

**Titre:** Potentiel d'interaction décroissant pour les lois de conservation non convexes  
Title: convexes

**Auteur:** Jocelyn Pellerin  
Author:

**Date:** 2011

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Pellerin, J. (2011). Potentiel d'interaction décroissant pour les lois de conservation non convexes [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/616/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/616/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Marc Laforest  
Advisors:

**Programme:** Mathématiques appliquées  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

POTENTIEL D'INTERACTION DÉCROISSANT POUR LES LOIS DE  
CONSERVATION NON CONVEXES

JOCELYN PELLERIN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

JANVIER 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

POTENTIEL D'INTERACTION DÉCROISSANT POUR LES LOIS DE  
CONSERVATION NON CONVEXES

présenté par : PELLERIN Jocelyn

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. FRAPPIER Clément, Ph.D., président

M. LAFOREST Marc, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LORIN DE LA GRANDMAISON Emmanuel, Ph.D., membre

*À la mémoire de ma mère Réjane*

## **REMERCIEMENTS**

Tout d'abord, je souhaite remercier M. Marc Laforest, professeur-chercheur au département de mathématiques et de génie industriel de l'École Polytechnique de Montréal pour avoir bien voulu diriger cette recherche. Nos rencontres ont eu lieu dans un climat détendu où j'ai été en mesure de bénéficier des judicieux conseils de M. Laforest et d'apprécier sa riche culture mathématique.

Je tiens également à remercier M. Clément Frappier, professeur-chercheur à l'École Polytechnique qui a accepté de présider le jury. Et, M. Emmanuel Lorin de la Grandmaison, professeur-chercheur au département de mathématiques de l'Université Carleton pour sa participation en tant qu'évaluateur externe.

Je m'en voudrais aussi de passer sous silence la contribution de M. Philippe G. LeFloch. En effet, le travail monumental de ce dernier dans le domaine des lois de conservation durant les vingt dernières années a ouvert la voie à d'autres personnes. J'ai profité de la nouvelle définition pour la force des ondes proposée par celui-ci avec M. Laforest vers la fin des années 2000. Naturellement, le support financier que j'ai eu de la part du Conseil des Recherches en Sciences Naturelles et Génie (CRSNG) a facilité la réalisation de cette recherche.

Finalement, je souhaite remercier ma mère pour tout ce qu'elle a fait pour moi au fil des ans. Jusqu'à la toute fin, son courage face à la maladie a été remarquable.

## RÉSUMÉ

Considérons la loi de conservation scalaire  $\partial u / \partial t + \partial f(u) / \partial x = 0$  quand la fonction de flux  $f(u)$  est concave convexe. Notre but dans cette recherche est de construire un potentiel d'interaction décroissant pour les quatre cas problématiques générés par la fonctionnelle Iguchi-LeFloch. Puis, nous allons tester les douze autres cas d'interactions pour vérifier si le potentiel d'interaction est décroissant. Ce travail est basé sur la théorie des fonctions cinétiques de LeFloch pour la régularisation des lois de conservation non convexes. Les résultats présentés ici sont une amélioration par rapport à ceux de Baiti, LeFloch et Piccoli ainsi que ceux d'Amadori, Baiti, LeFloch et Piccoli.

**ABSTRACT**

Consider the scalar conservation law  $\partial u/\partial t + \partial f(u)/\partial x = 0$  when the flux function  $f(u)$  is concave convex. Our goal in this research is to construct a decreasing interaction potential for the four problematic cases generated by the Iguchi-LeFloch functional. Then, we will test the twelve other interaction cases to check if the interaction potential is decreasing. This work is based on LeFloch's theory of kinetic functions for regularisation of nonconvex conservation laws. The results presented here are an improvement over those of Baiti, LeFloch and Piccoli as well as those of Amadori, Baiti, LeFloch and Piccoli.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	viii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1      LES LOIS DE CONSERVATION . . . . .	5
1.1   Introduction aux lois de conservation . . . . .	5
1.2   Lois de conservation non convexes . . . . .	11
1.3   La méthode de front tracking . . . . .	16
CHAPITRE 2      ANALYSE DE LA VARIATION TOTALE . . . . .	21
CHAPITRE 3      ANALYSE D'UN POTENTIEL D'INTERACTION . . . . .	44
CHAPITRE 4      CONCLUSION . . . . .	93
RÉFÉRENCES . . . . .	95
ANNEXES . . . . .	97

**LISTE DES FIGURES**

FIGURE 2.1	<b>Cas RC-1</b>	24
FIGURE 2.2	<b>Cas RC-2</b>	26
FIGURE 2.3	<b>Cas RC-3</b>	27
FIGURE 2.4	<b>Cas RN</b>	29
FIGURE 2.5	<b>Cas CR-1</b>	30
FIGURE 2.6	<b>Cas CR-2</b>	31
FIGURE 2.7	<b>Cas CR-3</b>	32
FIGURE 2.8	<b>Cas CR-4</b>	33
FIGURE 2.9	<b>Cas CC-1</b>	34
FIGURE 2.10	<b>Cas CC-2</b>	35
FIGURE 2.11	<b>Cas CC-3</b>	37
FIGURE 2.12	<b>Cas CN-1</b>	38
FIGURE 2.13	<b>Cas CN-2</b>	39
FIGURE 2.14	<b>Cas CN-3</b>	40
FIGURE 2.15	<b>Cas NC</b>	41
FIGURE 2.16	<b>Cas NN</b>	43

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

- $L^1 := \|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)| dx < \infty$  ;  
 $C^\infty$  : l'espace des fonctions infiniment différentiables ;  
 $[a, b]$  : l'intervalle fermé en  $a$  et  $b$  ;  
 $(a, b)$  : l'intervalle ouvert en  $a$  et  $b$  ;  
 $[a, b)$  : l'intervalle fermé en  $a$  et ouvert en  $b$  ;  
 $\mathbb{R}_+$  : l'ensemble des nombres réels positifs ;  
 $BV(I)$  : l'ensemble des fonctions avec une variation totale finie dans un intervalle  $I$  ;  
 $V$  : la fonctionnelle de variation totale généralisée ; page 21  
 $TV$  : la norme de variation totale ; Définition 1.11  
 $f$  : la fonction de flux ; page 5  
 $\varphi^\flat$  : la fonction cinétique ; Théorème 1.9  
 $\varphi^\sharp$  : la fonction accompagnatrice de  $\varphi^\flat$  ;  
 $Q$  : le potentiel d'interaction ;  
 $U$  : l'entropie ; page 7  
 $F$  : le flux d'entropie ; page 7  
 $\varphi_0^\flat$  et  $\varphi_0^\sharp$  : fonctions canoniques ; 12

## INTRODUCTION

Une loi de conservation est une équation différentielle aux dérivées partielles. Ces équations proviennent de la mécanique des fluides où elles représentent la conservation de la masse, la quantité de mouvement, l'énergie et l'entropie. À l'origine, elles ont été introduites par Euler et étudiées par d'autres chercheurs comme Riemann, Stokes. Avec l'arrivée de la seconde guerre mondiale, les équations d'Euler sont étudiées en profondeur puisqu'elles permettent de modéliser les ondes de chocs générées par les avions supersoniques, les ogives et les bombes nucléaires. Durant les années 50, Oleinik (Oleinik, 1957; Oleinik, 1959) débute l'étude abstraite des lois de conservation avec le cas scalaire ainsi que deux lois de conservation couplées. Puis, Lax (Lax, 1973) se penchera sur le problème de Riemann. Par la suite, les potentiels d'interaction  $Q(u(t))$  seront introduits par Glimm (Glimm, 1965) afin de présenter la première preuve générale d'existence de solutions pour les systèmes de lois de conservation. Les potentiels d'interaction sont au cœur de la théorie des lois de conservation et ils doivent satisfaire plusieurs caractéristiques d'un point de vue mathématique. En effet,

- 1) le potentiel ne dépend pas de la position exacte des ondes au temps  $t$  mais seulement de leur ordre ;
- 2) le potentiel correspond à une somme de termes qui sont quadratiques par rapport à la force des ondes ;
- 3) le potentiel doit être décroissant pour une interaction entre deux ondes et celui-ci diminue de manière proportionnelle au produit des ondes impliquées dans l'interaction ;
- 4) quand un potentiel d'interaction décroissant satisfait 1), 2) et 3), il forme une combinaison linéaire avec la variation totale et le résultat est une mesure décroissante de la variation totale.

Depuis la percée de Glimm (Glimm, 1965), d'autres individus ont contribué à l'avancement des connaissances concernant les lois de conservation. Au début des années 80, des gens ont amélioré les techniques introduites par Glimm. Toujours durant cette période, des chercheurs (Glimm and Lax, 1967; Liu, 1977a; Liu, 1977b; Liu and Yang, 1999; Bressan et al., 1999) ont présenté des preuves d'existence, d'unicité et de stabilité de solutions pour ces mêmes lois, tout en respectant les conditions initiales à petite variation totale, employées par Glimm dans ses travaux à l'époque. Après le développement d'une théorie mature d'existence, d'unicité et de stabilité pour les systèmes convexes, la question des systèmes non convexes est apparue de plus en plus importante pour d'autres personnes.

En effet, dans les années 80 et 90, la majorité des travaux au sujet des systèmes de lois de conservation convexe concave se sont attardés à ceux dont l'ensemble des solutions étaient caractérisées par des régularisations visqueuses (diffusion). Nous pouvons maintenant affirmer que les travaux de Bressan et Bianchini (Bressan and Bianchini, 2005) ont entièrement réglé la question de l'existence, de l'unicité et de la stabilité. Durant cette période, LeFloch a développé la théorie des fonctions cinétiques pour caractériser les solutions des lois de conservation obtenues avec des régularisations plus générales (de type diffusion-dispersion) (LeFloch, 2002).

Vers la fin des années 90, Baiti, LeFloch et Piccoli (Baiti et al., 1999) ont proposé une nouvelle fonctionnelle de variation totale pour mesurer la force des ondes pour le flux concave convexe le plus simple  $f(u) = u^3$ . Leurs calculs démontrent que cette fonctionnelle est toujours inférieure ou égale à zéro. Puis, Amadori, Baiti, LeFloch et Piccoli ont utilisé la même définition pour la fonctionnelle de variation  $V(u)$  qui avait été introduite dans (Amadori et al., 1999). Pour corriger l'augmentation de la fonctionnelle de variation totale, les chercheurs ont travaillé avec une nouvelle définition pour la force des ondes. Par la suite, en s'appuyant sur quatre hypothèses, ils ont évalué la fonctionnelle  $V$ . Pour chacun des seize cas étudiés, la fonctionnelle  $V$  est plus petite ou égale à zéro.

Malheureusement, leur approche abstraite ne permet pas de bien identifier le rôle de la fonction cinétique. De plus, la complexité de cette approche fait que ce n'est pas possible de généraliser celle-ci au cas des systèmes de type concave convexe.

Seulement quelques années plus tard, Baiti, LeFloch et Piccoli (Baiti et al., 2004b) introduit une fonctionnelle de variation totale  $\tilde{V}(u)$  qui se veut plus explicite que celle étudiée dans (Amadori et al., 1999). Mais, encore une fois, les calculs sont trop complexes pour obtenir une extension aux systèmes (Baiti et al., 2004a). La définition de celle-ci nécessite le calcul de la force des ondes  $\tilde{\sigma}(u_-, u_+)$ . Dans le cas des solutions non classiques, la définition de  $\tilde{\sigma}(u_-, u_+)$  semble assez complexe à utiliser. Jusqu'à maintenant, la littérature présente des définitions pour évaluer les potentiels d'interaction qui exigent des calculs qui ne sont pas très transparents (Baiti et al., 1999; Amadori et al., 1999; Baiti et al., 2004b). Plus spécifiquement, les propriétés fondamentales de la fonction cinétique n'apparaissent pas naturellement, en particulier la propriété de contraction  $|\varphi^\flat \circ \varphi^\flat(u)| \leq k|u|$ .

Puis, Laforest et LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010) ont proposé une définition plus intuitive et plus naturelle pour évaluer la force des ondes comparativement à celle décrite dans (Baiti et al., 2004b). À l'aide de cette nouvelle définition, les auteurs ont calculé la fonctionnelle de Glimm pour les solutions non classiques lorsque la fonction de flux  $f(u)$  est de type concave convexe. L'inspection de tous les cas traités permet d'affirmer que la fonctionnelle de Glimm est décroissante sauf pour quatre cas, ce qui contredit la condition 3, présentée dans le premier paragraphe. Toutefois, ils démontrent que celle-ci est décroissante dans le cas de solutions de type splitting-merging (LeFloch and Shearer, 2004). Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étendre les travaux de Laforest et LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010) et de construire un potentiel d'interaction  $Q$  adapté à leur  $V$ . Si nous parvenons à trouver le *bon*  $Q$  alors la relation  $V + kQ$  est équivalente à l'existence de solutions pour les lois de conservation scalaire non convexes. La littérature sur le sujet ainsi que des travaux préliminaires de Laforest et LeFloch suggèrent forte-

ment qu'il devrait exister un tel potentiel d'interaction  $Q$ . Bien que les travaux de La-forest et LeFloch n'ont pas encore été en mesure de produire un potentiel d'interaction décroissant, les résultats obtenus sont encourageants.

## CHAPITRE 1

### LES LOIS DE CONSERVATION

#### 1.1 Introduction aux lois de conservation

Une loi de conservation scalaire est une équation différentielle aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad u = u(x, t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

avec une condition initiale au temps  $t = 0$  :

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.2)$$

Dans l'équation (1.1), les variables indépendantes  $x$  et  $t$  représentent respectivement les coordonnées pour l'espace et le temps. La fonction  $f(u)$  est dite fonction de flux. Il est aisément de voir que même si  $|u_0| < \epsilon$  et que  $f, u_0$  sont dans  $C^\infty$  alors  $u$  peut développer des discontinuités après un temps fini (Oleinik, 1959). Il est donc nécessaire d'envisager des solutions discontinues pour l'équation différentielle.

#### **Définition 1.1. (solution faible)**

*Considérons les données initiales  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})^1$ . Si  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  alors  $u$  est dite une solution faible du problème de Cauchy représenté par (1.1-1.2) si pour tout  $\theta(x, t)$*

---

1.  $L^\infty(\Omega) = \{u \text{ est mesurable sur } \Omega, \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$

*lisse et de support compact, nous avons :*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left( u(x, t) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + f(u(x, t)) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \theta(x, 0) u_0(x) dx = 0.$$

Deux équations différentielles bien connues sont des exemples de lois de conservation. Il s'agit des équations de Burgers (1.3) et de Buckley-Leverett (1.4). Elles ont la forme suivante :

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad (1.3)$$

$$u_t + \left( \frac{u^2}{(u^2 + (1-u)^2)} \right)_x = 0 \quad (1.4)$$

L'équation de Burgers est un modèle simple et bien étudié des fluides compressibles. L'équation de Buckley-Leverett permet de représenter un fluide avec deux phases  $u \in [0, 1]$  tel un mélange eau-huile ;  $u$  représente la saturation d'une des deux phases.

Tentons de déterminer la provenance des chocs en regardant l'équation de Burgers après avoir fait la différentiation du second terme par rapport à  $x$ . Nous avons maintenant l'équation sous la forme :

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.5)$$

et ajoutons la condition initiale ci-dessous :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Le problème de Riemann donné par (1.5-1.6) possède la solution  $u(x, t) = u_0(x)$  pour tout  $(x, t)$ . Toutefois, il admet aussi une autre solution qui a la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -t \\ x/t, & \text{si } -t < x < t \\ 1, & \text{si } x > t \end{cases} \quad (1.7)$$

Ces deux solutions sont des solutions faibles.

Or, le fait que le problème de Riemann puisse comporter plusieurs solutions illustre bien la nécessité d'avoir une approche pour sélectionner une solution particulière parmi toutes celles obtenues. Nous verrons que si le flux est convexe alors l'imposition d'une seule condition d'entropie est suffisante pour identifier une solution unique.

### **Définition 1.2. (entropie-flux d'entropie)**

*Une paire de fonctions lisses  $(U(u), F(u)) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paire entropie-flux d'entropie si  $F'(u) = f(u) \times U'(u)$ .*

Il est facile de voir que si  $u$  est une solution lisse de (1.1) et que la définition ci-dessus est respectée alors  $u$  sera aussi une solution de l'équation suivante :

$$\partial(U(u))/\partial t + \partial(F(u))/\partial x = 0.$$

La définition 1.2 origine de la thermodynamique. Plus précisément, la seconde loi de la thermodynamique couvre la notion d'irréversibilité des phénomènes physiques. Cette loi comporte une fonction d'entropie que nous pouvons associer au désordre ; lors d'une

transformation le désordre ne peut qu'augmenter. En chimie par exemple, lorsqu'on effectue une transformation dans un système, l'entropie doit augmenter. Précisons que l'entropie mathématique = – entropie physique.

### Théorème 1.3.

*Soient (1.1-1.2) ainsi que  $f \in C^2$  et convexe,  $u_0 \in BV \cap L^1$  et<sup>2</sup> une<sup>3</sup> paire  $(U, F)$  avec  $U$  qui est l'entropie et  $F$  le flux d'entropie. Alors, il existe une solution unique de (1.1-1.2) qui satisfait au sens faible :*

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0.$$

Malheureusement, l'unicité ne tient pas si nous n'avons pas l'hypothèse de convexité sur le flux, comme dans le cas de l'équation de Buckley-Leverett (LeFloch, 2002). Pour des conditions initiales  $u_0 \in \Omega$ , dans le voisinage d'un point d'inflexion de  $f$ , il peut exister un nombre infini de solutions qui satisfont la même condition d'entropie.

Nous allons maintenant présenter les bases de la théorie. Il existe plusieurs références reconnues dans le domaine, dont celle de Smoller (Smoller, 1983) qui est sans doute la mieux connue, mais nous suivrons celle de LeFloch (LeFloch, 2002). Nous débutons avec un théorème important.

### Théorème 1.4 (inégalités d'entropie d'Oleinik).

*Soit une fonction de flux  $f(u)$  quelconque. Soit une onde de choc qui est une solution faible de (1.1) et qui a localement la forme ci-dessous :*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < \lambda t \\ u_r, & \text{si } x > \lambda t \end{cases} \quad (1.8)$$

---

2.  $L^1(\Omega) = \{u \text{ est mesurable sur } \Omega, \|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)| dx < \infty\}$

3.  $BV(\Omega) =$  L'ensemble des fonctions avec une variation totale finie dans un intervalle  $I$ .

où  $u_l$ ,  $u_r$  et  $\lambda$  sont des constantes avec  $u_l \neq u_r$ . L'onde de choc vérifie les inégalités

$$\partial U(u)/\partial t + \partial F(u)/\partial x \leq 0 \quad (1.9)$$

pour toutes les paires d'entropies convexes  $(U, F)$  si et seulement si les inégalités d'entropie d'Oleinik

$$\frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \quad (1.10)$$

sont respectées pour tout  $v$  qui se situe entre  $u_l$  et  $u_r$ .

### Définition 1.5.

Dans le théorème 1.4, la constante  $\lambda$  représente la vitesse de l'onde et on l'appelle la vitesse de Rankine-Hugoniot. Il est possible de vérifier que  $u(x, t)$  ci-dessus est une solution faible seulement si

$$\lambda = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}. \quad (1.11)$$

### Définition 1.6. (raréfaction)

Considérons les états  $u_l$  et  $u_r$ . Supposons aussi que  $f'(u)$  croît lorsque  $u$  passe de  $u_l$  à  $u_r$ . Dans ce cas, la fonction inverse de  $f'(u)$  que nous appellerons  $h$  est définie dans l'intervalle  $[f'(u_l), f'(u_r)]$ . Alors

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < tf'(u_l) \\ h(x/t), & \text{si } tf'(u_l) < x < tf'(u_r) \\ u_r, & \text{si } x > tf'(u_r) \end{cases} \quad (1.12)$$

constitue une solution continue de l'équation (1.1). Cette solution est une onde de raréfaction qui joint les états  $u_l$  à  $u_r$ .

Les solutions obtenues ne sont donc pas uniques car l'onde de choc donnée par (1.8) avec la vitesse de l'onde  $\lambda$  décrite par (1.11) est aussi une solution faible. En revanche, cette solution discontinue ne satisfait pour aucune paire  $(U, F)$  la condition  $\partial U(u)/\partial t + \partial F(u)/\partial x \leq 0$ .

Un problème de Riemann est un problème à valeur initiale de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < 0 \\ u_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous avons indiqué que l'addition d'une condition d'entropie nous assure de l'existence et de l'unicité. Ci-dessous, nous verrons que la régularisation d'une loi de conservation assure le même niveau d'existence et d'unicité. Nous utiliserons ce critère un peu plus tard.

### Théorème 1.7.

*Soit  $f \in C^2(\Omega)$  et convexe ainsi qu'un problème de Riemann avec une condition initiale  $u_0$ . Alors,*

- 1) *pour une paire d'entropie-entropie flux  $(U, F)$  il existe une solution faible unique,  $u$  de (1.1) qui vérifie  $U(u)_t + F(u)_x \leq 0$  pour  $(U, F)$  ;*
- 2) *il existe une solution faible unique,  $u$  de (1.1) qui respecte les inégalités d'entropie d'Oleinik ;*
- 3) *il existe une solution faible unique,  $u$  de (1.1) de la forme  $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$  ou  $u^\varepsilon$  est la solution de  $u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$ . Mentionnons ici que la limite est prise point par point.*

Pour les flux convexes, l'énoncé ci-dessus nous indique donc qu'une seule paire d'entropie-entropie flux est suffisante pour obtenir l'unicité. De plus, cette solution est la limite

d'une régularisation visqueuse.

## 1.2 Lois de conservation non convexes

Le théorème 1.7 est faux pour les lois de conservation non convexes puisqu'une seule paire  $(U, F)$  ne détermine pas uniquement la solution. Nous verrons maintenant qu'il est possible d'identifier une classe de solutions en sélectionnant une régularisation  $u$ . Prendre une régularisation est équivalent au choix d'une **fonction cinétique**. Nous introduirons un peu plus tard la notion de fonction cinétique.

Considérons le problème de Riemann constitué des équations (1.1-1.2).

Remplaçons le terme homogène dans l'équation (1.1) par un terme de diffusion :

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon \quad (1.14)$$

Il s'agit d'une régularisation visqueuse où  $\epsilon$  introduit la viscosité. Essentiellement, cette approche a pour but de réintroduire la viscosité (d'ordre 2) dans le modèle physique (d'ordre 1) qui décrit un fluide. Plus généralement, les lois de conservation non linéaires d'ordre 1 sont des modèles simplifiés de phénomènes physiques à l'intérieur desquels nous avons fait le choix de négliger la diffusion (ordre 2), la dispersion (ordre 3) et les autres processus d'ordres supérieurs. Selon le développement de Chapman-Enskog, tout système en mécanique statistique s'exprime comme un système d'équations aux dérivées partielles avec des termes d'ordre arbitrairement élevé. La physique du système nécessite donc la présence de termes d'ordres supérieurs.

Dans cette optique, il est préférable de réintroduire davantage de physique à l'aide de régularisations de la loi de conservation (1.13) de la forme :

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon a u_{xx}^\varepsilon + \varepsilon^2 b u_{xxx}^\varepsilon. \quad (1.15)$$

L'équation (1.15) avec les termes  $\varepsilon a u_{xx}^\varepsilon$  et  $\varepsilon^2 b u_{xxx}^\varepsilon$  est un problème bien posé si  $\varepsilon, a > 0$  (LeFloch, 2002). Si la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$  existe alors nous aurons une manière de choisir une solution unique. Malheureusement, la limite  $u^\varepsilon$  dépend de  $a$  et de  $b$ . Plus précisément, du rapport  $\alpha = b/a$  qui représente le rapport du taux de dispersion sur celui de la diffusion. Quand  $\alpha = 0$  alors il n'y a pas de dispersion tandis que lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$  c'est la dispersion qui domine. Dans certains systèmes, des termes d'ordres supérieurs ( $u_{xxx}$  et plus) pourraient être nécessaires. Pour des lois de conservation non convexes assujetties à des régularisations de la forme (1.15), nous verrons l'apparition d'ondes de choc dites non classiques.

### **Définition 1.8. (ondes de chocs classiques et non classiques)**

*Une discontinuité qui vérifie les inégalités d'entropie d'Oleinik est dite une onde de choc classique.*

*Une discontinuité qui ne vérifie pas les inégalités d'entropie d'Oleinik est dite une onde de choc non classique.*

### **Théorème 1.9.**

*Soit une fonction de flux concave convexe ainsi que la représentation de la diffusion dispersion donnée par  $\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon(b(u)u_x)_x + \delta(c_1(u)(c_2(u)u_x)_x)_x$  avec  $u = u^{\varepsilon,\delta}(x,t)$  ainsi que  $b(u), c_1(u), c_2(u) > 0$ . Le rapport  $\alpha = \varepsilon/\sqrt{\delta} > 0$  est donné. Alors, il existe une fonction cinétique  $\varphi^\flat : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait :*

*H1) Lipschitz continue ;*

*H2) monotone décroissante et  $\varphi^\flat(0) = 0$  ;*

H3) il existe un voisinage compact  $I$  dans lequel<sup>4</sup>  $\text{Lip}(\varphi^\flat) < 1$  ;

H4)  $\varphi^\flat \circ \varphi^\flat$  est une contraction stricte. Autrement dit, il existe  $k \in (0, 1)$  tel que  $|\varphi^\flat \circ \varphi^\flat| \leq k|u|$  pour tout  $u$ .

Quand  $\epsilon$  et  $\delta$  tendent vers zéro mais que  $\alpha$  reste constant alors toute discontinuité dans la limite

$$u^- := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t)$$

$$u^+ := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t)$$

qui est une onde de choc non classique satisfait  $u^+ = \varphi^\flat(u_-)$ .

De plus, en lien avec la fonction cinétique  $\varphi^\flat$ , nous avons deux fonctions canoniques. La première est la fonction de dissipation d'entropie zéro,  $\varphi_0^\flat$  alors que la seconde  $\varphi^\natural$  est donnée par la condition de tangence :

$$f'(\varphi^\natural(u)) = \frac{f(\varphi^\natural(u)) - f(u)}{\varphi^\natural(u) - u}$$

Ces deux fonctions ne dépendent que de  $f$  et de la paire  $(U, F)$ . En lien avec ces fonctions, nous avons aussi :

---


$$\varphi^\natural(u) \leq \varphi^\flat(u) < \varphi_0^\flat(u), \quad u < 0$$

---

4. La constante de Lipschitz est :  $0 < \text{Lip}(\psi) := \inf_{u \neq v} \left| \frac{\psi(u) - \psi(v)}{u - v} \right|$ .

$$\varphi_0^\flat(u) < \varphi^\flat(u) \leq \varphi^\sharp(u), \quad u > 0.$$

Nous pouvons aussi obtenir une fonction accompagnatrice  $\varphi^\sharp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui provient de  $\varphi^\flat$ . Cette fonction accompagnatrice est la seule qui satisfait

$$\frac{f(u) - f(\varphi^\sharp(u))}{u - \varphi^\sharp(u)} = \frac{f(u) - f(\varphi^\flat(u))}{u - \varphi^\flat(u)}$$

ainsi que

$$\varphi^\flat(u) < \varphi^\sharp(u) < u \quad u > 0$$

$$u < \varphi^\sharp(u) < \varphi^\flat(u) \quad u < 0$$

quand  $\varphi^\flat(u) \neq \varphi^\sharp(u)$ .

L'intérêt de la fonction accompagnatrice  $\varphi^\sharp$  réside dans le fait que celle-ci marque une transition pour une solution d'entropie non classique. En effet, tant que  $u_r$  est à droite de la fonction accompagnatrice  $\varphi^\sharp$ , la solution obtenue comporte une seule onde (soit une raréfaction ou une onde de choc classique). Dès que nous nous retrouvons à gauche de  $\varphi^\sharp$  alors la solution présente deux ondes (soit une onde de choc non classique avec une onde classique ou une onde non classique avec une raréfaction).

### **Théorème 1.10. (solutions d'entropie non classiques)**

*Soit une fonction cinétique  $\varphi^\flat$  et les hypothèses du théorème 1.9. Alors, le problème de Riemann décrit par :*

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < 0 \\ u_r, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\partial_t U(u) + \partial_x F(u) \leq 0$$

admet une solution d'entropie non classique qui possède la forme suivante lorsque  $u_l > 0$  :

- 1) Si  $u_r \geq u_l$  alors la solution est une raréfaction qui joint  $u_l$  à  $u_r$ .
- 2) Si  $u_r \in [\varphi^\sharp(u_l), u_l]$  alors la solution est une onde de choc classique qui joint  $u_l$  à  $u_r$ .  $\varphi^\sharp$  est la fonction accompagnatrice de  $\varphi^\flat$ .
- 3) Si  $u_r \in [\varphi^\flat(u_l), \varphi^\sharp(u_l))$  alors la solution est une onde de choc non classique qui joint  $u_l$  à  $\varphi^\flat(u_l)$  et une onde de choc classique qui joint  $\varphi^\flat(u_l)$  à  $u_r$ .
- 4) Si  $u_r \leq \varphi^\flat(u_l)$  alors la solution est une onde de choc non classique qui joint  $u_l$  à  $\varphi^\flat(u_l)$  et une raréfaction qui joint  $\varphi^\flat(u_l)$  à  $u_r$ .

L'attract de la fonction cinétique est de permettre une analyse et une construction des solutions d'une loi de conservation non convexe **sans avoir à passer par la régularisation**. La limite d'une régularisation est complexe et particulièrement difficile dans le contexte des fonctions dans  $L^1 \cap L^\infty$ . La théorie des fonctions cinétiques telle que développée par LeFloch est donc une manière de contourner le problème de la régularisation.

### 1.3 La méthode de front tracking

Dans cette section, nous allons aborder la méthode de front tracking qui permet de résoudre une loi de conservation scalaire avec une fonction de flux donnée.

En ce moment, la théorie nous assure de l'existence d'une solution faible pour (1.1) obtenue comme la limite d'une régularisation visqueuse. De plus, la théorie permet de décrire chaque discontinuité mais il nous manque un outil pour représenter la solution en se basant sur des discontinuités locales. Cet outil s'appelle la méthode de front tracking (Dafermos, 1972; DiPerna, 1976; Risebro, 1993). Elle est fondamentalement une simplification de la méthode que Glimm avait introduit dans son article original (Glimm, 1965). Ci-dessous, nous allons décrire avec un algorithme comment la méthode de front tracking permet de construire une approximation de la solution faible.

On choisit un nombre réel positif  $\epsilon$  suffisamment petit pour contrôler l'erreur d'approximation totale permise. Pour toute condition initiale  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , on construit une approximation constante par morceaux  $\tilde{u}_0$  possédant un nombre fini de discontinuités et telle que  $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon$ .

Pour faire évoluer la condition initiale approximative  $\tilde{u}_0$  qui est constituée uniquement de discontinuités, il suffit de suivre les étapes suivantes au temps  $t = 0$  :

- 1) si  $\tilde{u}(\cdot, t)$  a une discontinuité en  $x_0$  qui est une onde de choc (classique ou non) alors on permet à cette discontinuité de se déplacer avec la vitesse de Rankine-Hugoniot ;
- 2) si  $\tilde{u}(\cdot, t)$  a une discontinuité en  $x_0$  qui est une onde de raréfaction séparant les états  $u_l, u_r$  alors
  - a) on subdivise l'onde en  $n$  ondes de raréfaction séparant les états ordonnés  $u_l = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n+1} = u_r$  tels que  $|u_i - u_{i-1}| = \epsilon$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \epsilon;$$

b) on permet aux ondes de se déplacer avec la vitesse de Rankine-Hugoniot ;

Éventuellement, ces discontinuités pourraient se rencontrer, disons au temps  $\tilde{t}$ . Par contre, en tout temps,  $t \in [0, \tilde{t}]$ . La solution  $\tilde{u}(\cdot, t)$  sera constante par morceaux et formée d'ondes qui voyagent selon la vitesse de Rankine-Hugoniot.

Durant l'intervalle de temps  $[0, \tilde{t}]$ , la fonction  $\tilde{u}$  sera donc une solution faible de (1.1) bien que la condition d'entropie ne soit pas satisfaite le long des ondes de raréfaction. Pour que l'algorithme puisse poursuivre du temps  $t = \tilde{t}$  au temps  $t = \infty$ , on doit

- i) décrire comment les interactions sont approchées ;
- ii) vérifier que le nombre total d'ondes reste borné.

Concernant le premier point, il suffit d'utiliser le théorème 1.10 pour identifier le résultat de l'interaction et par la suite se servir de 1) ou 2) pour chaque onde sortante.

Quant au nombre total d'ondes, il est possible de montrer que

- a) le nombre total d'ondes de raréfaction au départ est borné par  $TV(\tilde{u}_0)/\epsilon$  ;
- b) durant les interactions, la force des ondes de raréfaction est toujours décroissante ;
- c) durant les interactions, le nombre total d'ondes de choc (classique ou non) est non croissant.

Ensemble, ces observations permettent de conclure que la méthode de front tracking produit une solution faible  $\tilde{u}$  qui est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, \infty)$ .

Dans les approximations de front tracking, il n'y a que des discontinuités. La manière classique (Glimm, 1965) de définir la force d'une seule discontinuité séparée par deux

états  $u_l$  et  $u_r$  est  $\tilde{\sigma}(u_l, u_r) = |u_r - u_l|$ .

Cette définition de la force d'une onde suggère qu'on mesure la force totale des ondes, aussi dite la variation totale, à l'aide de

$$TV(u) = \sum_{\alpha} \tilde{\sigma}(u_l^{\alpha}, u_r^{\alpha}).$$

Dans les travaux de Laforest et LeFloch, ceux-ci ont introduit une nouvelle mesure de la force des ondes :

$$\sigma(u_l, u_r) = \begin{cases} |u_l - u_r| & \text{si } u_l u_r \geq 0 \\ |u_l + u_r| & \text{si } u_l u_r < 0. \end{cases}$$

Cette définition est valide sous des hypothèses techniques que nous passerons sous silence. La variation totale qui en découle est

$$V(u) = \sum_{\alpha} \sigma(u_l^{\alpha}, u_r^{\alpha}).$$

Plus généralement, pour les fonctions lisses par morceaux nous aurons la définition suivante :

### **Définition 1.11.**

$$TV(u) = \sup \sum_j |u(y_j) - u(y_{j-1})| \quad (1.16)$$

*Le supréumum est la valeur obtenue lorsque nous considérons toutes les partitions finies  $\{y_i\}$  tout en ayant  $y_{j-1} < y_j$ . L'ensemble qui contient toutes les fonctions possédant une*

*variation totale finie à l'intérieur d'un intervalle  $I$  est noté  $BV(I)$ .*

Regardons de plus près un autre concept important : le potentiel d'interaction. Une force est associée à chaque onde de choc. Or, avant que deux ondes se frappent, nous pourrions prédire à l'avance qu'elles pourraient interagir en regardant leurs positions et leurs natures (ondes de choc ou raréfactions) respectives. Glimm (Glimm, 1965) suggère qu'on définisse le potentiel d'interaction  $Q$  de la manière suivante :

$$Q(u) = \sum_{\alpha \text{ approche } \beta} \tilde{\sigma}(u_l^\alpha, u_r^\alpha) \tilde{\sigma}(u_l^\beta, u_r^\beta) \quad (1.17)$$

Dans la définition (1.17),  $\tilde{\sigma}$  représente la force d'une onde alors que  $u_l^\alpha$  et  $u_r^\alpha$  sont respectivement les états de gauche et de droite de la discontinuité  $\alpha$ . Nous considérons qu'une onde  $\alpha$  à gauche **approche** une onde  $\beta$  à droite sauf si les deux ondes sont des raréfactions. Dans le chapitre 3, nous allons étudier une variante de (1.17) avec  $\tilde{\sigma}$  remplacé par  $\sigma$ .

Ci-dessus, nous avons présenté la notion de variation totale  $TV$ . Il est possible de réécrire pour les approximations de front tracking :

$$TV(u) = \sum_{\alpha} |u_l^\alpha - u_r^\alpha| \quad (1.18)$$

où  $u_l$  et  $u_r$  sont les états de gauche et de droite d'une discontinuité  $\alpha$ . Or, il est clair que dans (Laforest and LeFloch, 2010) la définition de la variation totale  $TV$  ci-dessus est équivalente à :

$$V(u) = \sum_{\alpha} \sigma(u_l^\alpha, u_r^\alpha) \quad (1.19)$$

où  $\sigma(u_l, u_r)$  représente la force d'une onde (Laforest and LeFloch, 2010). Mentionnons que  $\sigma$  est une fonction qui satisfait  $c_1 \sigma(u_l, u_r) \leq |u_l - u_r| \leq c_2 \sigma(u_l, u_r)$ , avec les constantes  $c_1, c_2 \neq 0$ . Plus spécifiquement, nous allons considérer des forces définies par :

$$\sigma(u_l, u_r) = \begin{cases} |u_l - u_r| & \text{si } u_l u_r \geq 0 \\ |u_l + u_r| & \text{si } u_l u_r < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $\tilde{u}$  est un changement de variables décrit par  $u \in \mathbb{R}$ .

Tous les éléments sont en place pour aborder une autre notion dans la théorie des lois de conservation : la fonctionnelle de Glimm, notée par  $H$ . Elle a la forme :

$$H(u(t)) = V(u(t)) + kQ(u(t)) \quad (1.21)$$

Dans cette équation,  $V$  est la fonctionnelle de variation totale alors que  $Q$  est le potentiel d'interaction quadratique. Laforest et LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010) ont étudié la variation de la fonctionnelle de Glimm dans les seize cas possibles (LeFloch, 2002) lorsque deux ondes interagissent pour une loi de conservation scalaire avec une fonction de flux de type concave convexe.

Leurs résultats montrent que pour douze cas la fonctionnelle de Glimm est décroissante. Ceci correspond à ce que nous espérons. C'est-à-dire qu'un potentiel d'interaction doit être décroissant. Toutefois, pour l'instant quatre cas demeurent problématiques puisque la fonctionnelle de Glimm résultante est croissante. L'objectif de cette recherche est d'étendre les travaux de Laforest et LeFloch en effectuant l'étude d'un nouveau potentiel d'interaction  $Q$  pour lequel  $V + kQ$  sera décroissant.

## CHAPITRE 2

### ANALYSE DE LA VARIATION TOTALE

Notre objectif dans ce chapitre est de présenter les valeurs obtenues pour la fonctionnelle de variation totale généralisée  $V$  donnée par (1.19). Nous allons couvrir les seize cas d’interactions (RC-1, RC-2, ..., NN) qui proviennent de l’équation (1.1) et qui impliquent l’interaction entre deux ondes lorsque la fonction de flux  $f$  est de type concave convexe. Ces résultats publiés au départ par Laforest et LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010) seront utiles pour étudier le potentiel d’interaction décroissant dans le chapitre 3.

Nous utiliserons la formule suivante pour faire les calculs. La fonctionnelle de variation totale généralisée est donnée par :

$$V(u(t)) = \sum_{\alpha} \sigma(u_l^{\alpha}, u_r^{\alpha}). \quad (2.1)$$

Dans la formule (2.1),  $\sigma$  est la force de l’onde alors que  $\alpha$  est la discontinuité qui se propage et  $u_l^{\alpha}, u_r^{\alpha}$  représentent les états de gauche et de droite de la discontinuité  $\alpha$ . Tout comme Laforest et LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010), nous supposons qu’un changement de variable  $\psi$  a déjà été appliqué à la variable  $u$  afin de s’assurer que  $\varphi^b$  vérifie les propriétés suivantes :

H1) La fonction  $\varphi^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitz continue ;

H2)  $\varphi^b$  est monotone décroissante et  $\varphi^b(0) = 0$  ;

H3) Il existe un voisinage compact  $I$  à l’intérieur duquel  $\text{Lip}(\varphi^b) < 1$  ;

H4)  $\varphi^\flat \circ \varphi^\flat$  est une contraction. En d'autres termes, pour une constante  $k \in (0, 1)$  nous avons  $|\varphi^\flat \circ \varphi^\flat(u)| \leq k|u|$ , pour tout  $u$ .

### **Théorème 2.1. (fonctionnelle de variation totale généralisée)**

*Considérons une fonction cinétique  $\varphi^\flat$  qui satisfait les propriétés H1) à H4) ci-dessus.*

*Pour une approximation de front tracking donnée  $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la loi de conservation  $u_t + f(u)_x = 0$  avec la condition initiale  $u(x, 0) = u_0 \in L^1 \cap L^\infty$  avec la fonction cinétique  $\varphi^\flat$  conduit à une fonctionnelle de variation totale généralisée  $V(u(t))$  qui est non croissante.*

### **Démonstration**

De la même manière que Laforest-LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010), nous démontrerons le théorème 2.1. Nous aurons besoin des inégalités qui correspondent aux seize cas dans le chapitre 3. Les symboles  $u_l, u_r, u_m$  sont présents. Ils représentent respectivement l'état de gauche, l'état de droite et l'état intermédiaire pour décrire deux ondes entrantes.

Pour la description des ondes, nous conserverons la notation introduite par LeFloch (LeFloch, 2002) puisque celle-ci est claire et concise. La signification des différents symboles est donnée dans les lignes qui suivent.

C : une onde de choc classique (si  $u_l > 0$  alors  $\varphi^\sharp(u_l) < u_r$  et si  $u_l < 0$  alors  $\varphi^\sharp(u_l) > u_r$ );

N : une onde de choc non classique (si  $u_r = \varphi^\flat(u_l)$ );

R : une onde de raréfaction (si  $u_l > 0$  alors  $u_r > u_l$  et si  $u_l < 0$  alors  $u_r < u_l$ );

$\uparrow$  : l'onde se déplace de la gauche vers la droite (onde croissante);

$\downarrow$  : l'onde se déplace de la droite vers la gauche (onde décroissante);

- + : l'onde joint deux états positifs ;
- : l'onde joint deux états négatifs ;
- $\pm$  : l'onde joint un état positif et un état négatif ;
- $\mp$  : l'onde joint un état négatif et un état positif ;
- / : onde(s) résultante(s) ;
- $\sigma(\cdot)$  : la force d'une onde ;
- $\sigma(\cdot')$  : la force d'une onde résultante ;
- $[V]$  : le changement dans la fonctionnelle de variation totale généralisée.

Par exemple, nous employons la notation  $(R_+^\uparrow C^\downarrow) - (C^{\downarrow'})$  pour indiquer qu'une onde de raréfaction et une onde classique interagissent. Pour la raréfaction, le signe + indique que l'onde relie deux états positifs alors que la flèche qui pointe vers le haut signifie que cette onde est croissante. L'onde résultante qui provient de cette interaction est une onde de choc. Pour spécifier qu'il s'agit d'une onde résultante, le symbole / est employé et cette onde est décroissante puisque la flèche associée à celle-ci pointe vers le bas.

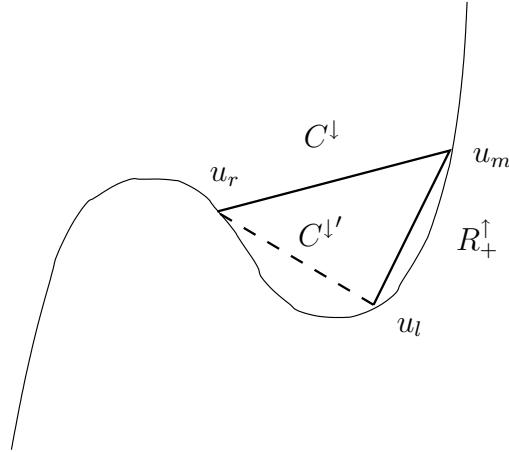


FIGURE 2.1 **Cas RC-1**  
 $(R_+^\uparrow C^\downarrow) - (C_+^{\downarrow'})$

**Cas RC-1**  $(R_+^\uparrow C^\downarrow) - (C_+^{\downarrow'})$

Ce cas est constitué des inégalités :

$$\max(\varphi^\sharp(u_l), \varphi^\sharp(u_m)) < u_r < u_l, \quad 0 < u_l < u_m.$$

Nous divisons ce premier cas en deux parties selon le signe de  $u_r$ .

1) Si  $u_r \geq 0$  alors nous avons  $(R_+^\uparrow C_+^\downarrow) - (C_+^{\downarrow'}).$

Nous allons évaluer le changement dans la fonctionnelle de variation totale généralisée,  $[V]$ . Ce calcul consiste à additionner les forces des ondes résultantes et de soustraire de celles-ci les forces des ondes entrantes. Nous avons besoin de la série d'inégalités :

$0 < u_r < u_l < u_m$  pour traiter les valeurs absolues dans l'expression (2.2).

$$\begin{aligned}
[V] &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(C_+^\downarrow) \\
&= |u_l - u_r| - |u_m - u_l| - |u_m - u_r| \\
&= (u_l - u_r) - (u_m - u_l) - (u_m - u_r) \\
&= -2(u_m - u_l) = -2|u_m - u_l| = -2\sigma(R_+^\uparrow)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2) Si  $u_r < 0$  alors on obtient  $(R_+^\uparrow C_\pm^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$ .

De plus,  $\varphi^\flat(u_l) < u_r$  alors  $-u_r < -\varphi^\flat(u_l) < u_l$ . Donc,

$$\begin{aligned}
[V] &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(C_\pm^\downarrow) \\
&= |u_l + u_r| - |u_m - u_l| - |u_m + u_r| = -2\sigma(R_+^\uparrow).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

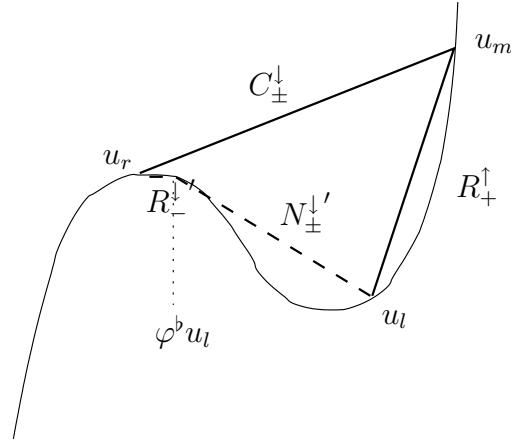
**Cas RC-2**  $(R_+^\uparrow C_\pm^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} R_-^{\downarrow'})$

Nous avons les inégalités :

$$\varphi^\sharp(u_m) < u_r \leq \varphi^\flat(u_l) < 0 < u_l < u_m.$$

Encore une fois, nous sommes en présence de deux sous-cas.

1) Si  $-u_r < u_l$  alors nous obtenons la série d'inégalités :  $-\varphi^\flat(u_l) < -u_r < u_l < u_m$ .



**FIGURE 2.2 Cas RC-2**  
 $(R_+^\uparrow C_\pm^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} R_-^{\downarrow'})$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(C_\pm^\downarrow) \\
 &= |u_l + \varphi^\flat(u_l)| + |\varphi^\flat(u_l) - u_r| - |u_m - u_l| - |u_m + u_r| \\
 &= 2|\varphi^\flat(u_l) - u_r| - 2|u_m - u_l| = -2(\sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(R_-^{\downarrow'}))
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cette quantité est négative parce que  $\varphi^\sharp(u_m) < u_r \leq \varphi^\flat(u_l) < 0$  et donc

$$\varphi^\flat(u_-) \leq \varphi^\sharp(u_-) \leq u_-. \tag{2.5}$$

Puisque la fonction  $\tilde{u} + \tilde{\varphi}^\flat(\tilde{u})$  est croissante alors

$$\begin{aligned}
 [V] &\leq 2|\varphi^\flat(u_l) - \varphi^\flat(u_m)| - 2|u_m - u_l| \\
 &\leq -2 \operatorname{Lip}(u + \varphi^\flat(u_l))\sigma(R_+^\uparrow) < 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

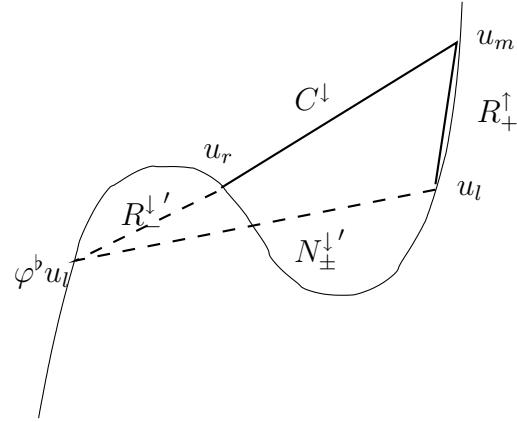


FIGURE 2.3 **Cas RC-3**  
 $(R_+^\uparrow C^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'})$

En d'autres mots,  $\sigma(R_+^\uparrow) > \sigma(R_-^\downarrow)$ .

2) Si  $-u_r > u_l$  la conclusion est la même.

**Cas RC-3**  $(R_+^\uparrow C^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} C^{\uparrow'})$

Nous avons les deux séries d'inégalités :

$$\max(\varphi^\flat(u_l), \varphi^\sharp(u_m)) < u_r < \varphi^\sharp(u_l), \quad 0 < u_l < u_m.$$

Deux sous-cas sont présents selon le signe de  $u_r$ .

1) Si  $u_r < 0$  alors on a  $(R_+^\uparrow C_\pm^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} C_-^{\uparrow'})$ .

La série d'inégalités est  $0 < -u_r < -\varphi^\flat(u_l) < u_l < u_m$ .

$$\begin{aligned}
[V] &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
&= |u_l + \varphi^{\flat}(u_l)| + |\varphi^{\flat}(u_l) - u_r| - |u_m - u_l| - |u_m + u_r| \\
&= -2\sigma(R_{+}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2) Si  $u_r \geq 0$  alors on obtient  $(R_{+}^{\uparrow} C_{+}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'} C_{\mp}^{\uparrow'})$ .

Nous avons les contraintes  $u_r < -\varphi^{\flat}(u_l) < u_l < u_m$ .

$$\begin{aligned}
[V] &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_{\mp}^{\uparrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) - \sigma(C_{+}^{\downarrow}) \\
&= |u_l + \varphi^{\flat}(u_l)| + |\varphi^{\flat}(u_l) + u_r| - |u_m - u_l| - |u_m - u_r| \\
&= -2\sigma(R_{+}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

**Cas RN**  $(R_{+}^{\uparrow} N_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'} R_{-}^{\uparrow'})$

Nous devons considérer les conditions  $u_r = \varphi^{\flat}(u_m)$  et  $0 < u_l < u_m$ .

Ce cas génère deux sous-cas dépendant de l'ordre relatif entre  $\varphi^{\flat}(u_m)$  et  $u_l$ .

1) Lorsque nous avons  $-\varphi^{\flat}(u_l) < -\varphi^{\flat}(u_m) < u_l < u_m$  alors

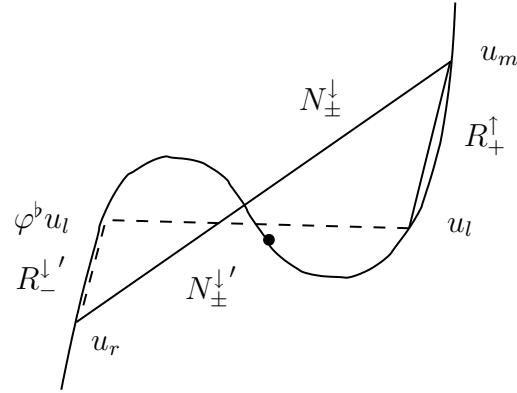


FIGURE 2.4 Cas RN  
 $(R_+^\uparrow N_\pm^\downarrow) - (N_\pm^\uparrow R_-^\downarrow)$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(N_\pm^\downarrow) + \sigma(R_-^\downarrow) - \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(N_\pm^\uparrow) \\
 &= |u_l + \varphi^\flat(u_l)| + |\varphi^\flat(u_l) - \varphi^\flat(u_m)| - |u_m - u_l| - |u_m + \varphi^\flat(u_m)|
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 [V] &= 2|\varphi^\flat(u_l) - \varphi^\flat(u_m)| - 2|u_m - u_l| \\
 &\leq -2 \operatorname{Lip}(u + \varphi^\flat)|u_m - u_l| \leq -2 \operatorname{Lip}(u + \varphi^\flat)\sigma(R_+^\uparrow).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

2) Le second sous-cas est caractérisé par  $-\varphi^\flat(u_l) < u_l < -\varphi^\flat(u_m) < u_m$ .

La conclusion demeure la même.

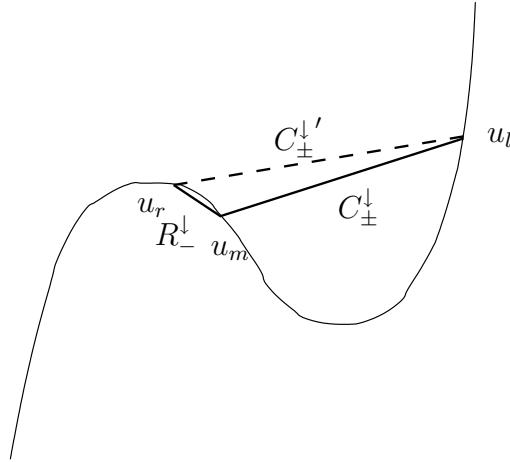


FIGURE 2.5 **Cas CR-1**  
 $(C_\pm^{\downarrow} R_-^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$

$$[V] \leq -2 \operatorname{Lip}(u + \varphi^\flat) \sigma(R_+^\uparrow) \quad (2.11)$$

**Cas CR-1**  $(C_\pm^{\downarrow} R_-^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$

Les inégalités sont les suivantes  $\varphi^\sharp(u_l) < u_r < u_m \leq 0 < u_l$ .

Ceci implique que  $-u_m < -u_r < -\varphi^\flat(u_l) < u_l$ .

$$\begin{aligned} [V] &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^{\downarrow}) - \sigma(R_-^\downarrow) \\ &= |u_l + u_r| - |u_l + u_m| - |u_m - u_r| = -2\sigma(R_-^\downarrow) \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Cas CR-2**  $(C_+^{\downarrow} R_+^\uparrow) - (C_+^{\downarrow'})$

Les contraintes sont données par  $\max(\varphi^\sharp(u_l), 0) \leq u_m < u_r < u_l$  et les ondes sont

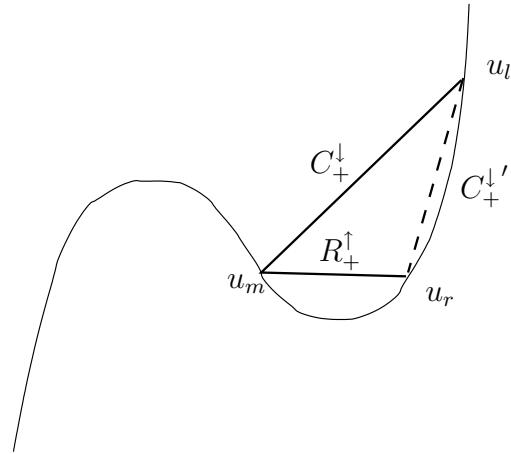


FIGURE 2.6 **Cas CR-2**  
 $(C_+^{\downarrow} R_+^{\uparrow}) - (C_+^{\downarrow'})$

toutes classiques.

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &= |u_l - u_r| - |u_l - u_m| - |u_m - u_r| = -2\sigma(R_+^{\uparrow})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

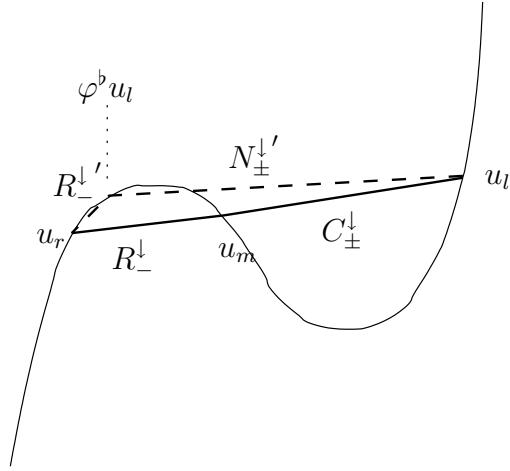
**Cas CR-3**  $(C_{\pm}^{\downarrow} R_{-}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'} R_{-}^{\downarrow'})$

Les inégalités sont  $u_r \leq \varphi^{\flat}(u_l) < \varphi^{\sharp}(u_l) < u_m \leq 0 < u_l$ .

Nous avons deux sous-cas possibles.

1) Si  $u_l < -u_r$  alors nous devons considérer les inégalités suivantes

$$-u_m < -\varphi^{\sharp}(u_l) < -\varphi^{\flat}(u_l) < u_l < -u_r.$$



**FIGURE 2.7 Cas CR-3**  
 $(C_\pm^{\downarrow} R_-^{\downarrow}) - (N_\pm^{\downarrow'} R_-^{\downarrow'})$

$$[V] = \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^{\downarrow}) - \sigma(R_-^{\downarrow}) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= |u_l + \varphi^\flat(u_l)| + |\varphi^\flat(u_l) - u_r| - |u_l + u_m| - |u_m - u_r| \\ &= 2(|u_l + u_r| - |\varphi^\flat(u_l) - u_m|) = 2(|u_r - \varphi^\flat(u_l)| - |u_l + u_m|) \\ &= -2(\sigma(R_-^{\downarrow}) - \sigma(R_-^{\downarrow'})) \end{aligned}$$

et puisque  $\sigma(R_-^{\downarrow}) = |-u_r + u_m| > \sigma(R_-^{\downarrow'}) = |-u_r + \varphi^\flat(u_l)|$

alors  $[V] < 0$ .

2) Si  $u_l > -u_r$  alors on a  $-u_m < -\varphi^\sharp(u_l) < -\varphi^\flat(u_l) < -u_r < u_l$ .

$$[V] = \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^{\downarrow}) - \sigma(R_-^{\downarrow}) \quad (2.15)$$

$$= -2|u_m - \varphi^\flat(u_l)| = -2(\sigma(R_-^{\downarrow}) - \sigma(R_-^{\downarrow'}))$$

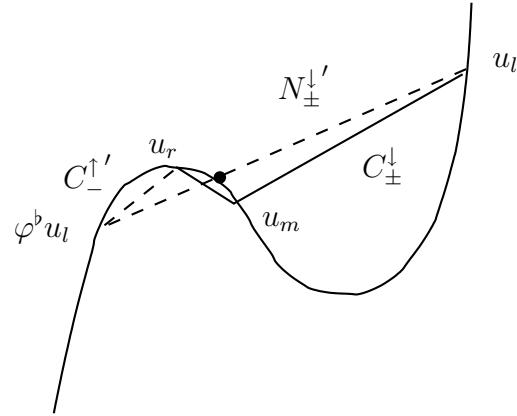


FIGURE 2.8 Cas **CR-4**  
 $(C_{\pm}^{\downarrow}R_{-}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow\prime}C_{-}^{\uparrow\prime})$

**Cas CR-4**  $(C_{\pm}^{\downarrow}R_{-}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow\prime}C_{-}^{\uparrow\prime})$

Les contraintes ont la forme  $\varphi^{\flat}(u_l) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_l) < u_m \leq 0 < u_l$ .

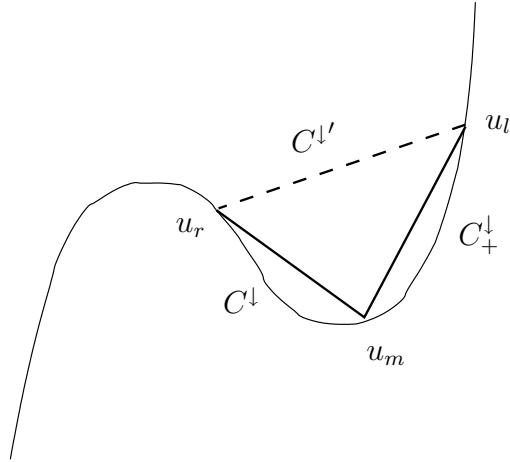
Alors on obtient  $-u_m < -u_r < -\varphi^{\flat}(u_l) < u_l$ .

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow\prime}) + \sigma(C_{-}^{\uparrow\prime}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \quad (2.16) \\
 &= |u_l + \varphi^{\flat}(u_l)| + |\varphi^{\flat}(u_l) - u_r| - |u_l + u_m| - |u_m - u_r| \\
 &= -2\sigma(R_{-}^{\downarrow})
 \end{aligned}$$

**Cas CC-1**  $(C_{+}^{\downarrow}C_{-}^{\downarrow}) - (C^{\downarrow\prime})$

Les contraintes s'expriment sous la forme

$$\max(\varphi^{\sharp}(u_l), \varphi^{\sharp}(u_m)) < u_r < u_m < u_l, \quad u_m \geq 0.$$



**FIGURE 2.9 Cas CC-1**  
 $(C_+^\downarrow C_+^\downarrow) - (C_+^{\downarrow'})$

Il y a deux sous-cas.

1) Si  $u_r \geq 0$  alors nous avons  $(C_+^\downarrow C_+^\downarrow) - (C_+^{\downarrow'})$ .

Les inégalités sont  $0 < u_r < u_m < u_l$ .

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C_+^\downarrow) \\
 &= |u_l - u_r| - |u_l - u_m| - |u_m - u_r| = 0
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2) Si  $u_r < 0$  alors  $(C_+^\downarrow C_\pm^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$ .

Nous avons les inégalités suivantes  $0 < -u_r < -\varphi^\flat(u_m) < u_m < u_l$ .

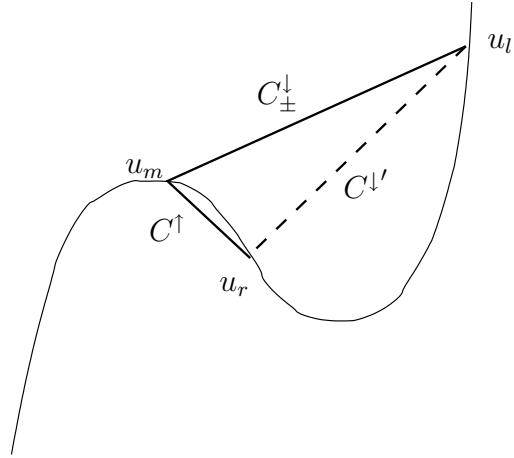


FIGURE 2.10 **Cas CC-2**  
 $(C_\pm^\downarrow C^\uparrow) - (C'^\downarrow)$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C_\pm^\downarrow) \\
 &= |u_l + u_r| - |u_l - u_m| - |u_m + u_r| = 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

**Cas CC-2**  $(C_\pm^\downarrow C^\uparrow) - (C'^\downarrow)$

Les contraintes prennent la forme suivante

$$\varphi^\sharp(u_l) < u_m < u_r < \varphi^\sharp(u_m) < u_l, \quad u_m < 0.$$

1) Si  $u_r \geq 0$  nous avons  $(C_\pm^\downarrow C^\uparrow) - (C_+^{\downarrow'}).$

Les contraintes se présentent comme suit

$$-u_m < -\varphi^\flat(u_l) < u_l$$

$$u_r < \varphi^\sharp(u_m) < \varphi^\flat(u_m) < -u_m.$$

Nous combinons celles-ci pour aboutir à

$$0 < u_r < \varphi^\sharp(u_m) < \varphi^\flat(u_m) < -u_m < -\varphi^\flat(u_l) < u_l.$$

$$\begin{aligned} [V] &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^\downarrow) - \sigma(C_\mp^\uparrow) \\ &= |u_l - u_r| - |u_l + u_m| - |u_m + u_r| = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2) Si  $u_r < 0$  alors on a  $(C_\pm^\downarrow C_-^\uparrow) - (C_\pm^{\downarrow'}).$

Nous devons considérer les inégalités :  $0 < -u_r < -u_m < u_l.$

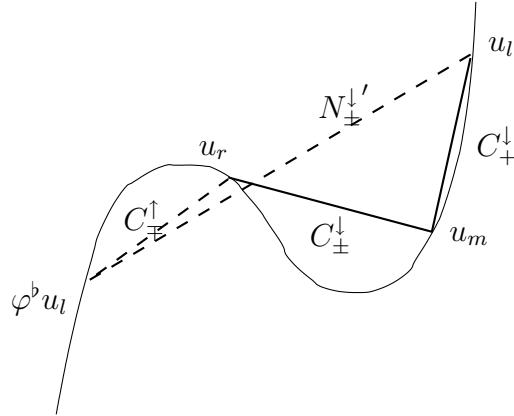
$$\begin{aligned} [V] &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^\downarrow) - \sigma(C_-^\uparrow) \\ &= |u_l + u_r| - |u_l + u_m| - |u_m - u_r| = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

**Cas CC-3**  $(C_+^\downarrow C_-^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} C_-^{\uparrow'})$

Nous avons les états suivants à regarder

$$\varphi^\flat(u_l) < \varphi^\sharp(u_m) < u_r < \varphi^\sharp(u_l) < u_m < u_l, \quad u_m \geq 0.$$

1) Si  $u_r < 0$  on obtient  $(C_+^\downarrow C_\pm^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} C_-^{\uparrow'}).$



**FIGURE 2.11 Cas CC-3**  
 $(C_+^\downarrow C_-^\downarrow) - (N_\pm^\downarrow' C_\mp^\uparrow)$

On considère que  $u_m < -\varphi^b(u_l)$  et que  $-u_r < -\varphi^b(u_m) < u_m$ .

Nous arrivons à :  $0 < -u_r < -\varphi^b(u_m) < u_m < -\varphi^b(u_l) < u_l$ .

$$[V] = \sigma(N_\pm^\downarrow') + \sigma(C_-^\uparrow) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C_\pm^\downarrow) \quad (2.21)$$

$$= |u_l + \varphi^b(u_l)| + |\varphi^b(u_l) - u_r| - |u_l - u_m| - |u_m + u_r| = 0$$

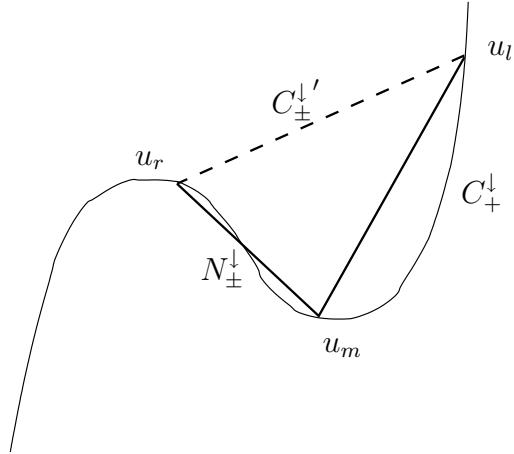
Par contre si  $u_m > -\varphi^b(u_l)$  on a la série d'inégalités :  $0 < -u_r < -\varphi^b(u_l) < u_m < u_l$ .

L'expression pour  $[V]$  est identique et le résultat demeure 0.

2) Si  $u_r \geq 0$  nous sommes en présence de  $(C_+^\downarrow C_+^\downarrow) - (N_\pm^\downarrow' C_\mp^\uparrow)$ .

Traitons le cas  $u_r > 0$  et  $u_m < -\varphi^b(u_l)$ .

Les inégalités ont la forme suivante :  $0 < u_r < u_m < -\varphi^b(u_l) < u_l$ .



**FIGURE 2.12 Cas CN-1**  
 $(C_+^\downarrow N_\pm^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(C_\mp^{\uparrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C_+^{\downarrow'}) \\
 &= |u_l + \varphi^\flat(u_l)| + |\varphi^\flat(u_l) + u_r| - |u_l - u_m| - |u_m - u_r| = 0
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Considérons maintenant le dernier sous-cas :  $u_r > 0$  et  $u_m > -\varphi^\flat(u_l)$ .

Ici, le résultat obtenu est le même que celui qui provient de la première partie du sous-cas 2). Donc  $[V] = 0$ .

**Cas CN-1**  $(C_+^\downarrow N_\pm^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$

Les contraintes sont :  $0 < u_m < u_l$  et  $\varphi^\sharp(u_l) \leq u_r = \varphi^\flat(u_m)$ .

On obtient les inégalités qui suivent :  $0 < -\varphi^\flat(u_m) < u_m < u_l$ .

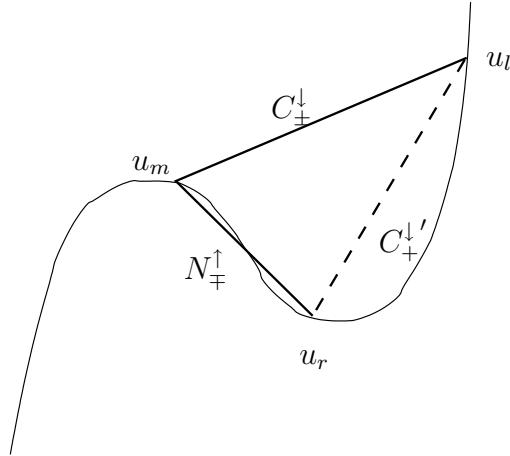


FIGURE 2.13 **Cas CN-2**  
 $(C_{\pm}^{\downarrow} N_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{+}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= |u_l + \varphi^b(u_m)| - |u_l - u_m| - |u_m + \varphi^b(u_m)| = 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

**Cas CN-2**  $(C_{\pm}^{\downarrow} N_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

Ce cas est constitué par  $\varphi^{\sharp}(u_l) < u_m < 0$  et  $u_r = \varphi^b(u_m)$ .

Nous avons besoin des inégalités ci-dessous :

$$0 < u_r = \varphi^b(u_m) < -u_m < -\varphi^b(u_l) < u_l.$$

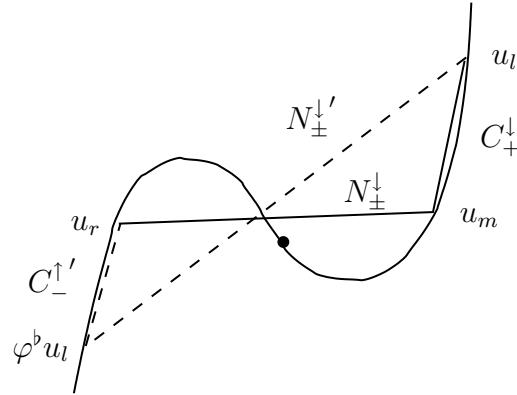


FIGURE 2.14 Cas CN-3  
 $(C_+^{\downarrow'} N_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'} C_-^{\uparrow'})$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
 &= |u_l - \varphi^b(u_m)| - |u_l + u_m| - |u_m + \varphi^b(u_m)| = 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

**Cas CN-3**  $(C_+^{\downarrow'} N_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'} C_-^{\uparrow'})$

Nous avons les états  $0 < u_m < u_l$  et  $u_r = \varphi^b(u_m) < \varphi^{\sharp}(u_l)$ .

Deux sous-cas doivent être pris en considération.

1) Si  $u_m < -\varphi^b(u_l)$  nous avons les inégalités qui suivent :

$-\varphi^b(u_m) < u_m < -\varphi^b(u_l) < u_l$ . Alors,

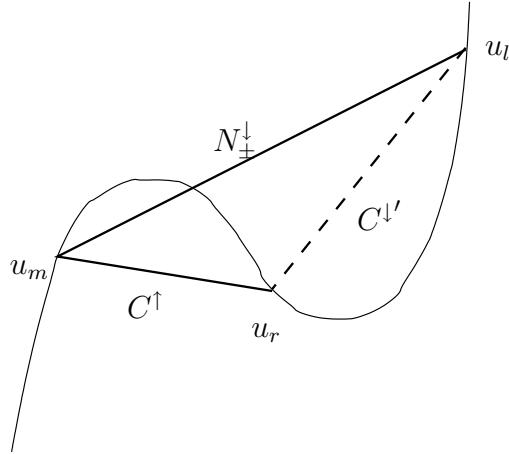


FIGURE 2.15 **Cas NC**  
 $(N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow}) - (C^{\downarrow'})$

$$\begin{aligned}
 [V] &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \sigma(C_{+}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= |u_l + \varphi^b(u_l)| + |\varphi^b(u_l) - \varphi^b(u_m)| - |u_l - u_m| - |u_m + \varphi^b(u_m)| \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

2) Si  $u_m > -\varphi^b(u_l)$  nous avons  $-\varphi^b(u_m) < -\varphi^b(u_l) < u_m < u_l$ .

Tout comme dans le premier sous-cas  $[V] = 0$ .

**Cas NC**  $(N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow}) - (C^{\downarrow'})$

Les états se présentent de la manière suivante :

$$u_m = \varphi^b(u_l), \quad \varphi^{\sharp}(u_l) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_m) < u_l.$$

1) Si  $u_r < 0$  les inégalités s'écrivent :  $-u_r < -\varphi^b(u_l) < u_l$ .

Les interactions entre les ondes sont  $(N_{\pm}^{\downarrow} C_{-}^{\uparrow}) - (C_{\pm}^{\downarrow'})$ .

$$\begin{aligned}[V] &= \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C_{-}^{\uparrow}) \\ &= |u_l + u_r| - |u_l + \varphi^b(u_l)| - |\varphi^b(u_l) - u_r| = 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

2) Si  $u_r \geq 0$  alors on a  $(N_{\pm}^{\downarrow} C_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$ .

Les inégalités sont  $0 < u_r < -\varphi^b(u_m) < -\varphi^b(u_l) < u_l$ .

$$\begin{aligned}[V] &= \sigma(C_{+}^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C_{\mp}^{\uparrow}) \\ &= |u_l - u_r| - |u_l + \varphi^b(u_l)| - |\varphi^b(u_l) + u_r| = 0\end{aligned}\tag{2.27}$$

**Cas NN**  $(N_{\pm}^{\downarrow} N_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

Les états sont  $u_m = \varphi^b(u_l)$  et  $u_r = \varphi^b(u_m)$ .

Les inégalités requises pour ce cas sont :  $0 < \varphi^b(u_m) = u_r < -\varphi^b(u_l) < u_l$ .

$$\begin{aligned}[V] &= \sigma(C_{+}^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\ &= |u_l - \varphi^b(u_m)| - |u_l + \varphi^b(u_l)| - |\varphi^b(u_l) + \varphi^b(u_m)| = 0\end{aligned}\tag{2.28}$$



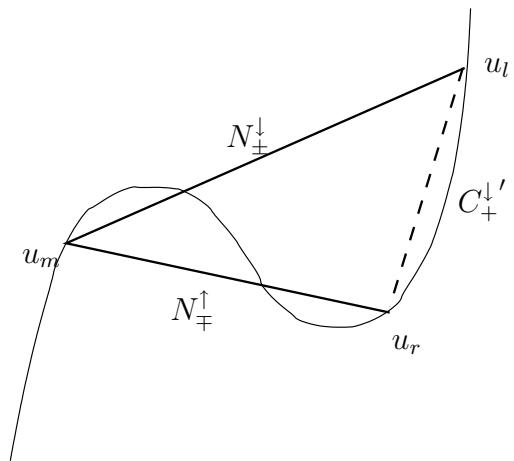


FIGURE 2.16 **Cas NN**  
 $(N_{\pm}^{\downarrow} N_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

## CHAPITRE 3

### ANALYSE D'UN POTENTIEL D'INTERACTION

Notre objectif dans ce chapitre est de présenter les résultats qui proviennent de la fonctionnelle employée pour effectuer l'analyse des seize cas d'interactions possibles au niveau des ondes. Mais tout d'abord, nous allons définir cette fonctionnelle.

$$\theta(x, y) = \begin{cases} C_*(\hat{a}(x) - \hat{a}(y))^+ & \text{même monotonocité} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la définition de la fonction de poids  $\theta(x, y)$ ,  $C_*$  est une constante positive. De plus, nous dirons que deux ondes ont la même monotonie si elles sont toutes les deux soient des chocs (classiques ou non classiques) ou des raréfactions.

La définition de la vitesse normalisée  $\hat{a}$  d'une onde en  $x$  avec des états voisins  $u_x^+$  et  $u_x^-$  se lit comme suit :

$$\hat{a}(x) = \frac{f(\hat{u}_x^+) - f(\hat{u}_x^-)}{(\hat{u}_x^+) - (\hat{u}_x^-)}$$

À l'intérieur de la définition ci-dessus,  $\hat{u}_x$  se présente sous la forme :

$$\hat{u}_x = \begin{cases} u_x, & \text{si } u_x \geq 0 \\ \varphi_0^\flat(u_x), & \text{si } u_x < 0 \end{cases}$$

Pour la force des ondes  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  nous utiliserons la définition de Laforest-LeFloch donnée par l'équation (1.19).

La fonctionnelle introduite ci-dessus est l'analyse naturelle de celle présentée par

Iguchi-LeFloch (Iguchi and LeFloch, 2003) dans leur étude. Par contre, ce n'est pas le seul potentiel d'interaction qui a été étudié dans le passé. En effet, le potentiel de Glimm

$$Q(u(t)) = \sum_{\alpha \text{ approche } \beta} \sigma_\alpha \times \sigma_\beta$$

a fait l'objet d'une étude par Laforest-LeFloch (Laforest and LeFloch, 2010). Ils ont démontré que ce potentiel est décroissant sauf pour les cas RC-3, CR-4, CC-3 ainsi que CN-3.

Dans des travaux non publiés, ces deux mêmes chercheurs ont analysé la fonctionnelle ci-dessous

$$Q_G(u(t)) = \sum_{\alpha \text{ approche } \beta} \tilde{\theta} \times \sigma_\alpha \times \sigma_\beta.$$

Dans ce second cas,  $\tilde{\theta}$  utilise la vitesse de Rankine-Hugoniot plutôt que la vitesse normalisée  $\hat{a}$ . Le potentiel d'interaction est décroissant sauf pour les cas RC-3, CR-4, CC-3 et CN-3.

Voici le théorème principal de ce mémoire.

### **Théorème 3.1.**

*Soit  $\varphi^\flat$  une fonction cinétique qui satisfait les propriétés H1, H2, H3 et H4 alors la fonctionnelle introduite ci-dessus est décroissante dans tous les cas d'interactions sauf pour CC-1, CC-2, CC-3, CN-1, CN-2, CN-3, NC et NN.*

Nous avons deux objectifs dans cette recherche. Nous désirons introduire une fonctionnelle qui permet d'obtenir un potentiel d'interaction décroissant pour les cas RC-3, CR-4, CC-3 et CN-3. Ces quatre cas font échouer la fonctionnelle Iguchi-LeFloch. Notre propre fonctionnelle est de type Iguchi-LeFloch. Dans un second temps, nous allons tester les autres cas d'interactions possibles.

Passons maintenant à la présentation des résultats obtenus à partir de notre

fonctionnelle. Pour faciliter la lecture, nous allons identifier chaque cas d'interaction avec son titre et les sous-cas résultants avec les chiffres romains i) à iv).

**Cas RC-1** ( $R_+^\uparrow C^\downarrow$ ) – ( $C^\downarrow'$ )

$$\max(\varphi^\sharp(u_l), \varphi^\sharp(u_m)) < u_r < u_l \quad \text{et} \quad 0 < u_l < u_m.$$

Considérons tout d'abord la situation où  $u_r \geq 0$ . Toutes les ondes présentes joignent deux états positifs. Toutefois, lorsque  $u_r < 0$ , des ondes qui relient un état positif à un état négatif apparaissent. Dans les deux situations, les calculs sont identiques. Pour cette raison, nous présenterons les calculs sans faire de distinction selon le signe de  $u_r$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, R_+^\uparrow)\sigma(R_+^\uparrow) - \theta(y, C^\downarrow)\sigma(C^\downarrow) \\ &= C_\star|v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - C_\star|v(C^\downarrow) - \Lambda|_+ \sigma(C^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous avons pour les vitesses :  $v(C^{\downarrow'}) < v(C^\downarrow) < v(R_+^\uparrow)$ .

En pratique, nous devons étudier le signe de (3.1) pour toutes les valeurs de  $\Lambda$ , la vitesse en  $y$ . En général, il sera facile de constater que  $B$ , qui est une fonction continue et linéaire par morceaux par rapport au terme  $\Lambda$ , est négative en vérifiant sa valeur pour une seule valeur critique de  $\Lambda$ . Dans le cas actuel, il est facile de voir qu'en regardant les valeurs de  $B(y)$  pour tout  $\Lambda$  décroissant mais débutant en  $\Lambda = \infty$ ,  $B(y) = -\sigma(R_+^\uparrow)$  si  $\Lambda \geq v(R_+^\uparrow)$  et que  $B(y)$  est certainement décroissant pour  $\Lambda \in [v(C^{\downarrow'}), v(R_+^\uparrow)]$ . Le seul terme positif apparaît quand  $\Lambda < v(C^{\downarrow'})$ .

Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 B(y) &= C_\star |v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - C_\star |v(C^\downarrow) - \Lambda|_+ \sigma(C^\downarrow) \\
 &= C_\star |v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ [\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C^\downarrow)] - \sigma(R_+^\uparrow) - C_\star |v(C^\downarrow) - v(C^{\downarrow'})|_+ \sigma(C^\downarrow) \\
 &= -C_\star |v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(R_+^\uparrow) - C_\star |v(C^\downarrow - v(C^{\downarrow'})| \sigma(C^\downarrow) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans bien des cas qui viennent plus tôt, un calcul semblable sera possible et nous mentionnerons tout simplement que le pire cas possible est  $\Lambda = v(C^{\downarrow'})$ , sans toutefois répéter le calcul ci-dessus.

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C^\downarrow) < 0$ , alors nous avons

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, R_+^\uparrow) \sigma(R_+^\uparrow) - \theta(y, C^\downarrow) \sigma(C^\downarrow) \\
 &= \sigma(C^{\downarrow'}) - C_\star |v(R_+^\uparrow) - \Lambda|_+ \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(C^\downarrow) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, R_+^\uparrow) \sigma(R_+^\uparrow) - \theta(x, C^\downarrow) \sigma(C^\downarrow) \\
 &= C_\star |\Lambda - v(C^{\downarrow'})|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) - C_\star |\Lambda - v(C^\downarrow)|_+ \sigma(C^\downarrow)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Puisque l'onde se trouve du côté gauche, il est facile de remarquer que cette quantité est négative si  $\Lambda = v(C^{\downarrow'})$ . Pour montrer que  $B(y)$  est négatif pour tout  $\Lambda$ , il suffit de le montrer quand  $\Lambda = v(C^\downarrow)$ . Alors, nous avons l'expression  
 $|v(C^\downarrow) - v(C^{\downarrow'})| = \tilde{C} \sigma(R_+^\uparrow)$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= C_\star \tilde{C} \sigma(R_+^\uparrow) \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) \\ &= \sigma(R_+^\uparrow) [C_\star \tilde{C} \sigma(C^{\downarrow'}) - 1] < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si nous posons  $C_\star$  de manière à ce que

$$C_\star \tilde{C} \sigma(C^{\downarrow'}) < 1$$

alors  $B(x)$  sera négatif. Ceci est possible si la variation totale des ondes est bornée a priori.

iv) Soit une onde de raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

Pour tout  $\Lambda$ , nous avons  $\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C^\downarrow) < 0$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, R_+^\uparrow) \sigma(R_+^\uparrow) - \theta(x, C^\downarrow) \sigma(C^\downarrow) \\ &= \sigma(C^{\downarrow'}) - C_\star |\Lambda - v(R_+^\uparrow)|_+ \sigma(R_+^\uparrow) - \sigma(C^\downarrow) < 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Cas RC-2**  $(R_+^\uparrow C_\pm^\downarrow) - (N_\pm^{\downarrow'} R_-^{\downarrow'})$   
 $\varphi^\sharp(u_m) < u_r \leq \varphi^\flat(u_l) < 0 < u_l < u_m$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - C_{\star} |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous avons :  $v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(R_{-}^{\downarrow'}) < v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(R_{+}^{\uparrow})$ .

Le pire cas correspond à  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow'})$ . Puisque  $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) < \sigma(R_{+}^{\uparrow})$ , on obtient

$$B(y) = \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) - C_{\star} |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) < 0. \tag{3.8}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$ ,  $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) < \sigma(R_{+}^{\uparrow})$  et pour les vitesses

$|v(R_{-}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+} < |v(R_{+}^{\uparrow}) - \Lambda|_{+}$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star} |v(R_{-}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+} \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - C_{\star} |v(R_{+}^{\uparrow}) - \Lambda|_{+} \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(x, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= C_{\star} |\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - C_{\star} |\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le pire cas correspond à  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$B(x) = C_{\star} |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}). \tag{3.11}$$

Or,  $|v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \leq C \sigma(R_{+}^{\uparrow})$ . L'expression mathématique devient

$$\begin{aligned}
 B(x) &\leq C_{\star} C \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &= \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \times [C_{\star} C \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - 1] + \sigma(R_{-}^{\downarrow'})
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ici, nous introduisons un résultat utile que nous obtenons en se basant sur l'inégalité :  
 $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) \leq -\text{Lip}(\varphi^b) \sigma(R_{+}^{\uparrow})$

Ceci nous permet d'écrire :

$$B(x) = \sigma(R_{+}^{\uparrow}) [C_{\star} C \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \text{Lip}(\varphi^b) - 1] < 0 \tag{3.13}$$

si la condition ci-dessous est respectée

$$[C_{\star} C \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \text{Lip}(\varphi^b)] < 1. \tag{3.14}$$

Selon la théorie, il est toujours possible de supposer que  $\text{Lip}(\varphi^b) < 1$  uniformément

pour l'ensemble des valeurs bornées de  $u$ .

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, R_{-}^{\downarrow'})\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(x, R_{+}^{\uparrow})\sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|\Lambda - v(R_{-}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(R_{+}^{\uparrow})|_{+}\sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le pire cas est  $\Lambda = v(R_{+}^{\uparrow})$ . Alors,

$$B(x) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) + C_{\star}|v(R_{+}^{\uparrow}) - v(R_{-}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) \tag{3.16}$$

Or, nous avons l'expression<sup>1</sup>  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) = -C_2\sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$  et  
 $|v(R_{+}^{\uparrow}) - v(R_{-}^{\downarrow'})|_{+} \leq C_1\sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 B(x) &\leq \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) + C_{\star}C_1\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &\leq -C_2\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) + C_{\star}C_1\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})[-C_2 + C_{\star}C_1] \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

lorsque  $C_{\star}$  satisfait l'inégalité

$$C_{\star}C_1 \leq C_2$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  qui sont des constantes.

**Cas RC-3**  $(R_{+}^{\uparrow}C_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}C^{\uparrow'})$   
 $\max(\varphi^{\flat}(u_l), \varphi^{\sharp}(u_m)) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_l)$  et  $0 < u_l < u_m$ .

---

1. La démonstration de ce résultat est difficile.

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(y, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
 &= C_*|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|v(C^{\uparrow'}) - \Lambda|_+\sigma(C^{\uparrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - C_*|v(C^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour les vitesses, on a :  $\max(v(C^{\downarrow}), v(N_{\pm}^{\downarrow'})) \leq \min(v(C^{\uparrow'}), v(R_+^{\uparrow}))$ .

Le pire cas possible correspond à  $\Lambda = v(C^{\downarrow})$  et  $v(C^{\downarrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow'})$  alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 B(y) &= C_*|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - v(C^{\downarrow})|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|v(C^{\uparrow'}) - v(C^{\downarrow})|_+\sigma(C^{\uparrow'}) \\
 &\quad - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\leq C_*C_1\sigma(R_+^{\uparrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*C_2\sigma(R_+^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &= \sigma(R_+^{\uparrow})[C_*C_1\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*C_2\sigma(C^{\uparrow'}) - 1] < 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

si nous prenons  $C_*$  a priori petit. Autrement dit, il faut que

$$C_*C_1\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*C_2\sigma(C^{\uparrow'}) < 1.$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Ici, étant donné que  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) \leq \sigma(C^{\downarrow})$  alors on a

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(y, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) - C_*|v(R_+^{\uparrow}) - \Lambda|_+\sigma(R_+^{\uparrow}) - \sigma(C^{\downarrow}) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(x, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(x, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
 &= C_*|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|\Lambda - v(C^{\uparrow'})|_+\sigma(C^{\uparrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - C_*|\Lambda - v(C^{\downarrow})|_+\sigma(C^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le pire cas est  $\Lambda = v(C^{\downarrow})$  avec  $v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(C^{\downarrow})$ . Lorsque ces conditions sont satisfaites, nous avons

$$\begin{aligned}
 B(x) &= C_*|v(C^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &= C_*C_3\sigma(R_+^{\uparrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &= \sigma(R_+^{\uparrow})[C_*C_3\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - 1] < 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

si  $C_*C_3\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) < 1$ .

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

Sachant que  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) \leq \sigma(C^{\downarrow})$ , nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(x, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(x, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) - C_*|\Lambda - v(R_+^{\uparrow})|_+\sigma(R_+^{\uparrow}) - \sigma(C^{\downarrow}) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

**Cas RN**  $(R_+^{\uparrow}N_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}R_-^{\downarrow'})$   
 $0 < u_l < u_m$  et  $u_r = \varphi^{\flat}(u_m)$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Les inégalités pour les vitesses ont la forme :

$$v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(N_{\pm}^{\downarrow}) < \min(v(R_{-}^{\downarrow'}), v(R_{+}^{\uparrow})) < \max(v(R_{-}^{\downarrow'}), v(R_{+}^{\uparrow})).$$

Le pire cas consiste en  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow'})$ . Parce que  $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) < \sigma(R_{+}^{\uparrow})$ , nous avons

$$B(y) = \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) - C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) < 0 \tag{3.25}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star} |v(R_{-}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+} \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - C_{\star} |v(R_{+}^{\uparrow}) - \Lambda|_{+} \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\
 &\quad - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Le pire cas possible est lorsque  $v(R_{+}^{\uparrow}) < v(R_{-}^{\downarrow'})$  et  $\Lambda = v(R_{+}^{\uparrow})$ . Dans cette situation, nous obtenons ceci

$$B(y) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star} |v(R_{-}^{\downarrow'}) - v(R_{+}^{\uparrow})|_{+} \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}). \tag{3.27}$$

Or, on peut écrire ce qui suit

$$\begin{aligned}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) &= \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\ &= \text{Lip}(\varphi^{\flat} \circ \varphi^{\flat}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\ &= -\sigma(R_{+}^{\uparrow}) [1 - \text{Lip}(\varphi^{\flat} \circ \varphi^{\flat})]\end{aligned}\tag{3.28}$$

De plus,  $|v(R_{-}^{\downarrow'}) - v(R_{+}^{\uparrow})|_{+} \leq C_2$  quand une borne  $TV(u_0)$  existe. Donc, nous aboutissons à l'expression ci-dessous

$$B(y) = -\sigma(R_{+}^{\uparrow}) [1 - \text{Lip}(\varphi^{\flat} \circ \varphi^{\flat}) - C_{\star}C_2 \text{Lip}(\varphi^{\flat})^{-1}] \leq 0\tag{3.29}$$

si  $C_{\star}$  est petit a priori.

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, R_{-}^{\downarrow'}) \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(x, R_{+}^{\uparrow}) \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\ &\quad - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\ &= C_{\star} |\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow}) \\ &\quad - C_{\star} |\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow})\end{aligned}\tag{3.30}$$

Le pire cas correspond à  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow})$ , ce qui mène à

$$B(x) = C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{+}^{\uparrow})\tag{3.31}$$

On a  $|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} = C \sigma(R_{+}^{\uparrow})$  et  $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) = \sigma(R_{+}^{\uparrow}) |\text{Lip}(\varphi^{\flat} \circ \varphi^{\flat})|$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= C_\star C \sigma(R_+^\uparrow) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^\uparrow) \\ &= \sigma(R_+^\uparrow) [C_\star C \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + |\text{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat)| - 1] < 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

si la condition ci-dessous est satisfaite

$$[C_\star C \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + |\text{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat)|] < 1. \quad (3.33)$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, N_\pm^{\downarrow'}) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \theta(x, R_-^{\downarrow'}) \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \theta(x, R_+^\uparrow) \sigma(R_+^\uparrow) \\ &\quad - \theta(x, N_\pm^\downarrow) \sigma(N_\pm^\downarrow) \\ &= \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + C_\star |\Lambda - v(R_-^{\downarrow'})|_+ \sigma(R_-^{\downarrow'}) - C_\star |\Lambda - v(R_+^\uparrow)|_+ \sigma(R_+^\uparrow) \\ &\quad - \sigma(N_\pm^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le pire cas à considérer est quand  $v(R_+^\uparrow) > v(R_-^{\downarrow'})$  et  $\Lambda = v(R_+^\uparrow)$ .

Nous avons l'expression ci-dessous :

$$B(x) = \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + C_\star |v(R_+^\uparrow) - v(R_-^{\downarrow'})|_+ \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \sigma(N_\pm^\downarrow). \quad (3.35)$$

Tout comme en ii)  $\sigma(N_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(N_\pm^\downarrow) = -\sigma(R_+^\uparrow)[1 - \text{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat)]$ . Alors que  $|v(R_+^\uparrow) - v(R_-^{\downarrow'})|_+ = C_2$ . Ceci implique

$$\begin{aligned} B(x) &= -\sigma(R_+^\uparrow)[1 - \text{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat)] + C_\star C_2 \text{Lip}(\varphi^\flat)^{-1} \sigma(R_+^\uparrow) \\ &= -\sigma(R_+^\uparrow)[1 - \text{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat) - C_\star C_2 \text{Lip}(\varphi^\flat)^{-1}] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

lorsque les constantes  $C_*$  et  $C_2$  sont suffisamment petites pour avoir

$$C_* C_2 \operatorname{Lip}(\varphi^\flat)^{-1} + \operatorname{Lip}(\varphi^\flat \circ \varphi^\flat) \leq 1. \quad (3.37)$$

**Cas CR-1**  $(C_\pm^\downarrow R_-^\downarrow) - (C_\pm^{\downarrow'})$

$$\varphi^\sharp(u_l) < u_r < u_m \leq 0 < u_l.$$

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_\pm^{\downarrow'}) \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \theta(y, C_\pm^\downarrow) \sigma(C_\pm^\downarrow) - \theta(y, R_-^\downarrow) \sigma(R_-^\downarrow) \\ &= C_* |v(C_\pm^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - C_* |v(C_\pm^\downarrow) - \Lambda|_+ \sigma(C_\pm^\downarrow) \\ &\quad - \sigma(R_-^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La série d'inégalités est :  $v(R_-^\downarrow) < v(C_\pm^{\downarrow'}) < v(C_\pm^\downarrow)$ .

Le pire cas est  $\Lambda = v(C_\pm^{\downarrow'})$ . Dans cette situation, nous obtenons :

$$B(y) = -C_* |v(C_\pm^\downarrow) - v(C_\pm^{\downarrow'})|_+ \sigma(C_\pm^\downarrow) - \sigma(R_-^\downarrow) \leq 0. \quad (3.39)$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_\pm^{\downarrow'}) < \sigma(C_\pm^\downarrow)$ , on a

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_\pm^{\downarrow'}) \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \theta(y, C_\pm^\downarrow) \sigma(C_\pm^\downarrow) - \theta(y, R_-^\downarrow) \sigma(R_-^\downarrow) \\ &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_\pm^\downarrow) - C_* |v(R_-^\downarrow) - \Lambda|_+ \sigma(R_-^\downarrow) < 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, R_{-}^{\downarrow}) \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= C_{\star} |\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - C_{\star} |\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ &\quad - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Le pire cas est  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors

$$\begin{aligned} B(x) &= C_{\star} |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - v(C_{\pm}^{\downarrow'})|_{+} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= C_{\star} \tilde{C} \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= \sigma(R_{-}^{\downarrow}) [C_{\star} \tilde{C} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - 1] < 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

si nous faisons l'hypothèse que les constantes  $C_{\star}$  et  $\tilde{C}$  sont assez petites pour que la condition suivante soit vraie

$$C_{\star} \tilde{C} \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) < 1. \quad (3.43)$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, R_{-}^{\downarrow}) \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star} |\Lambda - v(R_{-}^{\downarrow})|_{+} \sigma(R_{-}^{\downarrow}) < 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

**Cas CR-2**  $(C_{+}^{\downarrow} R_{+}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

$$\max(\varphi^{\sharp}(u_l), 0) \leq u_m < u_r < u_l.$$

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) - \theta(y, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nous constatons que  $v(R_+^{\uparrow}) < v(C_+^{\downarrow}) < v(C_+^{\downarrow'})$ .

Ici, la pire situation correspond à  $\Lambda = v(C_+^{\downarrow})$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} B(y) &= C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= C_{\star}\tilde{C}\sigma(R_+^{\uparrow})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= \sigma(R_+^{\uparrow})[C_{\star}\tilde{C}\sigma(C_+^{\downarrow'}) - 1] < 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Encore une fois, nous faisons l'hypothèse que  $C_{\star}$  ainsi que  $\tilde{C}$  sont des constantes positives et assez petites pour avoir

$$C_{\star}\tilde{C}\sigma(C_+^{\downarrow'}) < 1. \quad (3.47)$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_+^{\downarrow'}) < \sigma(C_+^{\downarrow})$  alors

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) - \theta(y, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - C_{\star}|v(R_+^{\uparrow}) - \Lambda|_+\sigma(R_+^{\uparrow}) < 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) - \theta(x, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow'})|_+\sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Le pire cas possible provient de  $\Lambda = v(C_+^{\downarrow'})$ . Alors,

$$B(x) = -C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(R_+^{\uparrow}) < 0. \quad (3.50)$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_+^{\downarrow'}) < \sigma(C_+^{\downarrow})$ , alors on obtient ceci

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) - \theta(x, R_+^{\uparrow})\sigma(R_+^{\uparrow}) \\ &= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - C_{\star}|\Lambda - v(R_+^{\uparrow})|_+\sigma(R_+^{\uparrow}) < 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

**Cas CR-3**  $(C_{\pm}^{\downarrow}R_{-}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}R_{-}^{\downarrow'})$

$$u_r \leq \varphi^{\flat}(u_l) < \varphi^{\sharp}(u_l) < u_m \leq 0 < u_l.$$

Les vitesses sont dans l'ordre suivant :  $\min(v(R_{-}^{\downarrow}), v(N_{\pm}^{\downarrow'})) < \max(v(R_{-}^{\downarrow}), v(N_{\pm}^{\downarrow'})) < \min(v(C_{\pm}^{\downarrow}), v(R_{-}^{\downarrow'})) < \max((v(C_{\pm}^{\downarrow}), v(R_{-}^{\downarrow'}))$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

Nous sommes en présence des inégalités suivantes pour les forces :  $\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) < \sigma(R_{-}^{\downarrow})$  et  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$ .

Tandis que pour les vitesses, on a  $|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ < |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+$ . Ces trois inégalités mènent à

$$B(y) = \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'})\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & - \theta(y, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ & = C_{\star}|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - C_{\star}|v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ & - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) < 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) & = \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, R_{-}^{\downarrow'})\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ & - \theta(y, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ & = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|v(R_{-}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ & - C_{\star}|v(R_{-}^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Le pire cas qu'on puisse avoir est  $\Lambda = v(R_{-}^{\downarrow})$ .

$$B(y) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|v(R_{-}^{\downarrow'}) - v(R_{-}^{\downarrow})|_+\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \quad (3.55)$$

Or,  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) = \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow})$  et  $|v(R_{-}^{\downarrow'}) - v(R_{-}^{\downarrow})|_+ = C|\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow})|$  où  $C$  est une constante. Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} B(y) & = \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) + C_{\star}C|\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow})| \\ & \times \sigma(R_{-}^{\downarrow'}) = |\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow})|[-1 + C_{\star}C\sigma(R_{-}^{\downarrow'})] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

si la condition donnée ci-dessous est satisfaite

$$[-1 + C_\star C \sigma(R_-^{\downarrow'})] \leq 0 \quad (3.57)$$

avec  $C_\star$  ainsi que  $C$  qui sont des constantes positives.

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, N_\pm^{\downarrow'}) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \theta(x, R_-^{\downarrow'}) \sigma(R_-^{\downarrow'}) - \theta(x, C_\pm^{\downarrow}) \sigma(C_\pm^{\downarrow}) \\ &\quad - \theta(x, R_-^{\downarrow}) \sigma(R_-^{\downarrow}) \\ &= C_\star |\Lambda - v(N_\pm^{\downarrow'})|_+ \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(R_-^{\downarrow'}) - C_\star |\Lambda - v(C_\pm^{\downarrow})|_+ \sigma(C_\pm^{\downarrow}) \\ &\quad - \sigma(R_-^{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$\Lambda = v(C_\pm^{\downarrow})$  est le pire cas.

On peut écrire les inégalités qui suivent :  $|v(C_\pm^{\downarrow}) - v(N_\pm^{\downarrow'})|_+ \leq C \sigma(R_-^{\downarrow})$  et pour les forces  $\sigma(R_-^{\downarrow'}) < \lambda \sigma(R_-^{\downarrow})$  où  $0 < \lambda < 1$ . Alors, en se servant de ces mêmes inégalités, nous arrivons à

$$\begin{aligned} B(x) &\leq C_\star C \sigma(R_-^{\downarrow}) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \lambda \sigma(R_-^{\downarrow}) - \sigma(R_-^{\downarrow}) \\ &= \sigma(R_-^{\downarrow}) [C_\star C \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \lambda - 1] < 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

lorsque la condition exprimée par

$$C_\star C \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \lambda < 1 \quad (3.60)$$

est respectée.

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, R_{-}^{\downarrow'})\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &\quad - \theta(x, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\
 &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|\Lambda - v(R_{-}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &\quad - C_{\star}|\Lambda - v(R_{-}^{\downarrow})|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

$\Lambda = v(R_{-}^{\downarrow'})$  représente le pire cas qu'on puisse rencontrer.

Puisque  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$ ,  $v(R_{-}^{\downarrow}) < v(R_{-}^{\downarrow'})$  alors on peut affirmer que

$$B(y) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(R_{-}^{\downarrow'}) - v(R_{-}^{\downarrow})|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow}) < 0. \tag{3.62}$$

**Cas CR-4**  $(C_{\pm}^{\downarrow}R_{-}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}C_{-}^{\uparrow'})$

$$\varphi^{\flat}(u_l) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_l) < u_m \leq 0 < u_l.$$

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C_{-}^{\uparrow'})\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &\quad - \theta(y, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\
 &= C_{\star}|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|v(C_{-}^{\uparrow'}) - \Lambda|_{+}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) \\
 &\quad - C_{\star}|v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

L'ordre des vitesses est :  $v(R_{-}^{\downarrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(C_{-}^{\uparrow'})$ .

Le pire cas provient de  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$B(y) = C_{\star}|v(C_{-}^{\uparrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}). \quad (3.64)$$

En observant que  $|v(C_{-}^{\uparrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+} = \tilde{C}\sigma(R_{-}^{\downarrow})$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} B(y) &= C_{\star}\tilde{C}\sigma(R_{-}^{\downarrow})\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= \sigma(R_{-}^{\downarrow})[C_{\star}\tilde{C}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - 1] < 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

si nous avons  $C_{\star}\tilde{C}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) < 1$ .

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_{-}^{\uparrow'}) < \sigma(C_{\pm}^{\downarrow})$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C_{-}^{\uparrow'})\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ &\quad - \theta(y, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(R_{-}^{\downarrow}) - \Lambda|_{+}\sigma(R_{-}^{\downarrow}) < 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C_{-}^{\uparrow'})\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\ &\quad - \theta(x, R_{-}^{\downarrow})\sigma(R_{-}^{\downarrow}) \\ &= C_{\star}|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|\Lambda - v(C_{-}^{\uparrow'})|_{+}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) \\ &\quad - C_{\star}|\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(R_{-}^{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Le pire cas possible est  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$  avec  $v(C_{-}^{\uparrow'}) > v(C_{\pm}^{\downarrow})$ .

Devant cette situation, nous obtenons :

$$B(x) = C_\star |v(C_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'})|_+ \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(R_-^\downarrow). \quad (3.68)$$

Si on utilise le fait que  $|v(C_\pm^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'})|_+ \leq \tilde{C} \sigma(R_-^\downarrow)$  alors

$$B(x) = \sigma(R_-^\downarrow) [C_\star \tilde{C} \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) - 1] < 0 \quad (3.69)$$

si la condition  $C_\star \tilde{C} \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) < 1$ .

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, N_\pm^{\downarrow'}) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \theta(x, C_-^{\uparrow'}) \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \theta(x, C_\pm^\downarrow) \sigma(C_\pm^\downarrow) \\ &\quad - \theta(x, R_-^\downarrow) \sigma(R_-^\downarrow) \\ &= \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \sigma(C_\pm^\downarrow) - C_\star |\Lambda - v(R_-^\downarrow)|_+ \sigma(R_-^\downarrow) < 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

**Cas CC-1**  $(C_+^\downarrow C_-^\downarrow) - (C_-^{\uparrow'})$

$\max(\varphi^\sharp(u_l), \varphi^\sharp(u_m)) < u_r < u_m < u_l$  et  $u_m \geq 0$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_-^{\uparrow'}) \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \theta(y, C_+^\downarrow) \sigma(C_+^\downarrow) - \theta(y, C_-^\downarrow) \sigma(C_-^\downarrow) \\ &= C_\star |v(C_-^{\uparrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C_-^{\uparrow'}) - C_\star |v(C_+^\downarrow) - \Lambda|_+ \sigma(C_+^\downarrow) \\ &\quad - C_\star |v(C_-^\downarrow) \Lambda|_+ \sigma(C_-^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Les vitesses sont dans l'ordre :  $v(C_-^\downarrow) < v(C_-^{\uparrow'}) < v(C_+^\downarrow)$ .

Si  $\Lambda \in [v(C_+^\downarrow), \infty)$  alors  $B(y) = 0$ . Tandis que si  $\Lambda \in (-\infty, v(C_-^\downarrow)]$ , alors nous

obtenons,

$$\begin{aligned} B(y) &= C_\star |v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow)|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C^\downarrow)|_+ \sigma(C_+^\downarrow) \\ &\quad + C_\star |v(C^\downarrow) - \Lambda|_+ [\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C^\downarrow)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Le pire cas est donc  $\Lambda = v(C^\downarrow)$ .

Considérons la situation lorsque  $u_r \geq 0$ .

Pour évaluer  $B(y)$ , nous allons nous servir des expressions suivantes pour les forces :

$\sigma(C_+^\downarrow) = |u_l - u_m|$ ,  $\sigma(C^\downarrow) = |u_m - u_r|$ ,  $\sigma(C^{\downarrow'}) = |u_l - u_r|$ . En utilisant ces expressions ainsi que les formules de Rankine-Hugoniot pour les vitesses  $v(C^\downarrow), v(C^{\downarrow'}), v(C_+^\downarrow)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} B(y) &= C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_l - u_r) \\ &\quad - C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_l - u_m) \\ &= C_\star [(f(u_l) - f(u_r)) - (f(u_l) - f(u_m))] \\ &\quad + C_\star \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} [-(u_l - u_r) + (u_l - u_m)] = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Toutefois, si  $u_r < 0$  alors les forces s'écrivent sous la forme :

$$\sigma(C_+^\downarrow) = |u_l - u_m|, \sigma(C^\downarrow) = |u_m + u_r|, \sigma(C^{\downarrow'}) = |u_l + u_r|.$$

Un calcul similaire montre que

$$\begin{aligned}
 B(y) &= C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_l + u_r) \\
 &\quad - C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_l - u_m) \\
 &= C_\star [(f(u_l) - f(u_r)) \frac{(u_l + u_r)}{(u_l - u_r)} - (f(u_l) - f(u_m))] \\
 &\quad + C_\star \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} [-(u_l + u_r) + (u_l - u_m)]
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Or, on constate que

$$\frac{u_l + u_r}{u_l - u_r} = \frac{u_l - u_r + 2u_r}{u_l - u_r} = 1 + \frac{2u_r}{u_l - u_r}.$$

$$\begin{aligned}
 B(y) &= C_\star \left( [f(u_l) - f(u_r) - f(u_l) + f(u_m)] + (f(u_l) - f(u_r)) \frac{2u_r}{u_l - u_r} \right) \\
 &\quad + \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} [-(u_l + u_r) + (u_l - u_m)] \\
 &= C_\star \left( \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} [(u_m - u_r) - u_r - u_m] + \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} (2u_r) \right) \\
 &= C_\star \left( \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right) \times (2u_r) \\
 &= C_\star (v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow)) \times (2u_r) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

puisque  $(v(C^{\downarrow'}) - v(C^\downarrow)) > 0$  et  $2u_r \leq 0$ .

ii) Soit une onde de raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C^{\downarrow'}) = \sigma(C_+^\downarrow) + \sigma(C^\downarrow)$

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, C_+^\downarrow)\sigma(C_+^\downarrow) - \theta(y, C^\downarrow)\sigma(C^\downarrow) \\ &= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C^\downarrow) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^\downarrow)\sigma(C_+^\downarrow) - \theta(x, C^\downarrow)\sigma(C^\downarrow) \\ &= C_\star |\Lambda - v(C^{\downarrow'})|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - C_\star |\Lambda - v(C_+^\downarrow)|_+ \sigma(C_+^\downarrow) \\ &\quad - C_\star |\Lambda - v(C^\downarrow)|_+ \sigma(C^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ici, le pire cas possible est  $\Lambda \in [v(C_+^\downarrow), \infty)$ . Alors, nous avons ce qui suit

$$B(x) = C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C^{\downarrow'})|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C^\downarrow)|_+ \sigma(C^\downarrow). \quad (3.78)$$

Traitons tout d'abord la situation lorsque  $u_r \geq 0$ . Nous allons prendre les définitions des forces introduites pour le cas  $u_r \geq 0$  en i).

$$\begin{aligned} B(x) &= C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right] (u_l - u_r) \\ &\quad - C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_m - u_r) \\ &= C_\star [-(f(u_l) - f(u_r)) + (f(u_m) - f(u_r))] \\ &\quad + C_\star \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} [(u_l - u_r) - (u_m - u_r)] \\ &= C_\star \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} [-(u_l - u_m) + (u_l - u_m)] = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Considérons maintenant la situation quand  $u_r < 0$ . Nous allons nous servir de nouveau des formules pour les forces présentées dans le cas i) lorsque  $u_r < 0$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \right] (u_l + u_r) \\
&\quad - C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} - \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] (u_m + u_r) \\
&= C_\star \left[ \frac{f(u_l) - f(u_m)}{u_l - u_m} ((u_l + u_r) - (u_m + u_r)) \right. \\
&\quad \left. - (f(u_l) - f(u_r)) - (f(u_l) - f(u_r)) \frac{2u_r}{u_l - u_r} \right. \\
&\quad \left. + (f(u_m) - f(u_r)) + (f(u_m) - f(u_r)) \frac{2u_r}{u_m - u_r} \right] \\
&= C_\star \times 2u_r \left[ -\frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} + \frac{f(u_m) - f(u_r)}{u_m - u_r} \right] \\
&= C_\star \times 2u_r (v(C^\downarrow) - v(C^{\downarrow'})) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.80}$$

puisque  $C_\star \geq 0$ ,  $2u_r \leq 0$  et  $(v(C^\downarrow) - v(C^{\downarrow'})) \leq 0$ .

iv) Soit une onde de raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^\downarrow) \sigma(C_+^\downarrow) - \theta(x, C^\downarrow) \sigma(C^\downarrow) \\
&= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(C^\downarrow) = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

**Cas CC-2**  $(C_\pm^\downarrow C^\uparrow) - (C^{\downarrow'})$

$\varphi^\sharp(u_l) < u_m < u_r < \varphi^\sharp(u_m) < u_l$  et  $u_m < 0$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\
&= C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_{+}\sigma(C^{\downarrow'}) - C_{\star}|v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star}|v(C^{\uparrow}) - \Lambda|_{+}\sigma(C^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Nous avons pour les vitesses :  $v(C^{\uparrow}) < v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(C^{\downarrow'})$ .

Le pire cas est  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$B(y) = C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C^{\downarrow'}) > 0. \tag{3.83}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C^{\downarrow'}) = \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) + \sigma(C^{\uparrow})$ , alors nous avons

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\
&= C_{\star}|\Lambda - v(C^{\downarrow'})|_{+}\sigma(C^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star}|\Lambda - v(C^{\uparrow})|_{+}\sigma(C^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$\Lambda = v(C^{\downarrow'})$  est le pire cas rencontré. Alors,

$$B(x) = -C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - v(C^{\uparrow})|_{+}\sigma(C^{\uparrow}) < 0 \tag{3.86}$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow}) = 0
\end{aligned} \tag{3.87}$$

**Cas CC-3**  $(C_{+}^{\downarrow}C^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}C^{\uparrow'})$   
 $\varphi^{\flat}(u_l) < \varphi^{\sharp}(u_m) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_l) < u_m < u_l$  et  $u_m \geq 0$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) \\
&\quad - \theta(y, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
&= C_*|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|v(C^{\uparrow'}) - \Lambda|_+\sigma(C^{\uparrow'}) \\
&\quad - C_*|v(C_+^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - C_*|v(C^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C^{\downarrow})
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Au niveau des vitesses, nous avons :

$$v(C^{\downarrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \min(v(C^{\uparrow'}), v(C_+^{\downarrow})) < \max(v(C^{\uparrow'}), v(C_+^{\downarrow})).$$

Le pire cas correspond à  $\Lambda = v(C_+^{\downarrow})$  et  $v(C_+^{\downarrow}) < v(C^{\uparrow'})$ . Alors,

$$B(y) = C_*|v(C^{\uparrow'}) - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C^{\uparrow'}) > 0. \tag{3.89}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) = \sigma(C_+^{\downarrow}) + \sigma(C^{\downarrow})$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) \\
&\quad - \theta(y, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
&= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(C^{\downarrow}) = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C^{\uparrow'})\sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(x, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) \\
 &\quad - \theta(x, C^{\downarrow})\sigma(C^{\downarrow}) \\
 &= C_*|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|\Lambda - v(C^{\uparrow'})|_+\sigma(C^{\uparrow'}) \\
 &\quad - C_*|\Lambda - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - C_*|\Lambda - v(C^{\downarrow})|_+\sigma(C^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Ici, le pire cas est  $\Lambda = v(C_+^{\downarrow})$ . Alors, on a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 B(x) &= C_*|v(C_+^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|v(C_+^{\downarrow}) - v(C^{\uparrow'})|_+\sigma(C^{\uparrow'}) \\
 &\quad C_*|v(C_+^{\downarrow}) - v(C^{\downarrow})|_+\sigma(C^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Pour l'instant, il est impossible pour nous de conclure si  $B(x)$  est négatif mais nous proposons tout de même une analyse détaillée de cette expression. Nous commençons avec une analyse approximative de  $B(x)$  avant de poursuivre plus tard avec une analyse rigoureuse.

Considérons l'onde de choc imaginaire  $C_I$  reliant les états  $u_l$  et  $\varphi^\sharp(u_l)$ . Alors,  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) \leq \sigma(C_I)$ .

Supposons que nous avons l'expression :

$$a(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

qui est la vitesse de Rankine-Hugoniot qui joint les états  $u$  et  $v$ . Si  $u_m$  est proche de  $u_l$  alors on a

$$v(C^\downarrow) = a(u_r, u_m) \leq a(\varphi^\sharp(u_l), u_m). \quad (3.93)$$

En revanche,  $u_m$  doit toujours être positif. Quand  $u_m$  sera proche de  $u_m = 0$  alors  $C^\downarrow$  sera une onde de choc qui reliera deux états  $u_r$  et  $u_m$  qui sont approximativement dans une région avec  $f'' < 0$ , une région concave. Donc, nous pourrions aussi avoir

$$a(u_m, \varphi^\sharp(u_l)) \leq a(u_m, u_r) \quad (3.94)$$

En général, l'expression qui comporte  $v(C^\downarrow) = a(u_r, u_m)$  semble plus probable que  $a(u_m, \varphi^\sharp(u_l)) \leq a(u_m, u_r)$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |v(C_+^\downarrow) - v(C^\downarrow)| &\leq |a(u_l, u_m) - a(\varphi^\sharp(u_l), u_m)| \\ &\leq C_3 |u_l - \varphi^\sharp(u_l)| = C_3 \sigma(C_I). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Donc,

$$B(x) \leq C_\star \sigma(C_\pm^\downarrow) \left( C_1 \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + C_2 \sigma(C_-^{\uparrow'}) - C_3 \sigma(C_I) \right). \quad (3.96)$$

Si les constantes  $C_1, C_2, C_3$  sont toutes presque égales alors puisque  $\sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) \leq \sigma(C_I)$  il y a une possibilité que  $B(x)$  soit négatif.

Dans les lignes qui suivent, nous allons tenter de confirmer cette affirmation en effectuant des calculs détaillés.

Nous avons  $u_r < \varphi^\sharp(u_l) < 0$  et l'expression (3.95)

$$\begin{aligned} B(x) &= C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(N_\pm^{\downarrow'})| \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C_-^{\uparrow'})| \sigma(C_-^{\uparrow'}) \\ &\quad - C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C_\pm^\downarrow)| \sigma(C_\pm^\downarrow) \\ &= C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_l, u_l^\flat) \right) (u_l + u_l^\flat) + C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_l^\flat, u_r) \right) \\ &\quad \times (u_r - u_l^\flat) - C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_m, u_r) \right) (u_m + u_r) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Nous avons l'égalité :  $a(u_l, u_l^\flat) = a(u_l, u_l^\sharp)$ . Nous allons nous servir de celle-ci pour réécrire  $B(x)$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_l, u_l^\sharp) \right) (u_l + u_l^\flat) \\ &\quad + C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_l, u_l^\sharp) + a(u_l, u_l^\flat) - a(u_r, u_l^\flat) \right) (u_r - u_l^\flat) \\ &\quad - C_\star \left( a(u_l, u_m) - a(u_l^\sharp, u_m) + a(u_l^\sharp, u_m) - a(u_m, u_r) \right) (u_m + u_r) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Les identités suivantes vont être utiles pour écrire  $B(x)$  sous une autre forme.

$$\begin{aligned} a(u_l, u_m) - a(u_l, u_l^\sharp) &= a \left( u_l, u_l^\sharp + (u_m - u_l^\sharp) \right) - a(u_l, u_l^\sharp) \\ &= \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp)(u_m - u_l^\sharp) + O((u_m - u_l^\sharp)^2) \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
a(u_l, u_l^\flat) - a(u_r, u_l^\flat) &= a(u_l^\sharp, u_l^\flat) - a(u_r, u_l^\flat) \\
&= a(u_l^\flat, u_l^\sharp) - a\left(u_l^\flat, u_l^\sharp + (u_r - u_l^\sharp)\right) \\
&= -\frac{\partial a}{\partial v}(u_l^\flat, u_l^\sharp)(u_r - u_l^\sharp) + O\left((u_r - u_l^\sharp)^2\right)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
a(u_l, u_m) - a(u_l^\sharp, u_m) &= a(u_m, u_l) - a\left(u_m, u_l + (u_l^\sharp - u_l)\right) \\
&= -\frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l)(u_l^\sharp - u_l) + O\left((u_l^\sharp - u_l)^2\right)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
a(u_l^\sharp, u_m) - a(u_m, u_r) &= a\left(u_m, u_r + (u_l^\sharp - u_r)\right) - a(u_m, u_r) \\
&= \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O\left((u_l^\sharp - u_r)^2\right)
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Réécrivons maintenant  $B(x)$  en utilisant les expressions présentées ci-dessus.

$$\begin{aligned}
B(x) &= C_\star(u_l + u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp)(u_m - u_l^\sharp) + O\left((u_l + u_l^\flat)(u_m - u_l^\sharp)^2\right) \\
&\quad + C_\star(u_r - u_l^\flat) \left( -\frac{\partial a}{\partial v}(u_l^\flat, u_l^\sharp)(u_r - u_l^\sharp) + O\left((u_r - u_l^\sharp)^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp)(u_m - u_l^\sharp) + O\left((u_m - u_l^\sharp)^2\right) \right) \\
&\quad - C_\star(u_m + u_r) \left( -\frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l)(u_l^\sharp - u_l) + O\left((u_l^\sharp - u_l)^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial r}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O\left((u_l^\sharp - u_r)^2\right) \right)
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Le second terme dans l'expression précédente a la forme :

$$\begin{aligned} g(u_l^\flat)(u_l^\sharp - u_r) + g(u_l)(u_m - u_l^\sharp) &= (u_m - u_r) \left( g(u_l^\flat) \frac{u_l^\sharp - u_r}{u_m - u_r} + g(u_l) \frac{u_m - u_l^\sharp}{u_m - u_r} \right) \\ &= (u_m - u_r) \left( g(u_l^\flat) \lambda + g(u_l) (1 - \lambda) \right) \end{aligned}$$

avec  $\lambda \in (0, 1)$ .

Si  $g$  est continue alors il existe  $u^* \in (u_l^\flat, u_l)$  tel que l'expression précédente puisse s'écrire  $(u_m - u_r)g(u^*) = (u_m - u_r)\frac{\partial a}{\partial v}(u^*, u_l^\sharp)$ .

De plus, on remarque que si  $\lambda \approx 0$  alors  $u^* \approx u_l$  et vice-versa ; si  $\lambda \approx 1$  alors  $u^* \approx u_l^\flat$ .

À une constante  $\tilde{C}$  près, nous avons la série d'inégalités :

$$0 < u_m - u_l^\sharp < u_m - u_r \leq \tilde{C}(u_m + u_r) = \tilde{C}\sigma(C_\pm^\downarrow).$$

La constante  $\tilde{C}$  est reliée à la constante de Lipschitz de la fonction cinétique. Alors,

$$\begin{aligned} B(x) &\leq C_*(u_l + u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp) \tilde{C}\sigma(C_\pm^\downarrow) + C_*(u_r - u_l^\flat) \\ &\quad \times \frac{\partial a}{\partial v}(u^*, u_l^\sharp) \tilde{C}\sigma(C_\pm^\downarrow) + C_*\sigma(C_\pm^\downarrow) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l)(u_l^\sharp - u_l) \\ &\quad - C_*\sigma(C_\pm^\downarrow) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O(s^3) \end{aligned} \tag{3.104}$$

$s$  est la force d'une des ondes.

Réécrivons de nouveau  $B(x)$ .

$$\begin{aligned} B(x) &\leq C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \left( \tilde{C}(u_l + u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp) + \tilde{C}(u_r - u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u^*, u_l^\sharp) \right. \\ &\quad \left. + (u_l^\sharp - u_l) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l) \right) - C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O(s^3) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} (u_l + u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp) + (u_r - u_l^\flat) \frac{\partial a}{\partial v}(u^*, u_l^\sharp) &= (u_r + u_l) \\ &\times \left( \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_l^\sharp) \frac{(u_l^\flat - (-u_l))}{(u_r - (-u_l))} + \frac{\partial a}{\partial v}(u^*, u_l^\sharp) \frac{(u_r - u_l^\flat)}{(u_r - (-u_l))} \right) \\ &= (u_r + u_l) \frac{\partial a}{\partial v}(u^{**}, u_l^\sharp) \end{aligned} \quad (3.106)$$

pour une valeur  $u^{**} \in (u_l, u^*)$  avec  $u^* \in (u_l^\flat, u_l)$ .

Donc, nous arrivons finalement à l'expression qui suit :

$$\begin{aligned} B(x) &\leq C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \left( \tilde{C}(u_r + u_l) \frac{\partial a}{\partial v}(u^{**}, u_l^\sharp) + (u_l^\sharp - u_l) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l) \right) - C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O(s^3) \\ &\leq C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \left( \tilde{C}(u_l - u_r) \left| \frac{\partial a}{\partial v}(u^{**}, u_l^\sharp) \right| - (u_l - u_l^\sharp) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_l) \right) \\ &\quad - C_* \sigma(C_\pm^\downarrow) \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l^\sharp - u_r) + O(s^3) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Malheureusement, ce long développement ne nous permet pas de conclure concernant le signe de  $B(x)$ .

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C^{\uparrow'}) \sigma(C^{\uparrow'}) - \theta(x, C_+^{\downarrow}) \sigma(C_+^{\downarrow}) \\ &\quad - \theta(x, C^{\downarrow}) \sigma(C^{\downarrow}) \\ &= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C^{\uparrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(C^{\downarrow}) = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

**Cas CN-1**  $(C_+^{\downarrow} N_{\pm}^{\downarrow}) - (C_{\pm}^{\downarrow'})$

$0 < u_m < u_l$  ainsi que  $\varphi^{\sharp}(u_l) \leq u_r = \varphi^{\flat}(u_m)$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow'}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow}) \sigma(C_+^{\downarrow}) - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\ &= C_{\star}|v(C_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C_{\pm}^{\downarrow'}) - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow}) - \Lambda|_+ \sigma(C_+^{\downarrow}) \\ &\quad - C_{\star}|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+ \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Les différentes vitesses sont :  $v(N_{\pm}^{\downarrow}) < v(C_{\pm}^{\downarrow'}) < v(C_+^{\downarrow})$ .

Le pire cas que nous puissions rencontrer est  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$B(y) = C_\star |v(C_\pm^{\downarrow'}) - v(N_\pm^\downarrow)|_+ \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow)|_+ \sigma(C_+^\downarrow). \quad (3.110)$$

L' expression pour  $B(y)$  ci-dessus ne nous permet pas de conclure. Alors, réécrivons  $B(y)$  comme suit :

$$\begin{aligned} B(y) &= C_\star |a(u_l, u_r) - a(u_r, u_m)| \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) \\ &\quad - C_\star |a(u_l, u_m) - a(u_m, u_r)| \sigma(C_+^\downarrow) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Sachant que nous pouvons développer les expressions ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} a(u_r, u_l) - a(u_r, u_m) &= \frac{\partial a}{\partial v}(u_r, u_m)(u_l - u_m) + O((u_l - u_m)^2) \\ &= f''(u_m)(u_l - u_m) \\ &\quad + O((u_r - u_m)(u_l - u_m) + (u_l - u_m)^2) \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} a(u_l, u_m) - a(u_m, u_r) &= a(u_m, u_r + (u_l - u_r)) - a(u_m, u_r) \\ &= \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l - u_r) + O((u_l - u_r)^2) \\ &= f''(u_r)(u_l - u_r) \\ &\quad + O((u_m - u_r)(u_l - u_r) + (u_l - u_r)^2) \end{aligned} \quad (3.113)$$

En utilisant ces formules, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 B(y) &= C_\star f''(u_m)(u_l - u_m)(u_l + u_r) - C_\star f''(u_r)(u_l - u_r)(u_l - u_m) \quad (3.114) \\
 &\quad + O(s^3) \\
 &= C_\star(u_l - u_m) \left( f''(u_m)(u_l + u_r) - f''(u_r)(u_l - u_r) \right) + O(s^3)
 \end{aligned}$$

ce qui ne nous permet pas de conclure concernant  $B(y)$ . Par contre, cette expression sera peut-être utile plus tard.

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_\pm^{\downarrow'}) = \sigma(C_+^\downarrow) + \sigma(N_\pm^\downarrow)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 B(y) &= \theta(y, C_\pm^{\downarrow'})\sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \theta(y, C_+^\downarrow)\sigma(C_+^\downarrow) - \theta(y, N_\pm^\downarrow)\sigma(N_\pm^\downarrow) \quad (3.115) \\
 &= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(N_\pm^\downarrow) = 0.
 \end{aligned}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, C_\pm^{\downarrow'})\sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^\downarrow)\sigma(C_+^\downarrow) - \theta(x, N_\pm^\downarrow)\sigma(N_\pm^\downarrow) \quad (3.116) \\
 &= C_\star|\Lambda - v(C_\pm^{\downarrow'})|_+\sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - C_\star|\Lambda - v(C_+^\downarrow)|_+\sigma(C_+^\downarrow) \\
 &\quad - C_\star|\Lambda - v(N_\pm^\downarrow)|_+\sigma(N_\pm^\downarrow)
 \end{aligned}$$

Ici,  $\Lambda = v(C_+^\downarrow)$  s'avère le pire cas possible. Nous obtenons donc :

$$B(x) = C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(C_\pm^{\downarrow'})|_+ \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - C_\star |v(C_+^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow)|_+ \sigma(N_\pm^\downarrow) \quad (3.117)$$

Regardons plus en détails ce que nous pouvons faire pour tenter de conclure. Nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} |v(C_+^\downarrow) - v(C_\pm^{\downarrow'})| &= a(u_l, u_m) - a(u_l, u_r) \\ &= \frac{\partial a}{\partial v}(u_l, u_r)(u_m - u_r) + O((u_m - u_r)^2) \\ &= f''(u_r)(u_m - u_r) \\ &\quad + O((u_l - u_r)(u_m - u_r) + (u_m - u_r)^2) \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} |v(C_+^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow)| &= a(u_l, u_m) - a(u_r, u_m) \\ &= \frac{\partial a}{\partial v}(u_m, u_r)(u_l - u_r) + O((u_l - u_r)^2) \\ &= f''(u_r)(u_l - u_r) \\ &\quad + O((u_m - u_r)(u_l - u_r) + (u_l - u_r)^2) \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= C_\star \left( f''(u_r)(u_m - u_r)(u_l + u_r) - f''(u_r)(u_l - u_r)(u_m + u_r) \right) \quad (3.120) \\
&\quad + O(s^3) \\
&= C_\star f''(u_r) \left( (u_m - u_r)(u_l + u_r) - (u_l - u_r)(u_m + u_r) \right) + O(s^3) \\
&= C_\star f''(u_r) \left( (u_m - u_r)(u_l - u_r) + (u_m - u_r)2u_r \right. \\
&\quad \left. - (u_l - u_r)(u_m - u_r) - (u_l - u_r)2u_r \right) + O^3 \\
&= C_\star f''(u_r) \times 2u_r \times (u_m - u_l) + O(s^3)
\end{aligned}$$

Techniquement,  $f''(u_r) < 0$ ,  $u_r < 0$ ,  $(u_m - u_l) < 0$  et le premier terme est négatif. Par contre, l'expression est aussi d'ordre trois et le signe de l'expression dépend donc du terme que l'on négligeait plus tôt. En pratique, un estimé indiquant que  $B$  est d'ordre trois est insuffisant pour une analyse classique.

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C_\pm^{\downarrow'}) \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \theta(x, C_+^\downarrow) \sigma(C_+^\downarrow) - \theta(x, N_\pm^\downarrow) \sigma(N_\pm^\downarrow) \quad (3.121) \\
&= \sigma(C_\pm^{\downarrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(N_\pm^\downarrow) = 0
\end{aligned}$$

**Cas CN-2**  $(C_\pm^\downarrow N_\mp^\uparrow) - (C_+^{\downarrow'})$   
 $\varphi^\sharp(u_l) < u_m < 0$  et  $u_r = \varphi^\flat(u_m)$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'}) \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, N_{\mp}^{\uparrow}) \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= C_{\star} |v(C_+^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star} |v(C_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+ \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star} |v(N_{\mp}^{\uparrow}) - \Lambda|_+ \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.122}$$

L'ordre des vitesses est :  $v(N_{\mp}^{\uparrow}) < v(C_{\pm}^{\downarrow}) < v(C_+^{\downarrow'})$ .

Le pire cas à considérer ici est lorsque  $\Lambda = v(C_{\pm}^{\downarrow})$ . Alors,

$$B(y) = C_{\star} |v(C_+^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_+ \sigma(C_+^{\downarrow'}) > 0. \tag{3.123}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_+^{\downarrow'}) = \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) + \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})$  on obtient l'expression :

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'}) \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, C_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, N_{\mp}^{\uparrow}) \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.124}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, N_{\mp}^{\uparrow})\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow'})|_{+}\sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star}|\Lambda - v(N_{\mp}^{\uparrow})|_{+}\sigma(N_{\mp}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Le pire cas possible se produit lorsque  $\Lambda \in [v(C_+^{\downarrow'}), \infty)$ . Et, puisque  
 $\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) = 0$

$$\begin{aligned}
B(x) &= C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow'})|_{+} \times [\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})] \\
&\quad - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(C_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(N_{\mp}^{\uparrow})|_{+}\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) < 0.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, C_{\pm}^{\downarrow})\sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, N_{\mp}^{\uparrow})\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(C_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) = 0
\end{aligned} \tag{3.127}$$

**Cas CN-3**  $(C_{+}^{\downarrow}N_{\pm}^{\downarrow}) - (N_{\pm}^{\downarrow'}C_{-}^{\uparrow'})$   
 $0 < u_m < u_l$  et  $u_r = \varphi^{\flat}(u_m) < \varphi^{\sharp}(u_l)$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C_-^{\uparrow'})\sigma(C_-^{\uparrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) \\
&\quad - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
&= C_*|v(N_{\pm}^{\downarrow'}) - \Lambda|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_*|v(C_-^{\uparrow'}) - \Lambda|_+\sigma(C_-^{\uparrow'}) \\
&\quad - C_*|v(C_+^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(C_+^{\downarrow}) - C_*|v(N_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+\sigma(N_{\pm}^{\downarrow})
\end{aligned} \tag{3.128}$$

La série d'inégalités concernant les vitesses est :

$$v(N_{\pm}^{\downarrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow'}) < \min(v(C_-^{\uparrow'}), v(C_+^{\downarrow})) < \max(v(C_-^{\uparrow'}), v(C_+^{\downarrow})).$$

Le pire cas qui peut se présenter est :  $\Lambda = v(C_+^{\downarrow})$  lorsque  $v(C_+^{\downarrow}) < v(C_-^{\uparrow'})$ . Alors,

$$B(y) = C_*|v(C_-^{\uparrow'}) - v(C_+^{\downarrow})|_+\sigma(C_-^{\uparrow'}) > 0. \tag{3.129}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) = \sigma(C_+^{\downarrow}) + \sigma(N_{\pm}^{\downarrow})$ , alors nous avons

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(y, C_-^{\uparrow'})\sigma(C_-^{\uparrow'}) - \theta(y, C_+^{\downarrow})\sigma(C_+^{\downarrow}) \\
&\quad - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
&= \sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \sigma(C_+^{\downarrow}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow'})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + \theta(x, C_{-}^{\uparrow'})\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) - \theta(x, C_{+}^{\downarrow})\sigma(C_{+}^{\downarrow}) \\
 &\quad - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
 &= C_{\star}|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|\Lambda - v(C_{-}^{\uparrow'})|_{+}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) \\
 &\quad - C_{\star}|\Lambda - v(C_{+}^{\downarrow})|_{+}\sigma(C_{+}^{\downarrow}) - C_{\star}|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow})
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

Le pire cas est donné par :  $\Lambda = v(C_{+}^{\downarrow})$  et l'inégalité<sup>2</sup>  $v(C_{-}^{\uparrow'}) < v(C_{+}^{\downarrow})$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 B(x) &= C_{\star}|v(C_{+}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow'}) + C_{\star}|v(C_{+}^{\downarrow}) - v(C_{-}^{\uparrow'})|_{+}\sigma(C_{-}^{\uparrow'}) \\
 &\quad - C_{\star}|v(C_{+}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}).
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Regardons les expressions suivantes pour tenter de conclure concernant le signe de  $B(x)$ .

$$\begin{aligned}
 v(C_{+}^{\downarrow}) - v(N_{\pm}^{\downarrow'}) &= a(u_l, u_m) - a(u_l, u_l^{\sharp}) \\
 &= \frac{-\partial a}{\partial v}(u_l, u_m)(u_l^{\sharp} - u_m) + O((u_l^{\sharp} - u_m)^2) \\
 &= -f''(u_m)(u_l^{\sharp} - u_m) + O((u_l - u_m)(u_l^{\sharp} - u_m) + (u_l^{\sharp} - u_m)^2) \\
 &\leq C_1|u_l^{\sharp} - u_m|
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

---

2. Le cas  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow})$  est aussi problématique mais plus simple.

$$\begin{aligned}
v(C_+^\downarrow) - v(N_\pm^\downarrow) &= a(u_l, u_m) - a(u_m, u_m^\flat) \\
&= a(u_l, u_m) - a(u_m, u_m^\sharp) \\
&= \frac{-\partial a}{\partial v}(u_m, u_l)(u_m^\sharp - u_l) + O((u_m^\sharp - u_l)^2) \\
&= -f''(u_l)(u_m^\sharp - u_l) + O((u_m^\sharp - u_l)(u_m - u_l) + (u_m^\sharp - u_l)^2) \\
&\leq C_2 |u_m^\sharp - u_l|
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Ces deux expressions permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
B(x) &= C_\star C_1 |u_m - u_l^\sharp| \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) - C_\star C_2 |u_l - u_m^\sharp| \sigma(N_\pm^\downarrow) \\
&\quad + C_\star C_3 \sigma(N_\pm^\downarrow) \sigma(C_-^\uparrow)
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Dans l'expression ci-dessus, les deux premiers termes sont semblables et s'annulent presque en totalité mais le dernier terme est problématique. Tout ceci implique que  $B(x)$  peut être positif ou négatif.

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, N_\pm^{\downarrow'}) \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \theta(x, C_-^{\uparrow'}) \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \theta(x, C_+^\downarrow) \sigma(C_+^\downarrow) \\
&\quad - \theta(x, N_\pm^\downarrow) \sigma(N_\pm^\downarrow) \\
&= \sigma(N_\pm^{\downarrow'}) + \sigma(C_-^{\uparrow'}) - \sigma(C_+^\downarrow) - \sigma(N_\pm^\downarrow) = 0
\end{aligned} \tag{3.136}$$

**Cas NC**  $(N_{\pm}^{\downarrow} C^{\uparrow}) - (C^{\downarrow'})$

$$u_m = \varphi^{\flat}(u_l) \quad \text{et} \quad \varphi^{\sharp}(u_l) < u_r < \varphi^{\sharp}(u_m) < u_l.$$

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, C^{\uparrow}) \sigma(C^{\uparrow}) \\ &= C_{\star} |v(C^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) - C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+ \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\ &\quad - C_{\star} |v(C^{\uparrow}) - \Lambda|_+ \sigma(C^{\uparrow}) \end{aligned} \quad (3.137)$$

Les vitesses se présentent dans l'ordre suivant :  $v(C^{\uparrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow}) < v(C^{\downarrow'})$ .

$\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow})$  est le pire cas qui puisse se produire. Alors,

$$B(y) = C_{\star} |v(C^{\downarrow'}) - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_+ \sigma(C^{\downarrow'}) > 0. \quad (3.138)$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

On a  $\sigma(C^{\downarrow'}) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) + \sigma(C^{\uparrow})$  alors

$$\begin{aligned} B(y) &= \theta(y, C^{\downarrow'}) \sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, C^{\uparrow}) \sigma(C^{\uparrow}) \\ &= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow}) = 0. \end{aligned} \quad (3.139)$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\ &= C_{\star}|\Lambda - v(C^{\downarrow'})|_{+}\sigma(C^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\ &\quad - C_{\star}|\Lambda - v(C^{\uparrow})|_{+}\sigma(C^{\uparrow}) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Le pire cas à considérer s'avère être  $\Lambda \in [v(C^{\downarrow'}), \infty)$ . De plus,

$\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow}) = 0$ , alors on peut affirmer que

$$\begin{aligned} B(x) &= C_{\star}|\Lambda - v(C^{\downarrow'})|_{+} \times [\sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow})] \\ &\quad - C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(C^{\downarrow'}) - v(C^{\uparrow})|_{+}\sigma(C^{\uparrow}) < 0. \end{aligned} \quad (3.141)$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned} B(x) &= \theta(x, C^{\downarrow'})\sigma(C^{\downarrow'}) - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, C^{\uparrow})\sigma(C^{\uparrow}) \\ &= \sigma(C^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(C^{\uparrow}) = 0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

**Cas NN**  $(N_{\pm}^{\downarrow}N_{\mp}^{\uparrow}) - (C_{+}^{\downarrow'})$

$u_m = \varphi^b(u_l)$  et  $u_r = \varphi^b(u_m)$ .

i) Soit une onde de choc en  $y$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'}) \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, N_{\mp}^{\uparrow}) \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= C_{\star} |v(C_+^{\downarrow'}) - \Lambda|_+ \sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star} |v(N_{\pm}^{\downarrow}) - \Lambda|_+ \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star} |v(N_{\mp}^{\uparrow}) - \Lambda|_+ \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Les différentes vitesses sont ordonnées comme suit :  $v(N_{\mp}^{\uparrow}) < v(N_{\pm}^{\downarrow}) < v(C_+^{\downarrow'})$ .

Le pire cas provient de  $\Lambda = v(N_{\pm}^{\downarrow})$ .

$$B(y) = C_{\star} |v(C_+^{\downarrow'}) - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_+ \sigma(C_+^{\downarrow'}) > 0 \tag{3.144}$$

ii) Soit une raréfaction en  $y$  avec  $x < y$ .

Puisque  $\sigma(C_+^{\downarrow'}) = \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) + \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})$ , nous avons

$$\begin{aligned}
B(y) &= \theta(y, C_+^{\downarrow'}) \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(y, N_{\pm}^{\downarrow}) \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(y, N_{\mp}^{\uparrow}) \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

iii) Soit une onde de choc en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, N_{\mp}^{\uparrow})\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow'})|_{+}\sigma(C_+^{\downarrow'}) - C_{\star}|\Lambda - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) \\
&\quad - C_{\star}|\Lambda - v(N_{\mp}^{\uparrow})|_{+}\sigma(N_{\mp}^{\uparrow})
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Le pire cas possible a la forme :  $\Lambda \in [v(C_+^{\downarrow'}), \infty)$ . Alors,

$$\begin{aligned}
B(y) &= C_{\star}|\Lambda - v(C_+^{\downarrow'})|_{+} \times [\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow})] \\
&\quad - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(N_{\pm}^{\downarrow})|_{+}\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - C_{\star}|v(C_+^{\downarrow'}) - v(N_{\mp}^{\uparrow})|_{+}\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) < 0.
\end{aligned} \tag{3.147}$$

iv) Soit une raréfaction en  $x$  avec  $x < y$ .

$$\begin{aligned}
B(x) &= \theta(x, C_+^{\downarrow'})\sigma(C_+^{\downarrow'}) - \theta(x, N_{\pm}^{\downarrow})\sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \theta(x, N_{\mp}^{\uparrow})\sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) \\
&= \sigma(C_+^{\downarrow'}) - \sigma(N_{\pm}^{\downarrow}) - \sigma(N_{\mp}^{\uparrow}) = 0
\end{aligned} \tag{3.148}$$

■

## CHAPITRE 4

### CONCLUSION

Notre objectif principal dans cette recherche était de présenter une fonctionnelle qui pourrait résoudre les quatre cas d’interactions problématiques qui découlent de l’équation aux dérivées partielles  $\partial u/\partial t + \partial f(u)/\partial x = 0$  lorsque la fonction de flux  $f(u)$  est de type concave convexe. Et, par la suite, vérifier si cette même fonctionnelle est en mesure de conduire à  $B(y) \leq 0$  pour les autres cas d’interactions.

La fonctionnelle Laforest-Pellerin proposée à l’intérieur du chapitre 3 ne permet pas de solutionner les quatre cas problématiques caractérisés par  $B(y) > 0$  qui proviennent de la fonctionnelle Iguchi-LeFloch. En effet, les cas d’interactions RC-3, CR-4 fonctionnent puisque  $B \leq 0$ . Toutefois, les cas CC-3, CN-3 font échouer notre fonctionnelle ; ils produisent des sous-cas avec  $B(y) > 0$ . Elle ne permet pas non plus de vérifier certains autres cas d’interactions pour la même raison.

Une analyse de nos calculs montre deux points importants quand un cas d’interaction donne comme résultat  $B(y) \leq 0$  :

- 1) la force de l’onde résultante  $\sigma(\cdot')$  est plus petite que la force de l’onde entrante  $\sigma(\cdot)$ ;
- 2) la vitesse de l’onde résultante  $v(\cdot')$  est plus petite que la vitesse de l’onde entrante  $v(\cdot)$ .

D’un point de vue mathématique, nous savons maintenant ce qui doit être fait. Est-ce qu’il est possible de construire une fonctionnelle de Glimm de manière à satisfaire

les points 1) et 2)? Si oui, comment? Pour l'instant, ces deux questions restent sans réponses.

Le mieux que nous puissions faire est de suggérer des approches potentielles. L'étude des systèmes de dimension  $2 \times 2$  pourrait mener à une meilleure compréhension du cas scalaire et à une résolution éventuelle du problème. Une étude en profondeur des 16 cas d'interactions pourrait s'avérer une autre avenue à explorer. Au moment d'écrire ces lignes - novembre 2010 - ce problème pose toujours un défi considérable et il demeure ouvert...

## RÉFÉRENCES

- AMADORI, D., BAITI, P., and PHILIPPE G. LEFLOCH, B. P. (1999). Nonclassical shocks and the cauchy problem for nonconvex conservation laws. *Journal of Differential Equations*, **151**, 345–372.
- BAITI, P., LEFLOCH, P., and PICCOLI, B. (1999). Nonclassical shocks and the cauchy problem. general conservation laws. In *Nonlinear partial differential equations (Evanston, IL, 1998)*, volume 238, pages 1–25. AMS. Contemp. Math.
- BAITI, P., LEFLOCH, P., and PICCOLI, B. (2004a). Existence theory for nonclassical entropy solutions II. Hyperbolic systems of conservation laws. Unpublished.
- BAITI, P., LEFLOCH, P., and PICCOLI, B. (2004b). Existence theory for nonclassical entropy solutions of scalar conservation laws. *Z. angew. Math. Phys.*, **55**, 927–945.
- BRESSAN, A. and BIANCHINI, S. (2005). Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math.*, **161**(2), 223–342.
- BRESSAN, A., LIU, T. P., and YANG, T. (1999).  $L^1$  stability estimates for  $n \times n$  conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **149**, 1–22.
- DAFERMOS, C. M. (1972). Polygonal approximation of solution to the initial value problem for a conservation law. *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 33–41.
- DIPERNA, R. J. (1976). Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Diff. Eq.*, **20**(1), 187–212.
- GLIMM, J. (1965). Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **18**, 697–715.
- GLIMM, J. and LAX, P. (1967). Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 105.

- IGUCHI, T. and LEFLOCH, P. G. (2003). Existence theory for hyperbolic systems of conservation laws with general flux functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **168**, 165–244.
- LAFOREST, M. and LEFLOCH, P. G. (2010). Diminishing functionals for non classical entropy solutions selected by kinetic functions. *Portugaliae Mathematica*, page 39.
- LAX, P. D. (1973). *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.
- LEFLOCH, P. G. (2002). *Hyperbolic systems of conservation laws. Lectures in mathematics*. Birkhauser-Verlag, Basel-Boston-Berlin.
- LEFLOCH, P. G. and SHEARER, M. (2004). Nonclassical Riemann solvers with nucleation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **134A**, 941–964.
- LIU, T.-P. (1977a). Decay to N-wave solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, **30**, 585–610.
- LIU, T.-P. (1977b). The deterministic version of the Glimm scheme. *Comm. Math. Phys.*, **57**, 135–148.
- LIU, T. P. and YANG, T. (1999).  $L^1$  stability for  $2 \times 2$  systems of hyperbolic conservation laws. *J. of AMS*, **12**(3), 729–774.
- OLEINIK, O. A. (1957). On the uniqueness of the generalized solution of the cauchy problem for a nonlinear system of equations occuring in mechanics. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **6**(78), 169–176.
- OLEINIK, O. A. (1959). Uniqueness and stability of the generalized solution of the cauchy problem for a quasi-linear equation. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **14**, 165–170.
- RISEBRO, N. H. (1993). A front-tracking alternative to the random choice method. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**(4), 1125–1139.
- SMOLLER, J. (1983). *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest.

## ANNEXE I

### RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

Cette annexe comporte les résultats pour la fonctionnelle qui a été abordée dans la recherche. La présentation a pour but de réintroduire les résultats démontrés dans le chapitre 3 de ce mémoire mais de manière beaucoup plus compacte.

#### **Fonctionnelle Laforest-Pellerin (de type Iguchi-LeFloch)**

La fonction de poids  $\theta(x, y)$  se définit comme suit :

$$\theta(x, y) = \begin{cases} C_*(\hat{a}(x) - \hat{a}(y))^+ & \text{même monotonie} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La définition de la force des ondes  $\sigma(u_-, u_+)$  est :

$$\sigma(u_-, u_+) = \begin{cases} |u_+ - u_-| & \text{si } u_- u_+ \geq 0; \\ |u_+ + u_-| & \text{si } u_- u_+ < 0. \end{cases}$$

Le terme  $B$  présenté dans les calculs est obtenu en effectuant le produit  $B(\cdot) = \theta(x, y) \times \sigma(\cdot)$ .

Passons maintenant aux résultats. Pour chacun des cas, i) représente le résultat pour une onde de choc en  $y$ , ii) le résultat pour une raréfaction en  $y$ , iii) le résultat pour une onde de choc en  $x$ , iv) le résultat pour une raréfaction en  $x$ .

**Cas RC-1**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas RC-2**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B \leq 0$

**Cas RC-3**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas RN**

- i)  $B < 0$       ii)  $B \leq 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas CR-1**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas CR-2**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas CR-3**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas CR-4**

- i)  $B < 0$       ii)  $B < 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B < 0$

**Cas CC-1**

- i)  $B \leq 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B = 0$  et  $B > 0$       iv)  $B = 0$

**Cas CC-2**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B = 0$

**Cas CC-3**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B = ?$       iv)  $B = 0$

**Cas CN-1**

- i)  $B = ?$       ii)  $B = 0$       iii)  $B = ?$       iv)  $B = 0$

**Cas CN-2**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B = 0$

**Cas CN-3**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B \geq 0$       iv)  $B = 0$

**Cas NC**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B = 0$

**Cas NN**

- i)  $B > 0$       ii)  $B = 0$       iii)  $B < 0$       iv)  $B = 0$

**Remarques sur les cas d'interactions**

Tout d'abord, les cas RC-1, RC-2, RC-3, RN, CR-1, CR-2, CR-3, CR-4 conduisent à  $B \leq 0$ . C'est ce que nous souhaitons obtenir pour en arriver à un potentiel d'interaction décroissant.

Tandis que les cas CC-1, CC-2, CC-3, CN-2, CN-3, NC et NN font échouer notre fonctionnelle puisque pour chacun de ces cas nous avons  $B > 0$  pour au moins un sous-cas.

Le cas CN-1 présente  $B = 0$  à deux reprises. Toutefois, les deux sous-cas qui font intervenir des ondes de chocs mènent à des expressions qui ne permettent pas de conclure concernant le signe de  $B$ . Pour exprimer ceci, nous avons fait appel au point d'interrogation ?.

Finalement, pour les quatre cas problématiques RC-3, CR-4, CC-3, CN-3. Nos résultats

ci-dessus indiquent que RC-3 ainsi que CR-4 débouchent sur  $B < 0$  alors que CC-3 et CN-3 conduisent à  $B > 0$ .