POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title: Equation de la chaleur et le mouvement brownien

Auteurs: Authors: Gilles Deslauriers, & Serge Dubuc

Date: 1976

Type: Rapport / Report

Référence: Citation: Deslauriers, G., & Dubuc, S. (1976). Equation de la chaleur et le mouvement brownien. (Rapport technique n° EP-R-76-27). https://publications.polymtl.ca/6015/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL: https://publications.polymtl.ca/6015/

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Terms of Use: Tous droits réservés / All rights reserved

Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: Report number: EP-R-76-27

URL officiel: Official URL:

Mention légale: Legal notice:

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

MATHÉMATIQUES

Rapport Technique EP76-R-27

Classification: Library of Congress no

L'EQUATION DE LA CHALEUR ET LE MOUVEMENT BROWNIEN

GILLES DESLAURIERS et SERGE DUBUC

Novembre 1976

CA2PQ
UP4
76R27
FRE
ex.2

Ecole Polytechnique de Montréal

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

Bibliothèque
Ecole
Polytechnique
MONTRÉAL
97530
COTE
CA2PQ
UP1
76R27
FRE
ex.2

8 NOV 1976

L'EQUATION DE LA CHALEUR ET LE MOUVEMENT BROWNIEN

Gilles Deslauriers et Serge Dubuc

I - *INTRODUCTION*

La propagation de la chaleur est intimement liée au mouvement brownien. C'est Bachelier en 1900, [1], qui a observé le premier que certaines fonctions rattachées au mouvement brownien satisfont à l'équation de la chaleur. De multiples travaux ont consacré cette liaison. On peut même dire en un sens que c'est le mouvement brownien qui est la clef de la théorie de la propagation de la chaleur. De fait, plusieurs probabilistes ont montré que le mouvement brownien permettait une analyse très fine de l'équilibre thermique. Le travail de Port et Stone, [8], en est une illustration excellente.

Les problèmes dont nous voulons traiter manifesteront ce jeu de va-et-vient entre l'équation de la chaleur et le mouvement brownien. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, désignons par $u(x,t)$ la probabilité que le mouvement brownien issu du point x à l'instant 0 demeure dans le domaine Ω pendant tout l'intervalle de temps $(0,t)$; ici x appartient à Ω. On sait que la fonction u satisfait à l'équation de la chaleur; $2\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$. $u(x,t)$ représente aussi la température à l'instant t au point x, lorsque Ω était à l'instant 0 à la température 1 en chacun de ses points et lorsque la frontière de Ω est constamment maintenue à la température nulle. Cette correspondance est valable au moins dans le cas où Ω est un ouvert borné régulier. Considérons le ou les points les plus chauds,

$$C(t) = \{x : u(x,t) = \sup_{y \in \Omega} u(y,t)\},$$

ce sont les points de probabilité maximale à l'instant t. Nous nous intéressons aux variations de C(t), si elles existent. En particulier, nous étudierons le comportement asymptotique de C(t) lorsque t tend vers l'infini ou lorsque t tend vers zéro. Nous montrerons que C(t) se réduit en un seul point (éventuellement variable en fonction du temps) lorsque Ω est un ouvert convexe borné non-vide. Ce dernier résultat sera une conséquence de deux propriétés de la fonction u(x,t), la première est que le logarithme de u est une fonction concave de x et la deuxième est que u est une fonction analytique de x. De toute façon, nous établirons le caractère spatialement analytique de toute solution à l'équation de la chaleur.

II - EQUATION DE LA CHALEUR

Nous résumons ici les aspects de la théorie de la chaleur, dont nous nous servirons dans la suite. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $c > 0$, considérons le cylindre dans $\mathbb{R}^{n+1}$: $\Gamma = \Omega \times (0,c)$. Nous nous limiterons aux solutions classiques de l'équation de la chaleur, il s'agira de fonctions $u:\Gamma \to \mathbb{R}$, telles que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, existent, sont des fonctions continues et satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} .$$

Nous utiliserons une terminologie particulière. Nous dirons qu'une solution à l'équation de la chaleur est du type A si elle se prolonge continûment à l'adhérence, $\bar{\Gamma}$, du cylindre Γ. Nous dirons qu'une solution à l'équation de la chaleur est du type B si u est une fonction bornée sur Γ et si u

se prolonge continûment sur $\bar{\Omega} \times (0,c) \cup \Omega \times \{0\}$. Si $\bar{u}(x,t)$ est le prolongement, la restriction de $\bar{u}$ à la base du cylindre $\Omega \times \{0\}$ sera notée $u_0(x) = \bar{u}(x,0)$ et sera appelée la trace de u sur la base ou encore la distribution initiale de la température. La restriction de $\bar{u}$ à la paroi latérale du cylindre, $\partial\Omega \times (0,c)$, sera notée $u_\ell(x,t) = \bar{u}(x,t)$ et sera appelée la trace sur la paroi ou encore le régime de température à la frontière de Ω.

Citons un cas particulier du principe du maximum pour l'équation de la chaleur. Ce cas est analysé avec simplicité dans Dennemeyer, [3].

Théorème 1.

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, si u est une solution à l'équation de la chaleur sur $\Omega \times (0,c)$ de type A, si $m \leqslant u_0(x) \leqslant M$, $x \in \Omega$, et si $m \leqslant u_\ell(x,t) \leqslant M$, $x \in \partial\Omega$ et $t \in (0,c)$ alors pour tout x de Ω et pour tout t de $(0,c)$, $m \leqslant u(x,t) \leqslant M$.

On obtient comme corollaire qu'une solution à l'équation de la chaleur de type A dont la distribution initiale de température est nulle et dont le régime de température à la frontière est nul donne lieu à la fonction identiquement nulle. Ceci assure l'unicité de la solution à l'équation de la chaleur en fonction des données aux limites.

III - SOLUTION PROBABILISTE A L'EQUATION DE LA CHALEUR

Soit $u(x,t)$ une solution à l'équation de la chaleur du type B sur le domaine $\Omega \times (0,c)$ dont la distribution initiale de température est $u_0(x)$ et dont le régime de température à la frontière est $u_\ell(x,t)$. Nous recherchons une représentation suffisamment explicite de $u(x,t)$ en fonction

de u_0 et de u_ℓ. Si x est un point de Ω, nous désignerons par $T = T(x,\Omega)$ le premier instant de $(0,\infty)$ où le mouvement brownien $X(t)$ de $\mathbb{R}^n$ issu de x à l'instant 0 quitte l'ensemble Ω. Posons $T_t = \min(T,t)$. Nous établirons dans les paragraphes qui suivront que $u(x,t)$ est l'espérance mathématique de la variation aléatoire $u(X(T_t),t-T_t)$. D'autre part, cette espérance peut se calculer en fonction de u_0 et de u_ℓ. De façon plus précise, nous allons trouver un noyau sur Ω, $p_t(x,y)$ et une mesure $d\mu_{t,x}(y)$ portée par la frontière de Ω, $0 < t < \infty$, de telle sorte que

$$u(x,t) = \int_\Omega p_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t d\left(\int_{\partial\Omega} u_\ell(y,t-\tau)\, d\mu_{\tau,x}(y) \right). \quad (1)$$

En fait, on sait que la variable aléatoire $X(T_t)$ induit une mesure sur l'adhérence de Ω, $\nu_{x,t} : \nu_{x,t}(A) = \Pr[X(T_t) \in A]$. La restriction de $\nu_{x,t}$ à Ω donnera la mesure $p_t(x,y)\,dy$ et la restriction de $\nu_{x,t}$ à $\partial\Omega$ donnera justement la mesure $\mu_{t,x}$. La formure (1) sera appelée la formule de représentation intégrale de l'équation de la chaleur pour le domaine Ω. Pour établir la validité de cette formule, nous passerons par les étapes suivantes. Le premier cas analysé sera la solution de l'équation de la chaleur pour $n = 1$, $\Omega = (a,b)$, le deuxième cas sera la solution de l'équation de la chaleur pour un pavé Ω de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$, Ω est un produit cartésien d'intervalles), le troisième cas sera pour un domaine Ω régulier et borné, le cas général sera le quatrième cas.

IV - PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE TIGE

Soit une tige (a,b), $a < b$, à l'instant 0 la température de la tige au point x est $u_0(x)$ où u_0 est une fonction continue sur $[a,b]$;

à l'instant t, $0 \leqslant t \leqslant c$, les extrémités de la tige sont à la température $a(t)$ et $b(t)$, $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions continues sur $[0,c]$. On recherche une fonction continue $u(x,t)$ sur $[a,b] \times [0,c]$ telle que sur $(a,b) \times (0,c)$ $2\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Procédons comme si la formule (1) était vraie pour $n = 1$ et $\Omega = (a,b)$. Soit $x \in (a,b)$, considérons le processus de Wiener $W(t)$ issu de x à l'instant $t = 0$; pour décrire l'absorption par les extrémités de l'intervalle (a,b), posons $X(t)$ égal à a ou à b si la première sortie hors de l'intervalle (a,b) s'effectue avant ou à l'instant t, $X(t)$ sera alors le point de première sortie; si le processus est demeuré constamment dans l'intervalle (a,b) jusqu'à l'instant t, on pose $X(t) = W(t)$. Il nous faut connaître la loi de $X(t)$, posons

$$A_t(x) = Pr_x [X(t) = a] \quad , \quad B_t(x) = Pr_x [X(t) = b] \ .$$

$A_t(x)$ et $B_t(x)$ sont les poids des deux atomes de la loi de $X(t)$. La loi de $X(t)$ est très bien connue, comme en fait foi le volume de Lévy, [7]. Néanmoins, nous présentons une nouvelle formule pour calculer $A_t(x)$ et $B_t(x)$. Cette formule sera essentielle pour nous un peu plus tard.

Théorème 2.

La loi de $X(t)$ est absolument continue sur (a,b) et admet deux atomes, l'un à a, l'autre à b, si $p_t(x,y)$ est la densité de la partie absolument continue, si $A_t(x)$ et $B_t(x)$ sont les poids des atomes a et b, on a les formules suivantes:

$$p_t(x,y) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{e^{-(y-x+2n(b-a))^2/2t} - e^{-(2a-y-x+2n(b-a))^2/2t}\} \qquad (2)$$

$$A_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2n}{\sqrt{2\pi t}} \int_{b+(2n-1)(b-a)}^{b+(2n+1)(b-a)} e^{-(y-x)^2/2t}\, dy \qquad (3)$$

$$B_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{2\pi t}} \int_{a+(2n-1)(b-a)}^{a+(2n+1)(b-a)} e^{-(y-x)^2/2t}\, dy \qquad (4)$$

Démonstration:

Pour évaluer $B_t(x)$, partons de la fonction $h(y)$, en escalier, qui vaut $2n$ sur l'intervalle $(a+(2n-1)(b-a),\ a+(2n+1)(b-a))$. Si $W(t)$ est le processus de Wiener issu de x, alors que $x \in (a,b)$, évaluons l'espérance de $h(W(t))$ de deux façons différentes. $W(t)$ suit une loi normale de moyenne x et de variance t, d'où

$$\mathcal{E}(h(W(t))) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{2\pi t}} \int_{a+(2n-1)(b-a)}^{a+(2n+1)(b-a)} e^{-(y-x)^2/2t}\, dy\ .$$

Décomposons la variable $W(t)$ selon le temps τ de première sortie hors de (a,b) et selon le point de sortie $W(\tau)$. Si $\tau > t$, on a que $h(W(t)) = 0$. Si $\tau \leqslant t$ et si $W(\tau) = a$, on a que $\mathcal{E}(h(W(t)) \,|\, \tau \leqslant t\ ,\ W(\tau) = a) = 0$ car h est une fonction antisymétrique autour de $y = a$: $h(2a-y) = -h(y)$ et $\{W(t) \,|\, \tau \leqslant t\ ,\ W(\tau) = a\}$ est une variable aléatoire symétrique par rapport à la position a. D'autre part, si $\tau \leqslant t$ et si $W(\tau) = b$, puisque $h(2b-y)+h(y) = 2$ et puisque $\{W(t) \,|\, \tau \leqslant t\ ,\ W(\tau) = b\}$ est une variable aléatoire symétrique par rapport à la position b, on aura que

$$\mathcal{E}(h(W(t)) \,|\, \tau \leqslant t\ ,\ W(\tau) = b) = 1\ .$$

D'où

$$\mathcal{E}(h(W(t))) = Pr_x[\tau \leqslant t\ ,\ W(\tau) = b] = B_t(x)\ .$$

Ceci établit donc les formules pour $A_t(x)$ et $B_t(x)$.

On peut calculer $p_t(x,y)$ d'une façon analogue. Soit I un sous-intervalle de (a,b), posons $J = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} 2n(b-a) + I$ et soit J' l'image de J par l'antisymétrie $y \to 2a-y$. Si l'on introduit la fonction g(y) qui vaut 1 sur J, -1 sur J' et 0 ailleurs, on a que $g(2a-y) = g(2b-y) = -g(y)$. D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(g(W(t))) &= \mathcal{E}(g(X(t))) \\
&= (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_I \{e^{-(y-x+2n(b-a))^2/2t} - e^{-(2a-y-x+2n(b-a))^2/2t}\}\, dy \\
&= \int_I p_t(x,y)\, dy \ .
\end{aligned}$$

On peut donc juger que la validité des diverses formules est établie. ∎

Remarques:

La formule (2) est donnée dans Lévy, [7]. Il est maintenant facile de vérifier que les fonctions de x et de t, $p_t(x,y)$, $A_t(x)$ et $B_t(x)$ satisfont à l'équation de la chaleur $2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Un calcul simple permet d'évaluer la dérivée partielle de $A_t(x)$ et de $B_t(x)$ par rapport à t,

$$A'_t(x) = \frac{\partial A_t(x)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(2\pi t^3)^{-\frac{1}{2}}(x-a-2n(b-a))\ e^{-(x-a-2n(b-a))^2/2t} \qquad (3')$$

Une formule semblable tient pour $B'_t(x) = \frac{\partial B_t(x)}{\partial t}$. Les deux fonctions $A'_t(x)$ et $B'_t(x)$ sont également solution à l'équation de la chaleur.

Revenons au problème de la propagation de la chaleur dans une tige. Si $u_0(x)$ est une distribution continue de température sur [a,b] et si

$a(t)$ et $b(t)$ sont des régimes continus de température que l'on veut accorder aux extrémités de la tige, posons pour $x \in (a,b)$, $t \in (0,c)$,

$$v(x,t) = \int_a^b p_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t a(t-\tau)\, A'_\tau(x)\, d\tau + \int_0^t b(t-\tau)\, B'_\tau(x)\, d\tau .$$

Il est facile de voir que $v(x,t)$ satisfait à l'équation de la chaleur $2\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Vérifions maintenant que $v(x,t)$ converge uniformément sur (a,b) vers $u_0(x)$ lorsque t tend vers zéro. On remarque d'abord que $\int_0^t [a(t-\tau)-a(0)]\, A'_\tau(x)\, d\tau$ converge uniformément vers zéro; il en est de même pour $\int_0^t [b(t-\tau)-b(0)]\, B'_\tau(x)\, d\tau$. Il suffit donc de démontrer que

$$(P_t u_0)(x) = \int_a^b p_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + u_0(a)\, A_t(x) + u_0(b)\, B_t(x)$$

converge uniformément vers $u_0(x)$ sur (a,b). L'application $u_0 \to P_t u_0$ est précisément un opérateur de Korovkin, [6], de $C[a,b]$ dans $C[a,b]$; c'est-à-dire que $P_t 1 = 1$ et $u \geqslant 0 \Rightarrow P_t u \geqslant 0$. Pour vérifier la convergence uniforme de $P_t u$ vers u, il suffit de l'établir pour les fonctions $u_1(y) = y$ et $u_2(y) = y^2$. Or $P_t u_1 = u_1$ pour tout $t > 0$. En effet

$$\mathcal{E}_x[W(t)] = x = \int_a^b p_t(x,y)\, y\, dy + a\, A_t(x) + b\, B_t(x) .$$

D'autre part

$$\mathcal{E}_x[(W(t)-x)^2] = t = \int_a^b p_t(x,y)(y-x)^2 dy + \int_0^t [(t-\tau) + (a-x)^2]\, A'_\tau(x)\, d\tau + \int_0^t [(t-\tau) + (b-x)^2]\, B'_\tau(x)\, d\tau .$$

D'où $$[(P_t u_2)(x) - u_2(x)] = t - \int_0^t (t-\tau)\, [A'_\tau(x) + B'_\tau(x)]\, d\tau .$$

On voit bien que le membre à droite converge uniformément sur (a,b) vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Vérifions maintenant que $v(x,t)$ converge uniformément vers $a(t)$ lorsque x s'approche de a par la droite. Il suffit de vérifier que pour tout $\delta > 0$, $v(x,t)$ converge uniformément sur $[\delta,c]$ vers $a(t)$ lorsque x s'approche de a par la droite. Puisque de façon uniforme en y, $a < y < b$, en t, $\delta \leqslant t \leqslant c$, $p_t(x,y)$ et $B'_t(x)$ converge vers zéro lorsque x tend vers a, il suffit de montrer que de façon uniforme sur $[\delta,c]$, $\int_0^t [a(t-\tau)-a(t)]\, A'_\tau(x)\, d\tau$ tend vers zéro. Ceci est vrai, parce que pour tout $h > 0$, $\lim_{x\downarrow a} \int_h^t A'_\tau(x)\, d\tau = 0$. En effet $\int_h^t A'_\tau(x)\, d\tau \leqslant A_c(x) - A_h(x)$. Or $\lim_{x\downarrow a} A_c(x) = \lim_{x\downarrow a} A_h(x) = 1$ comme la formule (3) le montre.

La fonction $v(x,t)$ satisfait donc au problème posé au début de cette section. Si $u(x,t)$ est une solution à l'équation de la chaleur sur le rectangle $[a,b] \times [0,c]$ répondant aux mêmes conditions aux limites, le théorème 1, d'unicité nous assure que $u(x,t) = v(x,t)$. Résumons sous la forme d'un théorème les derniers résultats que nous avons établis.

Théorème 3.

La solution à l'équation de la chaleur $2\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans le rectangle $(a,b) \times (0,c)$ prolongeable continûment à $[a,b] \times [0,c]$ à une distribution initiale de température $u_0(x)$ et à un régime de température à la frontière $a(t)$ et $b(t)$ est

$$u(x,t) = \int_a^b p_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t a(t-\tau)\, \frac{\partial A_\tau(x)}{\partial \tau}\, d\tau + \int_0^t b(t-\tau)\, \frac{\partial B_\tau(x)}{\partial \tau}\, d\tau ,$$

où $p_t(x,y)\,dy + A_t(x)\,\delta_a(y) + B_t(x)\,\delta_b(y)$ est la loi de $X(t)$, du processus de Wiener issu de x, modifié par l'absorption aux extrémités de l'intervalle (a,b).

V - PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN PAVE DE $\mathcal{R}^n$

Soit Ω le produit cartésien de n intervalles finis de $\mathcal{R}$, $\Omega = \prod_{i=1}^{n} (a_i,b_i)$, soient $u_0(x)$ et $u_\ell(x,t)$ deux fonctions continues, l'une définie sur $\bar{\Omega} = \prod_{i=1}^{n} [a_i,b_i]$, l'autre sur $\partial\Omega \times [0,c]$ de telle sorte que $u_\ell(x,0) = u_0(x)$ si $x \in \partial\Omega$. On recherche une fonction continue $u(x,t)$ définie sur $\bar{\Omega} \times [0,c]$ telle que $u(x,0) = u_0(x)$ si $x \in \bar{\Omega}$, $u(x,t) = u_\ell(x,t)$ si $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,c]$ et $2\,\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ si $x \in \Omega$, $t \in (0,c)$.

Soit $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ un point de Ω, considérons le processus de Wiener $W(t)$ issu de x à l'instant 0, de moyenne x et dont la matrice de covariance est t fois la matrice identité à l'instant t. Essentiellement, il s'agit de n processus indépendants linéaires de Wiener $W_1(t),W_2(t),\ldots,W_n(t)$ où $W_i(t)$ est issu de x_i à l'instant 0, chacun des processus est de moyenne x_i et de variance t à l'instant t. Nous modifions le processus $W(t)$ par absorption à la frontière de Ω. Soit T le premier instant de sortie hors de Ω, on pose $X(t) = W(t)$ si $t < T$ et $X(t) = W(T)$ si $t \geqslant T$, $X_i(t)$ sera la ième composante de $X(t)$. Déterminons la loi de $X(t)$, ce qui est aisé. Soit $dy = dy_1,dy_2,\ldots,dy_n$ un élément de volume de Ω, si $p_t(x_i,y_i)\,dy_i$ est l'élément de probabilité que le processus $X_i(t)$ soit dans l'élément linéaire dy_i, alors l'élément de probabilité que le processus $X(t)$ soit dans l'élément dy à l'instant t est $p_t(x,y)\,dy = (\prod_{i=1}^{n} p_t(x_i,y_i))\,dy$. D'autre part si $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ est

un point de $\partial\Omega$ qui n'appartient qu'à une seule face extérieure, (disons que $y_i = a_i$, $y_j \neq a_j$ et $y_j \neq b_j$, lorsque $j \neq i$), si dy est l'élément de surface, $dy = \bigwedge_{j\neq i} dy_j$ et si dt est l'élément de temps, l'élément de probabilité que le processus $X(t)$ atteigne l'élément de surface dy durant la période de temps dt est

$$q_t(x,y)\ dy \wedge dt = \prod_{j\neq i} p_t(x_j,y_j)\ \frac{\partial A_t^{(i)}(x_i)}{\partial t}\ dy \wedge dt\ ,$$

où $A_t^{(i)}(x)$ est la probabilité que le processus $X_i(t)$ ait été absorbé par a_i avant l'instant t.

Quant aux autres points de $\partial\Omega$, ceux qui appartiennent à simultanément plus d'une face $y_i = a_i$ ou $y_i = b_i$, ils sont négligeables pour la loi de $X(t)$.

Les fonctions $p_t(x,y)$ et $q_t(x,y)$ satisfont toutes à l'équation de la chaleur pour y fixe.

Posons

$$v(x,t) = \int_\Omega p_t(x,y)\ u_o(y)\ dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} u_\ell(y,t-\tau)\ q_\tau(x,y)\ dy\ d\tau\ .$$

En utilisant des techniques analogues à celles de la section précédente, on vérifie que $v(x,t)$ satisfait à l'équation de la chaleur et se prolonge continûment à $\bar{\Omega} \times [0,c]$; de plus le prolongement obtenu coincide avec $u_o(x)$ sur la base du cylindre $t = 0$ et il coincide avec $u_\ell(x,t)$ sur la paroi latérale du cylindre $x \in \partial\Omega$ et $t \in [0,c]$.

Le théorème d'unicité permet de vérifier que v est l'unique solution du problème posé au début de la section 5 et la formule (1) est donc valide pour tout pavé Ω de $\mathbb{R}^n$.

VI - PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN DOMAINE BORNE REGULIER DE $\mathcal{R}^n$

Soit Ω un ouvert de $\mathcal{R}^n$ et soit y un point de la frontière de Ω, on dit que le point y est régulier (pour Ω), si pour tout $h > 0$, $\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} \varphi(x,h) = 0$ où $\varphi(x,h)$ est la probabilité que le mouvement brownien issu de x sorte de Ω pour la première fois après l'instant h. On retrouve dans Dynkin-Yuskevich, [4], une étude de la régularité. Il y est démontré en particulier que si la condition du cône de Poincaré est satisfaite au point y, alors y est un point régulier. Cette condition est qu'il existe un cône ouvert non-vide de sommet y situé hors de Ω. On dit qu'un ouvert est régulier si tous les points de la frontière de Ω sont réguliers.

Théorème 4.

Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathcal{R}^n$ et soit $u_o(x,t)$ une fonction continue bornée définie sur $\Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,c]$, si $W(t)$ est le processus canonique de Wiener dans $\mathcal{R}^n$ issu de x à l'instant 0, si T_t est le minimum entre t et le premier temps de sortie du processus hors de Ω, alors la fonction $u(x,t) = \mathcal{E}(u_o(W(T_t), t-T_t))$ satisfait à l'équation de la chaleur dans $\Omega \times (0,c)$.

Démonstration:

Soient $x \in \Omega$ et $t \in (0,c)$, la variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{R}^{n+1}$, $(W(T_t), T_t)$ induit une mesure sur le cylindre $\partial\Omega \times (0,c) \cup \Omega \times \{t\}$. Désignons par $\mu_{t,x}(y)$ la restriction de cette mesure à $\Omega \times \{t\}$ où y

parcourt Ω et $\nu_x(y,\tau)$ la restriction de cette mesure à $\partial\Omega \times (0,c)$ où $y \in \partial\Omega$ et $\tau \in (0,c)$. Soit Q un pavé ouvert contenant x, dont l'adhérence est contenu dans Ω, décomposons les trajectoires du chaos de Wiener selon le temps U de la première sortie hors de Q et posons $U_t = \min(U,t)$ La variable aléatoire $(W(U_t), U_t)$ induit une mesure sur $\partial Q \times (0,c) \cup Q \times \{t\}$. Cette variable admet la densité $p_t(x,y)\,dy$ sur $Q \times \{t\}$ et la densité $q_\tau(x,y)\,dy\,d\tau$ sur $\partial Q \times (0,t)$. D'où

$$d\mu_{t,x}(y) = p_t(x,y)\,dy + \int_0^t \int_{\partial Q} q_{t-\tau}(x,y')\,d\mu_{\tau,y'}(y)\,dy'\,d\tau$$

pour $y \in \Omega$. Il est sous-entendu ici que $p_t(x,y) = 0$ si $y \notin Q$.

$$d\nu_x(y,\tau) = \int_0^\tau \int_{\partial Q} q_{\tau-\tau'}(x,y')\,d\nu_{y'}(y,\tau')\,dy'\,d\tau'$$

pour $y \in \partial\Omega$ et $0 < \tau \leqslant t$. Evaluons l'espérance $v(x,t)$ de $u_o(W(T_t), t-T_t)$ à l'aide des formules précédentes.

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \mathbb{E}(u_o(W(T_t), t-T_t)) \\ &= \int_\Omega u_o(y,0)\,d\mu_{t,x}(y) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} u_o(y,\tau)\,d\nu_x(y,t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_Q u_o(y,0)\,p_t(x,y)\,dy + \int_0^t \int_{\partial Q} \int_\Omega q_{t-\tau}(x,y')\,u_o(y,0)\,d\mu_{\tau,y'}(y)\,dy'\,d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\partial Q} \int_0^\omega \int_{\partial\Omega} q_{t-\omega}(x,y')\,u_o(y,\omega-\tau')\,d\nu_{y'}(y,\tau')\,dy'\,d\tau'\,d\omega\,. \end{aligned}$$

Ceci a été obtenu après avoir changé l'ordre dans les intégrations successives et après avoir fait le changement de variable $\omega = \tau+\tau'$.

Les calculs de la section 5 permettent alors d'affirmer que $v(x,t)$ est une solution à l'équation de la chaleur. ∎

Comme corollaire, on obtient que la formule (1) de la section 3 est valide lorsque Ω est un ouvert borné régulier. En effet, si $u(x,t)$ est la solution de l'équation de la chaleur et $v(x,t)$ est la solution de l'équation telle que décrite précédemment, la régularité de Ω donne que $\lim_{\substack{x\to y \\ x\in\Omega}} v(x,t) = u(y,t)$ si $y \in \partial\Omega$. Le théorème d'unicité pour un ouvert borné donne que $u \equiv v$.

Pour établir que la formule (1) de la section 3 est valide pour un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, on utilise une suite croissante Ω_n d'ouverts bornés réguliers dont la réunion donne Ω. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails.

VII - LE CARACTERE SPATIALEMENT ANALYTIQUE DES SOLUTIONS A L'EQUATION DE LA CHALEUR

Comme Hilbert l'avait pressenti dans son 19ème problème présenté au deuxième congrès international des mathématiciens en 1900, toute solution à une équation aux dérivées partielles du type elliptique à coefficients analytiques est analytique. De plus, une équation aux dérivées partielles à coefficients constants qui n'est pas du type elliptique admet des solutions non-analytiques. On retrouve ces résultats dans Hormander, [5], par exemple. L'équation de la chaleur est du type parabolique. Ceci nous assure que toute solution de classe C^2 est de classe C^∞, mais aucune garantie n'est donnée sur l'analyticité d'une telle solution.

Théorème 5.

Si u est une solution à l'équation de la chaleur dans l'ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega \times (0,c)$, alors pour tout t de $(0,c)$, la fonction $x \to u(x,t)$ est analytique dans Ω.

Démonstration:

Soit x un point donné de Ω, considérons un pavé ouvert Q de $\mathbb{R}^n$ où $x \in Q$, $\bar{Q} \subseteq \Omega$, quitte à considérer plutôt la fonction $v(x,t) = u(x,\varepsilon+t)$ où $\varepsilon > 0$, on peut supposer que u est uniformément continue sur $Q \times (0,c)$. Puisque

$$u(x,t) = \int_Q p_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\partial Q} u_\ell(y,\tau)\, q_{t-\tau}(x,y)\, dy\, d\tau ,$$

pour vérifier l'analyticité de $x \to u(x,t)$, il suffit de trouver un ouvert Q_* de $\mathbb{C}^n$, des prolongements analytiques à Q_* des fonctions $x \to p_t(x,y)$ et $x \to q_t(x,y)$ de telle sorte que $Q \subseteq Q_*$,

$$\text{Sup } \{|p_t(z,y)| : z \in Q_*,\ y \in Q\} = G(t) < \infty$$

$$\text{Sup } \{|q_t(z,y)| : z \in Q_*,\ y \in \partial\Omega\} = h(t)$$

alors que $\int_0^c h(t)\, dt = H(c) < \infty$. Ces majorations seront d'autant plus utiles qu'elles permettront de majorer le module du prolongement analytique de $u(x,t)$ à Q_*: $|u(x,t)| \leqslant G(t)\, V(Q)\, \|u_0\|_\infty + H(t)\, S(Q)\, \|u_\ell\|_\infty$ où

$V(Q)$ est le volume du pavé Q,

$S(Q)$ est la surface de la frontière de Q.

Attardons-nous d'abord au cas $n = 1$. Revenons aux formules (2) et (3') de la section IV. La série à droite dans la formule (2) converge pour toute valeur complexe de x et de y, il y a convergence uniforme des séries si $y-x$ varie dans un compact du plan complexe. $p_t(x,y)$ admet donc un prolongement analytique à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Majorons cette fonction ainsi prolongée. Si $z = \rho + i\sigma$ où $\rho \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$|e^{-(z+2n)^2/2t}| \leqslant e^{\sigma^2/2t}\ e^{-(\rho+2n)^2/2t} .$$

Si on fait varier z dans le rectangle $|\text{Re } z| \leqslant \delta$ et $|\ell m\ z| \leqslant \varepsilon$, on aura pour tout $y \in \mathcal{R}$,

$$|p_t(x,y)| \leqslant \frac{A_\delta}{\sqrt{t}}\, e^{\varepsilon^2/2t} .$$

De même le membre de droite dans la formule (3') est une fonction entière de x. D'où on peut prolonger analytiquement à tout le plan complexe, la fonction $q_t(x,a) = A_t'(x)$.

$$q_t(z,a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi t^3)^{-\frac{1}{2}} (2n(b-a)+a-z)\, e^{-(z-a-2n(b-a))^2/2t} .$$

Quelques calculs d'inégalités font voir que

$$|q_t(z,a)| \leqslant \frac{B_\delta}{\sqrt{t^3}}\, e^{(\varepsilon^2-\delta^2)/2t} .$$

Pour le cas $n = 1$, il suffit que $\varepsilon < \delta$ pour que $\int_0^c |q_t(x,y)|\, dt < +\infty$ et l'on a bien que $|p_t(z,y)|$ pour t fixe est uniformément bornée pour $y \in \mathcal{R}$ et $|\text{Re } z| \leqslant \delta$, $|\ell m\ z| \leqslant \varepsilon$.

Revenons au cas de $\mathcal{R}^n$, si

$$Q_* = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C},\ |\text{Re } z_i| \leqslant \delta \text{ et } |\ell m\ z_i| \leqslant \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots,n\} ,$$

on peut trouver une constante ne dépendant que de δ telle que pour tout $y \in Q$ et pour tout $z \in Q_*$

$$|p_t(z,y)| \leqslant A_\delta\, t^{-n/2}\, e^{+n\varepsilon^2/2t} .$$

De même

$$|q_t(z,y)| \leqslant B_\delta\, t^{-n/2 - 1}\, e^{(n\varepsilon-\delta^2)/2t} .$$

Si l'on choisit ε pour que $\varepsilon < \delta/\sqrt{n}$ alors $\int_0^c |q_t(z,y)|\, dt < \infty$.

VIII - PROPRIETES DU NOYAU $p_t(x,y)$

Nous désirons dégager certaines propriétés du noyau $p_t^{\Omega}(x,y)$, où $p_t^{\Omega}(x,y)\,dy$ serait l'élément de probabilité que le mouvement brownien parti du point x à l'instant 0 demeure dans Ω, dans l'intervalle de temps $(0,t)$ et soit localisé à l'instant t dans l'élément de volume dy.

Théorème 6.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $W(t)$ est le processus de Wiener dans $\mathbb{R}^n$ issu d'un point x de Ω à l'instant 0, alors il existe une fonction continue $(x,y) \to p_t(x,y)$ de $\Omega \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour toute partie mesurable A de Ω,

$$\Pr\,[W(\tau) \in \Omega,\ \tau \in (0,t),\ W(t) \in A] = \int_A p_t(x,y)\,dy\ .$$

Démonstration:

Considérons les trajectoires browniennes issues de x à l'instant 0 ayant sorti hors de Ω dans l'intervalle de temps $(0,t)$, décomposons ces trajectoires en se servant d'un pavé fixe Q où $x \in Q$, $\bar{Q} \subseteq \Omega$. Notons par τ_1 le premier temps de sortie hors de Q, par y_1 l'endroit de cette sortie, par τ_2 le premier temps de sortie hors de Ω et par y_2 l'endroit de cette sortie. Si T est le premier temps de sortie hors de Ω, on peut définir la mesure suivante sur $\mathbb{R}^n$:

$$v_{x,t}(A) = \Pr\,[T < t,\ W(t) \in A]$$

$$= \int_A \int_0^t \int_0^{\tau_2} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial Q} \frac{q_{\tau_1}(x,y_1)\ dq_{\tau_2-\tau_1}(y_1,y_2)\ e^{-\|y-y_2\|^2/2(t-\tau_2)}}{[2\pi(t-\tau_2)]^{n/2}}\ dy_1\,dy_2\,d\tau_1\,d\tau_2\,dy\ .$$

Cette formule de représentation permet de voir que $v_{x,t}$ admet une dérivée de Radon-Nikodym qui soit une fonction continue $\varphi_t(x,y):\Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Comme $W(t)$ suit une loi multinormale de moyenne x et dont la matrice de covariance est t-fois la matrice identité, alors

$$p_t^{\Omega}(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\|y-x\|^2/2t} - \varphi_t(x,y) \ . \qquad \blacksquare$$

Théorème 7.

Si $f_k(x,y,t)$ est le résultat de l'intégration sur le domaine Ω^k de $\mathbb{R}^{nk}$ de la fonction

$$[2\pi t/k+1]^{-nk/2} \prod_{i=1}^{k+1} e^{-\|y_i - y_{i-1}\|^2/(2t/k+1)}$$

où $y_0 = x$, $y_{k+1} = y$, alors pour tout x de Ω et tout y de Ω,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x,y,t) = p_t^{\Omega}(x,y) \ ,$$

la convergence est uniforme lorsque x et y varient dans un même compact de Ω.

Démonstration:

On remarque d'abord que

$$0 \leqslant f_k(x,y,t) \leqslant (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|y-x\|^2/2t} \ .$$

Regardons $f_k(x,y,t)$ comme une fonction définie sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$, posons $v_k(z,t) = f_k(x,y,t)$ où $z = (x,y)$, v_k satisfait l'équation de la chaleur $4 \frac{\partial v_k}{dt} = \Delta v_k$ où Δ est le laplacien dans $\mathbb{R}^{2n}$. Soit 0 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ où $x \in 0$, $y \in 0$, $\bar{0}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon > 0$. Sur le domaine $0 \times 0 \times (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$, les v_k sont toutes des solutions uniformément bornées à l'équation de la chaleur: il existe une constante M telle que

$$(\forall k)(\forall x \in 0)(\forall y \in 0)(\forall t \in (\varepsilon, \tfrac{1}{\varepsilon}))\ f_k(x,y,t) \leqslant M \ .$$

La démonstration même du théorème 5 nous assure que les fonctions $v_k(z,t)$ se prolongent analytiquement sur un domaine $U \times (-\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$ ne dépendant pas de k, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^{2n}$ et tel que la trace de U sur $\mathbb{R}^{2n}$ soit 0. On sait de plus qu'il existe une constante M' telle que $|v_k(z,t)| \leqslant M'$ si $z \in U$, $t \in (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$. Or on sait que toute famille de fonctions analytiques uniformément bornée sur un ouvert donne une famille équicontinue de fonctions. Ainsi la famille de fonctions $(x,y) \to f_k(x,y,t)$ est relativement compacte. Montrons qu'elle n'admet qu'un seul point d'accumulation. Soit $\Psi_t^1(x,y)$ et $\Psi_t^2(x,y)$ deux fonctions différentes telles que Ψ_t^1 et Ψ_t^2 soient des points d'accumulation de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. On peut trouver un pavé Q de Ω, $\bar{Q} \subseteq \Omega$ tel que

$$\int_Q \Psi_t^1(x,y)\, dy \neq \int_Q \Psi_t^2(x,y)\, dy \ .$$

Or $$\int_Q \Psi_t^1(x,y)\, dy = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in A}} \Pr\left[W(\tfrac{i}{k+1}\, t) \in \Omega,\ 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } W(t) \in Q\right]$$

$$= \Pr\left[W(\tau) \in \Omega,\ 0 < \tau < t,\ W(t) \in Q\right]$$

$\int_Q \Psi_t^2(x,y)\, dy$ vaut cette même probabilité, ce qui est contradictoire. Ainsi $f_k(x,y,t)$ converge vers $p_t^{\Omega}(x,y)$ et ceci de façon uniforme sur $K \times K$ où K compact de Ω ($x \in K$, $y \in K$, t fixe). ■

Théorème 8.

$$p_t^{\Omega}(x,y) = p_t^{\Omega}(y,x) \ ,$$

$$p_{2t}(x,y) = \int_{\Omega} p_t(x,z)\, p_t(z,y)\, dz \ .$$

La fonction $p_t(x,y)$ est une fonction définie positive sur Ω.

Démonstration:

Un changement d'ordre d'intégration dans l'évaluation de $f_k(x,y,t)$ donne que $f_k(x,y,t) = f_k(y,x,t)$ d'où $p_t^{\Omega}(x,y) = p_t^{\Omega}(y,x)$. De même,

$$\int_{\Omega} f_{k-1}(x,z,t)\, f_{k-1}(z,y,t)\, dz = f_{2k-1}(x,y,2t) ,$$

d'où

$$p_{2t}^{\Omega}(x,y) = \int_{\Omega} p_t^{\Omega}(x,z)\, p_t^{\Omega}(z,y)\, dz .$$

Finalement, soit $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ k points de Ω et soit $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ des nombres complexes, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\bar{c}_j p_t(x_i,x_j) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\bar{c}_j p_{t/2}(x_i,z)\, p_{t/2}(z,x_j)\, dz \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\bar{c}_j p_{t/2}(x_i,z)\, p_{t/2}(x_j,z)\, dz \\
&= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{k} c_i p_{t/2}(x_i,z) \right|^2 dz \geqslant 0 .
\end{aligned}$$

Théorème 9.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un ouvert Ω_* de $\mathbb{C}^n$, une suite de fonctions analytiques définies sur Ω_*, $\{u_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ et une suite de nombres positifs $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ tels que

a) $\Delta u_k(z) = -\bar{\lambda}_k\, u_k(z)$,

b) $\{u_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ forment une base orthonormale de $\mathcal{L}^2(\Omega)$,

c) pour tout $\delta > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n \delta} < +\infty$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\, u_n(x)\, u_n(y)$ converge uniformément en x et en y sur Ω vers $p_t(x,y)$,

e) la trace de Ω_* sur $\mathbb{R}^n$ est Ω,

f) si a est un point régulier de $\partial\Omega$ alors pour tout k $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in\Omega}} \mu_k(x) = 0$, si de plus Ω est connexe et si les λ_n sont ordonnés par ordre croissant, alors $u_0(x)$ ne s'annulle pas sur Ω et y est donc de signe constant.

Démonstration:

Pour une valeur $t > 0$, utilisons la théorie de Fredholm pour l'opérateur intégral

$$f \to \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\ f(y)\ dy = (P_t f)(x)\ .$$

Le noyau $p_t^\Omega(x,y)$, puisqu'il est majoré par $(2\pi t)^{-n/2}\ e^{-\|y-x\|^2/2t}$, est un noyau de Hilbert-Schmidt lorsque Ω est de volume fini, c'est-à-dire que $\int_\Omega \int_\Omega (p_t^\Omega(x,y))^2\ dx\ dy < +\infty$. Puisque le noyau est symétrique, le spectre de l'opérateur P_t est situé à l'intérieur de l'axe réel. Puisque le noyau est défini positif, on peut même dire que le spectre est contenu dans $[0,\infty]$. Nous allons montrer que le spectre est effectivement contenu dans l'intervalle semi-ouvert $[0,1)$. En effet si μ est une valeur spectrale supérieure ou égale à 1, on peut trouver une fonction de carré sommable $\varphi(x)$ telle que $\int_\Omega \varphi^2(x)\ dx \neq 0$ et $\int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\ \varphi(y)\ dy = \mu\ \varphi(x)$. Si $\Psi(x) = |\varphi(x)|$, $\int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\ \Psi(y)\ dy \geqslant \mu\ \Psi(x) \geqslant \Psi(x)$. D'autre part, si Ω est de volume fini, il est impossible que presque toutes les trajectoires $X(\tau)$, $0 < \tau < t$, du mouvement brownien issu de x soient situées dans Ω, $\int_\Omega p_t(x,y)\ dy < 1$ pour tout x de Ω. Ainsi

$$\int_\Omega \Psi(x)\,dx \leqslant \int_\Omega \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\,\Psi(y)\,dy\,dx = \int_\Omega \int_\Omega p_t^\Omega(y,x)\,\Psi(y)\,dx\,dy$$
$$< \int_\Omega \Psi(y)\,dy\ .$$

Ce qui donne une contradiction.

On peut donc trouver une suite de nombres de $[0,1)$, $\mu_{n,t}$ et une base orthogonale $\{u_{n,t}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ telles que

$$\int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\,u_{n,t}(y)\,dy = \mu_{n,t}\,u_{n,t}(x)$$

et pour tout μ, $\{u_{n,t}:\mu_{n,t} = \mu\}$ forme une base orthonormale de $\{f:P_t f = \mu f\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que les $u_n(x)$ sont continues sur Ω. Posons $u_n = u_{n,t}$; puisque $P_s P_t = P_t P_s = P_{t+s}$ et $-\lambda_n t = \log \mu_{n,t}$, on peut se convaincre que $P_s u_n = e^{-\lambda_n s} u_n$. Vérifions maintenant que $\{f:P_t f = 0\} = \{0\}$. Si f est une fonction telle que $\int_\Omega f^2(x)\,dx \neq 0$ et $P_t f = 0$, alors on peut trouver une fonction continue à support compact dans Ω, $g(x)$, telle que $\int_\Omega g(x)\,f(x)\,dx \neq 0$. On a que $P_t f = 0$, $0 < t \leqslant c$. D'où $\int_\Omega \int_\Omega g(x)\,p_t^\Omega(x,y)\,f(y)\,dy\,dx = 0$, $0 < t \leqslant c$. D'autre part la fonction $v(x,t) = \int_\Omega g(y)\,p_t(y,x)\,dy$ satisfait à l'équation de la chaleur et $\lim_{t\to 0} v(x,t) = g(x)$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_\Omega \int_\Omega g(x)\,p_t^\Omega(x,y)\,f(y)\,dy\,dx = \int_\Omega g(y)\,f(y)\,dy \neq 0\ ,$$

ce qui donne une contradiction.

Pour établir la partie d) de l'énoncé du théorème, déterminons d'abord une majoration grossière de $u_n(x)$. Soit δ un nombre tel que $2\delta < t$, $\int_\Omega p_\delta^\Omega(x,y)\,u_n(y)\,dy = e^{-\lambda_n \delta} u_n(x)$,

$$|u_n(x)| \leqslant e^{\lambda_n \delta} \left(\int_\Omega (p_\delta^\Omega(x,y))^2\,dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (u_n(y))^2\,dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

vu l'inégalité de Schwartz. Or

$$\int_\Omega u_n^2(y)\ dy = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega (p_\delta^\Omega(x,y))^2\ dy \leqslant (2\pi\delta)^{-n} \left(\int_\Omega dy \right)$$

(car $p_\delta^\Omega(x,y) \leqslant (2\pi\delta)^{-n/2}$). D'où

$$|u_n(x)| \leqslant e^{\lambda_n \delta}\ (2\pi\delta)^{-n/2} \left(\int_\Omega dy \right)^{\frac{1}{2}} .$$

D'où $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(x)\ u_n(y)$ converge uniformément sur $\Omega \times \Omega$ par le critère de Weierstrass. D'autre part, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(x)\ u_n(y)$ au sens de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est égal à $p_t^\Omega(x,y)$. D'où $p_t^\Omega(x,y)$ est égal presque partout à $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(x)\ u_n(y)$. La continuité de $(x,y) \to p_t^\Omega(x,y)$ établit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(x)\ u_n(y) = p_t^\Omega(x,y) .$$

Pour la partie e), on sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} = \int_\Omega \int_\Omega (p_t^\Omega(x,y))^2\, dx\ dy .$$

D'où, pour tout $\delta > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n \delta} < +\infty$.

Remarquons maintenant que $p_t^\Omega(x,y)$ sont des solutions à l'équation de la chaleur qui se prolongent analytiquement sur un ouvert $\Omega_* \times \Omega_*$ où Ω_* est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont la trace avec $\mathbb{R}^n$ est Ω. On peut donc prolonger analytiquement à Ω_* les fonctions $u_k(x)$; $u_k(z) = e^{\lambda_k t} \int_\Omega p_t(z,y)\ u_k(y)\ dy$.

$$\Delta u_k(z) = e^{\lambda_k t} \int_\Omega \Delta_z p_t(z,y)\ u_k(y)\ dy$$

$$= e^{\lambda_k t} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} p_t(z,y)\ u_k(y)\ dy ,$$

mais

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\lambda_k t} \int_\Omega p_t(z,y)\ u_k(y)\ dy \right)$$

$$= \lambda_k u_k(z) + e^{\lambda_k t} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} p_t(z,y)\ u_k(y)\ dy$$

ainsi $\Delta u_k(z) = -\lambda_k u_k(z)$.

Pour obtenir la propriété f), on observe que

$$|u_k(x)| \leq e^{\lambda_k t} \|u_k\|_\infty \left(\int_\Omega p_t(x,y)\, dy \right),$$

or $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\Omega}} \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, dy = 0$, d'où la conclusion f).

Si Ω est connexe, on sait que $p_t(x,y) > 0$ pour tout x et tout y de Ω, ceci est suffisant pour assurer que la plus grande valeur propre est de multiplicité simple et que la fonction propre qui lui est associée ne change pas de signe. ∎

Introduisons quelques notations. Si $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ est la suite ordonnée par ordre croissant tel que décrite dans le théorème 9, et si les $u_k(x)$ sont les fonctions propres associées, si $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, l'harmonique fondamentale de f sera la première valeur λ_k telle que $\int f(x)\, u_k(x)\, dx \neq 0$. $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ sera appelé l'ensemble des harmoniques de Ω. Nous poserons $c_\mu(x,y) = \sum\limits_{\lambda_k=\mu} u_k(x)\, u_k(y)$.

Théorème 10.

Soit $f(x)$ une fonction de carré sommable sur Ω, où Ω est un ouvert de mesure finie sur $\mathcal{R}^n$. Alors la fonction $u(x,t) = \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, f(y)\, dy$ est une solution à l'équation de la chaleur qui est analytique en x et en t pour $x \in \Omega$, $t > 0$. Si μ est l'harmonique fondamentale de $f(x)$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)\, e^{+\mu t} = \int_\Omega c_\mu(x,y)\, f(y)\, dy$ de façon uniforme en x. ∎

IX - REFROIDISSEMENT D'UN OBJET CONVEXE

Si $f(x)$ est une fonction intégrable sur Ω, nous dirons que $u(x,t) = \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, f(y)\, dy$ décrit le refroidissement de l'objet Ω dont la distribution initiale de température est $f(x)$ à l'instant 0. Nous établirons une propriété de convexité du refroidissement d'un objet lorsque celui-ci est convexe.

Théorème 11.

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout t, la fonction $(x,y) \to p_t^\Omega(x,y)$ est logconcave, c'est-à-dire que la fonction $\log p_t^\Omega(x,y)$ est concave.

Démonstration:

Reprenons la notation de l'énoncé du théorème 7. Il suffit de montrer que le logarithme de $f_k(x,y,t)$ est une fonction concave de (x,y). Or ceci est vrai à cause d'un résultat de Borell, [2], que nous citons: "Si $f:\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to [0,\infty)$, si $g:\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to [0,\infty)$ de telle sorte que $\log f$ et $\log g$ soient des fonctions concaves, alors la fonction

$$\log\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,z)\, g(z,y)\, dz \right)$$

est concave sur l'ensemble convexe où elle est finie". On applique ce résultat pour les fonctions

$$\varphi_i(x,y) = \begin{cases} e^{-\|x-y\|^2/2t/(k+1)} & \text{si} \quad y \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \Omega\,. \end{cases}$$

La fonction de (y_0, y_{k+1}), $\int \cdots \int \prod_{i=1}^{k+1} \varphi_i(y_i, y_{i-1})\, dy_1 dy_2 \ldots dy_k$ est logconcave.

∎

Théorème 12.

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f(x)$ une fonction logconcave et intégrable sur Ω, alors la fonction $x \to u(x,t) = \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, f(y)\, dy$ est logconcave.

Démonstration:

Les fonctions $(x,y) \to p_t^\Omega(x,y)$ et $(y,z) \to f(y)$ sont logconcaves. Le résultat de Borell qui vient d'être cité montre que la fonction $u(x,t)$ est logconcave selon x. ∎

Corollaire:

La fonction propre positive $u_0(x)$ correspondant à la plus grande harmonique du domaine Ω est logconcave. En effet

$$u_0(x) = \lim_{t\to\infty} e^{+\lambda t} \int_\Omega p_t(x,y)\, dy$$

où λ est la plus grande harmonique de Ω. ∎

Théorème 13.

Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$, soit $f(x)$ une fonction logconcave sur Ω, si $u(x,t) = \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, f(y)\, dy$, alors la valeur $M_t = \sup\{u(x,t) : x \in \Omega\}$ est atteinte en un seul point x_t de Ω.

Démonstration:

L'ensemble des x tels que $u(x,t) = M_t$ est un convexe. Si ce convexe n'était pas réduit à un point, il contiendrait un segment S. Or la fonction $u(x,t)$ est analytique sur Ω, d'où $u(x,t)$ prendrait la valeur

M_t sur tous les points de Ω alignés avec le segment de S. Soit a un point de la frontière de Ω aligné avec S. a est un point régulier de $\partial\Omega$. D'où

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in\Omega}} u(x,t) \leqslant \|f\|_\infty \lim_{x\to a} \int_\Omega p_x(x,y)\, dy = 0 .$$

Ceci donne une contradiction. ∎

Remarque:

L'argument employé, légèrement modifié, permet d'établir que la fonction $(x,y) \to p_t^\Omega(x,y)$ est strictement logconcave.

Nous nous attarderons maintenant au refroidissement d'un objet de $\mathbb{R}^n$ qui est à l'instant initial à une température constante, nous prendrons cette constante égale à un. Soit $g_\Omega(x,t) = \int_\Omega p_t^\Omega(x,y)\, dy$. Nous voulons étudier cette distribution de température pour de petites valeurs de t. Citons d'abord une minoration simple suffisamment exacte de $g_\Omega(x,t)$ lorsque Ω est convexe.

Théorème 14.

Si Ω est un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$, si $x \in \Omega$, alors

$$g_\Omega(x,t) \geqslant 1-2 \int_{\mathbb{R}^n-\Omega} (2\pi t)^{-n/2}\, e^{-\|y-x\|^2/2t}\, dy .$$

Démonstration:

Désignons par $h(x,t)$ la probabilité qu'un vecteur multinormal de moyenne x, dont la matrice de covariance est tI, I étant la matrice identité, soit hors de Ω, posons $\varphi(x,t) = g(x,t) - 1+2h(x,t)$. La fonction φ satisfait à l'équation de la chaleur et est du type B. Si $x \in \Omega$,

$\lim_{t\downarrow 0} \varphi(x,t) = 0$ et si $a \in \partial\Omega$, $\lim_{x\to a} \varphi(x,t) \geqslant 0$ car $h(a,t) \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout t. Par le principe du maximum, $\varphi(x,t) \geqslant 0$ pour tout x de Ω et pour tout t.

Nous dirons qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ admet une frontière uniformément différentiable s'il existe une fonction $N:\partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in \partial\Omega$

a) $\|N(x)\| = 1$,

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\{y \in \Omega \mid \|y-x\| < \delta\} \subseteq \{y \mid \langle y-x, N(x)\rangle > -\varepsilon \|y-x\|\}$$

et

$$\{y \mid \|y-x\| < \delta \text{ et } \langle y-x, N(x)\rangle > \varepsilon \|y-x\|\} \subseteq \Omega .$$

Théorème 15.

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est uniformément différentiable, alors lorsque t tend vers zéro, $1 - g_\Omega(x,t)$ est asymptotique à

$$2\int_{\mathbb{R}^n - \Omega} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|y-x\|^2/2t}\, dy$$

et l'asymptoticité est uniforme sur Ω.

Démonstration:

L'argumentation sera semblable à celle du théorème précédent. Posons donc

$$h(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|y-x\|^2/2t}\, dy$$

et

$$\varphi(x,t;k) = g(x,t) - 1+kh(x,t) .$$

Nous allons montrer que si $k > 2$, alors il existe un nombre $t_k > 0$ tel que $\varphi(x,t;k) > 0$ si $x \in \Omega$ et $0 < t < t_k$. On remarque que $\varphi(x,0;k) = \lim_{t\downarrow 0} \varphi(x,t;k) = 0$. Soit $x \in \partial\Omega$, choisissons d'abord un $\varepsilon > 0$ tel que si $C_\varepsilon(x) = \{y \mid \langle y-x, N(x)\rangle < -\varepsilon \|y-x\|\}$ alors

$$\int_{C_\varepsilon(x)} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|y-x\|^2/2t} \, dy > \frac{1}{k} .$$

On peut remarquer que ce choix de ε ne dépend pas de la valeur particulière de x ni de celle de t. Soit le $\delta > 0$ correspondant à la valeur $\varepsilon > 0$ par la définition même de différentiabilité uniforme de la frontière de Ω, si $B_\delta(x) = \{y \mid \|y-x\| < \delta\}$, alors on peut trouver un t_k tel que pour tout $t \in (0,t_k)$

$$\int_{C_\varepsilon(x)\cap B_\delta(x)} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|y-x\|^2/2t} \, dy > \frac{1}{k} .$$

D'où si $x \in \partial\Omega$ et si $t \in (0,t_k)$, alors $kh(x,t) > 1$ et ainsi $\varphi(x,t;k) > 0$. Par le principe du maximum, nous obtenons que $\varphi(x,t;k) \geqslant 0$ pour $x \in \Omega$ et $t \in (0,t_k)$.

De la même façon, on montre que si $k < 2$, alors il existe un nombre t_k tel que $\varphi(x,t;k) \leqslant 0$ si $x \in \Omega$, $t \in (0,t_k)$. De sorte que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - g_\Omega(x,t)}{2h(x,t)} = 1$$

et cette convergence s'effectue uniformément en x.

Le prochain résultat nous dit qu'une petite source de froid proche se fait plus sentir qu'une grande source de froid éloignée durant un intervalle de temps $(0,\varepsilon)$.

Théorème 16.

Soit x un point de $\mathcal{R}^n$, soit $R > 0$, si K_1 est un compact de $\{y \mid \|y-x\| < R\}$ dont l'intérieur n'est pas vide, si K_2 est une partie fermée de $\{y \mid \|y-x\| \geqslant R\}$, si $\Omega_1 = \mathcal{R}^n - K_1$, $\Omega_2 = \mathcal{R}^n - K_2$, alors $g_{\Omega_1}(x,t) < g_{\Omega_2}(x,t)$ lorsque t est suffisamment voisin de 0. De façon plus précise, si $B_y(r)$ est une boule contenue dans K_1 où $\rho = R - \|y-x\| - r > 0$, alors il existe un nombre $t_{r,\rho,R}$ tel que $g_{\Omega_1}(x,t) < g_{\Omega_2}(x,t)$ lorsque $t \in (0, t_{r,\rho,R})$.

Démonstration:

Soit y un point de $\mathcal{R}^n$ et ρ un nombre tel que $\|y-x\| + \rho < R$ et $F_1 = \{z \mid \|z-y\| \leqslant \rho\} \subseteq K_1$. Posons aussi $F_2 = \{z \mid \|z-x\| \geqslant R\}$, $\Omega_1^* = \mathcal{R}^n - F_1$, $\Omega_2^* = \mathcal{R}^n - F_2$. On a que $g_{\Omega_1}(x,t) \leqslant g_{\Omega_1^*}(x,t)$, $g_{\Omega_2^*}(x,t) \leqslant g_{\Omega_2}(x,t)$. Faisons appel au théorème 15 pour montrer que $g_{\Omega_1^*}(x,t) < g_{\Omega_2^*}(x,t)$ pour tout t suffisamment voisin de 0, il suffit d'établir que $\int_{F_2} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz$ est petit par rapport à $\int_{F_1} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz$ et ceci sur un intervalle $0 < t < \varepsilon$. Si N est assez grand, on peut trouver N boules, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ de rayon ρ dont les centres sont situés sur la sphère $\{z \mid \|z-x\| = \|y-x\|\}$ telles que $\bigcup_{i=1} B_i$ recouvre une couronne sphérique $\{z \mid r_1 \leqslant \|z-x\| \leqslant r_2\}$. Si j est un entier non-négatif, si $1 \leqslant i \leqslant N$, soit B_{ij} la boule qui est l'homothétique de la boule B_i, l'homothétie utilisée étant de centre x et de rapport $c_j = \frac{R}{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^j$. Ainsi $F_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=0}^{\infty} B_{ij}$ et

$$\int_{B_{ij}} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz = \int_{B_i} \left(\frac{2\pi t}{c_j^2}\right)^{-n/2} e^{-c_j^2\|z-x\|^2/2t}\, dz .$$

$$R_t = \frac{\int_{F_2} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz}{\int_{F_1} (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz} \leqslant \frac{N \sum_{j=0}^{\infty} \int_{F_1} c_j^n e^{-c_j^2\|z-x\|^2/2t}}{\int_{F_1} e^{-\|z-x\|^2/2t}\, dz}$$

Si $a = \inf \{\|z+x\| : z \in F_1\}$, on a que

$$R_t \leqslant N \sum_{j=0}^{\infty} c_j^n \, e^{-c_j^2 a^2/2t} \, e^{+a^2/2t}.$$

On voit que $\lim_{t \downarrow 0} R_t = 0$. ∎

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, le *rayon intérieur* de Ω sera par définition $r_\Omega = \sup_{y \in \Omega} \inf_{x \notin \Omega} \{\|y-x\|\}$ et le *centre* de Ω sera $\{y \mid \inf_{x \in \Omega} \{\|y-x\|\} = r_\Omega\}$. On dira qu'une famille de parties de $\mathbb{R}^n$, $\{A(t)\}_{t>0}$ est *absorbée* par une partie B de $\mathbb{R}^n$ lorsque t tend vers zéro si pour tout ouvert 0 contenant B on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $A(t) \subseteq 0$ lorsque $t \in (0,\delta)$.

Théorème 17.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que tous les points de la frontière de Ω sont adhérents à l'intérieur du complémentaire de Ω, désignons par

$$C(t) = \{x \mid g_\Omega(x,t) = \sup \{g_\Omega(y,t) \mid y \in \Omega\}\},$$

alors lorsque t tend vers zéro les $C(t)$ sont absorbés par le centre de Ω.

Démonstration:

Soit 0 un ouvert contenant le centre de Ω, on se convainc que ce centre est compact et que $r' = \sup_{y \notin 0} \inf_{x \notin \Omega} \{\|y-x\|\} < r_\Omega$. Soit $\varepsilon = \dfrac{r_\Omega - r'}{4}$, on peut recouvrir la frontière de Ω par un nombre fini de boules $B_1, B_2, \ldots, B_N$, de rayon ε. Dans chacune de ces boules, B_i, on peut trouver une boule, b_i, de rayon ρ_i telle que $b_i \cap \Omega = \emptyset$, posons $\rho = \min \{\rho_i\}$. Choisissons un

point x_1 appartenant au centre de Ω et soit x_2 un point situé hors de 0. Soit r_2 le rayon de la plus grande boule de centre x_2 contenue dans Ω, on peut trouver un point y_2 de la frontière de Ω dont la distance à x_2 est égale à r_2. Dans la boule de rayon 2ε centrée en y_2, on peut trouver une des boules b_i dont le rayon, on le sait, dépasse ρ. Dans la boule de centre x_2 de rayon $r_2 + 2\varepsilon$, on peut donc trouver une boule b de rayon ρ située à l'extérieur de Ω. On remarque que $r_2 + 2\varepsilon \leqslant r_\Omega - 2\varepsilon$. Si nous utilisons le théorème 16, nous voyons que nous pouvons trouver une valeur $\delta > 0$, δ ne dépendant que de 0 et non de x_1 et de x_2, telle que $g_\Omega(x_2,t) < g_\Omega(x_1,t)$ lorsque $t < \delta$. D'où $C(t) \subseteq 0$ si $t < \delta$.

X - *EXEMPLES*

Considérons le refroidissement de quelques objets convexes Ω de $\mathbb{R}^n$. On sait maintenant que la fonction $x \to g_\Omega(x,t)$ atteint son maximum en un seul point x_t. Si $u(x)$ est une solution à l'équation de Helmholz, $\Delta u = -\lambda u$ où $u(x) > 0$, $\lim_{x \to a} u(x) = 0$ lorsque $a \in \partial\Omega$ et si x_∞ est la position du maximum de la fonction u, alors $\lim_{t \to \infty} x_t = x_\infty$. On sait d'autre part que lorsque t tend vers zéro $\{x_t\}$ est absorbé par le centre de Ω.

Si Ω est symétrique par rapport à un point a, on obtient que $x_t = a$ pour tout t. De façon plus générale, supposons que A est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$ telle que $A(\Omega) = \Omega$, on obtiendra que $A(x_t) = x_t$. Si Σ_Ω est la totalité des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^n$ laissant Ω invariant et si $F_\Omega = \{x \mid Ax = x \ \forall A \in \Sigma_\Omega\}$ est l'ensemble des points fixes communs à Σ_Ω, on a que $x_t \in F_\Omega$ pour tout t.

Si Ω est un simplexe de $\mathbb{R}^n$ dont tous les côtés sont égaux, on aura que x_t est toujours le barycentre du simplexe. Si Ω est un polygone régulier dans le plan, x_t est toujours le centre de Ω. La même conclusion tient pour un triangle de Reuleaux, etc...

Intéressons-nous maintenant à une situation où les points x_t varient en fonction du temps. L'exemple le plus simple à imaginer est l'étude du refroidissement d'une plaque dont la forme est celle d'un triangle rectangle isocèle. Prenons donc pour $\Omega = \{(x_1,x_2) \mid x_1>0, x_2>0, x_1+x_2<1\}$. On obtient une base orthonormale de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ en utilisant des solutions à l'équation de Helmholz $\Delta\varphi = -\lambda\varphi$;

$$\varphi_{m,n}(x_1,x_2) = 2(\sin m\pi x_1 \sin n\pi x_2 - (-1)^{m+n} \sin n\pi x_1 \sin m\pi x_2) .$$

D'où, le noyau de la solution à l'équation de la chaleur

$$\frac{2\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

sera

$$p_t((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sum_{0<m<n} e^{-\pi^2 t(m^2+n^2)/2} \varphi_{m,n}(x_1,x_2)\, \varphi_{m,n}(y_1,y_2) .$$

D'où $$g_\Omega(x_1,x_2,t) = \sum_{0<m<n} a_{m,n}\, e^{-\pi^2 t(m^2+n^2)/2} \varphi_{m,n}(x_1,x_2)$$

où $a_{m,n} = \int_\Omega \varphi_{m,n}(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2$. La position $x(t) = (x_1(t),x_2(t))$ où la fonction $(x_1,x_2) \to g_\Omega(x_1,x_2,t)$ atteint son maximum est sur la bissectrice $x_1 = x_2$ des axes cartésiens. Lorsque t tend vers zéro, $x(t)$ converge vers le centre du cercle inscrit du triangle. Ce centre a pour coordonnées cartésiennes $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$. Lorsque t tend vers l'infini, $x(t)$ converge vers la position du maximum de la fonction

$$(\sin \pi x_1 \sin 2\pi x_2 + \sin 2\pi x_1 \sin \pi x_2) .$$

Ce point est (c,c) où $c = \frac{1}{\pi} \text{ arc } \cos\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.3041$. Or $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ vaut 0.2929 à 10^{-4} près. Ces deux derniers nombres diffèrent donc par un centième seulement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BACHELIER, "*Théorie mathématique du jeu*", Ann. Ec. Norm. Sup., 5.3, t. 18, pages 143-210 (1901).

[2] C. BORELL, "*Convex Set Functions in d-space*", Period. Math. Hungar., Vol. 6 (1975).

[3] R. DENNEMEYER, "*Introduction to Partial Differential Equation and Boundary Value Problems*", McGraw-Hill (1968).

[4] E.B. DYNKIN et A.A. YUSHKEVICH, "*Markov Processes*", Plenum Press, New York (1969).

[5] L. HORMAUDER, "*Linear Partial Differential Operators*", Springer-Verlag, New York (1969).

[6] R.A. DE VORE, "*Lecture Notes in Mathematics*", Vol. 293, Springer-Verlag, New York (1972).

[7] P. LEVY, "*Processus stochastiques et mouvement Brownien*", Gauthier-Villars, Paris (1948).

[8] PORT et STONE, "*Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*", Vol. III (1972).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00288853 3