UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CLASSIFICATION ET ÉNUMÉRATION D' ENCODEURS ET DE CODES CONVOLUTIONNELS DE TAUX $\frac{1}{2}$.

par

Chahin FIOUZI YOUSSEFI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLÉCTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M. Sc. A.)

Août 1989

© Chahin FIOUZI YOUSSEFI 1989

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CLASSIFICATION ET ÉNUMÉRATION D' ENCODEURS ET DE CODES CONVOLUTIONNELS DE TAUX $\frac{1}{2}$.

Présenté par: Chahin FIOUZI YOUSSEFI

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A.

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. HACCOUN David , Ph. D. , président

M. CONAN Jean , Ph. D.

M. SEGUIN Gérald , Ph. D.

Sommaire

Dans ce mémoire on présente les résultats d'une étude visant à caractériser et à énumérer certaines classes d'encodeurs convolutionnels binaires de taux $\frac{1}{2}$. Ceci nous a conduit à définir des ensembles d'encodeurs possédant des caractéristiques telles que, par exemple, l'ensemble des encodeurs à générateurs auto-réciproques, ainsi que des sous classes formées d'encodeurs catastrophiques et non catastrophiques dont nous avons pu déterminer les nombres cardinaux en fonction de la longueur de contrainte. Nous avons d'autre part pu définir un ensemble global d'équivalence des encodeurs de longueur de contrainte donnée tel que chacun des encodeurs ainsi définis puisse être associé à un "code" (défini comme l'ensemble des mots de code générés par cet encodeur) de spectre de poids distinct. Cette équivalence conduit à toute fin, pratique à l'énumération de tous les codes convolutionnels de spectre de poids non identique en fonction de la longueur de contrainte. En parallèle, nous proposons une conjecture permettant de générer dans un temps raisonnable des codes atteignant la distance libre maximale. Il apparait de plus que la méthode de classification et d'énumération présentée puisse être étendue au cas plus général des codes de taux $\frac{1}{v}$, $v \geq 3$. Quelques suggestions sont faites dans cette direction.

ABSTRACT

In this work we investigate the question of weight equivalence of rate $\frac{1}{2}$ binary convolutional codes and consider the problem of enumeration and generation of all the non-weight equivalent such codes for a given memory order m. In the generation process, this will be done by ordering the potential encoders into classes in such a way that it becomes easy to recognize the weight equivalence as well as the catastrophic error propagation conditions. Consequently, sub-classes including self and non-self reciprocal as well as catastrophic and non-catastrophic such encoders will be introduced. The cardinal number of these ensembles as well as the number of "non-weight equivalent" codes will be computed recursively as a function of m. In parallel we propose a conjecture which permits to generate for a large values of memory order, the codes with maximal free distance.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de recherche, le professeur Jean Conan, pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que pour le temps qu'il a consacré à cette recherche.

Je remercie Pierre Montreuil et François Gagnon pour leur aide précieuse ainsi que mes confrères de travail qui m'ont aidé dans ce projet.

Enfin, ma gratitude va à mes parents qui m'ont permis d'arriver à ce point. Je les suis de plus très reconnaissant pour les soutiens financier et moral.

Table des matières

Sommaire iv

Abstract v

Remerciements vi

Liste des tableaux ix

Liste des figures x

Liste des symboles xi

1 Introduction 1

2 Codage Convolutionnel 3

2.1 Encodeurs Convolutionnels 3

2.2 Compléments et paramètres caractéristiques des encodeurs et des codes convolutionnels 7

2.3 Propositions 11

2.4 Classes particulières d'encodeurs de taux $\frac{1}{2}$ 15

3 Énumération des encodeurs et des codes convolutionnels 25

3.1 Nombres cardinaux des sous classes d'encodeurs $C^s_{m,i}$ excluant un parmi les jumeaux à générateurs réciproques 26

3.1.1 Calcul des nombres cardinaux des classes $C_{m,i}$ $i = 1, 2$ . . . 26

3.1.2 Calcul des nombres cardinaux des classes $C^s_{m,i}$ $i = 1, 2$ 28

3.1.3 Calcul de $\#P_m$: 33

3.2 Nombres cardinaux des classes d' encodeurs catastrophiques $C^c_{m,i}$ $i = 1, 2$. 34

3.3 Nombres cardinaux des classes d' encodeurs non catastrophiques excluant un des encodeurs jumeaux à générateurs réciproques 41

3.3.1 Classes intermédiaires d'encodeurs 41

3.3.2 Nombres cardinaux des classes $C^{cr}_{m,i}$, $i = 1, 2$ 44

3.3.3 Récapitulation des formules 46

4 Résultats numériques **49**

4.1 Applications numériques 49

4.2 Résultats expérimentaux 53

5 Conclusion **58**

Bibliographie **60**

Liste des tableaux

2.1 Les spectres de raies des codes non catastrophiques de la classes $C_{4,1}$. 23

2.2 Les spectres de raies des codes non catastrophiques de la classe $C_{4,2}$. . 24

3.1 Choix permis des couples $[g_1(D), g_2(D)]$ (illustrés par $\times$) formant la classe $C_{m,2}$ 27

3.2 Ensemble des encodeurs de la classe $C_{4,2}$ et leur classification. 35

4.1 Nombres cardinaux des classes d'encodeurs presentés au chapitre 3 . . 50

4.2 Distributions de la distance libre des encodeurs des classes $C^*_{m,i}$ $i = 1, 2$ jusqu'à la mémoire 6. 54

4.3 Codes possédant le "d_{free}" maximum et vérifiant la condition de la conjecture (4.1) 56

Liste des figures

2.1 Le schéma de l'encodeur de taux $\frac{2}{3}$ 7

2.2 Le diagramme d'états de l'encodeur $G(D)$ 7

3.1 Localisation des classes d'encodeurs. 43

3.2 Localisation des ensembles Y_m^i *et* Z_m^i. 43

4.1 Les rapports $\frac{\#C_{m,i}^c}{\#C_{m,i}}$ $i = 1$ *et* 2 en fonction de la mémoire. 51

4.2 Les rapports $\frac{\#C_{m,i}^*}{\#C_{m,i}}$ $i = 1$ *et* 2 en fonction de la mémoire. 51

4.3 Les rapports $\frac{\#C_{m,2}^*}{\#C_{m,1}^*}$ en fonction de la mémoire. 52

4.4 Nombres cardinaux des classes $C_{m,1}^*$ *et* $C_{m,2}^*$ 54

LISTE DES SYMBOLES

$\#A$: nombre cardinal de la classe A.

a_d : nombre de mots de code de poids "d" dans C_p.

c_d : poids total de l'ensemble des séquences d'entrées associés aux mots de code de poids "d" dans C_p.

C_p : ensemble de tous les mots de code.

$C_{m,i}$: $i^{ème}$ classe d'encodeurs de mémoire m.

$C^s_{m,i}$: $i^{ème}$ classe d'encodeurs excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques de mémoire m.

$C^c_{m,i}$: $i^{ème}$ classe d'encodeurs catastrophiques de mémoire m.

$C^*_{m,i}$: $i^{ème}$ classe d'encodeurs non catastrophiques excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques de mémoire m.

$C^{cr}_{m,i}$: $i^{ème}$ classe d'encodeurs de mémoire m, catastrophiques dont les générateurs sont auto-réciproques.

$del\{g(D)\}$: le plus petit exposant de l'operateur D à coefficient non nul de $g(D)$.

$deg\{g(D)\}$: degré du polynôme $g(D)$.

d_{free} : distance libre.

$d(Y, Y')$: distance de Hamming entre deux séquences Y *et* Y'.

$g^j_{\ell,i}$: coefficient de "D" dans les polynômes de générateurs.

$g^*(D)$: polynôme réciproque de $g(D)$.

$G^*(D)$: encodeur réciproque de $G(D)$.

G_{m-n} : ensemble de facteurs communs de degrée $m - n$.

$G^j_i(D)$: générateur du code.

$G(D)$: matrice génératrice.

k: nombre de registre à decalage de l'encodeur.

n: nombre additioneurs modulo 2 de l'encodeur.

p: probabilité de transition du canal.

P_b : probabilté d'erreur par symbole d'entrée.

P_E : probabilté qu'une séquence de longueur finie soit mal décodée.

P_m : ensemble des polynômes auto-réciproques de degré "m".

$PGCD$: plus grand commun diviseur.

R : taux de codage.

$w(Y)$: poids de Hamming de la séquence Y.

$\underline{X}$: séquence d'entrée de l'encodeur sous la forme binaire.

$X(D)$: séquence d'entrée sous la forme polynômiale.

X^i_m : ensemble des encodeurs de générateurs auto-réciproques.

$\underline{Y}$: séquence de sortie de l'encodeur sous la forme binaire.

$Y(D)$: séquence de sortie sous la forme polynômiale.

Z : ensemble des entiers.

ν_i : mémoire de l'encodeur pour la $i^{ème}$ entrée.

ν: mémoire de l'encodeur.

$\underline{\sigma_t}$: état de l'encodeur.

Chapitre 1

Introduction

Dans tout système de transmission numérique, la présence de bruits de communication conduit toujours, et ceci quelle que soit la qualité de la liaison de transmission de données, à la présence d'erreurs de transmission. Un moyen efficace de détecter et corriger les symboles en erreur est l'utilisation du codage. La technique de codage consiste à envoyer avec l'information utile des symboles supplémentaires appelés symboles de parité calculés selon une loi bien définie et connue du récepteur comme de l'émetteur. Du point de vue théorique, l'intéret du codage apparait dans l'énoncé du second théorème fondamental de Shannon qui stipule que lorsque le taux d'information de la source R mesuré en bits/sec est inférieur à la capacité du canal C exprimée en bits/sec, il existe toujours une procédure adéquate de codage et de décodage, permettant d'atteindre une probabilité d'erreur arbitrairement petite. Le prix à payer du fait de l'utilisation d'un code correcteur d'erreur de taux de transmission éffectif de l'information inférieur à "1" se situe au niveau de l'augmentation de la largeur de bande requise du systéme de transmission par la nécessité de transmettre les symboles supplémentaires de parité.

De façon générale, il existe deux grandes classes de codes:

a— *Les codes en blocs*,

b— *Les codes convolutionnels.*

Tout au long de ce mémoire, on se restreint à la classe des codes convolutionnels binaires et on examine de façon générale, la question de la classification et de l'énumération des différentes classes d'encodeurs de taux $R = \frac{1}{2}$ avec pour objectif d'identifier une sous classe d'encodeurs qui générent tous les "codes" possibles distincts . Sachant que l'encodeur est la machine qui génére le code, l'énumération des codes consiste à calculer le nombre cardinal de la classe des encodeurs non catastrophiques qui permettent d'atteindre une performance d'erreur distincte au travers d'un canal binaire symétrique (C.B.S). Le problème sera résolu en ordonnant les encodeurs dans des classes distinctes telles qu'on puisse aisément détecter les encodeurs catastrophiques et ceux dont la performance d'erreur est identique (i.e., des codes dont les spectres de poids soient identiques).

Pour cela, on utilisera une approche algébrique basée sur l'utilisation des polynômes réciproques et initiée par J.Conan [Con 3] et [Con 4].

Les contributions spécifiques qui sont présentées dans ce mémoire peuvent s'énumérer comme suit:

-Obtention d'une procédure récursive capable d'énumérer tous les "codes" convolutionnels distincts de taux $R = \frac{1}{2}$ en fonction de la mémoire de l'encodeur.

-Proposition d'une méthode systématique d' identification et d'énumération des encodeurs catastrophiques.

-Conjecture relative à la possibilité de construire simplement des codes de distance libre maximale.

Ce mémoire se divise en cinq chapitres. Le chapitre 2 porte sur le codage convolutionnel. On a élaboré la structure et les principaux outils algébriques qui sont utiles à l'analyse des encodeurs et des codes convolutionnels. Par la suite quelques propositions de base [Con 1] et la détermination des classes d'encodeurs [Con 3] et [Con 4] sont exposés.

Le chapitre 3 contient, dans la première partie, la procédure de calcul des nombres cardinaux des sous-classes d'encodeurs excluant un parmi les jumeaux à générateurs réciproques [Con 3] et [Con 4]. Il est conjecturé que ces sous-classes ne contiennent pas d' encodeurs générant des codes de spectres de poids identiques. Par la suite, on a calculé les nombres cardinaux des classes des encodeurs catastrophiques et ceux des classes des encodeurs non catastrophiques excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques.

L'analyse des résultats numériques ainsi que la conjecture concernant la recherche des codes possédant la distance libre maximale sont illustrées dans le chapitre 4.

Le cinquième chapitre conclut ce mémoire. Tout d'abord les résultats de cette recherche sont analysés, ensuite quelques recommandations concernant l'énumération des codes de taux $R = \frac{1}{v}$ sont proposées.

Chapitre 2

Codage Convolutionnel

Dans ce chapitre nous élaborons sur les définitions, la structure et les principaux outils algèbriques qui sont utiles à l'analyse des encodeurs et des codes convolutionnels. Nous compléterons ensuite par une présentation des définitions appropriées des codes convolutionnels. D'autre part, nous présenterons les propositions de base d'une part dans le cas général et plus particulièrement pour les codes de taux $R = \frac{1}{2}$ qui permettront par la suite d'énumérer les codes non équivalents. Enfin nous introduirons différentes classes d'encodeurs dont l'énumération individuelle préalable sera nécessaire pour nous permettre d'arriver à nos fins.

2.1 Encodeurs Convolutionnels

Un encodeur convolutionnel binaire G de taux $R = \frac{k}{n}$ est caractérisé de façon générale par un circuit linéaire, séquentiel et invariable dans le temps sur l'alphabet binaire 0,1 considéré comme un corps de Galois. Un tel encodeur est formé de k registres à décalage alimentés par les séquences d'entrée et de n additionneurs modulo 2 reliés aux cellules de ces k registres. Les séquences d'entrée et de sortie d'un tel circuit peuvent se présenter par les suites:

$$\underline{X} = \left[\underline{X_0}, \underline{X_1}, \underline{X_2}, \cdots\right], \tag{2.1}$$

$$= \left[x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^k, x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^k, \cdots\right], \tag{2.2}$$

$$\underline{Y} = \left[\underline{Y_0, Y_1, Y_2, \cdots}\right], \tag{2.3}$$

$$= \left[y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^n, y_1^1, y_1^2, \cdots, y_1^n, \cdots\right], \tag{2.4}$$

où $\underline{X_i}$ est le k-tuplet des symboles d'entrée x_i^j ; $1 \leq j \leq k$ au temps i et $\underline{Y_i}$ représente le n-tuplet des symboles de sortie y_i^j ; $1 \leq j \leq n$. Une autre représentation plus commode pour les manipulations de ces séquences d'entrée et de sortie est basée sur l'utilisation d'un vecteur ligne de fonctions génératrices:

$$\underline{X}(D) = [X_1(D), X_2(D), \cdots, X_k(D)], \tag{2.5}$$

$$\textit{où} \quad X_j(D) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^j \, D^i \,, \qquad 1 \leq j \leq k, \tag{2.6}$$

est la transformée de Huffmann de la $j^{éme}$ séquence d'entrée. La séquence de sortie $\underline{Y}(D)$ se définit de manière similaire comme le vecteur des transformées de Huffmann des séquences de sortie. L'équation qui permet d'exprimer la séquence de sortie $\underline{Y}(D)$ correspondant à la séquence d'entrée $\underline{X}(D)$ s'écrit alors:

$$\underline{Y}(D) = \underline{X}(D) \,.\, G(D) \tag{2.7}$$

où $G(D)$ représente la matrice génératrice et posséde la forme générale suivante:

$$G(D) = \begin{pmatrix} G_1^1(D) & G_1^2(D) & \cdots & G_1^n(D) \\ G_2^1(D) & G_2^2(D) & \cdots & G_2^n(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_k^1(D) & G_k^2(D) & \cdots & G_k^n(D) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\textit{où} \quad G_i^j(D) = g_{0i}^j + g_{1i}^j \, D + g_{2i}^j \, D^2 + \cdots \qquad 1 \leq i \leq k \tag{2.9}$$

$$\textit{et} \quad g_{\ell i}^j \in \{\, 0, 1 \,\} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Du fait du nombre limité de places dans les registres à décalage les $G_i^j(D)$ sont des polynômes appelés les générateurs du code. Conformément à la relation (2.9), les g_{li}^j prennent les valeurs 1 ou 0 suivant que le $j^{ème}$ sommateur est relié ou non à la sortie de la $l^{ème}$ cellule du $i^{ème}$ registre à décalage. Chaque séquence de sortie $\underline{Y}(D)$ constitue un mot de code pour une entrée $\underline{X}(D)$ donnée. Nous définirons par $\mathcal{C}_p$ l'ensemble de tous les mots de codes $\underline{Y}(D)$ dont les composantes sont polynômiales et de délai 0. Les paramètres suivants caractérisent aussi un encodeur particulier.

La mémoire d'un encodeur pour la $i^{ème}$ entrée est définie comme:

$$\nu_i = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ deg \left[G_i^j \ (D) \right] \right\} . \tag{2.10}$$

D'autre part sa mémoire totale ν sera:

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \ . \tag{2.11}$$

Cette quantité mesure le degré de complexité de l'encodeur et, à chaque instant, le contenu global du registre représente l'état de l'encodeur caracterisé par le ν tuplet suivant:

$$\underline{\sigma_t} \ = \ \left[x_{t-j}^i \mid \ 1 \leq i \leq k \ \ , \ \ 1 \leq j \leq \nu_i \right] \tag{2.12}$$

On a donc 2^ν états possibles.

Puisque l'encodeur convolutionnel est une machine à états finis on peut décrire son comportement à l'aide d'un diagramme d'état. Ce diagramme indique la structure des transitions d'état associées au processus d'encodage.

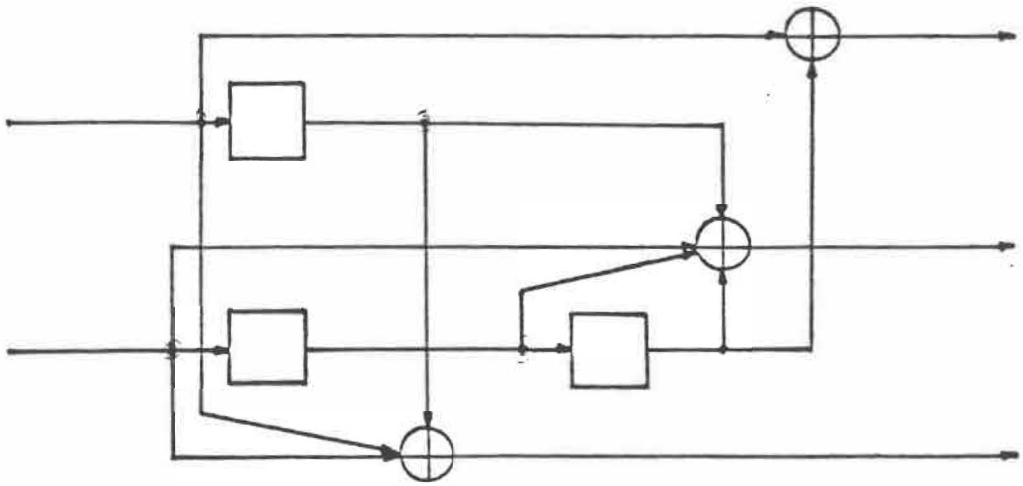
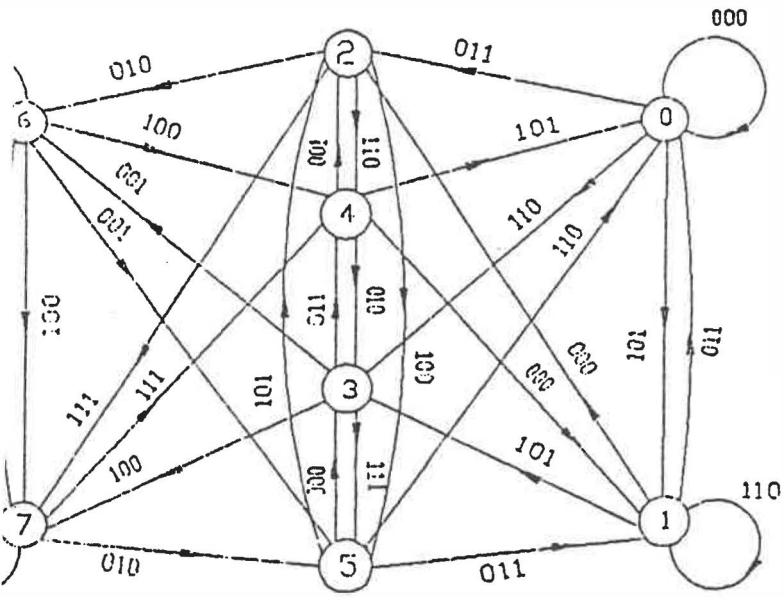


Figure 2.1: Le schéma de l'encodeur de taux $\frac{2}{3}$



Etats	Contenu de la memoire
0	0,00
1	1,00
2	0,10
3	1,10
4	0,01
5	1,01
6	0,11
7	1,11

Figure 2.2: Le diagramme d'états de l'encodeur $G(D)$

La figure (2.1) illustre le schéma de l'encodeur de taux $\frac{2}{3}$ et de mémoire 3 ayant la matrice génératrice:

$$G(D) = \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D \\ D^2 & 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Le diagramme d'état correspondant est représenté sur la figure (2.2).

2.2 Compléments et paramètres caractéristiques des encodeurs et des codes convolutionnels

Dans cette section, nous présentons un certain nombre de définitions de paramètres caractéristiques des encodeurs et codes convolutionnels ainsi que des résultats complémentaires qui seront utiles par la suite.

Le paramètre le plus important dans le calcul de la performance d'un code convolutionnel est la distance libre du code. On définit la distance de Hamming $\underline{d(Y', Y'')}$ entre deux mots de code $\underline{Y'}$, $\underline{Y''}$, comme le nombre de symboles pour lesquels $\underline{Y'}$ *et* $\underline{Y''}$ diffèrent . Cette dernière est égale au poids de Hamming $\underline{\omega(Y' \oplus Y'')}$ de la somme modulo 2 des deux mots de codes. La distance libre, notée d_{free}, d'un code convolutionnel se définit comme:

$$d_{free} \triangleq \min_{\underline{Y'} \neq \underline{Y''}} \left\{ d\left(\underline{Y'}, \underline{Y''} \right) \right\}, \tag{2.14}$$

ou de façon équivalente:

$$d_{free} = \min_{\underline{Y'} \neq \underline{Y''}} \left\{ \omega\left(\underline{Y'} \bigoplus \underline{Y''} \right) \right\},$$

$$d_{free} = \min_{\underline{Y} \neq \underline{0}} \{ \omega (\underline{Y}) \},$$

$$d_{free} = \min_{\underline{X} \neq \underline{0}} \{ \omega (\underline{X} \, G) \} . \tag{2.15}$$

Une autre caractérisation plus complète d'un code convolutionnel consiste à déterminer la fonction génératrice ou spectre des mots de code de l'ensemble $\mathcal{C}_p$.

Cette fonction est caractérisée par la suite:

$$\{a_d / d = d_{free}, d_{free} + 1, \cdots\} \tag{2.16}$$

où a_d représente le nombre de mots de code de poids "d" dans l'ensemble $\mathcal{C}_p$.

Une autre fonction génératrice importante dans l'évaluation du taux d'erreur par symbole et relative à un encodeur particulier est qui elle est caractérisée par la suite:

$$\{c_d \ / \ d = d_{free}, d_{free} + 1, \cdots\} \ , \tag{2.17}$$

où c_d représente le poids total de l'ensemble des séquences d'entrées associées aux mots de code de poids " d " dans $\mathcal{C}_p$.

On parle habituellement d'un spectre de " L " raies qui comprend les couples (a_d, c_d) pour $d_{free} \leq d \leq d_{free} + L - 1$. Comme dans le cas des codes en bloc, la connaissance du spectre du code convolutionnel permet l'évaluation d'une borne supérieure sur la probabilité d'erreur lorsque le code est utilisé sur un canal discret sans mémoire et utilise un décodeur à maximum de vraisemblance.

A titre d'exemple, après transmission sur un canal binaire symétrique de taux d'erreur p, la probabilité P_E qu'une séquence de longueur finie soit mal décodée est bornée supérieurement par:

$$P_E < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d \, P_d \ . \tag{2.18}$$

D'autre part, pour une transmission continue, le taux d'erreur par symbole d'entrée P_b satisfait à:

$$P_b < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} c_d \, P_d \; ; \tag{2.19}$$

où les quantités P_d ne dépendent que du canal de transmission et satisfont aux relations de définition:

$$P_d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\frac{d+1}{2}}^{d} \binom{d}{i} p^i \, (1-p)^{d-i} & \text{d=impair} \\ \displaystyle\sum_{i=\frac{d+1}{2}}^{d} \binom{d}{i} p^i \, (1-p)^{d-i} + \frac{1}{2} \binom{d}{\frac{d}{2}} p^{\frac{d}{2}} \, (1-p)^{\frac{d}{2}} & \text{d=pair .} \end{cases} \tag{2.20}$$

Compte tenu de la discussion ci-dessus, nous pouvons conclure que:

- Deux codes qui possédent le même spectre de poids présenteront des performances identiques après transmission au travers d'un canal binaire symétrique et de façon générale d'un canal sans mémoire.

- Entre deux codes on choisira celui qui minimise la probabilité d'erreur. En général, ceci correspond au code:

  1. qui a la valeur de d_{free} la plus grande,

  2. pour deux valeurs de d_{free} identiques, on choisira le code dont le spectre présente des raies dont les valeurs sont les plus faibles dans l'ordre croissant.

Un encodeur convolutionnel sera dit catastrophique lorsqu' un nombre fini d'erreurs se produisant sur la séquence de canal conduit à une séquence décodée contenant une infinité d'erreurs . L'exemple qui suit permet d'illustrer le concept.

Exemple - Considérons l'encodeur catastrophique de taux $R = \frac{1}{2}$ dont la matrice génératrice est donnée par:

$$G(D) = \begin{pmatrix} 1+D & 1+D^2 \end{pmatrix}.$$

Relativement à la séquence d'entrée de poids infini:

$$X(D) = \frac{1}{1+D} = \sum_{i=0}^{\infty} D^i. \tag{2.21}$$

les deux séquences de sortie sont respectivement:

$$Y^1(D) = 1 \quad ; \quad Y^2(D) = 1+D\,.$$

Donc le mot de code correspondant à la séquence d'entrée ne contient que 3 symboles non nuls. En particulier, si les 3 symboles non nuls deviennent nuls après leur passage à travers le canal, on retrouvera la séquence $\hat{Y}(D) = 0$ à la sortie du canal. La séquence $\hat{Y}(D) = 0$ est un mot de code. Sans aucune hésitation, ce dernier sera décodé suivant la séquence $\hat{X}(D) = 0$. En comparant les séquences $X(D) = \sum_{i=0}^{\infty} D^i$ (entrée) et $\hat{X}(D) = 0$ (la séquence décodée); on constate une infinité d'erreurs après le décodage, causées par un nombre fini d'erreurs (en l'occurence 3) sur le canal bruité. Evidemment il s'agit d'une situation inacceptable pour la transmission d'un train continu de symboles.C'est pour cette raison que l'on rejette tous les encodeurs catastrophiques en pratique.

Propriété caractéristique

Un encodeur convolutionnel de taux $R = \frac{k}{n}$ et de matrice génératrice $G(D)$ est non catastrophique (polynômialement inversible) si et seulement si:

$$P\ G\ C\ D\ [\triangle_i\ (D):\ i = 1, 2, 3, \cdots, \binom{n}{k}] \ = \ D^l \qquad l \geq 0\ , \tag{2.22}$$

où $\triangle_i\ (D)$ représente les mineurs d'ordre k de $G(D)$. Une sous classe importante d'encodeurs non catastrophiques est constituée par les encodeurs minimaux dont la définition est la suivante:

Définition

Un encodeur convolutionnel $G(D)$ de taux $R = \frac{k}{n}$ est dit minimal si et seulement si:

a) $G(D)$ est non catastrophique (polynômialement inversible).

et

b) le degré maximum des $\binom{k}{n}$ mineurs d'ordre k de G(D) est égal à $\sum_{i=1}^{k} \nu_i$.

Etant donné un code convolutionnel, on peut conclure par la condition b) qu'un encodeur minimal utilise le minimum d'espace mémoire pour générer le code. De façon équivalente le graphe de transitions d'état associé posséde un nombre minimum de noeuds.

2.3 Propositions

Un des problèmes majeurs rencontrés dans l'énumération des codes convolutionnels consiste à éviter de compter plusieurs fois des codes qui permettent d'atteindre la même performance au travers d'un Canal Binaire Symétrique (C.B.S). Suite aux discussions précédentes il s'ensuit que, parmi l'ensemble de tous les encodeurs, ceux qui possédent un spectre de poids identique permettent d'atteindre la même performance d'erreur. Dans l'ensemble des encodeurs on trouve donc des sous-ensembles dont les éléments constitutifs (c'est-à-dire les encodeurs), sont "équivalents". En allant un petit peu plus loin, la définition d'équivalence de deux encodeurs permet

aussi de spécifier la différence entre les concepts d' "encodeurs" et de "code" convolutionnel.

Définition (2.1):

Deux encodeurs convolutionnels seront dits équivalents s'ils générent le même code.

En d'autre termes, deux encodeurs G *et* G' sont équivalents si pour toutes les séquences de sorties $\underline{Y}$ de G il existe une séquence d'entrée $\underline{X'}$ relative à G' telle que :

$$\underline{X'}\, G' = \underline{Y} = \underline{X}\, G \qquad \forall\, \underline{X} \textit{ possible.} \tag{2.23}$$

Nous avons déjà mentionné que la classe des encodeurs minimaux constitue la classe la plus intéressante des encodeurs. Cependant, cette classe n'exclut pas, dans le cas général d'un taux $R = \frac{k}{n}$ quelconque, l'équivalence entre deux encodeurs minimaux. La proposition (2.1) déduite des références ([Con 1] , [Con 2]) spécifie les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux encodeurs minimaux soient équivalents.

Proposition 2.1 *Etant donné l'encodeur minimal $G(D)$ de taux $R = \frac{k}{n}$ possédant les valeurs distinctes de mémoires ν_l' , $l = 1, .., t$, supposées ordonnées par ordre de valeur décroissante $(\nu_1' > \nu_2' > .... > \nu_t')$. Si n_l , $l = 1, 2, ..., t$, représente le nombre d'entrées possédant la mémoire ν_l', la classe de tous les encodeurs minimaux équivalents à $G(D)$ est composée de tous les encodeurs spécifiés par :*

$$\left\{ G'(D) \ : G'(D) \ = \ T(D)\, G(D) \right\} \tag{2.24}$$

où

1) $T(D)$ est une matrice $k \times k$ polynômiale et polynômialement inversible.

2) $T(D)$ est une matrice triangulaire inférieure en bloc de la forme:

$$T(D) = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & & & 0 \\ T_{t1} & T_{t2} & \cdots & T_{tt} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

3)Les blocs de $T(D)$ ont les propriétés suivantes:

3a) Les T_{ll} sont des matrices $n_l \times n_l$ non singulières ayant des éléments dans $GF(2)$.

3b) Les T_{ij} $j = 1, 2, ..., i-1$ sont des matrices polynômiales $n_i \times n_j$ dont les éléments sont des polynômes de degré $\leq \nu_i' - \nu_j'$ $i = 1, 2, ..., t$.

Corollaire 2.1 *Etant donné l'encodeur minimal $G(D)$ défini dans la proposition (2.1), le nombre d'encodeurs distincts équivalents à $G(D)$ est:*

$$N\left(\nu_1', \cdots, \nu_t'\right) = \prod_{i=1}^{t} \left\{ \prod_{l=0}^{n_i-1} \left(2^{n_i} - 2^l\right) \prod_{j=i+1}^{t} \left(2^{\nu_j' - \nu_i'}\right)^{2^{n_i n_j}} \right\} \tag{2.26}$$

Remarquons que le nombre d'encodeurs distincts et équivalents à $G(D)$ dans le cas où $k = 1$, est unitaire. Donc notre première demarche pour énumérer des codes de taux $R = \frac{1}{2}$ se limite à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour des spectres identiques. Les propositions (2.2), (2.3) et (2.4) [Con 1] qui suivent expriment des conditions suffisantes pour qu'un encodeur $G'(D)$ posséde un spectre de poids identique à $G(D)$.

Proposition 2.2 *Etant donné un encodeur $G(D)$ de taux $R = \frac{k}{n}$ et d'ensemble des valeurs de mémoires $\{ \nu_i \}$, $G'(D)$ a un spectre de poids identique à G(D) si:*

$$G'(D) = E_1(D)\ G\left(D^{-1}\right). \tag{2.27}$$

où $E_1(D)$ est une matrice $k \times k$ de la forme diag[D^{ν_i}].

L'application de cette proposition dans le cas où $k = 1$ *et* $n = 2$ donne comme code équivalent à celui généré par $G(D)$, le code généré par l'encodeur $G^*(D)$ dit réciproque de $G(D)$ et défini comme:

$$G'(D) = G^*(D) \ = [G_1^*(D) \ , \ G_2^*(D)] \tag{2.28}$$

Exemple - soit $G_1(D)$ l' encodeur de mémoire 4 et de taux $R = \frac{1}{2}$ de la forme:

$$G_1(D) \ = \ \left[1 + D + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 + D^4\right] \ .$$

L'application de la proposition (2.2) nous permet d'obtenir l' encodeur de spectre de poids identique $G_1^*(D)$ et défini comme:

$$G_1^*(D) \ = \ \left[1 + D^2 + D^3 \quad 1 + D + D^2 + D^3 + D^4\right] \ .$$

Proposition 2.3 *Etant donné un encodeur $G(D)$ de taux $R = \frac{k}{n}$, tout encodeur $G'(D)$ de la forme:*

$$G'(D) \ = G(D) \ E_2(D), \tag{2.29}$$

où $E_2(D)$ est une matrice $n \times n$ de la forme diag[D^{l_i}] avec $l_i \in Z \quad i = 1, 2, \cdots, n$ posséde un spectre de poids identique à celui de $G(D)$.

Proposition 2.4 *L'encodeur $G(D)$ de taux $R = \frac{k}{n}$ a un spectre de poids identique à $G'(D)$ si:*

$$G'(D) = G(D)\ E_3, \tag{2.30}$$

où E_3 est une matrice $n \times n$ de permutation des colonnes de $G(D)$. Par conséquent, E_3 posséde les caractéristiques suivantes:
a) Les colonnes ainsi que les lignes de E_3 contiennent un seul "1" et tous les autres élements sont nuls.
b) Le rang de E_3 est égale à " n ".

Corollaire 2.2 *Le nombre d'encodeur $G'(D)$, appartenant à la classe définie par la proposition (2.4) est au plus égal à $n!$.*

2.4 Classes particulières d'encodeurs de taux $\frac{1}{2}$

En préparation pour les développements du chapitre suivant, nous définissons ici un certain nombre de classes d'encodeurs particuliers applicables aux codes de taux $R = \frac{1}{2}$. Nous commencerons par introduire les définitions suivantes.

Définition (2.1)

Etant donné un polynôme $g(D)$ à coefficients sur $GF(2)$ nous appelerons :

1. del{ $g(D)$} = Le delai du polynôme $g(D)$ (le plus petit exposant de l'opérateur D à coefficient non nul de $g(D)$).

2. deg{ $g(D)$} = Le degré du polynôme $g(D)$.

Définition (2.2):

Le polynôme réciproque $g^*(D)$ du polynôme $g(D)$ est défini par la relation:

$$g^*(D) = D^m\, g\left(D^{-1}\right) \qquad où\ \ m = deg\,\{g(D)\}\ . \tag{2.31}$$

Conformément aux résultats énoncés dans la proposition (2.3), on constate immédiatement que pour n'importe quel encodeur $G(D)$ tel que $\max_{i=1,2} del\{g_i(D)\} \neq 0$, il existe toujours un autre encodeur $G^*(D)$ de spectre de poids identique à $G(D)$ dont la valeur du $\max_{i=1,2} del\{g_i(D)\}$ soit égale à zero. A titre d'exemple, si

$$G(D) = \begin{bmatrix} D & 1+D \end{bmatrix};\ \ alors\ \ en\ \ choisissant$$

$$E_2(D) = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nous obtenons l'encodeur équivalent de délai zero:

$$G^*(D) = G(D) \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 1+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ i.e$$

$$G^*(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1+D \end{bmatrix}.$$

Pour toute valeur $m > 0$ de la mémoire, nous définirons deux classes d'encodeurs de taux $R = \frac{1}{2}$ et qui seront notées respectivement par $C_{m,1}$ *et* $C_{m,2}$. Ces deux classes disjointes ont été choisies de manière à ce qu' aucun encodeur d'une classe ne posséde un encodeur équivalent dans l'autre. Leur choix a été guidé par les résultats des propositions (2.3) et (2.4).

- $C_{m,1}$ contient tous les encodeurs de mémoire " m " et tels que:

$$a) \qquad del\ \{\ g_i(D)\ \} = 0 \qquad i = 1,2 \qquad (\ proposition\ \ (\ 2.3\ )\ ) \tag{2.32}$$

$$b) \quad deg\ \{\ g_1(D)\ \} < deg\ \{\ g_2(D)\ \} = m \quad (\ proposition\ (\ 2.4\ )\ ) \tag{2.33}$$

- $C_{m,2}$ contient tous les encodeurs de mémoire " m " et tels que:

$$a) del\ \{\ g_i(D)\ \} = 0 \quad i = 1,2 \quad (\ proposition\ (\ 2.3\ )\ ) \tag{2.34}$$

$$b) deg\ \{\ g_1(D)\ \} = deg\ \{\ g_2(D)\ \} = m \tag{2.35}$$

(*condition complèmentaire à celle de la classe* $C_{m,1}$)

$$c) si\ G(\ D\ ) = [g_1(D)\ \ g_2(D)] \in C_{m,2}\ alors$$

$$G'(\ D\ ) = [g_2(D)\ \ g_1(D)] \notin C_{m,2}\ (\ proposition\ (\ 2.4\ )\ ). \tag{2.36}$$

Nous avons utilisé les propositions (2.3) et (2.4) pour distinguer les encodeurs de spectre de poids identique. Par la suite nous préciserons la seule condition à vérifier pour compléter cette distinction en utilisant la proprieté (2.2) appliquée aux deux classes définies précédemment.

Soit $G(D) = [\ g_1(D)\ \ g_2(D)\ ] \in C_{m,1}$ avec $deg\{g_1(D)\} = n < m$ alors d'après la proposition (2.3) il existe une matrice $E_2(D)$ de la forme :

$$E_2(D) = \begin{bmatrix} D^{m-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad telle\ que \tag{2.37}$$

$$G'(D) = G(D)\ E_2(D) = \left[\ D^{m-n}\ g_1(D) \quad g_2(D)\ \right] \tag{2.38}$$

posséde un spectre de poids identique à $G(D)$. Cependant on remarquera que

$G'(D)$ n'appartient ni à $C_{m,1}$ ni à $C_{m,2}$. Par contre d'après la proposition (2.2) pour le même $G(D)$, il existe $G''(D)$ de spectre de poids identique à $G'(D)$ et $G(D)$ et défini par les transformations:

$$G''(D) = D^m G'\left(D^{-1}\right) = D^m \left[D^{-m+n} g_1\left(D^{-1}\right) \quad g_2\left(D^{-1}\right) \right] \tag{2.39}$$

$$G''(D) = \left[D^n g_1\left(D^{-1}\right) \quad D^m g_2\left(D^{-1}\right) \right] \tag{2.40}$$

$$G''(D) = [\, g_1^*(D) \quad g_2^*(D) \,] \tag{2.41}$$

On vérifie donc que $G''(D)$ appartient à $C_{m,1}$ et que ses polynômes générateurs sont simplement les polynômes réciproques des générateurs de l'encodeur $G(D)$.

Si $G(D)$ appartient à la classe $C_{m,2}$, il suffit simplement d'appliquer la proposition (2.2) pour obtenir un encodeur équivalent de la même classe en définissant $G'(D)$ comme:

$$G'(D) = D^m G\left(D^{-1}\right) = [\, g_1^*(D) \quad g_2^*(D) \,] \tag{2.42}$$

Les résultats ci-dessus nous permettent d'énoncer le corollaire suivant:

Corollaire 2.3 *Pour qu'un encodeur convolutionnel $G(D) = [\, g_1(D) \;\; g_2(D) \,]$ appartenant à l'une des classes $C_{m,i}$ $i = 1, 2$ posséde un spectre de poids identique à*

$G'(D) = [\ g'_1(D)\ \ g'_2(D)\ ]$ *il suffit que (conditions suffisantes):*

$$A \begin{cases} g'_1(D) = g^*_1(D) \\ g'_2(D) = g^*_2(D) \end{cases} \tag{2.43}$$

Si $G(D)$ appartient à l'une ou l'autre des deux classes .Et

$$B \begin{cases} g'_1(D) = g^*_2(D) \\ g'_2(D) = g^*_1(D) \end{cases} \tag{2.44}$$

si $G(D)$ appartient à la classe $C_{m,2}$.

Démonstration: A) Pour toute séquence d'entrée $X(D)$ finie de degré " n " de l'encodeur $G(D)$, nous démontrons qu'il existe une séquence d'entrée $X'(D) = X^*(D) = D^n X(D^{-1})$ relative à $G'(D)$ et telle que: $Y(D) = X(D)G(D)$ posséde le même poids que $Y'(D) = X'(D)G'(D)$.

Nous avons d'une part:

$$X(D)\ G(D) = X(D)\ [g_1(D)\quad g_2(D)] \Longrightarrow \begin{cases} Y_1(D) = X(D)\ g_1(D) \\ Y_2(D) = X(D)\ g_2(D) \end{cases}$$

d'autre part:

$$X^*(D)\ G'(D) = X^*(D)\ [g^*_1(D)\quad g^*_2(D)] \Longrightarrow \begin{cases} Y'_1(D) = X^*(D)\ g^*_1(D) \\ Y'_2(D) = X^*(D)\ g^*_2(D) \end{cases}$$

les séquences $Y'_i(D)\ \ i = 1,2$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$Y'_i(D) = X^*(D)\ g^*_i(D) = [X(D)\ g_i(D)]^* = [Y_i(D)]^* = Y^*_i(D)$$

La relation ci-dessus montre que, quelle que soit la séquence d'entrée $X(D)$ de $G(D)$,

il existe une séquence d'entrée $X^*(D)$ de $G'(D)$ telle que $Y_i'(D) = Y_i^*(D)$ $i = 1, 2$. D'après la définition du polynôme réciproque il est évident que la distribution des symboles codés de $Y_i^*(D)$ est la même que $Y_i(D)$ mais dans le sens inverse:

$$Y_i(D) = 1 + a_1^i D + a_2^i D^2 + \cdots + a_{n-1}^i D^{n-1} + D^n$$

$$Y_i^*(D) = 1 + a_{n-1}^i D + \cdots + a_2^i D^{n-2} + a_1^i D^{n-1} + D^n .$$

Ceci entraine, l'égalité du poids des séquences $Y(D)$ *et* $Y'(D)$ définies par:

$$Y(D) = Y_1\left(D^2\right) + D\, Y_2\left(D^2\right)$$

$$Y'(D) = Y_1^*\left(D^2\right) + D\, Y_2^*\left(D^2\right) .$$

Par conséquent, les spectres de poids des codes généré par les encodeurs $G(D)$ et $G'(D)$ sont bien identiques.

B) Pour l'encodeur $G(D) = [g_1(D) \;\; g_2(D)] \in C_{m,2}$; d'après le developpement A) l'encodeur $G''(D) = [g_2(D) \;\; g_1(D)]$ posséde le même spectre de poids que $G(D)$. Cependant cet encodeur n'appartient pas à $C_{m,2}$. Par contre l'encodeur $G'(D) = [g_1'(D) \;\; g_2'(D)]$ avec:

$$g_1'(D) = g_2^*(D)$$
$$g_2'(D) = g_1^*(D)$$

a le même spectre de poids et appartient à $C_{m,2}$.

C.Q.F.D.

Tout au long de ce mémoire, nous désignerons les paires d'encodeurs qui vérifient les conditions (2.43) ou (2.44) par le vocable d'encodeurs jumeaux à générateurs

réciproques.

Par contre les encodeurs possédants les propriétés:

$$a) \begin{cases} g_1(D) = g_1^*(D) \\ g_2(D) = g_2^*(D) \end{cases} \qquad b) \;\; g_1(D) = g_2^*(D) \tag{2.45}$$

seront nommés encodeurs à générateurs auto-réciproques.

Le corollaire énoncé ci-dessus spécifie uniquement une condition suffisante pour que $G(D)$ posséde un spectre de poids identique à $G'(D)$. Jusqu'à présent, nous ne connaissons aucune preuve à l'appui du fait que cette condition soit aussi nécessaire. Néanmoins, la partition résultant de l'application de ce corollaire à l'ensemble des codes non-catastrophiques de mémoire inférieure ou égale à 6 ne contient aucun exemple de codes équivalents. Il y a lieu donc de conjecturer à ce point que les conditions spécifiées au corollaire (2.3) sont aussi nécessaires.

À titre d'exemple, les tableaux (2.1) et (2.2) ci-dessous représentent pour chacune des classes $C_{m,1}$ et $C_{m,2}$ l'ensemble des codes distincts obtenus par application des conditions précédentes aux encodeurs de mémoire m=4.

$G_1(octal)$	$G_2(octal)$	d_{free}	$(a_n,\ n = d_f,\ d_{f+1},\ d_{f+2}, \cdots)$
1	21	3	$(1,1,1,4,10,19,\cdots)$
1	31	4	$(1,0,4,0,19,0,\cdots)$
1	25	4	$(2,0,5,0,23,0,\cdots)$
1	37	4	$(1,0,3,0,20,0,\cdots)$
3	37	4	$(1,0,2,3,10,21,\cdots)$
5	25	4	$(1,2,2,5,11,25,\cdots)$
7	37	4	$(1,0,2,0,17,0,\cdots)$
17	37	4	$(1,0,2,0,10,14,\cdots)$
1	35	5	$(2,2,2,12,19,28,\cdots)$
1	33	5	$(2,2,1,10,21,29,\cdots)$
3	31	5	$(1,2,5,8,13,35,\cdots)$
3	25	5	$(1,2,2,4,16,34,\cdots)$
5	31	5	$(1,0,1,8,12,24,\cdots)$
7	21	5	$(1,1,0,4,11,17,\cdots)$
7	35	5	$(1,1,4,10,10,34,\cdots)$
11	31	5	$(1,1,2,5,12,32,\cdots)$
15	21	5	$(1,0,0,5,8,15,\cdots)$
15	35	5	$(1,1,2,9,17,26,\cdots)$
15	33	5	$(1,0,1,9,11,19,\cdots)$
5	37	6	$(2,2,3,11,28,56,\cdots)$
7	31	6	$(2,0,13,0,49,0,\cdots)$
11	37	6	$(1,1,3,7,18,40,83,\cdots)$
15	31	6	$(3,0,13,0,59,0,\cdots)$
15	25	6	$(2,0,6,0,43,0,\cdots)$
15	23	6	$(1,0,9,0,35,0,\cdots)$
15	37	6	$(1,0,7,0,40,0,\cdots)$
17	31	6	$(1,2,2,10,27,49,\cdots)$
17	25	6	$(1,2,3,5,16,44,\cdots)$

Tableau 2.1: Les spectres de raies des codes non catastrophiques de la classes $C_{4,1}$.

Classe	$G_1(octal)$	$G_2(octal)$	d_{free}	$(a_n,\ n = d_f,\ d_{f+1},\ d_{f+2}, \cdots)$
2	21	31	5	(1,1,2,5,9,22)
2	21	25	5	(1,2,4,8,16,34)
2	21	37	6	(1,1,3,5,12,27)
2	31	25	6	(1,0,5,0,31,0)
2	21	23	6	(1,0,4,0,22,0)
2	31	37	6	(1,0,6,0,34,0)
2	25	35	6	(1,2,2,8,19,42)
2	25	37	6	(1,0,6,0,31,0)
2	35	37	6	(1,1,3,7,18,40,87)
2	33	37	6	(1,1,3,6,13,31)
2	31	35	7	(3,3,3,24,42,63)
2	31	33	7	(2,4,6,15,37,83)
2	31	27	7	(2,3,4,16,37,68)

Tableau 2.2: Les spectres de raies des codes non catastrophiques de la classe $C_{4,2}$.

Chapitre 3

Énumération des encodeurs et des codes convolutionnels

Le présent chapitre a pour objet de calculer, à partir des classes $C_{m,i}$ $i = 1, 2$ les cardinaux des classes des encodeurs non catastrophiques excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques. Pour y parvenir, nous devrons effectuer le calcul en trois parties. La première partie consistera à calculer les nombres cardinaux des sous-classes dénotées $C^s_{m,i}$, $i = 1, 2$, d'encodeurs excluant un parmi les jumeaux à générateurs réciproques. Le nombre cardinal de l'ensemble des polynômes identiques à leur réciproque (auto-réciproques) ainsi que les nombres cardinaux des classes $C_{m,i}$, $i = 1, 2$, seront nécessaires à ce calcul. Par la suite, la détermination des nombres cardinaux des classes des encodeurs catastrophiques (dénoté $C^c_{m,i}$ $i = 1, 2$) sera considérée dans la deuxième partie. Enfin, la troisième partie sera consacrée au calcul des nombres cardinaux des classes d' encodeurs non catastrophiques excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques. Cette classe sera denotée $C^*_{m,i}$, $i = 1, 2$.

3.1 Nombres cardinaux des sous classes d'encodeurs $C^s_{m,i}$ excluant un parmi les jumeaux à générateurs réciproques .

3.1.1 Calcul des nombres cardinaux des classes $C_{m,i}$ $i = 1, 2$

a) <u>Calcul du nombre cardinal de $C_{m,1}$:</u>

Tout polynôme $g(D)$ de degré " n " à coefficients dans $GF(2)$ et tel que $del\{g(D)\} = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$g(D) \quad = \quad 1 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{n-1} D^{n-1} + D^n. \qquad (3.1)$$

Du fait que les " a_i" ne prennent que deux valeurs 0 ou 1, il y a donc 2^{n-1} polynômes $g(D)$ différents . La classe $C_{m,1}$ contient tous les encodeurs de la forme $G(D) = [g_1(D) \quad g_2(D)]$ et où les polynômes $g_1(D)$ et $g_2(D)$ satisfont à la condition (3.1). Comme les $g_1(D)$ sont de degré inférieur à "m" (la mémoire de l'encodeur), il y a $(\sum_{j=1}^{m-1} 2^{j-1} + 1)$ choix différents incluant la constante 1. D'autre part, il y a 2^{m-1} polynômes qui peuvent être choisis pour $g_2(D)$ dont le degré est égal à "m". Par conséquent toutes les combinaisons de ces deux générateurs conduisent à $(\sum_{j=1}^{m-1} 2^{j-1} + 1)2^{m-1}$ formes distinctes d'encodeurs. Donc le nombre cardinal de $C_{m,1}$ (dénoté $\#C_{m,1}$) se calcule comme:

$$\#C_{m,1} = \left(\sum_{j=1}^{m-1} 2^{j-1} + 1\right) 2^{m-1},$$

$$soit \quad \boxed{\#C_{m,1} = (2^{m-1} - 1 + 1)\, 2^{m-1} \;=\; 2^{2m-2}}. \qquad (3.2)$$

b)**Calcul du nombre cardinal de $C_{m,2}$**

La classe $C_{m,2}$ contient tous les encodeurs de mémoire "m" dont les générateurs satisfont aux conditions (3.1). Evidemment, les générateurs ne peuvent être identiques et d'autre part on exclue toute permutation des générateurs d'un encodeur quelconque pour donner naissance à un autre encodeur dans cette classe. Le tableau qui suit illustre, pour chacun des 2^{m-1} polynômes possibles de degrés " m ", les choix permis pour les paires $g_1(D)$ et $g_2(D)$ correspondant aux encodeurs de la classe $C_{m,2}$.

	$g_1^1(D)$	$g_1^2(D)$	$g_1^3(D)$	$\cdots\cdots$	$g_1^{2^{m-1}-1}(D)$	$g_1^{2^{m-1}}(D)$
$g_2^1(D)$						
$g_2^2(D)$	$\times$					
$\vdots$	$\times$	$\times$				
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
$g_2^{2^{m-1}}(D)$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Tableau 3.1: Choix permis des couples $[g_1(D), g_2(D)]$ (illustrés par $\times$) formant la classe $C_{m,2}$

Par simple détermination du nombre de cases marquées par $\{\times\}$, nous trouvons le nombre cardinal de $C_{m,2}$:

$$\#C_{m,2} = \sum_{i=1}^{2^{m-1}-1} i = \frac{2^{m-1} * (2^{m-1} - 1)}{2},$$

$$soit \quad \boxed{\#C_{m,2} = 2^{m-2} * (2^{m-1} - 1) = 2^{2m-3} - 2^{m-2}}. \tag{3.3}$$

3.1.2 Calcul des nombres cardinaux des classes $C^s_{m,i}$ $i = 1, 2$

Nous avons determiné au chapitre 2 (corollaire(2.3)) un certain nombre de conditions permettant d' identifier les encodeurs générant des codes dont les spectres de poids sont identiques. La définition qui suit dont l'origine se trouve dans l'énoncé du corollaire(2.3), est nécessaire à la compréhension de la proposition qui nous conduit aux calculs des nombres cardinaux des classes d'encodeurs excluant un parmi les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques ($\#C^s_{m,i}$ $i = 1, 2$).

Définition

• Nous définissons par X^1_m la sous-classe de $C_{m,1}$ dont les encodeurs vérifient la propriété suivante:

$$a) \begin{cases} g_1(D) = g_1^*(D) \\ g_2(D) = g_2^*(D). \end{cases}$$

• De même, nous définissons par X^2_m la sous-classe de $C_{m,2}$ dont les encodeurs vérifient l'une des propriétés suivantes:

$$a) \begin{cases} g_1(D) = g_1^*(D) \\ g_2(D) = g_2^*(D). \end{cases} \qquad b) \;\; g_1(D) = g_2^*(D)$$

Les ensembles X^1_m et X^2_m comprennent tous les encodeurs de générateurs auto-réciproques.

Proposition 3.1 *Pour $i = 1, 2$, les nombres cardinaux de $C^s_{m,i}$ s'expriment à partir de ceux de X^i_m et $C_{m,i}$ par la relation:*

$$\#C^s_{m,i} = \frac{[\#C_{m,i} + \#X^i_m]}{2} \qquad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Démonstration: l'ensemble différence $(C_{m,i} - X_m^i)$ est formé des encodeurs possédant un jumeau à générateurs de réciproques distinct, puisque nous éliminons de l'ensemble $C_{m,i}$, l'ensemble des encodeurs dont les polynômes générateurs sont auto-réciproques. Donc pour chaque encodeur $G(D) \in [C_{m,i} - X_m^i]$, il existe un encodeur distinct $G'(D) \in [C_{m,i} - X_m^i]$ qui est le jumeau de $G(D)$. Autrement dit l'ensemble $[C_{m,i} - X_m^i]$ est constitué de deux sous ensembles tels que chaque élément de l'un posséde son jumeau dans l'autre. Donc, si nous ajoutons à l'un de ces sous ensembles, dénoté Y_m^i, l'ensemble X_m^i, nous obtenons précisement les classes $C_{m,i}^s$ $i = 1, 2$ recherchées. Il s'ensuit que:

$$C_{m,i}^s = Y_m^i \bigcup X_m^i \quad avec \quad \#Y_m^i = \frac{\#\{C_{m,i} - X_m^i\}}{2},$$

$$\#C_{m,i}^s = \frac{\{\#C_{m,i} - \#X_m^i\}}{2} + \#X_m^i,$$

$$\#C_{m,i}^s = \frac{\#C_{m,i}}{2} - \frac{\#X_m^i}{2} + \#X_m^i,$$

$$soit \quad \#C_{m,i}^s = \frac{\#C_{m,i} + \#X_m^i}{2}.$$

C.Q.F.D

Lors de la démonstration ci-dessus nous avons défini un certain nombre de sous-ensembles disjoints de l'ensemble $(C_{m,i} - X_m^i)$. Pour fins de reférences ultèrieures, on dénote ces sous-ensembles de la façon suivante:

$$C_{m,i} - X_m^i = Y_m^i \bigcup Z_m^i \tag{3.5}$$

$$où \quad Y_m^i \bigcap Z_m^i = \{\phi\} \tag{3.6}$$

On remarque que Y_m^i et Z_m^i contiennent chacun un élement de chacun des paires de jumeaux. Il s'ensuit donc que $\#Y_m^i = \#Z_m^i$. D'autre part on a aussi $\#C_{m,i}^s = \#X_m^i + \#Y_m^i$.

Pour utiliser la relation (3.4), il est nécessaire de connaitre $\#X_m^i$ pour tout "m". Comme préalable à l'evaluation de ces quantités nous définirons l'ensemble P_m de tous les polynômes $P(D)$ tels que:

$$\begin{cases} deg\,\{P\,(D)\} = & m \\ del\,\{P\,(D)\} = & 0 \\ P\,(D) = P^*\,(D) = & D^m P\,(D^{-1})\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Cet ensemble sera appelé l'ensemble des polynômes auto-réciproques de degré "m".

Nous pouvons maintenant calculer séparement les valeurs de $\#X_m^i$ en fonction du nombre cardinal de P_m.

a) **Valeur de $\#X_m^1$:**

L'ensemble X_m^1 comprend des encodeurs satisfaisant aux propriétés 1) et 2):

$$1)\ \ g_1(D) = g_1^*(D) \qquad avec\ \ 0 \ \leq\ deg\,\{g_1(D)\} \ \leq\ m-1, \tag{3.8}$$

$$2)\ \ g_2(D) = g_2^*(D) \qquad avec\ \ deg\,\{g_2(D)\} = m. \tag{3.9}$$

Il existe $\sum_{i=0}^{m-1} \#P_i$ polynômes qui vérifient la condition 1) et $\#P_m$ polynômes vérifiant la seconde condition. Il y a donc $(\#P_m * \sum_{i=0}^{m-1} \#P_i)$ encodeurs de mémoire "m" appartenant à la classe $C_{m,1}$ et qui vérifient les deux conditions énumérées ci-dessus.

Nous en concluons que:

$$\#X_m^1 = \#P_m * \sum_{i=0}^{m-1} \#P_i. \tag{3.10}$$

b) **Valeur de X_m^2**

L'ensemble X_m^2 est composé de deux sous-ensembles disjoints que nous dénoterons X_1 $et X_2$. Ces sous ensembles sont caracterisés par les propriétés suivantes:

$$X_1 \begin{cases} a_1)\ g_1(D) = g_1^*(D) & , deg\,\{g_1(D)\} = m; \\ a_2)\ g_2(D) = g_2^*(D) & , deg\,\{g_1(D)\} = m. \end{cases} \tag{3.11}$$

$$X_2 \qquad b)\ \ g_1(D) = g_2^*(D). \tag{3.12}$$

Il existe $\#P_m$ polynômes vérifiant la condition a_1). D'autre part, comme $g_1(D) \neq g_2(D)$, il s'ensuit que $(\#P_m - 1)$ polynômes satisfont à la condition a_2). Donc $\#P_m * (\#P_m - 1)$ encodeurs ne possédant pas des générateurs identiques vérifient la condition a). Nous devons diviser ce nombre par 2 puisque la permutation des générateurs n'est pas permise dans la classe $C_{m,2}$. D'où:

$$\#X_1 = \frac{\#P_m * (\#P_m - 1)}{2}. \tag{3.13}$$

La condition b) définit l'ensemble X_2. Du fait que $g_1(D) \neq g_2(D)$ (par hypothèse), l'ensemble X_2 contient des encodeurs dont les polynômes générateurs sont de réciproque distinct et vérifient la condition $g_1(D) = g_2^*(D)$. Pour obtenir $\#X_2$ il suffit donc de calculer le nombre d' encodeurs possédant des polynômes générateurs tels que $g_1(D) \neq g_1^*(D)$ et de le diviser par 2. Il existe $(2^{m-1} - \#P_m)$ polynômes distincts qui ne sont pas auto-réciproques et s'obtiennent simplement en

retirant l'ensemble des polynômes de réciproques identique de l'ensemble de tous les polynômes possibles de degré " m ". La permutation des générateurs n'étant pas permise, nous devons diviser ce nombre par 2 pour obtenir le nombre cardinal de X_2 :

$$\#X_2 = \frac{2^{m-1} - \#P_m}{2}. \tag{3.14}$$

Nous en concluons que la valeur de X_m^2 est:

$$\begin{aligned} \#X_m^2 &= \#X_1 + \#X_2, \\ \#X_m^2 &= \frac{\#P_m * (\#P_m - 1)}{2} + \frac{2^{m-1} - \#P_m}{2}, \\ soit \quad \#X_m^2 &= \frac{(\#P_m)^2}{2} + 2^{m-2} - \#P_m. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Reportant ces expressions dans (3.4) et utilisant les resultats (3.2) et (3.3), nous obtenons les nombres cardinaux de $C_{m,i}^s \quad i = 1, 2$:

$$\#C_{m,1}^s = \frac{[\#C_{m,1} + \#X_m^1]}{2},$$

$$\#C_{m,1}^s = \frac{\left[2^{2m-2} + \#P_m . \sum_{i=0}^{m-1} \#P_i\right]}{2},$$

$$\boxed{\#C_{m,1}^s = 2^{2m-3} + \frac{\left[\#P_m . \sum_{i=0}^{m-1} \#P_i\right]}{2}}. \tag{3.16}$$

$$\#C^s_{m,2} = \frac{[\#C_{m,2} + \#X^2_m]}{2},$$

$$\#C^s_{m,2} = \frac{\left[2^{2m-3} - 2^{m-2} + \frac{(\#P_m)^2}{2} + 2^{m-2} - \#P_m\right]}{2},$$

$$\boxed{\#C^s_{m,2} = 2^{2m-4} + \frac{(\#P_m)^2}{4} - \frac{\#P_m}{2}}. \tag{3.17}$$

La seule quantité non déterminée dans ces expressions est $\#P_m$ qui correspond au nombre cardinal de la classe des polynômes auto-réciproques.

3.1.3 Calcul de $\#P_m$:

De la définition du polynôme réciproque, nous concluons qu'un polynôme $g(D)$ de degré " m " sous la forme:

$$g(D) \quad = \quad 1 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{m-1} D^{m-1} + D^m \tag{3.18}$$

est auto-réciproque si et seulement si:

$$a_i = a_{m-i} \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1. \tag{3.19}$$

Telles qu' exprimées, ces conditions sont redondantes. La considération séparée des cas "m" pair et "m" impair conduit à les écrire sous la forme:

$$m\ pair \begin{cases} a_1 = a_{m-1} \\ a_2 = a_{m-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\frac{m}{2}-1} = a_{\frac{m}{2}+1} \\ a_{\frac{m}{2}} = a_{\frac{m}{2}} \end{cases} \qquad m\ impair \begin{cases} a_1 = a_{m-1} \\ a_2 = a_{m-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\frac{m-1}{2}-1} = a_{\frac{m-1}{2}+2} \\ a_{\frac{m-1}{2}} = a_{\frac{m-1}{2}+1} \end{cases}$$

Du fait que les a_i ne prennent que les deux valeurs 0 et 1, nous en déduisons immédiatement:

$$\#P_m = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} & m \ pair \\ 2^{\frac{m-1}{2}} & m \ impair. \end{cases} \tag{3.20}$$

Exemple: Le tableau (3.2) représente l'ensemble des 28 ($\#C_{4,2}$) encodeurs de la classe $C_{4,2}$. Dans ce tableau, les 8 encodeurs de la sous classe X_4^2 ont été classifiés respectivement par + (les 6 qui satisfont la relation (3.13)) et * (les 2 qui satisfont la relation (3.14)). D'après le corollaire (2.3) le reste des encodeurs constituent un ensemble dont chacun des élèments posséde un jumeau de spectre de poids identique. Cet ensemble est $C_{4,2} - X_4^2$ et il est constitué de deux sous-ensembles dijoints Y_4^2 et Z_4^2. Lors de la démonstration de la proposition (3.1) on a constaté que le nombre cardinal de Y_4^2 ou Z_4^2 s'obtient par la relation suivante:

$$\#Y_4^2 = \#Z_4^2 = \frac{\#C_{4,2} - \#X_4^2}{2} = \frac{28-8}{2} = 10 \ .$$

Afin de séparer les propriétés des encodeurs des sous-ensembles Y_4^2 et Z_4^2, les 10 encodeurs de chacun des sous-ensembles sont d'une part identifiés par les prefixes y_i (pour Y_4^2) et z_i (pour Z_4^2) , $i = 1, 2, \cdots, 10$, et d'autre part les couples d'encodeurs qui satisfont aux conditions (2.44) et (2.45) du corollaire (2.3) sont respectivement identifiés par les sufixes A et B.

3.2 Nombres cardinaux des classes d' encodeurs catastrophiques $C_{m,i}^c \quad i = 1, 2.$

A partir de la définition des encodeurs convolutionnels catastrophiques présentée au chapitre 2, nous pouvons conclure qu'un encodeur $G(D) = [g_1(D) \quad g_2(D)]$ de la

nb	$g_1(D)$	$g_2(D)$	*Classification*
1	$1+D^4$	$1+D+D^4$	$(y_1.A)$
2	$1+D^4$	$1+D+D^2+D^4$	$(y_2.A)$
3	$1+D^4$	$1+D^2+D^4$	$+$
4	$1+D^4$	$1+D^3+D^4$	$(z_1.A)$
5	$1+D^4$	$1+D+D^3+D^4$	$+$
6	$1+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$(z_2.A)$
7	$1+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$+$
8	$1+D+D^4$	$1+D+D^2+D^4$	$(y_3.A)$
9	$1+D+D^4$	$1+D^2+D^4$	$(y_4.B)$
10	$1+D+D^4$	$1+D^3+D^4$	$*$
11	$1+D+D^4$	$1+D+D^3+D^4$	$(y_5.A)$
12	$1+D+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$(y_6.B)$
13	$1+D+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$(y_7.A)$
14	$1+D+D^2+D^4$	$1+D^2+D^4$	$(y_8.B)$
15	$1+D+D^2+D^4$	$1+D^3+D^4$	$(z_6.B)$
16	$1+D+D^2+D^4$	$1+D+D^3+D^4$	$(y_9.B)$
17	$1+D+D^2+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$*$
18	$1+D+D^2+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$(y_{10}.A)$
19	$1+D^2+D^4$	$1+D^3+D^4$	$(z_4.B)$
20	$1+D^2+D^4$	$1+D+D^3+D^4$	$+$
21	$1+D^2+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$(z_8.B)$
22	$1+D^2+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$+$
23	$1+D^3+D^4$	$1+D+D^3+D^4$	$(z_5.A)$
24	$1+D^3+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$(z_3.A)$
25	$1+D^3+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$(z_7.A)$
26	$1+D+D^3+D^4$	$1+D^2+D^3+D^4$	$(z_9.B)$
27	$1+D+D^3+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$+$
28	$1+D^2+D^3+D^4$	$1+D+D^2+D^3+D^4$	$(z_{10}.A)$

Tableau 3.2: Ensemble des encodeurs de la classe $C_{4,2}$ et leur classification.

classe $C_{m,i}$ est catastrophique si et seulement si $q(D) = P.G.C.D.[g_1(D)\ ,\ g_2(D)]$ satisfait:

$$a)\quad del\{q(D)\} = 0 \qquad et$$

$$b)\quad deg\{q(D)\} \geq 1$$

La proposition (3.2) qui suit constitue la clé pour calculer les nombres cardinaux de $C^c_{m,i}$ $\ i = 1$ *ou* 2. Tout d'abord nous définissons un ensemble qui nous aidera à énoncer cette proposition.

<u>**Définition**</u>

Etant donné " m " la mémoire de l'encodeur, soit G_{m-n} ; $1 \leq n \leq m-1$ l'ensemble formé des polynômes $p(D)$ qui vérifient les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} deg\{p(D)\} = m-n \quad ; \quad 1 \leq n \leq m-1 \\ del\{p(D)\} = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Il est aisément vérifié que $\#G_{m-n} = 2^{m-n-1}$. Pour fins de reférences ultérieures, cet ensemble sera qualifié du vocable d'ensemble des facteurs communs.

Proposition 3.2 *Tous les encodeurs catastrophiques dans la classe* $C_{m,i}$, $i = 1$ *ou* 2, *s'obtiennent par union des ensembles disjoints constitués de tous les encodeurs dont les générateurs s'obtiennent par produit des eléments de* G_{m-n} *et des générateurs de tous les encodeurs non catastrophiques de* $C_{n,i}$ *pour* $n = 1, 2, \cdots, m-1$. *En d'autres termes, si* $p_k^{m-n}(D)$, $\quad k = 1, 2, \cdots, 2^{m-n-1}$, *représente un élement quelconque de* G_{m-n} *et* $G_n^j(D)$, $\quad j = 1, 2, \cdots, \#C_{n,i} - \#C^c_{n,i} = j_n$ *est un encodeur non catastrophique de* $C_{n,i}$ *; alors on peut représenter* $C^c_{m,i}$ *comme*

$$C^c_{m,i} = \bigcup_{n=1}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{j_n} \bigcup_{k=1}^{2^{m-n-1}} \left\{ G^j_n(D) * p^{m-n}_k(D) \right\} \qquad i = 1 \ ou \ 2. \tag{3.22}$$

Démonstration: la démonstration sera faite en trois étapes. La première étape consistera à démontrer que l'encodeur dont les générateurs sont obtenus par le produit d'un quelconque polynôme $p^{m-n}_k(D) \in G_{m-n}$ par les générateurs d'un encodeur catastrophique peut être généré aussi par le produit d'un autre polynôme $p^{m-\ell}_k(D) \in G_{m-\ell}$, $\ell < n$, par les générateurs d'un encodeur non catastrophique. La deuxième étape, consistera à démontrer que tous ces produits par des facteurs distincts ne peuvent donner des encodeurs identiques. Finalement, nous montrerons dans la troisième partie que cette opération génére tous les encodeurs catastrophiques.

Etape 1:

Considérons l'encodeur catastrophique $G_n(D) \in C_{n,i}$ et un quelconque polynôme $p^{m-n}(D) \in G_{m-n}$. L'encodeur produit s'écrit:

$$\begin{aligned} G_m(D) &= G_n(D) * p^{m-n}(D) = [g^1_n(D) * p^{m-n}(D) \quad g^2_n(D) * p^{m-n}(D)] \\ &= [g^1_m(D) \quad g^2_m(D)]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Soit $q(D) = P.G.C.D[g^1_n(D) \ , \ g^2_n(D)]$ *avec* $deg\{q(D)\} = r > 1$ On peut donc écrire:

$$[g^1_n(D) \ , \ g^2_n(D)] = q(D) * [g^1_{n-r}(D) \ , \ g^2_{n-r}(D)],$$

et il est clair que $P.G.C.D[g^1_{n-r}(D) \ , \ g^2_{n-r}(D)] = 1$. Notons $n - r = \ell$, alors la relation (3.23) peut s' écrire sous la forme :

$$G_m(D) = G_n(D) * p^{m-n}(D) = [g^1_\ell(D) \quad g^2_\ell(D)] * q(D) * p^{m-n}(D)$$

où $[g_\ell^1(D) \quad g_\ell^2(D)]$ représente un encodeur non catastrophique de la classe $C_{\ell,i}$. De plus on a les propriétés:

$$\left.\begin{array}{l} del\{q(D)\} = 0 \\ del\{p^{m-n}(D)\} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow del\{q(D) * p^{m-n}(D)\} = 0 \qquad (3.24)$$

$$\left.\begin{array}{l} deg\{q(D)\} = r \\ deg\{p^{m-n}(D)\} = m - n \end{array}\right\} \Longrightarrow deg\{q(D) * p^{m-n}(D)\} = m - \ell. \qquad (3.25)$$

On tire de (3.24) *et* (3.25) $\quad q(D) * p^{m-n}(D) = p^{m-\ell} \in G_{m-\ell}$

et donc $\quad G_n(D) * p^{m-n}(D) = G_\ell(D) * p^{m-\ell}(D)$ où $G_\ell(D)$ est un encodeur non catastrophique et $p^{m-\ell}(D) \in G_{m-\ell}$.

Etape 2:

Il suffit de démontrer que l'égalité:

$$G_n(D) * p^{m-n}(D) = G_r(D) * p^{m-r}(D) \qquad (3.26)$$

pour $r \leq n$ ne peut être satisfaite lorsque les encodeurs $G^n(D)$ *et* $G^r(D)$ sont non catastrophiques et distincts. D'après l'hypothèse nous avons:

$$G_n(D) = \quad [g_n^1(D) \quad g_n^2(D)] \; avec \; P.G.C.D[g_n^1(D) \; , \; g_n^2(D)] = 1$$

$$et \quad G_r(D) = \quad [g_r^1(D) \quad g_r^2(D)] \; avec \; P.G.C.D[g_r^1(D) \; , \; g_r^2(D)] = 1.$$

De l'égalité (3.26) nous obtenons les relations ci-dessous:

$$G_n(D) * p^{m-n}(D) = G_r(D) * p^{m-r}(D)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} g_n^1(D) * p^{m-n}(D) = g_r^1(D) * p^{m-r}(D) & (A) \\ g_n^2(D) * p^{m-n}(D) = g_r^2(D) * p^{m-r}(D) & (B) \end{cases}$$

$$A \Longrightarrow p^{m-n}(D) = \frac{g_r^1(D) * p^{m-r}(D)}{g_n^1(D)}$$

substituant $p^{m-n}(D)$ dans (B) nous conduit à:

$$g_n^2(D) * \frac{g_r^1(D) * p^{m-r}(D)}{g_n^1(D)} = g_r^2(D) * p^{m-r}(D)$$

$$g_n^2(D) * \frac{g_r^1(D)}{g_n^1(D)} = g_r^2(D) \tag{3.27}$$

Nous démontrons que l'égalité (3.27) est absurde. En effet, d'une part il n' existe aucun diviseur commun entre $g_n^1(D)$ et $g_n^2(D)$ puisque $P.G.C.D[g_n^1(D)\ ,\ g_n^2(D)] = 1$. D'autre part le polynôme $g_r^1(D)$ ne peut diviser entièrement $g_n^1(D)$ $(r \leq n)$ que si $g_r^1(D) = g_n^1(D)$ auquel cas $g_r^2(D) = g_n^2(D)$ (i.e. les encodeurs de départ sont identiques contrairement à l'hypothèse). Dans l'alternative contraire il résulte que le terme de gauche de l'égalité (3.27) contient toujours un dénominateur non simplifiable et n'est donc pas polynômial. Par contre le côté droit de cette relation contient un polynôme de degré fini. D'où la contradiction recherchée.

Etape 3:

Il nous reste à démontrer que la construction suggérée nous permet d'obtenir la totalité des encodeurs catastrophiques. Tout encodeur catastrophique $G(D) \in C_{m,i}$ peut s'ecrire sous la forme:

$$G(D) = p(D) * G'(D)$$

où $p(D)$ est un polynôme de degré $r > 1$ et $G'(D) \in C_{m-r,i}$ est non catastrophique. Il apparait donc au moins une fois comme élement de l'ensemble défini par la relation (3.22). Le fait qu'il n'apparait qu'une fois provient de la démonstration de l'étape 1.

C.Q.F.D.

Calcul du nombre cardinal de $C^c_{m,i}$

Le nombre cardinal de $C^c_{m,i}$ s'obtient immédiatement du résultat de la proposition (3.2) comme:

$$\#C^c_{m,i} = \sum_{n=1}^{m-1} \#G_{m-n} * (\#C_{n,i} - \#C^c_{n,i})$$

$$\#C^c_{m,i} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * (\#C_{n,i} - \#C^c_{n,i}).$$

Nous avons donc spécifiquement:

$$\boxed{\#C^c_{m,1} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * (2^{2n-2} - \#C^c_{n,1})} \tag{3.28}$$

$$\boxed{\#C^c_{m,2} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * (2^{2n-3} - 2^{n-2} - \#C^c_{n,2})} \tag{3.29}$$

3.3 Nombres cardinaux des classes d' encodeurs non catastrophiques excluant un des encodeurs jumeaux à générateurs réciproques

3.3.1 Classes intermédiaires d'encodeurs

Etant donné " m ", la mémoire de l'encodeur, nous avons jusqu'à date pu évaluer les nombres cardinaux des classes d'encodeurs suivantes:

$C^s_{m,i}$ = Classe des encodeurs excluant un des jumeaux à générateurs réciproques,

$C^c_{m,i}$ = Classe des encodeurs catastrophiques.

Notre but dans cette section est de calculer le nombre cardinal de la classe des encodeurs non catastrophiques excluant un des jumeaux à générateurs réciproques que nous noterons $C^*_{m,i}$, $i = 1, 2$. Nous avons mentionné au chapitre 2 qu'il est conjecturé que les codes associés à chaque encodeur de cette classe sont tous de spectre distinct. Comme $C^*_{m,i}$, $i = 1, 2$, exclut les encodeurs dans $C_{m,i} - C^s_{m,i}$ et les encodeurs dans $C^c_{m,i}$, la localisation de ces différentes sous-classes d'encodeurs est illustrée par la figure (3.1) . On peut donc écrire :

$$\#C_{m,i} = \#C^*_{m,i} + \#C^c_{m,i} + \#(C_{m,i} - C^s_{m,i}) - \#\left\{\left(C_{m,i} - C^s_{m,i}\right) \bigcap C^c_{m,i}\right\},$$

d'où nous déduisons:

$$\#C^*_{m,i} = \#C_{m,i} - \#\left(C_{m,i} - C^s_{m,i}\right) - \#C^c_{m,i} + \#\left\{\left(C_{m,i} - C^s_{m,i}\right) \bigcap C^c_{m,i}\right\},$$

$$soit \quad \boxed{\#C^*_{m,i} = \#C^s_{m,i} - \#C^c_{m,i} + \#\left\{\left(C_{m,i} - C^s_{m,i}\right) \bigcap C^c_{m,i}\right\}}. \tag{3.30}$$

Pour évaluer $\#C^*_{m,i}$ il est donc nécessaire de calculer le cardinal de l'ensemble $(C_{m,i} - C^s_{m,i}) \bigcap C^c_{m,i}$ des encodeurs catastrophiques parmi les encodeurs de l'ensemble $(C_{m,i} - C^s_{m,i})$. Par définition des sous-classes, pour chaque encodeur $G(D) \in (C_{m,i} - C^s_{m,i}) = Y^i_m$, il existe un encodeur jumeau $G'(D) \in Z^i_m$. La figure (3.2) montre la localisation des ensembles Y^i_m *et* Z^i_m. Afin d'évaluer le cardinal de $(Y^i_m \bigcap C^c_{m,i})$, nous énoncons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.1 *Le nombre cardinal des encodeurs catastrophiques dans les ensembles* Y^i_m *et* Z^i_m *est identique. Autrement dit:*

$$\#\left\{Y^i_m \bigcap C^c_{m,i}\right\} = \#\left\{Z^i_m \bigcap C^c_{m,i}\right\} \tag{3.31}$$

Démonstration: soit $G(D) = [g_1(D) \quad g_2(D)]$ un encodeur catastrophique appartenant à l'ensemble Y^i_m(ou Z^i_m) et $q(D) = P.G.C.D[g_1(D)\ ,\ g_2(D)]$ avec $deg\{q(D)\} \geq 1$. Nous avons:

$$g_1(D) = q(D) * r(D),$$

$$g_2(D) = q(D) * s(D).$$

En calculant les polynômes réciproques des deux cotés des relations ci-dessus nous obtenons:

$$g^*_1(D) = (q(D) * r(D))^* = q^*(D) * r^*(D),$$

$$g^*_2(D) = (q(D) * s(D))^* = q^*(D) * s^*(D)\ .$$

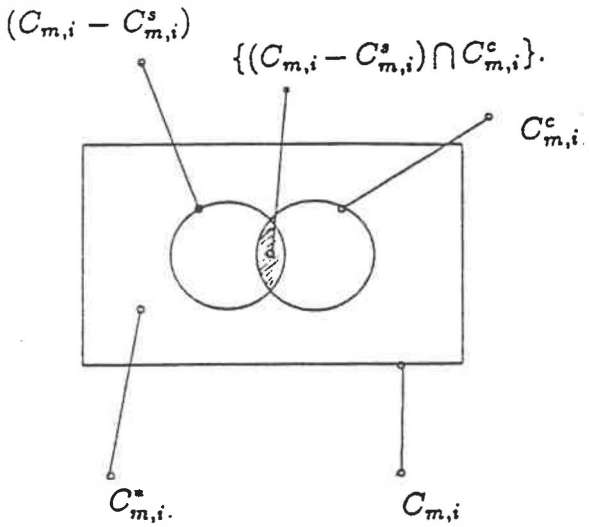


Figure 3.1: Localisation des classes d'encodeurs.

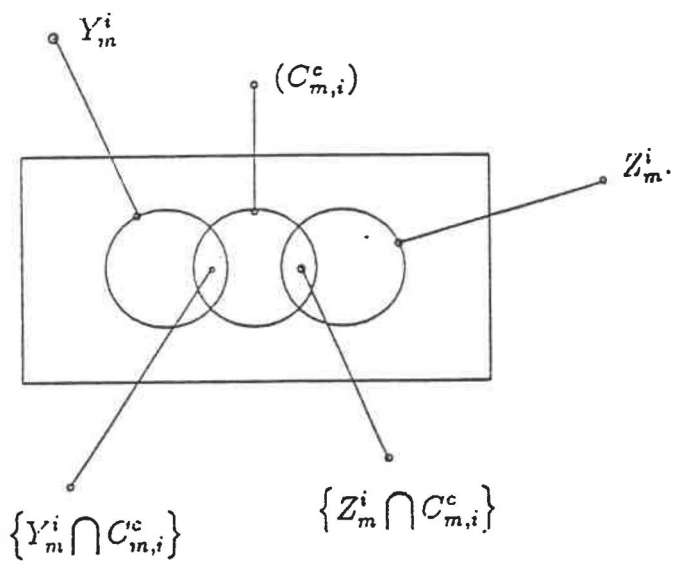


Figure 3.2: Localisation des ensembles Y^i_m *et* Z^i_m.

Nous en concluons que les encodeurs $G'(D) = [g_1^*(D) \quad g_2^*(D)]$ et $G''(D) = [g_2^*(D) \quad g_1^*(D)]$ qui appartiennent à Z_m^i(ou Y_m^i) sont aussi catastrophiques puisqu' il existe un diviseur commun $(P^*(D))$ entre $g_1^*(D)$ et $g_2^*(D)$ de degré supérieur à "1".

C.Q.F.D.

On peut donc représenter la classe des encodeurs catastrophiques comme l'union de trois ensembles disjoints:

$$C_{m,i}^c = \left(Y_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right) \bigcup \left(Z_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right) \bigcup C_{m,i}^{cr} \tag{3.32}$$

où $C_{m,i}^{cr}$ est la classe des encodeurs catastrophiques possédant des générateurs auto-réciproques et que nous étudierons plus en détail à la section suivante. De la relation (3.32) nous obtenons les nombres cardinaux suivants:

$$\#C_{m,i}^c = \#\left(Y_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right) + \#\left(Z_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right) + \#C_{m,i}^{cr}.$$

En utilisant la relation (3.31) nous obtenons:

$$\#C_{m,i}^c = 2 * \left(\#\left(Y_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right)\right) + \#C_{m,i}^{cr}$$

$$\Longrightarrow \#\left(Y_m^i \bigcap C_{m,i}^c\right) = \#\left\{\left(C_{m,i} - C_{m,i}^s\right) \bigcap C_{m,i}^c\right\} = \frac{\#C_{m,i}^c - \#C_{m,i}^{cr}}{2} \tag{3.33}$$

Le nombre cardinal $C_{m,i}^{cr}$ est donc nécessaire pour pouvoir calculer $\#\{(C_{m,i} - C_{m,i}^s) \bigcap C_{m,i}^c\}$.

3.3.2 Nombres cardinaux des classes $C_{m,i}^{cr}$, $i = 1, 2$

$C_{m,i}^{cr}$ est la classe des encodeurs catastrophiques dont les générateurs sont auto-réciproques. Pour calculer, son nombre cardinal nous allons utiliser la même

procédure de calcul que celle de $\#C^c_{m,i}$. Cependant, cette fois, nous utiliserons les encodeurs possédant des générateurs auto-réciproques et pour les facteurs communs nous allons prendre en consideration uniquement les polynômes auto-réciproques.

On rappelle que X^i_m représente la classe des encodeurs dont les générateurs sont auto-réciproques. C'est-à-dire que pour un encodeur quelconque $G(D) = [g_1(D) \quad g_2(D)] \in X^i_m \quad i = 1, 2$:

$$g_1(D) = g_1^*(D) \qquad g_2(D) = g_2^*(D) \ . \tag{3.34}$$

et pour la classe X^2_m:

$$g_1(D) = g_2^*(D) \ . \tag{3.35}$$

<u>**Notations**</u>

• On rappelle que P_{m-n} représente l'ensemble des polynômes $r(D)$ qui vérifient les proprietés suivantes:

$$\begin{cases} del\{r(D)\} = 0 \\ deg\{r(D)\} = m - n \\ r(D) = r^*(D) \end{cases} \tag{3.36}$$

Avec ces notations nous sommes en mesure d'énoncer la proposition (3.3) qui nous conduira à la détermination des cardinaux des classes $C^{cr}_{m,i}$.

Proposition 3.3 *Tous les encodeurs catastrophiques dans la classe $C^r_{n,i}$, $i = 1, 2$, s'obtiennent par union des ensembles disjoints constitués de tous les encodeurs dont les générateurs s'obtiennent par produit des élements de P_{m-n} et des générateurs de tous les encodeurs non catastrophiques de X^i_n pour $n = 1, 2, \cdots, m-1$. En d'autres termes, si $r^{m-n}_k(D)$; $k = 1, 2, \cdots, \#P_{m-n}$ représente un élement quelconque de P_{m-n} et $G^j_n(D)$; $j = 1, 2, \cdots, \#X^i_n - \#C^{cr}_{n,i} = j_n$ est un encodeur non*

catastrophique de X_n^i; alors on peut représenter $C_{n,i}^{cr}$ comme:

$$C_{n,i}^{cr} = \bigcup_{n=1}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{j_n} \bigcup_{k=1}^{\#P_{m-n}} \left\{ G_n^j(D) * r_k^{m-n}(D) \right\} \qquad i = 1 \ ou \ 2 \tag{3.37}$$

Démonstration: la démonstration est identique à celle de la proposition 3.2 au vocabulaire près.

Calcul du cardinal de $C_{m,i}^{cr}$:

Le cardinal $C_{m,i}^{cr}$ s'obtient immédiatement du résultat de la proposition (3.3)comme:

$$\#C_{m,i}^{cr} = \sum_{n=1}^{m-1} \#P_{m-n} * \left(\#X_n^i - \#C_{n,i}^{cr} \right) \qquad i = 1 \ ou \ 2 \tag{3.38}$$

En substituant les nombres cardinaux de X_m^1 et X_m^2 dans la formule (3.49), nous obtenons:

$$\boxed{\#C_{m,1}^{cr} = \sum_{n=1}^{m-1} \#P_{m-n} * \left(\#P_n * \sum_{i=0}^{n-1} \#P_i - \#C_{n,1}^{cr} \right)}, \tag{3.39}$$

$$\boxed{\#C_{m,2}^{cr} = \sum_{n=1}^{m-1} \#P_{m-n} * \left(\frac{(\#P_n)^2}{2} + 2^{n-2} - \#P_n - \#C_{n,2}^{cr} \right)}. \tag{3.40}$$

3.3.3 Récapitulation des formules

A partir des relations que nous avons trouvé tout au long de ce chapitre, nous sommes en mesure de calculer les nombres cardinaux des encodeurs non-catastrophiques excluant un des encodeurs jumeaux à générateurs réciproques (i.e.

$\#C^*_{m,i}$, $i = 1, 2$).

Les relations (3.30) et (3.33) nous amènent aux cardinaux de $C^*_{m,i}$ $i = 1$ *et* 2:

$$\boxed{\#C^*_{m,i} = \#C^s_{m,i} - \frac{\#C^c_{m,i} + \#C^{cr}_{m,i}}{2} \quad i = 1 \ et \ 2} \tag{3.41}$$

Où:

$\#C^s_{m,i} =$ Les nombres cardinaux des encodeurs excluant les encodeurs jumeaux à générateurs réciproques obtenus en (3.16) et (3.17):

$$\#C^s_{m,1} = 2^{2m-3} + \frac{\left[\#P_m . \sum_{i=0}^{m-1} \#P_i\right]}{2},$$

$$\#C^s_{m,1} = \begin{cases} 2^{2m-3} + 2^m - 2^{\frac{m}{2}} & m \ pair \\ 2^{2m-3} + 2^{m-1} + 2^{m-2} - 2^{\frac{m-1}{2}} & m \ impair \end{cases}$$

$$\#C^s_{m,2} = 2^{2m-4} + \frac{(\#P_m)^2}{4} - \frac{\#P_m}{2},$$

$$\#C^s_{m,2} = \begin{cases} 2^{2m-4} + 2^{m-2} - 2^{\frac{m-2}{2}} & m \ pair \\ 2^{2m-4} + 2^{m-3} - 2^{\frac{m-3}{2}} & m \ impair \end{cases}$$

$\#C^c_{m,i} =$ Les cardinaux des encodeurs catastrophiques obtenus en (3.28) et (3.29):

$$\#C^c_{m,1} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * (2^{2n-2} - \#C^c_{n,1})$$

$$\#C^c_{m,1} = 2^{2m-3} - 2^{m-2} - \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * \#C^c_{n,1}$$

$$\#C^{c}_{m,2} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * (2^{2n-3} - 2^{n-2} - \#C^{c}_{n,2})$$

$$\#C^{c}_{m,2} = 2^{2m-4} - 2^{m-4} - \sum_{n=1}^{m-1} 2^{m-n-1} * \#C^{c}_{n,2}$$

$\#C^{cr}_{m,i} =$ Les cardinaux des encodeurs catastrophiques parmi les encodeurs possédant des générateurs auto-réciproques obtenus en (3.39) et (3.40):

$$\#C^{cr}_{m,1} = \sum_{n=1}^{m-1} \#P_{m-n} * \left(\#P_n * \sum_{i=0}^{n-1} \#P_i - \#C^{cr}_{n,1} \right)$$

$$\#C^{cr}_{m,2} = \sum_{n=1}^{m-1} \#P_{m-n} * \left(\frac{(\#P_n)^2}{2} + 2^{n-2} - \#P_n - \#C^{cr}_{n,2} \right)$$

et $\#P_m =$ le cardinal de l'ensemble des polynômes auto-réciproques obtenus en (3.20).

$$\#P_m = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} & m \text{ pair} \\ 2^{\frac{m-1}{2}} & m \text{ impair} . \end{cases}$$

Chapitre 4

Résultats numériques

Ce chapitre a pour objet de présenter dans la première partie, les valeurs numériques correspondant aux formules obtenues dans le chapitre précédent. Plus spécificement, nous comparerons les populations des encodeurs des classes $C^c_{m,i}$ et $C^*_{m,i}$ $i = 1, 2$ par rapport à celles des classes $C_{m,i}$ $i = 1, 2$. La deuxième partie sera consacrée à examiner la distribution de la distance libre des classes $C^*_{m,1}$ et $C^*_{m,2}$ pour les valeurs de mémoire jusqu'à $m = 6$. Enfin nous représenterons quelques résultats experimentaux relatifs à la recherche de codes de distance libre maximale.

4.1 Applications numériques

Le tableau (4.1) représente les valeurs numériques des nombres cardinaux des classes d'encodeurs considérées au chapitre 3 obtenues par application des relations itératives résumées à la section 3.3.3. Ces résultats ont aussi été vérifiés à l'aide de recherche systématique sur l'ordinateur.

Afin de mieux comparer ces classes, les rapports de certaines populations ont été reportés sur des courbes en fonction de la valeur de la mémoire.

Les rapports $\frac{\#C^c_{m,i}}{\#C_{m,i}}$ $i = 1$ *et* 2 en fonction de la mémoire "m" sont representés sur la figure (4.1). Ils mettent en évidence la fraction des encodeurs catastrophiques

m	$C_{m,1}$	$C^c_{m,1}$	$C^s_{m,1}$	$C^*_{m,1}$
1	1	0	1	1
2	4	1	4	3
3	16	5	12	7
4	64	21	44	28
5	256	85	148	91
6	1024	341	568	368
7	4096	1365	2136	1387
8	16384	5461	8432	5568
9	65536	21845	33136	21931
10	262144	87381	132064	87808
11	1048576	349525	525792	349867

m	$C_{m,2}$	$C^c_{m,2}$	$C^s_{m,2}$	$C^*_{m,2}$
2	1	0	1	1
3	6	1	4	3
4	28	7	18	13
5	120	35	66	44
6	496	155	268	181
7	2016	651	1036	688
8	8128	2667	4152	2773
9	32640	10795	16440	10944
10	130816	43435	65776	43861
11	523776	174251	262384	174848

Tableau 4.1: Nombres cardinaux des classes d'encodeurs presentés au chapitre 3

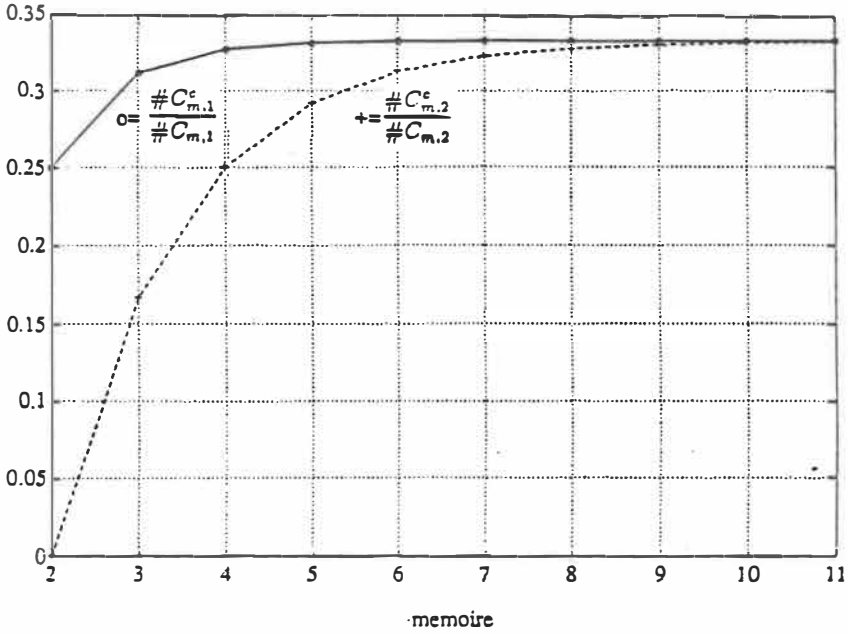


Figure 4.1: Les rapports $\frac{\#C^c_{m,i}}{\#C_{m,i}}$ $i = 1$ *et* 2 en fonction de la mémoire.

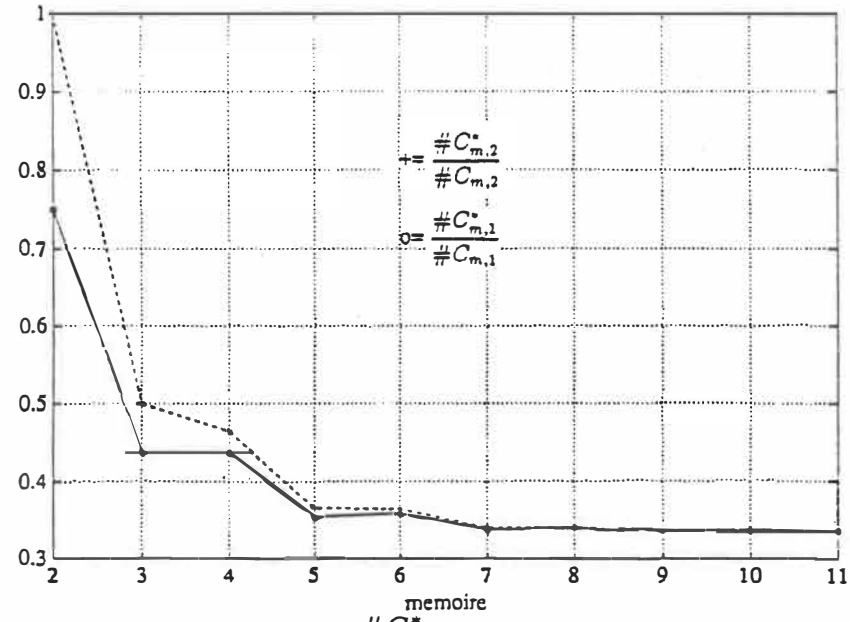


Figure 4.2: Les rapports $\frac{\#C^*_{m,i}}{\#C_{m,i}}$ $i = 1$ *et* 2 en fonction de la mémoire.

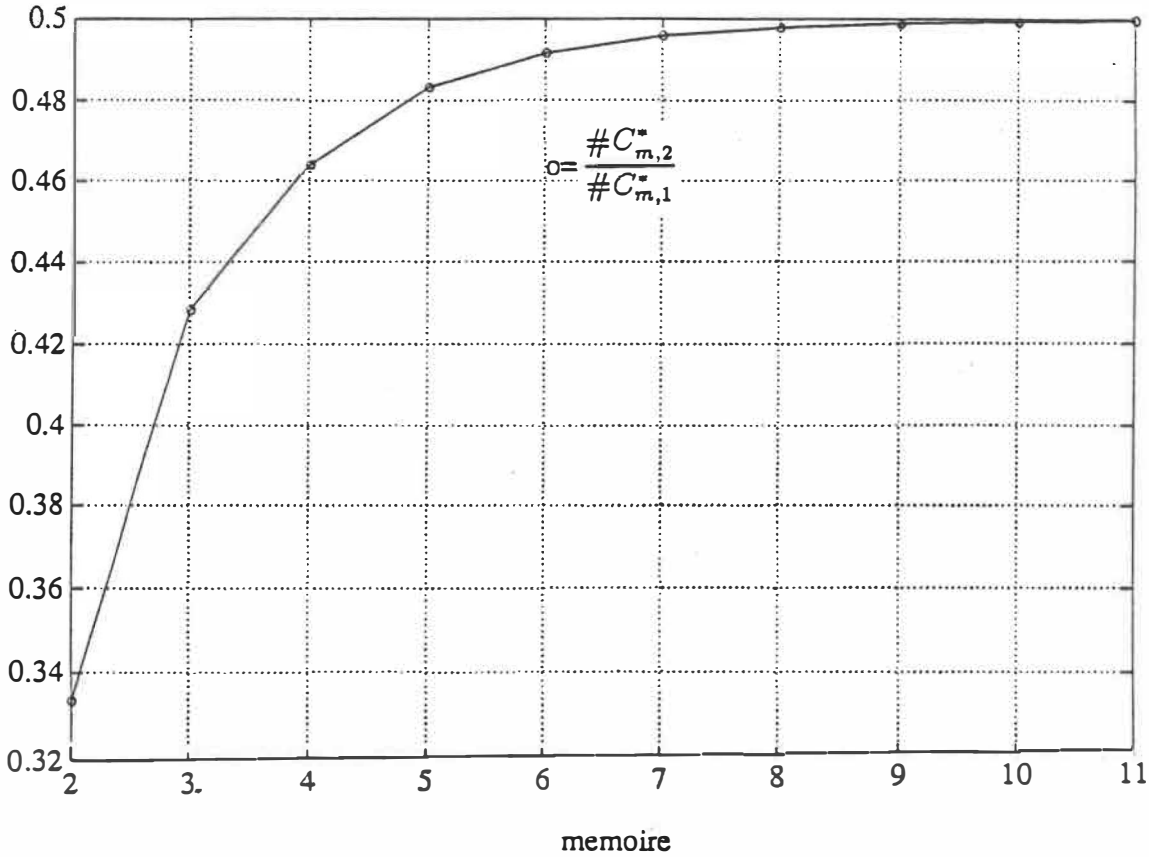


Figure 4.3: Les rapports $\frac{\#C^*_{m,2}}{\#C^*_{m,1}}$ en fonction de la mémoire.

parmi l'ensemble de tous les encodeurs des classes $C_{m,i}$ $i = 1$ *et* 2.

On remarque immédiatement que $\frac{C^c_{m,i}}{C_{m,i}}$, $i = 1$ *et* 2 , tendent rapidement vers la valeur $\frac{1}{3}$ lorsque la mémoire augmente. Il s'ensuit que asymptotiquement $\frac{1}{3}$ des encodeurs de chacune des classes sont catastrophiques.

De même, afin de mettre en évidence la fraction des encodeurs non catastrophiques et ne possédant pas des encodeurs jumeaux à générateur réciproque; i.e. la fraction des codes par rapport aux encodeurs, nous avons représenté sur la figure (4.2) les rapports des nombres cardinaux $\frac{\#C^*_{m,i}}{\#C_{m,i}}$, $i = 1$ *et* 2 , en fonction de la mémoire "m".

On remarque que ces rapports tendent aussi rapidement vers la valeurs $\frac{1}{3}$. On peut donc conclure que $\frac{1}{3}$ des encodeurs de la classe $C_{m,i}$ $i = 1, 2$ sont non catastrophiques et ne possédent pas d'encodeur jumeaux à générateur réciproque. La figure (4.3) représente le rapport des nombres cardinaux des encodeurs des classes $\frac{\#C^*_{m,2}}{\#C^*_{m,1}}$. Ce rapport tend vers la valeur $\frac{1}{2}$. Ceci implique que le nombre cardinal des codes de la classe $C^*_{m,2}$ est la moitié du nombre cardinal des codes de la classe $C^*_{m,1}$ pour $m \geq 7$. Cependant les codes de la classe $C^*_{m,2}$ sont en général meilleurs que ceux de la classe $C^*_{m,1}$.

4.2 Résultats expérimentaux

Nous avons vu au chapitre 2 que la distance libre " d_{free}" constitue le paramètre le plus important dans le calcul de la performance d'un code convolutionnel. De façon générale, pour une mémoire donnée de l'encodeur, plus " d_{free} " est grand et meilleur est le comportement du code en correction d'erreurs. L'extrème importance de ce paramètre nous a donc naturellement conduit à évaluer la distribution de la distance libre dans chaque classe $C^*_{m,i}$ $i = 1, 2$.

Cependant, la croissance exponentielle des nombres cardinaux des codes des classes $C^*_{m,i}$, $i = 1, 2$, (représentés sur la figure (4.4)) avec la mémoire nous a limité

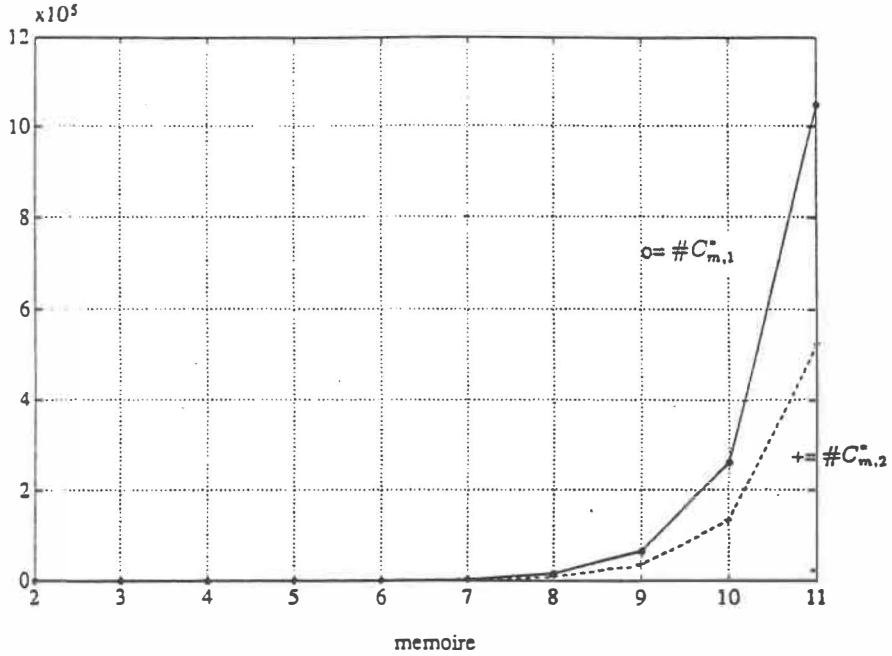


Figure 4.4: Nombres cardinaux des classes $C^*_{m,1}$ *et* $C^*_{m,2}$

d_{free}	$C^*_{2,1}$	$C^*_{2,2}$
3	1	0
4	2	0
5	0	1

d_{free}	$C^*_{4,1}$	$C^*_{4,2}$
3	1	0
4	7	0
5	11	2
6	9	8
7	0	3

d_{free}	$C^*_{6,1}$	$C^*_{6,2}$
3	1	0
4	12	0
5	26	3
6	91	24
7	122	39
8	106	91
9	10	22
10	0	2

d_{free}	$C^*_{3,1}$	$C^*_{3,2}$
3	1	0
4	3	0
5	2	1
6	1	2

d_{free}	$C^*_{5,1}$	$C^*_{5,2}$
3	1	0
4	4	0
5	18	2
6	38	6
7	21	19
8	9	17

Tableau 4.2: Distributions de la distance libre des encodeurs des classes $C^*_{m,i}$ $i = 1, 2$ jusqu'à la mémoire 6.

dans l'évaluation de la distribution de la distance libre pour $m \leq 6$. Les tableaux (4.2) illustrent la distributions de la distance libre pour les classes $C^*_{m,i}$ $i = 1, 2$ pour les valeurs de mémoire 2,3,4,5,6.

On remarque que pour la plus grande valeur de distance libre possible, le nombre des encodeurs appartenant à la classe $C^*_{m,2}$ $m \leq 6$ est nettement plus grand que celui de la classe $C^*_{m,1}$ $m \leq 6$. Cette remarque et le fait que le nombre cardinal de la classe $C^*_{m,2}$ soit plus petit que celui de $C^*_{m,1}$ (figure (4.3)) sont les deux raisons pour lesquelles nous nous sommes volontairement restreints à la classe $C^*_{m,2}$ pour la recherche des codes possédant la distance libre maximale. La conjecture suivante (résultat de recherches systématiques sur l'ordinateur) nous permet de limiter la recherche de codes possédant d_{free} maximum, à une classe contenant moins d'élements que $C^*_{m,2}$.

Conjecture 4.1 *Etant donnée la distance libre "d_{free} ", il existe au moins un encodeur convolutionnel dans la classe $C^*_{m,2}$ tel que la somme des poids de ses générateurs soit égale à "d_{free} ".*

En d'autres termes, il y a au moins un encodeur tel que la somme des poids de sa reponse impulsionnelle coincide avec la distance libre "d_{free}".

La valeur optimum de la distance libre s'obtient à l'aide de la borne supérieure de Heller:

$$d_{free} \leq \min_{1 \leq n} \left[\frac{2^n}{2^n - 1} (m + n) \right] \tag{4.1}$$

Le tableau (4.3) illustre les résultats de la recherche de codes de taux $\frac{1}{2}$ possédant le d_{free} maximum et vérifiant la condition de la conjecture (4.1).

On dénote $C^j_{m,2}$, $j = 1, 2, \cdots, 2m - 1$, la sous-classe de $C_{m,2}$, qui posséde tous les encodeurs ayant "j" comme la somme de poids de ses générateurs. Le nombre cardinal de la sous-classe $C^j_{m,2}$ se calcule à partir de la formule ci-dessous:

$k = m + 1$	$g_1(D)(octal)$	$g_2(D)(octal)$	d_{free}
3	5	7	5
4	13	15	6
5	31	35	7
6	61	75	8
7	171	133	10
8	247	361	10
9	561	753	12
10	1167	1541	12
11	2335	3661	14
12	4335	5723	15
13	10533	17661	16
14	21675	27023	16
15	55367	63121	18
16	111653	145665	19
17	347241	246277	20
18	506477	673011	20

Tableau 4.3: Codes possèdant le "d_{free}" maximum et vérifiant la condition de la conjecture (4.1)

si " j " représente la somme de poids des générateurs , on a:

$$\#C^{j}_{m,2} = \#C^{2m+6-j}_{m,2}$$

$$\#C^{j}_{m,2} = \sum_{i=1}^{i_j} T_i + \eta(j) \qquad j \leq m+3$$

$$où\ i_j = \begin{cases} \dfrac{j-4}{2} & j\ pair \\ \dfrac{j-3}{2} & j\ impair \end{cases} \qquad T_i = \binom{i-1}{m-1} * \binom{j-i-3}{m-1}$$

$$\eta(j) = \begin{cases} \dfrac{\left(\binom{j-1}{m-1} - 1\right) * \binom{j-1}{m-1}}{2} & j\ pair \\ 0 & j\ impair \end{cases}$$

A titre d'exemple les 2016 encodeurs de la classe $C_{7,2}$ peuvent être classifiés en fonction de la somme des poids de ces générateurs "j" de la façon suivante :

j	$\#C^{j}_{7,2}$	j	$\#C^{j}_{7,2}$
5	6	11	396
6	30	12	240
7	110	13	110
8	240	14	30
9	396	15	6
10	452		

Chapitre 5

Conclusion

Cette recherche avait pour but d'énumérer des classes d'encodeurs convolutionnels dans le but d'identifier les codes convolutionnels distincts de taux $R = \frac{1}{2}$. Dans son ensemble, ce mémoire comporte les principaux points suivants.

A) Nous avons défini par le vocable " énumération des codes ", la détermination du nombre cardinal de la classe de tous les encodeurs minimaux générant les codes de spectre de poids distinct.

B) Par l'utilisation adéquate des propositions du chapitre 2 qui spécifient les caractéristiques des encodeurs générant les codes de spectre de poids identique, nous avons pu identifier dans deux classes mères distinctes les sous-classes d'encodeurs générant les codes à spectre de poids distinct.

C) L'identification des encodeurs catastrophiques nous a aussi permis de calculer les nombres cardinaux des classes d'encodeurs catastrophiques.

D) En parallèle, nous avons proposé une conjoncture qui nous a permis de générer dans un temps raisonnable et pour de très grande longueur de contrainte des codes

de taux $R = \frac{1}{2}$ de distance libre maximale. La démonstration de cette conjoncture et extension de la procédure d'énumération des codes de taux $R = \frac{1}{v}$, $v \geq 3$, sont des extensions naturelles de ce travail.

La procédure envisagable pourrait être la suivante. Étant donnée une valeur m de la mémoire, nous suggerons de classifier les encodeurs de taux $R = \frac{1}{v}$, $v \geq 3$, dans v classes mères distinctes dont "i" générateurs (supposés tous de délai zéro) possèdent le degré "m" et les "$v - i$" autres générateurs (de délai zéro) restant possèdent un degré maximal inferieur à "m" pour $i = 1, 2, \cdots, v$. Il apparait en première vue, que l'identification et l'énumération des encodeurs catastrophiques ainsi que ceux qui générent des codes de spectre de poids distincts de taux $R = \frac{1}{v}$, $v \geq 3$, puissent être menées suivant des procédures semblables à celles proposées dans ce mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

Con 1 J. Conan, D. Haccoun, J. Chamas, " *On the Equivalence of Convolutional Codes and Encoders* ", paper presented at the IEEE International Symposium on Theory, Grignano, Italy, June 1979.

Con 2 J. Conan, "*Structural Properties of Convolutional Codes: An Algorithmic Approch with Applications to Linear Multivariable System Theory*", Ph.D. Thesis, Depart. of Elect. Eng., McGill University, Montreal, November 1980.

Con 3 J. Conan, C. Fiouzi, "*On the Enumeration and Generation of Rate $\frac{1}{2}$ Convolutional codes*", paper presented at Fourteanth Biennial Symposium on Communications, May 1988.

Con 4 J. Conan, "*Private notes on Enumeration of Convolutional Codes*".

For G.D. Forney Jr., "*Structural Analysis of Convolutional Codes Via Dual Codes*", IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT. 19, pp 512-518, 1973.

Lar K.J. Larsen, "*Short Convolutional Codes with Maximal Free Distance for Rate $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$*", IEEE Trans. on Inf. Theory, Vol. IT-19, Mai 1973.

Mas J.L. Massey, M.K. Sain, "*Inverses of Linear Sequential Circiuts*", IEEE Trans. Computers, Vol. C-17, pp 330-337, April 1968.

Mon P. Montreuil, "*Algorithmes de Determination de Spectres des Codes Convolutionnels*", Mémoire de Maitrise, Ecole Polytechnique de Montreal, Février

1987.

Pas E. Passke, "*Short Binary Convolutionnal Codes with Maximal Free Distance for Rates* $\frac{2}{3}$ *and* $\frac{3}{4}$", IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-20, pp. 683-688, Sept. 1974.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00290801 8