



**Titre:** Amélioration de l'optimisation des designs de fosses par l'approche  
Title: stochastique

**Auteur:** Josiane Caron  
Author:

**Date:** 2011

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Caron, J. (2011). Amélioration de l'optimisation des designs de fosses par  
Citation: l'approche stochastique [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/604/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/604/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Denis Marcotte  
Advisors:

**Programme:** Génie minéral  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

AMÉLIORATION DE L'OPTIMISATION DES DESIGNS DE FOSSES  
PAR L'APPROCHE STOCHASTIQUE

JOSIANE CARON

DÉPARTEMENTS DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MINÉRAL)

MAI 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

AMÉLIORATION DE L'OPTIMISATION DES DESIGNS DE FOSSES  
PAR L'APPROCHE STOCHASTIQUE

Présenté par : CARON Josiane

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SIMON Richard, Ph.D., président

M. MARCOTTE Denis, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GAMACHE Michel, Ph.D., membre

À JF.

Merci.

## REMERCIEMENTS

Ce projet de maîtrise est né alors que j’habitais encore le désert du Pilbara en Australie. Denis Marcotte, qui devint mon directeur, a sans hésitation accepté de me prendre comme étudiante, et m’a sans délai proposé de travailler sur un projet fort intéressant et étroitement lié à mes intérêts professionnels. Je lui suis très reconnaissante et j’estime qu’il est un directeur remarquable qui ne compte pas les heures dédiées à ces étudiants.

De sincères remerciements à Paul Johnson, directeur des opérations minières chez Osisko, pour avoir donné son accord à ce projet de recherche et pour m’avoir donnée accès aux bases de données et aux logiciels d’Osisko. Merci à Donald Gervais, surintendant du département de géologie, et à Elzéar Belzile, directeur de Belzile Solutions Inc., d’avoir pris le temps de parcourir avec moi les bases de données, de m’expliquer les subtilités du logiciel Gemcom et de me présenter leur processus de modélisation géologiques.

Merci beaucoup aux professeurs Charles Audet, Alain Hertz et Roussos Dimitrakopoulos avec qui j’ai suivi des cours pendant ces deux années de maîtrise. Le dévouement pour le dépassement de leurs élèves est digne de mention. Un merci spécial à Charles Audet pour avoir élaboré avec moi la preuve présentée à l’Annexe 2.

À mes collègues et amis Linda Armelle Nzumotcha, Jacques-Étienne Croteau, Véronique Bouzaglou et Martine Rivest, merci d’avoir rendu plus agréable mon retour aux études!

Un gros merci à ma famille qui m’a soutenu tout le long de mes études supérieures : mon père Normand, ma mère Françoise et mes sœurs Valérie, Marylène et Isabelle. Marylène, merci pour la correction de mon mémoire!

Mon dernier mot sera pour Jean-François. Merci de tout cœur de toujours me faire confiance et d’avoir compris qu’il était nécessaire que j’entreprenne cette maîtrise pour arriver à me démarquer dans un milieu de travail à prédominance masculine. Merci pour tout.

## RÉSUMÉ

Le design final d'une fosse à ciel ouvert consiste à déterminer les contours ultimes de la fosse au-delà desquelles la poursuite de l'exploitation du gisement n'est plus souhaitable. L'objectif premier de l'optimisation d'un design de fosse est de définir des contours ultimes qui maximisent le profit net de la fosse. Ce processus se présente comme un problème d'optimisation combinatoire où il importe de trouver une sélection de blocs qui maximise le profit.

L'approche classique d'optimisation de fosse, présentement utilisée en industrie, est généralement basée sur des teneurs de blocs krigées. L'optimisation du design repose sur les valeurs nettes (profits) des blocs du gisement. Ces valeurs nettes dépendent des coûts d'extraction (sautage et halage), des coûts de traitement, de la classification économique des blocs (stérile/minerai) et des revenus engendrés par la teneur en métal des blocs. Les teneurs de blocs sont appliquées à une fonction de profit convexe afin de déterminer leur valeur nette respective. Les valeurs nettes sont ensuite soumises à un algorithme d'optimisation qui permet de trouver la sélection de blocs maximisant le profit. L'ensemble de ces blocs correspond aux contours ultimes de la fosse. Peu importe l'algorithme d'optimisation choisi, les méthodes d'optimisation considèrent que les valeurs nettes des blocs sont connues et dépourvues d'incertitudes et d'erreur. Cette hypothèse est toujours invalide puisqu'il est impossible d'estimer parfaitement les teneurs d'un gisement.

Le risque lié à la géologie est reconnu comme étant le facteur prédominant quant à l'échec éventuel d'un projet minier. Cette incertitude a tout intérêt à être modélisée et intégrée au processus d'optimisation du design de fosse afin d'évaluer le risque sur la valeur nette du projet, les flux de trésorerie attendus ou les quantités de minerai récupérées. Un gain substantiel au niveau de la valeur de la fosse serait obtenu en considérant l'incertitude géologique. Une façon d'envisager ce problème est de recourir à des simulations géostatistiques pour exprimer l'incertitude sur les teneurs.

L'approche proposée dans ce mémoire est une approche stochastique où les simulations géostatistiques sont utilisées afin d'inclure le risque géologique dans le processus d'optimisation. Cette nouvelle approche repose sur l'optimisation des espérances des valeurs nettes des blocs.

Plutôt que d'appliquer la fonction de profit aux valeurs krigées comme dans l'approche classique, cette fonction de profit est appliquée à chacune des simulations géostatistiques séparément et la moyenne est ensuite calculée. L'algorithme d'optimisation utilisé est de type « flux maximal » calculé sur un graphe orienté. Il est démontré dans ce mémoire que la solution optimale stochastique prévoit nécessairement un profit supérieur à la solution classique (sous hypothèse que la moyenne des valeurs simulées des blocs correspond à la valeur krigée). Ce résultat théorique est confirmé par deux études de cas synthétiques.

Une première étude a été réalisée sur un gisement généré aléatoirement, dont les caractéristiques sont entièrement connues et contrôlées, afin de valider la qualité des estimations et des designs obtenus. La fosse stochastique permet un gain réel de 73,81% pour la quantité réelle d'or récupérée par rapport à la fosse classique et un gain réel de 8,66% sur la valeur nette de la fosse. Une seconde étude de cas a été menée sur le gisement aurifère Canadian-Malartic de la Corporation minière Osisko. La fosse stochastique prévoit un gain moyen de 4,04% (453,4 Koz) pour la quantité réelle d'or récupérée par rapport à la fosse classique et un gain moyen de 1,33% (83,01 M US\$ avec un prix de l'or fixé à 825 US\$/oz) sur la valeur nette de la fosse.

Dans chaque cas, la fosse stochastique exploite mieux l'incertitude sur les teneurs et permet d'exploiter davantage le potentiel du gisement et de réduire le risque au maximum. En résumé, la fosse stochastique est plus performante que la fosse classique, en plus d'être plus performante qu'une fosse basée sur une seule simulation.

## ABSTRACT

An open pit design consists in defining the ultimate pit shell beyond which the exploitation is not to be desired. The primary objective of open pit optimization is to find the pit design that maximizes the profit. This process is presented as a combinatorial optimization problem where the objective is to find a selection of blocks that maximizes profit.

The traditional approach, currently used in the industry, relies on kriged block grades from which a profit for each block is calculated based on a convex profit function. The profit function's inputs are the mining costs (drilling, blasting and hauling), the processing costs, the block economical classification (ore/waste) and the recoverable block value. The block profits are then subjected to an optimization algorithm that finds the selection of blocks that maximizes profit. Regardless of the optimization algorithm used, it still considers that the block profits are known and certain. This hypothesis is always invalid because it is impossible to perfectly estimate ore grades. The geological risk related to ore grades is known as a dominant factor in mine valuation and for possible project failure. The open pit optimization approach greatly benefits from the integration of grade uncertainty. One approach to this problem is to use geostatistical simulations to model grade uncertainty.

The approach proposed in this thesis is to use conditional simulations in a stochastic optimization program to include the geological risk. The algorithm optimizes the expected profit of the blocks computed from the conditional simulations. The optimization algorithm used is a "maximum flow" type algorithm calculated on a directed graph. Because of the convexity of the profit function, the pit computed on expected profit differs substantially from the traditional one obtained with kriged grades.

In this thesis, it is shown that the stochastic optimal solution predicts a higher or equal profit than the traditional optimal solution (under the assumption that the average of simulated block grades corresponds to the kriged grade). This theoretical result is confirmed by two synthetic case studies.

A first case study was conducted on a fully controlled synthetic deposit with known characteristics in order to assess the quality of the predicted pit profits. The results show that



stochastic optimization yields 8.66% more profit than the traditional optimization. Moreover, the amount of gold recovered is 73.81% higher with the stochastic pit.

A second case study was conducted on Osisko's Canadian-Malartic gold deposit. The stochastic approach predicts a significant increase in recoverable gold and in pit profit compared to the traditional pit design. Furthermore, the stochastic pit provides an average increase of 4.04% (453.4 K oz) on the real amount of gold recovered and an average increase of 1.33% (US \$ 83.01 million with a gold price fixed at US \$ 825/oz) in real pit profit. In each case, the stochastic approach makes better use of grade uncertainty and allows more profitable operations while minimizing risk.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	IV
RÉSUMÉ .....	V
ABSTRACT.....	VII
TABLE DES MATIÈRES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XIII
LISTE DES FIGURES .....	XIV
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVI
LISTE DES ANNEXES .....	XX
CHAPITRE 1 INTRODUCTION .....	1
1.1 Problématique .....	2
1.2 Objectifs .....	3
1.3 Introduction à l'approche stochastique et son importance.....	3
1.4 Organisation du mémoire.....	5
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE.....	7
2.1 L'approche classique d'optimisation de fosse à ciel ouvert .....	7
2.1.1 Problème de fermeture maximale d'un graphe .....	9
2.1.2 Problème de flux maximal dans un graphe biparti .....	10
2.2 Problématique liée à l'utilisation de l'approche classique d'optimisation de fosse .....	11
2.3 Choix de la fonction-objectif à optimiser .....	11
2.3.1 Maximiser le profit des blocs.....	12
2.3.2 Minimiser la perte des blocs .....	12
2.3.3 Maximiser le rapport profit/perte des blocs .....	12
2.3.4 Comparaison et performance des méthodes .....	12

2.4	Méthodes de simulations géostatistiques utilisées dans le domaine minier .....	13
2.4.1	Méthode de simulation séquentielle gaussienne (SGS) .....	14
2.4.2	Méthode de simulation spectrale (FTT-ma) .....	14
2.4.3	Méthode de simulation des bandes tournantes.....	15
2.5	Utilisation des simulations géostatistiques pour l'optimisation de fosse.....	15
2.5.1	Incertitude sur un design donné .....	16
2.5.2	Performance relative de plusieurs designs .....	16
2.5.3	Programme d'optimisation stochastique.....	18
2.6	Paramétrisation de fosse .....	19
2.7	Synthèse .....	20
CHAPITRE 3	THÉORIE .....	21
3.1	Effet information et effet support .....	21
3.2	Techniques de calcul des teneurs.....	22
3.2.1	Krigeage .....	22
3.2.2	Simulations géostatistiques conditionnelles .....	25
3.3	Problème d'optimisation de fosse.....	30
3.3.1	Modélisation du problème .....	30
3.3.2	Théorie des graphes et réseaux .....	32
3.3.3	Problème de fermeture maximale .....	33
3.3.4	Problème du flux maximal.....	36
CHAPITRE 4	ÉTUDE DE CAS – GISEMENT SIMULÉ .....	41
4.1	Caractéristiques du gisement simulé.....	41
4.1.1	Distribution des teneurs .....	42
4.1.2	Modèle de variogramme .....	43

4.1.3	Géométrie du gisement .....	43
4.2	Échantillonnage du gisement simulé .....	43
4.3	Estimation des teneurs par krigeage ordinaire .....	45
4.3.1	Variogramme utilisé pour le krigeage.....	45
4.3.2	Comparaison des distributions de teneurs réelle et estimée.....	46
4.4	Simulation des teneurs par la méthode des bandes tournantes .....	46
4.4.1	Modèle de covariance utilisé pour les simulations .....	47
4.4.2	Post-conditionnement des simulations.....	47
4.4.3	Comparaison des distributions de teneurs réelle et simulées.....	48
4.5	Optimisation des différents designs de fosse .....	50
4.5.1	Détermination de la valeur nette des blocs .....	50
4.5.2	Application de l'algorithme « push-relabel » .....	50
4.5.3	Paramètres économiques des fosses à l'étude.....	51
4.6	Performance relative des différents designs de fosse .....	55
4.7	Synthèse .....	58
CHAPITRE 5 ÉTUDE DE CAS – PROJET CANADIAN-MALARTIC.....		59
5.1	Description des gisements du projet Canadian-Malartic .....	59
5.1.1	Localisation.....	59
5.1.2	Géologie locale .....	61
5.1.3	Type de gisement et de minéralisation.....	62
5.2	Développements souterrains antérieurs au projet .....	63
5.3	Campagne de forages et échantillonnage des gisements .....	63
5.4	Description des données de forage et du « Block Model ».....	65
5.5	Modélisation des variogrammes .....	68

5.5.1	Ajustement visuel et automatique .....	69
5.5.2	Validation croisée .....	71
5.5.3	Variogrammes retenus .....	74
5.6	Estimation des teneurs par krigeage ordinaire .....	75
5.6.1	Comparaison des échantillons et des teneurs estimées .....	75
5.7	Simulation des teneurs par la méthode des bandes tournantes .....	76
5.7.1	Modèle de covariance utilisé pour les simulations .....	77
5.7.2	Post-conditionnement des simulations.....	78
5.7.3	Comparaison des échantillons et des teneurs simulées.....	78
5.8	Optimisation des différents designs de fosse .....	80
5.8.1	Détermination de la valeur nette des blocs .....	80
5.8.2	Application de l'algorithme « push-relabel » .....	81
5.8.3	Paramètres économiques estimés des fosses à l'étude.....	83
5.8.4	Paramètres économiques réels des fosses à l'étude .....	86
5.9	Synthèse .....	92
CHAPITRE 6 DISCUSSION .....		93
6.1	Biais conditionnel dans l'estimation de la valeur nette d'une fosse .....	93
6.2	Sélection des blocs sur valeurs estimées versus valeurs réelles .....	94
6.3	Incertitude économique versus incertitude géologique.....	94
6.4	Considérations économiques et sociales .....	95
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....		97
BIBLIOGRAPHIE.....		100
ANNEXES .....		105

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Exemple de gain possible avec l'approche stochastique .....	4
Tableau 4.1: Caractéristiques des deux modèles de gisement .....	42
Tableau 4.2: Paramètres des distributions de teneurs réelle et krigée .....	46
Tableau 4.3: Paramètres économiques des fosses optimale, classique et stochastique .....	51
Tableau 4.4: Statistiques UP et DR des designs de fosse à l'étude .....	56
Tableau 5.1: Informations concernant le « Block Model » du projet Canadian-Malartic .....	65
Tableau 5.2: Modèles de variogrammes des différents domaines géologiques du projet Canadian-Malartic .....	69
Tableau 5.3: Statistiques d'écart pour les variogrammes isotropes .....	72
Tableau 5.4: Statistiques d'écart pour les variogrammes de Belzile Solutions Inc. ....	72
Tableau 5.5: Différence d'ajustement entre les variogrammes isotropes et les variogrammes de Belzile Solutions Inc. ....	73
Tableau 5.6: Paramètres des variogrammes du projet Canadian-Malartic .....	74
Tableau 5.7: Paramètres des distributions de teneurs échantillonnées et krigées.....	75
Tableau 5.8: Paramètres des modèles de covariance du projet Canadian-Malartic.....	77
Tableau 5.9: Paramètres des distributions de teneurs échantillonnées et simulées .....	79
Tableau 5.10: Paramètres économiques des fosses classiques et stochastique.....	83
Tableau 5.11: Étendues des valeurs nettes possibles pour les designs à l'étude .....	87
Tableau 5.12: Tendances centrales des valeurs nettes réelles des designs à l'étude .....	88
Tableau 5.13: Étendues des quantités d'or récupérables par les designs à l'étude.....	89
Tableau 5.14: Tendances centrales des quantités réelles d'or récupérées par les designs à l'étude .....	90

## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1: Exemple de fonctions de profit pour les blocs .....	5
Figure 2-1: Fonction de profit des blocs .....	8
Figure 2-2: Statistiques UP et DR sur différents designs de fosse .....	17
Figure 2-3: Modélisation du problème d'optimisation de fosse par l'approche de Meagher .....	19
Figure 3-1: Étapes des transformations gaussiennes et inverses .....	26
Figure 3-2: Représentation de la méthode des bandes tournantes en 2D .....	27
Figure 3-3: Liens de précedence d'un bloc à extraire .....	31
Figure 3-4: Exemple d'un graphe orienté .....	32
Figure 3-5: Exemple de modélisation du problème de fermeture maximale .....	33
Figure 3-6: Exemple simplifié d'un gisement à optimiser.....	35
Figure 3-7: Modélisation du graphe $G$ correspondant au gisement à optimiser .....	35
Figure 3-8: Fermeture maximale du graphe $G$ .....	35
Figure 3-9: Exemple de modélisation du problème du flux maximal .....	37
Figure 3-10: Exemple simplifié d'un gisement à optimiser.....	39
Figure 3-11: Modélisation du graphe $G'$ correspondant au gisement à optimiser.....	39
Figure 3-12: Flux maximal du graphe $G'$ .....	40
Figure 3-13: Coupe minimale du graphe $G'$ .....	40
Figure 4-1: Géométrie du gisement simulé.....	44
Figure 4-2: Moyennes des distributions de teneurs simulées .....	48
Figure 4-3: Variances des distributions de teneurs simulées .....	49
Figure 4-4: Fosse optimale basée sur la distribution de teneurs réelles.....	52
Figure 4-5: Fosse classique basée sur la distribution de teneurs krigées .....	52

Figure 4-6: Fosse stochastique basée sur l'ensemble des distributions de teneurs simulées .....	53
Figure 4-7: Valeurs nettes des fosses basées sur chacune des distributions de teneurs simulées .....	53
Figure 4-8: Box-plot des valeurs possibles des designs à l'étude.....	56
Figure 4-9: Écart entre les valeurs estimées et réelles des designs de fosse à l'étude .....	57
Figure 5-1: Localisation du projet Canadian-Malartic.....	60
Figure 5-2: Géologie locale du projet Canadian-Malartic .....	61
Figure 5-3: Développements souterrains issus d'exploitations minières antérieures .....	63
Figure 5-4: Campagne de forages menée par Osisko pour le projet Canadian-Malartic.....	64
Figure 5-5: Domaines géologiques à haute teneur dans le gisement Canadian-Malartic .....	66
Figure 5-6: Domaines géologiques à faible teneur dans le gisement Canadian-Malartic.....	67
Figure 5-7: Domaines géologiques dans le gisement Barnat.....	68
Figure 5-8: Ajustement visuel d'un modèle de variogramme exponentiel sur les variogrammes expérimentaux du domaine 74 .....	70
Figure 5-9: Moyennes des distributions de teneurs simulées .....	78
Figure 5-10: Variances des distributions de teneurs simulées .....	79
Figure 5-11: Domaines géotechniques du gisement Canadian-Malartic .....	82
Figure 5-12: Fosse classique 1 basée sur les teneurs krigées calculées par Osisko.....	83
Figure 5-13: Fosse classique 2 basée sur les teneurs krigées calculées avec les variogrammes isotropes .....	84
Figure 5-14: Fosse stochastique basée sur les teneurs simulées avec les variogrammes isotropes .....	84
Figure 5-15: Box-plot des valeurs possibles des designs classique et stochastique .....	86
Figure 5-16: Box-plot des quantités d'or récupérables pour les designs .....	89



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$a$	Portée d'un variogramme
$c$	Palier d'un variogramme
$c_0$	Effet de pépite
$C$	Ensemble de $M$ capacités $c_{ij}$ associées aux arcs $u_{ij}$ dans un graphe
$C_{ex}$	Coût d'extraction d'un bloc
$Cov$	Covariance entre deux variables aléatoires
$C(S, T)$	Coupe minimale de $G'$ où un sous-ensemble $S$ de sommets incluant la source $s$ et excluant le puits $t$ et où $T = G' - S$ avec $T \cup S = G'$
$C_{tr}$	Coût de traitement d'un bloc
$C_Y(h)$	Modèle de covariance pour les simulations dans l'espace 1D
$C_Z(h)$	Modèle de covariance pour les simulations dans l'espace 3D
DR	« Downside risk »
$E$	Espérance conditionnelle
$E[z   z^*]$	Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire $z$ par rapport à $z^*$
FTT-ma	Fast Fourier transform - moving average
$g/t$	Gramme par tonne (unité pour la densité d'une roche)
$G$	Graphe orienté représentant l'ensemble des blocs d'un gisement
$G'$	Graphe orienté représentant l'ensemble des blocs d'un gisement
$G\$$	Milliards de dollars
$H$	Distance entre deux points $x_i$ dans l'espace 3D
$I_{x_i}$	Variable d'optimisation représentant le choix d'un bloc pour faire partie de $Y$

K Oz	Milliers d'onces
KT	Millier de tonnes
L	Longueur simulée sur chaque droite (fonction de la taille du gisement à simuler)
$L(\lambda)$	Lagrangien, fonction des poids de krigeage
m	teneur moyenne d'un volume de roche
M\$	Millions de dollars
$\mu$	teneur moyenne d'un volume de roche après transformation normale
p	prix de l'or
$P_{10}$	10 <sup>e</sup> percentile d'une distribution
$P_{25}$	25 <sup>e</sup> percentile d'une distribution ou premier quantile
$P_{50}$	50 <sup>e</sup> percentile d'une distribution ou médiane
$P_{75}$	75 <sup>e</sup> percentile d'une distribution ou troisième quantile
$P_{90}$	90 <sup>e</sup> percentile d'une distribution
ppm	Partie par millions (unité pour la teneur d'un volume de roche)
r	Taux de récupération du métal à l'usine de traitement
RNCan	Ressources naturelles Canada
s	Sommet artificiel appelé source dans un graphe
$\sigma^2$	Variance des teneurs d'un volume de roche
$\sigma_{KS}^2$	Variance d'estimation du krigeage simple
$\sigma_{KO}^2$	Variance d'estimation du krigeage ordinaire
t	Sommet artificiel appelé puits dans un graphe
$u_i$	Vecteur unitaire 3D

$U$	Ensemble de $M$ arcs $u_{ij}$ , reliant les sommets $x_i$ et $x_j$ dans un graphe
UP	« Upside potential »
US\$	Dollar américain
US\$/t	unité du coût par tonne unitaire de roche
$V$	Ensemble de $N$ valeurs $v_i$ associées aux sommets $x_i$
Var	Variance
$V_i$	Valeur nette du bloc $i$
$W$	Ensemble de $M$ poids $w_{ij}$ associés aux arcs $u_{ij}$ dans un graphe
$x_i$	Variable d'optimisation représentant le choix d'un bloc $i$ pour faire partie d'une fosse
$X$	Ensemble de $N$ sommets $x_i$ dans un graphe
$Y$	Fermeture transitive de poids maximale de $G$
$Y_i(t)$	Variable aléatoire à simuler sur la droite $u_i$ au point $t$
$z$	Variable aléatoire représentant la teneur d'un volume de roche
$z^*$	Teneur estimée par krigeage
$z^*(x_0)$	Teneur estimée au point $x_0$ par krigeage avec $z(x_i)$
$z_s^*(x_0)$	Teneur estimée au point $x_0$ par krigeage avec $z_s(x_i)$
$z_c$	Teneur de coupure
$z_{CS}(x_0)$	Teneur simulée au point $x_0$ suite au post-conditionnement avec $z(x_i)$
$Z_G$	Teneur d'un gisement entier
$z_s(x_0)$	Teneur simulée au point $x_0$
$z_s(x_i)$	Teneurs simulées aux points $x_i$
$Z_v$	Teneur de bloc

$\beta^2$	Variance des teneurs d'un volume de roche après transformation normale
$\Phi$	Flux circulant dans un graphe
$\Gamma_i$	Ensemble des blocs successeurs du bloc i
$\Gamma(x)$	Ensemble des successeurs de x dans un graphe
$\Gamma^{-1}(x)$	Ensemble des prédécesseurs de x dans un graphe
$\hat{\Gamma}(s)$	Fermeture transitive du sommet s dans un graphe
$\gamma(x)$	Variogramme
$\lambda_i$	Poids de krigeage au point $x_i$

## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe 1</b> – Comparaison des méthodes du profit maximal et de la perte minimale pour la classification économique des blocs .....	105
<b>Annexe 2</b> – Comparaison des approches classique et stochastique d'optimisation .....	108
<b>Annexe 3</b> – Comparaison de l'approche stochastique et l'approche de Meagher.....	111
<b>Annexe 4</b> – Comparaison de la performance de deux fosses stochastiques.....	113
<b>Annexe 5</b> – Biais conditionnel et approches classique et stochastique .....	116

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Selon l'Association Minière du Canada, « L'industrie minière canadienne est un moteur important de la prospérité du Canada [...] » et compte quelques 306 000 travailleurs dans les secteurs de l'exploration et de l'exploitation minière, de la transformation des métaux et de la mise en marché des produits minéraux. L'industrie minière joue un rôle prédominant dans la valorisation de nombreuses régions éloignées et participe à la prospérité économique des métropoles canadiennes en accueillant les sièges sociaux d'influentes corporations minières multinationales. Plus de 3200 compagnies supportent cette industrie par le biais de services d'ingénierie et de l'approvisionnement en équipement de forage (Fédération de l'industrie minérale canadienne 2010). « En 2008, la valeur de la production canadienne de minéraux s'est établie à 45,3 G\$ et a ainsi dépassé de 11,7% la valeur de 40,5 G\$ signalée pour 2007. » (RNCan, Production de minéraux 2009) La production totale de métaux au Canada s'éleva à 21 G\$ en 2008, dont 3,57 G\$ (17,0%) étaient attribuable à la province de Québec.

En définitive, la décennie qui précéda la récession économique et financière mondiale de 2008-2009 a été très favorable pour le domaine minier au Canada. En revanche, au plus fort de la crise, alors que les marchés des minéraux et des métaux ont chuté, la production minérale a largement ralenti au Canada. En 2009, la valeur totale des minéraux produits au Canada a diminué de 31,5% pour s'établir à 32,2 G\$ par rapport à 47 G\$ en 2008, tandis que la production de métaux s'est affaïssée à 16,2 G\$, soit une baisse de 28,5 % (RNCan, Production de minéraux 2010).

À la lumière des statistiques énoncées ci-haut, la mise en valeur des sociétés minières s'avère très vulnérable à l'instabilité financière que provoquent les récessions économiques mondiales. Quelles sont les stratégies susceptibles de venir en aide aux sociétés minières afin de résister aux fluctuations du marché? Une des méthodes les plus prometteuses qui viendrait en aide aux sociétés minières est d'entreprendre la modélisation de l'incertitude et du risque géologique relatifs à leur gisement. (Dimitrakopoulos et al. 2002; Henry et al. 2005).

## 1.1 Problématique

Les méthodes modernes d'évaluation économique de projets permettent de montrer que le fait de tenir compte de l'incertitude et du risque géologique a pour effet d'améliorer la valeur économique du projet. Notamment, l'approche « real option » permet d'intégrer et de gérer le risque, ce qui permet de protéger des investissements stratégiques et de mettre en valeur leur plein potentiel (Dimitralopoulos et al. 2002; Henry et al. 2005). Cette approche permet d'évaluer :

- la valeur d'un projet à débiter dans un futur proche, avec des coûts d'exploitation donnés;
- le coût de retarder la production afin d'approfondir la connaissance du gisement et ainsi de réduire l'incertitude géologique;
- la valeur de procéder à l'exploitation en tenant compte de l'incertitude et du risque (incertitude sur tous les aspects d'un projet de développement minier).

Dans le contexte des mines à ciel ouvert, l'évaluation des actifs pour la prise de décision se présente comme la nécessité de quantifier le risque dans les aspects clés de l'optimisation de la fosse et de la planification minière. Ce risque se présente sous trois formes principales : le risque technique (géologique, ingénierie), le risque financier et le risque environnemental. La source première de risque technique provient de l'incertitude sur les teneurs, sur la densité du minerai, sur le tonnage et sur les aspects géomécaniques. Le risque lié à la géologie est reconnu comme étant le facteur technique prédominant quant à l'échec éventuel d'un projet minier (Dimitrakopoulos et al. 2002).

Cette incertitude a donc tout intérêt à être modélisée et intégrée au processus d'optimisation du design de fosse et du plan minier afin d'évaluer le risque sur la valeur actuelle nette du projet, les flux de trésorerie attendus, les quantités de minerai récupérées et les coûts de production. Cela ouvre la porte au développement d'une nouvelle approche, nommée « approche stochastique », basée sur le risque, pour évaluer les actifs d'un projet minier et minimiser les risques liés au design de la fosse.

## 1.2 Objectifs

Les principaux objectifs de ce mémoire consistent à :

1. Développer une approche stochastique d'optimisation pour le design de fosse qui :
  - tient compte de l'incertitude sur les teneurs du gisement;
  - maximise la valeur économique nette du gisement.
2. Comparer l'approche classique d'optimisation de fosse et l'approche stochastique à l'aide d'un gisement simulé, généré aléatoirement et entièrement connu. Ainsi, on pourra :
  - comparer les paramètres économiques des fosses classique et stochastique,
  - comparer le potentiel et le risque associés aux fosses classique et stochastique.
3. Optimiser le design de fosse du projet Canadian-Malartic, Osisko, à l'aide des approches d'optimisation classique et stochastique afin de comparer les paramètres économiques des fosses classique et stochastique.

## 1.3 Introduction à l'approche stochastique et son importance

L'approche classique d'optimisation de fosse est généralement basée sur les teneurs krigées d'un gisement. Afin de déterminer la valeur économique nette des blocs une fois ceux-ci excavés et traités, les teneurs krigées des blocs sont appliquées à une fonction de profit convexe. Selon le type d'étude effectué (en dollars constants ou en dollars variables), la fonction de profit est soit linéaire par morceaux (courbe bleue sur la figure 1-1), soit non linéaire (courbe rouge sur la figure 1-1) (Henry et al. 2005).



Par ailleurs, une teneur krigée peut être approchée par la moyenne d'un certain nombre de teneurs simulées par simulation géostatistique conditionnelle. Lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, la teneur moyenne tend vers la teneur krigée. Ainsi, il est juste de dire que l'approche classique s'appuie sur la valeur économique nette de la teneur moyenne (valeur krigée) de chaque bloc.

L'approche stochastique propose plutôt de s'appuyer sur la moyenne des valeurs économiques nettes de chaque bloc, chacune attribuable à une teneur simulée. Cette modification par rapport à l'approche classique permet d'exploiter la convexité de la fonction de profit. Par définition, si une fonction  $v(x)$  est convexe, alors

$$v\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{v(x_1) + v(x_2)}{2} \quad (1.1)$$

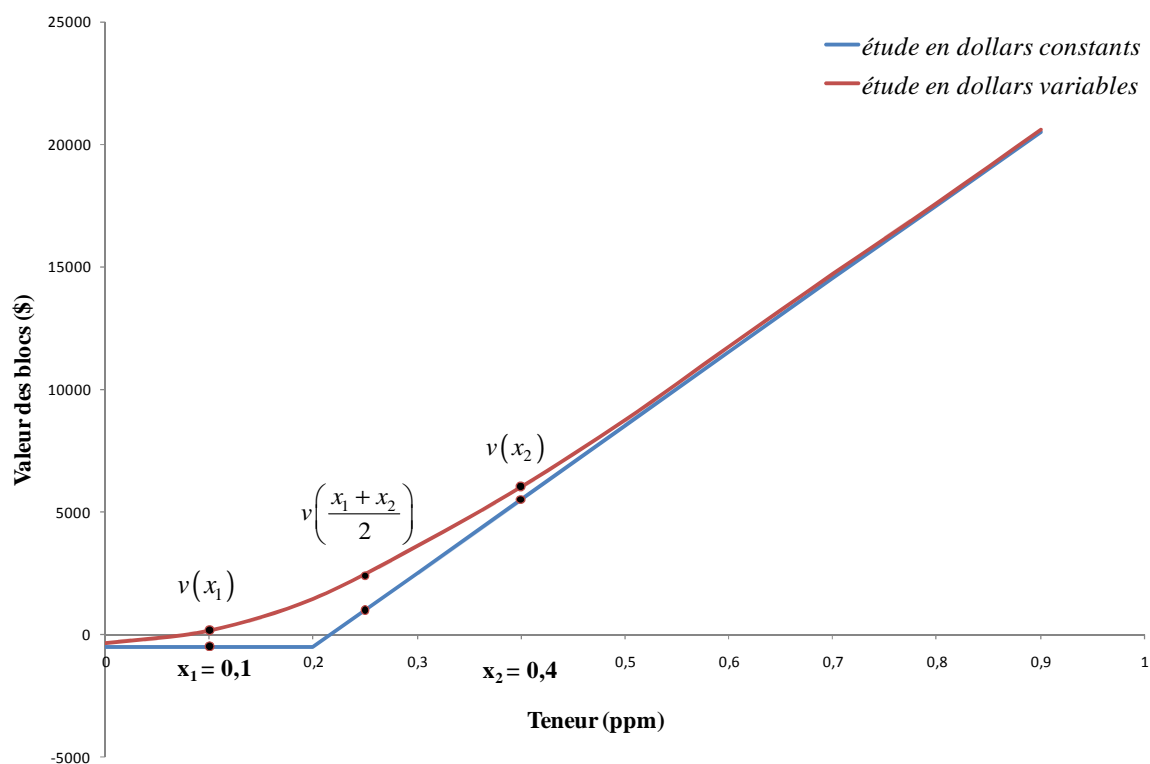
Une optimisation basée sur des valeurs de bloc supérieures conduit nécessairement à une fosse plus profitable. L'approche stochastique permet ainsi de simuler plusieurs teneurs pour chaque bloc et d'effectuer la moyenne sur leurs valeurs économiques nettes, après avoir appliqué la fonction de profit. Le tableau 1.1 et la figure 1-1 mettent en évidence le gain appréciable que permet cette approche.

**Tableau 1.1: Exemple de gain possible avec l'approche stochastique**

$x_1 = 0,1 \text{ ppm}$

$x_2 = 0,4 \text{ ppm}$

Approche d'optimisation	Calcul de la valeur nette d'un bloc	Fonction de profit $v$	Valeur nette du bloc (\$)	Gain
Approche classique	$v\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$	linéaire par morceaux (courbe bleue)	1000	
Approche stochastique ( <i>incertitude géologique</i> )	$\frac{v(x_1) + v(x_2)}{2}$	linéaire par morceaux (courbe bleue)	2500	150%
Approche stochastique ( <i>incertitudes géologique + économique</i> )		non linéaire (courbe rouge)	3092	150% + 59%



**Figure 1-1: Exemple de fonctions de profit pour les blocs**

L'approche stochastique permet d'inclure toutes incertitudes modélisables. Néanmoins, le tableau 1.1 montre que le gain le plus substantiel est obtenu en traitant l'incertitude géologique. Pour cette raison, seule l'incertitude géologique sera considérée dans ce mémoire.

## 1.4 Organisation du mémoire

Ce mémoire est divisé en six chapitres. Le chapitre 2 présente une brève revue de la littérature scientifique sur l'optimisation de design de fosse, où il est question de l'approche classique d'optimisation de fosse et de l'approche stochastique, du choix de la fonction à optimiser et des différentes méthodes d'optimisation et de simulations géostatistiques utilisées dans le domaine minier.

Le chapitre 3 présente quelques aspects théoriques relatifs à l'évaluation des ressources minérales d'un gisement; soient le krigeage simple, le krigeage ordinaire et les simulations géostatistiques

conditionnelles par bandes tournantes. Il traite ensuite du problème d'optimisation de fosse en expliquant la modélisation du problème, la théorie des graphes et réseaux et les problèmes de fermeture maximale et de flux maximal dans un graphe.

Le chapitre 4 présente une étude de cas d'un gisement généré aléatoirement afin de comparer l'approche classique et l'approche stochastique d'optimisation de fosse et de démontrer que l'approche stochastique mène au design de fosse le plus performant.

Le chapitre 5 se consacre à l'étude des gisements Canadian-Malartic et Barnat détenus par la Corporation Minière Osisko. Ce chapitre passe en revue les caractéristiques des gisements, leur minéralisation prédominante et la géologie régionale, la description des données de forages, la modélisation des variogrammes, l'évaluation des teneurs et des valeurs nettes des blocs et l'optimisation de la fosse par les approches classique et stochastique.

Une discussion générale des résultats est présentée au chapitre 6. En dernier lieu, une conclusion rapportant l'atteinte des objectifs du projet et quelques recommandations pertinentes viendront clore ce mémoire.

## **CHAPITRE 2    REVUE DE LITTÉRATURE**

Ce chapitre présente une brève revue des publications et travaux entrepris sur l'optimisation de design de fosse à ciel ouvert. Les sections 2.1 et 2.2 présentent l'approche classique d'optimisation de fosse et la problématique liée à cette façon de faire. Les sections subséquentes traitent respectivement du choix de la fonction à optimiser, des différentes méthodes de simulations géostatistiques utilisées dans le domaine minier et de leur utilisation pour améliorer le processus d'optimisation de fosse.

### **2.1 L'approche classique d'optimisation de fosse à ciel ouvert**

L'approche classique pour l'optimisation de design de fosse à ciel ouvert débute par la détermination de la distribution des teneurs ponctuelles et des teneurs de blocs à travers le gisement. L'estimation des teneurs peut se faire par méthodes conventionnelles ou géostatistiques.

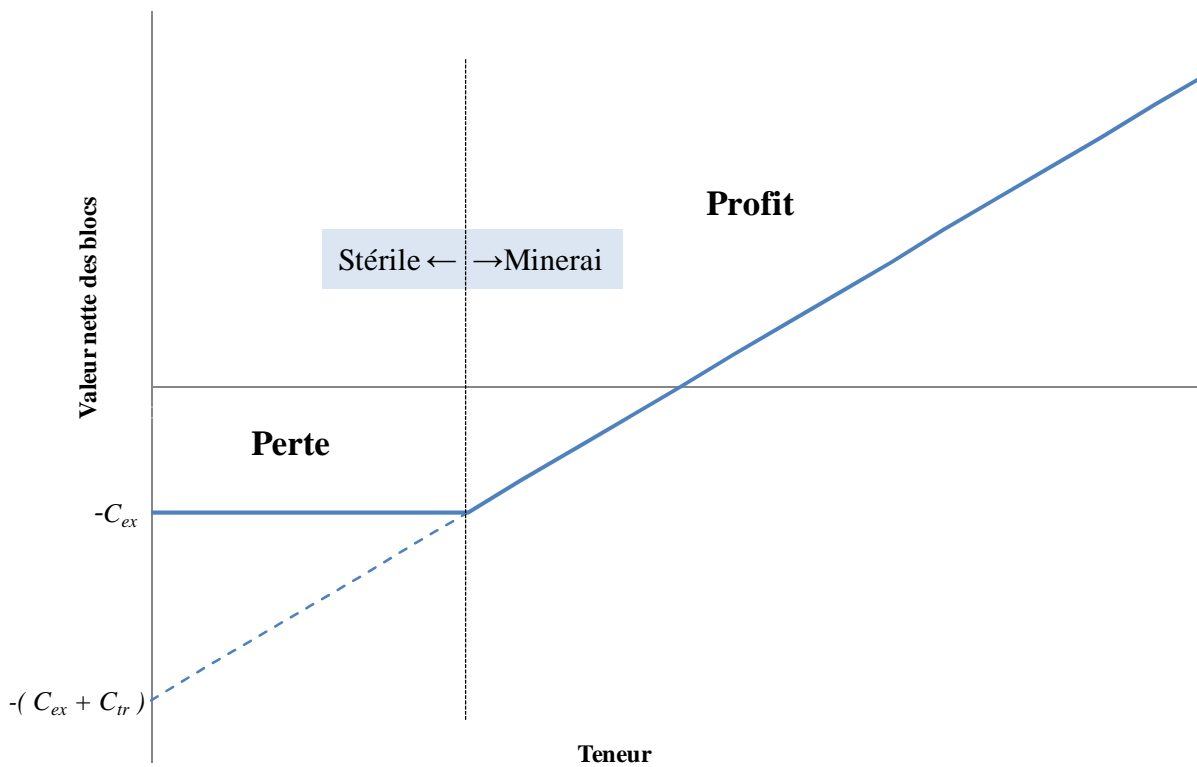
Les méthodes conventionnelles englobent les méthodes d'estimation qui ne se basent pas sur la géostatistique et qui, par conséquent, négligent la covariance existant entre les teneurs échantillonnées. La méthode polygonale, la méthode triangulaire et la méthode de l'inverse de la distance font partie de cette catégorie. Contrairement aux méthodes conventionnelles d'interpolation, les méthodes géostatistiques se basent sur une fonction de covariance entre les teneurs d'un gisement afin de représenter leur variabilité spatiale moyenne en minimisant la variance d'estimation. L'approche classique se limite à l'utilisation du krigeage ordinaire, du cokrigeage et du krigeage d'indicateur (David, 1977; Journel et Huijbregts, 1978).

Une fois la distribution des teneurs connue, le gisement est divisé en unités de minage élémentaires, appelés blocs, et leur teneur est calculée en faisant la moyenne des teneurs ponctuelles se trouvant à l'intérieur des limites de chaque bloc. Ensuite, à l'aide d'une teneur de coupure  $z_c$  optimale (Lane, 1988), les blocs sont classés en deux catégories : stérile ou minéral. La teneur de coupure peut être définie comme la teneur du bloc pour laquelle le coût de

traitement associé à un bloc est égal aux revenus engendrés par ce même bloc. Ainsi, un bloc de teneur  $z \leq z_c$  est stérile alors qu'un bloc de teneur  $z > z_c$  est considéré comme minéral.

L'optimisation de design de fosse repose sur la valeur nette des blocs du gisement. Cette dernière dépend des coûts d'extraction  $C_{ex}$ , des coûts de traitement  $C_{tr}$ , la classification économique des blocs (stérile/minéral) et des revenus engendrés par la teneur en métal des blocs de minéral. Les revenus associés sont calculés à partir du prix du métal  $p$ , de la teneur en métal du bloc de minéral  $z$  et du taux de récupération du métal  $r$ . La fonction de profit détermine la valeur nette associée à chaque bloc :

$$V = \begin{cases} -C_{ex} & \text{si stérile} \\ prz - (C_{ex} + C_{tr}) & \text{si minéral} \end{cases} \quad (2.1)$$



**Figure 2-1: Fonction de profit des blocs**

Lors du design d'une exploitation à ciel ouvert, l'objectif premier est de définir une séquence d'extraction et un contour-limite de la fosse qui satisfassent un objectif économique évident : maximiser la valeur nette de la fosse. Cette étape se présente comme un problème d'optimisation combinatoire où il importe de trouver une sélection de blocs qui maximise le profit (Chandran et Hochbaum, 2009; Goldberg et Tarjan, 1986; Hochbaum, 2001; Hochbaum, 2008; Lerchs et Grossmann, 1965; Picard, 1976). Il existe de nombreux algorithmes permettant cette optimisation : les plus courants utilisent la théorie des graphes et réseaux.

### 2.1.1 Problème de fermeture maximale d'un graphe

Lerchs et Grossmann (1965) ont résolu le problème d'optimisation de fosse en calculant la fermeture maximale d'un graphe orienté. Le gisement est représenté par un graphe orienté  $G=(X,A)$  où les blocs sont des sommets  $x_i$  de valeur nette  $V_i$ . Un arc  $a_{ij}$  relie  $x_i$  à  $x_j$  si l'enlèvement du bloc  $x_j$  est nécessaire à l'enlèvement du bloc  $x_i$ . Soit  $V_Y$ , la valeur nette totale d'un sous-ensemble de sommets  $Y$  dans  $G$  formant une fermeture<sup>1</sup>. Le problème d'optimisation de fosse revient à trouver un sous-ensemble  $Y$  de valeur nette maximale, i.e. une fermeture maximale.

La fermeture maximale de  $G$  peut être déterminée par l'algorithme de Lerchs-Grossmann qui construit, par processus itératif, des arborescences normalisées croissantes dans  $G$  jusqu'à l'obtention d'un arbre final.

Il a été démontré par Hochbaum (2001) que la complexité de cet algorithme est proportionnelle à  $nm \cdot \min(N^+, N^-)$ , où  $n$  est le nombre de sommets,  $m$  est le nombre d'arcs et  $N^+$  et  $N^-$  sont respectivement le nombre de sommets de valeur positive et le nombre de sommets de valeur négative.

---

<sup>1</sup> La fermeture d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets est le graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant progressivement des arêtes entre les sommets non adjacents dont la somme des degrés est au moins égale à  $n$ , jusqu'à ce que ceci ne puisse plus être fait.

## 2.1.2 Problème de flux maximal dans un graphe

Rhys (1970) et Balinski (1970) ont montré que le problème d'optimisation de fosse peut être résolu par le problème de flux maximal dans un graphe. Picard (1976) a démontré que trouver la fermeture maximale de  $G$  est théoriquement équivalent à résoudre le problème de flux maximal dans un réseau  $G'$  construit à partir de  $G$ . Ce réseau est formé de  $G$  et de deux sommets artificiels, une source et un puits. Les arcs de  $G$  portent une capacité infinie, la source est liée à chaque sommet  $x_i$  de valeur  $v_i > 0$  par un arc de capacité  $v_i$  et le puits est lié à chaque sommet  $x_i$  de valeur  $v_i \leq 0$  par un arc de capacité  $-v_i$ .

### 2.1.2.1 Algorithme « push-relabel » de Goldberg et Tarjan

Cet algorithme est aussi connu sous le nom de l'algorithme « preflow-push ». Goldberg et Tarjan (1986) ont déterminé que le flux maximal dans  $G'$  peut être trouvé avec un algorithme qui utilise les concepts de « preflow » et d'arborescence dynamique de Sleator et Tarjan (1983). La complexité de cet algorithme est proportionnelle à  $nm \cdot \log(n^2/m)$ , où  $n$  est le nombre de sommets et  $m$  est le nombre d'arcs de  $G'$ . Cet algorithme nécessite moins d'opérations que l'algorithme de Lerchs-Grossmann.

### 2.1.2.2 Algorithme « pseudo-flow » de Hochbaum

Hochbaum (2008) a développé un algorithme pour résoudre le problème de flux maximal en se basant sur l'algorithme de Lerchs-Grossman. L'algorithme « pseudo-flow », dans sa version la plus simple qui utilise le principe d'arborescence dynamique, a une complexité fortement polynomiale de l'ordre de  $nm \cdot \log(n)$ .

La version la plus sophistiquée de l'algorithme « pseudo-flow » offre une performance très compétitive par rapport à l'algorithme « push-relabel ». Chandran et Hochbaum (2009) ont démontré que leur implémentation de cette version de l'algorithme, avec une initialisation générique du pseudo-flow, est plus rapide que l'implémentation de la meilleure version de l'algorithme « push-relabel » sur la plupart des instances.

## **2.2 Problématique liée à l'utilisation de l'approche classique d'optimisation de fosse**

Peu importe l'algorithme d'optimisation choisie, toutes les méthodes considèrent que les valeurs des blocs sont connues et dépourvues d'incertitudes et d'erreur. Cette hypothèse est toujours invalide puisqu'il est impossible d'estimer parfaitement un gisement, d'où l'idée de recourir à des simulations géostatistiques pour chercher à tenir compte de ces erreurs.

Dans (Dimitrakopoulos et al., 2002), la performance et les limites de l'approche classique ont été testées par l'entremise d'un gisement aléatoire, estimé de manière classique, et du design optimal qui lui est associé, obtenu par l'algorithme de Lerchs-Grossmann (utilisation du logiciel commercial Gemcom Whittle™). Des représentations équiprobables du gisement aléatoire obtenues par simulations conditionnelles ont ensuite été utilisées pour évaluer l'incertitude sur les teneurs des blocs constituant le design de fosse classique.

La performance du design classique a été évaluée en appliquant les différents modèles de teneurs au design classique et en calculant les différents critères de performance (VAN, tonnage, etc.) obtenus afin d'obtenir leur fonction de distribution.

Les résultats mettent en évidence un risque substantiel associé au design classique pour ce gisement particulier. L'analyse de la performance indique que la probabilité que le design analysé engendre la VAN prévue n'est que de 4% (Dimitrakopoulos et al., 2002). De plus, cet exemple montre une différence négative entre les flux de trésorerie actualisés trimestriels obtenus et ceux attendus, en plus d'une durée de vie plus courte pour la mine. Cette étude souligne les limites de l'approche classique.

## **2.3 Choix de la fonction-objectif à optimiser**

L'approche classique cherche à obtenir un design de fosse qui maximise le profit. Des chercheurs ont tenté d'obtenir des designs supérieurs en optimisant des fonctions-objectif alternatives à la fonction de profit (Collet et Corley, 2000; Deutsch et al., 1999; Glacken, 1997; Godoy et al., 2001; Isaaks, 1990; Schofield et Rolley, 1997; Shaw et Khosrowshahi, 1997; Srivastava, 1987).



L'idée était de réduire le mauvais classement économique des blocs (mineral ou stérile) qui a une incidence directe sur le revenu des opérations minières.

### **2.3.1 Maximiser le profit des blocs**

La méthode du profit maximal (Glacken, 1997) calcule le profit moyen pour chaque bloc, en fonction de ses teneurs simulées, pour les deux classifications possibles (stérile/mineral). La classification qui entraîne un profit maximal est celle retenue pour le bloc en question.

### **2.3.2 Minimiser la perte des blocs**

Similairement à la méthode précédente, la méthode de la perte minimale (Isaaks, 1990) consiste à calculer la perte moyenne pour chaque bloc, en fonction de ses teneurs simulées, pour les deux classifications possibles (stérile/mineral). La classification qui entraîne une perte minimale est celle retenue pour le bloc. La perte associée à un bloc est définie par la différence entre sa valeur potentielle et sa valeur récupérée.

### **2.3.3 Maximiser le rapport profit/perte des blocs**

La méthode du rapport profit/perte (Glacken, 1997) consiste à calculer le profit moyen pour chaque bloc et pour les deux classifications possibles (stérile/mineral), mais en fonction d'une pénalité définie comme suit :

- Profit = valeur récupérée – (poids x pénalité)
- Pénalité = valeur potentielle – valeur récupérée

La classification qui entraîne un profit maximal est celle retenue pour le bloc.

### **2.3.4 Comparaison et performance des méthodes**

D'un point de vue théorique, les méthodes du profit maximal et de la perte minimale sont équivalentes (Verly, 2005) : cette preuve est présentée à l'Annexe 1. Des performances

identiques sont alors attendues de ces deux méthodes. La méthode du rapport profit/perte des blocs prévoit une pénalité dans le cas d'un faux stérile, ce qui a pour effet de classer moins de blocs stériles et plus de blocs minerais qu'avec la méthode du profit maximal. Pourtant, cette dernière pénalise intrinsèquement une mauvaise classification : le profit d'un faux minerai est moindre que le profit d'un véritable stérile et le profit d'un faux stérile est moindre que le profit d'un véritable minerai. La pénalité supplémentaire imposée par la méthode du rapport profit/perte des blocs est difficilement justifiable car il est attendu que cette méthode soit moins performante que la méthode du profit maximal. Ainsi, l'optimisation de ces fonctions alternatives n'est pas plus efficace que l'optimisation de la fonction de profit.

Une étude de cas sur un gisement simulé (Godoy et al., 2001) rapporte des performances très différentes entre les méthodes du profit maximal et de la perte minimale, ce qui semble contredire le fait que les deux méthodes soient théoriquement équivalentes. Les auteurs ne fournissent pas d'explications pour ce résultat.

## **2.4 Méthodes de simulations géostatistiques utilisées dans le domaine minier**

Les simulations géostatistiques conditionnelles sont un type de simulations de Monte-Carlo. Les simulations sont nécessaires pour tout problème impliquant des transformations non linéaires des variables mesurées (Chilès et Delfiner 1999). L'idée est de produire plusieurs distributions aléatoires équiprobables de la variable à l'étude qui expriment la même structure spatiale et le même variogramme. Dans le cas d'un gisement minier, la variable à l'étude est la teneur des blocs et chaque simulation est une représentation du gisement qui reproduit sa variabilité in situ et les teneurs connues.

Plusieurs méthodes existent pour générer des simulations. Les trois méthodes les plus utilisées dans le domaine des mines sont (Chilès et Delfiner 1999) :

- Méthode de simulation séquentielle gaussienne (SGS)
- Méthode de simulation spectrale (FTT-ma)
- Méthode de simulation des bandes tournantes

### 2.4.1 Méthode de simulation séquentielle gaussienne (SGS)

La méthode séquentielle gaussienne, utilisée pour la première fois en géostatistique par Alabert et Massonnat (1990), est une méthode de simulation conditionnelle. L'utilisation de la méthode nécessite que la variable aléatoire à simuler suive une loi normale. Le principe de cette méthode est d'effectuer un krigeage simple pour chaque point  $n_i$  à simuler, en utilisant comme données conditionnantes les  $N$  points échantillonnés et les points  $n_i$  ayant déjà été simulés. La valeur krigée obtenue et la variance de krigeage correspondent respectivement à l'espérance et à la variance conditionnelles du point  $n_i$ . Les  $n$  points sont simulés tour à tour dans un ordre aléatoire.

Dans son application directe, la complexité de cet algorithme est proportionnelle à  $n^3$ . En effet, les derniers point  $n_i$  à être simulés nécessitent un krigeage simple avec presque  $n$  points. Afin de ne pas restreindre l'utilisation de cette méthode à des champs de petites tailles, il est possible d'utiliser un voisinage réduit ( $m$  points, avec  $m < n$ ) en exploitant l'effet d'écran de la fonction de la covariance entre les  $N$  points. La complexité de cette variante de l'algorithme est  $nm^3$ . La reproductivité de certaines structures complexes sera fonction de la force de l'effet d'écran.

### 2.4.2 Méthode de simulation spectrale (FTT-ma)

La méthode spectrale (Ravalec et al., 2000) est une méthode de simulation gaussienne non conditionnelle qui doit être suivie d'une phase de post-conditionnement afin que la distribution des points simulés respecte la structure spatiale et le variogramme des points échantillonnés. Son utilisation nécessite que la variable aléatoire à simuler suive une loi normale et que les points soient simulés sur une grille régulière.

La méthode se base sur le fait qu'il est possible d'exprimer une variable aléatoire  $Z(x)$  sous forme d'un produit de convolution entre un bruit blanc gaussien  $Y(x)$  et une fonction de pondération  $g$  qui détermine la covariance de  $Z(x)$ . Les transformées de Fourier permettent d'associer un spectre en fréquence pour les fonctions non-périodiques. Ainsi, le produit de convolution devient un simple produit dans le domaine spectral. L'idée est de tirer profit de cette propriété pour réduire le nombre d'opérations de l'algorithme en calculant le produit de convolution dans le domaine spectral puis en revenant au domaine spatial pour calculer la valeur de  $Z(x)$  comme une moyenne spatiale de variables aléatoires indépendantes  $Y(x)$ . La complexité de cet algorithme est

proportionnelle à  $n \cdot \log(n)$  ( $n$  est le nombre de points à simuler), ce qui permet d'utiliser cette méthode pour simuler des champs de grande taille.

### **2.4.3 Méthode de simulation des bandes tournantes**

La méthode des bandes tournantes (Chentsov, 1957; Matérn, 1960; Matheron, 1973) est une méthode de simulation gaussienne non conditionnelle qui nécessite que la variable aléatoire à simuler suive une loi normale et qui doit être suivie d'une phase de post-conditionnement.

Le principe de cette méthode est de ramener une variable aléatoire 3D à une combinaison linéaire de variables aléatoires 1D simulées indépendamment afin de réduire le nombre d'opérations de l'algorithme. L'idée est de projeter les points à simuler sur des droites unitaires uniformément dispersées dans une demi-sphère unitaire. Ces projections sont alors simulées sur chaque droite par une méthode gaussienne (ex. SGS) avec un modèle de covariance approprié. La valeur du point à simuler est obtenue par combinaison linéaire des projections simulées.

La complexité de cet algorithme est proportionnelle au nombre de point à simuler, ce qui en fait la méthode la plus efficace pour simuler des champs de grande taille.

## **2.5 Utilisation des simulations géostatistiques pour l'optimisation de fosse**

Les simulations géostatistiques ont été utilisées dans le domaine minier depuis le milieu des années 1970 (Coleou, 1989; Deraisme et Dumay, 1979; Dowd, 1997; François-Bongarçon, 1983; Journel, 1974; Matheron, 1976), aussi bien pour les exploitations à ciel ouvert que pour les exploitations souterraines. On peut distinguer trois modes différents d'utilisation des simulations géostatistiques :

- Décrire l'incertitude d'un design donné
- Examiner la performance relative de plusieurs designs différents
- Construire un programme d'optimisation stochastique

### 2.5.1 Incertitude sur un design donné

Les simulations géostatistiques peuvent être utilisées pour prévoir un intervalle de confiance sur la valeur nette prévue d'un design. Les teneurs de blocs de chacune des simulations sont appliquées au design à évaluer. En plus de définir l'étendue des valeurs nettes éventuelles pour la fosse, il est possible de calculer l'écart-type et la valeur nette moyenne associés au design. Cette façon de faire permet de quantifier a posteriori le risque associé à un design donné mais ne permet pas d'optimiser la rentabilité de la fosse (Dimitrakopoulos et al., 2002; Dowd et Dare-Bryan, 2007).

### 2.5.2 Performance relative de plusieurs designs

Dimitrakopoulos et al. (2007) ont élaboré l'approche « maximum upside / minimum downside » qui permet de calculer la performance d'un design de fosse et de comparer directement différents designs entre eux.

Cette approche s'appuie sur le fait qu'il est possible qu'un design donné puisse être plus performant que prévu : ainsi, on considère qu'il existe un « upside potential (UP) » associé au design considéré. De façon similaire, on considère un « downside risk (DR) » lorsque les prédictions ne sont pas atteintes.

En définissant des seuils minimaux acceptables (MAR) sur les paramètres du design (VAN, tonnage, etc.), les statistiques UP et DR s'expriment comme suit :

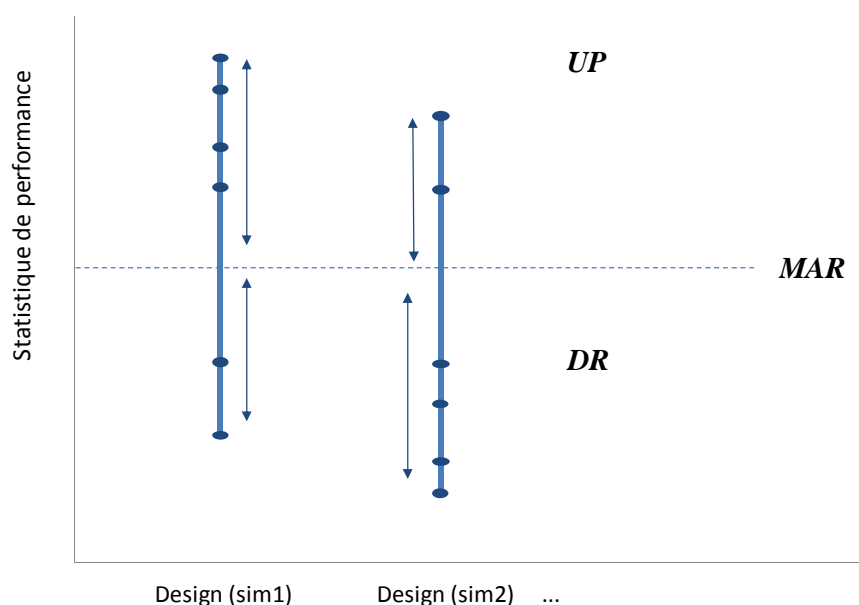
- $V_{ij}$  : la valeur du design de fosse  $i$  lorsque appliqué à la simulation  $j$
- $P_j$  : probabilité d'occurrence de la simulation  $j$

$$\text{Soit } I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{ij} \geq MAR \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$UP_i = \sum_j P_j (V_{ij} - MAR) \times I_{ij}$$

$$DR_i = \sum_j P_j (V_{ij} - MAR) \times (I_{ij} - 1)$$

En optimisant un design de fosse pour chaque simulation, on obtient un ensemble de designs potentiels différents. Les statistiques UP et DR procurent un critère de sélection pour le design le plus performant. Lorsque la statistique UP d'un design donné est supérieure à celle d'un second design, alors le premier est plus performant; le raisonnement inverse s'applique pour la statistique DR. Par exemple, dans la figure 2-2, le design 1 est supérieur au design 2.



**Figure 2-2: Statistiques UP et DR sur différents designs de fosse**  
modifiée d'après Dimitrakopoulos et al. (2007)

Bien qu'autant de designs que de simulations soient obtenus, rien ne garantit que le design optimal se trouve dans l'échantillon de simulations produit. Par ailleurs, une simulation conditionnelle prise seule est deux fois moins précise qu'une estimation par krigeage (approche classique). Un design de fosse issu d'une seule simulation permettra de récupérer un profit réel vraisemblablement inférieur à une fosse classique. De plus, le design aura tendance à surestimer ce qu'il permettra de récupérer réellement.

### 2.5.3 Programme d'optimisation stochastique

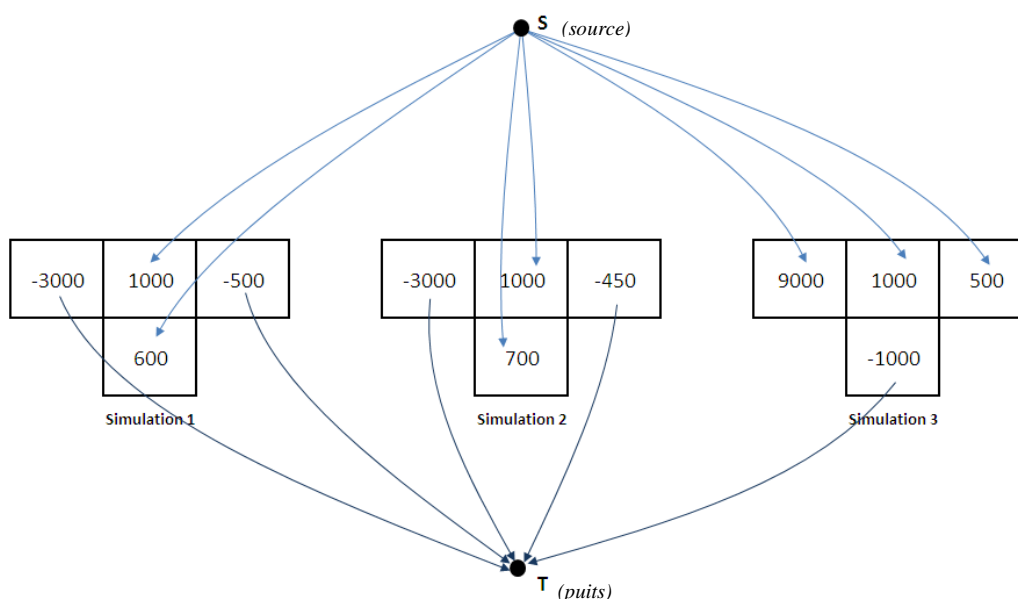
L'optimisation stochastique incorpore les fonctions de distribution des variables aléatoires dans le programme d'optimisation (la fonction-objectif ou les contraintes) ou dans l'algorithme de résolution. Ce concept est en opposition avec l'optimisation déterministe où les valeurs du programme d'optimisation sont présumées exactes.

L'idée d'utiliser un programme d'optimisation stochastique afin d'inclure l'incertitude sur les teneurs dans l'optimisation de design de fosse a été exploitée pour la première fois par Henry et al. (2005). Sans en faire mention explicitement dans l'article, l'incertitude a été prise en compte dans l'optimisation de fosse par un programme stochastique. La stratégie est d'exploiter la convexité de la fonction de profit en calculant la valeur nette espérée de chaque bloc et d'optimiser la fosse sur ces valeurs espérées. La méthode stochastique permet de réaliser un seul design de fosse de valeur nette supérieure à celui issu du krigeage. L'Annexe 2 présente la preuve de cette affirmation. De plus, cette méthode est sans biais conditionnel donc la valeur nette des blocs qu'elle prévoit est égale à l'espérance de la valeur réelle des blocs. La démonstration est présentée à l'Annexe 5.

Bastante et al. (2008) ont suggéré de procéder de la même façon pour définir les contours-limites d'une fosse, sans toutefois montrer que cette méthode mène à des résultats supérieurs.

Meagher et al. (2009) suggèrent une méthode similaire pour incorporer l'incertitude sur les teneurs dans l'optimisation de la fosse. La méthode repose sur l'idée qu'il est nécessaire que les blocs aient la même désignation (dans la fosse ou non) d'une simulation à l'autre afin de s'assurer de la constance du design de fosse. Il doit donc exister un lien indissociable entre les blocs d'une simulation à l'autre. Ces liens indissociables s'ajoutent aux liens de précedence entre les blocs.

Le problème est modélisé sous forme de graphe orienté, pour des fins d'applicabilité des algorithmes de résolution, où les sources ( $S$ ) des différentes simulations sont fusionnées et où leurs puits ( $T$ ) sont aussi fusionnés. Des arcs bidirectionnels de capacité infinie sont ajoutés entre les mêmes blocs d'une simulation à l'autre, afin de limiter la sélection d'un bloc en fonction de ces différentes valeurs simulées.



**Figure 2-3: Modélisation du problème d’optimisation de fosse par l’approche de Meagher**  
modifiée d’après Meagher et al. (2009)

Bien que les auteurs mentionnent que cette méthode mène à un design de fosse de valeur nette supérieur aux fosses stochastiques de Bastante et de Henry, elle est en réalité équivalente. En effet, cette modélisation du problème sert d’outil à la résolution du même programme d’optimisation stochastique, à une constante près. La solution optimale de ce programme est égale à la solution optimale du programme stochastique. L’Annexe 3 présente la preuve de cette affirmation.

## 2.6 Paramétrisation de fosse

La première étape de la planification d’une séquence de minage est de diviser le volume inclus dans les contours ultimes de la fosse en unités de minage plus facilement gérables appelées ici « pushback ». La séquence de minage doit commencer avec l’exploitation de la portion du gisement la plus riche en minerai de hautes teneurs afin de générer un flux de trésorerie maximal en début de projet. Des fosses imbriquées sont ainsi ordonnées de manière croissante selon leurs flux de trésorerie respectifs.



Les objectifs de la planification de séquences de minage comprennent le plus souvent les éléments suivants (Hustrulid, 1995) :

- Maximiser la valeur nette de chaque pushback;
- Uniformiser le flux de trésorerie d'un pushback à l'autre;
- Uniformiser le tonnage total (minerai et stérile) d'un pushback à l'autre ou uniformiser le tonnage de minerai d'un pushback à l'autre.

De nombreuses publications portent sur la planification de séquences de minage (Coleou, 1989; Dagdelen et Johnson, 1986; François-Bongarçon, 1983). L'idée commune aux méthodes de création de fosses imbriquées est la paramétrisation de fosse. Il s'agit d'appliquer un paramètre croissant  $\lambda > 0$  au prix du métal d'intérêt ou à la valeur nette des blocs avant d'effectuer l'optimisation de la fosse. Cette technique permet d'obtenir un ensemble de fosses imbriquées de valeurs nettes croissantes. D'autres auteurs ont étudié l'intégration du risque géologique dans la planification des séquences de minage (Bastante et al., 2008; Consuegra et Dimitrakopoulos, 2010; Dagdelen, 2007; Godoy et Dimitrakopoulos, 2004; Leite et Dimitrakopoulos, 2007; Meagher et al., 2009; Ramazan et Dimitrakopoulos, 2007). Ce thème ne sera pas abordé dans le cadre de ce mémoire; l'optimisation de la planification minière étant un domaine de recherche distinct de l'optimisation de fosse.

## 2.7 Synthèse

Le présent chapitre a mis en évidence les lacunes de l'approche classique d'optimisation de fosse et les possibilités qu'offre la programmation stochastique pour améliorer les designs de fosse. Il a aussi présenté deux façons de résoudre le problème d'optimisation de fosse, soit en le transformant en problème de fermeture maximale dans un graphe, soit en le transformant en problème de flux maximal dans un graphe. Il a également été mentionné que la meilleure fonction-objectif à optimiser pour résoudre le problème d'optimisation de fosse reste de maximiser le profit des blocs, les autres fonctions-objectifs étant théoriquement équivalentes à celle-ci. Ce chapitre a d'ailleurs revu les différentes techniques de simulations géostatistiques utilisées dans le domaine minier et a statué sur leur efficacité à simuler des champs de grandes tailles, la plus efficace étant la méthode des bandes tournantes. Finalement, la paramétrisation de fosse pour le séquençage des phases de minage a brièvement été abordée en fin de chapitre.

## CHAPITRE 3 THÉORIE

Ce chapitre présente les principaux aspects théoriques relatifs à ce projet de recherche. Il débute par un bref rappel des effets information et support qui affectent l'évaluation des ressources minérales d'un gisement. La section 3.2 présente les différentes techniques de calcul des teneurs utilisées dans ce projet, soient le krigeage simple, le krigeage ordinaire et les simulations géostatistiques conditionnelles par bandes tournantes. Finalement, la section 3.3 traite du problème d'optimisation de fosse. Cette dernière section comprend plusieurs sous-sections qui expliquent la modélisation du problème d'optimisation de fosse, la théorie des graphes et réseaux et les problèmes de fermeture maximale et de flux maximal dans un graphe.

### 3.1 Effet information et effet support

Un estimateur est dit sans biais conditionnel lorsque l'espérance conditionnelle  $E[Z | Z^*]$  d'une variable aléatoire  $Z$  par rapport à sa valeur estimée  $Z^*$ , est égale à  $Z^*$ . L'utilisation d'un estimateur sans biais conditionnel pour estimer les teneurs d'un gisement est d'une importance capitale pour l'évaluation des ressources minérales. En bref, un estimateur sans biais conditionnel signifie que l'on récupère la teneur prévue - et donc le profit prévu - lorsque la fonction de profit est linéairement reliée à la teneur suite à une sélection de bloc. Deux phénomènes mathématiques qui affectent le calcul des réserves récupérables ont été identifiés dans ce domaine : l'effet information et l'effet support (Chilès et Delfiner, 1999).

L'effet information se rapporte au fait que, à tonnage égal, la teneur du minerai récupéré au terme de la vie de la mine avec un design basé sur des teneurs estimées est toujours moindre que ce qu'elle aurait été avec un design basé sur les teneurs réelles. Ce manque de précision se traduit en une perte économique plus ou moins importante selon la qualité de l'estimateur choisi (Chilès et Delfiner, 1999).

L'effet support concerne la taille des blocs élémentaires choisis pour l'extraction du minerai. Le fait de modifier la taille des blocs afin de rendre l'opération d'extraction plus ou moins sélective affecte la quantité de métal récupérée (Chilès et Delfiner, 1999). À tonnage constant, un design basé sur des teneurs de grands blocs récupère moins de métal que s'il avait été exploité avec de

plus petits blocs. L'effet information et l'effet support sont toujours présents, que l'on utilise un estimateur avec ou sans biais conditionnel.

### 3.2 Techniques de calcul des teneurs

Dans le présent projet de recherche, deux techniques de calcul des teneurs sont utilisées : le krigeage ordinaire et les simulations géostatistiques par bandes tournantes.

#### 3.2.1 Krigeage

Le krigeage est un estimateur qui minimise la variance d'estimation (Chilès et Delfiner, 1999). Il est considéré presque sans biais conditionnel. Il s'agit d'une approche linéaire qui produit un modèle de distribution des teneurs en moyenne plus près du véritable gisement (Dimitrakopoulos, 1998; Dimitrakopoulos et al., 2002). Pour ce faire, la force du lien linéaire entre les teneurs dans le gisement est mise à profit. Puisque la distribution des teneurs est régionalisée, la corrélation entre elles dépend de leur localisation dans le gisement. La teneur estimée en un point ou pour un bloc est obtenue à partir de teneurs échantillonnées dans son voisinage.

Afin d'estimer des paramètres statistiques à partir de données échantillonnées, des hypothèses de stationnarité du second ordre doivent être posées. Ces dernières rendent possible la translation des emplacements  $x$  et  $x+h$ , dissociant ainsi le calcul de la covariance de localisations précises. La covariance devient alors une fonction qui dépend du vecteur  $h$  séparant les teneurs échantillonnées et non plus de leur localisation exacte.

Selon les hypothèses de stationnarité du second ordre, l'espérance mathématique des teneurs ne dépend donc plus de  $x$  et la covariance entre les teneurs  $Z(x)$  et  $Z(x+h)$  ne dépend que de  $h$ .

$$E[Z(x)] = m \quad (3.1)$$

où  $m$  est la teneur moyenne du gisement

$$Cov(Z(x), Z(x+h)) = C(h) \quad (3.2)$$

Usuellement, le variogramme  $\gamma(h)$  est la fonction utilisée en géostatistique pour décrire la covariance entre les teneurs d'un gisement. Il se calcule par la relation suivante :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[ (Z(x) - Z(x+h))^2 \right] = Var[Z(x)] - Cov(h) \quad (3.3)$$

Lorsque le bon modèle de variogramme est utilisé et que les hypothèses de stationnarité sont réalistes, le krigeage est en moyenne au moins aussi juste que tous les autres estimateurs linéaires. Deux types de krigeage sont décrits ci-après, le krigeage simple et le krigeage ordinaire.

### 3.2.1.1 Krigeage simple

L'estimateur par krigeage simple suppose la teneur moyenne  $m$  du gisement connue. La teneur estimée  $Z_v^*$  est obtenue par l'équation suivante (Chilès et Delfiner, 1999) :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) m \quad (3.4)$$

où  $z_i \quad \forall i = \{1, \dots, n\}$  correspond aux teneurs échantillonnées.

L'estimateur  $Z_v^*$  est construit de façon à être sans biais et à minimiser la variance d'estimation  $Var[Z_v - Z_v^*]$ ,  $Z_v$  étant la vraie teneur du bloc. Ainsi, les paramètres  $\lambda_i$ , appelés poids de krigeage, sont obtenus en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } Var[Z_v - Z_v^*] &= Var[Z_v] + Var[Z_v^*] - 2Cov[Z_v, Z_v^*] \\ \text{où } Var[Z_v^*] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] \\ Cov[Z_v, Z_v^*] &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ce programme d'optimisation convexe sans contrainte peut être solutionné en calculant les zéros des dérivées partielles par rapport à  $\lambda_i$ .

Le système de krigeage simple obtenu est le suivant :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] = \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.6)$$

La variance d'estimation minimale, nommée variance de krigeage simple, est :

$$\sigma_{KS}^2 = \text{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad (3.7)$$

### 3.2.1.2 Krigeage ordinaire

Dans la majorité des cas, la teneur moyenne du gisement est inconnue; la définition de l'estimateur diffère alors du krigeage simple. Afin que la moyenne du gisement soit exclue du calcul de l'estimateur, une condition est nécessaire pour assurer que l'estimateur soit sans biais (Chilès et Delfiner, 1999) :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) m \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (3.8)$$

$$\text{d'où} \quad Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$$

Les poids de krigeage  $\lambda_i$  sont obtenus en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } \text{Var}[Z_v - Z_v^*] &= \text{Var}[Z_v] + \text{Var}[Z_v^*] - 2\text{Cov}[Z_v, Z_v^*] \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \\ \text{où } \text{Var}[Z_v^*] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] \\ \text{Cov}[Z_v, Z_v^*] &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ce programme d'optimisation convexe sous contrainte d'égalité peut être solutionné par le Lagrangien :

$$L(\lambda) = \text{Var}[Z_v - Z_v^*] + 2\mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \quad (3.10)$$

Le système de krigeage ordinaire obtenu est le suivant :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.11)$$

La variance d'estimation minimale, nommée variance de krigeage ordinaire, est :

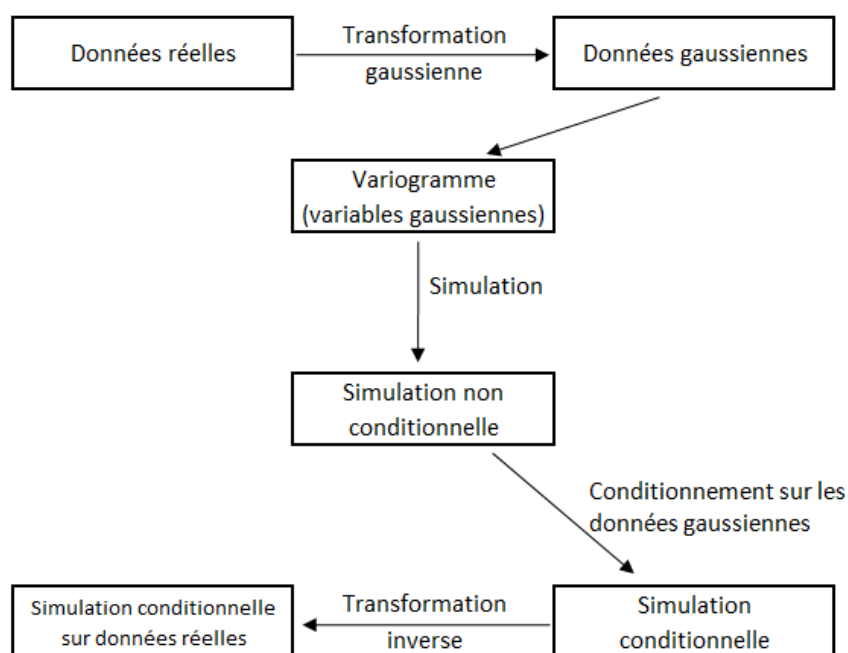
$$\sigma_{KO}^2 = \text{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] - \mu \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Simulations géostatistiques conditionnelles

Les simulations géostatistiques conditionnelles sont un type de simulations de Monte-Carlo. Plusieurs méthodes existent pour générer des simulations. La taille du champ de données à simuler dans le domaine minier étant très grande, la méthode de simulation de moindre complexité a été retenue pour ce projet. Cette méthode gaussienne, appelée « Méthode des bandes tournantes », est résumée ci-dessous.

#### 3.2.2.1 Méthode de simulation par bandes tournantes

La méthode des bandes tournantes est une méthode de simulation gaussienne non conditionnelle qui nécessite une phase de post-conditionnement. Les méthodes gaussiennes requièrent que les données échantillonnées suivent une distribution multinormale. Lorsque la distribution des teneurs ne suit pas une loi normale, on transforme les teneurs afin d'obtenir une distribution marginale normale. On peut vérifier ensuite le caractère binormal à l'aide des variogrammes d'indicatrices. Toutefois, au-delà des statistiques d'ordre 2, on doit faire l'hypothèse que le champ est multinormal. La transformation inverse est appliquée aux teneurs suite aux simulations et au post-conditionnement. Les étapes des transformations gaussiennes et inverses sont présentées sous forme d'organigramme à la figure 3-1.



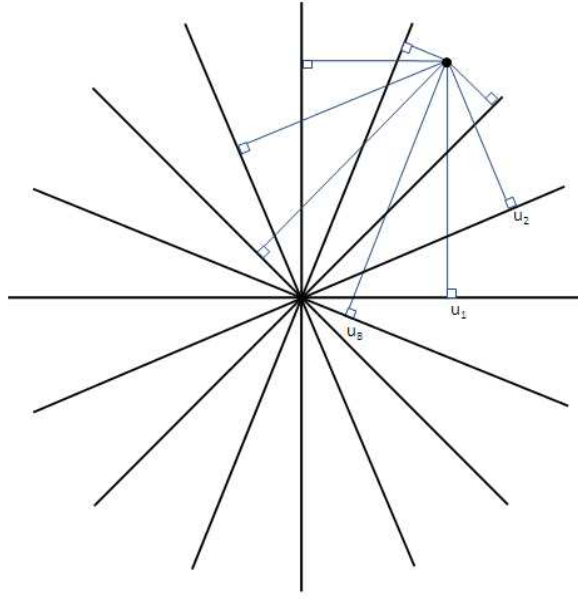
**Figure 3-1: Étapes des transformations gaussiennes et inverses**  
modifiée d'après Chilès et Delfiner (1999)

La méthode des bandes tournantes permet de simuler une valeur aléatoire de la teneur  $Z(x)$ .

Soit :

- $x$  : vecteur 3D (position de la teneur  $z$ );
- $Z(x)$  : variable aléatoire à simuler au point  $x$ ;
- $u_i$  : vecteur unitaire 3D  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  (droites);
- $Y_i(t)$  : variable aléatoire à simuler sur la droite  $u_i$  au point  $t \forall t \in [0, L]$ .
- $L$  : longueur simulée sur chaque droite (en fonction de la taille du gisement à simuler)

Le principe est de projeter les points à simuler  $x$  sur des segments de droites unitaires  $u_i$  uniformément dispersées dans une demi-sphère unitaire. La figure 3-2 montre une représentation en deux dimensions des projections et des bandes.



**Figure 3-2: Représentation de la méthode des bandes tournantes en 2D**  
modifiée d'après (Chilès et Delfiner, 1999)

Sur chaque droite  $u_i$  est simulée indépendamment une variable aléatoire  $Y_i(t)$  par une méthode gaussienne. La valeur aléatoire  $Z(x)$  est obtenue par une combinaison linéaire d'une variable  $Y_i(t)$  sur chaque bande :

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M Y_i \langle x, u_i \rangle \quad (3.13)$$

Le nombre de bandes à générer doit au moins égaliser quelques centaines (Marcotte, 2009). Par le théorème central limite, la distribution de la variable  $Z(x)$  est assurée d'être gaussienne puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes. Afin de s'assurer que  $Z(x)$  présente le modèle de covariance voulu  $C_Z(h)$ , il est nécessaire que les  $Y_i(t)$  présentent une covariance appropriée  $C_Y(h)$  sur chaque droite. On considère que la moyenne des distributions des  $Z(x)$  et des  $Y_i(t)$  est nulle.

Soit les covariances  $C_Z(h)$  et  $C_Y(h)$ , telles que :

$$C_Z(h) = \text{Cov}(Z(x), Z(x+h)) \quad (3.14)$$

$$C_Y(h) = \text{Cov}(Y(x), Y(x+h)) \quad (3.15)$$



Par définition,

$$C_Z(h) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Cov}(Y_i\langle x, u_i \rangle, Y_i\langle x+h, u_i \rangle) \quad (3.16)$$

En dispersant uniformément les droites  $u_i$  dans une demi-sphère unitaire avec le nord coïncidant avec  $h$  et en utilisant un grand nombre de bandes  $M \rightarrow \infty$ , il est possible d'écrire :

$$C_Z(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} C_Y(h \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta \quad (3.17)$$

En posant  $t = h \cos \varphi$  et  $dt = -h \sin \varphi d\varphi$ , on obtient le résultat suivant :

$$C_Z(h) = \frac{1}{h} \int_0^h C_Y(t) dt \quad \text{d'où} \quad C_Y(h) = \frac{d}{dh}(h C_Z(h)) \quad (3.18)$$

Ceci permet de calculer la covariance à simuler sur une droite pour obtenir la covariance désirée en 3D. Par exemple, pour simuler un modèle exponentiel de palier  $c$  et de portée  $a$  en 3D :

$$C_Z(h) = c \exp\left(\frac{-h}{a}\right) \quad (3.19)$$

on doit simuler le modèle suivant sur les droites :

$$C_Y(h) = c \left(1 - \frac{|h|}{a}\right) \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \quad (3.20)$$

### 3.2.2.2 Post-conditionnement par krigeage

Puisqu'elles sont non conditionnelles, les simulations par bandes tournantes doivent être suivies d'une phase de post-conditionnement afin que la distribution des  $Z(x)$  respecte la structure spatiale et le variogramme des teneurs échantillonnées  $Z(x_i)$ .

Soit :

- $x_0$  : un point à simuler
- $x_i$  : localisation des teneurs échantillonnées
- $Z^*(x_0)$  : teneur estimée au point  $x_0$  par krigeage avec  $z(x_i)$
- $Z_S(x_0)$  : teneur simulée au point  $x_0$
- $Z_S(x_i)$  : teneurs simulées aux points  $x_i$
- $Z_S^*(x_0)$  : teneur estimée au point  $x_0$  par krigeage avec  $z_S(x_i)$
- $Z_{CS}(x_0)$  : teneur simulée au point  $x_0$  suite au post-conditionnement avec  $z(x_i)$

La teneur simulée conditionnellement  $Z_{CS}(x_0)$  se calcule de la façon suivante :

$$Z_{SC}(x_0) = Z^*(x_0) + [Z_S(x_0) - Z_S^*(x_0)] \quad (3.21)$$

Ainsi, on ajoute simplement une erreur simulée à la valeur obtenue par krigeage. À noter que l'étape de post-conditionnement peut-être réalisée très efficacement en krigeant un grand nombre de points simultanément et en utilisant le formalisme dual du krigeage (Chilès et Delfiner, 1999). Cette étape exigeant beaucoup moins de temps de calcul que le krigeage requis pour la méthode SGS.

### 3.3 Problème d'optimisation de fosse

Lors du design d'une exploitation à ciel ouvert, l'objectif premier est de définir un contour-limite de la fosse qui satisfasse l'objectif économique de maximiser la valeur nette de la fosse. L'optimisation d'une fosse est un problème d'optimisation combinatoire où il importe de trouver une sélection de blocs de valeur nette maximale (Hochbaum, 2001; Lerchs et Grossmann, 1965; Picard, 1976). Cet ensemble de blocs constitue les contours optimaux de la fosse.

#### 3.3.1 Modélisation du problème

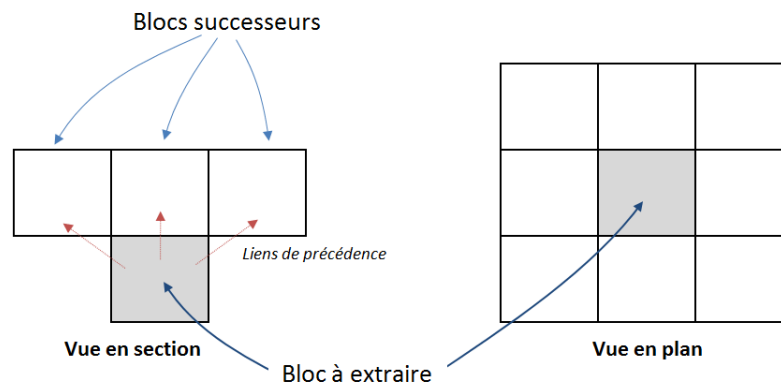
Le problème d'optimisation de fosse s'exprime mathématiquement par un programme d'optimisation linéaire en nombres entiers.

Soit :

- $x_i$  : une variable binaire telle que  $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le bloc } i \text{ est miné} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $V_i$  : la valeur nette du bloc  $i$  tel que  $i = \{1, \dots, n\}$

$$\underset{x}{Max} \sum_{i=1}^n [V_i x_i] \quad (3.22)$$

Ce programme d'optimisation n'est pas sans contraintes. Une des contraintes de l'exploitation à ciel ouvert est de débiter l'extraction à la surface topographique et de poursuivre l'exploitation en profondeur, banc par banc. La sélection d'un bloc candidat pour la fosse optimale est liée non seulement à sa valeur nette, mais aussi à la valeur des blocs voisins. Les liens de précedence entre les blocs ont une grande importance dans la modélisation d'une fosse optimale (Hochbaum, 2001; Lerchs et Grossmann, 1965; Picard, 1976).



**Figure 3-3: Liens de précedence d'un bloc à extraire**

En définissant deux ensembles :  $G$ , l'ensemble des blocs du gisement et  $\Gamma_i$ , l'ensemble des blocs successeurs du bloc  $i$ , il est possible d'exprimer les liens de précedence entre les blocs par l'ensemble de contraintes suivant :

$$x_i \in X$$

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_i \in \{0,1\}, i \in G \\ (x_i - x_{i'}) \leq 0, i' \in \Gamma_i, i \in G \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

Un programme linéaire en nombres entiers n'est pas un programme linéaire dans le sens où son domaine de réalisabilité n'est pas un polyèdre, mais un ensemble discret de points. L'algorithme du simplexe ne permet pas de le résoudre directement.

Le problème de l'optimisation de fosse peut se transformer en problème de fermeture maximale dans un graphe et se résoudre avec un algorithme de flux maximal, tous deux des programmes linéaires. Ces problèmes font partie de l'ensemble des problèmes de sélection. Les problèmes de sélection doivent être représentés sous forme de graphe orienté pour des fins de praticabilité des algorithmes de résolution.

La section 3.3.2 présente un bref aperçu de la théorie nécessaire pour la compréhension des problèmes de sélection, tandis que les sections 3.3.3 à 3.3.4 expliquent la modélisation des problèmes de fermeture maximale et de flux maximal.

### 3.3.2 Théorie des graphes et réseaux

Les graphes sont des objets mathématiques qui décrivent les connexions et les possibilités de cheminement d'un élément à l'autre (Lacomme et al., 2003). Il s'agit d'un ensemble de sommets et d'arcs reliés entre eux ou non, selon les besoins de la modélisation à obtenir.

Soit  $G = (X, U, W, C)$ , un graphe orienté où :

- $X$  : un ensemble de  $N$  sommets  $x_i$
- $U$  : un ensemble de  $M$  arcs  $u_{ij}$ , reliant les sommets  $x_i$  et  $x_j$
- $W$  : un ensemble de  $M$  poids  $w_{ij}$  associés aux arcs  $u_{ij}$
- $C$  : un ensemble de  $M$  capacités  $c_{ij}$  associées aux arcs  $u_{ij}$
- $\Gamma(x)$  : l'ensemble des successeurs de  $x$
- $\Gamma^I(x)$  : l'ensemble des prédécesseurs de  $x$

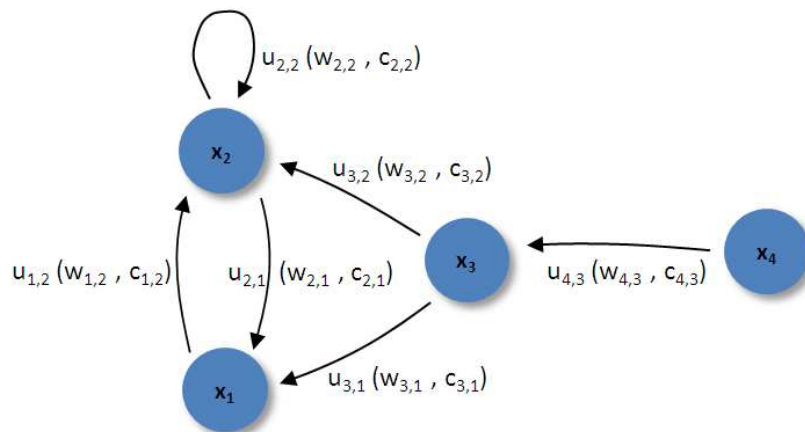


Figure 3-4: Exemple d'un graphe orienté

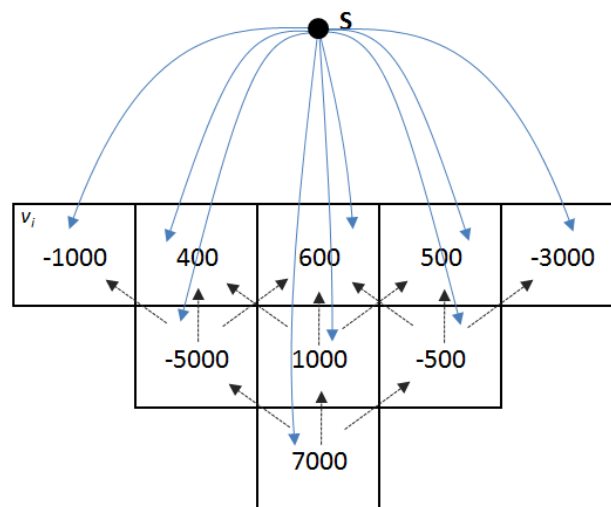
### 3.3.3 Problème de fermeture maximale

#### 3.3.3.1 Généralités

Le problème de fermeture maximale est modélisé par un graphe  $G$ . Un sommet  $x_i$  correspond à un bloc  $i$  et sa valeur  $v_i$  correspond à la valeur nette du bloc. Un sommet artificiel nommé source est relié à chacun des sommets  $x_i$ .

Soit  $G = (X, U, V, s)$ , un graphe orienté où :

- $X$  : un ensemble de  $N$  sommets  $x_i$
- $U$  : un ensemble de  $M$  arcs  $u_{ij}$ , reliant les sommets  $x_i$  et  $x_j$
- $V$  : un ensemble de  $N$  valeurs  $v_i$  associées aux sommets  $x_i$
- $s$  : un sommet artificiel appelé source
- $\Gamma(s)$  : l'ensemble des successeurs de la source



**Figure 3-5: Exemple de modélisation du problème de fermeture maximale**

Le problème de fermeture maximale consiste à trouver la fermeture transitive de la source de poids maximal. La fermeture transitive du sommet  $s$ , notée  $\hat{\Gamma}(s)$ , est l'ensemble des sommets situés sur des chemins d'origine  $s$ . La fermeture transitive de la source consiste en la limite de  $\{s\} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma(\Gamma(x_i)) \dots$  (Lacomme et al., 2003)

La fermeture transitive de poids maximale  $Y = \hat{\Gamma}(s)$  de  $G$  est définie comme un sous-ensemble de sommets  $x_i$  tel que, si  $x_i$  appartient à  $Y$ , alors tous ses successeurs appartiennent aussi à  $Y$ . De plus,  $Y$  est construit de façon à ce que la somme des valeurs  $v_i$  lui appartenant soit maximale.

### 3.3.3.2 Formulation du problème

Soit :

$I_{x_i}$  : la variable binaire telle que  $I_{x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Le problème de fermeture maximale se présente comme le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned} & \underset{I_{x_i}}{\text{Max}} \sum_{i=1}^N [v_i I_{x_i}] \\ & \text{s.c.} \\ & I_{x_i} \in \{0,1\} \quad \forall x_i \in X \\ & (I_{x_i} - I_{x_{i'}}) \leq 0 \quad \forall x_{i'} \in \Gamma(x_i), \quad \forall x_i \in X \end{aligned} \tag{3.24}$$

L'ensemble des sommets  $x_i$  tel que  $I_{x_i} = 1$  forment le sous-ensemble  $Y$ . Si l'on assimile les sommets du graphe  $G$  à des blocs dans un gisement, le sous-ensemble  $Y$  correspond à l'ensemble des blocs faisant partie de la fosse optimale.

Cette modélisation du problème de fermeture maximale est celle qu'ont adoptée Lerchs et Grossmann (1965) dans leur algorithme d'optimisation de fosse. Le logiciel commercial Whittle<sup>TM</sup> se base sur l'algorithme de Lerchs-Grossmann (Whittle, 1998).

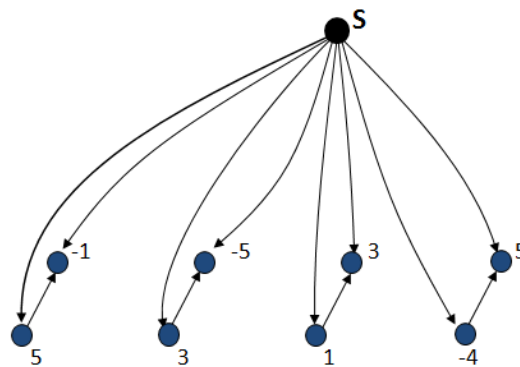
### 3.3.3.3 Exemple de résolution du problème

Afin de faciliter la compréhension du problème de fermeture maximale appliqué à l'optimisation de fosse, voici un exemple simplifié d'un gisement à optimiser composé de 8 blocs. Les liens de précedence sont limités au bloc situé directement au dessus d'un bloc.

-1	-5	3	5
↑	↑	↑	↑
5	3	1	-4

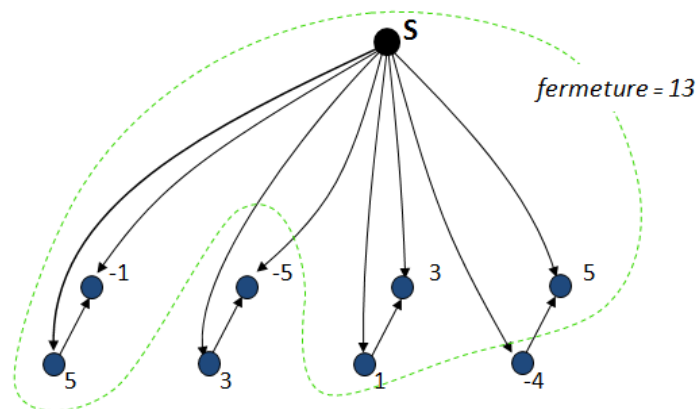
**Figure 3-6: Exemple simplifié d'un gisement à optimiser**

Le gisement est d'abord modélisé sous forme de graphe orienté  $G = (X, U, V, s)$ .



**Figure 3-7: Modélisation du graphe  $G$  correspondant au gisement à optimiser**

Ensuite l'algorithme de Lerchs-Grossmann est utilisé pour résoudre le programme linéaire en nombres entiers énoncé à l'équation (3.24).



**Figure 3-8: Fermeture maximale du graphe  $G$**



Le poids de la fermeture transitive maximale de la source est égal à 13. Les blocs correspondant aux 5 sommets faisant partie de la fermeture maximale forment la fosse optimale du gisement.

### 3.3.4 Problème du flux maximal

#### 3.3.4.1 Généralités

Picard (1976) a démontré que trouver la fermeture maximale d'un graphe orienté  $G$  est équivalent à trouver le flux maximal dans un graphe orienté  $G'$ .

Soit  $G' = (X, U, V, C, s, t)$ , un graphe orienté où :

- $X$  : un ensemble de  $N$  sommets  $x_i$
- $U$  : un ensemble de  $M$  arcs  $u_{ij}$ , reliant les sommets  $x_i$  et  $x_j$
- $V$  : un ensemble de  $N$  valeurs  $v_i$  associées aux sommets  $x_i$
- $C$  : un ensemble de  $M$  capacités  $c_{ij}$  associées aux arcs  $u_{ij}$
- $s$  et  $t$  : deux sommets artificiels appelés source et puits

Un sommet  $x_i$  correspond à un bloc  $i$  et sa valeur  $v_i$  correspond à la valeur nette du bloc. Le graphe porte une capacité infinie sur ces arcs  $u_{ij}$ . La source est liée à chaque sommet  $x_i$  de valeur  $v_i > 0$  par un arc  $u_{si}$  de capacité  $c_{si}$  égale à  $v_i$ . Le puits est lié à chaque sommet  $x_i$  de valeur  $v_i < 0$  par un arc  $u_{it}$  de capacité  $c_{it}$  égale à  $-v_i$  (Hochbaum, 2001; Lacomme et al., 2003; Picard, 1976).

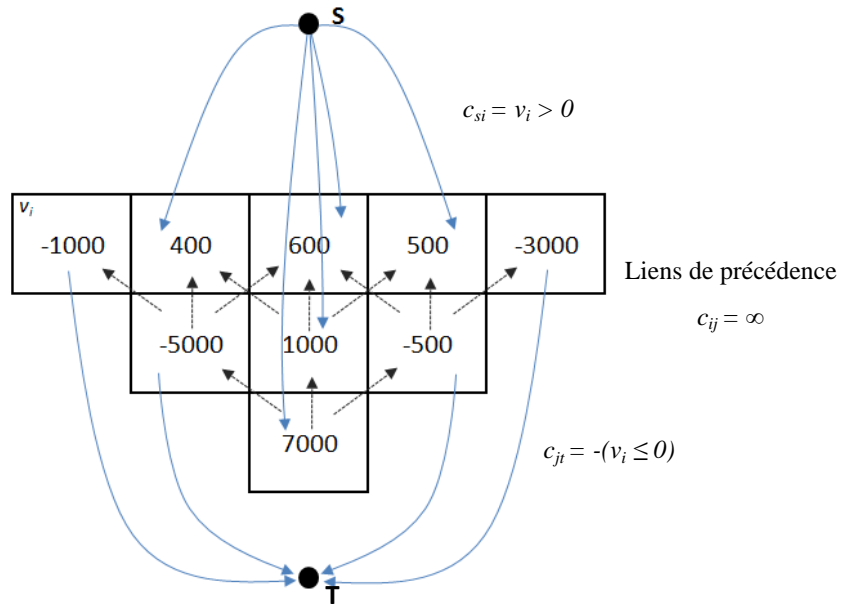


Figure 3-9: Exemple de modélisation du problème du flux maximal

### 3.3.4.2 Formulation du problème

Soit un flux  $\Phi$  qui vérifie les énoncés suivants :

- $0 \leq \Phi_{ij} \leq c_{ij}, \forall u_{ij} \in U$ : le flux sur chaque arc respecte la capacité de celui-ci
- $\sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \Phi_{ij} = \sum_{x_j \in \Gamma^{-1}(x_i)} \Phi_{ji} \quad \forall x_i \neq s, t$ : le flux entrant par  $x_i$  est égal au flux sortant
- $\sum_{s \in \Gamma(s)} \Phi_{sj} = \sum_{x_j \in \Gamma^{-1}(t)} \Phi_{jt}$ : le débit total est égal au flux entrant par  $s$  et sortant par  $t$

Le problème du flux maximal consiste à trouver un flux  $\Phi$  qui maximise le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{s \in \Gamma(s)} \Phi_{sj} \\
 & \text{s.c.} \\
 & 0 \leq \Phi_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall u_{ij} \in U \\
 & \left( \sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \Phi_{ij} \right) - \left( \sum_{x_j \in \Gamma^{-1}(x_i)} \Phi_{ji} \right) \leq c_{ij} \quad \forall x_i \in X
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

La valeur de la fosse n'est pas directement définie par la valeur du flux maximal dans  $G'$  mais bien par la capacité de la coupe minimale  $C(S, T)$  de  $G'$ . Une coupe de  $G'$  est un sous-ensemble  $S$  de sommets incluant la source  $s$  et excluant le puits  $t$ . Il est alors possible de définir le sous-ensemble  $T = G' - S$  avec  $T \cup S = G'$ . Une coupe peut aussi être définie par l'ensemble des arcs ayant une extrémité dans  $S$  et l'autre dans  $T$ . Ford et Fulkerson (1956) ont démontré, par le théorème « max-flow min-cut », que la valeur du flux maximal dans un graphe orienté est égal à la capacité de sa coupe minimale. La capacité d'une coupe  $C(S, T)$  est la somme des capacités des arcs sortant de la coupe.

$$C(S, T) = \sum_{u_{ij}} C_{ij} \quad (3.26)$$

sc.  $x_i \in S, x_j \in T$

Le théorème « max-flow min-cut » s'appuie sur le fait que le problème de la coupe minimale constitue la forme duale du problème de flux maximal (Lawler, 2010). L'égalité des deux solutions est due au théorème de la dualité forte qui stipule que si le programme primal a une solution optimale  $x^*$ , alors le programme dual a aussi une solution optimale  $y^*$ , telle que les deux solutions sont égales.

Ainsi, résoudre le problème du flux maximal dans  $G'$  permet de trouver la capacité de la coupe minimale et le sous-ensemble  $S$  de capacité minimale. L'ensemble des sommets de  $S$  constitue l'ensemble des blocs de la fosse optimale.

Cette façon de modéliser le problème de flux maximal a été choisie par Goldberg et Tarjan (1986) et par Hochbaum (2008) pour leurs algorithmes d'optimisation de fosse. Le programme Matlab\_bgl\_v.4.0.1, qui a été utilisé dans ce projet de recherche, se base sur l'algorithme de « push-relabel » de Goldberg et Tarjan (Gleich, 2007).

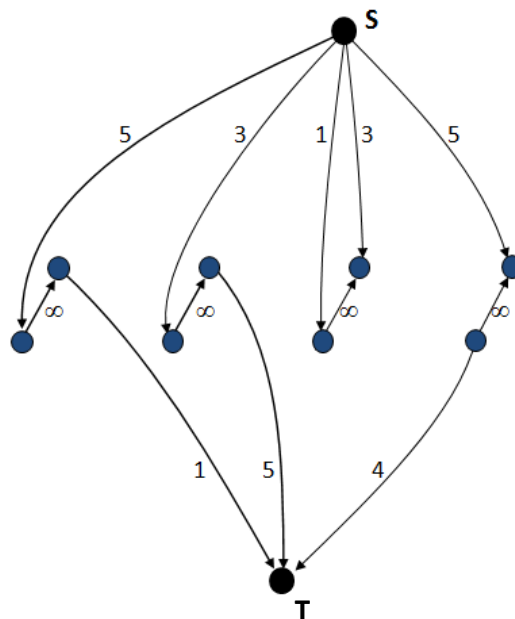
### 3.3.4.3 Exemple de résolution du problème

Reprenons l'exemple simplifié d'un gisement à optimiser composé de 8 blocs afin de faciliter la compréhension du problème de flux maximal appliqué à l'optimisation de fosse. Les liens de précedence sont encore limités au bloc situé directement au dessus du bloc.

-1	-5	3	5
↑	↑	↑	↑
5	3	1	-4

**Figure 3-10: Exemple simplifié d'un gisement à optimiser**

Le gisement est d'abord modélisé sous forme de graphe orienté  $G' = (X, U, V, C, s, t)$ .



**Figure 3-11: Modélisation du graphe  $G'$  correspondant au gisement à optimiser**

Ensuite, l'algorithme de « push-relabel » de Goldberg et Tarjan est utilisé pour résoudre le programme linéaire énoncé à l'équation (3.25).

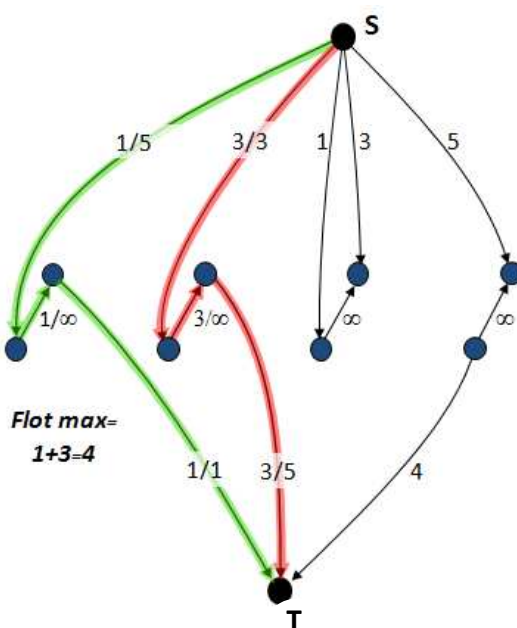


Figure 3-12: Flux maximal du graphe  $G'$

Le flux maximal provenant de la source et s'écoulant vers le puits est de 4, ce qui correspond à la capacité de la coupe minimale de  $G'$ , comme le montre la figure suivante.

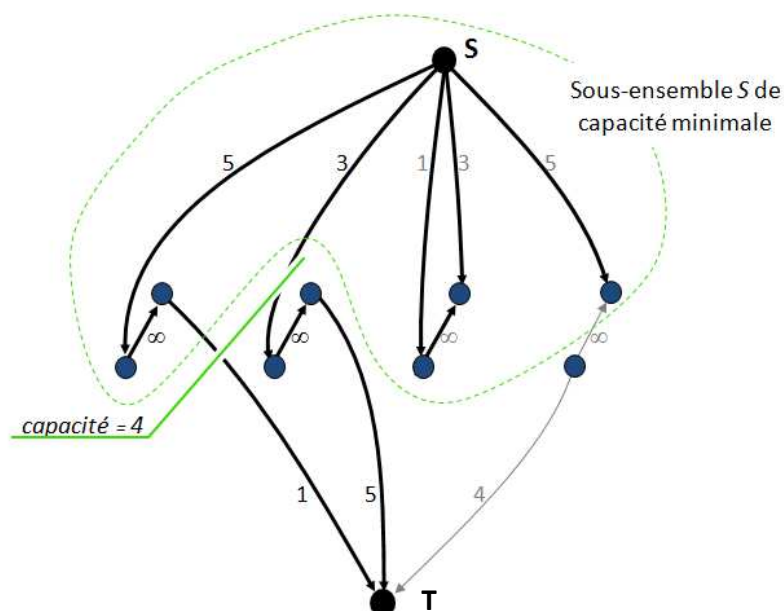


Figure 3-13: Coupe minimale du graphe  $G'$

Les blocs correspondant aux cinq sommets faisant partie de la coupe minimale forment la fosse optimale du gisement.

## **CHAPITRE 4 ÉTUDE DE CAS – GISEMENT SIMULÉ**

Ce projet de maîtrise cherche à comparer l'approche classique et l'approche stochastique d'optimisation de fosse et à démontrer que l'approche stochastique mène au design de fosse le plus performant. Ce chapitre se consacre à l'étude d'un gisement généré aléatoirement. L'intérêt de comparer les deux approches sur un gisement simulé est que ce dernier permet de valider la qualité des estimations et des designs obtenus puisque ses caractéristiques sont complètement connues et contrôlées. Les deux approches d'optimisation sont utilisées pour produire des designs de fosse qui seront comparés entre eux.

Le chapitre 4 se divise en 7 sections qui traitent respectivement des caractéristiques du gisement simulé, de l'échantillonnage du gisement, de l'estimation des teneurs par krigeage et par simulations conditionnelles, de l'optimisation des différents designs de fosse et de leurs performances relatives. Le chapitre se termine par une synthèse de la comparaison des deux approches d'optimisation.

### **4.1 Caractéristiques du gisement simulé**

Le gisement simulé est représentatif d'un porphyre syénitique aurifère où la minéralisation se présente en un halo continu de pyrite disséminée associé à de l'or fin natif. Ce type de gisement est semblable aux gisements exploités par le projet Canadian-Malartic (Malartic, Québec) qui sera étudié au chapitre 5 de ce mémoire. La teneur moyenne du gisement simulé, la variance de ses teneurs et leur fonction de covariance ont été choisies afin de représenter le plus justement les caractéristiques des gisements à l'étude. Un tableau comparatif des caractéristiques des deux modèles est présenté à la page suivante.

**Tableau 4.1: Caractéristiques des deux modèles de gisement**

	<b>Étude de cas Chapitre 4 (Gisement simulé)</b>	<b>Étude de cas Chapitre 5 (Projet Canadian-Malartic)</b>
<b>Volume du gisement</b>	42 M m <sup>3</sup>	252 M m <sup>3</sup>
<b>Teneur moyenne de l'échantillon</b>	0,693 ppm	0,985 ppm
<b>Variance de l'échantillon</b>	2,0 ppm <sup>2</sup>	2,1 ppm <sup>2</sup>
<b>Modèle de covariance (Domaine lognormal)</b>	Modèle sphérique a = 20 m (portée) c = 1,24 (palier) c <sub>o</sub> = 0,39 (effet de pépité) ratio c <sub>o</sub> /c = 0,32	Modèles sphériques et exponentiels a = (de 4,8 à 82,0 m, moy = 26,3 m) c = (de 0,1 à 1,5, moy = 0,8) c <sub>o</sub> = (de 0,01 à 0,7, moy = 0,2) ratio c <sub>o</sub> /c = 0,25
<b>Grille d'échantillonnage</b>	27 m x 27 m	30 m x 30 m (zone CM) 25 m x 25 m (zone BA)
<b>Taille de l'échantillon</b>	1,24% du champ à simuler	1,33% du champ à simuler
<b>Taille des blocs</b>	9 m x 9 m x 9 m	20 m x 10 m x 10 m
<b>Densité du massif rocheux</b>	2,64 g/t	de 1,8g/t à 2,83g/t, moy = 2,64g/t
<b>Coûts d'extraction</b>	7,96 US\$/t	1,32 US\$/t + 0,02 US\$/t par banc de profondeur
<b>Coûts de traitement</b>	9,28 US\$/t	6,38 US\$/t (zone CM) 6,63 US\$/t (zone BA)
<b>Teneur de coupure</b>	0,35 ppm	0,34 ppm

### 4.1.1 Distribution des teneurs

Dans ce type de gisement, la distribution des teneurs d'or suit approximativement une loi lognormale. Les mesures de tendance centrale et de dispersion typiques pour les gisements d'or sont une teneur moyenne de  $m = 0,7$  ppm et une variance de  $\sigma^2 = 2$  ppm<sup>2</sup>. La loi normale associée à ces paramètres est la suivante :

$$\ln z \sim N(\mu, \beta^2) \quad \text{où} \quad \mu = \ln(m) - \frac{\beta^2}{2} \approx -1,17 \quad (4.1)$$

$$\beta^2 = \ln\left(\frac{\sigma^2}{m^2} + 1\right) \approx 1,63$$

### 4.1.2 Modèle de variogramme

Le modèle de variogramme utilisé pour définir la covariance entre les teneurs  $Z(x_i)$  et  $Z(x_i+h)$  du gisement simulé est un variogramme sphérique, ayant une portée de  $a = 20$  m, un palier de  $c = 1,24$  ainsi qu'un effet de pépité de  $c_0 = 0,39$ .

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ c \left( \frac{1,5h}{a} - 0,5 \left( \frac{h^3}{a^3} \right) \right) + c_0 & \text{si } a > h > 0 \\ c + c_0 & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (4.2)$$

Les teneurs du gisement sont obtenues grâce à une simulation non conditionnelle par bandes tournantes en respect avec le variogramme ci-haut.

### 4.1.3 Géométrie du gisement

Le gisement simulé a une taille de 432 m (nord) par 432 m (est) et par 225 m (profondeur). Ce volume est constitué d'un ensemble de cubes élémentaires de dimension 3 m x 3 m x 3 m. Pour fin d'analyses géostatistiques, les teneurs de ces cubes élémentaires sont assimilées à des points  $v_i$ . Le gisement  $G$  est donc constitué par un ensemble fini de  $N = 1555200$  variables aléatoires et la teneur du gisement est définie comme suit :

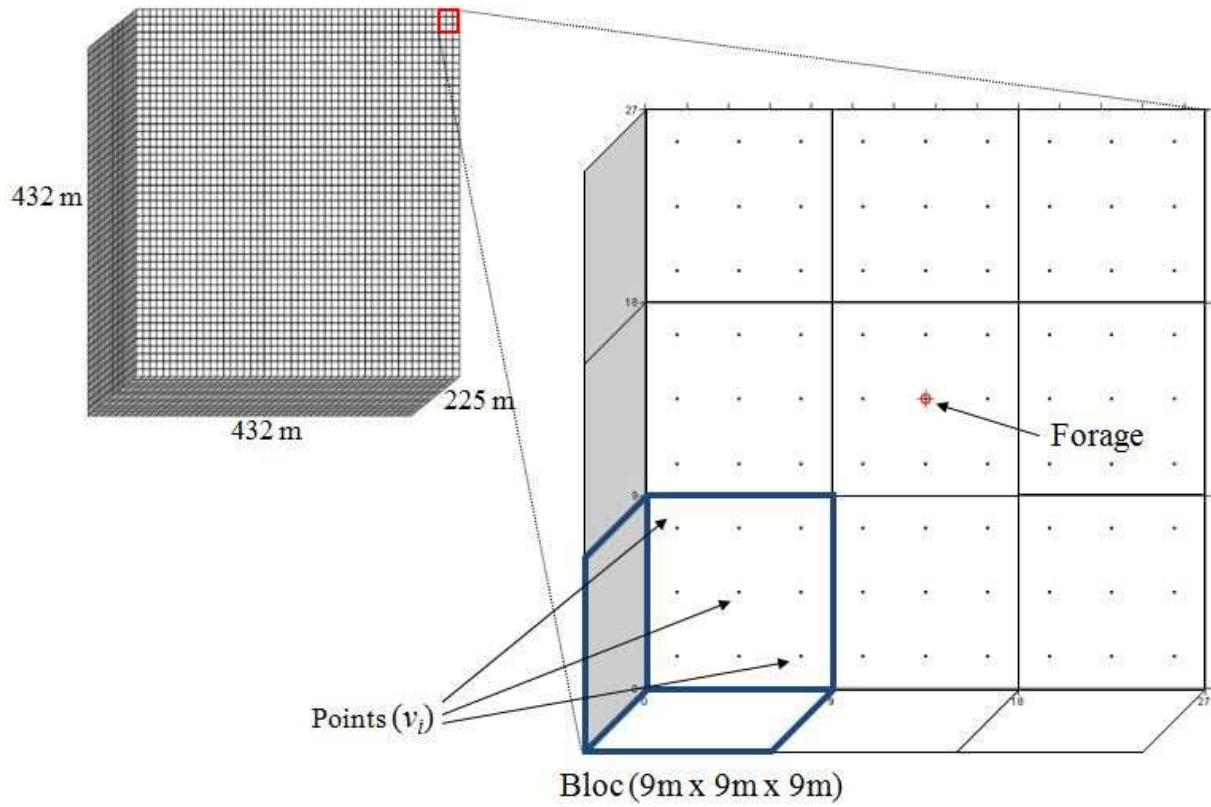
$$Z_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_{v_i}(x, y, z) \quad \text{où} \quad v \ll G \quad (4.3)$$

## 4.2 Échantillonnage du gisement simulé

L'échantillonnage considéré pour ce gisement est un patron de forages verticaux sur une grille régulière de 27 m x 27 m, ce qui se rapproche de la grille de sondage suivi par la Corporation minière Osisko sur la zone Canadian-Malartic (30 m x 30 m) et sur la zone Barnat (25 m x 25m). Les forages sont d'une longueur de 225 m allant jusqu'à la limite inférieure du gisement. Une donnée est disponible tous les trois mètres le long du forage. Les valeurs au forage sont simulées



en même temps que celles définissant les points du gisement, à une très petite distance près, afin de tenir compte de l'effet de pépité.



**Figure 4-1: Géométrie du gisement simulé**

À partir des forages, on cherche ultimement à estimer la teneur de 57600 blocs de dimension 9 m x 9 m x 9 m. Le modèle est donc constitué de 48 (nord) x 48 (est) x 25 (profondeur) blocs.  $M = 27$  est le nombre de points constituant un bloc.

$$Z_V = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Z_{v_i} \quad \text{où} \quad v \ll G \quad (4.4)$$

### 4.3 Estimation des teneurs par krigeage ordinaire

L'échantillon prélevé de la distribution réelle a d'abord été utilisé comme données conditionnantes pour réaliser un krigeage ordinaire.

#### 4.3.1 Variogramme utilisé pour le krigeage

Les données échantillonnées ont été krigées dans le domaine normal avec un variogramme sphérique de portée  $a = 20$  m, de palier  $C = 1,2$  et un effet de pépité de  $C_o = 0,8$ .

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ C \left( \frac{1,5h}{a} - 0,5 \left( \frac{h^3}{a^3} \right) \right) + C_o & \text{si } a > h > 0 \\ C + C_o & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (4.5)$$

Les valeurs du palier  $C$  et de l'effet de pépité  $C_o$  ont été définies par les relations suivantes, qui transforment les paramètres lognormaux en paramètres normaux :

$$\begin{aligned} C &= m^2 (\exp(c) - 1) \\ C_o &= m^2 (\exp(c + c_o) - 1) - C \\ \text{où } m &= 0,7 \quad c = 1,24 \quad \text{et } c_o = 0,39 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le krigeage utilise 75 données échantillonnées  $z$  dans un voisinage circulaire de rayon 120 m pour estimer une teneur  $Z^*$ . Un total de 1555200 points ont été krigés.

### 4.3.2 Comparaison des distributions de teneurs réelle et estimée

La moyenne et la variance des distributions réelle et krigée sont présentées au tableau suivant.

**Tableau 4.2: Paramètres des distributions de teneurs réelle et krigée**

Distribution de teneurs	Nombre de données	Moyenne (ppm)	Variance (ppm <sup>2</sup> )
Teneurs réelles	1555200	0,691	1,889
Teneurs échantillonnées	19200	0,693	2,000
Teneurs krigées	1555200	0,690	0,180

La taille de l'échantillon des teneurs est de 19200 données. Cela représente 1,24% de la totalité des points constituant le gisement entier. Cet échantillon est de moyenne 0,693 ppm et de variance 2 ppm<sup>2</sup>. Il est représentatif de la distribution réelle de moyenne 0,691 ppm et de variance 1,889 ppm<sup>2</sup> et les écarts entre ces valeurs correspondent à des fluctuations aléatoires attendues.

La moyenne des teneurs est maintenue lors du passage de l'échantillon (0,693 ppm) à la distribution krigée (0,69 ppm), tel qu'attendu du krigeage. On remarque que la variance de la distribution krigée (0,18 ppm<sup>2</sup>) est beaucoup plus faible que la variance de l'échantillon (2 ppm<sup>2</sup>) et que la variance de la distribution réelle (1,889 ppm<sup>2</sup>). Le krigeage étant un estimateur qui produit un lissage des données, il est attendu que la variance des teneurs krigées soit réduite. Ici, le lissage est prononcé dû au fort effet de pépite et à la portée relativement courte.

## 4.4 Simulation des teneurs par la méthode des bandes tournantes

Une centaine (100) de simulations non conditionnelles ont été réalisées avec la méthode des bandes tournantes. Celles-ci ont ensuite été conditionnées à l'aide des données échantillonnées par une phase de post-conditionnement par krigeage.

#### 4.4.1 Modèle de covariance utilisé pour les simulations

Les teneurs ont été simulées dans le domaine logarithmique. Le modèle de covariance  $C_Z(h)$  voulu pour les simulations dans l'espace 3D est un modèle sphérique ayant une portée de  $a = 20$  m, un palier de  $c = 1,24$  et un effet de pépité de  $c_o = 0,39$ :

$$C_Z(h) = \begin{cases} c + c_o & \text{si } h = 0 \\ c \left[ 1 - \left( \frac{1,5h}{a} - 0,5 \frac{h^3}{a^3} \right) \right] + c_o & \text{si } a > h > 0 \\ 0 & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (4.7)$$

Par conséquent, la covariance  $C_Y(h)$  qui a été utilisée sur les droites  $u_i$  est la suivante :

$$C_Y(h) = \frac{d}{dh}(hC_Z(h))$$

$$C_Y(h) = \begin{cases} c & \text{si } h = 0 \\ c \left[ 1 - \frac{3h}{a} + 2 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right] & \text{si } a > h > 0 \\ 0 & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (4.8)$$

Les 100 simulations ont été générées par la méthode des bandes tournantes à l'aide de 500 variables aléatoires  $(Y_i(t))$  simulées indépendamment sur 500 droites  $(u_i)$ . L'effet de pépité  $c_o$  n'est pas simulé sur les droites  $u_i$ ; il est ajouté après que la structure du modèle de covariance  $C_Y(h)$  ait été simulée.

#### 4.4.2 Post-conditionnement des simulations

Le post-conditionnement a été effectué par krigage simple de moyenne  $m = 0$  ppm. Les données simulées ont été krigées dans le domaine logarithmique avec un variogramme sphérique ayant une portée de  $a = 20$  m, un palier de  $c = 1,24$  et un effet de pépité de  $c_o = 0,39$  :

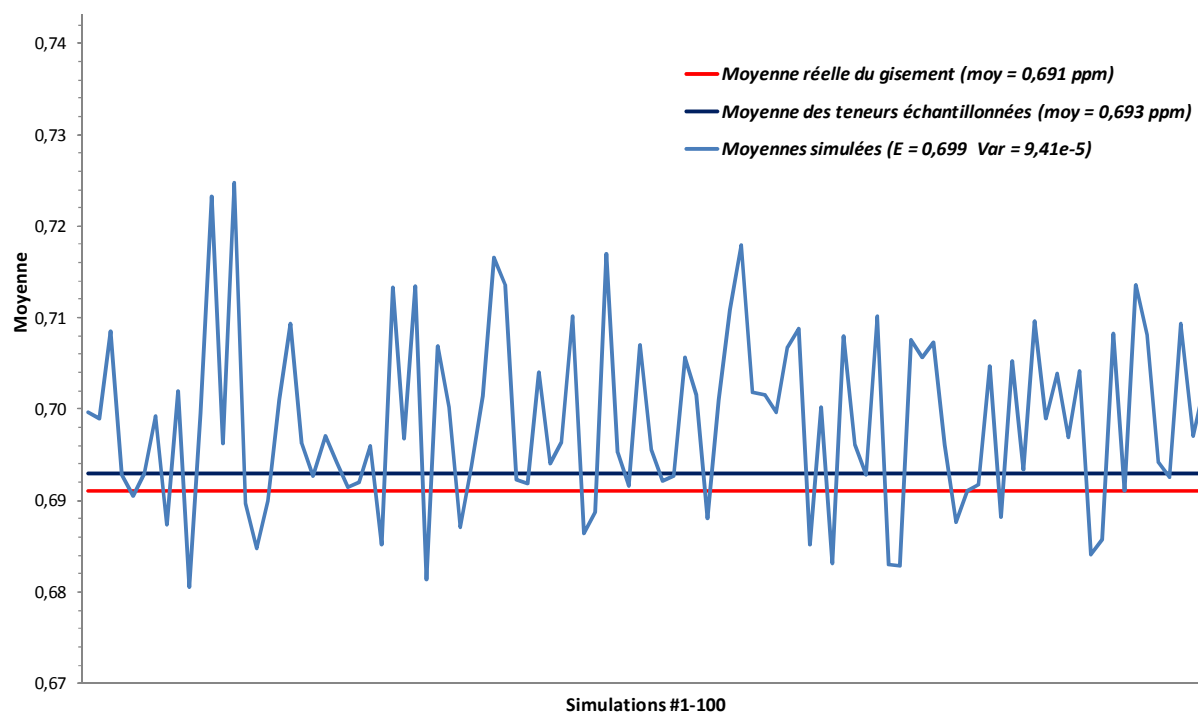
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ c \left( \frac{1,5h}{a} - 0,5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right) + c_o & \text{si } a > h > 0 \\ c + c_o & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (4.9)$$

Suite au post-conditionnement, la moyenne  $\mu = -1,17$ , dans le domaine logarithmique, a été ajoutée à chacune des données simulées et une transformation inverse vers le domaine normal a été effectuée.

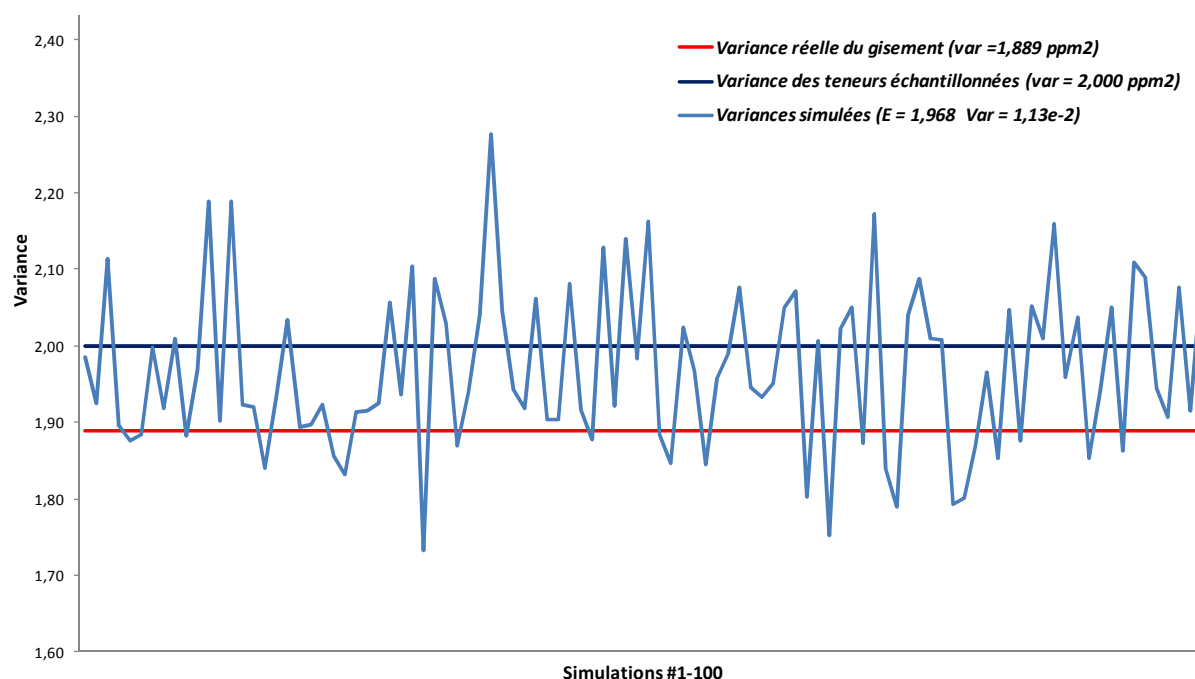
Le krigeage simple du post-conditionnement utilise 500 teneurs simulées  $z_s(x_i)$  contenues dans un voisinage rectangulaire (27 m x 432 m x 225 m) des points à conditionner  $x_0$  (10800 points  $x_0$  sont conditionnés à la fois). Un total de 155200 teneurs ont été simulées et post-conditionnées.

#### 4.4.3 Comparaison des distributions de teneurs réelle et simulées

Les moyennes et les variances des distributions de teneurs simulées sont présentées aux figures 4-2 et 4-3.



**Figure 4-2: Moyennes des distributions de teneurs simulées**



**Figure 4-3: Variance des distributions de teneurs simulées**

La moyenne des teneurs est maintenue lors du passage de l'échantillon aux distributions de teneurs simulées, ce qui est attendu des simulations conditionnelles. La figure 4-2 montre que la moyenne de chacune des 100 simulations réalisées est proche de la moyenne attendue de 0,691 ppm, soient une distribution allant de 0,68 à 0,72 ppm, de moyenne 0,7 ppm et de variance  $9,41 \times 10^{-5} \text{ ppm}^2$ .

La variance des distributions de teneurs simulées est aussi très près de la variance de l'échantillon ( $2 \text{ ppm}^2$ ) et de la variance de la distribution réelle ( $1,889 \text{ ppm}^2$ ). La figure 4-3 montre que les variances des 100 simulations suivent une distribution allant de 1,73 à  $2,27 \text{ ppm}^2$ , de moyenne  $1,97 \text{ ppm}^2$  et de variance  $1,13 \times 10^{-2} \text{ ppm}^4$ .

## 4.5 Optimisation des différents designs de fosse

L'optimisation des fosses classique et stochastique se base sur les distributions de teneurs krigées et simulées obtenues précédemment. Cette section présente les différentes étapes de calcul qui mènent à la détermination des paramètres économiques des designs de fosse étudiés.

### 4.5.1 Détermination de la valeur nette des blocs

L'optimisation de design de fosse repose sur la valeur nette des blocs du gisement. Les coûts d'extraction ont été fixés à 7,96 US\$/t et les coûts de traitement à 9,28 US\$/t. La valeur nette des blocs, dont la teneur est inférieure à la teneur de coupure fixée à 0,35 ppm, est donc de  $-C_{ex} = -30629$  US\$. Seuls les blocs d'une teneur supérieure à la teneur de coupure seront acheminés vers l'usine de traitement. Leur valeur nette correspond à la valeur générée par leur teneur ( $prz$ ), diminuée des coûts de traitement et d'extraction ( $C_{ex} + C_{tr} = 66362$  US\$). Le taux de récupération du métal à l'usine de traitement a été fixé à 90% et le prix de l'or à 825 US\$/oz. La densité moyenne du gisement a été fixée à 2,64 g/t, ce qui donne un tonnage de 1924,6 tonnes par bloc.

### 4.5.2 Application de l'algorithme « push-relabel »

Une série de fosses a été optimisée. Une première fosse, nommée « fosse optimale », a été obtenue avec la distribution de teneurs réelles. Cette fosse servira d'étalon pour la comparaison de la performance des designs suivants. Une seconde fosse, nommée « fosse classique », est basée sur la distribution de teneurs krigées. Une troisième fosse a été obtenue par l'approche stochastique décrite au chapitre 2, section 2.5.3, en utilisant l'ensemble des distributions de teneurs simulées. Finalement, un ensemble de 100 fosses, nommées « fosses simulées », ont été optimisées en se basant sur chacune des distributions de teneurs simulées.

L'optimisation a été réalisée avec l'algorithme de « push-relabel » de Goldberg et Tarjan (1986). Le programme Matlab\_bgl\_v.4.0.1 (Gleich, 2007), qui permet l'utilisation de l'algorithme, a été utilisé dans l'interface de programmation Matlab v.7.8.0.

L'algorithme « push-relabel » fournit une sélection de blocs générant un profit maximal. Il est ainsi possible de calculer la valeur nette estimée de la fosse, son tonnage et la quantité d'or extraite de la fosse en exploitant les caractéristiques de chaque bloc (teneur estimée, tonnage...). La valeur réelle d'une fosse n'est pas fournie directement par l'algorithme. Elle est obtenue en appliquant le design de la fosse aux teneurs réelles du gisement. La classification économique des blocs (minéral/stérile) utilisée pour le calcul de la valeur nette réelle est la classification obtenue avec les teneurs réelles (connues puisqu'il s'agit d'un gisement fictif). Ce choix est motivé par le fait que lors de l'exploitation de la fosse, chaque bloc est ré-échantillonné avant d'être excavé. Ainsi, la classification des blocs obtenue avec les teneurs estimées avant le ré-échantillonnage des blocs n'est plus valide pour le calcul de la valeur nette réelle de la fosse.

### 4.5.3 Paramètres économiques des fosses à l'étude

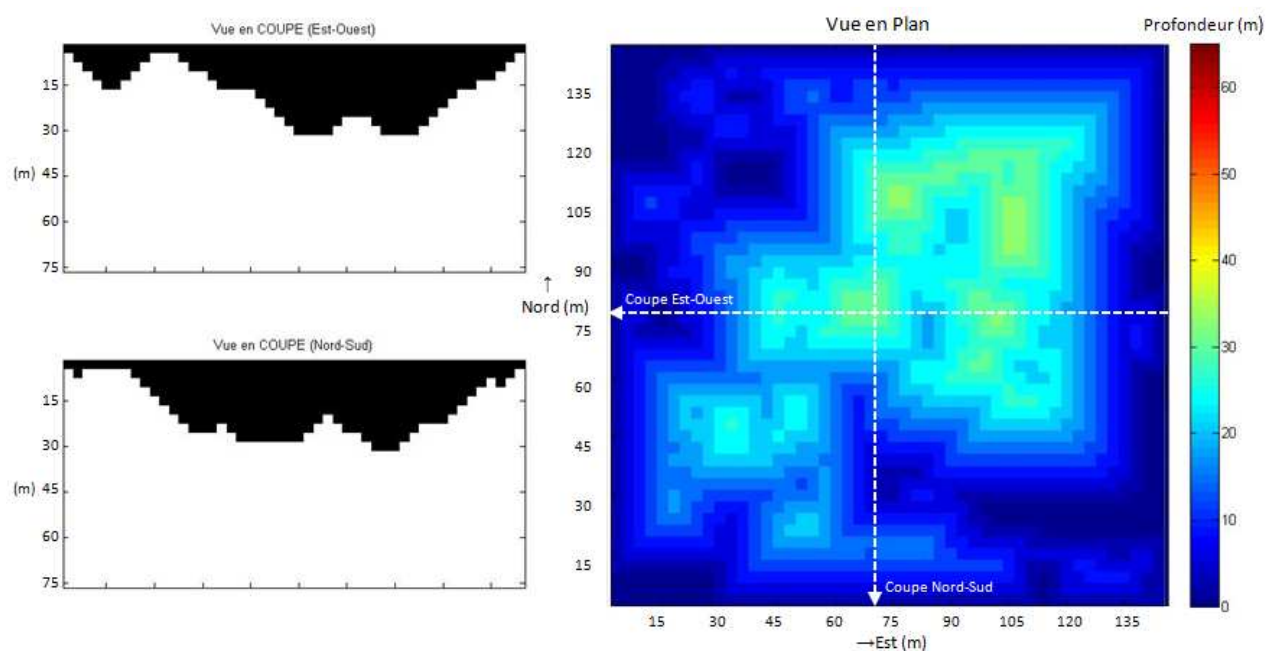
Le tableau suivant résume les paramètres économiques des fosses optimale, classique et stochastique.

**Tableau 4.3: Paramètres économiques des fosses optimale, classique et stochastique**

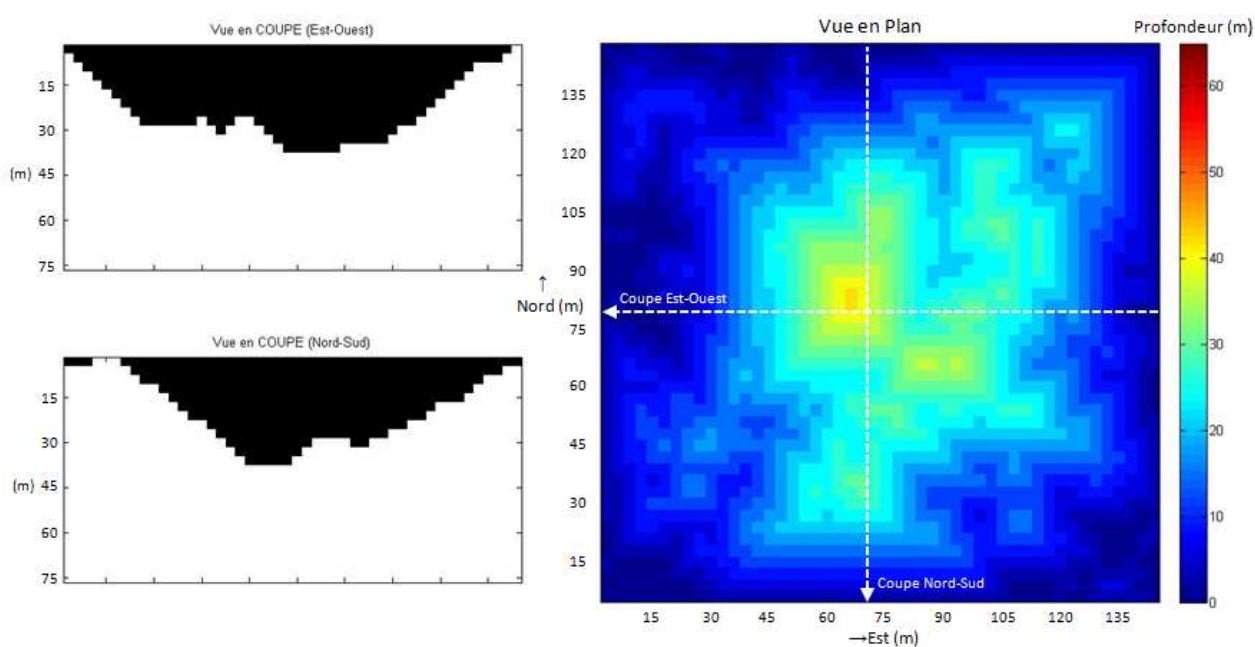
Design de fosse	Valeur nette réelle (M US\$)	Valeur nette estimée (M US\$)	Quantité d'or réelle (K Oz)	Quantité d'or estimées (K Oz)	Volume de la fosse (M m <sup>3</sup> )	Tonnage de minéral (M Tonnes)	Ratio (bloc) minéral : stérile
<i>Fosse optimale</i>	78,16	78,16	425,39	425,39	7,83	13,98	1 : 2
<i>Fosse classique</i>	54,49	59,64	370,02	426,67	7,28	18,40	1 : 12
<i>Fosse stochastique</i>	59,21	67,59	643,13	655,14	13,89	31,32	1 : 6

Les figures 4-4 à 4-6 montrent les vues en plan et en coupe des designs des fosses optimale, classique et stochastique.

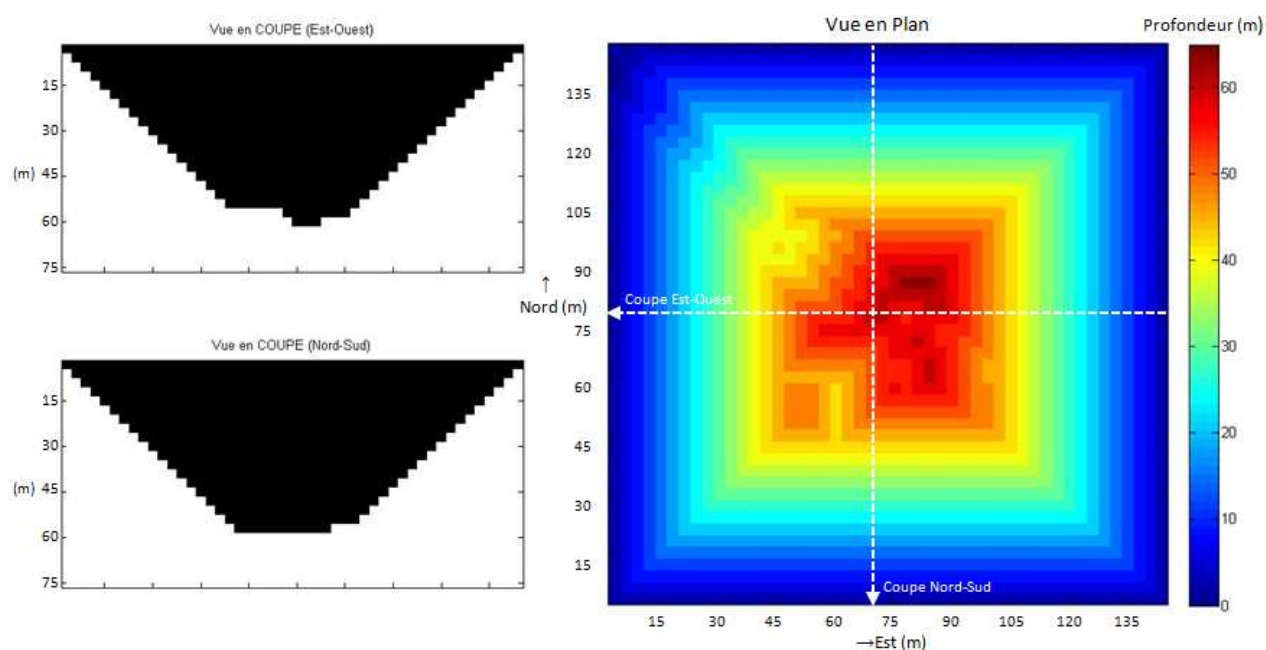




**Figure 4-4: Fosse optimale basée sur la distribution de teneurs réelles**

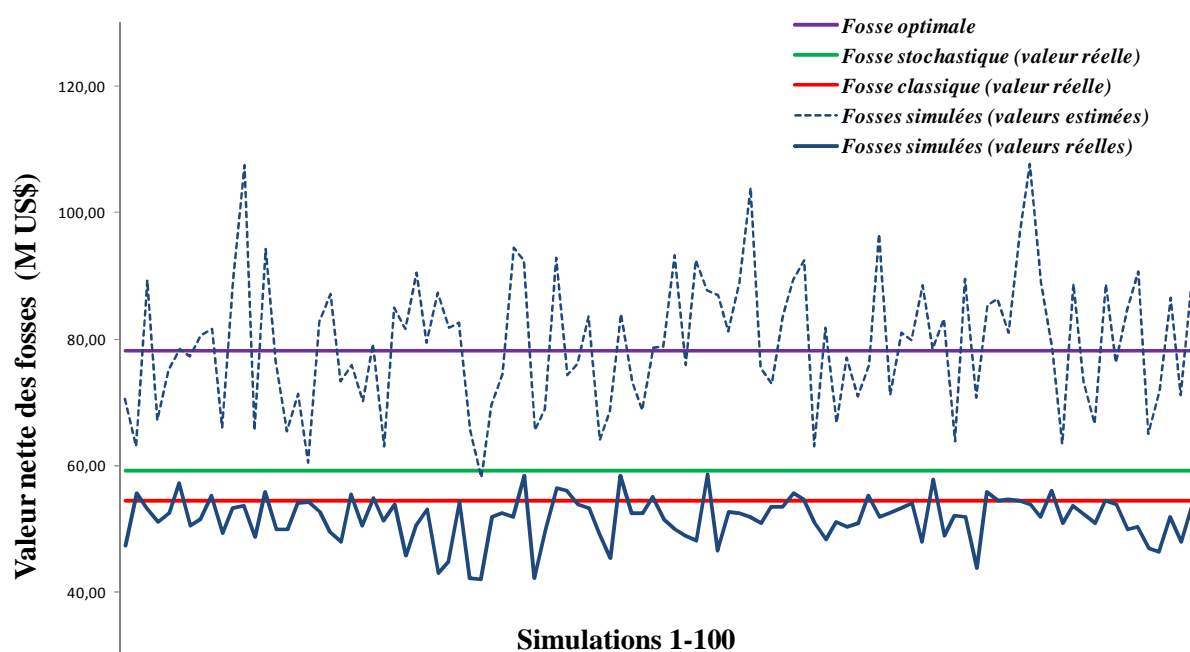


**Figure 4-5: Fosse classique basée sur la distribution de teneurs krigées**



**Figure 4-6: Fosse stochastique basée sur l'ensemble des distributions de teneurs simulées**

La figure 4-7 illustre les valeurs nettes des fosses basées sur les distributions de teneurs simulées.



**Figure 4-7: Valeurs nettes des fosses basées sur chacune des distributions de teneurs simulées**

L'analyse des valeurs estimées et réelles des fosses optimisées au tableau 4.2 et à la figure 4-7 permet d'énoncer les observations suivantes :

*Fosse optimale versus fosses estimées*

- La fosse classique prévoit une valeur nette inférieure de 23,69% à la valeur de la fosse optimale;
- La valeur nette prévue de la fosse classique surestime de 9,45% sa valeur réelle et de 15,31% la quantité d'or réellement récupérable;
- La fosse stochastique prévoit une valeur nette inférieure de 13,52% à la valeur de la fosse optimale;
- La valeur nette que prévoit la fosse stochastique surestime de 14,15% sa valeur réelle et de 1,87% la quantité d'or réellement récupérable;
- Les fosses simulées prévoient des valeurs nettes allant jusqu'à 107,72 M US\$, ce qui excède de 37,82% la valeur de la fosse optimale;
- Les valeurs nettes prévues par les fosses simulées surestiment jusqu'à 103% leurs valeurs réelles et jusqu'à 17% les quantités d'or réellement récupérables.

Les écarts obtenus entre les valeurs estimées et réelles des fosses classique et stochastique peuvent être positifs ou négatifs. Avec l'approche stochastique, la moyenne des écarts devrait être nulle puisque que cette approche est sans biais conditionnel (voir Annexe 5). Un deuxième gisement aléatoire, généré à l'aide des caractéristiques identiques à celui présenté dans ce chapitre, a été optimisé avec l'approche stochastique afin de vérifier cette affirmation. Les résultats sont présentés en Annexe 4.

Pour l'approche classique, on s'attend à une sous-estimation de la valeur réelle en raison de la convexité de la fonction profit. L'Annexe 5 démontre que l'approche classique n'est pas sans biais conditionnel.

Cependant, pour toutes les fosses simulées, on doit s'attendre à un écart positif car on sélectionne les blocs les plus riches dans l'optimisation et l'espérance de la vraie valeur de ces blocs est donc

en moyenne inférieure à la teneur simulée des blocs retenus (comme l'illustre la figure 4-7). Cela est dû au fait qu'une simulation conditionnelle prise seule n'est pas sans biais conditionnel et que sa variance d'estimation est deux fois plus élevée que la variance de krigeage.

#### *Fosse stochastique versus fosse classique*

- La fosse stochastique génère une valeur nette réelle de 59,21 M US\$, ce qui surpasse la valeur nette réelle de la fosse classique (54,49 M US\$) de 8,66%;
- La fosse stochastique permet de récupérer 643,13 milliers d'onces d'or alors que la fosse classique ne permet de récupérer que 370,02 milliers d'onces d'or.

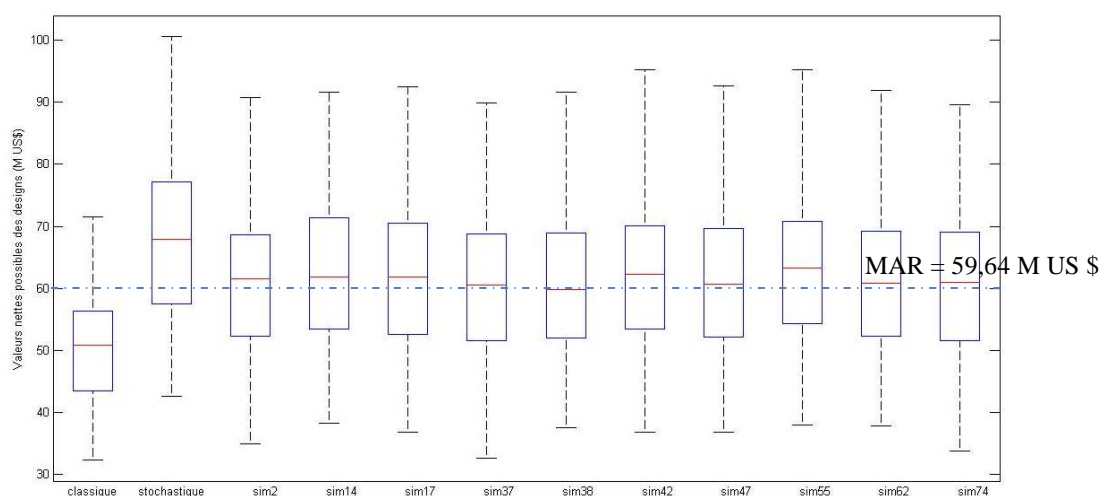
En résumé, comme l'illustre clairement la figure 4-7, la fosse stochastique est plus performante que la fosse classique, en plus d'être plus performante que toutes les fosses simulées.

Dans le cas d'un gisement véritable, la valeur réelle de la fosse optimale et les valeurs réelles des fosses classique et stochastique sont inconnues. L'approche « maximum upside / minimum downside » (Dimitrakopoulos et al., 2007) est alors mise à profit pour comparer la performance de différents designs.

## **4.6 Performance relative des différents designs de fosse**

L'approche « maximum upside / minimum downside » décrite au chapitre 2 à la section 2.5.2, permet d'évaluer le potentiel et le risque d'un design de fosse par l'entremise des statistiques UP et DR. Afin de comparer les fosses stochastique, classique et simulées entre elles, un seuil minimal acceptable de MAR = 59,64 M US \$ (valeur estimée de la fosse krigée) a été fixé sur la valeur voulue de la fosse.

La figure 4-8 illustre l'incertitude liée aux designs étudiés. Les box-plots représentent l'étendue des valeurs possibles des designs stochastique et classique ainsi que des 10 meilleurs designs issus d'une seule simulation.



**Figure 4-8: Box-plot des valeurs possibles des designs à l'étude**

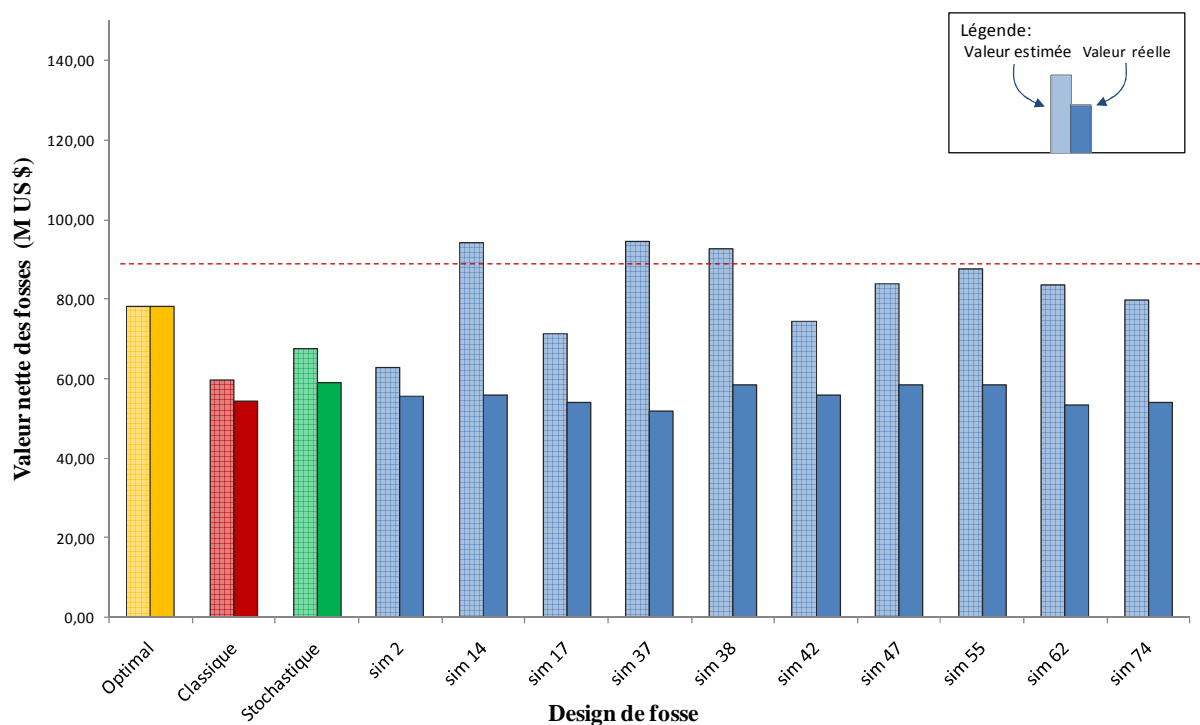
On remarque que tous les percentiles du box-plot du design stochastique ( $P_{10}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{50}$ ,  $P_{75}$  et  $P_{90}$ ) sont supérieurs aux valeurs des designs classique et simulées.

Les statistiques UP et DR pour les designs illustrés à la figure 4-8 sont compilées au tableau 4.4. Celui-ci présente aussi la probabilité que chacun des designs génère le seuil minimal acceptable de 59,64 M US \$ (valeur estimée de la fosse krigée).

**Tableau 4.4: Statistiques UP et DR des designs de fosse à l'étude**

Designs retenus	Statistique <i>UP</i>	Statistique <i>DR</i>	Probabilité de générer le <i>MAR</i> $P[V_{\text{fosse}} \geq \text{MAR}]$
<b>Classique</b>	0,68	9,64	15%
<b>Stochastique</b>	<b>9,83</b>	<b>1,87</b>	<b>69%</b>
<i>sim 2</i>	5,14	3,69	56%
<i>sim 14</i>	6,23	3,18	58%
<i>sim 17</i>	5,89	3,58	61%
<i>sim 37</i>	5,18	4,18	52%
<i>sim 38</i>	5,38	3,80	50%
<i>sim 42</i>	5,94	3,60	56%
<i>sim 47</i>	5,38	3,75	53%
<i>sim 55</i>	6,37	3,09	58%
<i>sim 62</i>	5,37	4,00	55%
<i>sim 74</i>	5,61	4,11	52%

La figure suivante illustre bien l'écart entre les valeurs estimées et réelles des designs de fosse à l'étude.



**Figure 4-9: Écart entre les valeurs estimées et réelles des designs de fosse à l'étude**

L'analyse du tableau 4.4 permet d'énoncer les observations suivantes :

- La fosse stochastique obtient la valeur UP la plus élevée avec 9,83 et la valeur DR la plus faible avec 1,87, ce qui en fait la fosse la plus performante.
- La probabilité que la fosse stochastique génère 59,64 M US \$ (MAR) est de 69%.
- Les fosses simulées obtiennent des valeurs UP inférieures comprises entre 5,14 et 6,37, et des valeurs DR supérieures comprises entre 3,09 et 4,18.
- La probabilité qu'une des meilleures fosses simulées génère 59,64 M US \$ (MAR) varie entre 50% et 61%.
- La fosse classique obtient la valeur UP la plus faible avec 0,68 et la valeur DR la plus élevée avec 9,64.
- La probabilité que la fosse classique génère 59,64 M US \$ (MAR) est de 15%.

La fosse stochastique exploite mieux l'incertitude sur les teneurs et permet d'exploiter davantage le potentiel du gisement, tout en réduisant le risque au maximum. En résumé, comme l'illustre clairement la figure 4-9, la fosse stochastique est plus performante que la fosse classique et la meilleure des fosses simulées.

## 4.7 Synthèse

Grace à un gisement simulé exprimant des caractéristiques semblables aux gisements du projet Canadian-Malartic (Malartic, Québec) et échantillonné de façon similaire, il a été démontré que la fosse stochastique est la fosse la plus performante.

En exploitant le fait que le gisement simulé est entièrement connu, il a été possible de montrer que la valeur nette réelle de la fosse stochastique et la quantité d'or qu'elle récupère sont les plus élevées. De plus, cette fosse montre le plus faible écart entre ses valeurs nettes estimée et réelle.

Finalement, l'approche « maximum upside / minimum downside » a montré que la fosse stochastique maximise le potentiel du gisement et minimise le risque lié à l'incertitude sur les teneurs avec la plus haute statistique UP et la plus faible statistique DR.

## **CHAPITRE 5 ÉTUDE DE CAS – PROJET CANADIAN-MALARTIC**

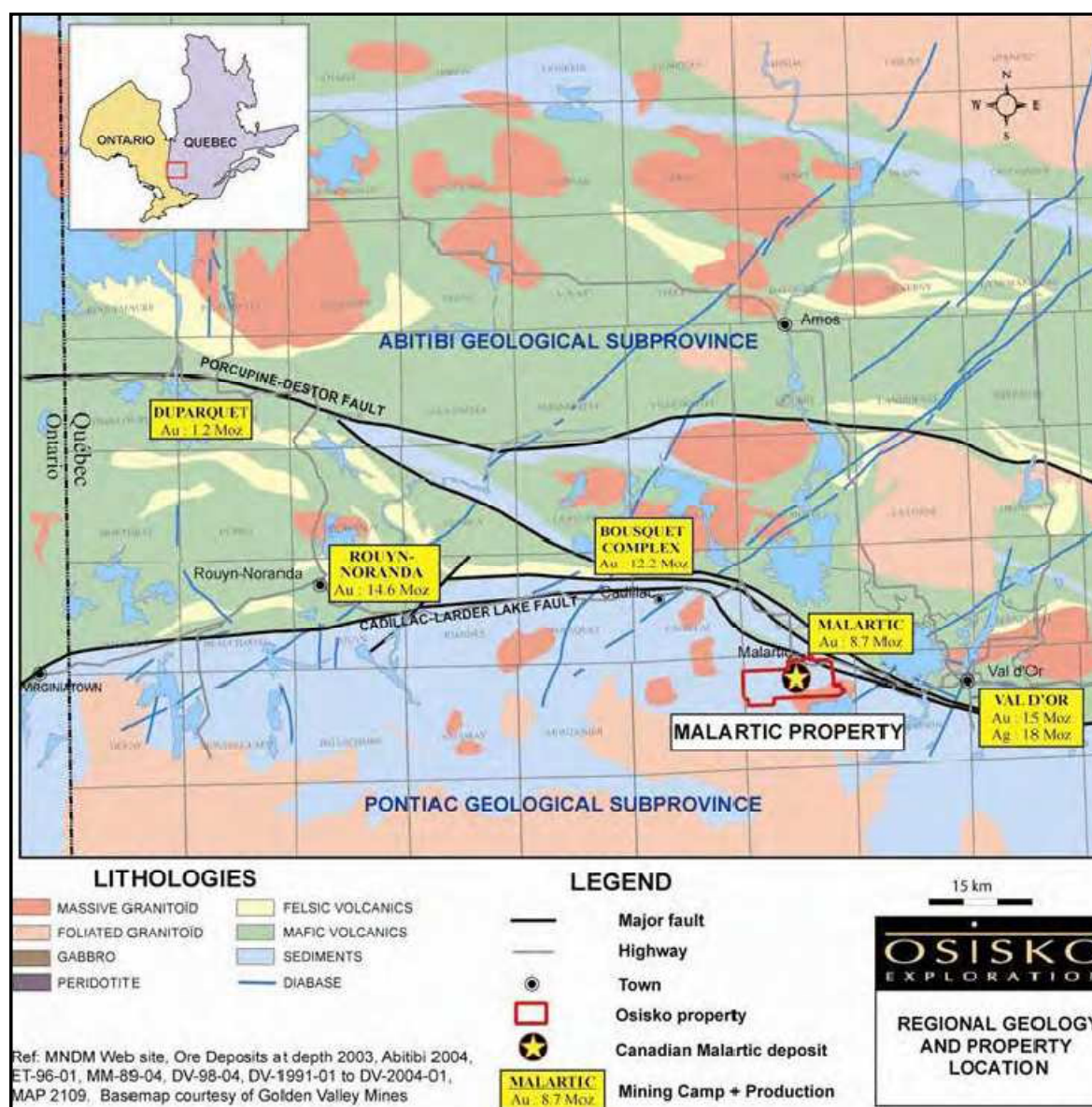
Ce chapitre se consacre à l'étude de deux gisements aurifères du projet Canadian-Malartic détenus par la Corporation Minière Osisko, le gisement principal Canadian-Malartic et le gisement secondaire Barnat, celui-ci étant situé à 1200 m au nord-est du premier. Le chapitre 5 passe en revue la localisation du projet, la géologie locale, le type de gisement, la minéralisation prédominante et la présence de développements souterrains, vestiges d'exploitations minières antérieures. Il sera ensuite question de la campagne de forages menée par Osisko, de la description des données de forages, de la modélisation des variogrammes et de l'estimation des teneurs par krigeage et par simulations géostatistiques conditionnelles. En dernier lieu, l'optimisation du design de la fosse du projet par les approches classique et stochastique sera réalisée et les différents designs obtenus seront comparés entre eux.

### **5.1 Description des gisements du projet Canadian-Malartic**

#### **5.1.1 Localisation**

Le projet Canadian-Malartic est situé dans la région administrative de l'Abitibi-Témiscamingue, au nord-ouest de la province de Québec, Canada. Il repose entièrement dans le canton Fournière au sud de la ville de Malartic. La propriété s'étend sur 13 km en direction est-ouest et sur 4 km en direction nord-sud et son centre se trouve approximativement à la coordonnée UTM 713000E, 5333000N (Latitude 48° 7' 45" N et Longitude 78° 7' W). La propriété comprend également la partie sud de la ville de Malartic (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). La figure 5-1 montre la localisation du projet Canadian-Malartic.

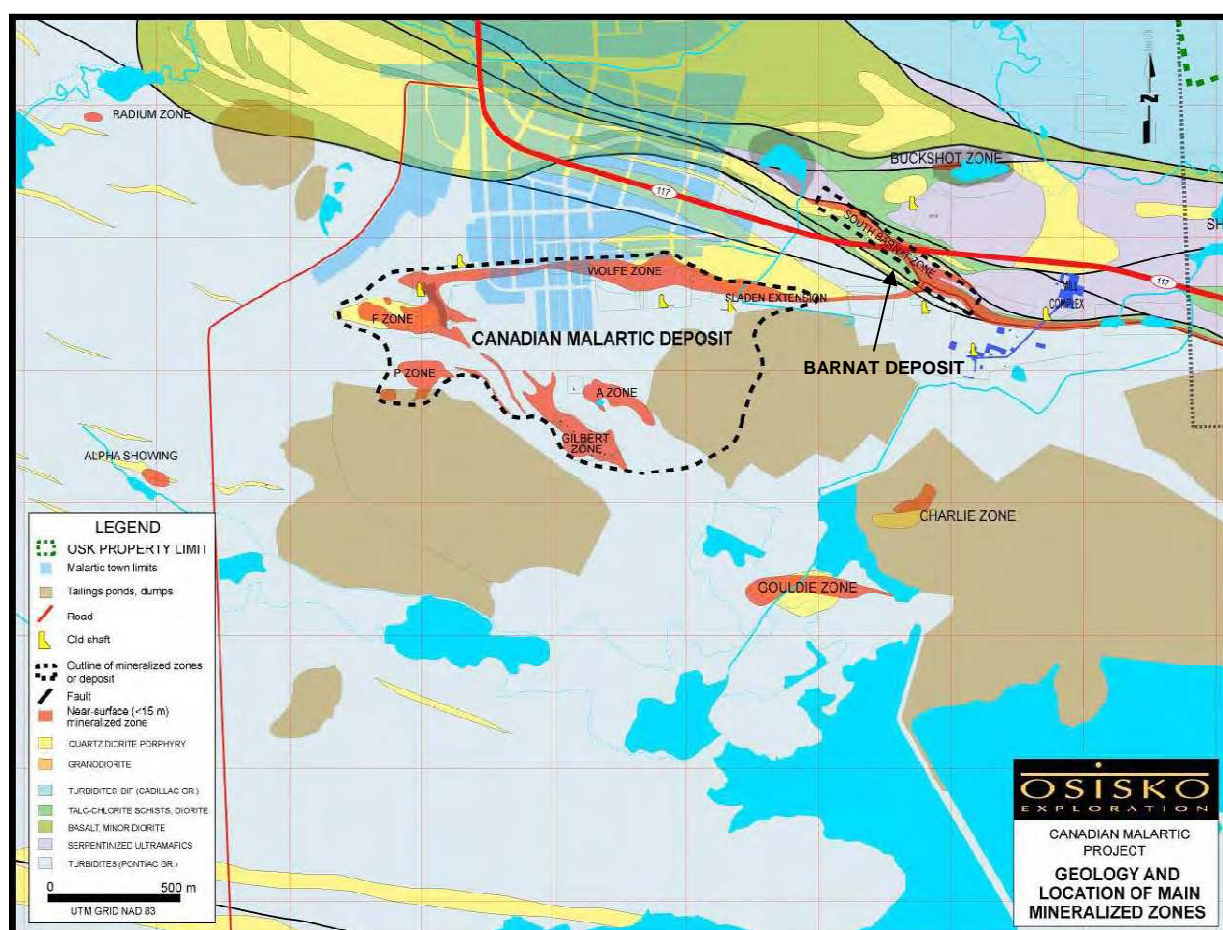




**Figure 5-1: Localisation du projet Canadian-Malartic**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

### 5.1.2 Géologie locale

La majorité de la propriété du projet Canadian-Malartic se trouve sur une zone de méta-sédiments du groupe Pontiac, immédiatement au sud de la faille Cadillac. La portion centrale nord de la propriété couvre une section d'une longueur approximative de 3,5 km de la zone de faille de la faille Cadillac elle-même. Sous cette section se trouve des roches métamorphiques mafiques à ultramafiques d'origine volcanique du Groupe Piché, entrecoupées d'intrusions porphyriques, ainsi que des méta-sédiments du groupe Cadillac au nord de la zone de faille (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010).



**Figure 5-2: Géologie locale du projet Canadian-Malartic**  
modifiée d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

### 5.1.3 Type de gisement et de minéralisation

Les gisements d'or du projet Canadian-Malartic sont de type porphyrique (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010; Issigonis, 1980) et possiblement d'origine orthomagmatique<sup>2</sup>. Des études non publiées, commandées par Osisko, montrent que les porphyres sont composés de diorite calcalcaline et de monzodiorite. Étant donné la nature de la minéralisation du gisement, cette dernière est fortement associée aux intrusions porphyriques (dykes et stocks<sup>3</sup>). Osisko a adopté un modèle de porphyre aurifère pour mener l'exploration géologique de la propriété (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010).

La minéralisation des gisements Canadian-Malartic et Barnat consiste en un halo continu de pyrite disséminée (1 à 5%), associé à de l'or fin natif ainsi qu'à des traces de chalcoppyrite, de sphalérite et de tellure (Eakins, 1962; Fallara et al., 2006). La majorité de la réserve aurifère (70%) se trouve incluse dans les sédiments clastiques altérés du Groupe de Pontiac. Une seconde part importante de la réserve en or (30%) est constituée de la partie supérieure de l'intrusion porphyrique. Un large halo de minéralisation à faible teneur en or (0,3 à 1 ppm Au), associé à une zone d'altération potassique, ceinture le gisement principal (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010).

---

<sup>2</sup> Étape initiale de la cristallisation des roches plutoniques produites par l'activité volcanique, constituées en profondeur. Source : ( Centre national de ressources textuelles et lexicales, adresse URL : <http://www.cnrtl.fr> )

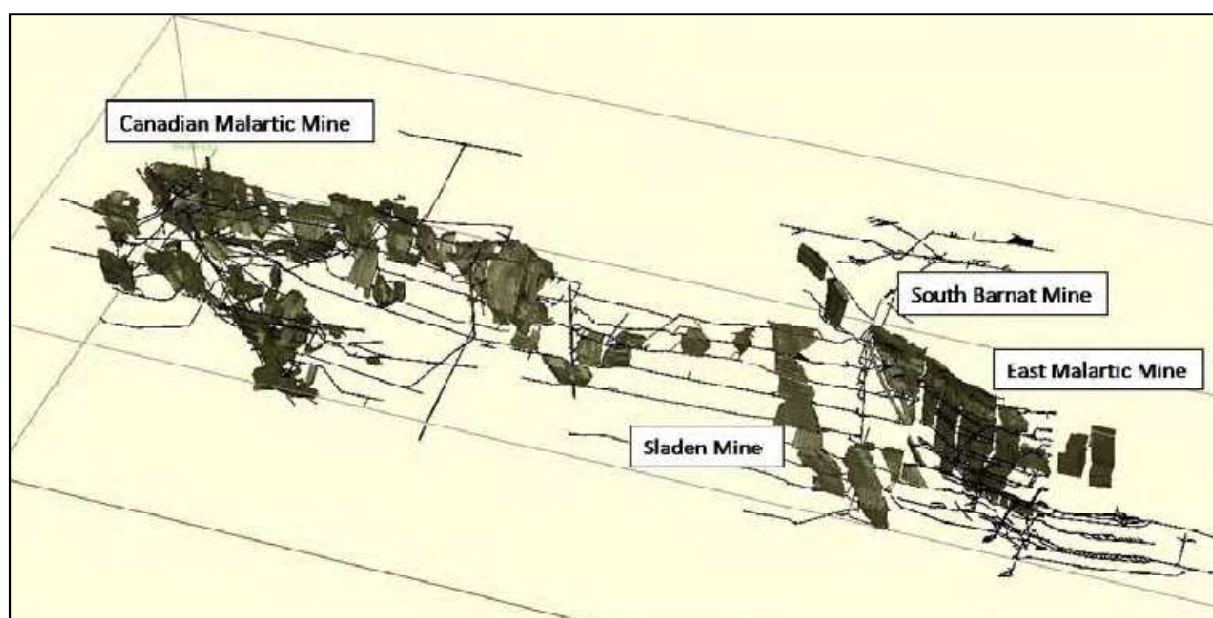
<sup>3</sup> Masse intrusive de roches ignées, plus petite qu'un batholite mais semblable, de section horizontale circulaire, elliptique ou irrégulière, normalement avec des côtés très abrupts.

Source : (Grand dictionnaire terminologique, Office québécois de la langue française, adresse URL : [http://www.granddictionnaire.com/btml/fra/r\\_motclef/index800\\_1.asp](http://www.granddictionnaire.com/btml/fra/r_motclef/index800_1.asp) )



## 5.2 Développements souterrains antérieurs au projet

La propriété Canadian-Malartic inclut les sites des anciennes mines souterraines Canadian Malartic, South-Barnat, Sladen et East-Malartic. La figure 5-3 montre le réseau de galeries et les chantiers d'exploitation des anciennes mines. Une fois le calcul des teneurs achevé, un modèle de vide a été créé afin de réduire les ressources aurifères actuelles du projet. Basé sur ce modèle, le volume total des excavations antérieures est légèrement supérieur à 5,65 million m<sup>3</sup> (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010).

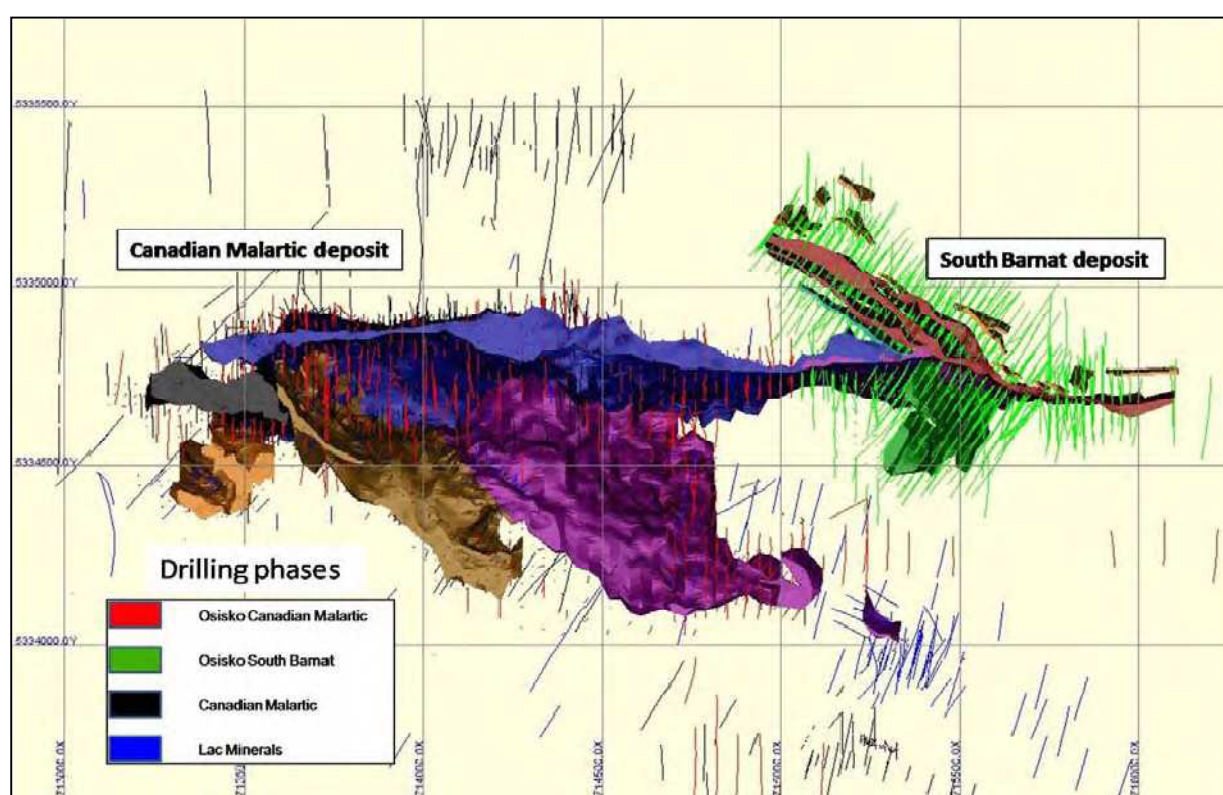


**Figure 5-3: Développements souterrains issus d'exploitations minières antérieures**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

## 5.3 Campagne de forages et échantillonnage des gisements

En mars 2005, Osisko a entrepris une campagne de forages d'exploration sur le gisement Canadian-Malartic. Les forages ont été dispersés uniformément sur une grille de 30 m par 30 m. À la fin du mois d'octobre 2009, Osisko avait complété un total de 1437 forages, constituant 339841 m de forage dans le gisement Canadian-Malartic.

En juin 2008, une seconde campagne de forages d'exploration a été déployée sur le gisement Barnat. Cette fois, les forages ont été dispersés sur une grille de 25 m par 25 m. En 2009, des forages additionnels ont été ajoutés au sud du gisement Barnat afin de déterminer l'extension possible de la zone minéralisée. À la fin du mois d'octobre 2009, Osisko avait complété un total de 942 forages, constituant 221361 m de forage dans le gisement Barnat. (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). Les données de forage et les teneurs des échantillons de forage sont décrites à la section 5.4.



**Figure 5-4: Campagne de forages menée par Osisko pour le projet Canadian-Malartic**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

## 5.4 Description des données de forage et du « Block Model »

Les données brutes utilisées pour l'estimation des ressources aurifères du projet Canadian-Malartic sont regroupées en deux fichiers : une base de données de forage sur Microsoft Access™ et un « Block Model » sur Microsoft Excel™.

La base de données de forage contient les tables et les champs suivants :

- **Table *Collar information*** : no forage, coordonnées xyz du sommet du forage  
longueur totale du forage
- **Table *Down-hole survey*** : no forage, profondeurs le long du forage, pendage, azimuth
- **Table *Assay*** : no forage, intervalle de profondeur, no échantillon  
teneur de l'échantillon (ppm)
- **Table *Geology*** : no forage, intervalle de profondeur, no échantillon  
domaine géologique, type d'altération

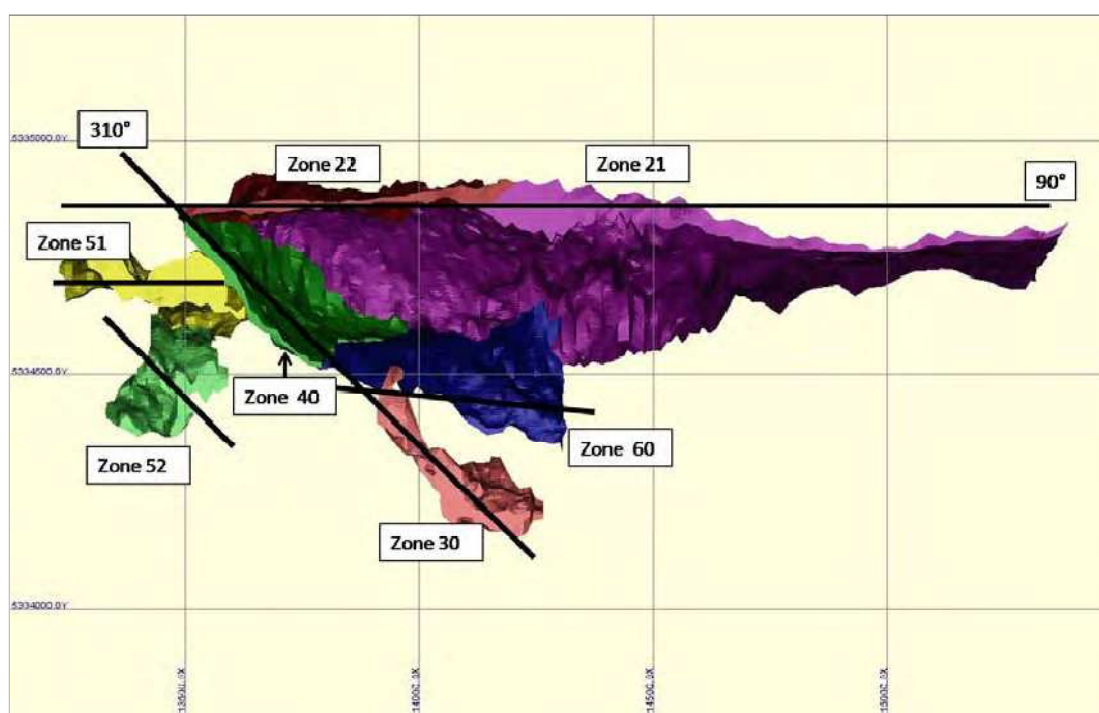
Le « Bloc Model » fournit les informations figurant au tableau 5.1 sur les blocs constituant les gisements du projet :

**Tableau 5.1: Informations concernant le « Block Model » du projet Canadian-Malartic**

<b>Origine du « Block Model »</b>	<i>x (Est)</i>	712700
	<i>y (Nord)</i>	5333400
	<i>z (Profondeur)</i>	360
<b>Dimension des blocs</b>	<i>x (Est)</i>	20 m
	<i>y (Nord)</i>	10 m
	<i>z (Profondeur)</i>	10 m
<b>Index des blocs</b>	<i>x (Est)</i>	1 à 200
	<i>y (Nord)</i>	1 à 240
	<i>z (Profondeur)</i>	1 à 76
<b>Coordonnées des centroides des blocs</b>		(x,y,z)
<b>Domaines géologiques assignés aux blocs</b>		
<b>Densités assignés aux blocs</b>		
<b>% de vide dans les blocs</b>		
<b>Teneurs (Au) assignées aux blocs</b>		

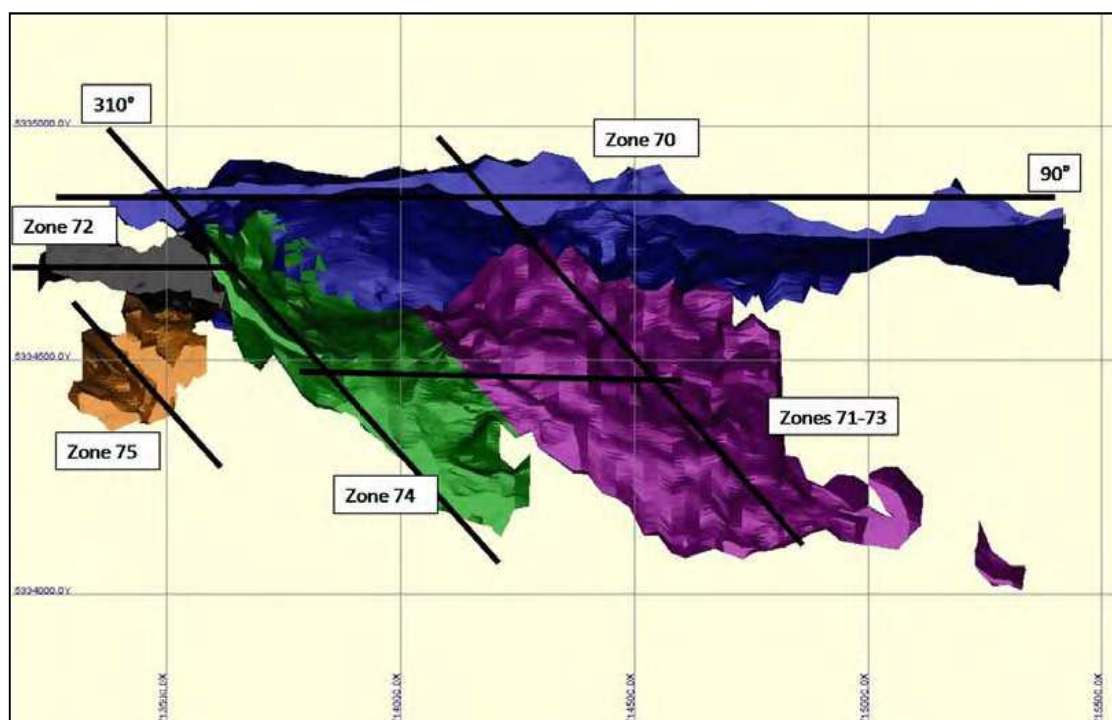
La composition des échantillons de forage a été fixée à 5 m. Ce choix a été motivé par la taille de l'opération minière potentielle qui nécessitera des bancs d'une hauteur de 10 m. Les composites d'une longueur inférieure à 1,5 m ont été exclus de la base de données. De plus, les échantillons de teneur inférieure à la limite de détection (0,005 ppm Au), ainsi que les portions de forage non échantillonnées, se sont vues attribuer une teneur de 0,001 ppm Au (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010).

Le gisement Canadian-Malartic a été divisé en 14 domaines géologiques. Parmi ces domaines, sept ont été identifiés comme étant à haute teneur (21, 22, 30, 40, 51, 52 et 60). Les principaux domaines à haute teneur (21, 22, 52 et 60) sont orientés est-ouest, alors que les autres (30, 40 et 51) sont plutôt orientés ouest-nord-ouest (300 à 320°) (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). Ces domaines sont représentés à la figure 5-5.



**Figure 5-5: Domaines géologiques à haute teneur dans le gisement Canadian-Malartic**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

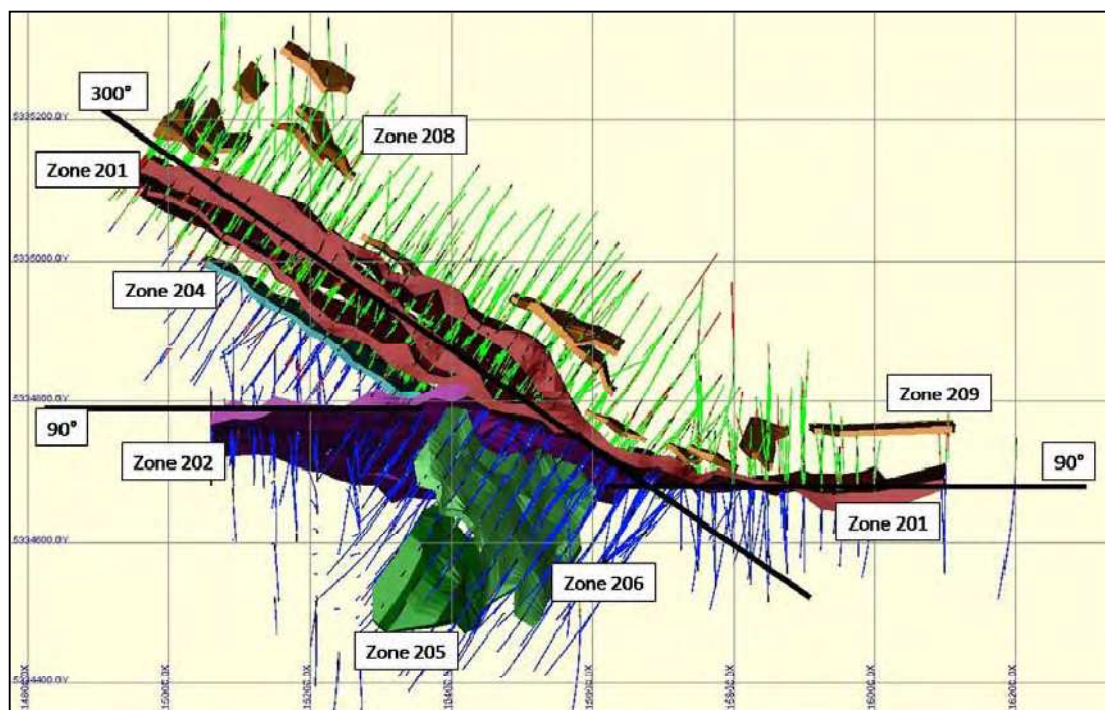
Six autres domaines (70, 71, 72, 73, 74, et 75) consistent en des enveloppes d'altération de plus faible teneur. Le domaine 10 représente une large enveloppe de faible teneur définissant les limites de la minéralisation (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). Ces domaines sont représentés à la figure 5-6.



**Figure 5-6: Domaines géologiques à faible teneur dans le gisement Canadian-Malartic**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

Le gisement Barnat a été divisé en sept domaines géologiques à haute teneur (201, 202, 204, 205, 206, 208 et 209). Parmi ces domaines, quatre sont localisés dans des dykes porphyriques (201, 204, 208 et 209). Les domaines 205 et 206 sont situés dans les sédiments et le domaine 202 constitue le prolongement du domaine 21 du gisement Canadian-Malartic. Il est important de mentionner que le domaine 10 du gisement Canadian-Malartic s'étend jusqu'aux sédiments du gisement Barnat (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). Ces domaines sont représentés à la figure 5-7.





**Figure 5-7: Domaines géologiques dans le gisement Barnat**  
d'après Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., (2010)

## 5.5 Modélisation des variogrammes

Le rapport « Updated resource and reserve estimates on the Canadian Malartic Project, 2010 », Belzile Solutions Inc., fournit un variogramme pour chacun des domaines géologiques énoncés à la section précédente. Ces variogrammes sont anisotropes et comportent plusieurs structures ( $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$ ), comme le montre le tableau 5.2.

**Tableau 5.2: Modèles de variogrammes des différents domaines géologiques du projet Canadian-Malartic**

Domaine	Modèle	$c_0$	$c_1$	$a_1$ (effective)			$c_2$	$a_2$ (effective)			Rotation*		
				X	Y	Z		X	Y	Z	X	Y	Z
10	exponentiel	0,3	0,58	10	30	17	0,12	30	150	100	3,9	-16,6	70,4
21	exponentiel	0,2	0,65	18	22	20	0,15	60	150	100	40,9	48,6	89,1
22	exponentiel	0,2	0,58	10	12	25	0,22	40	30	60	28,3	40,5	22,6
30	exponentiel	0,25	0,7	10	15	20	0,05	20	50	37	-64,4	53,2	-121,0
40	exponentiel	0,15	0,75	15	15	25	0,1	22	125	75	-20,2	-46,8	38,8
51	exponentiel	0,1	0,85	15	15	20	0,05	20	30	40	0,0	-40,0	90,0
52	exponentiel	0,2	0,67	12	22	13	0,13	50	50	100	5,1	-24,5	-72,1
60	exponentiel	0,2	0,5	10	25	30	0,3	20	40	60	-88,5	49,0	-101,8
70	exponentiel	0,25	0,6	15	25	15	0,15	45	70	100	21,4	28,4	69,5
71	exponentiel	0,25	0,56	20	40	15	0,19	80	150	50	8,0	38,3	71,8
72	exponentiel	0,25	0,4	30	70	10	0,35	120	120	25	0,0	87,0	72,0
73	exponentiel	0,25	0,65	25	30	30	0,1	50	60	60	-0,4	0,9	-4,0
74	exponentiel	0,25	0,5	35	20	25	0,25	75	100	50	-44,2	21,1	18,4
75	exponentiel	0,2	0,78	15	40	40	0,02	30	75	75	0,0	-42,0	90,0
201	exponentiel	0,2	0,7	7,5	13	16	0,1	30	200	120	51,9	3,9	67,9
202	exponentiel	0,1	0,6	20	12	20	0,3	150	20	75	0,0	57,0	-10,0
204	exponentiel	0,3	0,6	15	5	25	0,1	30	10	100	-8,6	-59,6	-15,1
205-206	exponentiel	0,1	0,7	15	15	5	0,2	35	100	15	55,8	19,4	99,3
208	exponentiel	0,15	0,1	30	5	10	0,75	100	15	50	7,0	-23,0	-43,4
209	exponentiel	0,15	0,1	30	5	10	0,75	100	15	50	0,0	-15,0	90,0

Des modèles plus simples isotropes à deux structures ( $c_0$  et  $c$ ) ont été aussi ajustés et comparés aux modèles du tableau 5.2. L'ajustement de tous les variogrammes a été vérifiée par la validation croisée. Cette technique de validation est présentée à la section 5.5.2.

### 5.5.1 Ajustement visuel et automatique

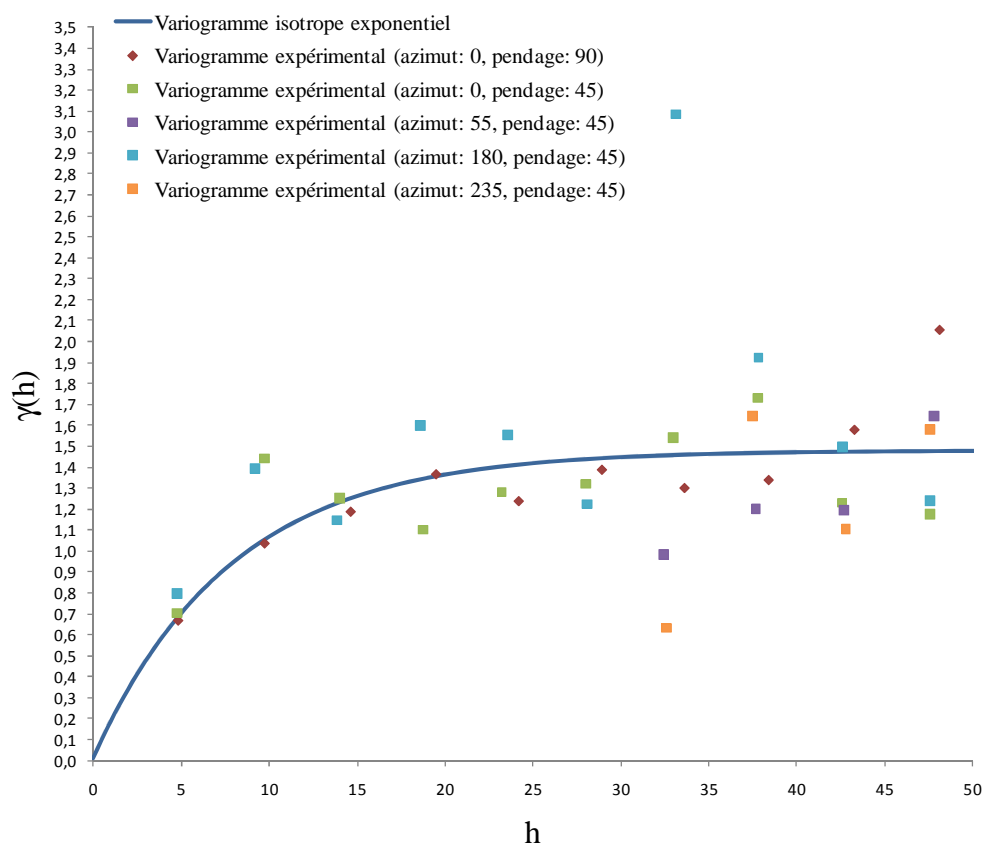
La modélisation des variogrammes comprend deux étapes. Premièrement, il convient de déterminer le type de modèle de variogramme (ex. linéaire, sphérique, exponentiel, etc.), le nombre de structures (ex. un effet de pépite, une structure sphérique et une structure exponentielle) et la présence possible d'anisotropie dans le modèle.

---

\* Les angles de rotation des modèles sont donnés selon la convention trigonométrique en 3D, les rotations se font selon les axes x, y et z et sont effectuées dans l'ordre z, y et x (sens antihoraire, système de la main-droite).

Ensuite, les paramètres du modèle (effet de pépite, palier et portée) sont estimés.

Les teneurs en or échantillonnées par Osisko ont permis de calculer des variogrammes expérimentaux pour chaque domaine géologique. La première étape de la modélisation des variogrammes a été basée sur un ajustement visuel du modèle de variogramme pour chaque domaine géologique à l'aide des variogrammes expérimentaux. La figure suivante montre un exemple d'ajustement visuel d'un modèle exponentiel sur les variogrammes expérimentaux du domaine 74.



**Figure 5-8: Ajustement visuel d'un modèle de variogramme exponentiel sur les variogrammes expérimentaux du domaine 74**

La seconde étape de modélisation a été réalisée par la méthode automatique d'ajustement des moindres carrés. Avec cette méthode, on ajuste les paramètres des variogrammes de façon à minimiser la somme des carrés de l'écart entre valeurs expérimentales et valeurs théoriques du modèle. Une fonction de pondération proportionnelle au nombre de paires de chaque point du variogramme peut être utilisée. On peut également donner plus de poids aux faibles valeurs de  $h$  (distance entre 2 teneurs  $z(x)$ , voir section 3.2.1).

Les principaux avantages de cette méthode sont sa rapidité et sa reproduction fidèle de l'ajustement visuel, tout en éliminant une certaine part de subjectivité. Par contre, le critère des moindres carrés est étroitement lié à la distribution normale et est assez sensible à la présence de points aberrants sur le variogramme expérimental. De plus, la solution optimale obtenue n'est pas assurément un optimum global, ce qui implique que le résultat peut dépendre du point de départ de l'algorithme.

Les paramètres des variogrammes du projet Canadian-Malartic ont été calculés avec un programme écrit sur l'interface de programmation Matlab v.7.8.0 (Marcotte, 2002). La fonction de pondération utilisée consiste à appliquer une puissance de 2 sur les valeurs de  $h$  en plus de la pondération sur le nombre de paires.

### 5.5.2 Validation croisée

La validation croisée permet de vérifier l'ajustement d'un estimateur en calculant des erreurs d'estimation sur chacun des points estimés et de calculer des statistiques sur ces erreurs. Elle consiste à retirer tour à tour une donnée connue et à estimer ce point à l'aide des autres données. À la fin du processus, on dispose de la vraie valeur observée  $Z_i$  et de la valeur estimée  $Z_i^*$  obtenue en utilisant les données voisines et l'estimateur testé. On peut ajuster un meilleur variogramme en répétant le processus de validation croisée sur différents modèles et en comparant les statistiques des écarts  $e_i = Z_i - Z_i^*$  obtenues. Dans ce mémoire, la validation croisée a été effectuée sur les données échantillonnées avec un programme écrit sur l'interface de programmation Matlab v.7.8.0 (Marcotte, 1991). Les tableaux 5.3 et 5.4 présentent les statistiques d'écart pour les variogrammes isotropes et les variogrammes de Belzile Solutions Inc. pour les différents domaines géologiques du projet Canadian-Malartic.

**Tableau 5.3: Statistiques d'écart pour les variogrammes isotropes**

Domaine	Validation croisée			
	médiane (écart <sup>2</sup> )	moyenne (écart <sup>2</sup> )	Écart-type des écarts	nombre de données
10	0,02	0,18	0,43	27835
21	0,38	1,57	1,25	10124
22	0,62	5,96	2,44	3244
30	0,48	1,77	1,33	804
40	0,65	2,40	1,55	3048
51	0,28	1,25	1,12	725
52	0,23	1,48	1,22	4460
60	0,65	1,93	1,39	1114
70	0,06	0,29	0,54	5178
71	0,10	0,66	0,81	5205
72	0,06	0,26	0,51	1302
73	0,22	1,07	1,03	544
74	0,11	0,36	0,60	1477
75	0,09	0,40	0,64	471
201	0,75	8,80	2,97	6311
202	0,41	1,67	1,29	1684
204	0,25	0,91	0,95	680
205-206	0,25	1,44	1,20	681
208	0,78	9,76	3,13	520
209	2,02	5,19	2,31	123

**Tableau 5.4: Statistiques d'écart pour les variogrammes de Belzile Solutions Inc.**

Domaine	Validation croisée			
	médiane (écart <sup>2</sup> )	moyenne (écart <sup>2</sup> )	Écart-type des écarts	nombre de données
10	0,02	0,18	0,42	27835
21	0,35	1,53	1,24	10124
22	0,62	5,82	2,41	3244
30	0,49	1,93	1,39	804
40	0,56	2,41	1,55	3048
51	0,37	1,39	1,18	725
52	0,24	1,45	1,20	4460
60	0,58	2,00	1,42	1114
70	0,06	0,29	0,54	5178
71	0,09	0,63	0,79	5205
72	0,06	0,26	0,51	1302
73	0,19	1,05	1,03	544
74	0,09	0,37	0,61	1477
75	0,07	0,45	0,68	471
201	0,66	8,79	2,97	6311
202	0,33	1,62	1,27	1684
204	0,26	0,99	0,99	680
205-206	0,21	1,32	1,15	681
208	0,81	9,77	3,14	520
209	1,90	5,91	2,46	123

La médiane des écarts au carré est la statistique la plus robuste pour qualifier l'ajustement des variogrammes puisqu'elle n'inclut pas les valeurs extrêmes comme le fait la moyenne. La valeur de la médiane des écarts au carré pour l'ajustement des variogrammes se situe près de zéro pour tous les domaines géologiques, autant pour les variogrammes isotropes (de 0,02 à 2,02 et moyenne de 0,42) que pour les variogrammes de Belzile Solutions Inc. (de 0,02 à 1,90 et moyenne de 0,40). Les domaines pour lesquels les variogrammes sont le moins bien ajustés sont les domaines où la taille de l'échantillon de teneurs connues est plus petite. Malgré cela, ces ajustements restent acceptables. Le tableau 5.5 montre la différence d'ajustement entre les variogrammes isotropes et les variogrammes de Belzile Solutions Inc. Les différences sont presque nulles pour la médiane, la moyenne des écarts au carré et l'écart-type des écarts. Par conséquent, l'utilisation de modèles de variogrammes isotropes ne devrait pas affecter significativement la valeur des teneurs estimées obtenues.

**Tableau 5.5: Différence d'ajustement entre les variogrammes isotropes et les variogrammes de Belzile Solutions Inc.<sup>5</sup>**

Domaine	médiane (écart <sup>2</sup> )	moyenne (écart <sup>2</sup> )	Écart-type des écarts	nombre de données
10	0,00	0,00	-0,01	27835
21	-0,03	-0,04	-0,01	10124
22	0,00	-0,13	-0,03	3244
30	0,00	0,16	0,06	804
40	-0,09	0,01	0,00	3048
51	0,08	0,14	0,06	725
52	0,02	-0,04	-0,01	4460
60	-0,07	0,07	0,03	1114
70	0,00	0,00	0,00	5178
71	0,00	-0,03	-0,02	5205
72	0,00	0,01	0,01	1302
73	-0,03	-0,01	-0,01	544
74	-0,02	0,01	0,00	1477
75	-0,02	0,05	0,04	471
201	-0,09	-0,01	0,00	6311
202	-0,08	-0,05	-0,02	1684
204	0,01	0,08	0,04	680
205-206	-0,04	-0,12	-0,05	681
208	0,03	0,01	0,00	520
209	-0,11	0,71	0,15	123

<sup>5</sup> Un écart positif représente un meilleur ajustement pour le variogramme isotrope que pour le variogramme de Belzile Solutions Inc.

### 5.5.3 Variogrammes retenus

Deux modèles de variogramme ont été retenus pour définir la covariance entre les teneurs  $z(x_i)$  et  $z(x_i+h)$  des gisements du projet Canadian-Malartic. Pour les domaines 22, 40, 51, 73, 75, 204, 205 et 206, un modèle sphérique a été retenu, tandis que les autres domaines étaient mieux représentés par un modèle exponentiel.

$$\text{Modèle sphérique } \gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ c \left( \frac{1,5h}{a} - 0,5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right) + c_0 & \text{si } a > h > 0 \\ c + c_0 & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{Modèle exponentiel } \gamma(h) = c \left( 1 - \exp \left( \frac{-3|h|}{a} \right) \right) + c_0 \quad (5.2)$$

Les paramètres des variogrammes des différents domaines géologiques sont présentés au tableau 5.6.

**Tableau 5.6: Paramètres des variogrammes du projet Canadian-Malartic**

Domaine	Modèle	c <sub>0</sub>	c	a (effective)
10	exponentiel	0,08	0,12	46,34
21	exponentiel	0,30	1,36	23,01
22	sphérique	0,38	0,86	40,44
30	exponentiel	0,10	1,02	30,00
40	sphérique	0,15	0,45	11,18
51	sphérique	0,31	1,31	17,15
52	exponentiel	0,24	0,83	16,57
60	exponentiel	0,10	0,82	18,00
70	exponentiel	0,13	0,18	25,72
71	exponentiel	0,08	0,39	20,66
72	exponentiel	0,13	0,42	82,03
73	sphérique	0,22	0,55	17,83
74	exponentiel	0,01	1,46	23,62
75	sphérique	0,03	0,35	15,80
201	exponentiel	0,73	1,29	36,19
202	exponentiel	0,29	0,54	39,07
204	sphérique	0,43	0,82	4,76
205-206	sphérique	0,02	0,68	21,00
208	exponentiel	0,10	1,06	30,00
209	exponentiel	0,02	1,52	7,49

## 5.6 Estimation des teneurs par krigeage ordinaire

Les teneurs en or échantillonnées par Osisko ont été utilisées comme données pour réaliser un krigeage ordinaire, à l'aide des variogrammes isotropes présentés au tableau 5.6. La teneur des blocs a été calculée en faisant la moyenne des teneurs des points krigés se trouvant à l'intérieur de chaque bloc. Un nombre de 54 points ont été krigés par bloc, pour un total de 6803352 points pour le projet entier.

Le krigeage a utilisé 50 teneurs échantillonnées  $z$  dans un voisinage circulaire de rayon allant de 120 m à 480 m pour estimer une teneur  $z^*$ .

### 5.6.1 Comparaison des échantillons et des teneurs estimées

Les différents domaines géologiques du projet Canadian-Malartic ont été krigés séparément avec leurs variogrammes respectifs. La moyenne et la variance des échantillons et des teneurs krigées sont présentées au tableau suivant.

**Tableau 5.7: Paramètres des distributions de teneurs échantillonnées et krigées**

(1) Domaine	(2) Moyenne de l'échantillon (ppm)	(3) Variance de l'échantillon (ppm <sup>2</sup> )	(4) Moyenne des teneurs krigées (ppm)	(5) Variance des teneurs krigées (ppm <sup>2</sup> )	(4)/(2) Ratio entre les moyennes	(5)/(3) Ratio entre les variances
10	0,24	0,18	0,23	0,02	95%	13%
21	1,88	1,96	1,77	0,53	94%	27%
22	1,95	4,43	1,89	1,11	97%	25%
30	1,86	2,10	1,85	0,57	99%	27%
40	1,96	2,51	1,95	0,38	100%	15%
51	1,50	1,49	1,52	0,25	101%	17%
52	1,34	1,36	1,36	0,26	101%	19%
60	1,54	1,74	1,54	0,35	100%	20%
70	0,64	0,30	0,63	0,03	98%	9%
71	0,74	0,60	0,75	0,14	101%	23%
72	0,54	0,32	0,50	0,05	91%	15%
73	0,84	0,80	0,86	0,09	102%	11%
74	0,58	0,37	0,57	0,11	98%	31%
75	0,51	0,29	0,52	0,04	103%	12%
201	1,81	7,41	1,86	1,33	102%	18%
202	1,54	1,92	1,64	0,44	106%	23%
204	1,04	1,42	1,02	0,06	98%	4%
205	0,86	0,49	0,90	0,06	104%	12%
206	1,30	1,46	1,25	0,31	97%	22%
208	1,88	7,79	1,79	2,15	95%	28%
209	1,70	3,33	2,02	0,07	119%	2%



Les distributions de teneurs krigées respectent la moyenne des échantillons de chaque domaine géologique. Le ratio entre les moyennes des teneurs krigées et les moyennes des échantillons varie entre 91% et 119% avec une moyenne de 100,05%. Les écarts par rapport à un ratio de 100% correspondent à des fluctuations aléatoires attendues.

Le ratio entre les variances des teneurs krigées et les variances des échantillons passe de 2% à 31%, avec une moyenne de 17,76%. Le krigeage étant un estimateur qui produit un lissage des données, il est attendu que la variance des teneurs krigées soit réduite.

## 5.7 Simulation des teneurs par la méthode des bandes tournantes

Un nombre de 50 simulations conditionnelles ont été réalisées avec la méthode des bandes tournantes, conditionnées à l'aide des données échantillonnées par Osisko dans une phase de post-conditionnement par krigeage simple.

La méthode des bandes tournantes impose que les données échantillonnées suivent une distribution marginale normale. Les données échantillonnées par Osisko ont dû subir une transformation normale avant d'être utilisées pour modéliser les modèles de covariance et pour le post-conditionnement puisque leur distribution exacte est inconnue. Pour ce faire, la fonction de distribution cumulative des teneurs ( $\Phi_Z$ ) doit premièrement être réalisée à partir des teneurs échantillonnées  $z$ .

$$\Phi_Z(z) = P[Z \leq z] \quad (5.3)$$

Une fois la probabilité cumulative calculée pour chaque teneur échantillonnée, on utilise une loi normale standard inverse pour obtenir la teneur transformée.

Les teneurs transformées sont alors simulées et post-conditionnées. Les teneurs simulées conditionnement ainsi obtenues subissent ensuite la transformation inverse vers leur domaine initial. Les étapes des transformations normale et inverse sont montrées à la figure 3-1 du chapitre 3.

### 5.7.1 Modèle de covariance utilisé pour les simulations

Les différents domaines géologiques du projet Canadian-Malartic ont été simulés séparément avec leurs modèles de covariance respectifs. Les modèles de covariance  $C_Z(h)$  utilisés ont été obtenus par ajustement visuel et automatique avec les teneurs échantillonnées par Osisko, transformées en distributions normales. Les paramètres des modèles de covariance pour les différents domaines géologiques sont présentés au tableau 5.8.

**Tableau 5.8: Paramètres des modèles de covariance du projet Canadian-Malartic**

Domaine	Modèle	$c_0$	$c$	$a$ (effective)
10	sphérique	0,47	0,53	47,67
21	sphérique	0,28	0,72	27,05
22	sphérique	0,25	0,75	27,08
30	sphérique	0,00	1,00	11,41
40	sphérique	0,18	0,82	14,79
51	sphérique	0,16	0,84	16,52
52	sphérique	0,31	0,59	23,32
60	sphérique	0,20	0,80	12,00
70	sphérique	0,39	0,61	30,12
71	sphérique	0,36	0,64	33,26
72	sphérique	0,39	0,61	35,91
73	sphérique	0,14	0,86	16,25
74	sphérique	0,24	0,76	19,93
75	sphérique	0,03	0,97	14,24
201	sphérique	0,40	0,56	21,89
202	sphérique	0,28	0,72	24,03
204	sphérique	0,67	0,33	8,06
205-206	sphérique	0,20	0,80	17,50
208	sphérique	0,56	0,28	54,66
209	sphérique	0,69	0,19	98,60

Les 50 simulations ont été générées par la méthode des bandes tournantes, à l'aide de 500 variables aléatoires  $Y_i(t)$  simulées indépendamment sur 500 droites  $u_i$ . L'effet de pépité  $c_0$  n'est pas simulé sur les droites  $u_i$ ; il est ajouté après que la structure du modèle de covariance  $C_Y(h)$  ait été simulée.

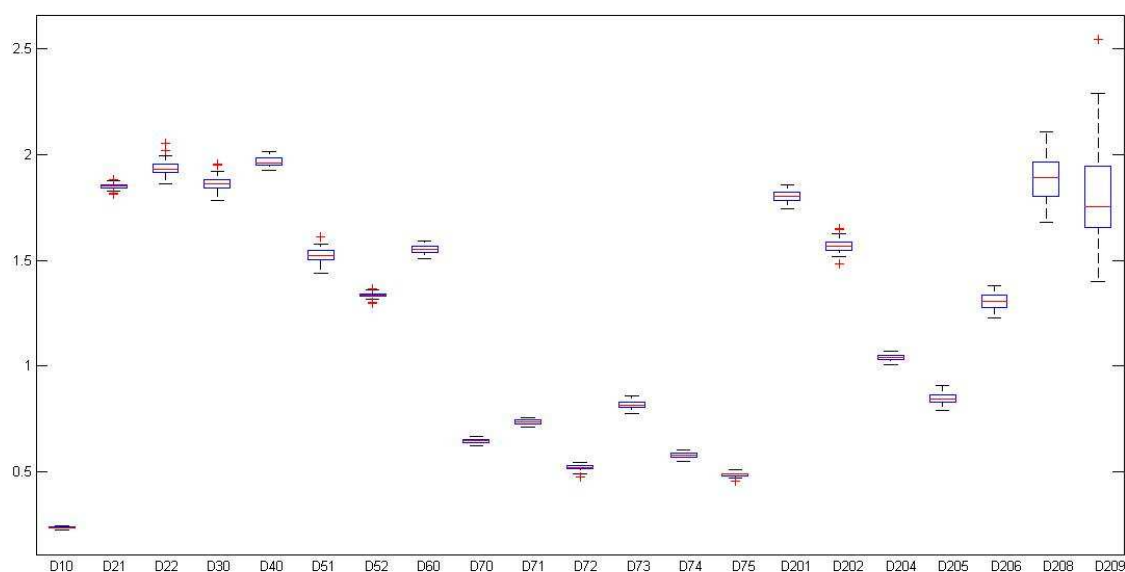
### 5.7.2 Post-conditionnement des simulations

Le post-conditionnement a été effectué par krigeage simple. Le post-conditionnement a eu lieu dans le domaine normal. Par conséquent, les données conditionnantes ont subi une transformation normale avant d'avoir été utilisées et elles suivent une loi normale  $N(0,1)$ . Pour chaque domaine géologique, le krigeage simple a été effectué avec les covariances présentées au tableau 5.8.

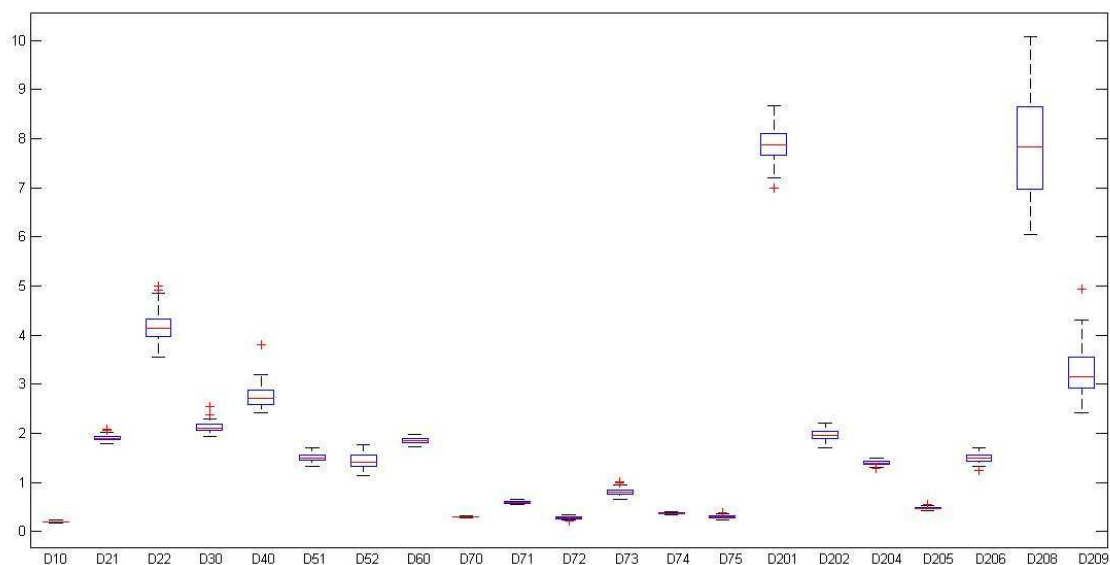
Ce krigeage utilise 500 teneurs simulées  $Z_s(x_i)$  se trouvant dans les limites de chaque domaine géologique. Un total de 6803352 teneurs ont été simulées et post-conditionnées par simulation.

### 5.7.3 Comparaison des échantillons et des teneurs simulées

Pour chaque domaine géologique du projet Canadian-Malartic, les moyennes et les variances des 50 ensembles de teneurs simulées sont présentées aux figures 5-9 et 5-10, sous forme de box-plots.



**Figure 5-9: Moyennes des distributions de teneurs simulées**



**Figure 5-10: Variations des distributions de teneurs simulées**

**Tableau 5.9: Paramètres des distributions de teneurs échantillonnées et simulées**

(1) Domaine	(2) Moyenne de l'échantillon (ppm)	(3) Variance de l'échantillon (ppm <sup>2</sup> )	(4) Médiane des moyennes des simulations (ppm)	(5) Médiane des variances des simulations (ppm <sup>2</sup> )	(4)/(2) Ratio entre les moyennes	(5)/(3) Ratio entre les variances
10	0,24	0,18	0,24	0,20	100%	109%
21	1,88	1,96	1,85	1,90	99%	97%
22	1,95	4,43	1,93	4,15	99%	94%
30	1,86	2,10	1,86	2,12	100%	101%
40	1,96	2,51	1,96	2,72	100%	108%
51	1,50	1,49	1,52	1,50	101%	100%
52	1,34	1,36	1,34	1,42	100%	104%
60	1,54	1,74	1,55	1,85	100%	106%
70	0,64	0,30	0,65	0,30	100%	100%
71	0,74	0,60	0,73	0,60	100%	100%
72	0,54	0,32	0,52	0,29	96%	90%
73	0,84	0,80	0,82	0,82	97%	102%
74	0,58	0,37	0,58	0,37	100%	101%
75	0,51	0,29	0,49	0,30	96%	102%
201	1,81	7,41	1,80	7,87	99%	106%
202	1,54	1,92	1,57	1,96	101%	102%
204	1,04	1,42	1,04	1,40	100%	98%
205	0,86	0,49	0,85	0,48	98%	97%
206	1,30	1,46	1,31	1,50	101%	103%
208	1,88	7,79	1,89	7,83	100%	100%
209	1,70	3,33	1,75	3,15	103%	95%

Les distributions de teneurs simulées respectent la moyenne des échantillons de chaque domaine géologique. Le ratio entre les moyennes varie entre 96% et 103%, avec une moyenne de 100%. Le ratio entre les variances des teneurs simulées et les variances des échantillons passe de 90% à 108%, avec une moyenne de 100%. Les écarts par rapport à un ratio de 100% correspondent à des fluctuations aléatoires attendues.

## **5.8 Optimisation des différents designs de fosse**

Trois fosses différentes ont été optimisées. Une première fosse classique, basée sur les teneurs de blocs fournies par Osisko dans le « Block Model », a été optimisée (voir tableau 5.1). Une deuxième fosse classique basée sur les teneurs de blocs krigées obtenues à la section 5.6, a aussi été optimisée afin de comparer les paramètres économiques des deux fosses classiques et de vérifier la performance des variogrammes isotropes à grande échelle. Enfin, une dernière fosse a été optimisée avec l'approche stochastique décrite au chapitre 2, section 2.5.3, en utilisant l'ensemble des teneurs simulées obtenues à la section 5.7.

Cette section présente les différentes étapes de calcul qui mènent à la détermination des paramètres économiques des designs de fosse étudiés.

### **5.8.1 Détermination de la valeur nette des blocs**

L'optimisation de design de fosse repose sur la valeur nette des blocs du gisement. Les coûts d'extraction ont été fixés à 1,32 US\$/t avec 0,02 US\$/t supplémentaire par banc de profondeur (10 m), et les coûts de traitement sont égaux à 6,38 US\$/t dans la zone Canadian-Malartic et à 6,63 US\$/t dans la zone Barnat (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). La teneur de coupure a été fixée à 0,34 ppm par Osisko et seuls les blocs d'une teneur supérieure à cette teneur seront acheminés vers l'usine de traitement. Le taux de récupération du métal à l'usine de traitement est de 85,9% et le prix de l'or a été fixé à 825 US\$/oz pour cette étude (Belzile et Gignac, Belzile Solutions Inc., 2010). La densité moyenne du gisement est de 2,64 g/t, variant de 1,8 à 2,83 g/t.

## **5.8.2 Application de l'algorithme « push-relabel »**

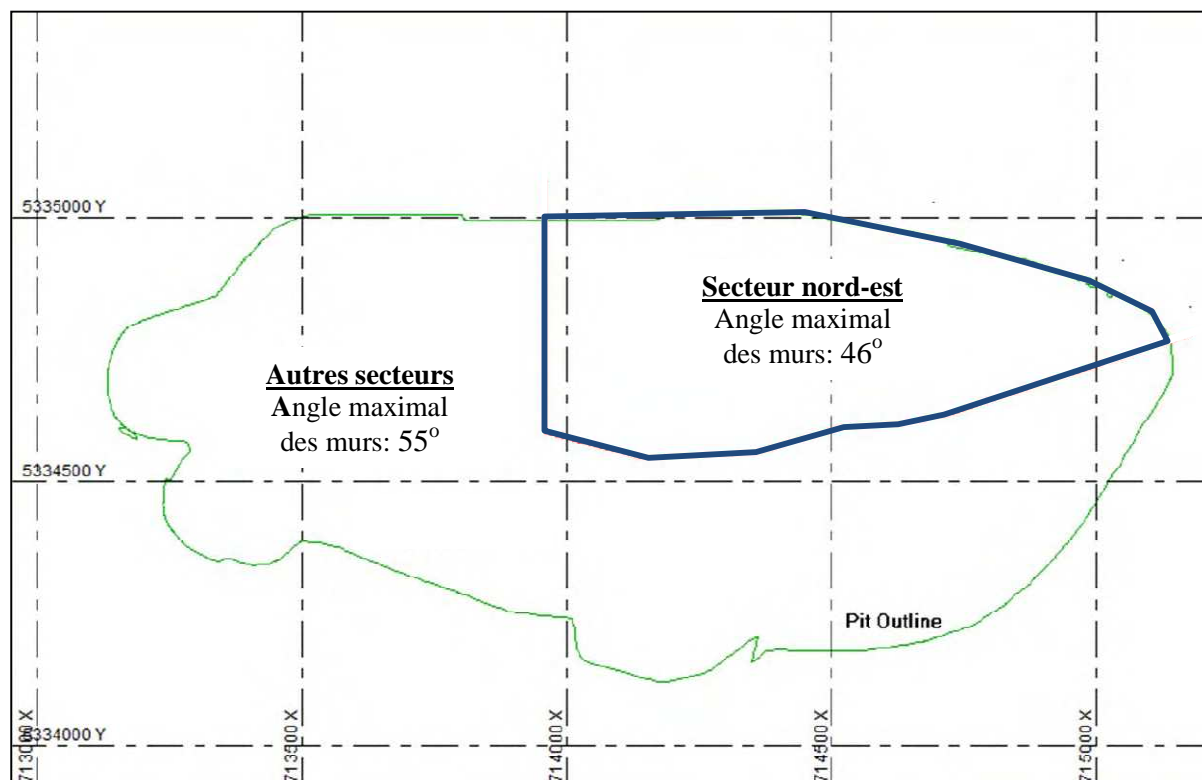
Comme pour l'optimisation du gisement simulé au chapitre 4, l'optimisation a été réalisée avec l'algorithme de « push-relabel » de Goldberg et Tarjan (1986). Le programme Matlab\_bgl\_v.4.0.1 (Gleich, 2007), qui permet l'utilisation de l'algorithme, a été utilisé dans l'interface de programmation Matlab v.7.8.0.

L'algorithme « push-relabel » fournit une sélection de blocs générant un profit maximal. Il est ainsi possible de calculer la valeur nette estimée de la fosse, son tonnage et la quantité d'or extraite de la fosse en exploitant les caractéristiques de chaque bloc (teneur estimée, % de vide et tonnage).

### **5.8.2.1 Limites et contraintes appliquées au « Block Model »**

La partie sud de la ville de Malartic a été déplacée plus au nord afin de rendre cet espace disponible pour la fosse. La fosse est par conséquent limitée au nord par la nouvelle frontière sud de la ville. Cette frontière se situe aux coordonnées UTM 5335100N, de 713000E à 714800E (BBA, 2008). Les blocs se trouvant au-delà de cette frontière doivent être exclus de la fosse. Pour ce faire, une très grande valeur négative a été attribuée à ces blocs, de sorte qu'ils ne soient pas choisis dans l'optimisation de la fosse.

Les gisements Canadian-Malartic et Barnat sont aussi sujets à des contraintes géotechniques. Deux différents domaines géotechniques ont été établis. L'angle des murs du secteur nord-est de la fosse ne doit pas dépasser  $46^{\circ}$ . Les autres secteurs de la fosse peuvent supporter un angle des murs de  $55^{\circ}$ . (BBA, 2008). Les domaines géotechniques sont présentés à la figure 5-11.



**Figure 5-11: Domaines géotechniques du gisement Canadian-Malartic**  
modifiée d'après (Feasibility Study - Canadian Malartic Project, 2008)

L'empilement de blocs de dimension 20 m x 10 m x 10 m donne un angle de  $26,57^\circ$  selon la direction est-ouest et un angle de  $45^\circ$  dans la direction nord-sud. Pour obtenir des angles de  $55^\circ$ , la taille des blocs a été modifiée pour l'optimisation. L'empilement de blocs de dimension 6,67 m x 10 m x 10 m permet d'atteindre un angle de  $56,31^\circ$  selon la direction est-ouest et un angle de  $45^\circ$  dans la direction nord-sud, ce qui est suffisamment près des angles requis.

La section nord-est de la fosse est limitée au nord par la frontière sud de la ville de Malartic. Afin de respecter l'angle maximal des murs ( $46^\circ$ ) de ce domaine géotechnique, les blocs se trouvant au-delà de la limite d'un mur à  $46^\circ$  partant de la frontière sud de la ville doivent être exclus de la fosse. Pour ce faire, une très grande valeur négative a été attribuée à ces blocs, de sorte qu'ils ne soient pas choisis dans l'optimisation de la fosse.

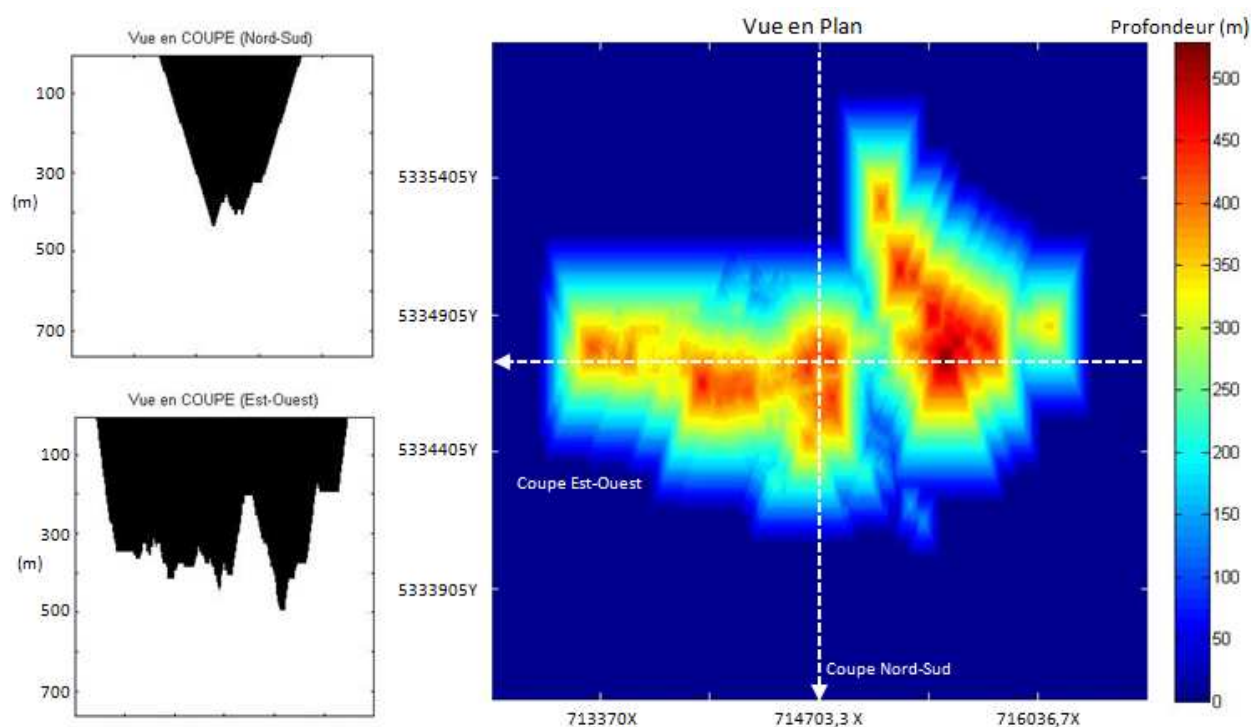
### 5.8.3 Paramètres économiques estimés des fosses à l'étude

Le tableau suivant résume les paramètres économiques estimés pour les deux fosses classiques et la fosse stochastique obtenues.

**Tableau 5.10: Paramètres économiques des fosses classiques et stochastique**

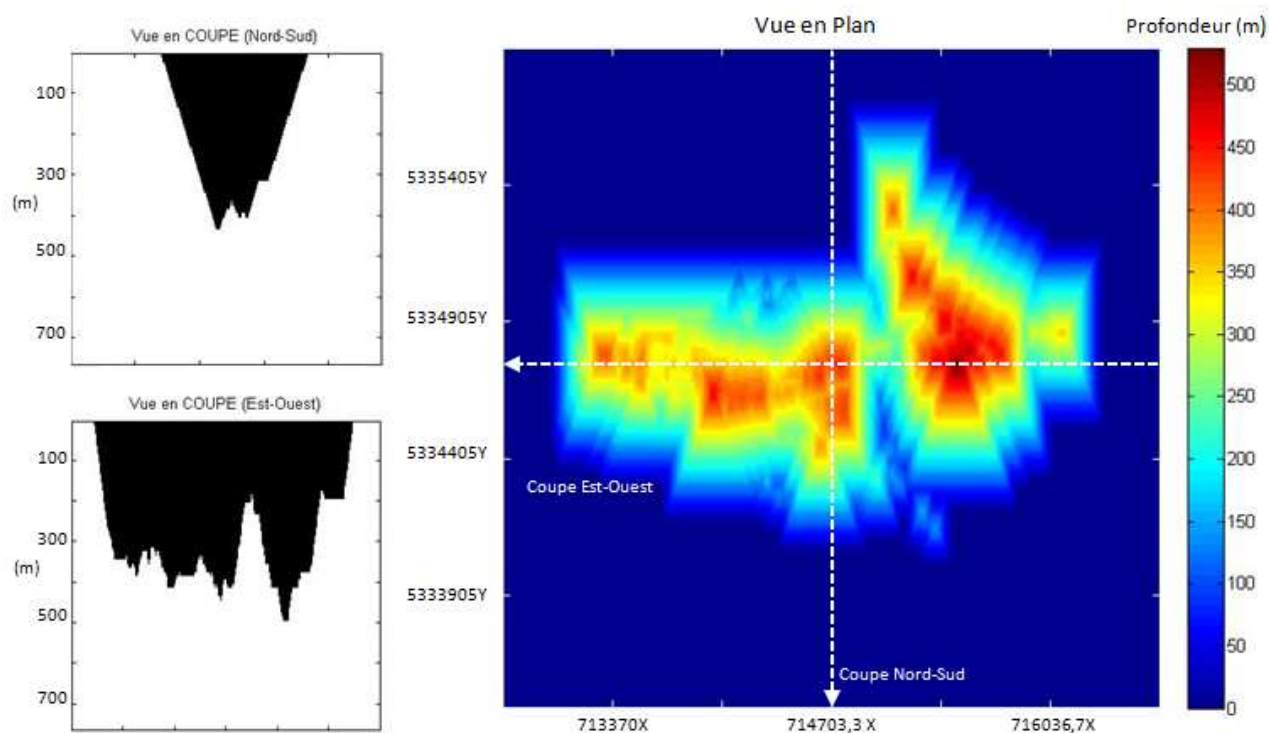
Designs à l'étude	Valeur nette estimée (G US\$)	Quantité d'or estimées (M Oz)	Volume de la fosse (M m <sup>3</sup> )	Tonnage de minerai (M Tonnes)	Ratio (blocs) minéral : stérile
<b>Fosse classique 1</b> - calcul des teneurs par Osisko	5,76	10,99	767,47	338,13	1 : 56
<b>Fosse classique 2</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.5	5,72	11,04	770,55	340,69	1 : 55
<b>Fosse stochastique</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.6	6,33	11,67	834,84	351,26	1 : 55

Les figures 5-12 à 5-14 montrent les vues en plan et en coupe des designs des fosses classiques et stochastique.

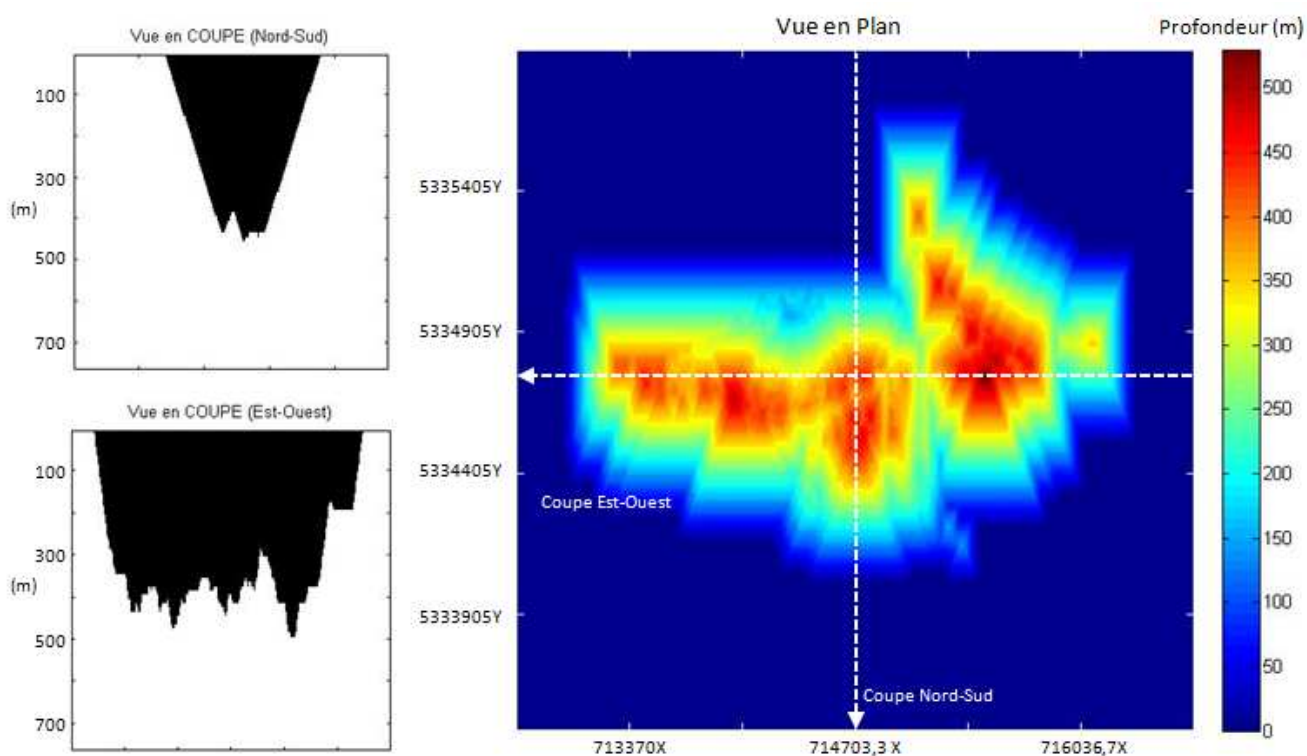


**Figure 5-12: Fosse classique 1 basée sur les teneurs krigées calculées par Osisko**





**Figure 5-13: Fosse classique 2 basée sur les teneurs krigées calculées avec les variogrammes isotropes**



**Figure 5-14: Fosse stochastique basée sur les teneurs simulées avec les variogrammes isotropes**

### *Fosse classique 1 versus fosse classique 2*

- Les deux fosses classiques prévoient des valeurs nettes semblables à 0,79% de différence près.
- Les deux fosses classiques prévoient sensiblement la même quantité d'or récupérable à 0,40% de différence près.
- Les deux fosses classiques sont de volumes similaires à 0,40% de différence près.
- Les deux fosses classiques prévoient des tonnages similaires à 0,76% de différence près.
- 99,21% des blocs constituant la fosse classique 1 se retrouvent dans la fosse classique 2.
- 98,81% des blocs constituant la fosse classique 2 se retrouvent dans la fosse 1.

Ces observations montrent bien que l'ajustement des variogrammes isotropes utilisés pour le krigeage des teneurs de la fosse classique 2 est analogue à l'ajustement des variogrammes de Belzile Solutions Inc. qui ont été utilisés pour la fosse classique 1. La performance des variogrammes isotropes est par conséquent assurée à l'échelle des gisements Canadian-Malartic et Barnat.

### *Fosse stochastique versus fosses classiques*

- La fosse stochastique prédit une valeur nette de 10,22% supérieure aux fosses classiques.
- La fosse stochastique prédit une quantité d'or récupérable de 5,95% supérieure aux fosses classiques.
- La fosse stochastique est de volume 8,56% supérieure aux fosses classiques.
- La fosse stochastique prévoit un tonnage de minerai de 3,49% supérieur aux fosses classiques.

Les résultats présentés au tableau 5.10 sont les paramètres économiques prévus par les fosses à l'étude. Mais qu'en est-il des valeurs nettes réelles des fosses à l'étude? Bien qu'il soit

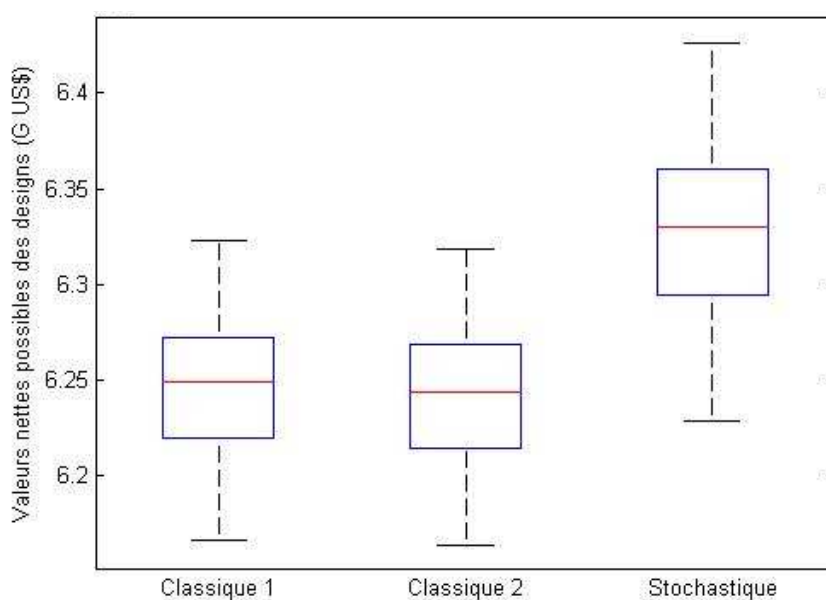
impossible de déterminer avec exactitude la valeur nette réelle d'une fosse, il est possible d'en connaître certains paramètres statistiques comme la moyenne, la médiane, l'écart-type et le coefficient de variation. En calculant successivement les différentes valeurs nettes d'une fosse à l'aide des distributions de teneurs simulées, on obtient un ensemble de valeurs nettes possiblement générées par cette fosse.

### 5.8.4 Paramètres économiques réels des fosses à l'étude

Les 50 distributions de teneurs simulées, obtenues à la section 5.7 de ce chapitre, permettront de calculer un ensemble de valeurs nettes équiprobables éventuellement générées par les fosses classiques et la fosse stochastique.

#### 5.8.4.1 Étendues des valeurs nettes

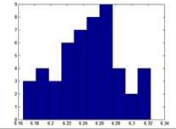
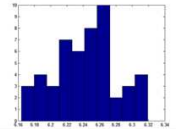
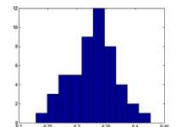
La figure suivante illustre l'incertitude liée aux designs étudiés. Les box-plots représentent l'étendue des valeurs possibles des designs classiques et stochastique.



**Figure 5-15: Box-plot des valeurs possibles des designs classique et stochastique**

Le tableau 5.11 présente l'étendue des valeurs nettes possibles des designs à l'étude.

**Tableau 5.11: Étendues des valeurs nettes possibles pour les designs à l'étude**

Designs à l'étude	Valeur nette estimée (G US\$)	Étendue des valeurs nettes réelles possibles		
		Valeur nette minimale (G US\$)	Valeur nette maximale (G US\$)	Distribution des valeurs nettes
<b>Fosse classique 1</b> - calcul des teneurs par Osisko	5,76	6,17	6,32	
<b>Fosse classique 2</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.5	5,72	6,16	6,32	
<b>Fosse stochastique</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.6	6,33	6,23	6,43	

À la figure 5-15, on remarque que tous les percentiles du box-plot du design stochastique ( $P_{10}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{50}$ ,  $P_{75}$  et  $P_{90}$ ) sont sans conteste supérieurs aux valeurs des designs classiques 1 et 2.

Les fosses obtenues par l'approche classique sont basées sur les teneurs krigées des blocs. Les distributions de teneurs obtenues par krigeage sont plus lisses que la distribution réelle des teneurs puisque, par définition, le krigeage minimise la variance d'estimation. Les fosses basées sur des teneurs krigées sont par conséquent plus lisses et tendent à sous-estimer la valeur nette réelle des fosses. C'est ce que l'on remarque au tableau 5.11, où les valeurs nettes estimées des fosses classique 1 et classique 2 se situent à l'extérieur de leurs intervalles de confiance obtenus à l'aide des simulations. Toutefois, la valeur nette estimée de la fosse stochastique se trouve bien au centre de son intervalle de confiance.

#### 5.8.4.2 Tendances centrales des valeurs nettes réelles des fosses

À l'aide de l'ensemble des valeurs nettes équiprobables éventuellement générées par chacune des fosses à l'étude, il est possible de calculer les mesures de tendances centrales suivantes sur la

valeur nette réelle de chaque fosse: la médiane, la moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation. Le tableau 5.12 résume ces valeurs.

**Tableau 5.12: Tendances centrales des valeurs nettes réelles des designs à l'étude**

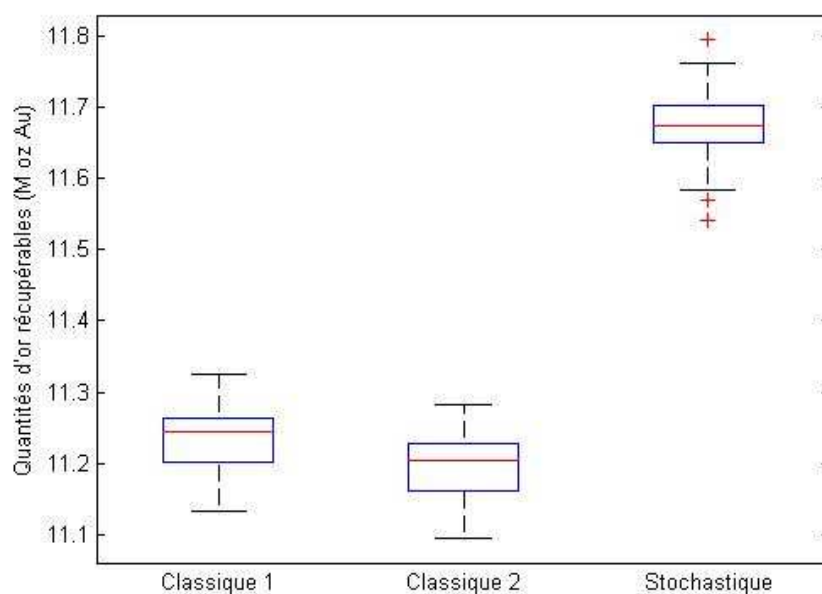
Designs à l'étude	Médiane de la valeur nette (G US\$)	Valeur nette moyenne (G US\$)	Écart-type de la valeur nette	Coefficient de variation de la valeur nette
<b>Fosse classique 1</b> <i>- calcul des teneurs par Osisko</i>	6,25	6,25	0,04	0,61%
<b>Fosse classique 2</b> <i>- calcul des teneurs présenté à la section 5.6</i>	6,24	6,24	0,04	0,62%
<b>Fosse stochastique</b> <i>- calcul des teneurs présenté à la section 5.7</i>	6,33	6,33	0,04	0,64%

Le coefficient de variation est une mesure de la dispersion relative des valeurs nettes réelles autour de la moyenne. Il permet de comparer l'écart entre la valeur nette estimée et réelle pour les différentes fosses. Le coefficient de variation des trois fosses à l'étude étant inférieur à 1%, l'écart entre la valeur nette moyenne et la valeur nette réelle de chaque fosse sera minime. Ainsi, il est possible d'affirmer que :

- La valeur nette réelle de la fosse stochastique sera de 1,33% supérieure aux fosses classiques.
- Basée sur un prix de l'or fixé à 825 US\$/oz, la fosse stochastique permet un gain de 83,01 M US\$ par rapport aux fosses classiques.

#### 5.8.4.3 Étendues des quantités d'or récupérables

Les box-plots de la figure suivante représentent l'étendue des quantités d'or récupérables pour les designs classiques et stochastique.



**Figure 5-16: Box-plot des quantités d'or récupérables pour les designs classique et stochastique**

Le tableau 5.12 présente l'étendue des quantités d'or possiblement récupérables par designs à l'étude.

**Tableau 5.13: Étendues des quantités d'or récupérables par les designs à l'étude**

Designs à l'étude	Quantité d'or estimées (M oz)	Étendue des quantités réelles d'or récupérées		
		Quantité d'or minimale (M oz)	Quantité d'or maximale (M oz)	Distribution des quantités d'or récupérée
<b>Fosse classique 1</b> - calcul des teneurs par Osisko	10,99	11,13	11,33	
<b>Fosse classique 2</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.5	11,04	11,10	11,28	
<b>Fosse stochastique</b> - calcul des teneurs présenté à la section 5.6	11,67	11,54	11,79	

Tous les percentiles du box-plot du design stochastique ( $P_{10}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{50}$ ,  $P_{75}$  et  $P_{90}$ ) sont largement supérieurs aux valeurs des designs classiques 1 et 2.

Au tableau 5.13, les quantités estimées d'or récupérées par les fosses classique 1 et classique 2 se situent à l'extérieur de leurs intervalles de confiance obtenus à l'aide des simulations. Encore une fois, la quantité estimée d'or récupérée par la fosse stochastique se trouve bien au centre de son intervalle de confiance.

#### 5.8.4.4 Tendances centrales des quantités réelles d'or récupérées

Les mesures de tendances centrales sur la quantité réelle d'or récupérée par chaque fosse sont présentées au tableau 5.14.

**Tableau 5.14: Tendances centrales des quantités réelles d'or récupérées par les designs à l'étude**

Designs à l'étude	Médiane quantité d'or (M oz)	Quantité d'or moyenne (M oz)	Écart-type quantité d'or	Coefficient de variation quantité d'or
<b>Fosse classique 1</b> <i>- calcul des teneurs par Osisko</i>	11,24	11,24	0,05	0,42%
<b>Fosse classique 2</b> <i>- calcul des teneurs présenté à la section 5.6</i>	11,20	11,20	0,05	0,42%
<b>Fosse stochastique</b> <i>- calcul des teneurs présenté à la section 5.7</i>	11,67	11,67	0,05	0,45%

Le coefficient de variation des trois fosses à l'étude étant inférieur à 1%, l'écart entre la quantité moyenne d'or et la quantité réelle d'or récupérée par chacune des fosses sera minime. Ainsi, il est possible d'affirmer que :

- La quantité réelle d'or récupérée avec la fosse stochastique sera de 4,04% supérieure aux fosses classiques, soit un gain de 453,40 K oz.
- Au prix de l'or actuel de 1488,16 US\$/oz<sup>6</sup> (17 avril 2011), ce gain représente 674,73 MUS\$.

---

<sup>6</sup> Source : ( Cours de l'or en dollar US, adresse URL : [http://www.24hgold.com/francais/cours\\_or\\_en\\_dollars.aspx](http://www.24hgold.com/francais/cours_or_en_dollars.aspx) )



## 5.9 Synthèse

Ce chapitre se consacrait à l'étude des deux gisements aurifères du projet Canadian-Malartic détenus par la Corporation Minière Osisko, les gisements Canadian-Malartic et Barnat.

À l'aide des données de forages fournies par Osisko, des variogrammes isotropes à deux structures ( $c_0$  et  $c$ ), ont été modélisés. Par validation croisée, ces variogrammes ont été comparés aux variogrammes anisotropes fournis par Belzile Solutions Inc. Les résultats de la validation croisée étant à toutes fins pratiques identiques pour les deux ensembles de variogrammes, l'utilisation de modèles de variogrammes isotropes ne devait pas affecter significativement la valeur des teneurs estimées obtenues.

Deux fosses ont été optimisées par l'approche classique. Une première fosse classique était basée sur les teneurs de blocs fournies par Osisko et une deuxième a été basée sur les teneurs de blocs krigées obtenues à la section 5.6. Les paramètres économiques similaires des deux fosses classiques ont permis de constater que la performance des variogrammes isotropes et des variogrammes de Belzile Solutions Inc. est quasi identique à grande échelle. Cette comparaison était nécessaire puisque ce sont les variogrammes isotropes qui ont été utilisés pour réaliser les simulations conditionnelles utilisées dans l'approche stochastique.

Une dernière fosse a été optimisée avec cette approche en utilisant un nombre de 50 simulations conditionnelles réalisées avec les variogrammes isotropes et conditionnées à l'aide des données échantillonnées par Osisko. Les résultats montrent que la fosse stochastique prédit une valeur nette et une quantité d'or récupérée supérieures aux fosses classiques.

Par ailleurs, les distributions de teneurs simulées ont aussi permis de calculer un ensemble de valeurs nettes équiprobables éventuellement générées par les deux fosses classiques et la fosse stochastique. Les résultats montrent que l'écart entre la valeur nette moyenne et la valeur nette réelle de chaque fosse sera minime, que la valeur nette réelle de la fosse stochastique sera supérieure aux fosses classiques et que le gain en quantité d'or récupérée sera significatif.

## CHAPITRE 6 DISCUSSION

### 6.1 Biais conditionnel dans l'estimation de la valeur nette d'une fosse

Un estimateur est dit sans biais conditionnel lorsque l'espérance conditionnelle  $E[Z | Z^*]$  d'une variable aléatoire  $Z$ , par rapport à sa valeur estimée  $Z^*$ , est égale à  $Z^*$ . Un estimateur sans biais conditionnel permet donc de récupérer la valeur nette prévue d'une sélection de blocs à partir de leurs valeurs nettes estimées.

L'approche classique utilise comme estimateur la teneur krigée des blocs appliquée à une fonction de profit. Le krigeage ordinaire est réputé être une méthode d'estimation presque sans biais conditionnel pour la teneur. Pourtant, la fonction de profit étant convexe, le profit prévu avec les valeurs krigées sera automatiquement inférieur à la moyenne des profits obtenus sur un ensemble de gisements simulés conditionnellement (voir la preuve en Annexe 5). Comme les profits pour chaque bloc seront inférieurs, la fosse optimisée aura aussi une valeur inférieure à celle basée sur l'espérance des valeurs nettes. Si l'on classait ultimement chaque bloc selon sa valeur krigée, on obtiendrait le profit prévu malgré la convexité de la fonction de profit. Toutefois, au moment de la classification finale, on peut considérer connue la vraie valeur des blocs. Certains blocs initialement classés « minerais » seront possiblement reclassés « stérile » et inversement pour des blocs initialement classés « stérile ». Les gains des seconds seront en moyenne plus importants que les pertes des premiers en raison de la convexité de la fonction de profit. Si la fonction de profit était linéaire, les gains et les pertes se seraient annulés en moyenne et le krigeage aurait été à nouveau sans biais conditionnel pour le profit. L'approche stochastique utilise comme estimateur l'espérance des valeurs nettes des blocs. Plutôt que d'appliquer la fonction de profit aux valeurs krigées comme dans l'approche classique, cette fonction de profit est appliquée à chacune des simulations géostatistiques séparément et la moyenne est ensuite calculée. Les écarts obtenus entre les valeurs estimées et réelles des fosses stochastiques peuvent encore une fois être positifs ou négatifs, sauf qu'ici le profit estimé tient compte explicitement de la convexité de la fonction de profit, ce qui élimine le biais conditionnel pour le profit décrit dans le cas du krigeage (voir la preuve en Annexe 5).

Un des grands soucis de la géostatistique dans le domaine de l'industrie minière étant d'estimer avec justesse les ressources minérales, il est intéressant de constater que l'approche stochastique propose une méthode d'estimation de la valeur des blocs plus efficace que le krigeage, et ce, selon deux critères importants : i. récupérer le profit que l'on prévoit et ii. récupérer plus de profits.

## **6.2 Sélection des blocs sur valeurs estimées versus valeurs réelles**

Le design d'une fosse est basé sur les teneurs estimées des blocs, donc la valeur nette estimée de la fosse est en quelque sorte une valeur préliminaire qui sera raffinée au cours de l'exploitation. Avant le début des travaux d'excavation, les seules teneurs connues sont celles ayant été échantillonnées dans les forages de définition. Cet échantillon de teneurs représente typiquement une quantité infime de matériau par rapport au gisement entier. Au fur et à mesure de l'exploitation de la mine, des données additionnelles seront disponibles puisque tous les blocs seront échantillonnés avant leur extraction. Leur classification économique (mineral/stérile) est alors réévaluée en fonction de la teneur réelle du bloc et la valeur nette de la fosse est ajustée en conséquence.

Il est donc avantageux de faire des mises à jour régulières d'un design de fosse en relançant l'optimisation des contours ultimes de la fosse à la lumière des nouvelles données connues sur le gisement. Cette façon de faire permet aussi de mettre à jour les paramètres économiques considérés constant dans l'optimisation, comme les coûts d'extraction, les coûts de traitement et le prix de l'or. Ainsi, la fosse réellement minée tendra vers la fosse optimale pour le gisement en question.

## **6.3 Incertitude économique versus incertitude géologique**

L'approche stochastique permet d'inclure toutes incertitudes modélisables. Néanmoins, il est plus avantageux de traiter l'incertitude géologique en priorité.

D'une part, l'incertitude économique est principalement modélisée en générant différents scénarios possibles de la variation du prix d'un métal dans le temps. Ces scénarios sont obtenus

par processus stochastiques tel le « mean-reversion model » proposé par Schwartz (1997). Les paramètres de ces processus se basent sur les données historiques.

D'autre part, l'incertitude géologique est modélisée en générant différentes distributions de teneurs possibles à travers un gisement. Ces différentes distributions sont obtenues par simulations géostatistiques se basant sur la corrélation établie entre les teneurs connues dans le gisement, i.e. le variogramme.

Il semble difficile d'obtenir des scénarios réalistes de l'évolution du prix d'un métal en se basant uniquement sur des données historiques. En effet, rien n'indique qu'un événement de rare occurrence ait été déjà eu lieu dans l'ensemble des données historiques. Les paramètres sur lesquels se base la modélisation de l'incertitude économique semblent moins robustes que le variogramme utilisé pour la modélisation de l'incertitude géologique.

Pour cette raison, et également pour le fait que le gain le plus substantiel est obtenu en traitant l'incertitude géologique, seule cette dernière a été considérée dans ce mémoire.

## **6.4 Considérations économiques et sociales**

Les fosses stochastiques ont en moyenne un volume supérieur aux fosses classiques. Cette constatation est due au fait que chaque bloc du gisement présente une valeur nette supérieure avec l'approche stochastique. Une optimisation basée sur des valeurs de bloc supérieures conduit nécessairement à une fosse plus profitable et par conséquent plus grande. Cette observation porte à réfléchir sur certaines considérations économiques et sociales.

Un projet minier de plus grande envergure crée un besoin accru en main-d'œuvre qualifiée pour une période de temps plus grande, étant donnée la plus longue durée de vie de la mine. Cela a pour effet d'augmenter le nombre d'emplois bien rémunérés en région et de profiter inévitablement à l'essor de l'économie locale et régionale. De plus, l'approche stochastique ouvre la porte à l'exploitation en fosse de gisements de très faible teneur qui jusqu'à maintenant, n'étaient pas jugés profitables par l'approche classique.

La teneur de coupure optimale, facteur déterminant de la rentabilité d'un projet minier, devra tenir compte de la durée de vie plus grande de la mine. Ainsi, l'usure des équipements, les défis de poursuivre une exploitation en grande profondeur et l'établissement d'un parc à résidu de grande ampleur et devront être pris en compte.

Enfin, l'approche stochastique minimise le risque économique et maximise le plein potentiel du gisement, ce qui permet une exploitation plus rationnelle d'une ressource par définition non renouvelable.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans le contexte des mines à ciel ouvert, il est essentiel de quantifier le risque dans les aspects clés de l'optimisation de fosse et de la planification minière. Le risque est omniprésent dans les aspects techniques, financiers et environnementaux d'une opération minière. Pourtant, il a été montré que la source première de risque provient de l'incertitude géologique, i.e l'incertitude sur les teneurs. Des méthodes modernes d'évaluation économique de projets permettent de montrer que le fait de tenir compte de l'incertitude géologique a pour effet d'améliorer la valeur économique d'un projet minier.

Afin de faire face à cette problématique, les principaux objectifs de ce mémoire étaient de :

- développer une approche stochastique d'optimisation pour le design de fosse, qui tient compte de l'incertitude sur les teneurs et qui optimise sa valeur nette, tout en minimisant le risque économique et maximisant le plein potentiel du gisement;
- comparer l'approche classique d'optimisation de fosse et l'approche stochastique à l'aide d'un gisement simulé, afin de comparer les paramètres économiques des différentes fosses et leurs risques associés;
- optimiser le design de fosse du projet Canadian-Malartic, Osisko, à l'aide des approches d'optimisation classique et stochastique afin de comparer leurs paramètres économiques.

Pour ce faire, une nouvelle approche reposant sur l'optimisation des espérances des valeurs nettes des blocs a été développée afin d'inclure l'incertitude sur les teneurs dans l'optimisation de design de fosse. L'idée centrale était d'exploiter la convexité de la fonction de profit. Pour ce faire, plutôt que d'appliquer la fonction de profit aux valeurs krigées, comme dans l'approche classique, cette fonction de profit est appliquée à chacune des simulations géostatistiques séparément et la moyenne est par la suite calculée.

Il a été démontré dans ce mémoire que la solution optimale stochastique prévoit nécessairement un profit supérieur à la solution classique (sous hypothèse que la moyenne des valeurs simulées des blocs correspond à la valeur krigée). Ce résultat théorique est confirmé par deux études de cas synthétiques.

Une première étude a été réalisée sur un gisement généré aléatoirement, dont les caractéristiques sont complètement connues et contrôlées, afin de valider la qualité des estimations et des designs obtenus. La fosse stochastique permet un gain réel de 73,81% pour la quantité réelle d'or récupérée par rapport à la fosse classique et un gain réel de 8,66% sur la valeur nette de la fosse. Une seconde étude de cas a été menée sur le gisement aurifère Canadian-Malartic de la Corporation minière Osisko. La fosse stochastique prévoit un gain moyen de 453,4 Koz (4,04%) pour la quantité réelle d'or récupérée par rapport à la fosse classique et un gain moyen de 1,33% sur la valeur nette de la fosse. Au prix de l'or actuel de 1488,16 US\$/oz<sup>7</sup> (17 avril 2011), le gain en quantité d'or récupérée représente une valeur de 674,73 millions US\$.

Cela a permis de mettre en lumière les conclusions suivantes :

- l'approche stochastique permet de réaliser un design de fosse dont les valeurs nettes estimées et réelles sont supérieures ou égales à celles issues du krigeage;
- l'approche stochastique permet de réaliser un design de fosse dont les valeurs nettes estimées et réelles sont supérieures ou égales à celles issues d'une seule simulation géostatistique;
- en tenant compte de l'incertitude sur les teneurs, l'approche stochastique minimise le risque économique lié à la valeur nette réelle de la fosse;
- l'approche stochastique propose un estimateur de la valeur nette des blocs sans biais conditionnel, alors que l'approche classique, i.e. le krigeage, propose un estimateur presque sans biais conditionnel pour la teneur mais pas pour le profit ultimement réalisé.

---

<sup>7</sup> Source : ( Cours de l'or en dollar US, adresse URL : [http://www.24hgold.com/francais/cours\\_or\\_en\\_dollars.aspx](http://www.24hgold.com/francais/cours_or_en_dollars.aspx) )

Ces conclusions permettent d'envisager l'exploitation en fosse de gisements de très faible teneur, qui jusqu'à maintenant n'étaient pas jugés profitables par l'approche classique. De plus, un projet minier de plus grande envergure crée un besoin accru en main-d'œuvre qualifiée pour une période de temps plus grande, étant donnée la plus longue durée de vie de la mine. Cela a pour effet d'augmenter le nombre d'emplois bien rémunérés en région et de profiter inévitablement à l'essor de l'économie locale et régionale.

Une piste de recherche future pourrait permettre d'utiliser l'approche stochastique dans d'autres secteurs critiques d'un projet minier, comme la planification d'une séquence de minage et d'un calendrier de production. Pour atteindre cet objectif, le paramétrage des valeurs nettes pourrait être utilisé avec l'approche stochastique pour simplifier la recherche de solution.

Une autre piste de recherche pourrait être de prédire le gain potentiel envisageable avec l'approche stochastique, en tenant compte de l'incertitude géologique dans un premier temps, et en tenant compte de l'incertitude économique dans un second temps.



## BIBLIOGRAPHIE

- Alabert, F. et G. J. Massonnat (1990). Heterogeneity in a complex turbiditic reservoir: Stochastic modeling of facies and petrophysical variability. 65th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, Louisiana, SPE paper 20604.
- Balinski, M. L. (1970). "On a Selection Problem." Management Science **17**(3).
- Bastante F. G., J. Taboada, J. Alejano et E. Alonso (2008). "Optimization tools and simulation methods for designing and evaluating a mining operation." Stochastic Environmental Research and Risk Assessment **22**(Compendex): 727-735.
- BBA (2008). Feasibility Study - Canadian Malartic Project (Malartic, Québec).
- Belzile, E. et L.-P. Gignac (2010). Updated resource and reserve estimates or the Canadian Malartic Project. Malartic, Québec, Belzile Solutions Inc.
- Chandran, B. G. et D. S. Hochbaum (2009). "A computational study of the pseudoflow and push-relabel algorithms for the maximum flow problem." Operations Research **57**(Compendex): 358-376.
- Chentsov, N. N. (1957). "Lévy Brownian motion for several parameters and generalized white noise." Theory of Probability and Its Applications **Vol. 2**: p. 265-266.
- Chilès, J.-P. et P. Delfiner (1999). Geostatistics : modeling spatial uncertainty. New York; Toronto, Wiley.
- Coleou, T. (1989). Technical Parametrization of Reserves for Open Pit Design and Mine Planning. 21st application of computers and operations research in the mineral industry proceedings. A. Weiss: 485-494.
- Collet, D. et D. Corley (2000). Transparent grade control: Improvements from the application of sequential indicator simulation and optimisation at Ravenswood gold mine, NQ. International Symposium on Geostatistical Simulation in Mining, Perth, WA, Australia.
- Consuegra, F. R. A. et R. Dimitrakopoulos (2010). "Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: Method, application and comparisons." Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology **119**(Compendex): 88-101.

- Dagdelen, K. (2007). Open pit optimisation - Strategies for improving economics of mining projects through mine planning. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Perth, WA, Australia, Australasian Institute of Mining and Metallurgy.
- Dagdelen, K. et T. B. Johnson (1986). Optimum open pit mine production scheduling by lagrangian parameterization. Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry - 19th International Symposium., Universal Park, PA, USA, Soc of Mining Engineers of AIME.
- David, M. (1977). Geostatistical ore reserve estimation. Amsterdam.
- Deraisme, J. et R. Dumay (1979). Geostatistics and mining processes. 16th International APCOM Symposium, New York.
- Deutsch, C. V., E. Magri et K. Norrena (1999). Optimal grade control using geostatistics and economics: Methodology and examples. SME Annual Meeting, Denver.
- Dimitrakopoulos, R. (1998). "Conditional simulation algorithms for modelling orebody uncertainty in open pit optimisation." International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment **12**(Compendex): 173-179.
- Dimitrakopoulos, R., C. T. Farrelly et M. C. Godoy (2002). "Moving forward from traditional optimization: Grade uncertainty and risk effects in open-pit design." Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology **111**(Compendex): A82-A88.
- Dimitrakopoulos, R., L. Martinez et S. Ramazan (2007). "A maximum upside / minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design." Journal of Mining Science **43**(Compendex): 73-82.
- Dowd, P. A. (1997). "Risk in minerals projects - Analysis, perception and management." Transactions. Section A, Mining industry / Institution of Mining & Metallurgy **106**: A9-A18.
- Dowd, P. A. et P. C. Dare-Bryan (2007). Planning, designing and optimising production using geostatistical simulation. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Perth, WA, Australia, Australasian Institute of Mining and Metallurgy.
- Eakins, P. R. (1962). Geological settings of gold deposits of Malartic district, Abitibi-East County. Que., Canada, Bureau of Mines: 133.
- Fallara, F., M. Legault et O. Rabeau (2006). "3-D Integrated Geological Modeling in the Abitibi Subprovince (Québec, Canada): Techniques and Applications." Exploration and Mining Geology **15**(1-2): 27-41.

- Fédération de l'industrie minière canadienne (2010). Positionner l'industrie pour la croissance. e. C. d. m. d. Mines. Montréal.
- Ford, L. R. et D. R. Fulkerson (1956). "Maximal flow through a network." Canadian Journal of mathematics **Vol. 8**: p. 399-404.
- François-Bongarçon, D. (1983). "Parametrization of optimal designs of an open pit beginning of a new phase of research." Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers **274**: 1801-1805.
- Glacken, I. M. (1997). Change of support and use of economic parameters for block selection. Geostatistics Wollongong '96: Kluwer academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. **2**: 811-821.
- Gleich, D. (2007). Matlab BGL v2.1, Matlab Central.
- Godoy, M. et R. Dimitrakopoulos (2004). "Managing risk and waste mining in long-term production scheduling of open-pit mines." Society for Mining, Metallurgy and Exploration **Vol. 316**: p. 43-50.
- Godoy, M. C., R. Dimitrakopoulos et J. F. Costa (2001). "Economic functions and conditional simulation applied to grade control." Mineral resource and ore reserve estimation - The AusIMM guide to good practice (Hannover 812040) **23**: 591-599.
- Goldberg, A. V. et R. E. Tarjan (1986). A new approach to the maximum flow problem. Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing. Berkeley, California, United States, ACM: 136-146.
- Henry E., D. Marcotte et M. Samis (2005). Valuing a mine as a portfolio of European call options: the effect of geological uncertainty and implications for strategic planning. Geostatistics Banff 2004, Springer.
- Hochbaum, D. S. (2001). "A new - old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs." Networks **37**(4): 171-193.
- Hochbaum, D. S. (2008). "The pseudoflow algorithm: A new algorithm for the maximum-flow problem." Operations Research **56**(Compendex): 992-1009.
- Hustrulid, W. A. (1995). Open pit mine : planning and design. Rotterdam, Netherlands.
- Isaaks, E. H. (1990). The application of Monte-Carlo methods to the analysis of spatially correlated data, Stanford University. **Ph.D.**: 213.
- Issigonis, M. J. (1980). "Occurrence of disseminated gold deposits in porphyries in archaean Abitibi Belt, Northwest Quebec, Canada." Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section B: Applied Earth Science **89**(Compendex): b157-b158.

- Journel, A. G. (1974). "Geostatistics for conditional simulation of ore bodies." Economic Geology **69**: 673-687.
- Journel, A. G. et C. J. Huijbregts (1978). Mining geostatistics. London, Academic Press.
- Lacomme, P., C. Prins et M. Sevaux (2003). Algorithmes de graphes. Paris, Eyrolles.
- Lane, K. F. (1988). The Economic Definition of Ore. London.
- Lawler, E. (2010). 4.5. Combinatorial Implications of Max-Flow Min-Cut Theorem, 4.6. Linear Programming Interpretation of Max-Flow Min-Cut Theorem. Combinatorial Optimization: Networks and Matroid. Dover: pp. 117–120.
- Leite, A. et R. Dimitrakopoulos (2007). "Stochastic optimisation model for open pit mine planning: Application and risk analysis at copper deposit." Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology **116**(Compendex): 109-118.
- Lerchs, H. et I. F. Grossmann (1965). "Optimum design of open-pit mines." Canadian Mining and Metallurgical Bulletin **58**(633): 47-54.
- Marcotte, D. (1991). "Cokriging with Matlab." Computers and Geosciences **17**(Compendex): 1265-1280.
- Marcotte, D. (2002). Fonction "ajustermulti", École Polytechnique de Montréal.
- Marcotte, D. (2009). "Notes de cours: Géostatistique (GML6402A)." 2010, from <http://geo.polymtl.ca/~marcotte/gml6402.html>.
- Matérn, B. (1960). "Spatial Variation - Stochastic Models and Their Application to Some Problems in Forest Surveys and Other Sampling Investigations." Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut **Vol. 49**(No. 5).
- Matheron, G. (1973). "The intrinsic radom functions and their applications." Advances in Applied Probability **Vol. 5**: p.439-468.
- Matheron, G. (1976). A simple substitute for conditional expectation: The disjunctive kriging. Advanced Geostatistics in the Mining industry. Reidel. Dordrecht, Holland: p. 237-251.
- Meagher C., S. A. Abdel Sabour et R. Dimitrakopoulos (2009). Pushback Design of Open Pit Mines Under Geological and Market Uncertainties. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Perth, WA.
- Picard, J.-C. (1976). "Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems." Management Science **22**(Compendex): 1268-1272.

- Ramazan, S. et R. Dimitrakopoulos (2007). Stochastic optimisation of long-term production scheduling for open pit mines with a new integer programming formulation. Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Perth, WA, Australia, Australasian Institute of Mining and Metallurgy.
- Ravalec M. L., B. Noetinger et L.Y. Hu (2000). "The FFT Moving Average (FFT-MA) Generator: An Efficient Numerical Method for Generating and Conditioning Gaussian Simulations." Mathematical Geology **32**(6).
- Ressource naturelle Canada (2009). Les prix élevés des non-métaux portent à plus de 45 G\$ la valeur de la production canadienne de minéraux en 2008. Bulletin d'information mars 2009.
- Ressource naturelle Canada (2010). La récession mondiale a réduit la production de minéraux au Canada en 2009. Bulletin d'information mars 2010 - Production de minéraux.
- Rhys, J. M. W. (1970). "Shared Fixed Cost and network Flows." Management Science **17**(3).
- Schofield, N. et P. Rolley (1997). Optimisation of ore selection in mining: Method and case studies. 3rd International Mining Geology Conference.
- Schwartz, E. S. (1997). "The stochastic behavior of commodity prices - Implications for valuation and hedging." Journal of Finance **52**: 923-973.
- Shaw, W. J. et S. Khosrowshahi (1997). Grade control sampling and ore blocking: Optimisation based on conditional simulation. 3rd International Mining Geology Conference.
- Sleator, D. D. et R. E. Tarjan (1983). "A data structure for dynamic trees." Computer System Science **24**: 362-391.
- Srivastava, R. M. (1987). "Minimum variance or maximum profitability?" CIM bulletin **80**(901): 63-68.
- Verly, G. (2005). "Grade Control Classification of Ore and Waste: A Critical Review of Estimation and Simulation Based Procedures." Mathematical Geology **37**(5): 451-475.
- Whittle, D. (1998). Whittle Programming's present and future tools for the strategic planning of mines. *27th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industries* (pp. 27-33). London, England.

## **ANNEXE 1 – Comparaison des méthodes du profit maximal et de la perte minimale pour la classification économique des blocs**

La classification économique des blocs dépend du choix de la fonction-objectif à optimiser. Le but est de réduire le mauvais classement économique des blocs (minerais ou stériles) afin de maximiser le revenu des opérations minières. Deux méthodes sont ici comparées : la méthode du profit maximal (Glacken, 1997) et la méthode de la perte minimale (Isaaks, 1990).

### **Détermination des variables et paramètres des méthodes**

La valeur nette d'un bloc dépend :

- des ses coûts d'extraction  $C_{ex}$  (sautage et halage);
- des ses coûts de traitement  $C_{tr}$  (halage vers l'usine et traitement);
- du prix du métal  $p$ ;
- de la teneur en métal du bloc  $z$ ;
- du taux de récupération du métal  $r$ ;
- et de la classification économique des blocs (stérile/minerais).

La teneur de coupure  $z_c$  est définie comme étant la teneur du bloc pour laquelle le coût de traitement égal aux revenus du bloc. De cette définition découlent quatre scénarios envisageables pour un bloc de teneur  $z$  :

1. classification « minerais » avec  $z > z_c \rightarrow$  minerais véritable
2. classification « minerais » avec  $z \leq z_c \rightarrow$  faux minerais
3. classification « stérile » avec  $z \leq z_c \rightarrow$  stérile véritable
4. classification « stérile » avec  $z > z_c \rightarrow$  faux stérile

Un bloc peut prendre deux valeurs : la valeur potentielle et la valeur récupérée. La valeur récupérée dépend du classement du bloc : un gain ( $prz - C_{ex} - C_{tr}$ ) pour un bloc de minerais et une

perte ( $-C_{ex}$ ) pour un bloc de stérile. La valeur potentielle et la valeur récupérée sont égales si un bon classement a été fait.

De plus, une variable binaire  $i(z, z_c)$  est définie tel que :

$$i(z, z_c) = \begin{cases} 1 & z \leq z_c \\ 0 & z > z_c \end{cases}$$

### Méthode 1 : Profit maximal

La méthode du profit maximal calcule le profit moyen pour chaque bloc, en fonction des teneurs simulées, pour les deux classifications possibles (stérile et minéral). La classification qui entraîne un profit maximal est celle retenue pour le bloc en question.

Si un bloc est classé « minéral », sa fonction de profit  $g(z)$  et son profit moyen  $P_{ORE}$  sont :

$$\begin{aligned} g(z) &= prz - C_{ex} - C_{tr} \\ P_{ORE} &= E[g(Z)] = E[prZ - C_{ex} - C_{tr}] \end{aligned}$$

Et lorsqu'il est classé « stérile », sa fonction de profit  $g(z)$  et son profit moyen  $P_{WST}$  sont :

$$\begin{aligned} g(z) &= -C_{ex} \\ P_{WST} &= E[g(Z)] = E[-C_{ex}] = -C_{ex} \end{aligned}$$

Il s'agit de classer le bloc de « minéral » si  $P_{ORE} > P_{WST}$ , et de « stérile » autrement.

### Méthode 2 : Perte minimale

La méthode de la perte minimale consiste à calculer la perte moyenne pour chaque bloc, en fonction de ses teneurs simulées, pour les deux classifications possibles (stérile et minéral). La classification qui entraîne une perte minimale est celle retenue pour le bloc. La perte associée à un bloc est définie par la différence entre sa valeur potentielle et sa valeur récupérée.

Si un bloc est classé « minerais », sa fonction de perte  $g(z)$  et sa perte moyenne  $L_{ORE}$  sont :

$$g(z) = \begin{cases} C_{tr} - prz & z \leq z_c \\ 0 & z > z_c \end{cases}$$

$$L_{ORE} = E[g(Z)] = E[i(Z, z_c) \times (-prZ + C_{tr})]$$

Et lorsqu'il est classé « stérile », sa fonction de perte  $g(z)$  et sa perte moyenne  $L_{WST}$  sont :

$$g(z) = \begin{cases} 0 & z \leq z_c \\ prz - C_{tr} & z > z_c \end{cases}$$

$$L_{WST} = E[g(Z)] = E[(1 - i(Z, z_c)) \times (prZ - C_{tr})]$$

Il s'agit de classer le bloc de « minerais » si  $L_{ORE} < L_{WST}$ , et de « stérile » autrement.

## Comparaison des deux méthodes

D'un point de vue théorique, les méthodes du profit maximal et de la perte minimale sont équivalentes (Verly, 2005).

La méthode du profit maximal classe un bloc de « minerais » si :

$$\begin{aligned} P_{ORE} &> P_{WST} \\ \Leftrightarrow E[prZ - C_{ex} - C_{tr}] &> -C_{ex} \\ \Leftrightarrow E[i(Z, z_c) \times (prZ - C_{tr})] + E[(1 - i(Z, z_c)) \times (prZ - C_{tr})] &> 0 \\ \Leftrightarrow E[i(Z, z_c) \times (prZ - C_{tr})] &> 0 - E[(1 - i(Z, z_c)) \times (prZ - C_{tr})] \\ \Leftrightarrow -L_{ORE} &> -L_{WST} \\ \Leftrightarrow L_{ORE} &< L_{WST} \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent au critère de classification de « minerais » de la méthode de la perte minimale.



## ANNEXE 2 – Comparaison des approches classique et stochastique d'optimisation

L'approche classique d'optimisation de fosse est généralement basée sur les teneurs krigées d'un gisement. Afin de déterminer la valeur économique nette des blocs, les teneurs krigées des blocs sont appliquées à une fonction de profit convexe  $V$ .

- soit  $x$ , une variable binaire telle que  $x \in \{0,1\}$   $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le bloc } i \text{ est miné} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- soit  $z_i^*$ , la teneur krigée du bloc  $i$  telle que  $i = \{1, \dots, nb\}$
- soit  $G$ , l'ensemble des blocs du gisement
- soit  $S_i$ , l'ensemble des blocs successeurs au bloc  $i$

La fonction de profit  $V$  prévue pour le krigeage est définie comme suit :

$$V = \begin{cases} -C_{ex} & \text{si stérile} \\ prz_i^* - (C_{ex} + C_{tr}) & \text{si minéral} \end{cases}$$

où  $z_i^*$  : teneur krigée du bloc

$C_{ex}$  : coût d'extraction du bloc

$C_{tr}$  : coût de traitement du bloc

$p$  : prix du métal

$r$  : taux de récupération du métal

La méthode classique d'optimisation se résume comme suit :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n \left[ V(z_i^*) x_i \right]$$

s.c.

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in G$$

$$(x_i - x_{i'}) \leq 0, \quad i' \in S_i, \quad i \in G$$

Par ailleurs, une teneur krigée peut être approchée par la moyenne d'un certain nombre de teneurs simulées par simulation géostatistique conditionnelle. Lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, la teneur moyenne tend vers la teneur krigée. Ainsi, il est correct de dire que l'approche classique s'appuie sur la valeur économique nette de la teneur moyenne (valeur krigée) de chaque bloc.

- soit  $z_{ij}$ , la teneur du bloc  $i$  dans la simulation  $j$  telle que  $i = \{1, \dots, nb\}$  et  $j = \{1, \dots, ns\}$
- soit  $\bar{z}_i$  la valeur moyenne de  $z_{ij}$  telle que  $\bar{z}_i = \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} z_{ij} \rightarrow z_i^*$  (lorsque  $ns$  est grand)

La méthode classique d'optimisation peut aussi se présenter comme suit :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n \left[ V \left( \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} z_{ij} \right) x_i \right]$$

s.c.

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in G$$

$$(x_i - x_{i'}) \leq 0, \quad i' \in S_i, \quad i \in G$$

L'approche stochastique propose plutôt de s'appuyer sur la moyenne des valeurs économiques nettes de chaque bloc, chacune attribuable à une teneur simulée. Cette modification par rapport à l'approche classique permet d'exploiter la convexité de la fonction de profit.

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} V(z_{ij}) x_i \right]$$

s.c.

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in G$$

$$(x_i - x_{i'}) \leq 0, \quad i' \in S_i, \quad i \in G$$

Il est possible de montrer mathématiquement que la solution optimale de l'approche stochastique est supérieure ou égale à la solution optimale de l'approche classique.

La fonction de profit  $V$  étant convexe, on a :

$$V\left(\frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} z_{ij}\right) \leq \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} V(z_{ij}) \quad \forall i$$

*approche classique*                      *approche stochastique*

La solution optimale classique n'est pas optimale pour le programme stochastique. Il existe par conséquent une solution meilleure que la solution classique, i.e., la solution stochastique.

Ainsi, chaque bloc présente une valeur nette supérieure avec l'approche stochastique. Une optimisation basée sur des valeurs de bloc supérieures conduit nécessairement à une fosse prévue plus grande et plus profitable. On peut donc s'attendre à obtenir en moyenne une fosse réelle plus profitable avec l'optimisation stochastique.

### ANNEXE 3 – Comparaison de l'approche stochastique et l'approche de Meagher

L'approche stochastique d'optimisation de fosse est basée sur les teneurs simulées d'un gisement. Afin de déterminer la valeur économique nette des blocs, les teneurs simulées des blocs sont obtenues par la fonction de profit convexe  $V$  suivante :

$$V = \begin{cases} -C_{ex} & \text{si stérile} \\ prz - (C_{ex} + C_{tr}) & \text{si minéral} \end{cases}$$

où  $z$  : teneur du bloc

$C_{ex}$  : coût d'extraction du bloc

$C_{tr}$  : coût de traitement du bloc

$p$  : prix du métal

$r$  : taux de récupération du métal

- soit  $x$ , une variable binaire telle que  $x \in \{0,1\}$   $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le bloc } i \text{ est miné} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- soit  $z_{ij}$ , la teneur du bloc  $i$  dans la simulation  $j$  telle que  $i = \{1, \dots, nb\}$  et  $j = \{1, \dots, ns\}$
- soit  $G$ , l'ensemble des blocs du gisement
- soit  $S_i$ , l'ensemble des blocs successeurs au bloc  $i$

Rappelons que l'approche stochastique d'optimisation se présente comme suit :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} V(z_{ij}) x_i \right]$$

s.c.

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in G$$

$$(x_i - x_{i'}) \leq 0, \quad i' \in S_i, \quad i \in G$$

L'approche de Meagher consiste à créer autant de graphes qu'il y a de simulations. Les nœuds des graphes sont ensuite liés par des arcs de capacité infinie. Dans l'approche de Meagher, les blocs sont donc indissociables d'une simulation à l'autre (liens de capacité infinie). Un bloc fera alors partie de la fosse si et seulement si la somme de ses valeurs possibles est choisie par l'algorithme d'optimisation.

Cette approche d'optimisation s'exprime sous la forme du programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{ns} V(z_{ij}) x_i \right] \\ & \text{s.c.} \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i \in G \\ & (x_i - x_{i'}) \leq 0, \quad i' \in S_i, \quad i \in G \end{aligned}$$

Ce programme linéaire est pareil au programme linéaire de l'approche stochastique, à une constante (1/ns) près (ns représente le nombre de simulations). La solution optimale de ce programme est donc égale à la solution optimale du programme stochastique.

## ANNEXE 4 – Comparaison de la performance de deux fosses stochastiques

Un second gisement aléatoire a été généré afin de vérifier les écarts obtenus entre les valeurs estimées et réelles des fosses stochastiques peuvent effectivement être positifs ou négatifs.

Ce nouveau gisement présente la même moyenne (0,7 ppm) et la même variance des teneurs ( $2 \text{ ppm}^2$ ) et le même variogramme (sphérique,  $a = 20\text{m}$ ,  $c = 1,24$  et  $c_0 = 0,39$ ). Il a été échantillonné de façon identique au gisement du chapitre 4 et découpé en un même nombre de blocs de dimensions  $9 \text{ m} \times 9 \text{ m} \times 9 \text{ m}$ . Les simulations ont été réalisées avec la méthode des bandes tournantes, puis conditionnées par une phase de post-conditionnement par krigeage.

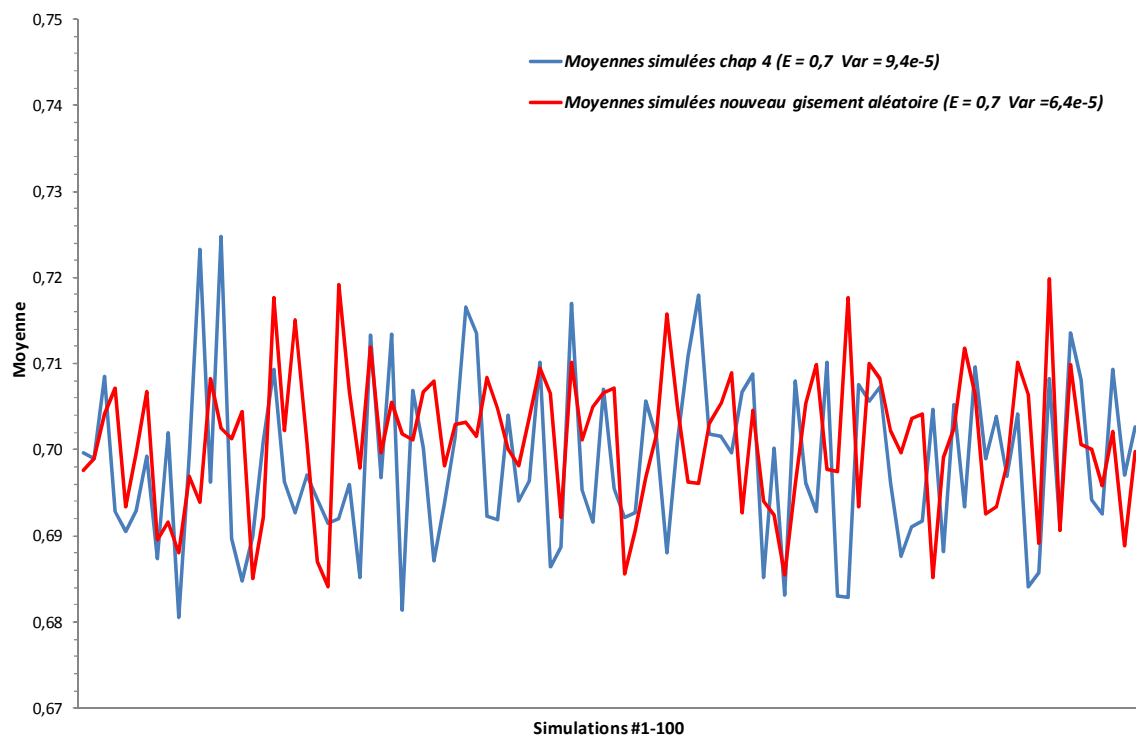
### Comparaison des distributions de teneurs réelles et échantillonnées

Le tableau suivant montre que les moyennes et les variances des échantillons et des teneurs réelles des deux gisements à l'étude sont comparables.

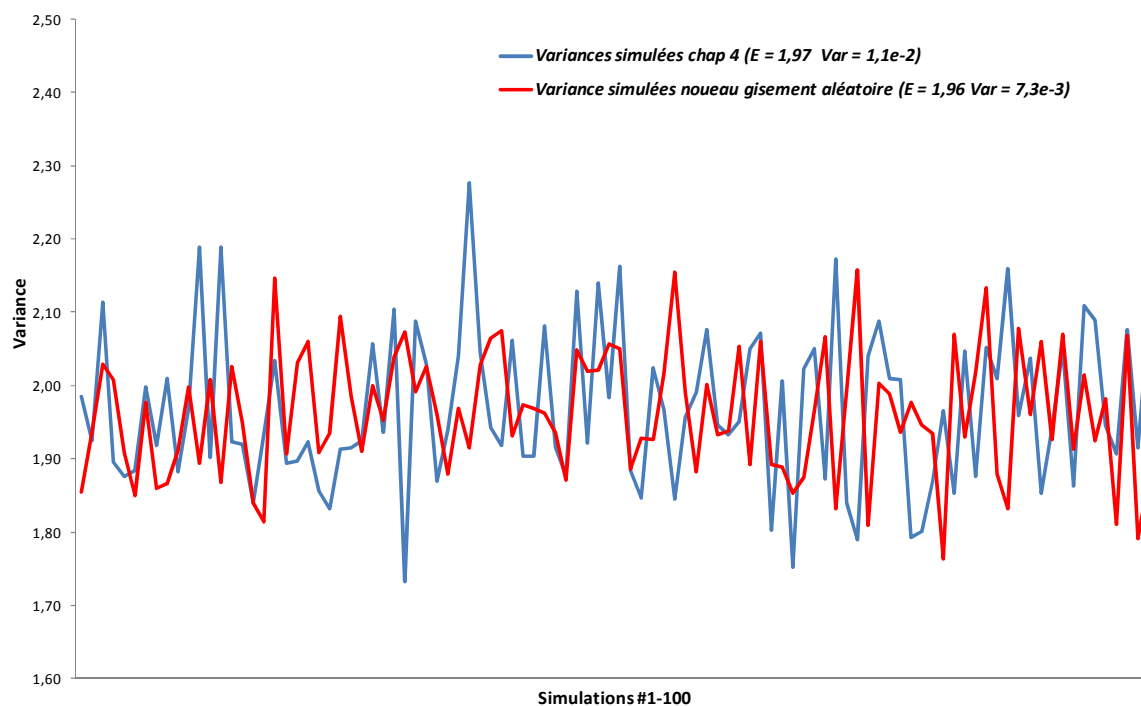
**Tableau A.1: Paramètres des échantillons et des teneurs réelles des deux gisements**

Distribution de teneurs	Paramètres des distributions	Gisement aléatoire du chapitre 4	Nouveau gisement aléatoire
Teneurs réelles	Nombre de données	1555200	1555200
	Moyenne (ppm)	0,69	0,71
	Variance ( $\text{ppm}^2$ )	1,89	2,02
Teneurs échantillonnées	Nombre de données	19200	19200
	Moyenne (ppm)	0,69	0,71
	Variance ( $\text{ppm}^2$ )	2,00	1,75

Les moyennes et les variances des distributions de teneurs simulées, pour les deux gisements, sont présentées aux figures suivantes.



**Figure A-1: Moyennes des distributions de teneurs simulées**



**Figure A-2: Variances des distributions de teneurs simulées**

La figure A-1 montre que les moyennes des deux ensembles de simulations varient dans un même intervalle (entre 0,68 et 0,72 ppm) et sont près de la moyenne attendue de 0,7 ppm.

La figure A-2 montre que les variances des deux ensembles de simulations varient aussi dans un même intervalle (entre 1,73 et 2,28 ppm) et sont près de la variance attendue de 2 ppm<sup>2</sup>. L'ensemble des nouvelles simulations présente une plus grande variance ( $\text{var} = 7,3 \times 10^{-3} \text{ ppm}^4$ ) que le premier ensemble ( $\text{var} = 1,1 \times 10^{-2} \text{ ppm}^4$ ). Ces écarts correspondent à des fluctuations aléatoires attendues.

Le tableau suivant résume les paramètres économiques de la fosse stochastique présentée au chapitre 4 et de la nouvelle fosse stochastique.

**Tableau A.2: Paramètres économiques des fosses stochastiques**

Design de fosse	Valeur nette réelle (M US\$)	Valeur nette estimée (M US\$)	Écart	Onces d'or réelles (K Oz)	Onces d'or estimées (K Oz)	Écart
<i>Fosse stochastique (chap. 4)</i>	59,21	67,59	8,38	643,13	655,14	12,02
<i>Nouvelle fosse stochastique</i>	75,83	70,70	-5,13	654,03	648,85	-5,18

Comme le montre le tableau A.2, la valeur nette estimée par la fosse stochastique présentée au chapitre 4 surestime de 14,15% sa valeur réelle et de 1,87% la quantité d'or réellement récupérable.

En contrepartie, la nouvelle fosse stochastique prévoit une valeur nette qui sous-estime de 6,77% sa valeur réelle et sous-estime de 0,79% la quantité d'or réellement récupérable.

Ces résultats montrent bien que les écarts obtenus entre les valeurs estimées et réelles des fosses stochastiques peuvent être positifs (fosse chap. 4) ou négatifs (nouvelle fosse). À force d'optimisations supplémentaires, la moyenne des écarts devrait tendre vers 0.



## ANNEXE 5 – Biais conditionnel et approches classique et stochastique

La fonction de profit  $v$  suivante permet de déterminer la valeur économique nette des blocs.

$$v = \begin{cases} -C_{ex} & \text{si } z \leq z_c \text{ (stérile)} \\ prz - (C_{ex} + C_{tr}) & \text{si } z > z_c \text{ (minera)} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où :

$z$  : teneur du bloc

$z_c$  : teneur de coupure (note :  $prz_c = C_{tr} + C_{ex}$ )

$C_{ex}$  : coût d'extraction du bloc

$C_{tr}$  : coût de traitement du bloc

$p$  : prix du métal

$r$  : taux de récupération du métal

Soient les variables aléatoires suivantes :

- $z_i$  : la teneur réelle du bloc  $i$
- $z_i^*$  : la teneur krigée du bloc  $i$
- $z_{ij}^s$  : la teneur simulée du bloc  $i$  dans le gisement simulé  $j$ , tel que  $j = \{1, \dots, ns\}$

Une teneur krigée peut être approchée par la moyenne d'un certain nombre de teneurs simulées par simulation géostatistique conditionnelle. Lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini, la teneur moyenne tend vers la teneur krigée. Ainsi, il est correct de réécrire  $z_i^*$  telle que :

$$z_i^* \rightarrow \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} z_{ij}^s = E[z_{ij}^s] \quad \text{lorsque } ns \rightarrow \infty \quad (\text{A.2})$$

La valeur nette réelle  $V_i$  d'un bloc  $i$  est calculée avec sa teneur réelle  $z_i$ , tel que :

$$V_i = v(z_i) \quad (\text{A.3})$$

La valeur nette classique  $V_i^{Cl}$  est calculée avec la teneur krigée du bloc  $i$ , tel que :

$$V_i^{Cl} = v(z_i^*) = v\left(E\left[z_{ij}^s\right]\right) \quad (\text{A.4})$$

La valeur nette stochastique  $V_i^{St}$  du bloc  $i$  est égale à :

$$V_i^{St} = E\left[v\left(z_{ij}^s\right)\right] \quad (\text{A.5})$$

Il est possible de démontrer que la valeur nette des blocs obtenue par l'approche classique sous-estime en moyenne la valeur réelle des blocs. De ce résultat, on conclut que l'approche classique pour déterminer la valeur nette des blocs n'est pas sans biais conditionnel.

### **Démonstration 1.1 – Approche classique**

Montrons que  $E[V_i] \geq V_i^{Cl} \quad \forall i$ , d'où  $E[V | V^{Cl}] \geq V^{Cl}$

Par définition, l'espérance conditionnelle de  $x$  par rapport à  $y$  est égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx = E[x|y] \quad (\text{A.6})$$

#### **1. Lorsque $z_i^* > z_c$ (le bloc $i$ est classé minéral)**

$$z_i^* > z_c \Rightarrow V_i^{Cl} = v(z_i^*) = prz_i^* - C_{ex} - C_{tr} \quad (\text{par l'équation A.1})$$

$$\begin{aligned} E[V_i] &= \underbrace{P[z_i \leq z_c] \cdot (-C_{ex})}_{\text{partie 1}} + \underbrace{\int_{z_c}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i}_{\text{partie 2}} \\ E[V_i] &= \int_{-\infty}^{z_c} (-C_{ex}) f(z_i | z_i^*) dz_i + \int_{-\infty}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i - \int_{-\infty}^{z_c} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i \end{aligned}$$

En réorganisant les termes de droite,

$$E[V_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i + \int_{-\infty}^{z_c} (C_{tr} - prz_i) f(z_i | z_i^*) dz_i$$

Puisque le krigeage est sans biais conditionnel et que  $E[z_i | z_i^*] = z_i^*$ , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i = prz_i^* - C_{ex} - C_{tr} = V_i^{Cl} \quad (\text{par l'équation A.6})$$

Ainsi,

$$E[V_i] = V_i^{Cl} + \underbrace{\int_{-\infty}^{z_c} (C_{tr} - prz_i) f(z_i | z_i^*) dz_i}_{\substack{\geq 0 \\ \text{lorsque } -\infty < z_i < z_c}}$$

D'où $E[V_i] \geq V_i^{Cl}$ lorsque $z_i^* > z_c$	→ Résultat 1
---	--------------

## 2. Lorsque $z_i^* \leq z_c$ (le bloc $i$ est classé stérile)

$$z_i^* \leq z_c \Rightarrow V_i^{Cl} = v(z_i^*) = -C_{ex} \quad (\text{par l'équation A.1})$$

$$\begin{aligned} E[V_i] &= P[z_i \leq z_c] \cdot (-C_{ex}) + \int_{z_c}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i \\ E[V_i] &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (-C_{ex}) f(z_i | z_i^*) dz_i - \int_{z_c}^{\infty} (-C_{ex}) f(z_i | z_i^*) dz_i}_{\substack{\geq 0 \\ \text{lorsque } z_i^* \leq z_c}} + \int_{z_c}^{\infty} (prz_i - C_{ex} - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i \end{aligned}$$

En réorganisant les termes de droite,

$$E[V_i] = -C_{ex} + \int_{z_c}^{\infty} (prz_i - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i$$

Ainsi,

$$E[V_i] = V_i^{Cl} + \underbrace{\int_{z_c}^{\infty} (prz_i - C_{tr}) f(z_i | z_i^*) dz_i}_{\substack{\geq 0 \\ \text{lorsque } z_c \leq z_i < \infty}} \quad (\text{par l'équation A.1})$$

D'où $E[V_i] \geq V_i^{Cl}$ lorsque $z_i^* \leq z_c$	→ Résultat 2
--	--------------

À partir des résultats 1 et 2, on peut conclure que :

$$\begin{aligned} E[V_i] &\geq V_i^{Cl} \quad \forall i \\ E[V_i | V_i^{Cl}] &\geq V_i^{Cl} \quad \forall i \Rightarrow E[V | V^{Cl}] \geq V^{Cl} \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur nette des blocs obtenue par l'approche classique  $V^{Cl}$  sous-estime en moyenne la valeur réelle des blocs. De ce résultat, on conclut que l'approche classique pour déterminer la valeur nette des blocs n'est pas sans biais conditionnel et que :

$$E[V | V^{Cl}] \geq V^{Cl}$$

Le même résultat peut aussi être obtenu par la démonstration suivante, plus courte.

### **Démonstration 1.2 – Approche classique**

Montrons que  $E[V_i] \geq V_i^{Cl} \quad \forall i$ , d'où  $E[V | V^{Cl}] \geq V^{Cl}$

Par l'équation A.3, on a,

$$\begin{aligned} V_i &= v(z_i) \\ E[V_i] &= E[v(z_i)] \end{aligned}$$

Par l'équation A.4, on a,

$$V_i^{Cl} = v\left(E[z_{ij}^s]\right)$$

où  $i$  est un bloc dans un gisement simulé  $j$ . Or, un gisement simulé pourrait aussi bien être un gisement réel, de sorte qu'il est possible d'exprimer l'espérance de la valeur nette réelle d'un bloc en fonction de  $z_{ij}^s$  :

$$E[V_i] = E[v(z_i)] = E[v(z_{ij}^s)]$$

Par convexité,

$$\underbrace{E[v(z_{ij}^s)]}_{E[V_i]} \geq \underbrace{v(E[z_{ij}^s])}_{V_i^{Cl}}$$

D'où,

$$E[V_i] \geq V_i^{Cl} \quad \forall i \Rightarrow E[V | V^{Cl}] \geq V^{Cl}$$

Il est également possible de démontrer que la valeur nette des blocs obtenue par l'approche stochastique est égale à l'espérance de la valeur réelle des blocs. On conclut alors que l'approche stochastique est sans biais conditionnel.

### **Démonstration 2.1 – Approche stochastique**

Montrons que  $E[V_i] = V_i^{St} \quad \forall i$ , d'où  $E[V | V^{St}] = V^{St}$

Par l'équation A.3, on a,

$$\begin{aligned} V_i &= v(z_i) \\ E[V_i] &= E[v(z_i)] \end{aligned}$$

Par l'équation A.5, on a,

$$V_i^{St} = E[v(z_{ij}^s)]$$

où  $i$  est un bloc dans un gisement simulé  $j$ . Or, un gisement simulé pourrait aussi bien être un gisement réel, de sorte qu'il est possible d'exprimer l'espérance de la valeur nette réelle d'un bloc en fonction de  $z_{ij}^s$  :

$$E[V_i] = E[v(z_i)] = E[v(z_{ij}^s)] \rightarrow V_i^{St} \quad \text{lorsque } ns \rightarrow \infty$$

Ainsi, il y a équivalence entre l'espérance de la valeur nette réelle d'un bloc  $E[V_i]$  et sa valeur nette stochastique  $V_i^{St}$ .

D'où,

$$E[V_i] = V_i^{St} \quad \forall i \Rightarrow E[V | V^{St}] = V^{St}$$