

Titre: Simulation numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens
Title:

Auteur: Daniel Côté
Author:

Date: 1989

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Côté, D. (1989). Simulation numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens
Citation: [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/57943/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/57943/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE D'ÉCOULEMENTS
DE FLUIDES NON-NEWTONIENS

par

Daniel CÔTÉ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)

Août 1989

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58168-9

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé:

SIMULATION NUMÉRIQUE D'ÉCOULEMENTS
DE FLUIDES NON-NEWTONIENS

présenté par: Daniel Côté

en vue de l'obtention du grade de: M. Sc. A.

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Pierre Lafleur , Ph.D., président

M. Philippe A. Tanguy , Ph.D.

M. André Fortin , Ph.D.

Sommaire

Le but de ce projet de maîtrise est de résoudre numériquement des écoulements de fluides non-newtoniens. Pour que la simulation numérique soit la plus générale possible, on permet l'imposition d'une condition de frottement à la paroi. Le modèle mathématique qu'on utilise pour représenter le comportement de cette condition possède un seuil de contrainte au glissement. Ceci implique qu'il y a adhérence lorsque la contrainte de frottement à la paroi est plus petite que le seuil et glissement lorsqu'elle est plus grande.

Plus particulièrement, on étudie l'écoulement d'un fluide de Bingham. Ce type de substance possède un seuil de contrainte à la déformation. On choisit d'utiliser la méthode des éléments finis pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui caractérisent cet écoulement. La présence du fluide de Bingham et du modèle de frottement énoncé plus haut nécessite la résolution d'une inéquation variationnelle qu'on traite à l'aide de la méthode du Lagrangien augmenté.

Les résultats numériques obtenus sur le frottement montrent qu'il est possible d'avoir adhérence et glissement sur des régions différentes d'une même paroi. De plus, pour l'écoulement d'un fluide de Bingham dans un tube, on montre qu'il est possible d'avoir un profil de vitesse plat à travers toute la section du tube sans que la perte de charge soit nulle. Finalement, on réussit à reproduire numériquement des résultats expérimentaux obtenus dans un rhéomètre à capillaire.

Abstract

The partial differential equations which characterize a non-Newtonian fluid flow are solved numerically with the finite element method. The boundary condition normally imposed in problems involving fluid flows is wall adherence. In this work, we allow the imposition of a more general boundary condition called wall friction. The mathematical model used to represent this boundary condition has a shear-stress threshold. This means that when the wall shear-stress is smaller than the threshold value, the fluid adheres to the wall and we recover the classical adherence condition. But when the wall shear-stress is greater than the threshold value, the fluid is allowed to slip along the wall with a given friction coefficient. The implementation of this particular behavior produce a variational inequality treated by the augmented Lagrangian method. With this boundary condition, we are able to reproduce experimental results obtained in a capillary rheometer.

Remerciements

Je tiens à remercier M. André Fortin, du département de mathématiques appliquées de l'École Polytechnique de Montréal, qui a su guider ce projet de maîtrise tout au long de sa réalisation et qui a apporté le support financier.

J'aimerais aussi exprimer ma reconnaissance à M. Philippe A. Tanguy, du département de génie chimique de l'université Laval, qui a fourni le logiciel de base dans lequel l'implantation d'une condition de frottement à la paroi a été réalisée et qui a également contribué au support financier.

Je remercie enfin le département de mathématiques appliquées de l'École Polytechnique de Montréal pour m'avoir donné accès à ses équipements informatiques et aux logiciels de préparation de documents.

Table des matières

Sommaire	iv
Abstract	v
Remerciements	vi
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	x
Liste des symboles	xi
Introduction	1
1 Formulation variationnelle	4
1.1 Notation	4
1.2 Enoncé du problème	6
1.3 Inéquation variationnelle	10
2 Méthode du Lagrangien augmenté	17
2.1 Fonctionnelle d'optimisation	18
2.2 Contraintes artificielles	20

2.3	Optimisation	22
2.4	Discrétisation	28
2.5	Algorithme itératif	29
3	Ecoulement dans un tube	32
3.1	Position du problème	32
3.2	Champ de vitesse	34
3.3	Solution analytique	37
3.3.1	Fluide newtonien	38
3.3.2	Fluide de Bingham	39
3.3.3	Loi de puissance	41
4	Résultats numériques	44
4.1	Ecoulement dans un tube	45
4.2	Ecoulement dans une contraction conique	49
4.3	Ecoulement dans une contraction abrupte	51
	Conclusion	64
	Bibliographie	66
A	Les fonctions $f(x) = \left[a + \frac{b}{ x } \right] x$ et $g(x) = \frac{a}{2} x ^2 + b x - (\tau, x)$	68
A.1	Minimisation de la fonction $g(x)$	69
A.2	Inversion de l'expression $\tau = f(x)$	70

Liste des figures

3.1	Géométrie d'un écoulement dans un tube	33
3.2	Comportement d'une loi de puissance	43
4.1	Géométrie d'un tube	55
4.2	Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 1.0 Pa < \tau_0$)	55
4.3	Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 2.0 Pa = \tau_0$)	56
4.4	Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 3.0 Pa > \tau_0$)	56
4.5	Géométrie d'une contraction conique	59
4.6	Vitesse de glissement à la paroi d'une contraction conique (l'origine est située à l'entrée)	59
4.7	Profil de vitesse à la sortie d'une contraction conique	60
4.8	Géométrie d'une contraction abrupte	61
4.9	Courbe expérimentale de comportement du frottement à la paroi	61
4.10	Région linéaire de la courbe de comportement illustrée à la figure 4.9	62
4.11	Graphique de $\log \tau_a$ versus $\log \dot{\gamma}_a$ avec et sans glissement	62
4.12	Vitesse de glissement à la paroi dans la sortie d'une contraction abrupte (l'origine est située à la contraction)	63

Liste des tableaux

4.1	Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 1.0 Pa < \tau_0$)	57
4.2	Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 2.0 Pa = \tau_0$)	57
4.3	Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 3.0 Pa > \tau_0$)	57
4.4	Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 1.0 Pa < \tau_0$)	58
4.5	Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 2.0 Pa = \tau_0$)	58
4.6	Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 3.0 Pa > \tau_0$)	58
4.7	Validation des résultats numériques obtenus à la sortie d'une contraction conique (nombre d'itérations = 12)	60
4.8	Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'une contraction abrupte	63

Liste des symboles

Caractères romains

- \mathbf{a} Vecteur défini par $a_y [\mathbf{y}_u + r_y \mathbf{w}_u]$
- a_q, a_λ, a_y Fonctions de mise à l'échelle des multiplicateurs de Lagrange: q , λ , et \mathbf{y}_v
- $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ Fonctionnelle bilinéaire sous forme variationnelle
- \mathbf{b} Vecteur défini par $a_y [-\mathbf{y}_u + r_y \mathbf{u}_t]$
- $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ Forme variationnelle du terme d'inertie
- c_f Coefficient de friction
- f Force externe
- f Modèle de frottement
- g Seuil de contrainte au glissement
- $H^1(\Omega)$ Sous espace de $L^2(\Omega)$ qui contient toutes les fonctions dont les dérivées sont de carré sommable sur Ω
- $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Sous espace de $L^2(\Gamma)$ qui contient la trace sur Γ de toutes les fonctions de $H^1(\Omega)$
- $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Dual de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$J(\mathbf{v})$	Fonctionnelle quadratique
$j(\mathbf{v})$	Fonctionnelle non-différentiable sous forme variationnelle
K	Exponentielle de l'ordonnée à l'origine du graphique $\log \tau_a$ versus $\log \dot{\gamma}_a$ d'une loi de puissance
K_a	Paramètre K apparent lorsqu'il y a glissement
K_u	Ensemble de variables: $\{\mathbf{u}, p, \sigma_u, \lambda_u, \mathbf{w}_u, \mathbf{y}_u\}$
K_v	Ensemble de variables: $\{\mathbf{v}, q, \sigma_v, \lambda_v, \mathbf{w}_v, \mathbf{y}_v\}$
L	Longueur d'un tube
L_e	Longueur de l'entrée d'une contraction
L_c	Longueur d'une contraction
L_s	Longueur de la sortie d'une contraction
$L(\mathbf{v}, q)$	Lagrangien de la fonctionnelle $J(\mathbf{v})$
$L_r(\mathbf{v}, q)$	Lagrangien augmenté de $L(\mathbf{v}, q)$
$L^2(\Omega)$	Espace qui contient toutes les fonctions dont le carré est sommable sur Ω
$\mathcal{L}_r(K_v)$	Lagrangien augmenté de $L_r(\mathbf{v}, q)$ soumis aux contraintes supplémen- taires: $\{\sigma_v - \dot{\gamma}(\mathbf{v}) = 0\}$ et $\{\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t = 0\}$
$l(\mathbf{v})$	Fonctionnelle linéaire sous forme variationnelle
m	Premier paramètre d'une loi de puissance
N	Nombre de dimensions du domaine de résolution
\mathbf{n}	Vecteur unitaire normal à la paroi
n	Deuxième paramètre d'une loi de puissance

n_a	Paramètre n apparent lorsqu'il y a glissement
p	Pression hydrostatique
Q	Débit dans un tube
q	Multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\{(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0\}$
R	Rayon d'un tube
R_e	Rayon à l'entrée d'une contraction
R_s	Rayon à la sortie d'une contraction
r	Composante du système de coordonnées cylindriques
r_c	Rayon critique de déformation pour un fluide de Bingham
r_q, r_λ, r_ν	Facteurs de pénalisation des contraintes: $\{(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0\}$, $\{\sigma_\nu - \dot{\gamma}(\mathbf{v}) = 0\}$ et $\{\mathbf{w}_\nu - \mathbf{v}_t = 0\}$
s	Projection du tenseur σ sur le vecteur unitaire normal à la paroi
s_t	Vecteur tangent de s à la paroi
s_n	Composante normale de s à la paroi
t	Projection du tenseur τ sur le vecteur unitaire normal à la paroi
t_t	Vecteur tangent de t à la paroi (contrainte de cisaillement à la paroi)
t_n	Composante normale de t à la paroi
u	Champ de vitesse
u_t	Vecteur tangent de u à la paroi (vitesse de glissement à la paroi)
u_n	Composante normale de u à la paroi
u_0	Vitesse du profil plat imposée à l'entrée d'un tube ou d'une contraction
u_R	Vitesse de glissement à la paroi dans un tube

u_m	Vitesse maximum du profil dans un tube
u_z	Composante z du vecteur \mathbf{u} (champ de vitesse dans un tube)
$V(\Omega)$	Sous espace de $[H^1(\Omega)]^N$ qui contient toutes les fonctions tests possibles
\mathbf{v}	Fonction test de la formulation variationnelle
\mathbf{v}_t	Vecteur tangent de \mathbf{v} à la paroi
\mathbf{v}_n	Composante normale de \mathbf{v} à la paroi
\mathbf{w}	Fonction test de la formulation variationnelle
\mathbf{w}_t	Vecteur tangent de \mathbf{w} à la paroi
\mathbf{w}_n	Composante normale de \mathbf{w} à la paroi
$\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_v$	Variables correspondant aux contraintes: $\{\mathbf{w}_u - \mathbf{u}_t = 0\}$ et $\{\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t = 0\}$
$\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v$	Multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes: $\{\mathbf{w}_u - \mathbf{u}_t = 0\}$ et $\{\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t = 0\}$
z	Composante du système de coordonnées cylindriques

Caractères grecs

α	Tenseur défini par $a_\lambda \left[\lambda_u + \frac{r_\lambda}{2} \sigma_u \right]$
β	Tenseur défini par $a_\lambda \left[-\lambda_u + \frac{r_\lambda}{2} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \right]$
Γ	Frontière du domaine Ω
Γ_1	Première partie de la frontière Γ
Γ_2	Deuxième partie de la frontière Γ
$\dot{\gamma}$	Vitesse de déformation
$\dot{\gamma}_a$	Norme de la vitesse de déformation apparente dans un tube

$\dot{\gamma}_{af}$	Vitesse de déformation apparente causée par le fluide dans un tube
$\dot{\gamma}_{ag}$	Vitesse de déformation apparente causée par le glissement dans un tube
$\dot{\gamma}_a^e$	Vitesse de déformation apparente dans l'entrée d'une contraction où l'écoulement est établi
$\dot{\gamma}_a^s$	Vitesse de déformation apparente dans la sortie d'une contraction où l'écoulement est établi
$\dot{\gamma}_a^{cd}$	Débit critique de déformation dans un tube
$\dot{\gamma}_a^{cg}$	Débit critique de glissement dans un tube
$\dot{\gamma}_{rz}$	Composante rz du tenseur $\dot{\gamma}$ (vitesse de déformation dans un tube)
Δp	Perte de charge par unité de longueur dans un tube
η	Modèle rhéologique pour la viscosité
λ_u, λ_v	Multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes: $\{\sigma_u - \dot{\gamma}(u) = 0\}$ et $\{\sigma_v - \dot{\gamma}(v) = 0\}$
μ	Viscosité d'un fluide newtonien
μ_0	Viscosité d'un fluide de Bingham
ρ	Densité d'un fluide
σ	Tenseur de contraintes
σ_u, σ_v	Variables supplémentaires correspondant aux contraintes: $\{\sigma_u - \dot{\gamma}(u) = 0\}$ et $\{\sigma_v - \dot{\gamma}(v) = 0\}$
τ	Contrainte de cisaillement
τ_0	Seuil de contrainte à la déformation d'un fluide de Bingham
τ_a	Norme de la contrainte de cisaillement à la paroi dans un tube

τ_R	Contrainte de cisaillement à la paroi dans un tube
τ_{rz}	Composante rz du tenseur τ (Contrainte de cisaillement dans un tube)
Ω	Domaine de résolution

Introduction

Les méthodes numériques sont maintenant largement utilisées dans plusieurs domaines de l'ingénierie et sont devenues un outil très important dans l'étude de la dynamique des fluides. L'intérêt principal de toute modélisation est de reproduire numériquement le comportement d'un phénomène physique particulier, le plus précisément possible. Les algorithmes numériques déjà existants, sur la résolution d'écoulements de fluides, imposent généralement une condition d'adhérence à la paroi. Ce type de conditions frontières est valable dans la plupart des applications concernant les écoulements de fluides newtoniens, mais pour les écoulements de fluides non-newtoniens, on observe parfois la présence d'une vitesse de glissement à la paroi qui a pour effet d'influencer considérablement le comportement du fluide. L'apparition de ce phénomène semble dépendre de l'interaction du fluide avec la paroi, quoique pour des contraintes de cisaillement à la paroi élevées, on ne devrait pas s'attendre à ce qu'il y ait adhérence. Pour avoir des algorithmes généraux, il faut donc trouver un moyen efficace d'incorporer les conditions frontières dans l'énoncé du problème au même titre que les modèles rhéologiques et les équations aux dérivées partielles. (voir Schowalter [1]).

Dans ce mémoire, nous étudions plus particulièrement la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une condition de frottement à la paroi. On utilise la méthode des éléments finis pour résoudre les équations aux

dérivées partielles et la méthode du Lagrangien augmenté pour tenir compte des difficultés apportées par la présence d'un fluide non-newtonien et d'une condition de frottement à la paroi. La méthodologie employée est générale et peut s'appliquer à plusieurs modèles rhéologiques et modèles de frottement. Le choix du fluide de Bingham provient du fait que ce type de substance est susceptible de produire de très fortes contraintes de cisaillement à la paroi. On utilise le terme "condition de frottement à la paroi" plutôt que "condition de glissement à la paroi" parce que les lois de comportement qui modélisent ce phénomène expriment la contrainte de cisaillement à la paroi t_t en fonction de la vitesse de glissement à la paroi u_t . Comme pour les lois de comportement des fluides, la condition de frottement à la paroi se divise en deux catégories, soit la loi de comportement linéaire:

$$t_t = -c_f u_t$$

où c_f est le coefficient de friction et la loi de comportement non-linéaire:

$$t_t = -f(|u_t|) u_t$$

où $f(|u_t|)$ est le modèle de frottement. En inversant la loi de comportement d'une condition de frottement à la paroi, on obtient une loi de comportement inverse qui caractérise une condition de glissement à la paroi.

Les lois de comportement du frottement à la paroi énoncées plus haut impliquent l'existence d'une vitesse de glissement réelle sur la paroi. Mais physiquement, le phénomène de glissement peut être expliqué à l'aide d'une autre hypothèse qui considère que la vitesse du fluide à la paroi augmente de zéro à une valeur finie à l'intérieur d'une couche très mince (plus petite que $1\mu m$). Cette dernière hypothèse correspond à ce qu'on appelle une condition de glissement apparent (voir Müeller-Löbl-Schauerte [2]). Dans ce cas, il n'est pas plausible de relier la

contrainte de cisaillement t_t à la vitesse de glissement u_t puisqu'il n'y a pas vraiment de loi de comportement. Il semble que les deux hypothèses sont vérifiées par différents fluides. Dans les polymères fondus, le glissement réel se produit mais pour les polymères en solution, le glissement est seulement apparent (voir Yoshimura-Prud'homme [3]). Dans tous les cas, il est plus commode numériquement de considérer le glissement réel. La présence d'une couche très mince sur la paroi rend la discrétisation du domaine très difficile. Le glissement réel peut alors être utilisé dans des problèmes où physiquement le glissement apparent se produit si on considère la couche comme suffisamment mince.

Dans une première lecture de ce mémoire, il est possible de se familiariser avec la situation en prenant connaissance des sections 1.1 et 1.2 du chapitre 1 et ensuite de passer directement au chapitre 3. La section 1.3 du chapitre 1 et le chapitre 2 contiennent le développement complet de la méthode utilisée pour faire la simulation numérique. Les résultats numériques sont présentés au chapitre 4. Ils consistent principalement à valider la méthode à l'aide de problèmes-tests et à reproduire les résultats expérimentaux obtenus par Ramamurthy [4].

Chapitre 1

Formulation variationnelle

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la simulation numérique d'écoulements de fluides non-newtoniens nécessite la détermination d'une formulation variationnelle. Le terme "formulation variationnelle" est employé pour désigner la formulation faible d'une équation différentielle obtenue lorsqu'on l'exprime sous une forme intégrale équivalente en transposant la différentiation de la variable dépendante sur une fonction test (voir Reddy [5]).

1.1 Notation

Les variables physiques utilisées pour l'étude de l'écoulement d'un fluide non-newtonien peuvent être divisées en trois catégories, soient les scalaires, les vecteurs et les tenseurs. On distingue ces variables en utilisant la notation suivante:

s = scalaire (caractère en italique),

\mathbf{u} = vecteur (caractère romain en italique avec emphase),

$\boldsymbol{\tau}$ = tenseur (caractère grec en italique avec emphase).

Pour les vecteurs et les tenseurs, il existe plusieurs types de multiplications. Le résultat de ces opérations peut produire des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs. De façon à clarifier la notation, on utilise différents types de parenthèses. La forme des parenthèses indique le type de variable que produit la multiplication:

$$() = \text{scalaire,}$$

$$[] = \text{vecteur,}$$

$$\{\} = \text{tenseur.}$$

Les seules opérations où la forme des parenthèses a une importance sont les multiplications où \cdot , $:$ et \times apparaissent. Il existe plusieurs autres types d'opérations possibles entre les scalaires, les vecteurs et les tenseurs. Les appendices A de Bird-Stewart-Lightfoot [6] et Bird-Armstrong-Hassager [7] sont très enrichissantes à ce point de vue.

Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont des vecteurs, on définit alors

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u_i v_i \quad \text{comme le produit scalaire et}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} \quad \text{comme la norme.}$$

Si $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont des tenseurs, on définit alors

$$(\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma}) = \tau_{ij} \sigma_{ji} \quad \text{comme le produit scalaire et}$$

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau})} \quad \text{comme la norme.}$$

Soit un vecteur unitaire \mathbf{n} normal à une surface Γ quelconque. Tout vecteur \mathbf{u} sur Γ peut alors être divisé en une composante normale et un vecteur tangent:

$$\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + \mathbf{u}_t = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{u}_t.$$

La composante tangentielle du vecteur \mathbf{u} ne peut pas être déterminée puisque de façon générale, dans le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{n} , on ne peut pas trouver de vecteur unitaire tangent unique sans utiliser le vecteur \mathbf{u} .

1.2 Enoncé du problème

Soit un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , borné et de frontière Γ régulière où l'on cherche à déterminer les caractéristiques de l'écoulement d'un fluide non-newtonien (Bingham) avec une condition de frottement à la paroi.

On considère alors les équations qui caractérisent l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans Ω :

Conservation de la masse

$$(1.1) \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$(1.2) \quad \rho [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] = [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] - \nabla p + \mathbf{f}$$

On note par \mathbf{u} la vitesse de l'écoulement, ρ la densité du fluide, $\boldsymbol{\tau}$ la contrainte de cisaillement, p la pression hydrostatique et \mathbf{f} la force externe. Pour pouvoir associer aux équations (1.1) et (1.2) une formulation variationnelle au sens classique, on néglige temporairement le terme d'inertie $[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]$.

Pour les fluides non-newtoniens, la contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ est reliée à la vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$ par un modèle rhéologique $\eta(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|)$:

$$(1.3) \quad \boldsymbol{\tau} = 2\eta(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$$

où le tenseur $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$ s'écrit

$$(1.4) \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^\dagger]$$

et $\nabla \mathbf{u}$ est défini par

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

L'équation (1.3) est appelée la loi de comportement d'un fluide non-newtonien.

On veut étudier plus particulièrement le comportement d'un fluide de Bingham, soit donc la loi de comportement suivante:

$$(1.5) \quad \boldsymbol{\tau} = 2 \left[\mu_0 + \frac{\tau_0}{2|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|} \right] \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}).$$

Les constantes positives μ_0 et τ_0 sont respectivement la viscosité et le seuil de contrainte à la déformation. Dans cette équation, si $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})| = 0$, la contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ est indéterminée. Afin de pouvoir interpréter l'équation (1.5), il est plus avantageux de l'exprimer sous sa forme inverse (voir section A.2). La loi de comportement devient alors

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = 0 & \text{si } |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0 \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\mu_0} \left[1 - \frac{\tau_0}{|\boldsymbol{\tau}|} \right] \boldsymbol{\tau} & \text{si } |\boldsymbol{\tau}| \geq \tau_0. \end{cases}$$

Le fluide ne subit donc aucune déformation tant que la contrainte appliquée $|\boldsymbol{\tau}|$ n'exède pas τ_0 . Lorsque la contrainte $|\boldsymbol{\tau}|$ est plus grande que τ_0 , le fluide se déforme suivant une viscosité μ_0 finie. Ceci implique que dans l'écoulement il existe des régions où le fluide se comporte comme un solide et d'autres où il se comporte comme un liquide.

Les conditions imposées sur la frontière Γ sont divisées en deux parties, soit une condition de Dirichlet sur Γ_1 et une condition de frottement à la paroi sur Γ_2 . Pour la condition de frottement à la paroi, la contrainte de cisaillement \mathbf{t}_t est reliée à la vitesse de glissement \mathbf{u}_t par un modèle de frottement $f(|\mathbf{u}_t|)$:

$$(1.7) \quad \mathbf{t}_t = -f(|\mathbf{u}_t|) \mathbf{u}_t$$

où les vecteurs \mathbf{t}_t et \mathbf{u}_t sont définis par:

$$(1.8) \quad \mathbf{t}_t = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n},$$

$$(1.9) \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

On note par \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à Γ_2 et on définit

$$\mathbf{t} = [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}]$$

comme le vecteur de traction sur Γ_2 . L'équation (1.7) est appelée la loi de comportement non-linéaire du frottement à la paroi.

L'utilisation d'une loi de comportement non-linéaire provient du fait que la vitesse de glissement à la paroi apparaît souvent seulement lorsqu'une certaine valeur de la contrainte de cisaillement à la paroi est atteinte (voir Ramamurthy [4] et Sridhar-Gupta [8]). Le modèle de frottement que nous utilisons est donc obtenu en combinant la loi de Coulomb (voir Duvaut-Lions [9]) avec le modèle de frottement linéaire ($f(|\mathbf{u}_t|) = c_f$) énoncé dans l'introduction. On obtient alors la loi de comportement suivante:

$$(1.10) \quad \mathbf{t}_t = - \left[c_f + \frac{g}{|\mathbf{u}_t|} \right] \mathbf{u}_t.$$

Les constantes positives c_f et g sont respectivement le coefficient de friction et le seuil de contrainte au glissement. Dans cette équation, si $|\mathbf{u}_t| = 0$, la contrainte de cisaillement \mathbf{t}_t est indéterminée. Comme pour le fluide de Bingham, on peut interpréter plus facilement l'équation (1.10) en l'exprimant sous sa forme inverse (voir section A.2). La loi de comportement devient alors

$$(1.11) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_t = 0 & \text{si } |\mathbf{t}_t| < g \\ \mathbf{u}_t = -\frac{1}{c_f} \left[1 - \frac{g}{|\mathbf{t}_t|} \right] \mathbf{t}_t & \text{si } |\mathbf{t}_t| \geq g. \end{cases}$$

Il y a donc adhérence à la paroi tant que la contrainte de cisaillement $|t_t|$ n'exède pas g . Lorsque la contrainte de cisaillement $|t_t|$ est plus grande que g , il y a glissement à la paroi suivant un coefficient de friction c_f fini. Ceci implique qu'il existe sur la paroi des régions où il y a une transition entre l'adhérence et le glissement.

En résumé, on a le problème suivant:

Problème 1

Equations aux dérivées partielles:

$$(1.12) \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{Continuité}),$$

$$(1.13) \quad -[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \nabla p = \mathbf{f} \quad (\text{Mouvement}).$$

Modèle rhéologique (Fluide de Bingham):

$$(1.14) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) = 0 & \text{si } |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0 \\ \dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\mu_0} \left[1 - \frac{\tau_0}{|\boldsymbol{\tau}|} \right] \boldsymbol{\tau} & \text{si } |\boldsymbol{\tau}| \geq \tau_0. \end{array} \right.$$

Conditions frontières sur Γ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$):

$$(1.15) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{sur } \Gamma_1, & \mathbf{u} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_2, & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ et} \\ & \mathbf{u}_t = 0 \quad \text{si } |t_t| < g \\ & \mathbf{u}_t = -\frac{1}{c_f} \left[1 - \frac{g}{|t_t|} \right] t_t \quad \text{si } |t_t| \geq g. \end{array} \right.$$

On choisit d'imposer une condition frontière homogène sur Γ_1 pour simplifier le développement. L'utilisation d'une condition non-homogène pourrait tout autant être considérée. Les lois de comportement du fluide de Bingham et du modèle

de frottement sont semblables. De plus, on sait que la loi de comportement d'un modèle de ce type n'est pas définie pour toutes les valeurs de la variable indépendante. Donc, ceci implique qu'il n'est pas possible de trouver une formulation variationnelle classique au problème 1. Par contre, on peut ramener la résolution du problème 1 à la résolution d'une inéquation variationnelle.

1.3 Inéquation variationnelle

Nous allons maintenant obtenir, de façon formelle, une inéquation variationnelle équivalente au problème 1 de la section précédente (voir Duvaut-Lions [9] et Glowinski-Lions-Trémolières [11]). Toutefois avant d'énoncer cette inéquation, on doit définir quelques espaces fonctionnels.

Soit l'ensemble des fonctions v de carré sommable sur Ω

$$L^2(\Omega) = \left\{ v \mid \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega < \infty \right\},$$

muni d'un produit scalaire et d'une norme:

$$\begin{aligned} (u, v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} uv d\Omega, \\ |v|_{L^2(\Omega)} &= \sqrt{(v, v)_{L^2(\Omega)}}. \end{aligned}$$

On dit alors que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Soit l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, N \right\},$$

muni d'un produit scalaire et d'une norme:

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} uv d\Omega + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega, \\ |v|_{H^1(\Omega)} &= \sqrt{(v, v)_{H^1(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Les espaces de Sobolev sont des espaces de Hilbert.

Considérons maintenant l'inéquation variationnelle suivante:

Problème 2

Trouver $\mathbf{u} \in V(\Omega)$, tel que

$$(1.16) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq l(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

$$\text{où } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu_0 \int_{\Omega} (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{v})) \, d\Omega + c_f \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v}_t) \, d\Gamma_2,$$

$$j(\mathbf{v}) = 2\tau_0 \int_{\Omega} |\dot{\gamma}(\mathbf{v})| \, d\Omega + g \int_{\Gamma_2} |\mathbf{v}_t| \, d\Gamma_2,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega$$

et

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N \mid (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\}.$$

Montrons que le problème 2 est équivalent au problème 1:

a) Nous allons montrer qu'une solution du problème 1 est automatiquement une solution du problème 2.

Dans un premier temps, on constate que l'équation de continuité (1.12) est vérifiée au problème 2 par le fait qu'on choisit la fonction \mathbf{u} élément de l'espace $V(\Omega)$. De plus, les deux premières conditions frontières (1.15) sur \mathbf{u} et $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ du problème 1 sont aussi vérifiées au problème 2 pour la même raison. Par contre, la condition frontière (1.15) sur le frottement à la paroi reste à vérifier. De la même façon, on doit montrer que l'équation de mouvement (1.13) et la loi de comportement inverse (1.14) vérifient la solution du problème 2.

On doit donc obtenir la formulation variationnelle de l'équation de mouvement (1.13) et remplacer adéquatement les lois de comportement (1.5) et (1.10). On multiplie alors l'équation (1.13) par une fonction $w \in V(\Omega)$ et on intègre sur Ω . On obtient alors

$$(1.17) \quad \int_{\Omega} \{ -([\nabla \cdot \tau] \cdot w) + ([\nabla p] \cdot w) - (f \cdot w) \} d\Omega = 0$$

qui est une formulation variationnelle qui ne respecte pas les conditions de régularité de l'espace choisi.

On effectue alors l'intégration par parties de l'équation (1.17). Pour ce faire, on a besoin des relations suivantes:

$$([\nabla \cdot \tau] \cdot w) = (\nabla \cdot [\tau \cdot w]) - (\tau : \nabla w),$$

$$([\nabla p] \cdot w) = (\nabla \cdot [pw]) - p(\nabla \cdot w),$$

$$(\tau : \nabla w) = (\tau : \dot{\gamma}(w))$$

ainsi que du théorème de divergence qu'on applique sur les intégrales suivantes:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot [\tau \cdot w]) d\Omega = \int_{\Gamma} ([\tau \cdot w] \cdot n) d\Gamma,$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot [pw]) d\Omega = \int_{\Gamma} ([pw] \cdot n) d\Gamma.$$

La formulation variationnelle correcte devient donc

$$(1.18) \quad \int_{\Omega} \{ (\tau : \dot{\gamma}(w)) - p(\nabla \cdot w) - (f \cdot w) \} d\Omega - \int_{\Gamma} ([\sigma \cdot w] \cdot n) d\Gamma = 0$$

où par définition $\sigma = -p\delta + \tau$.

D'après la définition de l'espace $V(\Omega)$ choisi, on sait que $(\nabla \cdot w) = 0$ dans Ω , que $w = 0$ sur Γ_1 et que $w_n = 0$ sur Γ_2 . De plus, on sait que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. On remplace alors ces contraintes dans l'équation (1.18) et on obtient

$$(1.19) \quad \int_{\Omega} \{ (\tau : \dot{\gamma}(w)) - (f \cdot w) \} d\Omega - \int_{\Gamma_2} ([\sigma \cdot w] \cdot n) d\Gamma_2 = 0.$$

Essayons maintenant de simplifier l'expression $([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{w}] \cdot \boldsymbol{n})$. On sait que pour un tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ symétrique, les produits scalaires peuvent être inversés. L'expression $([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{w}] \cdot \boldsymbol{n})$ est donc équivalente à $([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] \cdot \boldsymbol{w})$. Effectuons d'abord le produit scalaire avec \boldsymbol{n} :

$$(1.20) \quad [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] = -p \boldsymbol{n} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}] = -p \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}.$$

On sait que tout vecteur sur Γ_2 peut être divisé en une composante normale et un vecteur tangent, d'où

$$\boldsymbol{t} = t_n \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}_t.$$

En remplaçant \boldsymbol{t} dans l'équation (1.20), on obtient

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] = (-p + t_n) \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}_t$$

qui devient, en posant $s_n = -p + t_n$,

$$(1.21) \quad [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] = s_n \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}_t.$$

Effectuons maintenant le produit scalaire avec \boldsymbol{w} :

$$(1.22) \quad ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] \cdot \boldsymbol{w}) = s_n (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{t}_t \cdot \boldsymbol{w}).$$

Comme pour la multiplication avec \boldsymbol{n} , on remplace \boldsymbol{w} dans l'équation (1.22) par

$$\boldsymbol{w} = w_n \boldsymbol{n} + \boldsymbol{w}_t,$$

d'où

$$([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] \cdot \boldsymbol{w}) = s_n w_n (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}) + s_n (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}_t) + w_n (\boldsymbol{t}_t \cdot \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{t}_t \cdot \boldsymbol{w}_t).$$

On sait que les vecteurs \boldsymbol{t}_t et \boldsymbol{w}_t sont dans un plan perpendiculaire au vecteur \boldsymbol{n} .

Donc, en effectuant les produits scalaires, on obtient

$$(1.23) \quad ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] \cdot \boldsymbol{w}) = s_n w_n + (\boldsymbol{t}_t \cdot \boldsymbol{w}_t).$$

Puisque $w_n = 0$ sur Γ_2 , l'équation (1.23) se réduit à

$$(1.24) \quad ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{t}_t \cdot \mathbf{w}_t).$$

En remplaçant l'expression simplifiée (1.24) dans l'équation (1.19), on obtient

$$(1.25) \quad \int_{\Omega} \{ (\boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{w})) - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w}) \} d\Omega - \int_{\Gamma_2} (\mathbf{t}_t \cdot \mathbf{w}_t) d\Gamma_2 = 0$$

qui est la formulation variationnelle de l'équation de mouvement (1.13). Si on remplace dans l'équation (1.25) les lois de comportement (1.5) et (1.10), on s'aperçoit que le problème n'est pas défini pour toutes les valeurs de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$ et \mathbf{u}_t . On ne peut donc pas obtenir la formulation variationnelle classique du problème 1.

Afin de contourner cette difficulté, on pose $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ et on remplace les lois de comportement, d'où

$$(1.26) \quad \int_{\Omega} \left\{ 2\mu_0 (\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : [\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{v}) - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})]) + \tau_0 \left[\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{v}))}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|} - \frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}))}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|} \right] \right\} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_2} \left\{ c_f (\mathbf{u}_t \cdot [\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t]) + g \left[\frac{(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v}_t)}{|\mathbf{u}_t|} - \frac{(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t)}{|\mathbf{u}_t|} \right] \right\} d\Gamma_2 \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}]) d\Omega = 0$$

D'après la définition des normes tensorielles et vectorielles, on a que

$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) = 2 |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|^2,$$

$$(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t) = |\mathbf{u}_t|^2.$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy, on sait que

$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) : \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{v})) \leq 2 |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})| |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{v})|,$$

$$(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v}_t) \leq |\mathbf{u}_t| |\mathbf{v}_t|.$$

En remplaçant ces égalités et inégalités dans l'équation (1.26), on obtient l'inéquation suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ 2\mu_0 (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : [\dot{\gamma}(\mathbf{v}) - \dot{\gamma}(\mathbf{u})]) + 2\tau_0 [|\dot{\gamma}(\mathbf{v})| - |\dot{\gamma}(\mathbf{u})|] \} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} \{ c_f (\mathbf{u}_t \cdot [\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t]) + g [|\mathbf{v}_t| - |\mathbf{u}_t|] \} d\Gamma_2 \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot [\mathbf{v} - \mathbf{u}]) d\Omega \geq 0. \end{aligned}$$

En regroupant les termes adéquatement, on trouve

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq l(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

qui est identiquement égale à l'inéquation (1.16).

b) Nous allons montrer formellement qu'une solution du problème 2 vérifie les équations (1.12) à (1.15).

En prenant dans l'inéquation (1.16)

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm \lambda \mathbf{w} \quad \forall \lambda < 0,$$

on trouve

$$\pm \lambda a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + j(\mathbf{u} \pm \lambda \mathbf{w}) - j(\mathbf{u}) \geq \pm \lambda l(\mathbf{w})$$

qui devient, lorsqu'on divise par λ ,

$$(1.27) \quad \pm a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{[j(\mathbf{u} \pm \lambda \mathbf{w}) - j(\mathbf{u})]}{\lambda} \geq \pm l(\mathbf{w}).$$

Si on fait tendre λ vers 0, on a

$$(1.28) \quad \frac{[j(\mathbf{u} \pm \lambda \mathbf{w}) - j(\mathbf{u})]}{\lambda} = \left[\frac{dj(\mathbf{u} \pm \lambda \mathbf{w})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = \pm (j'(\mathbf{u}), \mathbf{w})$$

qui est appelée la dérivée au sens de Gâteaux. En remplaçant l'expression (1.28) dans l'inéquation (1.27) et en séparant les parties positives des parties négatives, on obtient

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (j'(\mathbf{u}), \mathbf{w}) \geq l(\mathbf{w}),$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (j'(\mathbf{u}), \mathbf{w}) \leq l(\mathbf{w}).$$

Ces deux inégalités ne sont compatibles que si

$$(1.29) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (j'(\mathbf{u}), \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}).$$

Pour que la fonctionnelle $(j'(\mathbf{u}), \mathbf{w})$ soit définie, il faut que

$$|\dot{\gamma}(\mathbf{u})| \neq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$|\mathbf{u}_t| \neq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_2.$$

En considérant ces restrictions, on peut effectuer la dérivée au sens de Gâteaux de la fonctionnelle $j(\mathbf{w})$ définie au problème 2, d'où

$$(1.30) \quad (j'(\mathbf{u}), \mathbf{w}) = \tau_0 \int_{\Omega} \frac{(\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}))}{|\dot{\gamma}(\mathbf{u})|} d\Omega + g \int_{\Gamma_2} \frac{(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{w}_t)}{|\mathbf{u}_t|} d\Gamma_2.$$

En remplaçant l'expression (1.30) dans l'équation (1.29), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ 2\mu_0 (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w})) + \tau_0 \frac{(\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{w}))}{|\dot{\gamma}(\mathbf{u})|} \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} \left\{ c_f (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{w}_t) + g \frac{(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{w}_t)}{|\mathbf{u}_t|} \right\} d\Gamma_2 \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w}) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

qui devient, en utilisant les lois de comportement (1.5) et (1.10),

$$\int_{\Omega} \{ (\boldsymbol{\tau} : \dot{\gamma}(\mathbf{w})) - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{w}) \} d\Omega - \int_{\Gamma_2} (\mathbf{t}_t \cdot \mathbf{w}_t) d\Gamma_2 = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (1.25).

On en conclut donc que le problème 2 est équivalent au problème 1.

Chapitre 2

Méthode du Lagrangien augmenté

La résolution de l'inéquation variationnelle énoncée au chapitre précédent nécessite une attention toute particulière. De façon générale, elle ne peut pas être résolue directement. On utilise alors la méthode du Lagrangien augmenté qui consiste à introduire des contraintes artificielles qui sont par la suite imposées à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Pour pouvoir tenir compte de ces contraintes, on doit exprimer le problème de résolution d'une inéquation variationnelle sous la forme d'un problème de point-selle généralisé.

La méthode du Lagrangien augmenté est employée dans Fortin-Glowinski [12] et Tanguy-Fortin-Bertrand [13] pour la résolution numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham sans frottement à la paroi. De plus, d'autres méthodes sont présentées dans Glowinski-Lions-Trémolières [10] et [11] pour toute une gamme de problèmes caractérisés par des inéquations variationnelles. La méthode s'applique aussi pour la résolution d'équations variationnelles non-linéaires obtenues par l'utilisation d'autres modèles rhéologiques (voir Tanguy-Fortin-Choplin [14]).

2.1 Fonctionnelle d'optimisation

On peut montrer que la résolution de l'inéquation variationnelle énoncée au chapitre précédent est équivalente au problème de minimisation suivant (voir Glowinski-Lions-Trémolières [10]):

Trouver $\mathbf{u} \in V(\Omega)$, tel que

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in V(\Omega)} J(\mathbf{v})$$

$$\text{où } J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + j(\mathbf{v}) - l(\mathbf{v})$$

$$\text{et } a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 4\mu_0 \int_{\Omega} |\dot{\gamma}(\mathbf{v})|^2 d\Omega + c_f \int_{\Gamma_2} |\mathbf{v}_t|^2 d\Gamma_2,$$

$$j(\mathbf{v}) = 2\tau_0 \int_{\Omega} |\dot{\gamma}(\mathbf{v})| d\Omega + g \int_{\Gamma_2} |\mathbf{v}_t| d\Gamma_2,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) d\Omega.$$

On se rappellera que l'espace $V(\Omega)$ était défini par

$$V(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N \mid (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \}.$$

On constate alors que le choix de cette espace impose une contrainte de divergence nulle sur les fonctions \mathbf{u} et \mathbf{v} . Cette contrainte fait en sorte que l'espace $V(\Omega)$ est très difficile à discrétiser. On choisit donc de travailler dans l'espace $[H^1(\Omega)]^N$ mais, pour que la minimisation de la fonctionnelle $J(\mathbf{v})$ soit toujours équivalente à la formulation variationnelle du système d'équations aux dérivées partielles initiales, on doit incorporer la contrainte de divergence nulle à l'intérieur de la fonctionnelle $J(\mathbf{v})$. Pour ce faire, on introduit un multiplicateur de Lagrange $q \in L^2(\Omega)$ qui transforme le problème de minimisation en un problème de point-selle:

Trouver $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^N$ et $p \in [L^2(\Omega)]$, tel que

$$L(\mathbf{u}, p) = \inf_{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N} \sup_{q \in [L^2(\Omega)]} L(\mathbf{v}, q)$$

$$\text{où } L(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} a_q q (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega$$

$$\text{et } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

On note par a_q la fonction de mise à l'échelle du multiplicateur de Lagrange q . En effectuant l'optimisation du terme ajouté à la fonctionnelle $J(\mathbf{v})$, on s'aperçoit que le produit $-a_q q$ correspond exactement à la pression hydrostatique p définie au chapitre précédent. De plus, on constate que les conditions frontières doivent maintenant être spécifiées puisque les fonctions \mathbf{u} et \mathbf{v} font partie de l'espace fonctionnel $[H^1(\Omega)]^N$.

Afin de s'assurer que la contrainte de divergence nulle soit bien respectée, on introduit le Lagrangien augmenté de $L(\mathbf{v}, q)$:

$$L_r(\mathbf{v}, q) = L(\mathbf{v}, q) + \int_{\Omega} a_q \frac{r_q}{2} |(\nabla \cdot \mathbf{v})|^2 \, d\Omega$$

où r_q est le facteur de pénalisation. Le problème de point-selle devient alors:

Trouver $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^N$ et $p \in [L^2(\Omega)]$, tel que

$$L_r(\mathbf{u}, p) = \inf_{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N} \sup_{q \in [L^2(\Omega)]} L_r(\mathbf{v}, q)$$

$$\text{où } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

En examinant les termes du Lagrangien augmenté $L_r(\mathbf{v}, q)$, on s'aperçoit que la fonction a_q doit avoir des unités de viscosité. De plus, contrairement à la méthode de pénalisation classique, la résolution du Lagrangien augmenté $L_r(\mathbf{v}, q)$ permet de déterminer une solution exacte sans que r_q ne tende nécessairement vers l'infini (voir Fortin-Glowinski [12]).

2.2 Contraintes artificielles

La difficulté dans l'optimisation du Lagrangien augmenté $L_r(\mathbf{v}, q)$ vient du fait que la fonctionnelle $j(\mathbf{v})$ est non-différentiable. Plus précisément, la présence des termes $|\dot{\gamma}(\mathbf{v})|$ et $|\mathbf{v}_t|$ font en sorte que l'optimisation du Lagrangien augmenté $L_r(\mathbf{v}, q)$ produit une inéquation variationnelle. On peut contourner partiellement cette difficulté en introduisant les variables σ_v et w_v qui sont définies par les contraintes suivantes:

$$(2.1) \quad \sigma_v - \dot{\gamma}(\mathbf{v}) = 0,$$

$$(2.2) \quad w_v - \mathbf{v}_t = 0.$$

On associe respectivement à ces contraintes les multiplicateurs de Lagrange λ_v et \mathbf{y}_v . De plus, les changements de variables qu'amènent la présence de ces contraintes affectent les fonctionnelles $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ et $j(\mathbf{v})$, qui deviennent:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 4\mu_0 \int_{\Omega} |\sigma_v|^2 d\Omega + c_f \int_{\Gamma_2} |w_v|^2 d\Gamma_2,$$

$$j(\mathbf{v}) = 2\tau_0 \int_{\Omega} |\sigma_v| d\Omega + g \int_{\Gamma_2} |w_v| d\Gamma_2.$$

Comme pour la contrainte de divergence nulle, on tient compte des contraintes artificielles (2.1) et (2.2) à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et de Lagrangien augmenté. Afin de simplifier l'écriture, on définit les variables suivantes:

$$K_u = \{ \mathbf{u}, p, \sigma_u, \lambda_u, w_u, \mathbf{y}_u \},$$

$$K_v = \{ v, q, \sigma_v, \lambda_v, w_v, y_v \}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{u}, \mathbf{v} &\in [H^1(\Omega)]^N, \\ q, p &\in [L^2(\Omega)], \\ \sigma_u, \sigma_v &\in [L^2(\Omega)]^{N \times N}, \\ \lambda_u, \lambda_v &\in [L^2(\Omega)]^{N \times N}, \\ \mathbf{w}_u, \mathbf{w}_v &\in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N, \\ \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v &\in [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N. \end{aligned}$$

Par abus de langage, nous avons noté $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N$ l'espace des traces sur Γ_2 des fonctions de $[H^1(\Omega)]^N$ et l'espace $[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N$ le dual de $[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N$ (voir Duvaut-Lions [9]). En incorporant les contraintes artificielles (2.1) et (2.2) dans le Lagrangien augmenté $L_r(\mathbf{v}, q)$, le problème de point-selle devient:

Trouver K_u , tel que

$$\mathcal{L}_r(K_u) = \inf_{\mathbf{v}} \sup_q \inf_{\sigma_v} \sup_{\lambda_v} \inf_{\mathbf{w}_v} \sup_{\mathbf{y}_v} \mathcal{L}_r(K_v)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathcal{L}_r(K_v) &= L_r(\mathbf{v}, q) \\ &+ \int_{\Omega} a_{\lambda} \left\{ (\lambda_v : [\sigma_v - \dot{\gamma}(\mathbf{v})]) + \frac{r_{\lambda}}{2} |\sigma_v - \dot{\gamma}(\mathbf{v})|^2 \right\} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_2} a_y \left\{ (\mathbf{y}_v \cdot [\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t]) + \frac{r_y}{2} |\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t|^2 \right\} d\Gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) &= 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

En développant complètement le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_r(K_v)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r(K_v) &= \int_{\Omega} 2\mu_0 |\sigma_v|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_2} \frac{c_f}{2} |w_v|^2 d\Gamma_2 \\
&+ \int_{\Omega} 2\tau_0 |\sigma_v| d\Omega + \int_{\Gamma_2} g |w_v| d\Gamma_2 \\
&- \int_{\Omega} (f \cdot v) d\Omega + \int_{\Omega} a_q q (\nabla \cdot v) d\Omega + \int_{\Omega} a_q \frac{r_q}{2} |(\nabla \cdot v)|^2 d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} a_{\lambda} (\lambda_v : \sigma_v) d\Omega - \int_{\Omega} a_{\lambda} (\lambda_v : \dot{\gamma}(v)) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} a_{\lambda} \frac{r_{\lambda}}{2} |\sigma_v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} a_{\lambda} \frac{r_{\lambda}}{2} (\sigma_v : \dot{\gamma}(v)) d\Omega + \int_{\Omega} a_{\lambda} \frac{r_{\lambda}}{2} |\dot{\gamma}(v)|^2 d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_2} a_y (y_v \cdot w_v) d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} a_y (y_v \cdot v_t) d\Gamma_2 \\
&+ \int_{\Gamma_2} a_y \frac{r_y}{2} |w_v|^2 d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} a_y r_y (w_v \cdot v_t) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2} a_y \frac{r_y}{2} |v_t|^2 d\Gamma_2.
\end{aligned}$$

On note respectivement par a_{λ} et a_y les fonctions de mise à l'échelle des multiplicateurs de Lagrange λ_v et y_v . De plus, on note par r_{λ} le facteur de pénalisation de la contrainte (2.1) et r_y le facteur de pénalisation de la contrainte (2.2). En examinant les termes du Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_r(K_v)$, on s'aperçoit que les fonctions a_{λ} et a_y doivent avoir respectivement les unités d'une viscosité et d'un coefficient de friction.

2.3 Optimisation

La condition d'optimalité de la fonctionnelle $\mathcal{L}_r(K_v)$ suivant une variable de K_v particulière est obtenue en imposant à zéro sa dérivée au sens de Gâteaux évaluée au point K_v et effectuée dans la direction de la variable de K_v en question. Soit la fonctionnelle $J(v)$ provenant d'une forme variationnelle, la dérivée au sens de

Gâteaux de la fonctionnelle J au point \mathbf{u} dans la direction \mathbf{v} est alors définie par

$$(J'(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \left[\frac{dJ(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})}{d\lambda} \right]_{\lambda=0}.$$

Donc, en effectuant l'optimisation suivant une variable particulière, on peut laisser tomber tous les termes qui ne contiennent pas cette variable puisque leur dérivée est nulle.

Optimisation en q

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent q , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$(\mathcal{L}_r(K_v))_q = \int_{\Omega} a_q q (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega$$

qui devient, lorsqu'on prend la dérivée au sens de Gâteaux par rapport à q égale à zéro,

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} a_q q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \forall q \in [L^2(\Omega)].$$

Cette expression exprime la contrainte de divergence nulle.

Optimisation en λ_v

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent λ_v , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$(\mathcal{L}_r(K_v))_{\lambda_v} = \int_{\Omega} a_{\lambda} (\lambda_v : [\sigma_v - \dot{\gamma}(\mathbf{v})]) d\Omega$$

qui devient, lorsqu'on prend la dérivée au sens de Gâteaux par rapport à λ_v égale à zéro,

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} a_{\lambda} (\lambda_v : [\sigma_u - \dot{\gamma}(\mathbf{u})]) d\Omega = 0 \quad \forall \lambda_v \in [L^2(\Omega)]^{N \times N}.$$

Cette expression exprime la contrainte artificielle (2.1).

Optimisation en \mathbf{y}_v

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent \mathbf{y}_v , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$(\mathcal{L}_r(K_v))_{\mathbf{y}_v} = \int_{\Gamma_2} a_y (\mathbf{y}_v \cdot [\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t]) d\Gamma_2$$

qui devient, lorsqu'on prend la dérivée au sens de Gâteaux par rapport à \mathbf{y}_v égale à zéro,

$$(2.5) \quad \int_{\Gamma_2} a_y (\mathbf{y}_v \cdot [\mathbf{w}_v - \mathbf{v}_t]) d\Gamma_2 = 0 \quad \forall \mathbf{y}_v \in [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N.$$

Cette expression exprime la contrainte artificielle (2.2).

Optimisation en \mathbf{v}

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent \mathbf{v} , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_r(K_v))_{\mathbf{v}} = & - \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} a_q \frac{r_q}{2} |(\nabla \cdot \mathbf{v})|^2 d\Omega \\ & + \int_{\Omega} a_{\lambda} \frac{r_{\lambda}}{2} |\dot{\gamma}(\mathbf{v})|^2 d\Omega - \int_{\Omega} a_{\lambda} \left(\left[\lambda_v + \frac{r_{\lambda}}{2} \sigma_v \right] : \dot{\gamma}(\mathbf{v}) \right) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} a_y \frac{r_y}{2} |\mathbf{v}_t|^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2} a_y ([\mathbf{y}_v + r_y \mathbf{w}_v] \cdot \mathbf{v}_t) d\Gamma_2 \end{aligned}$$

qui devient, lorsqu'on prend la dérivée au sens de Gâteaux par rapport à \mathbf{v} égale à zéro,

$$(2.6) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$$

où on redéfinit:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} a_{\lambda} \frac{r_{\lambda}}{2} (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{v})) d\Omega + \int_{\Omega} a_q r_q (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_2} a_y r_y (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v}_t) d\Gamma_2, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} (\alpha : \dot{\gamma}(\mathbf{v})) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_t) d\Gamma_2 \end{aligned}$$

$$\text{et } \boldsymbol{\alpha} = a_\lambda \left[\boldsymbol{\lambda}_u + \frac{r_\lambda}{2} \boldsymbol{\sigma}_u \right],$$

$$\mathbf{a} = a_y [\mathbf{y}_u + r_y \mathbf{w}_u].$$

L'expression (2.6) est une équation variationnelle linéaire qui permet de déterminer le champ de vitesses \mathbf{u} du problème 1. Si on impose $r_q = r_\lambda = r_y = 0$ dans l'équation (2.6), on constate qu'il n'est plus possible de déterminer le champ de vitesses \mathbf{u} . Donc, ceci implique que les termes qui caractérisent le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_r(K_v)$ font en sorte que le problème a un sens.

On se rappellera qu'au chapitre 1, on avait négligé le terme d'inertie $[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]$ de l'équation de mouvement (1.2). On doit maintenant tenir compte de ce terme. Pour y arriver, il faut obtenir sa formulation variationnelle. On multiplie alors le terme d'inertie par une fonction $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$ et on intègre, d'où

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho ([\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}) d\Omega.$$

En ajoutant cette fonctionnelle à l'équation (2.6), on obtient

$$(2.7) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$$

qui est une équation variationnelle non-linéaire permettant de trouver le champ de vitesses \mathbf{u} de l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une condition de frottement à la paroi. Si on impose les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} r_\lambda &= 2, & r_y &= 1, \\ a_\lambda &= 2\mu_0, & a_y &= c_f, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{0}, & \mathbf{a} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

le système (2.3) et (2.7) représente alors très exactement l'écoulement d'un fluide newtonien de viscosité μ_0 avec une condition de frottement linéaire à la paroi (voir introduction) déterminée par un coefficient de friction c_f .

Optimisation en σ_v

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent σ_v , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$(\mathcal{L}_r(K_v))\sigma_v = \int_{\Omega} \left\{ \left[2\mu_0 + a_\lambda \frac{r_\lambda}{2} \right] |\sigma_v|^2 + 2\tau_0 |\sigma_v| - a_\lambda \left(\left[-\lambda_v + \frac{r_\lambda}{2} \dot{\gamma}(v) \right] : \sigma_v \right) \right\} d\Omega.$$

La présence du terme $|\sigma_v|$ non-différentiable dans la fonctionnelle $(\mathcal{L}_r(K_v))\sigma_v$ fait en sorte que son optimisation produit une inéquation variationnelle. Mais, contrairement à la fonctionnelle originale $L_r(v, q)$, on peut ramener l'optimisation de la fonctionnelle $(\mathcal{L}_r(K_v))\sigma_v$ à l'optimisation point par point dans Ω de la fonctionnelle

$$\left[2\mu_0 + a_\lambda \frac{r_\lambda}{2} \right] |\sigma_u|^2 + 2\tau_0 |\sigma_u| - (\beta : \sigma_u)$$

$$\text{où } \beta = a_\lambda \left[-\lambda_u + \frac{r_\lambda}{2} \dot{\gamma}(u) \right].$$

Lorsqu'on minimise cette fonctionnelle par rapport à σ_u (voir annexe A), on obtient

$$(2.8) \quad \left| \begin{array}{ll} \sigma_u = 0 & \text{si } |\beta| < \tau_0 \\ \sigma_u = \frac{1}{\left[2\mu_0 + a_\lambda \frac{r_\lambda}{2} \right]} \left[1 - \frac{\tau_0}{|\beta|} \right] \beta & \text{si } |\beta| \geq \tau_0. \end{array} \right.$$

On remarque facilement la ressemblance entre l'équation (2.8) et la loi de comportement inverse d'un fluide de Bingham (1.6).

Optimisation en w_v

En isolant, dans $\mathcal{L}_r(K_v)$ tous les termes qui contiennent w_v , on obtient la fonctionnelle suivante:

$$(\mathcal{L}_r(K_v))w_v = \int_{\Gamma_2} \left\{ \left[\frac{c_f}{2} + a_y \frac{r_y}{2} \right] |w_v|^2 + g |w_v| - a_y \left([-y_v + r_y v_t] \cdot w_v \right) \right\} d\Gamma_2.$$

Comme pour l'optimisation en σ_v , la présence du terme $|w_v|$ non-différentiable dans la fonctionnelle $(\mathcal{L}_r(K_v))w_v$ fait en sorte que son optimisation produit une

inéquation variationnelle. De plus, l'optimisation de la fonctionnelle $(\mathcal{L}_r(K_v))_{w_v}$ peut être ramenée à l'optimisation point par point sur Γ_2 de la fonctionnelle

$$\left[\frac{c_f}{2} + a_y \frac{r_y}{2} \right] |w_u|^2 + g |w_u| - (b \cdot w_u)$$

où $b = a_y [-y_u + r_y u_t]$.

Lorsqu'on minimise cette fonctionnelle par rapport à w_u (voir annexe A), on obtient

$$(2.9) \quad \begin{cases} w_u = 0 & \text{si } |b| < g \\ w_u = \frac{1}{[c_f + a_y r_y]} \left[1 - \frac{g}{|b|} \right] b & \text{si } |b| \geq g. \end{cases}$$

Ici aussi, on note la ressemblance frappante de l'équation (2.9) avec la loi de comportement inverse du frottement à la paroi (1.11).

En résumé, on a le problème suivant:

Problème 3

Equation variationnelle non-linéaire:

$$a(u, v) + b(u, u, v) = l(v) \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^N.$$

où $u = 0, \quad v = 0$ sur $\Gamma_1,$

$(u \cdot n) = 0, \quad (v \cdot n) = 0$ sur $\Gamma_2.$

Modèle rhéologique (Fluide de Bingham):

$$\begin{cases} \sigma_u = 0 & \text{si } |\beta| < \tau_0 \\ \sigma_u = \frac{1}{\left[2\mu_0 + a_\lambda \frac{r_\lambda}{2} \right]} \left[1 - \frac{\tau_0}{|\beta|} \right] \beta & \text{si } |\beta| \geq \tau_0. \end{cases}$$

Condition de frottement à la paroi:

$$\begin{cases} w_u = 0 & \text{si } |b| < g \\ w_u = \frac{1}{[c_f + a_y r_y]} \left[1 - \frac{g}{|b|} \right] b & \text{si } |b| \geq g. \end{cases}$$

Contraintes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a_q q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega &= 0 & \forall q \in [L^2(\Omega)], \\ \int_{\Omega} a_\lambda (\lambda_v : [\sigma_u - \dot{\gamma}(\mathbf{u})]) d\Omega &= 0 & \forall \lambda_v \in [L^2(\Omega)]^{N \times N}, \\ \int_{\Gamma_2} a_y (\mathbf{y}_v \cdot [\mathbf{w}_u - \mathbf{u}_t]) d\Gamma_2 &= 0 & \forall \mathbf{y}_v \in [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)]^N. \end{aligned}$$

Le problème 3 est maintenant libre de toute difficulté que la méthode des éléments finis ne peut traiter. La méthode du Lagrangien augmenté a donc permis de transformer une inéquation variationnelle en un problème résolvable. De plus, la présence du terme d'inertie rend le problème 3 plus général, quoique plus difficile à résoudre. Afin de compléter ce chapitre, il reste à montrer la stratégie qu'on utilise pour résoudre le problème 3.

2.4 Discrétisation

La discrétisation consiste à diviser le domaine Ω en éléments finis et à approximer, dans chaque élément e , les fonctions de la solution K_u par des polynômes. Pour que la discrétisation soit possible, il faut donc que les fonctions de la solution K_u soient définies dans chaque élément.

On sait que les fonctions \mathbf{u} et p sont définies pour tout le domaine Ω . Par contre, les fonctions σ_u et \mathbf{w}_u telles qu'exprimées par les relations (2.8) et (2.9) sont seulement définies localement. Ceci implique que les fonctions λ_u et \mathbf{y}_u sont aussi définies localement. Donc, pour pouvoir évaluer ces fonctions, on doit considérer l'élément fini e du domaine Ω comme étant la région d'application de la relation (2.8) et l'arête de cette élément e sur Γ_2 comme la région d'application de la relation (2.9). La solution du problème 3 se divise alors en trois catégories:

Solution globale dans Ω (\mathbf{u} , p),

Solution locale dans les éléments de Ω ($\sigma_{\mathbf{u}}$, $\lambda_{\mathbf{u}}$),

Solution locale sur les arêtes de Γ_2 ($\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{y}_{\mathbf{u}}$)

où les solutions locales ne sont pas nécessairement continues d'un élément à l'autre. La continuité de la solution globale dans Ω dépend de l'approximation qu'on utilise pour les fonctions \mathbf{u} et p .

Dans ce mémoire, on se limite à un domaine Ω bidimensionnel. On choisit alors de discrétiser le champ de vitesses \mathbf{u} par un élément triangulaire à 7 noeuds et la pression hydrostatique p par un élément triangulaire à 3 noeuds (discontinu). On sait que les fonctions $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ dépendent de la fonction \mathbf{u} et sont connues localement. Il n'est donc pas nécessaire de définir de nouvelles approximations pour ces fonctions. Il suffit seulement de les évaluer aux mêmes points que les polynômes qui approximent la fonction \mathbf{u} . Ceci s'applique aussi pour les fonctions $\lambda_{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{y}_{\mathbf{u}}$.

2.5 Algorithme itératif

La présence de multiplicateurs de Lagrange et d'un terme d'inertie nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif. Les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour à chaque itération tandis que le terme d'inertie est traité par la méthode de Newton. On choisit d'adapter à notre problème l'algorithme ALG2 de Fortin-Glowinski [12] qui s'avère très efficace dans la résolution de problèmes semblables, soit donc l'algorithme suivant:

- \mathbf{u}^0 , p^0 , $\lambda_{\mathbf{u}}^0$, $\mathbf{y}_{\mathbf{u}}^0$ données arbitrairement
- Pour $k \geq 1$

- Obtenir σ_u^k en évaluant (2.8) avec λ_u^{k-1} et \mathbf{u}^{k-1}
- Mise à jour du multiplicateur de Lagrange

$$\lambda_u^k = \lambda_u^{k-1} + r_\lambda (\sigma_u^k - \dot{\gamma}(\mathbf{u}^{k-1}))$$

- Obtenir \mathbf{w}_u^k en évaluant (2.9) avec \mathbf{y}_u^{k-1} et \mathbf{u}_t^{k-1}
- Mise à jour du multiplicateur de Lagrange

$$\mathbf{y}_u^k = \mathbf{y}_u^{k-1} + r_y (\mathbf{w}_u^k - \mathbf{u}_t^{k-1})$$

- Obtenir \mathbf{u}^k en résolvant (2.7) avec p^{k-1} , σ_u^k , λ_u^k , \mathbf{w}_u^k et \mathbf{y}_u^k
- Mise à jour du multiplicateur de Lagrange

$$p^k = p^{k-1} + a_q r_q (\nabla \cdot \mathbf{u}^k)$$

- Vérifier la convergence par $\max_{i=1, N} \left| \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{u_i^{k-1}} \right| < 10^{-3}$

On choisit de vérifier la convergence de l'algorithme à l'aide de la fonction \mathbf{u} puisque, dans notre cas, la convergence de \mathbf{u} implique celle des autres fonctions. Dans cette algorithme, un bon choix des fonctions a_λ et a_y permet d'améliorer la convergence. Comme mentionné précédemment, on sait que a_λ doit avoir les unités d'une viscosité et a_y les unités d'un coefficient de friction. De plus, en examinant l'équation (2.7), on s'aperçoit que lorsque la solution est atteinte, on a que:

$$-a_\lambda \lambda_u = \tau,$$

$$a_y \mathbf{y}_u = \mathbf{t}_t.$$

On peut alors montrer que l'utilisation des paramètres suivant:

$$r_\lambda = 2,$$

$$r_y = 1,$$

$$a_\lambda = 2\eta(|\dot{\gamma}(\mathbf{u})|),$$

$$a_y = f(|\mathbf{u}_t|)$$

permet d'obtenir une convergence optimum (voir Fortin-Glowinski [12]). Pour évaluer les fonctions a_λ et a_y , on utilise un estimé initial de la solution \mathbf{u} . Si cet estimé n'est pas suffisamment bon pour que l'algorithme converge, on utilise alors une stratégie incrémentale suivant l'un des paramètres rhéologiques du problème. Cela résulte en la résolution de problèmes de plus en plus non-linéaires, mais dont on a un bon estimé initial de la solution. Tous les problèmes que nous traitons dans ce mémoire ne nécessitent pas l'utilisation de cette technique. L'algorithme converge lorsqu'on choisit un estimé initial nul ($\mathbf{u}^0 = 0$). Toutefois, pour que les fonctions a_λ et a_y soient définies, on impose $|\dot{\gamma}(\mathbf{u})| = 1$ et $|\mathbf{u}_t| = 1$.

Chapitre 3

Écoulement dans un tube

Ce chapitre consiste principalement à développer une base théorique pour permettre l'interprétation de résultats numériques et expérimentaux. Pour ce faire, on considère toujours l'écoulement d'un fluide non-newtonien avec une condition de frottement à la paroi, mais pour une géométrie simple.

3.1 Position du problème

Soit un écoulement axisymétrique à l'intérieur d'un cylindre infiniment long, la géométrie du problème est illustrée à la figure 3.1. On impose une condition de symétrie sur l'axe $r = 0$ et une condition de frottement à la paroi sur l'axe $r = R$. L'écoulement est engendré en imposant un débit Q constant à l'intérieur du cylindre.

Étant donnée la géométrie de la figure 3.1, le champ de vitesse \mathbf{u} et la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$ s'écrivent:

$$(3.1) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_z(r) \end{bmatrix},$$

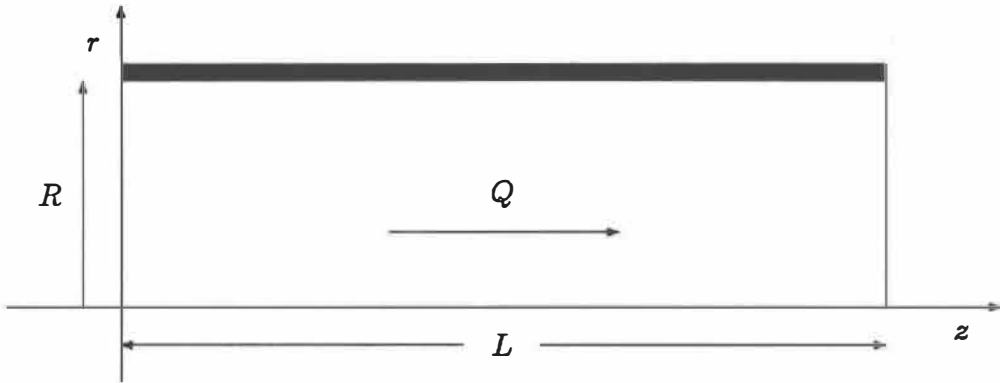


Figure 3.1: Géométrie d'un écoulement dans un tube

$$(3.2) \quad \dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr} \\ \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les équations aux dérivées partielles générales (voir section 1.2) deviennent alors:

$$(3.3) \quad \frac{dp}{dr} = 0,$$

$$(3.4) \quad \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \frac{dp}{dz}.$$

Dans ce cas, la loi de comportement d'un fluide non-newtonien s'écrit

$$(3.5) \quad \tau_{rz} = 2\eta(|\dot{\gamma}_{rz}|) \dot{\gamma}_{rz}$$

où on définit $\eta(|\dot{\gamma}_{rz}|)$ comme le modèle rhéologique.

Cette géométrie affecte aussi la contrainte de cisaillement à la paroi \mathbf{t}_t et la vitesse de glissement à la paroi \mathbf{u}_t , qui deviennent:

$$(3.6) \quad \mathbf{t}_t = \begin{bmatrix} \tau_{rz}(R) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_R \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(3.7) \quad \mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ u_z(R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_R \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, la loi de comportement générale du frottement à la paroi s'écrit

$$(3.8) \quad \tau_R = -f(|u_R|) u_R$$

où on définit $f(|u_R|)$ comme le modèle de frottement.

3.2 Champ de vitesse

L'expression générale du champ de vitesse est obtenue en intégrant l'équation différentielle

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dx}$$

qui provient de la relation (3.2), d'où

$$(3.9) \quad u_z(r) = u_R - 2 \int_r^R \dot{\gamma}_{rz}(t) dt.$$

Pour évaluer cette expression, on doit utiliser les lois de comportement inverses associées aux équations (3.5) et (3.8), soit

$$(3.10) \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \eta^{-1}(|\tau_{rz}|) \tau_{rz},$$

$$(3.11) \quad u_R = -f^{-1}(|\tau_R|) \tau_R.$$

De façon à remplacer adéquatement la vitesse de déformation $\dot{\gamma}_{rz}$ dans l'expression (3.9), il faut trouver la relation qui existe entre la contrainte τ_{rz} et le rayon r . Pour y arriver, on utilise l'équation différentielle (3.4).

D'après la loi de comportement d'un fluide non-newtonien (3.5), on constate que la contrainte τ_{rz} ne dépend pas de la variable z . Il faut donc que l'expression $\frac{dp}{dz}$ soit constante pour que l'équation différentielle (3.4) soit bien posée. On définit alors

$$(3.12) \quad \Delta p = \frac{dp}{dz} = \frac{p(L) - p(0)}{L}$$

comme la perte de charge par unité de longueur à l'intérieur du cylindre. On peut maintenant résoudre l'équation différentielle (3.4), d'où

$$(3.13) \quad \tau_{rz} = \frac{\Delta p}{2} r.$$

De plus, on sait que la contrainte de cisaillement τ_R est définie par la relation (3.6). Donc, en évaluant la contrainte τ_{rz} sur l'axe $r = R$, on obtient

$$(3.14) \quad \tau_R = \frac{\Delta p}{2} R.$$

Puisque l'écoulement est engendré par un débit Q constant, la perte de charge par unité de longueur Δp n'est pas donnée. On choisit alors d'exprimer τ_{rz} en terme de τ_R , d'où

$$(3.15) \quad \tau_{rz} = \tau_R \frac{r}{R}.$$

De plus, l'écoulement se fait dans le sens de l'axe z . Donc, pour que le problème soit physiquement plausible, il faut que la perte de charge par unité de longueur Δp soit négative. Ceci implique que la contrainte de cisaillement τ_R est aussi négative. De façon à ce que la contrainte τ_{rz} soit exprimée en terme de paramètres strictement positifs, on définit

$$(3.16) \quad \tau_a = \frac{|\Delta p|}{2} R = |\tau_R|$$

qui est la norme de la contrainte de cisaillement à la paroi. On remplace alors τ_R de l'équation (3.13) par τ_a , d'où

$$(3.17) \quad \tau_{rz} = -\tau_a \frac{r}{R}$$

qui est la relation permettant d'exprimer le champ de vitesse $u_z(r)$ en terme de la contrainte de cisaillement τ_a .

Dans la plupart des problèmes de ce type, la perte de charge par unité de longueur Δp est imposée, donc la contrainte de cisaillement τ_a est connue. Dans

notre cas, c'est le débit Q qui est connu. On doit alors déterminer la contrainte de cisaillement τ_a à partir du débit Q . De par sa définition, le débit Q est donné par l'expression générale suivante:

$$(3.18) \quad Q = 2\pi \int_0^R r u_z dr$$

où après intégration par parties, on a

$$(3.19) \quad Q = \pi r^2 u_z \Big|_0^R - 2\pi \int_0^R \frac{r^2}{2} \frac{du_z}{dr} dr.$$

En remplaçant les relations (3.2) et (3.7) dans l'équation (3.19), on obtient

$$(3.20) \quad Q = \pi R^2 u_R - 2\pi \int_0^R r^2 \dot{\gamma}_{rz} dr.$$

L'équation (3.20) exprime Q en terme de R . On veut que Q soit exprimé en terme de τ_a . On choisit donc de changer la variable r de l'équation (3.20) par la variable τ_{rz} de l'équation (3.17), d'où

$$(3.21) \quad Q = \pi R^2 u_R + 2\pi \frac{R^3}{\tau_a^3} \int_0^{-\tau_a} \tau_{rz}^2 \dot{\gamma}_{rz} d\tau_{rz}.$$

Afin de simplifier l'écriture, on définit une nouvelle variable

$$(3.22) \quad \dot{\gamma}_a = \frac{2Q}{\pi R^3}$$

qui est, pour un fluide newtonien, l'expression de la norme de la vitesse de déformation à la paroi. La définition (3.22) est donc, pour un fluide non-newtonien, une vitesse de déformation apparente. On exprime alors l'équation (3.21) en terme de $\dot{\gamma}_a$, d'où

$$(3.23) \quad \dot{\gamma}_a = 2u_R \frac{1}{R} + \frac{4}{\tau_a^3} \int_0^{-\tau_a} \tau_{rz}^2 \dot{\gamma}_{rz} d\tau_{rz}$$

qui est la relation exprimant le débit en terme de la contrainte de cisaillement τ_a .

On peut décomposer la vitesse de déformation apparente $\dot{\gamma}_a$ en deux parties, soit la vitesse de déformation apparente causée par le glissement

$$(3.24) \quad \dot{\gamma}_{a_g} = 2u_R \frac{1}{R}$$

et la vitesse de déformation apparente causée par le fluide

$$(3.25) \quad \dot{\gamma}_{a_f} = \frac{4}{\tau_a^3} \int_0^{-\tau_a} \tau_{rz}^2 \dot{\gamma}_{rz} d\tau_{rz}.$$

L'équation (3.23) s'écrit alors

$$(3.26) \quad \dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_{a_g} + \dot{\gamma}_{a_f}.$$

Les expressions obtenues jusqu'à maintenant sont totalement générales. Elles permettent de trouver une solution (analytique ou numérique) indépendamment du modèle rhéologique et du modèle de frottement. Par contre, pour qu'une solution analytique complète existe, il est absolument nécessaire que les modèles choisis admettent des lois de comportement inverses et que l'expression du débit (3.23) puisse être inversée.

3.3 Solution analytique

De par l'énoncé du problème, on impose toujours une condition de frottement à la paroi. De plus, on sait que $u_R \geq 0$ et que $\tau_a = |\tau_R|$. Donc, la loi de comportement inverse du frottement à la paroi s'écrit

$$(3.27) \quad \left| \begin{array}{ll} u_R = 0 & \text{si } \tau_a < g \\ u_R = \frac{(\tau_a - g)}{c_f} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{array} \right.$$

On remplace alors u_R de l'équation (3.24) par l'équation (3.27), d'où

$$(3.28) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_{a_g} = 0 & \text{si } \tau_a < g \\ \dot{\gamma}_{a_g} = 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{array} \right.$$

D'après la littérature (voir Bird-Steward-Lightfoot [6] et Bird-Armstrong-Hassager [7]), les problèmes où la contrainte de cisaillement τ_a est imposée possèdent une solution analytique pour le fluide newtonien, le fluide de Bingham et la loi de puissance. Dans ces trois cas, la solution analytique reste possible même lorsque le modèle de frottement énoncé par l'équation (3.27) est utilisé. On choisit donc de déterminer le champ de vitesse pour les trois modèles rhéologiques. De plus, pour chaque situation, on devra vérifier si l'expression du débit (3.23) est inversible.

3.3.1 Fluide newtonien

Le fluide newtonien est le modèle rhéologique le plus simple. Il caractérise bien les substances qui possèdent une faible viscosité, comme l'eau. Sa loi de comportement est donnée par

$$(3.29) \quad \tau_{rz} = 2\mu \dot{\gamma}_{rz}.$$

Donc, la loi de comportement inverse d'un fluide newtonien s'écrit

$$(3.30) \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2\mu} \tau_{rz}.$$

En utilisant l'équation (3.17), on peut exprimer $\dot{\gamma}_{rz}$ en terme de r , d'où

$$(3.31) \quad \dot{\gamma}_{rz} = -\frac{\tau_a}{2\mu} \frac{r}{R}.$$

En effectuant l'intégrale de l'expression (3.9) à l'aide des équations (3.31) et (3.27), on obtient le champ de vitesse

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_R = 0 & \text{si } \tau_a < g \\ u_R = \frac{(\tau_a - g)}{c_f} & \text{si } \tau_a \geq g \\ u_m = u_R + \frac{\tau_a}{2\mu} R \\ u_z(r) = u_R + (u_m - u_R) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{si } 0 \leq r \leq R \end{array} \right.$$

où u_m est la vitesse maximum du profil.

L'expression du débit est obtenue en effectuant l'intégrale de l'équation (3.23) à l'aide des équations (3.30) et (3.28), d'où

$$(3.33) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_a = \frac{1}{2\mu} \tau_a & \text{si } \tau_a < g \\ \dot{\gamma}_a = 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} + \frac{1}{2\mu} \tau_a & \text{si } \tau_a \geq g. \end{array} \right.$$

Pour le fluide newtonien, on constate que l'expression du débit (3.33) est inversible, d'où

$$(3.34) \quad \left| \begin{array}{ll} \tau_a = 2\mu \dot{\gamma}_a & \text{si } \dot{\gamma}_a < \dot{\gamma}_a^{cg} \\ \tau_a = \left(\frac{1}{R c_f + 4\mu} \right) (R c_f 2\mu \dot{\gamma}_a + 4\mu g) & \text{si } \dot{\gamma}_a \geq \dot{\gamma}_a^{cg}. \end{array} \right.$$

On note par $\dot{\gamma}_a^{cg}$ le débit critique de glissement. Il est déterminé en imposant $\tau_a = g$ dans l'expression du débit (3.33), d'où

$$(3.35) \quad \dot{\gamma}_a^{cg} = \frac{g}{2\mu}.$$

3.3.2 Fluide de Bingham

Le fluide de Bingham est une substance qui possède un seuil de contrainte. Il caractérise bien des matériaux comme les émulsions, les suspensions de solides et les pâtes. Sa loi de comportement est donnée par

$$(3.36) \quad \tau_{rz} = 2 \left[\mu_0 + \frac{\tau_0}{2 |\dot{\gamma}_{rz}|} \right] \dot{\gamma}_{rz}.$$

D'après l'équation (3.17), on sait que la contrainte τ_{rz} est négative. Donc, la loi de comportement inverse d'un fluide de Bingham s'écrit

$$(3.37) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_{rz} = 0 & \text{si } \tau_{rz} > -\tau_0, \\ \dot{\gamma}_{rz} = \frac{(\tau_{rz} + \tau_0)}{2\mu_0} & \text{si } \tau_{rz} \leq -\tau_0. \end{array} \right.$$

En utilisant l'équation (3.17), on peut exprimer $\dot{\gamma}_{rz}$ en terme de r , d'où

$$(3.38) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_{rz} = 0 & \text{si } 0 \leq r < r_c \\ \dot{\gamma}_{rz} = -\frac{\tau_a}{2\mu_0} \frac{(r - r_c)}{R} & \text{si } r_c \leq r \leq R. \end{array} \right.$$

On note par r_c le rayon critique qui démarque la transition entre le solide et le liquide. Elle se situe à l'endroit où τ_{rz} est précisément égale à τ_0 , d'où

$$(3.39) \quad r_c = \frac{\tau_0}{\tau_a} R.$$

En effectuant l'intégrale de l'expression (3.9) à l'aide des équations (3.38) et (3.27), on obtient le champ de vitesse

$$(3.40) \quad \left| \begin{array}{ll} u_R = 0 & \text{si } \tau_a < g \\ u_R = \frac{(\tau_a - g)}{c_f} & \text{si } \tau_a \geq g \\ u_m = u_R + \frac{\tau_a}{2\mu_0} \frac{(R - r_c)^2}{R} & \\ u_z(r) = u_m & \text{si } 0 \leq r < r_c \\ u_z(r) = u_R + (u_m - u_R) \left[1 - \frac{(r - r_c)^2}{(R - r_c)^2} \right] & \text{si } r_c \leq r \leq R \end{array} \right.$$

où u_m est la vitesse maximum du profil.

L'expression du débit est obtenue en effectuant l'intégrale de l'équation (3.23) à l'aide des équations (3.37) et (3.28), d'où

$$(3.41) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_{a_f} = 0 & \text{si } \tau_a < \tau_0 \\ \dot{\gamma}_{a_f} = \frac{\tau_a}{2\mu_0} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_a} \right) \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau_a} \right)^3 - 4 \right] \right\} & \text{si } \tau_a \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_{a_f} & \text{si } \tau_a < g \\ \dot{\gamma}_a = 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} + \dot{\gamma}_{a_f} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{array} \right.$$

Pour le fluide de Bingham, on constate que l'expression du débit (3.41) n'est pas inversible. Par contre, on peut évaluer le débit critique de glissement et un débit

critique de déformation. D'après l'équation (3.41), on s'aperçoit que les débits critiques dépendent de la relation qui existe entre g et τ_0 . Si $g < \tau_0$, on a un débit critique de déformation qui est défini par

$$(3.42) \quad \dot{\gamma}_a^{c_d} = 2 \frac{(\tau_0 - g)}{c_f} \frac{1}{R}$$

et un débit critique de glissement nul ($\dot{\gamma}_a^{c_g} = 0$). Cependant si $g \geq \tau_0$, on a un débit critique de glissement qui est défini par

$$(3.43) \quad \dot{\gamma}_a^{c_g} = \frac{g}{2\mu_0} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{g} \right) \left[\left(\frac{\tau_0}{g} \right)^3 - 4 \right] \right\}$$

et un débit critique de déformation nul ($\dot{\gamma}_a^{c_d} = 0$).

3.3.3 Loi de puissance

La loi de puissance est le modèle le plus utilisé pour décrire la viscosité des polymères fondus et des polymères en solution. Son comportement est donné par

$$(3.44) \quad \tau_{rz} = 2 \left[m |\dot{\gamma}_{rz}|^{n-1} \right] \dot{\gamma}_{rz}.$$

Comme pour le fluide de Bingham, on a une contrainte τ_{rz} négative. Donc, le comportement inverse d'une loi de puissance s'écrit

$$(3.45) \quad \dot{\gamma}_{rz} = - \left(\frac{-\tau_{rz}}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

En utilisant l'équation (3.17), on peut exprimer $\dot{\gamma}_{rz}$ en terme de r , d'où

$$(3.46) \quad \dot{\gamma}_{rz} = - \left[\frac{\tau_a}{2m} \left(\frac{r}{R} \right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

En effectuant l'intégrale de l'expression (3.9) à l'aide des équations (3.46) et (3.27), on obtient le champ de vitesse

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_R = 0 & \text{si } \tau_a < g \\ u_R = \frac{(\tau_a - g)}{c_f} & \text{si } \tau_a \geq g \\ u_m = u_R + 2 \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR}{(n+1)} \\ u_z(r) = u_R + (u_m - u_R) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{si } 0 \leq r \leq R \end{array} \right.$$

où u_m est la vitesse maximum du profil.

L'expression du débit est obtenue en effectuant l'intégrale de l'équation (3.23) à l'aide des équations (3.45) et (3.28), d'où

$$(3.48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\gamma}_a = \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } \tau_a < g \\ \dot{\gamma}_a = 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} + \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{array} \right.$$

Pour la loi de puissance, on constate que l'expression du débit (3.48) n'est pas inversible. Par contre, on s'aperçoit qu'elle peut le devenir, s'il n'y a pas de condition de frottement à la paroi ($c_f \rightarrow \infty$). De plus, on peut déterminer le débit critique de glissement

$$(3.49) \quad \dot{\gamma}_a^{c_g} = \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{g}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons maintenant qu'il n'y a pas de frottement à la paroi. L'équation (3.48) devient

$$(3.50) \quad \dot{\gamma}_a = \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette équation peut alors être inversée, d'où

$$(3.51) \quad \tau_a = 2m \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n (\dot{\gamma}_a)^n.$$

Si on prend le logarithme de τ_a , on a que

$$(3.52) \quad \log \tau_a = \log K + n \log \dot{\gamma}_a$$

où on définit

$$(3.53) \quad K = 2m \left(\frac{3n + 1}{4n} \right)^n .$$

Donc le graphique de $\log \tau_a$ versus $\log \dot{\gamma}_a$ donne une droite de pente n et d'ordonnée à l'origine $\log K$ (voir figure 3.2). Ce résultat est la constatation classique obtenue

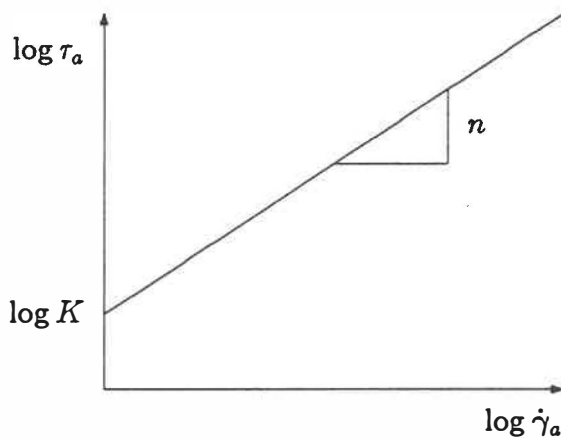


Figure 3.2: Comportement d'une loi de puissance

lorsqu'un fluide se comporte comme une loi de puissance sans frottement à la paroi.

Chapitre 4

Résultats numériques

Les simulations numériques effectuées dans ce chapitre ont été réalisées pour des géométries axisymétriques exprimées en coordonnées cylindriques (r, z) et à partir d'écoulements engendrés par un débit constant. De plus, on considère toujours une condition de symétrie sur l'axe $r = 0$ et un écoulement dans le même sens que l'axe z . Ceci implique que les problèmes simulés possèdent une entrée et une sortie dont la section perpendiculaire à l'axe z est circulaire. On peut donc obtenir un débit constant, en imposant un profil de vitesse plat à travers une section de la géométrie, d'où

$$(4.1) \quad Q = \pi R^2 u_0.$$

On note par R le rayon de la section et par u_0 la vitesse du profil plat à travers la section.

Ce type de problème est compatible avec les solutions analytiques obtenues au chapitre précédent. Par contre, pour pouvoir les utiliser dans l'interprétation de nos résultats, il faut que l'écoulement soit totalement développé. Supposons, pour l'instant, que cette condition soit respectée dans une section de la géométrie. D'après le chapitre précédent, les variables importantes à considérer sont la vitesse

de déformation apparente à la paroi:

$$(4.2) \quad \dot{\gamma}_a = \frac{2Q}{\pi R^3} = \frac{2}{R} u_0$$

et la contrainte de cisaillement à la paroi:

$$(4.3) \quad \tau_a = \frac{|\Delta p|}{2} R.$$

La vitesse de déformation apparente $\dot{\gamma}_a$ est donc la variable connue (on impose un débit constant) et la contrainte de cisaillement τ_a la variable inconnue. On sait qu'une expression analytique pour la variable τ_a ne peut pas toujours être déterminée. Par contre, il est toujours possible de l'évaluer dans la section considérée en utilisant l'équation (4.3) et la perte de charge par unité de longueur $|\Delta p|$ obtenue directement d'une simulation numérique.

4.1 Ecoulement dans un tube

Le but de cette section est de vérifier l'existence des débits critiques de déformation et de glissement obtenus à la section 3.3.2. Pour ce faire, on considère l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une condition de frottement à la paroi. La géométrie utilisée pour faire la simulation numérique est illustrée à la figure 4.1. La discrétisation du domaine est faite à l'aide d'un maillage uniforme de 21 noeuds suivant l'axe r et de 41 noeuds suivant l'axe z .

Pour pouvoir utiliser la solution analytique de la section 3.3.2, il faut que l'écoulement soit bien établi à la sortie. On choisit alors un rapport L/R suffisamment grand, soit $L = 10 m$ et $R = 1 m$. D'après la section 3.3.2, on sait que les débits

critiques de déformation et de glissement sont définis par:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{cd} &= 2 \frac{(\tau_0 - g)}{c_f} \frac{1}{R} \\ \dot{\gamma}_a^{cg} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ si } g < \tau_0,$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{cd} &= 0 \\ \dot{\gamma}_a^{cg} &= \frac{g}{2\mu_0} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{g} \right) \left[\left(\frac{\tau_0}{g} \right)^3 - 4 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \text{ si } g \geq \tau_0.$$

On choisit arbitrairement les paramètres physiques suivants:

$$\begin{aligned} \rho &= 1.0 \text{ kg/m}^3 & : & \text{ densité du fluide,} \\ \mu_0 &= 1.0 \text{ Pa s} & : & \text{ viscosité du fluide,} \\ \tau_0 &= 2.0 \text{ Pa} & : & \text{ seuil de contrainte à la déformation,} \\ c_f &= 1.0 \text{ Pa s/m} & : & \text{ coefficient de friction.} \end{aligned}$$

Le seuil de contrainte au glissement g est donné pour trois cas particuliers et les débits critiques sont évalués dans chaque cas:

$$\begin{aligned} \text{Premier cas: } g = 1.0 \text{ Pa} < \tau_0 & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{cd} &= 2.0 \text{ 1/s} \\ \dot{\gamma}_a^{cg} &= 0.0 \text{ 1/s,} \end{aligned} \right. \\ \text{Deuxième cas: } g = 2.0 \text{ Pa} = \tau_0 & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{cd} &= 0.0 \text{ 1/s} \\ \dot{\gamma}_a^{cg} &= 0.0 \text{ 1/s,} \end{aligned} \right. \\ \text{Troisième cas: } g = 3.0 \text{ Pa} > \tau_0 & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{cd} &= 0.0 \text{ 1/s} \\ \dot{\gamma}_a^{cg} &= 0.2654 \text{ 1/s.} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On effectue alors des simulations numériques pour chaque cas:

Premier cas

Dans le premier cas, on a un débit critique de déformation non-nul. De plus, aussitôt qu'un débit d'écoulement est imposé, il y a glissement. La figure 4.2 illustre

les profils de vitesse obtenus à la sortie du tube. Lorsque $\dot{\gamma}_a < \dot{\gamma}_a^{c_d}$, l'écoulement n'est pas assez intense pour déformer le fluide de Bingham. On a alors un solide qui se déplace dans le tube et qui est retenu par une force de friction sur la paroi déterminée par le coefficient de friction c_f . Lorsque $\dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_a^{c_d}$, l'écoulement est juste assez intense pour déformer le fluide de Bingham. Par contre, on a encore un solide qui se déplace dans le tube. Lorsque $\dot{\gamma}_a > \dot{\gamma}_a^{c_d}$, l'écoulement est assez intense pour déformer le fluide de Bingham. On a alors une région solide et une région liquide qui se déplace dans le tube.

Deuxième cas

Dans le deuxième cas, les débits critiques sont nuls. Aussitôt qu'un débit d'écoulement est imposé, il y a déformation et glissement. La figure 4.3 illustre les profils de vitesse obtenus à la sortie du tube. A mesure que $\dot{\gamma}_a$ augmente, on s'aperçoit que la déformation du fluide de Bingham et la vitesse de glissement à la paroi deviennent de plus en plus importantes. De plus, on observe, pour toutes les valeurs de $\dot{\gamma}_a$, une région solide et une région liquide dans l'écoulement.

Troisième cas

Dans le troisième cas, on a un débit critique de glissement non-nul. De plus, aussitôt qu'un débit d'écoulement est imposé, il y a déformation. La figure 4.4 illustre les profils de vitesse obtenus à la sortie du tube. Lorsque $\dot{\gamma}_a < \dot{\gamma}_a^{c_g}$, l'écoulement n'est pas assez intense pour qu'il y ait glissement. On a alors adhérence à la paroi, forçant ainsi le fluide de Bingham à subir une déformation déterminée par la viscosité μ_0 . Lorsque $\dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_a^{c_g}$, l'écoulement est juste assez intense pour qu'il y ait glissement. Par contre, on a encore adhérence à la paroi. Lorsque $\dot{\gamma}_a > \dot{\gamma}_a^{c_g}$,

l'écoulement est assez intense pour qu'il y ait glissement. Ici aussi, on observe, pour toutes les valeurs de $\dot{\gamma}_a$, une région solide et une région liquide dans l'écoulement.

L'existence d'une solution analytique permet de valider nos résultats numériques. Pour ce faire, on utilise la contrainte de cisaillement τ_a obtenue de la simulation numérique pour évaluer les variables désirées. Pour le fluide de Bingham, on est intéressé à connaître le rayon critique, défini par

$$r_c = \frac{\tau_0}{\tau_a} R$$

et à calculer la vitesse de déformation apparente, définie par

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{a_f} &= 0 & \text{si } \tau_a < \tau_0, \\ \dot{\gamma}_{a_f} &= \frac{\tau_a}{2\mu_0} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_a} \right) \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau_a} \right)^3 - 4 \right] \right\} & \text{si } \tau_a \geq \tau_0, \\ \dot{\gamma}_a &= \dot{\gamma}_{a_f} & \text{si } \tau_a < g, \\ \dot{\gamma}_a &= 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} + \dot{\gamma}_{a_f} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{aligned}$$

Les tableaux 4.1 à 4.3 et 4.4 à 4.6 donnent respectivement les rayons critiques et les vitesses de déformation apparentes calculés à partir des contraintes de cisaillement à la paroi obtenues numériquement. On peut alors comparer ces valeurs calculées à celles qu'on obtient à la sortie. Les rayons critiques obtenus sont déterminés en examinant les profils de vitesse. La précision de ces valeurs n'est donc pas très bonne. Il est alors inutile de calculer l'erreur relative. Par contre, la valeur de l'erreur relative entre la vitesse de déformation apparente imposée et calculée ainsi que le nombre d'itérations sont de bonnes indications de la qualité de la convergence de l'algorithme.

4.2 Ecoulement dans une contraction conique

Le but de cette section est de vérifier la transition entre l'adhérence et le glissement sur une même paroi. Pour ce faire, on considère l'écoulement d'un fluide newtonien avec une condition de frottement à la paroi. La géométrie utilisée pour faire la simulation numérique est illustrée à la figure 4.5. La discrétisation du domaine est faite à l'aide d'un maillage uniforme de 21 noeuds suivant l'axe r et de 41 noeuds suivant l'axe z . Ceci implique que la séparation entre les noeuds suivant l'axe r dans l'entrée est R_e/R_s fois plus grande que celle dans la sortie.

Pour ce genre de géométrie ($R_s < R_e$), la contrainte de cisaillement τ_a est obligatoirement plus élevée dans la sortie que dans l'entrée. Donc, pour que la transition désirée puisse se produire, il faut qu'il y ait adhérence dans l'entrée ($\tau_a < g$) et glissement dans la sortie ($\tau_a \geq g$). Afin de déterminer le débit correspondant à cette situation, on considère le débit critique de glissement obtenu à la section 3.3.1:

$$\dot{\gamma}_a^{c_g} = \frac{g}{2\mu}$$

et on impose arbitrairement les paramètres physiques suivants:

$$\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3 \quad : \text{ densité du fluide,}$$

$$\mu = 1.0 \text{ Pa s} \quad : \text{ viscosité du fluide,}$$

$$c_f = 1.0 \text{ Pa s/m} \quad : \text{ coefficient de friction,}$$

$$g = 2.0 \text{ Pa} \quad : \text{ seuil de contrainte au glissement.}$$

Afin que l'écoulement soit établi un peu avant la contraction et à la sortie, on choisit des rapports L_e/R_e et L_s/R_s suffisamment grands. On impose alors les paramètres géométriques suivants:

- $R_e = 1.0 \text{ m}$: rayon à l'entrée,
 $R_s = 0.5 \text{ m}$: rayon à la sortie,
 $L_e = 7.0 \text{ m}$: longueur de l'entrée,
 $L_c = 6.0 \text{ m}$: longueur de la contraction,
 $L_s = 7.0 \text{ m}$: longueur de la sortie.

D'après l'équation (4.2), on s'aperçoit que la vitesse de déformation apparente $\dot{\gamma}_a$ dépend du rayon de la section où on l'évalue. Ceci implique qu'à l'entrée, on a $\dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_a^e$ et qu'à la sortie, on a $\dot{\gamma}_a = \dot{\gamma}_a^s$ où $\dot{\gamma}_a^s = (R_e/R_s)^3 \dot{\gamma}_a^e$. On veut donc que $\dot{\gamma}_a^e < \dot{\gamma}_a^{c_g}$ et que $\dot{\gamma}_a^s > \dot{\gamma}_a^{c_g}$. On peut alors trouver l'intervalle des vitesses de déformation apparentes permmissibles dans l'entrée, d'où

$$\left(\frac{R_s}{R_e}\right)^3 \dot{\gamma}_a^{c_g} < \dot{\gamma}_a^e < \dot{\gamma}_a^{c_g}.$$

En utilisant cette expression et l'équation (4.2), on obtient l'intervalle des vitesses du profil plat permmissible dans l'entrée, d'où

$$\left(\frac{R_s}{R_e}\right)^2 \frac{R_s}{2} \dot{\gamma}_a^{c_g} < u_0 < \frac{R_e}{2} \dot{\gamma}_a^{c_g}.$$

En évaluant cette expression, on trouve que u_0 doit être compris entre 0.0625 m/s et 0.5 m/s pour qu'il y ait adhérence dans l'entrée et glissement dans la sortie. Afin de s'assurer qu'il y aura adhérence dans l'entrée, on choisit une valeur de u_0 plus près de la limite inférieure, soit $u_0 = 0.25 \text{ m/s}$.

On effectue alors une simulation numérique avec ces paramètres. La vitesse de glissement sur la paroi est donnée à la figure 4.6. On constate alors l'adhérence dans l'entrée, le glissement dans la sortie et la transition entre l'adhérence et le glissement dans la contraction. Le glissement à l'entrée est causé par la présence du profil plat qui produit artificiellement une contrainte de cisaillement élevée sur la paroi. Le profil de vitesse à la sortie est donné à la figure 4.7. On observe la

forme parabolique classique du fluide newtonien ainsi que la vitesse de glissement prévue.

A la sortie du domaine, la solution analytique complète est connue. On a alors des expressions pour le taux de déformation apparent, la contrainte de cisaillement à la paroi, la vitesse de glissement à la paroi et la vitesse maximum sur l'axe de symétrie:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_a^s &= \left(\frac{R_e}{R_s}\right)^3 \frac{2}{R_s} u_0, \\ \tau_a &= 2\mu \dot{\gamma}_a^s && \text{si } \dot{\gamma}_a^s < \dot{\gamma}_a^{c_g}, \\ \tau_a &= \left(\frac{1}{R_s c_f + 4\mu}\right) (R_s c_f 2\mu \dot{\gamma}_a^s + 4\mu g) && \text{si } \dot{\gamma}_a^s \geq \dot{\gamma}_a^{c_g}, \\ u_R &= 0 && \text{si } \tau_a < g, \\ u_R &= \frac{(\tau_a - g)}{c_f} && \text{si } \tau_a \geq g, \\ u_m &= u_R + \frac{\tau_a}{2\mu} R_s. \end{aligned}$$

La comparaison entre les résultats numériques et analytiques est donnée au tableau 4.7. On note une très bonne précision en seulement 12 itérations.

4.3 Ecoulement dans une contraction abrupte

Le but de cette section est de reproduire numériquement les résultats expérimentaux obtenus par Ramamurthy [4] sur le comportement de la résine 1 MI LLDPE à 220°C dans un rhéomètre à capillaire dont l'entrée est abrupte. Ces résultats montrent que la résine se comporte comme une loi de puissance avec une condition de frottement à la paroi. Pour les besoins de la simulation, on représente le rhéomètre à capillaire à l'aide de la contraction abrupte illustrée à la figure 4.8. La discrétisation du domaine est faite à l'aide d'un maillage non-uniforme dont la concentration des noeuds se trouve principalement près de la paroi et autour

de la contraction. Dans l'entrée, on utilise 41 noeuds suivant l'axe r et 19 noeuds suivant l'axe z tandis que dans la sortie, on utilise 13 noeuds suivant l'axe r et 19 noeuds suivant l'axe z .

La résine utilisée possède une densité $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$ et les paramètres de la loi de puissance qui la caractérise sont donnés par:

$$n = 0.64,$$

$$K = 0.0093 \text{ MPa s}^n.$$

D'après la section 3.3.3, on sait que par définition

$$K = 2m \left(\frac{3n + 1}{4n} \right)^n.$$

Donc, en inversant cette équation, on trouve $m = 0.00427 \text{ MPa s}^n$. La courbe expérimentale de comportement du frottement à la paroi illustrée à la figure 4.9 montre que notre modèle linéaire, lorsqu'il y a glissement, est valide seulement pour des valeurs de τ_a inférieures à 0.2 MPa (voir figure 4.10). En effectuant une régression linéaire dans cette région, on trouve un coefficient de friction $c_f = 0.0455 \text{ MPa s/mm}$ et un seuil de contrainte au glissement $g = 0.0719 \text{ MPa}$. On se limite donc à cette intervalle de contraintes de cisaillement à la paroi pour ne pas avoir à introduire un modèle de frottement plus compliqué (non-linéaire lorsqu'il y a glissement).

De façon à respecter les conditions expérimentales, on utilise les paramètres géométriques suivants:

$$R_e = 2.0 \text{ mm} : \text{ rayon de l'entrée,}$$

$$R_s = 0.5 \text{ mm} : \text{ rayon de la sortie,}$$

$$L_e = 5.0 \text{ mm} : \text{ longueur de l'entrée,}$$

$$L_s = 5.0 \text{ mm} : \text{ longueur de la sortie.}$$

Le rapport L_s/R_s est donc suffisamment grand pour que l'écoulement soit établi à la sortie. On utilise alors l'expression du débit obtenue au chapitre précédent:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_a = \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } \tau_a < g \\ \dot{\gamma}_a = 2 \frac{(\tau_a - g)}{c_f} \frac{1}{R} + \left(\frac{4n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_a}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } \tau_a \geq g. \end{cases}$$

Pour une valeur fixe de τ_a , cette expression montre l'existence de la relation linéaire entre $\dot{\gamma}_a$ et $1/R$ vérifiée par Ramamurthy (voir [4], figure 5). Ce comportement reste valide pour n'importe quel modèle de frottement et modèle rhéologique. De plus, à l'aide de l'expression (4.4), on peut évaluer le débit critique de glissement et le débit maximum admissible en y imposant respectivement $\tau_a = g$ et $\tau_a = 0.2 \text{ MPa}$, d'où

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_a^{c_g} &= 24.48 \text{ 1/s}, \\ \dot{\gamma}_a \text{ maximum} &= 132.3 \text{ 1/s}. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'effectuer des simulations numériques pour quelques valeurs de $\dot{\gamma}_a$ autour de $\dot{\gamma}_a^{c_g}$ et inférieur à $\dot{\gamma}_a$ maximum. La vitesse du profil plat à l'entrée est alors déterminée par

$$u_0 = \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^3 \frac{R_s}{2} \dot{\gamma}_a.$$

Les résultats numériques montrent que lorsque $\dot{\gamma}_a$ dépasse le débit critique $\dot{\gamma}_a^{c_g}$, la pente du graphique $\log \tau_a$ versus $\log \dot{\gamma}_a$ est légèrement modifiée (voir figure 4.11). Ce comportement est aussi observé expérimentalement (voir [4], figure 1). On introduit alors des paramètres de la loi de puissance apparents n_a et K_a qui caractérisent le comportement de la résine lorsqu'il y a glissement. En effectuant une régression linéaire, on trouve

$$\begin{aligned} n_a &= 0.62, \\ K_a &= 0.00968 \text{ MPa s}^{n_a}. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont considérablement différentes de celles obtenues expérimentalement, mais cette différence n'est pas vraiment significative puisque les intervalles de débits où les paramètres apparents numériques et expérimentaux sont calculés ne sont pas compatibles. Pour faire une comparaison correcte, il faudrait effectuer une régression linéaire des points expérimentaux qui se trouvent dans le même intervalle que nos résultats numériques. Puisque nous n'avons pas accès à ces données, on devrait plutôt considérer l'utilisation d'un modèle de frottement non-linéaire lorsqu'il y a glissement. Dans le contexte de ce mémoire, la reproduction qualitative des résultats expérimentaux est amplement suffisante. La figure 4.12 montre que la vitesse de glissement à la paroi près de la sortie reste constante. Donc, l'hypothèse d'un écoulement établi à la sortie est justifiée. De plus, on s'aperçoit qu'à l'entrée de la contraction la vitesse de glissement est élevée. Ceci s'explique par la présence de fortes contraintes de cisaillement à la contraction. La validation des résultats numériques est donnée par le tableau 4.8. On constate alors que l'erreur relative et le nombre d'itérations sont tout à fait acceptables.

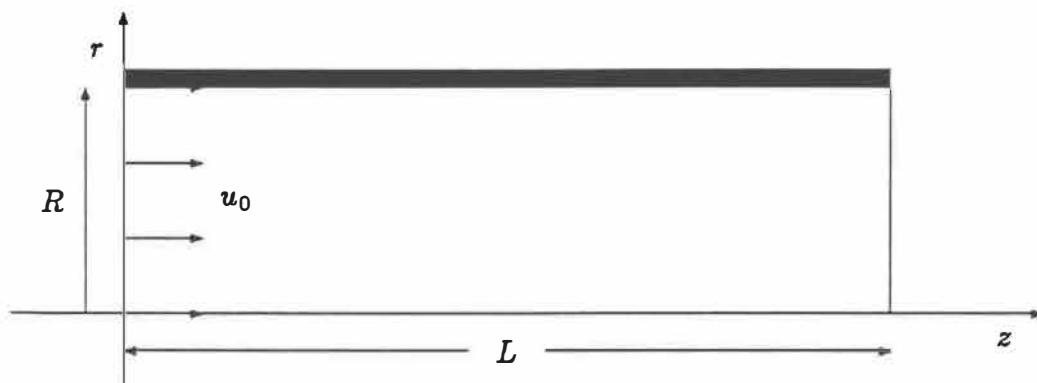


Figure 4.1: Géométrie d'un tube

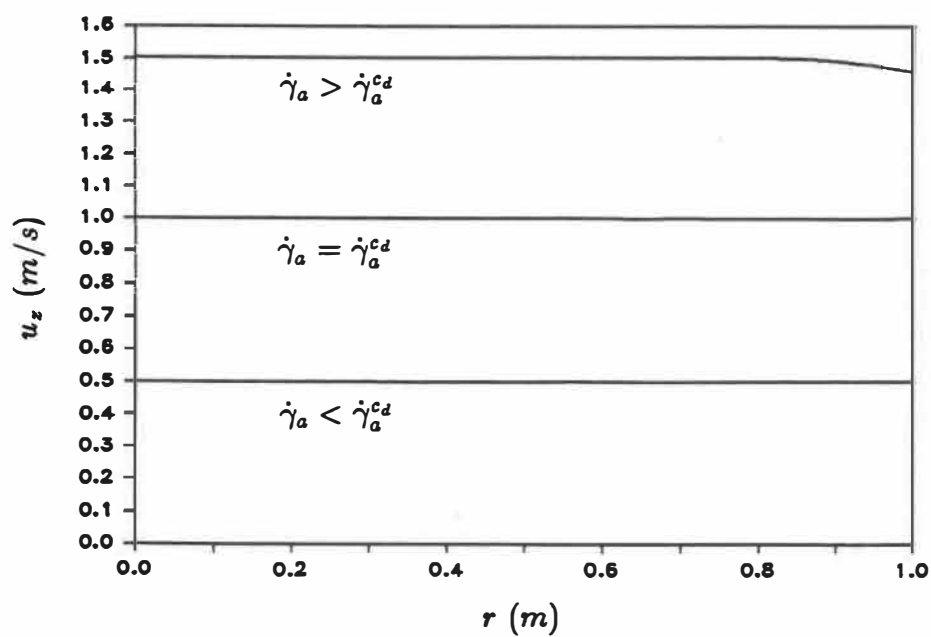


Figure 4.2: Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 1.0 \text{ Pa} < \tau_0$)

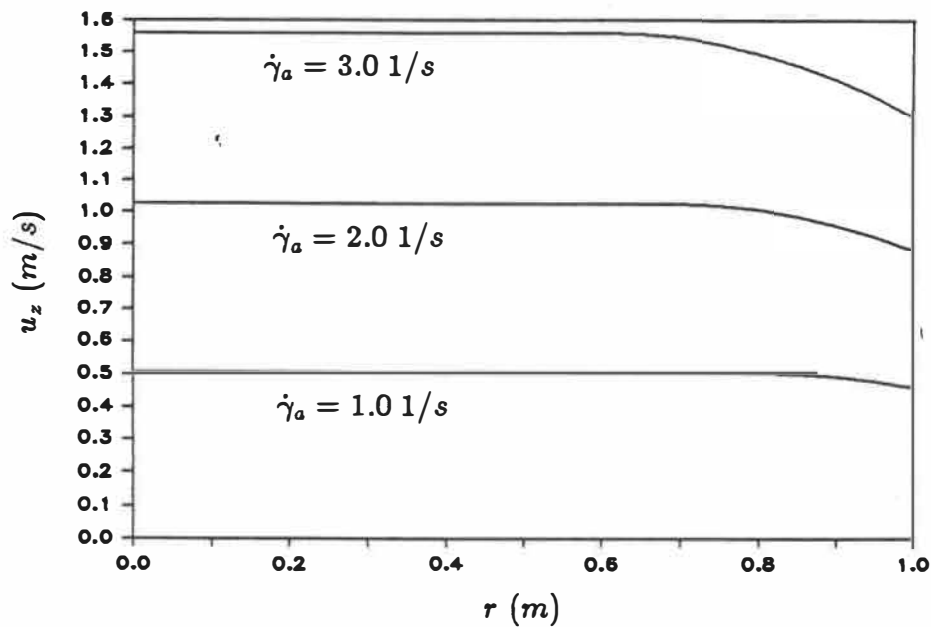


Figure 4.3: Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 2.0 \text{ Pa} = \tau_0$)

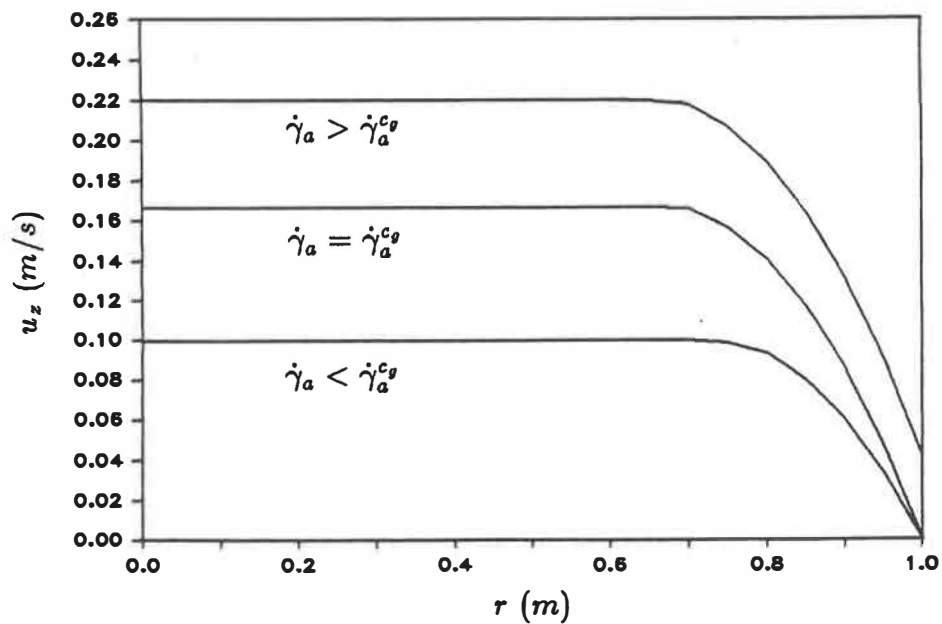


Figure 4.4: Profil de vitesse à la sortie d'un tube ($g = 3.0 \text{ Pa} > \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	r_c calculé (m)	r_c obtenu (m)
1.0	1.500	–	–
2.0	1.997	1.002	1.00
3.0	2.461	0.8127	0.80

Tableau 4.1: Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 1.0 \text{ Pa} < \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	r_c calculé (m)	r_c obtenu (m)
1.0	2.464	0.8118	0.80
2.0	2.889	0.6924	0.70
3.0	3.304	0.6053	0.60

Tableau 4.2: Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 2.0 \text{ Pa} = \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	r_c calculé (m)	r_c obtenu (m)
0.1654	2.736	0.7310	0.70
0.2654	2.999	0.6670	0.65
0.3654	3.041	0.6577	0.65

Tableau 4.3: Validation du rayon critique à la sortie d'un tube ($g = 3.0 \text{ Pa} > \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	$\dot{\gamma}_a$ calculé (1/s)	Erreur relative	Nombre d'itérations
1.0	1.500	0.9994	6.495×10^{-4}	10
2.0	1.997	1.993	3.396×10^{-3}	11
3.0	2.461	2.998	6.432×10^{-4}	14

Tableau 4.4: Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 1.0 \text{ Pa} < \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	$\dot{\gamma}_a$ calculé (1/s)	Erreur relative	Nombre d'itérations
1.0	2.464	1.004	3.857×10^{-3}	17
2.0	2.889	1.999	5.605×10^{-4}	16
3.0	3.304	3.000	1.666×10^{-4}	14

Tableau 4.5: Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 2.0 \text{ Pa} = \tau_0$)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (Pa)	$\dot{\gamma}_a$ calculé (1/s)	Erreur relative	Nombre d'itérations
0.1654	2.736	0.1648	3.633×10^{-3}	45
0.2654	2.999	0.2649	1.971×10^{-3}	47
0.3654	3.041	0.3642	3.233×10^{-3}	41

Tableau 4.6: Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'un tube ($g = 3.0 \text{ Pa} > \tau_0$)

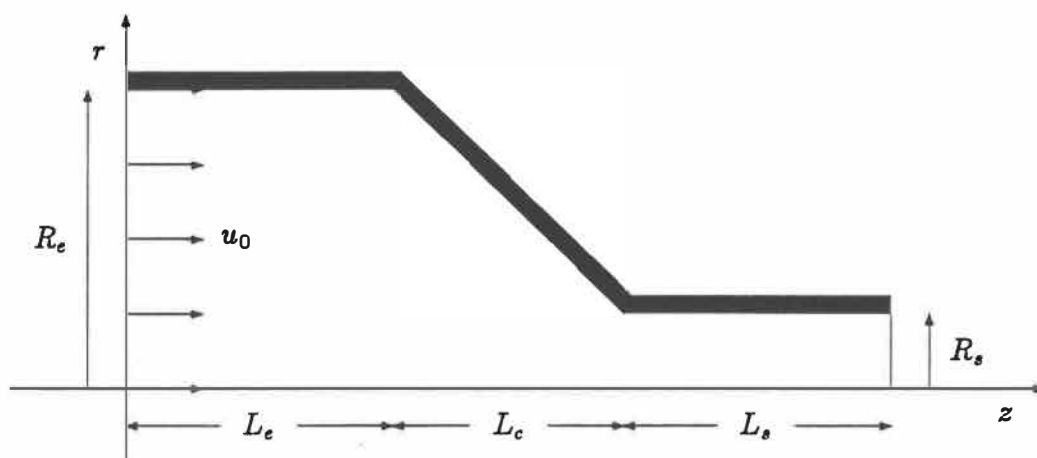


Figure 4.5: Géométrie d'une contraction conique

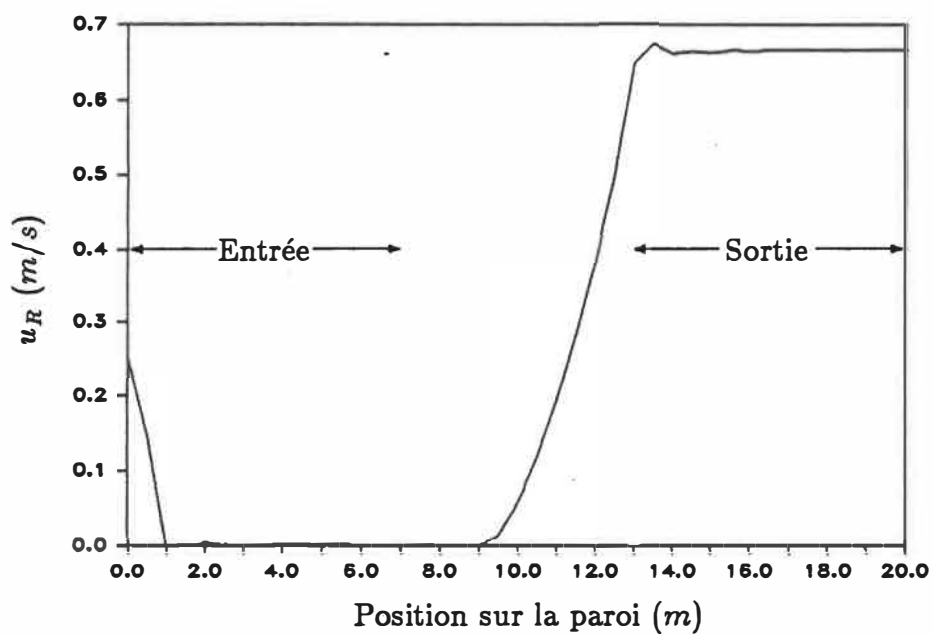


Figure 4.6: Vitesse de glissement à la paroi d'une contraction conique (l'origine est située à l'entrée)

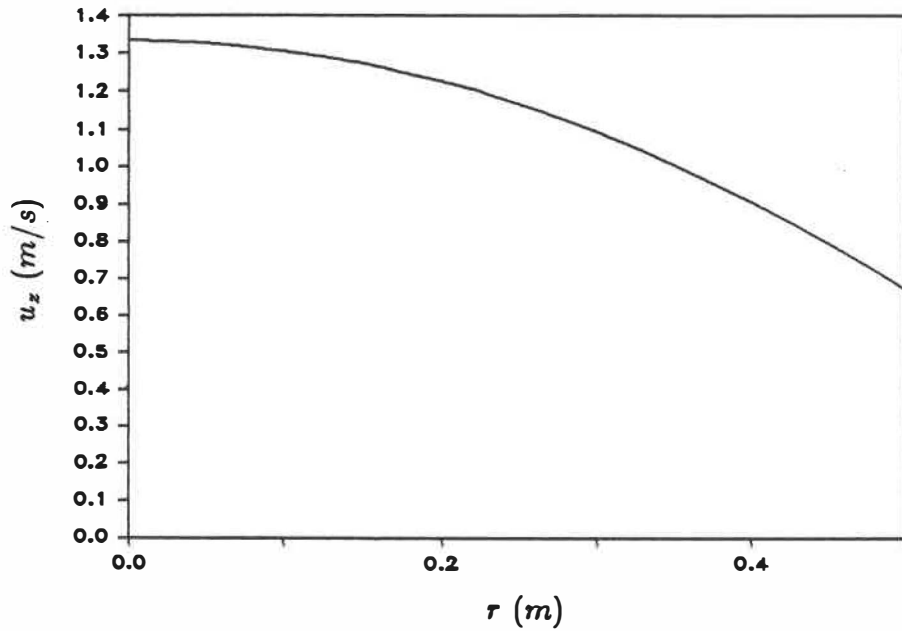


Figure 4.7: Profil de vitesse à la sortie d'une contraction conique

$\dot{\gamma}_a^s = 4.0 \text{ 1/s}$	Analytique	Numérique	Erreur relative
$\tau_a \text{ (Pa)}$	2.667	2.667	5.044×10^{-5}
$u_R \text{ (m/s)}$	0.6667	0.6667	2.211×10^{-5}
$u_m \text{ (m/s)}$	1.333	1.333	2.354×10^{-6}

Tableau 4.7: Validation des résultats numériques obtenus à la sortie d'une contraction conique (nombre d'itérations = 12)

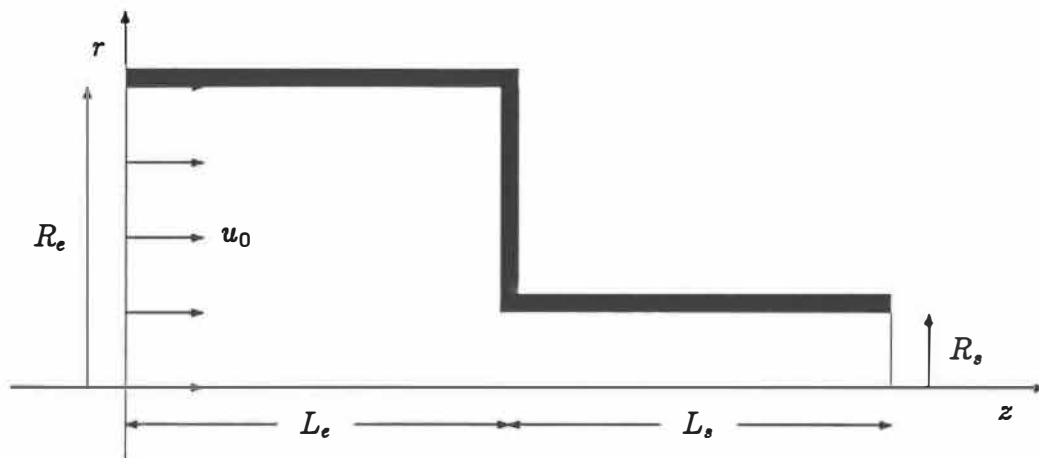


Figure 4.8: Géométrie d'une contraction abrupte

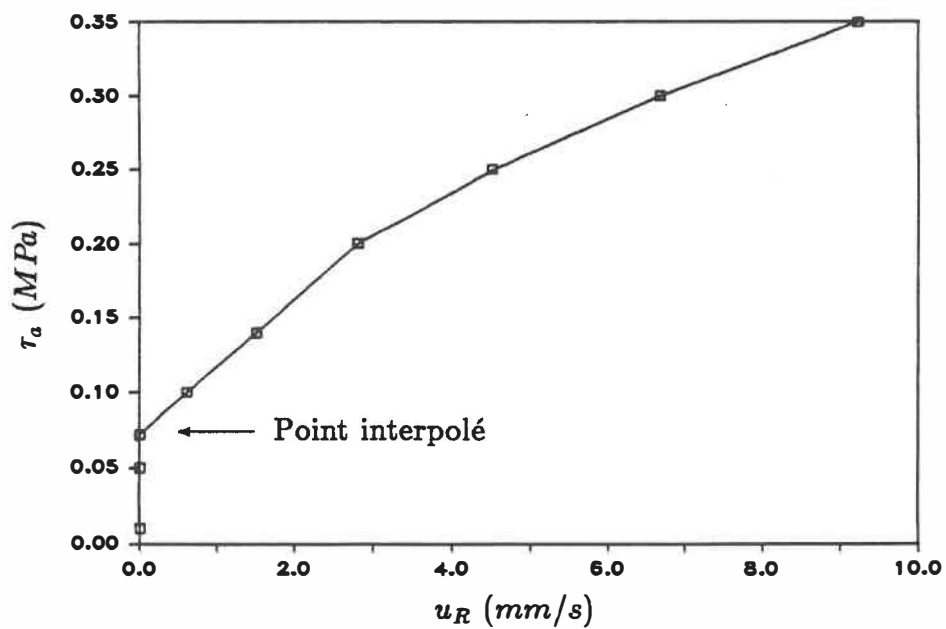


Figure 4.9: Courbe expérimentale de comportement du frottement à la paroi

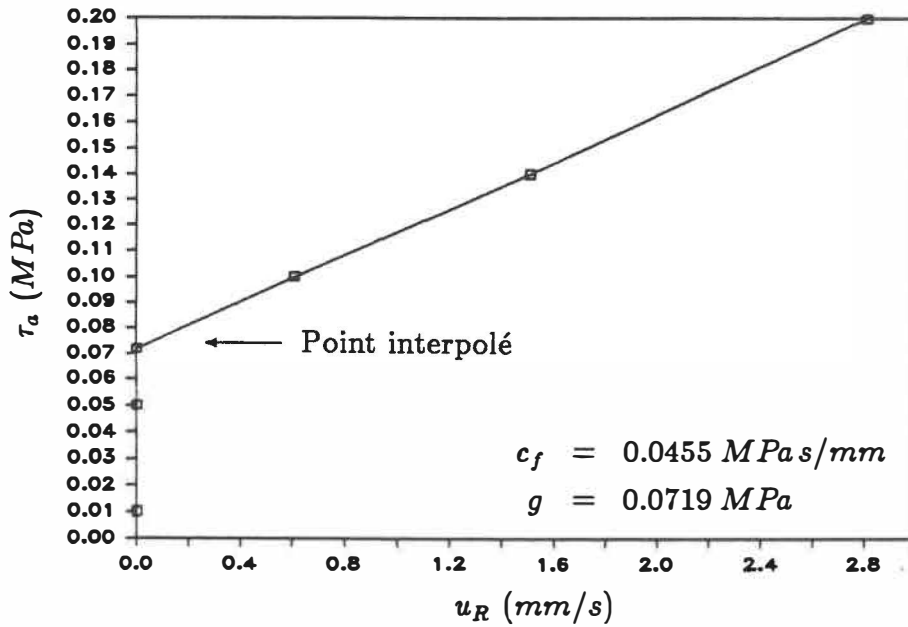


Figure 4.10: Région linéaire de la courbe de comportement illustrée à la figure 4.9

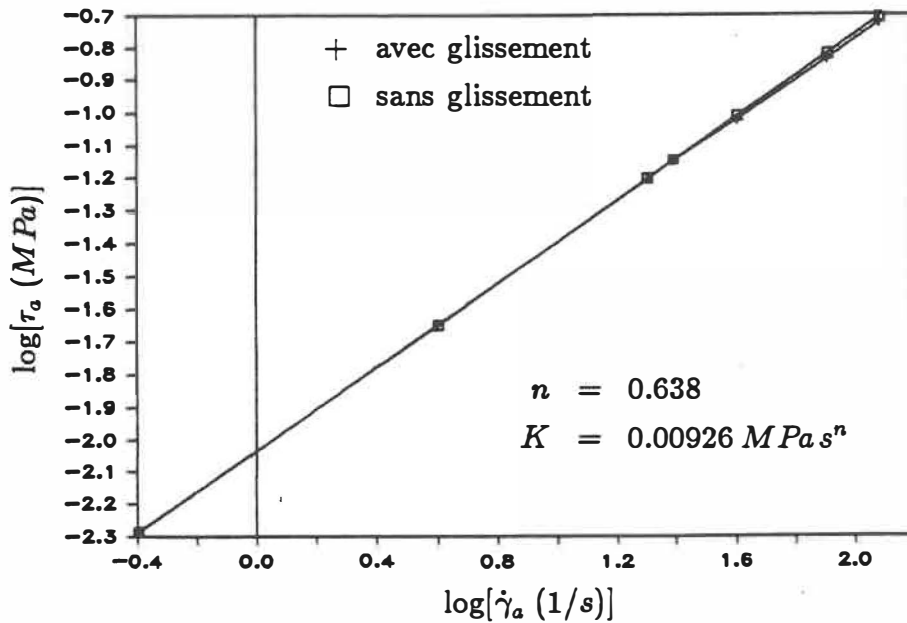


Figure 4.11: Graphique de $\log \tau_a$ versus $\log \dot{\gamma}_a$ avec et sans glissement

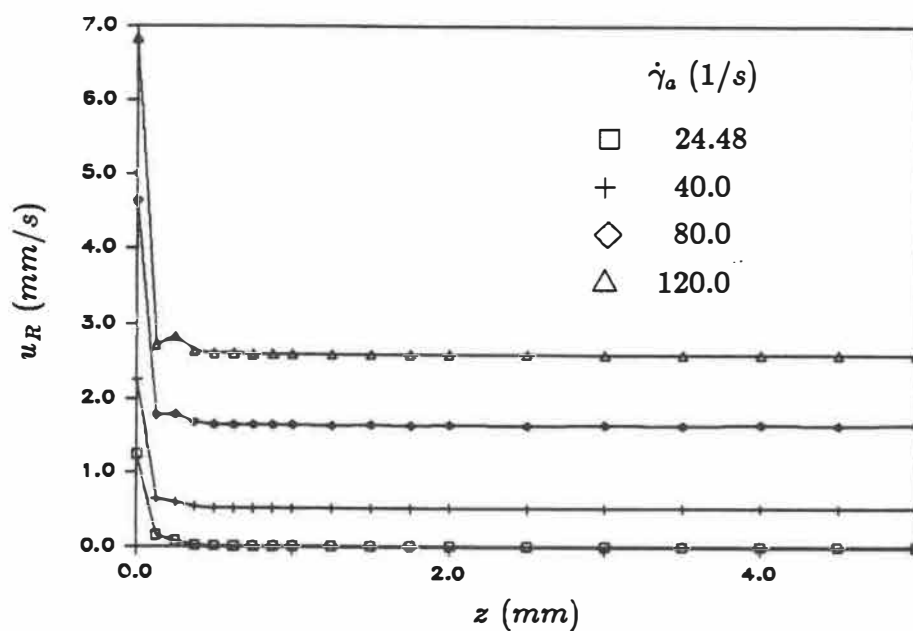


Figure 4.12: Vitesse de glissement à la paroi dans la sortie d'une contraction abrupte (l'origine est située à la contraction)

$\dot{\gamma}_a$ imposé (1/s)	τ_a obtenue (MPa)	$\dot{\gamma}_a$ calculé (1/s)	Erreur relative	Nombre d'itérations
0.4	0.005142	0.3969	7.871×10^{-3}	50
4.0	0.02259	4.008	1.928×10^{-3}	28
20.0	0.06246	19.64	1.822×10^{-2}	24
24.48	0.07116	24.07	1.654×10^{-2}	23
40.0	0.09534	40.08	2.091×10^{-3}	30
80.0	0.1457	80.27	3.370×10^{-3}	29
120.0	0.1885	120.6	4.696×10^{-3}	29

Tableau 4.8: Validation de la vitesse de déformation apparente à la sortie d'une contraction abrupte

Conclusion

On introduit, dans ce projet, un modèle de frottement qui permet de considérer les écoulements de fluides où il y a glissement à la paroi lorsqu'un certain seuil de contrainte est atteint. La présence de ce seuil amène une complication dans la détermination de la formulation variationnelle nécessaire à l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cette même complication existe lorsqu'on veut résoudre l'écoulement d'un fluide de Bingham. A l'aide de quelques manipulations mathématiques, on réussit à ramener ce problème à la résolution d'une inéquation variationnelle, qu'on effectue à l'aide de la méthode du Lagrangien augmenté. Ceci nous permet alors de développer un algorithme qui traite les problèmes d'écoulements de fluides non-newtoniens avec une condition de frottement à la paroi.

D'un point de vue théorique, l'utilisation de notre modèle de frottement permet de vérifier, pour une géométrie particulière, l'existence d'une transition entre l'adhérence et le glissement sur une même paroi. De plus, pour l'écoulement d'un fluide de Bingham, on montre qu'il est possible d'avoir un solide qui se déplace dans un tube sans que la perte de charge soit nulle. D'un point de vue pratique, on réussit à reproduire qualitativement le comportement d'un polymère dans un rhéomètre à capillaire. Par contre, la comparaison quantitative n'est pas possible puisque le modèle de frottement qu'on utilise est linéaire lorsqu'il y a glissement.

Finalement, dans le prolongement de ce projet, l'introduction d'autres modèles

de frottement serait à considérer. Par exemple, l'utilisation d'une loi de puissance lorsqu'il y a glissement, à la place du comportement linéaire, ferait en sorte qu'une comparaison quantitative serait possible entre les résultats numériques et expérimentaux. Il suffirait alors de déterminer les paramètres de la loi de puissance à l'aide de la courbe expérimentale de comportement du frottement à la paroi en utilisant une échelle logarithmique. Ceci permettrait donc de considérer le même intervalle de débit que Ramamurthy.

Bibliographie

1. Schowalter W.R., 'The Behavior of Complex Fluids at Solid Boundaries', *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **29**, 25-36 (1988).
2. Müller-Mohnssen H., Löbl H.P., Schauerte W., 'Direct Determination of Apparent Slip for a Ducted Flow of Polyacrylamide Solutions', *Journal of Rheology*, **31** (4), 323-336 (1987).
3. Yoshimura A., Prud'homme R.K., 'Wall Slip Corrections for Couette and Parallel Disk Viscometers', *Journal of Rheology*, **32** (1), 53-67 (1988).
4. Ramamurthy A.V., 'Wall Slip in Viscous Fluids and Influence of Materials of Construction', *Journal of Rheology*, **30** (2), 337-357 (1986).
5. Reddy J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New-York, N.Y., 1984.
6. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, New-York, N.Y., 1960.
7. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. I: Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, New-York, N.Y., 1977.

8. Sridhar T., Gupta R.K., 'Fluid Detachment and Slip in Extensional Flows' *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **30**, 285-302 (1988).
9. Duvaut G., Lions J.L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
10. Glowinski R., Lions J.L., Trémolières R., *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, Tome 1: Théorie Générale Premières Applications*, Dunod, Paris, 1976.
11. Glowinski R., Lions J.L., Trémolières R., *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, Tome 2: Applications aux Phénomènes Stationnaires et d'Évolution*, Dunod, Paris, 1976.
12. Fortin M., Glowinski R., *Résolution Numérique de Problèmes aux Limites par des Méthodes de Lagrangien Augmenté*, Dunod, Paris, 1982.
13. Tanguy P.A., Fortin A., Bertrand F., 'A 3-D Finite Element Model for Polymer Melt Flow', *Advances in Polymer Technology*, **8**, 99-113 (1988).
14. Tanguy P., Fortin M., Choplin L., 'Finite Element Simulation of Dip Coating, II: Non-Newtonian Fluids', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **4**, 459-475 (1984).

Annexe A

Les fonctions $f(x) = \left[a + \frac{b}{|x|} \right] x$ et
 $g(x) = \frac{a}{2} |x|^2 + b |x| - (\tau, x)$

Dans cette annexe, l'étude des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est valide seulement si les paramètres a et b sont des constantes positives et le paramètre τ ainsi que la variable x sont des nombres réels ($\tau, x \in \mathfrak{R}$). Les définitions du produit scalaire et de la norme dans l'espace \mathfrak{R} sont données par

$$\begin{aligned}(\tau, x) &= \tau x, \\ |x| &= \sqrt{(x, x)}.\end{aligned}$$

Le choix de tout autre espace doit tenir compte des définitions du produit scalaire et de la norme dans l'espace en question pour que les développements suivants soient corrects.

A.1 Minimisation de la fonction $g(x)$

La minimisation consiste d'abord à dériver la fonction $g(x)$ par rapport à la variable x , d'où

$$\frac{dg(x)}{dx} = ax + b \frac{x}{|x|} - y$$

puisque

$$\frac{d|x|^2}{dx} = 2x, \quad \frac{d|x|}{dx} = \frac{x}{|x|}, \quad \frac{d(\tau, x)}{dx} = \tau.$$

Ensuite, on impose

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0,$$

d'où

$$ax + b \frac{x}{|x|} - \tau = 0.$$

En reformulant cette équation, on trouve

$$\tau = \left[a + \frac{b}{|x|} \right] x = f(x).$$

Afin de déterminer les valeurs du paramètre τ permmissibles, on utilise la norme de cette expression, d'où

$$|\tau| = a|x| + b.$$

On constate alors que si $|x| = 0$, le paramètre τ est indéterminé. Par contre, on s'aperçoit que $|\tau| = b$. Si $|x| > 0$, on a alors que le paramètre τ est déterminé et que $|\tau| > b$. Donc, lorsque $|\tau| \geq b$, le minimum de la fonction $g(x)$ est obtenu en inversant l'expression $\tau = f(x)$ et est donné par

$$g(x) = -\frac{a}{2} |x|^2 \leq 0.$$

Lorsque $|\tau| < b$, l'expression $\tau = f(x)$ n'est plus valide. Le minimum de la fonction $g(x)$ est alors nul et se trouve en $x = 0$. Tout autre solution n'est pas possible

puisque si $g(x) < 0$, $|\tau| > b$ et si $g(x) > 0$, on n'a pas un minimum. La solution complète est donc caractérisée par le système d'équations suivant:

$$(A.1) \quad \begin{cases} x = 0 & \text{si } |\tau| < b, \\ f(x) - \tau = 0 & \text{si } |\tau| \geq b. \end{cases}$$

La difficulté se trouve donc dans l'inversion de l'expression $\tau = f(x)$.

A.2 Inversion de l'expression $\tau = f(x)$

Pour inverser l'expression $\tau = f(x)$, il faut d'abord exprimer la variable x en fonction de la variable τ , d'où

$$(A.2) \quad x = \frac{|x|}{a|x| + b} \tau$$

Ensuite, on doit trouver une expression pour $|x|$. Afin d'y arriver, on prend la norme de l'expression $\tau = f(x)$, d'où

$$|\tau| = a|x| + b$$

et on l'inverse, d'où

$$|x| = \frac{a}{2} (|\tau| - b).$$

En remplaçant cette expression dans l'expression (A.2), on obtient

$$(A.3) \quad x = \frac{1}{a} \left[1 - \frac{b}{|\tau|} \right] \tau$$

qui est l'inverse de l'expression $\tau = f(x)$. A l'aide de l'expression (A.3), on peut maintenant inverser le système d'équations (A.1), d'où

$$\begin{aligned} x &= 0 && \text{si } |\tau| < b, \\ x &= \frac{1}{a} \left[1 - \frac{b}{|\tau|} \right] \tau && \text{si } |\tau| \geq b. \end{aligned}$$

Ces points correspondent alors au minimum de la fonction $g(x)$ pour tous les paramètres τ possibles.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00259986 6