

Titre: Application des diagrammes de Nyquist et de Black pour l'amélioration de la sensibilité
Title: l'amélioration de la sensibilité

Auteurs: Romano M. De Santis
Authors:

Date: 1973

Type: Rapport / Report

Référence: De Santis, R. M. (1973). Application des diagrammes de Nyquist et de Black pour l'amélioration de la sensibilité. (Technical Report n° EP-R-73-47).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/6130/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6130/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-73-47
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

SECTION AUTOMATIQUE

Rapport Technique EP73-R-47

Classification: Library of Congress no.....

APPLICATION DES DIAGRAMMES DE NYQUIST ET DE BLACK POUR L'AMELIORATION DE LA SENSIBILITE

par

Romano M. DeSantis

Le 1 décembre 1973

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP4
73R47
FRE

C.P. 501
Snowdon
Montréal 248

A CONSULTER
SUR PLACE

APPLICATION DES DIAGRAMMES DE NYQUIST ET DE
BLACK POUR L'AMELIORATION DE LA SENSIBILITE +

Romano M. DeSantis *

SOMMAIRE

Dans ce rapport nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'amélioration de la sensibilité d'un système linéaire et invariant dans le temps vis à vis aux variations des paramètres internes et aux perturbations extérieures. Ces conditions concernent le diagramme de Nyquist et le diagramme de Black du système en chaîne ouverte et sont similaires à celles qui sont associées avec les critères de stabilité des systèmes nonlinéaires proposés par Popov, Zames et des autres auteurs. Elles sont de très facile application et sont obtenues en employant les techniques associées avec la réponse en fréquence, la théorie des nombres complexes, et quelques propriétés élémentaires de la géométrie Euclidienne.

73452

+ Les résultats qui sont donnés dans ce rapport constituent une des retombées "pratiques" d'une étude de plus grande envergure qui a été entreprise par l'auteur en collaboration avec le Professeur William A. Porter du Systems Engineering Laboratory de l'Université du Michigan. Cette recherche a été subventionnée par le Conseil National de la Recherche du Canada, Octroi A-8244.

* Ecole Polytechnique de Montréal, Québec

1. INTRODUCTION

Nous considérons le système linéaire, continu dans le temps, invariant dans le temps, et avec une entrée et une sortie, qui est représenté dans la Figure 1, où T représente le système nominal, ΔT représente la variation de la configuration du système nominal qui est engendrée par une perturbation des paramètres internes, et η tient compte de la présence d'une perturbation extérieure de type additif. Les notations $T(j\omega)$ et $\Delta T(j\omega)$ seront utilisées pour désigner la réponse en fréquence de T et ΔT ; $Y(j\omega)$, $X(j\omega)$, et $\Delta X_0(j\omega)$ représenteront la transformée de Fourier respectivement de y , $x = Ty$, et $\Delta x_0 = \Delta Ty + \eta$, c'est à dire de l'entrée, de la sortie, et de la somme de l'erreur due à la variation de T plus l'erreur due à la présence de la perturbation extérieure η .

Dans des nombreuses applications, il est désirable que l'importance de l'erreur due à la présence des perturbations, internes ou externes, soit réduite aussi tant que possible. Pour atteindre cet objectif on utilise souvent une configuration en contreréaction du type indiqué dans la Figure 2. L'analyste choisit en général les compensateurs U , M , et L de façon à ce qu'ils puissent satisfaire la double contrainte suivante. En absence de perturbations ils doivent rendre le système de la Figure 2 "équivalent" à celui de la Figure 1; en présence de perturbations l'erreur qui se produit dans le système compensé doit être "moins importante" que celle qui apparaît dans le système original. Du point de vue mathématique, ceci peut être interprété dans le sens que dans le cas où $\Delta T(j\omega) = \eta(j\omega) = 0$, et en correspondance avec toute entrée admissible y , il faut avoir $X_e(j\omega) = X(j\omega)$. De plus nous dirons que le système en contreréaction améliore la sensibilité du système original si pour $\Delta T(j\omega) \neq 0$ et/ou $\eta(j\omega) \neq 0$, l'énergie de l'erreur Δx_e est plus petite ou égale à l'énergie de l'erreur Δx_0 , c'est à dire $\|\Delta x_e\| \leq \|\Delta x_0\|$ (i)(ii).

Clairement, étant donné les compensateurs L , M , et U , et le système T , le problème de déterminer si oui ou non nous avons une amélioration de sensibilité dépendra non seulement de L , M , U , et T , mais aussi bien de ΔT , y , et η (ou, de façon équivalente de ΔT et Δx_0). Ainsi en général l'analyste doit s'attendre à ce que le système en contreréaction tout en améliorant la sensibilité en correspondance avec certaines valeurs de $\Delta T(j\omega)$ et $\Delta x_0(j\omega)$, puisse au même temps la déteriorer en correspondance avec d'autres valeurs.

Notre objectif est de présenter des conditions pour déterminer si et comment l'addition de compensateurs dans la chaîne de contreréaction peut réduire l'erreur Δx_0 . Ce problème, aujourd'hui classique, a été déjà considéré par plusieurs autres auteurs tels que, par exemple, Bode, [1], Cruz [2], Horowitz, [3], et Porter, [4]. Une revision assez détaillée de tous ces travaux est présentée dans [2]. Nos résultats seront formulés en termes de conditions concernant le diagramme de Nyquist et de Black de la réponse en fréquence du système en chaîne ouverte. Quelques uns de ces résultats sont bien connus mais difficiles à repérer dans la littérature technique; d'autres sont moins connus ou tout à fait nouveaux. Une caractéristique à remarquer c'est qu'ils sont similaires aux critères de stabilité proposés par Popov [5], Zames [6], et autres.

-
- i) Etant donné une fonction x , le symbole $\|x\|$ dénotera l'expression suivante:

$$\|x\| = [\int_0^\infty x(t)^2 dt]^{1/2}.$$
 - ii) Au moins qu'il ne soit autrement spécifié, nous supposerons que le système de la Figure 2 soit stable.

Sans aucune perte de généralité nous considérerons le cas où le compensateur M est égal à l'identité. Nous étudierons donc la relation entre la sensibilité de la sortie du système de la Figure 1 avec celle du système représenté dans la Figure 3. Pour ce faire, les fonctions $U(j\omega)$ et $L(j\omega)$ représenteront la réponse en fréquence des deux compensateurs U et L , et nous supposerons que U et L soient tels que la condition d'équivalence soit satisfaite (c'est le cas si on choisit, par exemple, $U(j\omega) = 1+L(j\omega)T(j\omega)$).

On commencera avant tout par considérer la relation qui lie l'erreur du système à chaîne fermée avec celle du système à chaîne ouverte (section 2). Ensuite, dans la section 3, le problème de l'amélioration de sensibilité sera discuté en relation avec le cas où y et η puissent être représentées par n'importe quelle fonction avec énergie finie. Ceci nous conduira à l'établissement de conditions qui sont indépendantes de l'entrée. Dans la section 4 les conditions de sensibilité sont modifiée de manière à tenir compte de la valeur spécifique de y et η (conditions dépendantes de l'entrée)

2. RELATION ENTRE L'ERREUR A CHAINE FERMEE ET L'ERREUR A CHAINE OUVERTE

Le premier pas qui doit être franchi dans toute étude de sensibilité comparative du type que nous intéressé, est de clarifier les connections entre l'erreur associée avec le système compensé (Figure 3) d'une part, et l'erreur associée avec le système original de l'autre (Figure 1). Ceci nous le faisons en introduisant l'assertion suivante (ce résultat peut être trouvé dans [1]).

Assertion 1. L'erreur du système à chaîne fermée, Δx_e , peut être exprimée en fonction du système à chaîne ouverte, Δx_o , au moyen de l'équation suivante:

$$\Delta x_e(j\omega) = (I + Q(j\omega)L(j\omega))^{-1} \Delta x_o(j\omega), \quad (1)$$

où $Q(j\omega) = T(j\omega) + \Delta T(j\omega)$.

Démonstration. Considérez le système de la Figure 2, et observez que

$\Delta x_e = \Delta x_{c1} + \Delta x_{c2}$ où: Δx_{c1} est l'erreur due à la présence de η sous la condition $y = 0$, et Δx_{c2} est l'erreur due à la présence de y sous la condition $\eta = 0$.

Clairement nous avons

$$\Delta x_{c1} = [I + L(\Delta T + T)]^{-1} \eta. \quad (2)$$

Pour ce qui concerne l'erreur Δx_{c2} , elle est obtenue au moyen de la suivante chaîne d'équations:

$$\begin{aligned} \Delta x_{c2} &= \{(T + \Delta T) [I + (I + LT)^{-1} L \Delta T]^{-1} - T\} y \\ &= \{\Delta T - T (I + LT)^{-1} L \Delta T\} \{I + (I + LT)^{-1} L \Delta T\}^{-1} y \\ &= (I + TL)^{-1} [I + \Delta T (I + LT)^{-1} L]^{-1} \Delta T y \\ &= (I + TL)^{-1} [I + \Delta T L (I + TL)^{-1}]^{-1} \Delta T y \\ &= (I + TL + \Delta TL)^{-1} \Delta T y \\ &= (I + (\Delta T + T)L)^{-1} \Delta T y. \end{aligned} \quad (3)$$

Des équations (2) et (3) il suit

$$\Delta x_e = (I + (\Delta T + T)L)^{-1} [\eta + \Delta Ty]$$

D'ici, en observant que $\Delta x_0 = \Delta Ty + \eta$, nous obtenons (1).

Observez que suivant l'Assertion 1, le problème de sensibilité peut être étudié sans besoin de considérer de façon explicite le compensateur U ou bien la perturbation extérieure $\eta^{(iii)}$. L'Assertion 1 nous donne aussi une relation directe entre Δx_0 et Δx_e . Ainsi si nous connaissons Δx_0 , alors Δx_e peut être obtenue en utilisant le modèle de sensibilité représenté dans la Figure 4.

Si la réponse en fréquence $\Delta T(j\omega)$ est "suffisamment petite", alors il est naturel de remplacer l'équation (1) avec l'équation suivante:

$$\Delta x_e(j\omega) = (I + T(j\omega)L(j\omega))^{-1} \Delta x_0(j\omega).$$

Le sens dans lequel cette approximation est valide est précisé dans l'assertion qui suit.

Assertion 2. Si le vecteur qui représente la réponse de $\Delta T L (I + \Delta T L)^{-1}$ à une entrée sinusoïdale de pulsation ω_0 , a un module plus petit que 1, alors le vecteur qui représente la réponse de $(I + (\Delta T + T)L)^{-1}$ à la même entrée sinusoïdale est contenu à l'intérieur du cercle qui a centre $C = \frac{1}{I + T(j\omega_0)L(j\omega_0)}$ et rayon

$$r = \frac{|\Delta T(j\omega_0)L(j\omega_0)|}{\left[1 - \frac{|\Delta T(j\omega_0)L(j\omega_0)|}{|I + T(j\omega_0)L(j\omega_0)|} \right] \cdot |I + T(j\omega_0)L(j\omega_0)|^2}.$$

Démonstration. Clairement

$$\left| \frac{1}{I + (\Delta T + T)L} - \frac{1}{I + TL} \right| = \frac{|TL|}{|I + TL|} \frac{|I + TL + \Delta TL|}{|I + TL + \Delta TL|}$$

(iii) Dans l'analyse qui suit nous nous limiterons donc à discuter la sensibilité tout simplement en termes de l'erreur en chaîne ouverte, Δx_0 et de $T, \Delta T, L$ et y .

et donc, si $|\Delta TL(I+TL)^{-1}| < 1$, on a

$$\left| \frac{1}{I+(\Delta T+T)L} - \frac{1}{I+TL} \right| \leq \frac{|\Delta TL|}{|I+TL|^2 (1 - |\frac{\Delta T}{I+TL}|)} .$$

3. CONDITIONS INDEPENDANTES DE L'ENTREE ET DE LA PERTURBATION EXTERIEURE

Dans cette section on supposera que l'entrée y et la perturbation extérieure η puissent être constituées par n'importe quelle fonction avec une énergie finie. Ceci implique que les résultats qui seront donnés seront exprimés tout simplement en termes de T , L et ΔT .

Assertion 1. Chacune des deux conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour l'amélioration de la sensibilité:

- i) le diagramme de Nyquist de $(I+QL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine;
- ii) le diagramme de Nyquist de $(I+QL)$ est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine.

Démonstration. Puisque les conditions i) et ii) sont évidemment équivalentes, il suffit de démontrer l'assertion dans le cas de la première condition.

"Suffisance". Si le diagramme de Nyquist de $(I+QL)^{-1}$ à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine, on a évidemment

$$\left| \frac{1}{I+Q(j\omega)L(j\omega)} \right| \leq 1 \quad \text{pour tout } \omega \in (-\infty, +\infty).$$

En utilisant l'équation 2.1, ceci implique

$$|\Delta X_e(j\omega)| \leq |\Delta X_0(j\omega)| \quad \text{pour tout } \omega \in (-\infty, +\infty),$$

et on peut alors conclure $\|\Delta x_e\| \leq \|\Delta x_0\|$.

"Nécessité". Si la condition i) n'est pas satisfaite, il existe au moins une fréquence ω_0 telle que

$$\left| \frac{1}{1+Q(j\omega_0)L(j\omega_0)} \right| > 1.$$

En choisissant $\eta = \sin \omega_0 t$, ou $y = \sin \omega_0 t$, on obtiendrait alors $\|\Delta x_e\| > \|\Delta x_0\|$.

Assertion 2. Chacune des deux conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour l'amélioration de la sensibilité iii) le diagramme de Nyquist de QL est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(-1, 0)$; iv) le diagramme de Nyquist de $QL(I+QL)^{-1}$ est localisé à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(1, 0)$.

Démonstration. iii) Il suffit d'observer que cette condition est équivalente à la condition ii) de l'Assertion précédente. En effet, si le diagramme de Nyquist de QL est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(-1, 0)$, alors nous devons avoir

$$|Q(j\omega)L(j\omega) + 1| > 1 \quad \text{pour tout } \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Ceci implique que le diagramme de Nyquist de $I+QL$ est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine.

iv) cette condition implique

$$\left| \frac{Q(j\omega)L(j\omega)}{1+Q(j\omega)L(j\omega)} - 1 \right| < 1$$

c'est à dire

$$\left| \frac{1}{1+Q(j\omega)L(j\omega)} \right| < 1 \quad \text{pour tout } \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Elle est donc équivalente à la condition i) de l'Assertion 1.

Les implications graphiques des Assertions 1 et 2 sont clarifiées dans la Figure 5.

Corollaire 1. Une condition suffisante pour l'amélioration de la sensibilité est que le diagramme de Nyquist de QL soit localisé dans la partie droite du plan complexe.

Corollaire 2. Supposez que $L(j\omega) = \lambda V(j\omega)$ et que $\inf_{\omega} |Q(j\omega)V(j\omega)| > 0$.

Alors pour $|\lambda|$ suffisamment grand le système à chaîne fermée est moins sensible que celui à chaîne ouverte. (iv)

Corollaire 3. Une condition nécessaire et suffisante pour l'amélioration de la sensibilité est que les points du diagramme de Black de QL soit localisé au dessus de la courbe pointillée représentée dans la Figure 6. (v)

Observez que les conditions considérées jusqu'à maintenant impliquent la connaissance exacte de la réponse en fréquence de ΔT . Les résultats qui suivent donnent par contre des conditions qui sont applicables au cas où l'analyste ne dispose que d'informations partielles sur $\Delta T(j\omega)$.

Assertion 3. Si le diagramme de Nyquist de ΔTL est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon égal à r et centre à l'origine, alors chacune des conditions suivantes assure une amélioration de la sensibilité:

- i) le diagramme de Nyquist de $(I+TL)^{-1}$ est localisé à l'intérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{1+r}$ et centre à l'origine;
- ii) le diagramme de Nyquist de $I+TL$ est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon $1+r$ et centre à l'origine;
- iii) le diagramme de Nyquist de TL est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon $1+r$ et centre dans $(-1, 0)$;
- iv) le diagramme de Nyquist de $TL(I+TL)^{-1}$ est localisé à l'intérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{1+r}$ et centre dans $(1, 0)$.

(iv) Observez que ce corollaire peut être utilisé pour montrer la possibilité que la sensibilité en correspondance à des grandes perturbations des paramètres peut être meilleure que celle correspondante à des perturbations petites.

(v) Cette ligne est obtenue en traçant l'image spéculaire par rapport à l'axe horizontal de la courbe identifiée par le paramètre 0dB.

Démonstration. Evidemment, toutes ces conditions sont l'une équivalente à l'autre; il est donc suffisant de démontrer notre assertion dans le cas particulier qui concerne la condition ii). Pour ce faire observez que cette condition implique

$$|T(j\omega)L(j\omega)+1| > 1+r \quad \text{tout } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

d'où en utilisant le fait que $|\Delta T(j\omega)L(j\omega)| < r$, on a

$$\begin{aligned} |\Delta T(j\omega)L(j\omega) + T(j\omega)L(j\omega) + 1| &\geq |1+T(j\omega)L(j\omega)| - |\Delta T(j\omega)L(j\omega)| \\ &\geq 1+r-r = 1. \end{aligned}$$

Le résultat désirée devient alors une conséquence immédiate de l'Assertion 1.

Corollaire 4. Si le diagramme de Nyquist de ΔTL est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon r et centre à l'origine, alors une condition suffisante pour l'amélioration de la sensibilité est que le diagramme de Nyquist de TL soit localisé dans la région à la droite de la ligne verticale passante par le point $(r, 0)$.

Corollaire 5. Si le diagramme de Nyquist de ΔTL est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon r et centre à l'origine, alors une condition suffisante pour l'amélioration de la sensibilité est que les points du diagramme de Black de TL soit au dessus de la ligne pointillée indiquée dans la Figure 8. ^(vi)

Assertion 4. Une condition suffisante pour assurer une amélioration de sensibilité est qu'il existe un couple de nombres réels, α et r , tels que: i) le diagramme de Nyquist de ΔTL est contenu à l'extérieur du cercle avec rayon égal à r et centre dans $(\alpha, 0)$; ii) le diagramme de Nyquist de TL est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon $1+r$ et centre dans $(-\alpha, 0)$.

(vi) Cette ligne est obtenue en traçant l'image spéculaire par rapport à l'axe horizontal de la courbe identifiée par le paramètre $20 \log (1+r)$ dB.

Démonstration. Observez que

$$\begin{aligned} \inf_{\omega} |I+T(j\omega)L(j\omega) + \Delta T(j\omega)L(j\omega)| &= \\ &= \inf_{\omega} |I+T(j\omega)L(j\omega) + \Delta T(j\omega)L(j\omega) - \alpha + \alpha| \\ &\geq \inf_{\omega} |T(j\omega)L(j\omega) + (I+\alpha)| - \sup_{\omega} |\Delta T(j\omega)L(j\omega) - \alpha|. \end{aligned}$$

En utilisant i) et ii) cette dernière inégalité implique

$$\inf_{\omega} |I+T(j\omega)L(j\omega) + \Delta T(j\omega)L(j\omega)| \geq 1.$$

Le résultat désiré devient alors une conséquence de l'Assertion 2 iii).

Assertion 5. Si le diagramme de Nyquist de $\Delta T(j\omega)L(j\omega)[I+T(-j\omega)L(-j\omega)]$ est localisé dans la partie droite du plan complexe, alors chacune des conditions suivantes est suffisante pour assurer une amélioration de la sensibilité:

- i) le diagramme de Nyquist de $(I+TL)^{-1}$ est localisé à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine;
- ii) le diagramme de Nyquist de $(I+TL)$ est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre à l'origine;
- iii) le diagramme de Nyquist de TL est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(-1, 0)$;
- iv) le diagramme de Nyquist de $T(I+TL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(1, 0)$.

Démonstration. Si le diagramme de Nyquist de $\Delta T(j\omega)L(j\omega)[I+T(-j\omega)L(-j\omega)]$ est localisé dans la partie droite du plan complexe, alors on a évidemment

$$R_e \{ \Delta T(j\omega)L(j\omega) [I+T(-j\omega)L(-j\omega)] \} \geq 0, \quad \text{pour tout } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

c'est à dire $|I+T(j\omega)L(j\omega) + \Delta T(j\omega)L(j\omega)| =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(I+T(j\omega)L(j\omega) + \Delta T(j\omega)L(j\omega)) (I+T(-j\omega)L(-j\omega) + \Delta T(-j\omega)L(-j\omega))} \\ &= \sqrt{|I+T(j\omega)L(j\omega)|^2 + 2R_e[\Delta T(j\omega)L(j\omega)(I+T(-j\omega)L(-j\omega))]} \\ &\geq |I+T(j\omega)L(j\omega)|. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique que si une quelconque des conditions i), ii), iii) ou iv) est valide, alors nous avons une amélioration de sensibilité puisque

$$|I+Q(j\omega)L(j\omega)| \geq 1.$$

Assertion 6. Si le diagramme de Nyquist de $\Delta TL(I+TL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans l'origine, et en dénotant

$$r_0 = \frac{[\Delta TL(I+TL)^{-1}]_{\max}}{1 - [\Delta TL(I+TL)^{-1}]_{\max}} \quad [(\Delta TL(I+TL)^{-1})_{\max}, \text{ où:}]$$

$$[\Delta TL(I+TL)^{-1}]_{\max} = \sup_{\omega} |\Delta T(j\omega)L(j\omega)(I+T(j\omega)L(j\omega))^{-1}|$$

$$[(I+TL)^{-1}]_{\max} = \sup_{\omega} |(I+T(j\omega)L(j\omega))^{-1}|,$$

on obtient que chacune des conditions suivantes est suffisante pour assurer une amélioration de la sensibilité:

- i) le diagramme de Nyquist de $(I+TL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur du cercle avec rayon $1 - r_0$ et centre à l'origine;
- ii) le diagramme de Nyquist de $I+TL$ est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{1-r_0}$ et centre à l'origine;
- iii) le diagramme de Nyquist de TL est localisé à l'extérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{1-r_0}$ et centre dans $(-1, 0)$;
- iv) le diagramme de Nyquist de $TL(I+TL)^{-1}$ est localisé à l'intérieur du cercle avec rayon $1-r_0$ et centre dans $(1, 0)$.

Démonstration. De l'Assertion 2.1, nous avons

$$\Delta X_e(j\omega) = (I + \Delta T(j\omega)L(j\omega) + T(j\omega)L(j\omega))^{-1} \Delta X_0(j\omega)$$

$$\text{d'où} \quad |\Delta X_e(j\omega)| \leq |(I+T(j\omega)L(j\omega))^{-1}| \quad |\Delta X_0(j\omega)| \\ + |(I+T(j\omega)L(j\omega))^{-1} - (I + \Delta T(j\omega)L(j\omega) + T(j\omega)L(j\omega))^{-1}| \quad |\Delta X_0(j\omega)|.$$

En appliquant l'Assertion 2.2, il suit

$$|\Delta X_e(j\omega)| \leq |I+T(j\omega)L(j\omega)^{-1}| \quad |\Delta X_0(j\omega)| + r_0 |\Delta X_0(j\omega)|.$$

Ceci implique que si une quelconque des conditions i), ii), iii), et iv) est vérifiée, alors

$$|\Delta X_e(j\omega)| \leq (1-r_o+r_o) |\Delta X_o(j\omega)| = |\Delta X_o(j\omega)|$$

c'est à dire $|\Delta X_e| \leq |\Delta X_o|$.

Les implications géométriques des Assertions 4, 5, et 6 sont représentées respectivement dans les Figures 8, 9, et 10.

Pour terminer cette section, observez que dans tous les résultats rencontrés jusqu'à maintenant aussi bien que dans les résultats à suivre, on suppose toujours que le système compensé soit stable. Cette hypothèse peut être naturellement remplacée au moyen de quelque condition additionnelle. Ceci est illustré dans le corollaire suivant.

Corollaire 6. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système compensé soit stable et moins sensible que le système original est que le diagramme de Nyquist de QL soit extérieur au cercle avec rayon unitaire et centre dans $(-1,0)$ et, de plus, que le cercle soit encerclé un nombre de fois égal au nombre de pôles de QL qui ont une partie réelle positive.

4. CONDITIONS DEPENDANTES DE L'ENTREE ET DE LA PERTURBATION EXTERIEURE

Dans un nombre d'applications pratiques la fonction d'entrée y et la perturbation η peuvent assumer un nombre limité de configurations qui sont connues au préalable. Quand cela arrive, les conditions pour l'amélioration de la sensibilité que nous avons données dans la section précédentes pourraient bien être plus restrictives qu'il ne soit nécessaire. Il devient alors important de considérer des conditions plus spécialisées qui puissent permettre d'exploiter cette connaissance "a priori" de y et η . Pour ce faire il est utile de commencer par l'introduction de la définition suivante.

Définition. Le gain de phase, φ , et le gain d'amplitude, G , d'un système, T , par rapport à une entrée spécifique, x , sont respectivement données par les expressions suivantes:

$$\varphi[T, x] = \cos^{-1} \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T(j\omega)X(j\omega)X(-j\omega)d\omega}{\|Tx\| \|x\|} \right]$$

et

$$G[T, x] = \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

où:

$$\|Tx\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} T(j\omega)X(j\omega)T(-j\omega)X(-j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|x\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)X(-j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le nombre complexe $G e^{j\varphi}$ prend le nom de gain de T par rapport à x .

Observez que si x est une fonction sinusoïdale caractérisée par une vitesse angulaire ω_0 , alors

$$\varphi[T, x] = \arg T(j\omega_0)$$

et

$$G[T, x] = |T(j\omega_0)|;$$

dans ce cas particulier notre définition du gain coincide donc avec le concept fort familier de réponse en fréquence.

Lemma 1. Le concept de gain jouit des propriétés suivantes:

- i) $\varphi[T, \lambda x] = \varphi[\lambda T, x] = \varphi[T, x];$
- ii) $G[T, \lambda x] = G[T, x]$ et $G[\lambda T, x] = |\lambda| G[T, x];$
- iii) $G[T_1 T_2, x] \leq G[T_1, x] G[T_2, x];$
- iv) $G[T_1 + T_2, x] \leq G[T_1, x] + G[T_2, x]$
- v) $G[T_1 - T_2, x] \geq G[T_1, x] - G[T_2, x].$

Assertion 1. Une condition nécessaire et suffisante pour l'amélioration de la sensibilité est que

$$\left| \frac{1}{1+Ge^{j\varphi}} \right| \leq 1$$

où, de façon équivalente,

$$|1+Ge^{j\varphi}| \geq 1,$$

où: G et φ représentent l'amplitude et la phase du gain de $(T+\Delta T)L$ évalué par rapport à l'erreur en chaîne ouverte $\Delta x_0 = \Delta Ty + \eta$.

Assertion 2. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour une amélioration de la sensibilité:

- i) la représentation de Nyquist du gain de $(I+QL)^{-1}$ dans Δx_0 est contenue dans le cercle avec rayon unitaire et centre dans l'origine;
- ii) la représentation de Nyquist du gain de $(I+QL)$ dans Δx_0 est localisée à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans l'origine;
- iii) la représentation de Nyquist du gain de QL dans Δx_0 est localisée à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(-1, 0)$;
- iv) la représentation de Nyquist du gain de $QL(I+QL)^{-1}$ dans Δx_0 est localisée à l'extérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans $(1, 0)$.

Corollaire 1. Une condition nécessaire et suffisante pour une amélioration de la sensibilité est ou bien que

$$\frac{\cos\varphi[QL, \Delta x_0]}{G[QL, \Delta x_0]} \geq -\frac{1}{2}$$

ou bien que

$$\frac{\cos\varphi [QL(I+QL)^{-1}, \Delta x_0]}{G [QL(I+QL)^{-1}, \Delta x_0]} \leq 2.$$

Corollaire 2. Une condition suffisante pour une amélioration de la sensibilité est que la représentation de Nyquist du gain de QL dans Δx_0 est localisée dans la partie droite du plan complexe.

Assertion 3. Supposons que l'amplitude du gain de ΔTL dans Δx_0 est plus petite que ou bien égale à r_0 . Alors chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour obtenir une amélioration de la sensibilité:

- i) la représentation de Nyquist du gain de $(I+TL)^{-1}$ dans Δx_0 est à l'intérieur du cercle avec rayon égal à $\frac{1}{I+r}$ et centre dans l'origine;
- ii) la représentation de Nyquist du gain de $(I+TL)$ dans Δx_0 est localisée à l'extérieur du cercle avec rayon $I+r$ et centre dans $(-1, 0)$;
- iii) la représentation de Nyquist du gain de TL dans Δx_0 est localisée à l'extérieur du cercle avec rayon $I+r$ et centre dans $(-1, 0)$;
- iv) la représentation de Nyquist du gain de $TL(I+TL)^{-1}$ dans Δx_0 est contenue à l'intérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{I+r}$ et centre dans $(1, 0)$.

Assertion 4. Supposez que $G[\Delta TL(I+LT)^{-1}, \Delta x_0] < 1$, et utilisez la notation

$$r_0 = \frac{[\Delta TL(I+TL)^{-1}, \Delta x_0]}{G[\Delta TL(I+TL)^{-1}, \Delta x_0]} \cdot G[(I+TL)^{-1}, \Delta x_0].$$

Chacune des conditions suivantes assure une amélioration de la sensibilité:

- i) la représentation de Nyquist du gain de $(I+TL)^{-1}$ dans Δx_0 est à l'intérieur du cercle avec rayon $\frac{1}{1+r_0}$ et centre dans l'origine;
- ii) la représentation de Nyquist du gain de $(I+TL)$ dans Δx_0 est extérieure au cercle avec rayon $1+r_0$ et centre dans l'origine;
- iii) la représentation de Nyquist du gain de TL dans Δx_0 est extérieure au cercle avec rayon $1+r_0$ et centre dans $(-1,0)$;
- iv) la représentation de Nyquist du gain de $TL(I+TL)^{-1}$ dans Δx_0 est intérieur au cercle avec rayon $\frac{1}{1+r_0}$ et centre $(1,0)$.

CONCLUSIONS

Dans ce développement nous avons présenté un nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour que la performance d'un système en chaîne ouverte vis-à-vis les variations des paramètres internes et les perturbations extérieures puisse être améliorée par l'introduction d'une chaîne de contre-réaction. Ces conditions peuvent être facilement vérifiées en utilisant le plan de Nyquist et l'abaque de Nichols. En général, cette vérification n'impose aucun effort supplémentaire en plus de celui qui est habituellement requis pour la vérification des conditions de stabilité (voir les Figures 4-10).

Les résultats présentés ont été bornés au cas d'un système linéaire, invariant dans le temps, continu dans le temps et avec une entrée et une sortie. C'est à une étude parallèle [7], que nous avons délégué la tache de montrer que leur application peut être facilement étendue au cas de systèmes qui ne possèdent aucun de ces attributs.

REFERENCES

1. H.W. Bode, Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1945.
2. J.B. Cruz, Feedback Systems, McGraw-Hill, Inter-University Electronic Series, Vol. 14, 1972.
3. I.M. Horowitz, Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, 1963, New York.
4. W.A. Porter, Sensitivity Problems in Distributive Systems, International Journal of Control, Vol. 7, No. 5, 1968, pp. 481-491.
5. V.M. Popov, Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control, Automation and Remote Control, Vol. 22, No. 8, 1961, pp. 961-979.
6. G. Zames, "On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems - Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-11, No. 3, July 1966, pp. 465-476.
7. W.A. Porter, R.M. DeSantis, Sensitivity Analysis in Multilinear Systems, (in preparation).

REMERCIEMENTS

Merci beaucoup à Mlle Carmen Gagnon pour avoir dactylographié le manuscript.

A. APPENDICE

Un exemple d'application. Considérons les systèmes représenté dans les Figures A.1 et A.2. Supposez que la réponse du compensateur ait l'expression $L(j\omega) = 100j\omega$ et que les valeurs du gain μ et de la constante de temps τ soient positives et inconnues. Pourrons nous dire quelque chose sur la sensibilité comparative de ces deux systèmes? Cette question peut être aisement répondue en utilisant la théorie développée dans les sections précédentes. On note d'abord que le diagramme de Nyquist de QL est toujours contenu dans la partie droite du plan complexe (le déphasage introduit par Q est négatif et plus petit que -180° , celui introduit par L est égal à $+90^\circ$). En utilisant le corollaire 3.1 on peut alors conclure que la sensibilité du système compensé est meilleure que celle du système original.

Supposez maintenant que les valeurs de μ et τ soient égales respectivement à .5 et 7 sec, et que la réponse en fréquence de L ait l'expression $\frac{1+10.5j\omega}{1+7j\omega}$. En regardant le diagramme de Black de la fonction TL (Figure A.3) et en utilisant l'Assertion 4-2, on arrive à la conclusion suivante. Si le spectre de la perturbation est essentiellement contenu dans l'intervalle $\left[0, \frac{4}{2\pi \times 7}\right]$, alors le système compensé améliore la sensibilité du système original. Si le spectre consiste de fréquences plus élevées que $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{7}$, alors la sensibilité est déteriorée.

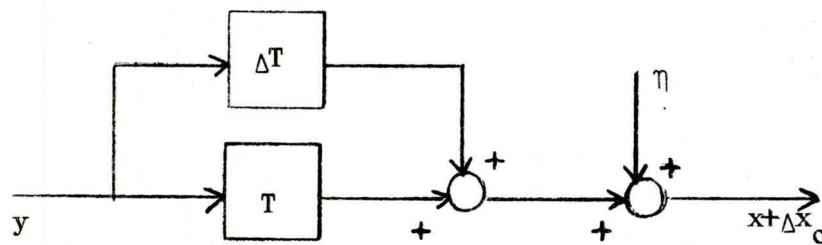


Figure 1: Système en chaîne ouverte soumis à la variation des paramètres internes, ΔT , et à la perturbation η .

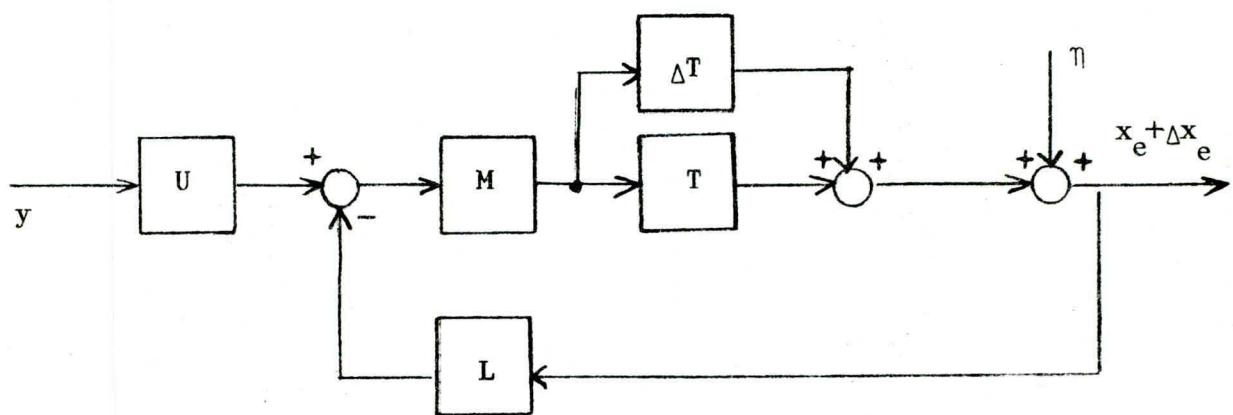


Figure 2: Système en contreréaction pour l'amélioration de la sensibilité.

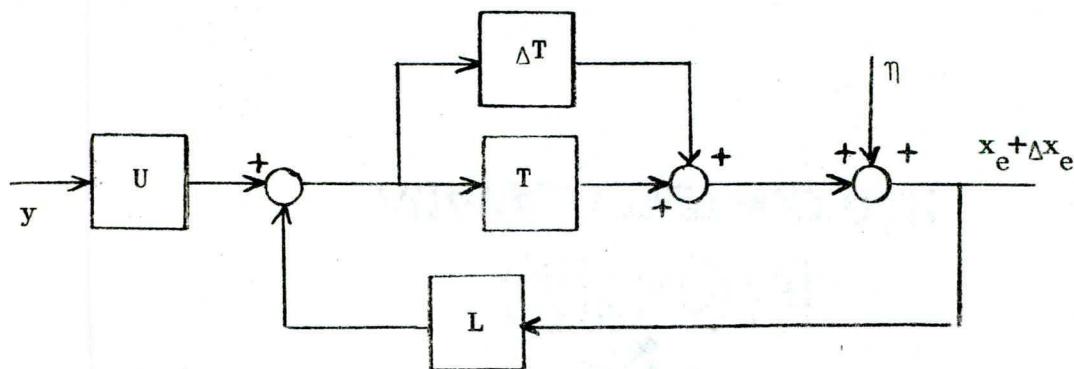


Figure 3: Système en contreréaction simplifié.

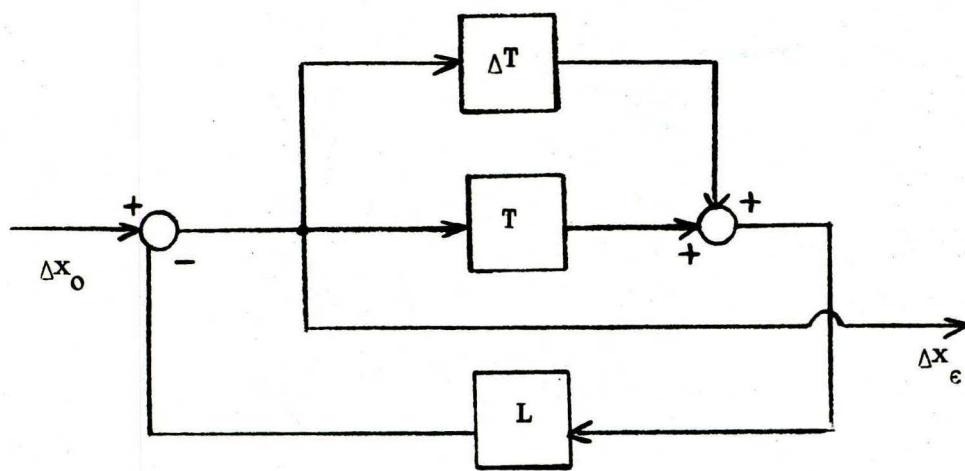
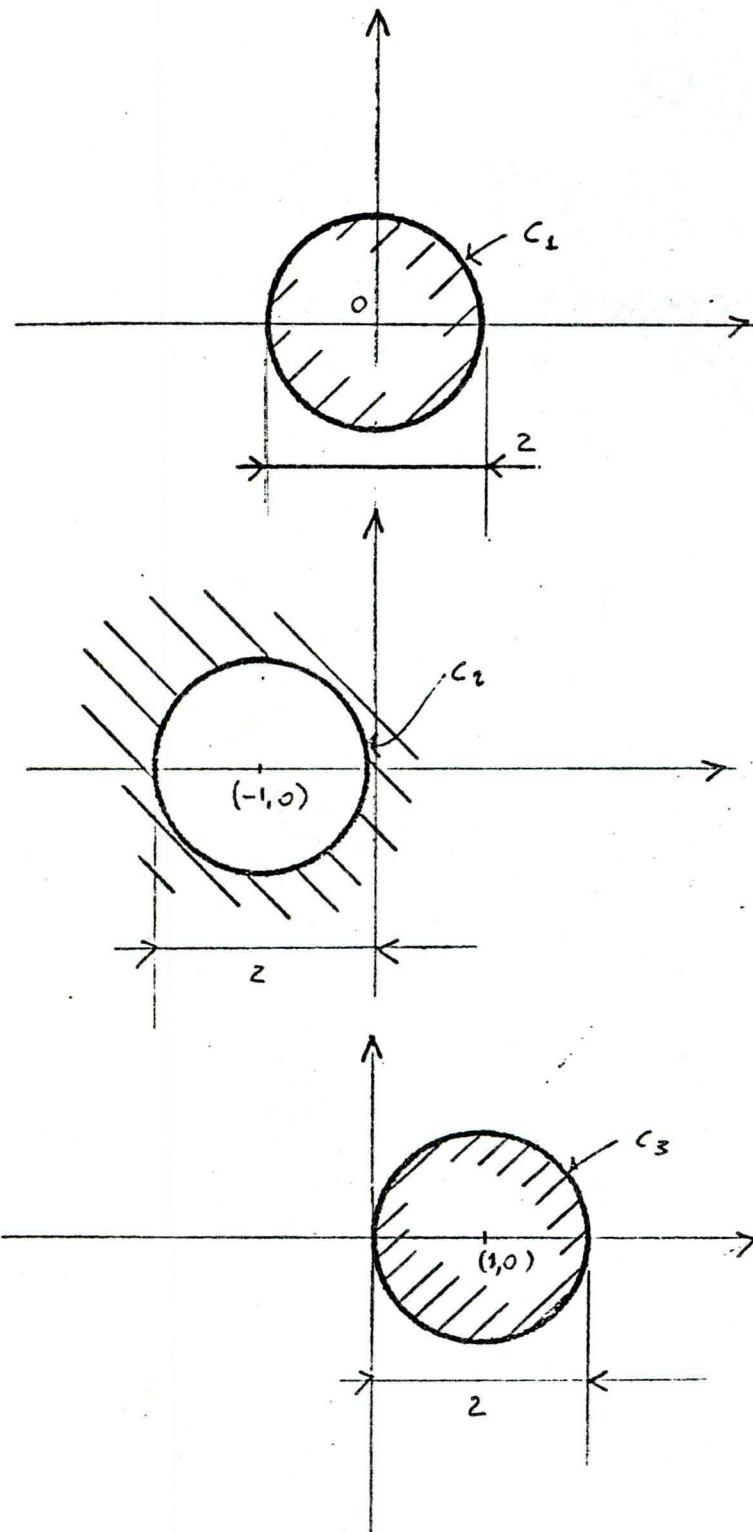
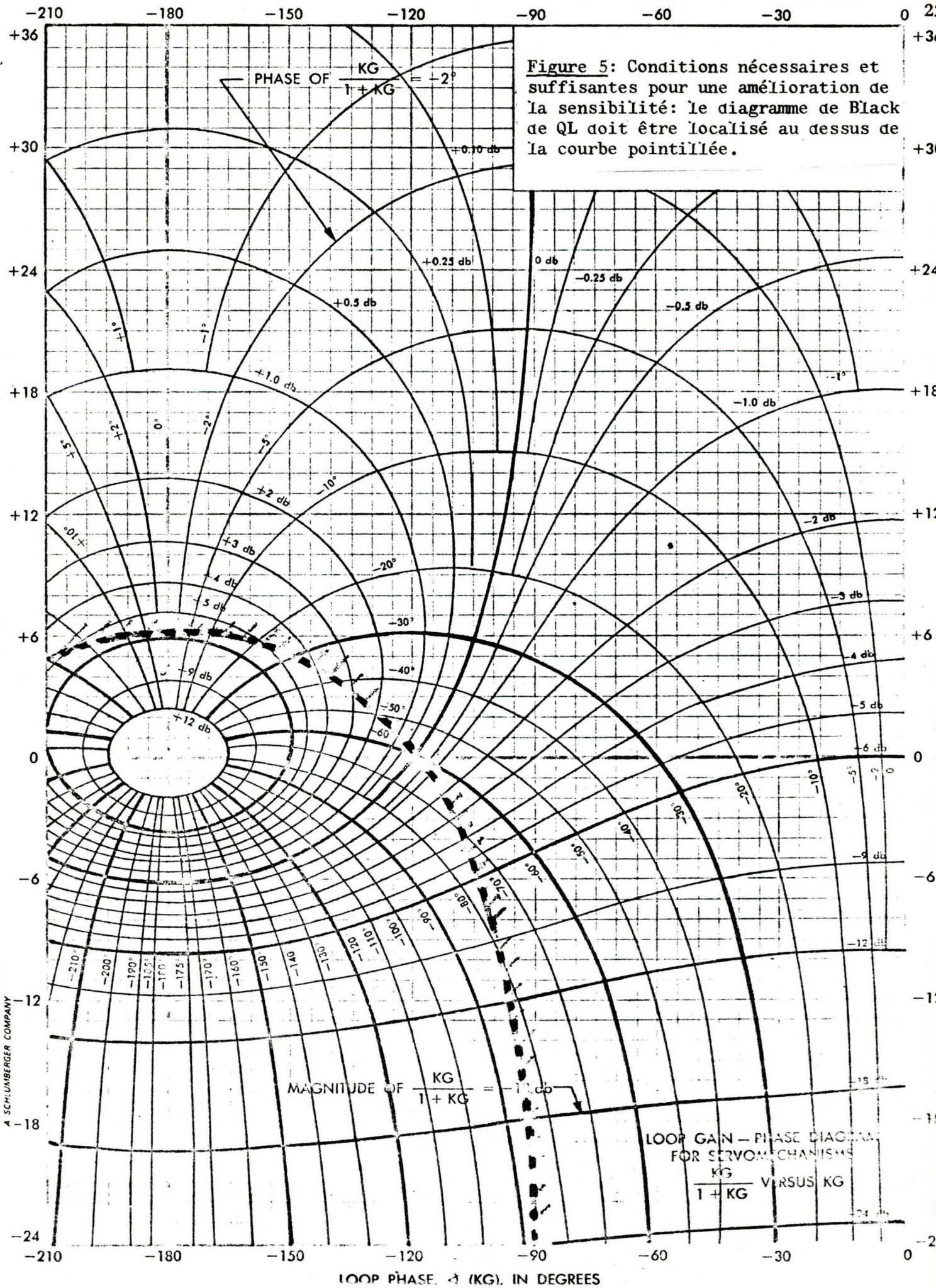


Figure 4: Modèle de sensibilité pour obtenir l'erreur à chaîne fermée à partir de l'erreur à chaîne ouverte.



- a) Le diagramme de Nyquist de $(I+QL)^{-1}$ doit être contenu à l'intérieur de C_1 ;
- b) Le diagramme de Nyquist de $(I+QL)$ doit être extérieur à C_1 .
- c) Le diagramme de Nyquist de $QL(I+QL)^{-1}$ doit être extérieur à C_2 .
- d) Le diagramme de Nyquist de $QL(I+QL)^{-1}$ doit être contenu à l'intérieur de C_3 .

Figure 4: Conditions nécessaires et suffisantes pour une amélioration de la sensibilité.



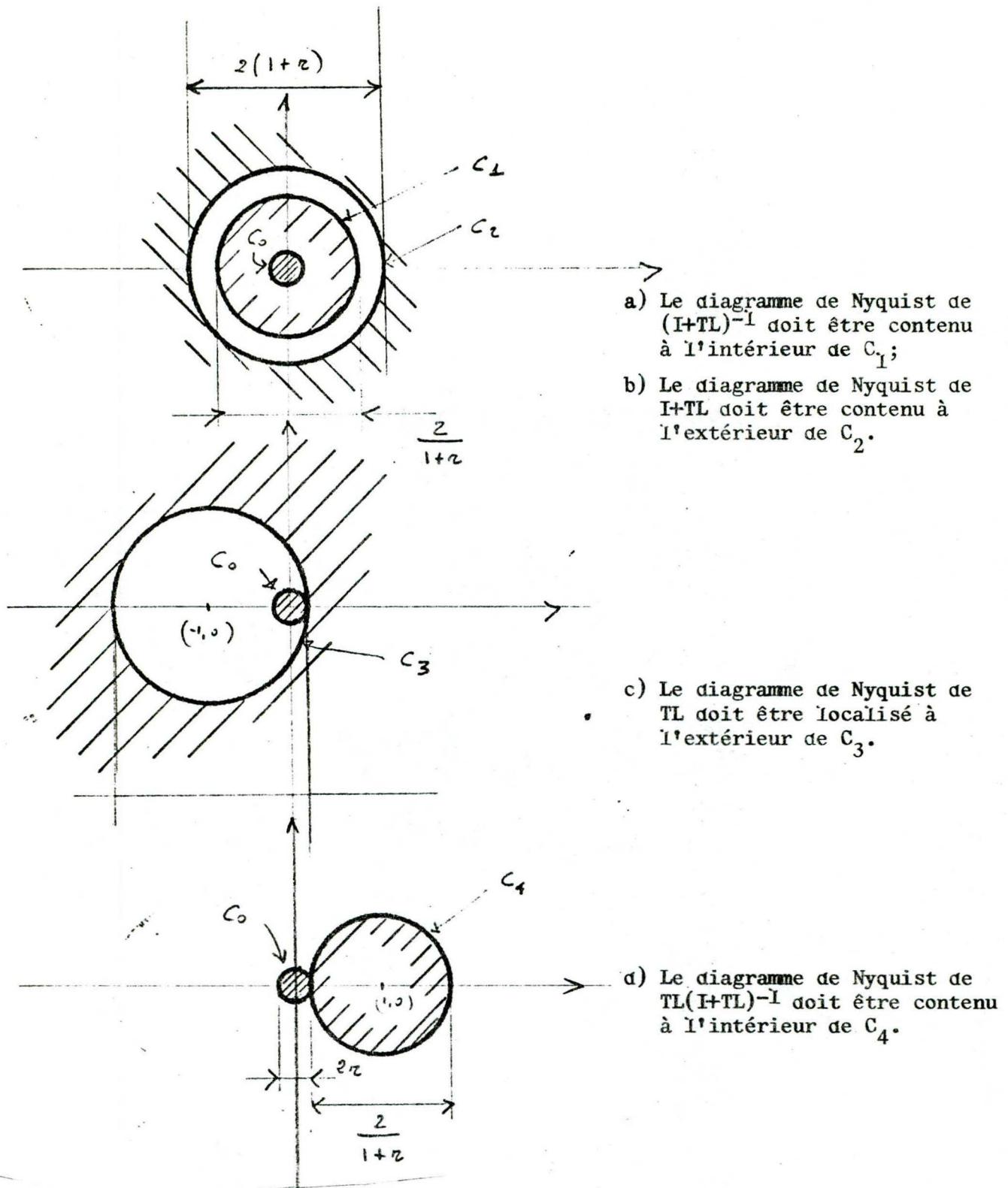


Figure 6: Conditions géométriques suffisantes pour une amélioration de la sensibilité: le diagramme de Nyquist de ΔTL est supposé être contenu à l'intérieur du cercle C_0 .

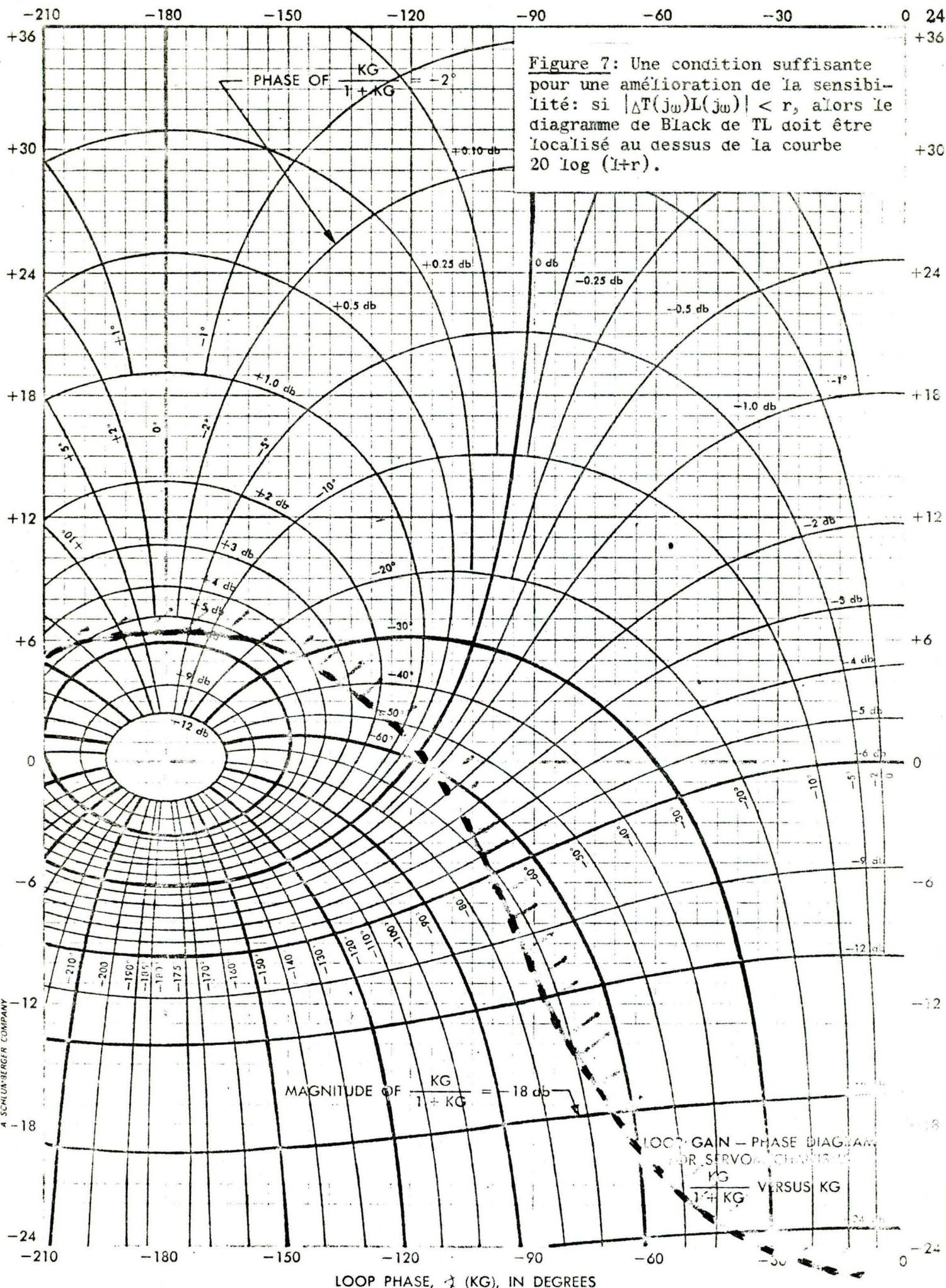


Figure 7: Une condition suffisante pour une amélioration de la sensibilité: si $|\Delta T(j\omega)L(j\omega)| < r$, alors le diagramme de Black de TL doit être localisé au dessus de la courbe $20 \log(1+r)$.

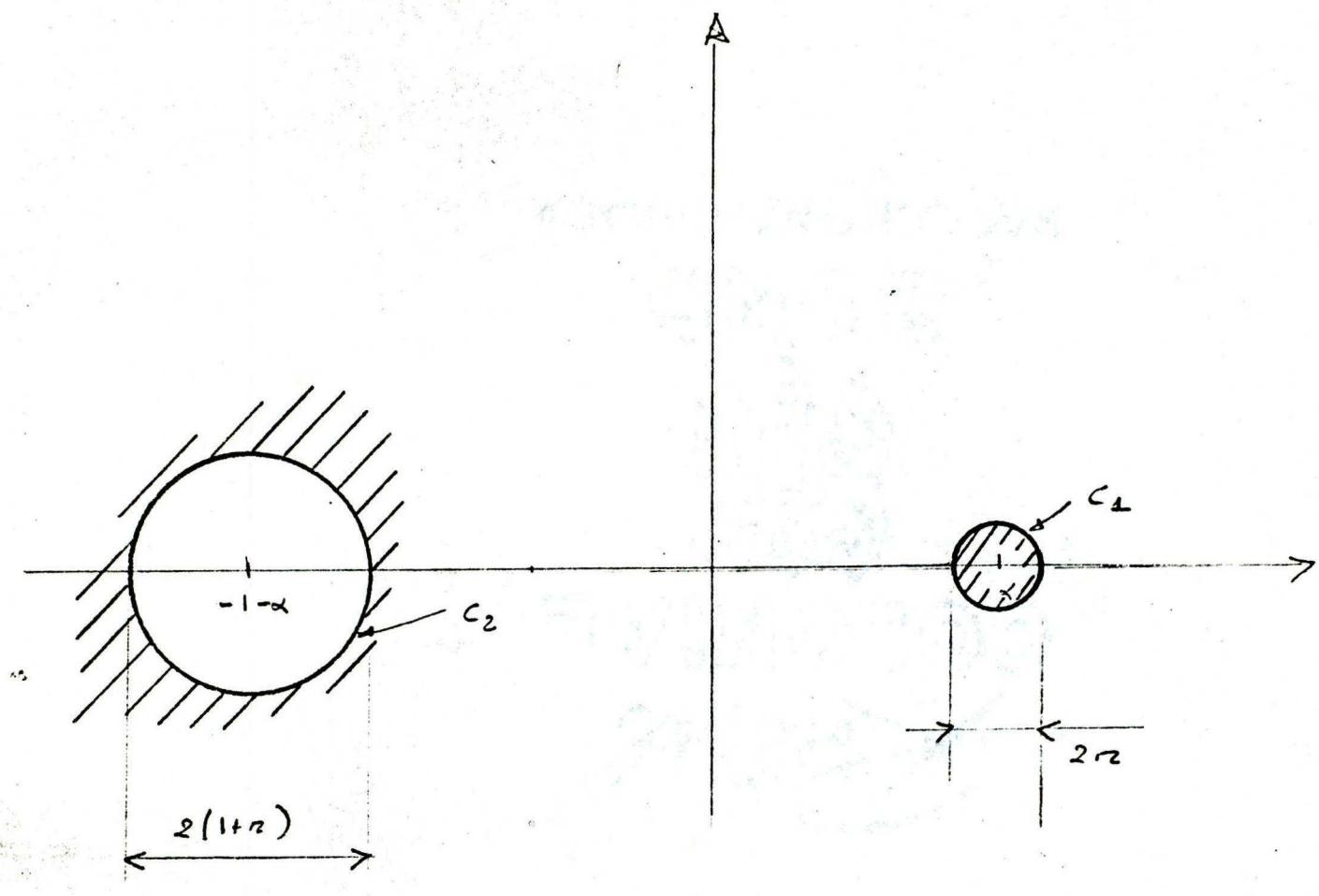
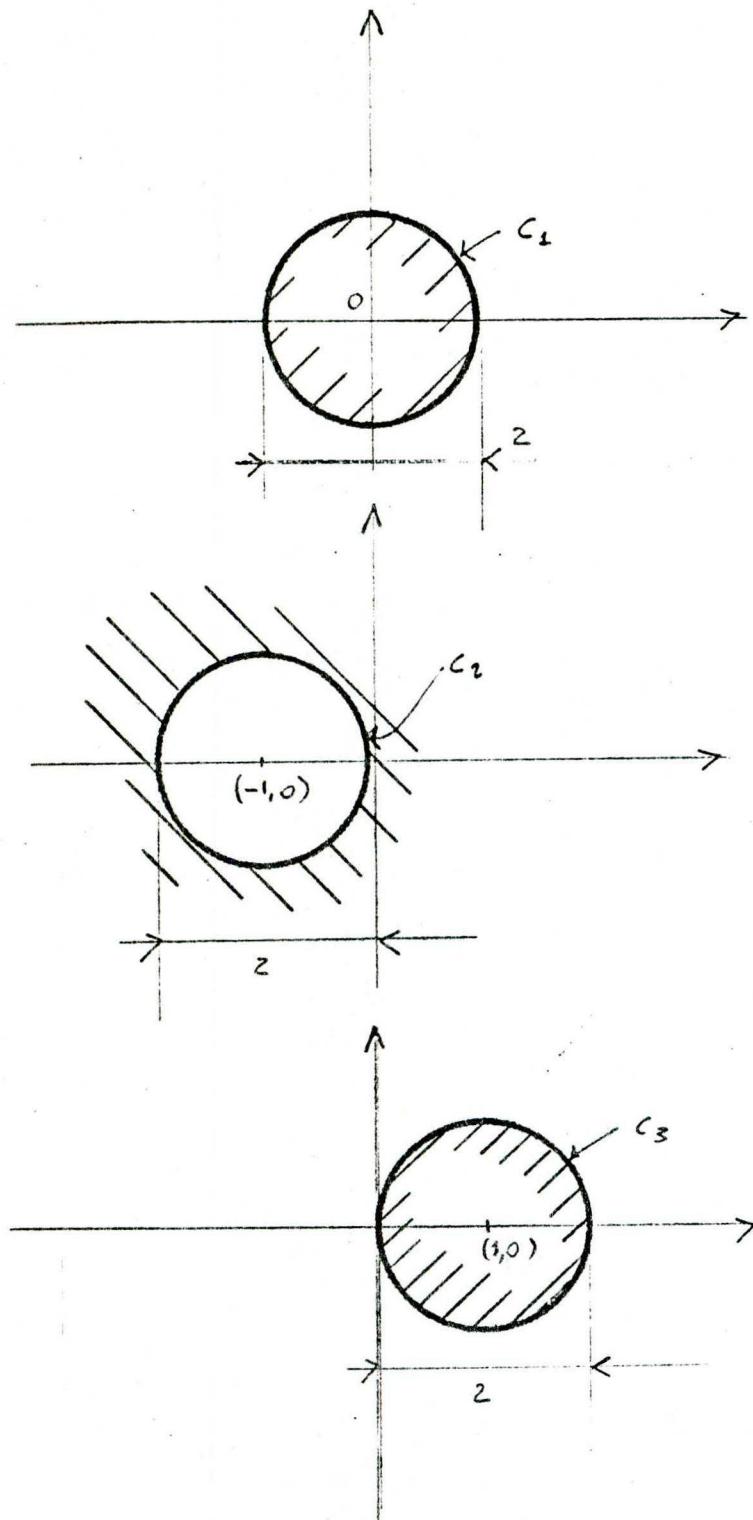
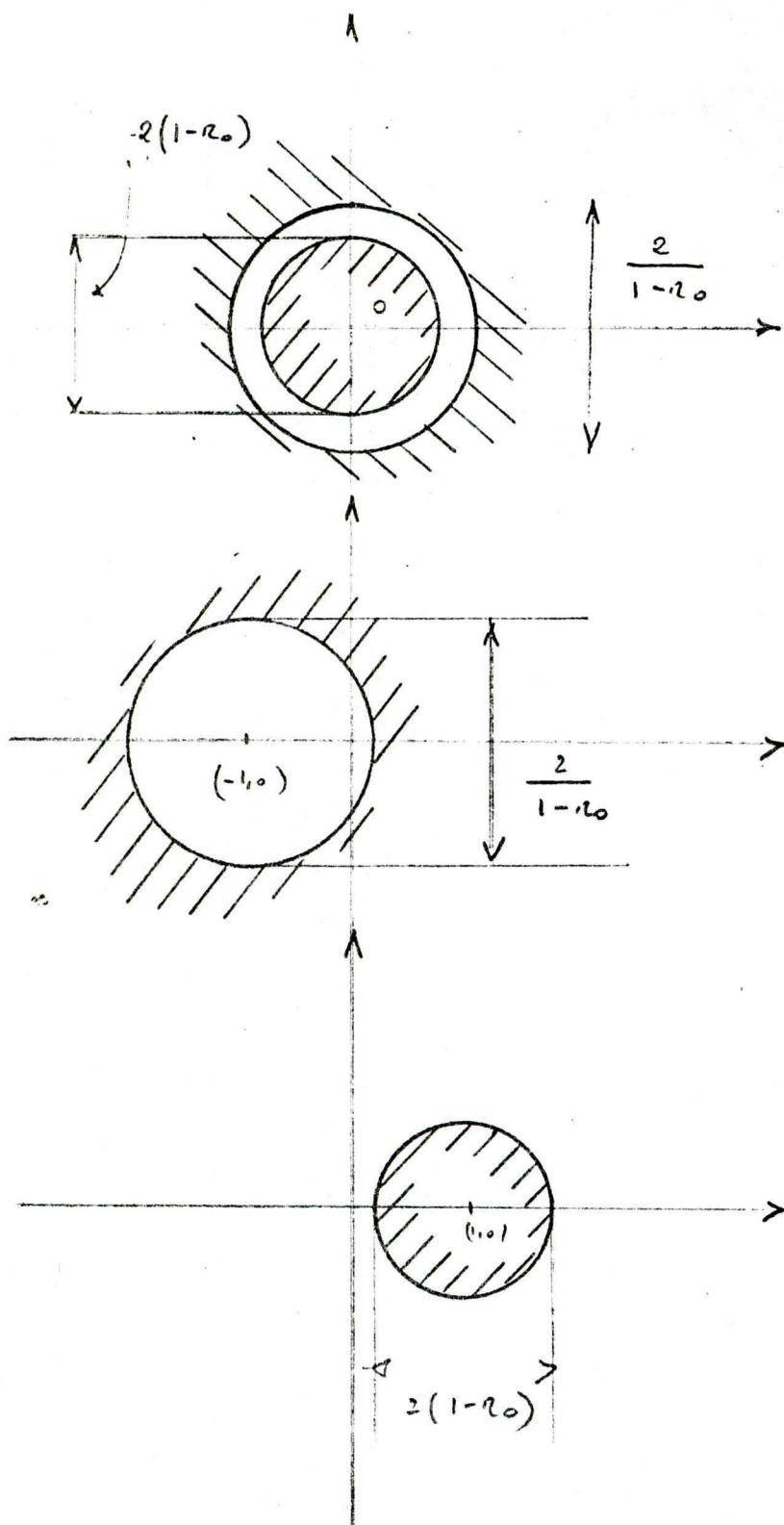


Figure 8: Une condition suffisante pour une amélioration de la sensibilité est que le diagramme de Nyquist de ΔTL soit contenu à l'intérieur de C_1 , et le diagramme de Nyquist de C_2 soit localisé à l'extérieur de C_1 .



- a) Le diagramme de Nyquist de $(I+TL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur de C_1 ;
- b) Le diagramme de Nyquist de $(I+TL)$ est localisé à l'extérieur de C_1 .
- c) Le diagramme de Nyquist de TL est localisé à l'extérieur de C_2 .
- a) Le diagramme de Nyquist de $TL(I+TL)^{-1}$ est contenu à l'intérieur de C_3 .

Figure 9: Une condition suffisante pour une amélioration de la sensibilité sous l'hypothèse que le diagramme de Nyquist de $\Delta T(j\omega)L(j\omega)[I+T(-j\omega)L(-j\omega)]$ soit contenu dans la partie droite du plan complexe.



- a) Le diagramme de Nyquist de $(I+TL)^{-1}$ doit être contenu à l'intérieur de C_1 ;
- b) Le diagramme de Nyquist de $(I+TL)$ est localisé à l'extérieur de C_2 .
- c) Le diagramme de Nyquist de TL est contenu à l'intérieur de C_3 .
- d) Le diagramme de Nyquist de $TL(I+TL)^{-1}$ est localisé à l'extérieur de C_4 .

Figure 10: Une condition suffisante pour une amélioration de la sensibilité sous l'hypothèse que le diagramme de Nyquist de $\Delta TL(I+TL)^{-1}$ soit contenu à l'intérieur du cercle avec rayon unitaire et centre dans l'origine (r_0 est définie dans l'Assertion 2.6)

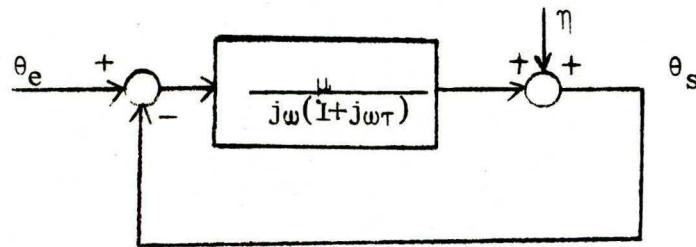


Figure A.1: Asservissement de Position angulaire.

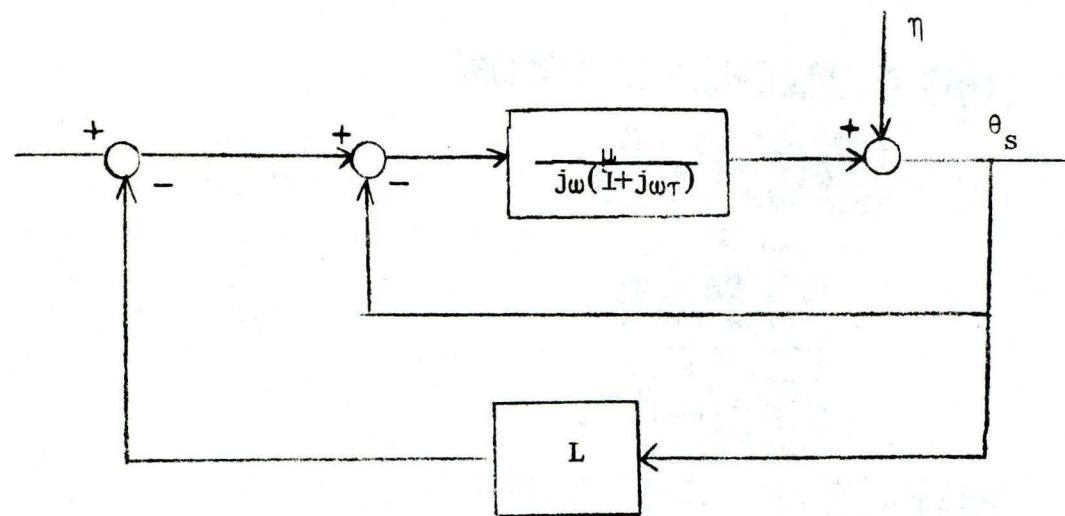
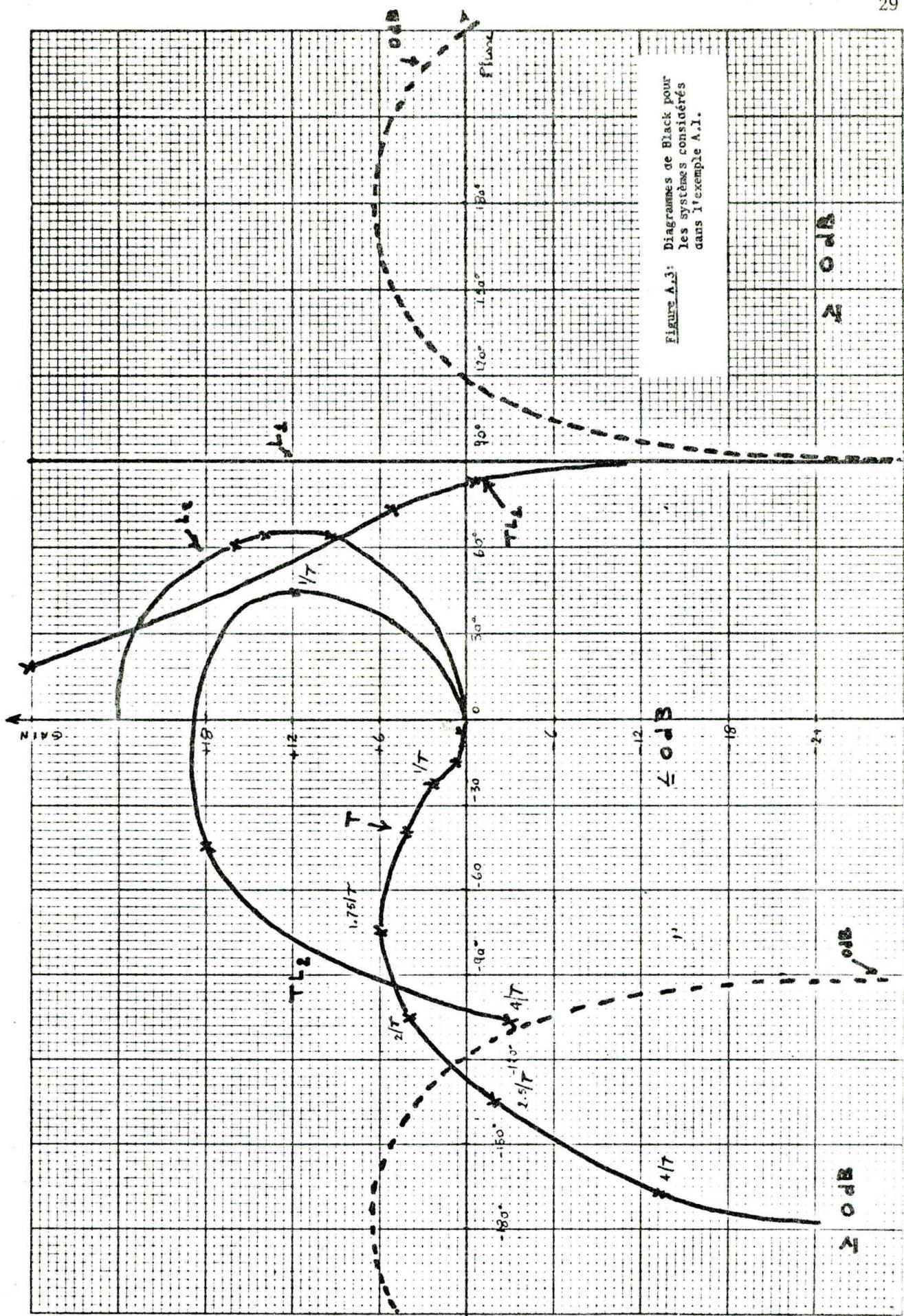


Figure A.2: Asservissement de Position angulaire avec compensation additionnelle.



Periodicals

73452

A CONSULTER
SUN PLATE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288663 6