

Titre: L'analyse des systèmes multivariables avec application au réglage fréquence tension
Title: Frequency tension control of multivariable systems

Auteurs: Romano M. De Santis, & Serge Lefebvre
Authors:

Date: 1976

Type: Rapport / Report

Référence: De Santis, R. M., & Lefebvre, S. (1976). L'analyse des systèmes multivariables avec application au réglage fréquence tension. (Technical Report n° EP-R-76-36).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/6141/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6141/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-76-36
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



Rapport Technique EP-R-36

L'ANALYSE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES
AVEC APPLICATION AU REGLAGE FREQUENCE TENSION

par

Dr. Romano M. De Santis
Professeur Agrégé

Serge Lefebvre
Etudiant en Maîtrise

Le 6 décembre 1976

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP4
76R36
FRE

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

Bibliothèque

COTE
CA2PQ

UP4

76R36

FRE

Ecole
Polytechnique

MONTRÉAL



21 DEC. 1976

Rapport Technique EP-R-36

L'ANALYSE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES
AVEC APPLICATION AU REGLAGE FREQUENCE TENSION

par

Dr. Romano M. De Santis
Professeur Agrégé

Serge Lefebvre
Etudiant en Maîtrise

Le 6 décembre 1976

R E M E R C I E M E N T S

L'étude présentée dans ce rapport a été développée dans le cadre du projet FCAC-CRP-378-76, Analyse, Gestion et Commande des Processus Industriels par Ordinateurs: Application aux Réseaux Electriques, financé par le Ministère de l'Education du Québec, et du projet CNR-A-8244, Application au Génie des Systèmes de la Théorie des Opérateurs de Volterra, financé par le Conseil National de la Recherche du Canada.

Les auteurs tiennent à souligner la collaboration apportée par les personnes suivantes: Réal-Paul Bouchard, Yvon Gervais et Jules O'Shea pour leur aide au niveau de la mise en place du banc d'essai pour la commande en temps réel des centrales électriques, Jean Conan et Hoang Hai-Hoc pour leur assistance au niveau des problèmes de programmation, Benoit Dubé, André Turgeon, Choib Bousba, Gérard Mouney et Toan Van Bac pour leurs suggestions et échanges d'idées.

T A B L E D E S M A T I E R E S

0-	Remerciements	
	Sommaire	
1-	Introduction	1
2-	Théorie	3
3-	Application	18
4-	Conclusion	40
	Références	41
	Sous-titres des figures	43
	Appendice	64

-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-

L'ANALYSE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES
AVEC APPLICATION AU REGLAGE FREQUENCE TENSION

Serge LEFEBVRE *

Romano M. DE SANTIS *

SOMMAIRE

Le présent article propose des nouvelles techniques fréquentielles pour l'analyse des systèmes multivariables continus avec application au réglage fréquence tension. Plus précisément dans une première partie, on élargit aux système multivariables continus les méthodes fréquentielles utilisées pour l'analyse de la sensibilité des systèmes univariables. L'intérêt de cette approche pour le design d'un compensateur multivariable est qu'elle dévoile un lien intéressant entre la matrice de sensibilité caractérisant ce compensateur et les compensateurs amenant une invariance absolue de l'une des sorties du système. De plus, comme dans le cas univariable, cette approche permet une visualisation assez facile de l'effet du compensateur multivariable sur le système. Dans une seconde partie, on illustre à l'aide d'un groupe moteur - alternateur comment ces techniques nous sont utiles dans un problème pratique.

* Ecole Polytechnique, Montréal, Québec.

1. INTRODUCTION

L'insertion d'une boucle de contre-réaction dans un système de commande est dans la plupart des applications justifiée par la nécessité de réduire la sensibilité du système avec perturbations extérieures et aux variations des paramètres internes. Pour la conception d'une telle boucle, il est évidemment important que l'automaticien puisse bien comprendre la relation entre les propriétés structurelles de la boucle et la réduction de sensibilité qui en résulte. Les techniques actuellement disponibles à cette fin reposent sur la théorie de la commande optimale ou bien sur la théorie du filtrage [1]. Il s'agit, dans un cas comme dans l'autre, de techniques à caractère analytique/numérique qui, très attrayantes au point de vue mathématique, répondent toutefois mal aux exigences de perception et introspection pour une bonne compréhension des phénomènes en jeu. C'est ainsi que dans le cas des systèmes univariables ces techniques sont habituellement remplacées par des procédures graphiques d'un niveau théorique beaucoup plus modeste [2]. Originellement proposées par Bode, ces procédures permettent une visualisation claire de la relation entre les réponses en fréquences du compensateur et du système à chaîne ouverte et la réduction de sensibilité sur le système à chaîne fermée.

Lorsqu'un système multivariable est constitué d'un ensemble de systèmes univariables découplés, il est encore possible d'appliquer les procédures de Bode. Dans la plupart des cas d'intérêt pratique toutefois les divers systèmes univariables constituant le système

multivariable sont intercouplés. L'application des procédures de Bode limite alors considérablement la validité de l'analyse. Cette difficulté est souvent surmontée en effectuant des opérations préliminaires de découplage avant d'appliquer les procédures de Bode [5]. Ces opérations semblent toutefois être marquées par les mêmes inconvénients associés avec les techniques analytiques/numériques que l'on aimerait éviter [6].

L'objectif de la présente étude est de développer des techniques pour l'analyse de la sensibilité qui, tout en jouissant de la simplicité et de l'efficacité des procédures de Bode, soient au même temps applicables aux systèmes multivariables. Nous ferons ceci en utilisant une approche axée sur le développement d'un nombre de connexions intéressantes liant la notion classique de compensateur avec l'invariance absolue [3], et la matrice de sensibilité proposée par Cruz et Perkins [4].

Examinons le système multivariable linéaire et invariant dans le temps représenté à la figure 1. A l'aide de la transformée de Laplace, on écrit le vecteur de sortie y^0 en fonction du vecteur d'entrée u et de la perturbation n :

$$y^0 = y_0 + \Delta^0 ; \quad y_0 = [G] u ; \quad \Delta^0 = [F] n \quad (1)$$

[G] et [F] représentent les fonctions de transfert du système exprimées sous une forme matricielle, y_0 la sortie nominale et Δ^0 l'erreur due à perturbation.

Afin d'améliorer le comportement du système en présence de perturbations, on peut lui ajouter des boucles de compensation selon l'arrangement de la figure 2. Les équations caractérisant le système deviennent:

$$y = y_o + \Delta ; y_o = [G] u ; \Delta = [F] \eta - [G] [M] \Delta \quad (2)$$

Le problème est évidemment de choisir M de telle façon que des critères de performance soient respectés. L'équation (2) nous donne:

$$\Delta = [\$] \Delta^0 \quad (3)$$

où $[\$] = [I + [G][M]]^{-1}$

En étudiant la relation entre la matrice de sensibilité $[\$]$ et la matrice des compensateurs $[M]$, on montrera comment on peut utiliser les méthodes fréquentielles d'analyse et de design habituellement réservées aux systèmes univariables pour fixer $[M]$. Cette étude permettra aussi de découvrir des liens intéressants entre $[\$]$ et les compensateurs amenant une invariance absolue de l'une des sorties du système.

2. THEORIE

Pour simplifier l'écriture on va étudier un système à 2 entrées et 2 sorties, la perturbation étant donnée par une quantité scalaire. Reprenant les équations (1), (2) et (3):

$$\begin{bmatrix} y_1^o \\ y_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{o1} \\ y_{o2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1^o \\ \Delta_2^o \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y_{o1} \\ y_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Delta_1^o \\ \Delta_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \eta$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{o1} \\ y_{o2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \eta - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = [\$] \begin{bmatrix} \Delta_1^o \\ \Delta_2^o \end{bmatrix}; \quad [\$] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Le système en boucle fermé sera amélioré si

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_1^o} \right| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\Delta_2}{\Delta_2^o} \right| < 1$$

Afin d'exprimer ces rapports en fonction des compensateurs M_{ij} , il faut calculer $[\$]$.

$$[\$] = \frac{\text{Adj} \begin{bmatrix} I & [G] \\ I & [M] \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} I & [G] \\ I & [M] \end{bmatrix}}$$

$$[\$] = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} (1 + G_{21} M_{12} + M_{22}) & -(G_{11} M_{12} + G_{12} M_{22}) \\ -(G_{21} M_{11} + G_{22} M_{21}) & (1 + G_{11} M_{11} + G_{12} M_{21}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{où } \det = (1 + G_{11} M_{11} + G_{12} M_{21})(1 + G_{21} M_{12} + G_{22} M_{22}) - (G_{21} M_{11} + G_{22} M_{21})(G_{11} M_{12} + G_{12} M_{22})$$

Utilisant $\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = [\$] \begin{bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{bmatrix}$, on trouve:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1^0(1+G_{21}M_{12}+G_{22}M_{22}) - \Delta_2^0(G_{11}M_{12}+G_{12}M_{22})}{\det} \\ \frac{\Delta_2^0(1+G_{11}M_{11}+G_{12}M_{21}) - \Delta_1^0(G_{21}M_{11}+G_{22}M_{21})}{\det} \end{bmatrix}$$

Sachant que $\Delta_2^0/\Delta_1^0 = F_2/F_1$, on écrit:

$$\Delta_1/\Delta_1^0 = \frac{(1+G_{21}M_{12}+G_{22}M_{22}) - \frac{F_2}{F_1}(G_{11}M_{12}+G_{12}M_{22})}{\det} \quad (5)$$

$$\Delta_2/\Delta_2^0 = \frac{(1+G_{11}M_{11}+G_{12}M_{21}) - \frac{F_1}{F_2}(G_{21}M_{11}+G_{22}M_{21})}{\det}$$

Définition 1

Le compensateur D^{11} , (D^{22}), est le compensateur connecté entre la première entrée, (deuxième entrée), et la première sortie, (deuxième sortie), et qui réduit à zéro l'influence de la perturbation sur la deuxième sortie, (première sortie).

Les compensateurs ayant cette propriété seront notés IA (compensateurs jouissant de la propriété de l'Invariance Absolue).

Définition 2

Le compensateur D^{12} , (D^{21}), est le compensateur connecté entre la première entrée, (deuxième entrée), et la deuxième sortie, (première sortie), et qui réduit à zéro l'influence de la perturbation

sur la première sortie, (deuxième sortie).

Les compensateurs ayant cette propriété seront encore notés IA.

Proposition 1 (Expression analytique des compensateurs IA)

Pour le système en boucle ouverte, les compensateurs IA sont donnés par:

$$D^{11} = \frac{F_2}{G_{21} F_1 - F_2 G_{11}}$$

$$D^{12} = \frac{F_1}{G_{11} F_2 - F_1 G_{21}}$$

$$D^{21} = \frac{F_2}{G_{22} F_1 - F_2 G_{12}}$$

$$D^{22} = \frac{F_1}{G_{12} F_2 - F_1 G_{22}}$$

Démonstration: calcul de D^{12}

Le compensateur M_{12} doit être tel que (définition 2) $\Delta_1 = 0$, i.e. $\Delta_1 / \Delta_1^0 = 0$. Utilisant (5) et sachant que $M_{11} = M_{21} = M_{22} = 0$ puisque le système est en boucle ouverte, on doit avoir:

$$(1 + G_{21} M_{12}) - \frac{F_2}{F_1} (G_{11} M_{12}) = 0$$

donc $M_{12} = -1 / \left(G_{21} - \frac{F_2}{F_1} G_{11} \right)$

$$M_{12} = F_1 / \left(G_{11} F_2 - F_1 G_{21} \right) = D^{12} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les autres compensateurs IA se calculent de la même façon.

Proposition 2 (Expression des compensateurs IA dans le système en boucle fermée)

Les compensateurs D_c^{ij} associés au système en boucle fermée sont reliés aux compensateurs D^{ij} du système en boucle ouverte par l'expression suivante:

$$\begin{bmatrix} D_c^{11} & D_c^{12} \\ D_c^{21} & D_c^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{11} & D^{12} \\ D^{21} & D^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \alpha = 1 - \frac{M_{11}}{D^{11}} - \frac{M_{21}}{D^{21}}, \quad \beta = 1 - \frac{M_{22}}{D^{22}} - \frac{M_{12}}{D^{12}}$$

Démonstration: calcul de D_c^{12}

Dans le système en boucle fermée, le compensateur D_c^{12} doit être tel que $\Delta_1/\Delta_1^0 = 0$. En utilisant (5), ceci implique:

$$1 + G_{21}(M_{12} + D_c^{12}) + G_{22}M_{22} - \frac{F_2}{F_1}(G_{11}(M_{12} + D_c^{12}) + G_{12}M_{22}) = 0$$

c'est-à-dire

$$D_c^{12} = \frac{-1 - G_{22}M_{22} + \frac{F_2}{F_1}(G_{12}M_{22})}{G_{21} - \frac{F_2}{F_1}G_{11}} - M_{12}$$

$$D_c^{12} = \frac{-1}{G_{21} - \frac{F_2}{F_1} G_{11}} + \frac{\frac{F_2}{F_1} G_{12} - G_{22}}{G_{21} - \frac{F_2}{F_1} G_{11}} - M_{12}$$

$$D_c^{12} = \frac{F_1}{G_{11} F_2 - F_1 G_{21}} + M_{22} \frac{G_{12} F_2 - F_1 G_{22}}{F_1} \frac{F_1}{F_1 G_{21} - F_2 G_{11}} - M_{12}$$

$$D_c^{12} = D^{12} + M_{22} \left(-\frac{D^{12}}{D^{22}} \right) - M_{12}$$

d'où

$$D_c^{12} = D^{12} \left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}} - \frac{M_{22}}{D^{22}} \right) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les autres compensateurs se calculent de la même façon.

Comme on l'indique à la figure 3, on peut analyser le système bouclé autour de son point nominal d'opération (y_o).

Cette représentation du système sera utilisée dans ce qui suit.

Lemma 1 (Fonction de transfert dans le système en boucle fermée)

Les fonctions de transfert du système représenté à la figure 3 sont données par:

$$[G]_{(M)} = [\$] [G] ; [F]_{(M)} = [\$] [F]$$

où $[\$]$ est telle que donnée par l'équation (4).

Démonstration:

a) Soit $n = 0$ dans le système de la figure 3, alors on a:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = [G] \Delta U - [G] [M] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \left[I + [G][M] \right]^{-1} [G] \Delta U = [\$] [G] \Delta U$$

$$\text{d'où } [G]_{(M)} = [\$] [G]$$

b) La preuve se fait d'une façon similaire pour $[F]_{(M)}$ (il s'agit de poser $\Delta U = 0$).

Corollaire 1 (Compensateurs IA et fonctions de transfert du système bouclé)

Si $M_{ij} = 0$ pour $ij \neq 22$, et si $M_{22} = D^{22}$ alors on a:

$$G_{11(M_{22})} = P^{11} ; G_{12(M_{22})} = P^{21} ; G_{21(M_{22})} = (G_{21}/G_{12})^{P^{21}} ;$$

$$G_{22(M_{22})} = (G_{22}/G_{12})^{P^{21}} ; \text{ où } P^{ij} = -1/D^{ij}. \text{ On a aussi}$$

$$D_c^{11} = D^{11} ; D_c^{12} = 0 ; D_c^{21} = D^{21} ; D_c^{22} = 0.$$

On peut facilement généraliser le résultat pour n'importe lequel des $M_{ij} = D^{ij}$. La preuve découle directement du Lemma 1 et de la proposition 1.

Proposition 3 (Relation entre la matrice de sensibilité et les compensateurs IA).

La matrice de sensibilité que l'on peut utiliser pour calculer Δ ou $[F]_{(M)}$ est donnée par:

$$[\$] = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

où, tout comme à la proposition 2,

$$\alpha = 1 - \frac{M_{11}}{D^{11}} - \frac{M_{21}}{D^{21}}, \text{ et } \beta = 1 - \frac{M_{22}}{D^{22}} - \frac{M_{12}}{D^{12}}.$$

Démonstration:

De l'équation (5), on a:

$$[\$] = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \left\{ (1+G_{21}M_{12} + G_{22}M_{22}) \right\} & 0 \\ -\frac{F_2}{F_1} (G_{11}M_{12} + G_{12}M_{22}) & \left\{ (1+G_{11}M_{11} + G_{12}M_{21}) \right. \\ 0 & \left. -\frac{F_1}{F_2} (G_{21}M_{11} + G_{22}M_{21}) \right\} \end{bmatrix}$$

d'où en développant le premier terme:

$$1 + G_{21}M_{12} - \frac{F_2}{F_1} G_{11}M_{12} + G_{22}M_{22} - \frac{F_2}{F_1} G_{12}M_{22} \stackrel{?}{=} \beta$$

$$1 + M_{12}(G_{21} - \frac{F_2}{F_1} G_{11}) + M_{22}(G_{22} - \frac{F_2}{F_1} G_{12}) \stackrel{?}{=} \beta$$

$$1 + M_{12}(-\frac{1}{D^{12}}) + M_{22}(-\frac{1}{D^{22}}) = \beta \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On peut montrer de la même façon que l'autre terme à l'intérieur des crochets est égal à α .

Corollaire 2 (Conditions de Nyquist pour l'évaluation graphique de la réduction de sensibilité engendrée par l'introduction d'un compensateur scalaire).

Une condition suffisante pour que dans le système à la figure 4 il y ait une réduction de la sensibilité de la première sortie, (deuxième sortie), est que l'origine du plan de Nyquist, (le point $-\frac{1}{D_{i1}^{i1}} = P^{i1} = G_{1i} - G_{2i} F_1 F_2^{-1}$), soit à l'intérieur du cercle centré en $-1/M_{i1}(j\omega)$ et qui passe par $G_{1i}(j\omega)$. On peut trouver l'amélioration apportée par le compensateur en évaluant graphiquement les expressions suivantes:

$$\left| \frac{\Delta_1(j\omega)}{\Delta_1^0(j\omega)} \right| = \frac{|1/M_{i1}(j\omega)|}{|1/M_{i1}(j\omega) + G_{1i}(j\omega)|} ; \quad \left| \frac{\Delta_2(j\omega)}{\Delta_2^0(j\omega)} \right| = \frac{|1/M_{i1}(j\omega) + P^{i1}(j\omega)|}{|1/M_{i1}(j\omega) + G_{1i}(j\omega)|}$$

Corollaire 3 (Condition de Nyquist pour l'évaluation graphique de la réduction de sensibilité engendrée par l'introduction d'une boucle multivariable)

La matrice de sensibilité de la proposition 4 peut être obtenue en évaluant graphiquement les expressions suivantes:

$$\$ (M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}) = \$ (M_{11})_{(M_1)} \$ (M_{12})_{(M_2)} \$ (M_{21})_{(M_3)} \$ (M_{22})_{(M_4)}$$

où

$$\$^{(M_{11})}(M_1) = \begin{bmatrix} \frac{1/M_{11}}{1/M_{11} + G_{11}(M_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1/M_{11} + P^{11}(M_1)}{1/M_{11} + G_{11}(M_1)} \end{bmatrix}; \$^{(M_{12})}(M_2) = \begin{bmatrix} \frac{1/M_{12} + P^{12}(M_2)}{1/M_{12} + G_{21}(M_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1/M_{12}}{1/M_{12} + G_{21}(M_2)} \end{bmatrix}$$

$$\$^{(M_{21})}(M_3) = \begin{bmatrix} \frac{1/M_{21}}{1/M_{21} + G_{12}(M_3)} & 0 \\ 0 & \frac{1/M_{21} + P^{21}(M_2)}{1/M_{21} + G_{12}(M_3)} \end{bmatrix}; \$^{(M_{22})}(M_4) = \begin{bmatrix} \frac{1/M_{22} + P^{22}(M_4)}{1/M_{22} + G_{22}(M_4)} & 0 \\ 0 & \frac{1/M_{22}}{1/M_{22} + G_{22}(M_4)} \end{bmatrix}$$

où M_1 représente le compensateur M qui était dans le système avant d'ajouter M_{11} ; M_2 ...

avec $P^{ij}(M) = -1/D_c^{ij}$; $G_{ij}(M_k)$ se calculant à l'aide du lemme 1.

Corollaire 4 (Conditions géométriques sur le diagramme de Nyquist

de M_{ij} imposées par une réduction de sensibilité assignée)

Si $M_{12} = M_{21} = M_{22} = 0$, et si M_{11} doit être choisi de telle façon que pour la pulsation ω_o on ait:

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_1^0} \right| < \alpha$$

et

$$\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_2^0} \right| < \beta$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$, alors il faut que $-1/M_{11}(j\omega_0)$ soit à l'intérieur du cercle centré en $-\frac{\alpha^2}{1-\alpha} G_{11}(j\omega_0)$ et de rayon $\frac{\alpha}{1-\alpha} G_{11}(j\omega_0)$, et aussi à l'intérieur du cercle centré en $\frac{-\beta^2}{1-\beta^2} \left(G_{11}(j\omega_0) - \frac{P^{11}(j\omega_0)}{\beta^2} \right)$ et de rayon $\frac{\beta}{1-\beta^2} \left| G_{11}(j\omega_0) - P^{11}(j\omega_0) \right|$.

Démonstration:

a) Considérons en premier lieu la condition $\left| \Delta_1 / \Delta_1^0 \right| < \alpha$.

On a:

$$\left| \frac{1/M_{11}}{1/M_{11} + G_{11}} \right| < \alpha \quad \text{à } \omega = \omega_0$$

en posant $1/M_{11}(j\omega_0) = m_x + jm_y$ et $G_{11}(j\omega_0) = g_x + jg_y$, on peut écrire:

$$\alpha \left| (m_x + g_x) + j(m_y + g_y) \right| > \left| m_x + jm_y \right|$$

$$(\alpha^2 - 1) m_x^2 + (\alpha^2 - 1) m_y^2 + \alpha^2 (g_x^2 + g_y^2) + 2 \alpha^2 (m_x g_x + m_y g_y) > 0$$

Etudions le cas où on a l'égalité à zéro. On a:

$$\left[m_x + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} g_x \right]^2 + \left[m_y + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} g_y \right]^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2} (g_x^2 + g_y^2)$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de rayon $\frac{\alpha}{1-\alpha} G_{11}(j\omega_0)$ et de centre $-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} G_{11}(j\omega_0)$. Puisque l'on trace $-1/M_{11}$ et que l'on désire $\Delta_1 / \Delta_1^0 < \alpha$ on déduit que:

$-1/M_{11}(j\omega_0)$ doit être à l'intérieur du cercle centré en $\frac{-\alpha^2}{1-\alpha} G_{11}(j\omega_0)$

b) Considérons maintenant la condition $|\Delta_2/\Delta_2^0| < \beta$.

$$\left| \$_{22}(M_{11}) \right| = \frac{\left| 1/M_{11} + P^{11} \right|}{\left| 1/M_{11} + G_{11} \right|} < \beta \quad \text{à } \omega = \omega_0$$

en posant $1/M_{11}(j\omega_0) = m_x + jm_y$, $G_{11}(j\omega_0) = g_x + jg_y$ et $P^{11}(j\omega_0) = p_x + jp_y$, on obtient:

$$\beta \left| (m_x + g_x) + j(m_y + g_y) \right| > \left| (m_x + p_x) + j(m_y + p_y) \right|$$

En étudiant le cas où on a égalité, et en développant comme en (a), on trouve:

$$m_x \left[\frac{p_x - \beta^2 g_x}{1 - \beta^2} \right]^2 + m_y \left[\frac{p_y - \beta^2 g_y}{1 - \beta^2} \right]^2 = \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \left[(g_x - p_x)^2 + (g_y - p_y)^2 \right]$$

Il s'agit encore d'un cercle de rayon $\frac{\beta}{1 - \beta^2} \left| G_{11}(j\omega_0) - P^{11}(j\omega_0) \right|$

et de centre $- \frac{1}{1 - \beta^2} \left[P^{11}(j\omega_0) - \beta^2 G_{11}(j\omega_0) \right]$. Puisque l'on trace $-1/M_{11}$

et que l'on désire $|\Delta_2/\Delta_2^0| < \beta$, on déduit que:

$-1/M_{11}(j\omega_0)$ doit être à l'intérieur du cercle centré en $- \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \left[G_{11}(j\omega_0) - \frac{P^{11}(j\omega_0)}{\beta^2} \right]$ et de rayon $\frac{\beta}{1 - \beta^2} \left| G_{11}(j\omega_0) - P^{11}(j\omega_0) \right|$.

c) Si on désire $|\Delta_1/\Delta_1^0| < \alpha$ et $|\Delta_2/\Delta_2^0| < \beta$ alors $-1/M_{11}(j\omega_0)$ doit être à l'intérieur du cercle (a) et à l'intérieur du cercle (b). C.Q.F.D.

Corollaire 5 (Relation entre la matrice de sensibilité, les compensateurs IA, et les gains de boucle).

La matrice de sensibilité que l'on peut utiliser pour calculer Δ ou $[F]_{(M)}$ est donnée par:

$$[\$] = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ où } \alpha = 1 - \frac{M_{11}}{D_{11}} - \frac{M_{21}}{D_{21}}, \beta = 1 - \frac{M_{22}}{D_{22}} - \frac{M_{12}}{D_{12}},$$

$$\text{et } K = (1 + G_{11} M_{11}) (1 + G_{12}(M_{11}) M_{21}) (1 + G_{22}(M_{11}, M_{21}) M_{12})$$

$$(1 + G_{22}(M_{11}, M_{21}, M_{12}) M_{22})$$

ou encore

$$K = (1 + G_{12} M_{21}) (1 + G_{11}(M_{21}) M_{11}) \dots \text{etc.}$$

Démonstration:

Du corollaire 3, on a:

$$\$ (M) = \begin{bmatrix} \frac{1/M_{11}}{1/M_{11} + G_{11}(M_1)} \cdot \frac{1/M_{12} + P^{12}(M_2)}{1/M_{12} + G_{21}(M_2)} \cdot \frac{1/M_{21}}{1/M_{21} + G_{12}(M_3)} \cdot \frac{1/M_{22} + P^{22}(M_4)}{1/M_{22} + G_{22}(M_4)} & 0 \\ 0 & \{\dots\} \end{bmatrix}$$

On montre que le premier terme, a_{11} , à l'intérieur des crochets est égal à β/K .

$$a_{11} = \frac{1}{(1 + M_{11} G_{11}(M_1))} \cdot \frac{(1 - M_{12}/D^{12}(M_2))}{(1 + M_{12} G_{21}(M_2))} \cdot \frac{1}{(1 + M_{21} G_{21}(M_3))} \cdot \frac{(1 - M_{22}/D^{22}(M_4))}{(1 + M_{22} G_{22}(M_4))}$$

$$a_{11} = \frac{1}{K} \left(\left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}(M_2)} \right) \left(1 - \frac{M_{22}}{D^{22}(M_4)} \right) \right)$$

Supposons que l'on mette M_{12} dans le système avant M_{22} , on a:

$$D^{12}(M_2) \quad D^{12}; \quad D^{22}(M_4) \quad D^{22} \left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}} \right)$$

$$a_{11} = \frac{1}{K} \left(\left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}} \right) \left(1 - \frac{M_{22}}{D^{22}(1-M_{12}/D^{12})} \right) \right) = \frac{1}{K} \left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}} - \frac{M_{22}}{D^{22}} \right) = \frac{\beta}{K} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Définition 3

Le compensateur MIN^{ij} est le compensateur à gain minimum connecté entre l'entrée i et la sortie j , et qui va faire que:

$$\left| \frac{\Delta_j}{\Delta_o} \right| < \alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

Proposition 4 (Compensateur MIN dans le système en boucle ouverte)

Pour le système en boucle ouverte, les compensateurs MIN sont donnés par:

$$\text{MIN}^{11} = \frac{1}{\beta G_{11}}; \quad \text{MIN}^{12} = \frac{1}{\beta G_{21}}; \quad \text{MIN}^{21} = \frac{1}{\beta G_{12}}; \quad \text{MIN}^{22} = \frac{1}{\beta G_{22}}$$

avec $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (β toujours > 0), α étant tel qu'à la définition 3.

Démonstration:

Supposons qu'en mettant M_{12} dans le système, on veuille obtenir pour toutes les fréquences:

$$\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_2^0} \right| < \alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

On sait que (proposition 5)

$$\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_2^0} \right| = \left| \frac{1}{1 + M_{12}(j\omega)G_{21}(j\omega)} \right| < \alpha$$

$$1 < \alpha (1 + M_{12}G_{21})$$

Or $|a + b| < |a| + |b|$, le signe d'égalité pouvant être utilisé seulement si a et b sont de même signe: Donc.

$$1 < \alpha \{1 + M_{12}G_{21}\}$$

et on peut utiliser le signe = seulement si $M_{12}G_{21} = 1 = 0^\circ$

On a:

$$\left| \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right| < |M_{12} G_{21}|$$

Le compensateur sera minimum si

$$\left| \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right| = |M_{12} G_{21}|$$

M_{12} et G_{21} devant être de même signe, la solution est:

$$M_{12} = \frac{1 - \alpha}{\alpha G_{21}} = \frac{1}{\beta G_{21}} = \text{MIN}^{1/2} \quad (\beta > 0)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 6 (Compensateurs MIN dans le système en boucle fermée)

Si on a déjà ajouté M dans le système, alors les compensateurs MIN sont donnés par:

$$\text{MIN}_C^{ij} = \frac{1}{\beta G_{ji}(M)} \quad \text{où } \beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

3. APPLICATION

Le développement théorique de la section précédente nous permet de faire le design du système compensé, une boucle à la fois. Il nous donne aussi plus de facilité pour déterminer, à chaque étape de la réalisation du compensateur, quelle est la boucle la plus avantageuse à utiliser. A l'aide d'exemples, on montre donc ici comment ces techniques fréquentielles peuvent nous aider à répondre aux questions suivantes:

- Le compensateur M_{ij} étant imposé dans un système, les performances de ce système sont-elles améliorées?
- Si on désire utiliser une seule boucle de compensation, laquelle faut-il choisir parmi toutes celles qui sont possibles?

Ayant déjà ajouté n compensateurs dans un système, comment peut-on choisir le suivant?

On montre aussi comment ces méthodes nous permettent de juger de la stabilité du système asservi tout en cherchant les compensateurs à planter.

3.1 Système à l'étude

Le système que l'on utilise pour faire la démonstration est représenté à la figure 5. Il s'agit d'un convertisseur DC-AC constitué d'un groupe moteur - alternateur débitant son énergie dans une charge triphasée équilibrée (F.P. = .86).

Les caractéristiques des principaux appareils sont:

- Moteur c.c. Tamper, type M-1422
puissance 3 HP, vitesse 1750 t.p.m.
- Alternateur triphasé Tamper, type SG-1020
puissance 2.5 kVA, vitesse 1800 t.p.m.
fréquence 60 Hz, tension 120-208-240 volts
- Amplificateur de puissance Hewlett Packard, type SCR-10
puissance 10 kVA, tension maximale + 240 volts
- Amplificateurs de moyenne puissance McFadden
Gain 10, tension maximale \pm 62 volts.

Une étude précédente, [8], nous a permis d'établir le modèle mathématique de ce système: en représentant le groupe autour de ses conditions nominales d'opération, il est tel que donné à la figure 6. On peut considérer que les entrées sont données par U_1 la tension d'induit du moteur c.c., et par U_2 la tension d'excitation de l'alternateur, les

sorties étant la tension V_a et la fréquence F aux bornes de l'alternateur. La perturbation (variation de la partie résistive de la charge) produit des erreurs de fréquence et de tension que l'on veut minimiser; entre autres, on désire améliorer les performances du système $\eta = u_{-1}(t) = \Delta W$. Aux pages suivantes, on illustre comment on peut utiliser les résultats de la section 1 pour solutionner ce problème.

3.2 Exemple 1 (Evaluation de l'effet d'un compensateur)

Pour bien comprendre les techniques que l'on va utiliser dans les exemples ultérieurs, on commence par montrer comment on peut évaluer graphiquement l'effet d'un compensateur M_{ij} dans un système.

Supposons par exemple que l'on désire mettre un compensateur M_{11} dans le système de la figure 6. Puisqu'il n'y a aucun autre compensateur présent, alors, selon les corollaires 2 et 3, il nous faut tracer les diagrammes de Nyquist de G_{11} , de P^{11} et de $-1/M_{11}$. A cette étape, le programme PASSA [10] nous simplifie grandement la tâche: il suffit de coder les fonctions de transfert sous une forme acceptable pour PASSA afin d'obtenir les diagrammes désirés. Ici pour obtenir $G_{11}(j\omega)$, on code:

$$G(s) = .5125/(1 + .55s) (Z), \text{ avec } Z = e^{+.08s}$$

et pour obtenir $P^{11}(j\omega)$ ($= -1/D^{11}(j\omega)$):

$$G1(s) = .5125/(1 + .55s) (Z)$$

$$G2(s) = -1.775 (.188) (1 + .34s) / 1.20 (1 + .41s) (1 + .6s) (Y)$$

$$\text{avec } Z = e^{+.08s} \text{ et } Y = e^{+.10s}$$

Sur une feuille séparée, on retrace ensuite $G_{11}(j\omega)$ en utilisant la même échelle pour l'axe réel et l'axe imaginaire, puis on superpose $P^{11}(j\omega)$: le résultat apparaît à la figure 7.

On peut utiliser les diagrammes de $G_{11}(j\omega)$ et de $-1/M_{11}(j\omega)$ pour juger de la stabilité du système bouclé: si le compensateur est proportionnel, il suffit d'utiliser le critère de Nyquist, et s'il ne l'est pas, les résultats que l'on retrouve en [9] nous permettent aussi de statuer sur la stabilité à partir de ces graphiques. Supposons que M_{11} est proportionnel, alors le critère de Nyquist impose (voir le diagramme de G_{11} à la figure 7).

$$-1/M_{11} > .5125 \text{ ou } -1/M_{11} < -.045$$

Le corollaire 2 nous permet maintenant de prédire les performances du système $\Delta W(j\omega)$. On montre plus loin que pour obtenir un bon comportement des deux sorties lorsque $\Delta W = u_{-1}(t)$ les fréquences qui nous intéressent sont $0 < \omega < 10$ et qu'il nous faut porter une attention particulière à celles qui sont inférieures à 2 rad/sec.

Si on pose $-1/M_{11} = .533$, on voit à partir de la figure 7 que les deux sorties du système sont détériorées. En effet, le cercle #1 ne répond pas aux conditions de la proposition. Par contre, si $-1/M_{11} = -.10$, on s'aperçoit que la précision du système est grandement améliorée puisque pour les deux sorties il existe un cercle obéissant aux conditions de cet énoncé, jusqu'à $\omega = 8.6$ rad/sec. (pour les 2 sorties). Les graphiques

nous permettent aussi de quantifier l'effet du compensateur. En effet, selon le corollaire 3, on a:

$$\left| \frac{\Delta F'}{\Delta F^0} \right| = \frac{|1/M_{11}|}{|1/M_{11} + G_{11}|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\Delta V_a'}{\Delta V_a^0} \right| = \frac{|1/M_{11} + P^{11}|}{|1/M_{11} + G_{11}|}$$

où l'indice ' désigne le système compensé, et l'indice ⁰ le système original. Par exemple pour $-1/M_{11} = -.1$, on a à $\omega = 2.0$ rad/sec:

$$\left| \frac{\Delta F'}{\Delta F^0} \right| = \left| \frac{m_1}{m_2} \right| = .241 \quad \left| \frac{\Delta V_a'}{\Delta V_a^0} \right| = \left| \frac{m_3}{m_2} \right| = .636$$

En évaluant ces rapports à diverses fréquences, on pourra ensuite se figurer l'allure des sorties pour toute valeur de la perturbation ΔW .

3.3 Exemple 2 (Recherche de la meilleure boucle)

Supposons que l'on désire améliorer la précision du système moteur-alternateur en n'y ajoutant qu'un seul compensateur parmi les quatre possibles. Donc, dans une bande de fréquence qui reste à déterminer, on veut réduire la grandeur de $F_1(s)$ et de $F_2(s)$: ces fonctions étant toutes deux du premier ordre, il est facile de fixer les fréquences qui nous intéressent. En tenant compte du spectre fréquentiel de la perturbation (échelon de charge) donné ci-dessous (figure 8), on s'aperçoit qu'il faut étudier toutes les fréquences telles que $0 < \omega < N\omega_{ci}$ ($3 < N < 5$) où ω_{ci} représente la fréquence de coupure de F_i

pour F_1 : $\omega_{c1} = 1/.6 = 1.67$ rad/sec

pour F_2 : $\omega_{c2} = 1/.34 = 2.94$ rad/sec.

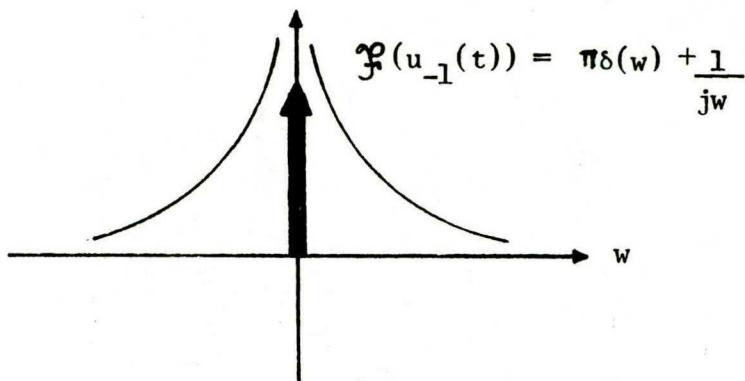


Figure 8: Spectre fréquentiel d'un échelon unitaire.

Donc, pour améliorer la réponse à l'échelon du système, on peut fixer les objectifs suivants:

a) Pour la fréquence: fonction F_1

$$\left| \frac{\Delta F'}{\Delta F^0} \right| < .3 \text{ pour } 0 < \omega < 10$$

$$\left| \frac{\Delta F'}{\Delta F^0} \right| < .1 \text{ pour } 0 < \omega < 2 \quad (\approx \omega_{c1})$$

b) Pour la tension: fonction F_2

$$\left| \frac{\Delta V_a'}{\Delta V_a^0} \right| < .65 \text{ pour } 0 < \omega < 10$$

$$\left| \frac{\Delta V_a'}{\Delta V_a^0} \right| < .5 \text{ pour } 0 < \omega < 3 \quad (\approx \omega_{c2})$$

On peut utiliser 4 boucles de compensation différentes:

$$\Delta U_1(s) = -M_{11}(s) \quad \Delta F'(s)$$

$$\Delta U_1(s) = -M_{12}(s) \quad \Delta V_a'(s)$$

$$U_2(s) = - M_{21}(s) \Delta F'(s)$$

$$U_2(s) = - M_{22}(s) \Delta V_a'(s)$$

Ne pouvant pas dire à priori laquelle de ces boucles pourra satisfaire les spécifications, ni laquelle présente le plus d'avantages, on va tracer, à l'aide de PASSA, les diagrammes de Nyquist suivants:

$$a) G_{11} \text{ et } P^{11} \quad b) G_{21} \text{ et } P^{12} \quad c) G_{12} \text{ et } P^{21} \quad d) G_{22} \text{ et } P^{22}$$

où sont les fonctions P^{ij} sont données par:

$$P^{11} = \frac{-1}{D^{11}} = \frac{.5125 e^{-0.08s}}{1 + .55s} - \frac{1.775(.188)(1+34s)e^{-1.0s}}{1.20(1+41s)(1+.6s)}$$

$$P^{12} = \frac{-1}{D^{12}} = \frac{1.775 e^{-0.04s}}{1 + .41s} - \frac{3.27(1+.6s)e^{-0.02s}}{(1+.55s)(1+.34s)}$$

$$P^{21} = \frac{-1}{D^{21}} = \frac{-.145 e^{-0.10s}}{1 + .67s} - \left(\frac{.675}{(1+.32s)} + \frac{.30s}{(1+.18s)^2} \right) \frac{.188(1+.34s)e^{-0.06s}}{1.20(1+.6s)}$$

$$P^{22} = \frac{-1}{D^{22}} = \frac{.675}{(1+.32s)} + \frac{.30s}{(1+.18s)^2} + \frac{.145(1.20)(1+.6s)e^{-0.04s}}{.188(1+.34s)(1+.67s)}$$

Les diagrammes de Nyquist en question sont représentés aux figures 9.1 à 9.4. Ces diagrammes nous permettent d'éliminer les compensateurs M_{21} et M_{22} : en effet, aux fréquences qui nous intéressent, on constate que l'on détériore au moins l'une des sorties du système car à la figure 9.3, (9.4), il est impossible de trouver un compensateur satisfaisant aux conditions du corollaire 4. Il ne reste donc que M_{11} et M_{12} qui peuvent être utilisés.

On peut aussi se servir des critères géométriques du corollaire 4 pour décider quelle boucle sera employée. Fixons par exemple: $\omega = 1.0 \text{ rad/sec}$. Les spécifications du projet sont données par:

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_1^0} \right| = \left| \frac{\Delta F'}{\Delta F^0} \right| < \alpha = .1$$

$$\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_2^0} \right| = \left| \frac{\Delta V'_a}{\Delta V_a^0} \right| < \beta = .5$$

Si on désire utiliser M_{11} , alors, selon l'énoncé du corollaire 4, $-1/M_{11}(\omega=1)$ doit

a) être à l'intérieur du cercle (a), caractérisé par

$$\text{rayon} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \left| G_{11}(\omega=1) \right| \approx .1 \left| G_{11}(\omega=1) \right|$$

$$\text{centre} = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2} G_{11}(\omega=1) \approx - .01 G_{11}(\omega=1)$$

si on veut respecter la spécification sur la fréquence.

b) être à l'intérieur du cercle (b), caractérisé par

$$\text{rayon} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \left| G_{11}(\omega=1) - P^{11}(\omega=1) \right| = \frac{2}{3} \left| G_{11}(\omega=1) - P^{11}(\omega=1) \right|$$

$$\text{centre} = \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} \left[G_{11}(\omega=1) - \frac{1}{\beta^2} P^{11}(\omega=1) \right] = - \frac{4}{3} \left[P^{11}(\omega=1) - \frac{1}{3} G_{11}(\omega=1) \right]$$

si on veut respecter la spécification sur la tension.

Les cercles en question apparaissent à la figure 9.1. La zone ombragée est celle qui est commune aux deux cercles: si $-1/M_{11}(\omega=1)$ est dans

cette zone, les spécifications seront respectées pour $\omega=1$ rad/sec.

En première analyse, on peut donc retenir cette boucle. Si on désire utiliser M_{21} , les cercles (a) et (b) sont encore caractérisés par les équations ci-dessus où G_{12} et P^{21} remplacent G_{11} et P^{11} . Comme on peut le voir à la figure 9.3, ces deux cercles ne se coupent pas. On rejettéra donc cette boucle de notre étude. Maintenant, si on désire utiliser M_{12} , les équations des cercles deviennent:

- a) Pour respecter la spécification sur la fréquence, le cercle est caractérisé par

$$\text{rayon} = \frac{\alpha}{1-\alpha}^2 \left| G_{21}(\omega=1) - P^{12}(\omega=1) \right| \approx .1 \quad \left| G_{21}(\omega=1) - P^{12}(\omega=1) \right|$$

$$\text{centre} = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha}^2 \left[G_{21}(\omega=1) - \frac{P^{12}}{\alpha^2}(\omega=1) \right] \approx 1.01 P^{12}(\omega=1) - .01 G_{21}(\omega=1)$$

- b) Pour respecter la spécification sur la tension, le cercle est caractérisé par

$$\text{rayon} = \frac{\beta}{1-\beta}^2 \left| G_{21}(\omega=1) \right| = \frac{2}{3} \quad \left| G_{21}(\omega=1) \right|$$

$$\text{centre} = \frac{-\beta^2}{1-\beta} \quad G_{21}(\omega=1) = -\frac{1}{3} G_{21}(\omega=1)$$

La zone ombragée de la figure 9.2 représente l'intersection des deux domaines. Encore une fois, on peut retenir cette boucle en première analyse. Et finalement, si on veut employer M_{22} , les équations des cercles sont identiques à celles qui caractérisent M_{21} , où G_{22} et P^{22} remplacent G_{21} et P^{12} . Cette fois, il n'y a pas d'intersection entre les cercles (figure 9.4): on rejette cette boucle.

Dans une seconde étape, on pourrait vérifier si un compensateur choisi dans la zone ombragée conserve la stabilité du système, on pourrait aussi recommencer le test pour d'autres valeurs de ω , etc.

3.3.1 Etude d'implantation du compensateur M_{11}

On sait que si on posait $M_{11} = D_A^{11}$, on réduirait à zéro l'erreur de tension dans le système compensé (à condition qu'il soit stable). Comme l'indique la figure 10.1, cela nous permettrait d'obtenir aussi une certaine amélioration de la tenue en fréquence. Bien que les résultats qu'on obtiendrait ne rencontreraient pas toutes les spécifications du projet, il peut être intéressant d'étudier ce cas. Remarquons en premier lieu que D_A^{11} est irréalisable puisqu'il est anticipatif (voir page 24), on utilise donc une approximation du compensateur IA (on néglige les avances).

$$D_A^{11} = \frac{(1+.55s)(1+.41s)(1+.6s)}{.278(1+.34s)(1+.55s) - .5125(1+.41s)(1+.6s)}$$

Malheureusement si $M_{11} = D_A^{11}$, le système bouclé sera instable. En effet, selon [9] : si $G_{11}M_{11}$ ($\omega=0$) est à gauche de $(-1,0)$ tandis que $G_{11}M_{11}$ ($\omega \rightarrow \infty$) en est à droite, alors le système en boucle fermée est instable si $G_{11}M_{11}$ a un nombre pair ou nul de pôles à partie réelle positive. Ici ce nombre de pôles est nul, ce qui nous permet de conclure à l'instabilité du système. A la figure 10.2, on a tracé $G_{11}M_{11}(j\omega)$. Ce graphique nous permet de vérifier l'instabilité du système bouclé puisque le point $(-1,0)$ est encerclé un nombre infini de fois par la fonction (à cause du retard de G_{11}).

On étudie maintenant le cas où $M_{11} = \text{MIN}^{11}$ (proposition 4).

Encore une fois, il faut utiliser une approximation car MIN^{11} est anticipatif:

$$M_{11} = \text{MIN}_A^{11} = (1 + .55s) / .5125\beta$$

On a donc:

$$M_{11}G_{11} = e^{-0.08s}/\beta$$

et puisque le système en boucle fermée est caractérisé par

$$1 + (e^{-0.08s}/\beta) = 0, \text{ i.e. } (e^{-0.08s}/\beta) = -1$$

il faut que $\beta > 1$ pour que le système bouclé soit stable. Donc, en utilisant un compensateur MIN, il n'est possible d'obtenir que (proposition 4)

$$.5 < \left| \frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)} \right| < 1$$

On est donc très loin des spécifications du projet: M_{11} devra s'éloigner de D^{11} et de MIN^{11} , la boucle n'est donc pas très intéressante de ce point de vue.

Bien que l'on puisse trouver plusieurs compensateurs M_{11} améliorant le système, il n'y en a pas qui nous permettent d'atteindre les spécifications que l'on vient de mentionner: l'un des bons compensateurs ici est donné par $M_{11} = 10$, et il ne nous permettrait d'obtenir que les résultats suivants (voir exemple 3.2).

ω rad/sec	$\frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)}$	$\frac{\Delta V_a' (j\omega)}{\Delta V_a^0 (j\omega)}$
.01	.162	.547
.10	.163	.549
1.0	.185	.584
2.0	.241	.636
4.0	.405	.727
5.0	.506	.756
6.8	.707	.851
8.6	.922	.961
10.0	1.12	1.03

Amélioration due à $M_{11} = 10$

Le compensateur améliore la réponse temporelle du système, et il faudra se contenter de ce compensateur si on ne trouve pas de valeur de M_{12} donnant de meilleurs résultats. A cause des retards présents dans le système, on ne peut pas utiliser PASSA pour obtenir des réponses temporelles, on a donc eu recours à CSMP, [11], pour obtenir les courbes données aux figures 11.1 et 11.2. Le programme CSMP apparaît en appendice. Comme le laissait présumer le tableau ci-dessus, on remarque que, si la perturbation est un échelon, le comportement du système bouclé est grandement amélioré par rapport au système original pour les valeurs du temps élevées (ω faible), et que l'amélioration est moins importante au début (ω élevé). Mais, les spécifications n'étant pas atteintes, il faut chercher un compensateur encore meilleur.

3.3.2 Etude d'implantation du compensateur M_{12}

On commence encore en essayant d'utiliser D_A^{12} , ce qui nous permettrait d'obtenir une invariance de la fréquence et une erreur de tension obéissant aux spécifications. Parce que D_A^{12} est anticipatif (page 29), on utilise une approximation:

$$M_{12} = D_A^{12} = \frac{(1+.55s)(1+.41s)(1+.34s)}{3.27(1+.6s)(1+.41s)-1.775(1+.55s)(1+.34s)}$$

Il s'agit d'un compensateur difficile à réaliser, mais, d'un point de vue théorique, il est quand même intéressant d'étudier la stabilité du système adyenant l'utilisation de ce compensateur. Les méthodes décrites en [9] ne nous permettent malheureusement pas, connaissant les diagrammes de Nyquist de $-1/M_{12}$ et de G_{21} (figure 12.1), de décider de la stabilité du système à cause des nombreux points d'intersection que comptent ces deux courbes. On calcule donc le nombre d'encerclements N de $G_{21} D_A^{12}$ autour de $(-1,0)$. On a

$$G_{21} D_A^{12} = \frac{e^{-0.04s}}{1 - \frac{3.27(1+.6s)(1+.41s)}{1.775(1+.55s)(1+.34)}}$$

$G_{21} D_A^{12}$ n'ayant pas de pôles à droite de $j\omega$, il faut que $N = 0$ pour que le système compensé soit stable. La figure 12.2 nous permet de constater la stabilité du système. Le tableau ci-dessous résume l'effet du compensateur dans le système.

ω rad/sec	$\frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)}$	$\frac{\Delta V_a' (j\omega)}{\Delta V_a^0 (j\omega)}$
.01	$\rightarrow 0$.458
.10	$\rightarrow 0$.459
1.0	$\rightarrow 0$.486
2.0	.01	.505
4.0	.025	.561
5.0	.026	.575
6.8	.035	.587
8.6	.044	.587
10.0	.050	.586

Amélioration due à $M_{12} D_A^{12}$

$$\text{où } \frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)} = \frac{1/M_{12}(j\omega) + P^{12}(j\omega)}{1/M_{12}(j\omega) + G_{21}(j\omega)} ; \quad \frac{\Delta V_a' (j\omega)}{\Delta V_a^0 (j\omega)} = \frac{1/M_{12}(j\omega)}{1/M_{12}(j\omega) + G_{21}(j\omega)}$$

Cette boucle présente donc de nets avantages sur la précédente. On cherchera plus loin un compensateur plus facile à réaliser que le précédent et approximant D^{12} . Pour l'instant, on fait remarquer un autre fait très intéressant: en examinant la figure 12.1, on s'aperçoit que $-G_{21}$ ressemble beaucoup à P^{12} . C'est-à-dire

$$\frac{-1}{M_{12}} = -\beta G_{21} \approx \frac{-1}{D^{12}}$$

Donc D^{12} est aussi près du compensateur à gain minimal qui ferait $|\Delta V_a'| \approx .5 |\Delta V_a^0|$. La boucle est donc très prometteuse parce qu'encore ici on respecte les objectifs du design.

On cherche donc un compensateur qui soit de réalisation assez facile tout en approximant D^{12} . Soit par exemple:

$$\frac{-1}{M_{12}} = \frac{-1}{K} \frac{(1+s\tau)}{(1+\alpha s\tau)}$$

$$\text{à } \omega = 0: -1/M_{12} = -1/K = -1.5 = K = .667$$

$$\omega \rightarrow \infty: -1/M_{12} = -1/K\alpha = -.2 = \alpha = 7.5$$

Il s'agit de fixer τ pour obtenir une bonne position des ω le long de la courbe. Soit $\tau = .0335$, on a:

$$\frac{-1}{M_{12}} = \frac{-1(1+.0335s)}{.667(1+.25125s)}$$

Les diagrammes de Nyquist de G_{21} , P^{12} et $-1/M_{12}$ sont donnés à la figure 13. Par inspection, on peut dire que le système bouclé est stable: en effet, selon [9], si $G_{21} M_{12}$ ($\omega = 0$) et $G_{21} M_{12}$ ($\omega \rightarrow \infty$) sont à droite de $(-1,0)$, et s'il existe une courbe (contenant l'origine et n'ayant qu'un seul point d'intersection avec tout vecteur qui en est issu) qui contient $G_{21}(j\omega)$ et qui laisse $-1/M_{12}(j\omega)$ à l'extérieur, alors le système bouclé est stable. Utilisant les courbes de la figure 13, on évalue l'amélioration due à ce compensateur.

ω rad/sec	$\frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)}$	$\frac{\Delta V_a' (j\omega)}{\Delta V_a^0 (j\omega)}$
.01	→ 0	.458
.10	→ 0	.458
1.0	.034	.473
2.0	.063	.478
4.0	.124	.549
5.0	.189	.574
6.8	.194	.588
8.6	.235	.617
10.0	.273	.628

Effet de $M_{12} = .667(1 .25125s)/(1 .0335s)$

Les spécifications sont respectées.

Les figures 14.1 et 14.2 représentent les réponses obtenues en simulant un échelon de charge à l'aide de CSMP. Ces courbes étaient prévisibles. En effet, en régime permanent ($\omega = 0$) l'erreur de fréquence doit tendre vers zéro d'après le tableau ci-dessus, tandis que ses valeurs, pendant le régime transitoire, doivent être faibles car l'amélioration est très importante jusqu'à $\omega = 10$. De la même façon, on pouvait prévoir l'amélioration du comportement de la tension. D'ailleurs, en comparant le tableau ci-dessus et les courbes des figures 14 avec le tableau caractérisant $M_{11} = 10$ et les courbes des figures 11, on se rend compte du lien qui existe entre les domaines fréquentiel et temporel.

Donc, il faut utiliser cette boucle: elle seule nous permet de respecter tous les objectifs fixés au début de cet exemple.

3.4 Exemple 3 (Utilisation de plus d'un compensateur)

Supposons encore que l'on désire améliorer la précision du système - moteur alternateur mais que cette fois il n'y a pas de limites sur le nombre de compensateurs pouvant être utilisés.

Pour améliorer la réponse à l'échelon du système, on fixe les objectifs suivants:

a) Pour la fréquence:

$$\begin{aligned} |\Delta F'|_{\text{final}} &< .5 \quad |\Delta F^0|, \quad 0 < \omega < 5 \\ |\Delta F'|_{\text{final}} &< .2 \quad |\Delta F^0|, \quad 0 < \omega < 2 \end{aligned}$$

b) Pour la tension:

$$\begin{aligned} |\Delta V_a'|_{\text{final}} &< .50 \quad |\Delta V_a^0|, \quad 0 < \omega < 10 \\ |\Delta V_a'|_{\text{final}} &< .25 \quad |\Delta V_a^0|, \quad 0 < \omega < 3 \end{aligned}$$

1^o Choix de la première boucle

On a vu au paragraphe précédent que seuls M_{11} et M_{12} pouvaient être utilisés isolément sans détériorer les performances de l'une ou l'autre des sorties du système. Supposons que l'on utilise encore M_{12} comme première boucle: il faut fixer sa valeur de façon à se rapprocher des objectifs ci-dessus. Soit par exemple $M_{12} = 2.0$, l'effet de ce compensateur est résumé par le tableau suivant (voir figure 9.2)

ω rad/sec	$\left \frac{\Delta F' (j\omega)}{\Delta F^0 (j\omega)} \right $	$\left \frac{\Delta V'_a (j\omega)}{\Delta V_a^0 (j\omega)} \right $
.01	.434	.221
.10	.438	.222
1.0	.500	.239
2.0	.612	.285
4.0	.820	.410
5.0	.842	.491
6.8	.948	.625
8.6	1.04	.746
10.0	1.13	.842

Effet de $M_{12} = 2.0$

Les réponses du système compensé à un échelon de charge sont données aux figures 16.1 et 16.2. Bien que le système soit amélioré, on se situe quand même assez loin des spécifications: il faut utiliser au moins un autre compensateur si on veut les atteindre.

2^o Choix de la deuxième boucle

Il y a encore trois boucles que l'on peut utiliser. On emploie la même méthode que dans l'exemple 2 pour trouver laquelle il faut utiliser. Le compensateur M_{12} a modifié les fonctions de transfert du système, on a maintenant selon la proposition 3

$$G_{11(12)} = \frac{G_{11}}{1+G_{21}M_{12}} ; G_{12(12)} = G_{12} - \frac{G_{11}G_{22}M_{12}}{1+G_{21}M_{12}} ;$$

$$G_{22(12)} = \frac{G_{22}}{1+G_{21}M_{12}}$$

Selon la proposition 2, on a aussi:

$$D_{(12)}^{11} = D^{11} ; \quad D_{(12)}^{21} = D^{21} ; \quad D_{(12)}^{22} = D^{22} \left(1 - \frac{M_{12}}{D^{12}}\right)$$

$$\text{i.e. } P_{(12)}^{22} = \frac{P^{22}}{1 + M_{12} P^{12}}$$

On a utilisé PASSA pour tracer les paires G et P données aux figures 15.1 à 15.3. Ces graphiques nous permettent de ne retenir que les boucles M_{21} et M_{22} . On choisit d'utiliser M_{22} parce que ainsi il est possible de réduire à zéro l'erreur de fréquence en régime permanent, tout en respectant les spécifications du régime transitoire. En effet, en posant simplement $M_{22} = 1.25$ ($-1/M_{12} = -.8$) et $M_{12} = 2.0$, on obtient l'amélioration suivante sur le système compensé seulement par M_{12} :

Sachant que:

$$\frac{|\Delta F(j\omega)|}{|\Delta F'(j\omega)|} = \frac{\left| \frac{1}{M_{22}} + P_{(12)}^{22} \right|}{\left| \frac{1}{M_{22}} + G_{(12)}^{22} \right|} \quad \text{et} \quad \frac{|\Delta V_a(j\omega)|}{|\Delta V'_a(j\omega)|} = \frac{\left| \frac{1}{M_{22}} \right|}{\left| \frac{1}{M_{22}} + G_{(12)}^{22} \right|}$$

on trouve à partir de la figure 15.3.

ω rad/sec	$\left \frac{\Delta F(j\omega)}{\Delta F'(j\omega)} \right $	$\left \frac{\Delta V_a(j\omega)}{\Delta V'_a(j\omega)} \right $
.01	$\rightarrow 0$.839
.10	$\rightarrow 0$.839
1.0	.115	.832
2.0	.304	.805
4.0	.533	.690
5.0	.572	.632
6.8	.587	.579
8.6	.582	.535
10.0	.571	.523

Amélioration du système compensé par M_{12} et M_{22} sur celui compensé uniquement par M_{12}

Et sachant que $\$ (M_{12}, M_{22}) = \$ (M_{12}) \$ (M_{22})_{(M_{12})}$, on trouve l'amélioration globale du système:

ω rad/sec	$\left \frac{\Delta F(j\omega)}{\Delta F^o(j\omega)} \right $	$\left \frac{\Delta V_a(j\omega)}{\Delta V'_a(j\omega)} \right $
.01	$\rightarrow 0$.185
.10	$\rightarrow 0$.186
1.0	.058	.199
2.0	.186	.229
4.0	.437	.283
5.0	.482	.310
6.8	.556	.362
8.6	.605	.399
10.0	.645	.440

Amélioration du système compensé par M_{12} et M_{22} sur le système original

Les réponses du système final à un échelon de charge sont données aux figures 16.1 et 16.2. En comparant ces courbes à celles obtenues avec seulement M_{12} , on note l'effet bénéfique de M_{22} .

Remarques:

1. On a posé $M_{12} = 2.0$ et $M_{22} = 1.25$. Si jamais le compensateur M_{12} tombait en panne, i.e. s'il passait à zéro, le système résultant resterait quand même stable, mais d'après la figure 9.4, l'erreur de fréquence serait plus grande que dans le système non compensé. Il est donc important de considérer ces éventualités lorsqu'on fait le design d'un compensateur. Les réponses à un échelon de charge du système compensé par M_{22} seul sont données aux figures 16.1 et 16.2.

2. La valeur de M_{12} influence le choix du compensateur M_{22} . Ainsi si on avait posé $M_{12} = 1.0$, il aurait été difficile de choisir une seconde boucle nous permettant d'atteindre les spécifications. On donne par exemple à la figure 17 les courbes de $G_{22(12)}$ et $P^{22(12)}$ sachant que $M_{12} = 1.0$. Il est impossible ici d'atteindre les spécifications, pourtant le système avec $M_{12} = 1.0$ se compare avantageusement avec celui ayant $M_{12} = 2.0$:

ω rad/sec	$\left \frac{\Delta F' (j\omega)}{F^0 (j\omega)} \right $	$\left \frac{\Delta V_a' (j\omega)}{V_a^0 (j\omega)} \right $
.01	.176	.358
.10	.178	.359
1.0	.226	.383
2.0	.307	.419
4.0	.567	.619
5.0	.669	.707
6.8	.806	.835
8.6	.910	.914
10.0	.976	.967

Amélioration à $M_{12} = 1.0$

(comparer ce tableau avec celui caractérisant $M_{12} = 2.0$)

3. Ici la théorie a été développée pour le cas où le système subissait l'influence d'une perturbation extérieure η , mais on aurait pu aussi considérer un modèle subissant des variations de paramètres (on néglige la perturbation η):

$$y^0 = [G] u + [\Delta G] u = y_0 + \Delta^0$$

Le système compensé aurait alors l'allure indiquée à la figure 18.

Ceci nous donne:

$$\Delta = \Delta^0 - [G + \Delta G] [M] \Delta$$

d'où $\$ = [I + [G + \Delta G] [M]]^{-1}$

A partir de cette relation, on pourrait alors développer des propositions semblables à celles de la section 1 et qui seraient utiles pour faire le design de $[M]$ dans la figure 18.

4. Conclusion

Dans le présent article, nous avons présenté une nouvelle approche graphique qui permet d'évaluer la réduction de sensibilité engendrée par l'introduction d'une boucle de contre-réaction dans un système multivariable. Cette approche est basée sur les notions de matrice de sensibilité et l'invariance absolue ainsi que sur les interconnections entre ces deux notions. Les principaux résultats sont résumés dans les propositions 1, 2 et 3. La proposition 1 identifie l'expression des compensateurs avec l'invariance absolue pour le système avec chaîne ouverte; la proposition 2 établie la relation entre les compensateurs avec l'invariance absolue du système à chaîne fermée avec ceux du système à chaîne ouverte; la proposition 3 permet d'exprimer la matrice de sensibilité du système à chaîne fermée en fonction des boucles de contre-réaction, des compensateurs avec l'invariance absolue et des gains de boucle. Les implications graphiques de ce dernier résultat sont explicitées dans les corollaires 1-5.

La procédure développée représente une aide précieuse pour le design d'une boucle de contre-réaction d'un système multivariable. Elle est simple et permet une visualisation facile de l'effet du compensateur sur la sensibilité du système. Ceci a été démontré par les exemples 1, 2 et 3 qui illustrent les modalités d'applications de la nouvelle approche au design d'un convertisseur DC-AC.

REFERENCES:

- 1 Contrôle des systèmes sujets aux perturbations extérieures, R.M. De Santis, Rapport de l'Ecole Polytechnique de Montréal, no. EP73-R-24, (juillet 1973).
- 2 Circle Type Conditions for Sensitivity Reduction, R.M. De Santis, W.A. Porter, ACTA, Vol. 2, no. 2, May 1974.
- 3 Some Considerations Relating to Control Systems Employing the Invariance Principle, M. Preninger, J. Rootenberg, IEEE Transactions on Automatic Control, July 1964.
- 4 Benchmark Papers in Systems Sensitivity Analysis, J.B. Cruz, (Editor), Dowdon, Hutchinson & Ross, Inc., 1974, (Paper no. 17), pp. 125-137.
- 5 The Return Difference and Return Ratio Matrices and their Use in the Analysis and Design of Multivariable Control Systems, H.H. Rosenbrock, Proc. IEEE 117, pp. 2027-2049, 1970.
- 6 Synthesis of Multivariable, Basically Non-Interacting Systems with Significant Plant Uncertainty, V. Shaked, I. Horowitz, S. Goldes, Automatica, Vol. 12, pp. 61-71, 1976.
- 7 Practical Sensitivity Reduction for Linear and Non Linear Systems, R.M. De Santis, J. Conan, 14th Allerton Conference, University of Illinois, October 1975.

- 8 Commande par ordinateur d'un groupe moteur - alternateur,
S. Lefebvre, projet de fin d'études, Ecole Polytechnique de
Montréal, avril 1976.
- 9 On the Use of the Compensator Inverse Nyquist Plot for
Feedback Systems Stability Analysis, R.M. De Santis,
19th Midwest Symposium on Circuit and Systems, University of
Wisconsin, August 1976.
- 10 PASSA, Analyse et synthèse des systèmes asservis, M. Augustin,
J. Conan, R.M. De Santis, rapport technique de l'Ecole Polytechnique de Montréal, EP74-R-38, août 1976.
- 11 CSMP, System/360 Continuous Systems Modeling Program (360A-CX-16X)
Application Description, 4^e Edition, GM20 - 0240 - 3, mars 1972.

SOUS-TITRES DES FIGURES

1. Système en boucle ouverte
2. Système compensé
3. Système asservi représenté autour de son point nominal d'opération
4. Système bouclé de la proposition 5
5. Système moteur - alternateur
6. Modèle du système de la figure 5
7. Evaluation graphique de l'effet d'un compensateur
8. Spectre fréquentiel d'un échelon unitaire
- 9.1 Diagramme de Nyquist de G_{11} et de P^{11}
- 9.2 Diagramme de Nyquist de G_{21} et de P^{12}
- 9.3 Diagramme de Nyquist de G_{12} et de P^{21}
- 9.4 Diagramme de Nyquist de G_{22} et de P^{22}
- 10.1 Recherche de M_{11}
- 10.2 Etude de stabilité pour $M_{11} = D_A^{11}$
- 11.1 Erreur de fréquence dans le système original et dans le système compensé ($M_{11} = 10$) lorsque ΔW est un échelon unitaire
- 11.2 Erreur de tension dans le système original et dans le système compensé ($M_{11} = 10$) lorsque ΔW est un échelon unitaire
- 12.1 Calcul de l'amélioration pour $M_{12} = D_A^{12}$
- 12.2 Etude de stabilité pour $M_{12} = D_A^{12}$
13. Recherche du compensateur M_{12}

- 14.1 Erreur de fréquence dans le système original et dans le système compensé lorsque ΔW est un échelon unitaire
 $M_{12} = .667 (1 + .25125s)/(1 + .335s)$
- 14.2 Erreur de tension dans le système original et dans le système compensé lorsque ΔW est un échelon unitaire
 $M_{12} = .667 (1 + .25125s)/(1 + .0335s)$
- 15.1 Diagramme de Nyquist de $G_{11(12)}$ et de $P_{(12)}^{11}$ sachant que $M_{12} = 2.0$
- 15.2 Diagramme de Nyquist de $G_{12(12)}$ et de $P_{(12)}^{21}$ sachant que $M_{12} = 2.0$
- 15.3 Diagramme de Nyquist de $G_{22(12)}$ et de $P_{(12)}^{22}$ sachant que $M_{12} = 2.0$
- 16.1 Erreur de fréquence dans le système original et dans le système compensé par M_{ij} lorsque ΔW est un échelon unitaire. $M_{12} = 2.0; M_{22} = 1.25$
- 16.2 Erreur de tension dans le système original et dans le système compensé par M_{ij} lorsque ΔW est un échelon unitaire. $M_{12} = 2.0; M_{22} = 1.25$
17. Diagramme de Nyquist de $G_{22(12)}$ et de $P_{(12)}^{22}$ sachant que $M_{12} = 1.0$
18. Système compensé subissant des variations de paramètres
19. Schéma bloc du système simulé dans le CSMP

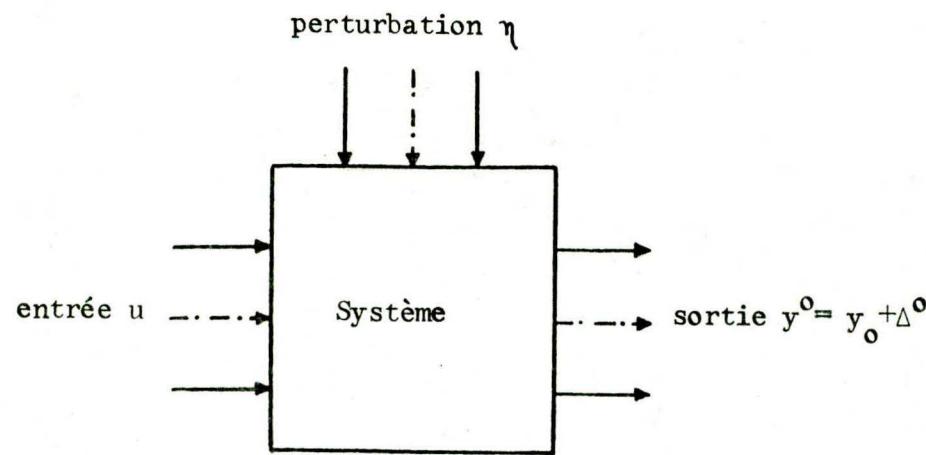


Figure 1: Système en boucle ouverte

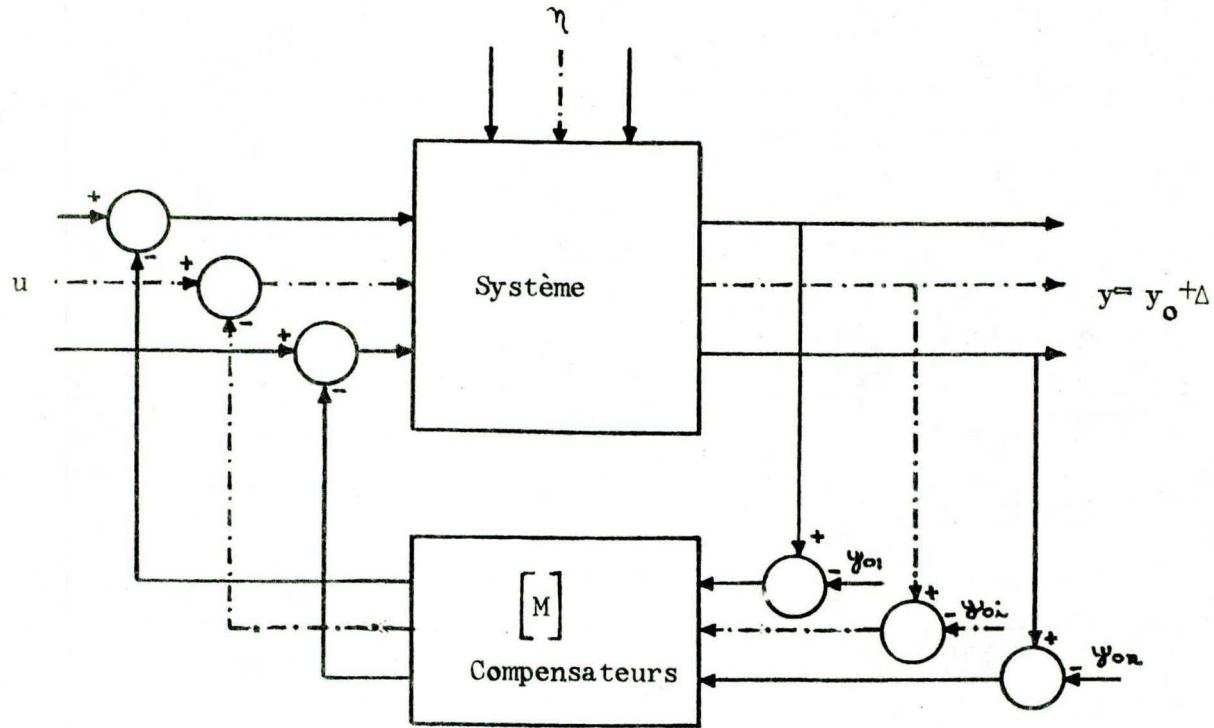


Figure 2: Système compensé

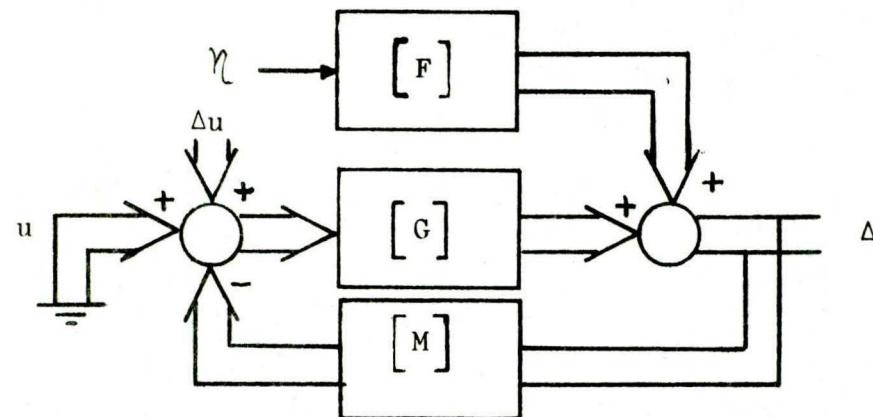


Figure 3: Système asservi représenté autour de son point nominal d'opération.

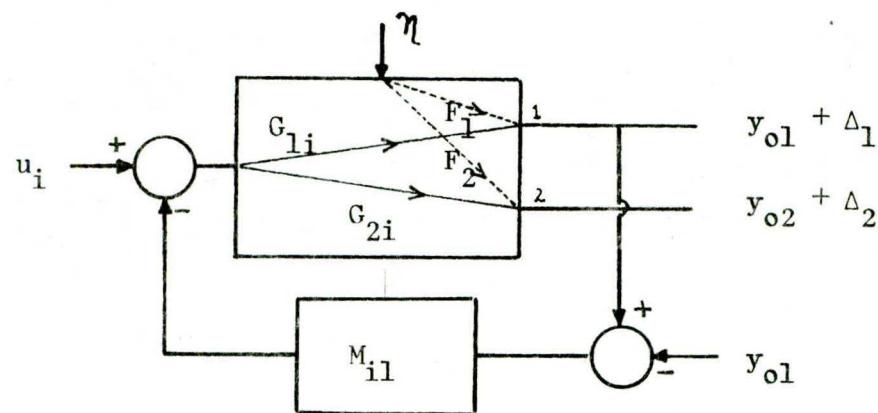


Figure 4: Système bouclé de la proposition 5.

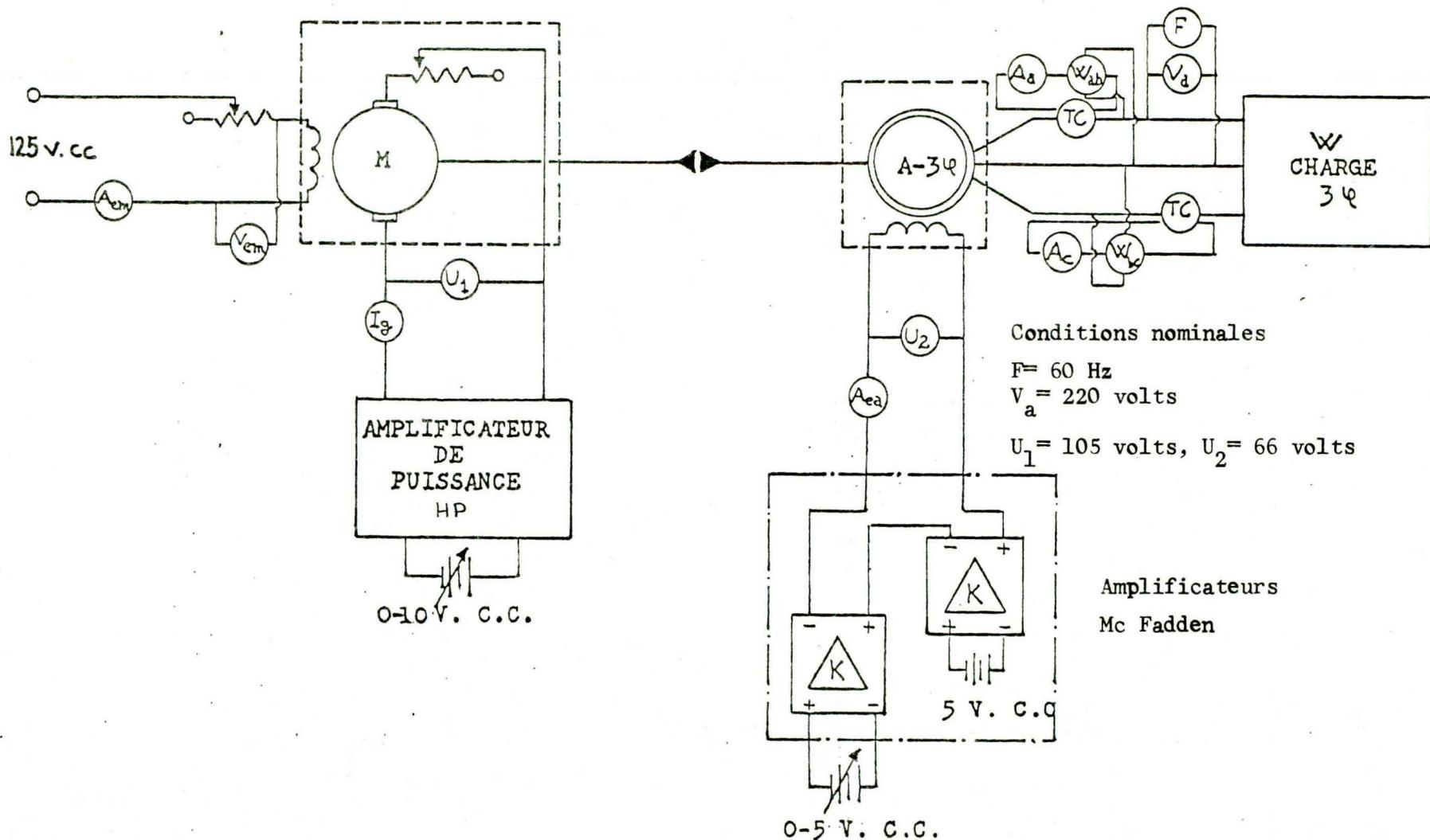
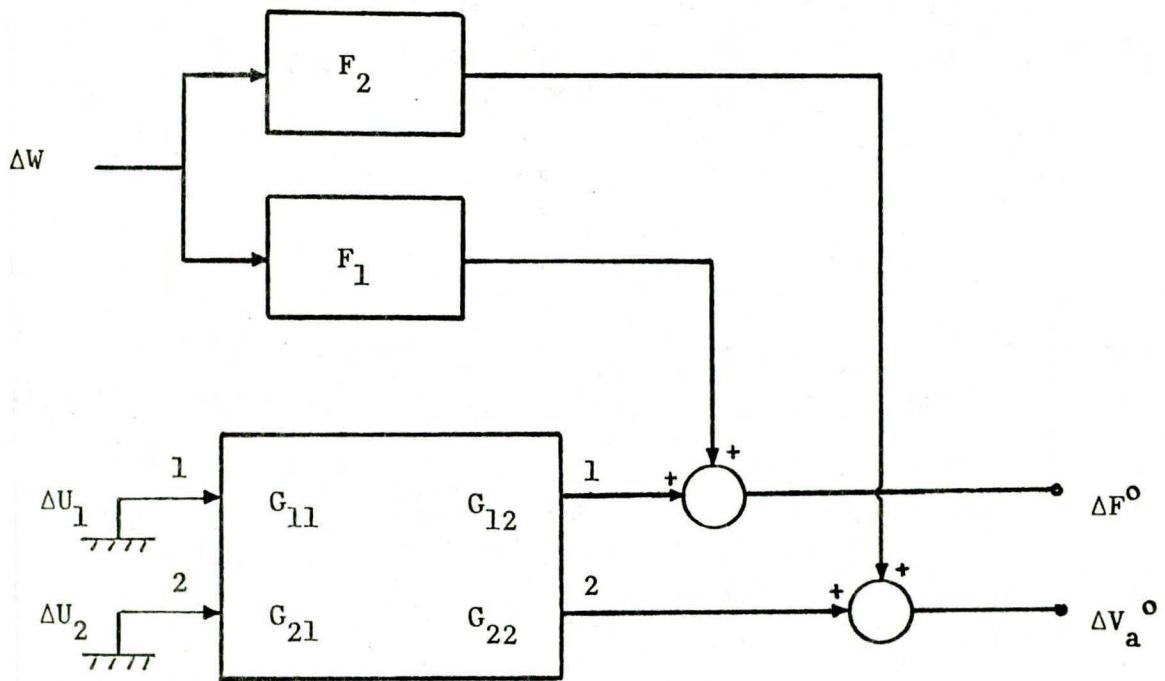


Figure 5: Système moteur-alternateur



$$G_{11}(s) = \frac{\Delta F(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{.5125}{1+.55s} e^{-0.08s}$$

$$G_{12}(s) = \frac{\Delta F(s)}{\Delta U_2(s)} = \frac{-0.145}{1+.67s} e^{-0.10s}$$

$$G_{21}(s) = \frac{\Delta V_a(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{1.775}{1+.41s} e^{-0.04s}$$

$$G_{22}(s) = \frac{\Delta V_a(s)}{\Delta U_2(s)} = \frac{.675}{1+.32s} + \frac{.30s}{(1+.18s)^2}$$

$$F_1(s) = \frac{\Delta F(s)}{\Delta W(s)} = \frac{-0.188}{1+.6s} e^{-0.06s}$$

$$F_2(s) = \frac{\Delta V_a(s)}{\Delta W(s)} = \frac{-1.20}{1+.34s}$$

ΔW est exprimé en % de la charge nominale; ΔU_1 , ΔU_2 et ΔV_a en volts; ΔF en hertz

Figure 6: Modèle du système de la figure 5. Le système est représenté autour de ses conditions nominales.

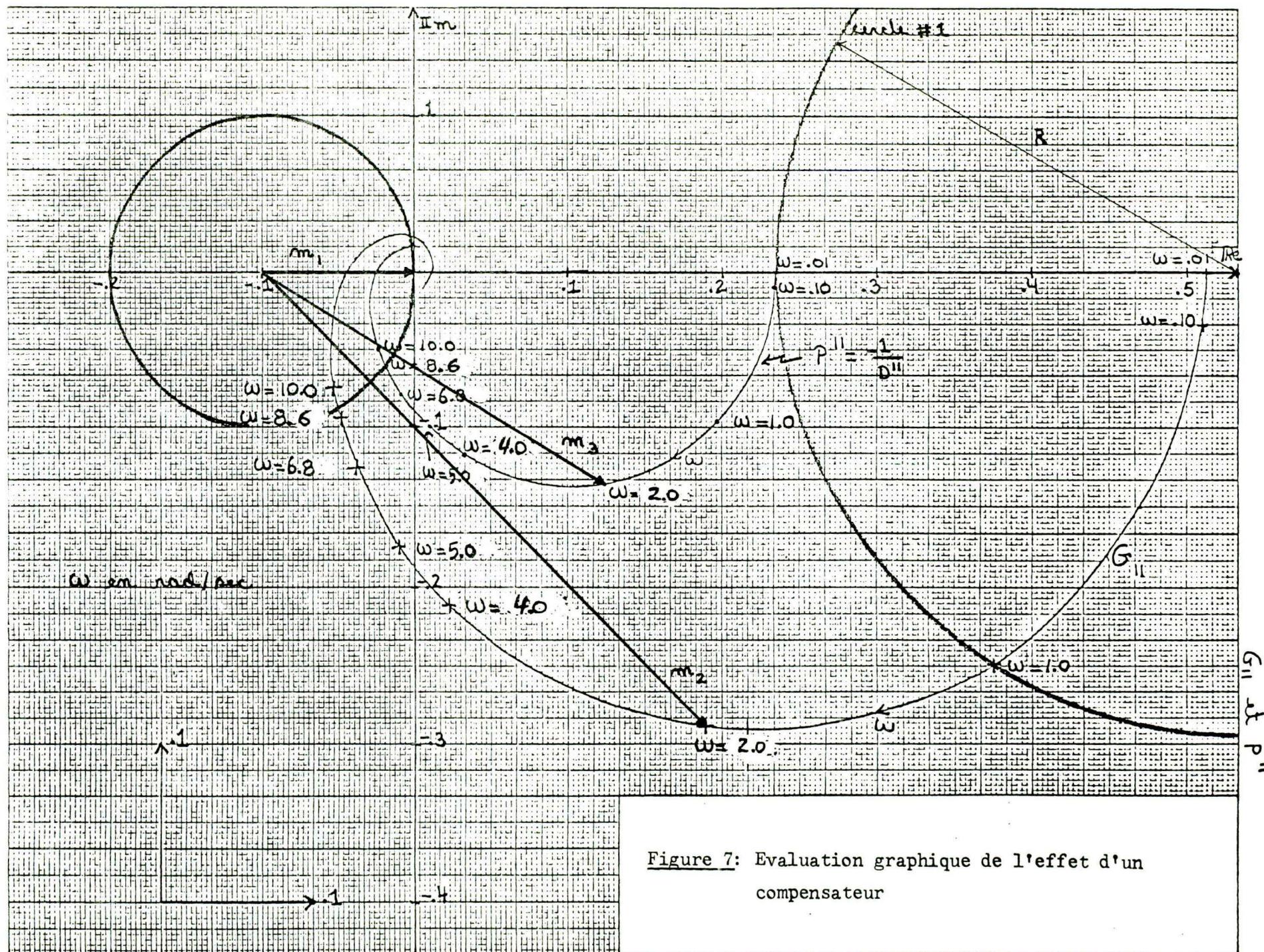


Figure 7: Evaluation graphique de l'effet d'un compensateur

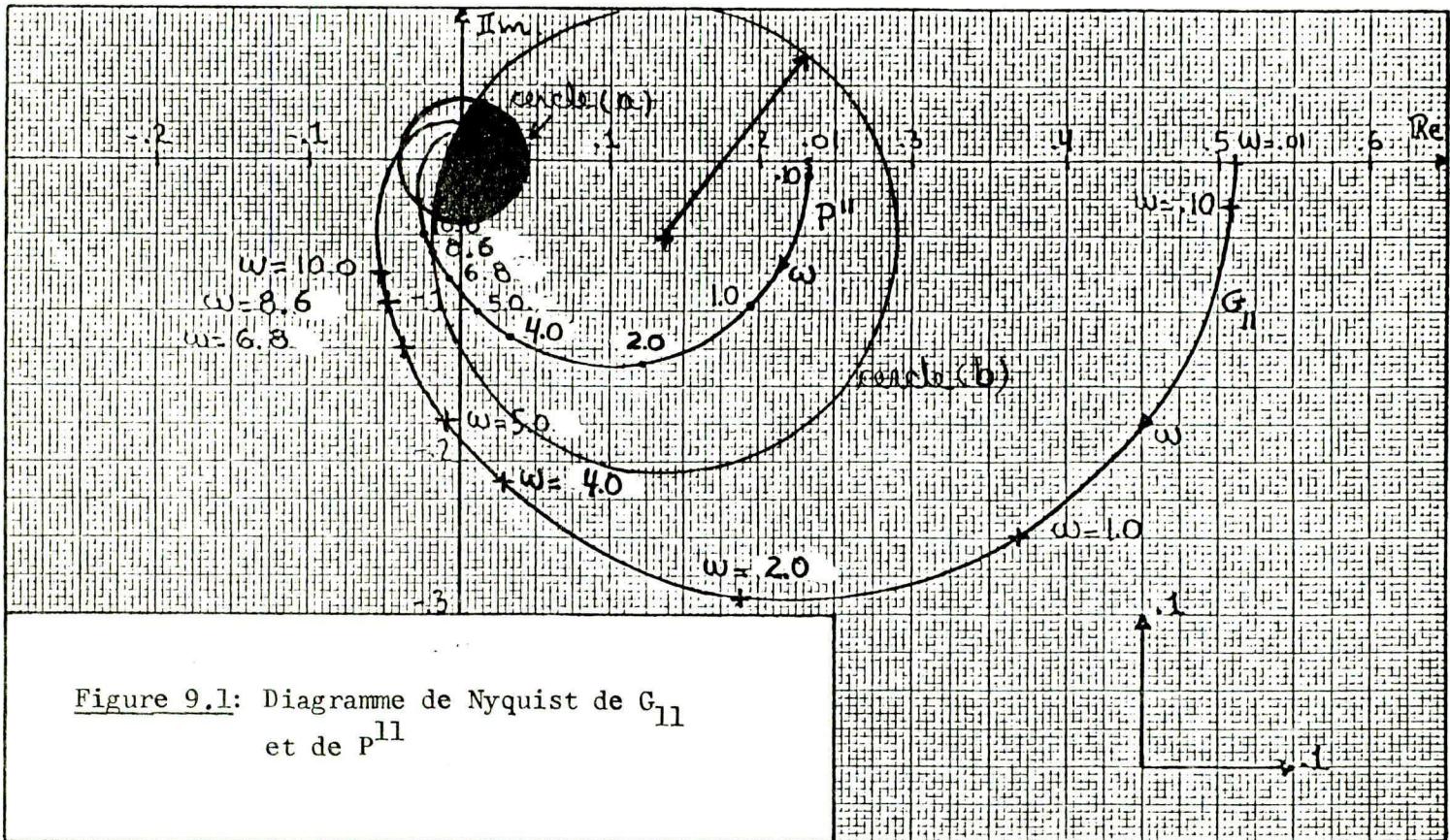


Figure 9.1: Diagramme de Nyquist de G_{11}
et de P^{11}

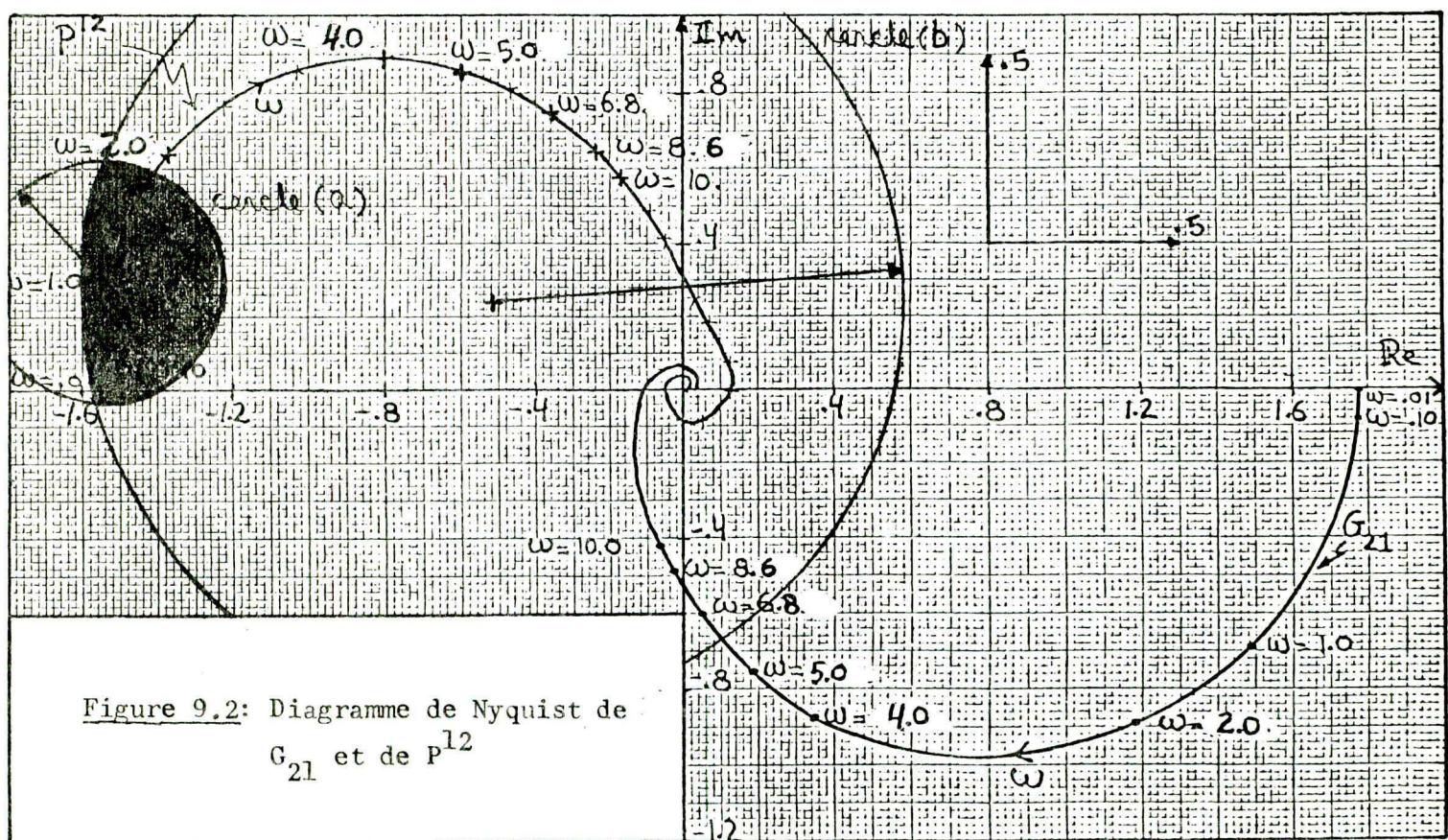


Figure 9.2: Diagramme de Nyquist de
 G_{21} et de P_{21}^{12}

Figure 9.3: Diagramme de Nyquist de G_{12} et de P^{21}

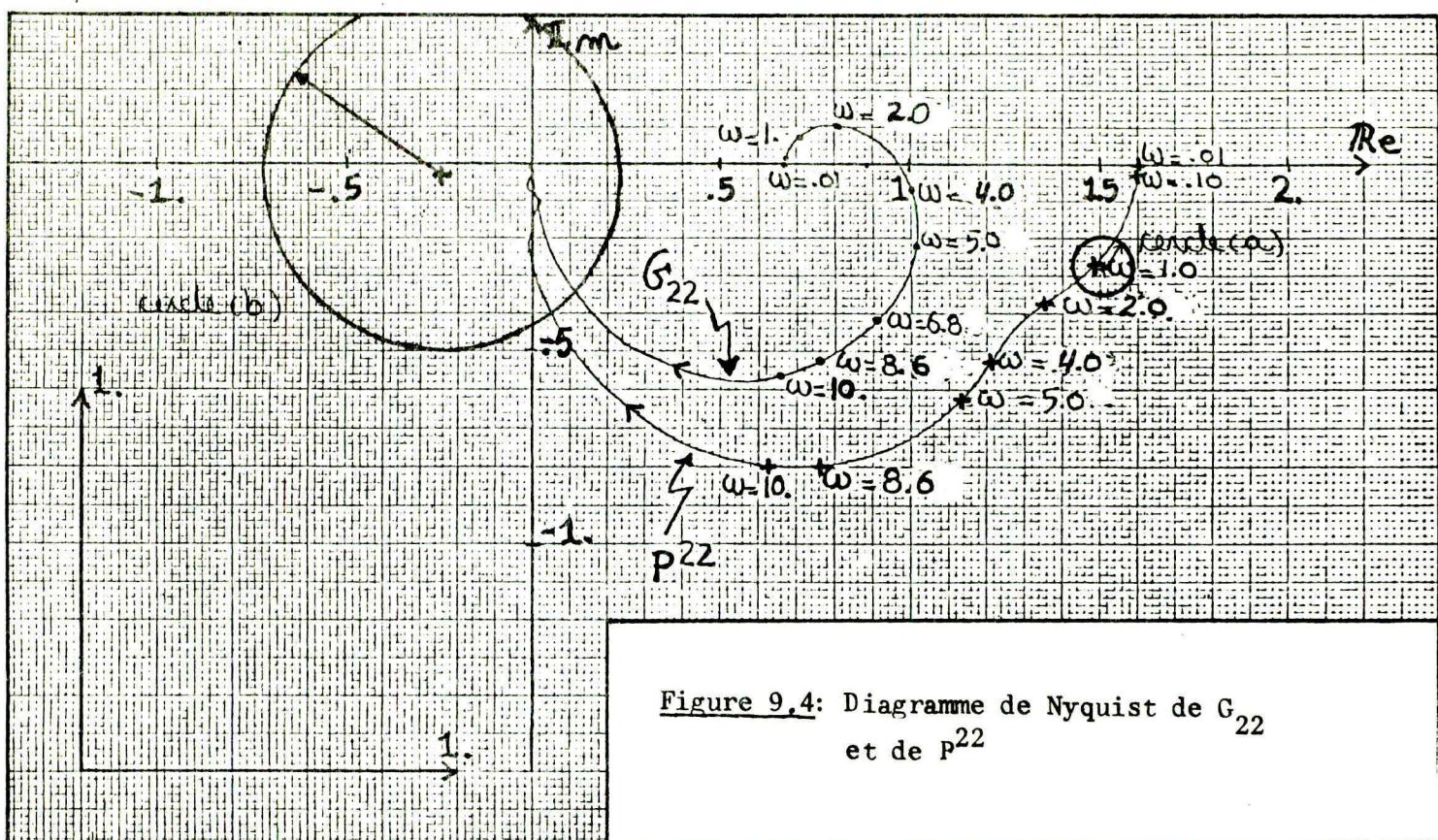
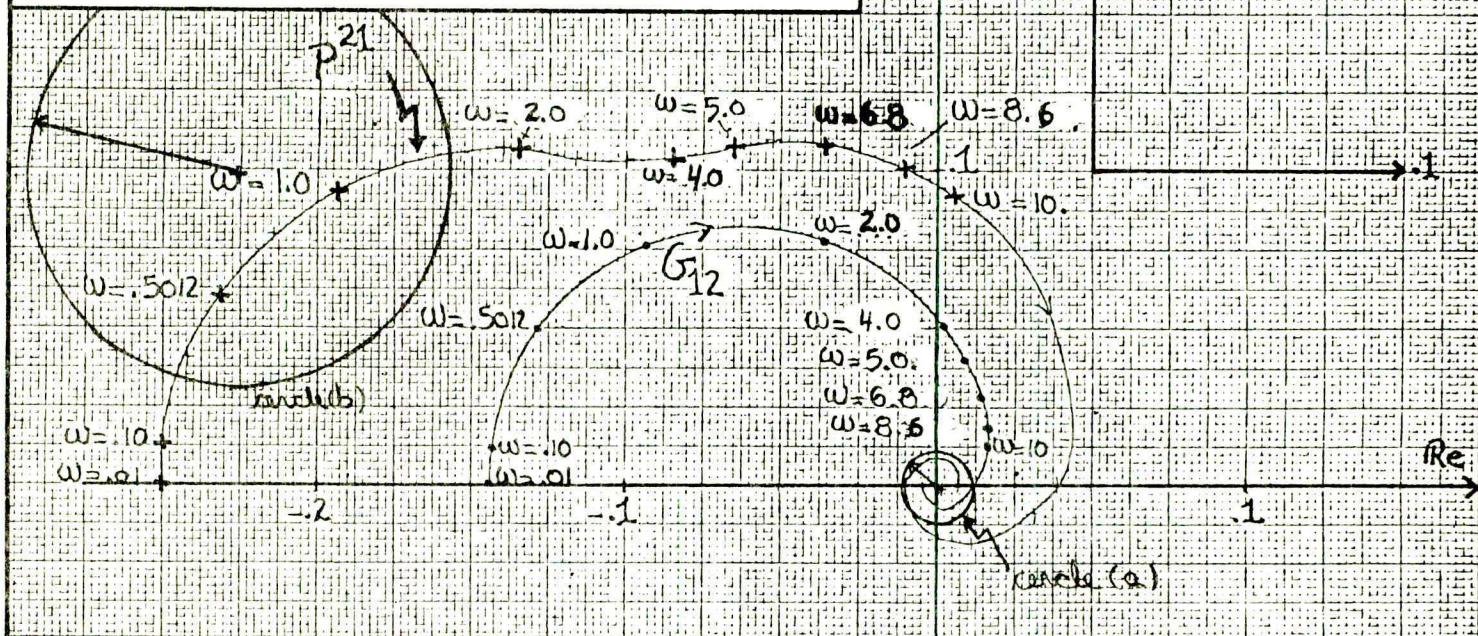
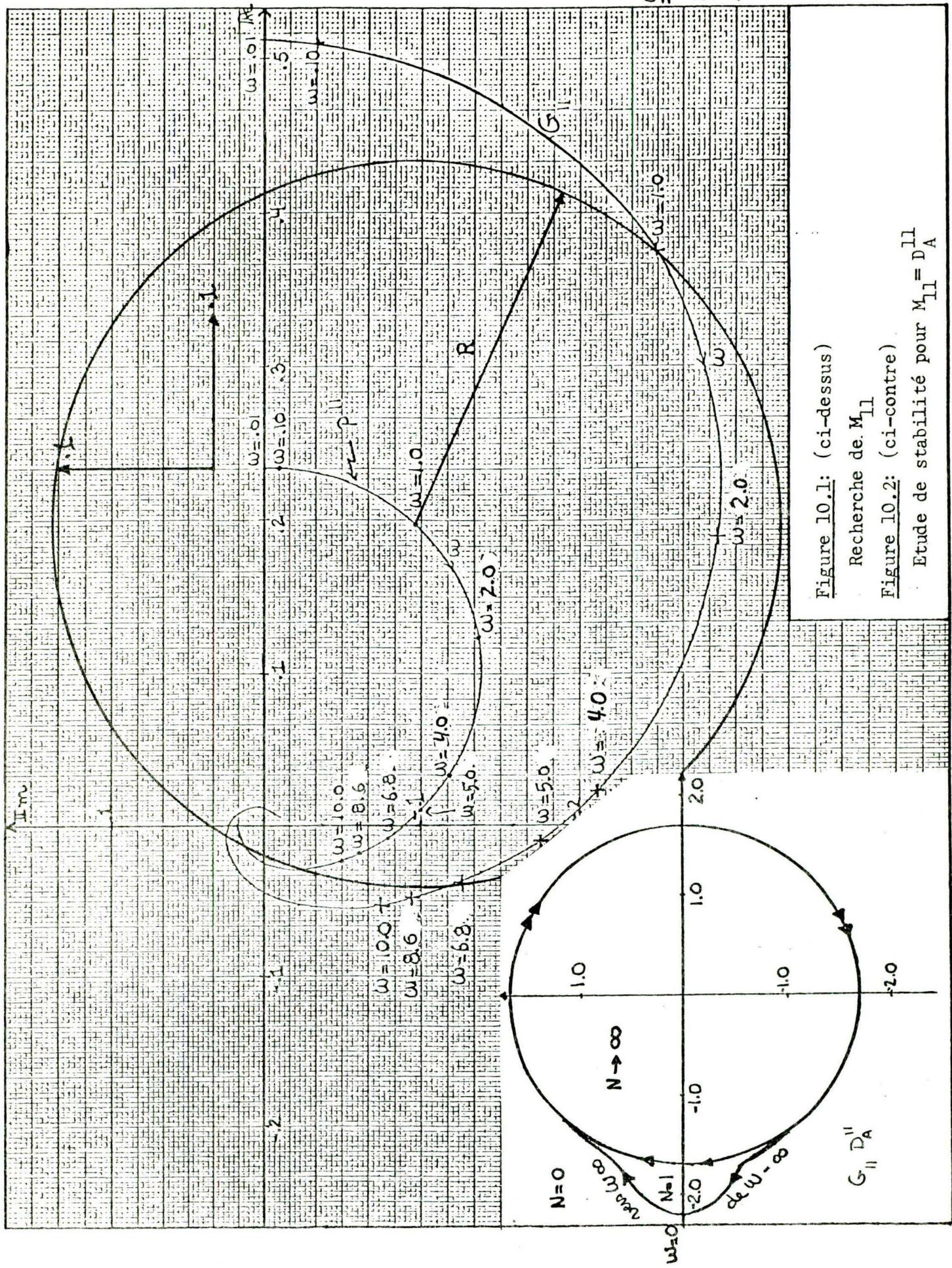


Figure 9.4: Diagramme de Nyquist de G_{22} et de P^{22}



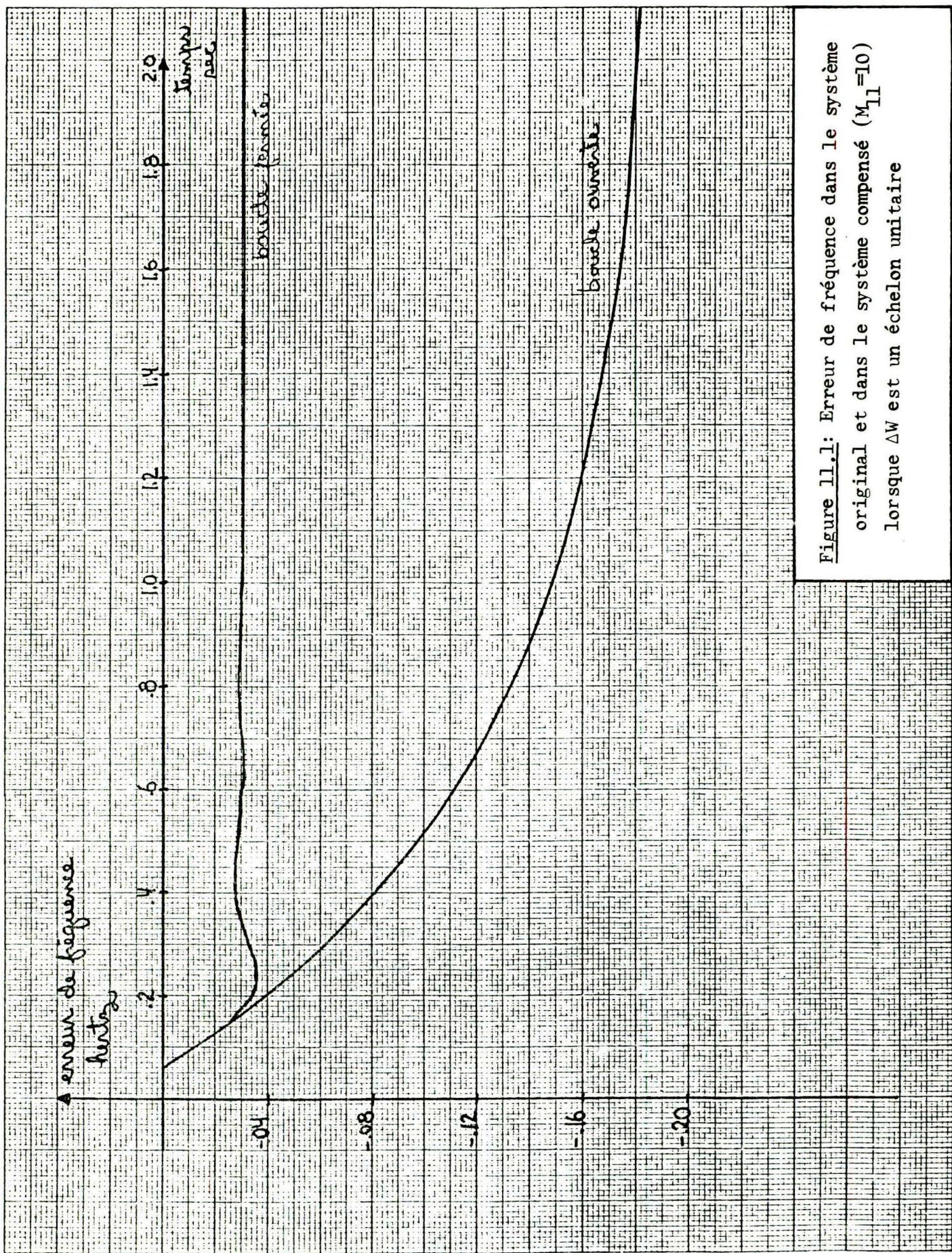


Figure 11.1: Erreur de fréquence dans le système original et dans le système compensé ($M_{11}=10$) lorsque ΔW est un échelon unitaire

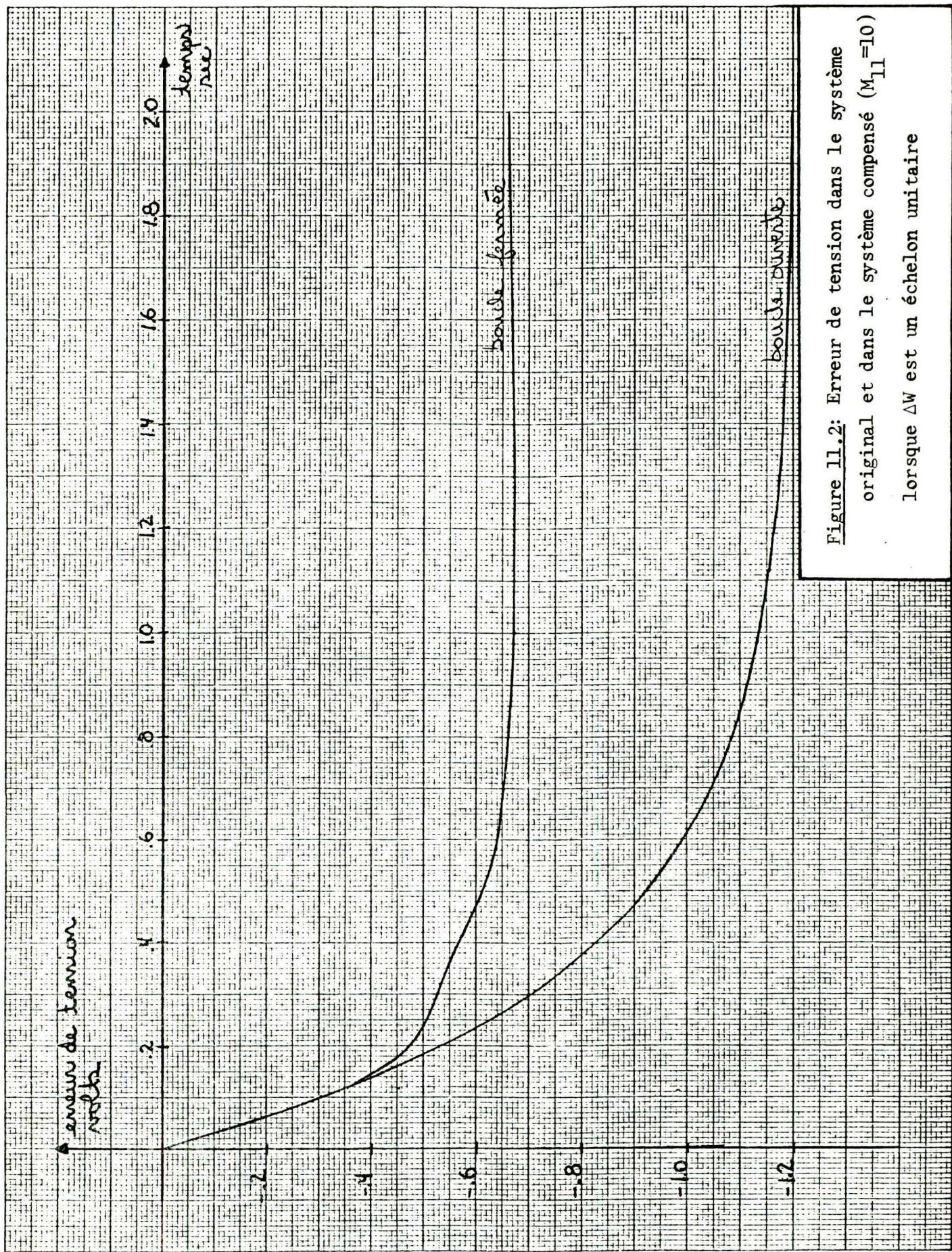


Figure 11.2: Erreur de tension dans le système original et dans le système compensé ($M_{11}=10$) lorsque ΔW est un échelon unitaire

$$-\frac{1}{M_{12}} = \frac{1.775}{(1+4.1s)} - \frac{3.27(1+6s)}{(1+5.5s)(1+3.4s)}$$

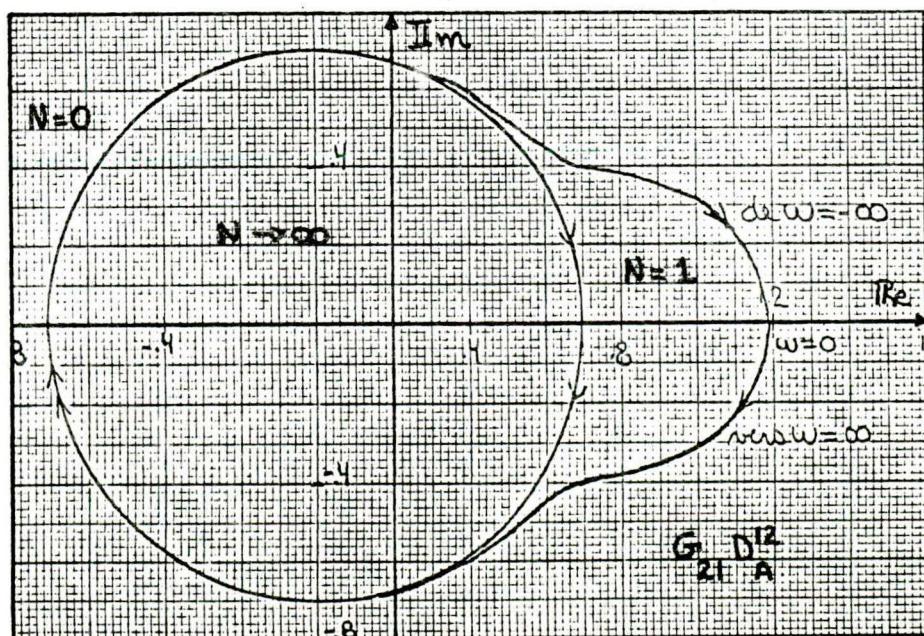
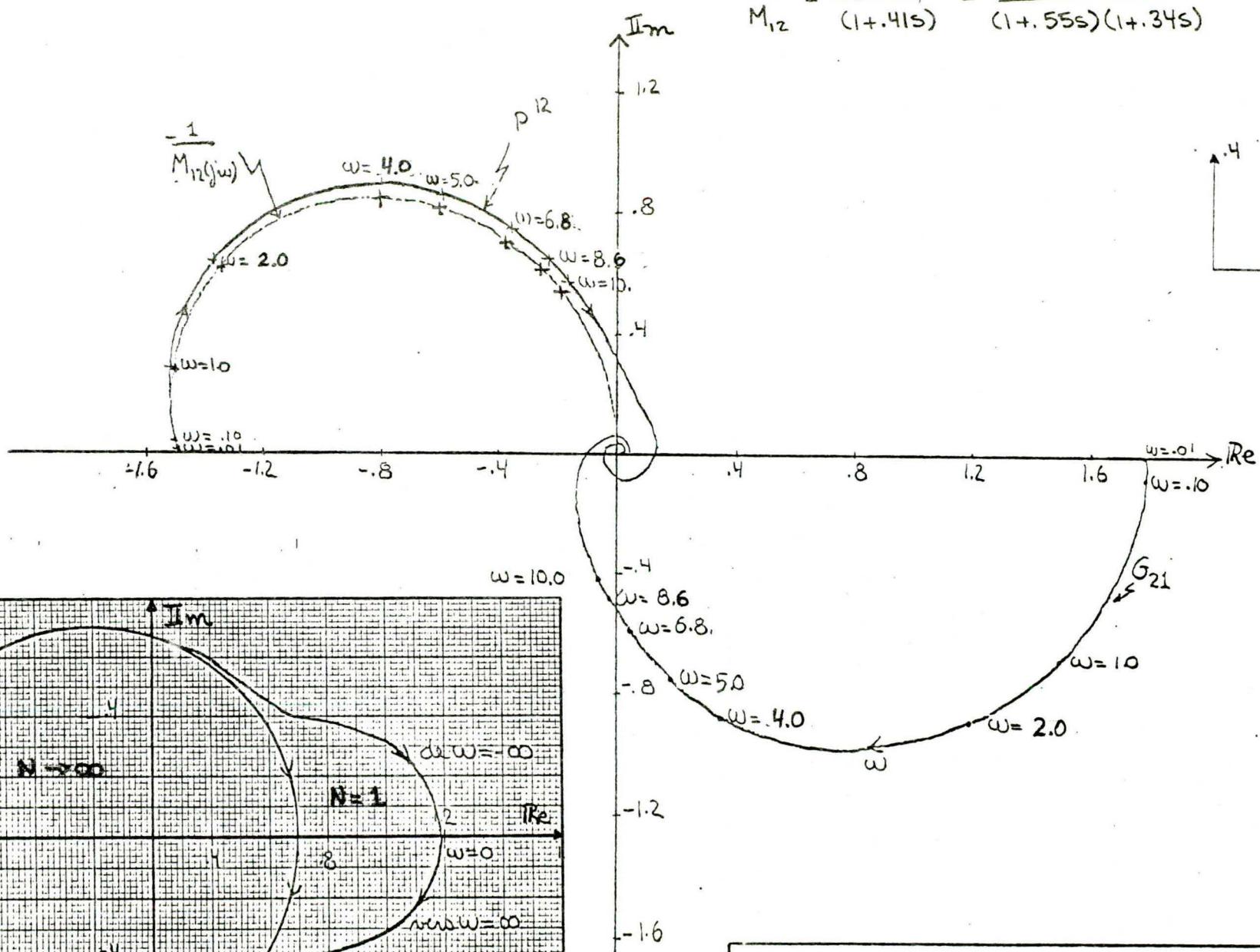


Figure 12.1: (ci-dessus)

Calcul de l'amélioration pour $M_{12} = D_A^{12}$

Figure 12.2: (ci-contre)

Etude de stabilité pour $M_{12} = D_A^{12}$

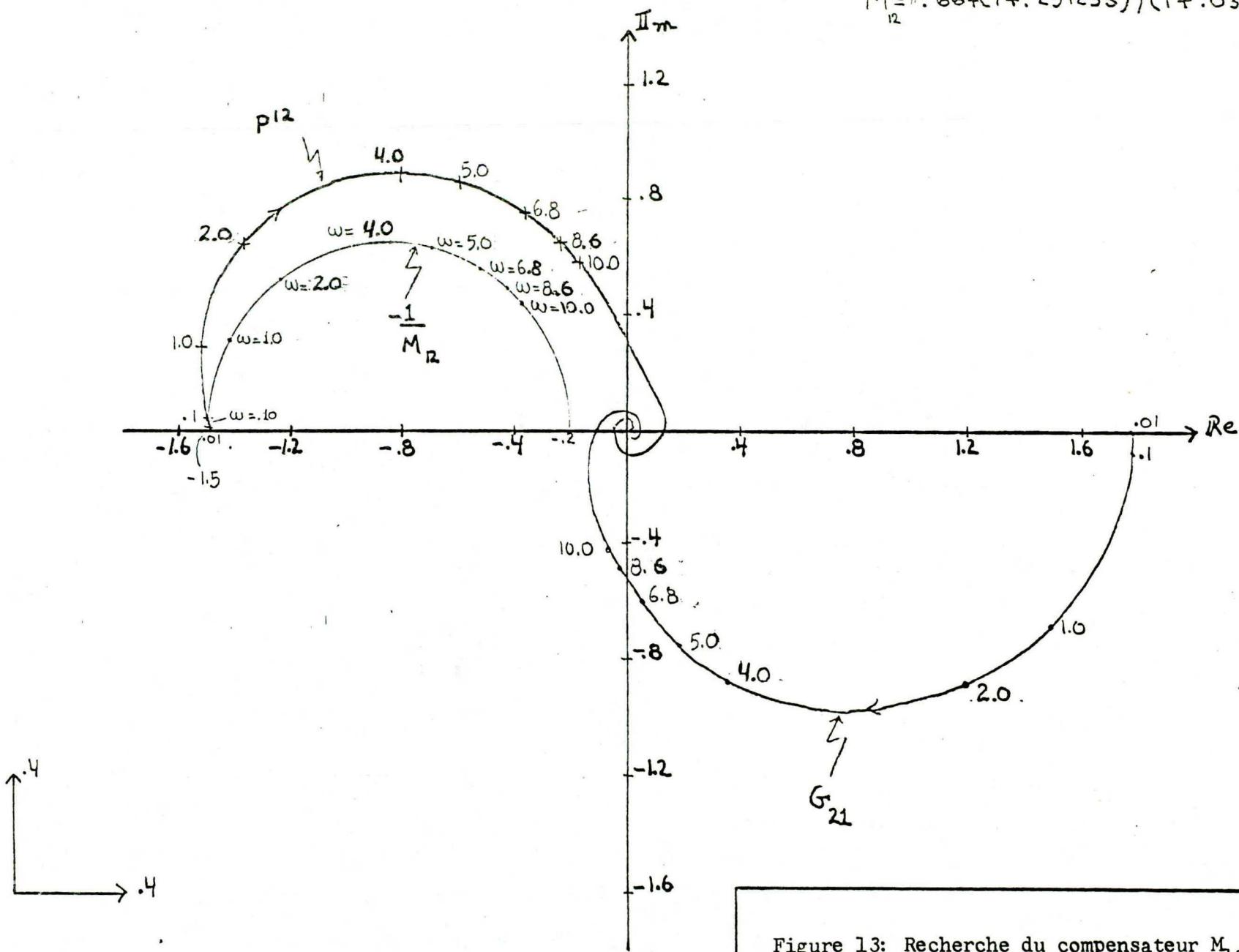
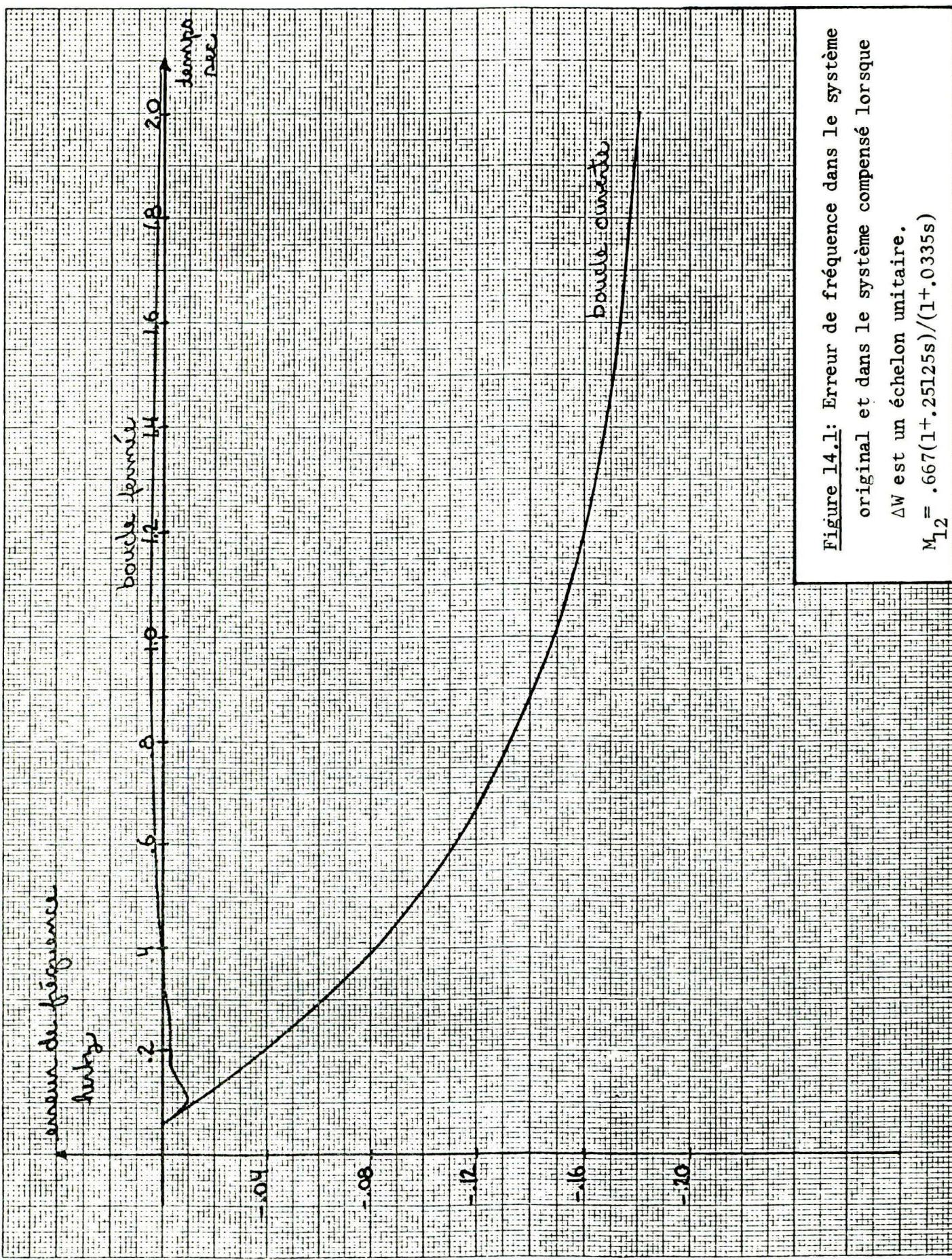
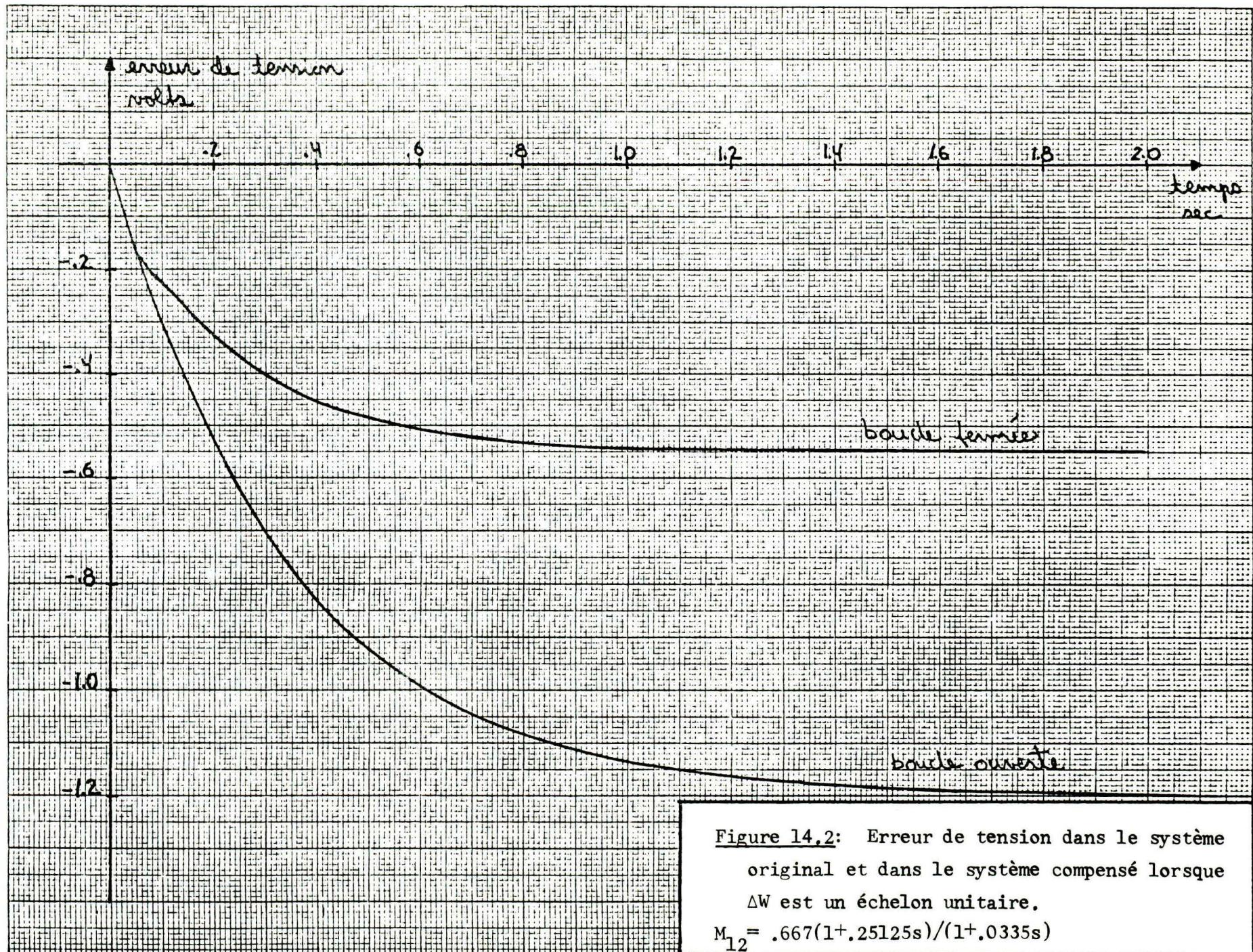


Figure 13: Recherche du compensateur M_{12}





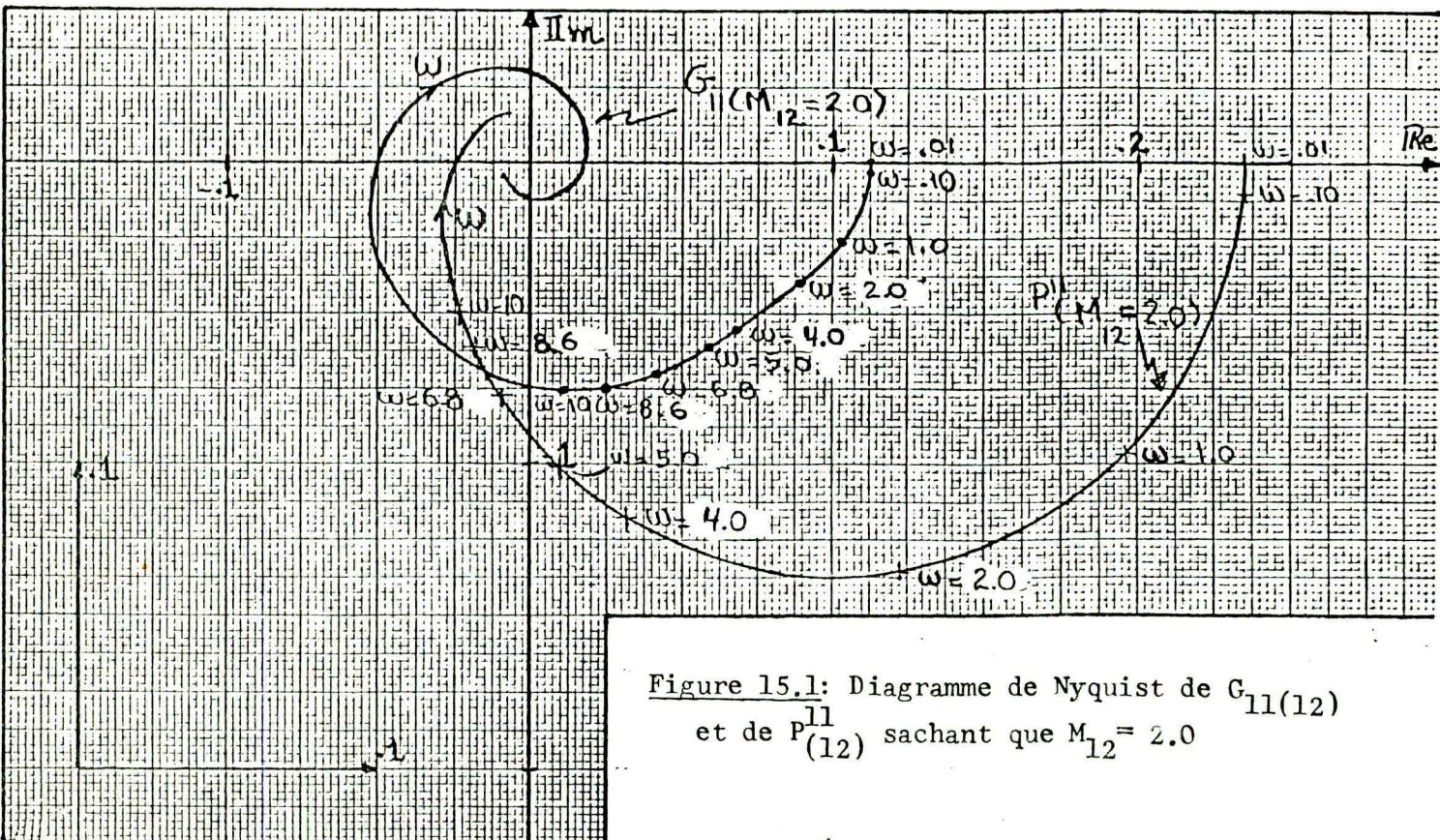


Figure 15.1: Diagramme de Nyquist de $G_{11}(12)$
et de $P_{(12)}^1$ sachant que $M_{12} = 2.0$

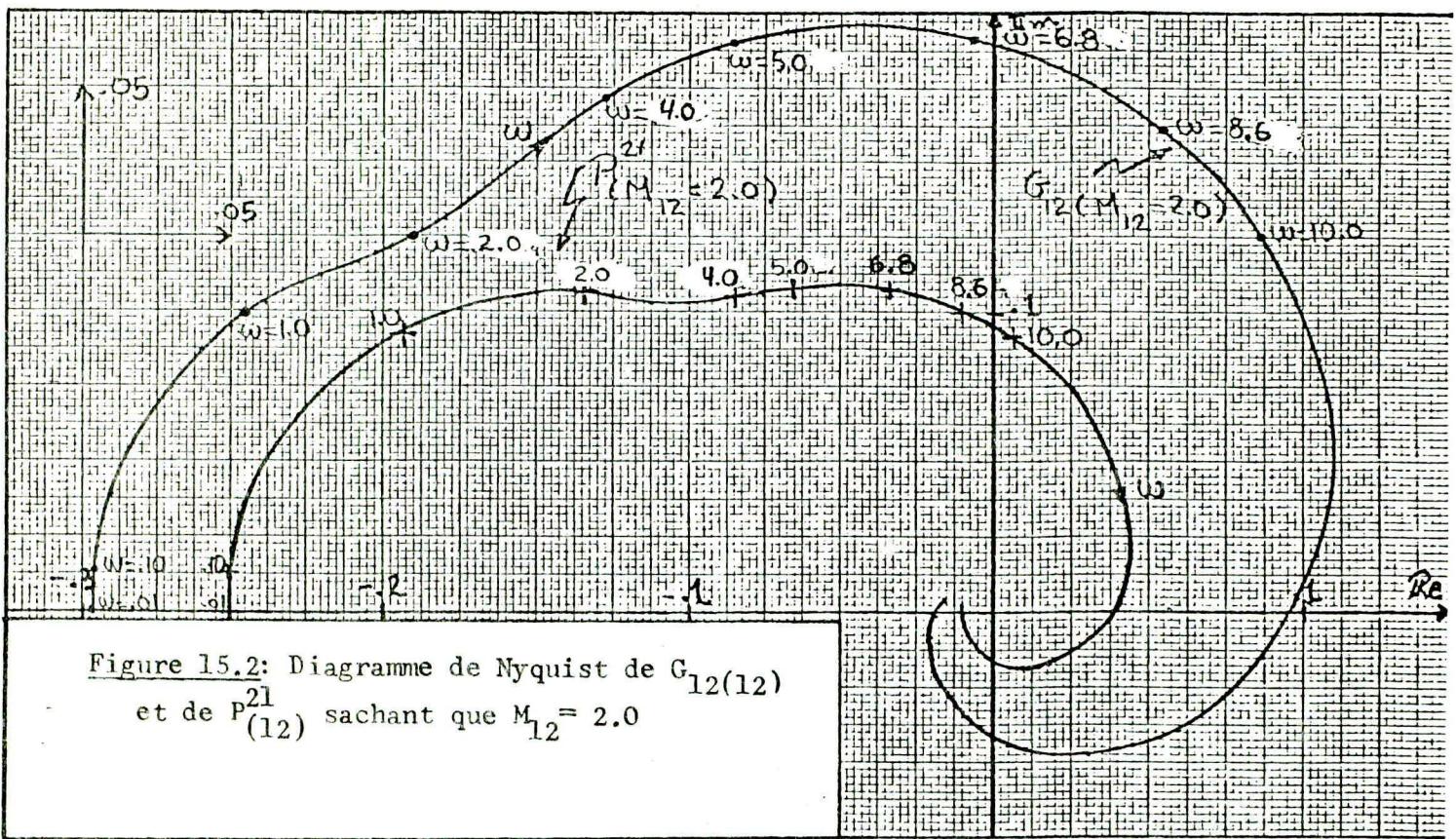


Figure 15.2: Diagramme de Nyquist de $G_{12}(12)$
et de $P_{(12)}^{21}$ sachant que $M_{12} = 2.0$

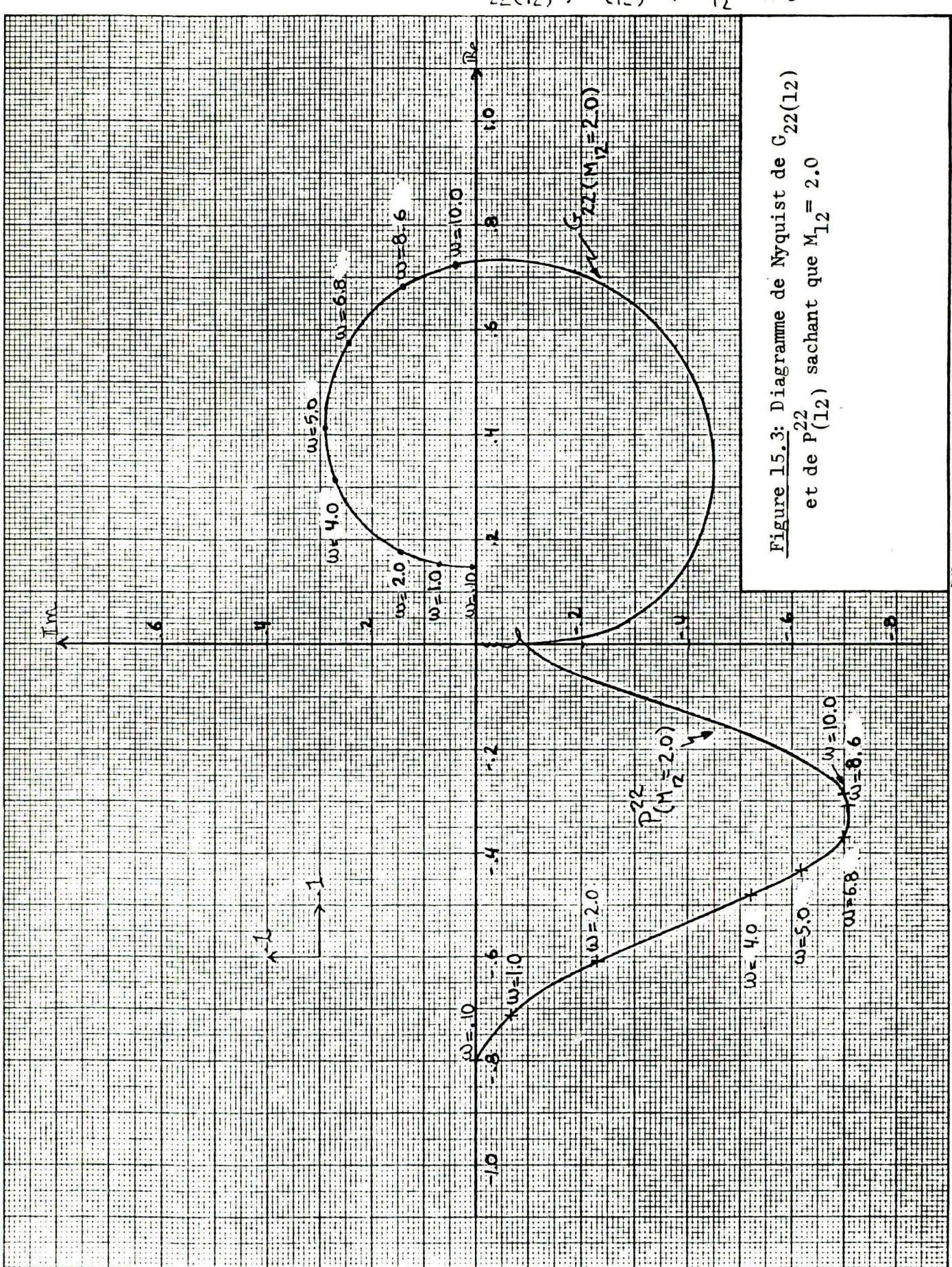
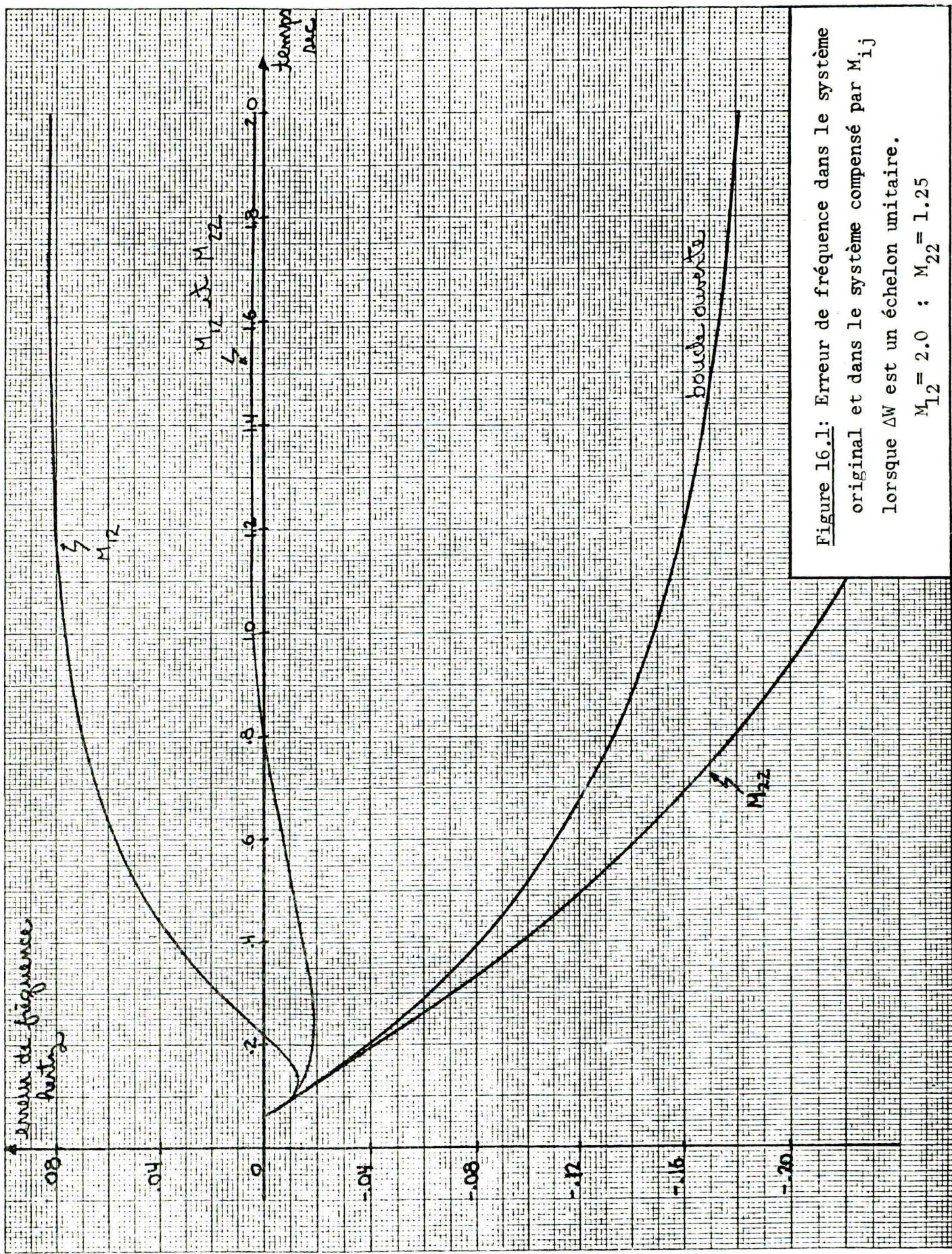


Figure 15.3: Diagramme de Nyquist de $G_{22}(12)$
et de $P_{(12)}^{22}$ sachant que $M_{12} = 2.0$



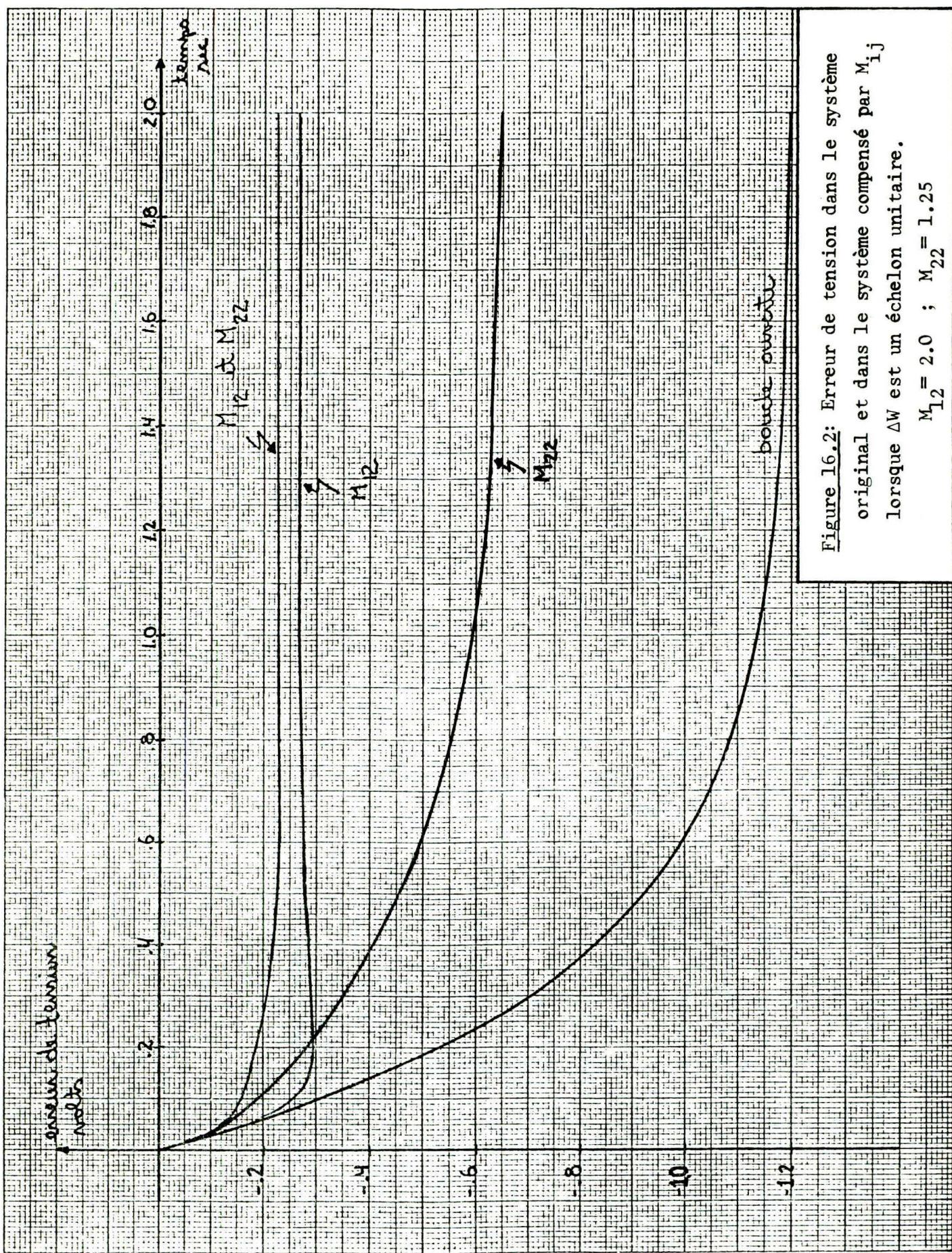


Figure 16.2: Erreur de tension dans le système original et dans le système compensé par M_{1j} lorsque ΔW est un échelon unitaire.

$$M_{12} = 2.0 ; M_{22} = 1.25$$



Figure 17: Diagramme de Nyquist de $G_{22}(12)$ et de P_{22} sachant que $M_{12} = 1.0$

APPENDICE

On a utilisé CSMP pour calculer les réponses temporelles du système. Un programme type est donné à la page suivante (seules les façons d'exprimer U_1 et U_2 peuvent changer). Le schéma ci-dessous explique la notation qui a été employée:

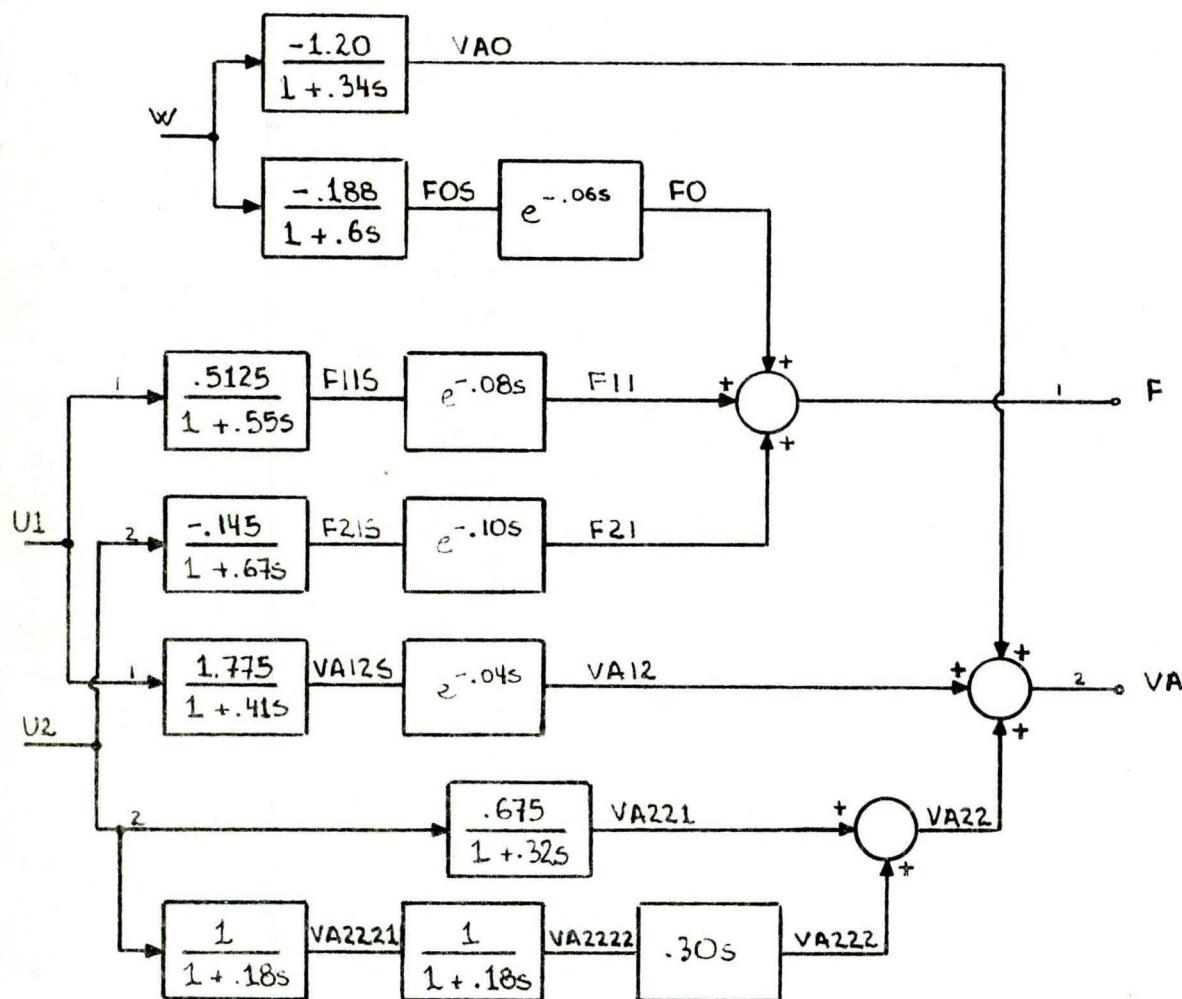


Figure 19: Schéma bloc du système simulé dans le CSMP

*****CONTINUOUS SYSTEM MODELING PROGRAM*****

*** VERSION 1.3 ***

* COMPORTEMENT TRANSITOIRE DU SYSTEME BOUCLE
 INITIAL

*

DYNAMIC

```

W=STEP(0.)
U1=-2.0*VA
U2=-1.5*VA
VAOK=REALPL(0.,.34,W)
VA0=-1.20*VAOK
FOSK=REALPL(0.,.60,W)
FOS=-.188*FOSK
F0=DELAY(6,.06,FOS)
F11SK=REALPL(0.,.55,U1)
F11S=.5125*F11SK
F11=DELAY(8,.08,F11S)
F21SK=REALPL(0.,.67,U2)
F21S=-.145*F21SK
F21=DELAY(10,.10,F21S)
VA12SK=REALPL(0.,.41,U1)
VA12S=1.775*VA12SK
VA12=DELAY(4,.04,VA12S)
VA221K=REALPL(0.,.32,U2)
VA221=.675*VA221K
VA2221=REALPL(0.,.18,U2)
VA2222=REALPL(0.,.18,VA2221)
VA222=0.30*DERIV(0.,VA2222)
VA22=VA221+VA222
VA=VA0+VA12+VA22
F=F0+F11+F21
  
```

*

TERMINAL

TIMER DELT=.01, FINTIM=3.0, OUTDEL=.02

METHOD SIMP

PRTPLT VA,F

LABEL REPONSE A UN ECHELON DE LA CHARGE

*

END

STOP

CUTPUT VARIABLE SEQUENCE

W	ZZ0003	VAOK	ZZ0006	FOSK	VA222	VA221	VA22	VA12S	VA12
VA0	VA	U1	ZZ0009	F11SK	U2	ZZ0012	F21SK	ZZ0015	VA12SK
ZZ0018	VA221K	ZZ0021	VA2221	ZZ0024	VA2222	FOS	FO	F11S	F11
F21S	F21	F							

OUTPUTS	INPUTS	PARAMS	INTEGS	+	MEM BLKS	FORTRAN	DATA CDS
37(500)	73(1400)	3(400)	8+	4=	12(300)	34(600)	5

ENDJOB

A CONSULTE
SUR PLACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288850 9