POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Ecoulements internes en régime transsonique
Title:

Auteurs: Yves Begin, & Ricardo Camarero
Authors:

Date: 1980

Type: Rapport / Report

Référence: Begin, Y., & Camarero, R. (1980). Ecoulements internes en régime transsonique. (Rapport technique n° EP-R-80-22). https://publications.polymtl.ca/6007/
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: https://publications.polymtl.ca/6007/
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-80-22
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

BIBLIOTHÈQUE
JUIN 16 1980
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Rapport Technique EP80-R-22

Classification: Library of Congress no

ECOULEMENTS INTERNES EN REGIME TRANSSONIQUE

Yves BEGIN & Ricardo CAMARERO

Mai 1980

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP 5
R80-22

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

Bibliothèque
Ecole Polytechnique
MONTRÉAL
COTE
CA2PQ
UP 5
RBO-22

BIBLIOTHÈQUE
JUIN 16 1980
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

ECOULEMENTS INTERNES EN REGIME TRANSSONIQUE

YVES BEGIN
RICARDO CAMARERO

Département de mathématiques appliquées

ECOLE POLYTECHNIQUE

MAI 1980

À CONSULTER
SUR PLACE

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I: PHENOMENES TRANSSONIQUES ET MODELISATION

1.1. Introduction 1
1.2. Description physique des phénomènes transsoniques..... 2
1.2.1. Profil isolé..... 2
1.2.2 Aspect visqueux de l'écoulements..... 5
1.2.3 Structure du choc 7
1.2.4 Traînée et portance 10
1.2.5 Ecoulement interne.....11
1.2.6 Modèles mathématiques.....12
1.2.7 Equation potentielle exacte 17
1.2.8 Théorie isentropique des chocs faibles 18

CHAPITRE II: REVUE DES METHODES NUMERIQUES

2.1. Introduction.....21
2.2 Le calcul numérique transsonique.....22
2.3 Profils sans choc:.....25
2.3.1 Méthode de l'hodographe.....25
2.3.2 Design de profils.....27
2.4 Profils avec choc.....27
2.5 Approche instationnaire.....29
2.5.1 Shock fitting.....31
2.5.2 Shock capturing.....32
2.6 Méthodes itératives de relaxation.....35
2.7 Méthodes instationnaires accélérées.....44
2.7.1 Méthodes instationnaires à viscosité artificielles.44
2.7.2 Méthodes instationnaires à viscosité corrigée....45
2.8 Distinction fondamentale entre les méthodes instationnaires et de relaxation.....45
2.9 Méthodes instationnaires artificielles.....47
2.10 Relaxation de l'équation potentielle.....49
2.10.1 Cas bidimensionel.....49
2.10.2 Transformation du plan.....49
2.10.3 Schémas tournés de Jameson.....50
2.10.4 Méthodes d'alignement des coordonnées.....54
2.11 Correction de la couche limite.....55

CHAPITRE III: THEORIE DES PETITES PERTURBATIONS ET MODULATION DESPARAMETRES DE SIMILITUDE

3.1 Introduction..... 57
3.2 Position du problème 59
3.3 Conditions aux frontières 60
3.4 Approximation de C et de l'équation de Bernouilli..... 61
3.5 Petites perturbations: potentiel de vitesse..... 62
3.6 Petites perturbations: potentiel de perturbation..... 67
3.7 Règles de similitude..... 72

3.8 Aspect singulier et non-unicité.....75
3.9 Corrections empiriques.....77
3.10 SDE.....80

CHAPITRE IV SDE POUR ECOULEMENTS INTERNES

4.1 Introduction 84
4.2 Ecoulements potentiels tridimensionels 85
4.3 SDE bidimensionelle.....87
4.4 Ecoulement dans une tuyère.....89
4.5 Problème-test.....90
4.6 Conditions de tangence.....91
4.7 Condition de Kulta.....93
4.8 Opérateur de différences finies 95
4.9 Matrice tridiagonale.....97

LISTE DES SYMBOLES

C	-	vitesse locale du son
$\vec{\Phi}$	-	vecteur vitesse
E	-	énergie interne
Et	-	énergie interne totale
h	-	entalpie interne
H	-	entalpie totale
M	-	Nombre de Mach local
M_∞	-	Nombre de Mach à l'amont
M_c	-	Nombre de Mach critique
M_d	-	Nombre de Mach caractérisant la hausse de traînée
P	-	pression
U	-	composante horizontale de la vitesse
V	-	" verticale " " "
U'	-	perturbation de u
V'	-	perturbation de v
S	-	entropie
x, y	-	coordonnées
x', y'	-	coordonnées transformées
ρ	-	densité
γ	-	rapport des chaleurs spécifiques
Φ	-	potentiel de vitesse
ψ	-	potentiel de perturbation
ϕ	-	potentiel de perturbation transformé

CHAPITRE I

PHENOMENES TRANSSONIQUES ET MODELISATION

1.1. INTRODUCTION

Les phénomènes très particuliers qui caractérisent les écoulements transsoniques font de ceux-ci des problèmes à part entière et distincts des écoulements purement subsoniques. L'étude de ces écoulements fut longtemps retardée par le manque de connaissances expérimentales et théoriques de phénomènes très complexes tels que les chocs faibles, les poches supersoniques, les interactions choc-couches limites, les effets de compressibilité non linéarisables, les décollements.

Des non-uniformités de l'écoulement telles que des poches supersoniques peuvent modifier totalement, les distributions de vitesses et de pressions sur des profils portants, et donc les caractéristiques aérodynamiques. La structure d'un écoulement interne (dans un canal inter-aubes d'une turbo-machine) peut être totalement modifiée aussi avec les conséquences que cela entraîne sur les caractéristiques et le rendement des aubages.

Les aspects qualitatifs des phénomènes transsoniques sont ici passés rapidement en revue, principalement la description classique et représentative du développement d'une poche supersonique sur un profil d'aile ayant une vitesse proche de celle du son.

Un autre point important est discuté: les conditions dans lesquelles une approximation fondamentale peut être faite concernant le compor-

tement quasi isentropique d'un écoulement ne contenant que des chocs "faibles".

Les équations constitutives simplifiées généralement utilisées sont également décrites: équations d'Euler, équation potentielle totale (écoulement permanent bi-dimensionnel).

1.2 DESCRIPTION PHYSIQUE DES PHENOMENES TRANSSONIQUES

Un écoulement est appelé transsonique si à la fois des régions subsoniques et supersoniques sont présentes dans le champ d'écoulement, ou encore si la vitesse critique est atteinte ou dépassée en un point précis de l'écoulement. Cette définition très large, est pourtant réduite pratiquement au cas où la région où M approche la valeur 1, est une partie importante en étendue ou en intérêt.

1.2.1. Profil isolé: (écoulement externe)

Deux sortes de problèmes sont possibles alors: une région supersonique locale induite dans un écoulement subsonique et l'inverse.

Bien que le premier cas soit en générale l'écoulement étudié, il est intéressant de considérer l'évolution qualitative d'un cas typique: l'écoulement plan (bidimensionnel) logiquement utilisé pour la conception d'un profil d'aile. (fig. 1.1)

Lorsque M_∞ dépasse une certaine valeur critique Mc, la vitesse sonique est dépassée dans une poche supersonique délimitée en amont par une ligne sonique et en aval par un choc plus ou moins faible. La forme des poches peut s'expliquer de la façon suivante (fig. 1.1): des ondes d'expansion quittant la surface du profil se réfléchissent sur la ligne sonique

et deviennent des ondes de compression. Certaines touchent la surface du profil, d'autres "s'accumulent" au niveau du choc aval. Celui-ci est le plus fort près de la surface du profil et s'affaiblit progressivement pour finalement se résorber en un point "sonique" plus ou moins au sommet de la poche supersonique. A cet endroit, le choc doit être localement normal à l'écoulement. Une étude plus détaillée de la structure du choc est donnée plus loin.

La vitesse maximum, localisée au point de l'épaisseur maximum pour un écoulement critique, est déplacée vers l'aval pour les écoulements supercritiques $M_\infty > M_c$. Il en résulte un déséquilibre de la distribution des pressions et des vitesses (fig. 1.2) qui est une manière d'expliquer l'influence prépondérante des poches supersoniques sur la portance du profil.

Une autre interprétation plus classique d'un phénomène en réalité unique et complexe, est de considérer l'aspect dynamique et énergétique: à une poche supersonique est associée quasi automatiquement un choc, phénomène non isentropique où l'énergie mécanique est dissipée sous forme de chaleur. La traduction mécanique de ce déficit est mesurée par la traînée de choc, dans le sillage, résultant d'une perte dans la quantité de mouvement.

D'une façon pratique, l'apparition d'une poche supersonique stable ne se fait qu'au-delà d'un certain seuil, en deçà duquel il est impossible de distinguer un choc défini parmi les ondes transitoires qui résultent toujours des couches limites et de la traînée. On peut aussi dire que les chocs très faibles créent un "clivage arrière" peu sensible des vitesses et pressions, car les variations de pente sont faibles autour de l'épaisseur maximum. Le seuil est en général atteint quand le maximum

des M est environ 1.05.

La position du choc se déplace vers l'arrière et la taille de la poche, ainsi que la force du choc augmentent rapidement, pour M_∞ croissant (ou bien un angle d'attaque croissant). Lorsque le maximum des M est environ 1.25, on atteint ordinairement un autre seuil: le choc devient de type "fort" (voir plus loin) et en autre le saut de pression devient suffisant pour causer la séparation de la couche limite, qui peut être de différents types.

Lorsque l'écoulement devient supercritique à l'intrados, il s'y développe aussi une poche supersonique. Une augmentation continue de M_∞ jusqu'à une valeur proche de l'unité rend l'écoulement supersonique pratiquement tout le long du profil, et les chocs se réduisent de façon continue en les lignes de Mach de queue. D'un point de vue académique, le cas d'un M_∞ strictement égal à 1 pose des difficultés, car la densité des fluides est alors maximale, et ne peut plus être augmentée malgré la "diminution de section" causée par la présence du profil. Le passage d'une configuration à M_∞ presque sonique à une configuration très légèrement supersonique se fait en fait généralement de façon transitoire. On peut imaginer, toujours de façon académique, que l'onde en forme d'arc qui précède le profil, configuration typique d'un écoulement supersonique, est rejetée vers l'infini amont pour des écoulements se rapprochant des conditions soniques, et la poche supersonique de tête devient alors le domaine infini amont . Suivant que la tête du profil est émoussée ou présente un angle franc, la configuration en arc se résorbe plus ou moins rapidement en ondes de Mach, et la poche subsonique de tête se

réduit ou disparaît pour des écoulements fortement supersoniques.

1.2.2 Aspect visqueux de l'écoulement: Interaction choc-couche limite

Le comportement de la couche limite est d'une importance capitale pour le développement de la configuration de l'écoulement. Dans les conditions d'intérêt technologique, le point de transition est localisé aux environs d'une abscisse relative à la corde du profil égale à 10%. L'onde de choc interagit donc normalement avec une couche limite turbulente. Ackeret, Feldmann, et Rott (réf.1 et fig. 1.5), ont montré que pour des nombres de Reynolds très faibles, l'interaction du choc avec une couche limite laminaire provoque une séparation et la formation d'une onde de choc oblique sur le profil, et la position du choc principal est sensiblement différente de celle pour le cas ordinaire d'une interaction avec une couche limite turbulente. Dans ce dernier cas, l'écoulement reste attaché, sauf si le choc devient très fort. Les configurations avec séparation peuvent prendre des allures très variées: voir fig. 1.6.

L'interaction agit de deux façons: le développement de la couche limite dépend de la distribution de pression, et particulièrement du saut de pression à travers les ondes de choc; inversément, la couche limite affecte la position et l'intensité de l'onde de choc, puisque son effet de déplacement modifie le contour effectif du profil et sa circulation. L'interaction est dite "faible" tant que la couche limite reste attachée, et "forte" si il y a séparation. La séparation à l'extrados explique le "palier" accusé dans le mouvement vers l'arrière de l'onde de choc à

l'extrados (fig. 1.7). Cette séparation en modifiant la pression à la queue du profil, favorise l'apparition et le développement de la poche supersonique à l'intrados.

Nous reprenons à présent l'étude d'une séparation de la couche limite turbulente (fig. 1.6) pour deux cas typiques fait par Pearcey et al (réf. 2). Le premier cas est une séparation due purement à l'onde de choc. Le saut de pression provoque à ce niveau un épaississement de la couche limite, et si ce saut est suffisant, une petite poche de séparation apparaît, juste derrière le choc, où l'écoulement est renversé. Pour une augmentation de M_∞ , la poche de séparation reste d'abord localisée, puis brusquement au-dessus d'un certain seuil, s'étale rapidement vers le bord de fuite. Ceci provoque une chute spectaculaire de la pression à cet endroit ainsi qu'une variation importante de la circulation et l'apparition de phénomènes parasites importants de type instationnaire (buffeting). Le seuil est atteint lorsque le M maximum, juste en amont du choc est environ égal à 1.25. Ce seuil a déjà été signalé comme un critère pratiquement indépendant du nombre de Reynolds pour assurer que le choc est suffisamment fort pour provoquer une séparation.

Autrement dit, en deçà de ce seuil, il peut déjà y avoir séparation, mais pas nécessairement. Au-delà, il y a sûrement séparation: le choc est dit "fort" et l'interaction choc-couche limite également "forte".

Le premier cas d'interaction "pure" suppose que la distribution des pressions en aval du choc présente un gradient suffisamment faible. Dans le cas contraire, une séparation semblable à celle qui peut

arriver aux vitesses subsoniques, peut apparaître au bord de fuite (fonction du nombre de Reynolds) et se développer en "remontant le courant". Outre le gradient de pression, ceci dépend aussi de configuration en amont de la couche limite, elle-même grandement influencée par l'interaction avec l'onde de choc en transsonique, qui peut catalyser le phénomène et provoquer une jonction de la zone de décollement du bord de fuite avec celle du choc si elle existe, et accélérer encore les choses.

Pour les écoulements sans séparation, la théorie inviscible donne des résultats excellents. On peut éventuellement tenir compte des modifications de profils dues à la couche limite, dont divers modèles mathématiques satisfaisants existent. Ce modèle de calcul est actuellement le seul pratiquement utilisable. Avec les interactions faibles, et des zones de décollement petites, il donne encore des approximations utiles. Il n'est malheureusement plus valable pour des interactions fortes et des zones importantes d'écoulement décollé. La turbulence est un phénomène très complexe, essentiellement tridimensionnel et instationnaire dont les connaissances théoriques sont encore incomplètes. Les mémoires et les temps de calcul requis pour les modèles turbulents sont probibitifs et dépassent encore souvent les possibilités des ordinateurs les plus modernes.

1.2.3 Structure du choc: Une importante singularité

Pour maintenir l'écoulement attaché, le choc doit être normal à une surface incurvée. Par contre la courbure impose une augmentation de la pression avec la distance au-dessus du profil dans la région subso-

nique. Mais les conditions en amont du choc ne permettent pas d'avoir un tel gradient en arrière du choc si celui-ci est droit . Donc le choc, normal à la surface, doit immédiatement devenir oblique. Ceci crée une certaine difficulté dans le cadre de la théorie des petites pertubations où l'on suppose les chocs faibles (en étendue et en intensité) et quasi-droits. Le phénomène est mentionné par Murman (3), Bailey (4), et d'autres et fut étudié analytiquement par Oswatitsch-Zierep(5) et Sichel (6). Le paradoxe peut être levé en introduisant une singularité appropriée dans l'allure du choc qui a une forme locale $y = c \cdot x^{2/3}$, et donc une courbure infinie au pied du choc $x = y = 0$. La séparation au niveau du profil est ainsi évitée car la discontinuité dans les lignes de courant est inversément proportionnelle à la courbure du choc. Le modèle prédit que la compression de l'onde de choc est directement suivie par une rapide expansion, immédiatement derrière le choc. Cette théorie concorde qualitativement avec les résultats expérimentaux de Ackeret et al. (réf.(1) et fig. 1.8). A une certaine distance de la surface, l'expansion est évidente, alors que les effets sur la surface elle-même sont quelque peu masqués et affaiblis par l'influence de la couche limite.

La singularité peut avoir une importance sur la détermination de la pression en aval du choc, et donc aussi globalement sur la position et l'intensité de celui-ci. Nous verrons plus loin que les méthodes numériques totalement conservatives sont nettement plus à même de faire apparaître une zone de détente rapide, prédite par le modèle analytique inviscible. Paradoxalement les schémas non conservatifs moins consistante avec cette hypothèse d'inviscibilité, donnent des résultats plus

faibles mais fortuitement plus proches de la vérité (expérimentale) qui s'écarte du modèle inviscible à cause des phénomènes visqueux (interactions avec la couche limite).

Sichel (6) a proposé un modèle mathématique qui contient le terme de viscosité pour corriger l'hypothèse d'inviscibilité du modèle de Oswatitsch et Zierep:

$$\begin{cases} -(\gamma+1)uu_x + v_y = -(\gamma+1)\lambda u_{xx} \\ u_y - v_x = 0 \end{cases}$$

VTE, viscous transonic equation)

où λ tient compte de la conductivité calorifique et de la viscosité du fluide. Bien que des solutions satisfaisantes n'aient pas été obtenues, les propriétés de l'équation donnent qualitativement les effets corrects.

En dehors de cette singularité, les expériences ont montré que les déviations des conditions de choc normal sont petites (Dyment et Gontier, 1964, réf.(7). Malheureusement la structure détaillée du choc à son extrémité éloignée du profil est difficile à vérifier expérimentalement. La configuration généralement admise est un modèle de connection entre l'onde de choc et la ligne sonique, où les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, et normales à la ligne de courant passant par leur jonction. Le modèle est en accord avec les travaux théoriques de Germain sur le comportement du choc au voisinage de la ligne sonique.

1.2.4 Traînée et portance

La fig. 1.9 montre le comportement qualitatif typique des coefficients de traînée et de portance pour un profil isolé. Entre M_c et Md, le choc est faible et court, et sa traînée induite est négligeable, donc C_D varie peu et C_L suit la loi de Prandt l-Glauert. Pour $M_\infty > M_d$. la poche supersonique augmente beaucoup plus vite, le choc augmente en intensité et en longueur, et donc aussi sa traînée induite. D'autre part la traînée de pression due à l'épaississement de la couche limite liée à l'intensité du choc augmente aussi. La traînée totale augmente donc brusquement C_L continue à augmenter jusqu'au décollement de la couche limite, où il s'écroule et traduit le réajustement des pressions côté extrados et intrados, avec accélération de la croissance de la poche supersonique côté intrados (fig. 1.7). Le phénomène s'évanouit lorsque les ondes de choc atteignent le bord de fuite.

La plage de vitesse juste au-dessus de M_d est le régime de vol idéal pour les performances (rapport portance-traînée et facteur de vitesse), et l'analyse des régimes transsoniques est d'un grand intérêt dans la mesure où elle peut réduire, par des modifications de profils, la traînée, en réduisant la force et l'étendue des poches supersoniques.

La manoeuvrabilité de l'avion étant directement liée à la portance, le grand danger que peut représenter sa détérioration énorme au-delà d'un certain seuil, suscite le deuxième intérêt (et but) de l'analyse transsonique: minimiser le taux de détérioration au-delà de la vitesse

optimum, qui est à nouveau grandement fonction de la configuration.

1.2.5 Ecoulement interne dans des aubes de turbomachines

L'écoulement réel au travers d'aubages de turbomachines est un phénomène instationnaire tridimensionnel extrêmement complexe dans lequel les effets visqueux sont généralement non négligeables et dont la solution exacte, décrite par les équations complètes de Navier-Stokes se heurte à des difficultés de temps de calcul, de capacité de mémoire des ordinateurs et aussi du manque de généralité des modèles de turbulence.

Dans ces conditions le modèle non visqueux, tenant éventuellement compte de la modification de profil due à la couche limite, reste le seul pratiquement utilisable. Le problème tridimensionnel est considéré comme pouvant être décrit par la composition de deux problèmes bidimensionnels, l'un sur une famille de surfaces S_1 qui caractérise l'écoulement inter-aubes et l'autre sur la famille de surfaces S_2 qui caractérise l'écoulement méridien: voir fig. 1.10 et référence (8). Les écoulements secondaires sont généralement négligés et l'on travaille comme pour les cascades en approximant les surfaces S_1 par des surfaces cylindriques $r = cste.$ (approche quasi-tridimensionnelle).

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons uniquement à l'écoulement inter-aubes supposé stationnaire, non visqueux et purement bidimensionnel, qui correspond à l'étude d'une grille d'aubes planes. Considérons les configurations décrites à la fig. 1.11.

Alors que dans un écoulement incompressible, à une variation

de la vitesse d'entrée correspond une variation similaire de vitesse sur le profil, en écoulement compressible (approximativement pour $M_{max} > 0.5$) une augmentation plus que proportionnelle aura lieu: ceci étant dû au fait que la densité locale est variable alors que l'équation de conservation doit être satisfaite. Ceci peut amener au développement d'une zone supersonique sur l'extrados de l'aubage. Une augmentation supplémentaire de la vitesse provoquera l'apparition d'une zone supersonique sur l'intrados de l'aubage et il est possible que ces deux régions se rejoignent (fig. 1.11); le point de saturation est alors atteint. Notons que l'on repasse généralement d'un écoulement supersonique à un écoulement subsonique par une onde de choc.

Pour un angle d'entrée donné, l'effet de canal supposé prédominant impose un angle de sortie constant en écoulement incompressible Par contre lorsque le nombre de Mach d'entrée augmente, la déflection de l'écoulement compressible égale à $|\beta_1 - \beta_2|$ diminue. La fig. 1.12 montre l'effet de compressibilité pour deux profils différents, à angle d'attaque constant (incidence optimum) (résultats expérimentaux).

1.2.6. Modèles mathématiques de l'écoulement inviscible bidimensionnel

Equations d'Euler.

Les équations transitoires d'Euler expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sous la forme conservative familière:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e_t \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(e_t + p) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(e_t + p) \end{bmatrix} = 0 \qquad (1)$$

où e_t énergie totale par unité de volume. Le système de 4 équations à 5 inconnues est complété par une équation d'état:

$$e_i = h - p/\rho$$

où e_i est l'énergie interne (par unité de masse). h est l'enthalpie

Par définition, $e_t = \rho q^2/2 + \rho e_i$ en l'absence de forces gravitationnelles et l'équation d'état prend donc la forme

$$e_t = \rho\left[h(p,\rho) + \frac{u^2+v^2}{2}\right] - p$$

où h(p,p) est l'équation d'état pour l'enthalpie "statique".

Pour un gaz parfait* on a la relation simple

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p}{\rho} \qquad \text{car } h = C_p T, \quad T = p/R\rho$$

$$C_p = f(\gamma), \quad R = f'(\gamma)$$

et donc

$$e_t = \frac{p}{\gamma-1} + \rho\frac{u^2+v^2}{2}$$

Nous allons à présent étudier les cas d'écoulements stationnaires où l'on peut introduire les notions d'isoénergéticité et homentropie.

---

* à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire transformation adiabatique sans pertes (frottements). L'écoulement est dit polytropique, mais il n'est pas nécessairement isentropique (réversible). Le rapport p/ρ est constant (et $= c^2/\gamma$) dans le cas isentropique et uniquement alors.

L'équation de l'énergie peut s'exprimer en terme d'enthalpie totale H_t

$$H_t \triangleq h + q^2/2 = (e_t + p)/\rho \triangleq e_i + p/\rho + \frac{u^2+v^2}{2}$$

La forme intégrale de l'équation de l'énergie est

$$h + q^2/2 = h_0 = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{u^2+v^2}{2} \qquad \text{(gaz parfait)}$$

valable en toute rigueur le long d'une ligne de courant avec h_0= enthalpie de stagnation.

La même équation peut encore être obtenue par intégration le long d'une ligne de courant des équations de mouvement, mais en utilisant la conservation de l'entropie dans un fluide inviscible, c'est-à-dire une forme dérivée de la conservation de l'énergie interne. La dérivation est moins générale car elle n'est pas valable a priori à travers un choc.

Dans le cas isentropique, l'équation de l'énergie devient l'équation de Bernouilli:

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = \text{cste} \qquad \text{(le long d'une ligne de courant)}$$

en vertu des relations isentropiques

$$c^2 = \gamma R T \ , \quad \gamma = \text{cste} \ , \quad (p_2/p_1) = (\rho_2/\rho_1)^{\gamma} = (T_2/T_1)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s} \ , \quad c^2 = \gamma\, p/\rho$$

Un écoulement est dit isoénergétique (on dit aussi homenthalpique) si h_o est constant (identique) pour toutes les lignes de courant, ce qui permet d'étendre artificiellement l'équation de l'énergie à tout l'écoulement et de considérer celui-ci comme quasi-unidimensionnel au point de vue énergétique (of Oswatitsch, réf.(9). p. 201 et 19). On peut alors appliquer à tout l'écoulement (partout) l'équation de l'énergie (qui est dite généralisée). Néanmoins l'équation de Bernouilli n'est généralisable que si le fluide est homentropique c'est-à-dire si l'entropie est conservée non seulement le long d'une ligne de courant mais dans tout l'écoulement.

Le bien-fondé de l'hypothèse d'isoénergéticité est basé sur la conservation de cette propriété à travers les chocs (où l'entropie change, mais pas l'énergie totale).

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, l'homentropicité et l'isoénergéticité vont de pair en vertu du théorème de Crocco:

$$\vec{q} \times \mathrm{rot}\,\vec{q} = \mathrm{grad}\, H_t - T\,\mathrm{grad}\, s$$

On peut alors montrer d'une manière directe à partir des équations de mouvement (sans passer par la conservation de l'énergie) que

$$\frac{V^2}{2} + h = V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho} = V^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = \text{cste.} \qquad \cdots\cdot \text{partout}$$

Néanmoins la condition d'isoénergéticité entraîne implicitement la conservation de l'énergie et en outre la démonstration est moins générale que celle de l'énergie car elle n'analyse que les cas homentropiques alors qu'il peut exister des cas isoénergétiques non homentropiques (écoulements rotationnels) et même des cas isoénergétiques, homentropiques et rotationnels (trois dimensions).

Dans les cas isoénergétiques qui nous intéressent le théorème de Crocco:

$$\vec{q} \times \mathrm{rot}\,\vec{q} = -T\,\mathrm{grad}\,s$$

montre néanmoins que la rotation et la production d'entropie sont fortement liées, et plus particulièrement, dans le cas bidimensionnel $(\vec{q} \perp \mathrm{rot}\,\vec{q})$, il y a complète réciprocité c'est-à-dire que la vérification (ou la non-vérification) d'une des deux propriétés entraîne la vérification (ou la non-vérification) de l'autre.

Le seul mécanisme de production d'entropie et de rotation dans le modèle d'écoulement inviscible est l'onde de choc. Nous verrons plus loin comment ce phénomène peut être considéré comme local et même négligé en première approximation dans le cas des chocs faibles.

Les écoulements qui nous intéressent seront donc supposés irrotationnels, stationnaires et isoénergétiques (donc homentropiques). Ils seront donc complètement déterminés par 3 variables dépendantes si l'on considère que la 4ième variable (p ou c) est déterminée par les équations isentropiques et d'état.

La solution peut alors s'obtenir comme solution asymptotique d'un système d'équations transitoires:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho\left(\frac{c^2}{\gamma} + u^2\right) \\ \rho u v \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho\left(\frac{c^2}{\gamma} + v^2\right) \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho(\frac{c^2}{\gamma}+u^2)\\ \rho u v\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho(\frac{c^2}{\gamma}+v^2)\end{bmatrix} = 0. \qquad (3)$$

1.2.7 <u>Equation potentielle exacte, quasilinéaire</u>

Si on suppose l'écoulement permanent, le système (3) peut encore s'écrire (sous forme non conservative)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (4)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Une dérivation par partie de l'équation de continuité permet d'obtenir une équation différentielle en les variables u et v uniquement, si on remlace les dérivées de ρ par les dérivées de u,v et p en utilisant les équations de conservation de quantité de mouvement, et la relation isentropique entre les dérivées de p et de ρ .

On obtient ainsi l'équation (non conservative,)

$$(c^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2)\frac{\partial v}{\partial y} - uv\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6)$$

Cette équation garantit la conservation de la masse et de l'énergie (voir section 3.10) mais pas la conservation de la quantité de mouvement suivant x et y , ces 2 dernières conditions en vertu du théorème de Crocco p.e., $\vec{q} \times \mathrm{rot}\,\vec{q} = -T\,\mathrm{grad}\,s$ s'identifie avec la condition d'irrotationnalité

$$\mathrm{rot}\,\vec{q} = 0 \quad \text{ou par ex.} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

La condition d'irrotationnalité peut être automatiquement satisfaite par l'introduction d'un potentiel Φ tel que

$$U = \Phi_x \quad , \quad V = \Phi_Y$$

Dans ce cas l'écoulement est complètement décrit par l'équation potentielle

$$(c^2 - \Phi_x^2)\Phi_{xx} + (c^2 - \Phi_Y^2)\Phi_{YY} - 2\Phi_x \Phi_Y \Phi_{xY} = 0 \qquad (8)$$

Cette équation n'est pas sous forme divergente, elle n'est pas conservative. Elle est linéaire dans les dérivées d'ordre le plus élevé, et est appelée pour cette raison équation quasi-linéaire du 2ième ordre ou encore équation potentielle totale exacte.

1.2.8 Théorie isentropique des chocs faibles

Trois équations sont à satisfaire à travers un choc droit:

$$\rho_2 q_2 = \rho_1 q_1 \qquad (9)$$

$$\rho_2 q_2^2 + p_2 = \rho_1 q_1^2 + p_1 \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2} q_2^2 + h_2 = \frac{1}{2} q_1^2 + h_1 \qquad (11)$$

Il convient de remarquer que (9) est la forme discrète originale d'un bilan de quantité de mouvement pour un "tube" de section constante, il convient de ne pas remplacer cette forme tout à fait générale par l'équation de Bernouilli, car celle-ci n'est valable que dans une transformation de l'énergie du moins à priori (voir plus loin).

La combinaison de (9), (10) et (11) donne une relation entre les enthalpies amont (indice 1) et aval (indice 2).

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right)(p_2 - p_1)$$

Cette relation peut se traduire par une autre relation entre p_1/p_2 et ρ_1/ρ_2 si on remplace h par $h(p,\rho)$. Sur un graphique cela donne la courbe de Rankine-Hugoniot. (R-H) (fig.1.14)

La courbe de Rankine-Hugoniot est le lieu de tous les états dans le plan p,ρ qui peuvent être atteint par passage à travers un choc, à partir de l'état $p_1 . \rho_1$ La solution triviale est le point A.

On peut comparer la courbe de R-H à la courbe isentropique dessinée sur le même graphique (fig. 1.14). L'écart entre les deux courbes est une mesure du caractère irréversible (non isentropique) du phénomène de choc. On constate que l'écart est faible pour des valeurs de P_2 telles que $P_2/p_1 \leq 2$. Des calculs précis montrent que les pertes sont de 3 en termes de pression de stagnation. Pour une variation d'entropie faible, une bonne approximation de cette variation est

$$\Delta s \cong (\Delta p)^3$$

La zone de faible variation d'entropie détermine le domaine des chocs dits "faibles". Cette zone correspond pratiquement à un nombre de Mach en amont $M \leq 1.3$. Dans cette zone une bonne approximation de la réalité est faite en remplaçant l'équation de l'énergie (11) non pas par la relation exacte de R-H, mais par une relation isentropique, par exemple l'équation de Bernouilli: à travers un choc l'entropie peut changer mais le flux d'énergie est conservé, donc l'équation de l'énergie se maintient à travers le choc, et elle se ramène à l'équation de Bernouilli partout où l'hypothèse d'isentropicité peut être faite. Approximer un choc faible par une relation isentropique revient à admettre que l'équation de Bernouilli est valable à travers le choc.

Une bonne appréciation de l'approximation faite est révélée par le théorème de Crocco:

$$\vec{q} \times \mathrm{rot}\,\vec{q} = -T\,\mathrm{grad}\,s$$

Supposer l'isentropicité revient à supposer l'irrotationnalité. Ou encore l'abscence de circulation avec les théorèmes liant la circulation à la variation d'entropie (th. de Kelvin) $d\Gamma/dt = -\oint_c T\,ds$ ou au rotationnel (th. de Stokes $\oint \vec{v}\,ds = \Gamma = \iint \mathrm{rot}\,\vec{n}\,ds$). Or on vérifie dans la pratique que globalement, c'est-à-dire en dehors de la couche extrêmement mince du choc, la circulation est négligeable, ce qui confirme l'aspect local de la variation d'entropie. Négliger cette discontinuité dans l'entropie n'influence donc pas l'écoulement autrement que par une perte globale d'énergie ou sous forme de quantité de mouvement si on suppose le phénomène isentropique. Pratiquement une mesure de ces pertes est donnée par le calcul de la traînée de choc, qui peut être considérable même si le changement d'entropie est faible, car le choc peut s'étendre sur un grand domaine.

CHAPITRE II

REVUE DES METHODES NUMERIQUES

2.1 INTRODUCTION

La connaissance théorique, qualitative, des phénomènes transsoniques semblait impossible à exploiter pour calculer des écoulements réels variés, avant l'avènement des ordinateurs: les équations de l'écoulement sont très difficiles à résoudre car elles sont essentiellement non linéaires et les écoulements subsoniques et supersoniques ont des caractéristiques très différentes qui se retrouvent dans les équations respectivement de type elliptique et hyperbolique. Les solutions analytiques accessibles sont donc limitées à des cas simplistes, et les autres approximations proposées (linéarisation locale, méthodes intégrales, hodographe) se heurtent aussi à des problèmes insurmontables.

La seule solution puissante était le calcul numérique des équations, tâche fastidieuse qui ne se conçoit pas sans l'usage de calculateurs ultra-rapides, les ordinateurs. Avec eux le domaine transsonique a connu ces dernières années un développement spectaculaire, justifié par le retard des connaissances dans ce domaine, et un besoin économique urgent.

Deux approches différentes furent essentiellement développées: la première obtient la solution du problème stationnaire comme solution asymptotique d'un problème instationnaire. Les principales difficultés rencontrées furent l'amortissement artificiel des oscilations de la solution numérique causées par les chocs, et l'accélération de la convergence du procédé itératif, car les solutions (très bonnes) requièrent des temps de calcul assez prohibitifs.

L'autre approche résout directement le problème stationnaire par relaxation. Dans ce cas, le problème est de traduire correctement et automatiquement les différences de comportement évoquées entre les écoulements supersoniques et subsoniques, par des formulations de différences finies décentrées ou centrales (type differencing). L'opérateur sonique requiert aussi beaucoup de précision pour garder la consistance du schéma avec les relations isentropiques du choc. La méthode utilise aussi une viscosité numérique artificielle, implicitement. Cette méthode fut imaginée et raffinée par Murman, et a été largement exploitée depuis car elle converge plus rapidement que la solution instationnaire. La raison fondamentale est liée à l'ordre plus élevé (2ième ordre) de l'équation résolue. On peut accélérer encore la convergence du procédé de différentes façons. Une difficulté importante est liée à l'alignement des schémas décentrés avec les lignes de courant (inconnues), nécessaire pour la stabilité numérique (schémas tournés de Jameson).

Les modèles les plus sophistiqués actuellement sont en 3 dimensions et utilisent des corrections du modèle inviscible par des modèles de turbulence et de couches limites.

2.2. UNE SPECIALITE EN PLEIN ESSOR: LE CALCUL NUMERIQUE TRANSSONIQUE

Calculs numériques transsoniques: voici un domaine de recherche qui connaît un essor énorme depuis environ 25 ans. Le rythme de la recherche (le nombre de publications, de colloques, de nouvelles méthodes) s'est considérablement accéléré, d'une part car il répond à un besoin grandissant, et sans cesse plus larges pour résoudre des problèmes auparavant "interdits".

Les contingences économiques et sociales ont concentré (ou réorienté)

le besoin de connaissances vers les écoulements transsoniques. Par exemple en aéronautique, les ressources énergétiques limitées ont réorienté les recherches supersoniques vers des écoulements (correspondants à des vitesses de croisières des avions) plus "économiques". On ne cherche pas à percer le mur du son, mais à s'en rapprocher le plus possible avec un minimum de pertes d'énergie (ailes supercritiques). Outre cette application classique, les écoulements transsoniques, permanents et non visqueux (en première approximation) se présentent dans de nombreuses autres applications pratiques: tuyères de fusées, prises d'air, et également les écoulements dans les turbomachines puisque l'utilisation de compresseurs et de turbines dont l'écoulement comporte des régions supersoniques avec ondes de chocs tend à se généraliser. Les turbomachines à écoulement partiellement ou totalement supersonique ont l'avantage de produire un rapport de pression par étage plus élevé, ce qui permet, pour une puissance donnée, une réduction du nombre d'éléments tournants par rapport aux machines classiques travaillant en régime complètement subsonique. La législation sur le bruit est un autre facteur stimulant la recherche transsonique.

Pour résoudre un problème donné d'écoulement, il y a les méthodes analytiques, numériques et les essais en soufflerie. Les solutions simples des modèles analytiques sont extrêmement rares, et avant l'avènement des ordinateurs, le calcul manuel des solutions était forçément très limité (méthodes des caractéristiques, de l'hodographe...). Dans le domaine subsonique et supersonique la méthode des petites perturbations et la linéarisation de Prandtl ouvrent la voie à de nombreuses théories d'approximations et de similitudes (Prandtl-Glauert, Karman-Tsien, caractéristiques,

Ringle, méthode de l'hodographe). L'avènement des ordinateurs a débloqué de façon inespérée l'impasse où débouchait alors la théorie: elle fournissait des équations dont il était manuellement impossible de trouver les solutions. De nombreuses méthodes numériques ont été développées permettant le calcul d'écoulements non visqueux subsoniques ou supersoniques, les techniques sont devenues classiques. Les progrès réalisés dans la simulation d'écoulements par voie numérique se situent actuellement à deux niveaux: celui des ordinateurs de plus en plus puissants et rapides, mais aussi celui des techniques de calcul, de plus en plus performantes.

Comparées aux essais en soufflerie, les méthodes numériques ont un intérêt certain. Elles permettent d'éviter ou de réduire les essais en soufflerie qui sont longs et coûteux, et d'une manière générale élargissent grandement le champ d'essais. Elles permettent une meilleure compréhension des phénomènes observés, condition indispensable à l'optimalisation des systèmes. Enfin elles offrent un champ de comparaison pour estimer les erreurs dues aux facteurs d'échelle difficiles à estimer et aux effets de parois de souffleries. Ces derniers problèmes sont particulièrement graves en transsonique car dans ce domaine, les écoulements sont très sensibles à de petites perturbations des conditions d'essais et rendent l'approche expérimentale très délicate et très coûteuse.

Une difficulté fondamentale a longtemps retardé le traitement convenable des écoulements transsoniques. Le modèle mathématique transsonique est de façon inhérente non linéaire (et non linéarisable par la linéarisation de Prandtl!) et les équations différentielles constitutives peuvent être de type elliptique ou hyperbolique, suivant que l'écoulement est sub-

sonique ou supersonique.

Deux approches distinctes ont été utilisées pour résoudre ces difficultés. La première (Magnus et Yoshihara) obtient la solution du problème stationnaire comme solution asymptotique d'un problème instationnaire. La deuxième (Murman et Cole) résout directement le problème stationnaire en adaptant la méthode de relaxation au caractère mixte de l'équation potentielle constitutive ("type dependent differencing"). Ces deux méthodes ne donnent cependant pas un moyen pour conçevoir des profils avec une onde de choc déterminée, qui est l'outil d'optimisation en fin de compte demandé pour l'aéronautique par exemple. C'est pourquoi les méthodes numériques d'optimisation, donnant des profils dit supercritiques (qui reculent la limite du M_D), sans chocs (ou quasi sans choc), par optimisation des caractéristiques transsoniques, sont exploitées intensivement actuellement.

2.3 PROFILS SANS CHOC: METHODES DE L'HODOGRAPHE

2.3.1. Méthode de l'hodographe

Dans le plan de l'hodographe, les coordonnées et donc les variables indépendantes sont les composantes de la vitesse. Une caractéristique essentielle de ce plan (pour le domaine transsonique) est que un problème non linéaire dans le plan physique des coordonnées spaciales x-y, devient linéaire dans le plan de l'hodographe.

Ainsi le système:

$$\begin{cases} (c^2-u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (c^2-v^2)\dfrac{\partial v}{\partial y} - uv\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

devient:

$$\begin{cases} (c^2 - u^2)\dfrac{\partial y}{\partial v} + uv\left(\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\right) + (c^2 - v^2)\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

et l'équation aux petites perturbations

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(\gamma + 1)}{U} M_\infty^2 u' \frac{\partial u'}{\partial x}$$

devient l'équation de Tricomi:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(\gamma + 1)}{U} M_\infty^2 \frac{\partial y}{\partial v}$$

Ces équations sont linéaires parce que les variables dépendantes x et y apparaissent de façon linéaire. Les équations non linéaires du 2ième ordre écrites pour le potentiel ou la fonction de courant peuvent être aussi transformées dans le plan de l'hodographe, où elles sont linéaires. L'équation potentielle "quasi-linéaire" devient l'équation de Busemann, et l'équation pour la fonction de courant devient l'équation de Chaplygin.

Les études théoriques dans le plan de l'hodographe ne manquent pas, étant donné que la linéarité autorise l'utilisation de tous les résultats de l'analyse linéaire. Le problème crucial, réside dans l'imposition des conditions frontières, naturelles dans le plan physique des coordonnées spatiales, mais moins faciles dans l'hodographe. C'est pourquoi les solutions analytiques sont rares. Aucune théorie générale ne semble possible, et l'intégration des phénomènes de chocs est une difficulté insurmontable.

2.3.2. Design de profils par optimisation numérique

Les méthodes de l'hodographe apportent un moyen efficace de réduire la traînée de choc, en produisant des profils qui sont sans choc pour une condition particulière du design. Cette méthode a deux désavantages: les codes demandent une grande expérience de la part de l'utilisateur, et les profils ainsi produits peuvent souffrir d'une détérioration plus ou moins grande et rapide des performances pour des conditions hors-design. (Concept de "peaky" et "non-peaky" " airfoils", voir Niewland et Spee, réf.(10). Une autre méthode de design a été proposée. La méthode inverse calcule le profil correspondant à une distribution de pression imposée. La procédure est simple mais demande de connaître à l'avance quelle distribution est bonne et réalisable; de plus des contraintes sur la portance, l'épaisseur, etc... ne peuvent être imposées. Une approche plus récente, l'optimisation numérique, est facile à appliquer et capable de tenir compte d'une variété pratiquement illimitée de contraintes imposées. Elle couple un programme d'optimisation basé sur la méthode des directions acceptables, et la méthode de l'hodographe. La méthode travaille sur une partie ou sur la totalité du profil, avec ou sans correction d'effets visqueux. Les résultats sont discutés par Ballhaus dans la réf.(11)

2.4 PROFILS AVEC CHOC: APPROCHE INSTATIONNAIRE ET PAR RELAXATION

Nous avons déjà souligné que la difficulté du problème transsonique (inviscible) est la non linéarité et le type variable des équations représentatives. Deux types d'écoulement qualitativement très différents, subsonique et supersonique, sont séparés par une frontière in-

connue à priori:

"Physiquement, ces deux types d'écoulements ont des propriétés très différentes. Dans un écoulement subsonique, une perturbation se propage dans toutes les directions, alors que dans un écoulement supersonique, elle n'a d'effet que dans une région limitée par le cône de Mach centré sur son point d'apparition.

Mathématiquement, un écoulement subsonique est décrit par des équations elliptiques et un écoulement supersonique par des équations hyperboliques.

Les schémas de discrétisation exigés pour résoudre une équation hyperbolique sont totalement différents de ceux exigés pour résoudre une équation elliptique. En effet, pour être stable, les schémas de discrétisation numérique doivent pouvoir simuler correctement le comportement d'une perturbation dans l'écoulement.

Le système d'équations aux dérivées partielles décrivant les écoulements transsoniques permanents et non visqueux est donc de type mixte, elliptique dans la région subsonique et hyperbolique dans la région susonique. Mais en plus, il est non linéaire. La frontière qui sépare ces deux régions (ligne sonique) n'est donc pas connue a priori, ce qui rend l'aspect numérique très complexe puisqu'il faut utiliser des schémas totalement différents dans des régions dont on ne connaît pas la localisation (réf. Ozer (12)).

Deux approches distinctes ont été utilisées pour contourner ces difficultés. La première consiste à éviter le problème mixte. Profitant au

maximum des capacités de la génération des ordinateurs plus aptes à résoudre un problème à conditions initiales qu'un problème à conditions aux frontières, on résout les équations complètes instationnaires (Euler), toujours complètement hyperboliques par rapport au temps et on avance dans le temps afin d'obtenir asymptotiquement l'état stationnaire. Cette méthode fut utilisée de deux façons différentes: celle de Moretti (réf. (13), qui est restée sans lendemain, et celle de Magnus et Yoshihara (réf. (14) qui a donné des résultats remarquablement corrects.

La seconde approche, développée par Murman et Cole (réf.15) traite directement le problème mixte stationnaire grâce à une nouvelle adaptation de la méthode itérative de relaxation (habituellement utilisée pour les problèmes elliptiques) qui permet de résoudre l'équation du potentiel en régime transsonique. On utilise des opérateurs différents dans les régions subsoniques et supersoniques ("type dependent differencing"). Le schéma très rapidement raffiné a été ensuite exploité par de très nombreux chercheur.

2.5 APPROCHE INSTATIONNAIRE

Malgré leur caractère purement hyperbolique, les équations d'Euler présentent des difficultés de stabilité à cause de la dépendance de la vitesse du son par rapport à la vitesse locale.

Je reprend ici l'explication très claire de Ozer (réf.(12):

"Les conditions d'Euler ne contenant aucun terme dissipatif, les ondes acoustiques ne sont pas amorties au cours de leur propagation et ne peuvent être éliminées que par des phénomènes d'interactions avec les conditions limites imposées sur les frontières du domaine de calcul.

Lorsque la composante normale de la vitesse est supersonique sur la frontière aval, on ne peut y imposer aucune condition. Une onde qui arrive sur cette frontière n'y subit aucune contrainte et quitte le domaine de calcul. De plus, en vertu de la règle des signaux interdits, aucune onde ne peut pénétrer à l'intérieur du domaine de calcul par cette frontière.

Par contre, une frontière imperméable, supposée rigide, ne peut ni absorber ni fournir d'énergie et toute onde qui l'atteint est réfléchie sans amortissement ni amplification. Il en est de même pour les frontières formées par des axes de symétrie ou par des limites de périodicité spatiale.

On peut ainsi montrer (réf.(17) que pour les conditions limites généralement utilisées en pratique, exception faite de la frontière aval supersonique, l'effet amortissant des conditions limites est soit inexistant soit très petit particulièrement à faible vitesse ou en régime transsonique.

En résumé, la seule possibilité d'élimination des ondes est leur élimination par la sortie si celle-ci est supersonique et même dans ce cas favorable, le temps de calcul peut être très long car les ondes peuvent subir maintes réflexions sur les autres frontières avant d'atteindre la sortie.

Dans le cas ou il n'y a pas de sortie supersonique, écoulements subsoniques et transsoniques supercritiques, le seul processus permettant un amortissement des ondes est un phénomène purement numérique dû à l'erreur de discrétisation du schéma aux différences finies. Celui-ci

n'est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles à résoudre qu'à un terme d'erreur de discrétisation près qui tend vers zéro lorsque le pas du maillage tend vers zéro si la condition de consistance est respectée. Cette erreur de discréyisation peut avoir un effet dissipatif, mais l'amortissement qui en résulte est forcément très faible si le maillage est pris très serré pour assurer une précision suffisante à la solution finale."

A ce point, deux philosophies différentes se dégagent et donnent lieu à deux techniques de calcul différentes, aussi bien en transsonique que en supersonique, du moment qu'il y a des chocs, ou des discontinuités. Ces techniques sont communément appelées en anglais: "shock fitting" et "shock capturing".

2.5.1 shock fitting:

On localise et on ajuste les chocs et autres discontinuités (ligne sonique) en y appliquant les conditions appropriées de saut (ex: Rankine-Hugoniot). On localise ainsi différents domaines de calcul d'un type clairement défini, où les équations d'Euler peuvent être solutionnées en appliquant les méthodes de différences appropriées.

Un seul cas transsonique avec choc a été étudié. Le plan physique est transformé en un domaine carré où le choc peut se traduire par une ligne verticale; celle-ci est déplacée jusqu'à ce que les conditions de Rankine soient satisfaites. Les résultats obtenus sont en concordance avec les résultats expérimentaux.

La méthode est intéressante car elle nécessite peu de points pour

fixer le choc, et est donc rapide. Mais sa mise en forme est compliquée car elle n'est pas directe: le choc doit être introduit en certains points.

2.5.2 shock capturing:

La deuxième école utilise une méthode directe, puisque le choc apparaît d'une manière explicite par les calculs. Elle se base sur le concept du schéma de différence finie dissipatif qui donna lieu à une méthode dite "de viscosité". Historiquement parlant, l'idée fut lancée par l'application du schéma très connu de Lax et Wendroff (réf.19).

Pour commencer, il est intéressant de rappeler le rôle "physique" des termes d'ordre croissant d'une série de Taylor développée à partir d'un schéma de différences finies, expansion qui permet de vérifier la consistance du schéma à traduire un opérateur différentiel.

Les opérateurs de différences finies sont en fait dérivés en supposant que les variables sont développables en série de Taylor, et donc qu'un opérateur différentiel peut se "discrétiser" en des opérations de différences entre les variables auxquelles il s'applique. Mais si les variables sont discontinues, elles ne sont plus développables en série de Taylor, la méthode est invalidée et il faut avoir recours au 2ième théorème de l'Appendice 1 pour comprendre comment se comportent alors les opérateurs de différences finies. Ceux-ci peuvent causer des oscillations de la solution en un endroit où les variables sont discontinues.

En effet, un schéma d'ordre 2 (ou plus) va faire passer un polynôme de degré 2 (ou plus) par la discontinuité, ce qui s'apparente à ap-

proximer la discontinuité par le mode fondamental et les 2 premières harmoniques d'une série de Fourier.

Ceci explique pourquoi des schémas plus précis, d'ordre plus précis, d'ordre plus élevé, sont aussi plus instables. On est alors obligé d'ajouter localement des termes d'ordre moins élevé pour amortir ces instabilités.

Les termes représentant des dérivées d'ordre pair amortissent les oscillations, ils sont "dissipatifs". Les termes d'ordre impair dispersent et propagent les oscillations, ils sont "dispersifs". La combinaison des deux effets s'appelle la "diffusion".

La plupart des schémas habituellement utilisés sont précis au second ordre. La vitesse de convergence due à la viscosité numérique est alors du quatrième ordre par rapport au pas du maillage, ce qui veut dire que la perturbation instationnaire décroit suivant une loi exponentielle du type $\exp(-a \cdot x^3 t)$, où "a" est une constante positive d'ordre 1, si on suppose $\Delta t \cong \Delta x$.

Prenons un exemple simple, Soit à approximer l'opération différentiel (réf.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Le schéma de Lax-Wendroff, du 2ième ordre, appliqué à cette équation, est consistant avec celle-ci jusqu'au 2ième ordre, car des expansions de Taylor de ce schéma nous donnent une équation dite "équivalente":

$$u_t = u_x + \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxx} - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{ttt} \cdots$$

Le 1er terme dissipatif (en u_{xxxx}) est bien du 4ième ordre par rapport au pas du maillage si on suppose Δx du même ordre que Δt (il faut augmenter l'ordre de l'expansion de 1 car $u_t = \Delta u/\Delta t$ et $u_x = \Delta u/\Delta x$). L'amortissement est très faible, le schéma est plus dispersif que dissipatif, d'où oscillations.

La méthode de viscosité numérique consiste à ajouter un terme dissipatif d'ordre moins élevé, donc plus efficace pour "amortir" la discontinuité sans oscillations. Ainsi Magnus et Yoshihara utilisent un schéma de Lax-Wendroff du 2ième ordre légèrement modifié de manière à augmenter localement la diffusion. Dans le cas simple ci-dessus le schéma est équivalent à

$$u_t = u_x + K\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{6}u_{xxx} - \frac{(\Delta t)^2}{6}u_{ttt} + \cdots$$

K est choisi de l'ordre du maillage pour garder un schéma du second ordre, et de manière à amortir les instabilités non linéaires des chocs, par un terme dissipatif (viscosité numérique) d'ordre peu élevé. Une perturbation décroît suivant une loi exponentielle du type exp $(-a\Delta x^2 t)$ si on suppose Δt de l'ordre de Δx . Une valeur optimale du terme de viscosité afin de faire un compromis entre la largeur du choc et les oscillations dans le domaine aval est difficile à estimer.

L'introduction d'un terme de viscosité numérique dans les expressions aux différences finies étale la discontinuité sur plusieurs points du maillage. La structure du choc n'est plus correcte puisqu'en particulier son épaisseur va dépendre du maillage.

Mais la position et la valeur du saut sont exactes, et la solution est continue. Le même schéma peut être utilisé dans tout l'écoulement puisque

la viscosité numérique est négligeable partout ailleurs qu'au droit des chocs.

Les résultats obtenus s'avèrent fort satisfaisants en comparaison des résultats expérimentaux; notons cependant que les auteurs citent un temps de calcul de l'ordre de deux heures sur CDC 6400 pour l'étude d'un profil isolé. La méthode est donc très lente à converger.

2.6 METHODES ITERATIVES DE RELAXATION: METHODE DE MURMAN ET COLE

La méthode fut originellement appliquée à la théorie des petites perturbations d'un écoulement potentiel (réf. 15)

$$[K - (\gamma+1)\phi_x]\,\phi_{xx} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \quad \text{sous forme non-conservative} \tag{12}$$

$$[K\phi_x - (\gamma+1)\phi_x^2/2]_x + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \quad \text{sous forme conservative} \tag{13}$$

Si la vitesse $\phi_x = u < K/(\gamma+1)$, on obtient une équation elliptique, le régime est subsonique, et une perturbation influence tout le domaine de calcul. Un schéma de discrétisation numérique ne peut être stable que s'il respecte le comportement d'une perturbation ce qui signifie que pour l'équation elliptique, il faut utiliser des schémas aux différences finies centrées. Les équations algébriques résultantes sont résolues itérativement par relaxation.

Si $\phi_x = u > K/(\gamma+1)$ l'équation différentielle a la forme d'une équation d'onde de type hyperbolique, le régime est supersonique, et une perturbation n'influence qu'une zone partielle du domaine qu'on appelle domaine de dépendance. Un schéma numérique centré est instable et il faut utili-

ser des schémas décentrés en veillant cependant à ce que le domaine de dépendance physique soit toujours inclus dans le domaine de dépendance numérique. (fig. 2.1 & 2.2)

Il n'y a généralement pas de raison de vouloir appliquer des techniques de relaxation à des équations purement hyperboliques puisque pour ce type d'équations, il existe des méthodes de résolution directes et très rapides (ex: méthodes des caractéristiques). Malheureusement, en transsonique, une formulation explicite des opérateurs de différences finies et impossible, car la condition de stabilité sur le pas du pseudo-temps ("marching-methods") est incompatible avec le besoin de prédéterminer le réseau et l'ignorance de l'emplacement de la ligne sonique.

Une méthode de relaxation adaptée à une équation hyperbolique doit donc utiliser des opérateurs différents pour satisfaire la règle des signaux interdits, mais aussi choisis de manière à éviter les solutions physiquement inacceptables (ex: ondes de détente).

Dans le domaine subsonique, l'équation conservative (13) est différenciée en utilisant également un schéma conservatif centré pour les "x" et les "y":

$$K\,\frac{(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j})-(\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j})}{(\Delta x)^2}$$

$$-(\gamma+1)\,\frac{(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j})^2-(\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j})^2}{2(\Delta x)^3}+\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j-1}}{(\Delta \tilde{y})^2}=0$$

qui se réduit fort heureusement (voir plus loin) à la formulation directement dérivée de l'équation de l'équation non conservative (12).

$$\left[K-(\gamma+1)\,\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}\right]\left[\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{ij}+\phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}\right]+\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{ij}+\phi_{i,j-1}}{(\Delta \tilde{y})^2}=0 \qquad (14)$$

Cette équation est précise au 2ième ordre et est similaire à une équation de Laplace.

L'opérateur est stable (suivant une anaylyse linéaire) si le coefficient

$$(V_e)_{i,j} = K - (\gamma+1)\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

est positif. Si on désigne par $p_{i,j}$ l'opérateur de différences finies pour les dérivées secondes suivant x, centré au point i,j et par $q_{i,j}$ l'opérateur correspondant (centré) pour les dérivées secondes suivant y, l'opérateur elliptique prend la forme canonique:

$$(V_e)_{i,j}\, p_{i,j} + q_{i,j} = 0 \tag{15}$$

Dans le domaine supersonique, le domaine de dépendance est limité par les lignes de Mach d'équations:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{\partial\phi/\partial x}}$$

Il est toujours situé complètement dans un demi-plan à gauche d'une parallèle à l'axe y passant par ce point (Fig. 2.3). Ce même domaine est le domaine de dépendance numérique d'une formule de différences finies décentrée vers l'amont pour les dérivées suivant x, tout en conservant le caractère conservatif de l'équation (13):

$$K\,\frac{(\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}) - (\phi_{i-1,j} - \phi_{i-2,j})}{(\Delta x)^2}$$

$$- (\gamma+1)\frac{(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j})^2 - (\phi_{i-1,j} - \phi_{i-2,j})^2}{2(\Delta x)^3} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta\tilde{y})^2} = 0$$

qui ici encore se réduit à l'opérateur décentré amont dérivé de l'équation non conservative (12):

$$\left[K - (\gamma+1)\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x}\right]\left[\frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2}\right] + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta \tilde{y})^2} = 0 \qquad (16)$$

Cette équation est précise au 1er ordre et est semblable à une équation de type "onde acoustique". L'opérateur est stable si le coefficient

$$(Vh)_{i,j} \quad K - (\gamma+1)\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j}}{2\Delta x}$$

est négatif.

L'équation "canonique", en reprenant les notations précédentes p_{ij} et $q_{i,j}$ est

$$(Vh)_{i,j} \cdot p_{i-1,j} + q_{i,j} = 0 \qquad (17)$$

ou encore

$$(Ve)_{i-1,j} \cdot p_{i-1,j} + q_{i,j} = 0 \qquad \text{car } (Vh)_{i,j} \triangleq (Ve)_{i-1,j}$$

L'erreur de troncature associée à la formule (16) a la forme d'une viscosité numérique ce qui nous place d'emblée dans le cadre des techniques de "shock capturing" utilisant cette viscosité pour traiter convenablement, de façon inhérente les perburbations produites par un choc.

Pour la simplicité des explications, on peut utiliser pour la "SPE" un potentiel transformé linéairement: $\overset{*}{\psi} = -kx + (\gamma+1)\phi$ ce qui donne

$$-\overset{*}{\psi}_x \overset{*}{\psi}_{xx} + \overset{*}{\psi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0$$

L'opérateur hyperbolique (16) donne une équation différentielle "équivalente"

$$-\overset{*}{\psi}_x \overset{*}{\psi}_{xx} + \overset{*}{\psi}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} + \Delta x(\overset{*}{\psi}_x \overset{*}{\psi}_{xx})_x = O[(\Delta x)^2, (\Delta\tilde{\tau})^2]$$

qui a la même forme que l'équation visqueuse transsonique étudiée par Siechel (cfr. étude physique du choc). Celui-ci a montré que la viscosité artificielle ne cause pas une augmentation de l'entropie au 1er ordre.

Si nous linéarisons localement l'erreur de trancature en posant $\overset{*}{\psi}_x = \overset{*}{u} = cste > 0$, on obtient

$$\overset{*}{\psi}_x \overset{*}{\psi}_{xx} - \psi_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} = \Delta x \overset{*}{u} \overset{*}{\psi}_{xxx}$$

Le terme de droite, en $\overset{*}{\psi}_{xxx}$ où $\overset{*}{u}$ est la viscosité artificielle, d'ordre Δx, qui joue le rôle d'une viscosité naturelle, et donne à la formule un caractère dissipatif apte à amortir les instabilités dues à une discrétisation de la discontinuité des chocs.

Cette aptitude a été vérifiée avec succès par Murman (figs. 2.4 et 2.5) et l'étalement est d'autant moins sensible que le choc est fort et droit. On vérifie que les formules hyperboliques du 2ième ordre, présentent les mêmes phénomènes d'instabilités que ceux déjà mentionnés pour le schéma de Lax-Wendroff sans terme correctif de dissipation. De nouveau, les termes dominants de l'erreur de trancature sont dispersifs et la viscosité numérique est reléguée à des termes d'ordre élevé, donc sans effet.

A propos de consistance, on peut dès à présent dire que l'équation différentielle hyperbolique admet des solutions discontinues non uniques: des sauts d'expansion et de compression sont tous les deux possibles, à

cause de l'absence d'une condition d'inégalité sur l'évolution de l'entropie.

Mais l'utilisation d'un opérateur hyperbolique décentré vers l'amont réintroduit l'unicité en interdisant les sauts d'expansion: la direction, au plutôt le sens de l'écoulement est tenu en compte dans la méthode numérique, et par le biais du terme d'erreur de troncature ayant l'effet d'une dissipation visqueuse. Cette perte d'énergie sous forme visqueuse, agit comme une source de production d'entropie.

L'idée de Murman et Cole est d'appliquer le schéma (14) dans la région subsonique et le schéma (16) dans la région supersonique. Comme l'équation est non linéaire, on ne connaît pas a priori la position de la ligne sonique, on ne connaît donc pas les domaines dans lesquels il faut appliquer les différents schémas. Il faut donc résoudre le problème itérativement, par exemple par une méthode de relaxation par lignes en prenant les lignes $x = cste$ comme lignes implicites et en résolvant d'amont en aval, en choisissant à chaque itération le schéma à appliquer en chaque point en fonction de la vitesse locale de l'écoulement obtenue à l'itération précédente.

A l'étape $K+1$ des itérations, à chaque ligne de relaxation, on commence donc par recalculer les nouvelles valeurs des coefficients

$$(Ve)_{i,j} \quad \text{et} \quad (Vh)_{i,j}$$

à partir des solutions de ϕ de l'itération K .

Si $(Ve)_{i,j}$ est $>o$, on utilise $(Vh)ij$ est , on utilise à l'itération K, l'opérateur supersonique (17).

Un premier cas particulier est le passage d'un opérateur à l'autre à travers la ligne sonique. Un point est atteint ou $(Ve)_{i,j}<0$ et $(Vh)_{i,j} = (Ve)_{i-1,j}>0$. Ni l'équation (15) ni l'équation (17) n'est stable. On utilise alors un opérateur parabolique obtenu en annulant les dérivées suivant x, ce qui est consistant avec la définition d'une ligne sonique:

$$\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta\bar{y})^2} = 0 \qquad \text{en posant } (Ve)_{i,j} = 0 \tag{18}$$

Il est axiomatique qu'un opérateur de différences finies doit être consistant avec l'équation différentielle qu'il approxime, c'est-à-dire que l'équation se réduise à l'équation différentielle dans la limite où les dimensions du réseau deviennent infiniment petites. L'opérateur (18) répond à cette condition dans les régions continues où l'équation différentielle SPE est valide. En effet, si on fait une expansion en série du coefficient $V=k-(\gamma+1)\phi_x$ autour de la valeur sonique $V=0$, la substitution dans l'équation SPE, donne au ler ordre:

$$\delta x(\gamma+1)(\phi_{xx})^2 + \phi_{\bar{y}\bar{y}} + \cdots = 0 \qquad \text{où} \quad \delta x = x - x_{sonic} \leq \Delta x$$

Si $\Delta x \to 0$, $\delta x \to 0$, et donc l'opérateur parabolique (18) est consistant.

Le deuxième cas particulier est celui du choc, où l'écoulement décélère (suffisamment que pour traverser la limite sonique), et donc devient subsonique. Un point est atteint où $(Ve)_{i,j}>0$ et $(Vh)_{i,j}<0$. L'équation (15) est stable, ainsi que l'équation (17), et on peut en principe utiliser n'importe lequel de ces opérateurs. Mais aucun n'est consistant avec la définition du choc et peut conduire à des erreurs substantielles sur la position et l'intensité du choc.

Nous allons reprendre ici plus en détail les conditions de "saut"

(compatibilité des solutions généralisées) dans le cadre des petites perturbations, et vérifier la consistance de ces conditions avec les conditions "physiques" d'un choc isentropique. Rappelons d'abord que, dans le cadre de l'hypothèse d'isentropicité pour l'établissement de la SPE, on admet, pour les chocs faibles considérés, que les relations de Rankine-Hugoniot, reliant de manière exacte les valeurs discontinues possible à travers le choc, peuvent être approximées par d'autres relations dites isentropiques car faites en supposant que la loi de conservation de l'énergie est isentropique.

La condition de compatibilité des solutions généralisées de Lax pour la SPE donne les conditions de saut

$$\langle K u - \frac{\gamma+1}{2} u^2 \rangle (d\tilde{y})_s - \langle v \rangle (dx)_s = 0 \tag{19}$$

$$\langle v \rangle (d\tilde{y})_s + \langle u \rangle (dx)_s = 0 \tag{20}$$

où $\langle\ \rangle$ est le saut, c'est-à-dire la valeur aval moins la valeur amont et $(\ )_s$ est un élément de surface du choc.

Les conditions (19) et (20) coïncident avec les conditions physiques de choc supposé quasi-isentropique, grâce au fait que la SPE était écrite sous forme conservative. De plus (19) et (20) peuvent être regroupées en une représentation polaire du choc:

$$[K - (\gamma+1)\bar{u}]\langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 = 0$$

où

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad \text{(moyenne à travers le choc)}$$

L'angle de choc est donné par:

$$\theta_s = dx/dy = -\langle v\rangle/\langle u\rangle$$

La continuité de la vitesse tangentielle à travers le choc conduit à $\langle\phi\rangle=0$ si on définit $u = \partial\phi/\partial x$ et $v = \partial\phi/\partial y$. La continuité du potentiel est "prolongée" (solution faible pour système du 2ième ordre) à travers le choc. La condition (20) (pas de saut dans la composante tangentielle des vitesses) peut donc être aussi interprétée comme: pas de circulation autour d'un chemin d'intégration infinitésimal traversant le choc, ce qui est consistant avec la théorie des chocs faibles.

Reprenons à présent notre discussion concernant l'emploi des opérateurs elliptique ou hyperbolique pour un choc.

Les imprécisions sur la position et sur l'intensité des chocs rencontrés dans l'emploi des opérateurs elliptique (15) ou hyperbolique (17) pour un choc, étaient dues au caractère localement non conservatif de ces schémas (NCR. non-conservative relaxation).

Murman (réf.20) après une étude détaillée sur la traduction conservative de l'équation différentielle au niveau du choc, a finalement montré que la solution (généralisée) de celle-ci est décrite de façon correcte (et unique) par le schéma conservatif (FCR. full conservative relaxation):

$$(V_e)_{i,j}\cdot p_{i,j} + (V_h)_{i,j}\cdot p_{i-1,j} + q_{i,j} = 0 \qquad (21)$$

On peut finalement vérifier la consistance de l'opérateur de choc (21) avec la SPE, dans le cas où ce choc se réduit à une recompression progressive (solution continue) ce qui est physiquement vérifié pour les poches supersoniques sans choc, et finalement simulé dans tous les cas si on utilise les opérateurs qui introduisent une viscosité numérique. Si on fait

les expansions de Taylor classiques pour l'opérateur de choc (21), on obtient une approximation consistante de la SPE, au 1er ordre (erreur de troncature de $\mathcal{O}(\Delta x)$.

$$2\left[K-(\gamma+1)\phi_x\right]\phi_{xx}+\phi_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}}+\Delta x\left\{\left[K-(\gamma+1)\phi_x\right]\phi_{xx}\right\}_x+\cdots\cdots=0$$

Si par contre on adopte le point de vue de la solution discontinue (solution asymptotique des solutions pratiquement utilisables), l'équation différentielle doit être étudiée avec ses solutions généralisées et la condition de consistance n'est pas violée.

2.7 METHODES INSTATIONNAIRES ACCELEREES (NATURELLES)

2.7.1 Méthodes instationnaires à viscosité artificielle

On peut améliorer la vitesse de convergence des méthodes instationnaires en ajoutant un terme de viscosité dans les équations à résoudre.

Supposons que le système s'écrive sous la forme:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+A(\vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}+B\frac{\partial \vec{u}}{\partial \gamma}=0 \qquad (22)$$

ou u est le vecteur des inconnues u en point donné

On peut introduire un terme dissipatif dans les équations en ajoutant un second membre de la forme:

$$\Delta x\left(Q_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+Q_\gamma\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}\right)\vec{u} \qquad (23)$$

dans lequel les matrices Q_x et Q_γ doivent être diagonalisables et avoir des valeurs propres positives. Si on veut conserver une précision du deuxième ordre, il est clair que ces matrices doivent être d'ordre Δx. L'effet dissipatif est donc du 3ième ordre et une perturbation décroît comme

exp. $(-\alpha \Delta x^2 t)$ si on suppose Δx de l'ordre de Δt.

C'est la méthode utilisée par Magnus et Yoshihara: il faut mentionner qu'à l'origine, le terme de viscosité artificielle a été introduit, non pas pour accélérer la convergence mais parce que sa présence était indispensable pour stabiliser les calculs dans les régions où le gradient de pression (ou vitesse) est important.

2.7.2 Méthodes instationnaires à viscosité corrigée

L'idée de base est celle des "surfaces d'amortissement" de MacDonald (réf.21) qui est une discrétisation de l'espace par éléments finis triangulaires. A nouveau cette méthode fut introduite d'abord pour améliorer la précision d'un schéma de type Lax-Wendroff fortement dissipatif, tout en préservant la stabilité des calculs.

Pour une même précision, la vitesse de convergence est réduite d'un ordre de grandeur par rapport à la méthode de Magnus et Yoshihara (elle devient d'ordre Δx^2. La méthode consiste en fait à garder une précision du 2ième ordre, tout en prenant dans le terme (23) des matrices Q_x et Q_Y d'ordre 1, ce qui donne alors un effet dissipatif du second ordre.

2.8 DISTINCTION FONDAMENTALE ENTRE LES METHODES INSTATIONNAIRES ET DE RELAXATION

Les réflexions qui suivent sont empruntées à Ozer (réf.12)

"Que la vitesse de convergence optimum des méthodes itératives de relaxation est d'ordre Δx , alors que celle des méthodes instationnaires est au mieux d'ordre Δx^2. Les méthodes de relaxation sont donc beau-

coup plus rapides. L'explication en est très simple. Les méthodes de relaxation sont utilisées pour résoudre des équations du second ordre. Le schéma de discrétisation est équivalent à une équation instationnaire".

Les méthodes instationnaires sont utilisées pour résoudre un système du premier ordre du genre (24) qui n'a pas d'amortissement interne.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(\vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + B(\vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0 \qquad (24)$$

($\vec{u}$ - vecteur des inconnues en un point donné)

En introduire un, sous la forme d'un terme $K\vec{u}$, détruirait la consistance du schéma, et nous amènerait à des techniques instationnaires artificielles qui seront étudiées plus loin.

"Il est d'ailleurs évident que, puisque au sens de Garabedian, toute technique itérative est équivalente à une équation instationnaire, la différence de rapidité entre les méthodes itératives et les méthodes instationnaires est essentiellement due à la différence de forme des opérateurs stationnaires plutôt qu'à la différence de conception entre les méthodes.

Il semble donc que les méthodes de relaxation soient beaucoup plus rapides que les méthodes instationnaires parce qu'elles résolvent une équation spatiale du second ordre. Mais elles ne peuvent être généralisées à l'étude d'un système du premier ordre comme le système complet d'Euler.

Dans ce cas, la vitesse de convergence serait nécessairement d'ordre Δx^2 comme pour les méthodes instationnaires.

Inversément, si on veut résoudre une équation spatiale du second ordre par une méthode instationnaire, on peut choisir un opérateur instationnaire du même type que celui de l'équation (24) et obtenir une vitesse de convergence d'ordre Δx ".

.De nombreux travaux sont actuellement consacrés à l'étude de calculs d'écoulements transsoniques. Ces travaux ont pour but, soit l'amélioration de la vitesse de convergence des méthodes instationnaires, soit l'amélioration des méthodes de relaxation, mais en considérant a priori que ces méthodes ne pourront jamais être utilisées que pour le calcul d'écoulements potentiels, c'est-à-dire d'équations du second ordre.

2.9 METHODES INSTATIONNAIRES ARTIFICIELLES

Les méthodes instationnaires artificielles appelées aussi méthodes instationnaires avec amortissement interne ont été développées par Essers (réf.17).

Les méthodes instationnaires naturelles sont beaucoup plus lentes que les méthodes de relaxation parce qu'elles résolvent des équations qui ne contiennent pas de terme d'amortissement interne.

Si on ne s'intéresse qu'à la solution stationnaire, on peut modifier la partie instationnaire de l'opérateur et la choisir pour accélérer la convergence vers un régime permanent.

Ensuite, pour introduire un amortissement interne dans un système

homogène du premier ordre: $A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0$ (25)

($\vec{u}$: vecteur des inconnus en point donné)

il faut ajouter un terme non dérivé, du type $K\vec{u}$ qui modifie la partie stationnaire de l'opérateur. La solution stationnaire d'un tel système ne satisfait plus l'équation(25).

L'idée d'Essers est de contourner cette difficulté en obtenant la solution de (25) comme solution asymptotique d'un système artificiel faisant intervenir en plus du vecteur u des N inconnues, un vecteur $\vec{q}$ de M inconnues artificielles. Le système artificiel est formé de N + M équations instationnaires du 1er ordre comptant les inconnues du 1er ordre comptant les inconnues $\vec{u}$ et $\vec{q}$:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0 \quad \text{(N équations)}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K_1\vec{u} + K_2\vec{q} = C\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + D\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + E\frac{\partial \vec{q}}{\partial x} + F\frac{\partial \vec{q}}{\partial y} \quad \text{(M equations)}$$

Les N premières équations tendent vers la partie stationnaire des équations "naturelles". Les M dernières équations sont construites pour obtenir avec $K_1\vec{u}$ et $K_2\vec{q}$, un amortissement interne optimum, mais aussi pour garantir que l'ensemble du système des N + M équations reste hyperbolique par rapport au temps: ceci n'est qu'un aspect des problèmes sérieux et complexes qu'occasionne la perte du caractère "physique" des équations. Il faut vérifier que l'opérateur ne permette pas la formation de chocs d'expansion (ce qui n'est plus garanti comme avec l'opérateur d'Euler) et choisir des conditions limites adaptées aux variables artificielles.

Cette complexité, et le caractère abstrait, non physique de l'évolution des équations est le prix à payer pour obtenir des taux de convergence comparable à ceux des méthodes de relaxation.

2.10 RELAXATION DE L'EQUATION POTENTIELLE TOTALE EXACTE

2.10.1 Cas bidimensionnel (ou axisymétrique)

Les méthodes de relaxation commencèrent à être utilisées comme outils de design avec l'avènement des méthodes numériques cycliques.

En 1970, la relaxation a connu une impulsion tout à fait remarquable avec l'introduction du "type-dependent differencing" de Murman et Cole, et de Murman et Krupp (réf.15). L'idée de base, appliquée à une théorie des petites perturbations (SPE) et des profils symétriques fut rapidement étendue par les auteurs aux profils portants (réf.16).

Pour terminer la revue des premiers travaux, citons l'étude parallèlement au cas bidimensionnel, des corps axisymétriques par Bailey (réf.22) et Krupp et Murman (réf.16) pour les corps pointus et la théorie des petites perturbations. En 1973 Murman(réf.20) étudie le problème d'arc.

Le succès de cette approche est tout à fait remarquable. La solution converge dans des temps de l'ordre de quelques minutes sur un CDC-6600. Et la comparaison avec les solutions sans choc, supposées exactes, et les résultats expérimentaux avec chocs, est très bonne, par ajustement de l'effet non linéaire et dissipatif à travers certains paramètres (cfr. chapître sur les paramètres de similitude).

2.10.2 Transformation du plan: méthodes de Garabedian-Korn

D'autres chercheurs ont exploité le schéma de Murman et Cole, dans des cas plus généraux, ayant comme équation constitutive l'équation du potentiel total exact. Le principal problème fut d'abord le transfert de

la condition frontière non linéarisée dans le réseau des différences finies. Deux méthodes émergèrent d'abord, celle de Garabedian et Korn, et celle de Steper et Lomax.

Garabedian et Korn (réf.23) commencent par transformer de façon conforme l'extérieur d'un profil donné en l'intérieur d'un cercle, suivant la méthode de Sells. Le reste du problème est traité comme Murman et Krupp à part l'usage d'un schéma explicite du 2ième ordre avec terme dissipatif pour la région hyperbolique. Malgré le caractère non conservatif, les résultats sont très bons, comparés aux solutions exactes de la méthode de l'hodographe (profils sans chocs) et à une série d'essais en soufflerie (réf.24). Kacprzynski dans cette "école", comparera ensuite les résultats avec la méthode des petites perturbations de Murman et Cole. Le temps de calcul reste de 5 à 10 minutes sur un CDC 6600.

La méthode de Garabedian et Korn n'est pas directement transposable à 3 dimensions (transformation conforme), contrairement à la méthode proposée par Steger et Lomax (réf.25). Ils utilisent un réseau ayant la forme d'un fer à cheval, dont la partie "intérieure" épouse la partie avant du profil et dont les branches, à l'arrière se réduisent à des droites parallèles. Les résultats et les temps de calcul sont comparables à la méthode de Garabedian et Korn.

2.10.3 Les schémas tournés de Jameson

Albone (réf.26) et surtout Jameson (réf.27 , 28 , 29) ont apporté une contribution importante en introduisant des schémas tournés (rotated schemes) pour maintenir la stabilité des schémas dans les cas où les lignes de coordonnées s'écartent fortement des équipotentielles et lignes

de courant. Dans la formulation petite perturbation du potentiel, l'écoulement est supposé toujours aligné suivant l'axe x: une perturbation ne peut jamais remonter le long de cet axe. Or dans un écoulement réel, la direction de l'écoulement n'est pas nécessairement alignée suivant l'axe x. Dans la région supersonique, deux cas sont à considérer. Si la composante de la vitesse dans la direction x est supersonique, le domaine de dépendance physique est entièrement compris à gauche de l'axe vertical et on peut utiliser un schéma décentré arrière pour exprimer les dérivées suivant l'axe x, fig. 2.6. Si la composante de la vitesse suivant l'axe x est subsonique, $u^2 < a^2 < u^2 + a^2$ (fig. 2.7) le domaine de dépendance physique n'est pas entièrement compris à gauche de l'axe vertical. En un tel point, l'utilisation d'un schéma centré permettrait une influence vers l'amont d'une perturbation et un schéma arrière aurait un domaine de dépendance numérique n'incluant pas le domaine de dépendance physique: les deux schémas sont localement instables. Cette situation apparaît souvent lorsque le nombre de Mach est voisin de l'unité car dans ce cas l'angle formé par les lignes de Mach est voisin de π et le schéma arrière est instable sauf si le système de coordonnées est parfaitement aligné sur les lignes de courant.

L'équation aux petites perturbations (SPE) utilisée par Murman et Cole présente une particularité, elle ne contient pas de terme en " $\phi_{\tilde{y}}$ " si bien que les caractéristiques de l'équation sont partout symétriques par rapport à la direction x de l'écoulement non perturbé, et le domaine de dépendance de l'équation aux différences finies contient toujours celui de l'équation différentielle. Ceci n'est plus vrai pour une équation transsonique de petites perturbations, en 3 dimensions, appliquée par

Ballhaus et Bailey (réf. 30) aux ailes obliques par rapport au fuselage ("swept wings"). Pour des raisons d'économie de points le maillage est non orthogonal, les lignes x=cste forment un angle égal à celui de l'obliquité de l'aile. Dans ce cas de sérieuses instabilités résultent, surtout si l'angle de l'obliquité augmente.

Jameson étudie de son côté les applications plus générales de la relaxation à l'équation potentielle exacte, en utilisant des transformations conformes comme Garabedian et Korn ou plus généralement des coordonnées curvilinéaires pour épouser au mieux le profil donné et augmenter la précision des conditions frontières. Il remarque que si les instabilités dues au non-alignement déjà évoqué n'ont pas empêché des méthodes "brutes" de donner des résultats satisfaisants (réf. (23), (24)) dans les cas où les zones supersoniques sont de faible taille, les résultats se détériorent avec l'extension de celles-ci, et il propose (réf. 28) un schéma tourné (rotated scheme) qui simule une rotation locale des coordonnées générales curvilignes utilisées, autour du secteur local de la vitesse. Une interpolation des points supersoniques réaligne le schéma de différenciation avec les équipotentielles et lignes de courant, et rétablit la stabilité liée au domaine de dépendance du schéma.

Il est évident que le schéma arrière pourrait être utilisé dans la région supersonique sans problème de stabilité à condition d'utiliser les équipotentielles et les lignes de courant de l'écoulement réel comme coordonnées.

Or l'équation du potentiel peut toujours être écrite en fonction des coordonnées s et n, dans la direction de l'écoulement et dans la

direction normale sous la forme:

$$\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}=0$$

Localement, les dérivées $\partial^2\Phi/\partial s^2$ et $\partial^2\Phi/\partial n^2$ peuvent être exprimées en fonction des coordonnées x et y par une rotation d'axe:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=\frac{1}{q^2}\left(u^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}=\frac{1}{q^2}\left(v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+u^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)$$

où u/q et v/q sont les cosinus directeurs de la rotation.

Si on utilise la technique de Murman et Cole en écrivant par différences arrières (par rapport à la direction de l'écoulement) tous les opérateurs en x et y qui interviennent dans le calcul de $\partial^2\phi/\partial s^2$ et par différences centrales tous ceux qui interviennent dans le calcul de $\partial^2\phi/\partial n^2$ on obtient toujours un domaine de dépendance numérique qui inclut le domaine de dépendance physique des équations (fig. 2.7).

Une analyse complète de la stabilité et de la convergence des schémas tournés est présentée dans la référence (49). L'approche est similaire à la théorie de Garabédian utilisée pour étudier la stabilité de la méthode de relaxation appliquée à l'équation de Laplace et où les itérations sont considérées comme des valeurs à des instants successifs d'une évolution artificielle.

Les schémas tournés présentent cependant l'inconvénient de ne pas être conservatifs, il en résulte une capture relativement peu précise des chocs ce qui très récemment a conduit Jameson à modifier son schéma pour

le rendre conservatif. Les résultats qu'il a obtenus montrent une précision nettement meilleure pour le calcul des chocs. Malheureusement, la technique est assez complexe et certains auteurs semblent avoir de sérieuses difficultés dans sa mise en oeuvre.

2.10.4 Méthodes d'alignement des coordonnées suivant le courant

Pour résoudre l'équation complète du potentiel, beaucoup d'auteurs ont utilisé des systèmes de coordonnées curvilignes choisies pour être le mieux possible alignées sur les lignes de courant de l'écoulement.

La méthode de Steger et Lomax décrite plus haut, définit par exemple son maillage par les perpendiculaires au profil choisies comme lignes implicites et des courbes entourant le profil en respectant sa forme principalement dans la région du bord d'attaque.

Dodge (réf.31) a mis au point une technique de relaxation pour le calcul d'écoulements bidimensionnels puis tridimensionnels en régime potentiel transsonique dans des grilles d'aubes de turbomachines. Le système de coordonnées utilisé est formé des lignes de courant et des équipotentielles relatives à l'écoulement dans la grille en régime incompressible et doit donc être préalablement calculé par une méthode numérique de singularité.

Les équations algébriques obtenues après discrétisation sont résolues par une méthode de relaxation par points. Les méthodes de relaxation par lignes n'ont été utilisées ni par Dodge ni par aucun auteur pour le calcul de grilles d'aubes parce que les conditions de périodicité spatiale détruisent le caractère tridiagonal des matrices à inverser.

La méthode de Dodge présente plusieurs inconvénients importants:

- En utilisant un schéma totalement décentré dans la région supersonique, on ne peut éviter la violation du domaine de dépendance physique si les lignes de courant de l'écoulement transsonique sont suffisamment proches de celles de l'écoulement incompressible: ce procédé n'offre pas de garantie totale de stabilité.

- La vitesse de convergence du schéma itératif par pointe est sensiblement réduite par rapport à cette qu'on pourrait obtenir par une méthode de relaxation par lignes.

2.11 CORRECTION DE LA COUCHE LIMITE. MODELE TURBULENT SIMPLIFIE

Les effets visqueux sont souvent au moins aussi importants que les effets de "non petites perturbations". Donc toute procédure moins approximative que la théorie des petites perturbations devrait tenir compte de la viscosité.

Pour donner des résultats comparables avec l'expérience, il est important de corriger les méthodes de simulation d'écoulement inviscible. On corrige la condition de saut (Kutta) dans le sillage, et, soit l'épaisseur de déplacement de la couche limite (méthode A), soit les conditions frontières sur le profil (méthode B). Lock (réf. 33) donne un aperçu de la question.

A cause de la linéarisation des conditions aux frontières dans la théorie des petites perturbations, la méthode ci-dessus n'est pas applicable aux équations SPE; on peut juste apporter des termes correctifs plus ou moins empiriques. La méthode B a l'avantage de ne pas redemander un

calcul de la transformation du plan et du profil, comme c'est le cas pour la méthode A.

L'épaisseur de la couche limite est fonction de la distribution de pression, et varie donc au cours du processus; la correction est donc intégrée en processus itératif.

Les résultats obtenus par ces corrections "externes" sont acceptables aussi longtemps que les zones de séparation sont petites. L'avantage de ces techniques est leur économie d'application. Un traitement plus complet des écoulements visqueux transsoniques permanent a été examiné par Refs. 11 et 34 qui cherche la solution asymptotique d'équations de Navier-Stokes simplifiées en utilisant des modèles de turbulence approximatifs pour les tenseurs de Reynolds. Les résultats sont encourageants mais la difficulté fondamentale réside dans le choix des modèles de turbulence adéquats pour des phénomènes différents comme la couche limite, les zones de décollement, la traînée.

Un traitement correct des effets visqueux réclamerait en fait une analyse détaillée de l'effet du sillage près du bord de fuite, et de l'interaction choc-couche limite. Malheureusement la grande variété des échelles spatiales et temporelles (ex: couche limite, épaisseur = $O[R_e^{-1/2}]$, choc, épaisseur = $O[R_e^{-1}]$ rend la tâche très malaisée.

CHAPITRE III

THEORIE DES PETITES PERTURBATIONS ET MODULATION DES PARAMETRES DE SIMILITUDE

3.1 INTRODUCTION

La théorie des petites perturbations est basée sur une analyse des ordres de grandeur des différents termes intervenant dans les équations d'écoulement et dans des expansions des variables pertinentes. Elle a été largement développée pour tous les domaines d'écoulement ex: linéarisations de Prandtl en subsonique supersonique). La formulation très simple de cette approche correspond néanmoins, en première approximation, à toute une série de cas réels, et constitue une étape préliminaire et logique dans l'étude systématique d'écoulements complexes, dont elle contient généralement beaucoup des caractéristiques essentielles, mais sous une formulation mathématique simplifiée (profils minces, problèmes plan ou axisymétriques, pas de friction)

Dans le même cadre d'hypothèses, l'analyse dimensionnelle confirme ou bien généralise les résultats des différentes expansions possibles dans la théorie des petites perturbations, en produisant des règles rigoureuses et des paramètres de similitude qui regroupent les variables adimensionnelles représentatives de phénomènes similaires c'est-à-dire différents dans les faits mais ayant une formulation mathématique et une solution équivalente.

Par exemple les fameuses règles de Prandtl - Glauert permettent de généraliser à plusieurs sortes d'écoulements les solutions compliquées) d'une équation unique.

Les théories des petites perturbations varient quant aux hypothèses faites, quant aux choix des expansions et des termes négligés, quant à leur rigueur et leur généralité (la règle commune en transsonique est toutefois de garder dans les expansions un terme non linéaire, par opposition aux linéarisations de Prandtl). Certaines sont formulées en termes de vitesses et d'autres en termes de potentiels. Certaines sont intuitives et d'autres rigoureuses. Ces dernières nous apprennent qu'il s'agit en fait d'un double processus de passage à la limite, pour la perturbation géométrique d'une part et pour le nombre de Mach à l'infini amont M_∞ d'autre part. L'analyse dimensionnelle cnnfirme cette exigence en produisant un paramètre de similitude $K(\delta, M_\infty)$

La propagation privilégiée des perturbations dans le sens transversal suggère une transformation de la coordonnée correspondante.

La dernière méthode exposée dans ce chapître est aussi globale, rigoureuse et générale que possible. Elle apporte notamment une explication et une justification claire du choix du terme non linéaire conservé, et par la même occasion de l'ordre de grandeur des termes de l'équation aux petites perturbations généralement utilisé; enfin, des considérations sur le degré d'approximation des quantités conservées. Elle met en exergue la non-unicité des processus d'expansion et de passage à la limite, qui se traduit concrètement par une certaine liberté dans le choix de deux paramètres M et n.

L'analyse dimensionnelle du phénomène, qui n'est pas unique non plus,

est comparée aux résultats précédents par l'intermédiaire d'un facteur constant commun aux résultats, le paramètre de similitude.

3.2 POSITION DU PROBLEME: PROFIL MINCE BIDIMENSIONNEL

L'étude de l'écoulement "plan" est logiquement une première étape à franchir avant de passer au tridimensionnel. Le domaine transsonique impose des conditions encore plus sévères aux hypothèses de corps minces car des perturbations généralement considéres comme petites, peuvent devenir grandes relativement à $(1-M_\infty^2)$ si $M_\infty \to 1$. Néanmoins les ailes réelles d'envergure finie perturbent moins l'écoulement que ne le fait un profil infini, où la dissipation suivant la 3ième dimension est exclue.

On considère un profil très simple symétrique, d'épaisseur maximale h, de longueur l, à angle d'attaque nul. (fig. 3.1)

L'écoulement amont est uniforme et parallèle à l'axe des x: U_∞.
Le vecteur de vitesse local $\vec{q}$ se décompose en $\vec{q}=(u,v)$. On décompose u en la somme de U_∞ et d'une perturbation u' : $u = u_\infty + u'$, v est la composante verticale de perturbation. On introduit les variables adimensionnelles suivantes: composantes de vitesses de perturbation u'/u_∞ ; v'/u_∞; unité de longueur égale à l, longueur du profil; épaisseur relative $\delta = h/l$.

Les hypothèses de profils minces et de petites perturbations entraînent les conditions,

$$\frac{u'}{U_\infty}, \frac{v}{U_\infty} << 1 \quad , \quad \delta << 1, \text{ on suppose } \frac{u'}{U_\infty} \text{ et } \frac{v}{U_\infty} = O(\delta)$$

La forme du profil répond à l'équation analytique $y = \delta F(x)$. La condition frontière de tangence sur le profil est

$$\frac{q_y(x, \delta F(x))}{q_x(x, \delta F(x))} = \delta F'(x)$$

Le modèle mathématique général de l'écoulement à résoudre est celui qui conduit à l'établissement de l'équation potentielle totale exacte:

$$(c^2 - \Phi_x^2)\,\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_Y\Phi_{xY} + (c^2 - \Phi_Y^2)\,\Phi_{YY} = 0 \qquad (8)$$

L'équation de l'énergie est celle de Bernouilli:

$$\frac{q^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1}$$

ou

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{\Phi_x^2 + \Phi_Y^2}{2} = \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} + \frac{U_\infty^2}{2}$$

Les conditions frontières pour le potentiel de perturbations sont:

infini amont $\quad \Phi \to U_\infty x$

tangence au profil $\quad \Phi_Y(x, \delta F(x)) = \delta F'(x)\,\Phi_x(x, \delta F(x))$

3.3 CONDITIONS AUX FRONTIERES CORRECTES ET SIMPLIFIEES

Dans le cadre des petites perturbations, on utilise les approximations suivantes:

$$\vec{q} - U_\infty = \left[(U_\infty + u - U_\infty)^2 + v^2\right]^{1/2} - U_\infty = u - U_\infty + \tfrac{1}{2}v^2/U_\infty + \cdots \cong u - U_\infty$$

$$\frac{v}{u} = \frac{v}{U_\infty + (u - U_\infty)} = \frac{v}{U_\infty}\left[1 - \frac{u - U_\infty}{U_\infty} + \left(\frac{u - U_\infty}{U_\infty}\right)^2 + \cdots\right] \cong \frac{v}{U_\infty}$$

La condition frontière de tangence devient donc:

$$U_\infty\,\delta F'(x) = v(x, \delta F(x)) = v(x, 0) + \left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)_{Y=0} \cdot \delta F(x) + \cdots$$

La théorie des petites perturbations, on le verra, fait apparaître une équation de type

$$(1 - M^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \qquad \text{avec} \quad \frac{u'}{U_\infty} = O(\delta)$$

$\partial u/\partial x$ est de l'ordre de $\max(u')/(\frac{1}{2})$ où $(\frac{1}{2})$ est la demi-corde normalisée.

Donc $$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq O(\delta)\, u_\infty$$

Donc $\partial v/\partial y \simeq O(\delta) u_\infty$ au moins, dans le domaine transsonique et le deuxième terme de l'expansion de Taylor ci-dessus, est en δ^2 donc négligeable en première approximation, ce qui s'avèrera consistant avec l'ordre des équations aux petites perturbations. L'approximation pour un profil mince consiste donc à imposer la condition frontière sur la corde moyenne définie par y = 0. La condition devient:

$$\frac{v(x,0)}{u_\infty} = \delta F'(x)$$

La généralisation aux profils non symétriques est très aisée. Le profil est réduit à une fente dans le domaine de calcul. L'approximation revient à introduire de la masse dans le champ d'écoulement le long de la partie avant de la "fente" figurant la corde moyenne du profil, et à en soustraire dans la partie arrière (distribution de sources et de puits). (cfr. fig. 3.2)

3.4 APPROXIMATION DE Cp ET DE L'EQUATION DE BERNOUILLI

Dans un écoulement isentropique, on a la relation de Bernouilli pour fluides incompressibles

$$\frac{q^2}{2} = -\int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho}\, dp = h = \frac{p}{\rho}\,\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{c^2}{\gamma-1}$$

En utilisant certaines expansions, on peut écrire aussi à partir de l'équation ci-dessus:

$$\frac{q-u_\infty}{u_\infty} = -\frac{1}{2} C_p - \frac{1}{8}(1-M_\infty^2) C_p^2 + \cdots$$

avec

$$C_p = \frac{2(p-p_\infty)}{\rho u_\infty^2}$$

Une autre formulation,

$$C_p = -2\,\frac{q-u_\infty}{u_\infty} - (1-M_\infty^2)\left(\frac{q-u_\infty}{u_\infty}\right)^2 + \cdots$$

est exacte jusqu'au deuxième ordre, strictement parlant.

Et l'approximation $C_p = -2\,\frac{q-U_\infty}{U_\infty}$

est apparemment du 1er ordre, elle correspond à la formule de Cp normalement dérivée de l'équation de Bernouilli pour fluide incompressible:

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}U_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

Cette approximation du 1er ordre est cependant très bonne dans le domaine transsonique, de petites perturbations, car le terme négligé est très petit comparé au terme restant.

Dans le même ordre d'approximation, on peut faire

$$C_p \cong -2\,\frac{u'}{U_\infty} = -2\,\psi_x$$

où ψ est un potentiel de perturbation défini par:

$$\psi_x = \frac{u'}{U_\infty} \quad , \quad \psi_y = \frac{v}{U_\infty}$$

3.5 PETITES PERTURBATIONS EN TERMES DE VITESSES DE PERTURBATION

Il existe plusieurs méthodes, suivant le genre d'expansions choisies, et les approximations faites.

1. Première méthode: expansion autour de C_∞ (méthode classique) (réf.41), pp. 202

De l'équation de Bernouilli:

$$\frac{(U_\infty + u') + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1}$$

on déduit une formulation pour c^2.

La substitution dans l'équation (6) donne l'équation exacte:

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = M_\infty^2\left[(\gamma+1)\frac{u'}{U_\infty} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{u'^2}{U_\infty^2} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{U_\infty^2}\right]\frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$+ M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{u'}{U_\infty} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{v^2}{U_\infty^2} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u'^2}{U_\infty^2}\right]\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+ M_\infty^2\left[\frac{v}{U_\infty}\left(1 + \frac{u'}{U_\infty}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

Le but est de simplifier au maximum l'équation constitutive. Le problème crucial reste donc l'élimination de termes du membre de droite, dans le cas où ils peuvent être considérés comme négligeables, pour un écoulement donné, et une précision donnée.

Si on élimine les termes en u'^2 , v^2 , et $u'v$, il reste:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = M_\infty^2(\gamma+1)\frac{u'}{u_\infty}\cdot\frac{\partial u'}{\partial x} + M_\infty^2(\gamma-1)\frac{u'}{u_\infty}\frac{\partial v}{\partial y} + M_\infty^2\frac{v}{u_\infty}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (26)$$

Si on néglige tous les termes à droite, on obtient la linéarisation de Prandtl, dont l'inefficience dans le domaine transsonique est inutile à souligner. Il suffit de prendre le cas extrême, sonique, $M_\infty = 1$ pour arriver au paradoxe d'une propagation latérale illimitée. Le domaine transsonique étant essentiellement non linéaire, il est indispensable de garder le premier terme du membre de droite, en $\partial u'/\partial x$, comme le terme critique du membre de gauche. Par contre la condition $M_\infty \to 1$ n'affecte pas les 2 autres termes du membre de droite, qui peuvent être négligée.

L'équation aux petites perturbations est donc:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = M_\infty^2(\gamma+1)\frac{u'}{u_\infty}\frac{\partial u'}{\partial x} \quad (27)$$

Cette équation est valable en première approximation, c'est-à-dire qu'elle est précise au 1er ordre. (en effet u'/u_∞ , $v/u_\infty = O(\delta)$, sont les standards de l'ordre de grandeur des termes et $\partial u'/\partial x, \partial v/\partial y = O(\delta)$, voir conditions aux frontières). Le terme de droite, non linéaire, est une correction du 1er ordre (voir commentaires plus loin). L'ordre de l'équation est consistant avec celui des approximations faites pour les conditions aux frontières.

2. Linéarisation de Prandtl, équation transsonique et variation du flux de masse ρq.

L'équation de continuité (conservation du flux de masse) prend la forme suivante en écoulements compressibles:

$$\frac{\rho q}{\rho_\infty u_\infty} - 1 = (1 - M_\infty^2)\frac{q - u_\infty}{u_\infty} - \frac{1}{2} M_\infty^2 \left[3 - (2-\gamma) M_\infty^2 \left(\frac{q - u_\infty}{u_\infty}\right)^2\right] + \dots \qquad (28)$$

La variation de ρq se prête bien à la linéarisation dans les domaines subsoniques et hypersoniques. Le domaine transsonique se caractérise par un caractère non linéaire (de type parabolique) prononcé. Voir fig. 3.3.

La linéarisation de Prandtl:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (29)$$

suppose que le 2ième terme du membre de droite de l'équation de continuité est négligeable par rapport au premier:

$$\frac{1}{2} M_\infty^2 \left| \frac{3 - (2-\gamma) M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \left(\frac{q}{u_\infty} - 1\right) \right| << 1$$

Elle est obtenue en négligeant tous les termes du deuxième ordre (les termes en u',v du membre de droite) de l'équation (26) du paragraphe précédent. Dans le domaine transsonique la condition (29) n'est plus remplie, mais on espère conserver les caractéristiques essentielles de l'équation (28) complète, en conservant dans (26) un terme du deuxième ordre. Le bien fondé d'une telle procédure a été vérifié par Van der Vooren (Ref.50).

3. deuxième méthode: expansion autour de M^* et de ρq (réf.9)

Sur base des considérations du paragraphe précédent, on développe une formulation parabolique simplifiée de ρq, et conséquemment une relation entre $(1-M^2)$ et $(1-M_\infty^2)$:

$$(1 - M^2) \simeq (1 - M_\infty^2)\left[1 - \frac{q - u_\infty}{c^* - u_\infty}\right]$$

L'équation (1) est réduite à

$$(1 - M^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

avec les hypothèses $v \ll c$, $u \cong q$ et la formule approximative
$(1-n_\infty^2)/(1/n_\infty^2-1) = (\gamma+1)+ ----$

Il obtient l'équation aux petites perturbations

$$\left[(1-M_\infty^2)-(\gamma+1)\frac{u'}{u_\infty}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u'}{u_\infty}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{u_\infty}\right)=0 \qquad (30)$$

La comparaison de (27) et (30) montre que l'approche par petites perturbations n'est pas unique, et que les formes obtenues diffèrent par exemple par des facteurs tendant vers 1 avec M_∞ . La forme (30) est moint générale que (27); elle est applicable autour de $M_\infty = 1$, alors que la forme (27) est bonne dans les domaines habituels de linéarisation.

4. troisième méthode: distorsion des coordonnées, expansion et conservation du flux de masse ρq. (réf.42)

Les cas subsonique et supersonique linéarisables s'apparentent fortement à l'acoustique. Par contre une procédure spéciale est nécessaire pour dériver des approximations (ou établir des expansions) aux petites perturbations en transsonique.

Si on linéarise, on suppose la vitesse du son constante. Lorsque $M_\infty \to 1$ ($M_\infty < 1$) , les petites perturbations produites ne peuvent remonter le courant aussi vite que le descendre. Les perturbations sont entraînées vers l'aval, ou au moins ralenties dans leur propagation vers l'amont, et s'accumulent, pour produire une perturbation plus grande, qui est une violation de l'hypothèse des petites perturbations.

Le paradoxe s'explique par les variations très réelles de la vitesse locale du son, qui permettent aux perturbations de s'échapper ou de s'accumuler en choc. On pourrait aussi montrer que les lignes caractéristiques

de l'écoulement, pour $M_\infty \simeq 1$, ont une pente infinie. Cela signifie que les perturbations (telles que la présence d'un profil) se propagent dans une direction privilégiée verticale, et suggèrent un réalignement des coordonnées.

La théorie linéaire a une singularité à $M_\infty = 1$: elle est basée sur le processus de limite $\delta \to 0$, M_∞ fixé.

En transsonique, un double processus de limite doit être utilisé:

$$\delta \to 0 \quad , \quad M_\infty \to 1 \, , \quad K = K(\delta, M_\infty) \text{ fixé}$$

La forme de K qui indique la manière dont les deux limites sont atteintes, n'est pas unique, sa détermination se fait par l'analyse dimensionnelle et nous verrons plus loin que un desprocessus limites acceptables est $K = (1-M_\infty^2)/\delta^{2/3}$ conjointement avec une transformation de coordonnée $Y = \delta^{1/3} Y$, et un potentiel de vitesse $\Phi = u_\infty(x + \delta^{2/3}\varphi) + \cdots$

Si on considère ces résultats pour acquis il est possible de reformuler toutes les équations constitutives de l'écoulement sur base des expansions:

$$q_x/u_\infty = 1 + \delta^{2/3} u'' + \cdots \qquad (u'' = u'/u_\infty)$$

$$q_Y/u_\infty = \delta v' + \cdots \qquad (v' = v/u_\infty)$$

$$p/p_\infty = 1 + \delta^{2/3} p'$$

$$\rho/\rho_\infty = 1 + \delta^{2/3} \rho'$$

L'ordre de grandeur de la perturbation transversale, $O(\delta)$, est fixé par les conditions de tangence à la surface de l'aile et celui de la perturbation longitudinale. $O(\delta^{2/3})$ par la nécessité que le terme non linéaire soit de même ordre que les autres termes linéaires. (Cette explication est en fait la traduction des conditions utilisées en analyse dimensionnelle pour déterminer les paramètres 1/3, 2/3).

Sur base des expansions ci-dessus, on peut dériver

$$\rho q_x / \rho_\infty U_\infty = 1 + \delta^{4/3} (K u' - (\gamma+1) u'^2/2) + \cdots$$

$$\rho q_Y / \rho_\infty U_\infty = \delta v + \delta^{5/3} + \cdots$$

Si on note que $\partial/\partial \tilde{Y} = \delta^{1/3} \partial/\partial Y$, on peut obtenir, de façon directe la forme DIVERGENTE:

$$\left[K \frac{u'}{U_\infty} - \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{u'}{U_\infty} \right)^2 \right]_x + \left(\frac{v}{U_\infty} \right)_{\tilde{Y}} = 0$$

qui est une forme conservative de la conservation de masse

3.6 PETITES PERTURBATIONS EN TERMES DE POTENTIEL DE PERTURBATION

Si on introduit un potentiel de vitesse ϕ tel que

$$\phi_x = u = U_\infty + u'$$
$$\phi_Y = v$$

L'équation (27) peut s'écrire:

$$(1 - M_\infty^2) \phi_{xx} + \phi_{YY} = M_\infty^2 (\gamma+1) \left(\frac{\phi_x - U_\infty}{U_\infty} \right) \phi_{xx} \qquad (27b)$$

et la condition approchée de tangence au profil:

$$\phi_Y (x, 0) = \phi_x \, \delta F'(x)$$

il est beaucoup plus pratique d'introduire un potentiel de perturbation ψ tel que

$$\psi_x = \frac{u'}{U_\infty} \quad , \quad \psi_Y = \frac{v}{U_\infty} \quad \text{et} \quad \phi = U_\infty (x + \psi)$$

en vertu du principe de superposition des solutions potentielles

L'équation (27 b) prend la forme adimensionnelle

$$(1 - M_\infty^2) \psi_{xx} + \psi_{YY} = M_\infty^2 (\gamma+1) \psi_x \psi_{xx} \qquad (33)$$

et la condition de tangence au profil

$$\psi_Y (x, 0) = \delta F'(x) \qquad \text{en utilisant} \qquad u \cong U_\infty$$

Pour un nombre de Mach fixé, le potentiel $\psi(x, Y ; M_\infty, \delta)$ est supposé

tendre vers 0 suivant un processus limite qu'il convient de préciser. Ceci constitue une des techniques d'approche rigoureuse de la théorie des petites perturbations (par expansion et ajustement de paramètres). Cette technique est très fortement liée à l'analyse dimensionnelle (voir § suivant) où typiquement le processus limite correct est lié à certains paramètres et aux relations entre eux, qui découlent de l'équation constitutive et des conditions frontières.

L'approche globale qui va être présentée redonne les résultats de (33) à partir d'une procédure d'expansion appliquée à l'équation potentielle totale (8).

En outre, elle met en lumière le lien entre les paramètres de similitude et le choix d'un procédé d'expansion consistant jusqu'à la limite avec la physique du problème.

Dans un premier temps, on peut montrer que la linéarisation de Prandtl correspond à un processus limite

$$\delta \to 0 \qquad (x, y, M_\infty \text{ fixé})$$

et une expansion

$$\Phi(x,y;M_\infty,\delta) = u_\infty\left[x+\varepsilon_1(\delta).\varphi(x,y;M_\infty)\right]+\ldots$$

Par la condition frontière (32), on obtient

$$\varepsilon_1(\delta) = \delta$$

Ensuite l'équation de Bernouilli donne: $c^2 = c_\infty^2 - (\gamma-1)u_\infty \delta\varphi + \mathcal{O}(\delta^2)$

Après introduction dans (8) on obtient:

$$(1-M_\infty^2)\,\delta\varphi_{xx} - M_\infty^2(\gamma+1)\delta^2\varphi_x\varphi_{xx} - 2M_\infty^2\delta^2\varphi_x\varphi_{xy} + \delta\varphi_{yy} - (\gamma-1)\delta^2 M_\infty^2\varphi_x\varphi_{yy} = 0 \qquad (34)$$

comparable à (26).

Si on garde seulement les termes d'ordre δ, on obtient l'équation de Prandtl. Comme déjà souligné, cette approximation est désastreuse pour

pour le domaine transsonique. Une inspection attentive des solutions montre une propagation latérale, dans le sens de y, surestimée et cela d'autant plus que M_∞ est proche de 1.

Il est clair qu'alors le processus de limite: $\delta \to 0 (M_\infty \cong 1)$ doit être abandonné pour un processus faisant intervenir deux limites: $\delta \to 0$ et $M \to 1$. Une manière d'y arriver est d'étudier le cas critique $M_\infty = 1$, et d'étendre ensuite les résultats en considérant que M_∞ tend vers 1 lorsque $\delta \to 0$ suivant un processus limite $M_\infty = 1 + K\,\nu(\delta)$, $\nu(\delta) \to 0$ par exemple, où K est maintenu fixé, d'ordre O(1) à la limite.

Dans le cas critique sonique, le problème est donc de trouver une expansion consistante. Deux indices peuvent guider l'intuition. Il semble qu'il faille agir sur la coordonnée y en la transformant en $\tilde{y} = \beta(\delta)\cdot y$, avec $\beta(\delta) \to 0$ pour corriger la trop grande extension des perturbations latéralement. Nous savons d'autre part qu'une bonne correction est obtenue en conservant le terme non linéaire en $\varphi_x \varphi_{xx}$. Ces deux corrections sont tout à fait compatibles et concordantes.

Soit $\qquad \phi(x, y; \delta) = u_\infty[x + \varepsilon(\delta)\varphi(x, \tilde{y})] + \cdots\cdots$

La condition de tangence donne $(\partial/\partial y \to \beta\,\partial/\partial\tilde{y})$

$$\varepsilon\beta = \delta$$

L'équation (34) se réduit à($M_\infty = 1$)

$$\varepsilon\beta^2\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} = M_\infty^2(\gamma+1)\varepsilon^2\varphi_x\varphi_{xx} - 2M_\infty^2\beta^2\varepsilon^2\varphi_{\tilde{y}}\varphi_{x\tilde{y}} - (\gamma+1)M_\infty^2\beta^2\varepsilon^2\varphi_x\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}}$$

Si on choisit $\varepsilon\beta^2 = \varepsilon^2$ ou $\beta = \sqrt{\varepsilon}$ on réarrange les ordres de grandeur des termes de façon à conserver le terme en $\varphi_x\varphi_{xx}$ non négligeable

L'analyse dimensionnelle nous donne les valeurs de ε et β qui rendent compatibles les conditions de tangence et de correction des ordres de grandeur

$$\varepsilon = \delta^{2/3} \quad , \quad \beta = \delta^{1/3}$$

Il reste à déterminer la valeur de $\nu(\delta)$ pour les cas transsoniques plus généraux.

La nouvelle forme de l'expansion:

$$\phi(x, y; M_\infty, \delta) = U_\infty[x + \delta^{2/3}\varphi(x, \tilde{y}; K)] + \cdots$$

$$\tilde{y} = \delta^{1/3} y$$

donne, à la place de (33)

$$-\nu(\delta)\delta^{2/3} K \varphi_{xx} + \delta^{4/3}\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} = \delta^{4/3}(\gamma+1) M_\infty^2 \varphi_x \varphi_{xx} \qquad (33 \text{ bis})$$

Le choix $\nu(\delta) = \delta^{2/3}$ est évident et l'on obtient finalement pour K

$$K_1 = \frac{1 - M_\infty^2}{\delta^{2/3}} \qquad (35)$$

qui est appelé paramètre de similarité en transsonique.

L'équation ci-dessus (33 b) d'ordre $\delta^{4/3} = (\delta^{2/3})^2$, prend la forme canonique classique:

$$[K + (\gamma+1) M_\infty^2 \varphi_x]\varphi_{xx} - \varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \qquad (36)$$

comparable à (33).

Le développement précédent n'est pas unique en ce sens que l'on a supposé a priori une certaine forme d'expansion $\psi = \varepsilon(\delta)\varphi$ et une certaine forme de distorsion de coordonnée $\tilde{y} = \beta(\delta)\, y$.

Nous allons maintenant introduire un processus d'expansion pour les limites $\delta \to 0$. $M_\infty \to 1$, encore plus général en autorisant

$$\psi = \varepsilon(\delta) M_\infty^{-n} \phi = \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi$$

et

$$\tilde{y} = \beta(\delta) M_\infty^{m} y = \delta^{1/3} M_\infty^{m} y$$

Nous reprenons naturellement les valeurs de $\varepsilon(\delta)$ et $\beta(\delta)$ déduites de l'analyse précédente.

on a donc

$$\psi_x = \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi_x$$

$$\psi_{xx} = \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi_{xx} \tag{37}$$

$$\psi_Y = \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi_{\tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial Y} = \delta^{2/3} M_\infty^{m-n} \phi_{\tilde{Y}}$$

$$\psi_{YY} = \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \delta^{1/3} M_\infty^{m} \delta^{1/3} M_\infty^{m} \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = \delta^{4/3} M_\infty^{2m-n} \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}}$$

Après substitution dans l'équation (33) on obtient

$$\left[(1-M_\infty^2) - (\gamma+1) M_\infty^2 \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi_x\right] \delta^{2/3} M_\infty^{-n} \phi_{xx} + \delta^{2/3} \delta^{2/3} M_\infty^{-n} M_\infty^{2m} \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = 0 \tag{38}$$

ou après simplification par $\delta^{4/3}$.

$$\left[\frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3} M_\infty^{2m}} - (\gamma+1) M_\infty^{2-n-2m} \phi_x\right] \phi_{xx} - \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = 0 \tag{39}$$

La condition frontière $\psi_Y(x,0) = \delta F'$ donne

$$\phi_{\tilde{Y}}(x,0) = M^{n-m} F'(x)$$

Un choix convenable pour m et n permet d'éliminer la présence explicite de M_∞ dans (39). La condition $2-n-2m=0$ donne

$$\left[K - (\gamma+1)\phi_x\right] \phi_{xx} + \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = 0 \tag{40}$$

ou

$$\left[K\phi_x - \frac{\gamma+1}{2}\phi_x^2\right]_x + \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = 0 \tag{41}$$

dont le caractère conservatif est confirmé par (31).

$$K = \frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3} M^{2m}} \tag{42}$$

est le paramètre de similitude, dont l'indice m indique le caractère non unique (voir plus loin).

Les valeurs couramment proposées (Spreiter) pour m et n sont 2/3 et 2/3.?

Il est possible d'obtenir (40) par substitution directe de (37) dans

$$(1-M^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

après suppression de tous les termes d'ordre supérieur à $\delta^{4/3} = (\delta^{2/3})^2$ dans le développement subséquent:

$$\Big[c_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}\Big(u_\infty^2 - u_\infty^2 - 2u_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty^2}\Big)^{2/3} \phi_x - u_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{4/3} \phi_x^2$$

$$- u_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{4/3} (M_\infty^2 \delta)^{2/3} \phi_{\tilde{Y}}^2 \Big) - u_\infty^2 - 2u_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{2/3} \phi_x$$

$$- u_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{4/3} \phi_x^2 \Big] \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{2/3} \phi_{xx}$$

$$+ c_\infty^2 \Big(\frac{\delta}{n_\infty}\Big)^{2/3} (n_\infty^2 \delta)^{2/3} \phi_{\tilde{Y}\tilde{Y}} = 0 \qquad (43)$$

3.7 REGLES DE SIMILITUDE. ANALYSE DIMENSIONNELLE

L'analyse dimensionnelle met en évidence pour un problème donné, les variables adimensionnelles les plus pertinentes pour décrire le problème. Les règles de similitude sont basées sur une analyse dimensionnelle plus poussée: on utilise le théorème de Buckingham pour réduire le nombre de variables adimensionnelles en les combinant à l'aide de relations telles que l'équation constitutive et les conditions frontières. Deux phénomènes physiques différents peuvent parfois être décrits par des équations et des conditions frontières "formellement" identiques, à condition que les variables adimensionnelles se combinent de manière à donner la (les) combinaison (s) caractéristique(s) du problème en vertu du théorème de Buckingham. Les solutions sont alors proportionnelles (identiques à une constante près). Dans notre cas, une combinaison caractérise à elle seule les écoulements compressibles, on l'appelle paramètre de similitude K.

Il convient tout de suite de dire qu'il y a de nombreuses façons de mettre en évidence des paramètres de similitude, suivant le choix de

de l'équation constitutive et donc des approximations faites et du changement de coordonnées. Conséquemment, plusieurs formes de paramètres de similitude peuvent être dérivées. Dans ce qui suit le facteur $(\gamma+1)$ intervenant dans K a été partout négligé, car il est considéré à toutes fins utiles constant pour un fluide donné.

Voici d'abord l'analyse dimensionnelle de l'équation (33).

Soient deux expériences caractérisées par les indices 1 et 2, auxquelles correspondent les potentiels ψ_1, et ψ_2, et les coordonnées (x,y) et $\xi = x$, $\eta = y\sqrt{1-M_1^2}/\sqrt{1-M_2^2}$

On impose au départ une proportionnalité des solutions:

$$\psi_1(x,y) = A\psi_2(\xi,\eta) \tag{44}$$

L'équation constitutive du 1er problème est:

$$\psi_{1xx} + \psi_{1yy}/(1-M_{1\infty}^2) = [(\gamma+1)M_1^2/(1-M_{1\infty}^2)]\,\psi_{1x}\psi_{1xx} \tag{45}$$

L'équation constitutive du 2ième problème est:

$$\psi_{2\xi\xi} + \frac{\psi_{2\eta\eta}}{1-M_{2\infty}^2} = (\gamma+1)\frac{M_{2\infty}^2}{1-M_{2\infty}^2}\psi_{2\xi}\psi_{2\xi\xi} \tag{46}$$

L'équation (45) réécrite en fonction des coordonnées ξ,η donne

$$\psi_{1\xi\xi} + \frac{\psi_{1\eta\eta}}{1-M_{2\infty}^2} = (\gamma+1)\frac{M_{1\infty}^2}{1-M_{1\infty}^2}\psi_{1\xi}\psi_{1\xi\xi} \tag{47}$$

Pour que (47) soit formellement identique à (46) il faut que (en utilisant (44)

$$A = \frac{M_{2\infty}^2}{M_{1\infty}^2}\cdot\frac{1-M_{1\infty}^2}{1-M_{2\infty}^2} \tag{48}$$

La condition frontière du problème 1 est: $\psi_{1y}\big|_{y=0} = \delta_1 F'(x)$

La condition frontière du problème 2 est: $\psi_{2\eta}\big|_{\eta=0} = \delta_2 F''(x)$

ou encore

$$\delta_1 F'(x) = A\sqrt{\frac{1-M_{1\infty}^2}{1-M_{2\infty}^2}}\;\delta_2 F''(x)$$

en utilisant (44).

Supposons les profils 1 et 2 affines, donc F' = F", on obtient la relation

$$\delta_2 \frac{M_{2\infty}^2}{M_{1\infty}^2} \frac{(1-M_{1\infty}^2)^{3/2}}{(1-M_{2\infty}^2)^{3/2}} = \delta_1 \tag{49}$$

Par définition, $C_{p1} = -2\psi_{1x} = -2A\psi_{2\xi} = A C_{p2}$

$$= \frac{M_{2\infty}^2}{M_{1\infty}^2} \frac{1-M_{1\infty}^2}{1-M_{2\infty}^2} C_{p2} \tag{50}$$

Si, dans (49) et (50) on regroupe les indices 1 et 2 de part et d'autre du signe d'égalité, on obtient la règle de similitude sous la forme canonique

$$\frac{C_p \cdot M_\infty^2}{1-M_\infty^2} = f\left(\frac{\delta M_\infty^2}{(1-M_\infty^2)^{2/3}}\right) \tag{51}$$

et le paramètre de similitude $K_2 = \frac{\delta M_\infty^2}{(1-M_\infty^2)^{2/3}}$. (53)

Les lois de similitude de Prandtl-Glauert ont une forme

$$\frac{C_p}{A} = f\left(\frac{\delta}{A\sqrt{1-M_\infty^2}}\right) \tag{52}$$

avec le paramètre A arbitraire cette fois, car il n'y a pas de terme non linéaire pour lui imposer de valeur.

La similarité existe entre deux écoulements ayant le facteur entre parenthèses identique: c'est le paramètre de similitude K.

Les solutions des deux écoulements sont identiques à un facteur près. Par exemple, ce facteur pour Cp est le coefficient de Cp dans (51). Alors que dans les formules (52) un choix judicieux de A permet de comparer deux écoulements différents autour d'un même profil, ou deux profils différents pour un même écoulement amont, ceci n'est plus possible avec le paramètre de similitude transsonique, les profils subissant toujours des élongations ou contractions avec les changements de coordonnées indispensables.

La comparaison de (53) et (35) montre bien la non-unicité des règles

de similitude. Rappelons que (35) correspond à la formulation (36), différente de (45-46), à un potentiel $\varphi = \varepsilon^{-1}\psi = \delta^{-2/3}\psi$, et un changement de coordonnée $\tilde{y} = \delta^{1/3} y$.

Spreiter (réf.43) a formulé une version "généralisée" de la règle de similitude (53). Il pose

$$K_2 = K_3^{-3/2}$$

avec $$K_3 = \frac{1 - M_\infty^2}{(\delta M_\infty^2)^{2/3}} \qquad (54)$$

Il montre que $$\frac{C_p \cdot M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} = K_3^{-1} f(K_3)$$

ou encore $$\frac{C_p M_\infty^{2/3}}{\delta^{2/3}} = f(K_3) = f\left(\frac{1 - M_\infty^2}{\delta^{2/3} M_\infty^{4/3}}\right)$$

Ces résultats sont carroborés par l'analyse dimensionnelle de Oswatitsch (réf. 9)

3.8 ASPECT SINGULIER ET NON-UNICITE DES EXPANSIONS TRANSSONIQUES

Il faut comprendre que particulièrement en écoulement transsonique, il faut se montrer critique vis-à-vis des résultats déductibles analytiquement. Les approximations faites sont toutes plus ou moins critiquables, par opposition aux cas linéarisables subsoniques et supersoniques. Il ne faut donc pas s'étonner de l'échec relatif de l'analyse théorique pour décrire la réalité.

Historiquement ceci se fit sentir dès avant les solutions numériques, dans les cas (rares) de solutions analytiques "exactes" disponibles: par exemple le cas exceptionnel du coin: Spreiter (réf.43) conclut que parmi les différentes possibilités d'expansions, d'approximations, et conséquemment,

de formes résultantes du facteur de similitude, la formulation la plus satisfaisante du point de vue de la comparaison avec les expériences et les solutions exactes est

$$K_3 = \frac{1 - M_\infty^2}{(\delta M_\infty^2)^{2/3}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \bar{y} &= \delta^{1/3} M^{2/3} y \\ \phi &= \delta^{2/3} M^{-2/3} \psi \end{aligned} \tag{57}$$

et l'équation $[K_3 - (\gamma+1)\phi_x]\phi_{xx} + \phi_{\bar{y}\bar{y}} = 0$ (40)

Les procédures d'expansions ne sont pas uniques ou tout à fait équivalentes, comme le prouve la variété des formulations de K proposées. En fait, un des seuls critères de sélection est la comparaison avec l'expérience et les solutions "exactes" (de l'hodographe, sans choc, par exemple). Ceci explique que, si l'on prend pour référence la méthode la plus générale qui traduit la non-unicité par les différents choix possibles des paramètres m et n, on trouve chez les utilisateurs actuels (ex. Cole, Murman, Krupp, Kacprzynski...) des valeurs de m et n, différentes de celles de Spreiter (2/3, 2/3) et apparemment inconsistantes avec la théorie générale décrite.

Avant d'expliquer ces écarts à la théorie, il est intéressant de montrer que les différentes formulations théoriques sont liées entre elles, et que si elles diffèrent souvent pour des M_∞ différents de l'unité, elles tendent vers les mêmes limites pour $M_\infty \to 1$.

Nous avons déjà eu l'occasion de souligner que la formulation (27), avec le terme non linéaire:

$$M_\infty^2 (\gamma+1) \frac{u'}{u_\infty} \frac{\partial u'}{\partial x}$$

est plus générale que les formulations de Oswatitsch (9) et de Cole (42) où le même terme est:

$$(\gamma+1) \frac{u'}{u_\infty} \frac{\partial u'}{\partial x}$$

L'absence du terme en M_∞^2 résulte d'un développement pour $M_\infty = 1$,

extrapolé aux valeurs voisines. On vérifie l'équivalence évidente pour $M_\infty = 1$ Il est intéressant de noter l'équivalence entre l'analyse dimensionnelle développée au §3.7, à partir d'une équation en ψ et avec un changement de coordonnée $\eta = \sqrt{1-M_\infty^2}\,Y$, donnant $K_3 = (1-M_\infty^2)/(\delta M_\infty^2)^{2/3}$ et l'analyse dimensionnelle du §3.6, à partir d'une équation en $\phi = \delta^{-2/3} M^n \psi$, avec un changement de coordonnée $Y = \delta^{1/3} M^m Y$, donnant $K = (1-M_\infty^2)/\delta^{2/3} M^{2m}$. Dans le cas proposé par Spreiter, m = 2/3 il y a équivalence parfaite des 2 procédés:

$$K_3 = K \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{\sqrt{K}}\, Y$$

les changements de coordonnées sont équivalents. Le cas m = n = 0, qui donne le paramètre de von Karman

$$K_1 = \frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3}} \tag{35}$$

est moins général, car il suppose $\tilde{Y} = \varepsilon(\delta) Y$ et non pas $\tilde{Y} = \alpha(\delta, M_\infty) Y$

On vérifie que les deux méthodes tendent vers la même limite pour $M_\infty \to 1$.

3.9 CORRECTIONS EMPIRIQUES DES APPROXIMATIONS THEORIQUES

Jusqu'à présent nous avons envisagé la combinaison t = m = n = 0 et le cas plus général $m = n = 2/3,\ t = 2$. La comparaison avec l'expérience et les profils sans choc (Korn, Niewland, Garabedian...) montre cependant que pour les profils d'ailes, la valeur m = $\frac{1}{2}$ remplace avantageusement la valeur 2/3 de Spreiter, dans les cas d'écoulement sans choc, qui sont très sensibles à la valeur de M_∞ , et offrent donc un test facile pour déterminer la relation analytique optimum entre M et o dans le paramètre de similitude. Comme l'influence de K est beaucoup moins sensible pour des profils normaux, on est assuré que la valeur m = $\frac{1}{2}$ donnera partout de bons résultats.

Pour une valeur de m déterminée, la procédure théorique est complètement déterminée par la condition 2-n-2m = 0 qui a pour but, rappelons-le, de supprimer la présence explicite de M_∞ dans l'équation potentielle (40). L'interprétation est la suivante: le paramètre n n'est pas un degré de liberté supplémentaire, c'est un simple artifice de changement de coordonnées qui permet "d'adimensionnaliser".

Dans ce sens, pour un m donné, n est le reflet de l'exposant 2 qui affecte M_∞^2 dans l'équation potentielle originale. Cette équation est l'aboutissement d'une série d'approximations plus ou moins critiquables comme signalé à la section précédente. Il n'est pas étonnant de constater des écarts avec la réalité.

Le caractère "relatif" de cet exposant 2 est d'ailleurs mis en évidence par son absence dans les développements obtenus pour $M_\infty = 1$ (équations (30) et (31).

Une correction plus ou moins empirique du caractère approximatif de la théorie peut être obtenue en remplaçant l'exposant 2 par une valeur t que nous allons discuter.

Pratiquement, le critère de correction globale par ajustement de t (ou de n) est celui-ci la valeur de t (2 ou une autre) influence la valeur de ϕ_x sonique, défini par

$$\phi_x^* = \frac{K}{(\gamma+1)M^{t-n-2m}} = \frac{1-M_\infty^2}{\delta^{2/3}(\gamma+1)M^{t-n}}$$

On en déduit un C_p critique $= -\frac{2\delta^{2/3}}{M^n}\phi_x^* = -\frac{2(1-M_\infty^2)}{(\gamma+1)M^t}$

La valeur t = 2 donne des résultats pour C_p^* qui s'écartent de >5% de la réalité, ce qui est beaucoup. Pour que les solutions de la SPE se comparent avantageusement aux quantités réelles, la vitesse sonique ϕ_x^* devrait

correspondre aussi près que possible à la valeur exacte de C_p^*. Si on prend t = 7/4, les erreurs entre C_p^* calculé et C_p^* vrai sont < 2% pour une large tranche de M_∞ .

On trouve donc, avec la valeur coorigée de $m = \frac{1}{2}$

$$t = 7/4 = 2\,m + n = 4/4 + n$$

$$n = 3/4$$

La valeur de n intervient dans le potentiel transformé $\phi = \delta^{-2/3} M^n \psi$. Donc, en utilisant la formulation approximative du § 3.4 , dans la valeur de C_p:

$$C_p = -2\psi_x = -\frac{2\phi_x\,\delta^{2/3}}{M^n}$$

Changer n ne modifie pas seulement la "distribution" de C_p de façon uniforme et proportionnelle, car en modifiant n, on modifie t dans l'équation potentielle originale, et on modifie le facteur M^{n-m} dans la condition frontière.

Ballhauss (réf.11) donne plus de détails quant à la manière de choisir la valeur de t.

Une valeur t = 1.75 (7/4) est un compromis entre les valeurs extrêmes

$$1.6 \leq t \leq 2$$

Pour t = 2 (p. 18, réf.11), le C_p^* calculé peut différer sensiblement du C_p^* vrai, mais on est assuré que le saut des quantités (p.e. $C_p = C_{p1} - C_{p2}$. avec 1 et 2 représentant les états avant et après le choc) sera respecté, même dans les cas de choc fort ($M \cong 1.3$) (voir fig. 3.4 b)

Pour t = 1.58... 1.69, c'est le contraire. Les valeurs de C_p^* soniques calculées et vraies coïncident mais en cas de chocs forts, le saut prédit peut être considérablement plus grand que le saut réel (voir fig. 3.4 a).

Ceci explique une autre valeur proposée par Murman (réf.3): $n = \frac{1}{2}$

qui correspond, avec $m = \frac{1}{2}$ à $t = 1.5$.

Cette valeur n'est admissible qu'avec des chocs très faibles, et en accordant plus d'importance à la bonne représentation de la ligne sonique, qu'aux valeurs de C_p au choc.

Néanmoins Murman (réf. 3, 23) néglige le facteur $M^{n-m} = M^{1/4}$ (pour $m = \frac{1}{2}$, $n = 3/4$), ce qui revient à épaissir le profil en divisant la pente $F'(x)$ par ce même facteur.

Ils suppriment ainsi l'influence de n sur la condition frontière, ou de t sur l'équation différentielle non transformée, ou encore l'influence de n sur la solution ϕ_x. Dans ce cas, modifier n revient à une correction globale, uniforme, de la solution!

En conclusion, il est important de souligner le caractère empirique et lié à une méthode précise, des corrections sur m et n. Il n'est pas impossible que l'amélioration en précision apportée par l'emploi des schémas conversatifs (FCR schemas) modifie ces valeurs, et dans ce contexte, il est avantageux de présenter les résultats en termes de variables transformées $\tilde{y}$, $\bar{C}_p$ K.

3.10 SDE: quantités conservées, ordres d'approximation, traînée de choc

A l'instar de Jameson (réf.35) il est utile de définir ce que les équations constitutives conservent comme quantités, et avec quel ordre d'approximation

L'équation (6)

$$(c^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2)\frac{\partial v}{\partial y} - uv\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6)$$

garantit la conservation de la masse mais aussi de l'énergie pour les écoulements homentropiques potentiels. Pour le voir, il suffit de l'écrire sous la forme potentielle:

$$(c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} = 0 \qquad (8)$$

Cette dernière équation peut être déduite directement de l'équation de v conservation de l'énergie écrite sous la forme de l'équation de Bernouilli:

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} q^2 + h = cste \tag{5}$$

en utilisant le fait que $h = h(\rho)$

et donc que $\sum u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{d\rho}{dh}\left(\sum u_i \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = -\frac{d\rho}{dh}\left(\sum_i \sum_k u_i u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$

et en utilisant finalement les relations isentropiques

$$c^2 = \left(\rho \frac{dh}{d\rho}\right)_{s=cste} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T$$

La conservation de la quantité de mouvement est automatiquement garantie par la condition d'irrotationnalité, en deux dimensions, grâce au théorème de Crocco.

L'équation (8) garantit donc implicitement la conservation de toutes les variables conservatives, mais sous une forme non-divergente.

Les équations aux petites perturbations dérivées de (6) ou (8) sont

$$\left[K - (\gamma+1) M_\infty^2 \left(\frac{u'}{U_\infty}\right)\right]\left(\frac{u'}{U_\infty}\right)_x + \left(\frac{v'}{U_\infty}\right)_{\tilde{y}} = 0 \tag{30}$$

$$\left[K\left(\frac{u'}{U_\infty}\right) - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{u'}{U_\infty}\right)^2\right]_x + \left(\frac{v'}{U_\infty}\right)_{\tilde{y}} = 0 \tag{31}$$

en termes de vitesses de perturbations. Le facteur M_∞^2 est souvent négligé pour $M_\infty \cong 1$. La forme (31), forme divergente de (27) ou (30) vérifie les propriétés de conservativité pour le flux de masse La preuve en est qu'on peut obtenir (31) de façon directe à partir de formulations divergentes pour le flux de masse (Section 3.5, 3ième méthode).

Sous sa formulation potentielle, la SPE peut aussi être écrite sous forme non conservative:

$$[K - (\gamma+1)\phi_x]\phi_{xx} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \tag{40}$$

ou conservative:

$$\left[K - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\phi_x^2\right]_x + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \tag{41}$$

A travers un choc on suppose que l'énergie est conservée de façon isentropique. Ceci est évidemment faux, mais représente une approximation valable des relations de Rankine-Hugoniot pour les chocs faibles. Rappelons ensuite que la variation d'entropie effective Δs est proportionnelle à la force du choc, qui est proportionnelle, pour les chocs faibles, à $(\Delta p)^3$ ou $(\Delta u)^3$.

Si les variations locales d'entropie Δs sont faibles, leur intégration le long du choc peut occasionner une perte globale significative: la traînée de choc. Si on estime la longueur du choc proportionnelle à Δp ou Δu, on obtient pour la traînée un rapport d'un ordre plus élevé en $(\Delta p)^4$ ou $(\Delta u)^4$.

Si on reprend à présent l'équation (43), on remarque que la SPE est précise au premier ordre en δ/M_∞ et au 2ième ordre en $(\delta/M_\infty)^2$, c'est-à-dire que l'on néglige les termes d'ordre $(\delta/M_\infty)^2$ ou plus élevé (en effet on néglige les termes en $[(\delta/M_\infty)^{2/3}]^2$, après avoir divisé tous les termes de (43) par $(\delta/M_\infty)^{2/3}$).

Cet ordre d'approximation est consistant avec l'approximation qui consiste à négliger les variations d'entropie effectives. On peut montrer en effet de plusieurs façons que

$$\Delta s \propto (\delta^{2/3})^3 = \delta^2$$

Revenons à l'hypothèse d'isentropicité. Si on imposait celle-ci de façon exacte (et non pas en négligeant des termes d'ordre 2 en δ), les équations de conservation de la masse (9) et de la quantité de mouvement (10) ne pourraient plus être satisfaites simultanément. Comme on exclut les pertes de masse (forme conservative de la SPE par rapport au

flux de masse), l'approximation isentropique devrait alors se traduire par une perte de quantité de mouvement.

A travers un choc, la conservation exacte de l'énergie sous forme isentropique et celle de la quantité de mouvement sont inconcilliables. Une seule quantité peut être conservée, et les pertes occasionnées dans l'autre se retrouvent sous forme d'une traînée.

Ceci est vrai en toute rigueur pour des équations exactes, sans ordre d'approximation. Nous avons vu que l'erreur commise, Δs est consistante avec le degré général d'approximation de la méthode de calcul. Autrement dit, si

$$\Delta s \propto (\Delta u)^3 \quad \text{et} \quad \Delta u \propto (M_\infty^2 - 1)^3 \quad \text{donc} \quad \Delta u \propto \delta^{2/3}$$

en utilisant la définition de K = cste. ou

$$\Delta s / R = (2\gamma / (\gamma+1)^3) \cdot ((M_\infty^2 - 1)/3)$$

on suppose conserver exactement la quantité de mouvement. L'équation de l'énergie est vérifiée au premier ordre en (δ/M_∞) (ou au deuxième ordre en $(\delta/M_\infty)^{2/3}$). Inversément, si on suppose conserver exactement l'entropie, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est précise au premier ordre en δ/M_∞ (ou au deuxième ordre en $(\delta/M_\infty)^{2/3}$).

Cette indétermination sur la quantité non conservée n'est pas gênante, car les pertes résultantes dans la traînée de choc peuvent s'exprimer indifféremment en fonction de Δs ou en fonction des quantités de mouvement. Et dans les deux cas, la formulation se ramène à la même traduction en termes de vitesses de perturbations.

CHAPITRE 4

SDE POUR ECOULEMENTS INTERNES

4.1 INTRODUCTION

On peut montrer que des écoulements axisymétriques et bidimensionnels sont rigoureusement parlant impossibles dans les aubages. C'est pourquoi le découplage classique du problème tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels dans les plans méridionaux, supposés axisymétriques, et dans les plans circonférentiels développés (cascades, "blade-to-blade") est une approximation connue sous le nom d'approche quasi tridimensionnelle.

La possibilité et la pertinence d'un modèle simplifié de petites perturbations appliqué à des écoulements inter-aubes sont ensuite étudiées. L'étude d'une cascade par la théorie des petites perturbations est à priori concevable dans les cas de faibles courbures. De sérieuses restrictions géométriques apparaissent néanmoins et réduisent d'autant l'avantage de la simplicité de cette approche. Le seul cas sans problèmes, qui est celui choisi pour tester le multigrid, est irréaliste! il s'agit d'une persienne sans déflections, c'est-à-dire une cascade sans décalages et sans angles d'attaque ni de sortie! Les aubes sont symétriques, et non portantes.

Le premier modèle utilisé est le cas classique d'une tuyère convergente-divergente. Le second modèle diffère du premier par les conditions de périodicité en amont et en aval, qui sont les conditions frontières typiques d'un écoulement en turbomachine.

On s'attardera dans ce chapître également à certaines particularités numériques de programmation. La singularité au bord d'attaque de la condition de tangence de la théorie des petites perturbations est analysée.

Le problème de la condition de Kutta est expliquée. On explique ensuite la procédure de relaxation par ligne (Gauss-Seidel); l'usage d'une pondération des corrections pour accélérer la convergence (facteur de surrelaxation) suivant un procédé classique, ainsi que l'usage des matrices tridiagonales.

4.2 ECOULEMENTS POTENTIELS TRIDIMENSIONNELS EN TURBOMACHINES.

Les écoulement potentiels en turbomachines sont étudiés en détail dans le livre de Vavra (réf.44). Rappelons d'abord que si l'écoulement dans une roue tournante est supposé isentropique, la seule possibilité de création d'un mouvement rotationnel dans un écoulement supposé irrotationnel en amont, est la présence de couches limites sillages et tourbillons. Si on néglige ces phénomènes, à la sortie de la roue, l'écoulement est toujours irrotationnel, les écoulements du type "free-vortex"(rV_θ= cste, V_θ vitesse circonférentielle absolue) et "forced-vortex" ($V_\theta = r \times$cste) ont tous deux une vorticité "relative" (dans un système de référence lié au rotor) constante. Dans ces conditions, il est possible d'introduire un écoulement fictif appelé écoulement absolu du rotor $\vec{Va}$, en additionnant vectoriellement la vitesse rotorique relative $\vec{W}$ et la vitesse périphérique d'entraînement: $\vec{i}_\theta \omega r$. La vitesse $\vec{Va}$ est irrotationnelle et peut être dérivée d'un potentiel dans le système de référence relatif, lié au rotor:

$$\begin{aligned} \vec{V_A} &= \vec{\nabla} \phi_A \\ \vec{V_A} &= \vec{W} + \vec{i}_\theta \omega r \\ \vec{\nabla} \times \vec{W} &= -2\vec{\omega} = cte \\ \vec{W} &= \vec{\nabla} \phi_A - \vec{i}_\theta \omega r \end{aligned} \qquad (55)$$

On voit que inversément, la vitesse relative peut être dérivée de la somme d'un potentiel de vitesse et d'un terme dépendant du rayon.

Dans le système relatif, on a soustrait à la vitesse de chaque particule, une composante rotationnelle égale et de signe opposé à la vitesse d'entraînement du rotor.

Il en résulte les équations générales suivantes, pour les rotors:

$$\nabla^2 \phi_A = \frac{\nabla \phi_A}{c^2} \cdot \nabla \left[\frac{V_A^2}{2} - \omega \frac{\partial \phi_A}{\partial \theta} \right] - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{V_A^2}{2} - \omega \frac{\partial \phi_A}{\partial \theta} \right]$$

$$c^2 = c_0^2 - (\gamma - 1) \left[\frac{V_A^2}{2} + \omega \left(K_1 - \frac{\partial \phi_A}{\partial \theta} \right) \right] \qquad (56)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{W} = 0 \qquad \vec{i}_\theta \cdot \nabla \phi_A = \omega r$$

Ces équations, écrites sous forme non divergente, ne peuvent donc pas être intégrées pour obtenir une solution faible en cas de chocs. Vavra démontre en détail que les écoulements axisymétriques et bidimensionnels s'existent pas réellement dans les rotors, et que l'équation (56) doit être utilisée en trois dimensions.

Une équation aux petites perturbations tridimensionnelle est proposée par Oswatitsch dans réf. 45 . La procédure d'introduction d'un potentiel est identique à celle de Vavra. L'équation est exprimée dans un système de coordonnées cartésiennes lié à un passage entre ailettes (figs. 4.1,2 et 3):

$$\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{\omega^2 u'}{c^2} \left(x' \sin\bar{\theta} + y' \cos\bar{\theta}\right) \sin\bar{\theta} = 0$$

$$u' = \phi_{x'} + \omega \left(r_0 + z'\right) \sin\bar{\theta}$$

$$v' = \phi_{y'} + \omega \left(r_0 + z'\right) \cos\bar{\theta} \qquad (57)$$

$$w' = \phi_{z'} - \omega \left(x' \sin\bar{\theta} + y' \cos\bar{\theta}\right) = \phi_{z'} - \omega y''$$

La fig. 4.1 décrit le système fixe (x,y,z) centré sur l'axe du rotor. La fig. 4.2 décrit le système relatif (x", y", z") lié au rotor et centré sur l'axe du rotor. La fig. 4.3 décrit le système final (x', y', z') obtenu par une translation du système (x", y", z") suivant z", depuis le centre du rotor jusqu'au pied des ailettes ($z' = z'' = r_o$) et une rotation $\bar{\theta}$.

4.3 SDE BIDIMENSIONNELLE: LIMITES ET HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Beaucoup d'auteurs préférent adopter l'approche quasi tridimensionnelle et étudier séparément l'écoulement entre les aubes et l'écoulement dans un plan méridional.

L'équation (57) peut être simplifiée pour l'écoulement de grille sur un plan, moyennant certaines hypothèses.

L'équation de l'énergie:

$$h + \frac{1}{2}\left(u'^2 - \omega^2 r^2\right) = cte$$

est à l'origine du terme en w^2 dans (57)

Si on suppose r = cte dans le plan, ce terme disparaît.

Si on suppose en outre:

$z' = 0$, $w' = 0$ (sur le moyeu)

$z' = b$, $w' = wo$ (b=envergure de l'ailette)

On peut approximer la perturbation de W par $W' = w_o z'/b$

Les équations constitutives deviennent

$$(1-M^2)\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{w_o}{b} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \qquad (58)$$

Si on introduit la transformation: $v' + \frac{w_o}{b} y' = \bar{v}$, (58) se réduit à:

$$(1-M^2)\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \tag{59}$$

La théorie simplifiée des petites perturbations se heurte néanmoins à des difficultés fondamentales dues à la géométrie du problème et à la déflection de l'écoulement.

A titre d'exemple, imaginons un écoulement purement horizontal traversant une rangée d'ailettes décalées d'un angle (fig.4.5) Dans un réseau cartésien, la condition de périodicité est:

$$\phi_n(s,n) = \phi(s+d, n+e)$$

Du point de vue numérique, cette condition est gênante car elle relie des points n'appartenant pas à la même ligne de coordonnées verticales. Le système matriciel des équations aux différences fondé n'est plus naturellement divisible en sous-matrices quasi tridiagonales pour chacune ses lignes de coordonnées verticales. Si l'on n'utilise pas des artifices tel qu'une inclinaison des lignes verticales, ou une interpolation de valeurs calculées à des itérations précédentes pour exprimer la périodicité, la relaxation par lignes doit être abandonnée pour une relaxation par points plus lourde et plus lente.

Le problème reste le même si l'écoulement amont est incliné d'un angle par rapport à la corde moyenne (fig.4.4)

Par contre, à la sortie, des difficultés supplémentaires surgissent dès qu'il y a portance et donc déflection de l'écoulement (c'est-à-dire si l'angle de sortie β_2 est différent de l'angle d'entrée β_1 , fig 4.4). Comme dans tout problème de profil portant, une circulation apparaît, proportionnelle à la portance et donc aussi à $|\beta_1 - \beta_2|$. Une condition de Kutta doit être imposée de manière explicite ou implicite, en termes de circulation ou

d'angle de déflection. Cette condition de Kutta intervient dans l'expression de la périodicité en aval de la grille d'aubes. Elle fait intervenir des valeurs (circulation ou déflection) qui sont fonctions elles-mêmes de la solution du problème. Ces valeurs doivent donc être a priori estimées au début du processus de calcul, puis ajustées au cours des itérations jusqu'à convergence. L'imposition de la périodicité doit donc être inclue à part entière dans le processus itératif, qui est plus complexe et plus lent à converger, surtout pour des profils à forte cambrure et à haute portance. Mais rappelons que dans ce cas l'hypothèse des peties perturbations n'est plus admissible. Seuls des profils à faible courbure et faible charge unitaire sont admissibles.

4.4 ECOULEMENT DANS UNE TUYERE CONVERGENTE-DIVERGENTE

Un premier programme a été écrit pour résoudre l'écoulement interne bidimensionnel dans un canal.

Le domaine de calcul est schématisé à la fig. 4.6: Le réseau de coordonnées est cartésien et uniforme.

Les conditions de tangence de l'écoulement sur les parois du canal sont représentées par DFUP (I) et DFLO(I): le col est supposé avoir la forme très simple d'un arc de cercle (DFLO(I) = F_1 (I)).

La paroi supérieure est partout rectiligne. Pratiquement cette condition frontière convient aussi bien pour traduire l'axe de symétrie d'un écoulement dans un col symétrique, dont la paroi supérieure serait l'image symétrique de la paroi DFLO(I)

A l'amont l'écoulement est uniforme, sans perturbations, $u' = v = 0$ Le potentiel de perturbation est posé $\equiv 0$.

A l'aval, les perturbation s'annulent. $u' = v = 0$, $d\phi = 0$, X_1, X_2 sont des nombres entiers (multiples de la corde).

La détermination des mailles du réseau (Δx et Δy) se fait par l'intermédiaire de NPAF et M. Des valeurs bien précises et uniques de ces paramètres sont nécessaires si l'on désire utiliser plusieurs finesses de réseaux successifs, avec des mailles dont les côtés sont proportionnels dans un rapport 1:3.

4.5 DESCRIPTION DU PROBLEME-TEST D'ECOULEMENT INTERNE DANS UNE PERSIENNE SYMETRIQUE

Les caractéristiques du problème sont semblables à celle de la tuyère, sauf pour les points suivants (voir fig. 4.7)

L'absence d'angle d'attaque et de sortie (donc de déflection) est compatible avec une symétrie des profils: DFUP(I) = DFLO(I). Dans ces conditions, il n'y a pas de circulation, et la périodicité de l'écoulement aval s'exprime de la même manière qu'en amont.

La périodicité exprime que les composantes de la vitesse doivent être les mêmes aux points (i,1) et(i,M); donc, pour les perturbations.

$$u'(i,1) = u'(i,M)$$
$$v'(i,1) = v'(i,M)$$

ce qui donne bien 2 relations ou conditions pour deux points frontières. En terme de potentiel on peut obtenir un système complet d'équations pour les (M-1) inconnues ϕi , i = 1...M-1 en utilisant les conditions de périodicité suivantes:

a) au point (i,M-1) on utilise dans l'équation la valeur $\phi_{i,1}$ à la place de la valeur $\phi_{i,M}$, ce qui exprime la condition de périodicité des u' ci-dessus.

b) au point (i,1), on considère ce point comme faisant partie de la solution, et non comme point frontière. On vérifie donc en ce point l'équa-

$$\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}\Big|_{j=1} = \frac{2}{\Delta\tilde{y}}\left(\frac{\phi_{j=2} - \phi_{j=1}}{\Delta\tilde{y}} - \phi_{\tilde{y}}(x, j=1)\right)$$

La deuxième méthode consiste à placer le premier point du réseau, $j = 1$, à une distance de la paroi égale à une fraction $h_1/\Delta\tilde{y}$ de $\Delta\tilde{y}$. La condition de tangence intervient de façon différente dans un développement de Taylor. Par exemple, si on prend $h_1 = \Delta\tilde{y}$ on a:

$$\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}\Big|_{j=1} = \frac{1}{\Delta\tilde{y}}\left(\frac{\phi_{j=2} - \phi_{j=1}}{\Delta\tilde{y}} - \phi_{\tilde{y}}(x, 0^+)\right)$$

Les valeurs de ϕ (et de la vitesse, de la pression) sur le profil sont calculées après résolution indépendante de la ligne (ou du réseau). Si, à cette fin, on utilise une extrapolation linéaire, on peut "lisser" un comportement localement irrégulier de la solution finale sur le profil, aux environs du bord d'attaque. (Cette singularité étant due au fait que la solution numérique décrit l'écoulement autour d'un profil différent de celui prescrit, à cause de la discrétisation des pentes, et de leur variation rapide au bord d'attaque).

Dans les autres cas, l'irrégularité signifie qu'il est illusoire d'essayer d'obtenir une condition de tangence précise, car la précision numérique est de toute façon dominée par une erreur inhérente liée aux traitement approximatif des conditions frontières sur la corde principale (petites perturbations).

Donc il n'y a pas d'avantage à utiliser des formules de Taylor plus précises (utilisant davantage de points), car le gain espéré n'est pas consistant avec l'ordre de précision de la méthode en général. De plus l'instabilité augmenterait, et enfin l'utilisation de valeurs $\phi_{j=3}$ ....

détruirait la structure tridiagonale du système d'équations aux différences finies écrit pour une ligne.

Dans notre programme, la première méthode décrite a été appliquée: les points j = 1 sont sur la frontière réelle.

4.7 CONDITIONS DE KUTTA

Une condition de Kutta doit être imposée au bord de fuite des aubes. Les conditions habituelles exprimées en termes de pression ou de vitesses conduisent à un comportement singulier dans le cadre de la théorie des petites perturbations. La traduction en différences finies amortit cette singularité, en la remplaçant par des valeurs finies des composantes de vitesses.

En aval du bord de fuite, la traînée est supposée coïncider avec les lignes de coordonnée longitudinales extrêmes délimitant le domaine de calcul. Suivant le système de coordonnées utilisé, la direction de la traînée peut être plus ou moins exacte, mais cela est de peu d'importance. Plus important est la discontinuité du potentiel ϕ à travers la traînée, qui s'explique de la manière suivante (fig 4.8).

L'évolution des ϕ le long de 1 et 2 est identique en amont du profil; en aval, à cause de la présence des aubes, une particule ayant suivi le trajet 1 connaît une autre "histoire" qu'une particule ayant suivi le trajet 2. La différence, si on intègre les vitesses correspondantes, est par définition la circulation Γ .

Il est peut-être utile de relever une contradiction apparente avec ce qui peut être déduit de considérations basées sur le théorème de conservation de la circulation. (fig. 4.8 b). Il est vrai que la circulation le long du contour $\mathcal{D}_3$ est zéro mais ce contour n'est pas identique à la frontière du domaine de calcul.

Ce dernier est délimité dans la partie supérieure par la ligne 2 tout au long de la ligne de courant correspondante. La ligne 2 est en-dessous de la traînée, tandis que la ligne 1 est au-dessus. Entre les deux, il y a une discontinuité, qui est précisément la circulation!

En aval du bord de fuite, la discontinuité persiste de part et d'autre de la traînée qui est supposée adjacente à la ligne de coordonnées ξ_ℓ par exemple.

Cette discontinuité aura une grande importance dans l'imposition de la périodicité en aval de la cascade (voir un chapître subséquent).

Soit Q" appartenant à 1' et Q appartenant à 2. Les deux points coïncident mais n'ont pas le même potentiel.

$$\phi_{Q''} = \phi_Q + \Delta\phi$$

La périodicité dit que Q' est identique à Q" au point de vue écoulement donc $\phi_{Q'} = \phi_{Q''} = \phi_Q + \Delta\phi$, qui est la relation de périodicité à appliquer entre les points "périodiques" associés dans le plan de calcul.

La valeur $\Delta\phi$, proportionnelle à la circulation Γ , est inconnue au départ et doit être estimée, puis ajustée au fur et à mesure de l'évolution de la solution, jusqu'à convergence. Celle-ci peut d'ailleurs être considérablement ralentie si l'estimation de départ est mauvaise (voir chapître subséquent)

La solution a convergé non seulement quand la différence entre les solutions successives est en-dessus d'un certain seuil, mais quand la variation de la circulation est également inférieure à un certain seuil. Un inconvénient est le peu de sensibilité de la circulation par rapport aux valeurs calculées pour les dérivées de la solution. Or c'est la circulation qui est le critère de vérification de la condition de Kutta. Une possibilité

est de vérifier que les pressions soient continues "à travers" le bord de fuite.

Pour éviter toutes les difficultés évoquées ci-dessus, le modèle-test a été choisi non portant, sans circulation de sorte que $\Delta\phi = 0$ (pas de discontinuité).

4.8 DEFINITION DE L'OPERATEUR DE DIFFERENCES FINIES ET PROCEDURE DE RELAXATION

On utilise les opérateurs de relaxation définis par Murman (chap.1) Leur généralisation sous une forme unique (commutation automatique) donne:

$$(1-\mu_{i,j})\, U_{i,j} \; \frac{\phi^{n}_{i+1,j} - 2\,\bar{\phi}^{n+1}_{i,j} + \phi^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$+ \mu_{i-1,j}\, U_{i-1,j} \; \frac{\hat{\phi}^{n+1}_{i,j} - 2\,\phi^{n+1}_{i-1,j} + \phi^{n+1}_{i-2,j}}{\Delta x^2} \qquad (60)$$

$$+ \; \frac{\hat{\phi}^{n+1}_{i,j+1} - 2\,\hat{\phi}^{n+1}_{i,j} + \hat{\phi}^{n+1}_{i,j+1}}{\Delta \bar{y}^2} = 0$$

Pour alléger le texte qui suit, nous omettons les indices positionnels. Les inconnues de cette équation sont $\hat{\phi}^{n+1}$ et $\bar{\phi}^{n+1}$. Il s'agit donc d'une relaxation par ligne (i=cste), de type Gauss-Seidel.

$$\bar{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^{n+1}/\omega - (1-\omega)/\omega\; \phi^{n} \qquad (61)$$

Il est commode de concevoir la relaxation comme un procédé de correction, et d'écrire explicitement (60) en utilisant pour inconnues les corrections T:

$$\bar{\phi}^{n+1} = T/\omega + \phi^{n} \qquad (62)$$

La relaxation de type Gauss-Seidel est plus rapide que cette de type Jacobi, et économise des mémoires.

Il n'y a pas de surrelaxation dans le domaine supersonique, un tel choix donne à la méthode une équivalence aux caractéristiques en ce sens que si les conditions initiales de la zone supersonique étaient définitives (ligne sonique), la solution ne nécessiterait qu'une seule itération.

Les valeurs optimales du facteur de relaxation dépendent de la finesse du réseau, et tendent vers la valeur 2 avec une finesse croissante (cfr. Bailey, réf. 4). Intuitivement on comprend ceci si on se rappelle que le critère de convergence est basé sur une interprétation de la relaxation comme une méthode instationnaire à temps fictif au sens de Garabedian, dans laquelle le pas dans le pseudo temps est proportionnel à Δx ou Δy (voir chap. 1).

Quoiqu'il en soit, pour un réseau donné, l'évolution qualitative des résidus, pour un facteur de relaxation donné, est schématisée à la fig. 4.9. On peut en tirer deux conclusions: 1 - Pour une solution de départ relativement grossière on a intérêt à ne pas surrelaxer. 2 - Lorsque la solution se raffine, ou si la solution de départ est déjà bonne, surrelaxer permet de retarder le moment où la convergence se détériore.

Ces deux conclusions, bien que uniquement qualitatives, peuvent être mises à profit dans une méthode globale d'optimisation de la convergence, couramment utilisée, où l'on utilise les résultats d'une solution qui a conversé sur un réseau grossier, comme estimateur de départ pour un réseau plus fin.

L'intérêt est double: sur le réseau grossier le coût d'une relaxation (proportionnel au nombre de points) est beaucoup plus faible; et, pour une précision donnée de la solution globale, le nombre d'itérations est plus faible car le pas du pseudo temps est plus grand (voir plus haut).

Le procédé est amorcé avec une solution très grossière sur un réseau grossier, et un facteur de relaxation proche de l'unité.

Au fur et à mesure que la solution et le réseau se raffinent, on utilise des valeurs de W croissantes et tendant vers 2.

4.9 MATRICE TRIADIAGONALE ET QUASITRIDIAGONALE

a) Les conditions de tangence aux points extrêmes d'une ligne de relaxation permettent d'écrire le système de M équations (j = 1,...M) correspondant à cette ligne sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & & a_m & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

Le système tridiagonal se résout très facilement et très économiquement par une élimination gaussienne directe.

b) Les conditions de périodicité aux points extrêmes d'une ligne de relaxation permettent d'écrire un système indépendant de m-1 équations à m-1 inconnues. (Par exemple ϕ_{ij}, $j=1, \ldots m-1$) qui s'écrit:

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & a_{m-2} & b_{m-2} & c_{m-2} \\
 & & & & & a_{m-1} & b_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{m-2} \\ \phi_{m-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{m-2} \\ d_{m-1}
\end{bmatrix}
$$

REFERENCES

1. ACKERET, J, FELDMAN, F., and ROOT, N.,
   Investigations of compression shocks and boundary layers in gases moving at high speed, NACA TM no 1113, 1947.

2. PEARCEY, H.H., OSBORNE, J., HAINES, A.B.,
   The interaction between local effects at the shock and rear separation a source of significan scale effects on aeropoils and wings, AGARD Conf. Paper 35, 1968.

3. MURMAN, E.M.,
   Computational methods for inviscid transonic flows with imbedded shock waves, Boeing Sc. Research, feb. 1971.

4. BAILEY,
   On the computation of 2 & 3 - dimensional steady transonic flows by relation methods. Lecture Notes in Physics 41. Springer-Verlag pp 1 - 77, 1975 or VKI Lectures Series. February 11-15, 1974.

5. OSWATITSCH, K. & ZIEREP, J.,
   "Das problem des senkrechten stosses an einer gekrümmten wand", Zeit. ang. math. u mech, 40 (143), 1960.

6. SICKEL, M.,
   Structure of weak non-Hugoniot shocks, Phys. of Fluids , (5), May 1963.

7. DYMENT, A., GONTIER, G.,
   Méthode de détermination des conditions de part et d'autre d'une onde de choc au moyen d'une sonde d'arrêt. Application à l'étude d'un écoulement de type mixte autour d'un profil mince. Inst. Mec Fl. Lille F.D. 64228, 1964

8. WU, CHUANG HUA,
   A general theory of three dimensional flow in subsonic & supersonic turbomachine of axial -, radial - and mixed-flow types, NACA TN 26-4 January 1972.

9. OSWATITSH, K.,
   Gas dynamics, Academic Press, N.Y., 1956

10. NIEWLAND, S
    Transonic airpoils recent developments in theory, experiment & design, Annual review of fluid mechanics, 1973.

11. BALLHAUS,
    Some recent progress in transonic flow computation, Von Karman Lectures Series 87, March 1976.

12. OZER, J.M.,
Etude numérique d'écoulements transsoniques permanents rotationnels et non visqueux, Thèse de doctorat, VKI & Univ. de Liège, juin 1977

13. MORETTI, G.,
The choice of a time-dependent technique for gas dynamics. Polytech. Inst. Brooklyn, PIBAL rep. 63-26 (V.K.I., L. no 26, 1970)

14. MAGNUS, YOSHIHARA,
Inviscid transonic flow over airpoils; AIAA pages 70-77, jan. 1970; AIAA Journal, Vol. 8, no 12, pp. 2157-62, 1970

15. MURMAN & COLE,
Calculation of plane steady transonic flows. AIAA, Vol.9, no 1 pp. 114-121 jan. 1971

16. KRUPP, MURMAN,
Computation of transonic flows part lifting airpoils and slender bodies, AIAA Journal 10, pp. 880-886, 1972

17. ESSERS, J.A.
Méthodes nouvelles pour le calcul numérique d'écoulements stationnaires de fluides compressibles. Thèse de doctorat, VKI & Univ. de Liège, avril 1977.

18. LAX., P.D.
Weak solutions of non linear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. pure appl. Math., Vol. 7, 1954, pp. 159-193.

19. LAX, P.D. WENDROFF, B.,
Difference Schemas for hyperbolic equations with High-order of occuracy, Comm. Pure Appl. Math., 17, 381-398, (1964)

20. MURMAN, E.M.
Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods, Proc. AIAA comp. Fluid Dyn. Conj., Polm Springs. California, pp. 27-40 July 1973.

21. MACDONALD, P.W.,
The computation of transonic flow through two dimensional gas turbine cascades, ASME P.71 GT 89

22. BAILEY, F.R.,
Numerical Calculation of transonic flow about slender bodies of revolution, TN D-6582, NASA, 1971

23. NURMAN, E.M.
A relaxation method for calculating transsonic flows with detached bow shocks, L.N.P vol. 19 p. 201-205, 1973.

24. KACPRZYNSKI, J.J., OHMAN, L.H. GARABEDIAN, P.R., KORN, D.G.,
Analysis of the flow past a shock less lifting airpoil in design and off-design conditions. Nat. Res. Counc. Canada, Aer. Rep. LR 554, 1971

25. STEGER, LOMAX, H.
Transonic flow about 2-dimensional airpoils by relaxation procedures, AIAA Journal Vol. 10, no 1, pp. 49-54, 1972

26. ALBONE, C.M.,
A finite - difference schemes for computing supercritical flows in arbitrage coordinate systems, Aeron. Res. Comm., CP No 1313, RAE, 1974

27. JAMESON, A,
Transonic flow calculations for airpoils 2 bodies of revolution Grumman Aerospace Corp. 1971

28. SOUTH, J.C. JAMESON, A.,
Relaxation solutions for inviscid oxisymetric transonic flow over blunt or pointed bodies. Proc. AIAA Comp. Fluid Dyn. Conf. Palm Springs, CA, pp. 8-17, 1973

29. JAMESON, A.,
Iterative solution of transonic flows over airpoils and wings including flows at Mach. 1, Comm. Pure Appl. Math. 27, pp 283-309, 1974

30. BAILEY, BALLHAUS,
Numerical calculation of transonic flow about swept wings, AIAA paper 72-677, june 1972

31. DODGE, P.,
A transonic relaxation method for cascade flows systems. I.V.K., L.S. 59, 1973

32. VAN DEN BRAEMBUSSCHE & ABADIE,
Contribution au calcul de l'écoulement transsonique en grille d'aubes par une méthode de relaxation I.V.K. report, juin 75.

33. LOCK, R.C.
Research in the UK on finite difference methods for computing steady transonic flows, RAE, Procc. Symposium transsonicum, Göttingen, 1975

34. DEIWERT, G.S,
Numerical simulation of high Reynolds number transonic flows, AIAA Paper 74-603, june 1974

35. JAMESON, A.,
Transonic flow calculations, Computational fluid dynamics VKI lecture series 87. March 1976

36. HAFEZ, M.M., CHENG, H.K.,
Convergence acceleration and shock fitting for transonic flow computations, AIAA Paper 75-51, 1975

37. MARTIN, E.D., LOMAX, H.,
Rapid finite difference computation of subsonic and transonic aerodynamics flows, AIAA Paper, 74-11, 1974

38. MARTIN, E.D.,
Advances in the application of fast semi-direct computational Methods intransonic flow, Symp. Transs. II, Göttingen, sept.1975

39. SOUTH, J.C., BRANDT, A.,
Application of the multi-level grid methods to transonic flows, Project SQUID, Monterey, Feb.1976

40. BRANDT, Achi,
Multi-level adaptative solutions to boundary value problems, IBM Th. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Repeat RC 6159, 8120176

41. LIEPMAN & ROSHKO,
Elements of Gasdynamics C.I.T. 1957

42. COLE, J.
20 years of transonic flow, Boeing Sc. Research Lab., july 1969

43. SPREITER, J.,
On alternative forms for the basic equations of transonic flow theory, Journ. Aero. Su., Vol. 21, No 1, 1954, p.70

44. VAVRA, M.H.,
Aero-thermodynamics and flow in turbomachines John Wiley & Sons, N.Y. London, 1960.

45. OSWATITSCH K.,
Basic Formulation for transonic flow problems in rotors, in transonic Flow Problems in Turbo-machinery, T.C. Adamson, M.F. Platzer, Project SQUID Workshop, Hemisphere publ. Corp. 1977

46. RAE, W.J.,
Finite-differences calculations of three-dimensional transonic flow through a compressor blade row, using the small disturbance noulinear potential equation. Project SQUID Workshop, Hemisphere pub. Corp. 1977 p.228.

47.BRANDT, Achi,
Multi-level adaptative techniques (MLAT) Part. I. The multi-grid method. IBM. Yorktown Heights Report, RC 6026, 613176

48.BRANDT, A.
Multi-level adaptative solutions to boundary-value problems, IBM Yorktown Heights, 8120176

49.JAMESON A.,
Numerical calculation of the 3-dimensional transonic flow over a yowed wing. Proc. AIAA Comp. Fl. Dyn. Conf., Palm Springs, p. 18-26 july 1973

50. VAN DER VOOREN, et AL
Remarks on the suitability of various transsonic small perturbation equations to describe 3-D transsonic flows. Symposium transsonicum III Z"ottingen, 1975.

LEGENDE DES FIGURES

Fig.1.1: Représentation schématique de chocs le long d'un profil d'aile.

Fig.1.2: Ecoulements en régime subsonique, transsonique et supersonique autour de profils d'ailes.

Fig.1.3: Le cas idéal d'un écoulement critique sonique: $M_\infty=1$.

Fig.1.4: Configuration sonique réelle avec une onde de choc très faible et largement en amont de l'obstacle.

Fig.1.5: Influence de Re sur les chocs; distributions de pressions d'après des expériences de Ackeret, Feldmann et Rott.

Fig.1.6: Schéma de plusieurs scénarios pour une perturbation croissante de l'écoulement le long d'un profil d'aile; interactions chocs-couches limites.

Fig.1.7: Courbure et affaiblissement progressif du choc vers l'extérieur; la fig. du bas illustre la rapide expansion juste derrière le choc, et l'effet amortissant de la couche limite; expériences de Ackeret, Feldmann et Rott.

Fig.1.8: Evolution de la position des chocs à l'extrados et à l'intrados d'un profil d'aile de corde "c", dans le domaine transsonique.

Fig.1.9: Evolution typique des coefficients de portance (Cl) et de traînée (Cd) pour une aile dans le domaine transsonique.

Fig.1.10: Définitions des surfaces de courant S1 et S2 introduites par Wu.

Fig.1.11: Développement typique d'un écoulement transsonique dans une grille d'aubes.

Fig.1.12: Effet de compressibilité: variation de la déflexion dans une grille d'aubes, avec M_1; d'après Van den Braembussche et Roustan, VKI.

Fig.1.13: Effet de compressibilité: évolution non linéaire du nombre de Mach maximum à l'entrée M_{SP} et du coefficient de traînée C_{DS}, avec le facteur de contraction d'une veine; d'après Ackeret et Rott.

Fig.1.14: Conditions de saut au choc: courbe de Rankine-Hugoniot comparée à la relation isentropique ($\gamma = 1.4$).

Fig.2.1: Exemples de schémas de discrétisation numérique: centré, décentré, explicite, implicite.

Fig.2.2: Les formules centralisées donnent une solution symétrique ou divergente; des formules hybrides, centralisées pour ϕ_{xx} et décentralisées pour les coefficients ϕ_x, sont également inappropirées; d'après Steger et Lomax.

Fig.2.3: Différenciation centrée dans les régions subsoniques et décentralisée vers l'amont dans les zones supersoniques; l'hypothèses des petites perturbations est consistante avec la symétrie des lignes de Mach par rapport à l'axe des X.

Fig.2.4: Oscillations parasites avec un schéma précis au deuxième ordre; amortissement avec un schéma du premier ordre (viscosité numérique).

Fig.2.5: Résultats obtenus par Murman pour un choc oblique avec des formules pyperboliques correctes au premier ordre, conservatives.

Fig.2.6: Ecoulement supersonique oblique; cas où le domaine de dépendance numérique contient entièrement le domaine de dépendance physique.

Fig.2.8: Les schémas tournés de Jameson ajustent localement le domaine de dépendance numérique avec les caractéristiques de l'écoulement.

Fig.3.1: Position du problème des petites perturbations autour d'un profil d'aile mince; caractéristiques géométriques et décomposition des vitesses.

Fig.3.2: Interprétation mathématique de l'approximation des frontières réelles du profil par une "fente" horizontale; analogie avec la théorie des singularités (sources et puits); le flux net est nul et la ligne de courant séparant la "circulation intérieure" de l'écoulement extérieur matérialise la forme réelle du profil.

Fig.3.3: Evolution du flux de masse $\rho\vec{q}$ en fonction du nombre de Mach; le domaine transsonique est intrinsèquement non linéaire.

Fig.3.4: Choix du paramètre "t", exposant intervenant dans les paramètres de similitude; l'influence sur le C_p et les chocs est discutée par Ballhauss.

Fig.4.1: Système absolu de référence (x,y,z).

Fig.4.2: Système relatif (x",y",z") lié au rotor.

Fig.4.3: Système final (x',y',z') adapté à la configuration naturelle d'une cascade; rotation et translation depuis l'axe du rotor jusqu'au pied des ailettes.

Fig.4.4: Angles; Λ = angle de calage; β_1 = angle d'incidence; β_2 = angle de sortie.

Fig.4.5: La condition de périodicité.

Fig.4.6: Description schématique du problème-test de l'écoulement dans une tuyère.

Fig.4.7: Description schématique du problème-test de l'écoulement dans une persienne symétrique.

Fig.4.8: Description de la condition de Kutta pour un profil avec portance;

fig.4.8.a: évolution différente des potentiels à l'intrados et à l'extrados; la différence finale est la circulation et représente un saut à travers la ligne de traînée;

fig.4.8.b: vérification schématique d'une circulation nulle dans

fig.4.8.b: vérification schématique d'une circulation nulle dans le domaine D_3 ; mais ce domaine n'est pas le domaine de calcul (voir texte).

Fig.4.9: Graphique illustrant l'évolution qualitative des résidus en fonction du facteur de relaxation w.

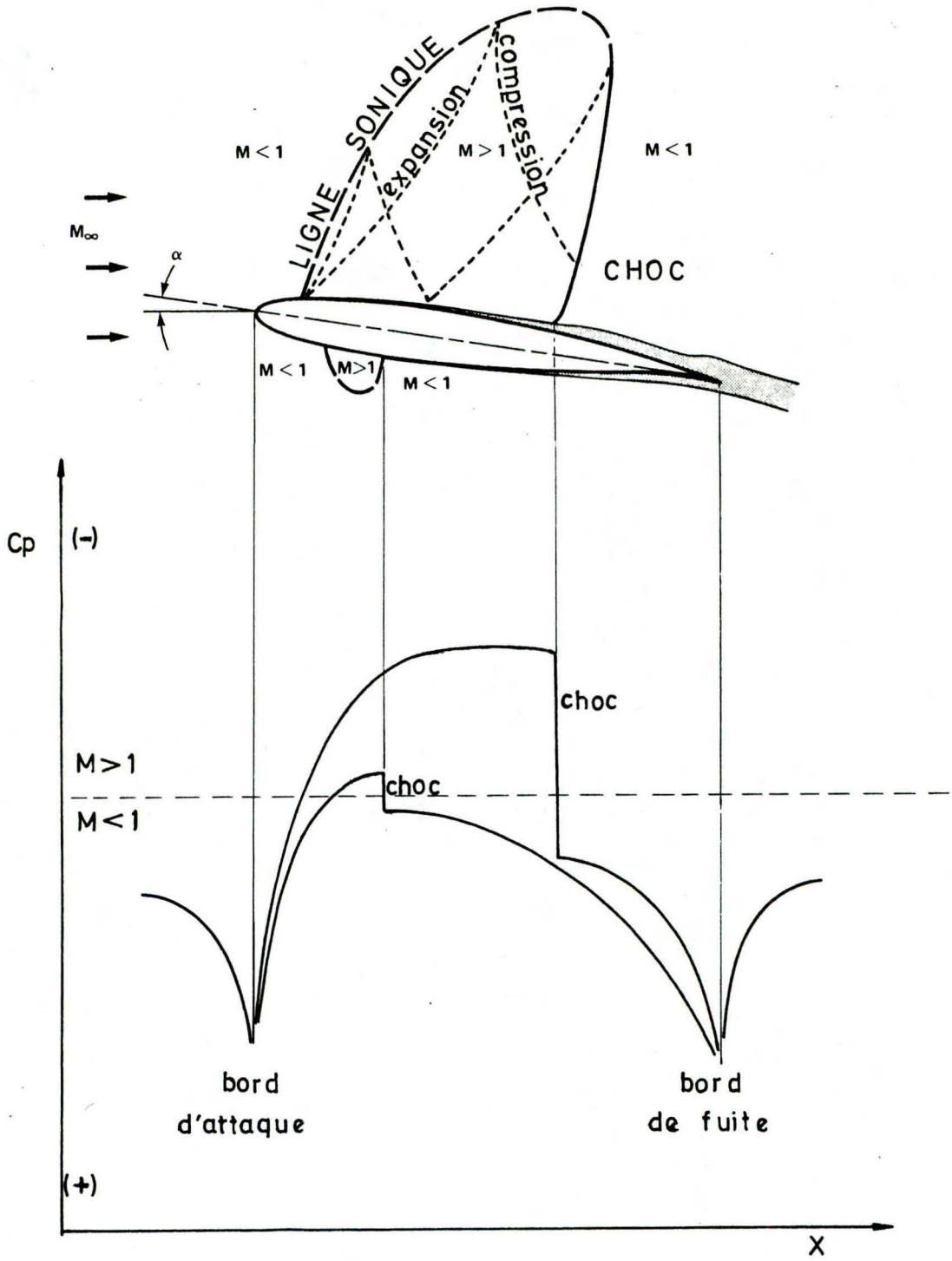
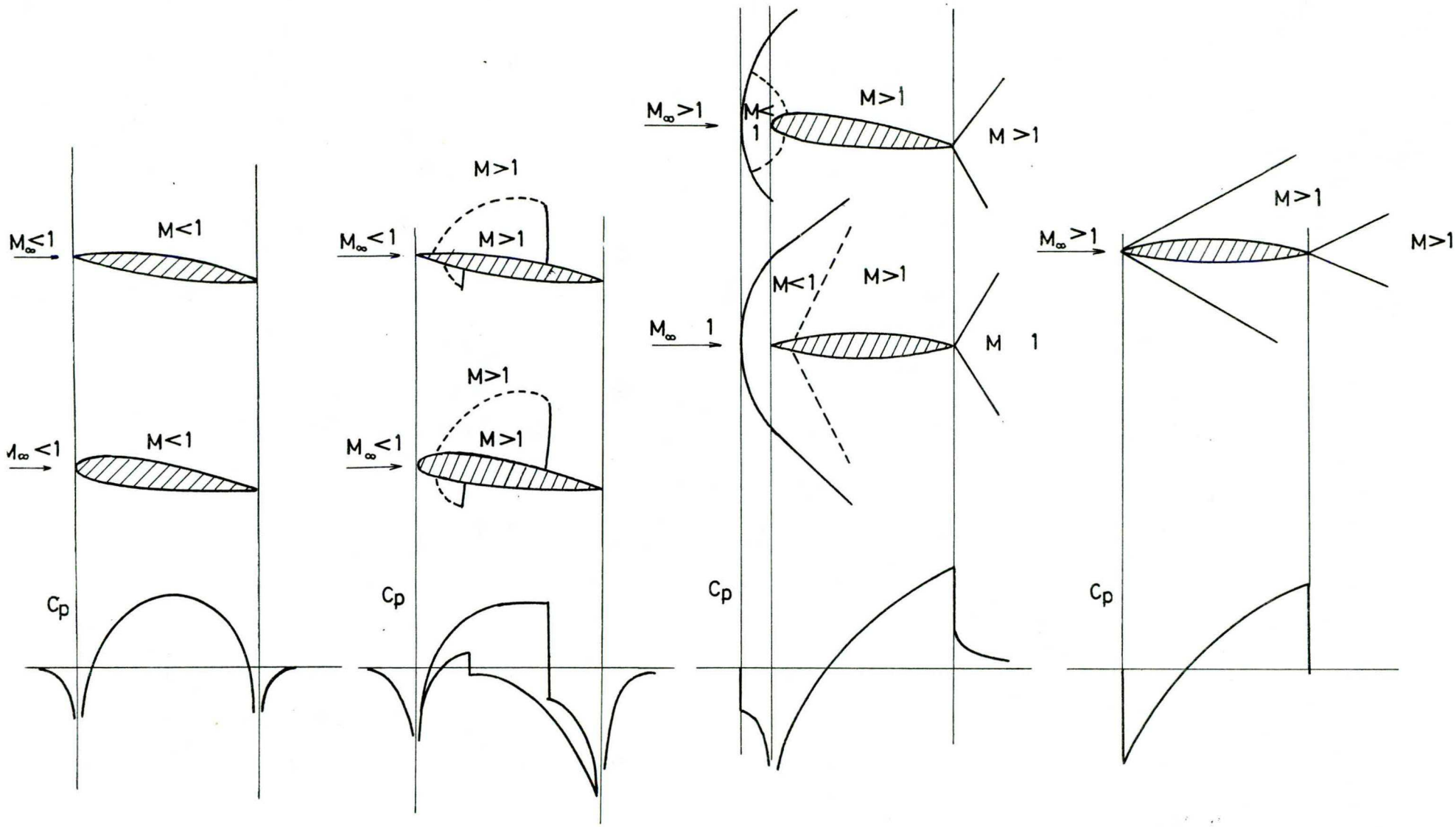

M < 1
LIGNE SONIQUE
expansion
compression
M > 1
M < 1
M∞
α
CHOC
M < 1
M>1
M < 1
Cp
(-)
choc
M>1
choc
M<1
bord
d'attaque
bord
de fuite
(+)
X

FIG. 1.1



$M_\infty < M_c < 1$
SUBSONIQUE

$M_c < M_\infty < 1$

$M_c < 1 < M_\infty$

TRANSSONIQUE

$M_\infty > 1$
SUPERSONIQUE

FIG. 1·2

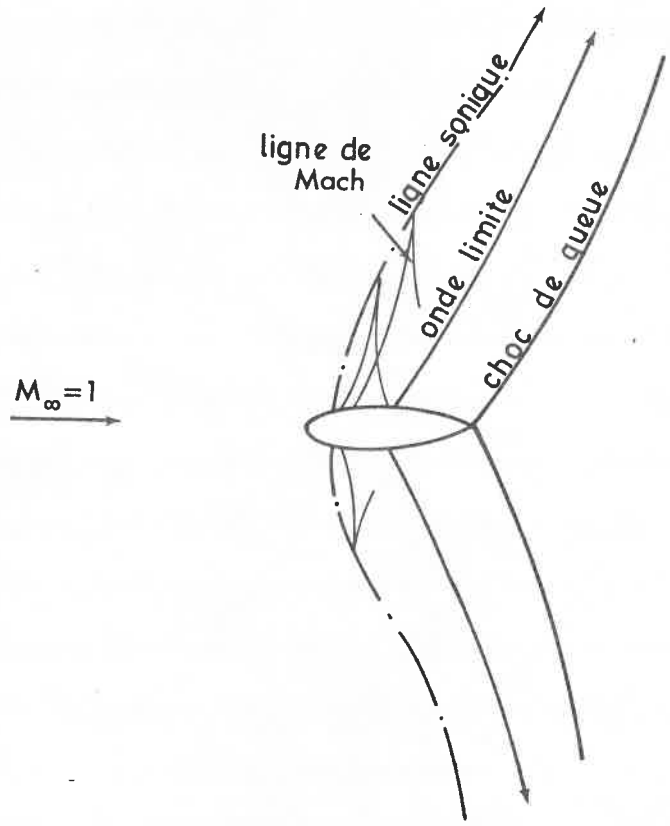

ligne de
Mach
ligne sonique
onde limite
choc de queue
$M_\infty=1$

FIG. 1·3

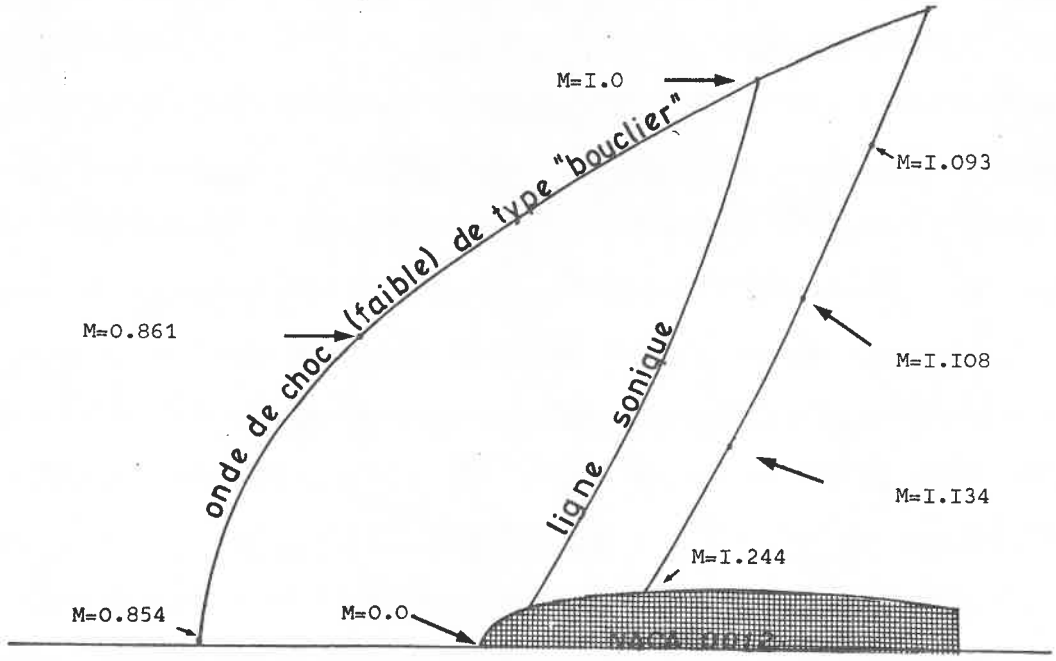

M=I.0
M=I.093
onde de choc (faible) de type "bouclier"
M=0.861
M=I.I08
ligne sonique
M=I.I34
M=I.244
M=0.854
M=0.0

FIG. 1·4

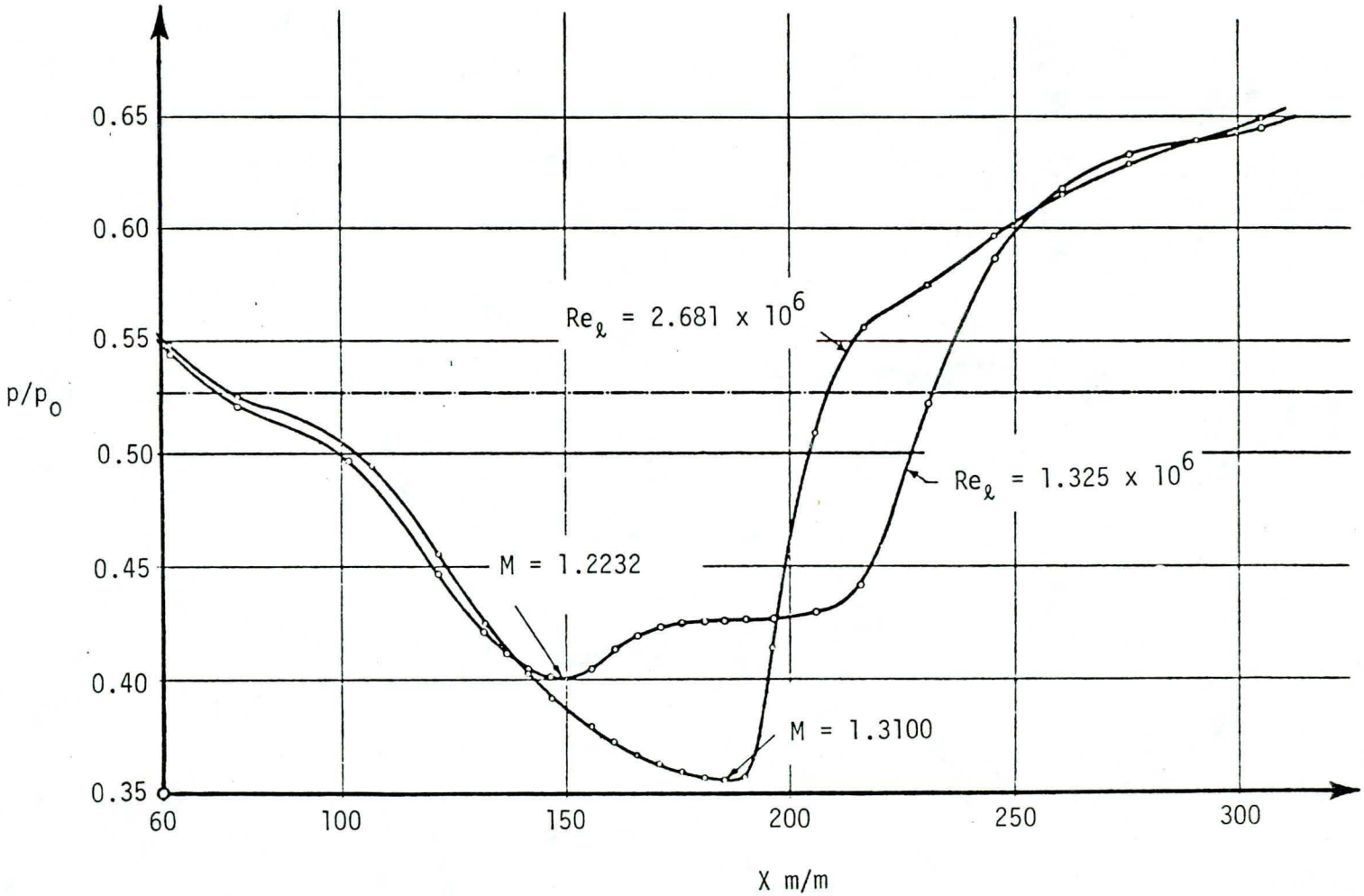

0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
p/p_o
60
100
150
200
250
300
X m/m
Re_ℓ = 2.681 x 10^6
Re_ℓ = 1.325 x 10^6
M = 1.2232
M = 1.3100

FIG. 1·5

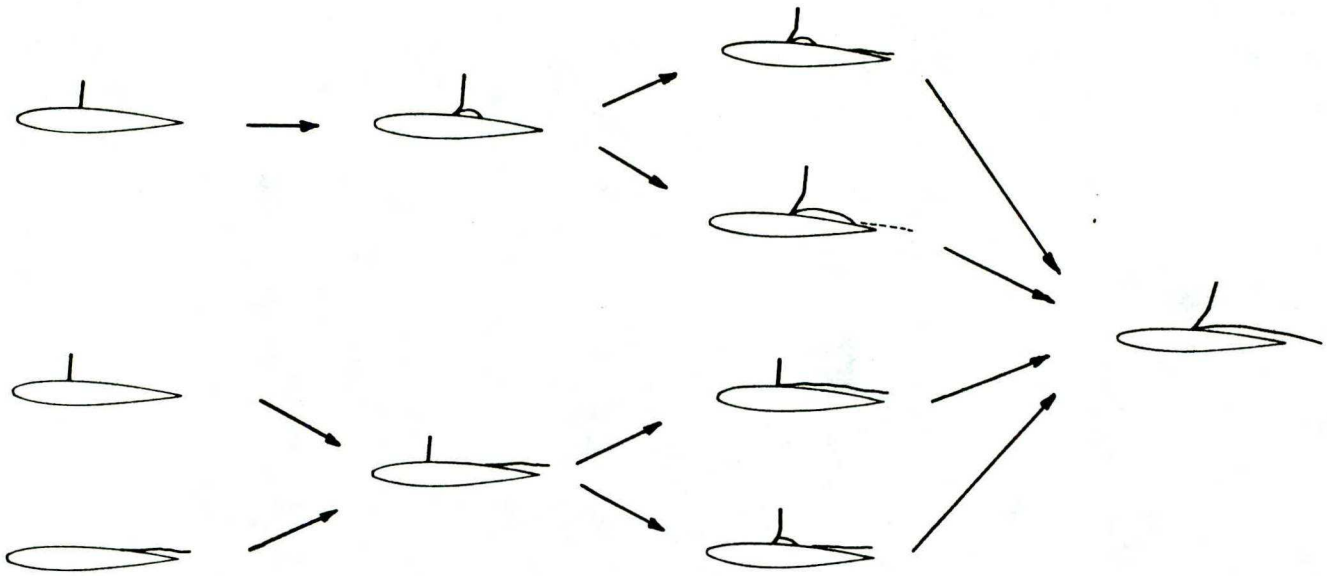
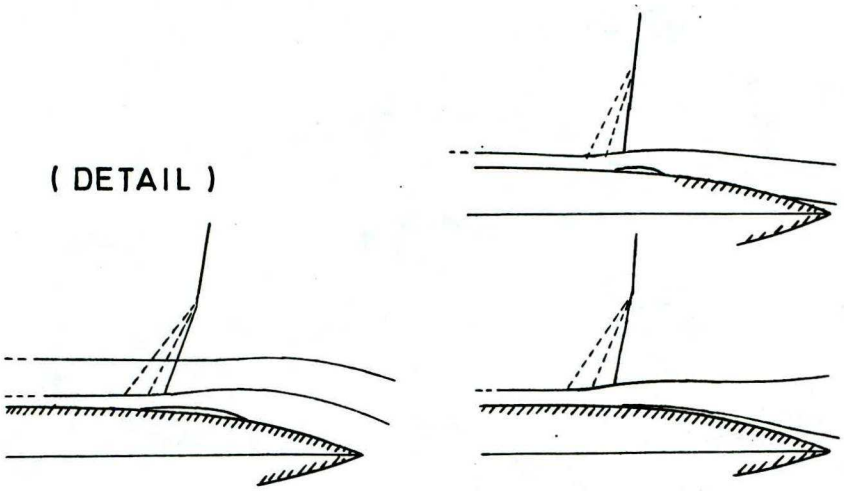


FIG. 1·6 a



sans séparation de fuite

avec séparation de fuite

FIG. 1·6 b

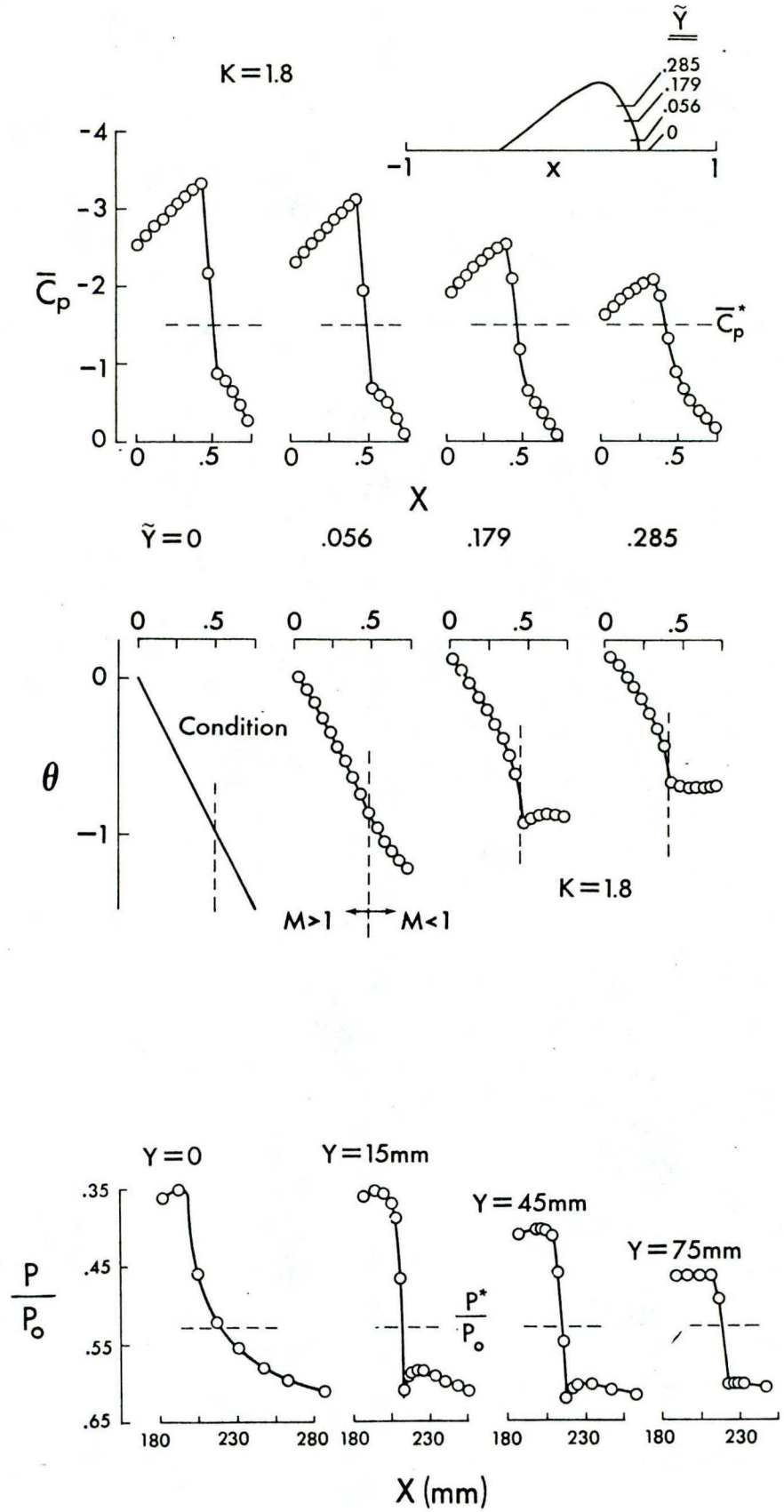

K=1.8
Ỹ
.285
.179
.056
0
-1
x
1
-4
-3
-2
-1
0
$\bar{C}_p$
$\bar{C}_p^*$
0
.5
X
Ỹ=0
.056
.179
.285
θ
Condition
M>1
M<1
K=1.8
Y=0
Y=15mm
Y=45mm
Y=75mm
.35
.45
.55
.65
P/P₀
P*/P₀
180
230
280
X (mm)

FIG. 1·7

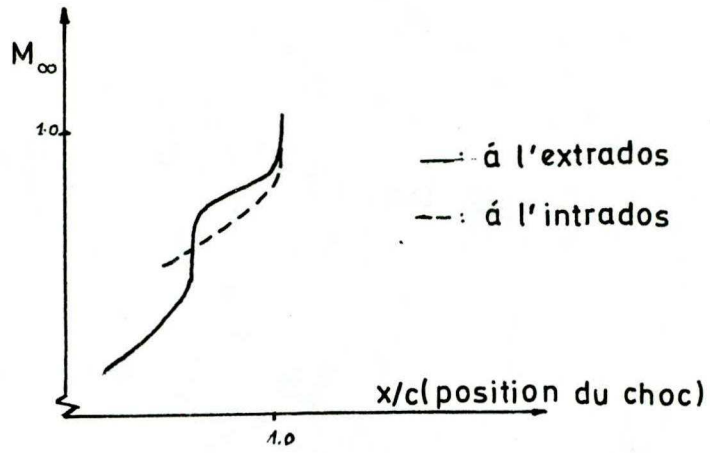

M∞
1.0
—: á l'extrados
--: á l'intrados
x/c(position du choc)
1.0

FIG. 1.8

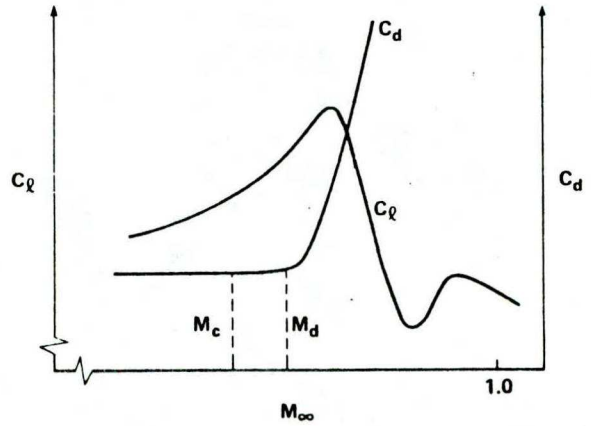

Cd
Cℓ
Cℓ
Cd
Mc
Md
1.0
M∞

FIG. 1.9

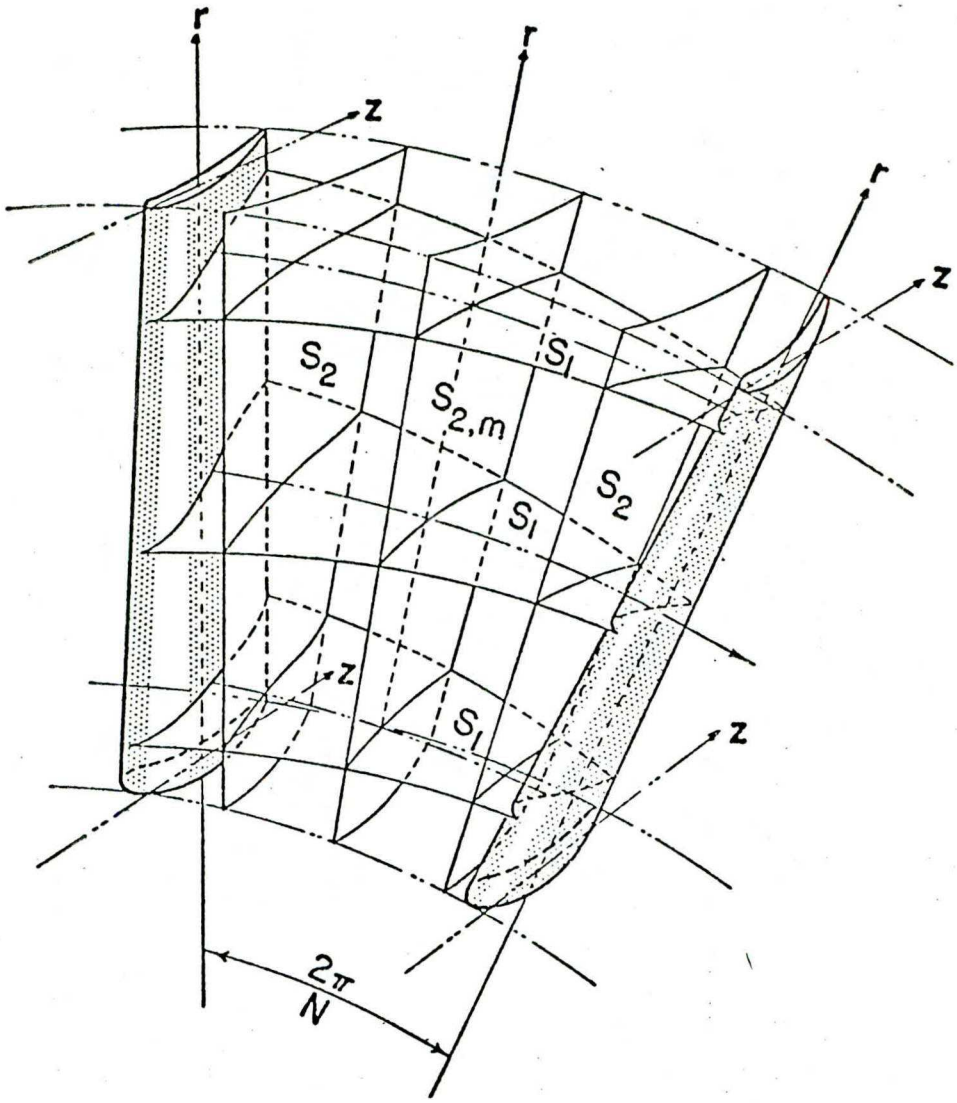


FIG. 1·10

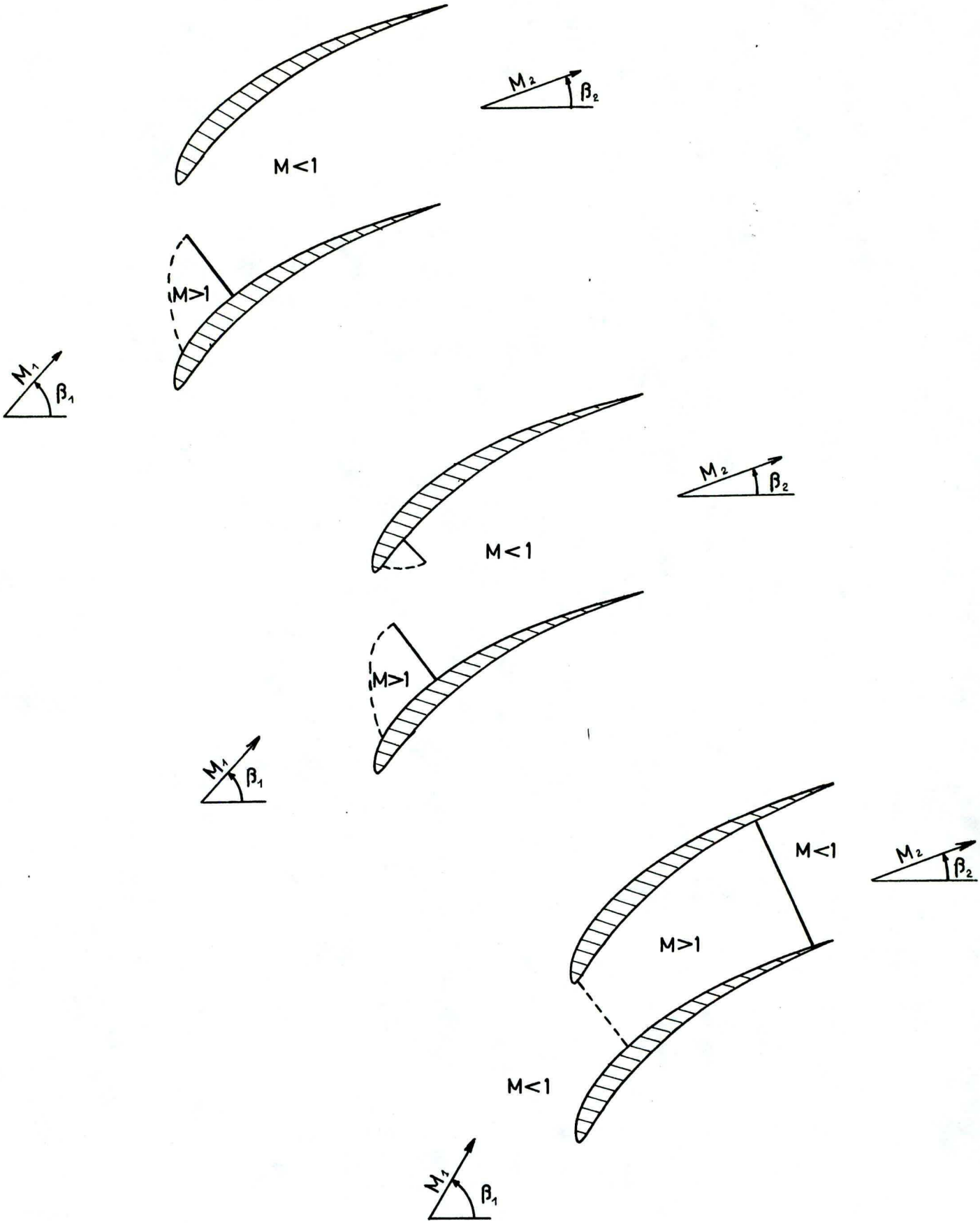
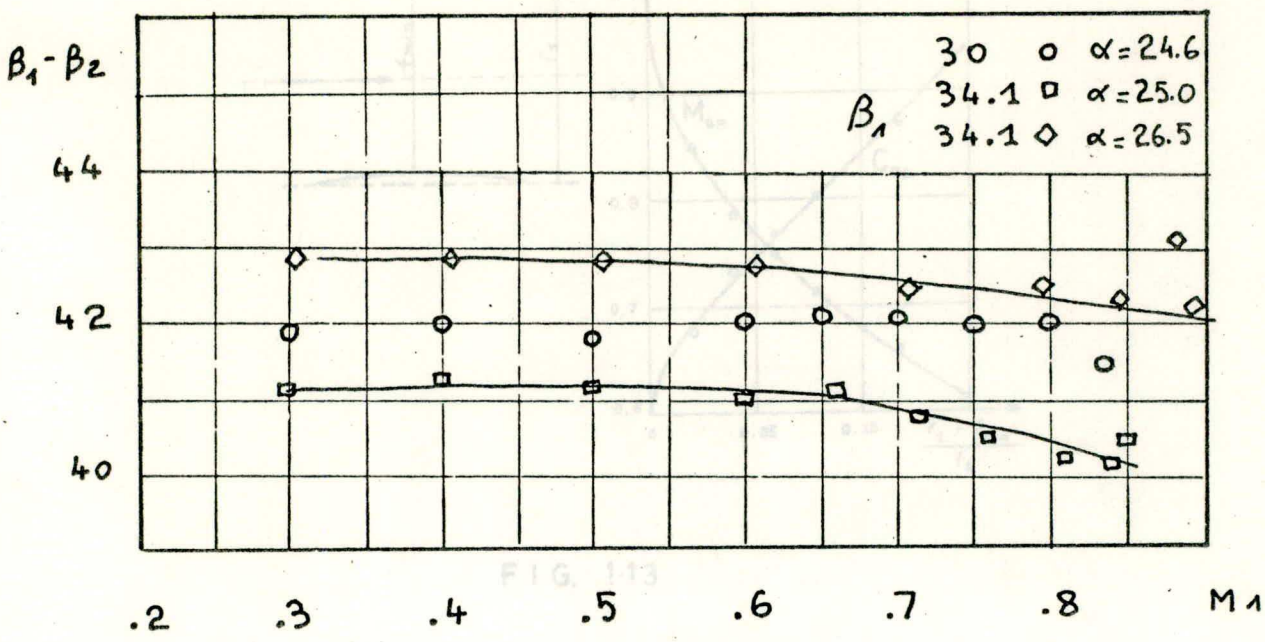
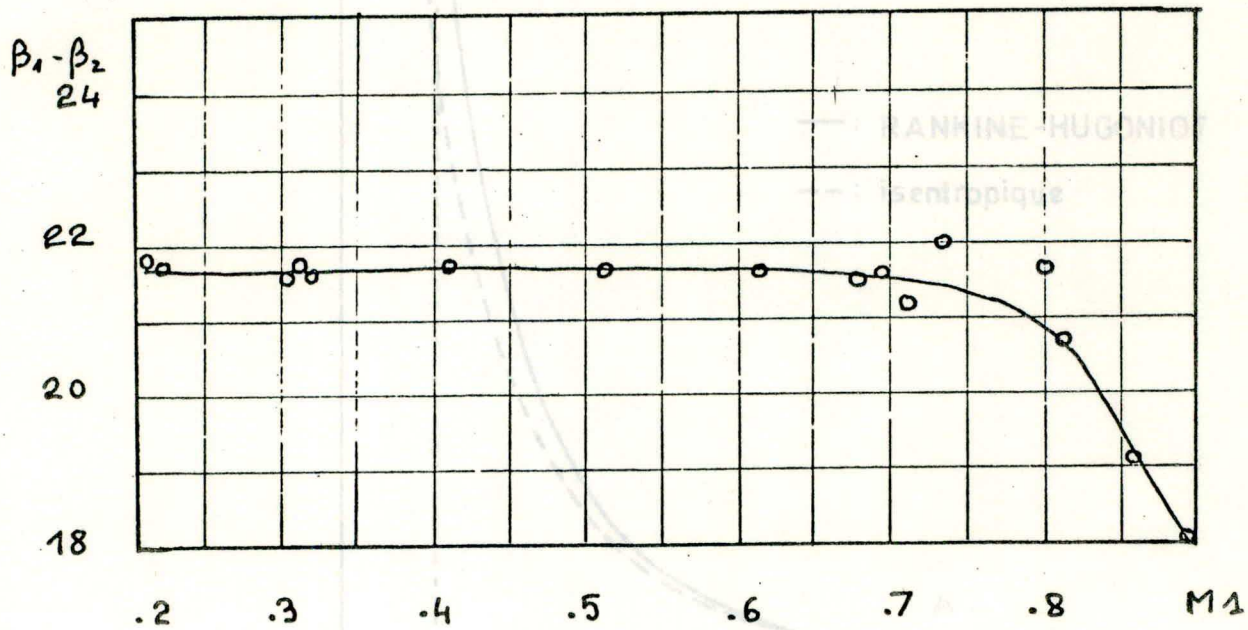


FIG. 1·11



(a) aube T1 (18 A_6 I_{4b}) 08 $c/g = 1.5$



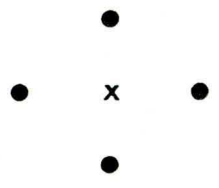
(b) aube 65 (12 A_{10}) 10 $c/g = 1$ $\beta_1 = 45°$

$\alpha = 16,5°$

FIG. 1·12

EQUATION DE LAPLACE : différences centrées

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$



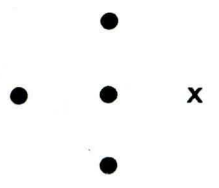
$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

explicite

EQUATION DES ONDES : différences décentrées amont

$$\phi_{xx} - c^2 \phi_{yy} = 0$$

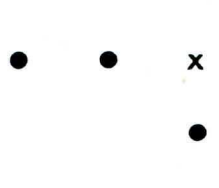
explicite



$$\frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} - c^2 \frac{\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Critère de stabilité $\frac{\Delta x}{\Delta y} \leq \frac{1}{c}$

implicite



$$\frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} - c^2 \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

(pas de limite de stabilité)

FIG. 2·1

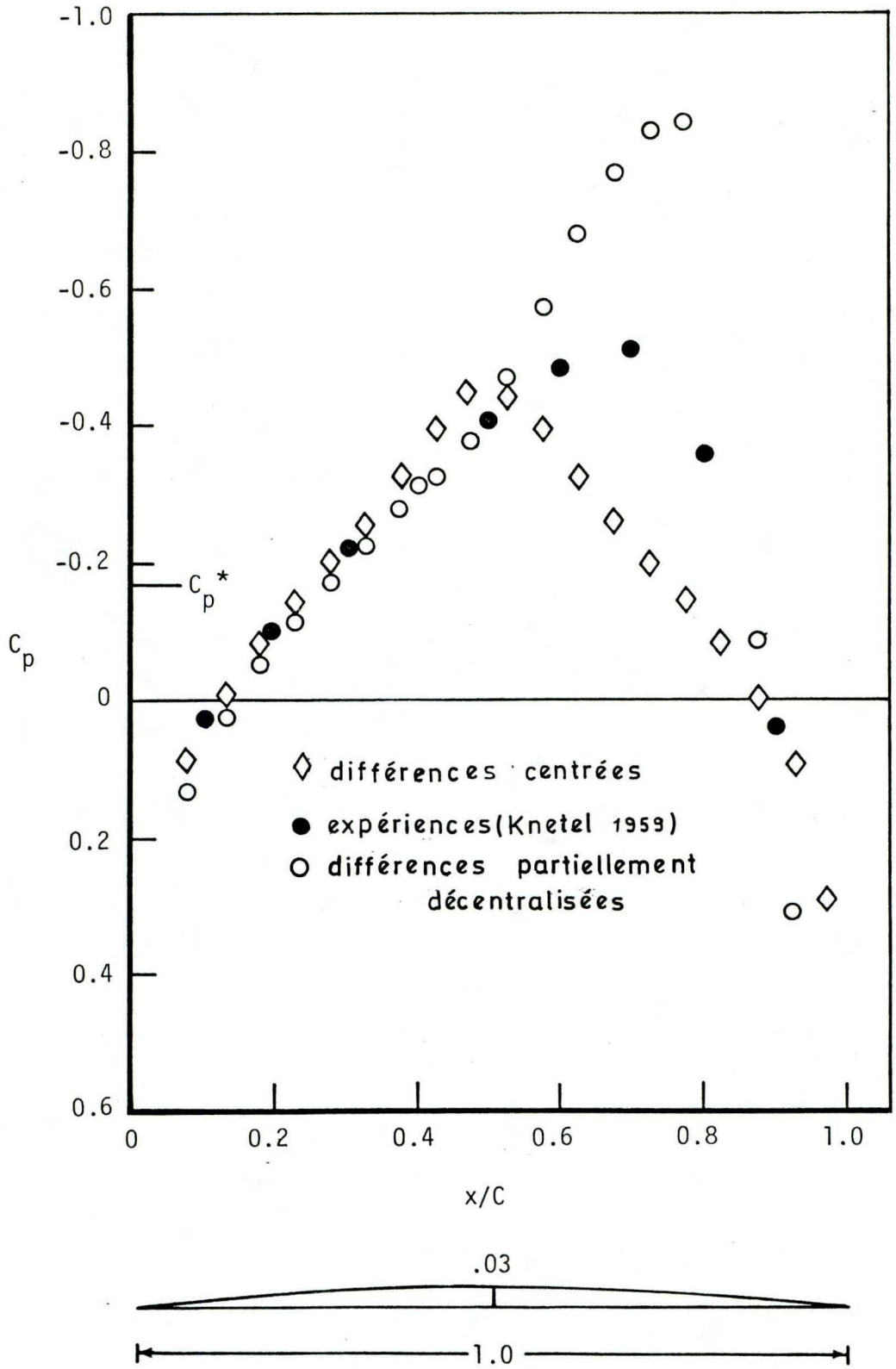
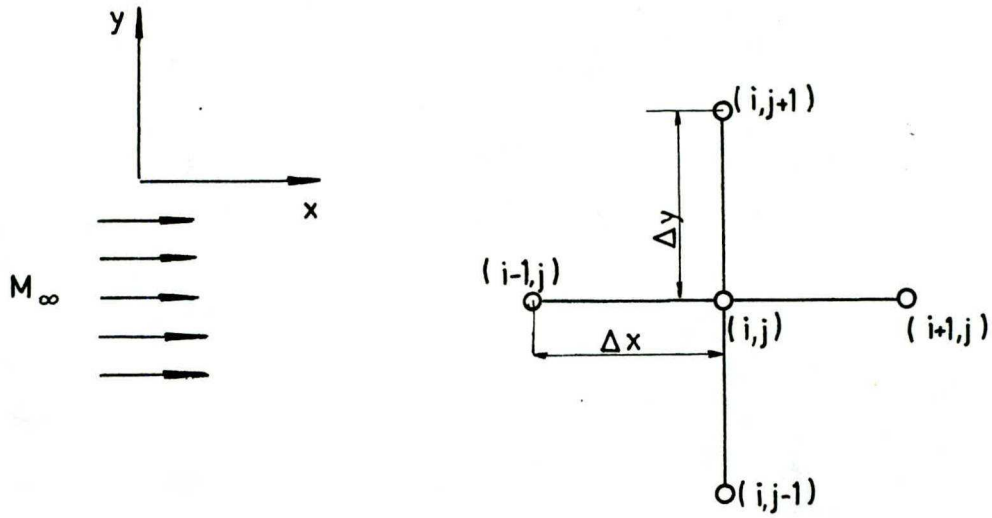
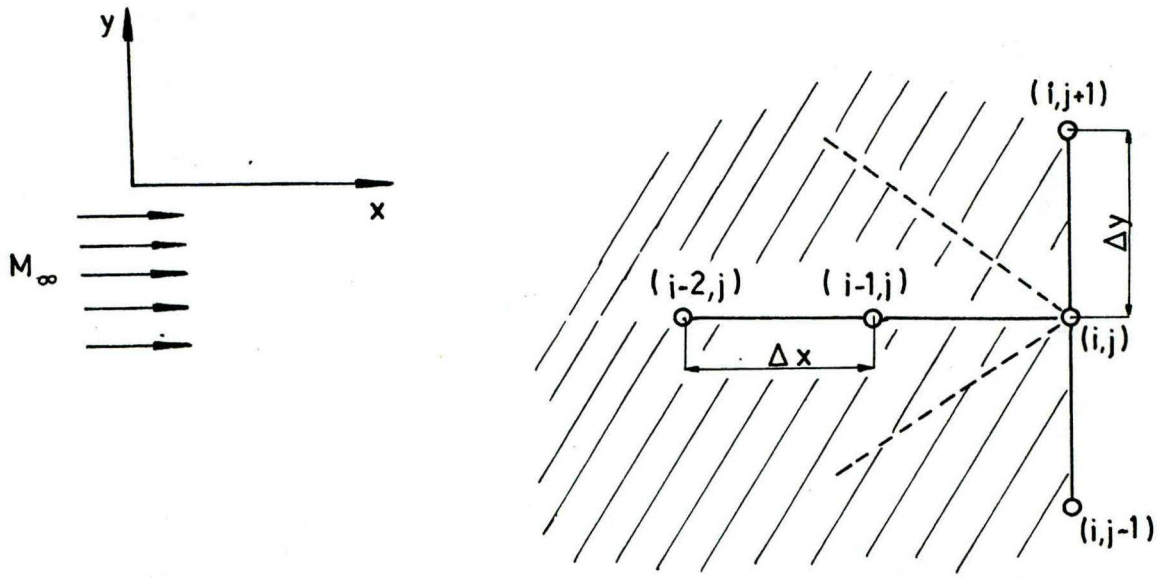

-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
C_p
C_p*
0
0.2
0.4
0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x/C
différences centrées
expériences(Knetel 1959)
différences partiellement décentralisées
.03
1.0

FIG. 2·2

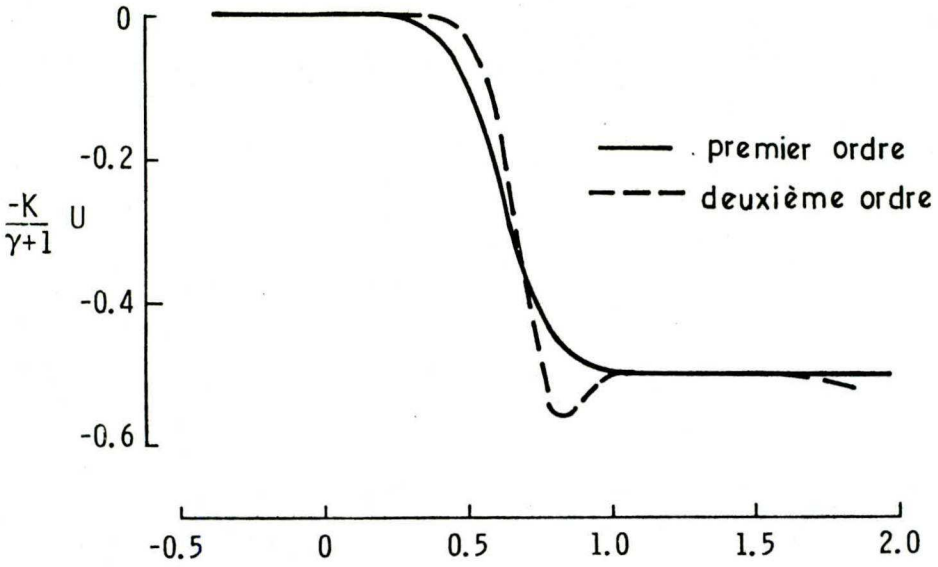




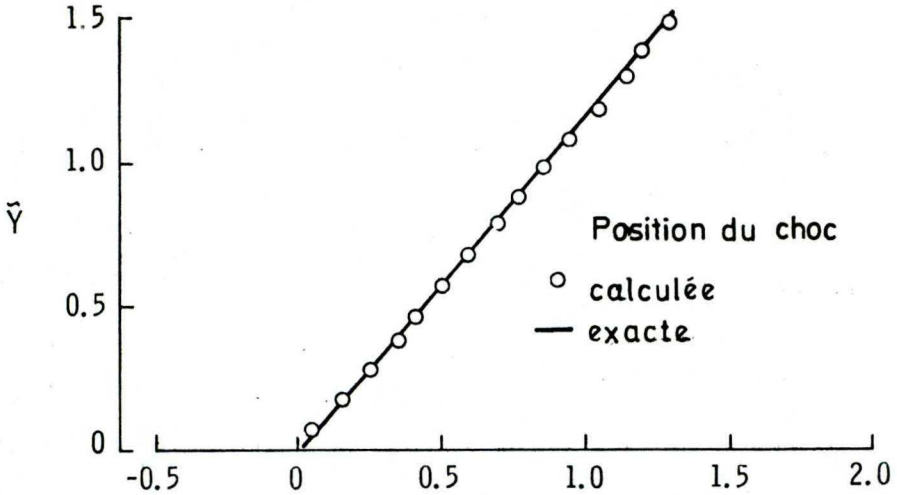
- - - - - - Lignes de Mach délimitant le domaine de dépendance physique du noeud (i,j)

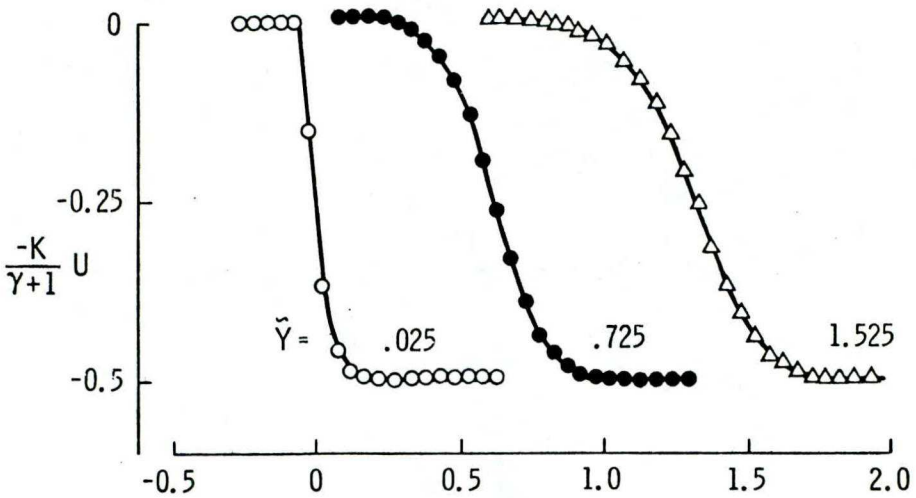
Domaine de dépendance numérique

F I G. 2·3


0
-0.2
-0.4
-0.6
$\frac{-K}{\gamma+1}$ U
premier ordre
deuxième ordre
-0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0

F I G. 2·4


1.5
1.0
0.5
0
$\tilde{Y}$
Position du choc
calculée
exacte
-0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0


0
-0.25
-0.5
$\frac{-K}{\gamma+1}$ U
$\tilde{Y}$ =
.025
.725
1.525
-0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0

F I G. 2·5

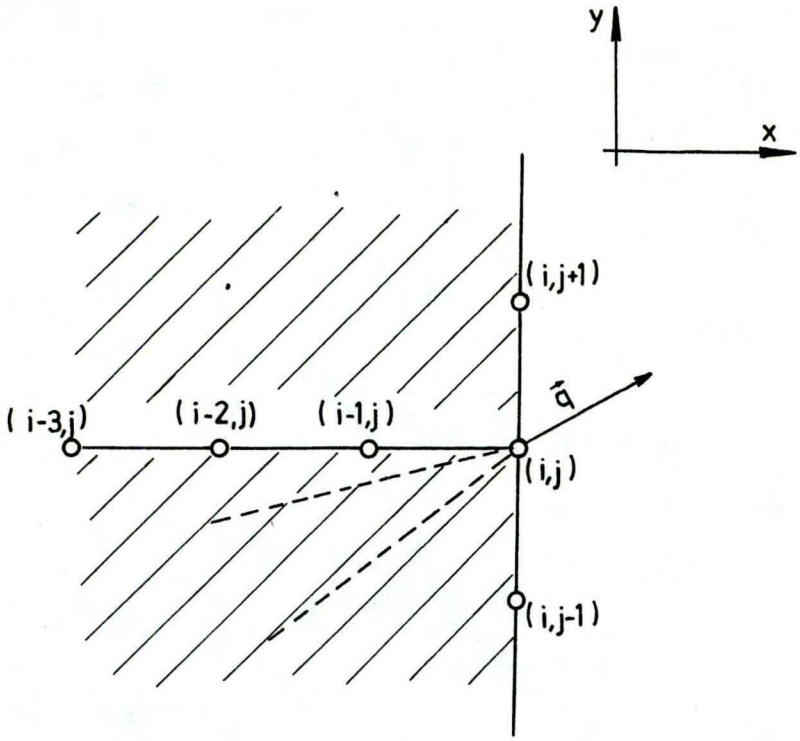


FIG. 2·6

— — — — Lignes de Mach délimitant le domaine de dépendance physique du noeud (i,j)

Domaine de dépendance numérique du noeud (i,j)

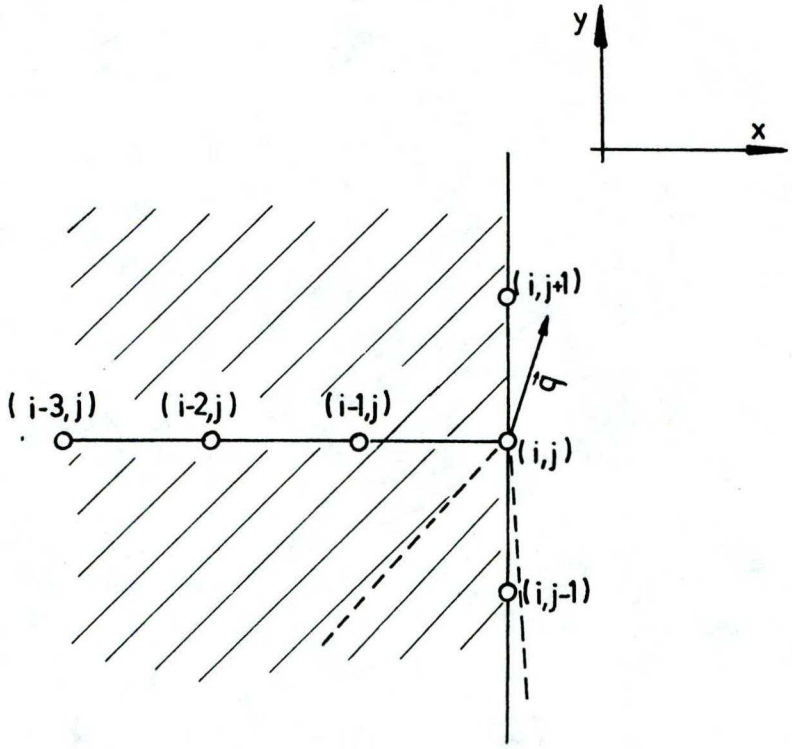


FIG. 2·7

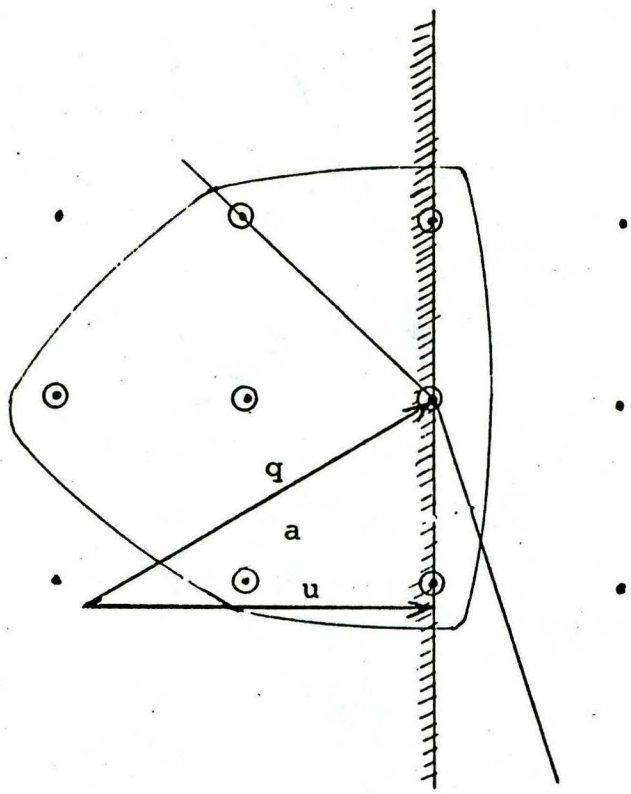


FIG. 2·8 a

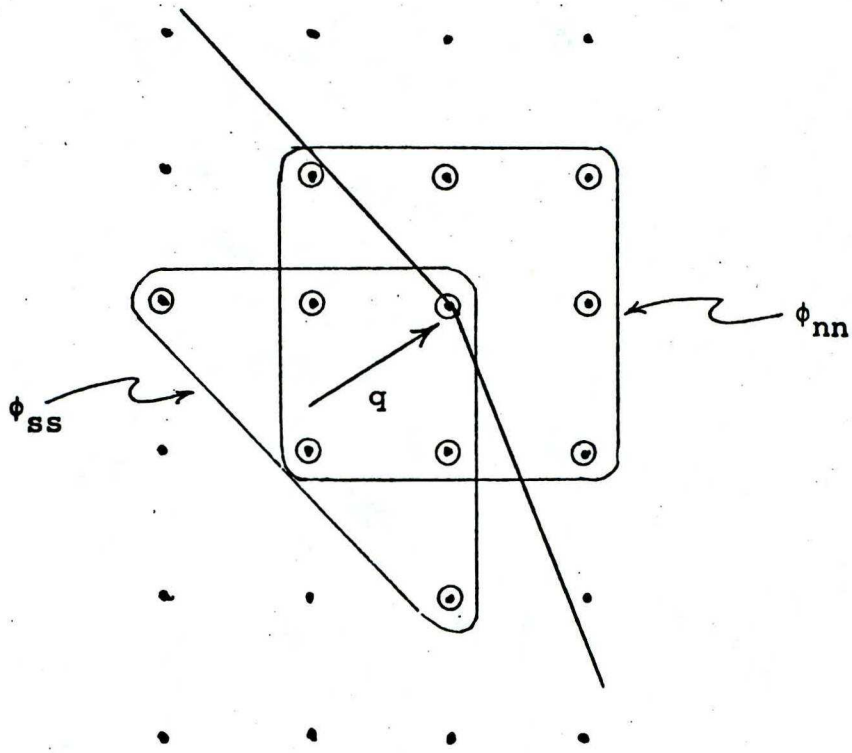


FIG. 2·8 b

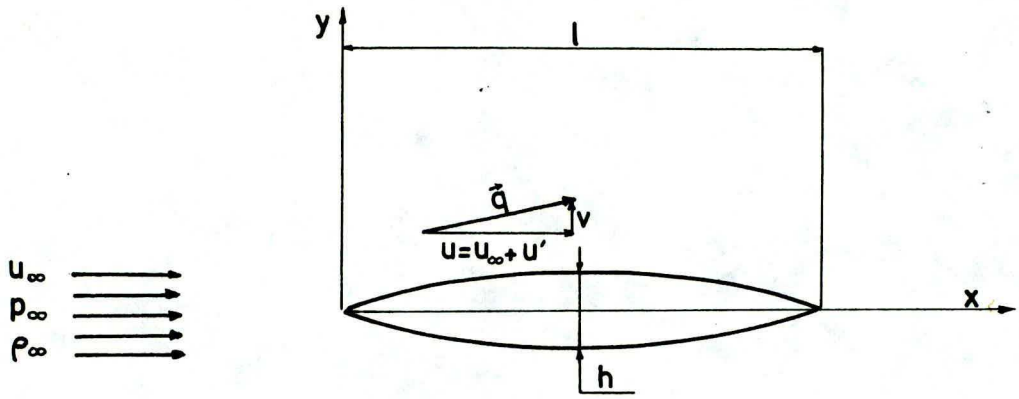


FIG. 3·1

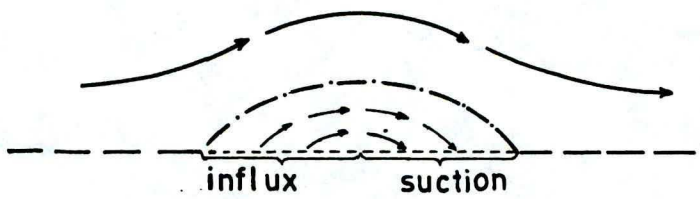


FIG. 3·2

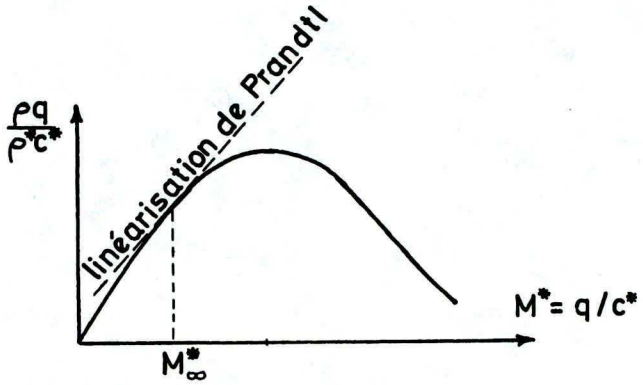


FIG. 3·3

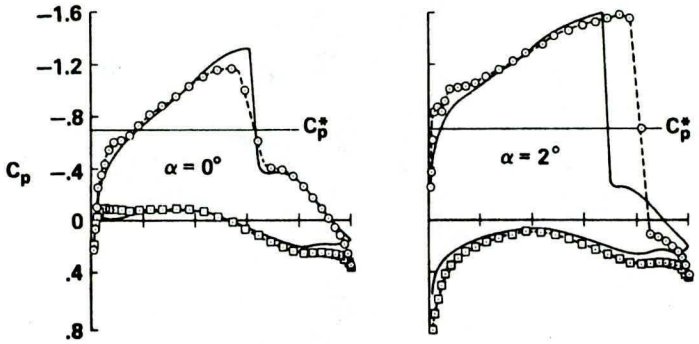


FIG. 3·4 a t =1.69

--o----□--: petites perturbations

————: exacte(euler), Magnus & Yoshihara

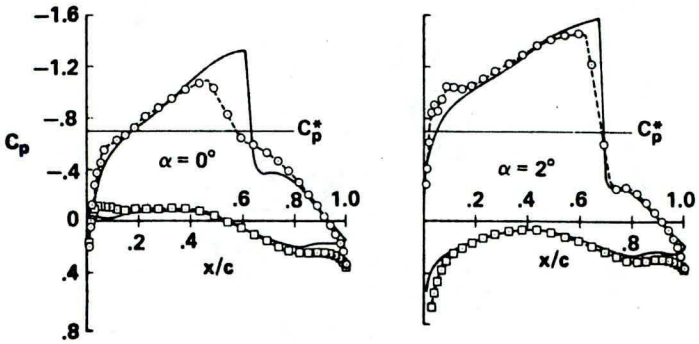


FIG. 3·4 b t = 2.

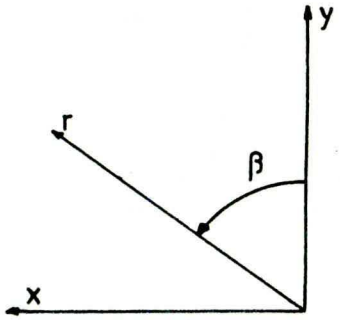


FIG. 4·1

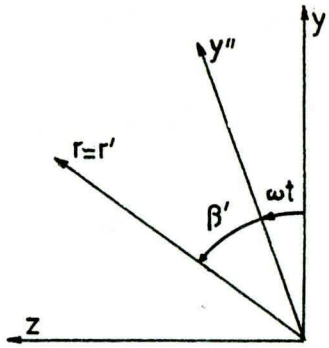


FIG. 4·2

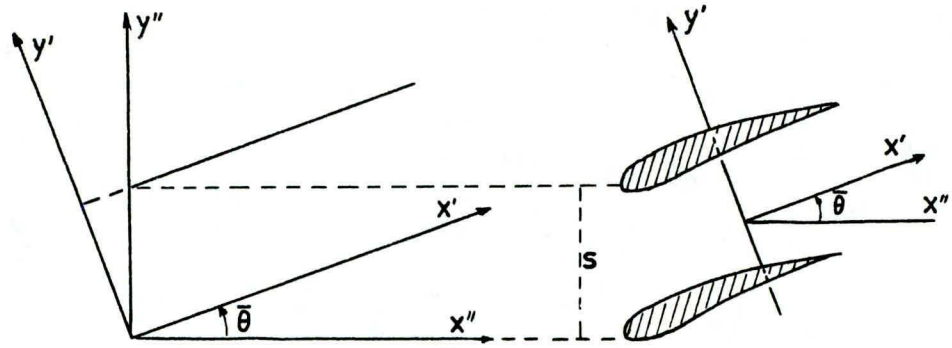


FIG. 4·3

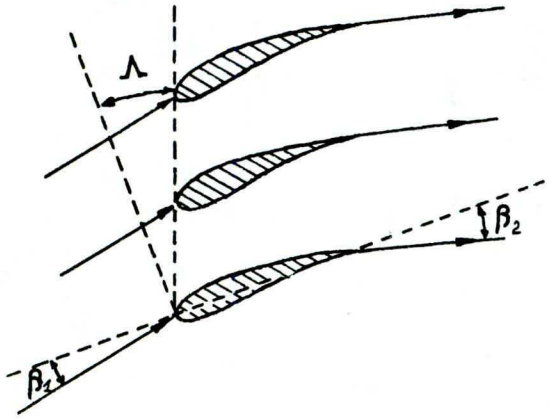


FIG. 4·4

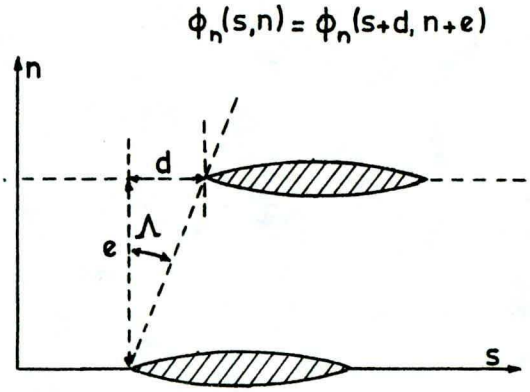


FIG. 4·5

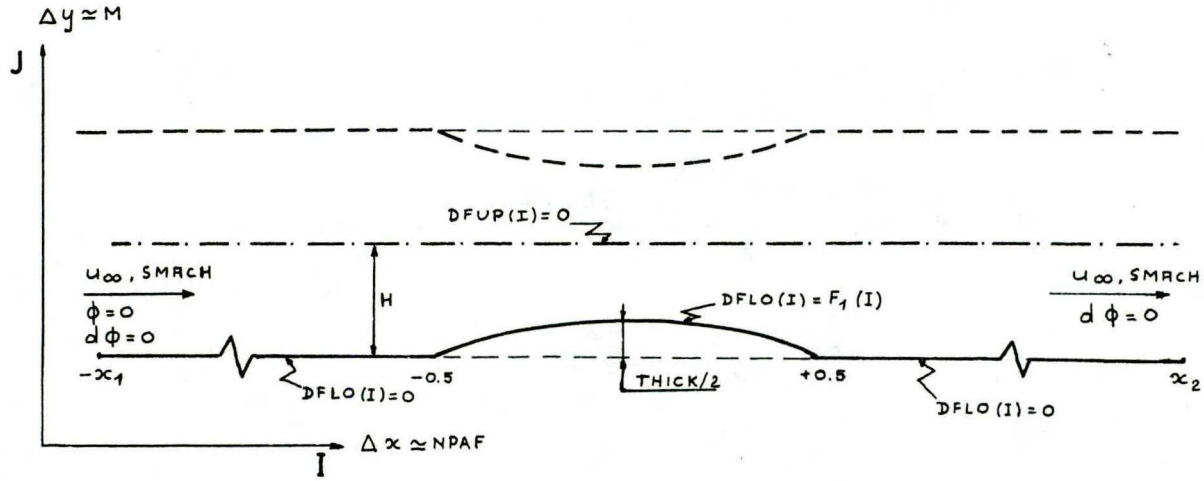

Δy ≃ M
J
DFUP(I) = 0
u∞, SMACH
φ = 0
dφ = 0
H
DFLO(I) = F1 (I)
u∞, SMACH
dφ = 0
-x1
DFLO(I) = 0
-0.5
THICK/2
+0.5
DFLO(I) = 0
x2
Δx ≃ NPAF
I

FIG. 4·6

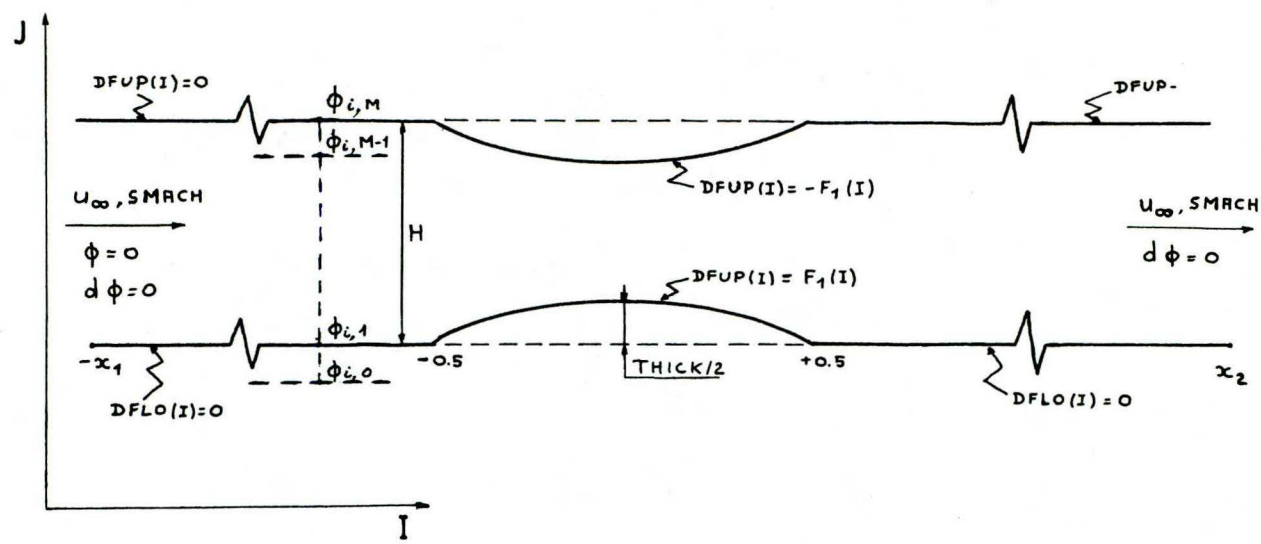

J
DFUP(I)=0
φi,M
DFUP-
φi,M-1
DFUP(I)= -F1 (I)
u∞, SMACH
φ = 0
dφ = 0
H
u∞, SMACH
dφ = 0
DFUP(I) = F1 (I)
φi,1
-x1
φi,0
-0.5
THICK/2
+0.5
x2
DFLO(I)=0
DFLO(I) = 0
I

FIG. 4·7

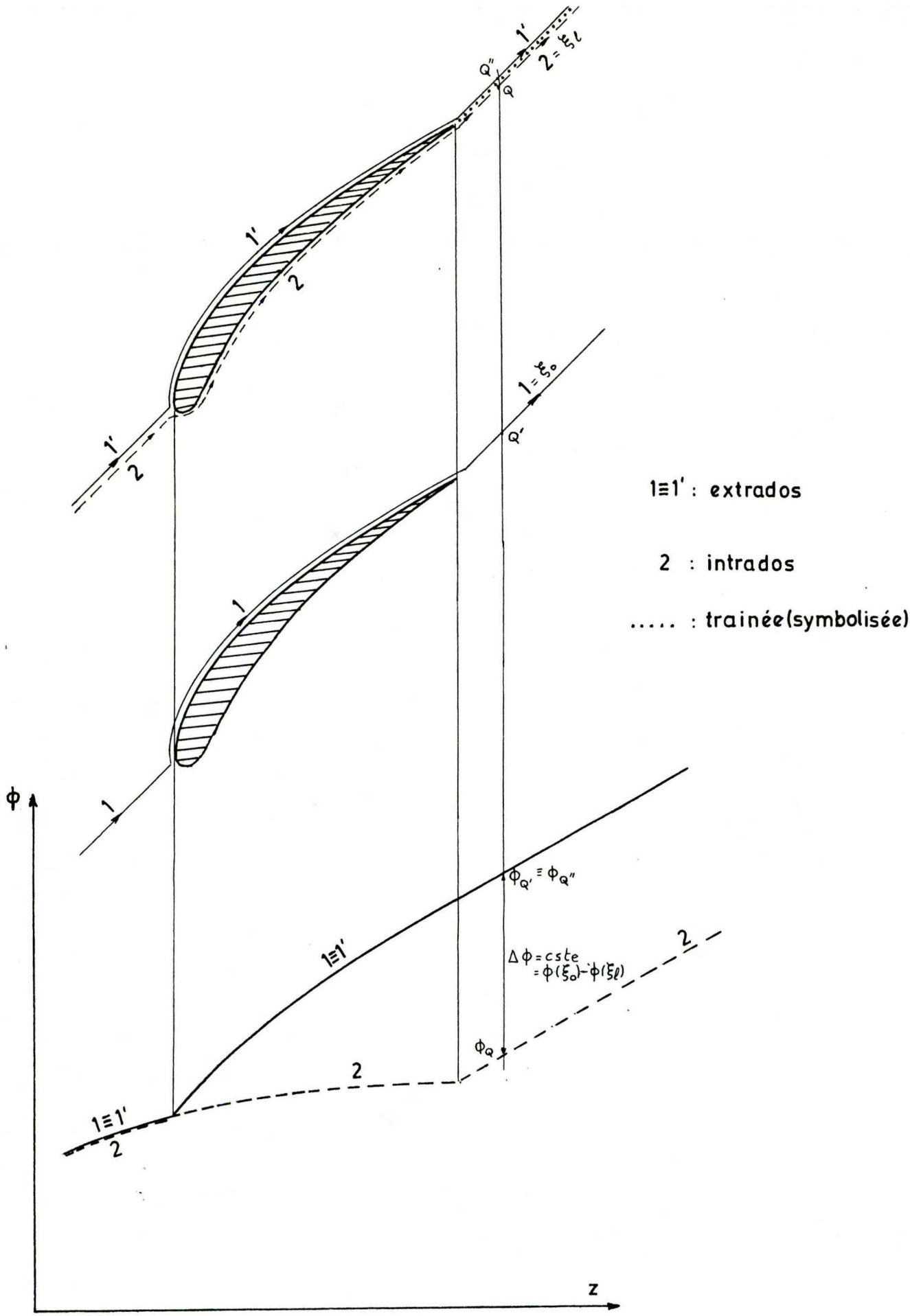

1'
2 = ξ_l
Q''
Q
1'
2
1 = ξ_0
Q'
1'
2
1
1
φ
φ_Q' ≡ φ_Q''
1≡1'
Δφ = cste
= φ(ξ_0) − φ(ξ_l)
2
φ_Q
2
1≡1'
2
z
1≡1' : extrados
2 : intrados
..... : trainée (symbolisée)

FIG. 4·8 a

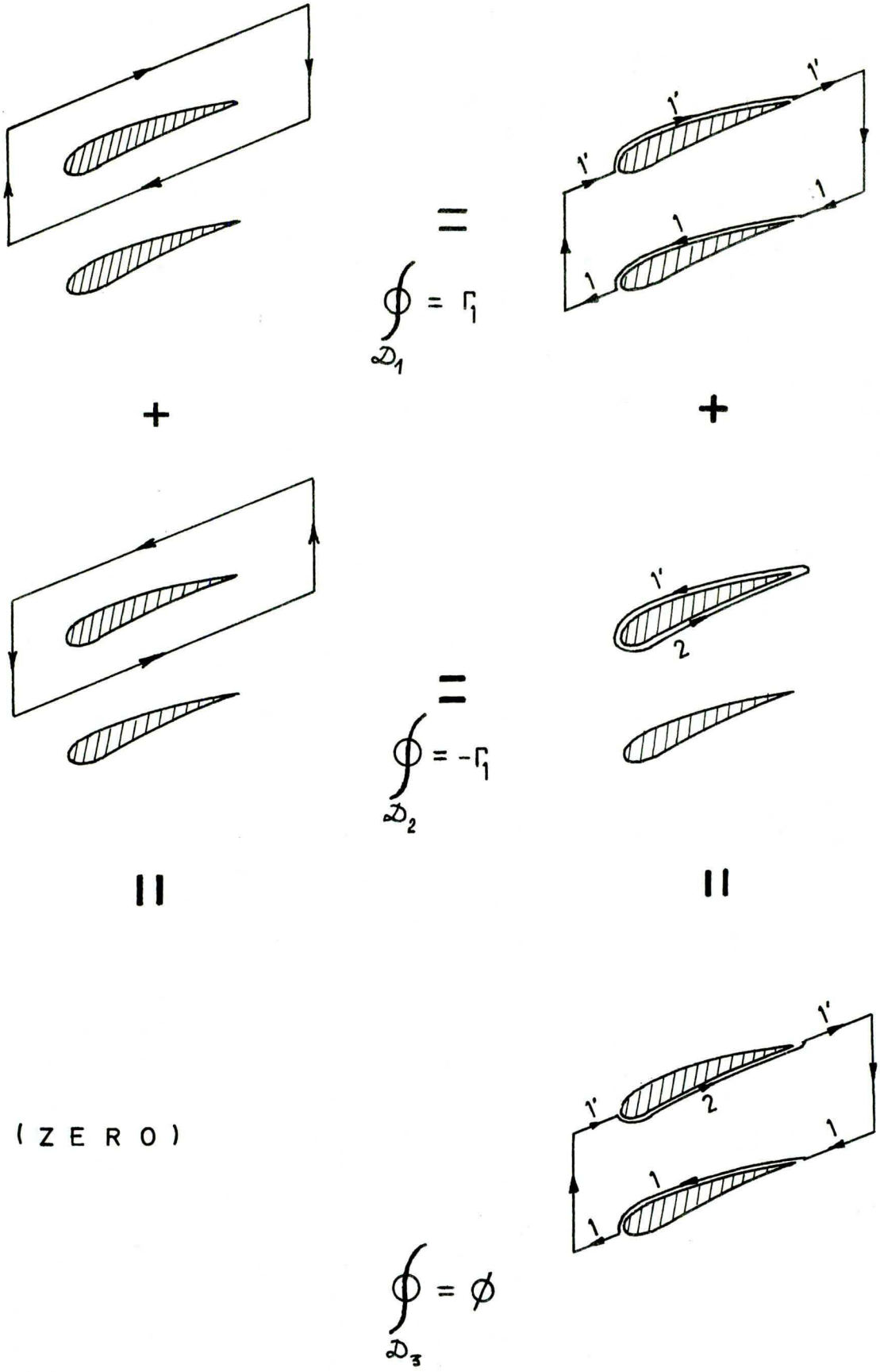

1'
1'
1'
1
1
1
=
$\oint_{\mathcal{D}_1} = \Gamma_1$
+
+
1'
2
=
$\oint_{\mathcal{D}_2} = -\Gamma_1$
||
||
1'
1'
2
1
1
1
(ZERO)
$\oint_{\mathcal{D}_3} = \emptyset$

FIG. 4·8 b

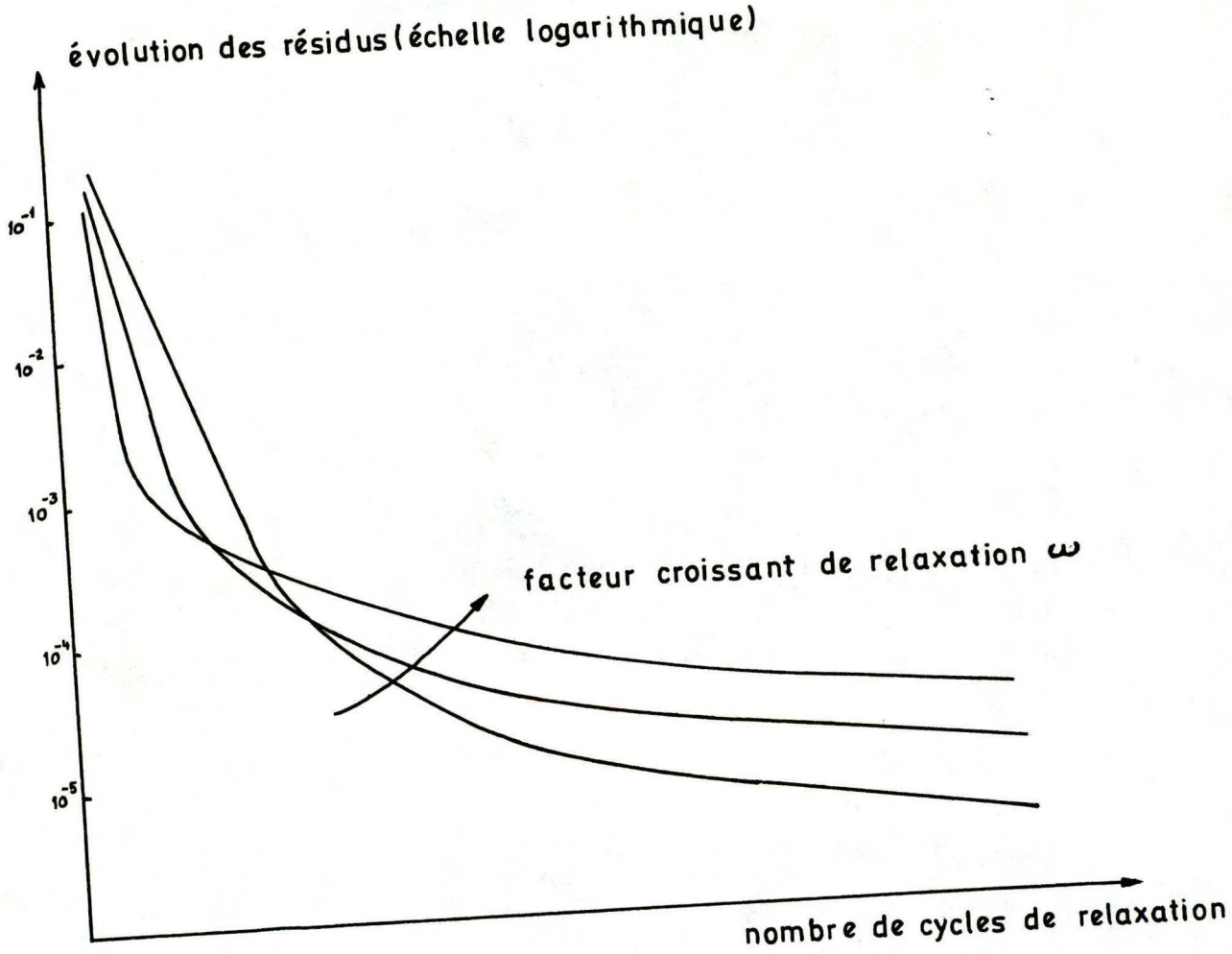

évolution des résidus (échelle logarithmique)
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
facteur croissant de relaxation ω
nombre de cycles de relaxation

FIG. 4-9

À CONSULTER
SUR PLACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00289075 2