

**UNIVERSITE DE MONTREAL**

**ETUDE DU DELAMINAGE EN MODE II DES COMPOSITES STRATIFIES**

**par**

**Richard LANGLOIS**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**ECOLE POLYTECHNIQUE**

**MEMOIRE PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU GRADE DE MAITRE ES SCIENCES APPLIQUEES (M.Sc.A)**

**Décembre 1989**

**© Richard Langlois 1989**

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58185-9

**UNIVERSITE DE MONTREAL**

**ECOLE POLYTECHNIQUE**

*Ce mémoire intitulé:*

**ETUDE DU DELAMINAGE EN MODE II DES COMPOSITES STRATIFIES**

**présenté par:** *Richard Langlois*

**en vue de l'obtention du grade de:** *M.Sc.A*

**a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:**

**Mme Marie Bernard Ph.D., présidente**

**M.Toan Vu-Khanh D. Ing.**

**M.Bohuslav Fisa Ph.D.**

## Sommaire

Un calcul a été développé afin de quantifier la compliance et de caractériser le taux de restitution d'énergie de déformation pour des échantillons de Verre/Epoxy sollicités en porte-à-faux fissurés à différents niveaux. Ce développement a été nécessaire pour vérifier les effets du craquement transverse (transverse cracking) qui interviennent lorsque le plan de fissuration repose sur un pli qui diffère d'un angle de 0 degré par rapport à l'axe longitudinal de la poutre. Par de nombreux essais à 7 localisations de plan de fissuration différentes, il a été démontré que le taux de restitution d'énergie de déformation était sensible aux facteurs géométriques environnants. Le calcul théorique a été complété d'une étude par éléments finis qui confirme le modèle et qui démontre la présence de mode mixte lorsque la localisation du plan de fissuration diffère de  $h_1/h = 1/2$ . Les conditions pour l'obtention du mode II pur en vue de mesurer l'énergie de rupture  $G_{IIc}$  entre une couche à 0 degré et une couche à  $\theta$  sont également discutées.

## **Abstract**

A mathematical model has been developed in order to quantify the compliance and to characterize the strain energy release rate of a cantilever beam type specimen for different crack plane locations. This development was necessary to verify the effects of the transverse cracking that occurs when the crack plane location is on a ply angle other than 0 degree with respect to the longitudinal axis of the beam. The experimental work on samples having 7 different crack plane locations have shown that the strain energy release rate is sensitive to the geometric factors. The theoretical development has been verified by finite elements. The numerical results show the presence of a mixed mode when the crack plane location is different from  $h_1/h = 1/2$ . The conditions to obtain a pur mode II in order to measure the fracture energy  $G_{IIc}$  between a layer at  $0^\circ$  and one at  $\theta$  will be also discussed.

## ***Remerciements***

*J'aimerais d'abord remercier chaleureusement le Dr. Toan Vu-Khanh, chercheur du Conseil National de Recherches du Canada, qui m'a accueilli et dirigé durant deux années à l'Institut de Génie des Matériaux et qui a toujours su porter un jugement expert, critique et constructif envers mes travaux.*

*J'aimerais également remercier le Dr. Jérôme Daoust pour son support indispensable dans le domaine des éléments finis et ses connaissances profondes du génie des matériaux composites.*

*De plus, tous ces travaux n'auraient pu être réalisés sans la précieuse collaboration de compétents technologues qui sont Mme Manon Plourde et M. Jacques Dufour.*

*Je ne voudrais surtout pas oublier Louis qui m'a continuellement supporté et pour qui j'ai beaucoup d'affection et de reconnaissance et également JoAne, mon amour, qui m'a soutenu et comblé durant ces deux années.*

*Enfin, j'aimerais dédier ce mémoire à mes chers parents à qui je dois tout.*

# Table des Matières

| <i>Sections</i>                                                            | <i>Page</i> |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Sommaire</b> .....                                                      | iv          |
| <b>Abstract</b> .....                                                      | v           |
| <b>Remerciements</b> .....                                                 | vi          |
| <b>Liste des Tableaux</b> .....                                            | x           |
| <b>Liste des Figures</b> .....                                             | xii         |
| <b>Liste des symboles</b> .....                                            | xv          |
| <b>Introduction</b> .....                                                  | 1           |
| <br>                                                                       |             |
| <b>1 Bases de la mécanique des matériaux composites</b>                    |             |
| 1.1 Rappels sur la mécanique des matériaux composites .....                | 4           |
| 1.2 Rigidité dans le plan d'un stratifié .....                             | 8           |
| 1.3 Rigidité en flexion d'un stratifié.....                                | 10          |
| 1.4 Coefficient de couplage des composites non-symétriques .....           | 11          |
| <br>                                                                       |             |
| <b>2 Notions de mécanique de la rupture</b>                                |             |
| 2.1 Mécanique de la rupture appliquée aux matériaux isotrope .....         | 14          |
| 2.2 Mécanique de la rupture appliquée aux matériaux composites.....        | 15          |
| 2.3 Modes mixtes.....                                                      | 17          |
| <br>                                                                       |             |
| <b>3 Développement des termes énergétiques</b>                             |             |
| 3.1 Energie de déformation en flexion $W_f$ d'une poutre non-fissurée..... | 21          |

|          |                                                                                |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2      | Energie de déformation en cisaillement $W_s$ d'une poutre non-fissurée.....    | 23        |
| 3.3      | Energie de déformation totale d'un échantillon fissuré .....                   | 24        |
| 3.4      | Calcul de la compliance d'une poutre fissurée à un niveau quelconque .....     | 28        |
| 3.5      | Taux de restitution d'énergie de déformation .....                             | 28        |
| 3.6      | Simplification du modèle pour un composite Quasi-Homogène .....                | 29        |
| 3.6.1    | Utilités .....                                                                 | 30        |
| 3.6.2    | Réduction des calculs .....                                                    | 32        |
| <b>4</b> | <b>Procédures expérimentales.....</b>                                          | <b>36</b> |
| <b>5</b> | <b>Résultats et discussion</b>                                                 |           |
| 5.1      | Dimension des échantillons utilisés.....                                       | 38        |
| 5.2      | Influence de la préfissuration sur $G$ .....                                   | 39        |
| 5.3      | Stabilité de la propagation.....                                               | 40        |
| 5.4      | Calculs de compliance et de $G$ .....                                          | 43        |
| 5.5      | Facteurs qui influencent le taux de restitution d'énergie de déformation ..... | 48        |
| 5.6      | Analyse par la méthode numérique des éléments finis.....                       | 53        |
| 5.7      | Observations générales.....                                                    | 58        |
|          | <b>Conclusion .....</b>                                                        | <b>60</b> |
|          | <b>Références .....</b>                                                        | <b>61</b> |
|          | <b>Annexe A</b>                                                                |           |
| A.1      | Répartition de la force "P" appliquée aux poutres 1 et 2.....                  | 68        |

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A.2 Simplifications.....                                                                                                     | 70 |
| A.3 Vérification de l'erreur due à la négligence de la déformation par<br>Cisaillement sur la répartition de la force P..... | 71 |

## **Annexe B**

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| B.1 Effet de la friction sur $G_{IIc}$ ..... | 72 |
|----------------------------------------------|----|

## **Annexe C**

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| C.1 Données expérimentales ..... | 77 |
|----------------------------------|----|

## **Annexe D**

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| D.1 Calcul des modules de flexion et de cisaillement transverse..... | 92 |
|----------------------------------------------------------------------|----|

## **Annexe E**

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| E.1 Calcul du facteur d'intensité de contraintes par éléments finis ..... | 97 |
| E.2 Méthode pour déterminer $k_i$ .....                                   | 98 |

## Liste des Tableaux

*Page*

### **1 Bases de la mécanique des matériaux composites**

Tableau 1.1: Coefficients de rigidité .....6

Tableau 1.2: Coefficients de rigidité .....7

### **3 Développement des termes énergétiques**

Tableau 3.1: Zone acceptable pour la réduction des calculs .....34

### **5 Résultats et discussion**

Tableau 5.1: Longueurs de fissures à respecter lors de l'expérimentation.....42

Tableau 5.2: Valeurs des paramètres  $k$  et  $G$ .....57

### **Annexe A**

Tableau A.1: Valeurs du terme  $\phi$  pour tous les niveaux de fissuration.....71

### **Annexe C**

Tableau C.1: Données du niveau de fissuration 22/28.....78

Tableau C.2: Données du niveau de fissuration 20/28.....80

Tableau C.3: Données du niveau de fissuration 18/28.....82

Tableau C.4: Données du niveau de fissuration 16/28 .....84

Tableau C.5: Données du niveau de fissuration 14/28.....86

Tableau C.6: Données du niveau de fissuration 12/28.....88

Tableau C.7: Données du niveau de fissuration 6/28.....90

**Annexe D**

Tableau D.1: Valeurs de compliance d'un Q-H 0-90 degrés 28 plis .....93

Tableau D.2: Valeurs de compliance d'un unidirectionnel 0 degré 10 plis .....94

Tableau D.3: Valeurs de compliance d'un unidirectionnel 90 degrés 10 plis.....95

# Liste des Figures

*Page*

## **Introduction**

Figure 1: Illustration du craquement transverse..... 3

## **1 Bases de la mécanique des matériaux composites**

Figure 1.1: Plaque composite multi-couches..... 5

Figure 1.2: Illustration de deux systèmes de coordonnées ..... 5

## **2 Notions de mécanique de la rupture**

Figure 2.1: Illustration des trois modes de rupture.....14

## **3 Développement des termes énergétiques**

Figure 3.1: Séparation de l'échantillon étudié en 3 parties distinctes.....20

Figure 3.2: Poutre composite non-fissurée chargée en flexion .....22

Figure 3.3: Méthode pour déterminer  $E^f$  et  $G_{13}$  .....31

Figure 3.4: Zone acceptable pour la réduction des calculs.....34

## **4 Procédures expérimentales**

Figure 4.1: Cycle de moulage du composite Verre/Epoxy .....37

## **5 Résultats et discussion**

Figure 5.1: Zone riche en résine au front de fissure.....39

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 5.2: Valeurs théor. et exp. des compliances pour le niveau 22/28 .....         | 45 |
| Figure 5.3: Valeurs théor. et exp. des compliances pour le niveau 14/28 .....         | 45 |
| Figure 5.4: Détermination de $G_c$ pour le niveau 22/28.....                          | 46 |
| Figure 5.5: Détermination de $G_c$ pour le niveau 14/28.....                          | 46 |
| Figure 5.5a: Valeurs de $G_{II}$ pour différentes localisations de fissure .....      | 48 |
| Figure 5.6: Echantillon fissuré à un niveau $h_1/h$ .....                             | 49 |
| Figure 5.7: Contraintes au front de fissure pour différentes localisations .....      | 50 |
| Figures 5.8a et 5.8b: Illustration des deux faces du plan de fissuration .....        | 51 |
| Figure 5.9: Différences des courbures selon la localisation de la fissure .....       | 52 |
| Figures 5.10a et 5.10b: Illustrations de la présence du mode mixte.....               | 53 |
| Figure 5.11: Contraintes d'ouverture au front de fissure pour $h_1/h=22/28$ .....     | 54 |
| Figure 5.12: Contraintes de cisaillement au front de fissure pour $h_1/h=22/28$ ..... | 55 |
| Figure 5.11: Contraintes normales au front de fissure pour $h_1/h=22/28$ .....        | 56 |
| Figure 5.14: Comparaison des valeurs de $G$ obtenues par 2 méthodes.....              | 57 |

## Annexe A

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Figure A.1: Division de l'échantillon encastré en trois parties ..... | 68 |
|-----------------------------------------------------------------------|----|

## Annexe B

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Figure B.1: Division de l'échantillon encastré en trois parties ..... | 72 |
|-----------------------------------------------------------------------|----|

## Annexe C

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure C.1: Compliances théorique et expérimentale du niveau 22/28 <sup>ième</sup> ..... | 79 |
| Figure C.2: Détermination de $G$ pour le niveau 22/28 <sup>ième</sup> .....              | 79 |
| Figure C.3: Compliances théorique et expérimentale du niveau 20/28 <sup>ième</sup> ..... | 81 |

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure C.4: Détermination de G pour le niveau 20/28 <sup>ième</sup> .....                 | 81 |
| Figure C.5: Compliances théorique et expérimentale du niveau 18/28 <sup>ième</sup> .....  | 83 |
| Figure C.6: Détermination de G pour le niveau 18/28 <sup>ième</sup> .....                 | 83 |
| Figure C.7: Compliances théorique et expérimentale du niveau 16/28 <sup>ième</sup> .....  | 85 |
| Figure C.8: Détermination de G pour le niveau 16/28 <sup>ième</sup> .....                 | 85 |
| Figure C.9: Compliances théorique et expérimentale du niveau 14/28 <sup>ième</sup> .....  | 87 |
| Figure C.10: Détermination de G pour le niveau 14/28 <sup>ième</sup> .....                | 87 |
| Figure C.11: Compliances théorique et expérimentale du niveau 12/28 <sup>ième</sup> ..... | 89 |
| Figure C.12: Détermination de G pour le niveau 12/28 <sup>ième</sup> .....                | 89 |
| Figure C.13: Compliances théorique et expérimentale du niveau 6/28 <sup>ième</sup> .....  | 91 |
| Figure C.14: Détermination de G pour le niveau 6/28 <sup>ième</sup> .....                 | 91 |

## Annexe D

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure D.1: Détermination des modules $E^f$ et $G_{13}$ pour un 0-90 degrés ..... | 94 |
| Figure D.2: Détermination des modules $E^f$ et $G_{13}$ pour un 0 degré .....     | 95 |
| Figure D.3: Détermination des modules $E^f$ et $G_{13}$ pour un 90 degrés .....   | 96 |

## Annexe E

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure E.1: Première étape: Maillage grossier .....                                        | 102 |
| Figure E.2: Deuxième étape: Raffinement d'une zone autour du front de fissure .            | 102 |
| Figure E.2: Troisième étape: Raffinement par cercles d'une zone de 1 mm <sup>2</sup> ..... | 103 |
| Figure E.4: Elements de Barsoum au front de fissure .....                                  | 103 |
| Figure E.5: Détermination du facteur $k_{II}$ pour le niveau 22/28 <sup>ième</sup> .....   | 104 |
| Figure E.6: Détermination du facteur $k_I$ pour le niveau 22/28 <sup>ième</sup> .....      | 104 |

## Liste des Symboles

|                          |                                                                                                         |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                      | <i>Longueur de fissure [mm]</i>                                                                         |
| $A$                      | <i>Section d'une poutre [mm<sup>2</sup>]</i>                                                            |
| $a_{ij}, d_{ij}$         | <i>Coefficients de souplesse des laminés symétriques</i>                                                |
| $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ | <i>Coefficients de rigidité des laminés symétriques et non-symétriques</i>                              |
| $b$                      | <i>Largeur de l'échantillon [mm]</i>                                                                    |
| $C$                      | <i>Compliance d'un échantillon fissuré [mm/N]</i>                                                       |
| $C_o$                    | <i>Compliance d'un échantillon non fissuré [mm/N]</i>                                                   |
| $E_x$                    | <i>Module de Young longitudinal [MPa]</i>                                                               |
| $E_y$                    | <i>Module de Young transversal [MPa]</i>                                                                |
| $E_s$                    | <i>Module de cisaillement longitudinal [MPa]</i>                                                        |
| $E^o_i$                  | <i>Constante d'ingénierie selon la direction <math>i</math> [MPa]</i>                                   |
| $F$                      | <i>Force appliquée à la partie 2 de l'échantillon [N]</i>                                               |
| $f_s$                    | <i>Facteur de forme</i>                                                                                 |
| $G$                      | <i>Taux de restitution d'énergie de déformation [kJ/m<sup>2</sup>]</i>                                  |
| $G_c$                    | <i>Energie de rupture [kJ/m<sup>2</sup>]</i>                                                            |
| $G_{13}$                 | <i>Module de cisaillement transverse [MPa]</i>                                                          |
| $h$                      | <i>Epaisseur de l'échantillon [mm]</i>                                                                  |
| $h_1$                    | <i>Hauteur du plan de fissuration [mm]</i>                                                              |
| $I$                      | <i>Inertie</i>                                                                                          |
| $K_i, k_i$               | <i>Facteurs d'intensité de contraintes <math>k_i = K_i \cdot \pi^{1/2}</math> [MPa.m<sup>1/2</sup>]</i> |
| $L$                      | <i>Longueur de l'échantillon [mm]</i>                                                                   |

|                                        |                                                                            |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $m$                                    | Constante adimensionnelle = $[1-\nu_x\nu_y]^{-1}$                          |
| $M_i$                                  | Moment par unité de largeur [Nm/m]                                         |
| $P$                                    | Force appliquée à l'extrémité de l'échantillon [N]                         |
| $P_c$                                  | Force critique appliquée à l'extrémité de l'échantillon [N]                |
| $Q_{ij}$                               | Composantes de rigidité $i,j=x,y,s$ ou 1,2,3 [MPa]                         |
| $r$                                    | Distance mesurée à partir du front de fissure [m]                          |
| $R$                                    | Force appliquée à la partie 1 de l'échantillon [N]                         |
| $u$                                    | Déplacement longitudinal                                                   |
| $V(x)$                                 | Effort tranchant [N]                                                       |
| $W_f$                                  | Energie de déformation élastique en flexion [J]                            |
| $W_s$                                  | Energie de déformation élastique en cisaillement transverse [J]            |
| $W_f$                                  | Energie totale de déformation = $W_f + W_s$ [J]                            |
| $y$                                    | Rapport $h_1/h$                                                            |
| $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \delta_{ij}$ | Coefficients de souplesse des laminés non symétriques                      |
| $\varepsilon_i$                        | Composantes de déformation d'un pli du laminé $i=x,y,s$                    |
| $\varepsilon^0_i$                      | Déformation dans le plan du stratifié $i=1,2,6$                            |
| $\theta$                               | Angle du rayon $r$                                                         |
| $\lambda_i$                            | Courbure $i=1,2,6$ [1/m]                                                   |
| $\mu$                                  | Coefficient de friction                                                    |
| $\mu_i$                                | Coefficients complexes dépendants du niveau d'anisotropie du matériau      |
| $\nu_x$                                | Coefficient de poisson longitudinal                                        |
| $\nu_y$                                | Coefficient de poisson transverse                                          |
| $\nu^0_{ij}$                           | Coefficients de poisson du laminé $i=1,2,6$                                |
| $\sigma_i$                             | Composantes de contraintes d'un pli du laminé $i=x,y,s$ ou $i=1,2,3$ [MPa] |

|                     |                                                                  |
|---------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\sigma_i$          | <i>Contrainte moyenne à travers l'épaisseur du laminé</i>        |
| $\tau_{ij}$         | <i>Contrainte de cisaillement <math>i,j = x,y,s</math> [MPa]</i> |
| $\varphi$           | <i>Coefficient de distribution de charge</i>                     |
| $\Phi_i, \Psi_i$    | <i>Facteurs de simplification</i>                                |
| $\omega', \omega''$ | <i>Fonctions du niveau du plan de fissuration</i>                |

## INTRODUCTION

---

La croissance phénoménale du marché des matériaux haute performance qu'a connue l'industrie depuis la dernière décennie a entraîné des changements majeurs à la philosophie de la conception et du développement des pièces d'ingénierie. De plus en plus, des pièces métalliques massives sont remplacées par des composantes à base de fibres et de résines qui ont, en général, un plus grand rapport résistance/poids. Les industries aéronautique et aérospatiale, notamment, profitent de nombreux avantages que procurent ces nouveaux matériaux dont certains se traduisent par des économies de poids et de carburant ou par de nouvelles formes impossibles à réaliser avec des matériaux conventionnels.

Cependant, bien que leur utilisation permette de multiples avantages dont les économies de poids substantielles, il demeure que les matériaux composites les plus couramment employés sont relativement sensibles aux conditions environnementales, à l'impact et au délaminage. Ce dernier point, qui est en réalité le problème majeur des stratifiés, peut diminuer considérablement la vie des pièces soumises à des chargements statiques ou cycliques. L'initiation de fissures, généralement faite à partir de défauts existants (micro-vide, bulles d'air, mauvaise interface résine/matrice etc.) peut mener à une propagation brutale et à une perte importante des propriétés du matériau. Les phénomènes impliqués sont complexes et mal connus et relèvent du domaine de la mécanique de la rupture.

Trois modes de rupture possibles peuvent être présents lorsqu'il y a délaminage: le mode I ou mode d'ouverture, le mode II ou mode de cisaillement longitudinal et le mode III

ou mode de cisaillement transverse. Cependant, il existe généralement un ou deux modes de rupture qui dominent dans le processus du délaminage: le mode I est surtout présent dans les corps fissurés isotropes, alors que les modes II et/ou III sont plus importants dans les corps fissurés anisotropes [1,2].

Certaines approches énergétiques qui caractérisent ces phénomènes sont basées sur l'hypothèse que la fissure se propage selon le même plan que le plan initial [3]. Par contre, il a été observé à maintes reprises que cette hypothèse n'est valable que pour le mode I et que les modes II et III tendent à faire dévier la fissure de son plan original. De nombreuses études sur le mode II ont montré les effets néfastes de la fissuration transverse (transverse cracking) [4,5] où la fissure plonge entre les couches du stratifié qui diffèrent d'un angle de 0 degré par rapport à l'axe longitudinale de la poutre (voir la figure 1) en impliquant plusieurs modes de rupture. La nouvelle localisation du plan de fissuration modifie la valeur de la compliance de la pièce et affecte inévitablement le taux de restitution d'énergie de déformation. Les conditions de mode II pur sont ainsi difficiles à réaliser car ces paramètres sont fortement influencés par l'orientation des couches adjacentes au plan de fissuration. Les calculs conventionnels ne tiennent donc plus et doivent être modifiés pour tenir compte de ces effets.

Conséquemment, le but de la présente étude est de pouvoir quantifier la valeur du taux de restitution d'énergie de déformation d'un échantillon de configuration générale, sollicité en flexion, pour une localisation quelconque du plan de fissuration. L'impossibilité d'évaluer  $G_{IIc}$  entre une couche à  $0^\circ$  et à  $\theta$  pour l'échantillon en porte-à-faux ainsi que les conditions nécessaires pour l'obtention de mode II pur seront également discutées.

L'approche et l'analyse du sujet se feront par l'intermédiaire d'un rappel sur la mécanique des matériaux composites et sur les notions de bases de la mécanique de la rupture suivi du développement analytique de l'énergie de rupture, des procédures expérimentales, de la présentation des résultats et de la discussion

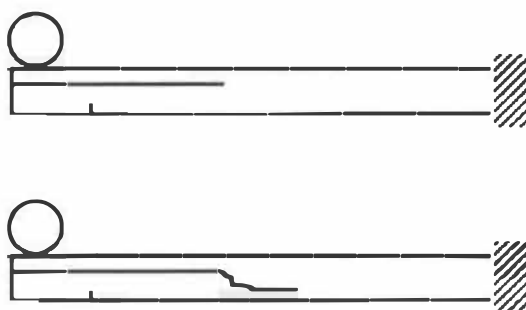


*Figure 1: Illustration du craquement transverse d'un échantillon chargé en porte-à-faux lorsque le pli sous le plan de fissuration diffère d'un angle de 0 degré par rapport à l'axe longitudinal de la poutre.*

# 1 BASES DE LA MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

---

## 1.1 Rappels sur la mécanique des matériaux composites

Les composantes de rigidité d'un matériau anisotrope peuvent être définies par des relations de contrainte-déplacement similaires à celles utilisées pour un matériau isotrope. La loi de Hooke généralisée nécessite, par contre, un nombre considérable d'informations pour le traitement des corps anisotropes tridimensionnels i.e. 36 constantes dont 21 indépendantes. A titre de comparaison, les relations qui définissent le même corps constitué d'un matériau isotrope nécessitent 12 constantes dont seulement 2 sont indépendantes. Il faut donc 21 procédures expérimentales différentes pour définir adéquatement les coefficients de rigidité du matériau anisotrope alors qu'un simple test de traction suffit pour caractériser le matériau isotrope. Naturellement, des simplifications s'imposent pour diminuer la quantité d'informations à traiter et également réduire les coûts expérimentaux.

Les matériaux composites à fibres continues sont généralement fabriqués à partir de couches individuelles orthotropes, empilées selon des angles pré-établis afin d'obtenir des propriétés spécifiques dans des directions spécifiques (Figure 1.1).

Puisqu'on retrouve habituellement les composites sous forme de plaques ou de pièces dont une des dimensions est de beaucoup inférieure à celles des 2 autres, il devient plus pratique et plus simple de les traiter en 2 dimensions. Le fait d'utiliser des couches orthotropes qui peuvent être définies par 4 constantes et de travailler en deux dimensions

réduit le nombre de constantes du laminé à 9 dont 6 sont indépendantes, comme il sera vu à la fin de cette section.

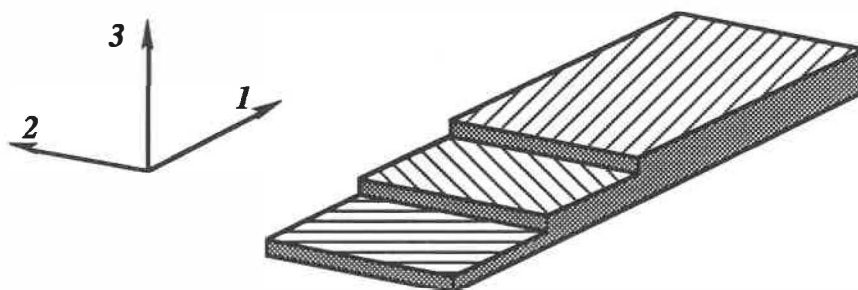


*Figure 1.1: Plaque composite multi-couches*

Deux systèmes de coordonnées cartésiennes sont nécessaires aux calculs de rigidité des matériaux composites (Figure 1.2). Le premier est global et indique les directions générales du composite. L'axe 3 est habituellement orienté à travers l'épaisseur. Le second est local et indique indépendamment l'orientation de chaque pli. Les axes  $x$  et  $y$  sont orientés longitudinalement et transversalement aux fibres respectivement. Selon la notation couramment utilisée [6] l'angle d'un pli est mesuré entre les axes  $x$  et 1 et est positif dans le sens anti-horaire.

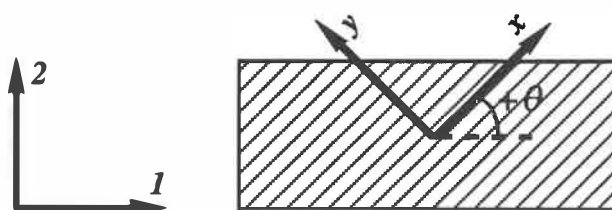


*Figure 1.2: Illustration des deux systèmes de coordonnées*

La relation "Contraintes-Déplacements" pour une couche donnée selon x et y peut s'exprimer sous forme matricielle comme suit [6]:

$$\begin{matrix} & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_s \\ \sigma_x & Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ \sigma_y & Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ \sigma_s & 0 & 0 & Q_{ss} \end{matrix}$$

où les termes  $Q_{ij}$  sont des coefficients de rigidité définis au tableau 1.1 qui sont fonctions des propriétés mécaniques longitudinales, transversales et en cisaillement de la couche traitée.

**Tableau 1.1**

|                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Q_{xx} = mE_x$<br>$Q_{xy} = m\nu_y E_x$<br>$Q_{yx} = m\nu_x E_y$<br>$Q_{yy} = mE_y$<br>$Q_{ss} = E_s$ | $E_x = \text{Module de rigidité longitudinal aux fibres/matrice}$<br>$E_y = \text{Module de rigidité transversal aux fibres/matrice}$<br>$E_s = \text{Module de rigidité en cisaillement}$<br>$\nu_x = \text{Coefficient de Poisson longitudinal}$<br>$\nu_y = \text{Coefficient de Poisson transverse}$<br>$m = \left[ 1 - \frac{Q_{xy} Q_{yx}}{Q_{xx} Q_{yy}} \right]^{-1} = \left[ 1 - \nu_x \nu_y \right]^{-1}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

*Tableau 1.1: Coefficients de rigidité*

Chaque contrainte et déplacement peut être exprimé selon le système d'axe global 1-2 par la transformation suivante:

$$\begin{array}{ccc}
& \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_6 \\
\sigma_1 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\
\sigma_2 & Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\
\sigma_6 & Q_{61} & Q_{62} & Q_{66}
\end{array}$$

où les coefficients de rigidité  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}...$  sont fonctions des coefficients  $Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{yy}...$  et de l'orientation du pli  $\theta$ . Ces relations sont données au tableau 1.2

**Tableau 1.2**

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= m^4 Q_{xx} + n^4 Q_{yy} + 2m^2 n^2 Q_{xy} + 4m^2 n^2 Q_{ss} \\
Q_{22} &= n^4 Q_{xx} + m^4 Q_{yy} + 2m^2 n^2 Q_{xy} + 4m^2 n^2 Q_{ss} \\
Q_{12} &= m^2 n^2 Q_{xx} + m^2 n^2 Q_{yy} + (m^4 + n^4) Q_{xy} - 4m^2 n^2 Q_{ss} \\
Q_{16} &= m^3 n Q_{xx} - mn^3 Q_{yy} + (mn^3 - m^3 n) Q_{xy} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{ss} \\
Q_{26} &= mn^3 Q_{xx} - m^3 n Q_{yy} + (m^3 n - mn^3) Q_{xy} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{ss} \\
Q_{66} &= m^2 n^2 Q_{xx} + m^2 n^2 Q_{yy} - 2m^2 n^2 Q_{xy} + (m^2 - n^2)^2 Q_{ss}
\end{aligned}$$

*Tableau 1.2: Coefficients de rigidité ( $m = \cos\theta$  et  $n = \sin\theta$ )*

Ainsi, les contraintes selon les axes dans le plan 1-2 pour une couche donnée peuvent être obtenues directement à partir des déplacements 1-2. L'inverse est également possible en utilisant la matrice inverse de rigidité  $[Q_{ij}]^{-1}$  ou matrice de souplesse. A l'aide de manipulations algébriques analogues, il est possible de passer de  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6)$  à  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_s)$  et de  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$  à  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s)$  ou inversement.

Il est à remarquer qu'une couche d'orientation donnée exprimée selon le système 1-2 possède des coefficients de couplage  $Q_{16}$ ,  $Q_{61}$ ,  $Q_{26}$ ,  $Q_{62}$  et que ces coefficients sont toujours nuls dans le cas d'un matériau ISOTROPE.

En résumé, la matrice de rigidité d'une couche est définie complètement par 9 constantes  $Q_{ij}$  dont 6 sont indépendantes puisque  $Q_{12} = Q_{21}$ ,  $Q_{16} = Q_{61}$ ,  $Q_{26} = Q_{62}$ . À titre de comparaison, un matériau isotrope est défini par 5 constantes dont 2 sont indépendantes:  $Q_{11} = Q_{22}$ ,  $Q_{12} = Q_{21}$ ,  $Q_{16} = Q_{61} = Q_{26} = Q_{62} = 0$ ,  $Q_{66} = f(Q_{11})$ .

## 1.2 Rigidité dans le plan d'un stratifié

Chaque couche du composite d'épaisseur  $h_0$ , possède sa propre matrice de rigidité  $Q_{ij}$ . La rigidité moyenne du stratifié  $A^*_{ij}$  peut s'exprimer par la somme des  $Q_{ij}$  de chaque pli divisé par l'épaisseur totale  $h$ .

$$A^*_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (i,j = 1,2,6)$$

Ou sous forme développée:

$$A^*_{11} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz \quad A^*_{22} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} dz \quad A^*_{12} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz \quad etc.$$

$A^*_{ij}$  = Coefficient normalisé de rigidité dans le plan et est généralement exprimé en GPa

Notons que  $A^*_{ij}h = A_{ij}$

La relation "Contrainte-Déplacement" pour le stratifié global devient:

$$\begin{array}{ccc}
 \varepsilon_1^o & \varepsilon_2^o & \varepsilon_6^o \\
 \bar{\sigma}_1 & A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* \\
 \bar{\sigma}_2 & A_{21}^* & A_{22}^* & A_{26}^* \\
 \bar{\sigma}_6 & A_{61}^* & A_{62}^* & A_{66}^*
 \end{array}
 \quad \text{ou inversement} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_6 \\
 \varepsilon_1^o & a_{11}^* & a_{12}^* & a_{16}^* \\
 \varepsilon_2^o & a_{21}^* & a_{22}^* & a_{26}^* \\
 \varepsilon_6^o & a_{61}^* & a_{62}^* & a_{66}^*
 \end{array}$$

$\bar{\sigma}_i$  signifie contrainte moyenne appliquée ou résultante sur la section du stratifié selon i

$\varepsilon_i^o$  signifie déformation imposée ou résultante dans le plan du stratifié selon l'axe i

*Puisque la distribution des contraintes à travers l'épaisseur n'est pas constante (la rigidité varie de pli en pli ) il est plus simple de définir une contrainte moyenne appliquée à toute l'épaisseur. Il est possible de calculer les contraintes induites dans chaque pli en passant par les déformations globales qui sont les mêmes partout à travers l'épaisseur.*

Les constantes d'ingénierie peuvent également être obtenues par les relations suivantes:

$$E_1 = \frac{1}{a_{11}^*} \quad E_2 = \frac{1}{a_{22}^*} \quad E_6 = \frac{1}{a_{66}^*} \quad \nu_{21}^o = -\frac{a_{21}^*}{a_{11}^*} \quad \nu_{61}^o = -\frac{a_{61}^*}{a_{11}^*} \quad \nu_{16}^o = -\frac{a_{16}^*}{a_{66}^*} \quad \text{etc.}$$

### 1.3 Rigidité en flexion d'un stratifié

La rigidité en flexion, à l'opposé de la rigidité dans le plan, est sensible à la séquence d'empilement. Ainsi, un stratifié sera plus rigide en flexion si les couches rigides sont en surface et sera plus souple si ces mêmes couches sont situées au centre.

Dans la même ligne de pensée qu'à la section 1.1, on peut définir des coefficients de rigidité en flexion  $D_{ij}$  reliant les moments appliqués  $M_i$  aux courbures des laminés  $\lambda_i$ . De cette façon, on obtient :

$$\begin{array}{cccc}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_6 & \\
 M_1 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\
 M_2 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\
 M_6 & D_{61} & D_{62} & D_{66}
 \end{array}
 \quad \text{ou inversement} \quad
 \begin{array}{cccc}
 M_1 & M_2 & M_6 & \\
 \lambda_1 & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\
 \lambda_2 & d_{21} & d_{22} & d_{26} \\
 \lambda_6 & d_{61} & d_{62} & d_{66}
 \end{array}$$

où les coefficients  $D_{ij}$  dépendent de la rigidité dans le plan de chacun des plis et de la localisation de chaque pli à travers l'épaisseur.

Ainsi,

$$D_{ij} = \int Q_{ij} z^2 dz \quad \text{est un coefficient de rigidité en flexion [Nm]}$$

$M_i$  est un moment par unité de largeur

$\lambda_j$  est la courbure du laminé sous l'application du moment  $M_i$

De ces relations on peut obtenir le module de flexion pour chaque axe:

Soit

$$\boxed{E_1^f = \frac{12}{h^3 d_{11}} \quad E_2^f = \frac{12}{h^3 d_{22}} \quad E_6^f = \frac{12}{h^3 d_{66}}}$$

## 1.4 Coefficient de couplage des composites non-symétriques

Une dernière catégorie de coefficients de couplage doit être définie lorsqu'il s'agit de composites non-symétriques. Ces coefficients font le lien entre les contraintes appliquées dans le plan et les courbures induites ou entre les moments appliqués et les déformations induites dans le plan.

On définit ce coefficient de couplage comme suit:

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz$$

ou, sous forme développée

$$B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz \quad B_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z dz \quad B_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} z dz \quad etc.$$

En l'appliquant sous forme de matrice on obtient:

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon_1^o & \varepsilon_2^o & \varepsilon_6^o & \\ M_1 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ M_2 & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ M_6 & B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & k_6 & \\ N_1 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ N_2 & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ N_6 & B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{array}$$

En résumé, la rigidité et la souplesse d'un laminé général peuvent être complètement définis dans un plan 1-2 par les relations suivantes:

|                  | $\varepsilon_1^\circ$ | $\varepsilon_2^\circ$ | $\varepsilon_6^\circ$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_6$ |                       | $\bar{\sigma}_1$ | $\bar{\sigma}_2$ | $\bar{\sigma}_6$ | $M_1$ | $M_2$         | $M_6$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------|------------------|------------------|------------------|-------|---------------|-------|
| $\bar{\sigma}_1$ |                       |                       |                       |             |             |             | $\varepsilon_1^\circ$ |                  |                  |                  |       |               |       |
| $\bar{\sigma}_2$ |                       | $A_{ij}$              |                       |             | $B_{ij}$    |             | $\varepsilon_2^\circ$ |                  | $\alpha_{ij}$    |                  |       | $\beta_{ij}$  |       |
| $\bar{\sigma}_6$ |                       |                       |                       |             |             |             | $\varepsilon_6^\circ$ |                  |                  |                  |       |               |       |
| $M_1$            |                       |                       |                       |             |             |             | $\lambda_1$           |                  |                  |                  |       |               |       |
| $M_2$            |                       | $B_{ij}$              |                       |             | $D_{ij}$    |             | $\lambda_2$           |                  | $\beta_{ij}$     |                  |       | $\delta_{ij}$ |       |
| $M_6$            |                       |                       |                       |             |             |             | $\lambda_6$           |                  |                  |                  |       |               |       |

Ou sous notation matricielle:

$$\bar{\sigma} = A\varepsilon^\circ + B\lambda \quad \text{et} \quad M = B\varepsilon^\circ + D\lambda$$

## 2 NOTIONS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE

---

La mécanique de la rupture implique des phénomènes qui diffèrent largement de ceux décrits dans la théorie classique de la résistance des matériaux. Elle vise, en particulier, les corps fissurés ou ceux qui possèdent des défauts à l'échelle microscopique (micro-vides, bulles d'air, mauvaise interface fibre/matrice etc.). Les forces internes, au voisinage de ces vices, se distribuent généralement sur des contours de faible rayon. Elles engendrent des champs de contrainte uniques qui tendent vers des valeurs infinies et qu'on appelle *champs singuliers*.

La connaissance des mécanismes qui gouvernent la propagation de fissures est encore très limitée. Afin de mieux comprendre ces mécanismes, il est ici essentiel d'énumérer les deux approches qui les caractérisent:

- *La première méthode est scalaire et suppose que la fissure se propage selon le même axe que son orientation initiale.*
- *La deuxième est vectorielle et suppose que la fissure se propage selon un angle  $\theta$  par rapport à son orientation initiale. Cet angle varie selon les propriétés mécaniques du matériau considéré et peut être calculé.*

La présente étude utilisera l'approche scalaire bien qu'elle possède certaines limites qui seront discutées à la section 5. L'approche vectorielle fera l'objet d'un prochain ouvrage sur le délaminage.

## 2.1 Mécanique de la rupture appliquée aux matériaux isotropes

Selon Owen et Fawkes [7], qui décrivent brièvement l'histoire de la mécanique de la rupture, Irwin [3] a démontré par les équations de Westergaard [8] que les champs de contraintes au voisinage du front de fissure, en un point  $(r, \theta)$  pouvaient s'exprimer sous la forme suivante:

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad \tau_{xy} = \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad \tau_{yz} = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad (2.1)$$

où  $r$  est la distance radiale à partir du front de fissure et où  $f(\theta)$  est une fonction de l'angle polaire  $\theta$ . Les paramètres  $K_1$ ,  $K_2$ , et  $K_3$  représentent les *facteurs d'intensités de contraintes* des trois modes de rupture (figure 2.1) qui caractérisent l'intensité des champs de contraintes dont la singularité est de l'ordre de  $-1/2$  au front de fissure.

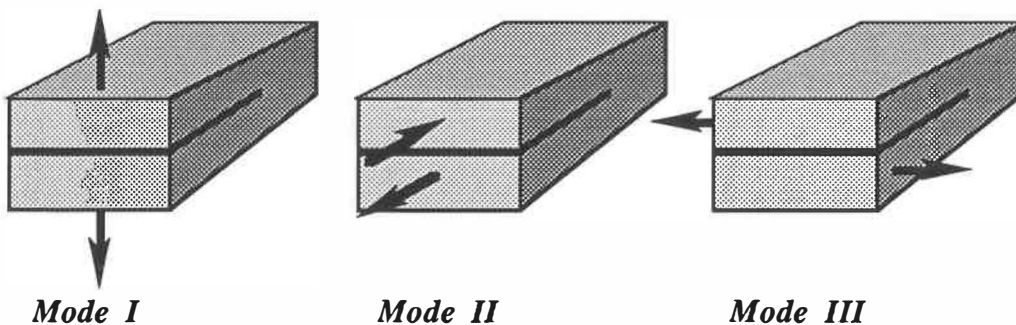


Figure 2.1: Illustration des trois modes de rupture

La propagation de la fissure survient lorsque le facteur  $K_i$  atteint une valeur critique  $K_c$ . Cette quantité est considérée comme une propriété intrinsèque du matériau qu'on appelle *Résistance à la rupture ou tenacité*.

Auparavant, Griffith [9] avait traité la rupture d'un point de vue énergétique utilisant le concept du taux de restitution d'énergie de déformation élastique. La relation qu'il a développé pour le mode I et qui exprime le taux avec lequel l'énergie de déformation élastique est restituée pour une extension infinitésimale de fissure  $da$ , est la suivante:

$$G_I = \frac{P^2}{2b} \frac{dC}{da} \quad (2.2)$$

où P est la charge normale au plan de fissuration, b est la largeur de l'échantillon et C est la compliance. Cette relation implique de manière analogue aux équations 2.1 que la propagation survient lorsque l'énergie disponible atteint une valeur critique  $G_c$ . Irwin [10] a également démontré le lien qui existe entre  $K_I$  et  $G_I$  pour un matériau isotrope par la relation:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{Etat plan de contraintes}) \quad (2.3)$$

$$G_I = \frac{K_I^2}{E(1-\nu^2)} \quad (\text{Etat plan de déformation}) \quad (2.4)$$

## 2.2 Mécanique de la rupture appliquée aux matériaux composites

En 1965, Sih et al. [6] ont développé les équations relatives aux champs de contrainte au voisinage d'une fissure pour un corps rectilinéairement anisotrope homogène (i.e dont l'anisotropie ne change pas dans une direction donnée), chargé simultanément en modes I et II. Ces équations se distinguent des équations.2.1 par leur dépendance à niveau d'anisotropie du matériau. Elles prennent la forme:

$$a) \quad \sigma_x = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ + \frac{k_2}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$b) \quad \sigma_y = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ + \frac{k_2}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$c) \quad \tau_{xy} = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \\ + \frac{k_2}{\sqrt{2r}} Re \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right]$$

où  $k_i$  est un facteur d'intensité de contrainte et équivaut à  $K_i \sqrt{\pi}$ ; les termes  $\mu_i$  sont des racines complexes tirées de l'équation d'Airy et sont fonctions des propriétés mécaniques du matériau [11].  $Re$  exprime la partie réelle des composantes entre crochets.

Les mêmes auteurs ont introduit les équations du taux de restitution d'énergie de déformation appliquées aux matériaux composites pour les trois modes de rupture . Les

relations ont la même forme que l'équation 2.3 et correspondent à un corps orthotropique ayant une fissure sur un plan de symétrie. Les deux premières expressions sont donc:

$$G_I = \pi k_I^2 \sqrt{\frac{a_{11}a_{22}}{2}} \left[ \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5a)$$

$$G_2 = \pi k_2^2 \frac{a_{11}}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5b)$$

où les termes  $a_{ij}$  sont les coefficients de souplesse du matériau et peuvent être calculés pour un état plan de contrainte et un état plan de déformation.

Il est à noter que l'équation 2.2 est également utilisée pour les matériaux composites. Dans tous les cas, il faut poser l'hypothèse que la fissure se propage dans le même plan que son orientation initiale (approche scalaire).

### 2.3 Modes mixtes

Il n'y a présentement aucun critère de rupture dans l'approche scalaire utilisant les facteurs  $k_i$  ou  $G_i$  qui caractérisent adéquatement les mécanismes de rupture en mode mixte. Les auteurs qui ont travaillé sur le mode mixte [2,12,13,14,15,16,17,18] ont utilisés le critère qui correspondait le mieux à leur résultats expérimentaux. A.C. Carg [19] a rassemblé différents critères qui sont présentés ici:

$$a) \quad G_T = G_I + G_{II} = G_c \quad \text{Condition: } G_{Ic} = G_{IIc}$$

$$b) \left( \frac{G_I}{G_{Ic}} \right)^m + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right)^n = 1$$

où m et n sont des constantes qui sont déterminées expérimentalement

$$c) (1-g) \left( \frac{G_I}{G_{Ic}} \right)^{\frac{1}{2}} + g \left( \frac{G_I}{G_{Ic}} \right)^m + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right)^n = 1 \quad \text{où } g = \left( \frac{G_I}{G_{Ic}} \right)$$

$$d) G_c = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{1 + (K_{II}/K_I)^2}$$

où  $\alpha_1$  est le taux de restitution d'énergie de déformation due au décollement fibre/matrice et  $\alpha_2$  est relié à l'énergie de surface de la résine  $\gamma_m$  par  $\alpha_2 = 2\gamma_m(1-\nu_f)$

$$e) G_c \propto \sqrt{1 + (K_{III}/K_I)^2}$$

f) il n'existe aucun critère de rupture reliant  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  [20].

### 3 DEVELOPPEMENT DES TERMES ENERGETIQUES

---

Les paramètres qui gouvernent la rupture des matériaux composites peuvent être caractérisés par l'intermédiaire des équations de la théorie des poutres. Bien que cette méthode sous-estime l'énergie de rupture  $G_c$  de 20 à 40 % [23], elle demeure populaire pour sa simplicité et ses valeurs conservatrices du taux de restitution d'énergie de déformation.

Suivant les étapes déjà franchies par Vu-Khanh [21] pour une poutre encastree fissurée en son centre, il est possible d'étendre l'analyse à un composite général à fibres continues fissuré à un niveau quelconque. L'énergie disponible avant restitution peut être évalué par:

$$G = - \frac{dW_T}{dA} = \frac{d(W_f + W_s)}{dA} \quad (3.1)$$

où

$W_f$  est l'énergie de déformation élastique en flexion emmagasinée dans l'échantillon

$W_s$  est l'énergie de déformation en cisaillement transverse emmagasinée dans l'échantillon

$dA$  est l'avance unitaire potentielle du plan de fissuration ( $dA = bda$ )

*Se référant au système de coordonnées de la figure 3.2, le terme  $W_f$  considère uniquement les déformations normales selon l'axe longitudinale 1 puisque les composantes selon les axes 2 et 3 sont négligeables. De plus, les mêmes raisons nous amènent considérer seulement les déformations en cisaillement transverse dans le plan 1-3.*

Ainsi, le taux de restitution d'énergie de déformation de l'échantillon de la figure 3.1 est la dérivée de la somme des énergies en flexion et en cisaillement transverse des parties 1,2 et 3 par rapport à A. Aux sections 3.1, 3.2 et 3.3 ces énergies seront traitées individuellement pour une poutre non fissurée, chargée par une force quelconque. Les résultats seront appliqués dans les sections suivantes pour les poutres 1,2 et 3 de l'échantillon de la figure 3.1 pour obtenir l'énergie totale  $W_t = W_f + W_s$ .

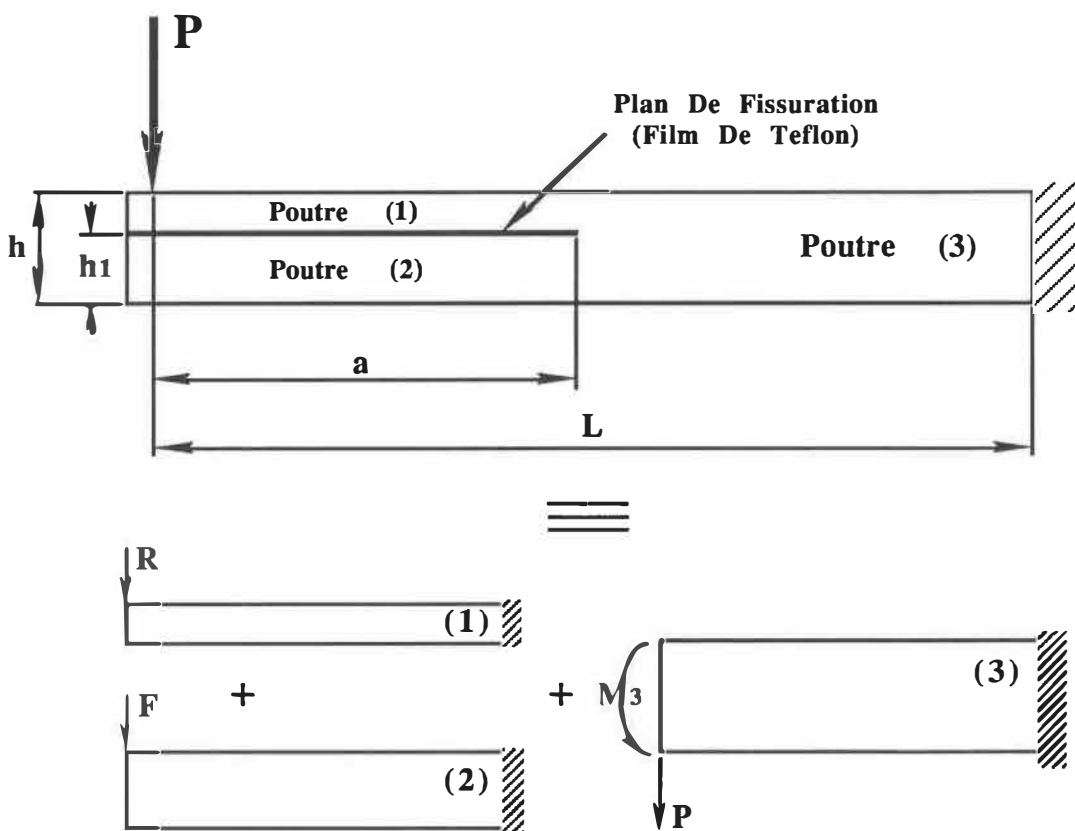


Figure 3.1: Séparation de l'échantillon étudié en trois parties distinctes

### 3.1 Energie de déformation en flexion $W_f$ d'une poutre non-fissurée

L'énergie potentielle élastique est couramment exprimée sous la forme:

$$W = \int_V \sigma_i \varepsilon_i dV \quad (3.2)$$

où

$\sigma_i$  et  $\varepsilon_i$  sont les composantes des contraintes et déformations locales d'un élément de volume  $dV$ . Ces composantes sont reliées à la loi de Hooke généralisée dans un plan 1-2 par:

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (3.3)$$

où  $Q_{ij}$  est une composante de rigidité déjà définie à la page 1-3.

Posant que les énergies de déformations transverses et en cisaillement dans les plan 1-2 et 2-3 sont négligeables l'équation (3.3) se réduit à :

$$\sigma_I = Q_{II} \varepsilon_I \quad (3.4)$$

Pour un composite général sollicité en flexion, la déformation locale  $\varepsilon_1$  est la somme d'une déformation due à la flexion ( $\varepsilon^f = z k_1$ ) et d'une déformation dans le plan ( $\varepsilon^o_1 = \beta_{11} M$ ) où  $\beta_{11}$  est un module de couplage qui a déjà été défini à la page 1-7.

La déformation locale devient donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \beta_{II} M + z k_I \\ \varepsilon_I &= [\beta_{II} + z \delta_{II}] M_I \end{aligned}$$

Suivant les spécifications de la poutre chargée en flexion de la figure 3.2, on obtient de l'équation 3.2:

$$W_f = \frac{L}{2} \int_v Q_{11} [\beta_{11} + z\delta_{11}]^2 M_1^2 dv$$

$$W_f = \frac{L}{2} \int_v Q_{11} [\beta_{11}^2 + 2\beta_{11}z\delta_{11} + z^2\delta_{11}^2] M_1^2 dv$$

où  $M$  est un moment par unité de largeur et vaut  $Px/b$

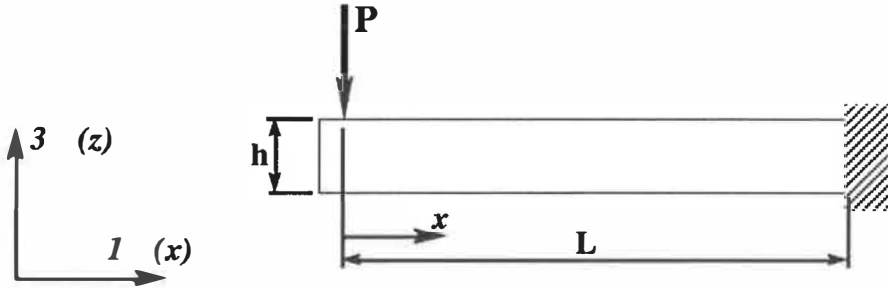


Figure 3.2: Poutre composite non-fissurée chargée en flexion

Séparant cette dernière équation en intégrale double, on obtient:

$$W = \frac{L}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} [\beta_{11}^2 + 2\beta_{11}z\delta_{11} + z^2\delta_{11}^2] \frac{P^2 x^2}{b} dz dx$$

$$W = \frac{L}{2} \int_0^L \left[ \beta_{11}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz + 2\beta_{11}\delta_{11} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz + \delta_{11}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 dz \right] \frac{P^2 x^2}{b} dx \quad (3.5)$$

or, tel que défini aux pages 8 à 11, les coefficients de couplage  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  et  $D_{11}$  peuvent s'exprimer par:

$$[A_{11}, B_{11}, D_{11}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} [1, z, z^2] dz$$

Donc,

$$W = \frac{l}{2} \int_0^l \left[ \beta_{11}^2 A_{11} + 2\beta_{11}\delta_{11}B_{11} + \delta_{11}^2 D_{11} \right] \frac{P^2 x^2}{b} dx \quad (3.6)$$

Ainsi, l'énergie de déformation élastique en flexion d'une poutre composite non-fissurée de longueur  $l$ , de largeur  $b$ , et de configuration quelconque devient:

$$W_f = \frac{P^2 l^3}{6b} \left[ \beta_{11}^2 A_{11} + 2\beta_{11}\delta_{11}B_{11} + \delta_{11}^2 D_{11} \right] \quad (3.7)$$

Il faut noter que pour un composite général :

$$\delta_{11} \neq \frac{1}{D_{11}} \text{ et } \beta_{11} \neq \frac{1}{B_{11}}$$

et que pour un composite symétrique:

$$\delta_{11} = \frac{1}{D_{11}} \text{ et } \beta_{11} = 0$$

### 3.2 Energie de déformation en cisaillement transverse $W_s$ (plan 1-3) d'une poutre non-fissurée

Puisque les matériaux composites en général ont une faible rigidité en cisaillement transverse et que les déformations par cisaillement sont non-négligeables, il est nécessaire de calculer l'énergie emmagasiné associé à ces déformations.

De la théorie des poutre, on tire l'énergie de déformation en cisaillement dans le plan 1-3 [96]:

$$W_s = f_s \int \frac{V_{(x)}^2 dx}{2G_{13}A} \quad (3.8)$$

où V est la force de cisaillement,  $G_{13}$  est le module de cisaillement transverse, A est la section de la poutre considérée et  $f_s$  est un facteur de forme qui vaut 6/5 dans le cas de sections rectangulaires. L'indice "s" est couramment employé dans la littérature et signifie "shear".

En développant l'équation 3.8 pour la poutre de la figure 3.2 et en posant que la force de cisaillement est uniforme et vaut P, on retrouve:

$$W_s = \frac{f_s P^2 L}{2bhG_{13}} \quad (3.9)$$

### 3.3 Energie de déformation totale d'un échantillon fissuré:

L'énergie de déformation totale de l'échantillon fissuré de la figure 3.1 est la somme des energies  $W_f$  et  $W_s$  des 3 poutres qui le compose.

Ainsi,

$$W_{totale} = W_{f1} + W_{f2} + W_{f3} + W_{s1} + W_{s2} + W_{s3}$$

De plus, les forces  $R$  et  $F$  appliquées aux poutres 1 et 2 tel que montré à la figure 3.1 peuvent être exprimées en fonction de la charge  $P$ . Ces calculs sont disponibles à l'annexe A de la page 68. On obtient :

$$F = P\varphi \quad \text{et} \quad R = P(1-\varphi)$$

où  $\varphi$  est un facteur de distribution de charge et dépend de la localisation du plan de fissuration et des propriétés mécaniques du matériau.

*Afin de simplifier la notation, les indices tensoriels "11" seront omis. Le nouvel indice "i" indiquera le numéro de la poutre correspondante. Ainsi pour  $\beta_2$  il faudra en réalité lire  $\beta_{11}$  de la poutre 2 etc.*

Reprenant les équations (3.6) et (3.7) de l'énergie de déformation en flexion et les appliquant aux poutres 1,2 et 3 de la figure 3.1 on obtient:

**Poutre 1:**

$$W_{f1} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \beta_1^2 A_1 + 2\beta_1 \delta_1 B_1 + \delta_1^2 D_1 \right] \frac{P^2 (1-\varphi)^2 x^2}{b} dx$$

$$W_{f1} = \frac{P^2 (1-\varphi)^2 a^3}{6b} \left[ \beta_1^2 A_1 + 2\beta_1 \delta_1 B_1 + \delta_1^2 D_1 \right] \quad (3.10)$$

**Poutre 2:**

$$W_{f2} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[ \beta_2^2 A_2 + 2\beta_2 \delta_2 B_2 + \delta_2^2 D_2 \right] \frac{P^2 \varphi^2 x^2}{b} dx$$

$$W_{f2} = \frac{P^2 \varphi^2 a^3}{6b} \left[ \beta_2^2 A_2 + 2\beta_2 \delta_2 B_2 + \delta_2^2 D_2 \right] \quad (3.11)$$

**Poutre 3:**

$$W_{f3} = \frac{1}{2} \int_0^{L-a} \left[ \beta_3^2 A_3 + 2\beta_3 \delta_3 B_3 + \delta_3^2 D_3 \right] \frac{P^2 (x+a)^2}{b} dx$$

$$W_{f3} = \frac{P^2 (L^3 - a^3)}{6b} \left[ \beta_3^2 A_3 + 2\beta_3 \delta_3 B_3 + \delta_3^2 D_3 \right] \quad (3.12)$$

Faisant la somme de ces énergies afin d'obtenir l'énergie de déformation en flexion globale, on retrouve:

$$W_f = \frac{P^2 a^3}{6b} \sum_{i=1}^3 \left[ \beta_i^2 A_i + 2\beta_i \delta_i B_i + \delta_i^2 D_i \right] \Phi_i \quad (3.13)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (l - \varphi)^2 \\ \Phi_2 &= \varphi^2 \\ \Phi_3 &= \left( \frac{L^3}{a^3} - l \right) \end{aligned}$$

De plus, les énergies de déformation en cisaillement des poutres 1,2 et 3 calculées à partir de l'équation 3.9 deviennent:

$$W_{s1} = \frac{P^2 f_s (1-\varphi)^2 a}{2b(h-h_1)G_{13_1}} \quad W_{s2} = \frac{P^2 f_s \varphi^2 a}{2bh_1 G_{13_2}} \quad W_{s3} = \frac{P^2 f_s (L-a)}{2bhG_{13_3}}$$

Et faisant la somme de ces énergies

$$W_{s\text{totale}} = W_{s1} + W_{s2} + W_{s3}$$

On obtient l'énergie globale due aux déformations par cisaillement:

$$W_{s\text{Totale}} = \frac{P^2 f_s}{2bh} \left[ a \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)G_{13_1}} + \frac{\varphi^2}{yG_{13_2}} - \frac{1}{G_{13_3}} \right) + \frac{L}{G_{13_3}} \right] \quad (3.14)$$

où  $y = h_1/h$

Finalement, la somme des énergies en flexion et en cisaillement donne:

$$W_t = \frac{P^2 a^3}{6b} \sum_{i=1}^3 \left[ \beta_i^2 A_i + 2\beta_i \delta_i B_i + \delta_i^2 D_i \right] \Phi_i + \frac{P^2 f_s}{2bh} \left[ a \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)G_{13_1}} + \frac{\varphi^2}{yG_{13_2}} - \frac{1}{G_{13_3}} \right) + \frac{L}{G_{13_3}} \right] \quad (3.15)$$

### 3.4 Calcul de la compliance d'une poutre fissurée à un niveau quelconque:

De l'équation (3.15) il est possible d'obtenir la compliance d'une poutre fissurée à un niveau quelconque par l'intermédiaire du théorème de Castigliano:

Soit:

$$C = \frac{2W}{P^2}$$

$$C = \frac{a^3}{3b} \sum_{i=1}^3 \left[ \beta_i^2 A_i + 2\beta_i \delta_i B_i + \delta_i^2 D_i \right] \Phi_i + \frac{f_s}{bh} \left[ a \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)G_{13_1}} + \frac{\varphi^2}{yG_{13_2}} - \frac{1}{G_{13_3}} \right) + \frac{L}{G_{13_3}} \right] \quad (3.16)$$

### 3.5 Taux de restitution d'énergie de déformation

Utilisant l'équation (3.15) et la dérivant par rapport à la surface fissurée A on obtient le taux de restitution d'énergie de déformation G par l'équation 3.1:

$$G = \frac{dW}{dA}$$

Donc:

$$G = \frac{P^2}{2b^2} \left[ a^2 \sum_{i=1}^3 \left[ \beta_i^2 A_i + 2\beta_i \delta_i B_i + \delta_i^2 D_i \right] \psi_i + \frac{f_s}{h} \left[ \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)G_{13_1}} + \frac{\varphi^2}{yG_{13_2}} - \frac{1}{G_{13_3}} \right] \right] \quad (3.17)$$

où

$$\psi_1 = \Phi_1 \quad \psi_2 = \Phi_2 \quad \psi_3 = -1$$

Il est à noter que l'équation (3.17) peut également être obtenue en faisant le calcul à partir de l'équation suivante:

$$G = \frac{P^2 dC}{2 dA}$$

### 3.6 Simplification du modèle pour un composite Quasi-Homogène

L'utilisation des quasi-homogènes entraînent des simplifications importantes aux équations (3.16) et (3.17). Les coefficients de couplage  $\beta_i$  deviennent nuls et le terme  $\delta_i^2 D_i$  devient égal à  $\delta_i$ . A l'aide de la relation développée à la section 1.2 pour le module de flexion et posant que les modules de flexion  $E^f$  et de cisaillement transverse  $G_{13}$ , sont les mêmes dans les trois parties de l'échantillon les équations (3.16) et (3.17) deviennent respectivement:

$$C = \frac{1}{b} \left[ \frac{4}{E^f h^3} \left( a^3 \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)^3} + \frac{\varphi^2}{y^3} - 1 \right) + L^3 \right) + \frac{f_s}{h G_{13}} \left( a \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)} + \frac{\varphi^2}{y} - 1 \right) + L \right) \right] \quad (3.18)$$

et

$$G = \frac{P^2}{2b^2} \left[ \frac{12 a^2}{E^f h^3} \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)^3} + \frac{\varphi^2}{y^3} - 1 \right) + \frac{f_s}{h G_{13}} \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)} + \frac{\varphi^2}{y} - 1 \right) \right] \quad (3.19)$$

Si le cisaillement du terme  $\varphi$  est omis (voir annexe A page 70) alors:

$$\varphi = \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3} \quad \text{où } y = h_1/h$$

et l'équation 3.19 devient:

$$G = \frac{P^2}{2b^2} \left[ \frac{12 a^2}{E^f h^3} \left( \frac{1}{y^3 + (1-y)^3} - 1 \right) + \frac{f_s}{h G_{13}} \left( \frac{y^5 + (1-y)^5}{(y^3 + (1-y)^3)^2} - 1 \right) \right] \quad (3.20)$$

### 3.6.1 Utilités

Les équations 3.18 et 3.19 servent principalement aux calculs de la compliance et du taux de restitution d'énergie de déformation lorsque les modules  $E^f$  et  $G_{13}$  sont connus. ■ est possible toutefois d'utiliser l'équation 3.18 pour déterminer les modules de flexion et de cisaillement transverse d'un échantillon fissuré. Il faut noter que les modules obtenus sont ceux des fibres/matrice et non les modules de la structure globale fissurée.

Reprenant l'équation 3.18 et simplifiant par les notations suivantes:

$$\omega' = \left[ \frac{1}{y^3 + (1-y)^3} - 1 \right] \quad \text{et} \quad \omega'' = \left[ \frac{y^5 + (1-y)^5}{(y^3 + (1-y)^3)^2} - 1 \right]$$

On obtient:

$$C = \frac{l}{b} \left[ \frac{4}{E^f h^3} (a^3 \omega' + L^3) + \frac{f_s}{h G_{13}} (a \omega'' + L) \right] \quad (3.21)$$

Ou sous une autre forme:

$$\frac{C b h}{(a \omega'' + L)} = \frac{4}{E^f h^2} \left( \frac{a^3 \omega' + L^3}{a \omega'' + L} \right) + \frac{f_s}{G_{13}} \quad (3.22)$$

Puisque la compliance peut être déterminée expérimentalement, il est possible de trouver le module de flexion et de cisaillement global à partir du graphique suivant:

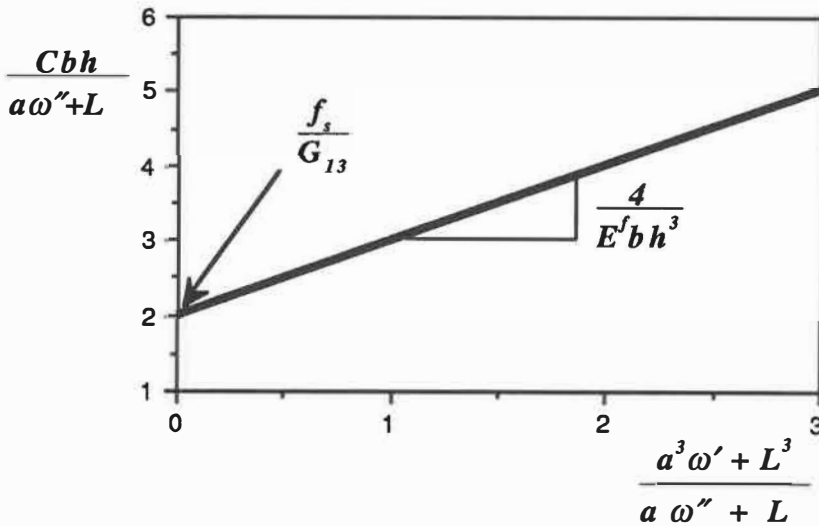


Figure 3.3: Méthode pour déterminer  $E^f$  et  $G_{13}$

Cette relation est particulièrement pratique lorsqu'il s'agit de déterminer les propriétés mécaniques du matériau utilisé dans une structure fissurée. Le plan de fissuration peut être localisé à un endroit quelconque. Il est à remarquer que si  $a=0$  on retrouve le cas d'un échantillon non-fissuré tel que décrit par Vu-Khanh [21]

### 3.6.2 Réduction des calculs

De l'équation 3.19, il est possible de déterminer la longueur minimale de fissure pour que l'effet du cisaillement transverse n'induisse pas une erreur de plus de 5%. Cette manipulation est particulièrement utile pour diminuer les temps de calculs.

Sachant que:

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{P_c^2}{b} \frac{dC}{da} \text{ et que } \frac{dC}{da} = \frac{12a^2 \omega'}{E_l^f b h^3} + \frac{f_s \omega''}{G_{l3} b h}$$

On obtient:

$$G_c = \frac{P_c^2}{2b^2} \left[ \frac{12a^2 \omega'}{E_l^f b h^3} + \frac{f_s \omega''}{G_{l3} b h} \right]$$

Où sous une autre forme (présentée par certains auteurs):

$$G_c = \frac{6P_c^2 a^2 \omega'}{E_l^f b^2 h^3} \left[ 1 + 0.1 \frac{\omega''}{\omega'} \left( \frac{E_l^f}{G_{l3}} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

Pour pouvoir simplifier l'équation 3.20 posons la condition suivante:

$$0.1 \frac{\omega'' E_t^f h^2}{\omega' G_{13} a^2} \leq 0.05$$

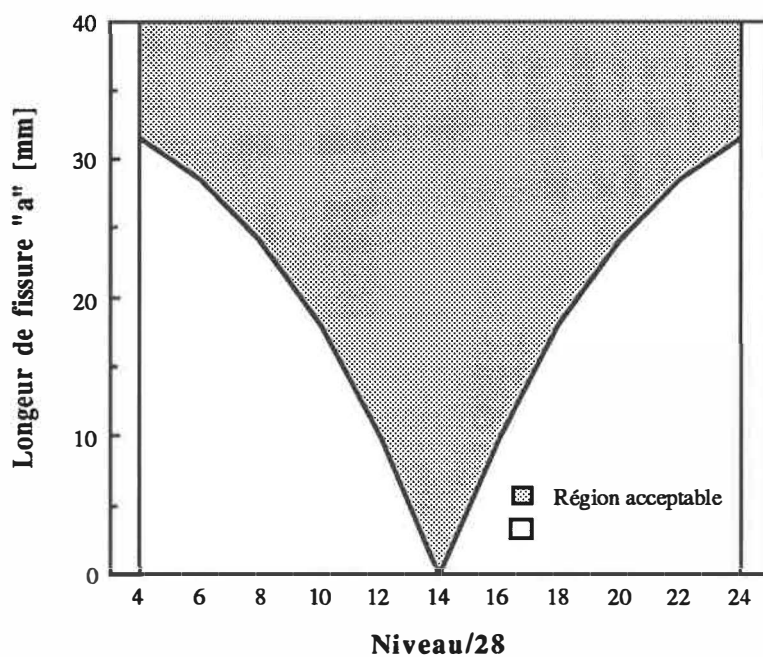
Ce qui entraîne:

$$a \geq \sqrt{0.1 \frac{\omega'' E_t^f h^2}{\omega' G_{13} 0.05}} \quad (3.24)$$

La condition représentée par l'équation 3.24 est mise sous forme numérique au tableau 3.1. et sous forme graphique à la figure 3.4. Pour un unidirectionnel 0 degré de verre/époxy CE9000/S-2 avec  $h=5.6\text{mm}$   $E=48200\text{N/mm}^2$  et  $G_{13}=815\text{N/mm}^2$  on obtient:

**Tableau 3.1**

| <i>Niveau</i>   | $\omega''/\omega'$ | $a \geq [\text{mm}]$ |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <b>4/28</b>     | 0.2700             | 31,7                 |
| <b>6/28</b>     | 0.2200             | 28,6                 |
| <b>8/28</b>     | 0.1579             | 24,2                 |
| <b>10/28</b>    | 0.0874             | 18.0                 |
| <b>12/28</b>    | 0.0256             | 9..75                |
| <b>14/28</b>    | 0.0000             | 0.00                 |
| <i>Symétrie</i> |                    |                      |

*Tableau 3.1: Zone acceptable pour la réduction des calculs**Figure 3.4: Illustration de la zone acceptable pour la réduction des calculs*

Respectant les longueur de fissure représentées par la zone hachurée de la figure 3.4, l'équation 3.19 se réduit à:

$$G_c = \frac{6P_c^2 a^2 \omega'}{E_f b^2 h^3} \quad (3.25)$$

## 4 PROCEDURES EXPERIMENTALES

---

Les plaques composites servant à la fabrication des échantillons ont été produites à partir des recommandations de la compagnie Ferro Corporation qui commercialise le pré-imprégné de Verre/Epoxy S-2/CE9000. Chaque couche de 30 cm x 30 cm x 200µm du laminé a été soigneusement déposée sur la couche précédente avec un angle de 90 degrés pour former un stratifié à plis croisés (Cross Ply Laminate) 0°-90° alternés de 28 plis. Un premier débullage a été fait à la main après le dépôt de chaque pli et un second à toutes les sept couches dans un sac sous vide pendant vingt minutes. Ces précautions ont été nécessaires afin de minimiser la présence de bulles d'air qui sont des sites propices pour l'initiation des fissures. Un film de teflon de 50µm d'épaisseur a été introduit entre deux couches prédéterminées afin de simuler un plan de fissuration. Ainsi, un premier pli a été inséré entre la sixième (0°) et la septième (90°) couche pour former un plan de fissuration au niveau 6/28<sup>ième</sup> pour une première série d'échantillons et un autre film a été inséré entre la huitième et la neuvième couche pour former le niveau 8/28<sup>ième</sup> d'une autre série d'échantillons, etc.

Chaque plaque a été soigneusement emballée sous vide et déposée dans un autoclave à convection naturelle pour cuisson. La pression appliquée a été de 60 psi et le gradient de température a été de 3°C par minute pendant 52 minutes pour ensuite atteindre un plateau à 177°C durant 60 minutes à pression constante tel qu'illustré à la figure 4.1. Le refroidissement s'est fait graduellement à pression atmosphérique pendant 60 min. suivi d'une cuisson à 183°C durant 4 heures pour permettre une polymérisation complète de l'époxy.

Les plaques, d'une épaisseur moyenne de 5.6mm, ont été découpées en bande de 10mm de largeur et taillées en longueur de 150mm. Chaque échantillon a été chargé en porte-à-faux i.e. qu'une partie a été encastrée solidement entre deux machoires et l'autre extrémité a été sollicitée par une charge  $P$  à vitesse constante tel qu'illustré à la figure 3.1 de la page 20. La distance entre le point d'application de la charge et de l'encastrement a été gardé constant à 90mm et le déplacement de la tête de charge a été constant à 10mm/min. Tous les tests ont été effectués à température et humidité contrôlés, soient 23°C et 50% respectivement pour des rapports de  $h_1/h$  variant entre 6/28 et 22/28.

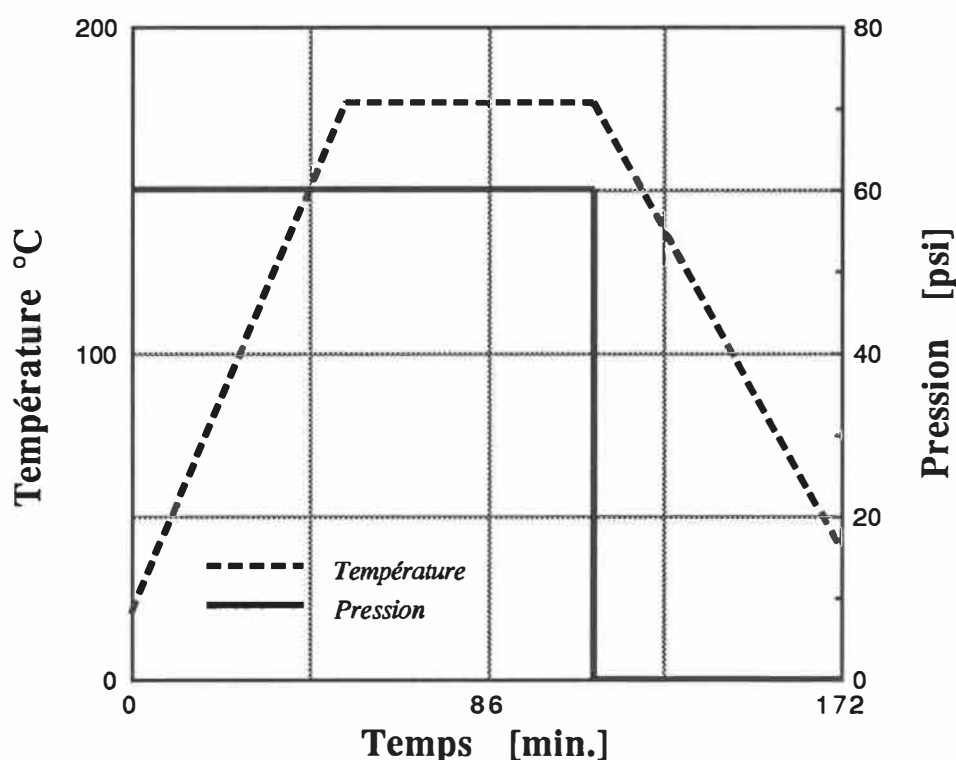


Figure 4.1: Cycle de moulage du composite Verre/Epoxy S-2/CE -9000

## 5 RESULTATS ET DISCUSSION

---

La présente discussion portera sur la dimension des échantillons utilisés, l'influence de la préfissuration et de la zone riche en résine au front de fissure sur  $G$ , l'instabilité et ses conditions, l'effet de la friction sur  $G_c$ , l'effet du cisaillement sur les mécanismes de rupture et enfin les résultats par éléments finis et le calcul des facteurs  $k_i$  et  $G_i$ .

### 5.1 Dimension des échantillons utilisés

Les échantillons ont été taillés en largeur de 10mm bien que la plupart des auteurs [23-28] utilisent des largeurs minimales de 25mm pour obtenir un état plan de déformation. On peut supposer que la largeur des échantillons était relativement peu importante dans notre cas puisqu'il s'agissait d'essais comparatifs pour différents niveaux du plan de fissuration. Le but premier n'était pas de trouver une valeur de  $G_c$  particulière mais bien de vérifier s'il y avait des différences appréciables de cette même valeur à travers l'épaisseur.

L'épaisseur et la longueur ont été estimées à partir des études faites par Gillespie et al. [26,27] sur le ENF (End Notched Flexure specimen). L'échantillon doit avoir une épaisseur suffisamment élevée pour avoir un comportement élastique linéaire et ne pas rompre en flexion d'une part et relativement mince pour minimiser la déformation par cisaillement d'autre part. Il est raisonnable de supposer que la géométrie du ENF puisse s'appliquer à notre type d'échantillon puisque la seule différence réside dans la méthode de chargement. Le ENF est testé en flexion trois points tandis que notre type d'échantillon est chargé comme poutre encastrée (figure 3.1).

## 5.2 Influence de la préfissuration sur $G$

Tel qu'expliqué dans la partie expérimentale de la page 36, un film de teflon de  $50\mu\text{m}$  d'épaisseur a été inséré entre deux plis de l'échantillon avant la cuisson afin de simuler la présence d'une fissure. Le vide créé par la rencontre des deux plis longeant le film de teflon a été comblé par de la résine provenant de plis superposés. Cette zone riche en résine, illustrée à la figure 5.1, a pour effet d'augmenter le taux de restitution d'énergie de déformation puisqu'elle favorise la présence d'une zone plastique plus importante au front de fissure. Certains auteurs ne tiennent pas compte des effets de la région résineuse [17,18,21] tandis que de nombreux autres [13,31,32,33,34,35] préfissenturent leurs échantillons afin d'obtenir des valeurs de  $G_c$  plus réalistes.

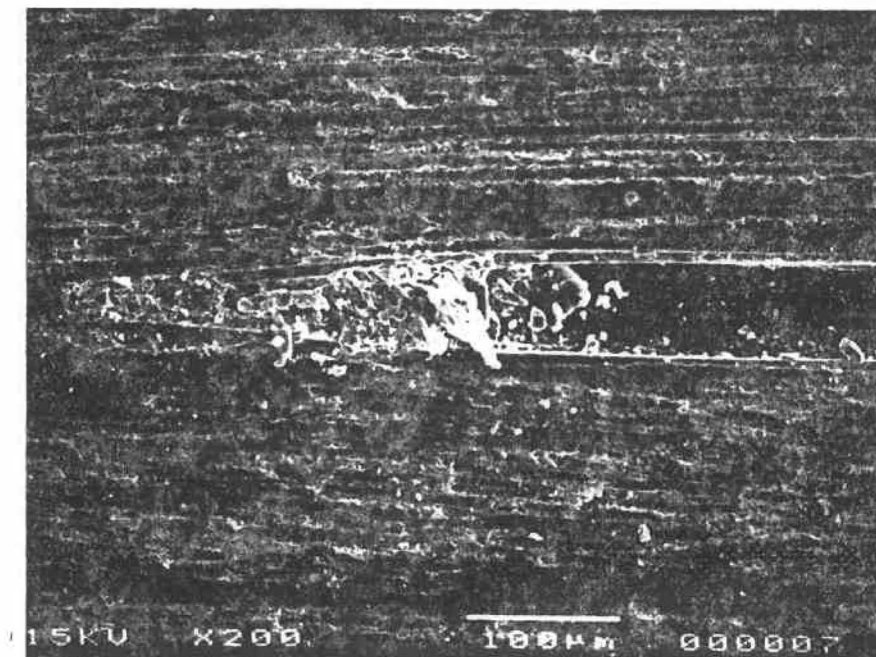


*Figure 5.1: Illustration de la zone riche en résine créée par la rencontre de 2 plis au front de fissure*

Il y a principalement deux méthodes de préfissuration sous charge statique. La première consiste en l'ouverture de l'échantillon en mode I jusqu'à ce qu'il y ait une légère propagation et la deuxième est en mode II mais est beaucoup plus délicate à réaliser car le chargement critique d'un matériau fragile mène souvent à une propagation brutale et donc complète de la fissure. Dans ces circonstances, il est préférable de charger l'échantillon cycliquement en mode II pour permettre à la fissure d'avancer de façon stable. Dans tous les cas, la non-préfissuration donne la plus grande valeur de  $G_c$ , suivi de la préfissuration en mode II et enfin celle en mode I [23].

Les échantillons qui ont été utilisés pour le présent ouvrage n'ont pas été préfissurés puisque les essais étaient uniquement comparatifs. Le principal but des expériences était de vérifier si  $G_c$  variait selon le niveau du plan de fissuration.

### 5.3 Stabilité de la propagation

La stabilité de la propagation de la fissure peut être déterminée à partir de la première dérivée du taux de restitution d'énergie de déformation par rapport à la longueur de la fissure [24,27]. Lorsque cette quantité est positive, nulle ou négative, l'avance de la fissure sera instable, métastable ou stable respectivement. Pour notre type d'échantillon, l'expression générale de  $G$  est donnée par l'équation 3.19 de la page 29:

$$G = \frac{P^2}{2b^2} \left[ \frac{12 a^2}{E^f h^3} \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)^3} + \frac{\varphi^2}{y^3} - 1 \right) + \frac{f_s}{h G_{13}} \left( \frac{(1-\varphi)^2}{(1-y)} + \frac{\varphi^2}{y} - 1 \right) \right] \quad (5.1)$$

Pour des *Conditions Fixes de Chargement*, la valeur de  $dG_{II}/da$  est obtenue directement de l'équation 3.19:

$$\frac{dG_{II}}{da} = \frac{12P^2 a}{E^f b^2 h^3} \left( \frac{(1-\phi)^2}{(1-y)^3} + \frac{\phi^2}{y^3} - 1 \right) \quad (5.2)$$

Cette quantité est toujours positive et l'avance de la fissure est instable.

Par contre, il est plus habituel de travailler avec des *Condition Fixes de Déplacement* où  $P=\delta/C$  ( $\delta$  est fixé)

On obtient l'expression de  $G_{II}$ ,

$$G_{II} = \frac{P^2}{2b} \frac{dC}{da} = \frac{\delta^2}{2bC^2} \frac{dC}{da} \quad (5.3)$$

La première dérivée,  $dG_{II}/da$ , de l'équation 5.3 mène à:

$$\frac{dG_{II}}{da} = \frac{\delta^2}{2b} \left( \frac{1}{C^2} \frac{d^2 C}{da^2} - \frac{2}{C^3} \left( \frac{dC}{da} \right)^2 \right) = \frac{\delta^2}{2bC^2} \left( \frac{d^2 C}{da^2} - \frac{2}{C} \left( \frac{dC}{da} \right)^2 \right) \quad (5.4)$$

Substituant l'expression de la compliance (équ. 3.21 de la page 31) en négligeant l'influence du cisaillement transverse comme première approximation, le critère de stabilité donne:

$$\frac{dG_{II}}{da} = \frac{12\delta^2 a \omega'}{Eb^2 h^3 C^2} \left( 1 - \frac{3a^3 \omega'}{a^3 \omega' + L^3} \right) \quad (5.5)$$

La condition pour une rupture instable devient:

$$a < \sqrt[3]{\frac{L}{2\omega'}} L \quad (5.6)$$

et est représentée au tableau 5.1 colonne 3, pour différents niveaux du plan de fissuration

**Tableau 5.1**

| <i>Niveau</i>            | $\omega'$ | $a <$   | $a >$  |
|--------------------------|-----------|---------|--------|
| 6/28                     | 1.0206    | 0.79 L  | 0.32 L |
| 8/28                     | 1.5789    | 0.68 L  | 0.27 L |
| 10/28                    | 2.2131    | 0.61 L  | 0.20 L |
| 12/28                    | 2.7692    | 0.565 L | 0.11L  |
| 14/28                    | 3         | 0.55L   | 0      |
| <i>Ligne de symétrie</i> |           |         |        |

*Tableau 5.1: Longueurs de fissures à respecter lors de l'expérimentation*

Combinant les résultats de l'équation 5.6 avec ceux du tableau 3.1 de la page 34 (colonne 4) servant à la réduction des calculs on obtient les marges de longueur de fissures à respecter lors de l'expérimentation pour avoir des ruptures fragiles.

## 5.4 Calculs de la compliance et de G

Les échantillons verre/époxy CE9000-S2 quasi-homogènes de configuration [0-90]<sub>14</sub> ont été testés de la façon décrite en Annexe C, la page 77. La première étape a été de comparer la compliance expérimentale par rapport à la compliance calculée à partir de l'équation 3.21 de la page 31. En pratique, les valeurs de compliance sont sensibles aux légères différences de largeur et d'épaisseur entre échantillons. Il est donc essentiel d'uniformiser les résultats en normalisant chaque valeur par rapport à la compliance d'un échantillon non-fissuré  $C_0$  de mêmes dimensions. Cette valeur est obtenue à l'aide de l'équation 3.21 pour une longueur de fissure nulle  $a=0$ . Les compliances théoriques ont été calculées à l'annexe C et comparées aux valeurs de compliances expérimentales. Les graphiques des compliances normalisées en fonction des longueurs de fissures normalisées sont présentés à l'annexe C et deux d'entre eux ont été reproduits aux figures 5.2 et 5.3 pour les niveaux de plan de fissuration 22/28 et 14/28 respectivement. Comme il peut être constaté, les valeurs expérimentales de compliance sont en très bon accord avec celles obtenues à partir de l'équation 3.21 de la page 31 prouvant ainsi la validité du calcul développé.

Les données expérimentales des tableaux C.1 à C.7 de l'annexe C servent également au calcul du taux de restitution d'énergie de déformation  $G_c$ . L'équation 3.25 de la page 28 peut être mise sous la forme:

$$P_c^2 = G_c \frac{E_f^2 b^2 h^3}{6a^2 \omega'} \quad (5.7)$$

où on retrouve une équation linéaire de type  $y=mx$  dont  $G_c$  est la pente. Cette méthode permet de minimiser la dispersion des résultats. Pour chaque niveau de plan de fissuration,

8 à 10 échantillons avec longueurs de fissures variables ont été testés. L'expérience a été répétée pour 7 niveaux différents et les résultats ont été portés en graphique en annexe C. Deux de ces graphiques représentant l'équation 5.7 pour les niveaux 22/28 et 14/28 ont été reproduits aux figures 5.4 et 5.5. La linéarité des résultats observée révèle que l'équation 3.25 est elle aussi valide.

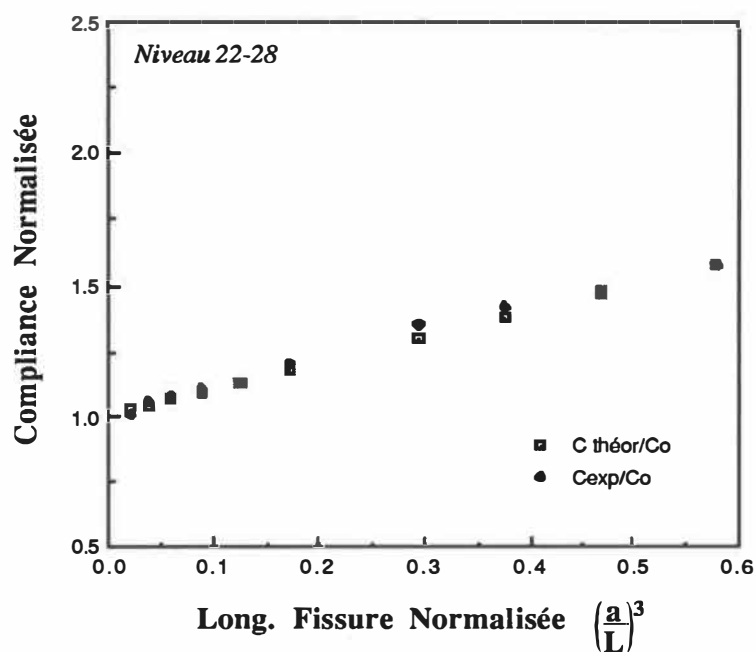


Figure 5.2: Valeurs théor. et exp. des compliances pour le niveau 22/28

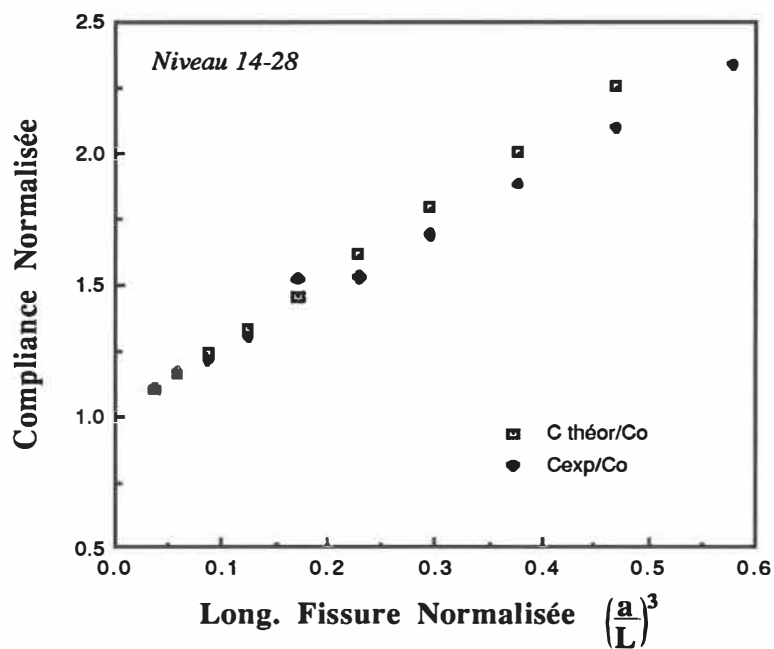


Figure 5.3: Valeurs théor. et exp. des compliances pour le niveau 14/28

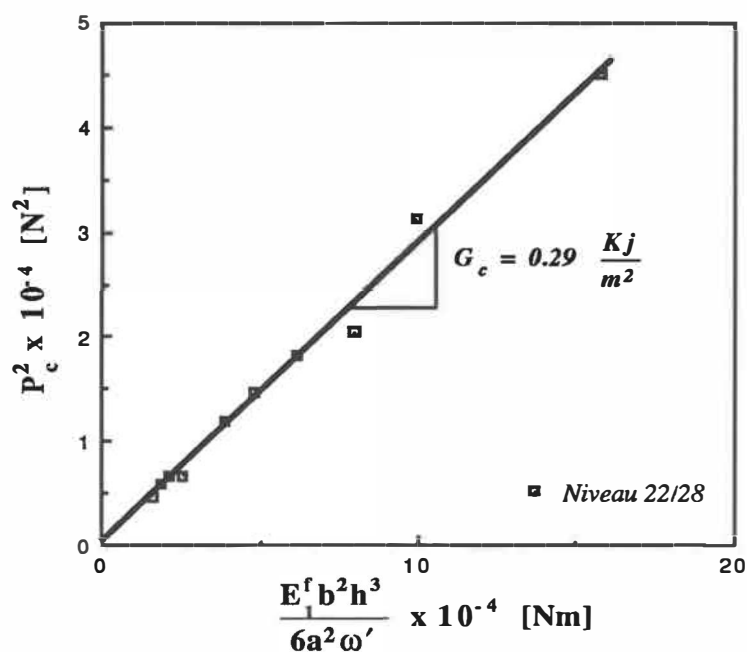


Figure 5.4: Détermination de  $G$  pour le niveau 22/28

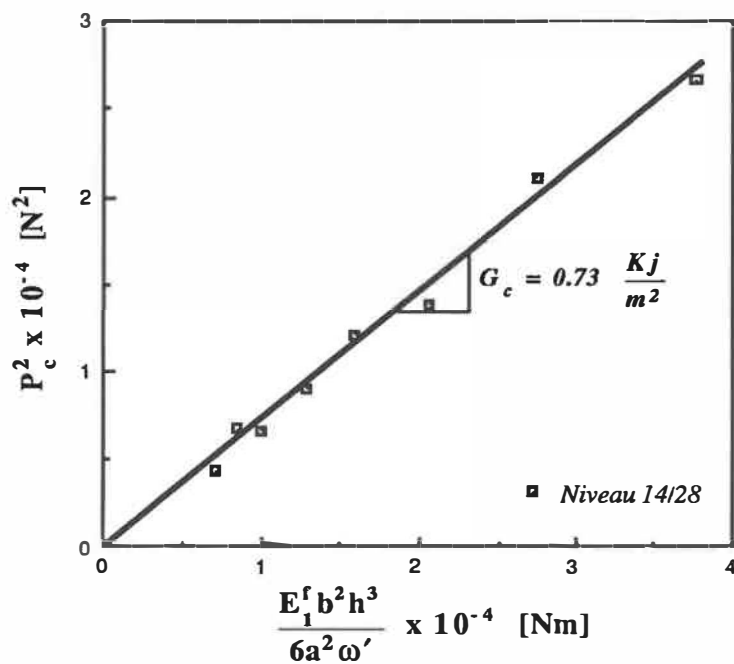


Figure 5.5: Détermination de  $G$  pour le niveau 14/28

Une deuxième méthode [37] permet de trouver  $G_c$  à partir des graphiques de compliance expérimentales normalisées. Reprenant la courbe expérimentale de la figure 5.2 de la page 45, on tire l'équation d'une droite de la forme:

$$\frac{C_{exp.}}{C_o} = 1 + m \left( \frac{a}{L} \right)^3$$

où le paramètre "m" est disponible directement à partir de la pente.

De cette approche,  $G_{IIc}$  peut être obtenu par différentiation de la compliance par rapport à "a", et en multipliant par  $\frac{P^2}{2b}$

Ainsi:

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{dC_{exp.}}{da}$$

$$G = \frac{3mP_c^2 a^2 C_o}{2bL^3} \Rightarrow P_c^2 = G \frac{2bL^3}{3ma^2 C_o}$$

La même procédure que celle utilisée pour l'équation 5.7 s'impose afin de minimiser la dispersion des résultats puisque la compliance  $C_o$  varie d'un échantillon à l'autre.

Les résultats de  $G_c$  tirées de la première méthode ont été portés en graphique à la figure 5.5a et montrent que l'énergie de rupture n'est pas constante à travers l'épaisseur.

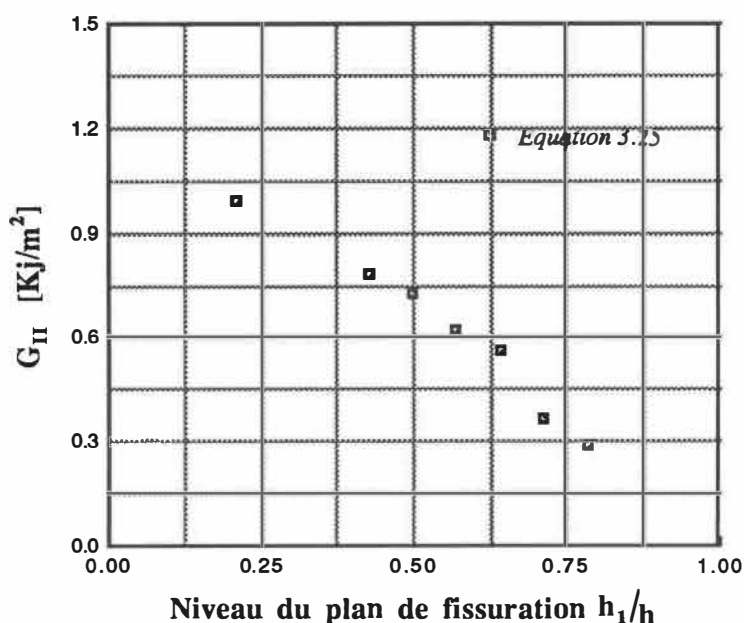


Figure 5.5a: Valeurs de  $G_{II}$  pour différentes localisations de fissure

Ces résultats sont relativement surprenants et il aurait été intuitivement naturel d'obtenir une valeur constante de  $G_c$  à travers l'épaisseur. En effet, le plan de fissuration est situé entre un pli à 0 degré et un pli à 90° pour tous les niveaux d'une part, et d'autre part,  $G_c$  est une propriété intrinsèque au matériau. La mesure de la propagation de fissure en fatigue [36] révèle le même effet de la localisation de la fissure sur la résistance à la propagation que sur  $G_c$ .

## 5.5 Facteurs qui influencent le taux de restitution d'énergie de déformation

Pour déterminer les facteurs possibles qui pourraient causer cette variation de  $G_{IIc}$ , trois paramètres ont été analysés; la contrainte normale longitudinale induite par le moment de flexion, la force de friction au point de chargement et la présence du mode I de rupture.

Enfin, pour une analyse plus rigoureuse, une étude par éléments finis a été effectuée afin d'examiner les champs de contraintes et de déplacements au front de fissure. Pour une meilleure compréhension, la figure 5.6 illustre l'échantillon en porte-à-faux qui a été utilisé et ses différentes parties .

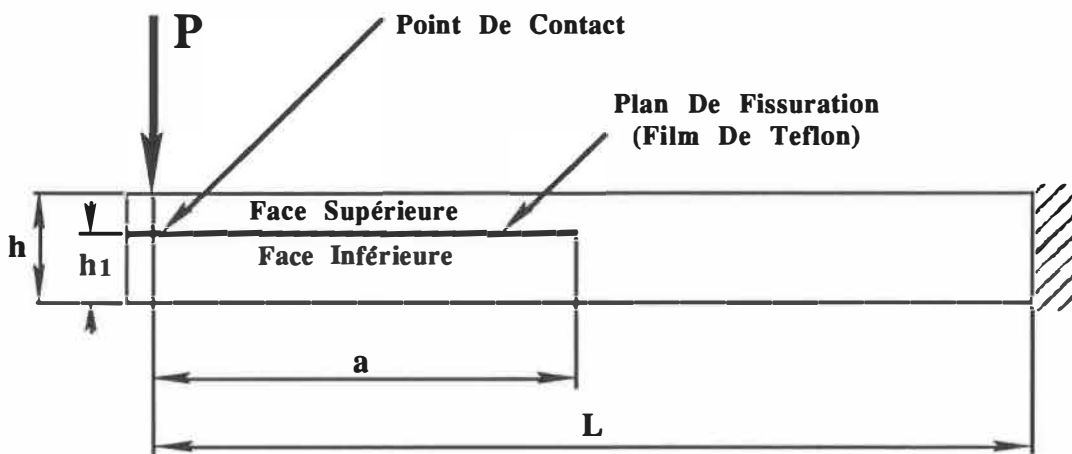


Figure 5.6: Echantillon fissuré à un niveau  $h_1/h$

La contrainte normale longitudinale maximum a été calculée à partir de la théorie des poutres en négligeant l'effet de concentrations de contraintes. Les résultats sont illustrés à la figure 5.7. Le résultat démontre que les valeurs maximales des contraintes augmentent avec le rapport  $h_1/h$ , atteignent un maximum, puis décroissent avec l'augmentation de  $h_1/h$ . Cette variation n'est pas consistante avec la variation de  $G_{IIc}$  par rapport  $h_1/h$ . Par conséquent, les contraintes normales longitudinales ne sont probablement pas responsables de la variation de  $G_{IIc}$ .

L'analyse de la force de contact au point de chargement entre les parties supérieure et inférieure du plan de fissuration décrite à l'annexe B page 72 révèle que la force de contact diminue avec la diminution du rapport  $h_1/h$  ce qui entre en contradiction avec la tendance de  $G_c$ . Egalement, il a été démontré à l'annexe B que l'énergie due à la force de

friction ne participe qu'à un maximum de 5% au mécanisme de rupture. Conséquemment, la friction au point de chargement ne peut être la cause de la variation de  $G_{IIc}$ .

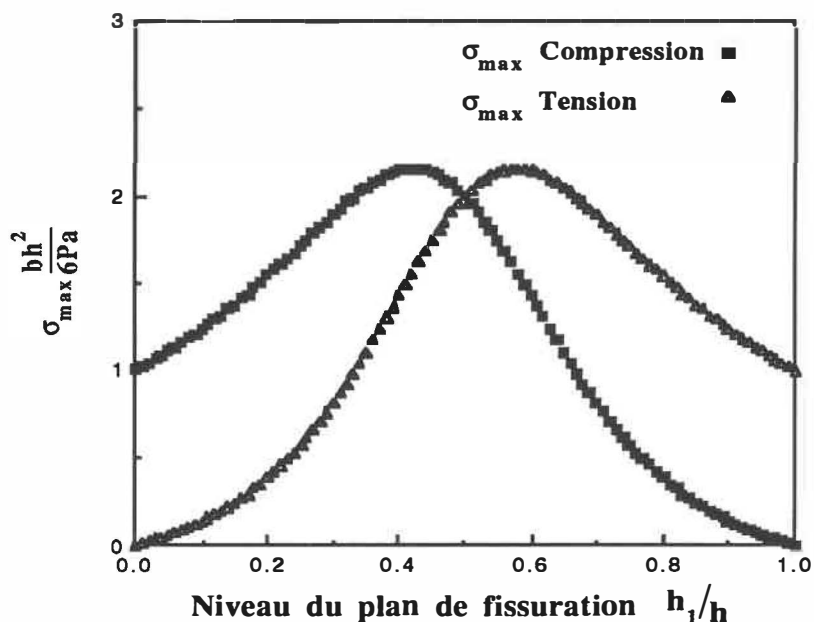


*Figure 5.7: Contraintes normales longitudinales au front de fissure pour différentes localisations du plan de fissuration (les singularités sont omises)*

Pour déterminer la présence du mode I dans l'échantillon, les courbures des parties supérieure et inférieure du plan de fissuration, au front de fissure, ont été calculées. Le calcul a été fait en considérant chaque partie de l'échantillon comme une poutre encastree qui peut se déformer librement sous l'action d'un chargement. Il faut noter que cette hypothèse ne représente pas les conditions réelles de l'échantillon. En effet, due à la force de contact, distribuée sur une certaine longueur au point de chargement, les sections transverses des parties supérieure et inférieure du plan de fissuration au point de contact ne peuvent pivotées librement. Cet obstacle affecte inévitablement les courbures et le calcul

impliqué devient extrêmement complexe. Cependant, cette considération a été faite afin de vérifier l'existence de contraintes d'ouverture à travers l'épaisseur du spécimen au front de fissure. La configuration globale  $[0-90]_{14}$ , qui a été choisie pour notre type d'échantillon, respecte les conditions de quasi-homogénéité  $[90]$ , i.e. un minimum de 16 plis d'épaisseur. On remarque, par contre, qu'une des deux faces du plan de fissuration ne rencontre jamais la condition de quasi-homogénéité puisqu'elle possède toujours moins de 16 plis. La partie  $[0/90]_n$  est donc considéré comme non-homogène et non symétrique (figure 5.8b). La non-symétrie implique évidemment la présence d'une courbure naturelle qui peut être calculée à partir des équations bien connues de la mécanique des matériaux composites (page 11).



*Figure 5.8a et 5.8b: Illustration que l'une ou l'autre des deux faces ne respecte jamais les conditions de quasi-homogénéité dépendamment du niveau du plan de fissuration*

La figure 5.9 illustre le calcul de la différence des courbures des poutre adjacentes au plan de fissuration au front de fissure, considérant uniquement la non-homogénéité et la non-symétrie d'une des deux faces et en supposant que les 2 parties peuvent se déformées librement sous l'action d'un chargement. Le résultat démontre clairement que, due à la différence de ces courbures, le mode I devrait exister dans l'échantillon.

Les valeurs de  $G_C$  qui ont été mesurées seraient donc dépendantes des valeurs  $G_I$  et  $G_{II}$ . De plus, la différence des courbures pourrait créée une friction additionnelle à

l'extérieur de la région du point de chargement, ce qui augmenterait l'imprécision des mesures. Une plus grande évidence de la présence de  $G_I$  est donnée à la figure 5.10 qui montre que les 2 faces de la fissure se séparent lorsque le spécimen est chargé et que le rapport  $h_1/h$  est plus grand que  $1/2$ . Il faut noter qu'à  $h_1/h = 1/2$  les 2 courbures sont égales (Figures 5.10a et 5.10b) et que le mode II pur peut être obtenu. A  $h_1/h < 1/2$ , la différence de courbures est négative impliquant que la face supérieure du plan de fissuration écrase la face inférieure, au front de fissure. Cette compression engendre évidemment une résistance au glissement des deux parties qui pourrait se traduire par une augmentation fictive de  $G_c$ .

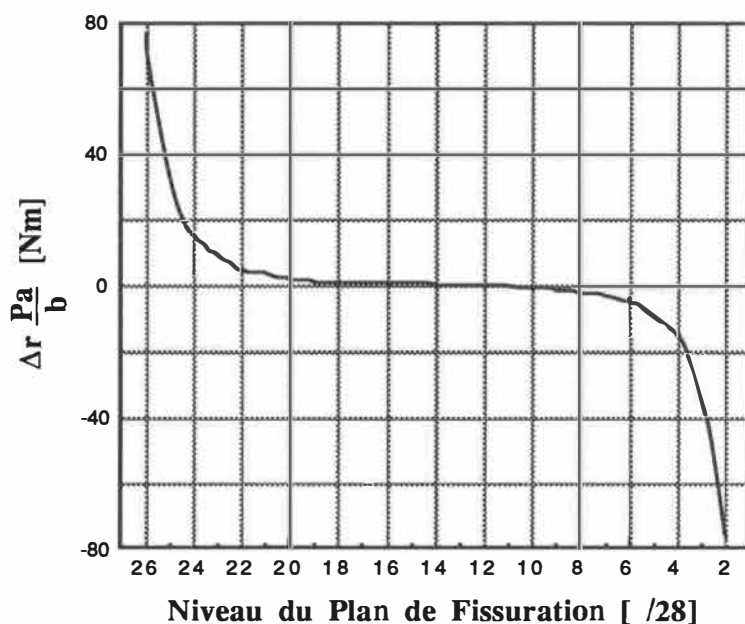
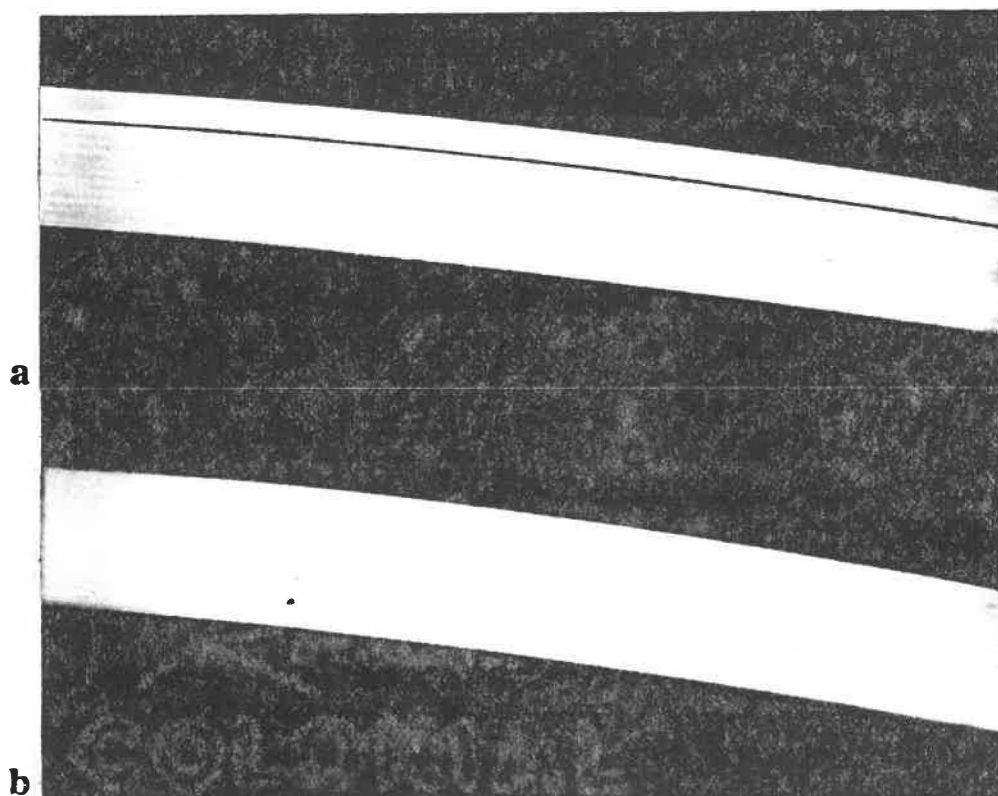


Figure 5.9 Différences des courbures selon la localisation du plan de fissuration



*Figures 5.10a et 5.10b: Illustration de la présence du mode mixte pour  $h_1/h=22/28$  et du mode II pur pour  $h_1/h=14/28$*

## 5.6 Analyse par la méthode numérique des éléments finis

Une étude par éléments finis a été nécessaire afin de vérifier la validité des hypothèses qui ont été posées précédemment. Les calculs ont été exécutés sur le code d'éléments finis FEMAC spécialisé dans le domaine des matériaux anisotropes rectilignes et développé par l'Institut de Génie des Matériaux, division du CNRC. Les détails relatifs au maillage et à la manipulation des résultats sont données à la page 97 de l'annexe E.

La première étape a été la vérification de la présence de champs singuliers au front de fissure. Le maillage de cette zone s'est révélé suffisamment raffiné car la progression

des champs de contrainte a été uniforme et régulière. Il a pu être démontré que la singularité suivait une distribution  $r^{-1/2}$  tel que prédit par les équations de Sih [6].

Une observation plus approfondie des résultats a montré la présence de contraintes d'ouverture (selon l'épaisseur du laminé, axe 3) lorsque le plan de fissuration est au dessus de l'axe centrale ( $h_1/h > 1/2$ ) et de contraintes de fermeture lorsque  $h_1/h$  est plus petit que  $1/2$ . Ces champs de contraintes ont été portés au graphique à la figure 5.11. Les résultats des contraintes de cisaillement et des contraintes normales longitudinales sont également montrés aux figures 5.12 et 5.13 pour le niveau  $h_1/h=22/28$ .

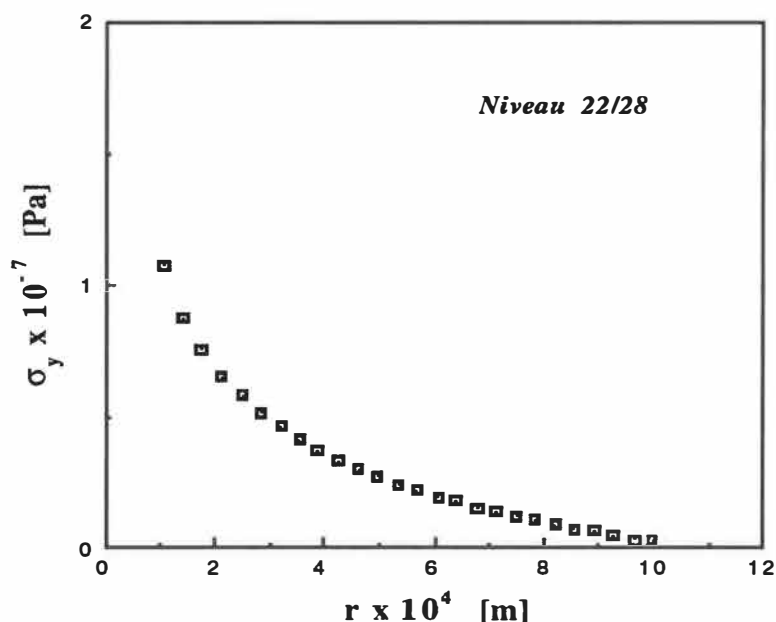


Figure 5.11: Illustration de contraintes d'ouverture importantes au front de fissure pour  $h_1/h=22/28$

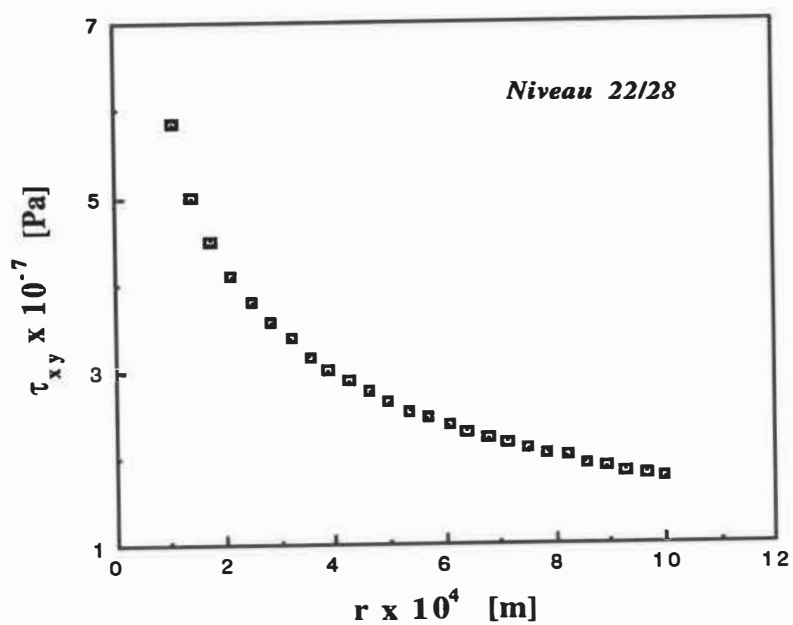


Figure 5.12: Illustration de la singularité des contraintes en cisaillement au front de fissure pour  $h_1/h=22/28$

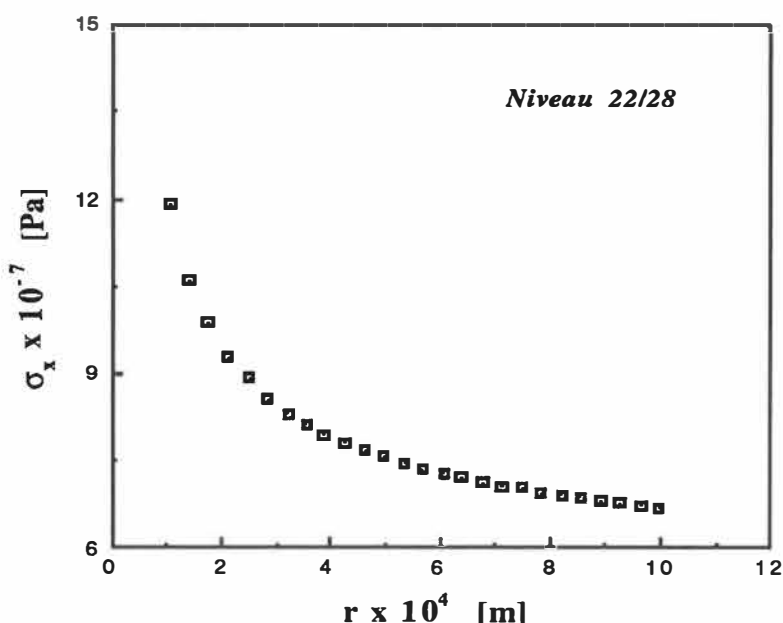


*Figure 5.13: Illustration de la singularité des contraintes normales longitudinales au front de fissure pour  $h_1/h=22/28$*

Chaque courbe des contraintes de cisaillement a été utilisée pour le calcul des facteurs d'intensités de contraintes  $k_1$  et  $k_2$  selon la méthode décrite à la page 97 de l'annexe E. Ces facteurs, ainsi que les taux de restitution d'énergie de déformation correspondant basés sur les équations 2.5a et 2.5b de la page 17, sont présentés au tableau 5.1 et comparés aux valeurs théoriques et expérimentales à la figure 5.14. La figure 5.14 montre que les calculs de  $G_c$  sont en très bon accord avec les valeurs obtenues par l'équation 3.25 de la page 35 où l'erreur relative moyenne est d'environ 10%. De plus, les résultats du tableau 5.1 démontrent clairement l'existence du mode II pur lorsque  $h_1/h$  égal  $1/2$  et la présence du mode mixte lorsque  $h_1/h$  diffère de  $1/2$ .

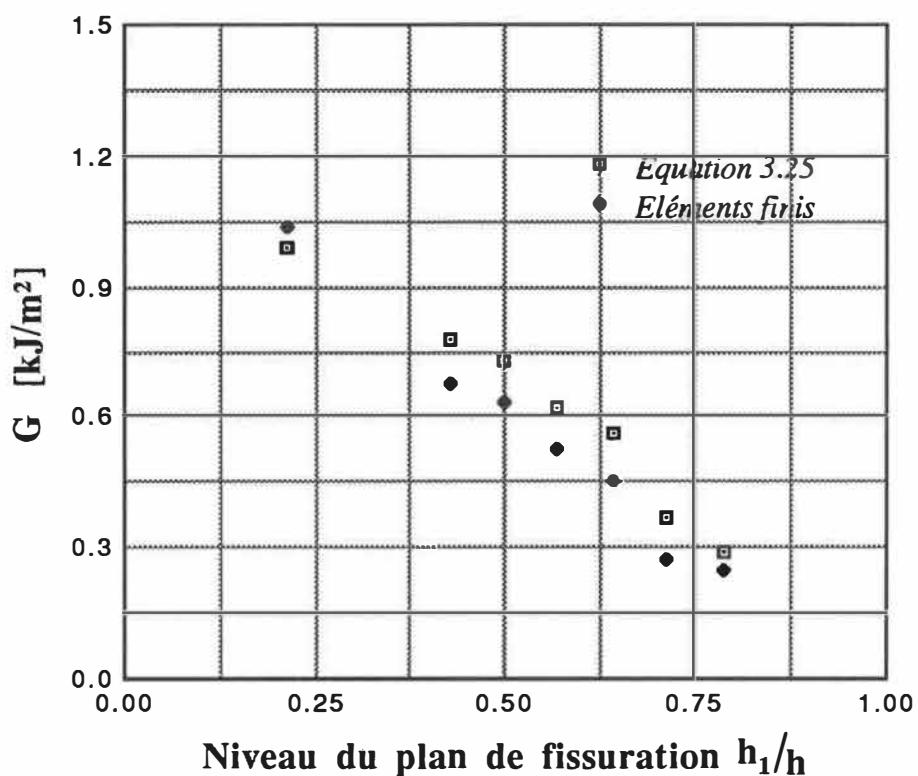


Figure 5.14: Comparaison des valeurs de  $G$  obtenues par deux méthodes

Tableau 5.2

| Niveau | $k_I$ [ $\text{Pa.m}^{0.5}$ ] | $k_{II}$ [ $\text{Pa.m}^{0.5}$ ] | $G_I$ [ $\text{j.m}^2$ ] | $G_{II}$ [ $\text{j.m}^2$ ] |
|--------|-------------------------------|----------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 22/28  | 169378                        | 869510                           | 27.6                     | 246.5                       |
| 20/28  | 222483                        | 912511                           | 47.6                     | 271.5                       |
| 18/28  | 200225                        | 1179985                          | 38.5                     | 454.0                       |
| 16/28  | 11894                         | 1267488                          | 12.0                     | 523.9                       |
| 14/28  | 0                             | 1391702                          | 0                        | 631.6                       |
| 12/28  | -9555                         | 1435434                          | 0.0                      | 671.7                       |
| 6/28   | -54560                        | 1785359                          | -2.86                    | 1039.4                      |

Tableau 5.2: Valeurs des paramètres  $k$  et  $G$

Cette révélation prouve la présence de deux modes de rupture à travers l'épaisseur. Cependant, elle prouve que les facteurs d'intensités de contraintes et le taux de restitution d'énergie de déformation sont dépendants de la géométrie de la pièce et de la localisation du plan de fissuration. Ces deux affirmations ont déjà été remarqués par plusieurs auteurs [37,38,39] sur des spécimens différents du type d'échantillon utilisé pour la présente étude. La largeur de l'échantillon, par exemple, influence directement la dimension de la zone plastique au front de fissure et affecte le facteur  $K_{1c}$  tel qu'observé [39] pour un matériau isotrope. La même remarque peut être faite pour les effets de bord qui interviennent lorsqu'une plaque de dimensions finies, fissurée en son centre, est chargée en mode I. Des facteurs de corrections ont été développés pour des plaques isotropes et anisotropes fissurées obliquement et simulant le mode mixte pour tenir compte de ces effets. Les éléments finis ont par contre l'avantage de pouvoir donner ces informations pour des géométries beaucoup plus complexes.

## 5.7 Observations générales

-Deux conditions sont essentielles pour l'obtention du mode II pur lorsque la fissure est située entre un pli à  $0^\circ$  et un pli à  $\theta$  pour un échantillon sollicité en porte-à-faux. La première condition demande que les rayons de courbures des parties supérieure et inférieure au plan de fissuration soient égaux et la deuxième exige que chacune des trois parties soit symétrique ou quasi-homogène pour éviter les courbures naturelles. Il devient donc évident que la symétrie des trois parties est impossible à réaliser lorsque  $\theta$  est différent de 0 et c'est seulement la quasi-homogénéité (*plus de 16 plis*) qui peut remplir les conditions.

Conséquemment, il est possible d'obtenir  $G_{IIc}$  pur seulement lorsque la fissure est localisée entre deux plis à 0 degré ou entre un pli à 0° et un pli à 90°.

-Il faut considérer que l'échantillon modélisé par éléments finis a été traité globalement comme un corps anisotrope homogène alors qu'en réalité, localement, la fissure est située dans un milieu résineux entre un pli supérieur à 90 degrés et un pli inférieur à 0 degré. Conséquemment, les champs de contraintes peuvent être grandement influencés par l'orientation des plis supérieur et inférieur, ce que le modèle par éléments finis ne considère pas.

-La région résineuse au front de fissure peut influencer grandement la dimension de la zone plastique au front de fissure. Par conséquent les valeurs de charges à la rupture obtenues expérimentalement devraient être sur-évaluées par rapport à celles qu'on obtiendrait avec un échantillon préfissuré. Cependant, la tendance des courbes de  $G_c$ , calculée à partir de l'équation 3.25 et par méthode numérique devrait être la même puisque les deux utilisent la même charge à la rupture.

-La variation des valeurs de  $G_c$  à travers l'épaisseur démontre qu'aucun critère de rupture basé sur la théorie scalaire de la mécanique de la rupture classique ne peut être utilisé pour caractériser le matériau et qu'elles ne peuvent être considérées comme *Propriétés Intrinsèques du Matériau* puisqu'elles dépendent de la géométrie de la pièce, des effets de bords et même dans certains cas de la vitesse de sollicitation du matériau [67]. Le critère qui sera utilisé dans le prochain ouvrage se basera sur la théorie vectorielle de la densité d'énergie [40-66] qui a déjà démontré qu'elle peut caractériser adéquatement un matériau sans être influencé par des paramètres externes.

## ***Conclusion***

Un calcul a été développé afin de quantifier la compliance et de caractériser le taux de restitution d'énergie de déformation pour des échantillons chargés en porte-à-faux fissurés à différents niveaux. Ce développement a été nécessaire pour vérifier les effets du craquement transverse (transverse cracking) qui interviennent lorsque le plan de fissuration repose sur un pli qui diffère d'un angle de 0 degré. Par de nombreux essais à 7 localisations de plan de fissuration différentes, il a été démontré que le taux de restitution d'énergie de déformation était sensible aux facteurs géométriques environnants. Le calcul théorique a été appuyé d'une étude par éléments finis qui confirme le modèle et qui démontre la présence de mode mixte lorsque la localisation du plan de fissuration diffère de  $h_1/h = 1/2$ . Conséquemment, le craquement transverse peut faire intervenir plusieurs modes de rupture de deux façons - i.e. lorsque la fissure plonge entre les couches du laminé jusqu'à l'atteinte d'une couche à 0 degré [5] d'une part et/ou lorsque la nouvelle localisation implique un environnement non symétrique d'autre part. Les conditions du mode II pur peuvent être remplies seulement si les trois parties de l'échantillon sont symétrique ou quasi-homogène. Il devient donc évident que la mesure de  $G_c$  entre un pli à  $0^\circ$  et à  $\theta$  d'un échantillon chargé en porte-à-faux est impossible à réaliser à l'exception des angles  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ .

## REFERENCES

---

- [1] S.S. Wang, Fracture Mechanics for Delamination Problems in Composite Materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 17, May 1983.
- [2] A.S.D. Wang, M. Slomiana and R.B. Bucinell, Delamination Crack Growth in Composite Laminates, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 1985, pp.135-167.
- [3] G.R. Irwin, Fracture Mechanics, *Structural Mechanics*, Pergamon press, New york, 1960, pp.557-591.
- [4] L. Browman, *Composite Materials Volume V*, Edited by Lawrence Browman, Academic Press Inc, New York, 1974.
- [5] F.W. Crossman and A.S.D. Wang, The Dependence of Transverse Cracking and Delamination on Ply thickness in Graphite/Epoxy Laminates, *Damage in Composite Materials*, ASTM STP 775, 1982, pp. 118-139.
- [6] S.W. Tsai and H.T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Company Inc, Lancaster, Pennsylvania, 1980.
- [7] D.R.J. Owen and A.J. Fawkes, Numerical Methods and Applications, *Engineering Fracture Mechanics*, Pineridge Press limited, Swansea, U.K., 1983
- [8] H.M. Westergaard, Bearing Pressure and Cracks, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1935
- [9] A.A. Griffith, The Phenomona of Rupture and Flow in Solids, *Phil. Trans. of The Royal Soc. of London*, Series A, 221, 1921, pp163-195.
- [10] G.R. Irwin, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, *Journal of Applied Mechanics*, 24, 1957, pp.361-364.
- [11] G.C. Sih, P.C. Paris and G.R. Irwin, On Cracks In Rectilinearly Anisotropic Bodies, *Internat. J. Fracture Mech.*, Vol 1, 1965, pp.189-203.
- [12] S.L. Donaldson, Fracture Toughness Testing of Graphite/Epoxy and Graphite/Peek Composites, *Composites*, Vol.16, No.2, April 1985.
- [13] E.A. Armanios, L.W. Rehfield and A.D. Reddy, Design and Testing for Mixed-Mode and Mode II Interlaminar Fracture of Composites, *Composite Materials: Testing and Design (Seventh Conference)*, ASTM STP 893, 1986, pp.232-255.
- [14] T.K. O'Brien, N.J. Johnston, I.S. Raju, D.H. Morris and R.A. Simonds, Comparisons of Various Configurations of the Edge Delamination Test for Interlaminar Fracture Toughness, *Toughened Composites*, ASTM STP 937, Philadelphia, 1987, pp.199-221.

- [15] G.E. Law, A Mixed-Mode Fracture Analysis of  $(+/-25/90_n)_s$  Graphite/Epoxy Composite Laminates, *Effects of Defects in Composite Materials*, ASTM STP 836, 1984, pp.143-160.
- [16] R.A. Jurf and R.B. Pipes, Interlaminar Fracture of Composite Materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, (Sept. 1982), p.386.
- [17] W.S.Johnson and P.D. Mangalgiri, Influence of the Resin on Interlaminar Mixed-Mode Fracture, *Toughened Composites*, ASTM STP 937, Philadelphia, 1987, pp.295-315.
- [18] R.L. Ramkumar and J.D. Whitcomb, Characterization of Mode I and Mixed-Mode Delamination Growth in T300/5208 Graphite/Epoxy, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 1985, pp.315-335.
- [19] A.C. Garg, Delamination - A Damage Mode In Composite Structures, *Eng. Fracture Mech.*, 1988, 29, (5), pp.557-584.
- [20] R. Jones, Characterisation of Pure and Mixed Mode Fracture In Composite Laminates, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 7, (1987), pp.115-124.
- [21] T. Vu-Khanh, Crack Arrest Study in Mode II Delamination in Composites, *Polymer Composite*, October 1987, Vol. 8 , No.5.
- [22] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Mechanics of Materials*, Litton Educationnal Publishing Inc., 1972.
- [23] B.R. Trethewey, L.A. Carlsson, J.W. Gillespie and R.B. Pipes, Mode II Interlaminar Fracture During Static And Fatigue Loading, *Internal Report* , University of Delaware
- [24] H. Maikuma, J.W. Gillespie, J.M. Whitney, Analysis and Experimental Characterization of the Center Notch Flexural Test Specimen for Mode II Interlaminar Fracture, *J. Composite Materials*, Vol.23, 8, 1989, pp756-786.
- [25] J.W. Gillespie, and R.B. Pipes, Thermoelastic Response of the Cylindrically Orthotropic Disk - Numerical and Experimental Evaluation, *High Modulus Fiber Composites in Ground Transportation and High Volume Applications*, ASTM STP 873, 1985, pp.86-102.
- [26] J.W. Gillespie, L.A. Carlsson and R.B. Pipes, Finite Element Analysis of the End Notched Flexure Specimen for Measuring Mode II Fracture Toughness, *Composite Science and Technology*, 27, (1987) pp.177-197.
- [27] L.A. Carlsson , J.W. Gillespie and R.B. Pipes, On The Analysis And Design Of The End Notched Flexure (ENF) Specimen For Mode II Testing, *Journal of Composite Materials*, Vol. 20, 1986.

- [28] H. Maikuma, J.W. Gillespie and D.J. Wilkins, Mode II Interlaminar Fracture of the Center Notch Flexural Specimen Under Impact Loading, *Submitted For Publication in Journal of Composite Materials*..
- [29] R.F. Eduljee, J.W. Gillespie and R.B. Pipes, Design Methodology For The Molding Of Short Fiber Thermoset Composites, *Composite Science and Technology*, Vol.33, 4, (1988) pp.241-256.
- [30] V.A. Guénon, T.W. Chou and J.W. Gillespie, Toughness Properties of a Three Dimensional Carbon-Epoxy Composite, *Accepted for Publication in The Journal of Material Science*.
- [31] B.R. Trethewey, J.W. Gillespie and L.A. Carlsson, Mode II Cyclic Delamination Growth, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, May 1988.
- [32] G. Betch and John W. Gillespie, Design and Analysis of the Crack Rail Shear Specimen for Mode III Interlaminar Fracture, *Composite Science and Technology*, 31, (1988) pp.143-157.
- [33] C.G. Gustafson, L. Jilken and P.A. Gradin, Fatigue Thresholds of Delamination Crack Growth in Orthotropic Graphite/Epoxy Laminates, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 1985, pp.200-216.
- [34] A.J. Russell and K.N. Street, The Effect of Matrix Toughness on Delamination: Static and Fatigue Fracture Under Mode II Shear Loading of Graphite Fiber Composites, *Toughened Composites*, ASTM STP 937, Philadelphia, 1987, pp.275-294.
- [35] A.J. Russell, Micromechanisms of Interlaminar Fracture and Fatigue, *Polymer Composite*, October 1987, Vol. 8 , No.5.
- [36] T. Vu-Khanh and R.P. Langlois, Influence of Ply Orientation on the Measurement of Mode II Delamination, *ICCM VII*, 1989.
- [37] O.L. Bowie and C.E. Freese, Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet, *Internat. J. Fracture Mech.*, Vol 8, No.1, March 1965.
- [38] K.R. Gandhi, Analysis of an Inclined Crack Centrally Placed In A Orthotropic Rectangular Plate, *Journal of Strain Analysis*, Vol. 7, No.3, 1972.
- [39] D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1980.
- [40] G.C. Sih, Mechanics and Physics of Energy Density Theory, *Theor. and Applied Fract. Mechanics* 4 (1985) pp.157-173.
- [41] J.R. Rice and G.C. Sih, Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, June 1965, p.418.
- [42] G.C. Sih, Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts, *Eng. Fracture Mech.*, June 1973, 5, (2), pp.365-377.

- [43] G.C. Sih, Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems, *Internat. J. Fracture*, Sept. 1974, 10, (3), pp.305-321
- [44] G.C. Sih and E.P. Chen, Fracture Analysis of Unidirectional Composites, *J. Composite Materials*, Vol 7, April 1973, p.230
- [45] P.C. Paris and G.C. Sih, *Stress Analysis of Cracks, Fracture Toughness Testing And Its Applications*, ASTM STP 381.
- [46] E.P. Chen and G.C. Sih, Stress Intensity Factor For A Three-Layered Plate With a Crack In The Center Layer, *Eng. Fract. Mech.*, 1981, 14, (1), pp.195-214.
- [47] G.C. Sih and E.P. Chen, Failure of Composites as Predicted by The Strain Energy Density Theory, *Cracks in Composite Materials, Mechanics of Fracture VI*, edited by G.C. Sih, Noordhoof International Publishing, Leyden, 1980, pp.XV-LXXXI.
- [48] G.C. Sih and B. MacDonald, Fracture Mechanics Applied to Engineering Problems-Strain Energy Density Fracture Criterion, *Eng. Fracture Mech.*, Vol 6, 1974, pp.361-386
- [49] G.C. Sih, Mechanics and Physics of Energy Density Theory, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 4, 1985, pp.157-173.
- [50] G.C. Sih , Semi-infinite Plane Cracks: *Three Dimensionnal Crack Problems, Mechanics of Fracture II*, edited by G.C. Sih, Noordhoof International Publishing, Leyden, 1974, pp.135-176.
- [51] G.C. Sih and J.R. Rice, The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, September, 1964.
- [52] G.C. Sih , A Three-dimensional Strain Energy Density Factor Theory of Crack Propagation: *Three Dimensionnal Crack Problems, Mechanics of Fracture II*, edited by G.C. Sih, Noordhoof International Publishing, Leyden, 1974, pp.XV-XXIX.
- [53] G.C. Sih, A Review of the Three-Dimensional Stress Problem For a Cracked Plate, *Int. Journal of Fracture Mech.*, 7, 1971, pp.39-61.
- [54] R.J. Hartranft and G.C. Sih, Three-Dimensional Growth Characteristics of a Plane Crack Subjected to Concentrated Forces, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, September, 1974.
- [55] R.J. Hartranft and G.C. Sih, Application of The Strain Energy Density Fracture Criterion to Dynamic Crack Problems, *Prospects of Fracture Mechanics*, Noordhoof International Publishing, Leyden, Netherlands, 1974, pp.281-297.
- [56] G.C. Sih, Surface Layer Energy And Strain Energy Density For A Blunted Crack or Notch, *Prospects of Fracture Mechanics*, Noordhoof International Publishing, Leyden, Netherlands, 1974, pp.85-102.

- [57] R.J. Hartranft and G.C. Sih, Stress Singularity For A Crack With An Arbitrarily Curved Front, *Eng. Fracture Mech.*, 1974, 9, (3), pp.705-718.
- [58] G.C. Sih, E.T. Moyer, JR., E.E. Gdoutos, P.S. Theocaris, N.P. Andrianopoulos, A Discussion of "The Mises Elastic-Plastic Boundary as The Core Region in Fracture Criteria", *Eng. Fracture Mech.*, 1983, 18, (3), pp.731-734.
- [59] G.C. Sih, Dynamics of Composites With Cracks: *Failure Mechanics of Composites, HandBook Of Composites Vol. III*, Elsevier Science Publishers B.V., 1985.
- [60] G.C. Sih and D.Y. Tzou, Dynamic Fracture Rate of Charpy V-Notch Specimen, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 5, (1986), pp.189-203.
- [61] Maria Arcisz and G.C. Sih, Effect of Orthotropy on Crack Propagation, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 1, (1984), pp.225-238.
- [62] G.C. Sih, Micromechanics And Macrobehavior of Advanced Materials, Inside Report.
- [63] G.C. Sih , A Special Theory of Crack Propagation: *Methods Of Analysis And Solutions Of Crack Problems , Mechanics of Fracture I*, edited by G.C. Sih, Noordhoof International Publishing, Leyden, 1973, pp.XXI-XLV.
- [64] G.C. Sih and E.P. Chen, Effect of Material Nonhomogeneity On Crack Propagation Characteristics, *Eng. Fracture Mech.*, 1980, 13, (3), pp.431-438.
- [65] M. Ramulu and A.S. Kobayashi, Strain Energy Density Criteria For Dynamic Fracture And Dynamic Branching, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 5, (1986), pp.117-123.
- [66] N.N Au, Application of the  $S_c$ -Theory To Structural Design, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 4, (1985), pp.1-11.
- [67] T. Vu-Khanh and F.X. DeCharentenay, Mechanics and Mechanisms of Impact Fracture in Semi-Ductile Polymers, *Polymer Engineering and Science*, Vol. 25, (13) Sept. 1985.
- [69] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, Mc Graw-Hill Inc., 1970.
- [70] R.S. Barsoum, Singularities in Composite Materials Applications, *Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms*, Edited by G.C. Sih, G.F. Smith, I.H. Marshall, J.J. Wu, Elsevier Applied Science Publishers LTD, England, 1988.
- [71] R.S. Barsoum, Cracks in Anisotropic Materials - an Iterative Solution of the Eigenvalue problem, *International Journal of Fracture*, 32, 1986, pp.59-67.
- [72] G.Caprino, I. Crivelli visconti and A. Di Ilio, Composite Materials Response Under Low-Velocity Impact, *composite Structure*, 2 (1984), pp.261-271.

- [73] C.T. Sun, An Analytical Method For Evaluation of Impact Damage Energy of Laminated Composites, *Composite Materials: Testing and Design (4<sup>th</sup> Conference)*, ASTM STP 617, 1977, pp.427-440.
- [74] E.E. Gdoutos and C.G. Thireos, Fracture Instability Of Notched Cracked Plates Characterized By The Strain Energy Density Theory, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 9, (1988), pp.239-247.
- [75] E. Reissner, On Bending Of Elastic Plates, *Quart. Appl. Math.*, vol 5, no 1, 1947, pp55-68
- [76] G.C. Sih , E.P. Chen, S.L. Huang and E.J. Mcquillen, Material Characterization On The Fracture Of Filament-Renforced Composites, *j. Composite Materials*, April 1975, 9, pp.167-186.
- [77] H.G. Maschke and M. Kuna, A Review Of Boundary And Finite Element Methods In Fracture Mechanics, *Theoretical and Applied Fract. Mech.*, 94, (1985), pp.181-189.
- [78] J.D. Whitcomb and I.S. Raju, Analysis of Interlaminar Stresses In Thick Composite Laminates With and Without Edge Delamination, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 1985, pp.69-94.
- [79] D.F. Adams, R.S. Zimmerman and Edwin M. Odom, Frequency and Load Ratio Effects On Critical Strain Energy Release Rate  $G_c$  Thresholds of Graphite/Epoxy Composites, *Toughened Composites*, ASTM STP 937, Philadelphia, 1987, pp.242-259.
- [80] S.R. Soni and R.Y. Kim, Delamination of Composite Laminates Stimulated by Interlaminar Shear, *Composite Testing and Design (Seventh Conference)*, ASTM STP 893, Philadelphia, 1986, pp.286-307.
- [81] J.M. Mahishi and D.F. Adams, Energy Release Rate During Delamination Crack Growth in Notched Composite Laminates, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, Philadelphia, 1985, pp.95-111.
- [82] V.Papaspyropoulos, J. Ahmad and M.F. Kanninen, A Micromechanical Fracture Mechanics Analysis of a Fiber Composite Laminate Containing a Defect, *Effects of Defects in Composite Materials*, ASTM STP 836, 1984, pp.237-249.
- [83] C.T. Herakovich, On The Relationship Between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, (July 1983), p336.
- [84] K.S. Kim and C.S. Hong, Delamination Growth in Angle-Ply Laminated Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 20, (Sept. 1986), p.423.
- [85] G.S.Giare, Fracture Toughness of Unidirectional Fibre Reinforced Composites In Mode II, *Eng. Fracture Mech.*, 20, (1), 1984, pp.11-21.

- [86] C.T. Sun and J.E. Grady, Dynamic Delamination Fracture Toughness of a Graphite/Epoxy Laminate Under Impact, *Composite Science and Technology*, 31, (1988), pp.55-72.
- [87] J.G. Williams and P.D. ewing, Fracture Under Complex Stress - The Angled Crack Problem, *Internat. J. Fracture Mech.*, Vol 8, No.4, December 1972.
- [88] A.J. Russell and K.N. Street, Factors Affecting the Interlaminar Fracture Energy of Graphite/Epoxy Laminates, *Progress in Science and Engineering of Composites*, T.Hayashi, K.Kawata & S. Umekawa, Ed., ICCM-IV, Tokyo,1982.
- [89] S.N. Chatterjee, R.B. Pipes and R.A. Blake, Criticality of Disbonds in Laminated Composites, *Effects of Defects in Composite Materials*, ASTM STP 836, 1984, pp.161-174.
- [90] J.E. Schiermeier and B.A. Szabo, Numerical Analysis of Stress Singularities in Composite Materials, *Eng. Fracture Mech.*, 32, (6), 1989, pp.979-996.
- [91] J.R. Yeh and I.G. Tadjbakhsh, Stress Singularity in Composite Laminates by Finite Element Method, *Journal of Composite Materials*, Vol.20, July 1986.
- [92] S.P. Timoshenko, *Strength of Materials*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc, 1955.

## ANNEXE A

### A.1 Répartition de la force "P" appliquée aux poutres 1 et 2

Il est nécessaire d'inclure dans l'analyse l'influence du cisaillement sur la déflexion globale puisque les composites ont, en général, un faible rapport  $E^f/G_{13}$ . Les parties 1 et 2 de la figure A.1 supportent des charges différentes qui dépendent de la localisation du plan de fissuration et des modules de flexion et de cisaillement transverse.

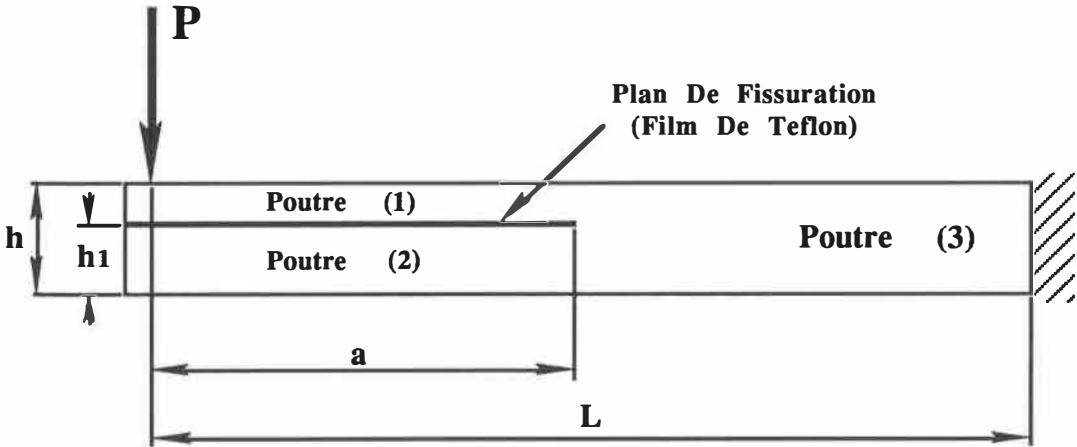


Figure A.1: Division de l'échantillon encastré en trois parties

Considérant que les poutres 1 et 2 sont encastrées et peuvent pivotées librement aux extrémités, leur déflexion respective devient [22]:

$$v_{1\max} = \frac{Ra^3\delta_{11}^I}{3b} + \frac{f_s Ra}{b(h-h_1)G_{13_1}} \quad v_{2\max} = \frac{Fa^3\delta_{11}^2}{3b} + \frac{f_s Fa}{bh_1G_{13_2}}$$

où

$$\frac{\delta_{ij}}{h} = \frac{1}{EI}$$

L'équilibre du système implique que:

$$P = R + F$$

et la compatibilité des déflexions:

$$V_{1\max} = V_{2\max}$$

$$R \left( \frac{a^3 \delta_{11}'}{3} + \frac{f_s a}{(h-h_1)G_{13_1}} \right) = F \left( \frac{a^3 \delta_{11}''}{3} + \frac{f_s a}{h_1 G_{13_2}} \right)$$

Or, puisque  $R = (P-F)$ , on obtient:

$$(P-F) \left( \frac{a^3 \delta_{11}'}{3} + \frac{f_s a}{(h-h_1)G_{13_1}} \right) = F \left( \frac{a^3 \delta_{11}''}{3} + \frac{f_s a}{h_1 G_{13_2}} \right)$$

$$P \left[ \frac{a^3 \delta_{11}'}{3} + \frac{f_s a}{(h-h_1)G_{13_1}} \right] = F \left[ \frac{a^3 (\delta_{11}' + \delta_{11}'')}{3} + f_s a \left( \frac{1}{(h-h_1)G_{13_1}} + \frac{1}{h_1 G_{13_2}} \right) \right]$$

Avec  $y=h_1/h$ , on obtient:

$$F = P \frac{\left[ \frac{a^3 \delta_{11}'}{3} + \frac{f_s a}{h(1-y)G_{13_1}} \right]}{\left[ \frac{a^3 (\delta_{11}' + \delta_{11}'')}{3} + \frac{f_s a}{h} \left( \frac{1}{(1-y)G_{13_1}} + \frac{1}{yG_{13_2}} \right) \right]} \quad (A.1)$$

## A.2 Simplifications:

Des simplifications apparaissent lorsque les échantillons sont de configuration quasi-homogène. Ainsi:

$$\delta_{11}^{'1} = \frac{12}{E_{1_1}^f h^3 (1-y)^3} \quad \delta_{11}^{'2} = \frac{12}{E_{1_2}^f h^3 y^3}$$

Et,

$$E_{1_1}^f = E_{1_2}^f = E_1^f \quad \text{et} \quad G_{13_1} = G_{13_2} = G_{13}$$

Donc:

$$F = P \frac{\left[ \frac{4a^3}{E_1^f h^3 (1-y)^3} + \frac{6a}{5G_{13} h (1-y)} \right]}{\left[ \frac{4a^3}{E_1^f h^3} \left( \frac{1}{(1-y)^3} + \frac{1}{y^3} \right) + \frac{6a}{5G_{13} h} \left( \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{y} \right) \right]} \quad (\text{A.2})$$

Si l'effet du cisaillement sur la déflexion est négligé, l'équation A.2 se réduit à:

$$F = P \frac{y^3}{y^3 + (1-y)^3} \quad (\text{A.3})$$

L'erreur générée par l'utilisation de l'équation A.3 étant infime, cette équation sera utilisée dans tous les calculs du présent ouvrage.

### A.3 Vérification de l'erreur due à la négligence de la déformation par cisaillement sur la répartition de la force P

Le tableau A.1 montre la différence entre les équations A.2 et A.3 pour le ScotchPly 1003 Quasi-Homogène 0-90 degrés. La valeur obtenue à partir de l'équation A.3 est donnée à la dernière ligne de chaque colonne du tableau. Bien que la différence semble énorme pour certains niveaux, elle n'a que très peu d'effets sur le calcul de  $G_c$  et de  $C$  lorsqu'elle est reportée dans les équations 3.18 et 3.19.

Avec  $Ef = 20920 \text{ N/mm}^2$   $G_{13} = 693.6 \text{ N/mm}^2$   $b=10\text{mm}$   $h=6.84\text{mm}$

**Tableau A.1**

| <i>a</i>       | <i>y=4/28</i>  | <i>y=6/28</i>  | <i>y=8/28</i>  | <i>y=10/28</i> | <i>y=12/28</i> | <i>y=14/28</i> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>20</b>      | 0.00799        | 0.03099        | 0.08317        | 0.17841        | 0.32216        | 0.50000        |
| <b>25</b>      | 0.00679        | 0.02714        | 0.07545        | 0.16806        | 0.31421        | 0.50000        |
| <b>30</b>      | 0.00613        | 0.02498        | 0.07100        | 0.16192        | 0.30938        | 0.50000        |
| <b>35</b>      | 0.00573        | 0.02366        | 0.06822        | 0.15802        | 0.30626        | 0.50000        |
| <b>40</b>      | 0.00547        | 0.02278        | 0.06638        | 0.15541        | 0.30415        | 0.50000        |
| <b>45</b>      | 0.00529        | 0.02218        | 0.06510        | 0.15358        | 0.30265        | 0.50000        |
| <b>50</b>      | 0.00516        | 0.02175        | 0.06418        | 0.15225        | 0.30156        | 0.50000        |
| <b>55</b>      | 0.00507        | 0.02143        | 0.06344        | 0.15125        | 0.30075        | 0.50000        |
| <b>60</b>      | 0.00499        | 0.02118        | 0.06296        | 0.15049        | 0.30012        | 0.50000        |
| <b>65</b>      | 0.00494        | 0.02099        | 0.06255        | 0.14989        | 0.29962        | 0.50000        |
| <b>Equ.A.3</b> | <b>0.00461</b> | <b>0.01988</b> | <b>0.06015</b> | <b>0.14637</b> | <b>0.29670</b> | <b>0.50000</b> |

Tableau A.1: Valeurs du terme  $\phi$  pour tous les niveaux de fissuration

## ANNEXE B

---

### Effet De La Friction sur $G_{IIc}$

La friction entre les deux surfaces en contact 1 et 2 de la figure B.1 s'oppose au glissement lorsque l'échantillon est chargé en flexion. L'énergie potentielle ainsi accumulée intervient dans le mécanisme de rupture lorsque le plan de fissuration s'accroît d'une quantité  $dA$  et doit être additionnée au taux de restitution d'énergie de déformation.

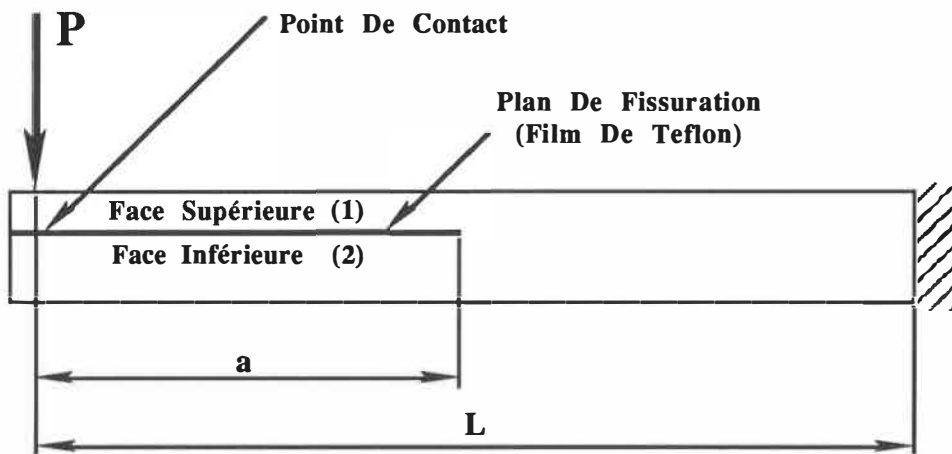


Figure B.1: Echantillon chargé en porte-à-faux

Le critère de propagation de fissure énoncé par Griffith et repris par Gillespie [27] veut que:

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} > G_{IIc} + \frac{dW_f}{dA} \quad (B.1)$$

où:

$W$  est l'énergie potentiel élastique accumulé sous l'effet d'une charge  $P$

$U$  est l'énergie de déformation emmagasiné dans le corps avant application de la charge "P"

$G_{IIc}$  est le travail requis pour créer une nouvelle surface unitaire  $dA$

$W_f$  est l'énergie emmagasinée par l'effet de friction

Posant que l'énergie de déformation avant application de la charge est nulle et réarrangeant l'équation 1 sous une autre forme on obtient:

$$\frac{dW}{dA} - \frac{dW_f}{dA} > G_{IIc} \quad (B.2)$$

L'équation B.2 nous montre que  $G_{IIc}$  diminue lorsque l'effet de friction augmente. Suivant les mêmes étapes que Gillespie et al. [26,27] pour le ENF avec fissure à la mi-épaisseur mais adapté cette fois à un niveau de fissuration quelconque, il est possible de déterminer l'énergie de friction de la façon suivante:

*L'énergie de friction  $W_f$  est le produit du coefficient de friction par la force de contact  $F$  par la différence de déplacements aux points de contacts:*

$$W_f \leq \mu F \Delta u(0) \quad (B.3)$$

La partie la plus laborieuse est le calcul des déplacements aux points de contacts. D'après TIMOSHENKO [69] on obtient le déplacement horizontal de la poutre 1 au point de contact::

$$u_1 = \underbrace{-\frac{Rx^2y}{2E_1I_1}}_1 - \underbrace{\frac{\nu Ry^3}{6E_1I_1}}_2 + \underbrace{\frac{Ry^3}{6G_{13}I_1}}_3 + \underbrace{\left(\frac{Ra^2}{2E_1I_1} - \frac{Rc^2}{2G_{13}I_1}\right)}_5 y \quad (B.4)$$

Au point de contact:

$$\begin{aligned}
 x &= 0 \\
 c &= \text{mi-hauteur} = (1-y')h/2 \\
 y &= (1-y')h/2 \\
 R &= P(1-\phi) \\
 \phi &= \frac{y'^3}{y'^3 + (1-y')^3} \quad \text{et} \quad y' = \frac{h_1}{h} \\
 I_1 &= \frac{bh^3}{12}(1-y')^3
 \end{aligned}$$

Le terme 1 devient nul puisque l'origine est au point de contact et les termes 2, 3 et 5 sont des fonctions de  $(h^2, (1-y'), E_1, G_{13}, \text{ et } \nu)$  et n'interviennent pas dans le calcul de  $dW_f / dA$ . Donc:

$$u_1 = \frac{Ra^2}{2E_1 I_1} \frac{h(1-y')}{2} + f(R, h^2, (1-y'), E_1, G_{13}, \nu) \quad (\text{B.5})$$

$$u_1 = \frac{3Ra^2}{E_1 bh^2 (1-y')^2} + f(\dots) \quad (\text{B.6})$$

$$u_1 = \frac{3P(1-\phi)a^2}{E_1 bh^2 (1-y')^2} + f(\dots) \quad (\text{B.7})$$

De la même façon obtient pour la poutre 2:

$$u_2 = \frac{-3Fa^2}{E_2 bh^2 y'^2} + f(\dots) \quad (\text{B.8})$$

$$u_2 = \frac{-3P\phi a^2}{E_2 b h^2 y'^2} + f(...) \quad (\text{B.9})$$

La différence des déplacements aux points de contact devient [27]:

$$\Delta u(0) = |u_1(0)| + |u_2(0)|$$

Des équations B.7 et B.9 on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta u(0) &= \frac{3P(1-\phi)a^2}{E_1 b h^2 (1-y')^2} + \frac{3P\phi a^2}{E_2 b h^2 y'^2} + f(...) \\ \Delta u(0) &= \frac{3Pa^2}{E_1 b h^2} \left( \frac{(1-\phi)}{(1-y')^2} + \frac{\phi}{E_2 y'^2} \right) + f(...) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Si  $E_1 = E_2$  (cas d'un Quasi-Homogène)

$$\Delta u(0) = \frac{3Pa^2}{E b h^2} \left( \frac{(1-\phi)}{(1-y')^2} + \frac{\phi}{y'^2} \right) + f(...) \quad (\text{B.11})$$

De cette dernière relation, il est simple de déterminer l'énergie potentielle de friction d'après l'équation B.3:

$$W_f \leq \mu F \Delta u(0) \quad \Rightarrow \quad W_f \leq \mu P \phi \Delta u(0)$$

Donc:

$$W_f \leq \frac{3P^2 a^2 \mu}{Ebh^2} \left( \frac{\phi(1-\phi)}{(1-y')^2} + \frac{\phi^2}{y'^2} \right) + f(...) \quad (\text{B.12})$$

Et enfin:

$$\frac{dW_f}{dA} = \frac{6P^2 a \mu}{Eb^2 h^2} \left( \frac{\phi(1-\phi)}{(1-y')^2} + \frac{\phi^2}{y'^2} \right) \quad (\text{B.13})$$

La relation B.13 n'implique, après calculs, qu'une faible erreur inférieure à 5% si elle est omise, et ce pour tous les niveaux. Gillespie et al.[26,27] ont remarqués le même phénomène pour leurs échantillons fissurés à mi-épaisseur de type ENF.

## ANNEXE C

---

### Données expérimentales et calculs

Les données expérimentales proviennent de tests effectués sur des échantillons fissurés artificiellement, encastrés à une extrémité et chargés par une force  $P$  à une distance  $L$  du porte-à-Faux selon la procédure déjà décrite à la page 36. La vitesse de charge a été constante à 10 mm/min. et tous les tests ont été effectués à humidité et température standard soient 50% et 23 Celsius respectivement. Les modules de flexion et de cisaillement transverse ont été déterminés sur des échantillons non-fissurés pour chaque plaque produite, selon la méthode décrite en annexe D page 92. Le matériau utilisé a été un pré-imprégné de Verre/Epoxy de la compagnie Ferro et la configuration des plaques a été limitée au quasi-homogène 0-90 degrés 28 plis.

Le tableaux C.1 à C.7 indiquent les valeurs de la charge à la rupture et de la compliance correspondante ainsi que les calculs nécessaires pour déterminer l'énergie de rupture des échantillons à partir de l'équation 3.25 de la page 35. Les valeurs de compliance normalisée et du taux de restitution d'énergie de déformation ont été portés en graphique après chaque tableau. La seule variable impliquée, pour un niveau de plan de fissuration donné, a été la longueur de fissure " $a$ ". Le nombre de tests requis par niveau de fissuration devait être particulièrement élevé (8 @ 10) afin de minimiser la dispersion des résultats.

|                                                       |
|-------------------------------------------------------|
| Tableau C.1                                           |
| Niveau du plan de fissuration: $Y=22/28$              |
| Module de Flexion $E_f^f$ : 30 000 MPa                |
| Module de Cisaillement Transverse $G_{13}$ : 1122 MPa |
| Longueur du Porte-à-Faux: 90 mm                       |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f^f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.2        | 5.85        | 212.27                           | 4.51                                        | 15.70                                                    | 0.0496                      | 0.0508                 | 0.0498               | 1.0234           | 1.0037         |
| 30          | 10.2        | 5.65        | 177.23                           | 3.14                                        | 9.95                                                     | 0.0549                      | 0.0571                 | 0.0577               | 1.0392           | 1.0506         |
| 35          | 10.2        | 5.80        | 143.20                           | 2.05                                        | 7.96                                                     | 0.0509                      | 0.0540                 | 0.0549               | 1.0611           | 1.0791         |
| 40          | 10.2        | 5.80        | 135.27                           | 1.83                                        | 6.12                                                     | 0.0509                      | 0.0555                 | 0.0559               | 1.0900           | 1.0988         |
| 45          | 10.2        | 5.80        | 121.90                           | 1.49                                        | 4.85                                                     | 0.0509                      | 0.0573                 | 0.0572               | 1.1269           | 1.1244         |
| 50          | 10.2        | 5.80        | 109.58                           | 1.20                                        | 3.94                                                     | 0.0509                      | 0.0597                 | 0.0611               | 1.1730           | 1.2010         |
| 55          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 60          | 10.2        | 5.70        | 83.26                            | 0.69                                        | 2.60                                                     | 0.0535                      | 0.0694                 | 0.0723               | 1.2965           | 1.3508         |
| 65          | 10.1        | 5.70        | 82.26                            | 0.68                                        | 2.18                                                     | 0.0541                      | 0.0744                 | 0.0765               | 1.3759           | 1.4152         |
| 70          | 10.05       | 5.70        | 77.45                            | 0.60                                        | 1.86                                                     | 0.0543                      | 0.0798                 | 0.0802               | 1.4684           | 1.4763         |
| 75          | 10.05       | 5.65        | 69.47                            | 0.48                                        | 1.58                                                     | 0.0557                      | 0.0878                 | 0.0878               | 1.5753           | 1.5751         |

Tableau C.1: Données du niveau de fissuration 22/28 ième

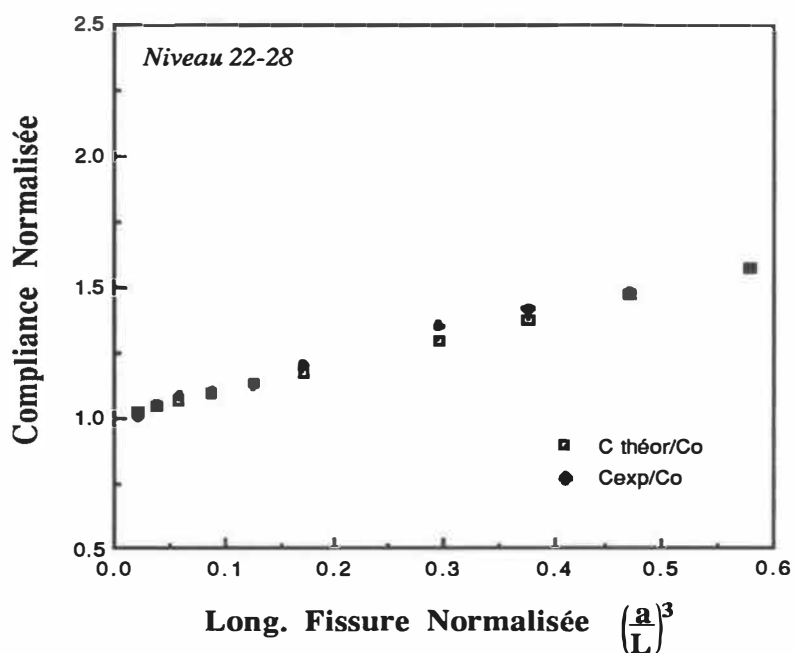
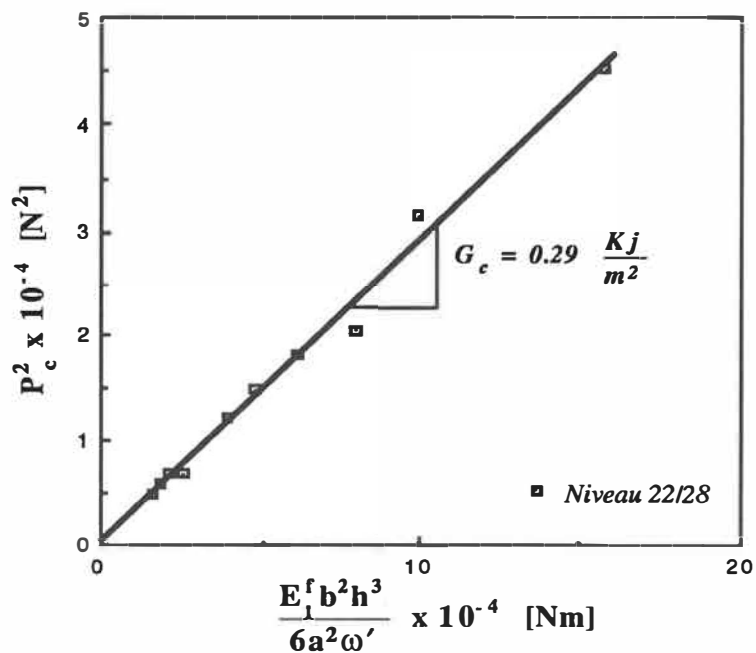


Figure C.1: Compliances théoriques et expérimentales du niveau 22/28

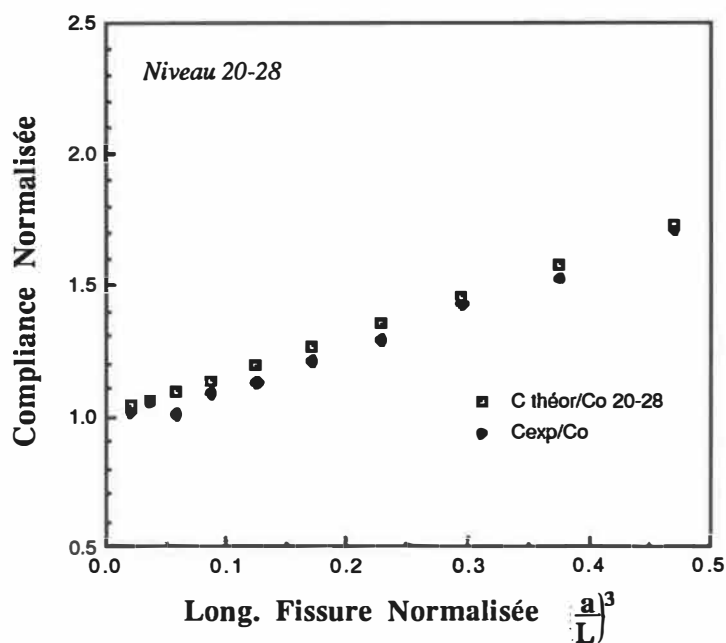


Figures C.2: Détermination de  $G_c$  pour le niveau 22/28

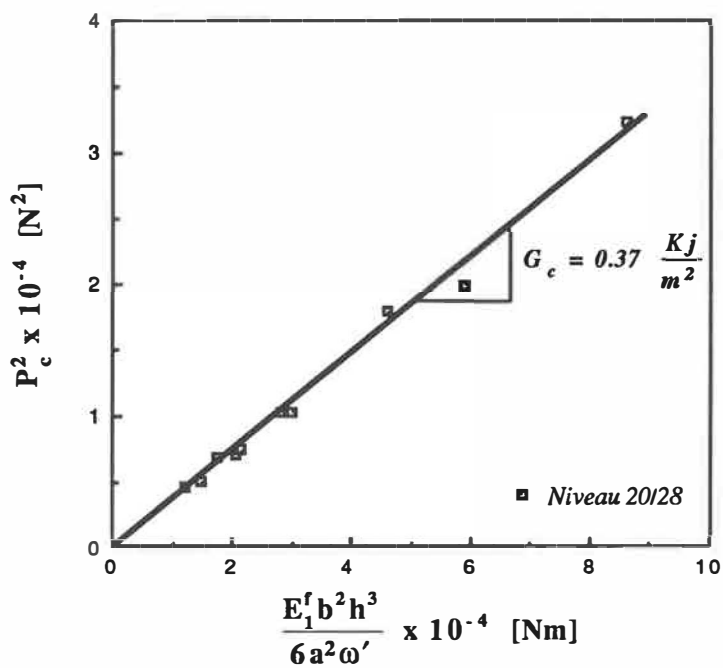
|                                                              |
|--------------------------------------------------------------|
| Tableau C.2                                                  |
| Niveau du plan de fissuration: $Y=20/28$                     |
| Module de Flexion $E_t^f : 30\,000\text{ MPa}$               |
| Module de Cisaillement Transverse $G_{t3} : 1122\text{ MPa}$ |
| Longueur du Porte-à-Faux: $90\text{ mm}$                     |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_t^f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.10       | 5.55        | 179.76                           | 3.23                                        | 8.61                                                     | 0.0584                      | 0.0605                 | 0.0591               | 1.0350           | 1.0113         |
| 30          | 10.14       | 5.50        | 141.35                           | 2.00                                        | 5.91                                                     | 0.0598                      | 0.0633                 | 0.0631               | 1.0593           | 1.0557         |
| 35          | 10.16       | 5.60        | 133.57                           | 1.78                                        | 4.62                                                     | 0.0566                      | 0.0618                 | 0.0571               | 1.0929           | 1.009          |
| 40          | 9.85        | 5.40        | 101.68                           | 1.03                                        | 2.99                                                     | 0.0649                      | 0.0739                 | 0.0703               | 1.1376           | 1.0827         |
| 45          | 10.20       | 5.60        | 101.43                           | 1.03                                        | 2.83                                                     | 0.0564                      | 0.0673                 | 0.0635               | 1.1946           | 1.1265         |
| 50          | 10.05       | 5.55        | 86.12                            | 0.74                                        | 2.17                                                     | 0.0587                      | 0.0743                 | 0.0707               | 1.2658           | 1.2038         |
| 55          | 10.08       | 5.80        | 83.80                            | 0.70                                        | 2.06                                                     | 0.0515                      | 0.0696                 | 0.0663               | 1.3520           | 1.2879         |
| 60          | 10.10       | 5.80        | 82.35                            | 0.68                                        | 1.74                                                     | 0.0514                      | 0.0748                 | 0.0733               | 1.4557           | 1.4267         |
| 65          | 10.10       | 5.80        | 70.80                            | 0.50                                        | 1.49                                                     | 0.0514                      | 0.0811                 | 0.0781               | 1.5782           | 1.5201         |
| 70          | 10.10       | 5.70        | 68.29                            | 0.47                                        | 1.22                                                     | 0.0541                      | 0.0931                 | 0.0923               | 1.7216           | 1.7075         |
| 75          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |

Tableau C.2: Données du niveau de fissuration 20/28<sup>ième</sup>



Figures C.3: Compliances théoriques et expérimentales du niveau 20/28



Figures C.4: Détermination de  $G_c$  pour le niveau 20/28

|                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tableau C.3</b>                                                      |
| <b>Niveau du plan de fissuration: <math>Y=18/28</math></b>              |
| <b>Module de Flexion <math>E_f</math> : 30 000 MPa</b>                  |
| <b>Module de Cisaillement Transverse <math>G_{f3}</math> : 1122 MPa</b> |
| <b>Longueur du Porte-à-Faux: 90 mm</b>                                  |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.06       | 5.74        | 195.82                           | 3.83                                        | 6.81                                                   | 0.0532                      | 0.0557                 | 0.0587               | 1.0475           | 1.1040         |
| 30          | 10.04       | 5.74        | 159.92                           | 2.56                                        | 4.75                                                   | 0.0533                      | 0.0576                 | 0.0577               | 1.0811           | 1.0830         |
| 35          | 10.10       | 5.70        | 134.81                           | 1.81                                        | 3.46                                                   | 0.0541                      | 0.0610                 | 0.059                | 1.279            | 1.0915         |
| 40          | 10.10       | 5.74        | 116.98                           | 1.37                                        | 2.71                                                   | 0.0530                      | 0.0630                 | 0.0613               | 1.1899           | 1.1574         |
| 45          | 9.9         | 5.74        | 102.93                           | 1.06                                        | 2.06                                                   | 0.0540                      | 0.0686                 | 0.0655               | 1.2695           | 1.2123         |
| 50          | 10.14       | 5.74        | 102.42                           | 1.05                                        | 1.75                                                   | 0.0528                      | 0.0722                 | 0.0674               | 1.3687           | 1.2777         |
| 55          | 10.14       | 5.60        | 82.59                            | 0.68                                        | 1.34                                                   | 0.0567                      | 0.0845                 | 0.0832               | 1.4906           | 1.4673         |
| 60          | 10.05       | 5.56        | 72.30                            | 0.52                                        | 1.09                                                   | 0.0584                      | 0.0906                 | 0.0886               | 1.6363           | 1.5165         |
| 65          | 10.10       | 5.52        | 64.76                            | 0.42                                        | 0.92                                                   | 0.0594                      | 0.107                  | 0.1032               | 1.8084           | 1.7381         |
| 70          | 10.16       | 5.64        | 69.03                            | 0.48                                        | 0.85                                                   | 0.0554                      | 0.111                  | 0.1038               | 2.0075           | 1.8728         |
| 75          | 10.16       | 5.65        | 64.26                            | 0.41                                        | 0.74                                                   | 0.0551                      | 0.123                  | 0.1166               | 2.2381           | 2.1147         |

Tableau C.3: Données du niveau de fissuration 18/28 ième

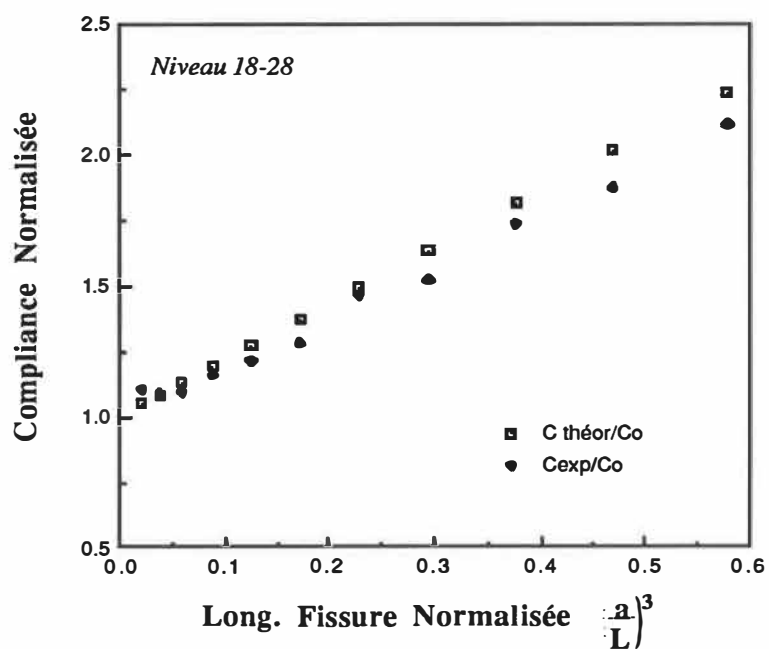
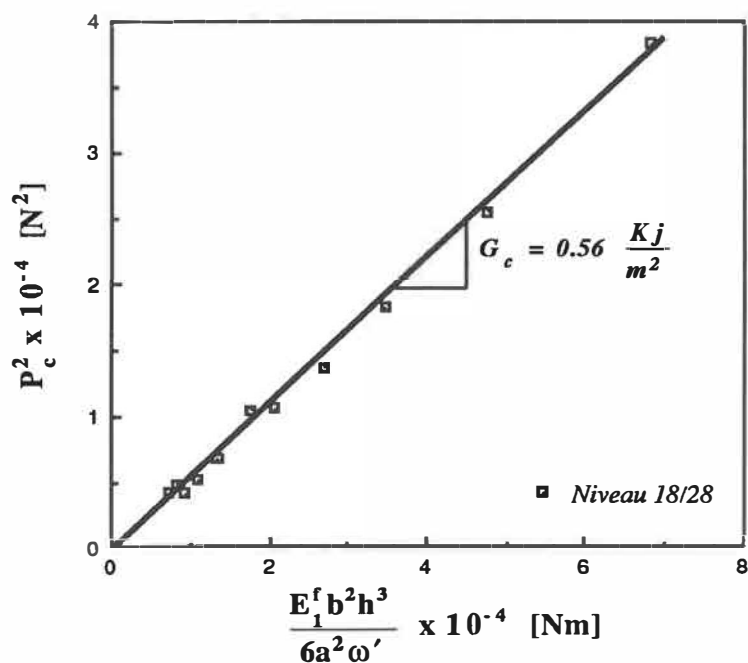


Figure C.5: Compliances théorique et expérimentales du niveau 18/28



Figures C.6 Détermination de  $G_c$  pour le niveau 18/28

|                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tableau C.4</b>                                                             |
| <b>Niveau du plan de fissuration: <math>Y=16/28</math></b>                     |
| <b>Module de Flexion <math>E_f^f : 30\,000\text{ MPa}</math></b>               |
| <b>Module de Cisaillement Transverse <math>G_{13} : 1122\text{ MPa}</math></b> |
| <b>Longueur du Porte-à-Faux: <math>90\text{ mm}</math></b>                     |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f^f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.10       | 5.32        | 162.33                           | 2.64                                        | 4.33                                                     | 0.0662                      | 0.0700                 | 0.0816               | 1.0580           | 1.2335         |
| 30          | 10.08       | 5.70        | 151.78                           | 2.30                                        | 3.76                                                     | 0.0542                      | 0.0595                 | 0.0600               | 0.0994           | 1.1078         |
| 35          | 9.96        | 5.48        | 124.42                           | 1.55                                        | 2.40                                                     | 0.0615                      | 0.0712                 | 0.0716               | 1.1580           | 1.1641         |
| 40          | 10.0        | 5.66        | 115.88                           | 1.34                                        | 2.04                                                     | 0.0557                      | 0.0688                 | 0.0675               | 1.2350           | 1.2112         |
| 45          | 10.10       | 5.68        | 106.09                           | 1.13                                        | 1.66                                                     | 0.0546                      | 0.0729                 | 0.0712               | 1.3342           | 1.3037         |
| 50          | 10.00       | 5.60        | 89.52                            | 0.801                                       | 1.27                                                     | 0.0575                      | 0.0839                 | 0.0875               | 1.4585           | 1.5219         |
| 55          | 10.06       | 5.74        | 78.47                            | 0.616                                       | 1.14                                                     | 0.0532                      | 0.0855                 | 0.0811               | 1.6089           | 1.5252         |
| 60          | 10.10       | 5.76        | 77.47                            | 0.600                                       | 0.98                                                     | 0.0524                      | 0.0938                 | 0.0884               | 1.7900           | 1.6862         |
| 65          | 10.00       | 5.74        | 69.94                            | 0.489                                       | 0.81                                                     | 0.0535                      | 0.1072                 | 0.1006               | 2.0043           | 1.8807         |
| 70          | 10.02       | 5.74        | 66.92                            | 0.448                                       | 0.70                                                     | 0.0534                      | 0.1203                 | 0.1120               | 2.2540           | 2.0980         |
| 75          | 10.16       | 5.74        | 61.65                            | 0.380                                       | 0.63                                                     | 0.0526                      | 0.1338                 | 0.1232               | 2.5421           | 2.3400         |

Tableau C.4: Données du niveau de fissuration 16/28 ième

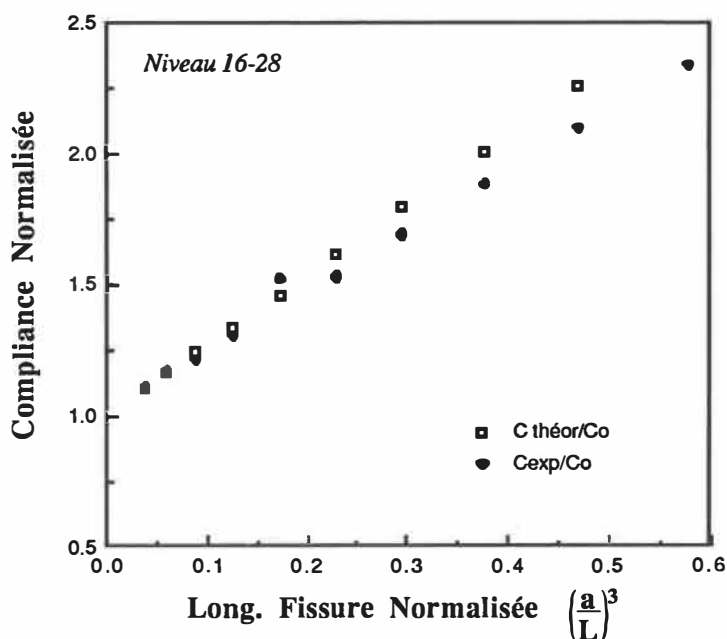


Figure C.7: Compliances théorique et expérimentales du niveau 16/28

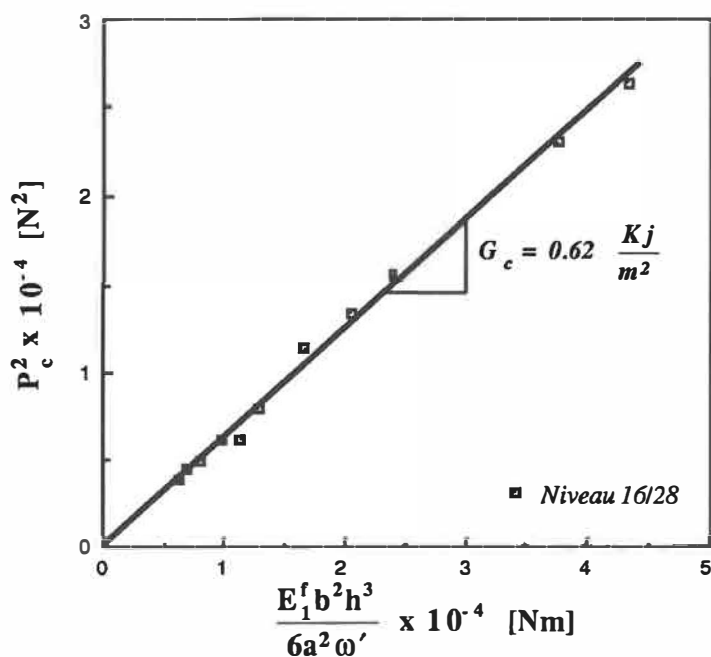


Figure C.8: Détermination de  $G_c$  pour le niveau 16/28

|                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tableau C.5</b>                                                      |
| <b>Niveau du plan de fissuration: <math>Y=14/28</math></b>              |
| <b>Module de Flexion <math>E_f</math> : 30 000 MPa</b>                  |
| <b>Module de Cisaillement Transverse <math>G_{13}</math> : 1122 MPa</b> |
| <b>Longueur du Porte-à-Faux: 90 mm</b>                                  |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f^f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.20       | 5.80        | 162.84                           | 2.65                                        | 3.76                                                     | 0.0509                      | 0.0563                 | 0.0554               | 1.1067           | 1.0890         |
| 30          | 10.20       | 5.80        | 145.13                           | 2.11                                        | 2.76                                                     | 0.0509                      | 0.0595                 | 0.0634               | 1.1694           | 1.2462         |
| 35          | 10.10       | 5.80        | 117.76                           | 1.39                                        | 2.07                                                     | 0.0514                      | 0.0644                 | 0.0657               | 1.2529           | 1.2788         |
| 40          | 10.10       | 5.74        | 109.79                           | 1.21                                        | 1.59                                                     | 0.053                       | 0.0720                 | 0.0664               | 1.3603           | 1.2537         |
| 45          | 10.10       | 5.74        | 94.54                            | 0.89                                        | 1.29                                                     | 0.053                       | 0.0791                 | 0.0742               | 1.4943           | 1.4010         |
| 50          | 10.06       | 5.65        | 81.28                            | 0.66                                        | 1.01                                                     | 0.0557                      | 0.0924                 | 0.0868               | 1.6587           | 1.5587         |
| 55          | 10.18       | 5.62        | 81.74                            | 0.67                                        | 0.85                                                     | 0.0559                      | 0.1037                 | 0.0975               | 1.8555           | 1.7444         |
| 60          | 10.14       | 5.60        | 64.31                            | 0.41                                        | 0.71                                                     | 0.0567                      | 0.1184                 | 0.1090               | 2.0879           | 1.9223         |
| 65          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 70          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 75          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |

Tableau C.5: Données du niveau de fissuration 14/28 ième

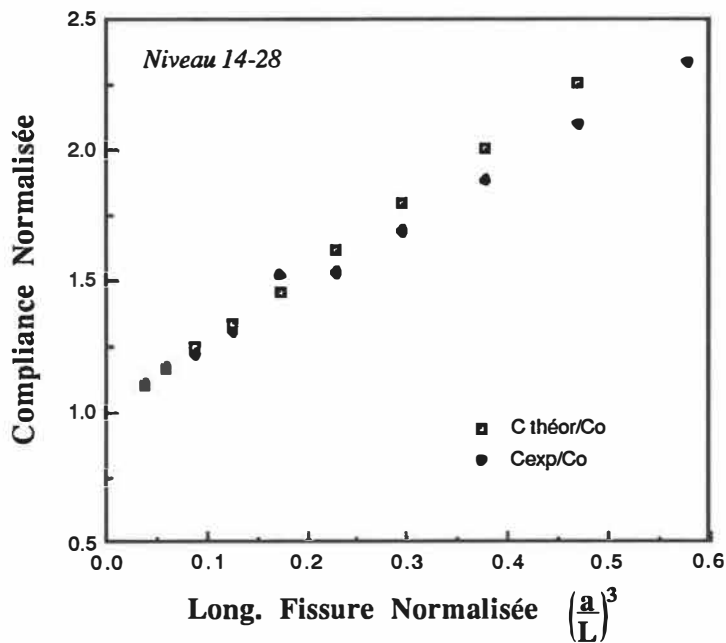


Figure C.9: Compliances théorique et expérimentales du niveau 14/28

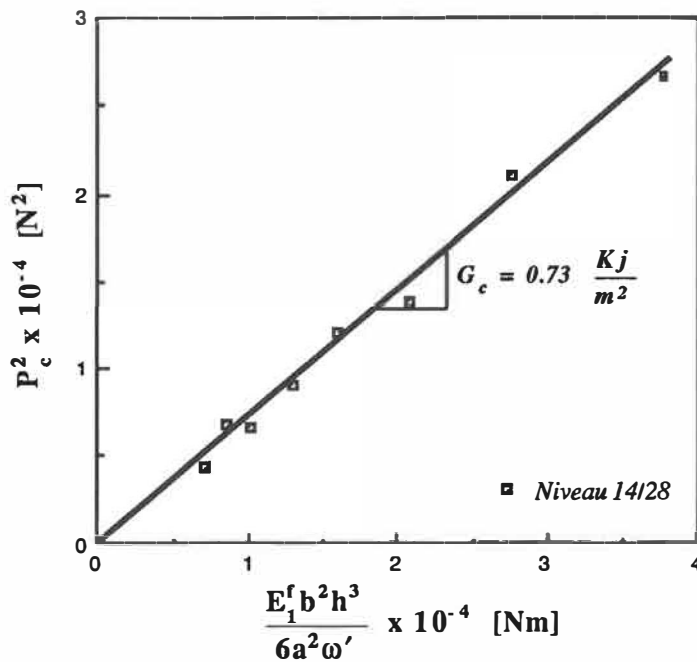


Figure C.10: Détermination de  $G$  pour le niveau 14/28

|                                                              |
|--------------------------------------------------------------|
| Tableau C.6                                                  |
| Niveau du plan de fissuration: $Y=12/28$                     |
| Module de Flexion $E_f^f : 30\,000\text{ MPa}$               |
| Module de Cisaillement Transverse $G_{13} : 1122\text{ MPa}$ |
| Longueur du Porte-à-Faux: 90 mm                              |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f^f b^2 h^3 / 6a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | 10.10       | 5.35        | 187.26                           | 3.51                                        | 4.50                                                     | 0.0651                      | 0.0688                 | 0.0734               | 1.0579           | 1.1280         |
| 30          | 10.06       | 5.50        | 172.19                           | 2.97                                        | 3.37                                                     | 0.0602                      | 0.0663                 | 0.0673               | 1.0997           | 1.1171         |
| 35          | 10.06       | 5.68        | 149.85                           | 2.25                                        | 2.73                                                     | 0.0548                      | 0.0635                 | 0.0609               | 1.1576           | 1.1107         |
| 40          | 10.06       | 5.70        | 129.26                           | 1.67                                        | 2.11                                                     | 0.0543                      | 0.0670                 | 0.0647               | 1.2349           | 1.1922         |
| 45          | 10.10       | 5.65        | 119.97                           | 1.44                                        | 1.64                                                     | 0.0555                      | 0.0740                 | 0.0707               | 1.3343           | 1.2747         |
| 50          | 10.08       | 5.58        | 105.16                           | 1.11                                        | 1.27                                                     | 0.0576                      | 0.0841                 | 0.0828               | 1.4586           | 1.4365         |
| 55          | 10.04       | 5.78        | 102.40                           | 1.05                                        | 1.16                                                     | 0.0522                      | 0.0840                 | 0.0827               | 1.6086           | 1.5840         |
| 60          | 10.05       | 5.78        | 88.84                            | 0.79                                        | 0.96                                                     | 0.0522                      | 0.0933                 | 0.0918               | 1.7898           | 1.7601         |
| 65          | 10.02       | 5.76        | 91.10                            | 0.83                                        | 0.82                                                     | 0.0528                      | 0.1059                 | 0.1012               | 2.0041           | 1.9150         |
| 70          | 9.92        | 5.76        | 80.81                            | 0.65                                        | 0.69                                                     | 0.0534                      | 0.1203                 | 0.1133               | 2.2537           | 2.1226         |
| 75          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                      | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |

Tableau C.6: Données du niveau de fissuration 12/28 ième

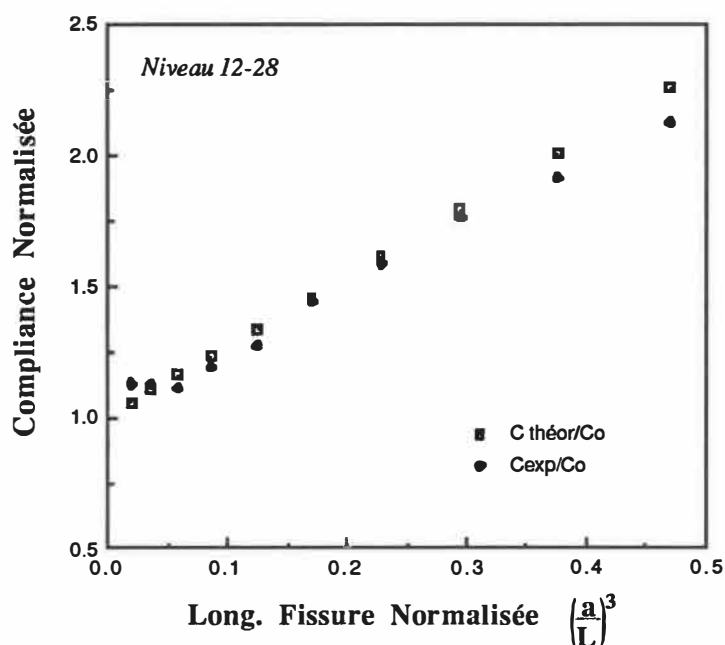


Figure C.11: Compliances théorique et expérimentales du niveau 12/28

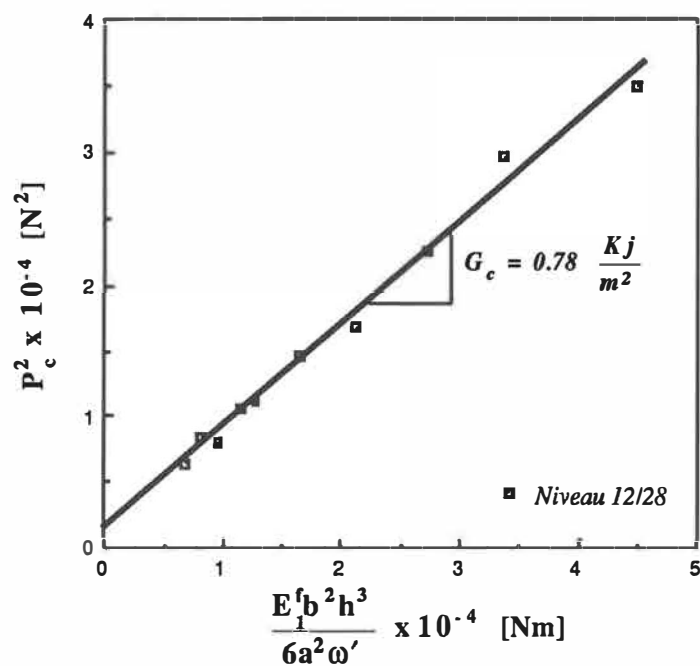


Figure C.12: Détermination de  $G$  pour le niveau 12/28

|                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tableau C.7</b>                                                     |
| <b>Niveau du plan de fissuration: <math>Y=6/28</math></b>              |
| <b>Module de Flexion <math>E_f</math>: 30 000 MPa</b>                  |
| <b>Module de Cisaillement Transverse <math>G_{f3}</math>: 1122 MPa</b> |
| <b>Longueur du Porte-à-Faux: 90 mm</b>                                 |

| $a$<br>[mm] | $b$<br>[mm] | $h$<br>[mm] | Charge à la<br>Rupture $P_c$ [N] | $P_c^2 \times 10^{-4}$<br>[N <sup>2</sup> ] | $E_f b^2 h^3 / 6 a^2 \omega' x \times 10^{-4}$<br>[Nmm] | $C_o$ à " $a$ "=0<br>[mm/N] | $C_{théor.}$<br>[mm/N] | $C_{exp.}$<br>[mm/N] | $C_{théor.}/C_o$ | $C_{exp.}/C_o$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------|----------------|
| 25          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                     | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 30          | 9.78        | 6.2         | 344.2                            | 11.85                                       | 10.83                                                   | 0.0485                      | 0.0504                 | 0.0484               | 1.0394           | 0.9975         |
| 35          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                     | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 40          | 9.72        | 6.12        | 271.9                            | 7.39                                        | 5.87                                                    | 0.0507                      | 0.0553                 | 0.0524               | 1.0900           | 1.0335         |
| 45          | 9.82        | 6.02        | 237.0                            | 5.62                                        | 4.52                                                    | 0.0527                      | 0.0593                 | 0.0563               | 1.1269           | 1.0693         |
| 50          | 9.84        | 6.24        | 230.9                            | 5.33                                        | 4.10                                                    | 0.0473                      | 0.0555                 | 0.0519               | 1.1727           | 1.0965         |
| 55          | 9.76        | 6.30        | 213.5                            | 4.56                                        | 3.44                                                    | 0.0464                      | 0.0570                 | 0.0538               | 1.2284           | 1.1593         |
| 60          | 9.82        | 6.42        | 202.9                            | 4.12                                        | 3.10                                                    | 0.0437                      | 0.0565                 | 0.0420               | 1.2950           | 0.9619         |
| 65          | 9.82        | 6.42        | 197.0                            | 3.88                                        | 2.64                                                    | 0.0437                      | 0.0600                 | 0.0567               | 1.3737           | 1.2985         |
| 70          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                     | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |
| 75          | Nil         | Nil         | Nil                              | Nil                                         | Nil                                                     | Nil                         | Nil                    | Nil                  | Nil              | Nil            |

Tableau C.7: Données du niveau de fissuration 6/28 <sup>ième</sup>

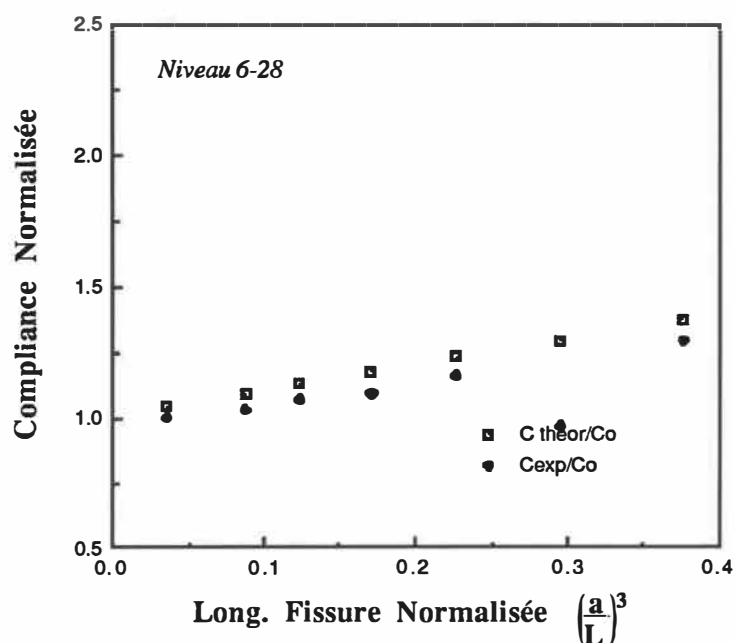


Figure C.13: Compliances théorique et expérimentales du niveau 6/28

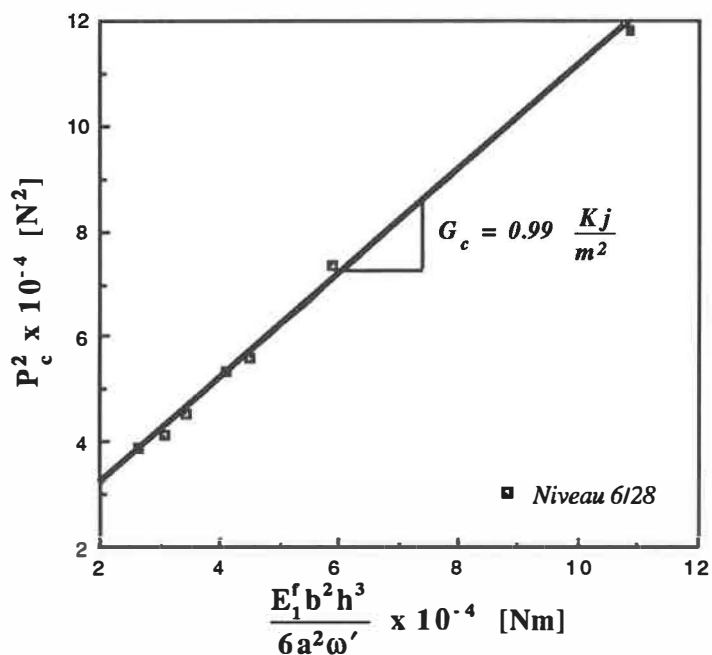


Figure C.14: Détermination de  $G$  pour le niveau 6/28

## ANNEXE D

---

### Calcul des modules de flexion et de cisaillement transverse

La détermination des modules de flexion et de cisaillement transverse a été faite à partir d'échantillons de configuration 0° unidirectionnel et /ou 0-90 alternés bidirectionnels. Leur configuration ainsi que leur épaisseur implique la condition de quasi-homogénéité déjà énoncé à la page 51. Cette condition permet de simplifier considérablement les calculs puisque le module de flexion d'une configuration quasi-homogène selon un axe donné devient équivalent au module de traction selon le même axe ( $E_i^f \equiv E_i^T$ ). De cette relation, le module de traction peut être déterminé par un simple test de flexion éliminant ainsi les manipulations délicates qu'entraînent l'utilisation des jauges de déformations. Lors du calcul du module de flexion, il est essentiel de tenir compte de la déflexion par cisaillement transverse. L'omission de ce terme peut induire une erreur de plus de 20% si le rapport  $L/h$  est de moins de 16. On remarque que de nombreux fournisseurs de matériaux composites nous donne, dans la plupart des cas, un module de flexion différent du module de tension. La compagnie 3M, par exemple, utilise la norme ASTM D-790 pour le calcul du module de flexion du pré-imprégné Scotchply 1002. Or, cette norme ne considère pas la déformation par cisaillement mais suggère par contre de choisir un rapport  $L/h$  suffisamment grand pour diminuer l'erreur.

La méthode qui a été choisie pour déterminer les modules  $E_i^f$  et  $G_{13}$  ne fait pas partie des normes ASTM . Toutefois, elle tient compte des déformations par cisaillement.

De l'équation 3.22 de la page 31 pour un échantillon non-fissuré ( $a=0$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$ ) on obtient [21]:

$$\frac{Cbh}{L} = \frac{4L^2}{E^f h^2} + \frac{f_s}{G_{13}} \quad (D.1)$$

où  $f_s = 6/5$  et où les modules  $E^f$  et  $G_{13}$  sont directement disponibles à partir de la pente et de l'ordonnée à l'origine de l'équation D.1.

Afin de minimiser la dispersion des résultats, il est préférable de faire entre 8 et 10 essais pour différentes longueurs de porte-à-faux. La compliance  $C$  est obtenue expérimentalement et équivaut à l'inverse de la pente sur un graphique de Force/Déplacements.

Les modules de flexion et de cisaillement transverse ont été calculés directement à partir des tableaux A.1 à A.3 pour une configuration quasi-homogène 0-90 degrés, un unidirectionnel 0 degré et un unidirectionnel 90 degrés de verre/époxy respectivement.

**Tableau D.1** *Quasi-Homogène 0-90 degrés 28 plis*

| $L$ [mm] | $C$ [mm/N] | $Cbh/L \times 10^2$ [mm <sup>2</sup> /N] | $L^2 \times 10^{-3}$ [mm <sup>2</sup> ] |
|----------|------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 90       | 0.0531     | 3.36                                     | 8.10                                    |
| 80       | 0.0370     | 2.63                                     | 6.40                                    |
| 70       | 0.0249     | 2.02                                     | 4.90                                    |
| 60       | 0.0165     | 1.57                                     | 3.60                                    |
| 55       | 0.0132     | 1.37                                     | 3.03                                    |
| 50       | 0.0104     | 1.19                                     | 2.50                                    |
| 40       | 0.0054     | 0.76                                     | 1.60                                    |
| 30       | 0.0026     | 0.49                                     | 0.90                                    |
| 20       | 0.0010     | 0.28                                     | 0.40                                    |
| 10       | 0.00024    | 0.14                                     | 0.10                                    |

*Tableau D.1: Valeurs de compliance d'un Quasi-Homogène 0-90 degrés 28 plis*

**Module de Flexion  $E_f$  déduit du graphique de la figure D.1:** 30000 MPa

**Module de cisaillement  $G_{13}$  déduit du graph. de la fig. D.1:** 898 MPa

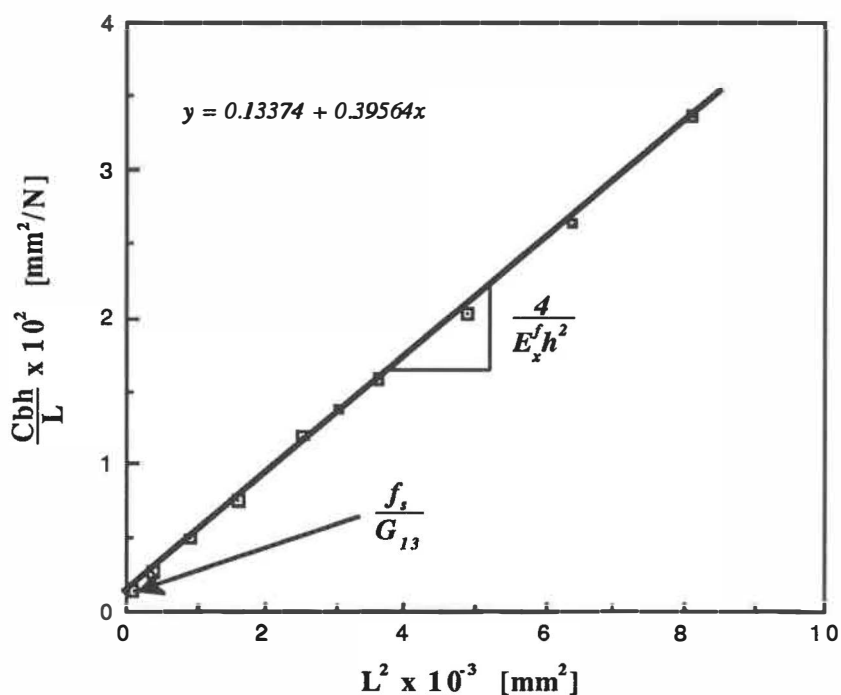


Figure D.1: Détermination des modules de flexion et de cisaillement du 0-90 degrés

Tableau D.2 Unidirectionnel 0 degrés 10 plis

| $L \text{ [mm]}$ | $C \text{ [mm/N]}$ | $\frac{Cbh}{L} \times 10^2 \text{ [mm}^2/\text{N]}$ | $L^2 \times 10^{-3} \text{ [mm}^2]$ |
|------------------|--------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 90               | 0.7710             | 17.13                                               | 8.10                                |
| 80               | 0.5368             | 13.42                                               | 6.40                                |
| 70               | 0.3608             | 10.31                                               | 4.90                                |
| 60               | 0.2304             | 7.68                                                | 3.60                                |
| 55               | 0.1786             | 6.49                                                | 3.03                                |
| 50               | 0.1357             | 5.43                                                | 2.50                                |
| 40               | 0.0721             | 3.60                                                | 1.60                                |

|    |        |      |      |
|----|--------|------|------|
| 30 | 0.0316 | 2.11 | 0.90 |
| 20 | 0.0106 | 1.06 | 0.40 |
| 10 | 0.0018 | 0.37 | 0.10 |

Tableau D.2: Valeurs de compliance d'un unidirectionnel 0 degré 10 plis

Module de Flexion  $E_f$  déduit du graphique de la figure D.2: 48200 MPa

Module de cisaillement  $G_{13}$  déduit du graph. de la fig. D.2: 562 MPa

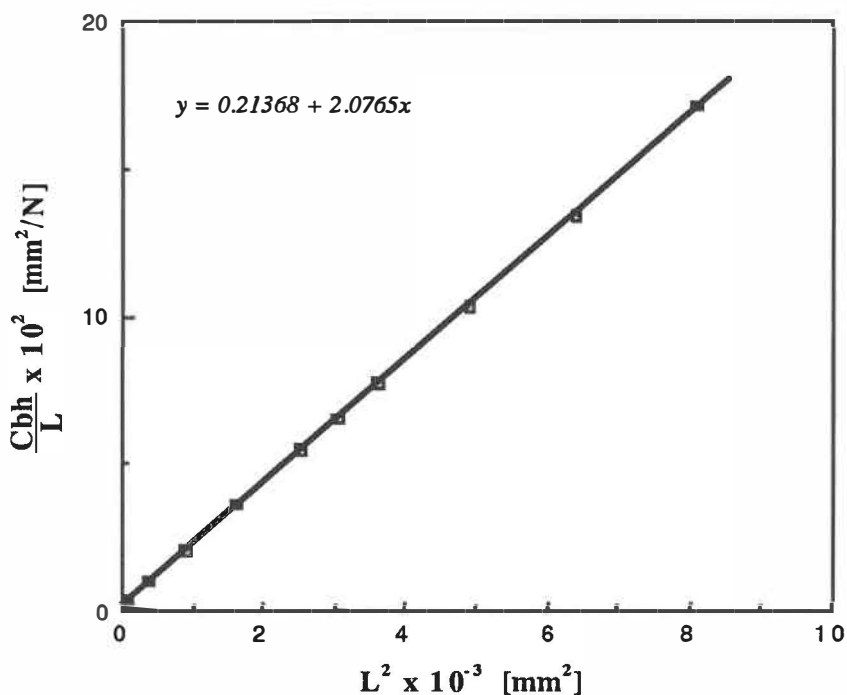


Figure D.2: Détermination des modules de flexion et de cisaillement du 0 degré

Tableau D.3 Unidirectionnel 90 degrés 10 plis

| $L$ [mm] | $C$ [mm/N] | $C_{bh}/L \times 10^2$ [mm <sup>2</sup> /N] | $L^2 \times 10^{-3}$ [mm <sup>2</sup> ] |
|----------|------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 55       | 0.5263     | 19.33                                       | 3.03                                    |
| 50       | 0.3968     | 16.03                                       | 2.50                                    |
| 45       | 0.2959     | 13.28                                       | 2.03                                    |

|    |        |       |      |
|----|--------|-------|------|
| 40 | 0.2079 | 10.50 | 1.60 |
| 35 | 0.1458 | 8.41  | 1.23 |
| 30 | 0.0916 | 6.17  | 0.9  |
| 25 | 0.0522 | 4.22  | 0.63 |
| 20 | 0.0290 | 2.92  | 0.4  |

Tableau D.3: Valeurs de compliance d'un unidirectionnel 90 degrés 10 plis

Module de Flexion  $E_f$  déduit du graphique de la figure D.3: 16000 MPa

Module de cisaillement  $G_{13}$  déduit du graph. de la fig. D.3: 242 MPa

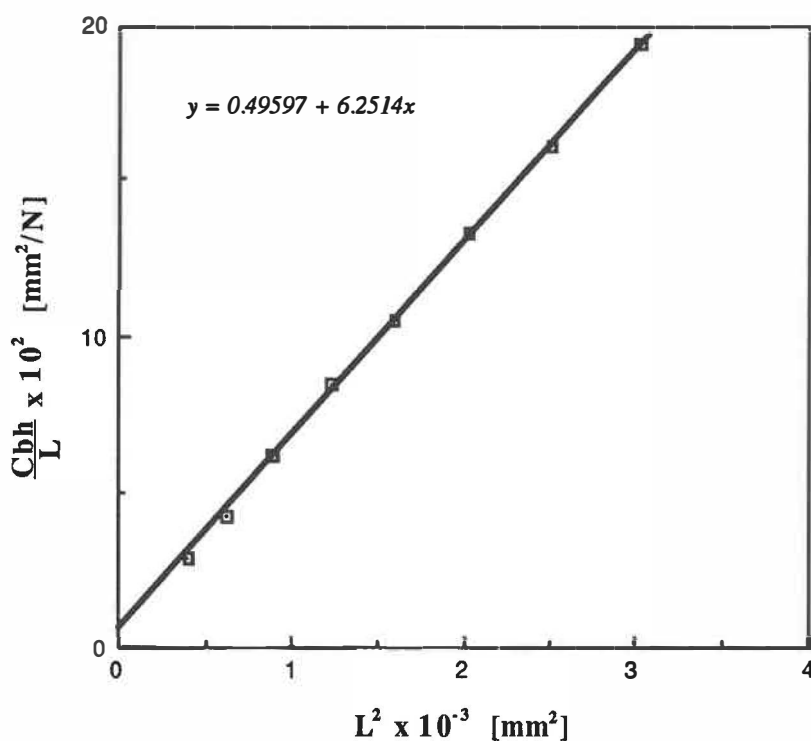


Figure D.3: Détermination des modules de flexion et de cisaillement du 90 degrés

## ANNEXE E

---

### Calcul du facteur d'intensité de contraintes par éléments finis

Les facteurs d'intensité de contraintes ont été déterminés à partir des valeurs des champs de contraintes obtenus par éléments finis. Le maillage a été dessiné en trois étapes (figures E.1, E.2 et E.3) où chaque phase correspond à une zone isolée de la phase précédente avec les mêmes déplacements imposés. Ce cheminement s'est avéré nécessaire afin de respecter la proportion minimale de 1/100<sup>ième</sup> entre la plus petite longueur du plus petit élément et la plus grande longueur du plus grand élément.

Des éléments isoparamétriques rectangulaires à 8 noeuds ont été utilisés pour les 2 premiers maillages et les mêmes éléments ont été mis sous forme de cercles concentriques (fig.E.3) au 3<sup>ième</sup> maillage pour obtenir des éléments de Barsoum [70,71] au voisinage du front de fissure (fig. E.4). Les éléments de Barsoum offrent la particularité de créer une singularité de contrainte si 3 des 8 noeuds sont joints en un même point et si les noeuds intermédiaires sur les côtés sont placés au quart de la distance du côté de l'élément par rapport au bout de la fissure. Ce type d'élément a été choisi faute de disponibilité d'un élément singulier [71]. L'approximation est par contre excellente et a été vérifiée avec des cas bien connus en mode I.

Les modèles des figures E.1 @ E.3 ont été considérés homogènes anisotropes rectilignes. Les modules de rigidités dans les directions globales 1 et 2 sont les mêmes et correspondent aux valeurs trouvés expérimentalement à l'annexe D de la page 93. Le module dans la direction 3 a été approximé par la valeur du module de la résine époxy

CE9000 sans fibres car les fibres jouent un faible rôle lorsqu'elles sont perpendiculaires aux forces appliquées.

Toutes les dimensions du modèle ont été mises sous forme de variables pour plus de versatilité. La charge critique appliquée, pour un niveau de fissuration donné, a été tirée des tableaux de l'annexe C. Les facteurs de concentrations de contraintes  $k_i$  ont donc été calculés à partir des charges critiques expérimentales.

### Méthode Pour Déterminer $k_i$

La méthode des *contraintes* utilisée pour déterminer les facteurs  $k_i$  des matériaux anisotropes est similaire à celle présentée par Broek [39] pour les matériaux isotropes. Les équations des champs de contraintes au front de fissure relatives aux facteurs d'intensités de contraintes  $k_1$  et  $k_2$  d'un corps anisotrope rectiligne sont les suivantes [11]:

*Mode I*

$$a) \quad \sigma_x = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$b) \quad \sigma_y = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$c) \quad \tau_{xy} = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right]$$

(E.1)

Mode II

$$d) \quad \sigma_x = \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$e) \quad \sigma_y = \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]$$

$$f) \quad \tau_{xy} = \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right]$$

où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les contraintes locales en extrémité de fissure,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des termes complexes dépendants des propriétés du matériau [6]. et  $\operatorname{Re}$ , la partie réelle du nombre complexe entre crochets. Le terme de droite de chaque équation est le premier d'une série dont les termes non-singuliers ont été omis; les équations sont donc valides uniquement pour des distances "r" du bout de fissure extrêmement petites.

Afin de simplifier les calculs, toutes les valeurs des contraintes ont été prises sur l'axe à  $\theta = 0^\circ$ , soit le même axe que celui du plan de fissuration. Ainsi, pour la détermination des facteurs  $k_1$  et  $k_2$  à partir des contraintes d'ouverture et de cisaillement on utilise:

$$\sigma_y = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = \frac{k_2}{\sqrt{2r}} \quad (\text{E.2})$$

En réarrangeant les équations en E.2 on obtient:

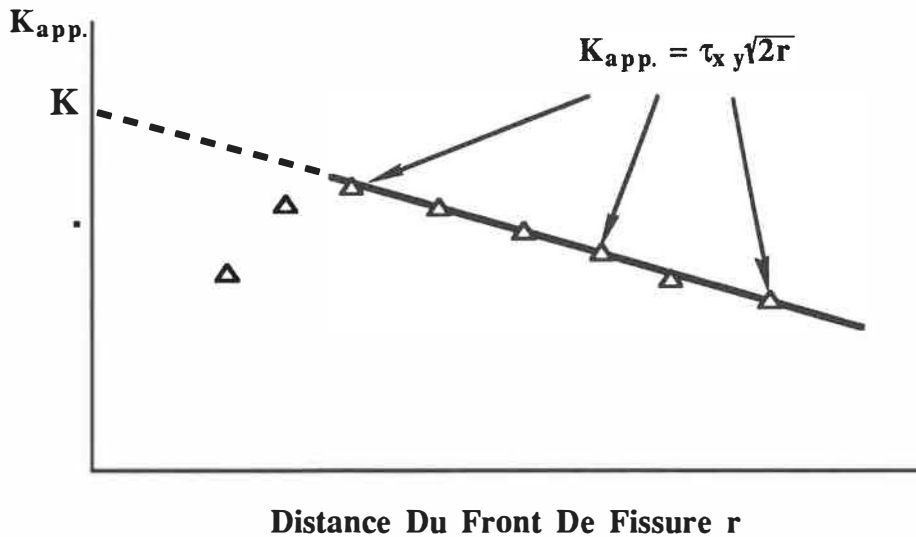
$$k_1 = \sigma_y \sqrt{2r} \quad \text{et} \quad k_2 = \tau_{xy} \sqrt{2r} \quad (\text{E.3})$$

Puisque la dimension des éléments au front de fissure est finie et que l'erreur sur la contrainte augmente pour des longueurs de  $r$  de plus en plus petites, chaque valeur de  $k$  calculée à une distance  $r$  donnée est une approximation qu'on appelle  $k_{\text{apparent}}$ . La valeur réelle est obtenue en extrapolant vers  $r \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$k_{2 \text{ app.}} = \tau_{xy} \sqrt{2r} = A + Br$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \sqrt{2r} = A = k_2$$

où sous forme graphique:



La même méthode s'applique pour la détermination du facteur d'intensité de contraintes  $k_1$ . Les calculs par éléments finis ont été exécutés sur micro ordinateur de type IBM 286 avec le code FEMAC (Finite Element for Materials And Composites) développé par l'Institut de Génie des Matériaux, division du CNRC.

Deux exemples sont présentés au figures E.5 et E.6 illustrant la détermination des facteurs  $k_1$  et  $k_2$  pour le niveau 22/28<sup>ième</sup> du plan de fissuration. Les autres résultats, obtenus par extrapolation, sont présentés au tableau E.1 pour 7 niveaux de fissuration.

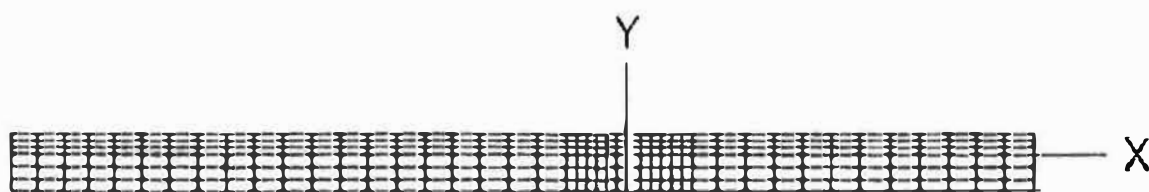


*Figure E.1: Première étape - maillage grossier*

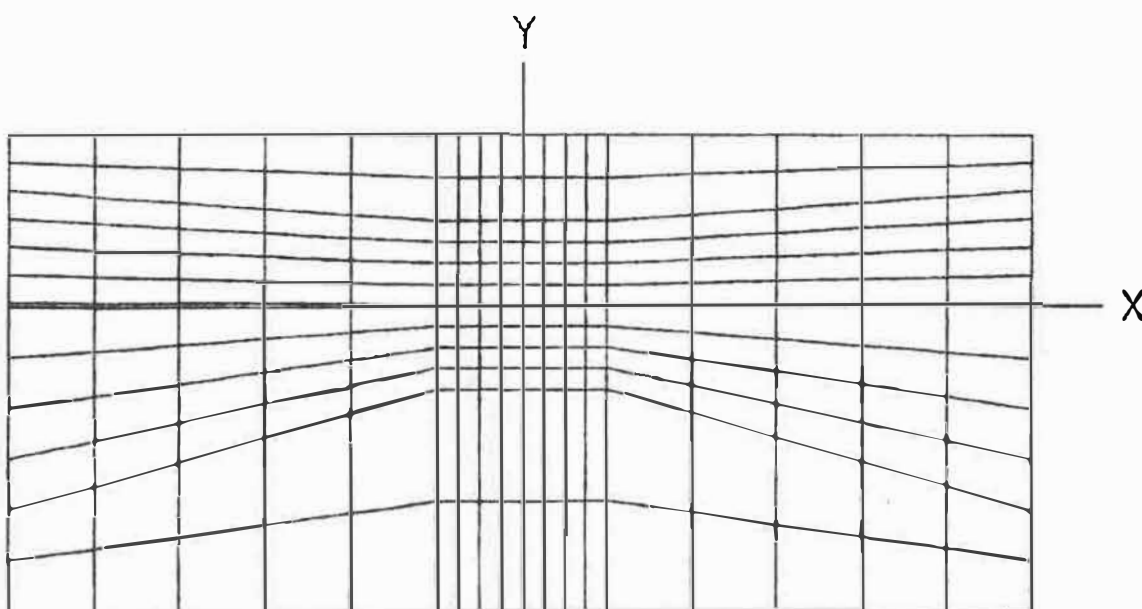


*Figure E.2: Deuxième étape - Raffinement d'une zone autour du front de fissure*

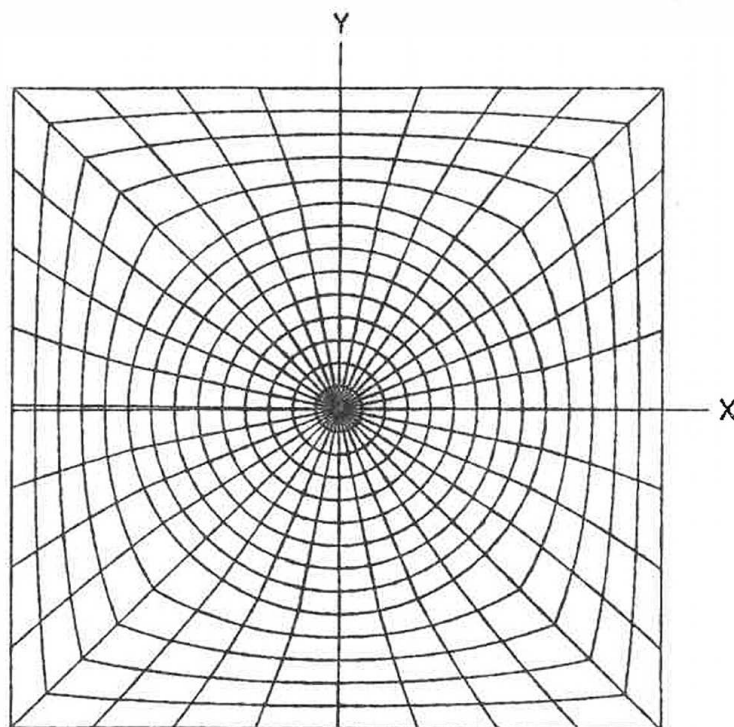


*Figure E.3. Troisième étape - Raffinement par cercles concentriques d'une zone de  $1\text{ mm}^2$*

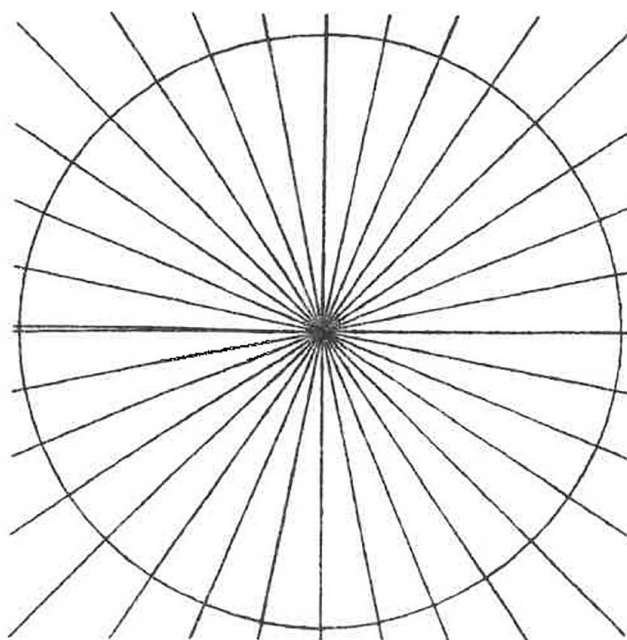


*Figure E.4: Eléments de Barsown au front de fissure*

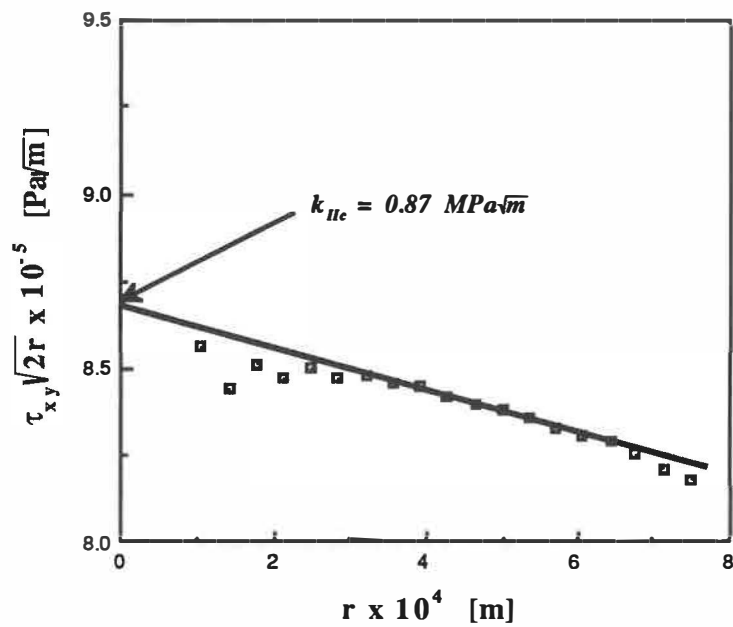


Figure E.5: Détermination du facteur  $k_{II}$  par extrapolation - Niveau 22/28

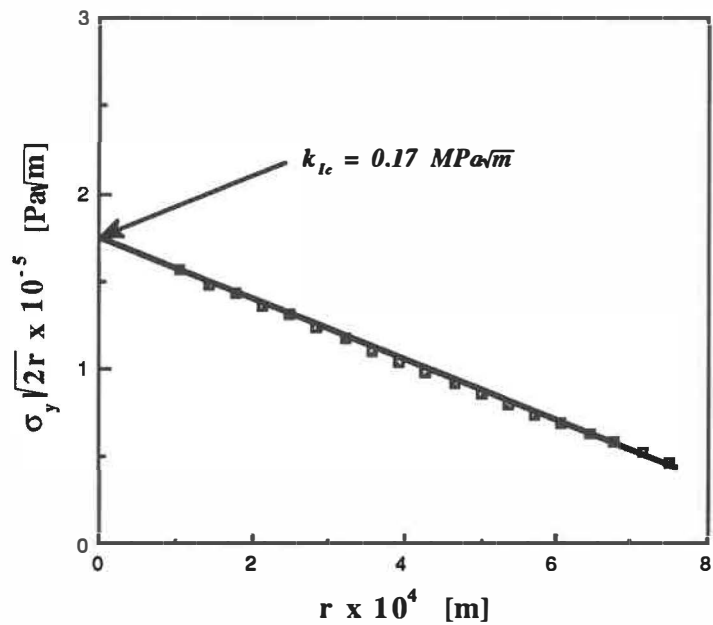


Figure E.6: Détermination du facteur  $k_I$  par extrapolation - Niveau 22/28

ECOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL



3 9334 00208890 2