

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PROBLÈMES ASSOCIÉS À LA COMMANDE LINÉAIRE OPTIMALE
DES SYSTÈMES À RETARD.

par

Maher HAMMAMI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M. Sc. A.)

Décembre 1989

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58179-4

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

PROBLÈMES ASSOCIÉS À LA COMMANDE LINÉAIRE OPTIMALE
DES SYSTÈMES À RETARD.

Présenté par: Maher HAMMAMI

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A.

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Jules O'Shea, D.Ing. , président

M. André-B. Turgeon, D.Sc.

M. Richard Hurteau, D.Ing.

Sommaire

L'application pratique de la commande automatique s'est vite heurtée à une classe importante de systèmes dits héréditaires, ou systèmes comportants des retards. Ces derniers sont rencontrés dans divers domaines industriels d'application, notamment la fabrication du papier, la distillation, les réacteurs chimiques, etc ...

D'abord ce mémoire présente une recherche bibliographique approfondie des différentes approches utilisées pour la modélisation et le contrôle des systèmes linéaires avec retard pur.

Puis, on étudie l'influence des retards sur la commande quadratique par retour d'état dans une commande proportionnelle et proportionnelle-intégrale.

Ensuite, on présente une étude comparative entre les prédicteurs de Smith et de Moore avec un contrôleur de Palmor.

De même, nous présentons une étude et des améliorations aux prédicteurs proposés par Vogel et Chang.

Enfin, nous développons une extension de la structure de Vogel pour les systèmes de troisième ordre.

Abstract

First an extended bibliographical research is done on the different approaches used for modeling and control of linear systems with pure delay. After wich a study is made of the delay effect on the performance of state feedback quadratic controller with proportionnal, and proportionnal integral components. Following that we compare the Smith and Moore prediction with the Palmor controller. Also we show that both the Vogel and Chang propositions result in an improvement of the Smith predictor. Finaly we describe an extension of the Vogel proposition for third order systems.

Remerciements

Le présent travail a été effectué aux laboratoires de l'École Polytechnique de Montréal, sous les directives du chef de section d'Automatique Monsieur R. M. De Santis. Qu'il soit vivement remercié.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur A. Turgeon, qui a dirigé cette recherche. Je lui suis spécialement reconnaissant pour ses encouragements, ses nombreux conseils ainsi que pour sa disponibilité lors de la rédaction de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur J. O'Shea, pour ses encouragements amicaux, ainsi que l'honneur qu'il m'a fait de présider ce jury.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. Hurteau, d'avoir bien voulu m'honorer de sa présence sur ce jury.

Je tiens à remercier le chef du département et les professeurs de l'École Nationale des ingénieurs de Sfax-Tunisie pour m'avoir donné la chance de poursuivre mes études ainsi que la Mission Universitaire Tunisienne à Washington pour son support financier.

Je tiens à remercier mes parents, ma sœur et mes frères pour leur soutien moral.

Je veux remercier mes amis particulièrement Messieurs C. Fiouzi et S. Gingras pour leur aide.

Table des matières

Sommaire	iv
Abstract	v
Remerciements	vi
Liste des figures	xiii
Liste des symboles	xix
Introduction	1
1 Représentation des systèmes continus avec retard pur	4
1.1 Généralités	4
1.1.1 Fonction de transfert pour $\epsilon \geq \epsilon_r$	5
1.1.2 Fonction de transfert pour $\epsilon \leq \epsilon_r$	6
1.1.3 Relations générales	7
1.2 Échantillonnage retardé dans l'échantillonneur à pulsations	8
1.2.1 Structure	9
1.2.2 Équations d'état	9
1.2.3 Diagramme fonctionnel	11
1.3 Retard pur d'un nombre entier de périodes d'échantillonnage	11
1.3.1 Structure	11
1.3.2 Equations d'état d'une chaîne de décalage	12

1.3.3	Équations d'état	13
1.4	Retard pur de valeur quelconque	14
1.4.1	Structure	14
1.4.2	Équations d'état	15
1.5	Retard pur interne	16
1.5.1	Équations d'état	16
1.6	Choix de la période d'échantillonnage	19
1.6.1	Comportement dynamique du système continu à régler	19
1.6.2	Comportement dynamique du circuit de réglage	20
1.7	Amortissement relatif optimal	21
1.8	Système à régler du premier ordre avec petit retard pur	22
1.8.1	Système à régler avec élément de maintien	23
1.8.2	Choix d'un régulateur PI	23
1.8.3	Réponse harmonique	25
1.8.4	Lieu des racines	26
1.8.5	Amortissement relatif optimal	26
1.9	Les méthodes d'approximations	27
1.9.1	L'approximation de Padé du premier ordre	27
1.9.2	L'approximation de Padé du second ordre	28

2 Adaptation de la commande quadratique à retour d'état aux systèmes à retard **29**

2.1	Structures et algorithmes de commande à retour d'état	29
2.1.1	Commande à critère quadratique	29
2.2	Amélioration de la structure de commande	37
2.3	Influence du retard interne sur la commande	44
2.4	Conclusions	45

3 La compensation des systèmes à retard: les prédicteurs **47**

3.1	Introduction	47
3.2	Le prédicteur de Smith	48
3.2.1	Structure fonctionnelle et principes	48
3.2.2	Performances dynamique et statique	54
3.2.3	Conclusions	58
3.3	Le prédicteur analytique	60
3.3.1	Structure fonctionnelle et principes	60
3.3.2	Performances dynamique et statique	65
3.3.3	Conclusions	69
3.4	Le prédicteur analytique avec estimation de charge	71
3.4.1	Structure fonctionnelle et principes	71
3.4.2	Performance dynamique et statique	74
3.4.3	Conclusions	76
3.5	Le prédicteur analytique généralisé	77
3.5.1	Structure fonctionnelle et principes	77
3.5.2	Performances dynamique et statique	79
3.5.3	Conclusions	80
3.6	Première modification: Proposition de Vogel	81
3.6.1	Extension paramétrique de Vogel	83
3.6.2	Stabilité du prédicteur de Vogel	85
3.6.3	Adaptation du contrôleur de Dahlin	87
3.6.4	Le compensateur de Vogel avec modélisation imparfaite	89
3.6.5	Performance dynamique et statique	90
3.7	Deuxième modification: proposition de Chang	94
3.7.1	Structure fonctionnelle et principes	94
3.7.2	Performance dynamique	95
3.8	Extension pour les modèles du troisième degré	96
3.8.1	Structure fonctionnelle et principes	96

3.8.2	Stabilité de l'extension	98
3.8.3	Performance avec un contrôleur proportionnel	99
Conclusions		101
Bibliographie		103
A Commande à critère quadratique		107
A.1	Représentation d'état	107
A.1.1	Commande optimale	107
A.1.2	Calcul direct de la matrice d'anticipation pour une structure améliorée	112
A.2	Performance de la structure à retour d'état	113
A.2.1	Système du second ordre	114
A.3	Procédés comportant un retard pur interne ($= N_i T$)	125
A.3.1	Découpage des matrices de la représentation d'état	125
A.3.2	Calcul de la matrice "L"	130
A.3.3	Condition suffisante pour la simplification de calculs	130
B Étude comparative des prédicteurs de Smith et de Moore		135
B.1	Performance avec un contrôleur proportionnel	135
B.1.1	Comparaison des domaines de stabilité	135
B.1.2	Comparaison des régimes permanents	136
B.2	Performance avec un contrôleur proportionnel et intégral	143
C Modifications et améliorations du prédicteur de Smith		154
C.1	Propositions de Vogel et de Chang	154
C.1.1	Performances dynamique et statique du prédicteur de Vogel	154
C.1.2	Performance du prédicteur de Chang	160
C.1.3	Extension du prédicteur de Vogel: performances	160

D Traitements théoriques préalables à l'application du critère de Jury	165
D.1 Domaine de stabilité	165
E Les modèles de références méthodes de Ziegler et Nichols et de Cohen et Coon	170

Liste des figures

1.1	Système continu avec retard pur	4
1.2	Allure du signal de sortie d'un système continu avec retard pur	5
1.3	Schéma bloc équivalent pour un échantillonneur à pulsations avec re- tard ϵ_r	8
1.4	Représentation schématique de la structure	9
1.5	Allure d'un élément $x_i[k, \epsilon]$ et d'un élément $u_j[k, \epsilon]$	10
1.6	Diagramme strutrel des équations d'état d'un système	11
1.7	Représentation schématique de la structure	12
1.8	Chaîne de décalage	12
1.9	Représentation schématique de la structure avec retard pur de valeur quelconque	15
1.10	Domaine admissible dans le plan z pour les pôles dominants d'un système échantillonné	20
1.11	Domaine des pôles pour un amortissement optimal	22
1.12	Réponses harmoniques $F(j\Omega)$	25
2.1	commande proportionnelle et intégrale à retour d'état	39
3.1	Le prédicteur de Smith	48
3.2	Le prédicteur analytique sans estimation de charge	60
3.3	Le prédicteur analytique avec estimation de charge	71
3.4	Le prédicteur analytique généralisé	77
3.5	Le prédicteur de Smith discret	81

3.6	Le contrôleur de Dahlin	82
3.7	Modification du prédicteur de Smith suivant Vogel	85
3.8	Compensateur de Vogel avec modélisation imparfaite	89
3.9	Le prédicteur de Smith numérique modifié: compensateur de Chang	94
3.10	Extension pour des modèles du troisième degré avec modélisation imparfaite	96
A.1	Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 1$, $Q = 1 : 20$ $k_r = 1$	116
A.2	Sortie de la commande à retour d'état avec $R = 1$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$	116
A.3	Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 0.1$, $Q = 1 : 20$ et $k_r = 1$	117
A.4	Sortie de la commande avec retour d'état $R = 0.1$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$	117
A.5	Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 0.01$, $Q = 1 : 20$ et $k_r = 1$	118
A.6	Sortie de la commande à retour d'état avec $R = 0.01$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$	118
A.7	Lieu des racines pour la commande à retour d'état: PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)	119
A.8	Sortie de la commande à retour d'état: PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)	119
A.9	Lieu des racines pour la commande à retour d'état: PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 5$)	120
A.10	Sortie de la commande à retour d'état: PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 5$)	120
A.11	Sortie de la commande à retour d'état: PI ($R = 0.1$, $Q = 2$ et $Q_v =$ $0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)	121
A.12	Sortie de la commande à retour d'état: PI ($R = 1$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 :$ $0.02 : 0.1$ avec $k_r = 1$)	121

A.13	Sortie de la commande à retour d'état: PI ($R = 1$, $Q = 20$ et $Q_v = 0$: 0.02 : 0.1 avec $k_r = 1$)	122
A.14	Commande à retour d'état avec un contrôleur P.I	123
A.15	Sous-programme de simulation	124
B.1	Comparaison des domaines de stabilité +PS, +PA, PAEC dans le cas d'une modélisation parfaite ($N = M$, $K_p = K_m$) $\tau_m = \tau_p = 2$; $T =$ 0.25	138
B.2	Comparaison des domaines de stabilité du +PA, PS ($M = N = 1$ avec $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$) et avec une modélisation parfaite *PS *PA ($M = N$ et $K_p = K_m$)	138
B.3	Comparaison des domaines de stabilité du +PS et PA dans le cas d'une modélisation imparfaite $M = 1$, $N = 2$ avec une variation du gain du modèle	139
B.4	Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle (K_m)	139
B.5	Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle (K_m)	140
B.6	Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une modélisation imparfaite (N)	140
B.7	Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une modélisation imparfaite (N): erreur sur le retard	141
B.8	Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur la valeur de la constante de temps du modèle ($B = e^{\frac{-T}{\tau_m}}$)	141
B.9	Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur la valeur de la constante de temps du modèle ($B = e^{\frac{-T}{\tau_m}}$)	142
B.10	Domaines de stabilité du prédictor de Smith ($N = M$), $+(N = M =$ $1)$ et $*(N = 2 \ M = 1)$	145

B.11 Domaines de stabilité du prédicteur analytique ($N = M$), $+(N = M = 1)$ et $*(N = 2, M = 1)$	145
B.12 Choix de la valeur de b du contrôleur de Palmor à l'aide du lieu des racines du prédicteur analytique: modélisation parfaite (o zéros * pôles)	146
B.13 Influence de la valeur de b du contrôleur de Palmor sur la sortie lors d'une modélisation parfaite ($N = M, K_p = K_m$)	146
B.14 Application du théorème de Rouché au prédicteur de Smith avec une modélisation imparfaite ($N = M = 1, K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)	147
B.15 Application du théorème de Rouché au prédicteur de Smith avec une modélisation imparfaite ($M = 1, N = 2, K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)	147
B.16 Application du théorème de Rouché au prédicteur analytique avec une modélisation imparfaite ($N = M = 1, K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)	148
B.17 Application du théorème de Rouché au prédicteur analytique avec une modélisation imparfaite ($M = 1, N = 2, K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)	148
B.18 Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'un modèle parfait	149
B.19 Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une petite variation sur le retard ($N = 2$)	149
B.20 Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une grande variation sur le retard ($N = 5$)	150
B.21 Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une erreur sur la constante de temps du modèle ($\tau_m = 3$)	150
B.22 Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle ($K_m = 2$)	151
B.23 Comparaison des régulateurs de $-.Y_{PS}, +Y_{PA}, ..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'un modèle parfait avec ($K_\ell = 0.001$)	151

B.24	Comparaison des régulateurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une modélisation imparfaite ($K_I = 0.01$ $N = 5$)	152
B.25	Comparaison des régulateurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une modélisation imparfaite ($K_I = 0.001$ $N = 5$)	152
B.26	Lieu des racine pour le PAE avec un contrôleur proportionnel ($K_c = 0.454$ et $K_I = 1$) (o zéros * pôles)	153
C.1	comparaison des domaines de stabilité $\tau_1 = \tau_2$	156
C.2	Comparaison des domaines de stabilité $\tau_1 \neq \tau_2$	156
C.3	Comparaison des deux sorties avec $K_c = 15$ *PS -Vogel	157
C.4	Comparaison des deux sorties avec $K_c = 0.5$ *PS -Vogel	157
C.5	Comparaison entre deux différents contrôleurs PID $-Y_{PS}$ (classique) et Y_{PS} (Åström)	158
C.6	Comparaison entre les sorties des équations $+G_{VE}$, $-\bar{G}_{DC}$, $..G_{DC}$, Y_{PS} (classique) et $*Y_{PS}$ (Åström) $\lambda = 2$ et $\delta = 3$	158
C.7	Comparaison entre les sorties des équations G_{VE} , $-\bar{G}_{DC}$ $*Y_{PS}$ (Åström) pour $\lambda = 0.2$ et $\delta = 3$	159
C.8	Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 1$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite	161
C.9	Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 3$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite	161
C.10	Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 10$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite	162

C.11	Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström $\delta = 3$ Chang + Vogel avec une modélisation imparfaite $M =$ $1, N = 2$	162
C.12	Comparaison des domaines de stabilité du prédicteur de Smith modifié (+) et de l'extension +PS -extension	163
C.13	Comparaison des deux sorties avec $K_c = 7$ +PS -extension	163
C.14	Comparaison des deux sorties avec $K_c = 1$ +PS -extension	164
E.1	Modèle de référence de Ziegler et Nichols et de Cohen et Coon	170

Liste des symboles

A	: $B^N + K_m(1 - B)C$.
A^*	: $B^N + \frac{(1 - B^N)(1 - Bz^{-1})}{1 - B}$.
$A(z)$	: dénominateur de $G(z)$.
a_{lim}	: dépend de l'amortissement minimal et de la période d'échantillonnage.
B	: $e^{-\frac{T}{\tau_m}}$.
B'	: $e^{-\frac{T}{\tau_p}}$.
$B(z)$	: numérateur de $G(z)$.
$B(1)$	: $B(z) _{z=1}$.
C	: définie par l'équation (3.90).
$\hat{d}$	: estimé de la perturbation de charge.
$D(z)$	: transformée en Z de $\hat{d}_k$.
$\bar{d}$	: régime permanent de la perturbation de charge.
e	: signal d'erreur.
$\bar{e}$	: erreur du régime permanent.
F	: matrice de transition du système complet($\Phi(T)$).
F_0	: matrice de transition du système sans retard.
F_d	: matrice de transition du retard.
$F(z)$	: filtre passe-haut défini par l'équation (3.156).
G_c	: fonction de transfert du contrôleur.
G_{DC}	: contrôleur de Dahlin avec un modèle de second ordre.
$\bar{G}_{DC}$	: contrôleur conventionnel de Dahlin.
G_t	: fonction de transfert de la charge.
G_m	: fonction de transfert du modèle de premier ordre.
G_p	: fonction de transfert du processus.
$G(s)$	: fonction de transfert en Laplace du processus.
$G_0(s)$	: fonction de transfert en Laplace sans retard.
G_{SP}	: prédicteur de Smith discret avec un modèle de second ordre.
G_{VE}	: fonction de transfert du nouveau compensateur.
$G(z)$	: fonction de transfert en discret du processus de second ordre.

- H : bloqueur d'ordre zéro.
- H : matrice d'entrée discret du système complet.
- H_0 : matrice d'entrée du système sans retard.
- H_d : matrice d'entrée du retard.
- K_c : contrôleur proportionnel.
- k : k^{ieme} instant d'échantillonnage.
- K_I : constante d'intégration pour l'estimation de la charge.
- K_ℓ : gain du régime permanent de la charge.
- K_m : gain du régime permanent du modèle.
- K_p : gain du régime permanent du processus.
- k_r : nombre entier de périodes d'échantillonnages du retard.
- ℓ : perturbation de charge.
- $L(s)$: transformé de Laplace de ℓ .
- m : nombre d'entrées du procédé.
- N_i : retard pur interne ($N_i = n_i + 1$).
- p_i : pôles de la fonction de transfert.
- p : nombre de sorties.
- $P(z)$: modèle du processus sans retard du prédicteur de Smith.
- $Q(z)$: modèle du processus sans retard du nouveau compensateur.
- r : point d'opération.
- r_c : point d'opération calibré.
- $R(s)$: transformé de Laplace de r .
- $S(z)$: $\frac{G(z)}{Q(z)}$.
- T : période d'échantillonnage.
- T_r : retard pur quelconque.
- T_i : constante de temps du système continu.
- U : sortie du contrôleur en discret.
- u : sortie du contrôleur.
- x : état du système complet.
- x_0 : état du système sans retard.
- x_d : état du système avec retard pur.
- y : sortie du processus.
- y_m : sortie du modèle retardé.
- y_m^* : sortie du modèle non retardé.
- $\hat{y}_{k+N}$: sortie du processus prédit de N période d'échantillonnage.
- z^{-N} : retard du modèle en discret.
- z^{-M} : retard du processus en discret.
- $\bar{y}$: sortie du processus en régime permanent.
- $\bar{y}_m$: sortie du modèle en régime permanent.
- Y : transformé en Z de $\hat{y}_k$.
- Y_m : transformé en Z de $\hat{y}_{mk}$.
- Y_m^* : transformé en Z de $\hat{y}_{mk}^*$.
- $Y_p(z)$: transformé en Z de $\hat{y}_{k+N}$.

Alphabet grec

- α_0 : paramètre réel de $F(z)$ défini par l'équation (3.156)
- β_0 : paramètre réel de $F(z)$ défini par l'équation (3.156).
- γ : $\epsilon - \epsilon_r$.
- δ : constante de temps désirée de la réponse en boucle fermée.
- λ : constante de temps de Dahlin.
- θ_m : retard du modèle.
- θ_p : retard du processus.
- τ_m : constante de temps du modèle.
- τ_p : constante de temps du processus.
- w_i : pulsation des pôles complexes conjugués.
- ρ_i : pôle réel.
- ϵ_r : fraction d'une période d'échantillonnage $0 \leq \epsilon_r \leq 1$.
- ϵ : fraction de temps entre deux instants d'échantillonnage.

Introduction

L'application pratique de la commande automatique s'est vite heurtée à une classe importante de systèmes dits héréditaires, ou systèmes comportants des retards. Ces derniers sont rencontrés dans divers domaines industriels d'application, notamment la fabrication du papier, la distillation, les réacteurs chimiques, etc ...

Le traitement mathématique de système comportant des retards purs causent cependant d'importants problèmes. Au niveau des systèmes continus, la présence du retard conduit à une équation non transcendante. Ce n'est qu'à l'aide de certaines modifications de la structure de commande que l'on peut contourner le problème. La proposition de Smith demeure sur ce point de vue fort efficace. Elle consiste en la mise en place d'une chaîne parallèle " dite de prédiction " qui vient égaliser la chaîne du procédé et ainsi enrayer le retard.

Au niveau des systèmes échantillonnés, un retard important signifie une équation aux différences d'ordre élevé. Le placement des modes impose donc le contrôle d'un grand nombre de singularités et il faut donc une structure de rétroaction d'état fort élaborée. Encore là, l'idée originale de Smith offre de nombreux avantages et elle est utilisée avec succès dans la commande numérique.

Notre intention est donc d'explorer à fond les avenues qui s'offrent présentement aux ingénieurs dans la mise au point des boucles de commandes des systèmes à large retard.

Le premier chapitre de ce travail, présente le formalisme théorique nécessaire à l'expression des systèmes continus avec retard pur. Notre présentation décrit les diverses situations topologiques où se situe le retard: à l'entrée ou à la sortie du système puis le cas particulier d'un retard interne.

Le deuxième chapitre, décrit l'adaptation de la commande quadratique à retour d'état aux systèmes à retard. De même, une étude particulière définit les conditions préalables qui permettent de simplifier l'application de la commande quadratique aux systèmes ayant un retard interne.

Le troisième chapitre, présente une comparaison entre les prédicteurs de Smith et de Moore avec un contrôleur de Palmor. De même, nous présentons l'amélioration du prédicteur de Smith suivant les propositions de Vogel et de Chang. On étudie l'effet d'une modélisation imparfaite sur les différents prédicteurs, et nous décrivons une extension de la proposition de Vogel pour les systèmes du troisième degré.

Cette étude comporte des contributions importantes au niveau des aspects suivants :

- Recherche bibliographique sur les systèmes linéaires avec retard pur;
- Influence des retards sur la commande quadratique par retour d'état dans une commande proportionnelle et proportionnelle intégrale;
- Domaine de stabilité des prédicteurs de Smith et de Moore avec les contrôleurs proportionnel et proportionnel intégral de Palmor dans une modélisation parfaite et imparfaite;
- Comparaison des domaines de stabilité de Smith et la proposition de Vogel pour un processus de second ordre quelconque;
- Comparaison des sorties des prédicteurs Smith, Vogel et Chang avec un

contrôleur PID d'Åström;

- Une extension à la proposition de Vogel pour les processus de troisième degré avec une comparaison de son domaine de stabilité par rapport à celui du prédictor de Smith.

Chapitre 1

Représentation des systèmes continus avec retard pur

1.1 Généralités

Dans ce chapitre nous allons présenter le formalisme permettant de représenter les systèmes avec retard [18] [27] [43] [48].

Dans bien des cas de la pratique, le système physique continu possède un retard pur. Ceci est représenté schématiquement à la figure (1.1). La fonction de transfert $G(s)$ se définit normalement de la façon suivante:

$$G(s) = G_0(s)e^{-sT_r} \quad (1.1)$$

où $G_0(s)$ est la fonction de transfert rationnel du système continu en négligeant le retard pur et T_r est le temps correspondant au retard pur (dead time). Pour déterminer la fonction de transfert échantillonnée, on doit rapporter le retard pur T_r

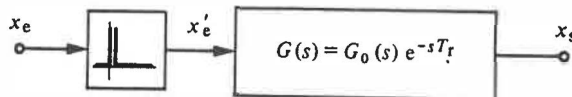


Figure 1.1: Système continu avec retard pur

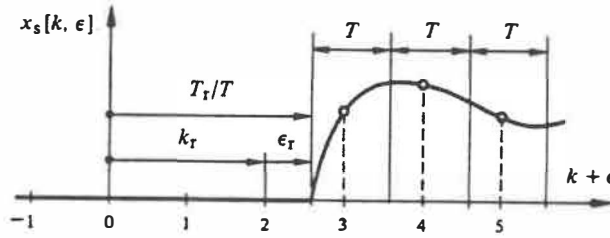


Figure 1.2: Allure du signal de sortie d'un système continu avec retard pur

à la période d'échantillonnage T selon la relation:

$$\frac{T_r}{T} = k_r + \epsilon_r \quad (1.2)$$

On décompose donc le retard pur relatif $\frac{T_r}{T}$ en un nombre entier k_r de périodes d'échantillonnage et une fraction ϵ_r avec $0 \leq \epsilon_r \leq 1$, comme le montre la figure (1.2). Par la suite, on doit distinguer deux domaines pour le paramètre ϵ qui représente l'intervalle de temps entre deux instants d'échantillonnage, à savoir $\epsilon \geq \epsilon_r$ et $\epsilon \leq \epsilon_r$.

1.1.1 Fonction de transfert pour $\epsilon \geq \epsilon_r$

Pour déterminer la fonction de transfert échantillonnée d'un système continu avec retard pur, on doit faire appel à la définition suivante [6]:

$$\begin{aligned} G(z, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} g[k, \epsilon] z^{-k} \\ G(z, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} g[(k + \epsilon)T] z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g_0[(k + \epsilon)T - T_r] z^{-k} \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $g_0[(k + \epsilon)T]$ est la réponse impulsionnelle de $G_0(s)$. Avec (1.2), on peut écrire pour l'argument de la réponse impulsionnelle

$$(k + \epsilon)T - T_r = (k - k_r)T + (\epsilon - \epsilon_r)T \quad (1.4)$$

Pour abréger, on introduit:

$$\gamma = \epsilon - \epsilon_r \quad (1.5)$$

avec la condition $0 \leq \gamma \leq 1$, ce qui correspond à $\epsilon \geq \epsilon_r$.

Ainsi, on tire de (1.3)

$$G(z, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} g_0[k - k_r, \gamma] z^{-k} \quad (1.6)$$

Selon le théorème de la translation retardée, un décalage de k_r périodes d'échantillonnage correspond, dans le domaine de la transformation en z , à une multiplication par z^{-k_r} , on a donc:

$$G(z, \gamma) = z^{-k_r} G_0(z, \gamma) \quad (1.7)$$

où $G_0(z, \gamma)$ est la fonction de transfert échantillonnée de $G_0(s)$. Cette relation qui est, bien entendu, valable uniquement pour l'argument $0 \leq \gamma \leq 1$, correspond à $\epsilon_r \leq \epsilon \leq 1 + \epsilon_r$. Ce qui est conforme à la transformée en z modifiée préconisée par Jury [28] et qui permet d'observer les valeurs de la fonction entre les périodes d'échantillonnage.

1.1.2 Fonction de transfert pour $\epsilon \leq \epsilon_r$

Lorsque $\epsilon \leq \epsilon_r$, il faut changer la relation (1.4) de la manière suivante:

$$(k + \epsilon)T - T_r = [k - (k_r + 1)]T + (1 + \epsilon - \epsilon_r)T \quad (1.8)$$

Avec l'abréviation

$$\delta = 1 + \epsilon - \epsilon_r \quad (1.9)$$

où il existe la condition $0 \leq \delta \leq 1$, correspondant à $\epsilon \leq \epsilon_r$, on obtient de (1.3) compte tenu du théorème de la translation retardée

$$G(z, \delta) = z^{-(k_r+1)} G_0(z, \delta) \quad (1.10)$$

Cette relation n'est valable que pour $0 \leq \delta \leq 1$, correspondant à $-1 + \epsilon_r \leq \epsilon \leq \epsilon_r$.

1.1.3 Relations générales

Suivant le cas $\epsilon \geq \epsilon_r$ ou $\epsilon \leq \epsilon_r$, on obtient donc pour la fonction de transfert échantillonnée d'un système continu avec retard pur deux expressions différentes.

Si l'on remplace les arguments γ et δ respectivement par (1.5) et (1.9), on a, avec $G_0(z, \epsilon)$, les relations générales:

$$G(z, \epsilon) = z^{-(k_r+1)} G_0(z, 1 + \epsilon - \epsilon_r); \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_r \quad (1.11)$$

$$G(z, \epsilon) = z^{-k_r} G_0(z, \epsilon - \epsilon_r); \quad \epsilon_r \leq \epsilon \leq 1 \quad (1.12)$$

Particulièrement pour $\epsilon = 0$, on obtient:

$$G(z, 0) = z^{-(k_r+1)} G_0(z, 1 - \epsilon_r); \quad (1.13)$$

Les déductions faites aux paragraphes précédents montrent que, en toute rigueur, la relation (1.11) est valable dans le domaine $-1 + \epsilon_r \leq \epsilon \leq \epsilon_r$ (correspondant à $0 \leq \delta \leq 1$) et la relation (1.12) dans le domaine $\epsilon_r \leq \epsilon \leq 1 + \epsilon_r$ (correspondant à $0 \leq \gamma \leq 1$). Dans ce cas, on dépasse donc l'intervalle de la période d'échantillonnage. Normalement, on restreint la variation de ϵ dans les limites habituelles $0 \leq \epsilon \leq 1$. Des exceptions à cette règle sont souvent très utiles.

Il est possible que la relation (1.11) ne donne pas pour $\epsilon = \epsilon_r$ la même valeur que la relation (1.12). Ceci est notamment le cas lorsque le signal de sortie x_s (voir figure (1.1)) présente des discontinuités à $\epsilon = \epsilon_r$. Il y a lieu de remarquer que la fonction de transfert échantillonnée est une fonction rationnelle en z . Par contre, le traitement de systèmes continus (non échantillonnés) présentant un retard pur conduit à des fonctions de transfert normales transcendantes, vu que le retard pur y intervient avec le facteur e^{-sT_r} . Ce fait complique considérablement le traitement de systèmes continus avec retard pur. Cette difficulté n'existe pas pour les systèmes échantillonnés. Le retard pur introduit essentiellement un pôle multiple à $z = 0$ d'ordre respectivement $k_r + 1$ et k_r . Cependant l'ordre de l'équation aux différences

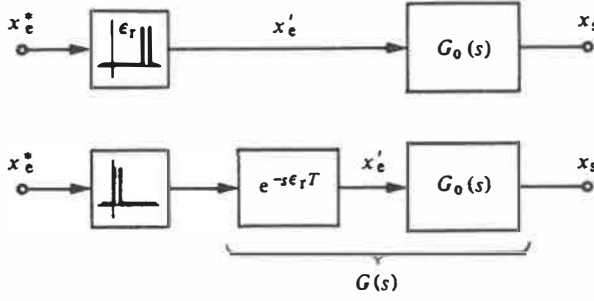


Figure 1.3: Schéma bloc équivalent pour un échantillonneur à pulsations avec retard ϵ_r

peut être fort élevé comparativement à l'ordre de l'équation différentielle de la forme rationnelle continu !

1.2 Échantillonnage retardé dans l'échantillonneur à pulsations

Le temps de calcul du calculateur de processus peut être pris en considération par un échantillonneur à pulsations dont l'apparition de l'impulsion est retardée de ϵ_r par rapport aux instants d'échantillonnage [6]. Ce retard $\epsilon_r \leq 1$ dans l'échantillonneur à pulsations peut être remplacé par un échantillonneur à pulsations ne présentant aucun retard et un dispositif de retard pur avec la fonction de transfert normale $G_0(s)$. Cette équivalence est représentée à la figure (1.3). Le problème se réduit donc au cas précédent donné par la figure (1.1) avec un retard pur de $T_r = \epsilon_r T$. On peut alors appliquer les relations établies précédemment, particulièrement les équations (1.11) et (1.12) qui se réduisent avec $k_r = 0$ à:

$$G(z, \epsilon) = z^{-1} G_0(z, 1 + \epsilon - \epsilon_r); \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_r \quad (1.14)$$

$$G(z, \epsilon) = G_0(z, \epsilon - \epsilon_r); \quad \epsilon_r \leq \epsilon \leq 1 \quad (1.15)$$

En particulier pour $\epsilon = 0$, c'est à dire aux instants d'échantillonnage, on obtient:

$$G(z, 0) = z^{-1} G_0(z, 1 - \epsilon_r) \quad (1.16)$$

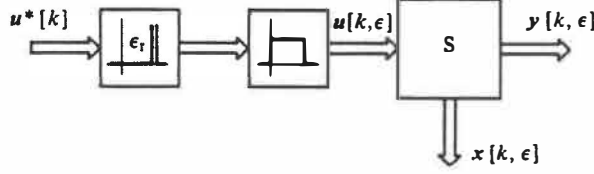


Figure 1.4: Représentation schématique de la structure

1.2.1 Structure

La figure (1.4) montre schématiquement la structure d'un système avec échantillonnage retardé dans l'échantillonneur à pulsations. Le vecteur d'entrée discret $u^*[k]$ est échantillonné dans l'échantillonneur à pulsations avec le même retard relatif ϵ_r , où $0 \leq \epsilon_r \leq 1$. Le cas échéant, il y a un élément de maintien entre l'échantillonneur à pulsations et le système continu.

L'allure en fonction du temps d'un élément $x_i[k, \epsilon]$ du vecteur d'état et d'un élément $u_j[k, \epsilon]$ du vecteur d'entrée est représentée schématiquement à la figure (1.5). La grandeur d'entrée discrète $u_j^*[k]$ apparaît aux instants d'échantillonnage. A cause du retard ϵ_r , la variation se manifeste sur la même grandeur d'entrée après l'élément de maintien, c'est à dire sur la grandeur $u_j[k, \epsilon]$, seulement à l'instant $k + \epsilon_r$. Quant à la grandeur d'état $x_i[k, \epsilon]$, il y a deux valeurs qui présentent un intérêt particulier: la valeur $x_i[k]$ à l'instant d'échantillonnage et la valeur $x_i[k, \epsilon_r]$ à l'instant de l'intervention de l'échantillonneur à pulsations.

1.2.2 Équations d'état

Pour l'établissement des équations d'état, on doit considérer le fait que le vecteur d'entrée est échantillonné à l'instant $k + \epsilon_r$. Dans le cas d'un élément de maintien, la valeur d'entrée reste constante pendant l'intervalle de $k + \epsilon_r$ à $k + 1 + \epsilon_r$. L'équation

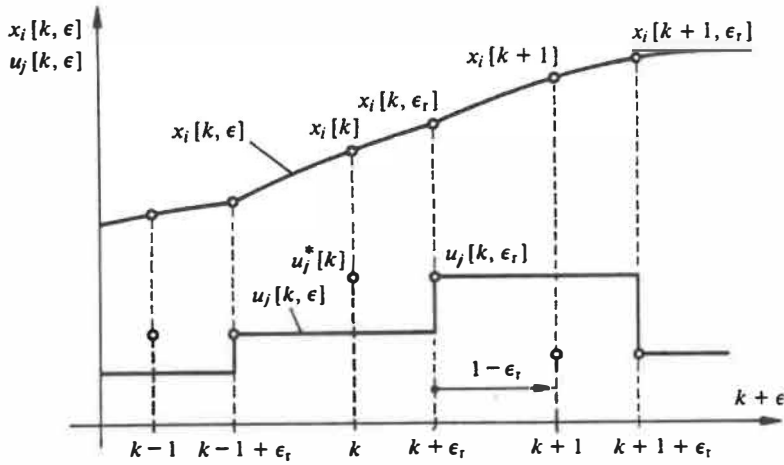


Figure 1.5: Allure d'un élément $x_i[k, \epsilon]$ et d'un élément $u_j[k, \epsilon]$

d'état aux différences d'un système invariant, peut donc s'écrire sous la forme:

$$x[k+1, \epsilon_r] = Fx[k, \epsilon_r] + Hu[k, \epsilon_r] \quad (1.17)$$

La matrice du système F est alors donnée par la relation $F = \Phi(T)$, et la matrice d'entrée H en discret est donnée par $H = FB$.

Quant au vecteur d'entrée, on a la relation $u[k, \epsilon_r] = u^*[k]$. Pour le vecteur d'entrée comme pour le vecteur d'état, ce ne sont pas les valeurs à l'instant d'échantillonnage k qui sont déterminantes, mais les valeurs à l'instant décalé $k + \epsilon_r$. A partir du vecteur d'état $x[k, \epsilon_r]$ et du vecteur d'entrée $u[k, \epsilon_r]$, on peut alors déterminer le vecteur d'état à l'instant $k+1$. Puisque le temps relatif qui s'écoule entre les instants $k + \epsilon_r$ et $k+1$ est égal à $1 - \epsilon_r$, on a:

$$x[k+1] = F(1 - \epsilon_r)x[k, \epsilon_r] + H(1 - \epsilon_r)u[k, \epsilon_r] \quad (1.18)$$

$$F(1 - \epsilon_r) = \Phi[(1 - \epsilon_r)T] = e^{A(1 - \epsilon_r)T} \quad (1.19)$$

Dans le cas avec élément de maintien, on a:

$$H(1 - \epsilon_r) = \Psi[(1 - \epsilon_r)T]B \quad (1.20)$$

avec $\Psi[(1 - \epsilon_r)T] = \int_0^{(1 - \epsilon_r)T} \Phi(\tau) d\tau$

$$= \int_0^{1-\epsilon_r} e^{A\epsilon T} d\epsilon \quad (1.21)$$

Enfin, le vecteur de sortie s'obtient lorsqu'on pose a priori la matrice de passage $D = 0$:

$$y[k, \epsilon_r] = Cx[k, \epsilon_r] \quad (1.22)$$

$$\text{et } y[k+1] = Cx[k+1] \quad (1.23)$$

où C est la matrice de sortie

1.2.3 Diagramme fonctionnel

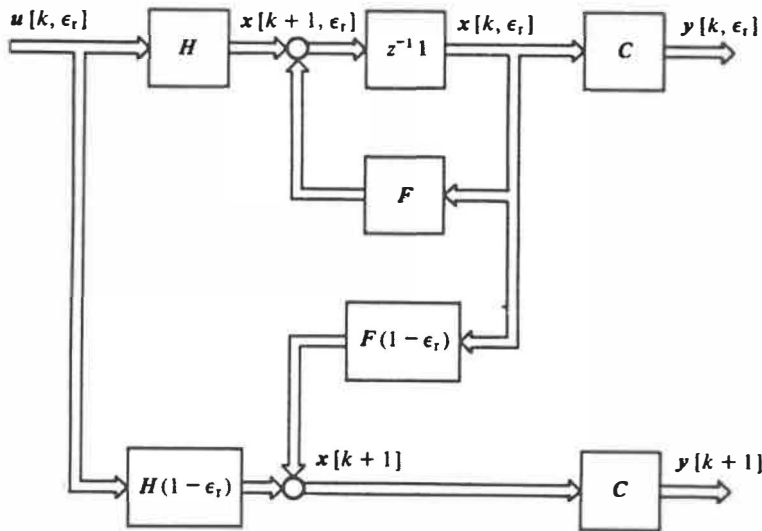


Figure 1.6: Diagramme structuré des équations d'état d'un système

1.3 Retard pur d'un nombre entier de périodes d'échantillonnage

1.3.1 Structure

Un retard pur dans un système monovarié peut être situé à l'entrée, à l'intérieur ou à la sortie du système. Selon le cas particulier, la structure de

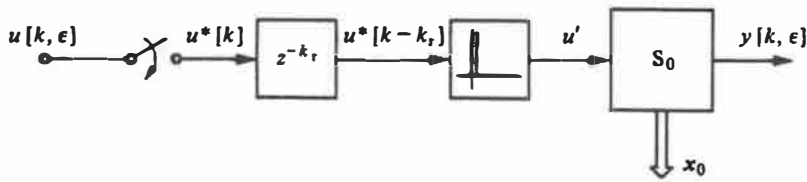


Figure 1.7: Représentation schématique de la structure

représentation sera différente. Pour mettre en évidence l'influence d'un retard pur, on peut séparer ce retard pur du reste du système. Il s'avère judicieux de déplacer le retard pur à l'entrée du système. On considère d'abord le cas où ce retard est égal à un nombre entier k_r de périodes d'échantillonnage. On peut alors établir une structure selon la représentation schématique de la figure (1.7).

On considère que la grandeur d'entrée $u[k, \epsilon]$ est soumise à un échantillonnage par un échantillonneur idéal. Le signal discret $u^*[k - k_r]$ est appliqué à l'entrée d'un échantillonneur à pulsations qui intervient sur le système S_0 ne possédant aucun retard pur. Le système S_0 peut être décrit par les équations d'état de la manière habituelle. Par contre, le retard de k_r périodes d'échantillonnage peut être représenté par une chaîne de décalage dont les équations d'état seront développées au paragraphe suivant.

1.3.2 Equations d'état d'une chaîne de décalage

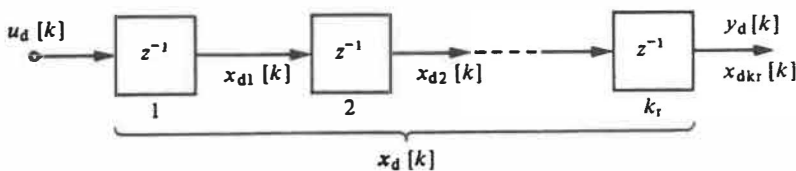


Figure 1.8: Chaîne de décalage

La figure (1.8) représente une chaîne de décalage qui provoque un retard pur de k_r périodes d'échantillonnage. Au signal de sortie de chacun des k_r blocs de décalage z^{-1} peut être attribué une grandeur d'état $x_{d1}[k], x_{d2}[k], \dots, x_{dk_r}[k]$. L'indice " d "

rappel qu'il s'agit de grandeurs inhérentes à la chaîne de décalage. On peut alors établir les relations suivantes

$$\begin{aligned} x_{d1}[k+1] &= u_d[k] \\ x_{d2}[k+1] &= x_{d1}[k] \\ &\vdots \\ x_{dk_r}[k+1] &= x_{dk_{r-1}}[k] \\ y_d[k] &= x_{dk_r}[k] \end{aligned}$$

Avec le vecteur d'état:

$$x_d[k] = \begin{bmatrix} x_{d1}[k] \\ x_{d2}[k] \\ \vdots \\ x_{dk_r}[k] \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

de dimension k_r en concordance avec le nombre k_r de périodes d'échantillonnage du retard pur, il est possible d'exprimer les relations sous forme matricielle, à savoir:

$$x_d[k+1] = F_d x_d[k] + h_d u_d[k] \quad (1.25)$$

$$\text{et } y_d[k] = c_d^T x_d[k] \quad (1.26)$$

On voit que la matrice F_d , le vecteur h_d et le vecteur ligne c_d^T deviennent:

$$\begin{aligned} F_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad h_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{et } c_d^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice F_d est une matrice (k_r, k_r) , tandis que les vecteurs h_d et c_d^T possèdent la dimension k_r .

1.3.3 Équations d'état

Selon la structure représentée à la figure (1.7), il y a une mise en série d'un système discret (représentant le retard pur) et d'un système échantillonné. Les

équations d'état pour le retard pur (chaîne de décalage) ont été déduites au paragraphe précédent. Pour le système échantillonné S_0 qui est un système monovariable, on peut écrire:

$$x_0[k+1] = F_0 x_0[k] + h_0[k] \quad (1.27)$$

$$y_0[k] = c_0^T x_0[k] + d_0 u_0[k] \quad (1.28)$$

A noter que l'indice 0 rappelle qu'il s'agit de grandeurs inhérentes au système sans tenir compte du retard pur. Le vecteur d'état $x_0[k]$ possède la dimension n_0 .

La mise en série implique la condition $u_0[k] = y_d[k]$ on a alors:

$$x(k+1) = Fx[k] + hu[k] \quad (1.29)$$

où l'on a introduit:

$$F = \begin{bmatrix} F_d & 0 \\ h_0 c_d^T & F_0 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} h_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

La matrice F du système global est une matrice $(k_r + n_0, k_r + n_0)$. Le vecteur h possède la dimension $k_r + n_0$. A noter que le vecteur 0 dans h est de dimension n_0 . L'équation de sortie devient avec $y[k] = y_0[k]$:

$$y[k] = c^T x[k] \quad (1.31)$$

$$\text{où } c^T = \begin{bmatrix} d_0 c_d^T & c_0^T \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

La dimension du vecteur ligne c^T est égale à $k_r + n_0$. A noter qu'il n'y a plus d'influence directe de $u[k]$ sur $y[k]$.

1.4 Retard pur de valeur quelconque

1.4.1 Structure

Lorsque le retard pur est de valeur quelconque $k_r + \epsilon_r$, on est contraint de traiter l'influence du nombre entier k_r différemment de celle de la fraction ϵ_r . Tandis que

le nombre entier k_r de périodes d'échantillonnage peut être pris en considération par une chaîne de décalage, l'influence de la fraction ϵ_r doit être prise en considération par un retard dans l'échantillonneur à pulsations. Pour un système monovarié, on peut donc utiliser la structure représentée à la figure (1.9).

Le système S_0 doit maintenant être décrit par les équations d'état en tenant compte du retard dans l'échantillonneur selon les démonstrations faites au paragraphe précédente. Le retard de k_r périodes d'échantillonnage peut être décrit par les équations établies au paragraphe (1.3.3).

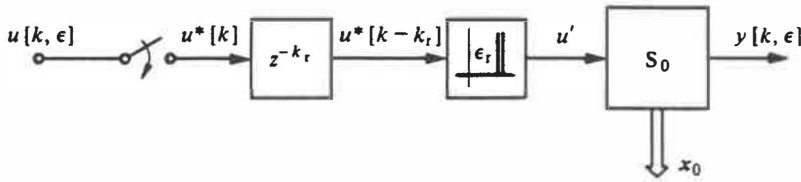


Figure 1.9: Représentation schématique de la structure avec retard pur de valeur quelconque

1.4.2 Équations d'état

Dans ce cas aussi, la structure est constituée de la mise en série d'un système discret (représentant le retard pur d'un nombre entier k_r de périodes d'échantillonnage) et d'un système échantillonné (qui est soumis à un échantillonnage retardé de ϵ_r). Pour ce dernier, on obtient les équations d'état à partir des relations établies au paragraphe (1.2.2):

$$x_0[k+1, \epsilon_r] = F_0 x_0[k, \epsilon_r] + h_0 u_0[k, \epsilon_r] \quad (1.33)$$

$$y_0[k+1] = c_0^T F_0 (1 - \epsilon_r) x_0[k, \epsilon_r] + c_0^T h_0 (1 - \epsilon_r) u_0[k, \epsilon_r] \quad (1.34)$$

Pour la mise en série, on doit considérer que $u_0[k, \epsilon_r] = y_d[k] = c_d^T x_d[k]$.

Le vecteur d'état du système global doit maintenant être défini, selon:

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_d[k] \\ x_0[k, \epsilon_r] \end{bmatrix}.$$

On aboutit alors à l'équation d'état aux différences pour le système global:

$$x[k+1] = Fx[k] + hu[k] \quad (1.35)$$

$$\text{avec } F = \begin{bmatrix} F_d & 0 \\ h_0 c_d^T & F_0 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} h_d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

On obtient donc exactement les mêmes relations que pour le cas où $\epsilon_r = 0$!

En particulier, le vecteur d'état $x[k]$ possède la dimension $k_r + n_0$.

Par contre, pour la grandeur de sortie, on obtient:

$$y[k+1] = c^T x[k] \quad (1.37)$$

$$\text{avec } c^T = [c_0^T h_0(1 - \epsilon_r) c_d^T \quad c_0^T F_0(1 - \epsilon_r)] \quad (1.38)$$

La dimension de ce vecteur ligne est $k_r + n_0$.

1.5 Retard pur interne

Le retard n'attaque pas la structure qu'il soit en entrée ou en sortie tandis que le retard pur de l'état du système influence la structure intérieure.

1.5.1 Équations d'état

Soit T la période d'échantillonnage et $N_i T$ la valeur du retard interne considéré (un retard de N_i périodes d'échantillonnage). On suppose que le retard pur porte sur une variable d'état, soit x_{n_0} . On choisit une représentation d'état telle que x_{n_0} soit

la dernière variable d'état non retardée, et qui correspond à:

$$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_0} & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_0} & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_01} & a_{n_02} & \dots & a_{n_0n_0} & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} F_{0_{(n_0 \times n_0)}} & \vdots & 0_{(n_0 \times n_i)} & \vdots & 0_{(n_0 \times 1)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ M_{1n_0_{(n_i \times n_0)}} & \vdots & F_{d_{(n_i \times n_i)}} & \vdots & 0_{(n_i \times 1)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0_{(1 \times n_0)} & \vdots & \underline{e}_{n_i(1 \times n_i)}^T & \vdots & 0_{(1 \times 1)} \end{bmatrix} ; \quad H_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} H_{0_{(n_0 \times m)}} \\ \dots \\ 0_{(n_i \times m)} \\ \dots \\ 0_{(1 \times m)} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } C_{(p \times n)} = \begin{bmatrix} C_{0_{(p \times n_0)}} & \vdots & 0_{(p \times n_i)} & \vdots & C_{d_{(p \times 1)}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_d \end{bmatrix}$$

n_0 : dimension de la partie sans retard (nombre de variables d'état sans le retard).

N_i : retard en périodes d'échantillonnage.

$n_i = N_i - 1$ (donc $n = n_0 + n_i + 1$).

$\underline{e}_{n_i}$: colonne numéro n_i de la matrice unité I_{n_i} .

M_{1n_0} : est une matrice dont la première ligne est $\underline{e}_{n_0}^T$, et les autres lignes sont nulles.

$\mathbf{e}_{n_0}$: colonne numéro n_0 de la matrice unité I_{n_0} .

$F_d = I_{-1}$: matrice carrée sous diagonale.

F : matrice d'état discret.

H : matrice d'entrée discrète.

C : matrice de sortie discrète.

m : nombre d'entrées du procédé.

p : nombre de sorties.

1.6 Choix de la période d'échantillonnage

Deux critères vont être analysés [6]:

Un premier critère va être fondé sur le comportement dynamique du système à régler et l'influence de l'échantillonnage sur ce comportement.

Le comportement dynamique du circuit de réglage échantillonné, sera le deuxième critère à analyser.

1.6.1 Comportement dynamique du système continu à régler

Le comportement dynamique du système à régler continu peut être caractérisé par les pôles p_i de la fonction de transfert normale $G_s(s)$. Les pôles de la fonction de transfert échantillonnée correspondante sont alors déterminés par $z_i = e^{p_i T}$. Lors de l'échantillonnage d'un système continu, on doit veiller à ce que le comportement entre deux instants d'échantillonnage soit assez bien représenté par les valeurs aux instants d'échantillonnage. L'allure de la réponse impulsionnelle est représentée de manière convenable par les valeurs aux instants d'échantillonnage lorsque la partie imaginaire des pôles complexes conjugués w_i est égale ou inférieure à $\frac{\pi}{4T}$ [6]. De cette condition, on obtient une première relation pour le choix de la période d'échantillonnage, à savoir:

$$T \leq \frac{\pi}{4w_i} \quad (1.39)$$

Quant à un pôle réel ρ_i , on doit exiger que la réponse impulsionnelle échantillonnée z_i^k représente de manière convenable une allure exponentielle. Ceci est le cas pour $\rho_i T \leq 0.5$ [6], d'où la condition pour la période d'échantillonnage:

$$T \leq \frac{1}{2\rho_i} = \frac{T_i}{2} \quad (1.40)$$

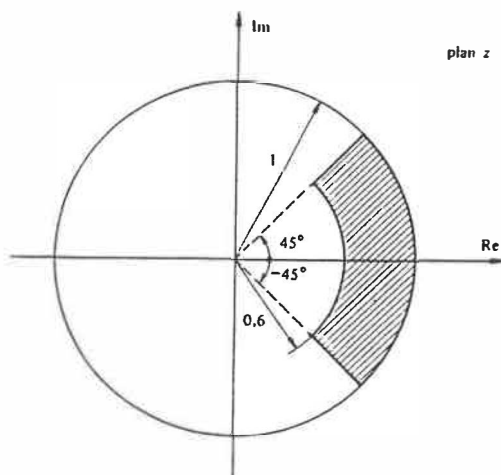


Figure 1.10: Domaine admissible dans le plan z pour les pôles dominants d'un système échantillonné

avec $T_i = \frac{1}{\rho_i}$ la constante de temps du système continu. La première relation correspond à la limite à un pôle z_i qui est situé sur une droite inclinée de $\pm 45^\circ$. La deuxième condition correspond à un cercle dont le rayon est $e^{-0.5} \cong 0.6$. On doit donc choisir la période d'échantillonnage T de sorte que tous les pôles dominants z_i du système échantillonné restent à l'intérieur de la surface hachurée représentée à la figure (1.10). A noter que les pôles dominants p_i correspondant au système continu ne comprennent pas les petites constantes de temps qui sont par exemple introduites par l'organe de commande ou un filtre de lissage. En effet, en respectant la deuxième condition également pour les petites constantes de temps, on obtiendrait des valeurs pour T en général très petites.

1.6.2 Comportement dynamique du circuit de réglage

En général, on peut montrer que la qualité de réglage diminue à cause de l'échantillonnage [6]. Un système de réglage continu donne donc presque toujours des valeurs meilleures pour la qualité de réglage qu'un système de réglage échantillonné. Dans ce contexte, on devrait donc choisir la période d'échantillonnage aussi petite que possible. Lors de la conception d'un système de réglage échantillonné, on doit choisir d'abord la période d'échantillonnage selon les règles mentionnées au para-

graphe précédent. Pour cette période d'échantillonnage, on évalue ensuite la qualité de réglage (dépassement, temps de montée ou critère "intégrale"). On répète alors le même calcul pour des valeurs de T plus petites (par exemple la moitié de la valeur précédente). On constatera en général que, à partir d'une certaine valeur de la période d'échantillonnage, la qualité du réglage ne varie plus de manière appréciable. Ainsi, on obtient une valeur "optimale" pour la période d'échantillonnage. Cependant, on ne peut pas diminuer à volonté la valeur de la période d'échantillonnage. En effet, si cette dernière devient trop petite, le calculateur de processus peut être surchargé pour l'élaboration des algorithmes de réglage.

1.7 Amortissement relatif optimal

La condition de stabilité selon laquelle les pôles doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité n'est pas suffisante, en général, pour obtenir un comportement stable et bien amorti des circuits de réglage échantillonnés. Pour une réponse rapide, mais quand même bien amortie, on désire en général une réponse impulsionnelle selon l'expression $g[k] = e^{-\alpha k} \cos \beta k$ où la constante α , déterminante pour l'amortissement, doit être dans une certaine relation avec la constante β , caractéristique pour la pulsation de l'allure oscillante. Pour un amortissement relatif optimal, on choisit normalement:

$$\alpha = \beta \tag{1.41}$$

C'est l'équivalent du choix d'amortissement $\delta = 0.707$ du cas continu.

Les pôles deviennent pour un système du second ordre:

$$z_{1,2} = e^{-\alpha(1 \mp j)}.$$

En variant $\alpha = \beta$ entre 0 et π , on obtient le lieu des pôles représenté par la courbe en trait plein de la figure suivante (1.11). Il ne suffit pas d'imposer un amortissement

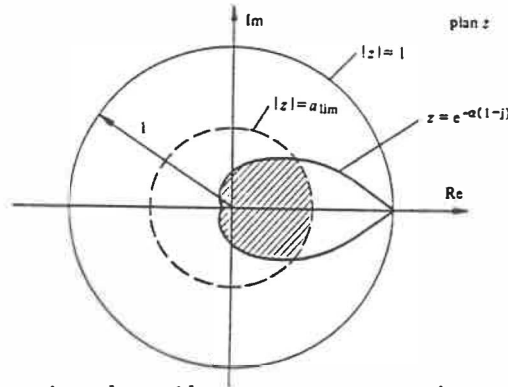


Figure 1.11: Domaine des pôles pour un amortissement optimal

relatif optimal selon la relation (1.41); afin d'obtenir un amortissement suffisant de la réponse impulsionnelle. En effet, on doit aussi observer un amortissement absolu minimal selon la condition:

$$e^{-\alpha} \leq a_{lim} \quad (1.42)$$

où la valeur limite a_{lim} sera située entre 0.4 et 0.9 [6]. La valeur dépend de l'amortissement minimal en temps absolu et de la période d'échantillonnage.

Afin de garantir un amortissement suffisant dans tous le cas, il est indispensable que les pôles soient situés à l'intérieur de la surface hachurée à la figure (1.11).

1.8 Système à régler du premier ordre avec petit retard pur

Dans cette partie, on étudiera d'abord l'influence d'un petit retard pur comme il est introduit par exemple, par le temps de calcul pour élaborer l'algorithme de réglage. On supposera un système à régler du premier ordre avec élément de maintien, ceci impose l'emploi du régulateur PI pour éliminer les erreurs stationnaires [6]. Pour le dimensionnement du régulateur, on montrera deux méthodes: le critère de la marge de phase et celui de l'amortissement relatif optimal.

1.8.1 Système à régler avec élément de maintien

La fonction de transfert normale du système à régler est donnée par:

$$G_s(s) = \frac{1}{1 + s\tau_1} \text{ avec } G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_s(s)$$

τ_1 est la constante de temps dominante du système à régler.

$$G(z, \epsilon) = \frac{Q(z, \epsilon)}{P(z)} = \frac{z(1 - z_1^\epsilon) + (z_1^\epsilon - z_1)}{z - z_1} \quad (1.43)$$

où le pôle z_1 est donné par $z_1 = e^{-\frac{T}{\tau_1}}$

En présence d'un petit retard pur, on doit faire appel à la relation (1.13)

Dans le cas présent, on obtient:

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= Q(z, 1 - \epsilon_r) \\ &= d_1 z + d_0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\text{avec } d_1 = 1 - z_1^{1-\epsilon_r} \quad (1.45)$$

$$\text{et } d_0 = z_1^{1-\epsilon_r} - z_1 \quad (1.46)$$

1.8.2 Choix d'un régulateur PI

Puisque le système à régler est du premier ordre, on doit choisir un régulateur du premier ordre. Afin que l'écart de réglage en régime établi s'annule, on utilisera un régulateur PI. La fonction de transfert discrète du régulateur, $D(z)$ sera exprimée sous la forme:

$$D(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad (1.47)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par:

$$G_0(z, 0) = G(z, 0)D(z) \quad (1.48)$$

Avec (1.47) et (1.48), cette relation devient:

$$G_0(z, 0) = \frac{Q(z, 0)}{P(z)} \frac{S(z)}{R(z)} \quad (1.49)$$

Le choix du régulateur sera fait de sorte que:

$$S(z) = KP(z) \quad (1.50)$$

où K est un coefficient de proportionnalité qui devra être déterminé afin que le circuit de réglage soit stable et bien amorti.

Les zéros du régulateur, c'est-à-dire les racines de $S(z)$ compensent donc les pôles du système à régler, c'est-à-dire les racines de $P(z)$ sont égales à celles de $P(z)$.

Lorsqu'on exige que l'écart de réglage soit nul, il est indispensable que le régulateur possède un pôle à $z = 1$.

D'où $S(z) = b_1z + b_0$

et $R(z) = z - 1$

avec $b_1 = K_c + K_i$ et $b_0 = -K_c$

Il faut adapter le polynôme $S(z)$ selon la relation (1.50), c'est-à-dire selon:

$$b_1z + b_0 = K(z - z_1)$$

En comparant les coefficients de z^i $i = 1, 0$, on obtient:

$$b_1 = K \quad (1.51)$$

$$b_0 = -Kz_1 \quad (1.52)$$

On tire les coefficients K_i et K_c du régulateur PI ,

$$K_i = K(1 - z_1) \quad (1.53)$$

$$K_c = Kz_1 \quad (1.54)$$

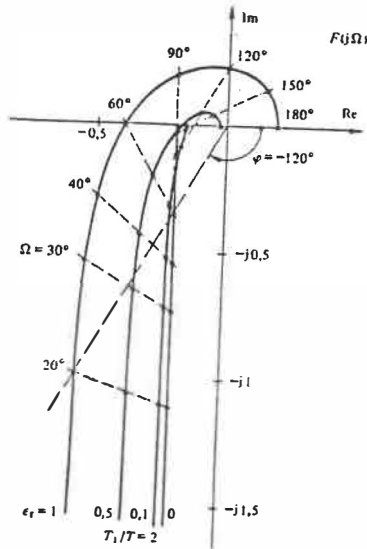


Figure 1.12: Réponses harmoniques $F(j\Omega)$

La fonction de transfert en boucle ouverte:

$$G_0(z, 0) = K \frac{d_1 z + d_0}{z(z - 1)} \quad (1.55)$$

Malgré le fait que le système à régler soit du premier degré, $G_0(z, 0)$ est du deuxième degré. Ceci est dû à la présence d'un petit retard pur. Les coefficients d_1 et d_0 dépendent de la constante de temps du système à régler et du retard relatif ϵ_r . Il n'y a donc que le facteur de proportionnalité K qui permet d'influencer la fonction de transfert du circuit en boucle ouverte.

1.8.3 Réponse harmonique

Pour appliquer le critère sur la marge de phase, il faut calculer la réponse harmonique de $F(z)$ (avec $F(z) = \frac{Q_0(z)}{P_0(z)}$). Ce critère se base sur certaines propriétés que la réponse harmonique du circuit en boucle ouverte doit respecter afin que le circuit en boucle fermée soit stable et bien amorti.

La figure (1.12) représente les courbes dans le plan complexe pour quatre valeurs différentes du retard relatif ϵ_r . La constante de temps du système à régler (rapportée à la période d'échantillonnage) est $\frac{\tau_1}{T} = 2$. On constate un déphasage important

lorsque le retard relatif ϵ_r augmente.

1.8.4 Lieu des racines

Les racines de l'équation caractéristique sont données par:

$$P_0(z) + KQ_0(z) = 0 \quad (1.56)$$

où K est considéré comme un paramètre de l'équation (1.56) donnée par:

$$z(z - 1) + K(d_1z + d_0) = 0 \quad (1.57)$$

$$\text{ou } z^2 - (1 - Kd_1)z + Kd_0 = 0 \quad (1.58)$$

Les racines exprimées par la relation (1.58) sont:

$$z_{1,2} = \frac{1 - Kd_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - Kd_1)^2}{4} - Kd_0} \quad (1.59)$$

A noter que pour $\epsilon_r = 0$, le coefficient d_0 devient également nul d'après l'équation (1.46). Dans ce cas, la relation (1.59) ne fournit qu'une seule racine valable, celle obtenue avec le signe positif. L'autre racine devient $z_{02} = 0$ et se compense dans la fonction de transfert en boucle ouverte d'où l'obtention d'un système du premier ordre avec une racine $z_1 = 1 - Kd_1$.

1.8.5 Amortissement relatif optimal

Afin de déterminer le coefficient de proportionnalité K , on fera appel à l'amortissement relatif optimal. Ce critère exige que les deux racines complexes conjuguées doivent se trouver sur la courbe en traitillé à la figure (1.11). On obtient les pôles z_{aro} pour l'amortissement relatif optimal avec $\Omega_0 = \omega_i T$.

$$z_{aro} = e^{-\Omega_0}(\cos \Omega_0 \pm j \sin \Omega_0) \quad (1.60)$$

Le coefficient K doit donc être déterminé de sorte que $z_{01,2} = z_{aro}$. Cette relation doit être remplie pour la partie réelle et la partie imaginaire. Ceci permet d'établir une formule récursive relativement simple. Pour la valeur absolue des pôles, on obtient la relation [6]:

$$|z_{01,2}| = \sqrt{Kd_0} = |z_{aro}| = e^{-\Omega_0} \quad (1.61)$$

d'où

$$\Omega_0 = -\ln \sqrt{Kd_0} \quad (1.62)$$

L'égalité des parties réelles impose que

$$\frac{1 - Kd_1}{2} - e^{-\Omega_0} \cos \Omega_0 = 0 \quad (1.63)$$

Il est possible de résoudre les relations (1.62) et (1.63) de manière itérative.

1.9 Les méthodes d'approximations

1.9.1 L'approximation de Padé du premier ordre

$$e^{-T_r s} = \frac{e^{-\frac{T_r s}{2}}}{e^{\frac{T_r s}{2}}} \quad (1.64)$$

$$\approx \frac{1 - \frac{T_r}{2}s}{1 + \frac{T_r}{2}s} \quad (1.65)$$

La comparaison entre les fonctions de transfert exactes et l'approximation de Padé indiquent que les courbes des gains sont identiques par contre les courbes de phase varie pour $T_r w \geq 0.75$.

Cette approximation permet donc de traiter le problème du retard, sans passer par les équations non transcendante. Mais il faut que le système équivalent en boucle fermée soit du type passe-bas et que dans le domaine de fréquence basse-fréquence considéré l'approximation soit valable.

1.9.2 L'approximation de Padé du second ordre

$$\begin{aligned}
 e^{-T_r s} &= \frac{e^{\frac{-T_r s}{2}}}{e^{\frac{T_r s}{2}}} \\
 &\approx \frac{1 - \frac{T_r}{2}s + \frac{T_r^2}{12}s^2}{1 + \frac{T_r}{2}s + \frac{T_r^2}{12}s^2}
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

L'équation est valide pour les valeurs $T_r w \approx 2.0$.

Elle fournit le bon gain mais la phase n'est valable que dans un domaine borné (basse fréquence).

Chapitre 2

Adaptation de la commande quadratique à retour d'état aux systèmes à retard

2.1 Structures et algorithmes de commande à retour d'état

2.1.1 Commande à critère quadratique

La minimalisation d'un critère quadratique constitue l'un des moyens de parvenir à la détermination d'une structure de commande par retour d'état pour les systèmes linéaires multivariables. Il demeure, cependant, qu'il est difficile de traduire l'influence des paramètres de pondération sur la rapidité de réponse, l'amortissement et la précision en régime du système.

Méthode utilisée

Nous considérons un système linéaire discret à n variables d'état, m entrées et p sorties, défini par sa représentation d'état discret:

$$\begin{cases} \underline{x}(i+1) &= F\underline{x}(i) + H\underline{u}(i) + \underline{f} \\ \underline{y}(i) &= C\underline{x}(i) + D\underline{u}(i) \end{cases} \quad (2.1)$$

$\underline{f}$ est un vecteur supposé constant, de dimension n qui peut exprimer la perturbation. La commande optimale recherchée, qui est donc une suite de vecteurs $\underline{u}(i)$, doit minimaliser un critère quadratique que nous noterons:

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \{ \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) \} \quad (2.2)$$

C'est aussi un critère énergétique fonction des entrées et de l'écart de consigne. Avec $\underline{e}(i)$ un vecteur d'écart entre les consignes, notées $\underline{z}$, et les sorties $\underline{y}(i)$, soit:

$$\underline{e}(i) = \underline{z} - \underline{y}(i) \quad (2.3)$$

R et Q sont deux matrices carrées, symétriques, définies positives, de dimension respectives $(m \times m)$ et $(p \times p)$. On sait que la détermination de la commande optimale d'un procédé entre dans le cadre plus général d'une classe de problèmes dits "à décisions séquentielles" [5].

Dans le cas de la recherche d'une commande optimale d'un procédé, il est de bonne politique d'établir la commande à partir de la propriété suivante qui constitue le principe d'optimalité énoncé par Bellman.

Principe d'optimalité [3], [18] et [33]:

" Une politique optimale à un problème initial P est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes constituent vis à vis du problème partiel P_1 une politique optimale par rapport à l'état résultant de la

première décision.”

Pour ce faire il suffit de considérer le problème à un instant i quelconque compris dans l'intervalle $[0, N]$, pour lequel l'état du système est défini par le vecteur d'état $\underline{x}(i)$, et d'étudier la valeur optimale $\hat{J}[\underline{x}(i)]$ du critère quadratique J_i définie par:

$$J_i = \sum_{j=i}^{N-1} \left\{ \underline{u}(j)^T R \underline{u}(j) + \underline{e}(j)^T Q \underline{e}(j) \right\} \quad (2.4)$$

Le vecteur d'action $\underline{u}(i)$ s'exprime

$$\{\hat{\underline{u}}(i), \hat{\underline{u}}(i+1), \hat{\underline{u}}(i+2), \dots, \hat{\underline{u}}(N-1)\} \quad (2.5)$$

sur l'intervalle de temps $[i, N-1]$.

Le principe d'optimalité implique que la suite des commandes de l'ensemble (2.5) permettant d'obtenir le minimum $\hat{J}[\underline{x}(i+1)]$ du critère quadratique J_{i+1} sur l'intervalle $[i+1, N-1]$ qui s'écrit:

$$J_{i+1} = \sum_{j=i+1}^{N-1} \left\{ \underline{u}(j)^T R \underline{u}(j) + \underline{e}(j)^T Q \underline{e}(j) \right\} \quad (2.6)$$

Ce qui procure la forme:

$$\hat{J}[\underline{x}(i)] = \min_{\underline{u}(i)} \left\{ \overbrace{\underline{u}(i)^T R \underline{u}(i) + \underline{e}(i)^T Q \underline{e}(i) + \hat{J}[\underline{x}(i+1)]}^S \right\} \quad (2.7)$$

Si l'état final est libre, la récurrence doit commencer à partir de $\hat{J}[\underline{x}(N)] = 0$. On dit que la procédure de calcul s'effectue en temps inverse. Supposons que $\hat{J}[\underline{x}(i+1)]$ est une forme quadratique.

$$\begin{aligned} \hat{J}[\underline{x}(i+1)] = & \underline{x}^T(i+1) \underbrace{K(i+1)}_{\text{matrice de Riccati}} \underline{x}(i+1) + 2 \underbrace{\underline{g}^T(i+1)}_{\text{vecteur } n \times 1} \underline{x}(i+1) \\ & + \underbrace{h(i+1)}_{\text{scalaire}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tout les calculs nécessaires ont été effectués à l'annexe A, la loi de commande est de la forme:

$$\hat{\underline{u}}_{m \times 1}(i) = -L(i)\underline{x}(i) + \underline{\mu}(i) \quad (2.9)$$

$$L_{m \times n}(i) = [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} [H^T K(i+1)F + D^T Q C] \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{m \times 1}(i) = [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} \\ \{D^T Q \underline{z} - H^T [\underline{g}(i+1) + K(i+1)\underline{f}]\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$K_{n \times n}(i) = \Omega K(i+1)[F - HL(i)] + \Phi C \quad (2.12)$$

$$\underline{g}_{n \times 1}(i) = \Omega \{ \underline{g}(i+1) + K(i+1)[H\underline{\mu}(i) + \underline{f}] \} - \Phi \underline{z} \quad (2.13)$$

Les conditions de départ: $K(N) = 0$ et $\underline{g}(N) = \underline{0}$ permettent l'initialisation des itérations et la remontée à l'inverse du temps.

$$\Omega_{n \times n} = F^T - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} H^T \quad (2.14)$$

$$\Phi_{n \times p} = C^T Q - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q \quad (2.15)$$

Remarque:

Pour que la commande optimale $\hat{\underline{u}}(i)$ corresponde bien à une minimisation du critère, il faut vérifier aussi que les conditions sur les dérivées du second ordre sont satisfaites. Alors, nous devons avoir $[R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]$ une forme définie positive.

Ce qui implique que R et Q soient elles-mêmes définies positives. D'après cette équation, nous pouvons observer une instabilité possible du point de vue numérique due aux erreurs d'arrondis, car K n'est pas définie positive. Selon les matrices F , H , C , D de certains système. Il faut dans le cas d'instabilité s'en tenir à la solution de l'équation (2.12)

$$\begin{aligned} K(i) = L^T(i)RL(i) + [C - DL(i)]^T Q [C - DL(i)] \\ + [F - HL(i)]^T K(i+1)[F - HL(i)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Remarques:

- La commande optimale $\hat{\underline{u}}(i) = -L(i)\underline{x}(i) + \underline{\mu}(i)$ comporte un terme de correction par retour d'état et un terme anticipatif proportionné à la consigne.
- La majorité des applications pratiques en milieu industriel, suppose un horizon d'optimisation infini, ou tout au moins très grand par rapport à l'échelle de temps des phénomènes physiques concernés [18].

Le critère à minimiser s'exprime:

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) + \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) \}$$

et procure une convergence de la matrice de Riccati vers une solution limite unique, lorsque le système est commandable.

Le passage aux cas de l'horizon infini est également possible. Le vecteur $\underline{g}(i)$ peut alors être assimilé à un vecteur constant $\underline{g}$, à condition bien sûr que le vecteur des consignes $\underline{z}$ soit lui-même constant.

Avec ces conditions, la matrice L et le vecteur $\underline{\mu}$ sont constants.

Cas particulier: La matrice entre la sortie et l'entrée est nulle ($D = 0$). Les équations (2.14), (2.15), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) sont exprimées respectivement par:

$$\Omega = F^T \tag{2.17}$$

$$\Phi = C^T Q \tag{2.18}$$

$$L(i) = [R + H^T K(i+1)H]^{-1} H^T K(i+1)F \tag{2.19}$$

$$\underline{\mu}(i) = -[R + H^T K(i+1)H]^{-1} H^T [\underline{g}(i+1) + K(i+1)\underline{f}] \tag{2.20}$$

$$K(i) = F^T K(i+1)[F - HL(i)] + C^T Q C \tag{2.21}$$

$$\underline{g}(i) = F^T \{ \underline{g}(i+1) + K(i+1)[H\underline{\mu}(i) + \underline{f}] \} - C^T Q \underline{z} \tag{2.22}$$

Dans le cas d'un horizon infini, seules les valeurs limites (en temps inverse) de K et de g sont intéressantes.

Performance de la commande

La fonction de transfert en temps continu pour une dynamique de second ordre plus un retard pur est considéré comme suit:

$$G(s) = \frac{e^{-T_r s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (2.23)$$

où $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ sont les constantes de temps et T_r est le retard pur. La transformation des matrices d'états en discrets de l'équation (2.23) sans retard pour une période d'échantillonnage $T = 1$ est:

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0.5632 & -0.0511 \\ 0.7665 & 0.9720 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0.7665 \\ 0.4196 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0667 \end{bmatrix}; \quad D_0 = 0 \quad (2.25)$$

1^{er} cas: $T_r = k_r = 1$: petit retard d'une période

$$F_d = 0; \quad h_d = 1; \quad \text{et} \quad c_d^T = 1 \quad (2.26)$$

Le système global est:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.7665 & 0.5632 & -0.0511 \\ 0.4196 & 0.7665 & 0.9720 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0667 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = 0$$

Programmation:

Le calcul des solutions limites des matrices L , μ , K et g peut être fait en temps croissant à partir de $K(0) = 0$ et $g(0) = 0$ à l'aide des équations:

$$L(j+1) = [R + H^T K(j)H]^{-1} H^T K(j)F \quad (2.27)$$

$$\mu(j+1) = -[R + H^T K(j)H]^{-1} H^T \underline{g}(j) \quad (2.28)$$

$$K(j+1) = F^T K(j)[F - HL(j+1)] + C^T Q C \quad (2.29)$$

$$\underline{g}(j+1) = F^T \{\underline{g}(j) + K(j)H\mu(j+1)\} - C^T Q \underline{z} \quad (2.30)$$

par remplacement de i par $(j+1)$ et $(i+1)$ par j .

Une fois calculées les solutions limites constantes L et μ procurent.

$$\hat{u}(i) = -Lx(i) + \mu \quad (2.31)$$

Le choix des constantes de pondération Q et R doivent être des paramètres réels positifs.

Remarque:

Plus le poids de R ($R = 1$, $R = 0.1$ et $R = 0.01$) sera faible par rapport à Q ($Q = 1 : 5$), plus la réponse du système sera rapide, (figures (A.2), (A.4) et (A.6)). Ce qui signifie que les valeurs propres auront un module voisin de zéro (figures (A.1), (A.3) et (A.5)).

Avec $R = 0.01$, $Q = 2$, les solutions limites des équations (2.27), (2.28), (2.29) et (2.30) procurent :

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 0.7603 & 0.8078 & 0.4929 \end{bmatrix} \\ \mu &= 9.1312 \\ \underline{g} &= \begin{bmatrix} -0.2185 \\ -0.2863 \\ -0.3932 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} 0.0139 & 0.0166 & 0.0130 \\ 0.0166 & 0.0207 & 0.0174 \\ 0.0130 & 0.0174 & 0.0251 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice de Riccati sont: 0.0518, 0.0003, 0.0076 donc toutes positives, et ainsi la matrice de Riccati (K) est définie positive.

Avec $R = 1$, $Q = 2$, les solutions limites L , μ sont:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0813 & 0.0799 & 0.0386 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mu = 1.1074 \quad (2.33)$$

Plus le poids de R sera faible par rapport à Q plus l'anticipation sera élevé.

2^{ème} cas: $T_r = k_r = 5$: Retard significatif de cinq périodes

Nous avons alors:

$$F_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad h_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_d = 0$$

Le système global devient:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7665 & 0.5632 & -0.0511 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4196 & 0.7665 & 0.9720 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0667 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = 0$$

Nous établissons les valeurs limites:

Avec $R = 0.01$, $Q = 2$:

$$L = \begin{bmatrix} 0.7610 & 0.8272 & 0.8235 & 0.7790 & 0.7129 & 0.6759 & 0.2845 \end{bmatrix}$$

$$\mu = 9.1219$$

Nous remarquons que les pôles du système ne sont pas influencé quand le retard augmente. Par contre la sortie est influencé.

Lorsqu'on augmente le retard le terme d'anticipation augmente ce qui traduit par l'augmentation du dépassement de la sortie.

Avec $R = 1$ et $Q = 2$:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0813 & 0.0775 & 0.0712 & 0.0639 & 0.0563 & 0.0526 & 0.0207 \end{bmatrix}$$

$$\mu = 1.1073$$

La même remarque que dans le cas précédent plus le poids de pondération sur la commande (R) sera faible plus les valeurs des solutions limites L et μ seront élevées.

2.2 Amélioration de la structure de commande

L'inconvénient majeur de la structure de commande précédemment définie (proportionnelle) est de ne pas assurer des erreurs nulles lorsque les consignes imposées au procédé ne sont pas nulles, d'où l'obligation d'une structure de commande proportionnelle et intégrale. Le nombre d'intégrateurs qu'il est ainsi possible d'adjoindre au procédé initial ne peut être arbitraire. Fond, M. [17] a énoncé à ce sujet une condition nécessaire et suffisante pour que le système élargi demeure commandable et ne pose pas de problème de convergence de la solution des équations de Riccati.

Le nombre maximal d'intégrateurs doit être nécessairement inférieur ou égal au nombre d'entrées.

Pour ne pas compliquer inutilement les formules, les développements mathématiques présentés ici supposent que chaque sortie à commander est munie d'un intégrateur.

Les intégrateurs numériques prennent la forme d'une approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles.

$$\underline{y}(i+1) = \underline{y}(i) + T\underline{e}(i) \quad (2.34)$$

$$= \underline{y}(i) + T(\underline{z} - \underline{y}(i)) \quad (2.35)$$

La dimension de $\underline{y}$ est p , T étant la période d'échantillonnage.

Le système élargi est de dimension $(n+p)$ et on suppose maintenant $\underline{f} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(i+1) \\ \underline{y}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{(n \times n)} & 0_{(n \times p)} \\ -TC_{(p \times n)} & I_{(p \times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{y}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{(n \times m)} \\ -TD \end{bmatrix} \underline{u}(i) + \begin{bmatrix} 0_{(n \times 1)} \\ T\underline{z}_{(p \times 1)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{(p \times n)} & 0_{(p \times p)} \\ 0_{(p \times n)} & I_{(p \times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(i) \\ \underline{y}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(i) \quad (2.37)$$

Le nouveau vecteur des sorties est de dimension $2p$. I est une matrice unitaire de rang p .

$$\begin{cases} \underline{x}_1(i+1) &= F_1 \underline{x}_1(i+1) + H_1 \underline{u}(i) + \underline{f}_1 \\ \underline{y}_1(i) &= C_1 \underline{x}_1(i) + D_1 \underline{u}(i) \end{cases} \quad (2.38)$$

F_1 : matrice d'état discret $(n+p) \times (n+p)$.

H_1 : matrice d'entrée discrète $(n+p) \times m$.

$\underline{f}_1$: vecteur constant $(n+p) \times 1$.

C_1 : matrice de sortie $2p \times (n+p)$.

D_1 : $2p \times m$.

Le critère J_1 à minimiser sur un horizon N a alors pour expression:

$$J_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \underline{e}_1^T(i) Q_1 \underline{e}_1(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) \right\} \quad (2.39)$$

Q_1 : matrice de pondération symétrique définie positive de dimension $(2p \times 2p)$.

$\underline{e}_1$: vecteur d'écart "global".

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{e}_{1(2p \times 1)}(i) = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{y}(i) \\ \underline{v}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}(i) \\ -\underline{v}(i) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Le critère J_1 peut donc encore s'écrire en faisant apparaître un terme de pondération Q "proportionnel" et un terme de pondération Q_v "intégral".

$$J_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \underline{e}^T(i) Q \underline{e}(i) + \underline{v}^T(i) Q_v \underline{v}(i) + \underline{u}^T(i) R \underline{u}(i) \right\} \quad (2.41)$$

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L_1(i) \underline{x}_1(i) + \underline{\mu}_1(i) \quad (2.42)$$

La matrice L_1 , de dimension $m \times (n+p)$ peut être décomposé en $L_1 = L, M$ où L et M sont respectivement de dimension $(m \times n)$ et $(m \times p)$.

$$\hat{\underline{u}}(i) = -L_{(m \times n)}(i) \underline{x}(i) - M_{(m \times p)}(i) \underline{v}(i) + \underline{\mu}_1(i) \quad (2.43)$$

On remarque que la matrice L figurant dans cette expression n'est pas la même que la matrice L obtenue (2.10) lors de la synthèse de la commande du système ne comportant pas d'intégrateurs additionnels.

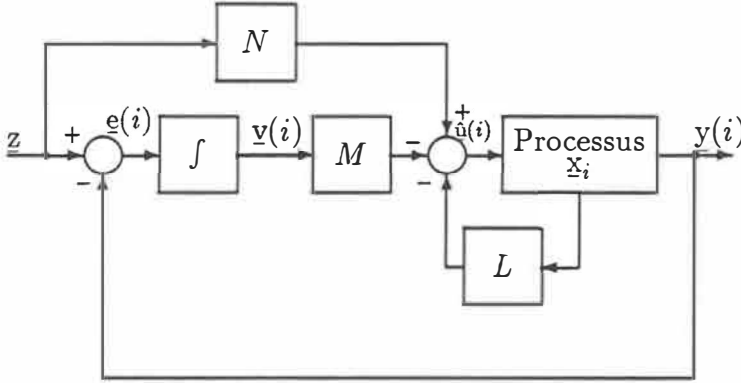


Figure 2.1: commande proportionnelle et intégrale à retour d'état

Les relations de récurrence permettant de déterminer, en temps inverse, le nouveau vecteur de commande optimal $\hat{u}(i)$ sont de la forme.

$$L_{1(m \times n+p)}(i) = [R + H_1^T K_1(i+1)H_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} [H_1^T K_1(i+1)F_1 + D_1^T Q_1 C_1] \quad (2.44)$$

$$\mu_{1(m \times 1)}(i) = [R + H_1^T K_1(i+1)H_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \{D_1^T Q_1 z_1 - H_1^T [g_1(i+1) + K_1(i+1)f_1]\} \quad (2.45)$$

$$\hat{u}_{m \times 1}(i) = -L_1(i)x_1(i) + \mu_1(i) \quad (2.46)$$

$$K_{1(n+p) \times (n+p)}(i) = \Omega_1 K_1(i+1)[F_1 - H_1 L_1(i)] + \Phi_1 C_1 \quad (2.47)$$

$$g_{1(n+p) \times 1}(i) = \Omega_1 \{g_1(i+1) + K_1(i+1)[H_1 \mu_1(i) + f_1]\} - \Phi_1 z_{-1} \quad (2.48)$$

$$\Omega_{1(n+p) \times (n+p)} = F_1^T - C_1^T Q_1 D_1 (R + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} H_1^T \quad (2.49)$$

$$\Phi_{1(n+p) \times 2p} = C_1^T Q_1 - C_1^T Q_1 D_1 (R + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} D_1^T Q_1 \quad (2.50)$$

Le vecteur $\underline{z}_1$ est le vecteur de “consigne” correspondant au vecteur de sortie élargi $\underline{y}_1$ défini par:

$$\underline{y}_1 = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$i.e : \underline{z}_1 = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Remarque:

$$D_1^T Q_1 D_1 = D^T Q D$$

$$D_1^T Q_1 \underline{z}_1 = D^T Q \underline{z}$$

Lorsque l’horizon choisi pour la minimisation du critère quadratique tend vers l’infini, la matrice de bouclage constante (L_1) et le vecteur d’anticipation constant $\underline{\mu}_1$ sont les solutions limites en temps inverse du système d’équations récurrentes.

Programmation:

Le calcul de ces solutions limites peut être fait en temps croissant à partir de $K(0) = 0$ et $\underline{g}_1(0) = 0$ à l’aide des équations:

$$\begin{aligned} L_{1(m \times n+p)}(j+1) &= [R + H_1^T K_1(j) H_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \\ &\quad [H_1^T K_1(j) F_1 + D_1^T Q_1 C_1] \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{1(m \times 1)}(j+1) &= [R + H_1^T K_1(j) H_1 + D_1^T Q_1 D_1]^{-1} \\ &\quad \{D_1^T Q \underline{z}_1 - H_1^T [\underline{g}_1(j) + K_1(j) \underline{f}_1]\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$K_{1(n+p) \times (n+p)}(j+1) = \Omega_1 K_1(j) [F_1 - H_1 L_1(j+1)] + \Phi_1 C_1 \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \underline{g}_{1(n+p) \times 1}(j+1) &= \Omega_1 \{ \underline{g}_1(j) + K_1(j) [H_1 \underline{\mu}_1(j+1) + \underline{f}_1] \} \\ &\quad - \Phi_1 \underline{z}_1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

obtenues on remplaçant i par $(j+1)$ et $(i+1)$ par j .

Une fois calculées les solutions limites constantes L_1 et $\underline{\mu}_1$

$$\begin{aligned}\hat{\underline{u}}(i) &= -L_1 \underline{x}(i) + \underline{\mu}_1 \\ &= -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + \underline{\mu}_1\end{aligned}$$

Les valeurs des matrices L et M et du vecteur $\underline{\mu}_1$ dépendent évidemment du choix des matrices Q_1 et R .

Performance de la structure

Choix des matrices de pondération Q_1 et R :

Les matrices carrées Q_1 et R sont définies positives. On se limite au choix de deux matrices diagonales.

Nous remarquons que plus le poids des éléments de la matrice R sera faible par rapport à ceux de la matrice Q , plus grandes seront les amplitudes des actions $\hat{\underline{u}}(i)$ et plus faibles seront les erreurs $\underline{e}_1(i)$. Donc la réponse du système sera plus rapide, ce qui signifie que ses valeurs propres auront un module plus proche de zéro.

On peut donc choisir des matrices Q_1 et R qui confèrent au système des valeurs propres proche de valeurs choisies à l'avance: c'est la forme que prend la commande "pseudo-modale" selon Fond.M [17].

Dans la pratique, le plus souvent, il ne convient pas de chercher à obtenir des caractéristiques dynamiques du type "temps de réponse", mais plutôt des caractéristiques du type "degré de stabilité", "robustesse", ...

Pour notre part nous avons choisi d'utiliser le lieu de racine pour caractériser le choix des matrices de pondérations.

Le calcul algébrique direct d'une matrice d'anticipation (2.45) a été effectué à la section de l'annexe (A.1.2).

Le vecteur de commande optimal peut donc se mettre, lorsque l'horizon tend vers l'infini, sous la forme:

$$\hat{\mathbf{u}}(i) = -L\mathbf{x}(i) - M\mathbf{v}(i) + N\mathbf{z} \quad (2.57)$$

Et la matrice d'anticipation N (de dimension $(m \times p)$) peut être déterminée après le calcul de L et M par un calcul algébrique direct:

$$N = (R + H_1^T K_1 H_1 + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} \{ D_1^T Q_1 A_1 - H_1^T [I - (F_1 - H_1 L_1)^T]^{-1} [(D_1 L_1 - C_1)^T Q_1 A_1 + K_1 A_2] \} \quad (2.58)$$

Système du second ordre

Le système du second ordre a été présenté dans la section (2.1.1).

- 1^{er} cas: $T_r = k_r = 1$ petit retard pur

Avec $R = 1$, $Q = 2$ et $Q_v = 0.1$, les solutions limites sont:

$$L = \begin{bmatrix} 0.2219 & 0.2285 & 0.1467 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$M = -0.2825 \quad (2.60)$$

$$N = 3.4237 \quad (2.61)$$

Avec $R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0.1$, les solutions limites sont:

$$L = \begin{bmatrix} 0.9595 & 1.0713 & 0.8583 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$M = -1.8456 \quad (2.63)$$

$$N = 14.8401 \quad (2.64)$$

Les figures (A.7) et (A.10) représentent le lieu de racine et la sortie avec $R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$. Lorsqu'on augmente la pondération sur

la commande ($R = 1$ avec $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$) la rapidité diminue (figure (A.11)).

Les figures (A.12), (A.13) représentent respectivement l'influence de la pondération sur $Q = 2$ et $Q = 20$ avec $R = 1$ et $Q_v = 0 : 0.02 : 0.1$.

- 2^{ieme} cas: $T_r = k_r = 5$ retard significatif de cinq périodes

Avec $R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0.1$

$$L = \begin{bmatrix} 0.9595 & 1.1813 & 1.3455 & 1.4676 & 1.5586 & 1.5858 & 0.9804 \end{bmatrix}$$

$$M = -1.8459$$

$$N = 22.2261$$

Les figures (A.8) et (A.9) représentent le lieu de racine et la sortie avec $R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$.

Remarque: Avec les mêmes pondérations sur la commande et sur le vecteur d'écart ($R = 0.01$, $Q = 2$) et variation de Q_v de 0 jusqu'à 0.01 il existe une augmentation du dépassement en régime transitoire.

Avec $R = 1$, $Q = 2$ et $Q_v = 0.1$

$$L = \begin{bmatrix} 0.2219 & 0.2367 & 0.2477 & 0.2559 & 0.2621 & 0.2631 & 0.1552 \end{bmatrix}$$

$$M = -0.2825$$

$$N = 4.5534$$

Nous remarquons que pour de mêmes valeurs de pondération sur la commande et sur le vecteur d'écart "global" et avec une élévation du retard il y a augmentation de l'anticipation.

2.3 Influence du retard interne sur la commande

La section (1.5) présente le cas particulier du retard interne possiblement sur un des états. Dans laquelle N_i représente un retard sur une variable d'état. Cependant lorsque le retard est important la dimension des équations est augmentée. D'où la difficulté à résoudre les équations de Riccati à cause de problème de convergence. Les travaux de Roxana et Boggiona [47] ont permis d'obtenir un système équivalent réduit. Dans certaines conditions il est possible d'opérer une contraction de $N_i > 2$ à $N_i = 2$.

En effet, sous certaines conditions il est possible de réduire la matrice F du système et conséquemment d'obtenir une matrice de Riccati réduite de $N_i > 2$ à $N_i = 2$. C'est très intéressant du point de vue du volume de calcul.

Tous les calculs nécessaires ont été reportés à la section de l'annexe A.3. D'après l'équation (2.21), on a:

$$K = (F - HNH^T KF)^T KF + C^T QC \quad (2.65)$$

avec $N = (R + H^T KH)^{-1}$.

On peut démontrer [47] que la matrice K_{12} est nulle, et, qu'alors, la matrice L se présente sous la forme:

$$L = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \vdots & 0 & \dots & 0 & \times & \vdots & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \vdots & 0 & \dots & 0 & \times & \vdots & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \vdots & 0 & \dots & 0 & \times & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

où $\times$ représente des coefficients non nuls a priori.

On peut démontrer également qu'on obtient les mêmes coefficients $\times$ dans la matrice L , si, toutes autres choses étant égales par ailleurs, on fait $N_i = 2$. Dans ces

conditions la commande L qu'on obtient se présente sous la forme:

$$L = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times & \vdots & \times & \vdots & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & \vdots & \times & \vdots & 0 \\ \times & \times & \cdots & \times & \vdots & \times & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

A partir de $\times$ on peut donc reconstruire facilement (2.66). Cette commande a été utilisé dans un procédé industriel comportant un retard pur interne, comme application aux caisses de tête de machine à papier [47].

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons appliqué la méthode de la commande quadratique par retour d'état pour les systèmes à retard avec la modélisation présentée au chapitre 1.

Ce chapitre comporte trois thèmes différents. Les deux premières sections traitent de l'influence du retard sur l'entrée ou la sortie avec des commandes du type proportionnel intégrale. La troisième section aborde le cas particulier d'un retard interne possible sur un des états.

C'est le lieu des racines qui nous permet de mieux visualiser le choix des matrices de pondérations Q , R et Q_v .

D'abord, en commande proportionnelle, la réponse sera d'autant plus rapide que la matrice de pondération R sera prépondérante face à la matrice Q de pondération de l'erreur. Ce qui signifie que les valeurs propres auront des modules faibles dans le plan z .

Cependant, comme inconvénient majeur ce type élémentaire de commande n'assure pas la convergence aux consignes en régime permanent. D'où l'obligation de commander par une structure plus évoluée: par exemple de type proportionnel et

intégrale. Cette nouvelle structure impose l'adjonction d'une matrice de pondération Q_v de l'intégrale de l'erreur.

Nous constatons cette fois, d'une part, que le dépassement de la sortie est d'autant plus important que la matrice Q_v de pondération de l'intégrale de l'erreur est forte vis à vis de R : la matrice énergétique de l'entrée.

D'autre part, puisque l'ajout de la fonction intégrale augmente d'un degré l'équation caractéristique, cela contribue en rendre plus complexe l'étude de la dynamique.

Ensuite, nous avons montré que la matrice Q_v doit être relativement moins élevée que Q pour ne pas destabiliser le système. Il est intéressant de constater que l'importance du retard n'affecte pas appréciablement la dynamique du système: soit les pôles de la boucle fermée. Cependant, le retard influence de beaucoup le dépassement dans le régime transitoire.

D'une manière générale, nous avons pris conscience que les méthodes quadratique imposent de nombreuses simulations afin de mettre en évidence l'importance du poids relatif des matrices de pondérations. Ne pouvant demeurer dans notre réflexion au seul niveau énergétique, on est contraint d'établir des moyens de visualisation à caractère dynamique et, d'ainsi ramener l'étude du problème aux méthodes classiques qui exigent soit une représentation des pôles de la boucle fermée dans le plan de Laplace soit celle de la réponse en fréquence.

Chapitre 3

La compensation des systèmes à retard: les prédicteurs

3.1 Introduction

Le prédicteur de Smith est probablement le meilleur compensateur connu et largement utilisé dans la technique de compensation de retard. Il a été proposé en 1957, par Smith O.J.M. [49]. Plusieurs travaux ont comparé les performances du prédicteur de Smith avec celles des contrôleurs PI et PID (Meyer et Seborg [29]; Ross [46], McMillan [31]). Un certain nombre d'auteurs ont analysé la sensibilité du prédicteur de Smith pour les problèmes inhérents par une modélisation imparfaite du procédé (Yamanaka et Shimemura [55]; Palmor et Shinnar [41], [42]; Palmor [38]; Herget et Frazer [24]; Hocken et al. [25]; Horowitz [26]). L'extension du prédicteur de Smith pour le contrôle de système multivariable est présentée par Alevisakis et Seborg [1]; Ogunnaike et Ray [36]; Herget et Frazer [24]; Owens et Raya [37]; Watanabe et al. [53]; Palmor et Halevi [40]. De plus, plusieurs auteurs ont proposé des modifications au prédicteur de Smith conventionnel incluant l'estimation de perturbations ou l'utilisation d'observateurs pour améliorer les performances en régulation (Hang et Wong [21]; Chiang et Durbin [10]; Hang et Tham [22]).

En 1970, Moore [32] a développé une solution alternative pour la compensation d'un système avec retard pur: c'est le prédictor analytique. Il est principalement utilisé dans le contrôle numérique direct. Doss et Moore [15] ont comparé les performances du prédictor de Smith avec celles du prédictor analytique dans la mise au point d'un système de contrôle de température. Plus tard, Meyer et al. [30] ont appliqué la même procédure à une colonne à distiller. Les auteurs Doss et Moore [16] ont généralisé le prédictor analytique à des modèles de processus d'ordre élevé en utilisant les techniques de la transformée en Z . Srinivasan et Mellichamp [50] ont développé une analyse théorique du prédictor analytique avec un contrôleur proportionnel. Le prédictor optimal du système de Donoghue [14] étend la version continue du prédictor analytique au cas multivariable.

3.2 Le prédictor de Smith

3.2.1 Structure fonctionnelle et principes

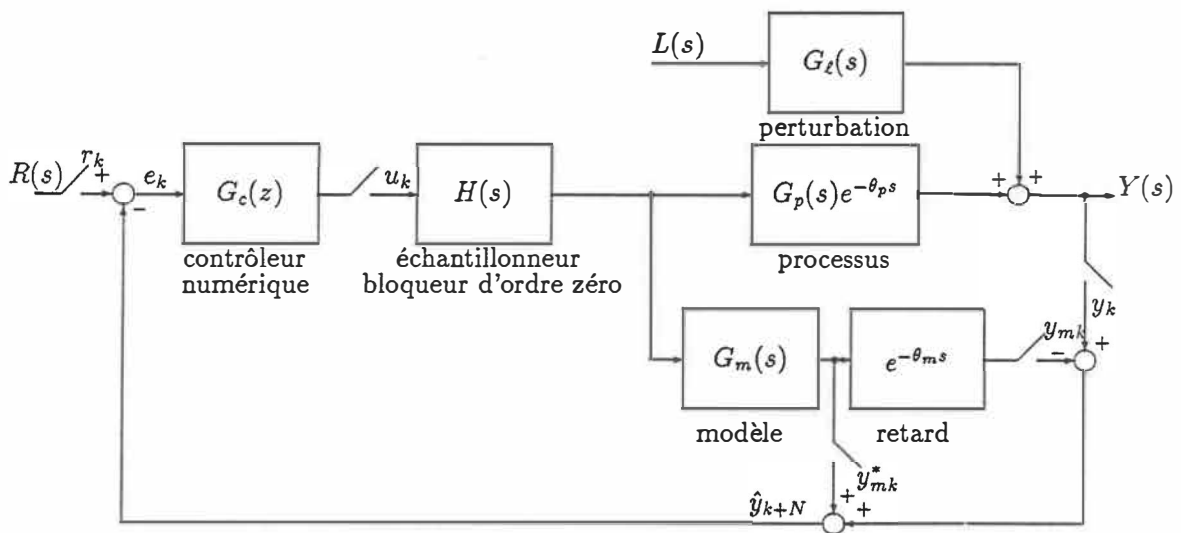


Figure 3.1: Le prédictor de Smith

Le prédicteur de Smith utilise un modèle du processus qui prédit les valeurs futures de la variable de la sortie à partir des entrées et sans perturbations. De sorte que, la variable de contre réaction provient de l'estimation de deux valeurs prévues à partir de l'entrée et de la valeur actuelle de la sortie. Le diagramme fonctionnel du prédicteur de Smith en temps discret est donné par la figure (3.1). On suppose que les fonctions de transfert $G_p(s)$ et $G_m(s)$ sont des fonctions rationnelles de la transformée de Laplace, et les retards purs, θ_p et θ_m , apparaissent comme des termes distincts pour une bonne caractérisation du système et du modèle de prédiction. Le signal de la sortie u_k du contrôleur numérique est fonction de la sortie future prévue $\hat{y}_{k+N}$, qui est calculée comme suit:

$$\hat{y}_{k+N} = y_{mk}^* + (y_k - y_{mk}) \quad (3.1)$$

Dans l'équation (3.1), y_{mk} est la sortie du modèle qui contient le retard, y_{mk}^* est la sortie du même modèle sans retard; et y_k est la sortie actuelle du processus. L'indice k indique le k^{ieme} instant d'échantillonnage. Le retard du modèle prédictif θ_m de la figure (3.1) est définit comme suit:

$$\theta_m = NT \quad (3.2)$$

où N représente le retard discret du modèle et T le temps d'échantillonnage. Dans la situation idéale, où le modèle est parfait et en absence de perturbation de charge, on a: $y_{mk} = y_k$. Donc, le signal d'entrée du contrôleur est: $e_k = r_k - y_{mk}^*$. L'action du contrôleur est dictée par y_{mk}^* , la sortie du modèle non retardée, plutôt que par celle du processus effectif y_k . Cependant en pratique, l'avantage théorique n'est pas entièrement réel à cause des effets de l'erreur de modélisation.

$$\tau_m \frac{dy_m^*(t)}{dt} + y_m^*(t) = K_m u(t) \quad (3.3)$$

$$\tau_m \frac{dy_m(t)}{dt} + y_m(t) = K_m u(t - \theta_m) \quad (3.4)$$

Si le bloqueur d'ordre zéro de la figure (3.1) est employé, $u(t)$ est une fonction

constante par morceaux, et les solutions analytiques des équations (3.3) et (3.4) prouvent:

$$y_{mk}^* = K_m (1 - B) u_{k-1} + B y_{mk-1}^* \quad (3.5)$$

$$y_{mk} = K_m (1 - B) u_{k-N-1} + B y_{mk-1} \quad (3.6)$$

où y_{mk}^* et y_{mk} représentent les sorties du modèle au k^{ieme} instant d'échantillonnage et B est définie par:

$$B = \exp \left(\frac{-T}{\tau_m} \right) \quad (3.7)$$

Comme y_m^* et y_m ont les mêmes conditions initiales on a:

$$y_{mk} = y_{mk-N}^* \quad (3.8)$$

D'après le diagramme de la figure (3.1), la réponse en boucle fermée est donnée par l'expression suivante:

$$Y(z) = \frac{G_c(z) G_p H(z) z^{-M} R(z) + \left(1 + G_c(z) G_m H(z) (1 - z^{-N})\right) G_\ell L(z)}{1 + G_c(z) G_m H(z) - G_c(z) G_m H(z) z^{-N} + G_c(z) G_p H(z) z^{-M}} \quad (3.9)$$

Le dénominateur de cette expression de la fonction de transfert en suiveur de l'entrée et en régulateur vise à bien mettre en évidence l'influence de la modélisation du processus. Il a cependant pour conséquence de ne pas mettre, en évidence, le principe fondamental du prédicteur de Smith, qui est celui de produire une équation caractéristique transcendante. La chaîne de prédiction doit selon cette intuition originale de Smith "égaliser" la fonction du processus afin d'enrayer l'effet déstabilisant du retard.

Le processus effectif avec son retard θ_p est affecté aussi par un multiple entier de la période d'échantillonnage T .

$$\theta_p = MT \quad (3.10)$$

Un modèle parfait procure $N = M$ et $G_m H(z) = G_p H(z)$, donc l'équation (3.9) se réduit à:

$$Y(z) = \frac{G_c(z) G_p H(z) z^{-M} R(z) + \left(1 + G_c(z) G_p H(z) (1 - z^{-M})\right) G_\ell L(z)}{1 + G_c(z) G_p H(z)} \quad (3.11)$$

Application: Système du premier ordre

Pour un processus du premier ordre et avec un contrôleur proportionnel $G_c(z) = K_c$ on a:

$$G_p H(z) = \frac{K_p (1 - B') z^{-1}}{1 - B' z^{-1}} \quad \text{avec } B' = \exp\left(-\frac{T}{\tau_p}\right) \quad (3.12)$$

$$G_m H(z) = \frac{K_m (1 - B) z^{-1}}{1 - B z^{-1}}; \quad \text{avec } B = \exp\left(-\frac{T}{\tau_m}\right) \quad (3.13)$$

La calibration du système en fonction de l'entrée peut se faire par le choix approprié du niveau de l'entrée $R(z)$. Ce référant au modèle de prédiction on peut choisir

$$R(z) = \frac{1 + K_c K_m}{K_c K_m} \frac{1}{(1 - z^{-1})} \quad (3.14)$$

Le niveau $Y(z)$ de sortie en l'absence de perturbation sera:

$$\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) y(z) \quad (3.15)$$

$$= \frac{K_p}{K_m} \frac{1 + K_c K_m}{1 + K_c K_p} \quad (3.16)$$

Il existe donc une erreur en régime permanent (offset):

$$\bar{e} = 1 - \bar{y} = \frac{K_m - K_p}{K_m (1 + K_c K_p)} \quad (3.17)$$

Remarquons qu'une modélisation parfaite procure:

$$\bar{y} = 1$$

$$\bar{e} = 0$$

Puisque $K_p = K_m$, il n'y a pas d'erreur en régime permanent.

Maintenant, en régulation, pour une entrée $R(z) \equiv 0$ et une perturbation $G_\ell L(z) = \frac{K_\ell}{1 - z^{-1}}$, nous avons :

$$\bar{y}_\ell = \frac{K_\ell}{1 + K_c K_p} \quad (3.18)$$

$$\text{et } \bar{e}_\ell = -\frac{K_\ell}{1 + K_c K_p} \quad (3.19)$$

L'erreur en régime permanent est proportionnelle au gain de la perturbation. Nous voyons là qu'une modélisation parfaite produit un asservissement qui a les mêmes performances que celui de la boucle de la seule fonction rationnelle du système. L'effet du retard est exclu de la boucle: c'est là qu'est l'intuition créatrice de Smith !

Équation caractéristique

Avec un compensateur proportionnel:

Le dénominateur de l'équation (3.9) de la sortie du prédictor de Smith en boucle fermée est:

$$\begin{aligned} Den_Y = 1 + [-B + K_c K_m(1 - B)]z^{-1} + K_c K_p(1 - B)z^{-(M+1)} \\ - K_c K_m(1 - B)z^{-(N+1)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} P(z) = z^{N+1} + [-B + K_c K_m(1 - B)]z^N + K_c K_p(1 - B)z^{N-M} \\ - K_c K_m(1 - B) \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'équation caractéristique lors d'une modélisation imparfaite ($N \geq M$, $K_p \neq K_m$).

Avec un compensateur proportionnel et intégral:

Le dénominateur de l'équation (3.9) de la sortie avec le contrôleur de Palmor [39] ($G_c(z) = b_0 \frac{1 - Bz^{-1}}{1 - z^{-1}}$) est:

$$\begin{aligned} Den_Y = 1 + [b_0 K_m(1 - B) - 1]z^{-1} + b_0 K_p(1 - B)z^{-(M+1)} \\ - b_0 K_m(1 - B)z^{-(N+1)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} P(z) = z^{N+1} + [b_0 K_m(1 - B) - 1]z^N + b_0 K_p(1 - B)z^{N-M} \\ - b_0 K_m(1 - B) \end{aligned} \quad (3.23)$$

C'est l'équation caractéristique lors d'une modélisation imparfaite ($N \geq M$, $K_p \neq K_m$).

Application du théorème de Rouché:

En regroupant les termes du polynôme caractéristique du système en boucle fermée pour appliquer le théorème de Rouché à l'étude des conditions de stabilité il vient:

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &= 1 + \frac{b_0(1 - B)}{1 - [1 - b_0(1 - B)K_m]z^{-1}} (K_p z^{-(M+1)} - K_m z^{-(N+1)}) \\ &= 1 + b_0(1 - B)K_p z^{-(M+1)} \frac{1 - \frac{K_m}{K_p} z^{-(N-M)}}{1 - [1 - b_0(1 - B)K_m]z^{-1}} \quad \text{pour } N \geq M \\ &= 1 + \sum_{i=M+1}^{\infty} a_i (z^{-1})^i \end{aligned} \quad (3.24)$$

- 1^{er} cas: $M = N$ avec une modélisation imparfaite sur le gain

$$a_i = b_0(1 - B)(K_p - K_m)[1 - b_0(1 - B)K_m]^{i-(M+1)} \quad \forall i \geq M + 1 \quad (3.25)$$

- 2^{ieme} cas: $M = N + 1$, $K_p \neq K_m$

$$a_i = b_0(1 - B)K_p \begin{cases} i = M + 1 & 1 \\ i > M + 1 & \frac{[1 - b_0(1 - B)K_m - \frac{K_m}{K_p}]}{\times [1 - b_0(1 - B)K_m]^{i-(M+1)}} \end{cases} \quad (3.26)$$

Une considération immédiate découlant du théorème de Rouché [45], exige qu'il faut

$$\left| \sum_{i=M+1}^{\infty} a_i (z^{-1})^i \right| < 1 \quad \forall |z^{-1}| = 1, \quad (3.27)$$

pour que $F(z^{-1})$ n'ait aucune racine à l'intérieur du cercle unitaire du plan z pour assurer que les racines soient positionnées sur le cercle unitaire. Sachant que nécessairement il existe:

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} |a_i| \geq \left| \sum_{i=M+1}^{\infty} a_i (z^{-1})^i \right| \quad \forall |z^{-1}| = 1 \quad (3.28)$$

Cette condition suffisante de stabilité asymptotique en boucle fermée impose:

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} |a_i| < 1 \quad (3.29)$$

3.2.2 Performances dynamique et statique

L'annexe B reproduit les diverses situations que nous avons simulées dans le but de mettre en évidence les propriétés fondamentales **du prédicteur de Smith**. Le lecteur devra s'y reporter pour les situer dans leur contexte global. Ici, nous portons l'attention du lecteur, sur les seules données qui sont pertinentes au prédicteur de Smith.

Les données du processus: $K_p = 1$, $\tau_p = 2$, $M = 1$, $T = 0.25$

avec $G_p H(z) = \frac{0.1175z^{-1}}{1 - 0.8825z^{-1}}$ et $B' = 0.8825$.

Compensateur proportionnelle

Étudions d'abord les performances d'une commande proportionnelle.

Le choix du modèle: $\tau_m = 2$, $T = 0.25$ et K_m varie entre 1 et 4.

Étude du domaine de stabilité:

- Pour une modélisation parfaite l'équation caractéristique avec ($N = M$, $K_p = K_m$) se réduit à:

$$P(z) = z + [-B + K_c K_m (1 - B)] \quad (3.30)$$

Par l'application du critère de Jury [35], le domaine de stabilité est de la forme (figure B.1) :

$$\frac{-1}{K_m} < K_c < \frac{1 + B}{K_m(1 - B)} \quad (3.31)$$

- L'équation caractéristique pour une modélisation imparfaite ($N = M = 1$, $K_p \neq K_m$) est:

$$P(z) = z^2 + [-B + K_c K_m (1 - B)]z + K_c(1 - B)(K_p - K_m) \quad (3.32)$$

Le domaine de stabilité devient alors (figure B.2):

$$\frac{-1}{K_p} < K_c < \frac{1 + B}{(2K_m - K_p)(1 - B)} \quad (3.33)$$

- L'équation caractéristique dans une modélisation imparfaite ($N = 2$, $M = 1$) est :

$$P(z) = z^3 + [-B + K_c K_m (1 - B)]z^2 + [K_c K_p (1 - B)]z - K_c K_m (1 - B) \quad (3.34)$$

Le domaine de stabilité devient alors (figure B.3) :

$$\frac{-1}{K_p} < K_c < \frac{(BK_m - K_p) + \sqrt{8K_m^2 + (-BK_m + K_p)^2}}{4K_m^2(1 - B)} \quad (3.35)$$

Nous remarquons que le domaine de stabilité dans une modélisation parfaite est supérieur à celui d'une modélisation imparfaite.

Compensateur proportionnelle et intégrale

Prenons maintenant une commande $P.I$ avec des ajustements de paramètres suivant une proposition de Palmor [39].

Le choix de contrôleur: $G_c(z) = b_0 \frac{1 - Bz^{-1}}{1 - z^{-1}}$ avec $b_0 = \frac{0.5}{b}$ tel que proposé par Palmor [39]. Le choix de la valeur de b a été défini de façon que les pôles et les zéros imaginaires coïncident sur le lieu des racines (B.12) dans une modélisation parfaite. La figure (B.13) représente l'influence de la valeur de b sur la sortie.

Étude du domaine de la stabilité:

1^{er} cas: $N = M$ et $K_p = K_m$: L'équation caractéristique de la modélisation parfaite est:

$$P(z) = z + [b_0 K_m (1 - B) - 1] \quad (3.36)$$

Le domaine de stabilité (figure (B.10)) est:

$$0 < b_0 < \frac{2}{K_m(1 - B)} \quad (3.37)$$

La condition suffisante de stabilité asymptotique de Rouché est vérifiée.

2^{ieme}: cas $N = M = 1$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$: modélisation imparfaite avec erreur sur le gain du modèle

L'équation caractéristique est:

$$P(z) = z^2 + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z + b_0 (1 - B)(K_p - K_m) \quad (3.38)$$

le domaine de stabilité (figure (B.10)):

$$0 < b_0 < \frac{-2}{(1 - B)(K_p - 2K_m)} \quad (3.39)$$

La condition suffisante de la stabilité asymptotique est:

$$\sum_{j=2}^{\infty} |b_0 (1 - B)(K_p - K_m)[1 - b_0 (1 - B)K_m]^{j-2}| < 1 \quad (3.40)$$

Dans une modélisation imparfaite avec erreur sur le gain du modèle, la condition suffisante de stabilité asymptotique est satisfaite avec $T = 0.25$, $\tau_p = \tau_m = 2$ (figure (B.14)).

3^{ieme} cas: $N = 2$, $M = 1$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$: modélisation imparfaite avec erreur sur le retard

L'équation caractéristique est:

$$P(z) = z^3 + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z^2 + b_0 K_p (1 - B)z - b_0 K_m (1 - B) \quad (3.41)$$

Le domaine de stabilité (figure (B.10)) est:

$$0 < b_0 < \frac{1}{(1 - B)K_m} \quad (3.42)$$

Nous remarquons que dans une modélisation imparfaite le domaine de stabilité donné par le critère de Jury est inférieur à celui de la modélisation parfaite.

La condition suffisante de la stabilité asymptotique en boucle fermée est:

$$\sum_{i=2}^{\infty} |a_i| < 1 \quad (3.43)$$

$$\text{avec } a_i = b_0(1 - B)K_p \begin{cases} i = 2 & 1 \\ i > 2 & [1 - b_0(1 - B)K_m - \frac{K_m}{K_p}] \\ & \times [1 - b_0(1 - B)K_m]^{i-3} \end{cases} \quad (3.44)$$

Nous remarquons que la condition suffisante de stabilité donnée par le théorème de Rouché est satisfaite (figure (B.15)) ($T = 0.25$, $\tau_m = \tau_p = 2$).

Performance à titre de suiveur:

Le choix du modèle du processus:

1^{er} cas: Modélisation parfaite

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 1$ et $K_\ell = 0$ (pas d'erreur en régime permanent)

avec $G_m H(z) = \frac{0.1175z^{-1}}{1 - 0.8825z^{-1}}$ et $B = 0.8825$ (figure (B.18)).

2^{ieme} cas: Erreur sur le retard

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 2$ et $K_\ell = 0$ (pas d'erreur en régime permanent)
avec $G_m H(z) = \frac{0.1175z^{-1}}{1 - 0.8825z^{-1}}$ et $B = 0.8825$ (figure (B.19)).

3^{ieme} cas: Erreur forte sur le retard

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 5$ et $K_\ell = 0$ (pas d'erreur en régime permanent)
avec $G_m H(z) = \frac{0.1175z^{-1}}{1 - 0.8825z^{-1}}$ et $B = 0.8825$ (figure (B.20)).

4^{ieme} cas: Erreur sur la constante de temps

$K_m = 1$, $\tau_m = 3$, $N = 1$ et $K_\ell = 0$ (pas d'erreur en régime permanent)
avec $G_m H(z) = \frac{0.08z^{-1}}{1 - 0.92z^{-1}}$ et $B = 0.92$ (figure (B.21)).

5^{ieme} cas: Erreur sur le gain

$K_m = 2$, $\tau_m = 2$, $N = 1$ et $K_\ell = 0$
avec $G_m H(z) = \frac{0.235z^{-1}}{1 - 0.8825z^{-1}}$ et $B = 0.8825$ (figure (B.22)).

Performance en régulation:

Les données de la perturbation: $G_\ell = \frac{K_\ell}{Den G_p H(z)}$.

Le choix du modèle du processus:

1^{er} cas: Modélisation parfaite

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 1$ et $K_\ell = 0.001$ (figure (B.23)).

2^{ieme} cas: Erreur sur le retard

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 5$ et $K_\ell = 0.001$ (figure (B.25)).

3^{ieme} cas: Erreur sur le retard avec augmentation du gain de la perturbation

$K_m = 1$, $\tau_m = 2$, $N = 5$ et $K_\ell = 0.01$ (figure (B.24)).

3.2.3 Conclusions

- Le domaine de stabilité dans une modélisation imparfaite est inférieur à celui obtenu pour une modélisation parfaite dans le cas des commandes proportion-

nelle et proportionnelle intégrale;

- Le régime permanent de la sortie totale augmente parallèlement avec le gain de la perturbation (K_ℓ) pour une valeur fixée du retard (N);
- Pour une grande variation du retard, seulement la pente de la réponse au démarrage est influencée. Par exemple, si on augmente la valeur du retard (N) le temps de monter du système est plus court.

3.3 Le prédicteur analytique

3.3.1 Structure fonctionnelle et principes

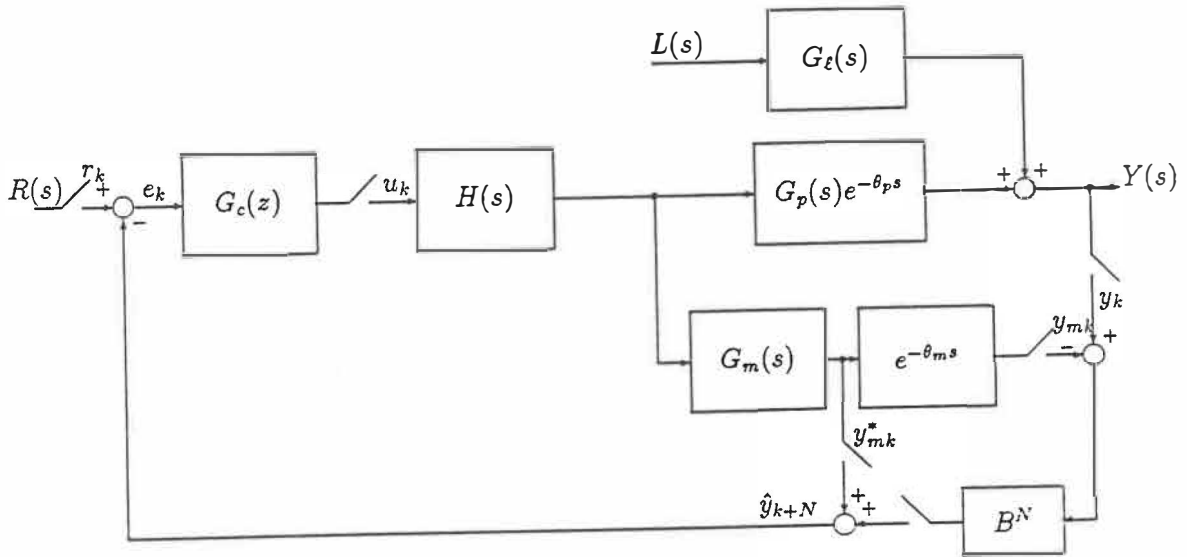


Figure 3.2: Le prédicteur analytique sans estimation de charge

La compensation du retard peut aussi être réalisée par un modèle de prédiction par lequel les sorties aux instants d'échantillonnage sont produites par la valeur effective de la sortie et les valeurs présentes et passées de l'entrée. Moore (1970) [32] a été le premier à préconiser ce type d'algorithme prédicteur pour le contrôle numérique direct, appelé: **prédicteur analytique**.

Le prédicteur analytique est, dans sa forme originale, basé sur un modèle du premier ordre. On sait que ce type de modèle est largement employé pour la représentation de système dont la réponse indicielle est apériodique et monotone en présence de retard pur. Le lecteur peut à ce titre se référer aux travaux de Zeigler et Nichols [56] et de Cohen et Coon [11] concernant la mise au point des régulateurs PID (annexe E).

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du premier ordre (3.6):

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+1} &= By_k + K_m (1 - B) u_{k-N} \\ \hat{y}_{k+2} &= By_{k+1} + K_m (1 - B) u_{k-N-1} \\ &\vdots \\ \hat{y}_{k+N} &= B^N y_k + K_m (1 - B) \sum_{i=1}^N B^{i-1} u_{k-i}\end{aligned}$$

Cette équation (3.45) produit:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+N} &= B^N y_k + K_m (1 - B) u_{k-1} + K_m (1 - B) B u_{k-2} \\ &\quad + \dots + K_m (1 - B) B^{N-1} u_{k-N}\end{aligned}\tag{3.45}$$

De l'équation (3.5), il vient:

$$\begin{cases} K_m (1 - B) u_{k-1} = y_{mk}^* - B y_{mk-1}^* \\ K_m (1 - B) u_{k-2} = y_{mk-1}^* - B y_{mk-2}^* \\ \vdots \\ K_m (1 - B) u_{k-N} = y_{mk-N+1}^* - B y_{mk-N}^* \end{cases}\tag{3.46}$$

La substitution de l'équation (3.45) dans (3.46) donne:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+N} &= B^N y_k + (y_{mk}^* - B y_{mk-1}^*) + B (y_{mk-1}^* - B y_{mk-2}^*) \\ &\quad + \dots + B^{N-1} (y_{mk-N+1}^* - B y_{mk-N}^*)\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\hat{y}_{k+N} = B^N y_k + y_{mk}^* - B^N y_{mk-N}^*\tag{3.48}$$

$$y_{mk-N}^* = y_{mk}$$

$$\hat{y}_{k+N} = y_{mk}^* + B^N (y_k - y_{mk})\tag{3.49}$$

La comparaison des équations (3.1) et (3.49), nous permet de mettre en évidence la différence des estimés $\hat{y}_{k+N}$, dans la méthode du prédicteur de Smith et celle que procure le prédicteur analytique de Moore.

En général $B^N \neq 1$, et les deux estimés ne sont identiques que pour le cas spécial où le modèle est parfait et en absence de perturbation de la charge. Il faut aussi que les conditions initiales soient les mêmes, dans ces conditions il vient:

$$y_{mk} = y_k\tag{3.50}$$

et par conséquent

$$\hat{y}_{k+N} = y_{mk}^* \quad (3.51)$$

Dans ce cas il n'y a pas d'erreur $y_k - y_{mk}$ et la chaîne de retour par le bloc B^N est inutile !

Mais comme on le voit dans les structures, ce prédicteur de Moore est formellement différent de celui de Smith car la forme B^N n'est pas variable pour un modèle et un processus données. En effet nous avons:

$$B^N = e^{-\left(\frac{\theta_p}{\tau_m M}\right)^N} = e^{-\left(\frac{\theta_p}{\tau_m}\right)^{\frac{N}{M}}}$$

avec $\frac{N}{M} \simeq 1 + \epsilon$ pour N et M grand ce qui est formellement différent de l'unité

$$B^N \neq 1$$

En particulier, lors d'une modélisation parfaite du système et du retard pur ce facteur est:

$$B^N = e^{-\frac{\theta_p}{\tau_m}}$$

Il est constant quelque soit la période d'échantillonnage !

D'après le diagramme de la figure (3.2), la sortie du prédicteur analytique sans estimation de la charge en boucle fermée, $Y(z)$, est:

$$Y(z) = \frac{G_c(z) G_p H(z) z^{-M} R(z) + \left(1 + G_c(z) G_m H(z) (1 - B^N z^{-N})\right) G_\ell L(z)}{1 + G_c(z) G_m H(z) - B^N G_c(z) G_m H(z) z^{-N} + B^N G_c(z) G_p H(z) z^{-M}} \quad (3.52)$$

Si le modèle est parfait, l'équation (3.52) se réduit à:

$$Y(z) = \frac{G_c(z) G_p H(z) z^{-M} R(z) + \left(1 + G_c(z) G_m H(z) (1 - B^N z^{-N})\right) G_\ell L(z)}{1 + G_c(z) G_m H(z)} \quad (3.53)$$

La différence entre les performances du prédicteur de Smith et celle du prédicteur analytique de Moore apparaît dans les équations (3.9), (3.11), (3.52) et (3.53). Les équations (3.9) et (3.52) ne sont jamais identiques, sauf pour le cas hypothétique d'une prédiction parfaite où la boucle de retour sur B^N n'a aucun effet. C'est dans ce cadre particulier et fort restrictif que certains auteurs relèvent la similitude des deux prédicteurs (Orgunnaïke et Ray [36]; Ray [44]) et encore, pour le cas d'un système et d'un modèle du premier ordre.

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation dans des systèmes dont la réponse indicielle est apériodique et monotone, c'est pratiquement un processus du premier ordre avec un retard qui illustre le mieux la différence entre les deux prédicteurs de Smith et de Moore. Supposons que le contrôleur proportionnel numérique soit utilisé alors, les erreurs en régime permanent ($\bar{e}$) causés par une modification de la commande de calibration,

$r_c = \frac{1 + K_m K_c}{K_c K_m} r$ pour le prédicteur de Smith (SP) et le prédicteur analytique (AP) sont donnés par:

$$(\bar{e})_{SP} = \frac{K_m - K_p}{K_m (1 + K_c K_p)} \quad (3.54)$$

$$(\bar{e})_{PA} = \frac{(K_m - K_p) [1 + K_c K_m (1 - B^N)]}{K_m [1 + K_c K_m + B^N (K_c K_p - K_c K_m)]} \quad (3.55)$$

avec $K_m = K_p$ l'erreur en régime permanent est nulle.

Similairement, pour un échelon unitaire de perturbation de charge, les erreurs en régime permanent seront:

$$\bar{y}_\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \frac{K_l [1 + K_c K_m (1 - B^N)]}{1 + K_c [K_m + B^N (K_p - K_m)]} \quad (3.56)$$

$$\bar{e}_\ell = -\frac{K_l [1 + K_c K_m (1 - B^N)]}{1 + K_c [K_m + B^N (K_p - K_m)]} \quad (3.57)$$

Équation caractéristique

Avec un Compensateur proportionnel:

Le dénominateur de l'équation (3.52) de la sortie du prédictor analytique sans estimation de charge en boucle fermée est:

$$\begin{aligned} Den_Y = & 1 + [-B + K_c K_m (1 - B)]z^{-1} + K_c K_p (1 - B) B^N z^{-(M+1)} \\ & - K_c K_m (1 - B) B^N z^{-(N+1)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

ou encore

$$\begin{aligned} P(z) = & z^{N+1} + [-B + K_c K_m (1 - B)]z^N + K_c K_p (1 - B) B^N z^{N-M} \\ & - K_c K_m (1 - B) B^N \end{aligned} \quad (3.59)$$

C'est l'équation caractéristique dans une modélisation imparfaite ($N \geq M$, $K_p \neq K_m$).

Avec un compensateur proportionnel et intégrale

Le dénominateur de l'équation (3.52) avec un contrôleur de Palmor est:

$$\begin{aligned} Den_Y = & 1 + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z^{-1} + b_0 B^N K_p (1 - B) z^{-(M+1)} \\ & - b_0 B^N K_m (1 - B) z^{-(N+1)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

L'équation caractéristique:

$$\begin{aligned} P(z) = & z^{N+1} + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z^N + b_0 B^N K_p (1 - B) z^{N-M} \\ & - b_0 B^N K_m (1 - B) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Application du théorème de Rouché:

En regroupant les termes du polynôme caractéristique du système en boucle fermée pour appliquer le théorème de Rouché il vient:

$$F(z^{-1}) = 1 + \frac{b_0 B^N K_p (1 - B) z^{-(M+1)} - b_0 B^N K_m (1 - B) z^{-(N+1)}}{1 + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z^{-1}} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + b_0 B^N (1 - B) K_p z^{-(M+1)} \frac{1 - \frac{K_m}{K_p} z^{-(N-M)}}{1 + [b_0 K_m (1 - B) - 1] z^{-1}} \quad \text{pour } N \geq M \\
&= 1 + \sum_{i=M+1}^{\infty} a_i z^{-i}
\end{aligned}$$

- 1^{er} cas: $N = M$ modélisation imparfaite avec une erreur sur le gain

$$a_i = b_0(1 - B)B^M(K_p - K_m)[1 - b_0(1 - B)K_m]^{i-(M+1)} \quad \forall i \geq M + 1 \quad (3.63)$$

- 2^{ieme} cas: $N = M + 1$, $K_p \neq K_m$

$$a_i = b_0(1 - B)B^{M+1}K_p \begin{cases} i = M + 1 & 1 \\ i > M + 1 & \frac{[1 - b_0(1 - B)K_m - \frac{K_m}{K_p}]}{\times [1 - b_0(1 - B)K_m]^{i-(M+1)}} \end{cases} \quad (3.64)$$

3.3.2 Performances dynamique et statique

Toujours selon l'annexe B qui regroupe les simulations nécessaires à la comparaison des deux types de prédicteurs (Smith et Moore).

Compensation proportionnelle

Étude du domaine de stabilité:

- Dans une modélisation parfaite ($N = M$, $K_p = K_m$), l'équation caractéristique est:

$$P(z) = z + [-B + K_c K_m (1 - B)] \quad (3.65)$$

Le domaine du prédicteur analytique est la même que celui du prédicteur de Smith dans une modélisation parfaite (équation (3.31), figure (B.1)).

- Prenons l'équation caractéristique dans une modélisation imparfaite ($N = M = 1$, $K_p \neq K_m$) par exemple: $K_p = 1$ et K_m varie entre 1 et 4 :

$$P(z) = z^2 + [-B + K_c K_m (1 - B)]z + K_c (K_p - K_m)(1 - B)B \quad (3.66)$$

Le domaine de stabilité se réduit à (figure B.2):

$$\frac{1}{(K_p - K_m)(1 - B)B} < K_c < \frac{1 + B}{1 - B} \frac{1}{K_m + B(K_m - K_p)} \quad (3.67)$$

- Avec une modélisation imparfaite ($N = 2$, $M = 1$), l'équation caractéristique (3.59) devient:

$$P(z) = z^3 + [-B + K_c K_m (1 - B)]z^2 + K_c K_p (1 - B)B^2 z - K_c K_m (1 - B)B^2 \quad (3.68)$$

Le domaine de stabilité de l'équation (3.68) se réduit à (figure B.3):

$$\frac{-1}{K_m + B^2(K_p - K_m)} < K_c < \frac{B\{BK_m - K_p\} + \sqrt{(BK_m + K_p)^2 + 4K_m^2(B^2 + 1)}}{2K_m^2(1 - B)(B^3 + B)} \quad (3.69)$$

Comparaison entre les deux domaines de stabilité de Smith et de Moore:

Nous remarquons que le domaine de stabilité du prédicteur analytique est supérieur à celui du prédicteur de Smith pour une modélisation imparfaite ($N = 2$, $M = 1$).

Mais comme pour le cas du prédicteur du Smith le domaine obtenu par le prédicteur de Moore avec une modélisation imparfaite est toujours inférieur à celui obtenu pour une modélisation parfaite.

Étude de l'erreur en régime permanent:

Comparaison de l'erreur en régime permanent $(\bar{e})_{PA}$ et $(\bar{e})_{PS}$ en suiveur:

L'erreur en régime permanent $(\bar{e})_{PA}$ est plus élevée que $(\bar{e})_{PS}$ et croît avec le gain du modèle (K_m) (figure (B.4)).

Lorsqu'on fait varier la valeur du retard ($B = e^{-(\frac{\theta_p}{\tau_m})^{\frac{N}{M}}}$), $(\bar{e})_{PS}$ est constant alors que $(\bar{e})_{PA} > (\bar{e})_{PS}$ varie exponentiellement (figure (B.6)). D'où un net avantage du prédicteur de Smith.

Comparaison de l'erreur en régime permanent en régulation :

$(\bar{e})_{PA}$ varie linéairement avec une pente négative quand K_m augmente. Par contre $(\bar{e})_{PS}$ est constant dans le cas d'une modélisation parfaite (figure (B.5)).

De même $(\bar{e})_{PA}$ varie en fonction d'un exponentiel dans le cas d'une modélisation imparfaite mais $(\bar{e})_{PA}$ est constant (figure (B.7)).

Lorsqu'on varie la valeur de B , $(\bar{e})_{PA}$ varie linéairement avec une pente positive quant K_m augmente, par contre l'erreur en régime permanent $(\bar{e})_{PA}$ est constante (figure (B.9)).

Nous dégageons ainsi le net avantage du prédicteur de Smith de point de vue précision. Cependant le prédicteur analytique donne un système plus rapide.

Compensation proportionnelle et intégrale

On étudie les mêmes cas qui ont été défini à la section (3.2.2).

1^{er} cas: $N = M$ et $K_p = K_m$: Dans une modélisation parfaite le prédicteur de Moore a le même domaine de stabilité que le prédicteur de Smith (figure (B.11)).

2^{ieme} cas: $N = M = 1$ et $K_p \neq K_m$: modélisation imparfaite avec erreur sur le gain du modèle

L'équation caractéristique est:

$$P(z) = z^2 + [b_0 K_m (1 - B) - 1]z + b_0 B (1 - B) (K_p - K_m) \quad (3.70)$$

Le domaine de stabilité (figure (B.11)) est:

$$0 < b_0 < \frac{-2}{-K_m(1 - B) + B(1 - B)(K_p - K_m)} \quad (3.71)$$

La condition suffisante de la stabilité asymptotique est:

$$\sum_{j=2}^{\infty} |b_0 B(1-B)(K_p - K_m)(1 - b_0(1-B)K_m)^{j-2}| < 1 \quad (3.72)$$

Remarque: Dans une modélisation imparfaite avec erreur sur le gain du modèle la condition suffisante de Rouché est satisfaite avec $T = 0.25$, $\tau_m = \tau_p = 2$ (figure (B.16)).

3^{ieme} cas: $N = 2$, $M = 1$ et $K_p \neq K_m$: modélisation imparfaite avec erreur sur le retard

L'équation caractéristique est:

$$P(z) = z^3 + [b_0 K_m(1-B) - 1]z^2 + b_0 B^2(1-B)K_p z - b_0 B^2(1-B)K_m \quad (3.73)$$

Le domaine de stabilité est (figure (B.11)):

$$0 < b_0 < \frac{B(K_m - K_p) + \sqrt{B^2(K_m - K_p)^2 + 8K_m^2}}{4B(1-B)K_m^2} \quad (3.74)$$

Le domaine de stabilité dans une modélisation imparfaite est inférieur à celui d'une modélisation parfaite.

La condition suffisante de la stabilité asymptotique en boucle fermée est:

$$\sum_{i=2}^{\infty} |a_i| < 1 \quad (3.75)$$

$$\text{avec } a_i = b_0 B^2(1-B)K_p \begin{cases} i = 2 & 1 \\ i > 2 & [1 - b_0(1-B)K_m - \frac{K_m}{K_p}] \times [1 - b_0(1-B)K_m]^{i-3} \end{cases} \quad (3.76)$$

La figure (B.17) prouve que la condition suffisante de la stabilité asymptotique est satisfaite.

Performance à titre de suiveur:

1^{er} cas: Modélisation parfaite entre le modèle et le processus

Le PA et le PS ont les mêmes dynamiques (figure (B.18)).

2^{ème} et 3^{ème} cas: Influence d'une mauvaise caractérisation du retard

Le PA est légèrement plus rapide que le PS comme l'indiquent les figures (B.19) pour une erreur faible et (B.20) pour une erreur appréciable.

4^{ème} cas: Erreur sur la constante de temps du modèle

Le PA a la même performance que le PS (figure (B.21)).

5^{ème} cas: Erreur sur le gain du modèle

Le PA est plus sensible à l'erreur en régime permanent que le PS (figure (B.22)).

Performance en régulation:

L'étude des trois cas qui ont été définis dans la section (3.2.2) avec les courbes figurants en (B.23), (B.24) et (B.25).

Nous remarquons que l'erreur en régime permanent du PS augmente lorsque K_ℓ augmente par contre le PA n'est pas influencé (figure (B.24)).

L'augmentation du retard (N) influence le temps de monter de la réponse du système pour une valeur de (K_ℓ) fixée (figure (B.25) et (B.23)).

3.3.3 Conclusions

Principalement, on voit que le prédicteur analytique a un comportement notablement différent du prédicteur de Smith.

Dans le cas du prédicteur analytique sans prévision de charge

- Le domaine de stabilité du prédicteur analytique est supérieur a celui du prédicteur de Smith pour une modélisation imparfaite avec les contrôleurs proportionnel et proportionnel intégrale;
- Dans une modélisation parfaite les prédicteurs de Smith et de Moore ont les mêmes domaines de stabilités pour les deux contrôleurs proportionnel et pro-

portionnel intégrale;

- Le prédicteur de Smith est plus précis en régime permanent que le prédicteur analytique;
- Par contre le prédicteur analytique est plus rapide que le prédicteur de Smith.

3.4 Le prédicteur analytique avec estimation de charge

3.4.1 Structure fonctionnelle et principes

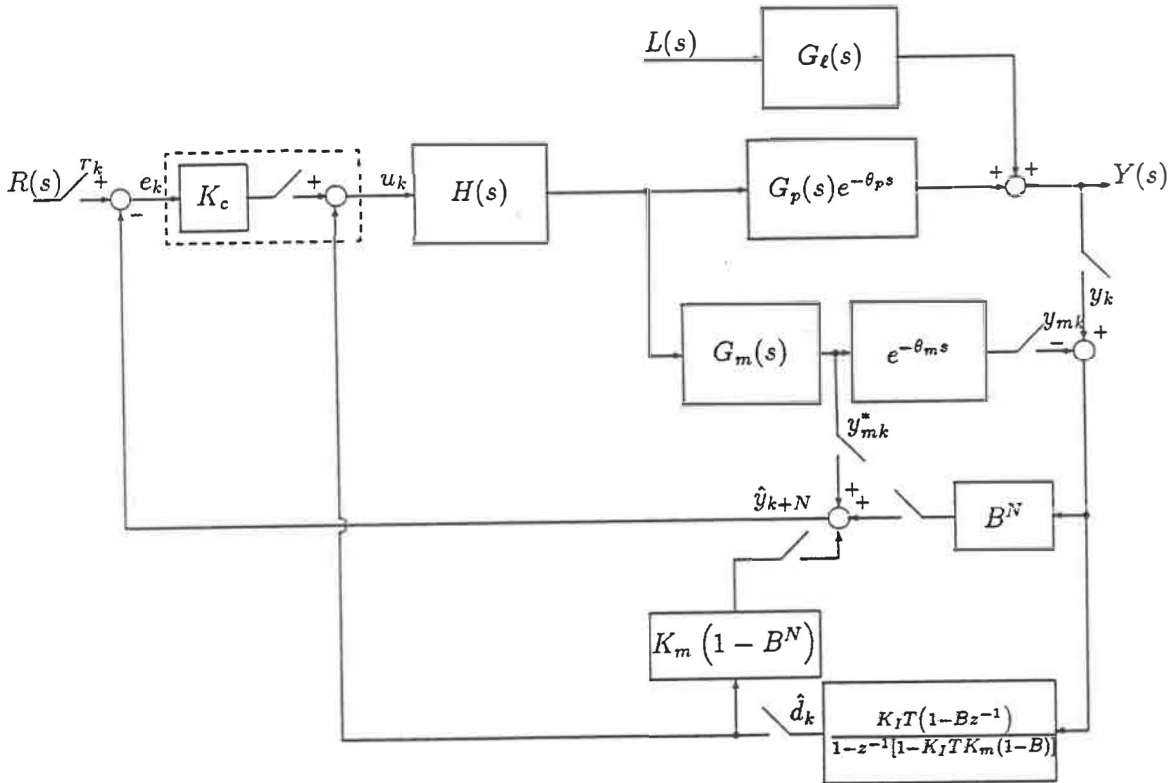


Figure 3.3: Le prédicteur analytique avec estimation de charge

Dans la section précédente nous avons montré que le prédicteur analytique avait l'inconvénient (figure (3.2)) de fournir des prédictions erronées en régime permanent y_{k+N} , pour un modèle inadéquat où en présence de changement de charge. Par conséquent, si $G_c(z)$ de la figure (3.2) est un contrôleur conventionnel PI ou PID, l'erreur en régime permanent est causée par des estimés biaisés de y_{k+N} . Hammerstrom et Waller [19] ont noté que le même problème se pose dans l'approche de Donoghue [14] qui est essentiellement l'extension au cas multivariable du prédicteur

analytique.

Moore [32] a modifié son prédicteur analytique par l'adjonction d'un estimateur de la charge. Ce prédicteur nous est donné en figure (3.3). L'expression de la prédiction de charge prend la forme qui suit:

$$\hat{y}_k = By_{k-1} + K_m (1 - B) (u_{k-N-1} + \hat{d}_{k-1}) \quad (3.77)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} + K_I T (y_k - \hat{y}_k) \quad (3.78)$$

$$u_k = K_c (r_{ck} - \hat{y}_{k+N}) - \hat{d}_k \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+N} &= By_{k+N-1} + K_m (1 - B) \left(u_{k-1} + \overbrace{\hat{d}_{k+N-1}}^{\hat{d}_k} \right) \\ &= B \left[By_{k+N-2} + K_m (1 - B) (u_{k-2} + \hat{d}_k) \right] + K_m (1 - B) (u_{k-1} + \hat{d}_k) \\ &= B^2 y_{k+N-2} + K_m (1 - B) \{ B (u_{k-2} + \hat{d}_k) + (u_{k-1} + \hat{d}_k) \} \end{aligned}$$

Soit:

$$\hat{y}_{k+N} = B^N y_k + K_m (1 - B) \sum_{i=1}^N B^{i-1} (u_{k-i} + \hat{d}_k) \quad (3.80)$$

D'après l'équation (3.80) nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+N} &= B^N y_k + K_m (1 - B) \sum_{i=1}^N B^{i-1} u_{k-i} + \\ &\quad K_m (1 - B) (1 + B + \dots + B^{N-1}) \hat{d}_k \\ \hat{y}_{k+N} &= B^N y_k + K_m (1 - B) \sum_{i=1}^N B^{i-1} u_{k-i} + K_m (1 - B^N) \hat{d}_k \end{aligned} \quad (3.81)$$

D'après la somme des équations (3.46) il vient:

$$\sum_{i=1}^N B^{i-1} u_{k-i} = \frac{y_{mk}^* - B^N y_{mk-N}^*}{K_m (1 - B)} \quad (3.82)$$

D'après l'équation (3.81) avec (3.82) c'est:

$$\hat{y}_{k+N} = y_{mk}^* + B^N (y_k - y_{mk}) + K_m (1 - B^N) \hat{d}_k \quad (3.83)$$

D'après les équations (3.77) et (3.6) on a:

$$\hat{y}_k = By_{k-1} + (y_{mk} - By_{mk-1}) + K_m (1 - B) \hat{d}_{k-1} \quad (3.84)$$

Les valeurs en régime permanent de y et y_m sont notées par $\bar{y}$ et $\bar{y}_m$ respectivement.

D'après (3.78) on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_k = \bar{y} \quad (3.85)$$

La substitution de l'équation (3.85) dans (3.84) donne:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}_k = \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \quad (3.86)$$

Le régime permanent s'obtient de l'équation (3.83):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_{k+N} &= \bar{y}_m + B^N (y_k - y_{mk}) + (1 - B^N) (\bar{y} - \bar{y}_m) \\ &= \bar{y} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Le prédicteur analytique avec estimation de charge donne une prévision exacte du régime permanent qui est insensible aux erreurs de modélisation ou des perturbations de charge non mesurées.

La sortie en boucle fermée:

Le contrôleur de Moore avec une commande proportionnelle est de la forme :

$$u_k = K_c (r_{ck} - \hat{y}_{k+N}) - \hat{d}_k \text{ avec } r_{ck} = \frac{1 + K_c K_m}{K_c K_m} r_k$$

D'après les équations (3.6) et (3.77) on a:

$$\hat{y}_k = By_{k-1} + y_{mk} - By_{mk-1} + K_m (1 - B) \hat{d}_{k-1} \quad (3.88)$$

La substitution de l'équation (3.88) dans (3.78) donne:

$$\hat{d}_k = [1 - K_I T K_m (1 - B)] \hat{d}_{k-1} + K_I T [(y_k - y_{mk}) - B (y_{k-1} - y_{mk-1})] \quad (3.89)$$

La transformée en Z de $\hat{d}_k$ est:

$$\begin{aligned} D(z) &= C(z) [Y(z) - Y_m(z)] \\ \text{avec } C(z) &= \frac{K_I T (1 - Bz^{-1})}{1 - z^{-1} [1 - K_I T K_m (1 - B)]} \end{aligned} \quad (3.90)$$

D'après l'équation (3.83) il existe:

$$\begin{aligned} Y_p(z) &= Y_m^*(z) + B^N [Y(z) - Y_m(z)] + K_m (1 - B^N) D(z) \\ Y_p(z) &= Y_m^*(z) + A(z) [Y(z) - Y_m(z)] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\text{avec } A(z) = B^N + K_m (1 - B^N) C(z) \quad (3.92)$$

La sortie avec modélisation imparfaite procure:

$$\begin{aligned} &K_c G_p H(z) z^{-M} R_c(z) \\ Y(z) &= \frac{+ \{1 + G_m H(z) [K_c - K_c A(z) z^{-N} - C(z) z^{-N}]\} G_\ell L(z)}{1 + K_c G_m H(z) + [K_c A(z) + C(z)] [G_p H(z) z^{-M} - G_m H(z) z^{-N}]} \end{aligned} \quad (3.93)$$

La sortie avec modèle parfait donne:

$$\begin{aligned} &K_c G_p H(z) z^{-M} R_c(z) \\ Y(z) &= \frac{+ \{1 + G_p H(z) [K_c - K_c A(z) z^{-N} - C(z) z^{-N}]\} G_\ell L(z)}{1 + K_c G_p H(z)} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\text{avec } G_m H(z) = \frac{K_m (1 - B) z^{-1}}{1 - B z^{-1}} \quad (3.95)$$

Équation caractéristique du système:

Le dénominateur dans une modélisation imparfaite de la sortie (3.93) est:

$$\begin{aligned} Den_Y &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \{[(B^N + (1 - B^N) K_m K_I T) K_c + K_I T] + \\ &[-K_c \{B^N (1 - K_I T K_m) + K_m K_I T B\} - B K_I T] z^{-1}\} \\ &\times \{K_p (1 - B) z^{-(M+1)} - K_m (1 - B) z^{-(N+1)}\} \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\text{avec } a_1 = -1 + K_I T K_m (1 - B) - B + K_m (1 - B) K_c \quad (3.97)$$

$$a_2 = -[1 - K_I T K_m (1 - B)] [-B + K_c K_m (1 - B)] \quad (3.98)$$

3.4.2 Performance dynamique et statique

L'annexe B regroupe les simulations nécessaires à l'évaluation du prédicteur analytique avec estimation de charge.

Le choix de la valeur K_c du contrôleur G_c a été définie de façon que les pôles et les zéros imaginaires coïncident sur le lieu des racines (figure (B.26)) pour une valeur de K_I donnée.

Étude du domaine de stabilité

Dans une modélisation parfaite ($N = M$, $K_p = K_m$) de l'équation (3.96)) est:

$$Den_Y = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \quad (3.99)$$

avec a_1 et a_2 sont donnés respectivement par les équations (3.97) et (3.98).

L'équation caractéristique de l'équation (3.99) est:

$$P(z) = z^2 + [-1 + K_I T K_m (1 - B) - B + K_m (1 - B) K_c] z - [1 - K_I T K_m (1 - B)] [-B + K_c K_m (1 - B)] \quad (3.100)$$

On étudie les mêmes données qui ont été défini dans la section (3.2.2), $\tau_m = \tau_p = 2$, $T = 0.25$, $K_I = 1$ et K_m varie entre 1 et 4.

Le domaine de stabilité [34] est:

$$\frac{-(1 + a_{10} + a_{20})}{a_{11} + a_{21}} < K_c < \frac{-1 - a_{20} + a_{10}}{a_{21} - a_{11}} \quad (3.101)$$

Les paramètres a_{10} , a_{11} , a_{20} et a_{21} sont donné par:

$$a_{10} = -(1 + B) + K_I T (1 - B) K_m \quad (3.102)$$

$$a_{11} = K_m (1 - B) \quad (3.103)$$

$$a_{20} = B [1 - K_I T K_m (1 - B)] \quad (3.104)$$

$$a_{21} = -(1 - B) K_m [1 - K_I T K_m (1 - B)] \quad (3.105)$$

Après simplification de l'inégalité (3.101) il vient:

$$\frac{-1}{K_m} < K_c < \frac{B + 1}{K_m (1 - B)} \quad (3.106)$$

Nous remarquons que le domaine de stabilité est indépendant de K_I .

Calculons le domaine de stabilité avec $K_I = \frac{1}{TK_m(1-B)}$ de l'équation (3.96).

$$P(z) = z + [-B + K_c K_m(1-B)] \quad (3.107)$$

Nous remarquons que l'équation caractéristique est de premier ordre, appliquons le critère de Jury [34] pour trouver le domaine de stabilité (figure (B.1)) c'est:

$$\frac{-1}{K_m} < K_c < \frac{1+B}{K_m(1-B)} \quad (3.108)$$

3.4.3 Conclusions

Dans le cas du prédicteur analytique avec estimation de charge

- Dans une modélisation parfaite, la valeur de K_I n'influe pas sur le domaine de stabilité ($N = M$, $K_m = K_p$);
- Par contre dans le cas d'une modélisation imparfaite avec erreur sur le gain du modèle ($N = M$, $K_m \neq K_p$) le domaine de stabilité est influencé par la valeur de K_I ;
- Le domaine de stabilité dans une modélisation parfaite est la même pour les prédicteurs de Smith, analytique sans estimation de charge et avec estimation de charge (figure (B.1)).

3.5 Le prédictiveur analytique généralisé

3.5.1 Structure fonctionnelle et principes

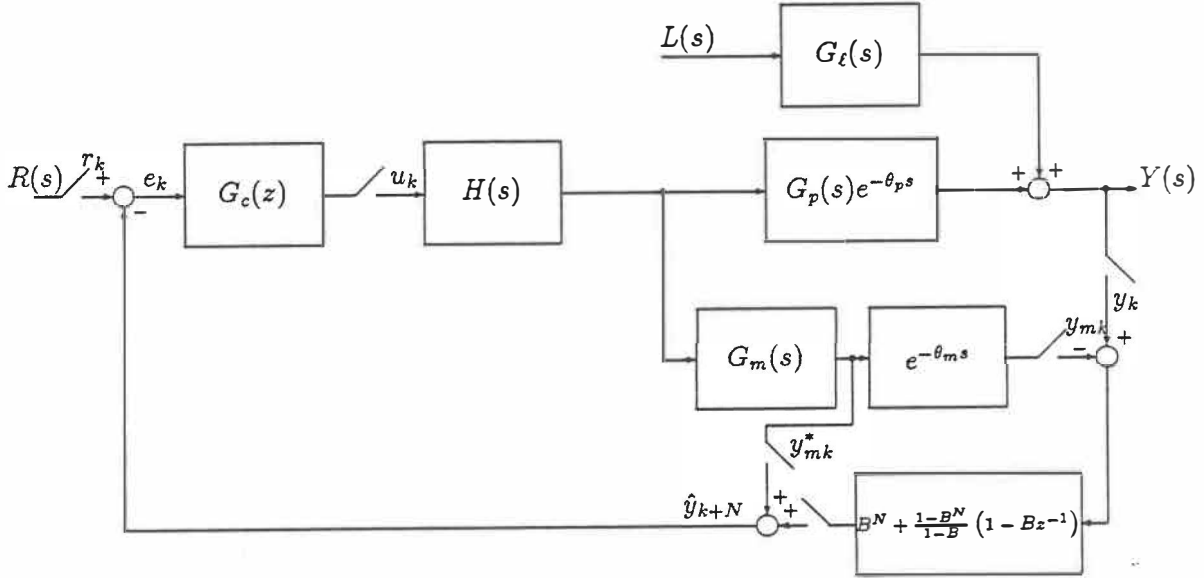


Figure 3.4: Le prédictiveur analytique généralisé

Le système de contrôle en contre-réaction est utilisé si le contrôleur et l'estimateur sont séparés.

D'après Moore et al. [32], lorsque la fonction de transfert de la charge G_p est un modèle exact, le niveau de la perturbation de charge est estimé après une période d'échantillonnage.

$t = (k-1)T$, $\hat{d}_{k-1} = 0$ et d'après l'équation (3.77)

$$\hat{y}_k = By_{k+1} + K_m(1-B)u_{k-N-1} \quad (3.109)$$

Si le modèle et la fonction de transfert de la charge sont exacts; G_ℓ et G_p ont la même fonction de transfert. Alors nous avons:

$$y_k = By_{k-1} + K_m(1-B)(u_{k-N-1} + \vec{d}) \quad (3.110)$$

D'après l'équation (3.78) il existe:

$$\hat{d}_k = K_I T K_m (1 - B) \bar{d} \quad (3.111)$$

Après une période d'échantillonnage, le niveau de la perturbation de charge est identifié $\hat{d}_k = \bar{d}$.

L'équation (3.111) établit:

$$K_I = \frac{1}{T K_m (1 - B)} \quad (3.112)$$

La substitution de l'équation (3.77) et (3.112) dans (3.78) donne:

$$\begin{aligned} \hat{d}_k &= \underbrace{\frac{\hat{y}_k - B y_{k-1}}{K_m (1 - B)} - u_{k-N-1}}_{d_{k-1}} + \frac{1}{K_m (1 - B)} (y_k - \hat{y}_k) \\ &= \frac{1}{K_m (1 - B)} [y_k - B y_{k-1} - K_m (1 - B) u_{k-N-1}] \end{aligned} \quad (3.113)$$

D'après l'équation (3.6) nous avons:

$$K_m (1 - B) u_{k-N-1} = y_{mk} - B y_{mk-1} \quad (3.114)$$

$$\hat{d}_k = \frac{1}{K_m (1 - B)} [(y_k - y_{mk}) - B (y_{k-1} - y_{mk-1})] \quad (3.115)$$

D'après l'équation (3.83) et (3.115), la sortie prédite $\hat{y}_{k+N}$ est:

$$\hat{y}_{k+N} = y_{mk}^* + B^N (y_k - y_{mk}) + \frac{1 - B^N}{1 - B} [(y_k - y_{mk}) - B (y_{k-1} - y_{mk-1})] \quad (3.116)$$

Remarque:

La constante K_I est alors éliminée.

La sortie en boucle fermée

La transformée en Z de $\hat{d}_k$ est:

$$D(z) = \frac{(1 - Bz^{-1}) [Y(z) - Y_m(z)]}{K_m (1 - B)} \quad (3.117)$$

Le même raisonnement que précédemment conduit à:

$$Y_p(z) = Y_m^*(z) + A^*(z)[Y(z) - Y_m(z)]$$

$$\text{avec } A^*(z) = B^N + \frac{(1 - B^N)(1 - Bz^{-1})}{(1 - B)}$$

$$U(z) = G_c(z)[R(z) - Y_p(z)] \quad U(z) = \frac{G_c(z)[R(z) - A^*(z)Y(z)]}{1 + G_c(z)G_mH(z)[1 - A^*(z)z^{-N}]}$$

La sortie avec modélisation imparfaite est:

$$Y(z) = \frac{G_c(z)G_pH(z)z^{-M}R(z) + \{1 + G_c(z)G_mH(z)[1 - A^*(z)z^{-N}]\}G_\ell L(z)}{1 + G_c(z)\{G_mH(z) + A^*(z)[G_pH(z)z^{-M} - G_mH(z)z^{-N}]\}} \quad (3.118)$$

La sortie avec modèle parfait devient:

$$Y(z) = \frac{G_c(z)G_pH(z)z^{-M}R(z) + \{1 + G_c(z)G_pH(z)[1 - A^*(z)z^{-M}]\}G_\ell L(z)}{1 + G_c(z)G_pH(z)} \quad (3.119)$$

3.5.2 Performances dynamique et statique

Performance à titre de suiveur

Toujours selon l'annexe B qui regroupe les simulations nécessaires à la comparaison des prédicteurs (PS, PA et PG).

On étudie les mêmes cas qui ont été définis à la section (3.2.2).

1^{er} cas: Modélisation parfaite entre le modèle et le processus

Le PG a la même dynamique que le PA et le PS (figure (B.18)).

2^{ieme} et 3^{ieme} cas: Modélisation imparfaite entre le modèle et le processus

Le PA est légèrement plus rapide que le PG (figures (B.19) et (B.20)).

4^{ème} cas: Erreur sur la constante de temps du modèle

Le PG a une meilleure performance que le PA (figure (B.21)).

5^{ème} cas: Erreur sur le gain du modèle

Le PG n'est pas sensible à l'erreur en régime permanent (figure (B.22)).

Performance en régulation

L'étude des trois cas qui ont été défini dans la section (3.2.2) avec les courbes figurants dans (B.23), (B.24) et (B.25).

Nous remarquons que le prédicteur généralisé est plus robuste face à la perturbation. Lorsque K_ℓ augmente le régime permanent du prédicteur analytique est influencé; par contre dans le cas du prédicteur généralisé il n'en est pas ainsi. Dans une modélisation imparfaite le comportement dynamique du PA est meilleur que celui du PG.

3.5.3 Conclusions

Le prédicteur généralisé est plus précis que le prédicteur analytique ce qui est évidemment conforme à son objectif: il a été produit du prédicteur analytique pour cette fin.

3.6 Première modification: Proposition de Vogel

D'autres algorithmes [52] [23] de contrôle ont été développés pour fournir la compensation du retard. Les algorithmes prédisent l'effet de l'action du contrôle actuel sur la sortie future, ce qui permet, par le choix de gains élevés au niveau du contrôleur, une réponse plus rapide du système. Ici le polynôme $P(z)$ permet une représentation plus étendue des modèles de processus.

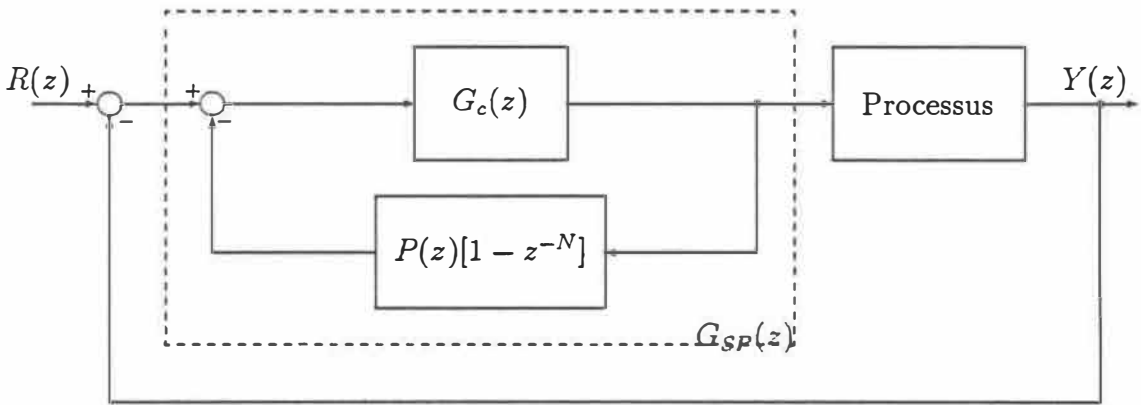


Figure 3.5: Le prédicteur de Smith discret

La structure du contrôleur $G_c(z)$, est normalement choisit pour correspondre à celle d'un contrôleur PI. La réponse du processus sans retard est obtenue via l'utilisation du modèle du processus. La fonction de transfert de ce modèle, $G(z)$, est décomposée en deux parties, la portion dynamique sans retard, $P(z)$, et la portion avec retard z^{-N} . Le produit de ces deux parties est le modèle du processus, $G(z) = P(z)z^{-N}$. Le modèle dynamique sans retard, $P(z)$, est utilisé pour prédire l'effet de l'action du contrôle sur la sortie du processus. Le contrôleur utilise cette prédiction de la réponse non retardée pour calculer la prochaine sortie. Cette prévision de la sortie est retardée d'un nombre N de période d'échantillonnage de retard, par rapport à la sortie du processus. Du diagramme de la figure (3.5), on

peut déduire la fonction de transfert $G_{SP}(z)$

$$G_{SP}(z) = \frac{G_c(z)}{1 + G_c(z)P(z)[1 - z^{-N}]} \quad (3.120)$$

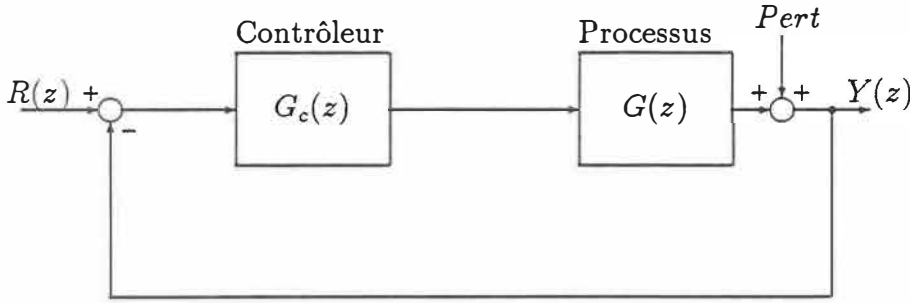


Figure 3.6: Le contrôleur de Dahlin

Un autre algorithme de discrétisation qui fournit la compensation du retard pur est le contrôleur de Dahlin (figure (3.6)) [12], qui est relié au prédicteur de Smith. Le contrôleur de Dahlin est utilisé dans le cas où la réponse en boucle fermée est la même qu'un processus de premier ordre avec une constante de temps λ et N intervalles d'échantillonnage de retard. Le résultat du contrôle est de la forme:

$$G_c(z) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}\right) z^{-N-1} [G(z)]^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}} z^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}\right) z^{-N-1}} \quad (3.121)$$

où T est le temps d'échantillonnage, λ la constante de temps de la réponse en boucle fermée est utilisée comme un paramètre d'ajustement sur la rapidité de la réponse.

On voit que cette procédure implique l'inversibilité du système: le système doit être à déphasage non-minimal. D'autre part, le compensateur étant en cascade avec le système il aisé de voir que les systèmes instables poseront des problèmes. En suite, le biffage par une fonction inverse proposé par Dahlin impose une bonne modélisation du système sans quoi la solution conduira à des problèmes de stabilisation.

Un intérêt pratique de l'algorithme de Dahlin vient de ce qu'il possède une action intégrale [34] (rendant l'erreur de position nulle en régime permanent). Ceci peut se vérifier facilement à partir de (3.121).

Divisant au long le dénominateur par $(1 - z^{-1})$, on trouve:

$$G_c(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}) z^{-N-1} G(z)^{-1}}{(1 - z^{-1})[1 + (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})z^{-1} + (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})z^{-2} + \dots + (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})z^{-N}]} \quad (3.122)$$

Il existe donc un pôle en $z = 1$, (3.122) d'où la forme intégrale de l'action.

3.6.1 Extension paramétrique de Vogel

Dans ce paragraphe nous allons étendre les développements que Vogel et al. à présenté pour un problème numérique particulier tout système de second ordre quelque soit la position des deux pôles.

Dans le cas du développement d'un prédicteur de Smith avec un modèle de processus du second ordre, la fonction de transfert en temps continu pour une dynamique de second ordre plus un retard pur est considéré comme suit:

$$G(s) = \frac{K_m e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.123)$$

où K_m est le gain du régime permanent, τ_1 et τ_2 sont les constantes de temps et θ est le retard. La correspondance de la fonction de transfert en temps discret est:

$$G(z) = \frac{(B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}) z^{-N}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}} \quad (3.124)$$

où A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , sont en fonctions de K_m , τ_1 , τ_2 , et T , le temps d'échantillonnage. N est le nombre entier de périodes d'échantillonnage du retard θ .

1^{er} cas: les deux constantes de temps sont différentes alors nous avons :

$$B_1 = K_m \left(1 - K_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \quad (3.125)$$

$$B_2 = K_m \left(e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T} - K_1 e^{-\frac{T}{\tau_2}} + K_2 e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \quad (3.126)$$

$$A_1 = - \left(e^{-\frac{T}{\tau_1}} + e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \quad (3.127)$$

$$A_2 = e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T} \quad (3.128)$$

avec $K_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$ et $K_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$

2^{ieme} cas: les deux constantes de temps sont égales $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ il vient:

$$B_1 = K_m \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\tau} \right) e^{-\frac{T}{\tau}} \right] \quad (3.129)$$

$$B_2 = K_m \left[e^{-2\frac{T}{\tau}} + \left(-1 + \frac{T}{\tau} \right) e^{-\frac{T}{\tau}} \right] \quad (3.130)$$

$$A_1 = -2e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (3.131)$$

$$A_2 = e^{-2\frac{T}{\tau}} \quad (3.132)$$

La fonction de transfert pour la sortie non retardée, $P(z)$, procure:

$$P(z) = \frac{B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}} \quad (3.133)$$

La substitution de l'équation (3.133) de, $P(z)$ dans l'équation (3.120) est:

$$G_{SP}(z) = \frac{(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}) G_c(z)}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + (B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}) G_c(z) [1 - z^{-N}]} \quad (3.134)$$

L'équation (3.134) est la fonction de transfert du prédictor de Smith discret avec un modèle du second ordre. Même si le prédictor de Smith est une technique qui fournit la compensation du retard, l'amélioration de la performance en boucle fermée peut être réalisée par une modification de $P(z)$, la fonction de transfert utilisée pour obtenir une sortie du modèle non retardée.

Par combinaison des deux termes du numérateur de $P(z)$, posons:

$$Q(z) = \frac{(B_1 + B_2) z^{-1}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}} \quad (3.135)$$

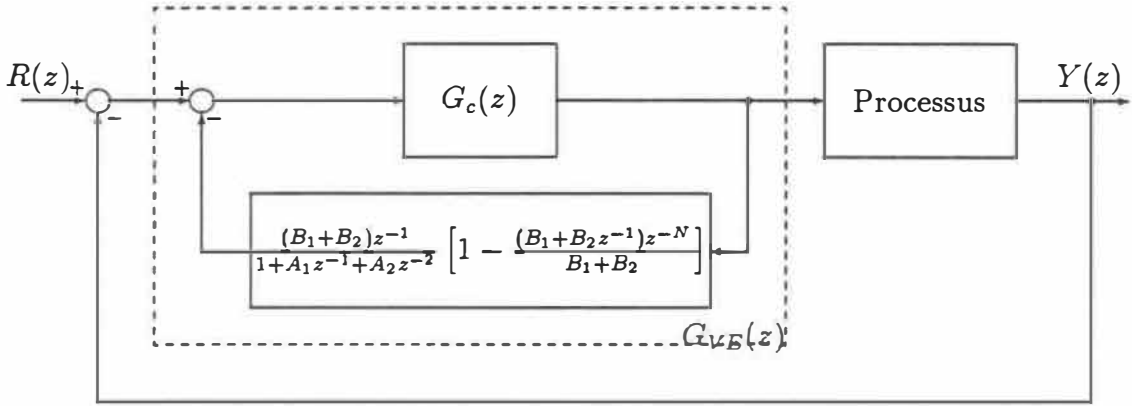


Figure 3.7: Modification du prédicteur de Smith suivant Vogel

ainsi une approximation de la réponse non retardée est obtenue. Les réponses de $P(z)$ et $Q(z)$ ont des dynamiques différentes. Elles ont cependant le même régime permanent de la forme:

$$P(z=1) = Q(z=1) = \frac{B_1 + B_2}{1 + A_1 + A_2} \quad (3.136)$$

Prenant alors:

$$S(z) = \frac{(B_1 + B_2 z^{-1}) z^{-N}}{B_1 + B_2} \quad (3.137)$$

Le produit $Q(z)$ et $S(z)$ est le modèle du processus avec retard donné par l'équation (3.124). Le diagramme de cette nouvelle technique de compensation du retard est donné par la figure (3.7) selon Vogel et Edgar [52] (avec modélisation parfaite) ce qui correspond à la fonction de transfert donnée par:

$$G_{VE}(z) = \frac{(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}) G_c(z)}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + z^{-1} G_c(z) [(B_1 + B_2) - (B_1 + B_2 z^{-1}) z^{-N}]} \quad (3.138)$$

3.6.2 Stabilité du prédicteur de Vogel

Notre démonstration est valable pour le cas particulier de l'utilisation d'un contrôleur proportionnel, avec un processus de second ordre et avec une modélisation

parfaite. La fonction de transfert en boucle fermée de G_{VE} avec un contrôleur proportionnel ($G_c = K_c$) est:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c (B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}) z^{-N}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + K_c (B_1 + B_2) z^{-1}} \quad (3.139)$$

Sans erreur de modélisation, le prédicteur de Smith avec un contrôleur proportionnel se réduit simplement à un contrôleur proportionnel sur la partie rationnelle du système, ce qui n'est pas le cas avec la fonction de transfert G_{VE} . Pour le même processus du second ordre, la fonction de transfert en boucle fermée pour un contrôleur proportionnel est:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c (B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}) z^{-N}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + K_c (B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2})} \quad (3.140)$$

Nous avons appliqué le critère de stabilité de Jury [28] pour les systèmes discrets afin de comparer les limites de stabilité des deux méthodes de prédiction. Le gain critique K_c pour qu'un système du second ordre devienne instable, est plus élevé pour l'équation (3.139) que pour l'équation (3.140). Dans ce cas, il apparaît, d'après les figures (C.1) et (C.2) de l'annexe C, que le domaine de stabilité est améliorée quand le nouveau prédicteur est utilisé.

3.6.3 Adaptation du contrôleur de Dahlin

Le contrôleur de Dahlin est donné par l'équation (3.121). Le contrôleur $G_c(z)$ appliqué à un modèle du second ordre (équation (3.124)), procure

$$G_{DC}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}} z^{-1} - (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}) z^{-N-1}} \frac{1}{(B_1 + B_2 z^{-1})} \quad (3.141)$$

Ce contrôleur ne fournit pas de bonnes performances pour un processus du second ordre. Nous démontrons, en effet, qu'un terme du dénominateur de la fonction de transfert (3.141) a un pôle négatif dans le cercle unité car (B_1 et $B_2 > 0 \forall \frac{T}{\tau_1} \text{ et } \frac{T}{\tau_2} < 1$). Ce pôle peut produire des oscillations sur la sortie du contrôleur et la sortie du processus. L'inversion du système imposée par la méthode de Dahlin n'est donc pas possible. C'est à dire que nous avons conservé les mêmes valeurs statiques tout en enlevant le zéro extérieur au cercle unitaire. Modifiant ce contrôleur pour enrayer cette effet, il vient:

$$\bar{G}_{DC}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{1 - e^{-\frac{T}{\lambda}} z^{-1} - (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}) z^{-N-1}} \frac{1}{(B_1 + B_2)} \quad (3.142)$$

De même on peut écrire:

$$\bar{G}_{DC}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})[(B_1 + B_2) z^{-1} - (B_1 + B_2) z^{-N-1}] + (1 - z^{-1})(B_1 + B_2)} \quad (3.143)$$

$$\bar{G}_{DC}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{\{1 + (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}}) z^{-1}[1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1}]\} \times \{(B_1 + B_2)[1 - z^{-1}]\}} \quad (3.144)$$

Cette modification du compensateur du retard est celle du contrôleur de Dahlin donné par l'équation (3.142) : c'est une forme adaptée de Dahlin.

D'autre part, le contrôleur de Dahlin $G_c(z)$ est également choisit à titre de compensateur de retard donné par la figure (3.7). Dans ce cas, le contrôleur est basé sur

l'équation $Q(z)$ plutôt que sur $P(z)$. Par simplification à partir de la figure (3.7), on obtient la fonction de transfert $G_{VE}(z)$ sous la forme suivante:

$$G_{VE}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})[(B_1 + B_2)z^{-1} - (B_1 + B_2 z^{-1})z^{-N-1}] + (1 - z^{-1})(B_1 + B_2)} \quad (3.145)$$

$$G_{VE}(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})(1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})}{\{1 + (1 - e^{-\frac{T}{\lambda}})z^{-1}[1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+1} + \frac{B_2}{B_1 + B_2}z^{-N}]\} \times \{(B_1 + B_2)[1 - z^{-1}]\}} \quad (3.146)$$

Cet algorithme de Dahlin modifié est comparable au contrôleur conventionnel de l'équation (3.142). Cependant, le contrôleur modifié a quelques propriétés additionnelles que nous allons mettre en évidence. De plus, il a de meilleures performances que le simple contrôleur conventionnel.

3.6.4 Le compensateur de Vogel avec modélisation imparfaite

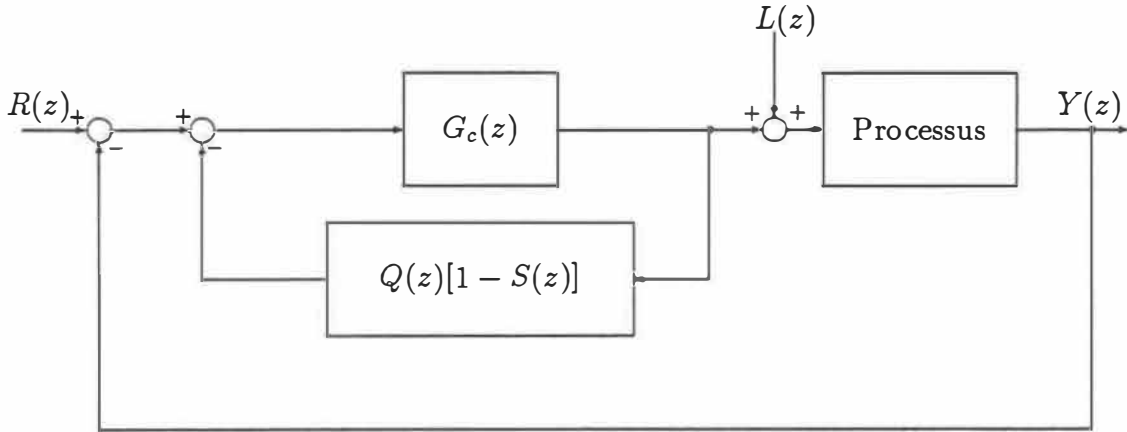


Figure 3.8: Compensateur de Vogel avec modélisation imparfaite

Étudions maintenant l'effet d'une modélisation imparfaite pour un système du second ordre en temps discret c'est à dire une erreur de prédiction du retard on a :

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \frac{B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}} z^{-M} \\ &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-M} \end{aligned}$$

Les équations $Q(z)$ et $S(z)$ sont définie respectivement par (3.135) et (3.137).

La sortie en boucle fermée:

Avec modélisation imparfaite (figure (3.8))

$$Y(z) = \frac{G_p(z)G_c(z)R(z) + G_p(z)\{1 + G_c(z)[Q(z) - Q(z)S(z)]\}L(z)}{1 + G_c(z)[Q(z) + G_p(z) - Q(z)S(z)]} \quad (3.147)$$

Le modèle est parfait mais il y a une erreur sur le retard:

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})z^{-M}G_c(z)R(z) + B(z^{-1})z^{-M}\{A(z^{-1}) + G_c(z)[B(1)z^{-1} - B(z^{-1})z^{-N}]\}L(z)}{A(z) + G_c(z)\{B(1)z^{-1} + B(z^{-1})(z^{-M} - z^{-N})\}} \quad (3.148)$$

Avec modélisation parfaite du système et du retard $M = N$:

$$Y(z) = \frac{G(z)G_c(z)R(z) + G(z)\{1 + G_c(z)[Q(z) - G(z)]\}L(z)}{1 + G_c(z)Q(z)} \quad (3.149)$$

3.6.5 Performance dynamique et statique

L'annexe C.1.1 expose les simulations nécessaires à la comparaison des deux types de compensateurs (Smith et Vogel).

Les données du processus:

Le processus est du second ordre avec les constantes de temps $\tau_1 = 3$ et $\tau_2 = 5$ et le gain $K_m = 1$. La période d'échantillonnage utilisée est $T = 1$.

L'application numérique de $G(z)$ avec $N = 0$ de l'équation (3.124) est:

$$G(z) = \frac{0.0280z^{-1} + 0.0234z^{-2}}{1 - 1.5353z^{-1} + 0.5866z^{-2}}$$

Stabilité du prédicteur de Vogel

Comparaison des domaines de stabilités des compensateurs de Vogel et Smith avec un contrôleur proportionnel:

Définition du critère de Jury pour un système de second ordre [34]

$$A(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2, \quad a_0 > 0$$

1. $|a_2| < a_0$
2. $A(1) > 0$ et $A(-1) > 0$,
soit $a_2 + a_1 + a_0 > 0$ et $a_2 - a_1 + a_0 > 0$

Pour le prédicteur de Smith modifié (3.139) le domaine de stabilité est compris entre deux valeurs $-1 < K_c < 17.65$. Par contre la forme de Vogel provient de l'équation (3.140) et est donnée par $-1 < K_c < 60.75$.

Les sorties des systèmes pour les deux équations (3.139) et (3.140) et avec un échelon unitaire sont données pour deux valeurs de K_c . Nous remarquons que si K_c est légèrement inférieur à la limite de stabilité pour l'équation (3.140) ($K_c = 15$), alors la sortie de l'équation (3.139) conserve une bonne performance par rapport à l'équation (3.140) (figure (C.3)). On remarque de plus que les deux systèmes ont de mêmes performances quant K_c est petit ($K_c = 0.5$) (figure (C.4)).

Performance à titre de suiveur avec différents contrôleurs

Comparaison avec deux types de contrôleurs PID dans le cas du prédicteur de Smith

- L'utilisation du contrôleur PID (Åström et Wittenmark [2]) dans la structure fonctionnelle (3.5) est donnée par:

$$\begin{aligned} \text{la composante proportionnelle (P)} &= -d_1 - 2d_2 \\ \text{la composante intégrale (I)} &= \frac{d_0 + d_1 + d_2}{1 - z^{-1}} \\ \text{la composante dérivée (D}_c\text{)} &= d_2(1 - z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } d_0 = \frac{1 - e^{-\alpha}}{B(1)} \quad (3.150)$$

$$d_1 = \frac{A_1(1 - e^{-\alpha})}{B(1)} \quad (3.151)$$

$$d_2 = \frac{A_2(1 - e^{-\alpha})}{B(1)} \quad (3.152)$$

$$\text{où } B(1) = B(z) \big|_{z=1} \quad (3.153)$$

$$\alpha = \frac{T}{\delta} \quad (3.154)$$

avec δ est la constante de temps désirée de la réponse en boucle fermée du premier ordre. Le choix de δ dépend du temps de réponse désiré.

- De même l'utilisation d'un contrôleur PID classique défini par:

$$(G_c)_{PID} = K_c \frac{(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}) - (1 + 2\frac{T_d}{T})z^{-1} + \frac{T_d}{T}z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (3.155)$$

La figure (C.5) représente la comparaison entre le contrôleur PID d'Åström et celle du contrôleur PID classique en utilisant le schéma fonctionnel de la figure (3.5) avec $N = 0$. Nous remarquons que le contrôleur PID d'Åström ($\delta = 3$) est plus performant que celui mis au point par des procédures classiques avec $K_c = 0.9$, $T_i = 6$ et $T_d = 2$.

Comparaison avec le contrôleur de Dahlin:

Le contrôleur de Dahlin est donné par l'équation (3.121):

On choisit comme valeur de λ (la constante de temps de la réponse en boucle fermée), $\lambda = 2$ donc $B_\lambda = e^{-\frac{T}{\lambda}} = 0.6065$.

La figure (C.6) représente la comparaison entre les sorties des équations $G_{VE}(z)$ (3.145), $\bar{G}_{DC}(z)$ (3.143) et G_{DC} (3.141) avec le contrôleur de Dahlin pour un retard $N = 1$.

La comparaison entre les sorties des équations G_{VE} (3.145), $\bar{G}_{DC}$ (3.143) et $Y_{PS_{\text{Åström}}}$ pour $\lambda = 0.2$ et $\delta = 3$ est donné par la figure (C.7).

Remarques:

Dans le cas que nous avons étudié

- Nous remarquons que la performance dynamique de la modification de Vogel (G_{VE}) est meilleure que le contrôleur conventionnel ($\bar{G}_{DC}(z)$);

- Le contrôleur modifié de Dahlin est plus performant que l'utilisation d'un contrôleur PID.

3.7 Deuxième modification: proposition de Chang

3.7.1 Structure fonctionnelle et principes

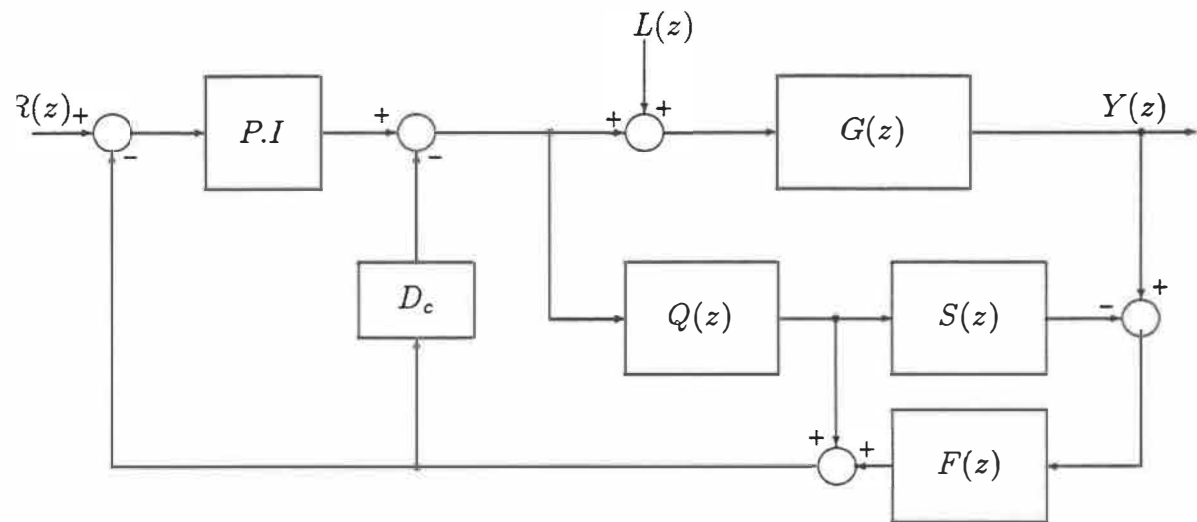


Figure 3.9: Le prédicteur de Smith numérique modifié: compensateur de Chang

Une autre modification du prédicteur de Smith est préconisé par Chang et al. [23] (avec modélisation parfaite).

$G(z)$, $Q(z)$ et $S(z)$ sont données respectivement par les équations (3.124), (3.135) et (3.137).

Le contrôleur numérique de Åström et Wittenmark [2] utilisé dans une autre configuration de la figure (3.9) est donnée à la section (3.6.5).

Le filtre passe-haut $F(z)$ [20] est donné par:

$$F(z) = \frac{\beta_0(1 - z^{-1})}{1 - \alpha_0 z^{-1}} \quad (3.156)$$

où α_0 , β_0 sont des paramètres réels.

La sortie en boucle fermée:

Avec modélisation imparfaite:

$$Y(z) = \frac{PIG(z)R(z) + G(z)\{(PI + D_c)Q(z)[1 - S(z)F(z)] + 1\}L(z)}{1 + (PI + D_c)Q(z) + (PI + D_c)[G(z) - Q(z)S(z)]F(z)} \quad (3.157)$$

Avec modélisation parfaite:

$$Y(z) = \frac{PI.G(z)R(z) + G(z)\{(PI + D_c)Q(z)[1 - S(z)F(z)] + 1\}L(z)}{1 + (PI + D_c)Q(z)} \quad (3.158)$$

3.7.2 Performance dynamique

- La comparaison entre les sorties des propositions de Chang (3.158), de Vogel (3.149) et de Smith (3.140) sont données avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 1$, $\delta = 3$ et $\delta = 10$ respectivement (figures (C.8) (C.9) et (C.10)) dans une modélisation parfaite ($\alpha_0 = \beta_0 = \frac{18}{19}$);
- La comparaison entre les équations des sorties de Chang et de Vogel dans une modélisation imparfaite avec une erreur sur le retard $M = 1$, $N = 2$ sont données par la figure C.11. Nous remarquons que la proposition de Chang est presque insensible à une erreur sur le retard. Alors que le prédicteur de Vogel est fortement influencé, les paramètres de $F(z)$ sont ($\alpha_0 = \beta_0 = \frac{18}{19}$).

3.8 Extension pour les modèles du troisième degré

3.8.1 Structure fonctionnelle et principes

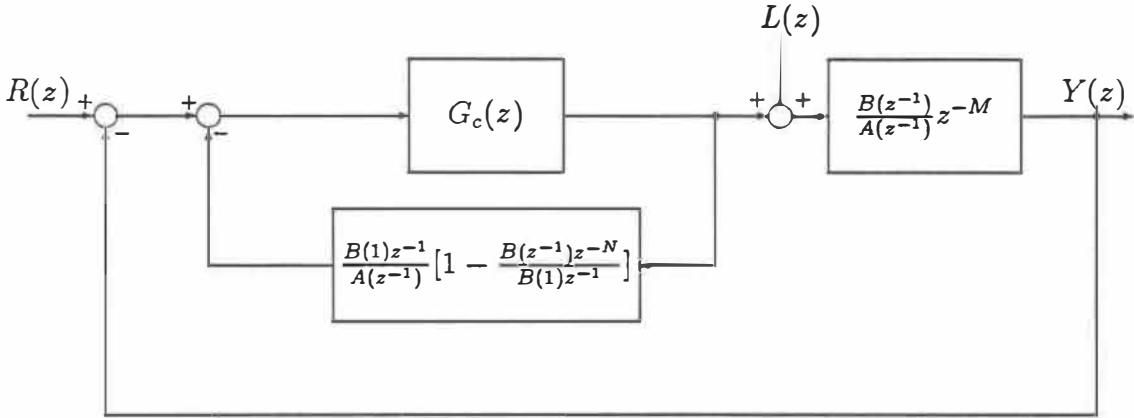


Figure 3.10: Extension pour des modèles du troisième degré avec modélisation imparfaite

A ce niveau aussi, nous allons pousser la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité quelque soit la position des pôles du système du troisième ordre.

Dans le cas de modèle d'ordre élevé, nous avons donné une extension du compensateur de Vogel pour les systèmes dont la réponse indicielle est apériodique et monotone en présence de retard pur. La fonction de transfert en temps continu pour une dynamique de troisième ordre plus un retard pur est considéré comme suit:

$$G_p(s) = \frac{K_m e^{-\theta_p s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)} \quad (3.159)$$

où K_m est le gain du régime permanent, τ_1 , τ_2 et τ_3 sont les constantes de temps et θ_p est le retard. La correspondance de la fonction de transfert en temps discret est:

$$G_p(z) = \frac{B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + B_3 z^{-3}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + A_3 z^{-3}} z^{-M} \quad (3.160)$$

$$= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-M} \quad (3.161)$$

où $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sont en fonctions de $K_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ et T , le temps d'échantillonnage. M est le nombre entier de période d'échantillonnage du retard θ_p .

Nous calculons:

$$B_1 = K_m \left\{ 1 - (K_1^3 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + K_2^3 e^{-\frac{T}{\tau_2}} + K_3^3 e^{-\frac{T}{\tau_3}}) \right\} \quad (3.162)$$

$$B_2 = (-1)^1 K_m \{ (1 - K_1^3)(e^{-\frac{T}{\tau_1}} - e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})}) + (1 - K_2^3)(e^{-\frac{T}{\tau_2}} - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})}) \\ + (1 - K_3^3)(e^{-\frac{T}{\tau_3}} - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})}) \} \quad (3.163)$$

$$B_3 = (-1)^2 K_m \{ K_1^3 e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} + K_2^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})} + K_3^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})} \\ - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} \} \quad (3.164)$$

$$A_0 = (-1)^0 \quad (3.165)$$

$$A_1 = (-1)^1 [e^{-\frac{T}{\tau_1}} + e^{-\frac{T}{\tau_2}} + e^{-\frac{T}{\tau_3}}] \quad (3.166)$$

$$A_2 = (-1)^2 [e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})} + e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})} + e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})}] \quad (3.167)$$

$$A_3 = (-1)^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} \quad (3.168)$$

$$K_1^3 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_3} \quad (3.169)$$

$$K_2^3 = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_3} \quad (3.170)$$

$$K_3^3 = \frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1} \frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_2} \quad (3.171)$$

Remarques:

- $K_1^3 + K_2^3 + K_3^3 = 1$.
- les racines de l'équation $B_1 z^2 + B_2 z + B_3$ ont des racines négatives dont l'une est à l'intérieur du cercle unité.

On définit $B(1) = B_1 + B_2 + B_3$.

La sortie en boucle fermé:

Avec modélisation imparfaite (figure (3.10)):

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})z^{-M}G_c(z)R(z) + B(z^{-1})z^{-M}\{A(z^{-1}) + G_c(z)[B(1)z^{-1} - B(z^{-1})z^{-N}]\}L(z)}{A(z) + G_c(z)\{B(1)z^{-1} + B(z^{-1})(z^{-M} - z^{-N})\}} \quad (3.172)$$

Avec modélisation parfaite du système et du retard $M = N$:

$$Y(z) = \frac{G(z)G_c(z)R(z) + G(z)\{1 + G_c(z)[Q(z) - G(z)]\}L(z)}{1 + G_c(z)Q(z)} \quad (3.173)$$

avec $Q(z) = \frac{B(1)z^{-1}}{A(z^{-1})}$ et $S(z) = \frac{B(z^{-1})z^{-N}}{B(1)z^{-1}}$.

3.8.2 Stabilité de l'extension

Notre démonstration est valable pour le cas particulier de l'utilisation d'un contrôleur proportionnel, avec un processus de troisième ordre et avec une modélisation parfaite. La fonction de transfert en boucle fermée avec un contrôleur proportionnel $G_c = K_c$ est:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c(B_1z^{-1} + B_2z^{-2} + B_3z^{-3})z^{-N}}{1 + A_1z^{-1} + A_2z^{-2} + A_3z^{-3} + K_c(B_1 + B_2 + B_3)z^{-1}} \quad (3.174)$$

Sans erreur de modélisation, le prédictor de Smith avec un contrôleur proportionnel se réduit simplement à un contrôleur proportionnel sur la partie rationnelle du système, ce qui n'est pas le cas avec la fonction de transfert de l'extension. Pour le même processus de troisième ordre, la fonction de transfert en boucle fermée pour un contrôleur proportionnel est:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c(B_1z^{-1} + B_2z^{-2} + B_3z^{-3})z^{-N}}{1 + A_1z^{-1} + A_2z^{-2} + A_3z^{-3} + K_c(B_1z^{-1} + B_2z^{-2} + B_3z^{-3})} \quad (3.175)$$

Nous avons appliqué le critère de stabilité de Jury [34] pour les systèmes discrets afin de comparer les limites de stabilité des deux méthodes de prédiction. Le gain critique K_c pour qu'un système de troisième ordre devienne instable, est plus élevé

pour l'équation (3.174) que pour l'équation (3.175). Dans ce cas, il apparaît, d'après la figure (C.12) de l'annexe D.1, que le domaine de stabilité est améliorée quand le prédicteur de l'extension est utilisé.

3.8.3 Performance avec un contrôleur proportionnel

Domaine de stabilité

Notre démonstration est valable pour le cas particulier de l'utilisation d'un contrôleur proportionnel, avec un processus de troisième degré et avec modélisation parfaite.

L'équation caractéristique de l'extension est:

$$P(z) = z^3 + \{A_1 + K_c B(1)\}z^2 + A_2 z + A_3 \quad (3.176)$$

Le domaine de stabilité de l'extension est:

$$-1 < K_c < \frac{A_3^2 + A_2 - A_1 A_3 - 1}{B(1)A_3}$$

L'équation caractéristique du prédicteur de Smith avec un processus du troisième ordre est:

$$P(z) = z^3 + (A_1 + K_c B_1)z^2 + (A_2 + K_c B_2)z + (A_3 + K_c B_3) \quad (3.177)$$

Le domaine de stabilité pour le prédicteur de Smith est:

$$-1 < K_c < \frac{-(A_1 B_3 + B_1 A_3 - B_2 - 2A_3 B_3) - \sqrt{\Delta_H}}{2(B_1 B_3 - B_3^2)} \quad (3.178)$$

avec $\Delta_H = (A_1 B_3 + B_1 A_3 - B_2 - 2A_3 B_3)^2 - 4(-B_3^2 + B_1 B_3)(1 + A_1 A_3 - A_2 - A_3^2)$

L'annexe D.1 expose le développement théorique des domaines de stabilité de l'extension de la proposition de Vogel et du prédicteur de Smith.

Remarque:

Le domaine de stabilité de l'extension est supérieur à celui du prédicteur de Smith (figure (C.12)).

Application

Le processus est de troisième ordre avec les constantes de temps $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 4$, $\tau_3 = 5$ et le gain $K_m = 1$. La période d'échantillonnage utilisée est $T = 1$.

L'application numérique de $G(z)$ avec $N = 0$ de l'équation (3.160) est:

$$G(z) = \frac{10^{-3}(2.287z^{-1} + 7.533z^{-2} + 1.546z^{-3})}{1 - 2.3141z^{-1} + 1.7823z^{-2} - 0.4569z^{-3}} \quad (3.179)$$

Pour le prédicteur de Smith modifié le domaine de stabilité est compris entre deux valeurs $-1 < K_c < 6.17$. Par contre la forme de l'extension est donnée par $-1 < K_c < 12.75$.

Les sorties des systèmes pour les deux équations (3.174) et (3.175) et avec un échelon unitaire sont données pour les deux valeurs de K_c . Nous remarquons que si K_c est légèrement supérieur à la limite de stabilité pour l'équation (3.175) ($K_c = 7$), alors la sortie de l'équation (3.174) conserve une bonne performance par rapport à l'équation (3.175) (figure (C.13)). On remarque de plus que les deux systèmes ont de mêmes performances quant K_c est petit ($K_c = 1$) (figure (C.14)).

Conclusions

Dans ce mémoire, nous traitons les problèmes associés à la commande linéaire des systèmes avec retard. Deux thèmes différentes ont été présenté pour les systèmes à retard.

Le premier thème traite de l'adaptation de la commande quadratique à retour d'état. Cependant, nous avons constaté que l'importance du retard n'affecte pas la dynamique du système : les pôles ne varient pas appréciablement, ce n'est que le régime transitoire avec son dépassement qui est affecté dans une structure de commande proportionnelle et proportionnelle intégrale.

Le second thème traite de l'adaptation des prédicteurs. Nous remarquons que le domaine de stabilité du prédicteur de Moore est supérieur à celui du prédicteur de Smith. Les études étant faite avec une modélisation imparfaite. Par contre dans une modélisation parfaite les prédicteurs de Smith et de Moore ont les mêmes domaines de stabilités pour un contrôleur quelconque. Le prédicteur de Smith est plus précis en régime permanent que le prédicteur analytique. Par contre le prédicteur analytique est plus rapide que celui de Smith.

Nous avons montré que la proposition de Vogel pouvait être appliquée à différents

processus du second ordre. De plus nous avons dégagé les domaines respectifs de stabilité et montré l'avantage de la proposition de Vogel sur le prédicteur de Smith.

Nous avons toujours établi les conditions de stabilité soit par le critère de Jury ou par une adaptation du critère de Rouché.

Nous avons présenté une extension à la proposition de Vogel pour les processus de troisième ordre.

Les domaines de stabilité plus ou moins restrictifs ont servi de base de comparaison entre les divers types de prédicteurs.

A la fin de ce travail plusieurs avenues se dégagent :

- Extension à la proposition de Vogel pour les systèmes d'ordre élevé avec présence de zéros;
- Extension du prédicteur de Smith amélioré pour les systèmes multivariables;
- Application de cette extension dans une commande adaptative.

Bibliographie

- [1] Alevisakis, G., et D.E. Seborg, "*Control of Multivariable Systems Containing Time Delays Usings a Multivariable Smith Predictor*", Chem. Eng. Sci., 29, 373 (1974).
- [2] Åström, K.J. et B. Wittenmark, "*Computer Controlled Systems-Theory and Design*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (1984).
- [3] Bellman R.E. et S.E. Dreyfus "*La programmation dynamique et ses applications*", vol.18 bibliothèque de l'automaticien p.13 (Paris, 1965).
- [4] Bornard, G., J.P. Gauthier, "Commande dynamique multivariable des systèmes industriels de production", Note interne L.A.G N° 77-29-1977
- [5] Boudarel R., J. Delmas et P. Guichet, "*Commande optimale des processus*", (4 tomes), Dunod (Paris, 1967).
- [6] Bühler, G., "*Réglages échantillonnés*", vol. 1 et 2 presses polytechniques Roman-des.
- [7] Caines, P.E., D.Q. Mayne, "*On the Discrete Time Matrix Equation of Optimal Control*", Internat. J. Control, vol.12 (1970), 785 – 794.
- [8] Caines, P.E., D.Q. Mayne, "*On the discrete time equation of optimal control-a correction*", Internat. J. Control, vol.14 (1971), 205 – 207.
- [9] Chang C.H, C.H. Tan, et W. P. Chan, "*A Performance Study of Control Systems with Dead Time*", IEEE Trans. Ind. Electron. Contr. Instrum., vol. IECI-27,3, 234 (1980).
- [10] Chiang, H.S., et L.D. Durbin, "*Loop Gain Control of a First-Order Plus Dead Time Process*", Proc. 1980 JACC Conf.Paper FA5-E (1980).
- [11] Cohen, G.H. and G.A. Coon, "*Theoretical Consideration of Retarded Control*", Trans. ASME, 75, 827 (1953).

- [12] Dahlin, E.B., "*Designing and Tuning Digital Controllers*", Control Systems Juin 1968.
- [13] Darato P., A.H. Levis, "*Optimal Linear Regulators, the Discrete-time Case*", I.E.E.E. Trans. Autom. Control, vol.AC-16 (Dec.1971) 613 – 620.
- [14] Donoghue, J.F, "*A Comparison of the Smith Predictor and the Optimal Design Approaches for Systems with Delay in the Control*", IEEE Trans. Ind. Elec. Control Instr., IECE-24,109 (1977).
- [15] Doss, J.E, et C.F. Moore, "*Comparaison of Dead Time Compensation Techniques in DDC*", 75th Nat. AIChE Meet., Paper 64b, New Orleans (1973).
- [16] Doss, J.E, et C.F. Moore, "*The Discrete Analytical Predictor-A Generalized Dead Time Compensation Technique*", Instrum. Chem. Pet. Ind., 16, 135 (1980).
- [17] Fond M., "*Notes de cours: Commandes des systèmes multivariables*", Avril 1985 Sfax-Tunisie.
- [18] Foulard, C., S. Gentil, J.p Sandraz, "*Commande et régulation par calculateur numérique*", Eyrolles, Paris, (1987).
- [19] Hammerstrom, L.G., et K.V. Waller, "*On Optimal Control of Systems with Delay in the Control*", IEEE Trans. Ind. Elect. Control Instr., IECI-27, 301 (1980).
- [20] Hang, C.C., et B.W. Chong, "*On Methods of Treating dc Levels in an Adaptive Digital Smith Predictor*", Report CI-87-4, Departement of Electrical Engineering, National University of Singapore.
- [21] Hang, C.C., et F.S. Wong, "*Modified Smith Predictors for the Control of Process with Dead Time*", Proc. ISA 1979 Ann. Conf., 33 (1979)
- [22] Hang, C.C., et Q.Y. Tham, "*Digital Extension of the Modified Smith Predictors*", Proc. ISA 1982 Int. Conf. Philadelphia, 1413 (1982).
- [23] Hang, C.C., K.W. Lim et B.W. Chong, "*A Dual-rate Adaptive Digital Smith Predictor*", Automatica, 25, 1 (1989).
- [24] Herget, C.J. et J.W. Frazer, "*Extension of the Smith Predictor*", Anal. Chim. Acta, 133, 109 (1981).
- [25] Hocken, R.D., S.V. Salehi, et J.E. Marshall, "*Time-Delay Mismatch and the Performance of Predictor Control Schemes*", Int. J. Control, 38, 433 (1983).
- [26] Horowitz, I., "*Some Properties of Delayed Controls (Smith Regulator)*", Int. J. Control, 38, 977 (1983).

- [27] Jury, E.I., "*Sampled Data Control System*", Wiley, New York (1958).
- [28] Jury, E.I., "*Theory and Applications of the z Transform Method*", Wiley, New York, (1964).
- [29] Meyer, C., D.E. Seborg, et R.K. Wood, "*A Comparison of the Smith Predictor and Conventional Feedback Control*", Chem. Eng. Sci., 31, 775 (1976).
- [30] Meyer, C., R.K. Wood, et D.E. Seborg, "*Experimental Evaluation of Analytical and Smith Predictors for Distillation Column Control*", AIChE J., 25, 24 (1979).
- [31] McMillan, G.K., "*A Performance Comparison between a Smith Predictor and a PID Controller for Control Valve Hysteresis and Process Nonself-Regulation*", Proc. 1983 ACC, San Francisco, 343 (1983).
- [32] Moore, C.F., C.L. Smith, et P.W. Murrill, "*Improved Algorithm for Direct Digital Control*", Instruments and Control Systems, 43, 70 (1970).
- [33] Naslin P. "*Théorie de la commande et conduite optimale*", vol.33 bibliothèque de l'automaticien p.213 Dunod (Paris, 1969).
- [34] O'Shea, J , "*Introduction à la commande par ordinateur*", édition de l'École Polytechnique Hiver (1987).
- [35] Ogata Katsuhiko, "*Discrete-Time Control Systems*", Prentice-Hall (1987)
- [36] Ogunnaike, B.A., et W.H. Ray," *Multivariable Controller Design for Linear Systems Having Multiple Time Delays*", AIChE J., 25, 1043 (1979).
- [37] Owens, D.H., et A. Raya, "*Robust Stability of Smith Predictor Controllers for Time Delays Systems*", IEE Proc., 129, 290 (1982).
- [38] Palmor, Z.J., "*Stability Properties of Smith Dead Time Compensator Controllers*", Int. J. Control, 32, 937 (1980).
- [39] Palmor, Z.J, "*Robust Digital Dead Time Compensator Controller for a Class of Stable Systems*", Automatica, vol. 22, No 5, 587 (1986).
- [40] Palmor, Z.J., et Y. Halevi, "*On the Design and Properties of Multivariable dead Time Compensators*", Automatica, 19, 255 (1983).
- [41] Palmor, Z.J., et R. Shinnar, "*Design and Tuning of Dead Time Compensators*", Proc. 1978 JACC, 57 (1978).
- [42] Palmor, Z.J., et R. Shinnar, "*Design of Advanced Process Controllers*", AIChE J., 27, 793 (1981).

- [43] Ragazzini, J.R., G.F. Franklin, "*Sampled Data Control System*", Mc Grawhill New-York (1958).
- [44] Ray, W.H., "*Advanced Process Control*", McGraw-Hill, New York, 213 (1981).
- [45] Rosenbrock, H.H., "*Computer-Aided Control System Design*", Academic Press pp. 23 (1974).
- [46] Ross, C.W. "*Evaluation of Controllers for Dead Time Processes*", ISA Trans., 16, 25 (1977).
- [47] Roxana A., A. Boggiano, "*Commande numérique multivariable performante et simple des procédés industriels comportant un retard pur interne, Application aux caisses de tête de machine à papier*", Thèse de l'école polytechnique de Grenoble (1982).
- [48] Sevely, Y. "*Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés*", Dunod, Université, Paris, (1969).
- [49] Smith, O.J.M., "*Closer Control of Loops with Dead Time*", Chem. Eng. Progr., 53, 217 (1957).
- [50] Srinivasan, R., et D. A. Mellichamp, "*Stability and Response Properties of the Analytical Predictor*", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. 22, 571 (1983).
- [51] Vidal Pierre, "*Systèmes échantillonnés non linéaires*", Gordon and Breach (1968)
- [52] Vogel, E.F. et T.F. Edgar, "*A New Dead Time Compensator for Digital Control*", Proc. ISA Annual Conf., 29 (1980).
- [53] Watanabe, K., Y. Ishiyama, et M. Ito, "*Modified Smith Predictor Control for Multivariable Systems with Delays and Unmeasurable step Disturbances*", Int. J. Control, 37, 959 (1983).
- [54] Wong, S. K. P. et D. E. Seborg, "*A Theoretical Analysis of Smith and Analytical Predictors*", AIChE J., 32, 1597 (1986).
- [55] Yamanaka, K. et E. Shimemura, "*Effects of Mismatched Smith Controller on Stability in Systems with Time-delay*", Automatica , vol. 23, No. 6, 787 (1987).
- [56] Ziegler, J.G. and N.B. Nichols, "*Optimum Settings for Automatic Controllers*", Trans. ASME, 64, 759 (1942).

Annexe A

Commande à critère quadratique

A.1 Représentation d'état

La représentation d'état d'un système linéaire discret à n variables d'état, m entrées et p sorties, est:

$$\begin{cases} \underline{x}(i+1) &= F\underline{x}(i) + H\underline{u}(i) + \underline{f} \\ \underline{y}(i) &= C\underline{x}(i) + D\underline{u}(i) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où $\underline{f}$ est un vecteur constant de dimension n qui peut exprimer la perturbation.

A.1.1 Commande optimale

Soit à calculer une politique de commande optimale d'un tel système qui est définie par un critère de performance énergétique fonction des entrées et de l'écart de la sortie avec la consigne.

Le principe d'optimalité convertit le problème global en un sous-problème de trajectoire terminale optimale que l'on écrit

$$\hat{J}[\underline{x}(i)] = \min_{\underline{u}(i)} \left\{ \overbrace{\underline{u}(i)^T R \underline{u}(i) + \underline{e}(i)^T Q \underline{e}(i) + \hat{J}[\underline{x}(i+1)]}^S \right\} \quad (\text{A.2})$$

Sachant que l'état final du régime autonome est nul: $\hat{J}[x(N)] = 0$, il est possible d'effectuer les calculs en remontant "le temps". Supposons que $\hat{J}[\underline{x}(i+1)]$ est une forme quadratique:

$$\begin{aligned} \hat{J}[\underline{x}(i+1)] = & \underline{x}^T(i+1) \underbrace{K(i+1)}_{\text{matrice carrée } (n \times n)} \underline{x}(i+1) + 2 \underbrace{\underline{g}^T(i+1)}_{\text{vecteur } (n \times 1)} \underline{x}(i+1) \\ & + \underbrace{h(i+1)}_{\text{scalaire}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Calculons alors la valeur de J_{i+1} , en remplaçant la valeur de $\underline{x}(i+1)$ de l'équation (A.1) dans la relation (A.3)

$$\begin{aligned} J_{i+1} = & [F\underline{x}(i) + H\underline{u}(i) + \underline{f}]^T K(i+1) [F\underline{x}(i) + H\underline{u}(i) + \underline{f}] + \\ & 2\underline{g}^T(i+1) [F\underline{x}(i) + H\underline{u}(i) + \underline{f}] + h(i+1) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Le calcul de $\underline{e}^T(i)Q\underline{e}(i)$ procure:

$$\underline{e}^T(i)Q\underline{e}(i) = (\underline{z} - C\underline{x} - D\underline{u})^T Q (\underline{z} - C\underline{x} - D\underline{u}) \quad (\text{A.5})$$

La valeur de S dans l'équation (A.2) prend la forme:

$$S = \underline{u}^T(i)R\underline{u}(i) + \underline{e}^T(i)Q\underline{e}(i) + J_{i+1} \quad (\text{A.6})$$

Un développement plus complet de cette équation à partir des expressions de (A.4) et (A.5) produit:

$$\begin{aligned} S = & \underline{x}^T(i) \{ F^T K(i+1)F + C^T Q C \} \underline{x}(i) + \underline{u}^T(i) \{ H^T K(i+1)H + \\ & D^T Q D + R \} \underline{u}(i) + \underline{x}^T \{ F^T K(i+1)H + C^T Q D \} \underline{u}(i) + \underline{u}^T(i) \\ & \{ H^T K(i+1)F + D^T Q C \} \underline{x}(i) + \underline{u}^T(i) \{ H^T K(i+1)\underline{f} - D^T Q \underline{z} \} \\ & + \{ \underline{f} K(i+1)H - \underline{z}^T Q D + 2\underline{g}^T(i+1)H \} \underline{u}(i) \\ & + \{ 2\underline{g}^T(i+1)F + \underline{f} K(i+1)F - \underline{z}^T Q C \} \underline{x}(i) - \underline{x}^T(i) C^T Q \underline{z} + \\ & \underline{z}^T Q \underline{z} + \underline{f} K(i+1)\underline{f} + 2\underline{g}^T(i+1)\underline{f} + h(i+1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Le minimum de $\hat{J}[\underline{x}(i)]$ est donné par $\frac{\partial S}{\partial u} = 0$, d'où l'on peut déduire le minimum correspondant du vecteur $\hat{\underline{u}}$:

$$\begin{aligned} [H^T K(i+1)H + D^T Q D + R]\hat{\underline{u}}(i) + [H^T K(i+1)F + D^T Q C]\underline{x}(i) \\ + H^T K(i+1)\underline{f} - D^T Q \underline{z} + H^T \underline{g}(i+1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} [H^T K(i+1)H + D^T Q D + R]\hat{\underline{u}} &= -[H^T K(i+1)F + D^T Q C]\underline{x}(i) \\ &\quad + D^T Q \underline{z} - H^T [\underline{g}(i+1) + K(i+1)\underline{f}] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Une condition d'existence d'une solution est que la matrice $R + H^T K(i+1)H + D^T Q D$ soit régulière d'où son inversibilité. Alors la commande optimale a pour expression:

$$\hat{\underline{u}}(i) = -\underbrace{L(i)}_{m \times n} \underline{x}(i) + \underbrace{\underline{\mu}(i)}_{m \times 1} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } L(i) &= [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} \\ &\quad [H^T K(i+1)F + D^T Q C] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \text{et } \underline{\mu}(i) &= [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} \\ &\quad [D^T Q \underline{z} - H^T (\underline{g}(i+1) + K(i+1)\underline{f})] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Nous avons proposé une forme quadratique pour $\hat{J}[\underline{x}(i+1)]$: l'état final "libre" ($\hat{J}[\underline{x}(N)] \equiv 0$) constitue une forme quadratique pour la quelle $K(N)$ est une matrice nulle, $\underline{g}(N)$ un vecteur nul et $h(N)$ un scalaire nul.

Il reste à démontrer que si $\hat{J}[\underline{x}(i+1)]$ est une forme quadratique alors $\hat{J}[\underline{x}(i)]$ l'est également. De plus la matrice $K(i)$ est symétrique.

Pour simplifier l'écriture, on supprime l'indice i , et on remplace l'indice $i+1$ par $+$. Donc la relation (A.3) trouve une expression plus simple:

$$\hat{J}[\underline{x}] = \underline{x}^T K \underline{x} + 2\underline{g}^T \underline{x} + h \quad (\text{A.13})$$

Le calcul de $K(i+1)$ et $\underline{g}(i+1)$:

D'après l'équation (A.2) on a:

$$\begin{aligned}\hat{J}[\underline{x}] &= S_{opt} \\ &= \underline{u}^T R \underline{u} + \underline{e}^T Q \underline{e} + \hat{J}(+)\end{aligned}\quad (A.14)$$

En remplaçant dans l'équation (A.6) la valeur de la commande optimale (A.10) on obtient:

$$\begin{aligned}S_{opt} &= (-L\underline{x} + \underline{\mu})^T R (-L\underline{x} + \underline{\mu}) + [\underline{z} + (DL - C)\underline{x} - D\underline{\mu}]^T Q \\ &\quad [\underline{z} + (DL - C)\underline{x} - D\underline{\mu}] + [(F - HL)\underline{x} + H\underline{\mu} + \underline{f}]^T K(+) \\ &\quad [(F - HL)\underline{x} + H\underline{\mu} + \underline{f}] + 2\underline{g}^T(+) [(F - HL)\underline{x} + H\underline{\mu} + \underline{f}] + h(+)\end{aligned}\quad (A.15)$$

Compte tenu de la relation (A.13) il vient:

$$\begin{aligned}K &= L^T R L + (C - DL)^T Q (C - DL) \\ &\quad + (F - HL)^T K(+) (F - HL)\end{aligned}\quad (A.16)$$

$$\begin{aligned}\underline{g}^T &= -\underline{\mu}^T R L - (\underline{z} - D\underline{\mu})^T Q (C - DL) + (H\underline{\mu} + \underline{f})^T K(+) (F - HL) \\ &\quad + \underline{g}^T(+) (F - HL)\end{aligned}\quad (A.17)$$

D'après la relation (A.16), on remarque que si $K(+)$ est une matrice symétrique définie positive, K a également la même propriété.

Remarque:

Il est inutile d'expliciter la relation de récurrence concernant le scalaire $\underline{h}$, car il n'intervient pas dans la commande et dans les relations récurrentes de K et $\underline{g}$.

D'après l'équation (A.16) et avec l'équation (A.11) on établit :

$$L^T [R + D^T Q D + B^T K(+) B] = A^T K(+) B + C^T Q D$$

$$K = F^T K(+) (F - HL) - C^T Q D L + C^T Q C \quad (A.18)$$

La modification de l'équation (A.11) donne:

$$(R + D^T Q D)L = H^T K(+)(F - HL) + D^T Q C$$

$$L = (R + D^T Q D)^{-1} [H^T K(+)(F - HL) + D^T Q C]$$

Tenant compte de cette formulation de L le terme, $C^T Q D L$ de la relation (A.18) devient:

$$\begin{aligned} K &= [F^T - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} H^T] K(+) (F - HL) + \\ &\quad [C^T Q - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q] C \end{aligned} \quad (A.19)$$

$$\begin{aligned} \underline{g}^T &= -\underline{\mu}^T [R + D^T Q D + H^T K(+) H] L - \underline{z}^T Q C + \underline{z}^T Q D L + \\ &\quad \underline{\mu}^T [D^T Q C + H^T K(+) F] + [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}]^T (F - HL) \end{aligned} \quad (A.20)$$

D'après l'équation (A.11) c'est:

$$\begin{aligned} \underline{g}^T &= -\underline{z}^T Q C + \underline{z}^T Q D L + [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}]^T (F - HL) \\ &= -C^T Q \underline{z} + F^T [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}] + L^T \{D^T Q \underline{z} - B^T [\underline{g}(+) + K(+) \underline{f}]\} \end{aligned} \quad (A.21)$$

L'équation de récurrence (A.21) s'exprime par:

$$\underline{g} = F^T [\underline{g}(+) + K(+) (H \underline{\mu} + \underline{f})] - C^T Q \underline{z} + C^T Q D \underline{\mu} \quad (A.22)$$

D'après la relation (A.12) le vecteur $\underline{\mu}$ vérifie la relation :

$$\underline{\mu} = (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q \underline{z} - (R + D^T Q D)^{-1} H^T [\underline{g}(+) + K(+) (H \underline{\mu} + \underline{f})] \quad (A.23)$$

Tenant compte de cette formulation du vecteur $\underline{\mu}$ pour le terme $C^T Q D \underline{\mu}$ de l'équation (A.22), on écrit:

$$\begin{aligned} \underline{g} &= [F^T - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} H] [\underline{g}(+) + K(+) (H \underline{\mu} + \underline{f})] \\ &\quad - [C^T Q - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q] \underline{z} \end{aligned} \quad (A.24)$$

Résumé:

Voilà en abrégé les développements de la politique d'implantation de la commande optimale:

$$\begin{aligned}
 \hat{\underline{u}}_{m \times 1}(i) &= -L(i)\underline{x}(i) + \underline{\mu}(i) \\
 L_{m \times n}(i) &= [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} [H^T K(i+1)F + D^T Q C] \\
 \underline{\mu}_{m \times 1}(i) &= [R + H^T K(i+1)H + D^T Q D]^{-1} \\
 &\quad \times \{D^T Q \underline{z} - H^T [\underline{g}(i+1) + K(i+1)\underline{f}]\} \\
 K_{n \times n}(i) &= \Omega K(i+1)[F - HL(i)] + \Phi C \\
 \underline{g}_{n \times 1}(i) &= \Omega \{ \underline{g}(i+1) + K(i+1)[H\underline{\mu}(i) + \underline{f}] \} - \Phi \underline{z}
 \end{aligned}$$

Les conditions d'initialisations sont: $K(N) = 0$ et $\underline{g}(N) = 0$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{n \times n} &= F^T - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} H^T \\
 \Phi_{n \times p} &= C^T Q - C^T Q D (R + D^T Q D)^{-1} D^T Q
 \end{aligned}$$

A.1.2 Calcul direct de la matrice d'anticipation pour une structure améliorée

Par analogie avec la relation générale de l'équation (A.21) l'équation récurrente $\underline{g}_1(i)$ peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \underline{g}_1^T(i) &= \underline{z}_1^T Q [D_1 L_1(i) - C_1] + \\
 &\quad [\underline{g}_1(i+1) + K_1(i+1)\underline{f}_1]^T [F_1 - H_1 L_1(i)]
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Dans le cas où l'horizon de minimilisation du critère quadratique tend vers l'infini, la solution limite vérifie donc:

$$\underline{g}_1 = (F_1 - H_1 L_1)^T (\underline{g}_1 + K_1 \underline{f}_1) + (D_1 L_1 - C_1)^T Q \underline{z}_1 \tag{A.26}$$

En posant:

$$\underline{h}_1 = \underline{g}_1 + K_1 \underline{f}_1 \tag{A.27}$$

Il vient:

$$[I - (F_1 - H_1 L_1)]^T \underline{h}_1 = (D_1 L_1 - C_1)^T Q \underline{z}_1 + K_1 \underline{f}_1 \quad (\text{A.28})$$

Or, les vecteurs $\underline{z}_1$ et $\underline{f}_1$ sont tels que:

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{f}_1 = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Il existe deux matrices de passage A_1 et A_2 , de dimension respectives $(2p \times p)$ et $(n + p) \times p$, telles que:

$$\underline{z}_1 = A_1 \underline{z} \quad \text{et} \quad \underline{f}_1 = A_2 \underline{z} \quad (\text{A.30})$$

I est la matrice unitaire d'ordre p . La relation définissant le vecteur $\underline{h}_1$ devient :

$$\underline{h}_1 = [I - (F_1 - H_1 L_1)^T]^{-1} [(D_1 L_1 - C_1)^T Q_1 A_1 + K_1 A_2] \underline{z} \quad (\text{A.31})$$

L'expression de la solution limite $\underline{\mu}_1$ du vecteur d'anticipation peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_1 = & (R + H_1^T K_1 H_1 + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} \{ D_1^T Q_1 A_1 - H_1^T [I - (F_1 - H_1 L_1)^T]^{-1} \\ & [(D_1 L_1 - C_1)^T Q_1 A_1 + K_1 A_2] \} \underline{z} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Le vecteur de commande optimal peut donc se mettre, lorsque l'horizon tend vers l'infini, sous la forme:

$$\underline{\hat{u}}(i) = -L \underline{x}(i) - M \underline{v}(i) + N \underline{z} \quad (\text{A.33})$$

La matrice d'anticipation N (de dimension $(m \times p)$) peut être déterminée après le calcul de L et M par un calcul algébrique direct:

$$\begin{aligned} N = & (R + H_1^T K_1 H_1 + D_1^T Q_1 D_1)^{-1} \{ D_1^T Q_1 A_1 - H_1^T [I - (F_1 - H_1 L_1)^T]^{-1} \\ & [(D_1 L_1 - C_1)^T Q_1 A_1 + K_1 A_2] \} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

A.2 Performance de la structure à retour d'état

Cette section de l'annexe regroupe un ensemble de simulation qui ont permis de mettre en évidence l'influence des matrices de pondération avec une commande à

retour d'état.

A.2.1 Système du second ordre

La fonction de transfert en temps continu pour une dynamique du second ordre plus un retard pur est considéré comme suit:

$$G(s) = \frac{e^{-T_r s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (\text{A.35})$$

où $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 5$ sont les constantes de temps et T_r est le retard pur. La constante d'échantillonnage est $T = 1$.

La représentation en temps discret est:

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0.5632 & -0.0511 \\ 0.7665 & 0.9720 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0.7665 \\ 0.4196 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0667 \end{bmatrix}; \quad D_0 = 0 \quad (\text{A.37})$$

Commande proportionnelle:

- 1^{er} cas: $k_r = 1$: petit retard pur

Les figures (A.1), (A.3) et (A.5) représentent les lieux des racines pour différentes pondérations de la commande $R = 0.01$, $R = 0.1$ et $R = 1$ avec $Q = 1 : 5$. Nous remarquons que plus le poids de R est faible par rapport à Q , plus les valeurs propres ont un module voisin de zéro.

L'influence sur la sortie pour ces mêmes pondérations sont données par les figures suivantes (A.2), (A.4) et (A.6). Nous remarquons que la réponse du système gagne en rapidité lorsque R diminue.

Remarque: Lorsqu'on augmente le retard le lieu de racine n'est pas influencé. Par contre la sortie est influencé.

Commande proportionnelle et intégrale

Afin de pallier aux inconvénients de la commande définie précédemment, on ajoute des intégrateurs pour éliminer les erreurs en régime.

- 1^{er} cas: $k_r = 1$ petit retard pur

Les figures (A.7, A.8) représentent respectivement le lieu de racine et la sortie avec $R = 0.01$, $Q = 2$ et Q_v varie entre 0 et 0.01.

Les figures (A.12) et (A.13) présentent diverses variation de la pondération sur le vecteur d'écart Q ($Q = 2$ et $Q = 20$) avec $R = 0.01$ fixe et Q_v varient entre 0 et 0.1.

La sortie de la commande par retour d'état avec les pondérations suivantes $R = 1$, $Q = 2$ et Q_v varie entre 0 et 0.01 est donnée par la figure (A.11).

- 2^{ieme} cas: $k_r = 5$ retard significatif de cinq périodes

Les figures (A.9) et (A.10) représentent respectivement le lieu des racines avec les pondérations suivantes: $R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$.

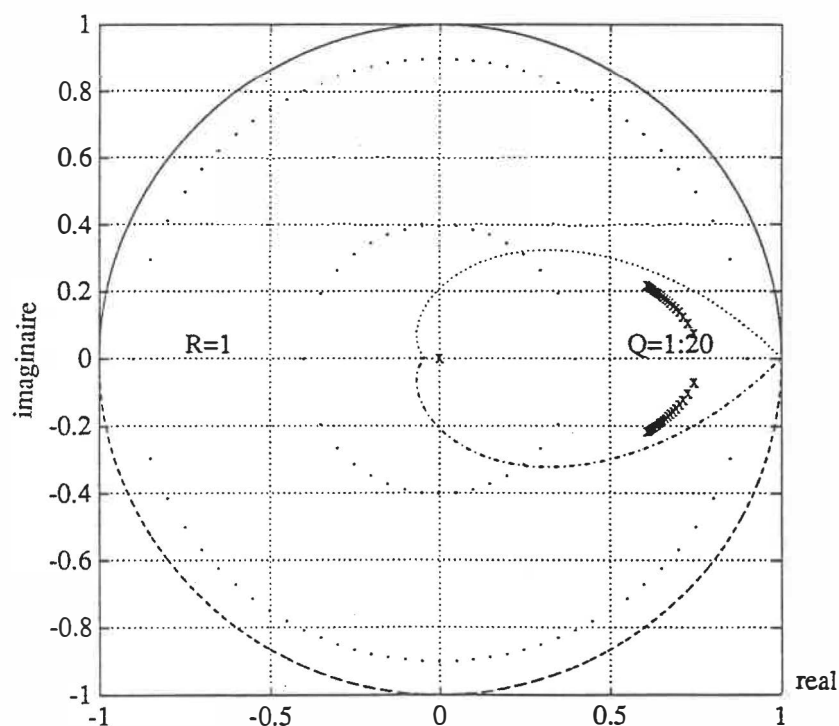


Figure A.1: Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 1$, $Q = 1 : 20$
 $k_r = 1$

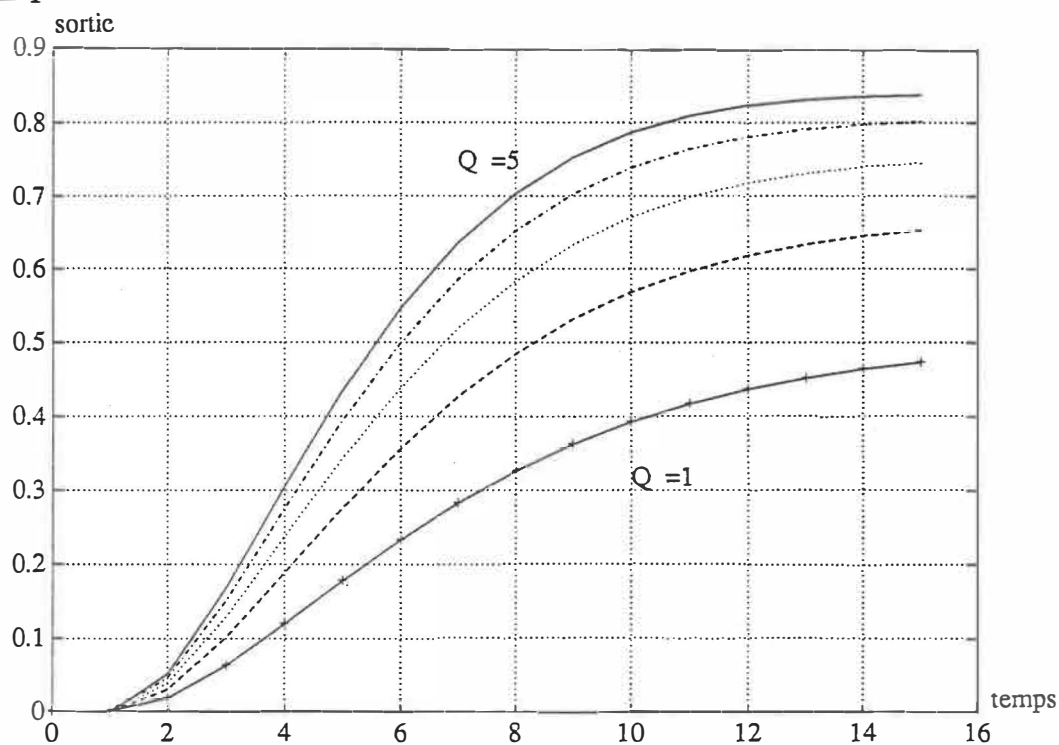


Figure A.2: Sortie de la commande à retour d'état avec $R = 1$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$

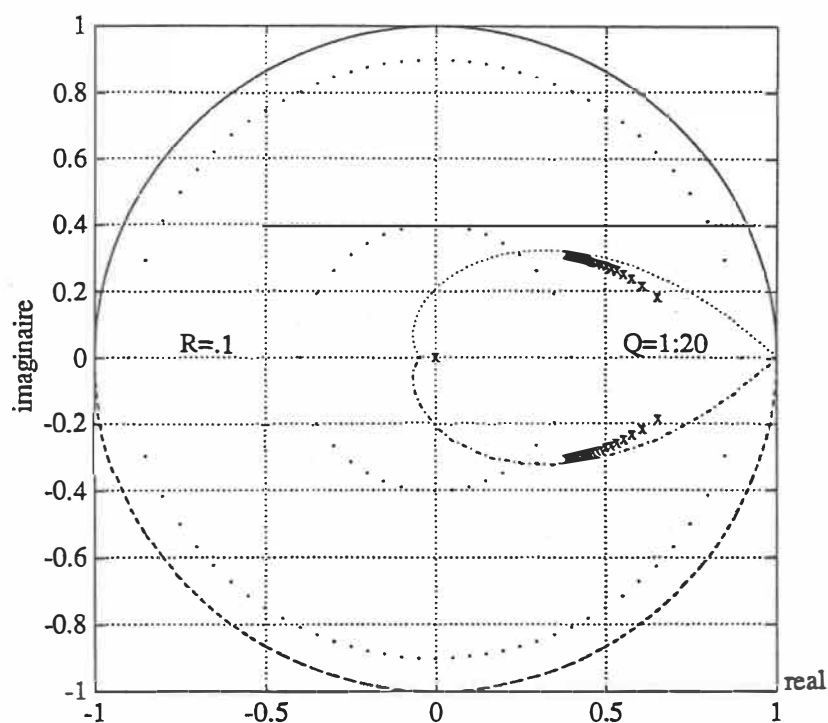


Figure A.3: Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 0.1$, $Q = 1 : 20$ et $k_r = 1$

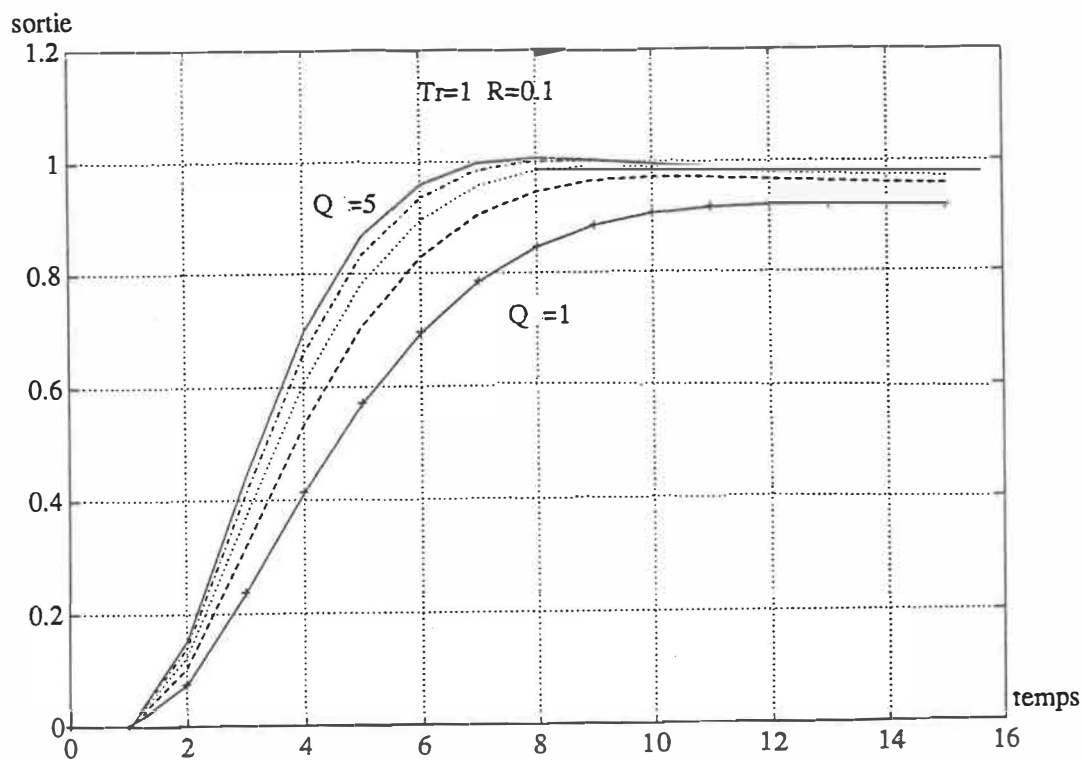


Figure A.4: Sortie de la commande avec retour d'état $R = 0.1$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$

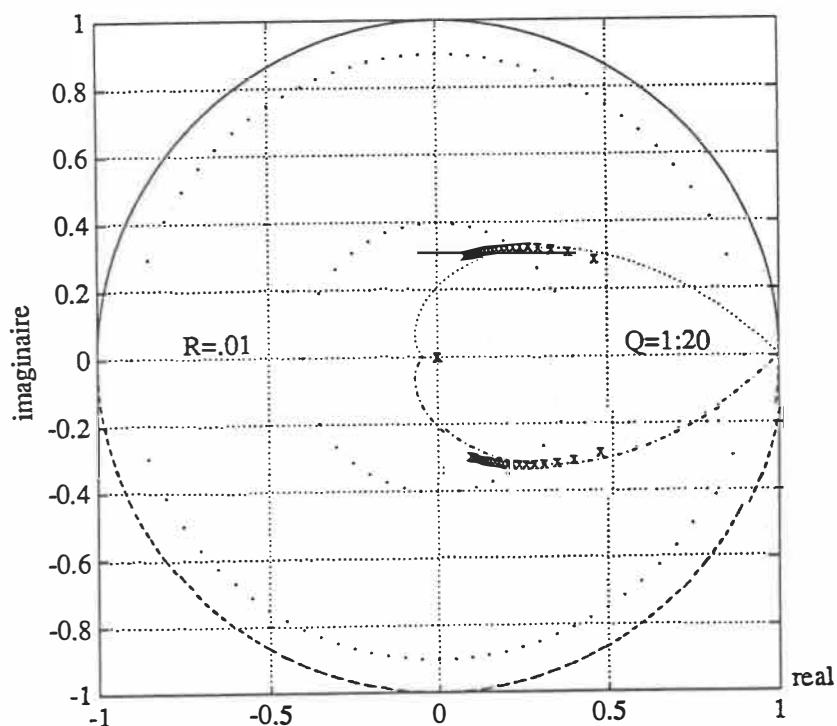


Figure A.5: Lieu des racines pour la commande à retour d'état $R = 0.01$, $Q = 1 : 20$ et $k_r = 1$

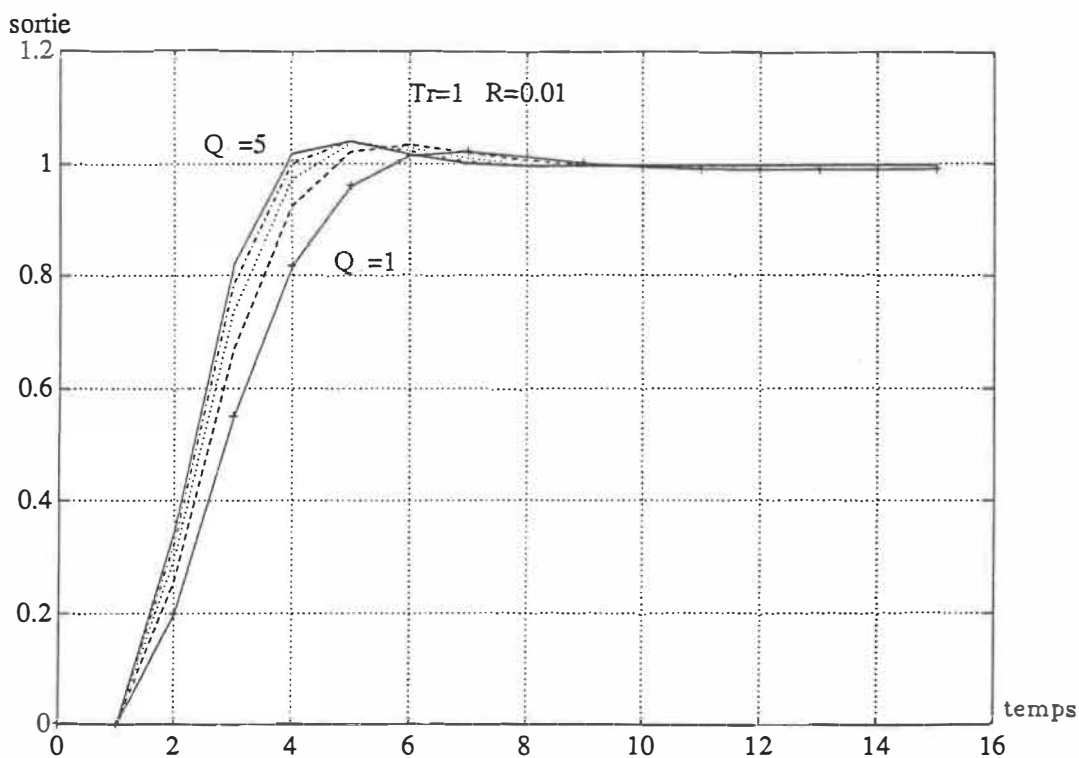


Figure A.6: Sortie de la commande à retour d'état avec $R = 0.01$, $Q = 1 : 5$ et $k_r = 1$

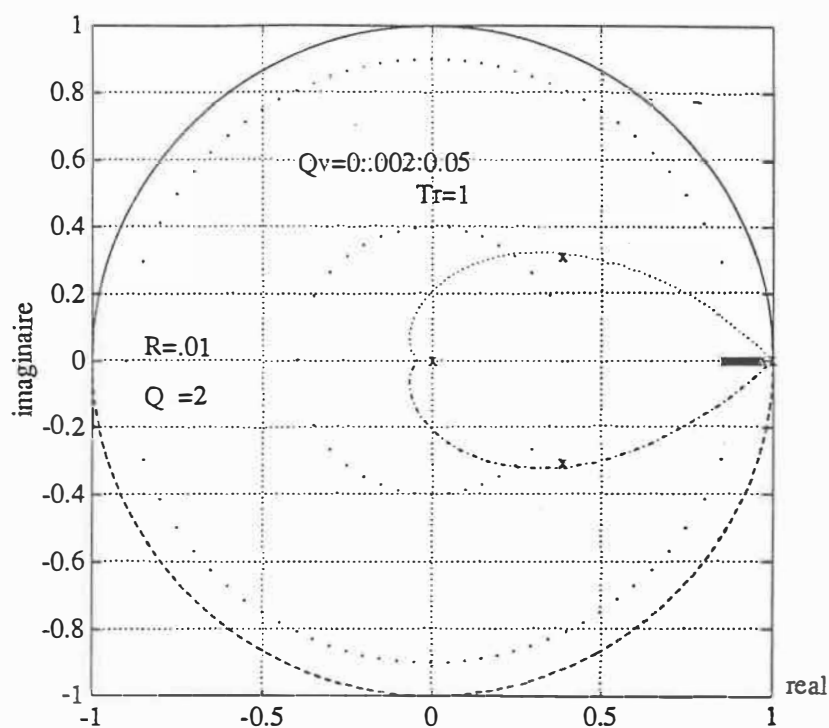


Figure A.7: Lieu des racines pour la commande à retour d'état : PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)

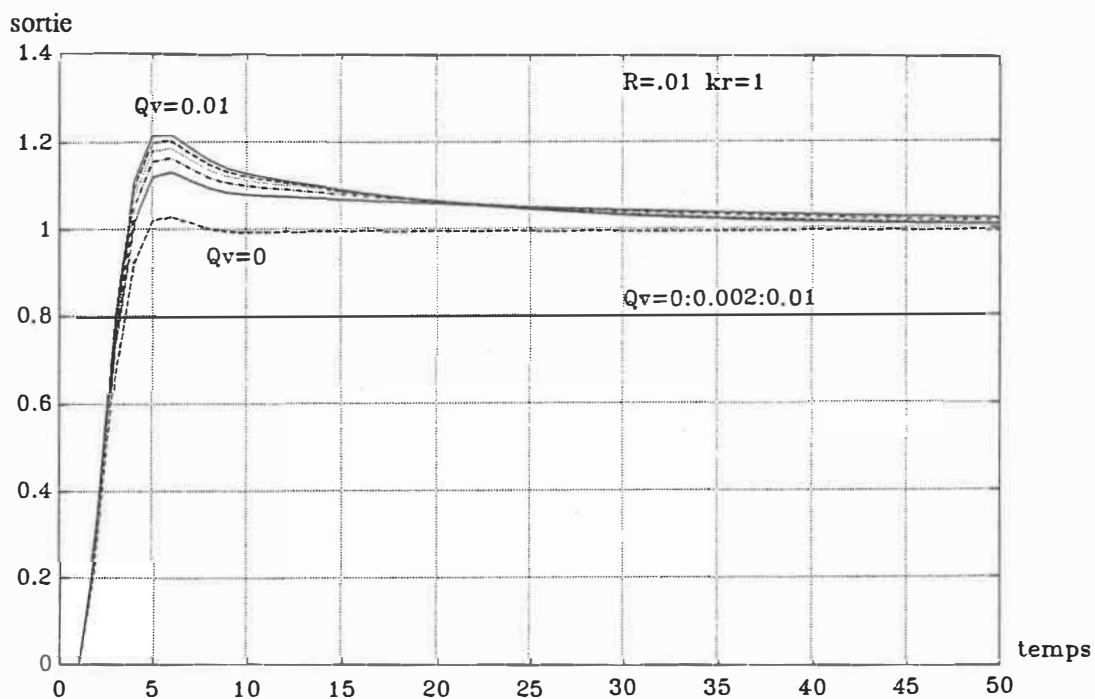


Figure A.8: Sortie de la commande à retour d'état : PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)

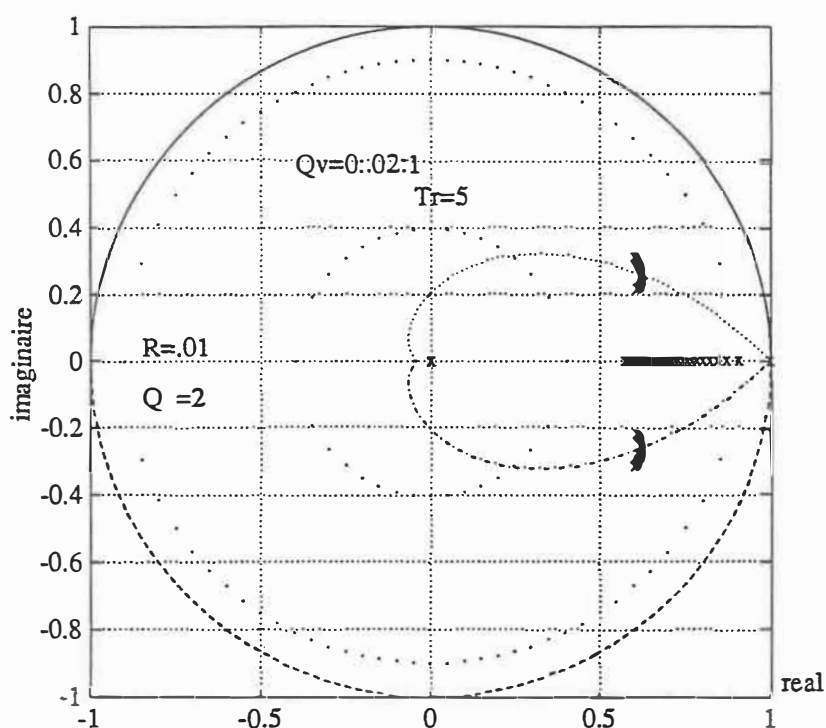


Figure A.9: Lieu des racines pour la commande à retour d'état : PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 5$)

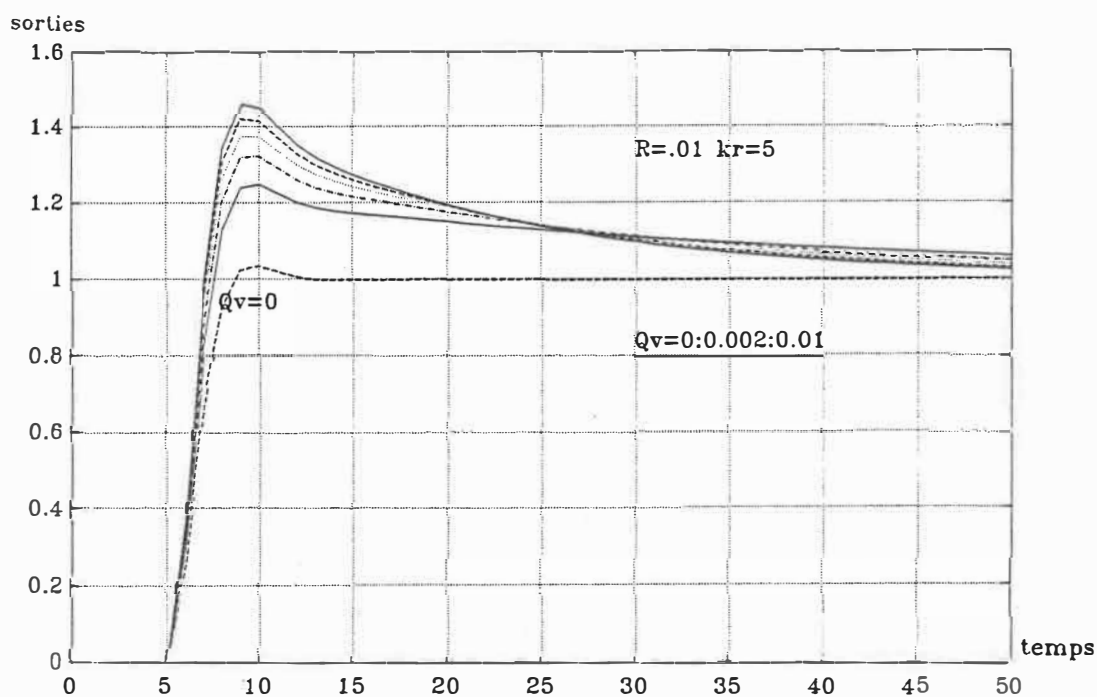


Figure A.10: Sortie de la commande à retour d'état : PI ($R = 0.01$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 5$)

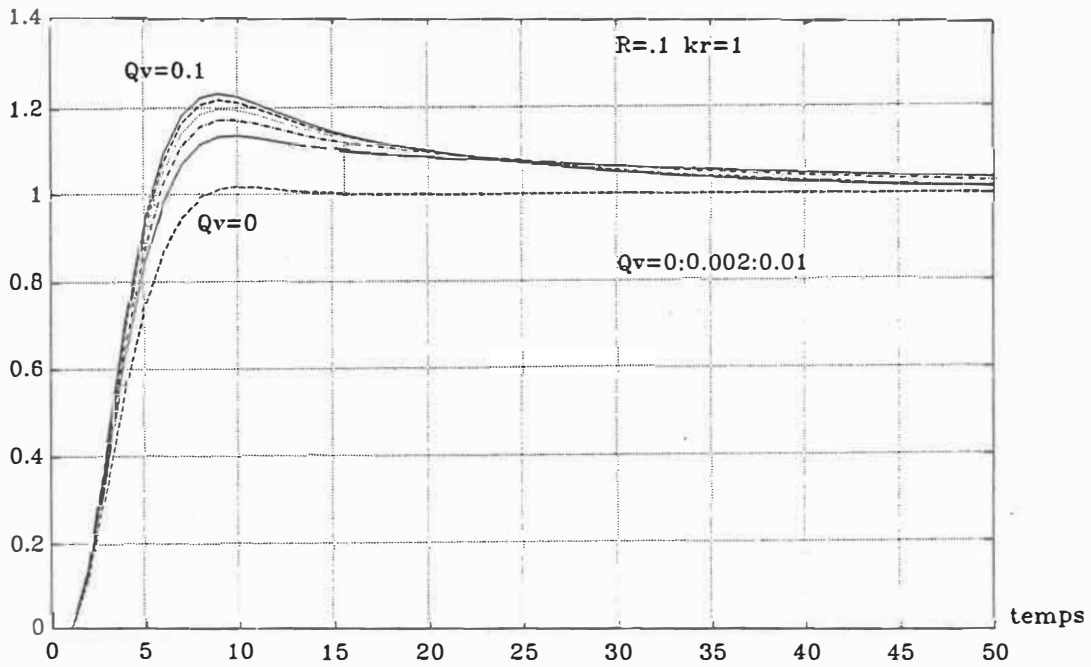


Figure A.11: Sortie de la commande à retour d'état : PI ($R = 0.1$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.002 : 0.01$ avec $k_r = 1$)

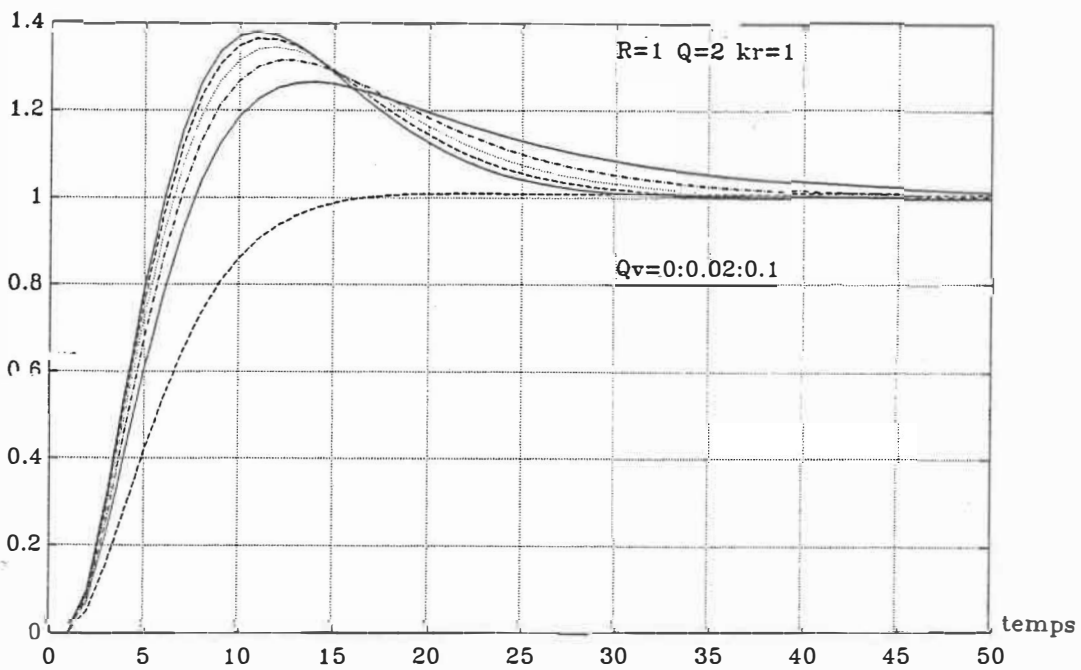


Figure A.12: Sortie de la commande à retour d'état : PI ($R = 1$, $Q = 2$ et $Q_v = 0 : 0.02 : 0.1$ avec $k_r = 1$)

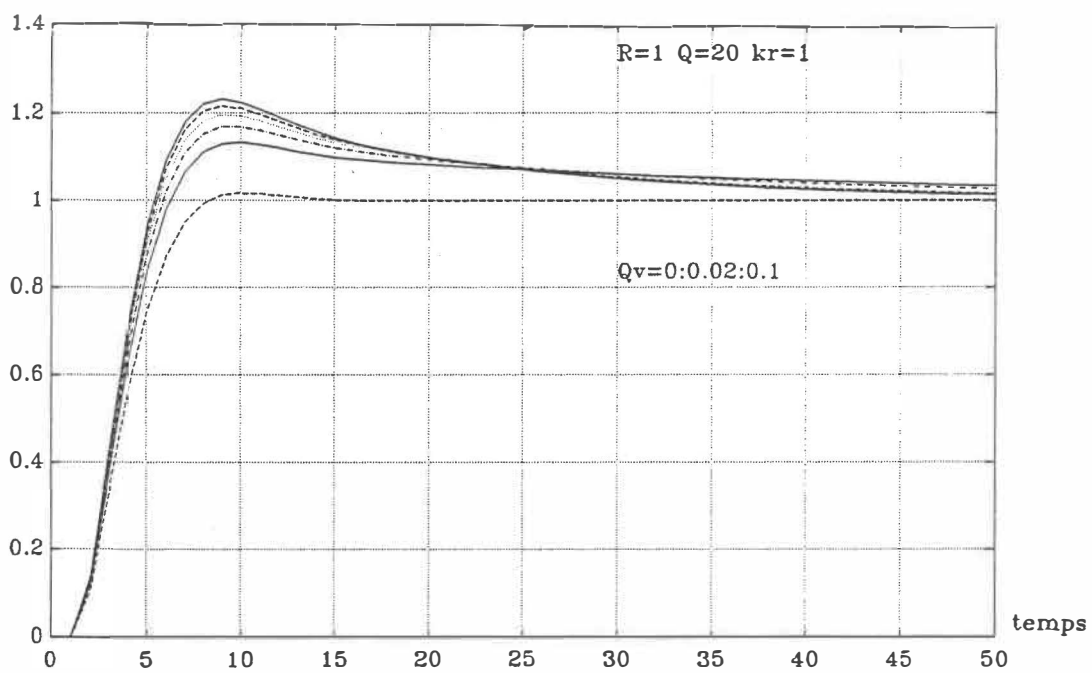


Figure A.13: Sortie de la commande à retour d'état : PI ($R = 1$, $Q = 20$ et $Q_v = 0 : 0.02 : 0.1$ avec $k_r = 1$)

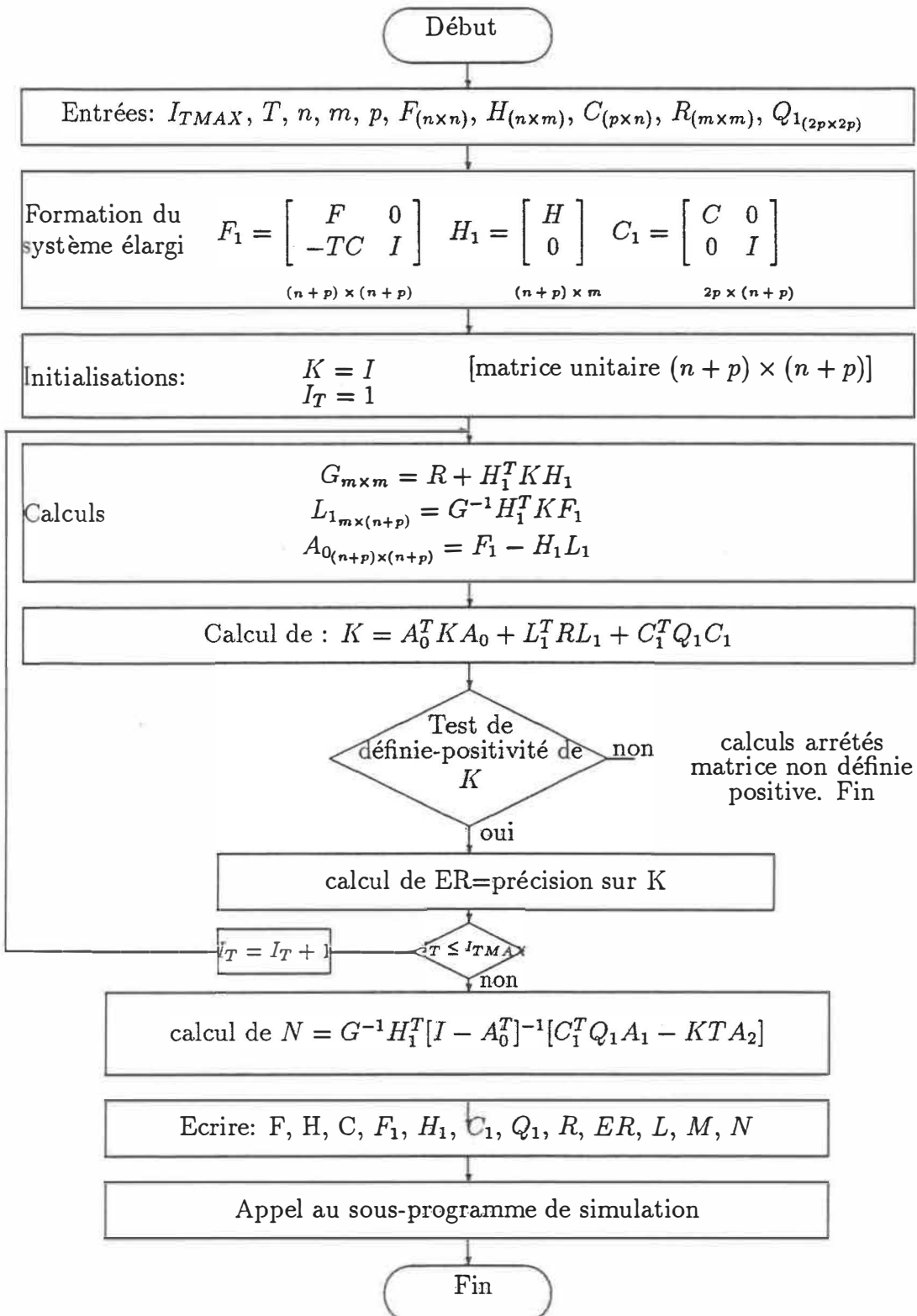


Figure A.14: Commande à retour d'état avec un contrôleur P.I

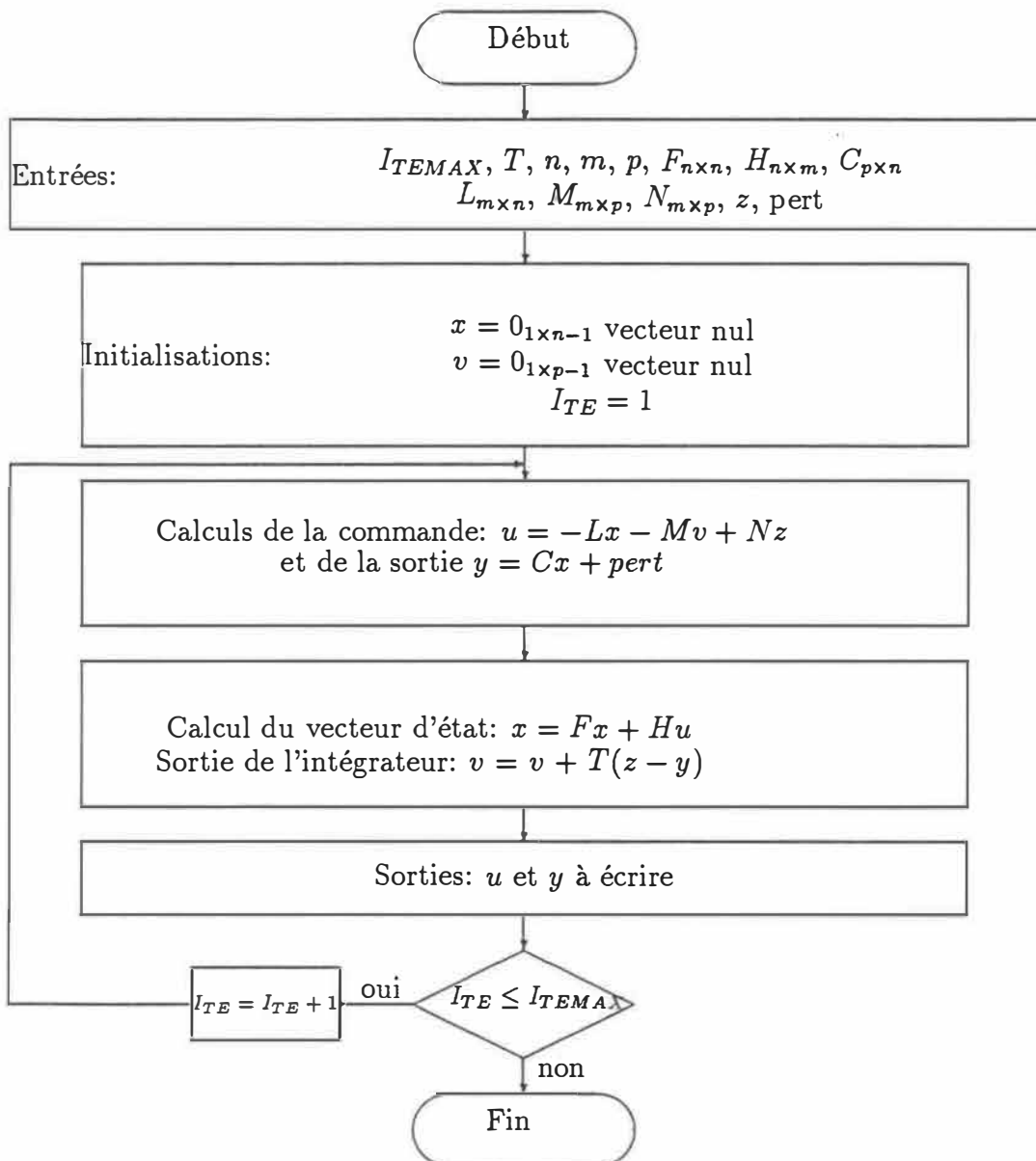


Figure A.15: Sous-programme de simulation

A.3 Procédés comportant un retard pur interne (= $N_i T$)

Dans cet exposé nous allons voir que dans certaines situations ou le retard interne est élevé $N_i > 2$; il est possible, sans perdre de rigueur, de traiter le problème comme s'il n'y avait qu'un retard $N_i = 2$. Les conditions préalables à cette réduction seront dégagées.

A.3.1 Découpage des matrices de la représentation d'état

Calcul de la matrice "K"

D'après l'équation (2.21), on a:

$$K = (F - HNH^T KF)^T KF + C^T QC \quad (\text{A.38})$$

On sait que la matrice K est symétrique.

Soit:

$$K_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \overbrace{K_0}^{n_0} & \vdots & \overbrace{K_{12}}^{n_i} & \vdots & \overbrace{K_{13}}^1 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ K_{12}^T & \vdots & K_{22} & \vdots & K_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{13}^T & \vdots & K_{23}^T & \vdots & k_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Avec (A.38), on a:

$$N = (R + H^T K H)^{-1} \quad (\text{A.40})$$

On peut voir facilement que:

$$H^T K H = H_0^T K_0 H_0 \quad (\text{A.41})$$

Donc:

$$N = (R + H_0^T K_0 H_0)^{-1}, \text{ matrice } (m \times m) \quad (\text{A.42})$$

D'autre part:

$$C^T Q C_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \overbrace{C_0^T Q C_0}^{n_0} & \vdots & \overbrace{0}^{n_i} & \vdots & \overbrace{C_0^T Q C_d}^1 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \underline{C}_d^T Q C_0 & \vdots & & \vdots & \underline{C}_d^T Q \underline{C}_d \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$H N H_{(n \times n)}^T = \begin{bmatrix} \overbrace{H_0 N H_0^T}^{n_0} & \vdots & \overbrace{0}^{n_i} & \vdots & \overbrace{0}^1 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

où: on sait que Q est une matrice diagonale $(p \times p)$.

De même:

$$K F_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \overbrace{K_0 F_0 + K_{12} M_{1n_0}}^{n_0} & \vdots & \overbrace{K_{12} I_{-1} + \underline{K}_{13} \underline{e}_{n_i}^T}^{n_i} & \vdots & \overbrace{0}^1 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ K_{12}^T F_0 + K_{22} M_{1n_0} & \vdots & K_{22} I_{-1} + \underline{K}_{23} \underline{e}_{n_i}^T & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \underline{K}_{13}^T F_0 + \underline{K}_{23}^T M_{1n_0} & \vdots & \underline{K}_{23}^T I_{-1} + k_{33} \underline{e}_{n_i}^T & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

D'où:

$$H N H^T K F = \begin{bmatrix} \overbrace{H_0 N H_0^T}^{n_0} & \vdots & \overbrace{H_0 N H_0^T}^{n_i} & \vdots & \overbrace{0}^1 \\ \overbrace{(K_0 F_0 + K_{12} M_{1n_0})}^{n_0} & \vdots & \overbrace{(K_{12} I_{-1} + \underline{K}_{13} \underline{e}_{n_i}^T)}^{n_i} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

$$(F - HNH^T KF) = \begin{bmatrix} \overbrace{[F_0 - H_0NH_0^T}^{n_0} & \overbrace{-H_0NH_0^T}^{n_i} & \overbrace{1}^1 \\ (K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0})] & (K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{1n_0} & I_{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \underline{e}_{n_i}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (A.47)$$

$$(F - HNH^T KF)^T = \begin{bmatrix} \overbrace{[F_0 - H_0NH_0^T}^{n_0} & \overbrace{-H_0NH_0^T}^{n_i} & \overbrace{1}^1 \\ (K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0})]^T & M_{1n_0}^T & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ -(K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T)^T & I_{-1}^T & \underline{e}_{n_i} \\ H_0NH_0^T & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.48)$$

Finalement:

$$K_{(n \times n)} = (F - HNH^T KF)^T KF + C^T QC = \quad (A.49)$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{[F_0 - H_0NH_0^T(K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0})]^T}^{n_0} & \overbrace{[F_0 - H_0NH_0^T(K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0})]^T}^{n_i} & \overbrace{C_0^T QC_d}^1 \\ (K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0}) + M_{1n_0}^T(K_{12}^T F_0 + K_{22}M_{1n_0}) + C_0^T QC_0 & (K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T) + M_{1n_0}^T(K_{22}I_{-1} + K_{23}\underline{e}_{n_i}^T) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ -(K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T)^T H_0NH_0^T & -(K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T)^T H_0NH_0^T & \vdots \\ (K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0}) + I_{-1}^T(K_{12}^T F_0 + K_{22}M_{1n_0}) + \underline{e}_{n_i}(K_{13}^T F_0 + K_{23}^T) & (K_{12}I_{-1} + K_{13}\underline{e}_{n_i}^T) + \underline{e}_{n_i}(K_{23}^T I_{-1} + k_{33}\underline{e}_{n_i}^T) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \underline{C}_d^T QC_0 & 0 & \underline{C}_d^T QC_d \end{bmatrix}$$

On a donc:

$$K_{13} = C_0^T QC_d, \quad K_{23} \equiv 0, \quad k_{33} = \underline{C}_d^T QC_d \quad (A.50)$$

$$K_{0(n_0 \times n_0)} = [F_0 - H_0NH_0^T(K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0})]^T (K_0F_0 + K_{12}M_{1n_0}) +$$

$$M_{1n_0}^T (K_{12}^T F_0 + K_{22} M_{1n_0}) + C_0^T Q C_0 \quad (\text{A.51})$$

$$K_{12(n_0 \times n_i)} = \left[F_0 - H_0 N H_0^T (K_0 F_0 + K_{12} M_{1n_0}) \right]^T (K_{12} I_{-1} + \underline{K}_{13} \underline{e}_{n_i}^T) + M_{1n_0}^T K_{22} I_{-1} \quad (\text{A.52})$$

$$K_{22(n_0 \times n_i)} = -(K_{12} I_{-1} + \underline{K}_{13} \underline{e}_{n_i}^T)^T H_0 N H_0^T (K_{12} I_{-1} + \underline{K}_{13} \underline{e}_{n_i}^T) + I_{-1}^T K_{22} I_{-1} + \underline{e}_{n_i} k_{33} \underline{e}_{n_i}^T \quad (\text{A.53})$$

D'autre part, on sait que:

$$M_{1n_0(n_i \times n_0)} = \begin{bmatrix} \overbrace{\underline{e}_{n_0(n_0 \times 1)}^T}^{n_0} \\ \dots \\ 0_{(n_0 \times (n_i - 1))} \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

On a donc:

$$K_{12} M_{1n_0} = \underline{K}_{12_1} \underline{e}_{n_0}^T \quad \text{et} \quad M_{1n_0}^T K_{12}^T = \underline{e}_{n_0} (\underline{K}_{12_1})^T \quad (\text{A.55})$$

où: $\underline{K}_{12_1}$ = première colonne de la matrice K_{12}

On a de même:

$$M_{1n_0}^T K_{22} = \underline{e}_{n_0} \underline{K}_{22_1}^T \quad (\text{A.56})$$

$(n_0 \times n_0)$

où: $\underline{K}_{22_1}^T$ = première ligne de la matrice K_{22}

De même:

$$M_{1n_0}^T K_{22} M_{1n_0} = \underline{e}_{n_0} k_{22_{11}} \underline{e}_{n_0}^T \quad (\text{A.57})$$

$(n_0 \times n_0)$

où: $k_{22_{11}}$ = premier élément de la matrice K_{22}

Aussi, on peut noter que:

$$I_{-1}^T = I_{+1} \quad (\text{A.58})$$

où: I_{+1} = représente une matrice carrée, sus-diagonal; l'effet de prémultiplier I_{+1} par une autre matrice est de décaler toutes les lignes de cette dernière d'un pas de bas en haut, et de rendre la dernière ligne égale à zéro.

En regroupant les termes différemment et en utilisant (A.55), (A.56), (A.57) et (A.58), on peut mettre (A.51) sous la forme:

$$\begin{aligned}
 K_{0(n_0 \times n_0)} = & (F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)^T K_0 F_0 + C_0^T Q C_0 + \\
 & \underbrace{(F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)^T \underline{K}_{12_1} \underline{e}_{n_0}^T}_{\text{matrice nulle sauf la dernière colonne}} + \\
 & \underbrace{\underline{e}_{n_0} (\underline{K}_{12_1})^T (F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)}_{\text{matrice nulle sauf la dernière ligne}} + \\
 & \underbrace{\underline{e}_{n_0} [k_{22_{11}} - (\underline{K}_{12_1})^T H_0 N H_0^T \underline{K}_{12_1}] \underline{e}_{n_0}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}} \quad (A.59)
 \end{aligned}$$

De (A.52) et (A.50), on tire:

$$\begin{aligned}
 K_{12} = & \{ (F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)^T K_{12} + \\
 & \underbrace{\underline{e}_{n_0} [\underline{K}_{22_1}^T - (\underline{K}_{12_1})^T H_0 N H_0^T K_{12}]}_{\text{matrice nulle sauf la dernière ligne}} \} I_{-1} \\
 & + \underbrace{(F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)^T C_0^T Q \underline{C}_d \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf la dernière colonne}} \\
 & - \underbrace{\underline{e}_{n_0} (\underline{K}_{12_1})^T H_0 N H_0^T C_0^T Q \underline{C}_d \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}} \quad (A.60)
 \end{aligned}$$

De (A.53) et (A.50), on tire:

$$\begin{aligned}
 K_{22} = & \underbrace{I_{+1} (K_{22} - K_{12}^T H_0 N H_0^T K_{12}) I_{-1}}_{\text{dernier ligne et colonne nulles}} \\
 - & \underbrace{I_{+1} K_{12}^T H_0 N H_0^T (C_0^T Q \underline{C}_d) \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf la dernière colonne mais avec le dernier élément nul}} \\
 - & \underbrace{\underline{e}_{n_i} (\underline{C}_d^T Q C_0) H_0 N H_0^T K_{12} I_{-1}}_{\text{matrice nulle sauf la dernière ligne mais avec le dernier élément nul}} \\
 + & \underbrace{\underline{e}_{n_i} [\underline{C}_d^T Q \underline{C}_d - (\underline{C}_d^T Q C_0) H_0 N H_0^T (C_0^T Q \underline{C}_d)] \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}} \quad (A.61)
 \end{aligned}$$

La résolution des trois systèmes d'équations matricielles (A.59), (A.60) et (A.61) donne K_0 , K_{12} et K_{22} et donc la matrice “ K ” puisque d'après (A.49), le calcul des autres éléments de cette matrice est trivial. Dans la section (A.3.3) on verra une condition suffisante qui permet de simplifier considérablement ces calculs.

A.3.2 Calcul de la matrice “ L ”

D'après l'équation (A.55):

$$L = NH^T K F \quad (\text{A.62})$$

et l'expression (A.45), on a:

$$L = \begin{bmatrix} \overbrace{NH_0^T (K_0 F_0 + K_{12} M_{1n_0})}^{n_0} & \vdots & \overbrace{NH_0^T (K_{12} I_{-1} + K_{13} \underline{e}_{n_0}^T)}^{n_i} & \vdots & \overbrace{0}^1 \\ = L_{0(m \times n_0)} & & = L_{2(m \times n_i)} & & = L_{3(m \times 1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

En utilisant (A.50) et (A.55), on a:

$$L_0 = NH_0^T K_0 F_0 + \underbrace{NH_0^T K_{12} \underline{e}_{n_0}^T}_{\text{matrice nulle sauf la dernière colonne}} \quad (\text{A.64})$$

$$L_2 = \underbrace{NH_0^T K_{12} I_{-1}}_{\text{matrice qui a la dernière colonne nulle}} + \underbrace{NH_0^T C_0^T Q C_d \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle, sauf la dernière colonne}} \quad (\text{A.65})$$

$$L_3 = 0 \quad (\text{A.66})$$

A.3.3 Condition suffisante pour la simplification de calculs

Dans les paragraphes précédents, on a trouvé les expressions de la matrice L et de la matrice K , découpées en sous-matrices, de façon à faire intervenir séparément, la dimension du modèle sans retard, n_0 , et la dimension dépendant directement du

retard, n_i , ($n_i = N_i - 1$). La matrice K n'est pas directement une matrice de commande, mais elle intervient dans tous les calculs des matrices.

Faisons pour l'instant l'hypothèse: $K_{12} \equiv 0$. Les sous-matrices de la matrice L deviennent alors:

$$L_{0(m \times n_0)} = NH_0^T K_0 F_0, \quad (\text{A.67})$$

(Rappel: $N = (R + H_0^T K_0 H_0)^{-1}$)

$$L_{2(m \times n_i)} = NH_0^T C_0^T Q C_d e_{n_i}^T, \quad (\text{A.68})$$

matrice nulle sauf la dernière colonne

$$L_{3(m \times 1)} = 0 \quad (\text{A.69})$$

Donc, L est constituée:

- d'une sous-matrice L_0 , en général pleine, de dimension $(m \times n_0)$;
- de la sous-matrice L_2 de dimension $(m \times n_i)$, dans laquelle toutes les colonnes sont nulles sauf la dernière. Donc si on élimine toutes ces colonnes nulles, L_2 deviendra de dimension $(m \times 1)$, ($n_i = 1$);
- de la matrice L_3 qui est nulle de dimension $(m \times 1)$.

On peut observer, dans ce cas, que dans les expressions de L_0 et L_2 , n'interviennent que les matrices: R , H_0 , F_0 , C_0 , Q , C_d , qui sont les données indépendantes de la dimension n_i , et la matrice K_0 , qui comme on le verra plus loin, est aussi indépendante de cette valeur. Dans ces conditions, si on calcule la matrice L avec $n_i = 1$, c'est-à-dire $N_i = 2$, on aura une matrice qui a les mêmes valeurs numériques non nulles que celle qui est calculée avec $n_i > 1$ ($N_i > 2$). L'intérêt évident est qu'on aura alors une dimension réduite à $(m \times (n_0 + 2))$ puisque les $(n_i - 1)$ colonnes de zéro n'apparaîtront pas.

Ceci montre que, pour le calcul de la matrice L , la réduction de $N_i > 2$ à $N_i = 2$ est possible si $K_{12} \equiv 0$, condition suffisante.

Voyons ce qui se passe pour la matrice K :

Dans l'expression (A.61), avec $K_{12} \equiv 0$, on obtient :

$$K_{22(n_i \times n_i)} = \underbrace{\mathbf{e}_{n_i} [\mathbb{C}_d^T Q \mathbb{C}_d - (C_0^T Q \mathbb{C}_d)^T H_0 N H_0^T (C_0^T Q \mathbb{C}_d)] \mathbf{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}} + I_{+1} K_{22} I_{-1} \quad (\text{A.70})$$

On peut voir facilement (par itérations successives) que K_{22} devient une matrice diagonale de dimension $(n_i \times n_i)$, telle que tous les éléments de la diagonale sont également donnés par:

$$k_{22ii} = \mathbb{C}_d^T Q \mathbb{C}_d - (C_0^T Q \mathbb{C}_d)^T H_0 N H_0^T (C_0^T Q \mathbb{C}_d), \quad i = 1, \dots, n_i \quad (\text{A.71})$$

D'autre part, l'équation (A.59), avec $K_{12} \equiv 0$, on obtient:

$$K_{0(n_0 \times n_0)} = [F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0]^T K_0 F_0 + C_0^T Q C_0 + \mathbf{e}_{n_0} k_{2211} \mathbf{e}_{n_0}^T \quad (\text{A.72})$$

Et si on utilise l'expression précédente pour k_{2211} , On a :

$$K_0 = [F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0]^T K_0 F_0 + C_0^T Q C_0 + \underbrace{\mathbf{e}_{n_0} [\mathbb{C}_d^T Q \mathbb{C}_d - (C_0^T Q \mathbb{C}_d)^T H_0 N H_0^T (C_0^T Q \mathbb{C}_d)] \mathbf{e}_{n_0}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}} \quad (\text{A.73})$$

(Rappel: $N = [R + H_0^T K_0 H_0]^{-1}$)

donc, on peut observer que dans ce cas, K_0 dépend seulement des données indépendantes de la dimension n_i , et si on réduit $n_i = 1$, d'après l'expression précédente, cette matrice restera inchangée.

Ceci confirme l'affirmation faite lors de la discussion relative à la matrice L .

Donc, l'effet de réduire $n_i = 1$ (c'est-à-dire $N_i = 2$), sur la matrice K serait dans ce cas de laisser toutes ses valeurs non nulles, inchangées, mais de réduire sa

dimension à $((n+2) \times (n_0+2))$. La sous-matrice K_{12} qui est nulle devient une seule colonne ($n_0 \times 1$) et la matrice K_{22} devient une seule valeur égale à celle de tous les éléments de la diagonale (k_{22ii}), quand $n_i > 1$.

D'autre part, examinons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice K_{12} soit nulle. De l'expression (A.60) pour $K_{12} \equiv 0$, on tire:

$$[F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0]^T C_0^T Q C_d \underline{e}_{n_i}^T + \underline{e}_{n_0} K_{22_1}^T I_{-1} = 0_{(n_0 \times n_i)} \quad (\text{A.74})$$

$\underline{e}_{n_0} K_{22_1}^T I_{-1}$ est une matrice nulle sauf la dernière ligne. Celle-ci est égale à la première ligne de K_{22} décalée d'un pas à gauche, avec le dernier élément égal à zéro. Mais on a vu, que pour $K_{12} \equiv 0$ la matrice K_{22} est diagonale. Donc cette dernière ligne ainsi construite, sera nulle.

Il reste à satisfaire:

$$\underbrace{[F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0]^T C_0^T Q C_d \underline{e}_{n_i}^T}_{\text{matrice nulle sauf la dernière colonne}} \equiv 0 \quad (\text{A.75})$$

C'est à dire:

$$[F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0]^T C_0^T Q C_d \equiv 0, \text{ matrice } (n_0 \times 1) \quad (\text{A.76})$$

Soit une condition nécessaire pour avoir $K_{12} = 0$:

$$C_d^T Q C_0 (I - H_0 N H_0^T K_0) F_0 = 0, \quad (1 \times n_0) \quad (\text{A.77})$$

ou: $N = (R + H_0^T K_0 H_0)^{-1}$

D'autre part, la condition (A.73) est également nécessaire puisqu'elle est obtenue en supposant $K_{12} = 0$.

L'ensemble des deux conditions nécessaire (A.73) et (A.77) constitue une condition suffisante pour avoir $K_{12} = 0$. Si les deux conditions ci-dessus sont réalisées on vérifie facilement que les équations (A.38), (A.59), (A.60) et (A.61) sont satisfaites pour $K_{12} = 0$. L'unicité de la solution entraîne la suffisance.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir K_{12} sont donc:

$$\begin{aligned}
 K_0 = & (F_0 - H_0 N H_0^T K_0 F_0)^T K_0 F_0 + C_0^T Q C_0 \\
 & + \underbrace{e_{n_0} [C_d^T Q C_d - (C_0^T Q C_d)^T H_0 N H_0^T (C_0^T Q C_d)] e_{n_0}^T}_{\text{matrice nulle sauf le dernier élément}}, (n_0 \times n_0)
 \end{aligned} \tag{A.78}$$

Remarque:

Si la solution des équations: (A.59), (A.60) et (A.61), avec $N_i = 2$ est un triplet: $K_0, \underline{K}_{12} \equiv 0$ et k_{22} . Pour $N_i > 2$ le triplet: $K_0, \underline{K}_{12} \equiv 0$ et K_{22} diagonale, avec $k_{22,ii} = k_{22}$, est une solution de ces équations et comme la solution est unique, ce triplet est effectivement la solution. Donc dans le cas où $\underline{K}_{12} \equiv 0$, on peut construire la matrice K (si $N_i > 2$) à partir de K_0, k_{22} en sachant que $K_{12} \equiv 0$, et avec $\underline{K}_{13}, \underline{K}_{23}$ et $\underline{k}_{33}$ qui sont toujours indépendants de N_i .

Annexe B

Étude comparative des prédicteurs de Smith et de Moore

Cet annexe regroupe un ensemble de simulations qui ont permis de mettre en évidence les comportements dynamiques et statiques des prédicteurs de Smith et de Moore en mode suiveur et régulateur.

Les simulations ont été réalisés sur un micro-ordinateur du type IBM PS/2 et sur une station SUN avec l'aide du logiciel MATLAB.

B.1 Performance avec un contrôleur proportionnel

B.1.1 Comparaison des domaines de stabilité

- Avec une modélisation parfaite ($N = M$ et $K_p = K_m$) les prédicteurs de Smith, analytique sans et avec estimation de charge (figure (B.1)) ont les mêmes domaines de stabilités.
- Le domaine de stabilité du PS et PA dans le cas d'une modélisation parfaite $N = M$, $K_p = K_m$ et plus élevé que dans le cas d'une modélisation parfaite

mais avec une erreur sur le gain ($N = M$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$) (figure (B.2)).

- Dans le cas d'une modélisation imparfaite sur le retard ($N = 2$, $M = 1$) et avec une erreur sur le gain du modèle ($1 < K_m < 4$ et $K_p = 1$) (figure B.3), le prédicteur analytique dispose encore d'une plage de stabilité plus étendue que celui de Smith.

B.1.2 Comparaison des régimes permanents

- Les figures (B.4) et (B.5) représentent respectivement le comportement en suiveur et en régulation pour la comparaison des erreurs en régimes permanents des prédicteurs de Smith et analytique dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle (K_m) mais sans erreur sur les retards ($N = M = 1$), $T = 0.25$, $K_p = 1$ et $\tau_m = \tau_p = 2$.

Remarque: $((e)_{PA} > (e)_{PS})$ en suiveur, mais en régulation $(e)_{PS}$ est constant. Par contre $(e)_{PA}$ varie linéairement avec une pente négative.

- De même, les figures (B.6) et (B.7) montrent respectivement qu'en suiveur et en régulation la comparaison des erreurs en régime permanents des prédicteurs de Smith et analytique dans le cas d'une modélisation imparfaite avec $T = 0.25$, $M = 1$, $K_p = 1$, $K_m = 2$, $\tau_m = \tau_p = 2$ et N varie entre 1 et 5.

Remarque: $(e)_{PA} > (e)_{PS}$ en suiveur, mais $(e)_{PS}$ ne dépend pas du retard N . En régulation $(e)_{PA} > (e)_{PS}$ en valeur absolue, de même $(e)_{PS}$ n'est pas en fonction du retard N .

- Les figures (B.8) et (B.9) représentent respectivement, en suiveur et en régulation, la comparaison des erreurs en régimes permanents des prédicteurs de Smith et de Moore. Nous étudions le cas d'une erreur sur la valeur de $(B = e^{\frac{-\theta_p}{\tau_m}})$ dans une modélisation imparfaite avec $T = 0.25$, $N = 1$, $K_p = 1$,

$K_m = 2$, $\tau_p = 2$ et avec une variation de $B = e^{\frac{-T}{\tau_m}}$ entre 0.7 et 0.9. Nous remarquons que l'erreur du prédicteur analytique diminue linéairement avec une pente négative lorsque B tend vers un pour le suiveur mais $(e)_{PA} > (e)_{PS}$. Par contre en régulation $(e)_{PA} > (e)_{PS}$ en valeur absolue, mais $(e)_{PA}$ diminue lorsque B tend vers un.

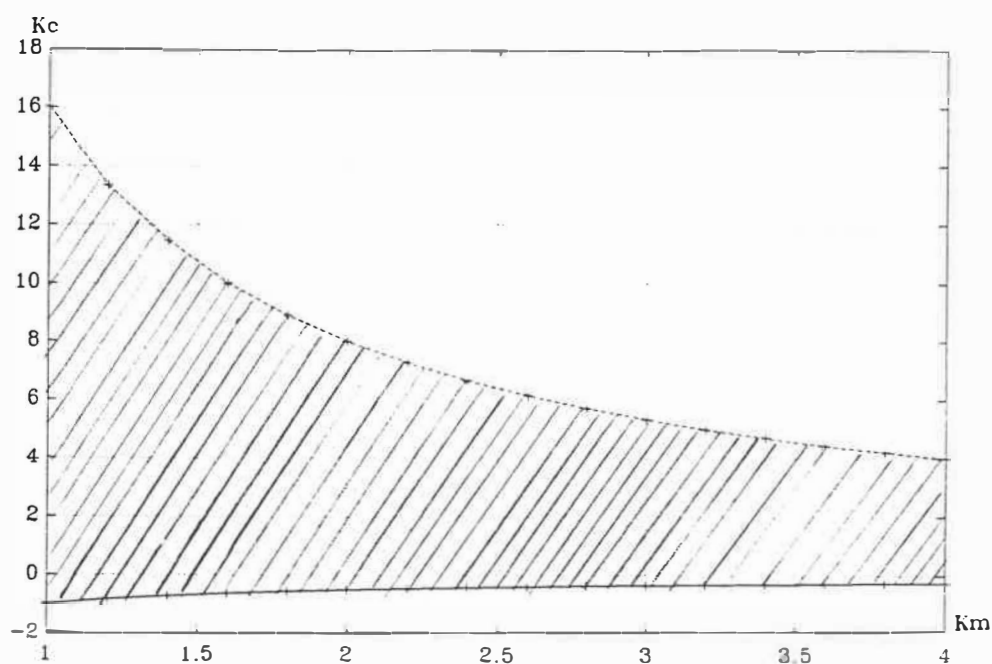


Figure B.1: Comparaison des domaines de stabilité +PS, +PA, PAEC dans le cas d'une modélisation parfaite ($N = M$, $K_p = K_m$) $\tau_m = \tau_p = 2$; $T = 0.25$

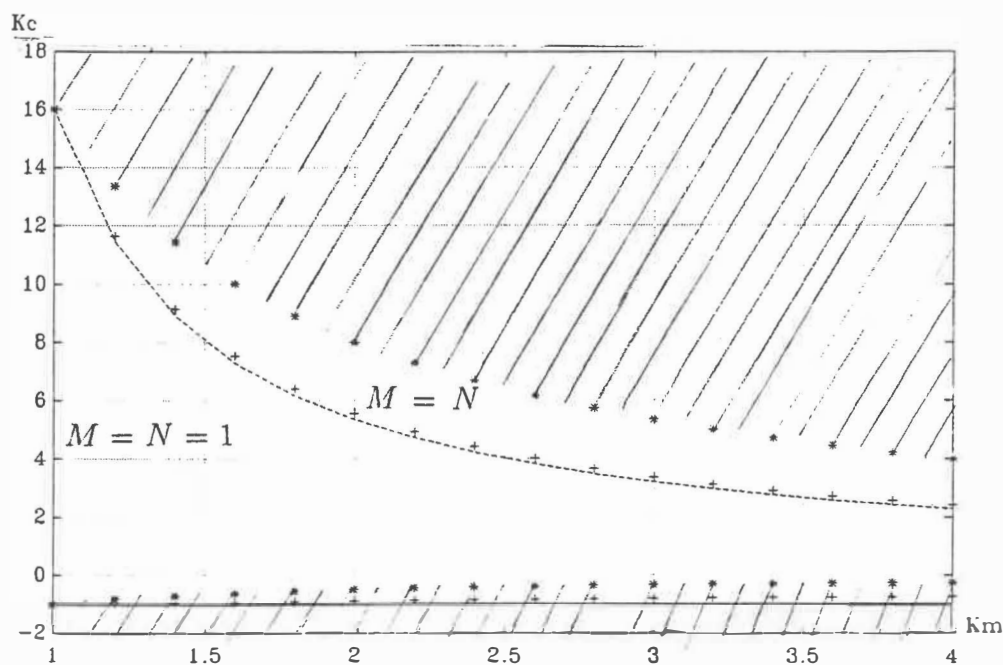


Figure B.2: Comparaison des domaines de stabilité du +PA, PS ($M = N = 1$ avec $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$) et avec une modélisation parfaite *PS *PA ($M = N$ et $K_p = K_m$)

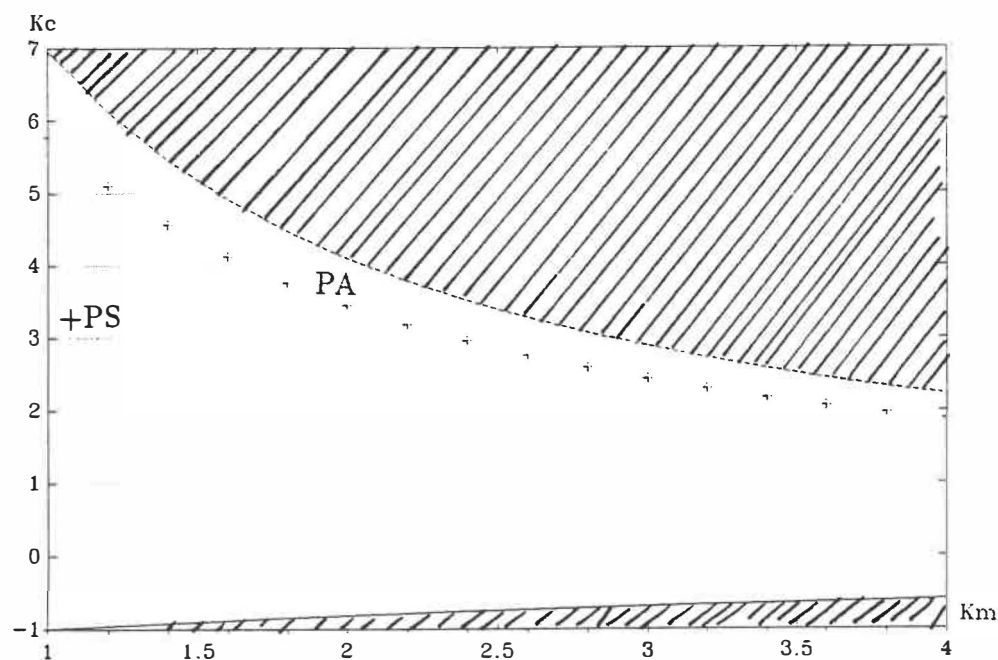


Figure B.3: Comparaison des domaines de stabilité du +PS et PA dans le cas d'une modélisation imparfaite $M = 1$, $N = 2$ avec une variation du gain du modèle

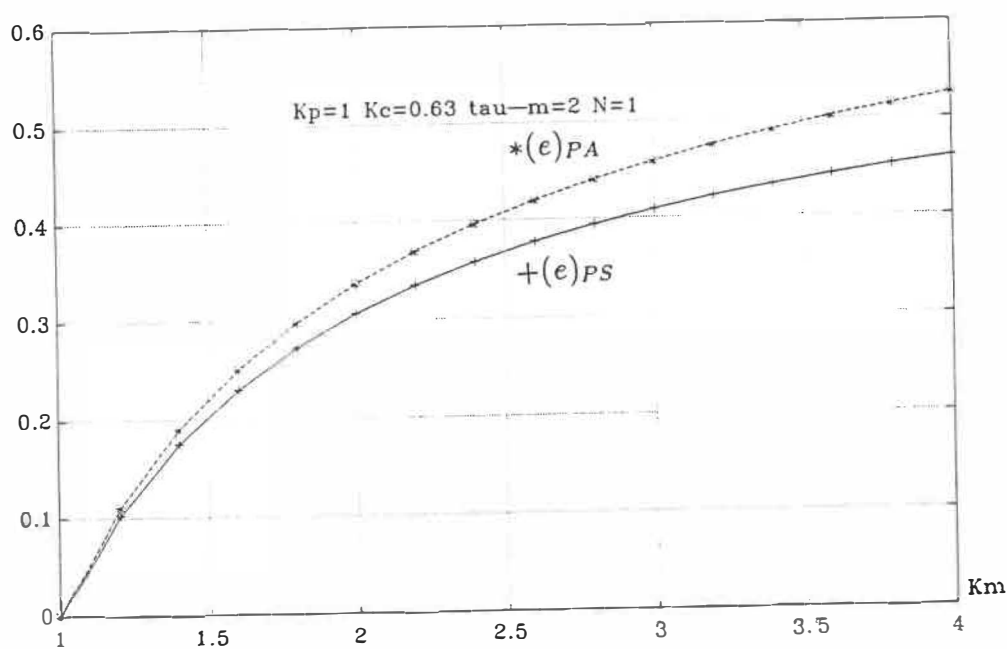


Figure B.4: Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle (K_m)

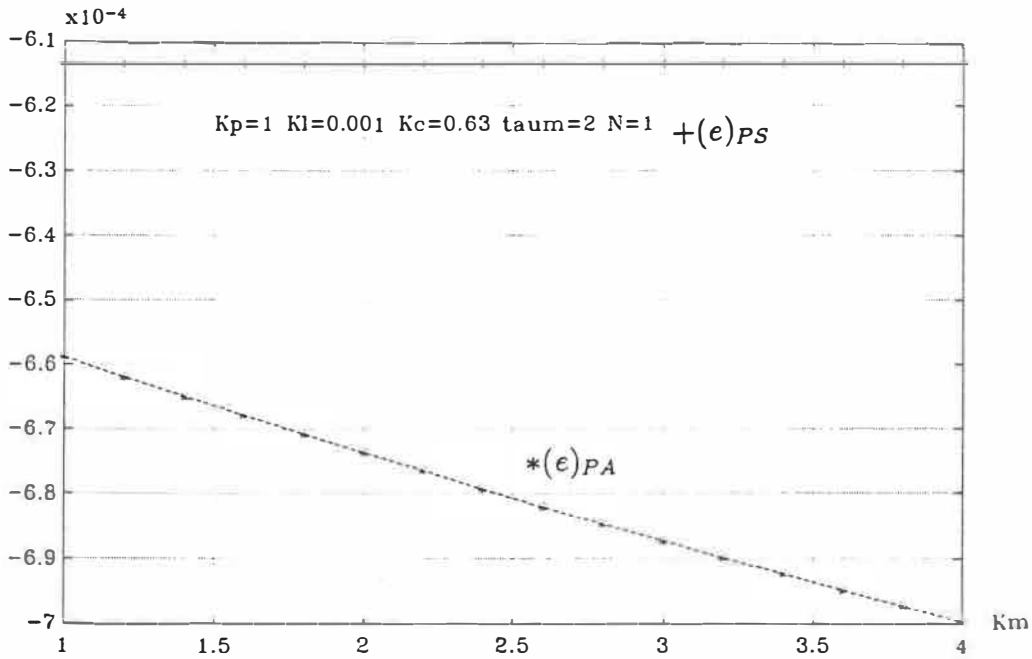


Figure B.5: Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle (K_m)

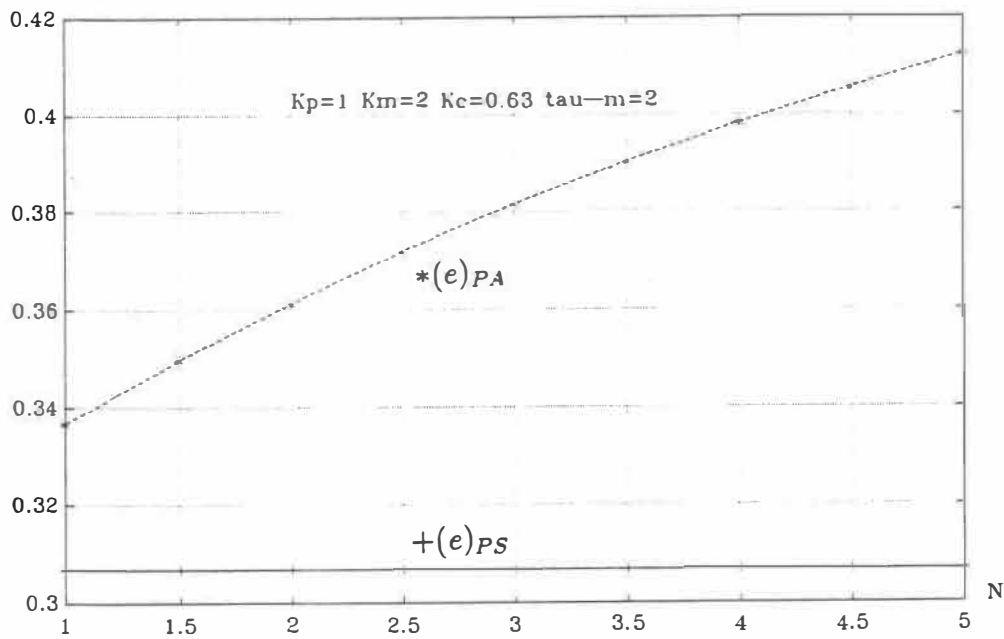


Figure B.6: Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une modélisation imparfaite (N)

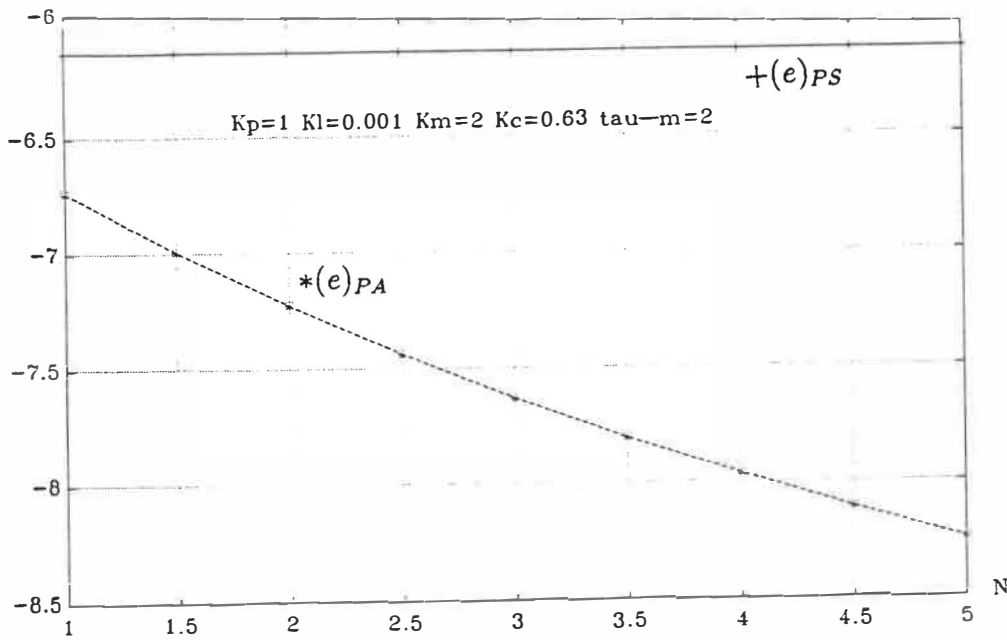


Figure B.7: Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une modélisation imparfaite (N) : erreur sur le retard

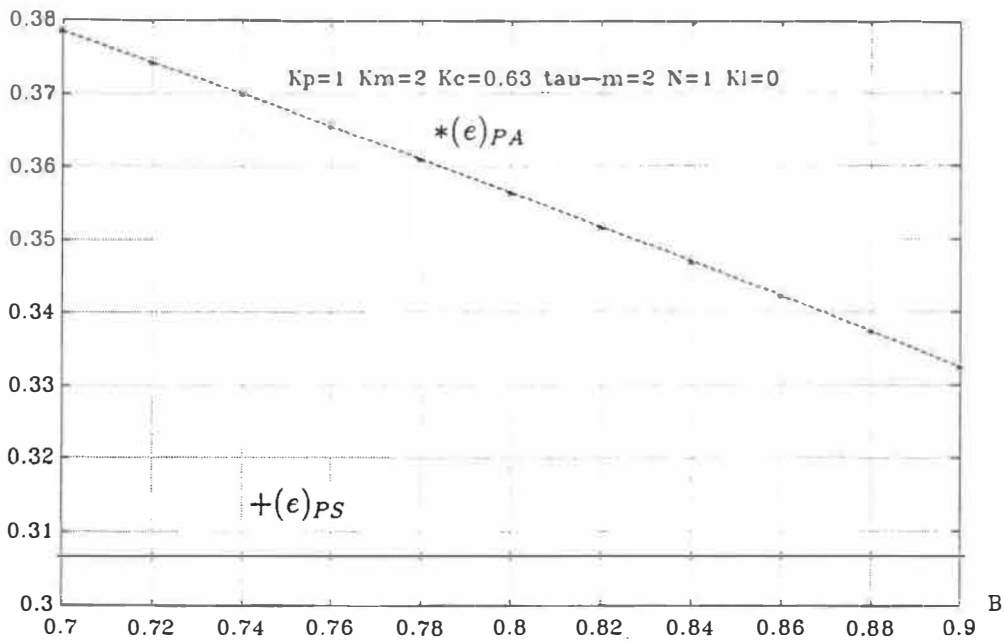


Figure B.8: Comparaison des suiveurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur la valeur de la constante de temps du modèle ($B = e^{-\frac{T}{\tau_m}}$)

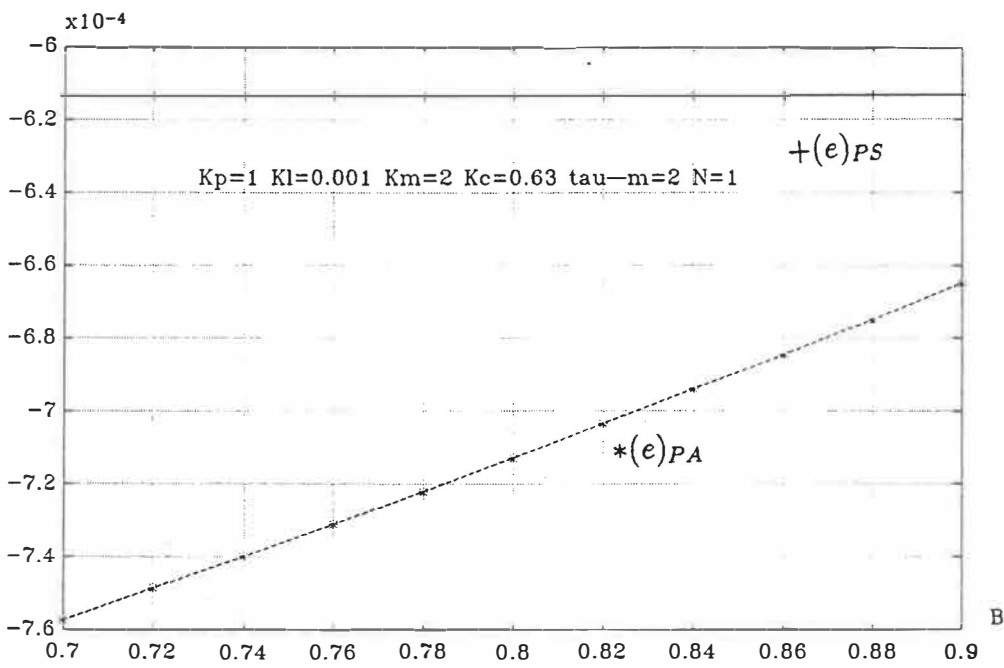


Figure B.9: Comparaison des régulateurs de $+(e)_{PS}$ et $*(e)_{PA}$ dans le cas d'une erreur sur la valeur de la constante de temps du modèle ($B = e^{\frac{T}{\tau_m}}$)

B.2 Performance avec un contrôleur proportionnel et intégral

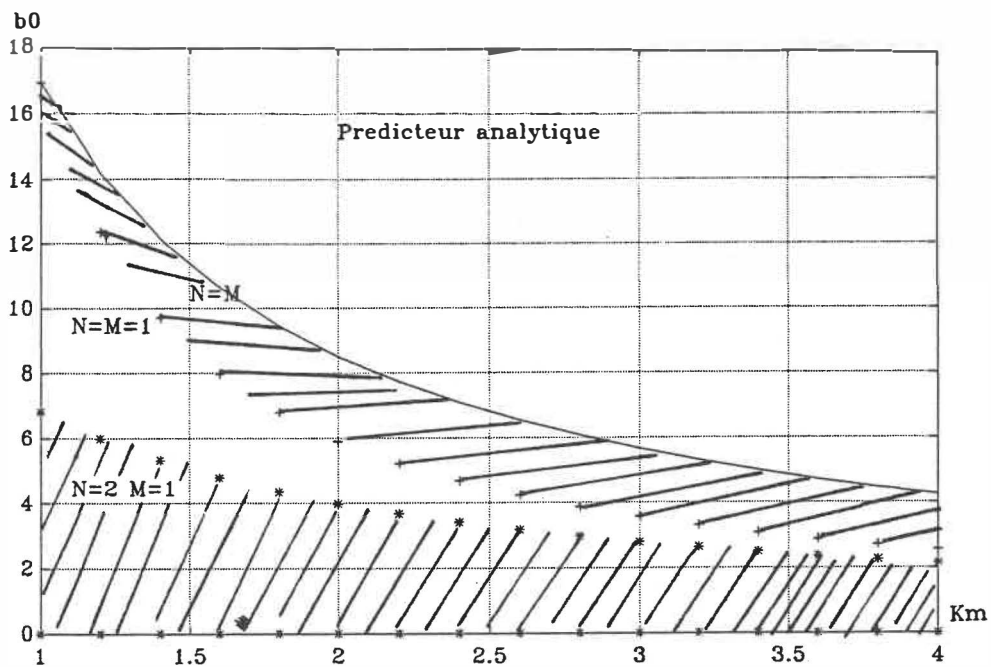
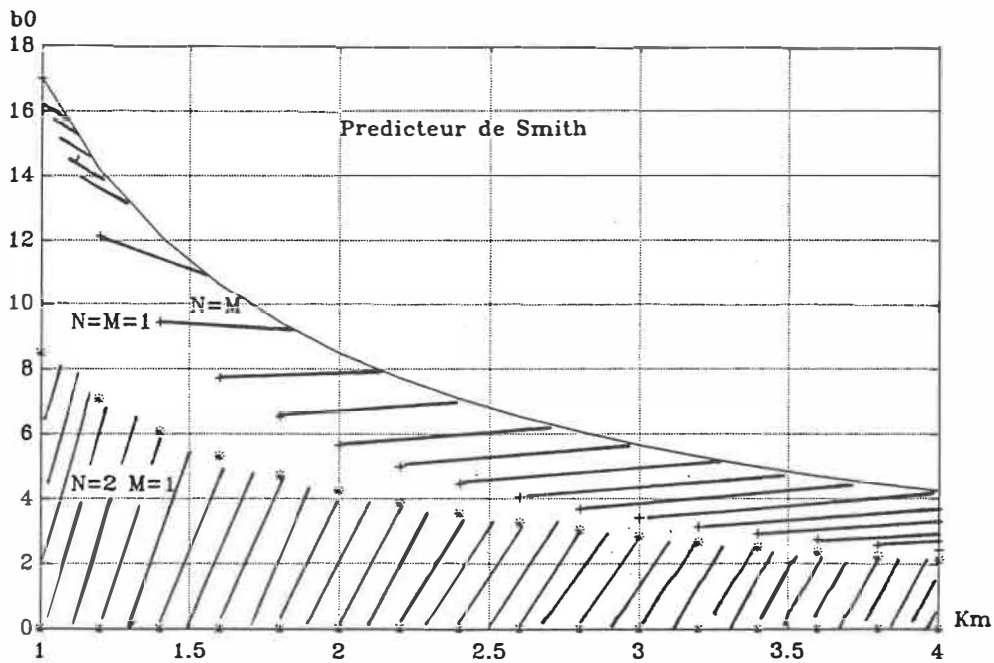
Le système de commande est de la forme proposée par Palmor.

La fonction de transfert du correcteur est $G_c(z) = \frac{0.5}{b} \frac{1 - Bz^{-1}}{1 - z^{-1}}$ avec $b = 0.7$

- Les figures (B.10) et (B.11) représentent la comparaison des domaines de stabilité respectivement des prédicteurs de Smith et de Moore. Nous remarquons que le domaine de stabilité dans une modélisation parfaite est supérieur à celui d'une modélisation imparfaite.
- Les figures (B.12) et (B.13) représentent le choix de la valeur de b du contrôleur de Palmor. Nous avons choisi $b = 0.7$ pour la suite des simulations suivant la suggestion de Palmor.
- La vérification des conditions suffisantes de stabilité du théorème de Rouché pour le prédicteur de Smith dans les modélisations imparfaites sont satisfaites, respectivement ($N = M = 1$, $K_p = 1$ et K_m varie entre 1 et 4 (figure (B.14)) et ($M = 1$, $N = 2$ $K_m \neq K_p$ (figure (B.15))).
- Les figures (B.18), (B.19), (B.20), (B.21) et (B.22) représentent la comparaison du suiveur pour les sorties des prédicteurs PS, PA et PG avec le contrôleur de Palmor : cependant le PAE a un contrôleur proportionnel. Ces enregistrements sont donnés respectivement dans le cas d'une modélisation parfaite du modèle

rationnel, avec d'abord une petite variation sur le retard ($N = 2$), puis pour une grande variation sur le retard ($N = 5$), de même pour une erreur sur la constante de temps du modèle ($\tau_m = 3$) et enfin une erreur sur le gain du modèle ($K_m = 2$).

- Les figures (B.23), (B.24) et (B.25) représentent la comparaison du régulateur respectivement dans la cas d'un modèle parfait avec $K_\ell = 0.001$, au niveau de la perturbation. Puis nous explorons deux cas d'erreur sur le retard avec des perturbations différentes $K_\ell = 0.01$, $N = 5$ puis $K_\ell = 0.001$, $N = 5$.
- La figure (B.26) représente la mise au point du prédicteur analytique avec estimation de charge à l'aide du lieu de racine avec un contrôleur proportionnel ($K_c = 0.454$ et $K_I = 1$); la modélisation est parfaite.



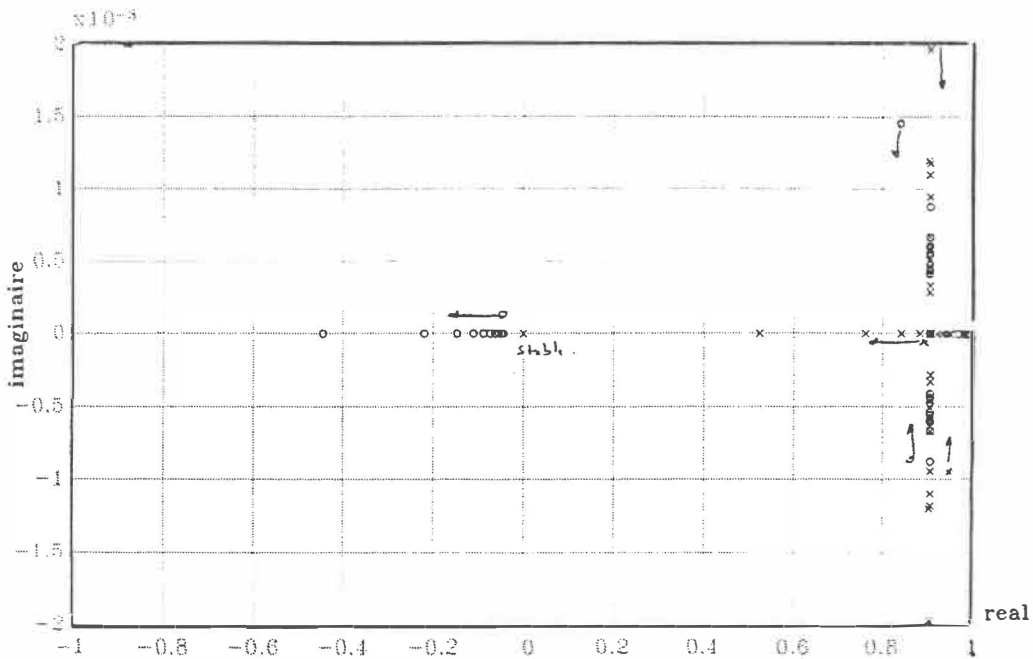


Figure B.12: Choix de la valeur de b du contrôleur de Palmor à l'aide du lieu des racines du prédicteur analytique : modélisation parfaite (o zéros * pôles)

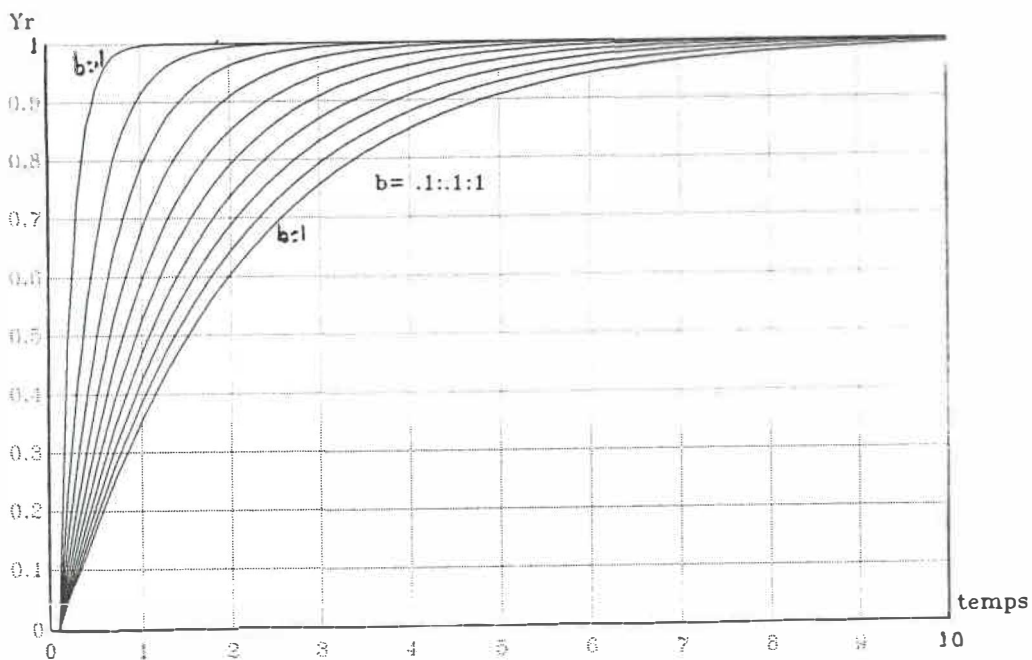


Figure B.13: Influence de la valeur de b du contrôleur de Palmor sur la sortie lors d'une modélisation parfaite ($N = M$, $K_p = K_m$)

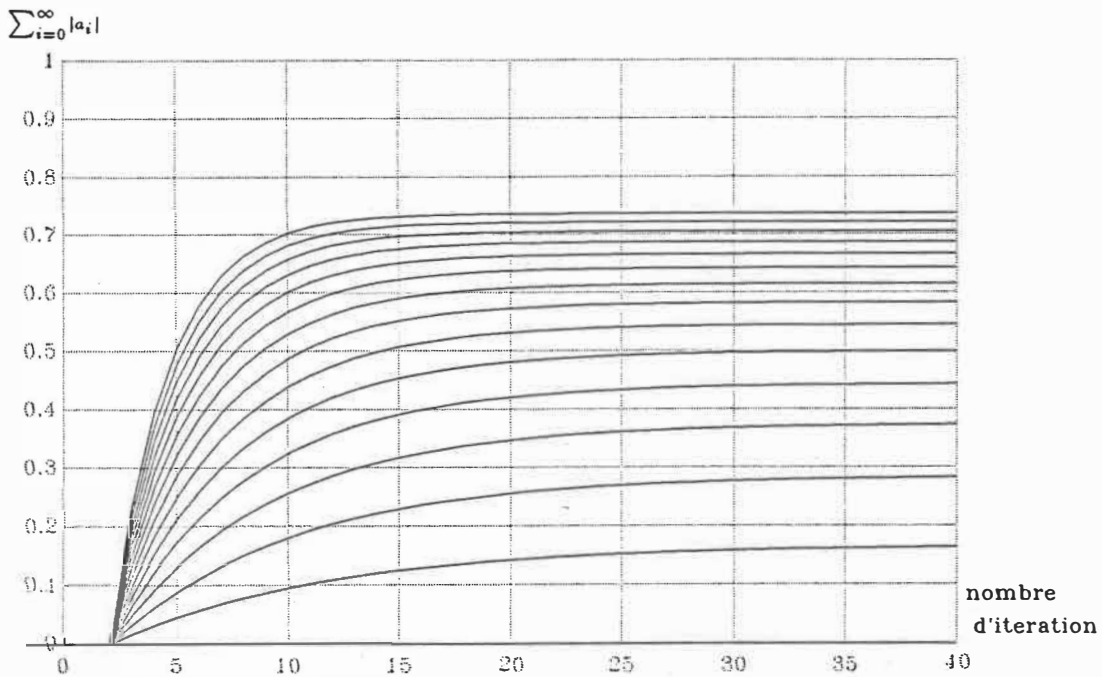


Figure B.14: Application du théorème de Rouché au prédicteur de Smith avec une modélisation imparfaite ($N = M = 1$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)

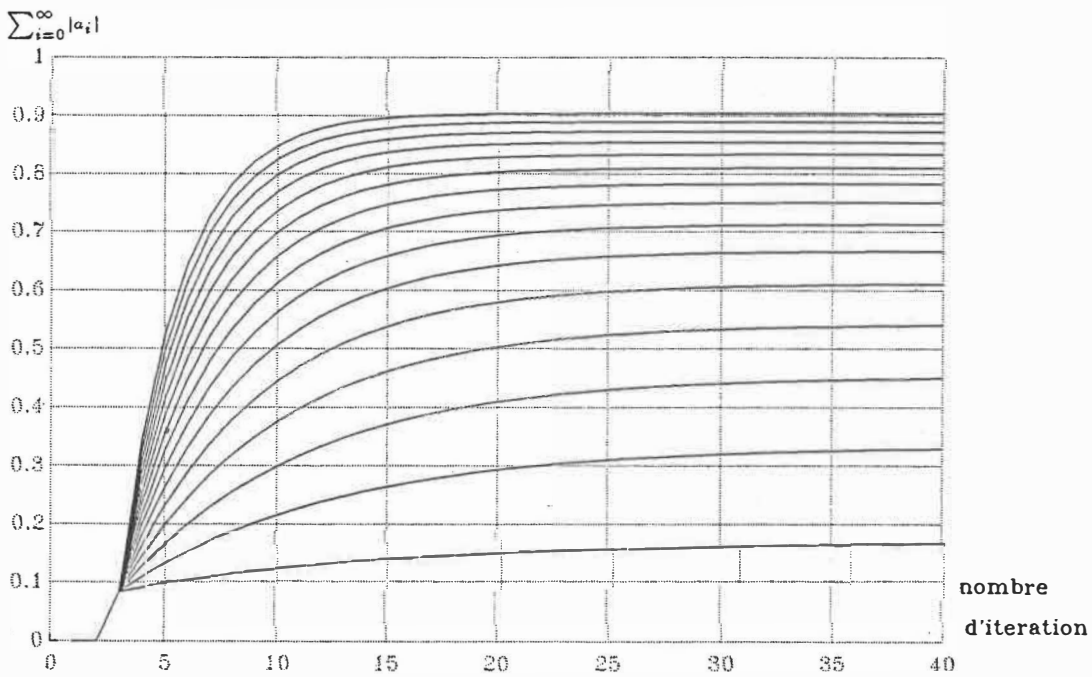


Figure B.15: Application du théorème de Rouché au prédicteur de Smith avec une modélisation imparfaite ($M = 1$, $N = 2$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)

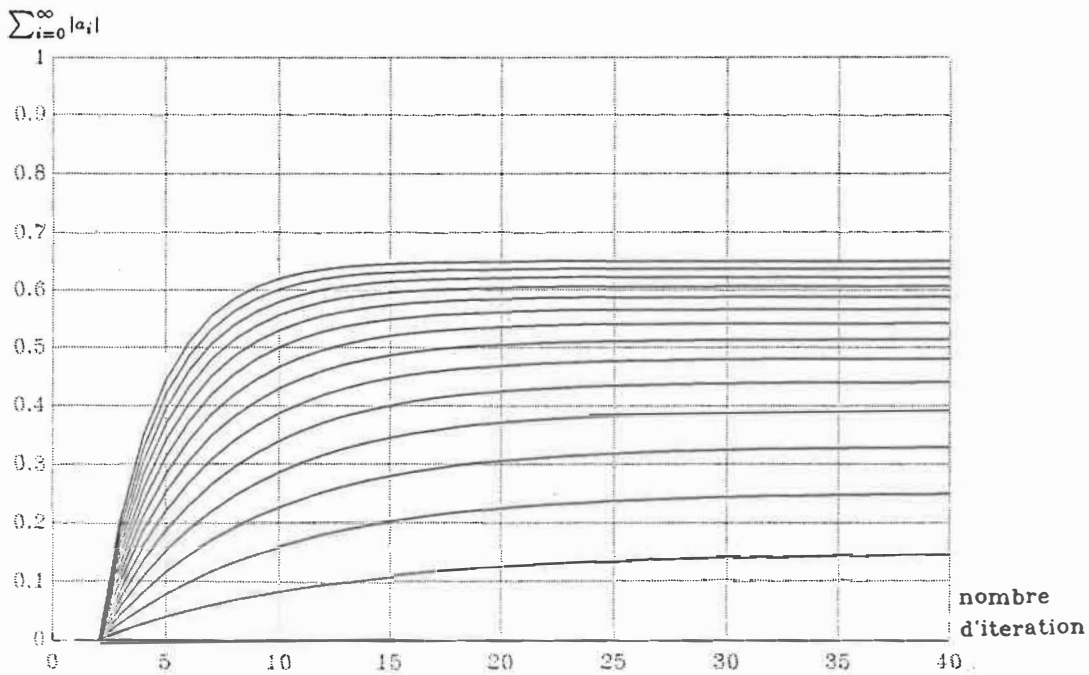


Figure B.16: Application du théorème de Rouché au prédicteur analytique avec une modélisation imparfaite ($N = M = 1$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)

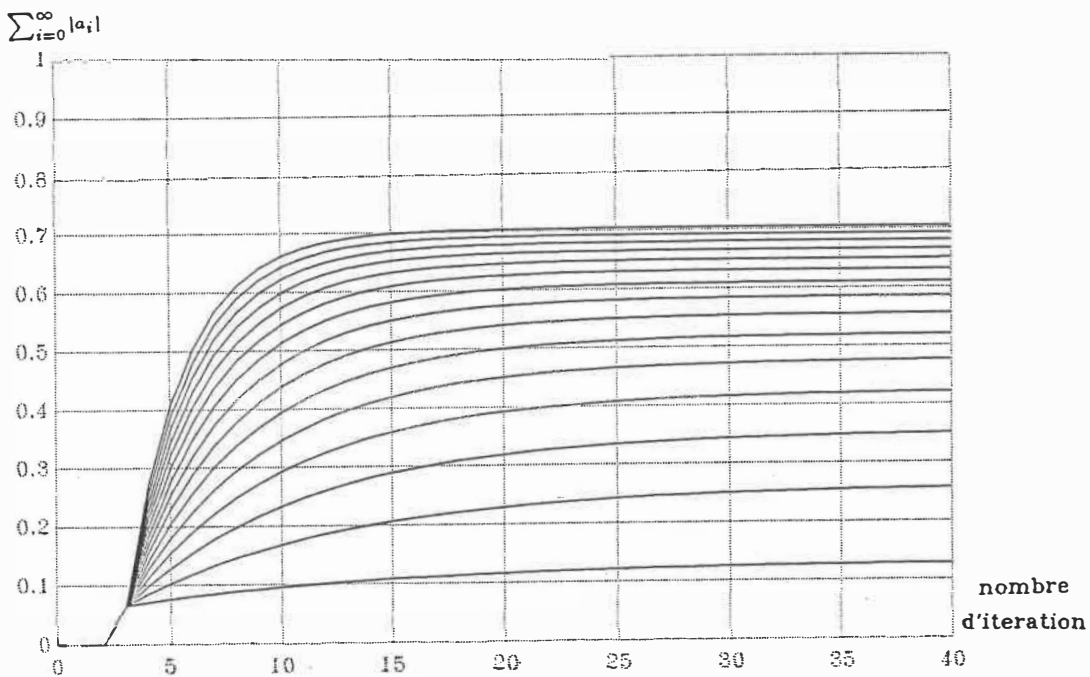


Figure B.17: Application du théorème de Rouché au prédicteur analytique avec une modélisation imparfaite ($M = 1$, $N = 2$, $K_p = 1$ et $1 < K_m < 4$)

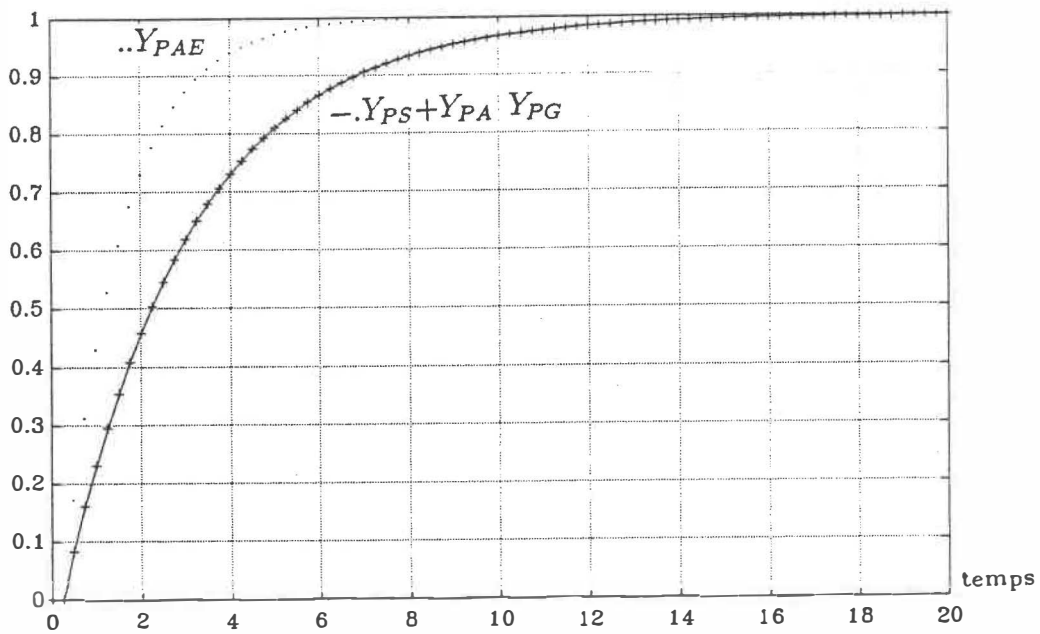


Figure B.18: Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'un modèle parfait

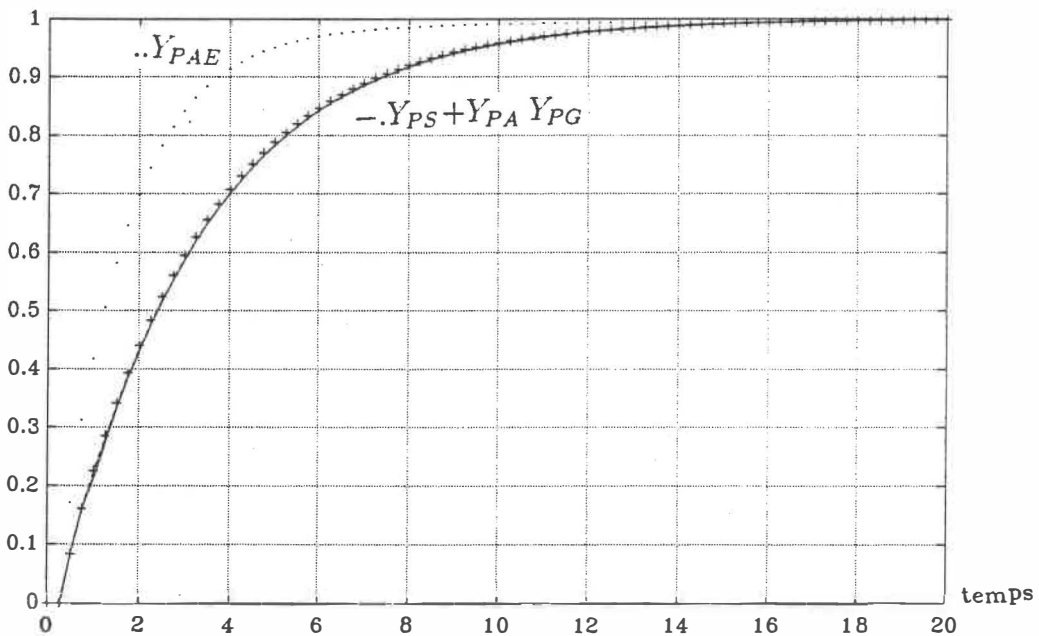


Figure B.19: Comparaison des suiveurs de $-.Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une petite variation sur le retard ($N = 2$)

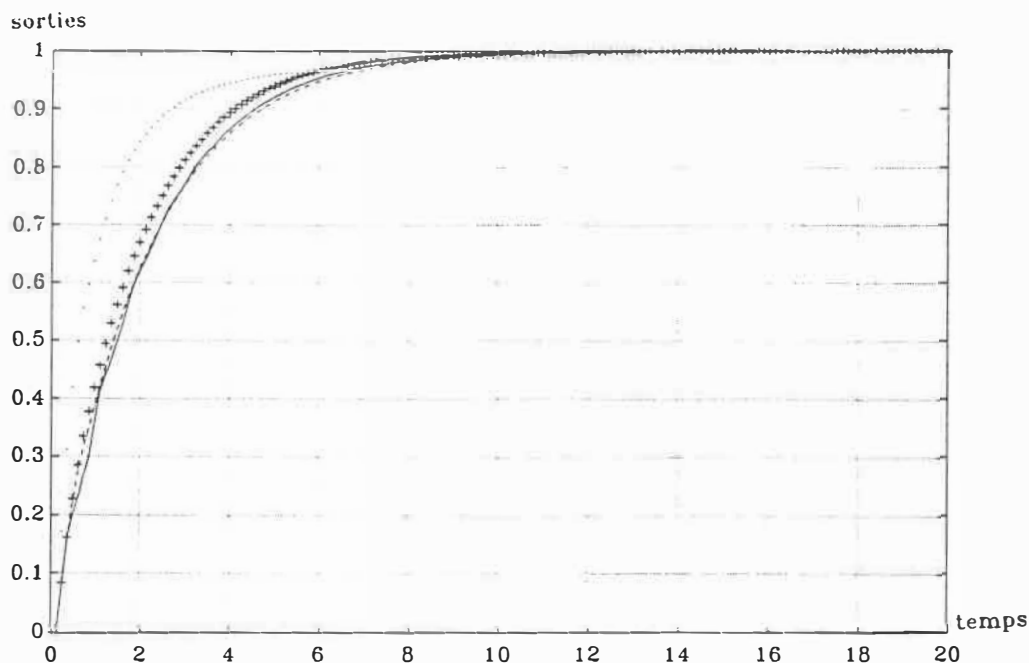


Figure B.20: Comparaison des suiveurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une grande variation sur le retard ($N = 5$)

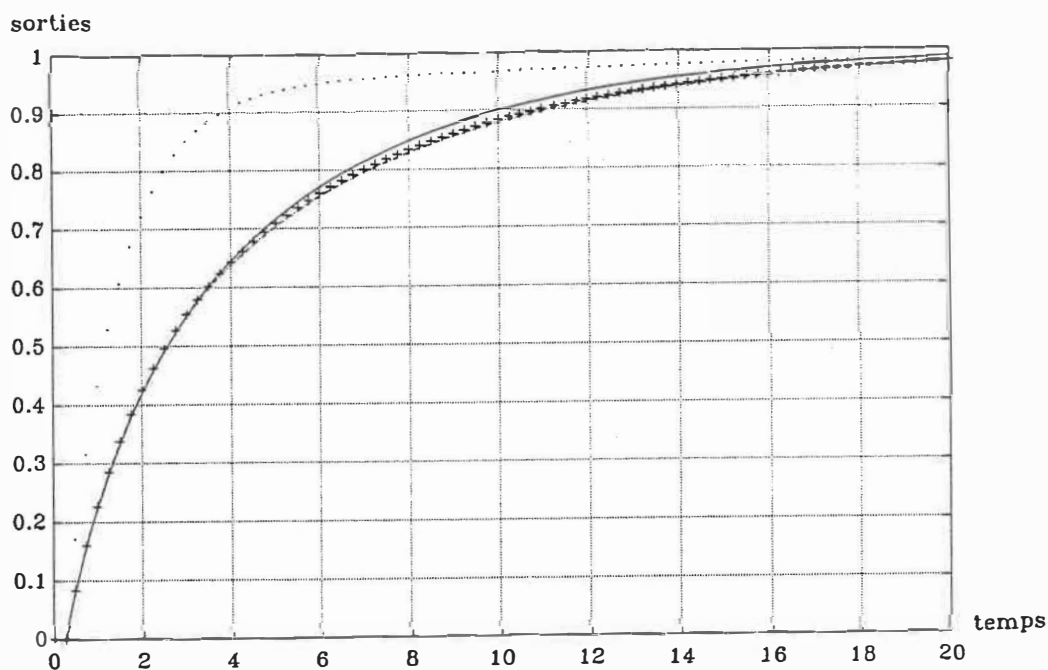


Figure B.21: Comparaison des suiveurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une erreur sur la constante de temps du modèle ($\tau_m = 3$)

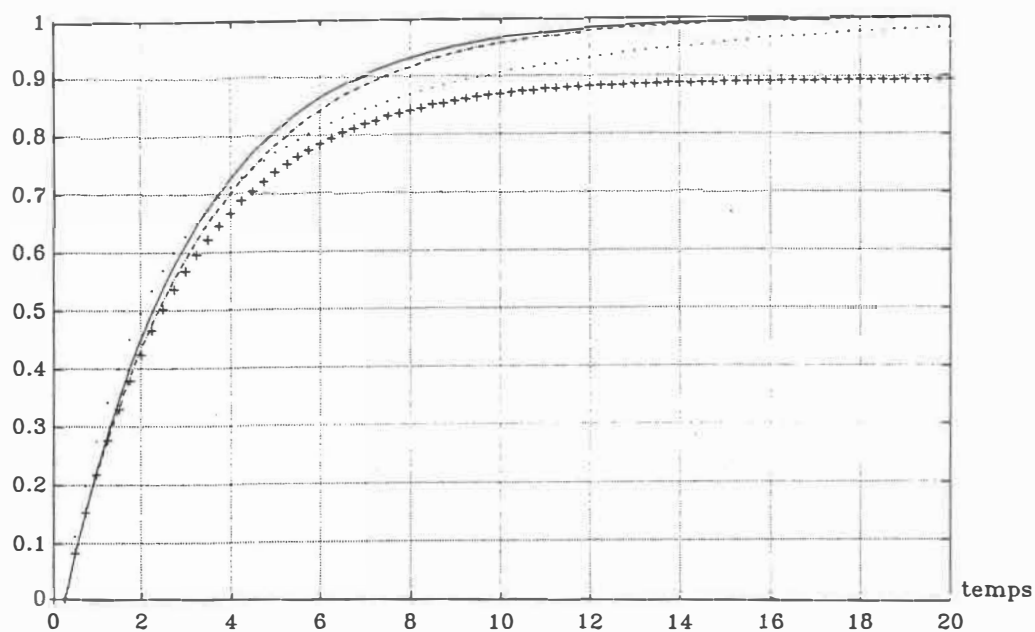


Figure B.22: Comparaison des suiveurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une erreur sur le gain du modèle ($K_m = 2$)

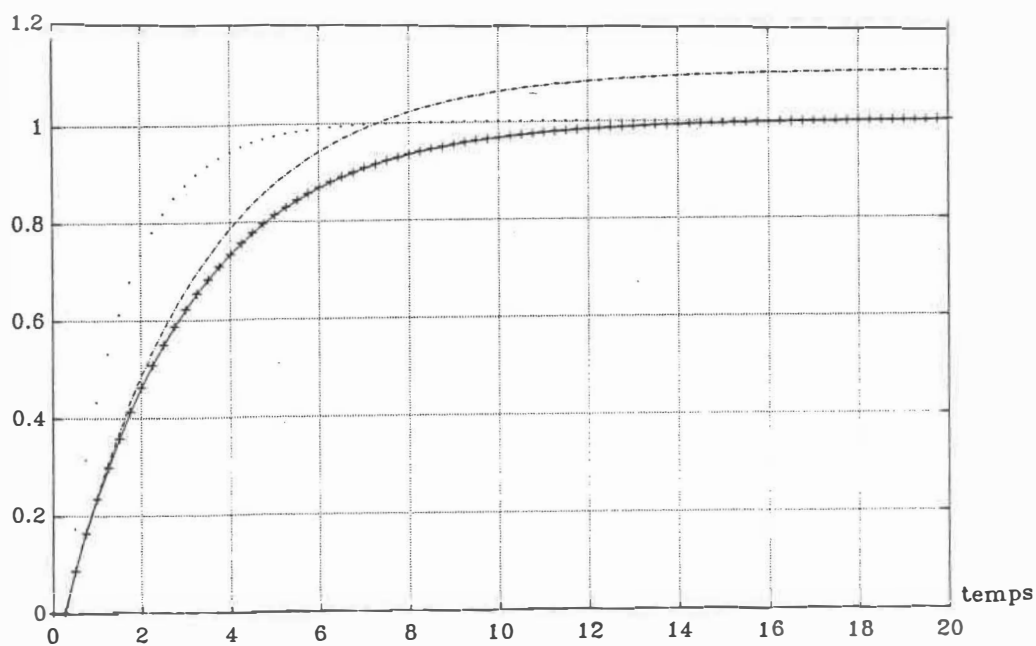


Figure B.23: Comparaison des régulateurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'un modèle parfait avec ($K_\ell = 0.001$)

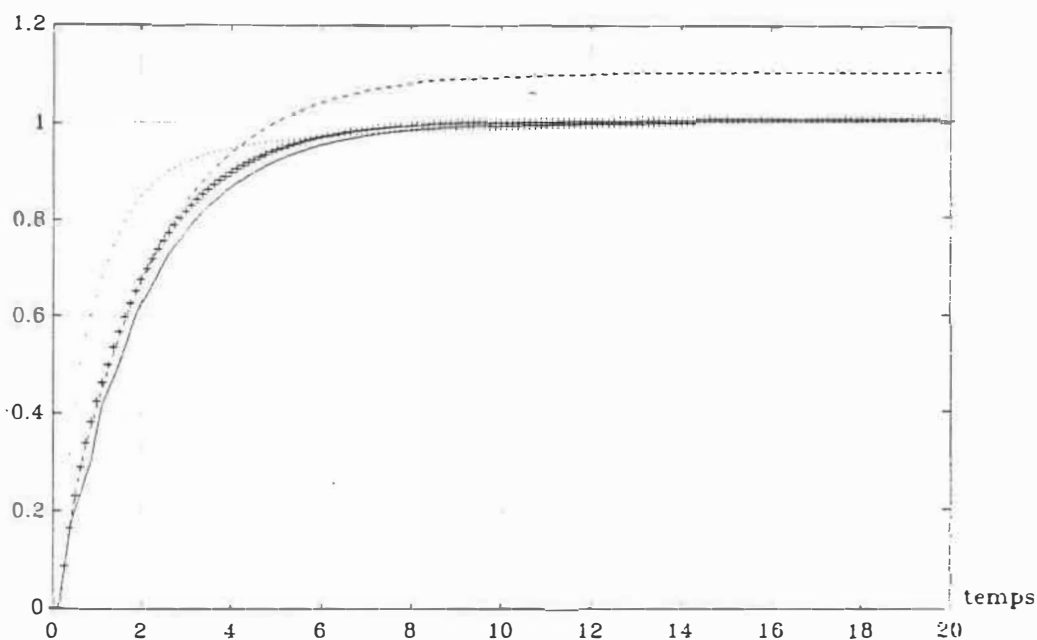


Figure B.24: Comparaison des régulateurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une modélisation imparfaite ($K_\ell = 0.01$ $N = 5$)

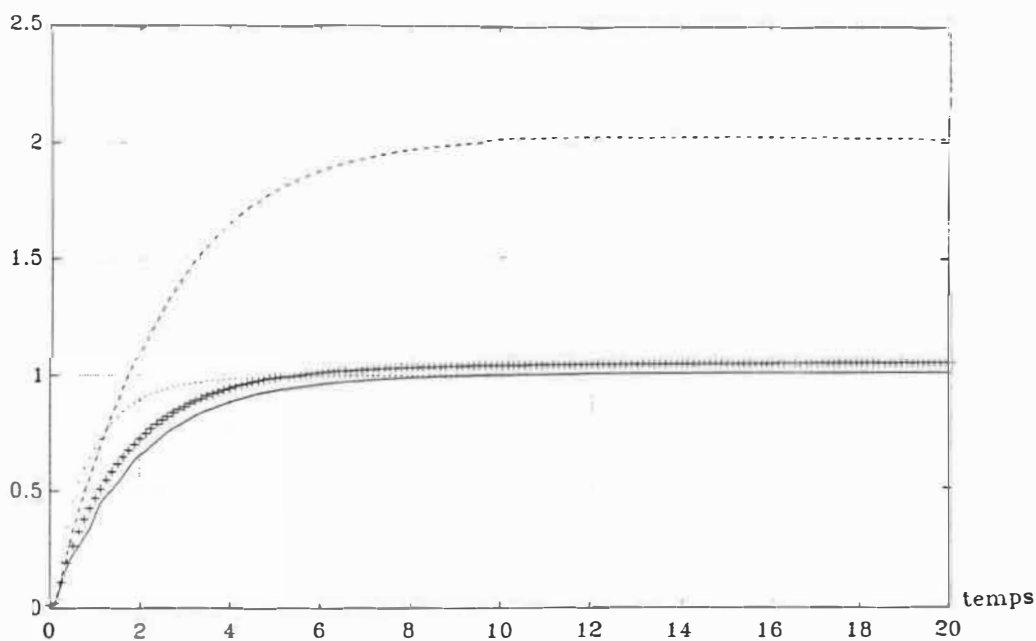


Figure B.25: Comparaison des régulateurs de $-Y_{PS}$, $+Y_{PA}$, $..Y_{PAE}$ et Y_{PG} dans le cas d'une modélisation imparfaite ($K_\ell = 0.001$ $N = 5$)

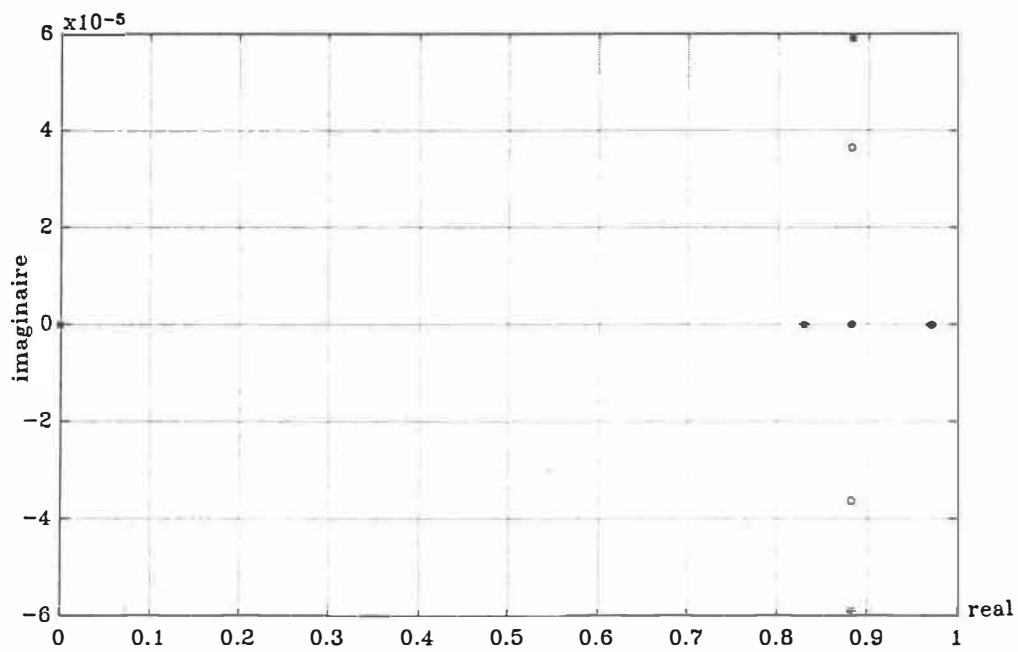


Figure B.26: Lieu des racine pour le PAE avec un contrôleur proportionnel ($K_c = 0.454$ et $K_I = 1$) (o zéros * pôles)

Annexe C

Modifications et améliorations du prédicteur de Smith

C.1 Propositions de Vogel et de Chang

Cet annexe regroupe un ensemble de simulations qui ont permis de mettre en évidence les comportements dynamiques et statiques des prédicteurs de Smith modifiés (proposition de Vogel et Chang). Les programmes de simulations ont été réalisés sur un micro-ordinateur du type IBM PS/2 et sur une station SUN avec l'aide du logiciel MATLAB.

C.1.1 Performances dynamique et statique du prédicteur de Vogel

- La comparaison des domaines de stabilité entre le compensateur de Vogel et le prédicteur de Smith est donnée pour des constantes de temps égales (figure (C.1)) et pour des constantes de temps différentes (figure (C.2)) dans le processus.

Nous remarquons que le domaine de stabilité du compensateur de Vogel est

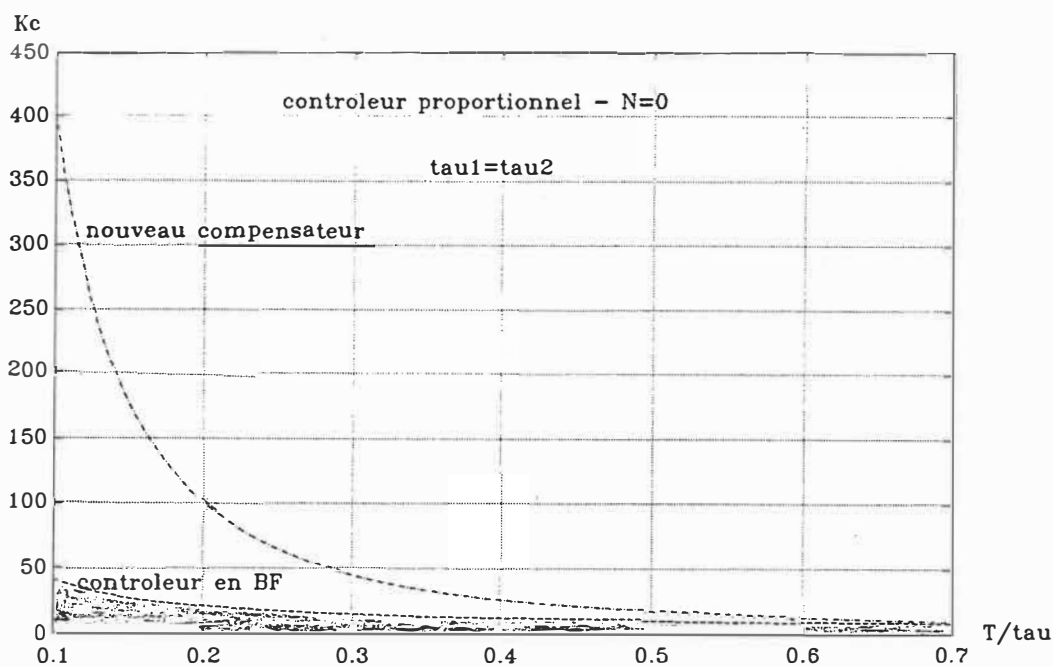
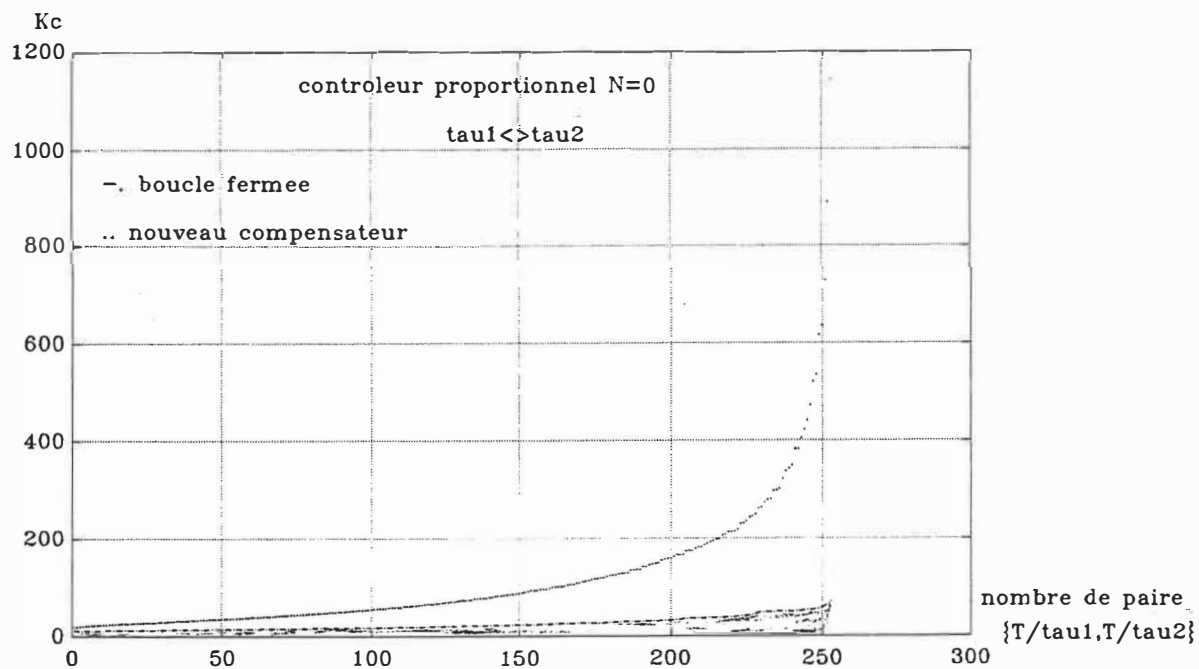
supérieur à celui du prédicteur de Smith.

- Les figures (C.3) et (C.4) représentent la performance du compensateur de Vogel par rapport au prédicteur de Smith avec un contrôleur proportionnel sans retard pur. Le domaine de stabilité du compensateur modifié (équation (3.139)) est supérieur au prédicteur de Smith (équation (3.140)). On voit que la valeur limite de $K_c = 15$ (figure (C.3)) du prédicteur de Smith procure encore une bonne dynamique lorsqu'elle est appliquée au prédicteur de Vogel. On remarque de plus que les deux systèmes ont de mêmes performances quant K_c est petit ($K_c = 0.5$) (figure (C.4)).
- La performance dynamique du contrôleur PID d'Åström est meilleur qu'un PID classique (figure (C.5)).
- Comparaison dynamique des sorties des équations G_{VE} (3.145), $\bar{G}_{DC}$ (3.142) et G_{DC} (3.141) avec la sortie du prédicteur de Smith dans le cas de deux contrôleurs PID (Åström et classique).

La figure (C.6) est donnée pour les valeurs $\lambda = 2$ (λ la constante de temps de la réponse en boucle fermée de Dahlin) et $\delta = 3$ (δ la constante de temps désirée de la réponse en boucle fermée de premier ordre d'Åström).

La figure (C.7) est donnée pour la valeur de la constante de temps de Dahlin $\lambda = 0.2$ pour les équations (3.145), (3.142) et (3.141). De même la comparaison du prédicteur de Smith avec un contrôleur PID de valeur $\delta = 3$.

Nous remarquons que la performance dynamique du compensateur de Vogel (G_{VE}) est meilleure que le contrôleur conventionnel ($\bar{G}_{DC}(z)$).

Figure C.1: comparaison des domaines de stabilité $\tau_1 = \tau_2$ Figure C.2: Comparaison des domaines de stabilité $\tau_1 \neq \tau_2$

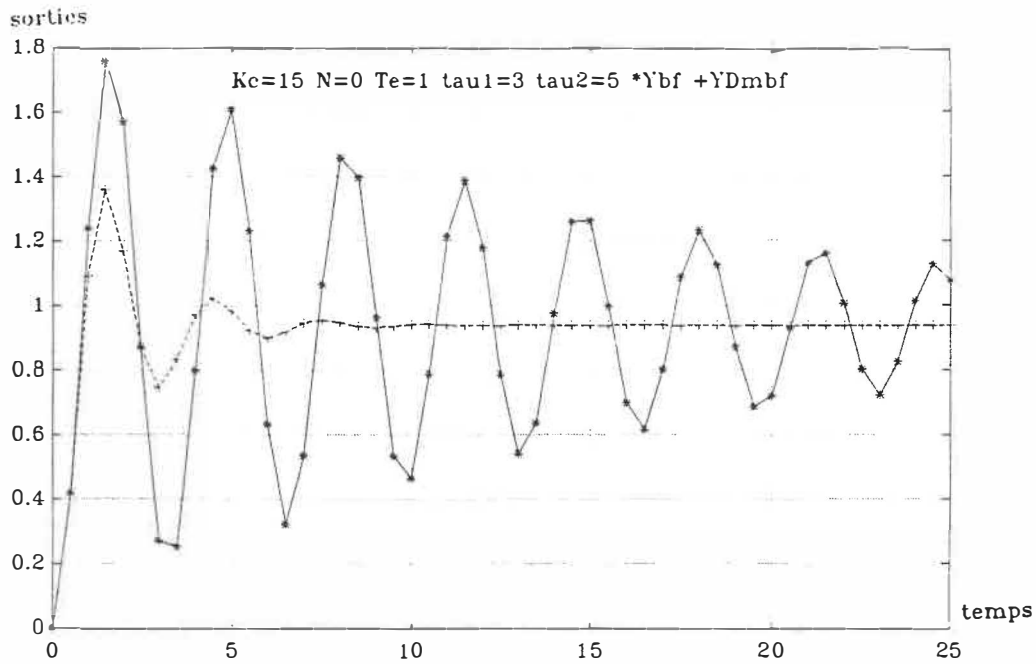


Figure C.3: Comparaison des deux sorties avec $K_c = 15$ *PS -Vogel

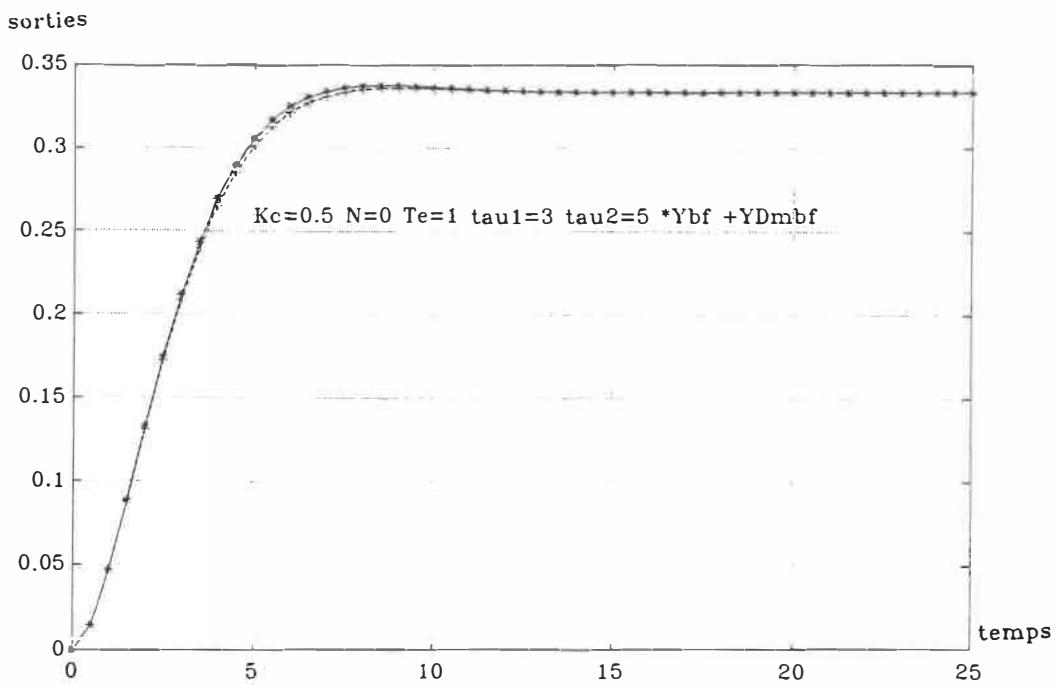


Figure C.4: Comparaison des deux sorties avec $K_c = 0.5$ *PS -Vogel

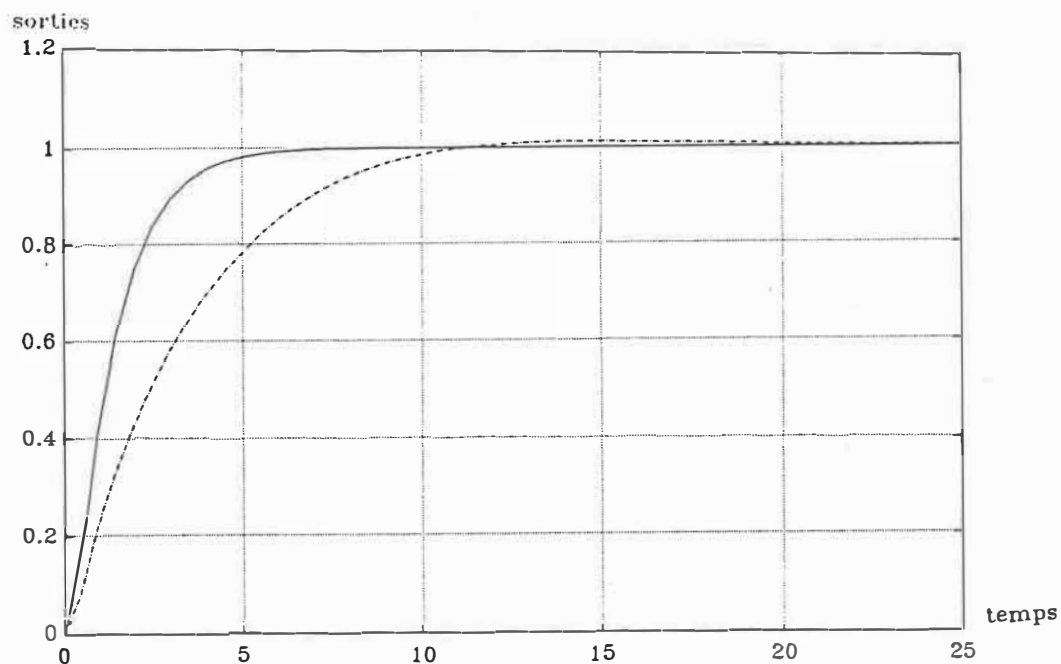


Figure C.5: Comparaison entre deux différents contrôleurs PID -. Y_{PS} (classique) et Y_{PS} (Åström)

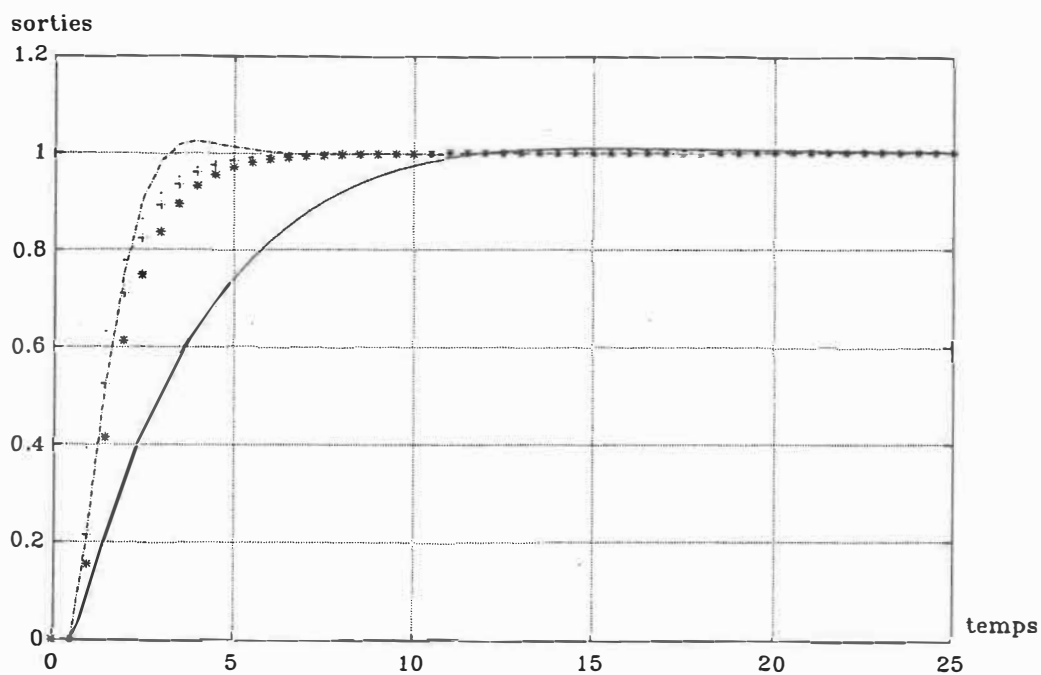


Figure C.6: Comparaison entre les sorties des équations $+G_{VE}$, $-\bar{G}_{DC}$, $..G_{DC}$, Y_{PS} (classique) et $*Y_{PS}$ (Åström) $\lambda = 2$ et $\delta = 3$

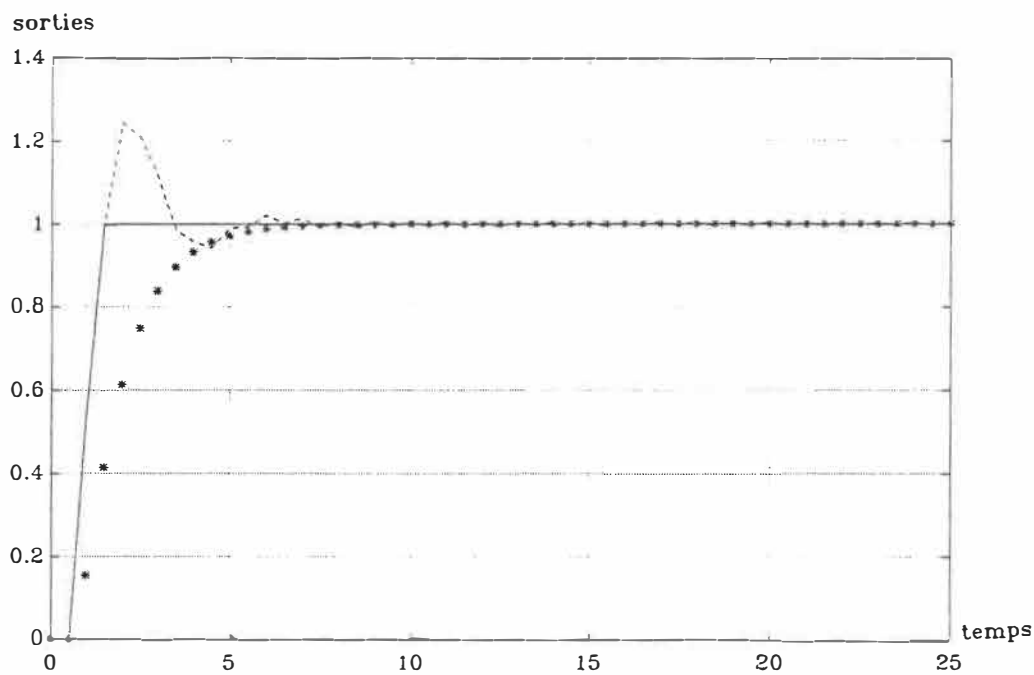


Figure C.7: Comparaison entre les sorties des équations G_{VE} , $-\bar{G}_{DC} * Y_{PS}$ (Åström) pour $\lambda = 0.2$ et $\delta = 3$

C.1.2 Performance du prédicteur de Chang

- La comparaison entre les sorties des prédicteurs de Chang (3.158), de Vogel (3.149) et de Smith (3.140) sont données avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 1$, $\delta = 3$ et $\delta = 10$ respectivement (figures (C.8) (C.9) et (C.10)) avec une modélisation parfaite ($\alpha_0 = \beta_0 = \frac{18}{19}$).
- La comparaison entre les équations des sorties de Chang et de Vogel dans une modélisation imparfaite avec une erreur sur le retard $M = 1$, $N = 2$ sont données par la figure C.11. Nous remarquons que la proposition de Chang est presque insensible à une erreur sur le retard. Alors que le prédicteur de Vogel est fortement influencé, les paramètres de $F(z)$ sont ($\alpha_0 = \beta_0 = \frac{18}{19}$).

C.1.3 Extension du prédicteur de Vogel: performances

- Comparaison des domaines de stabilités des prédicteurs de Smith avec l'extension du prédicteur de Vogel (figure (C.12)). Nous remarquons que le domaine de l'extension est supérieur à celui du prédicteur de Smith.
- Comparaison des sorties des équations de l'extension (3.174) et du prédicteur de Smith modifié (3.175) pour deux valeurs d'un contrôleur proportionnel $K_c = 7$ (figure (C.13)) et $K_c = 1$ (figure (C.14)).

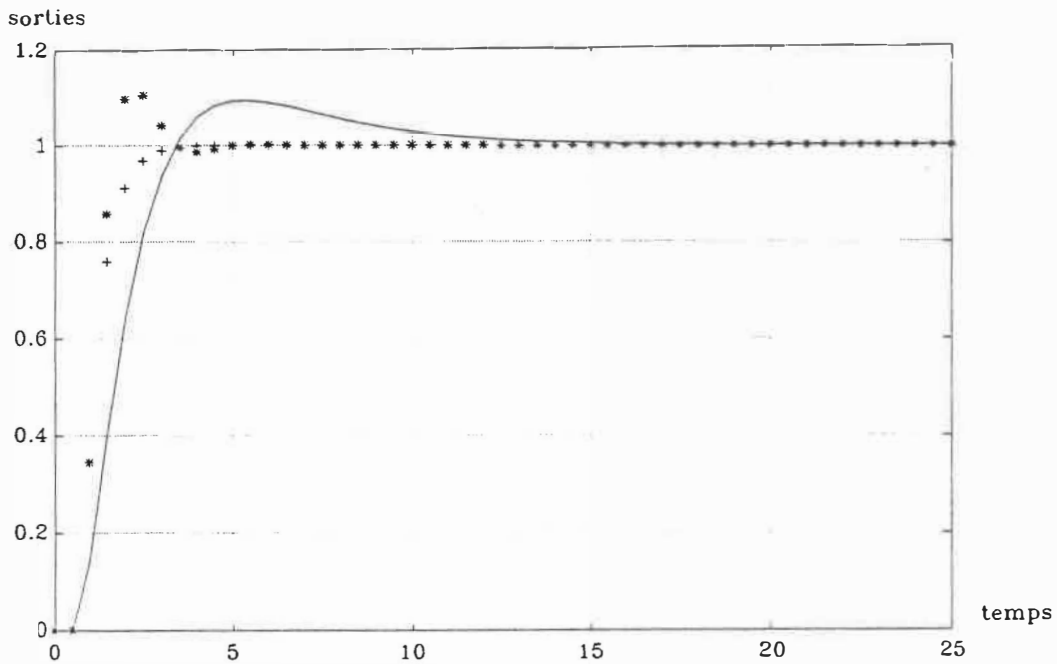


Figure C.8: Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 1$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite

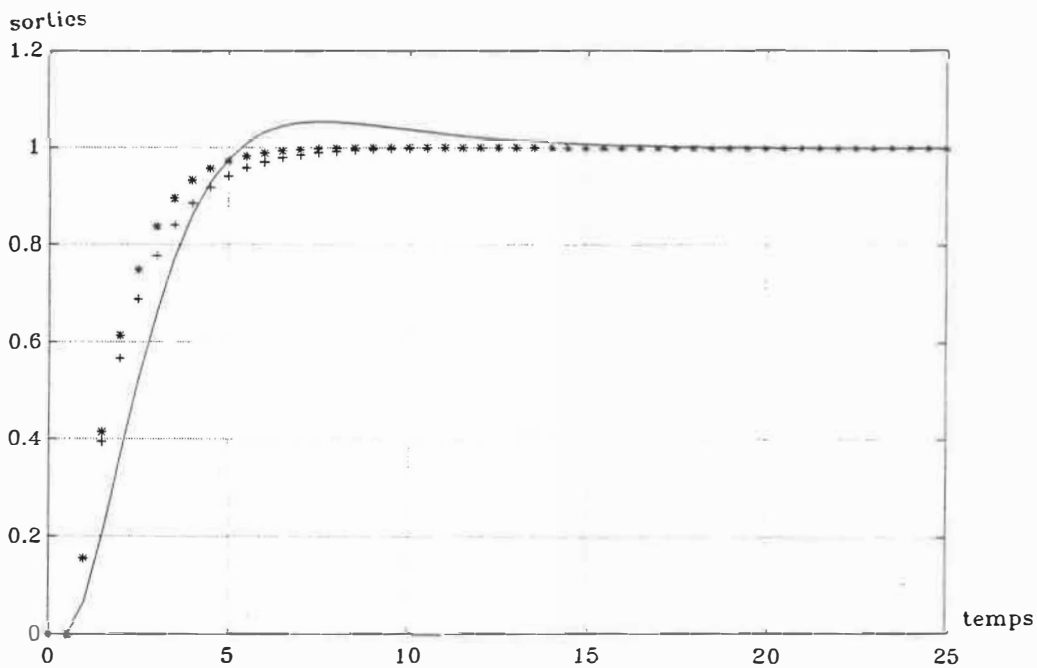


Figure C.9: Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 3$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite

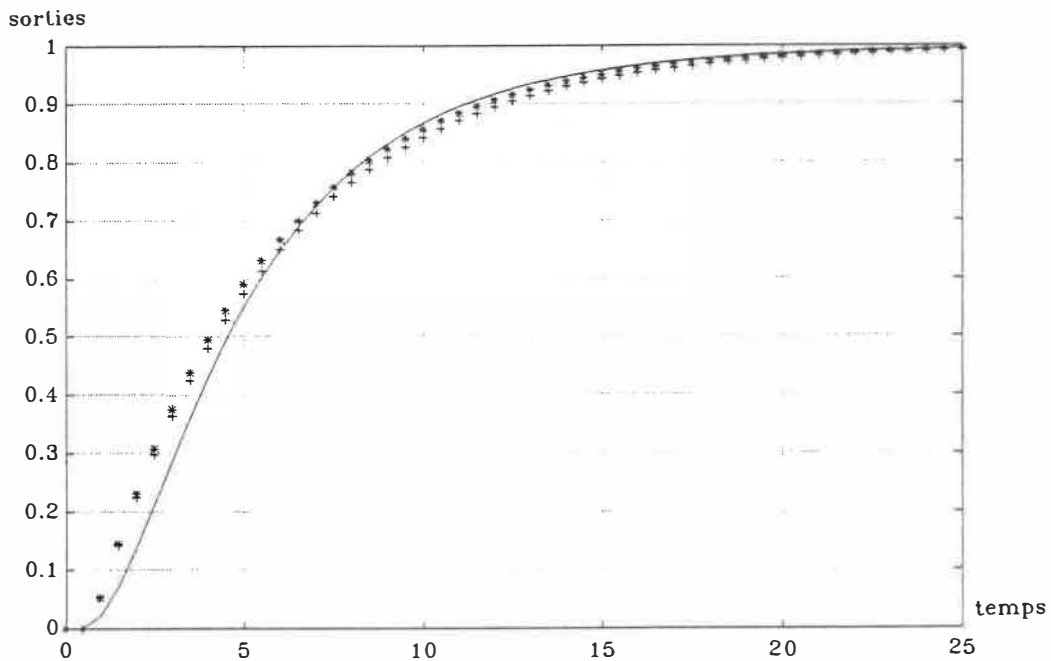


Figure C.10: Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström avec $\delta = 10$ Chang +Vogel *PS avec $N = 1$ avec une modélisation parfaite

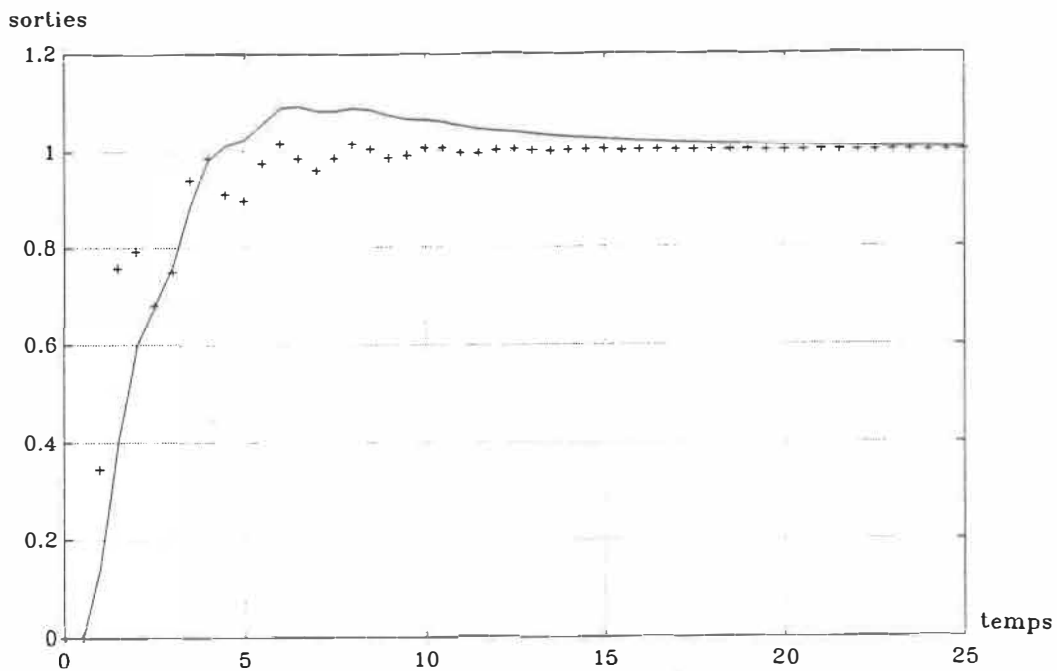


Figure C.11: Comparaison entre les sorties des équations avec un contrôleur PID d'Åström $\delta = 3$ Chang + Vogel avec une modélisation imparfaite $M = 1$, $N = 2$

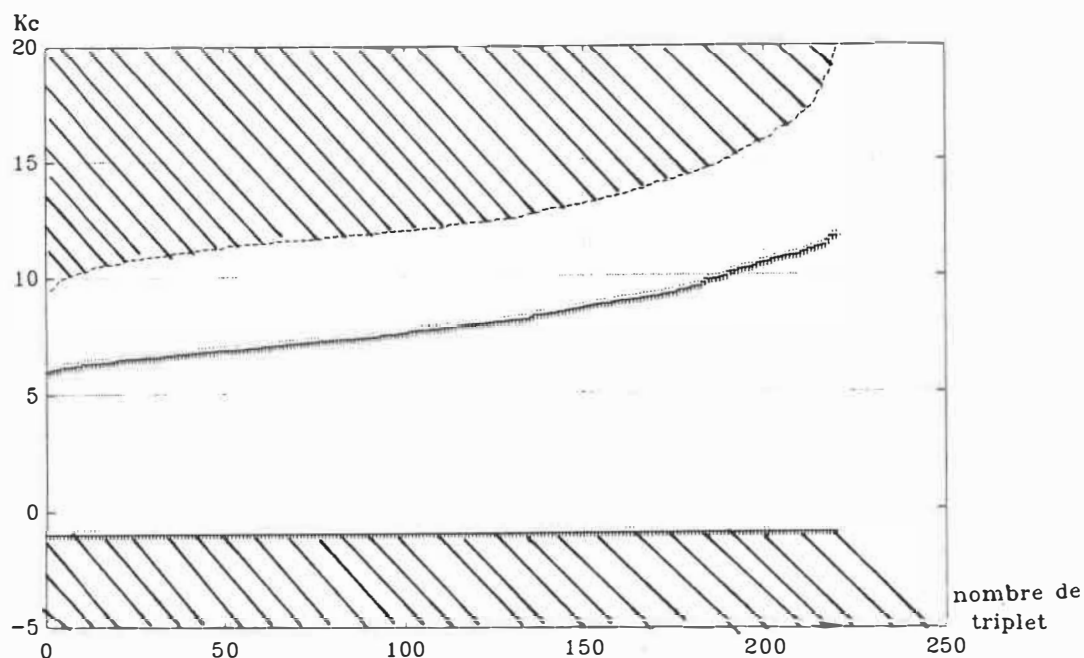


Figure C.12: Comparaison des domaines de stabilité du prédicteur de Smith modifié (+) et de l'extension +PS -extension

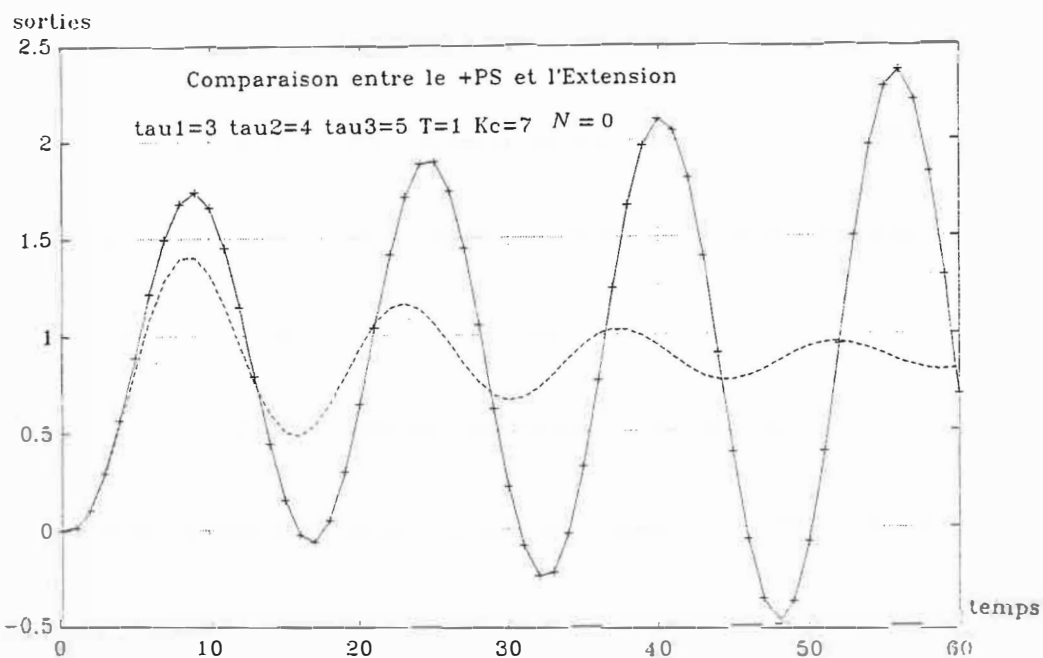


Figure C.13: Comparaison des deux sorties avec $K_c = 7$ +PS -extension

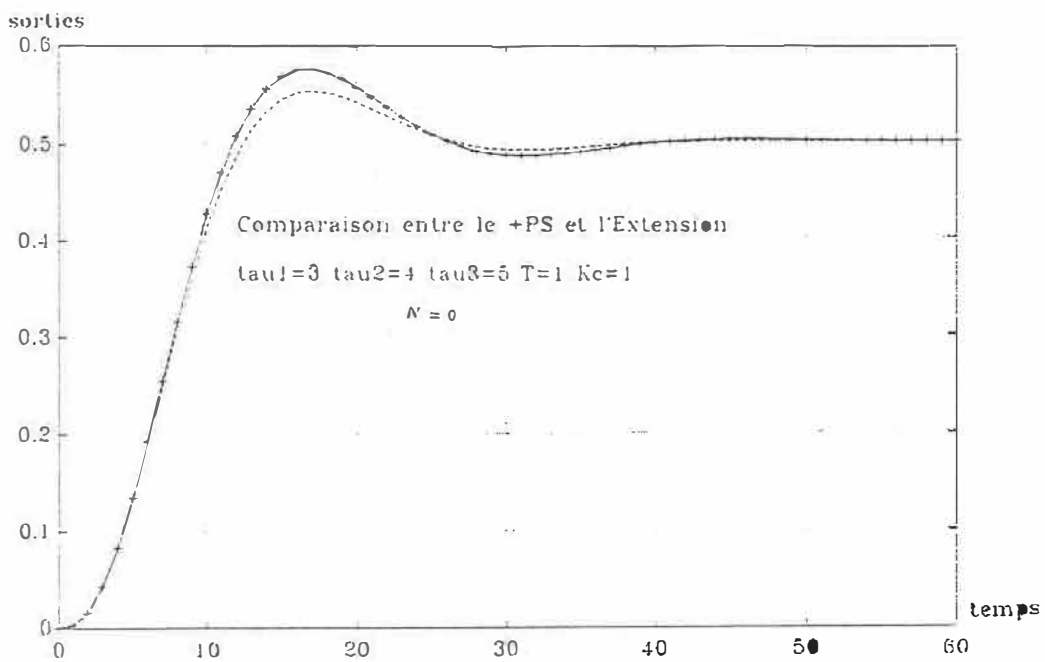


Figure C.14: Comparaison des deux sorties avec $K_c = 1$ +PS -extension

Annexe D

Traitements théoriques préalables à l'application du critère de Jury

D.1 Domaine de stabilité

Le critère de Jury définit les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité d'un système numérique. Nous dégageons ici les contraintes en fonction d'un système du troisième degré.

Définition du critère de Jury pour les systèmes de troisième degré [35]

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3, \quad a_0 > 0 \quad (\text{D.1})$$

1. $|a_3| < a_0$
2. $|a_3^2 - a_0^2| > |a_3 a_1 - a_0 a_2|$
3. $P(1) > 0$ et $P(-1) < 0$,
soit $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0$ et, $a_3 - a_2 + a_1 - a_0 < 0$

Domaine de stabilité de l'extension avec un contrôleur proportionnel

Partant de l'équation (3.173) qui représente la sortie de l'extension paramétrique de la structure de prédiction de Vogel en boucle fermée. La modélisation étant parfaite nous aurons:

$$A(z^{-1}) + K_c B(1)z^{-1} = 1 + \{A_1 + K_c B(1)\}z^{-1} + A_2 z^{-2} + A_3 z^{-3} \quad (D.2)$$

L'équation caractéristique est évidemment:

$$P(z) = z^3 + \{A_1 + K_c B(1)\}z^2 + A_2 z + A_3 \quad (D.3)$$

$$a_0 = 1, a_0 > 0$$

$$a_1 = A_1 + K_c B(1)$$

$$a_2 = A_2$$

$$a_3 = A_3$$

où $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ sont en fonctions de $K_m, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ et T , le temps d'échantillonnage définient par:

$$B_1 = K_m \left\{ 1 - (K_1^3 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + K_2^3 e^{-\frac{T}{\tau_2}} + K_3^3 e^{-\frac{T}{\tau_3}}) \right\} \quad (D.4)$$

$$B_2 = (-1)^1 K_m \{ (1 - K_1^3) (e^{-\frac{T}{\tau_1}} - e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})}) + (1 - K_2^3) (e^{-\frac{T}{\tau_2}} - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})}) + (1 - K_3^3) (e^{-\frac{T}{\tau_3}} - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})}) \} \quad (D.5)$$

$$B_3 = (-1)^2 K_m \{ K_1^3 e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} + K_2^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})} + K_3^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})} - e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} \} \quad (D.6)$$

$$A_0 = (-1)^0 \quad (D.7)$$

$$A_1 = (-1)^1 [e^{-\frac{T}{\tau_1}} + e^{-\frac{T}{\tau_2}} + e^{-\frac{T}{\tau_3}}] \quad (D.8)$$

$$A_2 = (-1)^2 [e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2})} + e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_3})} + e^{-(\frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})}] \quad (D.9)$$

$$A_3 = (-1)^3 e^{-(\frac{T}{\tau_1} + \frac{T}{\tau_2} + \frac{T}{\tau_3})} \quad (D.10)$$

$$K_1^3 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_3} \quad (D.11)$$

$$K_2^3 = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_3} \quad (D.12)$$

$$K_3^3 = \frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1} \frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_2} \quad (D.13)$$

avec $B(1) = B_1 + B_2 + B_3$.

1^{ère} condition de Jury : $|a_3| < |a_0|$

$|A_3| < 1$ c'est vérifiée à $\forall \frac{T}{\tau_1}, \frac{T}{\tau_2}$ et $\frac{T}{\tau_3}$ inférieur 1

2^{ème} condition de Jury : $|a_3^2 - a_0^2| > |a_3a_1 - a_0a_2|$

c'est à dire $|A_3^2 - 1| > |A_3(A_1 + K_c B(1)) - A_2|$

d'après la 1^{ère} condition: $A_3^2 - 1 < 0$ et $A_3 B(1) < 0$

$$\frac{1 + A_2 - A_3^2 - A_1 A_3}{B(1)A_3} = K_{c20} < K_c < K_{c21} = \frac{A_3^2 + A_2 - A_1 A_3 - 1}{B(1)A_3} \quad (D.14)$$

3^{ème} condition : $P(1) > 0$ et $P(-1) < 0$

$$P(1) > 0 \Leftrightarrow K_c > K_{c30} = \frac{-(1 + A_1 + A_2 + A_3)}{B(1)} = -1$$

$$P(-1) < 0 \Leftrightarrow K_c < K_{c31} = \frac{1 - A_1 + A_2 - A_3}{B(1)}$$

Remarque: $K_{c20} < K_{c30} < K_c < K_{c21} < K_{c31}$

Le domaine final: $K_{c30} < K_c < K_{c21}$

$$-1 < K_c < \frac{A_3^2 + A_2 - A_1 A_3 - 1}{B(1)A_3} \quad (D.15)$$

Domaine de stabilité du prédicteur de Smith

Le dénominateur de l'équation de la sortie du prédicteur de Smith en boucle fermée dans une modélisation parfaite est comme suit:

$$\begin{aligned} Den &= A(z^{-1}) + K_c B(z^{-1}) \\ &= 1 + (A_1 + K_c B_1)z^{-1} + (A_2 + K_c B_2)z^{-2} + (A_3 + K_c B_3)z^{-3} \end{aligned} \quad (D.16)$$

L'équation caractéristique est:

$$P(z) = z^3 + (A_1 + K_c B_1)z^2 + (A_2 + K_c B_2)z + (A_3 + K_c B_3) \quad (D.17)$$

D'après le critère de Jury: [35] [34] [51]

$$\begin{aligned} a_0 &= 1. \\ a_1 &= A_1 + K_c B_1. \\ a_2 &= A_2 + K_c B_2. \\ a_3 &= A_3 + K_c B_3. \end{aligned}$$

1^{ère} condition : $|a_3| < |a_0|$

$$|A_3 + K_c B_3| < 1 \Leftrightarrow \frac{-1 - A_3}{B_3} < K_c < \frac{1 - A_3}{B_3}$$

avec $K_{c10} = \frac{-1 - A_3}{B_3}$ et $K_{c11} = \frac{1 - A_3}{B_3}$

3^{ème} condition : $P(1) > 0$ et $P(-1) < 0$

$$P(1) > 0 \Leftrightarrow K_c > K_{c30} = \frac{-(1 + A_1 + A_2 + A_3)}{B(1)} = -1$$

$$P(-1) < 0 \Leftrightarrow K_c > K_{c31} = \frac{1 - A_1 + A_2 - A_3}{B_1 - B_2 + B_3}$$

car $B_1 - B_2 + B_3 < 0$

Remarque : L'intersection entre la première et la troisième condition procure:

$$K_{c31} < K_{c10} < K_{c30} < K_c < K_{c11}$$

2^{ème} condition : $|a_3^2 - a_0^2| > |a_3 a_1 - a_0 a_2|$: [35]

$$\text{d'après le 1^{er} critère } a_3^2 - a_0^2 < 0 \Leftrightarrow a_0^2 - a_3^2 > |a_3 a_1 - a_0 a_2| : [34]$$

la relation devient:

$$|(A_3 + K_c B_3)(A_1 + K_c B_1) - (A_2 + K_c B_2)| < 1 - (A_3 + K_c B_3)^2$$

Cherchons le signe de la fonction $F(K_c)$:

$$F(K_c) = (A_3 + K_c B_3)(A_1 + K_c B_1) - (A_2 + K_c B_2)$$

$$\text{avec } \Delta_F = (A_1 B_3 + B_1 A_3 - B_2)^2 - 4B_1 B_3 (A_1 A_3 - A_2)$$

on montre que $\Delta_F > 0$ et $B_1 B_3 > 0$

$$K_{cf20,1} = \frac{-(A_1 B_3 + B_1 A_3 - B_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2B_1 B_3} \quad (\text{D.18})$$

Remarque:

$$K_{cf20} < K_{c30} < K_c < K_{c11} < K_{cf21}$$

Le domaine de travail: $K_{c30} < K_c < K_{c11}$ dans ce cas $F(K_c) < 0$

Ce qui explique $a_3^2 - a_0^2 < a_3a_1 - a_0a_2$: [51]

c'est à dire:

$$\begin{aligned} -\{B_1B_3K_c^2 + (A_1B_3 + B_1A_3 - B_2)K_c + A_1A_3 - A_2\} &< 1 - (A_3 + K_cB_3)^2 \\ \Leftrightarrow H(K_c) &= (B_1B_3 - B_3^2)K_c^2 + (A_1B_3 + B_1A_3 - B_2 - 2A_3B_3)K_c + \\ &A_1A_3 + 1 - A_2 - A_3^2 > 0 \end{aligned} \quad (D.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_H &= (A_1B_3 + B_1A_3 - B_2 - 2A_3B_3)^2 - \\ &4(-B_3^2 + B_1B_3)(1 + A_1A_3 - A_2 - A_3^2) \end{aligned} \quad (D.20)$$

Remarque: $\Delta_H > 0$ et $B_1B_3 - B_3^2 > 0$

$$K_{cH01} = \frac{-(A_1B_3 + B_1A_3 - B_2 - 2A_3B_3) \pm \sqrt{\Delta_H}}{2(B_1B_3 - B_3^2)} \quad (D.21)$$

Remarque: $K_{c30} < K_{cH0} < K_{c11} < K_{cH1}$

On prend la partie positive de la fonction $H(K_c)$

Finalement: $K_{c30} < K_c < K_{cH0}$

$$-1 < K_c < \frac{-(A_1B_3 + B_1A_3 - B_2 - 2A_3B_3) - \sqrt{\Delta_H}}{2(B_1B_3 - B_3^2)} \quad (D.22)$$

Annexe E

Les modèles de références méthodes de Ziegler et Nichols et de Cohen et Coon

Les méthodes développés par Ziegler et Nichols [56] et de Cohen de Coon [11] ont un caractère empirique.

La modélisation du système (figure (E.1))

$$G(s) = \frac{K e^{-T_r s}}{1 + \tau s} \quad (\text{E.1})$$

est représentée par un premier ordre avec un retard pur. La procédure pour

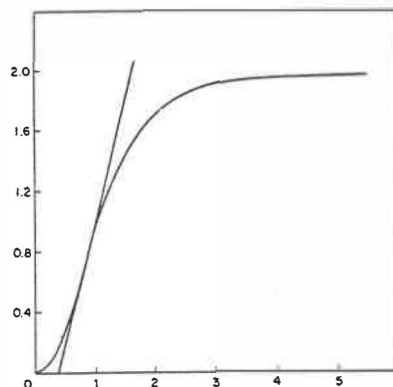


Figure E.1: Modèle de référence de Ziegler et Nichols et de Cohen et Coon

déterminer les constantes de l'expression (E.1) (le gain K , le retard T_r , et la constante de temps τ) dépend de l'évaluation graphique à partir de la réponse à l'échelon ou de calcul provenant de développements théoriques sur le procédé physique. En utilisant ce simple modèle pour identifier le processus du système, le choix du réglage des paramètres de contrôle a été établi suivant différents critères dont en particulier la minimisation de l'intégrale du carré de l'erreur. Les résultats obtenus ont été généraliser dans leurs recherche et en fonction des paramètres de la fonction de transfert du contrôleur et ceux de la fonction de transfert du processus.

Les valeurs d'ajustement reconnues par la pratique sont:

Proportionnel:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{T_r} \left(1 + \frac{T_r}{3\tau}\right) \quad (\text{E.2})$$

Proportionnel et Intégral:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{T_r} \left(0.9 + \frac{T_r}{12\tau}\right) \quad (\text{E.3})$$

$$T_i = T_r \left(\frac{30 + 3\frac{T_r}{\tau}}{9 + 20\frac{T_r}{\tau}} \right) \quad (\text{E.4})$$

Proportionnel et Dérivé

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{T_r} \left(1.25 + \frac{T_r}{6\tau}\right) \quad (\text{E.5})$$

$$T_D = T_r \left(\frac{6 - 2\frac{T_r}{\tau}}{22 + 3\frac{T_r}{\tau}} \right) \quad (\text{E.6})$$

Proportionnel Intégral et Dérivé

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{T_r} \left(1.33 + \frac{T_r}{4\tau}\right) \quad (\text{E.7})$$

$$T_i = T_r \left(\frac{32 + 6\frac{T_r}{\tau}}{13 + 8\frac{T_r}{\tau}} \right) \quad (\text{E.8})$$

$$T_D = T_r \left(\frac{4}{11 + 2\frac{T_r}{\tau}} \right) \quad (\text{E.9})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00290853 9

CA2
UP
198