

Titre: Génération numérique de maillages avec dilatation par la méthode
Title: MULTIGRID

Auteurs: Michel Hameury, & Ricardo Camarero
Authors:

Date: 1981

Type: Rapport / Report

Référence: Hameury, M., & Camarero, R. (1981). Génération numérique de maillages avec
Citation: dilatation par la méthode MULTIGRID. (Technical Report n° EP-R-81-03).
<https://publications.polymtl.ca/6187/>

 Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6187/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

 Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-81-03
Report number:

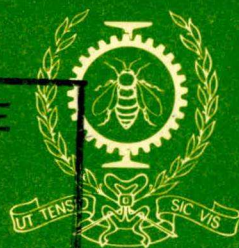
URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

BIBLIOTHÈQUE

JAN 26 1981

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL



MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Rapport Technique EP81-R-3

Classification: Library of Congress no

GENERATION NUMERIQUE DE MAILLAGES AVEC
DILATATION PAR LA METHODE MULTIGRID

Michel HAMEURY & Ricardo CAMARERO

Janvier 1981

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP 5
R81-03
ex.2

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

Bibliothèque

**Ecole
Polytechnique**

COTE

CA2PQ

UP 5

R81-03

ex. 2

MONTRÉAL

131981-X



BIBLIOTHÈQUE

JAN 26 1981

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Rapport Technique EP81-R-3

Classification: Library of Congress no

GENERATION NUMERIQUE DE MAILLAGES AVEC
DILATATION PAR LA METHODE MULTIGRID

Michel HAMEURY & Ricardo CAMARERO

Janvier 1981

GENERATION NUMERIQUE DE MAILLAGES AVEC DILATATION
PAR LA METHODE MULTIGRID

par

Michel Hameury

Ricardo Camarero

Janvier 1981

Département de Math. Appliquées
Ecole Polytechnique

Ces travaux ont été accomplis avec l'aide financière du CRSNG et de la direction de la Recherche de l'Ecole Polytechnique de Montréal.

TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	5
2. Maillages adaptés.....	7
3. Choix d'une méthode numérique.....	13
4. Schéma de relaxation.....	16
5. Application.....	27
6. Résultats et conclusions.....	30
Références.....	32
Figures et illustrations.....	34

1. INTRODUCTION

Les systèmes d'équations différentielles aux valeurs limites peuvent se solutionner numériquement de façon plus ou moins précise. Cette précision est grandement affectée par le choix du maillage employé ainsi que par le traitement des conditions frontières.

On sait qu'un maillage rectangulaire dans un domaine complexe ne permet pas une représentation précise des frontières (fig. 1). Il est donc nécessaire d'interpoler lors du traitement de la plupart des noeuds de frontières donnant ainsi lieu à une erreur.

De plus, le calcul des noeuds intérieurs étant différent du calcul des noeuds de frontières, ce genre de maillage alourdi considérablement la programmation.

Il est possible de remédier à la complexité des frontières en adaptant un maillage à la géométrie du domaine (fig. 2).

Le fait de solutionner un système d'équations différentielles sur un tel maillage, simplifie le problème des conditions frontières, mais complexifie quelque peu l'équation de départ.

Thompson en réf. (2) a donné une façon facile de construire des maillages s'adaptant à n'importe quelle géométrie. La solution d'un système d'équations différentielles partielles elliptiques par méthode numérique, permet d'obtenir les coordonnées curvilignes de ce maillage. Le choix d'une méthode numérique particulière pour la solution d'un tel système d'équations, dépend souvent du rendement (précision de calcul/temps de travail) qu'elle offre.

Camarero et Younis en réf. (1) ont déjà effectué quelques comparaisons entre les méthodes de relaxation par points, par ligne ainsi qu'une technique pour accélérer la convergence: MULTIGRID.

Dans ce travail, on propose une méthode améliorée pour la génération de maillages curvilignes adaptés aux frontières. La méthode utilisée est un procédé de relaxation par lignes et par colonnes alternativement. Ensuite une technique de multigrid est appliquée pour accélérer la convergence.

Comme le raffinement du maillage est souvent nécessaire dans différentes régions du domaine, plusieurs auteurs (réf. (1,2, 3,4,5)) ont déjà abordé le problème avec un certain nombre de techniques. Aussi on présente dans ce rapport une nouvelle approche dans la façon de concentrer les lignes du maillage.

Enfin on applique cette méthode à un cas particulier soit un canal interaube d'une turbomachine.

2. MAILLAGES ADAPTES

Le maillage adapté, proposé par Thompson réf. (2), est caractérisé par certaines lignes de coordonnées qui épousent parfaitement la frontière du domaine. Thompson en explique l'idée directrice en observant un cas particulier du maillage adapté: les coordonnées cylindriques. En effet, la meilleure façon de traiter un domaine aux frontières circulaires se fera dans un système de coordonnées cylindriques. De la même façon, le maillage adapté moule précisément la frontière du domaine quelqu'en soit la géométrie.

Le changement de coordonnées s'effectue en transformant les variables du domaine physique (Z, ϕ) dans un domaine de calcul rectangulaire (η, τ) (fig. 3). La méthode consiste à solutionner un système de deux équations de Poisson dans le domaine physique:

$$\eta_{ZZ} + \eta_{\phi\phi} = Q(\eta, \tau) \quad (1)$$

$$\tau_{ZZ} + \tau_{\phi\phi} = R(\eta, \tau) \quad (2)$$

Dans l'étude présentée, on applique cette transformation bidimensionnelle à un canal interaube de turbomachine. (appelé aussi "cascade").

Les quatres frontières de ce domaine sont représentées par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 . Ils coïncident avec $\eta = \eta_1$ pour Γ_3 , $\eta = \eta_2$ pour Γ_4 , $\tau = \tau_1$ pour Γ_1 et $\tau = \tau_2$ pour Γ_2 .

Les conditions frontières de Dirichlet sur le domaine physique s'écrivent donc:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1(Z, \phi) \\ \tau_1 \end{pmatrix}, \quad (Z, \phi) \in \Gamma_1$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2(Z, \phi) \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad (Z, \phi) \in \Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \tau_3(Z, \phi) \end{pmatrix}, \quad (Z, \phi) \in \Gamma_3$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \tau_4(Z, \phi) \end{pmatrix}, \quad (Z, \phi) \in \Gamma_4$$

où $\eta_1, \eta_2, \tau_1, \tau_2$ sont des constantes ($\eta_2 > \eta_1$) et ($\tau_2 > \tau_1$)
et $\eta_1(Z, \phi), \eta_2(Z, \phi), \tau_3(Z, \phi)$ et $\tau_4(Z, \phi)$ sont des fonctions
monotonique spécifiées respectivement sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

En transformant ce système dans le domaine de calcul (η, τ)
on obtient les équations différentielles elliptiques non-linéaires
suivantes:

$$\alpha \phi_{\eta\eta} + \gamma \phi_{\tau\tau} - 2\beta \phi_{\eta\tau} + J^2 Q \phi_{\eta} + J^2 R \phi_{\tau} = 0 \quad (5)$$

$$\alpha Z_{\eta\eta} + \gamma Z_{\tau\tau} - 2\beta Z_{\eta\tau} + J^2 Q Z_{\eta} + J^2 R Z_{\tau} = 0 \quad (6)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi_{\tau}^2 + Z_{\tau}^2 \\ \gamma &= \phi_{\eta}^2 + Z_{\eta}^2 \\ \beta &= \phi_{\eta} \phi_{\tau} + Z_{\eta} Z_{\tau} \\ J &= \phi_{\eta} Z_{\tau} - \phi_{\tau} Z_{\eta} \end{aligned} \quad (7)$$

ainsi que les conditions frontières transformées:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(\eta_1, \tau) \\ f_2(\eta_1, \tau) \end{pmatrix} && \text{selon } \Gamma_1^* \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_1(\eta_2, \tau) \\ g_2(\eta_2, \tau) \end{pmatrix} && \text{selon } \Gamma_2^* \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1(\eta, \tau_1) \\ h_2(\eta, \tau_1) \end{pmatrix} && \text{selon } \Gamma_3^* \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1(\eta, \tau_2) \\ q_2(\eta, \tau_2) \end{pmatrix} && \text{selon } \Gamma_4^* \end{aligned} \quad (8)$$

Les fonctions $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, q_1$ et q_2 sont spécifiées par la forme des fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 .

On est donc maintenant en présence d'un domaine de calcul rectangulaire (η, τ) dont les coordonnées sont espacées d'intervalles uniformes.

La résolution du système d'équations précédent permet d'obtenir les coordonnées du maillage physique (Z, ϕ) .

Il est possible d'utiliser les fonctions Q et R pour contrôler la concentration des lignes de coordonnées dans certaines régions du domaine physique. Quelques auteurs ont déjà discuté différentes concentrations de maillages à l'aide de ces fonctions (réf. 1,2,4).

On présente ici une nouvelle approche dans la façon de varier la densité du maillage. Avant le changement de coordonnées déjà vu, il s'agit d'effectuer une transformation dans un domaine rectangulaire (ψ, ξ) . Cette fois les coordonnées de ce maillage ne sont pas espacées uniformément, mais plutôt disposées selon une ou plusieurs fonctions analytiques. La fig. (4) montre un exemple de concentration, selon la direction ψ , à l'aide d'une fonction analytique simple. Ensuite, on peut effectuer le changement de coordonnées dans un domaine de calcul rectangulaire ayant un maillage espacé uniformément (η, τ) .

La concentration des lignes de coordonnées peut donc être différente sur chaque axe et aussi différente d'une région à une autre du domaine.

En résumé, les transformations de coordonnées se font comme suit: (fig. 5)

$$(Z, \phi) \rightarrow (\psi, \xi) \rightarrow (\eta, \tau)$$

Comme on désire une concentration selon des fonctions analytiques: $\psi = \psi(\eta)$ suivant η et $\xi = \xi(\tau)$ suivant τ .

Les équations (1), (2) et (3) s'écrivent après cette double transformation:

$$\alpha \phi_{\eta\eta} + \gamma \phi_{\tau\tau} - 2\beta \phi_{\eta\tau} + \left(\frac{J^2 Q}{\psi_\eta} - \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} \right) \phi_\eta + \left(\frac{J^2 R}{\xi_\tau} - \gamma \frac{\xi_{\tau\tau}}{\xi_\tau} \right) \phi_\tau = 0 \quad (9)$$

$$\alpha Z_{\eta\eta} + \gamma Z_{\tau\tau} - 2\beta Z_{\eta\tau} + \left(\frac{J^2 Q}{\psi_\eta} - \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} \right) Z_\eta + \left(\frac{J^2 R}{\xi_\tau} - \gamma \frac{\xi_{\tau\tau}}{\xi_\tau} \right) Z_\tau = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi_\tau^2 + Z_\tau^2 \\ \gamma &= \phi_\eta^2 + Z_\eta^2 \\ \beta &= \phi_\eta \phi_\tau + Z_\eta Z_\tau \\ J &= \phi_\eta Z_\tau - \phi_\tau Z_\eta \end{aligned} \quad (11)$$

Les conditions frontières sont

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(\eta_1, \xi(\tau)) \\ f_2(\eta_1, \xi(\tau)) \end{pmatrix} \text{ selon } \Gamma_1^{**} \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_1(\eta_2, \xi(\tau)) \\ g_2(\eta_2, \xi(\tau)) \end{pmatrix} \text{ selon } \Gamma_2^{**} \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1(\psi(\eta), \tau_1) \\ h_2(\psi(\eta), \tau_1) \end{pmatrix} \text{ selon } \Gamma_3^{**} \\ \begin{pmatrix} \phi \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1(\psi(\eta), \tau_2) \\ q_2(\psi(\eta), \tau_2) \end{pmatrix} \text{ selon } \Gamma_4^{**} \end{aligned} \quad (12)$$

Les fonctions $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, q_1$ et q_2 représentent encore la forme connue des frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 , sauf qu'ici, les points de la frontière sont choisis suivant les fonctions de concentration $\xi = \xi(\tau)$ et $\psi = \psi(\eta)$.

Avec un choix judicieux des fonctions de concentration, il est relativement facile d'obtenir les variations de densité de maillage désirées. Les fonctions Q et R deviennent alors inutiles et peuvent être posées à zéro.

Cependant il est encore possible de se servir de ces fonctions pour obtenir davantage de concentration en combinant les méthodes nouvelle et traditionnelle.

On peut simplifier l'écriture des équations en les réécrivant de la façon suivante:

$$\alpha \phi_{\eta\eta} + \gamma \phi_{\tau\tau} - 2\beta \phi_{\eta\tau} + Q' \phi_{\eta} + R' \phi_{\tau} = 0 \quad (13)$$

$$\alpha Z_{\eta\eta} + \gamma Z_{\tau\tau} - 2\beta Z_{\eta\tau} + Q' Z_{\eta} + R' Z_{\tau} = 0 \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi_{\tau}^2 + Z_{\tau}^2 \\ \gamma &= \phi_{\eta}^2 + Z_{\eta}^2 \\ \beta &= \phi_{\eta} \phi_{\tau} + Z_{\eta} Z_{\tau} \\ J &= \phi_{\eta} Z_{\tau} - \phi_{\tau} Z_{\eta} \\ Q' &= \frac{J^2 Q}{\psi_{\eta}} - \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_{\eta}} \\ R' &= \frac{J^2 R}{\xi_{\tau}} - \gamma \frac{\xi_{\tau\tau}}{\xi_{\tau}} \end{aligned} \quad (15)$$

Après la résolution de ce système d'équations elliptiques deux fois transformé, on obtient les coordonnées du maillage adapté selon la concentration désirée.

Les transformations conformes et orthogonales sont des cas particuliers du maillage adapté. En général la résolution du système d'équations elliptiques ne génère pas un maillage orthogonal, ce qui n'est pas essentiel dans la majorité des problèmes.

Finalement, il est à remarquer que cette méthode de génération de coordonnées peut se généraliser pour des maillages adaptés à des géométries en trois dimensions.

3. CHOIX D'UNE METHODE NUMERIQUE

En général, la résolution du système d'équations (13) et (14) ne se fait que de façon numérique.

D'abord toutes les dérivées du système sont remplacées par des différences centrées précises au deuxième ordre. Le système d'équations différentielles devient donc un système d'équations algébriques pour chaque point (η_i, τ_i) du domaine de calcul. Comme ce domaine est discrétisé de façon uniforme, on choisit $\Delta\eta$ et $\Delta\tau$ unitaire pour simplifier les équations. Ainsi η varie de 1 à $\eta_{\max}$ et τ de 1 à $\tau_{\max}$. Les valeurs de $\eta_{\max}$ et $\tau_{\max}$ sont respectivement le nombre de colonnes de coordonnées et le nombre de rangées de coordonnées. On a donc en tout point (η_i, τ_i) une équation algébrique donnant la valeur nodale de ϕ_{ij} et de Z_{ij} .

Pour les coordonnées tangentielles:

$$\begin{aligned} & \alpha' [\phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j}] + \gamma' [\phi_{ij+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{ij-1}] \\ & - 2\beta [\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}] / 4\Delta\eta\Delta\tau \\ & + Q'' (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) / 2\Delta\eta + R'' [\phi_{ij+1} - \phi_{ij-1}] / 2\Delta\tau = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

et pour les coordonnées axiales

$$\begin{aligned} & \alpha' [Z_{i+1,j} - 2Z_{ij} + Z_{i-1,j}] + \gamma' [Z_{ij+1} - 2Z_{ij} + Z_{ij-1}] \\ & - 2\beta [Z_{i+1,j+1} - Z_{i-1,j+1} - Z_{i+1,j-1} + Z_{i-1,j-1}] / 4\Delta\eta\Delta\tau \\ & + Q'' (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) / 2\Delta\eta + R'' [Z_{ij+1} - Z_{ij-1}] / 2\Delta\tau = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha' &= ((\phi_{ij+1} - \phi_{ij-1})^2 + (Z_{ij+1} - Z_{ij-1})^2) / ((2\Delta\tau)^2 * (\Delta\eta)^2) \\ \gamma' &= ((\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})^2 + (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})^2) / ((2\Delta\eta)^2 * (\Delta\tau)^2) \\ \beta &= ((\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\phi_{ij+1} - \phi_{ij-1}) + (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})(Z_{ij+1} - Z_{ij-1})) / (2\Delta\eta * 2\Delta\tau) \end{aligned} \quad (18)$$

et $\psi = \psi(\eta)$

$\xi = \xi(\tau)$ où $\psi(\eta)$ et $\xi(\tau)$ sont des fonctions analytiques connues.

$$Q'' = \left[\frac{J^2 Q}{\psi_\eta} - (\Delta\eta)^2 \alpha' \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} \right], \quad R'' = \left[\frac{J^2 R}{\xi_\tau} - (\Delta\tau)^2 \gamma' \frac{\xi_{\tau\tau}}{\xi_\tau} \right]$$

On a donc pour l'ensemble du domaine un système d'équations algébriques non-linéaires couplées. Les méthodes de solution les mieux adaptées pour ce genre d'équations sont itératives. Certaines de ces méthodes ont déjà fait l'objet d'études par le passé. (réf. 1) L'expérience de ces auteurs nous a permis d'entreprendre une étude comparative des quatre techniques suivantes:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. Surrelaxation
(S.O.R) | a) par ligne
b) aux directions alternées. |
| 2. Multigrid | a) par ligne
b) aux directions alternées. |

On peut juger de leur performance en se basant sur les critères de comparaisons qui suivent:

Le taux de convergence.

La facilité de mise en oeuvre.

La solution par S.O.R. Ligne est une méthode itérative semblable à Gauss-Seidel sauf qu'elle résout une ligne à la fois au lieu de travailler point par point. Bien qu'elle requiert la résolution d'un système tridiagonal, cette méthode implicite converge plus vite. Le fait de solutionner simultanément tous les points d'une ligne permet de faire ressentir instantanément les conditions frontières aux points intérieurs du domaine. Cette caractéristique correspond fidèlement à la nature elliptique du problème. De plus, le taux de convergence peut-être encore accéléré par le facteur de

surrelaxation. La méthode de S.O.R. aux directions alternées est basée sur le même principe que la précédente. La différence vient du fait que dans un premier temps, on relaxe par rangée et dans un second, on relaxe par colonne, on alterne ainsi la direction de chaque balayage jusqu'à une solution.

MULTIGRID

La méthode multigrid est une technique itérative permettant d'accélérer la convergence d'un problème de relaxation. Cette méthode fut proposée par Brandt (réf. 6) et utilisée par quelques auteurs (réf. 7,8). Fondamentalement, il s'agit de résoudre par relaxation un même problème sur une série de maillages de finesses variées. On permet une interrelation entre les maillages en interpolant les résultats d'un maillage grossier sur un maillage plus fin.

Il a été démontré (Brandt 1976) que la variation du résidu peut être disséquée en série de Fourier et qu'une technique particulière de relaxation atténue sélectivement les composantes dont la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la maille de la discrétisation. Aussi verra-t-on des taux de convergence différents pour des maillages de finesses différentes.

On utilise ici un algorithme développé en réf. 7 et déjà utilisé en réf. 1 pour des problèmes similaires.

4. SCHEMA DE RELAXATION

Toutes les méthodes de solution utilisées dans le présent travail sont basées sur un même schéma de relaxation: S.O.R. par ligne. C'est pourquoi il est essentiel d'en comprendre son développement. Avec une technique de relaxation par ligne (rangée ou colonne), on solutionne simultanément de façon implicite tous les noeuds d'une ligne. Même si cette méthode requiert la résolution d'un système tridiagonal, elle reste plus efficace qu'une méthode explicite de relaxation par point. En effet la solution de tous les noeuds d'une ligne à la fois permet aux noeuds intérieurs de ressentir instantanément les conditions frontières pour ainsi en améliorer la convergence.

Voici une description détaillée de la discrétisation des équations suivant une rangée et une colonne.

4.1 S.O.R. PAR RANGEE

On représente à la figure 6, la configuration typique d'une relaxation par rangée. Afin de respecter la configuration de la fig. 6, les équations discrétisées (16) et (17) sont réécrites en fonction du statut des noeuds considérés.

$$\begin{aligned} \alpha'[\bar{\phi}_{i+1,j} - 2\bar{\phi}_{ij} + \bar{\phi}_{i-1,j}] + \gamma'[\phi_{ij+1} - 2\bar{\phi}_{ij} + \phi_{ij-1}^+] \\ - \beta'[\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}^+ + \phi_{i-1,j-1}^+] \\ + Q^*[\bar{\phi}_{i+1,j} - \bar{\phi}_{i-1,j}] + R^*[\phi_{ij+1} - \phi_{ij-1}^+] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha'[\bar{z}_{i+1,j} - 2\bar{z}_{ij} + \bar{z}_{i-1,j}] + \gamma'[z_{ij+1} - 2\bar{z}_{ij} + z_{ij-1}^+] \\ - \beta'[z_{i+1,j+1} - z_{i-1,j+1} - z_{i+1,j-1}^+ + z_{i-1,j-1}^+] \\ + Q^*[\bar{z}_{i+1,j} - \bar{z}_{i-1,j}] + R^*[z_{ij+1} - z_{ij-1}^+] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad \beta' &= 2\beta/4\Delta\eta\Delta\tau \\
Q^* &= Q''/2\Delta\eta \\
R^* &= R''/2\Delta\tau
\end{aligned} \tag{21}$$

et α' et γ' ont déjà été identifiés: éq. (18).

Aussi on identifie

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} \phi \\ Z \end{array} \right\} & \text{comme de vieilles valeurs provenant du} \\
& \text{balayage précédent.} \\
\left. \begin{array}{l} \phi^+ \\ Z^+ \end{array} \right\} & \text{comme des valeurs corrigées; connues par la} \\
& \text{relaxation précédente ou par les conditions frontières.} \\
\left. \begin{array}{l} \bar{\phi} \\ \bar{Z} \end{array} \right\} & \text{comme des valeurs inconnues.}
\end{aligned}$$

Ces valeurs sont reliées au facteur de surrelaxation par les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\phi^+ &= \phi + \omega(\bar{\phi} - \phi) \\
Z^+ &= Z + \omega(\bar{Z} - Z)
\end{aligned} \tag{22}$$

ω étant le facteur de surrelaxation. On a donc pour les valeurs inconnues

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i,j} &= \phi_{i,j} + CF_{i,j}/\omega \\
\bar{Z}_{i,j} &= Z_{i,j} + CZ_{i,j}/\omega
\end{aligned} \tag{23}$$

où les corrections sont définies comme

$$\begin{aligned}
CF_{i,j} &= \phi_{i,j}^+ - \phi_{i,j} \\
CZ_{i,j} &= Z_{i,j}^+ - Z_{i,j}
\end{aligned} \tag{24}$$

En substituant les équations (23) et (24) dans les équations (18) et (19) on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha' - Q^*)}{\omega} CF_{i-1,j} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CF_{ij} + \frac{(\alpha' + Q^*)}{\omega} CF_{i+1,j} \\ & = -RF_{ij} - \gamma' CF_{ij-1} - \beta' [CF_{i+1,j-1} - CF_{i-1,j-1}] + R^* CF_{ij-1} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha' - Q^*)}{\omega} CZ_{i-1,j} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CZ_{ij} + \frac{(\alpha' + Q^*)}{\omega} CZ_{i+1,j} \\ & = -RZ_{ij} - \gamma' CZ_{ij-1} - \beta' (CZ_{i+1,j-1} - CZ_{i-1,j-1}) + R^* CZ_{ij-1} \end{aligned} \quad (26)$$

où les résidus $RF_{i,j}$ et $RZ_{i,j}$ s'écrivent:

$$\begin{aligned} RF_{ij} = & \alpha' (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j}) \\ & + \gamma' (\phi_{ij+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{ij-1}) \\ & - \beta' (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}) \\ & + Q^* (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + R^* (\phi_{ij+1} - \phi_{ij-1}) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} RZ_{ij} = & \alpha' (Z_{i+1,j} - 2Z_{ij} + Z_{i-1,j}) \\ & + \gamma' (Z_{ij+1} - 2Z_{ij} + Z_{ij-1}) \\ & - \beta' (Z_{i+1,j+1} - Z_{i-1,j+1} - Z_{i+1,j-1} + Z_{i-1,j-1}) \\ & + Q^* (Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}) + R^* (Z_{ij+1} - Z_{ij-1}) \end{aligned} \quad (28)$$

La forme des équations (25) et (26) laisse apparaître un système tridional lorsqu'on y substitue tous les points d'une colonne.

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & & \\ & A_i & B_i & C_i & \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CF_2 \\ CF_3 \\ \\ CF_i \\ CF_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ \\ D_i \\ D_{n-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & & \\ & A_i & B_i & C_i & \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CZ_2 \\ CZ_3 \\ \\ CZ_i \\ CZ_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DD_2 \\ DD_3 \\ \\ DD_i \\ DD_{n-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

où

$$A_i = (\alpha' - Q^*)/\omega \quad (31)$$

$$B_i = -2(\alpha' + \gamma')/\omega \quad (32)$$

$$C_i = (\alpha' + Q^*)/\omega \quad (33)$$

$$D_i = -RF_{i,j} - \gamma' CF_{i,j-1} - \beta' [CF_{i+1,j-1} - CF_{i-1,j-1}] + R^* CF_{i,j-1} \quad (34)$$

$$DD_i = -RZ_{i,j} - \gamma' CZ_{i,j-1} - \beta' [CZ_{i+1,j-1} - CZ_{i-1,j-1}] + R^* CZ_{i,j-1} \quad (35)$$

et les conditions frontières sont:

$$\begin{aligned} CF_1 &= CF_n = 0 \\ CZ_1 &= CZ_n = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

L'évaluation du système tridiagonal (29) et (30) donne la valeur des corrections $CF_{i,j}$ et $CZ_{i,j}$ servant à modifier les valeurs recherchées $\phi_{i,j}$ et $Z_{i,j}$.

4.2 S.O.R. PAR COLONNE

En respectant la configuration d'une relaxation par colonne (fig. 7), on peut réécrire les équations (16) et (17) de la façon suivante:

$$\begin{aligned} & \alpha'(\phi_{i+1,j} - 2\bar{\phi}_{ij} + \phi_{i-1,j}^+) + \gamma'(\bar{\phi}_{ij+1} - 2\bar{\phi}_{ij} + \bar{\phi}_{ij-1}) \\ & - \beta'(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}^+ - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}^+) \\ & + Q^*(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}^+) + R^*(\bar{\phi}_{ij+1} - \bar{\phi}_{ij-1}) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & \alpha'[Z_{i+1,j} - 2\bar{Z}_{ij} + Z_{i-1,j}^+] + \gamma'[\bar{Z}_{ij+1} - 2\bar{Z}_{ij} + \bar{Z}_{ij-1}] \\ & - \beta'[Z_{i+1,j+1} - Z_{i-1,j+1}^+ - Z_{i+1,j-1} + Z_{i-1,j-1}^+] \\ & + Q^*[Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j}^+] + R^*(\bar{Z}_{ij+1} - \bar{Z}_{ij-1}) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Et de la même façon que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma' - R^*)}{\omega} CF_{ij-1} - 2\frac{(\alpha' + \gamma')}{\omega} CF_{ij} + \frac{(\gamma' + R^*)}{\omega} CF_{i,j+1} &= -RF_{ij} - \alpha'CF_{i-1,j} \\ & - \beta'(CF_{i-1,j+1} - CF_{i-1,j-1}) \\ & + Q^*CF_{i-1,j} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & \frac{(\gamma' - R^*)}{\omega} CZ_{ij-1} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CZ_{ij} + \frac{(\gamma' + R^*)}{\omega} CZ_{i,j+1} = -RZ_{ij} - \alpha'CZ_{i-1,j} \\ & - \beta'[CZ_{i-1,j+1} - CZ_{i-1,j-1}] \\ & + Q^*CZ_{i-1,j} \end{aligned} \quad (40)$$

et où les variables sont définies à la section précédente.

Les constantes du système tridiagonal sont alors:

$$A_i = (\gamma' - R^*)/\omega \quad (41)$$

$$B_i = -2(\alpha' + \gamma')/\omega \quad (42)$$

$$C_i = (\gamma' + R^*)/\omega \quad (43)$$

$$D_i = -RF_{i,j} - \alpha'CF_{i-1,j} - \beta'(CF_{i-1,j+1} - CF_{i-1,j-1}) + Q^* CF_{i-1,j} \quad (44)$$

$$DD_i = -RZ_{i,j} - \alpha'CZ_{i-1,j} - \beta'(CZ_{i-1,j+1} - CZ_{i-1,j-1}) + Q^* CF_{i-1,j} \quad (45)$$

4.3 S.O.R. AUX DIRECTIONS ALTERNEES

La combinaison des deux dernières méthodes (S.O.R. rangée, S.O.R. colonne) permet d'obtenir une méthode mixte appelée S.O.R. alternée. C'est une technique à deux étapes: Dans un premier temps, tout le domaine est balayé dans un sens et dans un second temps, le balayage se fait dans l'autre sens. Un cycle est donc constitué de deux balayages.

Les discrétisation des équations (15) et (16) sont donc les mêmes. (éq. (25), (26), (39) et (40))

4.4 DIRECTION DU BALAYAGE DE RELAXATION

Le taux de convergence d'une méthode de relaxation peut être grandement affecté par le sens du balayage. La valeur du choix du balayage dépendra de l'ordre de grandeur de chacun des coefficients devant les dérivées. Habituellement, on choisit le sens du balayage pour coïncider avec la direction de propagation de l'information physique. Il est donc important de tenir compte des conditions frontières ainsi que du type.

Dans le cas où le choix d'une direction de balayage n'est pas évident, il peut être avantageux d'alterner les sens du balayage.

On compare dans le présent travail l'efficacité de la méthode S.O.R. ligne avec S.O.R. aux directions alternées.

4.5 LA METHODE MULTIGRID

On résume dans cette section la description, déjà fait en réf. (1) de la méthode MULTIGRID

Cette méthode est une technique accélérant la solution de problème itératif, grâce à l'interaction entre les maillages d'une suite hiérarchique de discrétisation du domaine. Elle accélère la convergence des techniques de relaxations déjà vu dans la section précédente.

C'est Brandt réf. (6) qui l'introduisit le premier; Camarero donne en réf. (7) une description utile à la mise au point d'un programme sur ordinateur.

La méthode multigrid comprend essentiellement deux éléments; d'abord le lissage de la solution sur le maillage fin, c'est-à-dire l'élimination dans l'erreur des composantes à hautes fréquences (dont la longueur d'onde correspond à l'ordre de grandeur du maillage); et ensuite la correction de cette solution provenant de la résolution du même problème sur un maillage grossier.

La première partie se fait par une méthode de relaxation et la seconde par des interpolations des résidus.

4.6 ALGORITHME

- 1) Chercher une solution initiale sur le maillage fin G^M

$$(u_f^M, u_z^M)$$

- 2) Lisser la solution et calculer le résidu sur le maillage fin G^M

$$L^M(uf^M, uz^M)$$

- 3) Résoudre l'équation résiduelle sur le maillage le plus grossier G^0

$$L^0(uf^0, uz^0) = \tilde{F}^0$$

on prend comme solution de départ

$$(uf^0, uz^0) = I_M^0(uf^M, uz^M)$$

$$\text{et } \tilde{F}^0 = I_M^0 L^M(uf^M, uz^M) - L^0(I_M^0 uf^M, I_M^0 uz^M)$$

- 4) quand le résidu de $L^D(uf^0, uz^0)$ est suffisamment bas (convergence asymptotique) interpoler la solution sur le maillage suivant, on l'utilise ainsi comme solution de départ pour ce nouveau maillage.

$$(uf^K, uz^K) = I_0^K(uf^0, uz^0)$$

- 5) Préparer les paramètres pour le nouveau maillage G^K

$$K = K+1$$

- 6) Calculer le résidu de (uf^M, uz^M) sur G^{K+1} et obtenir le terme forcé.

$$\tilde{F}^K = I_M^K L^M(uf^M, uz^M) - L^K(I_M^K uf^M, I_M^K uz^M)$$

- 7) Utilisant la solution de l'étape précédente comme point de départ, solutionner

$$L^K(uf^K, uz^K) = \tilde{F}^K$$

8) quand (uf^K, uz^K) est obtenue avec suffisamment de précision, on l'interpole sur le maillage suivant.

9) reprendre les étapes 5 à 8, jusqu'à une solution acceptable.

4.7 EQUATION DE CORRECTION POUR S.O.R. RANGEE AVEC MULTIGRID

La discrétisation et le réarrangement des équations (13) et (14) pour la méthode de multigrid, se fait de la même façon que pour le S.O.R. ligne (rangée ou colonne). Cependant, un terme forcé apparaît dans le membre de droite à cause de l'interaction entre les maillages.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\alpha' - Q^*)}{\omega} CF_{i-1,j} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CF_{ij} + \frac{(\alpha' + Q^*)}{\omega} CF_{i+1,j} \\
 &= FF_{ij} - RF_{ij} - \gamma' CF_{ij-1} \\
 & \quad - \beta' (CF_{i+1,j-1} - CF_{i-1,j-1}) \\
 & \quad + R^* CF_{ij-1}
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\alpha' - Q^*)}{\omega} CZ_{i-1,j} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CZ_{ij} + \frac{(\alpha' + Q^*)}{\omega} CZ_{i+1,j} \\
 &= FZ_{ij} - RZ_{ij} - \gamma' CZ_{ij-1} \\
 & \quad - \beta' (CF_{i+1,j-1} - CF_{i-1,j-1}) \\
 & \quad + R^* CZ_{ij-1}
 \end{aligned} \tag{47}$$

où les termes forcés sont:

$$FF_{ij} = -I_M^K L^M (UF^M) + L^K (I_M^K UF^M) \tag{48}$$

$$FZ_{ij} = -I_M^K L^M (UZ^M) + L^K (I_M^K UZ^M) \tag{49}$$

Les autres variables ont déjà été définies précédemment.

4.8 EQUATION DE CORRECTION POUR S.O.R. COLONNE AVEC MULTIGRID

De la même manière on a pour S.O.R. par colonne avec Multigrid les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\gamma' - R^*)}{\omega} CF_{ij-1} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CF_{ij} + \frac{(\gamma' + R^*)}{\omega} CF_{i,j+1} \\
 & = FF_{ij} - RF_{ij} - \alpha' CF_{i-1,j} \\
 & \quad - \beta' (CF_{i-1,j+1} - CF_{i-1,j-1}) \\
 & \quad + Q^* CF_{i-1,j}
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\gamma' - R^*)}{\omega} CZ_{ij-1} - \frac{2(\alpha' + \gamma')}{\omega} CZ_{ij} + \frac{(\gamma' + R^*)}{\omega} CZ_{i,j+1} \\
 & = FZ_{ij} - RZ_{ij} - \alpha' CZ_{i-1,j} \\
 & \quad - \beta' (CZ_{i-1,j+1} - CZ_{i-1,j-1}) \\
 & \quad + Q^* CZ_{i-1,j}
 \end{aligned} \tag{51}$$

4.9 S.O.R. AUX DIRECTIONS ALTERNÉES AVEC MULTIGRID

Similairement à la méthode S.O.R. aux directions alternées sans multigrid, cette technique s'exécute en deux temps. En fait, ce n'est que le principe itératif qui est à deux pas. Ainsi chaque relaxation requiert un balayage du domaine dans les deux sens. L'algorithme du multigrid, lui, reste le même.

4.10 STRATEGIE

L'efficacité de l'utilisation de la méthode multigrid réside en grande partie dans le choix de la stratégie (i.e. le nombre de niveaux et le nombre de relaxations par niveau).

D'abord on a choisit, pour chaque solution, le nombre maximum de niveaux permissible. Ce nombre dépend surtout de la quantité de noeuds dans le domaine.

Ensuite, on utilise un certain nombre de relaxations sur chaque niveau. Ici il est possible de trouver un très grand nombre de combinaisons. Dans le but de simplifier et de permettre une automatisation future du procédé, on a utilisé un nombre de relaxations constant par stratégie; soit 6, 4 ou 2 relaxations par niveau.

Les résultats ont démontré que la plupart du temps, le fait de travailler avec 6 ou 4 relaxations par niveau ne faisait qu'accroître le travail sans diminuer favorablement le résidu.

Il en ressort donc qu'ici, la meilleure utilisation du multigrid se fait avec une stratégie aussi simple que deux relaxations par niveau.

5. APPLICATION

La transformation de coordonnées décrite en section 2 offre la possibilité de concentrer le maillage suivant des fonctions de distribution désirées.

Ces fonctions, $\psi = \psi(\eta)$ et $\xi = \xi(\tau)$, agissent respectivement sur les lignes de coordonnées η et τ , distribuant ainsi les points du maillage selon la forme choisit. On a utilisé ici cette technique pour construire des maillages adaptées à des cascades. Dans ce cas bien particulier, on a besoin de raffiner le maillage le long des frontières, dans les régions du bord d'attaque et du bord de fuite fig. (8).

On a réalisé ces concentrations en combinant adéquatement des fonctions cubiques. D'autres types de fonctions auraient pu être utilisés, mais celles-ci ont démontré certaines qualités nécessaires à la manipulation: (fig. 9)

- l'antisymetrie facile à obtenir.
- un seul paramètre permettant de contrôler la courbure de la fonction.
- facilement dérivable.

La forme générale de la cubique employée est:

$$(y-y_0) = \frac{(1-C)}{D^2} (x-x_0)^3 + C(x-x_0) \quad (52)$$

où

y est la variable dépendante, soit ψ ou ξ

y_0 l'ordonnée à l'origine

x la variable indépendante, soit η ou τ

x_0 l'abscisse à l'origine

C le paramètre contrôlant la courbure $1 \leq C \leq 1.5$

D distance entre l'origine et la borne supérieure ou inférieure (selon le cas).

La fig. (10) représente des fonctions cubiques pour différents paramètres C . Comme on désire un changement de distribution et non un changement d'échelle ou de borne, on a donc

$$y_0 = x_0 \quad (53)$$

Ainsi en appliquant cette formule à la cascade de la fig. (8), on a les données suivantes.

1. On emploie sur la frontière transversale à l'écoulement, une cubique complète pour ainsi concentrer les lignes τ le long des frontières parallèles à l'écoulement.

$$x_0 = y_0 = 0 \quad (54)$$

$$D = \frac{N-1}{2}$$

2. a) on utilise ici, sur la première partie de la frontière parallèle à l'écoulement, une moitié positive de la cubique pour concentrer les lignes η vers le bord d'attaque.

$$x_0 = y_0 = 0 \quad (55)$$

$$D = MLE$$

2. b) Sur le profil, on utilise une cubique complète pour concentrer les lignes η vers le bord d'attaque et vers le bord de fuite.

$$x_0 = y_0 = MLE + \frac{NP-1}{2}$$

$$D = \frac{NP-1}{2}$$
(56)

2. c) Sur la dernière partie de la frontière parallèle à l'écoulement, on utilise une moitié négative de la cubique pour concentrer les lignes η vers le bord de fuite.

$$x_0 = y_0 = MTE-1$$

$$D = M-MTE$$
(57)

Pour les calculs servant aux comparaisons des méthodes numériques, le paramètre "C" était égal à 1.0, c'est-à-dire aucune concentration des coordonnées. Cela correspond à des termes Q^* et R^* nulles.

Les figures (11) montrent différentes concentrations de maillage. On peut comparer avec la fig.(10), pour laquelle il n'y a pas de concentration.

Cette technique de raffinement du maillage permet donc de bien mouler la frontière du domaine. On remarque sur les fig. (11) que l'effet des paramètres de concentration (C1 et C2) est proportionnel et facile à prévoir avec un peu d'expérience.

En plus de s'implanter facilement sur ordinateur, cette méthode peut s'adapter rapidement à un programme de maillage utilisant déjà la méthode de Thompson (TTM). En général, les résultats pour des cascades permettent de croire au succès de l'utilisation de cette méthode pour des géométries encore plus complexes.

6. RESULTATS ET CONCLUSIONS

L'étude comparative a porté sur les 4 méthodes de relaxations décrites dans ce rapport:

- 1) Surrelaxation par ligne
- 2) Surrelaxation aux directions alternées
- 3) Multigrid par ligne
- 4) Multigrid aux directions alternées

il s'agit d'en évaluer le rendement en fonction d'un certain nombre de paramètres tels que le facteur de surrelaxation, la stratégie du Multigrid et le nombre de noeuds dans le domaine.

Toutes les comparaisons sont basées sur des courbes de rendements; i.e. la précision des résultats en fonction du travail (ou du nombre de calculs) pour obtenir cette précision.

La précision des résultats est donnée par une moyenne quadratique des résidus sur le domaine entier. Et l'unité de travail est définie par le temps nécessaire pour exécuter une relaxation complète (dans une direction) sur tout le domaine.

Les comparaisons ont été effectuées sur les maillages suivant:

- a) 65×17 (1105 noeuds)
- b) 33×9 (297 noeuds)
- c) 33×17 (561 noeuds)

Dans un premier temps, on varie le facteur de surrelaxation afin d'en trouver sa valeur optimum. Ceci est effectué pour chacune des deux premières méthodes. La valeur optimum est choisie en comparant les courbes de rendements (ou historique de la relaxation).

Ensuite on reprend le calcul des maillages en utilisant les méthodes Multigrid. Cette fois, il s'agit de déterminer la meilleure stratégie (Nombre de niveaux, nombre de relaxations par niveau) pour chaque méthode et par la suite, la meilleure méthode.

On trouve aux figures (12) les rendements des méthodes de sur-relaxation par ligne et aux directions alternées utilisant différents facteurs de surrelaxation. Aux figures (13), on représente les rendements des méthodes multigrid employant différentes stratégies.

On compare aux figures (14) les solutions optimales de chaque méthode. On y remarque d'abord que la surrelaxation aux directions alternées est plus efficace que la surrelaxation par ligne. Comme la mise en oeuvre de ces deux méthodes est à peu près la même, on peut donc considérer comme plus avantageuse l'utilisation des directions alternées. Aussi on y note que les méthodes multigrid sont les plus efficaces.

Et de plus, la méthode de multigrid aux directions alternées surpassent toutes les autres méthodes. La supériorité des directions alternées s'explique en bonne part par le fait que chaque point intérieur du domaine perçoit plus rapidement l'effet bi-dimensionnel des conditions frontières.

Malgré une implantation sur ordinateur plus complexe, la méthode multigrid demeure une méthode itérative plus puissante.

REFERENCES

1. Camarero, R., Younis, M. "Generation of Body-Fitted Coordinates for Turbines Cascades Using Multigrid", Proceeding of I.S.B.E. IV, April 1-6, 1979, Orlando, Florida.
2. Thompson, J.F. "Numerical Solution of Flow Problems using Body-Fitted Coordinate Systems", Lecture Notes V.K.I series, 1978-4.
3. Ghia, U., Ghia, K.N. "Numerical Generation of a System of Curvilinear Coordinate for Turbine Cascade Flow Analysis", Report No. AFL75-4-17, University of Cincinnati, April 1975.
4. Sorenson, R.L., Steger, J.L. "Simplified Clustering of Nonorthogonal Grids Generated by Elliptic Partial Differential Equations", NASA TM73252, 1977.
5. Thomas, P.P., Middlecoff, J.F. "Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations", AIAA Journal, Volume 8, No. 6, June 1980.
6. Brandt, A. "Multi Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems" IBM Research Report RC-6026, 1976.
7. Camarero, R. "A Software Package for Multigrid Method", Ecole Polytechnique, Montreal, No. EP79-R, 1979.
8. Pelletier, D., Camarero, R. "Application de la méthode multigrid à la solution des équations de Navier Stokes", Rapport Technique EP80-R-18, Avril 1980.
9. Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, W. "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary 2-D Bodies", Journal of Computational Physics, Volume 15 (1974), pp. 299-319.

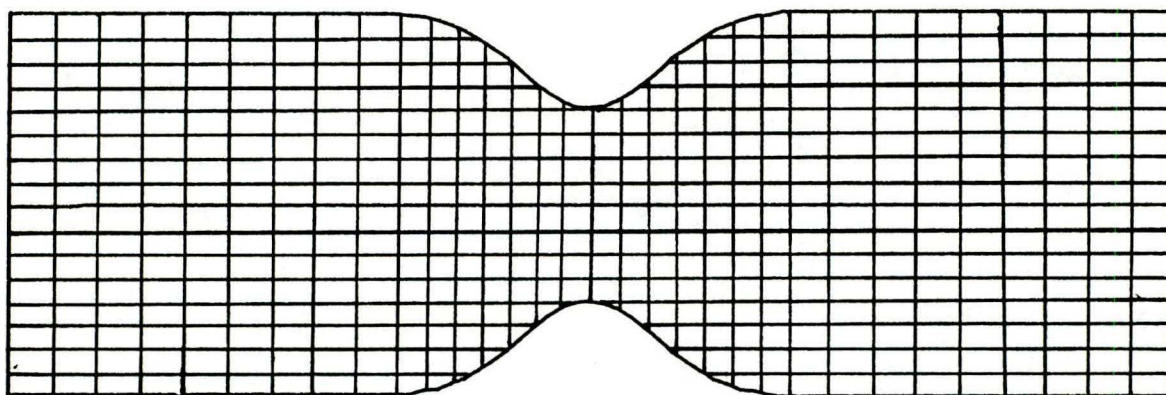


Fig. 1 Maillage rectangulaire dans une
géométrie complexe.

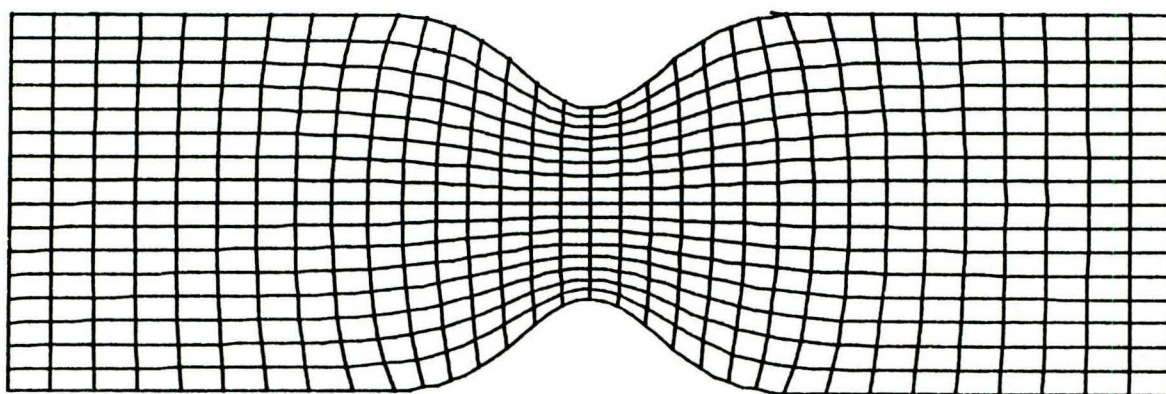


Fig. 2 Maillage adapté à la géométrie
du domaine.

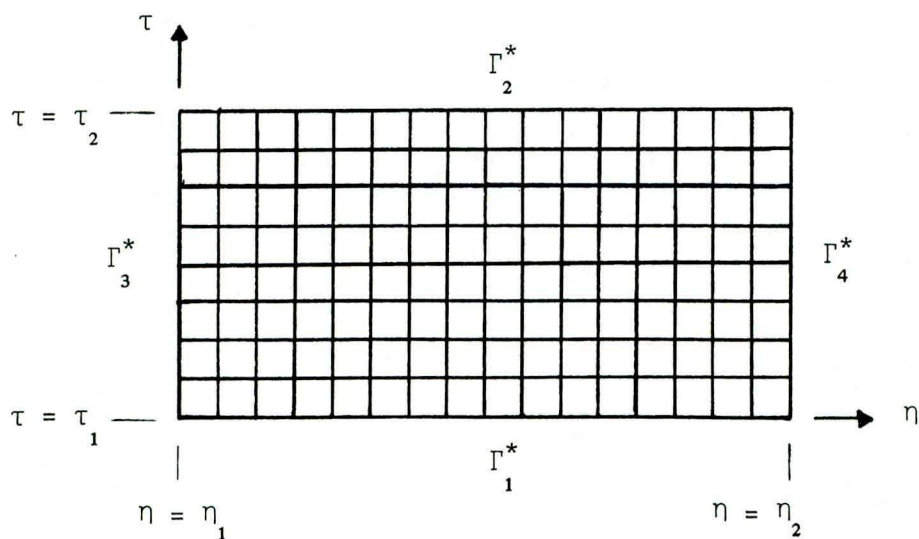
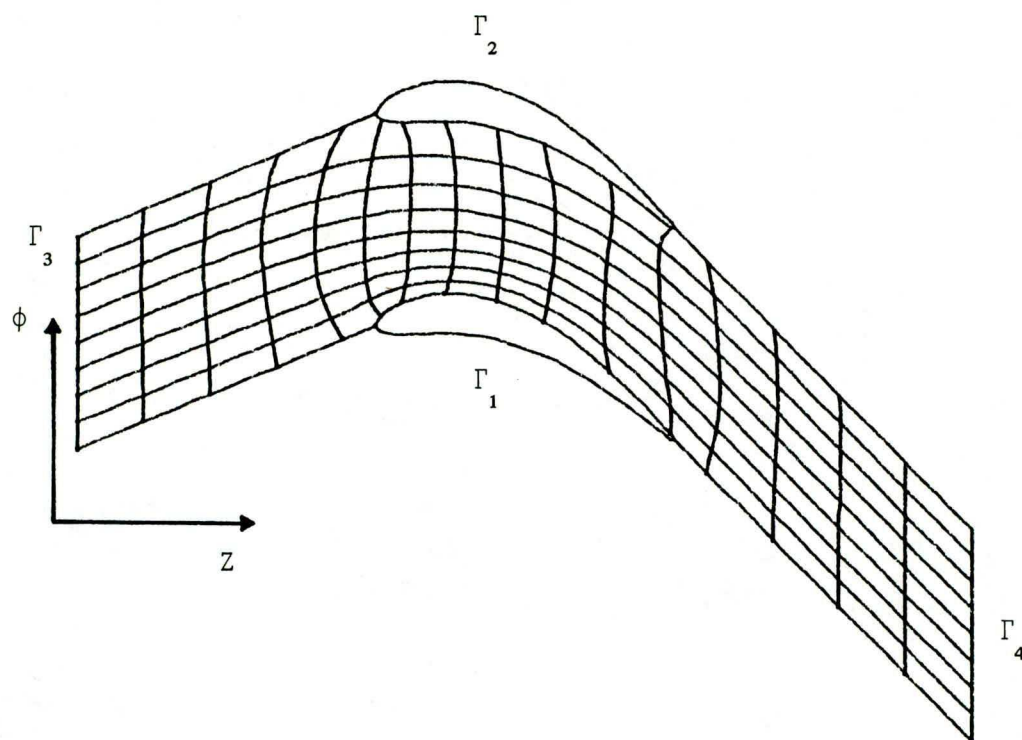


Fig. 3 Transformation d'un domaine physique complexe (Z, ϕ) par un domaine de calcul rectangulaire (η, τ) .

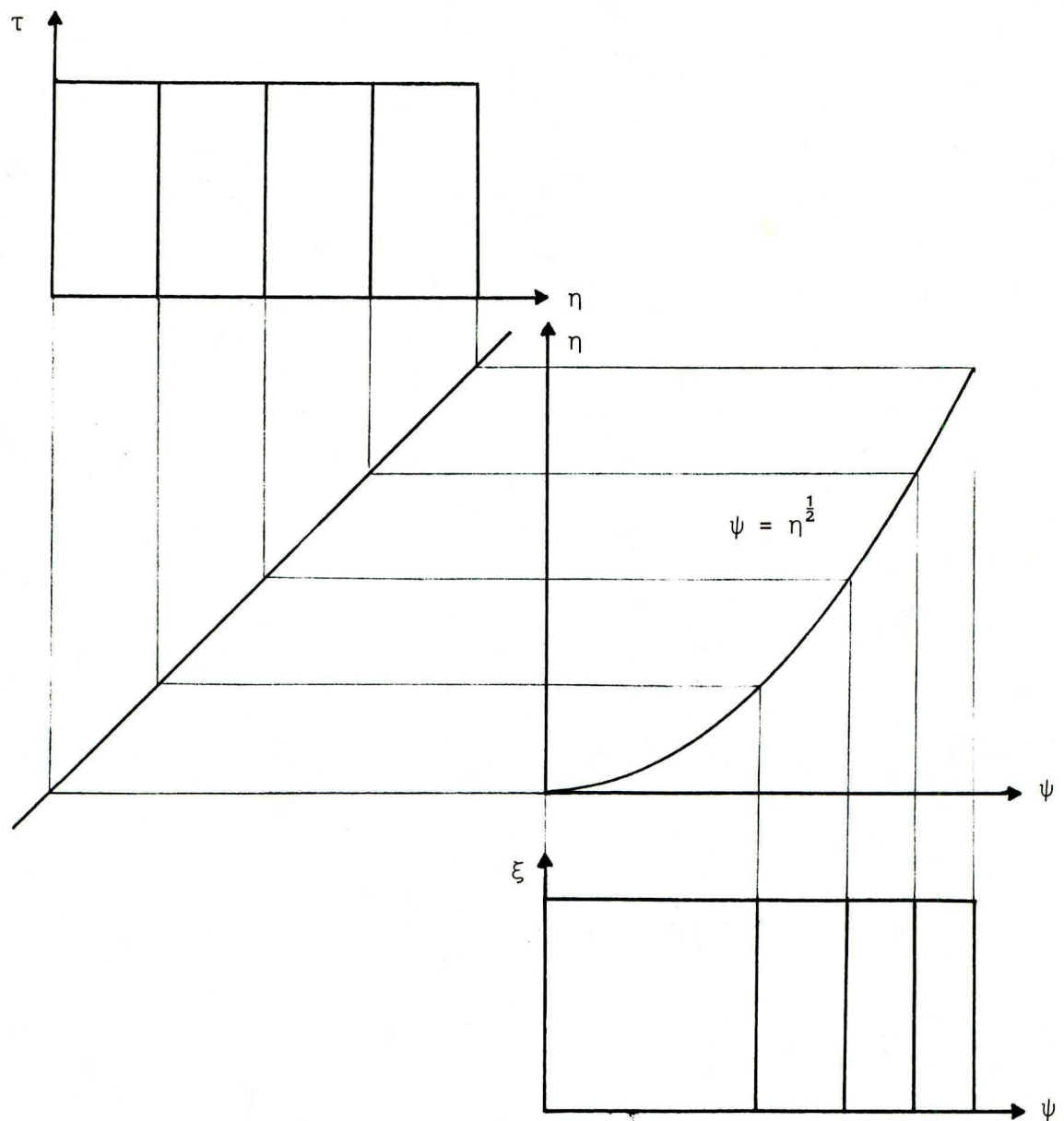


Fig. 4 Illustration d'une concentration de lignes de coordonnées selon ψ , entre deux domaines rectangulaires $((\psi, \xi) \rightarrow (\eta, \tau))$.

La fonction de concentration est
 $\psi = \psi(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}}$.

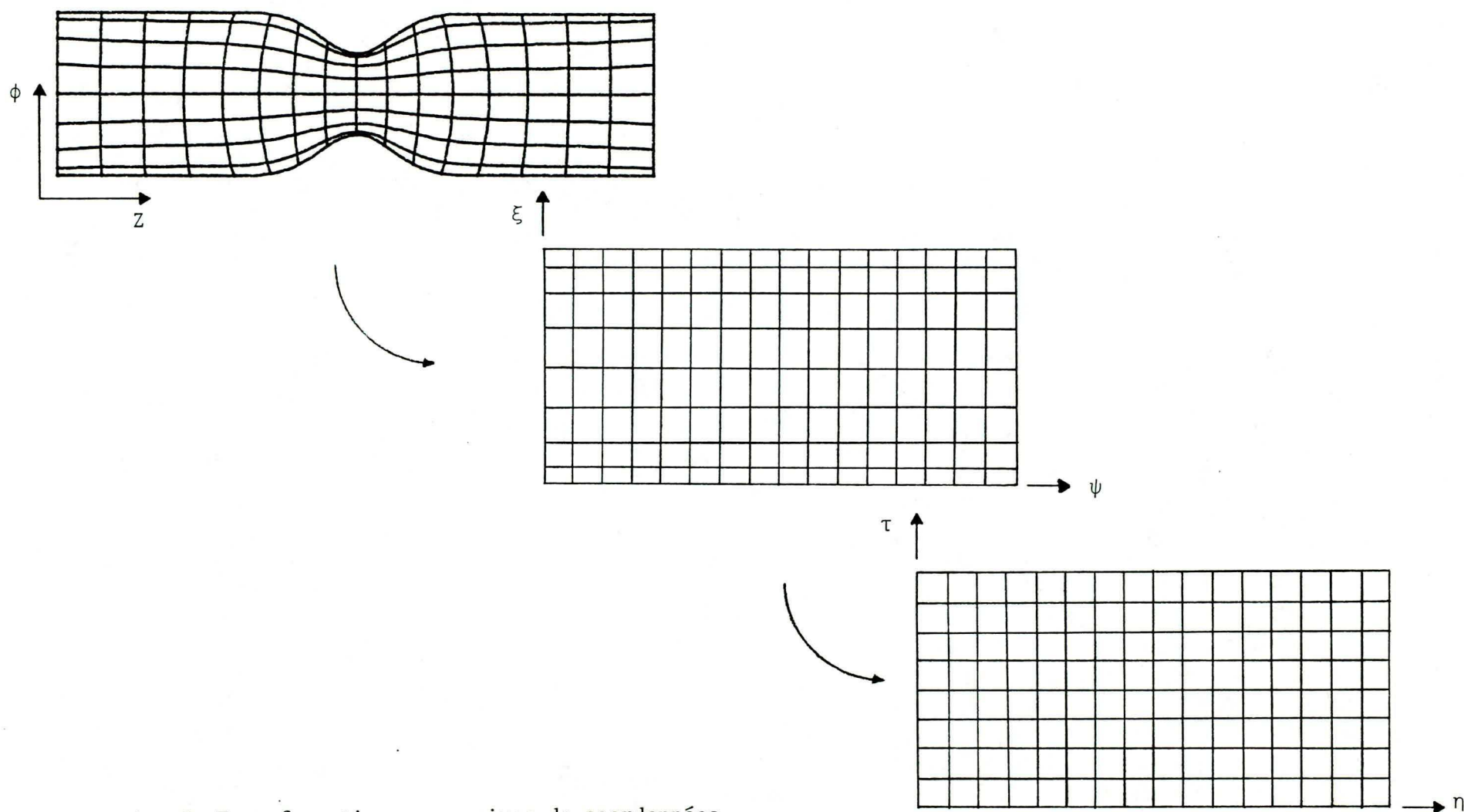


Fig. 5 Transformation successive de coordonnées
 $(Z, \phi) \rightarrow (\psi, \xi) \rightarrow (\eta, \tau)$.

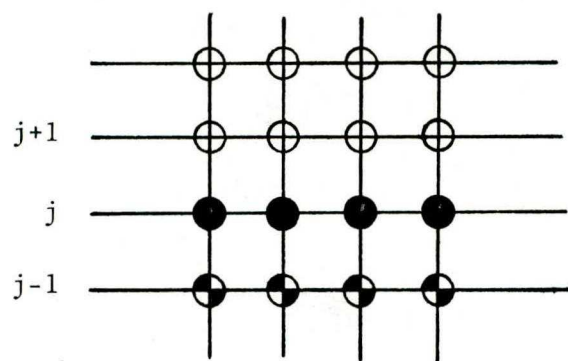


Fig. 6 Configuration d'une relaxation par rangée.

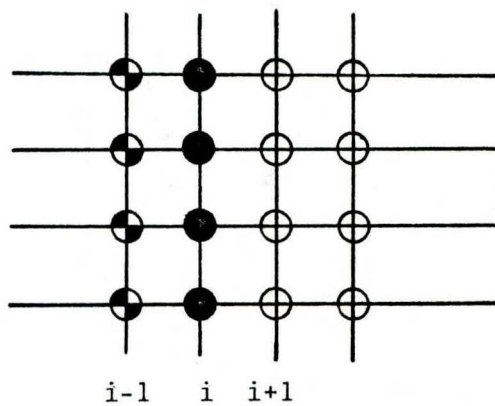


Fig. 7 Configuration d'une relaxation par colonne.

LEGENDE

-  - valeurs corrigées
-  - valeurs inconnues ou provisoires
-  - vieilles valeurs

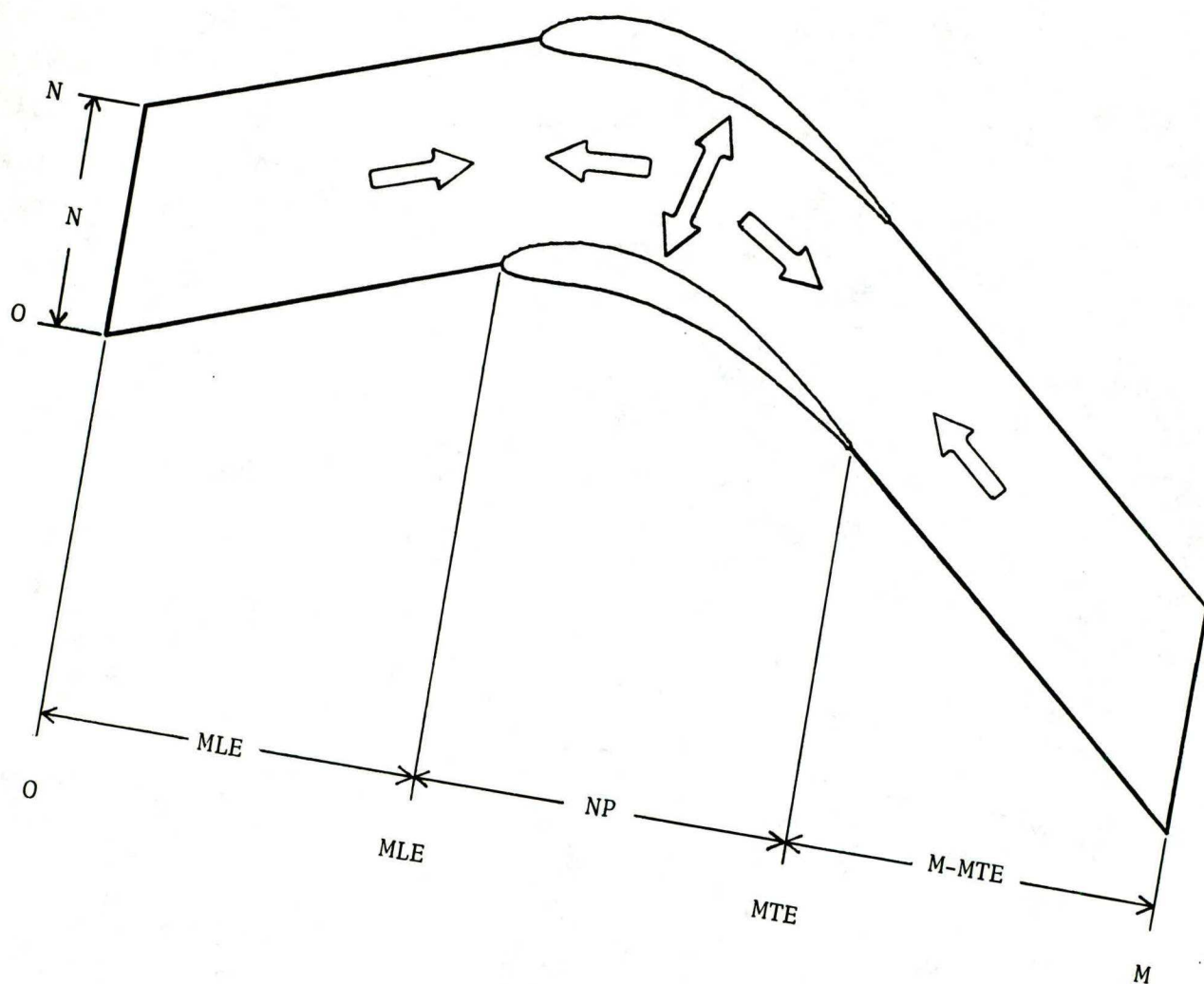


Fig. 8 Définition des régions de concentration du maillage dans une cascade.

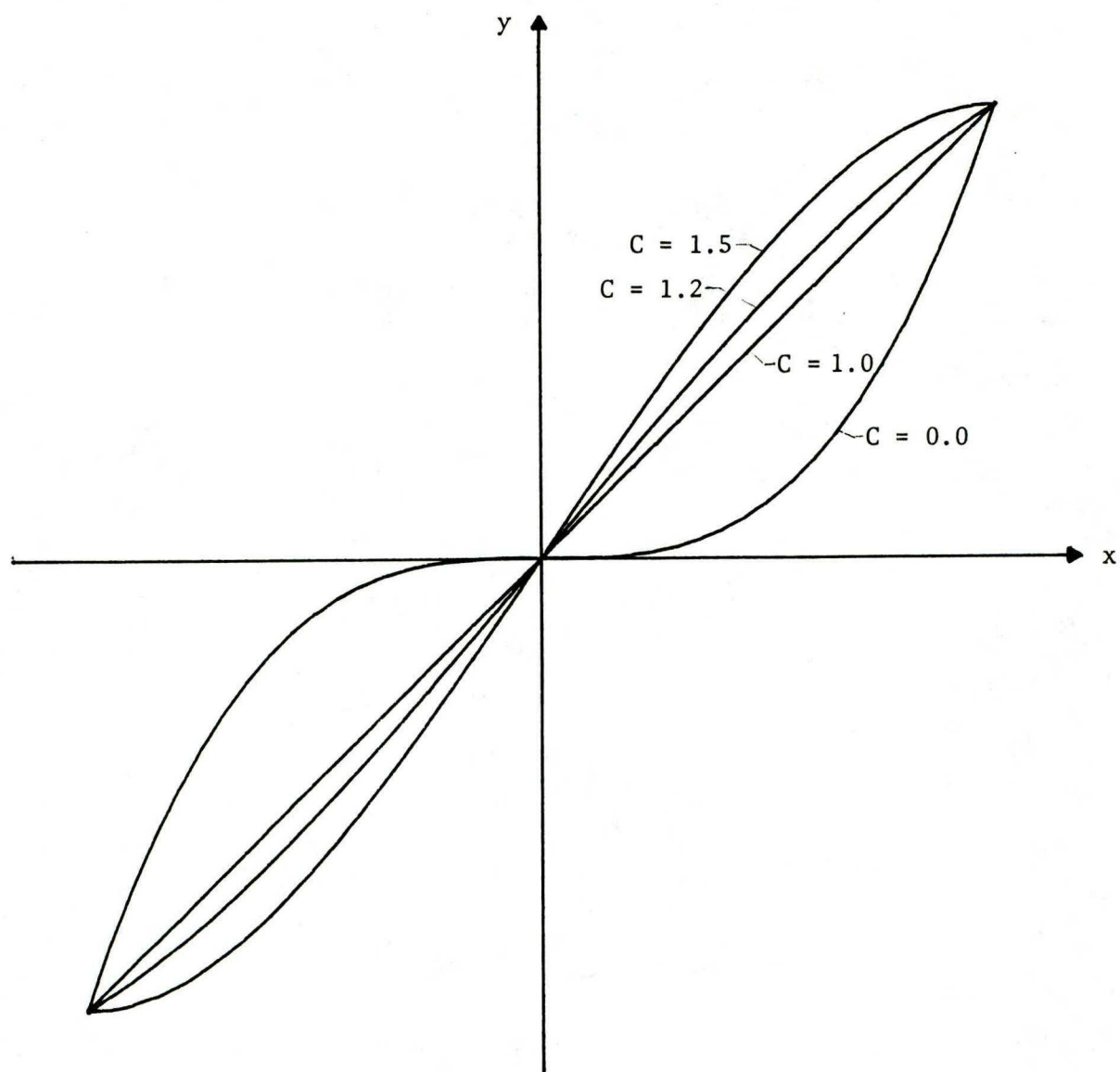


Fig. 9 Représentation d'une fonction cubique de dilatation avec différentes valeurs du paramètre "C"

$$(y-y_0) = \frac{(1-C)}{D^2} (x-x_0)^3 + C(x-x_0)$$

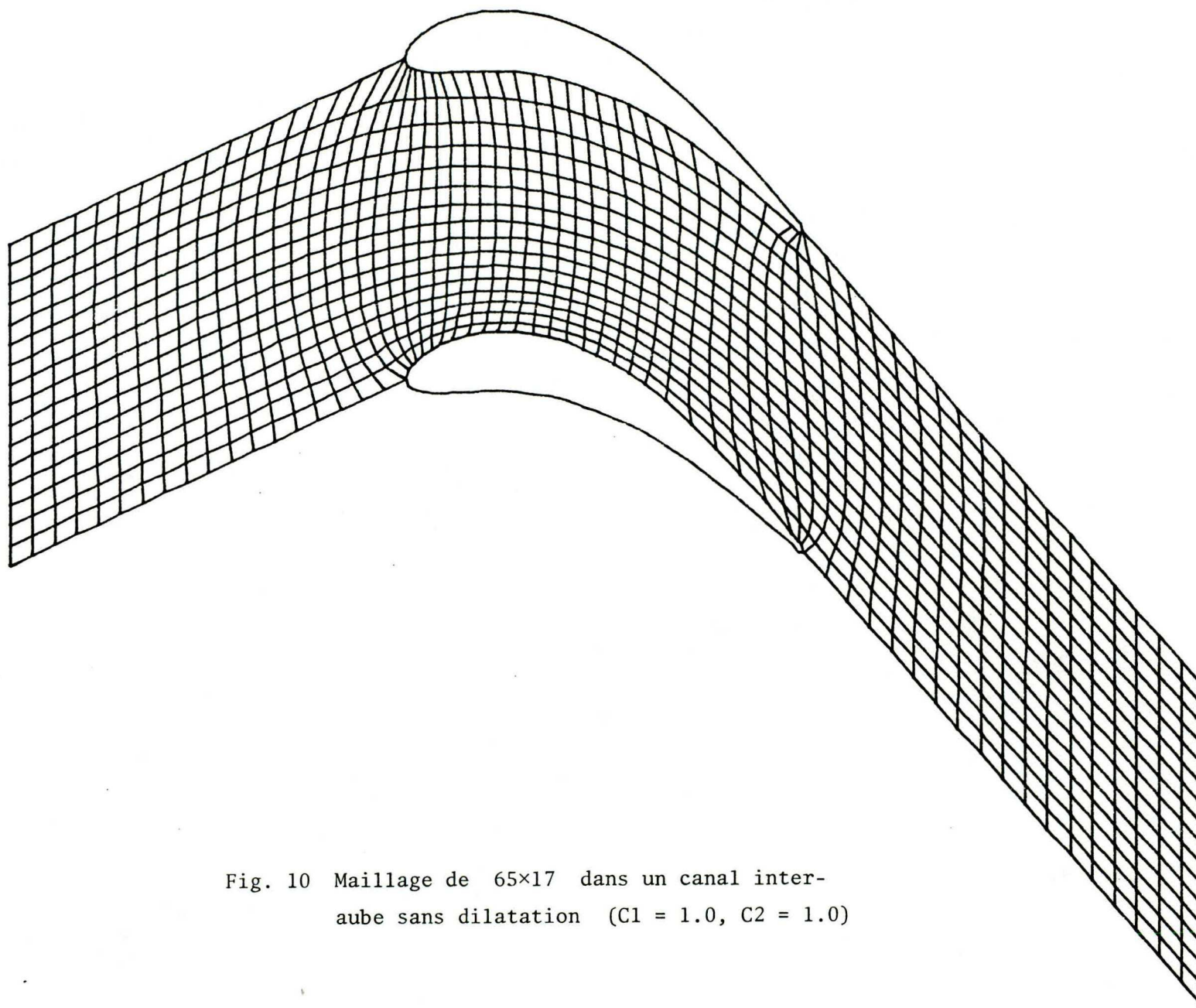


Fig. 10 Maillage de 65×17 dans un canal inter-aube sans dilatation ($C1 = 1.0$, $C2 = 1.0$)

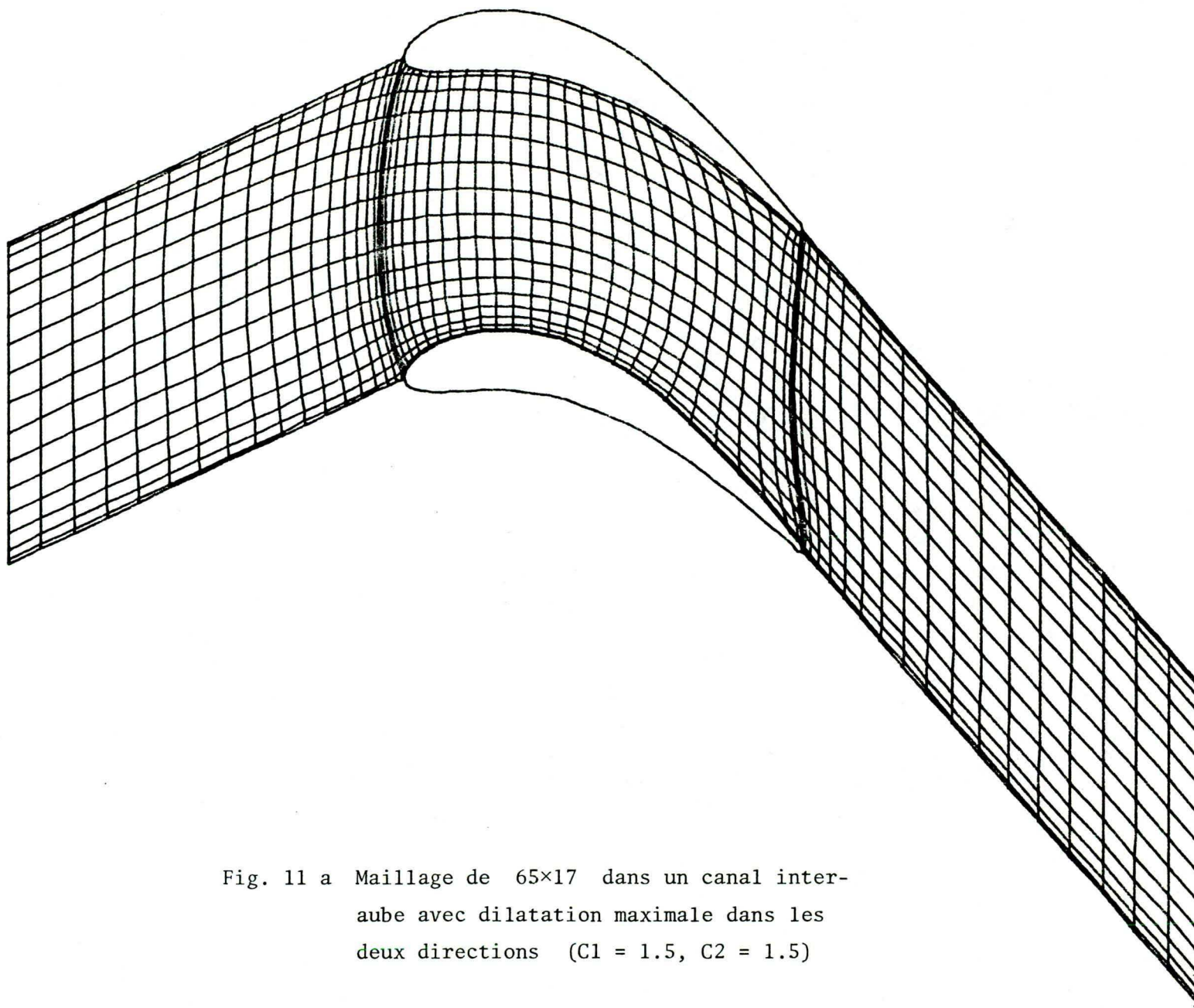


Fig. 11 a Maillage de 65×17 dans un canal inter-aube avec dilatation maximale dans les deux directions ($C1 = 1.5$, $C2 = 1.5$)

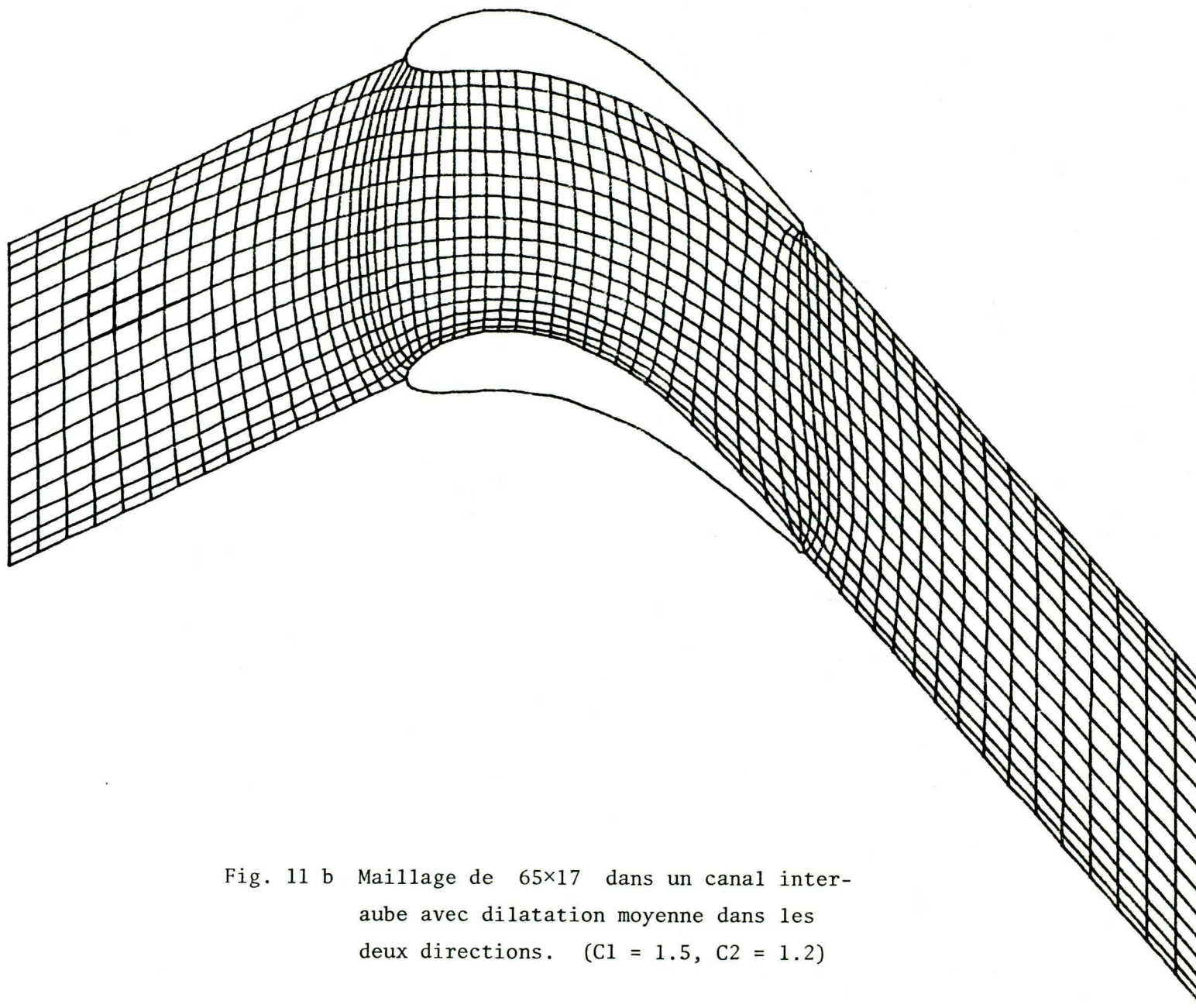


Fig. 11 b Maillage de 65×17 dans un canal inter-aube avec dilatation moyenne dans les deux directions. ($C1 = 1.5$, $C2 = 1.2$)

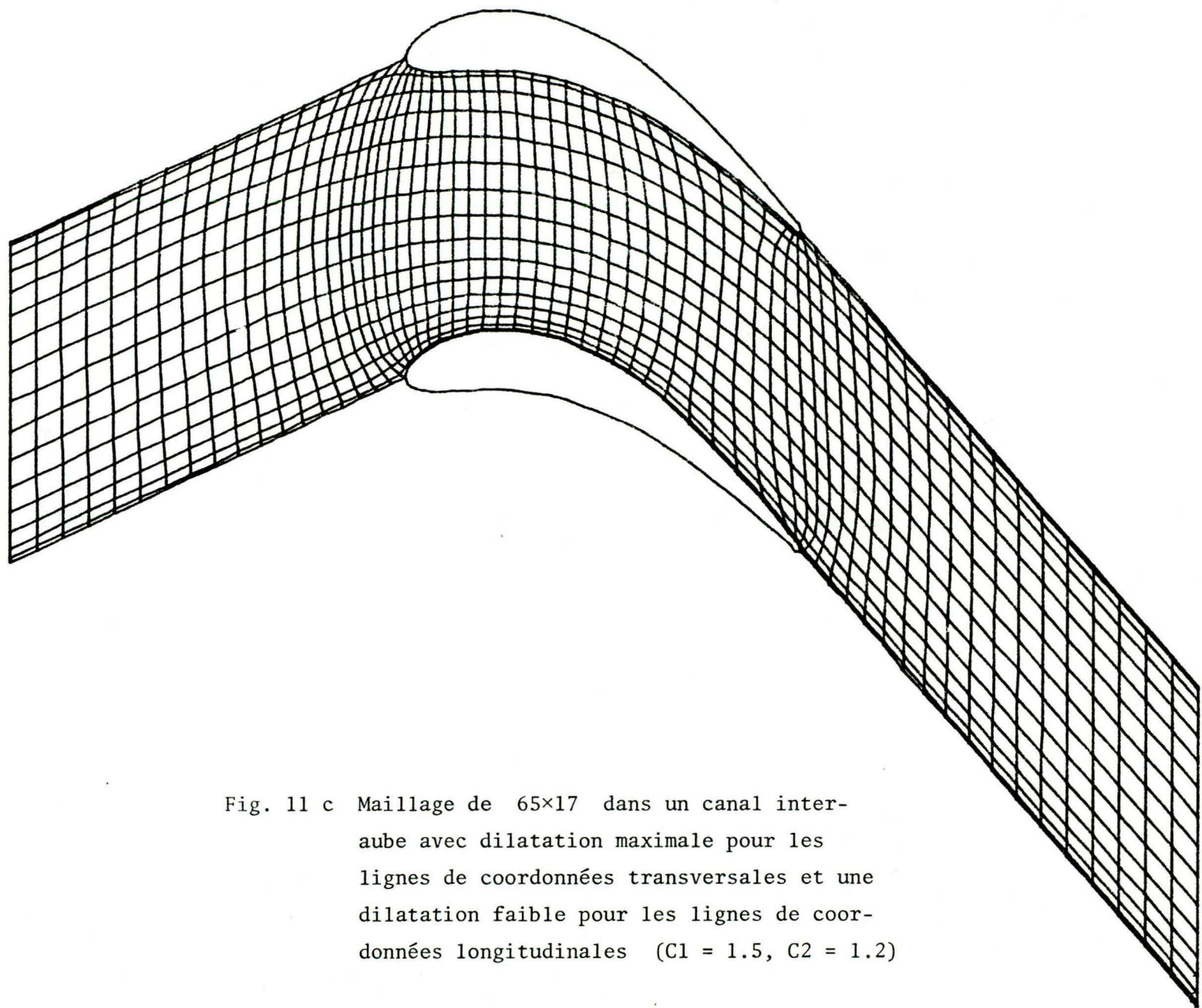


Fig. 11 c Maillage de 65×17 dans un canal inter-aube avec dilatation maximale pour les lignes de coordonnées transversales et une dilatation faible pour les lignes de coordonnées longitudinales ($C1 = 1.5$, $C2 = 1.2$)

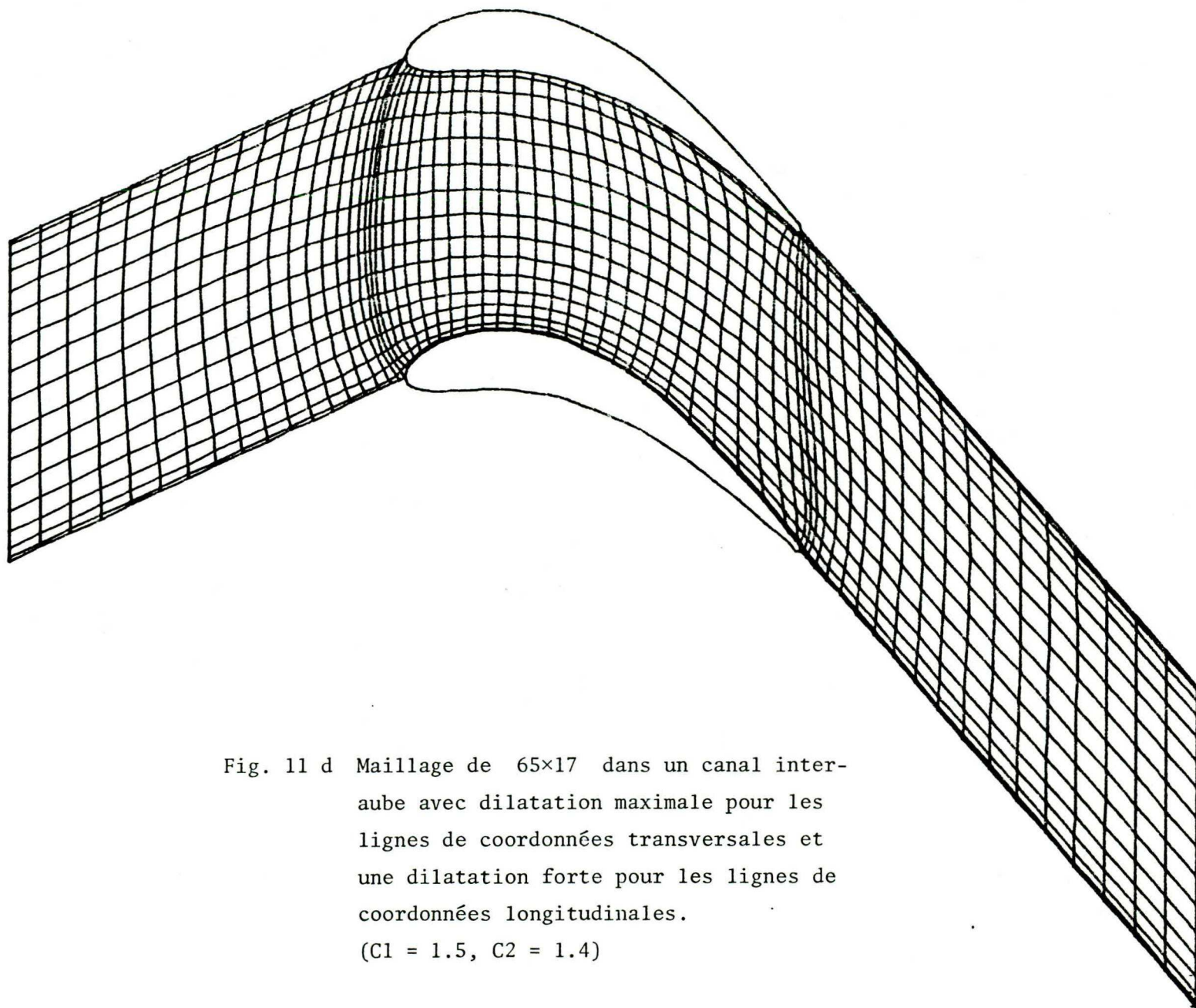


Fig. 11 d Maillage de 65×17 dans un canal inter-aube avec dilatation maximale pour les lignes de coordonnées transversales et une dilatation forte pour les lignes de coordonnées longitudinales.
($C1 = 1.5$, $C2 = 1.4$)

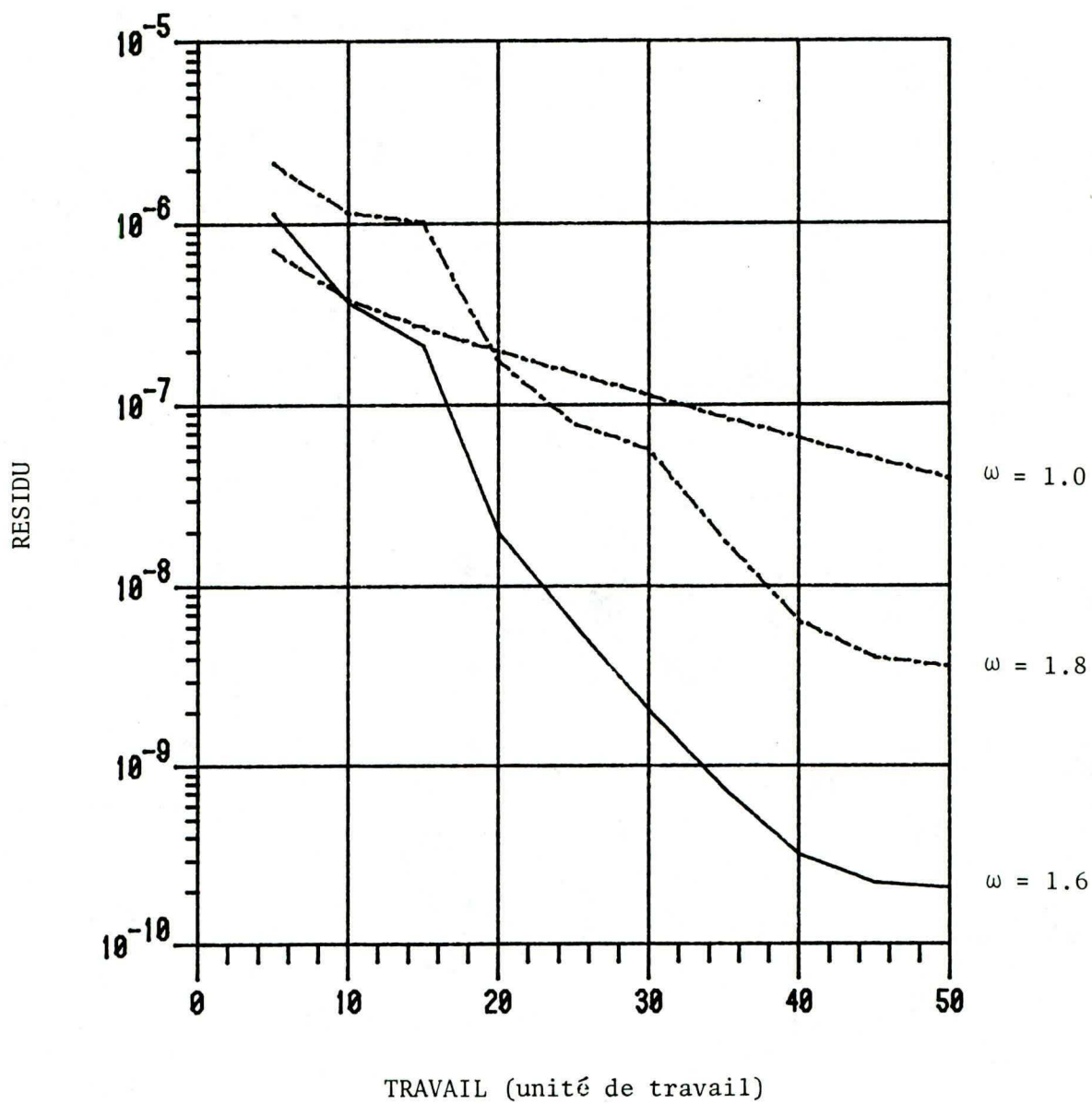
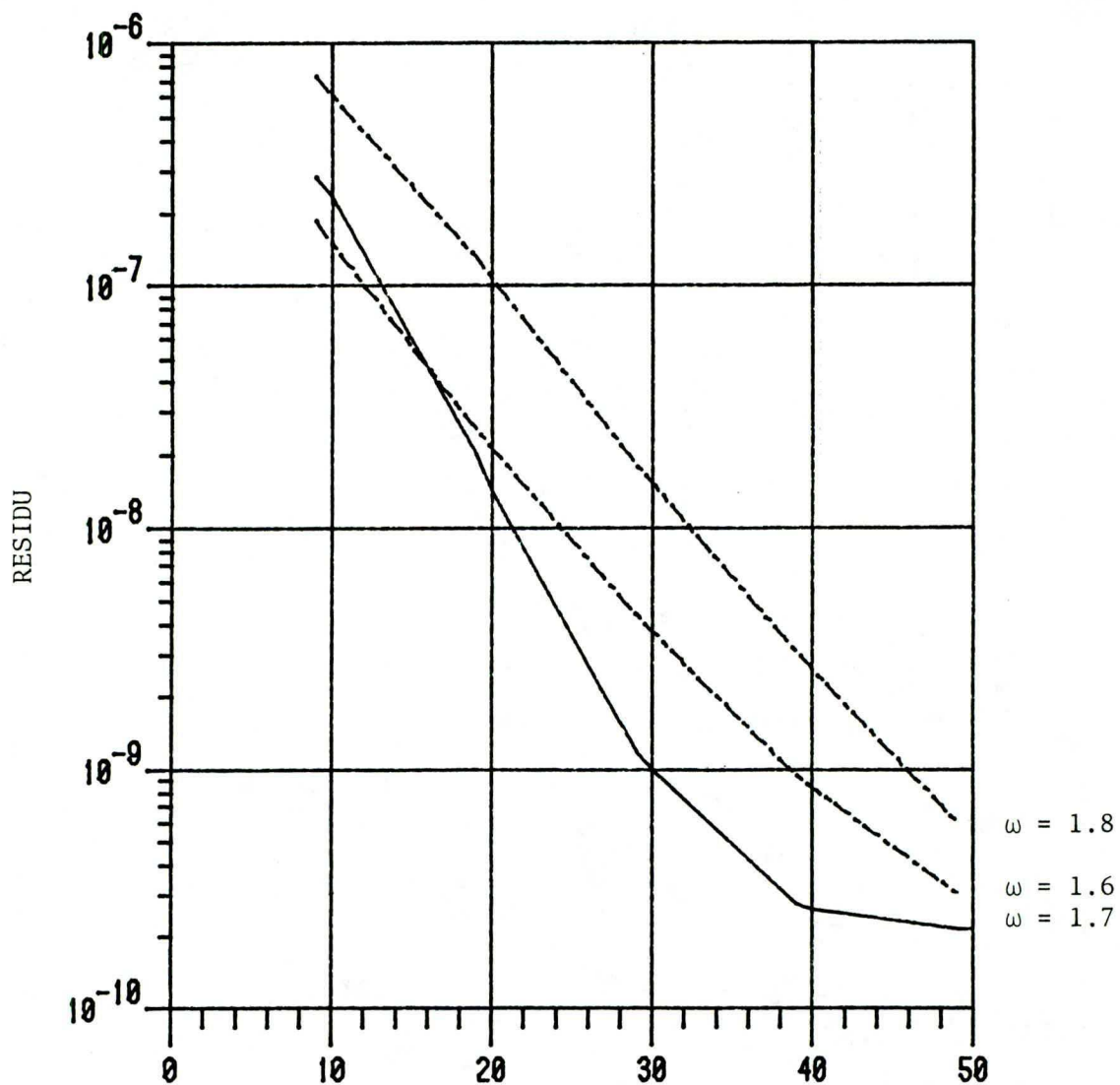


Fig. 12 a Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Solution par S.O.R. Ligne.

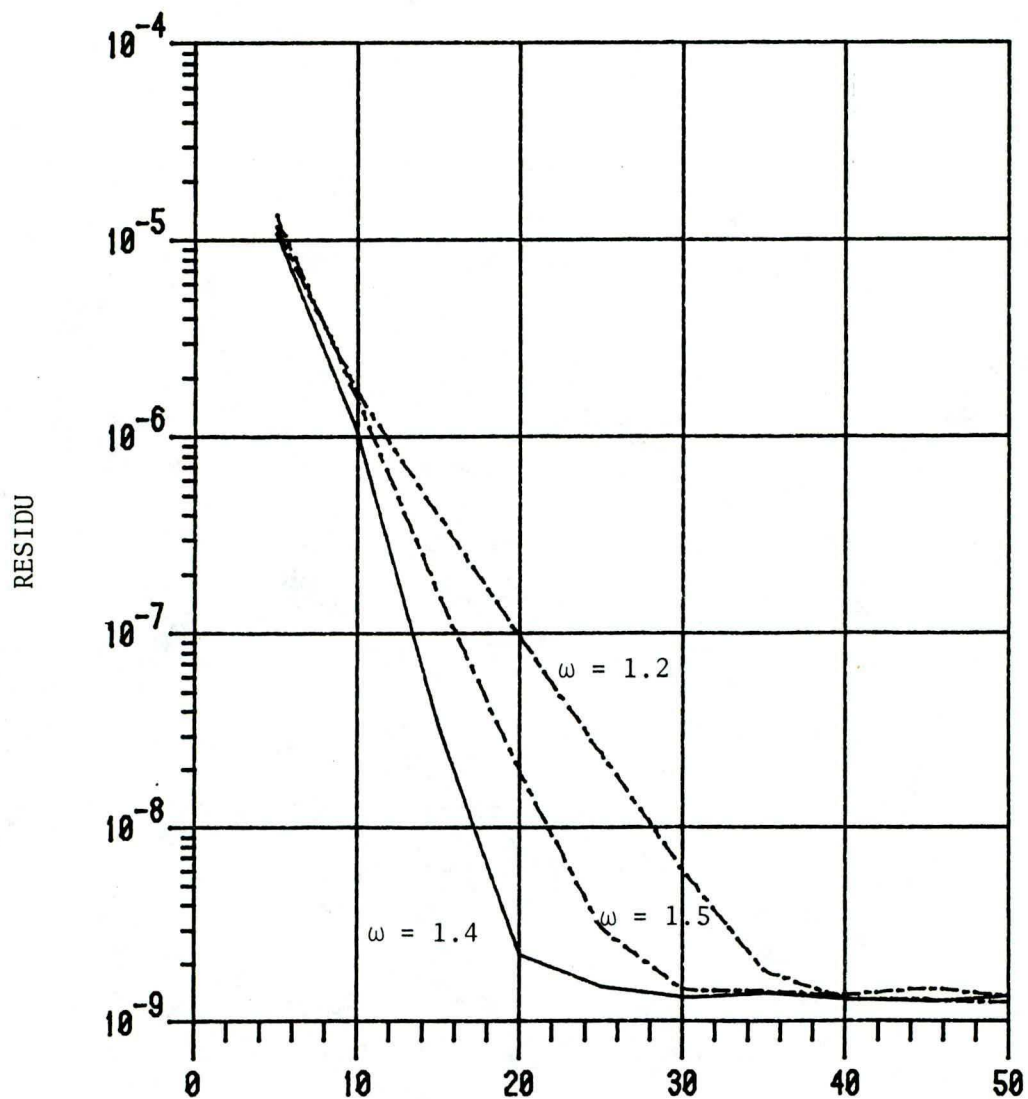


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 12 b Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Maillage de 65×17

Solution par S.O.R. aux directions alternées.

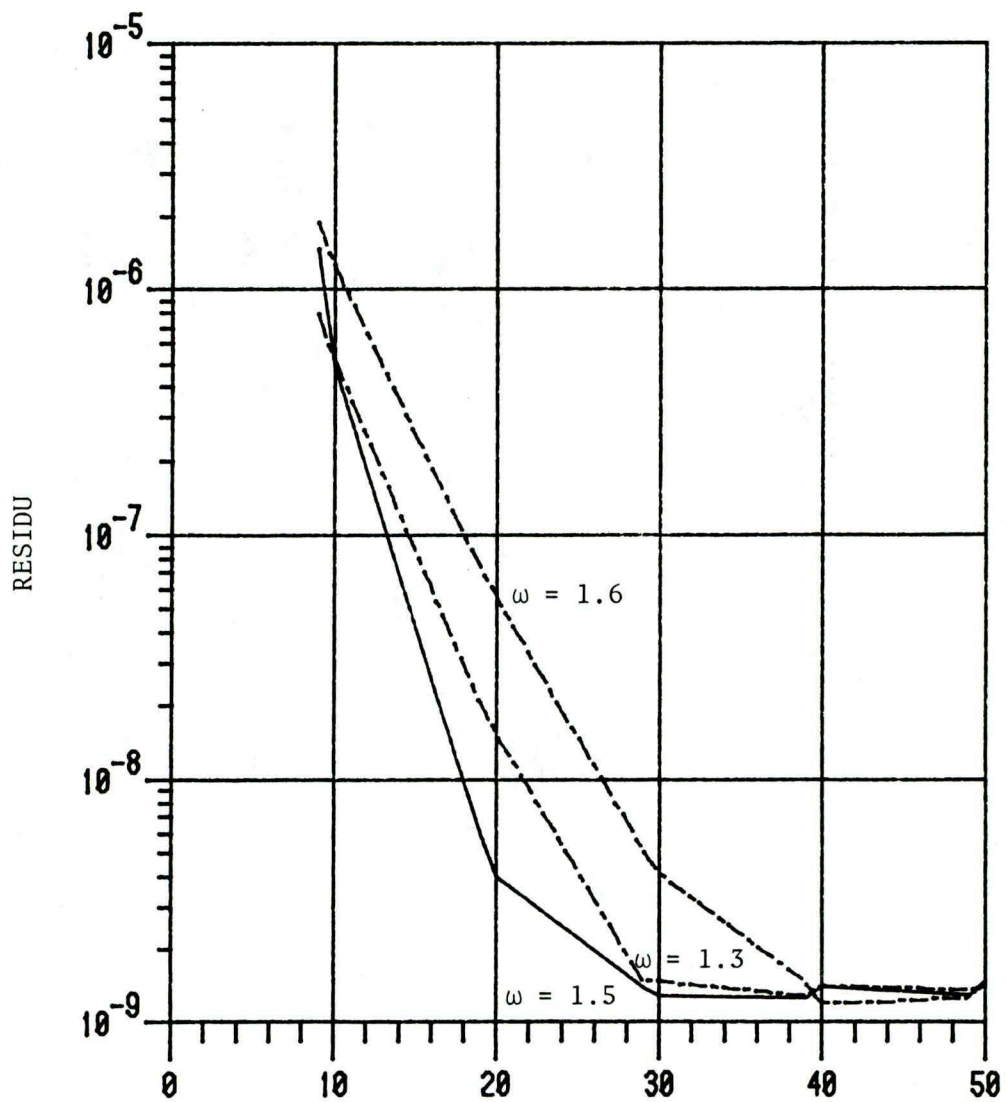


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 12 c Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Maillage de 33×9

Solution par S.O.R. ligne.

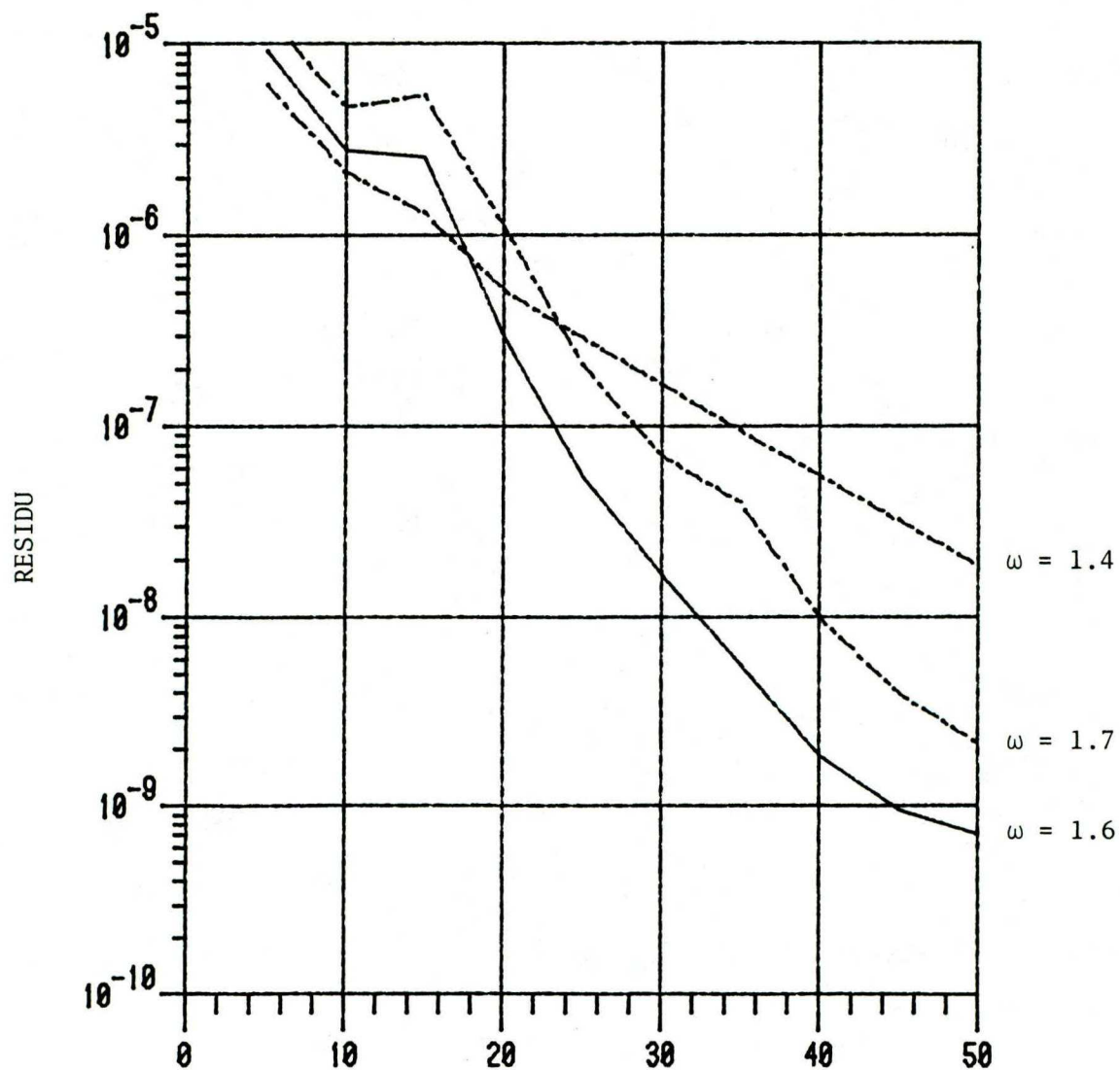


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 12 d Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Maillage de 33×9

Solution par S.O.R. aux directions alternées.

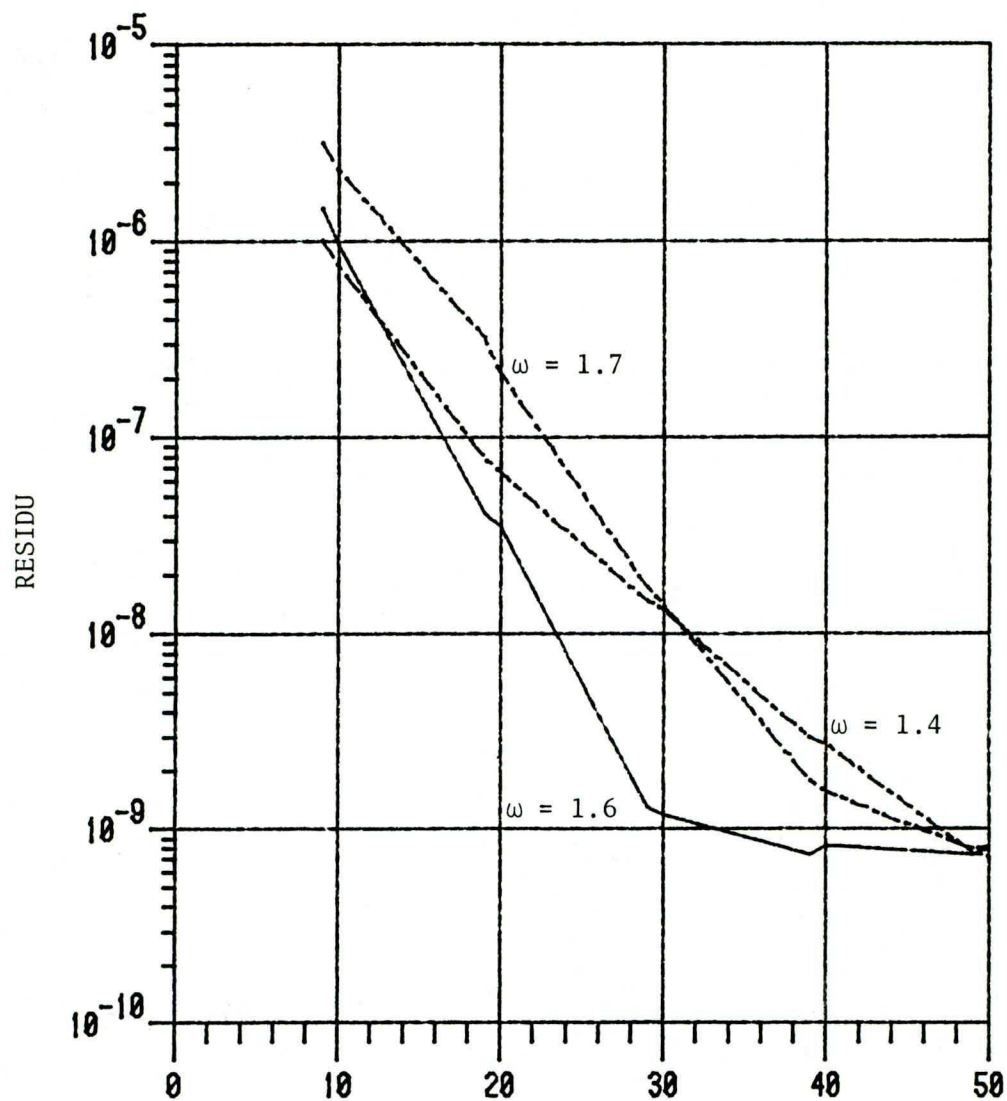


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 12 e Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Maillage de 33×17

Solution par S.O.R. aux directions alternées.

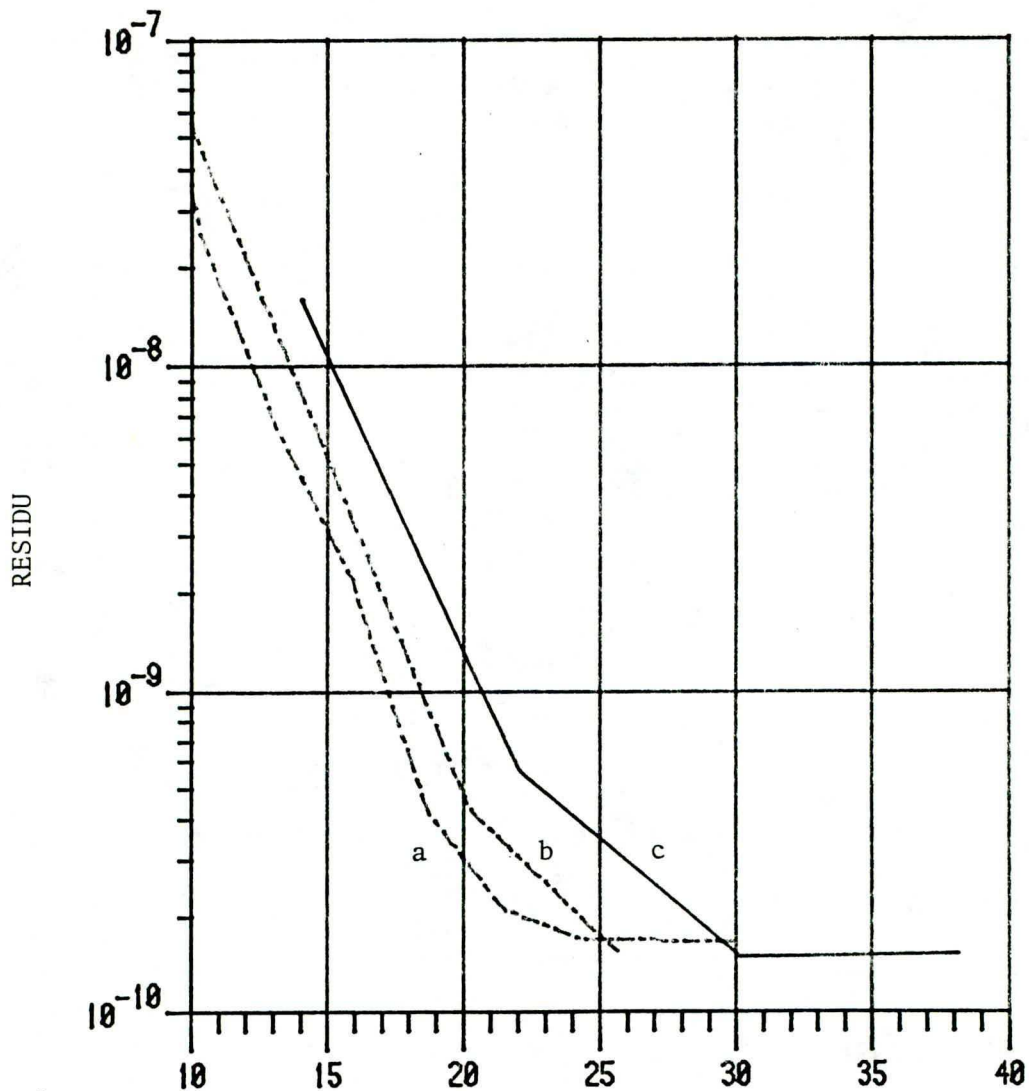


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 12 f Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes valeurs du facteur de surrelaxation ω .

Maillage de 33×17

Solution par S.O.R. aux directions alternées.



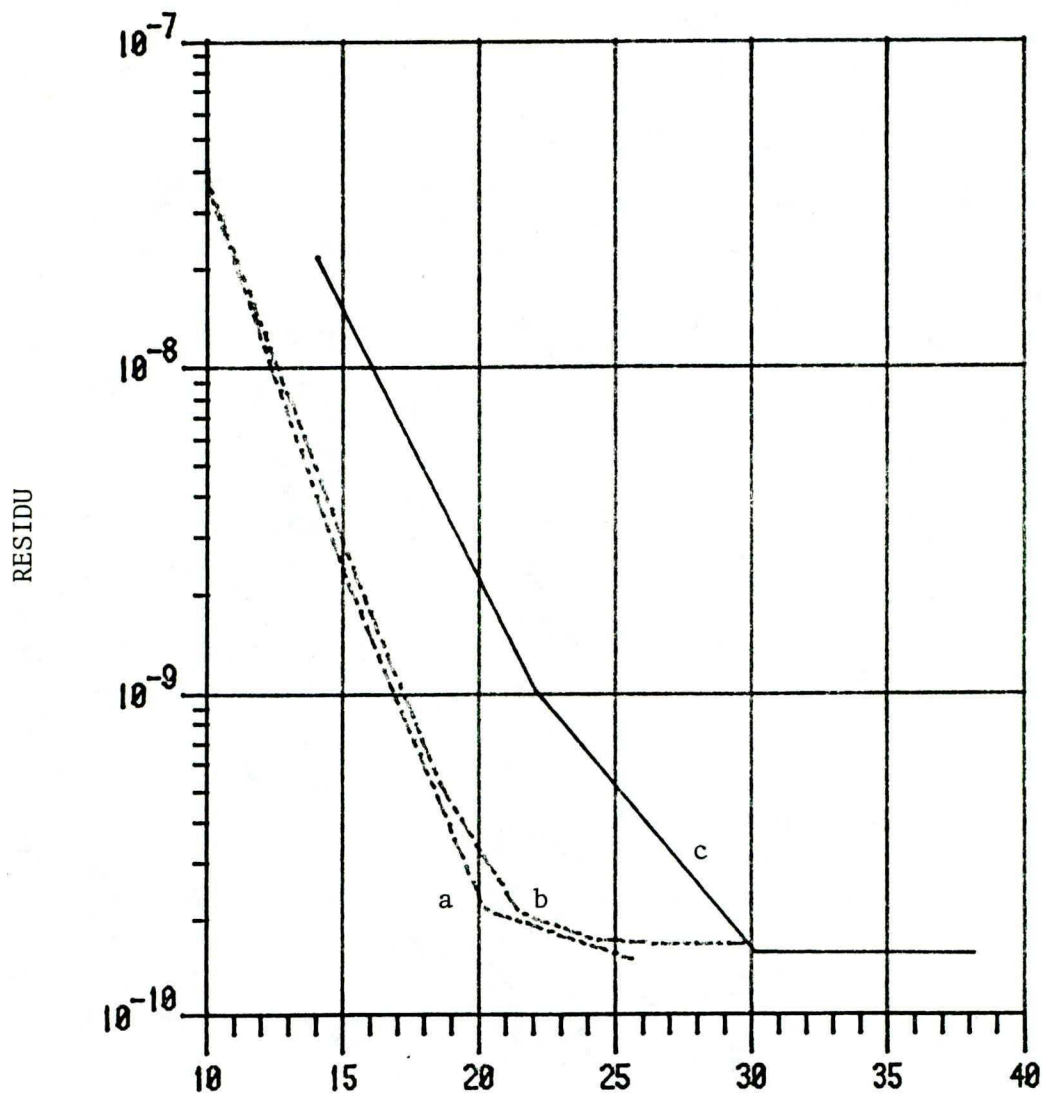
TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 13 a Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies.

Maillage 65×17

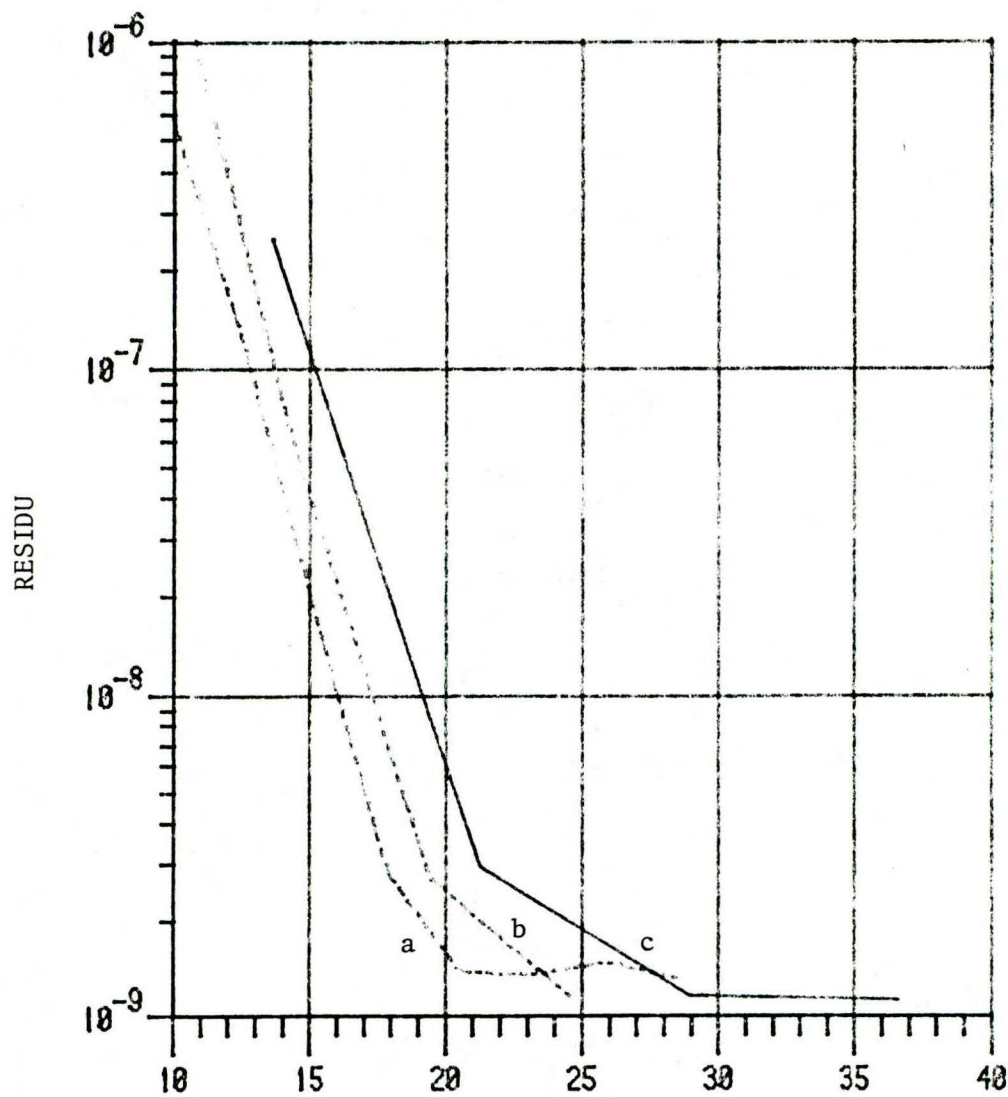
Solution par Multigrid ligne.

a) 2,2,2 b) 4,4,4 c) 6,6,6



TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 13 b Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies. Maillage 65×17
Solution par Multigrid aux directions alternées.
a) 4,4,4 b) 2,2,2 c) 6,6,6



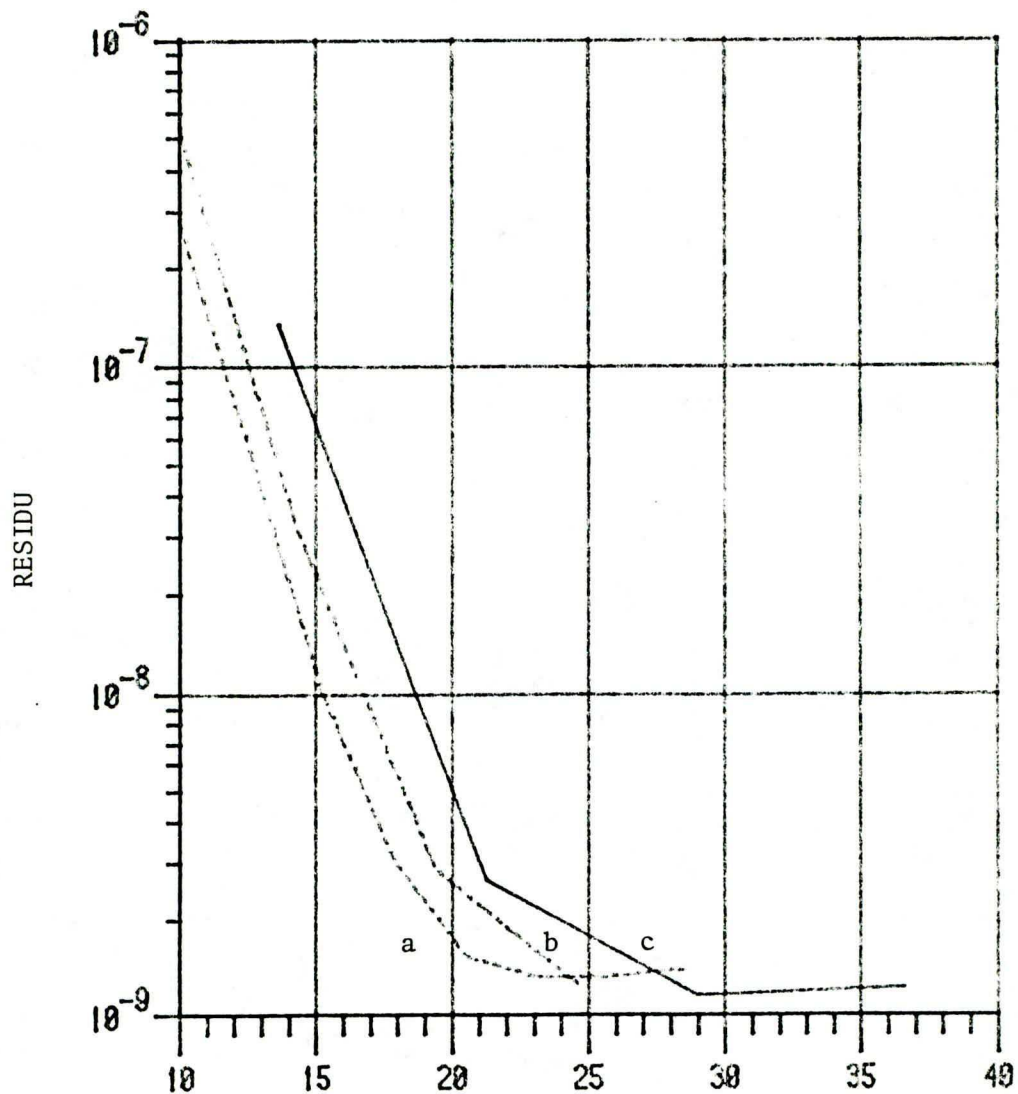
TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 13 c Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies.

Maillage 33×9

Solution par Multigrid ligne.

a) 2,2 b) 4,4 c) 6,6



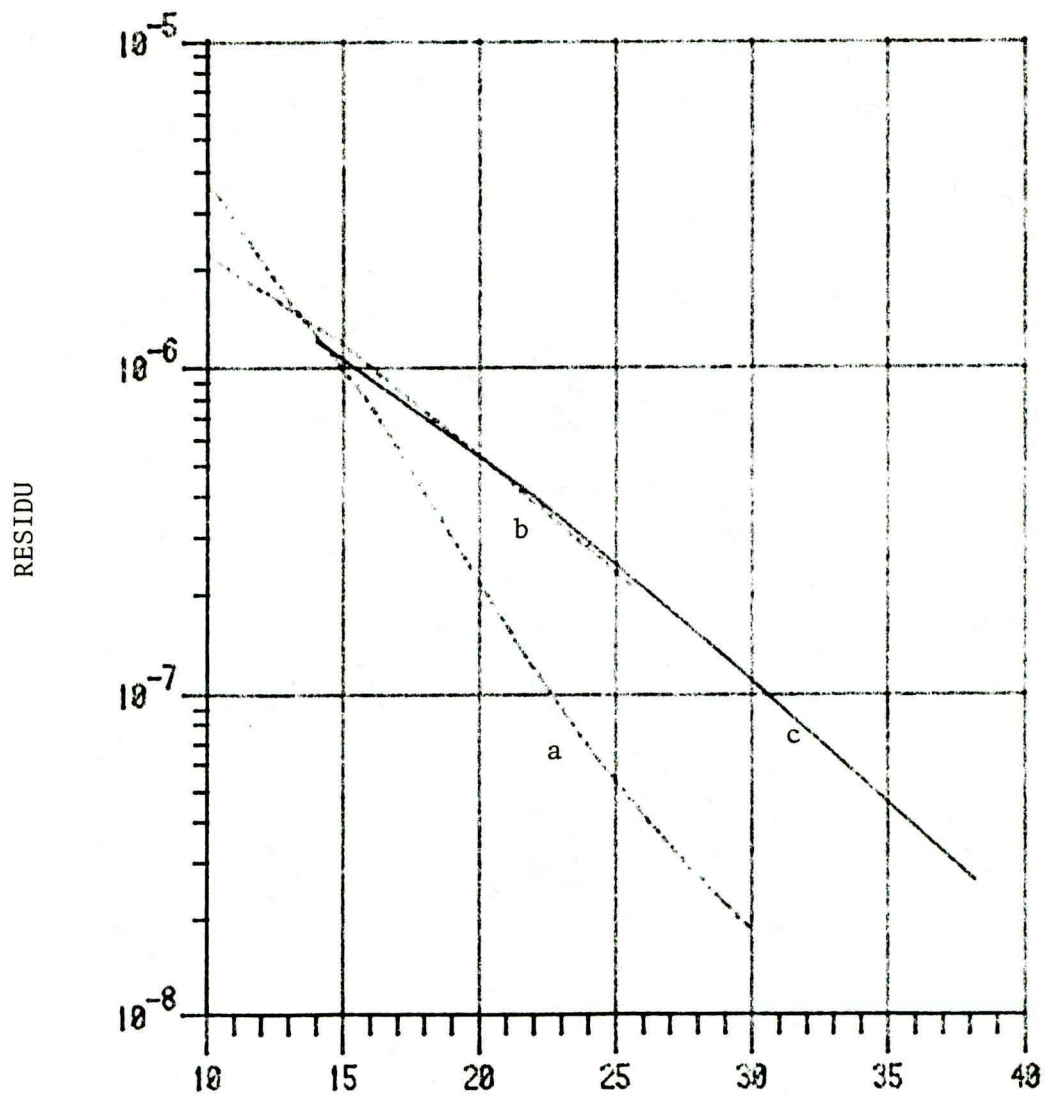
TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 13 d Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies.

Maillage 33×9

Solution par Multigrid aux directions alternées.

a) 2,2 b) 4,4 c) 6,6



TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 13 e Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies.

Maillage 33×17

Solution par Multigrid ligne.

a) 2,2,2 b) 4,4,4 c) 6,6,6

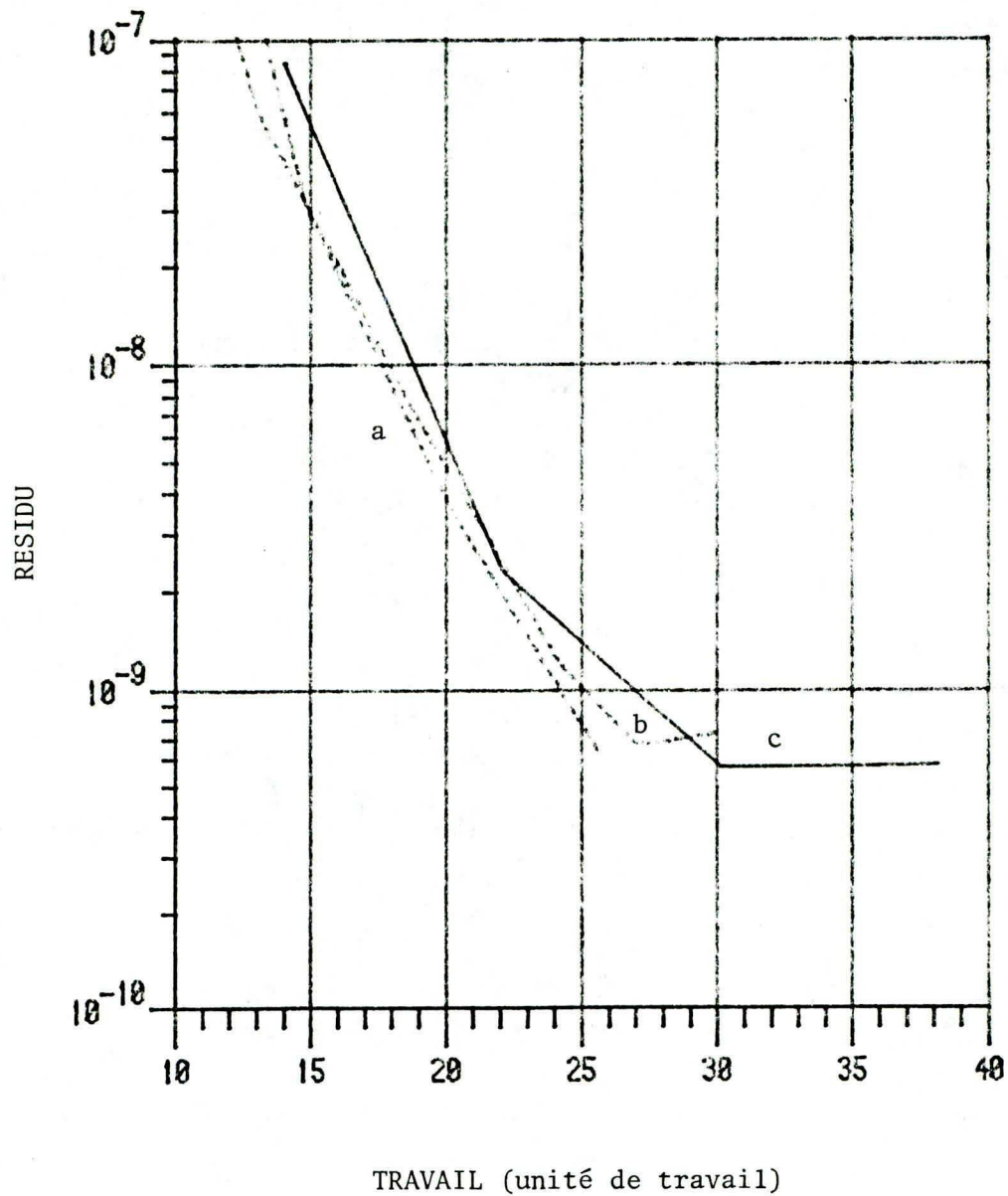


Fig. 13 f Variation du résidu en fonction de la quantité de travail, pour différentes stratégies. Maillage 33×17
Solution par Multigrid aux directions alternées.
a) 4,4,4 b) 2,2,2 c) 6,6,6

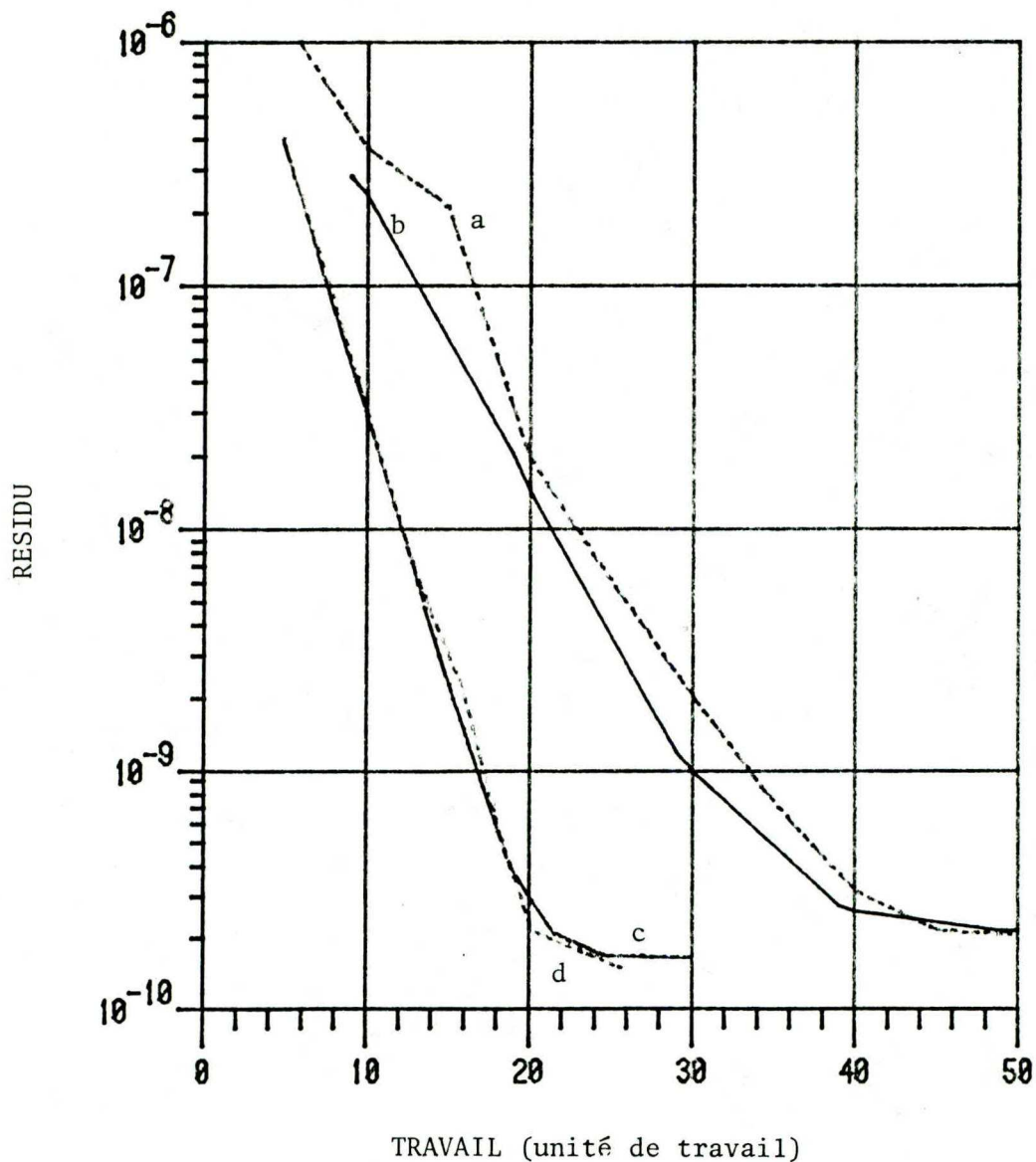
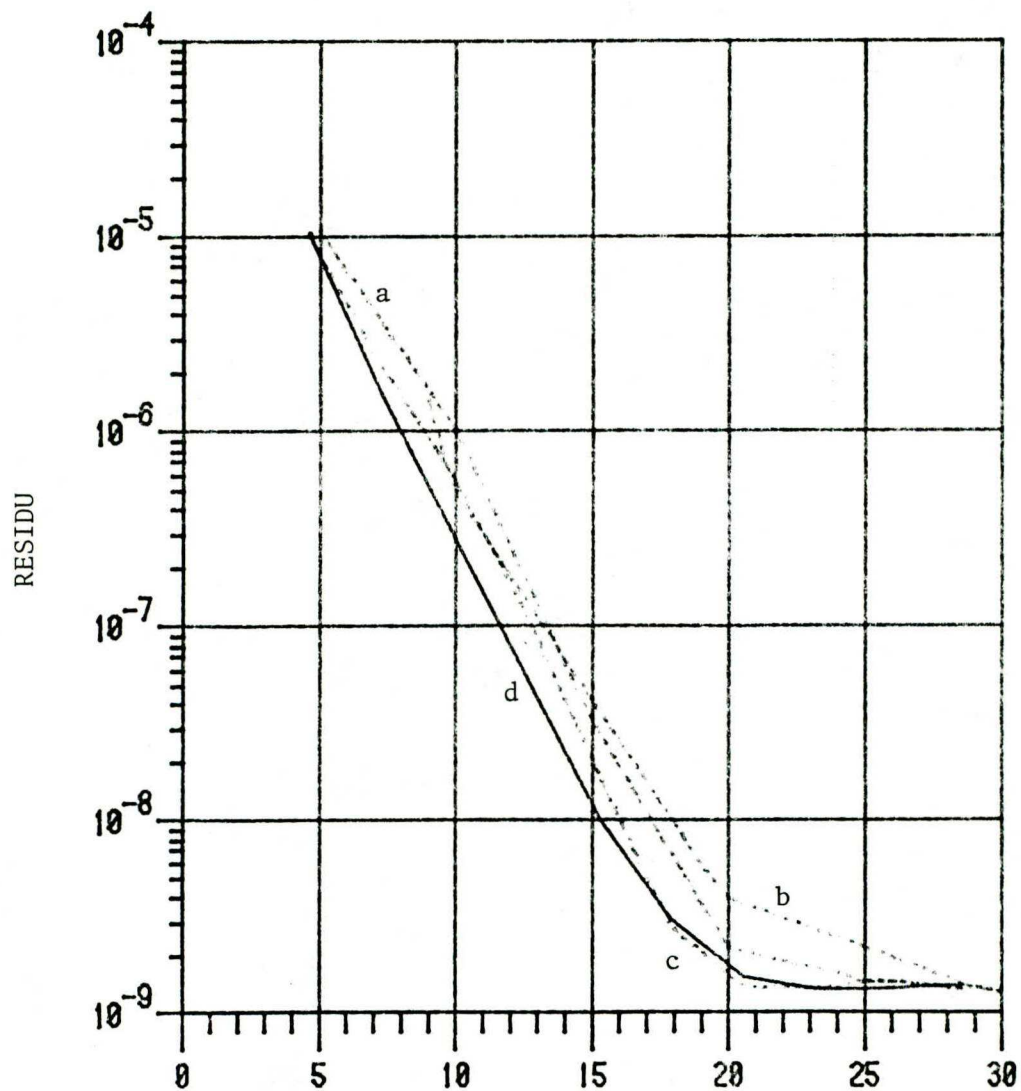


Fig. 14 a Comparaison du taux de convergence pour les solutions optimales de chaque méthode. Maillage 65×17

- a) S.O.R. Ligne ($\omega = 1.6$)
- b) S.O.R. aux directions alternées ($\omega = 1.7$)
- c) Multigrid Ligne (2,2,2)
- d) Multigrid aux directions alternées (4,4,4)

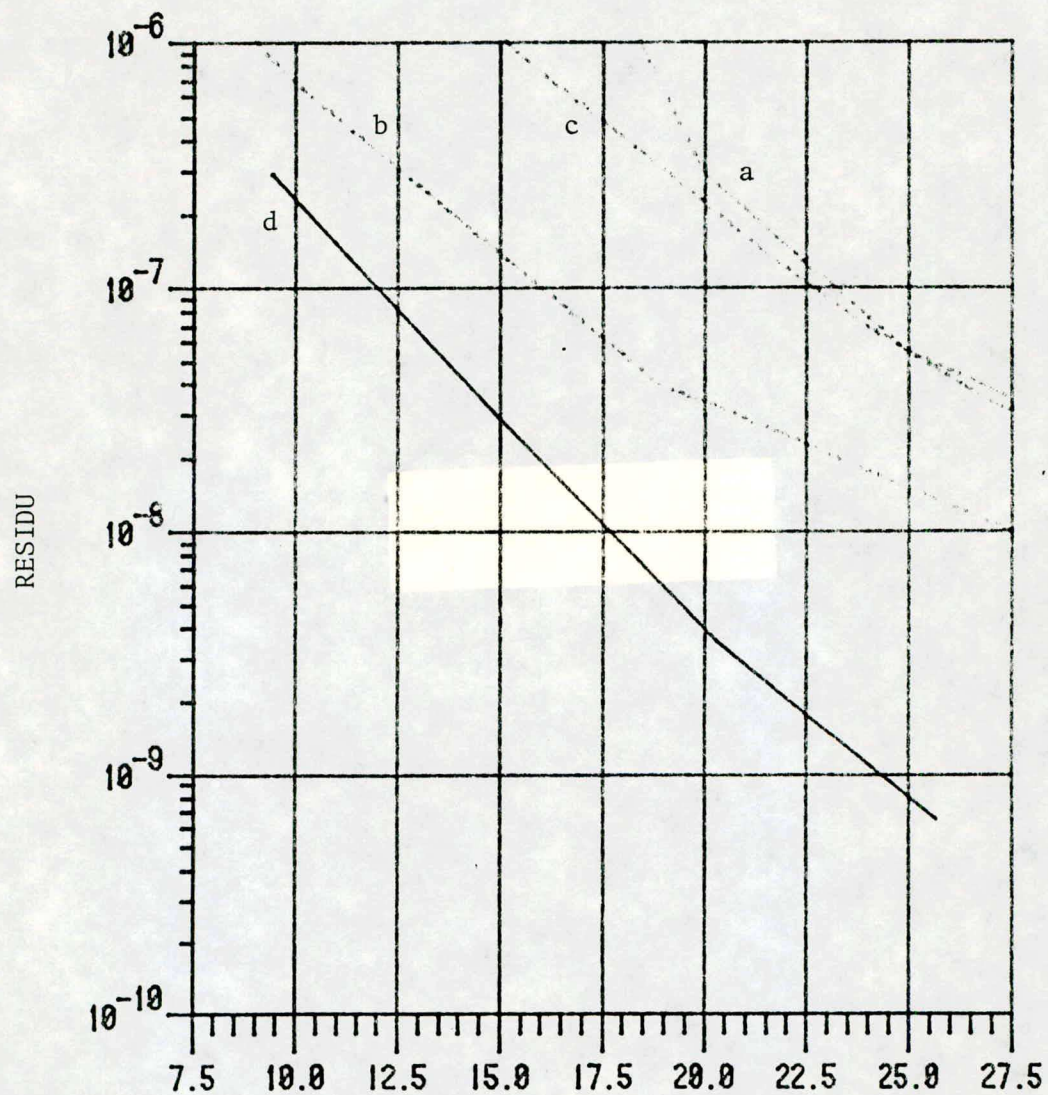


TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 14 b Comparaison du taux de convergence pour les solutions optimales de chaque méthode.

Maillage 33x9

- a) S.O.R. Ligne ($\omega = 1.4$)
- b) S.O.R. aux directions alternées ($\omega = 1.5$)
- c) Multigrid Ligne (2,2)
- d) Multigrid aux directions alternées (2,2)



TRAVAIL (unité de travail)

Fig. 14 c Comparaison du taux de convergence
pour les solutions optimales de chaque méthode.
Maillage 33×17

- a) S.O.R. Ligne ($\omega = 1.6$)
- b) S.O.R. aux directions alternées ($\omega = 1.6$)
- c) Multigrid Ligne (2.2.2)
- d) Multigrid aux directions alternées (4,4,4)

CA2PQ
UP 5
R81-03
ex.2

131981-X

~~13 AUG 1986~~

14 JAN 1994

~~10 JAN 1986~~

~~5 JAN 1987~~

~~12 FEB 1987~~

~~12 MAR 1987~~

~~21 DEC 1988~~

~~24 DEC 1988~~

~~27 DEC 1988~~

~~15 JAN 1990~~

~~21 AUG 1990~~

~~03 JAN 1991~~

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289043 0