PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Analyse des systèmes à contre réaction avec chaîne ouverte multipuissance
Title:

Auteurs: Romano M. De Santis, & W. A. Porter
Authors:

Date: 1973

Type: Rapport / Report

Référence: De Santis, R. M., & Porter, W. A. (1973). Analyse des systèmes à contre réaction avec chaîne ouverte multipuissance. (Rapport technique n° EP-R-73-32). https://publications.polymtl.ca/6128/
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: https://publications.polymtl.ca/6128/
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-73-32
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
SECTION AUTOMATIQUE

Rapport Technique EP73-R-32
Classification: Library of Congress no.....

ANALYSE DES SYSTEMES A CONTRE REACTION AVEC CHAINE OUVERTE MULTIPUISSANCE

par

Romano M. DeSantis

&

William A. Porter

1er novembre 1973

Ecole Polytechnique de Montréal

C.P. 501
Snowdon
Montréal 248

CA2PQ
UP4
73R32
FRE

Bibliothèque
Ecole
Polytechnique
MONTRÉAL

CLASSIFICATION
CA2PQ
UP4
73R32 FRE

No D'ENTRÉE
73190

ECOLE POLYTECHNIQUE BIBLIOTHEQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE BIBLIOTHEQUE

OCT 31 1973

Rapport Technique EP73-R-32
Classification: Library of Congress no.....

ANALYSE DES SYSTEMES A CONTRE REACTION AVEC CHAINE OUVERTE MULTIPUISSANCE

par

Romano M. DeSantis

&

William A. Porter

1er novembre 1973

A CONSULTER SUR PLACE

73190

ANALYSE DES SYSTEMES A CONTRE REACTION AVEC CHAINE OUVERTE MULTIPUISSANCES

Romano M. De Santis
Département de Génie Electrique
Division d'Automatique
Ecole Polytechnique
Montréal, Québec

William A. Porter
Electrical and Computer Engineering Department
The University of Michigan
Ann Arbor. Michigan

Le contenu de ce rapport est également disponible en langue anglaise dans: "ON CAUSALITY AND INVERTIBILITY IN MULTIPOWER SYSTEMS" (Technical Report, SEL 75, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan).

ANALYSE DES SYSTEMES A CONTRE REACTION AVEC CHAINE OUVERTE MULTIPUISSANCE +

Romano M.DeSantis* William A. Porter**

SOMMAIRE

Cette recherche concerne l'analyse du comportement entrée-sortie des systemes à contre réaction dont la chaine ouverte peut être représentée par un opérateur, k, "multipuissance", borné et strictement causal, défini sur un espace de résolution Hilbertien. Elle vise à étudier les questions suivantes: i) Etant donnée l'entrée ,y, la sortie ,x, est-elle bien définie? (existence, unicité) ii) Si x est bien défini, que peut-on dire de la transformation $y \rightarrow x$? (causalité, continuité) iii) Etant donné y, comment calculer x ? (Méthode de calcul).

En général, une entrée à énergie finie peut engendrer, à la sortie de la boucle de retour, des grandeurs à énergie infinie (avec temps de fuite éventuellement fini). Cependant, le domaine des entrées pour lesquelles cette difficulté n'intervient pas, est un domaine ouvert et contenant l'origine. De plus, sur ce domaine, la sortie est une fonction continue et causale de l'entrée et de la boucle ouverte du système, et elle peut être calculée en utilisant des algorithmes non linéaires déjà disponibles. Ces résultats peuvent être avantageusement utilisés pour l'étude de la stabilité, de la sensibilité, et de la controlabilité des systèmes dynamiques.

+ Cette recherche a été en partie subventionnée par le Conseil National de la Recherche du Canada, Octroi-A-8244, et par le U.S.A. Office of Scientific Research, Grant No. 732427

* Ecole Polytechnique de Montréal, Québec

** University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

ANALYSE DES SYSTEMES A CONTRE REACTION AVEC CHAINE OUVERTE MULTIPUISSANCE

Table des Matières

0. SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

2. PRELIMINAIRES MATHEMATIQUES

3. CONCEPTS DE CAUSALITE

4. EQUATIONS D'OPERATEURS MULTIPUISSANCE

5. CAS LINEAIRE

6. CAS BIPUISSANCE

7. RESULTATS CONCERNANT L'IMAGE

8. EXTENSION AU CAS MULTIPUISSANCE

9. APPLICATION

10. CONCLUSIONS

11. REFERENCES

1. INTRODUCTION

L'utilisation d'espace de résolution s'est récemment révélée comme étant un instrument particulièrement utile, et quelquefois essentiel pour l'analyse des problèmes de causalité, stabilité, sensibilité des systèmes dynamiques.

Cette étude vient s'ajouter à la littérature sur les questions d'inversibilité et de causalité des opérateurs sur des espaces de résolution Hilbertien. Les questions auxquelles nous aimerions répondre sont les suivantes: Si K est une somme d'opérateurs multilinéaire, sur un espace de résolution Hilbertien: (1) Dans quelles conditions I + K est-elle injective? (2) Quelle est l'image de I+K ? (3) Si $y = (I+K)x$, dans quelles conditions la transformation $y \to x$ est-elle causale ?

De par leur caractère général, ces questions apparaissent, bien sûr, insaisissables. Cependant, en limitant notre attention à la structure causale de K et aux implications qui en résultent sur les 3 questions posées, quelques progrès peuvent être faits. Dans ce sens, les propriétés de "causalité stricte" et "d'absence de mémoire" joueront un rôle important dans le développement.

Le problème d'inversibilité de, I + K, a reçu une attention considérable. En particulier, Browder [1], Dolph [2] et Minty [3] ont donné des conditions suffisantes d'inversibilité dans le cas où K est un opérateur monotone. Des résultats semblables ont été obtenu par Petryshyn [4] et Shinbrot [5] qui considéraient des opérateurs K munis de propriétés spéciales de compacité.

En ce qui concerne la causalité de $(I + K)^{-1}$, les premiers travaux s'intéressaient aux systèmes linéaires stationnaires, (Foures et Segal [6], et Youla Castriota et Carlin [7]) et étaient basés sur le théorème de Paley et Wiener [8]. Plus récemment Sandberg [9] considérait les systèmes non linéaires variant dans le temps et étudiait le lien entre les concepts de causalité et d'énergie. Damborg [10], [11] a établi une condition suffisante de causalité de $(I + K)^{-1}$ sous la forme d'une expression utilisant les concepts de dephasage à 'incrémentation tronquée'. Saeks [12] a considéré des systèmes linéaires sur un espace d'Hilbert et a établi la causalité de $(I + K)^{-1}$ lorsque K est causal et satisfait une condition sous forme de produit scalaire.

Dans le même contexte Porter [13] a montré que $(I + K)^{-1}$ était causal si K est causal et dissipatif. Finalement DeSantis [17], [18] concentra son attention sur ces systèmes causals lorsque l'avenir de la sortie est strictement déterminé par le passé de l'entrée; de tels systèmes sont dits strictement causals. Cette approche mène de façon naturelle à l'utilisation d'espace de résolution Hilbertien proposée en [12], [13] et [14] et qui sera également adoptée dans le présent article.

Le lien entre causalité stricte et inversibilité causale a déjà été étudié dans la littérature technique. En particulier, des résultats de Gohberg et Krein [16] sur la théorie abstraite des opérateurs de Volterra peuvent être interprétés [17] comme la démonstration de l'inversibilité de $I + K$ et de la causalité de $(I + K)^{-1}$ lorsque K est linéaire, totalement continue et strictement causal. Le champ d'application de ces résultats reste cependant limité étant donné les conditions exigeantes

de linéarité et de continuité complète qui sont posées. Cet article, ainsi que la référence [20], peuvent être perçues comme des efforts visant à supprimer la nécessité de ces conditions restrictives.

2. PRELIMINAIRES MATHEMATIQUES.

Dans cette section nous résumons les principales définitions des opérateurs multi-linéaires et des espaces de résolution Hilbertiens. Considérons d'abord un espace d'Hilbert,H, sur le corps, F, et son produit cartésien d'ordre n, H^n, muni des règles usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Supposons que W est une fonction sur le domaine H^n, a images dans H. En utilisant les notations $(x^1,\ldots,x^n) \in H^n$ et $W[x^1,\ldots x^n]$ nous avons:

Définition 1. Une fonction $W: H^n \to H$ est dite n-linéaire si

$W[x^1,\ldots x^i + \alpha y,\ldots x^n] = W[x^1,\ldots,x^i,\ldots x^n] + \alpha W[x^1,\ldots,y,\ldots,x^n]$

pour tout x^i, $y \in H$, $i = 1,\ldots, n$ et tout $u \in F$. (i)

Dans le cas n = 2 le terme bilinéaire est utilisé au lieu de n-linéaire. De la même façon le terme multilinéaire est utilisé lorsque n est arbitraire ou sans importance dans la suite du développement. Par abus de langage nous nous référerons à W comme étant un opérateur multilinéaire sur H.

A chaque opérateur n-linéaire $W: H^n \to H$ on associe une fonction $\hat{W}: H \to H$ définie par:

$$\hat{W}(x) = W[x,\ldots,x],\ x \in H. \qquad (1)$$

(i) Un opérateur linéaire peut être considéré comme un cas spécial d'opérateur n-linéaire.

Définition 2. Une fonction $\hat{W}: H \to H$ est appelée opérateur n-puissance s'il existe un opérateur n-linéaire $W: H^n \to H$ tel que l'équation (1) soit satisfaite.

Définition 3. Une transformation $\hat{W}: H \to H$ est multipuissante si elle est donnée par une combinaison linéaire d'opérateurs n-puissance.

Un opérateur n-linéaire est dit borné si:

$$\|W\| = \sup_{\Gamma} \| W[x^1,\ldots,x^n]\| < \infty$$

où $\Gamma = \{ \|x^1\| = \| x^2 \| = \|x^n\| = 1\}$. De la même façon l'opérateur n-puissance $\hat{W}$ est borné si:

$$\|\hat{W}\| = \sup_{\|x\|=1} \| \hat{W}(x)\| < \infty.$$

Les nombres $\|W\|$ et $\|\hat{W}\|$ sont appelées respectivement norme n-linéaire et norme n-puissance, évidemment $\|\hat{W}\| \leq \|W\|$. Un opérateur multipuissance est borné s'il est composé d'opérateurs n-puissance bornés.

Soit W un opérateur bilinéaire sur H. La permutation, W^*, et la moyenne $\bar{W}$, de W sont définies respectivement par:

$$W^*[x,y] = W[y,x]$$

$$\bar{W}[x,y] = 1/2 \{W[x,y] + W[y,x]\}.$$

Si $W = W^* = \bar{W}$, l'opérateur bilinéaire est dit symétrique. Plus généralement nous avons:

Définition 4. L'opérateur n-linéaire W^{*p} est appelé permutation de type p de l'opérateur n-linéaire W si la relation suivante est satisfaite

$$W^{*p}[x^1,x^2,\ldots,x^n] = W[x^{\gamma 1},x^{\gamma 2},\ldots,x^{\gamma n}]$$

où $p = \{\gamma 1,\gamma 2,\ldots,\gamma n\}$ est une permutation de l'ensemble ordonné $\{1,2,\ldots,n\}$, et $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ un élément quelconque de H^n.

Définition 5. $\hat{W}$ est dite moyenne de W si

$$\hat{W}[x^1,x^2,\ldots,x^n] = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n!} W^{*pj}[x^1,x^2,\ldots,x^2]$$

où $\{pj: j = 1,n!\}$ sont toutes des permutations distinctes de $\{1,2,\ldots,n\}$ et $(x^1,x^2,\ldots,x^n) \in H^n$.

Définition 6. W est dite symétrique si les équations

$$W[x^1,x^2,\ldots,x^n] = W^{*p}[x^1,x^2,\ldots,x^n] = \hat{W}[x^1,x^2,\ldots,x^n]$$

sont satisfaites pour toute permutation p de $\{1,2,\ldots,n\}$ et pour tout $(x^1,x^2,\ldots,x^n) \in H^n$.

En traitant des opérateurs multipuissance, il est évident que W, W^* et $\hat{W}$ génèrent tous le même $\hat{W}$.

Exemple 1. Soit H, l'espace Euclidien R^2, muni du produit scalaire ordinaire. Considérons l'opérateur $W_2:[R^2]^2 \to R^2$ défini comme suit:

Si $z = (z_1,z_2)$, $x^1 = (x_1^1,x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2) \in R^2$, et $z = W_2[x^1,x^2]$, alors,

$$z_1 = \beta_{111}x_1^1x_1^2 + \beta_{112}x_1^1x_2^2 + \beta_{121}x_2^1x_1^2 + \beta_{222}x_2^1x_2^2 ,$$

$$z_2 = \beta_{211} x_1^1 x_1^2 + \beta_{212} x_1^1 x_2^2 + \beta_{221} x_2^1 x_1^2 + \beta_{222} x_2^1 x_2^2$$

où β_{ijk} est un nombre réel. Cet opérateur est bilinéaire et borné; il est symétrique si $\beta_{ijk} = \beta_{ijk}$ pour tout $i,j,k \in \{1,2\}$.

Exemple 2. Soit $H = L_2(\Lambda)$ l'espace d'Hilbert des fonctions quadratiques intégrables définies sur l'intervalle $\Lambda = [0, \frac{\pi}{2}]$. Considérons une fonction à valeurs scalaires $K(t,s_1,s_2)$ définie sur Λ^3 et telle que

$$\|K\| = \iiint_{\Lambda^3} |K(t,s_1,s_2)|^2 dt\, ds_1 ds_2 < \infty.$$

Pour tout couple $x^1, x^2 \in L_2(\Lambda)$ l'intégrale

$$y(.) = \iint_{\Lambda^2} K(.,s_1,s_2) x^1(s_1) x^2(s_2) ds_1 ds_2$$

définit un opérateur $L_2^2 \to L_2$. Cet opérateur est borné, car pour tout couple $x^1, x^2 \in L_2(\Lambda)$ on a

$$\|y\| \leq \|K\| . \|x^1\| . \|x^2\| .$$

Il est symétrique si $K(t,s_1,s_2) = K(t,s_2,s_1)$

Dans ce qui suit nous présenterons la structure des espaces de résolution hilbertien [12],[14],[20]. Soit H un espace d'Hilbert, et ν un ensemble ordonné linéairement avec t_o et t_∞ respectivement éléments minimum et maximum. Une famille $\{P^t\} = IR$, $t \in \nu$, de projections orthogonales sur H est une Résolution de l'identité si elle satisfait les deux propriétés suivantes:

Ri) $P^{t_o} H = 0$, $P^{t_\infty} H = H$, et $P^k H \supseteq P^\ell H$ si $k > \ell$;

Rii) si $\{P^i\}$ est une séquence de projection orthogonale dans IR et s'il existe une projection orthogonale P telle que $\{P^i x\} \to Px$, pour tout $x \in H$, alors $P \in IR$.

Définition 7. Un espace d'Hilbert, H muni d'une Résolution d'Identité, $\{P^t\}$ est appelé Espace de Résolution Hilbertien (en Abrégé: ERH) et est noté $[H,P^t]$.

Exemple 3. Soit $H = R^2$ et considérons la famille de projections orthogonales $\{P^t\}$, $t \in \{0,1,2\}$ définie comme suit:
Si $x,y \in R^2$ et $y = P^t x$, alors

$$y = \begin{cases} (0,0) \text{ si } t = 0 \\ (x_1,0) \text{ si } t = 1 \\ (x_1,x_2) \text{ si } t = 2. \end{cases}$$

La famille de projections orthogonales $\{P^t\}$ est une résolution de l'identité et le couple $[R^2, P^t]$ est un espace de résolution hilbertien

Pour un opérateur K sur $[H,P^t]$, la notation $\int dPKdP$ représentera un opérateur dérivé de K, et calculé de la façon suivante. D'abord, soit $\Omega = \{t_o, t_1, \ldots, t_j, \ldots t_n = t_\infty\}$ une partition de ν, c'est à dire t_{j+1} pour tout j. L'ensemble de telles partitions est partiellement ordonné par inclusion: $\Omega_1 \geq \Omega_2$ si tout point de Ω_2 appartient à Ω_1. Pour simplifier, posons $P^j = P^{t_j}$ et $\Delta_j = P^j - P^{j-1}$, $j = 1,\ldots,n$.

Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe Ω_ϵ et une fonction, notée $\int dPKdP$, tels que

$$\| \int dPKdP - \sum_1^n \Delta_j K \Delta_j \| < \epsilon$$

pour tout $\Omega \geq \Omega_\epsilon$, alors la série de sommes converge et

$$\int dPKdP = \lim \Sigma\, \Delta_j K \Delta_j .$$

Exemple 5. Considérons dans $[L_2(\Lambda), P^t]$ l'opérateur bipuissance induit par la transformation bilinéaire décrite dans l'exemple 2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et choisissons la partition

$$\Omega_\varepsilon = \{\xi_i^\varepsilon\}$$

telle que

$$\iiint_{\xi_i^\varepsilon}^{\xi_{i+1}^\varepsilon} K^2(t,s_1,s_2)dt\, ds_1 ds_2 < \varepsilon .$$

Remarquer que pour tout $\{\xi_i\} = \Omega \supseteq \Omega_\varepsilon$, on doit avoir

$$\| \sum_{j=1}^{N} \Delta_j W[\Delta_j, \Delta_j] \| < \varepsilon .$$

Il s'en suit que l'opérateur considéré est tel que $\int dPW_2 dP = 0$.

Observez que si K est n-puissance et borné alors:

$$\|\Delta_j K \Delta_j x\| \leq M \|\Delta_j x\|^n \qquad j \in \Omega,\ x \in H \tag{2}$$

pour un scalaire M. Si $\int dPKdP = 0$ alors Ω peut être choisi tel que M puisse être pris arbitrairement petit.

Un opérateur n-linéaire W sur $[H,P^t]$ est dit causal (anticausal) si $P^tW = P^tWP^t, ((I-P^t)W(I-P^t))$. W est sans-mémoire s'il est à la fois causal et anticausal. W est précausal s'il existe une partition $\Omega \in \nu$ telle que $W = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i WP^{i-1}$. W est strictement causal s'il existe une suite d'opérateurs précausals $\{W_i\}$ tel que $\{W_i\} \to W$, où la convergence est entendue dans le sens uniforme c'est à dire en relation avec la metrique, définie par la norme des opérateurs n-linéaires. Un opérateur n-puissance est causal, (précausal, strictement causal) s'il est généré par un opérateur n-linéaire causal (précausal, strictement causal) (ii)

De même, l'opérateur multipuissance est causal (précausal, strictement causal) s'il a des composantes n-puissance causales (précausales, strictement causales).

Exemple 1. Considérons l'opérateur bilinéaires, $W_2:[R^2,P^t]^2 \to [R^2,P^t]$ décrit dans l'exemple 2.1.

Cet opérateur est:

causal si $\beta_{ijk} = 0$ lorsque j ou k est plus grand que i;

sans-mémoire si $\beta_{ijk} \neq 0$ seulement lorsque $j = k = i$;

précausal si $\beta_{ijk} = 0$ lorsque j ou k est plus grand ou égal à i.

Exemple 2. L'opérateur bilinéaire $[L_2[0,\frac{\pi}{2}], P^t]^2 \to [L_2[0,\frac{\pi}{2}],P^t]$ décrit dans l'exemple 2.2 est strictement causal si $K(t,s_1,s_2) = 0$ lorsque s_1 ou s_2 est plus grand que t. Il est précausal si il existe $\epsilon > 0$ tel que $K(t,s_1,s_2) = 0$ lorsque s_1 ou s_2 est plus grand que $t - \epsilon$. Il est sans-mémoire si $K(t,s_1,s_2) = 0$ sauf pour $s_1 = s_2 = t$ dans quel cas un comportement du noyau lié à la théorie de distribution est nécessaire afin d'éviter la solution triviale $K \equiv 0$.

(ii) Si W est précausal, il est strictement causal et causal; si W est strictement causal alors il est causal mais pas nécessairement précausal.

Observez que si W est causal, alors les équations

$$\begin{aligned} \Delta_1 Wx &= \Delta_1 W\Delta_1 x \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ \Delta_j Wx &= \Delta_j W[\Delta_j + \Delta_{j-1} + \ldots + \Delta_1]x \end{aligned}$$

sont satisfaites pour $x \in H$ arbitraire et pour toute partition Ω. Egalement, si W est sans mémoire, alors

$$\Delta_j Wx = \Delta_j W\Delta_j x$$

pour tout $x \in H$ et Δ_j arbitraire.

Proposition 1. Si W est causal alors pour tout $t \in \nu$ on a:

$$W(I - P^t) = (I - P^t)W(I - P^t).$$

Proposition 2. ([12], Coro. 4.11). W est sans-mémoire si et seulement si

$$W = \int dPWdP.$$

Proposition 3. Si W est strictement causal alors $\int dPWdP = 0$.

Proposition 4. Supposons que T et W soient des opérateurs causals, bornés respectivement linéaires et multilinéaire. Si T ou W est précausal (strictement causal), alors TW et WT sont aussi précausals (strictement causals).

Démonstration. Si T est précausal alors on peut écrire $T = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i TP^{i-1}$. En utilisant la causalité de W il s'en suit que

$$TW = \sum_{i=1}^{N} \Delta TP^{i-1}WP^{i-1} = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i TWP^{i-1}.$$

Donc, TW est précausal. Supposons maintenant que T est strictement causal. Alors, il existe une suite $\{T_i\}$ d'opérateurs précausals telle que $\{T_iW\}\to TW$, où chaque T_iW est précausal.

Proposition 5. La classe des opérateurs n-linéaires bornés causals (strictement causals) est une algèbre de Banach.

4. EQUATIONS D'OPERATEURS MULTIPUISSANCE

Etant donné l'espace d'Hilbert H, et un élément $y \in H$, nous considérons l'équation

$$x = y + \tilde{W}x \qquad (4)$$

où $\tilde{W} = \sum_{n=1}^{N} W_n$, W_n étant un opérateur n-puissance. Nous aurons besoin d'une structure de causalité et de ce fait H devient un espace de Resolution Hilbertien $[H,P^t]$. Pour des raisons de simplicité et sans aucune perte de généralité nous supposerons que notre résolution d'identité ne présente pas de discontinuité, c'est à dire que pour tout $x \in H$ la partition Ω peut être choisie telle que la relation

$$\|\Delta_j x\| < \beta \quad \text{tout } j \in \Omega$$

soit satisfaite pour tout $\beta > 0$.

Les problèmes d'existence et d'unicité d'une solution, x, pour des équations du genre cité plus haut ont été étudiés entre autre par Rall [21], McFarland [32], et Prenter [33]. Leurs résultats concernent le cas où l'opérateur $\tilde{W}$ et l'élément fixé y satisfont des conditions

de norme du type décrit dans la version spécialisée du théorème de transformation contractive suivant (voir Prenter [33])

Proposition 1. Si $\tilde{W} = \sum_{n=1}^{N} W_n$ et $\sum_{n=1}^{N} n\|y\|^{n-1} \|W_n\| < 1$, alors l'équations (4) a une solution x bien définie. De plus la transformation $y \to x$ est continue en son domaine et peut être calculée comme limite de la série suivante:

$$\begin{aligned} x_0 &= y \\ x_1 &= y + \tilde{W}x_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i &= y + \tilde{W}x_{i-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Corollaire 1. Si en plus des hypothèses de la proposition 1, $\tilde{W}$ est causal, alors la solution de l'équation (4) est une fonction causale de y.

Les résultats de la transformation contractive n'utilisent pas la structure de causalité. Lorsque $\tilde{W}$ ne satisfait pas la condition de norme de la proposition précédente, nous ne pouvons rien conclure, dans l'état actuel des recherches, sur les propriétés de la solution de l'équation (4). Il est facile de montrer cependant que lorsque $\tilde{W}$ est précausal nous avons alors:

Proposition 2. Si $\tilde{W} = \sum_{n=1}^{N} W_n$ est borné et précausal alors: i) l'équation (4) définit une transformation $y \to x$ continue et causale; ii) La transformation $y \to x$ peut être calculée en utilisant les itérations de la transformation contractive définies par les équations (5).

Les résultats précédents et notre définition d'un opérateur strictement causal comme la limite uniforme d'une suite d'opérateurs précausals, conduisent à la question suivante: les conditions de précausalité de la proposition 2 peuvent-elles être réduites à des conditions de causalité stricte?

Pour répondre à cette question nous supposerons que $\tilde{W}$ est strictement causal et nous étudierons l'existence et les propriétés de causalité et de continuité de l'opérateur inverse $(I + \tilde{W})^{-1}$. En particulier, dans la section suivante, nous discuterons le cas où $\tilde{W} = T$ est un opérateur linéaire (ce cas fut étudié dans [17]). Nous étudierons ensuite le cas où $\tilde{W} = W_2$ est bilinéaire (section 6 et 7) et finalement nous étendrons nos résultats au cas plus général multilinéaire.

5. CAS LINEAIRE

Le principal résultat de [20] permet d'étendre la proposition 3.2 au cas strictement causal, lorsque $\tilde{W} = T$ est un opérateur linéaire

Proposition 1. ([17], Théorème 4.2). Si T est un opérateur linéaire borné et strictement causal, alors I + T est inversible, la série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge uniformément et $(I + T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T)^n$.

Pour l'étude d'un opérateur multipuissance, il est utile de considérer l'extension de la proposition 1.

Proposition 2. Supposons que T_o est un opérateur linéaire tel que $(I + T_o)^{-1}$ existe et est causal et borné. Alors pour toute suite d'opérateurs linéaires strictement causals $\{T_i\}$, $(I+T_o+T_i)$ est inversible et $(I+T_o+T_i)^{-1}$ est causal et borné. De plus si $\{T_i\}$ converge vers $\tilde{T}$, alors $\{(I+T_o+T_i)^{-1}\}$ converge vers $(I+T_o+\tilde{T})^{-1}$.

Démonstration: D'après l'inversibilité de $(I+T_o)$, on peut écrire:

$$(I+T_o+T_i) = [I+T_i(I+T_o)^{-1}](I+T_o).$$

Pour démontrer la première partie de la proposition, il suffit alors de montrer que $[I+T_i(I+T_o)^{-1}]$ est inversible, et que son inverse est causal et borné. Cela résulte du fait que $T_i\ (I+T_o)^{-1}$ est strictement causal, (Proposition 3.3), et de l'application de la proposition 1. Pour démontrer la seconde partie de la proposition il suffit de remarquer que $\tilde{T}$ est strictement causal (proposition 3.4) et d'utiliser de nouveau la proposition 1; le résultat est alors évident d'après l'identité: $(I+T_o+T_i)^{-1} - (I+T_o+\tilde{T})^{-1} = (I+T_o+T_i)^{-1}\ \{\tilde{T}-T_i\}(I+T_o+\tilde{T})^{-1}$.

Corollaire 1. Si $\{T_i\}$ est une suite convergente d'opérateur linéaire strictement causal, $\{T_i\} \to T_o$, alors la suite $\{(I+T_i)^{-1}\}$ est aussi convergente avec $\{(I+T_i)^{-1}\} \to (I+T_o)^{-1}$.

Corollaire 2. Si W est strictement causal, alors pour tout $y \in H$ l'équation

$$x = u - W\,[y, u-x]$$

représente une transformation bien définie, continue et causale $u \to x$. Cette transformation est une fonction continue causale de y et W.

6. CAS BIPUISSANT

Pour discuter des propriétés de la solution de l'équation (4) dans le cas où $\hat{W} = W[x,x]$ est bipuissant et strictement causal, nous commençons par établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation homogène. Ce résultat est alors utilisé pour obtenir d'abord l'unicité dans le cas non homogène (proposition 2) et ensuite la causalité de $(I+W)^{-1}$ (proposition 3). Les résultats qui suivent, concernent les propriétés de continuité de $(I+W)^{-1}$, (proposition 4, 5 et 6).

Proposition 1. Si $\hat{W}$ est bipuissance borné, causal et $\int dP\hat{W}dP = 0$, alors l'équation (4) admet une solution unique pour $y = 0$, soit $x = 0$.

Démonstration. Soit $x \in H$ tel que $0 = x+\hat{W}(x)$. Pour toute partition Ω, la causalité de $\hat{W}$ implique,

$$\Delta_1 x+\Delta_1\hat{W}\Delta_1 x=0$$

et, en utilisant l'équation (2) on a

$$||\Delta_1 x|| = ||\Delta_1 \hat{W}\Delta_1 x|| \leq M||\Delta_1 x||^2$$

En choisissant la partition Ω afin que $M < 1$ et $||\Delta_1 x|| < 1$ il s'en suit immédiatement que $\Delta_1 x = 0$.

En continuant ainsi nous obtenons également

$$\begin{aligned} ||\Delta_2 x|| &= ||\Delta_2\hat{W}(\Delta_1+\Delta_2]x|| \\ &= ||\Delta_2\hat{W}\Delta_2 x|| \\ &\leq M||\Delta_2 x||^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique $\Delta_2 x = 0$. En répétant la procédure sur tous les éléments de la partition on obtient le résultat $x = 0$.

Proposition 2. Soit $\hat{W}$ bipuissance, borné, et strictement causal: si $y = x_1+\hat{W}(x_1) = x_2+\hat{W}(x_2)$, on a $x_1 = x_2$.

Démonstration. Si $x_1 \neq x_2$ dans la proposition, alors

$$x_1-x_2 = \hat{W}(x_1) - \hat{W}(x_2)$$
$$= W[x_1,x_1]- W[x_2,x_2]$$

où W est symétrique. En utilisant cette symétrie on a

$$x_1-x_2 = W[x_1-x_2,x_1-x_2] - 2W[x_1-x_2,x_1]$$

en posant $z = x_1-x_2$ nous obtenons

$$(I+2W[.,x_1])z = W[z,z].$$

Cependant l'opérateur linéaire $2W[.,x_1]$ est strictement causal et par conséquent d'après la proposition 5.1, $I + 2W[.,x_1]$ a un inverse borné, causal. De plus en appliquant la proposition 3.3 il s'en suit que

$$\tilde{W}(.) = (I+2W[.,x_1])^{-1} \hat{W}(.)$$

satisfait les conditions de la proposition 1. En utilisant les résultats de cette dernière nous obtenons $z = 0 = x_1-x_2$.

Proposition 3. Si $\hat{W}$ est un opérateur borné strictement causal, alors sur son domaine la transformation $(I+\hat{W})^{-1}$ est causale.

Démonstration. Supposons qu'il existe $y_1,x_1,y_2,x_2 \in H$ tels que

$$x_i = y_i+\hat{W}(x_i).$$

Pour tout $t \in \nu$ supposons que $P^t y_1 = P^t y_2$. Alors d'après les équations précédentes nous devons avoir

$$P^t x_2 - P^t x_1 = P^t \hat{W}(x_2) - P^t \hat{W}(x_1)$$

et d'après la causalité de $\hat{W}$

$$P^t x_2 - P^t x_1 = P^t \hat{W}(P^t x_2) - P^t \hat{W}(P^t x_1).$$

D'après la proposition 2 il est facile de voir que cette dernière égalité et vérifiée si et seulement si $P^t x_2 = P^t x_1$. Ceci entraine $P^t(I+\hat{W})^{-1} = P^t(I+\hat{W})^{-1}P^t$.

Proposition 4. Si W_2 est borné et strictement causal alors le domaine de $(I+\hat{W})^{-1}$ est un ensemble ouvert. De plus, $(I+\hat{W})^{-1}$ est continue sur son domaine.

Démonstration. Pour démontrer que $(I+\hat{W})^{-1}$ est continue et que son domaine est ouvert il suffit de montrer que si u et x sont tels que

$$x = u + W[x,x],$$

alors il existe un $\varepsilon > 0$ et un $M > 0$ tels que, étant donné Δu quelconque de H, $\|\Delta u\| < \varepsilon$, on peut trouver un $\Delta x \in H$, $\|\Delta x\| \leq M\|\Delta u\|$, tel que

$$x+\Delta x = u + \Delta u + W[x + \Delta x, x+\Delta x]. \qquad (7)$$

En utilisant la bilinéarité de W et l'équation (6), nous avons

$$\Delta x = \Delta u + 2W[\Delta x, x] + W[\Delta x, \Delta x].$$

Cette dernière équation peut être réécrite de la façon suivante

$$\Delta x = (I-2W[.,x])^{-1}\Delta u + (I-2W[.,x])^{-1}W[\Delta x, \Delta x]$$

où, d'après la proposition 5.1, $(I-2W[.,x])^{-1}$ est une transformation bornée causale, et, d'après la proposition 3.3, $(I-2W[.,x])^{-1}\, W[.,.]$, est strictement causale.

En appliquant la proposition **4.1** il s'en suit que si Δu est tel que

$$\|(I-2W[.,x])^{-1}\,\Delta u\| \,.\, \|(I-2W[.,x])^{-1}\, W[.,.]\| \leq \frac{1}{4}$$

alors l'équation (7) admet vraiment une solution unique. Il en résulte que si:

$$4\,\|\Delta u\| \leq \{\|(I-2W[.,x])^{-1}\| \,.\, \|(I-2W[.,x])^{-1}\, W[.,.]\|\}^{-1} \leq 4\varepsilon$$

alors, Δx satisfait l'équation 7 et vérifie $\|\Delta x\| \leq M\,\|\Delta u\|$ où $M = 2\,\|(I - 2W[.,x])^{-1}\|$.

Proposition 5. Si W_2 est borné et strictement causal et si le couple $u,x \in H^2$ est tel que

$$x = u + W(x,x],$$

alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\tilde{W}$ bilinéaire borné et strictement causal satisfaisant $\|\tilde{W}-W\| < \varepsilon$, l'équation $x^1 = u + \tilde{W}[x^1,x^1]$ admet une solution unique, causal. De plus cette solution est une fonction continue de $\tilde{W}$ et de u.

Démonstration. En posant $\Delta W = \tilde{W}-W$ et $\Delta x = x^1 - x$, commençons par démontrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $\|\Delta W\| < \varepsilon$ alors l'équation

$$x+\Delta x = u + (W+\Delta W)[x+\Delta x, x+\Delta x] \qquad (9)$$

admet une solution unique Δx. Pour ce faire remarquons que l'équation 9 est équivalente à

$$\Delta x = 2W[\Delta x,x] + W[\Delta x,\Delta x] + 2\Delta W[\Delta x,x] + \Delta W[\Delta x,\Delta x] + \Delta W[x,x].$$

c'est à dire

$$\Delta x = (I-2(W+\Delta W)\,[.,x])^{-1}\,\Delta W[x,x]+(I-2(W+\Delta W)[.,x])^{-1}(\Delta W+W)[\Delta x,\Delta x] \qquad (10)$$

où les inverses existent en vertue de la proposition 5.1. D'après la proposition 4.1 nous trouvons alors que l'équation (10) admet une solution si

$$\|(I-2(W+\Delta W)[.,x])^{-1}\Delta W[x,x]\| \,.\, \|(I-2(W+\Delta W)\,[.,x])^{-1}(W+\Delta W)[.,.]\| \leq \frac{1}{4}\,.$$

Cela implique que l'équation (10) admet une solution si ΔW satisfait l'inégalité suivante

$$\|\Delta W[x,x]\| \leq \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{\|(I-2(W+\Delta W[.,x])^{-1}\|^2 .\, \|W+\Delta W[.,.]\|}\,.$$

Cependant, d'après la proposition 5.2, nous pouvons certainement trouver un $\varepsilon>0$ tel que, pour $\|\Delta W\|<\varepsilon$, l'inégalité précédente est satisfaite.

La continuité de Δx par rapport à u et à ΔW résulte de la proposition 5 qui implique que $\|\Delta x\| < \frac{1}{2}\ \|\Delta W[x,x]\|$ et de la proposition 4 qui affirme que x est une fonction continue de u.

Proposition 6. Supposons que $\{W_i\}$ soit une suite d'opérateurs bilinéaires strictement causals tels que $(I+W_i)^{-1}u$ existe pour quelque $u\in H$. Si $\{W_i\}\to W_o$, et $\{(I+W_i)^{-1}u\} \to x_o$, alors $(I+W_o)^{-1}u$ existe également et est égale à x_o.

Démonstration. Posons $\{(I-W_i)^{-1}u\}=\{x_i\}$ et remarquons que

$$\|x_o-u-W_o[x_o,x_o]\|=\|x_o-x_i+W_i[x_i,x_i]-W_o[x_o,x_o]\|$$

$$\leq\|x_o-x_i\|+\|W_i[x_i,x_i]-W_i[x_o,x_o]\|+\|W_o[x_o,x_o]-W_i[x_o,x_o]\|\,.$$

Si $\{x_i\} \to x_o$, et $W_i \to W_o$, alors le second membre de l'inégalité peut être rendu aussi petit que l'on veut et nous pourrons alors conclure que

$$x_o = u + W_o[x_o, x_o].$$

Les résultats des propositions 1-6, se résument par les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Si $\hat{W}$ est un opérateur bipuissance borné et strictement causal, alors, i) $I + \hat{W}$ est injective, ii) le domaine de $(I+W)^{-1}$ est un ensemble ouvert, iii) $(I+W)^{-1}$ est continue et causale sur son domaine.

Théorème 2. Si $\{\hat{W}_i\}$ est une suite d'opérateurs bipuissance précausals telle que $\{\hat{W}_i\} \to \hat{W}$ et $\{(I+\hat{W}_i)^{-1}y\} \to x_o$, alors $(I+\hat{W})^{-1}$ y est un élément bien défini dans H et égal à x_o. L'élément $(I+\hat{W})^{-1}y$ et une fonction continue de y et de $\hat{W}$.

Corollaire 1. Si $\hat{W}$ est strictement causal, alors l'équation $x = u+\hat{W}x$ admet une solution x_o si et seulement si pour tout $\epsilon>0$ il existe une partition Ω_ϵ tel que pour tout $\Omega > \Omega_\epsilon$ on a

$$\| (I+\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \hat{W} P^{i-1})^{-1} u - x_o \| < \epsilon .$$

Corollaire 2. Si W_2 est strictement causal, alors l'équation $x = u+\hat{W}x$ admet une solution x_o si et seulement si il existe une suite convergente de composantes précausales $\{\hat{W}_i\} \to \hat{W}$ tel que $\{(I+\hat{W}_i)^{-1}u\} \to x_o$.

Corollaire 3. Soit $\hat{W}$ strictement causal et supposons que $\{u_i\}$ est une suite d'élément de H tel que $(I+\hat{W})^{-1}u_i$ existe pour tout i. Si $\{u_i\} \to u_o$, et si $(I+\hat{W})^{-1}u_o$ existe, alors

$$(I+\hat{W})^{-1}u_o = \lim (I+\hat{W})^{-1}u_i.$$

7. RESULTATS CONCERNANT L'IMAGE

Nous considérons l'image de la transformation définie par l'équation 4 dans le cas spécial où $\hat{W}$ est bipuissance et strictement causal. Tout d'abord nous commençons par montrer que contrairement à ce que l'on peut s'attendre d'après la proposition 4.2, l'opérateur $I + \hat{W}$ n'est pas nécessairement surjectif. Ceci est illustré par le contre exemple suivant:

Exemple 1. Considérons l'équation suivante:

$$x(t) = y(t) + [\int_0^t x(s)\, ds]^2, \quad t \in \Lambda = [0, \tfrac{\pi}{2}] \tag{11}$$

où $y(.)$ est une fonction scalaire fixée de $L_2(\Lambda)$, et $x(.)$ est l'inconnu de l'équation. Remarquons que le terme bipuissance est généré par un opérateur bilinéaire strictement causal du type décrit dans l'exemple 3.2. Observons également que pour $y(t) = -k^2$, la solution x est absolument continue et que l'équation différentielle qui en résulte est l'équation de Riccati

$$\dot{g}(t) = k^2 + g^2(t), \quad g(0) = 0.$$

La solution unique de cette équation, est $g(t) = k \tan(kt)$. Il s'en suit que la solution unique de l'équation (11) est donnée par $x(t) = \dot{g}(t) = K^2/\cos^2(kt)$. Remarquons que cette solution n'appartient pas à l'image de $I + \hat{W}$.

Nous prêterons maintenant notre attention sur les conditions nécessaires et suffisantes garantissant la propriété de surjectivité.

Proposition 1. Supposons que $\hat{W}$ soit strictement causal. Si $y \in H$ n'est pas dans l'image de $I + \hat{W}$, alors il existe un élément $t \in \nu$ tel que pour

$s < t$, $P^s y$ appartient à l'image de $P^s(I+\hat{W})$ et $\lim_{s\to t} \|x_s\| = \infty$, où $x_s = \|P^s(I+\hat{W})^{-1}P^s y\|$.

Démontration. Soit $t_o = \text{Sup}\{s: P^s y \text{ est dans l'image de } P^s(I+\hat{W})\}$. D'après la proposition 4.1 nous avons $t_o \neq 0$. Supposons maintenant que $\lim_{s\to t_o} \|x_s < \infty$. En observant que pout tout $s_2 > s_1$, nous avons,

$$x_{s_2} - x_{s_1} = (P^{s_2} - P^{s_1})\, x_{s_2},$$

il doit alors exister un élément bien défini, $Px^{t_o} \in H$, tel que $\lim_{s\to t_o} x_s = P^{t_o}x$. De plus, $P^{t_o}x$ satisferait:

$$P^{t_o}x = P^{t_o}\,(I+\hat{W})^{-1}\,P^{t_o}y$$

Cette dernière équation impliquerait que $P^{t_o}y$ est dans l'image de $P^{t_o}(I+\hat{W})$. Cette implication cependant ne peut être satisfaite parce que si $P^{t_o}y$ était dans l'image de $P^{t_o}(I+\hat{W})^{-1}$, alors, en appliquant la proposition 6.4, nous aurions pour quelque $t > t_o$, $P^t y$ aussi dans l'image de $P^t(I+\hat{W})$. Nous serions alors en contradiction avec l'hypothèse de supériorité de t_o.

Proposition 2. Si $\hat{W}$ est un opérateur bipuissance strictement causal et s'il existe une suite d'opérateurs précausals $\{\hat{W}_i\} \to \hat{W}$ tel que, pour tout $y \in H$, la suite $\{(I+\hat{W})^{-1}y\}$ est bornée, alors $I+\hat{W}$ est surjectif.

Démonstration. Supposons que y ne soit pas dans l'image de $I+\hat{W}$. Alors, d'après la proposition 1, il existerait un $t_o \in \nu$ tel que pour $s < t_o$, l'élément $P^s(I+\hat{W})^{-1}P^s y = x_s$ bien défini et tel que $\lim_{s\to t} \|x_s\| = \infty$. En posant $x_{is} = P^s\,(I+\hat{W})^{-1}\,P^s y$, d'après la proposition 6.5, il résulterait que $\lim_{\substack{i\to\infty \\ s\to t_o}} \|x_{is}\| = \infty$. On obtiendrait alors une contradiction à l'hypothèse selon laquelle la suite $\{(I+\hat{W})^{-1}y\}$ est bornée

Proposition 3. Si $\hat{W}$ est strictement causal, alors l'équation $x = y + \hat{W}x$ une solution $x \in H$ si et seulement si il existe une suite d'opérateurs précausals $\{W_i\} \to W$, telle que $\{(I+\hat{W})^{-1}y\}$ est borné.

Les résultats précédents sont résumés dans le théorème suivant:

Théorème 3. Si $\hat{W}$ est un opérateur bipuissance, borné et strictement causal alors une condition nécessaire et suffisante d'existence, de causalité et de continuité de $(I+\hat{W})^{-1}$ est qu'il existe une suite convergente d'opérateurs précausals $\{\hat{W}_i\}\to\hat{W}$ tel que pour tout $y\in H$ la suite $\{(I+\hat{W}_i)^{-1}y\}$ est bornée.

Le prochain résultat illustre un type différent de condition suffisante de surjectivité de $(I+\hat{W})$. Dans la suite, $T_x = I-2W[x,.]$ pour tout $x\in H$ est un opérateur linéaire borné sur H. L'adjoint de T_x est noté T_x^*.

Théorème 4. Il existe une suite $\{x_n\}$ telle que

(1) $\|x_n-\hat{W}(x_n)-y\|$ est monotone décroissante

(2) $T^*_{x_n}\ (x_n-\hat{W}(x_n) - y) \to 0$

(3) $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$

Corollaire Si $T^*_{x_n}$ est uniformément borné inférieurement sur l'ensemble $\{x: \|x-\hat{W}(x) - y\| < a\}$ où $\mathrm{Inf}\,[a-\|x_n-\hat{W}(x_n)-y\|] > 0$, alors la transformation $x \to x-\hat{W}(x)$ est surjective.

Remarque. Si W est strictement causal, alors, d'après la proposition 5, pour tout $x\in H$, T_x est injectif, surjectif, et borné inférieurement. Ces propriétés sont vérifiées par T_x^*. Cependant les auteurs ignorent si une famille indicée de tels opérateurs est nécessairement uniformément bornée inférieurement.

Pour démontrer le théorème considérons la fonctionnelle sur H déterminée par

$$f(x) = \|x - \hat{W}(x)-y\|^2.$$

En développant par le produit scalaire, la détermination des dérivées première de Frechet et seconde de Gateau de F est directe mais fastidieuse. On obtient

$$F^{1}(x;h) = 2 < x - \hat{W}(x) - y, (I-2W[x,.])\, h >$$

$$\nabla_x F = (I - 2W[x.,])^{*}(x-\hat{W}(x) - y) = T_x^{*} a(x)$$

et

$$F^{11}(x;k,h)=2 < T_x k, T_x h > - 4 < a(x),\ W[k,h] >$$

où $a(x) = x-\hat{W}(x)-y$. La démonstration du théorème 1 s'obtient alors immédiatement d'après Goldstein [22], page 125.

8. EXTENSION AU CAS MULTIPUISSANCE

La discussion au sujet des propriétés de la solution de l'équation multipuissance a jusque là été limitée au cas spécial où l'opérateur $\hat{W}$ était bipuissant. Remarquons cependant que la plupart de nos démonstrations étaient basées sur les propositions 4.1 et 4.2 qui demeurent valides lorsque $\hat{W}$ est donné par une somme d'opérateurs n-puissance. Il est alors naturel de se demander si nos résultats restent valables dans ce context plus général. Afin d'illustrer qu'il en est ainsi reformulons les énoncés des théorèmes 1, 2 et 3 comme suit.

Théorème 1. Si $\hat{W}$ est un opérateur multipuissance borné et strictement causal, alors i) $I+\hat{W}$ est injective; ii) le domaine de $(I+\hat{W})^{-1}$ est un ensemble ouvert; iii) $(I+\hat{W})^{-1}$ est causal et continu sur son domaine.

Théorème 2. Si $\{\hat{W}_i\}$ est une suite d'opérateurs multipuissance précausals telle que $\{\hat{W}_i\} \to \hat{W}_o$ et $\{(I+\hat{W}_i)^{-1}y\} \to x_o$, alors $(I+\hat{W}_o)^{-1}$ y est un élément bien défini de H et égal à x_o.

Théorème 3. Si $\hat{W}$ est un opérateur multipuissance borné et strictement causal, alors une condition nécessaire et suffisante d'existence, de causalité, et de continuité de $(I+\hat{W})^{-1}$ est qu'il existe une suite convergente d'opérateurs précausals $\{\hat{W}_i\} \to \hat{W}$, telle que pour tout $y \in H$, la suite $\{(I+\hat{W}_i)^{-1}y\}$ est bornée.

Une généralisation plus délicate de nos résultats est possible. Supposons que F et G sont des transformations sur $[H,P^t]$ telles que les inégalités:

$$m\|\Delta_j(x_1-x_2)\|^{\alpha} \leq \|\Delta_j F \Delta_j(x_i-x_2)\| \qquad (12)$$

et

$$\|\Delta_j G \Delta_j (x_1 - x_2)\| \leq M \|\Delta_j (x_1 - x_2)\|^n \qquad (13)$$

soient satisfaites pour tout couple $x_1, x_2 \in H$ et toute partition Ω convenablement choisie.

Théorème 4. Soit F sans-mémoire satisfaisant l'équation (12) et soit G causale satisfaisant l'équation (13). Si $n > \alpha$ ou $n = \alpha$ et $M < m$, alors l'opérateur F+G est injectif et $(F+G)^{-1}$ est causal sur son domaine.

Démonstration. La démonstration de la causalité est identique à celle qui est donnée pour la proposition 7.1. La propriété d'injectivité de F + G est basée sur les deux propositions suivantes.

Proposition 1. Si f et g sont des fonctions sur R satisfaisant $(mr)^\alpha \leq f(r)$ et $g(r) \leq (Mr)^\beta$ pour m, M, α, $\beta > 0$ et $0 \leq r \in R$ et si $f(r) = g(r)$ pour $r \geq 0$:

i) si $\beta > \alpha$ alors $r = 0$ ou $r \geq r_o$

ii) si $\beta = \alpha$ et $M < m$ alors $r = 0$

où $r_o = (m^\alpha / M^\beta)^{\frac{1}{\beta - \alpha}}$.

Proposition 2. Si F est sans-mémoire et satisfait l'équation (12), si G est causal et satisfait l'équation (13) et si $n > \alpha$ ou $n = \alpha$ et $M < m$, alors

$$0 = F(x) - G(x)$$

admet la solution unique $x = 0$.

La démonstration de la proposition 1 peut être faite par simple inspection; la proposition 2 est démontrée comme suit:

Démonstration. (prop. 2) Si $F(x) = G(x)$ alors en utilisant les propriétés de causalité de F,G nous avons

$$\Delta_1 F \Delta_1 x = \Delta_1 G \Delta_1 x$$

et d'après les équations (12) et (13) on a:

$$||m\ \Delta_1 x||^{\alpha} \leq ||M \Delta_1 x||^{n}.$$

Maintenant puisque $\{P^t\}$ n'a pas de discontinuités nous choisissons Ω telle que $||\Delta_1 x|| < r_o$ paramètre de la proposition 1. En utilisant cette proposition nous obtenons alors $\Delta_1 x = 0$. Il reste seulement à noter que

$$\begin{aligned} \Delta_2 F \Delta_2 x &= \Delta_2 G[\Delta_1 + \Delta_2] \\ &= \Delta_2 G \Delta_2 x \end{aligned}$$

et par conséquent l'argument précédent s'applique de nouveau et en procedant ainsi par choix de Ω nous arrivons à $x = 0$.

9. APPLICATIONS

Considérons l'opérateur $K : L_2[0,\infty] \to L_2[0,\infty]$ défini de la façon suivante: si $u, x \in L_2[0,\infty]$ et $u = Kx$, alors,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \ldots \int_0^t K(t, s_1, \ldots, s_n) x(s_1) \ldots x(s_n) ds_1, \ldots ds_n \qquad (14)$$

où

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty K^2(t, s_1, \ldots, s_n) ds_1, ds_2 \ldots ds_n < \infty, \quad n = 1, 2 \ldots N. \qquad (15)$$

Cet opérateur a été proposé comme modèle mathématique pour l'analyse du comportement des systèmes physiques tels que les réacteurs nucléaires [27], la lèvitation magnétique [28], les canaux de communications [29], les systèmes biologiques, [24], [30], etc...

L'intérêt de cette représentation pour une telle variété de système réside dans le fait qu'un opérateur de cette forme donne une bonne approximation d'opérateurs non-linéaires beaucoup plus généreux.

Le lemme suivant résume en partie cet état de chose.

Lemme [33]. Soit C[E] l'ensemble des opérateurs continus et causals sur $L_2[0,T]$ et restreint à un ensemble compact E de $L_2[0,T]$. Considérons dans C[E] la métrique définie par la norme. Alors la famille des opérateurs définie par les équations (14) et (15) est dense dans C[E].

Inspiré en partie par les résultats précédents, les propriétés de l'opérateur K ont été récemment étudié en relation avec les problèmes de synthèse [24], d'identification [25], [26] et de contrôle optimale [27].

La configuration d'un système de grand intérêt pour tous ces problèmes est représentée sur la figure 1.

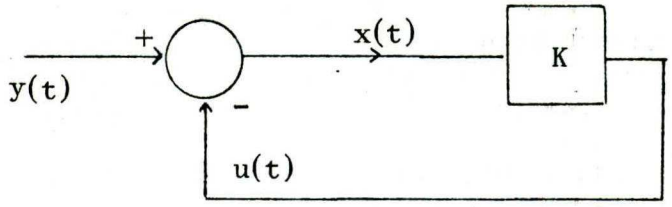

Figure 1: Système de base à contre réaction avec chaine ouverte multipuissance.

La première tâche qui s'impose est d'analyser le comportement entrée-sortie de ce système à contre réaction. Cela revient à étudier les propriétés de la solution de l'équation.

$$x(t) = y(t) + u(t) \tag{16}$$

où u(t) est donnée par l'équation (14).

En notant que l'opérateur K est borné multipuissance et strictement causal, les résultats de la présente étude peuvent être déjà utilisé à cette fin. En particulier le théorème 1 nous dit que si l'équation (16) admet une solution, x, alors cette solution est unique, et est une fonction causale de y. Evidemment ceci n'implique pas qu'à une entrée , y, à énergie finie, corresponde une solution x ayant nécessairement une énergie finie ou un temps de fuite fini (voir contre exemple 7.1). Cependant il est possible d'affirmer que le domaine de y pour lequel ces propriétés sont satisfaites est un ensemble ouvert dans $L_2[0,\infty]$. De plus à une entrée y dans ce domaine, correspond la solution x, fonction continue de y et de K (théorème 2).

Ces considérations permettent d'une part une meilleure connaissance qualitative des propriétés entrée-sortie du système à contre-réaction et fournissent d'autre part des implications pratiques quant aux méthodes de calcul visant à résoudre l'équation (15). Afin d'illustrer cette dernière affirmation, considérons le contexte particulier développé dans les exemples 2 et 5 de la section 2 et dans l'exemple 2 de la section 3. On commence par choisir une suite de nombres réels positifs $\{\xi_i\} \to 0$, et par déterminer la solution, x_i, de l'équation.

$$x(t) = y(t) - \int_0^{t-\xi_i} \cdots \int_0^{t-\xi_i} K(t,s_1,\ldots s_n)x(s_1,)\ldots x(s_n)ds_1\ldots ds_n.$$

en utilisant les iterations de la transformation contractive considérées dans la proposition 4.1, puisque l'opérateur multipuissance dans cette équation est borné et précausal. A ce niveau nous avons les deux possibilité suivantes: La suite $\{x_i\}$ peut s'avérer non bornée; dans ce cas on peut conclure que l'équation (16) n'admet pas de solution à énergie finie. D'autre part, si $\{x_i\}$ est bornée elle doit être alors convergente et avoir pour limite la solution cherchée de l'équation (16), (Théorème 3).

L'exemple suivant illustre une classe importante de système pratiques de contrôle à contre réaction pour lesquels toutes les considérations précédentes sont applicables.

Exemple 1. Considérons le système à contre réaction scalaire représenté en figure 2., les sytèmes T_i, $i = 1,2$, un pouvant être représenté comme suit: Si x_i, $z_i \in L_2[0,\infty)$ et $z_i = T_i x_i$, alors

$$z_i(t) = \int_0^t K_i(t,s)\, x_i(s)\, ds$$

où les $K_i(t,s)$ sont tels que $\int_0^\infty \int_0^\infty |K_i(t,s)|^2 ds\, dt < \infty$, $i=1,2$.

Soit N une non linéarité du type polynomial, sans mémoire, c'est à dire que si $z = Nx$, alors

$$z(t) = a_1 x(t) + \ldots + a_n x^n(t)$$

La chaine ouverte de ce système à contre réaction est un opérateur borné, multipuissance et strictement causal.

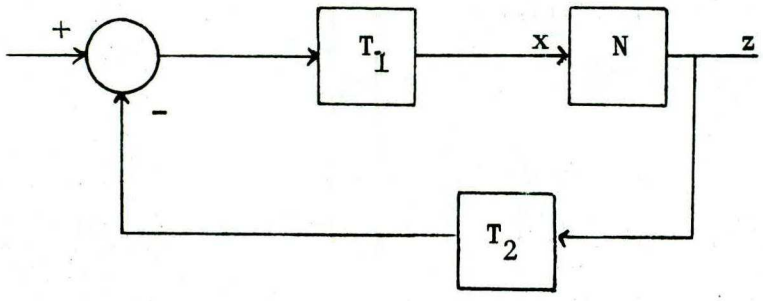

Figure 2: Exemple pratique de servo système multipuissance.

10. CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons cherché à relier certaines propriétés spéciales de causalité d'un système K à des questions concernant l'existence et la causalité de $(I + K)^{-1}$. Ceci a été fait en supposant que K était donné par une somme finie d'opérateurs multipuissance définis sur un espace de résolution Hilbertien. De même que dans l'étude précédente [20], où K est faiblement additif, le concept de stricte causalité a joué ici un rôle important.

Nos résultats se résument brièvement comme suit. Si K est borné et strictement causal, alors I+K est injectif et son inverse, lorsqu'il existe, est causal et continu (Théorème 1 et 2). Cela correspond aux théorèmes 4. 1-2 dans [20]. Contrairement à la principale conclusion de cette étude, lorsque, K est multipuissance l'hypothèse de causalité stricte n'est plus suffisante pour assurer l'inversibilité de I+K; en particulier, comme le montre l'exemple 1, I+K peut ne pas être surjectif.

Afin de préciser la structure de l'image de I+K nous avons été conduit naturellement à la recherche de conditions supplémentaires appropriées sur K. Dans ce sens, le théorème 3 donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une borne supérieure. Le théorème 4 donne une condition suffisante d'existence d'une borne inférieure.

REMERCIEMENTS

Le premier auteur tient à remercier ses étudiants de l'Ecole Polytechnique, en particulier M. Denis Dufresne, pour leur aide linguistique. Merci beaucoup aussi à Mlle Carmen Gagnon pour avoir dactylographié le manuscript.

REFERENCES

[1] Browder, F. E., "The Solvability of Nonlinear Functional Equations." Duke Math J. Vol. 30, 1962, pp. 557-566.

[2] Dolph, C. L., and Minty, G. J., "On Nonlinear Integral Equations of the Hammerstein Type." In: Nonlinear Integral Equations, edited by P. M. Anselone, University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1964, pp.

[3] Minty, G. M., "Monotone Nonlinear Operators in Hilbert Space." Duke Math J., Vol. 29, 1962, pp. 341-346.

[4] Petryshin, W.V., "On a Fixed Point Theorem for Nonlinear P-Compact Operators in Banach Space." Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 72, 1966, pp. 329-333.

[5] Shinbrot, M., "A Fixed Point Theorem and Some Applications," Arch. Rational Mech Anal., Vol. 17, 1964, pp. 255-271.

[6] Foures, Y., and Segal, I., "Causality and Analyticity." Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 78, 1955, pp. 385-405.

[7] Youla, D.C., Castriota, L. J., and Carlin, H. L., "Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory." IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-6, March 1959, pp. 102-124.

[8] Paley, R. E. A. C., and Wiener, Fourier Transform in the Complex Domain, American Mathematical Society, Colloquium Publ., Vol. 19, 1934.

[9] Sandberg, I. W., "Conditions for the Causality of Nonlinear Operators Defined on a Function Space." Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 23, No. 1, 1965, pp. 87-91.

[10] Damborg, M., "The Use of Normed Linear Space for Feedback System Stability." Preprints 14th Midwest Symposium on Circuit Theory, Denver, May 1971.

[11] Damborg, M., and Naylor, A. W., "The Fundamental Structure of Input-Output Stability for Feedback Systems." IEEE Trans. on Systems Science and Cybernetics, April 1970.

[12] Saeks, R., "Causality in Hilbert Space." Siam Review, Vol. 12, No. 3, July 1970.

[13] Porter, W. A., "Some Circuit Theory Concepts Revisited," Vol. 12, No. 3, pp. 433-448, 1970. International Journal of Control.

[14] Porter, W. A., And Zahm, C. L., "Basic Concepts in Systems Theory." Technical Report No. 44, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, 1969.

[15] Porter,W. A., "A Basic Optimization Problem in Linear Systems," Mathematical Systems Theory, Vol. 5, No. 1, 1971, pp. 20-44.

[16] Gohberg, I. Z., and Krein, M. G., Theory of Volterra Operators in Hilbert Space and Applications. American Mathematical Society, Vol. 24, Providence, Rhode Island, 1970.

[17] DeSantis, R. M., and Porter, W. A., "On the Generalization of the Volterra Principle of Inversion," submitted to the AMS Proceedings, November, 1972.

[18] DeSantis, R. M., "Causality Structure of Engineering Systems." Technical Report No. 67, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, 1972.

[19] DeSantis, R. M., "On the Generalized Volterra Equation in Hilbert Space." American Mathematical Society Proceedings, (to appear).

[20] DeSantis, R. M., "Causality, Strict Causality and Invertibility for Systems in Hilbert Resolution Spaces." Siam Journal on Control, (to appear)

[21] Rall, L. B., "Quadratic Equations in Banach Spaces." Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo X, 1961.

[22] Goldstein, A., "Constructive Real Analysis." Harpers, New York, 1967.

[23] Saeks, R., Resolution Space Operators and Systems, Lecture Notes, Springer-Verlag, New York, 1973.

[24] D'Alessandro, P., Isidori, A., and Ruberti, A., "Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamical Systems," Report 2.04, Istituto di Automatica Universita di Roma, Rome, 1972.

[25] Hsieh, H. C., "The Least Squares Estimation of Linear and Nonlinear System Weighting Function Matrices," Information and Control, Vol. 7 March 1969, pp. 84-115.

[26] Mosca, E., "Determination of Volterra Kernels from Input-Output Data," International Journal of Systems Sciences, Vol. , No. 1972, pp.

[27] Ahmed, N. V., " Optimal Control of a Class of Nonlinear Systems on Hilbert Space," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-14, No. 6, December, 1969, pp. 711-714.

[28] Parente, R. B., "Functional Analysis of Systems Characterized by Nonlinear Differential Equations," Technical Report 444, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Cambridge, Mass., 1966.

[29] Root, W. L., "On the Measurement and Use of Time-Varying Communications Channels," Information and Control, Vol. 8 pp. 390-422.

[30] Volterra, V., Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations, Dover, New York, 1959.

[31] Wiener, N., Nonlinear Problems in Random Theory, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1959.

[32] McFarland, J. E., "An Iterative Solution of the Quadratic Equation in Banach Space," Proceedings of A.M.S.,(1958), pp. 824-830.

[33] Prenter, P. A., "On Polynomial Operators and Equations," in Nonlinear Functional Analysis and Applications, (Rall edition), Academic Press, 1971.

A CONSULTER
SUR PLACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00288527 3