MATHÉMATIQUES

Rapport Technique EP75-R-56

Classification: Library of Congress no

QUASI-CONCAVITE DES PROBABILITES DES TRANSLATES D'UN CONVEXE

GILLES DESLAURIERS

SERGE DUBUC

Octobre 1974

Ecole Polytechnique de Montréal

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

QUASICONCAVITE DES PROBABILITES

DES TRANSLATES D'UN CONVEXE

par

GILLES DESLAURIERS et SERGE DUBUC

OCTOBRE 1974

/jv

CRM-455

QUASICONCAVITE DES PROBABILITES DES TRANSLATES D'UN CONVEXE

par

GILLES DESLAURIERS et SERGE DUBUC

Soit X une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit C une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^p$ dont l'intérieur n'est pas vide. Nous désirons connaître comment se comportent les quantités $Pr[X \in x + C]$ lorsque le vecteur de translation x varie dans $\mathbb{R}^p$. Nous verrons que les hypersurfaces de niveau $\Sigma_a = \left\{x: Pr[X \in x + C] = a\right\}$ sont des hypersurfaces strictement convexes à moins de se réduire à un point où à rien. Le niveau où l'hypersurface se réduit à un point est pour la valeur maximum des quantités $Pr[X \in x + C]$. On obtiendra donc qu'il existe un seul translaté de C qui sera de probabilité maximale. Le noeud principal de notre problème sera tranché par le théorème de Brunn-Minkowski. Plus généralement, nous montrerons que la convolution dans $\mathbb{R}^p$ d'une fonction logarithmiquement concave avec la densité d'une loi gaussienne donne une fonction quasiconcave.

1. Enoncé du résultat principal. Pour clarifier la terminologie que nous employerons, rappellons quelques définitions. Une fonction f à valeurs réelles, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ est dite quasiconcave (respectivement strictement quasiconcave) si pour tout triplet de points distincts alignés de D, x_0, x_1 et x_2, avec x_0 comme point intermédiaire, on a que $f(x_0) \geq \min(f(x_1), f(x_2))$ (respectivement $f(x_0) > \min(f(x_1), f(x_2))$. On dira qu'une fonction $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est logconcave si $f(x) \geq 0$ pour tout x et si pour tout couple de points x_1 et x_2 et pour tout nombre réel t de $(0,1)$, $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq f(x_1)^{1-t} f(x_2)^t$. On dira qu'une fonction est positive si elle prend ses valeurs dans $[0,\infty)$. Nous dirons qu'une fonction h définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est croissante (respectivement strictement croissante) si pour tout couple de points distincts de I, $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) < f(x_2)$).

On considérera le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^p$, noté $\langle x,y \rangle$ alors que la longueur d'un vecteur x sera $|x| = \langle x,x \rangle^{1/2}$. Si y est un point variable d'une sous-variété affine de dimension q, nous désignerons par dy la mesure de Lebesgue de dimension q portée par cette sous-variété. Si la sous-variété est réduite en un seul point y, dy représentera dans ce cas la masse-unité de Dirac disposée au point y.

Soit Y une sous-variété affine de $\mathbb{R}^p$, soit f une fonction logconcave définie sur Y, nous poserons pour tout x de $\mathbb{R}^p$

$$g(x) = \int_Y f(y) e^{-|x-y|^2} dy \tag{1}$$

Le résultat principal que nous voulons établir est que la fonction $g(x)$ est quasiconcave; de plus il y a quasiconcavité stricte si $\{y: g(y) > 0\}$ est un convexe borné d'intérieur non vide dans Y.

Lemme 1. La fonction g définie par la formule (1) est bien définie pour tout x de $\mathbb{R}^p$ et admet des dérivées partielles de tout ordre si f est logconcave.

Démonstration. Soit $C = \{y: f(y) > 0\}$, si C est d'intérieur vide pour la topologie usuelle de Y, alors $f(y) = 0$ presque partout sur Y et $g(x) \equiv 0$. Supposons que l'intérieur de C, C^0, n'est pas vide. Posons $h(y) = \log f(y)$ pour y dans C. Les points de discontinuité de h sont situés dans la frontière de C (par exemple voir J. Stoer et C. Witzgall[4] p.135). La fonction f est donc mesurable pour la tribu de Lebesgue. Soit $a \in C^0$, on peut trouver un vecteur u tel que $h(g) - h(a) \leq \langle u, y-a \rangle$ pour tout y de C (voir J. Stoer et C. Witzgall [4] p.142). On peut donc trouver deux constantes M_1 et M_2 telles que $f(y) \leq M_1 e^{M_2|y|}$ pour tout y de Y. La fonction $e^{M_2|y|} e^{-|x-y|^2}$ est intégrable sur Y, il en sera de même pour l'intégrand de (1). De façon semblable, on établit que $g(x)$ est de classe C^∞ puisque les dérivées partielles d'ordre m de la fonction $e^{-|x-y|^2}$ sont majorés par une fonction de la forme $B_r(1+|y|^m)e^{-|y|^2}$ lorsque y varie dans Y et que $|x| \leq r$.

2. Quelques résultats intermédiaires. Dans cette section, nous démontrons quelques résultats dont quelques-uns sont apparemment étrangers entre eux, mais dont nous aurons besoin par la suite et qui ont leur intérêt propre. Nous présentons d'abord deux résultats sur les convolutions avec une loi normale sur $\mathbb{R}$, puis viendra un principe de bissection d'intégrales et enfin dans $\mathbb{R}^p$, nous déterminerons l'adhérence des distributions uniformes sur des convexes d'intérieur non vide.

Théorème 2. Si $f(x)$ est une fonction quasiconcave positive définie partout sur $\mathbb{R}$ à l'exception possible d'une seule valeur de x et si $f(x)$ n'est pas égal presque partout à une fonction constante, alors la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(x-y)^2}dy$ est strictement quasiconcave aux endroits où elle est finie.

Démonstration. Traitons d'abord du cas où f est croissante. Si $x_1 < x_2$ et $g(x_2) < \infty$, puisque $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-y^2}dy$ et pour tout y, $f(x_1-y) \leq f(x_2-y)$. On a que $g(x_1) \leq g(x_2)$. Si $g(x_1) = g(x_2)$, alors $f(x_1-y) = f(x_2-y)$ presque partout en y et f serait égale presque partout à une fonction constante. En dehors de ce cas, g est strictement croissante et ainsi strictement quasiconcave.

Un raisonnement analogue joue lorsque f est décroissante. Il suffit maintenant de se limiter au cas où $f(x)$ est quasiconcave et où f n'est pas égal presque partout à une fonction monotone. A ce moment, on peut trouver un nombre c tel que f est croissante sur $(-\infty,c)$

et décroissante sur (c,∞). On pourra supposer que f n'est pas constante sur l'un ou l'autre de ces intervalles semi-infinis. Si $f(y)$ n'est pas localement intégrable autour de la valeur $y = c$, $g(x) \equiv \infty$. Supposons donc de plus que f est localement intégrable autour de la valeur c; $g(x)$ sera partout finie, car $g(x) \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(y)dy + M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dy$ où $M = \max(f(c+\delta))$. De plus, $g'(x)$ et $g''(x)$ existe pour tout x: $g'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} 2f(y)(x-y)e^{-(x-y)^2}dy$

$g''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(4(x-y)^2-2)e^{-(x-y)^2}dy.$

Pour montrer que $g(x)$ est strictement quasiconcave, il suffit de montrer que $g'(x)$ ne change de signe qu'une fois au plus et que ce changement de signe s'il s'opère s'effectue en passant du positif au négatif. Effectivement nous allons vérifier que la fonction $g'(x)e^{(x-c)^2}$ est strictement décroissante et même mieux que pour tout x, $(g'(x)e^{(x-c)^2})^1 < 0.$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dx} e^{(x-c)^2}\right) = \left(g''(x) + 2(x-c)g'(x)\right)e^{(x-c)^2} g''(x) + 2(x-c)g'(x) =$

$-\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(4(x-y)(y-c) + 2\right)e^{-(x-y)^2}dy.$ On remarque que la fonction $y \to \left(4(x-y)(y-c) + 2\right)e^{-(x-y)^2}$ est la dérivée par rapport à y de $h_x(y) = 2(y-c)e^{-(x-y)^2}$. Si c n'appartient pas à l'intervalle $[a,b]$, la formule d'intégration par parties de l'intégrale de Riemann-Stielyies donne que

$$\int_a^b f(y)\frac{d}{dy} h_x(y) = f(b)h_x(b) - f(a)h_x(a) - \int_a^b h_x(y)df(y)$$

Si l'on fait croître b vers ∞ et si l'on fait décroître a vers c, on

a que $\lim_{a\downarrow c, b\uparrow\infty} \int_a^b f(y)h_x'(y)dy = \int_c^\infty f(y)h_x'(y)dy$

$$\lim_{b\to\infty} f(b)h_x(b) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\downarrow c} f(a)u(a) = 0.$$

La dernière limite est nulle. En effet $0 \le (a-c)f(a) \le \int_c^a f(y)dy$ et

$\lim_{a\downarrow c} \int_c^a f(y)dy = 0$; d'où $\lim_{a\downarrow c}(a-c)f(a) = 0$; puisque $h_x(y)$ est dérivable et s'annule en $y = c$, on obtient $\lim_{a\downarrow c} h_x(a)f(a) = 0$. D'où $\int_c^\infty f(y)h_x'(y)dy =$

$-\int_c^\infty h_x(y)df(y)$. Puisque pour tout y de (c,∞), $h_x(y) > 0$, on a que

$\int_c^\infty h_x(y)df(y) \le 0$ et la dernière intégrale ne sera nulle que si f est

constante sur (c,∞). On peut raisonner de façon analogue pour obtenir que

$\int_{-\infty}^c f(y)h_x'(y)dy = -\int_{-\infty}^c h_x(y)df(y)$ et $\int_{-\infty}^c h_x(y)df(y) \le 0$. D'où

$g''(x) + 2(x-c)g'(x) < 0$ pour tout x et g est strictement quasiconcave. C.Q.F.D.

Théorème 3. Si $f(y)$ est une fonction logconcave sur $\mathbb{R}$, alors pour tout nombre $\alpha \in (-1,1)$, la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y)e^{-(x^2-2\alpha xy + y^2)}dy$ est strictement quasiconcave.

Démonstration: Le cas $\alpha = 0$ ne cause pas d'embarras. Supposons donc que $\alpha \neq 0$, on effectue le changement de variable $w = \alpha y$

$$g(x) = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^\infty f(\frac{w}{\alpha})e^{-(\frac{1}{\alpha^2} - 1)w^2} e^{-(x-w)^2} dw$$

On remarque que la fonction $f(\frac{w}{\alpha})e^{-(\frac{1}{\alpha^2}-1)w^2}$ est logconcave. Elle est donc quasiconcave et le théorème 2 donnera la quasiconcavité stricte de la fonction $g(x)$.

Théorème 4. Si $\{f_k(y)\}_{k=0}^n$ sont toutes des fonctions intégrables dans $\mathbb{R}^n$ et si $\int f_1(y)dy \neq 0$, alors il existe un demi-espace fermé H de $\mathbb{R}^n$ tel que $\int_H f_k(y)dy = \frac{1}{2}\int f_k(y)dy \qquad 1 \leq k \leq n$

$$\text{et } \int_H f_0(y)dy \leq \frac{1}{2}\int f_0(y)dy$$

Démonstration. Considérons la sphère S de $\mathbb{R}^{n+1}$, $S = \{(u,t): u \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, |u|^2 + t^2 = 1\}$. Considérons la fonction $F: S \to \mathbb{R}^n, F(u,t) = (\int_{\langle u,y \rangle \leq t} f_k(y)dy)_{k=1}^n$. Le théorème de Borsuk [3] nous assure que la fonction F prend la même valeur en un point et en son antipode. Si $F(u_0, t_0) = F(-u_0,- t_0)$, si $H_1 = \{y: \langle u_0, y \rangle \leq t\}$ et $H_2 = \{y: \langle u_0, y \rangle \geq t\}$, alors $\int_{H_1} f_k(y)dy = \int_{H_2} f_k(y)dy = \frac{1}{2}\int f_k(y)dy$, $1 \leq k \leq n$. Puisque $\int f_1(y)dy \neq 0$, il est impossible que $u_0 = 0$. Si $\int_{H_1} f_0(y)dy \leq \frac{1}{2}\int f_0(y)dy$, on pose $H = H_1$, sinon on pose $H = H_2$. C.Q.F.D.

Théorème 5. Soit $\{C_n\}$ une suite de convexes d'intérieur non vide tous situés dans un même convexe compact K de $\mathbb{R}^p$, alors il existe une sous-variété Y de $\mathbb{R}^p$ de dimension q, $0 \leq q \leq p$, une fonction $g: Y \to [0,\infty)$ et une sous-suite d'entiers $\{n_1, n_2,\ldots,\}$ telles que

a) $L = \{y: g(y) > 0\}$ est un convexe d'intérieur non vide de Y; si $q = p$, g est constant sur L; si $q < p$, la fonction $g^{1/(p-q)}$ est concave sur L.

b) pour toute fonction continue définie sur K à valeurs réelles,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_{C_{n_k}} f(x)dx}{\int_{C_{n_k}} dx} = \int_Y g(y)f(y)dy$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que les convexes C_n sont fermés, quitte à les remplacer par leur adhérence. Vu le théorème de sélection de Blaschke [1, p.62], on peut extraire une sous-suite de convexes $\{C_{n_i}\}$ qui converge vers un convexe compact non vide C. Remplaçons la suite originale par une telle sous-suite. Si l'intérieur de C n'est pas vide, considérons la fonction $g(y)$, $(\int_C dx)^{-1}$ si $y \in C$ et 0 si $y \notin C$. Puisque les fonctions indicatrices de C_n, 1_{C_n}, qui vaut 1 sur C_n et 0 hors de C_n, convergent presque partout vers la fonction indicatrice de C, le théorème de convergence bornée de Lebesgue donne que pour toute fonction continue f sur K,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{C_n} f(x)dx}{\int_{C_n} dx} = \int_{\mathbb{R}^p} g(y)f(y)dy.$$

Si d'autre part C se réduit à un point c, on a que $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(x)dx \Big/ \int_{C_n} dx = f(c)$ pour toute fonction continue f sur K: si $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert convexe V tel que $c \in V$ et $|f(x)-f(c)| \leq \varepsilon$ si $x \in V$ et si n est suffisamment grand, $C_n \subseteq V$, d'où $\left|\int_{C_n} (f(x) - f(c))dx\right| < \varepsilon \int_{C_n} dx$ et $\int_{C_n} f(x)dx \,/ \int_{C_n} dx$

et $$\int_{C_n} f(x)dx \,/ \int_{C_n} dx \text{ est voisin de } f(c).$$

Désignons par Y la variété affine engendrée par C. Il nous reste à discuter du cas où la dimension q de Y est comprise entre 1 et $p-1$. Considérons dans $\mathbb{R}^p$ le complémentaire orthogonal Z de $\{y_1 - y_2 : y_1 \in Y \text{ et } y_2 \in Y\}$. Posons pour y de Y, $C_n(y) = C_n \cap (y+Z)$. Enfin associons à la suite C_n une suite D_n d'ensembles où $D_n = \cup\{y + b_n(y) : C_n(y) \neq \phi\}$ où $B_n(y)$ est une boule fermée de Z dont le volume est égal au volume de dimension $p-q$ de $C_n(y)$ divisé par le volume de dimension p de C_n. Par le théorème de Brunn-Minkowski [2], D_n est convexe. Vérifions que les D_n sont tous contenus dans un même compact. Si $C_n^* = \{y : C_n(y) \neq \emptyset\}$, si $a \in C_n^*$, $E_n(a) = \frac{1}{2}\, a + \frac{1}{2}\, C_n^* + \frac{1}{2}\, B_n(a) \subseteq D_n$; le volume de $E_n(a)$ est $2^{-p} \int_{C_n^*} dy \cdot \int_{B_n(a)} dz$, et le volume de D_n vaut un. Puisque $\lim_{n\to\infty} C_n^* = C$ et que $\int_{C_n^*} dy$ converge vers $\int_C dy > 0$, on a que la suite $\int_{B_n(a)} dz$ est bornée par une quantité indépendante de n et de a. Les D_n sont contenus dans un même compact.

Utilisons de nouveau le théorème de Blaschke: on peut trouver une sous-suite $\{D_{n_k}\}$ qui converge vers un convexe D. Si $B(y) = D \cap (y+Z)$, si $g_n(y)$ et $g(y)$ sont respectivement les volumes de dimension $p-q$ de $B_n(y)$ et de $B(y)$, alors pour tout y de l'intérieur de C, on a que $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(y) = g(y)$. La racine $(p-q)^e$ de $g(y)$ est concave. Maintenant soit f une fonction continue sur K, on aura que

$$\int_{C_n} f(x)dx = \int_{C_n^*} \left(\int_{C_n(y)-y} f(y+z)dz \right) dy$$

Puisque pour tout y de C^0, $C_n(y)$ converge vers y, on a

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{C_n(y)-y} f(y+z)dz \Big/ \int_{C_n(y)-y} dz$ converge vers $f(y)$ lorsque $y \in C^0$.

D'autre part les fonctions indicatrices des C_n^* convergent presque partout vers la fonction indicatrice de C^0. Le théorème de convergence bornée de Lebesgue achève la démonstration:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_{C_{n_k}} f(x)dx}{\int_{C_{n_k}} dx} = \lim_{k} \int_{C^*_{n_k}} g_{n_k}(y)f(y)dy$$

$$= \int_C g(y)f(y)dy.$$

La fonction g ne peut pas s'annuler sur C^0 vu la concavité et la positivité de $g^{1/(p-q)}$.

3. Démonstration du résultat principal. Nous rassemblons le casse-tête de la dernière section pour démontrer le résultat principal précédemment annoncé et nous en tirerons les conséquences directes aux lois gaussiennes de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 6. Si $f(y)$ est une fonction logconcave non constante sur une variété affine Y de $\mathbb{R}^p$, alors la fonction

$$g(x) = \int_Y f(y)e^{-|x-y|^2}dy$$

est quasiconcave. Si $\{y: f(y) \neq 0\}$ est borné alors $g(x)$ est strictement quasiconcave.

Démonstration. Traitons d'abord du cas où le support de f est borné. La démonstration procède par induction sur la dimension de Y. Le premier pas de la démonstration est de se limiter à ce que Y soit un point ou une droite. Si $Y = \{a\}$, $g(x) = f(a)\, e^{-|x-a|^2}$, il s'agit bien d'une fonction strictement quasiconcave. Si Y est une droite de $\mathbb{R}^p$, montrons que la restriction de g à toute droite D de $\mathbb{R}^p$ est une fonction strictement quasiconcave. On choisit un point x_0 de D et un point y_0 de Y tel que $|x_0 - y_0| \leq \inf \{|x-y| : x \in D,\ y \in Y\}$. Soient a et b deux vecteurs de longueur un tels que $x_0 + a \in D$ et $y_0 + b \in Y$, posons

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_0 + ub)\, e^{-|x_0 + ta - y_0 - ub|^2}\, du.$$

Puisque $x_0 - y_0$ est orthogonal à a et à b, $|x_0 + ta - y_0 - ub|^2 = |x_0 - y_0|^2 + t^2 + u^2 - 2ut\ \langle a,b \rangle$. Les théorème 2 et 3 établissent la quanconcavité stricte de la fonction h puisque $|\langle a,b \rangle| \leq 1$.

Considérons maintenant le cas où la dimension de Y est supérieur ou égal à deux. Soient trois points alignés de $\mathbb{R}^p$, x_0, x_1 et x_2, x_0 étant entre x_1 et x_2, nous voulons montrer que $g(x_0) > \min g(x_1), g(x_2)$. Pour les trois fonctions $f_i(y) = f(y) e^{-|x_i - y|^2}$, $i = 0, 1$ et 2, appliquons le théorème 4. On peut trouver un demi-espace H_1 tel que $\int_{H_1} f_i(y)dy = \frac{1}{2} g(x_i)$, $i = 1$ et 2 et $\int_{H_1} f_0(y)dy \leq \frac{1}{2} g(x_0)$. Un second appel donnera l'existence d'un demi-espace H_2 tel que $\int_{H_1 \cap H_2} f_i(y)dy = \frac{1}{4} g(x_i)$ $i = 1$ et 2 et $\int_{H_1 \cap H_2} f_0(y)dy \leq \frac{1}{4} g(x_a)$.

Et l'on continue indéfiniment à faire usage du théorème 4. Il existe donc une suite de convexes compacts emboîtés C_n telle que

$$\int_{C_n} f_i(y)dy = 2^{-n} g(x_i),\ i = 1 \text{ et } 2 \text{ et } \int_{C_n} f_0(y)dy \le 2^{-n} g(x_0).$$

Par le théorème 5, il existe une suite croissante d'entiers n_k, une sous-variété affine Z de Y et une fonction $h\colon\ Z \to [0,\infty)$ dont une des racines est concave telles que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C_{n_k}} f_i(y)dy \Big/ \int_{C_{n_k}} dy = \int h(z) f_i(z)dz,\ i = 0,\ 1 \text{ et } 2.$$

On observe que la suite $2^{n_k}\int_{C_{n_k}} dy$ converge vers une valeur s non nulle. Si l'on pose $f^*(z) = f(z)h(z)$ pour z de Z, la fonction f^* est logconcave: une fonction concave est logconcave, une puissance réelle positive d'une fonction concave positive est logconcave; h et f étant logconcaves, leur produit le sera. Par hypothèse d'induction, la fonction

$g^*(x) = \int f^*(z) e^{-|x-z|^2} dz$ est strictement quasiconcave.

$$g(x_0) \ge \frac{1}{s} g^*(x_0) > \frac{1}{s} \min g^*(x_1),\ g^*(x_2)$$

$g(x_0) > \min g(x_1),\ g(x_2)$. Ce qui montre la quasiconcavité stricte.

Lorsque $\{y\colon\ f(y) \neq 0\}$ n'est pas borné, la fonction $g(x)$ est la limite de fonctions quasiconcaves $\int_{|y|<r} f(y) e^{-|x-y|^2} dy$, r tendant vers l'infini. D'où g est quasiconcave. Malheureusement, on n'est pas assuré de la quasiconcavité stricte dans ce cas général.

Citons quelques corollaires des méthodes que nous venons d'exposer.

Corollaire 7. Si $f(y)$ est une fonction logconcave définie sur une variété affine Y de $\mathbb{R}^p$, et à support borné, alors les hypersurfaces de niveau $\{x: \int f(y)e^{-|x-y|^2}\, dy = C\}$, sont des hypersurfaces strictement convexes à moins de se réduire à un point ou à rien. Le maximum de la fonction $x \to \int f(y)e^{-|x-y|^2} dy$ est atteint précisément en un seul point. En particulier si X est une loi gaussienne dans $\mathbb{R}^p$, si C est un convexe formé non vide de $\mathbb{R}^p$, alors les hypersurfaces de niveau $\{x: Pr[X \in c + C]$ sont strictement convexes si elles contiennent plus d'un point. Il existe un seul translaté $x_0 + C$ qui maximise la probabilité que le vecteur gaussien tombe dans la région $x = C$.

Revenons à la fonction $g(x) = \int f(y)e^{-|x-y|^2} dy$ lorsque f est logconcave et admet un support borné d'intérieur non vide. Si $\bar{x}(f)$ est la position du maximum de la fonction g, on sait que les dérivées partielles de la fonction g vont s'annuler au point $\bar{x}(f)$. Un examen attentif des démonstrations des théorèmes 2,3 et 6 révèle que le système d'équation

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

admet $\bar{x}(f)$ comme seule solution et que le hessien $\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ est défini positif. Il suffit de choisir au cours de la démonstration du théorème 6 comme fonctions $f_0(y)$, $f_1(y)$ et $f_2(y)$,

$$f_1(y) = f(y)e^{-|x-y|^2}$$

$$f_2(y) = f(y)D_\beta e^{-|x-y|^2}$$

$$f_0(y) = f(y)D_\beta^2 e^{-|x-y|^2}$$

où β est une direction de $\mathbb{R}^p$, D_β est la dérivée directionelle par rapport à x selon la direction β. On obtient alors que

$$D_\beta g(x) = 0 \text{ donne que } d_\beta^2 g(x) < 0.$$

D'où si $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,2,\ldots,p$, on aura que x sera un maximum local et $x = \bar{x}$ (f). Citons enfin une intéressante inégalité qui se détache de la démonstration du théorème 2.

Corollaire 8. Si $f(x)$ est une fonction quasiconcave positive sur $\mathbb{R}$ localement intégrable et si $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-x^2/2}dx = 0$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)e^{-x^2/2}dx < \int f(x)e^{-x^2/2}dx.$$

Bibliographie

[1] W. Blaschke, Kreis und Kugel. Leipzig: Verlag von Veit & Comp. 1916.

[2] T. Bonnesen et W. Fenchel, Theorie der kōnvexen Korper.
Berlin: Springer 1934.

[3] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre
Fund. Math. Bd 20(1933) p.177.

[4] J. Stoer et C. Witzgall, Convexity and Optimization in Finite
Dimensions I Berlin Springer (1970).

Note consécutive à la rédaction initiale de ce texte. Monsieur M. Kanter nous a fait connaître l'existence d'un travail récent de A. Prékopa, On logarithmic concave measures and functions, Acta Scientiarum Mathematicarum V.34 (1972) 336-343. Dans cet article, il est démontré que la convolution de deux fonctions logconcaves de $\mathbb{R}^n$ donne une fonction logconcave. Ce résultat est plus général que le théorème 6 que nous avons exposé. Néanmoins, nos techniques qui sont entièrement différentes de celles de A. Prékopa permettraient d'obtenir également son résultat.