



**Titre:** Modélisation de l'écoulement turbulent dans une pompe  
Title:

**Auteur:** Danielle Lysaught  
Author:

**Date:** 1989

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Lysaught, D. (1989). Modélisation de l'écoulement turbulent dans une pompe  
Citation: [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/58259/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/58259/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT  
DANS UNE POMPE

par

Danielle Lysaught

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU GRADE DE MAITRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

Novembre 1989

©Danielle Lysaught 1989

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58189-1

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT  
DANS UNE POMPE

présenté par: Danielle Lysaught

en vue de l'obtention du grade de: MAITRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Ricardo Camarero ..... Ph.D., président  
M. Dominique Pelletier ..... Ph.D.  
M. André Garon ..... Ph.D.  
M. Marcelo Reggio ..... Ph.D.

# Sommaire

Un modèle de turbulence de type longueur de mélange algébrique à deux couches est intégré à une procédure de solution des équations moyennes du passage de Navier-Stokes pour les fluides visqueux incompressibles. Le but visé est de simuler l'écoulement turbulent moyen dans une pompe de type mixte.

Le système d'équations différentielles est résolu à l'aide de la méthode des éléments finis. La formulation pénalisée consistante est utilisée afin de réduire le nombre d'inconnues et conséquemment diminuer le temps de calcul.

Le développement des équations moyennes du passage est présenté en détail ainsi que les hypothèses posées pour la simplification du problème particulier de la pompe.

L'implantation du modèle de turbulence est ensuite décrite pour deux modèles de longueur de mélange pour les conduites à symétrie de révolution. On validera ces modèles sur des cas-test simples pour s'assurer que la turbulence est correctement modélisée. Finalement on comparera les résultats obtenus numériquement avec les mesures expérimentales disponibles dans la section du rotor de la pompe.

# Abstract

We aimed to predict the mean turbulent flow in a mixed-type pump. To reach this goal, a two-layer algebraic mixing-length turbulence model is incorporated into a solver for passage-averaged Navier-Stokes equations using finite element method. The consistent penalty formulation is used to reduce the number of unknowns in order to increase the speed of calculations.

The passage-averaged equations are developed in details with hypothesis used to simplify the problem of simulation of the mean flow through the pump.

Implementation of the turbulence model is then described for two mixing-length models for symmetric ducts. Validation of these models is made with simple cases of flows to assure that turbulence is well modeled. Finally, we will discuss and compare the numerical predictions of the flow with experimental measurements available in the rotor part of the pump.

# Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon directeur d'études, M. Dominique Pelletier pour m'avoir proposé ce projet en tenant compte de mes intérêts et aptitudes et pour m'avoir tant appris en sachant trouver les mots pour m'expliquer et m'encourager. J'ai apprécié sa patience et son appui tant technique, moral que financier.

Mon co-directeur, M. André Garon, mérite aussi ma gratitude pour avoir été si disponible pour m'extirper des méandres mathématiques dans lesquels je m'enfonçais parfois et pour m'avoir fait partager ses connaissances. Je lui suis reconnaissante pour ses conseils et pour son amitié.

Je remercie les professeurs et membres du département de Mathématiques Appliquées que j'ai cotoyé pour leur travail consciencieux et en particulier Mme. Anne-Marie Goulet pour son aide précieuse à la rédaction de ce mémoire avec le programme  $\text{\LaTeX}$ .

J'adresse mes remerciements à tous mes collègues du groupe MIAO, Jean-François, Yves, Jean-Yves, Benoit, Min, François, Bob, Maryse... pour avoir fait de ces deux années passées ensemble une expérience dont je garderai le meilleur

souvenir.

Je remercie aussi mes parents pour la confiance qu'ils m'ont témoigné tout au long de mon existence et pour m'avoir permis d'atteindre mes objectifs.

Enfin, à mon ami, Denis Nantel, je désire exprimer mes remerciements pour son soutien, sa compréhension et son affection qui m'ont été indispensables.



# Table des Matières

<b>Sommaire</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xiv</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xviii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Revue bibliographique</b>	<b>4</b>
1.1 Modèles de turbulence . . . . .	4
1.1.1 Équations de Reynolds pour l'écoulement turbulent moyen	6

1.1.2	Généralités sur les modèles de turbulence . . . . .	8
1.1.3	Modèles à 0 équation . . . . .	10
1.1.4	Modèles à 1 et $1\frac{1}{2}$ équation . . . . .	12
1.1.5	Modèles à 2 équations . . . . .	13
1.2	Méthode des éléments finis . . . . .	15
1.2.1	Formulation pénalisée de la MEF . . . . .	16
1.2.2	MEF pour les écoulements laminaires . . . . .	18
1.2.3	MEF pour les écoulements turbulents . . . . .	18
1.3	Modélisation des écoulements dans les machines rotatives . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Équations moyennes du passage</b>	<b>22</b>
2.1	Modélisation de l'écoulement . . . . .	23
2.2	Présentation de la pompe . . . . .	24
2.3	Résultats préliminaires . . . . .	26
2.3.1	Moyenne dans le plan méridional d'une fonction en coordonnées cylindriques . . . . .	27
2.3.2	Intégrale sur une surface de révolution . . . . .	28
2.4	Équation moyenne de la continuité . . . . .	29

2.4.1 Facteur de blocage . . . . . 32

2.4.2 Équation moyenne de la continuité en fonction du facteur de blocage . . . . . 33

2.5 Moyenne de l'équation du mouvement . . . . . 35

2.5.1 Forme primaire de la moyenne de l'équation du mouvement 35

    Le terme de transport . . . . . 36

    Le terme de diffusion . . . . . 37

2.5.2 Moyenne du tenseur des contraintes . . . . . 39

    Moyenne du tenseur de cisaillement . . . . . 40

2.5.3 Équation moyenne du mouvement en fonction du facteur de blocage . . . . . 42

2.5.4 Modification du terme de diffusion moyen . . . . . 43

2.5.5 Modification des contraintes aux parois des pales . . . . . 44

    Vecteurs normaux aux surfaces des pales en fonction de la surface de cambrure et du facteur de blocage . . . . . 45

    Partie périodique de la pression aux parois . . . . . 49

    Partie périodique du tenseur de cisaillement aux parois . . . . . 50

    Forme complète du tenseur des contraintes à la paroi . . . . . 50

2.5.6	Forme complète de l'équation moyenne du mouvement . . . . .	51
-------	-------------------------------------------------------------	----

2.6	Modèle de fermeture des équations . . . . .	53
-----	---------------------------------------------	----

2.7	Le modèle complet . . . . .	57
-----	-----------------------------	----

2.7.1	Hypothèses simplificatrices . . . . .	58
-------	---------------------------------------	----

	Hypothèses sur le facteur de blocage . . . . .	58
--	------------------------------------------------	----

	Hypothèses sur les vecteurs normaux aux surfaces de force et de courant moyen . . . . .	59
--	--------------------------------------------------------------------------------------------	----

<b>3</b>	<b>Modèle de turbulence</b>	<b>63</b>
----------	-----------------------------	-----------

3.1	Choix du modèle de turbulence . . . . .	64
-----	-----------------------------------------	----

3.2	Deux modèles de longueur de mélange pour les conduites à symétrie de révolution . . . . .	68
-----	----------------------------------------------------------------------------------------------	----

3.2.1	Modèle de Patankar-Spalding . . . . .	72
-------	---------------------------------------	----

3.2.2	Modèle de Nikuradse-Van Driest . . . . .	73
-------	------------------------------------------	----

3.3	Implantation du modèle de turbulence pour la pompe . . . . .	74
-----	--------------------------------------------------------------	----

3.3.1	Modèle de Patankar-Spalding . . . . .	77
-------	---------------------------------------	----

3.3.2	Modèle de Nikuradse-Van Driest . . . . .	78
-------	------------------------------------------	----

<b>4</b>	<b>Résolution par éléments finis</b>	<b>81</b>
----------	--------------------------------------	-----------

4.1	Traitement du terme de force . . . . .	82
4.2	Forme des équations à résoudre . . . . .	86
4.3	Forme faible des équations . . . . .	87
4.3.1	Forme faible de l'équation du mouvement . . . . .	88
4.3.2	Forme faible de la continuité . . . . .	91
4.3.3	Forme faible des contraintes de tangence . . . . .	92
4.4	Formulation Pénalisée des équations . . . . .	93
4.5	Choix des fonctions d'interpolation . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>96</b>
5.1	Cas test 1: le demi-canal droit . . . . .	97
5.2	Cas-test 2: le canal de la pompe sans pales . . . . .	103
5.3	Calculs dans la pompe . . . . .	113
5.3.1	Comparaison avec les données expérimentales . . . . .	123
	<b>Conclusion et recommandations</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Résultats mathématiques</b>	<b>138</b>

A.1	Fonction implicite et gradient des surfaces des pales . . . . .	138
A.2	Tenseur métrique en coordonnées cylindriques . . . . .	140
A.3	Séparation des termes de la moyenne d'un produit . . . . .	141
A.4	Divergence d'un produit d'une fonction scalaire par une fonction vectorielle . . . . .	142
A.5	Contraction du tenseur métrique et d'un gradient . . . . .	143
A.6	Contraction du tenseur métrique et d'un vecteur . . . . .	144
A.7	Double contraction du tenseur des contraintes et d'un gradient . .	144

# Figures

1.1	Hypothèse de longueur de mélange de Prandtl . . . . .	11
2.1	Moyeu 3-D de la pompe . . . . .	24
2.2	Coupe axiale de la pompe . . . . .	25
2.3	Domaine de calcul de la pompe . . . . .	26
2.4	Surface de révolution et sa génératrice . . . . .	29
2.5	Frontières du volume entre les pales . . . . .	30
2.6	Surfaces des pales et facteur de blocage . . . . .	33
2.7	Effet du facteur de blocage . . . . .	34
2.8	Surfaces de pression et de succion . . . . .	46
2.9	Surfaces de cambrure, de force et de courant moyen . . . . .	60
3.1	Profils de vitesse d'écoulements laminaire et turbulent dans un tuyau	69

3.2	Épaisseur de la couche limite . . . . .	70
3.3	Profils de vitesse dans la couche limite . . . . .	70
3.4	Modèle de longueur de mélange de Patankar-Spalding . . . . .	72
3.5	Longueur de mélange de Nikuradse-Van Driest . . . . .	74
3.6	Couches limite supérieure et inférieure dans la canal de la pompe . . . . .	74
3.7	Maillage du canal de la pompe . . . . .	75
3.8	Calcul de $\delta$ dans le canal de la pompe . . . . .	78
3.9	Mesure de $R$ et $y$ dans une conduite . . . . .	79
4.1	Écoulement unidimensionnel avec pales inclinées . . . . .	82
4.2	Subdivision du domaine de calcul . . . . .	83
4.3	Tractions de surfaces sur la frontière $\Gamma$ . . . . .	90
4.4	Élément de bord et de région avec pales . . . . .	95
4.5	Élément de région sans pales . . . . .	95
5.1	Maillage du demi-canal droit . . . . .	98
5.2	Profil de vitesse turbulent imposé à l'entrée du canal . . . . .	99
5.3	Longueurs de mélange à l'entrée du canal: i) Patankar-Spalding ii) Nikuradse-Van Driest . . . . .	100



5.4	Profils de vitesse à la sortie du canal calculés avec: i) le modèle de Patankar-Spalding ii) le modèle de Nikuradse-Van Driest . . . . .	102
5.5	Contours de vitesse axiale dans le canal droit. . . . .	102
5.6	Maillage du canal de la pompe sans pales . . . . .	104
5.7	Profil de vitesse imposé à l'entrée de la pompe i) composante axiale ii) composante radiale . . . . .	105
5.8	Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à $Re = 10\ 000$	107
5.9	Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV à $Re = 10\ 000$ . . . . .	108
5.10	Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à $Re = 50\ 000$	109
5.11	Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV à $Re = 50\ 000$ . . . . .	110
5.12	Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à $Re = 500\ 000$	111
5.13	Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV à $Re = 500\ 000$ . . . . .	112
5.14	Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à $Re = 10\ 000$	116
5.15	Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à $Re = 10\ 000$ . . . . .	117
5.16	Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à $Re = 50\ 000$	118

5.17	Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à $Re = 50\,000$ . . . . .	119
5.18	Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à $Re = 200\,000$	120
5.19	Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à $Re = 200\,000$ . . . . .	121
5.20	Surface de pression dans le rotor de la pompe . . . . .	122
5.21	Stations de mesures expérimentales dans la pompe . . . . .	124
5.22	Prédictions à $Re = 50\,000$ . . . . .	125
5.23	Prédictions à $Re = 100\,000$ . . . . .	126
5.24	Prédictions à $Re = 200\,000$ . . . . .	127
A.1	Surface de pale et sa normale . . . . .	139

# Liste des symboles

## Caractères romains

$A$	Constante du modèle de longueur de mélange de Nikuradse-Van Driest
$B$	Fonction de facteur de blocage des pales
$c, C, C_1, C_2$	Constantes diverses
$e_p$	Fonction d'épaisseur de la pale
$(e_r, e_\theta, e_z)$	Base du système de coordonnées cylindriques
$F$	Terme de force des pales de l'équation moyenne de Navier-Stokes $F = f s_f$
$f$	Fonction scalaire de la grandeur de la force des pales sur le fluide $(f = f_v + f_\Gamma \delta_\Gamma)$
$f_v$	Composante de volume de $f$
$f_\Gamma$	Composante de surface de $f$
$f_i$	Composante du terme de force massique de l'équation de Navier-Stokes

$f_1$	Fonction de la surface de pression de la pale
$f_2$	Fonction de la surface de succion de la pale
$g$	Tenseur métrique en coordonnées cylindriques
$(i, j, k)$	Base du système de coordonnées cartésiennes
$K$	Fonction de rotation du rotor ( $K = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}$ )
$k$	Énergie cinétique moyenne de turbulence
$L$	Longueur caractéristique
$\ell_m$	Longueur de mélange de Prandtl
$N$	Nombre de pales de la cascade
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal à la paroi ou au volume
$p$	Pression hydrostatique
$R$	Rayon de la conduite
$Re$	Nombre de Reynolds
$R_{ij}$	Tenseur de Reynolds
$r$	Distance mesurée à partir de la paroi dans une conduite
$r, \theta, z$	Composantes du système de coordonnées cylindriques
$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$	Base orthonormale du système de coordonnées cylindriques
$S_p$	Fonction implicite de la surface de pression de la pale
$S_s$	Fonction implicite de la surface de succion de la pale
$S_c$	Fonction implicite de la surface de cambrure de la pale
$S_f$	Fonction implicite de la surface de force des pales

$\mathbf{s}$	Normale unitaire à une paroi de pale
$\mathbf{s}_f$	Normale unitaire à la surface de force des pales
$\mathbf{s}_m$	Normale unitaire à la surface de courant moyenne
$\mathbf{t}_s$	Vecteur-force de traction à la frontière du domaine de calcul
$U$	Vitesse caractéristique
$U_c$	Vitesse caractéristique de l'écoulement au centre du tuyau
$\mathbf{u}$	Champ de vitesse
$u_r, u_\theta, u_z$	Composantes du champ de vitesse en coordonnées cylindriques
$u_{\max}$	Grandeur de la vitesse maximale du profil dans une conduite
$\mathbf{u}_{rel}$	Vitesse relative au repère mobile
$u_x, u_y, u_z$	Composantes du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes
$V$	Volume contenu entre deux pales consécutives
$\mathbf{v}$	Vitesse d'entraînement du rotor ( $\mathbf{v} = \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta$ )

## Caractères grecs

$\beta$	Facteur de pénalisation de la formulation pénalisée des éléments finis
$\Gamma$	Frontière commune des domaines $\Omega_0$ et $\Omega_1$
$\delta$	Épaisseur de la couche limite
$\delta \bar{\mathbf{u}}$	Fonction test de la vitesse moyenne
$\delta \bar{p}$	Fonction test de la pression moyenne
$\delta f_V$	Fonction test de la force de volume

$\delta f_{\Gamma}$	Fonction test de la force de surface
$\partial \cdot$	Frontière du volume ou de la surface
$\epsilon$	Dissipation visqueuse turbulente
$\theta_p$	Fonction de la surface de pression de la pale
$\theta_s$	Fonction de la surface de succion de la pale
$\theta_c$	Fonction de la surface de cambrure de la pale
$\kappa$	Constante de Von Karmann ( $\kappa = 0.41$ )
$\lambda$	Constante de longueur de mélange du modèle de Patankar-Spalding ( $\lambda = 0.09$ )
$\mu$	Viscosité du fluide
$\mu_t$	Viscosité turbulente du fluide
$\mu_e$	Viscosité efficace du fluide ( $\mu_e = \mu + \mu_t$ )
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide ( $\nu = \mu/\rho$ )
$\rho$	Densité du fluide
$\sigma$	Tenseur de contraintes
$\sigma^*$	Tenseur des contraintes moyen sans la partie périodique
$\tau(\mathbf{u})$	Tenseur de cisaillement
$\Omega$	Domaine de résolution
$\Omega_0$	Région de $\Omega$ avec les pales
$\Omega_1$	Région de $\Omega$ sans les pales
$\omega$	Vitesse de rotation angulaire du rotor

## Symboles mathématiques

$\otimes$	Symbole de produit tensoriel
:	Symbole de double contraction
$\nabla$	Symbole nabla, en coordonnées cylindriques: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + r \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$
$\bar{f}$	Valeur moyenne de la fonction $f$ dans le temps ou l'espace
$\hat{f}$	Partie fluctuante dans le temps de la fonction $f$
$\tilde{f}$	Partie périodique dans l'espace de la fonction $f$
$[\cdot]$	Saut de la valeur de la fonction de part et d'autre de la frontière $\Gamma$
$\Delta(\cdot)$	Saut de la fonction dont on prend la dérivée au sens des distributions
$\delta_{ij}$	Delta Kronecker
$\delta_{\Gamma}$	Masse de Dirac sur la frontière $\Gamma$
$div(\cdot)$	Opérateur de divergence
$grad(\cdot)$	Opérateur de gradient

# Introduction

Les pompes, turbines et hélices sont des machines hydrauliques rotatives (ou turbomachines) composées généralement d'un rotor, d'un stator et d'un diffuseur. On désire prédire l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à travers une machine complète avec les moyens techniques disponibles actuellement en termes de capacité et de temps de calcul d'ordinateur. Un bon modèle d'usage général permettra d'aider et d'accélérer le processus de conception et de mise au point de telles machines.

La simulation de l'écoulement dans les machines rotatives nécessite de prendre en considération des phénomènes complexes tels la séparation et la recirculation qui sont dûs aux forts gradients de vitesses axiale, radiale et angulaire dans le passage des pales. Il peut aussi arriver que la pression subisse une brusque baisse localement et tombe en-deça de la pression de vapeur pouvant causer de graves dommages à la machine. On appelle ce phénomène la cavitation.

Pour capter tous les détails de l'écoulement turbulent tridimensionnel dans les diverses parties des turbomachines même les plus gros ordinateurs disponibles actuellement ne sont pas assez puissants. Il faut avoir recours à des stratégies de



simplification des problèmes.

Des méthodes existent pour calculer l'écoulement dans les composantes séparément (voir référence [1]), mais pour modéliser correctement le comportement du fluide dans l'ensemble de la machine il faut tenir compte de l'interactions des composantes. Des chercheurs ont proposé des techniques pour le couplage des différentes parties basées principalement sur les travaux fondamentaux de Wu [2] et du disque actuateur [3] pour les fluides non-visqueux; mais elles ne sont pas assez générales et trop coûteuses.

L'approche adoptée dans ce travail est celle développée par Garon [4] qui fait appel à la notion d'équations du passage moyen. Les équations de conservation sont intégrées sur le volume contenu entre deux pales consécutives. L'effet moyen des pales sur le fluide est remplacé par des forces qui deviennent des inconnues du système.

Ce modèle a servi pour des calculs en régime laminaire et a permis d'obtenir des résultats très satisfaisants pour la pompe de type mixte considérée. L'apport du présent travail a été d'ajouter un modèle de turbulence à la procédure de résolution existante afin de tenir compte de l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen dans la machine entière. On effectue la résolution des équations moyennes du passage avec la méthode des éléments finis utilisant la formulation pénalisée consistante.

L'objectif est de valider le modèle de turbulence qu'on a choisi sur le cas simple d'un canal droit d'abord, puis dans le canal de la pompe. On comparera les résultats obtenus pour le rotor de la pompe avec les mesures expérimentales disponibles.

L'étude des ces valeurs permettra de tirer les conclusions sur la modélisation de l'écoulement turbulent et de faire les recommandations appropriées pour les développements ultérieurs.

On débutera d'abord dans le premier chapitre avec une révision des connaissances actuelles dans les domaines qui nous concerne, soient les modèles de turbulence, la méthode des éléments finis et la modélisation des écoulements dans les turbomachines.

Au chapitre 2 on fera en détails le développement des équations moyennes du passage et on posera les hypothèses sur la physique du problème particulier de la pompe.

Puis on présentera dans le chapitre 3 le modèle de turbulence utilisé et la façon dont on l'a implanté dans l'algorithme de solution générale.

Le chapitre 4 comporte le traitement du terme de force des pales dans les équations moyennes du passage et les grandes lignes de la méthode des éléments finis utilisée.

Enfin au chapitre 5 on présentera les résultats obtenus avec le modèle de turbulence dans les cas-tests et le rotor de la pompe. On fera aussi la comparaison avec les mesures expérimentales.

# Chapitre 1

## Revue bibliographique

Avant d'aborder le sujet principal de ce travail, une brève revue des connaissances actuelles et des recherches précédentes dans les domaines connexes sera présentée. Il sera question des thèmes suivants:

- modèles de turbulence
- méthode des éléments finis
- modélisation des écoulements dans les machines rotatives

### 1.1 Modèles de turbulence

Un écoulement turbulent est caractérisé par un mouvement tridimensionnel, aléatoire et instationnaire. Le phénomène de la turbulence se manifeste en général lorsque le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses est élevé. On caractérise

ce rapport par le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,

$\mu$  la viscosité,

$U$  et  $L$  sont une vitesse et une longueur caractéristique du problème.

Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides turbulents de façon exacte. Des méthodes de résolution existent afin d'obtenir la solution de ces équations pour des écoulements turbulents simples et dont la valeur du nombre de Reynolds est faible [5]. Cependant pour des problèmes plus complexes ou plus généraux, l'espace-mémoire et le temps de calcul nécessaires pour la résolution numérique de tels problèmes dépassent la capacité des ordinateurs actuels. Les méthodes de calcul utilisées sont basées sur la notion de maillage et pour capter les effets de la turbulence, qui se manifeste sur des petits volumes de fluide dont l'ordre de grandeur est environ 1000 fois inférieur à la dimension du domaine, il faudrait considérer  $10^9$  éléments pour des calculs tridimensionnels [6].

Pour palier à ce problème, des modèles de turbulence ont été développés. Les modèles étudiés ici reposent sur l'approche statistique de Osborne Reynolds [6] qui consiste à décomposer les variables en composantes moyenne et fluctuantes. La moyenne se fait sur un intervalle de temps suffisamment court comparé à la fréquence du mouvement turbulent. La forme résultante des équations fait intervenir les valeurs moyennes de l'écoulement turbulent ainsi que des corrélations entre les parties fluctuantes. C'est une façon acceptable d'aborder la situation puisque la majorité des applications de mécanique des fluides ne sont intéressées que par la

comportement moyen de l'écoulement, non par ses détails.

### 1.1.1 Équations de Reynolds pour l'écoulement turbulent moyen

Considérons d'abord les équations de Navier-Stokes en notation indicelle pour les fluides incompressibles:

Conservation de la masse – Continuité

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Conservation du mouvement

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i$$

Pour obtenir les équations du mouvement moyen on sépare les variables de vitesse et de pression en deux parties: la valeur moyenne et la partie fluctuante.

$$u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i \quad \text{et} \quad p = \bar{p} + \hat{p}$$

D'une part,  $\bar{u}_i$  et  $\bar{p}$  sont définis en faisant la moyenne sur une courte période de temps:

$$\bar{u}_i = \int_0^t u_i dt \quad \text{et} \quad \bar{p} = \int_0^t p dt$$

et d'autre part,  $\hat{p}$  et  $\hat{u}_i$  sont les fluctuations de  $p$  et  $u_i$  autour des valeurs moyennes.

En remplaçant dans les équations précédentes, on obtient:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j}) + \rho f_i \quad (1.1)$$

Ces équations du mouvement moyen sont toujours exactes puisqu'aucune approximation n'a été faite pour les dériver. Mais cette forme ne peut être résolue directement car un nouveau terme a fait son apparition:

$$R_{ij} = \overline{\rho \hat{u}_i \hat{u}_j}$$

Ce terme qui fait intervenir les parties fluctuantes des composantes de vitesse est appelé tenseur des contraintes de Reynolds. Sa dérivée par rapport à  $x_i$  représente le transport du moment turbulent.

Le système ne constitue plus un système fermé puisqu'il y a maintenant plus d'inconnues que d'équations. (Les termes inconnus sont les composantes de vitesse moyenne  $\bar{u}_i$ , la pression moyenne  $\bar{p}$  et le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$ ).

Une façon de contourner le problème de fermeture du système d'équations est l'introduction d'un modèle de turbulence qui fournira une relation entre le terme des contraintes de Reynolds et les variables de l'écoulement moyen. Le modèle simulera l'effet de la turbulence sur celui-ci.

### 1.1.2 Généralités sur les modèles de turbulence

Pour la majorité des écoulements d'intérêt pratique comme les jets, les écoulements à surface libre et dans des canaux, les forces turbulentes sont beaucoup plus importantes que les forces laminares [6]. Il est donc important d'avoir un bon modèle pour le tenseur de Reynolds dans les équations du flot moyen. C'est le rôle des modèles de turbulence de relier le tenseur de Reynolds et les variables de l'écoulement moyen.

Un concept très important sur lequel est basée toute une famille de modèles de turbulence est la notion de viscosité par petits tourbillons ou viscosité efficace ou encore "eddy viscosity". Cette viscosité turbulente est une interprétation de l'effet du tenseur de Reynolds sur l'écoulement turbulent. L'hypothèse de Bousinesq fournit une expression reliant le tenseur de Reynolds aux variations des composantes de vitesse de l'écoulement moyen:

$$-\rho(\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}) = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k$$

où  $\mu_t$  est la viscosité turbulente

$k$  est l'énergie cinétique de turbulence moyenne,  $k = \frac{1}{2} \overline{\hat{u}_i^2}$

En substituant dans (1.1) et en délaissant la notation de vitesse et pression moyennes (ie.  $\bar{u}_i \equiv u_i$  et  $\bar{p} \equiv p$ ) on obtient:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i$$

où le terme d'énergie cinétique est absorbé dans le terme de pression.

Lorsque cette forme d'équations est adoptée le problème devient la détermination de la viscosité turbulente  $\mu_t$  par un modèle de turbulence. D'autres modèles proposent de trouver directement des valeurs pour le tenseur de Reynolds plutôt que de substituer à ce terme une relation introduisant une nouvelle inconnue.

Les modèles de turbulence peuvent donc être classés selon deux catégories:

1. Les modèles de viscosité turbulente qui se basent sur l'hypothèse de Boussinesq. Dans ceux-ci, la viscosité turbulente  $\mu_t$  est donnée par le modèle à chaque point du maillage et peut varier grandement d'un point à un autre du domaine. Les observations expérimentales confirment que ce type de modèle est valide pour plusieurs types d'écoulements [7].
2. Les modèles aux tensions de Reynolds qui n'utilisent pas l'hypothèse de Boussinesq. Ils font tout de même appel à des hypothèses et des approximations sur l'écoulement moyen afin d'exprimer le tenseur de Reynolds par des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Cette approche est très générale car il n'y a pas de suppositions sur le terme des tensions de Reynolds lui-même, seulement sur l'écoulement moyen, et ce terme demeure l'inconnu dans les équations. Ces modèles font l'objet de plusieurs recherches dont celles mentionnées dans la référence [8].

Dans les sections suivantes un aperçu des différents modèles de viscosité turbulente sera donné. Les modèles sont classés selon le nombre d'équations supplémentaires qu'ils font intervenir et qu'il faut résoudre avec les équations de l'écoulement moyen.



### 1.1.3 Modèles à 0 équation

Les modèles à 0 équation sont souvent appelés modèles de viscosité turbulente algébrique ou modèles de longueur de mélange.

La viscosité turbulente est déterminée soit à partir de valeurs expérimentales, soit par essais et erreurs ou encore par une expression en fonction de la distribution de la vitesse moyenne .

La plupart des modèles à 0 équation se présentent sous la forme appelée hypothèse de longueur de mélange de Prandtl:

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\delta u}{\delta y} \right|$$

où  $\ell_m$  est la longueur de mélange

$u$  est la vitesse de l'écoulement

et  $y$  est la direction transversale.

La distribution de la longueur de mélange dans l'écoulement moyen est donnée par des relations empiriques.

Prandtl a énoncé son hypothèse en 1925 en se basant sur une analogie avec la théorie cinétique des gaz: Considérons un petit paquet de fluide en position  $y_1$  se déplaçant à une vitesse moyenne  $v_1$  au temps  $t_1$  qui est entraîné transversalement à la direction de l'écoulement sous l'effet de la turbulence. Il se trouve maintenant au temps  $t_2$  à la position  $y_2$  et il possède une vitesse moyenne  $v_2$ , il a subi une variation de vitesse  $\Delta V = v_2 - v_1$ . La longueur de mélange est définie comme la distance transversale  $y_2 - y_1$  pour laquelle  $\Delta V$  est égale à la variation moyenne

des parties fluctuantes de la vitesse [6]. La figure 1.1 illustre ce concept.

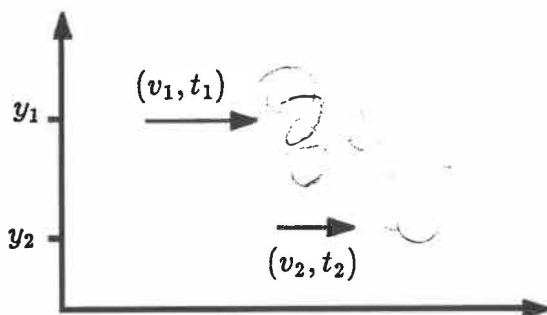


Figure 1.1: Hypothèse de longueur de mélange de Prandtl

Ces méthodes ont été utilisées pour des cas simples tels que les écoulements avec couche de cisaillement mince et couche limite. Elles présentent l'avantage d'être très faciles et peu coûteuses à implanter. Comme il n'y a pas d'équation différentielle supplémentaire, la même procédure de résolution que pour les écoulements laminaires peut être employée.

Il y a cependant quelques inconvénients:

1. Le manque d'universalité des données empiriques; différentes valeurs de longueur de mélange doivent être prises pour les divers types d'écoulement. Un seul modèle ne peut donc pas traiter plusieurs écoulements.
2. Ces modèles supposent que la turbulence est en équilibre local: elle est dissipée là où elle est générée, il n'y a pas de transport de la turbulence.

Il faut noter finalement que ces modèles à 0 équation ne conviennent pas lorsque

les termes de transport de turbulence sont importants, par exemple, dans les écoulements à développement rapide ou avec recirculation. En résumé, ils ne sont pas utiles pour des écoulements complexes à cause de la difficulté à déterminer  $\ell_m$  [6].

### 1.1.4 Modèles à 1 et $1\frac{1}{2}$ équation

Pour contourner les limites des modèles précédents, une autre catégorie a été développée qui tient compte du transport des termes turbulents.

Kolmogoroff et Prandtl ont proposé une expression pour la viscosité turbulente qui prend comme mesure du mouvement turbulent la racine carrée de l'énergie cinétique de l'écoulement:

$$\mu_t = C \rho L \sqrt{k}$$

où  $C$  est une constante

$L$  est une longueur caractéristique

$k$  est l'énergie cinétique turbulente moyenne

La répartition de l'énergie cinétique turbulente peut être déterminée en résolvant une équation différentielle de transport de  $k$ . Cette équation est dérivée des équations de Navier-Stokes, qui après quelques approximations prennent la forme:

$$\rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$$

où  $\sigma_k$  et  $C_D$  sont des constantes et le dernier terme est proportionnel à la dissipation visqueuse ( $\varepsilon$ ).

Cette équation est couplée et résolue simultanément avec les équations de continuité et de conservation du mouvement.

L'utilisation d'un modèle à une équation permet à l'énergie cinétique de dépendre des comportements antérieurs de l'écoulement, c'est-à-dire de son "histoire". Cela crée une forme de turbulence dans le système. Malgré tout, les performances de tels modèles ont été quelque peu décevantes jusqu'à présent. La raison peut être que pour la plupart des écoulements, une amélioration de la longueur caractéristique  $L$  a plus d'effet que l'utilisation de  $\sqrt{k}$  comme mesure de la turbulence [5].

Les modèles à  $1\frac{1}{2}$  équation font intervenir une équation différentielle ordinaire dans le calcul de la longueur caractéristique  $L$  pour la viscosité turbulente et dans l'équation du transport de l'énergie cinétique. Le paramètre  $L$  devient alors dépendant de l'histoire en amont de l'écoulement.

Ces modèles ont été utilisés avec succès pour les cas suivants:

1. Écoulement avec séparation [9]
2. Écoulement dans une conduite annulaire avec transfert de chaleur [10]
3. Jets plans et circulaires [11]

### 1.1.5 Modèles à 2 équations

Cette classe de modèles est une des plus employée pour les calculs. La longueur  $L$  qui caractérise la grosseur des tourbillons peut subir un transport de

la même manière que l'énergie cinétique tel que vu dans les modèles à 1 et  $1\frac{1}{2}$  équation. Une expression pour le transport de la longueur caractéristique peut être développée de façon similaire à celle de  $k$  afin d'obtenir la distribution de  $L$ . L'équation sera incorporée au système d'équations aux dérivées partielles pour former un modèle dit à deux équations. La plupart de ces modèles font aussi appel au concept de viscosité turbulente de Kolmogoroff-Prandtl.

La principale difficulté consiste à trouver une relation qui décrive le transport de la longueur d'échelle de façon générale et qui soit facile à interpréter physiquement. En utilisant un paramètre de la forme

$$Z = k^m L^n$$

qui relie l'énergie cinétique et la longueur caractéristique. Il est possible de donner un sens physique à l'expression et de trouver une équation de transport qui contienne  $L$  et  $k$ . L'énergie cinétique n'est plus considérée comme une inconnue car on résout aussi l'équation de transport pour  $k$ .

Un choix très répandu fait intervenir la quantité

$$\varepsilon = c \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$$

qui est proportionnelle à la dissipation visqueuse. Les modèles qui utilisent cette relation sont appelés modèles  $k - \varepsilon$ . L'équation de transport de  $\varepsilon$  se lit comme suit:

$$\rho u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \mu_t \rho \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

où  $\sigma_\varepsilon, C_1, C_2$  sont des constantes dépendantes du type de l'écoulement.

D'autres modèles utilisent la vorticité et la fréquence caractéristique du mouvement turbulent pour décrire la turbulence tel le modèle  $q - f$  discuté dans les références [7] et [12]. Ce dernier modèle n'a cependant pas fait l'objet d'une validation mathématique complète.

Des applications des modèles à 2 équations sont présentées dans les références [6], [13] à [18] et les différences et similitudes sont détaillées dans [19] et [20].

Il faut noter que ces modèles sont parvenus à un haut niveau de complexité pour tenir compte des divers phénomènes des écoulements. Il demeure que ce sont des modèles de viscosité turbulente et pour les cas où l'hypothèse de Boussinesq ne s'applique pas, les modèles ne sont pas valables.

Une dernière remarque enfin pour souligner qu'un modèle de turbulence très général n'est pas nécessairement idéal pour tous les types d'écoulements, il faut prendre en considération le niveau de complexité et la facilité d'application pour chaque problème [6].

## 1.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique de résolution des problèmes d'équations différentielles avec conditions aux frontières. Tout comme les méthodes de différences finies et de volumes finis, elle s'applique sur une représentation discrète de la géométrie du problème appelée maillage. Le maillage est une division du domaine en un nombre fini d'éléments, ceux-ci sont généralement de forme triangulaire ou quadrilatérale. Une approximation de la solution est calculée sur

chaque élément.

La méthode des éléments finis s'appuie sur le concept de formulation variationnelle développé dans les méthodes des résidus pondérés de Ritz-Galerkin. Les fondements mathématiques sur lesquels sont basés ces techniques en font des méthodes très robustes, pouvant se soumettre à l'analyse théorique. Il est possible de définir des espaces de solution, des conditions de convergence et des critères d'existence et d'unicité des solutions (voir référence [21]). Les différentes formulations possibles pour la méthode des éléments finis seront présentées un peu plus loin.

Néanmoins, les applications existantes utilisant la méthode des éléments finis (MEF) démontrent qu'elle est plus générale; elle peut traiter une plus grande variété de problèmes physiques et mathématiques, des géométries plus complexes et plusieurs types de conditions aux frontières. Par contre, la mise en oeuvre informatique est plus lourde et plus complexe.

### **1.2.1 Formulation pénalisée de la MEF**

La formulation pénalisée fournit un moyen d'incorporer l'équation de la continuité sous forme de contrainte de façon approximative. La solution au problème est atteinte dans la mesure où le facteur de pénalisation tend vers de très grandes valeurs.

L'avantage de cette formulation est de diminuer le nombre d'inconnues dans la résolution du problème. La pression n'apparaît plus dans la forme faible des

équations, elle est remplacée par la contrainte pénalisée. La valeur de la variable ainsi incorporée est ensuite récupérée grâce à l'expression de la contrainte qui prend la forme suivante:

$$p = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

où  $\beta$  est le facteur de pénalisation.

L'erreur causée par l'approximation de la pression est directement proportionnelle à la grandeur du facteur de pénalisation utilisé.

Les méthodes employant la formulation pénalisée sont donc plus faciles à implanter et sont plus efficaces que celles utilisant la formulation mixte (en vitesse – pression). Plusieurs travaux se basant sur cette formulation ont produit des résultats très satisfaisants. Différents types d'écoulements ont été étudiés dans les références mentionnées: écoulement stationnaire à grand nombre de Reynolds [22], convection naturelle dans une cavité [23], écoulement instationnaire [24]. Les références [25] et [26] présentent une revue des applications de cette méthode pour les problèmes transitoires et les écoulements stationnaires.

Une étude des propriétés mathématiques de la formulation pénalisée pour la solution des équations de Navier-Stokes est faite par Reddy dans la référence [27]. Des applications de son modèle aux problèmes bidimensionnels avec convection naturelle à nombre de Reynolds moyen et une généralisation aux cas tridimensionnels peuvent être trouvées dans les références [28] et [29].



### 1.2.2 MEF pour les écoulements laminaires

La méthode des éléments finis est appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes en régime laminaire depuis une quinzaine d'années. Les résultats obtenus sont satisfaisants mais les problèmes considérés ne sont pas d'un grand intérêt pratique en général.

Une formulation pour la résolution des équations de Navier-Stokes à partir des variables primitives, c'est-à-dire la vitesse et la pression, a été jugée plus efficace pour les calculs qu'une formulation en fonction de courant et vorticité à cause de la difficulté à spécifier les conditions limites sur la vorticité. Plusieurs travaux ont obtenu des solutions conformes aux données expérimentales en utilisant la formulation en vitesse - pression avec la forme pénalisée de la MEF. Les écoulements ont été correctement prédits pour des problèmes avec transfert de chaleur par convection naturelle et forcée [30] et des problèmes instationnaires [31],[32]. Une revue des connaissances actuelles dans ce domaine est faite dans la référence [33].

### 1.2.3 MEF pour les écoulements turbulents

La modélisation par éléments finis des écoulements turbulents est un champ d'études plus récent et plusieurs chercheurs s'y consacrent présentement. Des méthodes de résolution des équations de la couche limite utilisant les modèles de turbulence de longueur de mélange de Prandtl sont présentées dans la référence [34]. À cause de sa simplicité ce modèle est souvent employé pour une première phase de développement de programme d'éléments finis pour la simulation d'écoulements turbulents.

Les modèles à 2 équations ont servis pour quelques cas simples mais sans donner des résultats convaincants. Une application du modèle  $k - \epsilon$  pour la prédiction d'écoulement turbulent dans une conduite avec expansion rapide est présentée dans la référence [35]. La solution obtenue avec le modèle  $q - f$  pour le même problème se trouve dans les références [7] et [12]. La comparaison avec les valeurs expérimentales démontrent que ces modèles sont très sensibles aux conditions limites imposées sur les problèmes; il est nécessaire d'ajuster les paramètres des équations de ces modèles pour chaque type d'écoulement traité.

D'autres inconvénients sont aussi rencontrés lors de la résolution de problèmes avec ces modèles de turbulence si, par exemple, une méthode d'éléments finis est employée:

1. Les deux équations différentielles supplémentaires augmentent la taille du système à résoudre et par le fait même la quantité de travail à effectuer.
2. Les conditions initiales et les conditions limites pour les variables de turbulence  $k$  et  $L$  sont difficiles à déterminer. Les données expérimentales pour ces valeurs ne sont pas toujours disponibles.
3. Des problèmes de convergence et de stabilité de la méthode surviennent.

Plus d'espoirs sont fondés sur des méthodes faisant usage des modèles algébriques.

## 1.3 Modélisation des écoulements dans les machines rotatives

Les machines rotatives comprennent les turbines, les pompes, les compresseurs et les hélices. Leur fonction est de transférer l'énergie cinétique du fluide en énergie potentielle de l'écoulement sous une autre forme (mécanique, électrique) ou vice versa. Elles sont de type axiale, radiale ou mixte selon que l'écoulement du fluide se fasse principalement dans la direction de l'axe de rotation, du rayon de la machine ou des deux composantes.

La plupart de ces machines sont composées d'une entrée qui dirige le fluide, d'un rotor, partie mobile qui donne ou reçoit l'énergie cinétique, d'un stator, partie fixe dont le rôle est d'augmenter l'énergie potentielle et finalement du diffuseur pour évacuer le fluide vers l'extérieur.

Des calculs ont été effectués dans chacune de ces composantes séparément afin de modéliser l'écoulement en tenant compte de la géométrie et du mouvement des pales [1]. L'utilisation d'une grille de calcul en rotation avec le rotor a donc été nécessaire pour capter l'effet de celui-ci sur le fluide tandis qu'un repère fixe suffit pour la simulation de l'écoulement dans le stator et les sections sans pales.

Le problème survient lorsqu'on veut considérer l'interaction de toutes ces parties pour connaître le comportement du fluide dans la machine complète. Des solutions ont été proposées pour contourner cet inconvénient et effectuer le couplage des composantes mobiles avec les parties fixes. Adamczyk [36] a développé une méthode de calcul avec des grilles de calcul superposées, chacune couvrant

tout le domaine, pour des machines à écoulement axial. Des résultats satisfaisants ont été obtenus pour des écoulements compressibles d'Euler dans des turbines à gaz avec jusqu'à huit rangées de pales tournant en sens opposé une de l'autre ([37] et [38]). Les désavantages de cette méthode sont qu'elle nécessite beaucoup de calculs car il faut une grille de calcul par ensemble de pales et qu'elle ne s'applique pas à d'autre type de machine.

La solution suggérée par D. Pelletier et A. Garon ([39] et [40]) emploie une seule grille de calcul dans un repère fixe pour la machine entière. Le couplage des composantes se fait par les équations moyennes du passage de Navier-Stokes dans lesquelles l'effet des pales est remplacé par des forces dans la direction angulaire. Ces forces sont des inconnues du problème, pas des valeurs expérimentales présentées comme données ([41] et [5]). Cette approche est basée sur la théorie de Wu [2] et du disque actuateur ([3] et [42]).

Nous présenterons dans le prochain chapitre le développement des équations moyennes du passage de Navier-Stokes ainsi que le modèle de fermeture adopté pour tenir compte de l'effet des pales sur le fluide.

# Chapitre 2

## Équations moyennes du passage

L'écoulement d'un fluide dans une machine rotative est tridimensionnel, turbulent, et instationnaire. Le but de ce travail est de prédire de la façon la plus précise possible l'écoulement au travers du canal d'une telle machine en tenant compte de ses composantes et de leurs interactions. On aura recours à une procédure de solution numérique des équations décrivant l'écoulement du fluide à travers le canal de la machine.

Le canal de la pompe désigne toute la région interne où le fluide circule. Le passage est le volume contenu entre deux pales d'un rotor ou d'un stator. On développera une forme de ces équations qui tienne compte des particularités des machines rotatives comme les pales en mouvement du rotor ou les pales fixes du stator. Cette forme devra être assez simple à implanter dans le cadre d'un programme de résolution général.

## 2.1 Modélisation de l'écoulement

Tout comme la turbulence, l'écoulement tridimensionnel dans une pompe est trop complexe pour être traité intégralement avec les moyens techniques disponibles actuellement sans approximations. Il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur les phénomènes physiques en présence desquels nous nous trouvons :

- Les forces visqueuses sont importantes et l'écoulement est en régime permanent; la résolution des équations de Navier-Stokes pour les fluides visqueux, incompressibles et stationnaires est donc requise.
- L'écoulement tridimensionnel est périodique d'une paire de pales à une autre pour un ensemble de pales.
- Le flot entrant est axisymétrique près du bord d'attaque des pales. Ceci n'est vrai qu'à grand nombre de Reynolds.
- L'écoulement redevient rapidement axisymétrique après le passage des pales, ce qui permet de traiter des flots en cascades mais néglige les effets de traînée.

Dans ce cadre restrictif il est acceptable de considérer l'écoulement moyen dans le canal de la pompe comme étant axisymétrique. Les équations moyennes régissant le fluide dans le canal sont développées en effectuant la moyenne entre deux pales dans la direction périphérique d'un système de coordonnées cylindriques. Les calculs présentés dans ce chapitre reprennent en détail les développements effectués par André Garon et dont on retrouve les résultats dans la référence [43].

Notons que les équations sont valides pour tous les types de machines rotatives à symétrie de révolution (pompes axiales et radiales, turbines, hélices, etc.) dont le mouvement peut être représenté dans le système de coordonnées cylindriques.

## 2.2 Présentation de la pompe

Les équations moyennes sont appliquées au cas particulier de la pompe mixte qui a été étudiée au National Engineering Laboratory et dont la description géométrique se trouve dans [44].

La figure (2.1) est une représentation tridimensionnelle du moyeu de la pompe, deux composantes se distinguent: le rotor à l'avant constitué de cinq pales sur la partie mobile et le stator à l'arrière avec les neuf pales fixes.

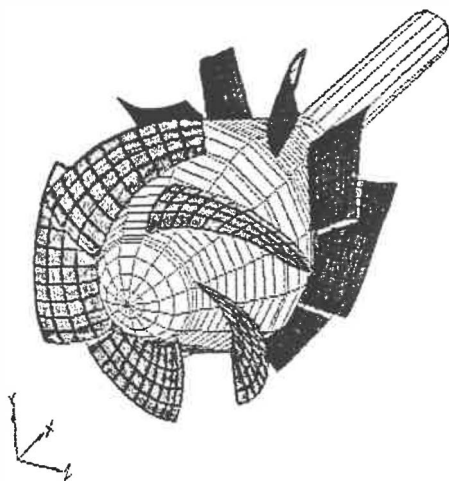


Figure 2.1: Moyeu 3-D de la pompe

La figure (2.2) représente une coupe axiale de la pompe, les pales du rotor et du stator sont projetées dans le plan méridional et le canal entier est donné avec le carter [44].

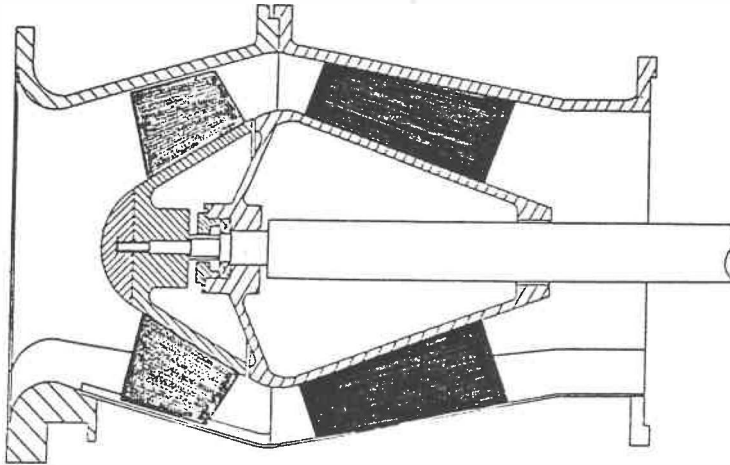


Figure 2.2: Coupe axiale de la pompe

L'écoulement moyen axisymétrique sera calculé sur la portion du canal comprise entre l'entrée et le diffuseur. La projection dans le plan méridional de la partie supérieure à l'axe est représentée dans la figure (2.3) [44].



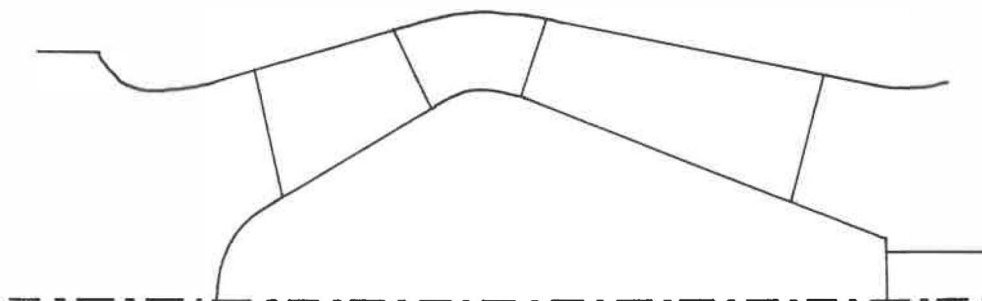


Figure 2.3: Domaine de calcul de la pompe

## 2.3 Résultats préliminaires

Avant de procéder au développement des équations moyennes du passage, quelques résultats mathématiques utiles seront énoncés afin de simplifier les manipulations.

L'opération de moyenne sur les équations consiste à intégrer les équations qui décrivent le mouvement tridimensionnel en coordonnées cylindriques sur un intervalle de la composante angulaire correspondant à l'ouverture entre deux pales. La forme axisymétrique obtenue ne tient plus compte des variations angulaires de l'écoulement.

On a donc besoin de définir la notion de moyenne dans le plan méridional d'une fonction scalaire définie en coordonnées cylindriques. On aura aussi recours au théorème de la divergence pour faire la moyenne des équations, ce qui nous ramènera à faire l'intégrale sur la surface du volume contenu entre les pales. Cette

surface étant composée de surfaces de révolution générées par le bord des pales, l'intégrale d'une fonction sur de telles surfaces sera aussi définie.

### 2.3.1 Moyenne dans le plan méridional d'une fonction en coordonnées cylindriques

Soient  $f$  une fonction de trois variables en coordonnées cylindriques et  $V$  son domaine de définition:

$$f = f(r, \theta, z) \quad \text{dans } V$$

La fonction peut être décomposée en une partie moyenne angulaire et une partie périodique:

$$f = \bar{f} + \tilde{f}$$

La partie périodique de la fonction ( $\tilde{f}$ ) regroupe les variations de la fonction autour de la valeur moyenne.

La moyenne selon  $\theta$  de  $f$  est définie par:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta, z) d\theta$$

où  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

On peut aussi écrire:

$$\Delta\theta \bar{f} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta, z) d\theta \quad (2.1)$$

La forme axisymétrique de la fonction dépend des valeurs moyennes des compo-

santes et s'applique dans la projection  $\Omega$  du volume  $V$  dans le plan méridional:

$$\bar{f} = \bar{f}(r, z) \quad \text{dans } \Omega$$

On fait l'intégrale sur le volume  $V$  en utilisant la définition de la moyenne angulaire de  $f$  (équation (2.1)).

$$\iiint_V f \, d\theta \, dr \, dz = \int \int_{\Omega} \Delta\theta \bar{f} \, dr \, dz$$

ou encore:

$$\boxed{\int_V f \, dV = \int_{\Omega} \Delta\theta \bar{f} \, d\Omega} \quad (2.2)$$

On peut alors affirmer que la moyenne d'une fonction scalaire  $f$  définie en coordonnées cylindriques sur le volume  $V$  est  $\Delta\theta \bar{f}$  dans le plan méridional  $\Omega$ .

### 2.3.2 Intégrale sur une surface de révolution

Soient une surface de révolution  $R$  et  $\partial\Omega$  la génératrice de cette surface telles que représentées à la figure (2.4): ( $\partial\Omega$  est la frontière de  $\Omega$ , projection du volume  $V$  dans le plan méridional).

Une unité de surface  $dR$  s'exprime comme:

$$dR = d\theta \, d\Gamma$$

où  $d\Gamma$  est une portion de la génératrice  $\partial\Omega$ .

L'intégrale sur une surface de révolution d'une fonction scalaire  $f$  prend la

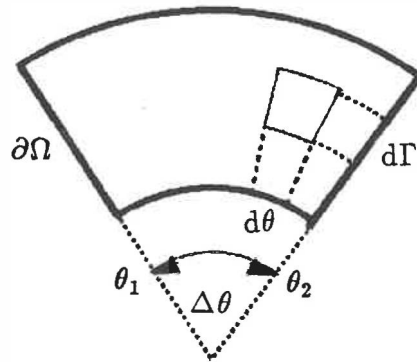


Figure 2.4: Surface de révolution et sa génératrice

forme:

$$\int_R f(r, \theta, z) dR = \int_{\partial\Omega} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta, z) d\theta \right) d\Gamma$$

En introduisant la valeur moyenne angulaire de  $f$  de l'équation (2.1):

$$\boxed{\int_R f(r, \theta, z) dR = \int_{\partial\Omega} \Delta\theta \bar{f} d\Gamma} \quad (2.3)$$

## 2.4 Équation moyenne de la continuité

Pour les fluides visqueux incompressibles, l'équation de la continuité est

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.4)$$

où les composantes de la fonction vectorielle  $\mathbf{u}$  en coordonnées cylindriques sont:

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$$

et chaque composante est une fonction des variables  $(r, \theta, z)$ :

$$u_r = f(r, \theta, z)$$

$$u_\theta = g(r, \theta, z)$$

$$u_z = h(r, \theta, z)$$

La forme moyenne de l'équation de la continuité est obtenue en faisant l'intégrale sur le volume contenu entre deux pales voisines. On utilise le théorème de la divergence pour intégrer la fonction  $\text{div}(\mathbf{u})$  sur le volume  $V$ .

Soit  $V$  le volume compris entre deux pales voisines tel que décrit à la figure (2.5).

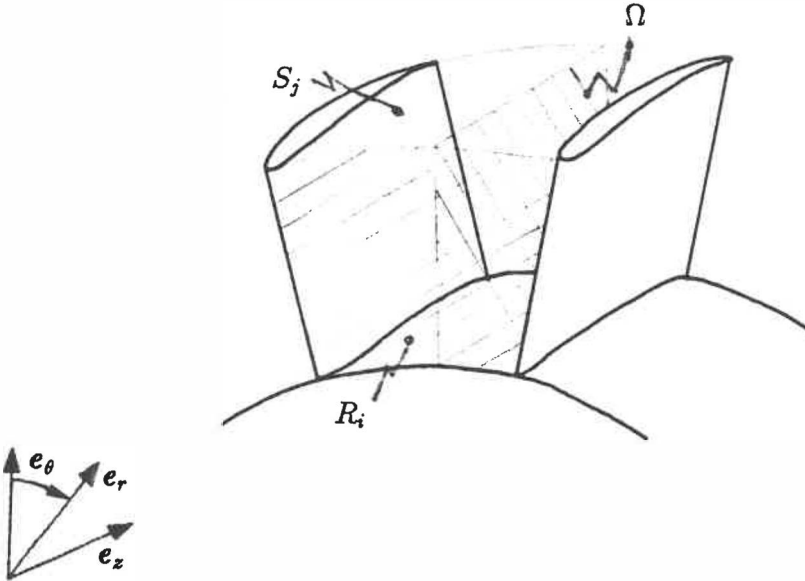


Figure 2.5: Frontières du volume entre les pales

La frontière  $\partial V$  peut alors s'exprimer comme

$$\partial V = \sum_{i=1}^4 R_i + \sum_{j=1}^2 S_j$$

où  $R_i$  sont les surfaces de révolution générées par le bord des pales

et  $S_j$  sont les surfaces des pales intérieures au volume

L'intégrale de la divergence peut alors s'écrire comme:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{u}) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{R_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i dR_i + \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_j dS_j$$

Le dernier terme s'annule car  $\mathbf{u} \equiv 0$  sur les parois des pales ( $S_j$ ) (condition d'adhérence). On fait l'intégrale sur les surfaces  $R_i$  en appliquant le résultat de la section (2.3.2), on obtient alors:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{u}) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} \Delta\theta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma_i$$

car la normale d'une surface de révolution ( $\mathbf{n}$ ) ne dépend pas de  $\theta$  (voir annexe A).

L'utilisation du théorème de la divergence pour une fonction sur  $\partial\Omega$  donne:

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} \Delta\theta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma_i = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega$$

où les composantes de  $\bar{\mathbf{u}}$  sont maintenant:

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z)$$

$$\text{avec } \bar{u}_r = \bar{f}(r, z)$$

$$\bar{u}_\theta = \bar{g}(r, z)$$

$$\bar{u}_z = \bar{h}(r, z)$$

L'équation moyenne de la continuité s'énonce alors comme:

$$\boxed{\operatorname{div}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega} \quad (2.5)$$

ou explicitement:

$$\text{div}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(\Delta\theta r \bar{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\Delta\theta \bar{u}_z) \right] = 0$$

Nous allons maintenant exprimer la fonction  $\Delta\theta$  sous une forme plus facile à manipuler.

### 2.4.1 Facteur de blocage

La valeur  $\Delta\theta$  est une fonction scalaire qui dépend de la variation de l'épaisseur des pales.

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= f_2(r, z) - f_1(r, z) \\ &= \theta_s - \theta_p \end{aligned}$$

où  $\theta_s$  est la fonction qui décrit la surface de succion de la pale ( $S_2$ ), aussi appelée extrados.

et  $\theta_p$  est la fonction qui décrit la surface de pression de la pale ( $S_1$ ), ou intrados.

On définit le facteur de blocage  $B$  de la façon suivante:

$$B = \frac{\Delta\theta}{2\pi/N} = \frac{\Delta\theta N}{2\pi}$$

où  $N$  est le nombre de pales.

La figure (2.6) présente les surfaces des pales et le facteur de blocage sur un passage développé.

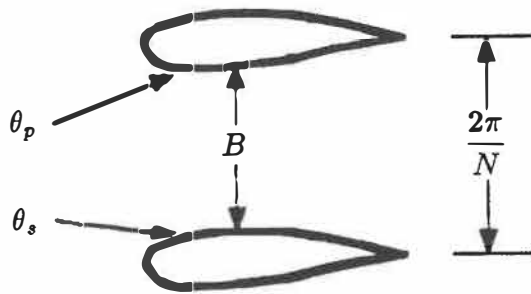


Figure 2.6: Surfaces des pales et facteur de blocage

Le facteur de blocage est une normalisation de la distance angulaire entre les surfaces de deux pales voisines par rapport à l'espace maximal possible. Par définition on a que  $0 < B \leq 1$  et  $B$  tend vers 1 si les pales sont minces. De plus, par prolongement,  $B = 1$  à l'extérieur de la région des pales.

Si on exprime  $\Delta\theta$  en fonction de  $B$  on a:

$$\Delta\theta = \frac{B 2\pi}{N} \quad (2.6)$$

On peut alors utiliser cette expression avec le facteur de blocage au lieu de la fonction  $\Delta\theta$  dans les équations moyennes.



## 2.4.2 Équation moyenne de la continuité en fonction du facteur de blocage

On remplace  $\Delta\theta$  par sa valeur en fonction de  $B$  (équation (2.6)) dans l'équation de la continuité moyenne (2.5):

$$\operatorname{div} \left( B \frac{2\pi}{N} \bar{\mathbf{u}} \right) = 0$$

Étant donné que  $\frac{2\pi}{N}$  est une constante, l'équation de la continuité en fonction du facteur de blocage devient simplement:

$$\boxed{\operatorname{div}(B \bar{\mathbf{u}}) = 0} \quad (2.7)$$

Il faut noter qu'à l'extérieur des pales, lorsque  $B = 1$ , on retrouve l'expression classique de la continuité (équation (2.4)).

Le facteur de blocage permet de tenir compte de l'effet des pales sur l'écoulement. Par exemple, considérons un écoulement uniforme dans un canal avec une vitesse moyenne initiale de grandeur unitaire ( $|\mathbf{u}| = 1$ ) tel que représenté dans la figure (2.7):

Dans la seconde partie, la section d'écoulement est réduite; supposons que  $B = 0.6$ , alors pour conserver le débit comme le dicte l'équation de la continuité, la vitesse moyenne dans la section étroite sera  $|\mathbf{u}| = 1.667$ .

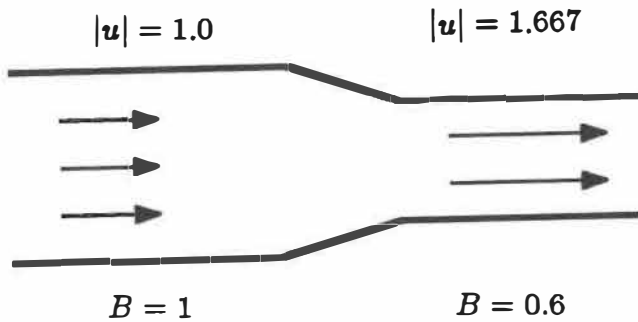


Figure 2.7: Effet du facteur de blocage

## 2.5 Moyenne de l'équation du mouvement

L'équation de conservation du mouvement pour les fluides visqueux incompressibles à l'état stationnaire est:

$$\rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{dans } V$$

où  $\rho$  est la densité du fluide

$\mathbf{u}$  est le champ de vitesse du fluide

et  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$$

avec  $\mathbf{g}$  le tenseur métrique en coordonnées cylindriques  
(voir annexe A)

$\mu$  la viscosité du fluide

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$  le tenseur de cisaillement de la forme:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u})$$

Les manipulations nécessaires pour obtenir la forme moyenne de l'équation du mouvement sont présentées dans les prochaines sections.

### 2.5.1 Forme primaire de la moyenne de l'équation du mouvement

La moyenne de l'équation de conservation du mouvement dans le passage des pales s'obtient aussi en faisant l'intégrale sur le volume contenu entre deux pales voisines.

Afin de simplifier les opérations d'intégration de chaque terme sur le volume, on effectue la projection du vecteur de vitesse  $\mathbf{u}$  et du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  sur un vecteur  $\boldsymbol{\ell}$  (invariant en direction et en longueur). On adopte la notation suivante:

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell} = u_\ell \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\sigma}_\ell$$

L'équation du mouvement (2.5) prend alors la forme:

$$\rho \operatorname{div}(u_\ell \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\ell)$$

Grâce à cet artifice on n'obtient que de fonctions scalaires, on évite ainsi l'intégration de la divergence de tenseurs d'ordre 2. On calculera la moyenne de chaque terme séparément, le membre de gauche est identifié comme le terme de transport et le membre de droite comme le terme de diffusion.

## Le terme de transport

On utilise le théorème de la divergence pour obtenir la forme:

$$\int_V \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{R_i} \rho \mathbf{u}_\ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i dR_i + \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} \rho \mathbf{u}_\ell \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_j dS_j$$

La condition d'adhérence s'applique toujours sur les parois  $S_j$  et le dernier terme s'annule. En effectuant la moyenne sur les surfaces de révolution  $R_i$  on obtient: (voir équation (2.3))

$$\int_V \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} \rho \Delta\theta \overline{\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma_i$$

On applique maintenant le théorème de la divergence sur la frontière de la surface  $\Omega$

$$\int_V \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}) dV = \int_\Omega \rho \operatorname{div}(\Delta\theta \overline{\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}}) d\Omega$$

On a donc une forme du terme de transport moyen dans le plan méridional  $\Omega$ . Il comporte cependant la moyenne du produit des vitesses que nous ne pouvons pas évaluer. Nous allons simplifier ce terme en séparant les facteurs (voir annexe A):

$$\rho \operatorname{div}(\Delta\theta \overline{\mathbf{u}_\ell \mathbf{u}}) = \rho \operatorname{div}(\Delta\theta \overline{\mathbf{u}_\ell} \overline{\mathbf{u}}) + \rho \operatorname{div}(\Delta\theta \tilde{\mathbf{u}}_\ell \tilde{\mathbf{u}}) \quad (2.8)$$

où l'indice  $\sim$  indique les parties périodiques de  $\mathbf{u}_\ell$  et  $\mathbf{u}$ .

On utilise maintenant un résultat sur la divergence d'un produit de fonction vectorielle par une fonction scalaire pour le premier terme du membre de droite (voir annexe A) :

$$\rho \operatorname{div}(\Delta\theta \overline{\mathbf{u}_\ell} \overline{\mathbf{u}}) = \rho \overline{\mathbf{u}_\ell} \operatorname{div}(\Delta\theta \overline{\mathbf{u}}) + \rho \Delta\theta \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}(\overline{\mathbf{u}_\ell})$$

En vertu de l'équation moyenne de la continuité (équation (2.5)), le premier terme du membre de droite est nul et l'équation(2.8) devient:

$$\rho \operatorname{div}(\Delta \theta \overline{u_\ell} \overline{u}) = \rho \Delta \theta \overline{u} \cdot \operatorname{grad}(\overline{u_\ell}) + \rho \operatorname{div}(\Delta \theta \overline{u_\ell} \overline{u}) \quad (2.9)$$

### Le terme de diffusion

Le théorème de la divergence pour intégrer le terme de diffusion donne:

$$\int_V \operatorname{div}(\sigma_\ell) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{R_i} \sigma_\ell \cdot \mathbf{n}_i dR_i + \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} \sigma_\ell \cdot \mathbf{n}_j dS_j$$

Cette fois le dernier terme ne s'annule pas car le tenseur des contraintes n'est pas nul à la paroi. Cependant l'intégrale sur les surfaces des pales  $S_j$  de la fonction  $\sigma_\ell$  peut se ramener à une forme équivalente sur la projection  $\Omega$  de ces surfaces en employant:

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \operatorname{grad}(S) d\Omega$$

Il faut alors prendre la restriction de  $\sigma_\ell$  à la surface  $S_j$ .

L'utilisation de ce résultat conjointement avec l'équation (2.3) permet d'écrire:

$$\int_V \operatorname{div}(\sigma_\ell) dV = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} \Delta \theta \overline{\sigma_\ell} \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma + \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \sigma_\ell|_{S_j} \cdot \operatorname{grad}(S_j) d\Omega$$

Puis en employant le théorème de la divergence pour la fonction sur  $\partial\Omega$  on obtient:

$$\int_V \operatorname{div}(\sigma_\ell) dV = \int_\Omega \operatorname{div}(\Delta \theta \overline{\sigma_\ell}) d\Omega + \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \sigma_\ell|_{S_j} \cdot \operatorname{grad}(S_j) d\Omega \quad (2.10)$$

Ces résultats sont valides pour tout vecteur  $\ell$ . On peut alors revenir à la notation tensorielle; le terme de transport moyen (équation (2.9)) devient :

$$\rho \Delta \theta (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \rho \operatorname{div}(\Delta \theta \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}})$$

et le terme de diffusion moyen (équation (2.10)):

$$\operatorname{div}(\Delta \theta \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \sum_{j=1}^2 \boldsymbol{\sigma} |_{S_j} \cdot \operatorname{grad}(S_j)$$

Alors la moyenne de l'équation du mouvement est:

$$\rho \Delta \theta (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \operatorname{div}(\Delta \theta \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \sum_{j=1}^2 \boldsymbol{\sigma} |_{S_j} \cdot \operatorname{grad}(S_j) - \rho \operatorname{div}(\Delta \theta \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.11)$$

On a l'équation moyenne du mouvement en fonction de la vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{u}}$  et de la partie périodique  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Il faut maintenant trouver l'expression pour le tenseur des contraintes moyen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ .

## 2.5.2 Moyenne du tenseur des contraintes

Rappelons que le tenseur des contraintes s'exprime comme (voir page 35):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$$

En faisant la moyenne sur  $V$  du tenseur des contraintes et on obtient :

$$\Delta \theta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\overline{p \Delta \theta \mathbf{g} + \mu \Delta \theta \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})} \quad \text{dans } \Omega$$

comme  $\mathbf{g}$  ne dépend pas de  $\theta$  (voir annexe A) alors:

$$\Delta\theta \bar{\sigma} = -\bar{p} \Delta\theta \mathbf{g} + \Delta\theta \overline{\mu \tau(\mathbf{u})}$$

En utilisant encore la relation de statistique pour la séparation des termes de la moyenne d'un produit (voir annexe A), le dernier terme s'exprime comme:

$$\overline{\mu \tau(\mathbf{u})} = \bar{\mu} \overline{\tau(\mathbf{u})} + \bar{\tilde{\mu}} \overline{\tilde{\tau}(\mathbf{u})}$$

Et le tenseur moyen des contraintes prend la forme:

$$\Delta\theta \bar{\sigma} = -\bar{p} \Delta\theta \mathbf{g} + \bar{\mu} \Delta\theta \overline{\tau(\mathbf{u})} + \Delta\theta \bar{\tilde{\mu}} \overline{\tilde{\tau}(\mathbf{u})} \quad (2.12)$$

On calculera maintenant la moyenne du tenseur de cisaillement  $\overline{\tau(\mathbf{u})}$ .

### Moyenne du tenseur de cisaillement

En faisant l'intégrale du tenseur de cisaillement sur le volume  $V$ , on obtient:

$$\int_V \tau(\mathbf{u}) dV = \int_{\Omega} \Delta\theta \overline{\tau(\mathbf{u})} d\Omega$$

Le tenseur de cisaillement moyen est de la forme:

$$\Delta\theta \overline{\tau(\mathbf{u})} = \Delta\theta \left[ \overline{\mathbf{grad}(\mathbf{u})} + \overline{\mathbf{grad}^T(\mathbf{u})} \right] \quad \text{dans } \Omega$$

Le terme  $\overline{\mathbf{grad}(\mathbf{u})}$  et son transposé ne peuvent être évalués facilement. Il faut trouver une forme équivalente exprimée en fonction de  $\bar{\mathbf{u}}$  qui simplifiera l'expression du tenseur de cisaillement moyen. Pour ce faire, on effectue la double contraction

avec le tenseur métrique  $\mathbf{g}$  afin de pouvoir faire la moyenne angulaire sur le volume d'une quantité scalaire:

$$\int_V \mathbf{g} : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) dV = \int_\Omega \mathbf{g} : (\Delta\theta \overline{\mathbf{grad}(\mathbf{u})}) d\Omega \quad (2.13)$$

(car le tenseur métrique  $\mathbf{g}$  en coordonnées cylindriques est indépendant de  $\theta$  – voir annexe A).

D'autre part en utilisant l'égalité:

$$\mathbf{g} : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) = \mathit{div}(\mathbf{u}) \quad (\text{voir annexe A})$$

On obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{g} : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) dV &= \int_V \mathit{div}(\mathbf{u}) dV \\ &= \int_\Omega \mathit{div}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \end{aligned}$$

Ce qui est le même résultat que celui obtenu pour l'équation moyenne de la continuité (équation (2.5)). En appliquant encore l'égalité précédente mais en sens inverse sur l'opérateur de divergence dans  $\Omega$  on obtient:

$$\int_\Omega \mathit{div}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_\Omega \mathbf{g} : \mathbf{grad}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega$$

On a alors la relation suivante:

$$\int_V \mathbf{g} : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) dV = \int_\Omega \mathbf{g} : \mathbf{grad}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (2.14)$$

En comparant les équations (2.13) et (2.14) on déduit l'équivalence suivante:

$$\Delta\theta \overline{\mathbf{grad}(\mathbf{u})} = \mathbf{grad}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}})$$



De même le transposé s'écrit:

$$\Delta\theta \overline{\mathbf{grad}^T(\mathbf{u})} = \mathbf{grad}^T(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}})$$

On a donc que

$$\Delta\theta \left[ \overline{\mathbf{grad}(\mathbf{u})} + \overline{\mathbf{grad}^T(\mathbf{u})} \right] = \mathbf{grad}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{grad}^T(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}})$$

Ainsi la forme simplifiée désirée est obtenue:

$$\boxed{\Delta\theta \overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})} = \boldsymbol{\tau}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) \quad \text{dans } \Omega} \quad (2.15)$$

En remplaçant l'expression trouvée pour  $\overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})}$  en (2.15) dans l'équation du tenseur des contraintes moyen (2.12) on obtient:

$$\boxed{\Delta\theta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p} \Delta\theta \mathbf{g} + \bar{\mu} \boldsymbol{\tau}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) + \Delta\theta \tilde{\mu} \overline{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})} \quad \text{dans } \Omega} \quad (2.16)$$

On dispose maintenant de tous les termes de la conservation du mouvement moyen. Comme on l'a fait pour l'équation de la continuité, on changera la fonction  $\Delta\theta$  qui exprime la distance entre deux pales pour le facteur de blocage  $B$  dans l'équation de la conservation du mouvement.

### 2.5.3 Équation moyenne du mouvement en fonction du facteur de blocage

En exprimant l'équation moyenne du mouvement (2.11) en fonction du facteur de blocage (rappelons que  $\Delta\theta = \frac{B 2\pi}{N}$ ) on obtient:

$$\rho \frac{B}{N} 2\pi (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{N} \text{div}(B \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \sum_{j=1}^2 \sigma |_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) - \rho \frac{2\pi}{N} \text{div}(B \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}})$$

Et si on divise par  $\frac{2\pi}{N}$  chaque membre de l'équation, celle-ci devient:

$$\boxed{\rho B (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \text{div}(B \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{N}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \sigma |_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) - \rho \text{div}(B \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}}) \quad \text{dans } \Omega} \quad (2.17)$$

Quelques simplifications sont encore possibles pour obtenir une forme plus près des équations de Navier-Stokes classiques. En effet, il est souhaitable de sortir le facteur de blocage ( $B$ ) à l'extérieur de la divergence du tenseur moyen des contraintes et d'exprimer les contraintes à la paroi en fonction de variables connues ou plus faciles à évaluer. Ces manipulations sont présentées dans les prochaines sous-sections.

#### 2.5.4 Modification du terme de diffusion moyen

On appelle terme de diffusion moyen le premier terme du membre de droite de l'équation (2.17):

$$\text{div}(B \bar{\boldsymbol{\sigma}})$$

Rappelons que le tenseur moyen des contraintes tel que donné à l'équation (2.16) est:

$$\Delta\theta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{p} \Delta\theta \mathbf{g} + \bar{\mu} \boldsymbol{\tau}(\Delta\theta \bar{\mathbf{u}}) + \Delta\theta \overline{\tilde{\mu} \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u})}$$

Exprimé en fonction du facteur de blocage, il devient:

$$B \bar{\sigma} = -\bar{p} B \mathbf{g} + \bar{\mu} \tau(B \bar{\mathbf{u}}) + B \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}$$

Le tenseur des contraintes moyen est séparé en deux parties, une comprenant les valeurs moyennes  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{p}$  et l'autre formée des parties périodiques, alors le terme de diffusion moyen prend la forme:

$$\text{div}(B \bar{\sigma}) = \text{div}(-\bar{p} B \mathbf{g} + \bar{\mu} \tau(B \bar{\mathbf{u}})) + \text{div}(B \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})})$$

En introduisant la notation:

$$\sigma^* = -\bar{p} \mathbf{g} + \frac{\bar{\mu} \tau(B \bar{\mathbf{u}})}{B} \quad (2.18)$$

l'équation précédente devient:

$$\text{div}(B \bar{\sigma}) = \text{div}(B \sigma^*) + \text{div}(B \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}) \quad (2.19)$$

On applique la propriété de la divergence d'un produit de fonction scalaire et d'un tenseur pour les deux termes du membre de droite (voir annexe A), on peut alors réécrire l'équation (2.19) sous la forme:

$$\text{div}(B \bar{\sigma}) = B \text{div}(\sigma^*) + \text{grad}(B) \cdot \sigma^* + B \text{div}(\overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}) + \text{grad}(B) \cdot \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})} \quad (2.20)$$

Il faut remarquer que  $\bar{\sigma} = \sigma^* + \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}$   
alors  $\text{grad}(B) \cdot \bar{\sigma} = \text{grad}(B) \cdot \sigma^* + \text{grad}(B) \cdot \overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}$

Donc le terme de diffusion moyen (équation (2.20)) devient:

$$\boxed{\text{div}(B \bar{\sigma}) = B \text{div}(\sigma^*) + \text{grad}(B) \cdot \bar{\sigma} + B \text{div}(\overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})})} \quad (2.21)$$

### 2.5.5 Modification des contraintes aux parois des pales

Les contraintes aux parois sont regroupées dans le terme:

$$\sum_{j=1}^2 \sigma|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j)$$

elles représentent les forces de friction du fluide sur les parois des pales.

Le tenseur des contraintes peut être exprimée autrement, étant donné qu'on a défini:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}$$

on peut écrire:

$$\sum_{j=1}^2 \sigma|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \sum_{j=1}^2 \bar{\sigma}|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) + \sum_{j=1}^2 \tilde{\sigma}|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j)$$

Mais comme la contrainte moyenne ( $\bar{\sigma}$ ) est valide pour tout le passage on a:

$$\bar{\sigma}|_{S_1} = \bar{\sigma}|_{S_2} = \bar{\sigma}$$

donc le terme des contraintes aux parois des pales se développe sous la forme:

$$\sum_{j=1}^2 \sigma|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \bar{\sigma} \cdot \sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) + \sum_{j=1}^2 \tilde{\sigma}|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) \quad (2.22)$$

Il reste à expliciter les parties périodiques du tenseur des contraintes aux parois ( $\tilde{\sigma}|_{S_j}$ ).

Voyons d'abord ce qu'est  $\tilde{\sigma}$ :

$$\text{On a } \sigma = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma} \quad \text{avec } \sigma = -p \mathbf{g} + \mu \tau(\mathbf{u})$$

$$\text{alors } \bar{\sigma} = -\overline{p \mathbf{g} + \mu \tau(\mathbf{u})} \quad \text{et } \tilde{\sigma} = -\tilde{p} \mathbf{g} + \tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})$$

On obtient donc la forme développée de la partie périodique des contraintes aux parois:

$$\sum_{j=1}^2 \tilde{\sigma} |_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \sum_{j=1}^2 -\tilde{p} |_{S_j} \mathbf{g} \cdot \mathbf{grad}(S_j) + \sum_{j=1}^2 \widetilde{\mu \tau}(\mathbf{u}) |_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) \quad (2.23)$$

On veut maintenant exprimer les gradients de ces surfaces en fonction de valeurs connues ou faciles à évaluer telles que la surface moyenne des pales ou surface de cambrure ( $S_c$ ) et le facteur de blocage  $B$ .

### Vecteurs normaux aux surfaces des pales en fonction de la surface de cambrure et du facteur de blocage

La fonction de la surface de cambrure est définie par:

$$\theta_c = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les fonctions des surfaces de pression et de succion respectivement.

Alors la forme implicite de la surface de cambrure est:

$$S_c \equiv \theta - \theta_c = 0$$

La figure 2.8 illustre un passage avec les côtés pression et succion des pales et la surface de cambrure identifiés ainsi que l'ouverture entre les pales:

On voit que la distance entre les surfaces de cambrure de deux pales voisines est constante et vaut  $\frac{2\pi}{N}$ , (rappelons que  $N$  est le nombre de pales de la cascade). L'ouverture du passage est donné par  $\Delta\theta = f_2 - f_1$ .

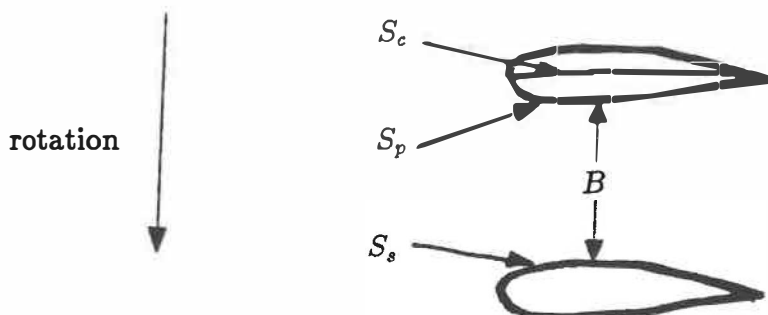


Figure 2.8: Surfaces de pression et de suction

Le facteur de blocage est donc le rapport de l'espace entre les surfaces de cambrure de deux pales voisines et la distance effective dans le passage due à la présence des pales:

$$B = \Delta\theta \frac{N}{2\pi}$$

On note que lorsque les pales sont très minces,  $B \rightarrow 1$ . En mettant  $\Delta\theta$  en fonction de  $B$  on obtient:

$$\Delta\theta = B \frac{2\pi}{N}$$

L'épaisseur des pales ( $e_p$ ) est exprimée comme:

$$e_p = \frac{2\pi}{N} - \Delta\theta$$

ou encore en remplaçant  $\Delta\theta$  par sa valeur en fonction de  $B$  :

$$e_p = \frac{2\pi}{N}(1 - B)$$

Les fonctions des surfaces des pales peuvent être définies comme la surface de cambrure  $\pm$  la moitié de l'épaisseur de la pale selon la position relative de la face:

$$f_1 = \theta_c + \frac{1}{2} e_p$$

$$\begin{aligned}
&= \theta_c + \frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi}{N}(1-B) \right] \\
&= \theta_c + (1-B) \frac{\pi}{N} \\
f_2 &= \theta_c - \frac{1}{2} e_p + \frac{2\pi}{N} \\
&= \theta_c - \frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi}{N}(1-B) \right] + \frac{2\pi}{N} \\
&= \theta_c - (1-B) \frac{\pi}{N} + \frac{2\pi}{N} \\
&= \theta_c + (1+B) \frac{\pi}{N}
\end{aligned}$$

Les fonctions implicites des surfaces sont définies de façon à ce que les vecteurs normaux soient orientés vers l'extérieur du volume limité par le passage des pales. Ceci est nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème de la divergence comme on l'a fait précédemment.

$$S_1 \equiv f_1 - \theta = 0 \quad \text{et} \quad S_2 \equiv \theta - f_2 = 0$$

En utilisant les relations pour  $f_1$  et  $f_2$  en fonction de  $\theta_c$  et  $B$  et en rappelant que la surface de cambrure est donnée par  $S_c \equiv \theta - \theta_c = 0$  on obtient:

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv \theta_c + (1-B) \frac{\pi}{N} - \theta \\
&= -S_c + (1-B) \frac{\pi}{N} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &\equiv \theta - \theta_c - (1+B) \frac{\pi}{N} \\
&= S_c - (1+B) \frac{\pi}{N} = 0
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer le gradient des surfaces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(S_1) &= -\mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(B) \frac{\pi}{N} \\
\mathbf{grad}(S_2) &= \mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(B) \frac{\pi}{N}
\end{aligned}$$

Le dernier terme de chacune de ces équations peut s'exprimer autrement:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(B) \frac{\pi}{N} &= \frac{\mathbf{grad}(B)}{B} \left( \frac{B\pi}{N} \right) \\ &= \mathbf{grad}(\ln B) \left( \frac{B\pi}{N} \right) \end{aligned}$$

Les gradients des surfaces sont alors:

$$\mathbf{grad}(S_1) = -\mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B\pi}{N} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{grad}(S_2) = \mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B\pi}{N} \quad (2.25)$$

Nous pouvons maintenant développer les termes des parties périodiques de la pression et du tenseur de cisaillement aux parois de l'équation (2.23) séparément:

### Partie périodique de la pression aux parois

Le terme de la partie périodique de la pression aux parois des pales est:

$$\sum_{j=1}^2 -\tilde{p}|_{S_j} \mathbf{g} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = -\tilde{p}|_{S_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{grad}(S_1) - \tilde{p}|_{S_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{grad}(S_2)$$

On sait que  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$  (voir annexe A) alors  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \mathbf{grad}(S_j)$ , ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{j=1}^2 -\tilde{p}|_{S_j} \mathbf{grad}(S_j) = -\tilde{p}|_{S_1} \mathbf{grad}(S_1) - \tilde{p}|_{S_2} \mathbf{grad}(S_2) \quad (2.26)$$

Ce terme représente la variation de pression entre les parois des pales,  $S_1$  étant le côté pression et  $S_2$  le côté suction.

On change la notation pour la restriction des quantités aux surfaces, on écrit:

$$\tilde{p}|_{S_1} = \tilde{p}_p \quad \text{et} \quad \tilde{p}|_{S_2} = \tilde{p}_s$$



En remplaçant les expressions trouvées pour  $\mathbf{grad}(S_1)$  et  $\mathbf{grad}(S_2)$  dans les équations (2.24) et (2.25) le terme des parties périodiques de la pression aux parois (2.26) devient:

$$\begin{aligned} & -\tilde{p}_p \mathbf{grad}(S_1) & - & & \tilde{p}_s \mathbf{grad}(S_2) & = \\ -\tilde{p}_p \left[ -\mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \right] & - & \tilde{p}_s \left[ \mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \right] & = \\ & (\tilde{p}_p - \tilde{p}_s) \mathbf{grad}(S_c) & + & & (\tilde{p}_p + \tilde{p}_s) \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \end{aligned}$$

### Partie périodique du tenseur de cisaillement aux parois

On fait le même développement pour le terme de la partie périodique du tenseur de cisaillement aux parois:

$$\sum_{j=1}^2 \tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})|_{S_j} \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})|_{S_1} \cdot \mathbf{grad}(S_1) + \tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})|_{S_2} \cdot \mathbf{grad}(S_2)$$

Le même type de notation est utilisé:

$$\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})|_{S_1} = \tilde{\mu} \tilde{\tau}_p \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})|_{S_2} = \tilde{\mu} \tilde{\tau}_s$$

En prenant les expressions pour  $\mathbf{grad}(S_1)$  et  $\mathbf{grad}(S_2)$  on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \tilde{\tau}_p \left[ -\mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \right] & + \tilde{\mu} \tilde{\tau}_s \cdot \left[ \mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \right] = \\ \left[ -\tilde{\mu} \tilde{\tau}_p + \tilde{\mu} \tilde{\tau}_s \right] \cdot \mathbf{grad}(S_c) & + \left[ \tilde{\mu} \tilde{\tau}_p + \tilde{\mu} \tilde{\tau}_s \right] \cdot \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B \pi}{N} \end{aligned}$$

### Forme complète du tenseur des contraintes à la paroi

Finalement le terme des parties périodiques du tenseur des contraintes à la paroi devient:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 \tilde{\sigma} |s_j \cdot \mathbf{grad}(S_j) = & (\tilde{p}_p - \tilde{p}_s) \mathbf{grad}(S_c) \\
& + (\tilde{p}_p + \tilde{p}_s) \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B\pi}{N} \\
& + [-\widetilde{\mu} \widetilde{\tau}_p + \widetilde{\mu} \widetilde{\tau}_s] \cdot \mathbf{grad}(S_c) \\
& + [\widetilde{\mu} \widetilde{\tau}_p + \widetilde{\mu} \widetilde{\tau}_s] \cdot \mathbf{grad}(\ln B) \frac{B\pi}{N}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Appelons ce terme  $\tilde{C}$ .

Alors l'équation (2.22) du tenseur des contraintes à la paroi est:

$$\sum_{j=1}^2 \sigma |s_j \cdot \mathbf{grad}(S_j) = \bar{\sigma} \cdot \sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) + \tilde{C} \tag{2.28}$$

## 2.5.6 Forme complète de l'équation moyenne du mouvement

En remplaçant les nouvelles formes du terme de diffusion moyen (équation (2.21)) et du tenseur des contraintes à la paroi (2.28) dans l'équation moyenne préliminaire du mouvement (2.17) on obtient une relation détaillée pour le mouvement moyen:

$$\begin{aligned}
\rho B(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = & B \operatorname{div}(\sigma^*) + \bar{\sigma} \cdot \mathbf{grad}(B) \\
& + \frac{N}{2\pi} \left[ \bar{\sigma} \cdot \sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) + \tilde{C} \right] \\
& - \rho \operatorname{div}(B \overline{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + B \operatorname{div}(\overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}) \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

On a déjà trouvé des expressions pour les normales aux surfaces des pales ( $\mathbf{grad}(S_j)$ ) en fonction du facteur de blocage (équations (2.24) et (2.25)), alors:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) &= \mathbf{grad}(S_1) + \mathbf{grad}(S_2) \\
&= -\mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(B) \frac{\pi}{N} \\
&\quad + \mathbf{grad}(S_c) - \mathbf{grad}(B) \frac{\pi}{N} \\
&= -\mathbf{grad}(B) \frac{2\pi}{N}
\end{aligned}$$

La relation suivante peut donc être utilisée:

$$\frac{N}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) = -\mathbf{grad}(B)$$

Alors ces deux termes de l'équation du mouvement s'annulent:

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{grad}(B) + \frac{N}{2\pi} \bar{\sigma} \cdot \sum_{j=1}^2 \mathbf{grad}(S_j) = 0$$

et l'équation moyenne du mouvement devient:

$$\begin{aligned}
\rho B(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= B \operatorname{div}(\sigma^*) + B \operatorname{div}(\overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}) \\
&\quad - \rho \operatorname{div}(B \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}}) + \frac{N}{2\pi} \tilde{C} \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

On peut diviser par le facteur de blocage chaque membre de l'équation:

$$\begin{aligned}
\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= \operatorname{div}(\sigma^*) + \operatorname{div}(\overline{\tilde{\mu} \tilde{\tau}(\mathbf{u})}) \\
&\quad - \rho \frac{\operatorname{div}(B \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}})}{B} + \frac{N}{2\pi B} \tilde{C} \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

On remarque que si les pales sont minces ou si on est à l'extérieur du passage des pales on a  $B = 1$  et les termes de transport et de diffusion sont les mêmes que pour les équations de Navier-Stokes sous la forme axisymétrique.

Les trois derniers termes font intervenir les parties périodiques des diverses quantités du mouvement. Ces termes ont fait leur apparition lors du processus de

moyenne sur le volume entre deux pales. Ils sont donc dûs à la présence des pales et sont associés aux forces exercées par celles-ci sur le fluide. On les regroupe dans un terme de force noté  $F$  et la forme complète de l'équation du mouvement est:

$$\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) + F \quad (2.29)$$

avec

$$\begin{aligned} F = & \text{div}(\bar{\mu} \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u})) - \rho \text{div}(B \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})/B \\ & + (\bar{p}_p - \bar{p}_s) \text{grad}(S_c) \frac{N}{2\pi B} \\ & + (\bar{p}_p + \bar{p}_s) \text{grad}(\ln B)/2 \\ & + [-\bar{\mu} \bar{\boldsymbol{\tau}}_p + \bar{\mu} \bar{\boldsymbol{\tau}}_s] \cdot \text{grad}(S_c) \frac{N}{2\pi B} \\ & + [\bar{\mu} \bar{\boldsymbol{\tau}}_p + \bar{\mu} \bar{\boldsymbol{\tau}}_s] \cdot \text{grad}(\ln B)/2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

L'équation de la continuité et les équations de Navier-Stokes moyennes ne constituent plus un système d'équations différentielles fermé puisque le terme de force des pales est une inconnue supplémentaire. Les parties périodiques des variables de l'équation du mouvement dépendent de l'écoulement tridimensionnel et ne peuvent être prédites par les équations de l'écoulement moyen. Ces quantités doivent être reliées aux variables moyennes de vitesse et de pression à l'aide de corrélations empiriques ou par une analyse du passage qui fournira des relations pour ces parties périodiques. Notons ici l'analogie avec le problème de fermeture des équations moyennes de Reynolds pour la modélisation de la turbulence discuté au chapitre précédent.

Dans la prochaine section on donnera un aperçu de la façon la plus répandue de résoudre le problème de fermeture de équations moyennes du passage et on

présentera la solution proposée par Garon [4] et qui est adoptée dans ce travail.

## 2.6 Modèle de fermeture des équations

Jusqu'à maintenant la plupart des procédés de résolution des équations moyennes du passage dans les turbomachines utilisaient des modèles de fermeture d'un type appelé "Formulation dynamique". Ces modèles nécessitent les spécifications des composantes axiales, radiales et angulaires des forces exercées par les pales sur le fluide à l'intérieur du passage. Elles peuvent être fournies par des calculs sur le volume entre les pales (ce qui est très coûteux et constitue en fait le problème original) ou par des données expérimentales. Le terme de force n'est donc pas une inconnue du système. La solution des équations moyennes est obtenue de façon itérative en passant l'information alternativement entre les parties du programme qui calculent l'écoulement dans le canal (parties sans pales) et dans le passage des pales. De cette manière on tient compte de l'écoulement moyen dans la machine complète et ceci a pour effet que le champ de vitesse s'ajuste librement pour minimiser le travail fait par les pales sur le fluide dans sa trajectoire à travers le passage [43]. Les travaux de Jennions et Stow [45] et Pelletier et Schetz [5] sont représentatifs de cette approche.

L'autre type de modèle de fermeture des équations moyennes du passage et dont nous avons fait usage est appelé "Formulation cinématique". Cette formulation établit une relation entre le terme de force  $F$  et la normale à une surface selon laquelle les pales agissent sur le fluide, appelons-la  $S_f$ , on réécrit alors:

$$F = f \mathbf{s}_f$$

où  $f$  est une fonction scalaire, maintenant l'inconnue,  
 et  $s_f$  est la normale à la surface  $S_f$ , ce vecteur est la direction  
 de la force et doit être une donnée du problème.

Le terme de force  $F$  est donc décomposé en une partie vectorielle spécifiée pour chaque problème et une partie scalaire à déterminer. L'orientation du vecteur de force est fixe et c'est sa grandeur qui est inconnue.

Ce modèle de fermeture se base sur l'hypothèse que les particules de fluide de l'écoulement moyen se déplacent sur la surface de courant moyen. Cette surface doit être une donnée du problème. La description géométrique de la surface peut se faire par des observations expérimentales ou par des calculs dans le passage des pales.

La restriction du fluide à se déplacer tangentiellement à la surface de courant moyenne ( $S_m$ ) est imposée par une condition de perpendicularité entre le vecteur de vitesse moyenne et la normale à la surface. Ce qui se traduit par un produit scalaire nul:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_m = 0$$

Autrement dit, aucune particule de fluide ne peut passer à travers la surface de courant moyen.

Cette relation n'est pas invariante sous un changement de repère. En effet, si la surface de courant moyen est définie dans un repère en mouvement (comme pour un rotor par exemple), la normale à cette surface ( $s_m$ ) ne sera pas la même pour un observateur fixe et un autre en mouvement avec les pales. Il est donc nécessaire de spécifier la vitesse moyenne et la normale à la surface dans le même repère [4].

On peut exprimer la vitesse moyenne absolue du fluide en fonction d'un repère lié à la surface de courant moyenne:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_{rel} + \mathbf{v}$$

où  $\bar{\mathbf{u}}_{rel}$  est la vitesse moyenne relative au repère lié à la surface de courant moyenne (en mouvement)

et  $\mathbf{v}$  est la vitesse d'entraînement du rotor,  $\mathbf{v} = \omega r \mathbf{e}_\theta$

Alors la vitesse liée au repère de la surface de courant moyenne est:

$$\bar{\mathbf{u}}_{rel} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v}$$

Donc la contrainte de tangence dans le repère de la surface de courant moyenne est donnée par:

$$(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{s}_m = 0 \quad (2.31)$$

En posant  $K = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_m$ , on peut écrire l'équation (2.31) comme:

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_m + K = 0} \quad (2.32)$$

Cette relation est valide pour tout le domaine car pour le stator et à l'extérieur de la région des pales  $K = 0$ .

L'utilisation de ce modèle pour la fermeture du système d'équations a pour conséquence de restreindre les vecteurs de vitesse  $\mathbf{u}$  à la surface de courant moyenne mais sans contraindre leur orientation ni leur longueur sur cette surface. Mathématiquement la condition de tangence est une contrainte sous laquelle la vitesse est libre de s'ajuster en sens et en grandeur pour minimiser les forces des pales sur le fluide.

Les équations de la continuité moyenne (2.7), de la conservation du mouvement moyenne (2.29) et la contrainte de tangence (2.32) forment maintenant un système fermé qui peut être résolu afin de prédire le comportement de l'écoulement moyen dans le canal moyen d'une machine rotative complète.

## 2.7 Le modèle complet

Les équations décrivant le mouvement moyen du fluide à travers le canal de la pompe sont données par:

$$\rho B(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = B \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) + f \mathbf{s}_f \quad \text{dans } \Omega$$

avec les contraintes d'incompressibilité (continuité moyenne):

$$\operatorname{div}(B\mathbf{u}) = 0$$

et de tangence à la surface de courant moyen:

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_m + K = 0$$

Le système est complet car on dispose des valeurs  $\rho$  et  $\mu$ , la densité et la viscosité, pour un fluide particulier (la viscosité turbulent  $\mu_t$  peut être spécifiée par un modèle algébrique sans ajouter d'équations au système) et la vitesse de rotation des pales  $\boldsymbol{\nu}$  est ajustée selon la machine considérée. En spécifiant des conditions aux frontières réalistes, on pourra prédire l'écoulement moyen dans une machine rotative.

Cependant, pour pouvoir résoudre le système il faut que le facteur de blocage  $B$  et les normales aux surfaces de forces  $\mathbf{s}_f$  et de courant moyennes  $\mathbf{s}_m$  soient spécifiés



dans le problème. Comme ces données ne sont pas toujours disponibles à partir d'expériences ou parce qu'il serait trop fastidieux de les déduire numériquement, on procède à quelques hypothèses et simplifications.

### 2.7.1 Hypothèses simplificatrices

Pour un problème donné, on dispose de la description géométrique de la machine et on connaît certaines caractéristiques de l'écoulement telles que les conditions à l'entrée et le débit. À partir de ces informations on peut juger s'il est raisonnable de faire quelques approximations afin de simplifier la formulation des équations de l'écoulement moyen dans l'appareil.

Dans le système que forment les équations (2.29), (2.7) et (2.32) pour décrire le comportement moyen du fluide dans le canal, les paramètres les plus difficiles à évaluer sont le facteur de blocage  $B$  et les vecteurs donnant la direction de l'action des pales  $s_f$  et la normale à la surface de courant moyen  $s_m$ . On abordera dans les prochaines sous-sections quelles hypothèses il est réaliste de faire afin de spécifier ces valeurs de façon simple pour le cas de la pompe mixte présentée à la section (2.2) et quelles sont les conséquences sur la modélisation de l'écoulement moyen.

#### Hypothèses sur le facteur de blocage

Le facteur de blocage  $B$  exprime la variation de section de l'écoulement entre deux pales.  $B$  dépend de l'ouverture du passage  $\Delta\theta$  qui est défini par les fonctions

des surfaces de pression et de succion des pales:

$$B = \frac{\Delta\theta N}{2\pi}$$

où  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$

Il faut donc connaître les fonctions  $\theta_s$  et  $\theta_p$  ou du moins un certain nombre de points de chacune de ces surfaces pour pouvoir spécifier le facteur de blocage dans la région de calcul des forces des pales. La valeur de  $\Delta\theta$  est alors donnée soit par évaluation des fonctions, soit par interpolation sur les points connus. Mais comme il est rare de disposer des fonctions pour les surfaces des pales, c'est plutôt la seconde méthode qui sera utilisée la plupart du temps. Il peut être très long et dispendieux de faire l'interpolation de valeurs si la grille de calcul comporte un grand nombre de noeuds.

On remarque cependant que si les surfaces intrados et extrados des pales sont parallèles,  $\Delta\theta$  est constant et par conséquent  $B$  aussi, ceci qui simplifie les équations moyennes.

Si le nombre de pales de la cascade est relativement grand, il est raisonnable d'approximer les pales par des surfaces minces, on pose  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$  et alors  $B = 1$ . C'est ce qu'on a assumé pour l'instant pour la pompe pour des raisons de simplicité.

### **Hypothèses sur les vecteurs normaux aux surfaces de force et de courant moyen**

On a défini les vecteurs normaux aux surfaces de force comme étant les directions selon lesquelles les pales agissent sur les particules de fluide. La surface de

force est donc une modélisation de l'effet des pales sur le fluide. Il faut trouver par approximation numérique ou par des observations expérimentales une telle surface qui, intuitivement, devrait être près de la surface de pression de la pale ou de la surface de cambrure. On pourra alors spécifier la direction des vecteurs de force.

La surface de courant moyenne représente la trajectoire de l'écoulement moyen dans le passage des pales. Elle peut aussi être déduite par des valeurs expérimentales ou par des calculs numériques tridimensionnels.

Les surfaces de force, de courant moyenne et de cambrure ne sont pas nécessairement parallèles entre deux pales. La figure (2.9) montre pour un cas extrême ces différentes surfaces dans un passage.

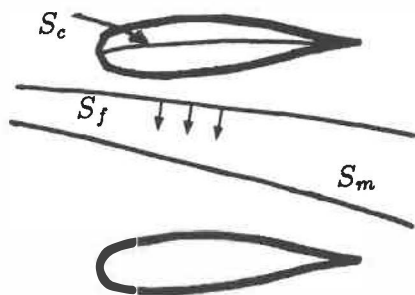


Figure 2.9: Surfaces de cambrure, de force et de courant moyen

Cependant, dans certaines situations il est acceptable de prendre la surface de

cambrure comme approximation des surfaces de force et de courant moyenne. Les conditions nécessaires pour qu'une telle supposition soit juste sont:

- Les pales sont minces
- Les pales sont en assez grand nombre
- La machine fonctionne à son point de design, ie. dans les conditions de rendement optimal.

Dans le cas de la pompe qui nous intéresse, on a déjà supposé que les pales sont minces et on dispose des données concernant le point de design (vitesse de rotation du rotor, débit du fluide) afin de simuler le régime d'efficacité maximale. On rencontre donc les exigences pour poser dans notre problème:

$$B = 1 \quad \text{et} \quad S_f \equiv S_m \equiv S_c$$

Les équations moyennes prennent la forme:

**Équation de continuité moyenne:**

$$\text{div}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \tag{2.33}$$

**Équation de conservation du mouvement moyenne:**

$$\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) + f \mathbf{s}_c \tag{2.34}$$

**Contrainte de tangence:**

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K = 0 \tag{2.35}$$

On a seulement à évaluer  $s_c$  maintenant, le vecteur normal à la surface de cambrure. Cette surface est donnée par:

$$S_c \equiv \theta_c = \frac{f_1 + f_2}{2} = 0$$

Il faut donc connaître les fonctions des surfaces de pression et de succion ou du moins une description géométrique discrète de ces surfaces. On obtiendra des points de la surface de cambrure en faisant la moyenne de ces valeurs et on pourra alors calculer les normales à la surface de cambrure à ces points. Pour obtenir les vecteurs normaux pour toute la région des pales on a fait l'interpolation sur les normales calculées mais sur un seul ensemble de valeurs (de la surface de cambrure) plutôt que sur deux (pour les surfaces de pression et de succion) si on avait voulu calculer le facteur de blocage.

En résumé, on a fait le développement des équations moyennes régissant le fluide dans le passage d'une machine rotative en coordonnées cylindriques et on a ajouté la contrainte de tangence à la surface de courant pour fermer le système d'équations. Enfin des approximations ont été formulées, avec ces hypothèses faites sur l'écoulement moyen et les caractéristiques de la pompe on a obtenu un système d'équations beaucoup plus simple à spécifier et à résoudre.

Dans la prochaine section nous allons présenter le choix du modèle de turbulence dont nous nous sommes servi pour prédire l'écoulement turbulent moyen dans la pompe.

# Chapitre 3

## Modèle de turbulence

L'écoulement dans une machine rotative est la plupart du temps en régime turbulent. Le régime turbulent se définit par opposition au régime laminaire dans lequel les particules du fluide se déplacent en gardant la même distance les unes par rapport aux autres dans la direction transversale à l'écoulement. Le fluide s'écoule selon des couches qui ne se mêlent jamais. Le mouvement turbulent est caractérisé par un désordre apparent du déplacement relatif des particules qui ne peut être décrit de façon précise dans son ensemble. On utilise pour mesurer le niveau de turbulence d'un écoulement le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses, soit le nombre de Reynolds.

Dans une pompe, les forces d'inertie sont plusieurs ordre de grandeur plus élevées que les forces visqueuses à cause de la grande vitesse de rotation des pales de la machine qui entraîne une grande vitesse d'écoulement du fluide. Pour le cas

de la pompe étudiée dans ce travail le nombre de Reynolds est de l'ordre de:

$$Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}} = \frac{\rho U L}{\mu} \simeq 10^5$$

Des observations expérimentales ont permis de spécifier que pour des écoulements dans des conduites à symétrie de révolution le fluide est en régime turbulent pour  $Re > 2000$ . La pompe mixte étant une conduite annulaire à section variable à laquelle on a ajouté des pales en rotation ou fixes, on peut affirmer que l'écoulement dans le canal de la pompe est turbulent.

Pour les raisons expliquées dans la section (1.1) il est nécessaire de recourir à un modèle de turbulence afin de simuler l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen décrit par les équations de Reynolds qui sont obtenues en faisant la moyenne des équations du mouvement sur un court intervalle de temps (voir section (1.1.1)).

Parmi les modèles à 0, 1 et 2 équations présentés dans les sections (1.1.3) à (1.1.5) il faut en choisir un qui sera adéquat pour le problème traité et qui sera assez simple à implanter. On discutera des solutions possibles et on présentera le modèle à qu'on utilisera pour ce travail.

### 3.1 Choix du modèle de turbulence

Deux familles de modèles de turbulence ont été mentionnés dans la revue des différents modèles. Les modèles aux tensions de Reynolds qui proposent une relation algébrique ou une équation différentielle pour le tenseur de Reynolds et les modèles s'appuyant sur l'hypothèse de Boussinesq, qui relie le tenseur de Reynolds

aux variations de l'écoulement turbulent par un facteur qui s'interprète comme une viscosité additionnelle provoquée par la turbulence.

Le choix du modèle de viscosité turbulente se complique dans le cas présent car on résout les équations du passage moyen. Le processus d'intégration sur le volume entre les pales a fait apparaître les termes de viscosité moyenne, la partie périodique de la viscosité et une corrélation entre la viscosité et le tenseur de cisaillement ( $\tau$ ) qu'on a inclus dans le terme de force (voir équation (2.30)). On ne sait pas actuellement comment modéliser cette relation entre la viscosité et le cisaillement. On suppose donc qu'il est suffisamment petit pour être négligé. Un bon modèle de turbulence devra cependant faire la correspondance entre la viscosité des équations tridimensionnelles et la viscosité moyenne des équations dans le plan méridional.

On a présenté trois types de modèles de viscosité turbulente: les modèles à 0 équation ou modèles de longueur de mélange (section 1.1.3), les modèles à 1 équation (section 1.1.4) et les modèles à 2 équations, principalement les modèles  $k - \varepsilon$  (section 1.1.5). On a vu que les modèles qui ont donné les meilleurs résultats et qui sont les plus utilisés pour différents types de problèmes sont les modèles de longueur de mélange (ou modèles de viscosité algébrique) et le modèle  $k - \varepsilon$ . Une discussion sur les possibilités d'implanter chacun de ces modèles est faite ci-dessous.

Le modèle de turbulence à 2 équations  $k - \varepsilon$  se base sur l'expression de la viscosité turbulente de Kolmogoroff-Prandtl:

$$\mu_t = C \rho L \sqrt{k}$$



où  $C$  est une constante

$\rho$  est la densité du fluide

$k$  est l'énergie cinétique turbulente

$L$  est une longueur caractéristique

Le terme  $\varepsilon$  est proportionnel à la dissipation visqueuse qui fait intervenir l'énergie cinétique et la longueur caractéristique:

$$\varepsilon = c \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$$

On peut réécrire la viscosité turbulente en fonction de  $k$  et  $\varepsilon$ :

$$\mu_t = C\rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Ce modèle introduit 2 équations aux dérivées partielles supplémentaires dans le système d'équations décrivant le mouvement: une équation de transport de l'énergie cinétique ( $k$ ) et une pour la dissipation visqueuse ( $\varepsilon$ ).

Étant donné qu'on a adopté l'approche consistant à résoudre les équations du mouvement moyennes dans le passage de la pompe il faudra aussi utiliser la forme moyenne des équations de transport de l'énergie cinétique et de dissipation visqueuse. Le processus d'intégration de ces équations sur le volume contenu entre deux pales consécutives fera apparaître les termes de valeurs moyennes et de parties périodiques des quantités en question. Et il n'est pas de première évidence d'interpréter physiquement ces termes ni de spécifier de valeurs aux frontières. De plus, comme la relation pour la viscosité turbulente n'est pas linéaire on n'est pas assurés de trouver la valeur de la viscosité turbulente moyenne avec les valeurs

moyennes de  $k$  et  $\varepsilon$ . Autrement dit:

$$\overline{\mu_t} = \int_{\theta_p}^{\theta_s} \mu_t = \int_{\theta_p}^{\theta_s} C\rho \frac{k^2}{\varepsilon} \neq C\rho \frac{\overline{k}^2}{\overline{\varepsilon}}$$

On rejette donc ce modèle qui ne s'adapte pas bien à la méthode utilisée en plus de demander une quantité de calculs supplémentaires pour la résolution des équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$ .

L'autre catégorie de modèle qui est fréquemment utilisée est un modèle à 0 équation ou modèle de viscosité turbulente algébrique. Ce type de modèle se base sur l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl qui relie la viscosité turbulente à la variation de la vitesse dans la zone de cisaillement par le facteur de longueur de mélange  $\ell_m$ .

$$\mu_t = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

où  $y$  est la direction transversale à l'écoulement.

En prenant la variation de la vitesse moyenne  $\overline{u}$  on obtient la viscosité moyenne  $\overline{\mu_t}$  dans le plan méridional du canal, on peut écrire:

$$\overline{\mu_t} = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$

Grâce à sa simplicité on n'a pas de difficulté à adapter ce modèle de turbulence aux équations moyennes du mouvement. On choisit ce type de modèle pour une première analyse de l'écoulement turbulent dans une machine rotative pour sa facilité d'implantation et le peu de travail qu'il exige au niveau des calculs et du stockage de données.

Le principal problème rencontré avec l'utilisation d'un modèle de viscosité turbulente algébrique est la détermination de la longueur de mélange  $\ell_m$ . Des modèles complets ont été développés pour des écoulements simples et comme ce sont les seuls modèles disponibles, ils sont utilisés pour des cas plus complexes comme l'écoulement dans la pompe. Les modèles que nous avons choisi de tester sont présentés dans la prochaine section.

## 3.2 Deux modèles de longueur de mélange pour les conduites à symétrie de révolution

La longueur de mélange est une mesure de la variation de la vitesse dans l'écoulement dont dépend la viscosité turbulente. Le concept de longueur de mélange développé par Prandtl a été présenté dans le chapitre 1 à la section (1.1.3).

Des relations ont été élaborées pour la spécification de la longueur de mélange pour des écoulements de type couche limite à partir d'observations expérimentales sur la distribution de la vitesse dans la zone de cisaillement.

On sait par la solution analytique que le profil de vitesse de l'écoulement laminaire dans une conduite est parabolique, ceci a été confirmé par des simulations numériques. Par contre, les mesures effectuées lors d'expériences démontrent que lorsque l'écoulement est en régime turbulent le profil de vitesse est aplati par rapport à celui de l'écoulement laminaire. La figure (3.1) illustre la différence des allures de la distribution de vitesse pour des écoulements laminaire et turbulent dans un tuyau.

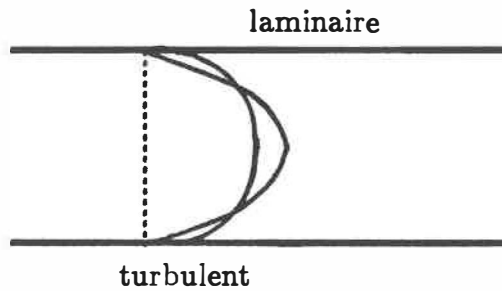


Figure 3.1: Profils de vitesse d'écoulements laminaire et turbulent dans un tuyau

On remarque que l'écoulement turbulent est ralenti au centre sous l'effet de la turbulence et que la couche limite est plus mince aux parois de chaque côté. C'est cette déformation du profil de vitesse due à la turbulence qu'on associe à la viscosité turbulente.

La couche limite est la zone près de la paroi dans laquelle les forces de cisaillement sont très importantes. Il s'agit de la partie de l'écoulement où la viscosité joue un rôle prépondérant. À l'extérieur de la couche limite, on considère l'écoulement comme étant laminaire. L'épaisseur de la couche limite (notée  $\delta$ ) est définie comme la distance à partir de la paroi pour laquelle la vitesse est égale à 99 % de la vitesse maximale tel que présenté à la figure (3.2).

Si on regarde plus en détails la distribution de la vitesse moyenne à l'intérieur de la couche limite pour des écoulements laminaire et turbulent, on remarque que le profil de vitesse turbulent semble être non-nul à la paroi (on a  $|\mathbf{u}|/U_c = 0.5$  à  $y = 0$ ). En fait la vitesse diminue lentement vers  $|\mathbf{u}| = 0$  pour  $0.05 \leq y/\delta \leq 1.00$  et décroît rapidement à  $|\mathbf{u}| = 0$  pour  $0.00 \leq y/\delta < 0.05$  (voir figure 3.3).

Ce comportement ressemble à un écoulement laminaire constitué de deux fluides

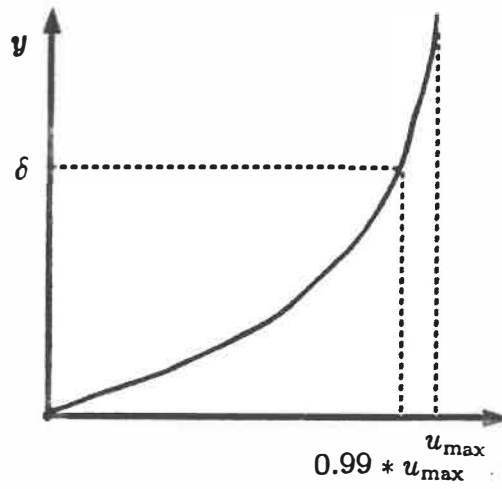


Figure 3.2: Épaisseur de la couche limite

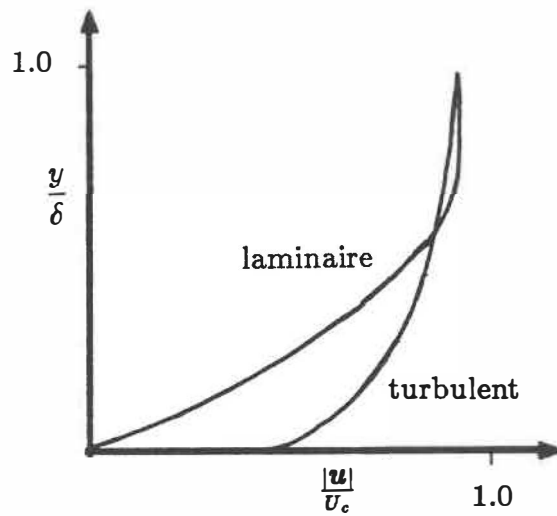


Figure 3.3: Profils de vitesse dans la couche limite

superposés. On suppose que le fluide dans la partie interne est caractérisé par une faible viscosité ( $\mu_1$ ) et que celui dans la partie externe possède une plus grande viscosité ( $\mu_2$ ). L'équilibre des forces agissant sur le fluide entraîne que le cisaillement à l'interface des deux zones doit être continu:

$$\tau_{w_1} = \mu_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)_{\text{interface}} = \mu_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{\text{interface}} = \tau_{w_2}$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont les vitesses moyennes dans les parties externe et interne respectivement.

Le gradient de vitesse doit alors varier brusquement au point de rencontre des deux couches selon le rapport des viscosités  $\mu_1/\mu_2$  ([46]).

La longueur de mélange est spécifiée par analogie avec cette subite variation de vitesse entre les deux zones de l'écoulement dans la couche limite. Un modèle composé de fonctions continues par morceaux et définies sur chacune des parties semble bien décrire la distribution de la viscosité turbulente d'un écoulement dans un tuyau. Dans la zone interne (près de la paroi), où les effets visqueux sont les plus importants, la longueur de mélange varie rapidement. Dans la zone externe de la couche limite la longueur de mélange est donnée de façon plus uniforme.

Deux modèles de ce type en particulier ont été développés à partir de mesures expérimentales et sont présentés ci-dessous. On les appelle "modèles à deux couches". Ce sont les modèles qu'on a choisi de tester dans le canal de la pompe.

### 3.2.1 Modèle de Patankar-Spalding

Le modèle de longueur de mélange proposé par Patankar et Spalding (voir référence [47]) a été développé pour des écoulements avec couche limite à la paroi. Il suggère une fonction linéaire pour la zone interne et une valeur constante dépendant de l'épaisseur de la couche limite pour la zone externe. La distribution de la longueur de mélange est illustrée par la figure (3.4).

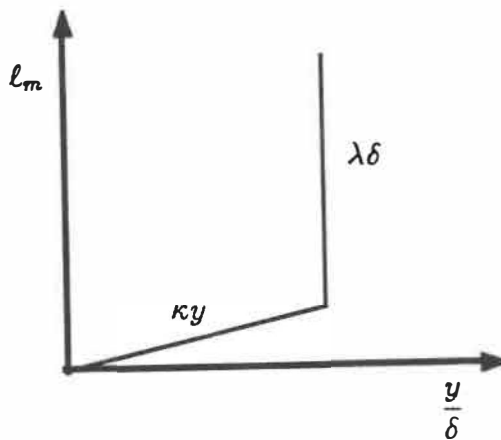


Figure 3.4: Modèle de longueur de mélange de Patankar-Spalding

La détermination des constantes  $\kappa$  et  $\lambda$  a été faite à l'aide de nombreuses observations. Patankar et Spalding ont utilisé les valeurs empiriques suivantes:

$$\kappa = 0.41 \quad (\text{constante de Von Karman})$$

$$\lambda = 0.09$$

Il s'agit donc d'un modèle très simple qui ne demande pas beaucoup de calculs.

### 3.2.2 Modèle de Nikuradse-Van Driest

Le modèle de Nikuradse est valide pour les écoulements complètement développés dans les conduites [48]. La répartition de la longueur de mélange est donnée par la relation

$$\ell_m = R \left[ 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right]$$

où  $R$  est le rayon de la conduite

et  $y$  est la distance à la paroi

Cette fonction se rapproche de la fonction linéaire  $\ell_m = \kappa y$  dans la zone interne mais pour la région très près du mur on doit modifier la relation de la longueur de mélange en utilisant la fonction d'amortissement de Van Driest:

$$\ell_m = \kappa y \left[ 1 - e \left( -\frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{A \nu} \right) \right]$$

où  $\tau_w$  est le cisaillement à la paroi

$$A = 26$$

et  $\nu$  est la viscosité cinématique:  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Les fonctions de longueur de mélange de ce modèle exigent plus de travail pour les évaluer mais la distribution est plus uniforme comme le démontre la figure (3.5).

Dans la prochaine section on montrera comment on procède à l'évaluation de ces modèles de longueur de mélange dans la pompe.



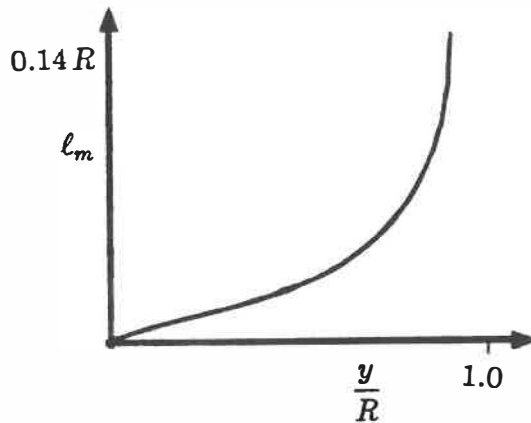


Figure 3.5: Longueur de mélange de Nikuradse-Van Driest

### 3.3 Implantation du modèle de turbulence pour la pompe

Le canal de la pompe est une conduite annulaire à section variable inclinée présentant une couche limite sur le carter et une autre sur le moyeu qui ne sont pas symétriques. On distingue la couche limite supérieure et la couche limite inférieure telles qu'illustrées à la figure (3.6):

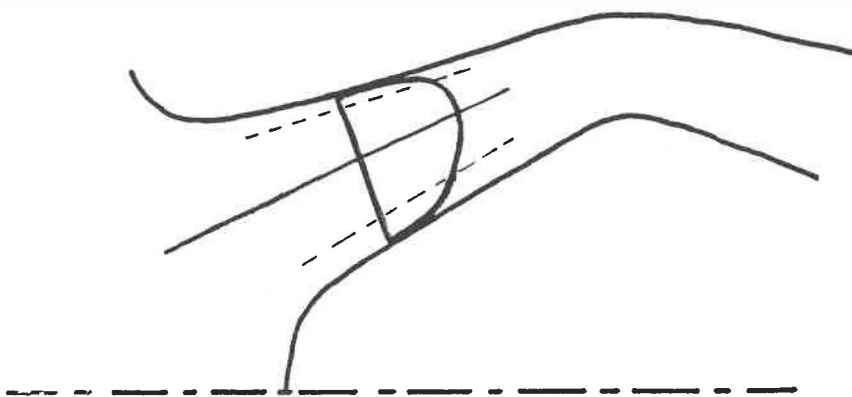


Figure 3.6: Couches limite supérieure et inférieure dans la canal de la pompe

Dans chaque couche limite on calcule la longueur de mélange dans les zones interne et externe pour les deux modèles considérés. La viscosité turbulente est alors évaluée et ajoutée à la viscosité du fluide pour former la viscosité effective dans les équations moyennes du mouvement. Rappelons que

$$\overline{\mu}_t = \rho \ell_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

La viscosité efficace moyenne de l'écoulement turbulent est donnée par:

$$\overline{\mu}_e = \overline{\mu} + \overline{\mu}_t$$

Pour connaître la variation de la vitesse dans la direction transversale à l'écoulement pour l'ensemble du domaine de calcul, on se sert des valeurs déjà calculées de la solution à l'itération précédente de la procédure de résolution. On connaît donc une approximation de la vitesse aux noeuds du maillage. La figure suivante représente un maillage sur notre domaine de calcul.

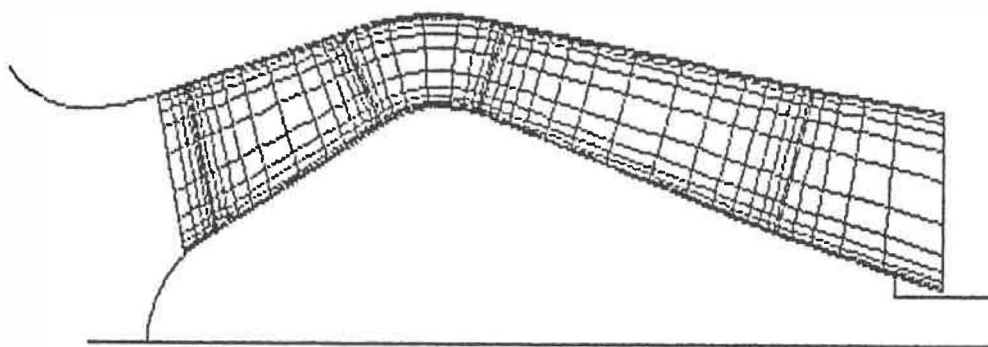


Figure 3.7: Maillage du canal de la pompe

Dans notre procédure de solution on a nommé "station" l'ensemble des noeuds situés sur une ligne du maillage transversale à l'écoulement.

Une façon d'évaluer la variation de vitesse dans la couche limite est de prendre la double contraction du tenseur de cisaillement et du gradient de vitesse telle que donné par l'expression suivante:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right| = \left[ (\mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}(\mathbf{u})^T) : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'expression à évaluer pour un problème axisymétrique est alors:

$$\begin{aligned} & \left[ (\mathbf{grad}(\mathbf{u}) + \mathbf{grad}(\mathbf{u})^T) : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ & \left[ 2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Notons que pour un écoulement uniforme en 1-D cette expression se réduit à:

$$\left| \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|$$

Pour évaluer la valeur de la viscosité turbulente à chacun des noeuds du maillage il faut maintenant calculer la longueur de mélange à l'aide d'un des modèles présentés précédemment. On procède station par station, c'est-à-dire pour chaque ligne de noeuds perpendiculaire à l'écoulement. Les couches limite inférieure et supérieure sont séparées et traitées individuellement. Les modèles nécessitent de connaître d'autres caractéristiques de l'écoulement telles l'épaisseur de la couche limite ou le cisaillement à la paroi. Pour les deux modèles à considérer on présentera les façons qu'on a utilisé pour calculer la longueur de mélange et les variables nécessaires à son évaluation.

### 3.3.1 Modèle de Patankar-Spalding

Le modèle de longueur de mélange de Patankar-Spalding utilise deux relations linéaires pour les zones interne et externe. Les fonctions pour chacune de ces zones sont:

$$\text{zone interne: } \ell_m = \kappa y$$

$$\text{zone externe: } \ell_m = \lambda \delta$$

À chacune des stations on extrait les profils de vitesse pour chaque couche limite à partir de la vitesse maximale au centre de l'écoulement. On obtient ainsi les deux couches avec la vitesse du fluide en fonction de la distance  $y$ . Il faut alors évaluer l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  pour chacun des profils. La procédure se résume aux 2 étapes suivantes:

- Trouver le point  $k$  tel que  $(0.99 u_{\max}) < u^k < (u_{\max})$ .
- Interpoler linéairement entre  $y^{k-1}$  et  $y^k$  sur  $u$  pour trouver  $\delta$ .

La figure (3.8) illustre la façon de calculer  $\delta$ .

On peut maintenant calculer la longueur de mélange du modèle de Patankar-Spalding. Notons qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la limite de la zone interne et de la zone externe de la couche limite, on n'a qu'à évaluer les deux fonctions pour tous les points de la station et prendre le minimum.

A l'extérieur de la couche limite la longueur de mélange est constante; pour faire l'union entre les deux couches, on interpole linéairement entre les valeurs externes pour les points situés dans le coeur de l'écoulement.

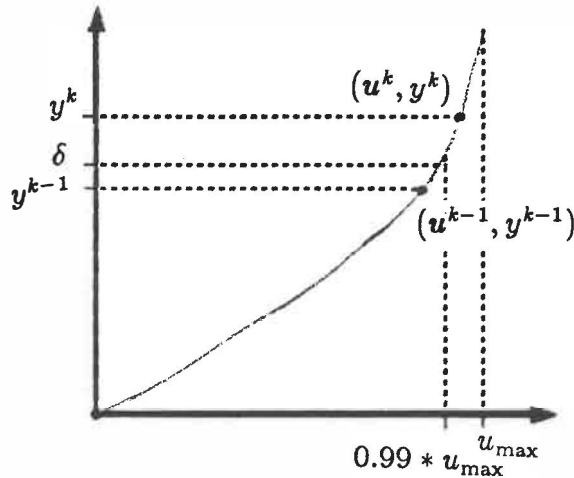


Figure 3.8: Calcul de  $\delta$  dans le canal de la pompe

La longueur de mélange étant connue à chaque point de la station, il est alors possible de connaître la viscosité turbulente aux noeuds, puis on passe à la station suivante.

### 3.3.2 Modèle de Nikuradse-Van Driest

La procédure de résolution pour le modèle de Nikuradse-Van Driest est la même que pour le modèle de Patankar-Spalding. On commence par séparer les profils de vitesse perpendiculaires de chaque couche en fonction de la distance à la paroi et on calcule la longueur de mélange dans la couche limite. Rappelons que les fonctions pour les zones interne et externe de ce modèle sont:

$$\begin{aligned} \text{zone interne: } \ell_m &= \kappa y \left[ 1 - e^{\left( -\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\Lambda\nu} \right)} \right] \\ \text{zone externe: } \ell_m &= R \left[ 0.14 - 0.08 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

On connaît  $R$  et  $y$ ,  $\nu$  est une donnée du problème. La figure suivante illustre comment on prend les mesures de  $R$  et  $y$ .

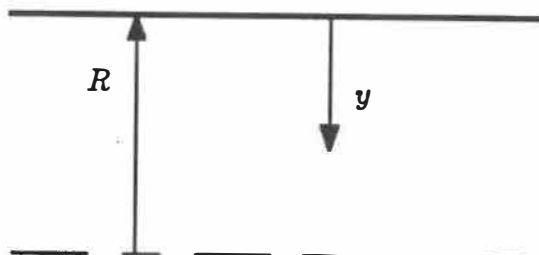


Figure 3.9: Mesure de  $R$  et  $y$  dans une conduite

Il faut cependant évaluer le cisaillement à la paroi qui est habituellement donné par l'expression suivante:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{y=0}$$

On peut faire une approximation discrète de la dérivée de la composante de vitesse axiale à la paroi dans la direction transversale à l'écoulement par:

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{u_z^{(1)}}{y^{(1)}}$$

où  $u_z^{(1)}$  est la vitesse axiale au premier noeud de la station après la paroi et  $y^{(1)}$  est la distance à la paroi du premier noeud de la station

Avec cette estimation du cisaillement à la paroi on peut évaluer la fonction de la longueur de mélange dans la zone interne de la couche limite. On compare ensuite avec celle de la zone externe pour prendre le minimum des deux.

Une comparaison des résultats obtenus en utilisant ces deux modèles pour la prédiction d'écoulements turbulents dans le cas-test d'un canal droit et du canal de la pompe est présentée dans le chapitre des résultats.

Nous allons plutôt nous attarder à présent sur la méthode de résolution des équations moyennes du passage développées au chapitre précédent. La technique utilisée est dérivée du calcul des variations dont la forme de Ritz-Galerkin nous amène à ce qui est couramment désignée par "méthode des éléments finis".

# Chapitre 4

## Résolution par éléments finis

La méthode des éléments finis permet de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux frontières. Elle se base sur le principe de formulation variationnelle discutée dans la référence [29].

L'écoulement dans le canal de la pompe subit de fortes variations en vitesse et en pression lors du passage entre une région du domaine sans pales et une avec pales, ce qui provoque des discontinuités dans les dérivées de ces fonctions. Afin d'assurer la continuité et l'équilibre des forces sur tout le domaine nous allons traiter le terme de force de l'équation du mouvement. Dans la section suivante nous verrons comment surviennent les discontinuités dans cette équation et nous proposerons une solution par la décomposition du terme de force.



## 4.1 Traitement du terme de force

Lors du développement des équations moyennes du passage (voir chapitre 2) on a introduit la contrainte de tangence à la surface de cambrure des pales afin de fermer le système d'équations. L'imposition d'une telle contrainte peut entraîner des discontinuités dans les dérivées des fonctions de l'écoulement moyen  $\bar{u}$  et  $\bar{p}$ . Un exemple de discontinuité dans la dérivée de  $u$  est donné dans la figure (4.1) pour le cas d'un écoulement bidimensionnel avec une série des pales droites inclinées.

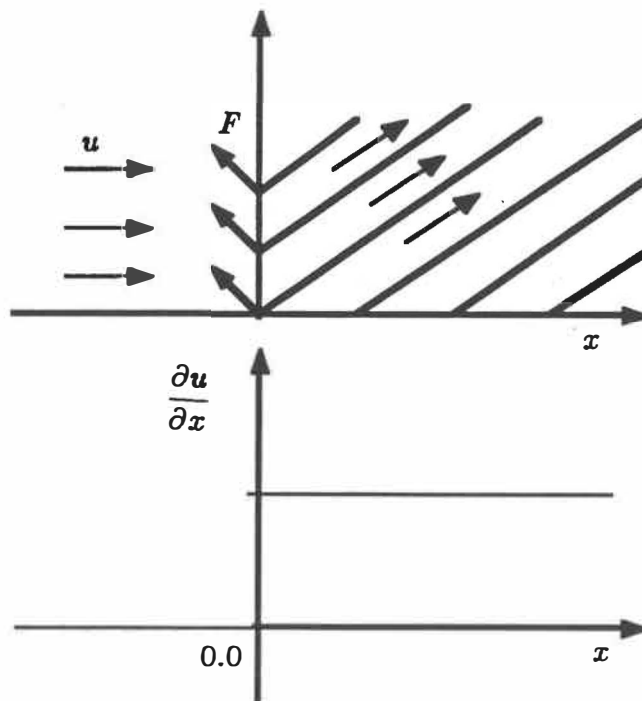


Figure 4.1: Écoulement unidimensionnel avec pales inclinées

À cause de la contrainte de tangence aux pales (l'écoulement doit être perpendiculaire à la normale  $\mathbf{s}$ ) le vecteur de vitesse  $\mathbf{u}$  est dévié sur le bord  $\Gamma$  des pales et la dérivée  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  passe de 0 à une valeur non-nulle.

La contrainte de tangence doit être vérifiée pour toute la région des pales ( $\Omega_0$ ) ainsi que sur la frontière ( $\Gamma$ ). La figure (4.2) illustre la subdivision du domaine de calcul ( $\Omega$ ) de la pompe en régions avec pales et sans pales avec leurs frontières.

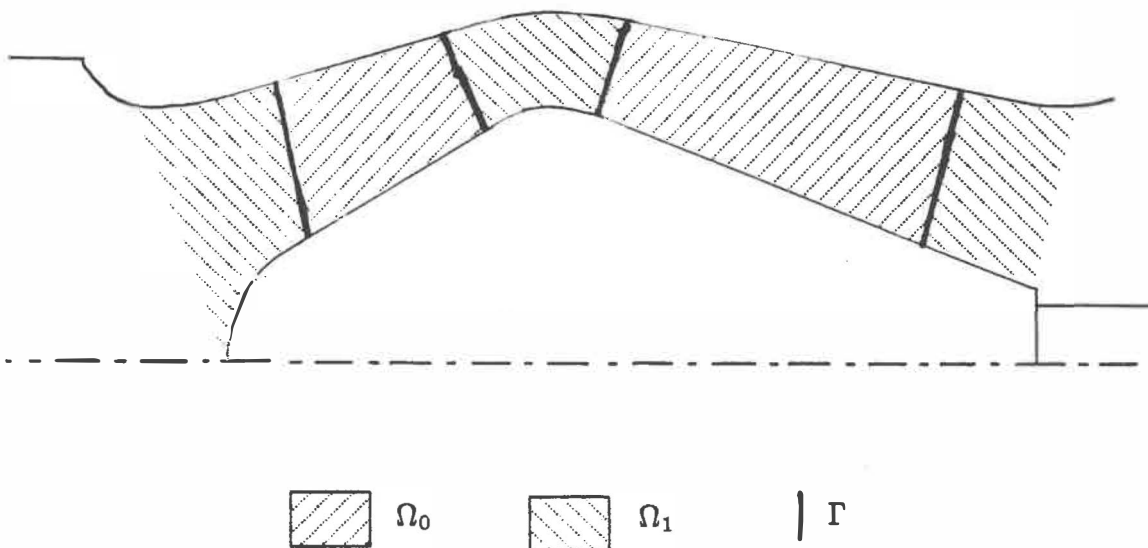


Figure 4.2: Subdivision du domaine de calcul

On a les relations suivantes:

- Le domaine de calcul complet est la somme des deux régions:  $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$ .
- Les frontières des domaines  $\Omega$ ,  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$  respectivement.

- La frontière  $\Gamma$  est la partie du bord des pales n'appartenant pas à la frontière du domaine  $\Omega$ :  $\Gamma = (\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1) \setminus \partial\Omega$ .

Afin de manipuler les discontinuités aisément, toutes les dérivées sont prises au sens des distributions. La dérivée première suivant cette notion est de la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\} + n_x \Delta(\mathbf{u}) \delta_\Gamma \quad (4.1)$$

où  $\{\cdot\}$  est la dérivée au sens classique

$n_x$  est la composante dans la direction  $x$  de la normale  $\mathbf{n}$

$\Delta(\cdot)$  est le saut de la fonction sur la frontière  $\Gamma$  dans la direction de  $n_x$ , ie. la valeur après avoir passer la frontière moins la valeur avant

et  $\delta_\Gamma$  est une masse de Dirac sur la frontière  $\Gamma$ .

Étant donné que la vitesse  $\mathbf{u}$  est continue, il n'y a pas de saut de la fonction sur la frontière  $\Gamma$ . Le second terme du membre de droite de l'équation (4.1) est donc nul et la première dérivée au sens des distributions est la même que la dérivée classique. Le terme de transport de l'équation moyenne de conservation du mouvement (membre de gauche de l'équation (2.34)) faisant intervenir les dérivées d'ordre 1 est donc continu.

Le terme de diffusion moyen ( $div(\sigma^*)$ ) comporte des dérivées du second ordre à cause du tenseur de cisaillement  $\tau$  dont on prend la divergence (voir équation (2.21)). La seconde dérivée au sens des distributions d'une fonction continue est

donnée par:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right\} + n_x \Delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \delta_\Gamma \quad (4.2)$$

Cependant comme la dérivée première n'est pas nécessairement continue, le dernier terme du membre de droite de l'équation (4.2) n'est pas nul et la dérivée seconde au sens des distributions comporte un saut. Ce qui entraîne que le terme de diffusion moyen n'est pas continu.

Le terme de diffusion moyen s'exprime alors comme (voir référence [49]):

$$div(\sigma^*) = \{div(\sigma^*)\} + n_x \Delta(\sigma^*) \delta_\Gamma$$

Le premier terme du membre de droite est la divergence au sens classique et le second terme est appelé la simple couche.

Le saut du tenseur moyen des contraintes est donné par:

$$\Delta(\sigma^*) = \Delta(\bar{p})\mathbf{g} + \bar{\mu} \Delta(\tau(\bar{\mathbf{u}}))$$

On déduit que ni la pression ni le tenseur de cisaillement ne sont continus sur la frontière  $\Gamma$ .

Comme pour tout système en équilibre il doit exister une force dans l'équation moyenne de conservation du mouvement qui équilibrera l'effet de la simple couche sur la frontière de la région des pales ( $\Gamma$ ). Le seul terme pouvant rétablir l'équilibre est le terme de force  $f$ , on a donc adopté la décomposition suivante: (voir référence [4])

$$\boxed{f = f_v + f_\Gamma \delta_\Gamma} \quad (4.3)$$

où  $f_V$  est la fonction de force définie à l'intérieur de la région des pales  
 $f_\Gamma$  est la fonction de force sur la frontière  $\Gamma$   
 et  $\delta_\Gamma$  est une masse de Dirac sur  $\Gamma$ .

L'équilibre entre les forces s'exprime alors de la façon suivante:

$$n_x \Delta(\sigma) + f_\Gamma s_c = 0$$

Maintenant que la continuité des fonctions est assurée sur tout le domaine  $\Omega$ , on peut réécrire l'équation moyenne de conservation du mouvement et la contrainte de tangence sous la forme qu'on résoudra.

## 4.2 Forme des équations à résoudre

L'équation moyenne de la conservation du mouvement (2.34) avec l'expression pour le terme de force et la divergence du terme moyen de diffusion pris au sens des distributions prend la forme:

$$\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \{div(\sigma^*)\} + n_x \Delta(\sigma^*) \delta_\Gamma + (f_V + f_\Gamma \delta_\Gamma) s_c \quad (4.4)$$

Le terme de force étant décomposé en deux parties, la première valide à l'intérieur des pales et l'autre sur le bord, il faut s'assurer que la contrainte de tangence est vérifiée sur toute la région des pales. On sépare donc aussi la contrainte en deux parties, une pour la vitesse à l'intérieur de  $\Omega_0$  et l'autre sur la frontière  $\Gamma$ :

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot s_c + K) \delta_\Gamma = 0 \quad (4.5)$$

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot s_c + K = 0 \quad (4.6)$$

L'équation de la continuité n'est pas modifiée, on a toujours:

$$\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (4.7)$$

La forme faible peut maintenant être développée pour ensuite arriver à la formulation des éléments finis. Notons que le processus est le même que pour les équations classiques de Navier-Stokes, mais on fera la présentation avec les équations moyennes qu'on a obtenues précédemment.

### 4.3 Forme faible des équations

La forme faible des équations moyennes du mouvement et de la continuité ainsi que des contraintes de tangence (équations 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7) s'obtient par une méthode dérivée des résidus pondérés de Galerkin. Les inconnues du système sont la vitesse et la pression moyennes ainsi que les forces de surface et de volume que nous allons traiter ensemble pour l'instant, on cherche donc les valeurs des variables  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{p}$  et  $f$ .

On substitue une approximation de la solution  $(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{p}^*, f^*)$  dans les équations ce qui produit un résidu pour chaque équation:

$$\text{Équation du mouvement} \quad : \quad R_m(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{p}^*, f^*) \quad = \quad r_m$$

$$\text{Équation de la Continuité} \quad : \quad R_c(\bar{\mathbf{u}}^*) \quad = \quad r_c$$

$$\text{Contrainte de tangence} \quad : \quad R_t(\bar{\mathbf{u}}^*) \quad = \quad r_t$$

Les résidus sont une mesure de la qualité de l'approximation de la solution.

La méthode de Galerkin consiste à annuler ces résidus en les rendant orthogo-

naux à un certain ensemble de fonctions appelées fonctions test qui sont à définir. On fait le produit des résidus par les fonctions test et on les intègre sur leur domaine de définition.

Soient  $\delta\bar{u}$ ,  $\delta\bar{p}$ ,  $\delta f$  les fonctions test correspondant à  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$ ,  $f$  respectivement. La fonction  $\delta\bar{u}$  est associée à la variation de l'équation moyenne du mouvement,  $\delta\bar{p}$  à celle de la continuité et  $\delta f$  à la contrainte de tangence. Nous allons développer la forme faible de chacune de ces équations séparément.

### 4.3.1 Forme faible de l'équation du mouvement

On multiplie l'équation (4.4) par la fonction test  $\delta\bar{u}$  et on intègre sur le domaine de définition de chaque terme, ie.  $\Omega$  pour le terme de transport moyen,  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  pour le terme de diffusion moyen au sens classique ( $\sigma^*$  étant discontinu il ne peut être défini sur la frontière  $\Gamma$ ),  $\Omega_0$  pour le terme de force  $f_V$  et  $\Gamma$  pour le saut du tenseur des contraintes et la force sur la frontière  $f_\Gamma$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}) \cdot \delta\bar{u} \, d\Omega &= \sum_{i=0}^1 \int_{\Omega_i} (\text{div}(\sigma^*)) \cdot \delta\bar{u} \, d\Omega_i + \int_{\Gamma} \Delta(\sigma^*) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\bar{u} \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_0} f_V s_c \cdot \delta\bar{u} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma} f_\Gamma \mathbf{n} \cdot \delta\bar{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.8)$$

On fait l'intégrale par parties du terme de diffusion moyen afin de répartir les dérivées d'ordre 2 de la fonction  $\bar{u}$  (à cause du terme  $\text{div}(\sigma^*)$ ) sur chacune des fonctions  $\bar{u}$  et  $\delta\bar{u}$  à l'aide du théorème de la divergence:

$$\int_{\Omega_i} (\text{div}(\sigma^*)) \cdot \delta\bar{u} \, d\Omega_i = - \int_{\Omega_i} \sigma^* : \text{grad}(\delta\bar{u}) \, d\Omega_i + \int_{\partial\Omega_i} \sigma^* \cdot \mathbf{n} \cdot \delta\bar{u} \, d\omega_i \quad (4.9)$$

où  $d\omega_i$  est une portion de la frontière  $\partial\Omega_i$ .

Introduisons la définition des forces de traction sur les bord des pales pour le dernier terme de cette équation. Il s'agit de conditions aux frontières naturelles qui doivent être connues pour le problème traité. Les tractions (notées  $t_s$ ) sont données par la contraction du tenseur des contraintes et du vecteur normal au bord de la pale et orienté vers l'extérieur:

$$t_s = \sigma^* \cdot n$$

En passant d'une région avec pales ( $\Omega_0$ ) à une région sans pales ( $\Omega_1$ ) l'écoulement subit un saut dans les valeurs des tractions. Notons  $t_{s-}$  la valeur de la traction dans  $\Omega_0$  et  $t_{s+}$  la traction dans  $\Omega_1$ .

Alors le dernier terme de l'intégrale du terme de diffusion (équation (4.9)) se ramène à la forme:

$$\int_{\partial\Omega_0} t_{s-} \cdot \delta\bar{u} \, d\omega_0 + \int_{\partial\Omega_1} t_{s+} \cdot \delta\bar{u} \, d\omega_1$$

La figure (4.3) présente un cas simple de jonction entre les deux régions pour un écoulement dans un canal droit. On remarque les normales au bord de chaque région ( $n_0$  et  $n_1$ ) et les flèches indiquant le sens de parcours anti-horaire de la frontière  $\Gamma$  pour les intégrales curvilignes.

On note aussi que l'union des frontières des deux régions  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  donne la frontière du domaine entier  $\delta\Omega$  plus le bord de la pale  $\Gamma$ :

$$\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 = \partial\Omega \cup \Gamma$$

Alors l'intégrale des tractions sur les bords peut s'exprimer de cette façon:

$$\int_{\partial\Omega} t_s \cdot \delta\bar{u} \, d\omega + \int_{\Gamma^-} t_{s-} \cdot \delta\bar{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma^+} t_{s+} \cdot \delta\bar{u} \, d\Gamma$$



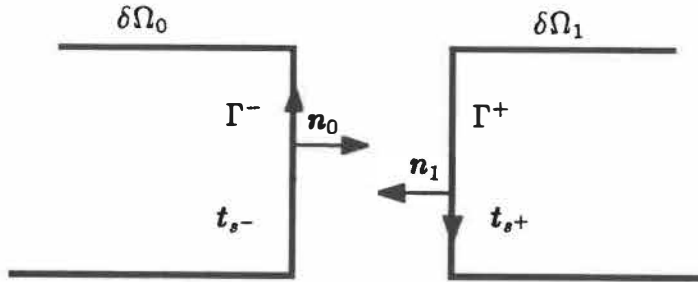


Figure 4.3: Tractions de surfaces sur la frontière  $\Gamma$

La frontière  $\Gamma$  étant parcourue en sens opposé pour chaque région, on inverse le signe de l'intégrale sur  $\Gamma^+$  pour avoir la normale  $\mathbf{n}_0$  dans le même sens que  $\mathbf{n}_1$ . Notons que c'est la direction qu'on a défini pour le passage de la frontière  $\Gamma$  par le fluide. On peut maintenant écrire l'intégrale des tractions de la façon suivante:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_s \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{t}_{s-} - \mathbf{t}_{s+}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma$$

Adoptons la notation suivante pour le saut des tractions sur la frontière  $\Gamma$ :

$$[\mathbf{t}_s] = \mathbf{t}_{s-} - \mathbf{t}_{s+}$$

Alors l'équation (4.8) prend la forme:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega &= - \sum_{i=0}^1 \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{grad}(\delta \bar{\mathbf{u}}) \, d\Omega_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}_s \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\omega \\ &+ \int_{\Gamma} [\mathbf{t}_s] \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \Delta(\boldsymbol{\sigma}^*) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_0} f_V \mathbf{s}_c \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma} f_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il faut remarquer que le saut du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^*$  a été défini à la page 84 comme étant la valeur du tenseur après avoir passé la frontière  $\Gamma$  moins

la valeur avant. On a donc:

$$\Delta(\sigma^*) = \sigma^*_+ - \sigma^*_-$$

En faisant la contraction avec le vecteur normal  $\mathbf{n}$ , on retrouve l'expression des tractions de surface:

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma^*) \cdot \mathbf{n} &= \sigma^*_+ \cdot \mathbf{n} - \sigma^*_- \cdot \mathbf{n} \\ &= t_{s+} - t_{s-} \\ &= - [t_s] \end{aligned}$$

Donc les deux intégrales sur  $\Gamma$  du saut de  $\sigma^*$  et des tractions s'annulent.

La double contraction du tenseur des contraintes par le gradient de la fonction test  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  peut être développée de la façon suivante (voir annexe A):

$$\sigma^* : \mathbf{grad}(\delta \bar{\mathbf{u}}) = - \bar{p} \operatorname{div}(\delta \bar{\mathbf{u}}) + \mu \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad}(\delta \bar{\mathbf{u}})$$

La forme faible de l'équation de conservation du mouvement s'écrit finalement sous la forme:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [(\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} - \bar{p} \operatorname{div}(\delta \bar{\mathbf{u}}) + \mu \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad}(\delta \bar{\mathbf{u}})] d\Omega \\ &- \int_{\Omega_0} f_v s_c \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Omega_0 - \int_{\Gamma} f_{\Gamma} \mathbf{n} \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\delta\Omega} t_s \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Forme faible de la continuité

Soit  $\delta \bar{p}$  la fonction test de la pression, comme l'équation de la continuité est définie sur tout le domaine, on peut faire l'intégrale sur  $\Omega$  en entier. En multipliant par  $\delta \bar{p}$  l'équation (4.7) et en effectuant l'intégrale, on obtient une forme bilinéaire qu'il faut minimiser pour arriver à la solution. La divergence de  $\bar{\mathbf{u}}$  ne comportant

que des dérivées d'ordre 1, on a pas à appliquer l'intégration par parties pour distribuer les dérivées sur  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\delta\bar{\mathbf{u}}$ . La forme faible de l'équation de la continuité est donc tout simplement:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\bar{\mathbf{u}}) \delta\bar{p} \, d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

### 4.3.3 Forme faible des contraintes de tangence

On a décomposé le terme de force en deux parties et pour chacun de ces termes on a aussi séparé la contrainte de tangence dans la région des pales pour que cette restriction soit vérifiée partout. Il y a donc deux inconnues de force, une à l'intérieur de la pale, l'autre sur le bord commun à deux régions avec et sans pales. Pour chacune de ces fonctions on a besoin d'une fonction test. Soient  $\delta f_V$  la fonction test de la contrainte dans  $\Omega_0$  et  $\delta f_{\Gamma}$  celle pour la contrainte sur le bord  $\Gamma$ . La forme faible des équations des contraintes s'obtient aussi facilement que pour l'équation de la continuité:

$$\int_{\Omega_0} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K) \delta f_V \, d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K) \delta f_{\Gamma} \, d\Gamma = 0 \quad (4.14)$$

Les équations (4.8, 4.12, 4.13, et 4.14) forment ce qu'on appelle la formulation mixte car la forme faible est fonction de toutes les inconnues du système:  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{p}$ ,  $f_V$  et  $f_{\Gamma}$ . On a déjà discuté au premier chapitre d'une formulation qui permet de diminuer le nombre d'inconnues du système tout en permettant de récupérer les valeurs des autres variables à partir de la solution calculée. C'est la formulation pénalisée que l'on présentera dans la prochaine section.

## 4.4 Formulation Pénalisée des équations

La formulation pénalisée consistante des équations de Navier-Stokes élimine la variable de pression de l'équation du mouvement en incorporant la contrainte d'incompressibilité (équation de la continuité) pénalisée. La forme de l'équation à résoudre est alors plus compacte et l'expérience démontre que les résultats obtenus sont aussi satisfaisants tout en nécessitant moins de calculs. On retrouve la valeur de la pression par l'expression de la continuité pénalisée.

Pour les équations moyennes que nous traitons, la formulation pénalisée comprend les conditions d'incompressibilité et de tangence aux pales. Cette formulation est décrite en détails dans la référence [50]. On pénalise les variables de pression et de forces, appelons le facteur de pénalisation  $\beta$ . Les relations suivantes sont vérifiées de façon approximative dans le même ordre de grandeur que le facteur de pénalisation:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= -\frac{1}{\beta} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}) \\ f_{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{\beta} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K) \\ f_{\Gamma} &= -\frac{1}{\beta} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K)\end{aligned}$$

On prend  $\beta \simeq 10^{-8}$  dans la procédure de solution.

La forme pénalisée de l'équation (4.11) est :

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} [(\rho (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\beta} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}) \operatorname{div}(\delta \bar{\mathbf{u}}) + \mu \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad}(\delta \bar{\mathbf{u}})] d\Omega \\ & + \int_{\Omega_0} \frac{1}{\beta} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K) \delta \bar{\mathbf{u}} d\Omega_0 + \int_{\Gamma} \frac{1}{\beta} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s}_c + K) \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\delta\Omega} \mathbf{t}_s \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\omega = 0\end{aligned}\tag{4.15}$$

La méthode des éléments finis est une façon de construire les fonctions test

pour minimiser le résidu. On approxime la solution sur chaque élément par des polynômes qu'on appelle fonctions d'interpolation. Nous allons expliquer le choix de fonctions qui a été fait.

## 4.5 Choix des fonctions d'interpolation

On a employé la formulation de Bubnov-Galerkine qui utilise les mêmes fonctions d'interpolation que les fonctions test.

La condition de Brezzi dicte le choix des fonctions d'approximation pour la vitesse et la pression des équations de Navier-Stokes. Un élément avec des fonctions quadratiques pour l'approximation de la vitesse et linéaires pour la pression répond à cette condition et fournit les meilleurs résultats. Les fonctions linéaires pour la pression ne sont pas tenues d'être continues puisqu'on a montré que la pression pouvait comporter des discontinuités dans le passage des pales.

Le choix de la fonction d'interpolation pour les termes de force des pales est plus délicat car ces termes sont très irréguliers. La contrainte de tangence est une condition très sévère sur l'écoulement, elle le détermine même complètement dans le cas unidimensionnel. On a trouvé que des fonctions constantes sur chaque élément est l'approximation la plus adéquate à l'intérieur des pales. Sur le bord des pales il a été nécessaire d'utiliser des fonctions quadratiques; on peut tenter d'expliquer cette différence par le fait que la satisfaction de la contrainte de tangence sur le bord des pales exige plus de degré de liberté pour  $f_{\Gamma}$  (voir référence [40]).

Les figures suivantes illustrent les types d'éléments utilisés sur les différentes

régions du domaine de calcul.

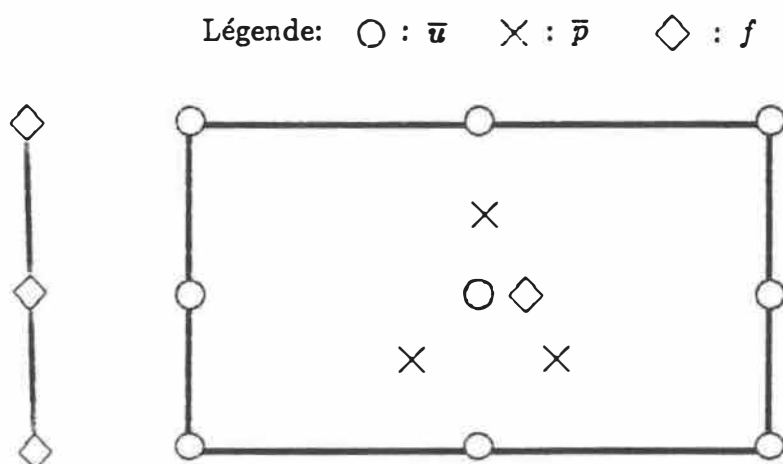


Figure 4.4: Élément de bord et de région avec pales

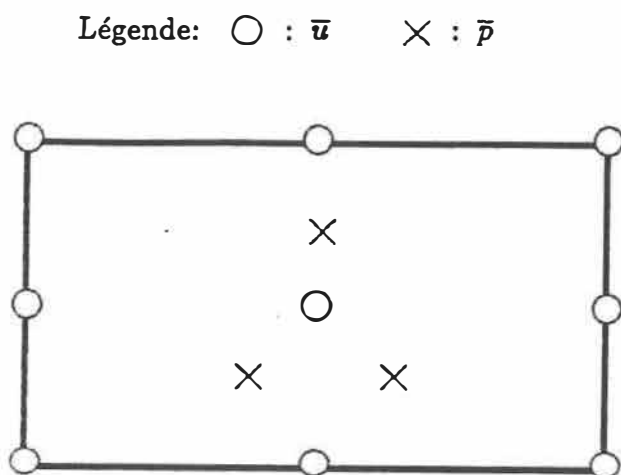


Figure 4.5: Élément de région sans pales

# Chapitre 5

## Résultats et discussion

Des calculs pour la prédiction de l'écoulement moyen turbulent dans la pompe ont été effectués avec le programme d'éléments finis développé par D. Pelletier et A. Garon (CADYF). Ce programme d'usage général résout les équations de Navier-Stokes moyennes avec le modèle de fermeture décrit au chapitre 2. Il utilise la forme faible pénalisée présentée au chapitre 4.

Les résultats disponibles jusqu'à maintenant étaient très satisfaisants pour les écoulements en régime laminaire (consulter les références [40], [39] et [4]). Dans ce travail une procédure de calcul permettant la simulation d'écoulements turbulents dans les machines rotatives basé sur le concept de viscosité turbulente a été incorporée. La description du modèle de turbulence utilisé est faite au chapitre 3.

Avant de procéder aux calculs dans la pompe, on a testé le modèle de turbulence sur des cas simples afin de s'assurer de la validité du modèle. On a d'abord simulé un écoulement turbulent dans un demi-canal droit (problème symétrique bi-

dimensionnel) puis dans le canal de la pompe sans les pales (problème axisymétrique sans tourbillon). Ces cas tests seront étudiés afin de démontrer le bien-fondé de l'utilisation du modèle de turbulence choisi. Puis on présentera les résultats dans la première section de la pompe incluant le rotor (problème axisymétrique avec tourbillon) et on fera la comparaison avec les données expérimentales disponibles pour cette partie.

## 5.1 Cas test 1: le demi-canal droit

La validation du modèle de turbulence a premièrement été faite sur un problème simple: un canal bidimensionnel avec un profil de vitesse symétrique dont on ne considère que la partie supérieure. Le maillage utilisé pour les calculs comporte 2 éléments dans la direction axiale et 9 dans la direction radiale. Comme on a utilisé des fonctions d'interpolation quadratiques sur les éléments, on compte 5 noeuds par 19 sur le maillage. Il est représenté à la figure 5.1.

On remarque que le maillage est resserré vers la paroi suivant une distribution géométrique afin de capter le plus possibles les effets turbulents dans la couche limite. Notons que les noeuds au bas du maillage se trouvent sur la ligne de symétrie du canal. On a défini la direction de l'écoulement de gauche à droite; le côté gauche du maillage est désigné par "entrée" et le côté droit par "sortie".

On suppose que l'écoulement est turbulent à l'entrée du canal et on a pris comme approximation du profil de vitesse turbulent à l'entrée la fonction expo-



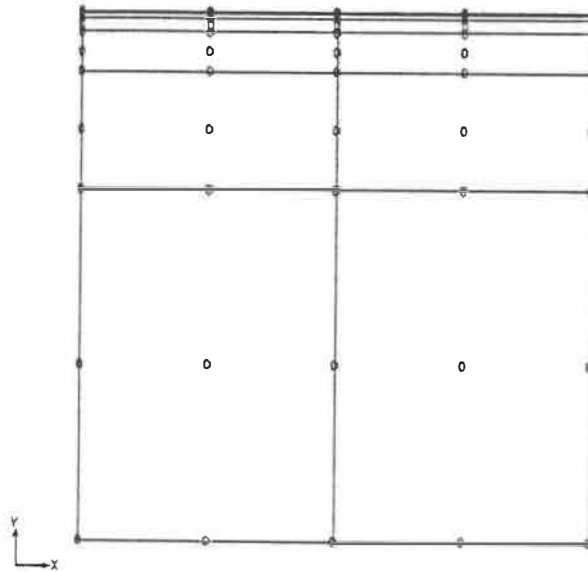


Figure 5.1: Maillage du demi-canal droit

entielle (voir référence [51]):

$$u_z = u_{\max} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{7}}$$

où  $u_{\max}$  est la vitesse maximale au centre

$r$  est la distance mesurée à partir de la paroi

et  $R$  est le rayon de la conduite

Ce qui correspond au profil de vitesse d'un écoulement turbulent à un nombre de Reynolds de 100 000.

Ce profil de vitesse turbulent est illustré dans la figure (5.2).

La longueur du canal ainsi que le rayon sont fixés à 1 unité, la vitesse au centre du canal est aussi fixée à 1 ( $u_{\max} = 1$ ). Par conséquent la viscosité cinématique  $\nu$

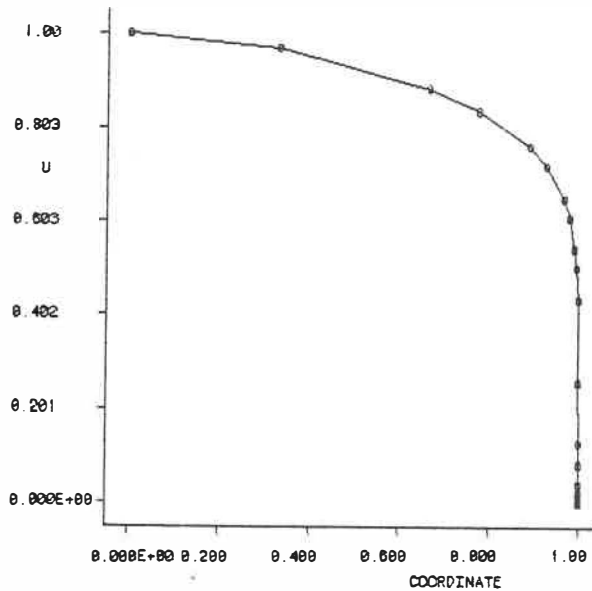


Figure 5.2: Profil de vitesse turbulent imposé à l'entrée du canal

est 0.00001 :

$$Re = \frac{U R}{\nu} = \frac{1}{10^{-5}} = 100\ 000$$

Le reste des conditions imposées aux frontières sont:

- Non-glissement à la paroi:  $u_x = u_y = 0$
- Symétrie sur l'axe:  $u_y = 0$
- Profil développé à la sortie:  $u_y = 0$

On a procédé aux calculs de viscosité turbulente avec les deux modèles de longueur de mélange présentés au chapitre 3: les modèles de Patankar-Spalding et de Nikuradse-Van Driest. Les valeurs des longueurs de mélange de chaque modèle à l'entrée du canal sont données dans la figure (5.3).

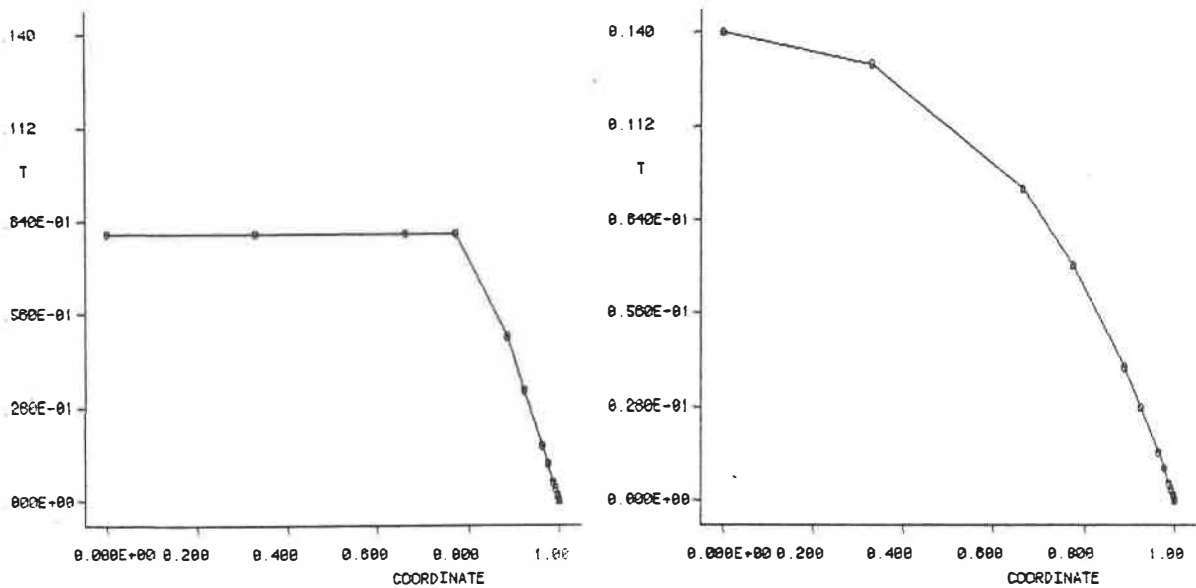


Figure 5.3: Longueurs de mélange à l'entrée du canal: i) Patankar-Spalding  
ii) Nikuradse-Van Driest

On remarque dans la figure de gauche les fonctions linéaires du modèle de Patankar-Spalding et la brusque variation entre les zones interne et externe de la couche limite (il n'y a pas de noeud au point où  $\kappa y = \lambda \delta$ , ce qui explique la droite entre les deux zones).

La figure de droite met en évidence la transition plus douce du modèle de Nikuradse-Van Driest, la distribution de la longueur de mélange est continue et on ne peut distinguer la limite des zones interne et externe. Cette apparente continuité est due à la fonction polynômiale de la zone externe et à la fonction exponentielle d'amortissement pour la zone interne (voir chapitre 3).

Notons que les valeurs maximales au centre de l'écoulement (points d'abscisse 0) sont 0.0802 et 0.14 pour les modèles de Patankar-Spalding et Nikuradse-Van Driest respectivement. La distribution de la longueur de mélange ne se fait

pas de la même façon pour les deux modèles. D'une part on a vu que le modèle de Patankar-Spalding est constitué de deux fonctions linéaires et dépend de l'épaisseur de la couche limite pour la zone externe. Ce modèle tient donc compte des variables de l'écoulement.

D'autre part, le modèle de Nikuradse-Van Driest ne dépend que du cisaillement à la paroi dans la fonction d'amortissement pour la zone interne. La longueur de mélange dans la zone externe étant donnée par un polynôme qui est une fonction de la distance à la paroi, la distribution de la longueur de mélange reste semblablement la même pour toutes les conditions d'écoulements. Ce modèle a été développé spécialement pour les conduites.

La comparaison des profils de vitesse imposés à l'entrée et calculés à la sortie nous donne une mesure de la qualité du modèle de turbulence. Si le profil se maintient tout au long du canal le caractère turbulent de l'écoulement est conservé.

La figure (5.4) présente les profils de vitesse à la sortie du canal calculées avec chacun des modèles de longueur de mélange.

Dans le cas présent les profils de vitesse obtenus à la sortie sont pratiquement identiques à celui donné à l'entrée. Les seules différences visibles sont la vitesse au centre qui est passée de 1.00 à 1.01 et les vitesses dans la zone interne qui subissent une légère accélération (les noeuds sont plus distancés les uns des autres près de la paroi). La figure (5.5) présente les contours de vitesse axiale dans le canal droit.

On voit bien l'épaississement du profil de vitesse à la paroi ce qui se traduit par celui de la couche limite. Notons que la valeur de la longueur de mélange du modèle de Patankar-Spalding nous permet de déduire l'épaisseur de la couche

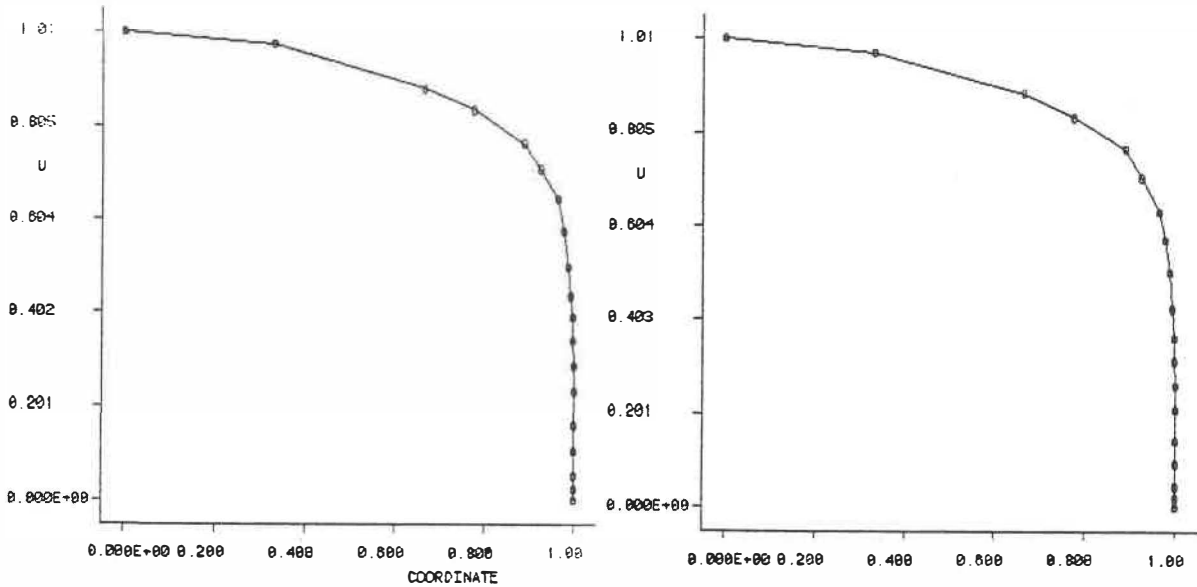


Figure 5.4: Profils de vitesse à la sortie du canal calculés avec: i) le modèle de Patankar-Spalding ii) le modèle de Nikuradse-Van Driest

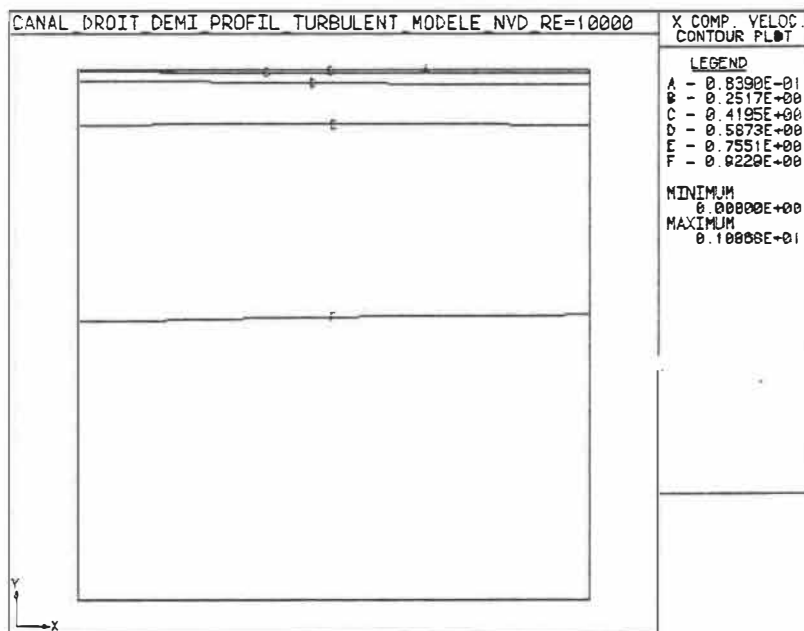


Figure 5.5: Contours de vitesse axiale dans le canal droit.

limite ( $\delta$ ). En effet, dans la zone externe de la couche limite la longueur de mélange est donnée par:

$$\ell_m = \lambda \delta \quad \text{avec} \quad \lambda = 0.09$$

À l'entrée du canal on a:

$$\ell_m = 0.0802 \quad \text{alors} \quad \delta = 0.891$$

Ces légères variations observées dans le comportement de fluide peuvent s'expliquer par le fait que le profil de vitesse imposé à l'entrée n'est pas exact et que l'écoulement oscille légèrement avant de se stabiliser. Il serait nécessaire de faire le calcul sur une grande longueur de canal par rapport au diamètre pour que le profil de vitesse soit totalement développé. Cet exemple est cependant suffisant pour vérifier le comportement du modèle de turbulence. On peut affirmer que l'écoulement turbulent est bien modélisé et que les deux modèles de longueur de mélange sont équivalents pour ce problème simple.

Nous allons poursuivre la validation du modèle de turbulence algébrique et la comparaison des modèles de longueur de mélange avec le deuxième cas-test: le canal de la pompe sans pales.

## 5.2 Cas-test 2: le canal de la pompe sans pales

On résout les équations moyennes dans le canal de la pompe sans tenir compte de l'effet des pales du rotor et du stator. Il s'agit d'un problème axisymétrique sans tourbillon ( $u_\theta = 0$ ). L'analyse des prédictions obtenues permettra de savoir si

le modèle de turbulence se comporte aussi bien pour ce type de problème et dans une géométrie plus complexe que le demi-canal droit.

Le maillage compte  $25 \times 18$  éléments, donc  $51 \times 37$  noeuds, tel que représenté à la figure (5.6).

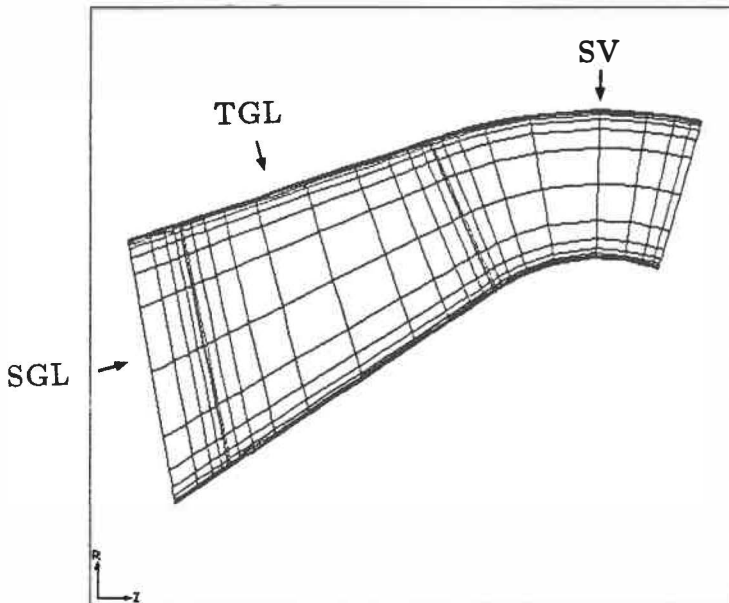


Figure 5.6: Maillage du canal de la pompe sans pales

On appelle SGL (pour Streamwise Grid Line) les lignes du maillage longitudinales à l'écoulement et TGL (pour Transverse Grid Line) les lignes du maillage transversales à l'écoulement. Notons la station TGL verticale au sommet du moyeu SV. On présentera des profils de vitesses calculés par notre résolveur à cet endroit.

Les conditions imposées aux frontières sont:

- Adhérence aux parois du moyeu et du carter:  $u_r = u_z = 0$
- Profil de vitesse plat à l'entrée parallèle aux SGL, calculé de façon à fournir le débit de la pompe au point de rendement maximum.

Les composantes axiale et radiale du profil de vitesse imposé à l'entrée sont illustrées à la figure (5.7).

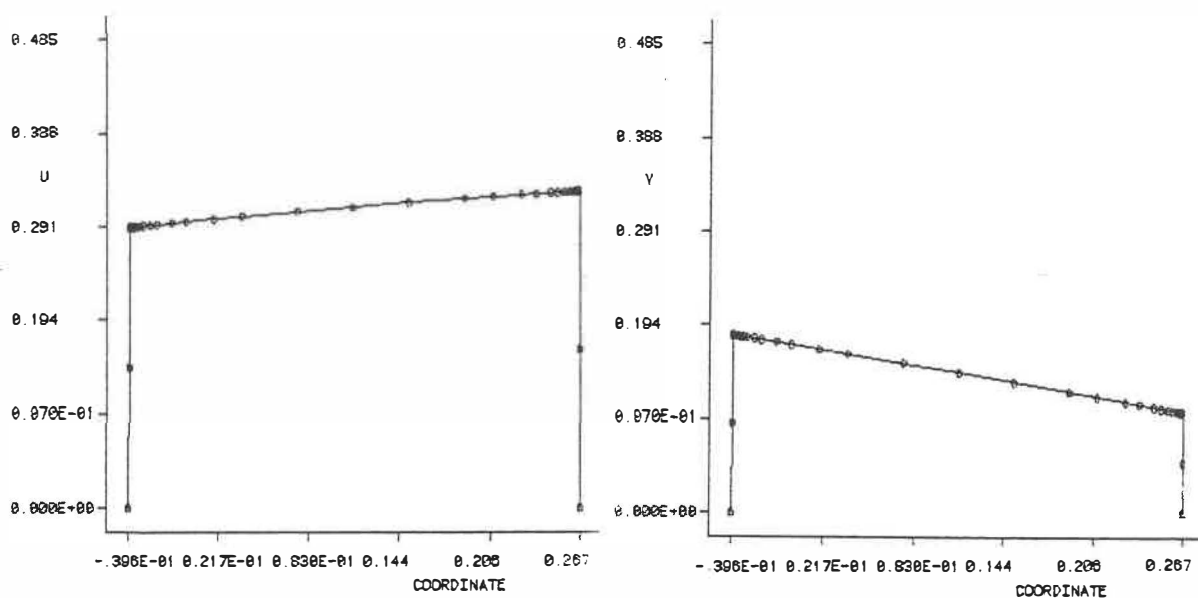


Figure 5.7: Profil de vitesse imposé à l'entrée de la pompe i) composante axiale ii) composante radiale

Les calculs en régime turbulent devraient mettre en évidence les caractéristiques d'un écoulement turbulent, ie. aplatissement du profil de vitesse par rapport au profil laminaire ainsi qu'un amincissement de la couche limite sous l'effet de la turbulence.



On a fait des calculs avec les deux modèles de longueur de mélange mais seul le modèle de Patankar-Spalding est assez général pour traiter les écoulements turbulents dans des conduites diverses. Le modèle de Nikuradse-Van Driest donne de très bons résultats pour les canaux droits comme on l'a montré dans la section précédente mais il n'est pas valide pour des situations plus complexes comme le cas présent. On ne présentera donc que les résultats obtenus avec le modèle de Patankar-Spalding .

On a augmenté graduellement la valeur du nombre de Reynolds pour la simulation des écoulements turbulents jusqu'à ce qu'on atteigne la valeur maximale possible pour la convergence du programme avec le maillage présenté précédemment. Ce maillage est le plus fin que l'on puisse traiter étant donné la capacité de l'ordinateur dont nous disposons (IBM 3090).

Les prochaines figures présentent les prédictions de l'écoulement moyen dans le canal de la pompe pour des valeurs de  $Re$  de 10 000, 50 000 et 500 000 (valeur maximale). On a donné les contours des composantes axiale et radiale de vitesse dans le canal de la pompe et les profils de vitesse à la section verticale au sommet du moyeu (station SV). Les composantes axiale et radiale sont représentées, la courbe la plus basse donnant les valeurs de vitesse radiales. Les valeurs de longueur de mélange à cette station sont aussi illustrées pour pouvoir apprécier les différences de vitesse et d'épaisseur de couches limites dans les deux zones supérieure et inférieure au moyeu et au carter respectivement.

Les principales observations à faire sont:

- À  $Re = 10\ 000$ , les contours de vitesse montrent l'épaississement des profils

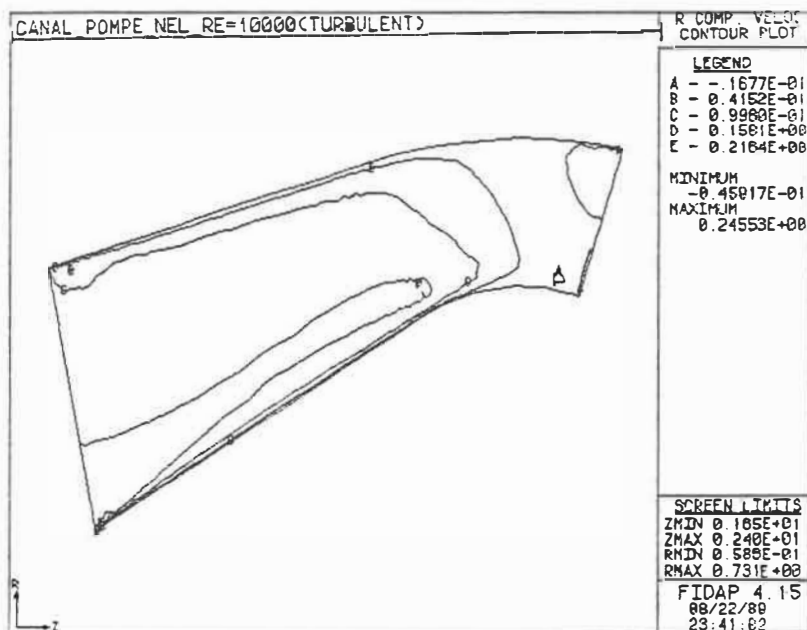
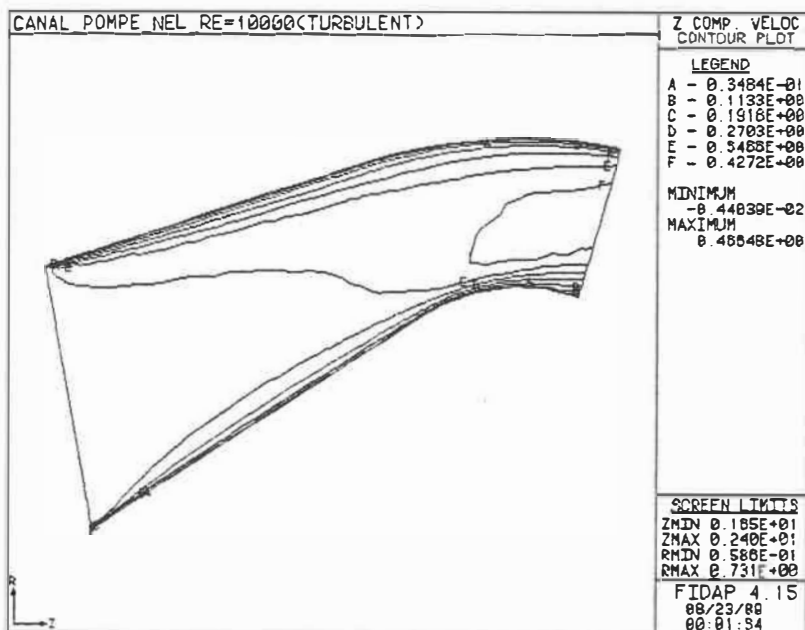


Figure 5.8: Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à  $Re = 10\,000$

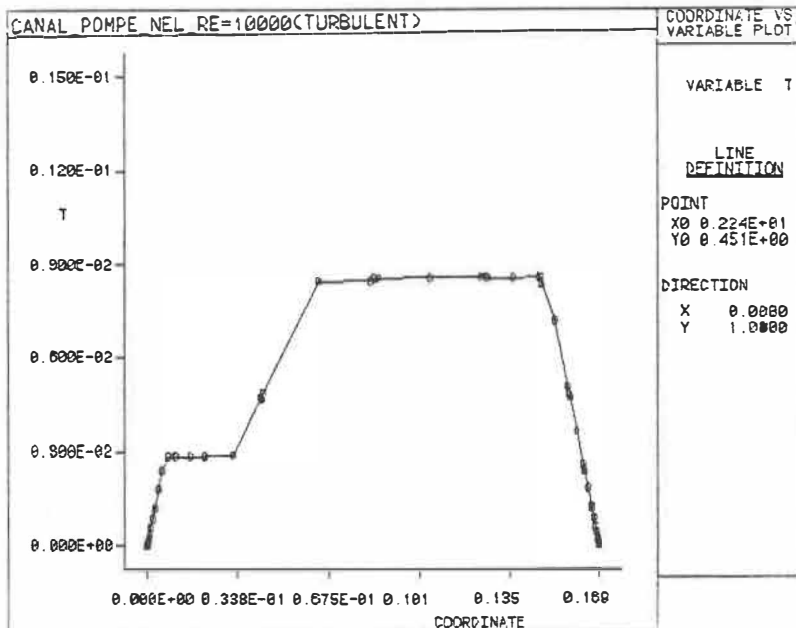
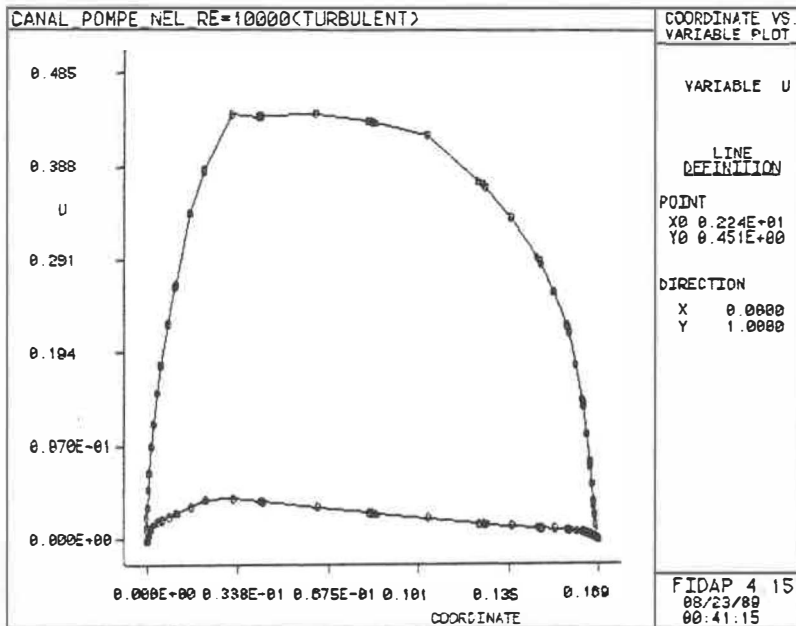


Figure 5.9: Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV  
à  $Re = 10\ 000$

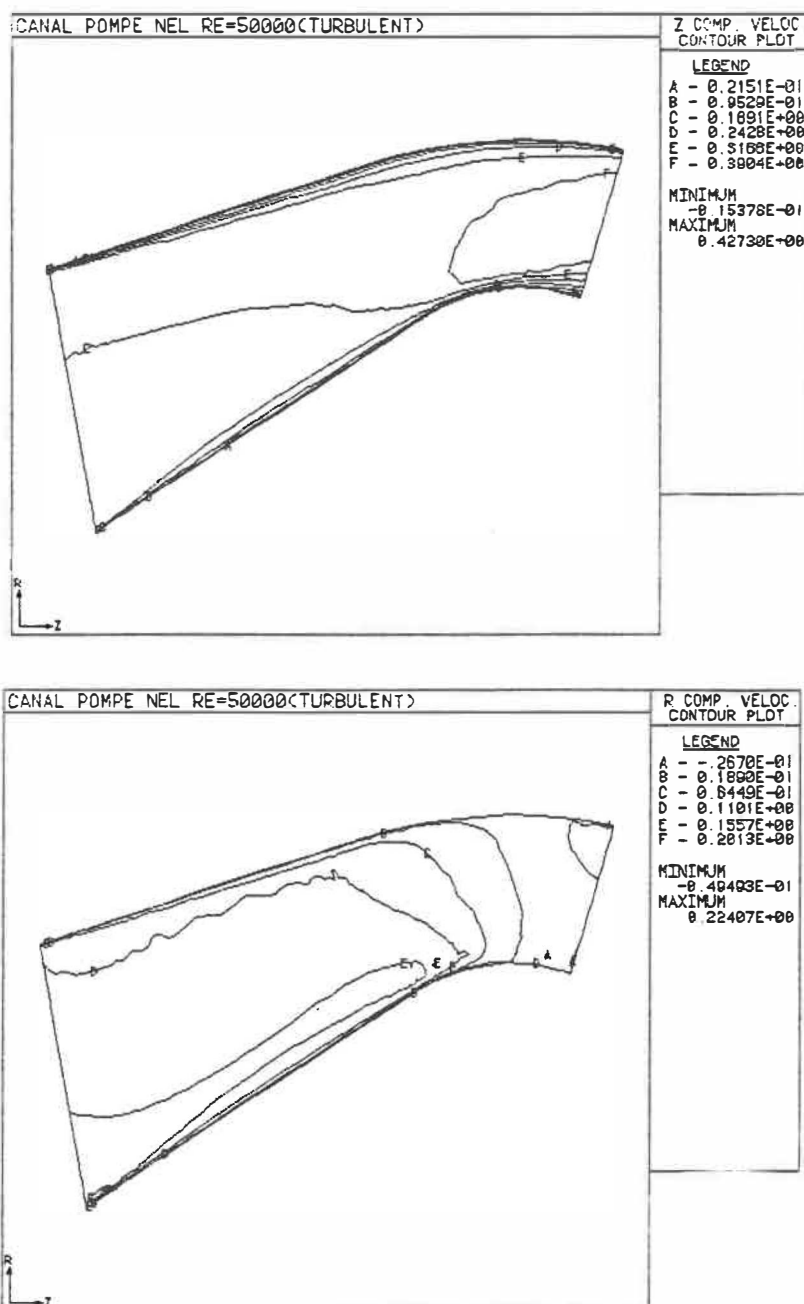


Figure 5.10: Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à  $Re = 50\,000$

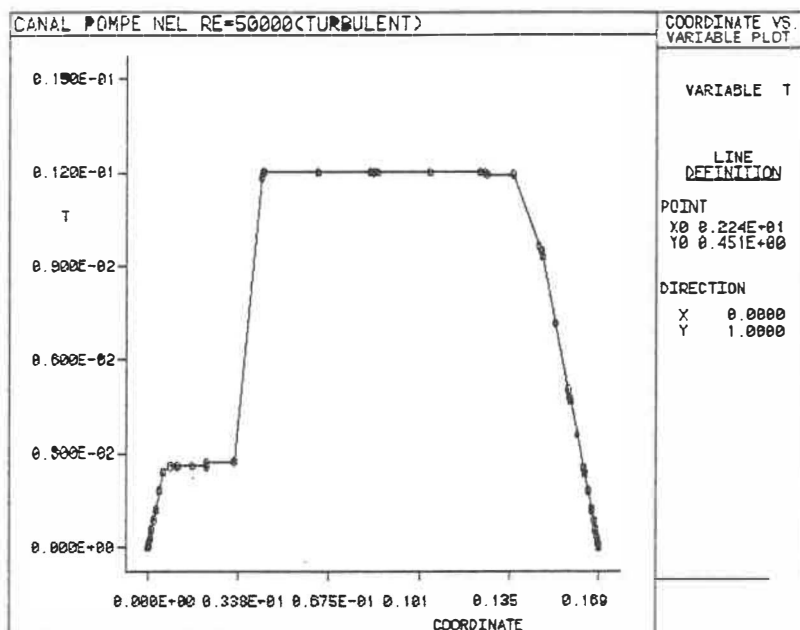
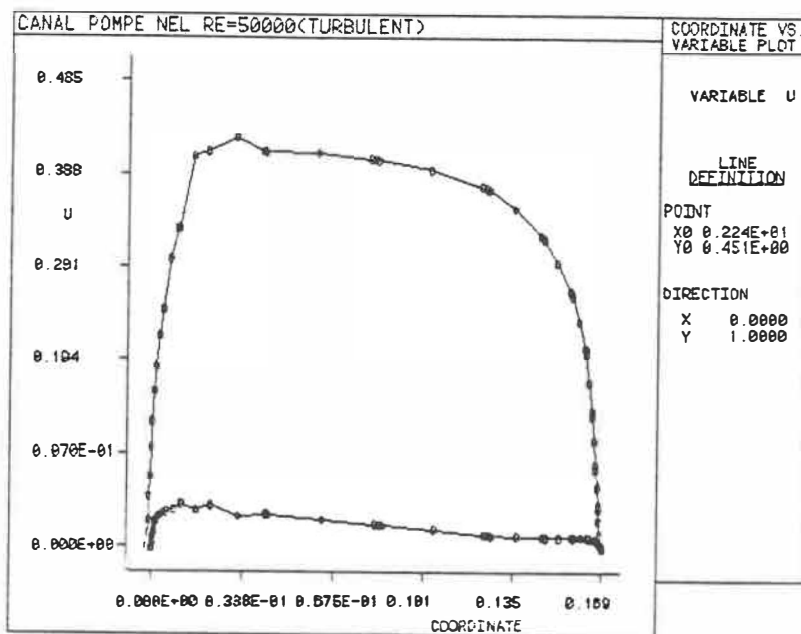


Figure 5.11: Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV à  $Re = 50\,000$

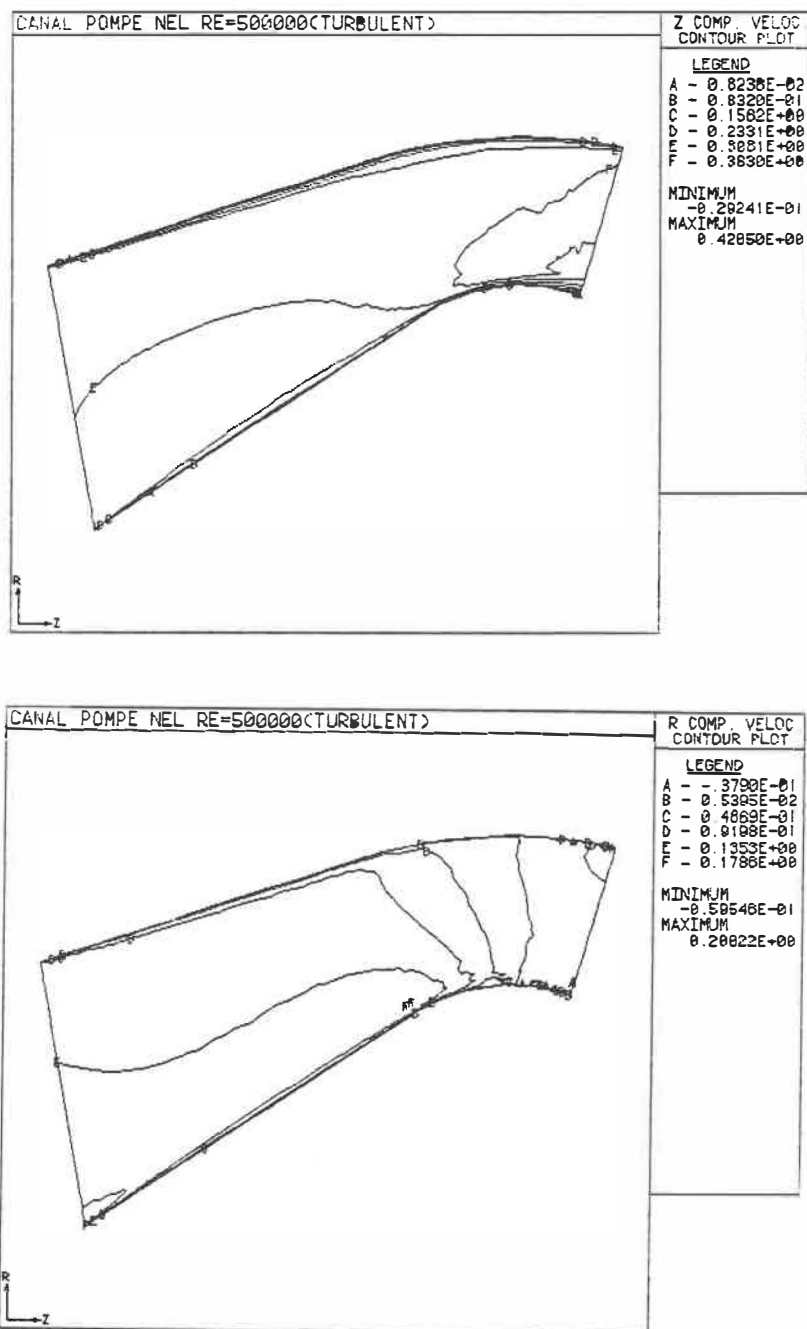


Figure 5.12: Contours de vitesse axiale et radiale le canal de la pompe à  $Re = 500\ 000$

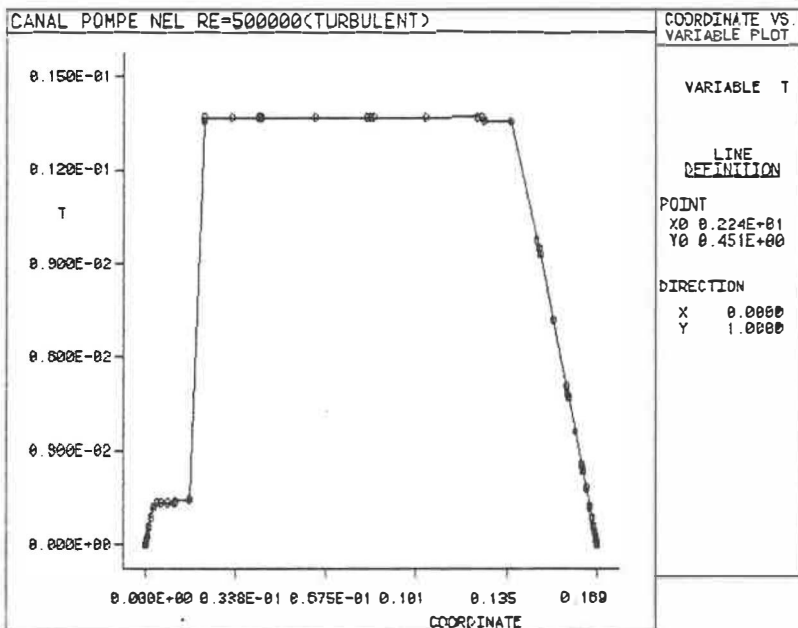
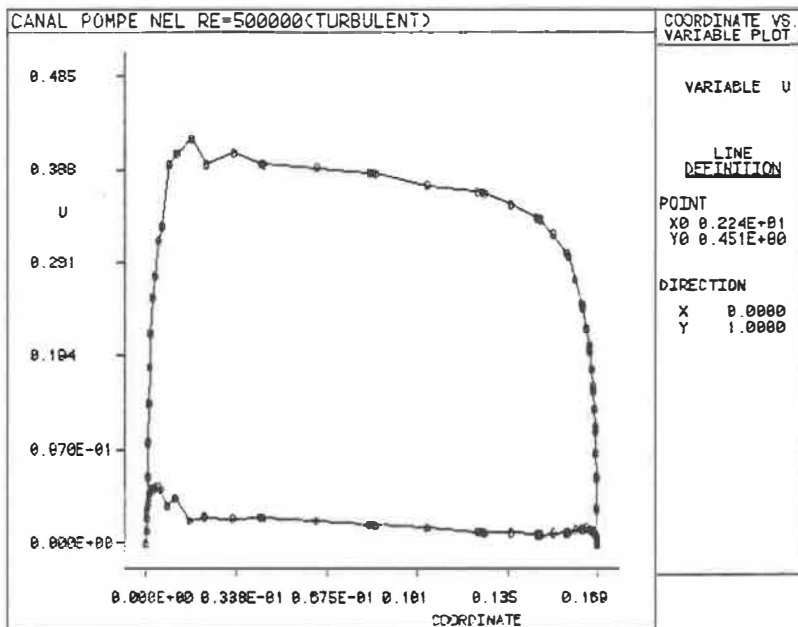


Figure 5.13: Profil de vitesse axiale et radiale et longueur de mélange à la station SV à  $Re = 500\,000$

près des parois, plus marqué dans la partie courbe supérieure. Le profil de vitesse à SV s'approche de la forme parabolique d'un écoulement laminaire.

- À  $Re = 50\ 000$ , l'accélération du fluide près des parois est moins évident, les couches limites restent assez minces et on remarque l'agrandissement du contour de vitesse axiale maximum (contour F) à la sortie du canal.
- À  $Re = 500\ 000$ , le fluide reste bien collé aux parois comme le démontrent les contours de vitesses axiale et radiale et le profil de vitesse à SV demeure assez plat.
- Le profil de vitesse s'aplatit et se décentre vers le moyeu (paroi inférieure) lorsque  $Re$  augmente.
- Les deux couches limite au moyeu et au carter sont bien distinctes. L'épaisseur de la couche limite au moyeu (à  $r = 0.0$ ) s'amenuise sous l'effet de la turbulence tandis que la couche limite au carter reste plus stable.

Les résultats produits avec le modèle de viscosité turbulente algébrique et le modèle de longueur de mélange de Patankar-Spalding sont donc en accord avec la théorie de la turbulence. Nous passerons maintenant aux calculs dans la première section de la pompe incluant les effets dûs au rotor.

### 5.3 Calculs dans la pompe

La prédiction de l'écoulement turbulent dans la pompe permettra de vérifier la pertinence du modèle de turbulence utilisé et d'évaluer l'impact des hypothèses que



l'on a assumées pour la simplification du problème de la simulation de l'écoulement moyen dans la pompe. La plus importante étant la supposition que le facteur de blocage ( $B$ ) est négligeable dans le passage des pales.

On ne procédera qu'aux calculs dans la première partie de la pompe comprenant le rotor pour deux raisons: d'abord, on ne dispose que des résultats expérimentaux pour cette section pour faire la comparaison avec notre prédiction. Deuxièmement comme nous l'avons mentionné auparavant, l'ordinateur dont nous disposons ne peut manipuler suffisamment de données pour atteindre la convergence de notre programme sur le maillage utilisé à grand nombre de Reynolds.

Le maillage est donc le même que celui illustré à la figure (5.6). On aura remarqué que le maillage comporte aussi une concentration d'éléments aux bords d'attaque et de fuite des pales du rotor. Les mêmes conditions ont été spécifiées à l'entrée que pour le canal de la pompe sans pales.

Les principales différences avec le cas précédent sont: a) le problème est maintenant quasi-tridimensionnel avec une composante angulaire ( $u_\theta$ ) et b) on tient compte de la contrainte de tangence à la pale du rotor dans le système d'équations (voir chapitre 2). Les conditions initiales sur  $u_\theta$  sont nulles aux parois supérieure et inférieure ainsi qu'à l'entrée (on suppose le fluide irrotationnel).

On sait que les équations moyennes du passage décrivent correctement l'écoulement dans une turbomachine complète. Les calculs en régime turbulent avec le modèle de longueur de mélange de Patankar-Spalding ont été effectués en utilisant comme valeur de départ une solution en régime laminaire à  $Re = 5\,000$ . Ces calculs ont donné des résultats concluants jusqu'à un nombre de Reynolds de 200 000. On

présente les solutions obtenues pour les valeurs de  $Re$  de 10 000, 50 000 et 200 000 sous forme de contours de vitesse axiale, radiale et angulaire ainsi que le profil de vitesse à la station verticale au sommet du moyeu (SV) dans les figures (5.14) à (5.19).

On remarque que la répartition de la vitesse est beaucoup moins uniforme que dans le canal de la pompe sans pales à cause de la présence du rotor. Les composantes radiales et angulaires subissent des variations importantes dans la région correspondant aux pales. Les plus forts gradients de vitesse angulaires étant localisés aux bords supérieur et inférieur des pales du rotor (sur le carter et le moyeu).

On a cependant semblablement le même comportement au niveau des couches limite au moyeu et au carter que dans le canal. Le contour de vitesse axiale à  $Re = 10\,000$  (fig. (5.15)) démontre bien l'épaississement des couches limites. Le profil de vitesse à la station SV tend plutôt vers la forme parabolique (fig. (5.14)).

À  $Re = 50\,000$  on remarque déjà que les couches limites se maintiennent mieux sur le carter et le moyeu (fig. 5.17)). Le profil à la station verticale est aussi plus aplati (fig. 5.16)).

Au plus haut niveau de turbulence qu'on ait pu modéliser ( $Re = 200\,000$ ) les contours de vitesse axiale et radiale (fig. (5.19)) mettent en évidence les couches limites beaucoup plus minces. La courbe de la vitesse axiale au sommet du moyeu (fig. (5.18)) prend l'allure caractéristique d'un profil de vitesse turbulent. La vitesse maximale au centre est passée de  $u_z = 0.436$  (pour  $Re = 10\,000$ ) à  $u_z = 0.400$  (pour  $Re = 200\,000$ ).

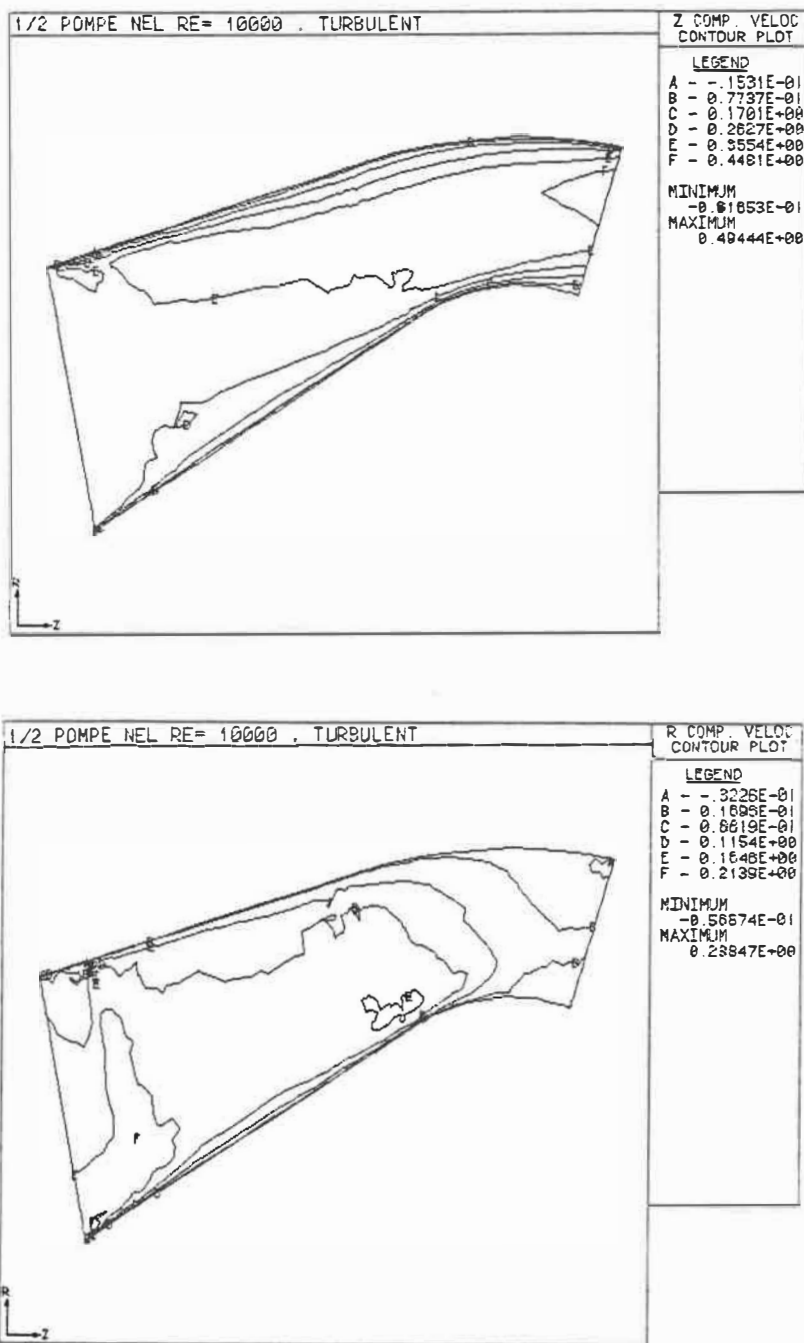


Figure 5.14: Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à  $Re = 10\,000$

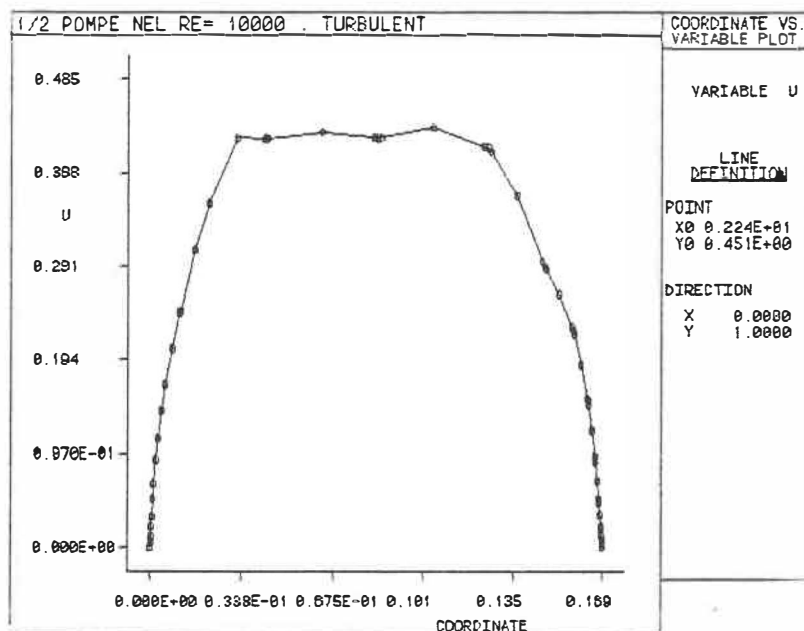
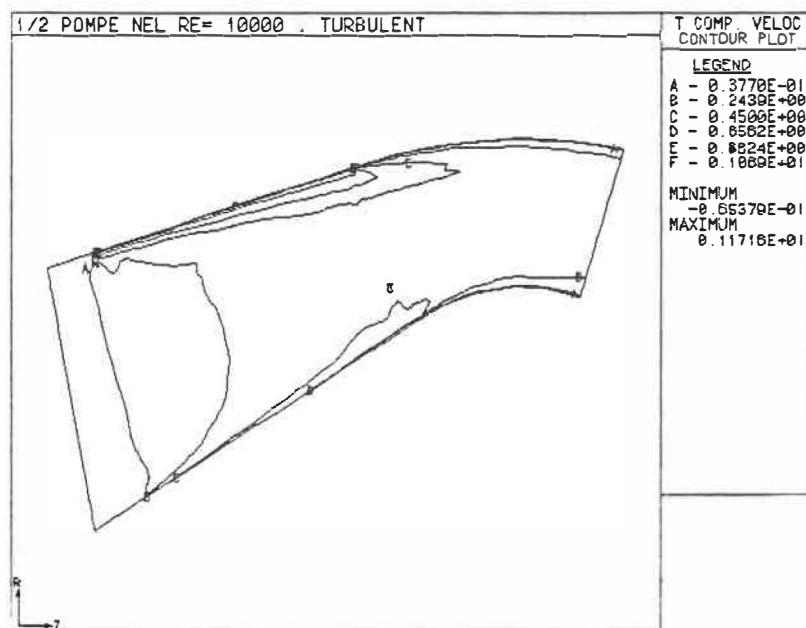


Figure 5.15: Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à  $Re = 10\ 000$

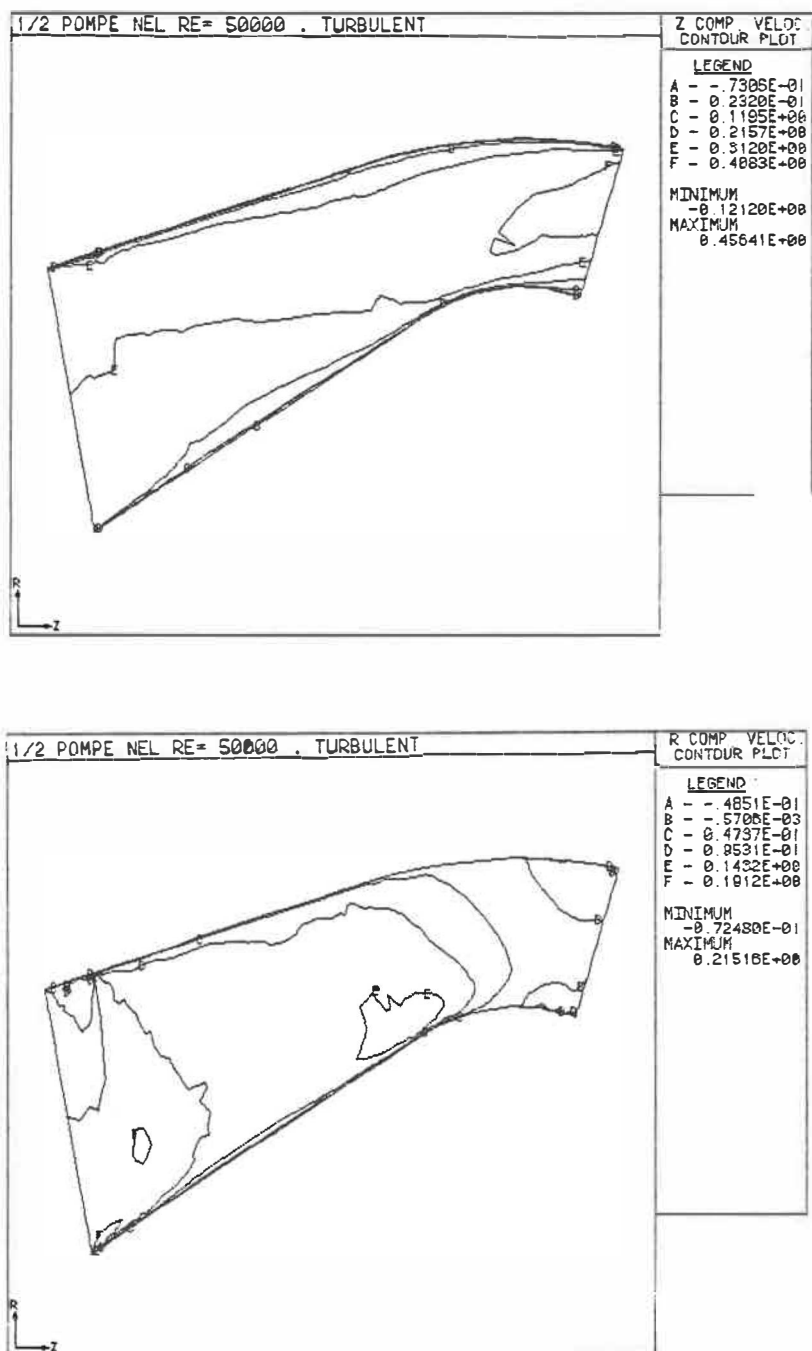


Figure 5.16: Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à  $Re = 50\,000$

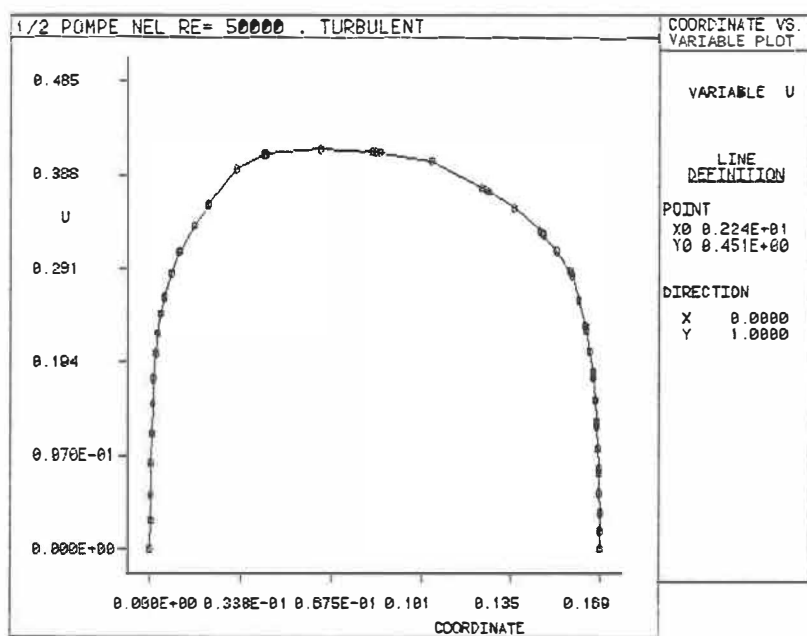
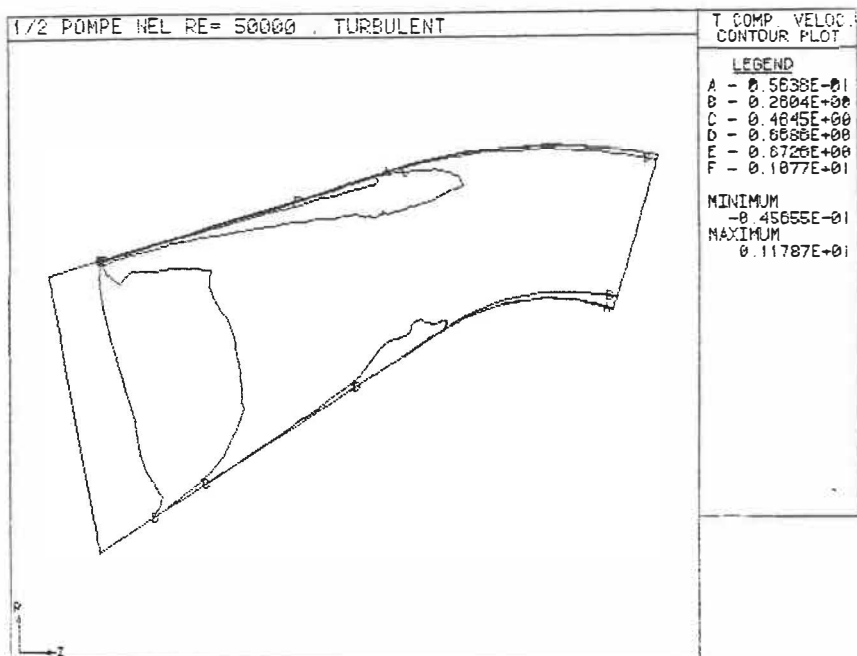


Figure 5.17: Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à  $Re) = 50\ 000$

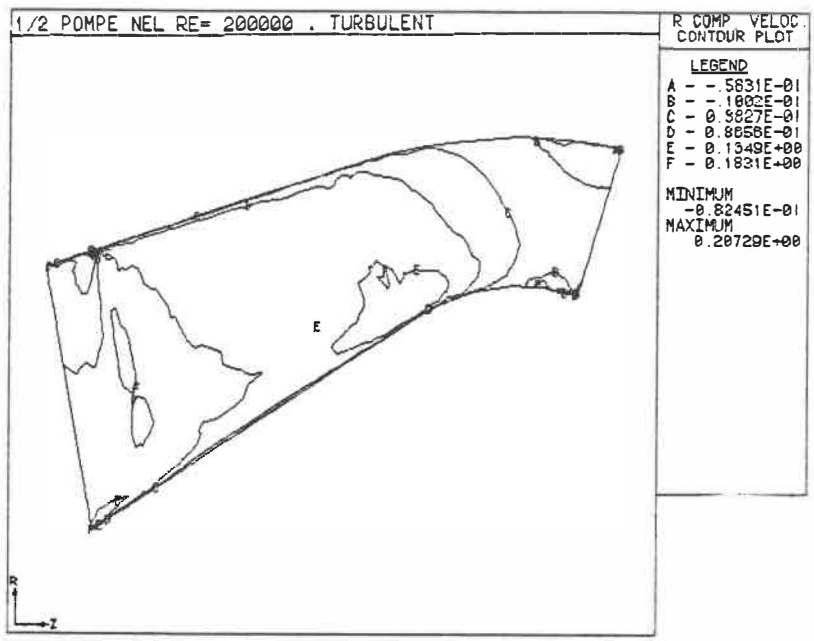
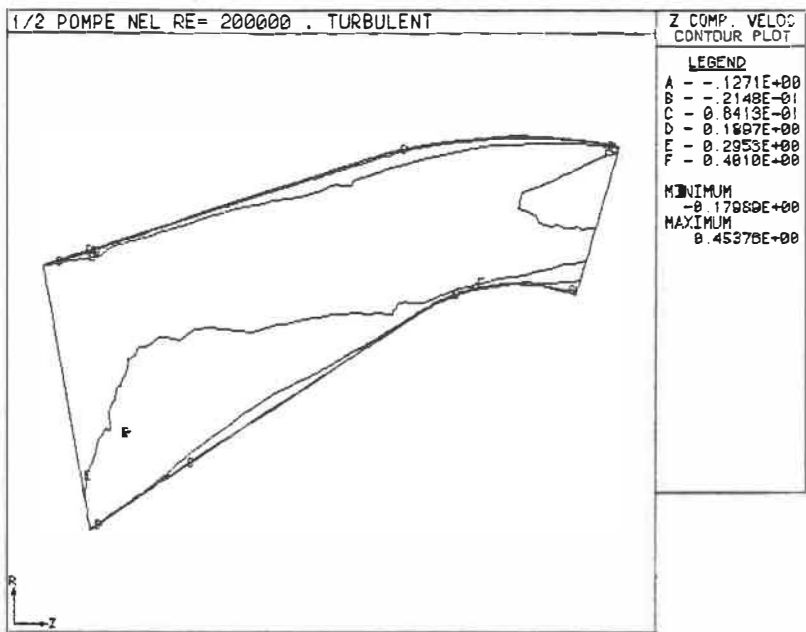


Figure 5.18: Contours de vitesse axiale et radiale dans la pompe à  $Re = 200\ 000$

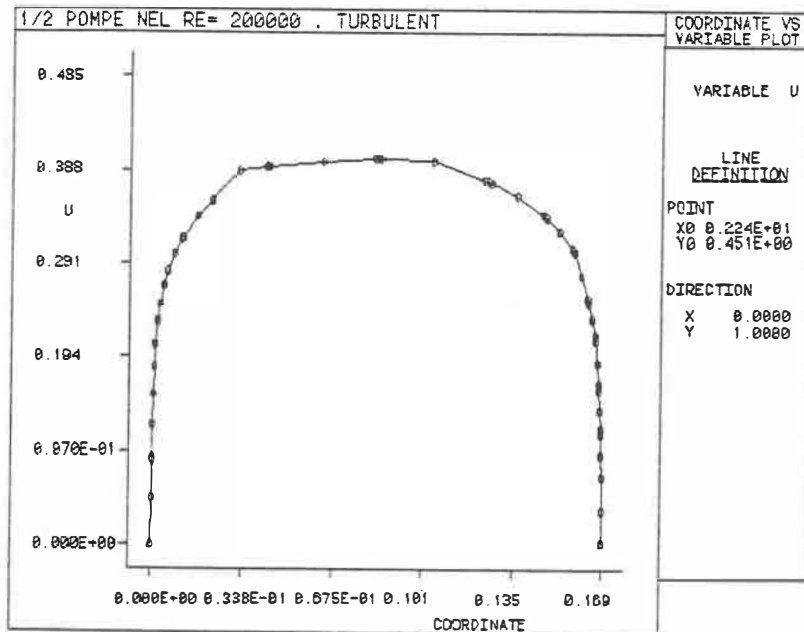
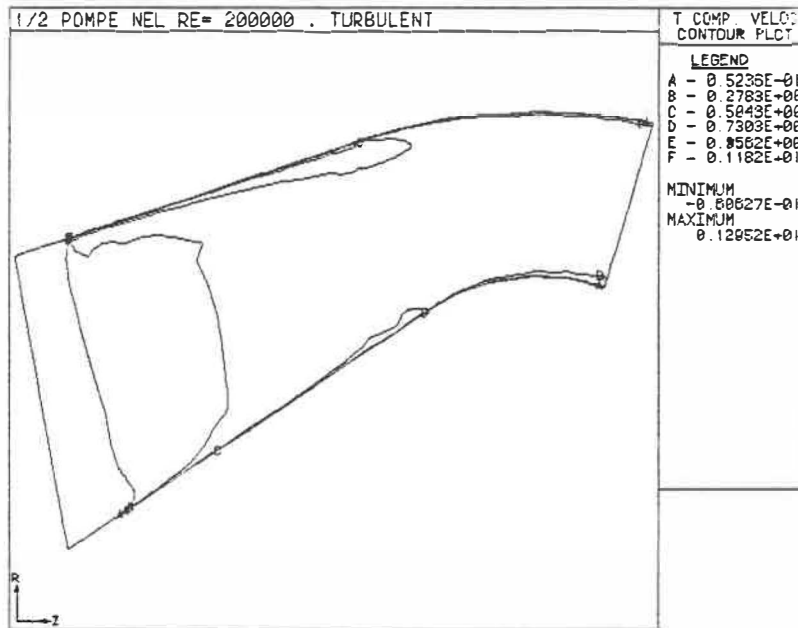


Figure 5.19: Contour de vitesse angulaire dans la pompe et profil de vitesse axiale à la station SV à  $Re = 200\,000$



Donc, même si la composante de vitesse tangentielle ( $u_\theta$ ) est très importante lorsqu'on tient compte de la présence des pales du rotor (car on a comme ordre de grandeur  $u_\theta = 1.0$  et  $u_z = 0.4$ ), on arrive à bien simuler l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen.

Enfin, la figure (5.20) illustre sous forme de surface la valeur de la pression dans le rotor. Pour bien comprendre cette figure il faut voir que le domaine de calcul est le plan inférieur et que la valeur de la pression est représentée par la hauteur à chaque noeud du maillage. La partie latérale gauche est l'entrée de la pompe et le côté droit est la sortie du rotor, la direction de l'écoulement est indiquée par une flèche. Les deux lignes verticales indiquent les limites du rotor.

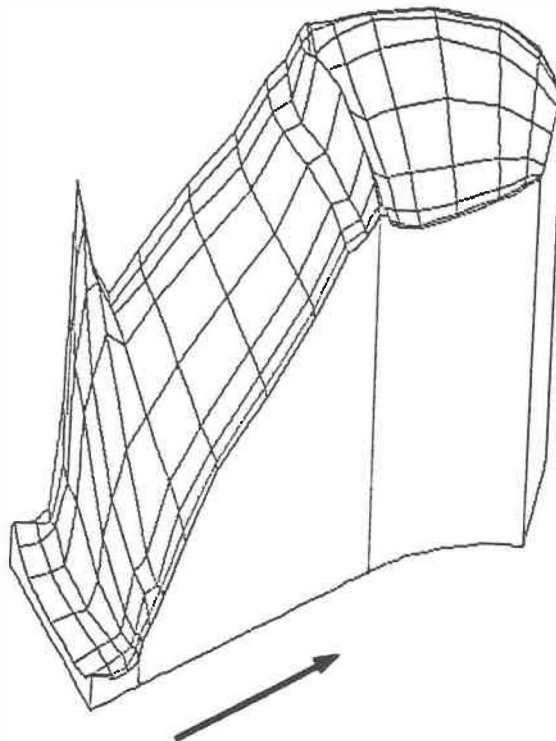


Figure 5.20: Surface de pression dans le rotor de la pompe

On voit la rapide hausse de pression dans le rotor suivie d'une faible baisse dans l'entrefer. Le stator devra maintenir la pression à ce niveau. Le travail de la pompe est donc bien simulé car l'accroissement de la pression est appréciable, comme on s'y attend d'une pompe efficace. Il faut noter que les pics formés aux parois du carter sont dûs à un maillage trop grossier aux endroits où les pales sont en interaction rapide avec le fluide. Le même problème est survenu en cours de développement aux quatre coins de la pale; le raffinement du maillage a suffi à éliminer ces anomalies.

Maintenant qu'on a étudié le comportement de l'écoulement turbulent dans la partie du rotor de la pompe, on peut procéder à la comparaison avec les mesures expérimentales.

### **5.3.1 Comparaison avec les données expérimentales**

Les données expérimentales mesurées au National Engineering Laboratory et qu'on retrouve dans la référence [52] sont disponibles pour les stations de mesure illustrées à la figure (5.21).

La station TGL UR est située en amont du rotor, les stations TGL 10 et TGL 12 sont près des bords d'attaque et de fuite respectivement tandis que les mesures prises sur TGL 13 le sont en aval des pales du rotor.

On pourra donc comparer les résultats obtenus à l'intérieur du passage avec le comportement réel du fluide dans la première partie de la pompe. L'expérience a été menée à différents régimes, nous ne considérerons que les conditions de rende-

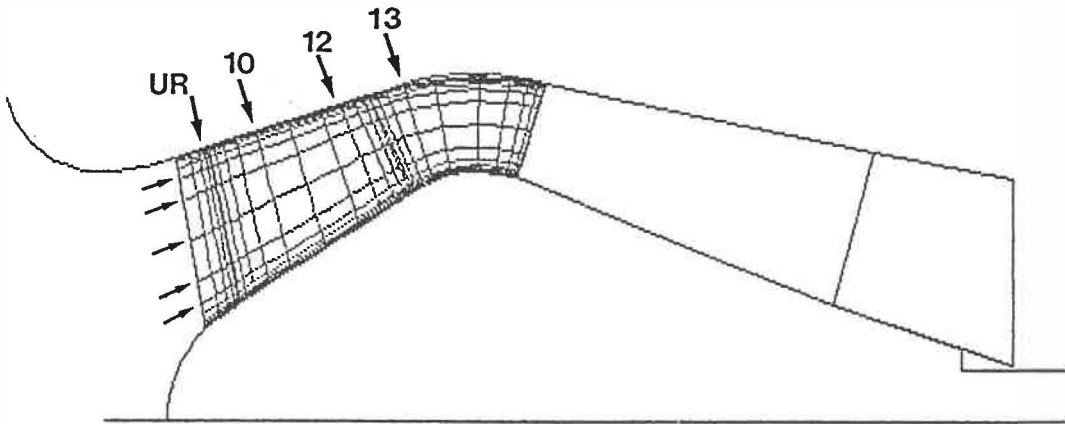
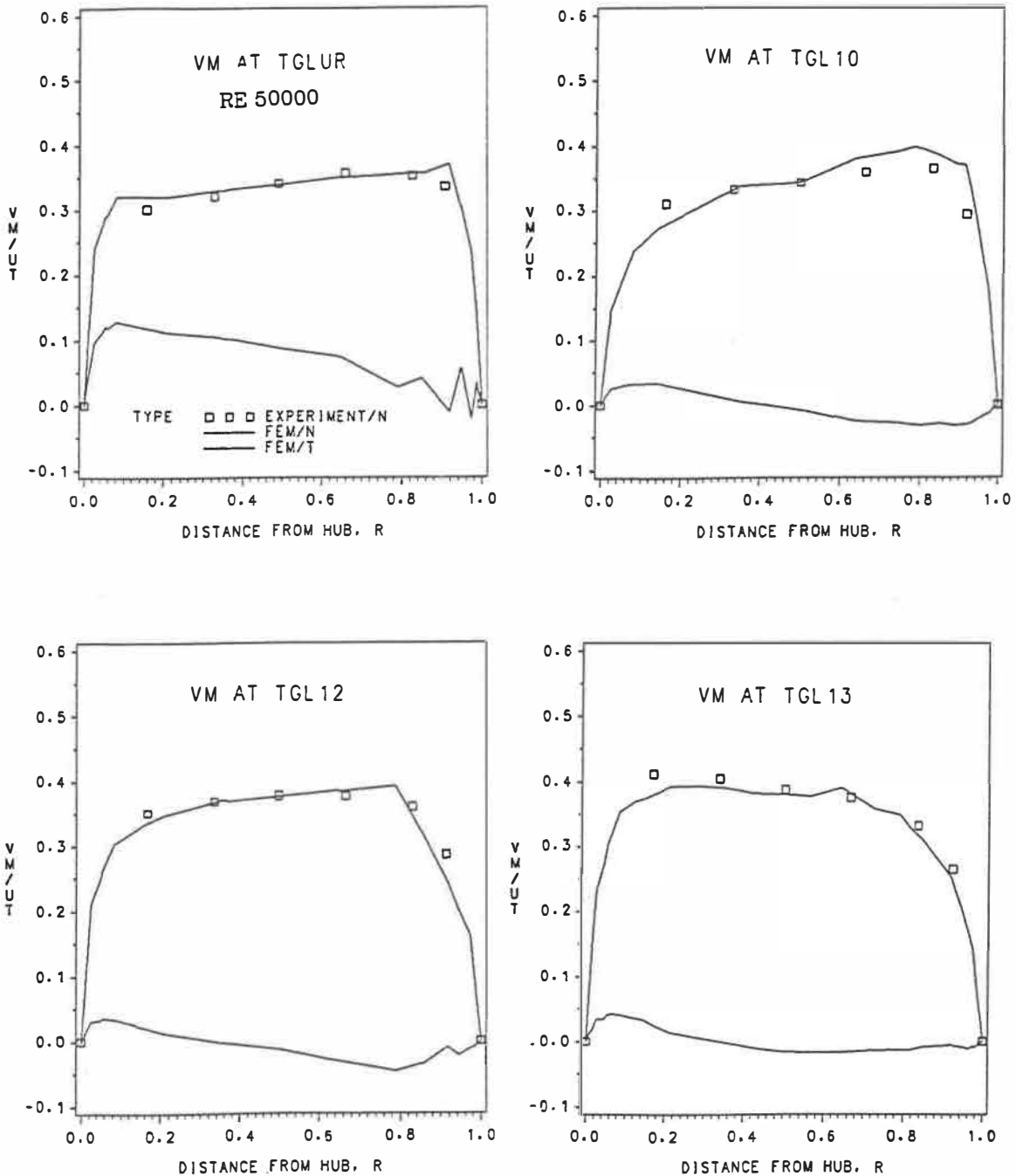


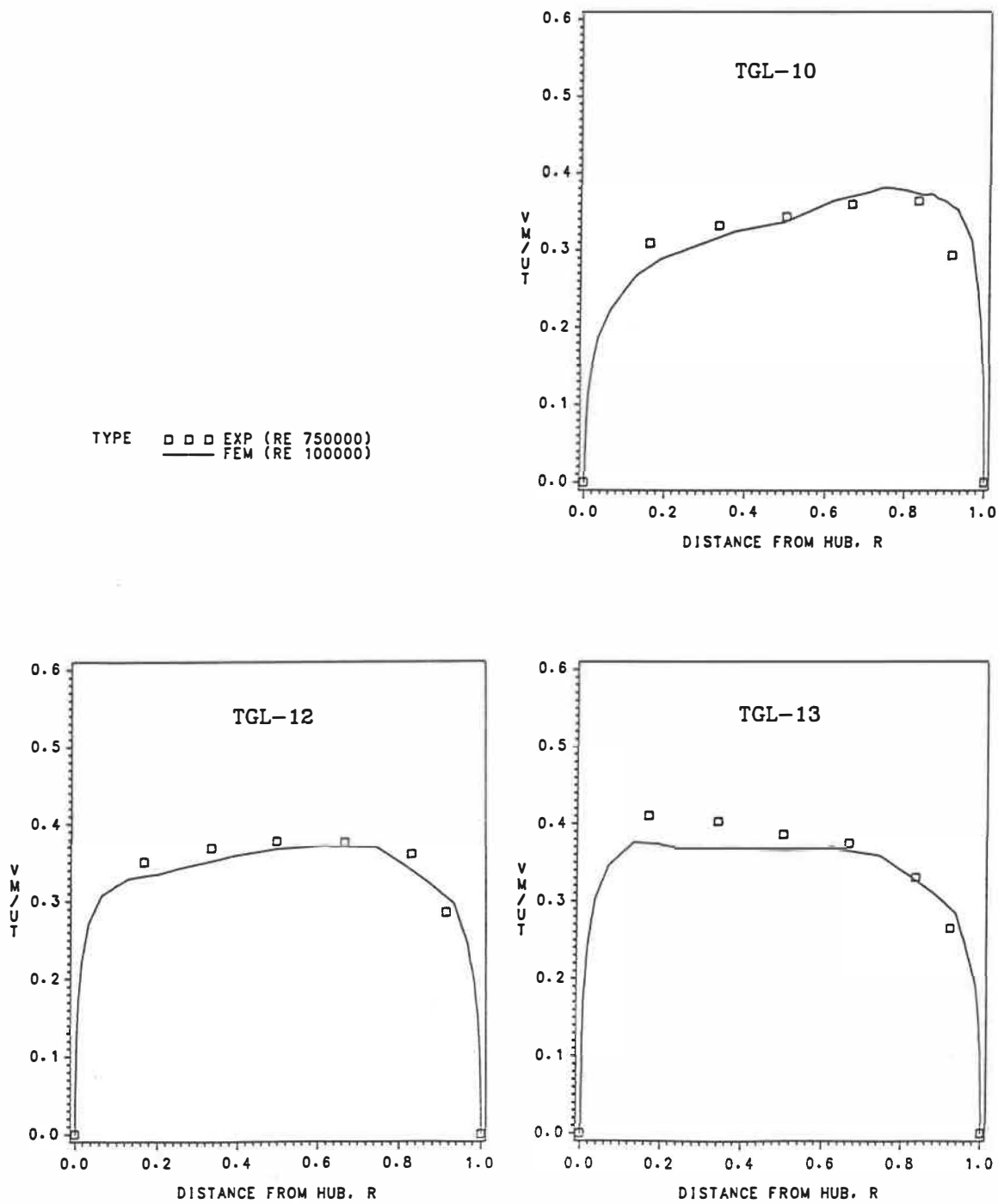
Figure 5.21: Stations de mesures expérimentales dans la pompe

ment optimales de la pompe que nous avons reproduites dans le programme. Les mesures ont été faites à un nombre de Reynolds de 750 000 que, pour les raisons énoncées précédemment, nous n'avons pas pu simuler. Nous ferons donc la comparaison de nos résultats obtenus aux valeurs du nombre de Reynolds de 50 000, 100 000 et 200 000.

Les prochaines figures présentent sur les mêmes graphes la composante de vitesse perpendiculaire aux TGL, appelée VM, calculée par notre résolveur et illustrées en ligne continue et les points de mesure de l'expérience pour chacune des stations aux TGL mentionnés précédemment. Dans les graphes de la figure (5.22) on trouve également la prédiction de la composante tangentielle aux TGL (courbe inférieure).

La figure (5.22) montre une très bonne concordance des résultats numériques et expérimentaux. Surtout en amont du rotor (à TGL UR) où la pale a peu d'influence sur l'écoulement. Dans le passage du rotor et en aval les résultats peuvent être considérés comme satisfaisants. On remarque bien les profils de vitesses arrondis

Figure 5.22: Prédications à  $Re = 50000$

Figure 5.23: Prédications à  $Re = 100\ 000$

TYPE    □ □ □ EXP (RE 750000)  
          ——— FEM (RE 200000)

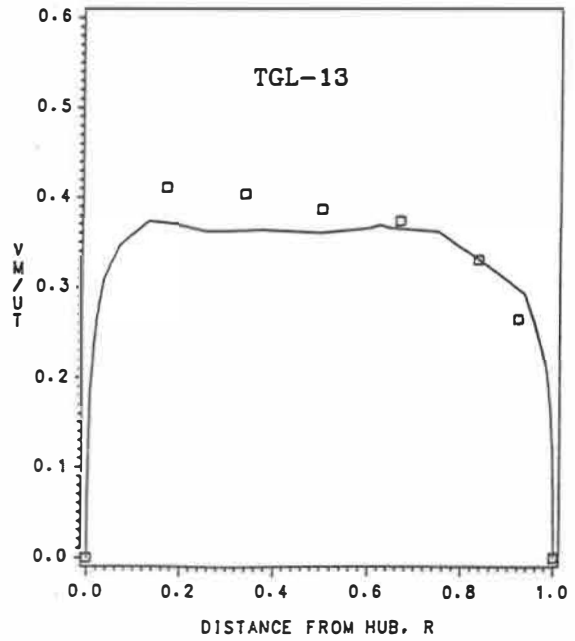
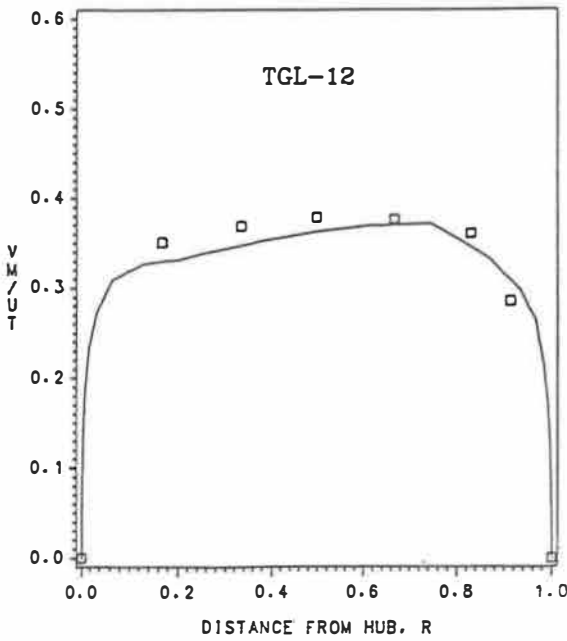
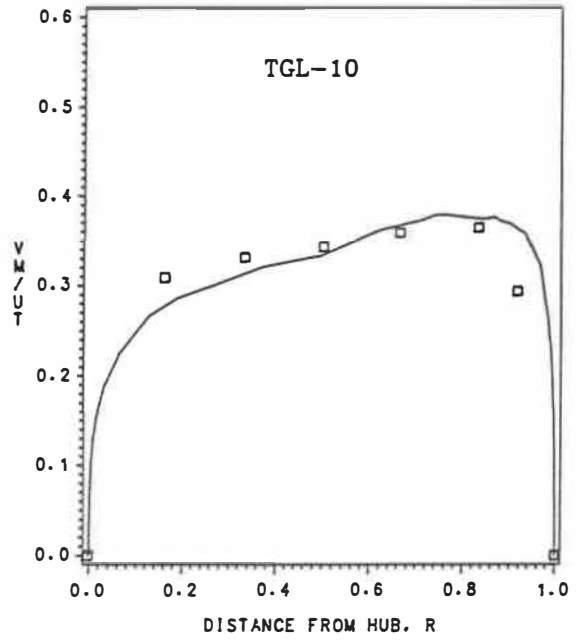


Figure 5.24: Prédications à  $Re = 200\ 000$

au centre et l'épaisseur des couches limites. Ce si bon accord peut sembler être une anomalie puisqu'on est loin du régime auquel les mesures ont été prises.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente à 100 000 (figure (5.23)) la qualité des prédictions s'améliore légèrement sauf près du moyeu en aval du rotor (à TGL 13). Les profils se sont aplatis et la couche limite s'est amincie comme on s'y attend d'un écoulement turbulent.

À  $Re = 200\ 000$ , les profils de vitesse perpendiculaires aux TGL sont encore plus plats et les prédictions sont en-deça des valeurs expérimentales et de façon plus marquée près du moyeu, là où la couche limite est la plus mince. Une explication peut résider dans le fait que l'on a négligé le facteur de blocage dans les équations moyennes du passage (on a posé  $B = 1$  pour simplifier le problème, voir chapitre 2). En effet, en retournant aux résultats obtenus à  $Re = 50\ 000$  on déduit que l'épaisseur de la couche limite introduit artificiellement un facteur de blocage efficace qui compense pour la négligence du terme dans les équations. Plus on augmente le nombre de Reynolds de l'écoulement et plus le blocage artificiel de la couche limite diminue avec l'épaisseur de celle-ci. On peut affirmer que cette tendance va se maintenir si le nombre de Reynolds croît. Il est donc nécessaire d'inclure le facteur de blocage des pales dans le système d'équations afin de bien modéliser l'écoulement moyen dans une machine hydraulique.

Cependant, on peut affirmer que l'effet de la turbulence est simulé correctement par le modèle de longueur de mélange algébrique qu'on a choisi d'utiliser. Le comportement de l'écoulement moyen est bien rendu et on a obtenu les résultats en régime turbulent que l'on espérait.

# Conclusion et recommandations

Les équations moyennes du passage de Navier-Stokes développées par A. Garon [4] ont été appliquées à la prédiction de l'écoulement turbulent dans une pompe mixte avec un modèle de turbulence à longueur de mélange algébrique à deux couches. Cette forme des équations permet le couplage des composantes pour la simulation d'écoulement dans des machines rotatives complètes. La méthode des éléments finis utilisant la formulation pénalisée consistante a été employée pour résoudre le système d'équations différentielles.

La modélisation de la turbulence est satisfaisante dans les cas test qui ont été calculés et étudiés. Le comportement de l'écoulement moyen turbulent est en accord avec la théorie pour ce type de problème. Même dans le passage des pales de la pompe, la turbulence est raisonnablement prédite.

Les solutions obtenues dans la section du rotor de la pompe se comparent favorablement aux mesures expérimentales disponibles. L'analyse des résultats indique que les approximations faites sur la physique du problème sont raisonnables sauf pour le facteur de blocage des pales qui devrait être incorporé au modèle pour obtenir une plus grande précision.



On dispose maintenant d'un modèle pouvant servir d'outil pour la conception de machines hydrauliques. Le programme est assez général et rapide pour qu'il soit réaliste de l'utiliser dans un contexte de développement.

La capacité de stockage de l'ordinateur a limité les possibilités de raffinement du maillage qui aurait permis de capter les détails de l'écoulement turbulent moyen dans les zones de couche limite près des parois.

Les recommandations suivantes sont proposées pour les développements ultérieurs afin d'améliorer les performances du modèle existant:

- Tenir compte de l'épaisseur des pales dans les équations moyennes du passage de Navier-Stokes par la fonction du facteur de blocage. Ceci permettra de mieux prédire l'écoulement dans une machine rotative complète à grand nombre de Reynolds.
- Utiliser un maillage plus fin afin de capter les détails du mouvement turbulent près des parois.
- Adapter la procédure de résolution par la méthode des éléments finis pour manipuler des maillages non-structurés et rendre possible le raffinement local du maillage aux points névralgiques de l'écoulement. On pourra ainsi concentrer les noeuds là où on le désire et profiter d'une économie d'espace-mémoire.
- Travailler sur un ordinateur plus puissant.

# Bibliographie

- [1] T. C. Vu, W. Shyy, M.E. Braaten et M. Reggio. Recent Developments in Viscous Flow for Hydraulic Turbine Components. In *IAHR Symposium 1986*, IAHR, Montréal, Canada, September 1986.
- [2] C.H. Wu. *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic et Supersonic Turbomachines of Axial, Radial et Mixed-Flow Types*. Technical Report TN-2604, NASA, 1952.
- [3] Horlock J.H. *Actuator Disk Theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [4] A. Garon. *Modèle pour l'étude des écoulements visqueux et incompressibles dans les turbines hydrauliques*. Thèse de Ph.D., École Polytechnique, Montréal, Canada, 1987.
- [5] D. Pelletier et J.A. Schetz. Finite Element Navier-Stokes Calculations of Three-Dimensional Flow near a Propeller. *AIAA Journal*, 24(9):1409–1416, 1986.
- [6] W. Rodi. *Turbulence Models and Their Applications in Hydraulics*. AIRH, 1980.

- [7] A.G. Hutton et R.M. Smith. A Study of Two-Equation Turbulence Model for Axisymmetric Recirculating Flow. In *Proceedings of the Third International Conference Held in Seattle*, pages 233–247, 1983.
- [8] D.A. Johnson et L.S. King. A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layer. *AIAA Journal*, 23(11):1684–1692, 1985.
- [9] R. H. Pletcher. Prediction of Incompressible Turbulent Separating Flows. *Journal of Fluid Engineering, Transaction of ASME*, 100, December 1978.
- [10] M.R. Malik et Pletcher R.H. A Study of some Turbulence Models for Flows and Heat Transfer in Ducts of Annular Cross Section. *Journal of Heat Transfer*, 103, 1981.
- [11] B.N. Minaie et Pletcher R.H. A Study of Turbulence Models for Round and Plane Heated Jets. In Hemisphere, editor, *Heat Transfer 1982, Proceeding of 7th International Heat Transfer Conference, Vol.3*, Washington D.C., 1982.
- [12] R.M. Smith. A Practical Method of Two-Equation Turbulence Modelling Using Finite Element. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4:321–336, 1984.
- [13] B.E. Launder, A.P. Morse, W. Rodi, et D.B. Spalding. The Prediction of Free-Shear Flows: A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models. In *Proceeding of the NASA Langley Free Turbulent Shear Flows Conference, Vol.1*, 1973. no. SP-320.
- [14] W. Rodi. Progress in Turbulence Modeling of Incompressible Flows. In *19th AIAA Aerospace Science Meeting*, St Louis, Missouri, January 1981.

- [15] B.E. Launder et D.B. Spalding. The Numerical Computation of Turbulent Flows. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 3, 1974.
- [16] K.H. Ng et D.B. Spalding. Turbulence Model for Boundary Layers near Walls. *Physics of Fluids*, 15:20–30, 1972.
- [17] D.C. Wilcox et R.M. Traci. A Complete Model of Turbulence. *AIAA Paper 76-351*, 1976.
- [18] P.G. Saffman et D.C. Wilcox. Turbulence Model Predictions for Turbulent Boundary Layers. *AIAA Journal*, 12:541–546, 1974.
- [19] M.W. Rubesin. Numerical Turbulence Modelling. *AGARD Lecture Series No. 86 on Computational Fluid Dynamics*, 3.1–3.37, 1977.
- [20] T.L. Chambers et D.C. Wilcox. A Critical Examination of the Two-Equation Turbulence Closure Models. *AIAA Paper 76-352*, 1976.
- [21] G.T. Carey et J.T. Oden. *Finite Elements: Fluid Mechanics, Vol. VI*. Prentice-Hall, 1986.
- [22] T.J.R. Hughes, R.L. Taylor et J.F. Levy. High Reynolds Number, Steady, Incompressible Viscous Flows by a Finite Element Method. In *Finite Element in Fluids, Vol.3*, John Wiley, 1978.
- [23] C.D. Upson, P.M. Gresho et R.L. Lee. *Finite Element Simulations of Thermally Induced Convection in an Enclosed Cavity*. Technical Report UCID-18602, Lawrence Livermore Laboratory, 1980.

- [24] T.J.R. Hughes, W.K. Liu et A. Brooks. Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation. *Journal of Computational Physics*, 30, 1979.
- [25] M.S. Engelman et R.L. Sani. Finite Element Simulation of an In-Package Pasterization Process. *Numerical Heat Transfer*, 6, 1983.
- [26] M.S. Engelman, Strang G. et Bathe K.-J. Application of Quasi-Newton Methods in Fluid Mechanics. *International Journal in Numerical Methods in Engineering*, 17, 1981.
- [27] J.N. Reddy. Penalty Finite Element Analysis of 3-D Navier-Stokes Equations. *Computational Methods in Applied Mechanic Engineering*, 35, 1982.
- [28] J.N. Reddy. On Penalty Function Methods in the Finite Element Analysis of Flow Problems. *Computational Methods in Applied Mechanic Engineering*, 35, 1982.
- [29] J.N. Reddy. Penalty Finite Element Methods in Conduction and Convection Heat Transfer. In *Numerical Methods in Heat Transfer, Vol. 2*, John Wiley, 1983.
- [30] D.K. Gartling. Convective Heat Transfer Analysis by the Finite Element Method. *Computational Methods in Applied Mechanic Engineering*, 12, 1977.
- [31] M.J.P. Cullen. Analysis of some Low-Order Finite Element Schemes for the Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 51, 1983.
- [32] M.J.P. Cullen. Experiments with some Low-Order Finite Element Schemes for the Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 51, 1983.

- [33] G.T. Carey et J.T. Oden, editors. *Proceedings of the Fifth International Symposium on Finite Element and Flow Problems*, Austin, Texas, January 1984.
- [34] K. Morgan, T.G. Hughes et C. Taylor. Investigation of a Mixing Length and Two-Equation Turbulence Model Utilizing the Finite Element Method. *Applied Mathematics Modelling*, 1, 1977.
- [35] A. Autret et M. Gretotto. Finite Element Computation of a Turbulent Flow over a Two-Dimensional Backward Facing Step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7:89–102, 1987.
- [36] J.J. Adamczyk. *Model Equation for Simulating Flows in Multistage Turbomachinery*. Technical Report TM-86869, NASA, 1984.
- [37] J.J. Adamczyk. A Model for Closing the Inviscid Form of the Averaged-Passage Equation System. *ASME Journal of Turbomachinery*, 108:180–186, 1986.
- [38] R.A. Celestina, M.L. Mulac et J.J. Adamczyk. A Numerical Simulation of the Inviscid Flow through a Counter-Rotating Propeller. *ASME Journal of Turbomachinery*, 108:187–193, 1986.
- [39] D. Pelletier et A. Garon. A New Finite Element Method for Computing the Flow near a Propeller. In *26th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA, Reno, Nevada, January 1988.
- [40] A. Garon, D. Pelletier et R. Camarero. A New Finite Element Method for Studying the Flow Inside a Complete Pump. In *IAHR Symposium 1988*, Trondheim, Norway, June 1988.

- [41] J.A. Schetz et S. Favin. Numerical Solution for the Near Wake of a Body with Propeller. *Journal of Hydronautics*, 11:136–144, October 1986.
- [42] J.A. Sparenberg. On the Linear Theory of an Actuator Disk in a Viscous Flow. *Journal of Ship Research*, 18(1), 1974.
- [43] A. Garon, D. Pelletier et R. Camarero. Passage-Averaged Navier-Stokes Equations with Finite Element Applications. In *27th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA, Reno, Nevada, January 1989. no. AIAA-89-0208.
- [44] C. Carey, S.M. Fraser, D. Rachman et Wilson G. *Studies of the Flow of Air in a Model Mixed-Flow Pump Using Laser Doppler Anemometry, Part 1: Research Facility and Instrumentation*. Technical Report 698, National Engineering Laboratory, 1985.
- [45] I.K. Jennions et T. Stow. A Quasi-Three-Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part 1 - Throwflow Analysis. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 107:301–307, 1985.
- [46] J.A. Schetz. *Foundations of Boundary Layer Theory for Momentum, Heat and Mass Transfer*. Prentice-Hall, 1984.
- [47] S.V. Patankar et D.B. Spalding. *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*. Intertext, London, 2 edition, 1970.
- [48] H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 7 edition, 1985.
- [49] R. Petit. *L'outil Mathématique*. Masson, 1982.

- [50] D. Pelletier, A. Garon et R. Camarero. A New Finite Element Method for Computing the Flow Inside Rotating Machinery. In *Eight International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, INRIA, Versailles, France, December 1987.
- [51] Inge L. Ryming. *Dynamique des fluides*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.
- [52] C. Carey, S.M. Fraser, D. Rachman et Wilson G. *Studies of the Flow of Air in a Model Mixed-Flow Pump Using Laser Doppler Anemometry, Part 2: Velocity Measurements Within the Impeller*. Technical Report 699, National Engineering Laboratory, 1985.
- [53] W. Flügge. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, 1972.



# Annexe A

## Résultats mathématiques

Dans cette annexe sont regroupés les définitions et les résultats mathématiques se rapportant au développement des équations moyennes du passage du chapitre 2 et à la méthode des éléments finis présentée au chapitre 4.

### A.1 Fonction implicite et gradient des surfaces des pales

Soit une surface de pale  $S$  et sa normale  $s$  telles que représentées à la figure (A.1).

La fonction de la surface de pale est donnée par:

$$\theta = f(r, z)$$

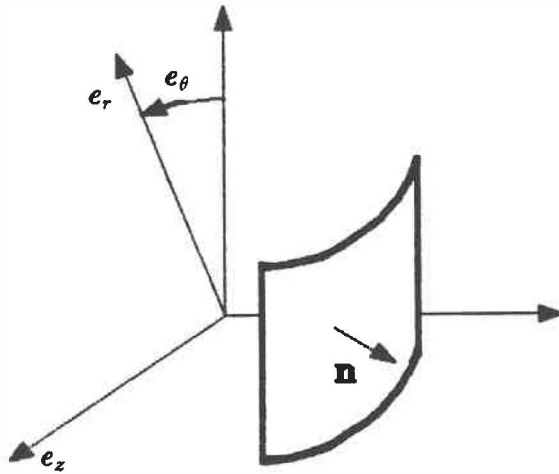


Figure A.1: Surface de pale et sa normale

et la fonction implicite est de la forme:

$$S \equiv \theta - f(r, z) = 0$$

alors le vecteur normal à la surface est:

$$\mathbf{n} = \mathit{grad}(S) = -\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\theta} - \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

Les composantes du vecteur normal sont donc bien indépendantes de la variable  $\theta$ .

Notons que la façon de définir  $S$  est arbitraire, le signe de  $\theta$  dans la forme implicite permet de choisir l'orientation de la normale. Dans l'équation précédente on a pris  $\theta$  positif afin d'avoir  $\mathbf{n}$  orienté vers les  $\theta$  croissants. On aurait aussi pu définir:

$$S \equiv f(r, z) - \theta = 0$$

et alors la normale serait orientée dans l'autre sens:

$$\mathbf{n} = \mathbf{grad}(S) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

En fait on choisit la première forme pour la surface de suction ( $S_2$  ou extrados) et la deuxième pour la surface de pression ( $S_1$  ou intrados) de façon à ce que les normales soient orientées vers l'extérieur du volume  $V$  contenu entre les deux pales comme le requiert le théorème de la divergence.

## A.2 Tenseur métrique en coordonnées cylindriques

Le tenseur métrique  $\mathbf{g}$  est donné sous forme de matrice avec les composantes:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$$

En coordonnées cylindriques, les indices  $i, j$  prennent les valeurs  $r, \theta, z$ . Les vecteurs de base exprimés en coordonnées cartésiennes sont:

$$\mathbf{g}_r = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{g}_\theta = -r \sin(\theta) \mathbf{i} + r \cos(\theta) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{g}_z = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Alors le tenseur métrique en coordonnées cylindriques prend la forme:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour référence voir [53].

### A.3 Séparation des termes de la moyenne d'un produit

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions scalaires dont on a fait la moyenne du produit. On veut maintenant séparer les deux termes pour obtenir une expression contenant la moyenne de chacun. Un résultat de base en statistique énonce que:

$$\overline{ab} = \bar{a} \bar{b} + \overline{\tilde{a} \tilde{b}}$$

où  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  sont les parties périodiques de  $a$  et  $b$ .

On peut généraliser ce résultat pour le produit d'une fonction scalaire  $a$  et d'une fonction vectorielle  $v$ . Par extension, puisque la divergence est un opérateur linéaire, on peut écrire que:

$$\operatorname{div}(\overline{av}) = \operatorname{div}(\bar{a} \bar{v}) + \operatorname{div}(\overline{\tilde{a} \tilde{v}})$$

Dans l'équation 2.8 on a pris  $a = \Delta\theta \bar{u}_\ell$  et  $v = u$ .

## A.4 Divergence d'un produit d'une fonction scalaire par une fonction vectorielle

Soient  $a$  une fonction scalaire et  $\mathbf{v}$  une fonction vectorielle. On veut montrer l'égalité suivante:

$$\operatorname{div}(a \mathbf{v}) = a \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(a)$$

On fera une démonstration par construction en coordonnées cartésiennes dans le plan. Les fonctions sont alors de la forme:

$$a = f(x, y) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = v_1(x, y) \mathbf{i} + v_2(x, y) \mathbf{j}$$

Le premier membre de l'égalité se développe sous la forme:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(a v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(a v_2) \\ &= a \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_2 \frac{\partial a}{\partial y} \end{aligned}$$

et chaque terme du membre de droite s'exprime comme:

$$a \operatorname{div}(\mathbf{v}) = a \frac{\partial v_1}{\partial x} + a \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(a) &= (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \cdot \left( \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial a}{\partial x} + v_2 \frac{\partial a}{\partial y} \end{aligned}$$

Donc  $\operatorname{div}(a \mathbf{v}) = a \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(a)$ .

## A.5 Contraction du tenseur métrique et d'un gradient

On doit démontrer que

$$g : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) = \mathit{div}(\mathbf{u})$$

Faisons la preuve par construction dans le plan en coordonnées cartésiennes:

Les composantes de la fonction  $\mathbf{u}$  sont:

$$\mathbf{u} = u_1(x, y) \mathbf{i} + u_2(x, y) \mathbf{j}$$

Le tenseur métrique en coordonnées cartésiennes est donné par:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et les composantes du gradient de la fonction vectorielle  $\mathbf{u}$  prennent la forme:

$$\mathbf{grad}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Alors la double contraction du tenseur et du gradient est donné par:

$$\begin{aligned} g : \mathbf{grad}(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} \mathbf{grad}(\mathbf{u})_{ij} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \mathit{div}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

## A.6 Contraction du tenseur métrique et d'un vecteur

On a utilisé la relation suivante:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$$

Ce qui s'interprète comme la contraction du vecteur  $\mathbf{n}$  par le tenseur métrique  $\mathbf{g}$  est le même vecteur  $\mathbf{n}$ .

En coordonnées cartésiennes bidimensionnelles les composantes de  $\mathbf{n}$  sous forme vectorielle sont:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

et on a vu que le tenseur métrique est la matrice identité, alors:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \mathbf{n}$$

Ceci est aussi valable pour tout système de coordonnées.

## A.7 Double contraction du tenseur des contraintes et d'un gradient

On veut montrer que

$$\sigma^* : \mathbf{grad}(\delta \bar{u}) = -p \operatorname{div}(\delta \bar{u}) + \mu \tau : \mathbf{grad}(\delta \bar{u})$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}^* = -p \boldsymbol{g} + \mu \boldsymbol{\tau}(\bar{\boldsymbol{u}})$$

Comme la double contraction est un opérateur linéaire on peut l'appliquer à chaque terme du tenseur des contraintes moyen:

$$\boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{grad}(\delta\bar{\boldsymbol{u}}) = -p \boldsymbol{g} : \boldsymbol{grad}(\delta\bar{\boldsymbol{u}}) + \mu \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{grad}(\delta\bar{\boldsymbol{u}})$$

Et on a déjà montré que la double contraction du tenseur métrique  $\boldsymbol{g}$  et du gradient d'une fonction donne la divergence de la fonction (voir A.5) alors:

$$-p \boldsymbol{g} : \boldsymbol{grad}(\delta\bar{\boldsymbol{u}}) = -p \operatorname{div}(\delta\bar{\boldsymbol{u}})$$

On arrive ainsi au résultat désiré.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00290863 8

CA  
UP  
19