de mesure
 (Kalman et MCG)

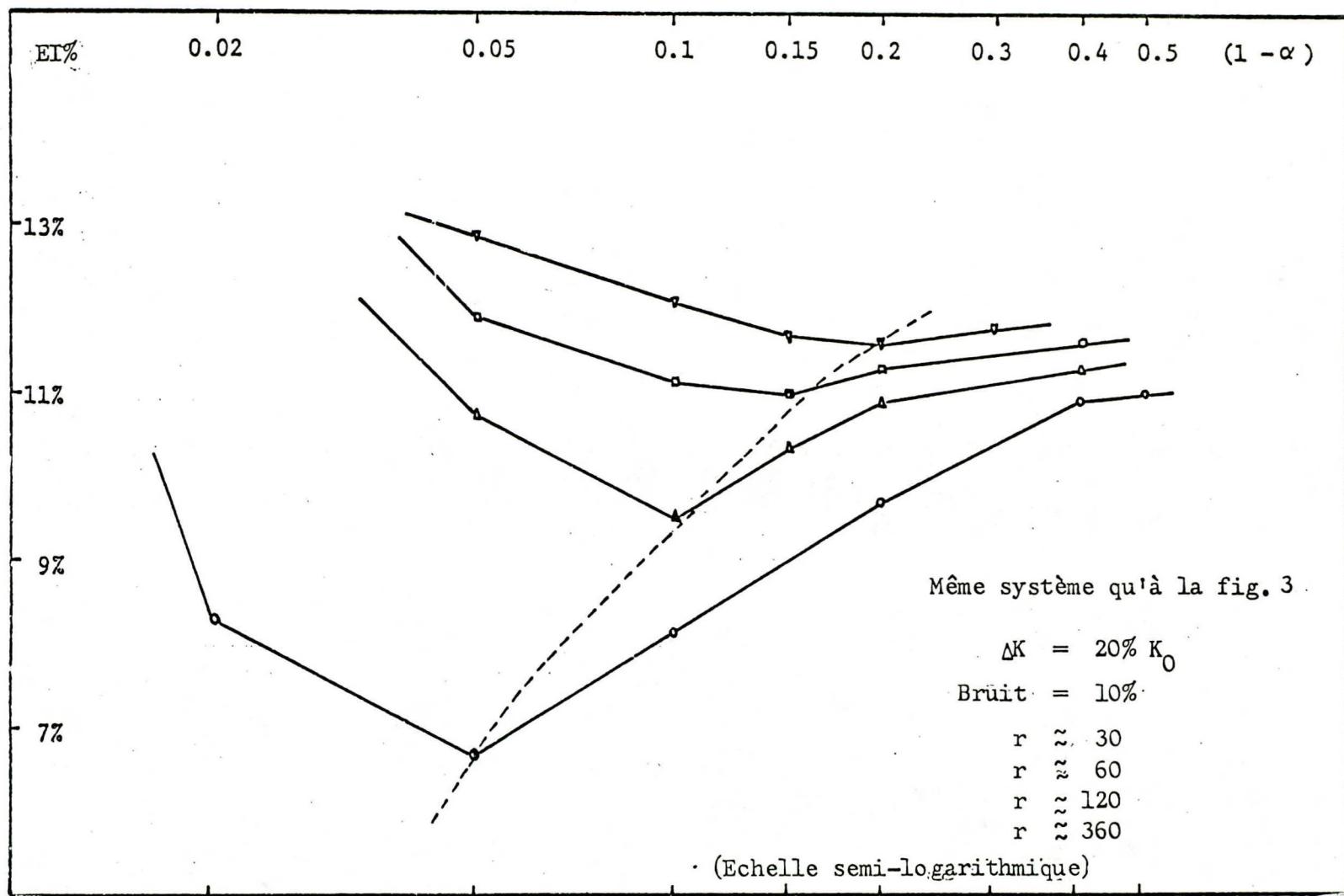


Fig. 5: Identification en présence des bruits de mesure
 (Méthode des MCG)

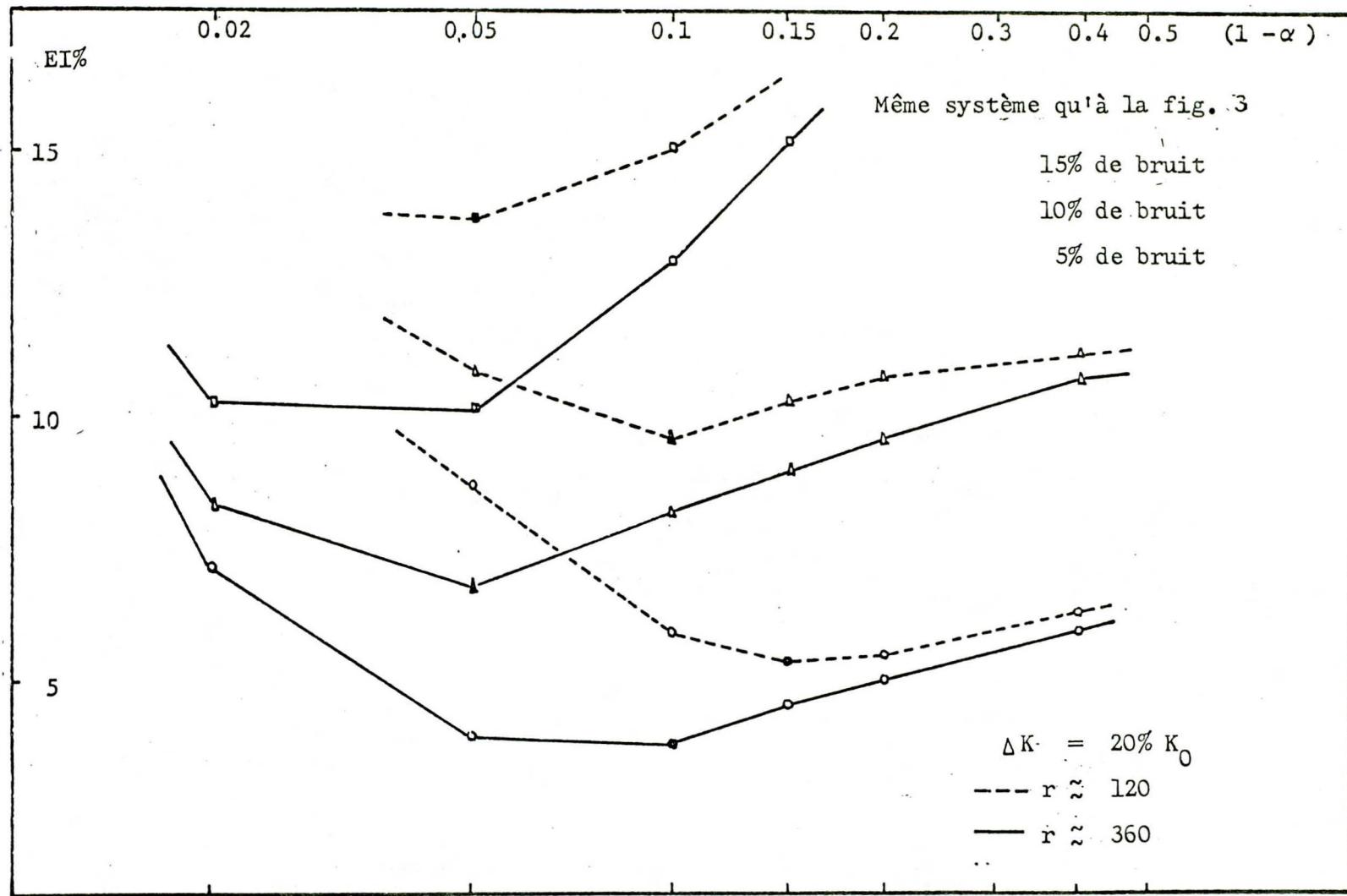


Fig. 6: Identification en présence des bruits de mesure
 (Méthode des MCG)

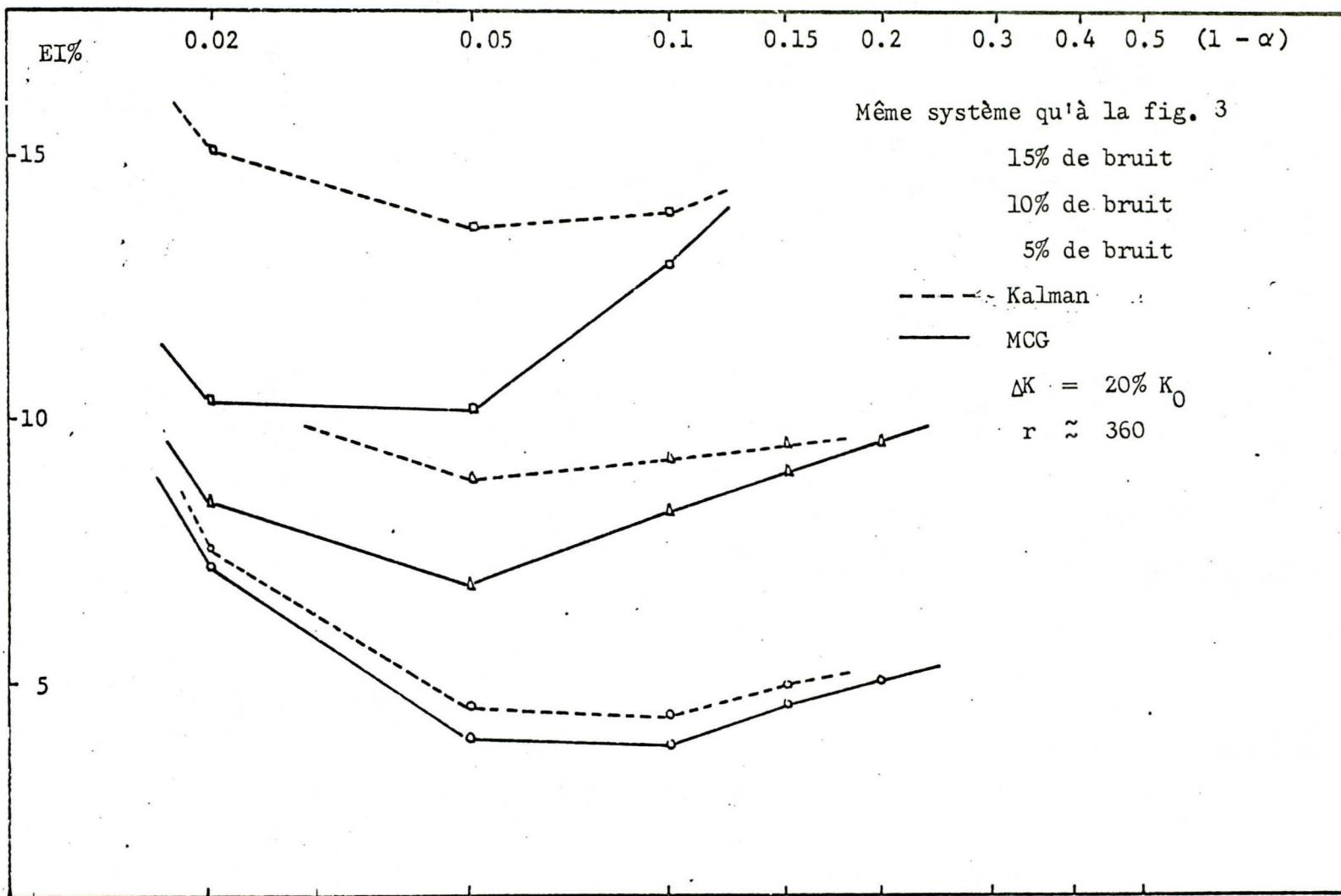


Fig. 7: Comparaison avec la méthode de Kalman

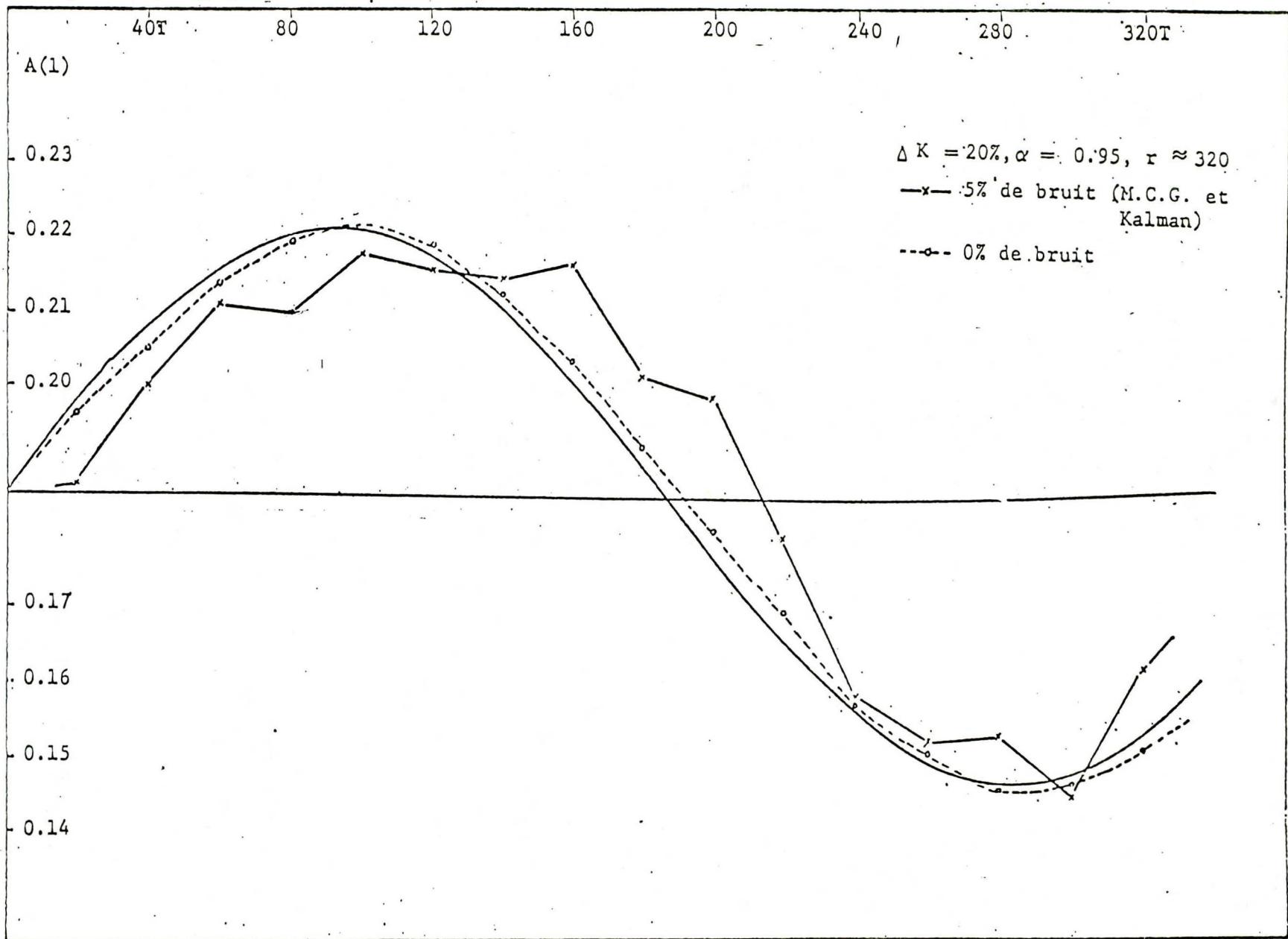


Fig. 8: Poursuite du paramètre A(1)

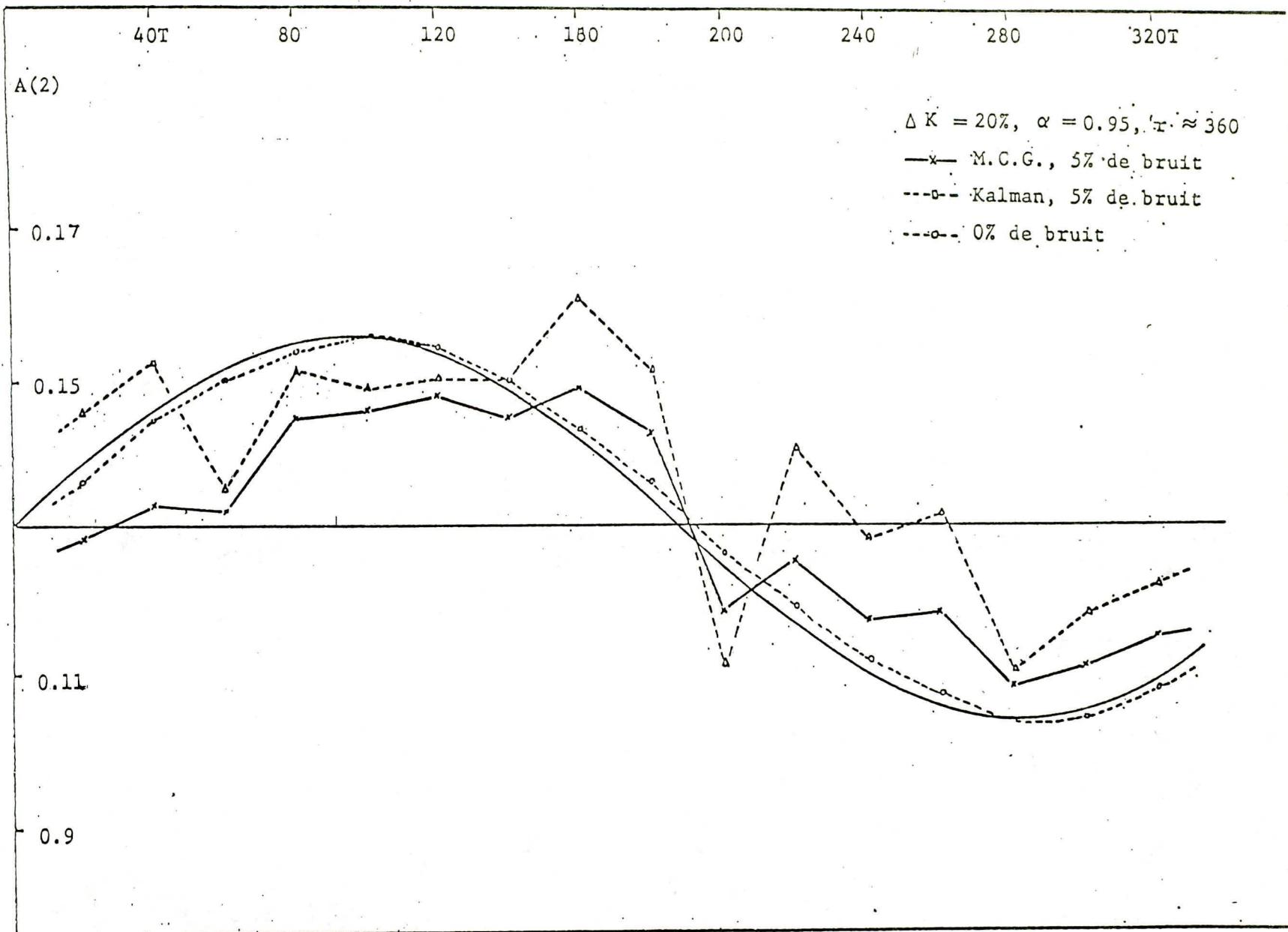


Fig. 9 Poursuite du paramètre A(2)

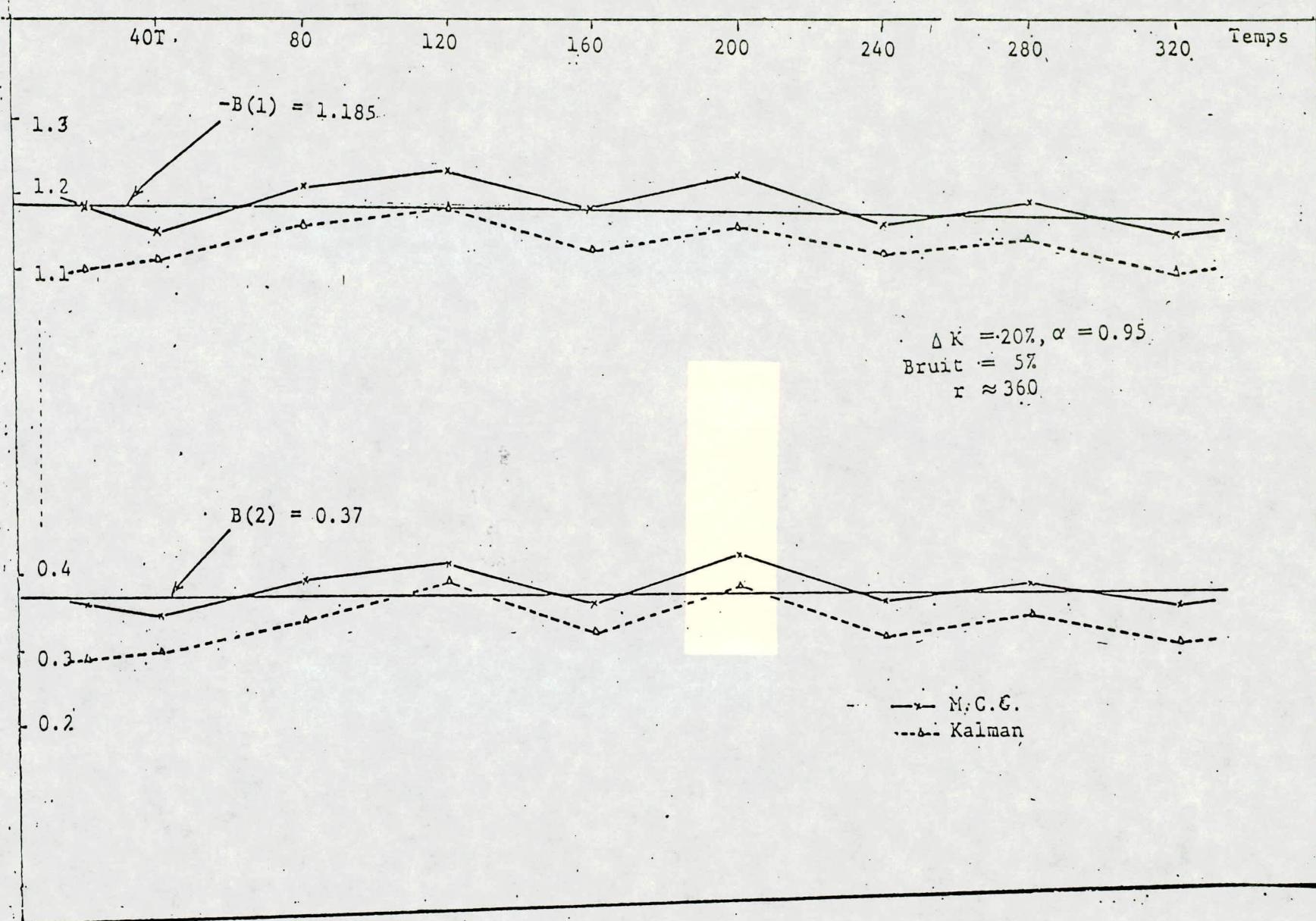


Fig. 10 Poursuite des paramètres $B(1)$ et $B(2)$