Titre: Title:	Coincidence de carrés noirs sur une grille quadrillée m x n
Auteurs: Authors:	Gilles Deslauriers
Date:	1979
Type:	Rapport / Report
Référence: Citation:	Deslauriers, G. (1979). Coincidence de carrés noirs sur une grille quadrillée m x n. (Rapport technique n° EP-R-79-06). https://publications.polymtl.ca/5961/

UT TENSIO SIC VIS

MATHÉMATIQUES

Rapport Technique EP79-R-6

Classification: Library of Congress no

COINCIDENCE DE CARRES NOIRS SUR UNE GRILLE QUADRILLEE $m \times n$

GILLES DESLAURIERS

Février 1979

Ecole Polytechnique de Montréal

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

COINCIDENCE DE CARRES NOIRS SUR UNE GRILLE QUADRILLEE $m \times n$

par

GILLES DESLAURIERS

I- INTRODUCTION

Sur une grille quadrillée formée de $m \times n$ carrés, m en hauteur et n en longueur, quelques-uns des carrés sont noircis et d'autres laissés blancs.

On peut représenter une telle grille de $m \times n$ carrés noirs et blancs comme une suite de n vecteurs colonnes $V_1^T, V_2^T, \ldots, V_n^T$ où V_i pour $i = 1,2,\ldots,n$ appartient à l'ensemble E^m; E^m étant le produit cartésien de l'ensemble $\{0,1\}$, m fois avec lui-même. Dans cette représentation, la composante 1 d'un vecteur indiquera un carré noir et la composante 0 un carré blanc.

On dira que deux colonnes consécutives sont liées si le produit scalaire des vecteurs représentant ces colonnes est non-nul. On définira un quasi-agrégat comme un ensemble de colonnes liées consécutivement et si le nombre de colonnes liées consécutivement est k, on dira que le quasi-agrégat est de taille k.

Nous voulons dénombrer les différents quasi-agrégats de taille k. Nous donnerons une première relation permettant de calculer ce nombre. Un peu plus loin dans le texte, nous tiendrons compte du nombre t, $(k \leqslant t \leqslant km)$, de carrés noirs dans un quasi-agrégat de taille k. Nous donnerons une relation permettant le calcul du nombre de quasi-agrégats différents de taille k le calcul du nombre ayant t carrés noirs.

Le cas $m = 2$ est en partie traité dans le livre de S.A. Roach [1] sur le dénombrement d'agrégats aléatoires, mais on ne trouve pas de relation simple donnant le nombre d'agrégats différents de taille k. Un agrégat sur une grille est constitué en reliant entre eux les carrés noirs adjacents, soit horizontalement, soit verticalement. Un agrégat est un quasi-agrégat mais l'inverse est faux. Dans le cas $m = 2$, c'est la même chose, mais pour $m > 2$ il peut y avoir chevauchement d'agrégats, ce qui explique la différence entre les deux termes.

II- NOTATION

Comme nous l'avons précédemment indiqué, une grille formée de $m \times n$ carrés dont certains sont noircis peut être vue comme une suite de n vecteurs colonnes de E^m. Nous pouvons définir d'une manière précise les différents quasi-agrégats que nous dénombrerons par la suite.

Définitions: 1) On désignera par $A(k)$ l'ensemble des quasi-agrégats de taille k, c'est-à-dire

$$A(k) = \{V_1, V_2, \ldots, V_k \mid V_i \cdot V_{i+1} \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,\ldots,k-1\}.$$

La cardinalité de cet ensemble sera notée par $a(k)$.

2) L'ensemble $A_{ij}(k)$ est constitué des quasi-agrégats de taille k dont l'extrémité gauche a i carrés noirs et celle de droite j carrés noirs $(1 \leqslant i \leqslant m\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$. On notera la cardinalité de cet ensemble par $a_{ij}(k)$.

3) L'ensemble des quasi-agrégats de taille k ayant t carrés noirs $(k \leqslant t \leqslant mk)$ sera noté $A(k,t)$ et sa cardinalité par $a(k,t)$.

4) Finalement, $A_{ij}(k,t)$ est l'ensemble des quasi-agrégats de taille k ayant t carrés noirs ($k \leq t \leq mk$) dont l'extrémité gauche a i carrés noirs et celle de droite j carrés noirs. La cardinalité de cet ensemble sera notée $a_{ij}(k,t)$.

Nous voulons déterminer les quantités $a(k)$ et $a(k,t)$. Il est immédiat que les ensembles $A_{ij}(k)$ constituent une partition de $A(k)$ de sorte que $a(k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(k)$. Les ensembles $A(k,t)$ forment également une partition de $A(k)$ et $a(k) = \sum_{t=k}^{mk} a(k,t)$. Les ensembles $A_{ij}(k,t)$ constituent, quant à eux, une partition de $A(k,t)$ de sorte que $a(k,t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(k,t)$.

Nous désignerons par $M(k)$ et $M(k,t)$ les matrices dont les éléments sont respectivement $a_{ij}(k)$ et $a_{ij}(k,t)$.

III- CARDINALITE DE A(k)

Si un vecteur V appartenant à E^m est à l'extrémité droite d'un quasi-agrégat et que celui-ci contienne r carrés noirs, on pourra augmenter la taille de ce quasi-agrégat de 1 si on ajoute un vecteur U de E^m tel que $U \cdot V \neq 0$. Si on veut que ce nouveau quasi-agrégat se termine à droite par j carrés noirs, le nombre total de vecteurs U satisfaisant ces deux conditions est: $\binom{m}{j} - \binom{m-r}{j} = c_{rj}$. Notons par C la matrice $m \times m$ dont les éléments sont c_{rj}. On peut vérifier que le déterminant de cette matrice est (-1) élevé à la puissance $\frac{(m+1)(m+2)-10}{2}$. On peut démontrer:

Relation 1: Pour $k > 1$, $M(k) = M(k-1)\,C$ et $M(1) = \left(\binom{m}{i}\,\delta_{ij}\right)_{m \times m}$.

Cette relation permet de calculer $a_{ij}(k)$ et $a(k)$. On peut obtenir une autre relation pour le calcul des $a(k)$.

Relation 2: Pour $k > m$, on a

$$a(k) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+1+i}\,\lambda_i\,a(k+i-m)$$

où λ_i est la somme des mineurs principaux d'ordre $m-i$ de la matrice C.

Démonstration: Soit $\varphi(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice C. On sait par le théorème de Cayley-Hamilton, que $\varphi(C) = 0$ où $\varphi(C) = \sum_{i=0}^{m} b_i C^i$, $b_m = (-1)^m$ et b_i est égal à $(-1)^i$ fois la somme des mineurs principaux d'ordre $m-i$ de la matrice C. Nous pouvons écrire que

$$C^m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+1}\,b_i C^i$$

et en multipliant à gauche par la matrice $M(k-m)$, $(k > m)$ on a $M(k-m)\,C^m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+1}\,b_i M(k-m)\,C^i$. La relation précédente donne $M(k) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+1}\,b_i M(k-m+i)$. La somme des éléments de la matrice $M(k)$ est:

$$a(k) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+1+i}\,\lambda_i\,a(k-m+i)$$

ce qui termine la démonstration.

Pour $k \leqslant m$, on doit utiliser la première relation, mais pour $k > m$, la deuxième relation permet un calcul plus rapide de $a(k)$.

Par exemple, on peut vérifier que pour $m = 4$,

$$a(1) = 2^4-1 = 15 \quad , \quad a(2) = 175 \quad , \quad a(3) = 2{,}129 \quad \text{et} \quad a(4) = 24{,}793$$

et
$$a(k) = 11a(k-1) + 14a(k-2) - 5a(k-3) - a(k-4) \ .$$

Donnons également le résultat pour $m = 2$, ce qui permet de calculer les différents agrégats de taille k beaucoup plus facilement que dans le livre de S.A. Roach [1]

$$a(1) = 3 \quad , \quad a(2) = 7 \quad \text{et} \quad a(k) = 2a(k-1) + a(k-2) \ .$$

IV- CARDINALITE DE $A(k,t)$

Considérons un vecteur aléatoire V prenant ses valeurs dans E^m. La loi de ce vecteur aléatoire est

$$P\ [\{V|V\cdot V = i\}] = \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$$

pour $i = 0,1,2,\ldots,m$ où $p+q = 1$ et $0 < p < 1$. Ceci revient à noircir un carré avec une probabilité p et à le laisser blanc avec une probabilité q.

Soit une suite de vecteurs aléatoires indépendants et suivant la même loi citée plus haut, $V_0, V_1, \ldots, V_k, \ldots$ Nous dirons que V_1 et V_k sont les extrémités gauche et droite d'un quasi-agrégat aléatoire de taille k si $V_0\cdot V_1 = 0$, $V_i\cdot V_{i+1} \neq 0$ pour $i = 1,2,\ldots,k-1$ et $V_k\cdot V_{k+1} = 0$.

Nous noterons par

$$B(k) = \{V_0,V_1,\ldots,V_k,V_{k+1}|V_0\cdot V_1 = 0, V_i\cdot V_{i+1} \neq 0 \text{ pour } i = 1,2,\ldots,k-1, V_k\cdot V_{k+1} = 0\}$$

et par

$$B_{ij}(k) = \{V_0,V_1,\ldots,V_k,V_{k+1}|V_0\cdot V_1 = 0, V_1\cdot V_1 = i, V_s\cdot V_{s+1} \neq 0$$
$$\text{pour } s = 1,2,\ldots,k-1, V_k\cdot V_k = j, V_k\cdot V_{k+1} = 0\}$$

une partition de l'événement $B(k)$; leurs probabilités respectives seront $p_k = P[B(k)]$ et $p_{ij}(k) = P[B_{ij}(k)]$. Nous désignerons l'événement

$$\{V_0, V_1, \ldots, V_k | V_0 \cdot V_1 = 0, V_1 \cdot V_1 = i, V_s \cdot V_{s+1} \neq 0 \text{ pour } s = 1,2,\ldots,k-1 \text{ et } V_k \cdot V_k = j\}$$

par $C_{ij}(k)$ et la matrice dont les éléments sont $(p_{ij}(k))$ par $P(k)$. On peut maintenant démontrer:

<u>*Relation 3:*</u> Pour $k > 1$, $P(k) = P(k-1)\, D$ et $P(1) = \left(\delta_{ij}\binom{m}{i} p^i q^{m+i}\right)_{m \times m}$ où D est une matrice $m \times m$ dont les éléments sont $d_{ji} = c_{ji} p^i q^{m-j}$; c_{ji} fût défini précédemment.

<u>*Démonstration:*</u> Nous allons montrer que:

$$p_{ri}(k) = \sum_{j=1}^{m} c_{ji} p^i q^{m-j} p_{rj}(k-1) .$$

En effet,

$$\begin{aligned} P[B_{ri}(k)] &= \sum_{j=1}^{m} P[C_{rj}(k-1) \cap \{V_k, V_{k+1} | V_k \cdot V_{k-1} \neq 0, V_k \cdot V_k = i, V_k \cdot V_{k+1} = 0\}] \\ &= \sum_{j=1}^{m} P[C_{rj}(k-1)]\; P[\{V_k, V_{k+1} | V_k \cdot V_{k-1} \neq 0, V_k \cdot V_k = i, \\ &\qquad V_k \cdot V_{k+1} = 0\} | C_{rj}(k-1)] . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$P[B_{rj}(k-1)] = P[C_{rj}(k-1)]\; P[V_k \cdot V_{k-1} = 0 | C_{rj}(k-1)] = q^j P[C_{rj}(k-1)]$$

et

$$\begin{aligned} & P[\{V_k, V_{k+1} | V_k \cdot V_{k-1} \neq 0, V_k \cdot V_k = i, V_k \cdot V_{k+1} = 0\} | C_{rj}(k-1)] \\ &= P[\{V_k, V_{k+1} | V_k \cdot V_{k-1} \neq 0, V_k \cdot V_k = i, V_k \cdot V_{k+1} = 0\} | \\ &\qquad \{V_{k-1} | V_{k-1} \cdot V_{k-1} = j\}] \\ &= \left[\binom{m}{i} - \binom{m-j}{i}\right] p^i q^{m-i} q^i = c_{ji} p^i q^m \end{aligned}$$

d'où en remplaçant dans la deuxième égalité on a montré le résultat.

Cette formule permet de calculer p_k et $p_{ij}(k)$, mais on peut obtenir une autre relation pour p_k dont la démonstration est calquée sur celle de la relation 2.

Relation 4: Pour $k > m$, $p_k = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+i+1} d_i p_{k+i-m}$ où d_i est la somme des mineurs principaux d'ordre $m-i$ de la matrice D.

On peut vérifier que le déterminant de la matrice D est:

$$(-1)^{((m+1)(m+2)-10)/2} p^{m(m+1)/2} q^{m(m-1)/2} .$$

Par exemple, pour $m = 3$, on a comme relation

$$p_k = (pq^2 + 3p^2q + p^3)\, p_{k-1} + (p^3q^3 + 2p^4q^2)\, p_{k-2} - p^3q^3p_{k-3} \quad \text{pour} \quad k > 3$$

$$p_1 = pq^4(3 + 3pq + p^2q^2)$$

$$p_2 = p^2q^6(3 + 12p + 15p^2 + 6p^3 + p^4)$$

$$p_3 = p^3q^6\{3q^2 + p(12q^2 + 12q) + 9p^2(2q^2 + 4q + 1) + 3p^3(4q^2 + 13q + 6) + 3p^4(q^2 + 6q + 5) + 3p^5(q + 2) + p^6\}.$$

Le résultat pour $m = 2$ est:

$$p_k = (pq + p^2)\, p_{k-1} + p^3qp_{k-2} \quad \text{pour} \quad k > 2$$

$$p_1 = 2pq^2 + p^2q^2$$

$$p_2 = 2p^2q^4 + 4p^3q^4 + p^4q^4$$

Regardons maintenant, plus en détail, le coefficient de p_{k+i-m} dans la relation 4. Ce coefficient est un polynôme que nous noterons $Q_i(p,q)$ et qui vaut

$$Q_i(p,q) = (-1)^{1-i} \sum_{\substack{s=(i+1)i/2 \\ 1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_i\leqslant m}}^{m+i(i-1)/2} \Lambda_{j_1,j_2,\ldots,j_i}\, p^s q^{im-s}$$

où $s = j_1+j_2+\ldots+j_i$ et où $\Lambda_{j_1,j_2,\ldots,j_i}$ est le mineur principal $(j_1,j_2,\ldots,j_i)$ de la matrice C. On peut vérifier que

$$\begin{aligned} Q_m(p,q) &= (-1)^{1-m}\det(D) \\ &= (-1)^{(m-3)(m+2)/2}\, p^{(m^2+m)/2}\, q^{(m^2-m)/2} \end{aligned}$$

et

$$Q_1(p,q) = \sum_{j=1}^{m} \left[\binom{m}{j} - \binom{m-j}{j}\right] p^j q^{m-j} .$$

La relation 4 s'écrit en fonction des polynômes $Q_i(p,q)$:

$$p_k = \sum_{i=1}^{m} Q_i(p,q)\, p_{k-i} \quad \text{pour} \quad k > m \qquad (*)$$

Mais si nous utilisons la cardinalité des ensembles $A_{ij}(k,t)$, $a_{ij}(k,t)$ nous pouvons écrire

$$p_k = \sum_{t=k}^{mk} p^t q^{km-t} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} q^i a_{ij}(k,t)\, q^j \right\} \qquad (**)$$

pour $k = 2,3,\ldots$ et $p_1 = \sum_{t=1}^{m} p^t q^{m+t} a_{tt}(1,t)$. Les relations ** et * montrent que p_k est un polynôme en p et q où les coefficients des puissances de p et q donnent les nombres $a_{ij}(k,t)$ pour $i+j$ fixé. Notons $a_\ell(k,t) = \sum_{i+j=\ell} a_{ij}(k,t)$. En égalisant les coefficients de $p^t q^{km-t+\ell}$ dans * et **, on aura la relation 5.

<u>*Relation 5:*</u> Les nombres $a_\ell(k,t)$ pour $2 \leqslant \ell \leqslant 2m$ et

$$a(k,t) = \sum_{\ell=2}^{2m} a_\ell(k,t)$$

satisfont la relation

$$a_\ell(k,t) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{1-r} \sum_{\substack{s=(r+1)r/2 \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq m}}^{m+r(r-1)/2} \Lambda_{j_1, j_2, \ldots, j_r} a_\ell(k-r, t-s)$$

où $s = j_1 + j_2 + \ldots + j_i$ pour $k = m+1, m+2, \ldots$

V- EXEMPLE

Dans le cas $m = 2$, on obtient une relation simple pour dénombrer les agrégats de taille k ayant t carrés noirs. Les matrices C et D sont:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} pq & p^2 q \\ 2p & p^2 \end{bmatrix}$$

La relation 5 est:

$$a(k,t) = a(k-1,t-1) + a(k-1,t-2) + a(k-2,t-3)$$

pour $k > 2$ et

$$a(1,1) = 2$$
$$a(1,2) = 1$$
$$a(2,2) = 2$$
$$a(2,3) = 4$$
$$a(2,4) = 1$$

Dans ce cas simple, on peut mettre les différents nombres $a(k,t)$ sous forme d'un tableau un peu comme un triangle de Pascal:

					2		1				
				2		4		1			
			2		8		6		1		
		2		12		18		8		1	
	2		16		a(5,7)		32		10		1
2		20		a(6,8)		a(6,9)		50		12	1
					a(7,10)						

Pour $m = 3$, on peut vérifier que:

$$a(1,1) = 3 \ , \ a(1,2) = 3 \ , \ a(1,3) = 1$$

$$a(2,2) = 3 \ , \ a(2,3) = 12 \ , \ a(2,4) = 15 \ , \ a(2,5) = 6 \ , \ a(2,6) = 1$$

$$a(3,3) = 3 \ , \ a(3,4) = 24 \ , \ a(3,5) = 63 \ , \ a(3,6) = 69 \ , \ a(3,7) = 33$$

$$a(3,8) = 9 \ , \ a(3,9) = 1$$

et la relation 5 est:

$$\begin{aligned} a(k,t) = {} & a(k-1,t-3) + 3a(k-1,t-2) + a(k-1,t-1) \\ & + 2a(k-2,t-4) + a(k-2,t-3) - a(k-3,t-6) \ . \end{aligned}$$

A cause du chevauchement des agrégats dans le cas $m \geqslant 3$, il semble difficile de dénombrer les différents types d'agrégats. Les nombres que l'on obtient pour les quasi-agrégats sont des bornes supérieures pour les nombres d'agrégats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. ROACH, "Dénombrement des agrégats aléatoires", Dunod, 1971.