

**Titre:** Mouvement brownien dans un ensemble convexe  
Title:

**Auteurs:** Gilles Deslauriers  
Authors:

**Date:** 1975

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Deslauriers, G. (1975). Mouvement brownien dans un ensemble convexe.  
Citation: (Technical Report n° EP-R-75-57). <https://publications.polymtl.ca/6107/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6107/>  
PolyPublie URL:

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés / All rights reserved  
Terms of Use:

## Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EP-R-75-57  
Report number:

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:



# MATHÉMATIQUES

Rapport Technique EP75-R-57

Classification: Library of Congress no

MOUVEMENT BROWNIEN DANS UN ENSEMBLE CONVEXE

GILLES DESLAURIERS

Octobre 1975

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ  
UP4  
75R57  
FRE

Campus de l'Université  
de Montréal  
Case postale 6079  
Succursale 'A'  
Montréal, Québec  
H3C 3A7



Bibliothèque  
Ecole  
Polytechnique  
MONTRÉAL

CLASSIFICATION

No D'ENTRÉE

**78059**

HTAM

12 NOV. 1975

Am

UNIVERSITE DE MONTREAL

MOUVEMENT BROWNIEN DANS UN ENSEMBLE CONVEXE

PAR

GILLES DESLAURIERS

78059

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES  
FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

THESE PRESENTEE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES  
EN VUE DE L'OBTENTION DU  
PHILOSOPHIAE DOCTOR (MATHEMATIQUES)

AOUT 1975

TABLE DES MATIERES

	pages
SOMMAIRE.....	iv
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 - PROBABILITE ET TEMPS PROBABLE DE SEJOUR.....	4
I - Marche aléatoire.....	5
II - Passage à la limite.....	9
III - Mouvement Brownien dans une sphère de $\mathbb{R}^n$ .....	12
IV - Mouvement Brownien dans un convexe de $\mathbb{R}^n$ .....	19
CHAPITRE 2 - MESURES QUASI-CONCAVES.....	23
I - Les théorèmes.....	26
II - Applications.....	42
CHAPITRE 3 - LOG-CONCAVITE DE LA PROBABILITE DE SEJOUR ET TEMPS PROBABLE MAXIMUM.....	48
I - Log-concavité de la probabilité de séjour dans un convexe quelconque de $\mathbb{R}^n$ .....	48
II - Temps probable maximum de séjour dans un convexe symétrique.....	53
REMERCIEMENTS.....	57
BIBLIOGRAPHIE.....	58

SOMMAIRE

Dans ce travail, nous avons démontré que la fonction

$$x \rightarrow f(x, t) = P [X(s) \in K ; 0 \leq s \leq t | X(0) = x]$$

est log-concave où  $\{X(s)\}$  est un mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  est un convexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  est un point de ce convexe. De ce résultat, nous déduisons que le temps probable de séjour à l'intérieur d'un convexe symétrique est maximum si  $x$  est le centre de symétrie du convexe.

Nous avons dû, pour obtenir ces résultats, donner une démonstration d'un théorème de Borell [ 2 ]. Cette démonstration nous permet de reconnaître les mesures strictement quasi-concaves de  $\mathbb{R}^n$ . Une condition suffisante sur deux fonctions est donnée pour que leur convolution soit une fonction quasi-concave.

## INTRODUCTION

Le problème à l'origine de cette thèse était le suivant:

"Quelle doit être la position initiale d'un point mobile  $X(t)$ , effectuant un mouvement Brownien à l'intérieur d'un ensemble convexe  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , pour que la valeur probable du temps qui s'écoule jusqu'à ce qu'il atteigne pour la première fois la frontière de  $K$  soit maximum?"

Nous désignerons par  $\mathbb{E}_x(T)$  la valeur probable du temps  $T$  qui s'écoule jusqu'à ce que le point mobile, placé initialement en  $X(0) = x$ , atteigne la frontière de  $K$  pour la première fois. Cette fonction du vecteur  $x$ , position initiale du point mobile, est liée à la probabilité que pendant l'intervalle de temps  $(0, s)$ , le point mobile  $X(t)$  soit resté constamment à l'intérieur du convexe  $K$ . Cette probabilité sera notée  $f(x, s)$ . La relation qui existe entre  $\mathbb{E}_x(T)$  et  $f(x, s)$  est:

$$\mathbb{E}_x(T) = \int_0^\infty f(x, s) \, ds.$$

Indiquons les résultats généraux déjà connus. Dans le livre de P. Lévy [9], il est dit que la fonction  $\mathbb{E}_x(T)$  est bornée et que la fonction  $f(x, s)$  est une solution de l'équation de la diffusion

$$\Delta f(x, s) = \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial s^2},$$

qui s'annule sur la frontière de  $K$ . Nous verrons dans la dernière section du chapitre 1, que  $\mathbb{E}_x(T)$  satisfait à l'équation de Poisson,

$$\Delta \mathbb{E}_x(T) = -2.$$

Parmi les résultats particuliers, citons un résultat que l'on trouve dans le livre de Dynkin-Yushkevich [ 4 ]: Pour une sphère de  $\mathbb{R}^n$ , centrée à l'origine et de rayon  $r$ ,

$$\mathcal{E}_0(T) = \frac{r^2}{n}.$$

Nous avons dans le premier chapitre caractérisé ces deux fonctions pour une sphère de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme ces caractérisations n'apportaient que très peu "d'eau à notre moulin", nous avons décidé de procéder différemment après avoir réalisé qu'il existait une certaine relation entre ce que l'on cherchait et les probabilités des translatés d'un convexe. Nous voulions montrer que la probabilité des translatés d'un convexe, prise comme une fonction du vecteur de translation, est quasi-concave. Nous avons essayé, en vain, de caractériser toutes les mesures de  $\mathbb{R}^n$ , quasi-concaves sous les translations. Notre étude sera donc limitée aux mesures quasi-concaves.

Nous donnerons, dans la première section du deuxième chapitre, une démonstration d'un théorème de Borell [ 2 ], théorème que l'on a découvert tout dernièrement, et qui nous permet de reconnaître les mesures qui sont strictement quasi-concaves. Les résultats de Prékopa [ 11 ] et de Zalgaller [ 13 ], que nous avons cités au début du deuxième chapitre, sont des applications de nos théorèmes. Finalement, nous terminerons ce deuxième chapitre en donnant des conditions suffisantes sur deux fonctions pour que la convolution de ces deux fonctions soit une fonction quasi-concave.

Grâce à cette étude des mesures quasi-concaves, nous démontrerons dans le troisième chapitre que la fonction  $f(x,s)$ , pour  $s$  fixe, est log-concave. Nous conclurons en disant que ce dernier résultat permet, dans le cas d'un convexe symétrique, de maximiser le temps probable de séjour à l'intérieur de ce convexe.

CHAPITRE IPROBABILITE ET TEMPS PROBABLE DE SEJOUR

Il arrive très souvent, lorsque l'on veut illustrer le mouvement Brownien dans le plan, que l'on prenne comme exemple la promenade d'un ivrogne dans un champ. Imaginons qu'un ivrogne commence à se promener, à l'instant  $t = 0$  à partir d'un point  $x_0$ , dans un champ clôturé et qu'il espère sortir de ce champ. Nous voulons caractériser la probabilité qu'il n'ait pas encore atteint (pour la première fois) la clôture au temps  $t$ . Cette fonction dépend de  $x_0$ , de  $t$  et aussi de la forme du champ. Nous voulons aussi caractériser, lorsque l'ivrogne essaye de sortir du champ, la valeur probable du temps qui s'écoule jusqu'à ce qu'il atteigne pour la première fois la clôture. Cette fonction dépend de  $x_0$  et de la forme du champ. On sait (P. Lévy [9]) que cette dernière fonction possède une borne supérieure finie indépendante du point  $x_0$ .

Notre but premier étant de maximiser ces deux fonctions par rapport à la variable  $x_0$ , nous rappellerons ici quelques définitions. On dira qu'une fonction  $f$  est quasi-concave si  $f$  est définie sur une partie convexe  $C$  d'un espace vectoriel réel  $E$  et si pour tout nombre réel  $a$ ,  $\{x : x \in C, f(x) \geq a\}$  est un ensemble convexe de  $E$ . Ceci revient à dire que  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min(f(x_1), f(x_2))$  lorsque  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $C$ ,  $x_1 \neq x_2$  et que  $\lambda \in (0,1)$ . On dira que  $f$  est strictement quasi-concave si  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) > \min(f(x_1), f(x_2))$

lorsque  $x_1 \in C$ ,  $x_2 \in C$ ,  $x_1 \neq x_2$  et  $\lambda \in (0,1)$ . On dira que  $f$  est *log-concave* si  $f$  est une fonction non-négative définie sur un convexe  $C$  de  $E$  et si  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq f^\lambda(x_1) f^{1-\lambda}(x_2)$  pour  $x_1 \in C$ ,  $x_2 \in C$ ,  $x_1 \neq x_2$  et  $\lambda \in (0,1)$ . La log-concavité stricte aura lieu si l'égalité ne peut avoir lieu.

Nous allons, dans ce premier chapitre, caractériser ces deux fonctions pour des champs circulaires.

### I - MARCHE ALEATOIRE

Un jeune garçon décide de se déplacer sur un trottoir entre deux coins de rue, soit en reculant d'un pas ou en avançant d'un pas. Pour effectuer cette marche aléatoire, il possède un sac de billes blanches et noires dans une proportion  $p, 1-p$  où  $0 < p < 1$ . Prenant une bille dans son sac, il avancera d'un pas si elle est blanche, sinon il reculera d'un pas. S'il atteint un des deux coins de rue, il cessera sa marche aléatoire. Nous supposons que la distance entre ces deux coins est  $a$ , qu'il y a  $K$  pas d'une longueur  $\delta > 0$  et qu'il prend une seconde pour effectuer un pas. Pour fixer les idées, disons qu'il débute sa marche au point  $x = z\delta \in (0, a)$

$$\cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad K\delta = a$$

Il aimeraient savoir où débuter sa marche pour rester le plus long-temps possible entre ces deux coins de rue?

Nous pouvons aussi nous demander où il doit commencer sa marche si nous voulons maximiser la probabilité qu'il soit encore entre les deux coins de rue après  $n$  pas ou  $n$  secondes?

On est en présence d'une marche aléatoire sur la droite réelle avec absorption aux points  $x = 0$  et  $x = a$ . Cette marche aléatoire est représentée par  $\{X(n)\}_{n=0,1,2,\dots}$  où  $X(n)$  est la position du jeune garçon après  $n$  pas ou au temps  $n$  secondes. De plus, la probabilité d'effectuer un pas vers les  $x$  positifs est  $p$  et celle d'effectuer un pas vers les  $x$  négatifs est  $q = 1-p$ .

Nous noterons par:

$$f(z\delta, n) = P [X(n) \in (0, a) | X(0) = z\delta]$$

la probabilité de non absorption à l'instant  $n$  lorsque la marche débute au point  $z\delta$ , pour  $z = 1, 2, \dots, K-1$  et par:

$$\mathbb{E}_{z\delta}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n P [N = n | X(0) = z\delta]$$

où  $N$  représente le nombre de pas ou le nombre de secondes nécessaire au jeune garçon pour terminer sa marche lorsqu'il débute au point  $z\delta$ . C'est la durée probable de cette marche aléatoire avec absorption aux points  $x = 0$  et  $x = a$ .

### i) Caractérisation de $f(z\delta, n)$

Ce résultat se retrouve dans le livre de Feller [5]. Cette fonction satisfait à l'équation:

$$f(z\delta, n+1) = p f(z\delta+\delta, n) + q f(z\delta-\delta, n) \quad (1.1)$$

et doit satisfaire les conditions initiales  $f(0, n) = f(a, n) = 0$  et  $f(z\delta, 0) = 1$  si  $0 < z < K$ . Si nous posons  $F_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(z\delta, n) s^n$  la fonction génératrice de  $f(z\delta, n)$ , l'équation (1.1) s'écritra:

$$F_z(s) - 1 = ps F_{z+1}(s) + qs F_{z-1}(s)$$

avec comme conditions aux limites  $F_0(s) = F_K(s) = 0$ . Il est facile de voir que la fonction  $\frac{1}{1-s}$  est une solution particulière et que la fonction  $A(s) \lambda_1^z(s) + B(s) \lambda_2^z(s)$  est une solution de l'équation homogène associée où

$$\lambda_1^z(s) = \frac{1 + \sqrt{1-4pq s^2}}{2ps} \quad \text{et} \quad \lambda_2^z(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pq s^2}}{2ps}$$

Finalement, la solution générale satisfaisant les conditions aux limites est:

$$F_z(s) = \frac{1}{1-s} \left\{ \frac{\lambda_1^K(s)(1 - \lambda_2^z(s)) - \lambda_2^K(s)(1 - \lambda_1^z(s)) - (\lambda_1^z(s) - \lambda_2^z(s))}{\lambda_1^K(s) - \lambda_2^K(s)} \right\}$$

La détermination du coefficient de  $s^n$  permettra d'écrire

$$f(z\delta, n) = 1 - \sum_{i=0}^n (u_{z,i} + w_{z,i})$$

où  $u_{z,i}$  et  $w_{z,i}$  représentent les probabilités partant initialement du point  $z\delta$ , d'être respectivement rendu, pour la première fois à l'instant  $i$ , au point 0 et au point  $a$ .

$$u_{z,i} = \frac{2^i}{K} p^{\frac{1}{2}(i-z)} q^{\frac{1}{2}(i+z)} \sum_{v=1}^{K-1} \cos^{i-1}(\frac{\pi v}{K}) \sin(\frac{\pi v}{K}) \sin(\frac{\pi v z}{K})$$

$$w_{z,i} = \frac{2^i}{K} p^{\frac{1}{2}(i+K-z)} q^{\frac{1}{2}(i-K+z)} \sum_{v=1}^{K-1} \cos^{i-1}(\frac{\pi v}{K}) \sin(\frac{\pi v}{K}) \sin(\frac{\pi v(K-z)}{K})$$

avec  $u_{0,i} = u_{K,i} = w_{0,i} = w_{K,i} = 0$  pour  $i \geq 1$

$$u_{0,0} = w_{K,0} = 1$$

et  $w_{z,0} = 0$  pour  $0 \leq z < K$

et  $u_{z,0} = 0$  pour  $0 < z \leq K$

On pourrait vérifier graphiquement que  $f(z\delta, n)$  n'est pas toujours une fonction concave, mais est quasi-concave. En effet:

$$\begin{aligned} f(z\delta, n) &\geq f(z\delta, n+1) = p f(z\delta+\delta, n) + q f(z\delta-\delta, n) \\ &\geq \min\{f(z\delta+\delta, n), f(z\delta-\delta, n)\} \end{aligned}$$

### ii) Caractérisation de $\mathbb{E}_{z\delta}(N)$

Cette caractérisation se retrouve dans le livre de W. Feller [5] lorsqu'il traite du problème de la ruine d'un joueur. Nous savons que

$$\mathbb{E}_{z\delta}(N) = p \mathbb{E}_{(z+1)\delta}(N) + q \mathbb{E}_{(z-1)\delta}(N) + 1 \quad (1.2)$$

avec  $0 < z < K$  et  $\mathbb{E}_0(N) = \mathbb{E}_{K\delta}(N) = 0$ .

La solution de cette équation est

$$\mathbb{E}_{z\delta}(N) = \frac{z}{q-p} - \frac{K [1 - (q/p)^z]}{(q-p) [1 - (q/p)^K]} \quad \text{si } p \neq q \quad (1.3)$$

et  $\mathbb{E}_{z\delta}(N) = z(K-z)$  si  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Dans les deux cas nous sommes en présence de fonctions concaves définies pour  $z = 0, 1, 2, \dots, K$ . Les maximums respectifs de ces fonctions seront atteints lorsque  $z$  prendra: la valeur entière la plus près du nombre réel

$$\frac{\ln \left\{ \frac{(q/p)^K - 1}{\ln(q/p)^K} \right\}}{\ln\{q/p\}} \quad \text{si } p \neq q$$

et dans le cas  $p = q = \frac{1}{2}$ , cette valeur dépendra de la parité de  $K$ , c'est-à-dire  $\frac{K}{2}$  lorsque  $K$  sera un nombre pair et  $\frac{K+1}{2}$  lorsque  $K$  sera un nombre impair.

## II - PASSAGE A LA LIMITE

Nous aurions pu précédemment fixer  $\delta = 1$ , comme longueur d'un pas, mais nous avons préféré tenir compte de la longueur du pas pour la simple raison que maintenant nous poserons  $\delta = \Delta x$  et les relations précédentes seront utilisées sans modification.

Imaginons, ici, une petite souris qui se déplace dans un corridor étroit où on a placé à chaque extrémité un fromage. Cette souris fait des petits pas d'une longueur  $\Delta x$ . Si nous lui laissons une seconde pour effectuer ce pas, elle devra faire un nombre de pas considérable si  $\Delta x$  est petit. Supposons donc qu'elle prend  $\Delta t$  seconde pour effectuer un pas  $\Delta x$  et définissons une variable aléatoire  $T$  représentant le temps nécessaire pour attraper l'un des deux fromages. Il est immédiat que  $T = N \Delta t$  où  $N$  est le nombre de pas qu'elle fera pour atteindre son but.

Ainsi

$$\mathbb{E}_x(T) = \mathbb{E}_x(N) \Delta t$$

et en remplaçant dans les équations (1.1) et (1.2)  $\delta$  par  $\Delta x$ , et le temps de parcours d'un pas par  $\Delta t$  seconde, nous obtenons:

$$f(x, t + \Delta t) = p f(x + \Delta x, t) + q f(x - \Delta x, t) \quad (1.4)$$

et  $\mathbb{E}_x(T) = \Delta t \mathbb{E}_x(N) = \Delta t \{p \mathbb{E}_{x+\Delta x}(N) + q \mathbb{E}_{x-\Delta x}(N) + 1\} \quad (1.5)$

Si  $p = q$  la solution de 1.5 sera:

$$\mathbb{E}_x(T) = \frac{x}{\Delta x} \left( \frac{a}{\Delta x} - \frac{x}{\Delta x} \right) \Delta t \quad (1.6)$$

et on voit que le passage à la limite sur  $\Delta x$  nécessite une condition sur  $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  que nous choisirons égale à 1. De plus, si  $p \neq q$  nous constatons

que

$$\mathcal{E}_x(T) = \Delta t \left\{ \frac{x/\Delta x}{q-p} - \frac{a/\Delta x [1 - (q/p)^{x/\Delta x}]}{q-p [1 - (q/p)^{a/\Delta x}]} \right\} \quad (1.7)$$

existera à la limite sur  $\Delta x$  si nous prenons  $q-p$  de l'ordre de  $\Delta x$ .

Posons donc  $p = \frac{1}{2} + c \Delta x$  et  $q = \frac{1}{2} - c \Delta x$  où "c" est une constante représentant une poussée vers la gauche ou la droite suivant que "c" est négatif ou positif. C'est en quelque sorte un plus gros morceau de fromage mis à une des extrémités du corridor.

Ayant établi les conditions d'un passage à la limite, l'équation (1.4) devient:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.8)$$

et si nous effectuons un changement de variables en posant  $u = x + 2ct$ , la nouvelle fonction obtenue, disons  $g(u,t) = f(u-2ct,t)$ , satisfera à l'équation de la chaleur sur la droite, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 2 \frac{\partial g}{\partial t} \quad (1.9)$$

C'est l'équation (1.8) lorsque la poussée est nulle.

L'équation (1.5) devient, lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$-2 = \frac{d^2 \mathcal{E}_x(T)}{dx^2} + 4c \frac{d \mathcal{E}_x(T)}{dx}$$

et pour  $c = 0$ ,  $\mathcal{E}_x(T)$  satisfait à l'équation de Poisson

$$-2 = \frac{d^2 \mathcal{E}_x(T)}{dx^2} \quad (1.10)$$

Nous supposerons par la suite qu'une particule initialement placée au point  $x$  se déplace suivant un mouvement Brownien linéaire  $\{X(t)\}$  d'une manière continue sous l'effet d'une poussée.

### i) Caractérisation de $f(x,t)$

Nous savons que cette fonction est solution de l'équation de la chaleur si la poussée est nulle. Cette fonction nous est donnée, par exemple, dans les livres de Feller [ 5 ] et Dynkin Yushkevich [ 4 ] par:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \left\{ e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}} \right\} dy$$

ou si nous utilisons un développement en série de Fourier (voir les livres de Feller [ 5 ] et P. Lévy [ 9 ]):

$$f(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 t}{2a^2} \right\} \sin \left\{ \frac{(2n+1) \pi x}{a} \right\} \quad (1.12)$$

Nous verrons dans le chapitre 3 que cette fonction de  $x$  pour  $t$  fixé est concave, symétrique par rapport à l'axe  $x = \frac{a}{2}$  et atteint sa valeur maximum au point  $x = \frac{a}{2}$ .

Si la poussée est non-nulle, par les remarques précédentes nous pouvons écrire:

$$f(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 t}{2a^2} \right\} \sin \left[ \frac{(2n+1) \pi (x+2ct)}{a} \right]$$

### ii) Caractérisation de $\mathbb{E}_x(T)$

On aurait pu caractériser  $\mathbb{E}_x(T)$  comme solution d'une équation différentielle suivant qu'il y a une poussée ou non.

Nous avons préféré utiliser les expressions (1.6) et (1.7) qui deviennent, lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\mathbb{E}_x(T) = x(a-x) \quad \text{si } c = 0$$

et

$$\mathbb{E}_x(T) = \frac{1}{-2c} \left\{ x - a \frac{(1 - e^{-4cx})}{(1 - e^{-4ca})} \right\} \quad \text{si } c \neq 0$$

Ces deux fonctions sont concaves et les maximums respectifs sont:

$$\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\ln[1 - e^{-4ca})/4ca]}{-4c}$$

### III - MOUVEMENT BROWNIEN DANS UNE SPHERE DE $\mathbb{R}^n$

Considérons une particule à l'intérieur d'une sphère

$$S_r^a = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-a\| < r\}$$

qui effectue un mouvement Brownien

$$\{X(t)\} = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}.$$

Supposons que  $X(0) = x$  appartienne à l'intérieur de  $S_r^a$ . Nous voulons caractériser

$$f(x,t) = P [X(s) \in S_r^a \mid 0 \leq s \leq t \mid X(0) = x]$$

et  $\mathbb{E}_x(T)$  le temps moyen passé à l'intérieur de la sphère par la particule avant de toucher la frontière.

#### i) Caractérisation de $f(x,t)$

Sans perte de généralité, supposons que le centre de la sphère soit à l'origine du système d'axes. Comme le mouvement Brownien est invariant sous les rotations d'axes, nous pouvons affirmer que

$$\begin{aligned} f(x,t) &= g(\rho, t) \quad \text{où} \quad \rho = \sqrt{x \cdot x^T} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $f$  est une fonction radiale.

Il est montré dans le livre de Paul Lévy [9] que cette fonction satisfait l'équation de la chaleur

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial t}$$

et satisfait les conditions aux limites suivantes:

$$f(x,0) = 1 \quad \text{pour tout } x \in S_r^0$$

$$f(x,t) = 0 \quad \text{si } x \cdot x^T = r^2$$

Par conséquent, la fonction  $g(\rho, t)$  doit satisfaire l'équation:

$$2 \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{n}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$g(\rho,0) = 1 \quad \text{si } \rho < r \quad \text{et} \quad g(r,t) = 0.$$

Appliquons la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation aux dérivées partielles. Posons  $g(\rho, t) = h(\rho) k(t)$  solution de (1.13), c'est-à-dire:

$$(h'' + h' \frac{n}{2\rho}) k = \frac{h}{2} k' \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Cette séparation des variables nous amène à résoudre deux équations différentielles:

$$k' = 2k\lambda \quad \text{et} \quad h'' + h' \frac{n}{2\rho} = \lambda h.$$

La fonction  $e^{2\lambda t}$  est solution de la première équation.

Pour la deuxième équation, si nous posons

$$h(\rho) = H(\rho\sqrt{\lambda})(\rho\sqrt{-\lambda})^{-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}},$$

on peut vérifier que la fonction  $H(u)$  satisfait à l'équation de Bessel sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire

$$H'' + \frac{H'}{u} + \left(1 - \frac{(\frac{n}{4} - \frac{1}{2})^2}{u^2}\right)H = 0$$

Nous savons [ 6 ] que la solution générale de l'équation de Bessel peut s'écrire:

$$H(u) = A J_v(u) + B N_v(u)$$

avec ici  $v = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}$  et  $n \geq 2$ ,  $A$  et  $B$  deux constantes et où  $J_v$  est la fonction de Bessel d'ordre  $v$  et  $N_v$  est la fonction de Neumann ou fonction de Bessel de seconde espèce.

Ainsi la solution générale sera:

$$h(\rho) = (\rho\sqrt{\lambda})^{-\frac{n}{4} + \frac{1}{2}} \{A J_v(\rho\sqrt{\lambda}) + B N_v(\rho\sqrt{\lambda})\} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{n}{4} - \frac{1}{2}.$$

Une solution de (1.13) sera la fonction

$$g(\rho, t) = e^{2\lambda t} (\rho\sqrt{-\lambda})^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} \left\{ A J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}(\rho\sqrt{-\lambda}) + B N_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}(\rho\sqrt{-\lambda}) \right\}$$

Mais la fonction de Neumann  $N_v(u)$  présente un point singulier à l'origine et comme  $g(\rho, t)$  est une fonction bornée, on doit donner à la constante  $B$  la valeur zéro.

On sait que la solution cherchée s'annule sur la frontière de la

sphère, c'est-à-dire  $g(r,t) = 0$ , ce qui implique

$$J_{\frac{n}{4} + \frac{1}{2}}(r\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

On doit donc choisir  $r\sqrt{-\lambda_k} = x_k$  les racines de la fonction de Bessel

$$J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}(x), k = 1, 2, \dots$$

Posons  $\lambda_k = -\left(\frac{x_k}{r}\right)^2$  pour  $k = 1, 2, \dots$  un nombre réel négatif

et la solution qui s'annule sur la frontière de la sphère est:

$$g(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\rho \frac{x_k}{r}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}\left(\frac{x_k \rho}{r}\right) e^{-2\left(\frac{x_k \rho}{r}\right)^2 t} \quad (1.14)$$

Mais nous avons aussi la condition que  $g(\rho, 0) = 1$  pour  $\rho < r$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\rho \frac{x_k}{r}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}\left(\frac{x_k \rho}{r}\right) = 1$$

Pour déterminer les constantes  $A_k$ , on utilisera les propriétés suivantes de la fonction de Bessel:

$$\int_0^1 x J_\mu(\rho_m x) J_\mu(\rho_n x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$\rho_m$  et  $\rho_n$  étant des racines de  $J_\mu$

$$2 \int_0^1 x [J_\mu(\rho_m x)]^2 dx = [J'_\mu(\rho_m)]^2$$

On trouve

$$A_k = \frac{2}{[J'_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}(x_k)]^2} (x_k)^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} \int_0^1 y^{\frac{1}{2} + \frac{n}{4}} J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}}(x_k y) dy$$

Finalement, nous pouvons écrire:

$$f(x, t) = P [X(s) \in S_r^0, 0 \leq s \leq t | X(0) = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( \sqrt{x \cdot x^T} \frac{x_k}{r} \right)^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} \left( \frac{x_k}{r} \sqrt{x \cdot x^T} \right) e^{-2 \left( \frac{x_k}{r} \right)^2 t}$$

pour la sphère centrée à l'origine. Si la sphère est centrée au point  $a$  il n'y a qu'à faire une translation.

Nous verrons dans le dernier chapitre que cette fonction est log-concave.

### ii) Caractérisation de $\mathbb{E}_x(T)$

Nous supposons que  $x \in S_r^a \subseteq \mathbb{R}^n$  est le point de départ d'une trajectoire effectuée par une particule qui suit un mouvement Brownien. Nous nous limiterons sans perte de généralité au cas d'une sphère centrée à l'origine d'un système d'axe. La variable aléatoire  $T$  représente le temps requis pour la première sortie à l'extérieur de la sphère.

Nous montrerons dans la section suivante que la fonction  $\mathbb{E}_x(T)$  satisfait l'équation de Poisson:

$$\Delta \mathbb{E}_x(T) = -2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbb{E}_x(t)}{\partial x_i^2} \quad (1.15)$$

Nous pouvons, ici aussi, affirmer que

$$\mathbb{E}_x(T) = g(\rho) \quad \text{où} \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

parce qu'il y a invariance du mouvement Brownien sous des rotations d'axes.

C'est une propriété de la loi multinormale. La fonction  $-\rho^2$  est une solution particulière de (1.15) et la fonction constante  $B$  est une solution de l'équation homogène associée.

Nous pouvons écrire:

$$\mathcal{E}_x(T) = C [B - \sum_{i=1}^n x_i^2] = C [B - \rho^2]$$

où  $C$  est une constante. Nous savons que  $\mathcal{E}_x(T) = 0$  si  $x \cdot x^T = r^2$ , ce qui implique  $B = r^2$  et

$$\mathcal{E}_x(T) = C [r^2 - \rho^2]$$

Admettons, temporairement, que  $\mathcal{E}_o(T) = \frac{1}{n} r^2$ , ce qui nous permettra de caractériser complètement  $\mathcal{E}_x(T)$

$$\mathcal{E}_x(T) = \frac{1}{n} \left\{ r^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}$$

Pour une sphère quelconque de centre  $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$\mathcal{E}_x(T) = \frac{1}{n} \left\{ r^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right\}$$

est une fonction strictement concave et son maximum est atteint au centre de la sphère.

Ce qui terminera cette section est indiqué dans le livre de Dynkin-Yushkevich [ 4 ].

Nous voulons montrer que  $\mathcal{E}_o(T) = \frac{1}{n} r^2$  et ce, par induction sur la dimension "n".

Dans le cas unidimensionnel, nous avons vu que  $\mathbb{E}_o(T) = r^2$ .

Supposons que le résultat soit vrai pour une sphère de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Nous définissons une nouvelle variable aléatoire  $T_2$  qui représente l'instant de la première visite de la particule à l'ensemble

$$C_n = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=2}^n y_i^2 \leq r^2 \quad \text{et} \quad y_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_o(T) &= \mathbb{E}_o(T_2) - \mathbb{E}_o(T_2 - T) \\ &= \mathbb{E}_o(T_2) - \mathbb{E}_\mu(T_2) \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la mesure uniforme définie sur la frontière de la sphère  $S_r^0 \subset \mathbb{R}^n$ , disons  $\partial S_r^0$  et

$$\mathbb{E}_\mu(T_2) = \int_{\partial S_r^0} \mathbb{E}_y(T_2) \mu(dy)$$

Par hypothèse  $\mathbb{E}_o(T_2) = \frac{1}{n-1} r^2$ , il nous reste à déterminer  $\mathbb{E}_\mu(T_2)$ . Pour cela, un passage aux coordonnées sphériques donnera

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu(T_2) &= \frac{1}{n-1} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{(r^2 - r^2 \sin^2 \theta_1) \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}}{2(\sqrt{\pi})^n / \Gamma(n/2) 2\pi} \\ &= \frac{r^2}{n-1} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}}{4 \frac{\pi}{2}^{n-1} / \Gamma(n/2)} \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^\pi \sin^n x dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

et

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\mu(T_2) &= \frac{\frac{r^2}{(n-1)} \frac{1}{(n)} \prod_{i=1}^{n-2} \left( \int_0^\pi \sin^i x \, dx \right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} / \Gamma(n/2)} \\ &= \frac{\frac{r^2}{n(n-1)} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{n-2}{2}} \prod_{i=1}^{n-2} \left( \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{i+1}{2})}{\Gamma(\frac{i+2}{2})} \right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} / \Gamma(n/2)} \\ &= \frac{r^2}{n(n-1)}\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{E}_0(T) = \frac{r^2}{n-1} - \frac{r^2}{n(n-1)} = \frac{r^2}{n}$$

#### IV - MOUVEMENT BROWNIEN DANS UN CONVEXE K DE $\mathbb{R}^n$

Nous savons, pour  $K$  un convexe ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , que

$$f(x, t) = P[X(s) \in K, 0 \leq s \leq t | X(0) = x]$$

est une fonction qui vérifie l'équation de la chaleur  $\Delta f = 2 \frac{\partial f}{\partial t}$ , et les conditions aux limites suivantes:

$$f(x, 0) = 1 \quad \text{pour } x \in K$$

$$f(x, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \partial K \quad \text{la frontière de } K.$$

Vu les difficultés de caractérisation de cette fonction, nous devons procéder différemment pour maximiser cette fonction.

Prenons une partition  $p_k$  de l'intervalle de temps  $(0, t)$ ,  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \dots < t_k = t$  et définissons

$$f_{p_k}(x, t) = P [X(t_1) \in K, X(t_2) \in K, \dots, X(t_k) \in K | X(0) = x]$$

une fonction qui s'approchera de  $f(x, t)$ , si nous nous choisissons une partition de plus en plus fine de  $(0, t)$ . Cette fonction peut s'écrire:

$$f_{p_k}(x, t) = P [X(t_1) - x \in K-x, \dots, X(t_k) - x \in K-x]$$

$$= \int_K \dots \int_K p_x(x_1; t_1) p_{x_1}(x_2; t_2 - t_1), \dots, p_{x_{k-1}}(x_k; t_k - t_{k-1}) dx_1 \dots dx_k$$

$$\text{où } p_{x_i}(x_j; \tau) = \frac{1}{(2\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{(x_j - x_i)^T}{2\tau^2}}$$

Effectuons un changement de variables. Posons

$$y_1 = x_1 - x$$

$$y_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, k$$

$$f_{p_k}(x, t) = \int_{C-X} \dots \int_{C-X} p_o(y_1; t_1) p_o(y_2; t_2 - t_1), \dots, p_o(y_k; t_k - t_{k-1}) dy_1 \dots dy_k$$

$$\text{où } x = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{kn}$$

$$\text{et } C = \{y \in \mathbb{R}^{nk} | y_1 \in K, y_2 \in K - y_1, \dots, y_k \in K - y_1 - y_2 - \dots - y_{k-1}\}$$

est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{nk}$ .

Ainsi

$$f_{p_k}(x, t) = \int_{C-X} \varphi(y) dy$$

$$\text{où } \varphi(y) = \prod_{i=1}^k p_o(y_i, t_i - t_{i-1})$$

est une fonction log-concave.

Nous allons donc étudier dans le chapitre suivant les conditions sur la fonction  $\varphi$  pour que la fonction  $X \rightarrow \int_{C-X} \varphi(y) dy$  soit quasi-concave ou log-concave.

Avant de terminer ce chapitre, montrons que pour un convexe ouvert  $K$ , quelconque de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $\mathcal{E}_x(T)$  satisfait à l'équation de Poisson. Soit  $x \in K$  un point et  $S_\rho^x$  une sphère de rayon  $\rho$  centrée en  $x$  contenue complètement dans  $K$ . Nous représenterons par  $T$  et  $T_\rho$  l'instant où la particule touche la frontière de  $K$  et de  $S_\rho^x$  respectivement pour la première fois. Nous savons que

$$\mathcal{E}_x(T_\rho) = \frac{1}{n} \rho^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_x(T) = \mathcal{E}_x(T_\rho) + \mathcal{E}_x(T-T_\rho).$$

Par la propriété forte de Markov

$$\mathcal{E}_x(T-T_\rho) = \int_{\partial S_\rho^x} \mathcal{E}_y(T) \mu(dy)$$

où  $\mu$  est la mesure uniforme sur la frontière de la sphère  $S_\rho^x$ .

La fonction

$$h(y) = \mathcal{E}_y(T) + \frac{1}{n} (y-x) \cdot (y-x)^T$$

vérifie la relation

$$h(x) = \int_{\partial S_\rho^x} h(y) \mu(dy),$$

et nous savons que toute fonction continue dans un ouvert  $K$ , ayant la propriété de la moyenne dans  $K$ , est harmonique dans  $K$ . Ainsi  $\mathcal{E}_x(T)$  défini sur un ensemble convexe quelconque satisfait à l'équation de Poisson  $\Delta \mathcal{E}_x(T) = -2$  et la condition aux limites  $\mathcal{E}_x(T) = 0$  pour  $x$  appartenant à la frontière du convexe.

Nous verrons dans le chapitre 3 qu'il est possible pour certains ensembles convexes de localiser le maximum de cette fonction.

CHAPITRE II  
MESURES QUASI-CONCAVES

Certaines questions posées dans le chapitre précédent peuvent connaître des réponses partielles ou complètes si l'on s'appuie sur les travaux de T.W. Anderson (1955), de V.A. Zalgaller (1967), de A. Prékopa (1972) et de C. Borell (1974). Nous voulons exposer ici ces résultats qui dégagent, en particulier, des propriétés fines de la loi multinormale. De chacun de ces auteurs, citons les théorèmes qui nous intéresseront.

Théorème d'Anderson [1] :

Soit  $E$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ , symétrique par rapport à l'origine et soit  $f(x) \geq 0$  une fonction telle que

- i)  $f(x) = f(-x)$ ,
  - ii)  $\{x | f(x) \geq u\}$  est convexe pour tout  $u$  de  $(0, \infty)$ ,
  - iii)  $\int_E f(x) dx < +\infty$ ,
- alors pour tout  $k$  de  $[0, 1]$

$$\int_E f(x+ky) dx \geq \int_E f(x+y) dx.$$

Théorème de Zalgaller [13] :

Soit  $xAx^T$  une forme quadratique non négative de  $n$  variables réelles, soit  $G$  un domaine convexe de dimension  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) de  $\mathbb{R}^n$ , on pose

$$p(M) = \int_{G+M} e^{xAx^T} dv_k$$

pour  $M \in \mathbb{R}^n$  et  $dv_k$  est l'élément de volume de dimension  $k$  de  $M+G$ , alors le logarithme de  $p(M)$  est une fonction concave de  $M$ .

Théorème de Prékopa [11] :

Si  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions non négatives, intégrables sur  $\mathbb{R}^n$ , dont le logarithme est concave, alors le logarithme de la convolution de  $f$  avec  $g$  est une fonction concave.

Théorème de Borell [2] :

Soit  $f(x)$  une fonction convexe positive définie sur un ouvert convexe non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on considère la mesure sur  $\Omega$ :

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{(f(x))^n},$$

alors si  $A$  et  $B$  sont deux convexes de  $\Omega$  et si  $t \in (0,1)$ ,

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \min(\mu(A), \mu(B)).$$

Indiquons maintenant les problèmes que nous voulons envisager dans ce chapitre. Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}^n$  et  $E$  un Borélien de  $\mathbb{R}^n$ , on considère la fonction  $\varphi(x) = \mu(x+E)$ . On peut songer que  $E$  est une cible que l'on déplace dans  $\mathbb{R}^n$  par des translations,  $x$  étant le vecteur de translation.

A quelle position est-il avantageux de déplacer la cible? Est-ce que la fonction  $\varphi(x)$  admet un maximum  $M$ ? Est-ce que le maximum est atteint en un seul point? Si le maximum de  $\varphi$  est atteint en plus d'un point, que peut-on dire de l'ensemble  $\{x | \varphi(x) = M\}$  d'après les propriétés de  $E$  et de  $\mu$ ?

Avant d'aller plus loin, nous rappelons ou introduisons des définitions. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , la somme de Minkowski de  $A$  avec  $B$  est  $A+B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$ . Il est facile de vérifier que  $A+B$  est un convexe si  $A$  et  $B$  le sont. Soit  $\mu$  une mesure sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $\mu$  est une mesure quasi-concave si pour tout couple de convexes compacts  $K_1$  et  $K_2$  ( $K_1 \subseteq \Omega$  et  $K_2 \subseteq \Omega$ ), et pour tout  $t \in (0,1)$ ,

$$\mu((1-t)K_1 + tK_2) \geq \min(\mu(K_1), \mu(K_2)).$$

On dira qu'une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est quasi-concave sous les translations si pour tout convexe compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $x \mapsto \mu(x+K)$  est quasi-concave. On vérifie facilement qu'une mesure quasi-concave est quasi-concave sous les translations. De façon analogue, on dit qu'une mesure  $\mu$  définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  est log-concave si pour tout couple de convexes compacts  $K_1$  et  $K_2$  de  $\Omega$  et pour tout  $t \in (0,1)$ ,

$$\mu((1-t)K_1 + tK_2) \geq \mu(K_1)^{1-t} \mu(K_2)^t.$$

Une mesure  $\mu$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  est log-concave sous les translations si pour tout convexe compact de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $x \mapsto \mu(x+K)$  est log-concave. Enfin, si on remplace dans les définitions précédentes les inégalités par des inégalités strictes, on parlera de mesures strictement quasi-concaves, de mesures strictement log-concave, etc.

La tâche que nous aurions aimé accomplir aurait été de caractériser de façon commode toutes les mesures de  $\mathbb{R}^n$  quasi-concaves sous les translations. La solution de ce problème est demeurée hors de notre

portée. Puisque les mesures quasi-concaves sont quasi-concaves sous les translations, nous avons par la suite limité notre attention aux mesures quasi-concaves. C'est à ce moment que nous avons découvert le théorème de Borell. Nous voulons donner une démonstration de celui-ci, qui nous permettrait entre autres de reconnaître les mesures de  $\mathbb{R}^n$  qui sont strictement quasi-concaves.

### I - LES THEOREMES

Nous commençons par prolonger l'excellent travail de Borell [2]. Si  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont trois fonctions non négatives définies sur  $\mathbb{R}^n$ , reliées entre elles par certaines inégalités, nous cherchons à minorer de façon suffisamment finie l'intégrale de  $h(x)$ .

#### Théorème 1.

Soient  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  trois fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$ , soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois corps convexes, on suppose que  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont continues et positives sur  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement, on supposera aussi que  $A+B \subseteq C$  et que

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B), h(x+y) \geq \delta [(a/f(x))^{1/n} + (b/g(y))^{1/n}]^{-n},$$

où  $a = \int_A f(x) dx$ ,  $b = \int_B g(y) dy$

et  $\delta$  est un nombre fixe, alors

$$\int_C h(z) dz \geq \delta.$$

Sous les mêmes conditions, on ne peut obtenir  $\int_C h(z) dz = \delta$  que si  $C = A+B$ ,  $B$  est en homothétie avec  $A$ , et si  $x \mapsto qx + \theta$  est l'homothétie de  $A$  sur  $B$ , alors  $g(qx + \theta) = ba^{-1} q^{-n} f(x)$  et  $h((q+1)x + \theta) = \delta a^{-1} (1+q)^{-n} f(x)$ ; de plus  $f^{-1/n}(x)$  est une fonction convexe sur  $A$ .

Démonstration:

L'outil principal de cette démonstration sera une adaptation de l'application de Brunn-Minkowski telle que décrite, par exemple, dans Dinghas [ 3 ]. Nous déterminons une première application qui enverra  $A$  sur le cube unité  $I^n$ . Pour ce faire, on utilise les diverses intégrales itérées de  $f$ :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, v) dv$$

$$f_0 = a = \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

Soit l'application

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$\text{où } t_k = \int_{-\infty}^{x_k} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, v) dv / f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$$

Cette application est continue et elle établit une correspondance biunivoque entre  $A$  et  $I^n$ . La matrice jacobienne de cette transformation est une matrice triangulaire, le  $k^{\text{ième}}$  élément de la diagonale est:

$$\frac{\partial t_k}{\partial x_k} = f_k(x_1, \dots, x_k) / f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Désignons par  $\varphi : I^n \rightarrow A$  l'application inverse. De façon analogue, on construit la suite  $\{g_k\}_{k=0}^n$  des diverses intégrales itérées de la fonction  $g$ ; on considère l'application  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto (u_1, u_2, \dots, u_n)$  où

$$u_k = \int_{-\infty}^{y_k} g_k(y_1, \dots, y_{k-1}, v) dv / g_{k-1}(y_1, \dots, y_{k-1}).$$

Ici  $\frac{\partial u_k}{\partial y_k} = g_k(y_1, \dots, y_k) / g_{k-1}(y_1, \dots, y_{k-1})$ .

On désignera par  $\Psi$  l'application inverse,  $\Psi : I^n \rightarrow B$ . Par hypothèse, on a que

$$h(\varphi(t) + \Psi(t)) \geq \delta \left[ \left( a/f(\varphi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} + \left( b/g(\Psi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-n}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_C h(z) dz &\geq \int_{I^n} h(\varphi(t) + \Psi(t)) J(t) dt \\ &\geq \delta \int_{I^n} \left[ \left( a/f(\varphi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} + \left( b/g(\Psi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-n} J(t) dt \end{aligned}$$

où  $J(t)$  est le jacobien de la transformation  $t \mapsto \varphi(t) + \Psi(t)$ . Nous allons montrer que

$$\left[ \left( a/f(\varphi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} + \left( b/g(\Psi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-n} J(t) \geq 1$$

pour tout  $t$  de  $I^n$ . En effet,

$$J(t) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{f_{k-1}(\varphi(t))}{f_k(\varphi(t))} + \frac{g_{k-1}(\Psi(t))}{g_k(\Psi(t))} \right).$$

Or on sait que pour toute suite de nombres positifs, on a l'inégalité:

$$\left[ \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right]^{\frac{1}{n}} \geq \left[ \prod_{i=1}^n a_i \right]^{\frac{1}{n}} + \left[ \prod_{i=1}^n b_i \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Ainsi  $\left[ J(t) \right]^{\frac{1}{n}} \geq \left[ \prod_{k=1}^n \frac{f_{k-1}(\varphi(t))}{f_k(\varphi(t))} \right]^{\frac{1}{n}} + \left[ \prod_{k=1}^n \frac{g_{k-1}(\Psi(t))}{g_k(\Psi(t))} \right]^{\frac{1}{n}}$

$$\left[ J(t) \right]^{\frac{1}{n}} \geq \left[ a/f(\varphi(t)) \right]^{\frac{1}{n}} + \left[ b/g(\Psi(t)) \right]^{\frac{1}{n}},$$

c'est l'inégalité que l'on voulait établir. D'où

$$\int_C h(z) dz \geq \delta.$$

Enumérons maintenant les cas où  $\int_C h(z) dz = \delta$ . Un certain nombre de conditions nécessaires apparaissent. Il faut, par exemple, que  $C = A+B$ , et même que l'image de  $I^n$  par l'application  $t \rightarrow \varphi(t) + \Psi(t)$  donne  $C$  à un ensemble de mesures nulles près. Il faut aussi que

$$\left[ \left( a/f(\varphi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} + \left( b/g(\Psi(t)) \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-n} J(t) \equiv 1.$$

Or l'égalité

$$\left[ \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \prod_{i=1}^n a_i \right]^{\frac{1}{n}} + \left[ \prod_{i=1}^n b_i \right]^{\frac{1}{n}}$$

n'a lieu que si les nombres  $b_i$  sont proportionnels aux nombres  $a_i$ , c'est-à-dire que  $b_i = q a_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{g_{k-1}(\Psi(t))}{g_k(\Psi(t))} = q(t) \frac{f_{k-1}(\varphi(t))}{f_k(\varphi(t))}.$$

La multiplication de ces  $n$  identités donne:

$$\frac{b}{g(\Psi(t))} = q^n(t) \frac{a}{f(\varphi(t))}.$$

Montrons que  $q(t)$  est une fonction constante. Si  $|A|$ ,  $|B|$  et  $|C|$  représentent la mesure de Lebesgue de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , alors

$$|A| = \int_A dx = \int_{I^n} \frac{a dt}{f(\varphi(t))}$$

$$|B| = \int_B dy = \int_{I^n} \frac{b}{g(\Psi(t))} dt = \int_{I^n} \frac{q^n(t) a}{f(\varphi(t))} dt$$

$$|C| = \int_C dz = \int_{I^n} J(t) dt$$

$$= \int_{I^n} \left[ \left( \frac{a}{f(\varphi(t))} \right)^{\frac{1}{n}} + \left( \frac{b}{g(\Psi(t))} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n dt$$

$$= \int_{I^n} (1 + q(t))^n \frac{a}{f(\varphi(t))} dt.$$

Puisque  $C = A+B$ , l'inégalité de Brunn-Minkowski [10] donne que

$$|C|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

D'autre part, l'inégalité de Minkowski pour  $L_\sigma^n(I^n)$  où  $d\sigma(t) = \frac{a dt}{f(\varphi(t))}$  donne

$$\|1+q\|_n \leq \|1\|_n + \|q\|_n,$$

c'est-à-dire que

$$|C|^{\frac{1}{n}} \leq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

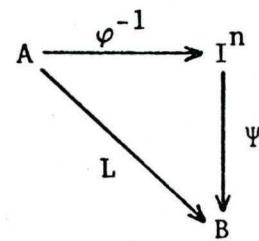
D'où  $\|1+q\|_n = \|1\|_n + \|q\|_n$ . Si  $n \geq 2$ , on obtient que  $q(t)$  est une constante et cette constante est

$$q = |B|^{\frac{1}{n}} |A|^{-\frac{1}{n}}.$$

Considérons l'application

$$L(x) = \Psi(\varphi^{-1}(x))$$

$$L(x) = (L_1(x), L_2(x), \dots, L_n(x))$$



Or

$$\frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \frac{f_1(x)}{a}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial y_1} = \frac{g_1(y)}{b}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{b}{g_1(y)} \cdot \frac{f_1(x)}{a} = q.$$

D'où  $L_1(x) = q x_1 + \theta_1$ . On peut supposer sans perte de généralité que A et B ont leur centre de gravité à l'origine.

$$0 = \int_A x_1 \, dx = \int_B y_1 \, dy = \int_A (qx_1 + \theta_1) q^n \, dx$$

vu que le jacobien de la transformation L est  $q^n$ . Ainsi  $\theta_1 = 0$ . On peut donc affirmer que pour tout  $x_1$ ,

$$q \frac{\int g(qx_1, v_2, \dots, v_n) \, dv_2, \dots, dv_n}{b} = \frac{\int f(x_1, v_2, \dots, v_n) \, dv_2, \dots, dv_n}{a}.$$

Si on pose

$$k(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{a} - q^n \frac{g(qx_1, qx_2, \dots, qx_n)}{b}$$

on obtient sur tout hyperplan  $x_1 = \text{constante}$  que l'intégrale de  $k(x)$  est nulle. En faisant varier les axes des coordonnées de  $\mathbb{R}^n$ , on obtient que la transformée de Radon est nulle. Ce qui nous assure que  $k(x) = 0$  presque partout [12] ou [8]. Ce qui montre que  $g(qx) = \frac{bf(x)}{aq^n}$  pour tout  $x$  de  $A$  et que  $B$  est homothétique à  $A$  selon le rapport  $q$ . D'autre part, un retour aux hypothèses sur  $h$  donne que

$$h(x(1+q)) \geq \delta \frac{f(x)}{a(1+q)^n}.$$

L'intégration sur  $A$  donne que

$$\frac{\delta}{(1+q)^n} \geq \frac{\delta}{(1+q)^n}.$$

Ainsi 
$$h(x(1+q)) = \frac{\delta f(x)}{a(1+q)^n}.$$

Par la suite, des contraintes sont apportées à la fonction  $f$

$$f^{-\frac{1}{n}} \left( \frac{x_1 + x_2 q}{1+q} \right) \leq \frac{f^{-\frac{1}{n}}(x_1) + q f^{-\frac{1}{n}}(x_2)}{1+q}.$$

Ce qui revient à dire que la fonction  $f^{-\frac{1}{n}}(x)$  est convexe sur  $A$ . La démonstration est complète, hors le cas  $n = 1$ .

Le cas  $n = 1$  demande une attention spéciale. Considérons donc trois fonctions continues  $f(x)$ ,  $g(y)$ ,  $h(z)$ , définies respectivement sur les intervalles  $[0, \alpha]$ ,  $[0, \beta]$  et  $[0, \gamma]$  telles que  $\gamma \geq \alpha + \beta$ ,

$$\frac{c}{h(x+y)} \leq \frac{a}{f(x)} + \frac{b}{g(y)}$$

alors que

$$a = \int_0^\alpha f(x) dx, \quad b = \int_0^\beta g(y) dy \quad \text{et} \quad c = \int_0^\gamma h(z) dz.$$

Nous voulons montrer que

$$g(qx) = \frac{b f(x)}{aq} \quad \text{et} \quad h(x(1+q)) = \frac{c f(x)}{(1+q) a},$$

alors que  $\gamma = \alpha + \beta$  et  $q = \beta/\alpha$  et que l'inverse de  $f(x)$  est une fonction convexe.

Il n'y a aucune perte de généralité à supposer que  $a = b = c = 1$  quitte à remplacer  $f, g, h$  par  $f/a, g/b$  et  $h/c$ .

Introduisons encore les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur  $[0, 1]$  où

$$\int_0^{\varphi(t)} f(x) dx = \int_0^{\psi(t)} g(y) dy = t,$$

$$\int_0^{\alpha+\beta} h(z) dz = \int_0^1 h(\varphi(t) + \psi(t)) \{\varphi'(t) + \psi'(t)\} dt.$$

Or  $\frac{1}{h(\varphi(t) + \psi(t))} \leq \frac{1}{f(\varphi(t))} + \frac{1}{g(\psi(t))} = \varphi'(t) + \psi'(t).$

Ce qui montre que  $\gamma = \alpha + \beta$  et que

$$\int_0^{\varphi(t)+\psi(t)} h(z) dz = t.$$

La fonction  $\frac{1}{h(z)}$  est convexe. Pour s'en rendre compte, il suffit de montrer que l'on ne peut pas trouver de nombres  $z_1, z_2, s$  et  $r$

tels que

$$\frac{1}{h(z_1)} - sz_1 = \frac{1}{h(z_2)} - sz_2 = r$$

et pour  $z_1 < z < z_2$

$$\frac{1}{h(z)} - sz > r.$$

Supposons que l'on ait trouvé de tels nombres  $z_1, z_2, s$  et  $r$ .

On peut trouver deux nombres  $t_1$  et  $t_2$  tels que

$$\varphi(t_i) + \psi(t_i) = z_i \quad (i=1 \text{ et } 2)$$

et l'on pose

$$x_i = \varphi(t_i) \quad \text{et} \quad y_i = \psi(t_i) \quad (i=1 \text{ et } 2).$$

On a les inégalités suivantes:

$$\frac{1}{h(x_1+y_2)} \leq \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(y_2)}$$

$$\frac{1}{h(x_2+y_1)} \leq \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(y_1)}.$$

D'autre part

$$\frac{1}{h(z_1)} = \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(y_1)}$$

et

$$\frac{1}{h(z_2)} = \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(y_2)}$$

d'où

$$\frac{1}{h(x_2+y_1)} + \frac{1}{h(x_1+y_2)} \leq \frac{1}{h(z_1)} + \frac{1}{h(z_2)}$$

$$s(x_2+y_1) + r + s(x_1+y_2) + r < sz_1 + r + sz_2 + r$$

Ce qui amène une contradiction.

Puisque la fonction  $\frac{1}{h(z)}$  est convexe si  $z \in (0, Y)$ , on peut trouver un  $m$  tel que

$$\frac{1}{h(z+\eta)} \geq \frac{1}{h(z)} + m\eta$$

( $m$  est un nombre entre la dérivée à gauche et la dérivée à droite de la fonction  $\frac{1}{h}$  au point  $z$ ). Si  $z = \varphi(t) + \Psi(t)$ ,  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \Psi(t)$ , on a l'inégalité

$$\frac{1}{f(x+\eta)} + \frac{1}{g(y)} \geq \frac{1}{h(z+\eta)} \geq \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(y)} + m\eta$$

$$\frac{1}{f(x+\eta)} \geq \frac{1}{f(x)} + m\eta.$$

Ceci montre que la fonction  $\frac{1}{f}$  est également convexe. De façon semblable, on peut voir que  $\frac{1}{g}$  est convexe. Hors d'un ensemble dénombrable, on a la relation

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g'(y)}{g^2(y)} = \frac{h'(z)}{h^2(z)} \quad \text{si} \quad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \\ z &= \varphi(t) + \Psi(t). \end{aligned}$$

Puisque  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$ , on peut donc admettre que  $\varphi'(t)$  a des dérivées à gauche et à droite et hors d'un ensemble dénombrable

$$f'(\varphi(t)) (\varphi'(t))^2 = -f(\varphi(t)) \varphi''(t)$$

$$g'(\Psi(t)) (\Psi'(t))^2 = -g(\Psi(t)) \Psi''(t)$$

d'où

$$\frac{\Psi''(t)}{\Psi'(t)} = \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}.$$

Ainsi

$$\Psi'(t) = C \varphi'(t) \quad \text{et} \quad \Psi(t) = C \varphi(t) + D.$$

Or  $\varphi(0) = \Psi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = \alpha$  et  $\Psi(1) = \beta$

d'où  $\Psi(t) = \beta \varphi(t)/\alpha$  et  $g(\Psi(t)) \Psi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

$$g(qx) = f(x)/q$$

$$h((1+q)x) = f(x)/(1+q).$$

Soit  $p : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $p(kx, ky) = k p(x, y)$   
 si  $k > 0$ , on a donc supposé que  $p$  est une fonction homogène de degré  
 un, non négative, définie dans le premier quadrant, nous introduisons une  
 suite de fonctions homogènes:

$$p_n(x, y) = \sup\{p(t^n x, (1-t)^n y) : t \in (0, 1)\}$$

ici  $p_n$  peut prendre la valeur  $\infty$ . Si  $p(x, y) = \sqrt{xy}$ , alors  $p_n(x, y) = 2^{-n} \sqrt{xy}$   
 si  $p(x, y) = \min(x, y)$ , alors

$$p_n(x, y) = \left( x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} \right)^{-n}.$$

Soit  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  une famille de mesures de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que ces mesures sont en homothétie, s'il existe un point  $c$ , une mesure  $\mu$  et une suite de nombres positifs  $\rho_i$  tels que pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $i \in I$ ,

$$\mu(B) = \mu_i(c + \rho_i(B - c)).$$

Inspirés par Borell, nous dégageons le résultat suivant:

### Théorème 2.

Soient  $f(x), g(x), h(x)$  trois fonctions positives continues, définies respectivement sur des corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A, B$  et  $C$ ,  $A+B \subseteq C$ ,

soit  $p(x,y)$  une fonction homogène de degré un, non négative, définie dans le premier quadrant du plan, on suppose que

$$h(x+y) \geq p_n(f(x), g(y)) \quad \text{pour } x \in A, y \in B,$$

alors

$$\int_C h(z) dz \geq p \left( \int_A f(x) dx, \int_B g(y) dy \right).$$

Démonstration:

Borell a démontré ce résultat lorsque  $p(x,y)$  est une fonction homogène de degré un, continue et croissante selon chacune de ses variables [2]. Pour traiter du cas général de  $p(x,y)$ , on se sert du théorème précédent après avoir observé que

$$h(x+y) \geq p_n(f(x), g(y)) \geq p(t^n f(x), (1-t)^n g(y))$$

$$\text{où } t = (a/f(x))^{1/n} / \{(a/f(x))^{1/n} + (b/g(y))^{1/n}\}$$

$$1-t = (b/g(y))^{1/n} / \{(a/f(x))^{1/n} + (b/g(y))^{1/n}\}$$

$$a = \int_A f(x) dx, \quad b = \int_B g(y) dy.$$

$$\text{D'où } h(x+y) \geq p(a,b) \{(a/f(x))^{1/n} + (b/g(y))^{1/n}\}^{-n}.$$

Théorème 3.

Avec la même notation et les mêmes hypothèses que dans le dernier théorème, si de plus,

$$\int_C h(z) dz = p \left( \int_A f(x) dx, \int_B g(y) dy \right),$$

$$\text{si } a = \int_A f(x) dx, \quad b = \int_B g(y) dy \quad \text{et} \quad c = \int_C h(z) dz,$$

alors

$$\frac{f(x)}{a}, \frac{g(y)}{b}, \frac{h(z)}{c}$$

sont des mesures en homothétie,  $C = A+B$  et si le rapport d'homothétie de  $B$  avec  $A$  est  $q$ , alors

$$\begin{aligned} p(a,b) &\geq (1+q)^n p(at^n, (1-t)^n bq^{-n}) \quad \text{pour } t \in (0,1) \\ &\geq (1+q)^n p_n(a, bq^{-n}) \end{aligned}$$

et  $f\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}\right) \geq (1+q)^n \frac{p_n(af(x_1), bq^{-n} f(x_2))}{p(a,b)}.$

Démonstration:

On a déjà vu que  $f(x)/a$ ,  $g(y)/b$  et  $h(z)/c$  sont les densités de trois mesures en homothétie. D'autre part, il faut aussi que

$$p(a,b)(1+q)^{-n} f(x)/a = h((q+1)x + \theta)$$

$$h((q+1)x + \theta) \geq p(t^n f(x), (1-t)^n bq^{-n} f(x)/a), t \in (0,1)$$

$$p(a,b) \geq (1+q)^n p(at^n, (1-t)^n bq^{-n}), t \in (0,1).$$

D'autre part, le présent théorème impose alors des contraintes sur la fonction  $f(x)$ .

Si  $y_2 = qx_2 + \theta$ ,

$$h(x_1 + y_2) = \frac{c}{a} (1+q)^{-n} f\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}\right)$$

$$\geq p_n(f(x_1), g(y_2))$$

$$\geq p_n(f(x_1), bq^{-n} f(x_2)/a)$$

$$f\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}\right) \geq \frac{(1+q)^n p_n(af(x_1), bq^{-n} f(x_2))}{p(a, b)}.$$

Nous indiquerons maintenant quelques conséquences de ces théorèmes. Si  $p(x, y) = \sqrt{xy}$ , on a que  $p_n(x, y) = 2^{-n} \sqrt{xy}$ . D'où si

$$h(x+y) \geq 2^{-n} \sqrt{f(x) g(y)},$$

on aura que

$$\int_{A+B} h(z) dz \geq \left( \int_A f(x) dx \int_B g(y) dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'égalité n'est obtenue que si  $f(x)/a$ ,  $g(y)/b$  et  $h(z)/c$  sont des densités de mesure en homothétie où le rapport d'homothétie de  $B$  avec  $A$  est 1 ( $B$  est un translaté de  $A$ ) et

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq (f(x_1) f(x_2))^{\frac{1}{2}}.$$

Si  $p(x, y) = \min(x, y)$ , on a que

$$p_n(x, y) = \left( x^{-\frac{1}{n}} + y^{-\frac{1}{n}} \right)^{-n}.$$

D'où, si

$$h(x+y)^{-\frac{1}{n}} \leq f(x)^{-\frac{1}{n}} + g(y)^{-\frac{1}{n}},$$

alors

$$\int_{A+B} h(z) dz \geq \min \left( \int_A f(x) dx, \int_B g(y) dy \right).$$

L'égalité n'est obtenue que si  $f(x)/a$ ,  $g(y)/b$  et  $h(z)/c$  sont des densités de mesure en homothétie. Il faut aussi que

$$\min(a, b) \geq \left( \frac{a^{-\frac{1}{n}} + b^{-\frac{1}{n}}}{1+q} \right)^{-n}.$$

Il faut donc que  $a = b$ . Il faudra que

$$f\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}\right) \geq (1+q)^n \left( f^{\frac{1}{n}}(x_1) + q f^{\frac{1}{n}}(x_2) \right)^n.$$

Ce qui revient à dire que  $f^{-\frac{1}{n}}(x)$  est nécessairement une fonction convexe.

Un calcul simple établit également que si  $A$  et  $B$  sont deux corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ , si  $p(x,y)$  est une fonction homogène de degré un, définie dans le premier quadrant, si  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions continues, positives, définies sur  $A$ ,  $B$  et  $\alpha A + \beta B = C$  et si

$$h(\alpha x + \beta y) \geq p_n(\alpha^{-n} f(x), \beta^{-n} g(y)), \quad x \in A \text{ et } y \in B,$$

alors

$$\int_{\alpha A + \beta B} h(z) dz \geq p\left(\int_A f(x) dx, \int_B g(y) dy\right).$$

On peut enfin introduire le cas où  $A$  et  $B$  sont deux ouverts convexes.

#### Théorème 4.

Si  $A$  et  $B$  sont deux ouverts non vides convexes de  $\mathbb{R}^n$ , si  $p(x,y)$  est une fonction homogène de degré un, définie dans le premier quadrant, si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , si  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions continues, positives, définies sur  $A$ ,  $B$  et  $C \supseteq \alpha A + \beta B$  et si

$$h(\alpha x + \beta y) \geq p_n(\alpha^{-n} f(x), \beta^{-n} g(y)), \quad x \in A, y \in B,$$

alors

$$\int_C h(z) dz \geq p\left(\int_A f(x) dx, \int_B g(y) dy\right).$$

Démonstration:

Etant donné les résultats antérieurs, il suffit de démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux corps convexes  $K$  et  $L$  tels que  $K \subseteq A$  et  $L \subseteq B$ ,

$$1-\epsilon < \frac{\int_K f(x) dx}{\int_A f(x) dx} = \frac{\int_L g(y) dy}{\int_B g(y) dy}.$$

On peut trouver deux corps convexes  $K_1$  et  $L_1$ ,  $K_1 \subseteq A$ ,  $L_1 \subseteq B$  et

$$1-\frac{\epsilon}{2} < \frac{\int_{K_1} f(x) dx}{\int_A f(x) dx} < \frac{\int_{L_1} g(y) dy}{\int_B g(y) dy}.$$

De même, on peut trouver deux corps convexes  $K_2$  et  $L_2$ ,  $K_2 \subseteq A$ ,  $L_2 \subseteq B$  et

$$1-\frac{\epsilon}{2} < \frac{\int_{L_2} g(y) dy}{\int_B g(y) dy} < \frac{\int_{K_2} f(x) dx}{\int_A f(x) dx}.$$

D'où il existe un nombre  $t \in (0,1)$  tel que si  $K = (1-t) K_1 + t K_2$  et si  $L = (1-t) L_1 + t L_2$

$$\frac{\int_K f(x) dx}{\int_A f(x) dx} = \frac{\int_L g(y) dy}{\int_B g(y) dy}.$$

D'autre part  $K \supseteq K_1 \cap K_2$  et  $L \supseteq L_1 \cap L_2$

$$\int_A f(x) dx - \int_{K_1 \cap K_2} f(x) dx < \int_{A-K_1} f(x) dx + \int_{A-K_2} f(x) dx.$$

D'où  $\int_A f(x) dx - \int_K f(x) dx < \varepsilon \int_A f(x) dx$

ainsi  $1-\varepsilon < \frac{\int_K f(x) dx}{\int_A f(x) dx}$ .

## II - APPLICATIONS

Borell a indiqué diverses applications de ces théorèmes. Soit  $k(x,y)$  un noyau défini sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , supposons que  $k(x,y)$  est une fonction log-concave. Montrons que la fonction  $x \rightarrow \int k(x,y) dy$  est log-concave. Soit  $x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$  où  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\alpha + \beta = 1$  et posons

$$f(y) = k(x_1, y), \quad g(y) = k(x_2, y), \quad h(y) = k(x_3, y) \quad \text{et} \quad A = B = C = \mathbb{R}^n.$$

La fonction de deux variables  $p(x,y) = x^\alpha y^\beta$  est homogène de degré un et  $p_n(x,y) = (\alpha^\alpha \beta^\beta)^n x^\alpha y^\beta$ . On a

$$h(\alpha y_1 + \beta y_2) = k(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$\geq k^\alpha(x_1, y_1) k^\beta(x_2, y_2) = p_n(\alpha^{-n} f(y_1), \beta^{-n} g(y_2)).$$

D'où  $\int k(\alpha x_1 + \beta x_2, y) dy \geq \left( \int k(x_1, y) dy \right)^\alpha \left( \int k(x_2, y) dy \right)^\beta.$

On obtient le théorème de Prékopa, précédemment cité, lorsque l'on pose  $k(x,y) = f(x-y) g(y)$  si  $f(x)$  et  $g(y)$  sont deux fonctions log-concaves de  $\mathbb{R}^n$ . D'autre part, le résultat de Zalgaller, que nous avons également cité auparavant, est une conséquence du théorème de Prékopa en prenant pour  $f(x)$  la fonction indicatrice d'un convexe et pour  $g(x)$  l'exponentiel d'une forme quadratique non positive.

Vérifions maintenant un autre résultat de Borell.

Théorème 5. (Borell [ 2 ])

Soit  $k(x,y)$  une fonction positive définie sur un ouvert convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  telle que  $k^{-\frac{1}{n}}$  est une fonction convexe. Si  $A(x) = \{y | (x,y) \in \Omega\}$ , alors la fonction  $x \mapsto \int_{A(x)} k(x,y) dy$  est quasi-convexe.

Démonstration:

Soient  $x_1, x_2, x_3$  trois points de  $\mathbb{R}^m$  tels que

$$x_3 = (1-t)x_1 + tx_2, \quad t \in (0,1),$$

posons  $A_i = A(x_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$  et supposons que

$$\delta = \min \left( \int_{A_1} k(x_1, y) dy, \int_{A_2} k(x_2, y) dy \right) \in (0, \infty).$$

Utilisons le théorème 4 en posant  $A = A_1, B = A_2, C = A_3, f(y) = k(x_1, y), g(y) = k(x_2, y), h(y) = k(x_3, y), \alpha = 1-t, \beta = t$  et  $p(x, y) = \min(x, y)$ .

Ici

$$p_n(x, y) = \left( x^{-\frac{1}{n}} + y^{-\frac{1}{n}} \right)^{-n}$$

et l'inégalité

$$h(\alpha x + \beta y) \geq p_n(\alpha^{-n} f(x), \beta^{-n} g(y)) = \left( \alpha^{-\frac{1}{n}} f(x) + \beta^{-\frac{1}{n}} g(y) \right)^{-n}$$

est vérifiée vu que  $k^{-\frac{1}{n}}$  est une fonction convexe. D'où

$$\int_{A_3} k(x_3, y) dy \geq \delta.$$

Le théorème de Borell, cité au début de ce chapitre, est un corollaire du dernier théorème. Nous nous servirons du deuxième théorème de Borell pour déterminer des conditions suffisantes sur deux fonctions  $f$  et  $g$  pour que la convolution de  $f$  avec  $g$  soit une fonction quasi-concave.

Introduisons des classes de fonctions définies sur un espace vectoriel  $V$ . Pour tout  $p \in [-\infty, \infty]$ ,  $C_p(V)$  sera un ensemble de fonctions  $f$  définies sur  $V$  à valeurs dans  $[0, \infty]$  où  $\{x | f(x) > 0\}$  sera toujours un convexe  $N_f$  de  $V$ .  $C_0(V)$  sera l'ensemble des fonctions log-concaves. Si  $p \in (0, \infty)$ ,  $C_p(V) = \{f | f^p \text{ est concave sur } N_f\}$ , si  $p \in (-\infty, 0)$ ,  $C_p(V) = \{f | f^p \text{ est convexe sur } N_f\}$ ,  $C_\infty(V) = \{f | f \text{ est constant sur } N_f\}$  et  $C_{-\infty}(V) = \{f | f \text{ est quasi-concave sur } N_f\}$ .

On vérifie la relation d'inclusion:

Lemme 1.

Si  $p < q$ , alors  $C_q \subset C_p$ .

Démonstration:

Premier cas:  $0 < p < q$ . Il s'agit de montrer que si  $f^q$  est concave, alors  $f^p$  est concave. Posons  $g = f^q$ ,  $\alpha = p/q$ ,  $f^p = g^\alpha$ . Ici  $\alpha \in (0, 1)$ . La fonction  $x \rightarrow x^\alpha$  est concave d'où

$$\begin{aligned} \left( \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \right)^\alpha &\geq \frac{g^\alpha(x_1) + g^\alpha(x_2)}{2} \\ g \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) &\geq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}. \end{aligned}$$

La croissance de  $x^\alpha$  assure la concavité de  $g^\alpha = f^p$ .

Deuxième cas:  $0 = p < q$ . Il s'agit de montrer que si  $f^q$  est concave, alors le  $\log f$  est concave. On pose  $g = f^q$ , alors  $\log f = \frac{\log g}{q}$ . La fonction  $x \rightarrow \log x$  est croissante et concave, d'où  $\log g$  est concave comme le  $\log$  de  $f$ .

Troisième cas:  $p < q = 0$ . Il s'agit de montrer que si  $\log f$  est concave, alors  $f^p$  est convexe. Posons  $g = \log f$ ,  $f^p = e^{pg}$ . La fonction  $x \rightarrow e^x$  est convexe et croissante, la fonction  $pg$  est convexe, d'où  $f^p$  est convexe.

Quatrième cas:  $p < q < 0$ . Si  $f^q$  est convexe, alors  $f^p$  est convexe. Posons  $g = f^q$  et  $\alpha = p/q$ ,  $f^p = g^\alpha$ . Ici  $\alpha > 1$ , la fonction  $x \rightarrow x^\alpha$  est convexe et croissante. D'où  $f^p$  est convexe.

Cinquième cas:  $p = -\infty < q < 0$ . Si  $f^q$  est convexe, si  $g = f^p$ , alors  $g$  est quasi-convexe, la fonction  $x \rightarrow x^{1/q}$  est décroissante. Ainsi  $f$  est quasi-concave.

Sixième cas:  $0 < p < q = +\infty$ . Une fonction constante élevée à une  $p^{\text{ième}}$  puissance est constante, donc concave.

### Lemme 2.

Soit  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives, définies sur un même intervalle ouvert, si  $f$  est convexe, si  $g$  est concave et si  $\alpha > 0$ , alors la fonction  $f^{1+\alpha} g^{-\alpha}$  est convexe.

### Démonstration:

Posons  $h(x) = f^{1+\alpha}(x) g^{-\alpha}(x)$ . Supposons premièrement que  $f''$  et  $g''$  existent en tout point.

$$h''(x) = h(x)\{(\alpha+1)f''(x)/f(x) - \alpha g''(x)/g(x) + \alpha(\alpha+1)(f'(x)/f(x) - g'(x)/g(x)^2\}.$$

D'où  $h''(x) \geq 0$ .

Si  $f(x)$  ou si  $g(x)$  n'est pas dérivable, on doit modifier notre argumentation. Soit  $x$  un point de l'intervalle. On sait que l'on peut trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels que

$$f(x+h) \geq f(x) + ah$$

$$g(x+h) \leq g(x) + bh.$$

D'où, sur un voisinage de  $x$ ,

$$f^{1+\alpha}(y) g^{-\alpha}(y) \geq \frac{(f(x) + a(y-x))^{1+\alpha}}{(g(x) + b(y-x))^{\alpha}}.$$

La fonction

$$y \longrightarrow \frac{(f(x) + a(y-x))^{1+\alpha}}{(g(x) + b(y-x))^{\alpha}}$$

est convexe près du point  $x$  comme on vient de le voir précédemment. La fonction  $f^{1+\alpha}(y) g^{-\alpha}(y)$  est donc minorée par une fonction convexe près du point  $x$ , d'où la convexité de la fonction  $h$ .

### Lemme 3.

Si  $f \in C_p$ , si  $g \in C_q$  pour  $p < 0 < p+q$ , alors  $fg \in C_r$  où  $r = \frac{pq}{p+q}$ .

### Démonstration:

La fonction  $f^p$  est convexe et la fonction  $g^q$  est concave.

Posons  $\alpha = -p/p+q$ , le lemme 2 donne que

$$(fg)^{pq/p+q} = f^{p(1+\alpha)} g^{-q\alpha}$$

est convexe.

### Théorème 6.

Si  $g$  appartient à  $C_q(\mathbb{R}^n)$  où  $q > 0$ , si  $f$  appartient à  $C_p(\mathbb{R}^n)$  où  $p = -q(1+nq)^{-1}$ , alors la convolution de  $f$  avec  $g$  est quasi-concave.

#### Démonstration:

On considère le noyau  $k(x,y) = f(x-y) g(y)$ . Le lemme 3 donne que  $k^{-\frac{1}{n}}(x,y)$  est convexe. Le deuxième théorème de Borell établit le résultat.

Il est peut-être bon d'apporter un regard critique sur ce dernier théorème. Pour  $n = 1$ , nous avons montré que si  $g > 0$ , si  $g \in C_q(\mathbb{R})$  et si  $f \in C_p(\mathbb{R})$  où  $p = -q/q+1$ , alors  $f*g$  est quasi-concave. Ce dernier résultat découle d'un théorème d'Ibragimov [ 7 ] qui en 1956 fit voir que la convolution d'une fonction log-concave sur  $\mathbb{R}$  (Strong unimodal) avec une fonction quasi-concave sur  $\mathbb{R}$  (unimodal) donne une fonction quasi-concave. Cependant, dans  $\mathbb{R}^n$ , nous ne connaissons pas de version du théorème d'Ibragimov. Nous savons, par exemple, que dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) il n'est pas toujours vrai que la convolution d'une fonction log-concave avec une fonction quasi-concave donne une fonction log-concave.

CHAPITRE IIILOG-CONCAVITE DE LA PROBABILITE DE SEJOUR ET TEMPS PROBABLE MAXIMUMI - LOG-CONCAVITE DE LA PROBABILITE DE SEJOUR DANS UN CONVEXE QUELCONQUE  
DE  $\mathbb{R}^n$ 

Considérons un mouvement Brownien  $\{X(t)\}$ , invariant sous les transformations orthogonales, qui partirait d'un point fixe  $x$  d'un ensemble ouvert convexe, borné  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  et qui s'arrêterait lorsque la trajectoire désordonnée toucherait la frontière de  $K$ .

Désignons par

$$f(x,t) = P [ X(s) \in K \quad 0 \leq s \leq t \mid X(0) = x ],$$

c'est la probabilité d'être toujours à l'intérieur du convexe  $K$  à l'instant  $t$ , partant initialement du point  $x \in K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Cette fonction est identiquement nulle pour tout  $x$  appartenant à la frontière de  $K$ .

Nous avons déjà caractérisé cette fonction lorsque  $K$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous voulons montrer, maintenant, que pour un ensemble convexe quelconque de  $\mathbb{R}^n$  la fonction  $x \rightarrow f(x,t)$  est log-concave.

Théorème 1.

La fonction  $f(x,t)$  est une fonction log-concave pour chaque  $t$  fixé.

Démonstration:

Prenons une partition  $p_k = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  de l'intervalle de temps  $(0, t)$ , où  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = t$  et définissons une nouvelle fonction  $f_{p_k}(x, t)$  comme suit:

$$x \longrightarrow P [X(t_1) \in K, \dots, X(t_k) \in K | X(0) = x].$$

Cette fonction peut s'écrire:

$$f_{p_k}(x, t) = \int_K \dots \int_K \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{1}{[2\pi(t_i - t_{i-1})]^{n/2}} \right\} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{(y_i - y_{i-1}) \cdot (y_i - y_{i-1})}{2(t_i - t_{i-1})^2}} dy_1 \dots dy_k$$

où  $y_0 = x$ , ou encore, après avoir effectué le changement de variables suivant:

$$Y_i = y_i - y_{i-1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k.$$

$$f_{p_k}(x, t) = \int_{C-x} \dots \int \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{1}{[2\pi(t_i - t_{i-1})]^{n/2}} \right\} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})^2}} dY_1 \dots dY_k$$

où  $X = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{nk}$

et  $C = \{Y \in \mathbb{R}^{nk} | Y_1 \in K, Y_2 \in K - Y_1, \dots, Y_k \in K - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{k-1}\}$

est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{nk}$ .

Ainsi

$$f_{p_k}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{nk}} I_C(Y+X) \varphi(Y) dY,$$

où  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ ,  $I_C$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$  et  $\varphi(Y)$  est la fonction

$$Y \longrightarrow \left\{ \prod_{i=1}^k \frac{1}{[2\pi(t_i - t_{i-1})]^{n/2}} \right\} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{Y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})^2}}.$$

La fonction  $K(X, Y) = I_C(Y+X) \varphi(Y)$  est une fonction log-concave et nous avons vu dans le chapitre précédent que la fonction  $X \rightarrow \int K(X, Y) dY$  est log-concave. Donc  $f_{p_k}(x, t)$ , pour  $t$  fixé, est une fonction log-concave du vecteur  $x$ . En prenant une partition de plus en plus fine de l'intervalle de temps  $(0, t)$ , on peut affirmer que la fonction  $x \rightarrow f(x, t)$  est une fonction log-concave.

Les ensembles  $A_{c(t)} = \{x | f(x, t) \geq c(t)\}$  sont des convexes de  $\mathbb{R}^n$ . Posons

$$m(t) = \sup\{f(x, t) | x \in K\};$$

l'ensemble

$$A_m(t) = \{x | f(x, t) = m(t)\}$$

est convexe et correspond à l'ensemble des points  $x$  tels que  $f(x, t)$  soit maximum. Malheureusement, on a pu démontrer que l'ensemble  $A_m(t)$  contient un seul point pour chaque  $t > 0$ , c'est-à-dire qu'on a pu démontrer que la fonction  $x \rightarrow f(x, t)$  soit strictement log-concave. La fonction  $f(x, t)$  possède une autre propriété.

### Théorème 2.

La fonction  $f(x, t)$  est une fonction sur-harmonique par rapport à la variable  $x$ .

Démonstration:

Comme  $f(x,t)$  satisfait à l'équation de la chaleur,  
 $\Delta f(x,t) = 2 \frac{\partial f}{\partial t}$ , et comme nous voulons que  $\Delta f \leq 0$ , il suffit de montrer que la fonction  $t \mapsto f(x,t)$  est une fonction non croissante. Pour le voir, supposons que  $t \leq t'$  et considérons l'événement

$$\{x(s) \in K \text{ pour } 0 \leq s \leq t | x(0) = x\}.$$

Cet événement est équivalent à

$$\{x(s) \in K \text{ pour } 0 \leq s \leq t \text{ et } x(u) \in \mathbb{R}^n \text{ pour } t < u \leq t' | x(0) = x\}.$$

Mais ce dernier événement contient

$$\{x(s) \in K ; 0 \leq s \leq t' | x(0) = x\}.$$

On voit ainsi que  $f(x,t) \geq f(x,t')$  pour  $t \leq t'$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0$  et  $f(x,t)$  est superharmonique par rapport à la variable  $x$ .

Dans le cas unidimensionnel, la fonction (1.12) est concave car  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0$ . De plus, les ensembles  $A_1^t = \{x | f(x,t) = 1\}$  sont emboîtés,  $A_1^t \supset A_1^{t'}$  si  $t \leq t'$ , c'est une conséquence de la non croissance de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $t$ . Cependant, on n'a pu démontrer qu'il existe un point unique, en l'occurrence,  $x = \frac{a}{2}$  et un temps  $t = t_0$  tels que  $f(\frac{a}{2}, t_0) > f(x,t)$  pour tout  $x \neq \frac{a}{2}$  et pour tout  $t \geq t_0$ , c'est-à-dire que  $f(x,t)$  soit strictement concave par rapport à la variable  $x$  à partir d'un certain temps  $t_0$ . Pourtant, on constate que si  $\frac{t}{a^2}$  est suffisamment grand,

$$f(x,t) \approx \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 t}{2a^2}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

(par exemple pour  $\frac{t}{a^2} \geq 1$ , l'erreur est de l'ordre de  $10^{-6}$ ) est une fonction strictement concave et  $A_m(t) = \{\frac{a}{2}\}$  pour tout  $t$  tel que  $\frac{t}{a^2}$  grand. On a tracé les graphiques de  $f(x, t)$  pour  $\frac{t}{a^2}$  variables et petits, et la fonction est encore strictement concave (voir graphiques ci-joints).

De même dans le cas d'une boule de  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n \geq 2$ , centrée à l'origine, la fonction  $f(x, t)$ , par rapport à la variable  $x$ , ne dépend que du rayon  $\rho = (x \cdot x^T)^{\frac{1}{2}}$  et s'écrit lorsque  $t$  est choisi suffisamment grand,

$$g(\rho, t) \approx A_1 \left\{ \frac{\rho x_1}{r} \right\}^{\frac{1}{2} - \frac{n}{4}} J_{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} \left( \frac{x_1 \rho}{r} \right) e^{-2 \left( \frac{x_1}{r} \right)^2 t} \quad (\text{voir 1.15})$$

Ce sont des fonctions strictement log-concaves et  $A_m(t) = \{0\}$  pour tout  $t$  assez grand, c'est-à-dire que 0 est l'unique point rendant  $g(\rho, t)$  maximum. Par exemple, si  $n = 4$  et  $t$  assez grand,

$$g(\rho, t) \approx A_1 \left\{ \frac{\rho x_1}{r} \right\}^{\frac{1}{2} - 1} J_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_1 \rho}{r} \right) e^{-2 \left( \frac{x_1}{r} \right)^2 t}.$$

$x_1 = \pi$  est la première racine et

$$J_{\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin u.$$

On peut écrire

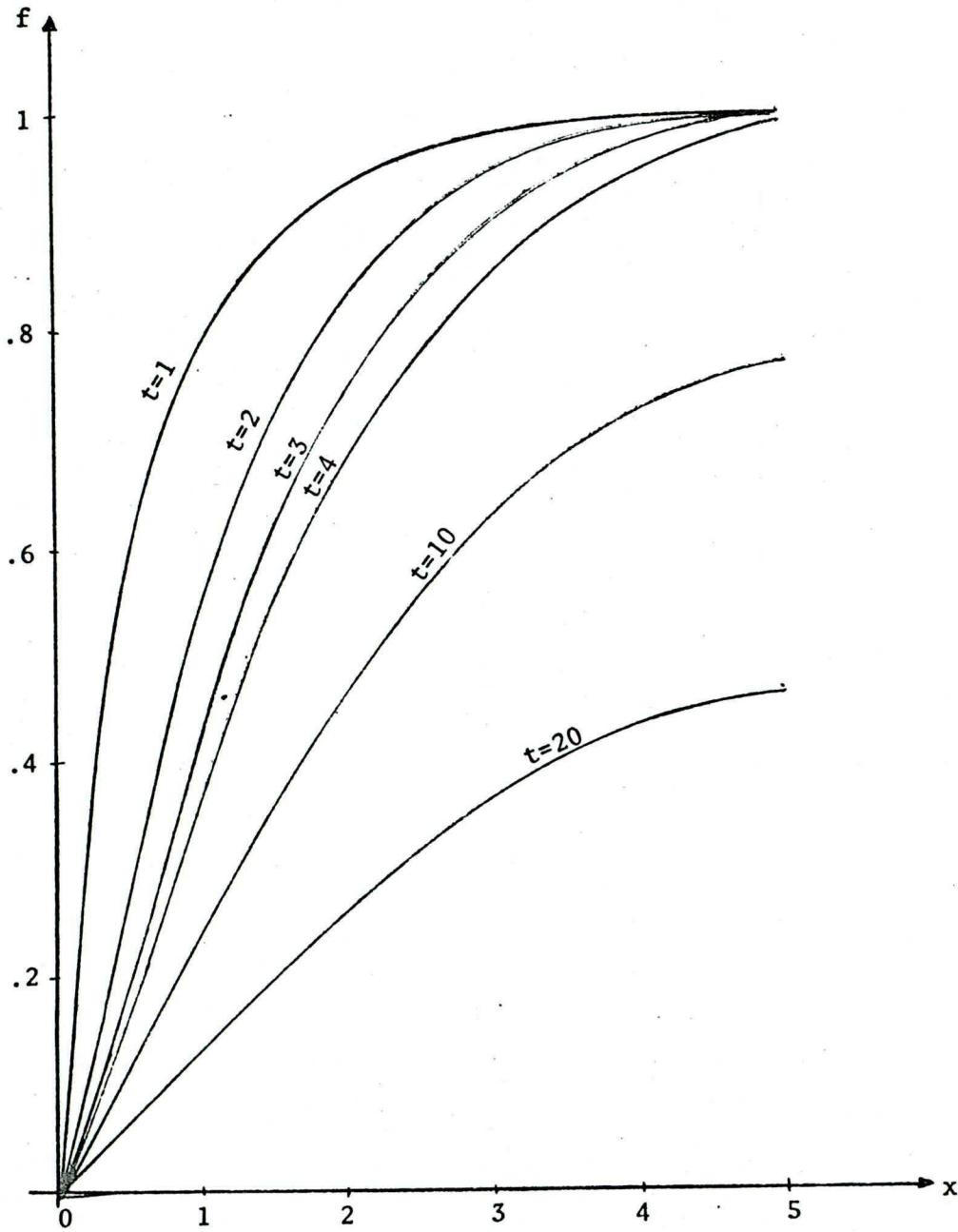
$$g(\rho, t) \approx A_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\pi \rho}{r})}{(\frac{\pi \rho}{r})} e^{-2(\frac{\pi}{r})^2 t},$$

et la fonction  $\frac{\sin u}{u}$  pour  $-\pi < u < +\pi$  est une fonction strictement log-concave.

### GRAPHIQUES

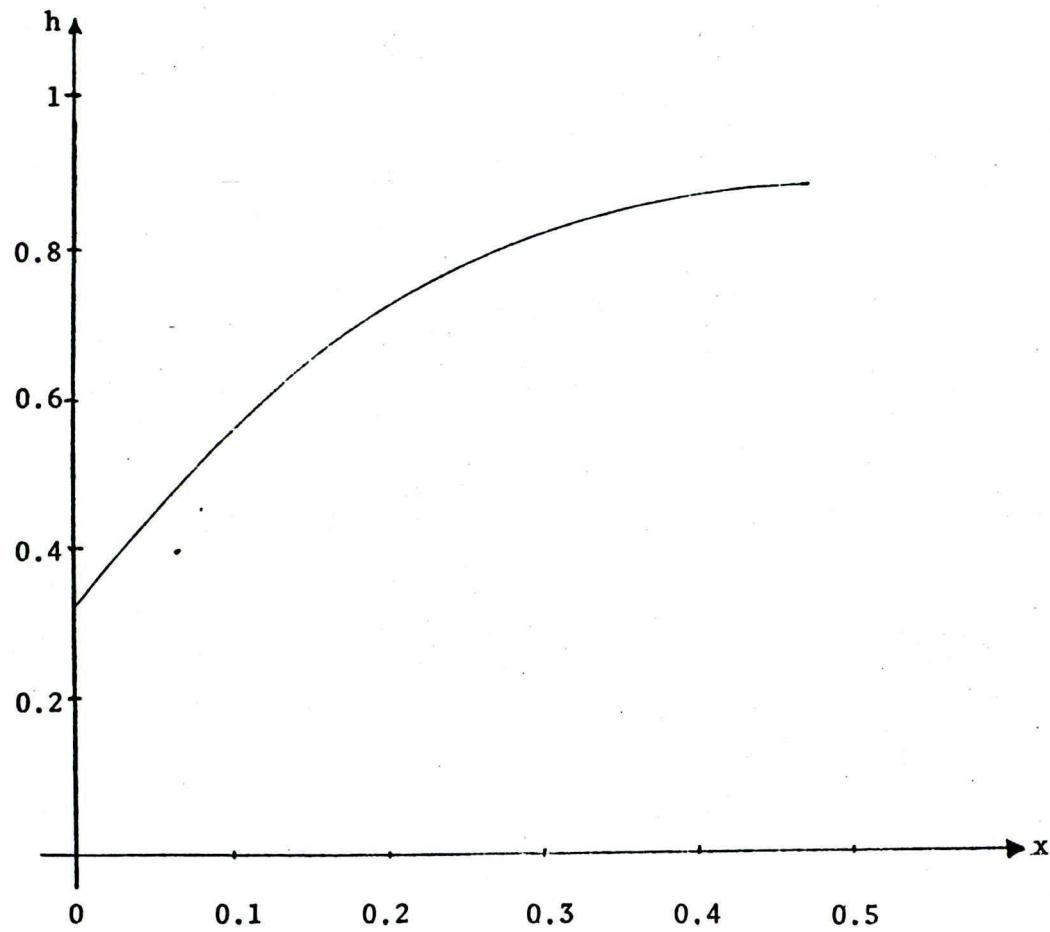
$$f(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t / 200} \sin \{(2n+1)\pi x / 10\}$$

pour  $t = 1, 2, 3, 4, 10, 20.$



GRAPHIQUE

$$h(x) = (f(x+4.5, 1) - 0.99999) \cdot 10^5$$



Dans le cas d'ensembles convexes symétriques  $K$ , supposons, sans perte de généralité, que l'origine du système d'axes soit le centre de symétrie,  $A_{m(t)}$  est aussi un ensemble convexe symétrique avec le même centre de symétrie que l'ensemble  $K$ . Ainsi  $0 \in A_{m(t)}$  pour tout  $t$  et  $f(x,t) \leq f(0,t)$  pour tout  $x \in K$  quel que soit  $t \geq 0$ .

Il est donc possible que dans le cas de convexes symétriques, la fonction  $f(x,t)$  soit strictement log-concave par rapport à la variable  $x$ , pour tout  $t$  assez grand, et que  $0$ , le centre de symétrie, soit l'unique point qui rende cette fonction maximum.

Pour des ensembles convexes quelconques, malheureusement, nous ne pouvons pas caractériser le point " $x(t)$ " rendant  $f(x,t)$  maximum, ni indiquer si ce point est le même pour tout  $t$ .

## II - TEMPS PROBABLE MAXIMUM DE SEJOUR DANS UN CONVEXE SYMETRIQUE

Considérons maintenant la variable aléatoire  $T$  représentant le temps passé à l'intérieur du convexe  $K$  par le mouvement Brownien, pour atteindre la frontière de  $K$ , pour la première fois. Nous avons vu dans le premier chapitre, pour la boule de rayon  $r$ , centrée à l'origine, que le temps probable  $\mathbb{E}_x(T)$  est égal à

$$\frac{1}{n} \left\{ r^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} .$$

C'est une fonction strictement concave ayant  $0$  comme point maximum, c'est-à-dire que  $\mathbb{E}_x(T) < \mathbb{E}_0(T)$  pour tout  $x \neq 0$  appartenant à la boule de  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons un résultat similaire pour le cas des convexes symétriques:

Théorème 3.

Soit  $K$  un ensemble convexe symétrique ayant comme centre de symétrie l'origine du système d'axes, alors  $\mathbb{E}_x(T) \leq \mathbb{E}_o(T)$  pour tout  $x \in K$ .

Démonstration:

On peut écrire

$$\mathbb{E}_x(T) = \int_0^\infty f(x,t) dt$$

où  $f(x,t)$  est la probabilité de séjour à l'intérieur de  $K$  pendant la période de temps  $(0,t)$ , mais  $0 \in A_{m(t)}$  pour tout  $t \geq 0$ , c'est-à-dire que  $f(x,t) \leq f(0,t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi

$$\mathbb{E}_x(T) \leq \int_0^\infty f(0,t) dt = \mathbb{E}_o(T).$$

On peut aussi affirmer:

Corollaire:

Si  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction croissante telle que  $\Phi(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) f(x,t) = 0$ ,  $K$  un convexe symétrique ayant  $0$  comme centre de symétrie, alors

$$\mathbb{E}_x(\Phi(T)) \leq \mathbb{E}_o(\Phi(T)).$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(\Phi(T)) &= \int_0^\infty \Phi(t) dP [T \leq t] \\ &= - \int_0^\infty \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dt \\ &= \int_0^\infty \Phi'(t) f(x,t) dt \leq \mathbb{E}_o(\Phi(T)). \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas dire si la fonction  $\mathfrak{E}_x(T)$  est concave ou log-concave. Il serait peut-être intéressant de connaître les conditions supplémentaires sur la fonction  $f(x,t)$  pour que la fonction

$$x \rightarrow \int_0^\infty f(x,t) dt$$

soit concave ou log-concave (strictement).

Dans le cas des ensembles convexes quelconques, on peut se demander si l'ensemble convexe

$$A_{m(t)} = \{x | f(x,t) = m(t)\}$$

est réduit à un seul point pour  $t$  fixé et positif et comment varie ce point en fonction du temps  $t$ . On peut également se poser la question suivante: Le maximum de la fonction,

$$x \rightarrow \mathfrak{E}_x(T) = \int_0^\infty f(x,t) dt,$$

est-il atteint en un seul point?

On laisse plusieurs questions en suspens, celles dont les réponses semblent assez difficile à obtenir. Malgré cela, nous avons obtenu des résultats que l'on peut qualifier d'importants. En effet, on connaît très peu de propriétés qualitatives pour des fonctions satisfaisant à des équations telles que: l'équation de la chaleur, l'équation de Laplace et l'équation de Poisson. Nous savons maintenant, grâce à notre étude des mesures quasi-concaves, que la fonction  $f(x,t)$ , satisfaisant à l'équation de la chaleur, est log-concave. Elle est sur-harmonique en utilisant des notions probabilistes. Pour la fonction  $\mathfrak{E}_x(T)$  satisfai-

sant l'équation de Poisson, on a montré l'existence d'un point  $x_0$  tel que  $\mathcal{E}_x(T)$  soit maximum, dans le cas de convexes symétriques.

REMERCIEMENTS

Je prie Monsieur Serge Dubuc d'agréer l'expression de ma profonde gratitude pour sa grande disponibilité à assumer la direction de cette thèse. Il a su répondre à mes questions, échanger sur des sujets mathématiques, pédagogiques ou autres. Je le remercie aussi pour son encouragement et ses conseils précieux qui m'ont aidé à mener à bonne fin ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Jacques Cartier, professeur à l'Ecole Polytechnique, pour son attention apportée aux corrections finales de ce manuscrit.

Je remercie également toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont participé à la réalisation de ce travail.

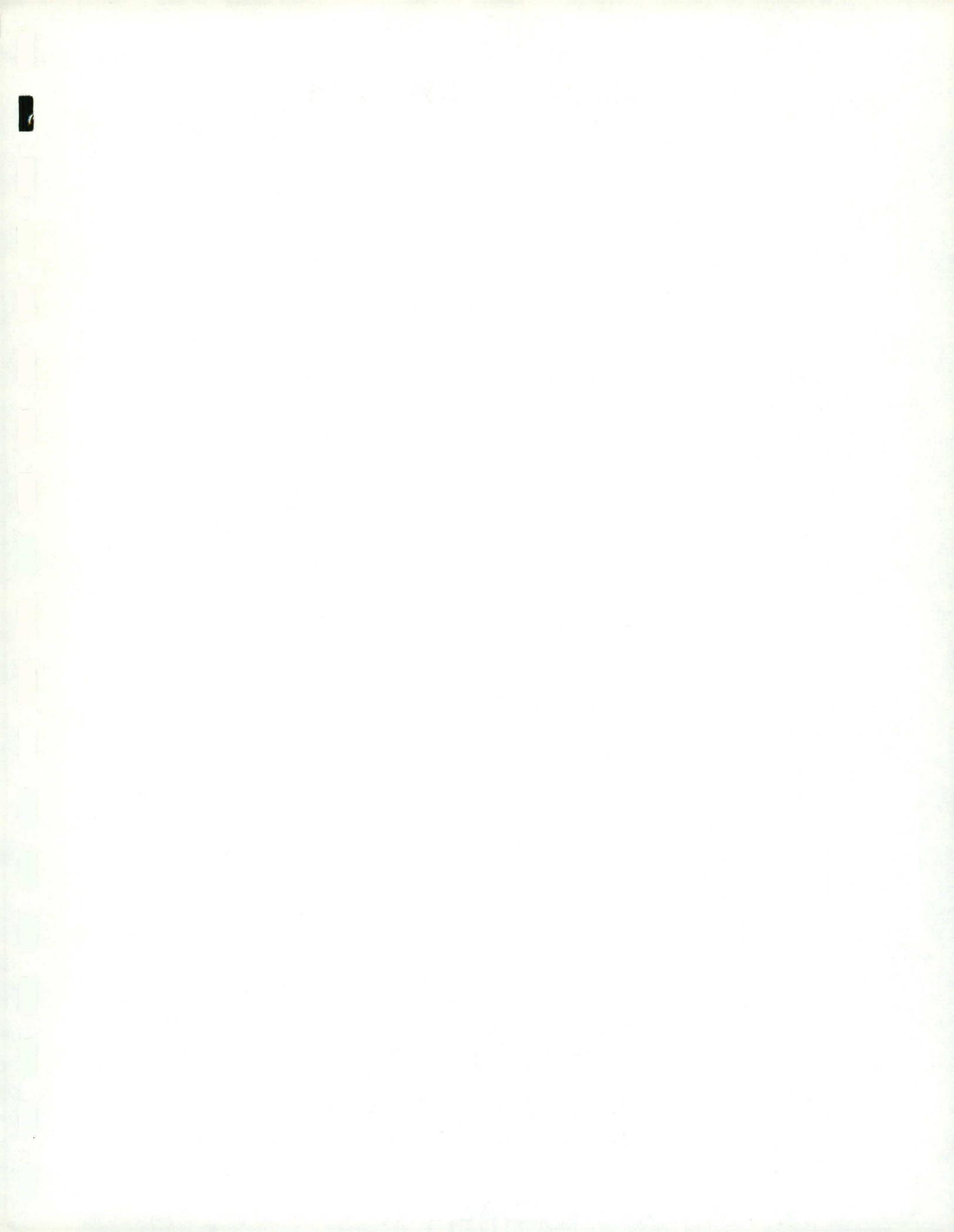
Je remercie Mme Pierrette St-Jean Guérin pour avoir bien voulu dactylographier cette thèse.

Je remercie sincèrement mon épouse pour son aide et sa compréhension à mon égard.

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1] T.W. ANDERSON, "The Integral of a Symmetric Unimodal Function over a Symmetric Convex Set and some Probability Inequalities". Proc. Amer. Math. Soc 6 (1955), pp. 170-176.
- [ 2] C. BORELL, "Convex Set Functions in d-space". Period. Math. Hungar., Vol. 5 (1975).
- [ 3] A. DINGHAS, "Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Isoperimetrische Ungleichungen". Gauthier-Villars (1961).
- [ 4] E.B. DYNKIN et A.A. YUSHKEVICH, "Markov Processes". Plenum Press, New York (1969).
- [ 5] W. FELLER, "An Introduction to Probability Theory and its Applications". Vol. 1 et 2, Wiley, New York (1957, 1966).
- [ 6] G. GOUDET, "Les fonctions de Bessel et leurs applications en physique". Masson et Cie, Paris (1954).
- [ 7] I.A. IBRAGIMOV, "On the Composition of Unimodal Distributions". Theory of Probability and its Applications, Vol. 1 (1956), pp. 255-260.
- [ 8] F. JOHN, "Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten". Math. Ann., Vol. 109 (1934), pp. 488-520.
- [ 9] P. LEVY, "Processus Stochastiques et mouvement Brownien". Gauthier-Villars, Paris (1948).
- [ 10] H. MINKOWSKI, "Geometrie der Zahlen". Chelsea, New York (1953).

- [ 11] A. PREKOPA, "On Logarithmic Concave Measures and Functions". *Acta Sci. Math.*, Vol. 34 (1972), pp. 335-343.
- [ 12] J. RADON, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten". *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math-Nat. Kl.* 69 (1917), pp. 262-277.
- [ 13] V.A. ZALGALLER, "Mixed Volumes and the Probability of Hitting in Convex Domains for a Multidimensional Normal Distribution". *Math. Zametki*, Vol. 2, no 1 (1967), pp. 97-104.



78059

A CONSULTER  
SUR PLACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288773 3