



Titre: Synthèse dynamique de modèles statistiques à base physique des charges électriques dans les réseaux
Title:

Auteur: Sofiène Kamoun
Author:

Date: 1989

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Kamoun, S. (1989). Synthèse dynamique de modèles statistiques à base physique des charges électriques dans les réseaux [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/58244/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/58244/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche:
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SYNTHÈSE DYNAMIQUE DE MODÈLES STATISTIQUES A BASE PHYSIQUE
DES CHARGES ÉLECTRIQUES DANS LES RÉSEAUX

par

Sofiène KAMOUN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M. Sc. A.)

Décembre 1989

©Sofiène Kamoun 1989



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Canadian Theses Service Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58183-2

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

SYNTHÈSE DYNAMIQUE DE MODÈLES STATISTIQUES A BASE PHYSIQUE
DES CHARGES ÉLECTRIQUES DANS LES RÉSEAUX

Présenté par: SOFIÈNE KAMOUN

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Romano M. De Santis , Ph. D., président-rapporteur,

M. Roland Malhamé , Ph. D., directeur de thèse,

M. Haic Hoc Hoang , Ph. D., membre du jury.

A la mémoire de ma mère ...

A ma femme, mon père et mes soeurs ...

Sommaire

La gestion des charges électriques sur un réseau électrique se fait souvent à l'aide d'un contrôle direct sous la forme d'interruptions intermittentes de certaines charges. A cause de leur capacité de stockage d'énergie, les chauffe-espace, chauffe-eau électriques, de même que les conditionneurs d'air ont été par le passé les charges les plus souvent choisies dans cet objectif. Dans le contexte de cette application, les modèles à base physique sont ceux qui décrivent le plus adéquatement le comportement des charges.

L'approche de modélisation hiérarchique proposée par Chong et Debs, et exploitée par Malhamé nous a permis de nous ramener à des modèles des charges élémentaires qui se distinguent par leur simplicité et leur capacité de capturer l'influence des facteurs climatiques et humains. Le présent travail de recherche résout l'identification des modèles élémentaires de charges de chauffage (dont les paramètres permettent d'obtenir le modèle global) sous la contrainte de la minimisation des mesures requises. Ce problème d'identification se distingue des cas classiques par la nature des mesures et celles des modèles. Nous sommes en présence de modèles **stochastiques à structure variable** que l'on doit identifier à partir de mesures disponibles, à des **→ intervalles de temps non réguliers, et non décrits explicitement par le modèle**. Dans le cas particulier des charges résidentielles de chauffage, les mesures sont restreintes aux durées de commutation des thermostats, et à la température ambiante. Nous distinguons de plus deux classes de paramètres: ceux qui caractéri-

sent la composante déterministe du modèle et ceux qui caractérisent sa composante stochastique.

Les algorithmes que nous avons développés permettent, outre l'estimation des paramètres de la composante déterministe du modèle, de reconstruire la distribution du bruit qui constitue un paramètre clé du système. Alors que la méthode des moindres carrés adaptée au système à structure variable nous permet d'estimer uniquement les paramètres de la composante déterministe de notre modèle, la méthode du maximum vraisemblance permet l'identification complète et selon un schéma stable. Finalement, à partir d'une analyse théorique des performances de la méthode du maximum de vraisemblance, nous développons un outil analytique utile en vue de comprendre la dynamique de ces estimateurs et d'anticiper les temps de convergence requis. Cet outil nous permet de conclure que l'approche du maximum de vraisemblance permet également de suivre les variations dynamiques de la charge à l'intérieur de limites raisonnables.

Abstract

In order to achieve peak load shaving and to force a more uniform load demand curve, several utilities involved with load management have chosen the intermittent direct device control option. The particular loads aimed in this case, are water heaters and electric space heating or cooling loads, because they are associated with energy storage. In this context, the physically-based load models were found to be those which describe adequately the controlled load behavior.

The bottom up hierarchical load modeling methodology proposed by Chong and Debs and exploited by Malhamé, avoids the widely spread models complexity while presenting elementary load models characterized by their simplicity and ability to capture the weather and human influence. Our contribution consists in solving the elementary heating load models identification, while minimizing data requirements. The type of measurements and models involved in this identification problem make it distinct from more classical situations. Indeed, we are dealing with **stochastic variable structure models** that have to be identified from measurements available at **irregular time intervals**, and which are **not explicitly related to the model**. In the particular case of electric space heating loads, these measurements are limited to the ambient temperature and the sequence of thermostat "ON" and "OFF" durations. The parameters to be estimated can be classified into parameters that either characterize the deterministic component of the model, or its stochastic component.

Beside an estimation of the parameters of the deterministic component of the load, the algorithms we develop permit a reconstruction of the system noise distribution, the noise being very influential in the load dynamics. While the least squares method yields the parameters associated with the deterministic component of the model, the maximum likelihood approach allows a complete identification according to a stable scheme. Finally, based on a theoretical analysis of the maximum likelihood method performances, we develop tools useful in understanding the estimators dynamics and anticipating the required time for ensured convergence. In addition, these tools allow us to conclude that the maximum likelihood approach permits a tracking of time-varying models as long as the parameter variations are reasonably slow.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mon directeur de recherches, le professeur Roland Malhamé, pour son grand support moral et technique, pour la confiance qu'il m'a témoignée, pour tout le temps qu'il a consacré à cette recherche, ainsi que pour le support financier qu'il m'a accordé. Je tiens enfin à lui exprimer ma gratitude pour sa patience à mon égard et pour m'avoir fortement aidé à déposer à temps ce mémoire.

Je remercie aussi les membres du jury, les professeurs Romano M. De Santis et Haic Hoc Hoang pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire, ainsi que pour l'effort particulier qu'ils ont fourni à mon égard.

Je remercie de plus le Professeur Denis Dochain de l'Université Catholique de Louvain pour son aide au début de ce travail de recherche.

J'exprime aussi mes remerciements à Louis Pierre Guillaume, Djamal Bouarab et Pierre Gauthier pour leur précieuse aide, aux étudiants et techniciens du laboratoire de robotique pour leur agréable soutien.

Je tiens aussi à exprimer ma grande reconnaissance à mes amis pour leur grand support moral à mes moments les plus difficiles.

Enfin ma plus grande gratitude va à ma femme pour le support et la motivation qu'elle ne cesse de me donner, et à ma famille qui m'a tant supporté et encouragé et à qui je dois mes plus grands acquis.

Table des matières

Sommaire	v
Abstract	vii
Remerciements	ix
Liste des figures	xv
Introduction	1
1 Revue bibliographique	7
1.1 Modèles de la pointe de demande	8
1.2 Modèles de la forme de la demande	9
1.2.1 Modèles de la distribution journalière	9
1.2.1.1 Approche temporelle	9
1.2.1.2 Décomposition spectrale	11
1.2.2 Modèles dynamiques	11
1.2.2.1 Modèles ARMA	12
1.2.2.2 Modèles d'état	14
1.2.3 Modèles à base physique	17
1.2.3.1 Exemple	18
1.2.4 Modèles mixtes	22
1.2.4.1 Modélisation de la composante indépendante	23

TABLE DES MATIÈRES

xi

1.2.4.2	Modélisation de la composante climatique	25
1.2.4.3	Estimation des paramètres	27
1.3	Conclusion	28
2	Modèle mathématique des charges élémentaires de chauffage ou de refroidissement	30
2.1	Méthodologie globale de modélisation	31
2.1.1	Hiérarchie de modélisation	31
2.1.2	Méthodologie	32
2.1.2.1	Modélisation des composantes élémentaires	32
2.1.2.2	Classification des charges en groupes "homogènes"	32
2.1.2.3	Collecte des données	32
2.1.2.4	Aggrégation des charges élémentaires	34
2.1.2.5	Validation des modèles	34
2.2	Représentation des charges élémentaires	34
2.2.1	Structure générale de modèles de charges élémentaires	35
2.3	Modèles des charges chauffantes (ou de refroidissement)	38
2.4	Conclusion	43
3	Méthode des moindres carrés	44
3.1	Relation entre paramètres et mesures	44
3.2	Formulation générale de l'algorithme	47
3.3	L'algorithme d'identification	50
3.4	Système variant dans le temps	51
3.5	Estimation des paramètres normalisés	52
3.6	Simulations	53
3.6.1	Cas du système invariant	53
3.6.1.1	$\sigma^2 = 0.04$	53
3.6.1.2	$\sigma^2 = 0.16$ et $\sigma^2 = 10^{-4}$	55

TABLE DES MATIÈRES

xii

3.7	Cas du système variant dans le temps	57
3.8	Conclusion	60
4	Méthode du maximum de vraisemblance	61
4.1	Densités de probabilité des durées T_{on} et T_{off}	62
4.2	Construction de la fonction de vraisemblance	63
4.2.1	Approche des fonctions de vraisemblance séparées	63
4.2.2	Fonction de vraisemblance globale	65
4.3	Formulation des estimateurs	66
4.3.1	Maximum de vraisemblance exact	66
4.3.1.1	Expressions analytiques des estimateurs optimaux de r , c et σ^2	66
4.3.1.2	Calcul des estimés de r , c et σ^2	68
4.3.1.3	Expressions analytiques des estimateurs optimaux de a , R et σ^2	71
4.3.1.4	Calcul des estimés de a , R et σ^2	74
4.3.2	Méthode du maximum de vraisemblance récursif de Newton	78
4.3.2.1	Formulation de l'algorithme	78
4.3.2.2	Initialisation	82
4.3.3	Méthode du maximum de vraisemblance récursif de Newton avec projection	83
4.3.4	Généralisation au cas variant dans le temps	83
4.4	Simulations	84
4.4.1	Cas du système invariant	84
4.4.1.1	Méthode du maximum de vraisemblance exact (M.V.E)	85
4.4.1.2	Maximum de vraisemblance exact versus semi-récursif (M.V.S.R)	91
4.4.1.3	Maximum de vraisemblance récursif de Newton	91
4.4.1.4	Maximum de vraisemblance semi-récursif versus récursif	99

4.4.2	Cas du système variant dans le temps	99
4.5	Conclusion	104
5	Étude théorique de la convergence du maximum de vraisemblance	105
5.1	Préliminaires	106
5.1.1	Calcul des moments de T_{on} et T_{off}	106
5.1.2	Calcul des moments de $\frac{1}{T_{on}}$ et $\frac{1}{T_{off}}$	108
5.1.3	Calcul des moments de $\sum_{i=1}^N T_{on}(i)$ et $\sum_{i=1}^N T_{off}(i)$	110
5.1.4	Calcul des moments de $\frac{1}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)}$ et $\frac{1}{\sum_{i=1}^N T_{off}(i)}$	112
5.2	Evaluation des espérances des estimateurs	115
5.3	Calcul de la matrice de covariance de l'estimateur	117
5.3.1	Calcul des covariances marginales	118
5.3.2	Calcul des covariances croisées	120
5.4	Estimation du temps de convergence	121
5.4.1	Principe	121
5.4.2	Résultats théoriques	122
5.4.3	Résultats pratiques	124
5.4.4	Analyse de l'influence du point d'opération	126
5.4.4.1	Influence de la variance	126
5.4.4.2	Effet de a et R	129
5.4.5	Résultats pratiques	132
5.5	Analyse de l'interaction des estimateurs	136
5.5.1	Principe	136
5.5.2	Courbes théoriques	136
5.5.3	Influence du point d'opération	139
5.6	Conclusion	143
	Conclusion	145
	Bibliographie	149

Annexe A: Calculs d'espérances mathématiques	152
A.1 Calcul de $E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right]$	152
A.2 Calcul de $E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right]$	153
A.3 Calcul de $E \left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^N T_{on}(j) \right)^4} \sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right]$	154
A.4 Calcul de $E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^4}{4T_{on}(i)^2} \right]$	156
A.5 Calcul de $E \left[\left(\sigma_{opt}^2 \right)^2 \right]$	158
A.6 Calcul de $E \left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right) \right]$	159
Annexe B: Principe de la simulation	161

Liste des figures

1.1	Modèle dynamique de la charge due à un conditionneur d'air	26
2.1	Représentation schématique de la procédure de synthèse des modèles des charges	33
2.2	Diagramme fonctionnel du modèle de la charge élémentaire	36
2.3	Densités de probabilité hybrides de la température	43
3.1	Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.04$	54
3.2	Estimé de R par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.04$	54
3.3	Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.16$	55
3.4	Estimé de R par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.16$	55
3.5	Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 10^{-4}$	56
3.6	Estimé de R par les moindres carrés, $\sigma^2 = 10^{-4}$	56
3.7	Estimé de a suite à une variation de X_a à $N = 25$	58
3.8	Estimé de R suite à une variation de X_a à $N = 25$	58
3.9	Estimé adaptatif de a ; $a_{in} = 0.015, a_{fin} = 0.03$ à $N = 25$	59
3.10	Estimé adaptatif de R ; $R_{in} = 0.3, R_{fin} = 0.6$ à $N = 25$	59
4.1	Sensibilité de $\hat{R}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$	76
4.2	Rapport des sensibilité de $\hat{R}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$	76
4.3	Sensibilité de $\hat{a}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$	77
4.4	Rapport des sensibilité de $\hat{a}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$	77
4.5	Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$	85

4.6	Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$	86
4.7	Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$	87
4.8	Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$	87
4.9	Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$	88
4.10	Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$	88
4.11	Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$	89
4.12	Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$	89
4.13	Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$	90
4.14	Estimé de a par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$	90
4.15	Estimé de R par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$	92
4.16	Estimé de σ^2 par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$	92
4.17	Estimé de a par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	93
4.18	Estimé de R par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	93
4.19	Estimé de σ^2 par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	93
4.20	Estimé de a par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$	95
4.21	Estimé de R par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$	95
4.22	Estimé de σ^2 par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$	96
4.23	Estimé de a par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$	96
4.24	Estimé de R par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$	97
4.25	Estimé de σ^2 par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$	97
4.26	Estimé de a par le M.V.S.R et le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	98
4.27	Estimé de R par M.V.S.R et le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	98
4.28	Estimé de σ^2 par le M.V.S.R et M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$	100
4.29	Estimé par le M.V.S.R de a en présence de variation de X_a à $N = 25$	101
4.30	Estimé par le M.V.S.R de R en présence de variation de X_a à $N = 25$	101
4.31	Estimé par le M.V.S.R de σ^2 en présence de variation de X_a à $N = 25$	102
4.32	Estimé adaptatif de a	102
4.33	Estimé adaptatif de R	103

4.34	Estimé adaptatif de σ^2	103
5.1	Erreur relative théorique de σ^2	123
5.2	Erreur relative théorique de r	123
5.3	Erreur relative théorique de c	124
5.4	Erreur relative de σ^2	125
5.5	Erreur relative de r	125
5.6	Erreur relative de c	127
5.7	Erreur relative de σ^2 en fonction de σ^2	127
5.8	Erreur relative de r en fonction de σ^2	128
5.9	Erreur relative de c en fonction de σ^2	128
5.10	Erreur relative de σ^2 en fonction de a et R	130
5.11	Erreur relative de r en fonction de a et R	130
5.12	Erreur relative de c en fonction de a et R	131
5.13	Erreur relative simulée de σ^2 en fonction de σ^2	133
5.14	Erreur relative simulée de r en fonction de σ^2	133
5.15	Erreur relative simulée de c en fonction de σ^2	134
5.16	Erreur relative simulée de σ^2 en fonction de a	134
5.17	Erreur relative simulée de r en fonction de a	135
5.18	Erreur relative simulée de c en fonction de a	135
5.19	Erreur relative croisée de σ^2 et r	137
5.20	Erreur relative croisée de σ^2 et c	137
5.21	Erreur relative croisée de r et c	138
5.22	Erreur relative croisée de σ^2 et r en fonction de a	140
5.23	Erreur relative croisée de σ^2 et c en fonction de a	140
5.24	Erreur relative croisée de r et c en fonction de a	141
5.25	Erreur relative croisée de σ^2 et r en fonction de σ^2	141
5.26	Erreur relative croisée de σ^2 et c en fonction de σ^2	142
5.27	Erreur relative croisée de r et c en fonction de σ^2	143

Introduction

La complexité du réseau électrique constitue un grand problème tant au niveau du contrôle que de la prévision des charges et de la planification. Cette complexité réside essentiellement dans la variation continue de la demande des charges électriques qui constituent la force motrice du réseau. Cette variation de la demande est observée au niveau de la nature et de la quantité.

C'est la fluctuation de la quantité qui cause le plus de problèmes. En effet, les pics de consommation, qu'il soient périodiques ou aléatoires, doivent être parfaitement supportés au niveau du contrôle et de la génération. La gestion des charges s'impose alors afin d'équilibrer cette demande et de limiter la puissance maximale requise vu les coûts élevés de génération.

On distingue à cet effet plusieurs modes de gestion des charges :

- La tarification qui consiste à varier les tarifs d'un utilisateur à l'autre, selon la nature et la quantité de sa demande, et selon les horaires.
- La limitation de la puissance maximale pouvant être consommée.
- Le délestage qui consiste à déconnecter de manière intermittente des groupes d'appareils ou de résidences. Le délestage généralisé est bien sûr le mode de gestion le plus efficace mais aussi le plus incommode.

On peut cependant éviter de léser les consommateurs, et ce en effectuant un délestage adéquat des appareils ayant un caractère emmagasinant d'énergie. L'idée consiste à reporter la consommation d'énergie de ces appareils, des heures de haute consommation vers les heures de faible consommation.

Ceci permettra alors, en appliquant le contrôle approprié, de réduire les pics de consommation et de remplir les creux de consommation. Les conséquences suivantes sont alors immédiates :

- La réduction des pics de consommation réduit du fait même la puissance maximale requise, donc la capacité de génération nécessaire.
- Le remplissage des creux de consommation donne une demande de puissance plus constante et donc plus de stabilité et de rationalité dans l'utilisation de la capacité de génération connectée au réseau.

Le contrôle et la gestion du réseau nécessitent la modélisation du comportement dynamique de la charge électrique. La nature des modèles requis varie selon l'horizon de temps, soit à court, moyen ou long termes.

Deux types de modèles sont, en général, établis dans la littérature; les modèles de la réponse de la charge et ceux de la demande. Les premiers modèles cités sont utilisés à court terme. Ils relient les puissances actives et réactives à la fréquence et au voltage à un instant donné. Ils permettent essentiellement l'analyse de la stabilité, et l'implantation du contrôle automatique de la tension. Ce sont des modèles relativement simples où la charge est souvent représentée sous forme de résistances, d'inductances et de capacités constantes (voir [DE75] par exemple). Ces modèles ne sont cependant pas précis lorsque le système s'écarte de manière significative de son régime permanent. Quant aux modèles de la demande de la charge, on distingue les modèles à court, à moyen et à long termes. Ils relient la demande au temps, et ceci pour une tension et une fréquence de réseau nominales. A court terme, ils seront utiles

contrôle automatique de la génération; à moyen terme, ils permettront l'opération optimale du réseau des points de vue déclenchement des unités de génération (unit commitment) et organisation des services de réparation, et aussi une prédiction de l'ampleur et la durée des pics quotidiens. A long terme, ils feront intervenir des variables économétriques et serviront à prédire les pics annuels de la demande en vue de la planification de l'expansion du réseau.

Ces modèles sont obtenus à partir de techniques statistiques de régression. Ils sont souvent de type ARMA, i.e. autorégressifs à moyenne mobile. Ils sont construits selon des méthodes statistiques à partir de séries chronologiques [BJ70]. Les modèles à base physique, quant à eux, comme leur nom l'indique, tiennent compte de la dynamique du milieu, des caractéristiques des appareils, du climat, du consommateur, et peuvent être considérés comme une synthèse des caractéristiques des modèles réponse et demande de la charge. L'utilisation de modèles du premier type donne une capacité de prédiction limitée dans le cas de la modélisation de la composante dépendante du climat, mais surtout en ce qui concerne les effets de différents contrôles qui pourraient modifier la dynamique ordinaire du réseau (e.g. gestion des charges). Cependant, ces modèles sont relativement simples à obtenir. La modélisation des charges à base physique, une science encore à ses débuts, est plus complexe tant au niveau des données requises que de la technique de l'intégration de ces données dans un modèle global; lorsque réalisable cependant, elle devrait permettre une meilleure prédiction des charges.

Ce sont les charges dépendantes du climat qui constituent la composante dont le comportement est le plus difficile à modéliser et à prédire, surtout lorsqu'elles sont soumises à un contrôle direct. Etant donné que ces mêmes charges génèrent une portion importante de la demande totale, leur modélisation et gestion par délestage font l'objet de nombreuses recherches. Notre contribution s'adressera spécialement au cas du chauffage.

Plusieurs modèles à base physique ont été proposés pour décrire le comportement thermodynamique des résidences individuelles. La difficulté majeure réside dans l'efficacité et la précision de la modélisation des caractéristiques thermiques et de l'intervention humaine. En effet, une caractérisation trop détaillée de tous les phénomènes en jeu ferait intervenir plusieurs paramètres donnant ainsi naissance à des modèles difficilement identifiables. L'approche proposée par Chong, Debs et Malhamé permet de construire des modèles statistiques à base physique, relativement simples, selon une méthodologie hiérarchique basée sur le principe de l'aggrégation des phénomènes physiques puis des charges. Ces modèles permettent de reconstruire les distributions statistiques de ces phénomènes, décrivant ainsi adéquatement le comportement dynamique de la demande de la charge.

Le présent travail consiste à développer des algorithmes d'identification pour une classe de modèles "élémentaires" caractérisant la dynamique des charges électriques de chauffage. Les paramètres de ces modèles élémentaires permettent alors de construire le modèle global au niveau du réseau. Le principal objectif sera de générer les paramètres réactualisés en temps réel, en utilisant un minimum de mesures, soit les enregistrements de la température externe et les durées des temps de commutation marche-arrêt d'un ensemble de thermostats dont la dynamique est représentative des habitations à l'intérieur du réseau.

La principale difficulté réside dans la nature même du modèle ainsi que son caractère dynamique. En effet, nous sommes en présence d'un modèle hybride stochastique à structure variable, dont certains paramètres varient dans le temps de manière aléatoire ou non-linéaire. Deux types de paramètres devront être estimés : des paramètres associés à la partie déterministe du modèle et apparaissant explicitement dans les équations du modèle (taux moyen de perte thermique, taux moyen de gain thermique), et un paramètre associé à la partie stochastique, i.e., la variance du bruit (pertes et gains thermiques indépendants des caractéristiques du milieu).

Nous utiliserons essentiellement deux approches : la méthode des moindres carrés qui nous donnera les paramètres déterministes du modèle, et le principe du maximum de vraisemblance qui permettra, en considérant les densités de probabilité des mesures traitées, de déterminer la variance du processus aléatoire qui influe considérablement la dynamique de la charge. Les estimés de ces paramètres devront, de plus être réajustés au fur et à mesure que le système varie.

Il s'agira donc d'abord d'établir des expressions analytiques des durées de temps de commutation du thermostat à partir du modèle initial. En effet, celui-ci décrit la température ambiante résultante des processus thermiques telle que vue par le thermostat; L'algorithme devra alors estimer les paramètres qui minimisent la somme des erreurs quadratiques entre les sorties mesurées et estimées. La méthode consiste en fait à minimiser l'importance du terme aléatoire apparaissant dans l'expression analytique ainsi établie (méthode des moindres carrés).

Dans la deuxième approche, il s'agira au contraire de considérer la distribution statistique des temps de commutation et de déterminer les paramètres qui auraient maximisé la probabilité à priori d'obtenir l'ensemble des sorties mesurées (principe du maximum de vraisemblance). La formulation des fonctions de densités de probabilité de ces temps de commutation nous permettra alors de tenir compte explicitement du bruit. Les estimés des paramètres qui maximisent la fonction de densité globale des mesures pourront être obtenus soit par un calcul analytique des valeurs optimales, soit de manière accélérée en introduisant un facteur d'accélération dans le calcul récursif de cet estimé optimal, soit encore en s'inspirant de la méthode de Newton donc en introduisant directement les gradients et jacobiens de la fonction de vraisemblance.

L'hypothèse de base de notre analyse est que les paramètres demeurent constants sur des intervalles de temps suffisamment longs par rapport à la durée nécessaire à la convergence des algorithmes. Il faudra aussi pouvoir tenir compte des variations soudaines que peut subir la température externe, et ceci dans l'hypothèse où le modèle

linéarisé utilisé demeure valable.

Ainsi ce mémoire comportera les chapitres suivants: Dans le chapitre 2, nous présenterons le modèle mathématique des charges élémentaires de chauffage ou de refroidissement. Le chapitre 3 présente un algorithme d'estimation de ce modèle selon la méthode des moindres carrés. L'identification selon le principe du maximum de vraisemblance fera l'objet du chapitre 4. Le mémoire sera enfin complété par le chapitre 5 qui consiste en une analyse détaillée de la convergence de ce dernier algorithme.

Chapitre 1

Revue bibliographique

Une connaissance continuelle et précise de la charge du système est une condition nécessaire pour un contrôle adéquat du réseau. Ainsi, à court terme (1mn jusqu'à 1 heure), des modèles de la réponse de la charge sont requis pour le contrôle fréquence-puissance, le dispatching économique du réseau et aussi pour certaines fonctions de gestion des charges, tandis que des modèles de la demande à moyen terme (1 semaine à 1 mois) et à long terme (1 à 5 ans) seront utilisés pour d'autres fonctions de gestion des charges et de planification respectivement. Nous étudierons particulièrement la classe des modèles de prédiction à court terme à des fins de gestion des charges par contrôle direct du réseau.

La demande totale de la charge est la somme des demandes individuelles à tous les noeuds du système. Cependant, vu que la demande et le mode d'utilisation d'une charge individuelle (du consommateur) sont de nature relativement aléatoire, et étant donné la diversité des modes d'utilisation, il n'est pas possible de prédire la demande globale par simple extrapolation des demandes individuelles estimées.

La température ambiante est le facteur climatique le plus important en terme d'effet sur la charge. En effet, des variations significatives de la température sont en mesure d'engendrer des variations importantes de la charge.

Elle sera donc souvent incluse comme variable exogène dans les modèles de prédiction. Finalement, la charge est vue par le système comme un processus aléatoire non stationnaire composé de milliers de charges individuelles ayant un comportement ne pouvant être décrit par une loi physique connue. On aura donc souvent tendance à la représenter à l'aide de modèles à priori dépourvus de sens physique. La qualité et l'efficacité d'un modèle donné dépendra essentiellement de sa performance au travers des variations saisonnières, et dans le temps. Une qualité recherchée aussi sera un volume de données limité requis pour la prédiction.

On distingue dans la littérature deux catégories de modèles : les modèles décrivant les pointes de la demande, et ceux caractérisant la dynamique de la demande.

— 1.1 Modèles de la pointe de demande

Ils décrivent essentiellement les pointes quotidiennes et hebdomadaires de la demande de la charge et ce, généralement en fonction du climat mais indépendamment du temps. Ces modèles expriment la charge sous la forme typique de la somme d'une charge de base et d'une composante dépendante du climat soit :

$$P = B + F(w) \tag{1.1}$$

où B est la charge moyenne indépendante du climat et $F(w)$ représente la charge dépendante du climat. w peut être soit la température à l'instant de la pointe, soit une combinaison des températures passées et prédites. Cette fonction généralement non-linéaire est calculée de manière empirique.

L'avantage de ces modèles réside dans la simplicité de leur structure et dans le fait qu'ils nécessitent peu de données. L'estimation des paramètres de ces modèles s'effectue généralement par régression linéaire ou non-linéaire. Ces modèles ont ce-

pendant la faiblesse de ne donner ni les instants auxquels se produisent les pointes, ni l'allure de la demande de la charge. De plus, ces modèles sont essentiellement statiques de telle sorte que tout phénomène dynamique d'une période à l'autre ne peut être prédit.

1.2 Modèles de la forme de la demande

Ils décrivent la demande de la charge sous forme de séries discrètes sur un intervalle de temps donné. L'intervalle d'échantillonnage est typiquement d'une heure ou d'une demi-heure. La mesure consiste en la puissance consommée durant l'intervalle de temps. On distingue encore là deux types de modèles : les modèles de la distribution journalière et les modèles dynamiques.

1.2.1 Modèles de la distribution journalière

1.2.1.1 Approche temporelle

Dans ce cas, les modèles considèrent la charge comme une fonction de l'heure de la journée. Ils décrivent la charge par une série discrète $z(t)$ sur un intervalle de temps T :

$$z(t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.2)$$

Les valeurs de $z(t)$ reflètent le comportement passé de la charge. En effet, un ensemble de profils de la demande pour des semaines typiques de l'année, ainsi que des conditions climatiques "normales", sont combinés de manière heuristique avec le profil de la demande de la dernière semaine pour obtenir $z(t)$ et permettre ainsi la prédiction. C'est le jugement de l'opérateur qui sera déterminant à cet effet. Dans ce cas,

le mécanisme de modélisation ne peut être décrit par des formules mathématiques appropriées. Seul un système expert pourra opérer en émulant les règles utilisées par l'opérateur. Ces modèles sont aussi souvent exprimés sous la forme :

$$z(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t) + v(t) \quad (1.3)$$

où la demande de la charge $z(t)$ est considérée comme la superposition d'une partie périodique (pour capturer les périodes naturelles du système) correspondant à un nombre fini de fonctions explicites du temps, généralement sinusoïdales, et d'un terme d'erreur $v(t)$. Les coefficients α_i sont des paramètres variant lentement dans le temps, et $v(t)$ représente donc l'erreur de modélisation; celle ci sera considérée comme un bruit blanc. Le modèle est supposé valide dans un intervalle de temps τ couvrant une partie du passé, le présent et la période de prédiction désirée.

Une fois les fonctions f_i sélectionnées à priori, les paramètres α_i du modèle sont estimés par régression linéaire ou par lissage exponentiel d'un ensemble d'observations passées.

Ces modèles ont pour avantage la simplicité de leur structure et de l'estimation des paramètres. Ainsi, de simples algorithmes récursifs nécessitant relativement peu de calculs permettront la réactualisation de ces paramètres. Cependant, ces modèles ne représentent pas adéquatement la nature stochastique de la demande de la charge et sa dépendance du climat. Il en résulte que lorsque le profil du climat change rapidement, les paramètres α_i du modèle deviennent, après un court laps de temps, inadéquats.

1.2.1.2 Décomposition spectrale

Les modèles dans cette catégorie s'expriment également sous la forme (1.3). Cependant, les fonctions f_i représentent dans ce cas les "fonctions propres" correspondant à la fonction d'autocorrélation de la série de mesures de la demande et ce, après élimination des tendances et des périodicités.

Ces modèles sont construits en utilisant la décomposition spectrale de Karhunen-Loève [DR58]; ceci permet d'obtenir des fonctions du temps qui décrivent de manière optimale la fonction d'autocorrélation, soit les comportements et moments probabilistes d'ordre deux. Ainsi la somme de ces fonctions représente les charges aléatoires stationnaires avec plus de précision que ne le permettraient des fonctions arbitraires du temps.

Cependant, l'identification des fonctions propres f_i requiert une approximation de la matrice d'autocorrélation, et donc le calcul des valeurs propres associées. Une telle étape d'identification ne convient pas à un algorithme récursif en temps réel vu la lourdeur des calculs associés. Si le processus est stationnaire, on pourra alors réduire la fréquence de cette identification. De plus, la méthode est susceptible d'introduire des erreurs dans le cas de variations soudaines ou importantes du climat et du facteur humain, puisque les modèles ne tiennent pas compte de telles variations explicitement.

1.2.2 Modèles dynamiques

Ces modèles tiennent compte du fait que la demande de la charge dépend non seulement du temps, mais aussi du comportement antérieur de la charge, du climat et de facteurs aléatoires. On distingue les modèles de type autorégressifs et à moyenne mobile (ARMA), les modèles d'état et les modèles à base physique.

1.2.2.1 Modèles ARMA

Ces modèles sont décrits par la forme générale :

$$z(t) = y_p(t) + y(t) \quad (1.4)$$

où $y_p(t)$ est la composante dépendante de l'heure de la journée et du profil de climat type de la journée. Cette composante peut être représentée par des fonctions périodiques de la forme (1.3). $y(t)$ est appelée charge résiduelle et décrit l'influence de la déviation de climat du profil normal, ainsi que des composantes de charge aléatoires. Certains modèles non-linéaires décrivent l'interaction entre les composantes périodiques et résiduelles.

La composante résiduelle $y(t)$ sera généralement décrite par un modèle ARMA [BJ70] de la forme :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{j_k}^{m_k} b_{j_k} u_k(t-j_k) + \sum_{h=1}^H c_h W(t-h) \quad (1.5)$$

où $u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n_u$ représentent les n_u variables climatiques. L'impact de ces entrées est considéré comme étant significatif. Elles sont fonctions des déviations de la température, par exemple, par rapport aux valeurs normales pour une heure donnée de la journée. Elles peuvent aussi représenter les déviations des effets climatiques d'une zone à l'autre du système. $W(t)$ est un processus stochastique (bruit blanc) de moyenne nulle qui représente les effets incertains du comportement de la charge aléatoire. Les paramètres a_i , b_{j_k} et c_h , ainsi que les ordres du modèles n , n_u , m_k et H sont supposés constants. Ils devront être identifiés en ajustant le modèle simulé aux données réelles de la charge et du climat.

Pour construire et identifier ces modèles, il est souvent choisi de préfiltrer les données afin d'éliminer la composante périodique $y_p(t)$ de la charge [Poy84], et ce en

définissant un nouveau processus de la forme :

$$z'(t) = z(t) - z(t - t_p) \quad (1.6)$$

où t_p est la période de la composante périodique.

Les techniques standards d'identification (calculs d'autocorrélations ...) [GY72] peuvent alors être utilisées. Ce préfiltrage, équivalent à une différenciation du processus comportant des erreurs de modélisation et de mesure, entraîne inévitablement une amplification de ces erreurs et donc une imprécision du modèle.

Les modèles non préfiltrés, donc qui incluent explicitement la composante périodique, éliminent ces erreurs. Ils nécessitent cependant un algorithme d'estimation non-linéaire, donc plus de calculs. Quant aux tendances observées dans les mesures, elles peuvent être soit éliminées grâce à un préfiltrage soit représentées par une fonction temporelle polynomiale.

Cependant, seule une partie des modèles ARMA développés dans la littérature tiennent compte réellement et explicitement du climat comme entrée. Cette entrée est généralement une fonction non-linéaire de la variation de température par rapport à la température normale. Ces modèles sont construits de manière empirique et varient d'un système à l'autre.

Dans la majorité des cas de modèles ARMA classiques, les paramètres sont continuellement réactualisés afin de tenir compte de l'effet des variations climatiques sur la charge. Cette approche n'est cependant pas efficace dans le cas de changements rapides des conditions climatiques, puisque la condition de stationnarité du processus n'est plus vérifiée. L'identification de ces modèles s'effectue en solutionnant les équations de Yule-Walker récursivement, ou encore en se basant sur le principe du maximum de vraisemblance selon un algorithme de régression non-linéaire [GA74].

Souvent, l'ordre du modèle n'est pas fixé à priori. Il est déterminé par le calcul des coefficients d'autocorrélation [BJ70]. Ces mêmes coefficients seront utilisés par la suite pour l'identification. Dans ce cas, les paramètres du modèle n'ont à priori aucune signification physique.

L'identification des modèles ARMA de la forme (1.5) est généralement plus lourde que celle des modèles de type distribution journalière. Cette complexité additionnelle permet cependant d'obtenir des modèles dynamiques plus robustes qui tiennent compte du climat. Cependant, une réactualisation continue, à un taux horaire par exemple, de ces modèles est parfois indésirable et ce surtout dans le cas d'anomalies dans le comportement de la charge, puisque les modèles ne sont pas conçus pour tenir compte d'une telle possibilité. L'identification devra donc être effectuée sur une base quotidienne. Ceci aura donc pour effet immédiat une perte d'informations dans le cas de variations rapides des caractéristiques du système.

~~X~~ 1.2.2.2 Modèles d'état

Il n'existe pas de différences conceptuelles fondamentales entre les modèles ARMA et les modèles d'état. En effet, la conversion d'un type à l'autre est toujours possible. Cependant, plusieurs modèles d'état proposés présentent également un degré de structure qui n'est pas toujours présent dans un modèle ARMA typique. Ils permettent également, grâce à la théorie du filtrage de Kalman, d'obtenir des prédictions optimales.

Dans ces modèles, la charge $z(t)$ est décrite par :

$$z(t) = C^T x(t) \tag{1.7}$$

où

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + W(t) \quad (1.8)$$

Les états $x_i(t), i = 1, 2, \dots, N_s$ peuvent représenter la composante périodique de la charge pour un jour donné de la semaine à une heure donnée, un paramètre donné du modèle, ou encore une combinaison d'entrées dépendantes de la charge et du climat. $u(t)$ représente l'entrée dépendante du climat, alors que $W(t)$ est un vecteur d'entrées aléatoires, typiquement de type bruit blanc. Les matrices A , B et C sont supposées constantes.

Ces modèles supposent que les paramètres caractérisant la composante périodique sont essentiellement des processus aléatoires, contrairement au cas des modèles ARMA. Les matrices A et B sont soit connues, soit identifiées, selon le cas.

Les modèles d'état ne présentent pas à priori d'avantages majeurs par rapport au modèles ARMA. Seule une expérimentation de ces modèles le montrera.

✦ Exemple :

Toyoda et Al. [TCI70] ont proposé le modèle suivant :

$$x(k+1) = x(k) + w(k) \quad (1.9)$$

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad (1.10)$$

où $x(k)$ est la charge totale du système, $y(k)$ est la valeur observée de la charge, $w(k)$ et $v(k)$ sont respectivement les bruits du système et d'observation. Ces termes sont modélisés par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance inconnue.

Le modèle ainsi formulé est valide pour des prédictions de l'ordre de cinq à dix minutes. Pour des périodes de dix minutes à une heure, ce modèle peut être modifié comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \Delta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Delta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\dot{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Delta(k) \end{bmatrix} + w(k) \quad (1.12)$$

où $\Delta(k)$ représente l'incrément de la charge.

Pour la prédiction journalière de la charge, le profil périodique de la charge ainsi que l'effet des conditions climatiques ne peuvent plus être négligés. Le modèle se reformule alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \Delta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta(k) & \gamma(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(k) \\ H(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} S(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Delta(k) \end{bmatrix} + w(k) \quad (1.14)$$

où $x(k)$ est la charge maximale pseudo-quotidienne. $\delta(k)$ représente la fluctuation de la charge causée par les conditions climatiques, soit la température $T(k)$, l'humidité $H(k)$ et le coefficient de charge standard $S(k)$ ($S(k) = S(k+D)$; $D = 24h$). Les paramètres $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\gamma(k)$ et $S(k)$ peuvent être estimés à partir des observations passées.

La difficulté majeure dans l'application du filtrage de Kalman dans ce cas réside dans le fait que les variances des bruits sont inconnues. Une approche a été proposée à cet effet; elle consiste à estimer les covariances du bruit en se basant sur le calcul des coefficients d'autocorrélation des observations.

La faiblesse de ce modèle réside dans son incapacité à décrire adéquatement l'influence des facteurs climatiques et humains, et ce surtout au cours d'une même journée. En effet, on peut observer dans cet intervalle de temps des variations de température ou de mode d'utilisation de l'individu qui sont de nature à changer considérablement la configuration et le comportement de la charge. La stratégie de modélisation que nous décrivons dans ce qui suit, s'écarte radicalement des stratégies précédentes, et constitue en fait le point focal de nos travaux de maîtrise.

* 1.2.3 Modèles à base physique

Contrairement aux cas précédents, ces modèles n'ont pas de structure prédéterminée. En effet, ils sont construits en tenant compte des lois de la physique et du fait que la charge, en un point du système et à un instant donné, est déterminée par la superposition de la charge due à un grand nombre d'appareils de caractéristiques différentes et sous le contrôle d'utilisateurs ayant des modes d'utilisation différents. Ainsi donc, une grande variété de modèles a été développée. Le degré de complexité dépend généralement du degré d'aggrégation des processus en jeu.

L'avantage de ces modèles, lorsque réalisables, réside dans une description plus adéquate du comportement dynamique de la charge, et ceci du fait qu'ils sont basés sur une description plus précise des processus générateurs de la demande. Une telle stratégie devient essentielle lorsqu'il s'agit de prédire le comportement dynamique de la charge pendant et après un délestage. En effet un tel contrôle, appliqué dans le cadre de la gestion des charges, crée une pointe retardée de demande dont l'amplitude et la durée peuvent être contrôlées à condition de connaître le dit comportement. L'efficacité d'un modèle donné dépendra de sa capacité de capturer la diversité des caractéristiques thermiques et ceci, à l'aide d'un minimum de variables, de paramètres et de données.

La capacité d'identifier des modèles agrégés simples et ne nécessitant qu'un nombre limité de données, demeure encore là un critère important pour la "survie" d'un modèle. En effet, la majorité des modèles existant présente un handicap majeur du fait qu'ils requièrent souvent une identification ou mesure de paramètres difficilement réalisables. De fait les modèles les plus précis et descriptifs sont le plus souvent loin d'être concis. Ils sont alors propres à un certain environnement, de sorte que le modèle global du système est difficile à construire et identifier.

Nous présentons dans ce qui suit un exemple qui illustre le principe de construction

de ces modèles.

1.2.3.1 Exemple

L'approche proposée par Ihara et Schweppe [IS81] consiste à modéliser les demandes de puissance élémentaires afin de pouvoir ensuite synthétiser la demande globale par sommation. Chaque demande de puissance est classée selon trois indices i , j et k . Chacun de ces indices indique une appartenance à une classe de charges présentant des caractéristiques similaires. Plus précisément :

- **Classes d'appareils** $i = 1, 2, \dots, I$: Les charges sont classées selon la similarité des caractéristiques électriques (dépendances de la tension et de la fréquence). Exemples: résistance chauffante, moteur à compression...
- **Classes d'utilisation** $j = 1, 2, \dots, J$: Les charges sont classées selon la similarité d'utilisation. Exemples: cuisine dans un procédé industriel, cuisine en résidence familiale...
- **Classes de facturation** $k = 1, 2, \dots, K$: Les charges sont divisées en groupes de modes de facturation communs.

Chaque charge élémentaire est alors classée a priori à l'aide des trois indices i , j et k . La charge, à chaque niveau du système, dépendra également d'une multitude de facteurs tels le temps, le climat, l'économie, la tension, et la fréquence... Cette dépendance s'exprime au niveau de la charge élémentaire par l'entrée exogène suivante :

$$z = (e, d, f, m) \tag{1.15}$$

où:

e : est le vecteur des paramètres économiques

d : est le vecteur des paramètres de l'appareil, de la tension et de la fréquence

f : est le vecteur des paramètres représentant le mode d'utilisation du consommateur

m : est un vecteur représentant les paramètres météorologiques.

La demande y de chaque charge élémentaire est le produit d'une demande potentielle et d'un facteur d'utilisation u :

$$y_{ijk}(t, z) = c_{ijk}(t, z) * u_{ijk}(t, z) \quad (1.16)$$

La demande potentielle est la demande maximale au temps t , que le consommateur peut provoquer en ajustant le contrôle de l'appareil. Cette demande est, elle-même séparée en un produit du taux de consommation x de l'appareil (sous conditions d'opération nominales), et d'un facteur d'ajustement de la consommation qui tient compte de l'écart entre les conditions réelles d'opération et les conditions nominales;

$$c_{ijk}(t, z) = x_{ijk}(t, e) * r_{ijk}(t, d) \quad (1.17)$$

Le facteur d'utilisation représente la fraction de la demande potentielle au temps t . Il est lui même le produit d'un facteur l dépendant du mode d'utilisation et d'un terme w représentant les contrôles automatiques de l'appareil tel le contrôle du thermostat.

$$u_{ijk}(t, z) = l_{ijk}(t, f) * w_{ijk}(t, m). \quad (1.18)$$

Ces deux termes sont généralement de nature stochastique. Leurs propriétés statistiques dépendent de l'entrée z qui, elle aussi, peut être stochastique.

Dans le cas de la demande de puissance associée au chauffage, on peut obtenir un modèle simplifié en considérant le taux de consommation comme constant et inconnu, et le facteur d'ajustement de la demande comme unitaire. On obtient alors :

$$y_{ijk}(t, m) = x_{ijk} * l_{ijk}(t) * w_{ijk}(t, m) \quad (1.19)$$

Il est supposé à ce niveau qu'il est possible de classer les charges élémentaires selon les indices i , j et k de manière à ce que l'espérance mathématique des demandes de puissances élémentaires soit le produit des espérances mathématiques des facteurs formulés (pas de corrélation entre l'appartenance à une classe i , et l'appartenance à une classe j ou k quelconque):

$$\bar{y}(t, m) = E\{y_{ijk}(t, m)\} = X * \alpha(t) * \beta(t, m) \quad (1.20)$$

où

$$X = E(x_{ijk}) \quad (1.21)$$

$$\alpha = E\{l_{ijk}(t)\} \quad (1.22)$$

$$\beta(t, m) = E\{w_{ijk}(t, m)\} \quad (1.23)$$

Le modèle particulier présenté dans ce qui suit est de type j . Il décrit les processus thermodynamiques d'une résidence tel que vus par le thermostat de l'élément chauffant. Ce modèle consiste en un système dynamique linéaire qui se formule comme suit :

$$\frac{dX(t)}{dt} = -AX + Bm + CV + DwQ \quad (1.24)$$

$$T = H^T X \quad (1.25)$$

où

T : est la température de la pièce, mesurée par le thermostat

X = vecteur de diverses températures

m : est un vecteur de fonctions non-linéaires représentant les entrées climatiques telles la température, l'intensité des rayons solaires, la vitesse du vent...

Q : est le flux thermique du chauffage

R : représente l'état de fonctionnement du chauffage (1 ou 0)

V : est le vecteur des autres sources internes de gain thermique

A, B, C : sont des matrices constantes dépendantes de la construction de la maison

D, H : sont des vecteurs constants et dépendants de la construction de la maison.

En réalité, tous les coefficients A, B, C, D et H varient selon que les portes, fenêtres, rideaux et autres sont ouverts ou fermés. Ils sont donc de nature stochastique. Toutes les entrées (m, V , et Q) sont aussi aléatoires. Tous ces paramètres sont d'abord considérés constants pour fins de simplification.

Pour estimer les pertes thermiques réelles, il est nécessaire de connaître les coefficients de transmission thermiques des murs et le mode d'isolation. Le modèle suppose aussi la connaissance de l'orientation de la maison, de la superficie des fenêtres Il est clair que l'utilisation d'un tel modèle n'est pas commode vu sa complexité et les difficultés d'accès aux paramètres.

Les auteurs ont alors proposé un modèle plus simple pour décrire la température vue par le thermostat :

$$\frac{dT}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau}\right)(T - T_f - wT_g) \quad (1.26)$$

où

τ : est une constante thermique moyenne

T_f : est la température cible atteinte lorsque le chauffage est arrêté

T_g : est le gain thermique du chauffage (capacité thermique du chauffage par rapport aux pertes thermiques de la maison)

Ceci permet alors d'établir des expressions pour les durées de temps de marche et d'arrêt du chauffage, respectivement d_1 et d_0 :

$$\frac{d_1}{\tau} = \ln\left\{1 + \frac{g}{(1-s)}\right\} \quad (1.27)$$

$$\frac{d_0}{\tau} = \ln\left\{\frac{1}{(1-\frac{g}{s})}\right\} \quad (1.28)$$

où

$$s = \frac{(T_s - T_f)}{T_g} \quad (1.29)$$

$$g = \frac{\delta}{T_g} \quad (1.30)$$

où δ est la différence des températures limites du thermostat.

Les paramètres de ce modèle ont été déterminés de manière empirique, et aucun schéma d'identification n'a été développé à cet effet.

Quoique le modèle ainsi formulé soit beaucoup plus simple que le précédent, il est moins précis et ne reflète pas tous les phénomènes en présence. En effet, l'influence du climat et l'intervention indirecte et aléatoire du consommateur (gains et pertes de chaleur dû à son activité dans l'habitation) sont négligées. Tel que décrit, le processus de commutation est cyclique avec des durées quasi constantes. En réalité, les facteurs cités précédemment représentent des différentes sources de gains et pertes thermiques qui peuvent changer complètement la dynamique ainsi décrite.

1.2.4 Modèles mixtes

Le caractère périodique ainsi que la dépendance climatique de la demande de la charge ont incité certains auteurs à formuler des modèles mixtes basés sur la décomposition spectrale et la modélisation à base physique, afin de capturer le maximum de phénomènes. Le modèle proposé par Schick et Al. [Sa88] est présenté à titre d'exemple.

Le principe de base de cette approche est la subdivision de la charge en deux composantes distinctes selon leur dépendance du climat. Certaines hypothèses sont aussi posées :

- Les phénomènes purement aléatoires ou imprédictibles sont éliminés
- Les irrégularités systématiques dûes aux vacances ou aux changements de caractéristiques de la charge résidentielle sont éliminées.
- Les irrégularités aléatoires dans le comportement périodique sont considérées comme du bruit .

Le modèle suivant est alors proposé :

$$y(n) = y_w(n) + y_t(n) \quad (1.31)$$

où

- $y(n)$ est la charge totale résidentielle durant l'heure n
- $y_w(n)$ est la composante dépendante du climat, et correspond donc à la consommation des appareils tel que chauffage, conditionneurs d'air..
- $y_t(n)$ est la composante indépendante du climat : machines à laver, éclairage ...

1.2.4.1 Modélisation de la composante indépendante

Si l'on observe les mesures de la puissance consommée, on constate tout de suite le caractère essentiellement périodique de la demande de la charge électrique. De fait, en effectuant une analyse spectrale des données, le spectre observé montre des composantes distinctes superposées à un faible bruit.

La périodicité observée est :

- hebdomadaire (faible)
- quotidienne
- de 12 heures
- de 8 heures

Ceci nous conduit alors à exprimer cette composante sous la forme :

$$y_t(n) = \sum \alpha_i \phi_i(n) \quad (1.32)$$

donc comme une somme pondérée de fonctions du temps. Ces fonctions du temps peuvent être de la forme :

- $\sin(\omega n)$
- $\cos(\omega n)$

ou bien,

- $\sin(\omega_1 n) \sin(\omega_2 n)$
- $\sin(\omega_1 n) \cos(\omega_2 n)$
- $\cos(\omega_1 n) \cos(\omega_2 n)$
- $\delta(n) \cos(\omega n)$
- $\delta(n) \sin(\omega n)$

Dans le premier cas la fréquence w est soit quotidienne, soit hebdomadaire ou parfois saisonnière. Dans le deuxième cas, la fonction modélise la corrélation entre les phénomènes quotidiens et ceux hebdomadaires ou saisonniers. Finalement, la troisième classe de fonctions mesure la variation entre les jours de la semaine et la fin de semaine.

* 1.2.4.2 Modélisation de la composante climatique

Dans ce cas, la charge totale vue par le réseau est exprimée comme une somme pondérée de prédicteurs de la forme :

$$y_w(n) = \sum_j \beta_j \theta_j(n) \quad (1.33)$$

où les β_j sont des coefficients de pondération dépendant des charges résidentielles individuelles, et les θ_j sont modélisés selon l'hypothèse suivante :

Une résidence est considérée comme étant un espace fermé sous une coquille. La température à l'intérieur est maintenue à une valeur constante désirée à l'aide de l'appareil approprié donc un radiateur ou un conditionneur d'air selon le cas. Quant à la coquille qui correspond donc à la paroi de la résidence, elle est constituée de diverses cellules ayant des caractéristiques thermiques différentes mais pouvant être regroupées sous une seule capacité thermique. Ainsi donc, la coquille possède une inertie thermique globale et des caractéristiques de transfert de chaleur propres.

Ayant posé la température interne comme constante, le transfert de chaleur effectué par l'élément conditionneur de l'espace est une fonction de la température propre de la coquille $T_w(t)$, qui elle-même est fonction de la température externe $T_o(t)$ selon le modèle suivant :

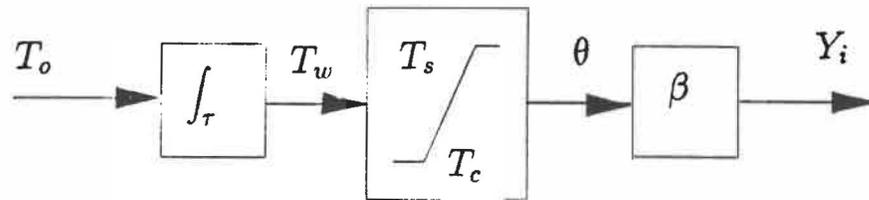


Figure 1.1: Modèle dynamique de la charge due à un conditionneur d'air

$$\tau \frac{d}{dt} T_w(t) = -T_w(t) + T_o(t) \quad (1.34)$$

où τ est une constante de temps dépendant des dimensions de la résidence, de l'isolation, de l'exposition En d'autres termes, une fois la température interne est considérée constante, les pertes (ou gains de chaleur) seront dictés simplement par la dynamique de $T_w(t)$, la température de la coquille considérée à travers l'équation (1.34) comme égale en régime permanent à la température externe, mais quelque peu "en retard" sur cette température externe lors de variations climatiques rapides.

Finalement, la puissance demandée θ_j est proportionnelle à la température $T_w(t)$, tout en étant bornée par deux zones de saturation. Prenons à titre d'exemple le cas d'une résidence dont la température est contrôlée par un conditionneur d'air. Si la température $T_w(t)$ demeure sous une température T_s , le conditionneur sera arrêté et la puissance consommée sera nulle : $\theta_j = 0$. Si la température dépasse une température maximale T_c , le conditionneur fonctionnera à pleine capacité consommant ainsi une puissance maximale $\theta_j = P_{max}$. Ceci peut être schématisé comme suit:

Dans ce modèle dynamique, les températures de saturation T_c et T_s varient en général d'une résidence à l'autre et doivent donc être estimées dans chaque cas. Il en est de même pour la constante de temps τ .

Ainsi donc, la composante climatique peut être exprimée comme suit :

$$y_w(n) = \sum_j \beta_j \theta_j(n, T_o(n), \tau_j, T_{c_j}, T_{s_j}) \quad (1.35)$$

Un modèle complet incluant les composantes dépendantes et indépendantes du climat est ainsi obtenu. Il s'agit maintenant d'identifier ce modèle et donc d'estimer ses différents paramètres.

✧ 1.2.4.3 Estimation des paramètres

✧ Le modèle complet est le suivant :

$$y(n) = \sum_i \alpha_i \phi_i + \sum_j \beta_j \theta_j(n, T_o(n), \tau_j, T_{c_j}, T_{s_j}) \quad (1.36)$$

où θ_j est une fonction non-linéaire de τ_j, T_{c_j} et T_{s_j} .

Alors que les coefficients α_i et β_j peuvent être estimés par régression linéaire, les θ_j doivent être choisis ou mesurés.

L'algorithme suivant est proposé :

- On pose $k = 0$ et on choisit dans un premier temps, et ce à partir de mesures individuelles dans le réseau, les τ_j, T_{c_j} et T_{s_j} .
- θ_j^k est alors calculé .
- Les coefficients α_i^k et β_j^k sont calculés par régression
- Si ce choix ne minimise pas la somme des résidus, on répète la procédure avec $k = k + 1$, et un "réajustement" des τ_j, T_{c_j} et T_{s_j} .

Le défaut majeur de ce modèle réside dans son incapacité de capturer les phénomènes aléatoires. Il présente aussi plusieurs faiblesses telles la complexité tant au niveau de la structure que de l'identification.

1.3 Conclusion

Ainsi donc, plusieurs approches ont été proposées pour modéliser la demande de la charge électrique. Dans tous les cas, la principale difficulté réside dans la description des phénomènes aléatoires essentiellement d'origine climatique et humaine. Alors que certaines approches de modélisation tendent à éliminer ces phénomènes purement aléatoires et les irrégularités dans le comportement périodique, d'autres essaient de décrire avec précision tous les phénomènes en jeu. Les premières approches permettent d'obtenir des modèles simples mais souvent inefficaces car imprécis, alors que les secondes débouchent sur des modèles compliqués et difficilement utilisables vu la complexité et le volume de données (souvent impossibles à obtenir) qui est requis pour l'identification.

Le test suivant permet de faire une première évaluation de la valeur potentielle d'un modèle donné :

- Le modèle tient-il compte des différents facteurs affectant la charge que ce soit explicitement ou implicitement ?
- Le modèle est-il physiquement significatif ?
- La structure et le degré de complexité du modèles sont-ils raisonnables ?

La sélection d'un modèle en particulier s'effectuera alors selon les critères suivants :

- Le nombre de variables descriptives
- La simplicité de la structure du prédicteur et le degré d'incertitude associé à chaque variable prédite.
- Le nombre de paramètres à estimer, et les données expérimentales nécessaires à cette estimation .

En général, il est préférable d'avoir des modèles ayant le moins de paramètres et variables possible. En effet, de tels modèles sont plus faciles à initialiser, identifier, réactualiser, modifier et donc à utiliser. L'implantation de ces modèles dépend aussi et surtout des données et mesures requises. Celles-ci augmentent avec la complexité du modèle. Il est en effet important que le modèle soit suffisamment souple tant au niveau de la portabilité que de sa capacité de refléter les changements des processus fondamentaux.

Dans le chapitre qui suit, nous présenterons un modèle mathématique décrivant la dynamique des charges élémentaires de chauffage et de conditionnement électrique d'air. Dans une modélisation à base physique, de tels modèles devront être agrégés pour obtenir la dynamique globale.

Chapitre 2

Modèle mathématique des charges élémentaires de chauffage ou de refroidissement

Malgré la diversité d'approches proposées dans la littérature, rares sont celles qui produisent des modèles capables de décrire adéquatement la dynamique de la charge électrique selon un schéma aisément transportable d'un réseau à l'autre tout en demeurant suffisamment simple des points de vue de l'identification, et de l'implantation.

Chong et Debs [CD79] ont proposé une approche systématique de modélisation des charges individuelles en tenant compte spécifiquement des facteurs aléatoires qui sont le talon d'Achille de nombreuses autres approches. Cette approche a été ensuite développée par Malhamé [Mal82] [MC85] qui a proposé des modèles à base physique simples et surtout une méthodologie d'aggrégation des charges individuelles. Celle-ci a permis de formuler un modèle global basé essentiellement sur les distributions statistiques des divers processus, et obtenu à partir d'une aggrégation de ces processus. L'avantage de cette approche réside dans la simplicité relative du modèle de base, le faible nombre de paramètres à estimer et surtout sa capacité de capturer l'influence

des facteurs climatiques et humains avec précision.

Dans la section 1, nous passerons en revue leur méthodologie de synthèse de modèles à base physique des charges électriques. La représentation des charges élémentaires fera l'objet de la section 2. Le chapitre est complété par la section 3 qui présente le cas des charges chauffantes que nous étudierons particulièrement.

2.1 Méthodologie globale de modélisation

2.1.1 Hiérarchie de modélisation

La méthodologie de modélisation est hiérarchique de manière ascendante. Ainsi, en un point et niveau donnés du système, la charge est synthétisée à partir des charges élémentaires d'un niveau inférieur quelconque. L'approche hiérarchique pour la synthèse dynamique du modèle de la charge, s'impose de par la structure du système.

Les appareils électriques constituent le plus bas niveau de la hiérarchie. Le niveau suivant est celui des bâtiments qui correspondent souvent à des clients individuels ou des unités de facturation. Les consommateurs individuels sont connectés à des sous-stations qui constituent le niveau suivant. Ces sous-stations sont alors reliées au système central. De plus, les clients sont divisés en groupes homogènes pour fin de gestion des charges. Les charges élémentaires correspondant à des grosses machines sont directement reliées aux sous-stations ou au niveau de haute puissance.

Ces différents niveaux possèdent souvent des caractéristiques différentes. En effet des bâtiments peuvent être connectés à une sous-station par un réseau de distribution radial alors que les sous-stations sont généralement elles mêmes reliées au système central par un réseau non radial. Ces différences de configuration du réseau ainsi que

la variété du type de charges, produiront des modèles différents à chaque niveau. Cependant, les étapes à suivre demeurent les mêmes pour construire un modèle à un niveau donné à partir de ceux des niveaux inférieurs.

2.1.2 Méthodologie

A chaque niveau de la hiérarchie, les étapes suivantes sont traversées :

2.1.2.1 Modélisation des composantes élémentaires

Un modèle simple, à base physique, est postulé pour une composante type dans un groupe homogène à ce niveau, capable cependant de tenir compte des facteurs clés qui affectent la charge .

2.1.2.2 Classification des charges en groupes “homogènes”

Les charges similaires sont divisées en classes équivalentes pour lesquelles des modèles simplifiés peuvent être obtenus. La similarité est une notion qui dépend de la représentation choisie de la charge pour ce niveau. Au plus bas niveau, la similarité peut être définie en termes de demande et de caractéristiques électriques, et du type d'utilisateurs (résidentiel, commercial...)

2.1.2.3 Collecte des données

Un échantillon statistiquement significatif de données est obtenu afin d'identifier la dynamique de l'élément type dans chacun des groupes homogènes définis en 1

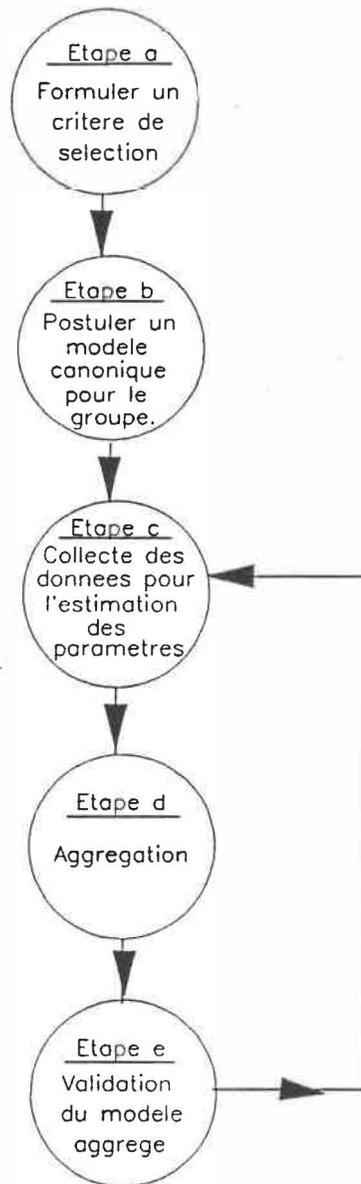


Figure 2.1: Représentation schématique de la procédure de synthèse des modèles des charges

2.1.2.4 Aggrégation des charges élémentaires

Les charges ayant des caractéristiques similaires sont regroupées donnant ainsi un modèle équivalent pour le groupe. En général, les modèles de la réponse de la charge (puissance injectée versus tension et fréquence) ainsi que ceux de la demande sont établis. La procédure exacte d'aggrégation dépend des modèles en question. En effet, les modèles de la réponse de la charge, représentés généralement par des équations dynamiques seront aggrégés plutôt à l'aide de techniques de réduction de modèles, alors que des techniques statistiques seront utilisées pour aggréger les modèles de charges représentés par des processus stochastiques.

2.1.2.5 Validation des modèles

Les modèles résultants sont validés en comparant les prédictions de ces modèles avec des données réelles ou par simulations détaillées.

La complexité du modèle résultant n'est pas évaluée à priori; elle dépend en effet de la complexité naturelle du système qui se reflète, entre autres, dans le nombre de groupes dissemblables.

2.2 Représentation des charges élémentaires

Sachant que la méthodologie de modélisation est essentiellement à base physique, il est nécessaire d'obtenir des modèles des appareils ou composantes qui constituent les charges élémentaires du système. Celles-ci correspondent aux chauffe-eau, chauffages, réfrigérateurs, machines à laver ... dans les secteurs résidentiels, et aux différentes charges industrielles tels les moteurs synchrones, à induction, ... dans les secteurs industriels.

La demande de puissance de chacune de ces composantes est affectée par différents types d'entrées tels le mode d'utilisation du consommateur, le climat, la tension et la fréquence du système. Les effets de ces entrées sur la charge seront souvent dynamiques et non-linéaires.

2.2.1 Structure générale de modèles de charges élémentaires

Il s'agit d'un modèle dynamique ayant les puissances actives et réactives comme sorties et des entrées classées comme suit :

- **Entrées génératrices de la demande:** Elles dépendent du temps, du climat, et du mode d'utilisation de l'individu. La demande d'énergie est l'apport net d'énergie à la charge. Elle est indépendante de la tension et de la fréquence. Cette demande peut être modifiée par différentes actions telles la tarification et d'autres motivations.
- **Entrées propres du système:** Les entrées telles la tension et la fréquence proviennent de la source de puissance du système (alimentation). Elles sont indépendantes des demandes de service individuelles, mais sont déterminées, au niveau de la centrale, par la charge totale connectée, la configuration du réseau et l'état de génération du système. Un modèle canonique est utilisé pour représenter chaque charge élémentaire. Il est constitué de deux sous-modèles dynamiques interconnectés :
 - **Un modèle fonctionnel** qui relie l'état de fonctionnement (ON/OFF) de l'appareil à sa demande de puissance.
 - **Un modèle électrique** qui décrit l'effet des variations de tension et de fréquence sur la demande de la charge.

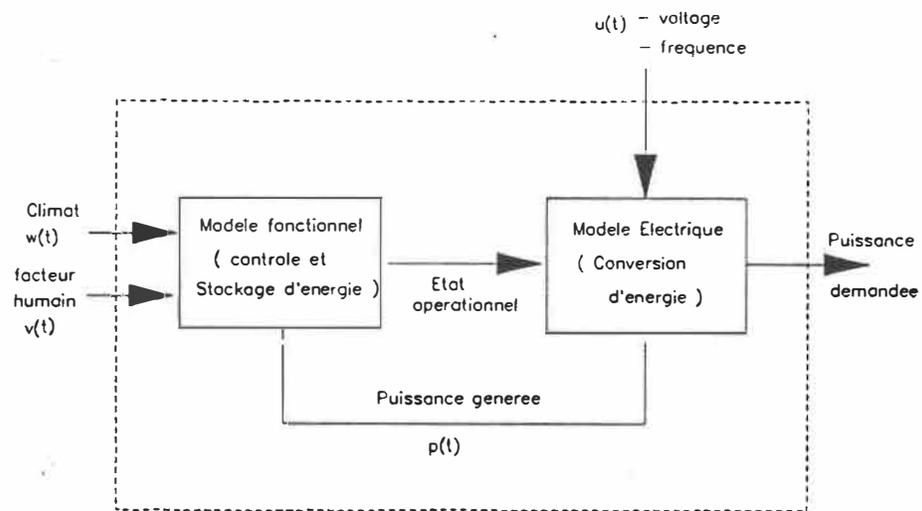


Figure 2.2: Diagramme fonctionnel du modèle de la charge élémentaire

Le modèle fonctionnel a comme entrées externes tous les facteurs qui affectent la demande d'énergie de la composante, et génère à la sortie l'état de fonctionnement du convertisseur d'énergie. Physiquement, il caractérise, si elle existe, la capacité de stockage d'énergie de la charge (ainsi que les facteurs environnants qui affectent ce stockage d'énergie).

Mathématiquement, le modèle est formulé comme suit:

$$y(t) = F_e(t, u(\tau), m(\tau), \forall \tau \leq t)$$

$$p(t) = G(y(t))$$

$$m(t) = F_f(t, v(\tau), w(\tau), p(\tau), \tau \leq t)$$

où

$u(t)$ est le vecteur des entrées du système, soit la tension et la fréquence au temps t

$v(t)$ est la demande due à l'intervention directe ou indirecte du consommateur

dans le processus

$w(t)$ est l'entrée correspondant au climat

$y(t)$ est la demande de puissance au temps t

F_e décrit le modèle électrique de la charge tandis que F_f correspond au modèle fonctionnel. $p(t)$ représente l'effet rétroactif du modèle électrique vers le modèle fonctionnel, donc celui de l'entrée $u(t)$ du système sur l'état de fonctionnement.

Le modèle fonctionnel est une composante primordiale du modèle global de la charge. Il est fortement dépendant de l'utilisation de l'appareil et de l'interaction de celui-ci avec son environnement. Le modèle fonctionnel caractérise l'évolution de la charge sous l'effet des facteurs climatiques et de l'utilisation de l'individu. Il détermine le comportement dynamique de la demande associée à la charge en l'absence de changements de fréquence ou de tension. Ainsi, le modèle fonctionnel est essentiel pour prédire le comportement de la charge électrique, particulièrement lors d'actions de délestage.

Les modèles développés tiennent compte de l'effet des variables exogènes importantes. Ainsi, le climat $w(t)$ est décrit explicitement dans le modèle sous forme de mesure, tandis que $v(t)$ est décrit selon la théorie des processus stochastiques. Les modèles stochastiques sont spécifiques à chaque appareil. Deux exemples sont présentés à cet effet :

- Dans le cas du chauffage (ou du conditionneur d'air), $v(t)$ modélise les pertes thermiques lorsqu'un individu entre ou sort du bâtiment, ainsi que les gains thermiques associés à l'activité humaine. Ce bruit est modélisé par un processus de Wiener de moyenne nulle et ayant une certaine variance.
- L'entrée du modèle fonctionnel du chauffe-eau, associée au facteur humain est la demande de service $v(t)$. Celle-ci est une demande "consciente" du consomma-

teur, modélisée par un processus Markovien de sauts, i.e., une entrée aléatoire constante par intervalles.

La connaissance de ces distributions statistiques est indispensable pour une modélisation adéquate du comportement dynamique de la demande de la charge.

Il est également essentiel de construire un modèle fonctionnel qui utilise un minimum de paramètres, suffisamment significatifs afin que l'identification soit la plus simple possible. L'aggrégation des processus dynamiques permet d'obtenir des modèles très simplifiés. Cette méthode évite la nécessité d'avoir des données complexes et nombreuses, comme c'est le cas pour les autres modèles à base physique utilisés. Dans ce qui suit, nous introduirons le modèle élémentaire des charges de chauffage et de refroidissement. Ce modèle constituera la pierre angulaire de nos travaux, rapportés dans les chapitres 4,5 et 6 du mémoire.

2.3 Modèles des charges chauffantes (ou de refroidissement)

On suppose dans ce qui suit qu'un chauffage électrique est contrôlé par un thermostat dont l'état dépend de la température.

Les phénomènes thermodynamiques précis d'une résidence individuelle peuvent être très complexes. Cependant, en considérant les processus thermiques "tel que vus par le thermostat", un modèle simple capturant les phénomènes peut être formulé. Le modèle est composé de deux sous-systèmes interconnectés : Une partie linéaire avec un état continu qui décrit la portion emmagasinante d'énergie de l'appareil, et dont l'évolution dépend de $m(t)$; et une partie non-linéaire avec un état discret $m(t)$ caractérisant le mécanisme de commutation, et dont la transition dépend de $x(t)$. Il est écrit comme suit :

-*état continu* : Soit $x(t)$ une température caractérisant l'état de stockage d'énergie de la résidence. $x(t)$ évolue selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Cdx(t) = -a'(x(t) - X_a(t))dt + R'm(t)b(t)dt \quad (2.1)$$

où :

C : La capacité thermique moyenne de la résidence

a' : Le taux moyen de pertes thermiques à travers les murs, plafond, plancher...etc,

$x(t)$: La température moyenne de la résidence

$X_a(t)$: La température ambiante (externe)

R' : Le taux moyen de gain thermique fourni par le chauffage

$m(t)$: L'état de fonctionnement de l'appareil (1 pour marche et 0 pour arrêt)

$v'(t)$: Un bruit additif

$b(t)$: L'état de fonctionnement de l'alimentation (1 pour marche et 0 pour arrêt)

Ainsi $b(t)$ représentera la commande appliquée par la centrale du réseau dans le cas d'une gestion par contrôle direct du réseau. $v'(t)$ représente les erreurs de modélisation et les processus de pertes ou gain thermiques qui n'ont pas été inclus explicitement. Ces processus sont essentiellement dus au comportement humain tel les entrées et sorties de la résidence. La présence d'un grand nombre de personnes dans la maison, ou une fenêtre ouverte près du chauffage modifie considérablement la dynamique de la charge, et ce indépendamment des caractéristiques individuelles de la résidence. $v'(t)$ est considéré comme un processus de Wiener de moyenne nulle et ayant une certaine variance.

En divisant (2.1) par C , on obtient :

$$dx(t) = -a(x(t) - X_a(t))dt + Rm(t)b(t)dt + dv(t) \quad (2.2)$$

où les définitions de a et R sont évidentes. $v(t)$ a pour variance σ^2

-*Etat discret* : L'évolution de l'état discret $m(t)$ est dirigée par un thermostat ayant pour températures limites x_- et x_+ . $m(t)$ passe de 1 à 0 lorsque $x(t)$ atteint x_+ , et de 0 à 1 lorsque $x(t)$ atteint x_- .

Mathématiquement, pour un incrément temporel infiniment petit δt :

$$m(t + \delta t) = m(t) + \pi(x(t), x_+, x_-) \quad (2.3)$$

où :

$$\pi(x(t), x_+, x_-) = \begin{cases} 0 & x_- < x(t) < x_+ \\ -m & x(t) \geq x_+ \\ 1 - m & x(t) \leq x_- \end{cases} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Tel que formulé, ce modèle implique essentiellement quatre paramètres : Le taux de gains thermiques normalisé, le taux de pertes thermiques normalisé, la variance du bruit et la température externe. Une fois la température externe mesurée, seuls trois paramètres restent à estimer. Nous montrerons plus loin comment il est possible d'effectuer l'identification en utilisant uniquement **les enregistrements des temps de commutation du thermostat et la mesure de la température externe.**

Une fois le modèle de la charge élémentaire synthétisé, on peut alors construire le modèle de la charge globale par aggrégation des groupes homogènes.

On définit un groupe de contrôle homogène comme étant un ensemble de charges électriques ayant les caractéristiques suivantes :

- Une dynamique de stockage d'énergie caractérisée par les mêmes paramètres
(2.2)

- Un contrôle $b(t)$ commun à tous les appareils dans le groupe, i.e $b_1(t) = b_2(t) = \dots = b_n(t)$

Soit $P(t)$ la demande globale des appareils et $\bar{m}(t)$: l'état d'opération agrégé, soit la fraction moyenne d'appareils en marche. La puissance $P(t)$ consommée par un groupe homogène est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=1}^N P_i(t) = \sum_{i=1}^N R'_i m_i(t) b_i(t) \\
 &= R' b(t) \sum_{i=1}^N m_i(t) \\
 &= R' b(t) N \bar{m}(t)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où :

$$\bar{m}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(t) \tag{2.7}$$

On peut alors démontrer [MC85] que $\bar{m}(t)$ tend vers l'espérance mathématique de $m(t)$ lorsque N devient suffisamment grand. Pour exprimer $\bar{m}(t)$, il s'agit d'abord de décrire l'évolution des fonctions de densité de probabilité suivantes :

$$f_1(\lambda, t) d\lambda = P_r[(\lambda < x(t) \leq \lambda + d\lambda) \cap (m(t) = 1)] \tag{2.8}$$

$$f_0(\lambda, t) d\lambda = P_r[(\lambda < x(t) \leq \lambda + d\lambda) \cap (m(t) = 0)] \tag{2.9}$$

On définira

$$T_{\lambda, t}^K[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \lambda} [(a(\lambda - X_a(t)) - kb(t)R)f] - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \tag{2.10}$$

Le théorème suivant est alors établi [Mal82]:

THÉORÈME

Les fonctions de densité de probabilités f_1 et f_2 ainsi définies sont solutions du système d'équations de Fokker-Planck suivant :

dans les régions a et b (voir figure (2.3))

$$T_{\lambda,t}^K[f_1(\lambda, t)] = 0 \quad k = 0, 1 \quad (2.11)$$

dans les régions b et c

$$T_{\lambda,t}^K[f_0(\lambda, t)] = 0 \quad k = 0, 1 \quad (2.12)$$

Conditions aux frontières:

$$f_{1,b}(x_+, t) = f_{0,b}(x_-, t) = 0 \quad (2.13)$$

Conditions à l'infini

$$f_{1,a}(-\infty, t) = f_{0,c}(+\infty, t) = 0 \quad (2.14)$$

Conservation de la probabilité

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda} f_{1,a}(x_-, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{1,b}(x_-, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{0,b}(x_-, t) = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f_{0,c}(x_+, t) - \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{0,b}(x_-, t) - \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{1,b}(x_+, t) = 0 \quad (2.16)$$

Une expression de l'évolution de la fraction moyenne d'appareils en marche est alors établie [Mal82] :

$$\bar{m}(t) = \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f_{1,b}(x_+, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{0,b}(x_-, t) \right] + \bar{m}(0) \quad (2.17)$$

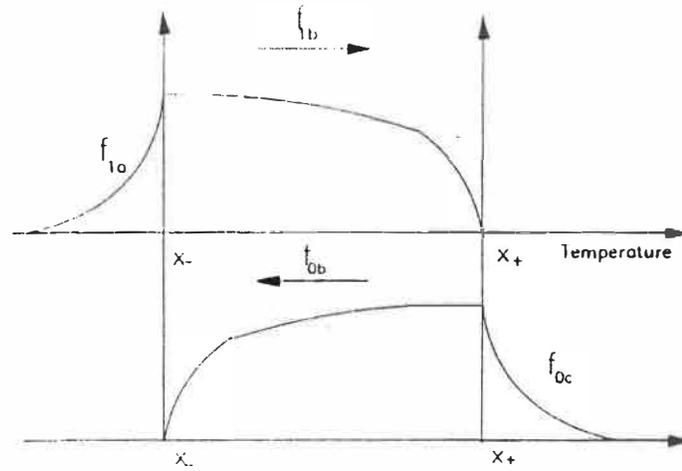


Figure 2.3: Densités de probabilité hybrides de la température

2.4 Conclusion

Ainsi donc, cette approche aura permis, à condition de résoudre le problème d'estimation des paramètres qui apparaissent dans l'équation (2.10), de synthétiser de manière simple et précise le comportement dynamique des charges électriques de chauffage (ou de refroidissement) et ce, tout en tenant compte de la diversité que peut comporter le système, des divers facteurs aléatoires affectant la charge, et en préservant le sens physique du modèle. Le tout est réalisé en utilisant un minimum de paramètres, et grâce à une méthodologie d'aggrégation basée sur la théorie des processus stochastiques. La puissance de cette approche réside dans le fait qu'il suffit d'identifier le modèle des charges élémentaires représentatives pour caractériser le modèle global. Il s'agit maintenant de développer des algorithmes d'identification du modèle de base à partir d'un minimum de mesures afin de rendre l'approche parfaitement souple. On choisit d'identifier le système à partir des durées de temps de marche et d'arrêt du chauffage, et de la mesure de la température externe.

Chapitre 3

Méthode des moindres carrés

La présente approche consiste à minimiser la somme des erreurs quadratiques, où l'erreur est définie comme étant la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée ou prédite. Dans notre cas, la sortie est la durée de marche et d'arrêt du thermostat.

Il s'agira donc d'abord d'établir une expression analytique de ces durées en fonction des paramètres à identifier . L'étape suivante consistera à dériver une expression analytique de l'erreur quadratique globale à partir de laquelle nous établirons une relation récursive et approximative pour le calcul des estimés définis comme les valeurs des paramètres qui minimisent le critère ainsi formulé .

3.1 Relation entre paramètres et mesures

Le modèle hybride à structure variable est, comme son nom l'indique, une concaténation alternée de deux modèles. En effet, selon que le chauffage soit en marche ou non, la structure du modèle change. On peut donc décomposer le modèle original en deux modèles caractérisant chacune des structures en donnant successivement à la variable discrète $m(t)$ les valeurs 1 et 0:

$$dx(t) = -a(x(t) - X_a(t))dt + Rdt + dv(t) \quad (3.1)$$

$$dx(t) = -a(x(t) - X_a(t))dt + dv(t) \quad (3.2)$$

Les équations (3.1) et (3.2) décrivent respectivement l'évolution de la température lorsque le chauffage est en marche et lorsqu'il est arrêté. Cette reformulation nous permet maintenant de développer une expression analytique pour les durées de marche et d'arrêt puisque chaque sous-système est décrit séparément. Nous noterons par T_{on} et T_{off} respectivement la durée de marche et la durée d'arrêt.

Une expression analytique exacte de T_{on} et T_{off} étant trop lourde à utiliser, nous établirons une simple approximation de celle-ci. Le développement proposé est le même pour T_{on} et T_{off} .

Considérons le cas où le chauffage est en marche ; l'équation différentielle (3.1) peut être discrétisée selon la méthode d'Euler comme suit :

$$x_{k+1} - x_k = -a(x_k - X_a)\delta t + R\delta t + dv \quad (3.3)$$

où δt est un incrément temporel suffisamment petit. Nous supposons que les paramètres a , R et X_a sont constants.

Nous effectuerons alors l'approximation suivante : à $t = 0$, la température est x_- , à $t = T_{on}$, la température atteint x_+ . Ainsi :

$$x_+ - x_- = -a(x_- - X_a)T_{on} + RT_{on} + \int_0^{T_{on}} dv \quad (3.4)$$

d'où

$$T_{on} = \frac{x_+ - x_-}{R - a(x_- - X_a)} + \frac{\int_0^{T_{on}} dv}{R - a(x_- - X_a)} \quad (3.5)$$

De la même manière, on peut écrire

$$T_{off} = \frac{x_+ - x_-}{a(x_+ - X_a)} + \frac{\int_0^{T_{off}} dv}{a(x_+ - X_a)} \quad (3.6)$$

Les expressions ainsi obtenues comportent un terme purement déterministe et un terme aléatoire. Ce dernier terme correspond au bruit accumulé entre les commutations, ou encore l'écart des temps de marche et arrêt par rapport à la durée normale en l'absence de pertes ou gains aléatoires.

Dénotons par \hat{T}_{on} et \hat{T}_{off} les durées estimées de T_{on} et T_{off} . En analysant les expressions ainsi obtenues, on constate que T_{on} et T_{off} s'expriment comme une valeur moyenne à laquelle s'ajoute un bruit. Ceci nous mène à considérer \hat{T}_{on} et \hat{T}_{off} comme étant les valeurs moyennes respectivement de T_{on} et T_{off} .

Ainsi :

$$\hat{T}_{on} = \frac{x_+ - x_-}{R - a(x_- - X_a)} \quad (3.7)$$

et

$$\hat{T}_{off} = \frac{x_+ - x_-}{a(x_+ - X_a)} \quad (3.8)$$

On définit alors r et c comme étant respectivement les vitesses moyennes de réchauffement et de refroidissement

$$r = R - a(x_- - X_a) \quad (3.9)$$

$$c = a(x_+ - X_a) \quad (3.10)$$

Soit Δ la bande de température du thermostat :

$$\Delta = x_+ - x_- \quad (3.11)$$

posons

$$r_{inv} = \frac{1}{r} \quad (3.12)$$

$$c_{inv} = \frac{1}{c} \quad (3.13)$$

(3.7) et (3.8) peuvent alors s'écrire :

$$\hat{T}_{on} = r_{inv} \Delta \quad (3.14)$$

$$\hat{T}_{off} = c_{inv} \Delta \quad (3.15)$$

(3.9) (3.10) (3.12) (3.13) montrent que des estimées de r_{inv} et c_{inv} peuvent mener à des estimées de a et R . La transformation ainsi formulée nous permet de nous ramener à un cas d'estimation linéaire pour deux systèmes découplés. Ainsi donc, l'algorithme d'estimation que l'on se propose de développer sera appliqué simultanément et indépendamment aux deux sous-systèmes.

3.2 Formulation générale de l'algorithme

Dénotons par θ le vecteur des paramètres à estimer pour chacun des systèmes, et par $T(t, \theta)$ la sortie associée au temps t , et par $\hat{T}(t, \theta)$ la sortie estimée au temps t . La subdivision du modèle en deux sous-systèmes donne à θ des valeurs scalaires, soit respectivement r_{inv} et c_{inv} .

Nous choisirons donc de mesurer la qualité de l'approximation à l'aide du critère scalaire suivant :

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(\hat{T}(t, \theta), T(t, \theta)) \quad (3.16)$$

où

$$L(\hat{T}(t, \theta), T(t, \theta)) = \frac{1}{2} (\hat{T}(t, \theta) - T(t, \theta))^2 \quad (3.17)$$

On impose au départ une structure réursive d'estimation. Ainsi, $\hat{\theta}(N+1)$, l'estimé après la $N + 1^{\text{ème}}$ mesure, devra minimiser la fonction $V_{N+1}(\theta)$. On peut écrire :

$$(N + 1)V_{N+1}(\theta) = NV_N(\theta) + \frac{1}{2} (\hat{T}(N + 1, \theta) - T(N + 1, \theta))^2 \quad (3.18)$$

Récrivons maintenant $\hat{T}(N + 1, \theta)$ en utilisant un développement en série de Taylor autour de $\hat{\theta}(N)$:

$$\hat{T}(N + 1, \theta) \simeq \hat{T}(N + 1, \hat{\theta}(N)) + \hat{T}'(N + 1, \theta) (\theta - \hat{\theta}(N)) \quad (3.19)$$

où

$$\hat{T}'(N + 1, \theta) \doteq \left. \frac{d\hat{T}(N + 1, \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}(N)} \quad (3.20)$$

en substituant (3.19) dans (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} (N + 1)V_{N+1}(\theta) & \simeq NV_N(\theta) + \frac{1}{2} [\hat{T}(N + 1, \hat{\theta}(N)) + \hat{T}'(N + 1, \hat{\theta}(N)) (\theta - \hat{\theta}(N)) - T(N + 1, \theta)]^2 \\ & = NV_N(\theta) + \frac{1}{2} (\psi(N)\theta - Z(N + 1))^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\psi(N) \doteq \hat{T}'(N + 1, \theta) \quad (3.22)$$

$$Z(N + 1) \doteq T(N + 1, \theta) - \hat{T}(N + 1, \hat{\theta}(N)) + \psi(N)\hat{\theta}(N) \quad (3.23)$$

en dérivant (3.21) par rapport à θ , on obtient

où

$$\dot{V}_{N+1}(\theta) \doteq \frac{dV_{N+1}(\theta)}{d\theta} \quad (3.25)$$

En développant $\dot{V}_N(\theta)$ en série de Taylor autour de $\hat{\theta}(N)$, on obtient :

$$\dot{V}_N(\theta) \simeq \dot{V}_N(\hat{\theta}(N)) + \ddot{V}_N [\theta - \hat{\theta}(N)] \quad (3.26)$$

En notant que $\dot{V}_N(\theta)$ est nul pour la valeur optimale $\hat{\theta}(N)$, on obtient à partir de (3.24) et (3.26) :

$$(N+1)\dot{V}_N(\theta) \simeq N\ddot{V}_N (\theta - \hat{\theta}_N) - \psi_N [Z(N+1) - \psi(N)\theta] \quad (3.27)$$

De la même manière, la valeur $\hat{\theta}(N+1)$ de θ annule $\dot{V}_{N+1}(\theta)$. Ainsi,

$$N\ddot{V}_N [\hat{\theta}(N+1) - \hat{\theta}(N)] - \psi(N) [Z(N+1) - \psi(N)\hat{\theta}(N+1)] = 0 \quad (3.28)$$

donc

$$\begin{aligned} [N\ddot{V}_N + \psi(N)^2] \hat{\theta}(N+1) &= N\ddot{V}_N \hat{\theta}(N+1) + \psi(N)Z(N+1) \\ &= [N\ddot{V}_N + \psi(N)^2] \hat{\theta}(N) \\ &+ \psi(N) [Z(N+1) - \psi(N)\hat{\theta}(N)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

d'où

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + [N\ddot{V}_N + \psi(N)^2]^{-1} \psi(N) [Z(N+1) - \psi(N)\hat{\theta}(N)] \quad (3.30)$$

Pour faciliter le calcul, Goodwin [GS84] propose le calcul de \ddot{V}_N de manière itérative.

Pour ceci, il suffit de dériver (3.24) par rapport à θ :

$$(N + 1)\ddot{V}_{N+1} \simeq N\ddot{V}_N + \psi(N)^2 \quad (3.31)$$

puis de définir:

$$P(N)^{-1} \doteq (N + 1)\ddot{V}_{N+1} \quad (3.32)$$

Le lemme d'inversion matricielle [GS84] nous permet alors d'établir que:

$$P(N) = P(N - 1) - \frac{P(N - 1)^2 \psi(N)^2}{1 + \psi(N)^2 P(N - 1)} \quad (3.33)$$

L'algorithme se résume ainsi en ce qui suit:

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}(N - 1) + P(N - 1)\psi(N - 1) [T(N) - \hat{T}(N, \hat{\theta}(N - 1))] \quad (3.34)$$

où

$$P(N - 1) = P(N - 2) - \frac{P(N - 2)^2 \psi(N - 1)^2}{1 + \psi(N - 1)^2 P(N - 2)^2} \quad (3.35)$$

$$\psi(N - 1) = \left. \frac{d\hat{T}(N, \theta)}{d\theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(N - 1)} \quad (3.36)$$

3.3 L'algorithme d'identification

Nous pouvons à présent formuler l'algorithme d'identification de notre modèle comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{c}_{inv}(N) &= \hat{c}_{inv}(N - 1) \\ &+ P_{off}(N - 1)\psi_{off}(N - 1) (T_{off}(N) - \hat{T}(N, \hat{c}_{inv}(N - 1))) \end{aligned} \quad (3.37)$$

où

$$P_{off}(N-1) = P_{off}(N-2) - \frac{P_{off}(N-1)^2 \psi_{off}(N-1)^2}{1 + \psi_{off}(N-1)^2 P_{off}(N-2)} \quad (3.38)$$

$$\hat{T}_{off}(N, \hat{c}_{inv}(N-1)) = \hat{c}_{inv}(N-1) \Delta \quad (3.39)$$

$$\psi_{off}(N-1) = \left. \frac{d\hat{T}_{off}(N, c_{inv})}{dc_{inv}} \right|_{c_{inv} = \hat{c}_{inv}(N-1)} = \Delta \quad (3.40)$$

$$\hat{a}(N) = \frac{1}{\hat{c}_{inv}(N-1)(x_+ - X_a)} \quad (3.41)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{r}_{inv}(N) &= \hat{r}_{inv}(N-1) \\ &+ P_{on}(N-1) \psi_{on}(N-1) [T_{on}(N) - \hat{T}(N, \hat{r}_{inv}(N-1))] \end{aligned} \quad (3.42)$$

où

$$P_{on}(N-1) = P_{on}(N-2) - \frac{P_{on}(N-1)^2 \psi_{on}(N-1)^2}{1 + \psi_{on}(N-1)^2 P_{on}(N-2)} \quad (3.43)$$

$$\hat{T}_{on}(N, \hat{r}_{inv}(N-1)) = \hat{r}_{inv}(N-1) \Delta \quad (3.44)$$

$$\psi_{on}(N-1) = \left. \frac{d\hat{T}_{on}(N, r_{inv})}{dr_{inv}} \right|_{r_{inv} = \hat{r}_{inv}(N-1)} = \Delta \quad (3.45)$$

$$\hat{R}(N) = \frac{1}{\hat{r}_{inv}(N-1)} + \hat{a}(N)(x_- - X_a) \quad (3.46)$$

Ainsi donc, l'estimé de chacun des paramètres est réactualisée selon une régression exponentielle contrôlée par un terme d'erreur. En initialisant le gain P_{on} (P_{off}) avec un facteur élevé, l'estimée devrait converger de manière rapide et stable vu l'invariance du gradient.

3.4 Système variant dans le temps

Le développement de l'algorithme n'impose aucune restriction aux paramètres τ , c ni à la température externe X_a . Ainsi donc, on peut admettre une variation de ces paramètres et utiliser le même algorithme pour le cas du système variant dans le

temps. On évaluera par simulations les limites de variations de paramètres dans le cas où celles ci s'effectuent par paliers.

3.5 Estimation des paramètres normalisés

L'algorithme d'identification ainsi développé suppose la connaissance des températures x_- et x_+ . Dans le cas où seule la température moyenne \bar{x} fixée par le thermostat est connue, nous effectuerons l'estimation des paramètres normalisés suivants :

$$r_n = \frac{r}{\Delta} \quad (3.47)$$

$$r_{invn} = \frac{\Delta}{r} \quad (3.48)$$

$$c_n = \frac{c}{\Delta} \quad (3.49)$$

$$c_{invn} = \frac{\Delta}{c} \quad (3.50)$$

L'algorithme résultant se formule alors selon le schéma initial comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{c}_{invn}(N) &= \hat{c}_{invn}(N-1) \\ &+ P_{off}(N-1)\psi_{off}(N-1) \left(T_{off}(N) - \hat{T}(N, \hat{c}_{invn}(N-1)) \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

où

$$P_{off}(N-1) = P_{off}(N-2) - \frac{P_{off}(N-1)^2 \psi_{off}(N-1)^2}{1 + \psi_{off}(N-1)^2 P_{off}(N-2)} \quad (3.52)$$

$$\hat{T}_{off}(N, \hat{c}_{invn}(N-1)) = \hat{c}_{invn}(N-1) \quad (3.53)$$

$$\psi_{off}(N-1) = \left. \frac{d\hat{T}_{off}(N, c_{invn})}{dc_{invn}} \right|_{c_{invn}=\hat{c}_{invn}(N-1)} = 1 \quad (3.54)$$

$$\hat{a}_n(N) = \frac{1}{\hat{c}_{invn}(N-1)(\bar{x} - X_a)} \quad (3.55)$$

et

$$\begin{aligned}\hat{r}_{invn}(N) &= \hat{r}_{invn}(N-1) \\ &+ P_{on}(N-1)\psi_{on}(N-1)\left(T_{on}(N) - \hat{T}(N, \hat{r}_{invn}(N-1))\right)\end{aligned}\quad (3.56)$$

où

$$P_{on}(N-1) = P_{on}(N-2) - \frac{P_{on}(N-1)^2 \psi_{on}(N-1)^2}{1 + \psi_{on}(N-1)^2 P_{on}(N-2)} \quad (3.57)$$

$$\hat{T}_{on}(N, \hat{r}_{invn}(N-1)) = \hat{r}_{invn}(N-1) \quad (3.58)$$

$$\psi_{on}(N-1) = \left. \frac{d\hat{T}_{on}(N, r_{invn})}{dr_{invn}} \right|_{r_{invn} = \hat{r}_{invn}(N-1)} = 1 \quad (3.59)$$

$$\hat{R}_n(N) = \frac{1}{\hat{r}_{invn}(N-1)} + \hat{a}_n(N)(\bar{x} - X_a) \quad (3.60)$$

Ainsi donc, l'estimée des paramètres normalisés aura exactement la même dynamique que celle des paramètres originaux.

3.6 Simulations

3.6.1 Cas du système invariant

Dans ce qui suit, nous effectuons des simulations pour différents niveaux de bruit avec

$$\begin{aligned}a &= 0.02(\text{min})^{-1} & R &= 0.4\text{degC}(\text{min})^{-1} & X_a &= 12\text{degC} \\ x_+ &= 21.1\text{degC} & x_- &= 20\text{degC} & \Delta &= 1.1\text{degC}\end{aligned}$$

3.6.1.1 $\sigma^2 = 0.04$

Pour un niveau de bruit intermédiaire, l'algorithme converge très rapidement et de manière très stable vers la valeur du paramètre pourvu que la matrice de gain

ait une valeur initiale élevée. Il est important d'initialiser l'algorithme avec une forte matrice de gain car celle-ci décroît assez rapidement de manière exponentielle. Dans notre cas

$$P_{off}(1) = P_{on}(1) = 10^6$$

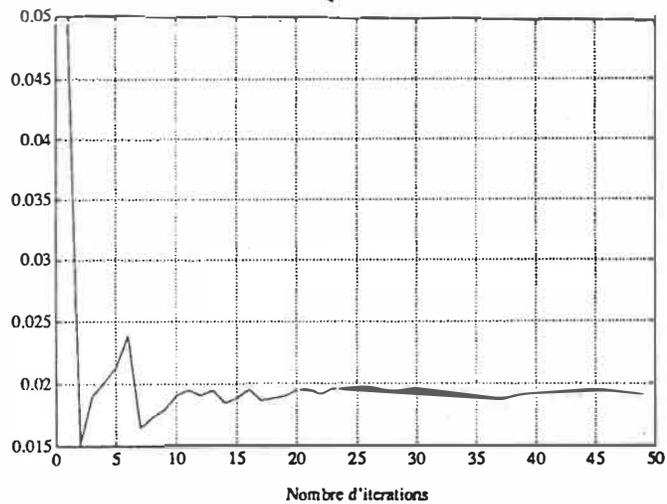


Figure 3.1: Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.04$

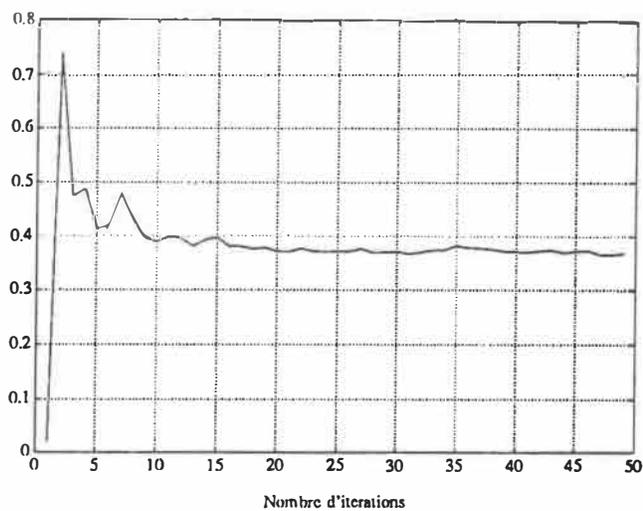


Figure 3.2: Estimé de R par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.04$

3.6.1.2 $\sigma^2 = 0.16$ et $\sigma^2 = 10^{-4}$

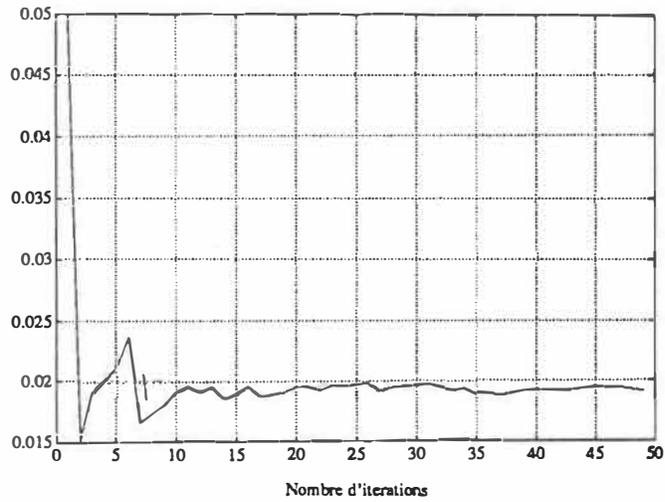


Figure 3.3: Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.16$

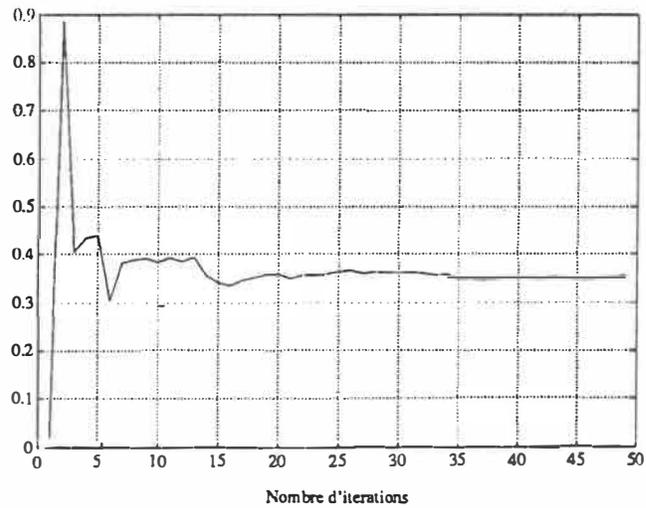


Figure 3.4: Estimé de k par les moindres carrés, $\sigma^2 = 0.16$

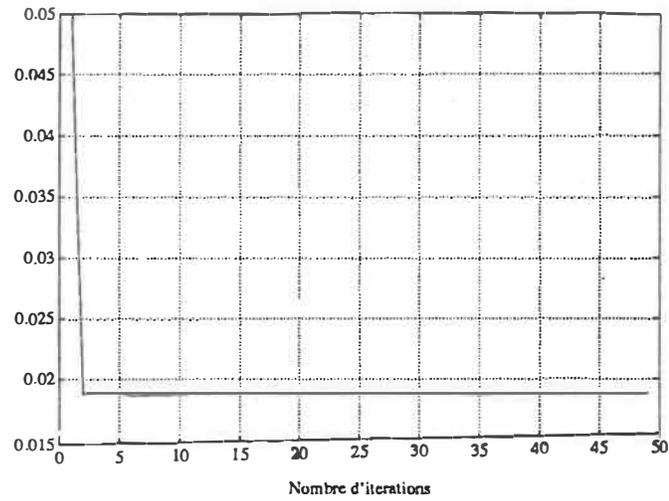


Figure 3.5: Estimé de a par les moindres carrés, $\sigma^2 = 10^{-4}$

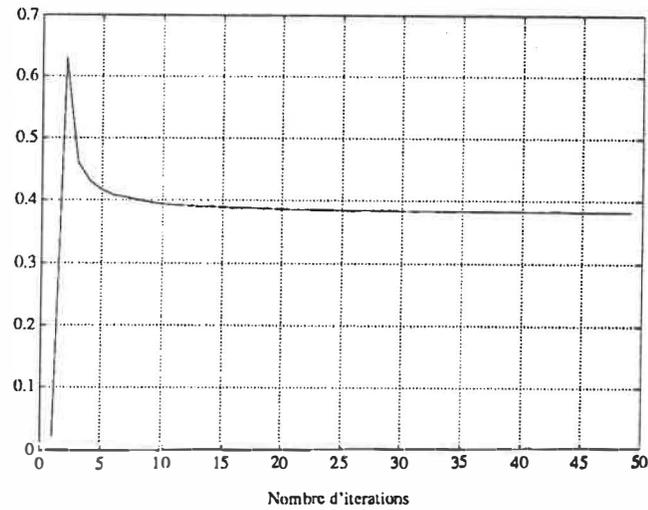


Figure 3.6: Estimé de R par les moindres carrés, $\sigma^2 = 10^{-4}$

Pour des faibles valeurs de bruit ainsi que pour celles élevées, on observe un léger biais. Dans le premier cas, cela est dû à la non-persistence de l'excitation. Dans le deuxième cas, le système tend à être noyé dans le bruit dont la moyenne des chocs peut s'écarter de zéro vu l'augmentation de la variance. La qualité des approximations (3.5) et (3.9) tend aussi à diminuer.

3.7 Cas du système variant dans le temps

La température externe est considérée comme une entrée variable. Lors de nos simulations, on fait varier la température par paliers. Nous avons effectué des variations jusqu'à l'ordre de 40%. Dans ces conditions, les estimés convergent en dépit des variations de la température. Ceci est dû au fait que les expressions des T_{on} et T_{off} tiennent compte explicitement de X_a .

En réalité, une forte variation de la température externe entraîne une **variation des paramètres a et R** . De fait, le modèle est une approximation linéaire sur un intervalle de température X_a d'un modèle non-linéaire. On a donc simulé à cet effet des variations brusques par paliers de nos paramètres:

$$\begin{array}{ll} a_{in} = 0.015min^{-1} & a_{fin} = 0.03min^{-1} \\ R_{in} = 0.3deg(min)^{-1} & R_{fin} = 0.6deg(min)^{-1} \\ \sigma_{in}^2 = 0.01 & \sigma_{fin}^2 = 0.04 \\ X_{ain} = 10^{oc} & X_{a fin} = 14^{oc} \\ x_+ = 21.1^{oc} & x_- = 20^{oc} \end{array}$$

où l'on a défini a_{in} et a_{fin} comme étant respectivement les valeurs initiales et finales.

L'algorithme des moindres carrés ne permet malheureusement pas de suivre des grandes variations. Seules de faibles variations continues pourront être absorbées, et ce malgré l'aspect récursif avec facteur d'oubli de l'algorithme.

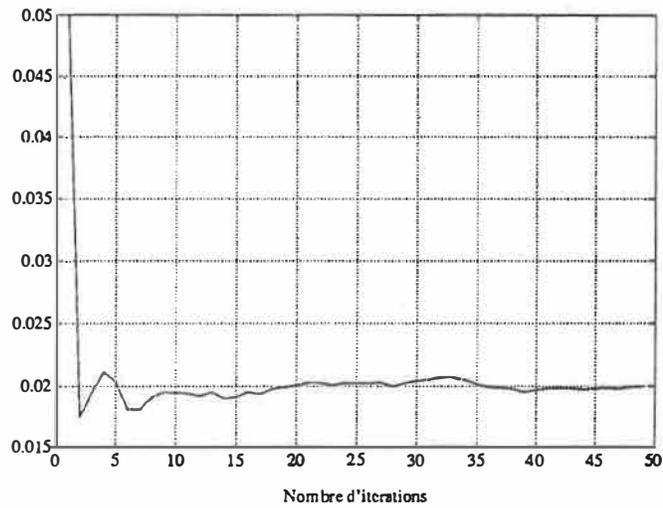


Figure 3.7: Estimé de a suite à une variation de X_a à $N = 25$

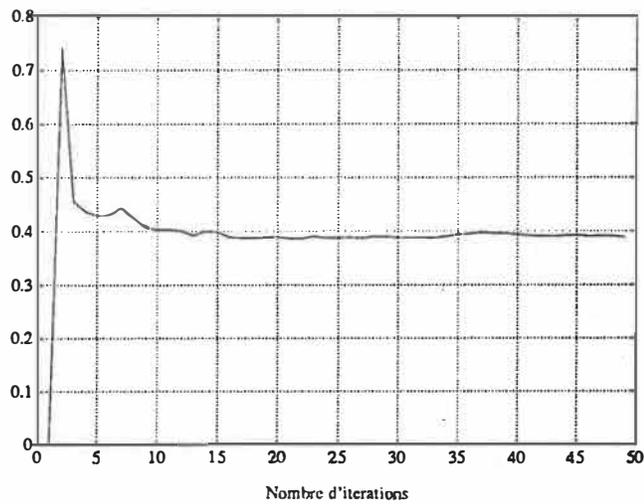


Figure 3.8: Estimé de R suite à une variation de X_a à $N = 25$

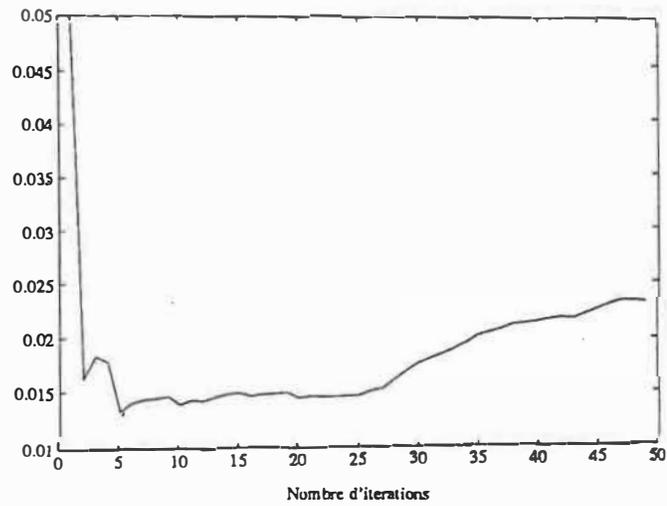


Figure 3.9: Estimé adaptatif de a ; $a_{in} = 0.015, a_{fin} = 0.03$ à $N = 25$

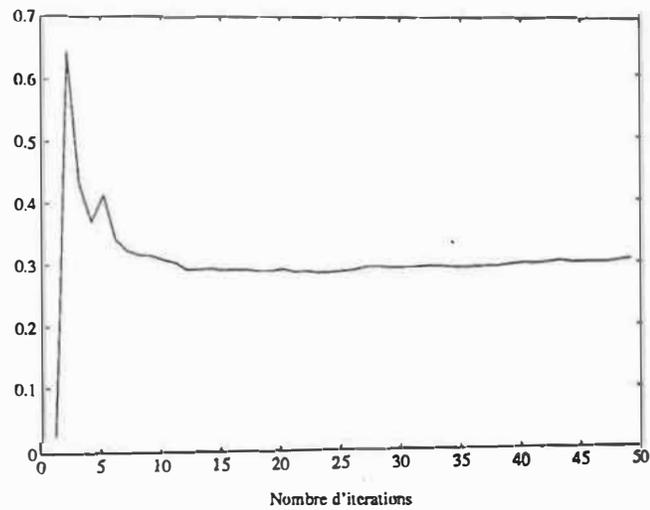


Figure 3.10: Estimé adaptatif de R ; $R_{in} = 0.3, R_{fin} = 0.6$ à $N = 25$

3.8 Conclusion

Ainsi donc, la méthode des moindres carrés nous permet d'estimer, selon un schéma simple et stable, la partie non stochastique de notre modèle. Il suffira d'utiliser un gain initial élevé pour obtenir une convergence rapide de l'estimateur. Cet estimateur pourra de plus être utilisé dans les cas variant et invariant dans le temps. Dans le cas où uniquement la température externe subit des variations, l'algorithme converge bien. X_a est en effet considérée comme une mesure. Cependant, lorsque les paramètres du système changent (a et R), l'algorithme n'est capable de suivre que de faibles variations de ces paramètres.

La méthode des moindres carrés présente cependant une importante lacune; celle de son incapacité d'identifier la variance du bruit. Cette identification est d'autant plus importante que le bruit est un paramètre clé dans le comportement de la charge [Mal82]. Nous utiliserons donc à cet effet la méthode du maximum de vraisemblance.

Chapitre 4

Méthode du maximum de vraisemblance

Les simulations du comportement dynamique d'un groupe homogène de charges [Mal82] [CM83] ont montré l'influence considérable de la variance du processus de Wiener agissant dans le modèle de base (2.2). Il est donc essentiel d'estimer ce paramètre en vue d'une identification complète du modèle de base, et par le fait même du modèle agrégé. Il s'agit alors d'établir des expressions des durées T_{on} et T_{off} dans lesquelles la variance σ^2 apparaît explicitement comme un paramètre identifiable.

Pour ceci, nous utiliserons l'approche du maximum de vraisemblance qui trouve sa justification dans la nature stochastique de notre modèle. Le principe de base de cette approche consiste à considérer comme estimés "optimaux" les valeurs des paramètres qui, à priori, auraient maximisé la probabilité d'observer les mesures qui ont été obtenues jusque là. Il s'agira donc d'établir la densité de probabilité de la sortie mesurée pour construire la fonction de vraisemblance. Nous serons alors en mesure d'établir les expressions analytiques des estimateurs optimaux. Le calcul des estimés pourra être effectué, soit par un calcul direct ou selon un schéma itératif (Newton).

Ainsi, dans la section 1, nous établirons les densités de probabilité des durées T_{on} et T_{off} pour pouvoir construire la fonction de vraisemblance associée au système (section 2). La section 3 présente la formulation des estimateurs par les différentes méthodes citées ci-haut. Nous compléterons enfin le chapitre avec des simulations (section 4).

4.1 Densités de probabilité des durées T_{on} et T_{off}

Les durées T_{on} et T_{off} correspondent aux premiers temps de passage du mouvement brownien décrivant la température x , de x_- vers x_+ et de x_+ vers x_- , avec r et c comme vitesses respectives. Les fonctions de densité de probabilité de ces temps de passage peuvent être exprimées en se basant sur les fonctions de densités de la température établies par Cox [CM65]:

$$P_{off}(t, \theta) = \frac{\Delta}{\sigma(2\pi t^3)^{1/2}} \exp - \frac{(\Delta - ct)^2}{2\sigma^2 t} \quad (4.1)$$

$$P_{on}(t, \theta) = \frac{\Delta}{\sigma(2\pi t^3)^{1/2}} \exp - \frac{(\Delta - rt)^2}{2\sigma^2 t} \quad (4.2)$$

où θ est le vecteur des paramètres à estimer, soit

$$\theta = (r, c, \sigma^2) \quad (4.3)$$

où encore

$$\theta = (a, R, \sigma^2) \quad (4.4)$$

Les fonctions (4.1) et (4.2) décrivent les densités de probabilité que T_{on} ou T_{off} durent un temps t .

Les paramètres a et R sont inclus implicitement dans les fonctions de densité ci-haut.

4.2 Construction de la fonction de vraisemblance

Il s'agit maintenant d'établir la fonction de vraisemblance correspondant à une série de durées T_{on} et T_{off} . Vu les propriétés du bruit blanc (fonction de corrélation nulle partout excepté à zéro), les durées aléatoires T_{on} (ou T_{off}) seront indépendantes, de telle sorte que la fonction de densité conjointe d'une série de mesures sera le produit des densités individuelles. Deux alternatives se présentent alors; la première consiste à construire deux fonctions de vraisemblance, correspondant à chacun des sous-systèmes, i.e. l'une pour la structure ON et l'autre pour la structure OFF. La seconde alternative consiste à construire une fonction de vraisemblance unique pour le système global. La considération de ces deux alternatives est essentiellement motivée d'une part par la nature du modèle, et d'autre part par la nécessité d'étudier l'interaction des deux structures par le biais du terme qui caractérise la partie stochastique du modèle. Nous exprimerons les fonctions de vraisemblance obtenues respectivement en fonction de r et c , puis de R et a . Cette distinction nous sera utile entre autre pour l'étude du cas du système variant dans le temps.

4.2.1 Approche des fonctions de vraisemblance séparées

Etant donné une série de durées $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$, la densité de probabilité globale s'exprime sous la forme :

$$p_g = \prod_{i=1}^N p(T_i, \theta) \quad (4.5)$$

La nature des densités $p(T_i, \theta)$ (4.1 - 4.2) ainsi que l'expression de p_g sous forme de produit, suggèrent l'utilisation du logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$L = \ln \prod_{i=1}^N p(T_i, \theta) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \ln p(T_i, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln \frac{\Delta}{\sigma (2\pi T_i^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - vT_i)^2}{2\sigma^2 T_i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

où v est la vitesse associée à chaque structure.

On obtient ainsi les fonctions de vraisemblance logarithmiques pour chacune des structures

$$L_{off(r_c)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma (2\pi T_{off}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - cT_{off}(i))^2}{2\sigma^2 T_{off}(i)} \right] \quad (4.8)$$

$$L_{on(r_c)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma (2\pi T_{on}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - rT_{on}(i))^2}{2\sigma^2 T_{on}(i)} \right] \quad (4.9)$$

Les équations (3.9) et (3.10) reliant les deux paires de paramètres nous permettent d'écrire de la même manière :

$$L_{off(a_R)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma (2\pi T_{off}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - a(x_+ - X_a)T_{off}(i))^2}{2\sigma^2 T_{off}(i)} \right] \quad (4.10)$$

$$L_{on(a_R)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma (2\pi T_{on}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - RT_{on}(i) + a(x_- - X_a)T_{on}(i))^2}{2\sigma^2 T_{on}(i)} \right] \quad (4.11)$$

4.2.2 Fonction de vraisemblance globale

Vu que la variance du bruit et le taux de perte thermique a sont des paramètres communs aux deux structures, la qualité de l'estimation pourrait être améliorée en utilisant la fonction de vraisemblance du système global. En effet, l'estimé de la variance serait obtenu à partir d'un maximum d'informations. Il en serait de même pour a si ce paramètre est directement estimé, et ce puisqu'il est commun aux deux structures.

La fonction de vraisemblance globale est le produit des densités de toutes les sorties du système. Dans ce cas, la fonction de vraisemblance est tout simplement le produit de L_{on} et L_{off} . Nous obtenons ainsi,

$$L_{G(r,c)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(2\pi T_{off}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - cT_{off}(i))^2}{2\sigma^2 T_{off}(i)} \right] + \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(2\pi T_{on}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - rT_{on}(i))^2}{2\sigma^2 T_{on}(i)} \right] \quad (4.12)$$

Les observations seront donc indicées comme suit :

$$\begin{array}{cccc} i = & 1 & 2 & 3... \\ T_{off}(1) & T_{off}(2) & T_{off}(3)... \\ T_{on}(1) & T_{on}(2) & T_{on}(3)... \end{array}$$

De la même manière nous obtenons :

$$L_{G(a,R)} = \sum_{i=1}^N \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(2\pi T_{off}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - a(x_+ - X_a)T_{off}(i))^2}{2\sigma^2 T_{off}(i)} \right] + \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(2\pi T_{on}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - RT_{on}(i) + a(x_- - X_a)T_{on}(i))^2}{2\sigma^2 T_{on}(i)} \right] \quad (4.13)$$

4.3 Formulation des estimateurs

Une fois la fonction de vraisemblance établie, nous sommes en mesure de déterminer les paramètres qui maximisent cette fonction. Ces paramètres pourront être estimés selon deux approches. La première consiste à établir les expressions des estimateurs optimaux comme solutions des équations :

$$\frac{\partial L_G}{\partial \theta} = 0 \quad (4.14)$$

où θ est remplacé respectivement par le paramètre à estimer. Ces estimés optimaux pourront alors être évalués directement. Cette approche sera appelée celle du maximum de vraisemblance exact. Une deuxième approche s'inspire de la méthode de Newton. Elle consiste à réactualiser le paramètre estimé à chaque observation en utilisant le gradient et le jacobien de la fonction de vraisemblance de la dernière estimée. C'est la méthode du maximum de vraisemblance récursif de Newton.

4.3.1 Maximum de vraisemblance exact

Nous développerons dans ce qui suit les algorithmes estimant respectivement r , c ainsi que ceux donnant directement a , R . En effet, il nous est possible d'établir des estimés de a et R , comme dans le cas de la méthode des moindres carrés, à partir de r et de c , ou directement.

4.3.1.1 Expressions analytiques des estimateurs optimaux de r , c et σ^2

L'estimation de r et de c peut s'effectuer à partir des fonctions de vraisemblances correspondantes respectivement aux structures ON et OFF, ou de la fonction de vraisemblance globale.

Les équations (4.8) et (4.12) impliquent que

$$\frac{\partial L_{G(r,c)}}{\partial c} = \frac{\partial L_{off(r,c)}}{\partial c} = \sum_{i=1}^N \frac{cT_{off}(i) - \Delta}{\sigma^2} \quad (4.15)$$

et

$$\frac{\partial L_{G(r,c)}}{\partial r} = \frac{\partial L_{on(r,c)}}{\partial r} = \sum_{i=1}^N \frac{rT_{on}(i) - \Delta}{\sigma^2} \quad (4.16)$$

Ainsi donc, l'utilisation de l'une ou l'autre des fonctions de vraisemblance (globale ou séparée) donnera le même résultat puisque r et c apparaissent comme deux paramètres découplés dans la fonction de vraisemblance.

(4.15) et (4.16) donnent:

$$c_{opt} = \frac{N\Delta}{\sum_{i=1}^N T_{off}(i)} \quad (4.17)$$

$$r_{opt} = \frac{N\Delta}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \quad (4.18)$$

L'estimation de ces paramètres s'effectuera bien sûr de manière cyclique.

Quand à l'estimateur de la variance, il pourra être établi à partir de l'une ou l'autre des fonctions de vraisemblance (globale ou séparée). Cependant, il est clair que le véritable estimateur optimal sera obtenu à partir de la fonction globale, vu que cette fonction fournit le maximum d'information rattachée à σ^2 . On vérifiera par simulation la différence de performances de chacun de ces estimés.

Soit σ_{on}^2 et σ_{off}^2 les estimés de la variance associés respectivement à la structure ON et à la structure OFF. Notons que (4.10) et (4.11) peuvent être écrites :

$$L_{off(a,R)} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Delta^2}{\sigma^2 (2\pi T_{off}(i)^3)} - \frac{(\Delta - a(x_+ - X_a)T_{off}(i))^2}{2\sigma^2 T_{off}(i)} \right] \quad (4.19)$$

$$L_{on(a,R)} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Delta}{\sigma^2 (2\pi T_{on}(i)^3)} - \frac{(\Delta - RT_{on} + a(x_- - X_a)T_{on}(i))^2}{2\sigma^2 T_{on}(i)} \right] \quad (4.20)$$

En dérivant par rapport à σ^2 , on obtient alors

$$\sigma_{on}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt} T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \quad (4.21)$$

et

$$\sigma_{off}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt} T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \quad (4.22)$$

Les paramètres r_{opt} et c_{opt} sont les estimateurs optimaux de r et c donnés par (4.17) et (4.18). De la même manière, on peut établir l'expression de l'estimateur optimal de σ^2 selon la fonction de vraisemblance globale:

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\Delta - r_{opt} T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} + \frac{(\Delta - c_{opt} T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] \quad (4.23)$$

Il est clair que les estimateurs optimaux donnés par les fonctions de vraisemblance séparées ne maximisent pas la fonction de vraisemblance globale.

4.3.1.2 Calcul des estimés de r , c et σ^2

Deux alternatives sont présentées pour le calcul numérique des estimés. La première consiste en un calcul direct de ces valeurs optimales, et ce par le biais d'un calcul cumulatif des différents termes de chacune des expressions. Cette méthode sera appelée la méthode du maximum de vraisemblance exact cumulatif. Elle permet donc une évaluation directe des estimateurs, par la reconstitution de la fonction de vraisemblance. Cette opération pourra facilement être implantée en ligne.

La deuxième méthode consiste en un calcul récursif des estimateurs. Il s'agira donc de calculer l'estimé au temps $N + 1$ en fonction de l'estimateur au temps N et de la mesure. Nous nous apercevrons alors que pour rendre le calcul récursif, il

faut faire certaines approximations au niveau du calcul de l'estimé de la variance, approximations qui donneront un estimateur différent. Cette méthode sera appelée la méthode du maximum de vraisemblance récursif.

Méthode du maximum de vraisemblance exact

Notons d'abord par $S_{on}(N)$ et $S_{off}(N)$ les quantités suivantes:

$$S_{on}(N) = \sum_{i=1}^N T_{on}(i) \quad (4.24)$$

$$S_{off}(N) = \sum_{i=1}^N T_{off}(i) \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

On peut alors facilement écrire:

$$S_{on}(N+1) = S_{on}(N) + T_{on}(N+1) \quad (4.27)$$

$$S_{off}(N+1) = S_{off}(N) + T_{off}(N+1) \quad (4.28)$$

$$r_{opt}(N) = \frac{(N+1)\Delta}{S_{on}(N+1)} \quad (4.29)$$

$$c_{opt}(N) = \frac{(N+1)\Delta}{S_{off}(N+1)} \quad (4.30)$$

Nous devons cependant développer l'expression de σ_{opt}^2 sous forme de sommes partielles. En effet, pour un temps N donné, nous utiliserons des valeurs uniques des estimés de r et c , soit celles maximisant la fonction de vraisemblance pour ces N observations. On exprimera donc $r_{opt}(N)$ et $c_{opt}(N)$ en fonction de ces sommes partielles.

(4.23) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2(N) = & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} - \Delta r_{opt}(N) + \frac{r_{opt}(N)^2 T_{on}(i)}{2} \right] \\ & + \frac{1}{N} \left[\frac{\Delta^2}{2T_{off}(i)} - \Delta c_{opt}(N) + \frac{c_{opt}(N)^2 T_{on}(i)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

d'où

$$\sigma_{opt}^2(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} - \Delta r_{opt}(N) + r_{opt}(N)^2 \frac{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)}{2N}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{off}(i)} - \Delta c_{opt}(N) + c_{opt}(N)^2 \frac{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)}{2N} \quad (4.32)$$

Notons par Q_{on} et Q_{off} les quantités

$$Q_{on}(N) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)}$$

$$Q_{off}(N) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{off}(i)}$$

Nous obtenons donc

$$Q_{on}(N+1) = Q_{on}(N) + \frac{\Delta^2}{2T_{on}(N+1)} \quad (4.33)$$

$$Q_{off}(N+1) = Q_{off}(N) + \frac{\Delta^2}{2T_{off}(N+1)} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{opt}^2(N+1) = \frac{1}{N} Q_{on}(N+1) + \Delta r_{opt}(N) + r_{opt}(N)^2 \frac{S_{on}(N+1)}{2N} \quad (4.35)$$

$$+ \frac{1}{N} Q_{off}(N+1) + \Delta c_{opt}(N) + c_{opt}(N)^2 \frac{S_{off}(N+1)}{2N} \quad (4.36)$$

L'estimation des paramètres $r_{opt}(N)$ et $c_{opt}(N)$ nous permettra d'obtenir des estimés de a et R selon la transformation suivante :

$$\hat{a}(N) = \frac{c_{opt}(N)}{(x_+ - X_a)} \quad (4.37)$$

$$\hat{R}(N) = r_{opt}(N) + \hat{a}(N)(x_- - X_a) \quad (4.38)$$

Méthode du maximum de vraisemblance récursif

En examinant les expressions analytiques des estimateurs optimaux, nous constatons que seules celles de $r_{opt}(N)$ et $c_{opt}(N)$ nous permettent d'établir une relation exacte purement récurrente. En effet, en exprimant $\sigma_{opt}^2(N+1)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2(N+1) &= \frac{N}{N+1} \sigma_{opt}^2(N) \\ &+ \frac{1}{N+1} \left[\frac{(\Delta - r_{opt}(N+1)T_{on}(N+1))^2}{2T_{on}(N+1)} \right] \\ &+ \frac{1}{N+1} \left[\frac{(\Delta - c_{opt}(N+1)T_{off}(N+1))^2}{2T_{off}(N+1)} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

nous cumulerons des quantités pondérées par des $r_{opt}(N)$ et $c_{opt}(N)$ différents à chaque itération. De cette manière, ce calcul ne donnera pas une évaluation exacte de l'estimateur optimal de la variance.

Quant aux deux autres estimateurs, des expressions récurrentes peuvent être établies en utilisant leurs inverses. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{opt}(N+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)}{(N+1)\Delta} \\ &= \frac{N}{N+1} \frac{1}{c_{opt}(N)} + \frac{T_{off}(N+1)}{(N+1)\Delta} \end{aligned} \quad (4.40)$$

d'où

$$\frac{1}{r_{opt}(N+1)} = \frac{N}{N+1} \frac{1}{r_{opt}(N)} + \frac{T_{on}(N+1)}{(N+1)\Delta} \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{c_{opt}(N+1)} = \frac{N}{N+1} \frac{1}{c_{opt}(N)} + \frac{T_{off}(N+1)}{(N+1)\Delta} \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

Enfin

$$\hat{a}(N) = \frac{c_{opt}(N)}{(x_+ - X_a)} \quad (4.44)$$

$$\hat{R}(N) = r_{opt}(N) + \hat{a}(N)(x_- - X_a) \quad (4.45)$$

4.3.1.3 Expressions analytiques des estimateurs optimaux de a , R et σ^2

Nous établirons dans ce qui suit les expressions analytiques des estimateurs optimaux de a , R et σ^2 à partir de la fonction de vraisemblance globale. Les expressions associées à la fonction de vraisemblance globale en seront déduites.

Posons

$$\alpha = \frac{1}{\sigma^2} \quad (4.46)$$

(4.13) se présente alors comme suit :

$$L_{G(aR)} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha \Delta^2}{(2\pi T_{off}(i))^3} - \frac{\alpha (\Delta - a(x_- - X_a(i))T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] + \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha \Delta^2}{(2\pi T_{on}(i))^3} - \frac{\alpha (\Delta - RT_{on}(i) + a(x_- - X_a(i)))^2}{2T_{on}(i)} \right] \quad (4.47)$$

En dérivant (4.47) respectivement par rapport à chacun des paramètres, nous obtenons :

$$\frac{\partial L_{G(aR)}}{\partial a} = \sum_{i=1}^N \alpha X_p(i) (\Delta - aX_p(i)T_{off}(i)) - \alpha X_m(i) (\Delta - RT_{on}(i) + aX_m(i)T_{on}(i)) = 0 \quad (4.48)$$

où l'on définit

$$X_p(i) = x_+ - X_a(i) \quad (4.49)$$

$$X_m(i) = x_- - X_a(i) \quad (4.50)$$

d'où

$$a_{opt}(N) = \frac{\sum_{i=1}^N X_p(i)\Delta - X_m(i)\Delta + R_{opt}X_m(i)T_{on}(i)}{\sum_{i=1}^N X_p^2(i)T_{off}(i) + X_m^2(i)T_{on}(i)} \quad (4.51)$$

De même

$$\frac{\partial L_{G(aR)}}{\partial R} = \sum_{i=1}^N \alpha (\Delta - RT_{on}(i) + aX_m(i)T_{on}(i)) = 0 \quad (4.52)$$

d'où

$$R_{opt}(N) = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta + a_{opt}X_m(i)T_{on}(i))}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \quad (4.53)$$

Enfin

$$\frac{\partial L_{G(aR)}}{\partial \alpha} = 0 \quad (4.54)$$

a pour solution

$$\alpha_{opt}(N) = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - a_{opt} X_p(i) T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta + R_{opt} T_{on}(i) + a_{opt} X_m(i) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)}} \quad (4.55)$$

d'où

$$\sigma_{opt}^2(N) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - a_{opt} X_p(i) T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta + R_{opt} T_{on}(i) + a_{opt} X_m(i) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)}}{N} \quad (4.56)$$

Nous sommes donc en présence d'un système de trois équations à trois inconnues, soit les trois estimateurs optimaux. Nous devons d'abord résoudre le système d'équations (4.51) et (4.53).

Posons

$$T_1 = \sum_{i=1}^N X_p(i) \Delta - X_m(i) \Delta \quad (4.57)$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^N X_m(i) T_{on}(i) \quad (4.58)$$

$$T_3 = \sum_{i=1}^N X_p(i)^2 T_{off}(i) + X_m(i)^2 T_{on}(i) \quad (4.59)$$

$$T_4 = \sum_{i=1}^N \Delta \quad (4.60)$$

$$T_5 = \sum_{i=1}^N X_m(i) T_{on}(i) \quad (4.61)$$

$$T_6 = \sum_{i=1}^N T_{on}(i) \quad (4.62)$$

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$a_{opt} = \frac{T_1}{T_3} + R_{opt} \frac{T_2}{T_3} \quad (4.63)$$

$$R_{opt} = \frac{T_4}{T_6} + a_{opt} \frac{T_5}{T_6} \quad (4.64)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{T_2}{T_3} \\ \frac{T_5}{T_6} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{opt} \\ R_{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T_3} \\ -\frac{T_4}{T_6} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

d'où

$$\begin{bmatrix} a_{opt} \\ R_{opt} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1 + \frac{T_2 T_5}{T_3 T_6}} \begin{bmatrix} -1 & \frac{T_2}{T_3} \\ -\frac{T_5}{T_6} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T_1}{T_3} \\ -\frac{T_4}{T_6} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Finalement nous obtenons

$$a_{opt}(N) = \frac{-\frac{T_1}{T_3} - \frac{T_2 T_4}{T_3 T_6}}{\frac{T_2 T_5}{T_3 T_6} - 1} \quad (4.67)$$

$$R_{opt}(N) = \frac{-\frac{T_4}{T_6} - \frac{T_1 T_5}{T_3 T_6}}{\frac{T_2 T_5}{T_3 T_6} - 1} \quad (4.68)$$

$$\sigma_{opt}^2(N) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - a_{opt} X_p(i) T_{off}(i))^2}{2 T_{off}(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta + R_{opt} T_{on}(i) + a_{opt} X_m(i) T_{on}(i))^2}{2 T_{on}(i)}}{N} \quad (4.69)$$

4.3.1.4 Calcul des estimés de a , R et σ^2

Comme pour les paramètres r et c , nous proposons deux alternatives de calcul numérique: le calcul cumulatif et le calcul récursif.

Méthode du maximum de vraisemblance exact (a , R)

Tels qu'exprimés a_{opt} , R_{opt} et σ_{opt}^2 sont fonction de sommes partielles pouvant être évaluées récursivement de la même manière que (4.29-30). L'algorithme de calcul sera donc donné par les équations (4.57)-(4.62) et (4.68)-(4.70).

Méthode du maximum de vraisemblance semi-récursif (a , R)

Contrairement au cas des paramètres r et c , les expressions analytiques des estimateurs ne permettent même pas d'établir une récursion exacte de a et R . Nous sommes

cependant en mesure de formuler une “semi-récursion” avec un facteur d’oubli. Nous parlons ici de “semi-récursion” vu la présence de sommes partielles cumulatives. Le choix d’une telle approche est motivé par le fait qu’il a été établi [Lju87] que l’introduction d’un facteur d’oubli est de nature à accélérer la convergence d’un algorithme récursif basé sur la méthode du maximum de vraisemblance ou des moindres carrés. Cette approche nous permettra donc d’améliorer la convergence si le calcul cumulatif s’avèrait être lent.

L’algorithme de calcul est formulé comme suit

$$\hat{a}(N) = \frac{\hat{R}(N-1)T_2 + T_1}{T_3} \quad (4.70)$$

$$\hat{R}(N) = \frac{\hat{a}(N-1)T_5 + T_4}{T_6} \quad (4.71)$$

$$\sigma_{opt}^2(N) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - a_{opt} X_p(i) T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta + R_{opt} T_{on}(i) + a_{opt} X_m(i) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)}}{N} \quad (4.72)$$

Afin d’établir analytiquement le facteur d’oubli, nous devrions exprimer le rapport des facteurs associés à deux mesures différentes, dans l’expression des estimateurs, de sorte à montrer la différence de pondération associée à ces mesures. Les expressions analytiques décrivant le calcul récursif des paramètres estimés (4.71)-(4.73) donnent cependant lieu à des fonctions non linéaires de ces mesures nécessitant ainsi de lourds développements. Nous utiliserons donc une approche numérique pour montrer l’existence de ces facteurs d’oubli. Nous étudierons la sensibilité logarithmique de chacun des paramètres respectivement par rapport à la première et à la dernière mesure. Théoriquement, ces sensibilités doivent tendre vers zéro, à mesure que N tend vers l’infini. En effet, plus le nombre de mesures est grand, moins l’estimé du paramètre est sensible à la variation d’une des mesures. L’introduction d’un facteur d’oubli engendre une augmentation de la vitesse à laquelle la sensibilité par rapport à la

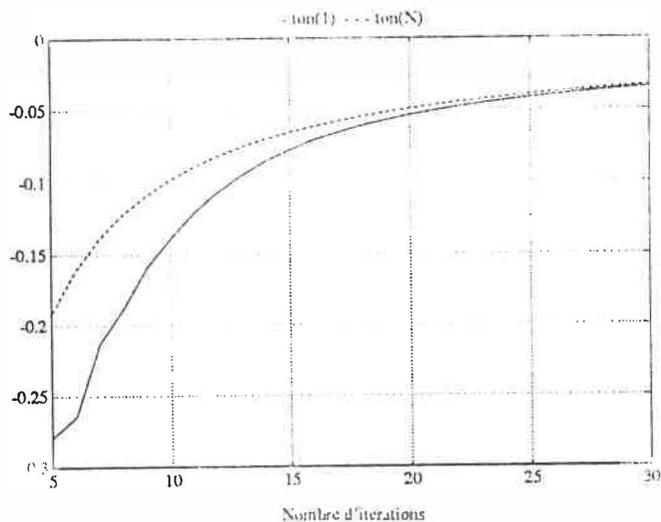


Figure 4.1: Sensibilité de $\hat{R}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$

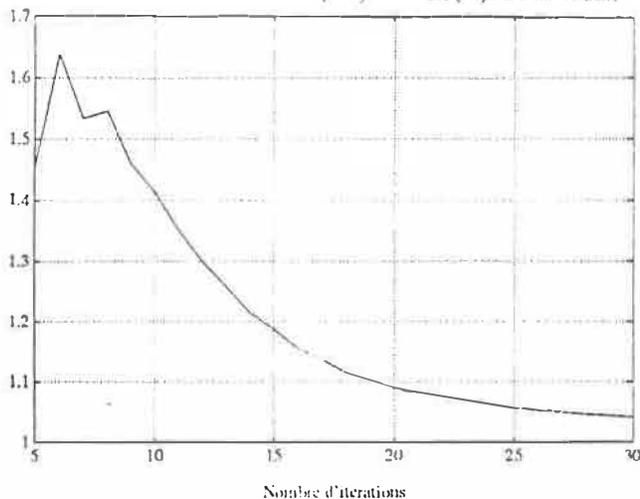


Figure 4.2: Rapport des sensibilités de $\hat{R}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$

première mesure tend vers zéro. Cette variation pourra aussi être observée à partir du quotient des sensibilités par rapport respectivement à la première et la dernière mesure. Ce dernier reflètera en fait le rapport des pondérations associées à chacune de ces mesures.

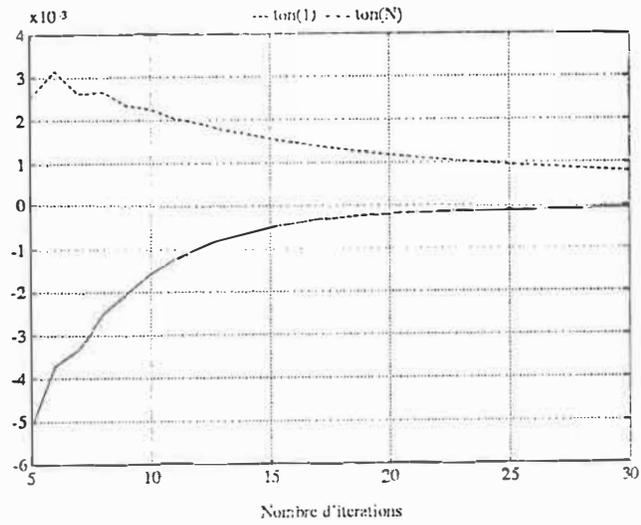


Figure 4.3: Sensibilité de $\hat{a}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$

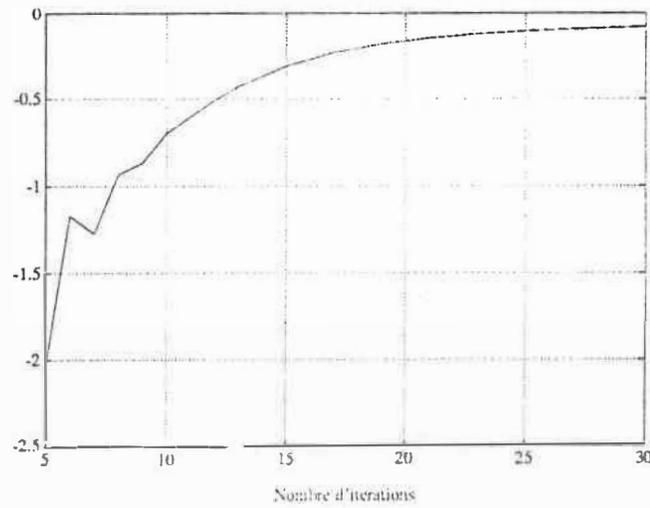


Figure 4.4: Rapport des sensibilité de $\hat{a}(N)$ à $T_{on}(1)$ et à $T_{on}(N)$

Les figures ci-dessus montrent que dans le cas de \hat{R} , il existe un facteur d'oubli qui agit pendant les premières itérations, accélérant ainsi la convergence, puis se dissipe de sorte que la pondération redevient égale pour toutes les mesures. Pour $\hat{\alpha}$, le facteur d'oubli est permanent et plus important. En effet, le rapport des sensibilités tendant vers zéro assez rapidement, la contribution des premières mesures est progressivement atténuée pour tendre vers zéro.

4.3.2 Méthode du maximum de vraisemblance récursif de Newton

Cette approche consiste à rechercher le maximum de la fonction de vraisemblance en utilisant le gradient et le jacobien de cette fonction selon l'approche de Newton. L'estimé est calculé en tenant compte de la forme de la fonction qui est décrite par ses dérivées (première et seconde). Ces mêmes termes de guidage jouent le rôle de facteurs d'accélération.

Vu que cette méthode est basée sur un principe non-linéaire, il est important de bien conditionner la fonction de vraisemblance par des changements de variables pour la rendre la plus proche d'une quadratique en fonction des paramètres, fonction pour laquelle la méthode de Newton donne les meilleurs résultats. Nous adopterons donc à cet effet le changement de variable utilisé pour le calcul de l'estimateur optimal, pour obtenir la fonction de vraisemblance sous la forme (4.47).

4.3.2.1 Formulation de l'algorithme

Notons par $V_N(\theta_N, Z_N)$ le critère à maximiser

$$V_N(\theta_N, Z_N) = L_G(N, \theta) \tag{4.73}$$

La nature de la fonction de vraisemblance nous suggère la formulation suivante :

$$V_N(\theta_N, Z_N) = \sum_{i=1}^N F(\theta_N, Z_i) \quad (4.74)$$

où

$$\begin{aligned} F(\theta_N, Z_i) = & \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(N)(2\pi T_{off}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - c(N)T_{off}(i))^2}{2\sigma^2(N)T_{off}(i)} \right] \\ & + \left[\ln \frac{\Delta}{\sigma(N)(2\pi T_{on}(i)^3)^{1/2}} - \frac{(\Delta - c(N)T_{on}(i))^2}{2\sigma^2(N)T_{on}(i)} \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

On peut donc écrire :

$$V_{N+1}(\theta_{N+1}, Z_{N+1}) = V_N(\theta_{N+1}, Z_N) + F(\theta_{N+1}, Z_{N+1}) \quad (4.76)$$

Chacun des termes de (4.76) peut être développé en série de Taylor autour de θ_N

$$\begin{aligned} V_N(\theta_{N+1}, Z_N) \simeq & V_N(\theta_N, Z_N) + \frac{\partial V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} (\theta_{N+1} - \theta_N) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\theta_{N+1} - \theta_N)^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

De même

$$\begin{aligned} F(\theta_{N+1}, Z_N) \simeq & F(\theta_N, Z_N) + \frac{\partial F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} (\theta_{N+1} - \theta_N) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\theta_{N+1} - \theta_N)^2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} V_{N+1}(\theta_{N+1}, Z_{N+1}) \simeq & V_N(\theta_N, Z_N) + \frac{\partial V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} (\theta_{N+1} - \theta_N) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\theta_{N+1} - \theta_N)^2 \\ & + F(\theta_N, Z_N) + \frac{\partial F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} (\theta_{N+1} - \theta_N) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\theta_{N+1} - \theta_N)^2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

En dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à θ_{N+1} , et sachant que pour la valeur optimale $\hat{\theta}_{N+1}$

$$\frac{\partial V_{N+1}(\theta_{N+1}, Z_{N+1})}{\partial \theta_{N+1}} = 0 \quad (4.80)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} + \frac{\partial^2 V_N(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\hat{\theta}_{N+1} - \hat{\theta}_N) + \frac{\partial F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N} \\ + \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_N)}{\partial \theta_N^2} (\hat{\theta}_{N+1} - \hat{\theta}_N) = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

d'où

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N - \frac{\dot{V}_N(\theta_N, Z_N) + \dot{F}(\theta_N, Z_{N+1})}{\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N) + \ddot{F}(\theta_N, Z_{N+1})} \quad (4.82)$$

Le calcul de $\dot{V}_N(\theta_N, Z_N)$ et de $\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N)$ s'effectuera aussi de manière récursive. Ainsi,

$$V_{N+1}(\theta_{N+1}, Z_{N+1}) = V_N(\theta_N, Z_N) + F(\theta_N, Z_{N+1}) \quad (4.83)$$

En dérivant, nous obtenons

$$\dot{V}_{N+1}(\theta_{N+1}, Z_{N+1}) = \dot{V}_N(\theta_N, Z_N) + \dot{F}(\theta_N, Z_{N+1}) \quad (4.84)$$

puis en développant au premier ordre en série de Taylor,

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(\theta_N, Z_N) = \dot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \dot{F}(\theta_{N-1}, Z_N) \\ + [\ddot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \ddot{F}(\theta_{N-1}, Z_N)] (\theta_N - \theta_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Quant au calcul de $\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N)$, il s'effectue comme suit :

$$\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N) = \ddot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \ddot{F}(\theta_{N-1}, Z_N) \quad (4.86)$$

L'algorithme se résume en ce qui suit :

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N - \frac{\dot{V}_N(\theta_N, Z_N) + \dot{F}(\theta_N, Z_{N+1})}{\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N) + \ddot{F}(\theta_N, Z_{N+1})} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_N(\theta_N, Z_N) &= \dot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \dot{F}(\theta_{N-1}, Z_N) \\ &+ [\ddot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \ddot{F}(\theta_{N-1}, Z_N)] (\theta_N - \theta_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\ddot{V}_N(\theta_N, Z_N) = \ddot{V}_{N-1}(\theta_{N-1}, Z_{N-1}) + \ddot{F}(\theta_{N-1}, Z_N) \quad (4.89)$$

Sachant que

$$\theta = [r \quad c \quad \alpha] \quad (4.90)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\sigma^2} \quad (4.91)$$

on a alors

$$\dot{F} = \frac{\partial F(\theta_N, Z_i)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \dot{F}_r \\ \dot{F}_c \\ \dot{F}_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\theta_N, Z_i)}{\partial r} \\ \frac{\partial F(\theta_N, Z_i)}{\partial c} \\ \frac{\partial F(\theta_N, Z_i)}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

où

$$\dot{F}_r = \alpha(\Delta - r(N) T_{off}) \quad (4.93)$$

$$\dot{F}_c = \alpha(\Delta - c(N) T_{off}) \quad (4.94)$$

$$\dot{F}_\alpha = \frac{1}{2\alpha(N)} - \frac{(\Delta - r(n) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} + \frac{1}{2\alpha(N)} - \frac{(\Delta - c(N) T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \quad (4.95)$$

et

$$\ddot{F} = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} \ddot{F}_r & \ddot{F}_{r,c} & \ddot{F}_{r,\alpha} \\ \ddot{F}_{c,r} & \ddot{F}_c & \ddot{F}_{c,\alpha} \\ \ddot{F}_{\alpha,r} & \ddot{F}_{\alpha,c} & \ddot{F}_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

où

$$\ddot{F}_r = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial r^2} = -\alpha(N)T_{on}(i) \quad (4.97)$$

$$\ddot{F}_c = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial c^2} = -\alpha(N)T_{off}(i) \quad (4.98)$$

$$\ddot{F}_\alpha = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha(N)^2} - \frac{1}{2\alpha(N)^2} \quad (4.99)$$

$$\ddot{F}_{rc} = \ddot{F}_{cr} = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial r \partial c} \quad (4.100)$$

$$\ddot{F}_{r\alpha} = \ddot{F}_{\alpha r} = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial r \partial \alpha} = (\Delta - r(N)T_{on}(i)) \quad (4.101)$$

$$\ddot{F}_{c\alpha} = \ddot{F}_{\alpha c} = \frac{\partial^2 F(\theta_N, Z_i)}{\partial c \partial \alpha} = (\Delta - c(N)T_{off}(i)) \quad (4.102)$$

Nous avons choisi de formuler cet algorithme pour l'estimation des paramètres r et c puisqu'ils permettent d'avoir la fonction de vraisemblance la plus lisse. Il est possible d'obtenir de la même manière l'algorithme d'estimation directe de a et R .

4.3.2.2 Initialisation

Tel que formulé, cet algorithme consiste à réactualiser le gradient ainsi que la matrice jacobienne de L_G , et ce selon la sortie mesurée et l'accroissement précédent des paramètres estimés. Cependant, une telle méthode numérique requiert une bonne initialisation afin d'assurer la convergence de l'estimé vers le maximum absolu de la fonction de vraisemblance. En fait, la stabilité et le temps de convergence pourraient être simultanément affectés si l'initialisation s'effectuait à partir d'un point éloigné de la trajectoire de la fonction de vraisemblance. L'algorithme reconstitue en effet l'allure de la fonction tout en cherchant son maximum grâce aux dérivées de la fonction. La solution proposée consiste à utiliser pendant quelques itérations la méthode

du maximum de vraisemblance exact ou semi-récurif puisqu'ils donnent les valeurs optimales des paramètres pour les données disponibles. Ces valeurs seront essentiellement utilisées pour initialiser le gradient et le jacobien, afin de guider l'algorithme dans la bonne direction.

4.3.3 Méthode du maximum de vraisemblance récurif de Newton avec projection

Vu que les paramètres à estimer sont bornés, la projection pourra être utilisée afin d'accélérer la convergence et surtout d'éviter l'instabilité qui pourrait être introduite par une variabilité excessive des mesures. En effet, cette variabilité est de nature à affecter le comportement de l'estimé de la variance et par la même celui des autres paramètres. Le schéma de projection proposé consiste simplement à réinitialiser la valeur des paramètres à la borne la plus proche en cas de dépassement. Le gradient et le jacobien, quant à eux, seront réinitialisés aux valeurs précédentes afin d'éviter la direction divergente. L'efficacité de cette méthode sera discutée au niveau des simulations.

4.3.4 Généralisation au cas variant dans le temps

Une des hypothèses de base du principe du maximum de vraisemblance est que les paramètres sont invariants; et selon que l'on considère r et c ou a et R comme étant les paramètres à estimer, ceux-ci devront être constants. Seules les mesures associées constituent les termes variables du système. Dans notre cas, nous sommes en présence d'un système variant lentement dans le temps, et dont le modèle est implicitement linéarisé par intervalles. En effet, tel que formulé, le modèle suppose que la température externe peut subir une faible variation, pour laquelle les paramètres restent constants. Ainsi les paramètres a et R devront être réévalués si la température

X_a subit une variation importante. La linéarisation du modèle de base utilise en fait la caractéristique de dynamique lente du système. L'utilisation du principe du maximum de vraisemblance ne pourra donc être généralisée au cas variant dans le temps que si l'on considère des variations continues de température X_a suffisamment petites pour rester dans le domaine de validité du modèle linéarisé caractérisé par a et R ou encore des variations par paliers de X_a , que l'on détectera et pour lesquelles le processus d'estimation sera réinitialisé. Notons que dans le cas où les variations de température sont considérées, la formulation du problème d'estimation en fonction des paramètres r et c devient erronée puisque ces paramètres ne sont plus constants.

4.4 Simulations

Nous avons choisi d'illustrer les algorithmes développés, en effectuant des simulations pour trois niveaux de bruit différents. En effet, sachant que notre souci majeur est d'être capable d'identifier complètement le système, et plus spécifiquement estimer la variance du processus de Wiener, il est important d'évaluer les performances de nos algorithmes dans le domaine de variation de ce paramètre critique.

4.4.1 Cas du système invariant

Dans ce qui suit, nous avons choisi les paramètres suivants pour nos simulations :

$$\begin{aligned} a &= 0.02 & R &= 0.4 & X_a &= 12 \\ x_+ &= 21.1 & x_- &= 20 & \Delta &= 1.1 \end{aligned}$$

Les taux de perte et de gain thermiques, r et c sont donnés par:

$$r = 0.24 \quad c = 0.18$$

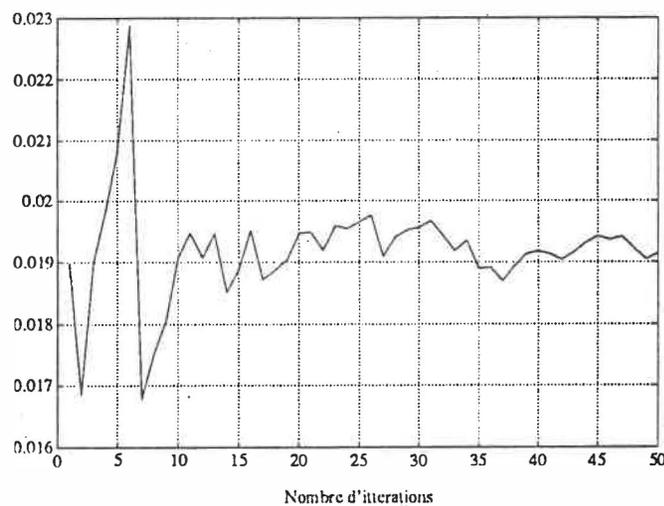


Figure 4.5: Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$

4.4.1.1 Méthode du maximum de vraisemblance exact (M.V.E)

Le premier résultat, qui en fait devait être vérifié, est que l'estimation directe de a et R , et celle indirecte par le biais de r et c donnent exactement le même résultat. Les estimés obtenus sont les mêmes à chaque itération. Ceci s'explique par le fait que l'on passe d'un estimé optimal à l'autre par un simple changement de variable.

Nous présentons maintenant des simulations de la méthode de vraisemblance exact respectivement pour les niveaux de bruit :

$$\sigma^2 = 0.02, \quad \sigma^2 = 0.4, \quad \sigma^2 = 10^{-4}$$

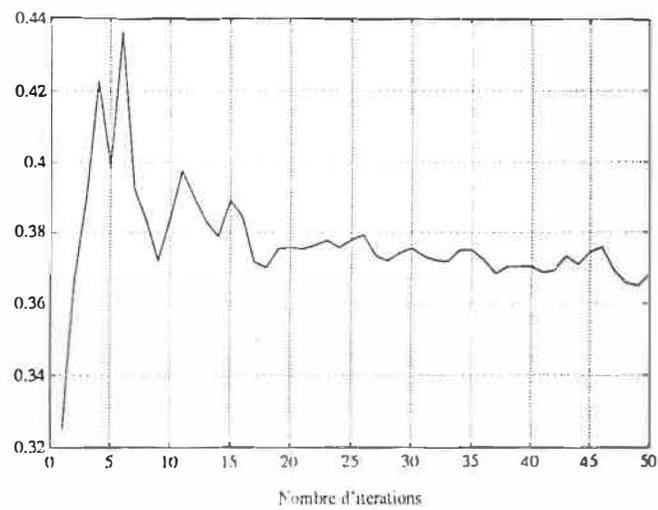


Figure 4.6: Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$

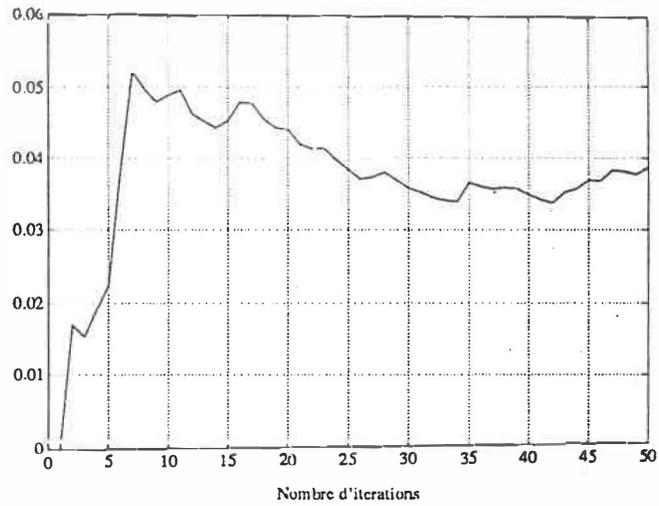


Figure 4.7: Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.04$

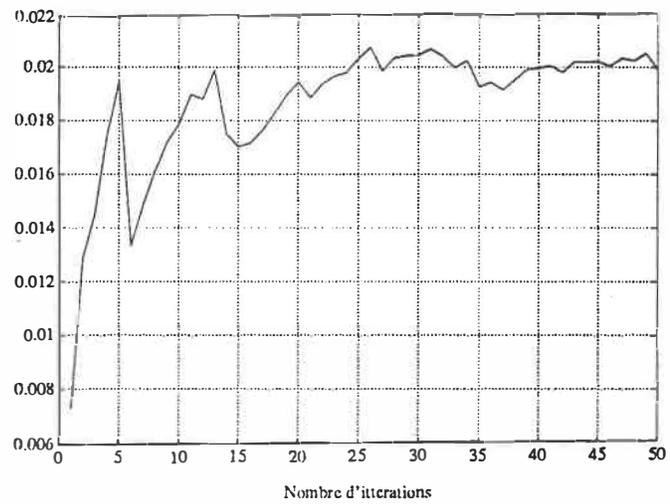


Figure 4.8: Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$

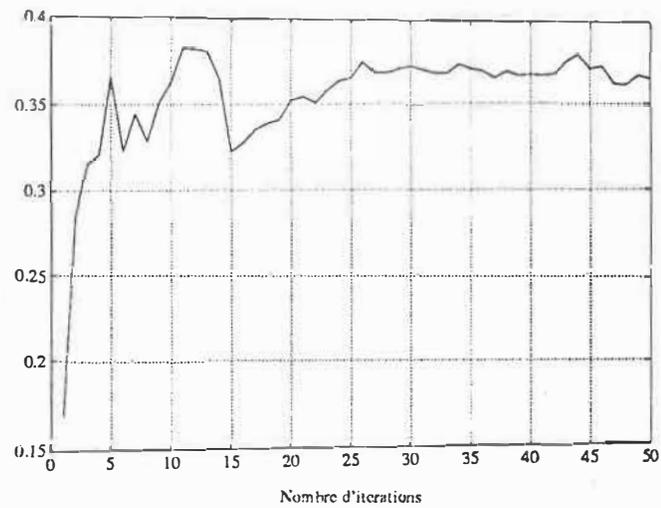


Figure 4.9: Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$

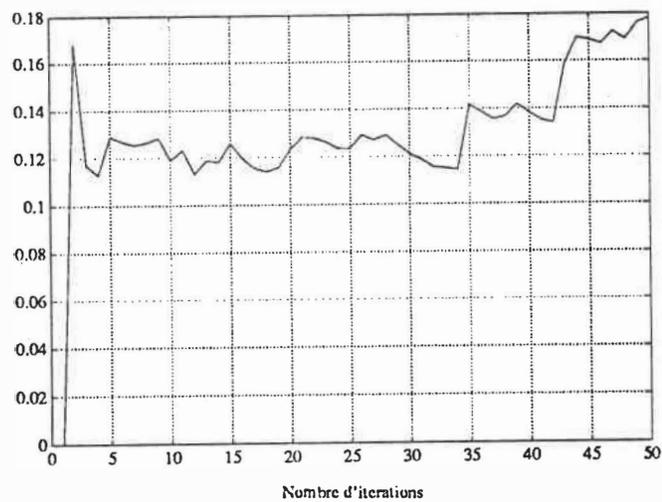


Figure 4.10: Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 0.16$

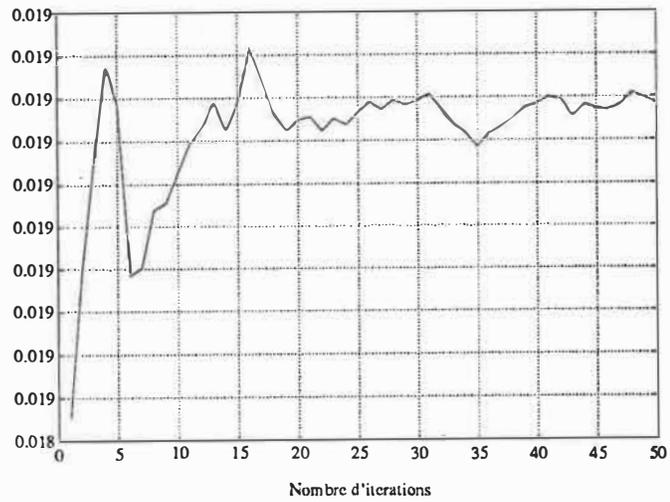


Figure 4.11: Estimé de a par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$

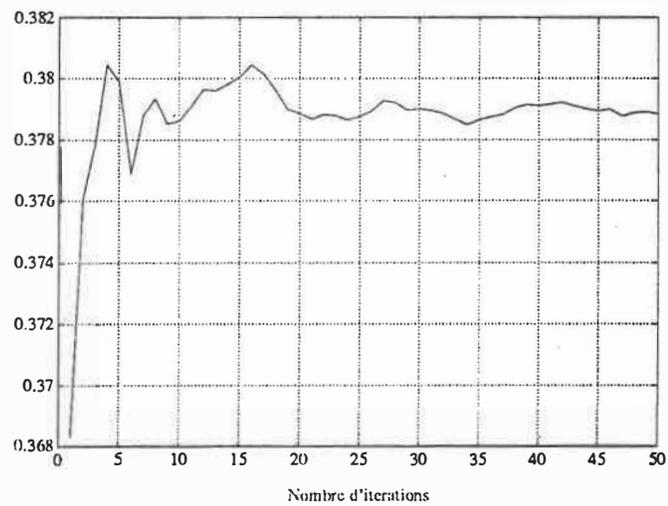


Figure 4.12: Estimé de R par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$

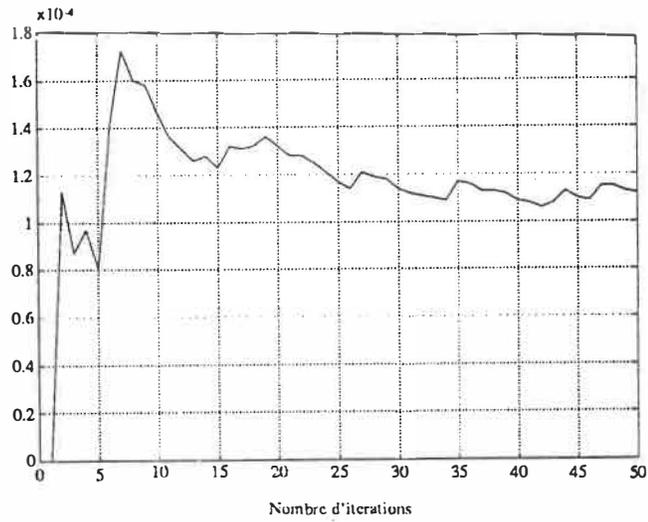


Figure 4.13: Estimé de σ^2 par le M.V.E, $\sigma^2 = 10^{-4}$

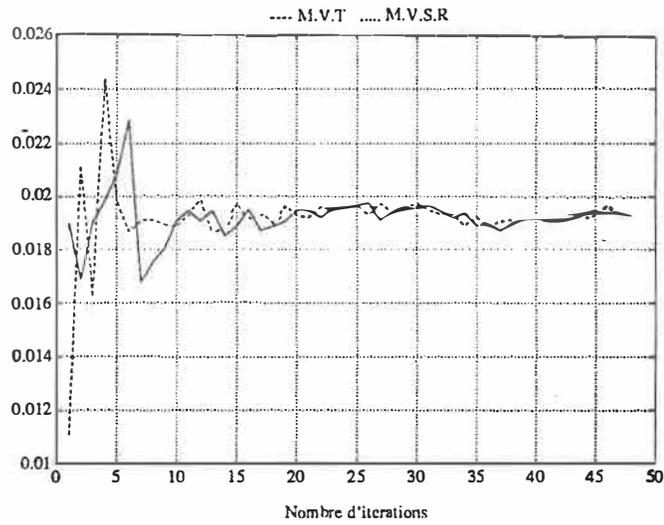


Figure 4.14: Estimé de a par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$

Pour un niveau de bruit intermédiaire, ($\sigma^2 = 0.04$), nous observons une convergence rapide des estimés de chacun des paramètres. Le comportement asymptotique des estimés peut être affecté par la variabilité des mesures. Le biais dépend non seulement du nombre d'itérations mais aussi du rapport entre les différents paramètres. Une analyse plus approfondie sera présentée au chapitre 5.

Une augmentation du niveau de bruit entraîne un ralentissement de la convergence. Il en est de même pour un faible niveau de bruit pour lequel nous observons de plus une augmentation de l'erreur relative donc du biais, pour cause de non persistance de l'excitation.

4.4.1.2 Maximum de vraisemblance exact versus semi-récuratif (M.V.S.R)

Les figures (4.14) (4.15) et (4.16) montrent clairement que l'introduction du facteur d'oubli accélère effectivement la convergence des estimateurs. L'amélioration la plus importante s'effectue au niveau de l'estimé de la variance. De plus, la performance de l'algorithme devient légèrement moins sensible à la variabilité des mesures. Le facteur d'oubli améliore donc à la fois la convergence et la stabilité.

4.4.1.3 Maximum de vraisemblance récursif de Newton

Effet de l'initialisation

Les simulations qui suivent montrent le comportement de l'algorithme de Newton pour deux niveaux différents de conditionnement. Nous effectuerons respectivement 3 et 6 itérations avec l'algorithme exact. Nous choisissons à cet effet un niveau de bruit intermédiaire (conditions normales du système).

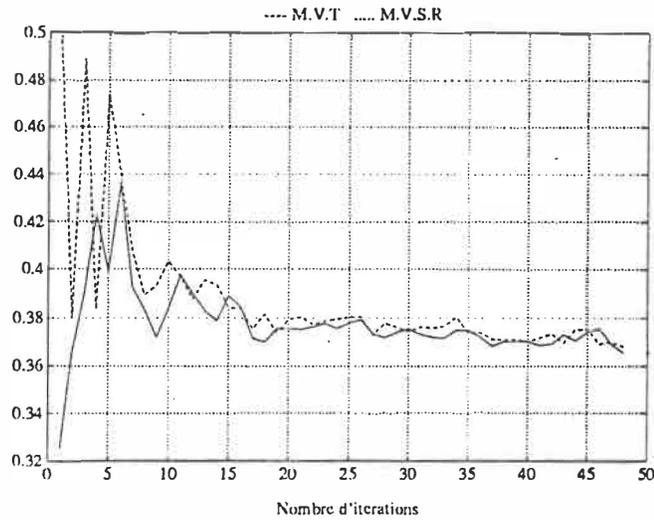


Figure 4.15: Estimé de R par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$

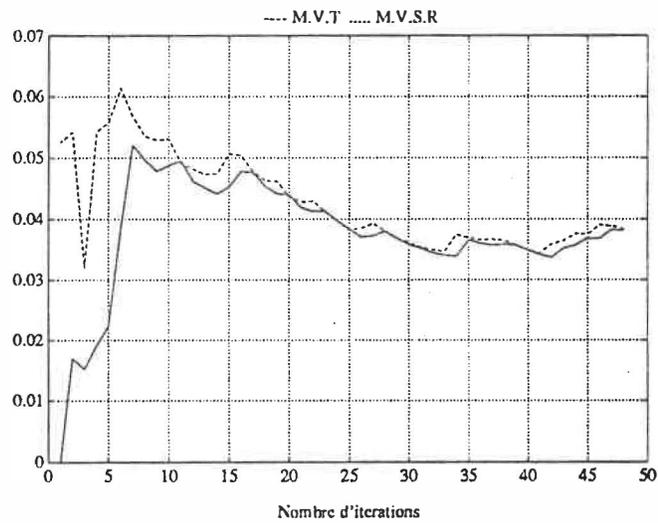


Figure 4.16: Estimé de σ^2 par le M.V.E et le M.V.S.R , $\sigma^2 = 0.04$

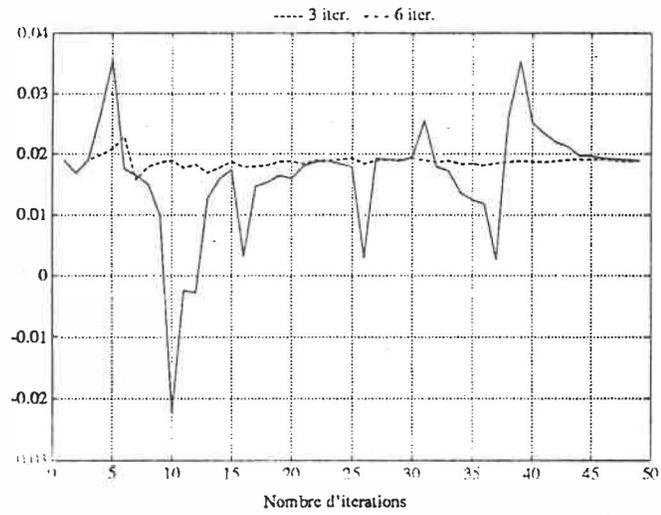


Figure 4.17: Estimé de a par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.01$

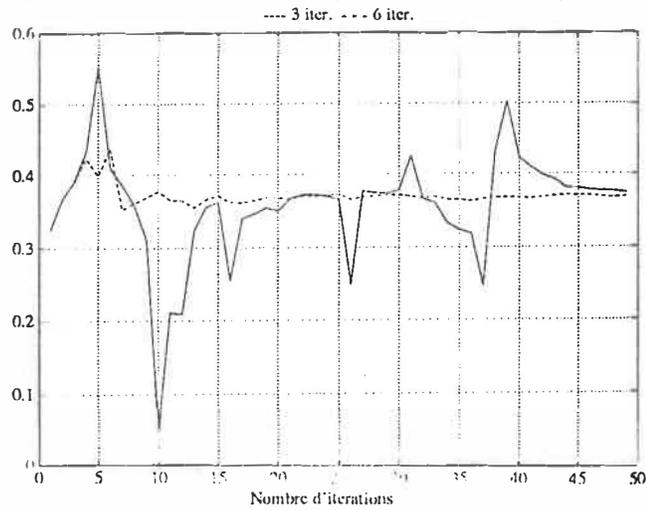


Figure 4.18: Estimé de R par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.01$

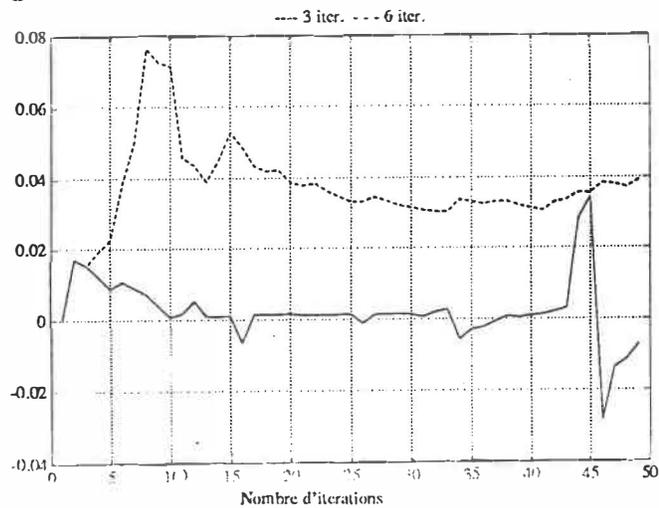


Figure 4.19: Estimé de σ^2 par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.01$

On remarque que l'algorithme développé est très sensible aux conditions initiales. Il a suffi de trois itérations supplémentaires pour stabiliser l'algorithme, et assurer la convergence de tous les paramètres (voir l'estimé de la variance).

Effet de la projection (fig. 4.20 à 4.22)

Nous avons simulé à cet effet le cas où $\sigma^2 = 0.16$. En effet pour un niveau de bruit élevé, l'estimé de la variance subit des variations brusques dues, non seulement à la sensibilité naturelle de cet estimé à la variabilité des mesures, mais aussi aux facteurs d'accélération importants que comporte l'algorithme. En introduisant la projection, nous évitons que l'estimateur subit une grande variation qui sera alors longue à réduire. Cependant l'intervalle de projection ne doit pas être trop étroit car cela produirait une instabilité qui se traduirait par de fortes oscillations des estimateurs.

Effet de la variance du bruit (fig. 4.23 à 4.25)

Nous avons vu qu'un haut niveau de bruit affecte la stabilité de l'estimateur. Dans l'autre cas extrême, pour un faible niveau de bruit, l'algorithme ne nécessite pas de projection pour converger vu la faible variabilité des mesures. Comme pour le maximum de vraisemblance exact, on observe cependant un biais dû à la non-persistance de l'excitation.

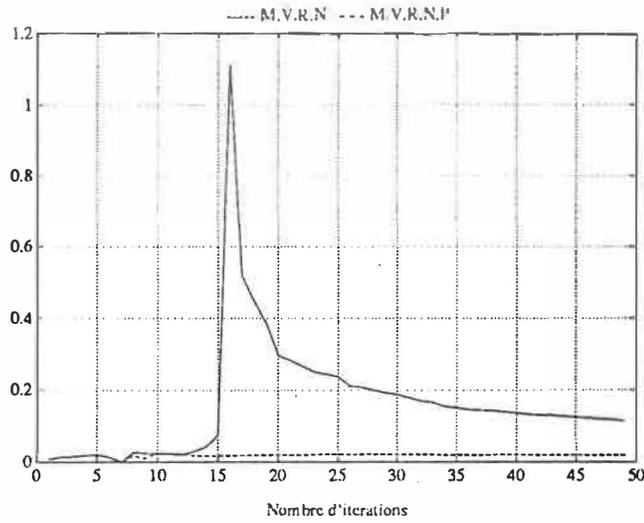


Figure 4.20: Estimé de a par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$

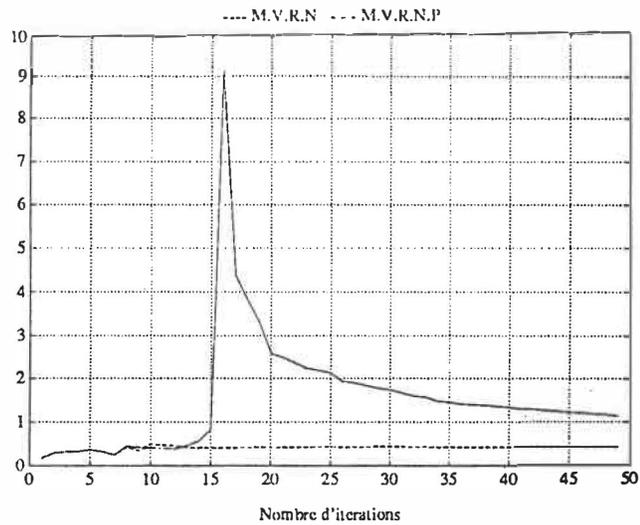


Figure 4.21: Estimé de R par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$

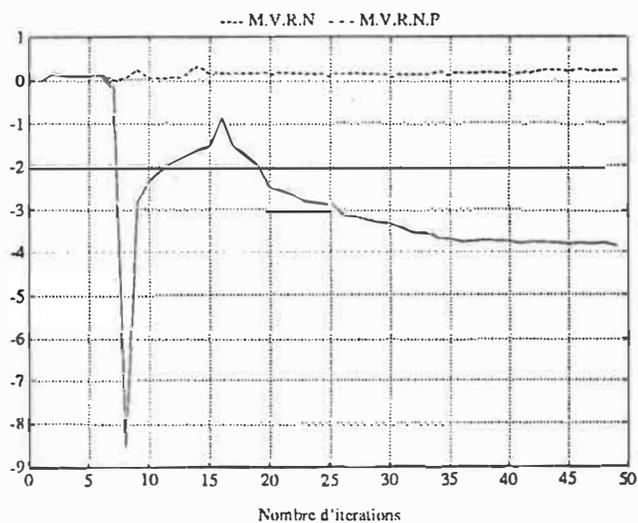


Figure 4.22: Estimé de σ^2 par le M.V.R.N et le M.V.R.N.P , $\sigma^2 = 0.16$

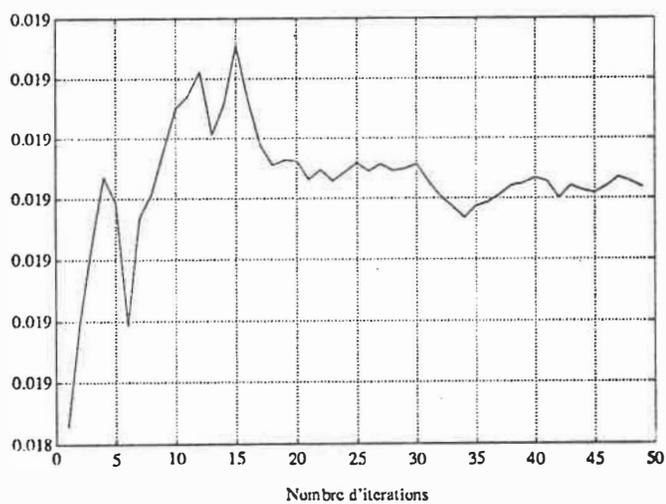


Figure 4.23: Estimé de a par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$

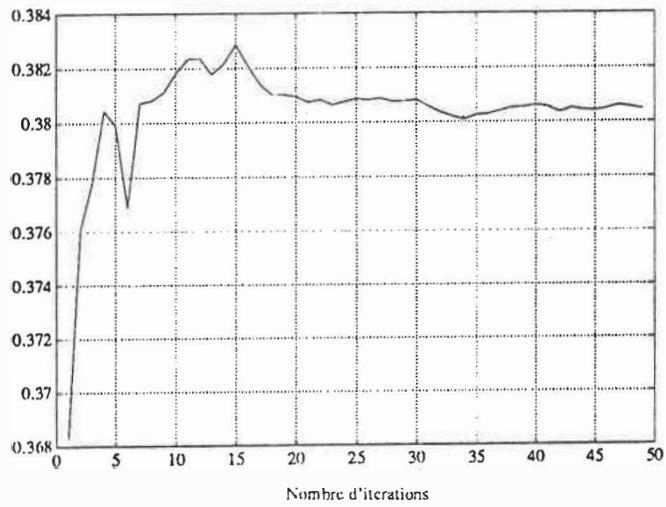


Figure 4.24: Estimé de R par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$

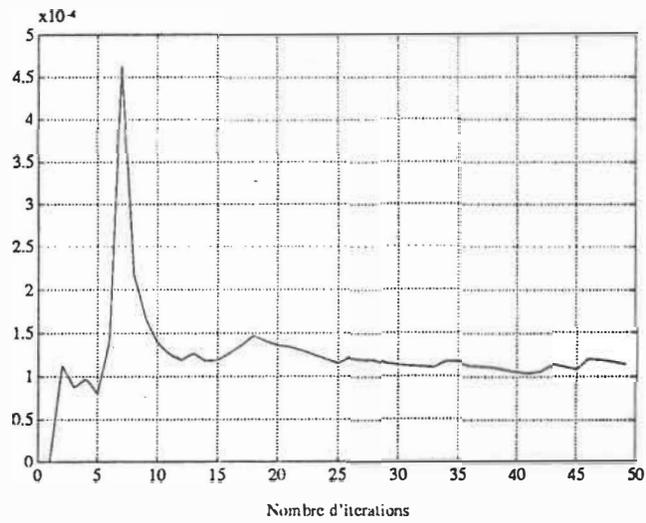


Figure 4.25: Estimé de σ^2 par le M.V.R.N , $\sigma^2 = 10^{-4}$

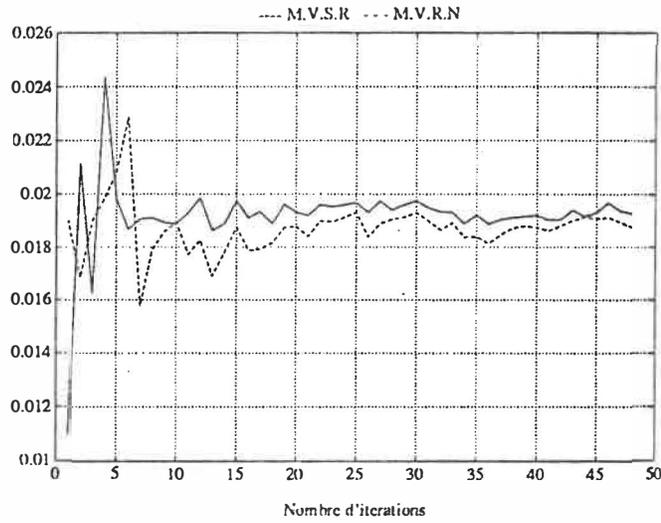


Figure 4.26: Estimé de a par le M.V.S.R et le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$

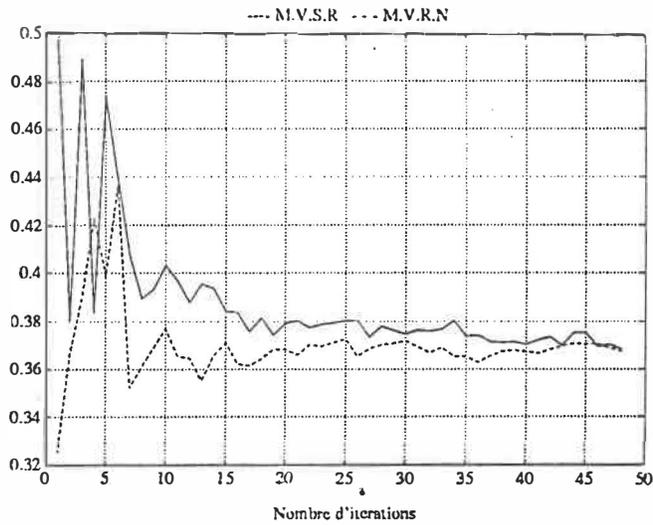


Figure 4.27: Estimé de R par M.V.S.R et le M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$

4.4.1.4 Maximum de vraisemblance semi-récuratif versus récuratif

Les deux algorithmes donnent sensiblement le même résultat du point de vue temps de convergence. Le M.V.S.R est cependant légèrement plus rapide pour l'estimation de la variance et moins biaisé que le M.V.R.N vu qu'il consiste en un calcul "exact". De même, le M.V.R.N a l'inconvénient de nécessiter de bonnes conditions initiales délicates à assurer.

4.4.2 Cas du système variant dans le temps

Afin de tenir compte de l'effet de la température externe, nous avons ajusté nos programmes de simulation afin qu'ils considèrent X_a comme étant une mesure au même titre que T_{on} et T_{off} . Nous avons commencé par considérer la variation de X_a comme étant dans les limites de la linéarité du modèle. Cette variation s'effectue par paliers. Nous avons considéré deux cas (fig. 4.29,4.30,4.31)

Cas 1:

$$\begin{array}{lll} a = 0.02 & R = 0.4 & \sigma^2 = 0.04 \\ x_+ = 21.1 & x_- = 20 & \Delta = 1.1 \\ X_{a\text{ini}} = 10 & X_{a\text{fin}} = 12 & N = 25 \end{array}$$

N représente l'instant de variation de la température, soit au bout de N itérations.

Cas 2:

$$\begin{array}{lll} a = 0.02 & R = 0.4 & \sigma^2 = 0.01 \\ x_+ = 21.1 & x_- = 20 & \Delta = 1.1 \\ X_{a\text{in}} = 10 & X_{a\text{fin}} = 14 & N = 25 \end{array}$$

Le M.V.E et le M.V.S.R donnent des estimés insensibles à la variation de la température externe. En effet, malgré une grande variation de X_a (de l'ordre de 40

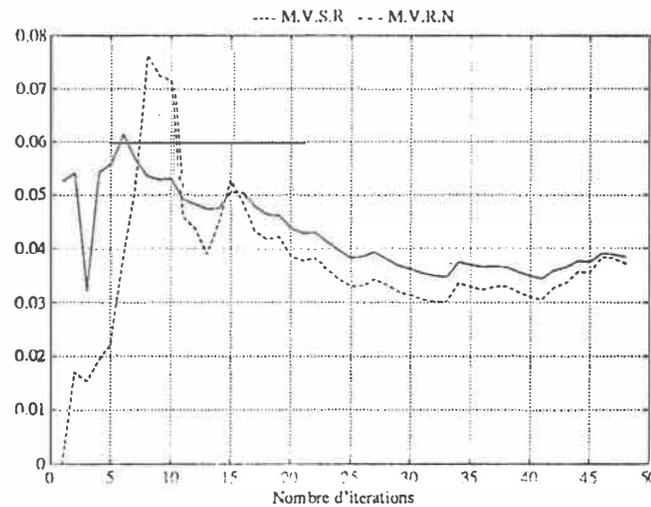


Figure 4.28: Estimé de σ^2 par le M.V.S.R et M.V.R.N , $\sigma^2 = 0.04$

% de sa valeur initiale) les estimés n'ont pas été effectués. Ceci est dû au fait que la fonction de vraisemblance telle que reconstituée tient compte de la variation de la température. Ainsi donc, nos algorithmes sont efficaces quelle que soit la variation de la température.

En réalité, une forte variation de X_a entraîne une modification des paramètres du système. Dans ce cas une réinitialisation des estimateurs s'impose.

Nous avons simulé à cet effet une variation simultanée de a , R et σ^2 en même temps que celle de X_a (fig.4.32,4.33,4.34):

$$\begin{array}{ll}
 a_{in} = 0.015 & a_{fin} = 0.03 \\
 r_{in} = 0.3 & r_{fin} = 0.6 \\
 \sigma_{in}^2 = 0.01 & \sigma_{fin}^2 = 0.04 \\
 X_{a_{in}} = 10 & X_{a_{fin}} = 14
 \end{array}$$

Les deux algorithmes convergent. Alors que le M.V.E accuse une certaine oscillation qui a pour effet de faire diverger l'estimé de la variance, le M.V.S.R, lui, converge de manière très rapide et stable. Nous pouvons ici clairement observer l'effet stabilisant du facteur d'oubli.

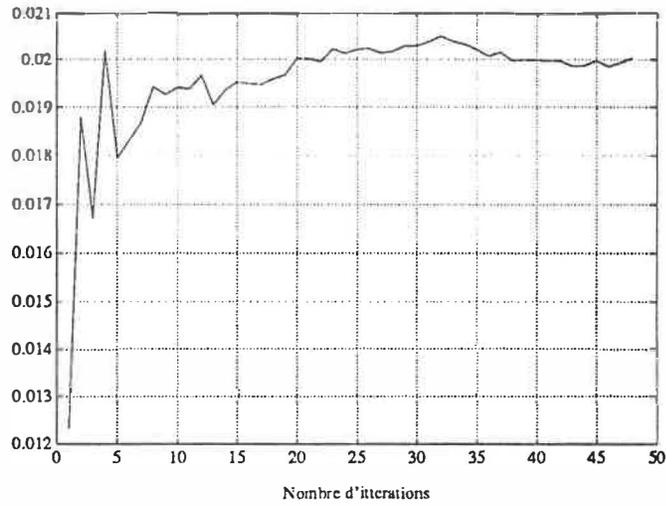


Figure 4.29: Estimé par le M.V.S.R de a en présence de variation de X_a à $N = 25$

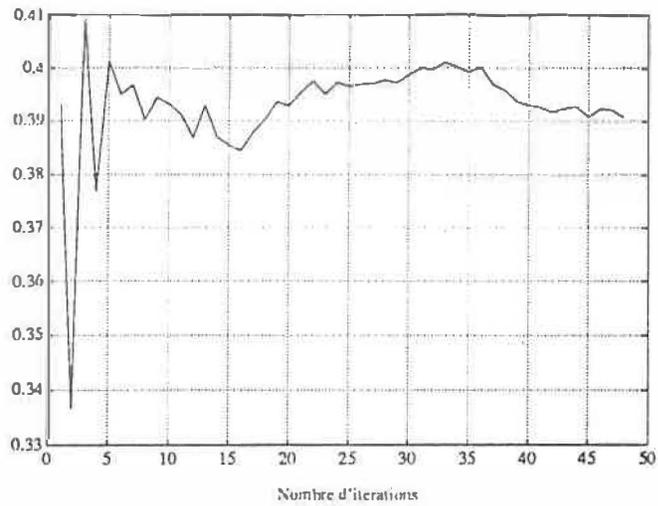


Figure 4.30: Estimé par le M.V.S.R de R en présence de variation de X_a à $N = 25$

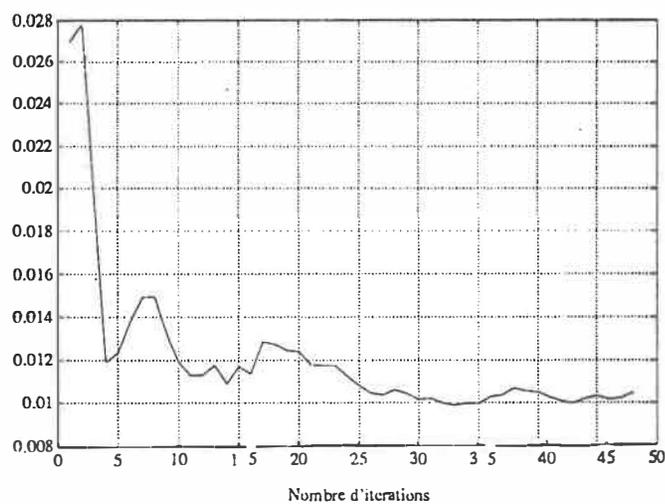


Figure 4.31: Estimé par le M.V.S.R de σ^2 en présence de variation de X_a à $N = 25$

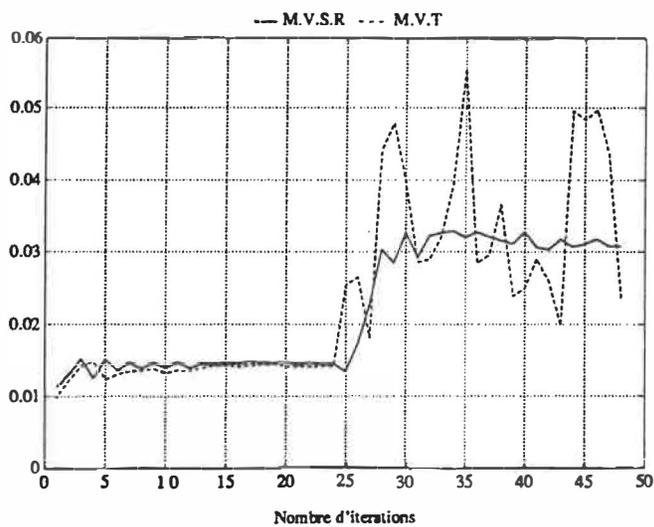


Figure 4.32: Estimé adaptatif de a

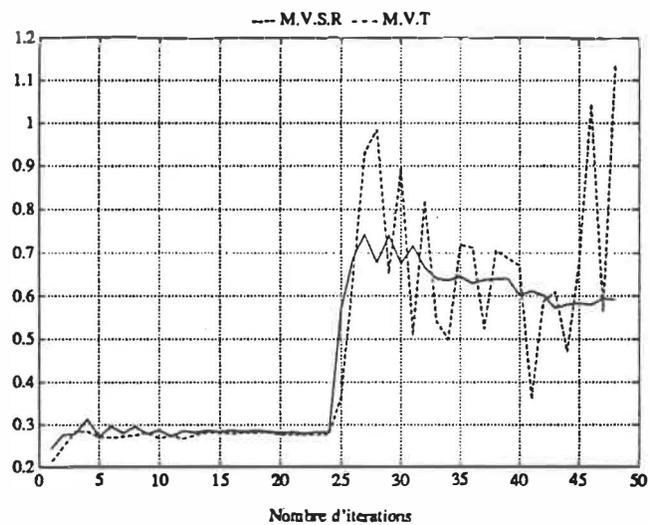


Figure 4.33: Estimé adaptatif de R

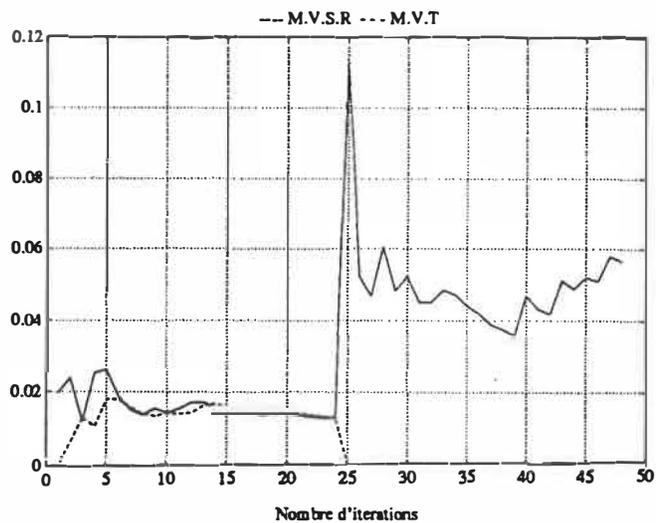


Figure 4.34: Estimé adaptatif de σ^2

4.5 Conclusion

Tous les algorithmes développés nous ont permis de converger vers les paramètres au bout d'une dizaine d'itérations pour un niveau de bruit intermédiaire. C'est essentiellement de la variance du bruit que dépendent les performances des différents algorithmes au niveau du temps de convergence et de la qualité de l'estimation. Elle affecte, de plus, la stabilité de l'algorithme de Newton. Dans ce cas, un bon conditionnement de l'algorithme (voir fig 4.17-4.22) ainsi que l'utilisation de la projection sont pertinents. Les méthodes du maximum de vraisemblance exact, et semi-récurif, présentent l'avantage de requérir un conditionnement uniforme pour tous les niveaux de bruit et, en plus d'excellentes caractéristiques de convergence. Dans le cas d'un bruit très faible, tous les estimateurs sont affectés par la non-persistence de l'excitation qui provoque un ralentissement de la convergence et donc l'apparition d'un biais. La grandeur relative des paramètres semble également avoir un effet sur le temps de convergence (donc le biais), et l'interaction des estimés est alors importante. Dans le chapitre suivant, nous tenterons précisément donc d'élucider analytiquement ces phénomènes . Nous avons pu constater que les méthodes du maximum de vraisemblance exact et semi-récurif peuvent être utilisés pour identifier le système même en présence de variations de température externe alors que certaines variations de paramètres peuvent être suivies (fig.). Quelles sont exactement les limites du caractère "adaptatif" de nos algorithmes ? Nous tenterons d'apporter des éléments de réponse à cette question dans le chapitre 5.

Chapitre 5

Étude théorique de la convergence du maximum de vraisemblance

Parmi les algorithmes présentés, nous analyserons en détail l'algorithme du maximum de vraisemblance exact. En effet, le contexte statistique de la méthode du maximum de vraisemblance rend possible l'évaluation théorique de ses caractéristiques de convergence.

L'approche consistera à évaluer la matrice de covariance de l'erreur d'estimation qui est un bon indicateur de l'évolution statistique des estimés de chaque paramètre, ainsi que des interactions entre ces estimés. Nous nous pencherons particulièrement sur les estimateurs de r , c et σ^2 .

Dans la section 1, nous dérivons une série de résultats qui nous permettent, dans les sections 2 et 3 d'obtenir les moyennes et matrices de covariances des erreurs d'estimation. Forts de ces résultats, nous évaluons la performance attendue des dits estimateurs et vérifions nos prédictions à l'aide de simulations (sections 4,5,6).

5.1 Préliminaires

Les fonctions de densité de probabilité de T_{on} et T_{off} (4.1) et (4.2) ont pour transformées de Laplace respectives [MC88]:

$$f_{T_{on}}^*(s) = e^{\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}\right] \Delta} \quad (5.1)$$

et

$$f_{T_{off}}^*(s) = e^{\left[\frac{c}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{c^2 + 2s\sigma^2}\right] \Delta} \quad (5.2)$$

Nous noterons respectivement par $\theta_r(s)$ et $\theta_c(s)$ les quantités :

$$\theta_r(s) = \left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2s\sigma^2} \right] \Delta \quad (5.3)$$

$$\theta_c(s) = \left[\frac{c}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{c^2 + 2s\sigma^2} \right] \Delta \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

5.1.1 Calcul des moments de T_{on} et T_{off}

Les transformées de Laplace ainsi établies nous permettront de calculer les différents moments de T_{on} et de T_{off} à partir de la fonction génératrice des moments.

En effet:

$$f_t^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ts} ds \quad (5.6)$$

donc

$$\frac{\partial f_t^*(s)}{\partial s} = - \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-ts} ds \quad (5.7)$$

d'où

$$E[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = -\frac{\partial f_t^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (5.8)$$

(5.8) nous permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned} E[T_{on}] &= -\frac{\partial f_{T_{on}}^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} e^{\theta_r(s)} \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$E[T_{on}] = \frac{\Delta}{r} \quad (5.10)$$

De la même manière, nous obtenons :

$$E[T_{off}] = \frac{\Delta}{c} \quad (5.11)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f_t^*(s)}{\partial s^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) e^{-ts} ds \quad (5.12)$$

d'où

$$E[t^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{\partial^2 f_t^*(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \quad (5.13)$$

(5.13) nous permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned} E[T_{on}^2] &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{-\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} e^{\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}\right] \Delta} \right]_{s=0} \\ &= \frac{\Delta \sigma^2}{(r^2 + 2s\sigma^2)^{3/2}} e^{\theta_r(s)} \Big|_{s=0} + \left[\frac{-\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} \right]^2 e^{\theta_r(s)} \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

d'où

$$E[T_{on}^2] = \frac{\sigma^2 \Delta}{r^3} + \frac{\Delta^2}{r^2} \quad (5.15)$$

de même

$$E[T_{off}^2] = \frac{\sigma^2 \Delta}{c^3} + \frac{\Delta^2}{c^2} \quad (5.16)$$

5.1.2 Calcul des moments de $\frac{1}{T_{on}}$ et $\frac{1}{T_{off}}$

Démontrons que

$$E\left[\frac{1}{t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) dt = \int_s^{+\infty} f^*(u) du \Big|_{s=0} \quad (5.17)$$

En effet

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} f^*(u) du &= \int_s^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-tu} dt du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s^{+\infty} f(t) e^{-tu} du dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{t} f(t) e^{-tu} \right]_s^{+\infty} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) e^{-ts} dt \end{aligned} \quad (5.18)$$

en évaluant (5.18) à $s = 0$ nous obtenons (5.17).

De même, nous montrons que

$$E\left[\frac{1}{t^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2} f(t) dt = \int_s^{+\infty} \int_v^{+\infty} f_t^*(u) du dv \Big|_{s=0} \quad (5.19)$$

En effet

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \int_v^{+\infty} f^*(u) du dv &= \int_s^{+\infty} \int_v^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-tu} dt du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s^{+\infty} \int_v^{+\infty} f(t) e^{-tu} du dv dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s^{+\infty} \left[-\frac{1}{t} f(t) e^{-tv} \right]_v^{+\infty} dv dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) e^{-tv} dv dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2} f(t) e^{-ts} dt
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

En évaluant (5,20) à $s = 0$, nous obtenons (5.19).

Ainsi donc,

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{1}{T_{on}}\right] &= \int_s^{+\infty} f_{on}^*(u) du \Big|_{s=0} \\
 &= \int_s^{+\infty} e^{\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2u\sigma^2}\right] \Delta} du \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

En posant le changement de variable suivant

$$x = \sqrt{r^2 + 2u\sigma^2} \tag{5.22}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{1}{T_{on}}\right] &= \int_{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{\left(\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{x\Delta}{\sigma^2}\right)} dx \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{e^{\theta_r(s)}}{\Delta} \left(\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{\Delta} \right) \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

d'où

$$E\left[\frac{1}{T_{on}}\right] = \frac{r}{\Delta} + \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \tag{5.24}$$

De la même manière, nous obtenons

$$E\left[\frac{1}{T_{off}}\right] = \frac{c}{\Delta} + \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \tag{5.25}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
 G_{on}(u) &= \int_u^{+\infty} f_{on}^*(v) dv \\
 &= \frac{e^{\theta_r(u)}}{\Delta} \left(\sqrt{r^2 + 2u\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{\Delta} \right)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

et en posant le changement de variable (5.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{1}{T_{on}^2} \right] &= \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} G_{on}(x) dx \Big|_{s=0} \\
 &= \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{\Delta x}{\sigma^2}}}{\sigma^2 \Delta} \left(x^2 + \frac{\sigma^2 x}{\Delta} \right) dx \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{1}{\Delta^2} \left[e^{\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^2 + \frac{2x\sigma^2}{\Delta} + \frac{2\sigma^2}{\Delta^2} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0} \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{\Delta^3} \left[e^{\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{\Delta x}{\sigma^2}} \left(x + \frac{\sigma^2}{\Delta} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Finalement, nous obtenons:

$$E \left[\frac{1}{T_{on}^2} \right] = \frac{r^2}{\Delta^2} + \frac{3\sigma^2 r}{\Delta^3} + \frac{3\sigma^4}{\Delta^4} \tag{5.28}$$

De la même manière, nous pouvons écrire

$$E \left[\frac{1}{T_{off}^2} \right] = \frac{c^2}{\Delta^2} + \frac{3\sigma^2 c}{\Delta^3} + \frac{3\sigma^4}{\Delta^4} \tag{5.29}$$

5.1.3 Calcul des moments de $\sum_{i=1}^N T_{on}(i)$ et $\sum_{i=1}^N T_{off}(i)$

Soit X une variable aléatoire définie comme suit:

$$X = \sum_{i=1}^N T_{on}(i) \tag{5.30}$$

X est la somme de N variables aléatoires indépendantes puisque les $T_{on}(i)$ constituent la sortie d'un processus de renouvellement.

Soit f_X^* la transformée de Laplace de la fonction de densité de probabilité f_X . Sachant que f_X est la convolution des fonctions f_{on} , f_X^* sera alors le produit des fonctions f_{on}^* . Nous pouvons donc écrire

$$f_X^* = \prod_{i=1}^N f_{on(i)}^* \tag{5.31}$$

Sachant maintenant que f_{on}^* est donnée par (5.1), nous obtenons

$$f_X^* = e^{N\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}\right]\Delta} \quad (5.32)$$

La connaissance de cette fonction nous permettra d'établir les différents moments de la variable aléatoire X comme dans la section (5.1.1) de la manière suivante :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = -\frac{\partial f_X^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (5.33)$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{\partial^2 f_X^*(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \quad (5.34)$$

Ainsi donc

$$\begin{aligned} E[X] &= -\frac{\partial f_X^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{N\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} e^{N\theta_r(s)} \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.35)$$

d'où

$$E[X] = \frac{N\Delta}{r} \quad (5.36)$$

aussi

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{-N\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} e^{N\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}\right]\Delta} \right]_{s=0} \\ &= \frac{N\Delta\sigma^2}{(r^2 + 2s\sigma^2)^{3/2}} e^{N\theta_r(s)} \Big|_{s=0} + \left[\frac{-N\Delta}{\sqrt{r^2 + 2s\sigma^2}} \right]^2 e^{N\theta_r(s)} \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.37)$$

d'où

$$E[X^2] = \frac{N\sigma^2\Delta}{r^3} + \frac{N^2\Delta^2}{r^2} \quad (5.38)$$

Notons maintenant par Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \sum_{i=1}^N T_{off}(i) \quad (5.39)$$

Nous pouvons alors écrire de la même manière

$$E[Y] = \frac{N\Delta}{c} \quad (5.40)$$

et

$$E[Y^2] = \frac{N\sigma^2\Delta}{c^3} + \frac{N^2\Delta^2}{c^2} \quad (5.41)$$

5.1.4 Calcul des moments de $\frac{1}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)}$ et $\frac{1}{\sum_{i=1}^N T_{off}(i)}$

En utilisant les résultats de la section (5.1.2) nous pouvons établir que

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_s^{+\infty} f_X^*(u) du \Big|_{s=0} \quad (5.42)$$

Ainsi donc,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{X}\right] &= \int_s^{+\infty} f_X^*(u) du \Big|_{s=0} \\ &= \int_s^{+\infty} e^{N\left[\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{r^2+2u\sigma^2}\right]\Delta} du \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.43)$$

En posant le changement de variable (5.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{X}\right] &= \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{N\left(\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{x\Delta}{\sigma^2}\right)} dx \Big|_{s=0} \\ &= \frac{e^{N\theta_r(s)}}{N\Delta} \left(\sqrt{r^2+2s\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \right) \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (5.44)$$

d'où

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{r}{N\Delta} + \frac{\sigma^2}{N^2\Delta^2} \quad (5.45)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} G_X(u) &= \int_u^{+\infty} f_X^*(v) dv \\ &= \frac{e^{N\theta_r(u)}}{N\Delta} \left(\sqrt{r^2+2u\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

et en posant le changement de variable (5.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{1}{X^2} \right] &= \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} G_X(x) dx \Big|_{s=0} \\
 &= \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}}}{\sigma^2 \Delta} \left(x^2 + \frac{\sigma^2 x}{N\Delta} \right) dx \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{1}{N^2 \Delta^2} \left[e^{N(\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{\Delta x}{\sigma^2})} \left(x^2 + \frac{2x\sigma^2}{N\Delta} + \frac{2\sigma^2}{N^2 \Delta^2} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0} \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{N^3 \Delta^3} \left[e^{N(\frac{r\Delta}{\sigma^2} - \frac{\Delta x}{\sigma^2})} \left(x + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Finalement, nous obtenons:

$$E \left[\frac{1}{X^2} \right] = \frac{r^2}{N^2 \Delta^2} + \frac{3\sigma^2 r}{N^3 \Delta^3} + \frac{3\sigma^4}{N^4 \Delta^4} \tag{5.48}$$

Par analogie avec les équations (5.17) et (5.19) nous obtenons les résultats suivants :

$$E \left[\frac{1}{X^3} \right] = \int_s^{+\infty} \int_w^{+\infty} \int_u^{+\infty} f_X^*(v) dv du dw \Big|_{s=0} \tag{5.49}$$

$$E \left[\frac{1}{X^4} \right] = \int_s^{+\infty} \int_z^{+\infty} \int_w^{+\infty} \int_s^{+\infty} f_X^*(v) dv du dw dz \Big|_{s=0} \tag{5.50}$$

Ainsi donc, sachant que

$$\begin{aligned}
 H_X(w) &= \int_w^{+\infty} \int_u^{+\infty} f_X^*(v) dv dw \\
 &= e^{N\theta_r(w)} \left(\frac{r^2 + 2w\sigma^2}{N^2 \Delta^2} + \frac{3\sigma^2}{N^3 \Delta^3} \sqrt{r^2 + 2w\sigma^2} + \frac{3\sigma^4}{N^4 \Delta^4} \right)
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

et en posant le changement de variable (5.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{1}{X^3} \right] &= \int_{\sqrt{r^2+2w\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} G_{on}(x) dx \Big|_{s=0} \\
 &= \int_{\sqrt{r^2+2w\sigma^2}}^{+\infty} e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left[\frac{1}{N^2 \Delta^2 \sigma^2} x^3 + \frac{3}{N^3 \Delta^3} x^2 + \frac{3\sigma^2}{N^4 \Delta^4} \right] dx \\
 &= \frac{1}{N^3} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^3 + \frac{3\sigma^2}{N\Delta} x^2 + \frac{6\sigma^4}{N^2 \sigma^2} x + \frac{6\sigma^6}{N^3 \Delta^3} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0} \\
 &\quad + \frac{3\sigma^2}{N^4 \Delta^4} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^2 + \frac{2\sigma^2}{N\Delta} x + \frac{2\sigma^4}{N^2 \Delta^2} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\sigma^4}{N^5\Delta^5} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0} \\
 & = e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left[\frac{1}{N^3\Delta^3} x^3 + \frac{6\sigma^2}{N^4\Delta^4} x^2 + \frac{15\sigma^4}{N^5\Delta^5} x + \frac{15\sigma^6}{N^6\Delta^6} \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

d'où

$$E \left[\frac{1}{X^3} \right] = \frac{1}{N^3\Delta^3} r^3 + \frac{6\sigma^2}{N^4\Delta^4} r^2 + \frac{15\sigma^4}{N^5\Delta^5} r + \frac{15\sigma^6}{N^6\Delta^6} \tag{5.53}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}
 M_X(z) & = \int_z^{+\infty} \int_w^{+\infty} \int_u^{+\infty} f_X^*(v) dv du dw \\
 & = e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left[\frac{1}{N^3\Delta^3} x^3 + \frac{6\sigma^2}{N^4\Delta^4} x^2 + \frac{15\sigma^4}{N^5\Delta^5} x + \frac{15\sigma^6}{N^6\Delta^6} \right]_{x=\sqrt{r^2+2z\sigma^2}}
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{1}{X^4} \right] & = \int_s^{+\infty} M_X(z) dz \Big|_{s=0} \\
 & = \int_{\sqrt{r^2+2s\sigma^2}}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} M_X(x) dx \Big|_{s=0} \\
 & = \frac{1}{N^4\Delta^4} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^4 + \frac{4\sigma^2}{N\Delta} x^3 + \frac{12\sigma^4}{N^2\Delta^2} x^2 + \frac{24\sigma^6}{N^3\Delta^3} x + \frac{24\sigma^8}{N^4\Delta^4} \right) \right] \\
 & + \frac{6\sigma^2}{N^5\Delta^5} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^3 + \frac{3\sigma^2}{N\Delta} x^2 + \frac{6\sigma^4}{N^2\Delta^2} x + \frac{6\sigma^6}{N^3\Delta^3} \right) \right] \\
 & + \frac{15\sigma^4}{N^6\Delta^6} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x^2 + \frac{2\sigma^2}{N\Delta} x + \frac{2\sigma^4}{N^2\Delta^2} \right) \right] \\
 & + \frac{15\sigma^4}{N^7\Delta^7} \left[e^{\frac{Nr\Delta}{\sigma^2} - \frac{N\Delta x}{\sigma^2}} \left(x + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \right) \right]_{x=\sqrt{r^2+2s\sigma^2}} \Big|_{s=0}
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

d'où

$$E \left[\frac{1}{X^4} \right] = \frac{1}{N^4\Delta^4} r^4 + \frac{10\sigma^2}{N^5\Delta^5} r^3 + \frac{45\sigma^4}{N^6\Delta^6} r^2 + \frac{105\sigma^6}{N^7\Delta^7} r + \frac{105\sigma^8}{N^8\Delta^8} \tag{5.56}$$

De la même manière, nous pouvons écrire:

$$E \left[\frac{1}{Y} \right] = \frac{c}{N\Delta} + \frac{\sigma^2}{N^2\Delta^2} \quad (5.57)$$

$$E \left[\frac{1}{Y^2} \right] = \frac{c^2}{N^2\Delta^2} + \frac{3\sigma^2 c}{N^3\Delta^3} + \frac{3\sigma^4}{N^4\Delta^4} \quad (5.58)$$

$$E \left[\frac{1}{Y^3} \right] = \frac{1}{N^3\Delta^3} c^3 + \frac{6\sigma^2}{N^4\Delta^4} c^2 + \frac{15\sigma^4}{N^5\Delta^5} c + \frac{15\sigma^6}{N^6\Delta^6} \quad (5.59)$$

$$E \left[\frac{1}{Y^4} \right] = \frac{1}{N^4\Delta^4} c^4 + \frac{10\sigma^2}{N^5\Delta^5} c^3 + \frac{45\sigma^4}{N^6\Delta^6} c^2 + \frac{105\sigma^6}{N^7\Delta^7} c + \frac{105\sigma^8}{N^8\Delta^8} \quad (5.60)$$

5.2 Evaluation des espérances des estimateurs

Dans ce qui suit, nous effectuerons une première évaluation de la qualité des estimateurs optimaux à partir du calcul des espérances mathématiques en 5.1. Il a été établi que

$$r_{opt}(N) = \frac{N\Delta}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \quad (5.61)$$

$$c_{opt}(N) = \frac{N\Delta}{\sum_{i=1}^N T_{off}(i)} \quad (5.62)$$

$$\hat{\sigma}_{opt}^2(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} + \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] \quad (5.63)$$

Calculons alors l'espérance mathématique de ces estimateurs.

$$\begin{aligned} E[r_{opt}(N)] &= E \left[\frac{N\Delta}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \right] \\ &= N\Delta E \left[\frac{1}{X} \right] \\ &= N\Delta \left(\frac{r}{N\Delta} + \frac{\sigma^2}{N^2\Delta} \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

d'où

$$E[r_{opt}(N)] = r + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \quad (5.65)$$

De la même manière

$$E [c_{opt}(N)] = c + \frac{\sigma^2}{N\Delta} \quad (5.66)$$

Calculons maintenant l'espérance de l'estimateur de la variance.

$$\begin{aligned} & E [\sigma_{opt}^2(N)] \\ &= \frac{1}{N} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2 - 2r_{opt}(N)\Delta T_{on}(i) + r_{opt}(N)^2 T_{on}(i)^2}{2T_{on}(i)} \right] \\ &+ \frac{1}{N} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2 - 2c_{opt}(N)\Delta T_{off}(i) + c_{opt}(N)^2 T_{off}(i)^2}{2T_{off}(i)} \right] \\ &= \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - \Delta E [r_{opt}(N)] + \frac{1}{2N} E \left[r_{opt}(N)^2 \sum_{i=1}^N T_{on}(i) \right] \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{off}} \right] - \Delta E [c_{opt}(N)] + \frac{1}{2N} E \left[c_{opt}(N)^2 \sum_{i=1}^N T_{off}(i) \right] \\ &= \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - \Delta E [r_{opt}(N)] + \frac{1}{2N} E \left[\frac{N^2 \Delta^2}{X} \right] \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{off}} \right] - \Delta E [c_{opt}(N)] + \frac{1}{2N} E \left[\frac{N^2 \Delta^2}{Y} \right] \\ &= \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - \Delta E [r_{opt}(N)] + \frac{N\Delta}{2N} E [r_{opt}(N)] \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{off}} \right] - \Delta E [c_{opt}(N)] + \frac{N\Delta}{2N} E [c_{opt}(N)] \end{aligned} \quad (5.67)$$

d'où

$$E [\sigma_{opt}^2(N)] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} \quad (5.68)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{r_{opt}} \right] &= E \left[\frac{X}{N\Delta} \right] \\ &= \frac{1}{N\Delta} \left[\frac{N\Delta}{r} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

d'où

$$E \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}_{opt}(N)} \right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} \quad (5.70)$$

De la même manière, nous obtenons

$$E \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}_{opt}(N)} \right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}} \quad (5.71)$$

Nous pouvons facilement vérifier que chacun des estimateurs converge bien vers la valeur exacte du paramètre lorsque N tend vers l'infini. En fait, les trois premiers estimateurs sont biaisés, et leur biais diminue comme $\frac{1}{N}$. Seule une transformation des paramètres estimés permet d'éliminer ce biais dans le cas des paramètres déterministes (5.70),(5.71). Il faut noter que c'est l'espérance mathématique du biais qui est décrite par (5.65), (5.66) et (5.68).

5.3 Calcul de la matrice de covariance de l'estimateur

Afin d'évaluer le temps de convergence de l'algorithme d'identification, nous calculerons la matrice de covariance de l'erreur quadratique d'estimation du vecteur de paramètres $\hat{\theta}_{opt}(N)$.

$$M = E \left[\left(\hat{\theta}_{opt}(N) - \theta \right) \left(\hat{\theta}_{opt}(N) - \theta \right)^T \right] \quad (5.72)$$

On considère

$$\hat{\theta}_{opt}(N) = \begin{bmatrix} r_{opt}(N) \\ c_{opt}(N) \\ \sigma_{opt}^2(N) \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

d'où

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

où

$$M_{11} = E [(r_{opt}(N) - r)^2] \quad (5.75)$$

$$M_{12} = E [(r_{opt}(N) - r) (c_{opt}(N) - c)] \quad (5.76)$$

$$M_{13} = E [(r_{opt}(N) - r) (\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2)] \quad (5.77)$$

$$M_{21} = E [(c_{opt}(N) - c) (r_{opt}(N) - r)] \quad (5.78)$$

$$M_{22} = E [(c_{opt}(N) - c)^2] \quad (5.79)$$

$$M_{23} = E [(c_{opt}(N) - c) (\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2)] \quad (5.80)$$

$$M_{31} = E [(\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2) (r_{opt}(N) - r)] \quad (5.81)$$

$$M_{32} = E [(\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2) (c_{opt}(N) - c)] \quad (5.82)$$

$$M_{33} = E [(\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2)^2] \quad (5.83)$$

$$(5.84)$$

Les termes M_{11} , M_{22} et M_{33} représentent les covariances individuelles des estimateurs. Ils décrivent l'évolution de l'erreur d'estimation quadratique de chaque paramètre. Les autres termes décrivent, quant à eux, l'évolution de l'erreur croisée, donc l'interaction entre les estimateurs.

5.3.1 Calcul des covariances marginales

Nous effectuerons dans ce qui suit le calcul détaillé de M_{11}

$$M_{11} = E [(r_{opt}(N) - r)^2] \quad (5.85)$$

$$= E [r_{opt}^2(N) - 2r r_{opt}(N) + r^2] \quad (5.86)$$

$$= E [r_{opt}^2(N)] - 2r E [r_{opt}(N)] + r^2 \quad (5.87)$$

$$= N^2 \Delta^2 E \left[\frac{1}{X^2} \right] - 2r E [r_{opt}(N)] + r^2 \quad (5.88)$$

$$(5.89)$$

Utilisant (5.65) et (5.48), nous obtenons

$$M_{11} = \frac{\sigma^2 r}{N \Delta} + \frac{3\sigma^4}{N^2 \Delta^2} \quad (5.90)$$

De la même manière, nous obtenons

$$M_{22} = \frac{\sigma^2 c}{N \Delta} + \frac{3\sigma^4}{N^2 \Delta^2} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} M_{33} &= E \left[\left(\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2 \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sigma_{opt}^2(N) \right)^2 \right] - 2\sigma^2 E \left[\sigma_{opt}^2(N) \right] + \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.92)$$

En utilisant (A.19, 5.68) nous obtenons:

$$\begin{aligned} M_{33} &= \frac{3}{4N} (r^2 \Delta^2 + c^2 \Delta^2 + \sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + 2\sigma^4) \\ &+ \frac{3}{2N^2} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta) + \frac{3}{N^3} \sigma^4 \\ &- \frac{1}{N-1} (r^2 \Delta^2 + c^2 \Delta^2 + r\sigma^2 \Delta + c\sigma^2 \Delta) - \frac{1}{(N-1)^2} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + 2\sigma^4) \\ &+ \frac{N^3}{4(N-1)^4} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + \Delta^2 r^2 + \Delta^2 c^2) + \frac{5n^3}{2(N-1)^5} (2\sigma^4 + r\sigma^2 + c\sigma^2) \\ &+ \frac{45N^3}{4(N-1)^6} \left(\frac{\sigma^6}{r\Delta} + \frac{\sigma^6}{c\Delta} + 2\sigma^4 \right) \\ &+ \frac{105N^3}{4(N-1)^7} \left(\frac{\Delta^4 \sigma^8}{r^2} + \frac{\Delta^4 \sigma^8}{c^2} + \frac{\Delta^5 \sigma^6}{r} + \frac{\Delta^5 \sigma^6}{c} \right) \\ &+ \frac{105N^3}{4(N-1)^8} \left(\frac{\sigma^6}{\Delta^3 r^3} + \frac{\sigma^6}{\Delta^3 c^3} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2 r^2} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2 c^2} \right) \\ &+ \sigma^4 \left(\frac{1}{4N} + \frac{3}{2N^2} \right) \end{aligned} \quad (5.93)$$

5.3.2 Calcul des covariances croisées

Remarquons tout d'abord que

$$M_{12} = M_{21} \quad (5.94)$$

$$M_{23} = M_{32} \quad (5.95)$$

$$M_{13} = M_{31} \quad (5.96)$$

$$(5.97)$$

de sorte que M est une matrice symétrique.

$$\begin{aligned} M_{12} &= E[(r_{opt}(N) - r)(c_{opt}(N) - c)] \\ &= E[r_{opt}c_{opt}] - rE[c_{opt}(N)] - cE[r_{opt}(N)] + rc \\ &= \left[r + \frac{\sigma^2}{N\Delta}\right] \left[c + \frac{\sigma^2}{N\Delta}\right] - r \left[c + \frac{\sigma^2}{N\Delta}\right] - c \left[r + \frac{\sigma^2}{N\Delta}\right] + rc \end{aligned} \quad (5.98)$$

d'où

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\sigma^4}{N\Delta} \quad (5.99)$$

Aussi

$$\begin{aligned} M_{13} &= E[(r_{opt}(N) - r)(\sigma_{opt}^2(N) - \sigma^2)] \\ &= E[\sigma_{opt}^2(N)r_{opt}(N)] - rE[\sigma_{opt}^2(N)] - \sigma^2E[r_{opt}(N)] + r\sigma^2 \\ &= E\left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)}\right)\right] - rE[\sigma_{opt}^2] - cE[r_{opt}] + r\sigma^2 \\ &+ E\left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.100)$$

En utilisant (A.6), (5.65) et (5.68), nous obtenons finalement

$$M_{13} = M_{31} = \left[\frac{N\Delta}{2(N-1)} - \frac{\Delta}{2}\right] r^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{N}{2(N-1)^2} + \frac{N}{2(N-1)} - \frac{3}{2N} - \frac{N-1}{2N} \right] r\sigma^2 \\
 & + \left[\frac{N}{2(N-1)^2\Delta} - \frac{2}{N^2\Delta} + \frac{1}{2N\Delta} \right] \sigma^4
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

De la même manière, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 M_{13} = M_{31} & = \left[\frac{N\Delta}{2(N-1)} - \frac{\Delta}{2} \right] c^2 \\
 & + \left[\frac{N}{2(N-1)^2} + \frac{N}{2(N-1)} - \frac{3}{2N} - \frac{N-1}{2N} \right] c\sigma^2 \\
 & + \left[\frac{N}{2(N-1)^2\Delta} - \frac{2}{N^2\Delta} + \frac{1}{2N\Delta} \right] \sigma^4
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

5.4 Analyse du temps de convergence

5.4.1 Principe

Nous évaluons le temps de convergence à partir de l'évolution de la covariance marginale de l'erreur de chacun des estimés. C'est la variance de l'erreur d'estimation.

Nous pouvons donc obtenir l'erreur moyenne relative de chacun des estimés en fonction du nombre d'itérations. Notons par

$$\sigma_{\text{erreur}} = \sqrt{M_{ii}} \tag{5.103}$$

σ_{erreur} représente l'écart type de la fonction de densité de probabilité de l'erreur d'estimation. Elle suit en fait asymptotiquement une loi normale de moyenne nulle [Lju87]. L'erreur sur l'estimation pour un nombre d'itérations donné pourra alors être considérée comme certain multiple de σ_{erreur} , facteur multiplicatif requis dépendant du niveau de confiance statistique désiré. Ainsi, si l'on désire obtenir un intervalle de confiance de 95%, l'erreur absolue d'estimation sera environ de

$$\epsilon = 1.56 \times \sigma_{\text{erreur}} \quad (5.104)$$

Ceci signifierait que la probabilité d'obtenir après N itérations une erreur inférieure à ϵ est de 95 %. Cela ne constituera en fait qu'une approximation de l'intervalle de confiance selon la loi normale, pour un nombre limité de points. Dans notre cas, nous étudierons à fin de simplification le cas où le facteur multiplicatif est l'unité, i.e.

$$\epsilon = \sigma_{\text{erreur}} \quad (5.105)$$

ce qui correspond à un intervalle de confiance de 87.8 %

Grâce à la matrice de covariance obtenue dans la section précédente, nous sommes en mesure de tracer l'évolution de l'erreur relative de chacun des paramètres.

Ainsi, pour r par exemple, nous évaluons

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{M_{11}}}{r} \quad (5.106)$$

5.4.2 Résultats théoriques

Nous avons choisi les mêmes conditions d'opération que celles des simulations soit :

$$a = 0.02, \quad R = 0.4, \quad \sigma^2 = 0.04 \\ x_+ = 21.1, \quad x_- = 20 \quad X_a = 12$$

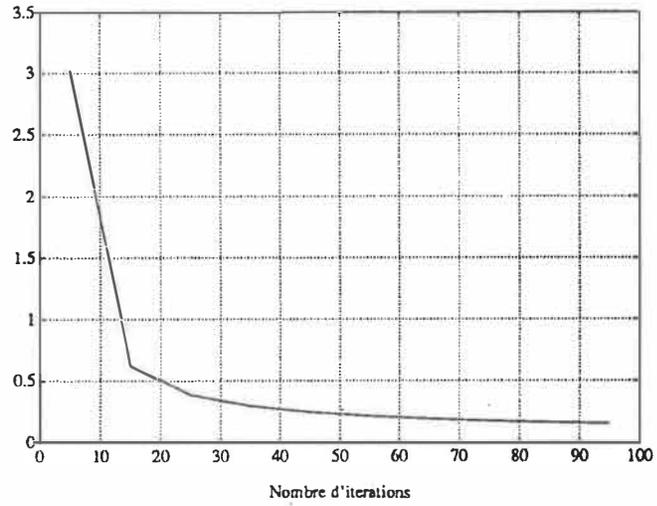


Figure 5.1: Erreur relative théorique de σ^2

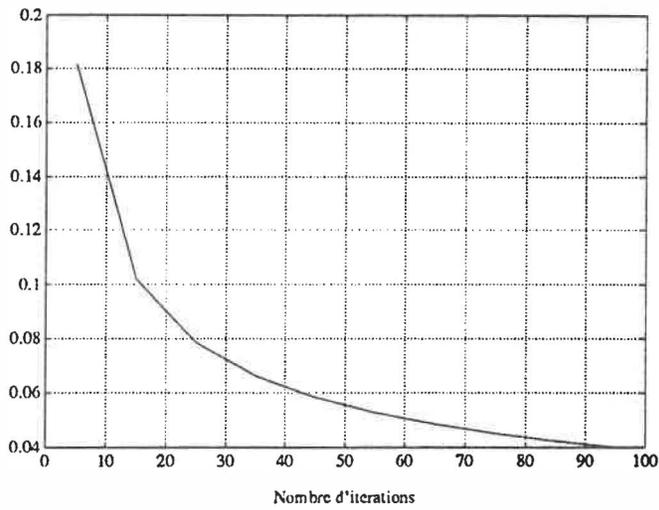
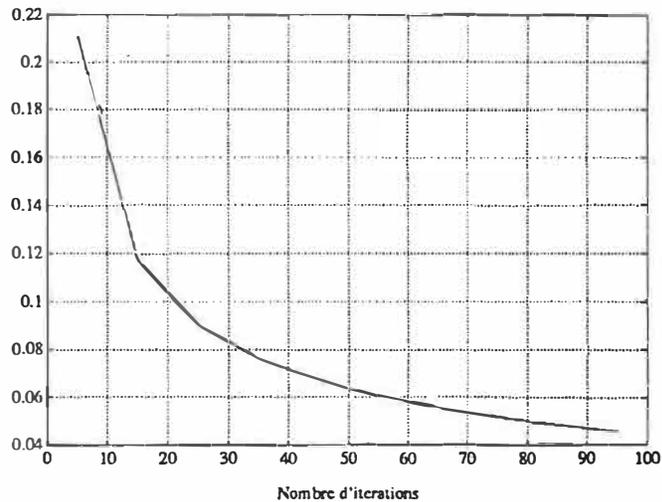


Figure 5.2: Erreur relative théorique de τ

Figure 5.3: Erreur relative théorique de c

D'après les figures (5.1, 5.2, 5.3), on vérifie bien que l'erreur d'estimation tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini. C'est l'erreur relative de la variance qui est la plus élevée. En effet, la reconstitution de la distribution du bruit requiert un plus grand nombre de points. Les estimés des paramètres convergent de manière beaucoup plus rapide. On atteint en effet 14% d'erreur pour r et 16% pour c au bout de 10 itérations uniquement. On remarque cependant que l'erreur sur r et celle sur c sont différentes bien que les structures des deux estimateurs soient identiques. Ceci porte à croire que le point d'opération, donc le rapport entre les valeurs des paramètres, affecte le temps de convergence.

5.4.3 Résultats pratiques

Des simulations ont été effectuées dans les mêmes conditions que 5.4.2.

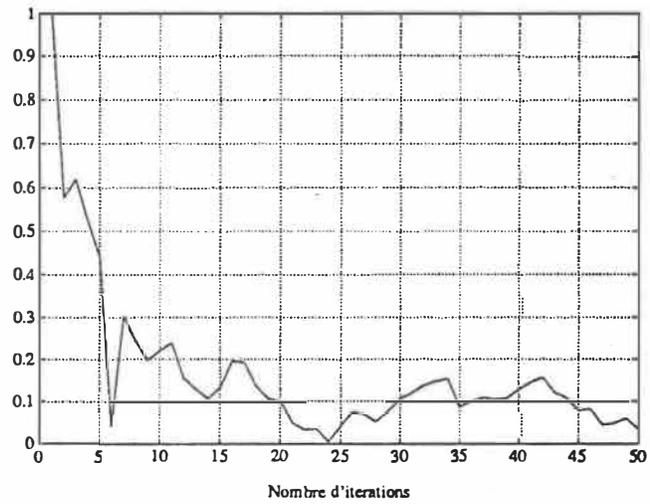


Figure 5.4: Erreur relative de σ^2

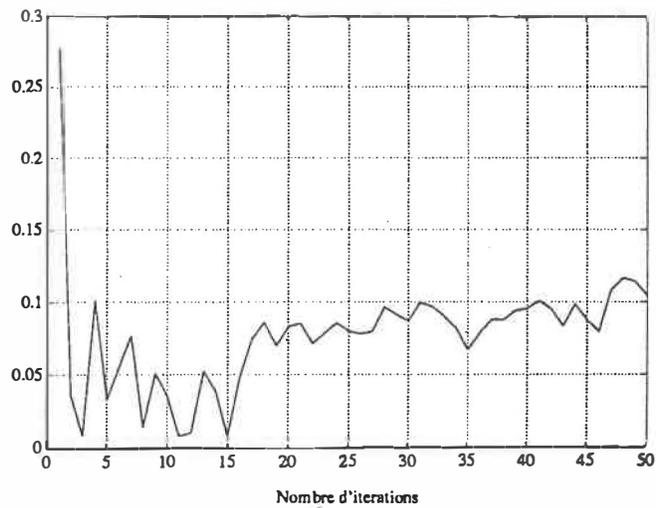


Figure 5.5: Erreur relative de r

On constate que les performances obtenues sont comparables à celles prédites pour r et c puisque l'on atteint rapidement (moins de 10 itérations) le niveau de 10% d'erreur (fig. 5.5, 5.6). L'estimé de σ^2 converge plus rapidement que prévu (fig 5.4).

5.4.4 Analyse de l'influence du point d'opération

Le point d'opération influe considérablement sur le temps de convergence. Nous nous intéresserons particulièrement à l'effet du niveau de bruit, et du rapport de a et R à la variance. Pour ceci, il suffit de fixer un nombre N d'itérations et d'observer la variation de l'erreur relative en fonction du paramètre en question.

Nous effectuerons les variations de paramètres à partir des conditions d'opération suivantes pour un nombre $N = 15$ itérations.

$$\begin{aligned} a &= 0.02, & R &= 0.4, & \sigma^2 &= 0.04 \\ x_+ &= 21.1, & x_- &= 20 & X_a &= 12 \end{aligned}$$

5.4.4.1 Influence de la variance

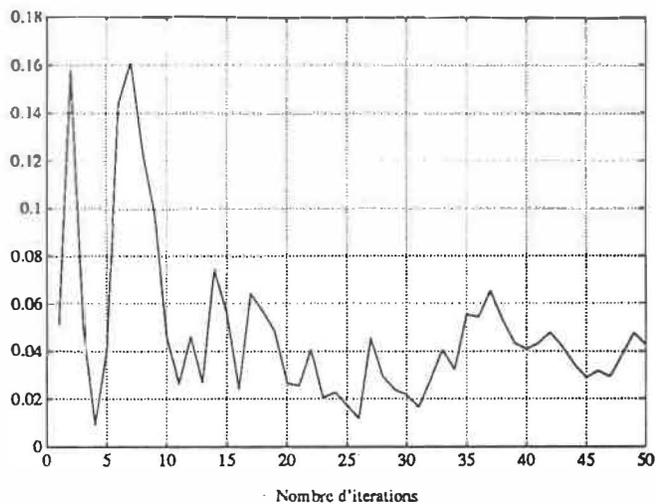


Figure 5.6: Erreur relative de c

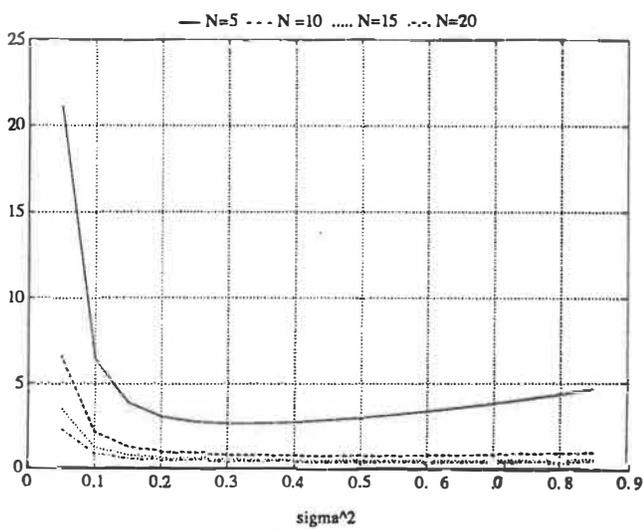


Figure 5.7: Erreur relative de σ^2 en fonction de σ^2

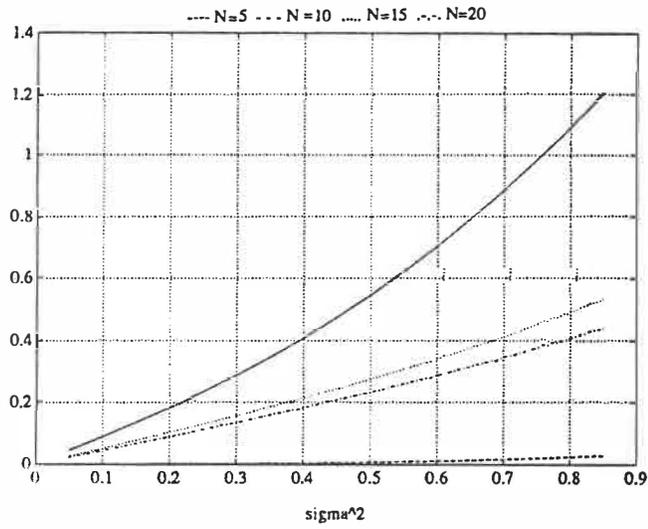


Figure 5.8: Erreur relative de r en fonction de σ^2

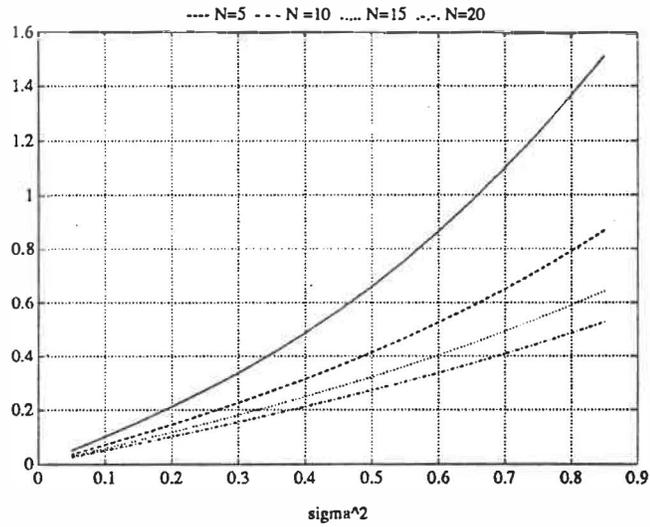


Figure 5.9: Erreur relative de c en fonction de σ^2

On constate qu'il existe un niveau de bruit critique pour lequel l'erreur sur l'estimé de la variance est minimale (fig. 5.7). Pour un faible niveau de bruit, l'estimé de la variance est affecté pour cause de non persistance de l'excitation. A mesure que la variance augmente, l'erreur est réduite. Dépassé ce point critique, l'estimé de la variance se dégrade. En effet, σ^2 devient trop important par rapport à r et c de sorte que c'est la variance qui contrôle l'évolution de la température plutôt que les taux de chauffage et de perte propres au système (à la résidence). L'augmentation de la variance entraîne une variabilité accrue des mesures. Il faut donc plus de points pour estimer la variance. L'erreur d'estimation de σ^2 devient donc plus élevée. Les estimés des paramètres r et c se détériorent avec l'augmentation du bruit (fig. 5.8, 5.9). Ils deviennent en effet noyés dans le bruit.

5.4.4.2 Effet de a et R

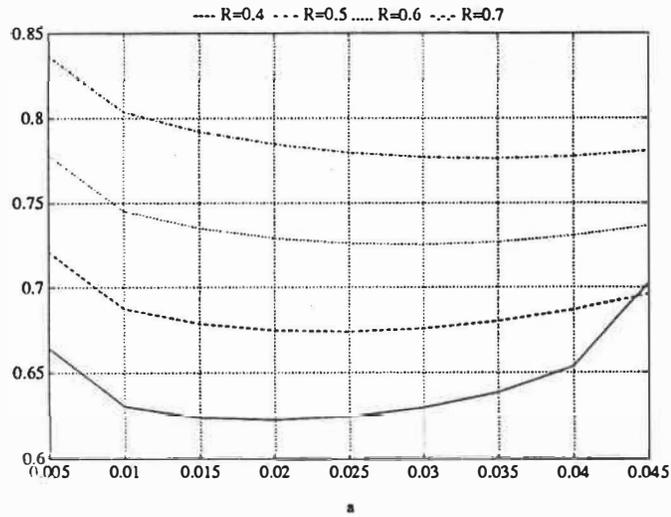


Figure 5.10: Erreur relative de σ^2 en fonction de a et R

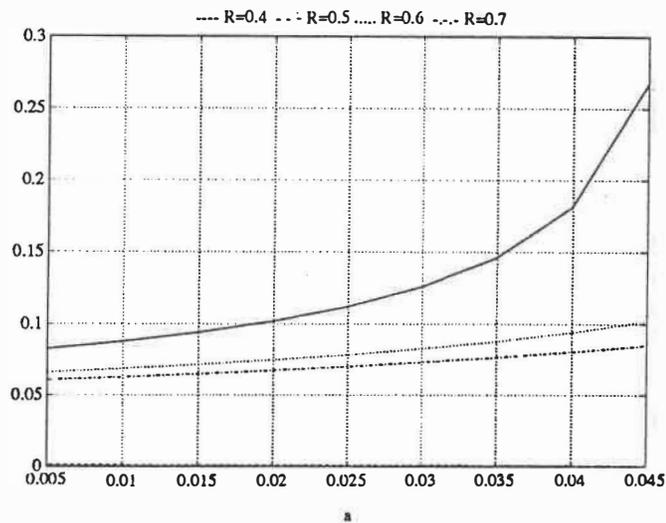


Figure 5.11: Erreur relative de r en fonction de a et R

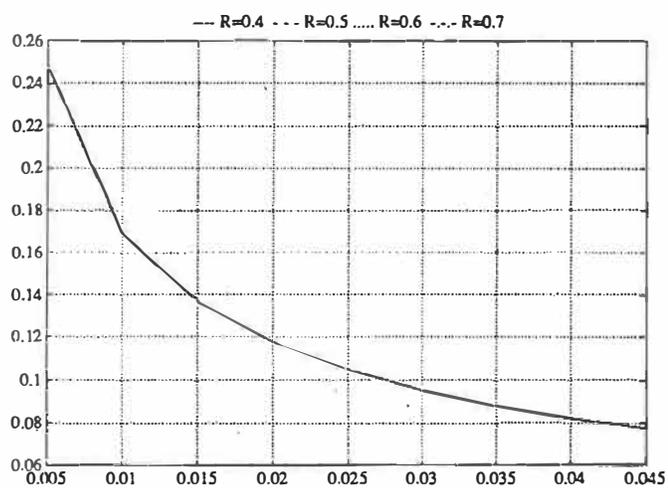


Figure 5.12: Erreur relative de c en fonction de a et R

Pour une faible valeur de a les estimés de la variance et de c sont détériorés (fig. 5.10, 5.12) alors que celui de r s'améliore (fig. 5.11). En effet le taux de perte devient faible devant le bruit, donc son effet devient plus difficile à détecter. L'effet contraire se produit pour r . Ceci cause alors la détérioration de σ^2 . Le cas où a augmente s'explique par analogie. Lorsque a augmente, l'estimé de la variance s'améliore vu l'amélioration de c ; cependant plus a augmente plus l'estimé de r est affecté; c'est alors que l'estimé du taux de gain thermique devient affecté, donc aussi la variance. Le creux de la courbe (fig. 5.10) correspond donc à un point "d'équilibre". Les courbes de niveaux correspondent à l'effet de la variation R qui se traduit de la même manière.

5.4.5 Résultats pratiques

Des simulations ont été réalisées pour les conditions d'opération suivantes, à partir desquelles sont effectuées les variations des paramètres σ^2 et a .

$$\begin{aligned} a &= 0.02, & R &= 0.4, & \sigma^2 &= 0.04 \\ x_+ &= 21.1, & x_- &= 20 & X_a &= 12 \end{aligned}$$

Nous donnerons ainsi à σ^2 les valeurs 0.16 et 0.0001; par la suite, nous ferons varier a de 0.02 respectivement à 0.005 et 0.045.

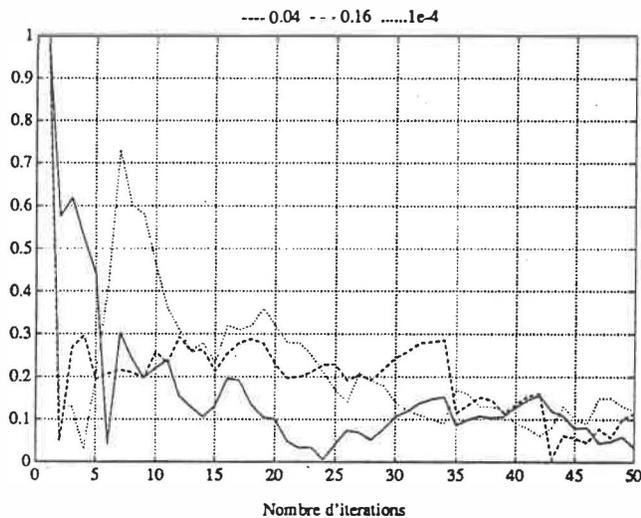


Figure 5.13: Erreur relative simulée de σ^2 en fonction de σ^2

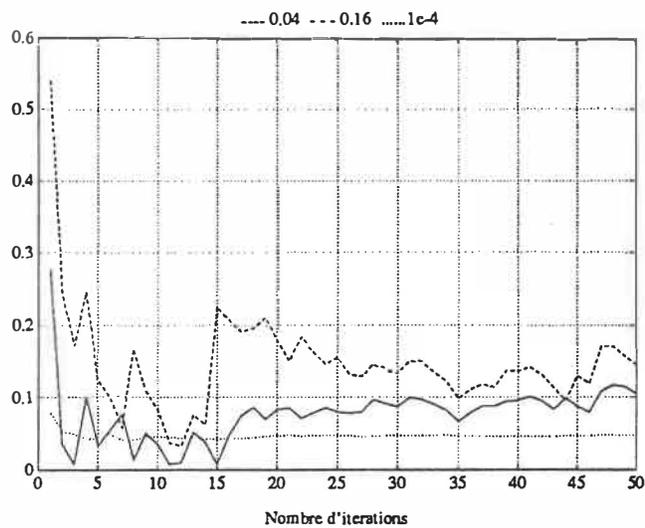


Figure 5.14: Erreur relative simulée de r en fonction de σ^2

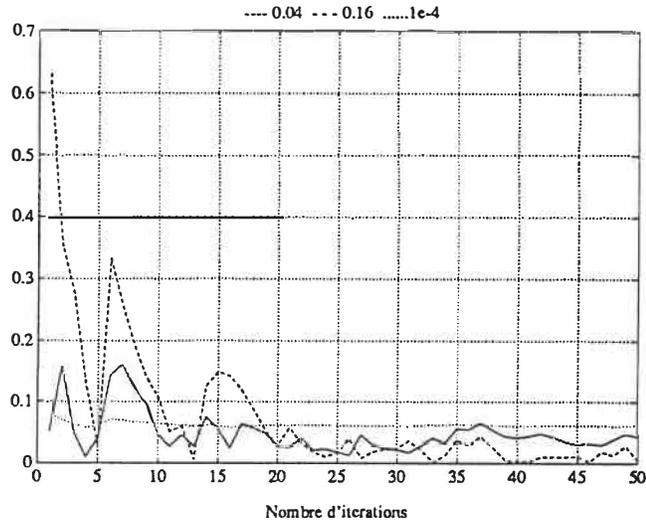


Figure 5.15: Erreur relative simulée de c en fonction de σ^2

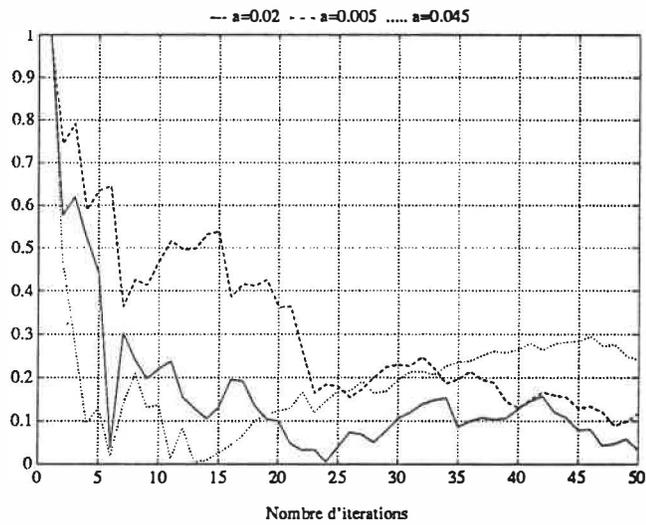


Figure 5.16: Erreur relative simulée de σ^2 en fonction de a

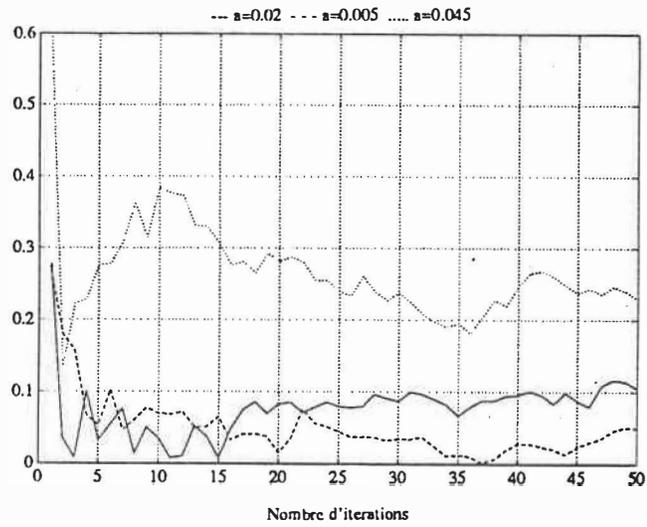


Figure 5.17: Erreur relative simulée de r en fonction de a

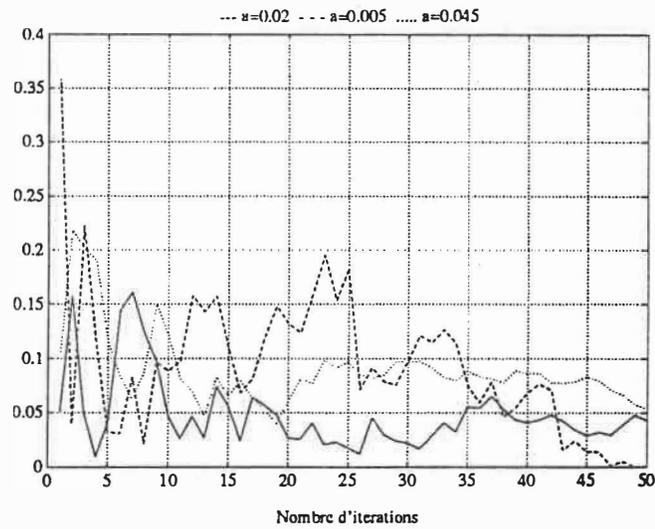


Figure 5.18: Erreur relative simulée de c en fonction de a

On vérifie bien que les performances des estimés de r , c et σ^2 s'améliorent ou se détériorent selon les prévisions données par les courbes (5.7 - 5.12), en se traduisant par des déplacements respectivement vers le bas et vers le haut des "trajectoires" des estimés.

5.5 Analyse de l'interaction des estimateurs

5.5.1 Principe

La covariance de l'erreur croisée représente l'interaction entre les estimateurs. Comme pour le cas précédent, nous évaluerons l'évolution de l'erreur croisée relative de chaque couple de paramètres. Ainsi, l'erreur croisée relative de σ^2 et r est donnée par

$$\epsilon_{\sigma^2 r} = \frac{M_{31}}{r \sigma^2} \quad (5.107)$$

Dans les diagrammes (5.19 - 5.21) nous montrons l'évolution des erreurs croisées relatives de σ^2 et r , σ^2 et c , r et c respectivement, en fonction du nombre d'itérations N .

5.5.2 Courbes théoriques

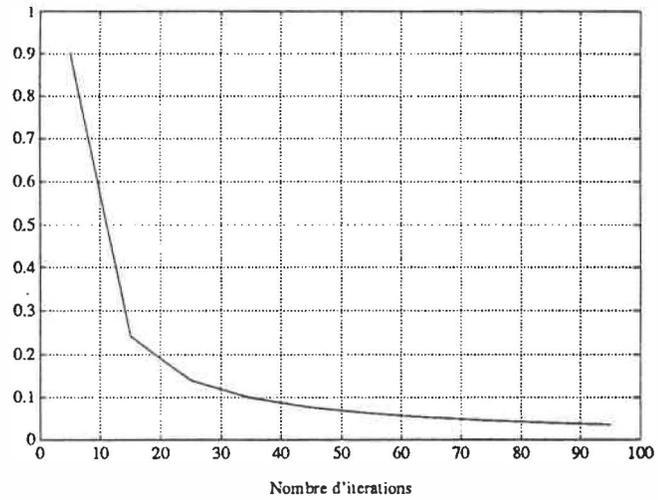


Figure 5.19: Erreur relative croisée de σ^2 et r

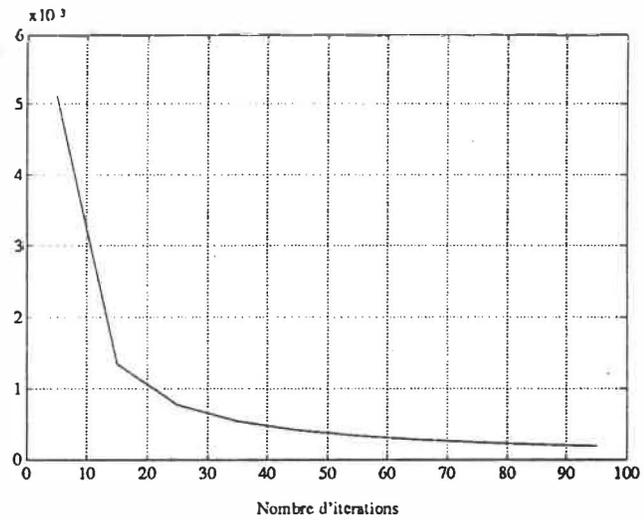


Figure 5.20: Erreur relative croisée de σ^2 et c

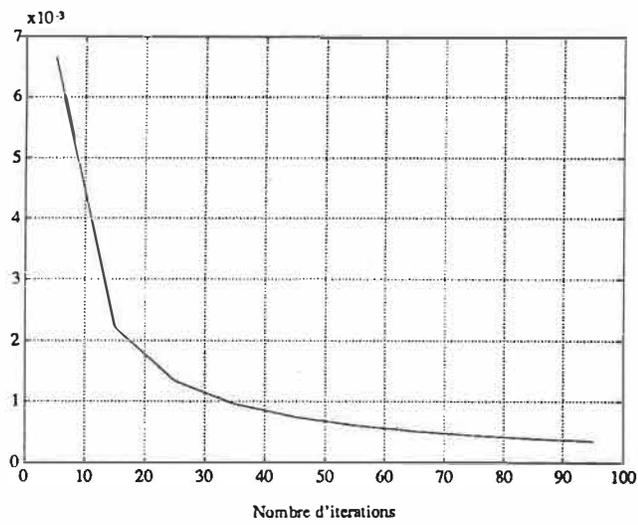


Figure 5.21: Erreur relative croisée de r et c

L'interaction entre les estimateurs diminue avec le nombre d'itérations. Pour un nombre d'itérations donné, l'erreur croisée sera en général non nulle. Pour un niveau donné non nul d'erreur croisée, une augmentation de l'erreur instantanée d'un estimé se traduira par la diminution de l'erreur instantanée de l'autre. Ce coefficient est également une mesure de la corrélation qui existe entre les estimateurs. Il donne l'influence de l'erreur moyenne d'un estimé sur un autre, que ce soit par l'ordre de grandeur et le sens de variation de l'erreur. Plus la corrélation est importante, plus il y aura interaction entre les estimateurs et interdépendance de la tendance de l'erreur.

5.5.3 Influence du point d'opération

L'erreur croisée varie elle aussi selon le point d'opération. Dans les diagrammes qui suivent, nous montrons l'influence respectivement des paramètres a et σ^2 sur les erreurs croisées de σ^2 et r , σ^2 et c , r et c . Les effets observés seront discutés dans la conclusion.

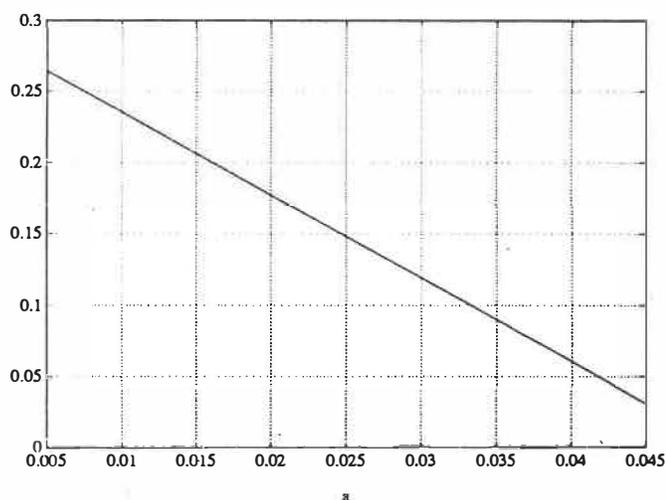


Figure 5.22: Erreur relative croisée de σ^2 et r en fonction de a

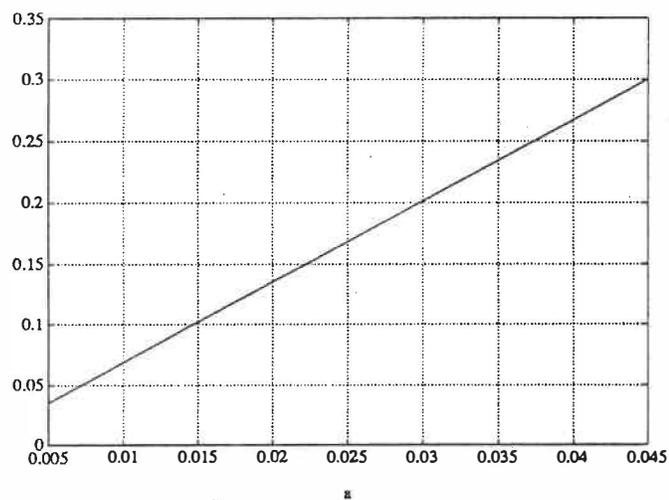


Figure 5.23: Erreur relative croisée de σ^2 et c en fonction de a

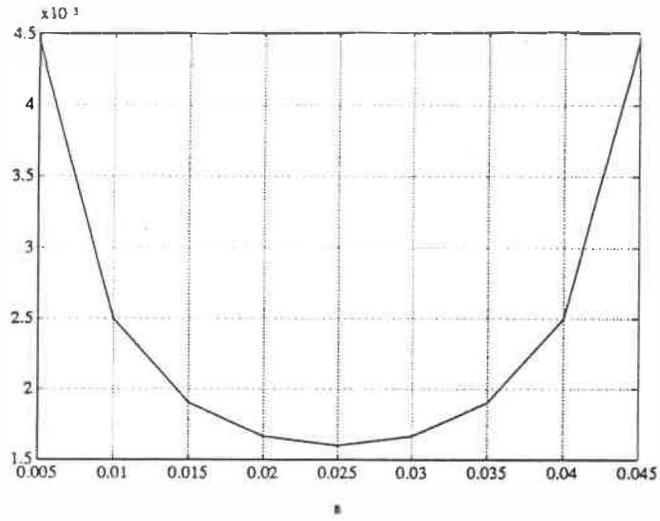


Figure 5.24: Erreur relative croisée de r et c en fonction de a

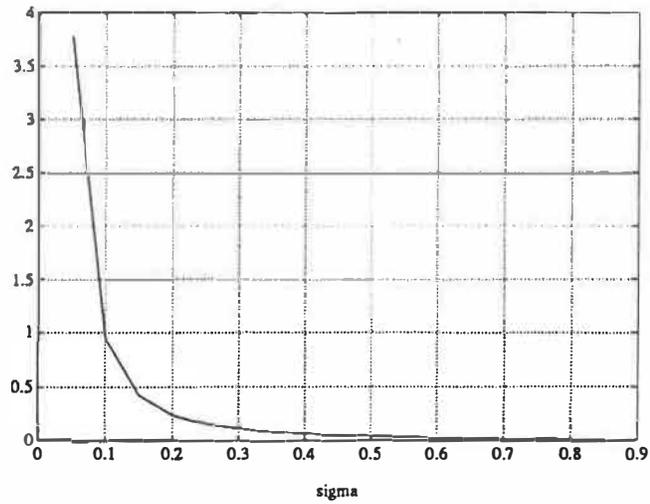


Figure 5.25: Erreur relative croisée de σ^2 et r en fonction de σ^2

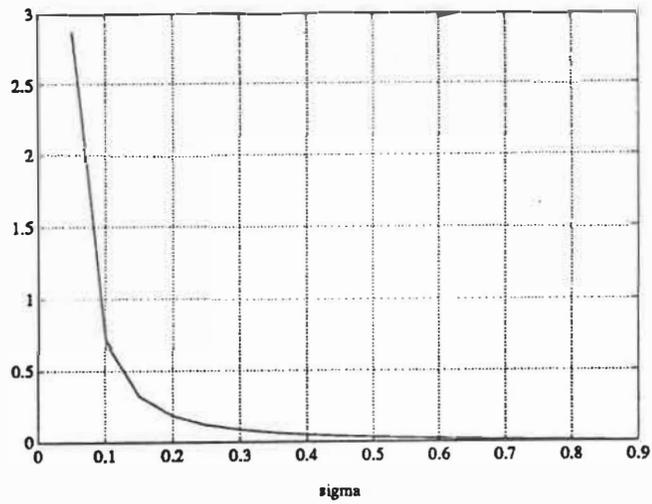


Figure 5.26: Erreur relative croisée de σ^2 et c en fonction de σ^2

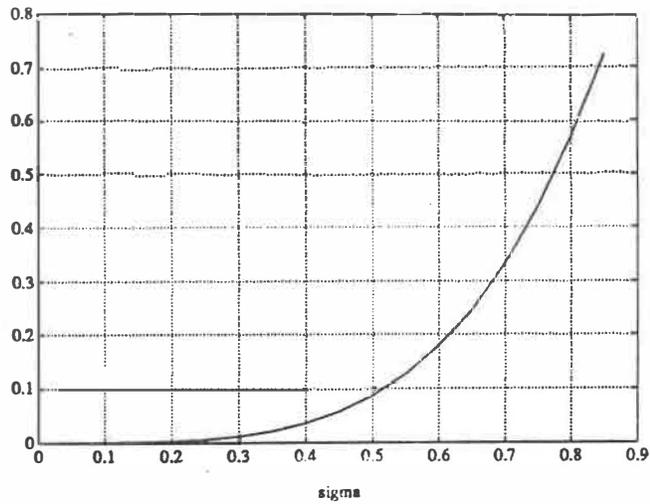


Figure 5.27: Erreur relative croisée de r et c en fonction de σ^2

5.6 Conclusion

Nous pouvons constater que les temps de convergence des estimateurs vers les paramètres exacts se rapprochent assez des temps prédits par la théorie. Ainsi, le temps de convergence requis pour r et c est de l'ordre de 10 itérations dans un voisinage de 10% d'erreur de leurs valeurs exactes (fig. 5.5, 5.6). L'erreur simulée de l'estimé de σ^2 est de l'ordre de 20% après 10 itérations, et de 12% après 20 itérations (fig. 5.4), donc inférieure à celle prédite. Il existe de plus un niveau de bruit optimal pour l'estimation de tous les paramètres (fig. 5.7). Vu la nature des estimateurs, l'estimation de a et R (r et c) influe sur l'estimation de σ^2 plutôt que l'inverse. En effet, pour des valeurs de a importantes, la corrélation croisée de a avec σ^2 est forte (fig. 5.22) alors que l'erreur relative sur a ou c diminue (fig. 5.12). Il s'en suit que l'estimé de a s'améliore et pour un niveau d'erreur croisée donné entre a et σ^2 , l'estimé de σ^2 se dégrade (fig. 5.10). Pour des valeurs de a faibles, la partie déterministe du modèle étant noyée dans le bruit, l'estimé de a se détériore (fig. 5.12), cependant, l'erreur relative croisée de a et σ^2 diminue, ceci ayant pour conséquence que l'estimé

se comporte indépendamment de l'estimé de a . C'est alors le comportement de R qui devient déterminant, puisque la corrélation croisée de σ^2 et r augmente (fig. 5.22). Si R augmente pour a donné, l'erreur relative sur l'estimé de R diminue (fig. 5.11). Il s'en suit alors le même raisonnement que précédemment, c'est à dire à cause d'une forte corrélation croisée entre σ^2 et R l'estimé de σ^2 va se dégrader (fig. 5.10). En somme, le comportement de l'estimé de σ^2 dépendra de son rapport au plus grand des paramètres R ou a . Il faudra alors que ni $\frac{R}{\sigma^2}$ ni $\frac{a}{\sigma^2}$ ne soient "trop grands" pour espérer un bon estimé de σ^2 . Finalement, lorsque σ^2 augmente considérablement, l'influence de r et c sur la dynamique du système devient négligeable. La partie déterministe du système devient noyée dans le bruit et ses paramètres deviennent difficilement identifiables, ce qui explique l'augmentation de l'erreur de ses estimés (fig. 5.2, 5.3). A mesure que le bruit augmente, la durée moyenne des temps de passage T_{on} et T_{off} augmente également. Il en est de même pour la variance des mesures, de sorte que cela prend un plus grand nombre de points pour estimer la variance, d'où l'augmentation de l'erreur sur l'estimé de σ^2 (fig. 5.7).

Ainsi donc, nous avons développé des outils qui nous permettent non seulement d'analyser et d'expliquer le comportement de nos algorithmes, mais surtout de prédire l'erreur d'estimation selon le point d'opération du système (s'il est connu). Cet outil de prédiction du temps de convergence devient surtout un moyen d'évaluer la capacité d'adaptation (paramètres non stationnaires) de nos algorithmes en tous cas, en ce qui concerne le maximum de vraisemblance exact.

Conclusion

La gestion optimale des charges électriques par contrôle direct des charges de chauffage (ou de refroidissement) dans un réseau électrique est une option qui engendre des besoins de modélisation très particuliers. Les modèles à base physique sont, parmi les modèles de charge présentement utilisés, les seuls capables de fournir le type d'informations requises afin de pouvoir synthétiser la commande. Dans le cas de la modélisation à base physique des charges de chauffage, la difficulté majeure est de trouver un bon compromis entre la précision de la modélisation des caractéristiques thermiques et l'intervention humaine, tout en limitant le volume des données nécessaires à l'identification du modèle, de même que sa complexité. En effet, une caractérisation trop détaillée des phénomènes en jeu pourra donner lieu à des modèles difficilement identifiables ou alors trop complexes à agréger, et donc pratiquement inutilisables.

Le modèle proposé ici pour les charges de chauffage se caractérise par sa capacité de capturer l'influence des facteurs climatiques et humains, et ce avec une simplicité relative. Les paramètres se réduisent à un taux de pertes thermiques propre à la structure de la résidence, un taux de gain thermique fourni par le chauffage et un bruit additif modélisant les échanges thermiques, dûs au comportement humain, ou non modélisés. Le modèle tient compte de la température ambiante elle-même considérée mesurable. En pratique, ce modèle élémentaire correspondra à une linéarisation d'un modèle thermodynamique non linéaire de la résidence autour d'un point de tempé-

rature externe et une grande variation de celle-ci pourra entraîner une variation des taux d'échanges. Le modèle se caractérise enfin par sa structure variable (selon l'état de fonctionnement du chauffage).

Le bruit, modélisé par un processus de Wiener, est en fait un paramètre déterminant pour la dynamique de la charge et ce, surtout suite à un délestage comme le confirment les simulations dans [Mal82]. Il était donc primordial d'identifier ce terme stochastique. L'objectif fixé au départ, a été d'identifier complètement le modèle (caractéristiques du bruit incluses), en ligne à partir d'un minimum de mesures, afin d'assurer la facilité d'implantation et d'utilisation de la technique développée. Les mesures exigées par l'algorithme d'identification sont les temps de commutation du thermostat, ses températures limites et la température externe. Vu la caractéristique de dynamique lente du système, nous avons opté pour l'étude préliminaire du cas invariant dans le temps, puis l'extension au cas variant.

La première approche développée a été celle de la méthode classique des moindres carrés. Nous avons donc exprimé analytiquement les sorties mesurées du système, soit les durées de marche et d'arrêt du thermostat. Ainsi, le système a été décomposé en ses deux sous-systèmes. Seuls les paramètres liés à la composante déterministe ont pu ainsi être identifiés. En effet, la variance du bruit n'apparaît pas comme paramètre explicite identifiable de la sortie du système. L'identification du système s'est donc réduite à l'estimation alternée (sur une échelle temporelle) de deux paramètres à partir de deux sous-systèmes découplés de même nature donc selon un même schéma. L'algorithme obtenu est stable et converge rapidement pour différents niveaux de bruit (pourvu que la condition de persistance de l'excitation soit vérifiée). Malgré ses performances, cette méthode ne saurait être implantée seule puisqu'elle ne permet pas d'estimer la variance du bruit.

La deuxième approche développée nous a permis d'identifier complètement notre modèle, même dans ses aspects stochastiques : c'est la méthode du maximum de

vraisemblance. En déterminant les paramètres qui maximisent la densité de probabilité des mesures observées, nous tenons compte explicitement des caractéristiques du processus aléatoire au lieu de considérer sa contribution comme une perturbation à éliminer (méthode des moindres carrés). Les fonctions de vraisemblance globale et propres à chaque structure ont été établies. Nous avons pu, par la suite, estimer nos paramètres selon trois schémas différents. Alors que les deux premiers se basent respectivement sur un calcul cumulatif et un calcul semi-récurif des estimés optimaux, le troisième consiste en un algorithme de résolution non-linéaire d'équations, de Newton. Cette dernière approche nécessite cependant un bon conditionnement vu sa très grande sensibilité aux conditions initiales.

Dans la deuxième partie du mémoire, les propriétés de convergence de la méthode du maximum de vraisemblance ont été étudiées à la fois pour comprendre la dynamique de ces derniers, et pour anticiper la vitesse de variations de paramètres que l'algorithme serait capable de suivre dans le cas variant dans le temps. Ainsi, le temps de convergence dépend non seulement du niveau du bruit, mais aussi du point d'opération soit du rapport entre les différents paramètres et conditions du système. Nous avons montré à cet effet l'existence d'une zone de bruit donnant le plus bas niveau d'erreur pour un nombre d'itérations donné. Ainsi, comme pour la méthode des moindres carrés, on doit assurer la persistance de l'excitation. Il est à noter que le niveau de bruit requis en réalité est plus faible que celui obtenu en simulation (effet numérique). Les performances se détériorent à mesure que le bruit augmente. Ainsi, dans le cas où l'une des vitesses de chauffage ou de refroidissement (r, c) du système est faible par rapport au bruit, au point que ce dernier contrôle l'évolution de la température interne, la convergence devient plus lente vu que le paramètre en question, noyé dans le bruit, devient difficilement identifiable.

Malgré l'interaction existante entre les estimés des paramètres, et la sensibilité de l'estimé de la variance, les algorithmes sont stables. Pour des conditions d'opération

normales , nous sommes en mesure d'atteindre un niveau de précision moyen de moins de 10 % au bout d'une dizaine d'itérations soit un temps absolu d'environ une heure et quarante minutes.

Les performances obtenues nous ont permis d'étendre l'utilisation de nos algorithmes au cas variant dans le temps. En effet, en estimant directement les paramètres physiques a et R , la température externe est incluse comme une mesure de sorte que de fortes variations de température n'ont pas affecté les estimés. Cependant, vu qu'en réalité, les paramètres du modèle linéarisé peuvent varier lors d'une grande variation de température, une estimation adaptative s'impose. L'algorithme ne pouvant suivre que des variations lentes de température une réinitialisation sera préférable lorsqu'une variation importante et rapide de la température ambiante est détectée. Nous obtenons donc un schéma d'adaptation continu ou par paliers. Vu que les variations du systèmes sont lentes, et faibles, le taux de réinitialisation peut être choisi de manière à minimiser l'erreur.

Ainsi donc, les méthodes développées nous permettent de suivre la variation de la charge de manière efficace grâce à leur temps relativement bon de convergence. Même les variations de charges aux heures de pointe peuvent être capturées. Le problème d'identification étant résolu, nous serons maintenant en mesure de nous attaquer au problème de la commande optimale des groupes de charges. L'utilisation de ces modèles et d'un tel algorithme d'estimation utilisant si peu d'informations, en vue d'une gestion optimale des charges, serait une opération économiquement réalisable et relativement peu coûteuse. Une étude de l'évolution du modèle et de la pertinence et des conditions de son extension en un modèle non-linéaire, en vue d'une identification directe, pourrait constituer une extension possible de ce travail de recherche.

Bibliographie

- [BJ70] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, Oakland, 1970.
- [CD79] C.Y Chong and A.S Debs. "Statistical Synthetis of Power System Load Models". *Proceeding of the IEEE conf. Decision and Control*, pp. 264-269, 1979.
- [CM65] D.R. Cox and H.D. Miller. *The theory of Stochastic Processes*. Willey, New York, 1965.
- [CM83] C.Y. Chong and R.P. Malhamé. *Statistical Approach to Physically Based Load Modeling*. Technical Report, Georgia Institute of Technology, prepared for U.S DEPARTMENT OF ENERGY, ENERGY SYSTEMS DIVISION, 1983.
- [DR58] W.B. Davenport and W.L. Root. *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. Mc Graw-Hill, New York, 1958.
- [DE75] F. P. DeMello. "Power System Dynamics Overview", *Symposium on Adequacy an Phylosophy of Modeling: Dynamic System Performance, IEEE pamphlet 75 CH0970-4-PWR*, pp. 5-15
- [GA74] F.D Galiana and Al. "Identification of Stochastic Electric Load Models from Physical Data". *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-19, pp. 887-893, 1974.

- [GS84] G.C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1984.
- [GY72] P.C. Gupta and K. Yamada. "Adaptive Short-term Forecasting of Hourly Loads Using Weather Information". *IEEE Transaction on Power. App. Syst.*, Vol. PAS-91, No. 5, Septembre 1972.
- [IS81] S. Ihara and F.C. Schweppe. "Physically Based Modeling of Cold Load Pickup". *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-100, No. 9, pp. 4142-4150, Septembre 1981.
- [KM89] S. Kamoun and R.P. Malhamé, "On-Line Identification of Physically-based Models of Electric Space Heating Loads", *Proceeding of the fourth IAS-TEDE International conference on HIGH TECHNOLOGY IN THE POWER INDUSTRY*, pp. 437-442, juillet 1989.
- [Lju87] L. Ljung. *System Identification : Theory For The User*. Prentice-Hall, New York, 1987.
- [Mal82] R.P. Malhamé. *A Statistical Approach for Modeling a Class of Power System Loads*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, Mars 1982.
- [MC85] R.P. Malhamé and C.Y. Chong. "Electric Load Model Synthesis by Diffusion Approximation of a High-order Hybrid-state Stochastic System". *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-30, pp. 854-860, Septembre 1985.
- [MC88] R.P. Malhamé and C.Y. Chong. "On the Statistical Properties of a Cyclic Diffusion Process Arising in the Modeling of Thermostat-controlled Electric Power System Loads". *SIAM J. Applied Mathematics*, vol. 48, No. 2, pp. 465-480, Avril 1988.

- [MKD88] R.P. Malhamé, S.Kamoun and D.Dochain. " On-line Identification of Electric Load Models for Load Management ". *Proceedings of the International Conference on Advances in Communication and Automatic Control*. vol. II, pp. 1183–1196, octobre 1988.
- [PA86] W. Press and Al. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. University Press, Cambridge, 1986.
- [Poy84] K. Poysti. "Box-Jenkins Method in Short-term Forecasting of Grid Load in Finland". *Proceedings of the 8th Power Systems Computation Conference*, Août 1984.
- [Sa88] Irvin C. Schick and al. "Modeling and Weather-normalization of Whole-house Metered Data for Residential End-use Load Shape Estimation". *IEEE Transaction on Power Systems*, vol. 3, No. 1, pp. 213–219, Février 1988.
- [TCI70] J. Toyoda, M. Chen, and Y. Inoue. "An application of state estimation to short-term load forecasting, part i: forecasting modeling." *IEEE Transactions on Power Apparatus and systems*, vol. PAS-89, No. 7, pp. 1678–1682, Septembre 1970.

Annexe A

Calculs d'espérances mathématiques

A.1 Calcul de $E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right]$

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} - r_{opt}(N)\Delta + \frac{r^2 T_{on}(i)}{2} \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} \right] - E \left[\sum_{i=1}^N r_{opt}(N)\Delta \right] + E \left[\sum_{i=1}^N \frac{r^2 T_{on}(i)}{2} \right] \\ &= \frac{N\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - N\Delta E[r_{opt}(N)] + \frac{1}{2} E \left[\sum_{i=1}^N T_{on}(i) \right] \\ &= \frac{N\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - N\Delta E[r_{opt}(N)] + \frac{1}{2} E \left[\frac{N^2 \Delta^2}{X^2} X \right] \\ &= \frac{N\Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] - N\Delta E[r_{opt}(N)] + \frac{N^2 \Delta^2}{2} E \left[\frac{1}{X} \right] \end{aligned} \tag{A.1}$$

En utilisant (5.24) (5.45) et (5.65), on obtient finalement

$$E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right] = \frac{N\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} \tag{A.2}$$

De la même manière, on obtient

$$E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] = \frac{N\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Calcul de $E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right]$

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right) \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right) \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right)} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T_{on}(i)} \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Lorsque N est grand, on obtient que

$$\frac{T_{on}(i)}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \rightarrow 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T_{on}(i)} \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N E \left[\frac{1}{T_{on}(i)} \frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N E \left[\frac{1}{T_{on}(i)} \right] E \left[\frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j)} \right] \quad (\text{A.5})$$

La séparation de l'espérance mathématique en un produit d'espérances nous a été possible puisque les deux quantités en présence sont deux fonctions indépendantes de variables aléatoires.

Sachant maintenant que

$$E \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] = N E \left[\frac{1}{T_{on}} \right] \quad (\text{A.6})$$

et

$$E \left[\frac{1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j)} \right] = E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-1} T_{on}(j)} \right] \quad (\text{A.7})$$

On obtient

$$E \left[\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-1} T_{on}(j)} \right) \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] = N \left[\frac{r}{\Delta} + \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \right] \left[\frac{r}{(N-1)\Delta} + \frac{\sigma^2}{(N-1)^2\Delta^2} \right] \quad (\text{A.8})$$

De même

$$E \left[\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-1} T_{off}(j)} \right) \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{off}(i)} \right] = N \left[\frac{c}{\Delta} + \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \right] \left[\frac{c}{(N-1)\Delta} + \frac{\sigma^2}{(N-1)^2\Delta^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

A.3 Calcul de $E \left[\frac{1}{(\sum_{j=1}^N T_{on}(j))^4} \sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right]$

$$E \left[\frac{1}{(\sum_{j=1}^N T_{on}(j))^4} \sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right) \frac{1}{\left(\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right) \right)^4} \right] \\
&= E \left[\sum_{i=1}^N \left(T_{on}(i)^2 \frac{1}{\left(\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right) \right)^4} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Lorsque N est grand, on obtient que

$$\frac{T_{on}(i)}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \rightarrow 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&E \left[\sum_{i=1}^N \left(T_{on}(i)^2 \frac{1}{\left(\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right) \right)^4} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^N E \left[T_{on}(i)^2 \frac{1}{\left(\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \left(1 + \frac{T_{on}(i)}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right) \right)^4} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N E [T_{on}(i)^2] E \left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1, j \neq i}^N T_{on}(j) \right)^4} \right]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

(5.15) et (5.56) nous permettront alors d'obtenir :

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{N-1} T_{on}(j) \right)^4} \sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right] \\
&= N \left[\frac{\sigma^2 \Delta}{r^3} + \frac{\Delta^2}{r^2} \right] \times \\
&\left[\frac{1}{(N-1)^4 \Delta^4} r^4 + \frac{10\sigma^2}{(N-1)^5 \Delta^5} r^3 + \frac{45\sigma^4}{(N-1)^6 \Delta^6} r^2 + \frac{105\sigma^6}{(N-1)^7 \Delta^7} r + \frac{105\sigma^8}{(N-1)^8 \Delta^8} \right]
\end{aligned}$$

(A.13)

(A.14)

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{N-1} T_{off}(j)\right)^4} \sum_{i=1}^N T_{off}(i)^2 \right] \\
&= N \left[\frac{\sigma^2 \Delta}{c^3} + \frac{\Delta^2}{c^2} \right] \times \\
& \left[\frac{1}{(N-1)^4 \Delta^4} c^4 + \frac{10\sigma^2}{(N-1)^5 \Delta^5} c^3 + \frac{45\sigma^4}{(N-1)^6 \Delta^6} c^2 + \frac{105\sigma^6}{(N-1)^7 \Delta^7} c + \frac{105\sigma^8}{(N-1)^8 \Delta^8} \right]
\end{aligned}$$

(A.16)

(A.17)

A.4 Calcul de $E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^4}{4T_{on}(i)^2} \right]$

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^4}{4T_{on}(i)^2} \right] \\
&= E \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta^4}{4T_{on}(i)^2} \right] - E \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta^3 r_{opt}(N)}{T_{on}(i)} \right] + \frac{3}{2} E \left[\sum_{i=1}^N r_{opt}(N)^2 \Delta^2 \right] \\
& - E \left[\sum_{i=1}^N \Delta r_{opt}(N)^3 T_{on}(i) \right] + \frac{1}{4} E \left[\sum_{i=1}^N r_{opt}(N)^4 T_{on}(i)^2 \right] \\
&= \frac{N\Delta^4}{4} E \left[\frac{1}{T_{on}^2} \right] - \Delta^3 E \left[\frac{N\Delta}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] + \frac{3N\Delta^2}{2} E \left[\frac{N^2 \Delta^2}{X^2} \right] \\
& - \Delta E \left[\frac{N^3 \Delta^3}{X^2} \right] + \frac{1}{4} E \left[\frac{N^4 \Delta^4}{\left(\sum_{i=1}^N T_{on}(i)\right)^4} \sum_{i=1}^N T_{on}(i)^2 \right]
\end{aligned} \tag{A.18}$$

(5.28) (5.48) (A.8) et (A.12) donnent :

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^4}{4T_{on}(i)^2} \right] \\
&= \frac{3N}{4} (r^2\Delta^2 + \sigma^2r\Delta + \sigma^4) \\
&+ \frac{3}{2} (\sigma^2r\Delta) + \frac{3}{2N}\sigma^4 - \frac{N^2}{N-1} (r^2\Delta^2 + r\sigma^2\Delta) \\
&- \frac{N^2}{(N-1)^2} (\sigma^2r\Delta + \sigma^4) \\
&+ \frac{N^5}{4(N-1)^4} (\sigma^2r\Delta + \Delta^2r^2) + \frac{5N^5}{2(N-1)^5} (\sigma^4 + r\sigma^2) \\
&+ \frac{45N^5}{4(N-1)^6} \left(\frac{\sigma^6}{r\Delta} + \sigma^4 \right) \\
&+ \frac{105N^5}{4(N-1)^7} \left(\frac{\Delta^4\sigma^8}{r^2} + \frac{\Delta^5\sigma^6}{r} \right) \\
&+ \frac{105N^5}{4(N-1)^8} \left(\frac{\sigma^6}{\Delta^3r^3} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2r^2} \right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^4}{4T_{off}(i)^2} \right] \\
&= \frac{3N}{4} (c^2\Delta^2 + \sigma^2c\Delta + \sigma^4) \\
&+ \frac{3}{2} (\sigma^2c\Delta) + \frac{3}{2N}\sigma^4 - \frac{N^2}{N-1} (c^2\Delta^2 + c\sigma^2\Delta) \\
&- \frac{N^2}{(N-1)^2} (\sigma^2c\Delta + \sigma^4) \\
&+ \frac{N^5}{4(N-1)^4} (\sigma^2c\Delta + \Delta^2c^2) + \frac{5N^5}{2(N-1)^5} (\sigma^4 + c\sigma^2) \\
&+ \frac{45N^5}{4(N-1)^6} \left(\frac{\sigma^6}{c\Delta} + \sigma^4 \right) \\
&+ \frac{105N^5}{4(N-1)^7} \left(\frac{\Delta^4\sigma^8}{c^2} + \frac{\Delta^5\sigma^6}{c} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{105N^5}{4(N-1)^8} \left(\frac{\sigma^6}{\Delta^3 c^3} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2 c^2} \right). \quad (\text{A.20})$$

A.5 Calcul de $E \left[\left(\sigma_{opt}^2 \right)^2 \right]$

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sigma_{opt}^2 \right)^2 \right] &= E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} E \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right)^2 \right] + \frac{1}{N^2} E \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{2}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^4}{4T_{on}(i)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(j))^2}{2T_{on}(j)} \right] \\ &+ \frac{2}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right] E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] \\ &+ \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{off}(i))^4}{4T_{off}(i)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{N^2} E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(j))^2}{2T_{off}(j)} \right] \end{aligned}$$

En utilisant (A.15), (A.16), (A.2) et (A.3), et sachant que

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(j))^2}{2T_{off}(j)} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(i))^2}{2T_{off}(i)} \right] E \left[\frac{(\Delta - c_{opt}(N)T_{off}(j))^2}{2T_{off}(j)} \right] \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(j))^2}{2T_{on}(j)} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right] E \left[\frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(j))^2}{2T_{on}(j)} \right] \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
& E \left[(\sigma_{opt}^2)^2 \right] \\
&= \frac{3}{4N} (r^2 \Delta^2 + c^2 \Delta^2 + \sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + 2\sigma^4) \\
&+ \frac{3}{2N^2} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta) + \frac{3}{N^3} \sigma^4 \\
&- \frac{1}{N-1} (r^2 \Delta^2 + c^2 \Delta^2 + r\sigma^2 \Delta + c\sigma^2 \Delta) - \frac{1}{(N-1)^2} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + 2\sigma^4) \\
&+ \frac{N^3}{4(N-1)^4} (\sigma^2 r \Delta + \sigma^2 c \Delta + \Delta^2 r^2 + \Delta^2 c^2) + \frac{5N^3}{2(N-1)^5} (2\sigma^4 + r\sigma^2 + c\sigma^2) \\
&+ \frac{45N^3}{4(N-1)^6} \left(\frac{\sigma^6}{r\Delta} + \frac{\sigma^6}{c\Delta} + 2\sigma^4 \right) \\
&+ \frac{105N^3}{4(N-1)^7} \left(\frac{\Delta^4 \sigma^8}{r^2} + \frac{\Delta^4 \sigma^8}{c^2} + \frac{\Delta^5 \sigma^6}{r} + \frac{\Delta^5 \sigma^6}{c} \right) \\
&+ \frac{105N^3}{4(N-1)^8} \left(\frac{\sigma^6}{\Delta^3 r^3} + \frac{\sigma^6}{\Delta^3 c^3} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2 r^2} + \frac{\sigma^4}{\Delta^2 c^2} \right) \tag{A.23}
\end{aligned}$$

A.6 Calcul de $E \left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right) \right]$

$$\begin{aligned}
& E \left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N) T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right) \right] \\
&= \Delta E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} - r_{opt}(N) \Delta + \frac{r^2 T_{on}(i)}{2} \right) \right] \\
&= \Delta E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta^2}{2T_{on}(i)} \right] - \Delta^2 E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N r_{opt}(N) \right] \\
&+ \frac{\Delta}{2} E \left[\frac{r_{opt}(N)^2}{\sum_{i=1}^N T_{on}(i)} \sum_{i=1}^N T_{on}(i) \right] \\
&= \frac{\Delta^3}{2} E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] - N \Delta^2 E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \frac{N \Delta}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \right] \\
&+ \frac{\Delta}{2} E \left[\frac{N^2 \Delta^2}{\left(\sum_{i=1}^N T_{on}(i) \right)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta^3}{2} E \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^N T_{on}(j)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{on}(i)} \right] - \frac{N^2 \Delta^3}{2} E \left[\frac{1}{X^2} \right] \quad (\text{A.24})$$

Avec (5.48) (A.2) , on obtient

$$\begin{aligned} & E \left[r_{opt}(N) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta - r_{opt}(N)T_{on}(i))^2}{2T_{on}(i)} \right) \right] \\ &= \left[\frac{N\Delta}{2(N-1)} - \frac{\Delta}{2} \right] + \left[\frac{N}{2(N-1)^2} + \frac{N}{2(N-1)} - \frac{3}{2N}r^2 \right] r\sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Annexe B

Principe de la simulation

Le modèle dont nous disposons est décrit par l'équation différentielle :

$$dx(t) = -a(x(t) - X_a(t))dt + Rm(t)b(t)dt + dv(t) \quad (\text{B.1})$$

L'évolution de l'état discret $m(t)$ est dirigée par un thermostat ayant pour températures limites x_- et x_+ . $m(t)$ passe de 1 à 0 lorsque $x(t)$ atteint x_+ , et de 0 à 1 lorsque $x(t)$ atteint x_- .

Mathématiquement, pour un incrément temporel infiniment petit δt :

$$m(t + \delta t) = m(t) + \pi(x(t), x_+, x_-) \quad (\text{B.2})$$

où :

$$\pi(x, m, x_+, x_-) = \begin{array}{ll} 0 & x_- < x < x_+ \\ -m & x \geq x_+ \\ 1 - m & x \leq x_- \end{array} \quad (\text{B.3})$$

$$(\text{B.4})$$

Ce modèle est classé parmi les équations stochastiques d'Ito de la forme :

$$dx(t, w) = a(t, x(t, w))dt + b(t, x(t, w))dW(t) \quad (\text{B.5})$$

avec la condition initiale

$$x(u, w) = x_u(w) \quad (\text{B.6})$$

où $x(t, w) \in R$, w appartient à l'espace des réalisations et $\{W(t)\}$ est un processus de Wiener. Les fonctions $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont des fonctions scalaires connues ayant des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre. La discrétisation de ces équations éart-14 s'effectue par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & x_n + a_n h + b_n Z_{1n} + \frac{1}{2} h^2 \left(a_{t_n} + a_{x_n} a_n - \frac{1}{2} a_{x_n} b_{x_n} b_n \right) \\ & + Z_{2n} \left(a_{x_n} b_n - b_{t_n} - b_{x_n} a_n + \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + \frac{1}{2} (Z_{1n}^2 - h) b_{x_n} b_n \\ & + Z_{1n} h \left(b_{x_n} a_n - b_{t_n} - \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + Z_{3n} b_{x_n} a_{x_n} a_n \\ & + \frac{1}{2} (Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) (a_{x_n} b_{x_n} b_n + a_{x_n x_n} b_n^2) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) (b_{x_n x_n} b_n^2 + b_{x_n}^2 b_n) \\ & + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 + Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{t_n x_n} b_n + b_{x_n x_n} b_n a_n - \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_n^2 b_n \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{x_n}^2 a_n + b_{x_n} b_{t_n} - \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} Z_{1n}^4 - 3 Z_{1n} Z_{2n} + 3 Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{3!} b_{x_n x_n x_n} b_n^3 + \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{2} b_{x_n x_n x_n} b_n^2 b_{x_n} + \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où

$$a_n = a(t_n, x_n) \quad (\text{B.8})$$

$$a_{t_n} = \frac{\partial a}{\partial t}(t_n, x_n) \quad (\text{B.9})$$

$$a_{x_n} = \frac{\partial a}{\partial x}(t_n, x_n) \dots \dots \dots \quad (\text{B.10})$$

Z_{1n} , Z_{2n} sont deux variables aléatoires normales dépendantes et Z_{3n} est approximée par une variable aléatoire normale.

$$Z_{1n} = \int dW(t) \quad (\text{B.11})$$

$$Z_{2n} = \int \int^t dW(s) \quad (\text{B.12})$$

$$Z_{3n} = \int \int^t (W_s - W_n) ds dW(t) \quad (\text{B.13})$$

où encore

$$Z_{1n} \doteq N(0, h) \quad (\text{B.14})$$

$$Z_{2n} \doteq N(0, \frac{h^3}{3}) \quad (\text{B.15})$$

$$Z_{3n} \doteq N(0, \frac{h^4}{12}) \quad (\text{B.16})$$

L'équation (B.1) de notre modèle se réécrit comme suit :

$$dx(t) = a(t, x)dt + b(t, x)dv(t) \quad (\text{B.17})$$

où

$$a(t, x) = Rmb(t) - a(x(t) - X_a(t)) \quad (\text{B.18})$$

$$b(t, x) = \sigma \quad (\text{B.19})$$

avec

$$b(t) = 1 \quad (\text{B.20})$$

puisque l'on n'applique aucune coupure externe. En fixant de plus la température externe durant le cycle de simulation

Ainsi

$$a_n = Rm - a(x_n - X_a) \quad (\text{B.21})$$

$$a_{t_n} = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$a_{x_n} = -a \quad (\text{B.23})$$

$$b_n = \sigma \quad (\text{B.24})$$

$$b_{t_n} = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$b_{x_n} = 0 \quad (\text{B.26})$$

de sorte que l'algorithme se réduit à ce qui suit :

$$x_{n+1} = x_n + a_n h + b_n Z_{1n} + \frac{1}{2} h^2 a_{x_n} a_n + Z_{2n} a_{x_n} b_n \quad (\text{B.27})$$

Pour générer Z_{1n} et Z_{2n} , nous utilisons la méthode de Box-Muller [PA86]. L'approche consiste à effectuer une transformation non-linéaire de deux variables aléatoires, x_1 et x_2 , suivants une loi uniforme sur $[0,1]$:

$$y_1 = (-2 \ln x_1)^{1/2} \cos 2\pi x_2 \quad (\text{B.28})$$

$$y_2 = (-2 \ln x_1)^{1/2} \sin 2\pi x_2 \quad (\text{B.29})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00290848 9