

UNIVERSITE DE MONTREAL

VALIDATION D'UN MODELE GENERATEUR
DE VITESSE A PROFIL GAUSSIEN
SUR DES SIGNATURES MANUSCRITES

par

Franck LECLERC
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
ECOLE POLYTECHNIQUE

MEMOIRE PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAITRE ES SCIENCES APPLIQUEES (M.Sc.A.)

Novembre 1989

author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58187-5

UNIVERSITE DE MONTREAL

ECOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé:

**VALIDATION D'UN MODELE GENERATEUR
DE VITESSE A PROFIL GAUSSIEN
SUR DES SIGNATURES MANUSCRITES**

présenté par: Franck LECLERC

en vue de l'obtention du grade de: MAITRE ES SCIENCES

APPLIQUEES

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Michel BERTRAND, Ph.D., président

M. Marc MOORE, Ph.D.

M. Réjean PLAMONDON, Ph.D., directeur

Au défaut du silence

Ta bouche aux lèvres d'or n'est pas en moi pour rire
Et tes mots d'auréole ont un sens si parfait
Que dans mes nuits d'années, de jeunesse et de mort
J'entends vibrer ta voix dans tous les bruits du monde.

Dans cette aube de soie où végète le froid
La luxure en péril regrette le sommeil,
Dans les mains du soleil tous les corps qui s'éveillent
Grelottent à l'idée de retrouver leur coeur.

Souvenirs de bois vert, brouillard où je m'enfonce,
J'ai refermé les yeux sur moi, je suis à toi,
Toute ma vie t'écoute et je ne peux détruire
Les terribles loisirs que ton amour me crée.

Paul ELUARD

SOMMAIRE

Le projet s'inscrit dans le cadre de recherches sur la modélisation de processus rattaché à l'écriture manuscrite.

A partir d'un modèle générateur de tracé manuscrit basé sur un contrôle des vitesses, nous avons développé un logiciel traitant des signatures manuscrites.

Dans le modèle proposé, on suppose que les vitesses générées (curvilinéaire et angulaire) ont des profils en cloche s'apparentant à l'équation d'une gaussienne.

Après acquisition d'une signature par une tablette à numériser, nous cherchons les paramètres des gaussiennes par le critère des moindres carrés. Une fois l'extraction des paramètres des gaussiennes réalisée, nous régénérons la signature à l'aide du modèle proposé.

Par ce travail, nous visons la validation du modèle générateur de profils de vitesse à forme gaussienne sur des signatures manuscrites.

ABSTRACT

The context of this project is the modelization of handwriting processes.

From a script generating model based on a velocity control, a software tool was developed to process handwritten signatures.

In the proposed model, the velocity curves generated (curvilinear and angular) are approximated by Gaussian curves. After signature acquisition, with a digitizer, the parameters of the gaussians are extracted by the least square root method and signatures are regenerated with the model.

The main object of this thesis is to test and validate this gaussian velocity based model on handwritten signature.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement Réjean PLAMONDON qui m'a permis de venir étudier au Québec et qui m'a soutenu dans mon travail durant toute la période de mon séjour.

Je remercie également très fortement Marc PARIZEAU, Pierre YERGEAU, Christian LANGHEIT et Wacef GERFALI pour leurs conseils et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportés pendant la programmation du logiciel et la rédaction de mon mémoire. Merci à Christian LANGHEIT d'avoir imprimé mon mémoire.

Enfin, je remercie toutes les autres personnes du laboratoire Scribens, les personnes qui m'ont donné leur signature, la secrétaire qui a tapé une grande partie de mon mémoire pour leur témoignage de sympathie et leur aide.

TABLE DES MATIERES

	<u>PAGE</u>
SOMMAIRE	v
ABSTRACT	vi
REMERCIEMENTS	vii
 CHAPITRE I INTRODUCTION	 1
I.1 Qu'est-ce que la modélisation?	2
I.2 Pourquoi modéliser?	4
I.3 Modélisation appliquée aux signatures .	5
I.3.1 Processus biomécanique de génération de la signature	 5
I.3.2 Choix du modèle générateur de gaussiennes	 6
I.4 Fonction de transfert d'un système générateur de gaussiennes	 7
I.4.1 Description des entrées/sorties . . .	8
I.4.2 Fonction de transfert du système . .	10
 CHAPITRE II MODELE DE GENERATION DE GAUSSIENNES .	 17
II.1 Vitesse curvilinéaire	18
II.2 Vitesse angulaire	20
II.3 Fonction de transfert	22
II.4 Définitions	15

II.5	Description globale du modèle	27
CHAPITRE III	JUSTIFICATION DES NOUVEAUX CONCEPTS .	29
III.1	Discontinuités angulaires	29
III.2	Composantes continues	34
III.3	Discontinuités spatiales	36
CHAPITRE IV	PROTOCOLE EXPERIMENTAL	39
IV.1	Matériel - logiciel	40
IV.2	Acquisition	40
IV.3	Suréchantillonnage	41
IV.4	Extraction des gaussiennes	43
IV.5	Intégration - reconstruction	43
CHAPITRE V	DESCRIPTION DU SURECHANTILLONNAGE . . .	45
V.1	Description de la méthode	46
V.2	Calcul des vitesses curvilinéaire et angulaire	50
CHAPITRE VI	EXTRACTION DES GAUSSIENNES	52
VI.1	Méthodes des moindres carrés pour les équations non linéaires	55
VI.1.1	Cas général	55
VI.1.2	Exemple	58
VI.2	Paramètres variables	60

VI.3	Présentation des méthodes	65
a)	Méthode 1	65
b)	Méthode 2	67
c)	Méthode 3	69
d)	Méthode 4	71
CHAPITRE VII	RECONSTRUCTION	76
VII.1	Choix de la méthode d'intégration . . .	76
VII.2	Reconstruction	78
VII.3	Mesure des erreurs	81
CHAPITRE VIII	RESULTATS	84
VIII.1	Traitement d'une signature	84
VIII.2	Traitement de 12 signatures	94
CHAPITRE IX	COMMENTAIRES SUR LE LOGICIEL	103
IX.1	Discussions	103
IX.2	Modifications	108
IX.3	Applications du logiciel	110
CHAPITRE X	CONCLUSION	112
REFERENCES - BIBLIOGRAPHIE		115

ANNEXE 1		119
Méthode 5		119
Méthode 6		120
Méthode 7		122
Méthode 8		124
Méthode 9		126
 ANNEXE 2		 130
ANNEXE 3		154

LISTE DES FIGURES

Figure		<u>PAGE</u>
I.1	Schéma bloc de la modélisation	3
I.2	Génération de la signature	6
I.3	Système générateur de gaussiennes	8
I.4	Entrées du système $e(t)$	9
I.5	Système générateur de gaussiennes dans le domaine de Laplace	10
I.6	Echelon unité $u(t)$	11
I.7	Echelon unité décalé dans le temps	12
I.8	Entrées du système	14
II.1	Exemple de signature	18
II.2	Exemple de tracé	25
II.3	Vitesse curvilinéaire	26
II.4	Vitesse angulaire	26
II.5	Exemple de segmentation	27
II.6	Générateur de signatures	28
III.1	Sommation de gaussiennes	31
III.2	Non sommation de gaussiennes	33
III.3	Composante continue non nulle	35

IV.1	Diagramme de flux de données	39
V.1	Miroir du signal $x(t)$ ou $y(t)$	47
V.2	Miroir inverse pour $x(t)$ ou $y(t)$	48
V.3	Signal périodique de période $2T$	48
VII.1	Reconstruction	79
VIII.1	Signature originale	85
VIII.2	Signature reconstruite	85
VIII.3	Erreurs de reconstruction par chaîne	86
VIII.4	Vitesse curvilinéaire originale	90
VIII.5	Vitesse curvilinéaire reconstruite	90
VIII.6	Erreurs sur la vitesse curvilinéaire	91
VIII.7	Vitesse angulaire originale	92
VIII.8	Vitesse angulaire reconstruite	92
VIII.9	Erreurs sur la vitesse angulaire	93
VIII.10	Erreurs max de reconstruction des signatures	95
VIII.11	Erreurs min de reconstruction des signatures	95
VIII.12	Erreurs max sur la vitesse curvilinéaire	96
VIII.13	Erreurs min sur la vitesse curvilinéaire	96
VIII.14	Erreurs max sur la vitesse angulaire	97
VIII.15	Erreurs min sur la vitesse angulaire	97
IX.1	Problème de reconstruction	107

Figure en Annexe	<u>PAGE</u>
1 Signature originale de RP	130
2 Signature reconstruite de RP	130
3 Racine carrée de EQM pour la signature de RP	131
4 Signature originale de E	132
5 Signature reconstruite de E	132
6 Racine carrée de EQM pour la signature de E	133
7 Signature originale de MP	134
8 Signature reconstruite de MP	134
9 Racine carrée de EQM pour la signature de MP	135
10 Signature originale de ND	136
11 Signatures reconstruites de ND	136
12 Racine carrée de EQM pour la signature de ND	137
13 Signature originale de MR	138
14 Signature reconstruite de MR	138
15 Racine carrée de EQM pour la signature de MR	139
16 Signature originale de FL	140
17 Signatures reconstruites de FL	140
18 Racine carrée de EQM pour la signature de FL	141
19 Signature originale de PR	142
20 Signature reconstruite de PR	142
21 Racine carrée de EQM pour la signature de PR	143
22 Signature originale de LF	144
23 Signature reconstruite de LF	144

24	Racine carrée de EQM pour la signature de LF	145
25	Signature originale de CL	146
26	Signature reconstruite de CL	146
27	Racine carrée de EQM pour la signature de CL	147
28	Signature originale de WG	148
29	Signature reconstruite de WG	148
30	Racine carrée de EQM pour la signature de WG	149
31	Signature originale de C	150
32	Signature reconstruite de C	150
33	Racine carrée de EQM pour la signature de C	151
34	Signature originale de PY	152
35	Signature reconstruite de PY	152
36	Racine carrée de EQM pour la signature de PY	153

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Dans le laboratoire SCRIBENS, où le présent travail a été réalisé, nous nous intéressons fortement à l'étude de l'écriture manuscrite et à ses retombées sur l'informatique.

Actuellement, l'informatique est présente partout et la reconnaissance de l'écriture manuscrite devient un atout essentiel pour tendre vers une bonne convivialité avec l'ordinateur et dialoguer avec lui sans passer par un clavier.

La reconnaissance de l'écriture manuscrite peut être abordée de différentes manières. Une des méthodes, utilisée au laboratoire SCRIBENS, porte sur la modélisation de la fonction de transfert du bras et plus particulièrement sur un modèle générateur de vitesses à profils gaussiens [1,2,3,4,5].

Ce modèle, décrit pour l'écriture manuscrite, peut être transposé à la génération de n'importe quel type de tracé. En particulier, nous pouvons l'appliquer aux signatures, car

le modèle est basé sur la description d'une fonction de transfert d'un système symbolisant le bras et la main. Ce système se résume à un générateur de profils gaussiens dans le domaine des vitesses. Ces tracés peuvent donc être de l'écriture ou des signatures.

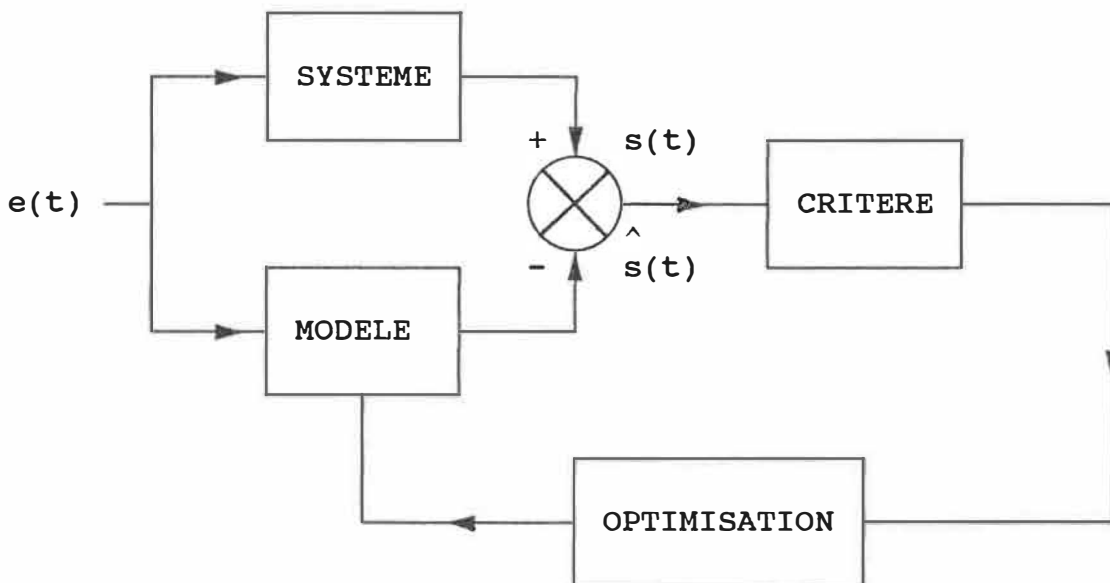
Le but de la présente étude consiste à valider le modèle générateur de gaussiennes en traitant des signatures manuscrites, à s'assurer que le modèle est applicable et à définir ses limites.

Après de brefs rappels sur la modélisation et sur la fonction de transfert d'un système générateur de gaussiennes, nous décrirons le modèle décrit dans différents articles [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] (chapitre II), les modifications qui ont été apportées (chapitre III) et le travail d'analyse / synthèse effectué (chapitres IV, V, VI, VII). Enfin nous présenterons les résultats obtenus (chapitre VIII) suivis d'une discussion.

I.1 - Qu'est-ce que la modélisation ?

La modélisation résume un processus physique par un modèle mathématique qui permet de recréer des résultats identiques à ceux obtenus expérimentalement.

Le modèle est choisi en fonction des données expérimentales. A partir des entrées et des sorties connues du système, on cherche à imaginer un modèle (le plus simple possible) qui donnera les résultats les plus proches, selon un critère prédéterminé, de ceux obtenus par le système à modéliser (figure I.1).



$e(t)$: entrée du système

$s(t)$: sortie du système

$\hat{s}(t)$: sortie du modèle (estimation)

Figure I.1: Schéma bloc de la modélisation

I.2 Pourquoi modéliser?

La modélisation a plusieurs buts. En premier lieu, on cherche à simplifier un processus complexe par la description d'un modèle mathématique sur lequel on possède de multiples connaissances. La modélisation vise à obtenir une meilleure connaissance du système.

Grâce au modèle, on peut ensuite prédire et optimiser le comportement du système, et évaluer des variables internes auxquelles on n'a pas accès.

A partir d'un modèle, on peut émettre des hypothèses que l'on vérifie ensuite sur le système réel par des expérimentations complémentaires.

REMARQUE : Pour l'écriture (ou la signature) il n'est pas possible d'optimiser le comportement du système en agissant directement sur un des paramètres en particulier. Nous n'avons pas accès aux variables internes. Ce sont des constantes biologiques (élasticité et contractilité des

muscles, transmission du flux nerveux, etc.), et à moins de faire de la chirurgie, les paramètres du système ne sont pas facilement modifiables.

Toutefois, ces paramètres ne sont pas figés. L'apprentissage chez l'enfant ou la réadaptation chez le psychomoteur doivent agir globalement sur les paramètres du système pour modifier son comportement et optimiser sa tâche.

I.3 Modélisation appliquée aux signatures

I.3.1 Processus biomécanique de génération d'une signature

L'information permettant de générer la signature est contenue dans le cerveau. Cette information, de haut niveau, est représentée sous forme d'un programme moteur qui sera transmis par les nerfs sous forme d'ondes dépolarisantes. Après transfert synaptique de la commande nerveuse (par l'intermédiaire de la plaque motrice), les muscles vont être activés pour produire le déplacement du crayon [10]. Le déroulement des opérations de génération de la signature est résumé dans le schéma qui suit (figure I.2).

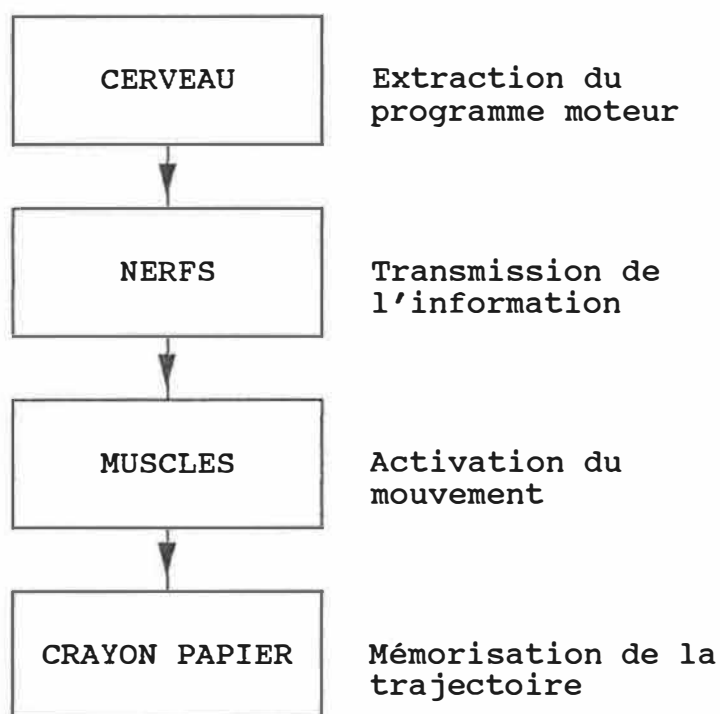


Figure I.2: Génération de la signature

I.3.2 - Choix du modèle générateur de gaussiennes

Selon différents articles publiés dans ce domaine [1,2,3,4,5], on constate que, si l'on se place dans le domaine des vitesses, les profils générés par un tracé manuscrit peuvent s'apparenter à des gaussiennes. Parti de cette constatation, en plus de l'expertise acquise dans ce domaine, Réjean Plamondon a proposé un modèle générateur de

gaussiennes qui permet d'approximer la fonction de transfert du bras lorsque l'on effectue une opération d'écriture ou de signature [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10].

Les paragraphes suivants conduisent à l'établissement de la fonction de transfert d'un générateur de gaussiennes.

I.4 - Fonction de transfert d'un système générateur de gaussiennes

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la fonction de transfert d'un système générateur de gaussiennes en se basant sur les hypothèses faites sur le modèle générateur de tracés manuscrits.

I.4.1 - Description des entrées/sorties

On peut résumer le processus générateur de gaussiennes par le schéma suivant:



Figure I.3: Système générateur de gaussiennes

Pour l'entrée du système (la commande électrique) nous allons considérer qu'il s'agit d'un signal rectangulaire d'amplitude et de durée variables. Nous prenons un signal rectangulaire, car celui-ci constitue l'entrée du système générateur de tracés manuscrits que nous allons utiliser dans ce travail [10]. Ce signal peut être symbolisé par l'expression suivante:

$$e(t) = A.[u(t) - u(t-t_c)] \quad (1.1)$$

avec

A: amplitude du signal

$u(t)$: fonction "échelon unité" (c.f. page 11)

t_c : durée du signal

La figure I.4 illustre l'entrée du système générateur de gaussiennes.

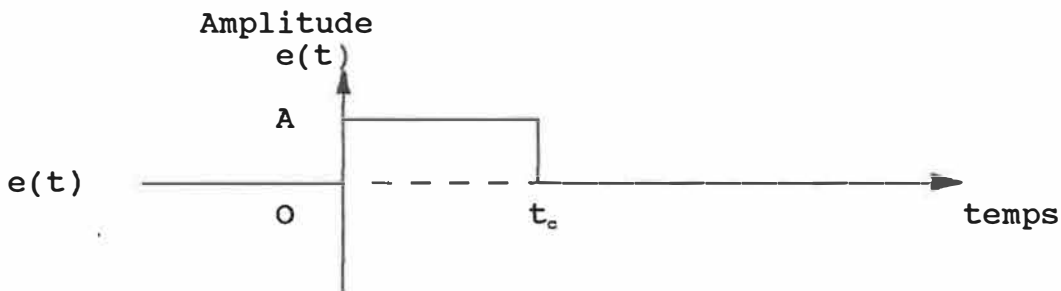


Figure I.4: Entrée du système $e(t)$

Puisque nous avons un système générateur de gaussiennes, la sortie peut s'exprimer par l'expression suivante :

$$z(t) = G.(A \exp [-(t-t_c)^2/\tau^2]) \quad (1.2)$$

avec

- A: Amplitude du signal d'entrée
- G: Gain du système
- t_c : Temps de commutation de la gaussienne
- τ : Constante de temps de la gaussienne

REMARQUE : N'ayant aucun moyen de connaître le gain du système, nous considérons que G est unitaire ou que l'amplitude du signal de sortie ($G.A$) est le seul paramètre qui soit accessible.

I.4.2 - Fonction de transfert d'un système générateur de gaussiennes

Dans le domaine de Laplace, le système générateur de gaussiennes peut se résumer par le schéma suivant:

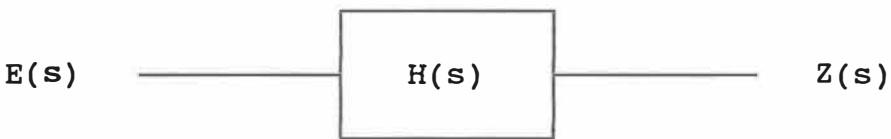


Figure I.5: Système générateur de gaussiennes dans le domaine de Laplace

avec

$E(s)$: transformée de Laplace de $e(t)$

$H(s)$: fonction de transfert du système

$Z(s)$: transformée de Laplace de $z(t)$

REMARQUE: $\mathcal{L}$ [] indique une transformation de Laplace.

Dans la suite nous utiliserons cette notation pour indiquer que l'on exécute une transformée de Laplace.

a) Transformée de Laplace de $e(t)$, entrée du système

- Fonction "échelon unité" (figure I.7)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

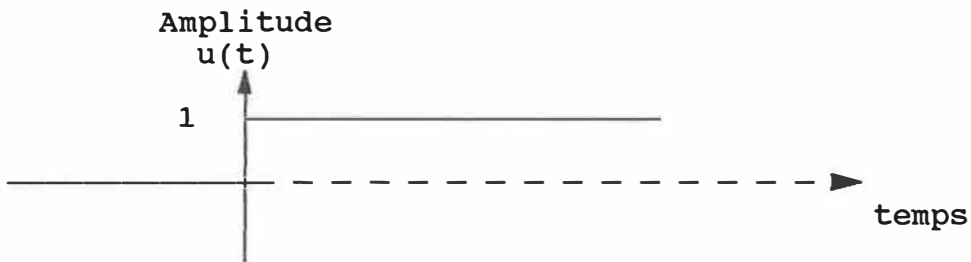


Figure I.6: Échelon unité $u(t)$

Selon la définition de la transformée de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \quad (1.3)$$

la transformée de Laplace $U(s)$ de $u(t)$ est égale à:

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (1.4)$$

$$\boxed{U(s) = \frac{1}{s}} \quad (1.5)$$

Pour la fonction décalée dans le temps, d'une valeur t_0 (figure I.7), on obtient une nouvelle transformée de

Laplace qui est (selon le théorème du décalage dans le domaine du temps):

$$\mathcal{F}[u(t-t_c)] = e^{-tcs} \cdot \mathcal{F}[u(t)] = e^{-tcs} / s \quad (1.6)$$

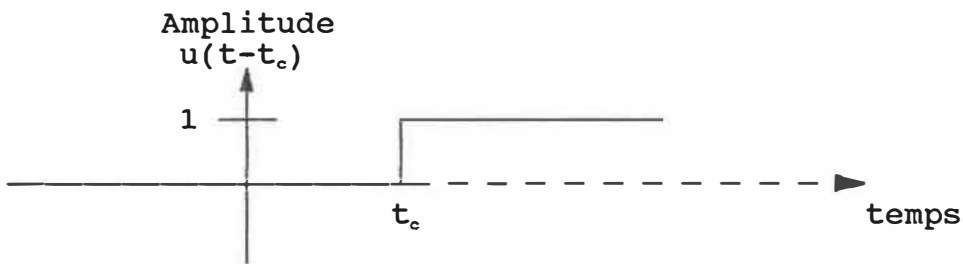


Figure I.7: Echelon unité décalé dans le temps

$$\mathcal{F}[u(t-t_c)] = e^{-tcs} / s \quad (1.7)$$

Ainsi, si l'on considère l'entrée de notre système générateur de gaussiennes par:

$$e(t) = A[u(t) - u(t-t_c)] \quad (1.8)$$

Puisque la transformation de Laplace est une opération linéaire alors:

$$E(s) = \mathcal{L}[e(t)] = A \cdot (\mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-t_c)]) \quad (1.9)$$

$$E(s) = A \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-tcs}}{s} \right) \quad (1.10)$$

$$E(s) = \frac{A}{s} (1 - e^{-tcs}) \quad (1.11)$$

$E(s)$ représente la transformée de Laplace de l'entrée du système générateur de gaussiennes.

Les figures I.8 illustrent que notre entrée $e(t)$ est la résultante des signaux $u(t)$ et $u(t-t_c)$.

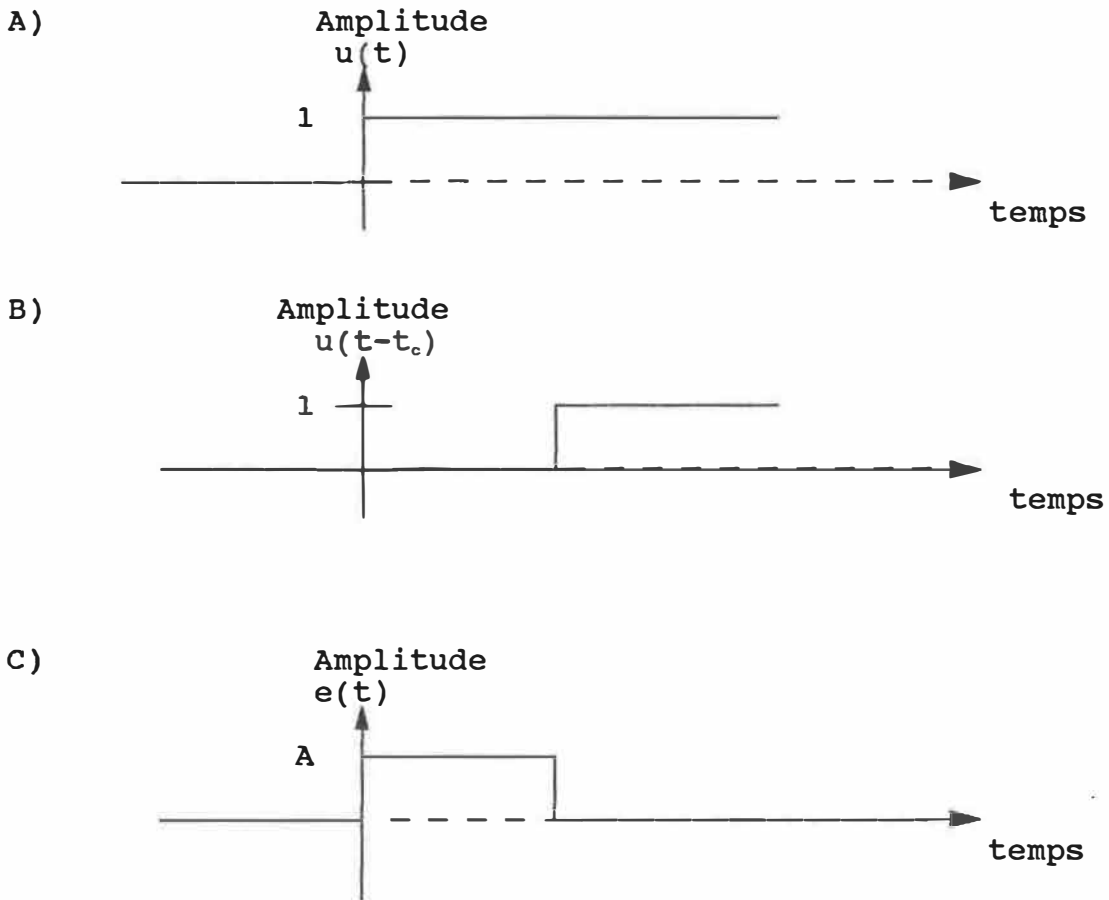


Figure I.8: Entrées du système ($C = A-B$)

b) Transformée de Laplace de $S(t)$, sortie du système

On considère l'équation d'une gaussienne donnée par:

$$f(t) = e^{-t^2/\tau^2} \quad (1.12)$$

Sachant que:

$$\mathcal{F} \left[\frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t^2} \right] = e^{s^2/4a^2} \cdot \text{erfc} (s/2a) \quad (1.13)$$

grâce à la propriété de linéarité on peut écrire:

$$\mathcal{F} [e^{-a^2 t^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{s^2/4a^2} \cdot \text{erfc} (s/2a) \quad (1.14)$$

ainsi, si on pose $a^2 = \frac{1}{\tau^2}$, alors

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{F} [f(t)] = \mathcal{F} [e^{-t^2/\tau^2}] \\ F(s) &= \frac{|\tau| \sqrt{\pi}}{2} e^{\tau^2 s^2/4} \cdot \text{erfc} (|\tau|s/2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par décalage dans le temps de la gaussienne on obtient:

$$Z(s) = \mathcal{F} [f(t-t_c)] = e^{-t_c s} \cdot \mathcal{F} [f(t)] \quad (1.16)$$

$$Z(s) = e^{-t_c s} \frac{|\tau| \sqrt{\pi}}{2} e^{\tau^2 s^2/4} \cdot \text{erfc} (|\tau|s/2) \quad (1.17)$$

$Z(s)$ transformée de Laplace de la sortie du système générateur de gaussiennes.

c) Fonction de transfert $H(s)$

$$H(s) = \frac{Z(s)}{E(s)} \text{ ainsi:}$$

$$H(s) = \frac{s \cdot e^{-t_c s}}{A \cdot (1 - e^{-t_c s})} \cdot \frac{|\tau| \sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\tau^2 s^2 / 4} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{|\tau| s}{2} \right) \quad (1.18)$$

Si le signal $e(t)$ est décalé de t_0 dans le domaine temporel, la fonction de transfert du système générateur de gaussiennes devient:

$$H(s) = \frac{s \cdot e^{-t_c \cdot s}}{A \cdot e^{-t_0 \cdot s} (1 - e^{-t_c \cdot s})} \cdot \frac{|\tau| \sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\tau^2 s^2 / 4} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{|\tau| s}{2} \right) \quad (1.19)$$

$H(s)$ fonction de transfert du système générateur de gaussiennes.

$\operatorname{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire, elle est définie comme suit:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \exp(-u^2) du \quad (1.20)$$

CHAPITRE II

MODELE DE GENERATION DE GAUSSIENNES

Dans le modèle utilisé pour cette étude [1,2,3,4,5,-6,7,8,9,10], les mouvements de base sont représentés dans le domaine des vitesses. On distingue deux sortes de vitesse: la vitesse curvilinéaire et la vitesse angulaire [5].

Le modèle suppose une signature (ou une écriture) rapide et programmée, dans laquelle tout est précisé d'avance et où il n'intervient pas d'autres contrôles extérieurs [7,9].

Pour l'écriture, on peut s'interroger sur l'existence d'autres contrôles (par exemple l'information visuelle sur le tracé en cours d'exécution qui, après réception par le cerveau, entraîne un contrôle du tracé), surtout chez l'enfant pendant la phase d'apprentissage, mais pour la signature le mouvement semble tout à fait programmé et rapide surtout si l'on considère les signatures du type illustré à la figure II.1.

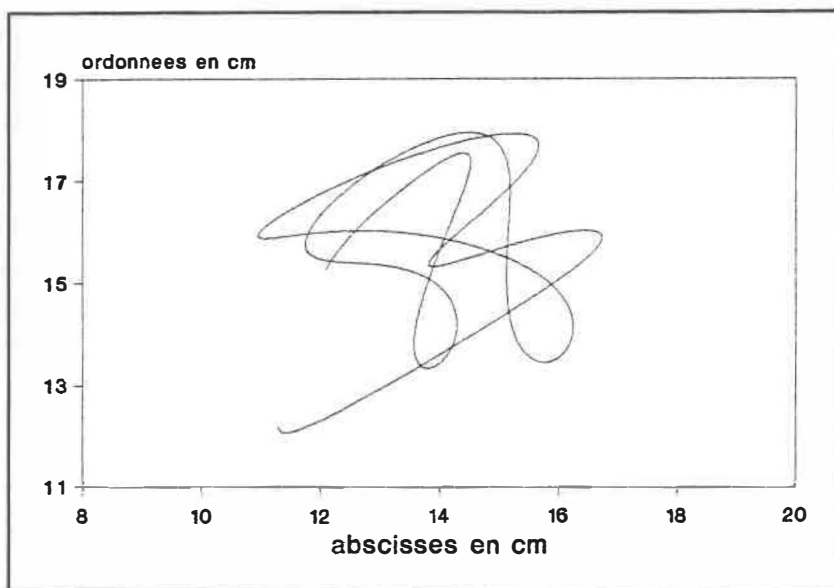


Figure II.1 Exemple de signature.

II.1 - Vitesse curvilinéaire

Une des caractéristiques essentielles du modèle proposé réside dans l'utilisation de la géométrie différentielle afin d'obtenir une invariance de la représentation des signatures en fonction du repère [7,9].

$\rightarrow$

Soit $\vec{m}$ le vecteur position (ou le rayon vecteur) de la pointe du crayon. Le mouvement curviligne de la pointe du crayon peut être décrit par la fonction vectorielle suivante:

$$\vec{m}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \quad (2.1)$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point mobile lié à la pointe du crayon est égal à la dérivée première du vecteur rayon $\vec{m}$ par rapport au temps et s'exprime par:

$$\vec{v} = \frac{d \vec{m}}{d t} = \frac{d x}{d t} \vec{i} + \frac{d y}{d t} \vec{j} \quad (2.2)$$

Le module $|\vec{v}|$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ devient:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(dx / dt)^2 + (dy / dt)^2} \quad (2.3)$$

Si on introduit l'abscisse curviligne σ en tant que paramètre, on aura pour le vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d \vec{m}}{d t} = \frac{d \vec{m}}{d \sigma} \cdot \frac{d \sigma}{d t} \quad (2.4)$$

Sachant que:

l'élément différentiel de l'abscisse curviligne ($d\sigma$) s'exprime par:

$$d\sigma = \sqrt{(dx / dt)^2 + (dy / dt)^2} dt \quad (2.5)$$

et que:

$$\vec{r} = \frac{d \vec{m}}{d \sigma} \quad (2.6)$$

avec:

σ : étant l'abscisse curviligne
 $\vec{r}$: le vecteur tangent unitaire à la courbe
 orienté dans le sens du mouvement.
 $\vec{m}(t)$: le vecteur position.

alors:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{r} \quad (2.7)$$

et:

$$|\vec{v}| = \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.8)$$

$|\vec{v}|$: vitesse curvilinéaire;
 σ : l'abscisse curviligne.

II.2 Vitesse angulaire

En géométrie différentielle, une courbe plane peut être décrite par sa courbure, $c(\sigma)$, le long de l'abscisse cur-

viligne σ [4].

$$c(\sigma) = \frac{\vec{dr}}{d\sigma} \cdot \vec{P} \quad (2.9)$$

Avec:

$$\vec{P} = \frac{\vec{dr}}{d\sigma} / \left| \frac{\vec{dr}}{d\sigma} \right| \quad (2.10)$$

$\vec{P}$: vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{r}$.

L'équation (2.9) est indépendante de l'orientation de la courbe.

Ainsi, une signature (ou de l'écriture), considérée comme une courbe plane, pourra s'exprimer par la fonction:

$$c(\sigma) = \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} \quad (2.11)$$

où:

$\theta(\sigma)$: représente la direction angulaire;

$c(\sigma)$: la trajectoire courbe;

σ : l'abscisse curvilinéaire.

La vitesse angulaire est définie comme la rotation effectuée pendant un intervalle de temps Δt ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\Omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.12)$$

$\Omega(t)$: vitesse angulaire.

II.3 Fonction de transfert

Le modèle générateur de signature ou d'écriture est basé sur l'activation de deux générateurs de vitesse: un générateur de vitesse curvilinéaire et un générateur de vitesse angulaire [5]. Ces deux générateurs produisent des profils en forme de cloche qui ont été modélisés par des courbes gaussiennes. La fonction de transfert, d'un générateur de gaussiennes stimulé par des créneaux rectangulaires, est donnée par: (voir chapitre I)

$$H(s) = \frac{se^{-tc.s}}{A.e^{-tos}(1-e^{-tc.s})} - \frac{|\tau|\sqrt{\pi}}{2} e^{\tau^2 s^2/4} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\tau|s}{2}\right) \quad (2.13)$$

II.4 Définitions

On appelle trait curvilinéaire, un mouvement curvilinéaire résultant de l'excitation du système curvilinéaire générateur de gaussiennes par un créneau rectangulaire en entrée.

On appelle trait angulaire, un mouvement angulaire résultant de l'excitation du système angulaire générateur de gaussiennes par un créneau rectangulaire en entrée.

On distingue dans un tracé deux sortes de discontinuités qui conduisent à la définition d'une chaîne et d'une composante.

Une composante est délimitée par des discontinuités dans le tracé (levées de crayon). Ainsi, une composante commence par une discontinuité en position et une vitesse initiale nulle (ou le début du tracé) et se finit par une discontinuité du tracé en position et une vitesse finale nulle (ou la fin du tracé).

Une chaîne est délimitée par des discontinuités angulaires (fortes variations angulaires et très faibles vitesses curvilinéaires). Ainsi, une chaîne commence par une discontinuité angulaire (ou le début du tracé, ou le début d'une composante) et se finit par une discontinuité angulaire (ou la fin du tracé ou la fin d'une composante).

Par conséquent, une composante peut être formée d'une ou plusieurs chaînes générées à partir d'une séquence de traits curvilinéaires et angulaires. Une signature (ou de l'écriture) est composée par la génération d'une suite de composantes.

Au début de chaque composante, le système prend de nouvelles conditions initiales curvilinéaires et angulaires.

Au début d'une chaîne, le système prend uniquement de nouvelles conditions initiales angulaires.

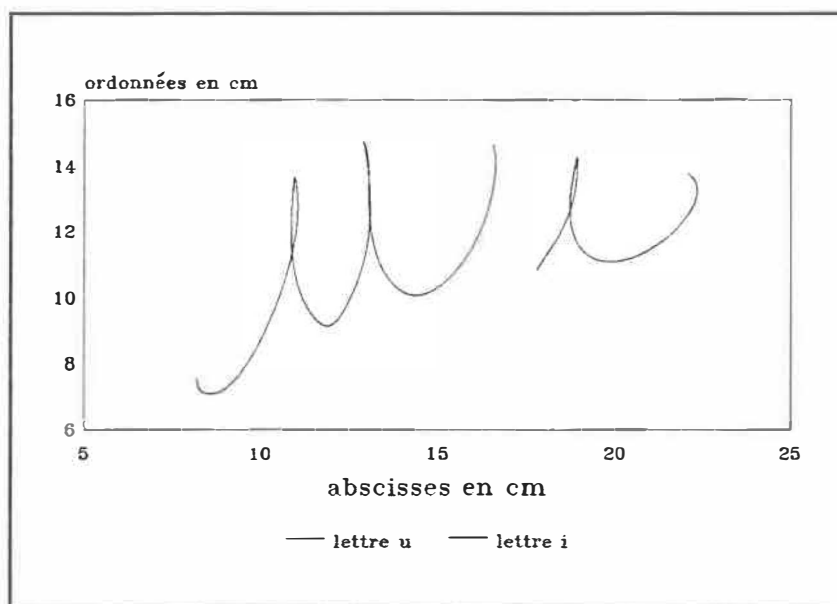


Figure II.2 : Exemple de tracé

La figure II.2 donne un exemple de tracé manuscrit, la figure II.3 donne l'aspect des profils de vitesse curvilinéaire et la figure II.4 donne les profils des vitesses angulaires. Sur la figure II.5 nous présentons la segmentation du tracé manuscrit en chaîne et en composante suivant les définitions données précédemment.

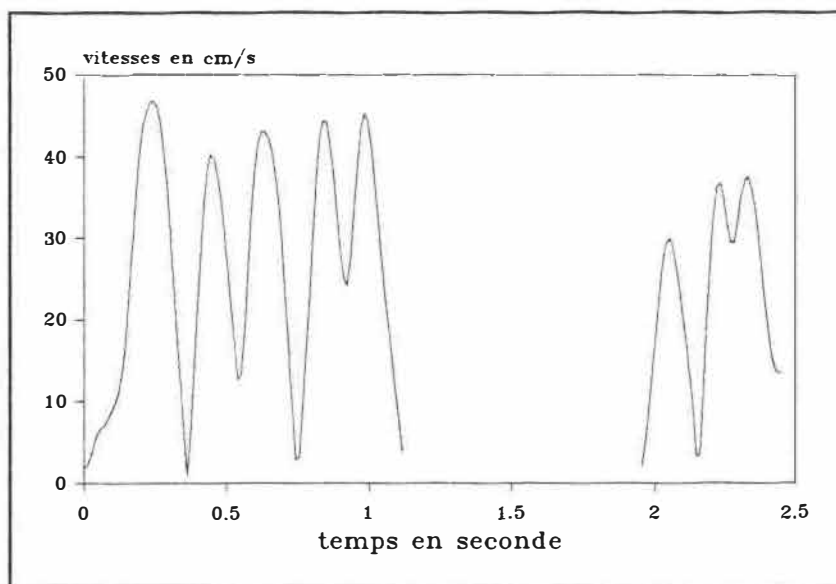


Figure II.3 : Vitesse curvilinéaire

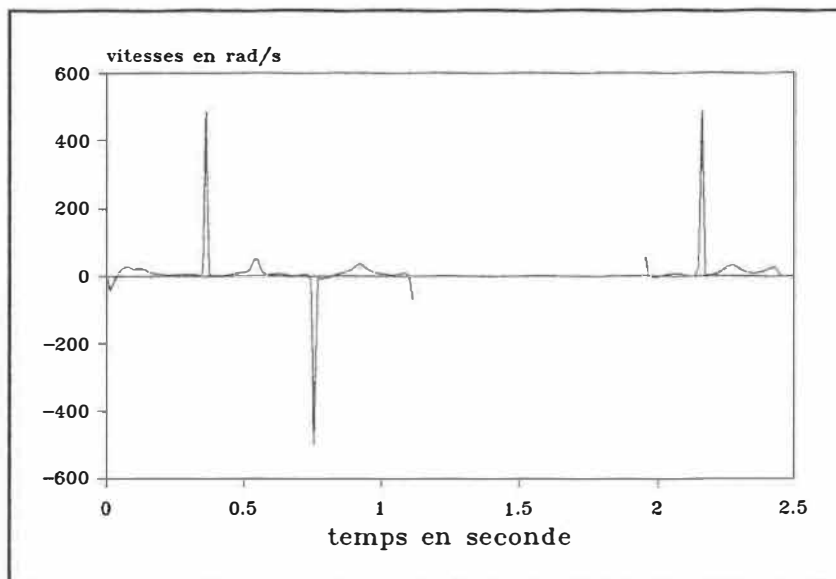


Figure II.4 : Vitesse angulaire

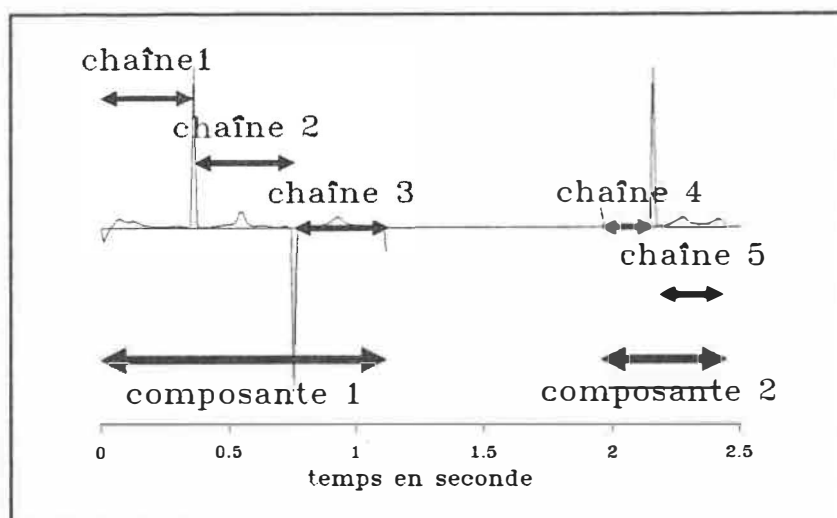


Figure II.5 : Exemple de segmentation

Sur la figure II.5 on peut voir la segmentation en composante et à l'intérieur des composantes la segmentation en chaîne, basée sur les discontinuités angulaires.

II.5 - Description globale du modèle

En résumé, le modèle global générateur de signatures (ou d'écriture) peut être symbolisé par la figure II.6 [5].

Dans ce schéma, on reconnaît les deux générateurs de vitesse. Chacun de ceux-ci produit, à partir de créneaux rectangulaires, une suite de gaussiennes représentant les profils de vitesse (curvilinéaire ou angulaire). A partir de l'intégration des profils de vitesse, on obtient respec-

tivement pour les vitesses curvilinéaires et angulaires, la distance parcourue et la courbure du tracé à chaque déplacement du crayon.

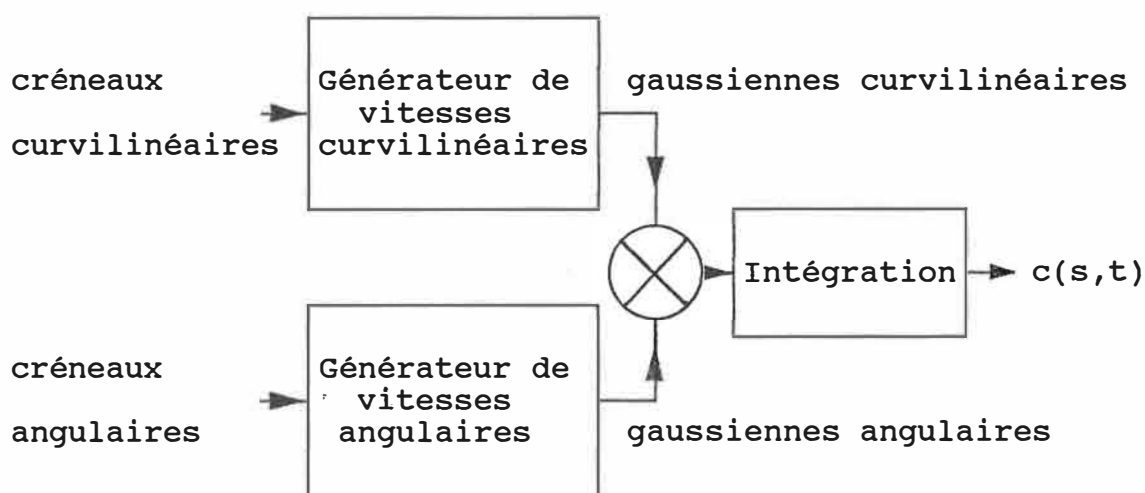


figure II.6 : Générateur de signatures

A partir des distances parcourues (données par le générateur curvilinéaire), des angles de rotation (donnés par le générateur angulaire) et des conditions initiales (les coordonnées du premier point et l'orientation du repère au temps t_0), nous devrions être capable de générer un tracé manuscrit.

CHAPITRE III

JUSTIFICATION DES NOUVEAUX CONCEPTS

III.1 Discontinuités angulaires

Dans le modèle générateur de gaussiennes, la notion de discontinuité angulaire est basée sur l'observation de pics très étroits (changements importants de direction pendant une durée très courte) que l'on observe sur les courbes de vitesse angulaire (Pour plus de détail voir chapitre II et figure II.5).

La notion de discontinuité, quoique évidente dans le processus de génération de tracés, demeure floue lorsque l'on doit décider, à partir des profils de vitesse angulaire, quels pics constituent des discontinuités angulaires.

Dans de précédents travaux réalisés par le professeur Yu Li de l'Université de Pékin, invité au laboratoire SCRIBENS [2] [3], les discontinuités ont été déterminées par un seuil. Ce seuil correspondait approximativement à une variation angulaire de π pendant un temps d'échantillonnage ($f_e = 100$ Hz).

Même si en physiologie la notion de seuil est importante, (ex.: seuil de dépolarisation d'une membrane, clef de la conductivité de l'influx nerveux), elle est très difficile à appréhender dans d'autres domaines (reconnaissance de formes, identification de signatures, séparation de classes, etc.) où sa détermination est souvent arbitraire et fait intervenir beaucoup d'heuristiques.

Pour éviter les seuils nous avons cherché d'autres notions pour déterminer les différentes chaînes délimitées par les discontinuités angulaires. La méthode proposée pour déterminer l'emplacement des discontinuités angulaires est basée sur l'étude des profils de vitesses curvilinéaires. Dans un premier temps cette démarche peut paraître très surprenante, mais les deux vitesses sont fortement liées, et il existe souvent une relation entre leurs extrema.

Pour extraire les paramètres des gaussiennes (chapitre VI) nous supposons qu'il peut y avoir sommation entre 2 gaussiennes successives. La figure III.1, prise sur les vitesses curvilinéaires d'une signature, illustre cette sommation des gaussiennes.

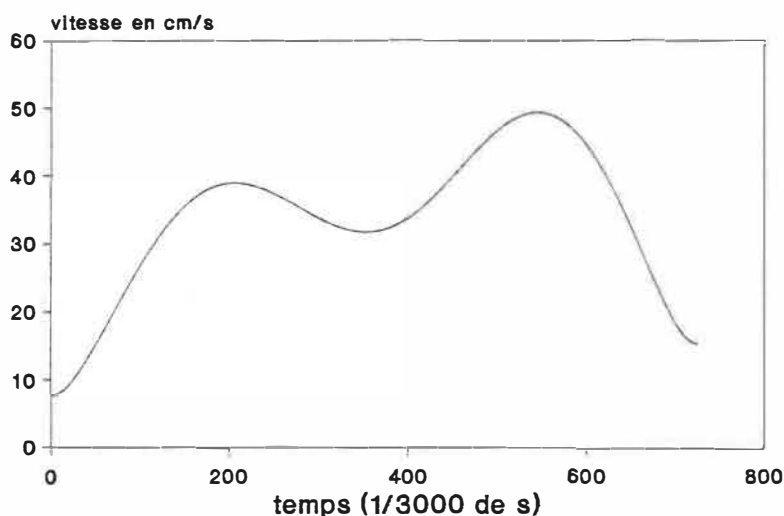


Figure III.1 Sommation de gaussiennes

Dans le concept de chaîne, décrit précédemment, nous savons que le système reprend de nouvelles conditions initiales (angulaires) à chaque début de chaîne. Ainsi, le système prenant de nouvelles conditions initiales, il ne peut pas y avoir sommation des gaussiennes dans le domaine des vitesses curvilinéaires ou angulaires à cet instant.

Si l'on est capable de trouver un algorithme qui détermine s'il y a sommation entre deux gaussiennes successives, on aura réussi à déterminer un moyen d'isoler les discontinuités angulaires sans notion de seuil.

Les pics angulaires correspondent toujours à de très faibles vitesses curvilinéaires.

La sommation ou non des gaussiennes se détermine dans la zone de décroissance de la première gaussienne et de croissance de la deuxième. Donc, si dans le domaine curvilinéaire nous n'avons pas sommation de gaussiennes, ceci veut dire que les deux gaussiennes sont indépendantes. La vitesse de la dernière gaussienne de la chaîne précédente tend vers zéro (il peut rester une vitesse résiduelle due à l'inertie du bras) et la gaussienne suivante commence avec de nouvelles conditions initiales et une vitesse proche de zéro.

La faible vitesse curvilinéaire et le fait d'avoir de nouvelles conditions initiales laissent présumer la présence d'un pic dans le domaine angulaire et implique le commencement d'une nouvelle chaîne. La figure III.2 illustre la non sommation des gaussiennes dans le domaine curvilinéaire (courbe au tracé le plus épais avec échelle des vitesses à gauche) et la présence d'un pic dans le domaine des vitesses angulaires (courbe au tracé fin avec échelle des vitesses angulaires à droite).

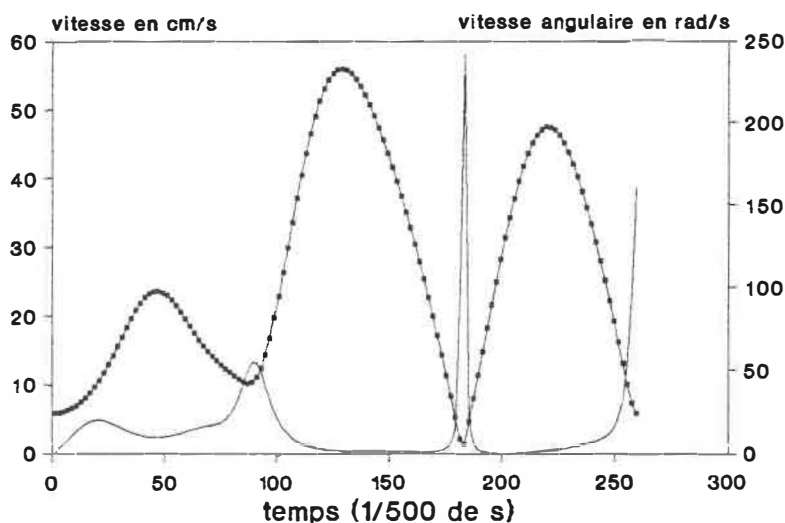


Figure III.2 Non sommation des gaussiennes

Un pic dans le domaine angulaire entraîne toujours une faible vitesse dans le domaine curvilinéaire. Le contraire n'est pas nécessairement vrai. Pourtant nous avons considéré que s'il n'y avait pas une sommation de gaussiennes (par conséquent une faible vitesse curvilinéaire à la jonction des 2 gaussiennes), on devait avoir un pic dans le domaine des vitesses angulaires. Le fait que l'on ne puisse pas déterminer la sommation dans le domaine curvilinéaire nous indique que l'on prend de nouvelles conditions initiales et que, par conséquent, nous sommes en présence d'une discontinuité angulaire.

Précisions: Dans le modèle générateur de gaussiennes décrit au chapitre II, une discontinuité angulaire entraîne

de nouvelles conditions initiales angulaires uniquement.

Pour éviter l'accumulation des erreurs, quand une discontinuité angulaire intervient (si elle détermine le début d'une chaîne) la chaîne prendra de nouvelles conditions initiales angulaires mais également de position (nouvelles coordonnées de départ pour cette chaîne).

III.2 Composantes continues

Dans le modèle de génération de gaussiennes [1,2,3,4,-5,6,7,8,9,10], il n'y a pas de composantes continues ajoutées aux vitesses curvilinéaires et angulaires.

Cependant, à partir de certains profils de vitesses nous avons pu constater, plus particulièrement sur les courbes de vitesses angulaires, que l'on effectue parfois des rotations à vitesse angulaire constante et non nulle. La figure III.3, obtenue sur une portion de vitesse angulaire, montre cette composante continue non nulle entre deux gaussiennes.

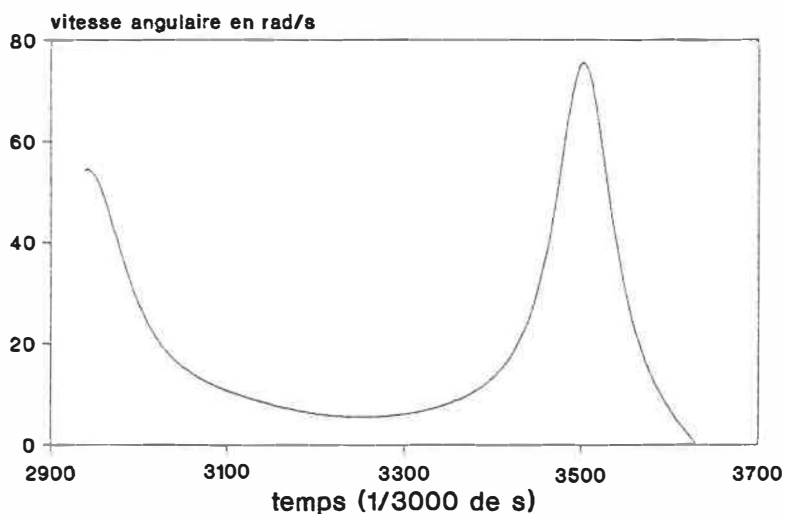


Figure III.3 Composante continue non nulle

Une gaussienne commençant et finissant à zéro, il n'est pas possible d'obtenir des valeurs de vitesse constantes et non nulles.

Après avoir constaté qu'un modèle générateur de tracé sans composantes continues n'était pas capable de générer des tracés à vitesse angulaire constante, nous avons décidé de rajouter une composante continue aux gaussiennes. Cette composante peut changer après chaque demi-gaussienne, nous obtenons ainsi une fonction en escalier pour la composante continue.

REMARQUE: A chaque changement de la constante de temps τ_i , nous associons la valeur d'une composante continue. Cette valeur peut être la même que la suivante ou que la précédente.

Le signal de vitesse (curvilinéaire ou angulaire) s'exprime maintenant par:

$$v(t) = \sum_{i=1}^N e^{-(t/\tau_i)^2} + \alpha_1 \quad (3.1)$$

avec

- $v(t)$: signal de vitesse (curvilinéaire ou angulaire)
- τ_i : constante de temps de la gaussienne
- α_i : composante continue

III.3 Discontinuités spatiales (levées de crayon)

Dans le modèle initial [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], les discontinuités spatiales conduisent à l'établissement de la notion de composante (voir définition des composantes dans la section II.2) et, dans un but de simplification, les tracés compris entre les levées de crayon n'ont pas été

considérées.

Puisque le mouvement est programmé, on peut se demander pourquoi le déplacement entre les différentes composantes ne serait pas lui aussi programmé.

Dans ce travail, nous avons considéré que ces mouvements font également appel à un programme moteur qui génère un tracé hors contact de la tablette. Les exemples du chapitre VIII, traitant les levées de crayon comme des tracés effectués sur la tablette, justifient cette hypothèse. Nous sommes capables de générer les tracés manuscrits et les levées de crayon.

Ne tenant plus compte des discontinuités spatiales, la notion de composante, selon la définition de la section II.2, disparaît totalement de ce travail. Nous pouvons aussi considérer la signature entière comme une composante.

REMARQUE: On ne considère que les levées de crayon comprises entre le début de la signature (début du tracé) et la fin de la signature. La fin de la signature est matérialisée par l'appui sur le bouton sur le coté du stylo de la tablette.

RESTRICTION: La trajectoire décrite pendant la levée de crayon doit être rapide pour respecter les contraintes du système générateur de gaussiennes (mouvement programmé d'avance).

CHAPITRE IV

PROTOCOLE EXPERIMENTAL

Le traitement d'une signature s'effectue en plusieurs étapes: acquisition, suréchantillonnage avec calcul des vitesses (curvilinéaires et angulaires), extraction des paramètres, intégration et reconstruction (voir figure IV.1).

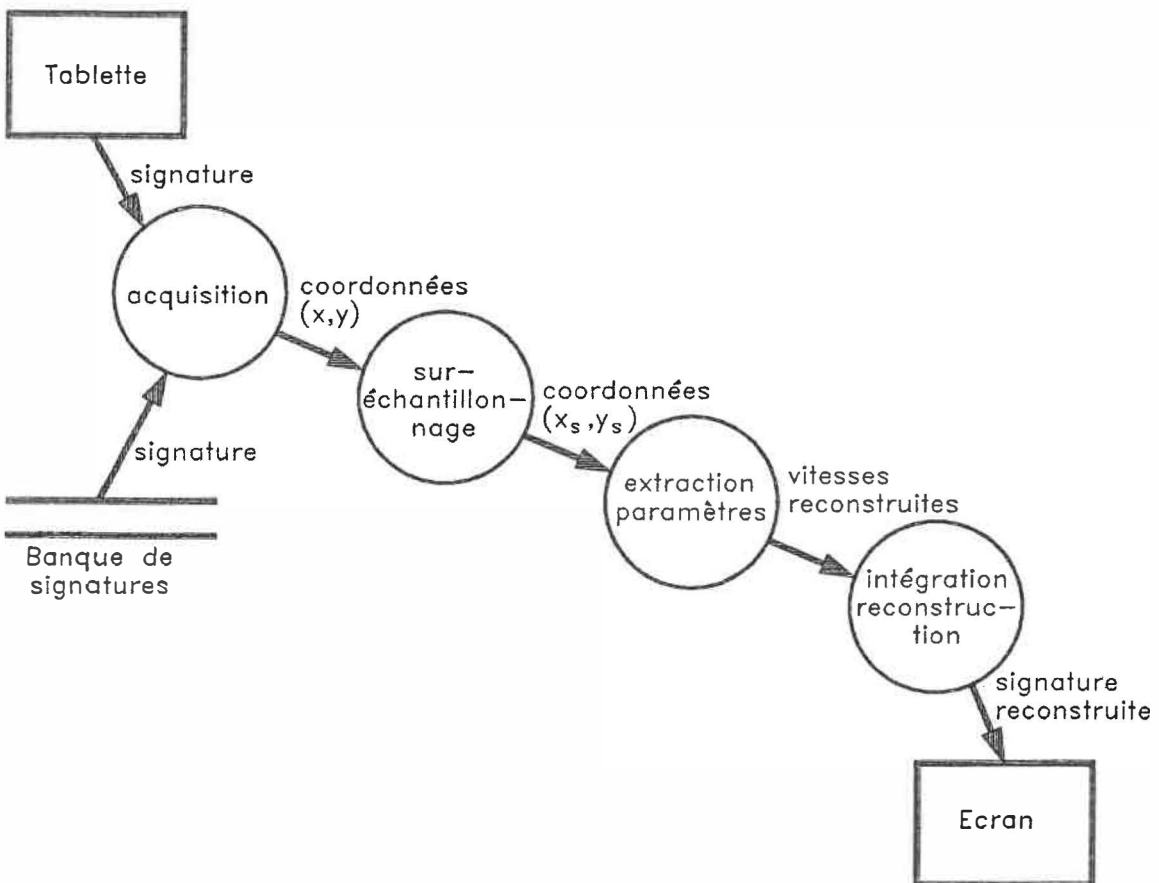


Figure IV.1 Diagramme de flux de données

IV.1 Matériel - logiciel

Pour la réalisation de ce projet nous avons utilisé:

- un micro-ordinateur (compact 286 ou 386) équipé d'une carte graphique EGA et d'un écran couleur;
- une tablette à numériser (penpad #310);
- un compilateur C de Microsoft (version 5.1);
- le logiciel d'aide à la programmation Schéma-Pro (version 1.11).

Une grande partie des travaux réalisés au laboratoire Scribens, nécessitant de la programmation, étant écrits en pseudo-code schématique à l'aide d'un outil d'aide à la programmation (Schéma-Pro) muni d'un traducteur C, nos programmes ont été écrits en langage C et en pseudo-code schématique de Schéma-Pro.

IV.2 Acquisition

Les signatures sont acquises à partir d'une tablette à numériser. Pour les tablettes utilisées, la fréquence d'échantillonnage et la résolution sont variables et peuvent être fixées par programme.

Tous nos exemples ont été acquis avec la tablette Penpad. Ses caractéristiques sont les suivantes:

fréquence d'échantillonnage $f_e = 100$ Hz

Résolution: 1000 points au pouce (394 points au centimètre).

REMARQUE : La fréquence donnée est celle du constructeur. La fréquence réelle est de 99.7 Hz [11]. Dans tous nos calculs, nous avons pris les caractéristiques données par le constructeur.

Pour l'acquisition des signatures, le logiciel est également capable de lire une banque de signatures disponibles au laboratoire [12]. Ces signatures ont été acquises avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hertz et une résolution de 1000 points au pouce (394 points au centimètre).

IV.3 Suréchantillonnage

Même en programmant les meilleures caractéristiques pour la tablette, la fréquence d'échantillonnage ne paraît pas suffisante pour déterminer les discontinuités angulaires

qui peuvent disparaître entre deux échantillons. Ainsi, nous avons été obligés d'effectuer un suréchantillonnage à partir du signal obtenu par la tablette.

Ce suréchantillonnage se fait par logiciel, à partir d'une méthode décrite par BURR [13]. Cette méthode sera explicitée en détail au chapitre suivant.

Globalement, dans ce suréchantillonnage, on réalise l'extraction des coefficients de Fourier du signal original. A partir de l'équation obtenue pour la signature, on recalcule les échantillons intermédiaires. On peut suréchantillonner autant que l'on veut, la limite étant la mémoire disponible et le temps de calcul. Il faut trouver un compromis entre le temps de calcul et la précision souhaitée.

La connaissance de l'équation estimée (continue en fonction du temps) nous permet de trouver les dérivées, première et seconde, afin de calculer les vitesses curvilinéaires et angulaires, sans faire appels aux méthodes de dérivations numériques.

IV.4 Extraction des gaussiennes

Après suréchantillonnage des signatures et calcul des vitesses (le coefficient de suréchantillonnage est fixé par l'utilisateur et par programmation), on peut passer à l'extraction des gaussiennes pour les vitesses curvilinéaire et angulaire.

L'extraction des gaussiennes se fait en utilisant comme critère d'optimisation les moindres carrés appliqués au cas d'équations non linéaires. La méthode d'extraction est la base de tout le logiciel puisque c'est de l'estimation des gaussiennes et de sa qualité que dépend la précision de la reconstruction des signatures. La méthode est développée au chapitre VI. Une fois l'extraction des paramètres effectuée, on peut passer à la reconstruction.

IV.5 Intégration - reconstruction

L'extraction des paramètres des gaussiennes nous permet de reconstruire les signaux des vitesses curvilinéaire et angulaire. Après intégration de ces vitesses et à partir d'une formule de reconstruction, on est capable de restituer le signal original.

La signature reconstruite est calculée pour les mêmes échantillons que la signature originale. Ainsi, on peut évaluer point par point la distance entre les 2 signatures.

A la fin du traitement, les deux signatures sont reproduites à l'écran afin d'apprécier visuellement la qualité de la reconstruction.

Donc, pour résumer, dans ce travail on prend des signatures sur lesquelles on extrait les vitesses curvilinéaires et angulaires. A partir de ces vitesses et selon le modèle proposé, on estime leurs profils par une suite de gaussiennes générée par 2 systèmes parfaitement identiques et agissant en parallèle (voir figure II.6): un générateur de vitesse curvilinéaire et un générateur de vitesse angulaire.

Notre travail consiste à trouver les gaussiennes qu'il faut générer avec notre système pour reproduire, le plus fidèlement possible, les vitesses curvilinéaires et angulaires et ensuite, après intégration, reconstruire la signature originale.

CHAPITRE V

DESCRIPTION DU SURECHANTILLONNAGE

Une signature peut être représentée par 2 variables fonctions du temps, $x(t)$ et $y(t)$, qui sont respectivement les abscisses et les ordonnées du vecteur position (rayon vecteur) lié à la pointe du crayon.

A partir de ces fonctions continues, par l'intermédiaire de la tablette à numériser, on obtient un signal échantillonné (la tablette prend les coordonnées du crayon à intervalles de temps constant). La signature peut ainsi être représentée par les valeurs 2 fonctions $x_s(t)$ et $y_s(t)$ prises à des temps discrets ($t = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots T$), où "T" représente la durée totale de la signature.

Notre problème est d'obtenir une estimation $X(t)$ et $Y(t)$ des abscisses et des ordonnées de la signature, ayant une variable temps continue, à partir des 2 signaux échantillonnés $x_s(t)$ et $y_s(t)$ obtenus avec la tablette à numériser.

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser une méthode basée sur une transformation en série de Fourier décrite par BURR [13].

V.1 - Description de la méthode

Pour appliquer une transformation en série de Fourier nous avons besoin de signaux périodiques.

Afin de pouvoir appliquer cette transformation, nous allons devoir faire subir diverses transformations à nos signaux $x_e(t)$ et $y_e(t)$ pour nous permettre de les considérer comme périodiques.

A partir des signaux, observés sur une durée T , nous prenons le miroir pour chaque échantillon suivant la droite passant par l'abscisse T (figure V.1), puis l'inverse du miroir (figure V.2). L'abscisse et l'ordonnée subissent exactement les mêmes traitements.

Remarque: Dans un but didactique nous avons représenté un signal continu pour les figures V.1, V.2, et V.3, mais l'abscisse et l'ordonnée sont effectivement des fonctions discrètes.

Après avoir pris le miroir inverse, nous retirons une rampe $R(t)$ passant par les ordonnées de nos signaux $x_e(t)$ et $y_e(t)$ au temps $t = 0$ et $t = T$. La soustraction de cette rampe permet aux deux signaux, d'abscisse et d'ordonnée, de débiter

à zéro et de finir à zéro. Après ces étapes, nous obtenons une fonction impaire que l'on peut imaginer se répéter périodiquement (figure V.3). Maintenant les signaux d'abscisse et d'ordonnée peuvent être utilisés comme s'ils étaient périodiques. Les signaux obtenus sont "périodiques" sur une durée $2T$ (T étant la durée d'observation des signaux d'abscisse et d'ordonnée).

Avec les 2 signaux périodiques obtenus pour l'abscisse et l'ordonnée, il est maintenant possible d'effectuer une transformation en série de Fourier.

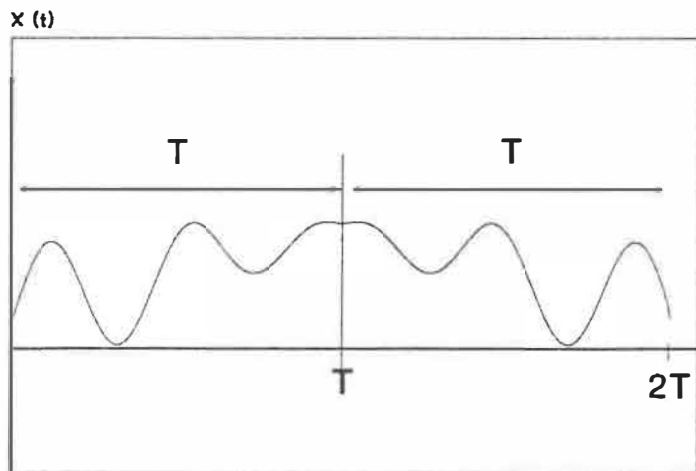


Figure V.1 Miroir du signal $x(t)$ ou $y(t)$

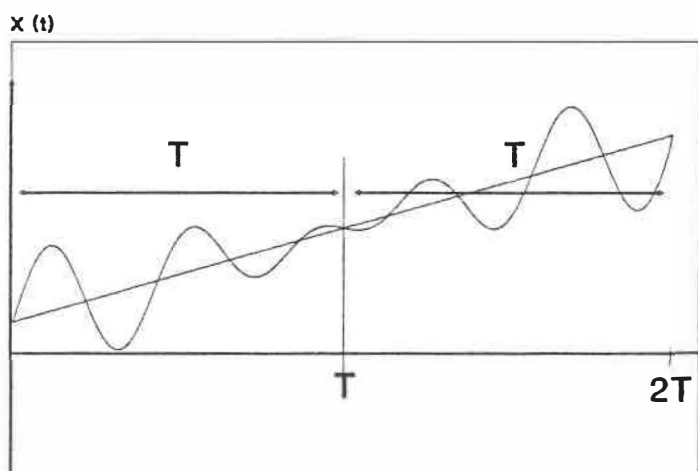


Figure V.2 Miroir inverse pour $x(t)$ ou $y(t)$

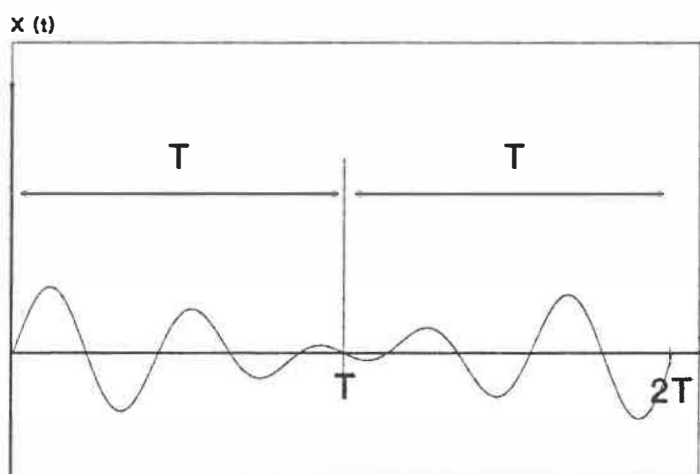


Figure V.3 Signal périodique de période $2T$

D'après la figure V.3 on constate que l'on obtient toujours des fonctions impaires. La transformée en série de

Fourier ne contiendra que des termes en sinus.

Ainsi nous obtenons des fonctions continues pour l'abscisse et l'ordonnée dont les équations peuvent s'exprimer par:

pour l'abscisse:

$$X(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\omega t) + R_x(t) \quad (5.1)$$

avec

$$A_n = \frac{4}{T} \sum_{t=1}^T X_e(t) \sin(n\omega t) \quad (5.2)$$

$$R_x(t) = a_x(t) + b_x \quad \text{rampe pour l'abscisse.} \quad (5.3)$$

pour l'ordonnée:

$$Y(t) = \sum_{n=1}^N B_n \sin(n\omega t) + R_y(t) \quad (5.4)$$

avec

$$B_n = \frac{4}{T} \sum_{t=1}^T Y_e(t) \sin(n\omega t) \quad (5.5)$$

$$R_y(t) = a_y(t) + b_y \quad \text{rampe pour l'ordonnée.}$$

Ces fonctions $X(t)$ et $Y(t)$, continues en fonction du temps, nous permettent de calculer n'importe quels échan-

tillons à l'intérieur de l'intervalle $[0, T]$. Nous pouvons donc choisir notre fréquence d'échantillonnage. Ensuite à partir de ces fonctions continues, il est très facile d'obtenir les vitesses en les dérivant.

V.2 - Calcul des vitesses curvilinéaire et angulaire

Dans le paragraphe II.1, nous avons donné l'expression de la vitesse curvilinéaire. Nous avons :

$$| \vec{V}(t) | = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} \quad (5.7)$$

avec :

$$v_x(t) = dX(t) / dt \quad v_y(t) = dY(t) / dt \quad (5.8)$$

Avec les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$, on peut obtenir l'expression de la vitesse curvilinéaire en fonction du temps grâce aux égalités suivantes :

$$dX / dt = \sum_{n=1}^T n\omega A_n \cos(n\omega t) + a_x \quad (5.9)$$

$$dY / dt = \sum_{n=1}^T n\omega B_n \cos(n\omega t) + a_y \quad (5.10)$$

Pour le calcul de la vitesse angulaire on considère la pente de la tangente à la courbe (ou coefficient directeur de la droite tangente à la courbe).

Si on pose:

$$m = \tan(\theta) = \frac{dY}{dX} \quad (5.11)$$

Alors on trouve:

$$\Omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + m^2} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (5.12)$$

Les vitesses, curvilinéaire et angulaire, ont des expressions continues en fonction du temps. A partir de ces expressions, on peut calculer les vitesses pour n'importe quels instants (inférieurs à la durée de la signature) et ainsi, échantillonner notre signal à la fréquence désirée.

CHAPITRE VI

EXTRACTION DES GAUSSIENNES

Pour reconstruire nos signatures, nous avons besoin d'extraire un certain nombre de paramètres à partir des profils de vitesse.

Les expressions des courbes de vitesse curvilinéaire et angulaire peuvent s'exprimer par:

Vitesse curvilinéaire:

$$v(t) = \sum_{i=1}^M V_{m1} \exp [-(t-t_{c1})^2/\tau_1^2] + \alpha_1 \quad (6.1)$$

Vitesse angulaire:

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^N \Omega_{m1} \exp [-(t-t_{c1})^2/\tau_1^2] + \alpha_1 \quad (6.2)$$

avec:

t_{c1} : les temps de commutation

V_{m1} et Ω_{m1} : les amplitudes maximales

τ_1 : les constantes de temps des gaussiennes

α_1 : les décalages des gaussiennes suivant les ordonnées

Pour chaque gaussienne nous considérons que les paramètres pour la montée (croissance de la gaussienne) sont différents des paramètres pour la descente (décroissance de la gaussienne). Nous interprétons ceci du fait que pour l'augmentation de la vitesse nous produisons un mouvement actif résultant de la contraction des muscles, alors que pendant la phase de décroissance des vitesses nous avons un mouvement passif résultant de l'élasticité des muscles agonistes. De plus, nous avons des muscles antagonistes qui agissent et nous pouvons supposer que leurs caractéristiques biomécaniques ne sont pas identiques.

D'après les équations 6.1 et 6.2, nous constatons que nous avons 4 paramètres qui peuvent varier pour chacune des équations: la constante de temps (τ_i), l'amplitude maximale ($v_{\pi i}$ ou $\Omega_{\pi i}$), le temps de commutation (t_{ci}) et le décalage (α_i).

Remarque: Les paramètres d'amplitude maximale et de temps de commutation peuvent être déterminés directement à partir des courbes et être considérés comme des paramètres fixes. C'est ce qui a été fait dans de précédents travaux [1,2].

Dans ce travail, nous avons considéré que ces paramètres pouvaient être variables, en mettant aussi en doute

l'hypothèse que l'on génère la gaussienne jusqu'à son temps de commutation et que, par conséquent, elle n'atteint pas nécessairement son maximum.

Les deux générateurs de vitesses (curvilinéaire et angulaire) sont considérés comme rigoureusement identiques. L'hypothèse qu'une gaussienne n'atteint pas son maximum a été faite surtout pour les vitesses angulaires où l'on décèle la présence de fortes croissances de leurs valeurs (les discontinuités). Nous pensons qu'une discontinuité est générée par une gaussienne ayant une très grande amplitude maximale qu'elle n'atteint pas, produisant ainsi une forte augmentation de la vitesse angulaire. De par la symétrie des deux générateurs, cette hypothèse a été également appliquée aux vitesses curvilinéaires.

Pour reproduire nos signatures, nous allons devoir extraire les paramètres des gaussiennes le plus fidèlement possible, pour obtenir après intégration des vitesses reconstruites, les meilleurs résultats. Ainsi pour la recherche des paramètres nous avons utilisé la méthode des moindres carrés appliquée à des équations non-linéaires.

Pour appliquer les moindres carrés à des équations non-linéaires, il faut préalablement linéariser les équations. En linéarisant l'équation autour d'un point (une solution approchée), les paramètres calculés par les moindres carrés ne seront plus une estimation de leur valeur, mais une correction à apporter à une valeur initiale approximative (la solution approchée).

A partir de la valeur corrigée, on construit une méthode itérative qui prend cette valeur pour calculer une autre correction. Après plusieurs itérations, on doit converger vers une estimation stable du paramètre (la correction calculée par les moindres carrés doit être de plus en plus en plus faible). Si la méthode ne converge pas il faut changer les conditions initiales (la solution approchée) et recommencer le processus itératif avec le calcul de la correction par les moindres carrés. Le paragraphe suivant décrit plus en détail cette méthode.

VI.1 Méthodes des moindres carrés pour les équations non linéaires

VI.1.1 Cas général

On a n paramètres inconnus $X_1, X_2, \dots, X_n$ que l'on veut estimer. Nous avons m mesures différentes de y : $y_1, y_2, \dots, y_m$ ($m \geq n$) et nous connaissons la relation entre les mesures y_k et les n paramètres

$$y_k = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Ainsi, on obtient un système d'équations non linéaires

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (6.3)$$

où chaque mesure y_k est entachée d'erreurs.

Si on connaît une solution approchée $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, on peut linéariser le système 6.3 en développant la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en série de Taylor autour de la solution

approchée. Si on ne retient que les termes linéaires on obtient:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx f(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i} (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \cdot \Delta x_i \quad (6.4)$$

où $x_i = x_{i0} + \Delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

Ainsi, au lieu du système 6.3 on considère le système d'équations linéaires:

$$y = A \cdot \Delta x \quad (6.5)$$

où

$$\begin{bmatrix} \delta f / \delta x_1 & \delta f / \delta x_2 & \dots & \delta f / \delta x_n \\ \delta f / \delta x_1 & \delta f / \delta x_2 & \dots & \delta f / \delta x_n \\ \vdots & & & \\ \delta f / \delta x_1 & \delta f / \delta x_2 & \dots & \delta f / \delta x_n \end{bmatrix} = A \quad (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ Y_2 - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ \vdots \\ Y - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \end{bmatrix}$$

En appliquant la méthode des moindres carrés on obtient:

$$\Delta X = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (6.6)$$

Si $(A^T A)^{-1}$ existe, le vecteur Δx est l'estimation de la correction (selon le critère des moindres carrés) à ajouter à la solution approchée pour obtenir une meilleure approximation [13,14]. Avec la solution approchée corrigée on peut ensuite itérer (voir page 54 et 55).

VI.1.2 Exemple

Pour expliquer la démarche suivie pour obtenir les résultats du paragraphe VI.3, nous allons traiter un exemple simple avec l'estimation d'un seul paramètre.

Dans cette exemple nous considérons l'équation:

$$y = A_{\max} \exp[-(t/\tau)^2] \quad (6.7)$$

dans laquelle τ sera notre paramètre à estimer.

Première étape, on linéarise cette équation pour se ramener à la méthode d'approximation par les moindres carrés classiques (voir paragraphe VI.1.1). Pour cela, on développe la fonction en série de Taylor autour d'une solution approchée τ_0 et on ne retient que les termes linéaires.

$$y = A_{\max} \cdot \exp[-(t/\tau_0)^2] + \frac{2A_{\max} t^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t/\tau_0)^2] \cdot \Delta\tau \quad (6.8)$$

Nos mesures seront données par des échantillons pris à des intervalles de temps constants et constituant un couple de données (t_k, y_k) .

A partir de ces échantillons de mesure, et connaissant une approximation τ_0 de la constante de temps, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant:

$$y = A \cdot x \quad (6.9)$$

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n]^T$$

Avec
$$a_k = \frac{2A_{\max} t_k}{(\tau_0)^3} \cdot \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$$

$$y = [b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n]^T$$

Avec $b_k = y_k - A_{\max} \cdot \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$

En calculant $(A^T A) \cdot \Delta x = A^T C$ on obtient

$$\sum_{k=1}^m (a_k)^2 \cdot \Delta \tau = \sum_{k=1}^m a_k b_k \quad (6.10)$$

$$\Delta \tau = \frac{\sum_{k=1}^m a_k b_k}{\sum_{k=1}^m (a_k)^2} \quad (6.11)$$

La solution devient

$$\tau = \tau_0 + \Delta \tau \quad (6.12)$$

Ainsi trouver une approximation des paramètres revient à chercher la solution du système

$$(A^T A) \cdot \Delta x = A^T C$$

(6.13)

Après application des moindres carrés, on obtient un système d'équations à n inconnues où n représente le nombre de paramètres à estimer.

La résolution de ces systèmes d'équations permettra de calculer la correction à apporter aux variables approximatives prises comme valeurs initiales.

V.2 Paramètres variables

Dans le paragraphe précédant, nous avons traité un exemple simple. Dans le cas qui nous intéresse l'équation est plus complexe et peut s'exprimer de façon générale pour les deux générateurs (curvilinéaire et angulaire) par:

$$y = A_{\max} \exp [-(t-t_c)^2/\tau^2] + \alpha \quad (6.14)$$

- $A_{\max}$: représente l'amplitude maximale des signaux de vitesse (curvilinéaire et angulaire)
- t_c : le temps de commutation, temps pour lequel l'amplitude maximale est atteinte
- τ : la constante de temps de la gaussienne. Dans notre cas nous considérons une constante de temps pour la montée et une constante de temps pour la descente
- α : représente la composante continue qui s'ajoute au signal de vitesse et que nous avons

justifiée au paragraphe III.2

Nous avons fait une hypothèse supplémentaire (qui ne figurait pas dans les travaux précédents [1] [2]) pour l'estimation des gaussiennes. Nous avons considéré qu'il pouvait y avoir sommation entre 2 gaussiennes successives (et uniquement 2 pour ne pas trop augmenter la complexité).

L'équation pour l'estimation des profils de vitesse (curvilinéaire et angulaire) par la méthode des moindres carrés appliquée aux cas non linéaires devient:

$$y = A_{\max 1} \exp [-(t/t_{c1})^2/\tau_1^2] + A_{\max 2} \exp [-(t-t_{c2})^2/\tau_2^2] + \alpha \quad (6.15)$$

avec la même définition des paramètres que précédemment et un " α " qui est une combinaison de 2 α , 1 pour chaque demi gaussienne.

A partir des équations 6.14 et 6.15 on peut se demander quels sont les paramètres à estimer?

τ représente le paramètre essentiel à estimer on ne peut pas y échapper. C'est lui qui détermine la forme de la gaussienne. Si on ne considère que la première équation

(2.1), nous avons au minimum un paramètre à estimer (les autres peuvent être des constantes déduites des courbes de vitesse).

Si l'on considère l'équation (6.15), nous avons au maximum 7 paramètres à estimer (τ_1 , τ_2 , $A_{\max 1}$, $A_{\max 2}$, t_{c1} , t_{c2} , α), ce qui impliquera d'inverser des matrices 7×7 pour connaître les solutions (voir paragraphe VI.1).

Dans notre cas, nous avons considéré que l'on pouvait avoir de 1 à 7 paramètres variables en passant par des combinaisons intermédiaires. Pour cela, nous avons développé 9 fonctions (ou méthode de calcul):

4 pour l'équation 2.1

Méthode	τ	Amax	tc	α
1	Varie	Fixe	Fixe	Nul
2	Varie	Fixe	Fixe	Varie
3	Varie	Varie	Fixe	Varie
4	Varie	Varie	Varie	Varie

Remarque: Les 4 méthodes sont appliquées 2 fois: l'une pour la gaussienne descendante, l'autre pour la gaussienne mon-

tante suivante. On traite toujours un ensemble de points compris entre 2 maxima, entraînant l'extraction des paramètres d'une demi-gaussienne descendante suivie d'une demi-gaussienne montante (sauf au début où nous commençons par une gaussienne montante et à la fin où nous terminons par une gaussienne descendante).

5 pour l'équation 2.2

Méthode	r_1	r_2	Amax1	Amax2	tc1	tc2	α
5	Varie	Varie	Fixe	Fixe	Fixe	Fixe	Fixe
6	Varie	Varie	Fixe	Fixe	Fixe	Fixe	Varie
7	Varie	Varie	Varie	Varie	Fixe	Fixe	Fixe
8	Varie	Varie	Varie	Varie	Fixe	Fixe	Varie
9	Varie	Varie	Varie	Varie	Varie	Varie	Varie

Pour les 9 méthodes, nous calculons l'erreur totale (somme des carrés des erreurs) sur la courbe comprise entre 2 maxima, en considérant soit les 2 gaussiennes individuellement (méthodes 1 à 4: descente + montée suivante, voir Remarque précédente), soit ensemble (méthodes 5 à 9 basées sur l'équation avec sommation des gaussiennes).

Si l'erreur totale la plus faible se situe dans les

méthodes qui considèrent les gaussiennes individuellement (méthodes 1 à 4), alors nous pouvons peut-être conclure qu'il n'y a pas sommation des gaussiennes; cela peut nous laisser penser que l'on change les conditions initiales et que par conséquent, nous sommes en présence d'une discontinuité (Voir paragraphe III.1 - Justification des nouveaux concepts).

Ainsi grâce à ces 9 méthodes, nous avons un moyen de déterminer si l'on doit considérer la sommation entre 2 gaussiennes successives ou non. On recherche les meilleurs paramètres selon le critère des moindres carrés, mais également on isole les discontinuités puisque l'on peut trouver s'il y a sommation des gaussiennes ou non, donc déterminer si notre signal est continue.

VI.3 Présentation des méthodes

Dans ce paragraphe, nous allons détailler les 4 premières méthodes en donnant les résultats essentiels obtenus avec les moindres carrés décrits précédemment. La sommation des gaussiennes (équation 6.5) est identique à la sommation de 2 équations 6.4, elle n'influence pas le développement en série de Taylor, seulement on obtient plus de termes (les

mêmes que dans les 4 méthodes). Les autres méthodes sont données en annexe 1.

a) Méthode 1

Dans cette première méthode c'est le paramètre τ que l'on veut estimer.

équation:

$$y = A_{\max} \exp[-(t/\tau)^2] \quad (6.16)$$

développement limité:

$$y = A_{\max} \exp[-(t/\tau_0)^2] + \frac{2 A_{\max} t^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t/\tau_0)^2] \cdot \Delta\tau$$

équation générale d'une mesure:

$$a_k \cdot \Delta\tau = b_k \quad (6.17)$$

avec

$$a_k = \frac{2 \cdot A_{\max} (t_k)^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$$

$$b_k = y_k - A_{\max} \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$$

Solution: (correspondant à résoudre $(A^T A) \Delta x = A^T C$ du paragraphe II.1)

$$\Delta \tau = \frac{\sum_{i=1}^N a_k b_k}{\sum_{i=1}^N (a_k)^2} \quad (6.18)$$

b) Méthode 2

Dans cette méthode on estime les paramètres τ et α

équation:

$$y = (A_{\max} - \alpha) \exp[-(t/\tau)^2] + \alpha \quad (6.19)$$

développement limité:

$$\begin{aligned} y &= (A_{\max} - \alpha_0) \exp[-(t/\tau_0)^2] + \alpha_0 \\ &+ \frac{2(A_{\max} - \alpha_0)t^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t/\tau_0)^2] \cdot \Delta \tau \\ &+ (1 - \exp[-(t/\tau_0)^2]) \cdot \Delta \alpha \end{aligned}$$

équation générale d'une mesure:

$$a_k \Delta \tau + b_k \Delta \alpha = C_k \quad (6.20)$$

avec

$$a_k = \frac{2(A_{\max} - \alpha_0)(t_k)^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$$

$$b_k = 1 - \exp[-(t_k/\tau_0)^2]$$

$$C_k = y_k - (A - \alpha_0) \cdot \exp[-(t_k/\tau_0)^2] = \alpha_0$$

Solution:

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \Delta \tau + B \Delta \alpha = D$$

$$B \Delta \tau + C \Delta \alpha = E \quad (6.21)$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$D = \sum_{i=1}^N a_k C_k$$

$$E = \sum_{i=1}^N b_k C_k$$

$$\Delta \tau = \frac{DC - BE}{AC - B^2}$$

$$\Delta \alpha = \frac{AE - DB}{AC - B^2}$$

$$\tau = \tau_0 + \Delta \tau$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$$

c) Méthode 3

Dans cette méthode on estime les paramètres τ , $A_{\max}$ et α
équation:

$$y = (A_{\max} - \alpha) \exp[-(t/\tau)^2] + \alpha \quad (6.22)$$

développement limité:

$$\begin{aligned} y &= (A_{\max 0} - \alpha_0) \exp[-(t/\tau_0)^2] + \alpha_0 \\ &+ \frac{2(A_{\max 0} - \alpha_0)t^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t/\tau_0)^2] \cdot \Delta\tau \\ &+ (1 - \exp[-(t/\tau_0)^2]) \cdot \Delta\alpha \\ &+ \exp[-(t/\tau_0)^2] \cdot \Delta A_{\max} \end{aligned}$$

équation générale d'une mesure:

$$a_k \Delta\tau + b_k \Delta\alpha + c_k \Delta A_{\max} = d_k \quad (6.23)$$

avec

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2(A_{\max 0} - \alpha_0)(t_k)^2}{(\tau_0)^3} \cdot \exp[-(t_k/\tau_0)^2] \\ b_k &= 1 - \exp[-(t_k/\tau_0)^2] \\ c_k &= \exp[-(t_k/\tau_0)^2] \end{aligned}$$

$$dk = y_k - (A_{\max 0} - \alpha_0) \cdot \exp[-(t/\tau_0)^2] - \alpha_0$$

Solution:

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \triangle \tau + B \triangle \alpha + C \triangle A_{\max} = D$$

$$B \triangle \tau + E \triangle \alpha + F \triangle A_{\max} = G$$

$$C \triangle \tau + F \triangle \alpha + H \triangle A_{\max} = I \quad (6.24)$$

avec

$$A = \sum_{k=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{k=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{k=1}^N a_k c_k$$

$$D = \sum_{k=1}^N a_k d_k$$

$$E = \sum_{k=1}^N (b_k)^2$$

$$F = \sum_{k=1}^N b_k c_k$$

$$G = \sum_{k=1}^N b_k d_k$$

$$H = \sum_{k=1}^N (c_k)^2$$

$$I = \sum_{k=1}^N c_k d_k$$

A partir du rang 3 pour les systèmes d'équations nous avons utilisé une méthode numérique pour calculer les solutions $\Delta\tau$, $\Delta\alpha$ et $\Delta A_{\max}$. La méthode est basée sur une LU¹ décomposition de la matrice de notre système, celle-ci est environ 3 fois plus rapide que la méthode de GAUSS-JORDAN [16]. Les solutions finales étant:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + \Delta\tau \\ \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ A_{\max} &= A_{\max 0} + \Delta A_{\max}\end{aligned}\tag{6.25}$$

d) Méthode 4

Dans cette méthode on estime les paramètres τ , $A_{\max}$, α et t_c .

équation:

$$y = (A_{\max} - \alpha) \cdot \exp [-(t-t_c)^2/\tau^2] + \alpha\tag{6.26}$$

développement limité:

$$y = (A_{\max 0} - \alpha_0) \cdot \exp [-(t-t_{c0})^2/\tau_0^2] + \alpha_0$$

¹ Décomposition d'une matrice en un produit de 2 matrices, une matrice triangulaire inférieure et une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(A_{\max 0} - \alpha_0)(t - t_{c0})^2}{(\tau_0)^3} \exp [-(t - t_{c0})^2 / \tau_0^2] \cdot \Delta \tau \\
& + (1 - \exp [-(t - t_{c0})^2 / \tau_0^2]) \cdot \Delta \alpha \\
& + \exp [-(t - t_{c0})^2 / \tau_0^2] \cdot \Delta A_{\max} \\
& + \frac{2(A_{\max 0} - \alpha_0)(t - t_c)^2}{(\tau_0)^2} \cdot \exp [-(t - t_{c0})^2 / \tau_0^2] \cdot \Delta t_c
\end{aligned}$$

équation générale d'une mesure:

$$a_x \Delta \tau + b_x \Delta \alpha + c_x \Delta A_{\max} + d_x \Delta t_c = e_x \quad (6.27)$$

avec

$$a_x = \frac{2(A_{\max 0} - \alpha_0)(t_k - t_{c0})^2}{(\tau_0)^3} \cdot \exp [-(t_k - t_{c0})^2 / \tau_0^2]$$

$$b_x = 1 - \exp [-(t_k - t_{c0})^2 / \tau_0^2]$$

$$c_x = \exp [-(t_k - t_{c0})^2 / \tau_0^2]$$

$$d_x = \frac{2(A_0 - \alpha_0)(t_k - t_c)}{(\tau_0)^2} \cdot \exp [-(t_k - t_{c0})^2 / \tau_0^2]$$

$$e_x = (A_0 - \alpha_0) \cdot \exp [-(t_k - t_{c0})^2 / \tau_0^2] + \alpha_0$$

Solution:

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}
 A \triangle \tau + B \triangle \alpha + C \triangle A_{\max} + D \triangle t_c &= E \\
 B \triangle \tau + F \triangle \alpha + G \triangle A_{\max} + H \triangle t_c &= I \\
 C \triangle \tau + D \triangle \alpha + J \triangle A_{\max} + K \triangle t_c &= L \\
 D \triangle \tau + H \triangle \alpha + K \triangle A_{\max} + M \triangle t_c &= N
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^N (a_k)^2 & B &= \sum_{k=1}^N a_k b_k \\
 C &= \sum_{k=1}^N a_k c_k & D &= \sum_{k=1}^N a_k d_k \\
 E &= \sum_{k=1}^N a_k c_k & F &= \sum_{k=1}^N (b_k)^2 \\
 G &= \sum_{k=1}^N b_k c_k & H &= \sum_{k=1}^N b_k d_k \\
 I &= \sum_{k=1}^N b_k e_k & J &= \sum_{k=1}^N (c_k)^2 \\
 K &= \sum_{k=1}^N c_k d_k & L &= \sum_{k=1}^N c_k e_k \\
 M &= \sum_{k=1}^N (d_k)^2 & N &= \sum_{k=1}^N d_k e_k
 \end{aligned}$$

La résolution par des méthodes numériques nous permet d'estimer $\Delta\tau$, $\Delta\alpha$, $\Delta A_{\max}$ et Δt_c et par suite:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + \Delta\tau \\ \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ A_{\max} &= A_{\max 0} + \Delta\alpha \\ t_c &= t_{c0} + \Delta t_c\end{aligned}\tag{6.29}$$

REMARQUE: A partir d'une première approximation d'un des paramètres, avec calcul de la correction de cette valeur par les moindres carrés, on peut réutiliser cette nouvelle valeur corrigée pour calculer une autre valeur plus précise. C'est ce que nous avons fait. L'algorithme réinjecte la valeur corrigée pour un nouveau calcul avec minimisation par les moindres carrés. L'algorithme cesse de calculer de nouvelles valeurs dès qu'il a atteint une précision suffisante (une variation inférieure à 0.0001) ou bien s'il y a divergence. Si l'on ne converge pas, l'algorithme reprend une nouvelle valeur initiale et recommence le même processus. Si après plusieurs changements de la valeur initiale le paramètre calculé ne converge pas vers une valeur stable, on passe à une autre des 9 méthodes. Les 9 méthodes sont exécutées les unes après les autres. Il y en a toujours plusieurs qui

convergent. Dans celles qui convergent, on retient les paramètres estimés de la méthode qui a donné la plus faible erreur au sens des moindres carrés.

CHAPITRE VII

RECONSTRUCTION

VII.1 - Choix de la méthode d'intégration

Dans les chapitres précédents nous avons montré que l'extraction des paramètres était réalisée dans le domaine des vitesses. Le modèle décrit est un générateur de courbes de vitesses (curvilinéaire et angulaire) ayant des profils de gaussiennes.

A partir de ces vitesses, après intégration, il est théoriquement possible de reconstruire un signal qui sera proche de l'original.

Pour intégrer nos vitesses, nous avons utilisé la méthode d'intégration numérique de Simpson [13]. Dans la formule de Simpson on approche la courbe par une fonction $f(x)$ qui passe par 3 points d'appui $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

La fonction $f(x)$ est donnée par:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{x-x_1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x_2)-f(x_0)}{2} + \frac{(x-x_1)^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (7.1)$$

On obtient ainsi pour l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (7.2)$$

Pour que cette formule soit applicable, il faut que l'intervalle entre 2 échantillons consécutifs soit constant (ce qui est bien notre cas).

Δx représente cet intervalle de temps

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad (7.3)$$

En répétant la formule (7.2) pour un nombre pair d'intervalle, on trouve la formule d'intégration de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)] + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (7.4)$$

REMARQUE: La méthode de Simpson a le désavantage de donner 1 point sur 2 après intégration. Pour que l'on ait autant de points que la signature originale, nous suréchantillonons par 2 le signal de vitesse afin d'avoir autant de point après intégration.

VII.2 - Reconstruction

Après intégration des vitesses (curvilinéaire et angulaire), nous obtenons les signaux qui vont nous permettre de réaliser la reconstruction de la signature.

L'intégration de la vitesse curvilinéaire entre 2 échantillons successifs nous permet de calculer le déplacement (distance parcourue) entre ces 2 points.

L'intégration de la vitesse angulaire du temps $t_0 = 0$ (début de la signature) au temps t_i , nous donne la rotation effectuée depuis le début du tracé par rapport à une direction fixe. A partir de cette rotation, on peut connaître la direction dans laquelle s'est effectué le déplacement de la pointe de stylo. Comme direction de référence pour retracer nos courbes, nous prendrons l'abscisse du repère cartésien lié à la tablette (l'horizontale de la partie inférieure de

la tablette). Un angle initial fixera la direction à prendre pour tracer le premier point à partir du point d'origine de la signature (x_0 y_0).

Connaissant la distance parcourue et la direction du parcours, on peut tracer les différents points à l'aide de la formule de reconstruction suivante (Voir figure VII.1 et la formule 7.1).

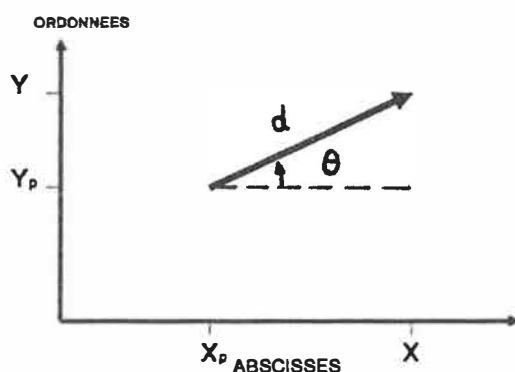


Figure VII.1 Reconstruction

$$x = d \cos(\theta) + x_p$$

$$y = d \sin(\theta) + y_p$$

avec

d : distance parcourue

θ : l'angle par rapport au repère fixe (abscisse de la tablette)

x_p : abscisse du point précédent

y_p : ordonnée du point précédent

Pour retracer la signature, nous avons besoin des conditions initiales (coordonnées du premier point et direction initiale). Pour les coordonnées du premier point, à partir duquel se fait la reconstruction, nous prenons les coordonnées du point correspondant sur la signature originale. Pour le calcul de l'angle initial, nous générons une première fois tout le tracé avec un angle initial nul, puis nous calculons le vecteur reliant le point de début et de fin du tracé de la chaîne. Nous calculons le même vecteur pour le tracé original, et à partir du point d'origine du tracé choisi comme pivot (ce point est identique pour les 2 tracés, le reconstruit et l'original), nous calculons la rotation à faire subir au vecteur lié au tracé reconstruit pour que ces 2 vecteurs se superposent. Cet angle nous donne les conditions initiales angulaires pour régénérer le tracé (Voir figure VII.2)

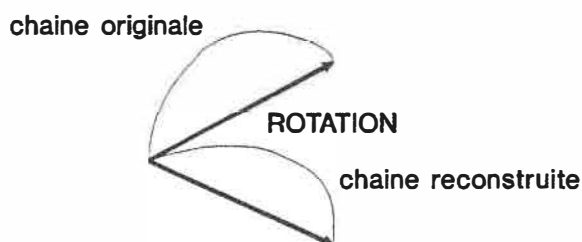


Figure VII.2 Rotation d'une chaîne

VII.3 - Mesure des erreurs

Pour chiffrer les erreurs lors de la reconstruction des vitesses curvilinéaires et angulaires et de la signature, nous avons utilisé le calcul de l'erreur quadratique moyenne.

Ainsi pour la vitesse curvilinéaire nous calculons:

$$\epsilon_v = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (V_{ok} - V_{rk})^2}{N}} \quad (7.5)$$

avec

V_{ok} : Vitesse curvilinéaire originale au temps t_k

V_{rk} : Vitesse curvilinéaire reconstruite au temps t_k

N : le nombre total de points

Pour la vitesse angulaire:

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{N}{\sum_{k=1}^N (\Omega_{ok} - \Omega_{rk})^2 / N}} \quad (7.6)$$

avec

Ω_{ok} : Vitesse angulaire originale au temps t_k

Ω_{rk} : Vitesse angulaire reconstruite au temps t_k

N : le nombre total de points

Pour la signature:

$$\epsilon_s = \sqrt{\frac{N}{\sum_{k=1}^N (d_k)^2 / N}} \quad (7.7)$$

où d_k représente la distance euclidienne entre le point original du tracé et le point reconstruit pris au même instant. Cette distance s'exprime par:

$$d_k = \sqrt{(x_{ok} - x_{rk})^2 + (y_{ok} - y_{rk})^2} \quad (7.8)$$

avec

(x_{ok}, y_{ok}) : coordonnées du point original au temps t_k

(x_{rk}, y_{rk}) : coordonnées du point reconstruit au temps t_k

Dans le chapitre suivant qui traite des résultats, nous aurons des exemples des valeurs que peuvent prendre ces erreurs de reconstruction.

CHAPITRE VIII

RESULTATS

Dans ce chapitre nous présenterons les résultats obtenus sur une signature. Nous montrerons la reconstuction de la vitesse curvilinéaire et de la vitesse angulaire de toute la signature, ainsi que la reconstruction du tracé de la signature même.

Dans le deuxième paragraphe nous donnerons un résumé des résultats relatifs aux traitements de 12 signatures.

VIII.1 - Traitement d'une signature

La figure VIII.1 présente la signature qui a été traitée. Cette signature possède une très bonne dynamique (exécution rapide), ce qui est un point important pour son traitement à l'aide du modèle. Cette signature ne présente aucune levée de crayon et elle est exécutée en une seule fois. Après acquisition par la tablette, cette signature a été suréchantillonnée 30 fois.

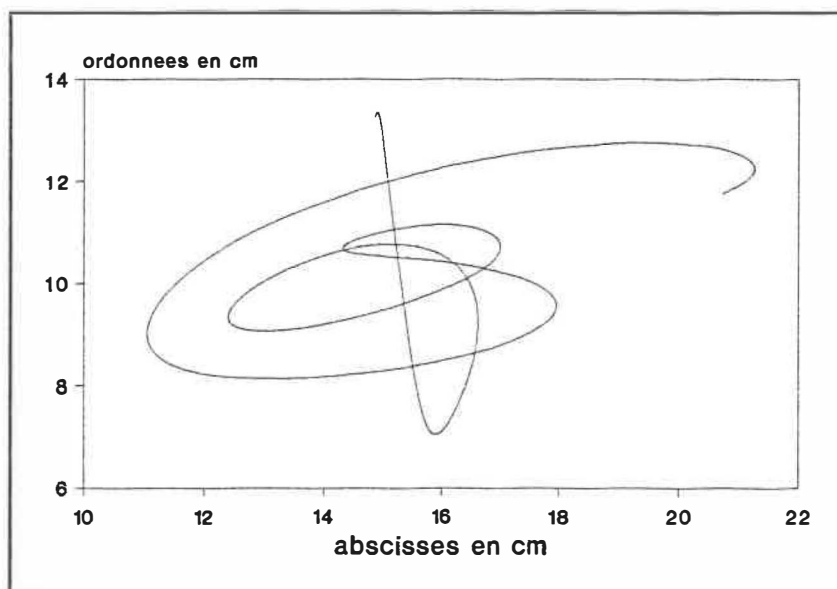


Figure VIII.1 Signature originale

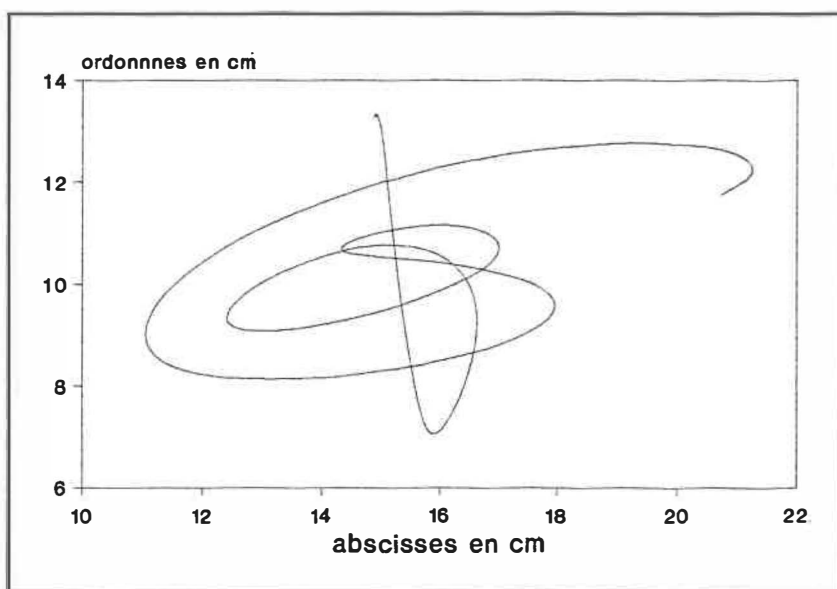


Figure VIII.2 Signature reconstitue

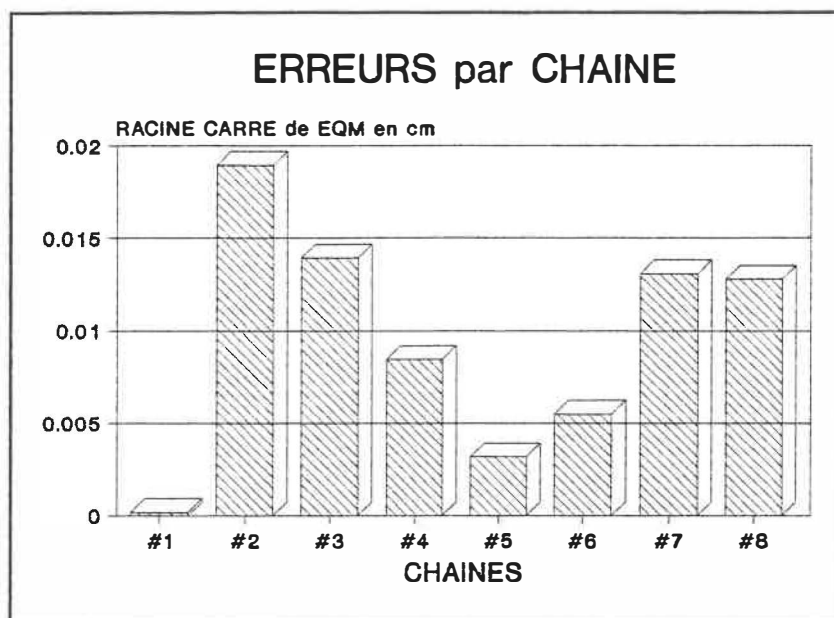


Figure VIII.3 Erreurs de reconstruction par chaîne

Le graphique VIII.2 donne la reconstruction de la signature à partir de l'extraction des paramètres obtenue sur les profils de vitesse.

L'exemple que nous présentons a été segmenté en 8 chaînes par le logiciel (pour la définition d'une chaîne voir paragraphe II.4). Le graphique VIII.3 montre les racines carrées des erreurs quadratiques moyennes ϵ_s de reconstruction (ϵ_s est définie au paragraphe VII.3), commise chaîne par chaîne. Sur ce graphique, on constate que la chaîne #2 de la signature est la moins bien reconstruite, elle s'éloigne en moyenne de 0.02 cm de la chaîne originale.

Les tableaux suivants donnent à titre indicatif les valeurs des paramètres extraits sur les vitesses curvilinéaire et angulaire pour les huit chaînes de la signature.

Signification des paramètres:

chaîne	td	durée	xd	yd	θ_d
	Paramètres tc	des gaussiennes Amax	curvilinéaires τ	α	type
	Paramètres tc	des gaussiennes Amax	angulaires τ	α	type

t_d : temps du début de la chaîne en s

durée: durée de la chaîne en s

x_d, y_d : coordonnée du premier point de la chaîne en cm

θ_d : angle initial (voir paragraphe VII.2) en rad

type: type de la gaussienne

"m" gaussienne croissante

"d" gaussienne décroissante

Paramètres extraits par les moindres carrés:

t_c : temps de commutation en s

A_{max} : amplitude maximum de la gaussienne (en cm\s ou rad\s)

τ : constante de temps de la gaussienne en s

α : composante continue (en cm\s ou rad\s)

chaîne #1	0.0000	0.034	14.87	13.24	1.36
	0.0000	69.4	0.1795	-65.600	d
	0.0697	-2058.0	0.0225	-3.948	m
chaîne #2	0.0353	0.2170	14.91	13.34	-0.06
	0.1132	70.55	0.1078	-24.174	m
	0.1272	57.64	0.0817	-10.863	d
	0.0000	-151.37	0.0071	-29.838	d
	0.0784	30.37	0.0815	-29.838	m
	0.0789	0.48	0.0207	0.049	d
	0.2813	1352.74	0.0405	1.266	m
chaîne #3	0.2523	0.2414	15.88	7.04	-0.09
	0.0646	41.85	0.0532	-3.226	m
	0.0677	14.53	0.0436	24.338	d
	0.1824	24.94	0.0458	24.338	m
	0.1854	45.81	0.0462	3.155	d
	-0.0094	124.82	0.0188	7.643	d
	0.1256	21.66	0.0395	5.801	m
	0.1223	18.20	0.0384	9.225	d
	0.2500	92.11	0.0207	10.825	m
chaîne #4	0.4937	0.1340	12.42	9.27	-1.16
	0.0654	55.50	0.0553	-0.271	m
	0.0724	49.72	0.0495	5.570	d
	-0.0240	156.59	0.0302	5.895	d
	0.1484	93.88	0.0275	5.895	m
chaîne #5	0.6280	0.1000	17.00	10.77	1.79
	0.0478	29.74	0.0358	11.678	m
	0.0529	58.16	0.0480	-16.742	d
	-0.0137	84.46	0.0270	10.497	d
	0.1119	418.31	0.0138	10.497	m

chaîne #6	0.7280	0.1133	14.32	10.67	-1.30
	0.0542	73.17	0.0563	-23.515	m
	0.0598	38.56	0.0417	11.155	d
	-0.0150	518.23	0.0153	3.719	d
	0.1773	-359.32	0.0504	-2.798	m
chaîne #7	0.8417	0.1386	17.96	9.58	-1.53
	0.0733	72.50	0.0559	4.711	m
	0.0796	56.32	0.0437	20.951	d
	-0.0195	-98.83	0.0315	-6.148	d
	0.1467	-55.11	0.0274	-6.148	m
chaîne #8	0.9807	0.2290	11.08	8.78	1.92
	0.0909	87.14	0.0734	10.370	m
	0.0905	146.85	0.0917	-48.865	d
	0.2293	59.40	0.0361	-48.865	m
	-0.0968	-361.74	0.0695	-6.357	d
	0.2308	-247.55	0.0410	-6.357	m
	0.1755	-93.70	0.0251	-1.499	d

La figure VIII.4 qui suit, montre la vitesse curvilinéaire originale, la figure VIII.5 la vitesse curvilinéaire reconstruite et la figure VIII.6 les erreurs de reconstruction prises chaîne par chaîne.

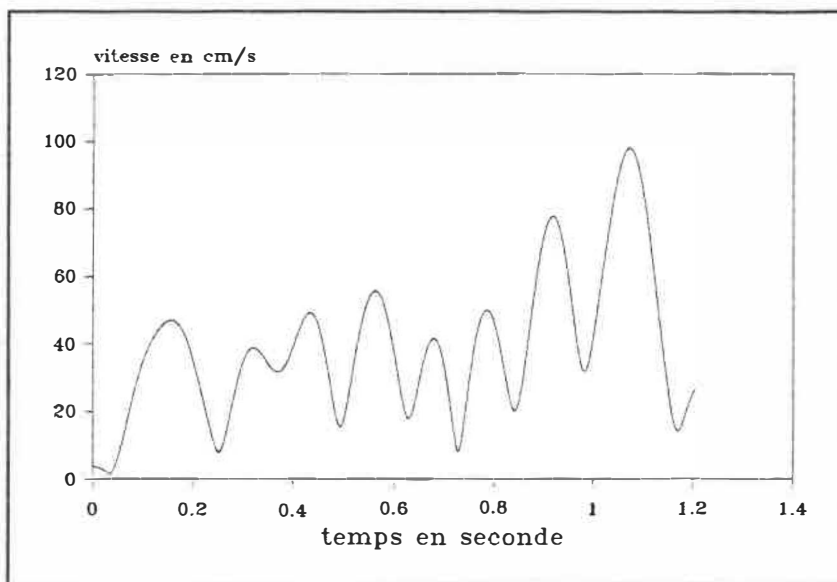


Figure VIII.4 Vitesse curvilinéaire originale

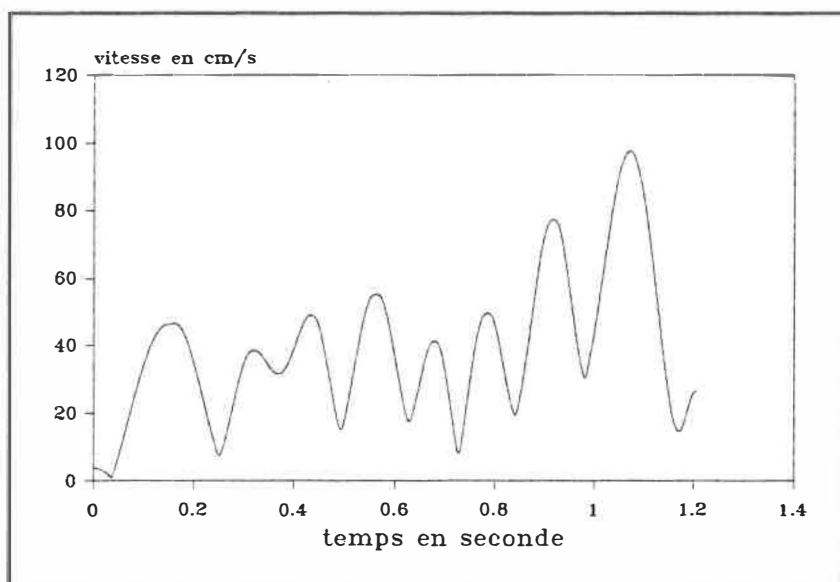


Figure VIII.5 Vitesse curvilinéaire reconstruite

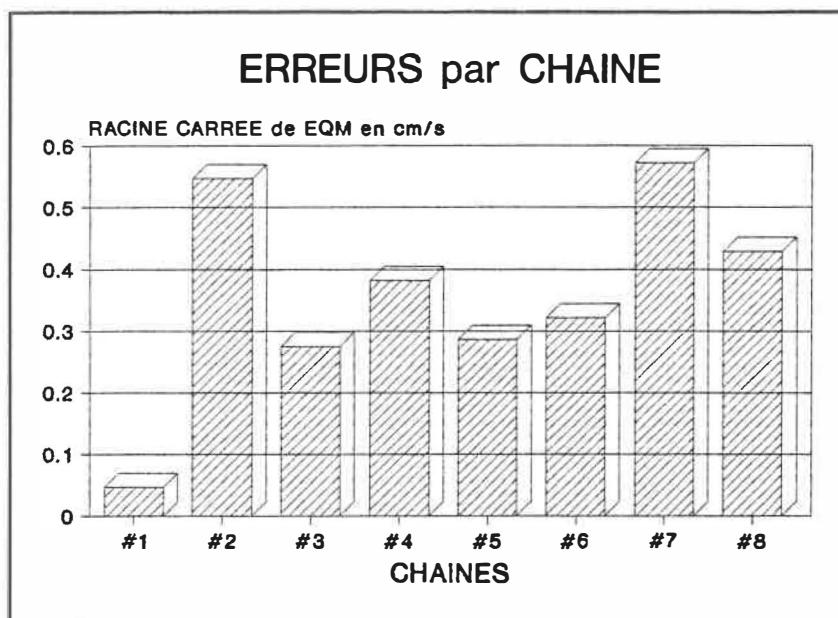


Figure VIII.6 Erreurs sur la vitesse curvilinéaire

Sur ce graphique, on constate, qu'en vitesse curvilinéaire, c'est la chaîne #7 qui est la moins bien reconstruite. Les erreurs de reconstruction sur les vitesses curvilinéaires influencent les résultats pour la reconstruction de la signature, mais ce ne sont pas les seules responsables des erreurs présentées sur la figure VIII.3. Les erreurs de reconstruction de la signature dépendent aussi de la vitesse angulaire (figure VIII.9).

Dans les pages suivantes, nous présentons la vitesse angulaire originale (figure VIII.7) et la vitesse angulaire reconstruite (figure VIII.8).

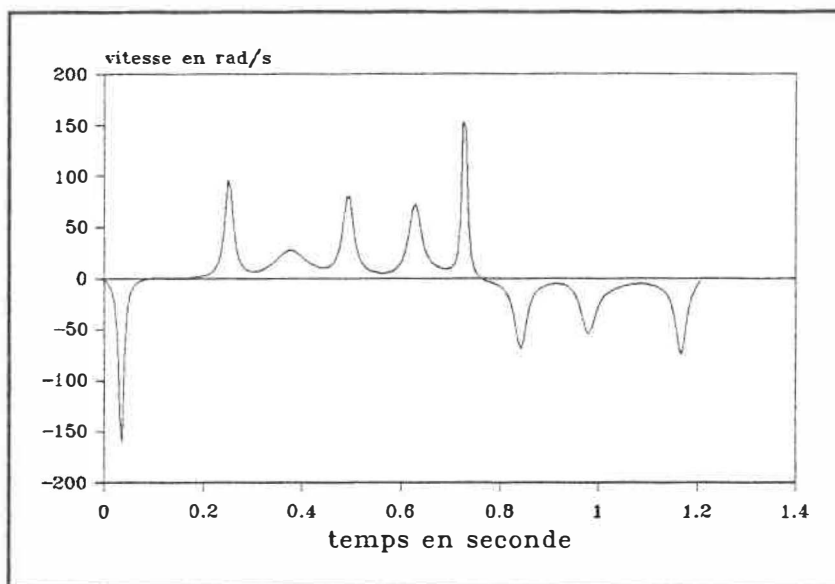


Figure VIII.7 Vitesse angulaire originale

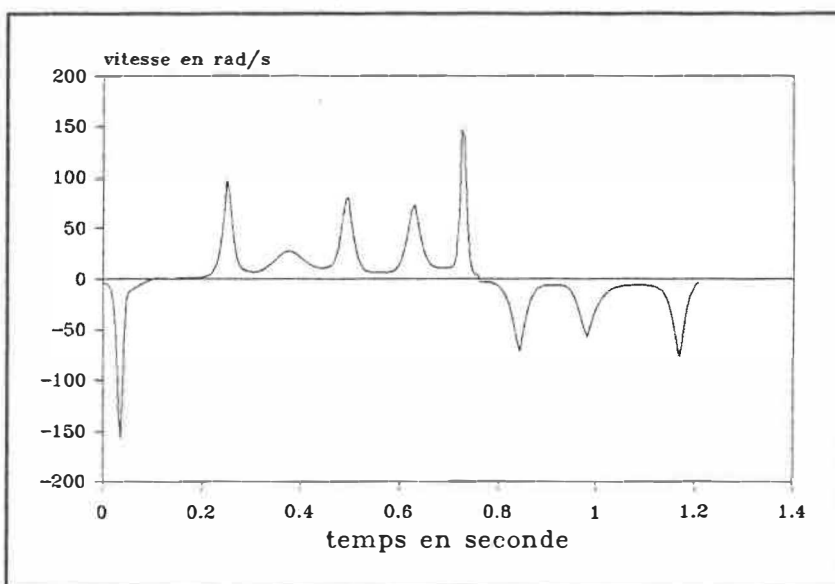


Figure VIII.8 Vitesse angulaire reconstruite

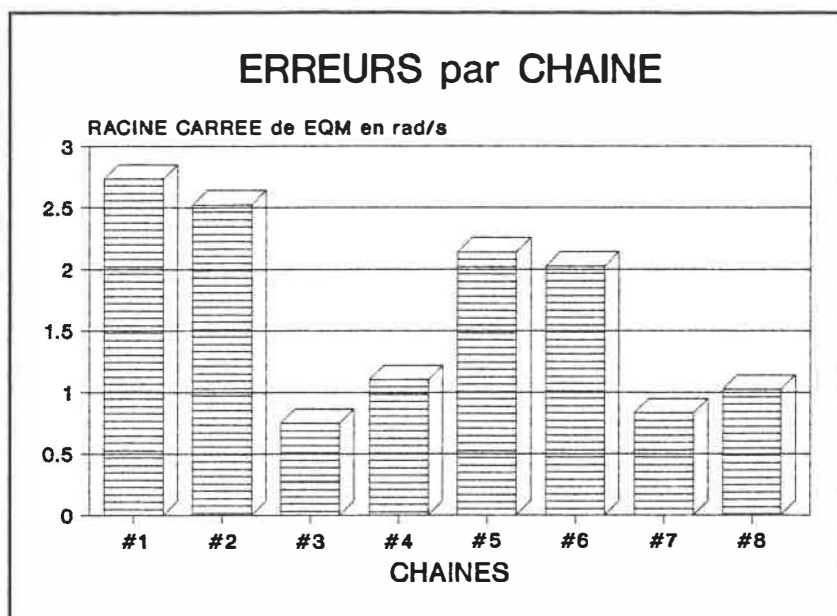


Figure VIII.9 Erreurs sur les vitesses angulaires.

Sur le graphique VIII.9, on peut constater que les racines carrées de l'erreur quadratique moyenne, prise chaîne par chaîne sur les vitesses angulaires, sont pratiquement constantes et relativement faibles, si on les compare à celles que l'on obtient sur d'autres signatures (voir paragraphe suivant). Ceci doit provenir du fait que cette signature ne possède pas dans son tracé de fortes variations angulaires. Généralement, les pics angulaires sont moins bien estimés, ce qui entraîne des erreurs de reconstruction plus grandes.

VIII.2 - Traitement de 12 signatures

Les pages suivantes montrent les résultats concernant le traitement de 12 signatures. Pour chacune des signatures, nous présentons la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne la plus élevée dans l'ensemble des chaînes reconstruites (figure VIII.10) et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne la moins élevée de toutes les chaînes de la signature (figure VIII.11) commise lors de la reconstruction pour les 12 signatures.

Les figures VIII.12 et VIII.13 donnent les racines carrées des erreurs quadratiques moyennes les moins et les plus élevées commises pour la reconstruction des vitesses curvilinéaires.

Les figures VIII.14 et VIII.15 donnent les erreurs quadratiques moyennes les moins et les plus élevées commises pour la reconstruction des vitesses angulaires.

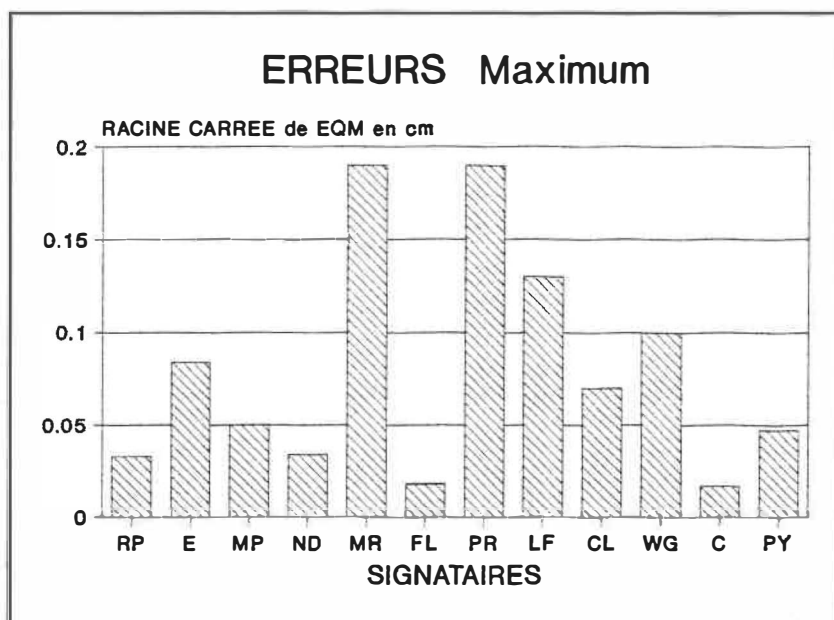


Figure VIII.10 Erreurs maximum de reconstruction des signatures

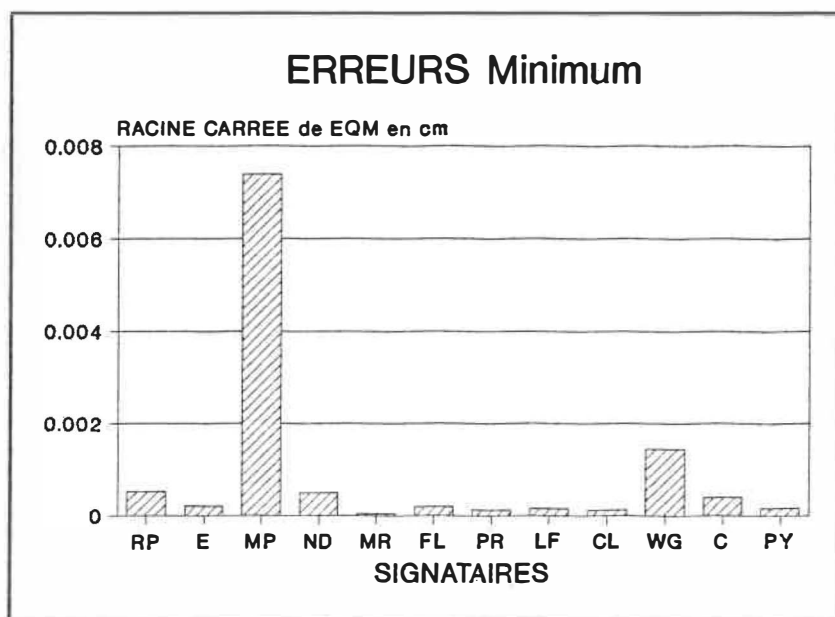


Figure VIII.11 Erreurs minimum de reconstruction des signatures

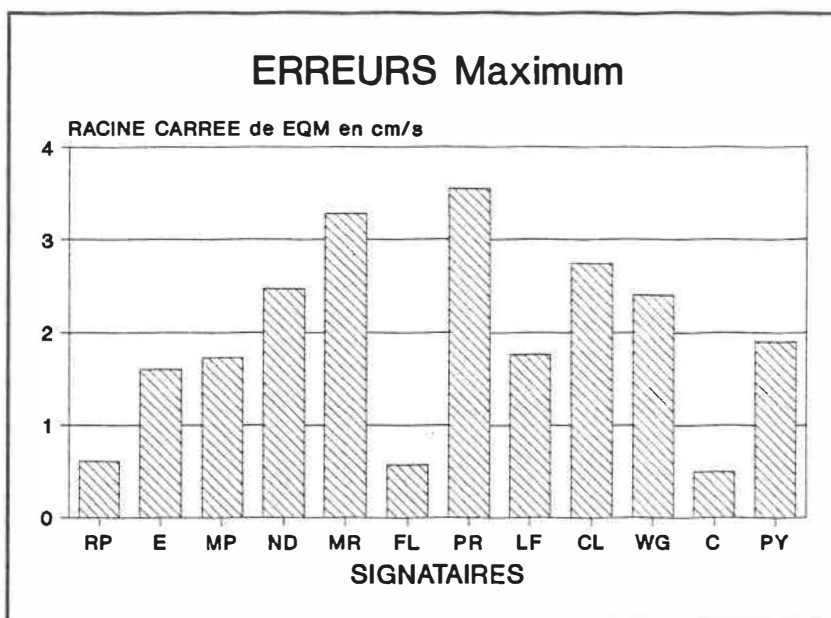


Figure VIII.12 Erreurs maximum sur la vitesse curvilinéaire

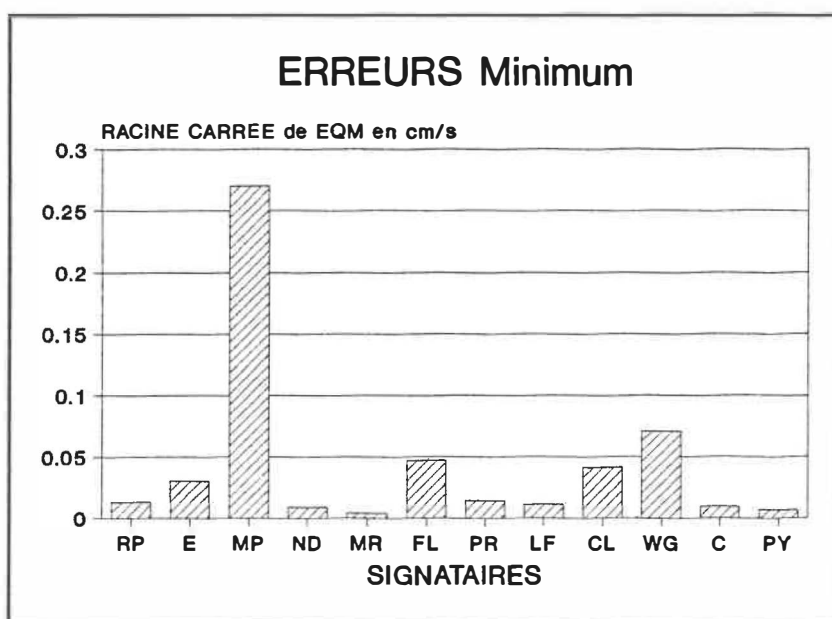


Figure VIII.13 Erreurs minimum sur la vitesse curvilinéaire

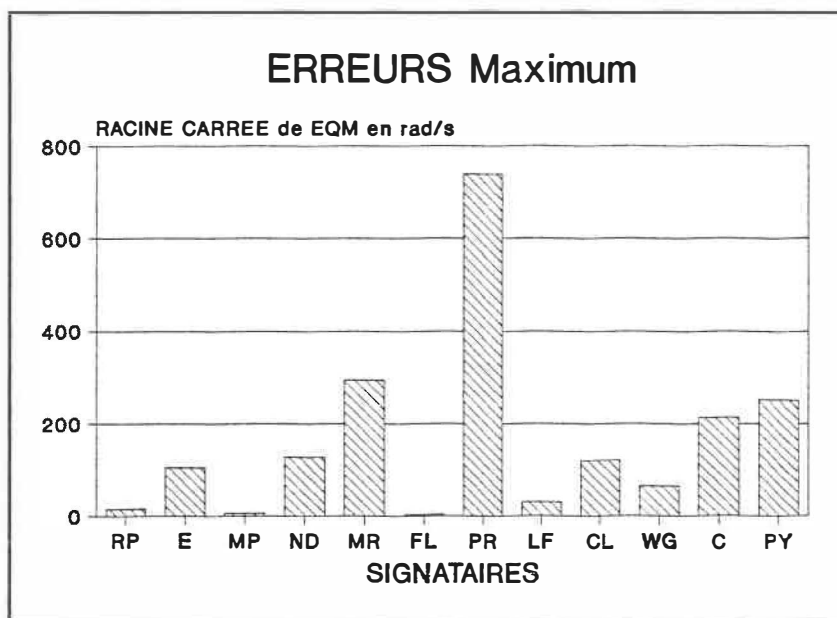


Figure VIII.14 Erreurs maximum sur les vitesses angulaires,

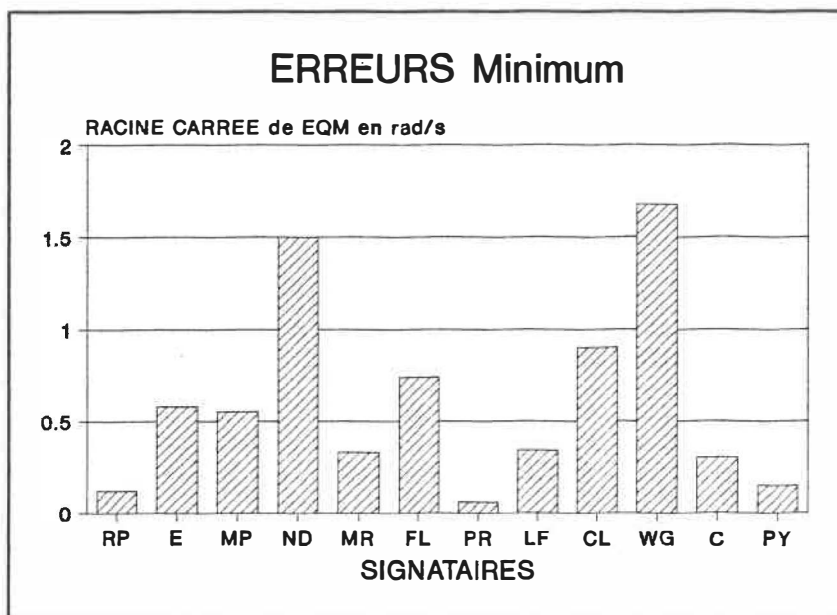


Figure VIII.15 Erreurs minimum sur les les vitesses angulaires

A partir des graphiques VIII.10 et VIII.11, on peut constater, que pour certaines signatures, les erreurs prises chaîne par chaîne sont pratiquement constantes sur toute la signature (ex: signature de MP, il y a peu d'écart entre les erreurs minimum et maximum), alors que pour d'autres, il y a une grande variabilité dans la reconstruction des différentes chaînes (ex: signature de MR). Si l'on regarde la signature de MP (voir annexe 2), on constate que cette signature est faite uniquement de boucles exécutées très rapidement, alors que la signature de MR (voir annexe 2) est composée d'un mélange de boucle rapide et d'écriture lente, ce qui explique certainement l'écart dans la qualité de la reconstruction des différentes chaînes. En règle général, on peut constater que les signatures écrites (constituées par l'écriture du nom de la personne) sont moins bien reconstruites que les signatures graphiques (constituées d'un ensemble de courbes, boucles et lignes droites ne représentant nullement le nom de la personne).

Sur les figures VIII.12 et VIII.13 qui illustrent les plus grandes et les plus petites erreurs de reconstruction de la vitesse curviliénaire (prises sur l'ensemble des chaînes d'une signature et pour les 12 signatures), on constate que les meilleures reconstructions des vitesses curvilinéaires correspondent aux tracés des signatures

rapides constituées surtout de boucles et dont le graphique (à l'exception d'une: LF) ne représente pas le nom du signataire (voir en annexe 2 les signatures de E, FL, LF, et C). De plus, on constate que la signature de MP, décrite précédemment, est également stable en vitesse.

Dans les graphiques VIII.14 et VIII.15, on constate de grandes différences entre les racines carrées des erreurs quadratiques les plus fortes et les racines carrées des erreurs quadratiques les plus faibles. Ceci s'explique par les discontinuités angulaires. Pour les pics angulaires, dont les valeurs sont très élevées, l'estimation des gaussiennes est difficile. La mauvaise estimation de ces pics et leurs fortes valeurs entraînent des valeurs d'erreur élevées. Pour les chaînes ne possédant pas de discontinuités angulaires, les erreurs sont beaucoup plus faibles.

Avec les résultats que nous venons de présenter sur les signatures et les graphiques donnés en annexe 2, nous pouvons déjà annoncer que nous avons atteint notre objectif pour ce projet de maîtrise: valider le modèle générateur de vitesse sur des signatures. Nous avons réussi l'implantation complète d'un logiciel permettant d'extraire automatiquement les paramètres des vitesses curvilinéaires et angulaires, et de reconstruire nos signatures à partir de ces paramètres et

des différents concepts du modèle [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10].

Ainsi, on peut constater que l'implantation du modèle nous donne des ouvertures sur d'autres recherches. Par exemple, si le modèle est proche du système bras/main, l'étude du modèle apportera des éléments pour la compréhension du processus générateur de tracé (écriture ou signature). Par exemple, à partir des 9 méthodes d'extraction des paramètres, on pourrait éventuellement faire une étude statistique dans une prochaines recherches) pour connaître celles qui reviennent le plus fréquemment.

Pour ma signature (figure VIII.1), nous avons pu constater que pour les vitesses curvilinéaires et angulaires confondues, les méthodes 4 et 9 sont les plus fréquemment utilisées. Ensuite les méthodes 3 et 6 n'apparaissent qu'une fois. Les autres ne sont pas utilisées. Les méthodes 4 et 9 se caractérisent par le fait que dans les équations nous supposons que la gaussienne n'atteint pas nécessairement son amplitude maximun. Cela voudrait dire que le système générateur de tracé (écriture ou signature) n'atteint presque jamais son régime permanent.

Cependant, il ne faut pas tirer de conclusions hâtives, il faudra attendre de prochaines recherches pour faire de

telles affirmations à partir du modèle. L'implantation du modèle générateur de vitesse est une étape dans la compréhension du processus de génération de tracé (écriture ou signature).

Pour terminer avec les résultats, l'annexe 3 présente les profils de vitesse curvilinéaire originale et reconstruite pour la signature de WG, et les profils de vitesse angulaire originale et reconstruite pour la signature de PR.

Chacune de ces signatures représente le cas où l'erreur (sur la vitesse curvilinéaire pour WG et sur la vitesse angulaire pour PR) est la moins bonne. Pour les valeurs des erreurs voir figure VIII.12 pour la signature de WG et la figure VIII.14 pour la signature de PR.

REMARQUE: D'un aspect visuel, les courbes originales et reconstruites semblent identiques. Mais ce n'est pas le cas, et les valeurs numériques des erreurs sont là pour en témoigner. Si les courbes pouvaient être superposées (nous n'avons pas pu le faire car les graphiques sont en noirs et blancs) les différences apparaîtraient plus facilement. Ainsi il faut regarder très attentivement les graphiques pour s'apercevoir que ce ne sont pas les mêmes. Des différences il y en a.

Pour la reconstruction de la vitesse angulaire, certains pics peuvent disparaître (sans conséquence pour la reconstruction de la signature), parce que les pics délimitent les chaînes. La chaîne reconstruite, selon sa durée, peut contenir ou non la discontinuité. Les pics délimitent les discontinuités, mais la partie essentielle pour la reconstruction se situe entre les discontinuités

CHAPITRE IX

COMMENTAIRES SUR LE LOGICIEL

IX.1 -Discussions

Après vous avoir présenté les résultats, il est maintenant temps de faire la critique du logiciel, d'en retenir les avantages et de souligner ses problèmes.

Tout d'abord nous allons commencer par ses aspects négatifs. Le temps de traitement, par exemple, est long. Pour exécuter la modélisation, il faut suréchantillonner la signature (chapitre V). En fonction du suréchantillonnage demandé, le temps pour calculer les échantillons intermédiaires peut être long. Evidemment, il dépend aussi de la durée de la signature à traiter.

Une fois le suréchantillonnage réalisé, il faut extraire les paramètres, et si nous suréchantillonons beaucoup, les temps de calculs pour extraire les paramètres des gaussiennes seront longs. Dans cette partie du logiciel, nous appliquons les 9 méthodes de recherche par les moindres carrés décrites aux chapitres VI; ceux-ci demandent beaucoup de calcul et d'inversion de matrice, ce qui justifie le temps

de traitement important.

L'extraction des paramètres est la partie la plus longue du traitement, c'est le coeur du logiciel. Après l'extraction, il faut reconstruire la signature point par point. Si le nombre de point est grand, le temps de reconstruction peut être également long.

Nous ne pouvons pas chiffrer les temps de calcul, le logiciel créé étant un logiciel de développement. Nous voulions savoir s'il était possible de reconstruire une signature à partir de l'extraction automatique des paramètres selon un modèle de génération de vitesse à profil gaussien. Nous avons réalisé une étude de faisabilité. Le logiciel réalise le traitement par étapes. Il permet à l'utilisateur de visualiser les résultats à chaque fois qu'ils sont disponibles. Le traitement d'une signature s'effectue en plusieurs fois, passant d'un logiciel à un autre. Nous ne pouvons donc pas chiffrer exactement le temps de traitement d'une signature. Ce paramètre n'était pas primordial dans le développement du logiciel, mais l'exécution du programme nous permet d'extrapoler sur la durée du traitement. Le logiciel dans sa forme actuelle donne des temps de traitement relativement longs, ainsi une signature moyenne peut mettre entre 5 à 10 minutes pour être traitée, voire davantage pour

une longue signature.

Le problème majeur du logiciel se situe au niveau de la segmentation des chaînes. Le logiciel génère plus de chaînes que le modèle théorique ne le supposait (la segmentation a été décrite au chapitre VI). Nous constatons que la non-sommation dans le domaine curvilinéaire n'entraîne pas toujours un pic dans le domaine angulaire. La méthode de segmentation que nous avons adoptée isole tous les pics de discontinuité angulaire, mais elle trouve d'autres points de segmentation qui correspondent à des variations angulaires de moindres importances. Le logiciel segmente plus qu'il n'était prévu dans le modèle initial.

Donc avec cette approche, lorsque nous parlerons de chaînes, il faudra comprendre: "chaînes fonctionnelles" puisque ce sont celles-ci que nous sommes capables d'extraire, mais la véritable notion de chaîne reste celle donnée au chapitre II.

Cette segmentation engendre d'autres problèmes pour le logiciel. Nous devons segmenter nos courbes à partir des pics angulaires. Un pic angulaire correspond toujours dans les vitesses curvilinéaires à un point de vitesse minimal. Plus les pics angulaires sont importants et plus cette

correspondance est vérifiée. Ayant pris la vitesse curvilinéaire comme base de la segmentation, nous prenons, pour la durée d'une chaîne, le temps qui s'écoule entre 2 minima de vitesse curvilinéaire pour lesquels il n'y a pas de sommation de gaussiennes. Ces deux points doivent correspondre dans le domaine des vitesses angulaires à 2 pics (c'est ce que nous avons supposé) séparés par la même durée. Dans le cas où ces durées sont légèrement différentes, nous prenons la durée de la séquence (curvilinéaire ou angulaire) la plus courte.

Or, lorsque nous segmentons sur des variations angulaires de moindres importances (problème cité plus tôt), le minimum de vitesse curvilinéaire ne correspond pas toujours exactement avec le maximum de vitesse angulaire. Il peut y avoir un décalage plus ou moins important entre les 2 extrema. Prenant la durée la plus courte entre les extrema de vitesse curvilinéaire ou angulaire, il arrive (mais c'est tout de même rare) que l'on ne génère qu'une partie de la chaîne, lorsque nous manquons d'information sur l'une des deux vitesses. Par exemple, nous avons observé ce phénomène sur la signature de RP et l'écart entre les 2 extrema était de 0.05 seconde.

L'extraction des paramètres pose également des problè-

mes. On demande au logiciel de trouver une gaussienne sur des portions de courbe qui parfois ressemblent plus ou moins à des gaussiennes. Ce problème se trouve surtout dans les vitesses angulaires où nous avons la présence de pics importants. La méthode des moindres carrés donne toujours une solution, mais celle-ci n'est pas toujours la meilleure.

De plus, sur certaines signatures, nous pouvons constater la sommation de plus de deux gaussiennes. La méthode des moindres carrés décrite au chapitre VI ne tient compte que de la sommation de deux gaussiennes. Dans ce cas, il est compréhensible que la solution obtenue après extraction des paramètres ne soit pas la meilleure (voir figure IX.1).

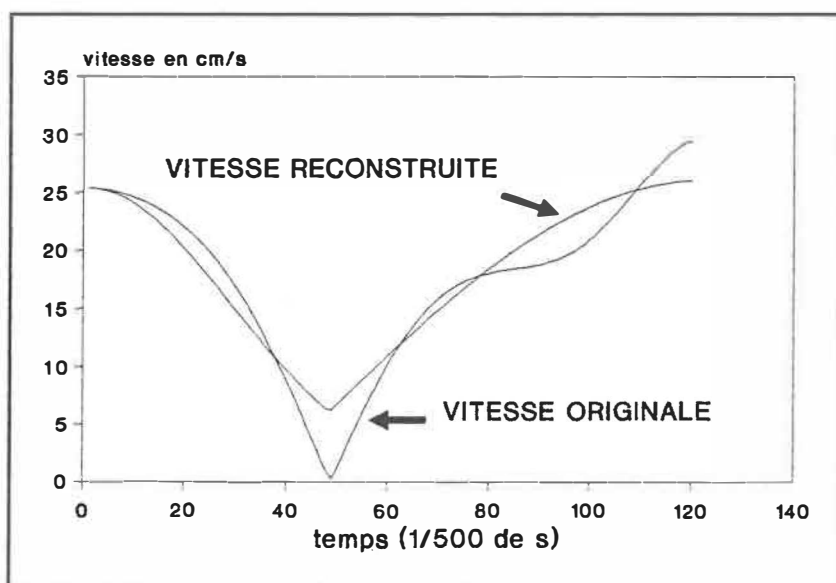


Figure IX.1 Problème de reconstruction

Sur la figure précédente, nous constatons que le logiciel détermine une gaussienne intermédiaire là où il y en a deux (partie à droite du graphique) ceci parce nous obligeons le logiciel à trouver la sommation de 2 gaussiennes alors que sur ce tracé il en existe certainement 3.

Le principal aspect positif de ce logiciel résulte de la qualité de la reproduction des signatures, que ce soit d'un point de vue dynamique (reconstruction des signaux de vitesse) ou statique (aspect de la signature). Les erreurs de reconstructions sont faibles et la signature générée ressemble à s'y méprendre à la signature originale (voir graphiques présentés au chapitre VIII et en annexe 2).

On peut remarquer que les problèmes d'extraction des gaussiennes n'influencent pas énormément la reconstruction des signatures. Ceci vient du fait que l'on minimise la somme des carrés des erreurs et que même dans des cas défavorables (voir figure IX.1: sommation de plus de deux gaussiennes), la solution trouvée est acceptable.

IX.2- Modifications

La principale modification devra porter sur la qualité

de la segmentation. On peut toutefois la laisser telle quelle et considérer que l'on a effectivement plus de chaînes (chaînes opérationnelles) que le modèle théorique, puisque l'algorithme détermine qu'il n'est pas capable d'assurer la continuité lors de la recherche des paramètres des gaussiennes. Dans ce cas, il ne faudra pas se fier à la correspondance des extrema des vitesses pour déterminer la durée des chaînes, car on a constaté que cela entraîne quelques cas de génération de chaînes trop courtes.

Ou bien, on pourrait modifier légèrement notre segmentation en privilégiant la sommation des gaussiennes lors de la recherche des paramètres dans le cas où les erreurs, au sens des moindres carrés, avec sommation ou sans sommation des gaussiennes sont proches. Ceci devrait permettre de limiter le nombre de chaînes (chaînes opérationnelles) et d'obtenir une segmentation plus proche de la segmentation sur les pics angulaires (chaînes réelles).

Pour améliorer les temps d'exécution des différents logiciels, nous pourrions envisager de paralléliser certaines étapes des calculs ou d'utiliser certains processeurs spécialisés (tel que le TMS 320 spécialisé dans le traitement de signal), ce qui pourrait soulager le processeur principal de certaines tâches, pour lesquelles il est mal adapté, et

lui permettre de réaliser d'autres traitements.

Pour l'extraction des paramètres, on pourrait envisager de faire passer la sommation à plus de deux gaussiennes, de modifier le modèle et trouver une autre équation pour la génération des vitesses angulaires afin de mieux estimer les fortes variations angulaires.

IX.3- Applications du logiciel

Si certaines suppositions continuent de se confirmer, comme le contrôle de la génération du tracé d'une signature (ou autre) par les vitesses, le modèle aiderait à mieux comprendre le processus de génération de tracé ainsi que la commande du cerveau.

De plus, avec le modèle de génération des signatures, on peut imaginer faire de la vérification de signature avec des spécimens enregistrés à partir d'une tablette à numériser. L'utilisation d'un modèle pour effectuer de la vérification de signature est une voie qui n'a pas encore été explorée. Pour cela, il faudrait faire une étude sur la variabilité des paramètres (extraits par le logiciel) de la

signature d'un même scripteur et déterminer s'ils sont suffisamment stables pour être utilisés pour de la vérification de signature. Ces idées feront l'objet de prochains travaux au laboratoire SCRIBENS.

Une étude a été commencée sur le traitement de 10 signatures d'un même scripteur, mais au moment de la rédaction de ce mémoire nous n'avons pas encore extrait l'information pertinente.

De plus, comme nous l'avons cité dans le chapitre précédant il serait très intéressant d'étudier la fréquence des différentes méthodes (1 à 9) de calcul des paramètres pour dégager des conclusions sur le système bras/main.

CHAPITRE X

CONCLUSION

La volonté de réaliser un programme générateur de profil de vitesse a soulevé le problème de la segmentation automatique des signatures en chaînes, basée sur les discontinuités des vitesses angulaires. Le modèle manque d'éléments sur ce sujet. Comment reconnaît-on une discontinuité à partir des courbes de vitesse angulaire pour les isoler sans ambiguïté ? Le logiciel a montré qu'il était capable de les isoler, mais il ajoute d'autres discontinuités angulaires que la théorie du modèle ne prévoyait pas.

Même si la programmation du modèle montre quelques imperfections, il fallait au moins la réaliser une première fois au complet, faire un prototype, pour déterminer les améliorations nécessaires. Le modèle décrit n'est pas figé, il est en constante évolution. Ce mémoire apporte également des éléments importants pour sa progression, tels que: la composante continue, le traitement des levées de crayon à l'intérieur d'une signature et une nouvelle approche pour la segmentation, excluant la notion des seuils sur les discontinuités angulaires, basée sur la sommation des gaussiennes.

Les résultats obtenus, nous permettent de conclure que le modèle générateur de gaussiennes peut être validé pour le traitement des signatures. Toutefois, pour obtenir de bons résultats, nous avons constaté que les tracés devaient être exécutés rapidement, ce qui constitue une des hypothèses de base pour le modèle proposé (le mouvement est programmé d'avance). Le logiciel montre de la difficulté à traiter des signatures lentes (on obtient de moins bons résultats).

Donc, globalement, nous sommes satisfait de voir que le programme est capable d'extraire les paramètres d'une signature et qu'il montre une bonne reconstruction. A première vue, on a du mal à voir la différence entre la signature originale et la signature reconstruite.

Les étapes suivantes, dans la réalisation de ce travail, seront d'améliorer le logiciel, à partir des imperfections décelées, et de le faire progresser en suivant l'évolution du modèle.

De plus, il serait important de faire une étude sur la stabilité de la segmentation à partir du modèle. Quand on connaît les problèmes que représentent la segmentation, cette nouvelle approche pourrait peut-être apporter des solutions intéressantes.

On peut également s'interroger sur la possibilité de traiter des signatures afin de réaliser leur vérification.

Et pour terminer, l'étude de la fréquence des méthodes de calcul utilisées pour extraire les paramètres apportera peut-être des éléments intéressants pour la compréhension du système BRAS/MAIN.

Les espoirs sont importants avec le modèle générateur de vitesses à profil gaussiens, souhaitons qu'il tienne ses promesses ...

RÉFÉRENCES - BIBLIOGRAPHIE

- [1] LI-DE Y., "Étude sur la fonction de transfert d'un modèle de l'écriture manuscrite". Rapport technique interne, laboratoire Scribens¹, Décembre 1987.

- [2] LI-DE Y., "Amélioration d'un modèle de l'écriture manuscrite basé sur la géométrie différentielle". Rapport technique interne, laboratoire Scribens, Décembre 1987.

- [3] R. PLAMONDON, G. E. STELMACH et N. TEASDALE. "Motor Program Coding Representation from Handwriting Generator Models: the Production of Line Responses", accepté dans Biol. Cybernetics, mai 1989, 21 pages.

- [4] R. PLAMONDON, Y. LI-DE, G. E. STELMACH, "On the Automatic Extraction of Biomechanical Information from Handwriting Signals", soumis à IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics, Novembre 1988, 35 pages.

¹ Laboratoire Scribens Ecole polytechnique de Montréal
CP 6079 SUCC. A
Montréal QC H3c 3A7

- [5] R. PLAMONDON., "Handwriting Control - A Functional Model", sous presse Models of Brain Function, R. COTTERILL ed., Academic Press, Londres, 1989, 12 pages.
- [6] R. PLAMONDON, F. LAMARCHE. "Modelisation of Handwriting: a System Approach", Graphonomics: Contemporary Research in Handwriting, H.S.R., Kao, G.P. VAN GALEN, R. HOOSAIN Eds., Elsevier Sci. Pub., North-Holland, septmebre 1986, pp.169-183.(Book of Selected from 2nd Int. Symp. on Neural and Motor Aspects of Handwriting.)
- [7] R. PLAMONDON, "A Handwriting Model Based on Differential Geometry". Computer Recognition and Human Production of Handwriting, R. PLAMONDON, C.Y. SUEN, M. SIMMER Eds. World Scientific Publish., Hong Kong, 1989 pages 179-192. (Book of selected papers from 3rd International Symposium on Handwriting and Computer Applications.)
- [8] R. PLAMONDON, F.J. MAARSE, "A Neuron Oriented Representation to Compare Biomechanical Handwriting Models", Proc. of the Third International Symposium on Handwriting and Computer Applications, Montréal, Juillet 87, p 2-4.

- [9] R. PLAMONDON, "What does Differential Geometry Tell us About Handwriting Generation?", Proc. Third Int. Symp. on Handwriting and Computer Applications, Montréal, juillet 87, p.11-13.

- [10] R. PLAMONDON, F.J. MAARSE, "An Evaluation of Motoric Models of Handwriting", IEEE Trans. on Syst. Man Cybernetics, Vol. 19 n=5, septembre 1989.

- [11] C. BOUCHARD, "Caractérisation de tablette numérique", Projet de fin d'études, Ecole polytechnique de Montréal. Automne 89.

- [12] JJ. BRAULT. "Proposition et vérification d'un coefficient de difficulté d'imitation des signatures manuscrites", Thèse de doctorat, Ecole polytechnique de Montréal, octobre 1989.

- [13] D.J. BURR, "A Normalizing Transform for Cursive Script Recognition". Proc. of the 6th Int. Conf. on Pattern Recognition, Munich, 19-22 oct. 1982, vol. 2, p 1027-1030.

- [14] K. ARBENZ et A. WOHLHAUSER, "Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, Analyse numérique". Presses

Polytechniques Romandes, 1981

- [15] K. ARBENZ et A. WOHLHAUSER, "Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, Compléments d'analyse". Presses Polytechniques Romandes, 1981.

- [16] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING. "Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 1988, page 39 à 44.

- [17] R. PLAMONDON, M. PARIZEAU, "Signature Verification from Position Velocity and Acceleration Signals. A comparative Study". Proc. 9th Int. Conf. on Patt. Recog., Rome, novembre 1988, p 260-265. Conférence parrainée par IEEE et IAPR.

- [18] R. PLAMONDON, G. LORETTE, "Automatic Signature Verification and Writer Identification: the State of the Art", Pattern recognition, vol. 22, n=2, 1989, p. 107-131.

ANNEXE 1

Méthode 5

Dans cette méthode on estime les paramètres τ_1 et τ_2

Equation

$$y = A_{\max 1} \exp[-(t/\tau_1)^2] + A_{\max 2} \exp[-(t/\tau_2)^2]$$

Equation générale d'une mesure

$$a_k \Delta \tau_1 + b_k \Delta \tau_2 = c_k$$

avec

$$a_k = \frac{2(A_{\max 1}) (t_k)^2}{(\tau_{10})^3} \exp[-(t_k/\tau_{10})^2]$$

$$c_k = Y_k - A_{\max 1} \exp[-(t_k/\tau_{10})^2] - A_{\max 2} \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

Solution

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \Delta \tau_1 + B \Delta \tau_2 = D$$

$$B \Delta \tau_1 + C \Delta \tau_2 = E$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$D = \sum_{i=1}^N a_k C_k$$

$$E = \sum_{i=1}^N b_k C_k$$

Méthode 6

Dans cette méthode on estime les paramètres τ_1 , τ_2 et α

Equation

$$y = (A_{\max 2} - \alpha) \exp[-(t/\tau_{20})^2] + \alpha$$

Equation générale d'une mesure

$$a_k \Delta \tau_1 + b_k \Delta \tau_2 + c_k \Delta \alpha = d_k$$

avec

$$a_k = \frac{2(A_{\max 1} - \alpha_0) (t_k)^2}{(\tau_0)^3} \exp[-(t_k/\tau_{10})^2]$$

$$b_k = \frac{2(A_{\max 2} - \alpha_0) (t_k)^2}{(\tau_{20})^3} \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

$$c_k = 1 - \exp[-(t_k/\tau_{10})^2] - \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

$$d_k = y_k - (A_{\max 1} - \alpha_0) \exp[-(t_k/\tau_{10})^2] \\ - (A_{\max 2} - \alpha_0) \exp[-(t_k/\tau_{20})^2] - \alpha_0$$

Solution

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \triangle \tau_1 + B \triangle \tau_2 + C \triangle \alpha = G$$

$$B \triangle \tau_1 + D \triangle \tau_2 + E \triangle \alpha = H$$

$$C \triangle \tau_1 + E \triangle \tau_2 + F \triangle \alpha = I$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$C = \sum_{i=1}^N a_k c_k$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$D = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$E = \sum_{i=1}^N b_k c_k$$

$$F = \sum_{i=1}^N (c_k)^2$$

$$G = \sum_{i=1}^N a_k d_k$$

$$H = \sum_{i=1}^N b_k d_k$$

$$I = \sum_{i=1}^N c_k d_k$$

La résolution se fait par une méthode numérique [16].

Méthode 7

Dans cette méthode on estime les paramètres τ_1 , τ_2 , $A_{\max 1}$ et $A_{\max 2}$

Equation

$$Y = A_{\max 1} \exp[-(t/\tau_1)^2] + A_{\max 2} \exp[-(t/\tau_2)^2]$$

Equation générale d'une mesure

$$a_k \Delta \tau_1 + b_k \Delta \tau_2 + c_k \Delta A_{\max 1} + d_k \Delta A_{\max 2} = e_k$$

avec

$$a_k = \frac{2A_{\max 10} (t_k)^2}{(\tau_{10})^3} \exp[-(t_k/\tau_{10})^2]$$

$$b_k = \frac{2A_{\max 20} (t_k)^2}{(\tau_{10})^3} \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

$$c_k = \exp[-(t_k/\tau_{10})^2]$$

$$d_k = \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

$$e_k = y_k - A_{\max 10} \exp[-(t_k/\tau_{10})^2] + A_{\max 20} \exp[-(t_k/\tau_{20})^2]$$

Solution

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \triangle \tau_1 + B \triangle \tau_2 + C \triangle A_{\max 1} + D \triangle A_{\max 2} = K$$

$$B \triangle \tau_1 + E \triangle \tau_2 + F \triangle A_{\max 1} + G \triangle A_{\max 2} = L$$

$$C \triangle \tau_1 + F \triangle \tau_2 + H \triangle A_{\max 1} + I \triangle A_{\max 2} = M$$

$$D \triangle \tau_1 + G \triangle \tau_2 + I \triangle A_{\max 1} + J \triangle A_{\max 2} = N$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{i=1}^N a_k c_k$$

$$D = \sum_{i=1}^N a_k d_k$$

$$E = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$F = \sum_{i=1}^N b_k c_k$$

$$G = \sum_{i=1}^N b_k d_k$$

$$H = \sum_{i=1}^N (c_k)^2$$

$$I = \sum_{i=1}^N c_k d_k$$

$$J = \sum_{i=1}^N (d_k)^2$$

$$K = \sum_{i=1}^N a_k e_k$$

$$L = \sum_{i=1}^N b_k e_k$$

$$M = \sum_{i=1}^N c_k e_k$$

$$N = \sum_{i=1}^N d_k e_k$$

La résolution du système se fait par une méthode numérique[16].

Méthode 8

Dans cette méthode on estime les paramètres τ_1 , τ_2 , $A_{\max 1}$, $A_{\max 2}$ et α .

Equation

$$y = (A_{\max 1} - \alpha) \exp[-(t/\tau_1)^2] + (A_{\max 2} - \alpha) \exp[-(t/\tau_2)^2] + \alpha$$

Equation générale d'une mesure

$$a_k \Delta \tau_1 + b_k \Delta \tau_2 + c_k \Delta A_{\max 1} + d_k \Delta A_{\max 2} + e_k \Delta \alpha = f_k$$

avec

$$a_k = \frac{2(A_{\max 1} - \alpha_0) (t_k)^2}{(\tau_{10})^3} \exp[-(t/\tau_{10})^2]$$

$$b_k = \frac{2(A_{\max 2} - \alpha_0) (t_k)^2}{(\tau_{20})^3} \exp[-(t/\tau_{20})^2]$$

$$c_k = \exp[-(t/\tau_{10})^2]$$

$$d_k = \exp[-(t/\tau_{20})^2]$$

$$e_k = 1 - \exp[-(t/\tau_{10})^2] - \exp[-(t/\tau_{20})^2]$$

$$f_k = y_k - (A_{\max 10} - \alpha_0) \exp[-(t/\tau_{10})]^2 \\ - (A_{\max 20} - \alpha_0) \exp[-(t/\tau_{20})]^2 - \alpha_0$$

Solution

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$A \triangle \tau_1 + B \triangle \tau_2 + C \triangle A_{\max 1} + D \triangle A_{\max 2} + E \triangle \alpha = P$$

$$B \triangle \tau_1 + F \triangle \tau_2 + G \triangle A_{\max 1} + H \triangle A_{\max 2} + I \triangle \alpha = Q$$

$$C \triangle \tau_1 + G \triangle \tau_2 + J \triangle A_{\max 1} + K \triangle A_{\max 2} + L \triangle \alpha = R$$

$$D \triangle \tau_1 + H \triangle \tau_2 + K \triangle A_{\max 1} + M \triangle A_{\max 2} + N \triangle \alpha = S$$

$$E \triangle \tau_1 + I \triangle \tau_2 + L \triangle A_{\max 1} + N \triangle A_{\max 2} + O \triangle \alpha = T$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{i=1}^N a_k c_k$$

$$D = \sum_{i=1}^N a_k d_k$$

$$E = \sum_{i=1}^N a_k e_k$$

$$F = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$G = \sum_{i=1}^N b_k c_k$$

$$H = \sum_{i=1}^N b_k d_k$$

$$I = \sum_{i=1}^N b_k e_k$$

$$J = \sum_{i=1}^N (c_k)^2$$

$$K = \sum_{i=1}^N c_k d_k$$

$$L = \sum_{i=1}^N c_k e_k$$

$$M = \sum_{i=1}^N (d_k)^2$$

$$N = \sum_{i=1}^N d_k e_k$$

$$O = \sum_{i=1}^N (e_k)^2$$

$$P = \sum_{i=1}^N a_k f_k$$

$$Q = \sum_{i=1}^N b_k f_k$$

$$R = \sum_{i=1}^N c_k f_k$$

$$S = \sum_{i=1}^N d_k f_k$$

$$T = \sum_{i=1}^N e_k f_k$$

Méthode 9

Dans cette méthode on estime les paramètres τ_1 , τ_2 , $A_{\max 1}$, $A_{\max 2}$, t_{c1} , t_{c2} et α .

Equation

$$y = (A_{\max 1} - \alpha) \exp[-(t - t_{c1})^2 / \tau_{10}^2] \\ + (A_{\max 2} - \alpha) \exp[-(t - t_{c2})^2 / \tau_{20}^2] + \alpha$$

Equation générale d'une mesure

$$a_k \Delta \tau_1 + b_k \Delta \tau_2 + c_k \Delta A_{\max 1} + d_k \Delta A_{\max 2} + e_k \Delta t_{c1} + f_k \Delta t_{c2} + g_k \Delta \alpha = h_k$$

Solution

Pour trouver la solution il faut résoudre le système d'équation suivant:

$$\begin{aligned} A \Delta \tau_1 + B \Delta \tau_2 + C \Delta A_{\max 1} + D \Delta A_{\max 2} + E \Delta t_{c1} + F \Delta t_{c2} + G \Delta \alpha &= f \\ B \Delta \tau_1 + H \Delta \tau_2 + I \Delta A_{\max 1} + J \Delta A_{\max 2} + K \Delta t_{c1} + L \Delta t_{c2} + M \Delta \alpha &= \theta \\ C \Delta \tau_1 + I \Delta \tau_2 + N \Delta A_{\max 1} + O \Delta A_{\max 2} + P \Delta t_{c1} + Q \Delta t_{c2} + R \Delta \alpha &= \beta \\ D \Delta \tau_1 + J \Delta \tau_2 + O \Delta A_{\max 1} + S \Delta A_{\max 2} + T \Delta t_{c1} + U \Delta t_{c2} + V \Delta \alpha &= \Gamma \\ E \Delta \tau_1 + K \Delta \tau_2 + P \Delta A_{\max 1} + T \Delta A_{\max 2} + W \Delta t_{c1} + X \Delta t_{c2} + Y \Delta \alpha &= \tau \\ F \Delta \tau_1 + L \Delta \tau_2 + Q \Delta A_{\max 1} + U \Delta A_{\max 2} + X \Delta t_{c1} + Z \Delta t_{c2} + \Omega \Delta \alpha &= \pi \\ G \Delta \tau_1 + M \Delta \tau_2 + R \Delta A_{\max 1} + V \Delta A_{\max 2} + Y \Delta t_{c1} + \Omega \Delta t_{c2} + \Sigma \Delta \alpha &= \mu \end{aligned}$$

avec

$$A = \sum_{i=1}^N (a_k)^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_k b_k$$

$$C = \sum_{i=1}^N a_k c_k$$

$$D = \sum_{i=1}^N a_k d_k$$

$$E = \sum_{i=1}^N a_k e_k$$

$$F = \sum_{i=1}^N a_k f_k$$

$$G = \sum_{i=1}^N a_k g_k$$

$$H = \sum_{i=1}^N (b_k)^2$$

$$I = \sum_{i=1}^N b_k c_k$$

$$J = \sum_{i=1}^N b_k d_k$$

$$K = \sum_{i=1}^N b_k e_k$$

$$L = \sum_{i=1}^N b_k f_k$$

$$M = \sum_{i=1}^N b_k g_k$$

$$N = \sum_{i=1}^N (c_k)^2$$

$$O = \sum_{i=1}^N c_k d_k$$

$$P = \sum_{i=1}^N c_k e_k$$

$$Q = \sum_{i=1}^N c_k f_k$$

$$R = \sum_{i=1}^N c_k g_k$$

$$S = \sum_{i=1}^N (d_k)^2$$

$$T = \sum_{i=1}^N d_k e_k$$

$$U = \sum_{i=1}^N d_k f_k$$

$$V = \sum_{i=1}^N d_k g_k$$

$$W = \sum_{i=1}^N (e_k)^2$$

$$X = \sum_{i=1}^N e_k f_k$$

$$Y = \sum_{i=1}^N e_k g_k$$

$$Z = \sum_{i=1}^N (f_k)^2$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^N f_k g_k$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N (g_k)^2$$

$$\mathfrak{f} = \sum_{i=1}^N a_k h_k$$

$$\Theta = \sum_{i=1}^N b_k h_k$$

$$\beta = \sum_{i=1}^N c_k h_k$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N d_k h_k$$

$$\tau = \sum_{i=1}^N e_k h_k$$

$$\pi = \sum_{i=1}^N f_k h_k$$

$$\mu = \sum_{i=1}^N g_k h_k$$

La résolution du système se fait par une méthode numérique [16].

ANNEXE 2

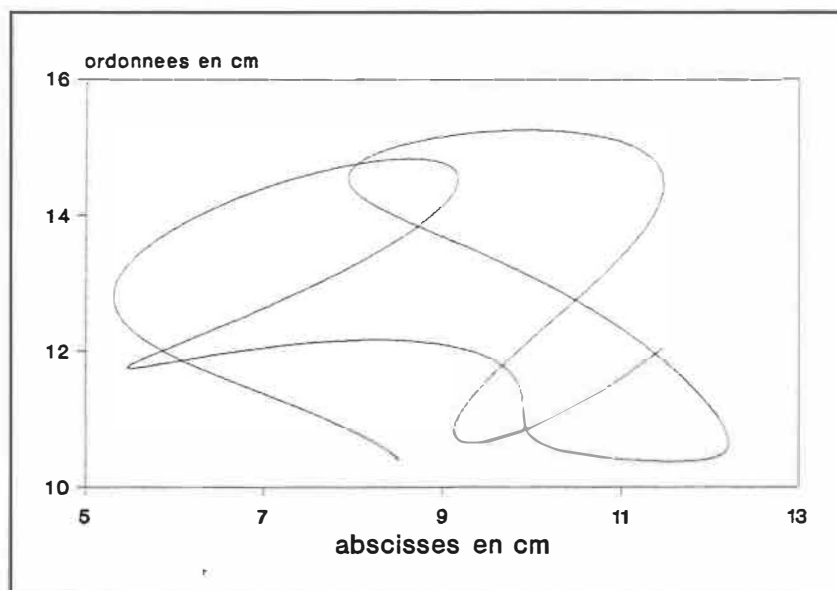


Figure 1 Signature originale de RP

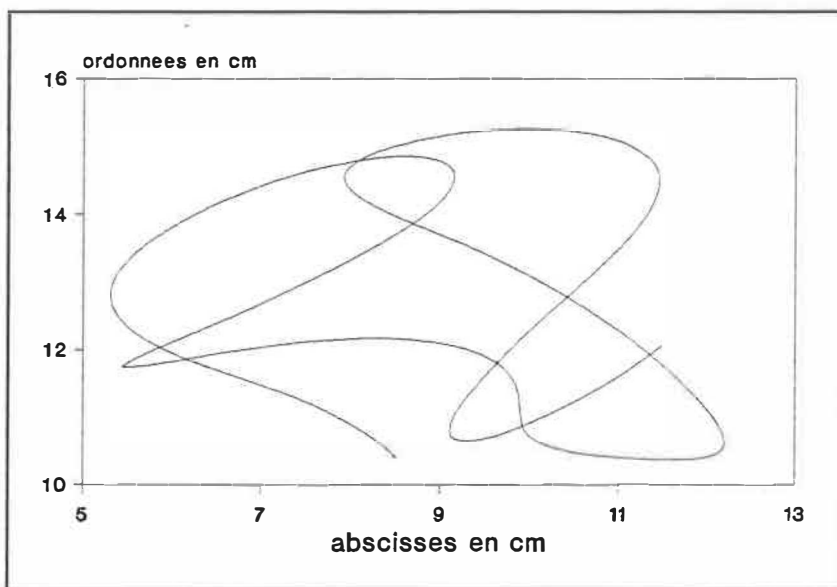


Figure 2 Signature reconstruite de RP

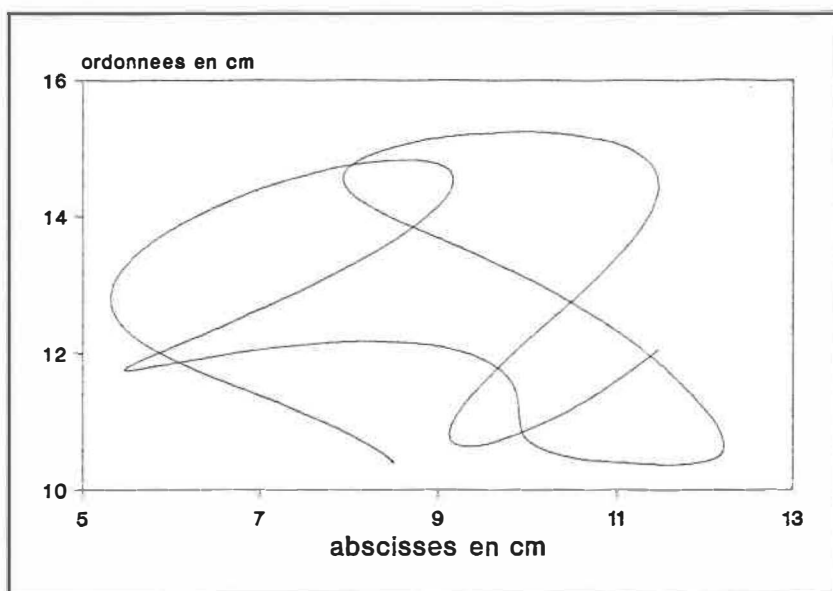


Figure 1 Signature originale de RP

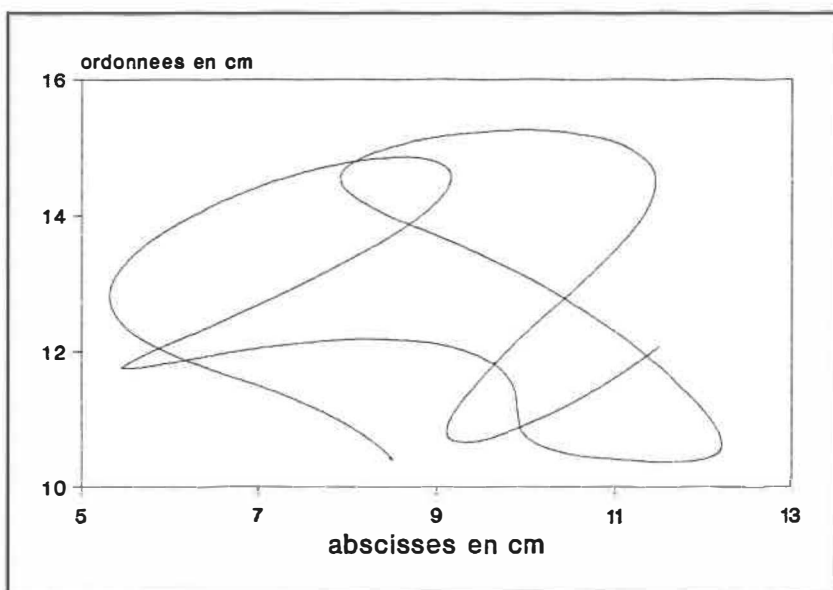


Figure 2 Signature reconstruite de RP

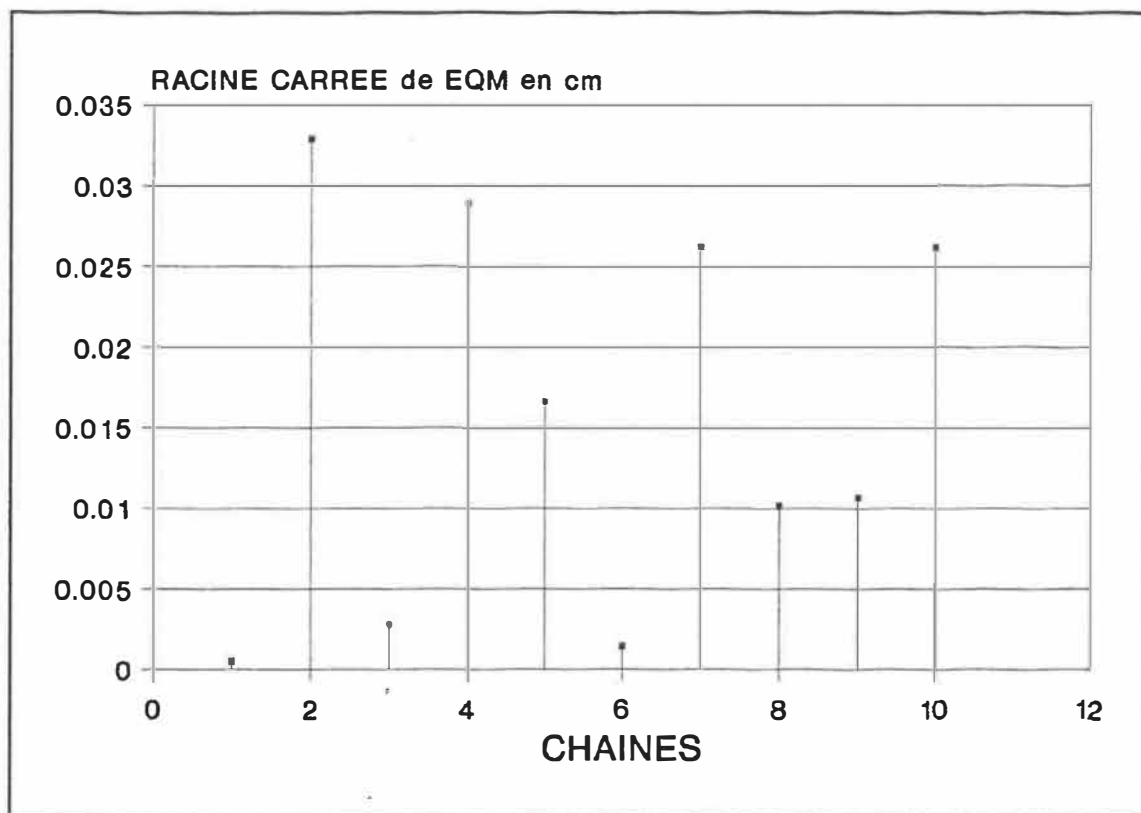


Figure 3 Racine carrée de EQM pour la signature de RP

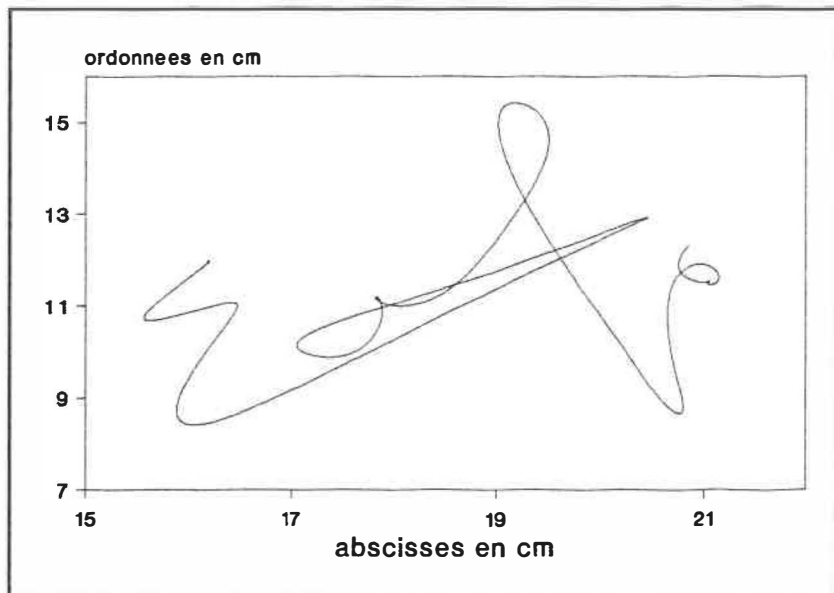


Figure 4 Signature originale de E

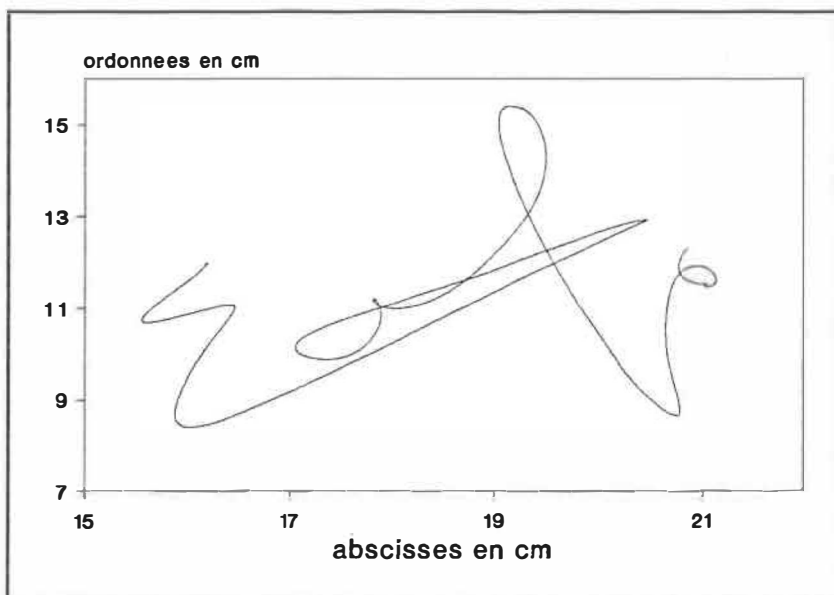


Figure 5 Signature reconstruite de E

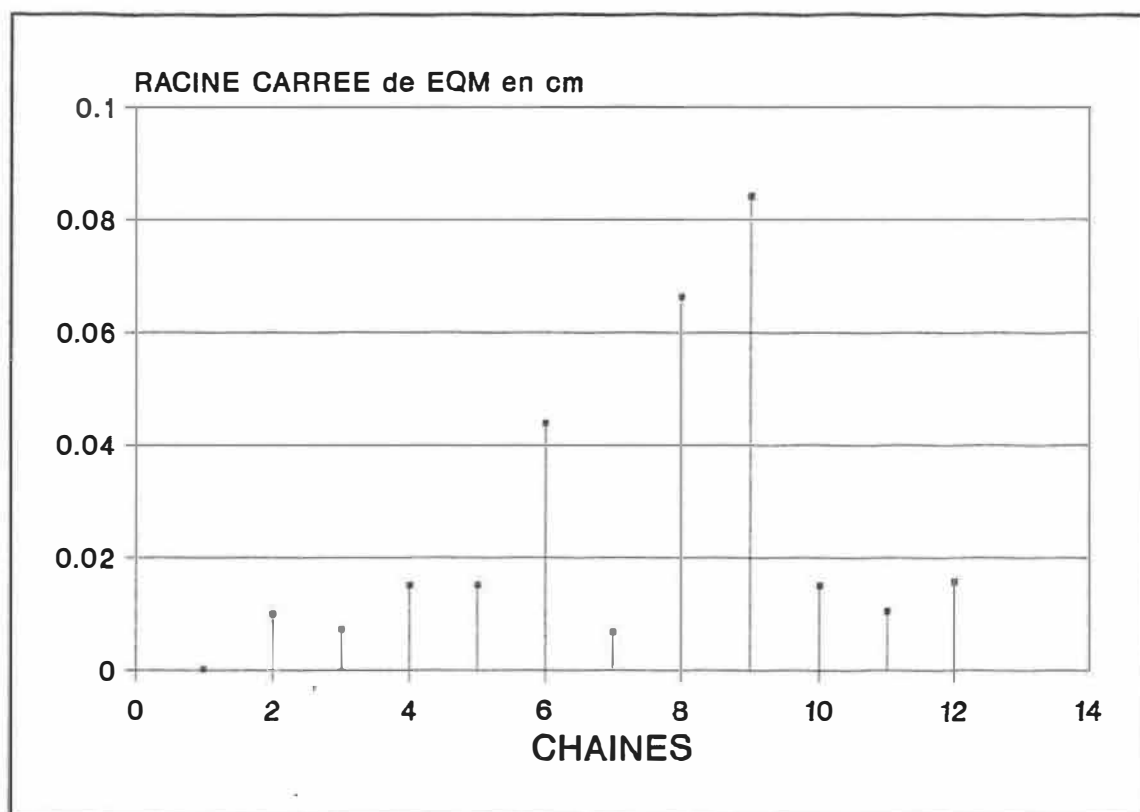


Figure 6 Racine carrée de EQM pour la signature de E

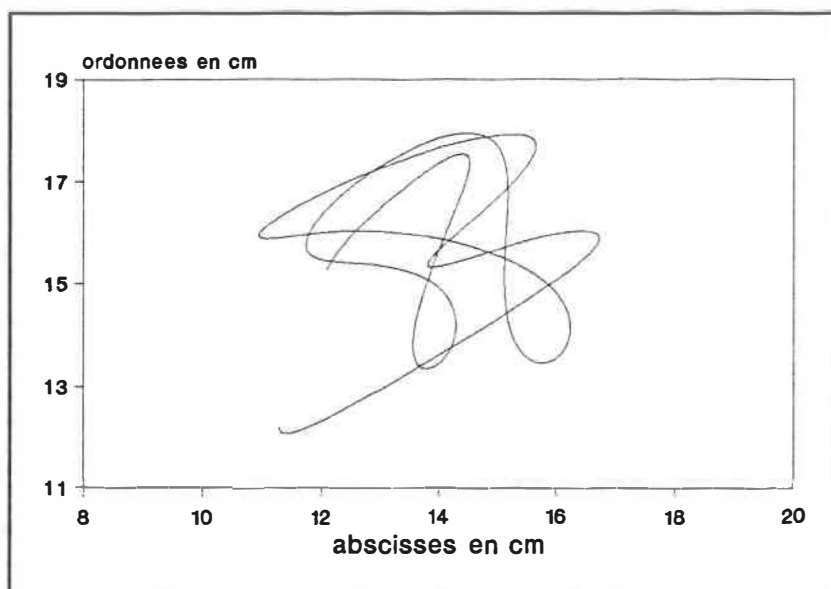


Figure 7 Signature originale de MP

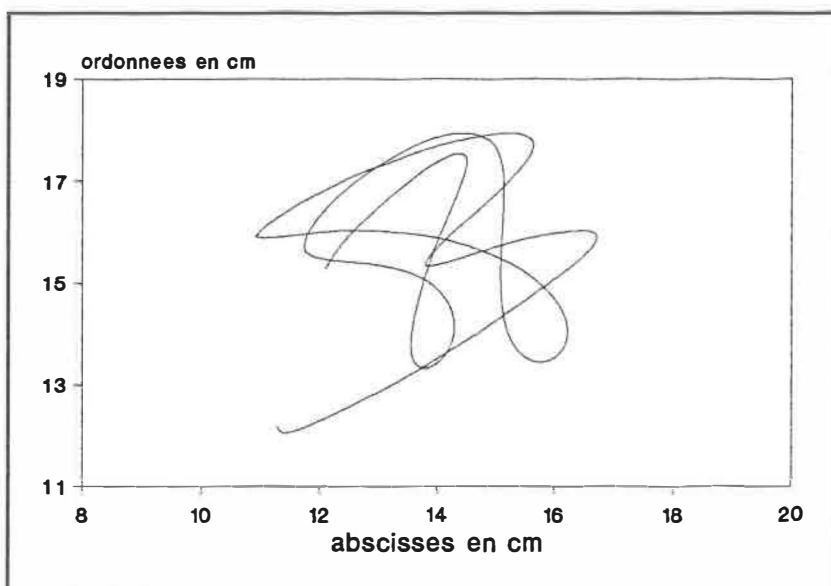


Figure 8 Signature reconstruite de MP

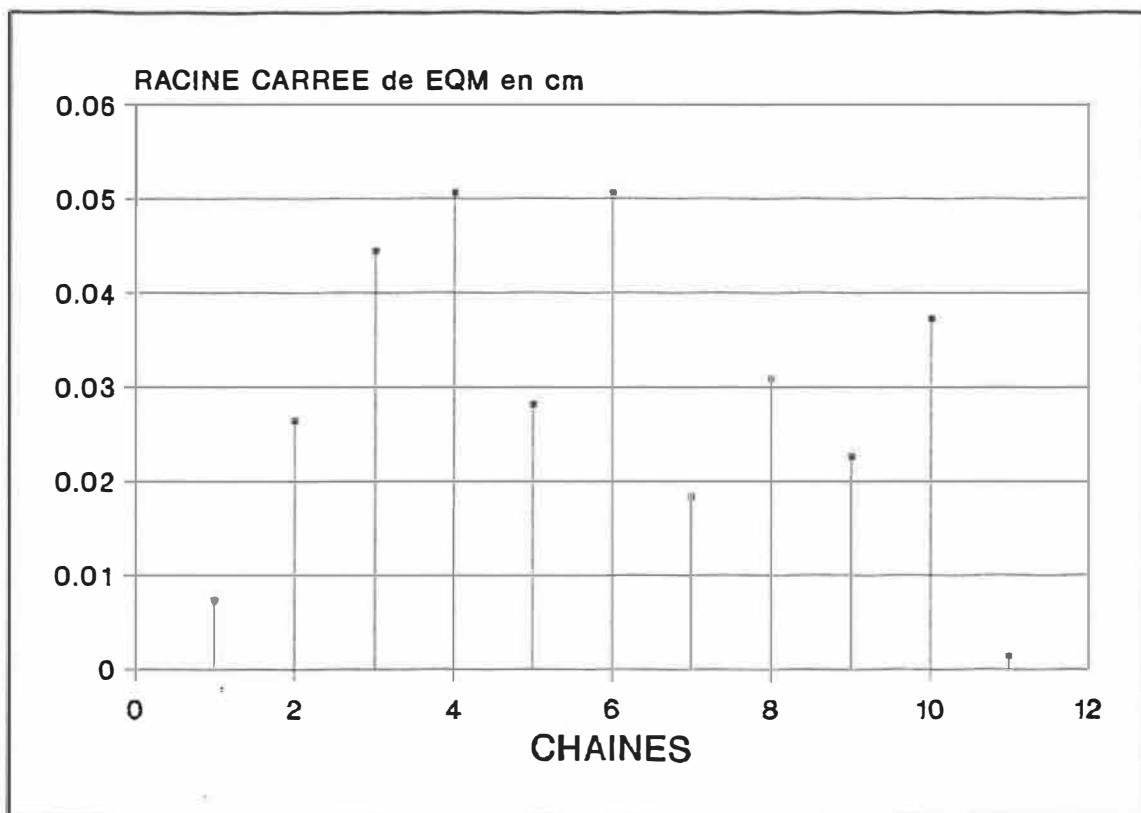


Figure 9 Racine carrée de EQM pour la signature de MP

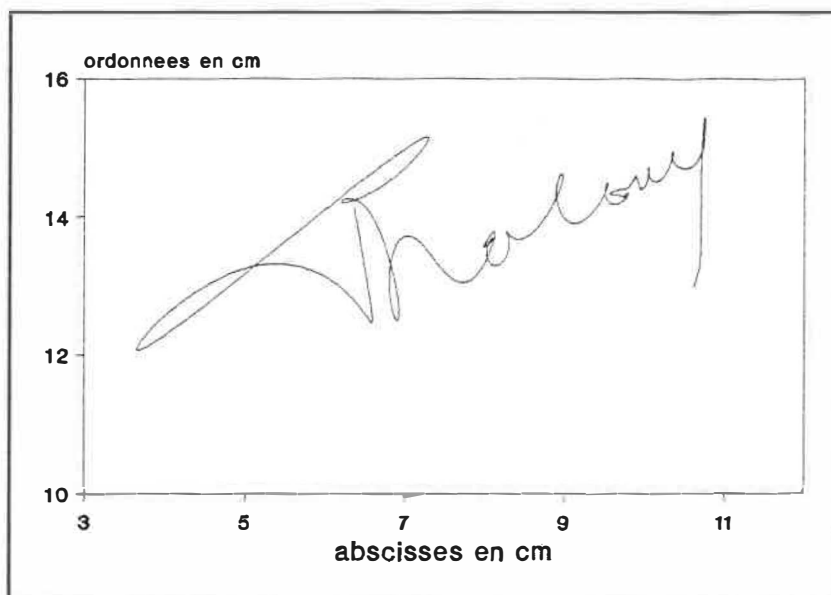


Figure 10 Signature originale de ND

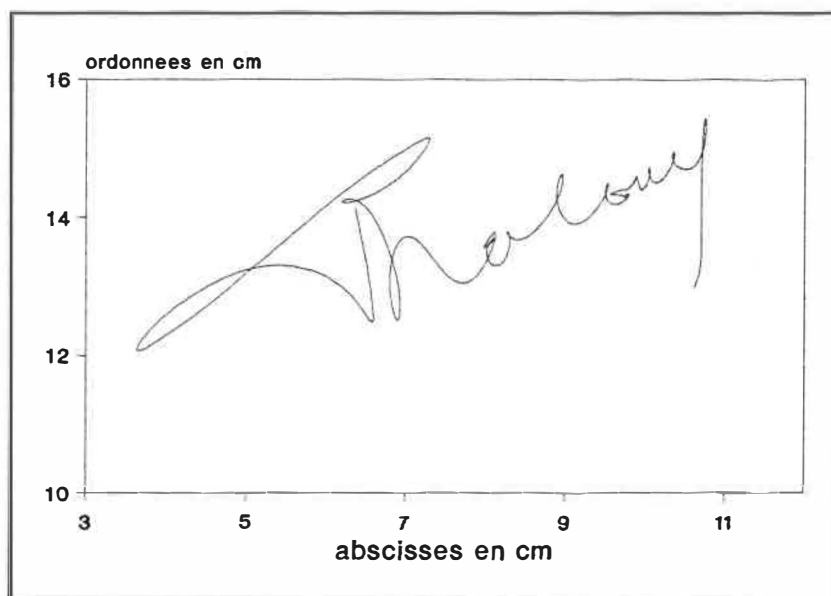


Figure 11 Signature reconstruite de ND

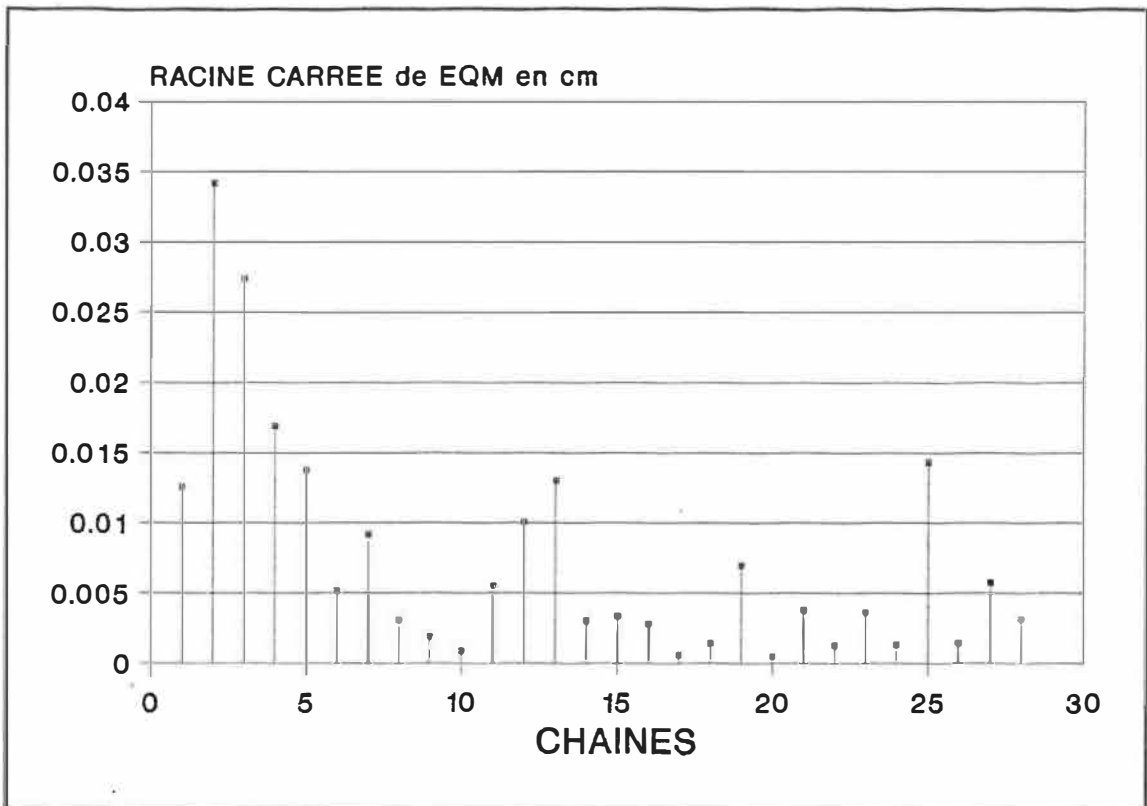


Figure 12 Racine carrée de EQM pour la signature de ND

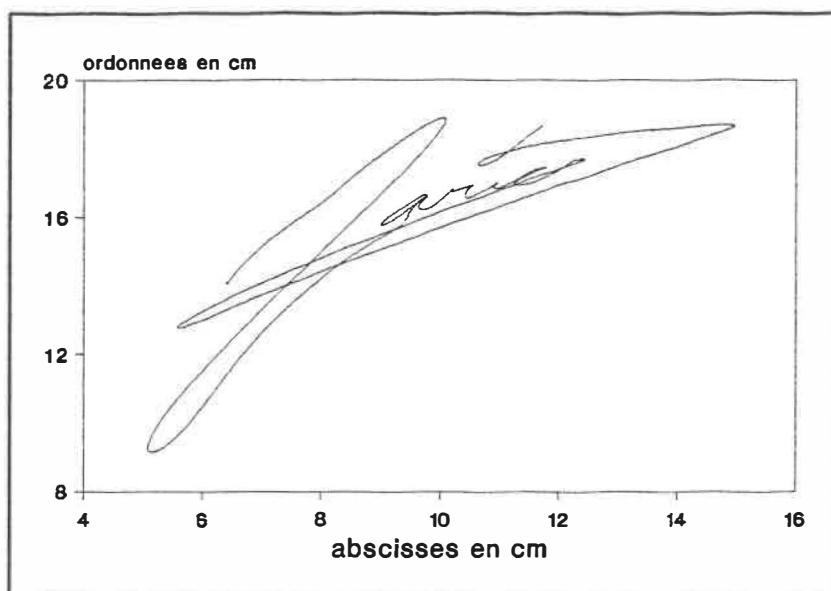


Figure 13 Signature originale de MR

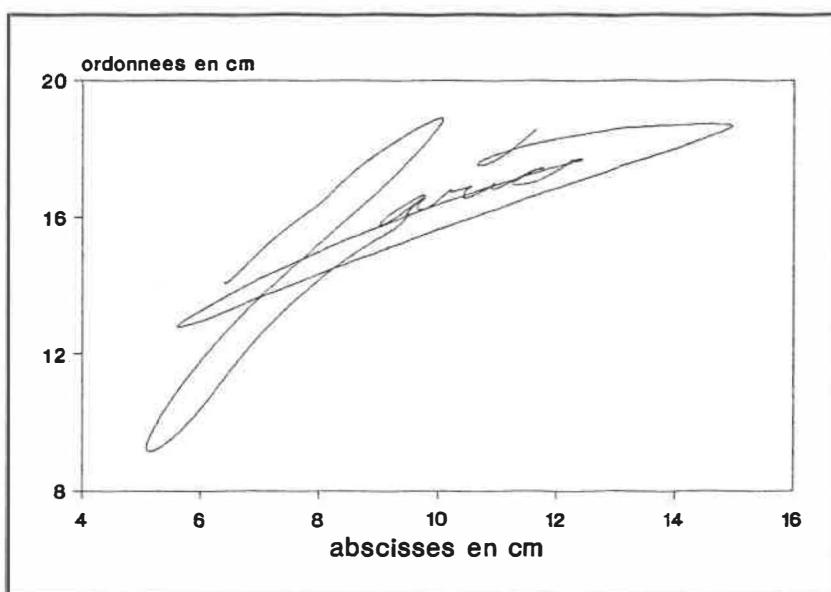


Figure 14 Signature reconstruite de MR

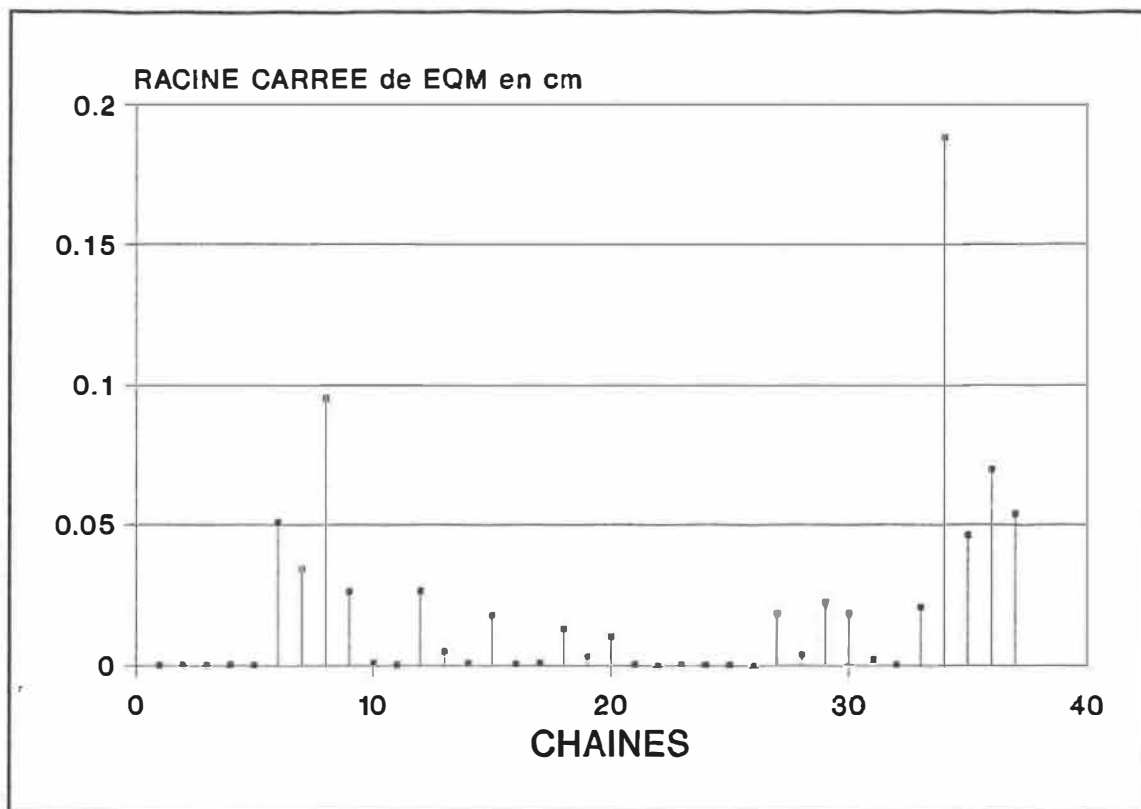


Figure 15 Racine carrée de EQM pour la signature de MC

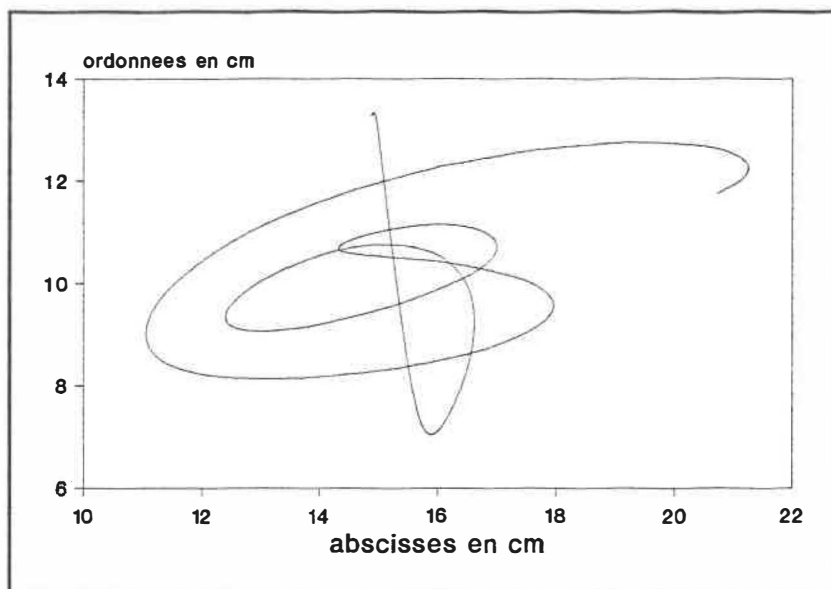


Figure 16 Signature originale de FL

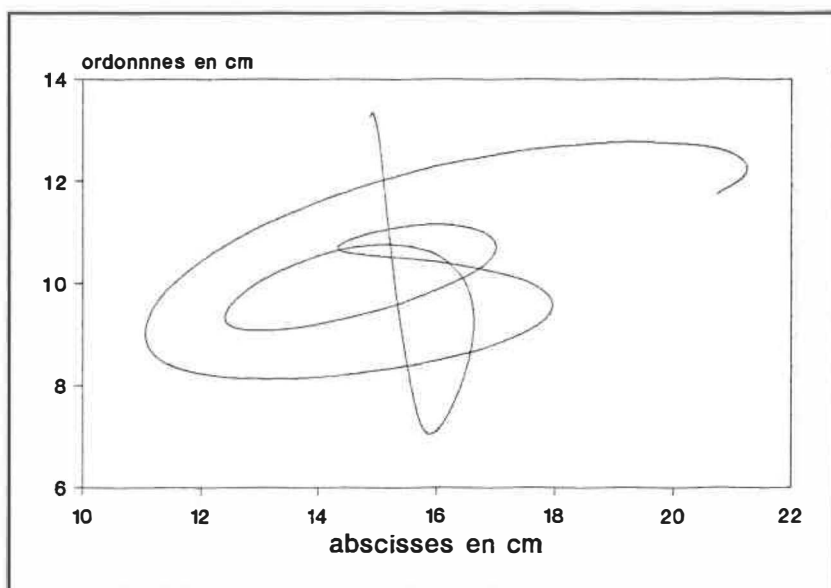


Figure 17 Signature reconstruite de FL

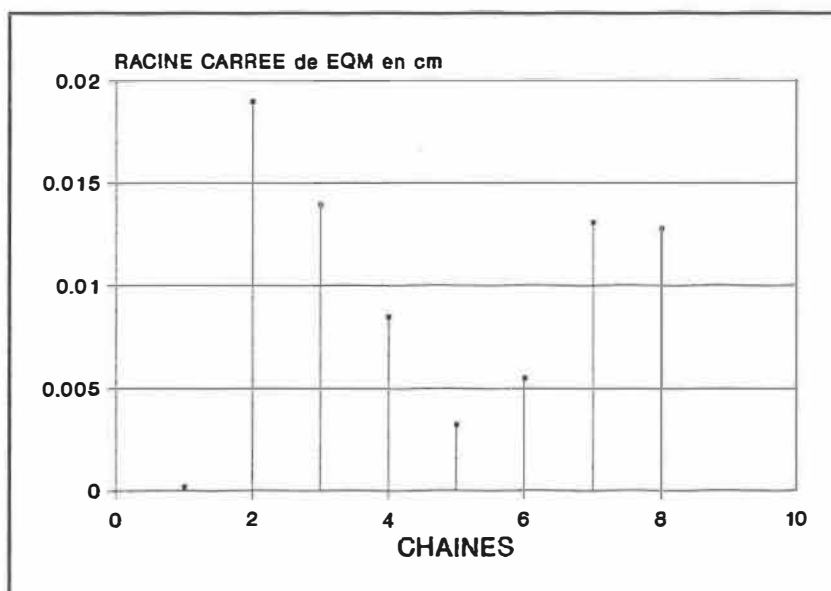


Figure 18 Racine carrée de EQM pour la signature de FL

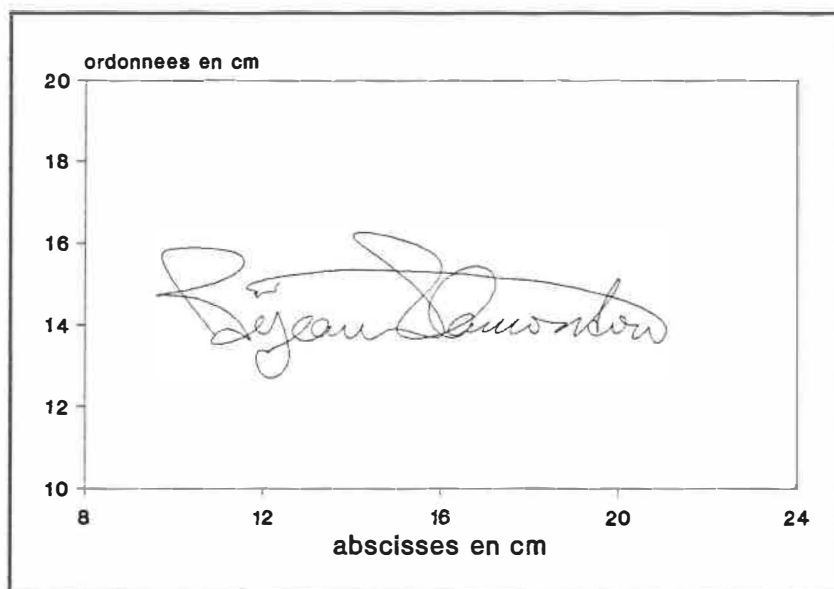


Figure 19 Signature originale de PR

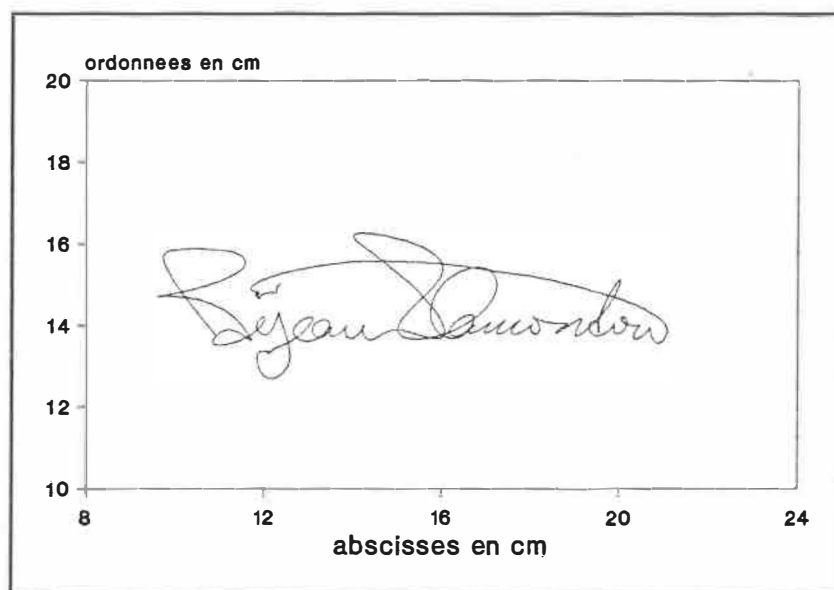


Figure 20 Signature reconstruite de PR

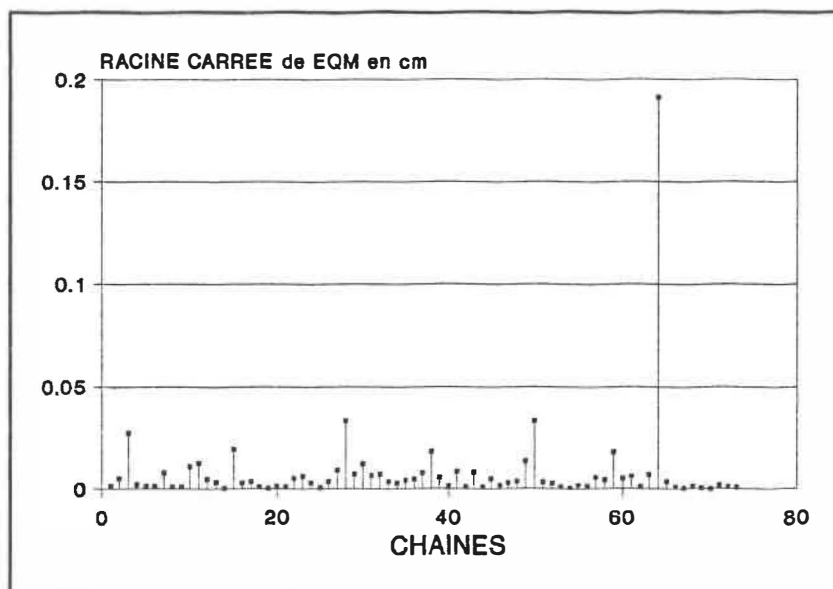


Figure 21 Racine carrée de EQM pour la signature de PR

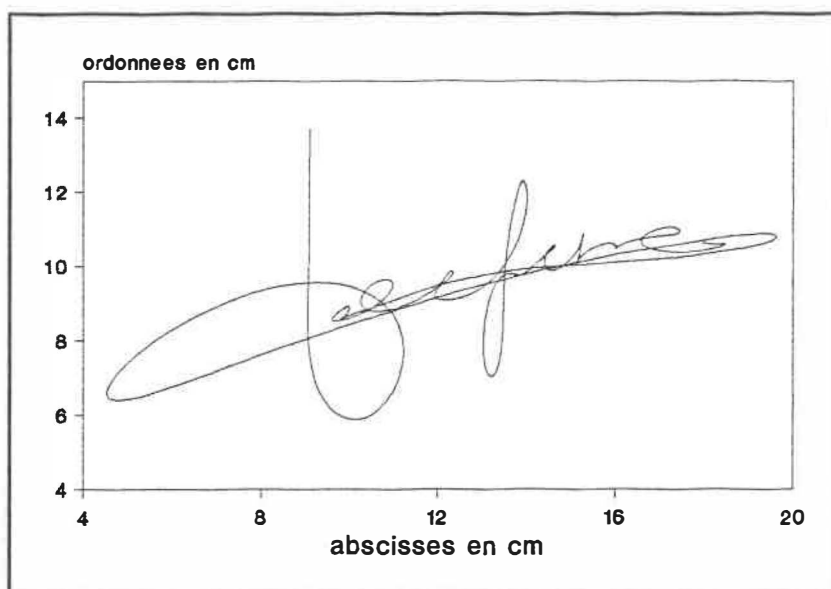


Figure 22 Signature originale de LF

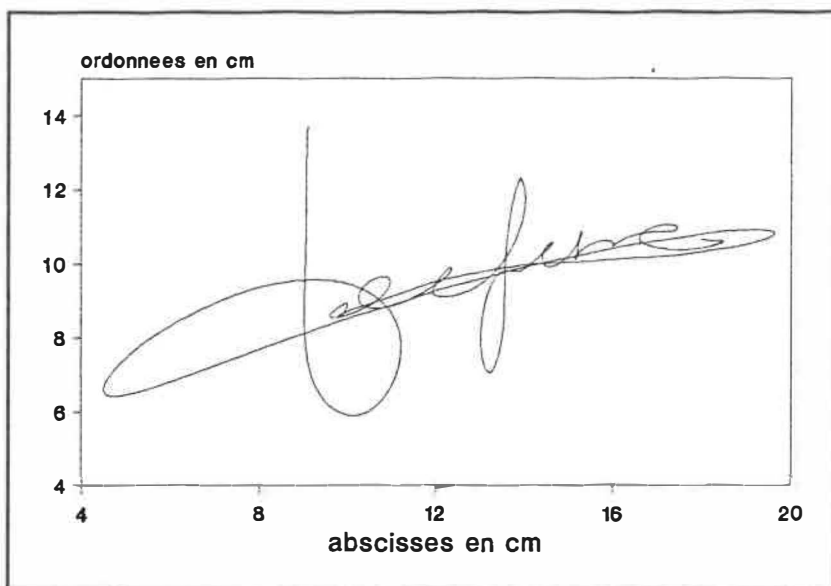


Figure 23 Signature reconstruite de LF

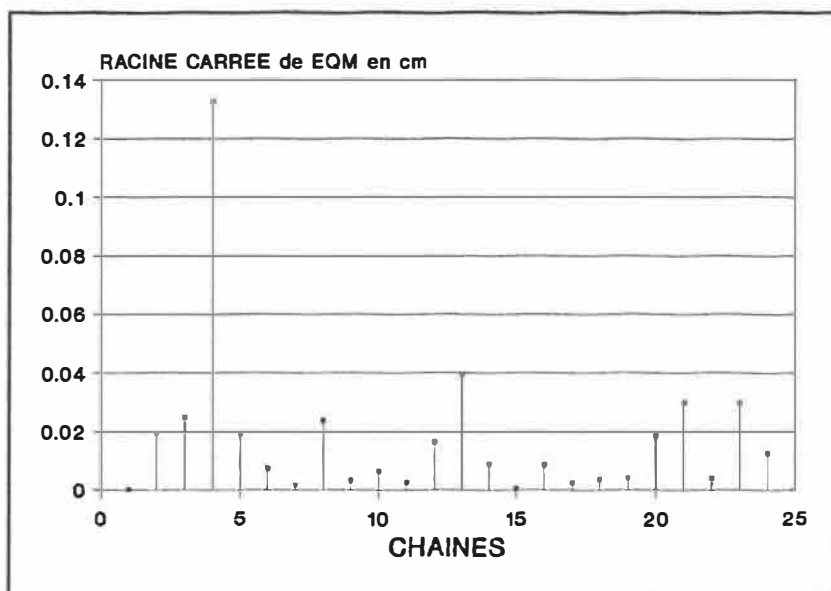


Figure 24 Racine carrée de EQM pour la signature de LF

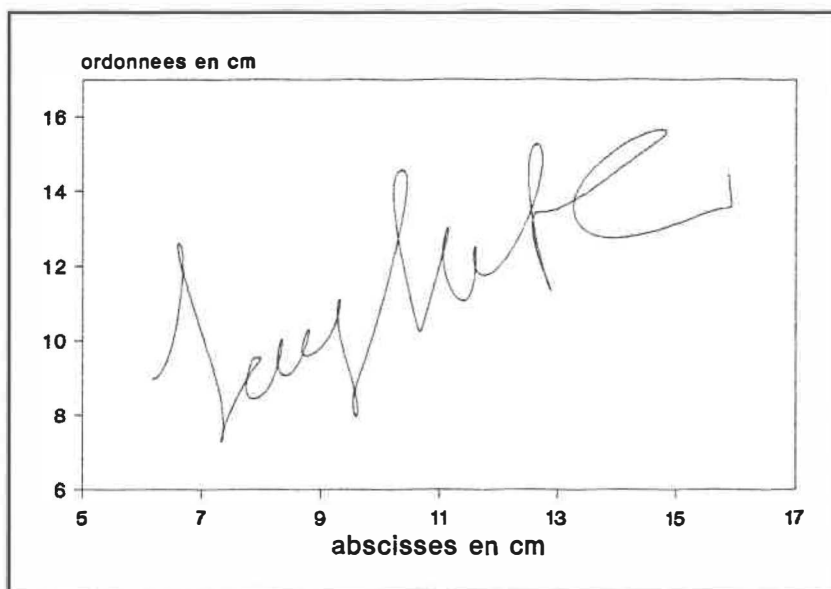


Figure 25 Signature originale de CL

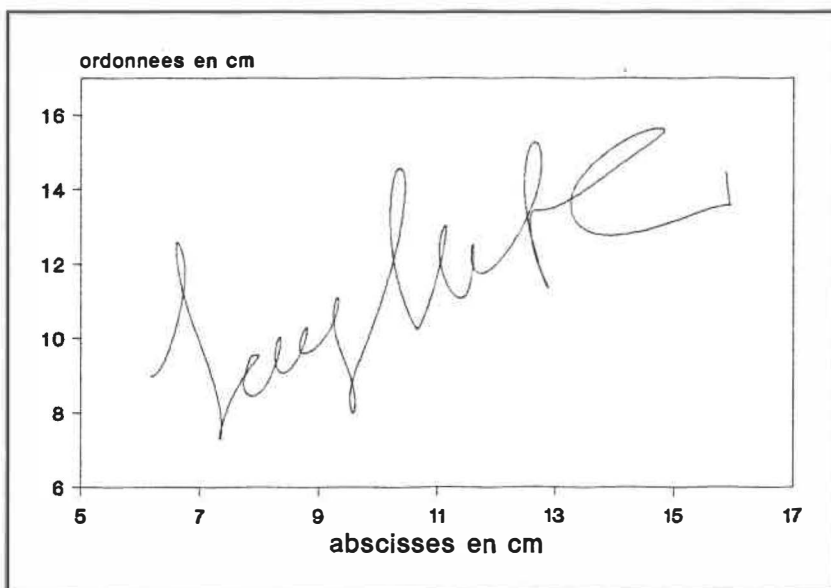


Figure 26 Signature reconstruite de CL

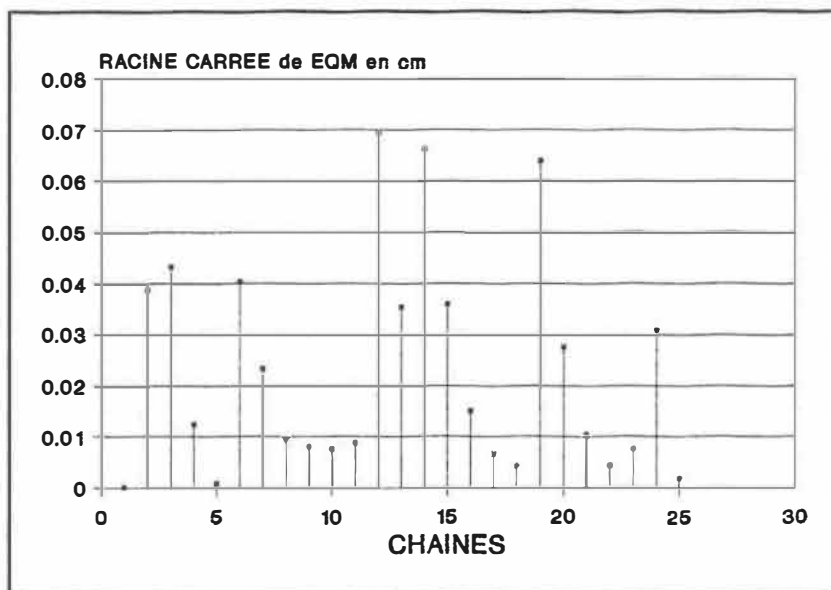


Figure 27 Racine carrée de EQM pour la signature de CL

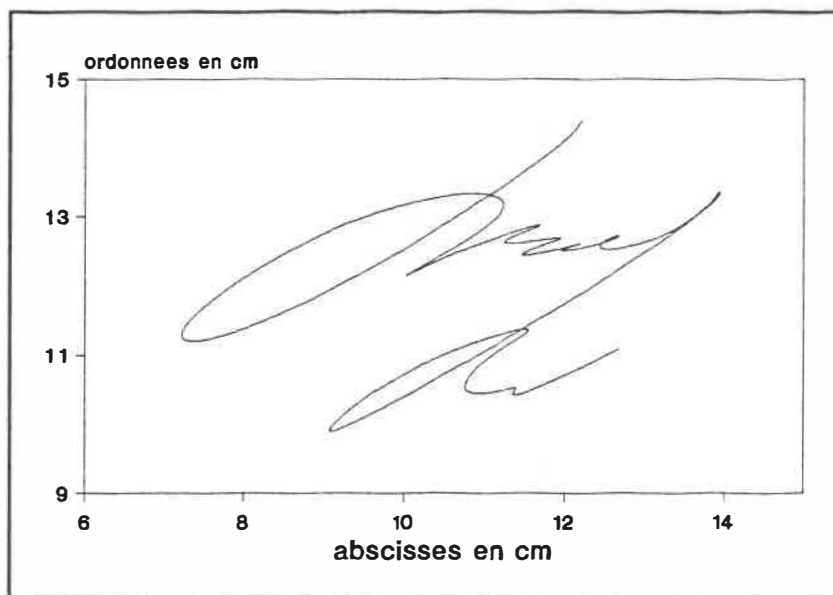


Figure 28 Signature originale de WG

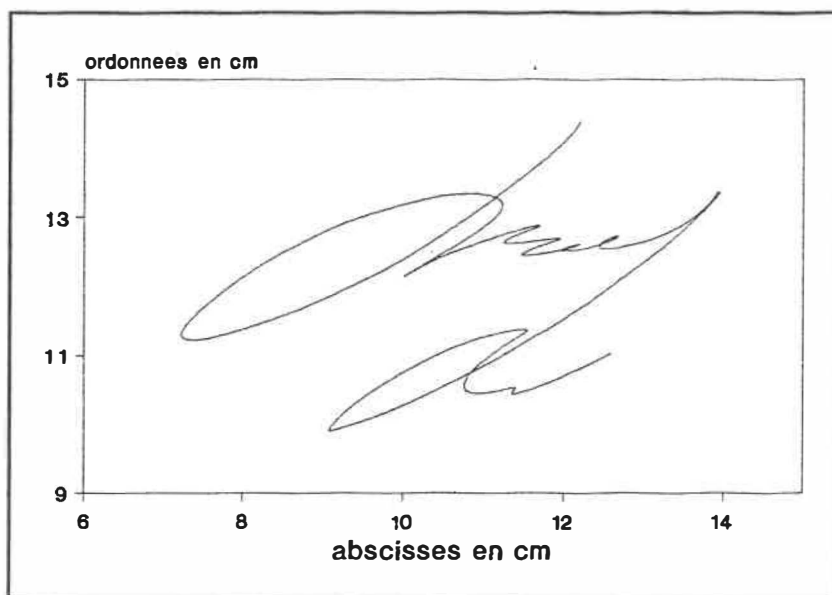


Figure 29 Signature reconstruite de WG

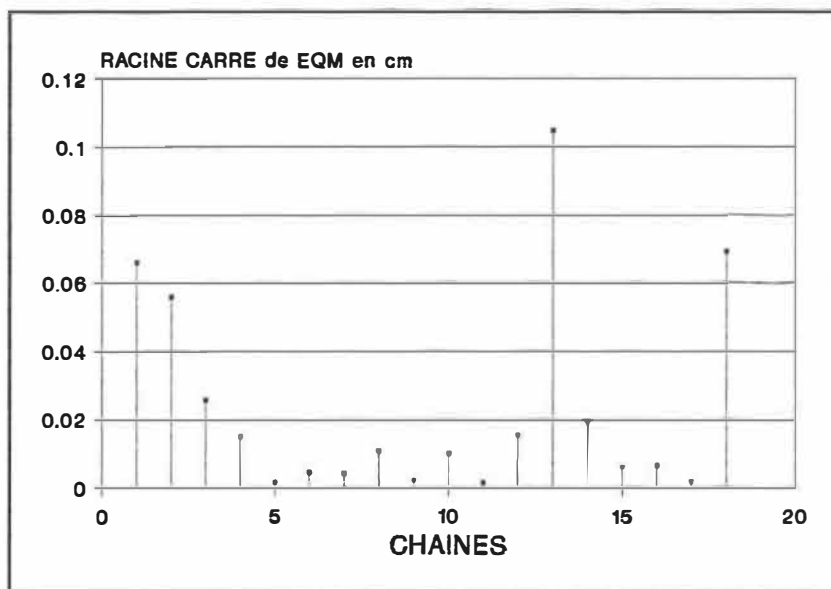


Figure 30 Racine carrée de EQM pour la signature de WG

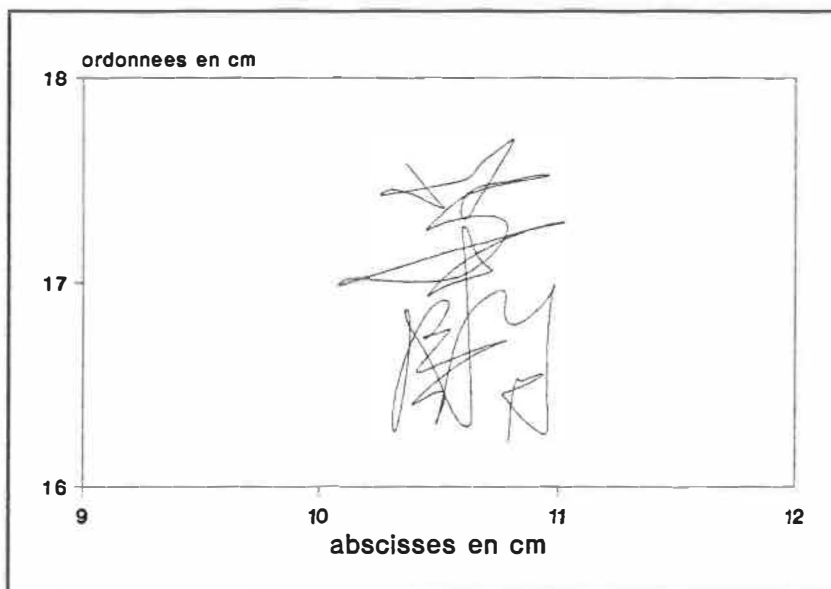


Figure 31 Signature originale de C

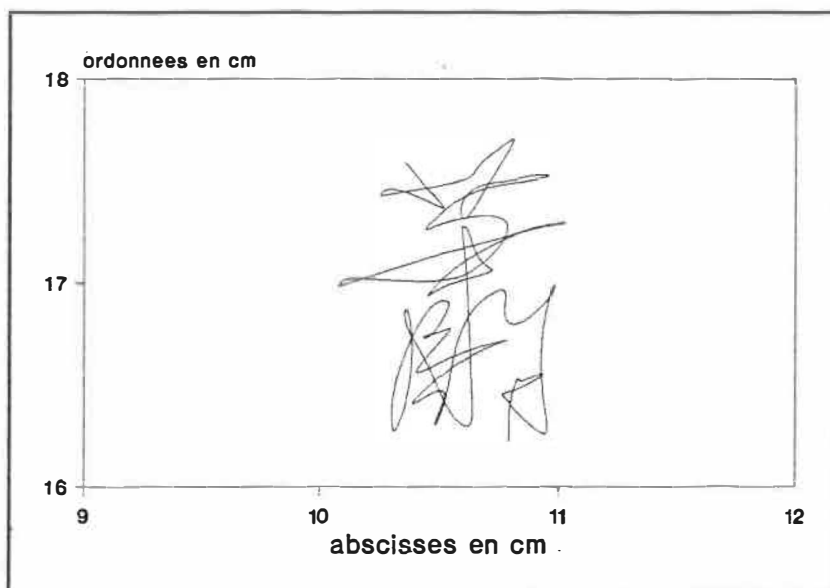


Figure 32 Signature reconstruite de C

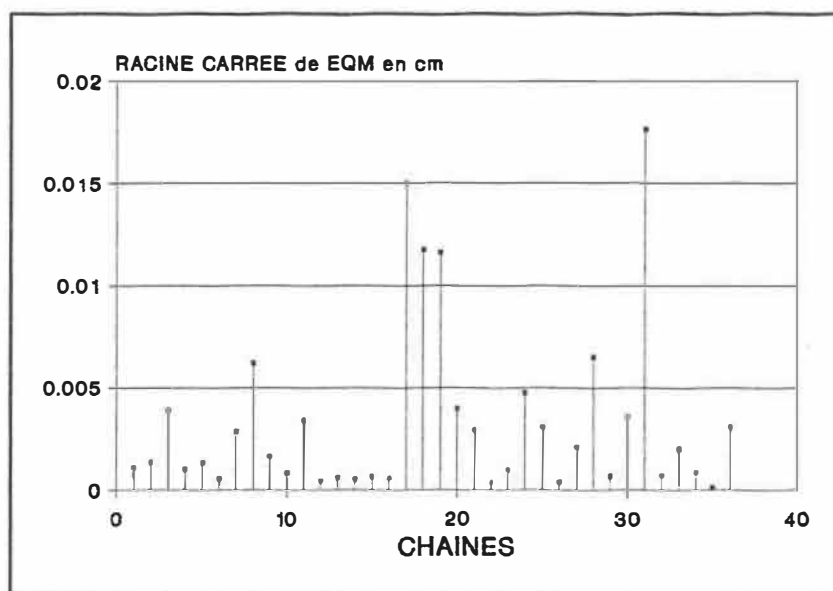


Figure 33 Racine carrée de EQM pour la signature de C

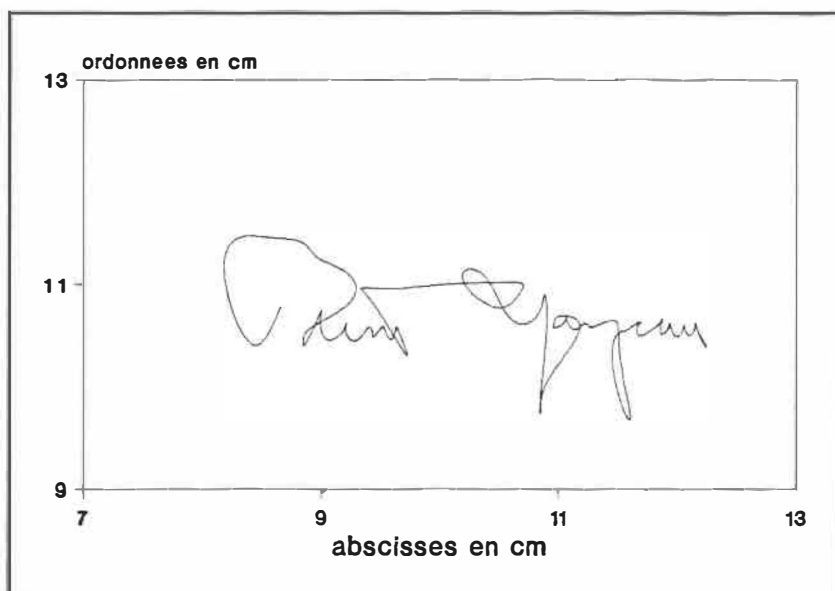


Figure 34 Signature originale de PY

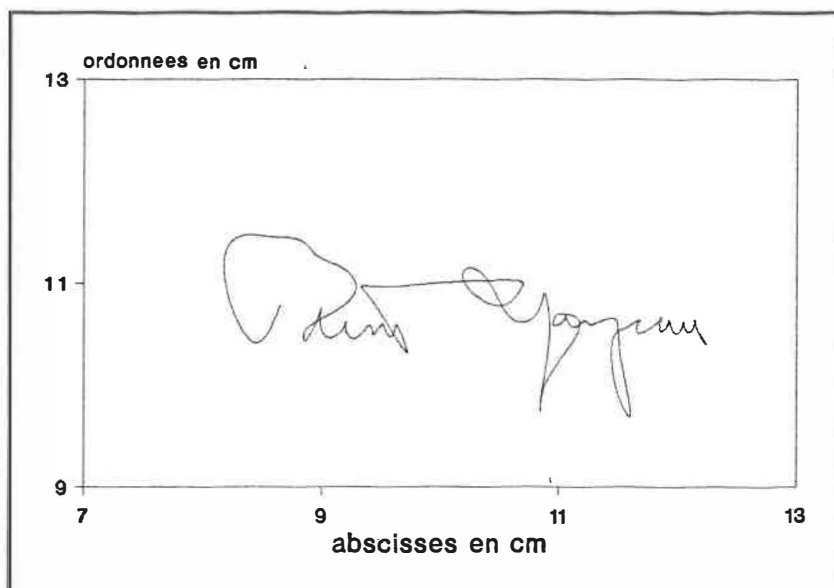


Figure 35 Signature reconstruite de PY

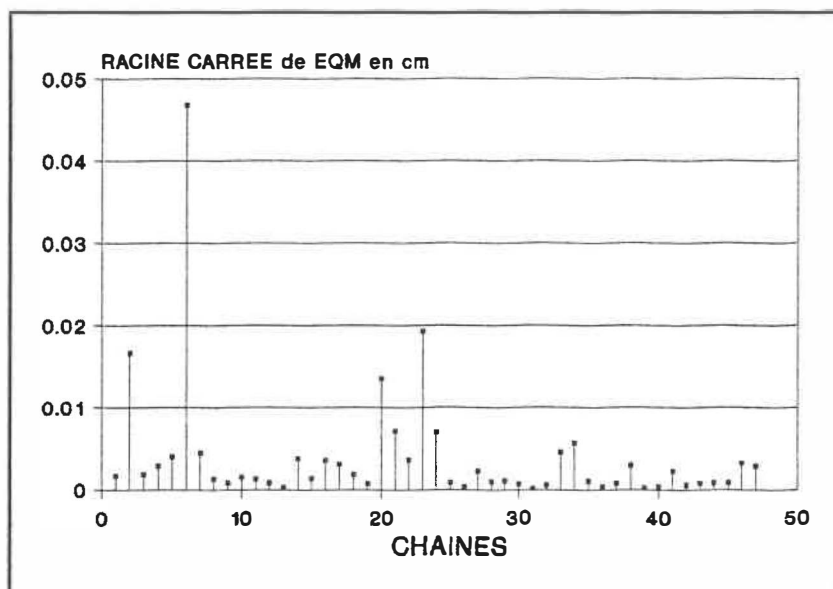


Figure 36 Racine carrée de EQM pour la signature de PY

ANNEXE 3

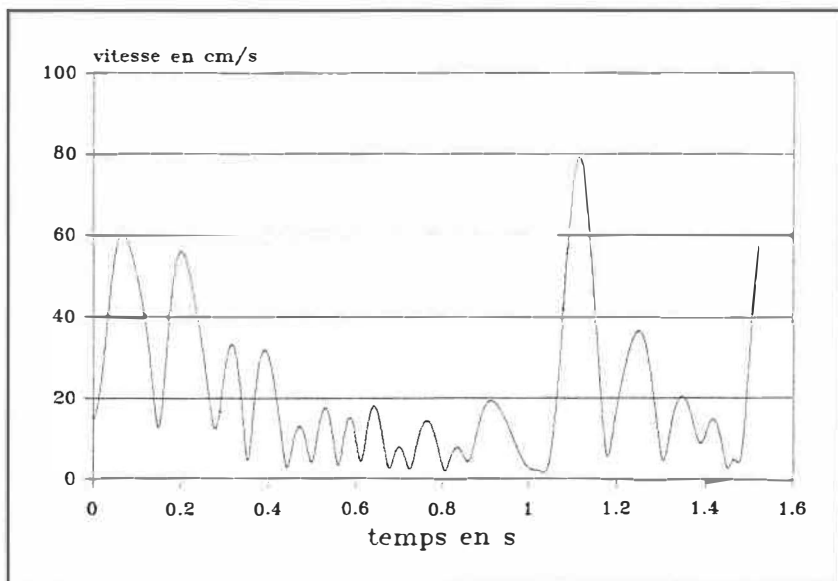


Figure 34 Vitesse curvilinéaire originale pour la signature de WG

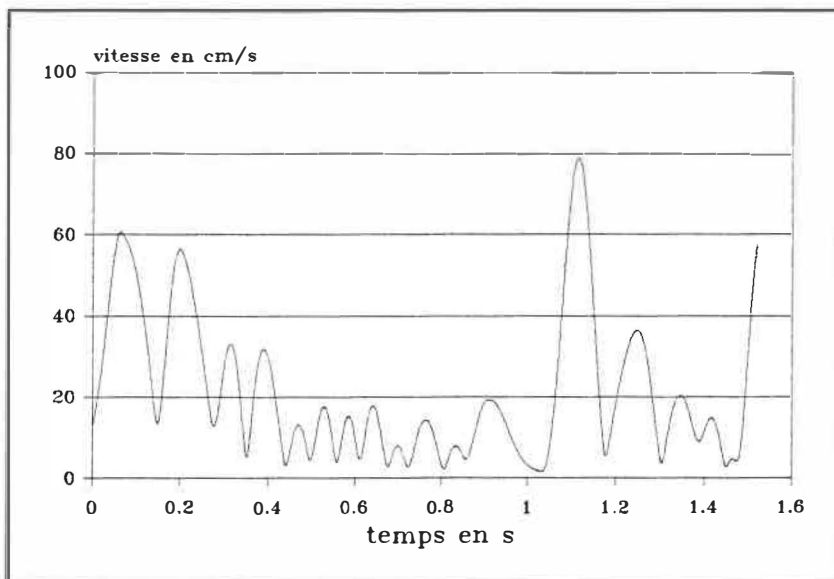


Figure 35 Vitesse curvilinéaire reconstruite pour la signature de WG

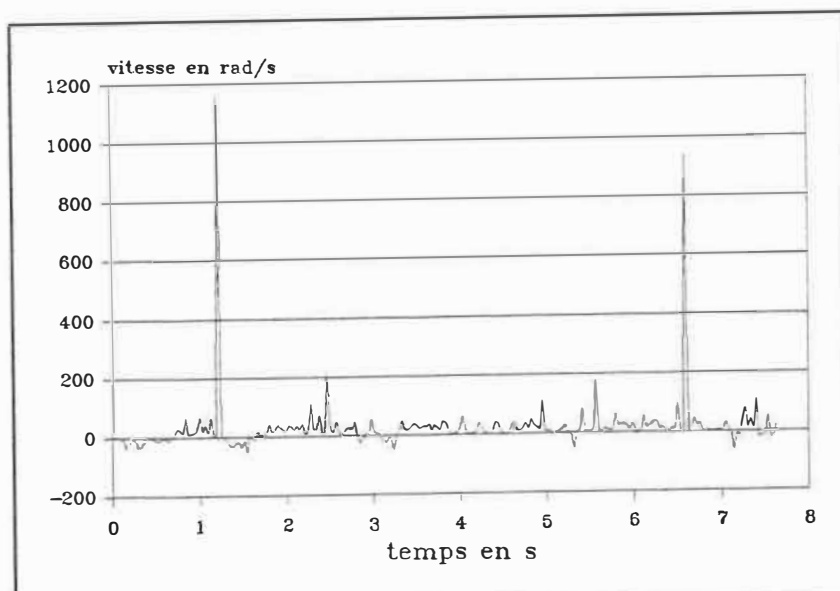


Figure 36 Vitesse angulaire originale pour la signature de PR

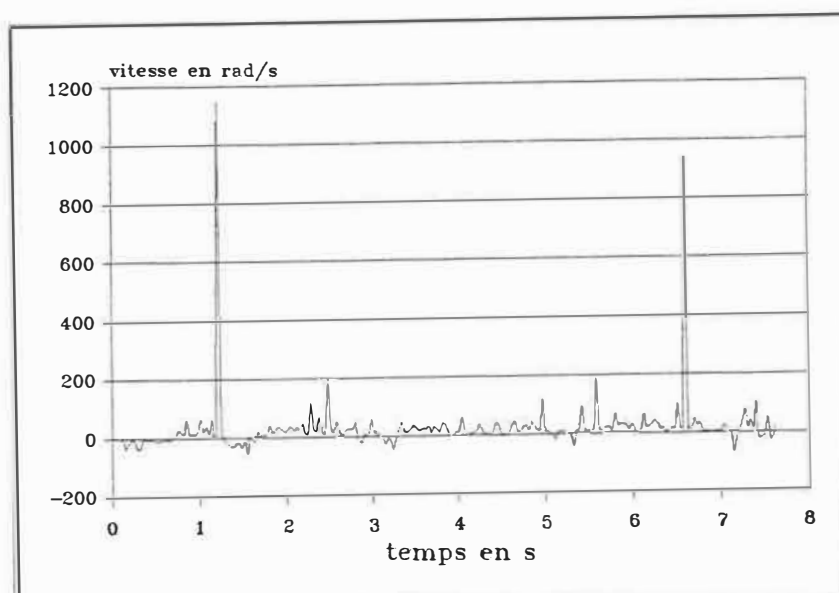


Figure 37 Vitesse angulaire reconstruite pour la signature de PR

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00276563 2