

**Titre:** Étude de la performance de la méthode nodale augmentée et modifiée pour les calculs d'écoulement de puissance  
Title: modified for power flow calculations

**Auteur:** Matthias Clément Molénat  
Author:

**Date:** 2024

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Molénat, M. C. (2024). Étude de la performance de la méthode nodale augmentée et modifiée pour les calculs d'écoulement de puissance [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/59462/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/59462/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Antoine Lesage-Landry, Jean Mahseredjian, & Nasim Rashidirad  
Advisors:

**Programme:** Génie énergétique  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Étude de la performance de la méthode nodale augmentée et modifiée pour les  
calculs d'écoulement de puissance**

**MATTHIAS CLÉMENT MOLÉNAT**

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie énergétique

Octobre 2024

# **POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

## **Étude de la performance de la méthode nodale augmentée et modifiée pour les calculs d'écoulement de puissance**

présenté par **Matthias Clément MOLÉNAT**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Roland MALHAMÉ**, président

**Antoine LESAGE-LANDRY**, membre et directeur de recherche

**Jean MAHSEREDJIAN**, membre et codirecteur de recherche

**Nasim RASHIDIRAD**, membre et codirectrice de recherche

**Alireza MASOOM**, membre externe

## DÉDICACE

*À mes proches,*

*De l'ancien et du nouveau continent.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier très sincèrement mon directeur de recherche Antoine Lesage-Landry, dont le soutien et les conseils avisés ont été d'une valeur inestimable.

Merci à Jean Mahseredjian, co-directeur de cette thèse, pour sa supervision et son ingéniosité. Merci de m'avoir permis de prendre part aux activités de recherche au sein de sa chaire industrielle de recherche regroupant le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), EDF (électricité de France), RTE (Réseau de transport électrique), Hydro-Québec et Opal-RT.

Merci à mes camarades de la chaire, pour leur sympathie et pour leurs remarques éclairées lors de nos discussions de bureau.

Merci à mes amis rencontrés à Poly : Loreley, Olivier, Abraham, Julien, Xavier, Victor. Merci à mes amis du laboratoire LORER. Sans vous, sans tous ces moments à Polytechnique ou à l'extérieur, n'aurait pas été aussi mémorables.

Merci à mes tous mes amis, en particulier à Olivier, Clément et Florent. Merci à ceux qui me rendent la vie si douce et qui l'ensoleillent, au plus tard de la nuit ou au plus profond de l'hiver canadien.

Merci à ma famille pour leur soutien infaillible. Merci de croire en moi.

## RÉSUMÉ

Un des outils principaux du gestionnaire de réseau électrique pour l'opération et l'étude des réseaux est le logiciel de modélisation et de résolution du problème de l'écoulement de puissance. Dans la littérature et dans l'industrie, il existe une multitude de méthodes pour la résolution de ce problème. Chacune de ces méthodes se différencie par leurs spécificités, autant sur le plan théorique (formulation et résolution) que sur le plan pratique (champs d'application, performances et limites). Cependant, les réseaux électriques modernes, par la diversité des éléments qui les composent et la pénétration croissante des ressources énergétiques distribuées, représentent des défis de modélisation de plus en plus complexes. Aujourd'hui, la complexité est telle que certaines de ces méthodes de résolutions de l'écoulement de puissance deviennent obsolètes.

L'objectif de ce projet de maîtrise est de fournir une analyse systématique, qui combine théorie et pratique, des performances de l'analyse nodale modifiée augmentée dite MANA. Cette méthode permet de résoudre le problème de l'écoulement de puissance pour les réseaux électriques en régime permanent. Dans ce mémoire, cette méthode est principalement étudiée conjointement et comparée à une méthode antérieure et de référence : CME, pour *Conventional Mismatch Equations*.

On introduit tout d'abord dans ce mémoire des notions nécessaires à la compréhension du travail réalisé. On définit les critères de performances qui permettront d'évaluer les méthodes de résolution de l'écoulement de puissance considérées. On motive ensuite l'intérêt de l'étude des performances des méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance et on identifie les objectifs de recherche.

Grâce à une revue de littérature approfondie sur les méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance et de leurs performances, on rapporte une description de méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance et de leurs performances comparées. On identifie des lacunes en matière de recherches relatives aux performances de ces méthodes.

Une approche théorique, basée à partir de la littérature portant sur la méthode Newton-Raphson (NR), permet de justifier des performances accrues de MANA en comparaison à CME. Une étude approfondie de la formulation des équations et des jacobiniennes associées à ces deux méthodes permet d'identifier la plus grande sensibilité de CME à l'initialisation de la méthode NR.

Ensuite, une approche pratique justifie les performances de convergence supérieures de MANA grâce à des indicateurs de dénombrement ainsi que par la considération du nombre de conditionnement.

La majorité des conclusions présentées dans les approches théoriques et pratiques sont des résultats généraux, testés sur des réseaux isolés réalistes.

Enfin, une amélioration de MANA est proposée afin de palier certaines limites identifiées lors de la résolution de l'écoulement de puissance pour les réseaux électriques isolés. On propose différents algorithmes dont on étudie les performances.

Finalement, on propose une synthèse des contributions de ce mémoire. On rend compte des recommandations et d'axes de travaux futurs pour l'approfondissement des connaissances sur les performances des méthodes de résolutions du problème de l'écoulement de puissance.

## ABSTRACT

One of the power system operator's main tools is a software for solving the load-flow problem. In the literature and in the industry, there are numerous methods for solving this problem. Each method has its own specific characteristics, both on the theory side (formulation and resolution) and on the practical side (application scope, performance, and limitations). However, modern power grids, with the diversity of their components and the increasing penetration of distributed energy resources, present an increasingly complex modeling challenge. Today, the complexity is such that some of these load flow resolution methods are becoming outdated.

The aim of this Master's thesis is to conduct a systematic analysis, combining theory and practice, of the performance of the modified augmented nodal analysis (MANA) load-flow solver. In this thesis, this method is mainly studied in parallel with and compared to an established method: CME, for Conventional Mismatch Equations.

First, we introduce the concepts needed to understand the work being carried out. We define the performance criteria that will enable us to evaluate the load-flow resolution methods under consideration. The interest in studying the performance of load-flow resolution methods is then explained, and the research objectives are identified.

An extensive literature review provides a detailed description and comparative analysis of various load-flow solution methods. Research gaps related to the performance of these methods are identified.

A theoretical approach based on the literature on the Newton-Raphson (NR) method justifies the MANA method's improved performance compared with the CME method. An in-depth study of the formulation of the equations and Jacobians associated with these two methods identifies the CME method's greater sensitivity to the initialization of the NR method.

Next, a practical approach justifies the superior convergence performance of the MANA method by means of various indicators, such as the conditioning number.

Most of the conclusions presented in the theoretical and practical approaches are general results, tested on realistic networks.

## VIII

Finally, an improvement of the MANA method is proposed to overcome weaknesses identified in the resolution of load-flow for islanded power systems. Different algorithms are proposed, and their performances are studied.

To conclude, a synthesis of the contributions made in this Master's thesis is presented. Recommendations and directions for future work are given, with insights to further deepen our knowledge of the performance of methods for solving the load-flow problem.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VII
TABLE DES MATIÈRES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XIII
LISTE DES FIGURES.....	XV
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVII
LISTE DES NOTATIONS MATHEMATIQUES.....	XVIII
LISTE DES ANNEXES.....	XXI
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Définitions et concepts clés.....	1
1.1.1 Paramètres d'un réseau électrique .....	1
1.1.2 Problème de l'écoulement de puissance .....	2
1.1.3 Méthode de Newton-Raphson.....	2
1.2 Enjeux des méthodes d'écoulement de puissance .....	5
1.2.1 Modélisation des réseaux .....	5
1.2.2 Performances des méthodes de résolution .....	5
1.3 Objectifs de recherche.....	6
1.4 Plan du mémoire.....	7
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTERATURE .....	8
2.1 <i>Conventional Mismatch Equations</i> - CME .....	9
2.1.1 Formulation du problème de l'écoulement de puissance.....	9

2.1.2	Résolution.....	10
2.2	<i>Modified-Augmented Nodal-Analysis</i> – MANA .....	11
2.2.1	Formulation du problème de l'écoulement de puissance.....	12
2.2.2	Résolution.....	14
2.3	Extension des méthodes CME et MANA .....	15
2.4	Performances comparées.....	17
2.4.1	Objectif de précision .....	17
2.4.2	Nombre d'équations .....	18
2.4.3	Convergence.....	19
2.4.4	Étude de jacobiniennes.....	20
2.5	Recherche de performance et méthodes de résolutions diverses .....	21
CHAPITRE 3 COMPARAISONS THÉORIQUES .....		24
3.1	Formalismes .....	24
3.1.1	Systèmes d'équations .....	24
3.1.2	Jacobiniennes.....	25
3.2	Dépendances des composantes de $\mathbf{x}_k$ à $\mathbf{x}_0$ .....	25
3.2.1	Composantes libres du bassin d'attraction NR .....	25
3.2.2	Composantes libres du bassin d'attraction quadratique NR.....	28
3.2.3	Impact sur la stratégie d'initialisation de la méthode NR .....	31
3.3	Applications à MANA et CME .....	32
3.3.1	Identification des composantes libres CME et MANA.....	32
3.3.2	Étude de cas.....	35
CHAPITRE 4 PERFORMANCE DE CALCUL .....		39
4.1	Rapidité d'exécution d'une itération .....	39

4.1.1	Complexité de construction de matrices jacobienes .....	39
4.1.2	Construction de jacobienes pour différentes méthodes : exemples.....	40
4.1.3	Dimensions de la complexité .....	42
4.2	Conditionnement de matrices jacobienes .....	43
4.2.1	Définition du nombre de conditionnement.....	43
4.2.2	Nombre de conditionnement et difficulté de résolution.....	44
4.2.3	Conditionnement des jacobienes MANA et CME .....	46
CHAPITRE 5 APPLICATION DES ENSEIGNEMENTS .....		56
5.1	Ecoulement de puissance pour les réseaux électriques isolés .....	56
5.1.1	Lacunes de la littérature et contributions .....	56
5.1.2	Formulation de l'écoulement de puissance $\mathbf{F}_{\text{MANA}, \mathbf{Y}(\omega)}$ .....	57
5.2	Algorithmes pour la résolution de la formulation améliorée .....	58
5.2.1	Motivation par l'exemple .....	58
5.2.2	Algorithmes MANA améliorés .....	59
5.3	Analyses numériques.....	65
5.3.1	Qualité de la solution $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$ .....	66
5.3.2	Performances de convergence .....	68
5.4	Synthèse de l'application .....	72
CHAPITRE 6 CONCLUSION .....		74
6.1	Contributions de la recherche.....	74
6.1.1	Contributions théoriques .....	74
6.1.2	Contributions pratiques .....	75
6.1.3	Publications .....	75
6.2	Travaux futurs .....	76

## XII

6.2.1	Recommandations d'implémentation.....	76
6.2.2	Axes de recherche .....	77
RÉFÉRENCES.....		79
ANNEXES .....		84

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Résultats des tests de l'étude de cas .....	37
Tableau 2 : Dimensions caractéristiques des jacobiennes CME, MANA et CIM pour un réseau monophasé à 4 nœuds, 2 charges et 1 générateur. ....	41
Tableau 3 : Nombre de composantes variables dans le bloc matrice $\mathbf{n}_w$ d'une jacobienne pour une méthode et un réseau donné. ....	41
Tableau 4 : Temps $(t_{\text{cst}}, \bar{t}_j, t_{\text{tot}})$ en seconde de calcul pour une méthode et un réseau donné.....	42
Tableau 5 : Nombre de conditionnement de la jacobienne MANA avec pré-conditionnement ciblé .....	48
Tableau 6 : Évolution de $\kappa_2(\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA}}}(\mathbf{x}_0))$ et $\kappa_2(\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{CME}}}(\mathbf{x}_0))$ en fonction de la tension nominale du réseau 25 barres.....	51
Tableau 7 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 25 barres.....	54
Tableau 8 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 906 barres.....	55
Tableau 9 : Résultats de l'écoulement de puissance par MANA et évaluation du <i>mismatch</i> $\ \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\ _\infty$ pour le réseau isolé 25 barres $(f_0 = 60 \text{ Hz et } \varepsilon_{tol} = 10^{-7})$ .....	58
Tableau 10 : Résultats de l'écoulement de puissance par MANA et évaluation du <i>mismatch</i> $\ \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\ _\infty$ pour le réseau isolé 906 barres $(f_0 = 50 \text{ Hz et } \varepsilon_{tol} = 10^{-7})$ .....	59
Tableau 11 : Récapitulatif des caractéristiques des différents algorithmes basés sur MANA.....	65
Tableau 12 : Résultats des écoulements de puissances $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ et $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$ pour le réseau 25 barres dans différentes situations de surcharges $\lambda_i$ . Les amplitudes de tension sont en Volt, $\omega$ en rad.s <sup>-1</sup> .....	66

Tableau 13 : Résultats des écoulements de puissances  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  et  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  pour le réseau 906 barres dans différentes situations de surcharges  $\lambda_i$ . Les amplitudes de tension sont en Volt,  $\omega$  en rad.s<sup>-1</sup>

..... 67

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Classification, relations et spécificités de différentes méthodes de résolutions d'écoulement de puissance .....	23
Figure 3.1 : Représentation graphique de la fonction $\ \mathbf{F}\ _2$ , associée à $\mathbf{F}$ .....	27
Figure 3.2 : Identification des bassins d'attraction par la méthode NR associés à $\mathbf{F}$ .....	28
Figure 3.3 : Identification des bassins de vitesse de convergence par la méthode NR associés à $\mathbf{F}$ . .....	31
Figure 3.4 : Exemple d'un réseau 4 barres .....	33
Figure 4.1 : Dénombrement et localisation des valeurs non-nulles - nz- de a) la matrice jacobienne CME associée au réseau 25 barres et de b) son inverse. ....	47
Figure 4.2 : Distribution en logarithme base 10 des entrées de la matrice jacobienne MANA associée au réseau 25 barres.....	48
Figure 4.3 : <i>Heatmaps</i> des ordres de grandeur en puissances de 10 des entrées des jacobiniennes CME et MANA proche de la solution de l'écoulement de puissance du réseau 25 barres... ..	50
Figure 4.4 : Evolution de $\kappa_2(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))$ des méthodes CME et MANA pour le réseau 25 barres sous différentes situations de surcharge. ....	52
Figure 5.1 : Erreur maximale normalisée entre les amplitudes de tension des vecteurs $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{x}_\omega^*$ pour le réseau 25 barres alimenté par des générateur <i>droop</i> , avec un facteur de surcharge $\lambda_l = 7.47$ .....	68
Figure 5.2 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 25 barres, sous différentes conditions de surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte. ....	69
Figure 5.3 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 906 barres, sous différentes conditions de	

## XVI

surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte.	70
.....	.....
Figure 5.4 : Nombres d'itérations nécessaires à la convergence de différents algorithmes pour un réseau 25 barres extrêmement chargé. ....	72
Figure B.1 : Micro-réseau 25 barres isolé [9]. ....	87
Figure A.6.2 : Réseau 906 barres isolé [65]. ....	88

**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

MANA	<i>Modified-Augmented Nodal-Analysis</i> – Analyse nodale modifiée et augmentée
CME	<i>Conventional Mismatch Equations</i> – Équations conventionnelles d'écoulement de puissance
CIM	<i>Current Injection Method</i> – Méthode par injection de courant
LF	<i>Load-Flow</i> – Écoulement de puissance
NR	Newton-Raphson
AC	<i>Alternative Current</i> – Courant alternatif
DC	<i>Direct Current</i> – Courant continu
GS	<i>Gauss-Seidel</i>
BFS	<i>Backward-Forward-Sweep</i>

## LISTE DES NOTATIONS MATHEMATIQUES

$(N, \ell)$  Graphe représenté par un ensemble  $N$  de nœuds (sommets) et un ensemble  $\ell$  d'arrêtes.

$\mathbf{x}, \mathbf{V}, \mathbf{I}$  Vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n, n > 1$ .

$\vec{x}$  Élément de  $\mathbb{C}$ .

$\vec{x}^*$  Élément conjugué de  $\vec{x}$ .

$V_{n_k} + jV_{m_k}$  Représentation rectangulaire de  $\vec{V}_k$ .

$V_k \angle \theta_k$  Représentation en phaseur du  $\vec{V}_k$ .

$\mathbf{F}$  Fonction vectorielle.

$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$  Matrice jacobienne associée à la fonction vectorielle  $\mathbf{F}$ .

$\mathbf{Y}$  Matrice d'admittance nodale, associée à un réseau.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  Espace vectoriel des matrices carrées réelles de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

$\llbracket 1, n \rrbracket$  Ensemble composé des entiers naturels compris entre 1 et  $n$ .

$[M]_{i,j}, M_{ij}$  Élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\mathbf{M}$ .

$\| \cdot \|$  Norme vectorielle quelconque.

$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \Omega}^T$  Représentation de  $\mathbf{x}$  par ses composantes  $x_i$ ,  $\Omega \subset \mathbb{N}$  représentant un ensemble d'indices.

$\sim$  Relation d'équivalence d'ordre de grandeur entre valeurs numériques. Exemples :  $120 \sim 10^2$ ,  $0.2 \sim 10^{-1}$ .

$\gg$  et  $\ll$  Relation de prépondérance ou de négligeabilité entre valeurs numériques. Exemple :  $120 \gg 0.2$ .

$\approx$  Relation d'approximation entre valeurs numériques. On définit pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \approx y \Leftrightarrow |x - y| \ll \min(|x|, |y|)$ . Exemple :  $101 \approx 107$ .

$\kappa(\mathbf{A})$  Nombre de conditionnement de la matrice inversible  $\mathbf{A}$ , se définit par rapport à une norme donnée  $\| \cdot \|$  :  $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \times \|\mathbf{A}^{-1}\|$ .

$\dim(\mathbf{x})$  Dimension du vecteur  $\mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dim(\mathbf{x}) = n$ .

**size(A)**      Nombres d'éléments de la matrice  $\mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{size}(\mathbf{A}) = n^2$ .

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE A : TABLEAU DE CORRESPONDANCE .....	84
ANNEXE B : RESEAUX TEST .....	87
B.1 Micro-réseau isolé 25 barres.....	87
B.2 Réseau isolé 906 barres .....	88
ANNEXE C : DEVELOPPEMENTS .....	89
C.1 Développement de Taylor à l'ordre 2 pour la convergence de NR .....	89
C.2 Matrices jacobiniennes des méthodes CME, MANA et CIM dans le cas d'un réseau simple à 4 nœuds .....	91
C.3 Idées explicitant les conjectures .....	99

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Ce premier chapitre introductif, organisé en quatre sous-parties, a pour rôle de munir le lecteur des clés nécessaires à la compréhension du travail rapporté dans ce mémoire.

Dans un premier temps, une présentation des définitions et de concepts importants est donnée afin de placer le cadre de la recherche. On motive ensuite les intérêts de recherche en présentant les enjeux des méthodes de résolution d'écoulement de puissance. Ces deux sous-parties permettront ensuite d'introduire la problématique de ce mémoire de recherche. Le cadre de l'étude et les objectifs de recherche découlent de cette problématisation. En fin de ce premier chapitre, on donne une présentation du plan de ce mémoire.

### 1.1 Définitions et concepts clés

Cette première sous-section place le cadre de recherche en introduisant trois éléments importants à la compréhension de ce mémoire : les paramètres d'un réseau électrique, le problème de l'écoulement de puissance et la méthode de Newton Raphson (NR).

#### 1.1.1 Paramètres d'un réseau électrique

Un réseau électrique, qu'il soit multiphasé à courant alternatif (AC), à courant continu (DC), ou hybride, est paramétré par des sources (générateurs de tension, de courant, de puissance, etc.), des charges et des composants divers (transformateurs, changeurs de prises, interrupteurs, etc.). Au sein du réseau, les sources injectent de la puissance, tandis que les charges consomment de la puissance. Le tout est interconnecté par des lignes que l'on modélise par leur admittance. Ces lignes consomment aussi de la puissance (pertes). L'ensemble du système d'interconnexions peut être représenté par un graphe constitué de nœuds, regroupés par barres, reliés par des lignes. On note ce graphe  $(N, \ell)$  où  $N$  représente les nœuds du graphe identifiés par un indice entier  $i \in N \subset \mathbb{N}$  et  $\ell \in N \times N$  représente l'ensemble des lignes existantes entre chaque nœud. On note  $\{i, j\} \in \ell$  la ligne qui relie les nœuds  $i \in N$  et  $j \in N$ . On note  $\mathbf{Y}$  la matrice d'admittance nodale associée au réseau.

### 1.1.2 Problème de l'écoulement de puissance

Le problème de l'écoulement de puissance est un problème inhérent à l'étude et la modélisation des réseaux électriques.

Pour un réseau électrique multiphasé donné, le problème de l'écoulement de puissance est défini comme le calcul de l'écoulement de puissance active  $P_{i,j}$  et réactive  $Q_{i,j}$  circulant dans les lignes  $\{i,j\} \in \ell$  de ce réseau en régime permanent [1, 2]. Ce calcul est mathématiquement équivalent à déterminer les tensions complexes  $\mathbf{V}_i$  à chaque nœuds  $i \in N$  du réseau. À une barre du réseau est associé  $m$  nœuds.

Dépendamment de la modélisation du réseau adoptée, le problème de l'écoulement de puissance peut s'écrire sous la forme d'un système à  $n$  équations (équations d'écoulement de puissances) et  $n$  variables que l'on peut décrire à l'aide d'une fonction  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  [1], telle que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Mathématiquement, ce problème est un problème déterministe : il existe un nombre fini de solutions. Résoudre le problème de l'écoulement de puissance revient à déterminer la solution  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  de (1.1).

On verra dans la suite de ce mémoire différentes modélisations, donnant lieu à différentes formulations  $\mathbf{F}$  pour un même réseau donné. Une fois une formulation choisie pour modéliser mathématiquement le problème de l'écoulement de puissance, il est nécessaire de choisir une méthode de résolution numérique pour calculer la solution  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  de (1.1).

### 1.1.3 Méthode de Newton-Raphson

La méthode dite aujourd'hui de Newton-Raphson (NR) est une procédure initiée en 1669 par Isaac Newton et en 1690 par Joseph Raphson. Son but est de trouver une valeur approchée d'une racine d'une fonction réelle d'une variable réelle [3]. Sous sa forme moderne, la méthode NR est étendue à la résolution de système algébriques non-linéaires [4, 5]. On la présente ici en utilisant les conventions d'écritures déjà introduites plus tôt.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  une fonction continûment différentiable. Notons  $\mathbf{J} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice jacobienne associée à  $\mathbf{F}$ . On a :

$$[\mathbf{J}(\mathbf{x})]_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2. \quad (1.2)$$

La suite  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est initialisée par une première estimation  $\mathbf{x}_0$  d'une racine  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ .

Cette suite représente les estimés successifs de la racine  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  par la méthode NR. Cette suite se définit de manière itérative suivant la relation (1.3) :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (1.3)$$

De manière computationnelle, la méthode NR possède deux catégories de critères d'arrêt.

La première catégorie correspond aux critères d'arrêt de convergence. Plusieurs critères peuvent être définis à cet effet. Soit une quantité  $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$  usuellement choisie petite devant  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|$  où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque. On peut définir trois critères parmi d'autres :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{tol}} &\geq \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\|, \\ \varepsilon_{\text{tol}} &\geq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|, \\ \varepsilon_{\text{tol}} \|\mathbf{x}_k\| &\geq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Notons que, dans les équations précédentes, on a sciemment omis de préciser une norme vectorielle. Les critères d'arrêt de convergence donnés précédemment peuvent alors être déclinés en différentes variantes selon le choix de norme vectorielle. Il est envisageable pour une même procédure d'utiliser un ou plusieurs critères d'arrêt convergence. Toutefois, toutes combinaisons de ces critères d'arrêt ne sont pas *a priori* équivalentes lorsque l'on considère l'approximation de  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  obtenue.

La seconde catégorie correspond au critère d'arrêt de divergence. En introduisant  $k_{\text{max}} \in \mathbb{N}^*$  un nombre limite d'itérations, la condition d'arrêt est alors :

$$k \leq k_{\text{max}}. \quad (1.5)$$

Ce critère, nécessaire, met fin au processus lorsque le ou les critères d'arrêt de convergence ne sont pas rencontrés dans le nombre imparti d'itérations  $k_{\text{max}}$ .

L'Algorithme 1 présente une manière de mettre en œuvre la méthode NR [3]. Il représente un moyen pratique de résoudre le problème de l'écoulement de puissance formulé en (1.1). L'inversion

matricielle présentée à la ligne 4 est réalisée par défaut grâce à la méthode de la décomposition LU [6] dans de nombreux environnement de développement tel que MATLAB.

---

**Algorithme 1 :** Méthode de Newton-Raphson

---

```

1: Define  $\mathbf{x}_0$ 

2:  $k = 0$ 

3: While  $k \leq k_{\max}$  et  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \geq \varepsilon_{\text{tol}}$  do

4:   
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$$

5:    $k = k + 1$ 

6: end While

7: If  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  then

8:   return  $\mathbf{x}_k$ 

9: Else

10:  return Erreur de convergence

11: End if

```

---

## 1.2 Enjeux des méthodes d'écoulement de puissance

Outre le défi mathématique, la résolution du problème d'écoulement de puissance représente un véritable enjeu pour les acteurs industriels du secteur des réseaux électriques. Dans cette section, on introduit les exploitations possibles de l'écoulement de puissance et on présente les attentes quant aux performances des méthodes de résolution du problème d'écoulement de puissance.

### 1.2.1 Modélisation des réseaux

La résolution du problème d'écoulement de puissance permet de modéliser le comportement d'un réseau électrique, mais permet aussi d'aider à l'anticipation de l'impact de modifications subies ou voulues de ce réseau électrique. Par exemple, il est possible de modéliser des scénarios de courts-circuits, de surcharges, de pannes de génération, de surtensions, d'expansions ou d'ilotages, et d'en évaluer les conséquences sur l'écoulement de puissance au sein du réseau [7-9].

Une fois les inconnues du problème déterminées, le gestionnaire de réseau peut constater si l'état du réseau en régime permanent respecte un ensemble de contraintes et de normes. Ces contraintes peuvent être contractuelles vis-à-vis des clients (e.g., accès au réseau, minimum de puissance délivrable, tensions aux nœuds), ou de sécurité (e.g., limitation de puissance dans les lignes) [10].

En agissant en conséquence, le gestionnaire de réseau peut être amené à intervenir réellement. Il peut notamment mettre en œuvre des modifications testées, adapter la production, intervenir lors de pannes ou prévoir le dimensionnement et la localisation d'éléments de protection du réseau.

Du fait que le problème est déterministe et dès lors que les paramètres du réseau sont connus, les résultats d'écoulement de puissance se substituent en première évaluation à la prise de mesures sur le terrain.

### 1.2.2 Performances des méthodes de résolution

En pratique, on considère les performances d'une méthode de résolution du problème de l'écoulement de puissance selon plusieurs attentes. Il est nécessaire, dans un premier temps, que la méthode de résolution converge et renvoie comme résultat une approximation satisfaisante de la solution du problème. Dans un second temps, il est souhaitable que cette convergence se fasse rapidement afin de tendre vers des simulations en temps réels. Enfin, une méthode faisant preuve de praticité est généralement préférée.

Chacune de ces trois attentes peuvent être considérées sous plusieurs prismes.

En effet, la convergence vers une approximation satisfaisante de la solution est atteinte lorsque le réseau considéré est convenablement modélisable à l'aide d'équations mathématiques et qu'une précision  $\varepsilon_{\text{tol}}$  satisfaisante est atteignable.

Ensuite, la rapidité de convergence s'étudie sous deux aspects. Le premier correspond au nombre réduit d'itérations nécessaires à la convergence, et le second correspond à la rapidité de la réalisation d'une itération. Dans l'ensemble, cela fait référence à la rapidité de réalisation de tout le processus de résolution.

La praticité fait référence à des indicateurs qualitatif et quantitatif. On peut notamment citer la clarté et flexibilité du code associé à la méthode, la possibilité d'inclure divers composants des réseaux, ainsi que la dimension des ressources informatiques nécessaires au déploiement de la méthode : capacités de calcul et mémoire disponible.

On prendra en compte dans ce mémoire ces considérations afin d'évaluer les méthodes de résolutions du problème de l'écoulement de puissance en considération.

### 1.3 Objectifs de recherche

L'objectif de ce mémoire de recherche est de contribuer à l'étude des performances de l'analyse nodale modifiée augmentée (MANA). On étudie conjointement la méthode usuelle, dites *conventional mismatch equations* (CME), comme méthode de référence. Le cadre d'étude est restreint à une implémentation en MATLAB de ces méthodes pour des réseaux à courant alternatif. Le code utilisé pour fournir les résultats proposés se base principalement sur un code déjà existant, interne au groupe de recherche. On rapporte dans l'Annexe A la correspondance entre les résultats communiqués et le code utilisé.

On adopte dans un premier temps une approche théorique, en complément à des résultats déjà existants dans la littérature.

Dans un second temps, on mobilise des arguments pratiques, afin de réaliser la conjugaison entre des résultats théoriques et les limitations de l'implémentation computationnelle des méthodes de résolutions du problème de l'écoulement de puissance.

Enfin, on illustre les possibilités d'améliorer MANA dans le cas particulier des réseaux isolés.

## 1.4 Plan du mémoire

Le Chapitre 2 propose une revue de littérature approfondie et détaillée sur les méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance et de leurs performances. On porte une attention particulière aux méthodes CME et MANA, ainsi qu'aux différentes démarches visant à comparer et à améliorer les performances de certaines méthodes. On rapporte une liste non exhaustive des méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance et leurs relations respectives dans une cartographie originale. On identifie enfin des lacunes en matière de recherches relatives aux performances de ces méthodes.

Le Chapitre 3 développe des éléments théoriques pour justifier les performances accrues de MANA en comparaison à CME. Ce travail repose particulièrement sur des résultats issus de la littérature portant sur la méthode NR et ses propriétés. Ces éléments sont mis en contexte, appliqués aux formulations associées aux méthodes MANA et CME, puis illustrés par des études de cas. Ce chapitre porte en particulier une attention sur les matrices jacobiniennes de ces deux méthodes.

Le Chapitre 4 adresse des considérations plus pratiques. On justifie les performances de convergence supérieures de MANA grâce à des indicateurs de dénombrement ainsi que par la considération du nombre de conditionnements.

Le Chapitre 5 est consacré à la présentation d'une application des enseignements que comporte ce rapport. On identifie des limites de performance de MANA pour la résolution de l'écoulement de puissance pour les réseaux électriques isolés. On propose alors une amélioration de MANA, dont on étudie les performances.

Finalement, une synthèse des contributions et des recommandations pour des implémentations et des travaux futurs sont fournies Chapitre 6.

## CHAPITRE 2 Revue de littérature

La résolution du problème de l'écoulement de puissance présenté à la section 1.1.2 est une des procédures pour les réseaux électriques la plus exécutée par les entreprises responsables de la gestion de réseaux électriques. Aujourd'hui, la littérature rend compte de différentes méthodes de résolutions du problème de l'écoulement de puissance [11-13]. Ces méthodes se distinguent par leurs approches et leurs performances respectives [9, 11-18]. Des critères discriminants dans le choix d'une méthode peuvent être par exemple la rapidité et la fiabilité [16].

Ces différentes méthodes se distinguent par des spécificités successives [11, 13, 19]. La première spécificité correspond au choix de la formulation  $F$  dans (1.1). La physique du problème peut être représentée de manières équivalentes comme un écoulement de puissances [4] ou un bilan de courants [20, 21]. Lorsque la formulation se base sur les courants, il est envisageable d'interfacer les composants de puissances grâce à des variables supplémentaires [16, 21]. Cependant, cela n'est pas nécessaire et peut se faire directement en intégrant les fonctions caractéristiques dans le bilan de courant [20]. Les variables du problème, principalement complexes, peuvent être représentées de deux manières : polaire ou complexe [13]. La seconde spécificité correspond à la méthode de résolution numérique adoptée. La méthode NR présentée à la section 1.1.3 est utilisée notamment dans les références [4, 20, 21]. D'autres méthodes, principalement itératives, peuvent être utilisées pour résoudre le système d'équations issues de la formulation  $F$  de (1.1). Les méthodes présentées dans les articles [17, 22] se basent par exemple sur des méthodes itératives qui exploitent le développement de Taylor au second ordre. D'autres méthodes, minoritaires, sortent de ce paradigme de construction.

Dans ce chapitre, on présente avec détail les spécificités de deux méthodes itératives pour la résolution du problème de l'écoulement de puissance. CME est d'abord détaillée à la section 2.1 car elle représente en général la méthode de référence [2, 4, 9, 13]. Ensuite, la construction de MANA est donnée à la section 2.2. Dans une optique de concision, les méthodes CME et MANA sont présentées dans un premier temps pour un réseau quelconque contenant uniquement des composantes à contraintes PQ. Des résultats issus de la littérature présenteront à la section 2.3 des extensions et à la section 2.4 des résultats de performances comparées de ces deux méthodes. On introduira notamment les jacobiniennes de ces méthodes pour la résolution du problème

d'écoulement de puissance dans le cas des réseaux isolés. Enfin, la section 2.5 permettra de mettre en contexte les méthodes MANA et CME au sein d'un ensemble de méthodes et de techniques disponibles pour l'amélioration des performances pour la résolution du problème d'écoulement de puissance.

## 2.1 *Conventional Mismatch Equations* - CME

*Conventional Mismatch Equations* (CME), historiquement appelé méthode de Newton-Raphson pour l'écoulement de puissance, représente la méthode usuelle pour la résolution de ce problème. Le formalisme des équations pour CME sont données, puis le système d'équation issue de NR est présenté.

### 2.1.1 Formulation du problème de l'écoulement de puissance

À chaque nœud  $i$  du problème est réalisé un bilan de puissance : la puissance injectée  $\vec{S}_i = P_i + jQ_i$  à un nœud est égale à la somme des puissances qui proviennent des lignes reliées à ce nœud [4]. Cette somme s'écrit en fonction des tensions complexes  $\vec{V}_k$  et admittances  $\vec{Y}_{ik}$  pour  $\{i, k\} \in \ell$ .

L'ensemble des éléments  $\vec{Y}_{ik}$  constituent la matrice d'admittance  $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associé au réseau.

$$\vec{S}_i = P_i + jQ_i = \vec{V}_i \sum_{k=1}^n \vec{V}_k^* \vec{Y}_{ik}^*, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.1)$$

La puissance  $\vec{S}_i$  peut être nulle (pas de consommation, ni de production), ou quelconque. Elle est calculée en réalisant la somme algébrique des consommations (e.g., charges) et production (e.g., générateurs).

Lorsque rédigée pour  $n$  nœuds du système, (2.1) permet d'obtenir un système à  $n$  équations complexes et  $n$  inconnues complexes  $\vec{V}_i$ . En séparant les parties imaginaires et complexes, on obtient un système à  $2n$  équations réelles et  $2n$  inconnues réelles.

Pour CME, la représentation des complexes se fait de manière polaire : les grandeurs complexes du membre de droite de (2.1) sont décrites par leur amplitude et leur phase.

$$\vec{V}_i = V_i \angle \theta_i, \quad \vec{Y}_{ik} = y_{ik} \angle \varphi_{ik}, \quad (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2. \quad (2.2)$$

On a pour chaque nœud  $i$  le système de deux équations réelles suivant :

$$\begin{aligned} P_i &= V_i \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) & i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Q_i &= V_i \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En posant pour variable de résolution du problème  $\mathbf{x}$  telle que :

$$\mathbf{x} = (V_1, \dots, V_n, \theta_1, \dots, \theta_n)^T. \quad (2.4)$$

Pour définir la formulation des équations d'écoulement de puissance associée à CME, on pose une fonction  $\mathbf{F}_{\text{CME}}$  :

$$\mathbf{F}_{\text{CME}}(\mathbf{x}) = (\Delta P_1, \dots, \Delta P_n, \Delta Q_1, \dots, \Delta Q_n)^T, \quad (2.5)$$

Où, à partir de (2.3), on a  $\Delta P_i = P_i - V_i \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik})$  et

$$\Delta Q_i = Q_i - V_i \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

## 2.1.2 Résolution

CME utilise la méthode NR afin de trouver une solution de la fonction  $\mathbf{F}_{\text{CME}}(\mathbf{x})$ . À partir d'une valeur initiale  $\mathbf{x}_0$ , (2.6) issue de (1.3) est résolue itérativement :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_n} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta P_n}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial V_n} & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \theta_n} \\ \hline \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_n} & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial V_n} & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial \theta_n} \end{array} \right] [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k] = -\mathbf{F}_{\text{CME}}(\mathbf{x}_k). \quad (2.6)$$

où  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j :$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_i} &= - \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) - 2V_i \cos(\varphi_{ii}), \\
\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_j} &= -V_i y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}), \\
\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_i} &= V_i \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}), \\
\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_j} &= -V_i V_j y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}), \\
\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} &= - \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) + 2V_i \sin \varphi_{ii}, \\
\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_j} &= -V_i y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}), \\
\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_i} &= -V_i \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}), \\
\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_j} &= V_i V_j y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

## 2.2 Modified-Augmented Nodal-Analysis – MANA

La méthode *Modified-Augmented Nodal-Analysis* (MANA) est une méthode aujourd’hui industriellement appliquée pour l’étude des réseaux électriques [1, 21, 23]. Cette méthode permet, tout comme CME, de résoudre le problème de l’écoulement de puissance. Toutefois, MANA partage avec l’analyse nodale (NA) [24] et l’analyse nodale modifiée (MNA) [25] une majorité de son formalisme portée sur l’injection de courant.

La matrice jacobienne caractéristique MANA est présentée dans l’article [9] pour les réseaux électriques isolés. A l’itération  $k$ , elle est décrite par bloc de la manière suivante :

$$\mathbf{J}_{\text{MANA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{D}_c & \mathbf{A}_{Ix} & \mathbf{A}_{IL} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_r & \mathbf{D}_{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{L\omega} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{Y}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_G & \mathbf{Y}_{GE} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

La représentation de la jacobienne utilise un paradigme différent de celui de la jacobienne CME présentée en (2.6). Sa construction se fait par bloc, et chaque bloc est associé à un type spécifique

de composants. Les blocs  $\mathbf{D}_c$ ,  $\mathbf{D}_r$  et  $\mathbf{D}_{rc}$  sont relatifs aux contraintes des relations entre les barres du réseau passif (interrupteurs, transformateurs, etc.). Les blocs  $\mathbf{A}_{Ix}$ ,  $\mathbf{A}_{IL}$  et  $\mathbf{A}_{IG}$  sont les matrices d'incidences associées au courant des composantes arbitraires ( $x$ ), des charges (L) et des générateurs (G). Les blocs identifiés par  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{A}_{\omega}$  sont associées aux contraintes des composants actifs ( $x$ , L, G), dont notamment l'éventuelle dépendance en fréquence  $\omega$  pour les réseaux isolés. Les blocs  $\mathbf{Y}_G$ ,  $\mathbf{B}_G$  et  $\mathbf{Y}_{GE}$  modélisent les impédances de Thévenin des générateurs.

Dans cette sous-section, on présente, dans le cadre d'un réseau à barres PQ, la formulation du bilan de courant pour les équations MANA. Dans un second temps, on démontre le système matriciel MANA relatif à la méthode NR appliquée à ces équations.

### 2.2.1 Formulation du problème de l'écoulement de puissance

La formulation du problème se base sur un paradigme de bilan de courants, dont les composants tels que les charges et les générateurs sont paramétrés par des variables d'interface des courants. Cette formulation, équivalente en termes de modélisation du problème, est équivalente aux équations d'écoulement de puissance.

À chaque nœuds  $i$  du problème est réalisé un bilan de courant : les courants injectés  $\vec{I}^{\text{injecté},i}$  à un nœud sont égaux à la somme des courants qui proviennent des lignes reliées à ce nœud. En affectant un indice, d'abord aux courants injectés par les générateurs (gen.), puis à ceux injectés par les charges au nœud  $i$ , on définit  $\Phi_i^{\text{gen.}} \cup \Phi_i^{\text{charge}} = \Phi_i \subset \mathbb{N}$  l'ensemble des indices étiquetant les différents courants d'interface injectés au nœud  $i$ . L'équation résultante est analogue à celle issue de l'analyse nodale [24] :

$$\sum_{l \in \Phi_i} \vec{I}_l^{\text{injecté},i} = \sum_k^n \vec{Y}_{ik} \vec{V}_k, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.9)$$

S'il n'y a pas d'injection de courant à un nœud  $i$ , i.e.  $\Phi_i = \emptyset$ , il n'est pas nécessaire d'introduire de variables d'interface de courant. Le terme  $\sum_{l \in \Phi_i} \vec{I}_l^{\text{injecté},i}$  est alors remplacé par  $\vec{0}$  dans (2.9). Dans le cas général,  $\sum_{l \in \Phi_i} \vec{I}_l^{\text{injecté},i}$  est quelconque. Ce terme peut être éventuellement algébriquement nul (e.g. : la consommation et la génération à ce nœud se compensent). Cette équation permet d'obtenir

un système à  $n$  équations complexes, mais introduit  $n^\dagger > n$  inconnues complexes :  $\{\vec{V}_i, \vec{I}_{l \in \Phi_i}^{\text{injecté},i}\}$  s'il

y a des composants à paramétriser dans le réseau. Plus particulièrement, on a  $n^\dagger - n = \sum_i^n \text{card}(\Phi_i)$ .

Chaque variable d'interface de courant introduite nécessite une nouvelle équation complexe qui la définit et relie le courant à la puissance produite ou consommée. Par exemple, la relation pour la tension et le courant injecté au nœud  $i$  de chaque composant PQ est donné par :

$$\left(\vec{I}_l^{\text{injecté},i}\right)^* \vec{V}_i = \vec{S}_l^{\text{injectée},i}, \quad l \in \Phi_i, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.10)$$

Ces équations représentent les équations supplémentaires nécessaires à la définition complète du système.

Pour MANA, la représentation des complexes se fait de manière rectangulaire. Les grandeurs et variables du problème sont décrites par leur partie réelle et imaginaire.

$$\begin{aligned} \vec{I}_l^{\text{injecté},i} &= I_{r_l}^{\text{injecté},i} + j I_{m_l}^{\text{injecté},i}, \\ \vec{V}_i &= V_{r_i} + j V_{m_i}, \quad l \in \Phi_i, \quad (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2. \\ \vec{Y}_{ik} &= G_{ik} + j B_{ik}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a pour chaque nœud  $i$  le système de deux équations réelles suivant :

$$\begin{cases} \sum_{l \in \Phi_i} I_{r_l}^{\text{injecté},i} = \sum_k^n [G_{ik} V_{r_k} - B_{ik} V_{m_k}] \\ \sum_{l \in \Phi_i} I_{m_l}^{\text{injecté},i} = \sum_k^n [B_{ik} V_{r_k} + G_{ik} V_{m_k}] \end{cases}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (2.12)$$

Avec pour les cas échéants les équations associées aux variables d'interface de courant :

$$\begin{cases} P_l^{\text{injecté},i} = I_{r_l}^{\text{injecté},i} V_{r_i} + I_{m_l}^{\text{injecté},i} V_{m_i} \\ Q_l^{\text{injecté},i} = I_{r_l}^{\text{injecté},i} V_{m_i} - I_{m_l}^{\text{injecté},i} V_{r_i} \end{cases}, \quad l \in \Phi_i, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.13)$$

En posant pour variable de résolution du problème  $\mathbf{x}$  telle que :

$$\mathbf{x} = \left( \{\text{Re}(\mathbf{V})\}, \{\text{Im}(\mathbf{V})\}, \{\text{Re}(\mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}})\}, \{\text{Im}(\mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}})\}, \{\text{Re}(\mathbf{I}^{\text{injectés-charge}})\}, \{\text{Im}(\mathbf{I}^{\text{injectés-charge}})\} \right)^T, \quad (2.14)$$

$$\text{avec : } \mathbf{V} = \left( \vec{V}_i \right)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, \mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}} = \left( \left( \vec{I}_l^{\text{injecté},i} \right)_{l \in \Phi_i^{\text{gen.}}} \right)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, \mathbf{I}^{\text{injectés-charge}} = \left( \left( \vec{I}_l^{\text{injecté},i} \right)_{l \in \Phi_i^{\text{charge}}} \right)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

La formulation des équations d'écoulement de puissance associée à MANA est définie par une fonction  $\mathbf{F}_{\text{MANA}}$  :

$$\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cccccc} \text{Re}(\mathbf{f}_n), & \text{Im}(\mathbf{f}_n), & \text{Re}(\mathbf{f}_{\text{gen.}}), & \text{Im}(\mathbf{f}_{\text{gen.}}), & \text{Re}(\mathbf{f}_{\text{charge}}), & \text{Im}(\mathbf{f}_{\text{charge}}) \end{array} \right)^T, \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{f}_n$  est issue de (2.9) et (2.12) telle que :

$$\begin{cases} \left[ \text{Re}(\mathbf{f}_n) \right]_i = \sum_k^n \left[ G_{ik} V_{r_k} - B_{ik} V_{m_k} \right] - \sum_{l \in \Phi_i} I_{r_l}^{\text{injecté},i}, & i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \left[ \text{Im}(\mathbf{f}_n) \right]_i = \sum_k^n \left[ B_{ik} V_{r_k} + G_{ik} V_{m_k} \right] - \sum_{l \in \Phi_i} I_{m_l}^{\text{injecté},i} \end{cases} \quad (2.16)$$

et  $\mathbf{f}_{\text{gen.}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{charge}}$  sont issues de (2.10) et (2.13) telles que pour une injection  $l \in \Phi_i$  associée à un nœud  $i$ , on a:

$$\begin{cases} \left[ \text{Re}(\mathbf{f}_{\text{injecté}}) \right]_{i,l} = I_{r_l}^{\text{injecté},i} V_{r_i} + I_{m_l}^{\text{injecté},i} V_{m_i} - P_l^{\text{injecté},i}, \\ \left[ \text{Im}(\mathbf{f}_{\text{injecté}}) \right]_{i,l} = I_{r_l}^{\text{injecté},i} V_{m_i} - I_{m_l}^{\text{injecté},i} V_{r_i} - Q_l^{\text{injecté},i}, \end{cases} \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Résolution

MANA utilise la méthode NR afin de trouver une solution de la fonction  $\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x})$  [26]. À partir d'une valeur initiale  $\mathbf{x}_0$ , (2.18) issue de (1.3) appliquée à (2.15) est résolue itérativement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{A}_{\text{IG}} & \mathbf{A}_{\text{IL}} \\ \mathbf{C}_{GPQ} & \mathbf{D}_{GPQ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{LPQ} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LPQ} \end{bmatrix} \left[ \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \right] = -\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}_k). \quad (2.18)$$

La matrice  $\mathbf{Y}_n$  est issue de l'analyse nodale et est construite à partir de la matrice d'admittance  $\mathbf{Y}$  du réseau. Du fait de la représentation rectangulaire des complexes telle que précisée en (2.16), on définit :

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{Y}) & -\operatorname{Im}(\mathbf{Y}) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{Y}) & \operatorname{Re}(\mathbf{Y}) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

La matrice  $\mathbf{A}_{IG}$  (respectivement,  $\mathbf{A}_{IL}$ ) est une matrice d'incidence nodale qui modélisent l'injection de courants des générateurs  $\mathbf{I}^{gen}$  (respectivement des charges  $\mathbf{I}^{charge}$ ) au réseau passif. Les matrices  $\mathbf{C}_{GPQ}$  et  $\mathbf{D}_{GPQ}$  (respectivement,  $\mathbf{C}_{LPQ}$  et  $\mathbf{D}_{LPQ}$ ) présentent les contraintes PQ des générateurs (respectivement, des charges) et sont issue de la différenciation de (2.17) [1].

### 2.3 Extension des méthodes CME et MANA

Les sections 2.1 et 2.2 présentent les méthodes CME et MANA détaillées pour un réseau à barres PQ. Toutefois, avec le développement de nombreuses technologies pour les réseaux électriques, la modélisation – et donc la formulation – nécessaire à la résolution de l'écoulement de puissance a été étendue pour ces deux méthodes. Il s'agit de prendre en compte les fonctions caractéristiques des nouveaux composants et de les intégrer au sein de la formulation  $\mathbf{F}$  en fonction des variables de résolution du problème. Dans un second temps, cette modification de formulation se répercute dans la construction des matrices jacobienes utilisées pour la méthode itérative de Newton-Raphson.

Pour CME, cette intégration se fait principalement au sein même des équations déjà existantes. À chaque nœud, on ajoute la caractéristique de puissance injectée par le composant d'intérêt. Dans le cas où l'on choisit un modèle différent pour les charges ou les générateurs, on intègre alors plus de complexité dans (2.1). Par exemple, on peut introduire le modèle de charge ZIP, utilisé notamment dans les références [15, 20], et le modèle de générateur idéal de courant injectant  $\vec{I}_{0,i}^{gen} = I_{0,i}^{gen} \angle \varphi_{I_{0,i}^{gen}}$ .

On remplace le terme  $\vec{S}_i = P_i + jQ_i$  par :

$$\vec{S}_i = V_i I_{0,i}^{gen} \underbrace{\left[ \cos(\theta_i - \varphi_{I_{0,i}^{gen}}) - j \sin(\theta_i - \varphi_{I_{0,i}^{gen}}) \right]}_{\text{Puissance apparente issue du générateur idéal de courant}} - \underbrace{\left[ P_{0,i} (a_i^p + b_i^p V_i + c_i^p V_i^2) + j Q_{0,i} (a_i^q + b_i^q V_i + c_i^q V_i^2) \right]}_{\text{Puissance apparente consommée par la charge ZIP}} \quad (2.20)$$

avec  $V_i \angle \theta_i$  la tension au nœud  $i$ ,  $P_{0,i}$  et  $Q_{0,i}$  respectivement puissance active et réactive nominale de la charge ZIP, et  $\{a_i^p, b_i^p, c_i^p, a_i^q, b_i^q, c_i^q\}$  des paramètres normatifs.

Pour MANA, cette intégration se fait par le biais des variables d'interface de courants. Pour chaque composant de puissance, on associe une variable d'injection de courant que l'on ajoute au bilan de courant au nœud  $i$ . On rajoute par la suite autant d'équations que nécessaire à la formulation  $\mathbf{F}$  afin de définir la relation entre le courant injecté et la fonction caractéristique de puissance associée au composant. En reprenant l'exemple utilisé pour écrire (2.20), (2.13) pour le nœud  $i$  deviennent alors :

$$\begin{aligned} P_0 \left( a_i^p + b_i^p \sqrt{V_{r_i}^2 + V_{m_i}^2} + c_i^p (V_{r_i}^2 + V_{m_i}^2) \right) &= I_{r_i}^{\text{charge}} V_{r_i} + I_{m_i}^{\text{charge}} V_{m_i}, \\ Q_0 \left( a_i^q + b_i^q \sqrt{V_{r_i}^2 + V_{m_i}^2} + c_i^q (V_{r_i}^2 + V_{m_i}^2) \right) &= I_{r_i}^{\text{charge}} V_{m_i} - I_{m_i}^{\text{charge}} V_{r_i}, \\ \vec{I}_i^{\text{gen}} &= I_{r_{0,i}}^{\text{gen}} + j I_{m_{0,i}}^{\text{gen}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ces extensions impliquent une complexification des jacobbiennes CME car ces nouveaux modèles modifient de manière intrinsèque ses composantes. En contrepartie, ces extensions ont un impact sur la taille des matrices jacobbiennes MANA à travers la définition de variables supplémentaires de résolution.

En théorie, il est aussi possible de modéliser des composants passifs tels que les transformateurs, les changeurs de prises et les interrupteurs. Dans les deux méthodes, ces composants impliquent l'ajout d'équations linéaires complexes entre les tensions des barres qu'ils relient [2]. En pratique, seul la méthode MANA intègre de facto le paramétrage de ces composants passifs grâce à la construction par blocs de ses matrices jacobbiennes.

Avec l'avènement des micro-réseaux et des réseaux isolés, pour une meilleure intégration des moyens de production décentralisée et renouvelable, il est nécessaire d'introduire la fréquence  $\omega$  du réseau comme nouvelle variable de résolution [27-29]. En effet, cette variable est nécessaire à la modélisation de composants tels que les générateurs à contrôle de *droop* [9]:

$$\begin{aligned} P_{\text{gen}}^+ &= P_0^+ + \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega), \\ Q_{\text{gen}}^+ &= Q_0^+ - \beta_{\text{droop}} \left( \sqrt{\left( V_{r_G}^+ \right)^2 + \left( V_{m_G}^+ \right)^2} - \left| \vec{V}_0^+ \right| \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $P_{\text{gen}}^+$  et  $Q_{\text{gen}}^+$  les puissances active et réactive de séquence positive du générateur,  $P_0^+$  et  $Q_0^+$  des puissances active et réactive de référence,  $\alpha_{\text{droop}}$  et  $\beta_{\text{droop}}$  des coefficient de puissance,  $\omega_0$  la

fréquence nominale,  $\vec{V}_0^+$  la tension nominale de séquence positive de référence associée au micro-réseau et  $V_{r_G}^+$  et  $V_{m_G}^+$  les composantes de la tension de séquence positive du générateur. Autant pour CME que pour MANA, la nouvelle équation portant sur la puissance active de séquence positive implique une augmentation de la dimension de l'espace de résolution de l'écoulement de puissance :  $\omega$  est désormais une variable du problème.

Des travaux tel que [30] recensent les équations de modélisation et les conséquences sur les jacobienne des différents composants d'un réseau moderne pour MANA.

## 2.4 Performances comparées

Les méthodes CME et MANA, bien que différentes dans leur formulation, se basent sur la méthode de résolution numérique de Newton-Raphson. On distingue en pratique et dans la littérature des performances différentes.

### 2.4.1 Objectif de précision

La première conséquence de la différence de formulation de ces deux méthodes est la nécessité de distinguer les critères d'arrêts de CME et de MANA. En effet, bien que les variables de résolution représentent les mêmes grandeurs physiques, les formulations  $\mathbf{F}$  représentent respectivement des puissances et des courants. Ainsi, dans (1.4), il est nécessaire de définir deux ordres de grandeurs de  $\varepsilon_{tol}$  lorsque deux normes  $\|\mathbf{F}\|$  sont évaluées. Dans les travaux associés à l'article [9], on observe que les deux méthodes convergent vers un résultat de même précision lorsque l'on utilise  $\varepsilon_{tol}^{MANA} = 10^{-7}$  et  $\varepsilon_{tol}^{CME} = 10^{-3}$ . Étant donné que le cadre de cette étude n'utilise pas une représentation des variables en *per unit*, on observe en termes d'ordre de grandeur :  $\mathbf{F}_{MANA} \left| \vec{V}_{nominal} \right| \sim \mathbf{F}_{CME}$ . D'où  $\varepsilon_{tol}^{MANA} \left| \vec{V}_{nominal} \right| \sim \varepsilon_{tol}^{CME}$ , avec  $\left| \vec{V}_{nominal} \right|$  prenant différentes valeurs selon le réseau étudié.

L'objectif de précision peut aussi être réalisé dans la finesse de modélisation du réseau étudié : l'utilisation d'approximations se fait souvent au détriment de la justesse de la solution obtenue et de la possibilité de résolution du problème. Dans certains cas de modélisation où la simplification prime sur la précision, il est possible qu'aucune solution ne puisse être trouvée par la méthode de résolution employée. C'est le cas pour des modèles tels que les modèles linéarisés [13].

## 2.4.2 Nombre d'équations

L'ajout de fonctions caractéristiques de composants possède un impact différent sur les jacobiniennes de CME et de MANA comme présenté à la section 2.3. En effet, bien que la taille des vecteurs et matrices manipulés avec CME reste sensiblement proportionnelle au nombre de nœuds du réseau, MANA nécessite des vecteurs et des matrices dont les dimensions varient grandement avec le nombre de composants reliés au réseau. L'article [9] compare les tailles caractéristiques des tenseurs dans le cas de micro-réseaux triphasés possédant  $n_b$  barres,  $n_{\text{inv}}$  générateurs type *inverter* et  $n_{\text{SG}}$  générateur synchrones. En prenant en compte les injections de courants complexes des  $n_L$  charges triphasées pour la formulation MANA, on a pour évaluation explicite du nombre  $n$  d'équations associées aux méthodes MANA et CME:

$$\begin{aligned} n_{\text{CME}} &= 6n_b + 6n_{\text{inv}} + 2n_{\text{SG}} + 1, \\ n_{\text{MANA}} &= 6n_b + 12n_{\text{inv}} + 8n_{\text{SG}} + 6n_L + 1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En général, on observe  $n_{\text{MANA}} \geq n_{\text{CME}}$ , et cela pour deux raisons :

1. La représentation rectangulaire des variables complexes n'est pas la formulation la plus pertinente pour l'étude des réseaux électriques, compte tenu du fait que la représentation polaire est *a priori* plus adaptée pour l'étude des amplitudes et des phases [11, 13, 31]. Par exemple, dans le cas d'une barre PV, seule la phase de la barre  $\delta$  est une variable de résolution en polaire, tandis qu'en rectangulaire, les variables de résolutions sont  $\{\text{Re}(\mathbf{V}), \text{Im}(\mathbf{V})\}$  [19].
2. Le paradigme de formulation par injection de courant tel que défini pour MANA nécessite d'introduire des variables d'interface d'injection de courant. La définition de ces variables nécessite des équations supplémentaires qui relie tension de barres, courant d'injection et puissances.

La dimension des systèmes à résoudre peut avoir un impact sur le déploiement des méthodes de résolution sur des machines aux capacités de mémoires relativement limitées. Il existe toutefois des méthodes de résolution d'écoulement de puissance par injection de courant qui n'introduisent pas autant de dimensions supplémentaires [20]. On note CIM ce type de méthode, pour *Current Injection Method*.

### 2.4.3 Convergence

Pour une méthode de résolution donnée, l'ajout de complexité dans les équations de modélisation peut induire des moindres performances de convergence. Par exemple, les équations de générateurs à fréquence variables telles que (2.22) rendent la résolution de l'écoulement de puissance plus laborieuse [9, 27, 32]. Il en est de même lorsque les réseaux sont hybrides [33] ou à fréquences multiples [34]. Deux effets participent à cette dégradation de performance : une augmentation du nombre d'itérations nécessaires à la convergence et une augmentation du temps de calcul nécessaire à la réalisation d'une itération.

En contrepartie, il est montré expérimentalement que, pour un problème donné, l'augmentation du nombre d'équations résultant du choix de méthode n'implique pas nécessairement une dégradation des performances. Cela est notamment illustré dans les références [9, 26, 35] : en général, MANA converge plus rapidement et nécessite moins d'itérations que CME malgré un plus grand nombre d'équations dans (2.23). On retrouve aussi ce résultat pour d'autres méthodes « augmentées » telles que la méthode rectangulaire augmentée pour l'écoulement de puissance [16] ou en fonction de la représentation polaire ou rectangulaire des complexes [13, 19]. Aujourd'hui, la littérature tend à promouvoir les méthodes en bilan de courant comme ayant une meilleure convergence que les méthodes en bilan de puissance [36].

Dans les deux cas, les méthodes CME et MANA utilisent la méthode de résolution NR appliquée sur deux formulations  $\mathbf{F}$  distinctes. On retrouve alors dans la littérature les propriétés de NR dans ces deux méthodes :

1. La convergence de ces méthodes dépend de la proximité la valeur  $\mathbf{x}_0$  initialisant la suite itérative de NR avec la solution [2, 37]. Outre l'initialisation par défaut *flat-start*, plusieurs méthodes proposent des valeurs particulières d'initialisation afin d'améliorer les performances des méthodes [9, 21, 38]. Dans la suite de ce mémoire, toutes les méthodes considérées sont initialisées par un vecteur  $\mathbf{x}_0$  dont la construction est détaillée dans [9].
2. Lorsque l'on observe la convergence de la méthode, elle est quadratique à partir d'une certaine itération  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  [39]. Moyennant une bonne initialisation, ces méthodes présentent de meilleures performances que des méthodes qui n'utilisent pas la méthode de résolution de NR telles que Backward-Forward-Sweep (BFS) [26] ou Gauss-Seidel (GS).

#### 2.4.4 Étude de jacobniennes

Les performances comparées des deux méthodes peuvent être justifiées en partie par l'étude des jacobniennes associées à chaque méthode. À partir des présentations de CME de la section 2.1, de MANA de la section 2.2, et des démarches d'extensions de la section 2.3, on introduit les matrices plus complètes de ces deux méthodes. Ces matrices sont détaillées dans l'article [9] et permettent, entre autre, la résolution de l'écoulement de puissance pour les réseaux isolés. Pour un réseau à fréquence fixe, les lignes et colonnes spécifiques aux réseaux isolés doivent être omises.

On donne la matrice jacobienne associée à CME en (2.24) et la matrice jacobienne associée à MANA en (2.25). On distingue en (2.24) des blocs supplémentaires relatifs aux équations et variables associées à la génération, relatifs aux grandeurs  $P_{\text{mis},G}$ ,  $Q_{\text{mis},G}$ ,  $|\mathbf{E}_G|$  et  $\boldsymbol{\theta}_{E_G}$ , ainsi qu'à la spécificité des réseaux isolés, avec  $\delta_{\text{mis},\text{ref}}$  et  $\omega$ . En (2.25), on distingue les blocs supplémentaires définis au préalablement dans l'introduction de la Sous-Section 2.2.

$$\mathbf{J}_{\text{CME}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{V}|} & \frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{E}_G|} & \frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{E_G}} & \frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{V}|} & \frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{E}_G|} & \frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{E_G}} & \frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial P_{\text{mis},G}}{\partial |\mathbf{V}|} & \frac{\partial P_{\text{mis},G}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial P_{\text{mis},G}}{\partial |\mathbf{E}_G|} & \frac{\partial P_{\text{mis},G}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{E_G}} & \frac{\partial P_{\text{mis},G}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial Q_{\text{mis},G}}{\partial |\mathbf{V}|} & \frac{\partial Q_{\text{mis},G}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial Q_{\text{mis},G}}{\partial |\mathbf{E}_G|} & \frac{\partial Q_{\text{mis},G}}{\partial \boldsymbol{\theta}_{E_G}} & \frac{\partial Q_{\text{mis},G}}{\partial \omega} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \delta_{\text{mis},\text{ref}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

$$\mathbf{J}_{\text{MANA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{D}_c & \mathbf{A}_{\text{lx}} & \mathbf{A}_{\text{IL}} & \mathbf{A}_{\text{IG}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_r & \mathbf{D}_{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{L\omega} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{Y}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_G & \mathbf{Y}_{\text{GE}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Ces deux matrices sont des matrices creuses et permettent de bonnes performances computationnelles [4, 26]. En effet, cela permet de bénéficier de représentations moins coûteuses

en mémoire et de méthodes computationnelles plus efficaces telle que la décomposition LU pour la résolution de (1.3).

Les articles [15, 20, 40, 41] soulignent le fait que la formulation basée sur l'injection de courant permet de manipuler des jacobienes principalement constantes et construites en majorité grâce à la matrice  $\mathbf{Y}$ . La méthode développée par les auteurs de [20] a été testée sur des cas de grands réseaux et présente une accélération moyenne de la résolution du problème d'écoulement de puissance de l'ordre de 20 % par rapport à CME.

Une supériorité tangible des performances de résolution de MANA par rapport à CME a aussi été observée dans de nombreux articles [9, 33, 35]. En supplément, la méthode NR *dishonest* qui consiste à actualiser périodiquement la jacobienne, plutôt qu'à chaque itérations, permet artificiellement de réduire le temps moyen des itérations nécessaires à la résolution [26]. Cependant, aucun travail ne compare explicitement la complexité de calcul des matrices CME et MANA.

Des travaux récents utilisent le nombre de conditionnement des jacobienes  $\kappa(\mathbf{J}) = \|\mathbf{J}\| \times \|\mathbf{J}^{-1}\|$  pour comparer les performances respectives de MANA et d'une autre méthodes de référence dite NA-NR [35]. Pour un problème donné, les jacobienes MANA sont identifiées comme mieux conditionnées que celles de NA-NR, i.e.  $\kappa(\mathbf{J}_{\text{MANA}}) \ll \kappa(\mathbf{J}_{\text{NA-NR}})$ . Ce constat expérimental motive l'implémentation de MANA pour la résolution de problèmes mal-conditionnés. Ces problèmes sont caractérisables par des matrices CME avec un nombre de conditionnement élevé. Ils représentent des véritables défis de convergence pour les méthodes de résolutions d'écoulement de puissance [13, 42-47].

## 2.5 Recherche de performance et méthodes de résolutions diverses

Outre le choix d'une formulation et d'une méthode de résolution, il existe un panorama de méthodes disponibles pour le gestionnaire de réseau qui souhaite résoudre le problème d'écoulement de puissance. Dans un cadre de travail donné, différentes méthodes peuvent être conseillées ou déconseillées en fonction de leurs performances respectives. La Figure 2.1 présente une cartographie reliant plusieurs méthodes en fonctions de leurs caractéristiques de construction : modélisations, formulations, représentation des complexes, choix de méthode de résolution, etc. Certaines méthodes sont présentées comme désuètes car prouvées dépassées par d'autres méthodes

(e.g., BFS et GS) ou inadaptées à la modélisation de réseaux modernes plus complexes [12, 16, 22, 47, 48].

Il existe aussi des améliorations de méthodes qui augmentent artificiellement les performances de certaines méthodes. On a cité notamment NR *dishonest* utilisé dans [26] ou bien le choix du point d'initialisation [9, 26, 38]. D'autres simplifications de jacobienes existent, notamment grâce à des hypothèses de découplage P-V Q-phase lorsque la représentation polaire est utilisée pour les complexes [13, 14, 18].

Une variable d'ajustement pour l'amélioration des performances des méthodes itératives est la détermination d'un coefficient de multiplication optimal modulant la quantité ajoutée à  $\mathbf{x}_k$  pour obtenir  $\mathbf{x}_{k+1}$  [31, 43, 47].

Toutefois, chaque amélioration artificielle nécessite des hypothèses ou des calculs supplémentaires qui restreignent les cas d'applications ou la praticité. On peut aussi perdre les garanties de convergences de certaines méthodes. Dans l'ensemble, MANA prétend être une méthode performante et généraliste [9, 21, 26, 33, 34, 39, 49].

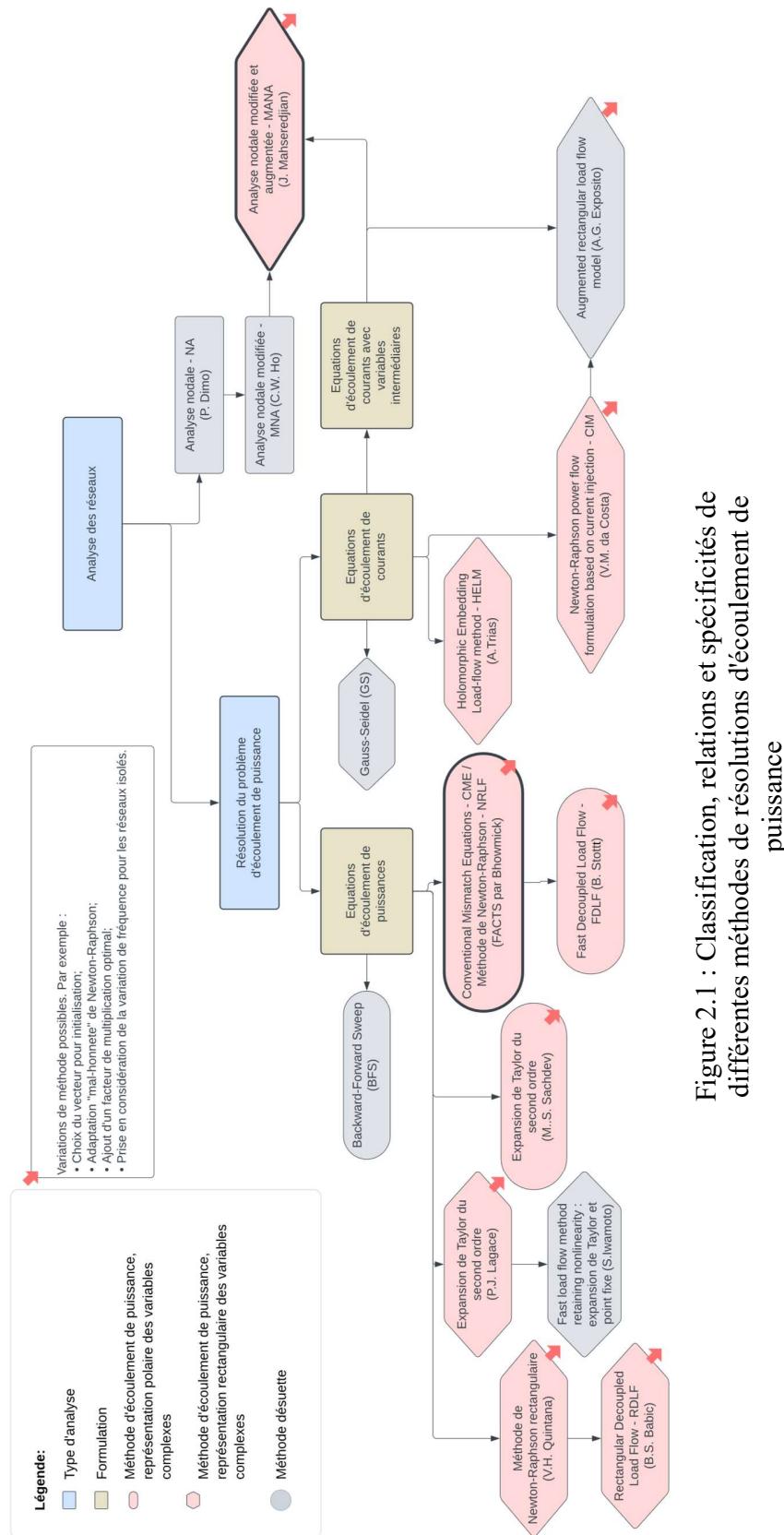


Figure 2.1 : Classification, relations et spécificités de différentes méthodes de résolutions d'écoulement de puissance

## CHAPITRE 3 COMPARAISONS THÉORIQUES

Une des principales motivations de ce mémoire est de donner des éléments théoriques pour justifier les résultats expérimentaux supposant une performance supérieure de MANA par rapport à CME. À partir de l'analyse des formulations et de résultats issus de la littérature sur la méthode NR, on étudie les spécificités de convergence de ces deux méthodes. On identifie aussi les spécificités des jacobbiennes MANA, et les caractéristiques des méthodes de résolution d'écoulement de puissance formulé par injection de courant.

### 3.1 Formalismes

Afin de justifier les performances de MANA par rapport à CME, on utilise des résultats issus de la littérature portant sur la méthode NR. On adopte dans cette sous-section les conventions d'écriture utilisées notamment dans [37], puis compare les implications des résultats de cet article sur les méthodes MANA et CME.

#### 3.1.1 Systèmes d'équations

On reprend la formulation présentée à la Section 1.1. Soit l'équation  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ . On emploie plus tard cette formulation générique pour représenter la formulation CME (respectivement, MANA) présentée dans la Section 2.1 (respectivement, Section 2.2).

On distingue deux sous-ensembles disjoints des composantes de  $\mathbf{F}$ , sur le critère de leur caractéristique linéaire ou non :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

La fonction  $\mathbf{n}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$  représente le système de fonctions non-linéaires sous-ensemble des composantes de  $\mathbf{F}$ . La fonction  $\mathbf{L}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n-q}$  représente le système de fonctions linéaires.

On distingue deux sous-ensembles disjoints des composantes de  $\mathbf{x}$  sur le critère de leur utilisation au sein des équations du système :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{w})$ . Ainsi,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-r}$  représente les composantes de  $\mathbf{x}$  qui sont uniquement impliquées linéairement dans la définition des composantes de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , et  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$  les composantes de  $\mathbf{x}$  privées de  $\mathbf{z}$ .

### 3.1.2 Jacobiennes

En conséquence du formalisme portant sur  $\mathbf{F}$ , on a la jacobienne  $\mathbf{J}$  associée à (3.1) qui s'écrit et se restreint en une fonction de  $\mathbf{w}$  :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{w}). \quad (3.3)$$

Plus précisément, en utilisant les ré-ordonnements sous-jacents à (3.1) et (3.2), on décrit la jacobienne  $\mathbf{J}$  à l'aide de matrice bloc :

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{n}_w(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{q,r}$ . Les matrices  $\mathbf{n}_z \in \mathbb{R}^{q,n-r}$ ,  $\mathcal{L}_w \in \mathbb{R}^{n-q,r}$  et  $\mathcal{L}_z \in \mathbb{R}^{n-q,n-r}$  sont des matrices constantes par construction.

## 3.2 Dépendances des composantes de $\mathbf{x}_k$ à $\mathbf{x}_0$

Dans cette partie, on démontre que les bassins d'attractions et les bassins d'attractions quadratiques associées à la méthode NR sont indépendants du choix des sous-composantes  $\mathbf{z}_0$  de  $\mathbf{x}_0$  telles que définie en (3.2). Le résultat portant sur les bassins d'attractions est issue de la référence [37], tandis que les extensions portant sur les bassins d'attractions quadratiques sont des contributions originales. On nommera composantes libres les composantes caractérisées par cette indépendance, car en théorie, elles sont sans impacts sur les performances de la méthode NR.

### 3.2.1 Composantes libres du bassin d'attraction NR

Pour une fonction  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , on définit le bassin d'attraction NR le sous-espace  $\Omega(\mathbf{x}^{\text{sol.}}) \subseteq \mathbb{R}^n$  tel que  $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega(\mathbf{x}^{\text{sol.}})$ , la suite définie par la méthode NR initialisée par  $\mathbf{x}_0$  converge vers  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ , la racine de  $\mathbf{F}$  [50]. On présente dans cette section une reformulation d'un résultat issus de la référence [37] qui permet de démontrer que  $\Omega(\mathbf{x}^{\text{sol.}})$  est de taille infinie selon les axes réels relatifs

aux sous-composantes  $\mathbf{z}$ . En d'autres termes, il n'est pas nécessaire, en théorie, d'initialiser spécifiquement  $\mathbf{z}_0$  pour espérer la convergence de la méthode NR. Il suffit seulement de bien choisir  $\mathbf{w}_0$ .

**Théorème 1** (Composantes libres du bassin d'attraction NR) [37] : Pour un processus NR initialisé par un premier estimé  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$  donné, la solution approchée  $\mathbf{x}_k$  définie par (1.3) est, à chaque étape  $k > 0$ , indépendantes du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

**Preuve** [37] : La preuve consiste en une preuve par hérédité à partir de la définition (1.3). Soit la propriété  $H_k$  que l'on souhaite démontrer pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  $H_k : \mathbf{x}_k$  est indépendant de  $\mathbf{z}_0$ .

Pour  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Or, par construction, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) &= g(\mathbf{x}_0) + \mathbf{n}_z \mathbf{z}_0, \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}_0) &= [\mathcal{L}_w \quad \mathcal{L}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{n}_z \mathbf{z}_0$  pouvant être restreinte à une fonction uniquement de  $\mathbf{w}_0$ , i.e.,  $g(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{w}_0)$ , qui représente l'ensemble des termes non-linéaires des composantes de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

Ainsi, (3.5) qui définit  $\mathbf{x}_1$  se réécrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} g(\mathbf{w}_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par conséquent, la valeur de  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$  ne dépend pas du choix de  $\mathbf{z}_0$ , mais uniquement de celui de  $\mathbf{w}_0$ .  $H_1$  est vraie.

Hérité : on suppose pour  $k > 0$ ,  $H_k$  :  $\mathbf{x}_k$  est indépendant de  $\mathbf{z}_0$  est vraie. On montre pour  $k' = k+1$ ,  $\mathbf{x}_{k'}$  est indépendant de  $\mathbf{z}_0$ , i.e.  $H_{k+1}$  est vraie. Par la relation (1.3), la valeur à l'itération  $k+1$  ne dépend que de la valeur à l'itération  $k$ . Or  $H_k$  est vrai, donc  $\mathbf{x}_{k'}$  est indépendant du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

On teste et illustre par un exemple simple ce résultat. Soit une fonction  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ , qui à  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  associe  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [x_1 + 2 \cos(0.5x_2), x_1 + 2 \sin(0.5x_2)]^T$  et possède une infinité de racines. On représente dans la Figure 3.1 la valeur de la norme de deux de cette fonction au voisinage de  $\mathbf{0}$ . On identifie les racines de  $\|\mathbf{F}\|_2$  dans les cuvettes blanches de la figure.

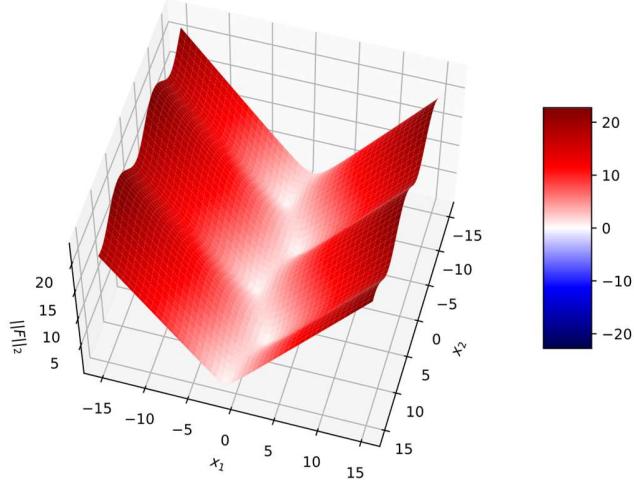


Figure 3.1 : Représentation graphique de la fonction  $\|\mathbf{F}\|_2$ , associée à  $\mathbf{F}$ .

Soit  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  une racine de  $\mathbf{F}$ . Seul  $x_1$  est linéairement impliqué dans la formulation de  $\mathbf{F}$ . En somme, on a  $\mathbf{z} = (x_1)$  et  $\mathbf{w} = (x_2)$ . Avec ce qui précède, seul le choix de la deuxième composante  $(x_2)_0$  impacte en théorie l'appartenance de  $\mathbf{x}_0$  à un éventuel bassin d'attraction. À partir d'une

initialisation dans un voisinage de  $\mathbf{0}$  discrétré, on identifie la solution obtenue grâce à la méthode NR par un identifiant qui dans ce cas prend des valeurs entre 1 et 6. On représente ainsi dans la Figure 3.2 les différents bassins d'attractions  $\Omega(\mathbf{x}^{\text{sol.}})$  associé à  $\mathbf{F}$  en fonction de l'identifiant associé à  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ . Par exemple, la méthode de Newton-Raphson converge vers la solution identifiée  $\mathbf{x}_1^{\text{sol.}} \approx [1.41, -4.71]^T$  si  $\mathbf{x}_0 = [-4, -4]^T$ , et vers la solution identifiée  $\mathbf{x}_7^{\text{sol.}} \approx [-1.41, 1.57]^T$  si  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$ .

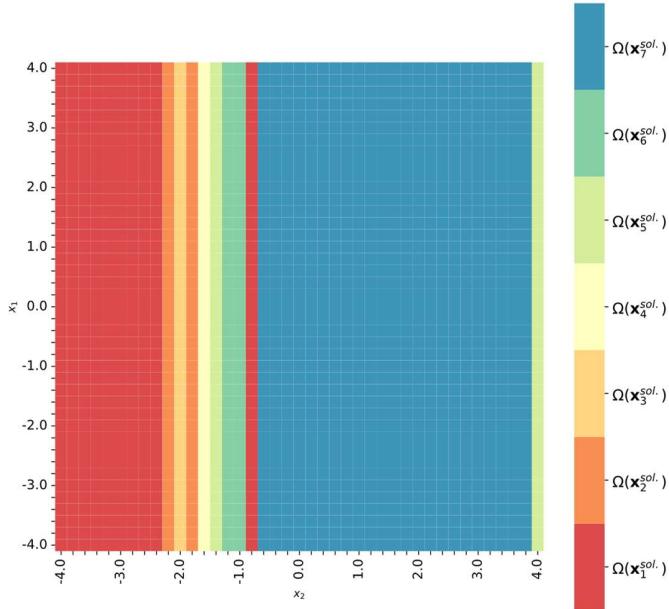


Figure 3.2 : Identification des bassins d'attraction par la méthode NR associés à  $\mathbf{F}$

La représentation en bandes illustre le fait que  $x_1$  est une composante libre de la fonction  $\mathbf{F}$  : le choix d'une valeur initiale de  $(x_1)_0$  n'a pas d'impact sur le résultat  $\mathbf{x}^*$  de la méthode NR.

### 3.2.2 Composantes libres du bassin d'attraction quadratique NR

On définit pour la suite  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la convergence quadratique vers  $\mathbf{x}^*$  à une vitesse maximale  $M \in \mathbb{R}^+$  suite à la première itération comme [51] :

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq M \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.8)$$

Pour une fonction  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , on définit le bassin d'attraction quadratique NR de vitesse maximale  $M$  par le sous-espace  $\Psi(\mathbf{x}^*, M) \subseteq \mathbb{R}^n$  tel que  $\forall \mathbf{x}_0 \in \Psi(\mathbf{x}^*, M)$ , la suite définie par la méthode NR initialisée par  $\mathbf{x}_0$  vérifie (3.8) avec  $\mathbf{x}^*$ , une racine de  $\mathbf{F}$ . Naturellement,  $\Psi(\mathbf{x}^*, M) \subseteq \Omega(\mathbf{x}^*)$ .

On présente dans cette section des extensions du résultat présenté à la Section 3.2.1 qui permet d'affirmer que, sous réserve d'existence,  $\Psi(\mathbf{x}^*, M)$  est de taille infinie selon les axes réels relatifs aux sous-composantes  $\mathbf{z}$ . En d'autres termes, il n'est pas nécessaire d'initialiser spécifiquement  $\mathbf{z}_0$  pour espérer la convergence quadratique de la méthode NR. À nouveau, il suffit seulement de bien choisir  $\mathbf{w}_0$ . Ces extensions sont des contributions originales

**Corollaire 1** (Évolution de la distance à la solution) : Pour une méthode NR initialisée par un premier estimé  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \in \Omega(\mathbf{x}^*)$ , la quantité  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$  est, à chaque étape  $k > 0$ , indépendante du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

**Preuve** : D'après le Théorème 1, pour une méthode NR initialisée par un premier estimé  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$  donné, la solution approchée  $\mathbf{x}_k$  définie par (1.3) est, à chaque étape  $k > 0$ , indépendante du choix de  $\mathbf{z}_0$ . Puisque  $\mathbf{x}^*$  est aussi indépendant du choix de  $\mathbf{z}_0$ , la quantité  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$  est, à chaque étape  $k > 0$ , indépendant du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

**Corollaire 2** (Nombre d'itérations nécessaire à la convergence) : Pour une méthode NR initialisée par un premier estimé  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \in \Omega(\mathbf{x}^*)$ , le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est indépendant du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

**Preuve :** Pour une méthode NR donnée, les critères d'arrêt (1.4) se basent sur les valeurs successives de la suite engendrée par  $\mathbf{x}_0$ . Or, ces valeurs sont indépendantes du choix de  $\mathbf{z}_0$  d'après le Théorème 1. Donc la première itération vérifiant le critère d'arrêt est indépendante du choix de  $\mathbf{z}_0$ .

**Corollaire 3** (Composantes libres du bassin d'attraction quadratique NR) : Tout bassin d'attraction quadratique  $\Psi(\mathbf{x}^*, M)$  est de taille infinie selon les axes réels relatifs aux sous-composantes  $\mathbf{z}$ .

**Preuve :** Soit un bassin d'attraction quadratique  $\Psi(\mathbf{x}^*, M)$  et  $\mathbf{x}_0^* = [\mathbf{w}_0^*, \mathbf{z}_0^*]^T \in \Psi(\mathbf{x}^*, M)$ . On montre que toute perturbation  $\mathbf{x}_0^*(\xi) = [\mathbf{w}_0^*, \mathbf{z}_0^* + \xi]^T, \xi \in \mathbb{R}^{n-r}$ , de  $\mathbf{x}_0^*$  appartient aussi à  $\Psi(\mathbf{x}^*, M)$ .

On a  $\mathbf{x}_0^* \in \Psi(\mathbf{x}^*, M)$  donc  $\|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}^*\| \leq M \|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}^*\|^2, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Or pour une méthode NR initialisée par un premier estimé  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \in \Psi(\mathbf{x}^*, M)$ , la quantité  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$  est, à chaque étape  $k > 0$ , indépendant du choix de  $\mathbf{z}_0$ . Donc  $\|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}^*\| \leq M \|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}^*\|^2, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi,  $\mathbf{x}_0^*(\xi) \in \Psi(\mathbf{x}^*, M)$ .

On propose en Annexe B.2 un développement de Taylor à l'ordre 2 qui illustre à nouveau la seule implication des composantes non-libres dans la vitesse de convergence de la méthode NR. Ce calcul représente un axe futur de recherche destiné à la caractérisation théorique des performances des méthodes de résolution de l'écoulement de puissance.

Afin d'illustrer l'invariance de la vitesse de convergence par la perturbation des composantes libres, on poursuit avec l'exemple introduit à la Section 3.2.1. On représente graphiquement dans la Figure 3.3 le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode NR avec pour critère d'arrêt  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \leq 10^{-5}$  en initialisant à partir d'un  $\mathbf{x}_0$  donné. Dans un bassin d'attraction donné, la qualité du choix de  $\mathbf{w}_0$  impacte la vitesse de convergence de la méthode NR. Par exemple, au sein du bassin  $\Omega(\mathbf{x}_7^*)$  la méthode converge en 4 itérations si  $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$ , et en 2 itérations si  $\mathbf{x}_0 = [0, 1.2]^T$ .

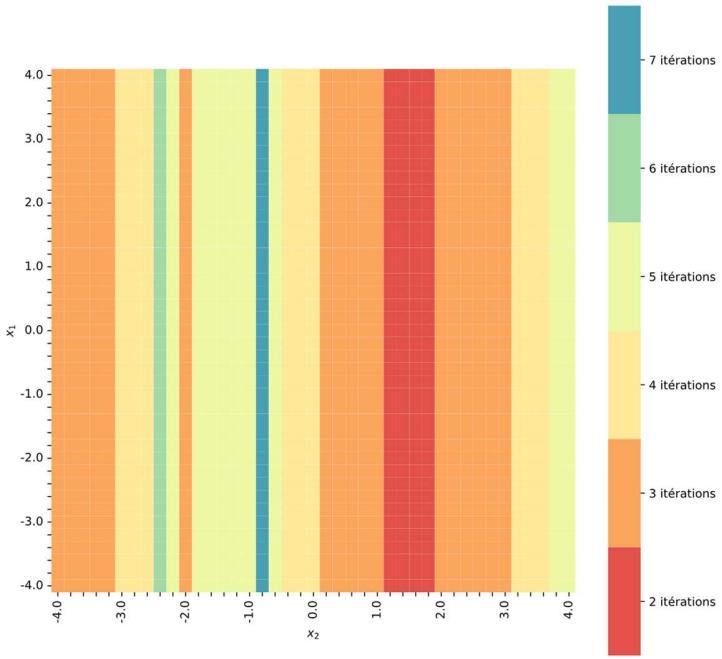


Figure 3.3 : Identification des bassins de vitesse de convergence par la méthode NR associés à  $\mathbf{F}$ .

À nouveau, la représentation en bandes illustre le fait que  $x_1$  est une composante libre de la fonction  $\mathbf{F}$  : le choix d'une valeur initiale de  $(x_1)_0$  n'a pas d'impact sur le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence vers le résultat  $\mathbf{x}^*$ .

### 3.2.3 Impact sur la stratégie d'initialisation de la méthode NR

La revue de littérature présentée dans les Sections 2.4.3 et 2.5 soulignent, par le prisme du problème d'écoulement de puissance, l'importance de la stratégie d'initialisation de la méthode NR pour en améliorer les performances. D'autant plus, il est connu que le problème de l'écoulement de puissance peut posséder aucune, une ou plusieurs solutions [52, 53]. En pratique, dans l'application faite à la résolution du problème d'écoulement de puissance, on souhaite obtenir la solution stable associée à des états de hautes tensions, par opposition aux autres solutions non-stables associées à des basses tensions. La solution obtenue par la méthode NR dépend de son initialisation et la vitesse de convergence dépend notamment de la proximité de l'initialisation avec la solution d'après le théorème de Kantorovich [54]. Cette section permet de restreindre la nécessité de bien initialiser  $\mathbf{x}_0$  à celle de bien initialiser  $\mathbf{w}_0$ .

### 3.3 Applications à MANA et CME

La revue de littérature présentée dans le Chapitre 2 insiste sur le fait que le choix de formulation **F** mène à des constats empiriques de différences de performances. Ce constat est d'autant plus probant lorsque l'on considère spécifiquement des méthodes de résolutions de l'écoulement de puissance utilisant une même méthode de résolution numérique telle que NR. On étudie dans cette partie l'application des résultats présentés dans les Sections 3.1 et 3.2 aux formulations CME et MANA dans le cadre d'étude telle que présenté à la Section 2.4.4 et relative à l'article [9].

#### 3.3.1 Identification des composantes libres CME et MANA

**CME** : Du fait de la représentation polaire des complexes, on identifie dans (2.3) des fonctions  $\cos$  et  $\sin$  qui prennent en argument les phases des tensions. Ces termes sont multipliés aux variables d'amplitude des tensions. Le formalisme en écoulement de puissance implique aussi la présence à l'ordre deux de termes d'amplitudes. Dans l'ensemble, pour CME, l'intégralité des équations usuelles sont non-linéaires, et la majorité des variables sont impliquées non-linéairement dans la formulation. Dans le cas où le réseau est composé de générateurs *droop* ou *inverter*, on identifie des équations linéaires modélisant les contraintes de phases des *inverters* [9]. Toutefois, seulement la fréquence  $\omega$  est une composante libre de la formulation CME lorsqu'elle permet de modéliser les générateurs *droops* dans les réseaux isolés impliquant (2.22).

Par conséquent, on écrit formellement :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{\text{CME}} = \mathbf{x}_{\text{CME}} \setminus \omega \\ \mathbf{z}_{\text{CME}} = \omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

**MANA** : Puisque le formalisme utilise la représentation rectangulaire des nombres complexes ainsi qu'un formalisme par injection de courant avec variables d'interface, les équations de bilans nodaux (2.16) sont des équations linéaires. Cependant, les équations qui interfacent les variables de courants (2.17) sont non-linéaires lorsque l'équation qui caractérise le composant est une équation de puissance. Les modèles ZIP de (2.21) et le modèle de générateur *droops* de (2.22) en sont des exemples.

Dans l'ensemble, on obtient comme composantes libres de la formulation MANA la fréquence  $\omega$ , les tensions réelles et complexes des nœuds qui ne sont pas associés à de l'injection de courant par

des composants de puissances, ainsi que certaines variables de résolutions qui modélisent le fonctionnement interne de certains composants de puissance.

Dans le cadre d'étude de l'article [9], on écrit formellement :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{\text{MANA}} = (\mathbf{V}^{\text{inj}}, \mathbf{I}^{\text{injectées}}) \\ \mathbf{z}_{\text{MANA}} = (\omega, \mathbf{V}^{\emptyset}, \mathbf{V}_{\text{EMF}}). \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans les variables impliquées non-linéairement, on identifie  $\mathbf{V}^{\text{inj}}$ , les tensions complexes des nœuds dans lesquels s'opère au moins une injection de courant par une variable d'interface de courant  $\mathbf{I}^{\text{injectées}}$ . Les variables uniquement impliquées linéairement sont la fréquence du réseau  $\omega$ , les tensions complexes des nœuds  $\mathbf{V}^{\emptyset}$  où il n'y a pas d'injection de courant par des variables d'interface  $\mathbf{I}^{\text{injectées}}$ . On identifie aussi  $\mathbf{V}_{\text{EMF}}$  les tensions complexes internes aux générateurs.

On illustre ce qui précède à partir du réseau de 4 barres donné dans Figure 3.4. On suppose que le réseau monophasé. Les charges  $L1$  et  $L2$  sont deux charges dont la fonction caractéristique de puissance injectée suit le modèle ZIP présenté en (2.20). La source  $S1$  est un générateur *droop* de caractéristique présentée en (2.22).

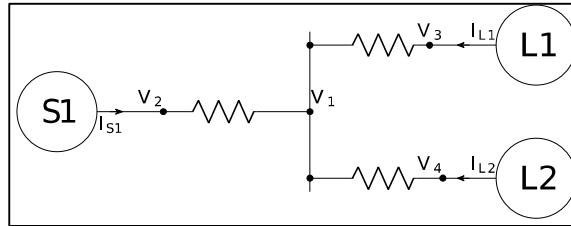


Figure 3.4 : Exemple d'un réseau 4 barres

Pour la formulation CME, on a :  $\mathbf{x}_{\text{CME}} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \omega)$ ,  $\mathbf{z}_{\text{CME}} = (\omega)$  et  $\mathbf{w}_{\text{CME}} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)$ .

Pour la formulation MANA, on a :  $\mathbf{x}_{\text{MANA}} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{I}_{S1}, \vec{I}_{L1}, \vec{I}_{L2}, \omega)$ ,  $\mathbf{z}_{\text{MANA}} = (\vec{V}_1, \omega)$  et  $\mathbf{w}_{\text{MANA}} = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{I}_{S1}, \vec{I}_{L1}, \vec{I}_{L2})$ .

### Remarques communes :

Dans un premier temps, la répartition des variables comme présentée en (3.9) et (3.10) peut varier en fonction du choix de modélisation des différents composants. L'article [9] utilise par exemple pour modélisation des charges deux équations qui, pour une charge sur une phase, prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_L &= P_{L_0} \left| \frac{\vec{V}_L}{\vec{V}_0} \right|^{\alpha_L} \left[ 1 - k_{pf} (\omega - \omega_0) \right], \\ Q_L &= Q_{L_0} \left| \frac{\vec{V}_L}{\vec{V}_0} \right|^{\beta_L} \left[ 1 - k_{qf} (\omega - \omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les paramètres  $P_{L_0}$  et  $Q_{L_0}$  sont les puissances actives et réactives nominales de la charge. Le paramètre  $\vec{V}_0$  est la tension nominale de la charge et  $\omega_0$  est la fréquence nominale. La tension  $\vec{V}_L$  est la tension du nœud auquel la charge est reliée. Les constantes  $\beta_L$  et  $\alpha_L$  (respectivement,  $k_{pf}$  et  $k_{qf}$ ) sont des paramètres de sensibilité relatives au modèle de charge exponentielle (respectivement, à la dépendance en la variation de fréquence  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  du réseau.)

La répartition de variables donnée en (3.10) correspond à un cadre d'étude où les constantes des charges sont telles que  $k_{pf} = k_{qf} = 0$ . Pour cette raison,  $\omega$  est un élément identifié de  $\mathbf{z}$ . Dans le cas de figure où  $\alpha_L \beta_L \neq 0$  et au moins une charge possède une sensibilité non-nulle à  $\Delta\omega$ , la fréquence  $\omega$  devient alors un élément de  $\mathbf{w}$  car non-linéairement impliqué dans la formulation de l'écoulement de puissance.

Dans un second temps, pour un même problème d'écoulement de puissance, les dimensions libres pour la méthode NR sont plus grandes pour MANA que pour CME. Pour CME,  $\mathbf{z}_{\text{CME}}$  est de dimension nulle ou unitaire. Pour MANA,  $\mathbf{z}_{\text{MANA}}$  est au moins de la dimension de  $\mathbf{z}_{\text{CME}}$ .

Ensuite, selon (2.23), la formulation MANA mobilise plus de variables que la formulation CME. Dans le cadre de l'étude d'un réseau aux charges triphasées tel que le réseau 25 barres de l'article [9], on peut définir une relation seuil de telle sorte à ce que la dimension de  $\mathbf{w}_{\text{MANA}}$  soit inférieure à celle de  $\mathbf{w}_{\text{CME}}$ . En d'autres termes, on définit un critère sur la composition du réseau de telle sorte que MANA requiert moins de composantes à correctement initialiser que CME. On réutilise les

notations introduites dans la Section 2.4.2 et on introduit  $n_{V^{inj}}$  le nombre de barres où la tension associée est utilisée pour définir au moins une variable d'interface de courant via une équation de type (2.13). La relation seuil est la suivante :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{w}_{MANA}) &\leq \dim(\mathbf{w}_{CME}) \\ \Leftrightarrow 6n_{inv} + 6n_{SG} + 6n_L + 6n_{V^{inj}} &\leq 6n_b + 6n_{inv} + 2n_{SG} \\ \Leftrightarrow 4n_{SG} + 6n_L + 6n_{V^{inj}} &\leq 6n_b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par exemple, si un réseau aux charges triphasées issue du cadre d'étude de l'article [9] possède plus de barres que de composants de puissances tels que  $2(n_{SG} + n_L) + n_{inv} \leq n_b$ , alors il est moins fastidieux d'initialiser correctement MANA que CME car ce réseau vérifie la relation seuil (3.12). En effet, il faut remarquer pour cela que, par définition,  $n_{V^{inj}} \leq n_{SG} + n_L + n_{inv}$ . Pour un réseau de distribution où les charges ne sont pas nécessairement triphasées, il est possible de définir une relation analogue en prenant en compte le nombre de charge par phase, et non pas  $n_L$  le nombre de charge par barres.

Enfin, la Section 3.2 étant généraliste, ces résultats peuvent être appliqués à tout autre composants de réseau modélisable par une contrainte mathématique, et cela sans exceptions. Prenons par exemple le cas d'un transformateur idéal de gain  $g$  formulé pour MANA, tel que présenté dans les notes de cours [21]. On note  $k_1$  et  $k_2$  les nœuds d'un bord, et  $m_1$  et  $m_2$  les nœuds de l'autre bord. La contrainte qui modélise ce transformateur, est, mathématiquement :

$$\vec{V}_{k1} - \vec{V}_{k2} - g(\vec{V}_{m1} - \vec{V}_{m2}) = \vec{0} \quad (3.13)$$

Cette contrainte implique linéairement les variables de résolutions  $(\vec{V}_{k1}, \vec{V}_{k2}, \vec{V}_{m1}, \vec{V}_{m2})$ . Dans le cas de figure où ces nœuds ne subissent pas d'injection de courant par des composants de puissance, on peut dorénavant affirmer que  $(\vec{V}_{k1}, \vec{V}_{k2}, \vec{V}_{m1}, \vec{V}_{m2}) \subset \mathbf{z}_{MANA}$  et qu'il n'est pas nécessaire de mieux initialiser ces variables pour espérer atteindre de meilleure performance de convergence de MANA.

### 3.3.2 Étude de cas

On propose dans cette sous-section une vérification des résultats théoriques présentés précédemment en étudiant la résolution du problème d'écoulement de puissance pour deux réseaux

tests, avec les méthodes MANA et CME. Les réseaux testés sont deux réseaux isolés de 25 barres et 906 barres. Ils sont respectivement présentés dans les annexes B.1 Micro-réseau isolé 25 barres et B.2 Réseau isolé 906 barres.

**Test 1 :** Calcul empirique des dimensions de  $\mathbf{n}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$ . À partir du code usuel d'une méthode donnée (MANA ou CME), on identifie le nombre de lignes et le nombre de colonnes non nulles de la matrice  $\Delta\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_0 + \xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_i > 0 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On identifie ainsi les dimensions  $(q, r)$  du bloc-matrice  $\mathbf{n}_w$  présenté en (3.4) sans avoir à ordonner au préalable ni  $\mathbf{F}$ , ni  $\mathbf{x}$ . Le nombre de lignes  $q$  non nulles correspond au nombre d'équations non-linéaires de  $\mathbf{F}$ . Il permet de dimensionner  $\mathbf{n}$ , et donc  $\mathcal{L}$ . Le nombre de colonnes  $r$  non nulles correspond au nombre de composantes de  $\mathbf{x}$  impliquées non-linéairement dans  $\mathbf{F}$ . Il permet de dimensionner  $\mathbf{w}$ , et donc  $\mathbf{z}$ .

**Test 2 :** Performance à la convergence avec perturbation des composantes libres. Le point d'initialisation de référence  $\mathbf{x}_0^*$  est donné par la méthode d'initialisation fournie par l'article [9].

On construit un point d'initialisation perturbé  $\mathbf{x}_0^*(\xi) = [\mathbf{w}_0^*, \mathbf{z}_0^* + \xi]^T$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n-r}$  avec  $\xi$  construit aléatoirement. On compare alors la qualité de cette initialisation perturbée  $\mathbf{x}_0^*$  par rapport à la qualité de l'initialisation de référence  $\mathbf{x}_0^*$ . Les deux indicateurs de qualité sont si l'on obtient la convergence, et le nombre d'itérations pour atteindre la convergence si applicable. On s'attend à ce que cette perturbation n'ait pas d'impact sur les propriétés de convergence. On rapporte les deux grandeurs  $i_{\text{ref}}$  et  $i_{\text{perturb}}$  correspondant respectivement au nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode NR avec l'initialisation de référence et avec l'initialisation perturbée. On affectera la valeur  $+\infty$  lors de divergence.

**Test 3 :** Performance à la convergence avec perturbation aléatoire de  $n-r$  composantes de  $\mathbf{x}_0^*$ . On réalise un test analogue au test 2, mais avec pour vocation de vérifier l'importance de l'initialisation de  $\mathbf{w}$  pour la résolution du problème de l'écoulement de puissance. À partir du point de référence  $\mathbf{x}_0^*$ , on construit un point d'initialisation perturbé  $\mathbf{x}_0^*(\xi) = \mathbf{x}_0^* + \xi$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  avec  $\xi$  construit aléatoirement avec  $r$  composantes nulles. On compare la qualité de cette initialisation perturbée  $\mathbf{x}_0^*$  par rapport à la qualité de l'initialisation de référence  $\mathbf{x}_0^*$ . Les deux indicateurs de qualité sont si l'on obtient la convergence, et à quelle vitesse de convergence si

applicable. On s'attend à ce que cette perturbation ait un impact sur les propriétés de convergence. On rapporte les deux grandeurs  $i_{\text{ref}}$  et  $i_{\text{perturb}}$  correspondant respectivement au nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode NR avec l'initialisation de référence et avec l'initialisation perturbée. On affectera la valeur  $+\infty$  lors de divergence.

### Résultats des tests :

Tableau 1 : Résultats des tests de l'étude de cas

		Test 1 : $(n, q, r)$	Test 2 : $(i_{\text{ref}}, i_{\text{perturb}})$	Test 3 : $(i_{\text{ref}}, i_{\text{perturb}})$
MANA	25 barres	(327,150,294)	(4,5)	(4, $+\infty$ )
	906 barres	(5563,114,244)	(4,7)	(4, $+\infty$ )
CME	25 barres	(165,156,164)	(7,7)	(7, $+\infty$ )
	906 barres	(5441,5440,5440)	(5, 5)	(5, $+\infty$ )

On constate grâce au Tableau 1 la théorie présentée dans les Sous-sections 3.2 et 3.3.1 :

1. Pour CME, on vérifie dans les deux cas (3.9) car  $\dim(\mathbf{w}) = n - 1$  .
2. Pour MANA, on vérifie dans les deux cas (3.10). Pour le réseau 25 barres, on vérifie  $\dim(\mathbf{w}_{\text{MANA}}) = r = 6n_{\text{inv}} + 6n_{\text{SG}} + 6n_{\text{L}} + 6n_{\text{V}^{\text{inj}}}$  en considérant les composants de puissance triphasé avec  $n_{\text{inv}} = 2$ ,  $n_{\text{SG}} = 1$ ,  $n_{\text{L}} = 24$  et  $n_{\text{V}^{\text{inj}}} = 22$ . On remarque  $n_{\text{V}^{\text{inj}}} < n_{\text{L}}$  car 2 charges sont paramétrées telles que la puissance injectée soit nulle. Pour le réseau 906 barres, on vérifie  $\dim(\mathbf{w}_{\text{MANA}}) = r = 6n_{\text{inv}} + 6n_{\text{SG}} + 2n_{\text{L}} + 2n_{\text{V}^{\text{inj}}}$  en considérant les  $n_{\text{L}}$  charges monophasées, les  $n_{\text{V}^{\text{inj}}}$  nœuds où on injecte du courant, et la génération triphasée. On a  $n_{\text{inv}} = 0$ ,  $n_{\text{SG}} = 2$ ,  $n_{\text{L}} = 55$  et  $n_{\text{V}^{\text{inj}}} = n_{\text{L}} + 3n_{\text{SG}} = 61$  , avec  $n_{\text{V}^{\text{inj}}} > n_{\text{L}}$  car la génération et la consommation n'ont pas de barres communes.

3. Comme attendu, les méthodes CME et MANA, appliquées aux deux réseaux, convergent malgré la perturbation du point d'initialisation  $\mathbf{x}_0^*(\xi) = [\mathbf{w}_0^*, \mathbf{z}_0^* + \xi]^T$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n-r}$ . Pour CME, cette perturbation n'a pas d'impact sur le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. La perturbation  $\mathbf{x}_0^*(\xi) = \mathbf{x}_0^* + \xi$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  amène à la divergence de la méthode.

On remarque toutefois un écart à la théorie avec le **Test 2** pour MANA : la perturbation de la composante  $\mathbf{z}$  induit une augmentation du nombre d'itérations nécessaire à la convergence. On explique ce constat par les erreurs de calculs numériques qui font légèrement dévier la trajectoire  $(\mathbf{x}_k)$  de la méthode NR lorsque la précision de calcul  $\mu$  est finie. Dans notre cas,  $\mu = 10^{-16}$ . En pratique, le solveur compile et résout (3.5), pourtant théoriquement équivalente à (3.7). En induisant la limitation de précision, le solver résout en réalité une équation de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g(\mathbf{w}_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \gamma(\mathbf{z}_0). \quad (3.14)$$

Avec un résidu  $\gamma(\mathbf{z}_0)$  tel que  $\|\gamma(\mathbf{z}_0)\| = O(\mu)$ . On abordera plus en détail les performances computationnelles au Chapitre 4.

## CHAPITRE 4 PERFORMANCE DE CALCUL

La remarque associée à (3.14) met en évidence les limites de l'étude des performances des méthodes MANA et CME par le prisme d'une unique analyse théorique : il est nécessaire de prendre en compte les limites numériques de résolution pour étudier la performance de ces méthodes de résolution. Dans un premier temps, on étendra le **Test 1** présenté Section 3.3.2 afin de démontrer que la complexité de calcul d'une itération CME est plus grande que celle d'une itération MANA, et cela bien que les dimensions des jacobiniennes MANA soient plus importantes que celle de CME. Dans un second temps, on étudiera la notion de conditionnement de jacobienne pour les méthodes MANA et CME.

### 4.1 Rapidité d'exécution d'une itération

Deux indicateurs déterminent le temps de résolution d'un problème d'écoulement de puissance qui utilise NR : la durée de résolution d'une itération et le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. On montre dans cette section la rapidité relative d'exécution d'une itération MANA par rapport à une itération CME. On considère notamment la sensibilité de cette exécution aux caractéristiques du réseau.

#### 4.1.1 Complexité de construction de matrices jacobiniennes

On a vu dans les Sections 2.1 et 2.3 que, les éléments qui composent les jacobiniennes associées à CME doivent être recalculés à chaque itération. Ce fait est directement lié aux dimensions de  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{w}$  : puisque la grande majorité des variables de résolution du problème sont impliquées non-linéairement dans sa formulation, alors ces variables sont au moins impliquées linéairement dans la construction des jacobiniennes associées. La complexité de calcul est d'autant plus grande que la majorité des composantes de la formulation CME utilisent des fonctions sin et cos : la majorité des éléments de la jacobienne nécessitent l'appel de fonctions sin et cos. L'appel de ces fonctions représentent un coût de calcul non négligeable.

MANA, utilisant une formulation basée sur des bilans de courant et une représentation rectangulaire des nombres complexes, implique une construction de jacobienne plus rapide à compiler. Ce constat avait déjà pu être fait dans l'études de méthodes de résolution de l'écoulement de puissance basée sur des bilans de courant [15, 20, 40, 41]. Du fait de l'ordre inférieur des équations utilisées pour la formulation, les jacobiniennes présentent plus de termes constants peu

coûteux à la construction des jacobniennes. Toutefois, MANA se différencie de ces méthodes du fait de l'utilisation de variables supplémentaire afin de réaliser une interface de l'injection de courant des composants de puissance dans le réseau. L'équation supplémentaire se caractérise principalement par l'équation quadratique (2.13) : les composantes non-linéaire de la formulation MANA induisent des affectations linéaires des variables de résolution dans la construction des jacobniennes MANA. Par conséquent, on perd en général la dominance diagonale de la jacobienne mais la différenciation est en général plus aisée.

#### 4.1.2 Construction de jacobniennes pour différentes méthodes : exemples

On propose à partir du réseau présenté à la Figure 3.4 un développement simple de matrices jacobniennes pour illustrer ces propos. Les méthodes étudiées sont CME, MANA, mais aussi CIM pour identifier les avantages partagés par les méthodes à injection de courant. La méthode CIM est une méthode de résolution du problème de l'écoulement de puissance basé sur un bilan nodal sans variables d'interface supplémentaires [15]. On supposera pour le modèle ZIP des deux charges :

$$b_1^P = b_2^P = b_1^Q = b_2^Q = \frac{1}{V_0}.$$

Les calculs sont développés en Annexe C.2 et exploités dans cette section. On porte une attention particulière à la complexité de construction des matrices jacobniennes des méthodes NR associées aux différentes formulations.

Dans cet exemple, la jacobienne CME est une matrice carrée de dimension 9. Parmi 81 composantes, 17 sont des constantes et 64 sont variables au fur et à mesure des itérations. Chacune de ces 64 composantes nécessitent au moins 10 opérations sur les variables de résolution : sommations, compositions par des fonctions trigonométriques et multiplications.

La jacobienne MANA est une matrice carrée de dimension 15. Parmi 225 composantes, 174 sont des constantes et 24 sont variables au fur et à mesure des itérations. Parmi ces 24 composantes variables, 14 sont égales à une des composantes de la variable de résolution et 10 nécessitent au moins 6 opérations sur les variables de résolution : sommations, mises à l'exposant, inversion et multiplications.

La jacobienne CIM est une matrice carrée de dimension 9. Parmi 81 composantes, 67 sont des constantes et 14 sont variables au fur et à mesure des itérations. Les 12 composantes variables de

la diagonale nécessitent au moins 10 opérations sur les variables de résolution : sommes, mises à l'exposant, inversion et multiplications.

Cet exemple, dont les grandeurs d'intérêts sont résumées dans le Tableau 2, illustre la praticité de MANA par le prisme de la construction de jacobien pour la méthode NR. MANA se distingue des méthodes CME et CIM par une complexité inférieure. Ici, la complexité des méthodes impacte la rédaction du code, mais aussi son temps de compilation. Bien que la dimension de la jacobienne MANA soit plus grande que celle des jacobien CME et CIM, le fait qu'elle soit creuse et principalement constante compense le désagrément présupposé de sa taille.

Tableau 2 : Dimensions caractéristiques des jacobien CME, MANA et CIM pour un réseau monophasé à 4 noeuds, 2 charges et 1 générateur.

	$n^2$	Composantes constantes	Composantes en affectation simple	Composantes nécessitant des opérations	Nombre approché d'opérations
CME	81	17	0	64	640
MANA	225	174	14	10	60
CIM	81	67	0	14	120

En poursuivant le **Test 1** présenté dans la Section 3.3.2, on calcule le nombre de composantes variables dans le bloc matrice  $\mathbf{n}_w$  en évaluant le nombre de valeurs non nulles dans la matrice  $\Delta\mathbf{J}$  utilisée plus tôt. On rapporte les résultats dans le Tableau 3.

Tableau 3 : Nombre de composantes variables dans le bloc matrice  $\mathbf{n}_w$  d'une jacobienne pour une méthode et un réseau donné.

	25 barres	906 barres
CME	2728	95240
MANA	618	488

Pour MANA le nombre d'entrées de  $\mathbf{n}_w$  est du même ordre de grandeur pour le réseau 25 barres et 906 barres : ces deux réseaux ont un nombre proche de charges, et donc un nombre proche de

termes non-linéairement impliqués dans la formulation. Au contraire, pour CME, le nombre d'entrée de  $\mathbf{n}_w$  est sensible au nombre de barres.

Dans le cadre de ce test, on rapporte dans le Tableau 4 trois temps  $(t_{\text{est}}; \bar{t}_J; t_{\text{tot}})$ . Le temps  $t_{\text{est}}$  correspond au temps de calcul des composantes constantes pour la construction des jacobiniennes et des contraintes,  $\bar{t}_J$  le temps moyen nécessaire à la construction d'une jacobienne et des contraintes avec MATLAB, et  $t_{\text{tot}}$  correspond au temps total de calcul nécessaire à la convergence.

	25 barres	906 barres
CME	(0;0.1825;1.8403)	(0;344.3;1762)
MANA	(0.0017;0.0011;0.0326)	(0.1041;0.0011;0.2003)

Tableau 4 : Temps  $(t_{\text{est}}, \bar{t}_J, t_{\text{tot}})$  en seconde de calcul pour une méthode et un réseau donné

Ces résultats s'inscrivent dans la continuité de l'étude du réseau à 4 barres présenté précédemment : une jacobienne associée à une formulation en injection de courant nécessite moins de composantes variables qu'une formulation en bilan de puissance. Dans nos études de cas, cela implique un temps de résolution plus court du problème, indépendamment de l'éventuelle augmentation du temps nécessaire à l'inversion des jacobiniennes.

#### 4.1.3 Dimensions de la complexité

Les indicateurs de complexité peuvent être caractérisés à partir des études théoriques réalisées dans le Chapitre 3.

Par exemple, la grandeur  $\text{size}(\mathbf{n}_w) = \dim(\mathbf{n}) \times \dim(\mathbf{w})$  représente une borne supérieure de ce nombre de composantes variables.

Lorsque l'on considère la formulation CME, la formulation se base sur  $\dim(\mathbf{n}) = 6n_b$  équations non-linéaires et  $\dim(\mathbf{w}) = 6n_b + 6n_{\text{inv}} + 2n_{\text{SG}}$  variables impliquées non-linéairement dans la formulation d'après (3.9). On en déduit  $\text{size}(\mathbf{n}_w) = 6n_b (6n_b + 6n_{\text{inv}} + 2n_{\text{SG}})$ .

Lorsque l'on considère la formulation MANA, la formulation se base sur  $\dim(\mathbf{n}) \leq 12n_{\text{inv}} + 8n_{\text{SG}} + 6n_{\text{L}}$  équations au plus non-linéaires et  $\dim(\mathbf{w}) = 6n_{\text{inv}} + 6n_{\text{SG}} + 6n_{\text{L}} + 6n_{\mathbf{V}^{\text{inj}}}$  variables impliquées non-linéairement dans la formulation d'après (3.10).

On en déduit  $\text{size}(\mathbf{n}_w) \leq (6n_{\text{inv}} + 6n_{\text{SG}} + 6n_{\text{L}} + 6n_{\mathbf{V}^{\text{inj}}})(12n_{\text{inv}} + 8n_{\text{SG}} + 6n_{\text{L}})$ .

Dans les cas extrêmes où le nombre de valeurs non-nulles de  $\mathbf{n}_w$  est proche de sa cardinalité, on remarque que CME est sensible au nombre de barres dans le réseau, tandis que MANA est sensible aux nombres de composants injectant de la puissance dans le réseau.

Ce résultat représente la définition d'une borne supérieure aux résultats proposés aux Tableau 3 et 4.

## 4.2 Conditionnement de matrices jacobienes

Malgré une taille de matrice jacobienne plus grande pour MANA que pour CME, on a illustré dans la Section 4.1 que l'étape déterminante sur le temps de calcul d'une itération pour la résolution de l'écoulement de puissance est l'étape de la construction des jacobienes.

On étudie dans cette section l'étape de la résolution de l'équation matricielle par le prisme du nombre de conditionnement tel qu'utilisé pour justifier les performances de MANA dans l'article [35].

### 4.2.1 Définition du nombre de conditionnement

Pour une matrice carrée  $\mathbf{A}$  quelconque, le nombre de conditionnement associée à  $\mathbf{A}$  est noté  $\kappa(\mathbf{A})$ . Ce nombre de conditionnement est explicitement associé à  $\mathbf{A}$ , et implicitement associé à une norme matricielle  $\|\cdot\|: \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \|\mathbf{A}\| \in \mathbb{R}^+$ . En effet,  $\kappa(\mathbf{A})$  est défini par le système (4.1) issue de la référence [55] :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mathbf{A} \text{ est singulier,} \\ \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Certaines propriétés du nombre de conditionnement sont héritées des propriétés des normes matricielles.

Par exemple, le nombre de conditionnement associé à la norme 2 d'une matrice inversible  $\mathbf{A}$  s'écrit comme le ratio de certaines des valeurs singulières associées à  $\mathbf{A}$  [56] :

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} \quad (4.2)$$

Dans un second exemple, pour un espace vectoriel de matrices réelles carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n$  donné et inversible, tous les nombres de conditionnement issus de normes matricielles sont équivalentes [55]. Dans la suite de ce mémoire, le nombre de conditionnement est calculé à l'aide de la norme 2.

Algébriquement, l'inverse du nombre de conditionnement  $\kappa_p(\mathbf{A})$  caractérise la distance en norme  $p$  entre la matrice  $\mathbf{A}$  et l'ensemble des matrices singulières de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  [55]. Cette grandeur caractérise aussi substantiellement la diversité des valeurs dans la matrice.

Illustrons ce résultat par des exemples simples usuels dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec la

norme 2. Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . On calcule  $\kappa_2(\mathbf{A}) = 1.00$ ,

$$\kappa_2(\mathbf{B}) = 2.62 \text{ et } \kappa_2(\mathbf{C}) = 102,00.$$

#### 4.2.2 Nombre de conditionnement et difficulté de résolution

Soit une matrice carrée inversible  $\mathbf{A}$ , associée l'équation matricielle linéaire :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4.3)$$

Le nombre de conditionnement  $\kappa(\mathbf{A})$  mesure la sensibilité relative du vecteur solution  $\mathbf{x}$  respectivement à une faible perturbation du vecteur de donnée  $\mathbf{b}$  [6, 57]. Pour une perturbation  $\delta\mathbf{b}$  du vecteur de donnée, on observe une perturbation  $\delta\mathbf{x}$  de la solution :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}. \quad (4.4)$$

En combinant (4.3) et (4.4), on obtient :

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \Leftrightarrow \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}. \quad (4.5)$$

La définition des normes subordonnée est  $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| > 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ . Pour  $\mathbf{x}$  quelconque, différent du vecteur nul, on a  $\|\mathbf{A}\| \geq \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ . En particulier, pour  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , on a :

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|, \quad (4.6)$$

et

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\|. \quad (4.7)$$

En multipliant (4.6) avec (4.7), on a :

$$\|\mathbf{b}\| \|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{A}\| \|\delta\mathbf{b}\| \Leftrightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (4.8)$$

En général, on dit d'un problème qu'il est mal conditionné lorsque son nombre de conditionnement est arbitrairement grand devant 1. Dans la littérature [56, 57], il est régulièrement donné comme grandeur de comparaison  $\frac{1}{\mu}$ , l'inverse de la précision  $\mu$  utilisée pour la représentation des scalaires en virgule flottante. Si  $\kappa(\mathbf{A}) \geq \frac{1}{\mu}$ , le problème est dit extrêmement mal conditionné. Dans

ce cas qui peut aussi être qualifié de « numériquement singulier », il est recommandé d'aborder le problème en augmentant la précision de représentation en virgule flottante de telle sorte à atteindre  $\kappa(\mathbf{A})\mu \ll 1$ . Ce critère peut être explicité à l'aide de (4.8) : on peut espérer résoudre (4.3) dans le cas de figure où l'erreur issue de la représentation des nombres en virgule flottante est assurée négligeable, i.e.  $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \ll 1$ . Or, la représentation en virgule flottante induit nécessairement une erreur sur le vecteur  $\mathbf{b}$  telle que  $\delta\mathbf{b} \sim \mu\mathbf{b}$ . Ainsi, (4.8) devient :

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \sim \kappa(\mathbf{A})\mu \quad (4.9)$$

Pour une représentation des scalaires en 32 bits,  $\mu = 10^{-6}$ , tandis que pour une représentation en 64 bits,  $\mu = 10^{-12}$ . En valeur par défaut, MATLAB utilise une précision de  $\mu = 10^{-16}$ .

Dans l'étude des réseaux électriques par la résolution du problème de l'écoulement de puissance, un réseau est mal conditionné lorsque CME diverge lorsqu'initialisé par un vecteur  $\mathbf{x}_0$  nominal (initialisation « flat-start »), malgré l'existence d'une solution [58]. Cette définition ne renvoie pas *a priori* à la notion de conditionnement des jacobiniennes impliquées dans la méthode NR : un bon nombre de conditionnement des jacobiniennes associées à un réseau ne garantit pas la convergence de la méthode [13]. Toutefois, la convergence de la méthode peut être conditionnée au choix de la précision  $\mu$  dans la représentation des nombres [43]. En effet, si l'erreur d'arrondi est trop grossière par rapport à  $\varepsilon_{\text{tol}}$ , il est possible que le critère d'arrêt (1.4) choisi pour la méthode NR ne soit jamais vérifiable. L'impact de la précision de calcul sur la convergence de la méthode avait déjà été mis en évidence dans la Section 3.3.2.

On remarque aussi que, dans le cadre de l'étude de la convergence de NR, il est important de prendre conscience qu'il n'y a pas de lien explicite entre le nombre d'itérations nécessaire à la convergence et le nombre de conditionnement. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la méthode pour la résolution d'équation  $f(x) = 0$  en dimension 1. En effet, toute jacobienne inversible associée à une fonction réelle quelconque est de nombre de conditionnement unitaire. Aucune garantie ne peut être donnée sur le nombre d'itérations nécessaire à la convergence.

#### 4.2.3 Conditionnement des jacobiniennes MANA et CME

La comparaison de méthode de résolution du problème de l'écoulement de puissance par le prisme du nombre de conditionnement des matrices jacobiniennes est, dans la littérature, très peu traitée. Pour MANA, seul l'article [35] observe dans deux exemples les performances supérieures de MANA par rapport à une méthode NA-NR de référence et les justifie par un nombre de conditionnement plus faible tel que  $\kappa(\mathbf{J}_{\text{MANA}}) \ll \kappa(\mathbf{J}_{\text{NA-NR}})$ . Dans ces exemples de réseaux dit mal-conditionnés, on observe  $\kappa(\mathbf{J}_{\text{NA-NR}}) \sim 10^3 \kappa(\mathbf{J}_{\text{MANA}})$  lorsque ces deux méthodes convergent. Dans des situations de surcharge critiques, la méthode NA-NR diverge, tandis que MANA converge.

Dans la continuité de ce travail, on observe le meilleur conditionnement de MANA par rapport à CME. Cependant, à partir d'une jacobienne donnée associée à un réseau, il est difficile de généraliser théoriquement la relation  $\kappa(\mathbf{J}_{\text{MANA}}) \ll \kappa(\mathbf{J}_{\text{CME}})$ . Cette difficulté est héritée de la

complexité associée au calcul de la valeur du nombre de conditionnement d'une matrice sans calculer la matrice inverse. L'utilisation d'encadrements fins nécessite de nombreuses manipulations de matrice ou l'étude de la matrice inverse [59]. D'autre part, bien que les jacobiniennes soient creuses, l'inverse d'une matrice creuse n'a pas, a priori, de caractéristiques de matrices creuses. Ce fait est illustré à la Figure 4.1. Lorsque l'on souhaite caractériser les entrées d'une matrice inverse de jacobienne, des relations d'encadrement existent mais font intervenir des valeurs associées au nombre de conditionnement [60, 61]. On note que, bien que les jacobiniennes associées à CME aient, a priori, une structure en bande par bloc d'après (2.6), (2.24) et (6.10), les jacobiniennes associées à MANA n'ont pas de structure régulière, a priori, de par la construction en blocs hétérogènes vu en (2.18), (2.25) et (6.15).

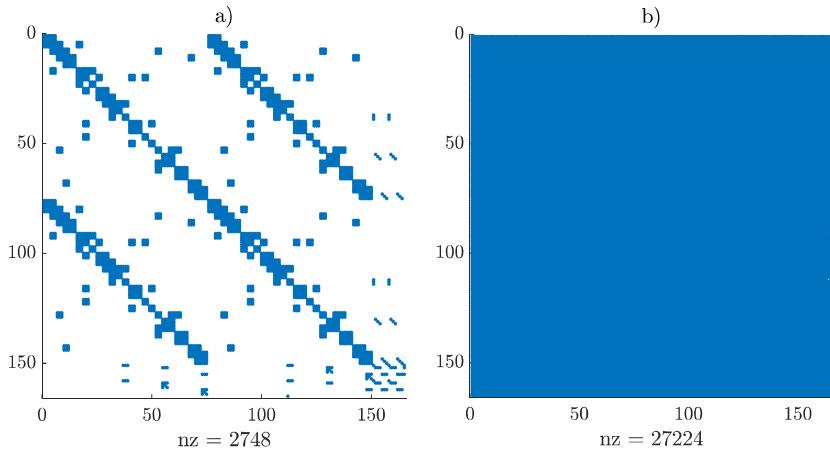


Figure 4.1 : Dénombrement et localisation des valeurs non-nulles - nz- de a) la matrice jacobienne CME associée au réseau 25 barres et de b) son inverse.

On donne cependant dans cette section des éléments qualitatifs pour interpréter et appuyer les constats fait dans l'article [35].

Des notions de pré-conditionnement permettent d'illustrer l'impact des ordres de grandeurs des entrées d'une matrice sur son conditionnement. Par exemple, dans la construction de la matrice jacobienne MANA associée au réseau de 25 barres dont la distribution des ordres de grandeur est donnée Figure 4.2, on identifie une répartition en 4 groupes. Deux groupes autour de -30 et -15, identifiée comme des erreurs de calculs lors d'inversions pour la construction de matrices blocs, un groupe entre -5 et 5, puis quelques valeurs se démarquent par leur ordre 7. Ces dernières valeurs correspondent aux coefficients  $\alpha_{\text{droop}}$  issue de (2.22) dans la matrice bloc  $\mathbf{A}_{G\omega}$ . Par manipulation

des valeurs, il est possible de redéfinir une méthode MANA mobilisant des matrices jacobienes avec un nombre de conditionnement modifié.

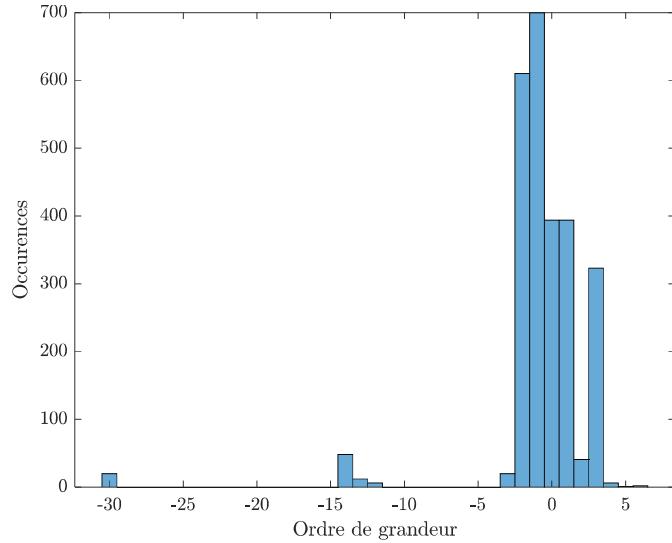


Figure 4.2 : Distribution en logarithme base 10 des entrées de la matrice jacobienne MANA associée au réseau 25 barres

Dans la contrainte de la puissance active d'un générateur *droop* (2.22), on effectue le changement de variable  $\omega' = C\omega$  où  $C \in \mathbb{R}^{+*}$ . La matrice-bloc  $\mathbf{A}_{G\omega}$  de la jacobienne (2.25) est alors substituée par  $\mathbf{A}'_{G\omega} = \frac{\mathbf{A}_{G\omega}}{C}$ . Pour illustrer l'impact de cette manipulation sur la valeur du nombre de conditionnement des jacobienes MANA. On étudie la méthode NR pour le réseau 25 barres avec pour valeur  $C = 10^\gamma$ ,  $\gamma \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pour chaque valeur de  $\gamma$ , on reporte dans le Tableau 5 le nombre de conditionnement de la première matrice jacobienne de la méthode.

Tableau 5 : Nombre de conditionnement de la jacobienne MANA avec pré-conditionnement ciblé

$\gamma$	0	1	2	3	4	5
$\kappa_2(\mathbf{J}_\gamma)$	$1.7216 \cdot 10^7$	$1.7222 \cdot 10^6$	$3.1872 \times 10^5$	$3.1972 \cdot 10^5$	$2.3259 \cdot 10^6$	$2.3232 \cdot 10^7$

Avec une valeur  $\gamma = 2$ , on divise par deux puissances de 10 l'ordre de grandeur du nombre de conditionnement car on tend à uniformiser les entrées de la matrice. Cette manipulation n'a pas d'impact sur la performance de convergence de la méthode à la précision  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ . À la lumière des remarques faites dans la Section 4.2.2, on cherche à résoudre ce même problème avec une précision accrue  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-8}$ . Dans ce cas plus critique, on observe des différences de performance à la convergence : le cas  $\gamma = 0$  requiert 12 itérations tandis que le cas  $\gamma = 2$  n'en nécessite que 8. Dans les deux cas, la demande accrue de précision implique une augmentation du nombre d'itération nécessaire à la convergence.

L'impact des ordres de grandeurs des entrées des matrices sur leur nombre de conditionnement est une explication à la différence de conditionnement des matrices MANA et CME présentée dans [35]. En effet, par la différence de paradigme entre le bilan de puissance, relatif à CME, et le bilan de courant, relatif à MANA, on observe une répartition différente des ordres de grandeurs des entrées des matrices. Puisque l'on ne travaille pas en *per unit*, la jacobienne CME fait intervenir des termes proportionnels à la tension et à la tension au carré en (2.7) et (6.9), tandis que la jacobienne MANA fait plutôt intervenir des termes constants et proportionnel à la tension en (2.18) et (6.17). La Figure 4.3 représente les ordres de grandeurs des entrées des jacobiniennes et illustre

ces propos. On identifie notamment des blocs orange la méthodes CME relatifs aux blocs  $\frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{V}|}$

et  $\frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial |\mathbf{V}|}$  de (2.24), proportionnels à la tension avec des entrées de l'ordre de  $10^4$ , et des blocs

rouges comme relatifs aux blocs  $\frac{\partial P_{\text{mis},n}}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial Q_{\text{mis},n}}{\partial \theta}$  de (2.24), proportionnels au carré de la tension

avec des entrées de l'ordre de  $10^8$ .

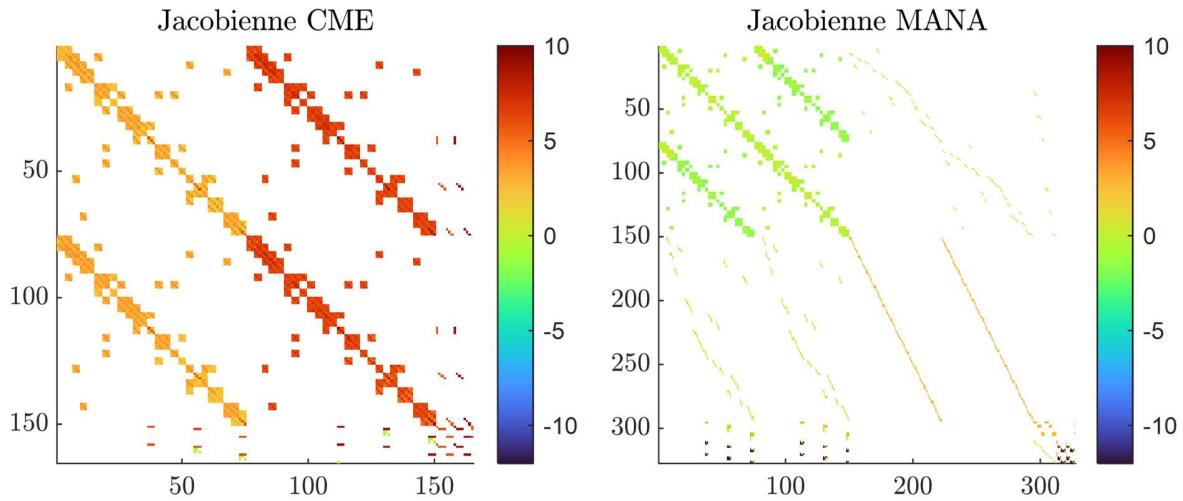


Figure 4.3 : Heatmaps des ordres de grandeur en puissances de 10 des entrées des jacobniennes CME et MANA proche de la solution de l'écoulement de puissance du réseau 25 barres

La construction des entrées des différentes jacobniennes induit aussi le fait que CME est plus sensible à l'évolution des valeurs – paramètres et variables de résolutions – selon les cas ou selon les itérations de la méthode NR. À partir de la manipulation proposée pour réaliser le Tableau 5 et (2.7), (2.18), (6.9) et (6.17), il est possible d'identifier des paramètres et des variables mobilisées pour la construction des jacobniennes qui, *a priori*, ont une influence sur les nombres de conditionnement de chaque méthode :  $\{\mathbf{V}_i, \alpha_{\text{droop}}, \beta_{\text{droop}}, P_{0_i}, Q_{0_i}\}$ . Par extension, la tension nominale

$V_0$  d'un réseau influe *a priori* car pour un réseau en fonctionnement normal,  $\|\mathbf{V}_i\| \sim V_0$ .

Les exemples qui suivent illustrent deux observations : 1) le nombre de conditionnement associée à MANA est moins sensible que CME aux variations des paramètres d'un même réseau, et 2) le nombre de conditionnement associée à MANA est moins sensible que CME aux variations des valeurs des variables de résolution au fur et à mesure des itérations de la méthode NR. Ces exemples sont à but académiques et ne représentent pas forcément une réalité physique.

**Exemple 1 :** évolution du nombre de conditionnement initial des matrices jacobniennes lors de la modification de la tension nominale du réseau.

À partir du réseaux 25, on évalue  $\kappa_2(\mathbf{J}(\mathbf{x}_0))$  le nombre de conditionnement des premières jacobniennes de la méthode NR pour les formulations associées à CME et MANA. On applique un

facteur multiplicateur  $\lambda_\nu$  pour faire évoluer la tension nominale du réseau. Par exemple,  $V_0(\lambda_\nu = 1) = 4.16$  kV et  $V_0(\lambda_\nu = 4) = 16.64$  kV.

Tableau 6 : Évolution de  $\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{MANA}}(\mathbf{x}_0))$  et  $\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{CME}}(\mathbf{x}_0))$  en fonction de la tension nominale du réseau 25 barres.

	Coefficient $\lambda_\nu$	1	2	4	10
25 barres	$\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{CME}}(\mathbf{x}_0))$	$8.54 \times 10^{12}$	$1.71 \times 10^{13}$	$3.48 \times 10^{13}$	$9.71 \times 10^{13}$
	$\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{MANA}}(\mathbf{x}_0))$	$1.72 \times 10^7$	$1.68 \times 10^7$	$1.66 \times 10^7$	$2.65 \times 10^7$

**Exemple 2 :** évolution du nombre de conditionnement des matrices jacobienes au fur et à mesure de la méthode NR, pour différents facteurs de surcharge.

À partir du réseaux 25 barres, on évalue l'évolution de la suite  $(\kappa_2(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ , représentant le nombre de conditionnement au fil des itérations  $k$  des jacobienes de la méthode NR pour les formulations associées à CME et MANA. On applique un facteur multiplicateur  $\lambda_l$  pour étudier différents profils de charge du réseau.

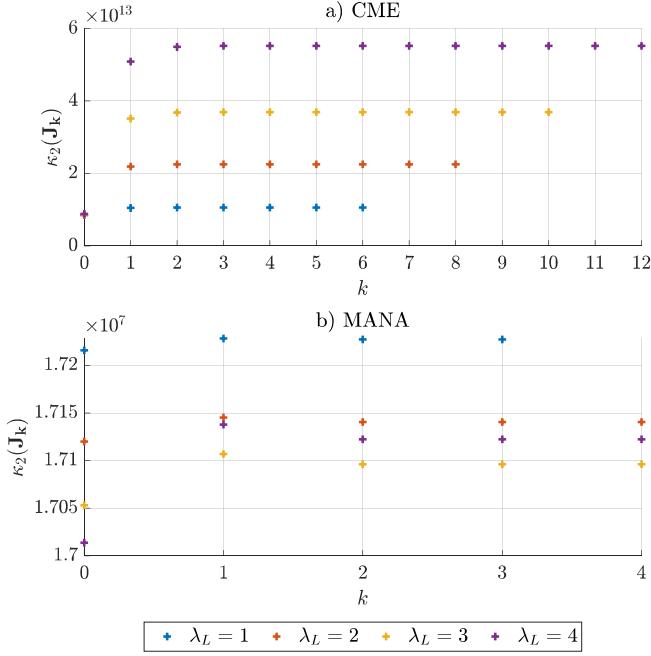


Figure 4.4 : Evolution de  $\kappa_2(J(x_k))$  des méthodes CME et MANA pour le réseau 25 barres sous différentes situations de surcharge.

Dans chaque cas, le nombre de conditionnement des matrices jacobniennes CME croît puis se stabilise après  $k \geq 3$  autour d'une valeur que l'on note  $\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{CME}}$ . Cette phase de croissance pour  $k \leq 3$  peut-être caractérisée par un changement d'ordre de grandeur. Par exemple, dans le cas  $\lambda_L = 4$ ,

$\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{CME}} \sim 10\kappa_2(J(x_0))$ . On remarque aussi que la valeur  $\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{CME}}$  est croissante avec  $\lambda_L$ . Cette croissance peut être ici caractérisée par une sensibilité empirique déterminée graphiquement :

$\frac{d\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{CME}}}{d\lambda_L} \approx 1.2$ . Le nombre de conditionnement des matrices jacobienne MANA croît puis se

stabilise autour d'une valeur que l'on note  $\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{MANA}}$  pour des valeurs de  $k \geq 2$ . La phase de croissance est mineure et relative à une variation de l'ordre de quelques pourcents. Contrairement à CME, on ne peut pas dénoter de tendance dans l'évolution de  $\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{MANA}}$  avec  $\lambda_L$ . Malgré l'évolution de  $\lambda_L$ , les valeurs de  $\bar{\kappa}_{\lambda_L}^{\text{MANA}}$  sont groupées et ne subissent que peu de variations.

Peu d'articles proposent des éléments d'évaluation de l'intrication entre le nombre de conditionnement et la convergence des méthodes de résolution de l'écoulement de puissance. Pour CME, l'article [46] propose en substance la Conjecture 1.

**Conjecture 1 [46]:** La méthode converge si le nombre de conditionnement reste relativement constant pendant les itérations initiales. En général, elle ne converge pas si le nombre de conditionnement oscille avec des variations de 20 % ou plus. Une valeur très élevée du nombre de conditionnement lors de la première itération indique que la convergence est peu probable.

On propose en conclusion de cette section des nouvelles conjectures pour MANA que l'on illustre par la suite. Ces conjectures ont pour qualités prendre en compte le lien entre limites computationnelles et le « bon conditionnement » illustré par la référence [43] mais omis par la **Conjecture 1**. On propose en Annexe B.3 une idée de raisonnement qui mène à ces conjectures.

Les hypothèses communes aux **Conjectures 2 et 3** ci-après sont :

- Le réseau considéré possède une solution au problème de l'écoulement de puissance.
- Le nombre de conditionnement des matrices se stabilisent à l'issu des premières itérations ( $k \leq 5$ ), autour d'une valeur que l'on note  $\bar{\kappa}$  :  $\forall k, k \leq 5, \kappa(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)) \approx \bar{\kappa}$ .

On rappelle les notations suivantes :  $\mu$  est la précision de représentation des scalaires en virgule flottante et  $\varepsilon_{\text{tol}}$  l'objectif de précision traduit dans le critère d'arrêt de la méthode NR.

**Conjecture 2 :** Si  $\bar{\kappa}\mu \ll \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode possède de grandes chances de converger.

**Conjecture 3 :** Si  $\bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode possède de grandes chances de diverger. Toutefois, dans le cas particulier où, pour un  $\varepsilon_{\text{tol}}^*$  tel que  $\varepsilon_{\text{tol}}^* \gg \bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode converge et renvoie un résultat  $\mathbf{x}^*$  tel que  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ , alors on est certains que la méthode va converger à une précision  $\varepsilon_{\text{tol}}$  quand bien même  $\bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ .

On illustre ces conjectures par les Tableau 7 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 25 barres. Ces résultats sont issus de la résolution du problème d'écoulement de puissance pour différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon_{\text{tol}}$ . Pour une valeur  $\varepsilon_{\text{tol}} \in \{10^{-k}, k \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$ , on utilise et on rapporte les informations suivantes :

- $\bar{\kappa}$ , calculée par  $\bar{\kappa} = \kappa_2(\mathbf{J}(\mathbf{x}_i))$  avec  $i = \min(k_{\text{cv}}, 5)$  égale à 5 sauf dans les cas où la méthode converge  $k_{\text{cv}} \leq 5$  itérations.

- $\bar{\kappa}\mu$ , produit de  $\bar{\kappa}$  et  $\mu$ . On rappelle que  $\mu=10^{-16}$  par défaut lorsque l'on utilise MATLAB.
- mis., la valeur de  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\|$  à la fin du processus, i.e., le *mismatch*.
- obs., pour observation de la situation de convergence à la fin du processus. On note « Convergence » lorsque la méthode converge, « Divergence » si  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  n'est pas vérifié pour  $k \in \{1, \dots, k_{\max}\}$  avec ici  $k_{\max} = 50$ .

Par exemple, avec le réseau 25 barres dans le Tableau 7, on a dans chaque cas  $\bar{\kappa}\mu = 1.72 \times 10^{-9}$ . On observe une convergence pour  $1.72 \times 10^{-9} \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  et une divergence pour  $1.72 \times 10^{-9} \geq \varepsilon_{\text{tol}}$ . Avec le réseau 906 barres dans le Tableau 8, le constat est le même avec cette fois-ci  $\bar{\kappa}\mu = 2.08 \times 10^{-9}$ .

Tableau 7 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 25 barres.

$\varepsilon_{\text{tol}}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}\mu$	mis.	obs.
$10^{-1}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-2}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-3}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-4}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-5}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-6}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-7}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$4.31 \times 10^{-8}$	Convergence
$10^{-8}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$8.85 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-9}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$1.05 \times 10^{-8}$	Divergence
$10^{-10}$	$1.72 \times 10^7$	$1.72 \times 10^{-9}$	$1.05 \times 10^{-8}$	Divergence

Tableau 8 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 906 barres.

$\varepsilon_{\text{tol}}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}\mu$	mis.	obs.
$10^{-1}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-2}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-3}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-4}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-5}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-6}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-7}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-8}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$7.80 \times 10^{-9}$	Convergence
$10^{-9}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$8.09 \times 10^{-9}$	Divergence
$10^{-10}$	$2.08 \times 10^7$	$2.08 \times 10^{-9}$	$8.09 \times 10^{-9}$	Divergence

## CHAPITRE 5 Application des enseignements

Les méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissances sont nombreuses et se distinguent par leurs approches et leurs spécificités. Le choix d'une méthode parmi d'autre résulte en général de la rencontre de différents critères subjectifs : rapidité de calcul, degré d'approximation, et, au contraire, degré de précision de modélisation, performances selon les caractéristiques du réseau, etc.

Dans ce chapitre, on propose une amélioration de la méthode MANA pour la résolution du problème de l'écoulement de puissance des réseaux électriques isolés à courant alternatif. On s'intéresse à la modélisation des admittances de lignes lorsque la fréquence du réseau varie dans un voisinage de la fréquence nominale.

### 5.1 Ecoulement de puissance pour les réseaux électriques isolés

Dans cette section, on identifie une lacune dans les connaissances scientifiques et propose une formulation pour y palier.

#### 5.1.1 Lacunes de la littérature et contributions

Avec l'avènement des sources de productions décentralisés, les réseaux et micro-réseaux isolés deviennent une véritable alternative aux réseaux usuels pour une production d'énergie plus durable [27, 28]. Dans ce type de réseau, la fréquence  $\omega$  du réseau peut être une variable de résolution du problème d'écoulement de puissance [7, 8, 27, 28, 32, 62], notamment grâce à des générateurs à contrôle par *droop* dont la fonction caractéristique est donnée par (2.22). Héritage des méthodes pour les réseaux où la fréquence est maintenue à sa valeur nominale, MANA ne prend pas en compte l'impact de la variation de fréquence sur la modélisation des lignes par leur admittance [9, 26]. Cette approximation de modélisation peut impacter *a priori* la précision de la solution de l'écoulement de puissance, présentée comme un critère de performance dans la Section 2.4.1. Bien qu'acceptée comme un compromis pour une simplicité de modélisation, la précision de modélisation peut avoir un intérêt particulier dans l'évaluation de cas critiques, comme lors de la réalisation d'évaluations de capacité de surcharge [8, 63].

Plusieurs articles introduisent la dépendance en fréquence de l'admittance des lignes pour une méthode CME améliorée [7, 27, 32, 62]. Cependant, dans la revue de littérature de la Section 2 et

les différentes contributions de ce mémoire, il a été montré que MANA possède de nombreux avantages par rapport à CME. On cherche alors à développer une version de MANA qui introduit la dépendance en fréquence de l'admittance des lignes pour une meilleure modélisation des réseaux isolés.

Les contributions présentées dans les sections ci-dessous sont les suivantes :

1. Proposition d'algorithmes améliorés basés sur MANA et prenant en compte la dépendance en fréquence de l'admittance des lignes.
2. Analyse de l'erreur induite sur la solution de l'écoulement de puissance provoquée par l'hypothèse d'admittance constante, par rapport à la solution issue des nouveaux algorithmes proposés.
3. Recommandations d'approches spécifiques en fonction de la situation de surcharge des réseaux isolés, afin d'atteindre une meilleure précision et une convergence plus rapide lors de la résolution du problème d'écoulement de puissance.

### 5.1.2 Formulation de l'écoulement de puissance $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$

La prise en compte de la dépendance  $\omega$  lors de la modélisation des lignes induit une formulation améliorée du bilan de courant basé sur (2.9). Ce nouveau bilan de courant se caractérise par une nouvelle matrice d'admittance  $\vec{Y}(\omega) = (R + j\omega L)^{-1}$ , avec  $R$  la résistance et  $L$  l'inductance. Ces deux grandeurs sont supposées constantes, indépendantes de  $\omega$  et paramètres du réseau considéré. En notant  $\mathbf{Y}(\omega)$  la matrice d'admittance d'un réseau multiphasé à  $n$  barres, (2.9) améliorée devient :

$$\sum_{l \in \Phi_i} \mathbf{I}_l^{\text{injecté},i} = \sum_k^n \mathbf{Y}_{ik}(\omega) \mathbf{V}_k, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (5.1)$$

On nomme alors  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$  la fonction associée à la formulation du bilan de courant et de puissance prenant en compte la dépendance  $\omega$  lors de la modélisation des lignes. Un algorithme amélioré basés à partir de MANA prenant en compte la dépendance en fréquence de l'admittance des lignes résoudrait  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , avec  $\mathbf{x}$  présenté en (2.14). On note par la suite  $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol}}$  la solution du

problème de l'écoulement de puissance associée à la formulation améliorée. On distingue ainsi  $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$  de la solution  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  résultante de MANA supposant  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\omega_0)$  pour les réseaux isolés.

## 5.2 Algorithmes pour la résolution de la formulation améliorée

On motive dans un premier temps la nécessité de développer un processus algorithmique pour résoudre l'équation  $\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Par l'exemple, on montre que la précision de la solution  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  résultante de MANA ne satisfait pas le critère d'arrêt d'une hypothétique méthode NR destinée à la résolution de la formulation présentée dans la Section 5.1.2. Dans un second temps, on propose 6 algorithmes dédiés à cette résolution.

### 5.2.1 Motivation par l'exemple

En utilisant la méthode NR avec un seuil de tolérance  $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$ , une condition suffisante pour utiliser  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  comme approximation de  $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$  serait  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\|_\infty \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ .

Pour motiver la nécessité de développer un processus algorithmique pour obtenir  $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$ , nous testons cette condition suffisante pour les réseaux isolés à 25 barres et à 906 barres sous différents niveaux de charge en utilisant un facteur multiplicatif linéaire  $\lambda_l > 0$ . Les résultats sont présentés respectivement dans les Tableau 9 et Tableau 10.

Tableau 9 : Résultats de l'écoulement de puissance par MANA et évaluation du *mismatch*  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\|_\infty$  pour le réseau isolé 25 barres ( $f_0 = 60$  Hz et  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ )

$\lambda_l$	$f$ (Hz)	$\omega$ (rad.s <sup>-1</sup> )	$\Delta\omega / \omega_0$ (%)	$\ \mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\ _\infty$	$\ \mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}})\ _\infty$
1	59.80	375.74	-0.33	$4.31 \times 10^{-8}$	0.39
2	59.59	374.44	-0.68	$2.51 \times 10^{-8}$	1.67
3	59.37	373.06	-1.04	$2.65 \times 10^{-8}$	4.02
4	59.14	371.58	-1.43	$3.17 \times 10^{-8}$	7.73

Tableau 10 : Résultats de l’écoulement de puissance par MANA et évaluation du *mismatch*  $\left\| \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}}) \right\|_{\infty}$  pour le réseau isolé 906 barres ( $f_0 = 50$  Hz et  $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-7}$ )

$\lambda_l$	$f$ (Hz)	$\omega$ (rad.s <sup>-1</sup> )	$\Delta\omega / \omega_0$ (%)	$\left\  \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}}) \right\ _{\infty}$	$\left\  \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}}) \right\ _{\infty}$
1	49.98	313.05	-0.35	$1.12 \times 10^{-8}$	$0.27 \times 10^{-1}$
2	49.65	311.93	-0.71	$1.12 \times 10^{-8}$	$1.11 \times 10^{-1}$
3	49.46	310.75	-1.07	$1.49 \times 10^{-8}$	$2.54 \times 10^{-1}$
4	49.28	309.62	-1.44	$0.93 \times 10^{-8}$	$4.60 \times 10^{-1}$

Dans chaque cas testé, nous observons que  $\left\| \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}}) \right\|_{\infty} \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ . Selon le critère de convergence de la méthode NR, les solutions trouvées par MANA ne satisfont pas le critère correspondant à une méthode NR appliquée à la fonction  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$ .

### 5.2.2 Algorithmes MANA améliorés

On propose dans cette sous-section six algorithmes qui permettent de résoudre l’écoulement de puissance associé à la formulation  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$ . L’algorithme MANA-Y( $\omega$ ) correspond à la méthode NR rigoureusement appliquée à la formulation améliorée. Les algorithmes BD1-MANA-Y( $\omega$ ) et BD2-MANA-Y( $\omega$ ) sont des variations de l’algorithme MANA-Y( $\omega$ ) construits dans l’objectif d’atteindre de meilleures performances de convergence. On propose une version hybride de chacun de ces algorithmes pour bénéficier de la solution  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  issue de MANA.

### 1. Algorithme MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$

L'introduction d'une formulation améliorée pour une modélisation plus précise du réseau implique un nouveau système de jacobienne pour la réalisation de la méthode NR. Il est nécessaire de réaliser la différenciation de la modification apportée en (5.1) :

$$d[\mathbf{Y}_n(\omega)\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n(\omega) & \frac{\partial \mathbf{Y}_n(\omega)}{\partial \omega} \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

La méthode NR pour cette formulation améliorée donne alors une nouvelle équation, analogue à (2.18), définissant l'Algorithme 2 ci-après que l'on appelle MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}} \Delta \mathbf{x}_k = -\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}_k), \quad (5.3)$$

avec :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n(\omega_k) & \mathbf{D}_c & \mathbf{A}_{Ix} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{Y}_n(\omega_k)}{\partial \omega} \mathbf{V} \\ \mathbf{D}_r & \mathbf{D}_{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{L\omega} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{Y}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_G & \mathbf{Y}_{GE} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Cette nouvelle équation matricielle se distingue de l'équation de MANA par deux points :

- Une formulation améliorée  $\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$  plus précise ;
- Une nouvelle matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}}$ , de fait, plus complexe, car associée à la formulation améliorée. En comparaison avec la jacobienne MANA usuelle (2.25), deux matrices blocs supplémentaires sont à évaluer à chaque itération :  $\mathbf{Y}(\omega_k)$  et  $\frac{\partial \mathbf{Y}_n(\omega_k)}{\partial \omega} \mathbf{V}$ .

Différents commentaires peuvent être réalisés pour mettre en contexte la méthode MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  dans ce mémoire. On s'attend tout d'abord à ce que le coût de la précision ajoutée ait un impact sur le temps de résolution : les nouveaux blocs variables nécessitent des opérations supplémentaires à chaque itération et vont induire un temps supplémentaire à la résolution comme présenté dans la

Section 4.1. Dans un second temps, les bilans de courants dans la formulation  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$  ne sont plus des équations linéaires : on perd les garanties sur les composantes libres telles que présentées dans la Section 3.3. Il faut de nouveau porter une attention particulière à l'initialisation de toutes ces composantes, tensions comme fréquence du réseau, pour espérer de bonnes performances de convergence de la méthode NR.

---

**Algorithme 2 : MANA-Y( $\omega$ )**


---

```

1: Define  $\mathbf{x}_0$ 

2:  $k = 0$ 

3: While  $k \leq k_{\max}$  et  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}_k)\| \geq \varepsilon_{\text{tol}}$  do

4:   
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}_k)$$

5:   
$$k = k + 1$$

6: End while

7: If  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  then

8:   return  $\mathbf{x}_k$ 
9: Else

10:  return Erreur de convergence
11: End if

```

---

## 2. Algorithmes BD1-MANA-Y( $\omega$ ) et BD2-MANA-Y( $\omega$ )

La praticité de MANA réside dans sa modularité. Cette modularité s'explique notamment par l'utilisation de matrices jacobiniennes composées de matrices blocs associées aux différents éléments

du réseau. Cette caractéristique n'est pas partagée par CME, comme vu en Section 2.4.4. On bénéficie de cette modularité pour proposer deux algorithmes alternatifs inspirés de la logique des méthodes de NR *dishonest* utilisées dans la littérature [26] : on décide d'approximer des matrices variables par des matrices constantes lors de chaque itération. Les algorithmes BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  et BD2-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  utilisent des jacobiniennes *dishonest* par bloc construite à partir de la jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}}$  présentée en (5.3). Elles sont construites pour être plus rapides à calculer et ainsi accélérer *a priori* chaque itération tout en gardant la précision de la formulation améliorée  $\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$ .

La matrice associée à l'algorithme BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  donnée en (5.5) utilise les approximations

par bloc  $\mathbf{Y}(\omega) \approx \mathbf{Y}(\omega_0)$  et  $\frac{\partial \mathbf{Y}_n(\omega)}{\partial \omega} \mathbf{V} \approx \mathbf{0}$ . En somme, on réutilise la jacobienne  $\mathbf{J}_{\text{MANA}}$ .

$$\mathbf{J}_{\text{BD1-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{D}_c & \mathbf{A}_{Ix} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_r & \mathbf{D}_{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{L\omega} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{Y}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_G & \mathbf{Y}_{GE} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

La matrice associée à l'algorithme BD2-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  donnée en (5.6) fait pour approximation

par bloc  $\frac{\partial \mathbf{Y}_n(\omega)}{\partial \omega} \mathbf{V} \approx \mathbf{0}$  uniquement. Cette dernière est un compromis entre la simplicité de calcul de la matrice (2.25) et l'exactitude de la matrice en (5.3).

$$\mathbf{J}_{\text{BD2-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n(\omega_k) & \mathbf{D}_c & \mathbf{A}_{Ix} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_r & \mathbf{D}_{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{C}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{L\omega} \\ \mathbf{C}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{Y}_G & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_G & \mathbf{Y}_{GE} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

### 3. Algorithmes hybrides :

Les caractéristiques de convergence de la méthode NR dépendent notamment de la qualité du vecteur d'initialisation choisi. Ce fait est cité et illustré dans les Sections 2.4.3 et 2.5 et dans le Chapitre 3. Afin de bénéficier d'une meilleure convergence pour les algorithmes présentés précédemment, on propose de les initialiser avec la solution issue de la résolution la méthode MANA usuelle. L'hypothèse sous-jacente est la suivante : le vecteur  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  issu de la résolution de la formulation MANA usuelle représente une meilleure estimation de  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  pour la formulation MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  que le vecteur  $\mathbf{x}_0$  proposé par [9] et utilisé dans les sections précédentes.

On définit ainsi les algorithmes h-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$ , h-BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  et h-BD2-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$ . On donne l'algorithme h-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  ci-après.

---

**Algorithme 3 : h-MANA-Y( $\omega$ )**


---

1: Define  $\mathbf{x}_0$

2:  $k = 0$

3: **While**  $k \leq k_{\max}$  et  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}_k)\| \geq \varepsilon_{\text{tol}}$  do

4:      $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA}}}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}_k)$

5:      $k = k + 1$

6: **End while**

7: **If**  $\|\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$  alors

8:     Utiliser MANA-Y( $\omega$ ) avec  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_k$

9: **Else**

10:     **return** Erreur de convergence

11: **End If**

---

On récapitule les spécificités des différents algorithmes traités dans cette Section avec le Tableau 11.

Tableau 11 : Récapitulatif des caractéristiques des différents algorithmes basés sur MANA

Algorithme	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{J}$	Vecteur résultat
MANA	MANA-init.	$\mathbf{F}_{\text{MANA}}$	$\mathbf{J}_{\text{MANA}}$	$\mathbf{x}^{\text{sol.}}$
MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	MANA-init.	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$
BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	MANA-init.	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\text{BD1-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)} = \mathbf{J}_{\text{MANA}}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$
BD2-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	MANA-init.	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\text{BD2-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$
h-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	$\mathbf{x}^{\text{sol.}}$	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$
h-BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	$\mathbf{x}^{\text{sol.}}$	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\text{BD1-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)} = \mathbf{J}_{\text{MANA}}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$
h-BD2-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$	$\mathbf{x}^{\text{sol.}}$	$\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{J}_{\text{BD2-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}$	$\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$

### 5.3 Analyses numériques

Dans cette section, nous examinons la qualité de la solution  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  et les propriétés de convergence des algorithmes proposées pour résoudre  $\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Les tests sont effectués sur les réseaux isolés 25 barres et 906 barres à différents niveaux de charge  $\lambda_l$ . Afin de tester les réseaux jusqu'à des situations critiques, aucune contrainte de puissance maximale n'est imposée aux différents générateurs. L'implémentation est faite en MATLAB et exécutée sur un ordinateur portable i7, CPU 2.8 GHz, avec 16.0 GB de mémoire. La moyenne des temps de calcul est obtenue à partir de 20 exécutions identiques.

### 5.3.1 Qualité de la solution $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$

On résout le problème de l'écoulement de puissance avec MANA et avec les algorithmes proposés dans la Section 5.2. Les tests sont réalisés sur les réseaux isolés à 25 barres et à 906 barres. Chaque réseau est testé avec un niveau de charge variable, paramétré par le facteur de surcharge  $\lambda_l \in [1, 7]$ . Les valeurs de fréquence et les amplitudes de tension aux barres sélectionnées sont fournies aux Tableau 12 et Tableau 13.

Tableau 12 : Résultats des écoulements de puissances  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  et  $\mathbf{x}_\omega^{\text{sol.}}$  pour le réseau 25 barres dans différentes situations de surcharges  $\lambda_l$ . Les amplitudes de tension sont en Volt,  $\omega$  en rad.s<sup>-1</sup>.

		25 barres			
		$\omega$	$ \vec{V}_{1,a} $	$ \vec{V}_{8,a} $	$ \vec{V}_{13,a} $
$\lambda_l = 1$	$\mathbf{x}^*$	375.74	2331.1	2317.8	2380.5
	$\mathbf{x}_\omega^*$	375.74	2331.2	2317.9	2380.5
$\lambda_l = 4$	$\mathbf{x}^*$	371.58	2085.2	2023.4	2309.5
	$\mathbf{x}_\omega^*$	371.58	2086.7	2025.3	2309.6
$\lambda_l = 7$	$\mathbf{x}^*$	365.73	1701.3	1550.6	2208.2
	$\mathbf{x}_\omega^*$	365.78	1714.6	1567.8	2210.3

Tableau 13 : Résultats des écoulements de puissances  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  et  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  pour le réseau 906 barres dans différentes situations de surcharges  $\lambda_l$ . Les amplitudes de tension sont en Volt,  $\omega$  en rad.s<sup>-1</sup>.

		906 barres			
		$\omega$	$ \vec{V}_{1,a} $	$ \vec{V}_{400,a} $	$ \vec{V}_{600,a} $
$\lambda_l = 1$	$\mathbf{x}^*$	313.05	238.47	239.28	238.92
	$\mathbf{x}_{\omega}^*$	313.05	238.47	239.28	238.92
$\lambda_l = 4$	$\mathbf{x}^*$	309.61	233.18	236.51	235.02
	$\mathbf{x}_{\omega}^*$	309.61	233.19	236.51	235.03
$\lambda_l = 7$	$\mathbf{x}^*$	305.97	227.61	233.60	230.94
	$\mathbf{x}_{\omega}^*$	305.96	227.62	233.60	230.95

On observe dans les cas étudiés que les amplitudes des tensions du vecteur  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  sont supérieures à celle du vecteur  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ . Toutefois,  $\omega \in \mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  et  $\omega \in \mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$  sont proches et leur différence est négligeable devant  $|\omega - \omega_0|$ . Au fur et à mesure que la surcharge augmente, on remarque une augmentation marginale de l'erreur sur la fréquence. L'erreur sur la tension du générateur reste toutefois mineure, comme le montrent les amplitudes de tension à la barre 13 pour le réseau 25 barres et à la barre 400 pour le réseau 906 barres.

On considère le réseau 25 barres dans une situation de surcharge critique ( $\lambda_l = 7.47$ , observé empiriquement comme étant proche du point de charge maximale). L'erreur maximale à chaque nœud pour les amplitudes de tension dans  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  par rapport à  $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$ , normalisée par la tension  $V_{13,a}$  choisie comme tension référence, est présentée dans la Figure 5.1. Dans ce cas, l'hypothèse  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}(\omega_0)$  conduit à une erreur croissante sur les amplitudes de tension à mesure que l'on

s'éloigne en aval d'une source. Par exemple, cette hypothèse produit une erreur de plus de 5% pour les valeurs de tension à la barre 15, l'une des barres les plus éloignées des générateurs.

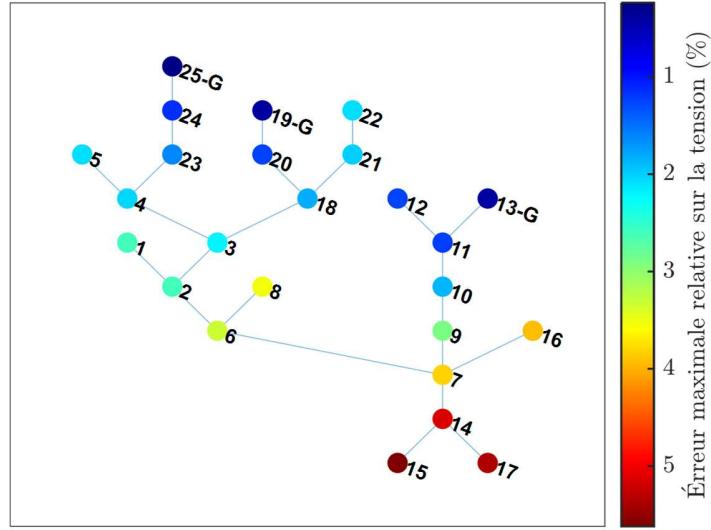


Figure 5.1 : Erreur maximale normalisée entre les amplitudes de tension des vecteurs  $\mathbf{x}^*$  et  $\mathbf{x}_\omega^*$  pour le réseau 25 barres alimenté par des générateur *droop*, avec un facteur de surcharge  $\lambda_l = 7.47$ .

Pour un réseau radial sans compensation, on fait la conjecture que plus la distance à une source est grande, plus l'erreur commise sur la tension à une barre donnée est grande. Afin d'enrichir la littérature, il serait intéressant de réaliser une étude de sensibilité sur l'erreur commise par rapport aux caractéristiques du réseau. Outre le facteur de surcharge  $\lambda_l$ , d'autres paramètres exercent a priori une influence sur cette erreur : facteur de droop  $\alpha_{droop}$ , nombre et disposition des sources dans le réseau, coefficient d'inductance  $L$ , etc.

### 5.3.2 Performances de convergence

Outre la précision accrue sur la solution obtenue, l'étude de la convergence des différents algorithmes permet de caractériser leurs performances respectives.

On compare maintenant le temps de calcul moyen et le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des algorithmes  $\text{MANA-Y}(\omega)$ ,  $\text{BD1-MANA-Y}(\omega)$ ,  $\text{BD2-MANA-Y}(\omega)$ , ainsi que leurs versions hybrides. Dans la continuité de cette section, on résout le problème de l'écoulement

de puissance pour les réseaux isolés à 25 barres et à 906 barres dans différentes situations de surcharge  $\lambda_l$ . Les résultats sont présentés aux Figure 5.2 et Figure 5.3.

Le résultat  $\mathbf{x}^*$  de la première étape de la MANA pour les algorithmes hybrides est considéré donné. On concentre ainsi l'étude sur les effets de l'initialisation proposée sur la performance des algorithmes utilisant la formulation  $\mathbf{F}_{\text{MANA-}Y(\omega)}$ . La performance globale des approches hybrides, incluant l'étape relative à MANA, peut être extrapolée en combinant les résultats MANA (en bleu) aux résultats des algorithmes hybrides (balises triangulaires) aux Figure 5.2 et Figure 5.3.

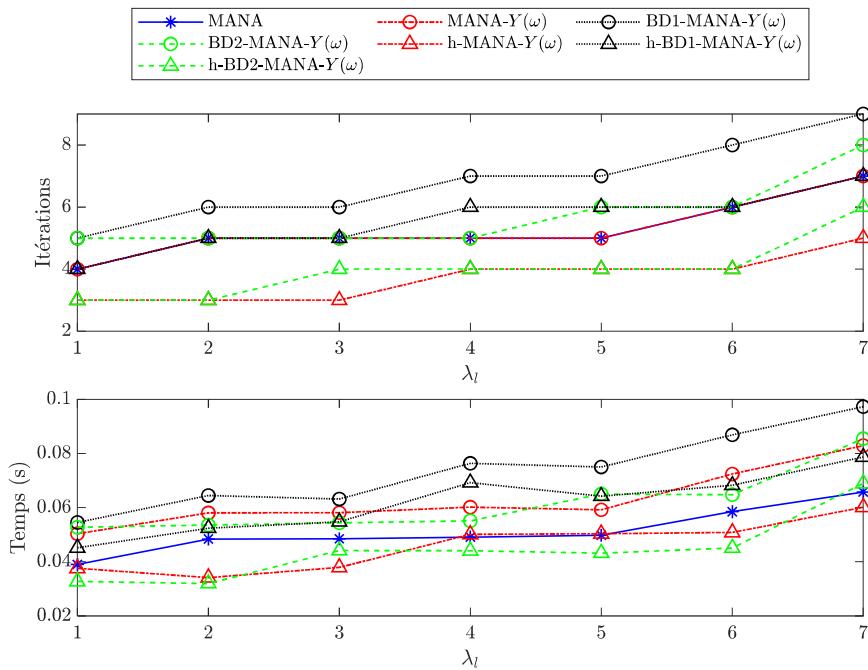


Figure 5.2 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 25 barres, sous différentes conditions de surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte.

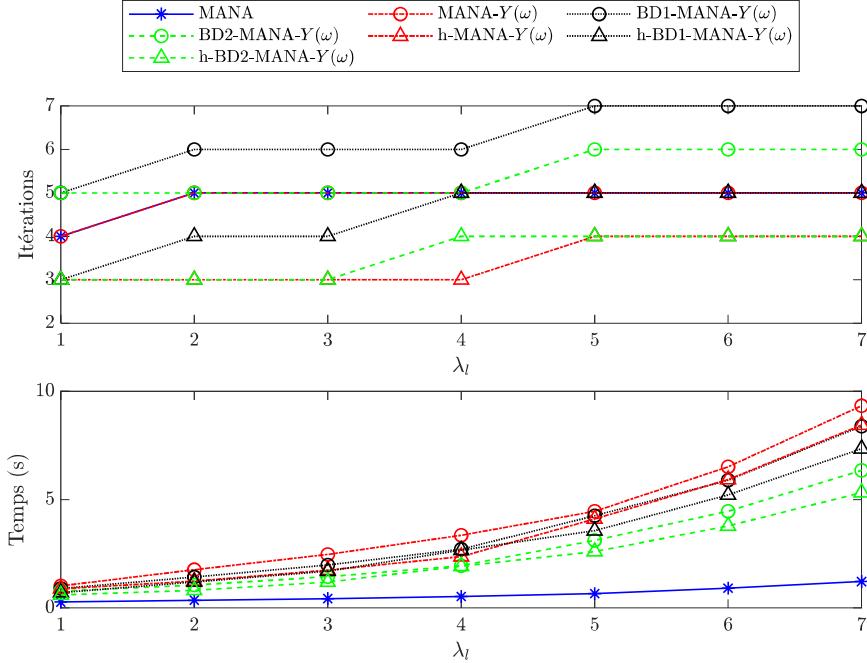


Figure 5.3 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 906 barres, sous différentes conditions de surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte.

Dans l'ensemble, les algorithmes de résolution du problème d'écoulement de puissance basés sur la formulation  $\mathbf{F}_{\text{MANA-Y}(\omega)}$  nécessitent plus d'itérations que MANA pour atteindre la convergence.

D'une variante de  $\text{MANA-Y}(\omega)$  à l'autre, le nombre d'itérations nécessaire à la convergence augmente avec le niveau d'approximation de la matrice jacobienne.

Lorsque l'on considère les temps de calculs, les matrices plus complexes — plus denses ou avec plus d'entrées dépendantes de l'itération — allongent le temps moyen de réalisation d'une itération. Ainsi, la création et l'inversion des matrices dans nos approches prennent plus de temps que MANA standard, ce qui entraîne un temps plus long pour atteindre la convergence.

Une initialisation par  $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$  issu de l'algorithme MANA permet de réduire le nombre d'itérations nécessaire à la convergence des algorithmes basée sur la formulation améliorée. L'avantage de l'hybridation lorsqu'on inclut le calcul de l'étape MANA devient évident lorsqu'on considère des réseaux de taille conséquente tels que le 906 barres. Bien qu'il faille globalement plus d'itérations,

la légère réduction des itérations  $\text{MANA-Y}(\omega)$ , qui prennent beaucoup de temps, peut conduire à un temps de calcul plus court que la méthode correspondante sans hybridation. Aussi, la mémoire moyenne requise à chaque itération en est alors réduite.

La résolution du problème de l'écoulement de puissance est difficile lorsque le réseau est proche de son point de charge maximale. En pratique, les jacobienes manipulées sont proche de la singularité et possèdent un nombre de conditionnement élevé. D'après la Section 4.2, on s'attend à ce que les algorithmes soient instables et peinent à converger proche du point de surcharge critique. On représente à la Figure 5.4 le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de différents algorithmes pour un réseau 25 barres en surcharge extrême. Algorithmiquement, la formulation  $\mathbf{F}_{\text{MANA}}$  n'a pas de solution numérique pour des valeurs élevées de  $\lambda_t$  : le réseau est virtuellement effondré. Bien que MANA diverge, les algorithmes résolvant la nouvelle formulation convergent au-delà du point apparent de charge maximale associé à MANA. Lorsque la surcharge est élevée, les approximations sont d'autant plus grossières et ont un impact significatif sur les performances de l'algorithme. On note que les méthodes hybrides héritent de la même limite que MANA standard : puisque MANA diverge, il n'est pas possible d'initialiser les nouveaux algorithmes par un vecteur  $\mathbf{x}^{\text{sol}}$ .

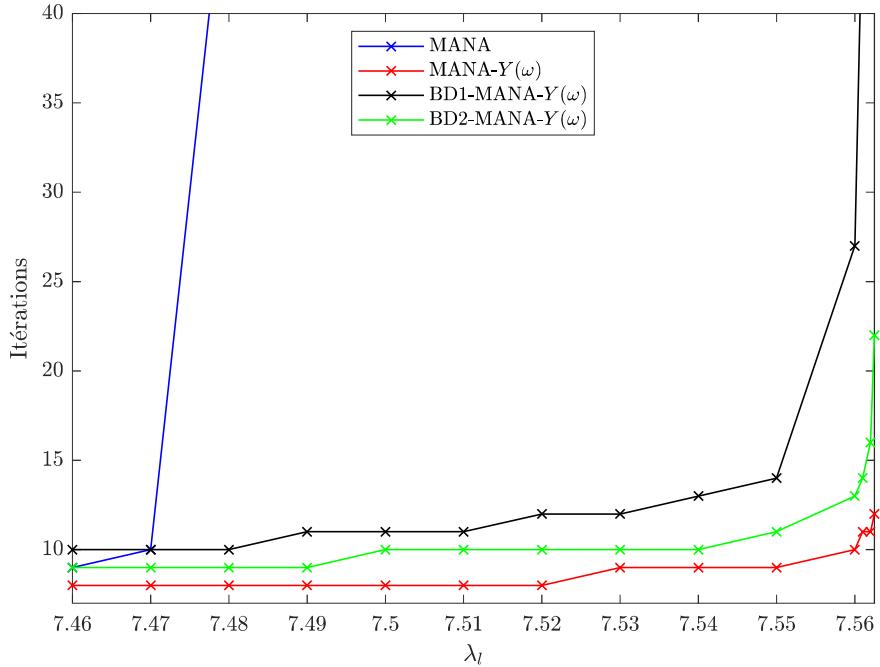


Figure 5.4 : Nombres d'itérations nécessaires à la convergence de différents algorithmes pour un réseau 25 barres extrêmement chargé.

Dans les cas de surcharge importante, il est préférable d'utiliser l'algorithme MANA- $Y(\omega)$ , plus couteux en temps mais plus précis car plus rigoureux. Globalement, l'algorithme BD2-MANA- $Y(\omega)$  offre un bon équilibre en termes de précision, de temps de calcul et de stabilité numérique.

## 5.4 Synthèse de l'application

L'hypothèse d'admittances de lignes indépendantes de la fréquence dans les réseaux isolés purement résistifs et inductifs entraîne une sous-évaluation des tensions lors de la résolution du problème de l'écoulement de puissance. Les différentes études de cas donnent un aperçu de l'impact des caractéristiques du réseau sur les erreurs commises par la formulation associé à MANA usuelle. On a identifié une limite de performance sur la précision de la solution donnée par cet algorithme. Pour résoudre ce problème, une formulation basée sur un bilan de courant avec un niveau de modélisation plus complexe est considérée. En utilisant la méthode NR, on a défini plusieurs algorithmes pour résoudre cette formulation.

Les différents tests numériques évaluent et comparent les performances des différents algorithmes. En utilisant des jacobiniennes telles que  $\mathbf{J}_{\mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}}$ , on perd l'un des principaux avantages de calcul de MANA usuelle présenté dans la Section 4.1 : à chaque itération, un plus grand nombre d'entrées doit être recalculé. Dans les deux méthodes *dishonest*, on essaie de conserver cet avantage, mais ces méthodes nécessitent un plus grand nombre d'itérations pour converger en raison des approximations faites sur les matrices jacobiniennes. Les méthodes hybrides tentent de bénéficier d'un point initial amélioré en utilisant MANA afin d'accélérer les nouvelles méthodes. Cependant, ces méthodes hybrides héritent des limites de modélisation de MANA, notamment dans les cas de surcharge extrême du réseau. Le choix de l'un de ces algorithmes réside en un compromis entre le nombre d'itérations, la vitesse de résolution et la précision.

Lors de la réalisation de cette application, on a identifié des axes de recherche complémentaires aux contributions proposées. Une liste non-exhaustive est donnée ci-dessous :

- Élargir les études de cas à des réseaux isolés quelconques, incluant notamment la modélisation des lignes PI, la présence de compensation, etc.
- Modélisation de la dépendance des charges avec la variation de fréquence [9].
- Sensibilité des performances de convergence des nouveaux algorithmes à l'initialisation de la fréquence dans le vecteur  $\mathbf{x}_0$  par suite de l'implication non-linéaire de  $\omega$  dans la nouvelle formulation, relativement aux travaux proposés dans la Section 3.3.
- Étude du nombre de conditionnement des matrices introduites pour les algorithmes  $\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)$  et  $\text{BD2-MANA-}\mathbf{Y}(\omega)$ , relativement aux travaux proposés dans la Section 4.2.

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

Pour conclure ce mémoire, on synthétise dans un premier temps les contributions apportées aux connaissances sur les performances des méthodes de résolutions du problème de l'écoulement de puissance. On précise les différentes opportunités de publications associées à ce mémoire. Dans un second temps on rend compte de diverses recommandations relatives à l'implémentation et des axes de recherche futurs.

### 6.1 Contributions de la recherche

Ce mémoire de recherche se caractérise par une approche concentrée sur deux axes caractéristiques des problématiques associées aux mathématiques appliquées aux problèmes de l'industrie. Ces contributions s'articulent selon deux axes principaux, distincts mais complémentaires. Un premier axe théorique est développé, et sert ensuite de support au développement du second axe : l'axe pratique. Les études de cas proposées servent d'illustration des propos développés dans ce mémoire. On clôt cette sous-section en énumérant les opportunités de publications associées au travail présenté dans ce mémoire.

#### 6.1.1 Contributions théoriques

Différentes contributions théoriques sont présentées dans ce mémoire :

- On propose dans la Section 2.4.1 une relation d'équivalence entre les différents critères de tolérance pour la condition d'arrêt de la méthode NR appliquée à deux formulations distinctes de l'écoulement de puissance dont on souhaite la même précision de résolution.
- On propose dans la Section 3.2.2 différents corolaires permettant de caractériser les bassins d'attraction quadratique de la méthode NR et la dépendance de la vitesse de convergence de cette méthode au vecteur d'initialisation.
- On propose dans la Section 3.3 l'application de la théorie développée dans la références [37] aux formulation CME et MANA. En identifiant les composantes libres, on définit un critère sur la composition des réseaux pour lequel l'initialisation de MANA est moins sensible.
- On propose en Annexe C.1 une formulation générale des matrices Hessiennes suivant le formalisme présenté dans la Section 3.1.

- On propose dans Chapitre 5 une formulation améliorée du problème d'écoulement de puissance pour les réseaux isolés. On présente une variante de la méthode de NR, dite méthode de NR *dishonest* par bloc pour résoudre plus efficacement la nouvelle formulation.

### 6.1.2 Contributions pratiques

Différentes contributions pratiques sont présentées dans ce mémoire :

- On propose dans la Section 2.4 différents critères pour évaluer les performances des méthodes de résolution du problème d'écoulement de puissance.
- On propose dans la Section 2.5, en complément de la revue de littérature, une typologie et une cartographie de plusieurs méthodes de résolution de l'écoulement de puissance. On différencie en particulier les choix de paradigme qui différencient les méthodes considérées : bilan de puissance ou bilan de courant, représentation des complexes polaire ou rectangulaire, utilisation de variables d'interface ou non, etc.
- On propose tout au long de ce mémoire des tests et des exemples simples, illustratifs, permettant d'illustrer et d'aborder une théorie relativement abstraite.
- On propose dans la Section 4.1 une comparaison de la complexité de construction des différentes jacobiniennes CME vs. MANA.
- On propose dans la Section 4.2 une étude du nombre de conditionnement des jacobiniennes des méthodes CME et MANA. Qualitativement, on justifie le meilleur conditionnement des jacobiniennes MANA par rapport aux jacobiniennes CME et on identifie le l'impact de cet indicateur sur les performances de convergence.
- On propose dans Chapitre 5 des recommandations portant sur l'utilisation des algorithmes définis pour MANA améliorée pour la résolution du problème d'écoulement de puissance pour les réseaux isolés.

### 6.1.3 Publications

Les travaux réalisés dans le cadre de la maîtrise de recherche ont et vont donner lieu à des publications scientifiques.

Le Chapitre 5 rend compte de travaux réalisés pour la publication de l'article de conférence *On the frequency variation in load-flow calculations for islanded AC microgrids* présenté en mai 2024 à

la conférence ELCTRIMACS 2024 [64]. Cette contribution originale, amélioration de MANA dans le cas de réseaux isolés, mobilise plusieurs enseignements et constats présentés dans les chapitres précédents de ce mémoire. Plusieurs renvois ont été ajouté à la contribution initiale de sorte à contextualiser l'article dans la démarche globale de réponse à la problématique qui motive ce mémoire.

Les Chapitres 3 et 4, vont donner lieu à la soumission d'un article scientifique justifiant les performances de MANA par le prisme de la théorie associée au formalisme des équations du problème de l'écoulement de puissance et de l'analyse de convergence de la méthode NR. Cet article est aussi l'opportunité d'approfondir la recherche suivant certains axes de recherche énoncés ci-après.

## 6.2 Travaux futurs

Ce mémoire permet d'identifier différentes opportunités de travaux futurs. Outre les commentaires déjà réalisés dans la Section 5.4 relatifs au Chapitre 5, on les propose dans cette section. Dans un premier temps, on donne des recommandations d'implémentations pour bénéficier des connaissances développées. Dans un second temps, on énonce des axes de recherche éventuels.

### 6.2.1 Recommandations d'implémentation

On illustre dans ce mémoire le fait que MANA est plus modulable que CME. Afin d'améliorer les performances de MANA, on recommande :

- La considération de l'approche *dishonest* par bloc, notamment utilisé par la méthode BD1-MANA- $\mathbf{Y}(\omega)$  dans le cadre de l'étude menée dans la Section 5.
- L'implémentation automatique du calcul unique et préliminaire des blocs de la jacobienne MANA identifiés comme constant. Par exemple, cette recommandation peut être implémentée dans le code MATLAB de MANA pour la construction du bloc  $\mathbf{A}_{G\omega}$  dans (2.25).
- De s'affranchir du maximum d'erreurs de calcul et de certaines entrées parasites de matrices blocs telles qu'identifiées dans la Figure 4.2. Par exemple : l'inverse d'une matrice diagonale doit être diagonale, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans le code MATLAB. Il est aussi possible d'imaginer une équation alternative à chaque itération de la méthode

de NR pour corriger l'erreur identifiée dès la première itération dans (3.14). On propose ainsi l'implémentation de l'équation équivalente à chaque itération  $k$  de la méthode NR:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_k) & \mathbf{n}_z \\ \mathcal{L}_w & \mathcal{L}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_w(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k - \mathbf{g}(\mathbf{w}_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

- L'omission de la définition des variables de résolution associées à des charges et des générateurs n'échangeant pas de puissances avec le réseau. On réduit ainsi le nombre de composantes de résolutions non-libres qui peuvent limiter les performances de convergence de la méthode.
- L'omission d'une l'initialisation spécifique des composantes libres, uniquement impliquée dans des équations linéaires : interrupteurs, transformateurs idéaux, etc. Pour ces composantes, on pourra se satisfaire d'une initialisation par valeur nominale, et omettre tout autre initialisation plus couteuse en opérations.

### 6.2.2 Axes de recherche

L'application de la théorie associée à la méthode NR pour l'étude des performances des méthodes MANA et CME représente une approche originale qui a permis dans ce rapport la proposition de plusieurs contributions. Plusieurs axes d'approfondissements possibles en découlent.

- Les propriétés de la méthode NR présentées sont issues principalement de l'étude des jacobiniennes associées à la formulation étudiée. Comme présentée en Annexe B.2, le calcul des matrices hessiennes à partir de ces jacobiniennes permet d'obtenir des informations sur la vitesse de convergence. Des efforts de recherche pourraient permettre d'éventuellement de caractériser ces matrices hessiennes et bénéficier de leurs avantages (formulation, variations, nullité) par rapport à celles associées à CME.
- Un travail de dénombrement exhaustif et quantitatif permettrait quantifier les complexités de la construction des jacobiniennes CME et MANA en fonction des paramètres du réseau étudié. Ce travail compléterait la Section 4.1.
- Le prolongement et l'approfondissement des résultats théoriques et pratiques présentés dans ce mémoire à des réseaux plus complexes : hybrides [35], multi-fréquences [34], barres PV, charges hautement débalancés, pénétration variables des différents cas

particulier du modèle ZIP, pénétrations variables de génération type synchrone ou *inverter*, réseaux à lignes courtes, etc.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Mahseredjian, "Régimes transitoires électromagnétiques : simulation," *Techniques de l'Ingénieur*, 2008.
- [2] J. Mahseredjian, "Positive sequence power-flow (load-flow)."
- [3] T. Yamamoto, "Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 124, no. 1, pp. 1-23, 2000.
- [4] S. Bhowmick, *Flexible AC Transmission Systems (FACTS): Newton Power-Flow Modeling of Voltage-Sourced Converter-Based Controllers*: CRC Press, 2018.
- [5] N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, Second ed.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [6] R. A. Horn, and C. R. Johnson, *Matrix analysis*: Cambridge university press, 2012.
- [7] M. A. Allam, A. A. Hamad, and M. Kazerani, "A Generic Modeling and Power-Flow Analysis Approach for Isochronous and Droop-Controlled Microgrids," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 33, no. 5, pp. 5657-5670, 2018, 2018.
- [8] N. Rashidirad, J. Mahseredjian, I. Kocar, S. M. Mohseni-Bonab, and O. Saad, "Loadability Assessment of Droop-Controlled Islanded Microgrids: Integration of Droop Control Functions Under Unbalanced Loading," in IECON 2023- 49th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 2023, pp. 1-6.
- [9] N. Rashidirad, J. Mahseredjian, I. Kocar, U. Karaagac, and O. Saad, "MANA-Based Load-Flow Solution for Islanded AC Microgrids," *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2022.
- [10] *Caractéristiques de la tension fournie par les réseaux moyenne et basse tension d'Hydro-Québec*, Hydro-Québec, 2016.
- [11] P. J. Lagace, "Power flow methods for improving convergence," in IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, 2012, pp. 1387-1392.
- [12] J. A. Martinez, and J. Mahseredjian, "Load flow calculations in distribution systems with distributed resources. A review," in 2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting, 2011, pp. 1-8.
- [13] V. H. Quintana, and N. Müller, "Studies of load flow methods in polar and rectangular coordinates," *Electric Power Systems Research*, vol. 20, no. 3, pp. 225-235, 1991.
- [14] S. B. Babić, "Decoupled load flow with variables in rectangular form," in IEE Proceedings C (Generation, Transmission and Distribution), 1983, pp. 98-102.
- [15] V. M. Da Costa, J. L. R. Pereira, and N. Martins, "An augmented Newton--Raphson power flow formulation based on current injections," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 305-312, 2001.
- [16] A. G. Expósito, and E. R. Ramos, "Augmented rectangular load flow model," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 271-276, 2002.

- [17] M. S. Sachdev, and T. K. P. Medicherla, "A second order load flow technique," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 96, no. 1, pp. 189-197, 1977.
- [18] B. Stott, and O. Alsac, "Fast decoupled load flow," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 3, pp. 859-869, 1974.
- [19] V. M. Da Costa, and A. L. S. Rosa, "A comparative analysis of different power flow methodologies," in 2008 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2008, pp. 1-7.
- [20] V. M. da Costa, N. Martins, and J. L. R. Pereira, "Developments in the Newton Raphson power flow formulation based on current injections," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14, no. 4, pp. 1320-1326, 1999.
- [21] J. Mahseredjian, "Multiphase Load-Flow Method," *Notes de cours*, 2010.
- [22] S. Iwamoto, and Y. Tamura, "A fast load flow method retaining nonlinearity," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 5, pp. 1586-1599, 1978.
- [23] J. Mahseredjian, S. Dennetière, L. Dubé, B. Khodabakhchian, and L. Gérin-Lajoie, "On a new approach for the simulation of transients in power systems," *Electric Power Systems Research*, vol. 77, no. 11, pp. 1514-1520, 2007, 2007.
- [24] P. Dimo, *Nodal Analysis of Power Systems*: International Scholarly Book Services, Inc., Forest Grove, OR, 1975.
- [25] C.-W. Ho, A. Ruehli, and P. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 504-509, 1975.
- [26] I. Kocar, J. Mahseredjian, U. Karaagac, G. Soykan, and O. Saad, "Multiphase Load-Flow Solution for Large-Scale Distribution Systems Using MANA," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 29, no. 2, pp. 908-915, 2014.
- [27] F. Mumtaz, M. H. Syed, M. Al Hosani, and H. H. Zeineldin, "A Novel Approach to Solve Power Flow for Islanded Microgrids Using Modified Newton Raphson With Droop Control of DG," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 7, no. 2, pp. 493-503, 2016.
- [28] D. E. Olivares, A. Mehrizi-Sani, A. H. Etemadi, C. A. Cañizares, R. Iravani, M. Kazerani, A. H. Hajimiragh, O. Gomis-Bellmunt, M. Saeedifard, R. Palma-Behnke, G. A. Jiménez-Estévez, and N. D. Hatziargyriou, "Trends in Microgrid Control," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 5, no. 4, pp. 1905-1919, 2014.
- [29] M. Molénat, J. Mahseredjian, N. Rashidirad, and A. Léage-Landry, "On the frequency variation in load-flow calculations for islanded AC microgrid," *ELECTRIMACS*, 2024, 2024.
- [30] B. E. Centindag, *Development of models and a unified platform for multiphase load flow analysis and dynamic state estimation of large distribution systems with secondary grids*: Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), 2016.
- [31] J. E. Tate, and T. J. Overbye, "A comparison of the optimal multiplier in polar and rectangular coordinates," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 1667-1674, 2005.

- [32] A. Lima-Silva, F. D. Freitas, and L. F. d. J. Fernandes, "A Homotopy-Based Approach to Solve the Power Flow Problem in Islanded Microgrid with Droop-Controlled Distributed Generation Units," *Energies*, vol. 16, no. 14, 2023.
- [33] N. Rashidirad, J. Mahseredjian, and I. Kocar, "MANA-Based Load-Flow Solution for Unbalanced Hybrid AC/DC Microgrids."
- [34] J. M. Nasim Rashidirad, Ilhan Kocar, U. Karaagac, "Unified MANA-based load-flow for multi-frequency hybrid AC/DC multi-microgrids," *Electric Power Systems Research*, vol. 220, 2023.
- [35] Z. Javid, T. Xue, U. Karaagac, and I. Kocar, "Unified Power Flow Solver for Hybrid AC/DC Distribution Networks," *IEEE Transactions on Power Delivery*, pp. 1-11, 2023.
- [36] M. Parada Contzen, "On Convergence Performance of Classic and Novel Power Flow Algorithms for Dynamic Simulation of Distribution Smart Grids with Renewable Sources," SSRN, 2024.
- [37] F. Casella, and B. Bachmann, "On the choice of initial guesses for the Newton-Raphson algorithm," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 398, 2021.
- [38] Q. Sun, L. Liu, D. Ma, and H. Zhang, "The initial guess estimation Newton method for power flow in distribution systems," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 4, no. 2, pp. 231-242, 2017.
- [39] Z. Javid, U. Karaagac, I. Kocar, and T. Xue, "DC grid load flow solution incorporating generic DC/DC converter topologies," *Energy Reports*, vol. 9, pp. 951-961, 2023.
- [40] P. A. N. Garcia, J. L. R. Pereira, S. Carneiro, V. M. d. Costa, and N. Martins, "Three-phase power flow calculations using the current injection method," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 508-514, 2000.
- [41] D. R. R. Penido, L. R. d. Araujo, S. Carneiro, J. L. R. Pereira, and P. A. N. Garcia, "Three-Phase Power Flow Based on Four-Conductor Current Injection Method for Unbalanced Distribution Networks," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 494-503, 2008.
- [42] L. Fan, "Solution of the ill-conditioned load flow problem by the tensor method," Department of Electrical and Computer Engineering, McGill University, 1989.
- [43] S. Iwamoto, and Y. Tamura, "A load flow calculation method for ill-conditioned power systems," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, no. 4, pp. 1736-1743, 1981.
- [44] M. Tostado-Véliz, T. Alharbi, O. Alrumayh, S. Kamel, and F. Jurado, "A Novel Power Flow Solution Paradigm for Well and Ill-Conditioned Cases," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 112425-112438, 2021.
- [45] P. Acharjee, and S. K. Goswami, "Power flow analysis under critical conditions by the linear perturbation-based simple algorithm," *Electrical Engineering*, vol. 94, no. 4, pp. 187-196, 2012.
- [46] K. Ganesan, E. Moore, and W. J. Vetter, "On convergence of Newton's method for load flow problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, no. 3, pp. 325-336, 1973.

- [47] M. Karimi, A. Shahriari, M. R. Aghamohammadi, H. Marzooghi, and V. Terzija, “Application of Newton-based load flow methods for determining steady-state condition of well and ill-conditioned power systems: A review,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 113, pp. 298-309, 2019/12/01, 2019.
- [48] L. R. d. Araujo, D. R. R. Penido, S. C. Júnior, J. L. R. Pereira, and P. A. N. Garcia, “Comparisons between the three-phase current injection method and the forward/backward sweep method,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 32, no. 7, pp. 825-833, 2010.
- [49] N. Rashidirad, J. Mahseredjian, I. Kocar, and O. Saad, “MANA-Based Load-Flow Solution for Bipolar DC Microgrids,” *ELECTRIMACS 2022*, no. 2022.
- [50] J. M. Gutiérrez, L. J. Hernández-Paricio, M. Marañón-Grandes, and M. T. Rivas-Rodríguez, “Influence of the multiplicity of the roots on the basins of attraction of Newton’s method,” *Numerical Algorithms*, vol. 66, no. 3, pp. 431-455, 2014/07/01, 2014.
- [51] P. Deuflhard, *Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms*: Springer Science & Business Media, 2005.
- [52] Y. Wang, and W. Xu, “The existence of multiple power flow solutions in unbalanced three-phase circuits,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 605-610, 2003, 2003.
- [53] J. Lindberg, A. Zachariah, N. Boston, and B. Lesieutre, “The distribution of the number of real solutions to the power flow equations,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 38, no. 2, pp. 1058-1068, 2022, 2022.
- [54] J. E. Dennis Jr, and R. B. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*: SIAM, 1996.
- [55] G. H. Golub, and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Fourth ed.: The Johns Hopkins University Press, 2013.
- [56] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3 ed., USA: Cambridge University Press, 2007.
- [57] H. Woźniakowski, “Numerical Stability for Solving Nonlinear Equations,” *Numerische Mathematik*, vol. 27, no. 4, pp. 373–390, 1976.
- [58] F. Milano, “Continuous Newton’s Method for Power Flow Analysis,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 50-57, 2009.
- [59] J. Lam, Z. Li, Y. Wei, J.-E. Feng, and K. W. Chung, “Estimates of the spectral condition number,” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 59, no. 3, pp. 249-260, 2011.
- [60] P. D. Robinson, and A. J. Wathen, “Variational bounds on the entries of the inverse of a matrix,” *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 12, no. 4, pp. 463-486, 1992.
- [61] S. Demko, W. F. Moss, and P. Smith, “Decay rates for inverses of band matrices,” *Mathematics of Computation*, vol. 43, pp. 491-499, 1984.
- [62] A. H. Lone, and N. G, “A Novel Modified Decoupled Newton-Raphson Load Flow Method with Distributed Slack Bus for Islanded Microgrids Considering Frequency Variations,” *Electric Power Components and Systems*, vol. 0, no. 0, pp. 1-19, 2023.

- [63] X. Xu, Z. Yan, M. Shahidehpour, S. Chen, H. Wang, Z. Li, and Q. Zhou, "Maximum Loadability of Islanded Microgrids With Renewable Energy Generation," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 10, no. 5, pp. 4696-4705, 2019.
- [64] M. Molénat, J. Mahseredjian, N. Rashidirad, and A. Lé sage-Landry, "On the frequency variation in load-flow calculations for islanded AC microgrid," in ELECTRIMACS Castellón de la Plana, 2024.
- [65] I. P. Test. "The IEEE European low voltage test feeder," <https://cmte.ieee.org/pestestfeeders/resources/>.

## ANNEXE A : TABLEAU DE CORRESPONDANCE

Cette annexe recense les résultats et les chemins pour accéder aux codes associés. L'intégralité des codes est accessible dans le fichier de chemin :

\polymtl.ca\Jean Mahseredjian - MatthiasMolenat\Code\2024\_MScA\_Matthias/

<b>Chapitre 3</b>	
Tableau 1 : Résultats des tests de l'étude de cas	Etude_Jacobienne/composantes_libres.m
Figure 3.1 : Représentation graphique de la fonction $\ \mathbf{F}\ _2$ , associée à $\mathbf{F}$ .	NR_MAP.ipynb
Figure 3.2 : Identification des bassins d'attraction par la méthode NR associés à	NR_MAP.ipynb
Figure 3.3 : Identification des bassins de vitesse de convergence par la méthode NR associés à	NR_MAP.ipynb
<b>Chapitre 4</b>	
Tableau 3 : Nombre de composantes variables dans le bloc matrice $\mathbf{n}_w$ d'une jacobienne pour une méthode et un réseau donné.	Etude_Jacobienne/composantes_libres.m
Tableau 4 : Temps $(t_{\text{cst}}, \bar{t}_J, t_{\text{tot}})$ en seconde de calcul pour une méthode et un réseau donné	Etude_Jacobienne/temps_calcul_MANA.m Etude_Jacobienne/temps_calcul_CME.m
Tableau 5 : Nombre de conditionnement de la jacobienne MANA avec pré-conditionnement ciblé	Préconditionnement/Test_precond_MANA.m
Tableau 6 : Évolution de $\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{MANA}}(\mathbf{x}_0))$ et $\kappa_2(\mathbf{J}_{F_{CME}}(\mathbf{x}_0))$ en fonction de la tension nominale du réseau 25 barres.	Cond_Vnom /Cond_Vnom.m

Tableau 7 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 25 barres.	Conjecture/Conjecture.m
Tableau 8 : Résultats de convergence MANA pour le réseau 906 barres.	Conjecture/Conjecture.m
Figure 4.1 : Dénombrement et localisation des valeurs non-nulles - nz- de a) la matrice jacobienne CME associée au réseau 25 barres et de b) son inverse.	Divers/Analyse_v1.m, showsparse_inv = 1
Figure 4.2 : Distribution en logarithme base 10 des entrées de la matrice jacobienne MANA associée au réseau 25 barres	Divers/Analyse_v1.m, showhistlog = 1
Figure 4.3 : Heatmaps des ordres de grandeur en puissances de 10 des entrées des jacobennes CME et MANA proche de la solution de l'écoulement de puissance du réseau 25 barres	Divers/Analyse_v1.m, showheatlog = 1
Figure 4.4 : Evolution de $\kappa_2(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))$ des méthodes CME et MANA pour le réseau 25 barres sous différentes situations de surcharge.	Divers/Analyse_v2.m
<b>Chapitre 5</b>	
Tableau 9 : Résultats de l'écoulement de puissance par MANA et évaluation du mismatch $\ \mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\ _{\infty}$ pour le réseau isolé 25 barres	ELECTRIMACS/Analyse_Omega.m $l \in \{1, \dots, 4\}$ , circuitno = 64,
Tableau 10 : Résultats de l'écoulement de puissance par MANA et évaluation du mismatch $\ \mathbf{F}_{\text{MANA-}\mathbf{Y}(\omega)}(\mathbf{x}^{\text{sol.}})\ _{\infty}$ pour le réseau isolé 906 barres	ELECTRIMACS/Analyse_Omega.m $l \in \{1, \dots, 4\}$ , circuitno = 80,
Tableau 12 : Résultats des écoulements de puissances $\mathbf{x}^{\text{sol.}}$ et $\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol.}}$ pour le réseau 25 barres dans différentes	ELECTRIMACS/automate_analyse_Omega.m

<p>situations de surcharges <math>\lambda_l</math>. Les amplitudes de tension sont en Volt, <math>\omega</math> en rad.s<sup>-1</sup>.</p>	<p>circuitno = 64, recompute = 20</p>
<p>Tableau 13 : Résultats des écoulements de puissances <math>\mathbf{x}^{\text{sol}}</math> et <math>\mathbf{x}_{\omega}^{\text{sol}}</math> pour le réseau 906 barres dans différentes situations de surcharges <math>\lambda_l</math>. Les amplitudes de tension sont en Volt, <math>\omega</math> en rad.s<sup>-1</sup>.</p>	<p>ELECTRIMACS/automate_analyse_Omega.m circuitno = 80, recompute = 20</p>
<p>Figure 5.1 : Erreur maximale normalisée entre les amplitudes de tension des vecteurs <math>\mathbf{x}^*</math> et <math>\mathbf{x}_{\omega}^*</math> pour le réseau 25 barres alimenté par des générateur <i>droop</i>, avec un facteur de surcharge <math>\lambda_l = 7.47</math>.</p>	<p>ELECTRIMACS/plot_graph_error.m</p>
<p>Figure 5.2 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 25 barres, sous différentes conditions de surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte.</p>	<p>ELECTRIMACS/automate_analyse_Omega.m ELECTRIMACS/representation.m circuitno = 64, recompute = 20</p>
<p>Figure 5.3 : Performances à la convergence des algorithmes pour la résolution du problème d'écoulement de puissance dans le cas du réseau à 906 barres, sous différentes conditions de surcharges. Pour les algorithmes hybrides, l'étape relative à MANA n'est pas prise en compte.</p>	<p>ELECTRIMACS/automate_analyse_Omega.m ELECTRIMACS/representation.m circuitno = 80, recompute = 20</p>
<p>Figure 5.4 : Nombres d'itérations nécessaires à la convergence de différents algorithmes pour un réseau 25 barres extrêmement chargé.</p>	<p>ELECTRIMACS/representation.m</p>

## ANNEXE B : RESEAUX TEST

### B.1 Micro-réseau isolé 25 barres

Le micro-réseau isolé 25 barres est un micro-réseau triphasé, isolé du réseau principal par un interrupteur identifié par l'appellation *isolation switch* dans la Figure B.1. Ce réseau est particulièrement débalancé du fait de la consommation des 72 charges monophasées du réseau. Le réseau est de tension nominale de 4.16 kV, de fréquence nominale 60 Hz. La génération est assurée par deux *inverters* aux barres 19 et 25, et un moteur synchrone à la barre 13. Il est utilisé comme tel notamment dans la référence [9].

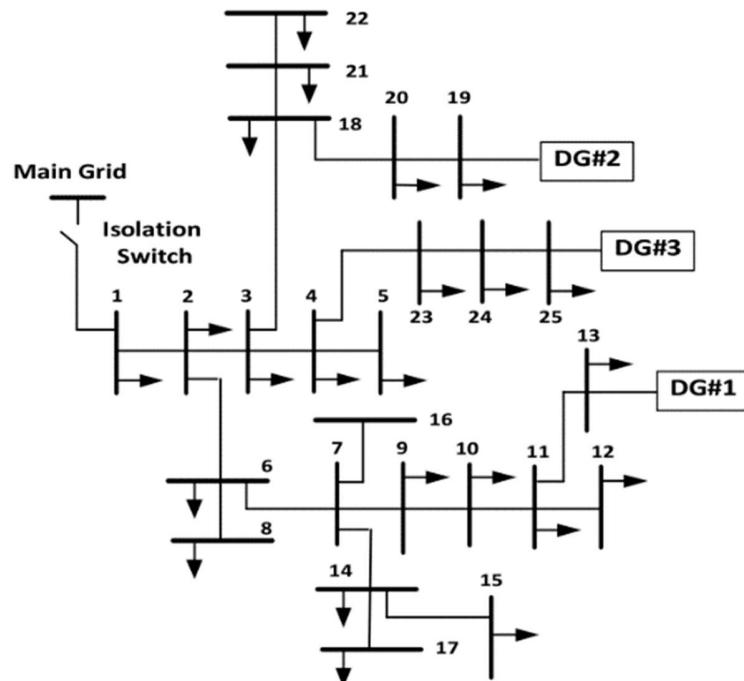


Figure B.1 : Micro-réseau 25 barres isolé [9].

## B.2 Réseau isolé 906 barres

Le réseau isolé 906 barres est un réseau triphasé de distribution. Sa topologie est illustrée dans la référence [65] par la Figure A.6.2. Ce réseau est débalancé du fait de la consommation des 55 charges monophasées du réseau. Le réseau est de tension nominale de 416 V, de fréquence nominale 50 Hz. La génération est assurée par deux générateur synchrone. Il est utilisé comme tel notamment dans la référence [9].

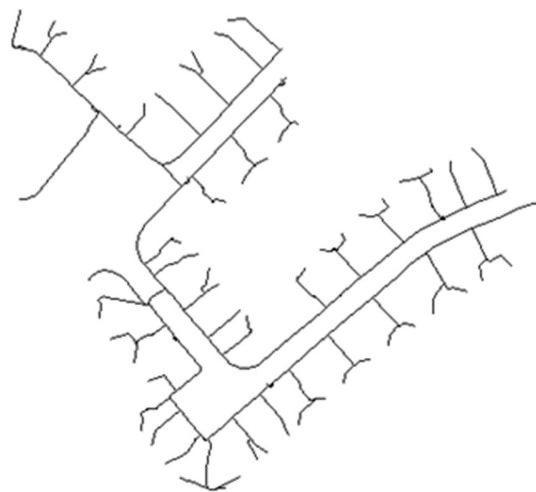


Figure A.6.2 : Réseau 906 barres isolé [65].

## ANNEXE C : DEVELOPPEMENTS

### C.1 Développement de Taylor à l'ordre 2 pour la convergence de NR

On utilise des éléments d'analyse pour illustrer la seule implication des composantes non-libres dans la vitesse de convergence de la méthode NR. On considère le tenseur d'ordre trois associée à la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  introduite en (3.4), et donc à  $\mathbf{F}$  introduit en (3.1). Le hessien  $\mathbf{H}$  peut être vu comme un vecteur composé des matrices hessiennes des composantes de  $\mathbf{F}$ . On a :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_i]_{1 \leq i \leq n}, \text{ avec } \mathbf{H}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}_{i,j}}{\partial \mathbf{w}_l} \right]_{1 \leq j, l \leq r} & \mathbf{0}_{r, n-r} \\ \mathbf{0}_{n-r, n} & \mathbf{0}_{n-r, n-r} \end{bmatrix} & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ \mathbf{0}_{n, n} & \text{si } i \geq q \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{J}_i \text{ est constante} \\ \mathbf{F}_i \text{ est linéaire en } x \end{cases} \end{cases}. \quad (6.1)$$

On écrit alors le développement de Taylor de  $\mathbf{F}$  à l'ordre 2 autour de  $\mathbf{x}^*$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*) + o\left(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2\right), \quad (6.2)$$

en introduisant  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_k) (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k) \right]_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur correction apporté par l'introduction du second ordre dans le développement de Taylor et  $o$  faisant référence à la notation de Landau. En explicitant  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|$ , on a au second ordre, à l'aide de (1.3) et (6.2) :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \quad & \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}^* \\
\Leftrightarrow \quad & \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}^*\| \\
& = \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) [\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)]\| \\
& = \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) [\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)]\| \\
& = \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)\|. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

En remarquant que  $\|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)\| \leq \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k)\| \|\mathcal{H}(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\|^2$ , on met ici en avant un élément de preuve de la convergence quadratique de la méthode NR sous réserve d'hypothèses de majoration sur  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{H}$ .

En utilisant (6.1) dans (6.3), on a  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*) &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_k) (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k) \right]_{0 \leq i \leq n} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k)^T \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}_{i,j}}{\partial \mathbf{w}_l} \right]_{1 \leq j, l \leq r} & \mathbf{0}_{r, n-r} \\ \mathbf{0}_{n-r, r} & \mathbf{0}_{n-r, n-r} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k), & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ \mathbf{0}, & \text{si } i \geq q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_k)^T \left[ \frac{\partial \mathbf{J}_{i,j}}{\partial \mathbf{w}_l} \right]_{1 \leq j, l \leq r} (\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_k), & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ \mathbf{0}, & \text{si } i \geq q. \end{cases} \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Ainsi, avec (3.3), (6.3) et (6.4), on a  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| &= \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)\| \\
&= \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{w}_k) \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k)\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{w}_k)\| \|\mathbf{H}(\mathbf{w}_k)\| \|\mathbf{w}_k - \mathbf{w}^*\|^2 \tag{6.5}
\end{aligned}$$

En remarquant que  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{z}$  exprimés dans la base canonique sont orthogonaux dans  $\mathbb{R}^n$ , on a avec les normes usuelles :  $\forall k \in \mathbb{N}, \|\mathbf{w}_k - \mathbf{w}^*\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$ . On écrit ainsi à partir de (6.5),  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$\|\mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{w}^*\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{w}_k)\| \|\mathbf{H}(\mathbf{w}_k)\| \|\mathbf{w}_k - \mathbf{w}^*\|^2 \quad (6.6)$$

Ainsi, la propriété de convergence quadratique ne dépend que des valeurs relatives à  $\mathbf{w}$ .

Pour les méthodes de résolution du problème de l'écoulement de puissance utilisant la méthode NR, cette manipulation porte un intérêt concret. En effet, les hessiennes ont des propriétés particulières dans certains réseaux et principalement pour les formulations en bilan de courant : matrices nulles, constantes, etc. Les travaux de Iwamoto en sont un exemple indirect [22, 43].

## C.2 Matrices jacobniennes des méthodes CME, MANA et CIM dans le cas d'un réseau simple à 4 nœuds

On rappelle la représentation du réseau donnée Figure 3.4 :

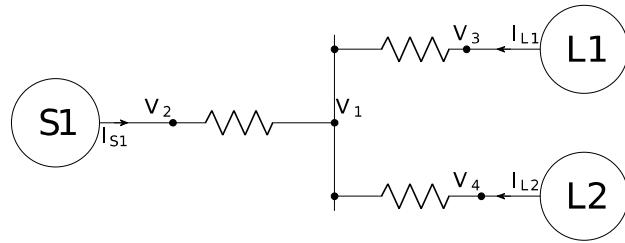


Figure B.1 : Exemple d'un réseau 4 barres

**CME** : Conformément à (2.4) de la Section 2.1, et augmentée de  $\omega$ , la variable de résolution de la formulation CME est la suivante :

$$\mathbf{x}_{\text{CME}} = (V_1, V_2, V_3, V_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega)^T. \quad (6.7)$$

La formulation CME développée est, à partir de (2.5), (2.22), et de [9] est :

$$\mathbf{F}_{\text{CME}}(\mathbf{x}) = (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3, \Delta P_4, \Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3, \Delta Q_4, \theta_{\text{ref}})^T, \quad (6.8)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Delta P_1 &= -V_1 \sum_{k=1}^4 V_k y_{ik} \cos(\theta_1 - \theta_k - \varphi_{1k}), \\
\Delta P_2 &= P_0^+ + \alpha_{\text{droop}}(\omega_0 - \omega) - V_2 \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_2 - \theta_k - \varphi_{2k}), \\
\Delta P_3 &= -\frac{P_{01}}{V_0} V_3 - V_3 \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_3 - \theta_k - \varphi_{3k}), \\
\Delta P_4 &= -\frac{P_{02}}{V_0} V_4 - V_4 \sum_{k=1}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_4 - \theta_k - \varphi_{4k}), \\
\Delta Q_1 &= -V_1 \sum_{k=1}^4 V_k y_{1k} \sin(\theta_1 - \theta_k - \varphi_{1k}), \\
\Delta Q_2 &= Q_0^+ - \beta_{\text{droop}}(V_2 - |V_0^+|) - V_2 \sum_{k=1}^4 V_k y_{2k} \sin(\theta_2 - \theta_k - \varphi_{2k}), \\
\Delta Q_3 &= -\frac{Q_{01}}{V_0} V_3 - V_3 \sum_{k=1}^4 V_k y_{3k} \sin(\theta_3 - \theta_k - \varphi_{3k}), \\
\Delta Q_4 &= -\frac{Q_{02}}{V_0} V_4 - V_4 \sum_{k=1}^4 V_k y_{4k} \sin(\theta_4 - \theta_k - \varphi_{4k}), \\
\theta_{\text{ref}} &= \theta_1.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

La jacobienne associée à cette formulation est alors, d'après (2.24) :

$$\mathbf{J}_{CME} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_4} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_4} & \dots & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_1} & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \theta_n} & \dots & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \omega} \\ \hline \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_4} & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_4} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial V_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial V_4} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial \theta_4} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \theta_{\text{ref}}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \theta_{\text{ref}}}{\partial \theta_4} & 0 \end{array} \right] \tag{6.10}$$

Les différentielles  $\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_j}, \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_j}, \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_j}$  et  $\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_j}, 1 \leq i, j \leq 4$ , sont identiques à celles présentées en (2.7), à la différence des composantes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_i} &= -\frac{P_{0_i}}{V_0} - \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) - 2V_i \cos(\varphi_{ii}), \quad i = 3, 4 \\
\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} &= -\frac{Q_{0_i}}{V_0} - \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) - 2V_i \sin(\varphi_{ii}), \quad i = 3, 4 \\
\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} &= -\beta_{\text{droop}} - \sum_{k=1, k \neq i}^n V_k y_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) - 2V_i \sin(\varphi_{ii}).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

On identifie  $\frac{\partial \theta_{\text{ref}}}{\partial \theta_1} = 1$ ,  $\frac{\partial \theta_{\text{ref}}}{\partial \theta_i} = 0$  pour  $i > 1$ , puis  $\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \omega} = 0 \ \forall i \neq 2$  et pour  $i = 2$ , on a  $\frac{\partial \Delta P_2}{\partial \omega} = -\alpha_{\text{droop}}$ .

**MANA :** Conformément à (2.14) de la Section 2.2.1 et augmentée de  $\omega$ , la variable MANA est la suivante :

$$\mathbf{x} = \left( \left\{ \text{Re}(\mathbf{V}) \right\}, \left\{ \text{Im}(\mathbf{V}) \right\}, \left\{ \text{Re}(\mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}}) \right\}, \left\{ \text{Im}(\mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}}) \right\}, \left\{ \text{Re}(\mathbf{I}^{\text{injectés-charge}}) \right\}, \left\{ \text{Im}(\mathbf{I}^{\text{injectés-charge}}) \right\}, \omega \right)^T, \tag{6.12}$$

Avec  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ ,  $\mathbf{I}^{\text{injectés-gen.}} = \mathbf{I}_{S1}$  et  $\mathbf{I}^{\text{injectés-charge}} = (\mathbf{I}_{L1}, \mathbf{I}_{L2})$ .

La formulation MANA développée est, à partir de (2.15), (2.16) et (2.13), la suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{MANA}}(\mathbf{x}) = \left( \text{Re}(\mathbf{f}_n), \text{Im}(\mathbf{f}_n), \text{Re}(\mathbf{f}_{\text{gen.}}), \text{Im}(\mathbf{f}_{\text{gen.}}), \mathbf{f}_{\text{G}_{\text{ref}}}, \text{Re}(\mathbf{f}_{\text{charge}}), \text{Im}(\mathbf{f}_{\text{charge}}) \right)^T, \tag{6.13}$$

avec :

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_n)]_1 &= \sum_k^4 [G_{1k} V_{r_k} - B_{1k} V_{m_k}], \\
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_n)]_2 &= \sum_k^4 [G_{2k} V_{r_k} - B_{2k} V_{m_k}] - I_{r_{s1}}, \\
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_n)]_3 &= \sum_k^4 [G_{3k} V_{r_k} - B_{3k} V_{m_k}] - I_{r_{l1}}, \\
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_n)]_4 &= \sum_k^4 [G_{4k} V_{r_k} - B_{4k} V_{m_k}] - I_{r_{l2}}, \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_n)]_1 &= \sum_k^4 [B_{1k} V_{r_k} + G_{1k} V_{m_k}], \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_n)]_2 &= \sum_k^n [B_{2k} V_{r_k} + G_{2k} V_{m_k}] - I_{m_{s1}}, \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_n)]_3 &= \sum_k^n [B_{3k} V_{r_k} + G_{3k} V_{m_k}] - I_{m_{l1}}, \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_n)]_4 &= \sum_k^n [B_{4k} V_{r_k} + G_{4k} V_{m_k}] - I_{m_{l2}}, \\
\operatorname{Re}(\mathbf{f}_{\text{gen}}) &= I_{r_{s1}} V_{r_2} + I_{m_{s1}} V_{m_2} - P_0^+ - \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega), \\
\operatorname{Im}(\mathbf{f}_{\text{gen}}) &= I_{r_{s1}} V_{m_2} - I_{m_{s1}} V_{r_2} - Q_0^+ - \beta_{\text{droop}} \left( \sqrt{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} - |\mathbf{V}_0^+| \right), \\
\mathbf{f}_{G_{\text{ref}}} &= V_{m_2}, \\
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_{\text{charge}})]_1 &= I_{r_{l1}} V_{r_3} + I_{m_{l1}} V_{m_3} + \frac{P_{0_1}}{V_0} \sqrt{V_{r_3}^2 + V_{m_3}^2}, \\
[\operatorname{Re}(\mathbf{f}_{\text{charge}})]_2 &= I_{r_{l2}} V_{r_4} + I_{m_{l2}} V_{m_4} + \frac{P_{0_2}}{V_0} \sqrt{V_{r_4}^2 + V_{m_4}^2}, \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_{\text{charge}})]_1 &= I_{r_{l1}} V_{m_3} - I_{m_{l1}} V_{r_3} + \frac{Q_{0_1}}{V_0} \sqrt{V_{r_3}^2 + V_{m_3}^2}, \\
[\operatorname{Im}(\mathbf{f}_{\text{charge}})]_2 &= I_{r_{l2}} V_{m_4} - I_{m_{l2}} V_{r_4} + \frac{Q_{0_2}}{V_0} \sqrt{V_{r_4}^2 + V_{m_4}^2}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

La jacobienne associée à cette formulation est d'après (2.25) :

$$\mathbf{J}_{\text{MANA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{A}_{IG} & \mathbf{A}_{IL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{GPO} & \mathbf{D}_{GPO} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{G\omega} \\ \mathbf{C}_{LPQ} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LPQ} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{6.15}$$

La matrice  $\mathbf{Y}_n$  est constante et n'a pas besoin d'être recalculée à chaque itération. Il en est de même avec les matrices d'incidences des variables d'interface de courant  $\mathbf{A}_{IG}$  et  $\mathbf{A}_{IL}$ , ainsi qu'avec la matrice  $\mathbf{A}_{G\omega}$  traduisant la dépendance en fréquence du générateur :

$$\mathbf{A}_{IG} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{IL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{G\omega} = \begin{bmatrix} -\alpha_{droop} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Exceptée la ligne relative à la contrainte de phase  $\mathbf{f}_{G_{ref}}$  du générateur, les matrices traduisant les contraintes des composants sont variables :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{GPQ} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{r_{s1}} & 0 & 0 & 0 & I_{m_{s1}} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{m_{s1}} - \beta_{\text{droop}} h_R(\mathbf{V}_2) & 0 & 0 & 0 & I_{r_{s1}} - \beta_{\text{droop}} h_M(\mathbf{V}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{D}_{GPQ} &= \begin{bmatrix} V_{r_2} & V_{m_2} \\ -V_{m_2} & V_{r_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{C}_{LPQ} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{r_{l1}} + \frac{P_{0_1}}{V_0} h_R(\mathbf{V}_3) & 0 & 0 & 0 & I_{m_{l1}} + \frac{P_{0_1}}{V_0} h_M(\mathbf{V}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_{l2}} + \frac{P_{0_2}}{V_0} h_R(\mathbf{V}_4) & 0 & 0 & 0 & I_{m_{l2}} + \frac{P_{0_2}}{V_0} h_M(\mathbf{V}_4) \\ 0 & 0 & -I_{m_{l1}} + \frac{Q_{0_1}}{V_0} h_R(\mathbf{V}_3) & 0 & 0 & 0 & I_{r_{l1}} + \frac{Q_{0_1}}{V_0} h_M(\mathbf{V}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{m_{l2}} + \frac{Q_{0_2}}{V_0} h_R(\mathbf{V}_4) & 0 & 0 & 0 & I_{r_{l2}} + \frac{Q_{0_2}}{V_0} h_M(\mathbf{V}_4) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{D}_{LPQ} &= \begin{bmatrix} V_{r_3} & 0 & V_{m_3} & 0 \\ 0 & V_{r_4} & 0 & V_{m_4} \\ V_{m_3} & 0 & -V_{r_3} & 0 \\ 0 & V_{m_4} & 0 & -V_{r_4} \end{bmatrix}, \\
&\quad (6.17)
\end{aligned}$$

avec  $h_R(\mathbf{V}_k) = \frac{V_{r_k}}{\sqrt{V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2}}$  et  $h_M(\mathbf{V}_k) = \frac{V_{m_k}}{\sqrt{V_{r_k}^2 + V_{m_k}^2}}$ .

**CIM** : Ecoulement de puissance bilan nodal sans variables d'interface, issu de Current Injection Method (CIM) dans l'article [15]. La variable de résolution CIM est la suivante :

$$\mathbf{x} = (V_{r_1}, V_{m_1}, V_{r_2}, V_{m_2}, V_{r_3}, V_{m_3}, V_{r_4}, V_{m_4}, \omega)^T, \quad (6.18)$$

La formulation inspirée de CIM est la suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_{m_1}, f_{r_1}, f_{m_2}, f_{r_2}, f_{m_3}, f_{r_3}, f_{m_4}, f_{r_4}, f_{G_{\text{ref}}})^T, \quad (6.19)$$

avec :

$$\begin{aligned}
f_{r_1} &= \sum_k^4 \left[ G_{1k} V_{r_k} - B_{1k} V_{m_k} \right], \\
f_{r_2} &= \sum_k^4 \left[ G_{2k} V_{r_k} - B_{2k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{r_2} \left( P_0^+ + \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega) \right) + V_{m_2} \left( Q_0^+ + \beta_{\text{droop}} \left( \sqrt{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} - |\mathbf{V}_0^+| \right) \right)}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2}, \\
f_{r_3} &= \sum_k^4 \left[ G_{3k} V_{r_k} - B_{3k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{r_3} P_{0_1} + V_{m_3} Q_{0_1}}{V_0 \left( V_{r_3}^2 + V_{m_3}^2 \right)}, \\
f_{r_4} &= \sum_k^4 \left[ G_{4k} V_{r_k} - B_{4k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{r_4} P_{0_2} + V_{m_4} Q_{0_2}}{V_0 \left( V_{r_4}^2 + V_{m_4}^2 \right)}, \\
f_{m_1} &= \sum_k^4 \left[ B_{1k} V_{r_k} + G_{1k} V_{m_k} \right], \\
f_{m_2} &= \sum_k^n \left[ B_{2k} V_{r_k} + G_{2k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{m_2} \left( P_0^+ + \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega) \right) - V_{r_2} \left( Q_0^+ + \beta_{\text{droop}} \left( \sqrt{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} - |\mathbf{V}_0^+| \right) \right)}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2}, \\
f_{m_3} &= \sum_k^n \left[ B_{3k} V_{r_k} + G_{3k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{m_3} P_{0_1} - V_{r_3} Q_{0_1}}{V_0 \left( V_{r_3}^2 + V_{m_3}^2 \right)}, \\
f_{m_4} &= \sum_k^n \left[ B_{4k} V_{r_k} + G_{4k} V_{m_k} \right] - \frac{V_{m_4} P_{0_2} - V_{r_4} Q_{0_2}}{V_0 \left( V_{r_4}^2 + V_{m_4}^2 \right)}, \\
f_{G_{\text{ref}}} &= V_{m_2}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

La jacobienne associée à cette formulation est :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^* & \mathbf{Y}_{12}^* & \mathbf{Y}_{13}^* & \mathbf{Y}_{14}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{21}^* & \mathbf{Y}_{22}^* & \mathbf{Y}_{23}^* & \mathbf{Y}_{24}^* & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \omega} \\ \mathbf{Y}_{31}^* & \mathbf{Y}_{32}^* & \mathbf{Y}_{33}^* & \mathbf{Y}_{11}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{41}^* & \mathbf{Y}_{42}^* & \mathbf{Y}_{43}^* & \mathbf{Y}_{44}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\text{ref}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Avec pour matrices par blocs constantes  $\mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & -B_{ij} \end{bmatrix}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 4$ ,  $\mathbf{J}_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

A priori, les matrices par blocs diagonales sont les matrices à réactualiser à chaque itération,

avec  $\mathbf{Y}_{ii} = \begin{bmatrix} B_{ii} - a_i & G_{ij} - b_i \\ G_{ii} - c_i & -B_{ii} - d_i \end{bmatrix}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Les grandeurs  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  sont associées à la dérivation

des courants injectés dans le réseau par des composants de puissances. Par exemple, on a

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0 \text{ (pas d'injection) et } a_3 = \frac{Q_{0_1} (V_{m_3}^2 - V_{r_3}^2) + 2V_{m_3}V_{r_3}P_{0_1}}{V_0 (V_{r_3}^2 + V_{m_3}^2)}.$$

En notant

$$\tilde{f}_{m_2} = \frac{V_{m_2} (P_0^+ + \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega)) - V_{r_2} (Q_0^+ + \beta_{\text{droop}} (\sqrt{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} - |\mathbf{V}_0^+|))}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2}, \quad (6.22)$$

on a

$$d_2 = \frac{\partial \tilde{f}_{m_2}}{\partial V_{m_2}} = \frac{(P_0^+ + \alpha_{\text{droop}} (\omega_0 - \omega)) - V_{r_2} V_{m_2} \beta_{\text{droop}} (V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2)^{-1/2} - 2V_{m_2} \tilde{f}_{m_2}}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2}. \quad (6.23)$$

On a aussi  $\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} -\frac{V_{m_2} \alpha_{\text{droop}} \omega}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} \\ -\frac{V_{r_2} \alpha_{\text{droop}} \omega}{V_{r_2}^2 + V_{m_2}^2} \end{bmatrix}$ .

### C.3 Idées explicitant les conjectures

Rappelons les conjectures et leurs hypothèses proposées dans la Section 4.2.3 :

Les hypothèses sont les suivantes :

- Le réseau considéré possède une solution au problème de d'écoulement de puissance.
- Le nombre de conditionnement des matrices se stabilisent à l'issu des premières itérations ( $k \leq 5$ ), autour d'une valeur que l'on note  $\bar{\kappa}$ .

Les conjectures pour MANA sont les suivantes :

**Conjecture 2 :** Si  $\bar{\kappa}\mu \ll \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode possède de grande chance de converger.

**Conjecture 3 :** Si  $\bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode possède de grande chance de diverger. Toutefois, dans le cas particulier où, pour un  $\varepsilon_{\text{tol}}^*$  tel que  $\varepsilon_{\text{tol}}^* \gg \bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ , la méthode converge et renvoie un résultat  $\mathbf{x}^*$  tel que  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ , alors on est certains que la méthode va converger à une précision  $\varepsilon_{\text{tol}}$  quand bien même  $\bar{\kappa}\mu \gg \varepsilon_{\text{tol}}$ .

Désormais, considérons un réseau quelconque pour lequel on écrit la formulation MANA afin de résoudre le problème de l'écoulement de puissance. On réalise une série d'hypothèses supplémentaires :

- Un ordre de grandeur à l'erreur faite sur  $\mathbf{x}_k$  conformément à la borne supérieure proposée en (4.8) est  $\|\delta\mathbf{x}_k\| \sim \kappa(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))\mu$ . Cet ordre de grandeur est proche du pire cas possible  $\|\delta\mathbf{x}_k\| \sim \|\mathbf{x}_k\| \kappa(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))\mu$ .
- La valeur du  $k^{\text{ème}} \text{ mismatch}$   $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\|$  est, après quelques itérations, équivalent à l'erreur faite sur le bilan nodal (2.9) :  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \sim \|\mathbf{Y}_n \delta\mathbf{V}_k\|$ . Cette hypothèse concorde avec les constats fait dans les résultats numériques en Section 5.2.1 : la valeur du *mismatch* est fortement impactée par des variations des termes impliqués dans le calcul du bilan nodal.
- Les entrées de la matrice d'admittance sont d'une norme d'ordre de grandeur allant de 1 à 10.

Dans ce cas, on a au voisinage de la solution  $\mathbf{x}^*$  :

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \sim \|\mathbf{Y}_n\| \bar{\kappa} \mu \quad (6.24)$$

Avec  $\|\mathbf{Y}_n\| \sim \{1, 10\}$ , on estime que la limite de précision  $\mu$  induit une erreur proche de l'ordre des grandeurs  $\{\bar{\kappa}\mu, 10\bar{\kappa}\mu\}$ . Ces grandeurs représentent des balises repères sur le compromis entre convergence et précision de solution. Ainsi, on s'attend à ce que cela soit difficile de converger avec une méthode NR dont l'erreur caractéristique réalisée sur le *mismatch* est de l'ordre du critère de tolérance.