

Titre: Structures périodiques bi-dimensionnelles de fils métalliques:
Title: caractérisation et applications

Auteur: Simon Couture
Author:

Date: 2011

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Couture, S. (2011). Structures périodiques bi-dimensionnelles de fils métalliques:
caractérisation et applications [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/610/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/610/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Christophe Caloz
Advisors:

Programme: génie électrique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

STRUCTURES PÉRIODIQUES BI-DIMENSIONNELLES DE FILS MÉTALLIQUES:
CARACTÉRISATION ET APPLICATIONS

SIMON COUTURE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
JUILLET 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

STRUCTURES PÉRIODIQUES BI-DIMENSIONNELLES DE FILS MÉTALLIQUES:
CARACTÉRISATION ET APPLICATIONS

présenté par : COUTURE, Simon

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LAURIN, Jean-Jacques, Ph.D., président.

M. CALOZ, Christophe, Ph.D., membre et directeur de recherche.

M. DENIDNI, Tayeb, Ph.D., membre.

RÉSUMÉ

Le but de la présente recherche est d'étudier deux structures périodiques 2D dans le contexte des métamatériaux. Les métamatériaux sont des structures périodiques dont la période est suffisamment plus petite que la longueur d'onde pour pouvoir considérer la structure comme un matériau homogène effectif avec des paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} . La première structure étudiée est une structure de fils métalliques plongés dans un milieu hôte diélectrique homogène. Deux modèles théoriques différents sont présentés pour cette structure. Ces modèles permettent d'attribuer une permittivité effective à la structure de fils. Une méthode numérique est ensuite employée pour extraire les paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} de la structure. Il est montré que les paramètres ainsi obtenus ne correspondent pas aux paramètres ε_{eff} et μ_{eff} obtenus à partir des modèles théoriques. On tente alors de faire la distinction entre les paramètres effectifs théoriques et les paramètres obtenus numériquement et d'éclaircir leur signification respective. Le concept des paramètres de Bloch est ainsi introduit et il est montré que ce sont les paramètres de Bloch, et non pas les paramètres théoriques ε_{eff} et μ_{eff} , qui sont significatifs pour la résolution de problèmes pratiques. Les paramètres de Bloch sont des paramètres qui caractérisent les propriétés de transmission et de réflexion pour une cellule unitaire et qui ne dépendent pas de la périodicité de la structure. Cette partie de la recherche peut être vue comme une mise en garde quant à l'interprétation et l'utilisation des paramètres effectifs attribués aux métamatériaux.

La présente recherche a aussi pour but de proposer des applications aux structures étudiées. Dans cette optique, la structure périodique de fils métalliques est utilisée pour concevoir un résonateur avec une distribution de champs uniforme dans la région occupée par la structure de fils. Ceci est possible en opérant à la fréquence correspondant à la permittivité effective nulle de la structure de fils, ce qui implique une longueur d'onde effective infinie.

La seconde structure périodique étudiée est une structure de fils métalliques entourés d'une gaine diélectrique et plongés dans un milieu hôte constitué d'une ferrite magnétisée. Le modèle théorique attribuant des paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} à la structure est brièvement présenté. Ce modèle prédit que dans une certaine bande de fréquences, les deux paramètres sont négatifs, ce qui donne lieu à la propagation de "backward waves", caractérisées par le fait que leur vecteur de propagation pointe dans la direction opposée au vecteur de Poynting, qui représente la direction de transport de l'énergie. Certaines propriétés physiques d'un matériau avec des paramètres négatifs sont présentées, notamment la propriété d'indice de réfraction négatif. Le modèle théorique pour la structure périodique est validé à l'aide de la même méthode numérique utilisée pour la première structure périodique. Le fait que les

paramètres extraits numériquement sont différents des paramètres théoriques est à nouveau souligné et les paramètres extraits numériquement sont interprétés à l'aide du concept des paramètres de Bloch.

Puisque la propriété d'indice de réfraction négatif est une des propriétés les plus importantes des matériaux avec des paramètres ε_{eff} et μ_{eff} négatifs, une expérience est conçue afin de valider cette propriété pour la structure de fils insérés dans une ferrite. Ainsi, la structure périodique est fabriquée en laboratoire et un montage permettant la mesure de l'indice de réfraction est conçu. Les résultats montrent clairement l'existence d'une bande de fréquences pour laquelle l'indice de réfraction est négatif, validant ainsi le modèle théorique. Des résultats sont obtenus montrant la dépendance de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence et aussi en fonction de l'intensité du champ magnétique DC H_0 servant à magnétiser la ferrite. Deux applications de cette structure périodique basées sur la variation de l'indice de réfraction sont proposées. La première un analyseur de spectre qui utilise la variation de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence pour décomposer spatialement les différentes composantes fréquentielles d'un signal. L'autre est un démultiplexeur qui utilise la variation de l'indice de réfraction en fonction de l'intensité du champ magnétique DC H_0 pour transmettre le signal d'entrée dans une direction particulière.

ABSTRACT

The goal of this research is to study two bidimensional periodic structures in the context of metamaterials. Metamaterials are periodic structures which have a period that is sufficiently smaller than the wavelength to be considered as an effective medium with effective parameters ε_{eff} and μ_{eff} . The first structure studied is a structure of metallic wires embedded in an homogeneous dielectric medium. Two different theoretical models for this structure are presented. These models assign an effective permittivity to the structure. A numerical method is then used to extract the effective parameters ε_{eff} and μ_{eff} of the structure. It is shown that these parameters obtained numerically do not correspond to the parameters ε_{eff} and μ_{eff} obtained from the theoretical models. Therefore, we attempt to properly distinguish the theoretical effective parameters from the parameters obtained numerically and to shed light on their respective physical meaning. For this purpose, the concept of Bloch parameters is introduced and it is shown that it is these Bloch parameters, and not the theoretical effective parameters ε_{eff} and μ_{eff} , which must be used in solving practical problems involving the periodic structures. The Bloch parameters are parameters which convey the transmission and reflexion properties of a single unit cell, independently of the structure's periodicity. This part of the research can be seen as a warning according to which one should be careful in the interpretation and use of the effective parameters derived for metamaterials.

This research also has for goal to suggest applications for the structures studied. Therefore, the periodic structure of metallic wires is used in the design of a resonator having the property of supporting a resonant mode with an uniform field distribution in the area occupied by the structure of wires. This is possible because the resonator is operated at the frequency corresponding to zero effective permittivity of the wire structure, thus implying that the effective wavelength is infinite.

The second structure studied is a structure of metallic wires surrounded by a dielectric cladding and embedded in a magnetized ferrite host medium. The theoretical model from which the effective parameters ε_{eff} and μ_{eff} are derived is briefly presented. This model predicts the propagation of backward waves in a certain frequency band, these waves being characterized by the fact that their propagation vector points in a direction opposite to the Poynting vector, which corresponds to the direction of energy flow. Some physical properties of a medium with negative parameters are presented, notably the property of negative refractive index. The theoretical model for this periodic structure is validated using the same numerical method used for the first periodic structure. The fact that the parameters extracted numerically are different from the theoretical parameters is once again highlighted and the

parameters obtained numerically are interpreted using the concept of Bloch parameters.

Since the negative refractive index property is one of the most important properties of materials with negative ε_{eff} and μ_{eff} parameters, an experiment is devised to validate this property experimentally for the structure of wires inserted in the ferrite medium. This periodic structure is fabricated in our laboratory and inserted in a setup that allows the measurement of the refractive index. The results clearly show the existence of a frequency band where the refractive index is negative, therefore validating the theoretical model. The results also show that the refractive index varies with the frequency and with the DC magnetic field H_0 used to magnetize the ferrite. Two applications of the periodic structure are suggested which are based on this variation of the refractive index. The first one is a spectrum analyzer which uses the variation of the refractive index with the frequency to spatially decompose the different frequency components of a signal. The other application is a demultiplexer which uses the variation of the refractive index with the applied magnetic field H_0 to transmit the input signal in a particular direction.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES ANNEXES	xiv
LISTE DES SIGLES ET SYMBOLES	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.2 Problématique et objectifs de recherche	3
1.3 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 Fils métalliques dans un milieu hôte diélectrique	6
2.1 Modèles théoriques	6
2.1.1 Théorème de Bloch-Floquet	7
2.1.2 Modèle proposé par Tretyakov	11
2.1.3 Modèle proposé par Pendry	17
2.2 Extraction de paramètres effectifs	19
2.2.1 Théorie de la méthode d'extraction	20
2.2.2 Extraction par une méthode numérique	22
2.2.3 Validité des paramètres effectifs, résultats et discussion	24
2.3 Application : résonateur $\epsilon = 0$ à taille indépendante	34
2.3.1 Principe du résonateur	35
2.3.2 Propriétés de la structure périodique de fils	35
2.3.3 Analyse modale	36
2.3.4 Résultats numériques	44
CHAPITRE 3 Fils métalliques dans un milieu hôte magnétique	47
3.1 Matériaux main-gauche et indice de réfraction négatif	47
3.2 Structure et modèle théorique de Dewar	50

3.2.1	Perméabilité effective d'une ferrite magnétisée	52
3.3	Extraction de paramètres	55
3.4	Vérification expérimentale	59
3.5	Applications potentielles	63
CHAPITRE 4	CONCLUSION	68
RÉFÉRENCES	71
ANNEXES	75

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Illustration de la périodicité d'une structure dans une, deux ou trois directions. Adaptée de "EBGs and Metamaterials : Concepts, Structures and Applications", EuCAP 2009, par C. Caloz.	1
Figure 2.1	Structure périodique 2D constituée d'une matrice carrée de fils métalliques de rayon r et de période a . Les fils sont orientés selon l'axe z	7
Figure 2.2	Décomposition du champ électrique pour une structure périodique de fils (considérés infinis en z) du point de vue du fil placé à l'origine. a) Champ \vec{E}_{loc} produit par tous les autres fils. b) Champ \vec{E}_{fil} produit par le fil à l'origine.	12
Figure 2.3	Principe de l'équivalent physique. a) Problème réel avec l'obstacle métallique. b) Problème équivalent avec le courant \vec{J}_s rayonnant en l'absence de l'obstacle et produisant les champs dispersés \vec{E}^s et \vec{H}^s	12
Figure 2.4	Onde plane incidente sur un milieu de paramètres μ_2 et ε_2 et d'épaisseur d (région 2) avec deux milieux semi-infinis de paramètres μ_1 et ε_1 de part et d'autre (régions 1 et 3).	20
Figure 2.5	Modèle d'une rangée de cellules unitaires de longueur totale d dans HFSS. La périodicité dans la direction transverse est modélisée par des conditions frontières périodiques (PBC). La structure est excitée par une onde TEM générée à l'aide d'un guide d'onde PEC-PMC.	23
Figure 2.6	Amplitude du champ électrique à l'intérieur d'une rangée de cellules unitaires pour la structure de fils métalliques avec une période $a = 10$ mm et avec un rayon des fils de $r = 0.545$ mm à 3.5 GHz. Les minima (en bleu) et les maxima (en vert-rouge) de l'onde se propageant dans la structure servent à déterminer la longueur d'onde effective.	25

Figure 2.7	Modèles HFSS pour une rangée de cellules unitaires de la structure périodique de fils métalliques. Les guides d'ondes TEM entre les ports et les cellules unitaires sont remplis par un matériau ayant le permittivité et la perméabilité du vide. La période de la structure est $a = 10$ mm et le rayon des fils est $r = 0.545$ mm. La permittivité du milieu hôte est $\epsilon_h = 10.2$. Les guides d'onde TEM sont remplis d'un matériau homogène ayant les paramètres du vide et ont chacun une longueur $l = 15$ mm. a) Une cellule unitaire. b) Deux cellules unitaires. c) Dix cellules unitaires.	27
Figure 2.8	Résultats de l'extraction numérique pour les rangées avec une, deux et dix cellules unitaires telles que montrées à la figure 2.7. a) Partie réelle de l'indice de réfraction n tel qu'obtenu par l'Éq. (2.64). b) Partie imaginaire de n . c) Partie réelle de l'impédance caractéristique η telle que donnée par l'Éq. (2.63). d) Partie imaginaire de η	28
Figure 2.9	Permittivité et perméabilité relatives obtenues à l'aide des paramètres S calculés avec une rangée d'une cellule unitaire (figure 2.7 a) en ne considérant pas que la perméabilité est celle du vide. a) Permittivité obtenue en divisant l'Éq. (2.64) par l'Éq. (2.63). b) Permeabilité obtenue en multipliant l'Éq. (2.63) avec l'Éq. (2.64)	29
Figure 2.10	Permittivité effective obtenue des modèles de Pendry et de Tretyakov et permittivité obtenue en considérant l'indice de réfraction n de la méthode d'extraction numérique (utilisant une rangée d'une seule cellule unitaire) avec $\mu_{eff} = 1$ pour la structure périodique de fils avec $r = 0.545$ mm, $a = 10$ mm et $\epsilon_h = 10.2$	30
Figure 2.11	Deux familles de lignes pour une matrice carrée bidimensionnelle de période a . La première famille correspond aux lignes verticales et la distance entre les lignes est $d_1 = a$. La seconde famille correspond aux lignes obliques et la distance entre les lignes est d_2	34
Figure 2.12	Régime de Bragg dans une structure périodique. a) Le régime de Bragg est le phénomène dominant car $a \approx \lambda_{eff}$. b) Pas de régime de Bragg car $a \ll \lambda_{eff}$: la structure peut être considérée comme un matériau effectif. Adaptée de "EBGs and Metamaterials : Concepts, Structures and Applications", EuCAP 2009, par C. Caloz.	35

Figure 2.13	Le résonateur est divisé en 9 régions. La région du centre est la région de permittivité $\epsilon_2 = 0$. Les autres régions ont des permittivités ϵ_1 et ϵ_3 satisfaisant la condition de séparabilité. Le résonateur a une épaisseur qui s'étend de $z = 0$ à $z = g$	36
Figure 2.14	Permittivité effective de la structure de fils de la région 5 du résonateur selon les modèles de Tretyakov et de Pendry. La structure de fils considérée a une période $a = 10.9$ mm, un rayon des fils $r = 0.32$ mm et un milieu hôte de permittivité $\epsilon_h = 10.2$	37
Figure 2.15	Amplitude des champs pour différents résonateur obtenues avec HFSS. Tous les résonateurs opèrent à 2.27 GHz et ont des permittivité $\epsilon_1 = 5.1$ et $\epsilon_3 = 10.2$ pour les régions sur les bords. Les paramètres des structures de fils sont $a = 10.9$ mm, $r = 0.32$ mm et $\epsilon_h = 10.2$. a) E_z pour un résonateur dont la région centrale est un matériau homogène de permittivité nulle. b) E_z pour un résonateur avec une structure de fils 7×7 pour laquelle $\epsilon_{eff} = 0$. c) et d) E_z et H_y respectivement pour un résonateur avec une structure de fils 5×5 . e) E_z pour un résonateur ayant des bords de différentes tailles. f) E_z pour un résonateur avec un seul fil dans sa région centrale. Toutes les figures sont à la même échelle.	45
Figure 3.1	Les vecteurs \vec{E} , \vec{H} et \vec{k} formant un ensemble a) main droite et b) main gauche. Pour l'ensemble main gauche, le vecteur de Poynting \vec{S} pointe dans la direction opposée à \vec{k}	48
Figure 3.2	Une onde dans une région 1 aux paramètres positifs qui est incidente sur une région 2 aux paramètres négatifs est réfractée avec un angle de réfraction θ_t négatif. L'indice de réfraction de la région 2 est alors négatif. Ceci est dû au fait que la composante tangentielle à l'interface du vecteur de propagation \vec{k} doit être continue et que le vecteur de Poynting \vec{S} dans la région 2 doit s'éloigner de l'interface.	49
Figure 3.3	Structure périodique aux paramètres négatifs proposée par Dewar. La structure est constituée de fils métalliques entourés d'une gaine d'un matériau diélectrique plongés dans une ferrite magnétisée par un champ magnétique DC H_0 . La période de la structure de fils est a tandis que la gaine diélectrique et les fils métalliques ont un rayon r_1 et r_2 respectivement.	51

Figure 3.4	Paramètres effectifs obtenus du modèle théorique de Dewar et donnés par les Éqs. (3.9) et (3.10). (a) Partie réelle et imaginaire de μ_{eff} avec la fréquence de résonance magnétique $f_{\mu r}$ et la fréquence de plasma magnétique $f_{\mu p}$. (b) Partie réelle et imaginaire de ε_{eff} avec la fréquence de résonance électrique $f_{\varepsilon r}$ et les deux fréquences de plasma électrique $f_{\varepsilon p1}$ and $f_{\varepsilon p2}$. (c) Partie réelle et imaginaire de l'indice de réfraction $n = \sqrt{\mu_{eff}\varepsilon_{eff}}$. La bande de fréquences est divisée en 6 régions avec des propriétés de propagation distinctes et qui sont dénotées par les lettres A à F.	56
Figure 3.5	Paramètres de Bloch n et $\eta = Z_B$ obtenus numériquement pour la structure de Dewar à partir d'une rangée de cellules unitaires telle que celle de la figure 2.5 avec une, deux et dix cellules unitaires. a) Partie réelle et imaginaire de l'indice de réfraction n . b) Partie réelle et imaginaire de l'impédance de Bloch $\eta = Z_B$	57
Figure 3.6	Comparaison des paramètres extraits numériquement avec les paramètres théoriques de la figure 3.4. (a) Perméabilité μ_{eff} . (b) Permittivité ε_{eff} . (c) Indice de réfraction n	58
Figure 3.7	Valeur de la quantité $\psi(\omega)$ définie par l'Éq. (3.8). Puisque la quantité $\psi(\omega)$ est positive alors que l'indice de réfraction n est négatif, on a bien des "backward waves".	59
Figure 3.8	Schéma du montage de l'expérience. (a) Schéma montrant le principe de mesure de l'indice de réfraction. L'angle de réfraction θ_t , mesuré à partir de la normale à l'interface, est positif dans la direction indiquée par la flèche et négatif dans la direction opposée. (b) Photographie du montage expérimental final avec dans le coin inférieur gauche une photographie de la ferrite taillée en trapèze après que les trous de rayon r_2 aient été percés.	61

Figure 3.9	Résultats expérimentaux pour la bande de fréquences où l'indice de réfraction est négatif (région D dans les figures 3.4(c) et 3.6(c)). (a) Diagramme de couleur montrant les paramètres S_{k0} mesurés du port d'entrée 0 vers chacun des 12 ports de sortie. Chaque port de sortie correspond à un angle de réfraction différent entre -82.5° et 82.5° avec un pas de 15° . (b) Comparaison entre l'indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés et l'indice de réfraction obtenu à l'aide de la méthode d'extraction numérique. (c) Illustration du processus de moyennage permettant d'obtenir l'indice de réfraction à partir des valeurs mesurées des paramètres S_{k0}	65
Figure 3.10	Variation de la courbe de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence avec la variation du champ magnétique DC H_0 . (a) Indice de réfraction obtenu avec la méthode d'extraction numérique. (b) Indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés.	66
Figure 3.11	Résultats expérimentaux pour la bande de fréquences où l'indice de réfraction est positif (région F dans les figures 3.4(c) et 3.6(c)). (a) Diagramme de couleur montrant les paramètres S_{k0} mesurés du port d'entrée 0 vers chacun des 12 ports de sortie. (b) Comparaison entre l'indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés et l'indice de réfraction obtenu à l'aide de la méthode d'extraction numérique.	66
Figure 3.12	Applications potentielles de la structure de Dewar. (a) Analyseur de spectre qui sépare spatialement les différentes composantes fréquentielles du signal d'entrée pour les envoyer vers les différents ports de sortie. (b) Démultiplexeur permettant de diriger le signal d'entrée vers un des ports de sortie en contrôlant l'intensité H_0 du champ magnétique DC.	67

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Continuité du vecteur de propagation	75
----------	--	----

LISTE DES SIGLES ET SYMBOLES

Sigles

FSS	Surface sélective en fréquence (<i>Frequency Selective Surface</i>)
PPWG	Guide d'Onde à Plaques Parallèles (<i>Parallel Plate Waveguide</i>)
PEC	Conducteur électrique parfait (<i>Perfect Electric Conductor</i>)
PMC	Conducteur magnétique parfait (<i>Perfect Magnetic Conductor</i>)
TEM	Transverse électrique magnétique (<i>Transverse Electric Magnetic</i>)
TE	Transverse électrique (<i>Transverse Electric</i>)
TM	Transverse magnétique (<i>Transverse Magnetic</i>)

Symboles

β	Constante de propagation
Γ	Coefficient de réflexion global
$\Gamma_{1,2}$	Coefficient de réflexion local (régions 1 et 2 semi infinies)
γ	Rapport gyromagnétique
T	Coefficient de transmission global
ε_{eff}	Permittivité effective
ε_f	Permittivité de la ferrite
θ_i	Angle d'incidence
θ_t	Angle de transmission
λ_0	Longueur d'onde dans le vide
λ_{eff}	Longueur d'onde effective
λ_h	Longueur d'onde dans le milieu hôte
μ_{eff}	Perméabilité effective
μ_f	Perméabilité de la ferrite magnétisée
$[\mu]$	Tenseur de perméabilité pour une ferrite
ω	Fréquence angulaire
\vec{A}	Potentiel vectoriel magnétique
a	Période d'une structure périodique
c	Vitesse de la lumière dans le vide
\vec{E}	Champ électrique
e	Charge de l'électron
\vec{H}	Champ magnétique
H_0	Champ magnétique DC magnétisant la ferrite
ΔH	Largeur de ligne d'une ferrite
I	Courant électrique
\vec{J}	Densité de courant électrique
\vec{k}	Vecteur de propagation
\vec{M}	Magnétisation
\vec{M}_s	Magnétisation de saturation
n	Indice de réfraction
\vec{q}	Vecteur de propagation de l'harmonique de Floquet fondamentale
\vec{S}	Vecteur de Poynting
\vec{v}_g	Vitesse de groupe
Z_B	Impédance de Bloch

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Définitions et concepts de base

Les structures périodiques sont omniprésentes dans la nature. Par exemple, un cristal de diamant est constitué d'un arrangement périodique tridimensionnel d'atomes de carbone. Formellement, les structures périodiques sont la répétition d'une cellule unitaire dans l'espace selon une matrice. Une matrice est un ensemble de points placés de manière périodique dans l'espace. La cellule unitaire, quant à elle, définit la structure physique qui, lorsque répliquée à chacun des points de la matrice, génère la structure périodique. Comme montré à la figure 1.1, les structures périodiques peuvent être à une, deux ou trois dimensions. Dans ce mémoire, les structures périodiques considérées sont des structures à deux dimensions, ce qui veut dire que la matrice associée est un ensemble de points localisés dans un plan.

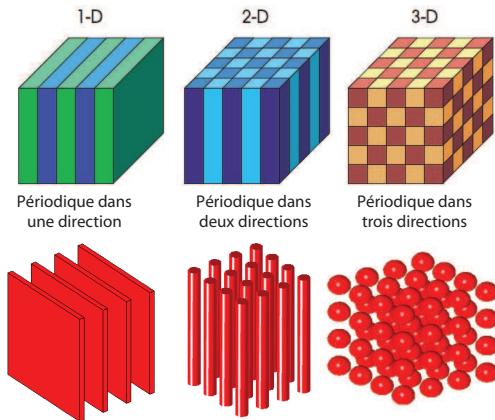


Figure 1.1 Illustration de la périodicité d'une structure dans une, deux ou trois directions. Adaptée de "EBGs and Metamaterials : Concepts, Structures and Applications", EuCAP 2009, par C. Caloz.

Les structures périodiques trouvent de nombreuses applications dans le domaine des micro-ondes. En effet, on les retrouve dans la conception de filtres et de certains types d'antennes. Les structures périodiques sont aussi utilisées dans la conception de surfaces sélectives en fréquence ("Frequency Selective Surfaces" ou FSS), qui sont des structures bidimensionnelles dont les coefficients de réflexion et de transmission pour une onde électromagnétique incidente varient selon la fréquence. Le comportement en fréquence de la structure est dû au

fait que les éléments de la cellule unitaire résonnent à une certaine fréquence, celle-ci pouvant être ajustée en variant la taille des éléments [1].

Depuis le début des années 2000, une autre catégorie de structures périodiques fait l'objet de beaucoup d'attention de la part de la communauté scientifique. Il s'agit des métamatériaux ou matériaux artificiels. La plupart des métamatériaux sont caractérisés par une cellule unitaire contenant une inclusion métallique entourée d'un milieu homogène appelé milieu hôte. Les métamatériaux sont des structures périodiques qui sont caractérisées par le fait que la période de leur matrice est suffisamment plus petite que la longueur d'onde λ_h dans le milieu hôte [2]. Dans la littérature, la condition pour qu'une structure périodique puisse être considérée comme un métamatériaux est que sa période soit inférieure à environ $\lambda_h/5$ (e.g. [2, 3]). Il est alors possible d'utiliser une procédure d'homogénéisation des champs électromagnétiques selon laquelle le champ moyen dans une cellule unitaire est calculé et utilisé pour définir les paramètres du matériau, c'est-à-dire une permittivité effective ϵ_{eff} et une perméabilité effective μ_{eff} . Ce sont ces champs homogénéisés et ces paramètres du matériau qui entrent dans les équations de Maxwell et permettent de traiter la structure périodique comme un matériau homogène (e.g. [4]). Bien entendu, certaines approximations sont nécessaires lors de l'application de la procédure d'homogénéisation. De manière générale, plus la longueur d'onde est grande par rapport à la périodicité et à la taille des inclusions, plus l'erreur introduite par ces approximations est petite. Ainsi, pour un métamatériaux où la période se situe près de la limite $\lambda_h/5$, il faut choisir soigneusement la procédure d'homogénéisation et s'assurer de la validité des approximations qui sont utilisées.

L'avantage des métamatériaux sur les matériaux conventionnels est que par la conception de la cellule unitaire et de la périodicité de la matrice, il est possible de contrôler les paramètres effectifs du matériau selon les besoins de l'application. De plus, bien souvent les paramètres des métamatériaux sont dispersifs, c'est-à-dire qu'ils varient en fonction de la fréquence. Parfois, cette propriété est indésirable car il serait souhaitable d'obtenir un matériau ayant des paramètres électromagnétiques fixes sur une large bande de fréquence. Cependant, pour certaines applications il est possible de tirer profit de la dépendance en fréquence des paramètres du matériau et d'ajuster cette dépendance selon les besoins. La propriété des métamatériaux qui a toutefois suscité le plus d'intérêt est la possibilité de réaliser des structures périodiques ayant à la fois une permittivité et une perméabilité effective négative, ce qui rend la propagation de "backward-waves" possible.

L'histoire des métamatériaux remonte à bien avant les années 2000. Dans un article publié en 1968, Veselago [5] analyse les conséquences d'une permittivité et d'une perméabilité toutes deux négatives. Il montre qu'une onde plane se propageant dans un tel milieu serait caractérisée par le fait que les champs \vec{E} et \vec{H} et le vecteur de propagation \vec{k} formeraient un système

de vecteurs satisfaisant la règle de la main-gauche, d'où le nom “left-handed medium”. Il montre aussi qu'un tel milieu aurait un indice de réfraction négatif. Dans son article, Veselago mentionne que certains milieux comme les substances gyrotropes et les plasmas ont une permittivité ou une perméabilité négative et donc qu'il ne serait pas impossible de trouver un jour un matériau ayant à la fois une permittivité et une perméabilité négative. À cette époque, les structures périodiques étaient déjà connues et étudiées mais n'étaient pas considérées comme des matériaux effectifs dont on pourrait contrôler les paramètres. Par exemple, un article de Rotman [6] publié en 1962 compare les propriétés d'une structure périodique de fils métalliques avec celles d'un plasma gazeux sans toutefois attribuer des paramètres effectifs à la structure périodique de fils. Ce n'est que plus tard que le concept de matériau effectif a été utilisé pour représenter une structure périodique, avec par exemple l'article de Pendry paru en 1996 [7] qui a étudié la même structure périodique de fils métalliques que celle étudiée par Rotman.

En 1999, Pendry et al. [8] ont introduit une structure périodique dont la cellule unitaire est constituée d'une boucle de métal résonante (“split ring resonators”) et à laquelle ils ont associé une perméabilité effective qui peut être négative près de la fréquence de résonance. En 2000, Smith et al. [9] ont proposé de combiner ces boucles de métal avec la structure périodique de fils métalliques pour créer un matériau avec à la fois une perméabilité et une permittivité effective négative. Ils ont démontré expérimentalement qu'une telle structure avait une bande passante correspondant aux fréquences où la perméabilité et la permittivité sont nulles. En 2001, le même groupe a publié un article dans *Science* [10] décrivant une expérience qui valide la propriété d'indice de réfraction négatif de la structure combinant les boucles de métal résonantes et les fils métalliques. Depuis ce temps, beaucoup d'efforts de recherche sont dédiés à la découverte de nouvelles structures périodiques ayant des paramètres effectifs contrôlables, à la caractérisation théorique et expérimentale de ces métamatériaux et à leurs applications.

1.2 Problématique et objectifs de recherche

Le concept de métamatériaux fait face à plusieurs défis. L'un de ces défis est de proposer des applications qui permettraient d'utiliser les métamatériaux dans des dispositifs micro-ondes réels qui auraient alors des performances meilleures que les dispositifs micro-ondes employant des matériaux conventionnels. Par exemple, Pendry [11] a proposé une lentille, qui, si elle était constituée d'un matériau avec un indice de réfraction $n = -1$, ne souffrirait pas de la limite imposée par la diffraction dont souffrent les lentilles conventionnelles. Bien que certaines expériences aient été tentées afin de valider ce phénomène (e.g. [12]), on est

encore bien loin d'une lentille qui pourrait être utilisée dans des applications. Comme autre exemple d'application ayant été suggérée, on mentionne l'implémentation d'une lentille de Luneburg à l'aide d'un métamatériaux bidimensionnel [13], la lentille de Luneburg étant une lentille circulaire servant à focaliser en un point une onde plane incidente. Dans ce cas encore, les performances du dispositif sont loin de ce qui serait requis afin d'être utilisé dans des applications pratiques.

Comme mentionné dans [14], les limites associées aux dispositifs utilisant des métamatériaux proviennent du fait que l'approximation selon laquelle la période de la structure périodique est beaucoup plus petite que la longueur d'onde est souvent grossière et que puisque le métamatériaux est nécessairement fini, les cellules unitaires sur le bord de la structure ne peuvent pas être modélisées de la même façon qu'une cellule unitaire placée dans une structure périodique infinie. Ainsi, un autre défi des métamatériaux est de développer une théorie basée sur l'attribution de paramètres effectifs à des structures périodiques qui définit clairement les limites de cette approche. En effet, l'utilisation de paramètres effectifs pour modéliser une structure périodique qui est alors considérée comme un matériau homogène a de grands avantages sur le plan pratique mais il est primordial de bien comprendre la signification réelle de ces paramètres effectifs ainsi que les approximations et erreurs qui peuvent découler de leur usage.

L'objectif de la présente recherche est d'étudier certaines structures périodiques pouvant être considérées comme des matériaux effectifs. On cherche d'abord à bien comprendre la procédure à suivre pour attribuer des paramètres effectifs à des structures périodiques en étudiant les modèles théoriques que l'on trouve dans la littérature ainsi qu'en explorant une méthode numérique permettant d'extraire les paramètres effectifs d'une structure. On tente ensuite d'éclaircir la signification de ces paramètres effectifs et d'établir les limites de leur validité afin d'en faire un usage correct dans la conception de dispositifs réels. On tente aussi de proposer des applications potentielles pour les structures périodiques étudiées et de valider leurs propriétés expérimentalement.

1.3 Plan du mémoire

Le mémoire est divisé en deux chapitres principaux, les chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 2, il est question d'une structure périodique 2D consistante de simples fils métalliques minces, considérés infinis en longueur et plongés dans un milieu hôte non magnétique et homogène. D'abord, les modèles théoriques établis dans la littérature pour cette structure sont décrits. On introduit alors une méthode numérique permettant d'obtenir les paramètres effectifs de la structure. Les paramètres ainsi obtenus sont comparés à ceux obtenus à l'aide des modèles

théoriques. À ce point, la validité des paramètres effectifs pour une structure périodique 2D en général et l'interprétation qu'il faut leur donner sont discutées. Pour terminer le chapitre, un exemple d'application potentielle pour la structure de fils métalliques est proposé. L'étude de cette structure relativement simple est une bonne première étape en vue de l'étude de la structure considérée au chapitre 3.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude d'une structure périodique 2D de fils métalliques plongés cette fois dans un milieu hôte magnétique. Puisque cette structure peut avoir une permittivité et une perméabilité toutes deux négatives, on présente les phénomènes qui en découlent tels que l'indice de réfraction négatif. Cette structure ayant été analysée théoriquement par Dewar [15], une brève présentation du modèle théorique est effectuée. Ensuite, les paramètres effectifs du matériau homogène correspondant à cette structure sont présentés et validés à l'aide de la méthode numérique d'extraction des paramètres. Dans certaines conditions, il existe un régime de fréquence où la perméabilité et la permittivité effective sont toutes deux négatives. Ceci donne lieu à des phénomènes intéressants dont le plus évident est l'indice de réfraction négatif. Une expérience ayant servi à mettre en évidence le phénomène d'indice de réfraction négatif pour la structure proposée par Dewar est décrite. Les résultats obtenus à l'aide de cette expérience sont présentés et discutés.

CHAPITRE 2

Fils métalliques dans un milieu hôte diélectrique

La première étape de la recherche concerne une structure 2D de fils métalliques que l'on suppose infinis en longueur et qui sont insérés dans un milieu hôte constitué d'un diélectrique homogène. Lorsque la longueur d'onde est suffisamment grande par rapport à la période des fils, cette structure périodique 2D peut être modélisée comme un matériau homogène ayant une permittivité effective.

Ce chapitre débute par une présentation des modèles théoriques que l'on retrouve dans la littérature pour la structure de fils métalliques plongés dans un milieu hôte diélectrique homogène. À partir de ces modèles, il est possible de déterminer la permittivité effective en fonction de la fréquence et des paramètres géométriques de la structure périodique de fils. Une technique numérique permettant de calculer la permittivité effective est utilisée pour valider les résultats obtenus à partir des modèles théoriques. La nécessité de restreindre l'analyse numérique à un problème de dimension finie alors que l'analyse théorique assume une structure périodique infinie pose naturellement la question de la validité des paramètres effectifs dans le cas d'une structure de dimension finie. Cette question ainsi que la question de la validité en général des paramètres effectifs sera abordée dans ce chapitre. Enfin, la dernière partie du chapitre est dédiée à l'étude d'une application potentielle de ce matériau effectif. Il s'agit d'un résonateur rectangulaire dont l'une des régions contient la structure périodique de fils et qui opère à la fréquence où la permittivité effective est zéro. Ceci permet à la taille physique du résonateur d'être arbitrairement grande, indépendamment de la fréquence d'opération.

2.1 Modèles théoriques

La structure de fils métalliques de rayon r et de période a est montrée à la figure 2.1. On considère que la matrice est carrée de sorte que la période est a selon les directions x et y . On assume que les fils sont minces par rapport à la longueur d'onde ($r \ll \lambda$). Pour cette raison, on peut négliger l'interaction des modes TEz (champ électrique transverse à la direction z) avec les fils (e.g., [16]). Ainsi, dans ce mémoire, on considérera uniquement les modes TMz (champ magnétique transverse à la direction z). On note que bien que la figure 2.1 montre un champ électrique orienté uniquement selon z , en général il est possible d'avoir des composantes en x et y du champ électrique pour un mode TMz, la seule restriction étant que

$H_z = 0$. Cependant, pour des fils minces, on peut négliger l'interaction avec les composantes x et y du champ électrique car elles créent des courants perpendiculaires à la direction z qui sont négligeables par rapport au courant orienté selon z causé par la composante du champ électrique orientée le long des fils. Pour des fils très minces par rapport à la longueur d'onde, on considère donc en quelque sorte que les fils sont invisibles du point de vue des composantes perpendiculaires aux fils du champ électrique.

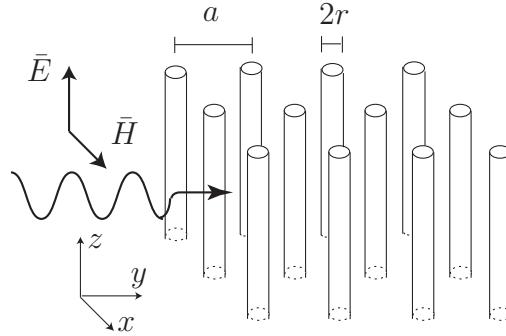


Figure 2.1 Structure périodique 2D constituée d'une matrice carrée de fils métalliques de rayon r et de période a . Les fils sont orientés selon l'axe z .

Deux modèles théoriques différents seront présentés pour cette structure. L'un a été proposé par Tretyakov [17] et l'autre par Pendry [7]. Avant d'introduire le modèle proposé par Tretyakov, il convient d'introduire un résultat important : le théorème de Bloch-Floquet.

2.1.1 Théorème de Bloch-Floquet

Le théorème de Floquet est un théorème applicable aux équations différentielles dont les coefficients sont des fonctions périodiques, comme par exemple

$$\frac{du(x)}{dx} + f(x)u(x) = 0 \quad (2.1)$$

où on cherche à déterminer $u(x)$ et où $f(x)$ est une fonction périodique de x . Le théorème de Bloch est une généralisation du théorème de Floquet pour des équations différentielles à plusieurs variables. Une démonstration du théorème ne sera pas présentée ici et on se contentera d'énoncer le résultat (voir par exemple [18] pour une démonstration). Le théorème de Bloch dit que pour l'équation d'onde homogène en trois dimensions

$$\nabla^2 u(x, y, z) + f(x, y, z)u(x, y, z) = 0, \quad (2.2)$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction périodique de x, y et z , les solutions (les *eigenfunctions*) sont de la forme

$$u(x, y, z) = e^{-j\vec{q} \cdot \vec{r}} \psi(x, y, z) = e^{-j(q_x x + q_y y + q_z z)} \psi(x, y, z) \quad (2.3)$$

où $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ est le vecteur position, $\vec{q} = q_x\hat{x} + q_y\hat{y} + q_z\hat{z}$ est la constante de propagation de la solution et $\psi(x, y, z)$ est une fonction ayant la même périodicité que $f(x, y, z)$. Ainsi, si la périodicité de $f(x, y, z)$ est telle que $f(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = f(x, y, z)$, alors on aura $\psi(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = \psi(x, y, z)$. Puisque $\psi(x, y, z)$ est une fonction périodique, elle peut être écrite sous la forme d'une série de Fourier à trois dimensions

$$\psi(x, y, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{l,m,n} e^{-j2\pi\left(\frac{lx}{a_x} + \frac{my}{a_y} + \frac{nz}{a_z}\right)} \quad (2.4)$$

où les coefficients $c_{l,m,n}$ sont donnés par

$$c_{l,m,n} = \frac{1}{a_x a_y a_z} \int_{-a_x/2}^{a_x/2} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_{-a_z/2}^{a_z/2} \psi(x, y, z) e^{j2\pi\left(\frac{lx}{a_x} + \frac{my}{a_y} + \frac{nz}{a_z}\right)} dx dy dz. \quad (2.5)$$

Ainsi, la solution donnée par l'Éq.(2.3) peut être écrite sous la forme

$$u(x, y, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{l,m,n} e^{-j\left[\left(q_x + \frac{2\pi l}{a_x}\right)x + \left(q_y + \frac{2\pi m}{a_y}\right)y + \left(q_z + \frac{2\pi n}{a_z}\right)z\right]}. \quad (2.6)$$

Chaque terme de l'Éq. (2.6) est connu sous le nom d'harmonique de Floquet. L'harmonique fondamentale pour laquelle $l = m = n = 0$ a une importance particulière pour l'analyse d'une structure périodique en tant que matériau homogène. En effet, l'harmonique fondamentale de Floquet a la même forme qu'une onde plane avec le vecteur de propagation \vec{q} . Ainsi, lorsque l'harmonique fondamentale est la composante dominante de la solution $u(x, y, z)$, on peut traiter cette solution comme une onde plane se propageant dans un milieu homogène effectif [17, 19].

Le théorème de Bloch peut être appliqué pour la structure périodique de fils métalliques de la figure 2.1. Considérons les modes TM_z pour lesquels $H_z = 0$. Ces modes peuvent être obtenus en considérant un potentiel vectoriel magnétique \vec{A} pour lequel seulement la composante A_z est non-nulle [16]. Puisqu'on considère le problème sans source, A_z doit satisfaire l'équation d'onde homogène

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0 \quad (2.7)$$

où $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ (ici comme dans le reste du mémoire, on assume implicitement une dépendance par rapport au temps de la forme $e^{j\omega t}$). Habituellement, l'Éq. (2.7) est résolue dans

le domaine défini par et excluant les surfaces métalliques, celles-ci étant prises en compte lors de l'application des conditions frontières. Cependant, pour l'application du théorème de Bloch, dans le cas présent on considère les fils métalliques comme faisant parti du domaine de solution [17]. On considère alors une conductivité σ pour les fils, le cas limite où ceux-ci sont des conducteurs parfaits correspondant à $\sigma \rightarrow \infty$. La présence des fils métalliques est alors prise en compte directement dans l'Éq. (2.7) en considérant que $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ est une fonction de l'espace avec $\varepsilon = \varepsilon_h - j\sigma/\omega$ aux endroits où se trouvent les fils. Puisque ε est une fonction périodique de x et y , k dans l'Éq. (2.7) est aussi une fonction périodique de x et y et on a donc la forme de l'Éq. (2.2) qui permet l'application du théorème de Bloch.

Bien entendu, dans le problème des fils métalliques, la périodicité n'est que selon deux directions, le problème étant invariant dans la direction z , soit le long des fils. Le théorème de Bloch est applicable pour l'équation d'onde en deux dimensions

$$\nabla^2 u(x, y) + f(x, y)u(x, y) = 0, \quad (2.8)$$

les solutions étant alors données par l'Éq. (2.3) avec $q_z = 0$ et $\psi = \psi(x, y)$. L'Éq. (2.7), qui est une équation en trois dimensions, peut être amenée sous la forme de l'Éq. (2.8) par une transformée de Fourier en z . Prenant la transformée de Fourier de l'Éq. (2.7), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla_t^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z) e^{-jq_z z} dz = 0 \quad (2.9)$$

où $\nabla_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Définissant la transformée de Fourier en z de A_z par

$$\bar{A}_z(q_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_z e^{+jq_z z} dz, \quad (2.10)$$

l'Éq. (2.9) peut être écrite comme

$$\nabla_t^2 \bar{A}_z + k^2 \bar{A}_z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} e^{+jq_z z} dz = 0. \quad (2.11)$$

En assumant que A_z et sa dérivée première par rapport à z sont zéro lorsque $z \rightarrow \pm\infty$, deux intégrations par partie successives donnent

$$\nabla_t^2 \bar{A}_z + k^2 \bar{A}_z + \int_{-\infty}^{+\infty} -q_z^2 A_z e^{+jq_z z} dz = 0 \quad (2.12)$$

ou encore,

$$\nabla_t^2 \bar{A}_z + (k^2 - q_z^2) \bar{A}_z = 0. \quad (2.13)$$

Ainsi, en considérant q_z comme un paramètre, \bar{A}_z satisfait une équation de la forme de l'Éq. (2.8). On peut alors appliquer le théorème de Bloch pour deux dimensions et les solutions \bar{A}_z ont la forme

$$\bar{A}_z = e^{-j(q_x x + q_y y)} \psi(x, y) \quad (2.14)$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction ayant la même période que $k^2 - q_z^2$, c'est-à-dire la même période que $\varepsilon(x, y)$. La solution A_z peut être obtenue de \bar{A}_z par la transformée de Fourier inverse

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}_z e^{-j q_z z} dq_z. \quad (2.15)$$

Puisque l'intégrale peut être vue comme la limite d'une sommation, l'Éq. (2.15) indique que les solutions fondamentales (les *eigenfunctions*) de l'Éq. (2.7) pour la structure de la figure 2.1 sont de la forme

$$A_z = e^{-j(q_x x + q_y y + q_z z)} \psi(x, y) \quad (2.16)$$

où q_z représente la variation en z et est considéré comme un paramètre dont on est libre de fixer la valeur.

Il faut noter que sous la jauge de Lorentz, les champs électriques et magnétiques sont obtenus de A_z à l'aide de (e.g. [20])

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2.17)$$

et

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}). \quad (2.18)$$

Avec les solutions données par l'Éq. (2.16) et en notant que la dérivée d'une fonction périodique est aussi une fonction périodique, il est facile de se convaincre que chaque composante de \vec{E} et \vec{H} peut être exprimée sous la même forme que A_z donnée par l'Éq. (2.16). On peut aussi faire la même affirmation pour les courants de surface induits sur les fils métalliques. En effet, ces courants sont donnés par $\vec{J} = \hat{n} \times \vec{H}$ où \hat{n} est le vecteur unitaire normal à la surface des fils. Pour les modes TM z obtenus à partir de A_z , \vec{H} et \hat{n} sont dans le plan xy et \vec{J} a uniquement une composante J_z . Cette composante peut alors être écrite sous la forme

$$J_z = e^{-j(q_x x + q_y y + q_z z)} \psi'(x, y) \quad (2.19)$$

où $\psi'(x, y)$ est une fonction périodique ayant la même périodicité que la fonction $\psi(x, y)$ de l'Éq. (2.16). Ce résultat sera utilisé à la section suivante.

2.1.2 Modèle proposé par Tretyakov

Dans cette section, le modèle théorique développé par Tretyakov pour la structure de fils de la figure 2.1 est présenté. Ce modèle permet d'assigner une permittivité effective à la structure de fils, qui est alors considérée comme un matériau homogène. On se contentera ici d'énoncer les étapes clé du développement tel que présenté dans [17]. La démarche suivie par Tretyakov est la suivante. La première étape consiste à résoudre le problème sans source, c'est-à-dire à résoudre l'équation d'onde homogène pour la structure infinie de fils afin de trouver les solutions naturelles. Ceci permet d'obtenir une équation de dispersion pour la structure de fils. Cette équation de dispersion est alors comparée à l'équation de dispersion pour un matériau homogène ayant une permittivité donnée. En faisant correspondre ces deux équations de dispersion, il est possible d'attribuer une permittivité effective à la structure de fil, qui peut alors être considérée comme un matériau homogène.

Le problème qui consiste à modéliser la structure périodique de fils métalliques est un problème implicite en ce sens que l'on cherche à déterminer la réponse électromagnétique d'un fil plongé à l'intérieur d'une structure infinie de fils alors que l'effet de tous ces autres fils sur le fil étudié ne peut être connu que si on connaît la réponse individuelle de ces autres fils, ce qui nous ramène au problème de départ.

Pour résoudre le problème, on considère un fil en particulier de la structure infinie que l'on place à la position $x = 0$ et $y = 0$, comme montré à la figure 2.2. On peut séparer le champ électrique total \vec{E}_{tot} à l'intérieur de la structure de fils en deux composantes : le champ local \vec{E}_{loc} et le champ \vec{E}_{fil} produit par le fil considéré de sorte que

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{loc} + \vec{E}_{fil}. \quad (2.20)$$

Pour bien comprendre la nature des champs produits par les fils, on fait appel à un principe en électromagnétisme connu sous le nom d'équivalent physique (*physical equivalent*) [21]. Lorsque des sources de courant externes \vec{J}_{ext} rayonnent en présence d'un obstacle métallique parfait conducteur ($\sigma \rightarrow \infty$), les champs électromagnétiques totaux \vec{E}_{tot} et \vec{H}_{tot} à l'extérieur de l'obstacle peuvent être décomposés selon

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}^i + \vec{E}^s \quad (2.21)$$

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}^i + \vec{H}^s. \quad (2.22)$$

où \vec{E}^i et \vec{H}^i sont les champs incidents produits par des sources externes *en l'absence de l'obstacle* et \vec{E}^s et \vec{H}^s sont les champs dispersés (“scattered”) par l'obstacle. Selon le principe de l'équivalent physique, les champs dispersés correspondent aux champs rayonnés par le

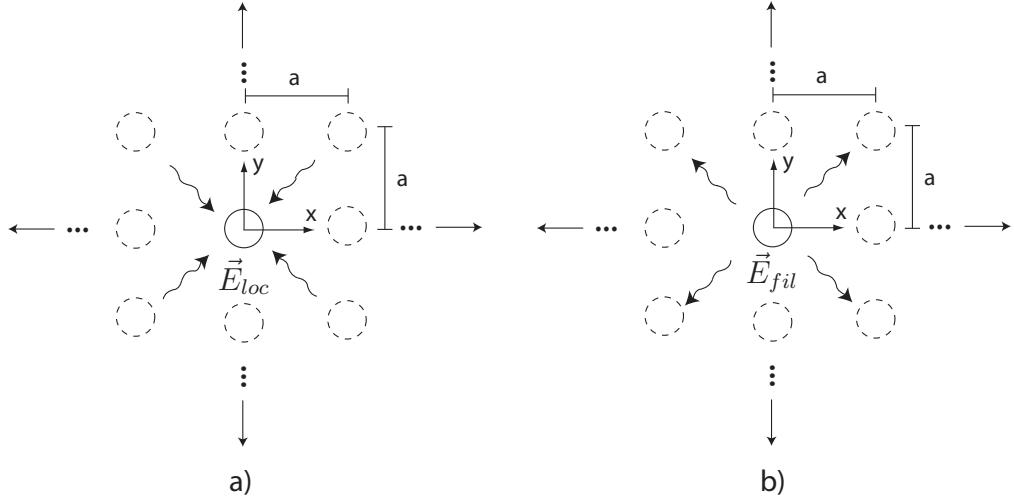


Figure 2.2 Décomposition du champ électrique pour une structure périodique de fils (considérés infinis en z) du point de vue du fil placé à l'origine. a) Champ \vec{E}_{loc} produit par tous les autres fils. b) Champ \vec{E}_{fil} produit par le fil à l'origine.

courant de surface $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_{tot}$ où \hat{n} est le vecteur unitaire normal à la surface de l'obstacle et pointant vers l'extérieur de l'obstacle, ce courant rayonnant dans un milieu homogène sans la présence de l'obstacle métallique (voir [21] ou [16]). Ce principe est illustré à la figure 2.3.

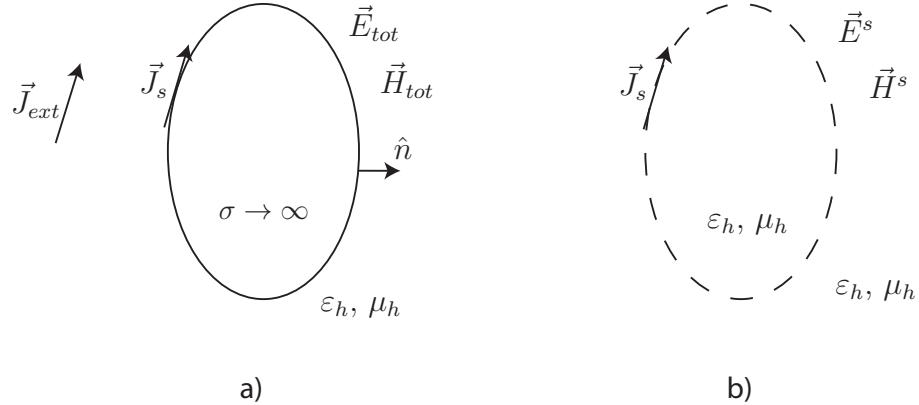


Figure 2.3 Principe de l'équivalent physique. a) Problème réel avec l'obstacle métallique. b) Problème équivalent avec le courant \vec{J}_s rayonnant en l'absence de l'obstacle et produisant les champs dispersés \vec{E}^s et \vec{H}^s .

Revenant au cas de la structure périodique de fils métalliques, on peut donc remplacer tous les fils par des courants de surface qui rayonnent dans le milieu hôte homogène en l'absence des fils métalliques. On note toutefois que la composante tangentielle du champ électrique total \vec{E}_{tot} doit s'annuler à la surface des fils, condition utilisée dans le développement de

Tretyakov. Cette condition, en combinaison avec la technique de l'équivalent physique, est à la base de la technique de l'équation intégrale pour le champ électrique. En supposant que les fils sont très minces par rapport à la longueur d'onde ($r \ll \lambda_h$), les champs rayonnés par les courants de surface sur chacun des fils seront équivalents aux champs rayonnés par une ligne de courant I localisée au centre de chaque fil. Aussi, puisqu'on est à la recherche des modes naturels de la structure, c'est-à-dire des solutions non-nulles au problème sans source externe, les champs incidents E^i et H^i des Éqs. (2.21) et (2.22) sont nuls. Ainsi, les champs \vec{E}_{loc} et \vec{E}_{fil} de l'Éq. (2.20) doivent être interprétés comme des champs dispersés qui sont rayonnés par des lignes de courant aux emplacements des fils et rayonnant dans un milieu homogène ayant les propriétés du milieu hôte, en l'absence des fils métalliques.

À présent, déterminons le champ électrique produit par une ligne de courant $I(z)$ placée à l'origine. Toujours pour les modes TM z , la composante A_z du potentiel vectoriel magnétique doit satisfaire l'équation d'onde non-homogène

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = \delta(\rho) I(z) \quad (2.23)$$

où $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_h$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\delta(\rho)$ est la distribution de Dirac. On utilise le résultat (e.g. [16]) selon lequel la solution de l'Éq. (2.23) lorsque $I(z) = I$ est une constante par rapport à z est donnée par

$$A_z = -j \frac{\mu}{4} I H_0^{(2)}(k\rho) \quad (2.24)$$

où $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel du deuxième type d'ordre 0. Cette solution ne dépend pas de z et on peut donc considérer que c'est une solution de l'équation

$$\nabla_t^2 A_z + k^2 A_z = \delta(\rho) I \quad (2.25)$$

Pour le cas qui nous intéresse, où $I(z)$ est une fonction de z , on peut utiliser ce résultat en considérant la transformée de Fourier en z de l'Éq. (2.23). Par la même manipulation qui a mené à l'Éq. (2.13), l'Éq. (2.23) devient

$$\nabla_t^2 \bar{A}_z + (k^2 - q_z^2) \bar{A}_z = \delta(\rho) \bar{I}(q_z) \quad (2.26)$$

où $\bar{I}(q_z)$ est la transformée de Fourier de $I(z)$. L'Éq. (2.26), tout comme l'Éq. (2.25), est indépendante de z . La solution de l'Éq. (2.26) est donc

$$\bar{A}_z = -j \frac{\mu}{4} \bar{I}(q_z) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho). \quad (2.27)$$

Considérant la transformée de Fourier inverse

$$A_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}_z e^{-jq_z z} dq_z, \quad (2.28)$$

on voit qu'en considérant une seule valeur de q_z à la fois, comme à la section précédente, la solution de l'Éq. (2.23) est

$$A_z = -j \frac{\mu}{4} \bar{I}(q_z) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho) e^{-jq_z z}. \quad (2.29)$$

Comme mentionné en début de chapitre, on ne considère que l'interaction de la composante E_z du champ électrique avec les fils. Le champ électrique est obtenu en utilisant l'Éq. (2.18). Pour E_z on a

$$E_z = -j\omega A_z - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}. \quad (2.30)$$

En utilisant l'expression pour A_z de l'Éq. (2.29), on obtient

$$E_z = -\frac{1}{4\omega\varepsilon} \bar{I}(q_z) e^{-jq_z z} (k^2 - q_z^2) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho). \quad (2.31)$$

Toujours en fixant q_z dans la transformée de Fourier inverse de $\bar{I}(q_z)$, on voit que $\bar{I}(q_z) e^{-jq_z z}$ correspond au courant $I(z)$. Ainsi, le champ E_z produit par une ligne de courant $I(z)$ placée à l'origine est

$$E_z = -\frac{1}{4\omega\varepsilon} I(z) (k^2 - q_z^2) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho). \quad (2.32)$$

De manière plus générale, le champ E_z rayonné par une ligne de courant I_z placée à la position (x_0, y_0) est aussi donné par l'Éq. (2.32) mais avec $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

L'équation de dispersion qui caractérise les modes supportés par la structure infinie de fils métalliques est obtenue en imposant la condition $E_{z,tot} = 0$ à la surface du fil de référence placé à l'origine. De l'Éq. (2.20), on a donc la condition $E_{z,loc} = -E_{z,fil}$ à la surface du fil de référence. Le champ $E_{z,fil}$ produit par le fil de référence est donné par l'Éq. (2.32) évaluée en $\rho = r$ où r est le rayon du fil. Le champ $E_{z,loc}$ est donné par la somme des champs produits par tous les autres fils identifiés par la paire d'indices (m, n) et situés aux positions $(x_0, y_0) = (ma, na)$ où a est la période de la structure de fils. On peut donc écrire

$$E_{z,loc} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} -\frac{1}{4\omega\varepsilon} I_{(m,n)}(z) (k^2 - q_z^2) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho_{(m,n)}) \quad (2.33)$$

où $\rho_{(m,n)} = \sqrt{(x - ma)^2 + (y - na)^2}$ et $I_{(m,n)}(z)$ est le courant dans chaque fil (m, n) . C'est ici qu'intervient le théorème de Bloch-Floquet. Puisque le courant $I_{(m,n)}(z)$ associé à chaque

fil est la limite lorsque $r \rightarrow 0$ de l'intégrale calculée sur la surface du fil du courant de surface J_z , de l'Éq. (2.19) on a que $I_{(m,n)}(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$I_{(m,n)}(z) = e^{-j(q_x ma + q_y na + q_z z)} I_p(x_0, y_0) \quad (2.34)$$

où $I_p(x_0, y_0)$ est une fonction périodique des coordonnées x_0 et en y_0 des fils et ayant une période a . Puisque la position des fils est donnée par $(x_0, y_0) = (ma, na)$, I_p a la même valeur pour tous les fils et peut donc être considéré comme une constante. Ainsi, à l'aide des Éqs.(2.32), (2.33) et (2.34), la condition à la surface du fil de référence $E_{z,loc} = -E_{z,fil}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} -\frac{1}{4\omega\varepsilon} e^{-j(q_x ma + q_y na + q_z z)} I_p(k^2 - q_z^2) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho_{(m,n)}) = \\ \frac{1}{4\omega\varepsilon} e^{-j q_z z} I_p(k^2 - q_z^2) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} r) \end{aligned} \quad (2.35)$$

où on a utilisé le fait que le fil de référence correspond à $(m, n) = (0, 0)$ et où on approxime $\rho_{(m,n)} \approx \sqrt{(ma)^2 + (na)^2}$. En annulant les facteurs communs aux deux membres de l'équation, on obtient

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} -e^{-j(q_x ma + q_y na)} H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} \rho_{(m,n)}) = H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - q_z^2} r) \quad (2.36)$$

ce qui correspond à l'équation de dispersion recherchée. L'équation de dispersion est en fait une relation entre les composantes de \vec{q} et k . Comme il a déjà été mentionné, \vec{q} correspond au vecteur de propagation de l'harmonique fondamentale de Floquet qui elle-même peut être associée à une onde plane se propageant dans la structure périodique considérée comme un matériau homogène. Ainsi, c'est en associant la relation de dispersion propre à une onde plane se propageant dans un milieu homogène ayant une permittivité donnée avec la relation de dispersion donnée par l'Éq. (2.36) qu'il est possible de définir une permittivité effective pour la structure périodique de fils métalliques.

Il est possible de résoudre l'Éq. (2.36) analytiquement sous certaines conditions. Premièrement, il faut que le rayon des fils soit beaucoup plus petit que la période a et que a soit à son tour beaucoup plus petite que la longueur d'onde λ_h ($r \ll a \ll \lambda_h$). De plus, il faut supposer que l'interaction entre les rangées de fils le long de la direction de propagation se fait par la propagation d'ondes planes qui correspondent à l'harmonique fondamentale de Floquet. Ceci est justifié par le fait qu'une rangée de fils transverse à la direction de propagation peut être modélisée par une feuille de courant uniforme dont la valeur correspond au courant moyen I_p/a et que cette feuille de courant produit une onde plane [17]. Les étapes de

la résolution analytique de l'Éq. (2.36) ne seront pas reproduites ici et peuvent être trouvées dans [17]. Le résultat est

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = k^2 - k_p^2 \quad (2.37)$$

où

$$k_p^2 = \frac{2\pi}{a^2 \left(\ln \frac{a}{2\pi r} + 0.5275 \right)} \quad (2.38)$$

et $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_h$.

Pour obtenir une permittivité effective pour la structure de fils métalliques à partir de l'Éq. (2.37), Tretyakov compare cette structure avec un milieu homogène caractérisé par une perméabilité $\mu = \mu_0$ et une permittivité uniaxiale exprimée par la dyade

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

où ε_t est la permittivité dans les directions transverses x et y et où ε_z est la permittivité dans la direction z . L'équation de dispersion pour les solutions TM_z se propageant dans un tel milieu avec le vecteur de propagation $\vec{q} = q_x \hat{x} + q_y \hat{y} + q_z \hat{z}$ est

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_t} q_z^2 + q_x^2 + q_y^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_z. \quad (2.40)$$

La recherche d'une permittivité effective pour la structure de fils est motivée par le fait que les courants induits dans les fils peuvent être associés à la polarisation électrique d'un matériau. Puisque les fils n'interagissent qu'avec la composante z du champ électrique, on s'attend à obtenir une permittivité transverse ε_t égale à la permittivité ε_h du milieu hôte. La permittivité effective ε_z associée à la structure de fils est obtenue en comparant la relation de dispersion de la structure de fils donnée par l'Éq. (2.37) avec la relation de dispersion du milieu avec une permittivité uniaxiale donnée par l'Éq. (2.40) où on considère $\varepsilon_t = \varepsilon_h$. Pour avoir l'équivalence entre ces deux équations, il faut avoir

$$\varepsilon_z(\omega, q_z) = \varepsilon_h \left(1 - \frac{k_p^2}{k^2 - q_z^2} \right) \quad (2.41)$$

ce qui correspond à la permittivité effective $\varepsilon_z = \varepsilon_{eff}$ pour la structure infinie de fils métalliques. De l'Éq. (2.41), on voit que la permittivité effective est temporellement et spatialement dispersive, c'est-à-dire qu'elle dépend de la fréquence temporelle à cause de k et de la fréquence spatiale puisqu'elle dépend de la composante q_z du vecteur de propagation. Ainsi, la permittivité associée à la structure de fil n'est pas la même pour différentes ondes ayant

différents vecteurs de propagation et est donc un paramètre non local [17] dans le sens que la permittivité en un point du milieu effectif représentant la structure de fils dépend en fait de la distribution des champs ailleurs dans le milieu.

2.1.3 Modèle proposé par Pendry

En 1996, Pendry a proposé un modèle pour obtenir la permittivité effective de la structure de fils métalliques de la figure 2.1 [7]. Il a plus tard détaillé son analyse dans une publication parue en 1998 [22]. Son approche est différente de celle employée par Tretyakov et repose sur une comparaison entre la structure de fils métalliques et un plasma puis sur la définition d'une masse effective des électrons conducteurs présents dans les fils métalliques.

Selon la théorie des plasmas, ceux-ci peuvent être caractérisés par la permittivité

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + j\gamma)} \quad (2.42)$$

où γ est un terme de pertes et où

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} \quad (2.43)$$

est la fréquence de plasma où n est la densité des électrons dans le plasma, e est la charge d'un électron et m est la masse d'un électron.

Pendry propose de voir la structure de fils métalliques comme un plasma homogène pour lequel la densité effective d'électrons n_{eff} correspond à la densité d'électrons dans une cellule unitaire divisée par le volume de la cellule unitaire. Ainsi, la densité des électrons pour la structure de fils est diluée par rapport au cas où le métal remplit tout l'espace. Selon l'Éq. (2.43), on voit que cela a pour effet de diminuer la fréquence de plasma. Pour un métal, ω_p se situe généralement dans le domaine de l'ultraviolet tandis que grâce à la structure de fils, il est possible d'abaisser ω_p au domaine des micro-ondes. En considérant la portion du volume d'une cellule unitaire occupé par un fil, la densité effective est

$$n_{eff} = n \frac{\pi r^2}{a^2} \quad (2.44)$$

où n est la densité d'électrons dans le métal.

Pendry affirme que la structure périodique de fils fait en sorte que la masse effective des électrons est augmentée par rapport à la masse réelle des électrons. Il explique cela par le fait que pour déplacer les électrons et produire un courant, la force agissant sur les électrons doit, en plus d'accélérer la masse réelle des électrons, travailler contre l'auto-inductance de la structure de fils. Pour prendre en compte cette inductance de la structure de fil, il argumente

que le potentiel vectoriel magnétique est donné par [22]

$$\vec{A}(\rho) = A_z(\rho)\hat{z} = \frac{\mu_0\pi r^2 nv_z e}{2\pi} \ln(a/\rho)\hat{z} \quad (2.45)$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et v_z correspond à la vitesse des électrons dans la direction z (on note que la quantité $\pi r^2 nv_z e$ correspond au courant dans un fil). À la surface des fils, on a $\rho = r$ et donc

$$\vec{A}(\rho = r) = \frac{\mu_0\pi r^2 nv_z e}{2\pi} \ln(a/r)\hat{z} \quad (2.46)$$

Du point de vue de la mécanique classique, le potentiel généralisé U d'un électron soumis à un champ électromagnétique caractérisé par le potentiel vectoriel magnétique \vec{A} et le potentiel scalaire ϕ satisfaisant la condition de Lorentz est [23]

$$U = e\phi - e\vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (2.47)$$

où \vec{v} est la vitesse de l'électron. Utilisant \vec{A} tel que donné par l'Éq. (2.46) et la condition de Lorentz [20]

$$\phi = \frac{j}{\omega\epsilon\mu} \nabla \cdot \vec{A}, \quad (2.48)$$

on note que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ par la définition de la divergence en coordonnées cylindriques et on obtient

$$U = -eA_z \frac{dz}{dt}. \quad (2.49)$$

Dénotant les composantes de la vitesse par $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ où par exemple $v_x = \frac{dx}{dt}$, le Lagrangien s'écrit

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + eA_z v_z \quad (2.50)$$

où T est l'énergie cinétique de l'électron. Le moment canonique associé à la composante z , qui est la composante qui nous intéresse puisque les fils sont orientés selon z et donc que les électrons se déplacent dans la direction z , est donné par

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} = mv_z + eA_z. \quad (2.51)$$

Pendry définit alors une masse effective m_{eff} telle que le moment $m_{eff}v_z$ soit égal au moment p_z donné par l'Éq. (2.51). Pour une structure de fils ayant une période a et un rayon des fils r de l'ordre de quelques mm, ce qui permet de considérer la structure comme un matériau homogène effectif et d'obtenir des propriétés intéressantes comme $\epsilon_{eff} = 0$ aux fréquences micro-ondes, le terme eA_z est dominant dans l'Éq. (2.51). En négligeant le terme mv_z , on

obtient

$$m_{eff}v_z = \frac{\mu_0\pi r^2 nv_z e^2}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (2.52)$$

et donc

$$m_{eff} = \frac{\mu_0\pi r^2 ne^2}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right). \quad (2.53)$$

En utilisant n_{eff} telle que donnée par l'Éq. (2.44) et m_{eff} telle que donnée par l'Éq. (2.53) dans l'Éq. (2.43) pour ω_p^2 , on obtient

$$\omega_p^2 = \frac{n_{eff}e^2}{\varepsilon_0 m_{eff}} = \frac{2\pi}{\varepsilon_0 \mu_0 a^2 \ln(a/r)}. \quad (2.54)$$

À partir de l'Éq. (2.42), en tenant compte du fait que la structure de fil est plongée dans un milieu homogène hôte de permittivité ε_h et en considérant des fils sans pertes avec $\sigma \rightarrow \infty$, la permittivité effective pour la structure de fils peut s'écrire

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_h - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.55)$$

où ω_p^2 est donné par l'Éq. (2.54). On note que la solution proposée par Pendry suppose qu'il n'y a aucune variation en z . La solution proposée par Tretyakov n'a aucune variation en z si on pose $q_z = 0$. Dans ce cas, la permittivité effective proposée par Tretyakov, donnée par l'Éq. (2.41), peut s'exprimer par l'Éq. (2.55) avec ω_p^2 donné par

$$\omega_p^2 = \frac{k_p^2}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\mu_0 \varepsilon_0 a^2 \left(\ln \frac{a}{2\pi r} + 0.5275 \right)}. \quad (2.56)$$

L'analyse de Tretyakov que l'on retrouve dans [17] et ayant été publiée en 2003 repose sur une solution entièrement électromagnétique du problème. Pour l'auteur du présent mémoire, le résultat de Tretyakov est plus exact et obtenu de manière plus rigoureuse que le résultat obtenu par Pendry. En effet, selon [24], le modèle de Pendry ne tient pas compte de l'interaction entre les fils métalliques. Les permittivités données par les deux modèles seront comparées entre-elles ainsi qu'avec la permittivité obtenue par une méthode numérique à la section suivante.

2.2 Extraction de paramètres effectifs

Dans cette section, on présente une méthode numérique permettant d'extraire les paramètres effectifs pour une structure périodique. Le logiciel d'éléments finis commercial HFSS est utilisé afin de calculer les coefficients de réflexion et de transmission pour la structure

périodique. À partir de ces coefficients, il est alors possible d'obtenir certaines informations sur les paramètres effectifs que l'on peut associer à la structure périodique. Depuis les années 2000, avec l'attention qu'ont reçu les métamatériaux, plusieurs travaux ont été réalisés sur l'extraction numérique des paramètres effectifs [25, 26, 27]. La méthode présenté ici est basée sur une méthode proposée par Smith [28], reprise par Chen et al. [29] et inspirée des travaux de Nicholson et Ross [30].

2.2.1 Théorie de la méthode d'extraction

La méthode d'extraction des paramètres effectifs pour une structure périodique est basée sur l'idée que si la structure périodique est considérée comme un matériau homogène, alors il est possible d'extraire de l'information sur les paramètres effectifs à partir des coefficients de réflexion et de transmission. Considérons le problème classique d'une onde plane incidente sur un matériau d'épaisseur d et ayant les paramètres μ_2 et ε_2 (région 2). Deux milieux semi-infinis de paramètres μ_1 et ε_1 se trouvent de part et d'autre de ce matériau (régions 1 et 3). Ce problème est illustré à la figure 2.4.

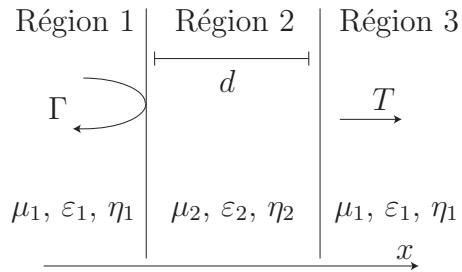


Figure 2.4 Onde plane incidente sur un milieu de paramètres μ_2 et ε_2 et d'épaisseur d (région 2) avec deux milieux semi-infinis de paramètres μ_1 et ε_1 de part et d'autre (régions 1 et 3).

Le champ électromagnétique dans les régions 1 et 2 est donné par la superposition d'une onde se propageant vers les valeurs croissantes de z et d'une onde se propageant vers les valeurs décroissantes de z alors que dans la région 3 seule une onde se propageant vers les valeurs croissantes de z existe. En appliquant les conditions de continuité des champs aux interfaces entre les régions, on obtient le coefficient de réflexion global à l'interface entre la région 1 et la région 2 (voir par exemple [20] ou [31])

$$\Gamma = \frac{(1 - e^{-2j\beta d})\Gamma_{1,2}}{1 - \Gamma_{1,2}^2 e^{-2j\beta d}} \quad (2.57)$$

où $\beta = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$ est la constante de propagation dans la région 2 et où

$$\Gamma_{1,2} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.58)$$

est le coefficient de réflexion local entre les régions 1 et 2 si ceux-ci étaient semi-infinis (pas de région 3), les impédances d'onde étant définies par $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ et $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$. Le coefficient de transmission global est donné par [20], [31]

$$T = \frac{(1 - \Gamma_{1,2}^2)e^{-j\beta d}}{1 - \Gamma_{1,2}^2 e^{-2j\beta d}}. \quad (2.59)$$

Supposons maintenant, toujours en considérant le problème de la figure 2.4 avec des matériaux homogènes, que les paramètres μ_2 et ε_2 du matériau de la région 2 sont inconnus alors que les paramètres μ_1 et ε_1 des régions 1 et 3 sont connus. Suivant [26], voyons comment il est possible, connaissant Γ et T , d'obtenir μ_2 et ε_2 . Les Éqs. (2.57) et (2.59) sont combinées afin d'obtenir une équation quadratique en $\Gamma_{1,2}$

$$\Gamma_{1,2}^2\Gamma - \Gamma_{1,2}(1 + \Gamma^2 - T^2) + \Gamma = 0 \quad (2.60)$$

ainsi que l'expression suivante pour $e^{-j\beta d}$:

$$e^{-j\beta d} = \frac{\Gamma + T - \Gamma_{1,2}}{1 - (\Gamma + T)\Gamma_{1,2}}. \quad (2.61)$$

La solution de l'Éq. (2.60) est donnée par

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1 + \Gamma^2 - T^2}{2\Gamma} \pm \sqrt{\left[\frac{1 + \Gamma^2 - T^2}{2\Gamma}\right]^2 - 1} \quad (2.62)$$

où, en général, le signe devant la racine carrée peut être déterminé en sélectionnant celui qui donne $|\Gamma_{1,2}| \leq 1$. Connaissant $\Gamma_{1,2}$, l'Éq. (2.58) peut être inversée afin d'obtenir

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \frac{(1 + \Gamma_{1,2})}{(1 - \Gamma_{1,2})} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}. \quad (2.63)$$

À partir de l'Éq. (2.61) avec $\beta = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$, on peut obtenir l'expression suivante

$$\frac{n_2}{c} = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \frac{-1}{jd\omega} [\ln |e^{-j\beta d}| + j \arg(e^{-j\beta d})]. \quad (2.64)$$

où n_2 est l'indice de réfraction dans la région 2 et $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ est la vitesse de la lumière

dans le vide. En combinant les Éqs. (2.63) et (2.64), on obtient les paramètres recherchés

$$\varepsilon_2 = \frac{n_2/c}{\eta_2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{n_2}{c} \eta_2. \quad (2.65)$$

En examinant l'Éq. (2.64) qui détermine l'exposant complexe de la fonction exponentielle $e^{-j\beta d}$, on voit qu'il y a une ambiguïté de $2m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) pour la fonction $\arg(e^{-j\beta d})$. Ainsi, la partie réelle de $\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ est donnée par

$$\text{Re}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}) = \frac{-1}{d\omega} [\text{Arg}(e^{-j\beta d}) + 2m\pi]. \quad (2.66)$$

où $\text{Arg}()$ est la fonction argument principal qui retourne une valeur entre $-\pi$ et π . La longueur d'onde dans la région 2 étant donnée par $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}$, l'Éq. (2.66) peut être écrite comme

$$\frac{d}{\lambda_2} = - \left[\frac{\text{Arg}(e^{-j\beta d})}{2\pi} + m \right]. \quad (2.67)$$

Pour une longueur d donnée, il faut choisir la bonne valeur de m afin d'obtenir la partie réelle de l'indice de réfraction. Le choix de m peut être fait si on connaît à l'avance la valeur approximative de l'indice de réfraction (par exemple à partir de modèles théoriques). Aussi, si la longueur d est suffisamment petite, il est fort probable que $m = 0$ donne la bonne valeur de l'indice de réfraction. En effet, de l'Éq. (2.67) on a que si la longueur d est plus petite que $\lambda_2 / 2$, il faut choisir $m = 0$.

2.2.2 Extraction par une méthode numérique

Il a été vu que si on peut effectivement considérer la structure périodique comme un matériau effectif homogène, il est possible d'obtenir des paramètres effectifs μ_{eff} et ε_{eff} en calculant le coefficient de réflexion et de transmission pour cette structure. Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être obtenus numériquement en solutionnant un problème analogue à celui de la figure 2.4.

La figure 2.5 montre le modèle d'un tel problème réalisé avec le logiciel commercial d'éléments finis HFSS. Une rangée de cellules unitaires est excitée par une onde transverse électrique magnétique (TEM) incidente depuis le port 1. L'onde TEM est caractérisée par une distribution uniforme des champs électrique et magnétique dans un plan transverse à la direction de propagation. Une telle onde peut être supportée à l'intérieur d'un guide d'onde constitué de deux murs métalliques parfaits conducteurs (PEC) en haut et en bas et de deux murs conducteurs magnétiques parfaits (PMC) sur les côtés. Le champ électrique est alors orienté verticalement, perpendiculairement aux murs PEC, tel que montré dans la figure 2.5.

L'onde TEM supportée par ces guides d'onde est équivalente à une onde plane restreinte au domaine défini par le guide d'onde. Deux guides d'ondes TEM de longueur l sont placés de part et d'autre de la structure périodique à exciter.

La périodicité de la structure dans la direction transverse à la direction de propagation est modélisée à l'aide de conditions aux frontières périodiques sur les côtés de la structure périodique (voir [32] pour une discussion des conditions frontières périodiques dans la méthode des éléments finis). Sur les frontières en haut et en bas des cellules unitaires de la structure périodique, la condition frontière PEC est utilisée. Ceci est justifiable par le fait qu'avec l'excitation TEM décrite plus haut, seuls des modes TM_z (on assume que la direction z est la direction de polarisation du champ \vec{E} dans la figure 2.5) avec aucune variation en z seront excités. Pour ces modes, le potentiel vectoriel magnétique n'a qu'une composante A_z qui ne dépend pas de la coordonnée z . Alors, selon l'Éq. (2.18), le champ \vec{E} n'aura qu'une composante selon z et la condition frontière PEC permet de délimiter le domaine de solution sans influencer la configuration des champs dans la structure. En d'autres mots, en utilisant la condition frontière PEC, on obtient le même résultat que si la structure était infinie dans la direction z .

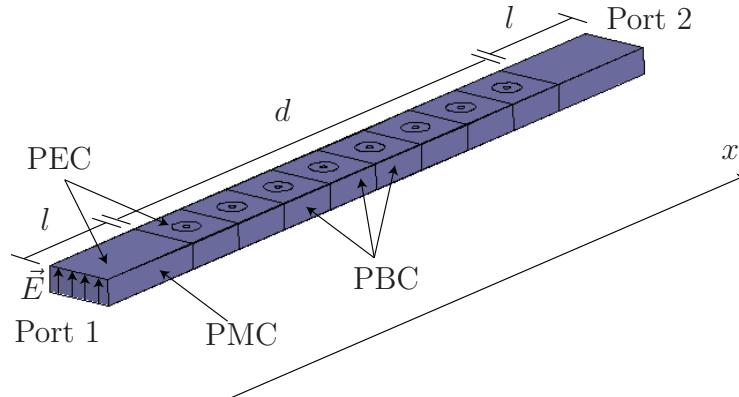


Figure 2.5 Modèle d'une rangée de cellules unitaires de longueur totale d dans HFSS. La périodicité dans la direction transverse est modélisée par des conditions frontières périodiques (PBC). La structure est excitée par une onde TEM générée à l'aide d'un guide d'onde PEC-PMC.

À l'aide du solveur HFSS et du modèle de la figure 2.5, il est possible d'obtenir les paramètres S_{11} et S_{21} par rapport aux ports 1 et 2. Les coefficients de réflexion et de transmission Γ et T équivalents à ceux définis pour le problème de la figure 2.4 peuvent être obtenus à partir de S_{11} et de S_{21} en tenant compte de la longueur l entre les ports 1 et 2 et l'interface entre la structure périodique et les guides d'ondes TEM. En supposant que les guides d'ondes

TEM sont remplis d'un matériau homogène ayant les paramètres μ_1 et ε_1 , la constante de propagation dans ces guides d'ondes est $\beta_g = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$. Les coefficients Γ et T sont alors obtenus par une simple correction de phase

$$\Gamma = S_{11}e^{j\beta_g 2l} \quad \text{et} \quad T = S_{21}e^{j\beta_g 2l}. \quad (2.68)$$

Il est alors possible, en suivant la procédure décrite précédemment, de calculer des paramètres μ_{eff} et ε_{eff} pour la structure périodique.

Concernant l'ambiguïté dans le choix de m dans l'Éq. (2.67), on note que dans le cas d'une structure périodique, la longueur d du matériau dont on veut extraire les paramètres ne peut évidemment pas être inférieure à la longueur a d'une cellule unitaire et dépend en fait du nombre de cellules unitaires qui sont simulées. Ainsi, la longueur d ne peut pas être choisie arbitrairement petite de sorte qu'on ne peut pas toujours supposer $m = 0$. Aussi, l'extraction est en général effectuée sur une certaine bande de fréquence. Cette bande de fréquence est discrétisée en plusieurs points de fréquence également espacés et les paramètres S sont calculés pour chacun de ces points. En pratique, on s'assure de déterminer la bonne valeur de m pour l'un de ces points et les valeurs de m pour les autres points sont choisies automatiquement en imposant la continuité de l'indice de réfraction n en fonction de la fréquence. La bonne valeur de m pour l'un des points de fréquence peut être choisie en s'appuyant sur les paramètres prédicts par les modèles théoriques. Une autre méthode est de visualiser les champs à l'intérieur de la structure périodique obtenus de la solution numérique d'une rangée de cellules unitaires. La figure 2.6 montre l'amplitude du champ électrique à l'intérieur d'une rangée de dix cellules unitaires d'une structure de fils métalliques de période $a = 10$ mm et avec un rayon des fils de $r = 0.545$ mm à 3.5 GHz. On peut clairement identifier les maxima et les minima à l'intérieur de la structure. On peut alors déduire la longueur d'onde effective de l'onde se propageant dans la structure et la valeur de m adéquate.

2.2.3 Validité des paramètres effectifs, résultats et discussion

Jusqu'à maintenant, la méthode d'extraction a été présentée telle qu'on la retrouve généralement dans la littérature (e.g. [33, 34, 35]). Certains points importants concernant la validité des paramètres extraits et l'interprétation qu'il faut leur donner ont toutefois été omis. Le but de cette section est de clarifier ces points et de les illustrer par des résultats obtenus à l'aide de la méthode numérique d'extraction des paramètres.

La première question qui sera discutée est celle des effets de bord et du nombre de cellules unitaires utilisées pour construire la rangée de la figure 2.5 qui sert à l'extraction numérique des paramètres. De manière générale, les théories servant à assigner des paramètres effectifs

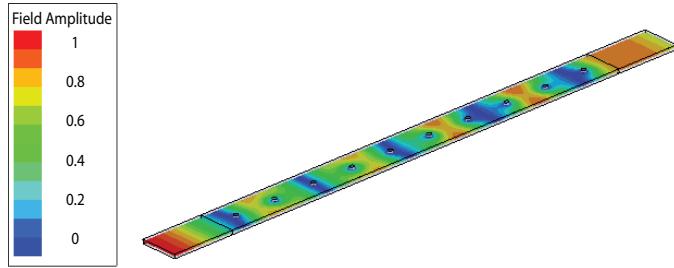


Figure 2.6 Amplitude du champ électrique à l'intérieur d'une rangée de cellules unitaires pour la structure de fils métalliques avec une période $a = 10$ mm et avec un rayon des fils de $r = 0.545$ mm à 3.5 GHz. Les minima (en bleu) et les maxima (en vert-rouge) de l'onde se propageant dans la structure servent à déterminer la longueur d'onde effective.

pour une structure périodique sont développées en considérant une structure infinie. Ceci est le cas pour les théories d'homogénéisation des champs servant à attribuer une permittivité et une perméabilité aux matériaux conventionnels constitués de structures périodiques d'atomes. Ceci est aussi le cas pour le modèle de Tretyakov pour la structure de fils métalliques présenté plus haut. Dans ces modèles, on considère une cellule unitaire entourée d'une infinité d'autres cellules unitaires qui interagissent toutes entre-elles. Lorsqu'on considère une structure de taille finie et une cellule unitaire sur le bord de la structure, on voit que cette cellule unitaire n'est pas entourée par une infinité d'autres cellules unitaires et on s'attend à ce que le modèle pour la structure infinie ne soit plus valide. Pour les matériaux conventionnels, où la période correspond à la distance interatomique et est de l'ordre de quelques Å, cet effet est négligeable aux fréquences micro-ondes. En effet, aux fréquences micro-ondes la longueur d'onde est de l'ordre de quelques cm ou mm et on voit que pour une pénétration de l'onde correspondant à une très petite fraction de la longueur d'onde, on aura atteint les atomes qui sont entourés d'un très grand nombre d'autres atomes, comme dans une structure infinie. L'effet de bord est alors négligeable. Cependant, comme il a été noté par Drude [36], lorsque la longueur d'onde se rapproche de la période de la structure, l'effet de bord doit être pris en compte. Il est alors possible d'utiliser les couches de transitions de Drude [3] qui permettent de passer des propriétés du milieu extérieur à la structure aux propriétés de la structure infinie de manière graduelle. La prise en compte des effets de bord est capitale dans l'analyse de la réflexion et de la transmission à l'interface entre une structure périodique et son milieu environnant.

Considérons une structure périodique de fils métalliques. Pour fixer les idées, considérons une période $a = 10$ mm et un rayon des fils de $r = 0.545$ mm plongés dans un milieu hôte avec une permittivité $\epsilon_h = 10.2$. On s'intéresse alors aux fréquences de l'ordre de 1 GHz où

se produisent des phénomène intéressants tels qu'une permittivité effective ε_{eff} nulle. Pour cette fréquence, la longueur d'onde dans le milieu hôte est $\lambda_h = 94$ mm. Cette longueur d'onde n'étant qu'environ dix fois la période a , on peut s'attendre à avoir un effet de bord important. Dans ce cas, on s'attend à ce que l'impédance effective $\eta = \sqrt{\mu_{eff}/\varepsilon_{eff}}$ obtenue à partir de la méthode d'extraction ne donne pas une juste représentation de la réflexion à l'interface entre le guide d'onde TEM et la structure périodique. Puisque le calcul des paramètres individuels μ_{eff} et ε_{eff} dépendent de η , ceux-ci perdraient leur sens physique en tant que paramètres effectifs. De même, l'effet de bord aurait un impact sur la quantité $n/c = \sqrt{\mu_{eff}\varepsilon_{eff}}$. Puisque cette quantité est obtenue dans la méthode d'extraction à partir de la constante de propagation moyenne le long de la structure périodique, on peut voir l'effet de bord comme un effet qui contamine la valeur n/c obtenue. Ce problème pourrait donc être contourné en utilisant une rangée contenant un grand nombre de cellules unitaires. Ainsi, la majorité des cellules unitaires pourraient être considérées comme étant entourées d'un grand nombre de cellules unitaires, le nombre de cellules sur les bords ne composant qu'une fraction négligeable de la rangée. Dans ce cas, à défaut de pouvoir attribuer une impédance effective η à la structure périodique, on pourrait obtenir un indice de réfraction effectif donnant une juste idée de la constante de propagation dans la structure (du moins loin des bords). On note que cet indice de réfraction ne serait en général pas représentatif de la constante de propagation dans les cellules unitaires près du bord et ne pourrait donc pas servir à calculer un angle de réfraction à partir de l'équation classique de Snell-Descartes.

Voyons si l'effet de bord a effectivement les conséquences suggérées plus haut en considérant un exemple. La méthode d'extraction numérique est appliquée à trois rangées de la structure périodique de fils métalliques. Ces trois rangées, composées de une, deux et dix cellules unitaires sont montrées à la figure 2.7. Les paramètres S pour ces structures sont calculés sur la plage de fréquence de 2 à 4.7 GHz et l'indice de réfraction n ainsi que l'impédance caractéristique η sont obtenus à l'aide des Éqs. (2.64) et (2.63) respectivement. Les résultats obtenus sont montrés à la figure 2.8. La bande de fréquences peut être divisée en deux. Pour les fréquences supérieures à environ 2.9 GHz, n et η sont essentiellement réels et correspondent à une bande de fréquences où il y a propagation dans la structure périodique. On remarque que les résultats dans cette bande de fréquence ne dépendent pas du nombre de cellules unitaires dans la rangée. En-dessous de 2.9 GHz, n est imaginaire ce qui correspond à une bande de fréquences sans propagation. Dans ce cas, il y a une ambiguïté sur le signe de la partie imaginaire de n et η qui semble provenir de l'ambiguïté sur le signe de la racine carrée dans l'Eq. (2.62). Cependant, on note que mise à part cette ambiguïté sur le signe de la partie imaginaire, les valeurs n et η semblent indépendantes du nombre de cellules unitaires dans la rangée. Ceci implique que les paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} qui sont extraits sont

indépendants du nombre de cellules unitaires. À partir de la discussion précédente sur l'effet de bord et des résultats de la figure 2.8, il est naturel de se questionner sur la nature des paramètres extraits et de se demander si on peut interpréter les paramètres extraits ε_{eff} et μ_{eff} au sens classique, c'est-à-dire comme représentant la polarisabilité électrique et magnétique moyenne dans le volume d'une cellule unitaire plongée dans une structure périodique infinie.

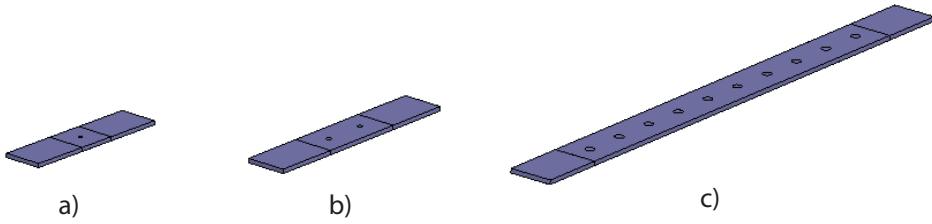


Figure 2.7 Modèles HFSS pour une rangée de cellules unitaires de la structure périodique de fils métalliques. Les guides d'ondes TEM entre les ports et les cellules unitaires sont remplis par un matériau ayant la permittivité et la perméabilité du vide. La période de la structure est $a = 10$ mm et le rayon des fils est $r = 0.545$ mm. La permittivité du milieu hôte est $\varepsilon_h = 10.2$. Les guides d'onde TEM sont remplis d'un matériau homogène ayant les paramètres du vide et ont chacun une longueur $l = 15$ mm. a) Une cellule unitaire. b) Deux cellules unitaires. c) Dix cellules unitaires.

Pour illustrer ces questions, la figure 2.9 montre la valeur relative (par rapport aux paramètres du vide) des paramètres effectifs donnés par $\varepsilon_{eff} = n/\eta$ et $\mu_{eff} = n\eta$. On note qu'à partir de 4 GHz, la partie réelle de la permittivité décroît. Ceci contrevient au principe de causalité selon lequel la partie réelle des paramètres classiques pour les matériaux conventionnels croît toujours avec la fréquence dans les régions de fréquences où les pertes sont négligeables [3]. Aussi, on note que la perméabilité a une valeur différente de la perméabilité du vide (perméabilité relative égale à 1). Or dans la structure périodique de fils, les modèles théoriques ne prévoient aucune polarisabilité magnétique. De ce point de vue, la perméabilité montrée à la figure 2.9 est aberrante. Ainsi, on voit que les paramètres effectifs extraits ne représentent pas la permittivité et la perméabilité au sens classique et ne correspondent pas aux paramètres calculés à l'aide des modèles théoriques. Cependant, même si on ne peut pas interpréter les paramètres effectifs extraits comme les paramètres effectifs classiques, faut-il pour autant complètement les rejeter ou est-il possible de leur donner une interprétation et/ou une utilité ?

Cette question a été étudiée par Simovski dans une série de travaux publiés de 2007 à 2009 [3, 37, 38, 39]. Dans ces travaux, Simovski affirme que pour un type de structure périodique qu'il appelle réseau de Bloch ("Bloch lattice"), des paramètres effectifs qu'il appelle paramètres de Bloch peuvent être définis. Ces paramètres de Bloch sont l'indice de réfraction

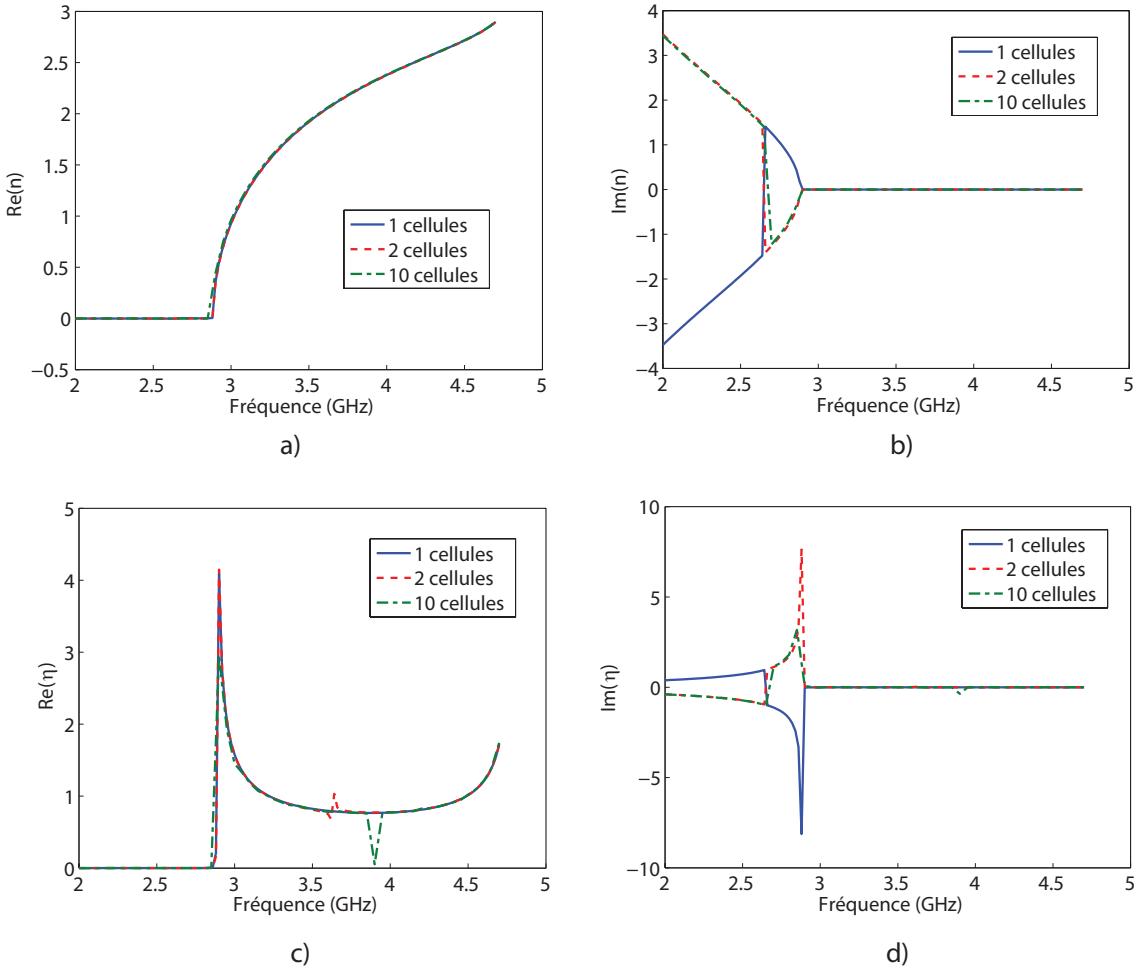


Figure 2.8 Résultats de l'extraction numérique pour les rangées avec une, deux et dix cellules unitaires telles que montrées à la figure 2.7. a) Partie réelle de l'indice de réfraction n tel qu'obtenu par l'Éq. (2.64). b) Partie imaginaire de n . c) Partie réelle de l'impédance caractéristique η telle que donnée par l'Éq. (2.63). d) Partie imaginaire de η .

(équivalent à la constante de propagation) et l'impédance de Bloch, Z_B . Ces paramètres correspondent respectivement à l'indice de réfraction n et à l'impédance caractéristique η obtenus par la méthode d'extraction des paramètres. Pour les réseaux de Bloch, les paramètres de Bloch contiennent l'information sur la réflexion et la transmission pour une cellule unitaire et sont donc en fait équivalents à la matrice de transfert ABCD de la théorie des lignes de transmission pour une cellule unitaire. Même si il est possible de calculer les paramètres individuels ε_{eff} et μ_{eff} à partir des paramètres de Bloch (n et $\eta = Z_B$), il n'est pas possible de leur attribuer une signification physique.

Examinons un à la fois les deux paramètres de Bloch en commençant par n . Avec l'approximation selon laquelle l'onde se propageant dans la structure périodique est une onde plane

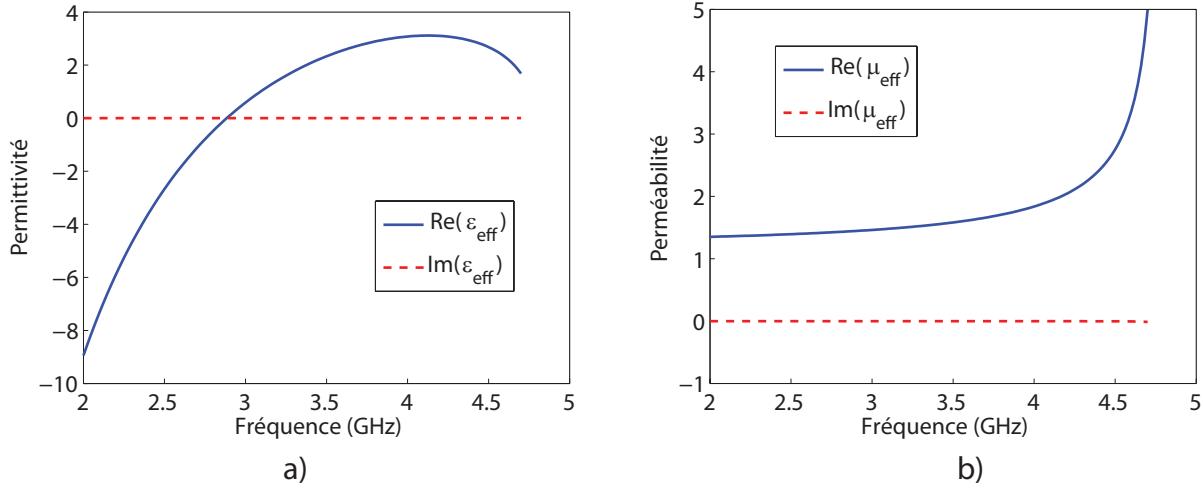


Figure 2.9 Permittivité et perméabilité relatives obtenues à l'aide des paramètres S calculés avec une rangée d'une cellule unitaire (figure 2.7 a) en ne considérant pas que la perméabilité est celle du vide. a) Permittivité obtenue en divisant l'Éq. (2.64) par l'Éq. (2.63). b) Perméabilité obtenue en multipliant l'Éq. (2.63) avec l'Éq. (2.64)

avec la dépendance spatiale $e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}$, correspondant à l'harmonique de Floquet fondamentale, on voit que n contient l'information sur la constante de propagation \vec{q} . Par exemple, pour une propagation selon x , les deux sont liés par $q_x = wn/c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. La constante de propagation obtenue par la méthode numérique d'extraction correspond à la même quantité que la constante de propagation qu'il est possible de déterminer à l'aide des modèles théoriques. Pour démontrer ceci, on peut calculer une valeur ε_{eff} correspondant à la permittivité requise pour obtenir la valeur extraite de l'indice de réfraction n en considérant $\mu_{\text{eff}} = 1$. On a alors $n = \sqrt{\mu_{\text{eff}}\varepsilon_{\text{eff}}}$. Puisque les modèles théoriques prédisent une perméabilité effective $\mu_{\text{eff}} = 1$, on s'attend à avoir une correspondance entre la valeur de ε_{eff} ainsi calculée et la permittivité prédicta par les modèles de Pendry et de Tretyakov. Cette valeur de ε_{eff} est comparée aux permittivités des modèles théoriques dans la figure 2.10 (pour le modèle de Tretyakov, on considère aucune variation en z , c'est-à-dire $q_z = 0$). On voit qu'il y une bonne correspondance entre la permittivité obtenue numériquement et la permittivité prédicta théoriquement par le modèle de Tretyakov qui est plus rigoureux que celui de Pendry. Il est important de noter que la valeur de ε_{eff} obtenue numériquement a ici une signification physique uniquement parce qu'on sait à l'avance par les modèles théoriques qu'on a $\mu_{\text{eff}} = 1$. Si ε_{eff} est calculé à partir des paramètres de Bloch extraits numériquement en divisant n par $\eta = Z_B$, on obtient des valeurs différentes pour ε_{eff} , tel que montré à la figure 2.9.

Si le paramètre de Bloch n correspond exactement à l'indice de réfraction prévu par

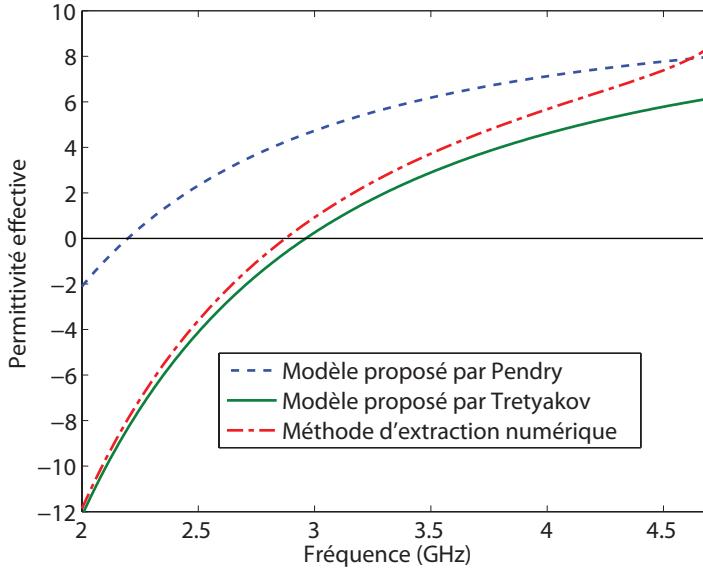


Figure 2.10 Permittivité effective obtenue des modèles de Pendry et de Tretyakov et permittivité obtenue en considérant l'indice de réfraction n de la méthode d'extraction numérique (utilisant une rangée d'une seule cellule unitaire) avec $\mu_{eff} = 1$ pour la structure périodique de fils avec $r = 0.545$ mm, $a = 10$ mm et $\varepsilon_h = 10.2$.

les modèles théoriques, le cas de l'impédance de Bloch Z_B nécessite plus de précaution. En effet, il y a ici deux quantités en jeu. La première est Z_B , qui correspond à l'impédance η extraite avec la méthode numérique. La seconde est l'impédance caractéristique théorique $\eta_{th} = \sqrt{\mu_{eff}/\varepsilon_{eff}}$ où μ_{eff} et ε_{eff} sont les paramètres effectifs obtenus théoriquement. Les quantités Z_B et η_{th} ont en général des valeurs numériques différentes et représentent deux quantités conceptuellement différentes. Pour les matériaux conventionnels, η_{th} est utilisée pour prédire la réflexion d'une onde à l'interface entre deux matériaux. Pour une structure périodique dont la période est comparable à la longueur d'onde, cette approximation n'est plus valide et la quantité η_{th} perd son utilité. Pour traiter le problème de la réflexion à un interface, il faut utiliser la quantité Z_B .

La quantité Z_B ne correspond pas, comme on pourrait s'y attendre, au ratio de l'amplitude des harmoniques de Floquet fondamentales du champ électrique et du champ magnétique [37]. Simovski définit Z_B comme le ratio de la moyenne du champ électrique et du champ magnétique dans un plan transverse à la direction de propagation évalué à la frontière d'une cellule unitaire. Par exemple, pour une direction de propagation selon x et une cellule unitaire

s'étendant de $x = 0$ à $x = a$, l'impédance de Bloch est définie par

$$Z_B = \frac{E^{TA}(x = 0)}{H^{TA}(x = 0)} \quad (2.69)$$

où E^{TA} et H^{TA} sont la moyenne des champs électrique et magnétique dans le plan yz de la cellule unitaire. En fait, Z_B peut être associée à l'impédance définie pour les lignes de transmission qui correspond au ratio de la tension sur le courant [2]. Il est intéressant de noter que la définition de l'Éq. (2.69) pour Z_B et le ratio des amplitudes des harmoniques de Floquet fondamentales du champ électrique et du champ magnétique sont équivalentes lorsque $a/\lambda_h \ll 1$ où λ_h est la longueur d'onde dans le milieu hôte [37]. Cette condition n'est cependant pas satisfaite pour les matériaux effectifs tels que la structure de fils considérée dans le présent chapitre.

Dans son article [37], Simovski montre que le coefficient de réflexion entre une région 1 constituée d'un matériau homogène caractérisé par l'impédance caractéristique $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ et une région 2 correspondant à un réseau de Bloch est :

$$\Gamma_{1,2} = \frac{Z_B - \eta_1}{Z_B + \eta_1}. \quad (2.70)$$

Ainsi, à partir du paramètre de Bloch $Z_B = \eta$ extrait de la méthode numérique, il est possible de calculer le coefficient de réflexion à l'interface avec un matériau homogène. Sur le plan pratique, on voit donc que le paramètre Z_B est très important et permet d'adapter une structure périodique (si celle-ci est un réseau de Bloch). Considérons par exemple les paramètres n et $Z_B = \eta$ extraits montrés à la figure 2.8. Ces paramètres sont obtenus à partir des paramètres S obtenus numériquement avec des guides d'onde TEM de longueur $l = 15$ mm remplis d'un matériau $\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$ et sont indépendants du nombre de cellules unitaires utilisées dans la rangée. À 3.45 GHz, ces paramètres sont $n = 1.869$ et $Z_B = 0.8391 + 0.0012j$. Voyons si il est possible d'utiliser l'Éq. (2.70) pour prédire correctement la valeur du paramètre S_{11} pour des guides d'ondes TEM remplis d'un matériau homogène avec des paramètres arbitraires comme $\varepsilon = 3$ et $\mu = 8$ et pour une rangée de deux cellules unitaires. On peut alors calculer S_{11} à partir de l'Éq. (2.57) en tenant compte de la variation de phase dans les guides d'onde TEM avec l'Éq. (2.68). Dans l'Éq. (2.57), β est la constante de propagation dans la structure périodique associée à n , d est la longueur de la structure périodique, soit 20 mm pour une rangée de deux cellules unitaires, et $\Gamma_{1,2}$ est donnée par l'Éq. (2.70). La valeur calculée dans ce cas est $S_{11} = -0.1827 - 0.2269j$. La valeur obtenue de la solution numérique de ce problème avec HFSS est $S_{11} = -0.1845 - 0.2369j$.

Jusqu'à maintenant, il a été supposé que la structure de fils métalliques est un réseau

de Bloch sans toutefois le justifier. Aussi, la définition d'un réseau de Bloch n'a pas encore été donnée. Les réseaux de Bloch sont définis comme étant une structure périodique pour laquelle l'interaction entre les cellules unitaires ne modifie pas les caractéristiques de transmission et de réflexion (c'est-à-dire les paramètres de Bloch) d'une cellule unitaire unique. Pour montrer que l'interaction entre les cellules unitaires ne modifie pas les paramètres de Bloch pour une structure périodique donnée et donc que cette structure périodique est un réseau de Bloch, Simovski compare l'équation de dispersion de la structure périodique avec l'équation de dispersion d'une ligne de transmission chargée périodiquement par une impédance ("periodically loaded transmission line") [37]. Pour une telle ligne de transmission, les coefficients de la matrice de transfert ABCD d'une cellule unitaire ne dépendent pas de la constante de propagation \vec{q} de l'harmonique de Floquet fondamentale et ne sont donc pas affectés par l'interaction avec les autres cellules unitaires. Lorsque la relation de dispersion d'une structure périodique a la même forme que celle d'une ligne de transmission chargée périodiquement, on peut conclure que les paramètres de Bloch ne varient pas à cause des interactions et donc que cette structure est un réseau de Bloch. Simovski a montré [37, 39] que si une cellule unitaire de la structure périodique peut être modélisée par un dipôle ou une ligne de courant, alors la structure périodique est un réseau de Bloch. Dans ce cas, l'interaction entre les cellules unitaires ne modifie pas les paramètres de Bloch et ceux-ci sont constants, peu importe le nombre de cellules unitaires le long de la direction de propagation. Puisque la structure de fils métalliques peut être modélisée par une ligne de courant au centre de la cellule unitaire, il s'agit d'un réseau de Bloch et les paramètres de Bloch extraits par la méthode numérique sont indépendants du nombre de cellules unitaires employé, tel que montré à la figure 2.8.

Ayant montré que sur le plan pratique, lorsqu'on désire utiliser une structure périodique dans un dispositif micro-ondes, celle-ci devant nécessairement être finie et avoir des interfaces avec les autres matériaux constituant le dispositif, les paramètres à considérer sont les paramètres de Bloch n et $Z_B = \eta$. On peut alors se demander quelle est la pertinence des modèles théoriques qui considèrent une structure périodique infinie et lui attribuent les paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} . En effet, on a vu que l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon_{eff}\mu_{eff}}$ correspond alors au paramètre de Bloch n mais que l'impédance $\eta_{th} = \sqrt{\mu_{eff}/\varepsilon_{eff}}$ ne correspond pas à l'impédance de Bloch Z_B et n'est d'aucune utilité pour résoudre les problèmes de réflexion et de transmission aux interfaces. Un élément de réponse est que les modèles théoriques permettent de déterminer l'indice de réfraction pour une structure périodique infinie et qu'en négligeant les effets de bord (ou si on considère une structure périodique qui est un réseau de Bloch), cette quantité est valide et utile. Un autre élément de réponse est que les paramètres de Bloch sont des paramètres non-locaux, c'est-à-dire qu'ils dépendent de la constante de pro-

agation \vec{q} effective dans la structure. Par exemple, les paramètres de Bloch seront différents pour différents angles d'incidence d'une onde plane incidente sur la structure périodique. Les paramètres théoriques ε_{eff} et μ_{eff} sont des paramètres locaux (en fait, le modèle de Tretyakov montre que pour la structure de fils, ε_{eff} est un paramètre local seulement si $q_z = 0$) qui relient la moyenne des champs électrique et magnétique dans le volume d'une cellule unitaire avec la polarisabilité électrique et magnétique de la cellule unitaire. Ainsi, les paramètres effectifs locaux ε_{eff} et μ_{eff} ont un sens dans le contexte des équations de Maxwell, ce qui n'est pas le cas pour les paramètres de Bloch. On note que Simovski a proposé une procédure pour extraire des paramètres locaux à partir des paramètres extraits par la méthode d'extraction numérique [3].

Un autre phénomène dont il faut tenir compte lors de l'analyse d'une structure périodique en tant que matériau homogène effectif est le régime de Bragg. Le régime de Bragg se produit lorsque les ondes dispersées (“scattered”) dans chaque cellule unitaire interfèrent de manière constructive. Avant d'énoncer la loi de Bragg, on définit la notion de famille de plans d'une matrice tridimensionnelle. Toute matrice tridimensionnelle peut être décomposée en une famille de plans parallèles les uns aux autres contenant chacun une tranche des points de la matrice. Tous les points de la matrice tridimensionnelle sont contenus dans une telle famille de plan et chacun de ces plans forme en fait une matrice bidimensionnelle. Selon la loi de Bragg, pour une structure tridimensionnelle et une famille de plans donnée, il y a interférence constructive lorsque [18]

$$m\lambda = 2d \sin \theta \quad (2.71)$$

où d est la distance entre deux plans et θ est l'angle que fait l'onde incidente avec les plans. Pour des structures périodiques bidimensionnelles comme celles considérées dans ce mémoire, au lieu d'avoir des familles de plans, on a plutôt des familles de lignes, comme montrées à la figure 2.11. Cependant, l'Eq. (2.71) demeure valide et pour une onde incidente perpendiculaire à une famille de ligne donnée, la réflexion de premier ordre ($m = 1$) se produit lorsque

$$\lambda = 2d. \quad (2.72)$$

L'Eq. (2.72) avec la distance entre les lignes d correspondant à la famille de lignes où les lignes sont le plus espacées indique la plus grande longueur d'onde pour laquelle on aura une interférence constructive ou réflexion de Bragg. Dans le cas d'une matrice carrée comme celle de la figure 2.11, cette distance est $d = a$.

Le régime de Bragg est le phénomène dominant dans l'analyse de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une structure périodique lorsque la longueur d'onde est égale

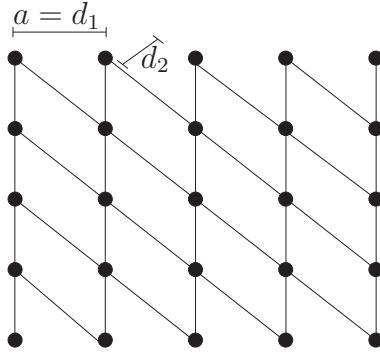


Figure 2.11 Deux familles de lignes pour une matrice carrée bidimensionnelle de période a . La première famille correspond aux lignes verticales et la distance entre les lignes est $d_1 = a$. La seconde famille correspond aux lignes obliques et la distance entre les lignes est d_2 .

ou plus petite que λ telle que donnée par l'Éq. (2.72). La longueur d'onde à considérer pour ce critère est en général λ_h , la longueur d'onde dans le milieu hôte, sauf si on peut considérer la structure périodique comme un matériau effectif, c'est-à-dire si λ_h est plus petite que $2a$, et que la longueur d'onde effective λ_{eff} est plus petite que λ_h , comme c'est le cas par exemple près de la fréquence de résonance des inclusions qui constituent certaines structures périodiques [3]. Lorsqu'on est en régime de Bragg, les paramètres effectifs perdent leur signification. Lorsque la longueur d'onde λ (λ_h ou λ_{eff} , selon le cas) est plus grande que $2a$, on est en dehors du régime de Bragg et on peut attribuer des paramètres effectifs à la structure périodique. La figure 2.12 illustre le cas du régime de Bragg et le régime où l'on peut traiter la structure périodique comme un matériau effectif. Pour la structure de fils métalliques de période $a = 10$ mm plongés dans un milieu hôte de permittivité $\varepsilon_h = 10.2$, le régime de Bragg commence lorsque $\lambda_h = 20$ mm, ce qui correspond à la fréquence 4.7 GHz. C'est pour cette raison que les résultats montrés aux figures 2.8, 2.9 et 2.10 sont limités aux fréquences inférieures à 4.7 GHz. Au-delà de 4.7 GHz, la méthode d'extraction donne des résultats aberrants.

2.3 Application : résonateur $\varepsilon = 0$ à taille indépendante

Dans cette section, on présente un résonateur micro-ondes qui contient une structure périodique de fils métalliques [40]. Cette structure périodique est considérée comme un matériau effectif avec une permittivité effective ε_{eff} . La fréquence d'opération correspond à $\varepsilon_{eff} = 0$ ce qui fait que la longueur d'onde effective λ_{eff} dans la structure périodique est infinie. Ceci permet d'utiliser une structure périodique de taille arbitraire et ainsi d'obtenir un résonateur dont la fréquence de résonance ne dépend pas de la taille physique totale du résonateur.

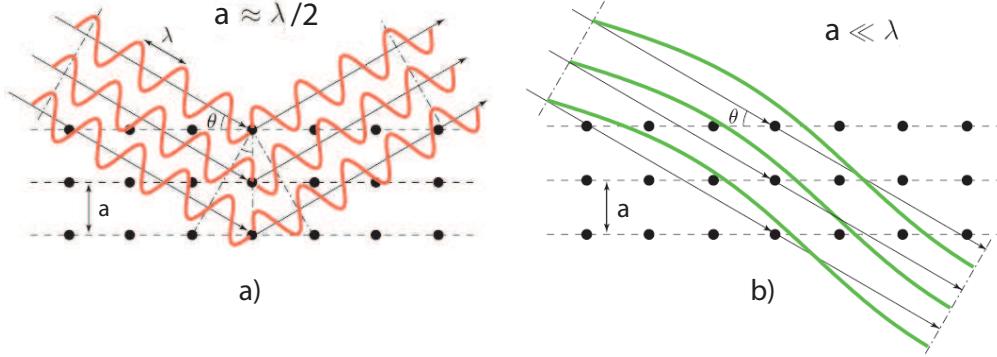


Figure 2.12 Régime de Bragg dans une structure périodique. a) Le régime de Bragg est le phénomène dominant car $a \approx \lambda_{eff}$. b) Pas de régime de Bragg car $a \ll \lambda_{eff}$: la structure peut être considérée comme un matériau effectif. Adaptée de "EBGs and Metamaterials : Concepts, Structures and Applications", EuCAP 2009, par C. Caloz.

2.3.1 Principe du résonateur

Le résonateur à taille indépendante est montré à la figure 2.13. Il comprend 9 régions diélectriques (non-magnétiques). La région du centre est constituée d'une structure périodique de fils métalliques, telle que montrée à la figure 2.1 et opérant à la fréquence correspondant à une permittivité effective $\varepsilon_2 = 0$. Les régions sur les côtés sont constituées d'un matériau diélectrique homogène de permittivité ε_1 tandis que les régions dans les coins sont constituées d'un diélectrique homogène de permittivité ε_3 . Les permittivités ε_1 et ε_3 sont choisies afin de satisfaire la condition de séparabilité

$$\varepsilon_3 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (2.73)$$

Cette condition, énoncée dans [41], permet d'obtenir la solution électromagnétique du problème de la figure 2.13 par la méthode de séparation des variables. La condition de séparabilité sera obtenue à la section 2.3.3 lorsque la solution par séparation de variables sera présentée. Comme il a été noté dans [42], cette condition peut aussi être interprétée comme permettant d'éviter la diffraction aux interfaces en coin du résonateur. Toutes les surfaces extérieures du résonateur sont couvertes par un conducteur métallique parfait (PEC).

2.3.2 Propriétés de la structure périodique de fils

Pour la structure périodique de fils de la région 5, on utilise une période $a = 10.9$ mm, un rayon des fils de $r = 0.32$ mm et un milieu hôte de permittivité $\varepsilon_h = 10.2$. La figure 2.14 montre les permittivités effectives prédictes par les modèles de Tretyakov et de Pendry, données

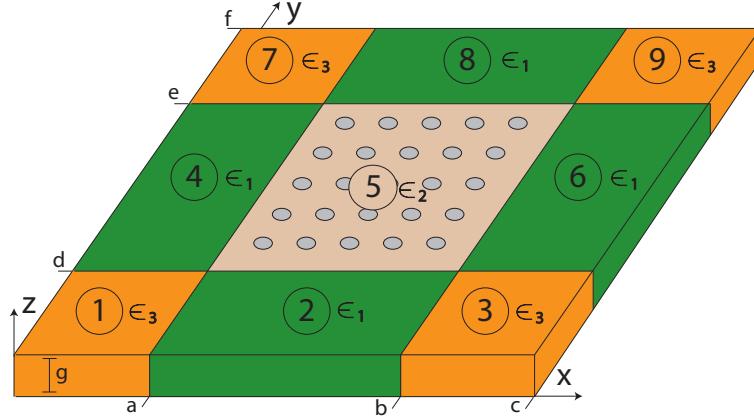


Figure 2.13 Le résonateur est divisé en 9 régions. La région du centre est la région de permittivité $\epsilon_2 = 0$. Les autres régions ont des permittivités ϵ_1 et ϵ_3 satisfaisant la condition de séparabilité. Le résonateur a une épaisseur qui s'étend de $z = 0$ à $z = g$.

par l'Éq. (2.55) avec les Éqs. (2.56) et (2.54) respectivement, pour une telle structure de fils. Le modèle de Tretyakov, qui est plus rigoureux (et qui est plus proche de la permittivité effective obtenue de la méthode d'extraction numérique, comme montré à la figure 2.10) prédit une permittivité effective nulle à 2.29 GHz. Le modèle de Pendry prédit une fréquence inférieure à cette valeur de 0.47 GHz. Le fait que le modèle de Tretyakov est bien le modèle qu'il faut utiliser sera montré à la section 2.3.4 où des résultats numériques obtenus à l'aide du solveur HFSS qui confirment le comportement $\epsilon_{eff} = 0$ à 2.29 GHz seront présentés.

2.3.3 Analyse modale

Dans cette section, les expressions des champs pour les modes supportés par le résonateur de la figure 2.13 sont obtenues. Tout d'abord, une analyse sera effectuée sans assumer de valeur spécifique pour la permittivité de la région centrale ϵ_2 . Les modes qui sont indépendants de la taille physique de la région centrale sont alors obtenus en posant $\epsilon_2 = 0$. Seuls des modes TM z seront considérés pour lesquels il n'y a aucune variation en z ce qui implique que le champ électrique a seulement une composante E_z . Ces conditions sont nécessaires pour que la permittivité effective de la figure 2.14 soit valide.

Pour obtenir des expressions pour les champs électriques et magnétiques, une approche possible consiste à solutionner le problème en terme du potentiel vectoriel magnétique \vec{A} pour ensuite déterminer \vec{E} et \vec{H} [16]. Sous la jauge de Lorentz, pour les modes TM z le potentiel vectoriel magnétique a une seule composante A_z

$$\vec{A} = A_z(x, y, z)\hat{z} \quad (2.74)$$

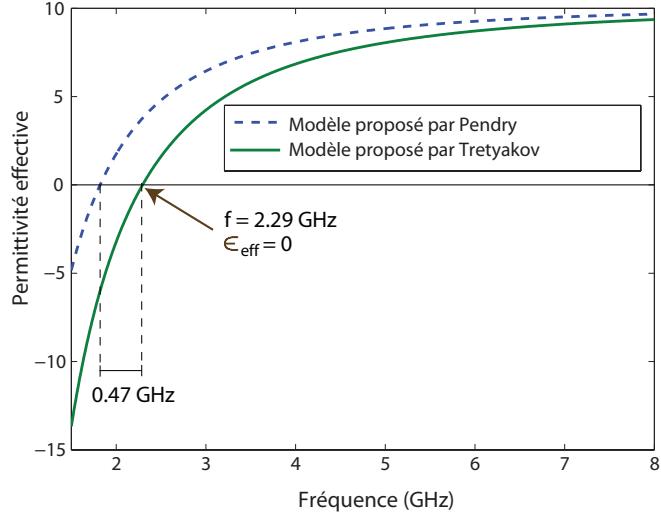


Figure 2.14 Permittivité effective de la structure de fils de la région 5 du résonateur selon les modèles de Tretyakov et de Pendry. La structure de fils considérée a une période $a = 10.9$ mm, un rayon des fils $r = 0.32$ mm et un milieu hôte de permittivité $\epsilon_h = 10.2$.

et les champs magnétiques et électriques sont donnés par

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2.75)$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}). \quad (2.76)$$

Dans un milieu homogène sans source, \vec{A} satisfait l'équation d'onde

$$\nabla^2 A_z(x, y, z) + k^2 A_z(x, y, z) = 0 \quad (2.77)$$

où $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$. Cette équation peut être résolue par la méthode de séparation des variables selon laquelle une solution de la forme $A_z(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ est supposée.

Pour chaque région i ($i = 1, 2, \dots, 9$) de la figure 2.13, on définit le potentiel vectoriel magnétique $\vec{A}_i = A_{zi} \hat{z}$. En supposant que la séparation des variables peut être utilisée dans chacune des régions, on a

$$A_{zi} = X_i(x)Y_i(y)Z_i(z) \quad (2.78)$$

qui doit satisfaire l'Éq. (2.77) pour chaque i . Cependant, en général les conditions frontières entre les différentes régions du résonateur rendent le problème impossible à résoudre par séparation des variables. Malgré cela, comme il sera montré plus bas, sous certaines conditions

le problème peut être rendu séparable.

En assumant pour le moment que le problème est séparable, en insérant l'Éq. (2.78) dans l'Éq. (2.77), on obtient pour chaque région i

$$\frac{X_i''(x)}{X_i(x)} + \frac{Y_i''(y)}{Y_i(y)} + \frac{Z_i''(z)}{Z_i(z)} + k_i^2 = 0 \quad (2.79)$$

où $k_i = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_i}$. Puisque chaque terme dans l'Éq. (2.79) doit être une constante des coordonnées de l'espace (x, y, z) , on pose

$$\frac{X_i''(x)}{X_i(x)} = -k_{xi}^2, \quad \frac{Y_i''(y)}{Y_i(y)} = -k_{yi}^2, \quad \frac{Z_i''(z)}{Z_i(z)} = -k_{zi}^2 \quad (2.80)$$

et l'Éq. (2.79) devient

$$k_{xi}^2 + k_{yi}^2 + k_{zi}^2 = k_i^2. \quad (2.81)$$

Puisque la structure analysée est un résonateur, on s'attend à ce que les solutions A_{zi} soient des ondes stationnaires. Ainsi, les solutions générales des Éqs. (2.80) sont écrites sous la forme

$$X_i(x) = A_i \sin(k_{xi}x) + B_i \cos(k_{xi}x) \quad (2.82)$$

$$Y_i(y) = C_i \sin(k_{yi}y) + D_i \cos(k_{yi}y) \quad (2.83)$$

$$Z_i(z) = E_i \sin(k_{zi}z) + F_i \cos(k_{zi}z). \quad (2.84)$$

De ces expressions pour \vec{A}_i , il est possible de trouver des expressions pour \vec{E} et \vec{H} et d'appliquer les conditions frontières adéquates afin de déterminer toutes les constantes de A_i jusqu'à F_i . D'abord, on trouve l'expression de la composante z du champ électrique à l'aide de l'Éq. (2.76)

$$E_{zi} = \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_{zi} + k_i^2 A_{zi} \right) \quad (2.85)$$

d'où on a

$$E_{zi} = \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon_i} X_i(x) Y_i(y) Z_i(z) (k_i^2 - k_{zi}^2). \quad (2.86)$$

Par la condition selon laquelle la composante tangentielle du champ \vec{E} doit être continue aux interfaces entre les 9 régions de la structure, il est possible de montrer que k_{xi} doit être continu aux interfaces parallèles à la direction \hat{x} et que similairement, k_{yi} et k_{zi} doivent être continus aux interfaces parallèles à \hat{y} et \hat{z} respectivement. Ce fait peut être accepté intuitivement, mais une démonstration est tout de même proposée en annexe. À cause de cette condition de continuité, les k_{zi} de toutes les régions doivent être égaux et on a $k_{zi} = k_z$. Aussi, on obtient

les égalités suivantes pour les k_{xi} et les k_{yi}

$$\begin{aligned} k_{x1} &= k_{x4} = k_{x7} & k_{y1} &= k_{y2} = k_{y3} \\ k_{x2} &= k_{x5} = k_{x8} & k_{y4} &= k_{y5} = k_{y6} \\ k_{x3} &= k_{x6} = k_{x9} & k_{y7} &= k_{y8} = k_{y9}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

En considérant ces relations dans l'écriture de l'Éq. (2.81) dans chaque région, on obtient

$$\textcircled{1} \quad k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_3 \quad (2.88)$$

$$\textcircled{2} \quad k_{x2}^2 + k_{y1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_1 \quad (2.89)$$

$$\textcircled{3} \quad k_{x3}^2 + k_{y1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_3 \quad (2.90)$$

$$\textcircled{4} \quad k_{x1}^2 + k_{y4}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_1 \quad (2.91)$$

$$\textcircled{5} \quad k_{x2}^2 + k_{y4}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_2 \quad (2.92)$$

$$\textcircled{6} \quad k_{x3}^2 + k_{y4}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_1 \quad (2.93)$$

$$\textcircled{7} \quad k_{x1}^2 + k_{y7}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_3 \quad (2.94)$$

$$\textcircled{8} \quad k_{x2}^2 + k_{y7}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_1 \quad (2.95)$$

$$\textcircled{9} \quad k_{x3}^2 + k_{y7}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_3 \quad (2.96)$$

En examinant ces équations, deux relations additionnelles reliant les différents k_{xi} et k_{yi} peuvent être obtenues. En effet, en soustrayant l'Éq. (2.90) de l'Éq. (2.88), on obtient

$$k_{x1} = k_{x3}. \quad (2.97)$$

Similairement, en soustrayant l'Éq. (2.95) de l'Éq. (2.89), on a

$$k_{y1} = k_{y7}. \quad (2.98)$$

Jusqu'à maintenant, il a été supposé que le problème est séparable et que l'Éq.(2.78) est une expression valide pour les solutions A_{zi} . Montrons sous quelle condition cette supposition est valide (voir aussi [41]). Cette condition de séparabilité peut être obtenue en considérant les régions 1, 2, 4 and 5 formant un coin (ou tout autre ensemble de régions formant un tel coin). En soustrayant l'Éq. (2.92) de l'Éq. (2.91) ainsi que l'Éq. (2.89) de l'Éq. (2.88), on

obtient

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_o (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (2.99)$$

et

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_o (\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \quad (2.100)$$

La comparaison de l'Éq. (2.99) avec l'Éq. (2.100) montre que la condition suivante doit être satisfaite

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_3 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (2.101)$$

Cette condition est appellée condition de séparabilité car elle découle du fait que le problème a été supposé séparable [Éq. (2.78)] et elle doit être satisfaite pour que les conditions aux frontières imposées par les équations de Maxwell puissent être satisfaites.

Jusqu'à maintenant, on a considéré des solutions générales pour lesquelles il peut y avoir des variations en z . La composante E_x du champ électrique dans chaque région peut être obtenue à partir de l'Éq. (2.76) et peut être écrite comme

$$E_{xi} = -\frac{j}{\omega \mu \epsilon_i} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_{zi} \quad (2.102)$$

d'où on a

$$\begin{aligned} E_{xi} = & -\frac{j}{\omega \mu \epsilon_i} k_{xi} [A_i \cos(k_{xi}x) - B_i \sin(k_{xi}x)] [C_i \sin(k_{yi}y) \\ & + D_i \cos(k_{yi}y)] k_z [E_i \cos(k_z z) - F_i \sin(k_z z)]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

On voit qu'en général, en imposant la condition $E_{xi} = 0$ à $z = 0$, on obtient $E_i = 0$. En imposant la même condition à $z = g$, on obtient

$$k_z = \frac{m\pi}{g}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.104)$$

Dans le cas présent, on s'intéresse aux modes sans variation en z et on pose $k_z = 0$. De l'Éq. (2.103), on voit alors que $E_{xi} = 0$. Similairement, E_{yi} est donnée par

$$E_{yi} = -\frac{j}{\omega \mu \epsilon_i} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_{zi} \quad (2.105)$$

et est 0 lorsque $k_z = 0$. Aussi, lorsque $k_z = 0$, l'expression pour E_{zi} donnée par l'Éq. (2.86) devient

$$E_{zi} = -j\omega X_i(x) Y_i(y) Z_i(z) \quad (2.106)$$

où on a utilisé la relation $k_i = \omega^2 \mu \varepsilon_i$.

À présent, on considère le cas où la région 5 du résonateur est occupée par une structure de fils métalliques opérant à la fréquence correspondant à $\varepsilon_{eff} = 0$. Dans ce cas, on peut écrire $\varepsilon_2 = 0$ et de l'Éq. (2.81), on a $k_{x5} = k_{y5} = 0$. Aussi, dans ce cas la condition de séparabilité devient $\epsilon_3 = 2\epsilon_1$. Puisque $k_{x5} = 0$ implique $k_{x2} = 0$ par l'Éq. (2.87), on a que l'Éq. (2.88) et l'Éq. (2.89) deviennent respectivement

$$k_{x1}^2 + k_{y1}^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_3 \quad (2.107)$$

$$k_{y1}^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_1 \quad (2.108)$$

En utilisant la condition de séparabilité $\epsilon_3 = 2\epsilon_1$ et en soustrayant l'Éq. (2.108) de l'Éq. (2.107), on obtient

$$k_{x1}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1. \quad (2.109)$$

Par comparaison avec l'Éq. (2.108), on voit qu'en fait on a $k_{x1} = k_{y1}$ que l'on note k_{xy} pour plus de simplicité. Ainsi, les composantes des vecteurs de propagation dans les différentes régions ont toutes la valeur k_{xy} ou 0 et sont données par

$$\begin{aligned} k_{x1} &= k_{x4} = k_{x7} = k_{x3} = k_{x6} = k_{x9} = k_{xy} \\ k_{y1} &= k_{y2} = k_{y3} = k_{y7} = k_{y8} = k_{y9} = k_{xy} \\ k_{x2} &= k_{x5} = k_{x8} = k_{y4} = k_{y5} = k_{y6} = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

À présent, il est pratique d'écrire les expressions pour la composante E_{zi} du champ électrique dans chaque région. En utilisant l'Éq. (2.106) et l'identité trigonométrique

$$A \sin(k_{xy}x) + B \cos(k_{xy}x) = G \sin(k_{xy}x + \theta) \quad (2.111)$$

où $\theta = \arctan(B/A)$ et $G = \sqrt{A^2 + B^2}$, on peut écrire la composante E_{zi} du champ électrique

dans chaque région comme

$$\textcircled{1} \quad E_{z1} = G_1 \sin(k_{xy}x) \sin(k_{xy}y) \quad (2.112)$$

$$\textcircled{2} \quad E_{z2} = G_2 \sin(k_{xy}y) \quad (2.113)$$

$$\textcircled{3} \quad E_{z3} = G_3 \sin(k_{xy}x + \theta_3) \sin(k_{xy}y) \quad (2.114)$$

$$\textcircled{4} \quad E_{z4} = G_4 \sin(k_{xy}x) \quad (2.115)$$

$$\textcircled{5} \quad E_{z5} = G_5 \quad (2.116)$$

$$\textcircled{6} \quad E_{z6} = G_6 \sin(k_{xy}x + \theta_6) \quad (2.117)$$

$$\textcircled{7} \quad E_{z7} = G_7 \sin(k_{xy}x) \sin(k_{xy}y + \theta_7) \quad (2.118)$$

$$\textcircled{8} \quad E_{z8} = G_8 \sin(k_{xy}y + \theta_8) \quad (2.119)$$

$$\textcircled{9} \quad E_{z9} = G_9 \sin(k_{xy}x + \theta_9) \sin(k_{xy}y + \theta_9) \quad (2.120)$$

où les G_n et les θ_n sont des constantes. Ces constantes peuvent être déterminées en appliquant les conditions frontières pour les différentes régions. Par exemple, pour la région 3 on a

$$E_{z3} = G_3 \sin \left[k_{xy} \left(x + \frac{\theta_3}{k_{xy}} \right) \right] \sin(k_{xy}y). \quad (2.121)$$

En appliquant la condition frontière $E_{z3} = 0$ à $x = c$ pour tout y de la région 3, on obtient

$$\sin \left[k_{xy} \left(c + \frac{\theta_3}{k_{xy}} \right) \right] = 0 \quad (2.122)$$

et donc

$$k_{xy} \left(c + \frac{\theta_3}{k_{xy}} \right) = m\pi \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = m\pi - ck_{xy}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.123)$$

Pour toutes les valeurs de m , on voit que l'Éq. (2.121) peut être écrite comme

$$E_{z3} = G_3 \sin[k_{xy}(x - c)] \sin(k_{xy}y) \quad (2.124)$$

où la constante G_3 , pour le moment indéterminée, absorbe le signe $-$ pour les valeurs impaires de m . Procédant de la même façon pour chacune des autres régions, le champ E_z peut être

réécrit comme

$$\textcircled{1} \quad E_{z1} = G_1 \sin(k_{xy}x) \sin(k_{xy}y) \quad (2.125)$$

$$\textcircled{2} \quad E_{z2} = G_2 \sin(k_{xy}y) \quad (2.126)$$

$$\textcircled{3} \quad E_{z3} = G_3 \sin[k_{xy}(x - c)] \sin(k_{xy}y) \quad (2.127)$$

$$\textcircled{4} \quad E_{z4} = G_4 \sin(k_{xy}x) \quad (2.128)$$

$$\textcircled{5} \quad E_{z5} = G_5 \quad (2.129)$$

$$\textcircled{6} \quad E_{z6} = G_6 \sin[k_{xy}(x - c)] \quad (2.130)$$

$$\textcircled{7} \quad E_{z7} = G_7 \sin(k_{xy}x) \sin[k_{xy}(y - f)] \quad (2.131)$$

$$\textcircled{8} \quad E_{z8} = G_8 \sin[k_{xy}(y - f)] \quad (2.132)$$

$$\textcircled{9} \quad E_{z9} = G_9 \sin[k_{xy}(x - c)] \sin[k_{xy}(y - f)]. \quad (2.133)$$

Le champ \vec{H} correspondant dans chaque région peut être obtenu de l'équation de Maxwell

$$\vec{H}_i = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}_i. \quad (2.134)$$

Pour la composante H_y , dans chacune des régions on a

$$\textcircled{1} \quad H_{y1} = \frac{-j}{\omega\mu} G_1 k_{xy} \cos(k_{xy}x) \sin(k_{xy}y) \quad (2.135)$$

$$\textcircled{2} \quad H_{y2} = 0 \quad (2.136)$$

$$\textcircled{3} \quad H_{y3} = \frac{-j}{\omega\mu} G_3 k_{xy} \cos[k_{xy}(x - c)] \sin(k_{xy}y) \quad (2.137)$$

$$\textcircled{4} \quad H_{y4} = \frac{-j}{\omega\mu} G_4 k_{xy} \cos(k_{xy}x) \quad (2.138)$$

$$\textcircled{5} \quad H_{y5} = 0 \quad (2.139)$$

$$\textcircled{6} \quad H_{y6} = \frac{-j}{\omega\mu} G_6 k_{xy} \cos[k_{xy}(x - c)] \quad (2.140)$$

$$\textcircled{7} \quad H_{y7} = \frac{-j}{\omega\mu} G_7 k_{xy} \cos(k_{xy}x) \sin[k_{xy}(y - f)] \quad (2.141)$$

$$\textcircled{8} \quad H_{y8} = 0 \quad (2.142)$$

$$\textcircled{9} \quad H_{y9} = \frac{-j}{\omega\mu} G_9 k_{xy} \cos[k_{xy}(x - c)] \sin[k_{xy}(y - f)]. \quad (2.143)$$

Des expressions similaires peuvent être obtenues pour les composantes H_x . Puisque $H_{y1} = H_{y2}$ à $x = a$ pour toutes les valeurs de y à l'interface entre les régions 1 and 2, on voit que

$$\frac{-j}{\omega\mu} G_1 \cos(k_{xy}a) \sin(k_{xy}y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(k_{xy}a) = 0.$$

Ainsi, les valeurs admissibles pour $k_{xy}a$ sont

$$k_{xy}a = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (2.144)$$

L'application de la condition de continuité de la composante tangentielle de \vec{H} aux interfaces entre les autres régions mène à la conclusion que $k_{xy}(c - b)$, $k_{xy}d$ et $k_{xy}(f - e)$ doivent satisfaire la même condition que $k_{xy}a$ donnée par l'Éq. (2.144). Ainsi, pour que les modes analysés jusqu'à présent existent, il faut que la longueur des régions entourant la région 5 dans la figure 2.13 soient un multiple impair de $\pm\pi/(2k_{xy})$ où $k_{xy} = k_{x1} = k_{y1}$ est défini par l'Éq. (2.108). En mots, cette condition exprime simplement le fait que la longueur des bords du résonateur doit être un multiple impair d'un quart de longueur d'onde afin que le champ électrique puisse être nul aux frontières externes du résonateur et maximal aux interfaces avec la région centrale où le champ électrique est uniforme et le champ magnétique est nul.

La dernière étape de l'analyse consiste à relier les constantes G_i entre-elles. Ceci peut être fait en appliquant la condition de continuité de E_{zi} aux interfaces entre les différentes régions. Il est alors facile de vérifier que $G_i = \pm G$ où le signe dépend de la longueur de la région en question et donc du multiple impair de $\pm\pi/(2k_{xy})$ qui est choisi pour a , $(c - b)$, d and $(f - e)$. Ceci correspond simplement au fait que les champs \vec{E} et \vec{H} doivent être continus partout à l'intérieur du résonateur.

2.3.4 Résultats numériques

Afin de valider l'analyse présentée à la section précédente, le solveur éléments finis HFSS est utilisé afin d'obtenir la solution numérique des champs dans le résonateur de la figure 2.13. Plus spécifiquement, le solveur eigenmode de HFSS qui donne les solutions du problème sans source est utilisé. La figure 2.15 montre les distributions de champs obtenues numériquement pour différentes configurations du résonateur. Les distributions de champs analytiques données aux Éqs. (2.125) à (2.133) pour E_z et aux Éqs. (2.135) à (2.143) pour H_y ne sont pas montrées mais il a été vérifié qu'elles correspondent très bien aux distributions de la figure 2.15. La seule différence est que dans la région du centre où une structure de fils est utilisée, les champs ne sont pas parfaitement uniformes ; seule la moyenne spatiale des champs est uniforme. Pour tous les résonateurs, les régions composant les bords ont des permittivités $\varepsilon_1 = 5.1$ et $\varepsilon_3 = 10.2$ qui satisfont la condition de séparabilité $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_1$.

La figure 2.15 a) montre l'amplitude du champ E_z pour un résonateur pour lequel la région centrale est constituée d'un matériau homogène fictif dont la permittivité est nulle. Pour les autres figures, la région centrale est constituée d'une structure périodique de fils ayant les mêmes paramètres que ceux utilisés pour obtenir les permittivité effective de la figure 2.14, soit

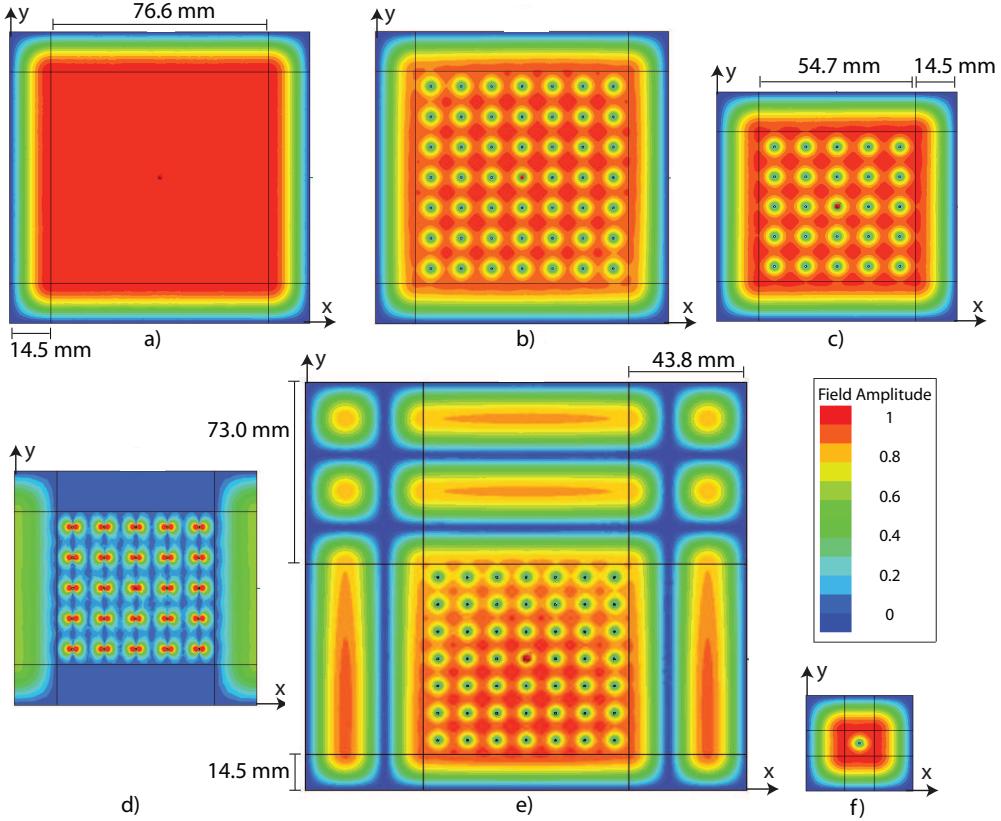


Figure 2.15 Amplitude des champs pour différents résonateur obtenues avec HFSS. Tous les résonateurs opèrent à 2.27 GHz et ont des permittivité $\epsilon_1 = 5.1$ et $\epsilon_3 = 10.2$ pour les régions sur les bords. Les paramètres des structures de fils sont $a = 10.9$ mm, $r = 0.32$ mm et $\epsilon_h = 10.2$. a) E_z pour un résonateur dont la région centrale est un matériau homogène de permittivité nulle. b) E_z pour un résonateur avec une structure de fils 7×7 pour laquelle $\epsilon_{eff} = 0$. c) et d) E_z et H_y respectivement pour un résonateur avec une structure de fils 5×5 . e) E_z pour un résonateur ayant des bords de différentes tailles. f) E_z pour un résonateur avec un seul fil dans sa région centrale. Toutes les figures sont à la même échelle.

$a = 10.9$ mm, $r = 0.32$ mm et $\epsilon_h = 10.2$. Pour tous les résonateurs, la fréquence d'opération est 2.27 GHz, ce qui est très près de la valeur de 2.29 GHz prédictive pour $\epsilon_{eff} = 0$ par le modèle de Tretyakov (voir figure 2.14). La figure 2.15 b) montre l'amplitude E_z pour un résonateur avec une structure de fils 7×7 . On voit que malgré les fortes variations du champ autour des fils, qui doit en fait s'annuler à la surface de ceux-ci, la moyenne spatiale du champ est uniforme lorsque prise sur plusieurs périodes ce qui valide l'interprétation de la structure périodique de fils comme un matériau homogène. Pour montrer l'indépendance de la fréquence de résonance par rapport à la taille physique de la région centrale, la figure 2.15 c) montre un résonateur avec une structure de fils 5×5 . On note que les résonateurs des figures 2.15 b) et c) ont des bords qui sont de la même taille. La figure 2.15 d) montre le champ H_y pour le

même résonateur que celui de la figure 2.15 c). On peut voir que la distribution du champ H_y correspond bien aux Éqs. (2.135) à (2.143). De l'Éq. (2.144), on a que la largeur des bords multipliée par le nombre d'onde k_{xy} doit être un multiple impair de $\pi/2$. La figure 2.15 e) montre un résonateur dont la taille des bords est $k_{xy}a = k_{xy}(c - b) = 3\pi/2$, $k_{xy}d = \pi/2$ et $k_{xy}(f - e) = 5\pi/2$.

Il a été mentionné à la section 2.2.3 que la structure périodique de fils est un réseau de Bloch et que l'indice de réfraction effectif qui caractérise cette structure ne dépend pas de l'interaction avec les autres cellules unitaires. Or en réalité, c'est la constante de propagation ou, de manière équivalente, l'indice de réfraction qui détermine la distribution de la phase des champs dans le résonateur et non la permittivité effective. Ceci explique qu'il n'y a pas d'effet de bord pour la structure périodique de fils dans les résonateurs de la figure 2.15 et que l'analyse selon laquelle on considère $\varepsilon_{eff} = 0$ et donc $n = 0$ dans toute la région centrale est valide et prédit avec succès l'existence de modes dans le résonateur. On peut pousser cette affirmation à la limite et considérer un résonateur avec une région centrale composée d'un seul fil, comme montré à la figure 2.15 f). L'unique cellule unitaire est dans ce cas caractérisée par $n = 0$ et donc une constante de propagation nulle tout aussi bien que les cellules unitaires des résonateurs 7×7 ou 5×5 . Ainsi, le champ ne subit aucun déphasage en traversant la région centrale et l'analyse de la section précédente demeure valide.

CHAPITRE 3

Fils métalliques dans un milieu hôte magnétique

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une structure périodique de fils métalliques telle que celle présentée au chapitre 2 mais cette fois plongée dans un milieu hôte magnétique constitué d'une ferrite soumis à un champ magnétique DC. Cette structure a la propriété d'avoir à la fois une permittivité et une perméabilité effective dans une certaine bande de fréquences. Ceci permet la propagation de "backward waves" dont certaines propriétés dont l'indice de réfraction négatif sont présentées à la section 3.1. La structure en question ayant été proposée par Dewar [43, 15], le modèle théorique de Dewar qui permet d'assigner des paramètres effectifs à la structure est présenté à la section 3.2. On applique ensuite la méthode d'extraction numérique des paramètres à la section 3.3 afin de valider le modèle théorique. À la section 3.4 on présente les résultats d'une expérience ayant servi à valider la propriété d'indice de réfraction négatif de la structure. Enfin, à la section 3.5 deux applications potentielles de la structure de Dewar sont proposées.

3.1 Matériaux main-gauche et indice de réfraction négatif

Les matériaux main-gauche ou matériaux aux paramètres négatifs sont caractérisés par une permittivité et une perméabilité effective toutes deux négatives. Les propriétés d'un tel matériau ont été décrites pour la première fois par Veselago [5] en 1968, alors que la possibilité qu'un tel matériau existe était incertaine. Depuis la proposition d'une structure périodique combinant des boucles de métal avec des fils métalliques en tant que matériau aux paramètres négatifs par Smith et al. en 2000 [9] et de la démonstration expérimentale de l'indice de réfraction négatif de cette structure [10], beaucoup d'efforts de recherche ont été consacrés à l'étude des matériaux aux paramètres négatifs et de leurs propriétés (e.g. [44, 45]).

Une onde plane se propageant dans un milieu homogène ayant les paramètres ε et μ a une constante de propagation $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Si l'un des paramètres ε ou μ est négatif, k est purement imaginaire et l'onde est evanescente. Dans ce cas il n'y a pas de propagation. Cependant, lorsque ε et μ sont tous deux négatifs, k est réel et il y a propagation de l'onde plane dans le milieu. La propriété fondamentale des matériaux aux paramètres négatifs est que pour une onde plane $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$, le vecteur de propagation \vec{k} pointe dans la direction opposée à celle du vecteur de Poynting \vec{S} , dont la partie réelle correspond à la direction vers laquelle

l'énergie associée à l'onde est transportée. Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (3.1)$$

où \vec{H}^* dénote la valeur conjuguée complexe de \vec{H} . Pour voir la relation entre la direction des vecteurs \vec{k} et \vec{S} et le signe des paramètres ε et μ , considérons les deux équations de Maxwell suivantes dans un milieu sans source ($\vec{J} = 0$)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}. \quad (3.2)$$

La dépendance spatiale des champs étant donnée par $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$, l'opérateur rotationnel $\nabla \times$ peut être remplacé par l'opérateur $-j\vec{k} \times$ et les équations de Maxwell précédentes deviennent

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\vec{E}. \quad (3.3)$$

On peut donc voir que lorsque les paramètres ε et μ sont positifs, les vecteurs \vec{E} , \vec{H} et \vec{k} forment un ensemble de vecteurs respectant la règle de la main droite, comme montré à la figure 3.1 a). Lorsque ε et μ sont négatifs, ces vecteurs respectent plutôt la règle de la main gauche, comme montré à la figure 3.1 b), d'où le nom matériaux main-gauche donné aux matériaux ayant des paramètres négatifs. Dans ce dernier cas, on voit que le vecteur de Poynting \vec{S} et \vec{k} pointent dans des directions opposées, d'où le nom de “backward waves” donné aux ondes planes se propageant dans un tel médium [46].

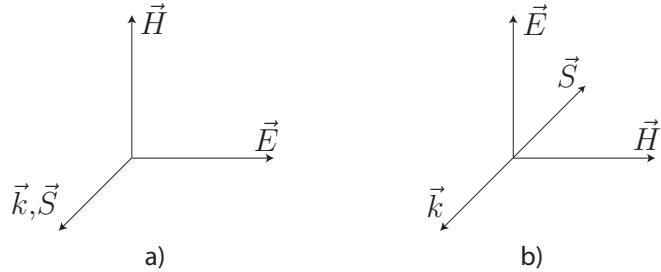


Figure 3.1 Les vecteurs \vec{E} , \vec{H} et \vec{k} formant un ensemble a) main droite et b) main gauche. Pour l'ensemble main gauche, le vecteur de Poynting \vec{S} pointe dans la direction opposée à \vec{k} .

Une propriété qui découle directement de la direction opposée des vecteurs \vec{k} et \vec{S} est l'indice de réfraction négatif. Supposons qu'une onde plane dans une région 1 composée d'un matériau diélectrique conventionnel est incidente avec un angle θ_i sur une région 2, comme montré à la figure 3.2. La loi de Snell-Descartes donne l'angle de transmission θ_t en fonction

de θ_i et des indices de réfraction n_1 et n_2 des deux régions

$$\sin \theta_i n_1 = \sin \theta_t n_2. \quad (3.4)$$

L'angle d'incidence θ_i et l'angle de transmission θ_t correspondent à l'angle que fait le vecteur \vec{S} avec la normale à l'interface. Ces angles sont donc définis par rapport à la direction de propagation de l'énergie associée à l'onde. Dans la région 1 où les paramètres ε_1 et μ_1 sont positifs, les vecteurs \vec{k} et \vec{S} pointent dans la même direction. Pour satisfaire la condition de continuité des champs à l'interface entre les deux régions, la composante de \vec{k} parallèle à l'interface doit être la même pour les ondes dans les régions 1 et 2. De plus, l'énergie transmise de la région 1 à la région 2 par l'onde incidente doit s'éloigner de l'interface et pénétrer dans la région 2 et non pas provenir de la région 2 et se diriger vers l'interface. Ainsi, dans la région 2, le vecteur \vec{S} doit être orienté de l'interface vers la région 2. Lorsque la région 2 a des paramètres ε_2 et μ_2 positifs, les vecteurs \vec{k} et \vec{S} de l'onde dans la région 2 ont la même direction et l'angle de réfraction est défini comme étant positif. L'indice de réfraction est alors positif. Le cas où les paramètres ε_2 et μ_2 sont négatifs est illustré à la figure 3.2. Dans ce cas, les vecteurs \vec{k} et \vec{S} ont des directions opposées. L'angle de réfraction θ_t que fait le vecteur \vec{S} avec la normale à l'interface est négatif et l'indice de réfraction du milieu est négatif, en accord avec l'Éq. (3.4).

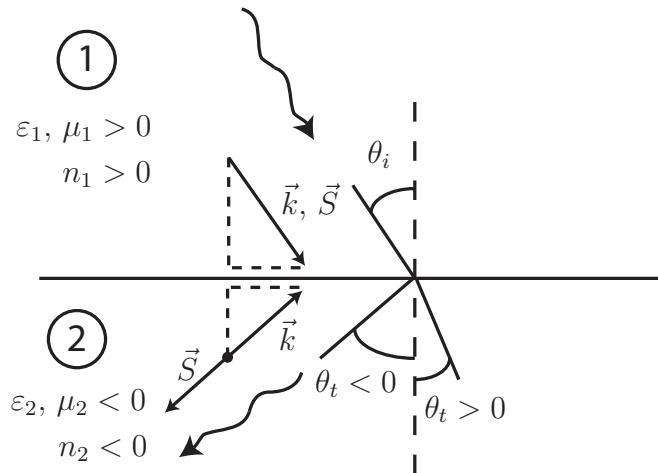


Figure 3.2 Une onde dans une région 1 aux paramètres positifs qui est incidente sur une région 2 aux paramètres négatifs est réfractée avec un angle de réfraction θ_t négatif. L'indice de réfraction de la région 2 est alors négatif. Ceci est dû au fait que la composante tangentielle à l'interface du vecteur de propagation \vec{k} doit être continue et que le vecteur de Poynting \vec{S} dans la région 2 doit s'éloigner de l'interface.

Jusqu'à maintenant, on a considéré un matériau parfaitement homogène ayant une per-

méabilité et une permittivité négatives. Puisque la structure discutée dans ce chapitre est une structure périodique qui, comme on le verra, est un réseau de Bloch, il est préférable d'analyser la structure en termes des paramètres de Bloch n et Z_B plutôt qu'en termes des paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} . Dans ce cas, pour montrer qu'une onde plane $e^{-j\vec{q}\cdot\vec{r}}$ (l'harmonique de Floquet fondamentale) se propageant dans la structure est caractérisée par un vecteur de propagation \vec{q} pointant dans une direction opposée à la direction du transport de l'énergie, il faut utiliser le concept de vitesse de groupe, qui est définie par

$$\vec{v}_g = \left(\frac{\partial q_x}{\partial \omega} \right)^{-1} \hat{x} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial \omega} \right)^{-1} \hat{y} + \left(\frac{\partial q_z}{\partial \omega} \right)^{-1} \hat{z}. \quad (3.5)$$

Le vecteur vitesse de groupe \vec{v}_g pointe dans la direction du transport de l'énergie [2, 20]. Considérons par exemple une onde se propageant dans la direction x pour laquelle $\vec{q} = q_x \hat{x}$. Dans ce cas, la vitesse de groupe est $\vec{v}_g = (\partial q_x / \partial \omega)^{-1} \hat{x}$ et on voit que si la dérivée $(\partial q_x / \partial \omega)$ a un signe opposé au signe de q_x , alors \vec{q} et \vec{v}_g pointent dans des directions opposées. Faisons maintenant le lien entre cette condition et le paramètre de Bloch n (l'indice de réfraction). Puisque pour une propagation selon x on a

$$q_x = \frac{\omega n(\omega)}{c} \quad (3.6)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et où $n(\omega)$ est une fonction de la fréquence ω , on peut écrire

$$\frac{\partial q_x}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left[n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right] \equiv \frac{1}{c} \psi(\omega). \quad (3.7)$$

Puisque c est évidemment positive, on voit que si le signe de la quantité

$$\psi(\omega) = \left[n(\omega) + \omega \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right] \quad (3.8)$$

est opposé au signe de q_x et donc de n selon l'Éq. (3.6), alors l'onde se propageant dans la structure périodique est une "backward wave". Cette condition sera utilisée plus tard pour montrer l'existence d'une "backward wave" à partir des paramètres de Bloch extraits par la méthode numérique pour la structure de Dewar.

3.2 Structure et modèle théorique de Dewar

En 2002, Dewar a proposé une structure se comportant comme un matériau main-gauche dans une certaine bande de fréquence. Dans une série d'articles publiés de 2002 à 2005 [43, 47, 48, 15], il fait l'analyse de cette structure et lui attribue des paramètres effectifs ε_{eff}

et μ_{eff} . La structure proposée par Dewar est montrée à la figure 3.3. Il s'agit d'une structure périodique de fils métalliques entourés par une gaine diélectrique et plongés dans un milieu hôte constitué d'une ferrite homogène soumise à champ magnétique DC orienté le long des fils. La période de la structure est a , le rayon des fils métalliques est r_1 et le rayon de la gaine est r_2 .

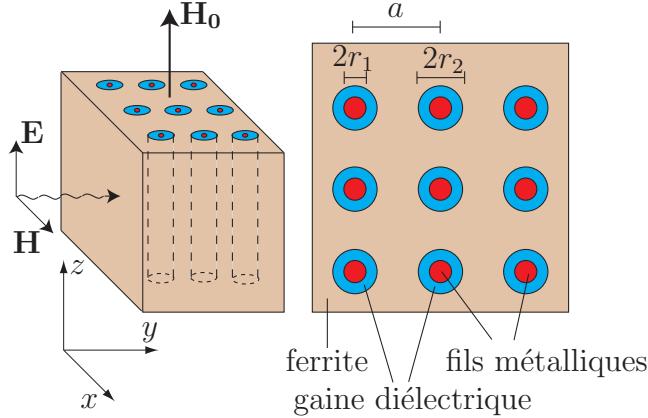


Figure 3.3 Structure périodique aux paramètres négatifs proposée par Dewar. La structure est constituée de fils métalliques entourés d'une gaine d'un matériau diélectrique plongés dans une ferrite magnétisée par un champ magnétique DC H_0 . La période de la structure de fils est a tandis que la gaine diélectrique et les fils métalliques ont un rayon r_1 et r_2 respectivement.

La présence de la gaine diélectrique autour des fils métalliques est nécessaire à l'existence d'une bande de fréquences pour laquelle les paramètres effectifs ε_{eff} et μ_{eff} sont négatifs. Comme il est montré dans [49], lorsque les fils métalliques de la structure sont en contact direct avec la ferrite caractérisée par une perméabilité négative, il n'existe pas de mode de propagation et il n'est pas possible de définir une permittivité effective négative. Cependant, en insérant un matériau diélectrique autour des fils, la réponse électrique des fils est en quelque sorte découpée de la réponse magnétique de la ferrite et la permittivité effective de la structure de fils peut à nouveau être négative [43].

Dans son modèle théorique, Dewar débute en assignant à la structure périodique une perméabilité effective qui correspond à la perméabilité effective de la ferrite diluée par la présence des fils qui peuvent être vus comme des trous dans la ferrite. La perméabilité effective est donnée par

$$\mu_{eff} = \left(1 - \frac{\pi r_2^2}{a^2}\right) \mu_f \quad (3.9)$$

où μ_f est la perméabilité effective dans la ferrite magnétisée et qui sera décrite à la section 3.2.1. Ainsi, la perméabilité effective correspond à la perméabilité de la ferrite multipliée par la proportion du volume de la structure occupée par la ferrite. Connaissant cette per-

méabilité, Dewar procède alors à une analyse similaire à celle de Tretyakov présentée à la section 2.1.2. Il écrit le champ électrique total pour un fil de référence comme étant la somme des champs dispersés (“scattered”) par les autres fils et le champ dispersé par le fil de référence. Contrairement à Tretyakov, Dewar ne suppose pas des fils métalliques avec une conductivité infinie. Ainsi il considère qu’un champ non-nul pénètre à l’intérieur du fil de référence et il impose la continuité des champs électriques et magnétiques tangentiels à la surface du fil. Cette analyse permet d’obtenir une relation de dispersion pour une onde plane se propageant dans la structure qui tient compte de la perméabilité négative du milieu hôte [15]. À partir de cette équation de dispersion, en faisant la moyenne du champ électrique à l’intérieur d’une cellule unitaire, il obtient l’expression suivante pour la permittivité effective de la structure [47]

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_f \left[1 - \frac{\sigma_{eff}}{\omega \varepsilon_f \left\{ j + \frac{\omega a^2 \sigma_{eff}}{2\pi} \left[\mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \mu_f \left(\ln \frac{a}{r_2} - \frac{3+\ln 2-\pi/2}{2} \right) \right] \right\}} \right] \quad (3.10)$$

où ε_f est la permittivité de la ferrite (considérée fixe et indépendante de la fréquence sur toute la gamme des fréquences micro-ondes) et σ_{eff} est donnée par

$$\sigma_{eff} = \sigma \frac{\pi r_1^2}{a^2} \quad (3.11)$$

et correspond à la conductivité moyenne de la structure due aux fils métalliques de conductivité σ qui occupent une proportion $\pi r_1^2/a^2$ du volume de la structure.

3.2.1 Perméabilité effective d’une ferrite magnétisée

Le but de cette section est de donner quelques informations générales sur les ferrites et d’expliquer comment on peut définir une perméabilité μ_f pour ce type de milieu. Une ferrite est un matériau ferrimagnétique qui possède des moments magnétiques pouvant être alignés par un champ magnétique externe. Les ferrites sont des céramiques et ont par conséquent une très faible conductivité. Ceci permet la propagation d’ondes électromagnétiques à l’intérieur de la ferrite sans trop d’atténuation et est une propriété essentielle à l’utilisation des ferrites dans les dispositifs micro-ondes.

Supposons qu’une ferrite est soumise à un champ magnétique externe H_0 orienté dans la direction z , comme montré à la figure 3.3. Lorsque l’intensité de ce champ est suffisamment élevée, tous les moments magnétiques de la ferrite sont alignés selon z et la magnétisation du matériau \vec{M} , correspondant à la quantité de dipôles magnétiques par unité de volume, atteint un maximum $\vec{M} = M_s \hat{z}$ appelée magnétisation de saturation. Lorsque la magnétisation est

inférieure à M_s , les pertes dans la ferrite sont très élevées et donc en pratique la ferrite est toujours utilisée avec une magnétisation saturée.

Considérons une onde se propageant dans la ferrite magnétisée jusqu'à saturation par le champ DC H_0 , cette onde étant caractérisée par les champs \vec{E} et \vec{H} . Si le champ \vec{H} a des composantes en x ou y , alors la magnétisation \vec{M} de la ferrite sera perturbée et aura des composantes en x et y . La perméabilité de la ferrite, définie par la relation entre la densité de flux magnétique \vec{B} , la magnétisation \vec{M} et le champ magnétique \vec{H}

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H}) \equiv [\mu]\vec{H} \quad (3.12)$$

est un tenseur de second ordre et est donné par [50]

$$[\mu] = \begin{pmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

où

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (3.14)$$

et

$$\kappa = \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.15)$$

et où $\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0$ et $\omega_m = \mu_0 \gamma M_s$, γ étant une constante appelée rapport gyromagnétique.

Dans le cas qui nous intéresse, l'onde se propageant dans la ferrite est TM z (le champ \vec{H} n'a donc pas de composante en z) avec aucune variation selon z et le champ électrique \vec{E} a uniquement une composante E_z , comme montré à la figure 3.3. En suivant le développement dans [50] et en supposant une dépendance spatiale de l'onde de la forme $e^{-j\beta y}$, correspondant à une propagation dans la direction y , on écrit les équations de Maxwell. Pour chacune des composantes de l'équation $\nabla \times \vec{E} = -j\omega[\mu]\vec{H}$, on obtient

$$\hat{x} : -j\beta E_z = -j\omega(\mu H_x + j\kappa H_y) \quad (3.16)$$

$$\hat{y} : 0 = -j\kappa H_x + \mu H_y \quad (3.17)$$

$$\hat{z} : 0 = 0. \quad (3.18)$$

Pour l'équation $\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_f \vec{E}$, on obtient

$$\hat{x} : 0 = 0 \quad (3.19)$$

$$\hat{y} : 0 = 0 \quad (3.20)$$

$$\hat{z} : j\beta H_x = j\omega\varepsilon_f E_z. \quad (3.21)$$

De l'Éq. (3.21), on a

$$H_x = \frac{\omega\varepsilon_f}{\beta} E_z. \quad (3.22)$$

En combinant les Éqs. (3.22) et (3.17), on obtient

$$H_y = \frac{j\omega\varepsilon_f\kappa}{\beta\mu} E_z. \quad (3.23)$$

En insérant les Éqs. (3.22) et (3.23) dans l'Éq. (3.16), on obtient la relation

$$-j\beta E_z = -j\omega \left(\frac{\mu\omega\varepsilon_f}{\beta} - \frac{\kappa^2\omega\varepsilon_f}{\mu\beta} \right) E_z. \quad (3.24)$$

La constante de propagation est donc donnée par

$$\beta = \omega \sqrt{\left(\frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} \right) \varepsilon_f} \equiv \omega \sqrt{\mu_f \varepsilon_f} \quad (3.25)$$

où

$$\mu_f = \left(\frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} \right) \quad (3.26)$$

correspond à la perméabilité associée à l'onde TM_z se propageant dans la ferrite. Si on tient compte des pertes dans la ferrite, l'Éq. (3.26) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\mu_f}{\mu_0} = \frac{(\tilde{H}_0 + M_s)^2 - \left(\frac{\omega}{\mu_0\gamma} \right)^2}{\tilde{H}_0(\tilde{H}_0 + M_s) - \left(\frac{\omega}{\mu_0\gamma} \right)^2} \quad (3.27)$$

où on considère une valeur complexe du champ magnétique DC \tilde{H}_0 dont la partie imaginaire tient compte des pertes et qui est donné par

$$\tilde{H}_0 = H_0 - j \left(\frac{\omega}{\mu_0\gamma} \right) \left(\frac{\xi}{\mu_0\gamma M_s} \right), \quad (3.28)$$

ξ étant la quantité proportionnelle aux pertes. Pour une ferrite, les pertes sont exprimées

par une quantité appelée la largeur de ligne (“linewidth”) ΔH exprimée en unités du champ magnétique (A/m ou Oe). La largeur de ligne ΔH dépend de la fréquence d’opération ω et est reliée à ξ par l’expression

$$\Delta H = \frac{-2\omega\xi}{\mu_0^2\gamma^2 M_s}. \quad (3.29)$$

En pratique et par convention, la largeur de ligne ΔH est spécifiée à la fréquence 9.4 GHz.

En observant les Éqs. (3.22) et (3.23), on voit que le champ magnétique \vec{H} a une polarisation elliptique dans le plan xy et a donc une composante dans la direction de propagation y . Les ondes se propageant dans la ferrite ne sont donc pas des ondes TEM même si le champ E_z se propage comme le champ électrique d’une onde plane avec la constante de propagation donnée par l’Éq. (3.25). La polarisation du champ magnétique n’a pas une grande importance dans l’analyse de dispersion de Dewar puisque celle-ci est basée sur l’analyse du champ E_z dans la structure périodique. En fait, dans son analyse Dewar considère que l’interaction entre les fils se fait par des ondes planes avec la constante de propagation donnée par l’Éq. (3.25).

3.3 Extraction de paramètres

Afin de valider le modèle théorique de Dewar, on utilise la méthode d’extraction numérique décrite au chapitre précédent pour extraire les paramètres de Bloch de la structure proposée par Dewar. Tous les résultats présentés dans cette section ainsi que dans la section suivante sont obtenus avec une structure telle que celle montrée à la figure 3.3 ayant les paramètres $r_1 = 0.127$ mm, $r_2 = 0.545$ mm et $a = 2.7$ mm. Les propriétés de la ferrite sont $4\pi M_s = 1600$ G, $\epsilon_f = 14.6$ et une largeur de ligne $\Delta H = 10$ Oe à 9.4 GHz. La ferrite utilisée pour l’expérience est une ferrite de calcium dopée avec du vanadium avec les propriétés ci-dessus spécifiées par le manufacturier.

Pour un champ magnétique DC $H_0 = 1500$ G, la perméabilité et la permittivité effective obtenues par le modèle de Dewar, données par les Éqs. (3.9) et (3.10) respectivement, ainsi que l’indice de réfraction $n = \sqrt{\mu_{eff}\epsilon_{eff}}$ sont montrés à la figure 3.4. On distingue 6 bandes de fréquences dénotées par les lettres A à F. La région D est la région où les paramètres ϵ_{eff} et μ_{eff} sont tous deux négatifs et où il y a propagation de “backward waves”. La région F est une bande de fréquences où les paramètres sont positifs. Les régions A, C et E sont des bandes où il n’y a pas de propagation puisque l’un des paramètres est négatif alors que l’autre est positif. La région B est caractérisée par des paramètres positifs et supporte un mode de propagation. Cependant, elle est très étroite et donc difficile à caractériser expérimentalement. Pour cette raison, elle ne sera pas considérée dans ce qui suit.

Il a déjà été mentionné que la structure de Dewar est un réseau de Bloch. Tel que défini au chapitre 2, un réseau de Bloch est caractérisé par le fait que l’interaction entre les cellules

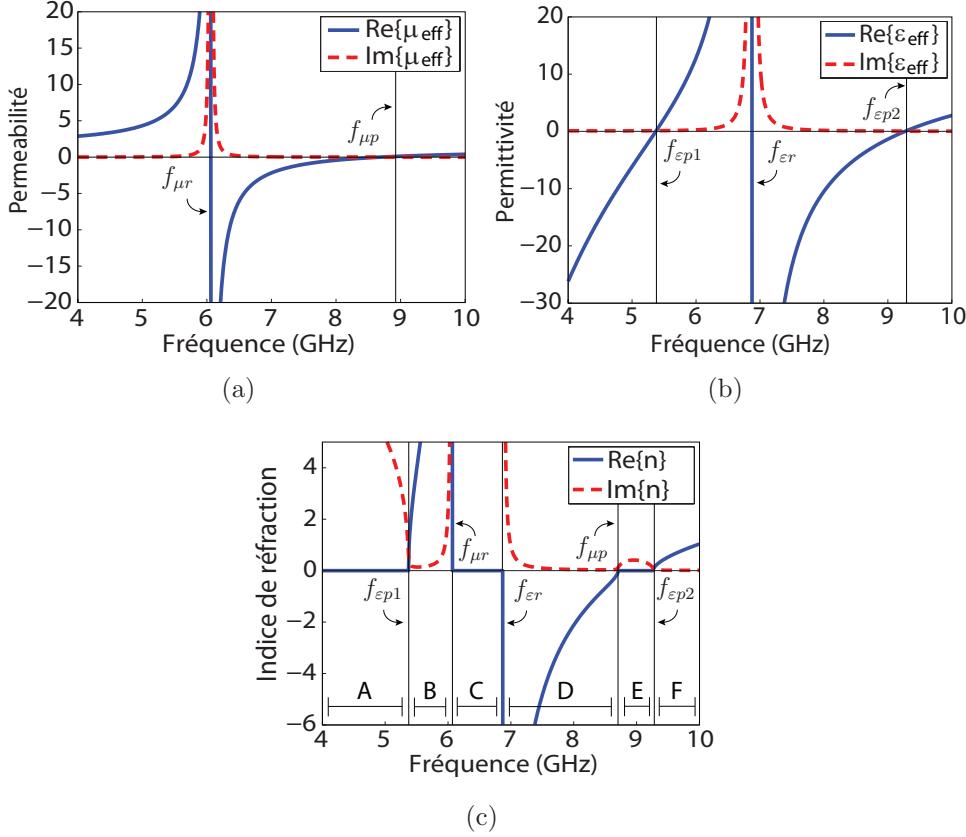


Figure 3.4 Paramètres effectifs obtenus du modèle théorique de Dewar et donnés par les Éqs. (3.9) et (3.10). (a) Partie réelle et imaginaire de μ_{eff} avec la fréquence de résonance magnétique $f_{\mu r}$ et la fréquence de plasma magnétique $f_{\mu p}$. (b) Partie réelle et imaginaire de ϵ_{eff} avec la fréquence de résonance électrique $f_{\epsilon r}$ et les deux fréquences de plasma électrique $f_{\epsilon p1}$ and $f_{\epsilon p2}$. (c) Partie réelle et imaginaire de l'indice de réfraction $n = \sqrt{\mu_{\text{eff}}\epsilon_{\text{eff}}}$. La bande de fréquences est divisée en 6 régions avec des propriétés de propagation distinctes et qui sont dénotées par les lettres A à F.

unitaires ne modifie pas les propriétés de transmission et de réflexion d'une cellule unitaire. Pour montrer que la structure est bien un réseau de Bloch, les paramètres de Bloch n et $\eta = Z_B$ donnés par les Éqs. (2.64) et (2.63) sont calculés à partir des paramètres S obtenus numériquement pour une, deux et dix cellules unitaires. Les résultats pour les fréquences de 7.5 à 8 GHz, qui font partie de la région D où les paramètres sont négatifs, sont montrés à la figure 3.5. On voit que peu importe le nombre de cellules unitaires utilisées dans la solution numérique, les paramètres de Bloch sont presque identiques.

Afin de valider les paramètres théoriques de la figure 3.4, la méthode d'extraction numérique est utilisée pour caractériser les bandes D, E et F, qui constituent les bandes de fréquence d'intérêt puisque D et F sont les régions où il y a propagation. La figure 3.6 fait

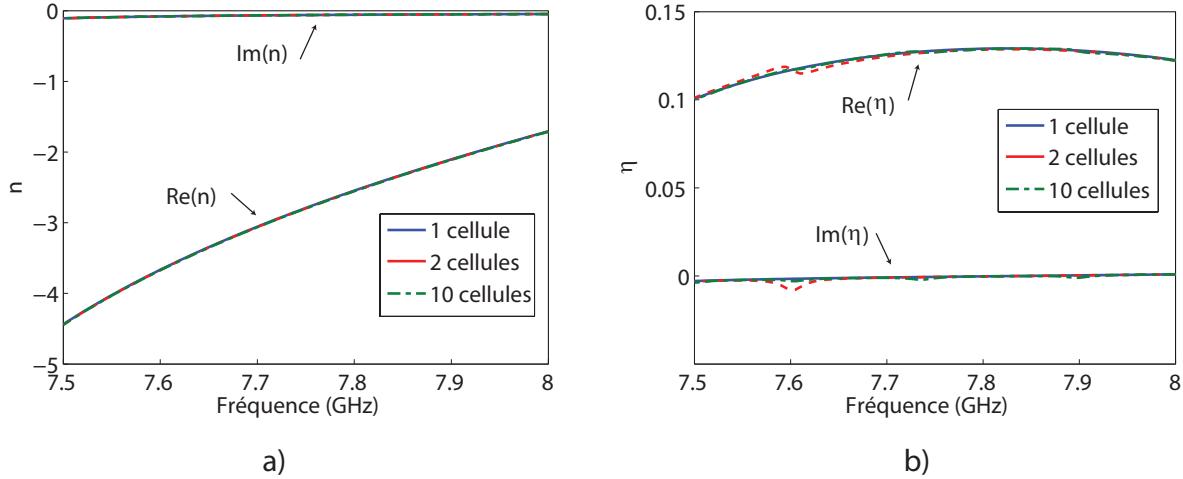


Figure 3.5 Paramètres de Bloch n et $\eta = Z_B$ obtenus numériquement pour la structure de Dewar à partir d'une rangée de cellules unitaires telle que celle de la figure 2.5 avec une, deux et dix cellules unitaires. a) Partie réelle et imaginaire de l'indice de réfraction n . b) Partie réelle et imaginaire de l'impédance de Bloch $\eta = Z_B$.

la comparaison entre les paramètres extraits numériquement et les paramètres obtenus du modèle théorique. Comme discuté au chapitre 2, la méthode d'extraction numérique permet d'obtenir les paramètres de Bloch n et $\eta = Z_B$ de la structure. Les valeurs extraites de la perméabilité et de la permittivité montrées aux figures 3.6(a) et 3.6(b) sont obtenues à partir des paramètres de Bloch par les équations $\mu_{eff} = nZ_B$ et $\varepsilon_{eff} = n/Z_B$. Comme discuté au chapitre 2, les paramètres μ_{eff} et ε_{eff} obtenus numériquement n'ont pas de sens physique particulier et ne correspondent pas aux paramètres μ_{eff} et ε_{eff} obtenus du modèle théorique de Dewar. En effet, on voit dans les figures 3.6(a) et 3.6(b) qu'il y a un écart entre les valeurs numériques des paramètres théoriques et extraits numériquement, qui correspondent à des quantités physiques différentes. En fait, puisqu'on s'attend à ce que la constante de propagation (et donc le paramètre de Bloch n) obtenue théoriquement soit la même que la constante de propagation extraite numériquement, cet écart correspond au fait que l'impédance de Bloch Z_B ne correspond pas à l'impédance caractéristique $\sqrt{\mu_{eff}/\varepsilon_{eff}}$ calculée à partir des paramètres effectifs μ_{eff} et ε_{eff} théoriques. La figure 3.6(c) montre la comparaison entre l'indice de réfraction ou paramètre de Bloch n obtenu du modèle théorique et obtenu de la méthode d'extraction numérique. En principe, les deux devraient être identiques et on voit qu'en s'éloignant de la région E, les deux quantités sont très proches l'une de l'autre. L'écart observé est probablement attribuable aux approximations faites dans le modèle de Dewar afin d'obtenir une solution analytique du problème.

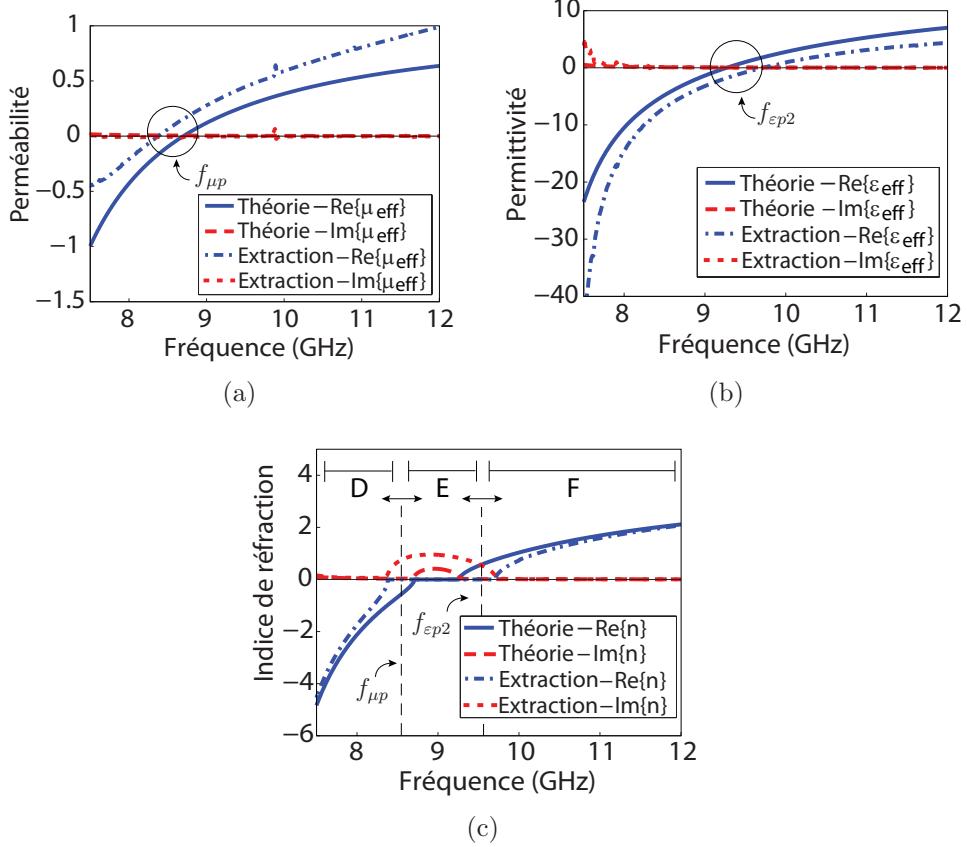


Figure 3.6 Comparaison des paramètres extraits numériquement avec les paramètres théoriques de la figure 3.4. (a) Permeabilité μ_{eff} . (b) Permittivité ϵ_{eff} . (c) Indice de réfraction n .

Puisque la structure de Dewar est une structure de Bloch, on note qu'il est possible d'utiliser le paramètre de Bloch Z_B pour calculer la réflexion à l'interface entre une région 1, composée d'un matériau homogène caractérisé les paramètres μ_1 et ϵ_1 avec l'impédance caractéristique $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$, et une région 2 correspondant à la structure de Dewar. Dans ce cas, le coefficient de réflexion $\Gamma_{1,2}$ est donné par l'Éq. (2.70). Il est alors possible d'utiliser cette équation pour prédire le paramètre S_{11} pour la structure de Dewar excitée par deux guides d'ondes TEM comme montré à la figure 2.5. On utilise pour ce faire l'Éq. (2.57) en tenant compte de la variation de phase dans les guides d'onde TEM avec l'Éq. (2.68). Démontrons ceci par un exemple numérique. Les paramètres de Bloch montrés à la figure 3.5 sont obtenus avec des guides d'onde TEM de longueur $l = 5$ mm remplis d'un matériau avec les paramètres $\epsilon = 18$ et $\mu = 1$. Pour une rangée de la structure périodique comptant dix cellules unitaires, à la fréquence 7.8 GHz, les paramètres de Bloch extraits sont $n = -2.547 - 0.057j$ et $Z_B = 0.129 - 0.0002j$. Avec l'Éq. (2.57), on calcule S_{11} pour la structure de la figure 2.5 avec une

seule cellule unitaire et avec des guides d'ondes TEM de longueur inchangée $l = 5$ mm mais remplis d'un matériau avec les paramètres $\varepsilon = 10$ et $\mu = 2$, qui sont choisis arbitrairement. On obtient alors $S_{11} = -0.2383 + 0.7714j$. La solution numérique de cette structure donne une valeur de $S_{11} = -0.2368 + 0.7715j$, ce qui est très proche de la valeur calculée. Cet exemple démontre l'importance du paramètre de Bloch Z_B qui est le paramètre à considérer pour concevoir l'adaptation de la structure périodique lorsque celle-ci est utilisée dans des dispositifs réels.

À la section 3.1, on a énoncé un critère pour déterminer l'existence d'une bande de fréquences où il y a propagation de “backward waves” et où l'indice de réfraction est négatif. Selon ce critère, le signe de la quantité $\psi(\omega)$ définie par l'Éq. (3.8) doit être opposé au signe de l'indice de réfraction n . La figure 3.7 montre la quantité $\psi(\omega)$ pour la structure de Dewar pour les fréquences de 7.5 à 8 GHz. On voit que $\psi(\omega)$ est positif alors que dans cette bande de fréquences, selon la figure 3.6, n est négatif. On a donc bien des “backward waves” et un indice de réfraction négatif dans cette bande de fréquences. La section suivante présente une expérience démontrant la propriété d'indice de réfraction.

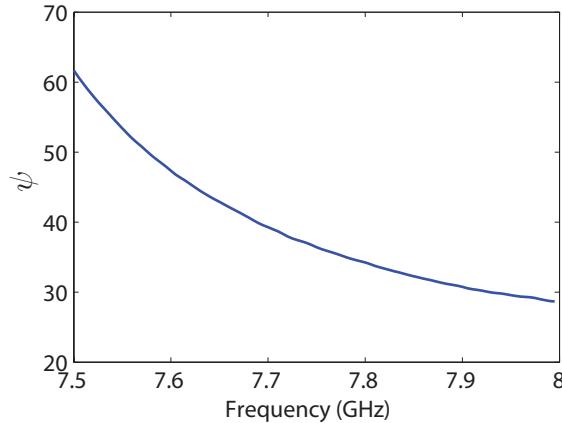


Figure 3.7 Valeur de la quantité $\psi(\omega)$ définie par l'Éq. (3.8). Puisque la quantité $\psi(\omega)$ est positive alors que l'indice de réfraction n est négatif, on a bien des “backward waves”.

3.4 Vérification expérimentale

Dans cette section, on présente une expérience ayant servi à démontrer la propriété d'indice de réfraction négatif pour la structure de la figure 3.3 [51]. Certains travaux ont été réalisés sur cette structure ou une structure similaire. Par exemple, Y. He et al. [52] ont mesuré les paramètres S d'une structure similaire placée dans un guide d'onde rectangulaire et ont utilisé ces données pour extraire les paramètres effectifs de la structure. Zhao et al. [53] ont

extraits des paramètres effectifs à partir des paramètres S obtenus numériquement pour une structure employant des tiges de ferrite au lieu d'une ferrite occupant tout l'espace du milieu hôte. Ils ont aussi montré expérimentalement l'existence d'une bande passante aux fréquences où les paramètres effectifs de la structure sont négatifs. G. He et al. [54] ont eux aussi extrait les paramètres effectifs d'une structure similaire et montré l'existence d'une bande passante où les paramètres sont négatifs. Cependant, aucune de ces études n'a démontré de manière directe la propriété d'indice de réfraction négatif.

La structure proposée par Dewar est fabriquée à partir d'une pièce de ferrite mesurant 2.5×2.5 cm avec une épaisseur de 1 mm. Des trous de rayon $r_2 = 0.545$ mm avec une période $a = 2.7$ mm sont percés dans la ferrite à l'aide d'un laser femtoseconde. L'utilisation d'un laser femtoseconde est nécessaire car un laser avec des pulsations plus longues a pour effet de surchauffer la ferrite et de la détruire. Toujours à l'aide du laser femtoseconde, la pièce de ferrite est découpée pour avoir une forme trapézoïdale tel que montré dans le coin inférieur gauche de la figure 3.8(b). Les trous sont ensuite remplis avec de la colle epoxy. Des trous de rayon $r_1 = 0.127$ mm sont percés dans l'epoxy à l'aide d'un laser puis remplis de cuivre. Cette procédure permet d'obtenir des fils de métal entourés d'une gaine diélectrique tels que montrés à la figure 3.3. Enfin, les surfaces du haut et du bas de la ferrite sont plaquées avec du cuivre afin de former un guide d'onde à plaques parallèles (PPWG, "Parallel Plate Waveguide") qui permet la propagation d'ondes TM_z sans variation selon z (donc n'ayant qu'une composante E_z du champ électrique). Cette métalisation des surfaces du haut et du bas est analogue aux conditions frontières PEC de la structure de la figure 2.5 utilisée pour obtenir les résultats numériques.

La structure périodique ainsi fabriquée est insérée dans le montage de la figure 3.8. Comme montré à la figure 3.8(a), la structure périodique est excitée par une ligne micro-ruban d'impédance 50Ω qui s'élargit progressivement pour former un guide d'onde à plaques parallèles (PPWG) ayant la même largeur que la structure périodique. Cette ligne micro-ruban supporte la propagation d'une onde quasi-TEM qui excite le mode TM_z voulu dans la structure périodique. La ligne micro-ruban est elle-même excitée par un câble coaxial 50Ω à l'aide d'une transition câble coaxial à ligne micro-ruban. À la sortie de la structure périodique, il y a un guide d'onde à plaques parallèles en forme de demi-cercle. À cause de la forme trapézoïdale de la structure périodique, l'onde incidente fait un angle de 26 degrés avec l'interface entre la structure périodique et ce guide semi-circulaire. Cet angle permet la réfraction de l'onde incidente et l'onde réfractée dans le guide d'onde semi-circulaire est captée par 12 ports distribués autour du demi-cercle. Ces ports sont des guides d'ondes à plaques parallèles qui sont rétrécis pour former des lignes micro-ruban qui sont adaptées à des ports coaxiaux 50Ω . Afin de déterminer l'angle de réfraction, les paramètres S_{k0} du port d'entrée 0 vers les

$k = 1, 2, \dots, 12$ ports de sortie sont mesurés à l'aide d'un analyseur de réseau vectoriel. En faisant une moyenne de l'angle associé à chacun des ports pondérée par la puissance incidente sur chaque port (proportionnelle à $|S_{k0}|^2$), il est en effet possible de déterminer l'angle de réfraction.

On note que l'angle de réfraction est un concept défini dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique selon laquelle l'onde se propage en ligne droite dans une seule direction. Dans le cas présent, la longueur de l'interface entre la structure périodique et le guide d'onde semi-circulaire à la fréquence 8 GHz est $d = 2.5\lambda_g$ où $\lambda_g = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_d}$ est la longueur d'onde guidée dans le guide d'onde semi-circulaire dont la permittivité du diélectrique est $\varepsilon_d = 10.2$. Puisque d est de l'ordre de quelques longueurs d'onde guidées λ_g , l'onde sera diffractée et dans ce cas l'approximation de l'optique géométrique est une approximation grossière. Cependant, la longueur d de l'interface est suffisamment grande pour générer une onde réfractée assez directive pour pouvoir mesurer l'angle de réfraction.

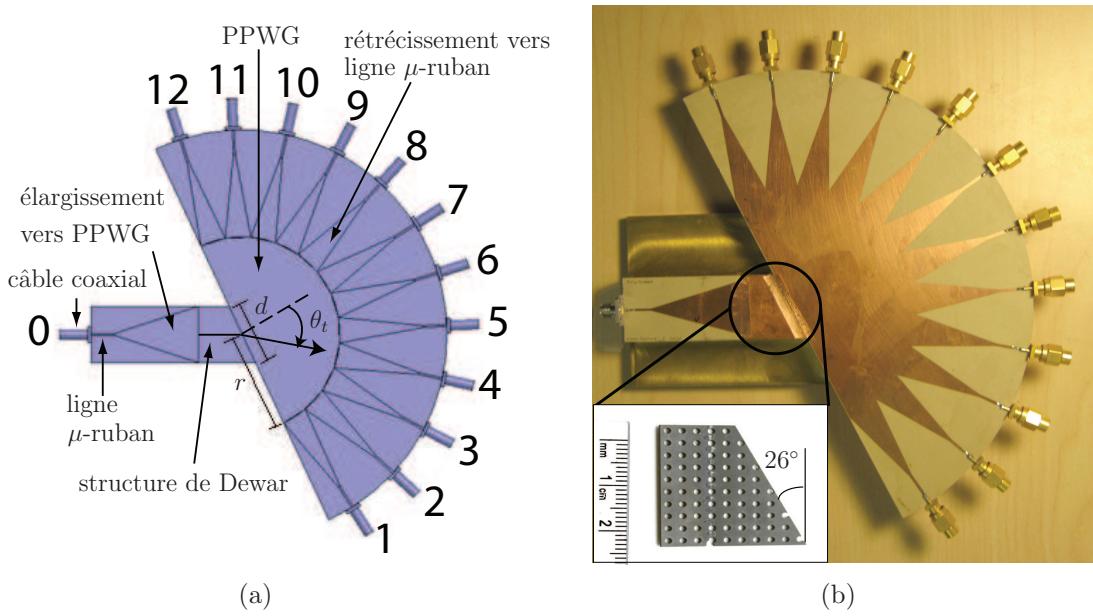


Figure 3.8 Schéma du montage de l'expérience. (a) Schéma montrant le principe de mesure de l'indice de réfraction. L'angle de réfraction θ_t , mesuré à partir de la normale à l'interface, est positif dans la direction indiquée par la flèche et négatif dans la direction opposée. (b) Photographie du montage expérimental final avec dans le coin inférieur gauche une photographie de la ferrite taillée en trapèze après que les trous de rayon r_2 aient été percés.

La figure 3.9 présente les résultats expérimentaux correspondant à la bande de fréquences où l'indice de réfraction est négatif (correspondant à la région D dans les figures 3.4(c) et 3.6(c)). Les données brutes pour les paramètres S_{k0} sont montrées sous la forme d'un dia-

gramme de couleurs à la figure 3.9(a). Ce diagramme montre les paramètres S_{k0} correspondant aux 12 ports de sortie pour différentes fréquences. L'axe horizontal du bas indique l'angle de réfraction θ_t correspondant à chaque port de sortie. Pour calculer l'angle de réfraction de l'onde réfractée pour différentes fréquences, on calcule la moyenne des angles associés aux ports pondérée par la puissance $|S_{k0}|^2$ incidente sur chaque port. La figure 3.9(c) illustre cette opération de moyennage. Chaque graphe correspond à une fréquence différente et les points bleus indiquent la valeur absolue des paramètres S_{k0} pour les différents ports et leur angle correspondant. La moyenne pondérée de l'angle, qui correspond à l'angle de réfraction, est indiqué par une croix rouge. À la figure 3.9(b), l'angle de réfraction ainsi obtenu pour différentes fréquences est comparé à l'indice de réfraction extrait de la méthode numérique pour un champ magnétique DC $H_0 = 1300$ G. Il est important de noter que l'indice de réfraction extrait numériquement est seulement superposé à l'indice de réfraction obtenu expérimentalement afin de comparer leur variation en fonction de la fréquence. En effet, il difficile en pratique de déterminer avec précision le champ magnétique DC H_0 à l'intérieur de la ferrite à cause de l'effet de démagnétisation. Ainsi, les données expérimentales de la figure 3.9(b) ne correspondent pas nécessairement à un champ magnétique DC $H_0 = 1300$ G.

Les paramètres effectifs théoriques μ_{eff} et ε_{eff} donnés par les Éqs. (3.9) et (3.10) dépendent de l'intensité H_0 du champ magnétique DC qui magnétise la ferrite. On s'attend donc à ce que l'indice de réfraction de la structure périodique soit ajustable avec l'intensité du champ H_0 . La figure 3.10 montre l'indice de réfraction en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du champ magnétique DC H_0 dans la bande de fréquences où l'indice de réfraction est négatif. L'indice de réfraction de la figure 3.10(a) est obtenu à l'aide de la méthode d'extraction numérique alors que celui de la figure 3.10(b) est obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés. Pour la solution numérique du problème, l'intensité du champ H_0 à l'intérieur de la ferrite est spécifiée explicitement dans la définition du problème. Ainsi, la figure 3.10(a) spécifie les valeurs absolues de H_0 qui sont incrémentées avec un pas de 8000 A/m. Lorsque l'intensité du champ H_0 est augmentée, la courbe de l'indice de réfraction subit une translation vers les fréquences plus élevées. Comme mentionné plus haut, il est difficile de déterminer avec précision la valeur du champ H_0 à l'intérieur de la ferrite expérimentalement. Il est cependant possible de connaître la variation du champ H_0 interne à partir de la variation du champ externe appliqué à la ferrite. Ainsi, la figure 3.10(b) spécifie la valeur du champ H_0 relativement à une valeur indéterminée H_{0i} . On voit que les variations de l'indice de réfraction en fonction des variations de H_0 montrées aux figures 3.10(a) et 3.10(b) sont similaires.

Ayant caractérisé expérimentalement la région D des figures 3.4(c) et 3.6(c) correspondant à un indice de réfraction négatif, on s'intéresse maintenant à la région F où il y a propagation

avec un indice de réfraction positif. La figure 3.11(a) montre un diagramme de couleurs représentant les paramètres S_{k0} mesurés. Sur ce diagramme, on peut voir l'émergence de la bande de propagation avec un indice de réfraction positif à partir de la fréquence 10 GHz. L'indice de réfraction est obtenu par la procédure de moyennage illustrée à la figure 3.9(c) et est comparé avec l'indice de réfraction obtenu numériquement à la figure 3.11(b). Les intensités du champ magnétique DC H_0 utilisées pour obtenir les résultats des figures 3.9 et 3.11 sont les mêmes. La différence entre les courbes de l'indice de réfraction mesuré et obtenu numériquement de la figure 3.11(b) suggère que la bande E où il n'y a pas de propagation est plus large expérimentalement que ce qui est prévu par la solution numérique du problème.

Avant de terminer cette section, revenons sur l'effet de bord discuté au chapitre 2. L'analyse théorique de Dewar prévoit des paramètres ε_{eff} et μ_{eff} négatifs et donc la propagation de "backward waves". En principe, ceci implique le phénomène d'indice de réfraction négatif. Cependant, comme on l'a vu, ces paramètres théoriques ne sont pas valides sur le bord de la structure. Or, puisque la réfraction est un phénomène qui se produit à l'interface de la structure périodique, les paramètres théoriques ne permettent pas automatiquement de prévoir le phénomène d'indice de réfraction négatif. Dans le cas de la structure de Dewar, les paramètres théoriques sont adéquats uniquement car la structure périodique est un réseau de Bloch. Dans ce cas, on a vu que le paramètre de Bloch correspondant à l'indice de réfraction correspond à l'indice de réfraction obtenu des paramètres théoriques $n = \sqrt{\mu_{eff}\varepsilon_{eff}}$ et que celui-ci n'est pas affecté par l'effet de bord. Puisque le phénomène de réfraction négative dépend uniquement de la constante de propagation dans la structure, on voit que dans le cas présent, les paramètres théoriques et les paramètres de Bloch obtenus numériquement sont équivalents en ce qui concerne la description du phénomène de réfraction négative.

3.5 Applications potentielles

Dans cette section, deux applications potentielles de la structure de Dewar sont présentées. Ces deux applications sont basées sur le fait qu'il est possible de concevoir les paramètres de la structure de Dewar afin d'éliminer la région E qui sépare les bandes de propagation D et F caractérisées par un indice de réfraction négatif et positif respectivement. Dans ce cas, l'indice de réfraction passera des valeurs négatives aux valeurs positives de manière continue, comme c'est le cas pour les structures balancées main-droite/main-gauche [2]. L'onde incidente pourrait alors être réfractée dans une direction entre -90° to 90° en faisant varier la fréquence de l'onde ou en ajustant l'intensité du champ magnétique DC H_0 .

Le concept de la première application est montré à la figure 3.12(a). Il s'agit d'un analyseur de spectre qui fonctionne grâce à la variation de l'indice de réfraction avec la fréquence.

Un analyseur de spectre utilisant le même principe est décrit dans [55]. À cause de cette variation de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence, les différentes composantes fréquentielles d'un signal incident seront séparées spatialement et transmises vers les différents ports de sortie. La seconde application proposée est montrée à la figure 3.12(b). Il s'agit d'un démultiplexeur qui exploite la dépendance de l'indice de réfraction sur l'intensité du champ magnétique DC H_0 . Si le signal d'entrée est un signal à bande étroite centré sur la fréquence f_0 , il est possible de diriger le signal vers l'un des ports de sortie en ajustant la valeur de H_0 , ce qui est facile dans le cas où le champ H_0 est créé par un électroaimant.

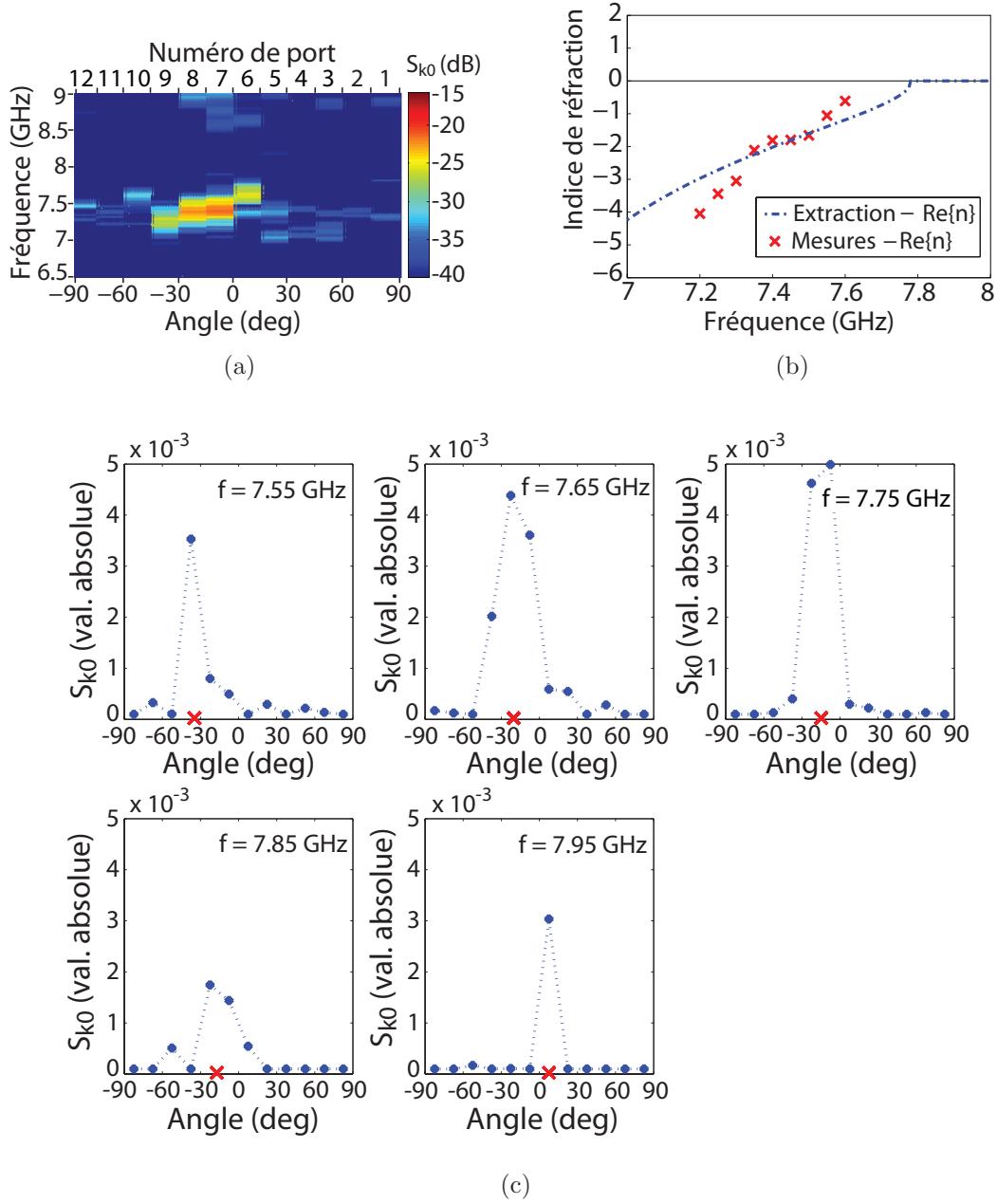


Figure 3.9 Résultats expérimentaux pour la bande de fréquences où l'indice de réfraction est négatif (région D dans les figures 3.4(c) et 3.6(c)). (a) Diagramme de couleur montrant les paramètres S_{k0} mesurés du port d'entrée 0 vers chacun des 12 ports de sortie. Chaque port de sortie correspond à un angle de réfraction différent entre -82.5° et 82.5° avec un pas de 15° . (b) Comparaison entre l'indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés et l'indice de réfraction obtenu à l'aide de la méthode d'extraction numérique. (c) Illustration du processus de moyennage permettant d'obtenir l'indice de réfraction à partir des valeurs mesurées des paramètres S_{k0} .

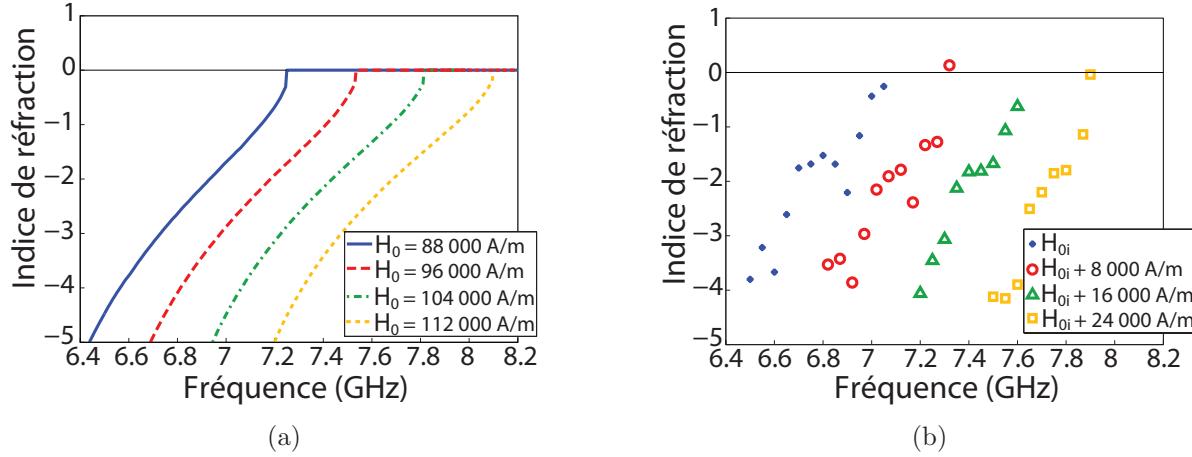


Figure 3.10 Variation de la courbe de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence avec la variation du champ magnétique DC H_0 . (a) Indice de réfraction obtenu avec la méthode d'extraction numérique. (b) Indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés.

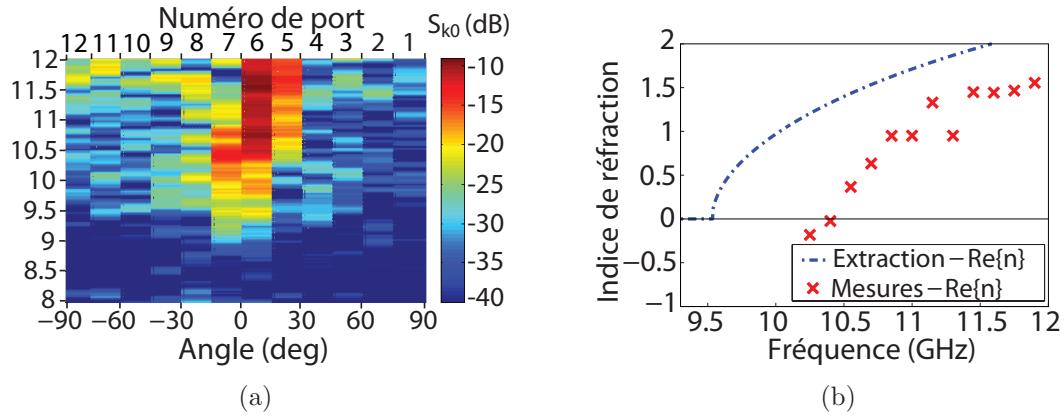


Figure 3.11 Résultats expérimentaux pour la bande de fréquences où l'indice de réfraction est positif (région F dans les figures 3.4(c) et 3.6(c)). (a) Diagramme de couleur montrant les paramètres S_{k0} mesurés du port d'entrée 0 vers chacun des 12 ports de sortie. (b) Comparaison entre l'indice de réfraction obtenu à partir des paramètres S_{k0} mesurés et l'indice de réfraction obtenu à l'aide de la méthode d'extraction numérique.

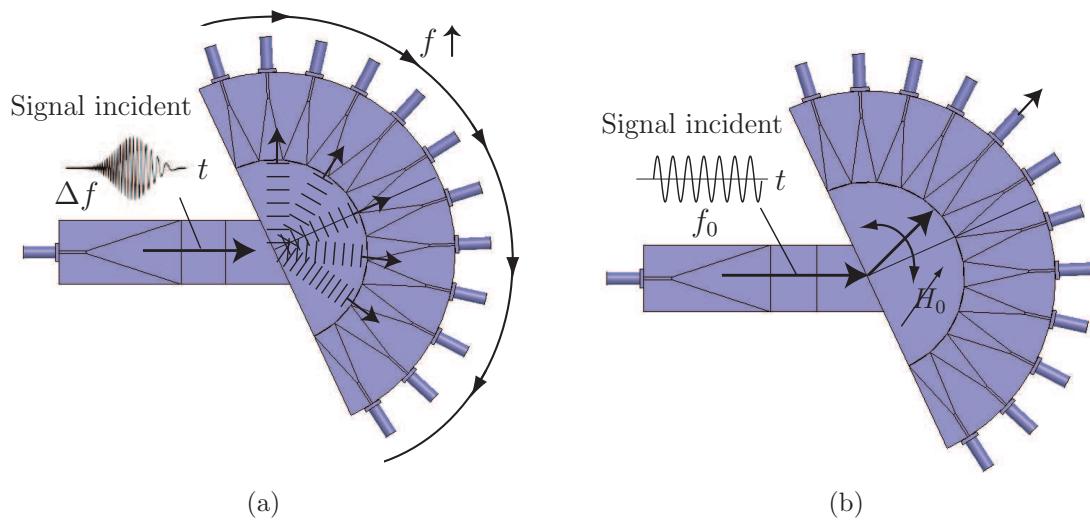


Figure 3.12 Applications potentielles de la structure de Dewar. (a) Analyseur de spectre qui sépare spatialement les différentes composantes fréquentielles du signal d'entrée pour les envoyer vers les différents ports de sortie. (b) Démultiplexeur permettant de diriger le signal d'entrée vers un des ports de sortie en contrôlant l'intensité H_0 du champ magnétique DC.

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Dans le cadre de la présente recherche, deux structures périodiques 2D ont été étudiées dans le contexte des métamatériaux. La première consiste en une structure périodique de fils métalliques plongés dans un milieu hôte diélectrique homogène. Deux modèles théoriques différents ont été présentés pour cette structure, l'un ayant été proposé par Pendry et l'autre par Tretyakov. Selon ces deux modèles, il est possible de définir une permittivité effective qui permet de traiter la structure périodique comme un matériau homogène. Quoique donnant des résultats légèrement différents, ces deux modèles prédisent une permittivité effective négative à basse fréquence qui augmente avec la fréquence pour devenir positive au-dessus de la fréquence de plasma. À la fréquence de plasma, la permittivité est nulle ce qui implique que la longueur d'onde effective est infinie. La deuxième structure étudiée est une structure périodique de fils métalliques entourés d'une gaine diélectrique et plongés dans un milieu hôte constitué d'une ferrite magnétisée. Le modèle théorique développé par Dewar a été présenté et il a été vu qu'on peut associer à la structure une perméabilité et une permittivité effective qui sont toutes deux dispersives et potentiellement négatives. Lorsque ces deux paramètres sont négatifs dans la même bande de fréquence, il y a propagation de "backward waves" caractérisées par le fait que le vecteur de propagation et le vecteur de Poynting pointent dans des directions opposées. On a vu que cette propriété donnait lieu à un indice de réfraction négatif, qui est une propriété impossible à retrouver dans les matériaux conventionnels connus jusqu'à ce jour.

Une partie importante de la présente recherche est l'utilisation d'une méthode numérique pour l'extraction des paramètres effectifs d'une structure périodique. Cette technique, abondamment utilisée dans la littérature, permet d'assigner des paramètres effectifs ϵ_{eff} et μ_{eff} à partir des paramètres S calculés numériquement pour la structure périodique. En comparant ces paramètres avec les paramètres théoriques, il a cependant été vu que les paramètres obtenus numériquement ne correspondent pas aux paramètres théoriques et qu'il faut manipuler le concept de paramètre effectif avec beaucoup de prudence. La difficulté provient du fait que pour les structures étudiées, la période est comparable à la longueur d'onde. Dans ce cas, l'effet de bord dû à la taille finie des structures périodiques utilisées pour la solution numérique devrait en principe invalider la méthode d'extraction numérique. En effet, lorsque la longueur d'onde est comparable à la période, il est inexact de modéliser les cellules unitaires sur les bords de la structure avec les mêmes paramètres effectifs définis pour les cellules

unitaires au centre de la structure. Lorsque la longueur d'onde est beaucoup plus grande que la période, comme c'est le cas pour les matériaux conventionnels aux fréquences micro-ondes, cet effet de bord est négligeable. En fait, il a été vu que pour des structures dont la période est comparable à la longueur d'onde, l'information extraite numériquement n'a du sens que pour une classe particulière de structures appelées réseaux de Bloch. Dans ce cas, l'interaction entre les cellules unitaires n'influence pas les propriétés de réflexion et de transmission d'une cellule unitaire et les paramètres extraits numériquement qu'il faut considérer sont les paramètres de Bloch. Bien qu'il soit tout de même possible dans ce cas de définir mathématiquement des paramètres ε_{eff} et μ_{eff} à partir de la solution numérique, ces paramètres n'ont pas de signification physique. De manière générale, une conclusion importante de la présente recherche est que l'utilisation de paramètres effectifs pour caractériser une structure périodique implique certaines approximations qui ne sont plus nécessairement valides lorsque la période se rapproche de la longueur d'onde. Il faut alors interpréter les paramètres effectifs avec beaucoup de prudence et être bien conscient de leur signification réelle. La définition de paramètres effectifs ainsi que leur interprétation dans le cas des structures dont la période est comparable à la longueur d'onde est un problème complexe qui fait encore aujourd'hui l'objet de plusieurs efforts de recherche.

Malgré cette différence entre les paramètres théoriques et les paramètres obtenus numériquement, il a été vu que pour la catégorie des réseaux de Bloch, dont les deux structures étudiées font partie, il est tout de même possible de faire un lien entre les deux types de paramètres. En effet, l'indice de réfraction (ou de manière équivalente, la constante de propagation) associée aux paramètres ε_{eff} et μ_{eff} théoriques correspond à l'un des paramètres de Bloch. L'autre paramètre de Bloch, l'impédance de Bloch Z_B ne correspond toutefois pas à l'impédance caractéristique $\sqrt{\mu_{eff}/\varepsilon_{eff}}$ théorique. Pour résoudre les problèmes pratiques, il a été vu que les paramètres à considérer sont les paramètres de Bloch et non pas les paramètres théoriques ε_{eff} et μ_{eff} . En effet, la capacité de prédire la réflexion à l'interface avec un réseau de Bloch à partir de l'impédance de Bloch Z_B a été démontrée à l'aide d'exemples numériques. Aussi, la validité du paramètre de Bloch correspondant à l'indice de réfraction et le fait qu'il n'est pas affecté par l'effet de bord a été démontré par l'analyse du résonateur employant la structure de fils métalliques plongés dans un milieu hôte diélectrique.

Une contribution importante de la présente recherche est la validation expérimentale de la propriété d'indice de réfraction négatif pour la structure proposée par Dewar. En effet, il a été montré que la propriété d'indice de réfraction négatif peut être interprétée uniquement en terme de la constante de propagation et donc du paramètre de Bloch correspondant. La structure proposée par Dewar étant un réseau de Bloch, la propriété d'indice de réfraction négatif n'est pas affectée par l'effet de bord et a donc pu être observée expérimentalement.

Le fait que l'analyse de Dewar pour une structure infinie ne permet pas automatiquement de conclure la propriété d'indice de réfraction négatif, qui est un effet d'interface, ajoute à l'importance de cette validation expérimentale.

Deux concepts pouvant mener à des applications de la structure de Dewar ont été présentés. Le premier est le principe de l'analyseur de spectre qui transmet les différentes composantes fréquentielles dans différentes directions. Le second est un démultiplexeur qui tire profit de la dépendance de l'indice de réfraction de la structure de Dewar sur l'intensité H_0 du champ magnétique DC qui permet de diriger le signal d'entrée vers un port de sortie en particulier en ajustant H_0 .

En termes de travaux futurs, plusieurs questions demeurent ouvertes en ce qui concerne les paramètres effectifs attribuables aux structures périodiques 2D. Par exemple, il serait intéressant d'énoncer des critères généraux et faciles à vérifier que doit satisfaire une structure périodique pour être considérée comme un réseau de Bloch. Aussi, dans la présente recherche seul le cas d'une onde avec un angle d'incidence normal à l'interface de la structure périodique a été considérée. Il serait intéressant de déterminer si les paramètres de Bloch demeurent inchangés pour des angles d'incidence obliques. Puisque comme il a été vu, l'impédance de Bloch Z_B est un paramètre important pour résoudre les problèmes de réflexion à l'interface de la structure périodique, il serait important d'être capable d'extraire la valeur de Z_B à partir des modèles théoriques et de comparer cette valeur avec celle obtenue de la méthode numérique d'extraction. Enfin, de manière générale il serait important de trouver d'autres idées d'applications innovatrices qui font usage des structures périodiques 2D et qui pourraient encourager leur développement.

RÉFÉRENCES

- [1] B. A. Munk, *Frequency Selective Surfaces*. Wiley, 2000.
- [2] C. Caloz et T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials, Transmission Line Theory and Microwave Applications*. Wiley & IEEE Press, 2006.
- [3] C. R. Simovski et S. Tretyakov, “Local constitutive parameters of metamaterials from an effective-medium perspective,” *Phys. Rev. B*, vol. 75, p. 195111, 2007.
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [5] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneous negative values of ϵ and μ ,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509–514, 1968.
- [6] W. Rotman, “Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media,” *IRE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-10, no. 1, 1962.
- [7] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, et I. Youngs, “Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, no. 25, pp. 4773–4776, 1996.
- [8] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, et W. J. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, no. 11, pp. 2075–2084, 1999.
- [9] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, et S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187, 2000.
- [10] R. A. Shelby, D. R. Smith, et S. Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction,” *Science*, vol. 292, pp. 77–79, 2001.
- [11] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969, 2000.
- [12] D. O. S. Melville, R. J. Blaikie, et C. R. Wolf, “Submicron imaging with a planar silver lens,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 84, no. 22, pp. 4403–4405, May 2004.
- [13] Q. Cheng, H. F. Ma, et T. J. Cui, “Broadband planar luneburg lens based on complementary metamaterials,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 95, no. 18, p. 181901, 2009.
- [14] M. Lapine, L. Jelinek, M. J. Freire, et R. Marqués, “Realistic metamaterial lenses : limitations imposed by discrete structure,” *Phys. Rev. B : Condens. Matter*, vol. 82, no. 16, p. 165124, 2010.
- [15] G. Dewar, “Minimization of losses in a structure having a negative index of refraction,” *New J. Phys.*, vol. 7, no. 161, 2005.

- [16] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 1989.
- [17] S. Tretyakov, *Analytical Modeling in Applied Electromagnetics*. Artech House, 2003.
- [18] N. Ashcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Brooks Cole, 1976.
- [19] M. Zedler et G. V. Eleftheriades, “Spatial harmonics and homogenisation of nri-tl metamaterial structures,” *Proc. 39th European Microwave Conference*, pp. 504–507, 2009.
- [20] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Wiley & IEEE Press, 1991.
- [21] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, 2001.
- [22] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, et W. J. Stewart, “Low frequency plasmons in thin-wire structures,” *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 10, no. 22, pp. 4785–4809, 1998.
- [23] H. Goldstein, C. Poole, et J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.
- [24] I. S. Nefedov et A. J. Viitanen, “Wire media,” in *Theory and Phenomena of Metamaterials - Chapter 15*, F. Capolino, Ed. CRC, 2009.
- [25] P. Markos et C. M. Soukoulis, “Transmission properties and effective electromagnetic parameters of double negative metamaterials,” *Opt. Express*, vol. 11, no. 7, pp. 649–661, 2003.
- [26] D. H. Lee et W. S. Park, “Extraction of effective permittivity and permeability of periodic metamaterial cells,” *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 51, no. 8, pp. 1824–1830, 2009.
- [27] O. Rybin, T. Abbas, M. Raza, et T. Nawaz, “An improved broadband method for the evaluation of effective parameters of slab metamaterials,” *Int. J. Electron. Commun.*, vol. 62, no. 10, 2008.
- [28] D. R. Smith, S. Schultz, P. Markos, et C. M. Soukoulis, “Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients,” *Phys. Rev. B : Condens. Matter*, vol. 65, no. 19, p. 195104, 2002.
- [29] X. Chen, T. M. Grzegorczyk, B. I. Wu, J. Pacheco, et J. A. Kong, “Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials,” *Phys. Rev. E*, vol. 70, 016608, 2004.
- [30] A. M. Nicholson et G. F. Ross, “Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-19, no. 4, p. 377, 1970.
- [31] K. R. Demarest, *Engineering Electromagnetics*. Prentice Hall, 1998.
- [32] N. Sukumar et J. E. Pask, “Classical and enriched finite element formulations for bloch-periodic boundary conditions,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 77, no. 8, pp. 1121–1138, 2009.

- [33] S. O'Brien et J. Pendry, "Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals," *J. Phys. : Condens. Matter*, vol. 14, no. 25, pp. 6383–6394, May 2002.
- [34] G. Dolling, C. Enkrich, M. Wegener, C. M. Soukoulis, et S. Linden, "Low-loss negative-index metamaterial at telecommunication wavelengths," *Opt. Lett.*, vol. 31, no. 12, pp. 1800–1802, 2006.
- [35] K. C. Huang, M. L. Povinelli, et J. D. Joannopoulos, "Negative effective permeability in polaritonic photonic crystals," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 4, pp. 543–545, 2004.
- [36] P. Drude, *The Theory of Optics, 3rd ed.* Dover, London, 1959.
- [37] C. R. Simovski, "Bloch material parameters of magneto-dielectric metamaterials and the concept of bloch lattices," *Metamaterials*, vol. 1, pp. 62–80, 2007.
- [38] ——, "On electromagnetic characterization and homogenization of nanostructured metamaterials," *J. Opt.*, vol. 13, no. 1, p. 013001, 2009.
- [39] ——, "Analytical modelling of double-negative composites," *Metamaterials*, vol. 2, no. 4, pp. 169–185, 2008.
- [40] S. Couture, A. Parsa, et C. Caloz, "Size-independent zeroth order electric plasmonic cavity resonator," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 53, no. 4, pp. 927–932, 2011.
- [41] A. Parsa et R. Paknys, "Interior green's function solution for a thick and finite dielectric slab," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 12, pp. 3504–3514, 2007.
- [42] A. Parsa, R. Paknys, et C. Caloz, "Edge diffraction suppression in rectangular dielectric resonators for quality factor enhancement using artificial plasma," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 5, pp. 1336–1344, May 2009.
- [43] G. Dewar, "The applicability of ferrimagnetic hosts to nanostructured negative index of refraction (left-handed) materials," *Proc. of SPIE*, vol. 4806, pp. 156–166, 2002.
- [44] N. Engheta et R. W. Ziolkowski, *Electromagnetic Metamaterials : Physics and Engineering Explorations.* Wiley & IEEE Press, 2006.
- [45] R. Marqués, F. Martin, et M. Sorolla, *Metamaterials with negative parameters.* Wiley, 2008.
- [46] P. A. Belov, C. R. Simovski, et S. A. Tretyakov, "Backward waves and negative refraction in photonic (electromagnetic) crystals," *J. Commun. Technol. Electron.*, vol. 49, no. 11, pp. 1285–1294, 2004.
- [47] G. Dewar, "Negative phase velocity composites employing magnetic hosts," *Proc. of SPIE*, vol. 5218, pp. 140–144, 2003.
- [48] ——, "Transverse electromagnetic waves in periodic wire arrays," *Proc. of SPIE*, vol. 5508, pp. 158–166, 2004.

- [49] A. L. Pokrovsky et A. L. Efros, “Electrodynamics of metallic photonic crystals and the problem of left-handed materials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, no. 9, p. 093901, 2002.
- [50] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Wiley, 2005.
- [51] S. Couture, J. Gauthier, T. Kodera, et C. Caloz, “Experimental demonstration and potential applications of a tunable nri ferrite-wire metamaterial,” *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 9, pp. 1022–1025, 2010.
- [52] Y. He, P. He, S. D. Yoon, P. Parimi, F. Rachford, V. Harris, et C. Vittoria, “Tunable negative index metamaterial using yttrium iron garnet,” *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 313, pp. 187–191, 2007.
- [53] H. Zhao, J. Zhou, L. Kang, et Q. Zhao, “Tunable two-dimensional left-handed material consisting of ferrite rods and metallic wires,” *Opt. Express*, vol. 17, no. 16, 2009.
- [54] G. He, R. Wu, Y. Poo, et P. Chen, “Magnetically tunable double-negative material composed of ferrite-dielectric and metallic mesh,” *J. Appl. Phys.*, vol. 107, 2010.
- [55] S. Gupta, S. Abielmona, et C. Caloz, “Microwave analog real-time spectrum analyzer (rtsa) based on the spectral-spatial decomposition property of leaky-wave structures,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 57, no. 12, 2009.

ANNEXE A

Continuité du vecteur de propagation

À la section 2.3.3, on a utilisé le fait qu'à l'interface entre deux régions différentes, les composantes tangentielles à l'interface du vecteur de propagation \vec{k} doivent être continues. Ici, une démonstration de cette condition est proposée. Considérons l'interface entre les régions 1 et 2 du résonateur de la figure 2.13. Cette interface étant contenue dans le plan yz , on veut montrer que les composantes k_x et k_y sont continues. On montrera la continuité de k_y , la même démarche pouvant être utilisée pour k_z . En $x = a$, on doit avoir $E_{z1} = E_{z2}$ pour toutes les valeurs de y et de z définissant l'interface entre les régions 1 et 2. Ainsi, de l'Éq. (2.86) on a

$$X_1(a)Y_1(y)Z_1(z)\beta_1 = X_2(a)Y_2(y)Z_2(z)\beta_2 \quad (\text{A.1})$$

où on a défini $\beta_1 = \frac{-j(k_1^2 - k_{z1}^2)}{\omega\mu\epsilon_3}$ et $\beta_2 = \frac{-j(k_2^2 - k_{z2}^2)}{\omega\mu\epsilon_1}$ qui sont des constantes par rapport aux coordonnées de l'espace (x, y, z) . En fixant $z = \alpha$, on peut écrire

$$\frac{Y_1(y)}{Y_2(y)} = \frac{X_2(a)Z_2(\alpha)\beta_2}{X_1(a)Z_1(\alpha)\beta_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad Y_1(y) = \beta Y_2(y) \quad (\text{A.2})$$

où β est une constante par rapport à la coordonnée y . Les termes $Y_1(y)$ et $Y_2(y)$ sont donnés par l'Éq. (2.83) qui peut être écrite sous la forme

$$Y_i(y) = C'_i e^{jk_{y_i} y} + D'_i e^{-jk_{y_i} y} \quad (\text{A.3})$$

où $C'_i = (D_i - jC_i)/2$ et $D'_i = (D_i + jC_i)/2$. Ainsi, l'Éq. (A.2) devient

$$C'_1 e^{jk_{y_1} y} + D'_1 e^{-jk_{y_1} y} = \beta C'_2 e^{jk_{y_2} y} + \beta D'_2 e^{-jk_{y_2} y} \quad (\text{A.4})$$

et est valide pour toute valeur de y sur l'interface considéré, c'est-à-dire pour tout $y \in [0, d]$. On montre que ceci peut être vrai seulement si $k_{y1} = k_{y2}$.

Supposons que l'Éq. (A.4) est satisfaite pour une valeur spécifique de $y \in [0, d]$, que l'on note y_p . Alors considérons $y = y_p + \delta y$ où δy est une variation infinitésimale de la coordonnée y . Alors, l'Éq. (A.4) doit toujours être satisfaite et on peut écrire

$$C'_1 e^{jk_{y_1}(y_p + \delta y)} + D'_1 e^{-jk_{y_1}(y_p + \delta y)} = \beta [C'_2 e^{jk_{y_2}(y_p + \delta y)} + D'_2 e^{-jk_{y_2}(y_p + \delta y)}]. \quad (\text{A.5})$$

En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction

$$f'(y) = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(y + \delta y) - f(y)}{\delta y}, \quad (\text{A.6})$$

chaque terme de l'Éq. (A.5) peut être réécrit en terme de la dérivée d'une fonction. Par exemple, le premier terme peut être écrit comme

$$C'_1 e^{jk_{y1}(y_p + \delta y)} = C1' \left[\frac{d}{dy} (e^{jk_{y1}y}) \Big|_{y=y_p} \delta y + e^{jk_{y1}y_p} \right]. \quad (\text{A.7})$$

En réécrivant chaque terme de l'Éq. (A.5) de cette façon, on s'aperçoit que les termes qui ne comprennent pas de dérivée correspondent exactement à l'Éq. (A.4) avec $y = y_p$ et s'annulent donc mutuellement. En divisant l'équation résultante par le facteur commun δy et en effectuant les dérivées, on obtient

$$C'_1 j k_{y1} e^{jk_{y1}y_p} - D'_1 j k_{y1} e^{-jk_{y1}y_p} = \beta C'_2 j k_{y2} e^{jk_{y2}y_p} - \beta D'_2 j k_{y2} e^{-jk_{y2}y_p}.$$

En divisant par jk_{y1} , on a

$$C'_1 e^{jk_{y1}y_p} - D'_1 e^{-jk_{y1}y_p} = \beta \frac{k_{y2}}{k_{y1}} [C'_2 e^{jk_{y2}y_p} - D'_2 e^{-jk_{y2}y_p}] \quad (\text{A.8})$$

En additionnant l'Éq.(A.8) et l'Éq. (A.4) avec $y = y_p$, on trouve

$$2C'_1 e^{jk_{y1}y_p} = \beta [C'_2 (1 + \frac{k_{y2}}{k_{y1}}) e^{jk_{y2}y_p} + D'_2 (1 - \frac{k_{y2}}{k_{y1}}) e^{-jk_{y2}y_p}] \quad (\text{A.9})$$

Enfin, la division des deux membres de l'Éq.(A.9) par $e^{jk_{y1}y_p}$ donne

$$2C'_1 = \beta [C'_2 (1 + \frac{k_{y2}}{k_{y1}}) e^{j(k_{y2} - k_{y1})y_p} + D'_2 (1 - \frac{k_{y2}}{k_{y1}}) e^{-j(k_{y2} + k_{y1})y_p}] \quad \forall y_p \in [0, d]. \quad (\text{A.10})$$

Dans l'Éq. (A.10), $2C'_1$ est une constante indépendante du choix de y_p tandis que le membre de droite est une fonction de y_p , sauf si $k_{y1} = k_{y2}$. \square