UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LOCALISATION ET PILOTAGE D'UN VÉHICULE AUTONOME DANS UNE MINE

par

Louis-Pierre GUILLAUME
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M. Sc. A.)

juin 1989

© Louis-Pierre Guillaume 1989

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Canadian Theses Service
Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-52725-0

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

LOCALISATION ET PILOTAGE D'UN VÉHICULE AUTONOME DANS UNE MINE

Présenté par: LOUIS-PIERRE GUILLAUME

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A.

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Richard Hurteau ....., D. Ing., président

M. François Soumis ....., Ph. D.

M. André Piché ....., Ph. D.

"Tout peut s'expliquer,
il suffit de ne pas chercher à comprendre."

(Gébé, *Service des cas fous*)

Sommaire

Le problème de la localisation d'un véhicule autonome est introduit à l'aide d'une revue des différents capteurs existants ainsi que de quelques prototypes expérimentaux. Un premier choix de capteurs envisageables pour notre étude est présenté. Ces capteurs possédant des temps de réaction très différents les uns des autres, un système hybride comprenant deux capteurs, un théodolite associé à des balises et un gyroscope, est choisi afin de tirer le meilleur parti de leurs avantages respectifs.

La localisation à l'aide de balises est étudiée. Trois balises suffisent à calculer la position et l'orientation grâce à la mesure par le théodolite de deux angles entre celles-ci. L'étude de la propagation des erreurs de mesure permet de définir des erreurs de position et d'orientation. Des calculs d'erreur sont effectués sur trois dispositions de balises et permettent d'obtenir des abaques d'erreurs pour différents espacements entre les balises. À partir de celles-ci, il est possible de déterminer la distance optimale entre les balises, connaissant l'erreur maximum désirée, pour une disposition de balise donnée. L'erreur sur la position est utilisée pour cela car elle est plus sensible à la distance que celle sur l'orientation.

L'utilisation d'une plate-forme inertielle pour localiser le véhicule est aussi considérée. La description des deux éléments la constituant, le gyroscope et l'accéléromètre, est ensuite menée en explicitant les différentes technologies. Du fait de la dérive croissante du gyroscope, une réactualisation périodique est jugée indispensable.

Un système hybride de capteurs, composé d'un théodolite et d'un gyroscope, est alors envisagé. Il offre la possibilité d'utiliser les avantages de chaque capteur tout en éliminant la plupart des inconvénients liés à l'utilisation individuelle du capteur. Le gyroscope a été préféré à la plate-forme du fait de sa simplicité. Un modèle de véhicule électrique permettant la simulation du système hybride est présenté et une commande de type optimale est choisie. Le modèle n'étant pas linéaire, nous avons développé une heuristique produisant de bonnes solutions malgré les non-linéarités du système.

Des simulations sont menées sur différentes trajectoires et confirment le bien-fondé du système hybride de capteurs choisi, en raison de sa simplicité et de sa précision. Une étude économique est ensuite menée, dont les conclusions confirment elles aussi notre choix. Le système hybride théodolite avec balises et gyroscope est donc un bon compromis précision/coût.

Abstract

This paper deals with the localization and piloting of an autonomous vehicule in a mine. After a review of the state-of-the-art technology in these areas, two sensors are chosen in order to localize the vehicule, i.e. to determine its position and orientation. These sensors are the theodolite (combined with beacons) and the gyroscope.

Beacons are used to study the localization. From the measurement of the angles between the beacons, formulae allow the computation of the localization. The propagation of measurement errors is analyzed. The resulting computation of error charts make it possible to determine the optimum distance between beacons, when some parameters are known. A review of inertial navigation systems is also presented. One of their components, the gyroscope, is described. As it suffers from unbounded error growth, a periodic reset is essential.

A hybrid system of sensors, composed of a theodolite and a gyroscope, is considered. It offers the potential of incorporating the major advantages of each component while eliminating most of the deficiencies of the individual components. A model of an electrical vehicule is used to carry out simulations of the hybrid system. A control is suggested in order that the vehicule may follow a predetermined trajectory. Simulations of the model on different trajectories and a cost/precision study confirm the choice of the hybrid system.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur François Soumis, pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que pour le temps qu'il a consacré à cette recherche.

Je remercie aussi le professeur Richard Hurteau pour m'avoir autorisé à utiliser l'équipement de son laboratoire de robotique, pour m'avoir donné l'opportunité de visiter le laboratoire du LAAS de Toulouse et pour avoir guidé ma recherche à son début

Je veux de plus remercier les professeurs Romano de Santis et Roland Malhamé pour leurs conseils concernant le chapitre 4 ainsi que le professeur André Piché pour ses conseils au sujet des mines.

Je remerci aussi Djamal Bouarab et Sofiene Kamoun pour leur aide précieuse et pour leur agréable soutien ainsi que toutes les personnes qui m'ont aidées dans ce projet.

J'exprime aussi mes remerciements envers l'école d'ingénieur ESIEE qui m'a donné l'occasion d'étudier au Canada et envers l'AECSP qui m'a permis de m'impliquer au sein de l'École Polytechnique.

Enfin, ma gratitude va à mes parents qui m'ont permis d'arriver à ce point et à mon amie, Sarah King, qui m'a soutenu durant ces deux années.

Table des matières

Sommaire v

Abstract vii

Remerciements viii

Liste des figures xiii

Introduction 1

1 Détermination de la localisation 3

1.1 Capteurs existants 5

1.1.1 Capteurs proprioceptifs 5

1.1.2 Capteurs extéroceptifs 7

1.2 Solutions déjà utilisées 10

1.3 Solutions envisageables 13

1.3.1 Localisation du véhicule 14

1.3.2 Asservissement du déplacement 15

1.4 Solution choisie 16

2 Localisation à l'aide de balises 17

2.1 Calcul de la position et de l'orientation d'un objet 17

2.1.1 Deux balises 18

2.1.2 Trois balises 19

2.1.2.1 Dans un plan 20
2.1.2.2 Dans l'espace 24
2.2 Calcul des erreurs de position et d'orientation 30
2.2.1 Méthode géométrique 31
2.2.2 Méthode analytique 33
2.3 Disposition des balises 35
2.3.1 Calculs des erreurs de position et d'orientation 35
2.3.1.1 Hypothèses 35
2.3.1.2 Configurations étudiées 36
2.3.1.3 Représentation des erreurs 38
2.3.2 Analyse des résultats 42
2.3.2.1 Position 43
2.3.2.2 Orientation 50
2.3.3 Conclusion 52
2.4 Conclusion générale 54

3 Plate-forme inertielle 55
3.1 Généralités 55
3.2 Rappel des lois de la mécanique et du principe de relativité 56
3.3 Principe des appareils mesurants $\vec{f}$ et $\vec{\omega}$ 57
3.3.1 Accéléromètre 57
3.3.2 Gyroscope 59
3.3.3 Plate-forme à inertie 61
3.3.4 Navigateur à inertie 62
3.4 Plate-forme 63
3.4.1 Gyroscope 63
3.4.2 Accéléromètre 67
3.4.3 Combinaison des deux capteurs 68
3.5 Conclusion 69

4 Pilotage par système hybride **71**

4.1 Localisation du véhicule à partir de capteurs 72

4.1.1 Théodolite 72

4.1.2 Gyroscope 78

4.1.3 Système hybride de capteurs 79

4.2 Modélisation du véhicule 80

4.2.1 Modèle du véhicule 80

4.2.2 Modèle des perturbations 83

4.3 Commande du véhicule 83

4.3.1 Objectifs à suivre 83

4.3.2 Modèle 86

4.3.3 Commande optimale 87

4.3.4 Commande heuristique réalisée 90

4.4 Estimation de la position 92

4.5 Conclusion 94

5 Simulations **96**

5.1 Caractéristiques des éléments 96

5.2 Commande choisie 98

5.3 Schéma de simulation 102

5.3.1 Sans gyroscope 102

5.3.2 Avec gyroscope 105

5.4 Résultats 107

5.4.1 Sans gyroscope 107

5.4.1.1 Ajustement des paramètres de pondération avec un échelon d'orientation 107

5.4.1.2 Échelon de vitesse 110

5.4.1.3 Échelon de position 111

5.4.1.4 Conclusion 111

5.4.2 Avec gyroscope 112
5.4.2.1 Sans théodolite 112
5.4.2.2 Avec théodolite 114
5.4.2.3 Conclusion 116
5.5 Étude économique 116
5.6 Conclusion 119

6 Conclusion **120**

Bibliographie **122**

A Formules de calcul **125**
A.1 Lieu des points P tels que l'angle BPA soit constant 125
A.2 Détermination des angles d'Euler 127
A.3 Calcul d'erreur : méthode analytique 128

Liste des figures

1.1 Appariements de segments d'une paire d'image pour la stéréo-vision [MIG86] 8

1.2 Résultat d'un balayage télémétrique par laser [GIR84]. 9

1.3 Perception par proximétrie à ultrasons [MIG86]. 10

1.4 Le robot HILARE. 11

1.5 Le robot GSR. 12

1.6 Le robot CMU-ROVER. 13

2.1 Localisation de R par rapport à A et B. 18

2.2 Localisation de R par rapport à A, B et C. 20

2.3 Lieu des points tels que $\alpha = cte$. 21

2.4 R, intersection de deux arcs de cercles. 21

2.5 Coordonnées de R. 23

2.6 Vue en perspective du couloir, des balises et du plan de détection (hachuré). 25

2.7 $\mid \alpha_c \mid < \mid \alpha_t \mid < \pi$ sauf si $P_t // P_c$. 25

2.8 coordonnées sphériques. 27

2.9 Véhicule incliné dans un couloir horizontal. 28

2.10 Véhicule dans un couloir incliné. 29

2.11 Illustration des matrices de rotation. 29

2.12 R, intersection de deux arcs de cercle. 31

2.13 Intersections des quatres arcs de cercle. 32

2.14 Règles des cosinus. 33
2.15 Configuration en triangle isocèle. 37
2.16 Configuration en ligne. 37
2.17 Configuration en triangle rectangle. 37
2.18 Images noir et blanc des erreurs de position et de rotation. 39
2.19 Mise en évidence des erreurs pour le cas 1 ($d = 10$). 40
2.20 Surfaces 3D. 41
2.21 Véhicule dans un couloir. 43
2.22 Exemple de zone utile dans les trois configurations. 43
2.23 courbes des erreurs de position à 50 %. 44
2.24 courbes des erreurs de position à 5 %. 46
2.25 courbes des erreurs de position à 90 %. 47
2.26 Courbes du cas 1, zone de 50 %, pour $\varepsilon = 0{,}1\,^{o}$ et $\varepsilon = 1\,^{o}$. 48
2.27 Variations de d par rapport à ε. 48
2.28 Courbes du cas 1 tracés en semi-log. 49
2.29 Courbes d'erreur approximées. 49
2.30 courbes des erreurs d'orientation à 50 %. 51
2.31 courbes des erreurs d'orientation à 5 %. 52
2.32 courbes des erreurs d'orientation à 90 %. 53

3.1 Le problème de la navigation par inertie. 56
3.2 Repère inertiel. 57
3.3 Schéma de principe d'un accéléromètre linéaire à un axe. 58
3.4 Véhicule accélérant dans un plan horizontal. Axe sensible horizontal. 58
3.5 Véhicule immobile. Axe sensible vertical ($\vec{f} = -\vec{g}$) 59
3.6 Références d'attitude. 60
3.7 Plate-forme à inertie. 61
3.8 Les deux types de plate-forme. 62
3.9 Schéma général d'un navigateur par inertie. 63

3.10 Gyroscope intégrateur à un degré de liberté. 65
3.11 Gyromètre. 65
3.12 Interféromètre de type Sagnac. 66
3.13 Accéléromètre pendulaire. 68

4.1 Position des balises par rapport au théodolite. 75
4.2 Effet du déplacement du véhicule sur les angles. 76
4.3 Voisinage de recherche de la balise. 76
4.4 Zone utile pour trois balises situées du même côté. 77
4.5 Passage d'un jeu de balises à un autre. 77
4.6 Franchissement de frontière entre deux zones. 78
4.7 Vue de dessus du véhicule à modéliser. 80
4.8 Véhicule dans le repère lié au couloir. 82
4.9 Schéma simplifié du modèle du véhicule. 82
4.10 Véhicule dans un repère lié à la trajectoire à suivre. 84
4.11 Commande d'un système linéaire. 88
4.12 Trajectoire désirée et position du véhicule. 91
4.13 Trajectoire à partir de l'orientation seulement. 91
4.14 Schéma général du système et de sa commande. 93

5.1 Schéma de la simulation sans gyroscope. 103
5.2 Schéma de la simulation avec gyroscope. 106
5.3 Contre-réaction sans y. 108
5.4 Contre-réaction sans α. 109
5.5 Contre-réaction mixte. 109
5.6 Échelon de vitesse. 110
5.7 Échelon de position. 111
5.8 Échelon de position sans théodolite. 113
5.9 Rampe de position sans théodolite. 113

5.10 Avec théodolite, $\Delta t_T = 1\ s$. 115
5.11 Avec théodolite, $\Delta t_T = 0,1\ s$. 115

A.1 Règles des sinus 125
A.2 Arc de cercle tel que $\alpha = cte$ 126
A.3 Angles d'Euler 127

Introduction

Depuis toujours, l'homme a cherché des moyens de locomotion pouvant lui permettre de se déplacer sans fatigue vite et loin sur la terre ferme. Il utilisa durant très longtemps des animaux spécifiques pour cette tâche jusqu'à ce que l'évolution des sciences et des techniques permette l'invention de nouveaux moyens de locomotion. Ceux-ci, encore utilisés de nos jours, ont pour nom vélocipède, automobile, chemin de fer, etc. Mais tous ces moyens de locomotion ont un point commun. Il faut toujours un être humain pour conduire le véhicule, encore plus pour une automobile que pour un char à bœuf. Le progrès présente parfois des inconvénients ...

Grâce aux progrès de l'informatique, de l'intelligence artificielle et de l'automatique, il devient maintenant de plus en plus envisageable d'automatiser les tâches de pilotage, jusqu'alors confiées à l'homme. Malheureusement, les robots autonomes mobiles (RAM) actuellement à l'étude dans le monde ne sont qu'à l'état de prototypes et ont surtout démontré jusqu'ici la complexité du problème.

Après l'utopie des robots anthropomorphes et les déboires des ambitieux projets américains (Shakey, JPL Rover), les équipes de recherche tentent actuellement de décomposer d'une façon plus réaliste la complexité du pilotage humain. Ces recherches portent sur trois domaines, la perception de l'environnement extérieur au robot ainsi que des états internes de celui-ci, le choix de la trajectoire en fonction des états actuels et des objectifs assignés, et enfin l'action à effectuer pour suivre la trajectoire choisie.

La perception de l'environnement est encore problématique du fait de la relative simplicité des capteurs mis en œuvre en regard de ceux que possède l'être humain, principalement l'œil. En effet, chez l'homme, la vision représente 80% de l'information utilisée pour se déplacer et elle occupe 30% du cerveau. Malgré les recherches poursuivies depuis le début du siècle, il n'a pas été possible de comprendre suffisamment le fonctionnement de l'appareil visuel pour être en mesure de l'imiter. Il a donc été nécessaire de recourir à des capteurs plus simples. La plupart de ces capteurs ont été conçus pour donner une information partielle de l'état du monde environnant, ce qui permet par recoupements de connaître la position du robot.

Ce mémoire porte sur le pilotage d'un véhicule dans une galerie de mine. Dans ce cas, le problème se réduit au repérage de la position et de l'orientation ainsi qu'au suivi d'une trajectoire prédéterminée.

Le mémoire débutera par une revue des solutions proposées par différents laboratoires afin de permettre à un véhicule de connaître sa position. Dans une seconde partie, nous exposerons les solutions que nous avons choisies pour un véhicule se déplaçant dans une galerie de mine. Nous ferons appel à un jeu de balises posées sur les murs et nous traiterons du positionnement optimal des balises selon un critère donné. La troisième partie exposera l'utilité du gyroscope dans la détermination de la position du robot tandis que la quatrième décrira le modèle d'un véhicule et explicitera sa commande. Enfin, dans une cinquième partie, nous combinerons ces deux méthodes et à l'aide de simulations nous choisirons le meilleur compromis précision/coût.

Chapitre 1

Détermination de la localisation

Tout véhicule doit connaître, non seulement sa position, mais aussi son environnement extérieur et ses états internes, afin de pouvoir suivre une trajectoire menant à une position finale déterminée.

La perception des états internes et externes peut être divisée en trois étapes :

- la perception par les capteurs
- l'extraction des informations pertinentes
- leur interprétation

L'information de perception est élaborée pour servir la mise en œuvre d'actions immédiates, comme l'asservissement en boucle fermée. Mais elle est aussi utilisée pour alimenter les mécanismes de décision à moyen ou à long terme, comme une tactique de navigation ou une stratégie de déplacement. Elle est suceptible de revêtir plusieurs formes selon l'usage à laquelle elle est destinée.

Elle est généralement scindée en deux classes. D'un côté les informations proprioceptives qui ont trait à l'état interne du robot (autonomie énergétique, capacité de fonctionnement du matériel, attitudes du robot, c'est-à-dire position et orientation

sur une surface ou dans l'espace, etc.) et de l'autre les informations extéroceptives qui se rapportent à l'environnement dans lequel évolue le robot et pour lesquelles les traitements associés reflètent différents niveaux d'abstraction (distance d'un objet, identification d'objet, sa localisation, etc.).

La nature et la complexité des capteurs conditionnent le type d'information qui sera recueillie. Or l'accroissement de l'autonomie du robot passe par une augmentation des capacités d'acquisition d'informations. La tendance actuelle est donc d'accroître le nombre de capteurs embarqués (aspect quantitatif), d'améliorer leurs performances et possibilités, de diversifier leur nature (aspect qualitatif), et parallèlement de construire des traitements sophistiqués capables d'extraire le maximum d'informations utiles en un minimum de temps, que sauront exécuter des calculateurs de plus en plus rapides et réduits.

Les capteurs fournissent en particulier des informations sur la localisation du robot dans son environnement. Cette localisation est de deux types :

- *absolue*, dans ce cas, elle fournit l'attitude, c'est-à-dire la position et l'orientation du robot sur une surface (bien souvent un plan) ou dans l'espace, dans un repère de référence lié à l'environnement.
- *relative*, c'est-à-dire qu'elle fournit l'attitude du robot relativement à un élément de l'environnement ou relativement à son attitude précédente.

Dans la suite de ce mémoire, nous ne traiterons que des véhicules autonomes et non des AGV (Automated Guided Vehicles) qui eux suivent un guide linéaire (enterré ou aérien) [HPS88]. En effet, les AGV ne peuvent être considérés comme étant autonomes car l'installation d'un guide nécessite un équipement lourd et ne peut être envisagée que dans des cas ponctuels. Nous tenterons dans ce chapitre de présenter une liste exhaustive de capteurs permettant la localisation, puis nous

décrirons les solutions utilisées actuellement dans quelques robots mobiles et enfin nous présenterons la solution que nous avons choisie dans le contexte d'un robot minier se déplaçant le long d'une trajectoire prédéterminée.

1.1 Capteurs existants

Les différents capteurs existant actuellement sur le marché et suceptibles d'être utilisés pour localiser un véhicule peuvent être regroupés en deux familles, les proprioceptifs et les extéroceptifs.

1.1.1 Capteurs proprioceptifs

Montés sur le véhicule, ils donnent une estimée aveugle de la position du robot, c'est-à-dire qu'ils estiment la position par rapport aux évolutions du véhicule et non en comparaison avec son environnement, ce qui peut donner parfois des résultats aberrants.

Odomètre. Cette technique, qui repose sur l'intégration de déplacements élémentaires en translation et rotation sur un même plan, permet d'établir la position et l'orientation du robot dans ce plan en référence à une position d'origine. Le calcul est effectué à partir des informations des codeurs montés sur les roues du robot. Les mesures sont donc biaisées par les incertitudes sur le rayon des roues et faussées par les glissements qui surviennent inévitablement [HAR87]. L'odométrie est de toute façon un système de localisation à court terme car par principe, l'erreur croît avec le déplacement.

Accéléromètre. Par opposition à l'odomètre, l'accéléromètre est un capteur absolu, c'est-à-dire qu'il détecte un état interne du véhicule, l'accélération. Une estimée du déplacement relatif par rapport au début de l'accélération est calculée par double intégration, autorisant ainsi un asservissement précis à court terme car l'accéléromètre a un temps de réponse très court. Mais cette précision ne peut être atteinte que si l'on connaît l'orientation du véhicule afin de calculer l'accélération dans le plan horizontal, et donc annuler l'effet de la gravitation. En outre, l'intégration introduisant des erreurs cumulatives à long terme, il convient de réinitialiser périodiquement les intégrateurs.

Vélocimètre. Placé sous le véhicule, il permet de déterminer la vitesse vraie du véhicule par rapport au sol par effet Doppler, et non pas son estimée odométrique. Les moyens de détection peuvent être soit par micro-ondes, soit par ultra-son. L'intégration de la vitesse permet de mesurer la distance parcourue.

Gyroscope et compas. Ils fournissent une connaissance directe du cap du véhicule. Le compas permet de le connaître de façon absolue par rapport au nord magnétique, mais il est sensible aux sources électromagnétiques environnantes. À l'opposé, le gyroscope autorise une connaissance du cap du véhicule, soit relativement à une direction fixe (fonction gyroscope directionnel), soit par rapport au Nord géographique (fonction gyrocompas), tout en étant relativement insensible aux perturbations extérieures. Par contre il subit une dérive proportionnelle au temps, ce qui implique là aussi une réinitialisation périodique.

Plate-forme inertielle. L'association de trois gyroscopes et de trois accéléromètres constitue une plate-forme gyroscopique. Celle-ci permet de connaître la position et l'orientation du véhicule dans l'espace. Ce type d'équipement, utilisé dans les

avions, possède une bonne précision, mais par contre est des plus coûteux [AM84].

L'utilisation de la plate-forme inertielle apparaît comme le meilleur capteur proprioceptif suceptible de permettre la localisation et l'orientation le véhicule. Si on ne désire ne connaître que la direction du véhicule, le gyroscope est un bon compromis.

1.1.2 Capteurs extéroceptifs

Contrairement aux précédents, ces capteurs utilisent l'environnement extérieur pour procéder à la localisation. Il s'agit alors d'extraire l'information pertinente à partir des nombreuses données recueillies, puis de l'interpréter. Ces capteurs fournissent généralement beaucoup plus de données que les précédents car ils doivent scruter autour du robot un univers (2D ou 3D) beaucoup plus riche qu'une simple indication sur un état interne.

Caméra. Séduisante, car proche de l'œil humain, la caméra n'est pourtant pas le capteur parfait, loin s'en faut. Malgré les recherches effectuées, tant sur la détection des contours et des textures que sur la stéréovision et la vision dynamique, ses capacités s'avèrent encore très limitées. En effet, les ordinateurs actuels, de part leur architecture de type "von Neumann", sont très mal adaptées au traitement de l'image. Dans l'attente de processeurs parallèles, la caméra restera un capteur relativement inefficace, sauf dans des cas bien précis pour lesquels on sait ce que l'on cherche (cf. figure 1.1).

Télémètre. La télémètrie est une approche beaucoup moins gourmante en calcul que la vision, surtout si elle est utilisée dans un plan. Le télémètre permet de situer les objets environnants dans un repère polaire associé au robot. Une carte de l'univers 2D, horizontale en général, est alors dressée, que l'on cherche ensuite à mettre

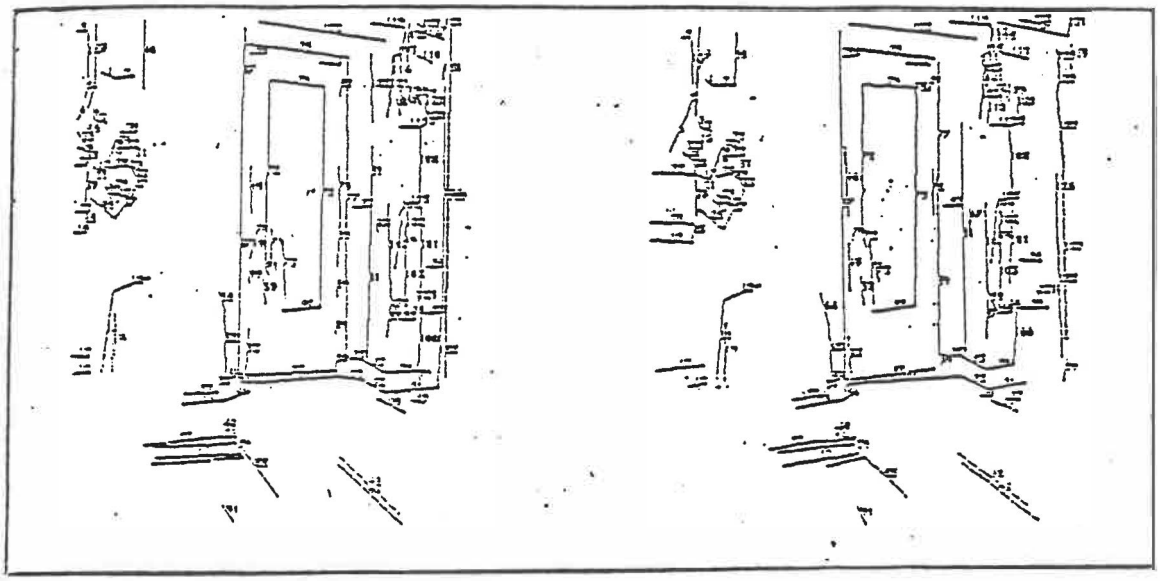


Figure 1.1: Appariements de segments d'une paire d'image pour la stéréo-vision [MIG86].

en correspondance avec une carte du site dans lequel le robot évolue [GIR84]. Si cette correspondance est réalisés, la position du robot est automatiquement connue. Deux inconvénients apparaissent cependant. Le véhicule doit émettre un train d'impulsions, ultrasonores ou laser, et compter le temps de vol. Il doit donc disposer d'une source d'énergie suffisamment importante. De plus, les ondes émises peuvent être réfléchies dans une mauvaise direction, ce qui rend la détection de l'objet réfléchissant impossible. Le télémètre laser (cf. figure 1.2) est en outre plus précis que le télémètre ultrason, ou sonar (cf. figure 1.3), car son cône d'émission est beaucoup plus petit et surtout il ne produit pas de lobes secondaires.

Théodolite. La détermination d'écarts angulaires par le théodolite entre des balises actives comme des émetteurs de lumière ou des émetteurs radio suceptibles d'être identifiés et/ou localisés, ou plus simplement des balises passives (bandes réfléchissantes, marques au sol, etc.) conduit, par un calcul géométrique, à la position et à

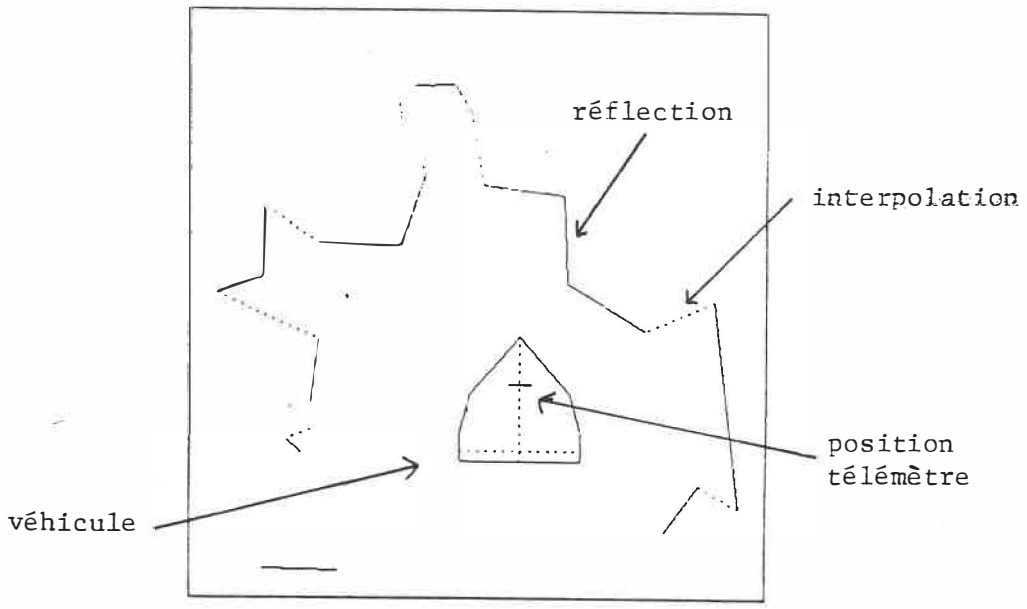


Figure 1.2: Résultat d'un balayage télémétrique par laser [GIR84].

l'orientation du robot de manière relative ou absolue selon les caractéristiques des balises [MR88]. Cette technique classique de triangulation nécessite un aménagement de l'environnement (pose et visibilité des balises) qui ne va pas toujours dans le sens de l'autonomie.

Système radio. La localisation s'effectue par la mesure de la variation de la phase du signal reçu par rapport à la position, le temps ou la fréquence. Dans la plupart des cas, on s'attache à calculer des distances à partir de déphasages. Les systèmes de localisation les plus connus sont le Système de positionnement global (GPS), LORAN et OMEGA [LAW76]. Le premier utilise des satellites placés sur des orbites appropriées tandis que les autres se servent d'un réseau de stations terrestres. De part sa souplesse d'utilisation et de conception, GPS est en passe de devenir un système universel. Il le sera lorsque la couverture globale de la terre par des satellites spécialisés sera achevée, Tous ces systèmes font preuve d'une grande précision à long terme mais sont vulnérables au brouillage. Ils ont néanmoins pour inconvénient majeur de ne pouvoir être utilisés sous terre à cause de la faible propagation des ondes radio dans

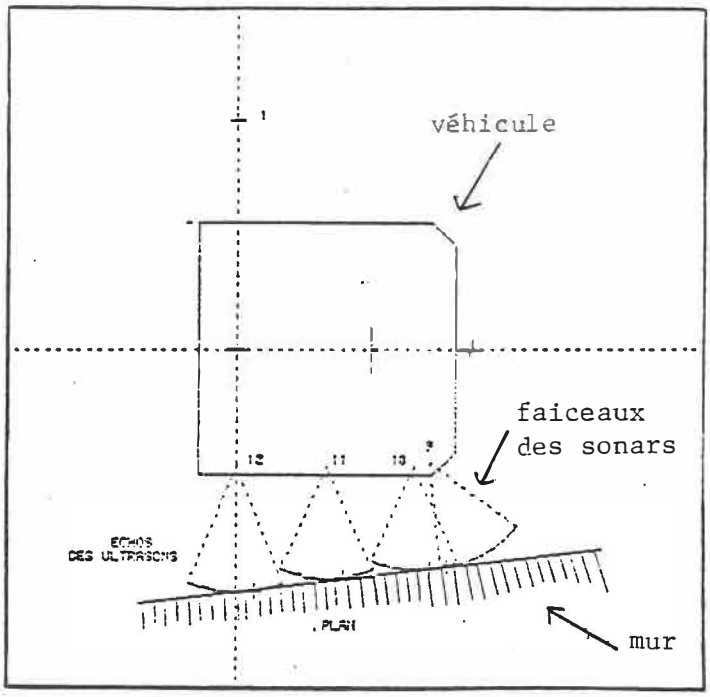


Figure 1.3: Perception par proximétrie à ultrasons [MIG86].

le sol.

Capteurs tactiles. Un système mécanique renvoie une information sur la présence et la position relative d'un objet touché. À cette information binaire, il est aussi possible d'ajouter une mesure d'effort pour connaître la consistance de l'objet touché.

La télémétrie et la triangulation sont pour l'instant les meilleurs moyens pour permettre à un véhicule de se localiser.

1.2 Solutions déjà utilisées

De nombreux laboratoires de part le monde, certains civils, la plupart en relation avec l'armée, effectuent des expérimentations sur des robots mobiles. On peut décomposer les recherches actuelles en deux groupes, l'un étant le suivi d'une tra-

jectoire prédéterminée (cas d'un atelier robotisé), l'autre l'improvisation le long d'une route inconnue (comme un char sur un champ de bataille ...). Nous allons décrire quelques robot bien connus, HILARE, GSR, ALV et CMU-ROVER.

HILARE [GIR84] est un robot développé au LAAS de Toulouse, France, pour être utilisé dans un atelier robotisé. Ce véhicule, muni de trois roues dont deux motrices, est équipé de 14 sonars pour la mesure de la distance (cf. figure 1.4). Cette ceinture de détection sert principalement à détecter les obstacles et à effectuer du suivi de mur. Un système constitué d'une caméra et d'un scanner laser est utilisé pour la reconnaissance 3D. Le laser sert d'une part à lever les ambiguïtés lors de l'analyse des images lues par la caméra, d'autre part à établir une carte de l'environnement par télémétrie.

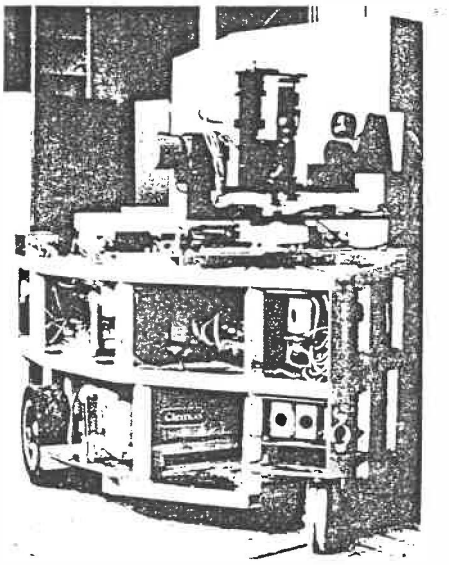


Figure 1.4: Le robot HILARE.

GSR. Le Ground Surveillance Robot [HAR87], développé par le Naval Ocean System Center, San Diego, USA, est un char monté sur chenilles. Il est équipé d'une caméra, d'un gyrocompas, d'un radar à effet Doppler pour mesurer la vitesse, de té-

lémètres ultrasons et d'un système de localisation par satellite (cf. figure 1.5). Comme aucun de ces capteurs ne peut fournir des informations précises en permanence, un algorithme basé sur la fusion des capteurs est utilisé afin de choisir le capteur le plus précis dans un cas donné.

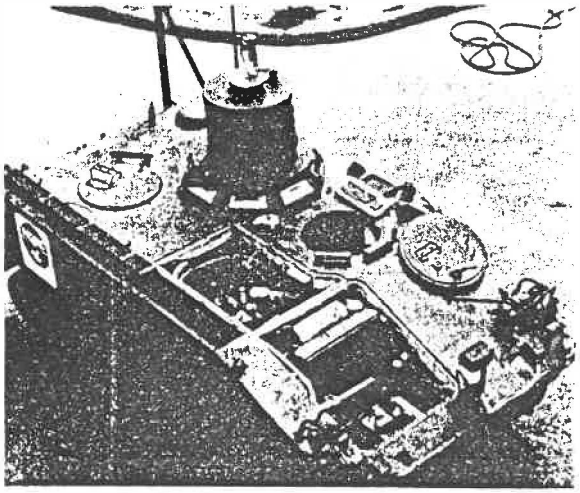


Figure 1.5: Le robot GSR.

ALV. The Autonomous Land Vehicule [RL86], issu du projet DARPA, USA, est un véhicule à six roues. Il est équipé de deux caméras, de télémètres laser et ultrasons et d'une centrale à inertie.

CMU-ROVER. Ce véhicule, développé par Carnegie-Mellon [MOR82], possède trois roues et un ensemble de capteurs comprenant une camera, des détecteurs de proximité infrarouge et ultrasonores et des capteurs tactiles(cf. figure 1.6).

Ces différentes machines, on le voit, ont été conçues pour évoluer dans des univers qui sont sujet à des modifications importantes de structure, comme le passage d'un champ à une forêt dans le cas du char de combat. Ces prototypes de recherche disposent de tout l'équipement voulu afin de pouvoir tester différentes configurations. Deux tendences semblent pourtant se dégager. L'une, expérimentale, est le fait des

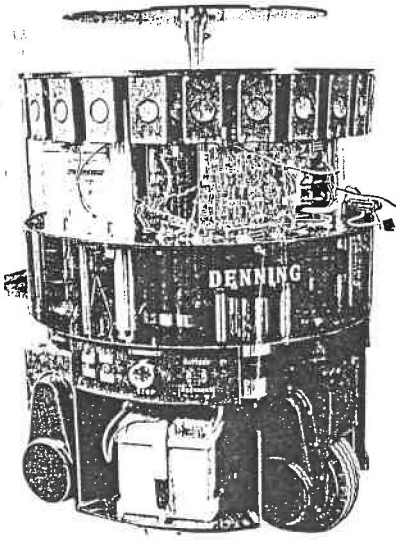


Figure 1.6: Le robot CMU-ROVER.

américains qui utilisent les équipements les plus sophistiqués, donc les plus coûteux, tandis que l'autre, plus européenne, privilégie l'approche théorique. Leurs résultats sont néanmoins comparables.

Ne disposant pas des moyens utilisés par ces grands laboratoires et faisant évoluer notre véhicule dans des couloirs de mine, donc dans un univers bien défini, nous nous limiterons dans notre étude à quelques capteurs simples utilisables dans ce contexte.

1.3 Solutions envisageables

Nous avons décrit en introduction les trois étapes du pilotage (perception, choix de la trajectoire et action). Or nous restreignons notre étude à un couloir de mine, ce qui implique que la trajectoire à suivre est prédéfinie, car elle suit le couloir. Dans ce cas, la problématique du choix de la trajectoire disparait. Par contre, du fait de la relative uniformité du couloir (uniformité de couleur, de texture et de forme), la localisation du véhicule entre deux intersections peut être rendue plus difficile. De plus, nous désirons utiliser des capteurs n'ayant pas fait l'objet d'études poussées

dans la littérature relative aux mines.

Nous proposons donc une solution permettant au véhicule, non seulement de se repérer par rapport aux murs, mais aussi d'asservir son déplacement sur la trajectoire désirée.

1.3.1 Localisation du véhicule

La localisation du véhicule peut se traduire par la connaissance des états du véhicules suivant ses différents degrés de liberté sur la plan. Ces degrés sont au nombre de trois :

- la position longitudinale
- la position transversale
- l'orientation angulaire

Le système de localisation doit être en mesure de déterminer ces trois valeurs avec une précision donnée afin de pouvoir :

- prévoir un virage ou un obstacle connu
- ajuster sa trajectoire sur la trajectoire prédéfinie

Parmi l'éventail des capteurs disponibles pour la localisation, nous pouvons retenir l'odomètre, la caméra, le télémètre, la plate-forme inertielle et le théodolite. Mais, à la lumière de l'étude du paragraphe 1.1, nous pouvons rejeter le premier à cause des grandes erreurs cumulatives qu'il produit, ainsi que les deux suivants en raison du temps de calcul et surtout des difficultés dans la reconnaissance d'éléments distinctifs.

Si on choisit le théodolite, il faut disposer de balises placées sur les murs. En se référant à celles-ci, il mesure les angles et permet ainsi de déterminer la position

et l'orientation du véhicule à l'aide de formules trigoniométriques. S'agissant d'un capteur extéroceptif, les erreurs de mesure sont toujours bornées.

La plate-forme inertielle, quant à elle, permet d'effectuer la localisation sans l'aide de dispositifs extérieurs. Son inconvénient principal est par contre l'augmentation des erreurs de localisation avec le temps, du fait de la dérive, certe minime mais néanmoins présente, des gyroscopes.

1.3.2 Asservissement du déplacement

La localisation étant effectuée, il reste au véhicule à se déplacer le long de la trajectoire désirée tout en s'écartant le moins possible de celle-ci. Cet asservissement peut être considéré comme de la gestion à court terme, contrairement à la localisation qui est un processus à long terme. En effet, il doit être en mesure de réagir très rapidement aux déplacements du véhicule, et surtout l'empêcher de pivoter. Les mesures de position et d'orientation étant échantillonnées dans le temps, il est indispensable que le temps entre chaque mesure soit petit comparé au temps de réaction du véhicule.

Le théodolite pouvant être pris en défaut dans le cas d'une balise manquante et pouvant ne pas être assez rapide, il est nécessaire, pour plus de sécurité, de faire appel à un procédé d'asservissement complémentaire. Dans la panoplie des capteurs disponibles, nous pouvons remarquer le sonar, le gyroscope et la plate-forme inertielle.

Le sonar, grâce à son lobe d'émission large, permet le suivi de murs en boucle fermée, mais si des renfoncements apparaissent dans les murs, le véhicule va s'écarter de sa trajectoire. Il est donc indispensable de posséder une carte précise du couloir et de la mettre à jour.

Le gyroscope directionnel permet de détecter des variation du cap du véhicule par rapport à une direction donnée. Il est particulièrement indiqué dans cette application

car la mesure des variations rapides du cap n'est pas influencée par la dérive à long terme de ce capteur.

La plate-forme inertielle fournit à la fois les variations de cap, mais aussi celle de tangage, de roulis et de position sur les trois axes. La remarque précédente au sujet de la dérive du gyroscope s'applique ici aussi.

Une autre solution, plus exotique mais plutôt idiote, serait de commander le véhicule en tout ou rien avec pour entrée les informations de présence ou d'abscence de mur, fournies par un capteur tactile. Le robot passerait son temps à osciller en se cognant la tête contre les murs ...

1.4 Solution choisie

Nous nous sommes fixés comme objectifs de localiser et de piloter un véhicule dans un couloir de mine. À la lumière de notre étude, il apparait que chaque capteur possède des avantages et des inconvénients qui se chevauchent. Plutôt que d'utiliser un seul capteur très précis donc très cher, il est serait avantageux d'utiliser différents capteurs, moins précis individuellement, mais dont la combinaison formerait un système hybride plus précis que chacun de ses éléments pris séparément. Ce système comporterait des capteurs plus précis à court terme et d'autres plus précis à long terme.

La combinaison du théodolite (long terme) et du gyroscope (à défaut de la plate-forme inertielle) permettrait de réaliser ces objectifs. Nous étudierons par la suite chacun de ces capteurs en détail afin de déterminer leurs caractéristiques, leurs conditions d'utilisation et leurs précision.

Chapitre 2

Localisation à l'aide de balises

Tout au long de la première partie, nous avons décrit un certain nombre de possibilités envisageables pour permettre à un véhicule autonome de se repérer. Puis ayant restreint notre étude à une mine, nous avons retenu en particulier la triangulation à l'aide d'un théodolite.

Nous déterminerons en premier lieu des formules pour calculer par triangulation la position et l'orientation d'un objet. Ensuite, ayant défini une erreur de mesure angulaire, nous établirons des formules de calcul d'erreur de positionnement. Enfin, à partir de ce calcul d'erreur, nous étudierons différentes dispositions de balises, leur espacement ainsi que leur nombre dans un couloir de longueur donné pour atteindre un critère de précision.

2.1 Calcul de la position et de l'orientation d'un objet

Disposant d'un ensemble de balises, nous devons localiser le véhicule. Différents procédés déjà étudiés dans la littérature, utilisent un laser [TFH84] [TH86], des ultrasons [DC86] ou des infra-rouges [MR88]. Les formules pour calculer la localisation sont

donc connues. Nous en déterminerons néanmoins d'autre en utilisant des propriétés du cercle. Nous étudierons d'abord le calcul de la position d'un objet par triangulation à l'aide de deux, puis de trois balises placées dans un plan et nous traiterons de l'orientation de l'objet par rapport à trois balises. Puis dans le cas de trois balises, nous généraliserons ces calculs dans l'espace 3D. Nous établirons enfin que le cas de n balises peut se ramener au cas de trois balises.

2.1.1 Deux balises

On possède deux balises dont les positions sont connues et qui sont assimilées à des points sur un plan. Soient A et B ces balises, connaissant la distance AB, on mesure les distances BR, AR et on détermine la position de l'objet R à partir de règles trigonométriques (cf. figure 2.1).

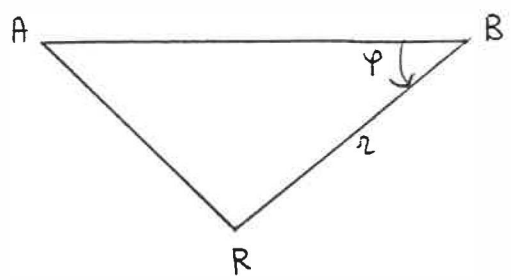


Figure 2.1: Localisation de R par rapport à A et B.

Les égalités vectorielles nous donnent : $\vec{AB} + \vec{BR} = \vec{AR}$

En élevant au carré : $AB^2 + BR^2 + 2\vec{AB}.\vec{BR} = AR^2$

c-à-d $AR^2 = AB^2 + BR^2 - 2AB.BR.\cos\varphi$

c-à-d $\cos\varphi = \frac{AB^2+BR^2-AR^2}{2AB.BR}$

Donc la position de l'objet R par rapport aux points A et B dans le repère Bxy est :

$$R : \begin{cases} x = RB\cos\varphi \\ y = \pm RB\sin\varphi \quad \text{selon la position de } R \text{ par rapport à la droite AB} \end{cases} \tag{2.1}$$

Nous pouvons faire trois remarques quant à ce résultat.

Remarque 1 Il y a deux positions possibles qui sont symétriques par rapport à la droite AB. On choisira la bonne en se référant à une autre balise par exemple ou bien à la position estimée.

Remarque 2 Dans ce calcul, on a utilisé les distances AB, BR et AR. On aurait pu aussi utiliser l'angle $\theta = \angle ARB$ sachant que $AB^2 = AR^2 + BR^2 - 2.AR.BR.\cos\theta$. Il suffit de connaître trois valeurs parmi AB, AR, BR et θ pour déterminer la position.

Remarque 3 Il est nécessaire de déterminer une des distances du point R à l'une des balises A ou B. Il faut donc faire appel à un télémètre.

Cette méthode n'est pas très utilisable car non seulement il faut disposer d'un télémètre mais il faut choisir entre deux déterminations.

2.1.2 Trois balises

Il est heureusement possible de déterminer une position sans avoir à mesurer une distance. Le plus simple est de mesurer des angles, mais il faut dans ce cas utiliser trois balises.

2.1.2.1 Dans un plan

Soit Oxy un repère de référence du plan et soient trois points A, B et C, correspondant aux balises, de coordonnées connues, et R un point correspondant au véhicule dont on désire connaître la position. Dans le repère de référence, les trois balises sont connues par leurs coordonnées cartésiennes tandis que dans le repère lié à R, elles sont définies par leurs coordonnées polaires, mais avec des distances r inconnues.

Soient les angles α et β mesurés en R, θ un angle connu et les angles φ et ψ (cf. figure 2.2), orientés dans le sens direct et définis comme suit :

$$\alpha = \angle BRA \qquad \beta = \angle CRB \qquad \theta = \angle ABC \qquad \varphi = \angle ABR \qquad \psi = \angle RBC$$

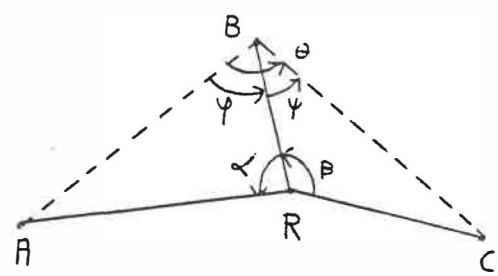


Figure 2.2: Localisation de R par rapport à A, B et C.

Nous savons que le lieu des points P tels que $\angle BPA = \alpha = constante$ est un arc de cercle $\mathcal{C}$ (cf. figure 2.3) passant par A et B dont l'équation polaire par rapport au point B est (cf. Annexe A.1) :

$$r = \frac{AB\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\alpha} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \pi \tag{2.2}$$

On peut alors considérer le point R comme étant l'intersection de deux arcs de cercle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définis respectivement par les angles α et β, passant respectivement par les points A, B et B, C (cf. figure 2.4).

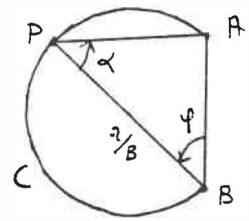


Figure 2.3: Lieu des points tels que $\alpha = cte$.

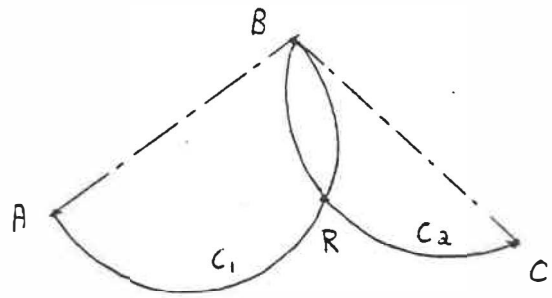


Figure 2.4: R, intersection de deux arcs de cercles.

Déterminons les coordonnées du point R.

Soient les équations des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ par rapport au point B :

$$r_1 = \frac{AB\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \pi \tag{2.3}$$

$$r_2 = \frac{BC\sin(\psi+\beta)}{\sin\beta} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq \psi \leq \pi - \beta \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \pi \tag{2.4}$$

Au point R, intersection des deux cercles, nous avons $r_1 = r_2$, c-à-d :

$$(2.3) \quad \text{et} \quad (2.4) \quad \Rightarrow \quad \frac{AB\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{BC\sin(\psi+\beta)}{\sin\beta}$$

$$\text{c-à-d} \quad \frac{AB\sin\beta}{BC\sin\alpha} = \frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)} \tag{2.5}$$

$$\text{or} \qquad \varphi + \psi = \theta = cte \tag{2.6}$$

$$\text{donc} \quad (2.5) \quad \text{et} \quad (2.6) \quad \Rightarrow \quad \frac{AB \sin\beta}{BC \sin\alpha} = \frac{\sin(\theta - \varphi + \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)} \tag{2.7}$$

Déterminons φ.

La détermination de l'angle φ permettra par la suite de connaître le rayon r du point R par rapport à B.

$$(2.7) \quad \Leftrightarrow \quad \sin((\theta + \beta) - \varphi) = c\ \sin(\alpha + \varphi) \qquad \text{avec} \quad c = \frac{AB \sin\beta}{BC \sin\alpha}$$

$$\text{c-à-d} \quad \sin(\theta + \beta)\cos\varphi - \cos(\theta + \beta)\sin\varphi = c(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)$$

$$\text{c-à-d} \quad \cos\varphi(\sin(\theta + \beta) - c\sin\alpha) = \sin\varphi(\cos(\theta + \beta) + c\cos\alpha)$$

$$\text{donc} \quad (2.7) \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{\sin(\theta + \beta) - c\sin\alpha}{\cos(\theta + \beta) + c\cos\alpha} \tag{2.8}$$

Remarque 1 Si $\alpha = \pi$ alors $c = \infty$. Il faut alors poser $\varphi = 0$ car R est entre A et B.

Remarque 2 Le cas $\alpha = 0$ est impossible car il correspondrait à un point situé à l'infini.

Résumé.

De (2.2) et (2.8), on peut déduire que R a pour coordonnées polaires dans le repère B (cf. figure 2.5) :

$$r = \frac{AB\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} \tag{2.9}$$

$$\text{avec} \quad \tan\varphi = \frac{\sin(\theta+\beta) - c\sin\alpha}{\cos(\theta+\beta) + c\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = \frac{AB\sin\beta}{BC\sin\alpha} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\text{mais si} \quad \alpha = \pi \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ r = \frac{BC\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta} \end{cases} \tag{2.11}$$

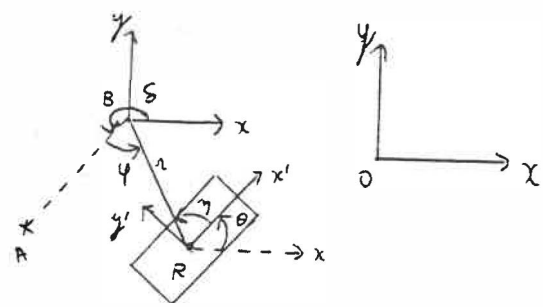


Figure 2.5: Coordonnées de R.

Déterminons la position de R par rapport à l'origine O.

Soit l'angle δ que fait le segment BA avec l'axe Ox ($\delta = \angle oxBA$), alors en en posant $\gamma = \delta + \varphi$, R a dans le repère Oxy les coordonnées cartésiennes suivantes (cf. figure 2.5) :

$$R : \begin{cases} x_R = x_B + r\cos\gamma \\ y_R = y_B + r\sin\gamma \end{cases} \tag{2.12}$$

Déterminons l'orientation θ de l'objet.

Tout au long de cette étude, nous n'avons considéré que la détermination de la position, mais tout objet dans un plan possédant trois degrés de liberté, il faut aussi définir par son orientation. Soit Oxy le repère de référence et $Rx'y'$ le repère lié au véhicule, soit η l'angle que fait le segment RB avec l'axe Rx', et soit θ l'angle que fait l'axe Rx' avec l'axe Ox (cf. figure 2.5), on peut déterminer géométriquement la relation :

$$\theta = \gamma - \pi - \eta \tag{2.13}$$

2.1.2.2 Dans l'espace

Nous avons supposé dans ce qui précède que les trois balises, ainsi que le capteur permettant de mesurer les angles, pouvaient être assimilés à des points situés dans un plan. Malheureusement, le véhicule n'étant que rarement horizontal, le capteur n'a pratiquement aucune chance de détecter une balise ponctuelle, il faudrait donc que les balises soient des droites. Mais un couloir étant un espace géométrique borné en hauteur, les balises doivent être donc des segments de droite placés sur les murs (cf. figure 2.6). Dans ce qui suit, nous supposerons que ces segments sont perpendiculaires au plan du couloir.

De plus, le théodolite est un capteur tournant dans un plan fixé au véhicule. Appelons ce plan P_t (t: théodolite). Si le véhicule est incliné, le plan P_t l'est aussi, alors les angles α_t et β_t mesurés par le théodolite se trouvent augmentés par rapport aux angles α_c et β_c qui correspondraient à des mesures effectuées sur un plan, parallèle au sol du couloir de la mine, appelé P_c (c: couloir), passant par le théodolite (cf. figure 2.7).

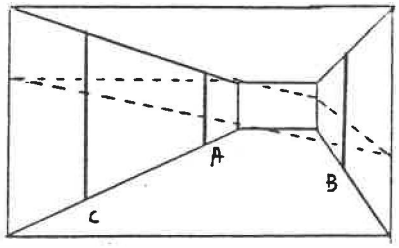


Figure 2.6: Vue en perspective du couloir, des balises et du plan de détection (hachuré).

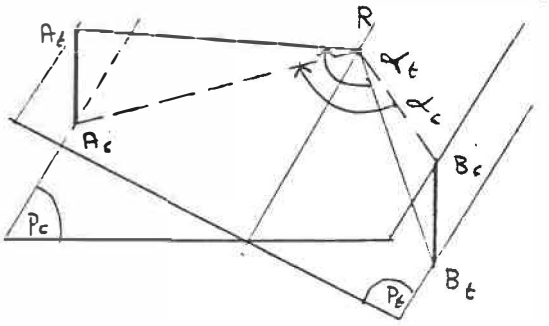


Figure 2.7: $\mid \alpha_c \mid < \mid \alpha_t \mid < \pi$ sauf si $P_t // P_c$.

Or les distances entre les balises sont calculées au sol, sur le plan P_c, donc la formule de calcul de la position (eq. 2.9, 2.10 et 2.11) fournit des résultats erronés si le véhicule est incliné. Il est donc indispensable de déterminer les angles α_c et β_c sur P_c correspondant aux angles α_t et β_t mesurés sur P_t. Il faut pour cela connaître l'inclinaison du plan P_t par rapport au plan P_c. Cette inclinaison peut être mesurée à l'aide d'une plate-forme inertielle comme nous le verrons par la suite dans le chapitre 3.

Calcul d'un angle φ_c connaissant φ_t mesuré

Nous supposerons en premier lieu que le couloir est horizontal, c'est-à-dire que le

plan lié au couloir est horizontal. Nous calculerons dans ce plan la relation entre un angle φ_t mesuré sur le plan P_t du théodolite et l'angle correspondant φ_c sur le plan P_c du couloir. Nous généraliserons ensuite ce résultat dans le cas d'un couloir non horizontal. Nous supposerons dans les deux cas que les balises sont perpendiculaires au plan du couloir.

Nous devons séparer cette étude en deux cas car la plate-forme inertielle se comporte comme un horizon artificiel, c'est-à-dire qu'elle fournit l'orientation du véhicule par rapport à l'horizontale et par rapport au Nord, et non par rapport au couloir.

Couloir horizontal. Les positions des balises dans l'espace sont exprimées par leur coordonnées sphériques dans les repères passant par le théodolite, l'un R_t solidaire du véhicule, l'autre R_c horizontal, solidaire de la plate-forme, parallèle au couloir, dont l'un des axes est dirigé vers le Nord. Soit M_1 la matrice de passage entre les repères R_t et R_c, telle que $R_c = M_1 \times R_t$. M_1 est une matrice de rotation pure sur les trois axes car les centres des deux repères coïncident.

$$\text{Posons} \quad M_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Soit P un point de l'espace, posons $P_{/t}$ et $P_{/c}$, les coordonnées sphériques de P exprimées respectivement dans les repères R_t et R_c (cf. figure 2.8).

$$P_{/t}(\rho_t, \varphi_t, \theta_t) = \begin{cases} x_t = & \rho_t \sin\theta_t \cos\varphi_t \\ y_t = & \rho_t \sin\theta_t \sin\varphi_t \\ z_t = & \rho_t \cos\theta_t \end{cases}$$

$$P_{/t}(\rho_c, \varphi_c, \theta_c) = \begin{cases} x_t = & \rho_c \sin\theta_c \cos\varphi_c \\ y_t = & \rho_c \sin\theta_c \sin\varphi_c \\ z_t = & \rho_c \cos\theta_c \end{cases} \tag{2.14}$$

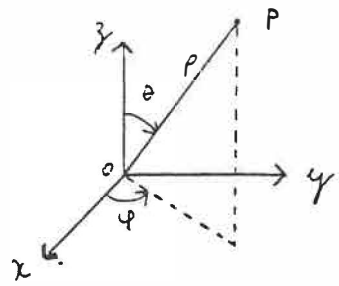


Figure 2.8: coordonnées sphériques.

Dans notre cas, le point P est situé sur une balise, c'est-à-dire sur un segment de droite perpendiculaire au plan P_t. Prenons l'exemple de la balise A. Le théodolite détecte le point A_t et mesure l'angle φ_t dans le repère R_t. Or nous désirons connaître l'angle φ_c que ferait le point A_c dans le repère R_c si le théodolite était horizontal. Or A_c est la projection verticale de A_t sur le plan P_t, donc l'angle que fait le point A_t dans le repère R_c est aussi φ_c. Donc le problème se résume à déterminer l'angle φ_c connaissant l'angle φ_t mesuré et la matrice de passage M_1.

Alors dans le repère R_c :

$$P_{/c} = M_1 P_{/t} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_t \sin\theta_t \cos\varphi_t \\ \rho_t \sin\theta_t \sin\varphi_t \\ \rho_t \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

$$\text{c-à-d} \quad P_{/c} = \begin{cases} x_c = & \rho_t(a\sin\theta_t\cos\varphi_t + d\sin\theta_t\sin\varphi_t + g\cos\theta_t) \\ y_c = & \rho_t(b\sin\theta_t\cos\varphi_t + e\sin\theta_t\sin\varphi_t + h\cos\theta_t) \\ z_c = & \rho_t(c\sin\theta_t\cos\varphi_t + f\sin\theta_t\sin\varphi_t + i\cos\theta_t) \end{cases} \tag{2.15}$$

L'angle φ_c recherché est déterminé à l'aide de l'équation 2.14, car $\tan\varphi_c = \frac{y_c}{x_c}$. En utilisant les coordonnées y_c et x_c de l'équation 2.15, on obtient alors :

$$\tan\varphi_c = \frac{y_c}{x_c} = \frac{b\sin\theta_t\cos\varphi_t + e\sin\theta_t\sin\varphi_t + h\cos\theta_t}{a\sin\theta_t\cos\varphi_t + d\sin\theta_t\sin\varphi_t + g\cos\theta_t} \tag{2.16}$$

Or le point P que nous utilisons dans ces calcul est une balise, il est donc située sur le plan xy lié au capteur, donc l'angle $\theta_t = \pi/2$, donc φ_c est tel que :

$$\tan \varphi_c = \frac{b \cos \varphi_t + e \sin \varphi_t}{a \cos \varphi_t + d \sin \varphi_t} \tag{2.17}$$

Remarque 1 On détermine les coefficients de la matrice M_1 à l'aide des angles d'Euler. Un calcul de ces angles est donné dans l'annexe A.2.

Remarque 2 Si les axe Oz des repères R_t et R_c sont parallèles, alors ces repères sont orientés l'un par rapport à l'autre. Leurs axes Ox forment donc un angle que nous appellerons δ. La matrice M_1 est donc une matrice de rotation autour de l'axe Oz. En se référant à l'annexe A.2, nous pouvons poser $a = e = \cos \delta$ et $b = -d = \sin \delta$. À partir de l'équation 2.17, on obtient $\varphi_c = \varphi_t + \delta$.

Couloir incliné. Cette méthode permet ainsi de localiser le véhicule par rapport à des balises situées dans un plan horizontal, quelle que soit l'inclinaison du véhicule, donc du théodolite (cf figure 2.9). Mais si le couloir est incliné, le plan dans lequel s'effectue les calculs de position doit lui aussi avoir la même inclinaison (cf figure 2.10).

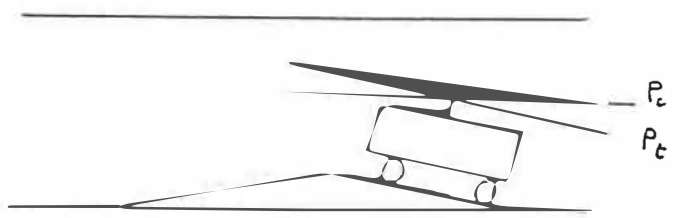


Figure 2.9: Véhicule incliné dans un couloir horizontal.

La plate-forme nous indiquant l'inclinaison du véhicule par rapport à l'horizontale, nous devons connaître l'inclinaison du couloir par rapport à l'horizontale pour déterminer l'inclinaison du véhicule par rapport au couloir. L'inclinaison du couloir est aussi déterminée par une matrice de rotation M_2 analogue à la matrice précé-

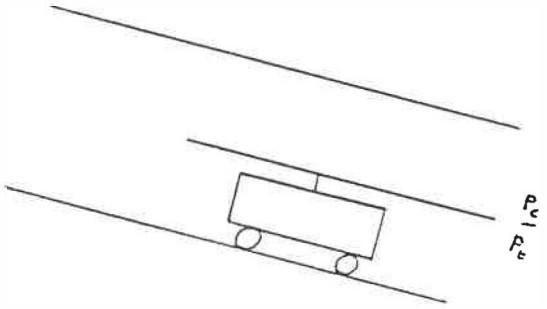


Figure 2.10: Véhicule dans un couloir incliné.

dente M_1. Cette matrice M_2 correspond à l'inclinaison du couloir dans une direction donnée. Elle doit être calculée au préalable pour tous les couloirs de la mine. Il suffit alors de réaliser le produit de ces deux matrices pour connnaître la position du véhicule (cf figure 2.11).

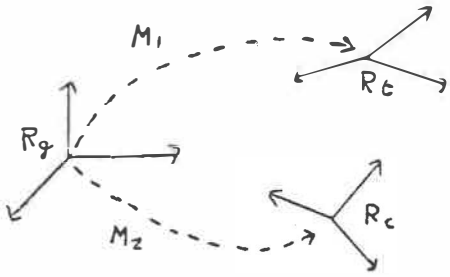


Figure 2.11: Illustration des matrices de rotation.

Soit R_p le repère lié à la plate-forme et soit P un point de l'espace, posons $P_{/t}$, $P_{/c}$ et $P_{/p}$, les coordonnées sphériques de P exprimées respectivement dans les repères R_t, R_c et R_p. Soient M_1 et M_2 les matrices de passage respectivement entre R_t et R_p, et R_c et R_p, alors :

$$P_{/p} = M_1 P_{/t} \quad \text{et} \quad P_{/p} = M_2 P_{/c} \quad \Rightarrow \quad P_{/c} = M_2^{-1} M_1 P_{/t}$$

Or les matrices de passage sont orthogonales, donc $M_2^{-1} = M_2'$, donc $P_{/c} = M_2' \, M_1 \, P_{/t}$.

En résumé, pour localiser un véhicule dans un couloir de mine par rapport à trois

balises à l'aide d'un théodolite et d'une plate-forme inertielle, il faut exécuter les étapes suivantes :

1. mesurer les angles α_t et β_t entre les balises sur le plan du théodolite,
2. calculer la matrice M_1 de rotation entre le théodolite et la plate forme,
3. extraire d'une base de donnée la matrice M_2 de rotation entre le couloir et l'horizontale,
4. calculer les angles α_c et β_c dans le plan du couloir, correspondant à α_t et β_t,
5. calculer les coordonnées polaires du véhicule par rapport à une balise,
6. déduire les coordonnées du véhicule ainsi que son orientation dans un repère de référence.

Nous n'avons utilisé que les angles mesurés à partir de trois balises par le théodolite, ainsi que les distances entre les balises, déjà connues. Trois balises suffisent donc pour déterminer une position et une orientation à partir d'angles mesurés. Si nous en possédons n ($n > 3$), il sera nécessaire de choisir une combinaison de trois balises parmi n.

2.2 Calcul des erreurs de position et d'orientation

Dans la section précédente, nous avons déterminé des formules pour calculer la position et l'orientation d'un objet, en l'occurence le théodolite, par rapport à trois balises. Nous avons utilisé les angles mesurés à l'aide du théodolite ainsi que les angles d'Euler fournis par la plate-forme inertielle qui permettent d'établir une matrice de rotation illustrant l'orientation du véhicule par rapport à la terre. Or toutes ces

mesures sont inévitablement entachées d'erreurs provenant de la lecture, du bruit ambiant, etc. Nous devons donc établir un calcul d'erreur pour évaluer l'influence de celles-ci. Nous nous contenterons dans cette partie d'étudier l'erreur de lecture du théodolite et nous traiterons les erreurs de la plate-forme dans le chapitre 3.

Nous avons déterminé des formules pour calculer la position et l'orientation d'un objet à l'aide de la géométrie. Deux méthodes sont alors possibles pour calculer les erreurs de position et de rotation : la géométrique à l'aide des distances ou l'analytique à l'aide d'un développement au premier ordre. Dans les deux cas, nous supposerons que les angles α et β mesurés par le théodolite sont connus à une erreur ε près. Il va sans dire que la méthode géométrique est la plus élégante. C'est donc celle que nous développerons ici, la méthode analytique sera décrite complètement dans l'annexe A.3.

2.2.1 Méthode géométrique

Nous avons démontré dans la section 2.1.2.1 que la position théorique R du centre de l'objet est située à l'intersection de deux arcs de cercle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définis respectivement par les angles α_0 et β_0, passant respectivement par les points A, B et B, C (cf. figure 2.12).

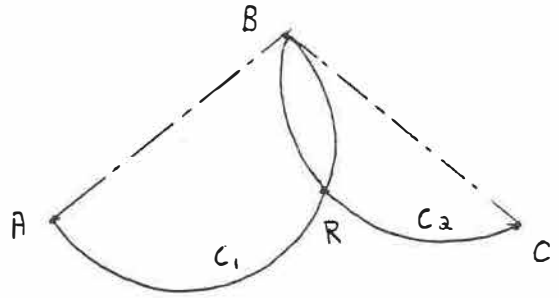


Figure 2.12: R, intersection de deux arcs de cercle.

Les angles vrais ne sont connus que dans un intervalle de largeur 2ε autour des angles mesurés α_0 et β_0. Ces deux angles définissent deux intervalles possédant chacun

deux bornes. À chacun de ces quatre angles $(\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon, \beta_0 - \varepsilon)$ correspond un arc de cercle. Ces quatre arcs de cercle se coupent en quatre points qui forment au quadrilatère dans lequel le point R se situe (cf. figure 2.13)

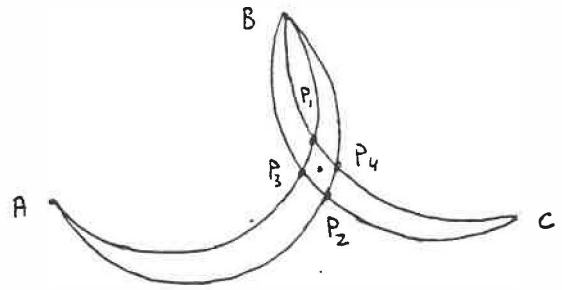


Figure 2.13: Intersections des quatres arcs de cercle.

Soient $P_i, i = 1, \ldots, 4$ ces quatre points, leurs angles respectifs sont :

$$P_1 \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \varepsilon \\ \beta = \beta_0 + \varepsilon \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} \alpha = \alpha_0 - \varepsilon \\ \beta = \beta_0 - \varepsilon \end{cases}$$
$$P_3 \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \varepsilon \\ \beta = \beta_0 - \varepsilon \end{cases} \qquad P_4 \begin{cases} \alpha = \alpha_0 - \varepsilon \\ \beta = \beta_0 + \varepsilon \end{cases} \tag{2.18}$$

À chacun de ces points, on associe leurs coordonnées polaires dans le repère associé au point B, calculées à l'aide des équations 2.9, 2.10 et 2.11 :

$$P_i : \begin{cases} r_i \\ \varphi_i \end{cases} \qquad \text{avec} \quad i = 1, \ldots, 4$$

On peut définir *l'erreur de position* comme étant la plus grande diagonale du quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$:

$$\Delta D = \max(P_1P_2, P_3P_4) \tag{2.19}$$

Pour calculer la longueur des diagonales, on utilise la règle des cosinus dans les triangles P_1P_2B et P_3P_4B (cf. figure 2.14) :

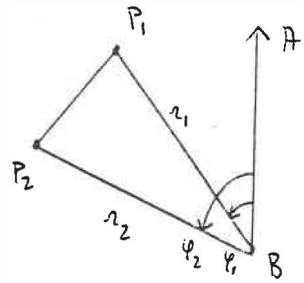


Figure 2.14: Règles des cosinus.

$$P_1P_2^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{2.20}$$

$$P_3P_4^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2.r_3.r_4\cos(\varphi_4 - \varphi_3) \tag{2.21}$$

On peut aussi définir *l'erreur d'orientation* à partir de l'équation 2.13, qui permet d'écrire la variation de θ sous la forme $\Delta\theta = \Delta\varphi + \Delta\eta$, c'est-à-dire $\Delta\theta = \Delta\varphi + \varepsilon$. Si on définit $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\max(\mid \varphi_2 - \varphi_1 \mid, \mid \varphi_4 - \varphi_3 \mid)$, alors l'erreur d'orientation est :

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\max(\mid \varphi_2 - \varphi_1 \mid, \mid \varphi_4 - \varphi_3 \mid) + \varepsilon \tag{2.22}$$

Il est ainsi possible de calculer en tout point l'erreur de position maximale ΔD ainsi que l'erreur d'orientation maximale $\Delta\theta$, à partir de la connaissance de l'erreur de mesure maximale ε.

2.2.2 Méthode analytique

Les coordonnées polaires du point R sont calculées à l'aide des équation 2.9, 2.10 et 2.11. Connaissant les erreurs de mesure sur α_0 et β_0, nous pouvons différentier au premier ordre les coordonnées de R. Cette différentiation nous permet d'exprimer les variation de r et φ en fonction de celles de α et β. À partir de ces variations, il est possible de déterminer quatre points formant un quadrilatère dans lequel se situe

R et de la même manière que dans la section précédente, on peut calculer des erreurs de position et de rotation.

Calculons les différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta \end{cases} \tag{2.23}$$

En posant $\Delta r = dr$, $\Delta\varphi = d\varphi$, $\Delta\alpha = d\alpha$ et $\Delta\beta = d\beta$, et en supposant que $\varepsilon = \Delta\alpha = \Delta\beta$, on peut déduire les variations de r et de φ autour de α_0 et β_0. On obtient alors les coordonnées polaires des quatres points :

$$\begin{array}{ll} P_1 \begin{cases} r = r_0 - \Delta r \\ \varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \end{cases} & P_2 \begin{cases} r = r_0 + \Delta r \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \end{cases} \\ P_3 \begin{cases} r = r_0 - \Delta r \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \end{cases} & P_4 \begin{cases} r = r_0 + \Delta r \\ \varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \end{cases} \end{array} \tag{2.24}$$

Ce calcul de variation est en fait une approximation au premier ordre du rayon et de l'angle. Cette approximation n'est réaliste que si les termes d'ordres supérieurs sont négligeables. Les simulations réalisées dans la section suivante semblent accréditer cette hypothèse dans le cas où l'erreur ε est "petite" comparée aux angles mesurés.

On peut aussi calculer l'erreur d'orientation à partir de l'équation 2.13, qui permet d'écrire la variation de θ sous la forme $\Delta\theta = \Delta\varphi + \Delta\eta$, c'est-à-dire :

$$\Delta\theta = \Delta\varphi + \varepsilon \tag{2.25}$$

La connaissance des erreurs de position et de rotation en fonction de l'erreur de mesure et des distances entre les balises nous permet de connaitre le degré de

confiance que l'on peut accorder au calcul de la position et ainsi nous permet de rejeter des triplets de balises pour lesquels l'erreur est trop grande. Elle nous autorise donc à choisir le triplet de balises pour lequel l'erreur est la plus faible.

2.3 Disposition des balises

Les formules de calcul d'erreur que nous avons déterminées dans la section précédente permettent de lier les erreurs de position et d'orientation avec la disposition des balises dans le couloir. À l'opposé, il serait intéressant de pouvoir déterminer la meilleure disposition autorisant les erreurs les plus petites. Or nous ne disposons pas de formules analytiques directes facilement inversables. Il est donc indispensable de faire appel à des simulations afin de pouvoir obtenir à partir des résultats, un mieux une fonction analytique, au pire des abaques.

2.3.1 Calculs des erreurs de position et d'orientation

2.3.1.1 Hypothèses

Pour effectuer les simulations, nous devons poser quelques hypothèses quant au couloir et au véhicule :

- la simulation s'effectue sur un plan parallèle au sol du couloir,
- le couloir est constitué de deux murs rectilignes,
- les balises sont situées sur les murs,
- le théodolite est placé au centre du véhicule.

De plus, nous avons noté précédemment que trois balises suffisaient pour localiser un véhicule. Or, si ce véhicule est loin de celles-ci, non seulement l'erreur de localisation risque d'être élevée, mais de plus la portée du théodolite peut s'avérer trop faible. Il est donc indispensable qu'elles soient relativement proches, ce qui implique qu'elles doivent être implantées par triplets sur les murs. Comme il est généralement nécessaire de respecter une certaine harmonie, les balises doivent être fixées sur les murs selon une configuration répétitive. Cette répétition permet au théodolite d'être toujours situé dans un triplet le plus proche possible. Au fur et à mesure de son déplacement, le véhicule passera d'un triplet à l'autre. Il n'est donc utile d'étudier que la configuration d'un triplet.

2.3.1.2 Configurations étudiées

Nous avons choisi trois configurations différentes, les deux premières de façon intuitive, la troisième par hasard. Ce sont le *triangle isocèle*, la *ligne* et le *triangle rectangle*. Nous ferons les études à l'intérieur de *zones d'étude* correspondant aux motifs géométriques créés par ces configurations.

Afin de simplifier la programmation et de réduire le temps de calcul, nous utiliserons la méthode géométrique pour calculer les erreurs. Nous pouvons enfin noter que à partir des équations 2.9 à 2.11 et 2.19 à 2.21, les erreurs sur la position et l'orientation du véhicule sont exprimées dans un système de coordonnées polaires situé en la balise B. Dans le but de respecter une certaine symétrie, il est nécessaire que la balise B soit située entre les balises A et C.

1. **Triangle isocèle**. Les trois balises forment un triangle isocèle et la zone d'étude est à l'intérieur de ce triangle. La balise B est située sur le mur opposé au deux autres pour les raisons de symétrie décrites ci-dessus (cf. figure 2.15).

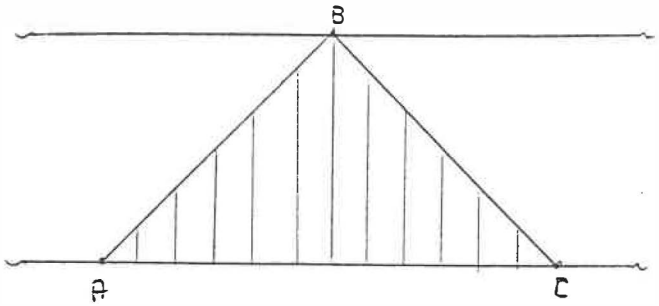


Figure 2.15: Configuration en triangle isocèle.

2. **Ligne.** Les trois balises sont situées sur le même mur. Pour des raisons de symétrie, B est située entre A et C et la zone d'étude est délimitée par les bissectrices des segments AB et BC (cf. figure 2.16).

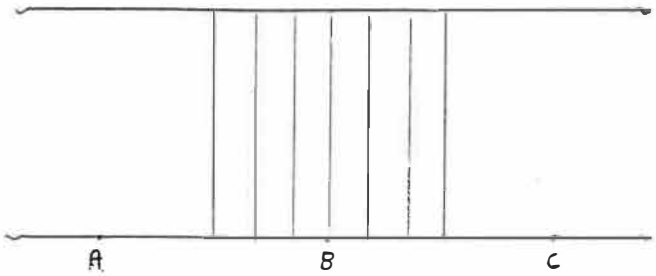


Figure 2.16: Configuration en ligne.

3. **Triangle rectangle.** Les trois balises forment un triangle rectangle dont l'angle droit est le point B pour les mêmes raisons de symétrie. La zone d'étude est à l'intérieur du triangle (cf. figure 2.17).

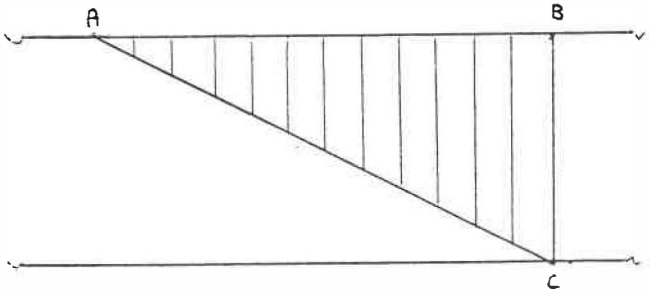


Figure 2.17: Configuration en triangle rectangle.

Par la suite, et dans le but d'alléger le texte, nous appellerons cas 1, cas 2 et cas 3 ces trois configurations.

2.3.1.3 Représentation des erreurs

Afin de déterminer la configuration offrant les erreurs les plus petites, nous devons effectuer un calcul d'erreur en tout points de la zone d'étude. Pour cela, nous découpons cette zone en une multitude de surfaces élémentaires et nous affectuons un calcul sur le centre de chaque surface. À chaque élément correspond deux angles mesurés α et β qui permettent de déterminer les erreurs de position et d'orientation. Nous reprenons ensuite ces calculs pour différentes distances entre les balises et pour chacune des trois configurations. À partir de ces calculs, nous effectuerons plusieurs représentations graphiques qui nous permettrons de mener des études à la fois qualitatives (images noir-et-blanc (N/B), surfaces 3D) et quantitatives (courbes d'erreur).

Dans ce qui suit, nous poserons $l = 5$ la largeur du couloir, $L = 25$ sa longueur et nous ferons varier la distance d entre les balises de l à L. Cette distance est, dans les cas 1 et 2, $d = AC$ et, dans le cas 3, $d = AB$. Nous poserons l'erreur de mesure $\varepsilon = 1\,^{o}$. Les unités de longueur ne sont pas indiquées car les développements effectués sont valables quelles que soient les unités considérées.

Image N/B. On effectue une discrétisation de l'erreur selon un nombre de niveaux d'erreur égal à 16 pour une résolution moyenne ce qui permet de distinguer des zones de même niveau. À chaque niveau d'erreur, on associe un niveau de gris (de blanc à noir selon les niveaux d'erreur croissants). Différentes images ont été produites pour les deux types d'erreur, avec les trois cas décrits ci-dessus, en fixant la distance entre les balises à $d = 10$ (cf. figure 2.18).

À partir de ces images, on peut remarquer des différences de forme entre les régions de même niveau de gris, donc de même niveau d'erreur. Par exemple, on note que le cas 1 apparait meilleur que les deux autres car la zone d'étude y apparait en plus claire. Les images permettent ainsi de mieux quantifier les surfaces de même niveau dans les zones utiles. De plus, la symétrie par rapport à la balise B est apparente dans les cas 1 et 2.

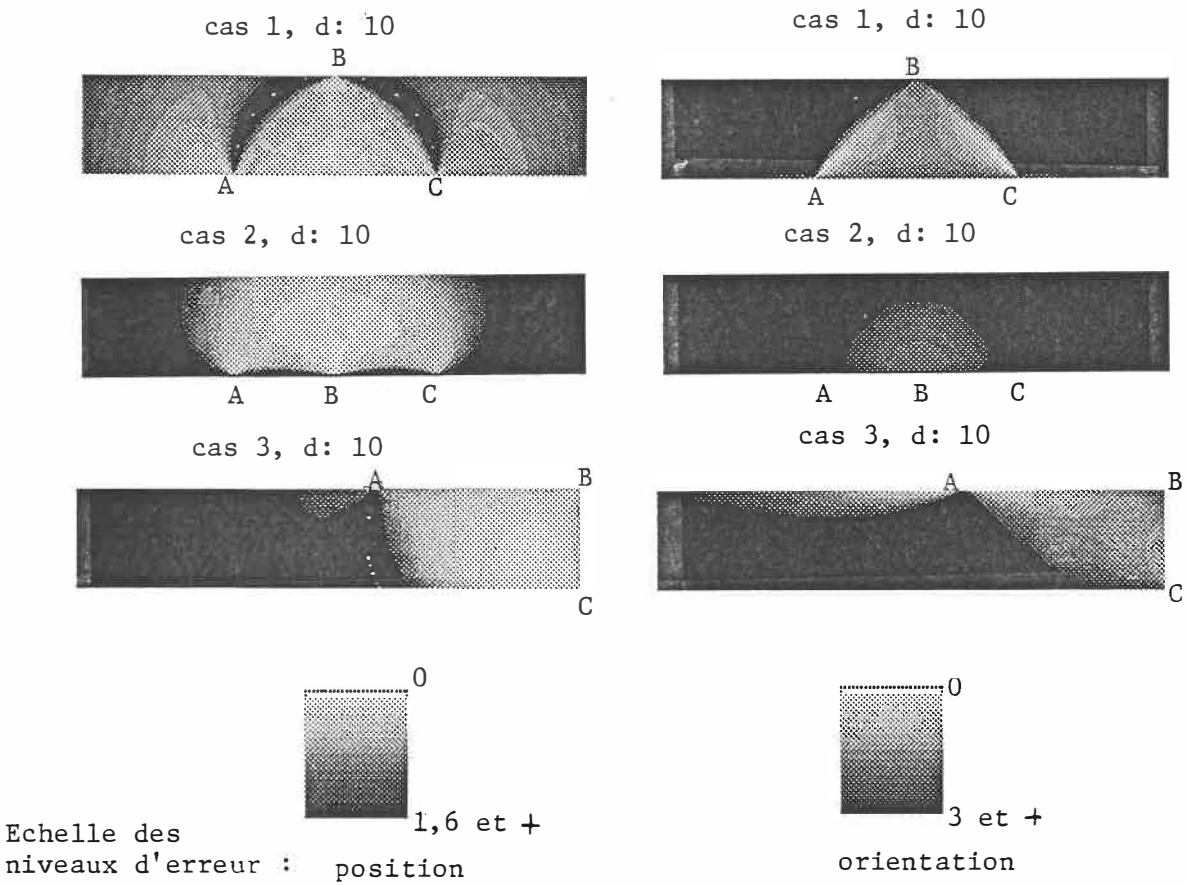


Figure 2.18: Images noir et blanc des erreurs de position et de rotation.

Les formes de ces régions d'erreur n'est pas très intuitive. Afin de mieux les comprendre, dessinons pour le cas 1 ($d = 10$) les cercles utilisés dans la méthode géométrique (section 2.21). Nous considérerons deux points dans cette étude, situés l'un dans la zone la plus claire entre les balises A et C, l'autre dans la zone la plus foncée entre B et C. Posons $P1$ et $P2$ ces points. Nous poserons l'erreur $\varepsilon = 5\,^{o}$ pour

plus de visibilité. Dans la figure 2.19a, $P1$ est situé à l'intersection des deux cercles caratérisés par les angles $\alpha = 95\,^{o}$ et $\beta = 95\,^{o}$ et dans la figure 2.19b, $P2$ est situé à l'intersection des deux cercles caratérisés par les angles $\alpha = 85^{o}$ et $\beta = 165^{o}$. L'erreur de position correspond à la plus grande diagonale du losange et l'erreur d'orientation au plus grand écart angulaire, par rapport à B, entre les points des deux diagonales. On remarque alors (malgré l'imprécision du dessin), que l'erreur de position est plus important pour $P2$ que pour $P1$ et que c'est l'inverse pour l'erreur d'orientation. Ceci est dû au phénomène d'aplatissement du losange sur le côté BC dans la direction BC.

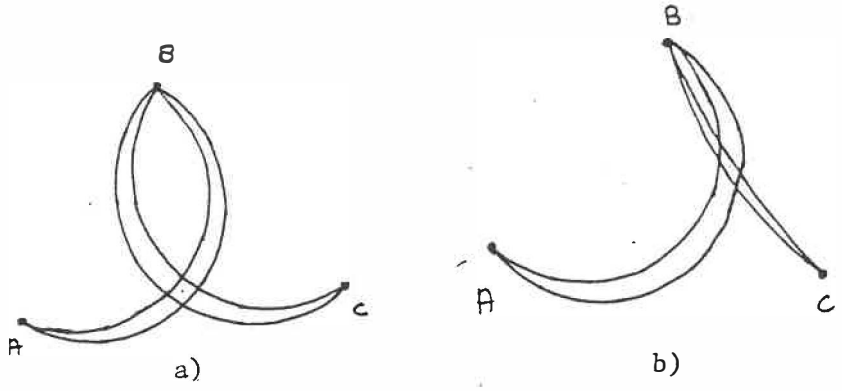


Figure 2.19: Mise en évidence des erreurs pour le cas 1 ($d = 10$).

Surfaces 3D. Afin de mieux "voir" de façon visuelle les erreurs dans le couloir, il peut être utile d'associer à chaque valeur d'erreur du maillage une hauteur sur un axe perpendiculaire au plan dans laquel se situe les calculs. On obtient alors une "montagne" représentée par une surface maillée. Les images ont été obtenues à l'aide du progiciel MATLAB [1]. L'image de la figure 2.19 a été calculée pour le cas 1 avec un $d = 10$. Si ce n'est sa relative beauté, elle nous apporte beaucoup moins d'informations que l'images N/B correspondante.

[1]MATLAB est un logiciel produit par The MathWorks, Inc.

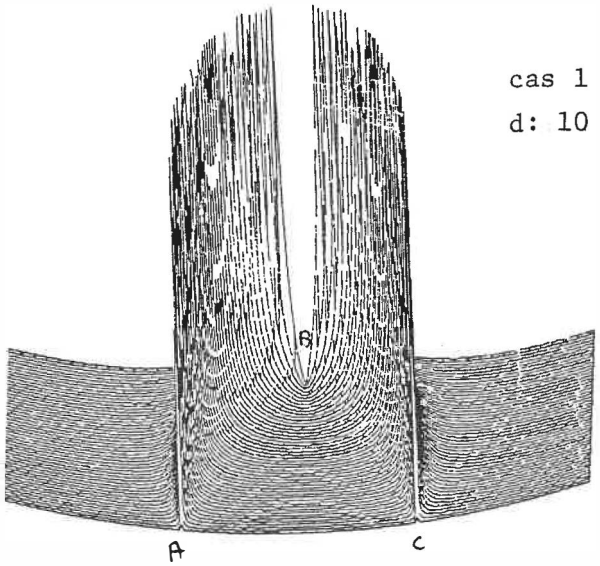


Figure 2.20: Surfaces 3D.

Courbes d'erreur. A l'opposé des deux méthodes d'analyse précédentes, cette méthode utilise des valeurs d'erreur, seuillées sur 25 niveaux équidistants, situées dans la zone d'étude, pour tracer des courbes statistiques. Pour chaque niveau i ($1 \leq i < 25$), on calcule le nombre de points ayant une erreur comprise entre les niveaux $i-1$ et i. Le niveau 25 quant à lui utilise les erreurs supérieures au niveau 24. À chaque niveau correspond un nombre de points, que l'on peut exprimer sous la forme d'une surface. On rapporte les surfaces de chaque niveau à la surface de la zone d'étude, ce qui donne des proportions de surface pour chaque zone. On obtient ainsi une distribution en %.

Ces distributions étant difficilement comparables, il est plus simple de considérer des fonctions de répartitions, c'est-à-dire pour chaque niveau, la somme des pourcentages des niveaux précédents. Ceci correspond à la proportion de surface pour laquelle l'erreur de mesure est inférieure à un niveau de précision donné, pour chacun des 25 niveaux, à une distance d constante. Par exemple, dans le cas 1 de la figure 2.22, pour $d = 15$, il y a 80 % de chances que l'erreur de position soit inférieure à 0,5. On

obtient ainsi une analyse quantitative de l'image.

2.3.2 Analyse des résultats

Les courbes d'erreur nous permettent d'analyser de façon plus fine les erreurs de position et de rotation à l'intérieur des zones d'étude. Or nous avons supposé dans les hypothèses générales que le théodolite est situé au centre du véhicule. Si on pose k la largeur du véhicule, on peut alors déduire que le théodolite va se déplacer dans une bande centrée dans le couloir, dont les côtés sont situés à $\frac{k}{2}$ et $l - \frac{k}{2}$. L'intersection de cette bande et de la zone d'étude constitue la *zone utile*. La forme de cette zone varie selon les valeurs de k. En effet, on peut définir la bande par un intervalle centré en $\frac{l}{2}$:

$$[\frac{k}{2}, l - \frac{k}{2}] = [\frac{l}{2} - (\frac{l}{2} - \frac{k}{2}), \frac{l}{2} + (\frac{l}{2} - \frac{k}{2})]$$

On étudiera 3 zones utiles (cf. figure 2.20) :

- **zone de 50 %.** Le véhicule est moitié moins large que le couloir, c-à-d $k = \frac{l}{2}$, dans ce cas $\frac{l}{2} - \frac{k}{2} = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \frac{l}{4}$; ce qui représente 50 % de $\frac{l}{2}$. La position du capteur varie donc de ± 50 % par rapport au milieu du couloir.

- **zone de 90 %.** Le véhicule est dix fois moins large que le couloir, c-à-d $\frac{l}{2} - \frac{k}{2} = \frac{l}{2} - \frac{l}{20} = \frac{9l}{20}$; ce qui représente 90 % de $\frac{l}{2}$. La position du capteur varie donc de ± 90 % par rapport au milieu du couloir.

- **zone de 5 %.** Si on suppose que le couloir est plat et que l'asservissement est bien fait, on peut considérer que le véhicule reste dans une bande de ± 5 % autour du milieu du couloir.

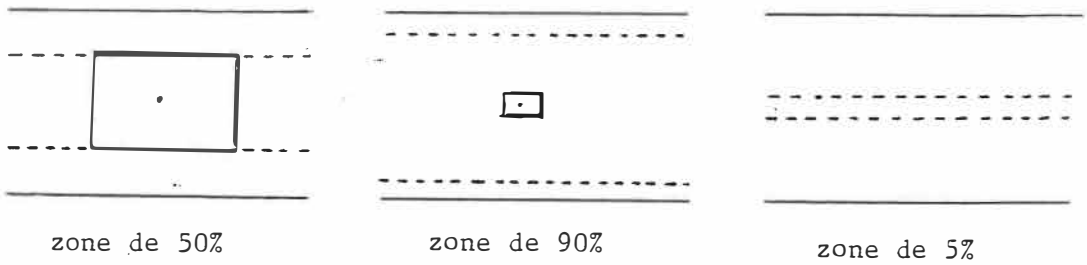


Figure 2.21: Véhicule dans un couloir.

Pour chacune des trois configurations définies à la section 2.3.1.2, une zone utile est dessinés sur la figure 2.21 afin de mieux visualiser la surface de cette zone utile par rapport à la zone d'étude (triangle défini par les trois balises).

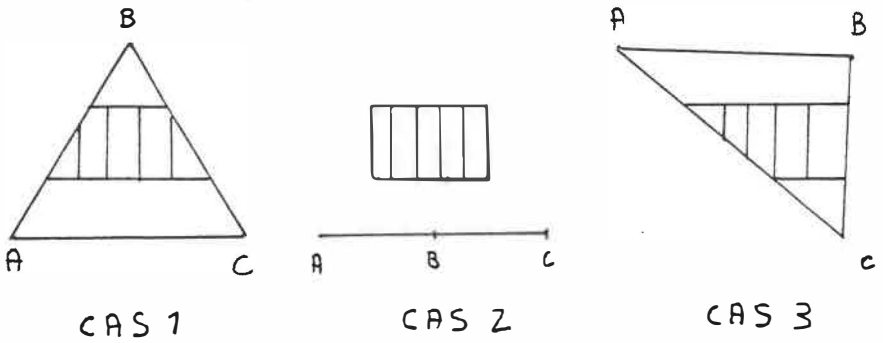


Figure 2.22: Exemple de zone utile dans les trois configurations.

2.3.2.1 Position

Des évaluations d'erreur ont été effectuées pour les trois cas dans les trois zones utiles. Une analyse des courbes permettra de déterminer la distance d maximum entre les balises pour une précision donnée et d'estimer la variation de d par rapport à ε. Nous tenterons aussi de trouver une formule analytique pour ces courbes. Pour alléger les graphes, nous n'avons affiché que les courbes correspondant à un d impair.

Zone de 50 %. Les courbes de la figure 2.22 nous permettent de comparer les trois cas et donc de déduire les résultats suivants :

- le cas 1 est toujours celui dont la proportion de surface, pour un niveau de précision donné, est la plus faible,
- les cas 2 et 3 se coupent toujours pour une proportion de surface proche de 80 %,
- le 2 est meilleur que le 3 si on choisit une proportion de surface supérieure à 80 %, sinon c'est le 3.

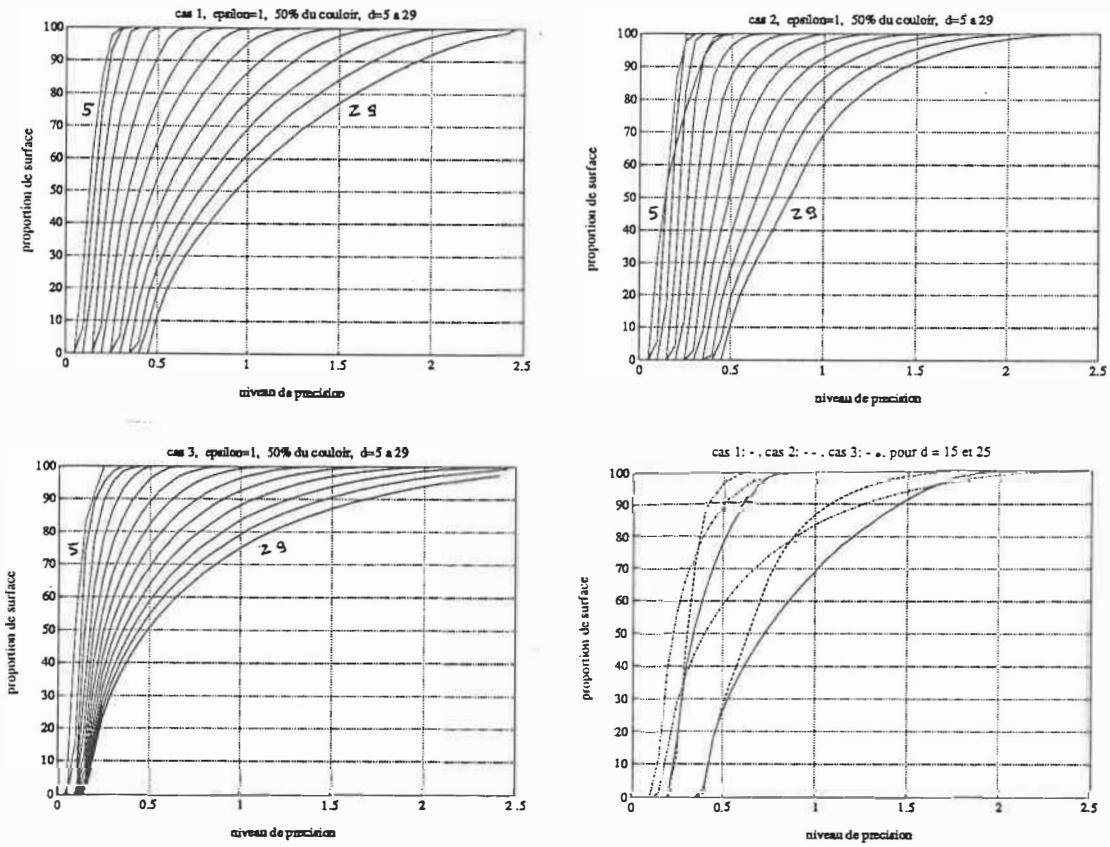


Figure 2.23: courbes des erreurs de position à 50 %.

Zone de 5 %. Les courbes de la figure 2.23 nous permettent de déduire que :

- les cas 1 pour 50 % et 5 % sont semblables,
- pour les cas 2 et 3, les courbes atteignent beaucoup plus rapidement leurs valeurs maximales, ce qui signifie que non seulement les erreurs de position dans la bande de 5 % sont plus faibles, mais aussi que, à une proportion de surface donné, la surface de la région de moindre précision est comparativement plus faible que pour la zone de 50 %.
- le 2 est meilleur que le 3 si on choisit une proportion de surface cette fois supérieure à 90 %, sinon c'est le 3.

Zone de 90 %. Les courbes de la figure 2.24 nous permettent de déduire que :

- le cas 1 surclasse les deux autres au-delà d'une proportion de surface de 80 % environs,
- le cas 1 pour 50 % et 90 % sont semblables,
- pour les cas 2 et 3, les courbes atteignent plus lentement leurs maxima que pour le cas 1, donc on obtient des conclusions opposées à celles de l'essai à 5 %,
- le 2 est meilleur que le 3 si la proportion de surface est supérieure à 90 %.

Détermination de d. Il est possible, à partir des courbes, de déterminer une distance d entre les balises si on fixe un niveau de précision N et une proportion de surface P. Par exemple, si $P = 95$ % et $N = 0,5$ (10 % de la largeur du tunnel), alors la configuration 2 qui est la meilleure nous donne $d = 15$ pour l'essai à 50 %.

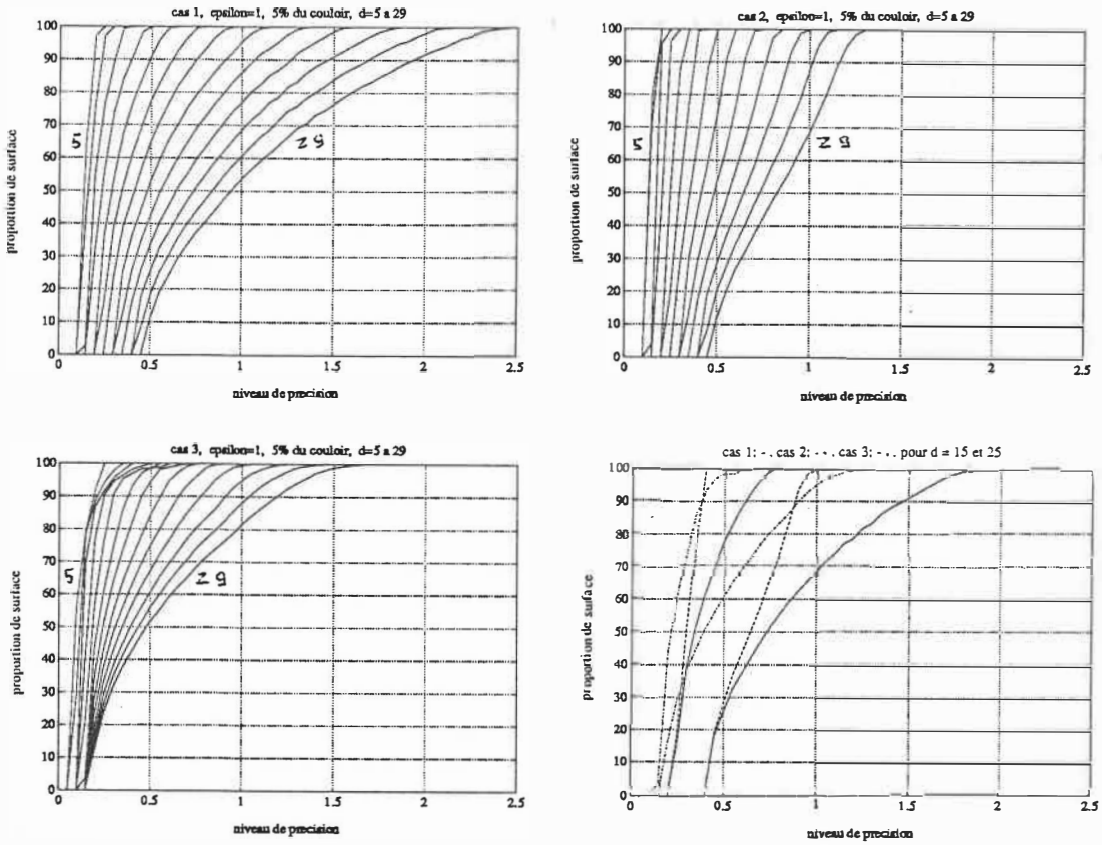


Figure 2.24: courbes des erreurs de position à 5 %.

Variation de d par rapport à ε. Les courbes ont été déterminées avec une erreur de mesure $\varepsilon = 1\ ^o$. Il serait intéressant de quantifier la variation de d par rapport à ε, à P et N constants. On peut déjà remarquer sur la figure 2.25 que si l'erreur de mesure est divisée par 10 ($\varepsilon = 0,1\ ^o$), alors l'échelle des niveaux de précision N est elle aussi divisée par 10. Cette proportionalité étant vérifiée dans les trois cas, on peut tracer la courbe $d = f(\varepsilon)$ de la façon suivante.

Pour ε_1, à une proportion de surface P_1 et à une distance d_1 données, correspond un niveau de précision N_1. Si pour $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/m$ (m étant un réel quelconque), à $P_2 = P_1$, on a $N_2 = N_1/m$, il suffit de déterminer sur les courbes correspondant à ε_1, la courbe relative à d_2 correspondant à $N_1 \times\ m$ et à P_1. Exemple : cas 1, essai à 50 %, $\varepsilon_1 = 1\ ^o$,

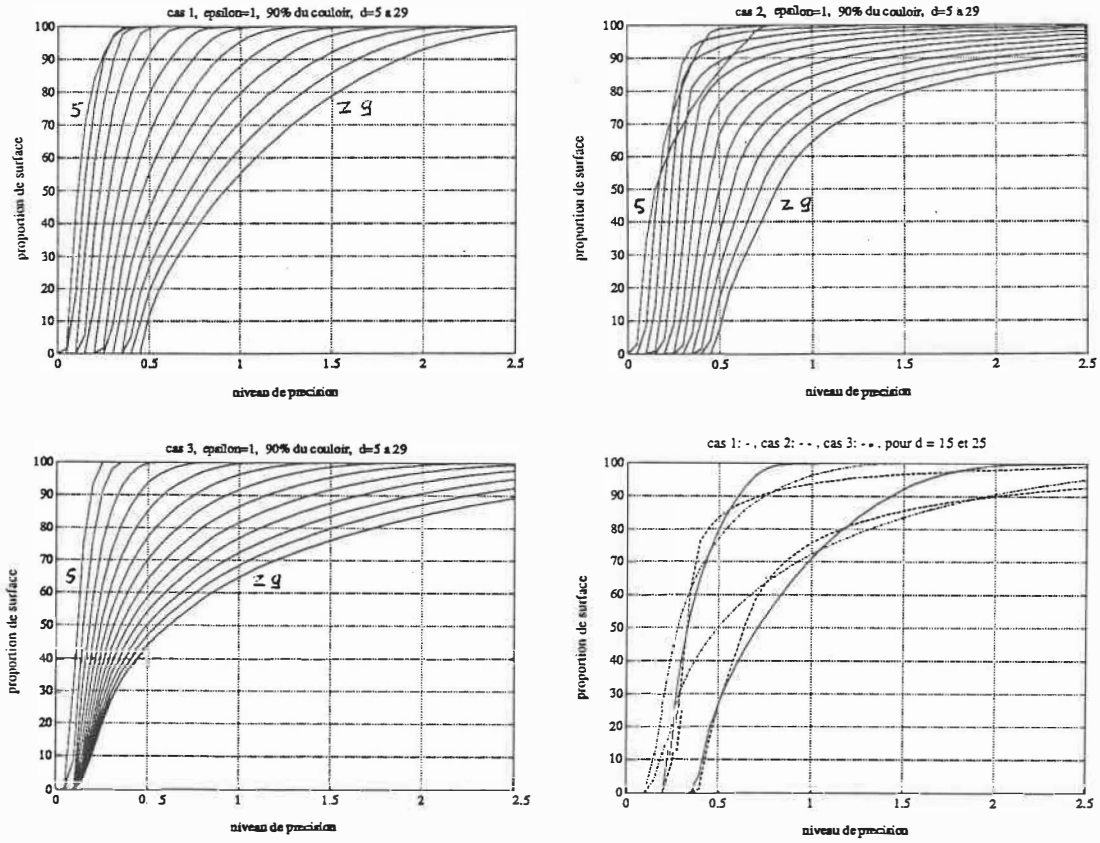


Figure 2.25: courbes des erreurs de position à 90 %.

$P_1 = 80$ %, $d_1 = 5$, $m = 2$ et $N_1 = 0,175$. À $N_1 \times m = 0,35$ correspond la courbe $d = 12$, etc.

On remarquera que cette correspondance de d_1 à d pour ε_1 à ε_1/m ne dépend ni de P, ni du d initial. On obtient alors des faiceaux de courbes parallèles à la courbe de la figure 2.26.

Détermination d'une fonction $P = f(\varepsilon, d, N)$. Les calculs d'erreur nous ont permis de tracer des abaques pour les trois configurations étudiées. Il pourrait être utile de disposer d'une fonction analytique $P = f(\varepsilon, d, N)$. On peut remarquer que les courbes ressemblent beaucoup à des exponentielles. Si on les trace sur un axe semi-

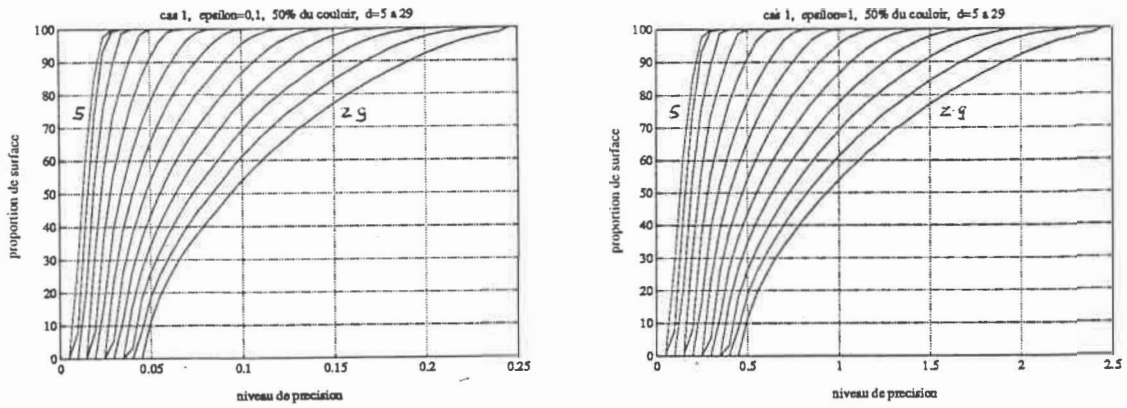


Figure 2.26: Courbes du cas 1, zone de 50 %, pour $\varepsilon = 0,1\,^{o}$ et $\varepsilon = 1\,^{o}$.

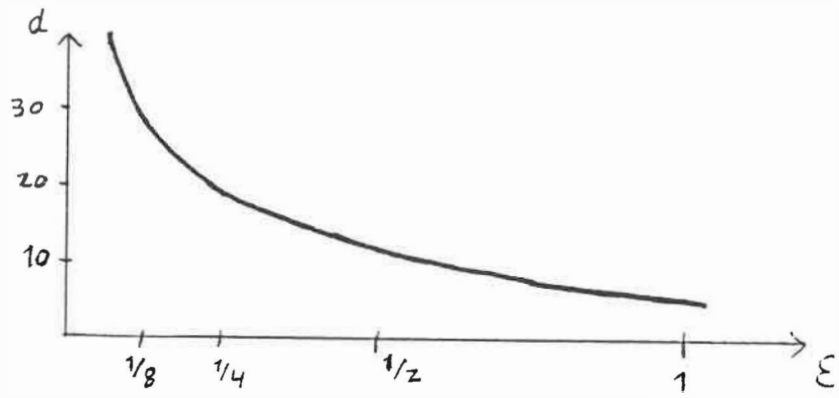


Figure 2.27: Variations de d par rapport à ε.

log, on obtient des droites parallèles arrondies à leurs extrémitées (cf. figure 2.27). On peut alors chercher une fonction du type :

$$P = 100(1 - \exp^{-\frac{N - N_0(d)}{\tau(d)}}) \qquad \text{avec} \quad N \geq N_0(d)$$

Il reste à estimer les paramètres $N_0(d)$ et $\tau(d)$. Si on essaye le cas 1 (essai à 50 %) avec $d = 15$ et $d = 29$, on trouve les résultats suivants :

d	15	29
$N_0(d)$	0,2	0,45
$\tau(d)$	0,175	0,7

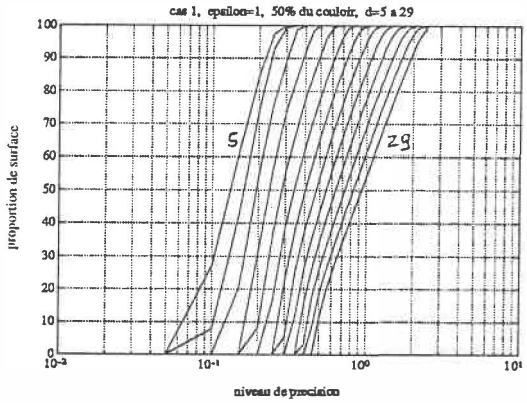


Figure 2.28: Courbes du cas 1 tracés en semi-log.

On trace ensuite les deux courbes approximées à coté des deux originales (cf. figure 2.28). Cette approximation est, on le voit, insuffisante. Une autre approximation, à l'aide de polynômes, a aussi été assayée, mais les résultats étaient encore plus décevants. Il apparait donc inutile de poursuivre dans cette voie, les abaques suffisant amplement.

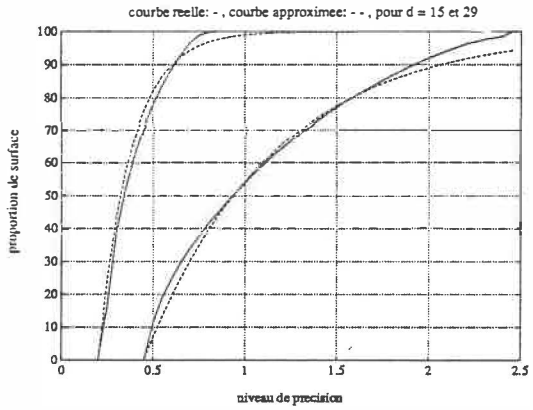


Figure 2.29: Courbes d'erreur approximées.

2.3.2.2 Orientation

Des évaluations d'erreur sont à nouveau effectuées pour les trois cas dans les trois zones utiles. Pour calculer cette erreur d'orientation, nous avons utilisé l'équation 2.23 d'une façon plus simplifiée, sachant que ε est le même pour tous les essais : $\Delta\theta = \max(\mid \varphi_2 - \varphi_1 \mid, \mid \varphi_4 - \varphi_3 \mid)$. Les courbes ainsi produites sont comparées à celles du calcul de l'erreur de position. Les angles sont exprimés en degré pour plus de facilité.

Zone de 50 %. Les courbes de la figure 2.29 nous permettent de comparer les trois cas et donc de déduire les résultats suivants :

- les courbes d'erreur tendent vers une courbe limite lorsque d augmente, dont l'erreur est finie, ce qui est compréhensible car si la mesure angulaire est finie (entre 0 et π), alors l'erreur est finie,
- le cas 2, contrairement aux autres, voit sa proportion de surface diminuer lorsque la distance d augmente,
- le cas 2 est le plus mauvais car c'est celui dont la proportion de surface, pour un niveau d'erreur donné, est toujours la plus faible,
- le cas 1 est meilleur que le 3.

Zone de 5 %. Les courbes de la figure 2.30 nous permettent de déduire que :

- les courbes tendent vers les mêmes limites que pour la zone de 50 %,
- les courbes des cas 2 et 3 sont moins bonnes que pour la zone de 50 % pour les distances d petites,

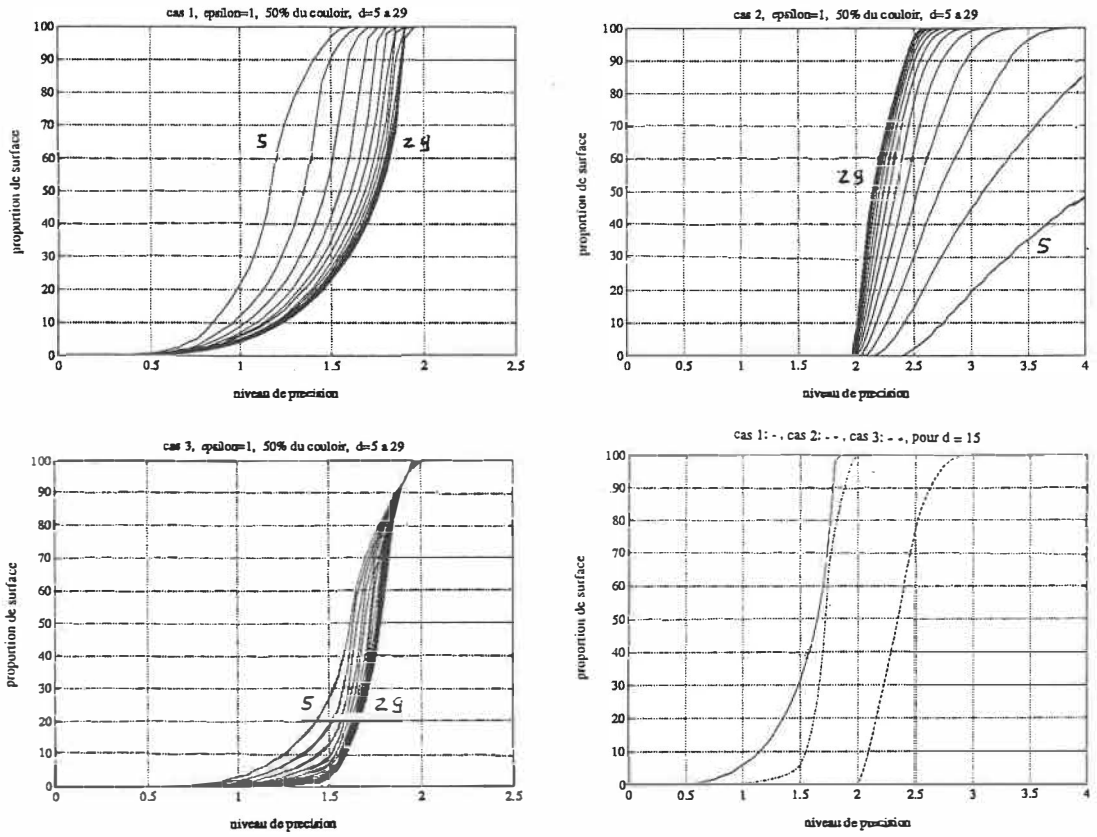


Figure 2.30: courbes des erreurs d'orientation à 50 %.

- le cas 1 est par contre meilleur que les autres,

- le cas 2 est toujours le pire.

Zone de 90 %. Les courbes de la figure 2.31 nous permettent de déduire que :

- contrairement à la zone de 5 %, les courbes sont meilleures que pour la zone de 50 %

- les courbes tendent vers les mêmes coubes limites limites que pour l'essai à 50 %,

- les limites sont les mêmes pour les cas 1 et 3,

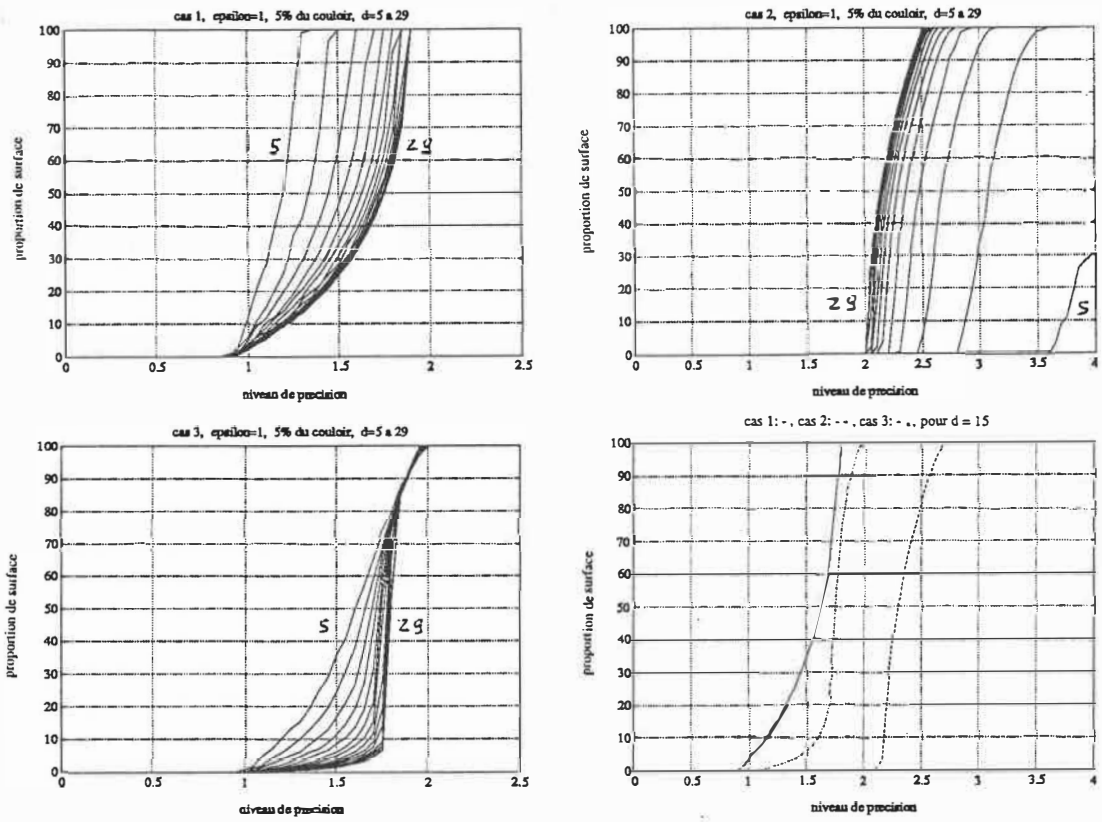


Figure 2.31: courbes des erreurs d'orientation à 5 %.

- le cas 2 est toujours le pire.

La détermination de la distance d entre les balises en fonction des courbes est, contrairement à la section précédente, inutile, car les courbes d'erreur sont bornées. On peut aussi prouver que les variations de d par rapport à ε sont les mêmes que dans la section précédente.

2.3.3 Conclusion

Les calculs d'erreur sur la position et l'orientation nous ont permis de déterminer des abaques. On peut remarquer que les courbes d'erreur ont des comportements

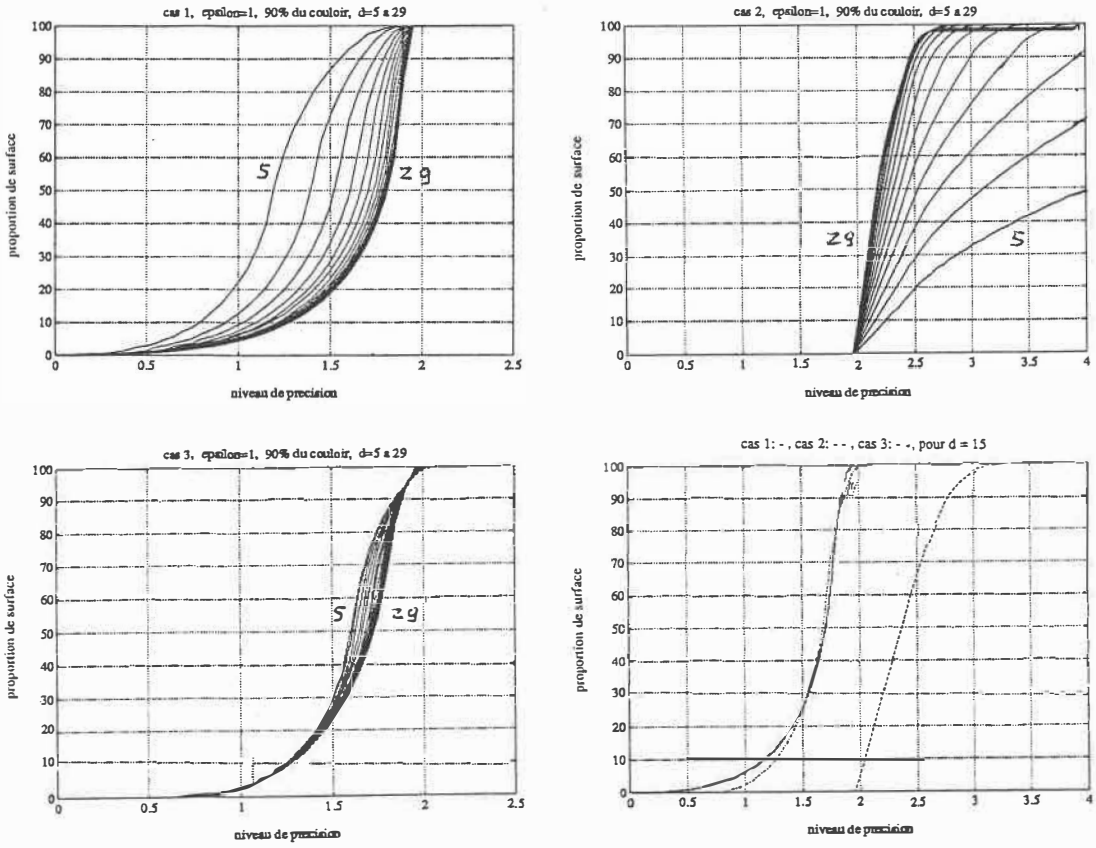


Figure 2.32: courbes des erreurs d'orientation à 90 %.

différents selon qu'il s'agisse de la position ou de l'orientation. En effet, dans le premier cas, les courbes tendent vers l'infini lorque la distance entre les balises d augmente, alors que dans le deuxième, ces courbes sont bornées par une courbe finie. Il apparait donc que l'erreur de position est beaucoup plus sensible à cette distance que l'erreur d'orientation. Il est donc suffisant de considérer l'erreur de position pour le choix de d.

La section 2.3.2.1 a présenté la détermination de la distance d entre les balises si on se fixe un niveau de précision désiré N et une proportion de surface P, c'est-à-dire un niveau de confiance. La valeur de N dépend de la précision dont on a besoin dans la bande d'évolution du véhicule que l'on a choisie (de 5 à 50 %) et celle de P peut être

posée égale à 95 % (niveau de confiance raisonnable). On choisit d'abord la largeur de la bande d'évolution, ensuite on détermine à la vue des courbes la configuration qui convient la mieux (triangle isocèle, ligne ou triangle rectangle) et enfin on détermine la distance d.

Les bandes d'évolution que nous avons choisies dans cette étude (5, 50 et 90 %) correspondent à des cas généraux. Il est bien sûr possible d'effectuer des calculs pour une bande donnée. Pour cela, on se réfèrera aux programmes en annexes.

2.4 Conclusion générale

Ce chapitre consiste en une étude approfondie de la détermination de la position et de l'orientation d'un objet par rapport à des balises situées dans l'espace. Après un calcul d'erreur de position et d'orientation, il nous a été possible de tracer des abaques d'erreur en fonctions de différentes configurations de balises. Ces abaques permettent de déterminer la distance optimale entre les balises dans un couloir droit en fonction d'un niveau de précision donné et d'un niveau de confiance.

Chapitre 3

Plate-forme inertielle

3.1 Généralités

De tout temps, la navigation a consisté à se diriger vers une destination finale et pour cela à déterminer la position et la vitesse d'un véhicule, mais tous ces systèmes de navigation – navigation par inertie exeptée – consistent à utiliser des phénomènes extérnes au mobile (point astronomique, mesure de vitesse par rapport au milieu ambiant, vitesse Doppler, etc.) [FAU71].

On peut soulever le problème suivant : *est-il possible de naviguer sans aucune aide extérieure?* On voit sans peine l'intérêt considérable qu'il y aurait à le résoudre :

- système de navigation insensible au brouillage,
- fiabilité ne dépendant pas d'aides extérieures.

Conceptuellement, le problème est résumé par la figure 3.1 où l'on a représenté un expérimentateur ayant loisir de faire toute expérience physique à *l'intérieur* de sa capsule que l'on suppose être un écran parfait à tous les rayonnements extérieurs. Peut-il alors déterminer ses positions, vitesse et altitude?

Figure 3.1: Le problème de la navigation par inertie.

3.2 Rappel des lois de la mécanique et du principe de relativité

Rappelons que par rapport à des axes liés au centre de la terre C et ayant des directions fixes par rapport aux étoiles (axes – ou repère – dits inertiels ou galiléens et représentés dans la suite par $[i]$), la loi fondamentale de la mécanique s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_i = \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{f} + \vec{g} \tag{3.1}$$

où

$\vec{r}$: vecteur position (cf. figure 3.2),

$\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_i$ ou $\ddot{\vec{r}}$: dérivée seconde par rapport au repère [i] de la position, c-à-d accélération inertielle (ou absolue),

$\vec{F}$: force totale appliquée,

$\vec{g}$: force par unité de masse due à l'attraction universelle,

$\vec{f}$: force spécifique = somme rapportée à l'unité de masse de toute les forces appliquées autres que $\vec{g}$ (effet des moteurs, réaction du sol, etc.)

Donc $\vec{r}$ est le vecteur position, et l'on représente par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée par rapport à l'espace inertiel de la capsule de la figure 3.1.

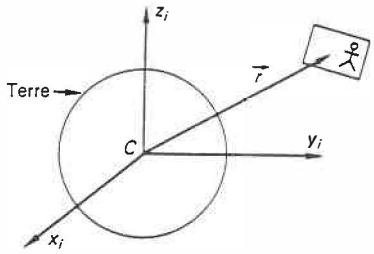


Figure 3.2: Repère inertiel.

On peut alors énoncer la vérité physique très profonde suivante :

PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE D'EINSTEIN.

À l'aide d'expériences physiques faites à l'intérieur de sa capsule, l'expérimentateur de la figure 3.1 peut mesurer :

- *la force spécifique $\vec{f}$,*
- *la rotation inertielle instantanée $\vec{\omega}$ de sa capsule, mais rien d'autre concernant son mouvement par rapport au reste de l'univers.*

3.3 Principe des appareils mesurants $\vec{f}$ et $\vec{\omega}$

3.3.1 Accéléromètre

Un appareil permettant de mesurer une ou plusieurs composantes du vecteur $\vec{f}$ s'appele un accéléromètre (remarquer combien une telle appellation est mal fondée : un accéléromètre ne mesure pas l'accélération, mais la force spécifique, c'est-à-dire la différence entre l'accélération inertielle et l'attraction universelle).

La figure 3.3 schématise le principe d'un accéléromètre : une masse M mobile

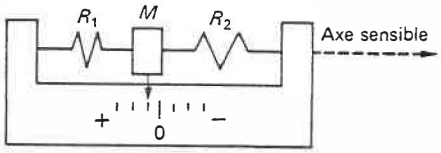


Figure 3.3: Schéma de principe d'un accéléromètre linéaire à un axe.

suivant un axe appelé axe sensible, est maintenue dans le boîtier de l'accéléromètre par deux ressorts R_1 et R_2; son mouvement possède de plus un amortissement visqueux.

Le déplacement de la masse M dans le boitier donne une mesure de la composante de $\vec{f}$ suivant l'axe sensible de l'appareil, ce qui est illustré sur les figures 3.4 et 3.5.

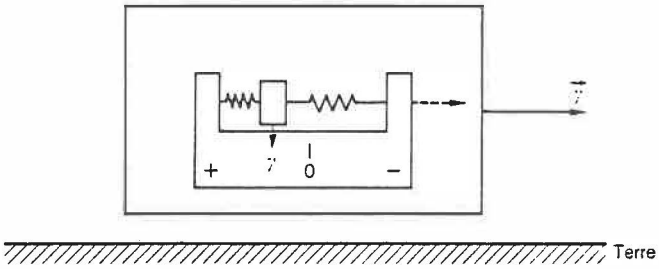


Figure 3.4: Véhicule accélérant dans un plan horizontal. Axe sensible horizontal.

En effet, on peut écrire la loi fondamentale de la mécanique

- pour l'ensemble composé de la masse mobile et du boitier :

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{f} + \vec{g}, \tag{3.2}$$

- pour la masse mobile seule

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + \vec{g}, \tag{3.3}$$

$\vec{T}$ représentant la réaction du boîtier sur la masse mobile.

Dans le cadre d'une analyse sommaire où l'on suppose qu'il y a équilibre, c-à-d qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre la masse mobile et le boîtier, on a

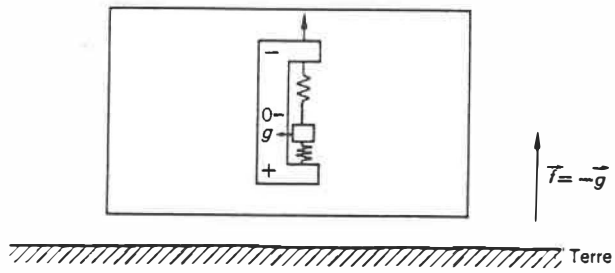


Figure 3.5: Véhicule immobile. Axe sensible vertical ($\vec{f} = -\vec{g}$)

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{r}}, \tag{3.4}$$

ce qui entraine

$$\vec{T} = \vec{f}. \tag{3.5}$$

Or la composante de $\vec{T}$ suivant l'axe sensible de l'accéléromètre est mesurable par la déformation des ressorts. L'accéléromètre mesure donc bien la composante de $\vec{f}$ sur cet axe sensible.

3.3.2 Gyroscope

On pourrait imaginer de repérer le mouvement angulaire par rapport à l'espace inertiel en utilisant un solide parfaitement suspendu autour de son centre d'inertie et ayant une vitesse angulaire initialiment nulle. La loi de l'inertie entraîne alors que ce solide garde une orientation inertiellement fixe (cf. figure 3.6a).

Cependant le moindre couple perturbateur entraîne la création d'un mouvement angulaire croissant quadratiquement avec le temps :

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{M}{I}t^2 \tag{3.6}$$

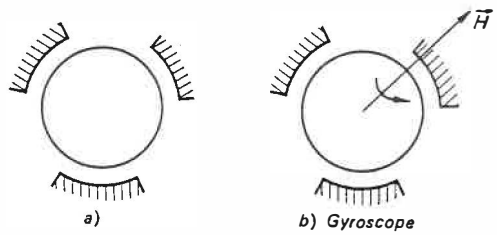


Figure 3.6: Références d'attitude.

où

θ : déplacement angulaire,

M : couple perturbateur,

I : moment d'inertie,

t : temps.

Compte tenu de la technologie actuelle, il se produit un décalage angulaire de 1° *au bout de 1 minute*, ce qui entraine qu'une telle référence angulaire est inutilisable.

Par contre si l'on considère un solide animé d'une très grande vitesse angulaire. autour de son axe de symétrie (cf. figure 3.6b), ce qui lui confère un moment cinétique $\vec{H}$ important, les lois de la mécanique entraînent les points suivants :

- en l'absence de couple perturbateur, $\vec{H}$ est inertiellement fixe,
- en présence d'un couple perturbateur $\vec{M}$, la rotation instantanée $\vec{\omega}$ (orthogonale à $\vec{H}$) obéit à la loi gyroscopique :

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{H}, \tag{3.7}$$

où la notation $\times$ désigne le produit vectoriel. Le mouvement angulaire crée par un couple perturbateur croît dans ce cas linéairement avec le temps :

$$\theta = \frac{M}{H}t \tag{3.8}$$

La technologie permet d'obtenir cette fois un décalage angulaire d'*une minute d'arc au bout d'une heure.*

Un tel dispositif permet donc de conserver une direction inertiellement fixe. Il porte le nom de *gyroscope.*

De nouveaux types de gyroscopes, plus modernes (laser, ou à résonnance magnétique nucléaire), ont été développés depuis. Nous les traiterons dans le paragraphe 3.4.

3.3.3 Plate-forme à inertie

Afin de mesurer $\vec{f}$ et $\vec{\omega}$, on fixe sur un même bâti 3 accéléromètres à un axe et 3 gyroscopes à un axe. Cet ensemble s'appelle *plate-forme à inertie* (cf. figure 3.7).

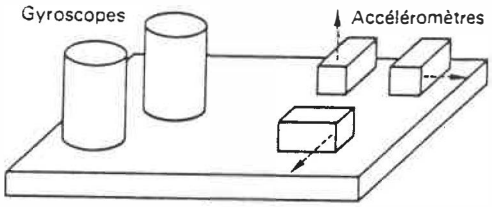


Figure 3.7: Plate-forme à inertie.

On peut imaginer essentiellement deux façons d'utiliser cette plate-forme :

- fixer rigidement la plate-forme au véhicule : on mesure alors $\vec{f}$ sur des axes liés au véhicule, et l'orientation de la plate-forme est déterminée à l'aide des deux gyroscopes. Ce fonctionnement s'appelle "strapdown",
- isoler la plate-forme des mouvements angulaires du véhicule à l'aide de cardans et l'asservir (les gyroscopes étant les instruments détecteurs) à une orientation

choisie (par exemple inertiellement fixe).

Ces deux systèmes sont schématisés sur la figure 3.8 : dans un cas la rotation de la plate-forme est commandée (signal d'entrée), dans l'autre elle est mesurée (signal de sortie).

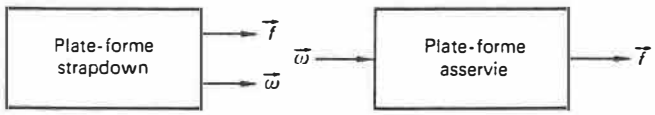


Figure 3.8: Les deux types de plate-forme.

3.3.4 Navigateur à inertie

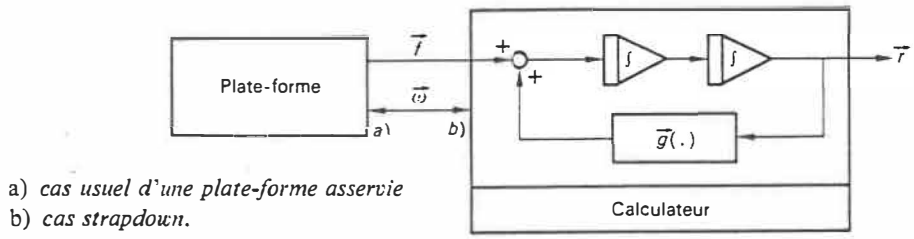
Disposant d'une plate-forme, le navigateur par inertie va intégrer l'équation fondamentale de la mécanique :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{g} \tag{3.9}$$

où $\vec{f}$ est mesuré par les accéléromètres, $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ est calculé en fonction de la position. L'équation vectorielle 3.9 est interprétée sur les axes de la plate-forme dont la rotation instantanée $\vec{\omega}$ est connue, qu'elle soit mesurée (strapdown) ou commandée (plate-forme asservie).

Il convient évidement d'initialiser les calculs en indiquant les positions, vitesse et orientation de la plate-forme à l'instant initial.

Très schématiquement, un navigateur par inertie est représenté par la figure 3.9.



a) *cas usuel d'une plate-forme asservie*
b) *cas strapdown.*

Figure 3.9: Schéma général d'un navigateur par inertie.

3.4 Plate-forme

La plate forme inertielle est composé, nous l'avons vu, de deux éléments principaux, le gyroscope et l'accéléromètres. Ces deux capteurs font appel à différentes technologies que nous décrirons.

3.4.1 Gyroscope

Trois types de gyroscopes existent sur le marché, utilisant différentes technologies. Les deux plus connus sont dans l'ordre chronologique, le gyroscope inertiel, et le gyroscope laser.

Le gyroscope inertiel. Il fait appel au principe de l'inertie de rotation que nous avons décrit dans la section 3.3.2. Il est composé d'un corps de révolution appelé *toupie* (rotor d'un moteur électrique) maintenu en rotation rapide et constante Ω par rapport à un boitier (contenant le stator du moteur); cet ensemble sera appelé par la suite *élément sensible.* Désignant par $\vec{\omega}$ la rotation par rapport à l'espace inertiel de cet élément sensible, le moment cinétique total peut s'écrire sous la forme $I\vec{\omega} + I_R\vec{\Omega}$, où I_R désigne le moment d'inertie de la toupie autour de son axe de rotation et I

le tenseur d'inertie de l'ensemble boitier et toupie solidifiés. L'équation d'Euler du mouvement de l'élément sensible est alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(I\vec{\omega} + I_R\vec{\Omega})_i = \vec{M} \tag{3.10}$$

$\vec{M}$ désignant la résultante des couples extérieurs appliqués et i indiquant que la dérivation s'effectue par rapport au repère inertiel. Compte tenu de l'hypothèse que la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est maintenue constante, on a [FAU71] :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(I\vec{\omega})_i = \vec{M} - \vec{\omega} \times I_R\vec{\Omega} \tag{3.11}$$

Tout se passe comme si

- le rotor et le boitier pouvaient être solidifiés,
- le couple supplémentaire $-\vec{\omega} \times I_R\vec{\Omega}$ appelé *couple gyroscopique* était appliqué à l'élément sensible.

Cette interprétation de l'équation d'Euler est très utile pour saisir de façon intuitive les phénomènes gyroscopiques : toute vitesse angulaire $\vec{\omega}$ produit un couple gyroscopique qui entraine un mouvement conforme alors à notre expérience des corps solides.

À partir de ces équations, il est possible de construire deux types de gyroscopes à un degré de liberté, le gyroscope intégrateur et le gyromètre. Le premier transforme la rotation inertielle α autour de l'axe d'entrée $\vec{E}$ en la rotation β de l'élément sensible autour de l'axe de sortie $\vec{S}$ avec un retard dû à l'inertie et aux frottements et un gain dû au moment cinétique de la toupie (cf. figure 3.10).

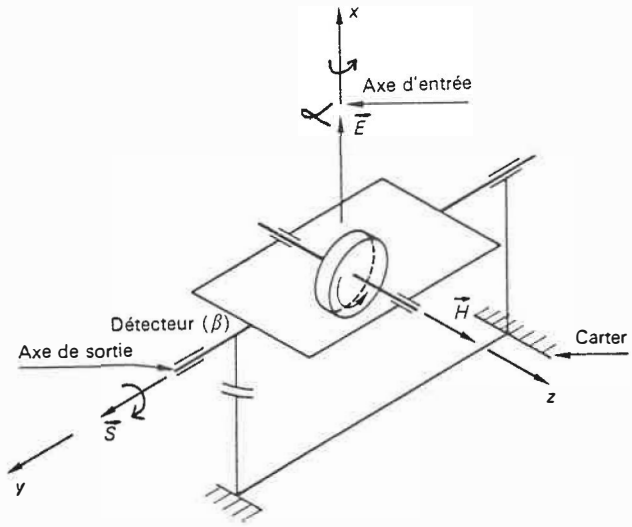


Figure 3.10: Gyroscope intégrateur à un degré de liberté.

Le deuxième est un appareil destiné à mesurer la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ autour de son axe d'entrée. Il comporte, comme le gyroscope intégrateur, un élément sensible mobile autour d'un axe de sortie, avec en plus un dispositif générant un couple de rappel M proportionnel à l'écart angulaire (cf. figure 3.11). β est alors proportionnel à $\dot{\alpha}$.

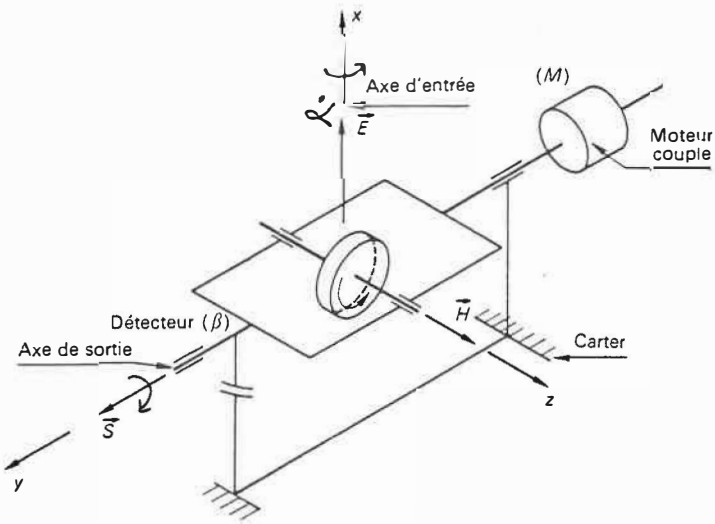


Figure 3.11: Gyromètre.

Le gyroscope laser. Le gyroscope à fibres optiques est un interféromètre du type Sagnac [AS82]. La figure 3.12 montre une vue schématique de cet interféromètre. Une rotation de l'interféromètre autour d'un axe orthogonal au plan de propagation de la lumière crée un déphasage $\Delta\Phi_S$ entre les deux faiceaux lumineux qui se propagent de façon contraire. Ce déphasage est exprimé par :

$$\Delta\Phi_S = \frac{8\pi A}{\lambda C}\,\Omega \tag{3.12}$$

avec Ω = vitesse angulaire de rotation, λ = longueur d'onde, C = vitesse de la lumière et A = surface efficace de l'interféromètre.

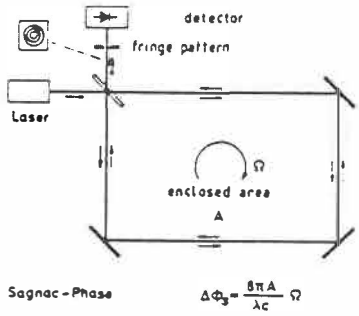


Figure 3.12: Interféromètre de type Sagnac.

Avec l'avènement des fibres monomodes, il devint possible d'envelopper une large surface efficace dans un petit volume en faisant circuler les faiceaux lumineux dans une fibre optique (longueur L) enroulée autour d'un cylindre de rayon R. Dans ce cas, l'équation 3.12 devient :

$$\Delta\Phi_S = \frac{4\pi RL}{\lambda C}\,\Omega \tag{3.13}$$

Dans un gyroscope à fibre optique normal, conçu avec L = 1 km, R = 7 cm, λ = 850 nm, la phase de Sagnac varie entre $10^{-3}\,^{o}$ et $10^{+3}\,^{o}$ pour Ω variant respectivement entre $1\,^{o}/h$ et $300\,^{o}/s$. Dans la cas d'un gyroscope laser passif, la phase est

calculée à partir de la lecture d'un changement d'intensité $I = I_0 \cos \Delta\Phi_S$, ce qui crée une ambiguïté lorsque Ω dépasse 50 $^o/s$ dans l'exemple ci-dessus. Ce problème est résolu grâce à un asservissement en boucle fermée de la phase et à des techniques de modulation des deux signaux. La vitesse de rotation dépend alors linéairement de la différence entre les fréquence de modulations des deux signaux.

Les performances du gyroscope laser dépassent maintenant largement celles du gyroscope inertiel tant au niveau de la précision qu'au niveau de la fiabilité. Son principal défaut est son prix élevé.

3.4.2 Accéléromètre

Différents types d'accéléromètres existent sur le marché, chacun utilisant différentes technologies. Les deux plus connus sont dans l'ordre le pendulaire et le silicium.

L'accéléromètre pendulaire. Il est constitué [FAU71] d'une masse P de centre d'inertie G suspendue par un bras de longueur L à une articulation fixée sur un boîtier (cf. figure 3.14). Un moteur couple agit sur la masse P en générant une force $\vec{F}$ proportionnelle à l'écart de la position du pendule par rapport à une position nominale. Le moteur couple est du type à aimant permanent et la mesure de $\vec{F}$ se résume à la mesure du courant de commande circulant dans la bobine fixée à la tête du pendule. La force spécifique à mesurer est alors :

$$f = F = ki \tag{3.14}$$

k étant le facteur de proportionnalité entre la force exercée par le moteur couple et le courant de commande qui s'exprime en "g" par milliampères.

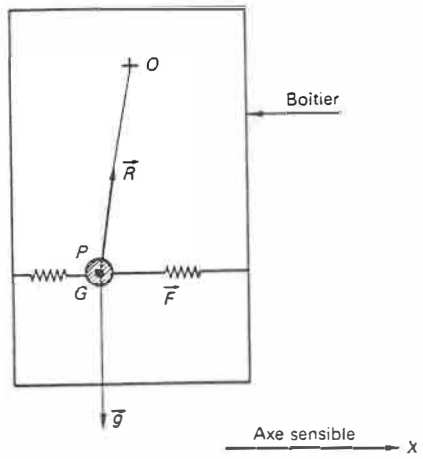


Figure 3.13: Accéléromètre pendulaire.

L'accéléromètre au silicium. Sur une plaque de circuit intégré [Vec89], une languette métallique est déposée sous vide. Après érosion du substrat situé sous la languette à l'aide d'un acide, un espace se crée entre la languette et l'oxyde de silicium, créant un micro-condensateur. Sous l'effet de la force spécifique, la languette fléchit. Comme la valeur de la capacité dépend de l'espacement, on obtient une mesure de la force spécifique. La puce de silicium contient de plus toute la circuiterie pour opérer les calculs nécessaires pour linéariser la réponse du capteur.

L'accéléromètre au silicium est en passe de devenir un capteur universel d'accélération grâce à sa large plage de mesure, son format réduit et son coût minime.

3.4.3 Combinaison des deux capteurs

Dans tout système inertiel, on se propose de mesurer la force spécifique d'un mobile, en grandeur et en direction. Deux types de solution sont possibles pour effectuer cette mesure.

La solution avec plate-forme asservie. Les accéléromètre sont montés sur un support isolé des mouvements angulaires de l'avion. Ce support, appelé cœur, est suspendu au moyens de cardans et possède une liberté angulaire totale par rapport à l'avion. Des gyroscopes, senseurs de rotation par rapport à "l'espace inertiel", sont montés sur le cœur. Ils permettent de déceler toute rotation de leur support (qui est aussi celui des accéléromètres) provoquée par des couples perturbateurs. Leurs signaux sont utilisés pour déclencher l'action corrective qui rétablit l'orientation adéquate du cœur de la plate-forme. La plate-forme stabilisée (ou asservie) par gyroscopes est ainsi le senseur inertiel qui permet le mesure des forces spécifiques, en force et en direction.

La solution du type "strap-down". Les accéléromètres sont ici directement fixés sur le véhicule et mesurent la force spécifique dans un système d'axes lié à ce véhicule. Pour connaître à chaque instant l'orientation de ce système d'axes par rapport à un trièdre de calcul horizontal, il faut fixer sur le véhicule des gyroscopes capables de mesurer la rotation autour de leur axe avec une grande précision et dans un grand domaine de mesure.

3.5 Conclusion

La plate-forme asservie fut la seule solution industrielle jusqu'aux années 80. L'asservissement permettait d'utiliser les meilleurs capteurs de l'époque avec des calculateurs électroniques tout en obtenant une bonne précision, avec en contre-partie une plus grande complexité mécanique. L'avènement de calculateurs puissants, de gyroscopes laser et d'accéléromètres de grande précision a permis l'utilisation de la solution "strap-down". Celle-ci est maintenant largement répandue. L'accroissement de la précision entraine cependant une plus grande sensibilité des capteurs aux per-

turbations externes, spécialement les variations du champ gravitationnel terrestre.

Malheureusement, toutes ces plates-formes dérivent, ce qui entraine une divergence de la position, de la vitesse et de l'orientation calculées. Plutôt que de fabriquer des plates-formes de plus en plus précises, les systèmes de repérage actuels utilisent un système hybride de capteurs associants une plate-forme à des capteurs externes fournissant par intermittence une erreur bornée. Dans ce cas, la précision de la plate-forme est moindre, mais celle du système hybride est supérieure à la plus précise des plates-formes.

Chapitre 4

Pilotage par système hybride

Nous avons étudié au cours des chapitres précédents la localisation d'un véhicule soit par rapport à des balises soit en utilisant une plate-forme inertielle. L'objectif de cette étude étant de parvenir à piloter un véhicule à l'aide de ces capteurs, il est primordial d'étudier l'influence du mouvement du véhicule sur la lecture des capteurs. L'avantage d'un système hybride de capteurs est qu'il tire partie des avantages de chacun des capteurs tout en réduisant les effets de leurs faiblesses.

Nous nous attarderons dans un premier lieu à étudier la détection des balises par le théodolite ainsi que le comportement du gyroscope. Quelques résultats relatifs aux erreurs seront fournis. Puis nous modéliserons le véhicule d'expérimentation et nous envisagerons les différentes possibilités pour le commander. Ensuite nous étudierons les moyens d'estimer la position du véhicule à partir de l'orientation fourni par le gyroscope. Enfin nous simulerons le déplacement du véhicule en présence de bruit dans un tunnel de mine. Ces simulations seront effectuées sur une station SUN en langage C.

4.1 Localisation du véhicule à partir de capteurs

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié en détail deux moyens de localisation, les balises et la plate-forme inertielle. Dans chacun des cas, nous avons énoncé les principes de fonctionnement, et nous avons établi des formules d'erreur pour les balises. Dans le premier cas, un théodolite mesure des angles entre des balises et par la connaissance des positions de celles-ci, détermine la position et l'orientation du véhicule tandis que dans le deuxième, une combinaison de gyroscopes et d'accéléromètres estime en aveugle les mêmes paramètres. Ces deux études ont été conduites dans le cas d'un capteur immobile par rapport à la terre. Il nous reste donc à étudier le comportement de ces capteurs lorsqu'ils sont placés sur un véhicule mobile et à déterminer le meilleur système hybride.

4.1.1 Théodolite

Le théodolite est un capteur mesurant des angles entre des objets, en l'occurence des balises. Nous avons déterminé que trois balises suffisent à localiser le capteur et que la précision est la meilleure dans une zone appelée zone utile située entre les balises.

Le théodolite que nous avons choisi est constitué d'un émetteur-récepteur à infrarouge tournant autour d'un axe. Il émet un rayonnement polarisé dans un plan et le détecte dans un plan de polarisation perpendiculaire à celui de l'émission. Il ne peut donc détecter que des objets ayant la propriété de tourner de 90° la polarisation de la lumière. Il peut ainsi détecter des réflecteurs spéciaux, les catadioptres, car la plupart des matériaux réfléchissant ne possèdent pas cette propriété.

Supposons que le théodolite tourne dans un plan et qu'il ait une portée P. Supposons que des balises soient placées sur un mur du tunnel et qu'elles soient

recouvertes de ce matériau réfléchissant. Alors le capteur va détecter toutes les balises situées à l'intérieur du disque de rayon P. De plus, le capteur se déplace car il est solidaire du véhicule. Évidemment, la perfection n'étant pas de ce monde, il est nécessaire de tenir compte des remarques suivantes :

1. les mesures angulaires par le théodolite sont entachées d'erreurs,
2. le véhicule, donc le théodolite, peuvent être inclinés,
3. les positions des balises sur les murs sont imprécises, et ceux-ci peuvent ne pas être verticaux,
4. le déplacement du véhicule n'est pas connu à priori, et même s'il l'est, il est susceptible de dévier de sa route (glissements ...),
5. il peut ne pas avoir de balise à l'endroit prévu,
6. il peut avoir des fausses détections (réflexions parasites),
7. en général, plus de trois balises sont détectées (trois suffisent pour se localiser),
8. le véhicule avance, donc les trois balises servant à se localiser ne sont pas toujours les mêmes,
9. le temps de balayage peut être long comparé à la vitesse du véhicule, donc entre les mesures de deux balises consécutives le véhicule avance.

Le point 9 nous amène à préciser la différence entre la durée Δt_T de balayage du théodolite et la période d'échantillonnage Δt du système de commande. Pour des raisons de stabilité et de convergence des algorithmes (Théorème de Shannon), la période Δt doit être au moins deux fois plus petite que la plus faible constante de temps du système à commander. Celles-ci sont de l'ordre de la demi-seconde pour notre véhicule. Compte tenu des performances des calculateurs actuels, elle peut être

au maximum de l'ordre de la dizaine de millisecondes. Dans notre cas, nous avons choisi une période d'échantillonnage assez petite ($\Delta t = 0,01\ s$). D'un autre côté, des contraintes mécaniques limitent la vitesse de rotation du théodolite, donc imposent une période minimale de balayage. Un prototype réalisé par [MR88] utilise comme support pour le théodolite une table tournante tournant à $33\frac{1}{3}\ tours/min$, ce qui correspond à une durée $\Delta t_T = 1,8\ s$. Pour permettre à la commande de disposer du maximum d'informations sur le véhicule, il faut que les capteurs soient au moins aussi rapides que la commande ($\Delta t_T \leq \Delta t$). Le théodolite doit avoir dans ce cas une période $\Delta t_T = 0,01\ s$, mais cette rapidité signifie que le capteur est plus onéreux que dans le cas correspondant à une période de l'ordre de la seconde. Les deux cas seront étudiés dans le chapitre 5. Remarquons que le calcul de la localisation effectué dans le chapitre 2 ne tient pas compte du mouvement du véhicule durant une rotation du théodolite. Les mesures effectuées seront bien-sûr erronées, mais ces erreurs sont inversement proportionnelles à Δt_T.

La problématique de la localisation à l'aide de balises devient alors :

- à l'instant t, trois balises A, B et C ont été utilisées pour faire le point, chacune faisant un angle respectivement φ_A, φ_B et φ_C par rapport à l'axe du véhicule,
- dans l'intervalle $[t, t + \Delta t_T]$, n balises étant détectées, en choisir trois telles que l'erreur de localisation soit la plus faible.

On conçoit que le problème n'est pas simple. Considérons le cas particulier dans lequel :

10. toutes les balises sont situées sur les murs aux bons endroits,
11. toutes sont détectées (il peut y avoir néanmoins de fausses détections),
12. les murs sont droits, parallèles et verticaux,

13. le véhicule avance en ligne droite parallèlement aux murs,

14. l'axe du véhicule reste toujours parallèle à celui de la route,

15. la vitesse du véhicule est constante,

16. les balises sont toutes sur le même côté, à droite du véhicule,

Nous allons étudier sommairement une méthode pour choisir trois balises au temps $t + \Delta t_T$.

Dans le repère lié au théodolite, les positions des trois balises sont connues au temps t par leurs angles par rapport à l'axe du véhicule $\varphi_A(t)$, $\varphi_B(t)$, $\varphi_B(t)$, et par leurs distances respectivement r_A, r_B, r_C par rapport au centre du capteur (cf. figure 4.1), calculées à partir de la connaissance de la position de celui-ci à l'aide des formules 2.9 à 2.11.

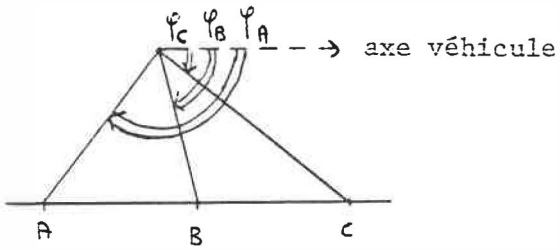


Figure 4.1: Position des balises par rapport au théodolite.

Au temps $t + \Delta t_T$, n angles sont mesurés, $\varphi_i(t + \Delta t_T), i = 1, \ldots, n$. Parmi ceux-ci, trois correspondent aux balises utilisées au temps t, $\varphi_A(t + \Delta t_T)$, $\varphi_B(t + \Delta t_T)$, $\varphi_B(t + \Delta t_T)$. On conçoit très bien que lorque le véhicule avance, les angles φ augmentent en valeur absolue. On peut remarquer que le déplacement en avant du véhicule par rapport aux balises fixes correspond à un déplacement en arrière des balises par rapport à un véhicule fixe (cf. figure 4.2).

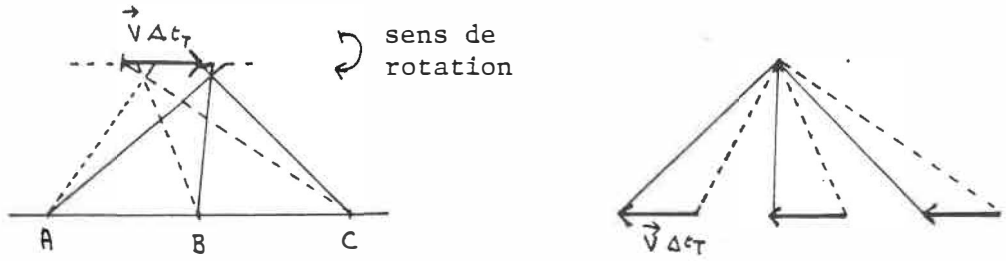


Figure 4.2: Effet du déplacement du véhicule sur les angles.

Pour éviter les fausses détections et éliminer les mauvaises balises, il est raisonnable de chercher les nouvelles balises à $t + \Delta t_T$ au voisinage d'un angle $\varphi(t) + \Delta\varphi(t)$, $\Delta\varphi(t)$ correspondant à l'effet du déplacement du véhicule. Cet angle $\Delta\varphi(t)$ dépend de la vitesse V du véhicule et de la distance r de la balise au capteur (cf. figure 4.3). Si l'on suppose que $\Delta\varphi(t)$ est "petit", alors on peut considérer que la longueur de l'arc a est égale à celle de la corde qui le sous-tend. La géométrie indique alors que $\Delta\varphi(t) = \frac{a}{r}$. Or seul $l = V dt$ est connu. Comme $\Delta\varphi(t)$ est "petit", on peut aussi considérer que les segments qui déterminent la corde de longueur a (c-à-d ceux correspondant à $\varphi(t)$ et $\varphi(t) + \Delta\varphi(t)$) sont parallèles. Donc la corde est perpendiculaire à ces deux segments. La relation liant a et l est alors $a = l\ \cos(\varphi(t) - \frac{\pi}{2})$. On obtient alors la relation :

$$\Delta\varphi(t) = \frac{a}{r} = \frac{V\Delta t_T\ \cos(\varphi(t) - \frac{\pi}{2})}{r} \tag{4.1}$$

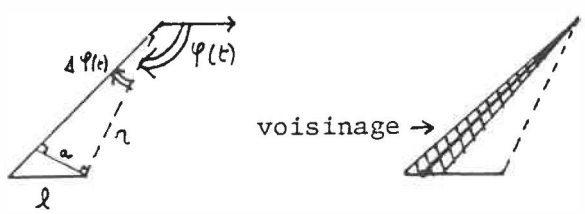


Figure 4.3: Voisinage de recherche de la balise.

On cherche donc l'angle $\varphi(t + \Delta t_T)$ qui se situe dans un intervale centré autour de $\varphi(t) + \Delta\varphi(t)$.

Il nous faut aussi considérer le cas où le véhicule passe d'un groupe de trois balises à un autre au cours de son déplacement. Dans le cas des balises situées sur un même mur, la zone utile, telle que définie au chapitre 2, correspondant à trois balises est illustrée à la figure 4.4.

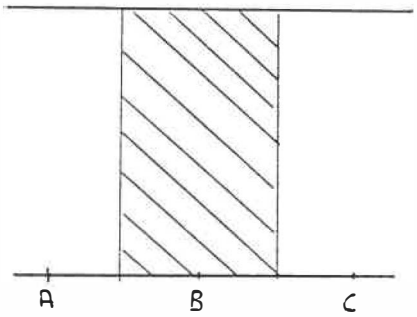


Figure 4.4: Zone utile pour trois balises situées du même côté.

Quand le véhicule est à l'intérieur de celle-ci, il utilise les trois balises A, B et C. Mais lorsqu'il franchit le frontière entre deux zones (par ex. celle entre B et C), il doit alors utiliser les balises B, C, et D (cf. figure 4.5).

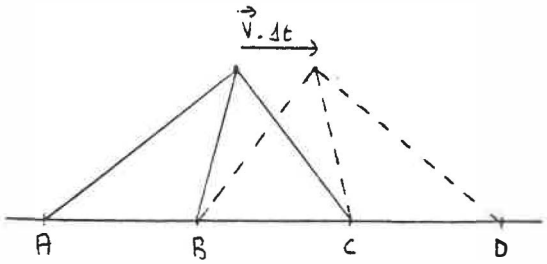


Figure 4.5: Passage d'un jeu de balises à un autre.

Il doit donc être en mesure de détecter le passage de la frontière. Celle-ci est franchie lorsque les rayons r_B et r_C sont tels que $r_B \geq r_C$, car sur la médiatrice de BC, $r_B = r_C$ (cf. figure 4.6).

Lorsque la frontière est franchie, la balise A est délaissée. Afin d'être en mesure

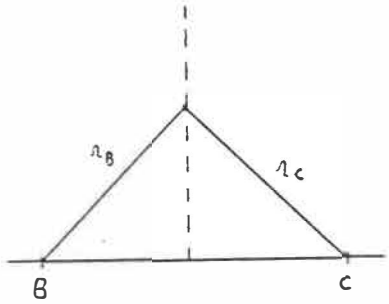


Figure 4.6: Franchissement de frontière entre deux zones.

de repérer la balise D dès le franchissement, il est nécessaire que le détecteur puisse "voir" une balise en avant de C, c'est-à-dire qu'il mette à jour à chaque balayage non seulement les angles φ_A, φ_B et φ_C, mais aussi l'angle φ_D calculable à partir de la position connue de D. Il faut aussi remarquer que les balises sont placées de façon irrégulière sur les murs (murs non droits et placement imprécis). Comme la précision de la localisation dépend de celle des balises [DC86], le véhicule doit posséder une base de données contenant la position exacte des balises. Cette base de données doit être remise à jour en permanence par le véhicule à partir des positions connues des balises précédentes.

Nous voyons donc sur cette exemple que le problème est loin d'être simple. Dans la suite de notre étude, nous nous limiterons à utiliser l'information de position et d'orientation, fournie par le théodolite, en supposant que celui-ci a détecté les bonnes balises et que celles-ci sont à leurs places.

4.1.2 Gyroscope

Pour des raisons de coût, nous utiliserons un gyroscope classique, c-à-d avec un axe en rotation, au lieu d'une plate-forme inertielle. De plus, nous verrons que ce capteur suffit pour notre étude. Son fonctionnement a été décrit en détail dans le chapitre 3. Ce gyroscope est utilisé dans un plan horizontal pour qu'il puisse mesurer l'orientation du véhicule par rapport à un axe. Son rôle est double. Il permet d'une part de

connaître l'orientation du véhicule entre deux mesures consécutives du théodolite et ainsi d'estimer sa position par extrapolation de la trajectoire, et d'autre part de corriger la valeur de l'angle $\Delta\varphi(t)$ en ajoutant l'effet de la rotation du véhicule, ce qui permet d'affiner la recherche des balises.

Le gyroscope est toujours à l'arrêt quand il est inutilisé. Nous devons d'abord le lancer, puis l'amener dans une direction donnée. Cette direction sera l'axe de référence pour l'orientation. Cette phase préliminaire étant achevée, nous pourrons ensuite nous orienter par rapport à cet axe. Cette orientation est sujette à de nombreuses perturbations qui sont dues à une direction initiale imprécise (généralement de quelques degrés), à la rotation de la terre (il tourne avec elle) et à une dérive aléatoire proportionnelle au temps. Par contre, ce capteur a pour avantages d'être insensible au brouillage extérieur (capteur sûr) et d'avoir une période entre deux mesures angulaires très courte (beaucoup plus que dans le cas du théodolite).

L'imprécision de la direction initiale peut poser des problèmes car nous devons orienter le véhicule par rapport à la direction du couloir. Il est donc important de disposer d'une référence angulaire extérieure (théodolite par exemple). Pour plus de facilité, nous orienterons l'axe longitudinal du véhicule dans cette direction. Afin de pouvoir nous affranchir des autres perturbations, il est indispensable de réinitialiser le gyroscope périodiquement, spécialement si celui-ci n'est pas un appareil de haute précision. Cette réinitialisation se fera à l'aide du théodolite.

4.1.3 Système hybride de capteurs

La notion de système hybride est très importante. En effet, il apparaît à la suite de notre exposé que les capteurs ont une inter-dépendance très forte, chacun ayant besoin de l'autre pour affiner ses mesures. La précision à long terme du théodolite permet la recalibration de l'axe du gyroscope tandis que la précision à court terme du gyroscope

permet d'affiner la sélection des balises par le théodolite. Afin d'obtenir la meilleure localisation possible compte tenu des caractéristiques de chacun des capteurs, il faut optimiser cette inter-dépendance.

4.2 Modélisation du véhicule

Après avoir traité des capteurs, nous allons nous pencher sur le véhicule. Nous déterminerons un modèle simplifié de celui-ci, puis à défaut de connaître parfaitement les perturbations qui s'y appliquent, nous proposerons un modèle simpliste de celles-ci.

4.2.1 Modèle du véhicule

Le véhicule que nous allons simuler est celui de la section automatique du département de génie électrique. Il est constitué d'une base de chaise roulante électrique, d'un ordinateur IBM-PC, de capteurs et de liaisons radio. Il est mu par deux moteurs à courant continu situés à l'arrière (cf. figure 4.7) et possède deux roues folles à l'avant. Deux modèles ont été tirés du véhicule, le modèle cinématique et le modèle dynamique. Nous ne les décrirons pas ici.

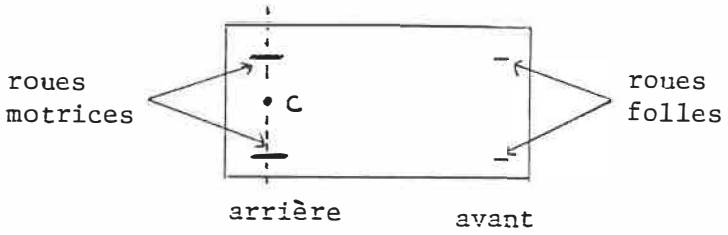


Figure 4.7: Vue de dessus du véhicule à modéliser.

Une simplification de ces modèles permet d'assimiler le véhicule à deux moteurs électriques dont l'inertie correspond à celle du véhicule. Ces moteurs font tourner les

roues droite et gauche. La position et l'orientation du véhicule est obtenue par intégration des vitesses de rotation des deux roues. En première approximation, à partir des relations explicités dans [SAN86], un moteur peut être modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\,\dot{\theta} + \frac{K_m}{\tau}\,u \tag{4.2}$$

avec

$\dot{\theta}$	vitesse de rotation
u	tension d'entrée
K_m	gain statique
τ	constante de temps

Les deux moteurs fournissent une vitesse de rotation gauche et droite $\dot{\theta}_g$ et $\dot{\theta}_d$. À partir de celles-ci, on peut exprimer la vitesse V_C du centre de poussée C des roues du véhicule (entre les roues motrices) ainsi que la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ autour de celui-ci. Nous ne tiendrons pas compte du glissement des roues.

$$V_C = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_d\,R_d + \dot{\theta}_g\,R_g) \tag{4.3}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{l}(\dot{\theta}_d\,R_d - \dot{\theta}_g\,R_g) \tag{4.4}$$

avec

R_g, R_d	rayon des roues gauches et droites
l	largeur de l'essieu
V_C	vitesse du centre de poussée C
$\dot{\alpha}$	vitesse angulaire autour de C

On peut alors décomposer la vitesse sur un repère lié au couloir dans lequel le véhicule se déplace (cf. figure 4.8). Dans celui-ci, les vitesses et les positions s'expriment par :

$$\alpha = \int_0^t \dot{\alpha}(\tau)d\tau \tag{4.5}$$

$$\dot{x} = V_C \cos \alpha \tag{4.6}$$

$$\dot{y} = V_C \sin \alpha \tag{4.7}$$

$$x = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau \tag{4.8}$$

$$y = \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau \tag{4.9}$$

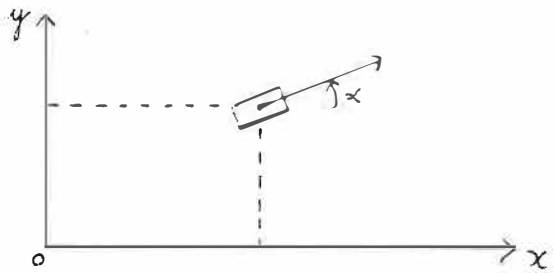


Figure 4.8: Véhicule dans le repère lié au couloir.

Le modèle se résume alors au schéma de la figure 4.9.

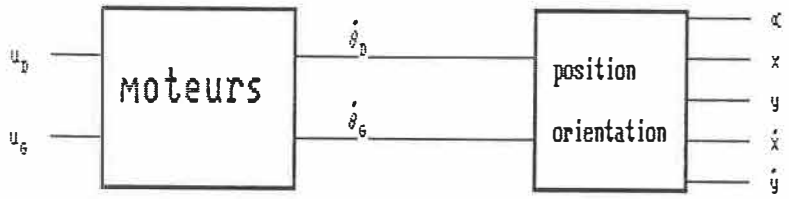


Figure 4.9: Schéma simplifié du modèle du véhicule.

Pour tenir compte des variations des paramètres, comme la masse du véhicule, le rayon des roues, le glissement des roues, etc. , il suffit de les rendre variant dans le temps. Mais il faut pour cela mettre en évidence un modèle de chaque perturbation. Dans ce qui suit, nous supposerons que tous ces paramètres sont constants et symétriques (par ex. $R_g = R_d = cte = R_a$). L'étude du système est alors facilité. Dans

la simulation informatique, nous utiliserons un bruit pour représenter la variation de tous ces paramètres dans le temps.

4.2.2 Modèle des perturbations

Nous ne possédons pas de modèles exacts des différentes perturbations agissant sur le véhicule. Nous pouvons simplement supputer que les constantes des moteurs dépendent de la température, du poids du véhicule et de l'usure des axes de rotation tandis que le rayon des roues dépend du poids et de la pression des pneus (donc de la température) et le glissement dépend de la nature du sol et de l'usure des pneus. Comme ces perturbations sont nécessairement bornées, un bruit uniforme nous paraît en être la meilleure représentation à défaut d'une étude plus précise. Un modèle Markovien pourraît peut-être représenter une solution.

4.3 Commande du véhicule

Le véhicule doit être commandé de façon à ce qu'il se déplace dans le couloir selon une trajectoire désirée. Dans le repère lié au couloir de la figure 4.8, la route à suivre est définie à la fois par une trajectoire et par une vitesse de déplacement. Nous choisirons une trajectoire simple, c'est-à-dire une succession de droites. Le but de la commande est de faire en sorte que le véhicule suive cette trajectoire le mieux possible à la vitesse désirée. Nous choisirons une commande simple.

4.3.1 Objectifs à suivre

Chaque segment de droite S définissant la trajectoire est caractérisé par une orientation β par rapport au repère du couloir $[C]$ et par les coordonnées du point P_0 par lequel débute ce segment (cf. figure 4.10). On associe à ce segment un repère

catésien $[S]$ centré en P_0 dont l'abscisse est parallèle au segment et dirigée dans le sens du déplacement. La commande a pour objectif : (i) que la position du véhicule soit la plus proche possible du segment que l'on désire suivre, c'est-à-dire que la distance du véhicule au segment soit minimale; (ii) que le véhicule soit orienté dans la direction du segment. Pour cela, il nous faut considérer le véhicule dans le repère $[S]$ lié au segment. Pour passer de $[C]$ à $[S]$, il faut opérer une rotation et une translation. Soit $P_{/C}$ et $P_{/S}$ les coordonnées du véhicule respectivement dans les repères $[C]$ et $[S]$, alors :

$$P_{/S} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} (P_{/C} - P_0) \tag{4.10}$$

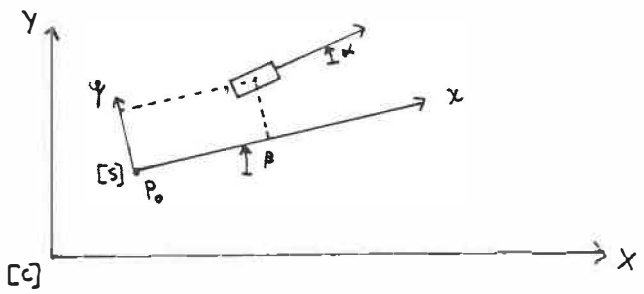


Figure 4.10: Véhicule dans un repère lié à la trajectoire à suivre.

Dans ce repère $[S]$, l'objectif (i) concernant la minimisation de la distance du véhicule au segment peut avantageusement se remplacer par la minimisation de l'ordonnée y du véhicule, l'objectif (ii) se remplaçant par la minimisation de l'orientation α du véhicule.

De plus le véhicule doit se déplacer à une vitesse désirée. Or on ne peut observer à l'aide du théodolite et du gyroscope que l'orientation et/ou la position et une dérivation des valeurs mesurées dans le but d'en tirer la vitesse serait désastreuse en raison de l'amplification du bruit de mesure due à la dérivation. Par contre, on peut mesurer la vitesse de rotation des roues par des encodeurs optiques. En faisant abstraction du glissement des roues, la vitesse est proportionnelle à la vitesse de rotation des roues

droites et gauches (resp. $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$). Donc la vitesse désirée correspond à celle des roues. Comme les trajectoires à suivre sont des segments de droite, les vitesses des deux roues sont égales sur ces segments. La commande doit alors minimiser l'écart entre la vitesse des roues et la vitesse désirée $\dot{\theta}_D$. Pour être plus précis, $\dot{\theta}_D$ correspond à un régime désirée pour les moteurs. La commande doit s'assurer que les moteurs ne s'emballent pas plutôt que d'imposer une vitesse de déplacement constante qui pourrait conduire à un sur-régime des moteurs en cas de glissement.

En résumé, la commande doit agir de sorte que dans le repère $[S]$:

$$\begin{cases} y & \rightsquigarrow 0 \\ \alpha & \rightsquigarrow 0 \\ \dot{\theta}_d & \rightsquigarrow \dot{\theta}_D \\ \dot{\theta}_g & \rightsquigarrow \dot{\theta}_D \end{cases} \tag{4.11}$$

Toute la commande (ou contrôle) doit s'effectuer en se basant sur ces consignes. C'est un problème classique d'automatisme. Les solutions envisageables pour la commande sont les suivantes :

1. le PID (proportionnel, intégral, dérivé),
2. la commande optimale selon un critère,
3. le placement de pôles,
4. la commande adaptative (modèle de référence ou self-tuning),
5. la méthode fréquentielle,
6. le contrôle géométrique,
7. la commande à structure variable.

Nous désirons utiliser pour cette simulation une commande simple. C'est le cas des trois premiers. Ils sont équivalents, seule la méthode de calcul des paramètres de contrôle diffère. Nous avons choisi la commande optimale par critère quadratique dans le cas linéaire car ce critère permet d'exprimer de manière convenable les qualités globales recherchées pour la commande. Celles-ci peuvent en fait se résumer, le plus généralement, par la détermination d'une commande assurant "le meilleur compromis" entre certaines performances, représentées par des termes de pondération faisant intervenir les sorties ou les variables internes du systèmes (variables d'état), et une économie d'énergie. De plus, un autre avantage non négligeable de la méthode de détermination d'une structure de commande par minimalisation d'un critère quadratique dans le cas linéaire est de se prêter à des développements mathématiques nombreux et puissants. Cette minimalisation conduit à la détermination d'une "commande optimale" au sens d'un critère [FGS87].

4.3.2 Modèle

Deux possibilités existent pour modéliser le comportement du système, soit le modèle entrées/sorties, soit le modèle d'état. Nous utiliserons la deuxième solution. Nous devons d'abord transformer les équations 4.2 à 4.9 sous la forme d'un système d'équations d'état. Si ce système est linéaire et invariant, alors des théorèmes puissants peuvent être utilisés pour cette étude. Nous devons pour cela tenir compte des objectifs à suivre fixés dans la section 4.3.1. Ceux-ci concernent rappelons-le les paramètres exprimés dans le repère lié au segment de droite à suivre $[S]$ $(y, \alpha, \dot{\theta}_d, \dot{\theta}_g)$. La commande optimale que nous avons choisi utilisant en un retour d'état, celui-ci doit intégrer les quatre paramètres ci-dessus.

Parmi les systèmes linéaires invariants, celui qui permet l'utilisation du plus grand nombre d'objectifs utilise le vecteur d'état $X(t) = [\dot{\theta}_d \ \dot{\theta}_g \ \alpha]^T(t)$ [1] et les entrées $U(t) =$

[1] T indique la transposition matricielle.

$[u_d\, u_g]^T(t)$. La position y sera traité comme une sortie. Nous pouvons alors écrire les équation 4.2, 4.4 et 4.5 sous une forme matricielle du type :

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,U(t) \text{ , c'est-à-dire :} \tag{4.12}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_d \\ \ddot{\theta}_g \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ \frac{R_a}{l} & -\frac{R_a}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_g \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_m}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_g \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Les équations 4.6 et 4.7 ne sont pas linéaires vis-à-vis de nos états α, $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$. Il est donc impossible d'utiliser une forme matricielle comme pour les états. Les vitesses et positions du véhicule sont alors traitées comme des sorties non-linéaires. À partir des équations 4.3 et 4.6 à 4.9, on obtient les sorties :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{R_a}{2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)\cos\alpha \\ \dot{y} &= \frac{R_a}{2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g)\sin\alpha \\ x &= \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau \\ y &= \int_0^t \dot{y}(\tau)d\tau \end{cases} \tag{4.14}$$

4.3.3 Commande optimale

Le problème de la commande optimale se ramène à minimiser un critère quadratique J entre un temps initial t_0 et un temps final t_f. Le critère doit tenir compte à la fois de la position y, de l'orientation α, des vitesses angulaires $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$, de la commande U et de leurs valeurs désirées exprimées par le système 4.11. il faut néanmoins vérifier que notre système linéaire (équation 4.13) est commandable, c-à-d que tout état désiré peut être atteind à l'aide d'une commande en un temps fini. Le test de la commandabilité répond par l'affirmative.

Le théorème du régulateur optimal de Kalman nous indique une solution à ce problème dans le cas linéaire sans contraintes sur la commande et les états. Soient

Q et R des matrices de pondération, il s'agit de minimiser l'écart quadratique du critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(X(t) - X_d(t))^T Q (X(t) - X_d(t)) + U^T(t) R U(t)] dt \tag{4.15}$$

avec l'équation d'état : $\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$ et l'état désiré $X_d(t)$. Alors la commande est de la forme :

$$U(t) = -R^{-1} B^T P (X(t) - X_d(t)) = -K_r (X(t) - X_d(t)) \tag{4.16}$$

avec P solution d'une équation de Ricatti. K_r est appelé le coefficient de contre-réaction (cf. figure 4.11). Cette solution n'existe que si les matrices Q et R sont symétriques définies positives (R strictement positive). Dans la pratique, on prendra des matrices diagonales qui ont pour particulité de répondre à cette exigence.

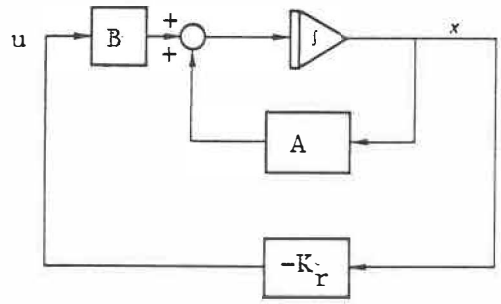


Figure 4.11: Commande d'un système linéaire.

Les matrices de pondération sont de deux types. Q sert à souligner les états pour lesquels cette minimisation est plus importante tandis que R est utilisée pour diminuer la dépense d'énergie (carré de la tension), ce qui a pour effet d'augmenter le temps de réponse. Toute la difficulté dans cette commande est de choisir les bonnes valeurs de Q et R.

La contre-réaction permet de contrôler le véhicule. Elle permet aussi d'ajuster les caractéristiques désirées du véhicule. En effet, le véhicule a des constantes de temps

(τ) qui le caractérisent, et qui correspondent aux valeurs propres de la matrice A de l'équation 4.13. Le véhicule réagit. Lorsque le véhicule est commandé en boucle ouverte (sans contre-réaction), il réagit à une entrée (ici deux tensions de commande) avec un retard principalement dû à son inertie. Par contre, en boucle fermée (avec contre-réaction), l'entrée U dépend des états (cf. équation 4.16). L'équation 4.13 devient alors :

$$(4.13) \quad \text{et} \quad (4.16) \quad \Rightarrow \quad \dot{X}(t) = A\,X(t) - B\,K_r\,(X(t) - X_d(t))$$

$$\text{c-à-d} \quad \dot{X}(t) = (A - B\,K_r)\,X(t) - B\,K_r\,X_d(t) \tag{4.17}$$

La dynamique du système bouclé est caractérisée par les valeurs propres de la matrice $(A - B\,K_r)$. Elle est donc ajustable par K_r, c'est-à-dire par les matrices Q et R.

Appliquons ces résultats, à l'équation 4.13 et aux valeurs désirées 4.11. Les états à utiliser sont alors :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_g \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_d(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_D \\ \dot{\theta}_D \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

En choisissant pour l'équation 4.15 des matrices Q et R diagonales, nous obtenons le critère suivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\, q_1\,(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_D)^2 + q_2\,(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}_D)^2 + q_3\,(\alpha)^2 + r_1\,u_d^2 + r_2\,u_g^2\,]\,dt \tag{4.19}$$

avec q_1, q_2, q_3, r_1 et r_2 des coefficients de pondération.

Or ce critère ne tiend pas compte de la positions y. Pour en tenir compte, nous devrions l'y ajouter. Nous obtiendrions alors le critère quadratique suivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \quad [\, q_1\,(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_D)^2 + q_2\,(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}_D)^2 + q_3\,(\alpha)^2 + q_4\,(y)^2 + r_1\,u_d^2 + r_2\,u_g^2\,]\,dt \tag{4.20}$$

Or l'équation 4.14 nous indique que la position y n'est pas une fonction linéaire des états du système. Donc notre problème n'est pas linéaire. De plus la commande issue du critère 4.20 utilise, outre les états $\dot{\theta}_d$, $\dot{\theta}_g$ et α, la sortie y (trois états – une sorties). Avec cette formulation, le calcul du coefficient de contre-réaction K_r ne peut s'effectuer de façon immédiate. Plusieurs solutions sont alors possibles, par exemple la linéarisation autour d'un point de fonctionnement, la linéarisation externe ou la formulation bilinéaire (en supposant α petit). Elles sont malheureusement complexes à mettre en œuvre. Une autre, plus simple, serait d'introduire de façon heuristique la sortie y dans la commande calculée pour optimiser le critère quadratique 4.19, de sorte que les non-linéarités introduites par celle-ci soient négligeables. Une heuristique de ce type a déjà été utilisée pour commander un véhicule légèrement différent [NC88]. Nous choisirons donc un régulateur optimal pour le sous-système linéaire ($\dot{\theta}_d$, $\dot{\theta}_g$, α) avec une heuristique tenant compte de la non-linéarité y.

4.3.4 Commande heuristique réalisée

Dans la section 4.3.1, nous avons défini la trajectoire à suivre comme étant une suite de segments de droites, chacun étant caratérisé par un repère curviligne [S]. Cette trajectoire est définie par une distance y entre la véhicule et le segment, par une orientation α et par une vitesse désirée $\dot{\theta}_D$. Il est indispensable que la commande tienne compte de y.

En effet supposons que le véhicule doive suivre un segment quelconque de la trajectoire à vitesse constante (cf.figure 4.12). Les coordonnées du véhicule sont y et

α dans le repère [S]. Supposons que le véhicule dérive à gauche du segment, alors $\alpha > 0$. La commande issue de la contre réaction va agir de sorte que l'état α, c-à-d l'orientation, tende vers 0. Mais comme elle ne tiend pas compte de y le véhicule va tendre vers une trajectoire dont l'angle est égal à α, mais qui est décalée (cf. figure 4.13).

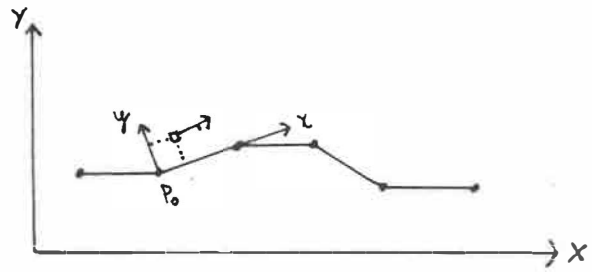


Figure 4.12: Trajectoire désirée et position du véhicule.

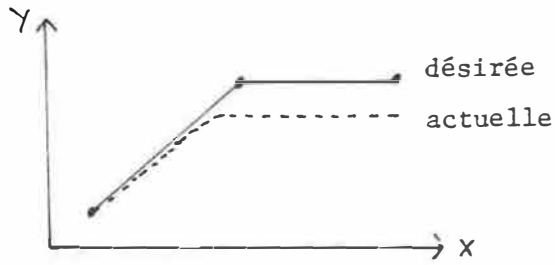


Figure 4.13: Trajectoire à partir de l'orientation seulement.

Dans ce cas, l'erreur sur la position est $y > 0$. Une commande tenant compte de y tenderait à ramener le véhicule sur la trajectoire désirée. Une solution heuristique est de pondérer l'orientation α avec la position y de sorte que les non-linéarités introduites aient une influence faible vis-à-vis de α. Nous pouvons alors remplacer la troisième ligne de $X(t) - X_d(t)$ de la commande (équation 4.16), avec $X(t)$ et $X_d(t)$ de l'équation 4.18, qui est (α) par :

$$(la.\alpha + ly.y) \qquad \text{avec} \quad la + ly = 1 \text{ (sans perte de généralité)} \tag{4.21}$$

Les coefficients de pondération la et ly permettent d'indiquer l'importance que l'on accorde aux paramètres. Dans notre cas, deux considérations nous poussent à donner une importance relative à l'orientation. En effet, d'une part nous avons supposé dans notre raisonnement que les non linéarités sont faibles, et d'autre part l'équation 4.14 nous indique que y dépend de α et non l'inverse, donc α est un paramètre plus sensible que y. Les valeurs de ces coefficients seront déterminées expérimentalement.

Si l'on suppose que la non-linéarité introduite dans la commande par y est faible, on peut calculer la valeur du coefficient de contre-réaction dans le cas linéaire, sans la positions y, puis introduire ensuite cette non-linéarité dans la commande. Cette commande est heuristique car la non-linéarité n'a pas été prise en en compte. Cette commande peut être représentée par le schéma de la figure 4.14.

Ici, les valeurs de α et y utilisées pour le contrôle sont issues de mesures extérieures, réalisées à l'aide du théodolite par exemple. Il est en effet absurde de se baser sur des mesures internes pour évaluer la position et l'orientation du fait du glissement et des variations des paramètres car les erreurs s'accumulent (intégration de la vitesse). Par contre, les erreurs sur le vitesse sont plus faibles car elle s'accumulent peu (intégration de l'accélération). Il est donc suffisant d'utiliser les vitesses de rotation des roues pour contrôler la vitesse.

4.4 Estimation de la position

Dans la section 4.3.3, le véhicule est contrôlé d'une part en vitesse avec la mesure directe sur les roues de $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$, et d'autre part en position et orientation par une mesure externe de y et α. Celle-ci s'effectue à l'aide du théodolite.

On peut soulever le problème suivant : *Que se passe-t-il si une balise manque ou si*

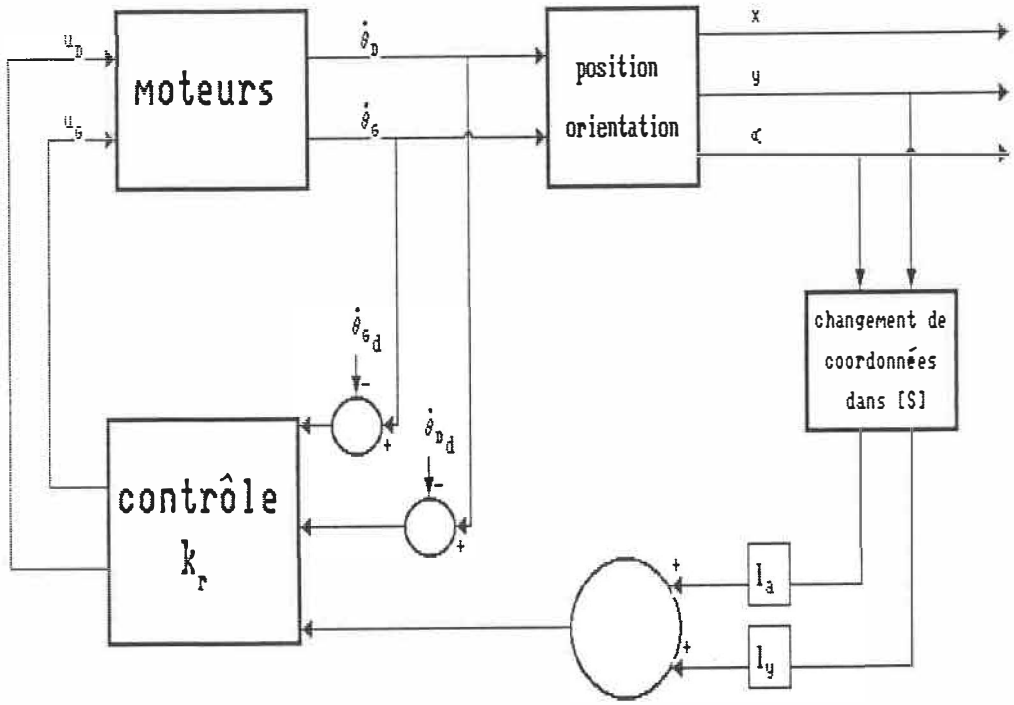


Figure 4.14: Schéma général du système et de sa commande.

la période entre deux mesures est trop longue? La réponse est que sans informations sur sa localisation, le véhicule erre en aveugle. Il est donc indispensable de se munir d'un deuxième procédé de localisation indépendant du premier. Nous pouvons utiliser pour cela une centrale inertielle. Celle-ci peut nous fournir l'information désirée avec une très bonne précision à court terme. Mais si l'on suppose un comportement à priori du véhicule et si l'on considère le peu de degrés de liberté (trois), on peut se contenter d'extrapoler la position par la connaissance de l'orientation. Dans ce cas, un gyroscope suffit. De plus, ce capteur est beaucoup moins onéreux qu'une plate-forme. Nous choisirons cette dernière solution.

Le gyroscope a pour avantage, nous l'avons souligné dans la section 4.1.2, d'être proprioceptif, donc indépendant de l'extérieur. Il ne nous fournit par contre qu'une

information, l'orientation α_g par rapport à un axe. De plus, ce capteur, très précis à court terme, subit une dérive à long terme. Deux solutions sont alors possibles pour estimer la position y à partir de l'orientation : un intégrateur ou un observateur. Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi la première solution.

L'intégrateur extrapole la position au temps $[t, t+\Delta t]$ connaissant soit les positions aux temps t et $t - \Delta t$, soit la vitesse et la position au temps t. Δt est ici la période d'échantillonnage de la commande. Dans le premier cas il réalise une extrapolation linéaire simple sans connaître le comportement du véhicule à t tandis que dans le deuxième cas il utilise la seule vitesse disponible, celle des roues, pour estimer la position. Cette méthode est plus séduisante car le comportement du véhicule à t est connu, mais elle ne peut malheureusement pas tenir compte du glissement des roues. Faute de mieux, elle a été retenue. La position y dans le repère [S] lié au segment de droite que désire suivre le véhicule est alors calculée par la relation :

$$y = \frac{R_a}{2} \int_0^t (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_g) \sin \alpha_g \, d\tau \tag{4.22}$$

Mais comme cette méthode ne se base pas sur un modèle du véhicule, elle est incapable de prévoir les réactions de celui-ci.

4.5 Conclusion

À la lumière de notre étude, le schéma de pilotage du véhicule que nous implanterons est le suivant. Un contrôleur linéaire utilise comme entrées les vitesses de rotation des roues du véhicule ainsi que la positions y et l'orientation α. Un système hybride de capteurs comprenant un théodolite et un gyroscope est utilisé pour mesurer la position et l'orientation. Entre deux mesures du théodolite, le gyroscope fournit l'orientation et permet d'estimer la position. Comme la position y est une fonction

non-linéaire de la commande, le schéma de pilotage contient des non-linéarités qui peuvent déstabiliser la commande. Nous allons donc simuler ce système avec différentes perturbations afin de tester la robustesse de notre commande.

Chapitre 5

Simulations

Nous nous proposons de simuler le véhicule avec la commande et le système hybride de capteurs que nous avons étudiés. Nous étudierons leurs comportement sur différentes trajectoires en présences de perturbations. Nous tirerons enfin des conclusions quant au modèle et à la commande utilisés.

5.1 Caractéristiques des éléments

Le véhicule que nous modélisons est la plate-forme mobile d'expérimentation du département de génie électrique. Le théodolite est un émetteur-récepteur infra-rouge monté sur une table tournante et le gyroscope est un modèle pour avions. Les balises sont toutes placées sur le même mur d'un couloir rectiligne.

Véhicule :

- largeur entre les roues $l = 0,53\,m$
- longueur $0,84\,m$
- largeur $0,66\,m$

- hauteur $0,77\,m$
- poid $80\,kg$
- rayon des roues $R_g = R_d = 0,15\,m$
- constantes de temps $\tau_d = \tau_g = 0,5\,s$
- gain statique $K_{m\,d} = K_{m\,g} = 1,7\,rad/s/v$
- vitesse maximale $V_{max} = 2\,m/s$

Théodolite :

- portée $P = 40\,m$
- erreur angulaire maximum $\varepsilon = 1\,^o$
- période entre deux mesures Δt_T (cf. texte)

Couloir :

- largeur $L = 25\,m$
- distance inter-balises $d = 20\,m$

Gyroscope :

- dérive aléatoire $da = 1\,^o/h$
- période entre deux mesures Δt_G (cf. texte)

La distance inter-balises n'a pas été choisie par hasard. Nous supposons que les balises sont toutes placées sur le même côté du couloir, ce qui correspond au cas 2

étudié dans la chapitre 2. Nous estimons que le véhicule reste dans une zone de 50 % autour du milieu du couloir et que l'erreur de mesure angulaire est inférieure ou égale à ε. Nous souhaitons être assuré que l'erreur de position soit inférieure à un niveau de précision $N = 1\,m$ dans une proportion $P = 95\,\%$ de la surface de cette zone. En consultant la figure 2.21, on en déduit la distance inter-balises $d = 20\,m$. L'erreur d'orientation est alors relevée à partir de la figure 2.28. On relève pour les valeurs de P et d précédentes un niveau de précision $N = 2,5$. L'erreur d'orientation est égale à $\varepsilon + \frac{N}{2} = 2,25\,^{o}$.

5.2 Commande choisie

Notre simulation s'effectue sur ordinateur, c'est-à-dire dans un espace discrétisé. Nous devons donc transformer toutes nos équations continues afin qu'elles puissent être utilisées. La commande étant discrétisée, il nous faut définir le pas d'échantillonnage, c'est-à-dire la période Δt entre deux mesures des capteurs où entre deux actions. Celle-ci doit être au moins deux fois plus faible que la plus petite constante de temps du système, mais pas trop petite pour ne pas augmenter démesurément de temps de calcul. Nous avons fixé :

- période d'échantillonnage $\Delta t = 0,01\,s$

Nous devons faire une distinction entre les deux modèles du véhicule que nous avons décrit. Le premier, illustré par les équations 4.2 à 4.9, est le modèle de base qui servira pour notre simulation car il permet tous les ajustements possibles. Le deuxième, décrit par les équations 4.13 et 4.14, est celui qui est utilisé pour calculer les coefficients de contre-réaction car il permet de tenir compte à la fois de l'orientation α et des vitesses de rotation $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$ grâce à des simplifications (variables symétriques). Ces deux modèles sont identiques, seule leur représentation est différente. Néanmoins, nous utiliserons séparément l'équations 4.2 dédoublée (droite et

gauche) et l'équation 4.4 plutôt que l'équation 4.13 car cette formulation permet une plus grande souplesse lors de la simulation. Notons que les équations 4.3 et 4.4 sont simplifiées elles-aussi car elle ne tiennent pas compte des glissements possibles. Ce glissement peut être interprété comme un ralentissement de la vitesse des roues. Nous l'introduirons donc dans les équations 4.3 et 4.4 car elles servent à calculer l'orientation et la position du véhicule. Nous appellerons ces glissements G_d et G_g.

Ayant traité ces deux modèles dans le cas continu, nous devons maintenant les transformer pour une utilisation dans le cas discret. Les équations utilisées dans ces deux modèles sont du type :

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,U(t)$$

Le calcul des matrices correspondant à A et B dans le cas discret (resp. Ad et Bd) s'effectue à l'aide des formules décrites dans l'annexe B.3. Soit $X(i)$ l'état et $U(i)$ l'entrée à la période i (au "temps" i), ces équations deviennent alors :

$$X(i+1) = Ad\,X(i) + Bd\,U(i) \tag{5.1}$$

Appliquons cette méthode à l'équation 4.2. Dédoublons cette équation afin d'obtenir une équation pour chaque moteur. Nous obtenons le système :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_d \\ \ddot{\theta}_g \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_d} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_g \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} \frac{K_{m\,d}}{\tau_d} & 0 \\ 0 & \frac{K_{m\,g}}{\tau_g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_g \end{pmatrix}(t) \tag{5.2}$$

Ce qui donne en discret :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_g \end{pmatrix}(i+1) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_d}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Delta t}{\tau_g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_g \end{pmatrix}(i) +$$

$$\begin{pmatrix} K_{m\,d}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta t}{\tau_d}}) & 0 \\ 0 & K_{m\,g}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta t}{\tau_g}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_g \end{pmatrix}(i) \tag{5.3}$$

L'équation 5.3 est utilisée pour calculer les vitesses angulaires des deux moteurs. Le calcul de l'orientation, des positions et des vitesses s'effectue à partir des équations 4.3 à 4.9 et du glissement comme suit :

$$(4.4) \quad \text{et} \quad (4.5) \quad \Rightarrow \quad \alpha(i+1) = \alpha(i) + \frac{\Delta t}{l}\left(\dot{\theta}_d(i)R_dG_d - \dot{\theta}_g(i)R_gG_g\right) \tag{5.4}$$

$$(4.3) \quad \text{et} \quad (4.6) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(i) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_d(i)R_dG_d + \dot{\theta}_g(i)R_gG_g)\cos\alpha(i) \tag{5.5}$$

$$(4.3) \quad \text{et} \quad (4.7) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(i) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_d(i)R_dG_d + \dot{\theta}_g(i)R_gG_g)\cos\alpha(i) \tag{5.6}$$

$$(4.8) \quad \Rightarrow \quad x(i+1) = x(i) + \dot{x}(i) \times \Delta t \tag{5.7}$$

$$(4.9) \quad \Rightarrow \quad y(i+1) = y(i) + \dot{y}(i) \times \Delta t \tag{5.8}$$

Pour calculer la matrice de contre-réaction discrète K_rd, il nous faut transformer l'équation 4.13 à l'aide du logiciel MATLAB. Nous utilisons pour cela la commande "C2D" qui transforme un système d'équation continu en discret. À partir de toutes ces équations, nous pouvons expliciter la commande choisie dans le chapitre précédent.

Nous avons choisi une commande dont les paramètres sont choisis de façon optimale à l'aide d'un critère quadratique. Il nous faut fixer les valeurs des matrices de pondération Q et R du critère de l'équation 4.15. Ces matrices doivent être symétriques définies positives. Nous les avons choisies diagonales :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Ces matrices permettent de calculer à l'aide d'une équation de Riccati les coefficients de la matrice de contre-réaction discrète $K_r d$:

$$K_r d = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Ce calcul, effectué à l'aide de la fonction "DLQR" de MATLAB, sert à fixer un jeu de paramètres qui permet au système à la fois d'être suffisament rapide (mais pas trop) et de suivre la trajectoire désirée. Nous désirons mettre l'accent sur q_3 qui correspond à la variable α de l'équation 4.13, c'est-à-dire à la somme pondérée de l'orientation et de la position. Les variables $\dot{\theta}_d$ et $\dot{\theta}_g$ correspondent aux vitesses de rotation droite et gauche. Comme l'asservissement en vitesse est moins important que celui en position et que d'autre part la vitesse désirée est constante, nous pouvons assumer que $q_2 = q_3$ est plus faible que q_1. Les coefficients relatifs aux tensions u_d et u_g permettent de mettre l'accent sur l'énergie consommée par les moteurs. Plus r_1 et r_2 seront élevés, plus l'énergie consommée sera moindre, donc plus le temps de réponse du véhicule sera long. De plus, comme les moteurs sont symétriques, $r_1 = r_2$.

Après plusieurs essais, nous avons fixé les matrices Q et R comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

MATLAB fournit alors la matrice de contre-réaction discrète :

$$K_r d = \begin{pmatrix} 1,74 & -0,08 & 4,84 \\ -0,08 & 1,74 & -4,84 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Les valeurs propres de la matrice $(A - B\,K_r)$ du système continu bouclé de l'équation 4.13 avec la matrice K_r du cas continu correspondant à $K_r d$ sont alors $-0,61$; $-7,84$ et $-7,86$. La valeur propre la plus proche de l'axe imaginaire du plan complexe conditionne la dynamique dominante du système.

5.3 Schéma de simulation

Afin de pouvoir simuler le déplacement du véhicule, nous devons établir un schéma de calcul qui doit tenir compte des capteurs, des moteurs et de la commande. Nous imposerons un schéma séquentiel. Dans une première étape de simulation, nous utiliserons uniquement le théodolite pour localiser le véhicule. Dans ce cas, la période entre deux mesures est égale à celle d'échantillonage ($\Delta t_T = \Delta t$). Puis nous introduirons le gyroscope pour estimer la position entre deux mesures du théodolite. Dans ce cas, la période du gyroscope est Δt_G ($= \Delta t$) et celle du théodolite Δt_T ($> \Delta t$).

La trajectoire à suivre est représentée par une suite de segments de droite, chacun défini par un repère [S] (cf. section 4.3.1). Ce repère est caractérisé par le point d'origine P_0 du segment (dans le sens du déplacement) et par une orientation β par rapport au repère [C] lié au couloir. Le repère est noté (x_0; y_0; β). La commande a pour but de minimiser à la fois la distance entre le véhicule et le segment (c-à-d minimiser y dans [S]) et l'orientation du véhicule par rapport au segment (c-à-d minimiser α dans [S]). L'équation 4.10 permet de passer de [C] à [S].

5.3.1 Sans gyroscope

Dans ce premier schéma, le gyroscope n'est pas utilisé. La mesure de la position et de l'orientation s'effectue à l'aide des balises et du théodolite. Le théodolite est donc aussi rapide que la commande, ce qui correspond au cas idéal. Nous supposerons que le couloir dans lequel le véhicule se déplace est horizontal. Ce schéma est explicité à la figure 5.1.

Ce schéma réclame quelques explications :

1. Lors de l'initialisation, les coordonnées (x; y; α) et les vitesses de rotation

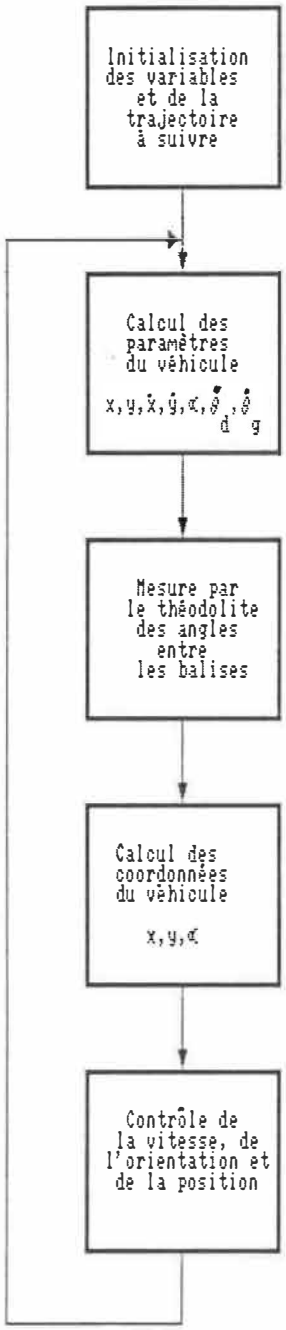


Figure 5.1: Schéma de la simulation sans gyroscope.

(θ_d ; θ_g) initiales du véhicules sont fixées. Idem pour les segment définissant la trajectoire (x_0; y_0; β). Les trois balises A, B, et C servant à la mesure des angles sont désignées. La trajectoire à suivre est définie.

2. Afin de recréer le plus parfaitement possible le comportement du véhicules, quelques perturbations sont introduites dans le modèle. Nous supposons que celles-ci sont bornées en amplitude, donc le bruit utilisé est uniforme. Nous imposons une dynamique de ± 10 % concernant les paramètres des moteurs τ_d, τ_g, $K_{m\,d}$ et $K_{m\,g}$ et nous supposons que les glissements peuvent évoluer dans l'intervalle $[0,8\,;1]$.

3. Le théodolite mesure l'angle que fait chaque balise avec l'axe longitudinal du véhicule. Ces angles, pour les trois balises A, B, et C sont respectivement φ_A, φ_B, φ_C. Les mesures angulaires sont entachées d'erreurs. Cette erreur angulaire, supposée bornée, est appelée ε. Nous n'avons pas tenu compte des erreurs de disposition des balises, des fausses détections, des balises manquantes, etc. Nous supposons donc que le capteur détecte les bonnes balises à coup sûr. D'autre part, lorsque le véhicule franchit la frontière de la zone utile associée à trois balises, le théodolite doit rechercher la prochaine balise en avant, appelée D, et opérer un changement de triplet de balises $(A\ B\ C) \rightarrow (B\ C\ D)$. La balise A est alors abandonnée.

4. Nous ne tiendrons pas compte du mouvement du véhicule durant une rotation du théodolite. Nous supposerons que la mesure des angles est instantanée tous les Δt_T.

5. À partir de ces mesures angulaires, les coordonnées du véhicules (x, y, α) sont calculées. Un filtrage est effectué afin de réduire l'effet du bruit de mesure. Nous utilisons pour cela un filtre du deuxième ordre.

6. Le contrôleur utilise les valeurs issues du théodolite ainsi que les vitesses an-

gulaires mesurées sur les roues pour produire une commande permettant au véhicule de suivre la trajectoire désirée.

5.3.2 Avec gyroscope

Dans ce schéma, le gyroscope est utilisé avec une période égale à celle de la commande, tandis que la période du théodolite est augmentée. Entre deux mesures de celui-ci, le gyroscope fournit l'orientation du véhicule, ce qui permet, à l'aide des vitesses angulaires, d'estimer la position du véhicule. À chaque mesure du théodolite, la position et l'orientation du gyroscope sont réactualisées. Ce schéma est explicité à la figure 5.2.

De même que précédement, quelques explications s'imposent :

1. Le gyroscope mesure l'orientation de l'axe longitudinal du véhicule par rapport à un axe fixe dans un repère galiléen lié à la terre. Il tourne donc par rapport à elle. De plus, Il subit une dérive aléatoire proportionnelle au temps due aux imperfections de construction. Cette dérive, que nous supposons bornée est égale à da. Le calcul de cet orientation est effectué en ajoutant la dérive à l'orientation fournie par le modèle du véhicule.

2. L'intégration de la position est très simpliste. En effet, il nous est impossible de prendre en compte les glissements. Le niveau de confiance accordé à cette intégration se dégrade donc au cours du temps.

3. Cette position estimée est corrigée à chaque mesure du théodolite. De même pour l'orientation de l'axe du gyroscope.

4. De même que dans dans le cas sans gyroscope, nous ne tiendrons pas compte du mouvement du véhicule durant une rotation du théodolite.

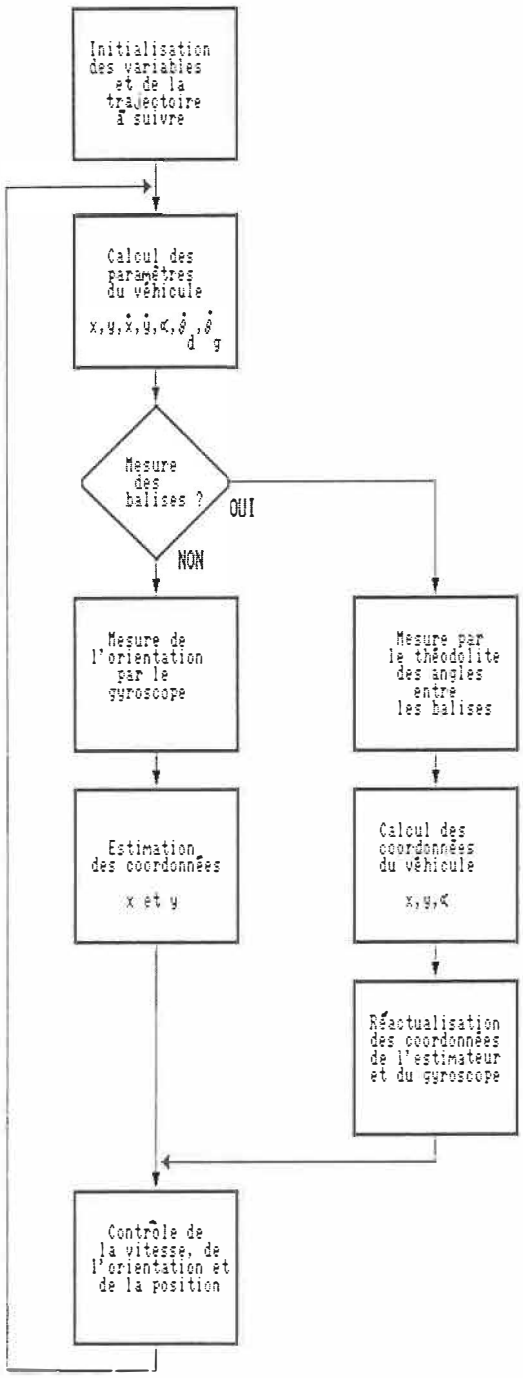


Figure 5.2: Schéma de la simulation avec gyroscope.

Les simulations effectuées à l'aide de ce système hybride de capteurs vont permettre de mesurer l'influence de la période Δt_T sur la qualité de l'asservissement.

5.4 Résultats

Nous avons réalisées des simulations avec différentes conditions initiales et différentes trajectoires. Nous utiliserons pour cela des échelons (brusques changements de consigne) et des rampes (accroissements de la consigne). Nous traiterons d'abord le cas sans gyroscope, puis nous étudierons les effets de l'intégration avec gyroscope. Enfin, nous tirerons des conclusions sur l'effet de la réactualisation par le théodolite.

5.4.1 Sans gyroscope

Plusieurs simulations ont été effectuées afin d'ajuster certains paramètres et de visualiser les réactions du véhicule. Pour les évaluer, le plus simple est d'appliquer au véhicule des commandes simples, puis d'étudier sa réaction. Nous choisirons des échelon de vitesse, de position et d'orientation. Comme nous n'utilisons que le théodolite, nous posons alors $\Delta t_T = \Delta t$.

5.4.1.1 Ajustement des paramètres de pondération avec un échelon d'orientation

Le véhicule avance à $2\,m/s$ sur le segment de droite d'origine [S] ($x_0 = 10$; $y_0 = 12,5$; $\beta = 0$). À la position $x = 50\,m$, le véhicule glisse et présente une orientation $\alpha = 10\,^o$. La commande tend alors à ramener le véhicule sur le segment. Nous déterminerons à l'aide d'essais les valeurs des paramètres la et ly. Nous illustrerons notre propos à l'aide de deux exemples extrèmes.

Contre-réaction sans y. Seule l'information d'orientation est utilisée pour contrôler le véhicule c'est-à-dire sans y (cf équation 4.21). Nous posons pour cela $ly = 0$. Comme nous l'avons mentionné dans la section 4.3.3 (cf. figure 4.11), cette commande particulière va faire tendre l'orientation vers zéro. Par contre, la position y tend vers une valeur légèrement différente de la valeur désirée ($12,9$ au lieu de $12,5$). Le véhicule reste néanmoins sur un axe parallèle aux murs (cf. figure 5.3).

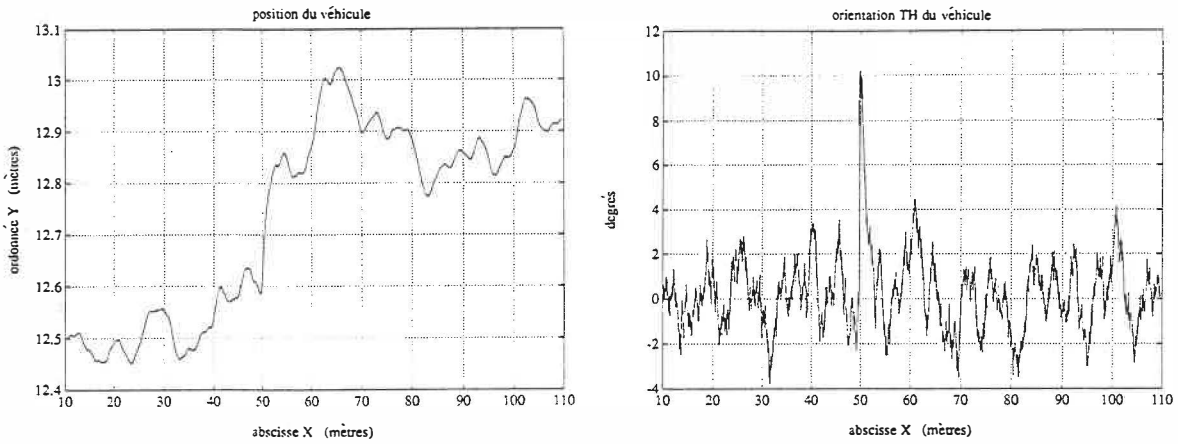


Figure 5.3: Contre-réaction sans y.

Contre-réaction sans α. Cette fois, seul y est utilisé dans la contre-réaction ($la = 0$). Les non-linéarités introduites par cette variable sont alors prédominantes. Sous l'effet des perturbations, le système se met à osciller, ce qui se traduit par une mise en rotation du véhicule (cf. figure 5.4). L'information de α est donc indispensable.

Contre réaction-mixte. À la lumière de ces deux derniers essais, on réalise l'importance d'un bonne pondération entre la position et l'orientation dans l'équation 4.21 afin que le contrôleur fonctionne parfaitement. Nous cherchons maintenant à faire varier les pondérations de sorte que le contrôle soit le meilleur. L'équation 4.28 nous indique que celui-ci tiend compte de deux variables qui sont exprimées dans le repère [S] lié au segment de droite à suivre. La connaissance de y et de α permet d'assurer

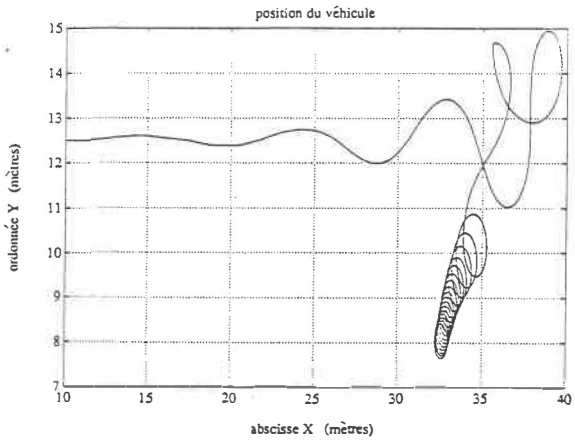


Figure 5.4: Contre-réaction sans α.

une commande qui, si elle ne garanti pas que $x \longrightarrow x_{\textit{désiré}}$, permet au moins que dans [S] $y \longrightarrow 0$ et $\alpha \longrightarrow 0$. En effet, le but de la commande est de corriger les écarts par rapport à la trajectoire, et non de forcer le véhicule à se rendre en un point donné à un instant donnée. Après plusieurs essais (cf. figure 5.5), nous avons choisi le jeu de paramètres suivant :

$$la = 0,8 \ ; \ ly = 0,2 \tag{5.13}$$

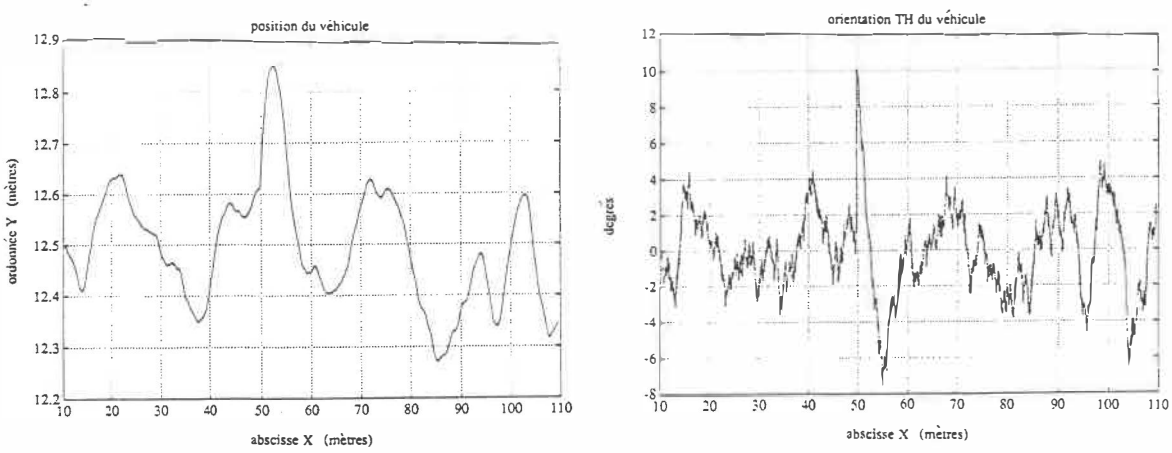


Figure 5.5: Contre-réaction mixte.

Le véhicule reste sur le segment [S] en dépit de l'échelon d'orientation. Le niveau de bruit créé par le théodolite reste dans les limites prévues. En effet, l'observation

des données fournies par le théodolite nous indique l'erreur de positionnement est égale au maximum à $0,8\ m$ et l'erreur d'orientation à $2\ ^o$, ce qui est inférieur aux valeurs maxima imposées dans la section 5.1 (resp. $1\ m$ et $2,25\ ^o$).

5.4.1.2 Échelon de vitesse

Le véhicule est à l'arrêt au milieu du couloir, au début du segment [S] ($x_0 = 10$; $y_0 = 12,5$; $\beta = 0$). Son axe est parallèle au couloir, son orientation est donc $\alpha = 0$. On désire qu'il atteigne sa vitesse maximale tout en suivant une ligne droite parallèle au couloir (axe des x). La vitesse V_x passe de 0 à $2\ m/s$ en deux secondes. Nous pouvons alors mesurer la constante de temps du véhicule. Il nous suffit de remarquer que la courbe de la vitesse (cf. figure 5.6) ressemble à celle d'un système du premier ordre. La valeur à 63% est égale à la constante de temps. Nous la trouvons égale à $0.25\ s$, ce qui est la moitié de celle en boucle ouverte. Quant au véhicule lui-même, il reste parallèle au couloir comme prévu.

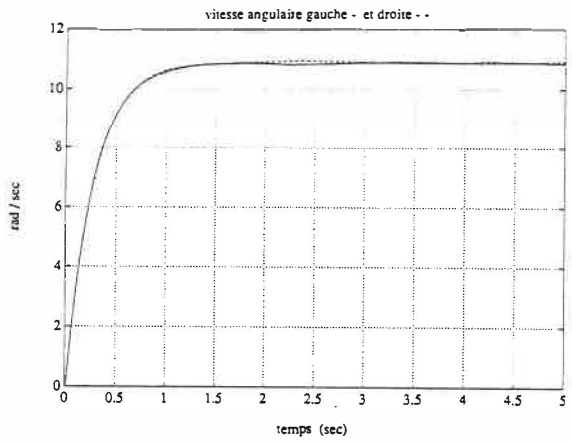


Figure 5.6: Échelon de vitesse.

5.4.1.3 Échelon de position

Le véhicule avance à $2\ m/s$ au milieu du couloir, parallèlement aux murs. À la position $x = 40\ m$, la position désirée y du véhicule passe de $12,5\ m$ à $15\ m$. La commande réagit pour que le véhicule suive cette nouvelle consigne. L'orientation passe par un maximum de $30\ ^o$ puis décroît vers zéro (cf. figure 5.7). L'allure de la position y ressemble à celle d'un premier ordre. Nous pouvons alors considérer que le véhicule atteind la consigne après $15\ m$.

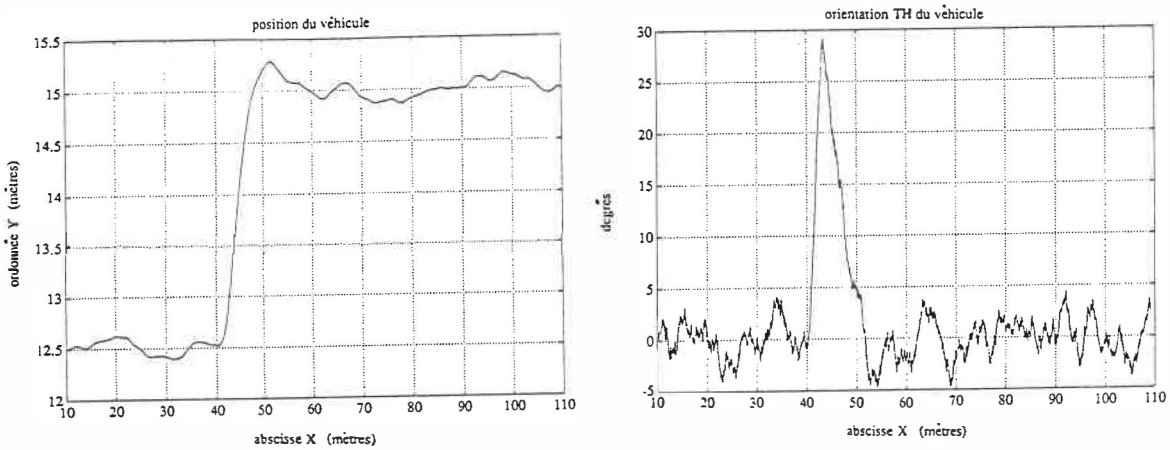


Figure 5.7: Échelon de position.

5.4.1.4 Conclusion

Ces simulations nous montrent que le contrôleur que nous avons bâti est efficace. Il nous assure en effet une bonne réponse du véhicule à différentes consignes. La pondération entre y et α ne destabilise pas le système en dépit du bruit sur ces mesures. Le bruit sur les mesures de position et d'orientation fournies par le théodolite est supérieur à celui que l'on mesure sur le véhicule et qui est visible sur les courbes, mais reste dans les limites imposées. Ce type de mesure avec un théodolite serait parfait si celui-ci était aussi rapide que le contrôleur. Or ceci est loin d'être le cas. Pour palier à cette lenteur, nous devons ajouter un intégrateur de position utilisant

un gyroscope. Le couplage de ces deux capteurs s'appelle un système hybride.

5.4.2 Avec gyroscope

L'ajout du gyroscope permet d'utiliser un théodolite basse fréquence. Dans un premier temps, le gyroscope seul servira à estimer la position du véhicule à l'aide de l'intégrateur discuté dans la section 4.4. Puis, les mesures du théodolite seront utilisées pour contrer la dérive de l'intégrateur. Nous étudierons l'effet de la période Δt_T du théodolite au travers de deux essais ($\Delta t_T = 1$ et $0,1\,s$). Dans tous les cas, la période Δt_G du gyroscope est égale à celle de discrétisation Δt. Nous simulerons le véhicule sur des échelons et des rampes.

5.4.2.1 Sans théodolite

Échelon de position. Le véhicule avance à $2\,m/s$ au milieu du couloir, parallèlement aux murs. À la position $x = 40\,m$, la position désirée y du véhicule passe de $12,5\,m$ à $15\,m$. La commande réagit pour que le véhicule suive ces consignes. Or ce sont les positions issues de l'intégrateur qui sont utilisées par le contrôleur, donc la commande va suivre l'intégrateur et non le véhicule. On obtient les résultats de la figure 5.8. Nous pouvons en tirer les conclusions suivantes. (i) Les perturbations qui agissent sur le véhicule le ralentissent par rapport à sa position estimée en x. La différence entre les positions x estimées et réelles ne cesse de croître. (ii) Les changements de consigne ne pouvant être prévus par l'intégrateur, il s'ensuit une erreur de position y croissante avec l'amplitude de l'échelon. (iii) La croissance de ces erreurs est environs de $0,15\,m$ par mètre parcouru. (iv) La forme des courbes de la position estimée et de celle du véhicule est la même. On peut donc considérer que l'intégration est bonne.

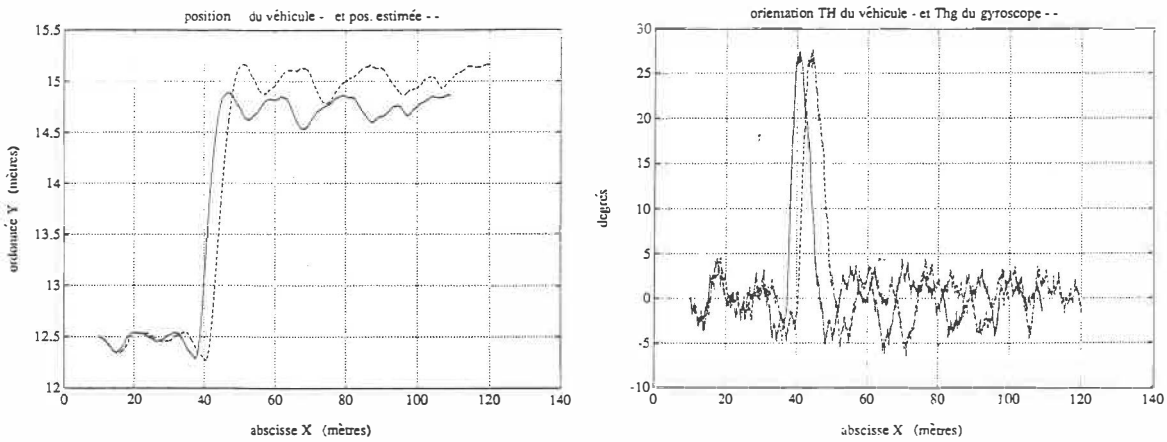


Figure 5.8: Échelon de position sans théodolite.

Rampe de position. Le véhicule avance à $2\,m/s$ au milieu du couloir, parallèlement aux murs. À la position $x = 40\,m$, la consigne appliquée consiste à suivre une droite inclinée pour faire passer le véhicule de la position $y = 12,5$ à celle $y = 17,5$; et ce en $70\,m$. La pente de la droite est donc $\alpha \simeq 4\,°$. La rampe accentue l'effet de dérive de l'intégrateur, qui croît avec le temps. L'intégrateur suit la consigne appliquée, tandis que le véhicule s'en éloigne. La croissance des erreurs sur x et y est la même que pour l'échelon.

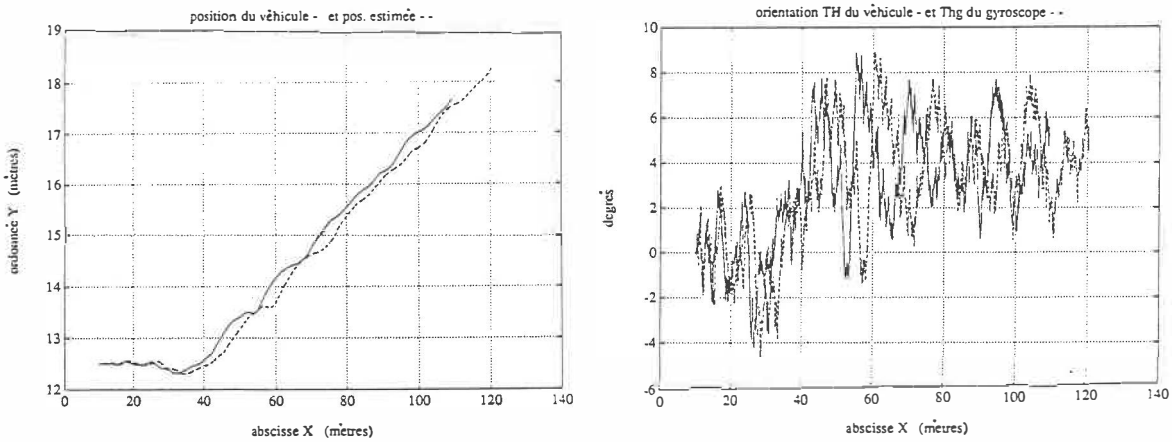


Figure 5.9: Rampe de position sans théodolite.

Nous pouvons conclure à partir de ces simulations que l'intégrateur se comporte de façon satisfaisante lorsque le véhicule suit une trajectoire parallèle aux murs. Sa

dérive sur x croît néanmoins avec le temps et tout changement de consigne se traduit par une dérive sur y. Cette dérive étant relativement faible sur une courte distance ($0,15\ m$ par mètre parcouru), le pilotage du véhicule est donc possible. Il convient néanmois de réactualiser périodiquement l'intégrateur.

5.4.2.2 Avec théodolite

Le véhicule suit la même rampe que précédemment. L'intégrateur est réctualisé cette fois tous les Δt_T. Nous réaliserons deux essais avec des Δt_T différents, soit $1\ s$ et $0,1\ s$.

$\Delta t_T = 1\ s$. Dans ce cas, la trajectoire du véhicule suit exactement la trajectoire désirée (cf. figure 5.10). La trajectoire de l'intégrateur, quant à elle, oscille de part et d'autre de celle du véhicule et les positions x coïncident. Les "bosses" que l'on apperçoit sur la figure proviennent de la position y fournie par le théodolite lors de la réactualisation. En effet, le bruit de mesure produit un bruit sur les valeurs de y qui se traduit par une déviation de la valeur de y. Si, de surcroît, une mesure du théodolite est entachée d'une erreur importante, alors l'information erronée de l'intégrateur va faire dévier le véhicule. Mais comme ce bruit est centré, la somme de ces déviations est nulle. La réactualisation par le théodolites est, on le voit, indispendable pour commander le véhicule.

$\Delta t_T = 0,1\ s$. Cette fois la durée entre deux réactualisation est plus courte. Comme dans le cas précédent, le véhicule suit la trajectoire désirée (cf. figure 5.11). L'augmentation du nombre de réactualisations permet au véhicule de mieux suivre la trajectoire désirée car il n'a pas le temps de dévier entre deux mesures. Il n'y a aucune différence quant à l'orientation.

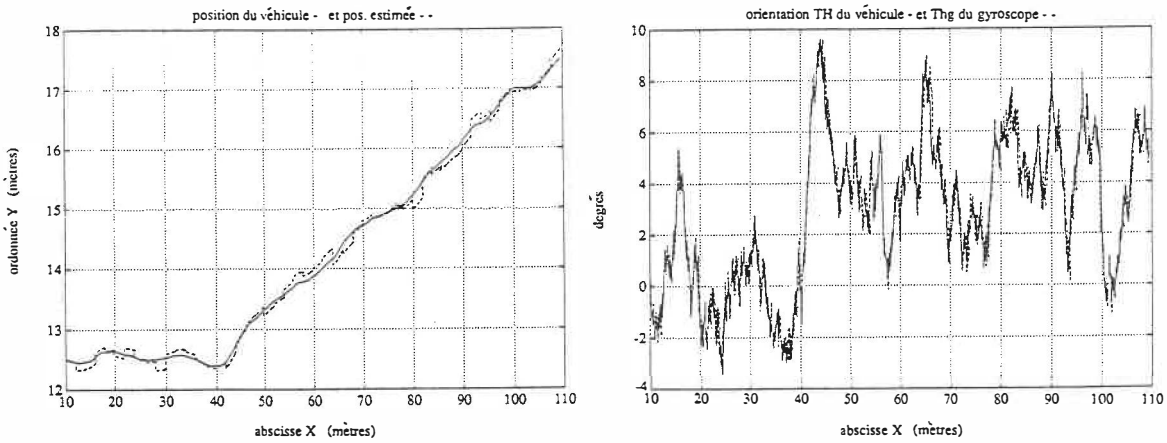


Figure 5.10: Avec théodolite, $\Delta t_T = 1\ s$.

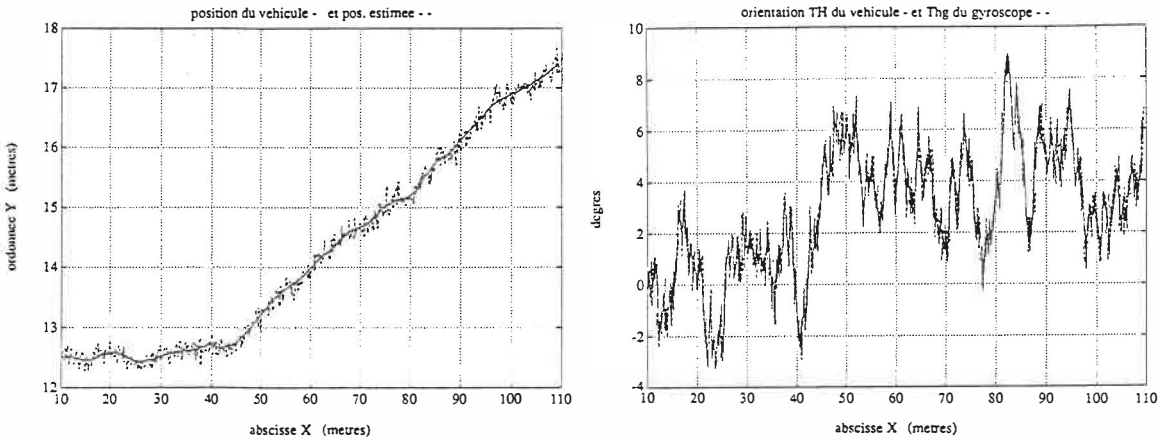


Figure 5.11: Avec théodolite, $\Delta t_T = 0,1\ s$.

Un danger provient du théodolite lui-même. En effet, tous les Δt_T, le théodolite détecte les balises. Ces balises étant indicernables, il est nécessaire de connaître la position approximative du capteur pour pouvoir sélectionner les trois bonnes balises $(A\ B\ C)$ servant au calcul de la position. Si Δt_T est trop long, la position estimée risque d'être trop erronée pour assurer la détection certaine des bonnes balises. Si $\Delta t_T = 1\ s$, la distance parcourue est de $2\,m$ tandis que pour $\Delta t_T = 0,1\ s$, celle-ci est de $0,2m$. Compte tenu de l'imprécision de l'intégrateur, de la vitesse de déplacement et de l'espacement inter-balises, la période $\Delta t_T = 1\ s$ est suffisante pour assurer une bonne détection.

Le rôle du théodolite est aussi de réactualiser l'orientation fournie par le gyroscope. Celui-ci subit à la fois une dérive aléatoire da et une dérive due à la rotation de la terre. Pour une durée $\Delta t_T = 1\ s$, l'effet de la dérive aléatoire est $\frac{\Delta t_T \times da}{3600} \simeq 0,0002\ ^o$ et celui de la rotation de la terre $\frac{\Delta t_T \times 360}{3600 \times 24} \simeq 0,004\ ^o$. Ces dérives sont, on le voit, négligeables. Néanmois, il convient de réactualiser sous peine de voir cette erreur augmenter au cours du temps.

5.4.2.3 Conclusion

Le gyroscope seul ne permet pas la commande du véhicule. En effet, en plus de sa propre dérive s'ajoute une dérive de l'intégrateur qui croît avec la distance parcourue. Après quelques mètres, l'information fournie par ce capteur devient inutilisable. La combinaison de gyroscope et du théodolite sous la forme d'un système hybride s'est avéré être une bonne solution car la précision du théodolite permet d'améliorer celle de l'intégrateur tandis que l'intégrateur autorise le pilotage entre deux mesures du théodolite. La précision du système hybride dépend principalement de la période entre deux mesures du théodolite. Si le système étudié avait été entièrement linéaire, cette combinaison aurait pu être optimisée par l'utilisation d'un filtre de Kalman pouvant estimer les différents paramètres du véhicule et ainsi permettant l'ajustement optimal des paramètres de contre-réaction.

5.5 Étude économique

À la lumière de notre simulation, le système hybride de capteurs donne de bons résultats. Il permet d'optimiser l'utilisation conjointe d'un gyroscope inertiel et d'un théodolite associé à des balises. Il convient d'étudier l'aspect économique de cette combinaison, c'est-à-dire de déterminer si cette combinaison est viable finacièrement. Pour cela, nous comparerons les coûts des balises, du théodolite, du gyroscope, d'un

système inertiel et d'un système hybride. Les coûts indiqués sont des ordres de grandeur et ne tiennent pas compte d'une installation spécifique.

Les balises. Dans notre étude, nous avons supposé que les balises étaient situées dans un couloir sur un même côté et nous avons pris l'exemple du couloir de mine. Différents types de balises existent (passives, actives, à infra-rouge, à radio-fréquence, etc.). La moins chère, la balise réfléchissant la lumière infra-rouge polarisée, coûte environs 45 $ dans un format de $1\ m \times 5\ cm$. Un autre coût à considérer a trait à l'installation dans le couloir de la mine. Si l'on tient compte du temps mis par l'ouvrier pour se rendre à son lieu de travail, des mauvaises conditions de travail et de la durée du vissage sur le mur, alors le coût d'installation est environs de 25 $ par balise. Le coût total unitaire est donc de 70 $.

Le théodolite. Il est composé d'un émetteur-récepteur infra-rouge ne pouvant détecter que les balises tournant la lumière polarisée de $90\,^{o}$, soit monté sur un plateau tournant, soit fixe et avec un miroir tournant. Pour une portée de $20\ m$, le coût approximatif est de 500 $ (source : Électro-Mag Ltée). Le miroir tournant, plus robuste que le capteur tournant coûterait aux environs de 300 $ avec l'électronique et la mécanique de détection si l'on désire une période de rotation $\Delta t_T = 1\ s$ et une précision $\varepsilon < 1\,^{o}$. Avec une période dix fois plus petite, la vitesse de rotation est dix fois plus grande, donc l'accélération centrifuge est cent fois plus grande. De plus le signal à détecter est dix fois plus court, donc l'énergie à détecter est dix fois plus faible, donc le capteur doit être dix fois plus sensible. Le coût serait alors beaucoup plus important. Pour $1\ s$, le coût est approximativement de 800 $

Le gyroscope. Différents types de gyroscopes ont été décrits dans le chapitre 3. Les plus courants sont le gyroscope inertiel et le gyroscope laser, mais le premier

type est maintenant considéré comme dépassé. Le gyroscope inertiel bas de gamme coûte à peu près 10.000 $ avec une dérive $da = 1\,°/h$ et un temps moyen entre deux pannes de 1000 h, tandis qu'un gyroscope laser à trois axes utilisable en "strapdown" coûte environs 120.000 $ avec une dérive $da = 0,07\,°/h$ et un temps moyen entre deux pannes de 12.000 h (source : Bendix). Dans notre application, l'intégrateur n'utilise le gyroscope seul qu'entre deux mesures du théodolite, soit 1 s, donc un gyroscope inertiel bas de gamme suffit. Le coût sera donc de 10.000 $.

Le système inertiel. Si l'on désire s'affranchir des balises sur une grande distance, par exemple dans le cas de groupes de trois balises distants les uns des autres, il faut disposer d'un système de localisation inertiel sophistiqué. Celui-ci constitué de trois gyroscopes laser et de trois accéléromètres pendulaires, possède sur une précision de l'ordre de $100m$ pour la position et de $0,4°$ pour l'orientation sur une distance parcourue de 10 km [HAR86]. Ce type de système inertiel est très coûteux, de l'ordre de 200.000 $, car il doit être capable de n'utiliser aucune information externe durant une longue période. Avec l'utilisation de capteurs complémentaires formant un système hybride, une précision moyenne, voir faible du système inertiel suffit pour déterminer la position et l'orientation du véhicule.

Le système hybride. Nous avons le choix entre la combinaison système inertiel-théodolite et celle gyroscope-théodolite. La première permet de se servir moins fréquement des balises que la deuxième, mais en contre-partie elle est plus onéreuse. Pour les comparer, nous allons calculer le coût annuel d'utilisation. Si l'on désire amortir la plate-forme par exemple en cinq ans, le coût annuel est de 40.000 $. Nous ne tiendrons pas compte de l'entretien dans ces calculs. Pour le théodolite, prenons l'exemple d'une mine d'uranium en Ontario (Denison Mine). Les balises sont placées au fur et à mesure de l'extension du couloir. Nous déterminerons donc l'avancement l annuel du couloir, puis en connaissant la distance entre deux balises, nous estimerons

le coût annuel. La mine est constituée de chambres placées de part et d'autre de couloirs. Chaque chambre a une largeur de 25 m, donc la largeur du front de taille est approximativement de 50 m. La hauteur des chambres est d'environs 10 m. On peut estimer que le véhicule de transport fait quatre aller-retours par heure et que sa capacité est de 8 m^3. Une année contient environs 8000 h de travail. Le nombre de voyages est alors $\frac{50 \times 10 \times l}{8} = 8000 \times 4$, ce qui donne $l \approx 500\ m$. Si l'on pose une balise tout les 20 m et que chacune coûte 70 \$, alors le coût annuel d'implantation des balises est d'environs 2.000 \$. Avec le même amortissement sur cinq ans, les coûts annuels par véhicule du théodolite et du gyroscope sont respectivement de 200 \$ et 2.000 \$. Ces coûts sont à comparer avec celui du véhicule qui est d'environs 300.000 \$. La combinaison que nous avons choisi, c'est-à-dire gyroscope-théodolite, est la moins chère et de plus remplit bien son rôle, pour autant que les balises soient disposées sur tout le chemin parcouru par le véhicule.

5.6 Conclusion

Ces simulations nous ont permis d'évaluer la pertinence de notre commande appliqués à un système faiblement non-linéaire. Cette commande donne de bons résultats sur quelques exemples d'échelons et de rampes, ceci en dépit des perturbations qui sont appliquées sur les paramètres et sur les mesures. Le système hybride de capteurs, comprenant un théodolite et un gyroscope, est un bon compromis tant pour la précision obtenue que sur le coût. Il serait toutefois utile d'effectuer d'autres simulations en faisant varier les paramètres selon des lois statistiques plus proches de la réalité.

Chapitre 6

Conclusion

Ce mémoire de maîtrise a traité de la localisation et du pilotage d'un véhicule autonome dans une mine. La localisation est effectuée à l'aide d'un système hybride de capteurs comprenant un théodolite associé à des balises et un gyroscope. Nous avons dans un premier lieu évalué l'influence des erreurs de mesure sur les valeurs de position et d'orientation fournies par le théodolite. Puis à partir de ces erreurs, nous avons tracé des abaques permettant le placement optimal de balises sur les murs d'un couloir de mine selon trois schémas possibles. Nous avons ensuite envisagé l'utilisation d'une centrale inertielle pour localiser le véhicule. Cette idée, intéressante mais complexe, fut remplacée par l'utilisation d'un gyroscope pour estimer la position du véhicule sur une courte distance. Un modèle simpliste d'un véhicule mû par deux moteurs électriques a été utilisé afin de permettre la simulation de la combinaison du système de capteurs hybride théodolite-gyroscope. Une commande de type optimale avec retour d'état, permettant de tenir compte des non-linéarités du système, a été développée. Des simulations ont permis d'ajuster les paramètres, et des courbes illustrant la robustesse de la commande ainsi que la précision du système hybride ont été obtenues. Le choix de ce système hybride a aussi fait l'objet d'une étude précision/coût et il s'est avéré être le moins onéreux. Ce fut donc le bon choix.

Cette étude n'est malheureusement pas achevée. Il est indispensable d'utiliser un modèle plus réaliste de véhicule minier afin de se situer dans des conditions proches de la réalité. Un modèle plus poussé des perturbations que subit le système est nécessaire pour mieux comprendre l'influence de celles-ci sur la commande et ainsi pour aider à sa conception. Afin d'optimiser le système hybride, un filtre de Kalman est nécessaire car il peut estimer en temps réel les différents paramètres du véhicule et donc réactualiser les paramètres de contre-réaction en fonction des perturbations. Enfin des essais réels sont indispensables afin de tester la validité des algorithmes.

Les applications de cette étude sont multiples. L'intérêt d'un véhicule autonome pouvant suivre une route prédéterminée est justifié par la sécurité, la salubrité et par les coûts d'utilisation. En effet, dans une mine, les aménagements nécessaires aux humains (ventilation forcée, consolidation, etc.) s'expriment sous forme de coût, et l'absence de personnel implique une réduction de ces coûts. Un véhicule autonome est donc une solution économiquement viable. Les applications de ce type de véhicule débordent largement le cadre des mines; le tranport du minerai dans un chantier ou bien la surveillance de l'enceinte d'un camp militaire peuvent aussi être envisagés. Les seules limites sont celles de l'imagination ...

Bibliographie

[AM84] Gary ADAMS and Conrad E. MUELLER. *Laser Gyro Land Navigation System Performance Predictions and Field Results.* IEEE Position Location And Navigation Syposium, pp. 81–90, 1984.

[AS82] Dr. W. AUCH and E. SCHLEMPER. *The Fiber Gyro as Core of a Future Optronic Navigation System.* IEEE Position Location And Navigation Syposium, pp. 254–259, 1982.

[DC86] C. DURIEU and H. CLERGEOT. *Navigation of a Mobile Robot with Ultrasonic Beacons.* Intelligent Autonomous Systems, an International Conference Amsterdam, pp. 203–208, 1986. École Nationale Supérieure, France.

[FAU71] Pierre FAURE. *Navigation inertielle optimale et filtrage statistique.* Méthodes mathématiques de l'informatique, Dunod, 1971.

[FGS87] C. FOULARD, S. GENTIL, and J. P. SANDRAZ. *Commande et régulation par calculateur numérique.* Eyrolles, cinquième édition, 1987.

[GIR84] Georges GIRALT. *Mobile Robot.* Robotics and Artificial Intelligence, NATO, pp. 365–393, 1984. LAAS, Toulouse, France.

[HAR86] D. G. HARRIS. *A Low Cost Inertial/GPS Integrated Approach to Land Navigation.* IEEE Position Location And Navigation Syposium, pp. 425–430, 1986.

[HAR87] Scott Y. HARMON. *The Ground Surveillance Robot GSR: an Autonomous Vehicule Designed to Transit Unknown Terrain.* IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3(3): pp. 266–279, June 1987. Naval Ocean System Center, San Diego, USA.

[HPS88] R. HURTEAU, A. PICHÉ, and M. St-AMANT. *Experimental Results of the Tele-Operation and Automatic Guidance of LHD's.* First IFAC Workshop on Advances in Automation of Underground Hard Rock Mining, 1988. École Polytechnique de Montréal.

[LAW76] N. LAWHEAD. *Position Location Systems Technology.* IEEE Position Location And Navigation Syposium, pp. 1–12, 1976.

[MIG86] Pascal MIGAUD. *Contrôle d'exécution de plans d'actions pour un Robot mobile.* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, 1986.

[MOR82] Hans P. MORAVEC. *The CMU Rover.* AAAI, pp. 337–380, 1982. Carnegie-Mellon, Pittsburgh, USA.

[MR88] Clare D. McGILLEM and Theodore S. RAPPAPORT. *Infra-red Location System for Navigation of Autonomous Vehicule.* IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1236–1238, 1988.

[NC88] Winston L. NELSON and Ingemar J. COX. *Local Path Control for an Autonomous Vehicule.* IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1504–1510, 1988. AT&T Bell Laboratories, USA.

[RL86] Ulrich REMBOLD and Paul LEVI. *Sensor and Control for Autonomous Robots.* Intelligent Autonomous Systems, an International Conference Amsterdam, pp. 79–95, 1986. Universität Karlruhe, RFA.

[SAN86] Romano De SANTIS. *Théorie des systèmes de commande linéaires.* Édition de l'École Polytechnique de Montréal, septembre 1986.

[TFH84] T. TSUMARA, N. FUJIWARA, and M. HASHIMOTO. *A New Method of Position and Heading Measurement of Ground Vehicule by Use of Laser and Corner Cube.* 34th IEEE Vehicular Technology, pp. 271–276, 1984.

[TH86] T. TSUMARA and M. HASHIMOTO. *Positioning and Guidance of Ground Vehicule by Use of Laser and Corner Cube.* IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1335–1342, 1986.

[Vec89] Vectavib. *Accéléromètre silicium.* 60 chemin des Mouilles, BP 46, 69132 Écully cedex, France, 1989.

Annexe A

Formules de calcul

A.1 Lieu des points P tels que l'angle BPA soit constant

Soit un triangle ABP tel que $AB = cte$, déterminons le lieu des points tels que $\angle BPA = cte$. Utilisons la règle des sinus sur le triangle APB (cf. figure A.1).

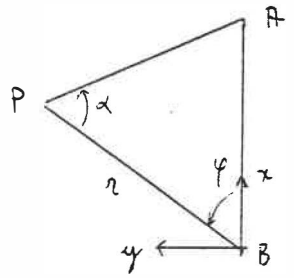


Figure A.1: Règles des sinus

$$\frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin(\pi - \varphi - \alpha)}{r}$$

$$\text{c-à-d} \quad r = \frac{AB\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\alpha}$$

Si l'on désire que les distances r er AB restent positives, il faut fixer les intervalles suivants pour les angles : $0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ et $0 < \alpha < \pi$.

Déterminons les coordonnées cartésiennes de P dans le repère lié à B.

$$\text{Posons} \quad P : \begin{cases} x = & r\cos\varphi \\ y = & r\sin\varphi \end{cases}$$

C'est-à-dire en remplaçant r par sa valeur :

$$P : \begin{cases} x = & \frac{AB\sin(\varphi+\alpha)\cos\varphi}{\sin\alpha} \\ y = & \frac{AB\sin(\varphi+\alpha)\sin\varphi}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\text{c-à-d} \quad \begin{cases} x = & \frac{AB}{2}\,\frac{\sin(2\varphi+\alpha)+\sin\alpha}{\sin\alpha} \\ y = & \frac{AB}{2}\,\frac{\cos\alpha-\cos(2\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\text{c-à-d} \quad \begin{cases} x = & \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2\sin\alpha}\sin(2\varphi+\alpha) \\ y = & \frac{AB}{2\tan\alpha} - \frac{AB}{2\sin\alpha}\cos(2\varphi+\alpha) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

C'est l'équation d'un arc de cercle (trait plein) de centre $(\frac{AB}{2}, \frac{AB}{2\tan\alpha})$ et de rayon $\frac{AB}{2\sin\alpha}$ (cf. figure A.2).

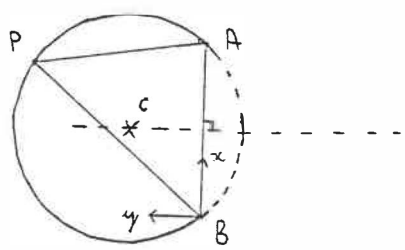


Figure A.2: Arc de cercle tel que $\alpha = cte$

Remarque 1 Il faut utiliser des angles orientés, sinon on obtient deux arc de cercle symétriques par rapport à la droite AB, un pour α et un pour $-\alpha$.

Remarque 2 Si $\varphi > \pi - \alpha$, on obtient l'arc de cercle en traits hachurés qui correspondrait à un angle $\alpha' = \pi - \alpha$ (cf. figure A.2).

Remarque 3 Le centre de l'arc de cercle est sur la bissectrice de la droite AB

A.2 Détermination des angles d'Euler

Étant donné que toute rotation peut se décomposer en trois rotations élémentaires sur trois axes orthogonaux. Ces angles, en général appelés angles d'Euler, sont utilisés pour calculer la matrice de transformation M_1 pour passer des repères R_a à R_a. Ce passage s'effectue par trois rotations successives θ_1 (lacet), θ_2 (tangage) et θ_3 (roulis) autour des axes z, y et x (cf. figure A.3).

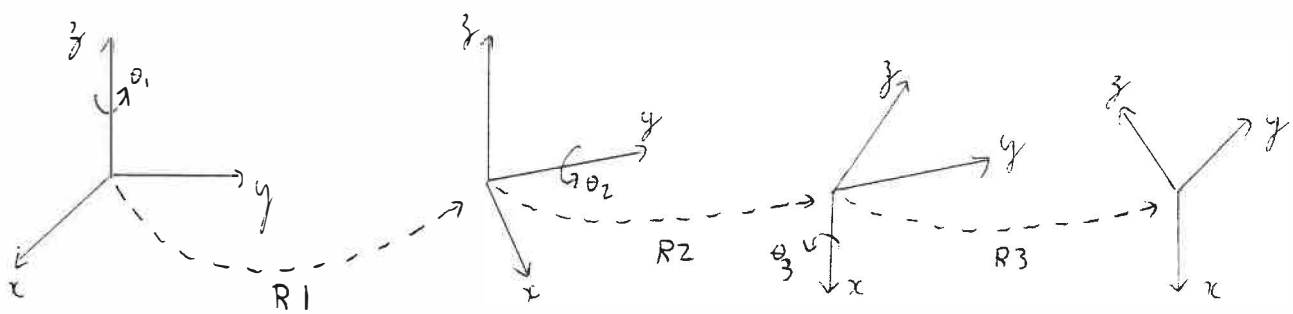


Figure A.3: Angles d'Euler

Soient R_1, R_2 et R_3 les opérateurs correspondants.

$$R_1 = \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C3 & -S3 \\ 0 & S3 & C3 \end{pmatrix}$$

avec $C1 = \cos\theta_1$, $S1 = \sin\theta_1$, etc.

Posons $M_1 = R_3 \times R_2 \times R_1$.

$$\text{Alors} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C3 & -S3 \\ 0 & S3 & C3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c-à-d} \quad M_1 = \begin{pmatrix} C2 & 0 & S2 \\ S3S2 & C3 & -S3C2 \\ -C3S2 & S3 & C3C2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c-à-d} \quad M_1 = \begin{pmatrix} C2C1 & -C2S1 & S2 \\ S3S2C1 + C3S1 & -S3S2S1 + C3C1 & -S3C2 \\ -C3S2C1 + S3S1 & C3S2S1 + S3C1 & C3C2 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

La matrice de transformation M_1 est une matrice de rotation pure (sans translation ni homothétie). De ce fait, elle est *orthogonale*, c'est-à-dire que : $M_1^{-1} = M_1'$.

A.3 Calcul d'erreur : méthode analytique

Le point R a pour coordonnées polaire le couple (r, φ). Ces coordonnées dépendent des angles α et β mesurés par le théodolite et sont calculées à l'aide des équation 2.9, 2.10 et 2.11. Connaissant les erreurs de mesure sur α_0 et β_0, nous pouvons différentier au premier ordre les coordonnées de R. Cette différentiation nous permet d'exprimer les variation de r et φ en fonction de celles de α et β.

Rappelons les formules pour calculer la position :

$$r = \frac{AB \sin(\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} \tag{A.2}$$

$$\tan \varphi = \frac{BC \sin(\theta + \beta) \sin \alpha - AB \sin \beta \sin \alpha}{BC \cos(\theta + \beta) \sin \alpha + AB \sin \beta \cos \alpha} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi - \alpha \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases} \tag{A.3}$$

$$\text{mais si} \quad \alpha = \pi \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \varphi = & 0 \\ r = & \frac{BC \sin(\theta+\beta)}{\sin \beta} \end{cases} \tag{A.4}$$

Calculons les différentielles du premier ordre de r et φ :

$$\begin{cases} dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta \end{cases} \tag{A.5}$$

Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial r}{\partial \beta}$:

$$(A.2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \alpha} = AB \frac{(1+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}) \cos(\varphi+\alpha) \sin\alpha - \sin(\varphi+\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ \frac{\partial r}{\partial \beta} = AB \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cos(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha} \end{cases} \tag{A.6}$$

Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$:

$$(A.3) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arctan u \qquad \text{avec} \quad u = \frac{BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha}{BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\sin\beta\cos\alpha}$$

Alors $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \dfrac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{1+u^2}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \dfrac{\frac{\partial u}{\partial \beta}}{1+u^2}$

donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{(BC\sin(\theta+\beta)\cos\alpha - AB\sin\beta\cos\alpha)(BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\sin\beta\cos\alpha)}{(BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\sin\beta\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{-(BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha)(BC\cos(\theta+\beta)\cos\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha)}{+(BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha)^2}$$

c-à-d $$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{AB.BC\sin(\theta+\beta)\sin\beta - AB^2\sin^2\beta}{AB^2\sin^2\beta + BC^2\sin^2\alpha + 2.AB.BC\sin\alpha\sin\beta\cos(\theta+\beta+\alpha)}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{(BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\cos\beta\sin\alpha)(BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\sin\beta\cos\alpha)}{(BC\cos(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\sin\beta\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{-(BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha)(-BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha + AB\cos\beta\cos\alpha)}{+(BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha - AB\sin\beta\sin\alpha)^2}$$

c-à-d $$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{BC^2\sin^2\alpha - AB.BC\sin(\theta+\beta)\sin\alpha}{AB^2\sin^2\beta + BC^2\sin^2\alpha + 2.AB.BC\sin\alpha\sin\beta\cos(\theta+\beta+\alpha)}$$

En posant $\Delta r = dr$, $\Delta\varphi = d\varphi$, $\Delta\alpha = d\alpha$ et $\Delta\beta = d\beta$, on en déduit les variations de r et de φ autour de α_0 et β_0.

$$(A.5) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta r = \frac{\partial r}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial r}{\partial\beta}\Delta\beta \\ \Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Delta\beta \end{cases} \tag{A.7}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00290854 7