

Titre: Etude d'un contrôleur pour un robot flexible : application de la commande optimale quadratique
Title:

Auteur: Kaouthar Benameur
Author:

Date: 1989

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Benameur, K. (1989). Etude d'un contrôleur pour un robot flexible : application de la commande optimale quadratique [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/57926/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/57926/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche:
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE D'UN CONTRÔLEUR POUR UN ROBOT FLEXIBLE:
APPLICATION DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE

par

Kaouthar BENAMEUR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE ES SCIENCES APPLIQUÉES (M. Sc. A.)

Décembre 89

©Kaouthar Benameur 1989



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Canadian Theses Service Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58163-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE D'UN CONTRÔLEUR POUR UN ROBOT FLEXIBLE
APPLICATION DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE

Présenté par: Kaouthar BENAMEUR

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Romano M. De Santis, Ph. D., président

M. Richard Hurteau, D. Ing

M. Rolland Malhamé, Ph. D.

Sommaire

L'étude de membrures flexibles, dans le domaine robotique, a fait l'objet au cours des dernières années de nombreux travaux de recherches. En effet, l'allègement des structures mécaniques et le désir d'améliorer les performances des robots amènent à considérer les effets de la flexibilité dans la synthèse de lois de contrôleurs de mouvement.

Cette prise en compte des modes vibratoires dans la commande introduit des problèmes nouveaux. Un des problèmes clefs est celui de la non colocalisation de l'actionneur et du capteur. En effet, dans un robot flexible, l'actionneur est situé au niveau de la base tandis que le capteur est situé à l'extrémité libre du bras. Entre l'actionneur et le capteur, on se trouve en présence d'un modèle dynamique complexe pour décrire la flexibilité de la membrure. De plus, ce modèle doit prendre en compte les couplages et les nonlinéarités provenant des mouvements des membrures d'un robot à plusieurs degrés de liberté.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la conception d'un contrôleur du bras flexible. La commande de ce dernier est calculée à partir d'un modèle continu linéaire. La synthèse de cette commande est issue de la minimisation d'un critère quadratique à horizon infini.

Le système considéré dans cette recherche est un robot à deux degrés de liberté, la dernière membrure est flexible. Celle-ci se déplace verticalement en translation et effectue un mouvement de rotation dans le plan horizontal. Une charge est fixée à l'extrémité de la membrure flexible. Deux types de robots sont considérés dans cette étude, un robot terrestre avec une membrure de $2.2m$ et un robot spatial avec une membrure de $10m$. Ce dernier est caractérisé par une membrure plus longue et plus flexible. La modélisation des deux robots tient compte de deux sortes de déformations, une déformation horizontale reliée principalement au mouvement de rotation et une déformation verticale propre au mouvement de translation.

Dans la première étape, une commande classique colocalisée est appliquée aux deux robots et évaluée en utilisant leurs modèles linéaire et non linéaire. Le contrôleur,

de type proportionnel dérivé, a été conçu en appliquant la méthode de positionnement de pôles. Les performances de ce type de contrôleur sont évaluées en terme de marge de gain et de marge de phase ainsi que face à une perturbation appliquée à l'extrémité du bras. L'étude du contrôleur a également permis de déterminer le nombre de modes vibratoires nécessaires pour représenter le comportement du système.

Dans la deuxième étape, la conception d'un régulateur optimal est analysée, en supposant que tous les états du système sont accessibles. Un soin particulier est apporté à l'étude de la phase non minimale de la fonction de transfert du système en boucle ouverte et de ce qui en découle, notamment les pondérations au niveau de la commande et des états. Cette analyse est faite à partir des lieux des racines de la fonction caractéristique. Elle s'avère primordiale dans l'étude des performances de la commande.

La troisième étape traite de la conception de l'observateur utilisant la mesure de la position de l'extrémité de la membrure. Dans cette partie, une ébauche de discussion sur le choix des capteurs et ses retombées sur le problème de la phase non minimale, est présentée. Les densités du bruit sont utilisées comme des paramètres dans l'étude de l'observateur, elles permettent d'établir un lien direct entre la robustesse de la commande et le choix des pondérations au niveau de l'estimateur.

Une étude comparative entre le comportement du modèle linéaire et du modèle non linéaire à l'application de la commande, a permis d'établir l'efficacité de cette dernière hors des limites de sa conception.

Cette étude de la commande d'un manipulateur flexible a montré que le contrôleur linéaire optimal (de type LQG) à actionneurs et capteurs non colocalisés permet d'obtenir du système des bonnes performances en boucle fermée malgré la présence de nonlinéarités.

Abstract

Study of flexible robot has been an increasing research subject in the past few years. This interest is attributed to the fact that flexible robot with flexible links is a light weight robot which can possibly operate at high speed with small actuator. However the control strategy has to take into account the effect of the flexibility in the dynamic of the motion.

Many problems have to be solved to successfully control flexible robot. One of the most important problem is the non colocalisation of the sensor and the actuator; the sensor is usually located on the end of the flexible link while the actuator is fixed at the joint.

A complex model is needed to describe the flexibility of the arm, between the actuator and the sensor. Moreover, this model has to include the usual coupling effects and non linearity related to the motion of a multi-link rigid robot.

For the sake of simplicity, only a flexible arm driven by a servomotor is considered. The model takes into account one flexibility in the horizontal plane and one in the vertical plane. For simulation, two arms are considered, both in aluminium. The first is 2.2m long, the second is 10m long, characterised by a higher flexibility.

The objective of this thesis is to study the design of a controller for a flexible arm. The controller strategy is selected using a linear model of the system by applying the LQG theory.

The application of classical and modern control design techniques to the conception of a tip position controller is discussed. The first control law is a proportional plus derivative gain feedback where the position sensor is the hub angle collocated with the actuator. The performances of this regulator are evaluated from gain margins and to tip disturbance force.

The design of the LQG controller is done in two steps:

- The first is the design of a full state feedback controller where we suppose that all states of the system are known. In this study, we focus particularly on the effect of the non-minimum phase transmission zeros of the open loop transfer function from torque to tip position on the weighting matrices and feedback gain.
- The second step is the design of steady state estimator. The unknowns states are reconstructed from measures of one or more sensors mounted on the beam. We investigate in this study the effect of adding one or more sensors in the base, to the main sensor in the extremity, on the performance of the controller.

A comparative discussion between the behavior of linear model and the nonlinear model for the application of classical and modern controllers has allowed to establish the efficiency of those controllers beyond the limits of their conceptions.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, les professeurs Richard Hurteau et Denis Dochain, pour le sujet de recherche proposé ainsi que pour leurs conseils inestimables tout au long de cette étude.

J'exprime mes remerciements les plus sincères au Docteur Jean-Claude Piedboeuf présentement à l'Institut Und Lehrstuhl B Fur Mechanik à Munich pour son aide et sa patience durant toutes les étapes de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi aux professeurs Romano Desantis et Roland Malhamé pour avoir accepté d'être membres du jury.

De plus, je tiens à remercier tous les étudiants travaillant dans le laboratoire de la section Automatique pour la bonne ambiance de travail qui y régnait.

Mes remerciements aussi à la Mission Universitaire Tunisienne pour le support financier qu'elle m'a apporté, ainsi qu'à mes professeurs et amis de l'École des Ingénieurs de Monastir pour leurs conseils et encouragements.

Enfin, ma reconnaissance la plus profonde va à ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée à poursuivre mes études.

Table des matières

| | |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| Sommaire | iv |
| Abstract | vi |
| Remerciements | viii |
| Liste des figures | xii |
| Liste des tableaux | xiv |
| Notations et variables | xv |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Les modèles existants | 3 |
| 1.1.1 Problème de contamination | 5 |
| 1.2 Méthodes de contrôle | 8 |
| 1.2.1 Contrôleur d'ordre infini | 9 |
| 1.2.2 Contrôleur se basant sur la nature de l'entrée | 10 |
| 1.2.3 Contrôleurs à applications particulières | 11 |
| 1.2.4 Contrôle modal | 12 |
| 1.3 Étude du contrôle composite | 13 |
| 1.4 Étude du contrôle hybride | 15 |
| 1.4.1 Étude de la commande optimale | 16 |
| 1.4.2 Étude de la commande adaptative | 20 |
| 1.5 Conclusion | 23 |
| 2 Présentation du modèle | 25 |
| 2.1 Introduction | 25 |
| 2.2 Modèle et hypothèses | 26 |
| 2.3 Modèle d'ordre réduit | 28 |
| 2.4 Modèle d'état | 29 |
| 2.5 Linéarisation | 31 |
| 2.5.1 Modèle linéaire simple | 36 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.6 | Choix des manipulateurs simulés | 37 |
| 2.6.1 | Nombre de modes retenus | 39 |
| 2.7 | Conclusion | 42 |
| 3 | Étude d'une commande classique | 43 |
| 3.1 | Introduction | 43 |
| 3.2 | Critères de performances | 44 |
| 3.3 | Étude des lieux des racines en boucle fermée | 44 |
| 3.3.1 | PD en rétroaction directe | 45 |
| 3.3.2 | PD retour tachymétrique | 52 |
| 3.3.3 | Effet de l'amortissement sur le lieu des racines | 55 |
| 3.3.4 | Étude de la marge de gain et de la marge de phase | 56 |
| 3.4 | Asservissement de la position horizontale | 58 |
| 3.5 | Asservissement de la position verticale | 60 |
| 3.6 | Asservissement des positions horizontale et verticale | 61 |
| 3.7 | Étude de l'effet d'une perturbation à l'extrémité | 62 |
| 3.8 | Étude de la commande PD avec capteurs à l'extrémité | 65 |
| 3.9 | Conclusion | 68 |
| 4 | Étude de la commande optimale quadratique | 70 |
| 4.1 | Introduction | 70 |
| 4.2 | Étude du régulateur | 72 |
| 4.2.1 | Choix des paramètres de la fonction de minimisation | 73 |
| 4.2.2 | Étude de l'effet de la phase non minimale sur l'implantation du régulateur | 80 |
| 4.2.3 | Version discrète du régulateur | 82 |
| 4.3 | Étude de l'observateur | 86 |
| 4.3.1 | Introduction | 86 |
| 4.3.2 | Analyse de l'observateur | 88 |
| 4.3.3 | Observateur discret | 91 |
| 4.4 | Analyse de l'erreur | 92 |
| 4.5 | Observateur d'ordre réduit | 95 |
| 4.6 | Analyse des performances du système régulateur observateur | 97 |
| 4.6.1 | Performances du compensateur à l'extrémité | 99 |
| 4.6.2 | Performances du deuxième compensateur | 99 |
| 4.6.3 | Performances du troisième compensateur | 100 |
| 4.7 | Étude de la robustesse | 101 |
| 4.7.1 | Étude de la robustesse du régulateur | 101 |
| 4.7.2 | Étude de la robustesse de l'observateur | 102 |
| 4.7.3 | Étude de la robustesse en boucle fermée | 107 |
| 4.8 | Résultats des simulations | 109 |
| 4.9 | Conclusion | 114 |

| | |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| 5 Conclusion | 116 |
| 5.1 Résumé et apports du mémoire | 116 |
| 5.2 Travaux futurs | 118 |
| Bibliographie | 120 |
| Annexe A: Calculs des paramètres du modèle d'état | 127 |
| A.1 Les matrices A_{ij} | 127 |
| A.2 Constantes de modélisation | 128 |
| Annexe B: Variables de calcul | 131 |
| B.1 Fonctions de transfert | 131 |
| B.2 Pôles des observateurs | 133 |
| Annexe C: Méthode des fermetures successives | 134 |
| C.1 Méthode des fermetures successives des boucles | 134 |
| C.1.1 Définitions | 134 |
| C.1.2 La méthode de fermetures successives | 135 |
| C.2 Calcul de la force perturbatrice | 137 |

Liste des figures

| | | |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Géométrie du modèle de base | 4 |
| 2.1 | Le système à modéliser | 27 |
| 2.2 | Diagramme fonctionnel du modèle d'ordre réduit | 32 |
| 2.3 | Diagramme fonctionnel du modèle d'ordre réduit linéarisé autour de zéro | 38 |
| 2.4 | Diagramme de Bode: manipulateur terrestre | 41 |
| 2.5 | Diagramme de Bode: manipulateur spatial | 41 |
| 3.1 | PD :Rétroaction directe | 45 |
| 3.2 | PD :Retour tachymétrique | 46 |
| 3.3 | Lieu des racines en boucle ouverte: bras terrestre | 47 |
| 3.4 | Lieu des racines en boucle ouverte: bras spatial | 47 |
| 3.5 | Lieu des racines en boucle fermée $\tau = 3$ | 48 |
| 3.6 | Lieu des racines en boucle fermée $\tau = 0.5$ | 49 |
| 3.7 | Angle de départ du pôle | 50 |
| 3.8 | Lieu des racines en boucle fermée: bras spatial | 51 |
| 3.9 | Lieu des racines en boucle ouverte du bras AL22: déplacement vertical | 52 |
| 3.10 | Lieu des racines en boucle fermée du bras AL10: déplacement vertical | 53 |
| 3.11 | Lieu des racines en boucle fermée du AL22: $K_v = 20$ | 54 |
| 3.12 | Lieu des racines en boucle fermée du AL22 $K_v = 5$ | 54 |
| 3.13 | Comportement des pôles en boucle fermée à l'introduction d'un amortissement interne: $\kappa_e = 0.005$: bras terrestre | 56 |
| 3.14 | Diagramme de Bode: amortissement non nul $\kappa_e = 0.005$ | 57 |
| 3.15 | Diagramme de Bode du bras terrestre: amortissement nul | 58 |
| 3.16 | Asservissement de la position horizontale de AL22: $\theta_{réf} = 1rad$ | 59 |
| 3.17 | Asservissement de la position horizontale de AL22: $\theta_{réf} = 2\pi$ | 60 |
| 3.18 | Asservissement de la position horizontale de AL10: $\theta_{réf} = 2\pi$ | 61 |
| 3.19 | Asservissement de la position verticale: bras AL22, $d_{réf} = 10m$ | 62 |
| 3.20 | Asservissement des positions verticale et horizontale: bras spatial | 63 |
| 3.21 | Évolution des sorties pour une perturbation à l'extrémité du bras AL22 | 66 |
| 3.22 | Variation faible de la charge à l'extrémité du bras AL22: 20% | 66 |
| 3.23 | Variation importante de la charge à l'extrémité du bras AL22: 50% | 67 |

| | | |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.24 | Variation de la géométrie de la charge | 67 |
| 3.25 | Lieu des racines en boucle fermée: commande et capteurs non-colocalisés | 68 |
| 4.1 | lieu des pôles en fonction de ρ : position de l'extrémité, bras AL22 . . . | 78 |
| 4.2 | Lieu des pôles en fonction de ρ : position de l'extrémité + vitesse angulaire à la base, bras AL22 | 78 |
| 4.3 | Lieu des racines en fonction de ρ : position à l'extrémité, bras AL10 . . | 79 |
| 4.4 | Diagramme de phase de la fonction $A(s)$ | 81 |
| 4.5 | Densité spectrale de puissance pour $f_e = 10\text{hz}$ | 85 |
| 4.6 | Densité spectrale de puissance $f_e = 50\text{hz}$ | 85 |
| 4.7 | Lieu des racines de l'observateur: une seule entrée | 89 |
| 4.8 | Lieu des racines de l'observateur: deux entrées | 90 |
| 4.9 | Lieu des racines de l'observateur: trois entrées | 91 |
| 4.10 | Réponse en boucle fermée: divergence | 94 |
| 4.11 | Réponse en boucle fermée: convergence | 94 |
| 4.12 | Implantation régulateur observateur d'ordre réduit | 97 |
| 4.13 | Lieu des racines: rétroaction de la position de l'extrémité | 100 |
| 4.14 | Lieu des racines: rétroaction de la vitesse | 100 |
| 4.15 | Implantation d'une commande optimale avec retour de tous les états . | 103 |
| 4.16 | Implantation d'une commande optimale avec observateur | 104 |
| 4.17 | LQG/LTR: sortie du système, une seule mesure, variation du bruit à l'entrée | 106 |
| 4.18 | LQG/LTR: sortie du système, trois mesures, variation du bruit à l'entrée | 107 |
| 4.19 | Déplacement des zéros lorsque la position de l'extrémité est prise comme sortie pour κ_e de 0 à 0,009 | 108 |
| 4.20 | Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22: $\theta_{r\acute{e}f} = 2\pi$ et $d = 1m$ | 110 |
| 4.21 | Commande optimale sur l'extrémité du bras AL10 | 111 |
| 4.22 | Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 amortissement non nul | 112 |
| 4.23 | Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 faible variation de la charge: 20% | 112 |
| 4.24 | Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 grande variation de la charge: 50% | 113 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Résumé des hypothèses (Piedboeuf89) | 28 |
| 2.2 | Coordonnées et vitesses généralisées du modèle d'ordre réduit (Piedboeuf89) | 29 |
| 2.3 | Sorties du système (Piedboeuf89) | 35 |
| 3.1 | Paramètres de la commande pour F | 55 |
| 3.2 | Paramètres de la commande pour T | 57 |
| 3.3 | Résumé de l'effet des variations des paramètres | 65 |
| 4.1 | Fréquences propres des modes flexibles | 79 |
| 4.2 | Fréquences parasites des modes flexibles | 83 |
| 4.3 | Paramètres de la pondération de l'observateur | 99 |
| B.1 | Cas de simulation | 132 |

Notations et variables

Définition des variables ainsi que des notations utilisées dans ce manuscrit.

Notations

vecteur en caractère gras, e.g. \mathbf{x}

matrice en caractère gras souligné, e.g. $\underline{\mathbf{x}}$

dérivée spatiale $\frac{\partial v}{\partial x} = v'$

dérivée temporelle $\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$

intégration $\int v dx = v'$

Variables

${}^v\eta_i, {}^w\eta_i$: $i^{\text{ième}}$ coordonnée généralisée pour v et w

$\theta(t) = \theta$: rotation de la base

κ : coefficient d'amortissement interne

κ_e : κ/E

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$: constantes sans dimension apparaissant dans les fonctions de forme

μ_θ, μ_d : coefficient d'amortissement externe pour θ et d

n_u, n_w : nombre de modes flexibles dans l'expansion de v et w

ρ : densité linéaire (kg/m)

σ : densité volumique (kg/m^3)

${}^v\phi_i, {}^w\phi_i$: $i^{\text{ième}}$ fonction de forme pour v et w

A : section de la poutre

B : base

C : charge

$d(t) = d$: traslation de la base

E : module d'élasticité ou module de Young (Pa)

F : force de contrôle appliquée sur la base

g : constante de gravité ($9.81m/s^2$)

I_{1c}, I_{2c}, I_{3c} : éléments du tenseur d'inertie de la charge

I_B : inertie de la base autour de r_3

\underline{I}_B : tenseur d'inertie du corps B

I_t : inertie totale du système autour de r_3 (base+poutre+charge)

j : système de coordnnées attaché au bras

K_p, K_v : gain de la commande proportionnelle dérivée

L : longueur de la membrure

m_B : masse de la base

m_t : masse totale du système (base+poutre+charge) M : moment de contrôle appliqué sur la base

M_y, M_z : moment fléchissant

Q : covariance du bruit à l'entrée

\underline{R} : matrice de covariance du bruit au niveau des sorties

$v(x, t) = v$: déformation transversale horizontale

$w(x, t) = w$: déformation transversale verticale

x : coordonnée le long de la poutre

y : coordonnée d'une section A de la poutre

z : coordonnée d'une section A de la poutre

Abréviations

ÉDP équation aux dérivées partielles

ÉDO équation aux dérivées ordinaires

PD commande proportionnelle dérivée

LQG commande linéaire quadratique gaussienne

LTR méthode de recouvrement

AL22 bras terrestre

AL10 bras spatial

Chapitre 1

Introduction

Les domaines d'application des robots actuels sont limités par l'encombrement et le poids de leurs structures mécaniques. En effet pour garantir une bonne précision au niveau de leur positionnement, les robots actuels sont constitués de membrures lourdes et rigides.

La flexibilité des membrures est minimisée en surdimensionnant les structures ce qui leur assure un maximum de rigidité. Ces robots sont massifs et demandent beaucoup d'énergie. De plus, pour assurer cette rigidité face aux variations de la charge, on limite la vitesse et l'accélération du manipulateur. Ainsi, la rigidité des membrures entraîne les limitations suivantes:

- Faible vitesse de déplacement.
- Envergure limitée.
- Charge transportable limitée.

La considération de la flexibilité lors de la modélisation permet de réduire la taille des membrures et d'augmenter la vitesse du manipulateur. Le bras manipulateur des

navettes spatiales, avec ses contraintes de poids et ses exigences de haute précision, est un exemple typique des robots flexibles.

Dans l'industrie, le besoin d'avoir des robots précis a entraîné le développement d'une commande cinématique qui tient principalement compte de la vitesse du manipulateur. Celui-ci est caractérisé par une masse assez importante par comparaison à la charge utile qu'il est susceptible de manipuler. Les robots spatiaux ont donné une autre tournure à ces recherches, les robots ne sont plus conçus en fonction de leur rigidité mais plutôt par rapport à leur capacité de manipulation. Les robots ont alors un poids minimal et sont de plus en plus flexibles. La flexibilité n'est plus une contrainte mais un aspect physique à considérer dans la modélisation dynamique du robot.

À cet égard, un intérêt croissant s'est manifesté pour la commande automatique de ces systèmes flexibles. La vitesse, l'accélération ainsi que les forces d'inertie jouent un rôle majeur dans la synthèse des lois de commandes performantes.

Les robots flexibles se distinguent des robots rigides classiques par le fait qu'ils sont des systèmes non linéaires à paramètres distribués. Lors de la modélisation, la flexibilité est décrite par des équations aux dérivées partielles (ÉDP). Généralement une approximation de cette dynamique est faite à l'aide des équations différentielles ordinaires (ÉDO). Le nombre des modes vibratoires est encore infini. Une troncature au niveau du modèle s'avère nécessaire pour limiter le nombre des modes vibratoires à étudier. Le modèle obtenu est alors un modèle approximatif aux ÉDO qui décrit le système rigide ainsi que la flexibilité de la structure.

La complexité du modèle dépend essentiellement des hypothèses prises en considération lors de la modélisation. Cette complexité peut être caractérisée par des termes non linéaires, des couplages entre les variables ... etc. Dans le but de faire de la commande, les chercheurs ont rendu ces hypothèses assez restrictives ce qui a

permis essentiellement d'éliminer les termes non linéaires du modèle et de rendre la conception du contrôleur automatique plus simple.

Dans des approches plus récentes, on assiste à l'apparition des modèles plus complexes pour décrire la structure flexible. La conception des commandes suit modestement cette évolution.

Dans ce chapitre, on introduit en première partie les modèles déjà existant ainsi que les nouvelles tendances. La deuxième partie s'intéresse aux méthodes de commande utilisées jusqu'à maintenant. La dernière partie est une introduction à la commande appliquée dans ce mémoire.

1.1 Les modèles existants

Dans cette section, on présente une revue restreinte des modèles existants tout en mettant en relief les hypothèses de base de la modélisation [Piedboeuf 89]. Le système qu'on considère est présenté à la figure 1.1. Il est composé d'une seule membrure flexible ayant un joint rotoïde et une charge ponctuelle à l'extrémité. Ce choix, bien que simple, permet de mieux assimiler les problèmes découlant de la flexibilité de la structure. La représentation la plus répandue est celle basée sur le modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli. Les modèles qui en découlent posent des hypothèses plus ou moins restrictives. Ainsi, on peut tenir compte ou non de la gravité, de l'amortissement, de la nature de l'amortissement, des forces centrifuges et de Coriolis et des effets des couplages des modes rigides et flexibles.

D'autres modèles de la flexibilité existent dans la littérature. Par exemple le modèle de Timoshenko, le modèle avec ressorts et amortisseurs.

On constate de ce qui précède qu'on arrive à obtenir des modèles linéaires mais avec des hypothèses restrictives ce qui entraîne des limitations dans l'efficacité du mo-

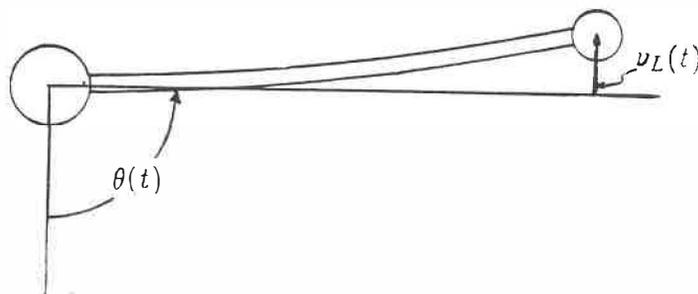


Figure 1.1: Géométrie du modèle de base

dèle. Une modélisation plus complète tenant compte de la plupart des effets physiques agissants sur le système entraîne des non-linéarités dans le modèle.

Les méthodes de calcul utilisées dans la modélisation de la membrure flexible permettent d'obtenir des modèles d'ordre infini d'ÉDO. La réduction de ces modèles à un ordre fini est nécessaire pour une étude plus concrète de la commande. Cette réduction permet d'avoir un modèle d'ordre réduit qui est généralement transformé sous forme de modèle d'état.

La réduction du système à paramètres distribués correspond à sa projection dans un sous espace de dimension fini H_n de H tel que $H = H_n \oplus H_r$, H est un espace de Hilbert et H_r est un sous espace des résidus. Cette projection correspond physiquement à l'élimination d'un certain nombre de fréquences de vibration du modèle. Cette projection va entraîner des perturbations au niveau des actionneurs et des capteurs lors de l'application d'une commande au système.

1.1.1 Problème de contamination

Avant d'exposer les méthodes de contrôle d'une structure flexible, il est important d'exposer et de définir les notions de contamination qui sont particulières au contrôle d'une structure flexible.

La contamination est reliée à la représentation du système par un un modèle d'ordre réduit. La contamination ¹ peut se diviser en deux catégories [Balas 78]:

- Contamination à l'observation.
- Contamination à la commande.

Le modèle d'état d'ordre réduit s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{A}}_r \mathbf{x}_1 + \underline{\mathbf{B}}_r u \\ \dot{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{C}} \mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = [\theta_1, q_1, \dot{\theta}_1, \dot{q}_1]^T \quad (1.2)$$

θ_1 définit l'angle de rotation et q_1 la coordonnée généralisée. Ce modèle est obtenu à partir d'une troncature au niveau du modèle d'état d'ordre complet. Ici seul le mode rigide et le premier mode vibratoire sont retenus au niveau du vecteur d'état. Le vecteur présentant les états résiduels est le suivant:

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = [q_2, q_3, \dots, q_N, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_N]^T \quad (1.3)$$

avec q_i coordonnée généralisée, $i = 1, 2, \dots, N$. Le modèle d'ordre complet a pour équation:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_1 \\ \underline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} u \quad (1.4)$$

¹Spillover

avec:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{11} & \underline{\mathbf{A}}_{12} \\ \underline{\mathbf{A}}_{21} & \underline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

et

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

En utilisant le modèle d'ordre réduit 1.1, la commande par rétroaction linéaire d'état calculée s'écrit $\mathbf{u} = -\mathbf{k}\mathbf{x}_1$. En pratique, cette commande sera appliquée en évaluant la variable \mathbf{x}_1 à partir des mesures de l'angle de rotation et de la déformation.

Cependant, la méthode des modes assumés permet d'exprimer la déformation sous la forme:

$$\eta_v(\mu, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mu) q_i(t) \quad (1.7)$$

La sortie réelle telle que mesurée par une jauge de mesure s'écrit alors:

$$R(\mu_m, t) = \sum_{i=1}^N \ddot{\phi}_i(\mu_m) q_i(t) \quad (1.8)$$

avec μ_m position du capteur sur la membrure.

Si on limite le système à un seul mode vibratoire, la coordonnée généralisée $q_1(t)$ est alors approximée par:

$$q_1(t) = \frac{R(\mu_m, t)}{\ddot{\phi}_1(\mu_m)} = \frac{\sum_{i=1}^N \ddot{\phi}_i(\mu_m) q_i(t)}{\ddot{\phi}_1(\mu_m)} \quad (1.9)$$

L'équation de sortie du modèle complet est alors:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \underline{\mathbf{C}}_2 \mathbf{x}_2 \quad (1.11)$$

avec: $c_i = \frac{\ddot{\phi}_i(\mu_m)}{\ddot{\phi}_1(\mu_m)}$, $i = 2, 3, \dots, N$.

En pratique, la commande utilise \mathbf{y} au lieu de \mathbf{x}_1 parce qu'on regarde le modèle réduit

comme étant le modèle complet. La loi de contrôle réellement appliquée au système est alors:

$$u = -\mathbf{k} \begin{bmatrix} I & \underline{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Appliquant l'équation 1.11 à l'équation 1.4, on obtient le modèle d'état d'ordre complet suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kI & k\underline{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Dans l'équation ci-dessus, les variables en contre-réaction excitent les modes résiduels à l'aide du terme B_2 d'où le nom de contamination par la commande. Ce problème de contamination réfère donc à l'excitation à la commande au niveau des modes vibratoires négligés lors de la modélisation.

De façon semblable, La contamination à l'observation est définie par l'apport du terme $C_2 \mathbf{x}_2$ sur les sorties des capteurs. Elle se caractérise par des mesures faussées au niveau des sorties. Les capteurs mesurent l'effet des modes vibratoires qui sont déjà négligés lors de la modélisation.

Balas[Balas 81] démontre que le modèle d'ordre réduit préserve les propriétés de commandabilité et d'observabilité même en présence du problème de contamination. Il étudie l'effet de la contamination à la commande dans le cas où on néglige la contamination à l'observation. Il montre alors que la contamination à la commande n'introduit qu'un retard au niveau de celle-ci. De leur part, Kanoh et Lee [Kanoh 85] prouvent expérimentalement que la contamination à la commande n'a d'effet sur la stabilité du système que si la contamination à l'observation est non nulle. Ils relient le problème de contamination au problème de l'emplacement des actionneurs et des capteurs, et montrent que la colocalisation de ceux-ci annule le problème de contamination à l'observation si on fait un choix correct de la bande passante de l'observateur. Ils démontrent qu'une mesure prise à l'extrémité du bras entraîne la

déstabilisation de celui-ci. Ce résultat est similaire à celui de Gevarter qui démontre qu'un contrôleur linéaire appliqué à une membrure flexible assure la stabilité du système si et seulement si le capteur et l'actionneur sont colocalisés. Greene aboutit aussi au même résultat et montre que les noeuds sont des lieux idéaux pour contrôler le mode rigide d'un bras libre à ses extrémités, si on se limite à un seul mode vibratoire.

Dans la suite de ce chapitre, le problème de la contamination est discuté à l'intérieur des méthodes de contrôle en distinguant les deux approches suivantes:

- Contrôleur à actionneurs et capteurs colocalisés.
- Contrôleur à actionneurs et capteurs non colocalisés.

1.2 Méthodes de contrôle

L'objectif d'un système de contrôle est d'imposer au système un comportement bien spécifié. Généralement, un système de contrôle se compose essentiellement de:

- Un ou plusieurs capteurs.
- Un ou plusieurs actionneurs.
- Un régulateur.

Le contrôle d'une structure flexible se base sur les mêmes principes. Cependant, comme le modèle d'une membrure peut comprendre un grand nombre de variables (modes vibratoires) le contrôleur peut devenir complexe de façon à obtenir les performances envisagées en boucle fermée.

Quoique dans la section 1.2 on introduise deux classes de modèles (linéaire et non linéaire), dans la littérature on ne trouve généralement que des commandes basées

sur des modèles linéaires.

À Partir des études réalisées dans le domaine, le contrôle des membrures flexibles peut se subdiviser en quatre grandes familles:

- Contrôleur d'ordre infini.
- Contrôleur se basant sur la nature de l'entrée.
- Contrôleurs à applications particulières.
- Contrôleur modal.

1.2.1 Contrôleur d'ordre infini

Ce contrôleur présente une application purement mathématique pour commander des structures flexibles. Les chercheurs supposent qu'on arrive à obtenir un contrôleur idéal d'ordre infini à partir du modèle d'ordre infini d'ÉDO. La troncature ne se fait plus au niveau du modèle mais au niveau du contrôleur idéal. Suivant le niveau de la troncature, on obtient une convergence plus ou moins rapide du régulateur vers le contrôleur idéal. Cette troncature peut se faire à l'aide de plusieurs méthodes. On cite par exemple la méthode de minimisation de Hankel s'appliquant uniquement aux systèmes discrets. Gibson et Jabbari [Gibson 83] calculent leur commande idéale à partir d'un modèle discret d'ordre infini:

$$\begin{cases} z(t+1) = Tz(t) + Bu(t) \\ y(t) = cz(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

L'estimateur d'ordre infini est défini par:

$$\hat{z}(t+1) = T\hat{z}(t) + Bu(t) + G(y(t) - c\hat{z}(t) - Du(t)) \quad (1.15)$$

La commande étant $u(t) = -k\hat{z}(t)$. Les gains G et Q sont choisis à partir d'un régulateur LQG (Linear Quadratique Gaussien) discret d'ordre infini. Ils présentent leur contrôleur sous un modèle ARMA (Auto Regressive and Moving Average) d'ordre infini à partir des équations 1.13 et 1.14. La troncature s'effectue alors au niveau du modèle ARMA.

Pritchard [Pritchard 87] commande son modèle à l'aide d'un régulateur linéaire quadratique (LQR) sans limites ni sur les entrées ni sur les sorties du système.

1.2.2 Contrôleur se basant sur la nature de l'entrée

Cette méthode est orientée plutôt sur l'étude de la sortie en fonction du signal appliqué à l'entrée du système. Elle est basée sur le principe d'ajustement de l'entrée d'une façon qui permet d'éliminer les différents modes vibratoires considérés lors de la modélisation. Singer [Singer 88] propose d'utiliser une entrée telle que la tendance du système à vibrer soit compensée par les vibrations de celle-ci. Le modèle linéaire peut alors être présenté par une suite d'équations de second ordre avec une réponse sinusoïdale décroissante.

$$y(t) = [A \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega(t-t_0)}] \sin \omega \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_0) \quad (1.16)$$

- A amplitude de l'impulsion à l'entrée.
- ω fréquence naturelle non amortie du modèle.
- ζ amortissement interne.
- t_0 instant d'envoi de l'impulsion.

Le principe consiste à calculer l'entrée en se basant sur la réponse impulsionnelle du système de façon que les oscillations du signal d'entrée se superposent à celles de

la sortie. Cette méthode suppose la connaissance exacte des fréquences propres du modèle.

Meerkov [Meerkov 86] considère aussi ce type de contrôle vibratoire. Son idée consiste à introduire dans le système des vibrations à moyenne nulle et reliés aux paramètres dynamiques du modèle. Ces vibrations doivent modifier le comportement du système dans le sens désiré. Il propose cette méthode dans le cas où l'application d'une commande en rétroaction ou bien en feedforward est difficile, particulièrement dans le cas où on ne peut pas mesurer tous les modes vibratoires (vibrations de Betaton, vibrations d'une membrure flexible). Cette méthode est applicable à un modèle non linéaire aussi bien qu'à un modèle linéaire.

1.2.3 Contrôleurs à applications particulières

Dans cette catégorie plusieurs types de contrôleurs sont regroupés. Une première appelée méthode d'agrégation [Johnson 81] est orientée vers les structures spatiales. Elle est basée sur l'influence des actionneurs et des capteurs sur la stabilité du système. Le principe de positivité utilisé par Benhabib [Benhabib 81] suppose que le système est à entrées et sorties bornées BIBO (Bounded Input Bounded Output). L'auteur démontre qu'un tel système est stable si sa fonction de transfert directe ainsi que celle en rétroaction sont positives et qu'une au moins est strictement positive. Cette méthode de contrôle est orientée principalement vers la commande des structures spatiales LSS (Large Space Structures).

Un deuxième type de contrôleur en rétroaction, proposé par Piché, utilise un signal de commande qui est fonction des racines carrées des fréquences d'oscillations du système. D'autre part, on sait qu'un retard pur peut se manifester à la commande d'une structure flexible ce qui limite l'application de cette méthode qui n'est pas robuste dans ce cas de système.

La commande à structure variable est une méthode de contrôle appliquée récemment aux structures flexibles. Le principe de cette méthode est de maintenir le système sur des modes glissants insensibles aux perturbations externes. La réponse du système est alors déterminée par la pente de la fonction de glissement². Cette méthode de contrôle est censée présenter une grande robustesse face aux perturbations. On trouve différentes applications de cette méthode dans la régulation d'une structure flexible. Oz et Özguner [Oz 84] proposent cette méthode pour commander une structure spatiale. Al Abbas et Özguner [Al Abbas 85] l'utilisent pour introduire de l'amortissement au niveau des modes flexibles.

Le contrôle "ponctuel" est une méthode de compensation orientée plutôt vers la commande des structures spatiales; elle se base sur les principes développés par Greene, Balas et Chassiakos. C'est une méthode qui propose l'introduction des actionneurs ponctuels à des positions bien définies sur le bras en plus d'un couple au niveau de la base. Les sorties du système sont alors l'angle à la base et la position de l'extrémité. Cette méthode n'est pas applicable dans le cas terrestre puisque Le nombre des actionneurs est alors limité à un seul, positionné au niveau du joint.

1.2.4 Contrôle modal

C'est la méthode de contrôle la plus utilisée. Elle est basée sur le modèle d'ordre réduit obtenu par expansion modale. On considère généralement un modèle linéaire. On peut diviser cette méthode de contrôle en deux grandes classes :

- Les méthodes qui considèrent un découplage entre les différents modes du système : c'est le contrôle composite.
- Les méthodes qui ne considèrent pas de découplage entre les différents modes : c'est le contrôle hybride.

²Slope of the switching line

Une étude détaillée de ces deux méthodes de contrôle se trouve dans les sections qui suivent.

1.3 Étude du contrôle composite

La première approche utilisant cette méthode de contrôle considère qu'on peut commander chacun des modes du système sans influencer le comportement des autres. Cette méthode trouve sa justification dans l'article de Gevarter [Gevarter 70]. Celui-ci démontre que si les actionneurs et capteurs sont colocalisés, on arrive à stabiliser le mode rigide ainsi que les différents modes flexibles. Par exemple, avec un actionneur et un capteur situés à la base, la stabilité du système est assurée à l'aide d'un simple contrôleur classique de type proportionnel dérivée. La colocalisation des actionneurs et des capteurs entraîne donc l'annulation de l'effet déstabilisant de la contamination due à l'observation.

Kanoh et Lee [Kanoh 85] aboutissent à un résultat similaire en se basant sur le théorème de Mikhailov. Ils démontrent que la stabilisation du système à l'aide d'une rétroaction linéaire du vecteur d'état est assurée si le signe de la dérivée seconde des fonctions propres du modèle est positive. L'étude de ce signe entraîne des restrictions sur le choix de l'emplacement des capteurs. En fait, cette méthode suppose un découplage complet entre les différents modes du système. Or, physiquement, on ne peut pas assurer le découplage dans la commande des différents modes. Une commande du mode rigide peut exciter un certain nombre de modes flexibles.

Ce problème de découplage entre les différents modes a entraîné l'apparition d'une deuxième approche dans le contrôle composite se basant sur le principe de la perturbation singulière. Elle permet de séparer le système selon les modes rapides qui correspondent à la partie flexible et les modes lents qui correspondent à la partie rigide. Khorrami et Özgüner [Khorrami 88] utilisent ce principe dans la conception de la

commande d'un bras flexible. Deux méthodes sont utilisées pour déterminer le mode lent et l'effet des modes vibratoires sur le système rigide : expansion asymptotique composite et le "Manifold approach". La dernière méthode permet de considérer le bras flexible comme une succession de sous-systèmes rigides lents reliés par des joints flexibles [Guo 88]. Le contrôle du sous-système lent peut être réalisé à l'aide d'un contrôleur linéaire ou non linéaire.

Dans leur article, Khorrami et Özgüner proposent d'appliquer la méthode du couple calculé ce qui suppose que le système est inversible. Singh et Schy [Singh 86] supposent aussi que leur modèle est inversible. Ils calculent une commande non linéaire u_d à la base à l'aide de la méthode de linéarisation externe. Ils commandent les modes vibratoires en superposant une commande u_s à u_d . La commande appliquée est alors $u = u_d + u_s$, u_s est calculée en appliquant la théorie de contrôle linéaire.

Khorrami et Özgüner introduisent un filtre passe-bas à la sortie pour atténuer les vibrations. Ils démontrent que si le sous système rapide est asymptotiquement stable (physiquement, on considère un modèle avec un certain amortissement) alors le système global est stable sans introduire un contrôleur au niveau des modes vibratoires. Sinon ils calculent un régulateur linéaire quadratique à partir du modèle d'état du système rapide. Cette méthode de conception de contrôleur reste valide seulement pour un paramètre de perturbation assez petit.

En réalité, la méthode de perturbation singulière présente des difficultés d'application pour une structure flexible parce que la commande du mode rigide peut influencer les vibrations du système. En effet, si la bande passante de la commande du mode rigide est supérieure à la fréquence du premier mode alors elle entraîne au moins l'excitation de celui-ci. En plus, dynamiquement, les deux ensembles rigide et flexible sont couplés. La présence des forces de Coriolis et centrifuge assure ce couplage de même que la variation de l'inertie du système.

1.4 Étude du contrôle hybride

La méthode de contrôle hybride est de plus en plus utilisée dans la commande des structures flexibles. Elle diffère de la méthode de contrôle composite par le fait qu'elle ne considère pas ce découplage entre modes rigide et vibratoires pour la conception du contrôleur. Le problème est alors de chercher une loi de commande qui permet d'avoir des caractéristiques dynamiques satisfaisantes en boucle fermée en tenant compte de l'ensemble du système.

Deux approches ont dominé cette méthode de contrôle soient la commande linéaire quadratique (LQ) et la commande adaptative.

Les premiers articles qui ont traité ce problème ont considéré la conception d'un contrôleur en plaçant des capteurs au niveau de la base, colocalisés avec les actionneurs. Cette méthode aboutit à des résultats comparables à ceux obtenus par une commande proportionnelle dérivée et une modélisation linéaire du système. Le contrôle optimal est une approche qui répond de près à l'objectif de considérer une structure flexible. En effet, l'objectif est d'avoir une réponse rapide du système tout en minimisant l'effet des oscillations. Celui-ci est contradictoire puisqu'il nécessite de faire appel à des couples importants pour avoir un temps de réponse faible alors qu'au même moment on exige des couples faibles pour ne pas exciter les modes vibratoires. Ce but est atteint à l'aide d'une régulation optimale en jouant sur les matrices de pondération de la commande et des états du modèle.

La commande adaptative est utilisée dans le but d'assurer une bonne robustesse du contrôleur face aux variations des paramètres du modèle dues à la variation de la charge.

Le degré de difficulté du contrôle hybride varie selon que l'on considère des actionneurs et des capteurs colocalisés ou non. Cela suppose donc l'étude des effets de

la contamination et de la phase de la fonction de transfert sur la stabilité du système. La colocalisation est un cas idéal pour une commande hybride. En effet le système est stabilisable à l'aide d'un régulateur proportionnel dérivé ou d'un correcteur à avance de phase. L'utilisation de la commande optimale dans ce cas se justifie par le besoin d'assurer des meilleures performances [Speyer 86].

1.4.1 Étude de la commande optimale

On considère seulement dans cette étude le cas des actionneurs et des capteurs non-colocalisés. La mesure de la sortie à l'extrémité du bras répond au besoin d'avoir une meilleure image sur le comportement du point que l'on veut commander et sur les perturbations agissant sur ce point. Ce choix de placement du capteur entraîne l'apparition d'un ou de plusieurs zéros à parties réelles positives dans la fonction de transfert en boucle ouverte. La fonction de transfert est alors à phase non minimale ce qui rend la conception du contrôleur plus difficile.

Plusieurs méthodes basées sur l'utilisation de la commande optimale sont exposées dans la littérature. Plusieurs articles abordent également les difficultés liées au fait que le système soit à phase non minimale. Le problème de robustesse est aussi abordé et plusieurs améliorations à la commande optimale sont proposées. Les premières études étaient orientées vers la commande optimale quadratique; la fonction de minimisation est généralement considérée à horizon infini. La pondération est introduite au niveau de la commande ainsi que des états du système. Miller [Miller 85] étudie le choix de ces matrices de pondération en fonction de la nature physique de la membrure et propose une fonction de minimisation qui comprend un terme d'optimisation de la structure. Schmitz [Schmitz 85] étudie l'effet de la pondération sur la position et la vitesse de l'extrémité et démontre que la pondération sur la vitesse agit directement sur la marge de gain du système. Usoro et al [Usoro 84], Sakawa et Matsuno [Sakawa 86] considèrent un terme exponentiel multiplicatif dans leur fonction

coût. Ce terme permet d'assurer un degré minimum de stabilité. Biswas et Klafter [Biswas 88] choisissent une fonction de minimisation à horizon fini et qui est fonction du déplacement du robot, de sa vitesse angulaire, de l'amplitude des vibrations et de leurs fréquences. Dans cette étude, les auteurs considèrent une modélisation non linéaire de la membrure. Ils considèrent l'existence d'une force axiale agissant sur la membrure. Néanmoins, on peut toujours considérer que la fonction de minimisation agit directement sur l'énergie mise en jeu par la commande ainsi que sur les amplitudes et les vitesses des modes vibratoires.

Les contrôleurs obtenus en appliquant la théorie de la commande optimale sont des régulateurs d'états d'où la nécessité de connaître à chaque instant la valeur du vecteur d'état. Pratiquement, puisqu'on a uniquement accès au signal de commande et aux sorties, les états doivent être reconstruits à partir de ces données en utilisant un observateur.

Plusieurs auteurs ont traité le problème de la commande optimale sans aborder la conception de l'observateur. Par exemple, lorsque Biswas et Klafter abordent le problème du contrôleur optimal, ils comparent les performances de ce contrôleur à celles d'une commande au niveau de la base sans pourtant explorer les méthodes d'accès aux états du système.

L'introduction d'un observateur s'avère importante dans l'étude de la commande optimale. On peut estimer tous les états du système comme on peut limiter les calculs et n'estimer qu'un nombre donné d'états. Ce nombre correspond à la différence entre le nombre des états du système et le nombre de sorties considérées. En général, l'observateur considéré correspond à un filtre de Kalman à variance minimale³. Book [Book 85] considère un observateur d'ordre réduit pour estimer seulement la vitesse des modes flexibles. Leurs amplitudes sont calculées directement à partir des mesures aux niveaux des jauges. Le choix des paramètres de l'observateur influence

³[Bryson 79],[Schmitz 85] et [Speyer 86]

le comportement du compensateur. L'équation du modèle utilisée dans le calcul de l'observateur étant généralement la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \omega \\ \mathbf{y} = \underline{\mathbf{C}}\mathbf{x} + v \end{cases} \quad (1.17)$$

Les variables ω et v correspondent à un bruit blanc gaussien de variances Q et R . Le choix du gain de l'estimateur se fait d'une façon empirique en variant les matrices Q et R . Il est calculé à partir du lieu des racines tracés en fonction du rapport $\frac{Q}{R}$. L'objectif est d'assurer une bande passante maximale à l'observateur. Le compensateur calculé dans ce cas est du type linéaire quadratique gaussien *LQG*.

Le fait que le système soit à phase non minimale a pour conséquence de limiter la bande passante du système en boucle fermée. Il limite la marge de phase en boucle ouverte (introduction d'une phase positive qui correspond à un retard). Plusieurs méthodes sont proposées pour palier à ce problème. On cite entre autres l'introduction des filtres passe bande ⁴ dans le compensateur [Bryson 79] qui permettent d'annuler l'effet indésirable des zéros à parties réelles positives. Schmitz [Schmitz 85] montre que la considération d'une deuxième sortie pour le système au niveau de la base améliore le comportement de celui-ci; il considère la vitesse à la base comme une deuxième entrée pour son estimateur (amortissement des modes vibratoires). Cette dernière méthode rend le système multisorties ce qui complique le calcul du compensateur.

D'autres améliorations sont introduites au niveau de cette commande lui donnant une plus grande robustesse face aux perturbations. On trouve principalement :

- La méthode de recouvrement *LTR*⁵ introduite par Doyle et Stein.
- La méthode de la boucle interne *IFL*⁶.

⁴Notch filter

⁵Loop transfer recovery

⁶Internal feedback loop

La méthode de recouvrement permet la conception d'un contrôleur robuste en combinant le domaine fréquentiel et les techniques de calcul du modèle d'état. La méthode suppose l'existence d'une fonction de transfert exacte et inconnue du système et d'une deuxième fonction de transfert reliée à la première par un coefficient multiplicatif d'erreur. Ce coefficient est lui aussi inconnu mais des limites en fréquences sont considérées pour la fonction de transfert exacte. Partant de ces hypothèses, Doyle et Stein démontrent qu'en faisant varier sur les matrices de pondération au niveau du régulateur et de l'observateur, on arrive à avoir un système robuste et que pour un choix correcte de ces matrices, on a convergence du modèle existant vers le modèle exact du système. Ils démontrent aussi que cette méthode est applicable seulement pour une fonction de transfert à phase minimale. Cependant Schmitz montre que cette méthode reste valable pour un modèle à phase non minimale si on considère que l'observateur a deux entrées dont l'une est colocalisée avec l'actionneur.

La deuxième méthode est une généralisation de la méthode LQG-LTR introduite par Minjea et Speyer. Cette méthode suppose que les variations des paramètres peuvent être présentées d'une façon équivalente par une boucle interne IFL. Celle-ci découle des techniques considérant ces variations dans le domaine fréquentiel et faisant leur évaluation à partir de la méthode des valeurs singulières.

Le modèle perturbé peut alors être considéré comme possédant deux entrées et deux sorties. Une première rétroaction correspond au modèle nominal et la deuxième rétroaction correspond aux perturbations. Le système perturbé est alors présenté par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{M}\omega \\ \mathbf{y} = \underline{\mathbf{C}}\mathbf{x} \\ \mathbf{z} = \underline{\mathbf{N}}\mathbf{x} \\ \omega = -L(\epsilon)\mathbf{z} \end{cases} \quad (1.18)$$

\mathbf{z} et ω sont respectivement la sortie et l'entrée connectées à l'IFL avec un gain $L(\epsilon)$.

Ce système peut aussi être présenté sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{C}\phi B & \underline{C}\phi M \\ \underline{N}\phi B & \underline{N}\phi M \end{pmatrix}}_{\underline{G}} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

avec

$$\phi = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \quad (1.20)$$

La matrice \underline{G} permet de poser des conditions sur la robustesse du système en terme de stabilité et de temps de réponse. Les auteurs démontrent l'existence d'une relation directe entre la variation des paramètres du modèle et les matrices de pondération (convergence des deux méthodes LTR et IFL). Les paramètres sont calculés à l'aide des propriétés asymptotiques.

1.4.2 Étude de la commande adaptative

Deux approches sont utilisées dans la commande adaptative d'une structure flexible :

1. Commande adaptative directe: à partir d'un modèle de référence (MRAC)⁷;
2. commande adaptative indirecte: contrôle auto-ajustable (STR)⁸.

Vu le besoin d'avoir une bonne précision au niveau de l'extrémité du bras manipulateur, la commande adaptative a trouvé sa place dans le contrôle d'une structure flexible. On justifie l'utilisation de cette commande par la présence des incertitudes paramétriques sur le système en particulier celle qu'introduit une variation de la charge au bout de la membrure. En effet, une variation de la charge (qui a pour effet de modifier l'inertie du système), ou une augmentation de la vitesse du bras (en

⁷Model reference adaptive control

⁸Self tuning control

agissant sur les termes non linéaires) peuvent entraîner une modification des valeurs des paramètres des modèles.

Nelson et Mitra [Nelson 86] proposent un estimateur de type gradient au niveau de la charge et un contrôleur à gain variable du type commande optimale. Le calcul du gain est fait d'une façon réursive et périodique en fonction de la variation de la charge (la matrice de Riccati est fonction de la charge). Cependant, les auteurs n'ont pas prévu une limitation dans les performances de cette commande due à l'effet de la phase non minimale.

Pour un suivi de trajectoire avec une accélération et une vitesse prédéfinies par rapport au joint, Siciliano et al. [Siciliano 86] montrent qu'un modèle linéaire n'arrive pas à assurer un bon suivi et ils proposent pour cela un contrôleur adaptatif à partir d'un modèle de référence. Celui-ci est linéaire, choisi de façon à assurer un suivi théorique de la trajectoire; la commande est alors :

$$u = u_1 + u_2 \quad (1.21)$$

avec

$$u_1 = -\mathbf{k}_x^T \mathbf{x} + \mathbf{k}_u u_m \quad (1.22)$$

u_1 défini la commande de suivi du modèle linéaire.

$$u_2 = -\Delta \mathbf{k}_x^T \mathbf{x} + \Delta \mathbf{k}_u u_m \quad (1.23)$$

u_2 défini le second terme de la commande, il assure la stabilité du modèle global. La variable u_m est l'entrée du modèle de référence.

Le gain \mathbf{k}_x^T est calculé à partir d'une commande optimale conçue pour le modèle linéarisé. Le terme \mathbf{k}_u est choisi égale à l'unité. Les variables $\Delta \mathbf{k}_x^T$ et $\Delta \mathbf{k}_u$ sont calculées de façon à assurer l'existence d'une fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité du système global.

La méthode du couple calculé n'est applicable à une structure flexible que si l'on suppose la connaissance exacte de la dynamique du système [Marino 86]. La méthode adaptative suppose la variation des paramètres du système en fonction de la variation de la charge (le système est toujours considéré inversible). Cette méthode adaptative repose sur les mêmes principes que ceux utilisés dans la commande d'un manipulateur rigide. Une version modifiée de cette méthode de contrôle consiste à considérer la méthode du "Learning control". Celle-ci permet d'estimer les perturbations dues à une variation de la charge.

Le STR est défini comme une méthode de contrôle adaptatif indirect tel que les paramètres du contrôleur sont ajustés en fonction de l'erreur entre le modèle du système et le modèle estimé à partir des sorties. L'estimation des paramètres du modèle est faite à l'aide de la méthode des moindres carrés récurrents [Rovner 88]. Les deux approches utilisées dans le calcul de la commande sont:

1. Placement de pôles.
2. Variance minimale généralisée GMV ⁹.

Cannon et Rovner [Cannon 87] discutent l'effet des modes flexibles sur les performances de l'estimateur. Ils proposent un algorithme d'estimation qui se base sur la méthode des moindres carrés récurrents. Le contrôleur est du type optimal quadratique à variance minimale. Une pondération est introduite sur la position et la vitesse de l'extrémité. Ils prennent comme sorties la position de l'extrémité ainsi que la vitesse à la base. Une identification de la fonction de transfert de l'angle à la base par rapport au couple appliqué est faite en parallèle pour étudier l'effet des perturbations sur l'estimation des paramètres. La stratégie suivie dans l'implantation de ce compensateur se divise en deux étapes:

⁹GMV: Generalized Minimum Variance

1. Identification des paramètres du modèle à l'aide d'une entrée assez excitante et introduction d'une commande à la base (principe de colocalisation);
2. après la convergence de l'algorithme d'estimation; calcul du compensateur LQG.

Les études faites démontrent que la commande STR est robuste face aux perturbations externes.

Les premières études de la commande STR n'ont pas abordé le problème de la phase non minimale. Une nouvelle méthode s'oriente vers l'étude de ce problème en utilisant le même principe que celui du STR: la commande adaptative prédictive. C'est une méthode qui s'applique à la commande des systèmes où on considère une incertitude au niveau de la modélisation. Cette incertitude peut être due à :

1. Un retard variable;
2. un modèle à paramètres mal connus;
3. l'ordre du modèle n'est pas connu.

La modélisation du système est faite sous forme discrete. Les premières méthodes en études prédictives se basaient sur le modèle ARMA (Auto-Regressive Moving-Average)[Dugard 87]. Les dernières approches ont prouvé l'efficacité du modèle CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrating Moving-Average model)[Clarke 84]. Le contrôleur utilisé est de type optimal avec une fonction de minimisation à horizon fini. Les premiers résultats ont prouvé la robustesse de cette méthode face à une phase non minimale. On cite le cas de la commande GPC ¹⁰.

¹⁰GPC: Generalized predictive control

1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, la modélisation des robots flexibles et les méthodes de contrôle utilisées pour leur commande ont été introduites. Comme nous l'avons signalé, la plupart des travaux de recherche dans ce domaine utilisent un modèle linéaire ou linéarisé autour d'un point de fonctionnement. De plus un seul type de vibration transversale est considéré.

L'apport de cette recherche dans ce domaine consiste à:

- L'évaluation d'un système de commande de robot classique (contrôle des joints) sur un robot flexible à deux degrés de liberté.
- La description des difficultés liées à la commande non colocalisée, principalement celles causées par la phase non minimale de la fonction de transfert du système en boucle ouverte.
- Conception d'un contrôleur optimal pour le robot à deux degrés de liberté, contrôleur découplé, et étude de ses propriétés.
- Étude des performances d'une commande linéaire dans le contrôle d'un modèle non linéaire. Un intérêt particulier est accordé à l'étude des effets des couplages entre la vitesse angulaire et les modes vibratoires verticaux ainsi qu'entre ces derniers et les modes vibratoires horizontaux.

Chapitre 2

Présentation du modèle

2.1 Introduction

Le chapitre 1 nous a permis d'exposer les différentes méthodes de contrôle utilisées dans la commande d'une structure flexible. Cette revue de littérature a permis d'identifier de nombreuses méthodes pour le contrôle. Cependant, toutes ces méthodes sont conçues à partir de modèles linéaire ou linéarisé autour d'un point de fonctionnement et sont appliquées à des manipulateurs à un seul degré de liberté.

Ce chapitre traite en première partie la modélisation d'un robot à deux degrés de liberté et particulièrement la linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Une deuxième partie est consacrée à l'étude du problème de la troncature. On expose quelques critères utilisés lors de cette réduction.

La première partie est une description du robot à deux degrés de liberté. On présente les hypothèses prises lors de la modélisation sans pourtant entrer dans les détails. Le modèle est tiré de la thèse "Étude du modèle non linéaire d'un manipulateur avec une membrure flexible"[Piedboeuf 89]. L'introduction du modèle d'ordre réduit facilite la conception d'une stratégie de commande surtout que ce dernier est sous la forme d'un modèle d'état.

2.2 Modèle et hypothèses

Le robot à modéliser, représenté à la figure 2.1, est constitué d'un bras flexible encastré dans une base rigide. La base se déplace en translation le long de l'axe r_3 et tourne autour de l'axe r_3 , la trajectoire de l'extrémité suit donc la surface d'un cylindre. Le robot porte une charge inertielle à l'extrémité de la membrure flexible et la gravité agit selon la verticale (axe r_3).

Dans la partie modélisation, les hypothèses ont été choisies de façon à permettre une étude correcte du modèle qui tient compte des aspects physiques les plus importants. Ces hypothèses consistent principalement à limiter le nombre de déformations à étudier. On considère deux déformations dans le plan transversal (selon les axes r_2 et r_3): une est horizontale, l'autre est verticale.

La déformation transversale est due à l'effort que subit le manipulateur en présence d'une charge à son extrémité. Elle se caractérise par des modes de vibration à des fréquences de quelques hertz. Le modèle, se basant sur le principe de la poutre d'Euler-Bernoulli, suppose que la déformation ne peut dépasser en aucun cas $0.1L$ avec L la longueur du bras. Le cisaillement causé par l'effort tranchant et l'inertie de rotation sont considérés comme négligeables. Le modèle ne considère pas de limitation sur la vitesse. Par contre il limite l'accélération. Cette dernière doit être calculée de tel façon que la déformation à l'extrémité ne dépasse pas $0.1L$.

Pratiquement, le modèle étudié correspond à une barre flexible encastrée avec une charge à l'extrémité. On considère que l'inertie à la base est supérieure à celle du bras. Ces deux dernières caractéristiques sont seulement valables pour le bras terrestre et elles ne sont pas considérées dans le cas du bras spatiale. La section de la poutre ainsi que ces caractéristiques dynamiques (densité, module de Young) sont constantes le long de l'axe j_1 . La charge située à l'extrémité possède une masse et une inertie;

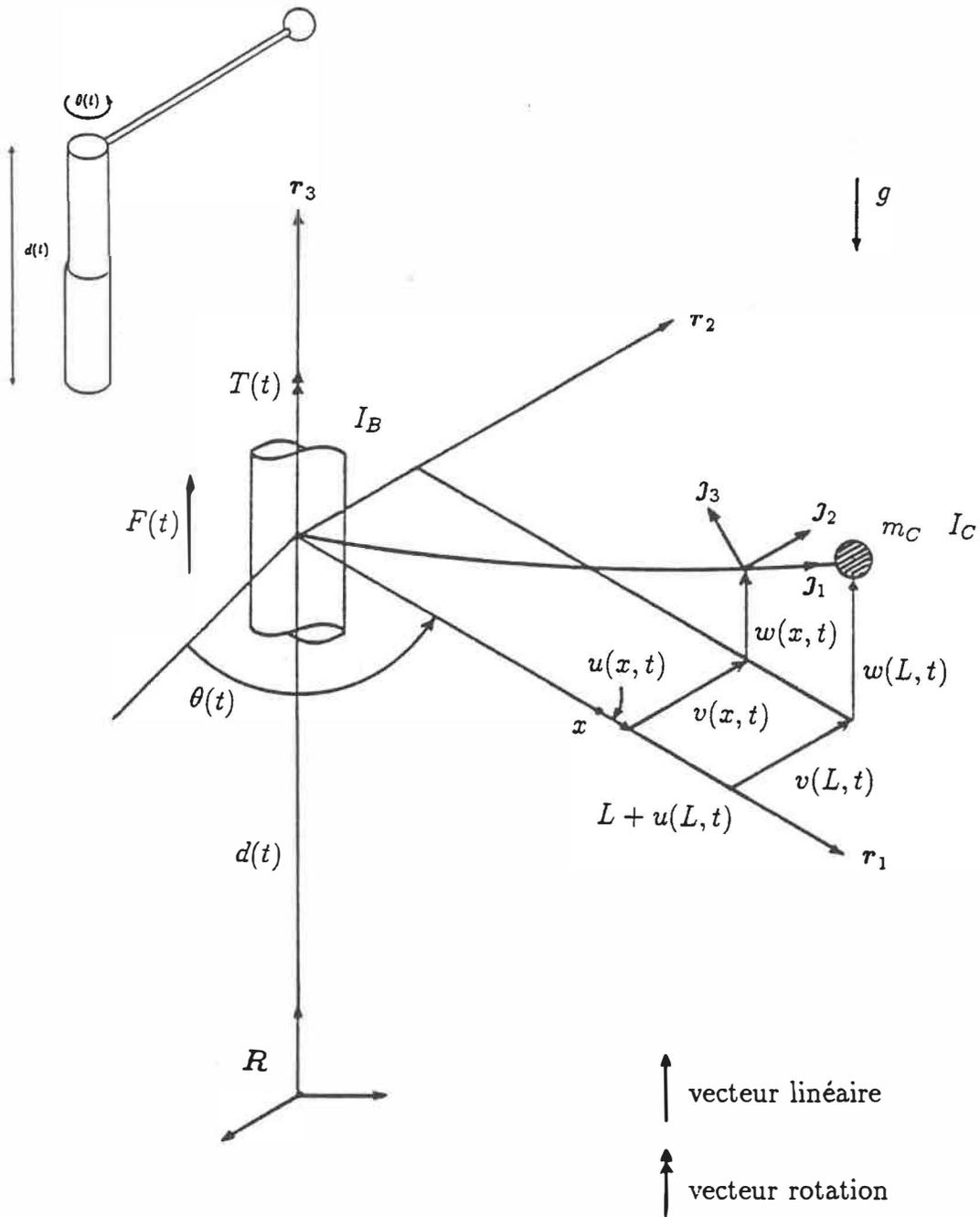


Figure 2.1: Le système à modéliser

| | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| Déformations | | |
| 2 transversales: $v(\mathbf{r}_2), w(\mathbf{r}_3) < 0, 1x$ modèle d'Euler-Bernoulli | | |
| 1 longitudinale: $u(\mathbf{r}_1)$ | | |

| Repères | États | Coïncide avec |
|-----------------------------------------------------------------|----------|-----------------------------------|
| R : inertiel | immobile | |
| r : fixé sur la base | mobile | R pour θ et $d = 0$ |
| j : fixé sur le centroïde de la section A de la poutre | mobile | r pour $x = 0$ |

| | |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Base: | possède masse et inertie, rayon négligeable |
| Poutre: | propriétés uniformes le long de j_1 j_1, j_2 et j_3 sont les axes principaux d'inertie |
| Charge: | possède masse et inertie, centre de masse à $x = L$ axes principaux d'inertie \equiv axes j à $x = L$ |

Tableau 2.1: Résumé des hypothèses (Piedboeuf89)

son centre de masse coïncide avec le centroïde de la section du bras à l'extrémité. Le tableau 2.1 résume les hypothèses utilisées pour la modélisation.

2.3 Modèle d'ordre réduit

L'introduction d'un modèle d'ordre réduit s'avère importante dans la partie commande. Il rend possible une restructuration des ÉDP en utilisant la méthode des modes assumés. Cela permet d'avoir un modèle d'ordre limité à étudier. Le modèle d'ordre réduit est basé sur le principe de l'expansion modale. Le choix des coordonnées et vitesses généralisées dans le modèle permet d'écrire une déformation comme la somme d'une fonction de forme dépendant uniquement de x multipliée par une fonction dépendant uniquement de t . Ainsi les déformations v horizontale et w verticale sont présentées par:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{v_v} \phi_i(x) \eta_i(t) \tag{2.1}$$

| | coordonnée | vitesse | équation |
|-------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------|-------------|
| rotation de la base | $\theta(t)$ | $\dot{\theta}(t)$ | ÉDO |
| déplacement linéaire de la base | $d(t)$ | $\dot{d}(t)$ | ÉDO |
| fonction du temps de $v(x, t)$ ($i = 1, \dots, \nu_v$) | ${}^v\eta_i(t)$ | ${}^v\dot{\eta}_i(t)$ | ν_v ÉDO |
| fonction du temps de $w(x, t)$ ($i = 1, \dots, \nu_w$) | ${}^w\eta_i(t)$ | ${}^w\dot{\eta}_i(t)$ | ν_w ÉDO |

Tableau 2.2: Coordonnées et vitesses généralisées du modèle d'ordre réduit (Piedboeuf89)

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\nu_w} {}^w\phi_i(x) {}^w\eta_i(t) \quad (2.2)$$

L'ordre du modèle est réduit en choisissant ν_v et ν_w de dimension finie. Si les ϕ_i sont les fonctions propres du système, on obtient un modèle exact mais ces fonctions sont difficiles à obtenir. Le principe des modes assumés [Meirovitch 67] est une des méthodes permettant de simplifier le problème. Les fonctions de forme sont alors des fonctions admissibles qui satisfont aux conditions frontières géométriques. Ces nouvelles coordonnées n'ont aucune signification physique et permettent seulement une représentation mathématique des aspects physiques. Les coordonnées et les vitesses généralisées du modèle réduit sont décrites dans le tableau 2.2. Les fonctions qui sont utilisées dans ce mémoire correspondent aux fonctions propres d'une poutre avec charge à l'extrémité, encastree sur une base mobile [Piedboeuf 89].

2.4 Modèle d'état

Le modèle obtenu en utilisant la méthode des modes assumés peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} = \underline{f}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) + \underline{F} \quad (2.3)$$

où \mathbf{q} est le vecteur des coordonnées généralisées:

$$\mathbf{q} = [\theta, {}^v\eta_1, \dots, {}^v\eta_{\nu_v}, d, {}^w\eta_1, \dots, {}^w\eta_{\nu_w}]^T \quad (2.4)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est constitué par l'ensemble des termes ne dépendant ni des accélérations ni des forces de contrôle appliquées à la base. Le vecteur \mathbf{F} des forces appliquées s'écrit:

$$\mathbf{F} = [T \quad \mathbf{0} \quad F \quad \mathbf{0}]^T \quad (2.5)$$

En manipulant les variables [Piedboeuf 89], on obtient l'ensemble d'équations suivant:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\mu_\theta}{I_B} \dot{\theta} + \sum_{i=1}^{\nu_v} v e_i^1 ({}^v\eta_i + \kappa_e {}^v\dot{\eta}_i) + T/I_B \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} {}^v\ddot{\eta}_i = & -\sum_{j=1}^{\nu_v} v k_{ij}^1 ({}^v\eta_j + \kappa_e {}^v\dot{\eta}_j) + v k_i^5 \frac{\mu_\theta}{I_B} \dot{\theta} + \sum_{j=1}^{\nu_v} v k_{ij}^2 {}^v\eta_j \dot{\theta}^2 \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\nu_v} \sum_{k=1}^{\nu_v} v k_{ijk}^3 {}^v\eta_j {}^v\dot{\eta}_k \dot{\theta} - 2 \sum_{j=1}^{\nu_v} \sum_{k=1}^{\nu_v} v k_{ijk}^4 {}^w\eta_j {}^w\dot{\eta}_k \dot{\theta} - v k_i^5 \frac{T}{I_B} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$i = 1, \dots, \nu_v$$

$$\ddot{d} = -\frac{\mu_d}{m_B} - \sum_{i=1}^{\nu_w} \eta_w e_i^1 ({}^w\eta_i + \kappa_e {}^w\dot{\eta}_i) + F/m_B - g \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} {}^w\ddot{\eta}_i = & -\sum_{j=1}^{\nu_w} w k_{ij}^1 ({}^w\eta_j + \kappa_e {}^w\dot{\eta}_j) + w k_i^5 \mu_d / m_B \dot{d} + \sum_{j=1}^{\nu_w} w k_{ij}^2 {}^w\eta_j \dot{\theta}^2 \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\nu_w} \sum_{k=1}^{\nu_w} w k_{ijk}^3 {}^w\eta_j {}^w\dot{\eta}_k \dot{\theta} - w k_i^5 F / m_B \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$i = 1, \dots, \nu_w$$

Le vecteur d'état est alors formé des coordonnées généralisées \mathbf{q} et des vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, v_{\eta_1}, \dot{v}_{\eta_1}, \dots, v_{\eta_{\nu_v}}, \dot{v}_{\eta_{\nu_v}}, d, \dot{d}, w_{\eta_1}, \dot{w}_{\eta_1}, \dots, w_{\eta_{\nu_w}}, \dot{w}_{\eta_{\nu_w}}]^T \quad (2.10)$$

Le diagramme fonctionnel du modèle d'ordre réduit est présenté à la figure 2.4. Il met en évidence le couplage entre les deux déformations verticales et horizontales. En effet, les nonlinéarités présentant les forces de Coriolis et centrifuge assurent ce couplage à l'aide des termes qui sont fonctions des deux déformations. Ils mettent aussi en évidence le couplage entre la vitesse angulaire et la déformation verticale.

2.5 Linéarisation

Pour faire l'étude de la commande à l'aide des méthodes linéaires, on doit calculer une version linéarisée du modèle d'état. Cette linéarisation permet la commande du modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement. Dans cette section, une linéarisation autour d'un point de fonctionnement est réalisée. Il s'agit de développer le modèle sous forme de séries de Taylor autour de ce point. Ce dernier est défini tel que $v_{\dot{\eta}_i} = 0$ et $w_{\dot{\eta}_i} = 0$.

Le modèle d'état non linéaire s'écrit:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

où \mathbf{f} est une fonction non linéaire des états et \mathbf{F} est une fonction linéaire représentant les forces et les moments appliqués. L'expansion en série de Taylor au premier ordre de l'équation de $\dot{\mathbf{x}}$ (éq. 2.11) autour du point de fonctionnement $\bar{\mathbf{x}}$ donne la forme habituelle du modèle d'état:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{x} + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

tel que

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

et

$$\mathbf{F} = \underline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (2.14)$$

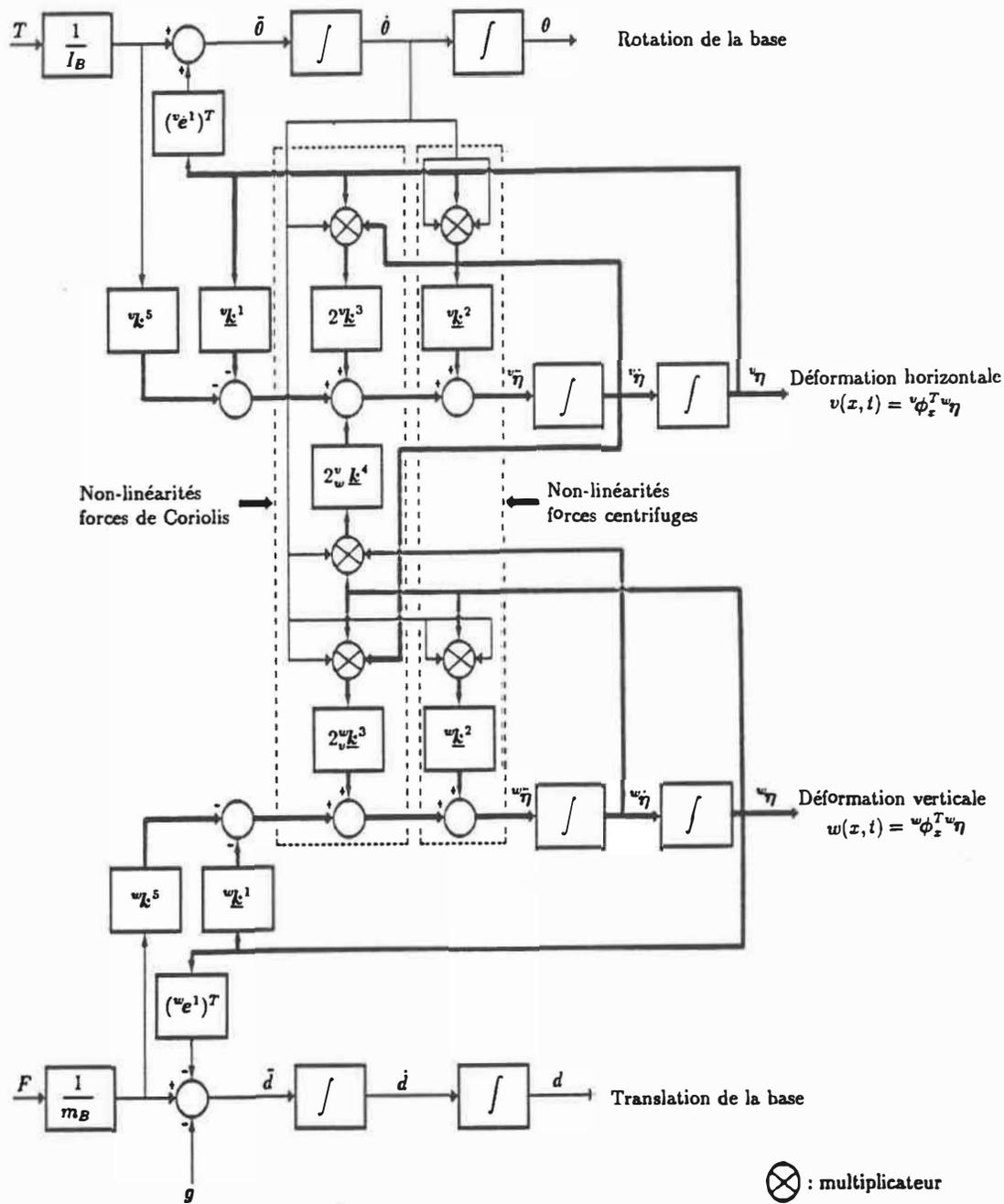


Figure 2.2: Diagramme fonctionnel du modèle d'ordre réduit

où $\mathbf{u} = [T, F - m_B g]^T$. Afin de considérer l'effet de la gravité, l'entrée appliquée verticalement sur la base est prise comme étant la force F moins la force de gravité. Les matrices $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$ sont définis de façon à mettre en évidence le couplage entre la déformation v et celle w .

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{11} & \underline{\mathbf{A}}_{12} \\ \underline{\mathbf{A}}_{21} & \underline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_{11} & \underline{\mathbf{B}}_{12} \\ \underline{\mathbf{B}}_{21} & \underline{\mathbf{B}}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

En définissant les entiers:

$$m_v = 2(1 + \nu_v)$$

$$m_w = 2(1 + \nu_w)$$

les dimensions des différentes matrices sont les suivantes:

$$\dim(\underline{\mathbf{A}}_{11}) = m_v \times m_v \quad \dim(\underline{\mathbf{A}}_{12}) = m_v \times m_w$$

$$\dim(\underline{\mathbf{A}}_{21}) = m_w \times m_v \quad \dim(\underline{\mathbf{A}}_{22}) = m_w \times m_w$$

$$\dim(\underline{\mathbf{B}}_{11}) = m_v \times 1 \quad \dim(\underline{\mathbf{B}}_{12}) = m_v \times 1 \quad \dim(\underline{\mathbf{B}}_{21}) = m_w \times 1 \quad \dim(\underline{\mathbf{B}}_{22}) = m_w \times 1$$

Détermination des matrices A_{ij}

Les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{ij}$ ¹ sont obtenues pour le point de linéarisation $\bar{\mathbf{x}}$ choisi. Un tel point est indispensable pour tenir compte de la déformation due à la gravité. Cela permet aussi d'étudier l'influence de la vitesse de rotation ou celle du couplage entre les différents modes flexibles sur le comportement du système en boucle fermée. Les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{12}$ et $\underline{\mathbf{A}}_{21}$ mettent en évidence le mécanisme du couplage entre les vibrations horizontales et verticales. En effet, d'après les équations de ces matrices, on souligne qu'il n'y a aucun couplage entre $\theta, \dot{\theta}$ et d, \dot{d} . Ce couplage apparaît dès qu'une déformation existe en présence d'une vitesse de rotation. Donc, lorsque le bras tourne tout en subissant la force de gravité, les déformations v et w sont couplées.

¹définies dans l'annexe A

L'influence de la vitesse de rotation sur la rigidité ressort dans la forme linéarisée. Elle se manifeste dans les dérivées partielles² $-v k_{ij}^1 + v k_{ij}^2 \dot{\theta}^2$ pour v et $-w k_{ij}^1 + w k_{ij}^2 \dot{\theta}^2$ pour w . Les termes en $\dot{\theta}^2$ représentent la force centrifuge et augmentent la rigidité. Ceux en $\dot{\theta}$ sont présents dans les forces de Coriolis et peuvent augmenter ou diminuer la rigidité.

Détermination des vecteurs B_{ij}

En considérant le fait qu'aucun couplage n'est créé par la commande, les vecteurs B_{12} et B_{21} sont nuls. Les vecteurs B_{11} et B_{22} s'obtiennent à partir des termes de force apparaissant dans les équations aux dérivées partielles [Piedboeuf 89]. Les vecteurs B_{11} et B_{12} reliés au mouvement horizontal sont:

$$B_{11} = \left[0 \quad \frac{1}{I_B} \quad 0 \quad -\frac{v k_1^5}{I_B} \quad \dots \quad 0 \quad -\frac{v k_{vw}^5}{I_B} \right]^T \quad (2.17)$$

$$B_{12} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.18)$$

Les vecteurs B_{21} et B_{22} sont associés au mouvement vertical. La force appliquée à la base est définie par l'équation 2.14.

$$B_{21} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.19)$$

$$B_{22} = \left[0 \quad \frac{1}{m_B} \quad 0 \quad -\frac{w k_1^5}{m_B} \quad \dots \quad 0 \quad -\frac{w k_{vw}^5}{m_B} \right]^T \quad (2.20)$$

Sorties pour le modèle d'état

Afin de simuler le comportement de dynamique de la membrure flexible, il faut définir les sorties. Celles-ci doivent être choisies de façon qu'elles aient un sens physique

²les paramètres sont définis dans l'annexe A

et qu'elles soient accessibles aux appareils de mesures. Ce choix permet de simplifier les calculs aux niveaux des contrôleurs.

Les sorties sont définies dans le tableau 2.3

| | sortie | équation |
|------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------|
| position angulaire de la base | $\theta(t)$ | $\theta(t)$ |
| vitesse angulaire de la base | $\dot{\theta}(t)$ | $\dot{\theta}(t)$ |
| position linéaire de la base | $d(t)$ | $d(t)$ |
| vitesse linéaire de la base | $\dot{d}(t)$ | $\dot{d}(t)$ |
| déformation horizontale | $v(x, t)$ | $\sum_{i=1}^{\nu_v} \phi_i(x) \eta_i(t)$ |
| déformation verticale | $w(x, t)$ | $\sum_{i=1}^{\nu_w} \phi_i(x) \eta_i(t)$ |
| vitesse de déformation horizontale | $\dot{v}(x, t)$ | $\sum_{i=1}^{\nu_v} \dot{\phi}_i(x) \eta_i(t)$ |
| vitesse de déformation verticale | $\dot{w}(x, t)$ | $\sum_{i=1}^{\nu_w} \dot{\phi}_i(x) \eta_i(t)$ |
| moment à la base | $EI_z v_0''$ | $EI_z \sum_{i=1}^{\nu_v} \phi_i''(0) \eta_i(t)$ |
| force à la base | $EI_y w_0'''$ | $EI_y \sum_{i=1}^{\nu_w} \phi_i'''(0) \eta_i(t)$ |

Tableau 2.3: Sorties du système (Piedboeuf89)

À partir des sorties définies précédemment, il est possible d'en reconstruire d'autres. Par exemple, la position de l'extrémité du bras s'écrit:

$$r(L, t) = L\mathbf{r}_1 + [d(t) + w(L, t)]\mathbf{r}_2 + [L\theta(t) + v(L, t)]\mathbf{r}_3 \quad (2.21)$$

et peut s'exprimer en fonction des sorties définies à l'aide du principe des modes assumés.

Sous forme matricielle, les sorties s'écrivent:

$$\mathbf{y} = \underline{\mathbf{C}}\mathbf{x} \quad (2.22)$$

Le vecteur de sortie \mathbf{y} , est:

$$\mathbf{y} = [\theta, \dot{\theta}, v_x, \dot{v}_x, EI_z v_0'', d, \dot{d}, w_x, \dot{w}_x, EI_y w_0''']^T \quad (2.23)$$

Si le vecteur $\Delta\mathbf{x}$ est utilisé, l'équation des sorties est alors:

$$\Delta\mathbf{y} = \underline{\mathbf{C}}\Delta\mathbf{x} \quad (2.24)$$

où $\Delta \mathbf{y}$ est égal à $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$.

La matrice $\underline{\mathbf{C}}$ est partitionnée en quatre sous-matrices, conformément à la partition des matrices $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$.

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{11} & \underline{\mathbf{C}}_{12} \\ \underline{\mathbf{C}}_{21} & \underline{\mathbf{C}}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Les dimensions des sous-matrices sont:

$$\dim(\underline{\mathbf{C}}_{11}) = 5 \times m_v \quad \dim(\underline{\mathbf{C}}_{12}) = 5 \times m_w \quad \dim(\underline{\mathbf{C}}_{21}) = 5 \times m_v \quad \dim(\underline{\mathbf{C}}_{22}) = 5 \times m_w$$

Les éléments des sous-matrices $\underline{\mathbf{C}}_{ij}$ sont obtenus à partir du tableau 2.2:

$$\underline{\mathbf{C}}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^v\phi_{1x} & 0 & \dots & {}^v\phi_{\nu_0 x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^v\phi_{1x} & \dots & 0 & {}^v\phi_{\nu_0 x} \\ 0 & 0 & EI_z {}^v\phi''_{10} & 0 & \dots & EI_z {}^v\phi''_{\nu_0 0} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\underline{\mathbf{C}}_{12} = [0] \quad (2.27)$$

$$\underline{\mathbf{C}}_{21} = [0] \quad (2.28)$$

$$\underline{\mathbf{C}}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^w\phi_{1x} & 0 & \dots & {}^w\phi_{\nu_w x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^w\phi_{1x} & \dots & 0 & {}^w\phi_{\nu_w x} \\ 0 & 0 & EI_y {}^w\phi'''_{10} & 0 & \dots & EI_y {}^w\phi'''_{\nu_w 0} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

D'après la définition des sorties, on s'aperçoit qu'on ne peut pas mesurer les effets du couplages entre les différents modes. Les matrices $\underline{\mathbf{C}}_{12}$ et $\underline{\mathbf{C}}_{21}$, représentant le couplage, sont alors nulles.

2.5.1 Modèle linéaire simple

Pour simplifier plus les calculs lors des premières simulations, on a linéarisé le modèle d'ordre réduit autour d'un point de fonctionnement à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ nulle et $\dot{\theta}^2$ négligeable. Les matrices caractérisant le couplage entre les deux déformations

\underline{A}_{12} et \underline{A}_{21} sont alors nulles. Physiquement, on considère que les forces centrifuges et de Coriolis sont nulles. Les matrices \underline{A}_{11} et \underline{A}_{22} prennent les formes simples suivantes:

$$\underline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_\theta}{I_B} & v_{e1}^1 & \kappa_e v_{e1}^1 & \dots & v_{e\nu}^1 & \kappa_e v_{e\nu}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_{k1}^5 \frac{\mu_\theta}{I_B} & -v_{k11}^1 & -\kappa_e v_{k11}^1 & \dots & -v_{k1\nu}^1 & -\kappa_e v_{k1\nu}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & v_{k\nu}^5 \frac{\mu_\theta}{I_B} & -v_{k\nu 1}^1 & -\kappa_e v_{k\nu 1}^1 & \dots & -v_{k\nu\nu}^1 & -\kappa_e v_{k\nu\nu}^1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\underline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_d}{m_B} & -w_{e1}^1 & -\kappa_e w_{e1}^1 & \dots & -w_{e\nu}^1 & -\kappa_e w_{e\nu}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_{k1}^5 \frac{\mu_d}{m_B} & -w_{k11}^1 & -\kappa_e w_{k11}^1 & \dots & -w_{k1\nu}^1 & -\kappa_e w_{k1\nu}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & w_{k\nu}^5 \frac{\mu_d}{m_B} & -w_{k\nu 1}^1 & -\kappa_e w_{k\nu 1}^1 & \dots & -w_{k\nu\nu}^1 & -\kappa_e w_{k\nu\nu}^1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le diagramme fonctionnel (fig. 2.5) se caractérise alors par deux blocs séparés présentant respectivement la déformation horizontale et la déformation verticale. Cette présentation met en évidence le découplage entre les deux déformations pour une linéarisation autour de zéro.

2.6 Choix des manipulateurs simulés

Comme on l'a mentionné au chapitre 1, les manipulateurs flexibles sont orientés vers des tâches soit terrestres, soit spatiales. Deux types de manipulateurs flexibles sont alors considérés dans ce mémoire.

Le manipulateur terrestre simulé est inspiré du prototype construit au laboratoire d'automatique du département de génie électrique de l'École Polytechnique de Montréal [Piedboeuf 89]. Il consiste en une barre d'aluminium de 2.2 mètres de long.

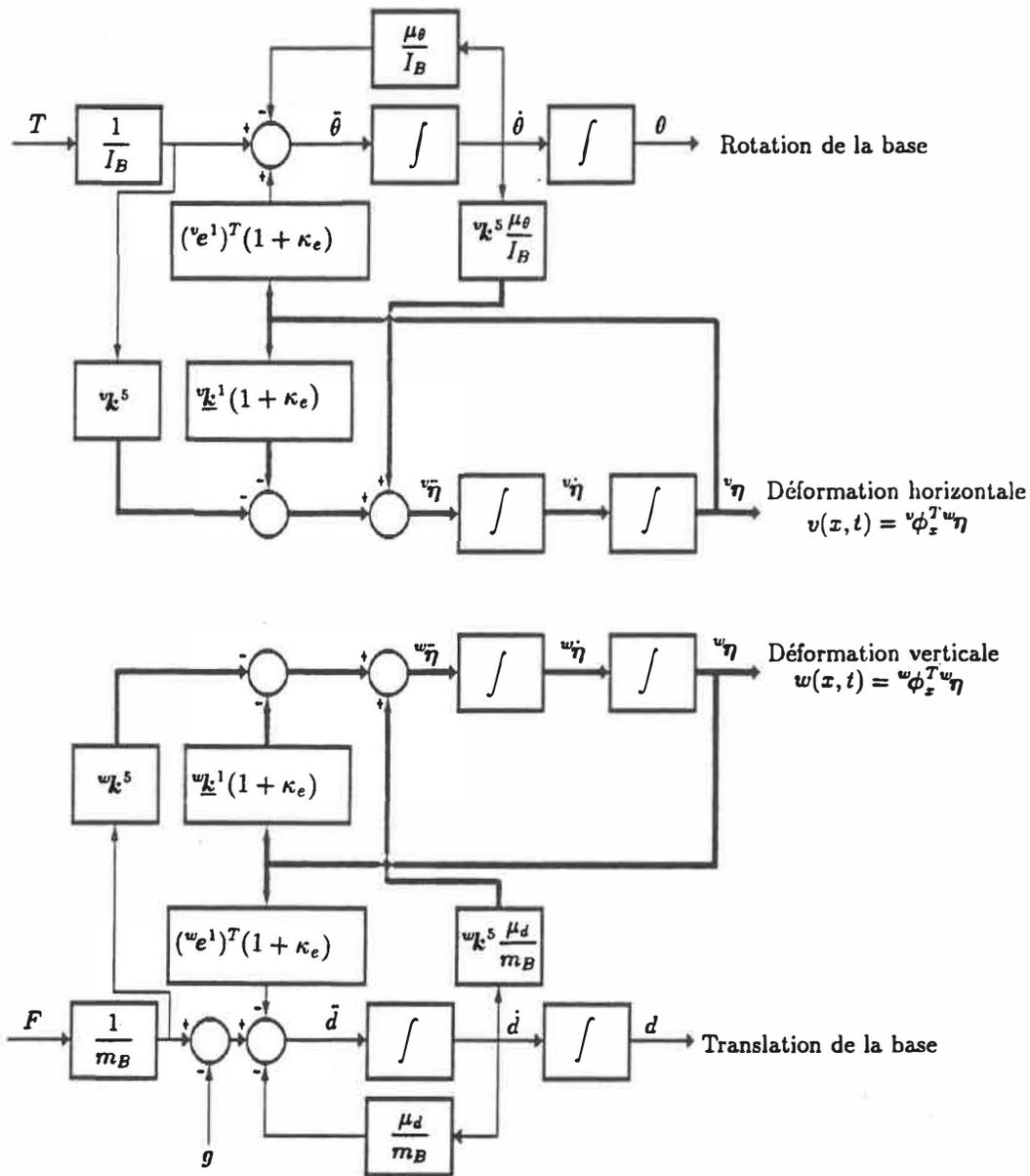


Figure 2.3: Diagramme fonctionnel du modèle d'ordre réduit linéarisé autour de zéro

La base est un cylindre en acier assez massif pour assurer sa rigidité. On considère une charge cylindrique à l'extrémité de masse variable. Ce choix permet d'analyser le comportement du manipulateur ainsi que la robustesse de la commande à cette variation. La barre est susceptible d'opérer dans les deux plans, horizontal et vertical en présence de la force gravitationnelle.

Le manipulateur spatial se caractérise par un bras de 10 mètres de long. Son matériau de base est aussi l'aluminium. Il se caractérise par une base possédant une faible inertie de rotation ce qui engendre une grande flexibilité dans le plan horizontal. Au contraire, l'inertie en translation est assez importante. En l'absence de gravité, la déformation verticale est faible. La charge est considérée comme étant variable.

L'amortissement interne est considéré variable pour les deux catégories de manipulateurs. Les premières simulations sont faites en considérant un amortissement nul. La considération de l'amortissement permet d'étudier les effets de couplage des modes vibratoires et des non-linéarités dans un cas réel.

Notation

Dans la partie qui va suivre de ce mémoire, on utilise la notation *AL22* pour désigner le manipulateur terrestre et *AL10* pour indiquer le manipulateur spatial.

2.6.1 Nombre de modes retenus

L'introduction d'un modèle d'ordre réduit implique immédiatement une troncature au niveau des modes flexibles. Cette élimination se fait en considérant l'apport de chaque mode flexible au fonctionnement global du système. Dans une première étape, on étudie la déformation horizontale. On limite le nombre des modes flexibles en étudiant le spectre de puissance d'un signal de sortie. Ce signal est la réponse

du modèle global à une impulsion à l'entrée. D'après le spectre qu'on obtient, on constate que le premier mode vibratoire domine les autres modes dans le cas du manipulateur terrestre. Cette dominance est moins évidente pour le robot spatial. On trouve un appui à ces remarques en traçant le diagramme de Bode des deux modèles en boucle ouverte (fig. 2.4 et fig. 2.5), on constate alors la dominance du deuxième mode vibratoire du bras spatial.

On choisit de limiter le nombre de modes vibratoires à quatre pour les deux types de manipulateurs soit un vecteur d'état de la forme:

$$\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, \eta_1, \dot{\eta}_1, \dots, \eta_4, \dot{\eta}_4]^T \quad (2.32)$$

Ce choix résulte du fait qu'on doit étudier les effets excitateurs de plusieurs facteurs sur ces modes. En particulier, la fréquence d'échantillonnage et la variation de la charge.

En translation, l'inertie à la base est importante. Les fréquences naturelles des modes vibratoires correspondent, approximativement, à celles d'une poutre encastree à la base. Les modes vibratoires n'influencent pas trop le comportement du manipulateur. On limite ν_w à trois. Ce choix permet d'étudier l'excitation que provoque la vitesse angulaire au niveau des modes vibratoires verticaux ainsi que celle provoquée par la variation de la charge.

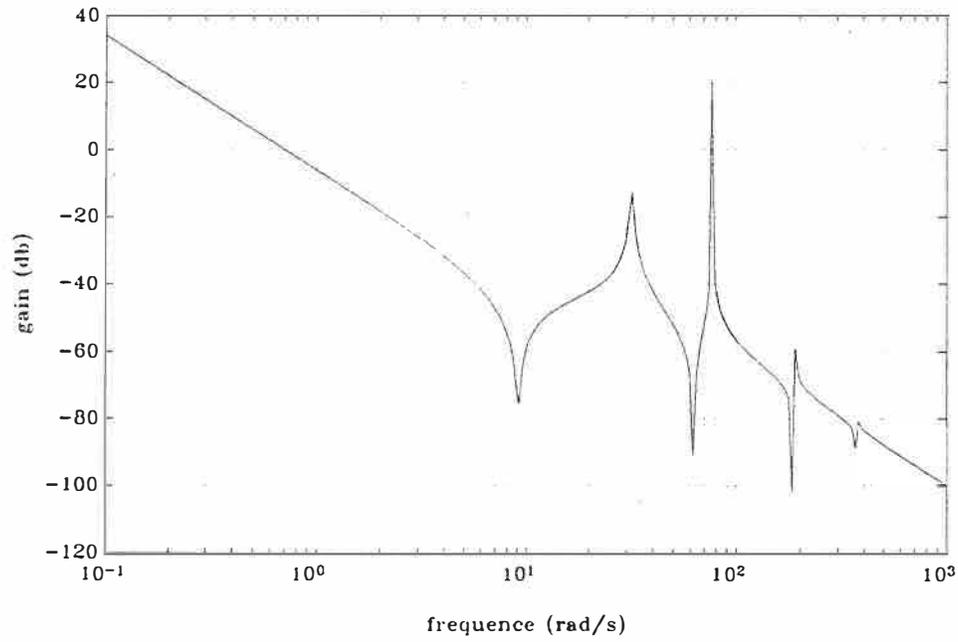


Figure 2.4: Diagramme de Bode: manipulateur terrestre

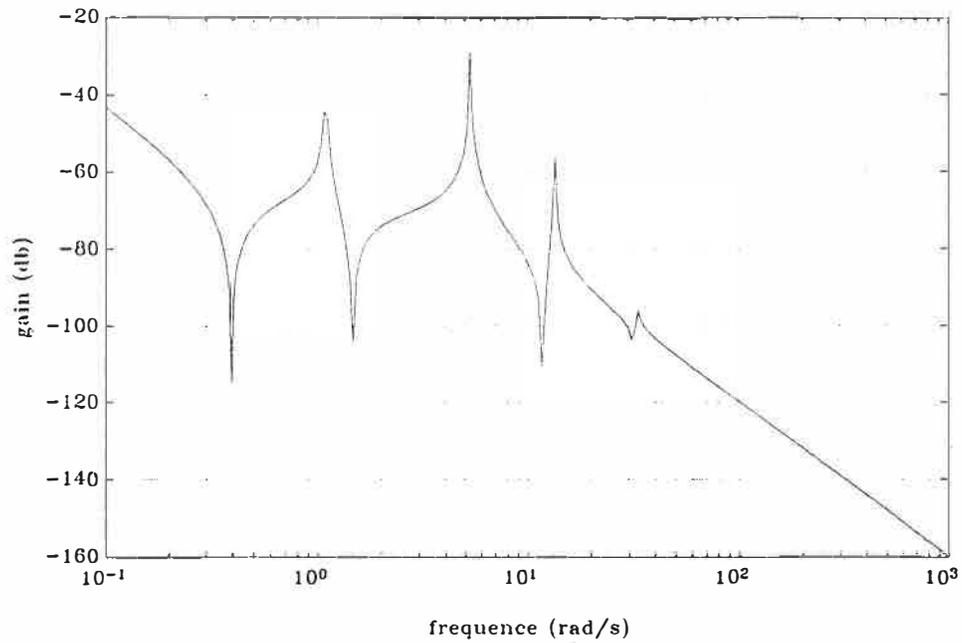


Figure 2.5: Diagramme de bode: manipulateur spatial

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles non linéaire et linéarisé autour d'un point de fonctionnement sont présentés. Le modèle non linéaire met évidence le couplage entre les déformations horizontale et verticale de la membrure flexible. Ce couplage apparaît dès que l'on suppose que la vitesse de rotation angulaire est non nulle. Le modèle non linéaire met également en évidence l'effet de la vitesse de rotation sur la flexibilité de la membrure. À vitesse de rotation réduite, un modèle linéaire simple est obtenu et ce modèle assure un découplage entre les déformations horizontale et verticale.

Pour étudier la conception d'un contrôleur, deux modèles linéaires ont été retenus. Le premier modèle, noté *AL22* désigne un manipulateur terrestre avec une membrure en aluminium de 2.2 mètres de long. Le second modèle, noté *AL10* est un manipulateur spatial possédant un bras d'une longueur de 10 mètres.

Chapitre 3

Étude d'une commande classique

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a présenté le système à étudier, les étapes de la modélisation et de la linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Deux modèles sont retenus, l'un linéaire, l'autre non linéaire caractérisé par des forces axiale et centrifuge ainsi que par un couplage entre les modes flexibles.

Dans ce chapitre, les résultats obtenus à l'application d'une commande proportionnelle dérivée sur chaque joint sont analysés à partir des modèles linéaire et non linéaire. Ce choix découle du fait qu'en pratique, généralement, on commande les manipulateurs rigides à l'aide des contrôleurs proportionnels, intégrales et dérivés (PID). En l'absence d'une perturbation constante au niveau du système, une commande PD s'avère suffisante. Cette commande obéit au principe de la colocalisation. On n'a de l'information que sur la position et la vitesse du joint. Les vibrations du bras flexible seront détectés seulement dans le cas où leurs effets touchent la base. Leur action sur l'extrémité n'influence pas le comportement du contrôleur.

Dans ce chapitre, on met en relief les limitations qu'entraîne la flexibilité dans le contrôle de l'extrémité ainsi que les performances du système en boucle fermée. Plus

particulièrement, la position de l'extrémité du bras du manipulateur, l'influence des vibrations sur sa trajectoire sont étudiées. Les limitations de la commande proportionnelle dérivée pour contrôler une structure flexible sont mises en évidence.

Une étude comparative entre les modèles linéaire et non linéaire permet de mettre en évidence l'apport des termes non linéaires dans la commande du système.

3.2 Critères de performances

En traitant le problème de contrôle d'une membrure flexible, on est obligé de développer un certain nombre de critères pour assurer des bonnes performances dynamiques du système. Même si des critères comme la stabilité sont bien incontestables, d'autres dépendent essentiellement de la nature de l'application envisagée pour la membrure. Dans un cas pratique, ces critères sont une combinaison des performances désirées par l'opérateur et des contraintes sur le poids, l'accélération, l'énergie mise en jeu, etc. Avec ce choix de critères, on essaye, toujours, d'assurer une bonne robustesse du système en boucle fermée vis à vis des perturbations externes et des incertitudes dans la modélisation de la structure essentiellement celles dues à la troncature.

Une étude des lieux des racines en fonction des gains, de la marge de phase et de la marge de gain permet de se faire une idée sur la robustesse de la commande.

3.3 Étude des lieux des racines en boucle fermée

Dans cette section, on fait l'étude des lieux des racines en fonction de plusieurs variables. On considère que les capteurs de position et de vitesse sont colocalisés avec la commande au niveau de la base. On conçoit deux méthodes d'insertions de la boucle contrôle:

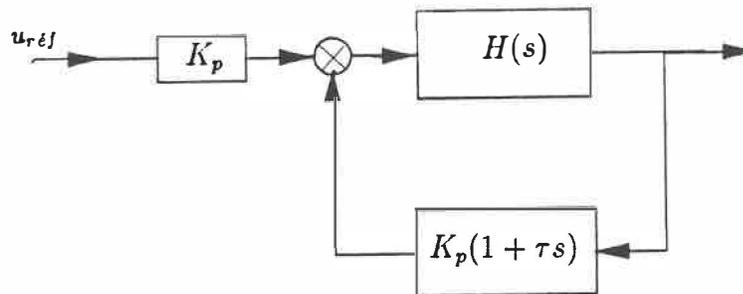


Figure 3.1: PD :Rétroaction directe

1. En rétroaction directe;
2. à l'aide d'un retour tachymétrique.

3.3.1 PD en rétroaction directe

Si on considère la configuration en rétroaction directe, le compensateur est à un seul degré de liberté. On suppose qu'on peut mesurer correctement la vitesse de déplacement de la membrure. Les pôles en boucle fermée sont solution de l'équation caractéristique:

$$1 + K_p \left(1 + \frac{K_v}{K_p} s\right) H(s) = 0 \quad (3.1)$$

Avec:

$H(s)$: fonction de transfert en boucle ouverte

K_p : gain proportionnel

K_v : gain dérivé

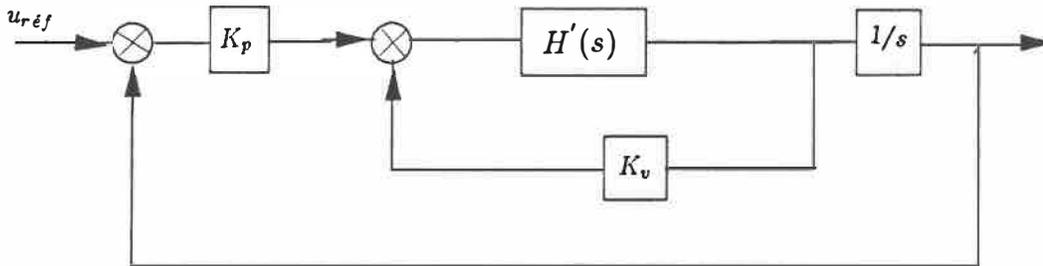


Figure 3.2: PD :Retour tachymétrique

Déformation horizontale

La fonction de transfert est alors:

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} \quad (3.2)$$

Le moment appliqué à la base $T(t)$ s'écrit:

$$T(t) = K_p[\theta(t) - \theta_{ref}(t)] + K_v[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_{ref}(t)] \quad (3.3)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte du bras terrestre, telle que présentée dans la figure 3.3, se caractérise par une alternance des pôles et des zéros sur l'axe des imaginaires. Les pôles double du mode rigide sont à l'origine. Cette position est propre à un système à amortissement nul.

Le bras spatial se caractérise aussi par des racines alternées sur l'axe des imaginaires. La figure 3.4 montre que les pôles des modes flexibles sont assez proches de l'axe des réels ce qui signifie une grande flexibilité de la membrure spatiale.

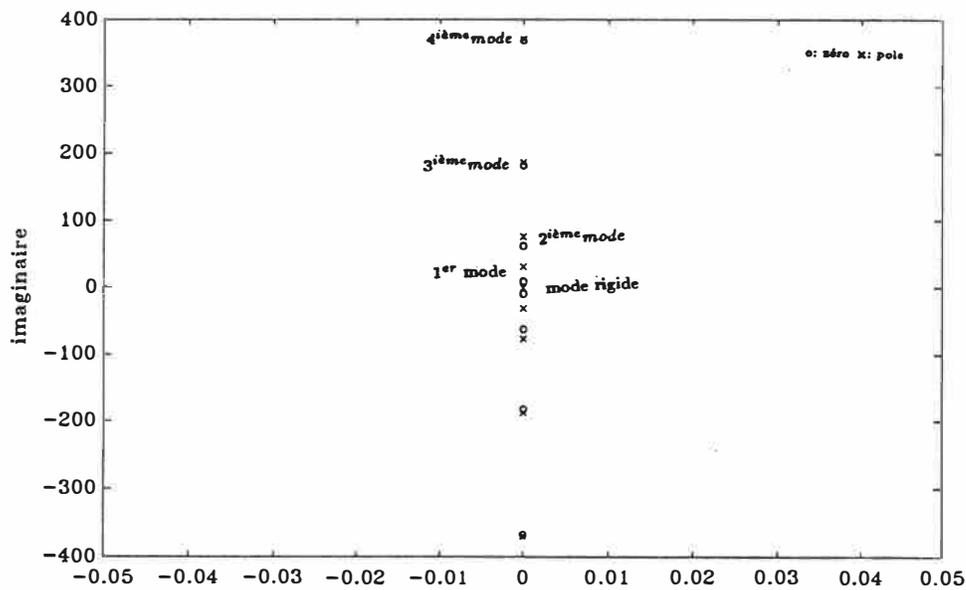


Figure 3.3: Lieu des racines en boucle ouverte: bras terrestre

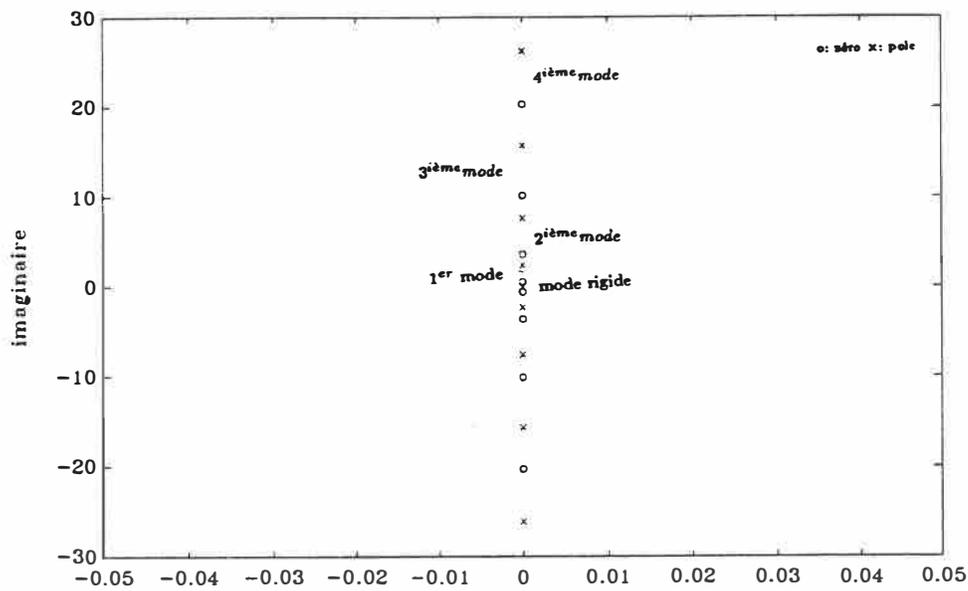
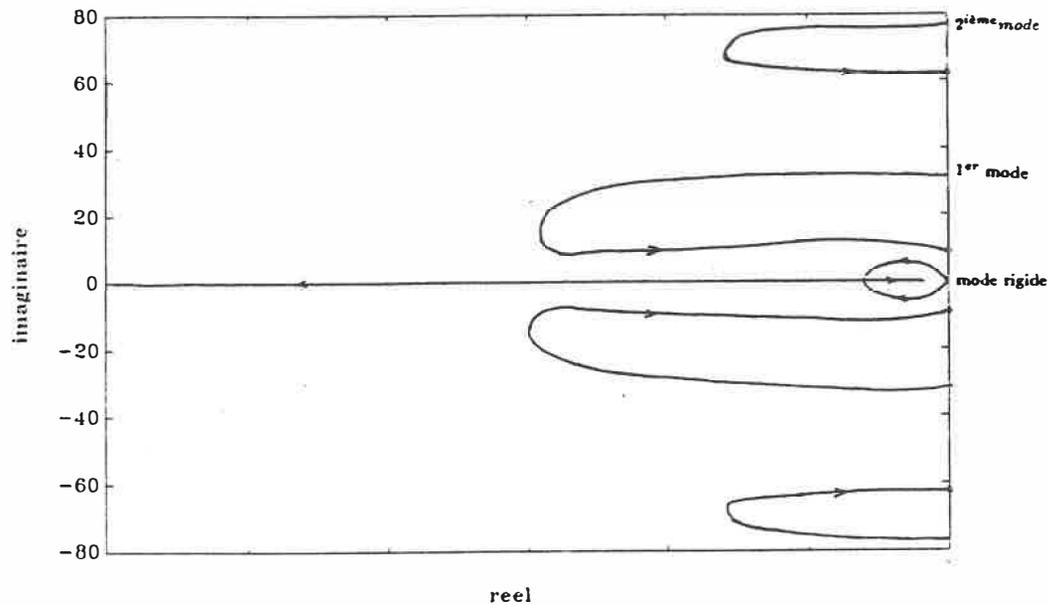


Figure 3.4: Lieu des racines en boucle ouverte: bras spatial

Figure 3.5: Lieu des racines en boucle fermée $\tau = 3$

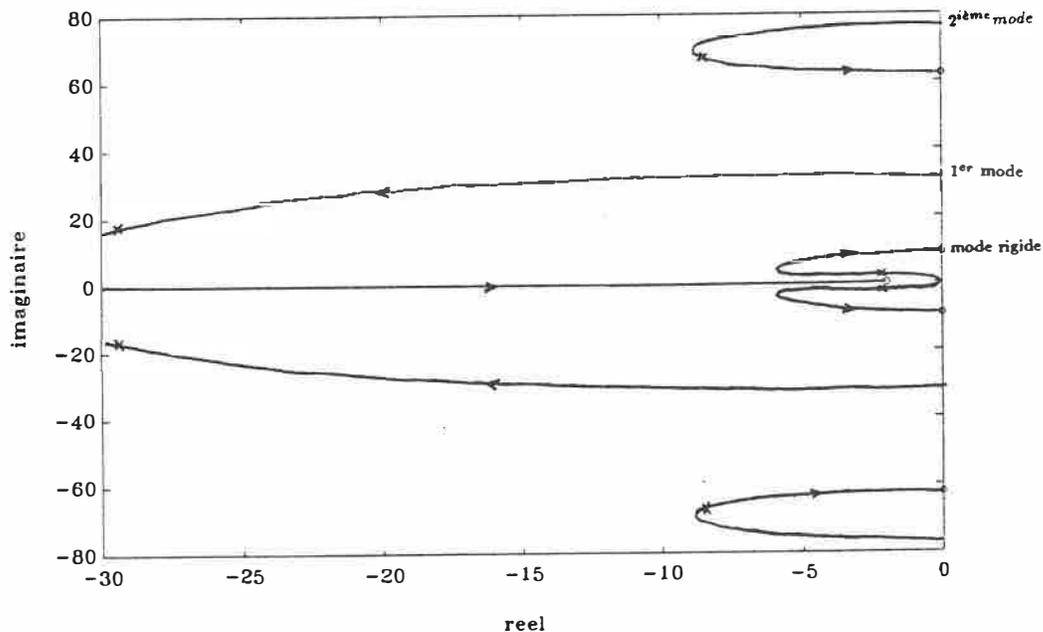
Le lieu des racines en boucle fermée dépend principalement de la position du zéro du régulateur

$$z = -\frac{1}{\tau}$$

τ défini le rapport des gains K_p et K_v . On fait varier en simulation le gain K_p (similaire à une variation de K_v tant que le rapport entre les deux demeure constant). En étudiant le comportement du bras terrestre à la variation de τ et qui correspond à une variation inverse du zéro du régulateur, on remarque que le lieu des racines change de configuration suivant la valeur de ce zéro.

Pour un τ assez élevé, un des pôles du mode rigide est attiré par le zéro du régulateur, l'autre se dirige vers l'infini. La figure 3.5 présente un cas typique avec une valeur de τ égale à 3.

En diminuant la valeur de τ , le zéro du régulateur proportionnel dérivée s'éloigne vers la gauche. Il va attirer les pôles du premier mode flexible. Les zéros de ce der-

Figure 3.6: Lieu des racines en boucle fermée $\tau = 0.5$

nier attirent les pôles du mode rigide. Pour un τ égale à 0.5, on réussit à avoir un amortissement critique pour le mode rigide. Dans la figure 3.6, la position des pôles en boucle fermée pour un gain $K_p = 17$ est indiquée par des (*). La bande passante est alors égale à 3.12hz.

En continuant à diminuer la valeur de τ on aura un zéro qui attire, successivement, un des pôles du deuxième mode, du troisième mode, etc. Les pôles des modes qui le précèdent vont être respectivement attirés par les zéros des modes qui les succèdent.

La diminution de la valeur de τ permet aussi d'étudier l'importance des modes flexibles sur le comportement du système. En effet, on remarque qu'à partir du troisième mode, il devient difficile d'attirer les pôles du quatrième mode. Ces derniers ont tendance à être attirés par leurs zéros correspondants. Ce qui implique une action nulle de ce mode au niveau de la base en l'absence d'une excitation de fréquence égale

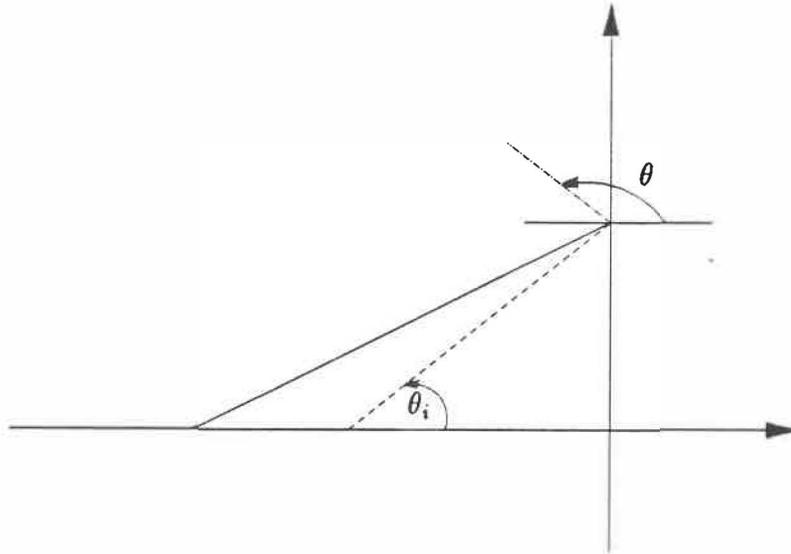


Figure 3.7: Angle de départ du pôle

à celle du 4^{ième} mode.

La variation dans la courbe du lieu des racines, lorsque τ diminue, peut avoir une interprétation à l'aide de l'angle de départ de chaque pôle θ . θ est défini tel que

$$\sum_{i=1}^z \theta_i - \sum_{j=1}^{p-1} \theta_j - \theta = 180^\circ \quad (3.4)$$

En éloignant le zéro de l'axe des imaginaires, θ_1 diminue. Donc l'angle de départ diminue et tend vers 90° ce qui implique que le pôle a plus tendance à être attiré par le zéro du mode vibratoire qui le succède (fig. 3.7).

En considérant le bras spatial, la variation du zéro compensateur entraîne des effets similaires à ceux provoqués dans le cas terrestre sauf au niveau du premier mode flexible. On remarque d'après la figure 3.4 que les pôles et les zéros de ce dernier sont presque confondus. Cela entraîne que le zéro du régulateur proportionnel dérivée ne peut pas attirer le pôle du premier mode. Les pôles du mode rigide sont toujours attirés par les zéros du premier mode flexible. Un amortissement optimal est assuré au mode rigide pour un gain $Kp = 320$ et un zéro dérivateur égal à -0.1 . La bande

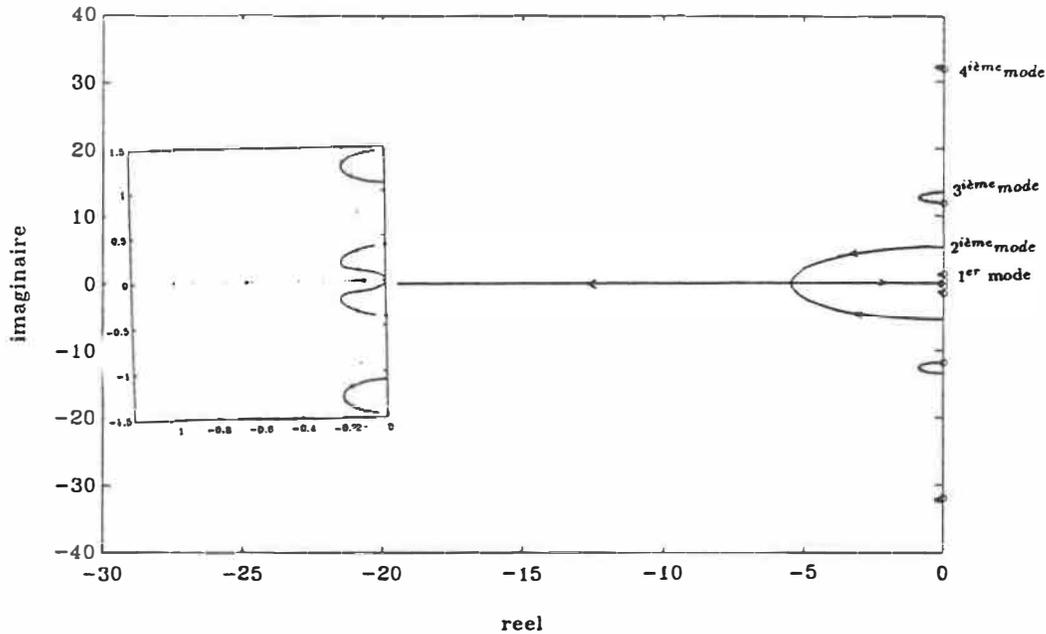


Figure 3.8: Lieu des racines en boucle fermée: bras spatial

passante du système est alors égale à 0.17hz. Un cas limite est atteint lorsqu'on choisit le zéro du régulateur égal à -0.06 : un des pôles du mode rigide est alors attiré par le zéro dû au régulateur, l'autre se dirige vers le zéro du premier mode flexible de même que le pôle du deuxième mode flexible (fig. 3.8).

Déformation verticale

La fonction de transfert en boucle ouverte est alors:

$$H(s) = \frac{d(s)}{F(s)} \quad (3.5)$$

La force appliquée à la base s'écrit

$$F(t) = K_p[d(t) - d_{réf}(t)] + K_v[\dot{d}(t) - \dot{d}_{réf}(t)] \quad (3.6)$$

D'après la figure 3.9, on remarque que les pôles et les zéros caractérisant les modes vibratoires du bras terrestre coïncident presque. Cela entraîne une plus grande rigidité du bras dans son déplacement vertical [Schmitz 85]. Le zéro du régulateur n'a d'influence que sur le mode rigide.

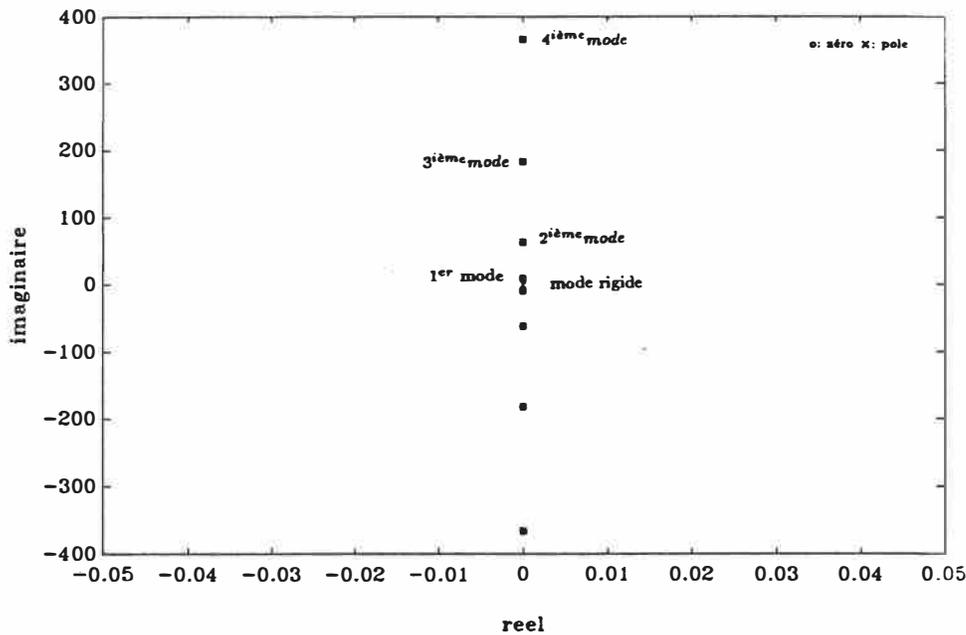


Figure 3.9: Lieu des racines en boucle ouverte du bras AL22: déplacement vertical

Le lieu des racines, caractérisant la fonction de transfert en boucle ouverte du bras spatial, peut subir l'influence du zéro compensateur à condition d'assurer des gains élevés de l'ordre de 1000.

3.3.2 PD retour tachymétrique

Cette deuxième implantation permet d'analyser la variation de chacun des paramètres K_p et K_v . L'étude est faite à partir des lieux des racines en boucle ouverte et en boucle fermée.

Déformation horizontale

La variation du gain K_v entraîne le déplacement du pôle du mode rigide sur l'axe des réels. En continuant à augmenter la valeur de K_v , ce pôle se dirige vers l'infini. Le comportement du bras spatial est similaire à celui du bras terrestre sauf qu'il faut des valeurs du gain K_v plus élevées. On remarque la dominance du deuxième mode par

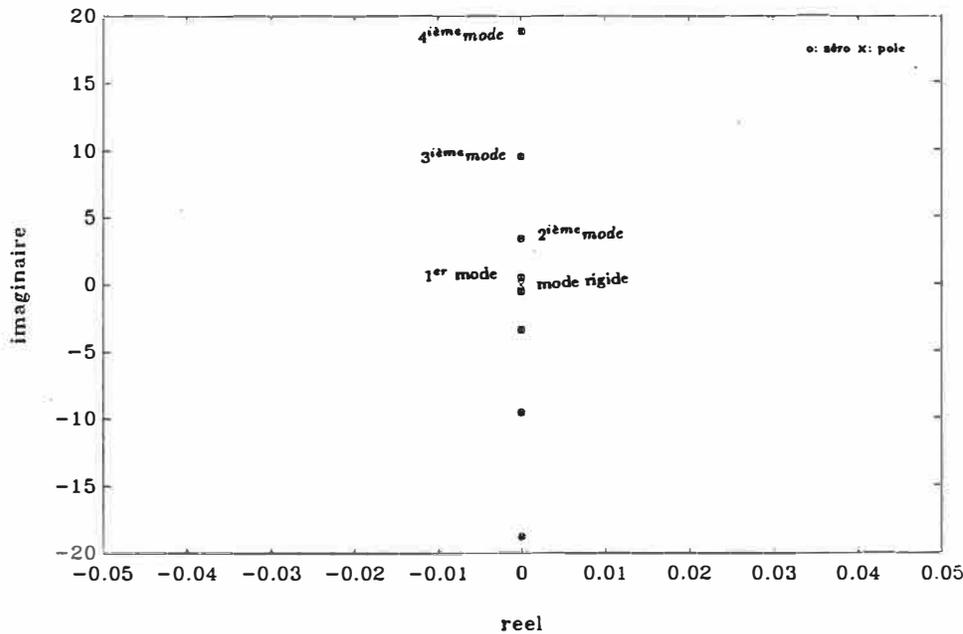


Figure 3.10: Lieu des racines en boucle fermée du bras AL10: déplacement vertical

rapport au premier mode du bras spatial. Le premier est plus sensible à la variation de K_v . Le choix du gain K_v est équivalent à un choix de l'amortissement en boucle fermée.

La variation du gain K_p donne un lieu de racines qui dépend essentiellement du choix de K_v .

Pour un $K_v = 20$, les pôles du mode rigide du manipulateur terrestre se dirigent vers l'infini (fig. 3.11). En diminuant cette valeur du gain, on éloigne le zéro compensateur de l'axe des imaginaires. Les pôles du mode rigide sont alors attirés par les zéros du premier mode (fig. 3.12). La variation de K_v , pour le manipulateur spatial, entraîne la même évolution dans le lieu des racines que celle dans le cas terrestre à une différence près: Les pôles du mode rigide sont attirés par les zéros du deuxième mode.

D'après les lieux des racines obtenus, on peut remarquer qu'on n'arrive à assurer un amortissement optimal pour le mode rigide avec une bande passante maximale que si les pôles de ce dernier sont attirés par les zéro du premier mode vibratoire.

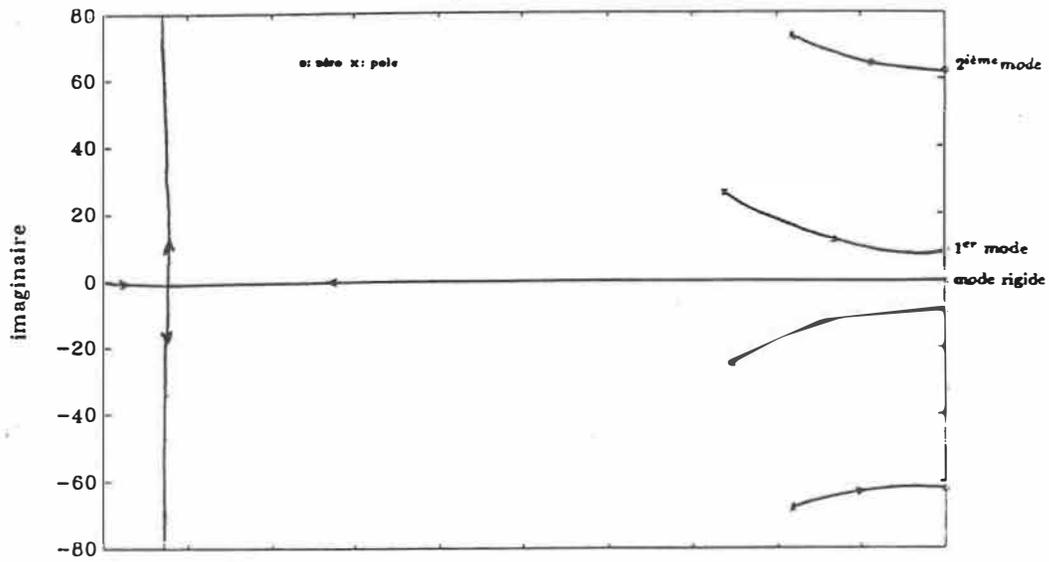


Figure 3.11: Lieu des racines en boucle fermée du AL22: $K_v = 20$

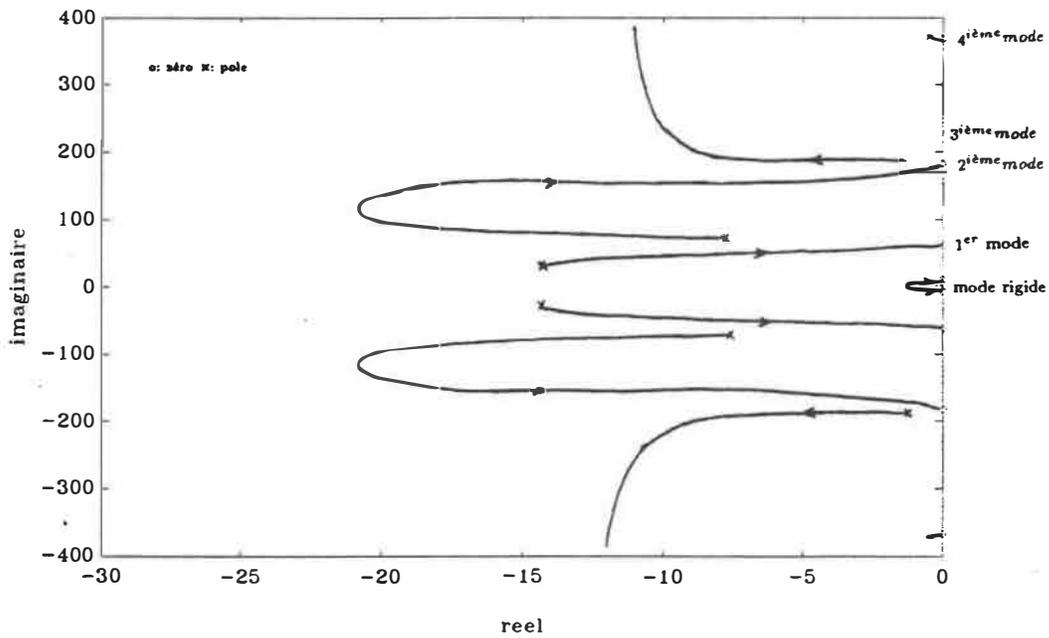


Figure 3.12: Lieu des racines en boucle fermée du AL22 $K_v = 5$

| paramètres | robots | |
|------------|----------------|--------------|
| | terrestre AL22 | spatial AL10 |
| K_p | 500 | 100 |
| K_v | 300 | 400 |

Tableau 3.1: Paramètres de la commande pour F

Déformation verticale

Le comportement des manipulateurs spatial et terrestre est similaire à celui qu'on obtient à partir de la première implantation. On fixe les paramètres du contrôleur aux valeurs définies dans le tableau 3.1.

3.3.3 Effet de l'amortissement sur le lieu des racines

La plupart des études faites sur la commande des structures flexibles considèrent que l'amortissement est nul ou très faible. L'introduction d'un amortissement interne, même faible, dans le modèle d'un bras flexible agit directement sur les modes vibratoires. On a choisi d'étudier les comportements des bras terrestre et spatial à l'introduction d'un amortissement. On se limite au déplacement horizontal. L'introduction d'un amortissement interne $\kappa_e = 0.005$ entraîne le déplacement des pôles et des zéros en boucle ouverte vers la gauche (fig. 3.13). En boucle fermée et d'après le diagramme de Bode (fig. 3.14), on ne remarque pas une variation ni dans la marge de gain ni dans la marge de phase par rapport à ceux obtenus pour la même commande en l'absence de l'amortissement (fig. 3.15). Par contre, une atténuation sensible est remarquée au niveau du troisième et du quatrième mode vibratoires.

L'étude du lieu des racines (fig. 3.13) montre que l'effet de cet amortissement se manifeste à partir du deuxième mode flexible et se limite aux modes vibratoires de

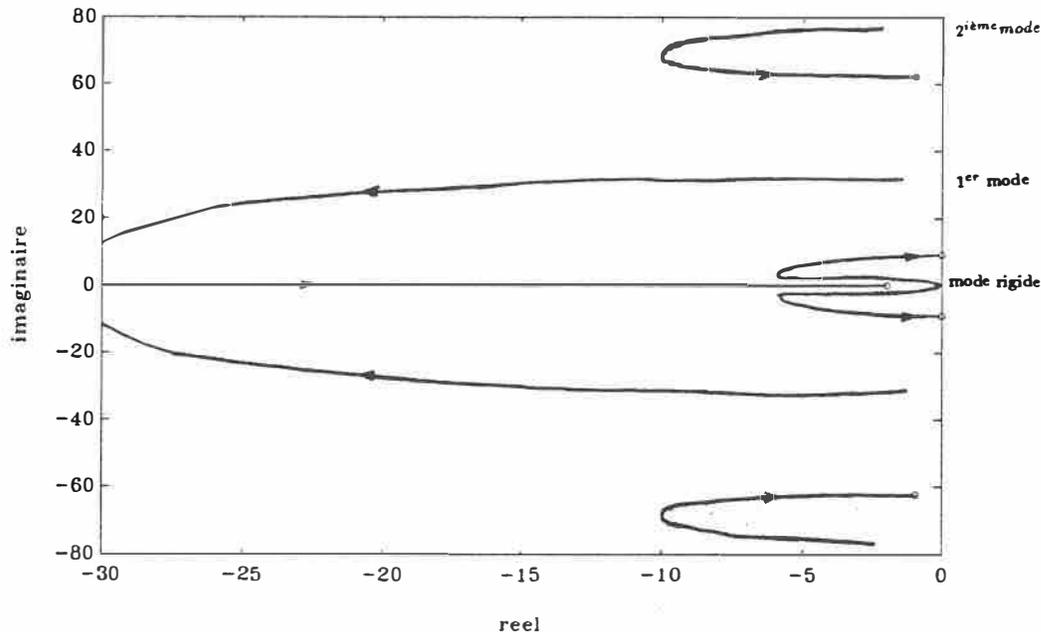


Figure 3.13: Comportement des pôles en boucle fermée à l'introduction d'un amortissement interne: $\kappa_e = 0.005$: bras terrestre

fréquences élevées. On peut alors conclure que l'amortissement interne n'agit pas au niveau de la commande proportionnelle dérivée, active à basse fréquence et dont la bande passante fermée n'a dépassé en aucun cas la fréquence propre du premier mode vibratoire, inaltéré par la présence de l'amortissement.

L'introduction d'un amortissement externe au niveau du système agit aux niveaux des modes à basses fréquences, particulièrement le premier mode vibratoire ainsi que le mode rigide. Ce dernier se caractérise par le déplacement de l'un de ces pôles dans le plan négatif de Gauss.

3.3.4 Étude de la marge de gain et de la marge de phase

Comme l'a démontré théoriquement Gevarter [Gevarter 70], on peut choisir n'importe quelle valeur positive pour K_p afin de stabiliser le système. Pratiquement, on a des contraintes à respecter telles que le temps de réponse, la marge de gain et la marge

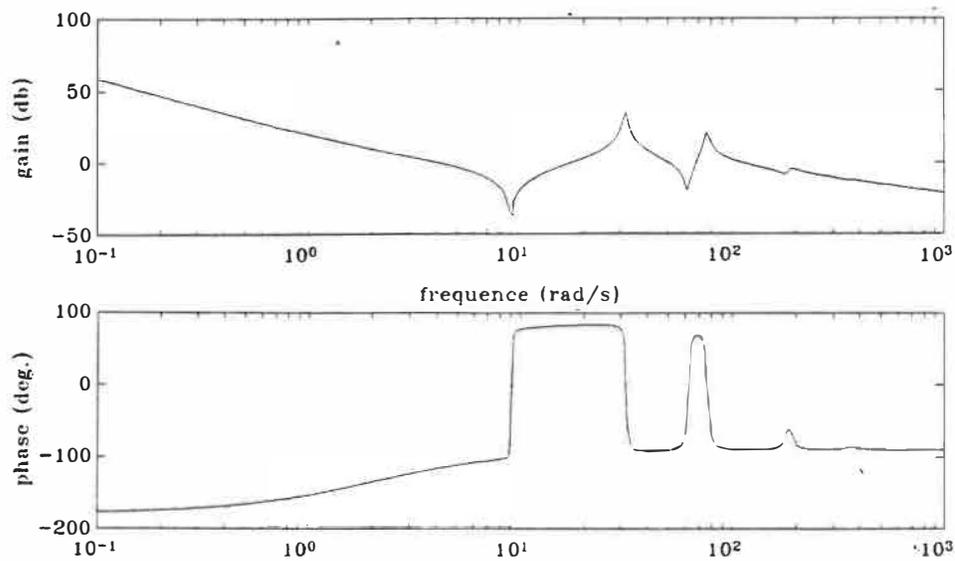


Figure 3.14: Diagramme de bode: amortissement non nul $\kappa_e = 0.005$

| paramètres | robots | |
|------------|----------------|--------------|
| | terrestre AL22 | spatial AL10 |
| K_p | 17 | 350 |
| K_v | 8.5 | 1400 |

Tableau 3.2: Paramètres de la commande pour T

de phase. Pour les paramètres du contrôleur présentés dans le tableau 3.2, le manipulateur terrestre possède en boucle fermée une marge de gain infini et une marge de phase de 87° (fig. 3.15).

Pratiquement la marge de phase est inférieure à 87° . Cette réduction est due à la présence de modes vibratoires non modélisés et qui introduisent des phases négatives dans le système ainsi qu'à l'effet retardataire de la période d'échantillonnage.

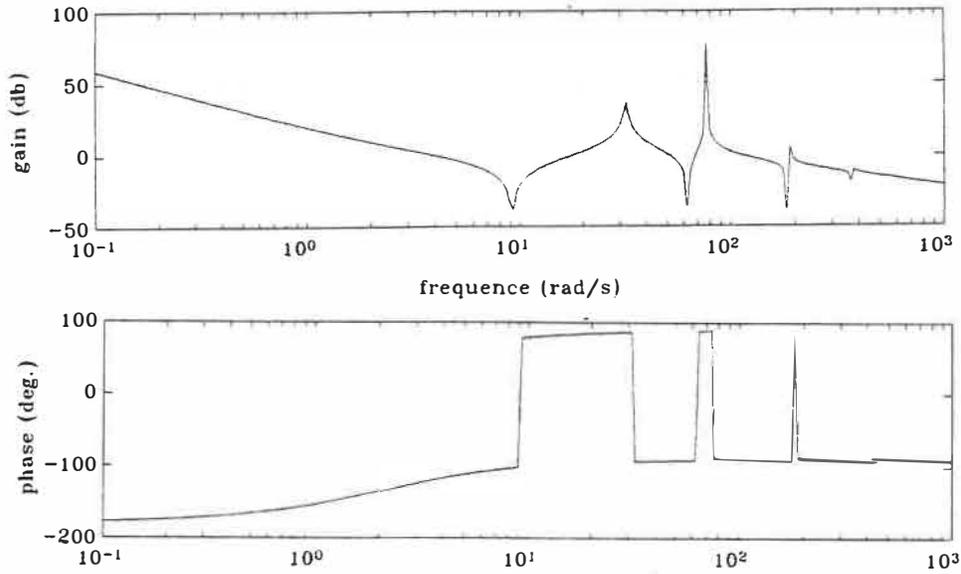


Figure 3.15: Diagramme de bode du bras terrestre: amortissement nul

3.4 Asservissement de la position horizontale

L'étude précédente a permis de choisir des gains optimaux permettant un amortissement optimal du mode rigide tout en assurant une bande passante maximale. L'application de cette commande au modèle linéaire ainsi qu'au modèle non linéaire permet d'effectuer une étude comparative entre les deux systèmes.

Etant donné que les deux modèles découlent d'un modèle d'Euler-Bernoulli qui limite la déformation à un dixième de la longueur totale de la membrure, on limite la commande de façon à ne pas dépasser cette limite. Pour cela, on sature la commande dès que l'on juge que c'est nécessaire.

Les performances du contrôleur ainsi que l'illustration des effets des termes non linéaires dépendent du niveau de la consigne de référence horizontale $\theta_{réf}$. Pour un $\theta_{réf} = 1rad$, le comportement du modèle linéaire est similaire à celui du modèle non linéaire (fig. 3.16). La vitesse angulaire est alors faible ce qui limite l'influence des termes non linéaires tel que la force centrifuge et la force de Coriolis. En augmen-

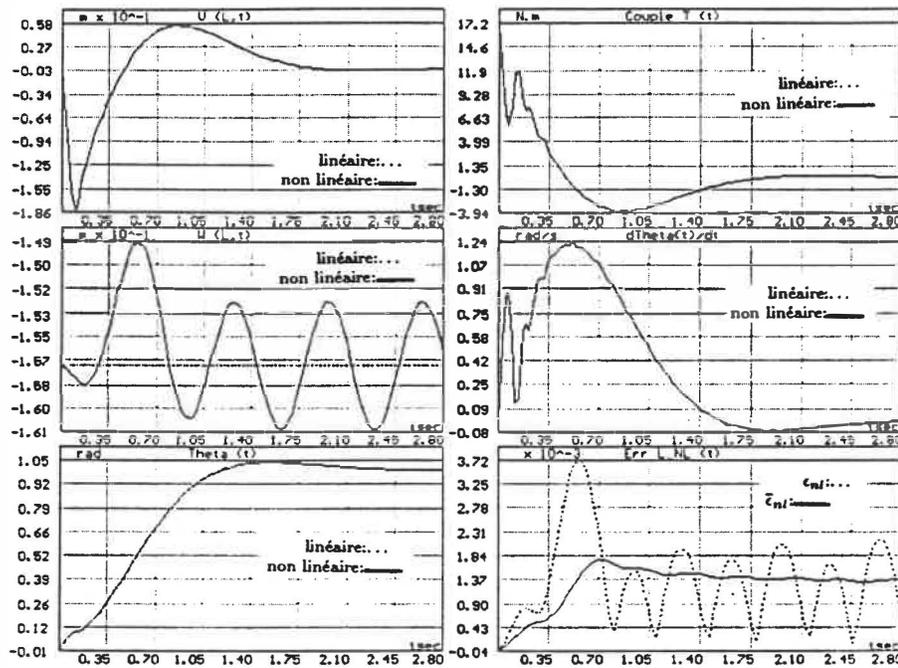
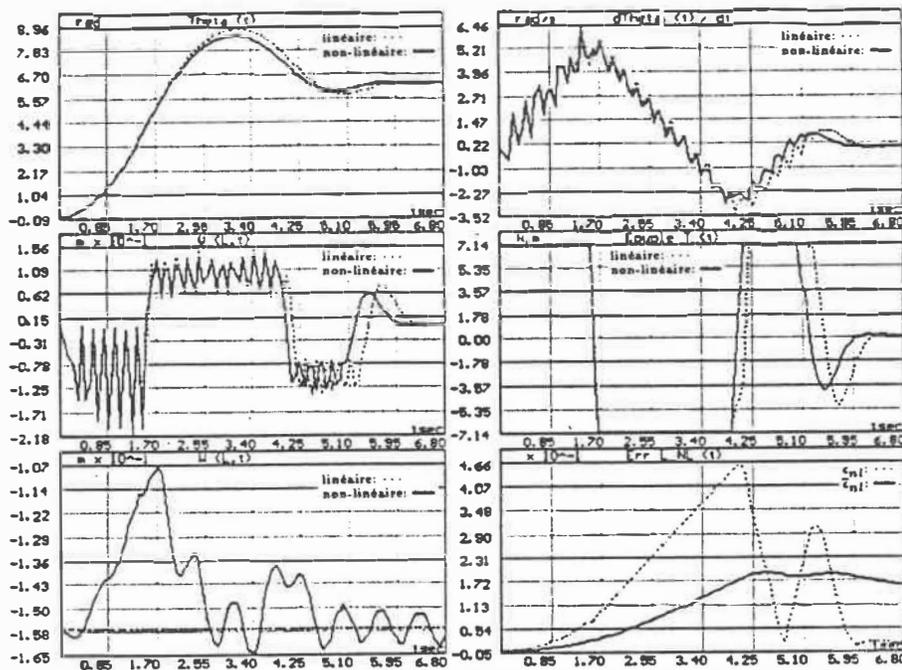


Figure 3.16: Asservissement de la position horizontale de AL22: $\theta_{réf} = 1 \text{ rad}$

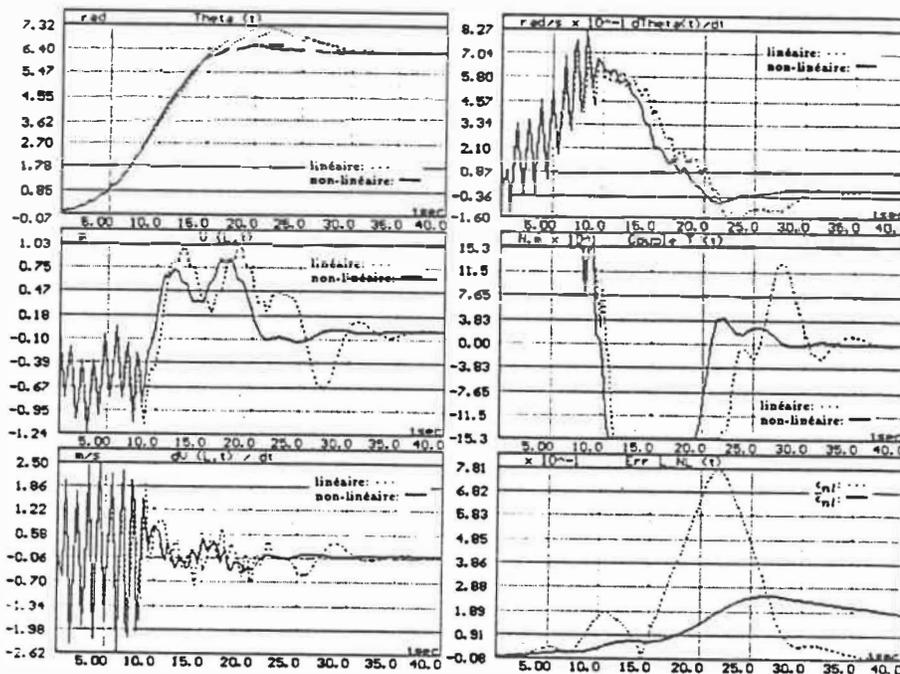
tant $\theta_{réf}$, la vitesse angulaire du bras augmente. Un cas limite est atteint lorsqu'on commande la base pour un $\theta_{réf}$ égale à un tour complet, le modèle non linéaire se comporte alors différemment du modèle linéaire: une différence notable apparaît au niveau de la trajectoire de l'extrémité entre les deux modèles. La réponse dans le cas du modèle non linéaire est plus rapide et présente moins de vibrations que dans le cas linéaire (fig. 3.17).

Dans le cas du bras spatial, la différence entre le comportement des deux modèles est plus critique. Ce fait s'explique par la longueur du bras qui entraîne une plus grande flexibilité (fig. 3.18)


 Figure 3.17: Asservissement de la position horizontale de AL22: $\theta_{ref} = 2\pi$

3.5 Asservissement de la position verticale

Quelque soit la valeur de la consigne de translation d_{ref} , aucune variation n'est observée dans le comportement de la base entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire du bras terrestre. Le lieu des racines en boucle ouverte (fig 3.3) permet d'expliquer ce phénomène. En effet, celui-ci est caractérisé par des pôles et des zéros qui coïncident presque et caractérisent une membrure qui n'est pas assez flexible. Physiquement, on peut expliquer ce lieu des racines par le fait que la base possède une grande inertie par rapport à celle de la membrure. Celle-ci est considérée alors comme encastree. Les vibrations verticales n'affectent pas la base (fig. 3.19). Si on observe l'extrémité, on remarque la présence d'une déformation verticale qui influence la trajectoire de l'extrémité du manipulateur.


 Figure 3.18: Asservissement de la position horizontale de AL10: $\theta_{réf} = 2\pi$

3.6 Asservissement des positions horizontale et verticale

Comme précédemment, une consigne $\theta_{réf}$ petite permet d'avoir un comportement similaire entre les deux modèles et le choix de $d_{réf}$ n'influence pas ce comportement car la vitesse de translation à la base n'excite pas les termes non linéaires. En augmentant la valeur de $\theta_{réf}$, la présence des nonlinéarités dans le comportement du modèle non linéaire est accentuée. Cette présence se manifeste par un couplage entre les vibrations verticales et la vitesse de rotation angulaire. En effet, l'augmentation de $\theta_{réf}$ entraîne l'amplification des amplitudes des forces centrifuge et de Coriolis. Ces forces agissent sur la membrure. Ils jouent sur la flexibilité de la structure en rendant le bras plus rigide. Dans la figure 3.20, on observe ces phénomènes dans le cas du bras terrestre.

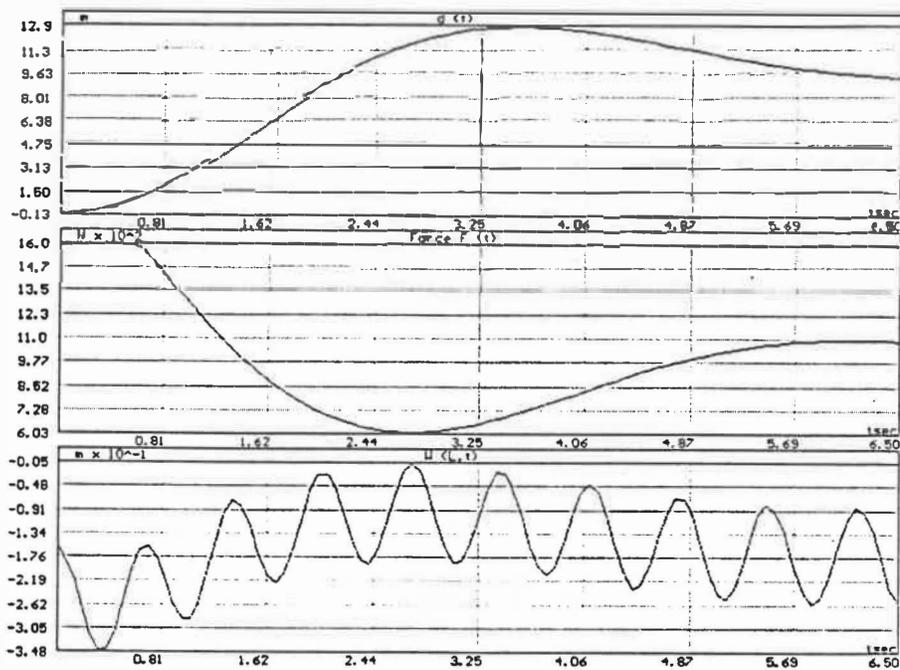


Figure 3.19: Asservissement de la position verticale: bras $AL22$, $d_{réf} = 10m$

Le couplage entre les deux déformations peut être décelé en faisant varier la géométrie de la charge à l'extrémité. On considère une charge sphérique au lieu d'une charge cylindrique. On a alors une diminution de la déformation verticale qui caractérise ce couplage. Cette variation est due au changement des conditions initiales du modèle [Piedboeuf 89].

3.7 Étude de l'effet d'une perturbation à l'extrémité

Ces essais permettent de simuler les perturbations qui peuvent exister lorsque le manipulateur est en action. Idéalement, la commande du système doit assurer une position de l'extrémité assez amortie en présence d'une perturbation externe. On limite cet essai à l'étude de la déformation horizontale.

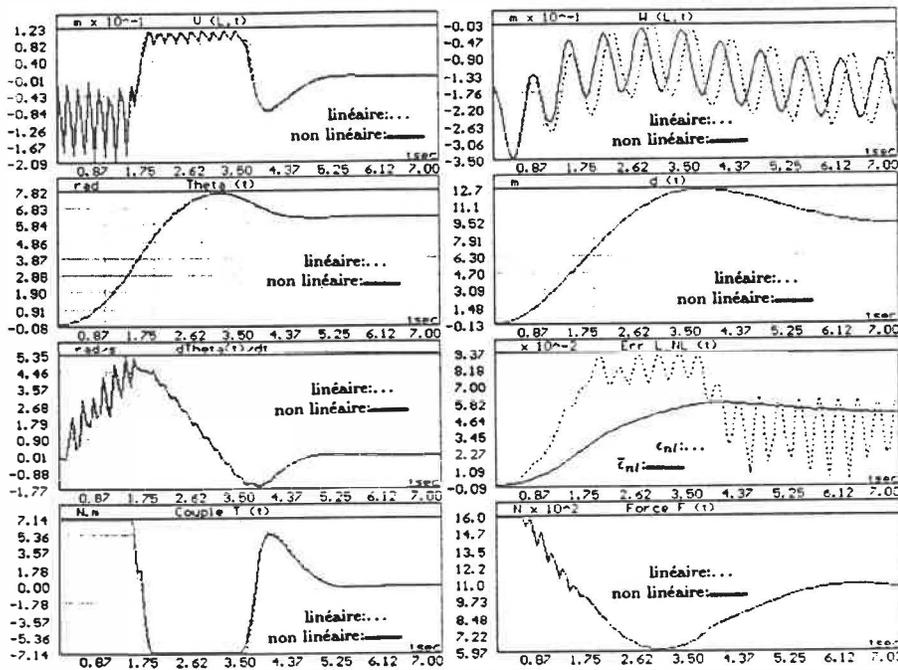


Figure 3.20: Asservissement des positions verticale et horizontale: bras spatial

Dans une première partie on considère que la perturbation est une force externe appliquée à l'extrémité. Au même temps, on applique la commande proportionnelle dérivée à la base. La réponse en boucle fermée est gouvernée par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{v}\dot{x} = (\underline{A}_{11} - K_p B_{11} C_{11p} - K_v B_{11} C_{11v})v\dot{x} + \Gamma_t F_t \quad (3.7)$$

tel que

C_{11p} et C_{11v} présentent respectivement les vecteurs de mesure de l'angle et de la vitesse angulaire à la base.

$\Gamma_t F_t$ présente la force perturbatrice à l'extrémité du bras¹. Le système atteint son régime statique tout en étant déformé à l'extrémité. La figure 3.21 montre la réponse de l'angle à la base ainsi que la réponse de l'extrémité lorsqu'on relâche la force perturbatrice à l'extrémité. La réponse transitoire est l'opposée de celle obtenue si

¹Le calcul de cette dernière est présenté dans l'annexe C

on applique un échelon perturbateur au modèle en boucle fermée.

Les gains utilisés sont les mêmes que ceux utilisés dans les simulations précédentes. On remarque que le système met plus de temps pour que la position de l'extrémité soit carrément amortie.

La variation de la charge à l'extrémité permet aussi d'étudier la robustesse de la commande. Une variation de la charge égale à 20% de la charge initiale permet de rester dans les limites raisonnables de dépassement et de déformation (fig. 3.22). À partir d'une variation de 50%, on peut déceler une variation entre le comportement du modèle linéaire et du modèle non linéaire. La réponse de ce dernier en boucle fermée présente moins de dépassement. La déformation horizontale n'excède pas dans ce cas 0.1 fois la longueur de la membrure mais elle se caractérise, comme pour le modèle linéaire, par la dominance d'un mode vibratoire ne permettant pas la stabilisation totale de la membrure (fig. 3.23). L'erreur temporelle entre les deux modèles (se basant sur la différence entre la position de l'extrémité du robot pour les modèles linéaire et non linéaire) dépasse les 40% et caractérise aussi bien la déformation verticale que l'augmentation du couplage qui existe entre les modes vibratoires.

L'augmentation de la déformation verticale n'est pas due au couplage entre les modes flexibles verticales et la vitesse angulaire car cette dernière présente une diminution lors de cette simulation.

En faisant varier la géométrie de la charge, on considère une charge sphérique plutôt que cylindrique, la déformation verticale présente une légère diminution qui caractérise l'annulation de la différence entre les moments d'inertie (fig. 3.24) sans pourtant être suffisante pour expliquer la variation de la déformation verticale lors de la simulation précédente.

On peut alors conclure qu'un nouveau phénomène physique agit au niveau du

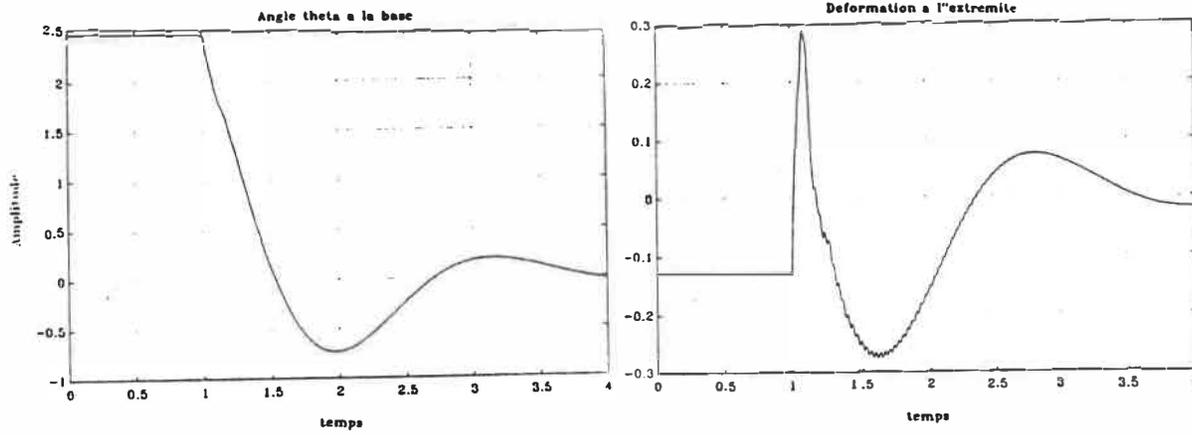
| Paramètres | Déformation horizontale | Déformation verticale | position de l'extrémité |
|-------------------------|------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| $\theta_{réf} \nearrow$ | $v(x, t) \nearrow$ modèle linéaire | $w(x, t) \nearrow$ | linéaire plus lent à se stabiliser |
| $d_{réf} \nearrow$ | pas de variation | $w(x, t) \nearrow$ | pas de variation |
| Charge \nearrow | $v(x, t) \nearrow$ | $w(x, t) \nearrow$ | ne suit plus la commande |

Tableau 3.3: Résumé de l'effet des variations des paramètres

ystème et il est caractérisé le modèle non linéaire pour une augmentation importante de la charge: c'est la torsion. Le tableau 3.1 résume l'évolution de l'extrémité pour les différentes simulations.

3.8 Étude de la commande PD avec capteurs à l'extrémité

La compensation d'un bras flexible à l'aide d'une commande proportionnelle dérivée s'avère limitée. En effet, on peut conclure des sections précédentes que cette commande n'assure pas un contrôle acceptable de l'extrémité. Elle n'agit qu'au niveau de la base et ne limite pas la déformation verticale qu'entraîne une grande vitesse de rotation. On peut également conclure que le choix des capteurs colocalisés n'est pas suffisant et on a intérêt à les positionner à l'extrémité. Ce choix permet d'avoir de l'information sur le point que l'on désire réellement contrôler. L'étude de la fonction de transfert du système en boucle ouverte permet de détecter la présence des zéros à parties réelles positives: elles caractérisent un système à phase non minimale. L'étude du lieu des racines de la fonction de transfert en boucle fermée, calculée pour un retour de l'extrémité, permet d'évaluer les gains du régulateur. D'après la figure 3.25, on remarque qu'en faisant augmenter le gain du contrôleur, quelques pôles du système en boucle fermée sont piégés par les zéros à parties réelles positives.



a) Position de la base

b) Position de l'extrémité

Figure 3.21: Évolution des sorties pour une perturbation à l'extrémité du bras AL22

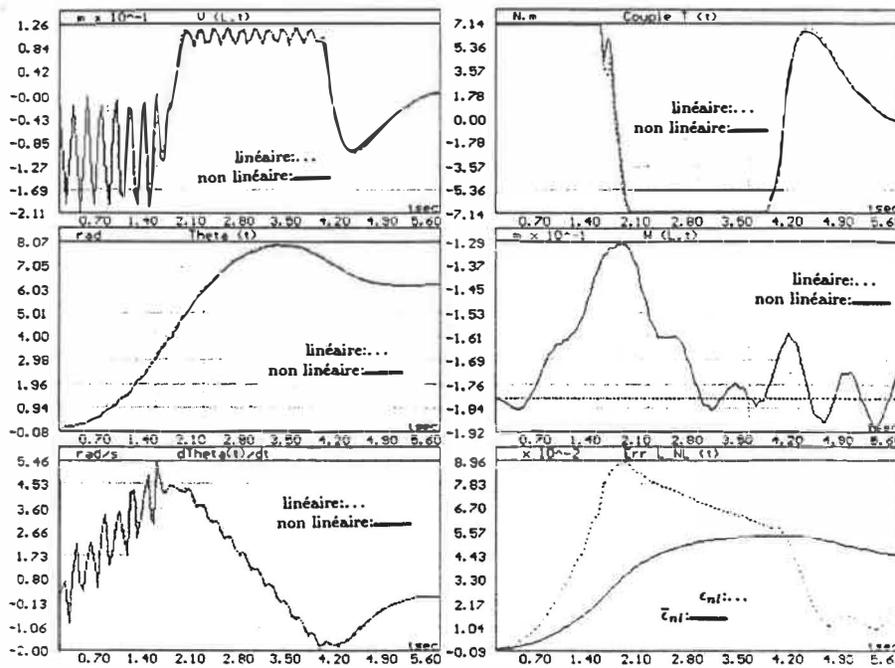


Figure 3.22: Variation faible de la charge à l'extrémité du bras AL22: 20%

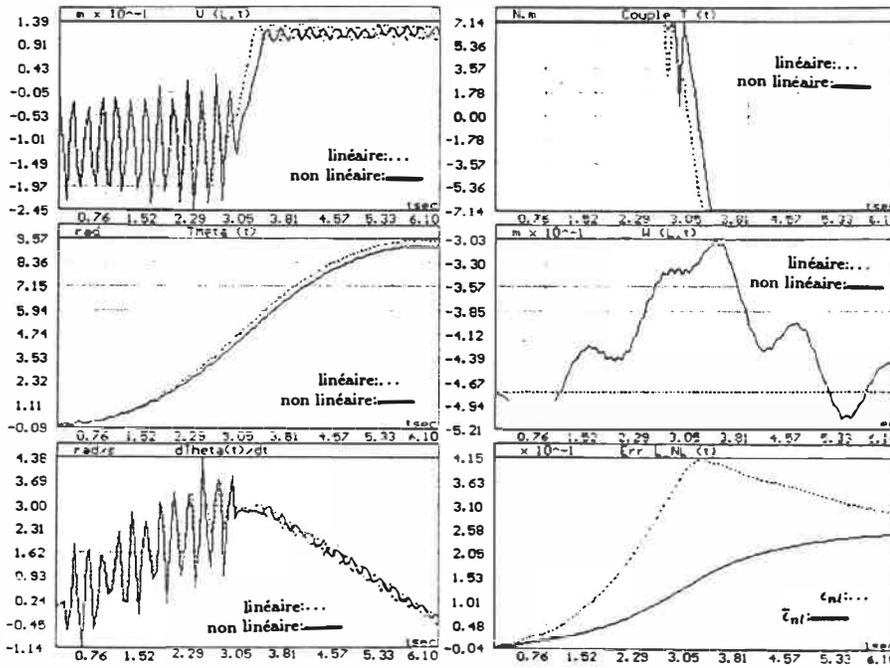


Figure 3.23: Variation importante de la charge à l'extrémité du bras AL22: 50%

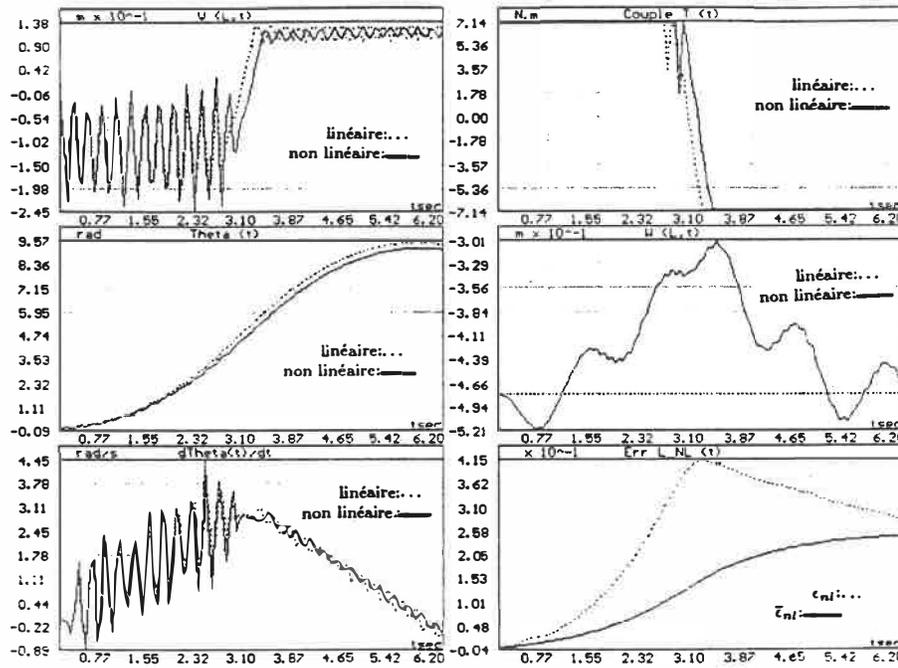


Figure 3.24: Variation de la géométrie de la charge

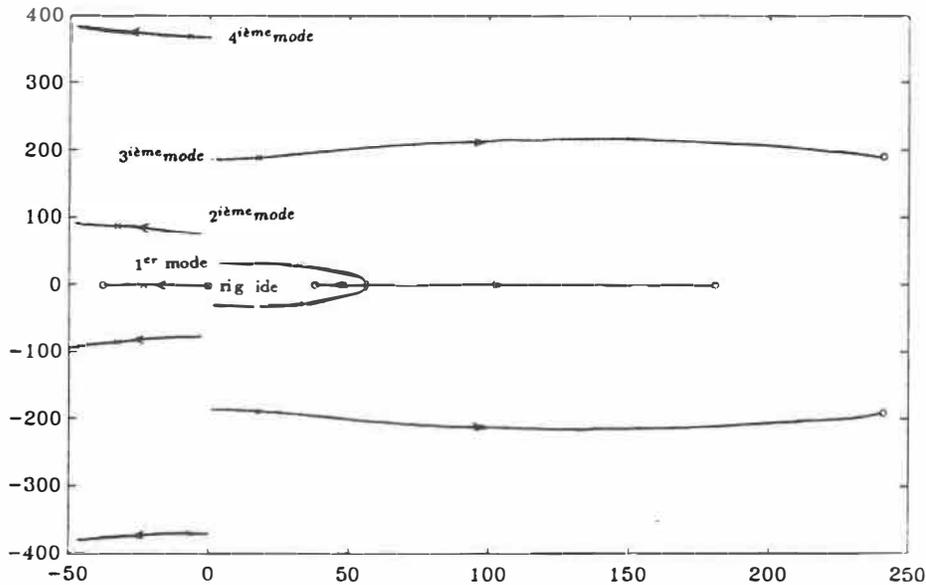


Figure 3.25: Lieu des racines en boucle fermée: commande et capteurs non-colocalisés

Ce dernier résultat met en évidence la limitation des performances que le contrôleur peut apporter au système en boucle fermée. Cette limitation est causée par le gain faible du régulateur.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a appliqué la commande proportionnelle dérivée au manipulateur à deux degrés de liberté. Les gains du contrôleur ont été calculés à partir du modèle linéaire en traçant le lieu de racines de la fonction caractéristique du système. Cette méthode a permis de positionner le zéro régulateur de façon à assurer un amortissement critique du mode rigide.

L'étude du lieu des racines tracé en fonction des gains a permis de conclure que:

- L'importance d'un mode flexible sur le comportement du bras est fonction de la position de son zéro par rapport à son pôle. Si ces derniers sont très rapprochés,

ils n'agissent pas au niveau du système.

- En considérant un bras spatial, l'importance de la déformation n'est pas forcément fonction de l'ordre des modes vibratoires: dans le cas étudié, c'est le deuxième mode vibratoire qui est dominant.
- Une grande inertie au niveau de la base limite les effets de la flexibilité. La déformation verticale est faible vue l'importance de l'inertie en translation au niveau de la base.

L'application de la commande proportionnelle dérivée calculée aux modèles linéaire et non linéaire a permis de conclure que d'une part, la commande PD avec actionneur et capteur colocalisés agit mieux au niveau du modèle non linéaire, ces performances sont dues à la présence des forces non linéaires et principalement la force centrifuge qui entraîne la rigidification du bras manipulateur, d'autre part, cette commande ne permet pas de contrôler l'extrémité qui est perturbé par la présence d'une déformation verticale lors d'un mouvement en rotation.

L'observation de l'extrémité a mis en évidence les limitations de la commande proportionnelle dérivée face à des perturbations externes ainsi qu'aux effets des couplages existants entre les différents modes vibratoires et ceux entre la vitesse angulaire et les modes de vibrations verticales.

Cette commande se limite à compenser les effets de la flexibilité au niveau de la base. Le besoin de mieux contrôler l'extrémité nous a ramené à choisir la position de l'extrémité du bras comme sortie. La fonction de transfert du système est alors caractérisée par la présence des zéros à parties réelles positives propres aux modes vibratoires d'ordre impair. Cette présence se caractérise par un lieu de racines de la fonction caractéristique ayant des branches dans le plan positif et indiquant ainsi une limitation des marges de gain et de phase du système.

Chapitre 4

Étude de la commande optimale quadratique

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, l'étude de la commande proportionnelle dérivée avec actionneur et capteur colocalisés au niveau du joint, a mis en évidence les limitations de celle-ci pour la commande de l'extrémité. En effet, ce contrôleur n'assure pas un bon suivi de trajectoire à l'extrémité subissant les effets des vibrations verticales.

Le choix du capteur à l'extrémité a entraîné l'apparition des zéros à parties réelles positives dans la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette présence se manifeste par une limitation du gain du contrôleur, les pôles étant piégés par les zéros dans le plan à droite de l'axe des imaginaires. Ceci nous amène à chercher une autre commande qui permet un meilleur contrôle de l'extrémité du bras.

Dans la littérature, le contrôleur le plus utilisé pour la commande des manipulateurs flexibles est le régulateur optimal quadratique. Celui-ci est souvent présenté sans spécifier les problèmes dus aux mesures et particulièrement celui de la phase non minimale.

Dans ce chapitre, l'implantation d'une commande optimale quadratique gaussienne (LQG) est discutée. Cette implantation paraît simple si on considère que les gains sont calculés à l'aide d'un logiciel de simulation (Matlab). Or, l'étude des performances du système en boucle fermée rend la conception plus difficile. À travers ce chapitre, on met en évidence l'influence des pondérations au niveau du régulateur sur le comportement des modes flexibles ainsi que l'influence des matrices de covariances du bruit sur le comportement de l'observateur et du système en boucle fermée. En faisant la conception de LQG, on essaye de mettre en relief l'influence des capteurs secondaires, considérés en plus du capteur de la position de l'extrémité, sur les performances du système en boucle fermée et surtout leur apport au niveau de la phase non minimale caractéristique de la fonction de transfert en boucle ouverte.

L'étude du LQG est faite en première partie en continu, on utilise dans les calculs le modèle linéaire simple introduit dans le deuxième chapitre. On s'est basé dans ces calculs sur le théorème de séparation [Bryson 79]. Deux étapes sont alors considérées:

1. Étude de la commande optimale quadratique en supposant la connaissance de tous les états du modèle;
- 2. étude d'un observateur à variance minimale.

Lors de l'étude de la commande optimale quadratique, on essaye de mettre en évidence l'influence des variables contrôlées sur le comportement du système en boucle fermée. On étudie principalement l'apport de ces variables au problème de la phase non minimale.

En concevant l'observateur, un ensemble de gains est calculé afin d'estimer les états inconnus du système à partir des mesures faites par un ou plusieurs capteurs. On discute le nombre des capteurs, leurs positions et l'influence de ces derniers sur les performances de l'observateur ainsi que sur celles de la boucle fermée. L'implantation

d'un observateur d'ordre réduit s'avère utile pour alléger les calculs.

La fin du chapitre est consacrée aux résultats des simulations de la commande LQG appliquée au modèle linéaire ainsi qu'au modèle non linéaire. On met en relief les performances de cette commande à contrôler un modèle non linéaire et sa robustesse face à des perturbations externes.

4.2 Étude du régulateur

La conception du régulateur est réalisée en utilisant un modèle en temps continu, de dimension fini et déterministe. Une version discrète est présentée à la fin de la section, elle met en relief le problème de contamination que peut entraîner une période d'échantillonnage non appropriée au modèle. Seuls les calculs du régulateur pour la commande en rotation sont détaillés. Les résultats concernant la commande en translation sont introduits au fur et à mesure.

le modèle pour le système en rotation étudié est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}\mathbf{x}(t) = \underline{\mathbf{A}}_{11} v\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{11}u \\ v\mathbf{z}(t) = v\underline{\mathbf{D}}_{11} v\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Les matrices $\underline{\mathbf{A}}_{11}$, \mathbf{B}_{11} et $v\underline{\mathbf{D}}_{11}$ ont été définies dans le chapitre 2. Le vecteur $v\mathbf{z}(t)$ présente les variables contrôlées telles qu'obtenues à partir des sorties définies dans le deuxième chapitre. On considère principalement la position absolue de l'extrémité du bras. Le choix d'autres variables contrôlées dépend de plusieurs critères entre autres le nombre des modes flexibles considéré lors de la modélisation. On choisit le vecteur de sorties $v\mathbf{z}(t)$ suivant :

$$v\mathbf{z}(t) = [L\theta(t) + v(L, t), \dot{\theta}(t), v(L, t), \dot{v}(L, t)] \quad (4.2)$$

Dans le cas d'un système en translation, le vecteur de sorties s'écrit

$$w\mathbf{z}(t) = [d(t) + w(L, t), \dot{d}(t), w(L, t), \dot{v}(L, t)] \quad (4.3)$$

La fonction de minimisation choisie est la suivante :

$$J = \int_0^{\infty} ({}^v\mathbf{z}^T {}^v\mathbf{R}_4 {}^v\mathbf{z} + \rho u^T \mathbf{I} u) dt \quad (4.4)$$

la matrice de pondération ${}^v\mathbf{R}_4$ est définie positive

ρ est la pondération sur la commande, valeur réelle positive.

Cette formule de minimisation est déduite à partir de la fonction coût général

$$J = \int_0^{\infty} ({}^v\mathbf{x}^T {}^v\mathbf{Q} {}^v\mathbf{x} + u^T {}^v\mathbf{R}_2 u) dt \quad (4.5)$$

avec la matrice \mathbf{Q} égale à $\mathbf{D}_{11}^T {}^v\mathbf{R}_4 \mathbf{D}_{11}$.

Ce choix de pondérer sur les sorties est justifié par le fait que l'on ne connaît pas la signification physique de tous les états du modèle. Le couple T et la force F appliqués à la base deviennent alors :

$$T(t) = -{}^v\mathbf{K}_r [{}^v\mathbf{x}(t) - {}^v\mathbf{x}_{réf}] \quad (4.6)$$

$$F(t) = -{}^w\mathbf{K}_r [{}^w\mathbf{x}(t) - {}^w\mathbf{x}_{réf} - {}^w\mathbf{x}_g] + F_g \quad (4.7)$$

${}^w\mathbf{x}_g$: déformation initiale due à la gravité.

F_g : force due à la gravité.

${}^v\mathbf{x}_{réf}, {}^w\mathbf{x}_{réf}$: positions désirées.

${}^v\mathbf{K}_r = {}^v\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{P}_1$ où \mathbf{P}_1 est la solution de l'équation de Riccati appropriée.

${}^w\mathbf{K}_r = {}^w\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{P}_2$ où \mathbf{P}_2 est la solution de l'équation de Riccati appropriée.

4.2.1 Choix des paramètres de la fonction de minimisation

À partir de la théorie de la commande optimale [Bryson 79], les pôles en boucle fermée sont définis par les valeurs propres de la matrice \mathbf{Z} (eq: 4.7)

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{B}_{11} {}^v\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}_{11} \\ -\mathbf{D}_{11}^T {}^v\mathbf{R}_4 \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{A}_{11}^T \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

En développant le calcul de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{Z})$, les pôles en boucle fermée sont solution de l'équation caractéristique suivante :

$$(-1)^n \phi(s) \phi(-s) \det[\mathbf{I} + \frac{1}{\rho} H^T(-s) \mathbf{R}_4 H(s)] = 0 \quad (4.9)$$

où n définit la dimension du vecteur d'état et

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}) \\ H(s) &= \mathbf{D}_{11}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} \mathbf{B}_{11} \end{aligned}$$

L'étude du lieu des pôles en boucle fermée, tracé en fonction de la pondération sur la commande permet de visualiser l'évolution de ces pôles et de les positionner en fonction des performances désirées. Le lieu des pôles en boucle fermée dépend des variables contrôlées, des pondérations sur la commande et les sortie, mais aussi, du nombre de modes flexibles simulés.

Choix du nombre des modes flexibles

Ce nombre présente une importance particulière puisqu'il caractérise l'existence ou non du problème de la phase non minimale dans la fonction de transfert en boucle ouverte lorsqu'on considère la position de l'extrémité comme variable contrôlée. Lors de l'étude de la déformation horizontale du bras *AL22*, on remarque la présence de zéros à parties réelles positives à partir du deuxième mode vibratoire.

Le nombre des zéros dans le plan positif est différent suivant que l'on considère le manipulateur terrestre ou le manipulateur spatial. Cette différence dépend des caractéristiques physiques des manipulateurs et non des équations de formes choisies.

Se limitant à un seul mode vibratoire, on peut remarquer qu'on néglige une caractéristique importante de la commande d'une structure flexible. Cette dernière caractéristique joue un rôle important dans la détermination des performances du système en boucle fermée.

Pour une étude concrète, on a choisi un modèle dont la fonction de transfert en boucle ouverte est à phase non-minimale, soit 4 modes vibratoires pour le mouvement en rotation.

En étudiant la déformation verticale, la phase non minimale se manifeste à partir du premier mode vibratoire pour les deux sortes de manipulateurs. Cette présence est caractéristique d'un retard entre l'application de la commande et la réponse de l'extrémité.

Influence des variables contrôlées

En considérant pour principale variable contrôlée la position de l'extrémité du bras flexible. Le lieu des racines en boucle fermée dépend de la nature de la fonction de transfert en boucle ouverte. Avec quatre modes vibratoires, le système en boucle ouverte du bras terrestre est à phase non minimale. L'étude du lieu des racines de la fonction caractéristique (fig. 4.1) montrent que les pôles du mode rigide sont attirés par le zéro à partie réelle positive ainsi que par l'image du zéro à partie réelle positive dans le plan négatif. Ce choix de variable contrôlée limite la bande passante du système en boucle fermée.

L'introduction d'une deuxième variable permet d'améliorer les performances de la boucle fermée. En effet, si on considère la vitesse angulaire comme deuxième sortie, les pôles du mode rigide se dirigent vers l'axe des imaginaires en faisant diminuer la valeur de ρ . Le zéro dû à l'introduction de la vitesse angulaire attire le pôle de l'un des modes vibratoires. Cette différence de comportement dépend essentiellement de la pondération sur la vitesse angulaire (fig. 4.2)

La considération d'autres sorties peut influencer le temps de réponse du système en boucle fermée. En effet, en plus de la vitesse angulaire, la mesure de l'effort à la

base permet d'améliorer le temps de réponse en permettant plus d'information sur la déformation subit par le bras. Le choix des performances de la réponse en boucle fermée, en particulier le temps de réponse et la déformation à l'extrémité, dépend de la pondération sur ces variables. Par exemple, la pondération sur la vitesse angulaire joue sur l'amortissement du système en boucle fermée; en augmentant celle-ci, on rend le système de plus en plus lent. D'où le choix d'introduire une pondération plus forte sur les positions.

D'autre part, la pondération sur la commande est limitée si on considère le modèle tel que le système est à phase non minimale en boucle ouverte. Cette dernière caractéristique limite la pondération sur la commande qui à partir d'une certaine valeur déstabilise le système en boucle fermée. D'après Kwakernaak [Kwakernaak 73], si \mathbf{x}_0 symbolise les conditions initiales du modèle, la transformée de Laplace de la variable contrôlée peut être exprimée sous la forme:

$$\mathbf{Z}(s) = H(s)u(s) + \underline{\mathbf{D}}_{11}(s\mathbf{I} - \underline{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (4.10)$$

$\mathbf{Z}(s)$ est égale à zéro pour la valeur:

$$u(s) = -H^{-1}(s)\underline{\mathbf{D}}_{11}(s\mathbf{I} - \underline{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (4.11)$$

D'après l'équation 4.11, on remarque que la commande ne peut avoir une évolution stable que si l'inverse de la fonction de transfert $H^{-1}(s)$ est stable, donc que $H(s)$ est à phase minimale. Pour une telle commande, on ne peut pas faire tendre la pondération vers zéro. Par exemple, lors de l'étude du manipulateur terrestre on limite ρ à 1×10^{-2} lorsque la fonction de transfert est à phase non minimale (fig. 4.2) alors qu'elle peut dépasser 1×10^{-3} pour une variable de contrôle à la base.

En faisant tendre ρ vers zéro, le bras flexible a plus de tendance à se déformer. Pour rester dans des limites raisonnables ($v(L, t) \leq 0.1L$), on a envisagé deux solutions, qu'on a appliqué en même temps :

1. Limiter la pondération sur la commande;
2. saturer la commande dans le cas où on risque de dépasser les limites.

D'après la figure 4.2, on remarque qu'on peut assurer une bande passante égale à 4.80hz pour le système en boucle fermée tout en assurant un amortissement critique ($\xi = 0.707$) pour le mode rigide ($\rho = 1/200$). La pondération sur les sorties est la suivante :

$${}^v\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 2.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

L'étude de la fonction de minimisation du mouvement en translation se base elle aussi sur l'expérience pratique du concepteur. Dans ce cas, l'effet des modes vibratoires est limité. On pondère moins sur les variables contrôlées ainsi que sur la commande. On a choisi ($\rho = 1 \times 10^{-5}$) et la matrice

$${}^w\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

L'étude du lieu des racines du manipulateur spatial est différente du fait de la dominance du deuxième mode vibratoire. Les (*) dans la figure 4.3 correspondent à une pondération $\rho = 1 \times 10^{-4}$ La pondération sur les sorties est choisie égale à

$${}^v\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces pondérations permettent une bande passante en boucle fermée égale à 0.41hz soit une fréquence supérieure à celle du premier mode vibratoire (tab:4.2) et un amortissement critique pour le mode rigide.

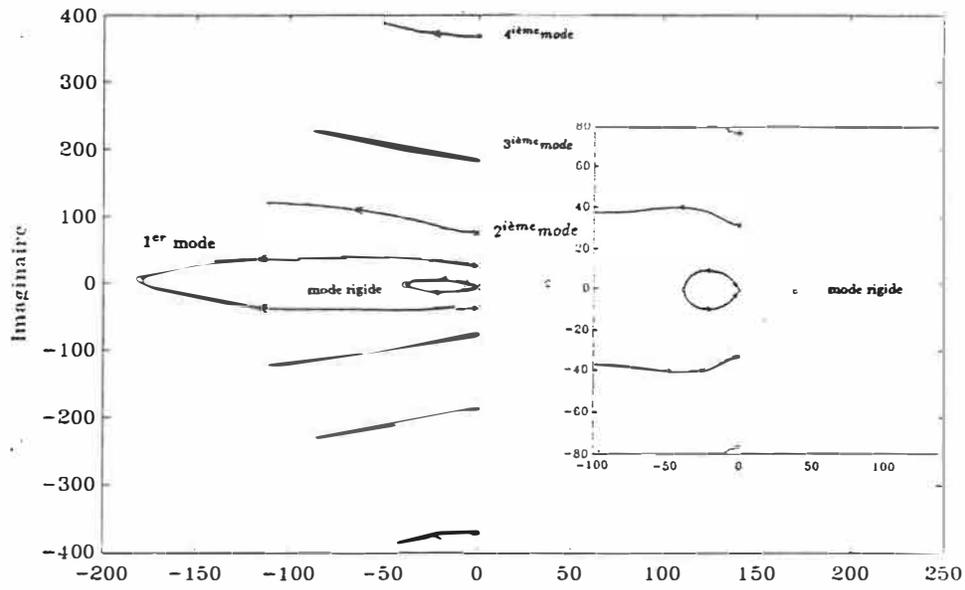


Figure 4.1: lieu des pôles en fonction de ρ : position de l'extrémité, bras AL22

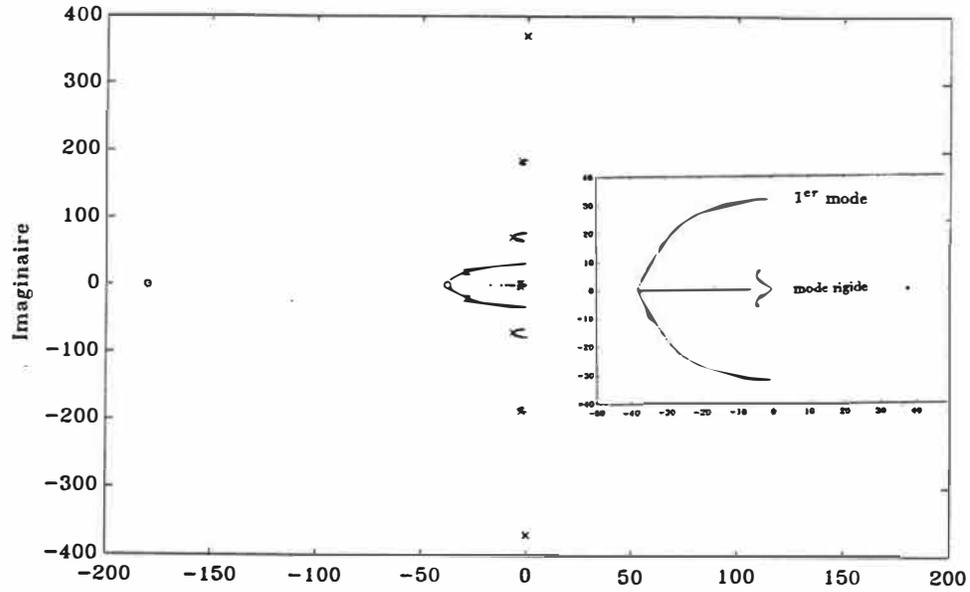


Figure 4.2: Lieu des pôles en fonction de ρ : position de l'extrémité + vitesse angulaire à la base, bras AL22

| déformation | déformation horizontale | | déformation verticale | |
|-----------------------|-------------------------|------|-----------------------|------|
| | AL22 | AL10 | AL22 | AL10 |
| 1 ^{er} mode | 5.06 | 0.38 | 1.45 | 0.08 |
| 2 ^{eme} mode | 12.19 | 1.21 | 9.92 | 0.54 |
| 3 ^{eme} mode | 29.80 | 2.50 | 28.97 | 1.52 |
| 4 ^{eme} mode | 58.85 | 4.17 | 58.22 | 2.99 |

Tableau 4.1: Fréquences propres des modes flexibles

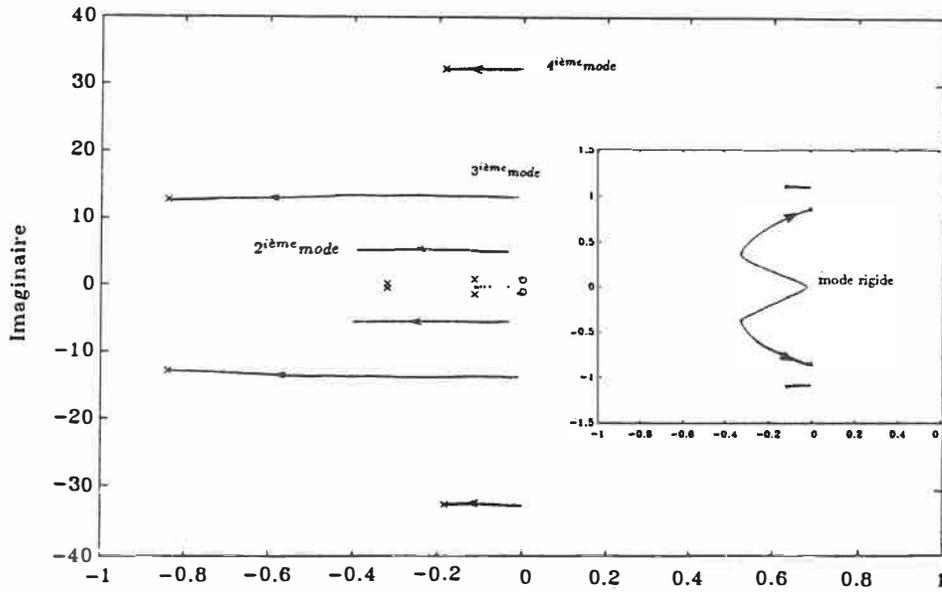


Figure 4.3: Lieu des racines en fonction de ρ : position à l'extrémité, bras AL10

Les pondérations suivantes sont utilisées lors de la commande du bras spatial en mouvement de translation $\rho = 1 \times 10^{-5}$ et

$${}^w R_4 = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Étude de l'effet de la phase non minimale sur l'implantation du régulateur

À cause de la présence des zéros à parties réelles positives dans la fonction de transfert en boucle ouverte, on a un problème de stabilité en boucle fermée. Théoriquement, l'existence des zéros à parties réelles positives limite la vitesse de réponse du système global.

À première vue, on peut dire que la phase non minimale n'intervient pas dans l'étude d'un régulateur optimal surtout si l'on considère que la commande est faite à partir des états du système et que la sortie n'a pas d'influence sur le comportement du régulateur.

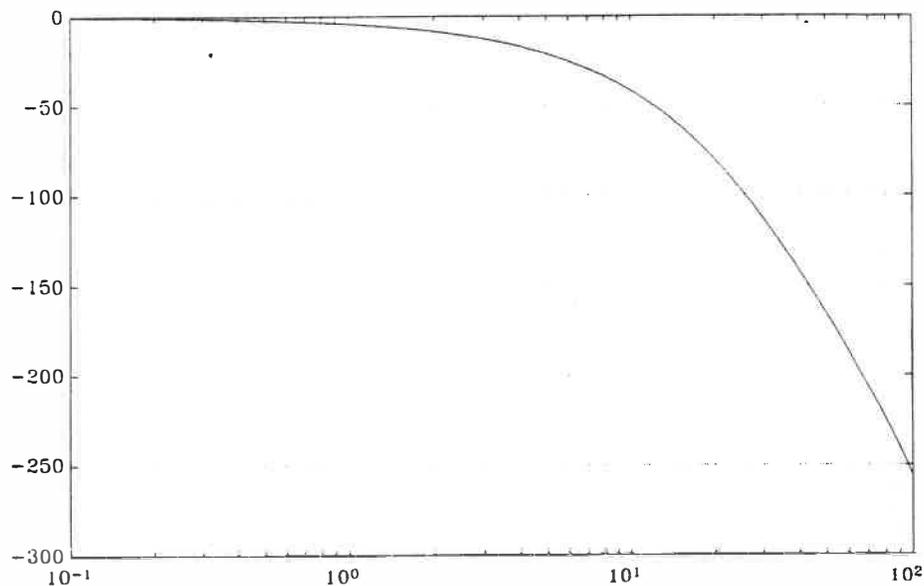
L'étude du lieu des racines en fonction de la pondération ρ sur la commande ainsi que l'étude du diagramme de Bode permettent de mettre en évidence la présence de ce phénomène. On considère dans cette partie que la seule variable contrôlée est la position absolue de l'extrémité. En faisant tendre la pondération sur la commande ρ vers zéro, on n'arrive plus à contrôler l'extrémité du bras. La sortie présente un déphasage par rapport au couple appliqué. Celui-ci augmente en faisant diminuer ρ . L'étude de la marge de phase permet d'évaluer la valeur de la pondération à partir de laquelle on a un déphasage entre l'entrée et la sortie. Par exemple, la fonction de transfert du bras terrestre, lorsqu'on considère quatre modes vibratoires, peut s'écrire sous la forme

$$H(s) = A(s)G(s) \quad (4.12)$$

avec:

$G(s)$ fonction de transfert à phase minimale.

$A(s)$ est caractéristique d'un filtre passe tout (déphaseur pur). Ses zéros sont les zéros

Figure 4.4: Diagramme de phase de la fonction $A(s)$

caractéristiques de la phase non minimale.

$$A(s) = \frac{(-s + 37.86)(-s + 179.97)(-s + 240.84 \pm j191.16)}{(s + 37.86)(s + 179.97)(s + 240.84 \pm j191.16)} \quad (4.13)$$

La phase de la fonction $A(s)$ varie en fonction de la fréquence et introduit un déphasage négatif au niveau de celle du système. D'après la figure 4.4 et qui présente la phase de la fonction $A(s)$, on remarque qu'à partir d'une certaine fréquence, cette dernière est inférieure à -90° , l'entrée et la sortie sont alors déphasées ce qui exprime la limitation principale de la commande dans le cas de phase non minimale.

Les limitations de cette pondération pour le manipulateur terrestre et le manipulateur spatial sont, respectivement, $\rho = 1 \times 10^{-3}$ et $\rho = 1 \times 10^{-5}$.

Pratiquement, la limitation qu'on observe dans le gain du contrôleur trouve son explication en étudiant le lieu des pôles en boucle fermée (fig. 4.1). En effet, si on trace cet lieu en fonction de la pondération sur la commande, on remarque que pour une pondération qui tend vers zéro, les pôles de la boucle fermée se dirigent vers les zéros de la boucle ouverte s'ils sont à parties réelles négatives ou bien vers les

images des zéros dans le plan négatif si ces derniers sont à parties réelles positives. Ces derniers pôles ne sont pas compensés. Les pôles restant et qui correspondent à la différence entre le nombre des pôles et des zéros, se dirigent vers l'infini. La position des pôles en boucle fermée dépend essentiellement de la pondération des variables contrôlées. Une des conséquences principales de ce résultat est la limitation de la vitesse du régime transitoire.

Théoriquement, l'effet de ces images dans le plan négatif dépend, essentiellement de leurs positions par rapport à l'axe des imaginaires. Leur influence est limitée si elles sont bien éloignées de ce dernier. Le problème de la phase non minimale ne se manifeste pas au niveau de la sortie en boucle fermée, il est plutôt camouflé au niveau de la commande. Cette dernière diverge vers l'infini pour assurer la sortie convergente du modèle.

4.2.3 Version discrète du régulateur

L'analyse du comportement du bras flexible à partir d'un modèle échantillonné exige quelques précautions. Dans ce cas de système, on doit tenir compte de l'effet de la période d'échantillonnage sur les différents modes vibratoires. Le choix de cette dernière dépend des fréquences des modes vibratoires ainsi que de leur spectre de puissance.

Lors de la conception d'un système de réglage échantillonné, la période d'échantillonnage n'est pas connue a priori et constitue un des paramètres à déterminer. Une analyse du comportement dynamique du système à régler et l'influence de l'échantillonnage sur ce comportement permet de choisir correctement cette période.

Pour étudier ce comportement, on a considéré la réponse du système à des conditions initiales non nulles. Celles-ci étant fixées, on observe le comportement du système suivant différentes fréquences d'échantillonnage et pour 4 modes vibratoires.

| Modes flexibles | Fréquence f en hz |
|-----------------------|-----------------------|
| 2 ^{ème} mode | 2.19 |
| 3 ^{ème} mode | 0.20 |
| 4 ^{ème} mode | 1.15 |

Tableau 4.2: Fréquences parasites des modes flexibles

La figure 4.5 présente la densité spectrale du signal de sortie pour une période d'échantillonnage égale à 10 hertz soit deux fois la fréquence du premier mode vibratoire du bras *AL22*. On remarque la présence des fréquences parasites dues à un recouvrement fréquentiel.

Théoriquement, ces fréquences parasites sont calculées à partir de la relation:

$$f = |(f_m + \frac{f_e}{2}) \bmod(f_e) - \frac{f_e}{2}| \quad (4.14)$$

où f_m définit la fréquence de chacun des modes vibratoires succédants au premier mode et f_e définit la fréquence d'échantillonnage.

Dans le cas du bras terrestre, on obtient les fréquences présentées dans le tableau 4.2 et qui correspondent aux fréquences obtenues par simulation.

On peut alors conclure que le choix d'une fréquence deux fois la fréquence du premier mode entraîne un problème de recouvrement et donne un modèle échantillonné qui ne reflète pas la dynamique du système continu.

Une deuxième approche a été considérée pour le choix de la période d'échantillonnage. D'après Buhler [Buhler 83], lors de l'échantillonnage d'un système continu, on doit veiller à ce que le comportement entre deux instants d'échantillonnage soit assez bien représenté par les valeurs prises à ces instants. Il montre que l'allure de la réponse impulsionnelle est représentée de manière convenable par les valeurs aux instants d'échantillonnage lorsque la partie imaginaire des pôles complexes conjugués du premier mode vibratoire est égale ou inférieure à $\frac{\pi}{4T_e}$ avec T_e la période d'échan-

tillonnage. De cette condition, on obtient une première relation pour le choix de la période de discrétisation. Au premier mode vibratoire du bras terrestre correspond une partie imaginaire $\omega_i = 31.8$ soit une période d'échantillonnage égale à 0.02.

La deuxième étape consiste à augmenter le nombre de modes vibratoires dans le modèle et à interpréter le comportement de la sortie pour cette nouvelle variation. L'augmentation est faite par *increment* de un. On constate que cette variation influence peu la réponse discrète: celle-ci ne présente pas d'effet de repliement. En effet, si on analyse le spectre de densité de puissance du modèle on remarque (fig. 4.6) que le premier mode vibratoire est dominant. Les autres modes vibratoires interviennent comme des perturbations au niveau du modèle et n'entraînent donc pas un recouvrement spectral: leur spectre de densité est pratiquement nul par rapport à la densité de puissance du premier mode.

L'étude du système en boucle ouverte nous a permis de choisir une fréquence d'échantillonnage qui ne dépend que du premier mode. Le deuxième critère dans le choix de cette fréquence repose sur le comportement du système contrôlé et échantillonné.

La qualité du contrôle diminue à cause de l'échantillonnage. Un système continu donne toujours des meilleures valeurs pour la qualité de contrôle qu'un système de réglage échantillonné. Dans ce contexte, on a intérêt à choisir la période d'échantillonnage aussi petite que possible.

Avec la fréquence choisie précédemment, on a le modèle d'état suivant:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (4.15)$$

tel que

$\Phi = e^{\mathbf{A}_{11} T_e}$, T_e définit la période d'échantillonnage.

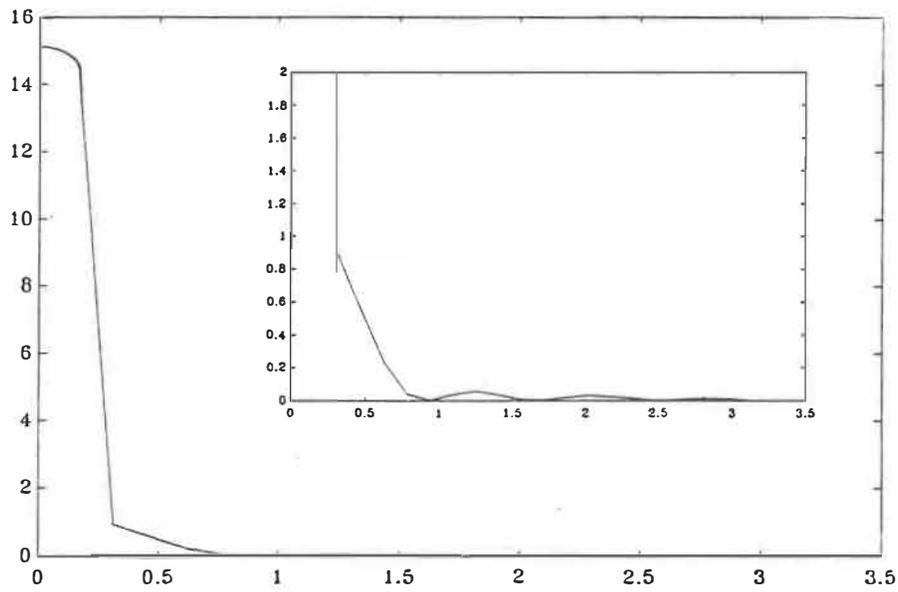


Figure 4.5: Densité spectrale de puissance pour $f_e = 10\text{hz}$

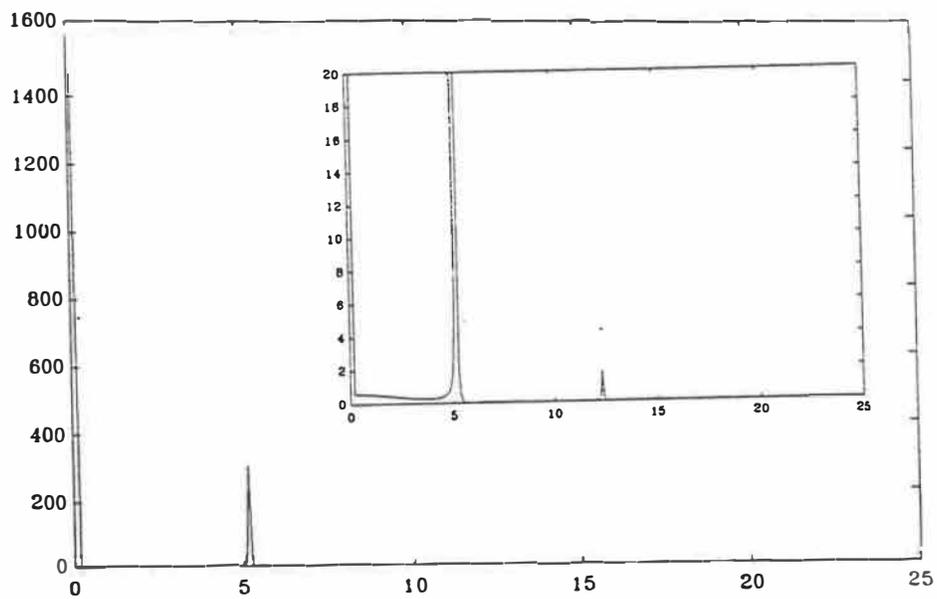


Figure 4.6: Densité spectrale de puissance $f_e = 50\text{hz}$

$\Gamma = \int_0^{T_e} e^{\underline{A}_{11}t} \underline{B}_{11} dt$ La fonction de minimisation discrète est définie par:

$$J^d = \sum_{k=0}^{\infty} [{}^v\mathbf{x}^T(k) \underline{\mathbf{Q}}_d {}^v\mathbf{x}(k) + u^T(k) \underline{\mathbf{B}} u(k)] \quad (4.16)$$

La matrice de pondération $\underline{\mathbf{Q}}_d$ est fonction de la matrice de pondération en continue ainsi que de la période d'échantillonnage.

$$\underline{\mathbf{Q}}_d = \int_0^{T_e} \Phi^T(t) {}^v\underline{\mathbf{Q}} \Phi(t) dt \quad (4.17)$$

$\underline{\mathbf{B}}$ défini la pondération sur la commande dans le cas discret

Le modèle échantillonné ainsi obtenu preserve les mêmes propriétés en boucle fermée que celles obtenues à partir du modèle continu.

4.3 Étude de l'observateur

4.3.1 Introduction

En étudiant la commande LQG, on a supposé dans une approche déterministe que les états du modèle sont mesurables et que les capteurs sont parfaits. Ces deux suppositions ont permis de simplifier la conception du régulateur. Or, même si on suppose que tous les états du modèle sont mesurables, on ne peut pas annuler l'incertitude sur les mesures dues aux capteurs.

De plus, même si cette approche déterministe admet la présence des erreurs dues à la modélisation, elle ne considère pas explicitement les perturbations dues aux actionneurs et à d'autres facteurs externes.

En développant les calculs de l'observateur, on a considéré le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} {}^v\dot{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{A}}_{11} {}^v\mathbf{x}(t) + \omega_1 \\ {}^v\mathbf{y} = \underline{\mathbf{C}} {}^v\mathbf{x}(t) + \omega_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

ω_1 et ω_2 présentent deux signaux aléatoires de covariance, respectivement, \underline{Q} et \underline{R} . On considère que ces signaux sont blancs et non colorés. Le bruit ω_1 présente les perturbations au niveau du modèle. ω_2 présente les erreurs dues aux capteurs.

Le vecteur \underline{y} définit les variables observées. Sa dimension ainsi que celle de la matrice \underline{C} dépendent du nombre de capteurs considéré dans l'étude.

Les matrices \underline{Q} et \underline{R} sont présentées comme des paramètres de calculs et non comme des paramètres estimés. \underline{R} est définie positive et diagonale. Sa dimension ainsi que son module dépendent du nombre de capteurs et de leurs positions.

Dans cette section, trois estimateurs sont considérés. Cette partition dépend du nombre ainsi que de la nature des variables observées. Au premier observateur, un seul capteur est choisi au niveau de l'extrémité du bras. Le deuxième observateur se caractérise par deux sorties mesurées: l'une au niveau de l'extrémité (capteur de position); l'autre au niveau de la base (mesure la vitesse angulaire).

Le troisième estimateur considère comme troisième sortie une jauge de contrainte placée à la base de la membrure. Elle permet de mesurer l'effort à la base. La matrice \underline{R} est alors définie par:

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_{yt} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\dot{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & R_{\sigma_1} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

L'étude des trois estimateurs met en évidence l'influence du nombre de capteurs et de leurs positions sur la robustesse de l'observateur. On analyse le lien qui existe entre les matrices de covariances et le lieu des pôles de l'estimateur, ainsi que celui entre ces matrices et la précision de l'observateur.

Dans une dernière partie, on introduit une version discrète de l'estimateur. On étudie le choix de la période d'échantillonnage et l'influence de cette dernière sur la stabilité et la robustesse de l'observateur.

4.3.2 Analyse de l'observateur

L'observateur conçu est (équivalent à) un filtre de Kalman statique ¹. Le calcul du filtre LQG consiste à :

- a) Identifier le bruit à l'entrée.
- b) Choisir la covariance \underline{Q} et des rapports $k_1 = R_{yt}/R_{\dot{\theta}}$, $k_2 = R_{yt}/R_{\sigma}$.

Le choix de ces valeurs se reposent sur plusieurs critères dont la rapidité de l'observateur et la robustesse du système de commande.

Le choix des paramètres des matrices de covariances est fait en étudiant l'évolution du lieu des pôles tracé en fonction de l'un des paramètres. Les pôles de l'observateur à variance minimale sont solutions de l'équation caractéristique ² [Bryson 79]

$$\det[\underline{R} + \underline{Z}(s)\underline{Q}\underline{Z}^T(-s)] = 0 \quad (4.20)$$

$\underline{Z}(s)$ est un vecteur colonne, ses éléments sont les fonctions de transferts en boucle ouverte des trois capteurs.

$$\underline{Z}^T(s) = \left[y_t(s)/T(s) \quad \dot{\theta}(s)/T(s) \quad \sigma(s)/T(s) \right] \quad (4.21)$$

Avec le choix pour les capteurs, on fait l'étude des lieux de racines en fonction de \underline{Q}/R_{yt} , $k_1 = R_{yt}/R_{\dot{\theta}}$ et $k_2 = R_{yt}/R_{\sigma}$.

Les résultats sont les suivants

En faisant augmenter la valeur du rapport \underline{Q}/R_{yt} , les pôles du premier estimateur se dirigent vers les zéros stables de la fonction de transfert en boucle ouverte de la position de l'extrémité ainsi que vers les images des zéros instables dans le plan négatif. Les pôles restant se dirigent vers l'infini. Le paire des pôles le plus lent dépend de la nature du manipulateur. Les pôles de l'estimateur pour le manipulateur terrestre

¹en anglais: steady state Kalman filter

²en anglais: the root square characteristic equation

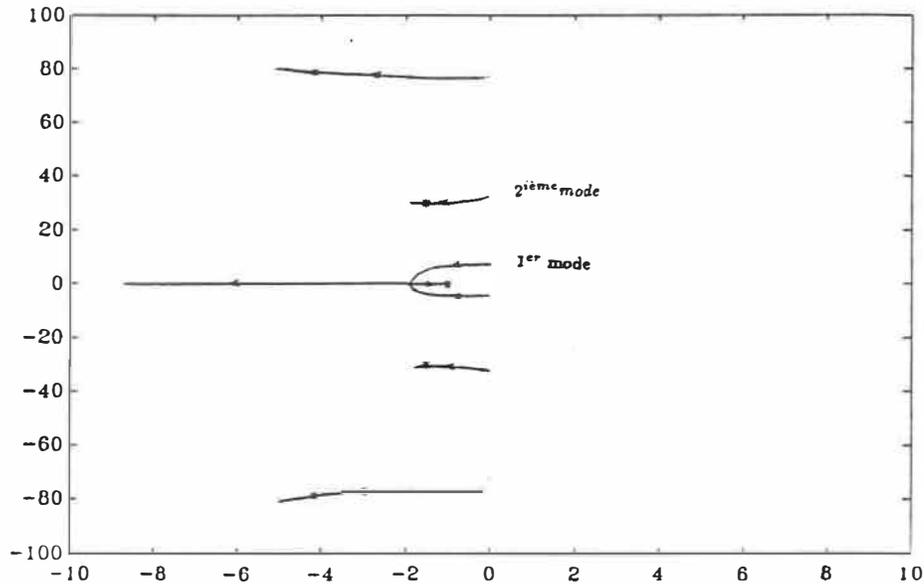


Figure 4.7: Lieu des racines de l'observateur: une seule entrée

et le manipulateur spatial sont présentés dans l'annexe B.

L'amplification du bruit au niveau de l'entrée entraîne l'augmentation de la valeur de la matrice de covariance de l'erreur d'où un gain plus important pour le filtre. Qualitativement, ceci correspond à porter plus d'attention aux dernières mesures et de mettre plus de pondération sur les mesures antérieures. En accentuant le bruit à l'entrée, on augmente la bande passante du filtre. Cette variation dans la bande passante a une interprétation directe si on considère qu'une amplification du bruit à l'entrée est équivalente à ce que le bruit blanc ait plus de puissance et cause donc plus d'excitation aux états actuels du modèle à observer. Or, une large bande passante fait passer plus de perturbations causées par les capteurs. Ainsi, un choix des matrices de covariances revient au calcul de la bande passante du filtre qui doit obéir à un certain compromis.

D'après la figure 4.8, les pôles du deuxième observateur, se trouvent dans le plan négatif du lieu des racines tracé en fonction de la variable k_1 . Les pôles se déplacent

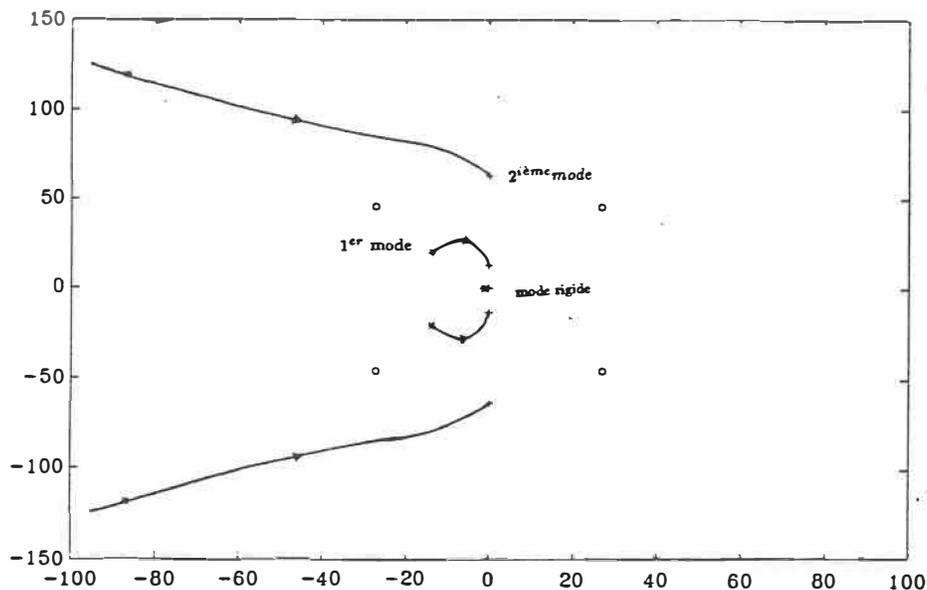


Figure 4.8: Lieu des racines de l'observateur: deux entrées

entre les zéros de la fonction de transfert de la position de l'extrémité et les zéros de la fonction de transfert de la vitesse angulaire.

L'importance de la vitesse angulaire, dans l'étude de la boucle fermée est déterminée par le rapport $R_{y\dot{\theta}}/R_{\dot{\theta}}$. En faisant tendre ce rapport vers un, on tient compte de plus en plus de la mesure provenant de la base.

Pour la valeur choisie de k_1 , on trace le lieu des racines en fonction de la variable k_2 . Les pôles se déplacent de leurs positions pour le deuxième estimateur vers les zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'effort à la base. Cette variation caractérise la perte de l'information à partir de l'extrémité au dépend de l'information à la base. La variable k_2 définit l'apport de chacun des capteurs à l'estimateur. On fixe $k_2 = 2000$ pour le manipulateur terrestre (fig. 4.9) et $k_2 = 1000$ pour le manipulateur spatial. Les pôles du troisième estimateur sont présentés dans l'annexe B.

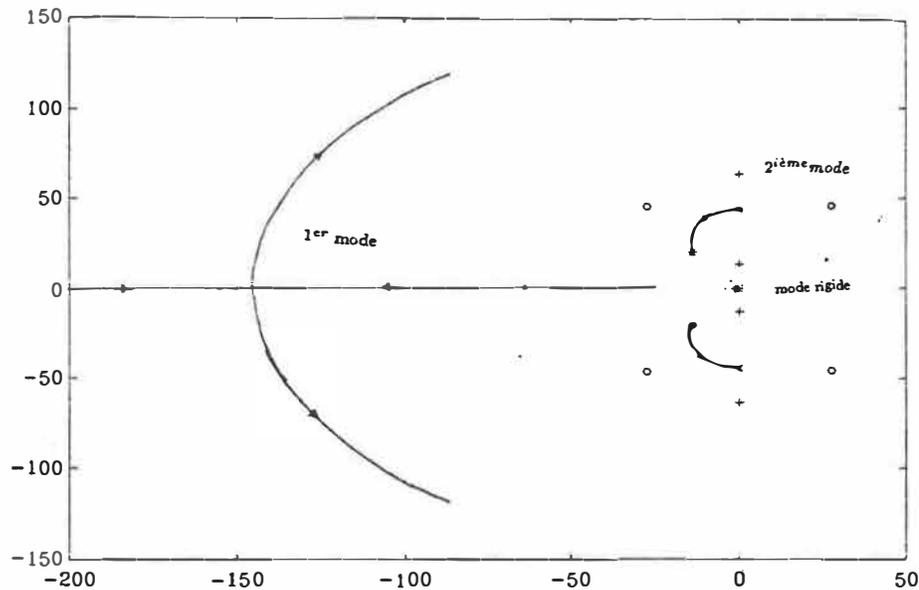


Figure 4.9: Lieu des racines de l'observateur: trois entrées

4.3.3 Observateur discret

Pour l'implémentation pratique de l'observateur, on a recours à une version discrète qui est présentée dans cette section. On choisit la même période d'échantillonnage que lors de l'étude du régulateur. Le modèle discret peut alors être écrit:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \underline{\Phi} \mathbf{x}(k) + \omega_{1d}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underline{D}_{11} \mathbf{x}(k) + \omega_{2d}(k) \end{cases} \quad (4.22)$$

$\underline{\Phi}$ est défini par $e^{\underline{A}_{11}T_e}$. $\omega_{1d}(k)$ est une séquence aléatoire de covariance $\underline{Q}_d(k)$. Celle-ci est discrétisée à partir de la matrice de covariance \underline{Q} tel que:

$$\underline{Q}_d = \int_0^{T_e} e^{\underline{A}_{11}t} \underline{Q} e^{\underline{A}_{11}^T t} dt \quad (4.23)$$

$\omega_{2d}(k)$ définie une séquence aléatoire à la sortie, \underline{R}_d définie sa matrice de covariance.

L'étude du lieu des racines, dans le plan z , du système en boucle fermée permet de choisir les pondérations sur les variables de contrôle. Ce choix se caractérise par des valeurs plus élevées pour les éléments de \underline{R}_d que dans le cas du système continu. Mais, il n'empêche qu'il reste un choix arbitraire. On choisit les valeurs de \underline{R}_d tel

qu'elles respectent les caractéristiques d'un filtre de Kalman qui se caractérise par des mesures relativement précises. \underline{R}_d est égale à \underline{R}/T_e , \underline{R} définit la pondération en continu.

Les conditions initiales n'influencent pas le comportement du filtre si l'on prône pour un bon choix des pondérations. En effet, d'après les simulations faites, on peut conclure que les facteurs qui agissent sur la stabilité de l'observateur discret sont le nombre de modes vibratoires et les pondérations.

4.4 Analyse de l'erreur

En faisant l'étude du filtre de Kalman, deux questions se posent au niveau de la conception:

- La nature des erreurs que l'on peut rencontrer et leur effet sur les performances du filtre.
- Comment minimiser la charge des calculs.

Évidemment, les deux questions ne sont pas indépendantes. Par exemple, pour une procédure qui utilise un nombre réduit de calculs ces performances aussi sont faibles. Les deux erreurs les plus considérées sont ceux où on considère des matrices de modélisation incorrectes ou bien des matrices de covariances du bruit mal définies. D'autres erreurs peuvent être envisagées mais on ne tient pas compte de leur présence dans une première étape. On cite entre autres les erreurs dues aux nonlinearités dans le modèle réelle, l'effet des bruits colorés, etc.

Dans la partie qui suit, on fait l'étude analytique des effets de ces erreurs sur l'observateur et leur conséquence principale qui est la divergence.

L'analyse de l'erreur est faite à partir des simulations effectués au niveau du filtre. On a supposé que les erreurs qui interviennent sont au niveau du modèle: effet des modes vibratoires qui n'étaient pas considérés lors du choix de la période d'échantillonnage pour le modèle discret ainsi que le choix des matrices de covariances du bruit. On montre dans une première étape le lien direct qui existe entre les deux erreurs.

Pour cela, on considère une période d'échantillonnage qui assure le non recouvrement avec un seul mode vibratoire soit 0.1hz . Le modèle considéré dans cette simulation est d'ordre six soit le mode rigide et deux modes flexibles.

En première partie, on considère les mêmes pondérations que celles obtenues pour le modèle d'ordre quatre, le mode rigide et un seul mode flexible. Les pôles de l'observateur sont alors en dehors du cercle unité et on obtient une réponse en boucle fermée divergente. En augmentant la valeur de la matrice de covariance du bruit au niveau de l'entrée de 1×10^2 à 1×10^6 , on arrive à placer les pôles de l'observateur à l'intérieur du cercle unité de façon à assurer la stabilité du système. Le deuxième mode flexible agit alors en élément perturbateur. L'augmentation de Q_d amplifie les marges de gain et de phase de l'estimateur et permet de considérer le mode vibratoire comme une perturbation interne au niveau du modèle. Les figures (4.10, 4.11) présentent la réponse du système en boucle fermée pour les deux cas discuté dans le paragraphe précédent.

Ce dernier résultat met en évidence la sensibilité de l'observateur au problème de contamination. Le choix de la fréquence d'échantillonnage ne dépend pas seulement de l'importance spectrale des modes vibratoires mais il dépend aussi de la robustesse de l'observateur face à l'excitation de ces modes.

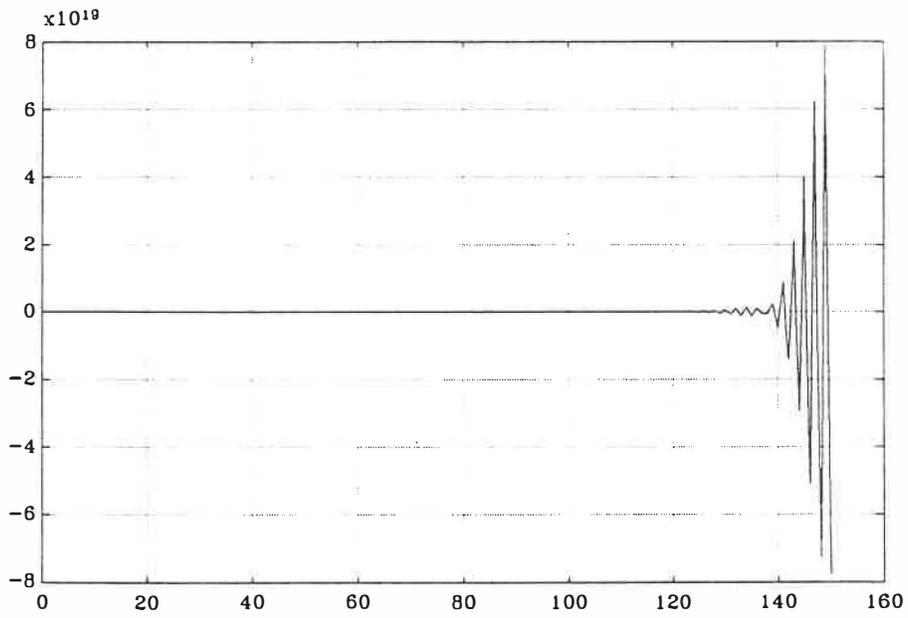


Figure 4.10: Réponse en boucle fermée: divergence

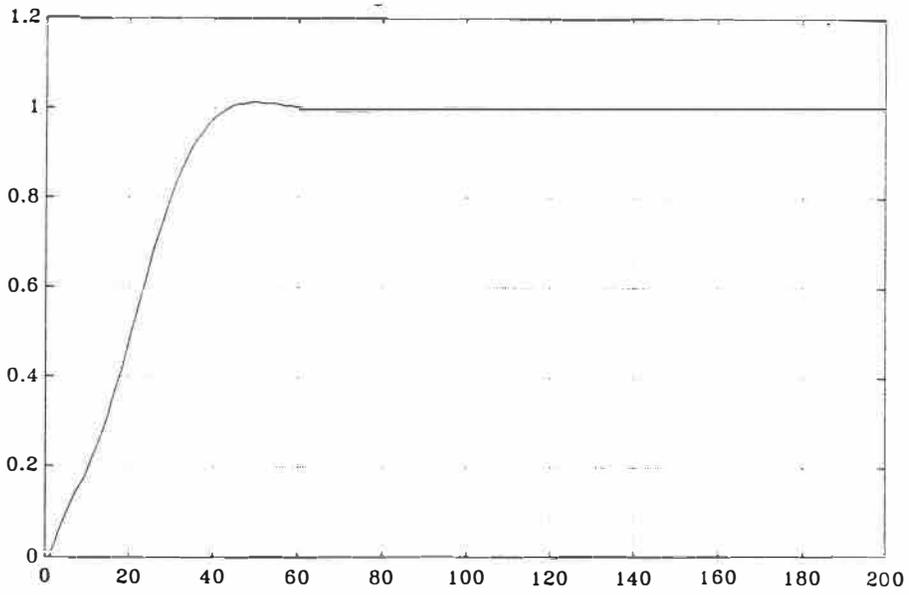


Figure 4.11: Réponse en boucle fermée: convergence

Théoriquement, la divergence au niveau du filtre découle du fait que la covariance de l'erreur du modèle reste limitée alors que la matrice de performance de l'erreur ³ définie par:

$$\sum_{k/k-1}^p = E[\mathbf{x}_k^a - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^d][\mathbf{x}_k^a - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^d]^T \quad (4.24)$$

(a désigne l'état actuel et d caractérise l'état de référence) devient assez grande par rapport à la limite supérieure de l'erreur de performance ⁴ ou bien, elle tend carrément vers l'infini. La divergence est généralement associée avec l'un des cas suivants :

- a) Bruit à l'entrée faible ou nulle.
- b) Le modèle à contrôler n'est pas asymptotiquement stable.

Une matrice de covariance du bruit à l'entrée assez grande et un modèle asymptotiquement stable assurent la convergence de l'observateur à condition de choisir une période d'échantillonnage qui ne provoque pas l'excitation d'un des modes vibratoires considérés.

4.5 Observateur d'ordre réduit

En utilisant l'observateur d'ordre complet, le modèle en boucle fermée voit sa dimension doubler. Cette dernière atteint la valeur de quarante si on considère que le modèle en boucle ouverte est quatre modes vibratoires.

Kwakernaak et Sivan proposent un observateur d'ordre réduit pour limiter les calculs. L'ordre de l'observateur est égale à la différence entre la dimension du vecteur d'état m_v et le nombre de sorties s_v .

³En anglais: error performance matrix

⁴en anglais: the design performance

Étant donné le modèle suivant:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{A}}_{11} \mathbf{x}(t) + \underline{\mathbf{B}}_{11} T(t) + \omega_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \underline{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t) + \omega_2(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

L'équation $\mathbf{y}(t) = \underline{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t)$ permet de calculer s_v états du système. On a alors à reconstruire $m_v - s_v$ combinaisons linéaires des états.

En supposant que la matrice $\underline{\mathbf{C}}$ est de plein rang, le vecteur $\mathbf{p}(t)$ de dimension $l_v = m_v - s_v$ définit l'ensemble des sorties fictives tel que $\mathbf{y}(t) = \underline{\mathbf{C}}' \mathbf{p}(t)$. La matrice $\underline{\mathbf{C}}'$ est telle que

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{C}}' \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

soit non singulière.

Le vecteur d'état peut alors s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \underline{\mathbf{L}}_1 \mathbf{y}(t) + \underline{\mathbf{L}}_2 \mathbf{p}(t) \quad (4.27)$$

où

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{L}}_1 & \underline{\mathbf{L}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{C}}' \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.28)$$

Il suffit donc de reconstruire le vecteur $\mathbf{p}(t)$. Les équations du modèle à observer sont alors:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2 \mathbf{p}(t) + \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_1 \mathbf{y}(t) + \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{B}}_{11} T(t) + \underline{\mathbf{C}}' \omega_1(t) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2 \mathbf{p}(t) + \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_1 \mathbf{y}(t) + \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{11} T(t) + \underline{\mathbf{C}} \omega_1(t) + \dot{\omega}_2(t) \quad (4.30)$$

Afin de ramener ces équations sous la forme habituelle d'un modèle d'état, une nouvelle variable \mathbf{q} est définie telle que

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) - \underline{\mathbf{K}}_e \mathbf{y}(t) \quad (4.31)$$

L'équation de l'observateur d'ordre réduit est alors

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) = & [\underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2 - \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2] \mathbf{q}(t) \\ & [\underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2 \underline{\mathbf{K}}_e + \underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_1 - \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_1 - \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{L}}_2 \underline{\mathbf{K}}_e] \mathbf{y}(t) \\ & + [\underline{\mathbf{C}}' \underline{\mathbf{B}}_{11} - \underline{\mathbf{K}}_e \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{B}}_{11}] T(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

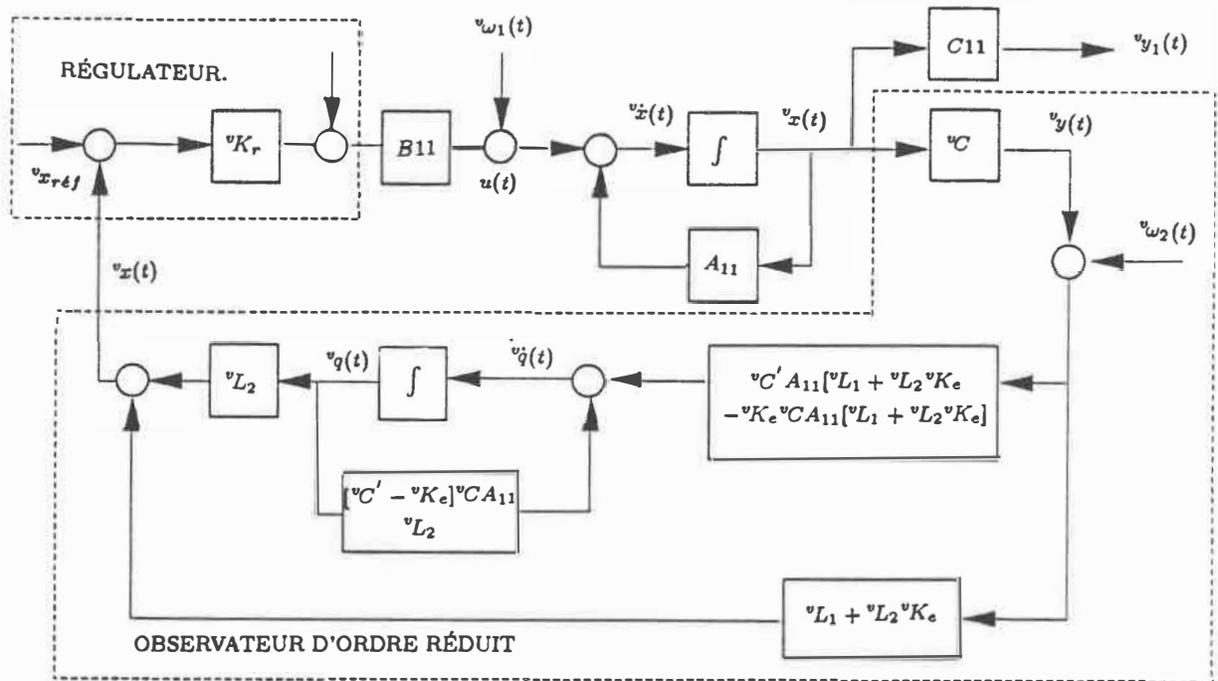


Figure 4.12: Implantation régulateur observateur d'ordre réduit

Le vecteur d'état reconstruit est alors égal à

$$\hat{x}(t) = vL_2 vq(t) + (vL_1 + vL_2 vK_e)y(t) \quad (4.33)$$

L'ensemble régulateur observateur d'ordre réduit est illustré à la figure 4.12. Une étude comparative des simulations faites à partir des deux implantations observateur d'ordre complet et observateur d'ordre réduit montre que cette réduction n'influence pas le système en boucle fermée.

4.6 Analyse des performances du système régulateur observateur

L'ensemble régulateur observateur est alors considéré comme un compensateur classique dont la fonction de transfert est la suivante:

$$u_{opt}(s) = -{}^v\mathbf{K}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{K}_r + \mathbf{K}_e\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{Z}^T(s) \quad (4.34)$$

\mathbf{Z}^T est le vecteur défini par l'équation 4.21.

D'après la section précédente, on obtient trois systèmes différents en boucle fermée pour le même régulateur mais pour différents estimateurs. Le tableau 4.3 résume les paramètres de calcul choisis pour ces trois observateurs. L'objectif de cette section est de comparer les performances des trois systèmes en boucle fermée en se basant sur des techniques utilisées dans le cas des commandes classiques [Bryson 79]. Cette étude est faite à partir du lieu des racines en fonction d'un paramètre k qui définit un facteur multiplicatif de la commande optimale. On a alors

$$u(s) = ku_{opt}(s) \quad (4.35)$$

On note que les pôles de cette fonction de transfert ne sont ni les pôles du régulateur ni ceux de l'estimateur.

L'étude est faite à l'aide de la méthode de fermetures successives des boucles présentée dans l'annexe C.

4.6.1 Performances du compensateur à l'extrémité

Le compensateur à l'extrémité est un filtre dérivateur, double intégrateurs caractérisé par des filtres caches aux niveaux des quatre modes vibratoires. Pour une

| Spectre de densité du bruit | Q | R_{yt} | $R_{\dot{\theta}}$ | R_{σ} |
|-----------------------------------------------------|-----------------|----------|--------------------|--------------|
| Position absolue de l'extrémité | 1×10^4 | 1 | ∞ | ∞ |
| Position absolue vitesse angulaire | 1×10^4 | 1 | 2000 | ∞ |
| Position absolue vitesse angulaire effort à la base | 1×10^4 | 1 | 2000 | 30 |

Tableau 4.3: Paramètres de la pondération de l'observateur

augmentation du gain k de 40%, deux branches du lieu des racines se déplacent vers le plan de droite. Cette sensibilité à l'augmentation du gain est typique d'un système à phase non minimale avec des zéros qui ont tendance à piéger les pôles du compensateur (fig. 4.13).

4.6.2 Performances du deuxième compensateur

Suivant la méthode définie dans l'annexe C, on procède à la fermeture de la boucle vitesse angulaire. D'après la figure 4.14, on remarque que le compensateur de vitesse est un filtre passe bas. La présence des filtres caches aux niveaux du deuxième et troisième mode permet de limiter les effets des vibrations. Ce compensateur est susceptible d'un gain k élevé d'où la présence de deux pôles en boucle fermée à l'origine, caractéristique d'une colocalisation des capteurs.

La boucle de vitesse étant considérée fermée, la fermeture de la boucle position de l'extrémité se caractérise par la présence d'un zéro compensateur au voisinage du zéro annulant ainsi l'effet d'un des pôles à l'origine. Dans ce cas de compensation, une augmentation de 50% du gain k déstabilise le système en boucle fermée. On peut alors conclure que l'introduction de la vitesse angulaire prévoit une augmentation

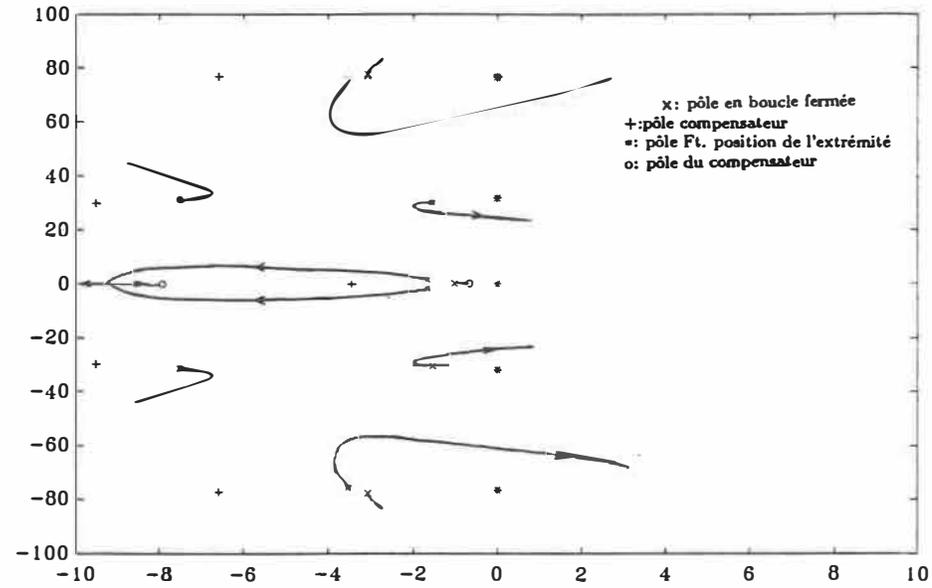


Figure 4.13: Lieu des racines: rétroaction de la position de l'extrémité

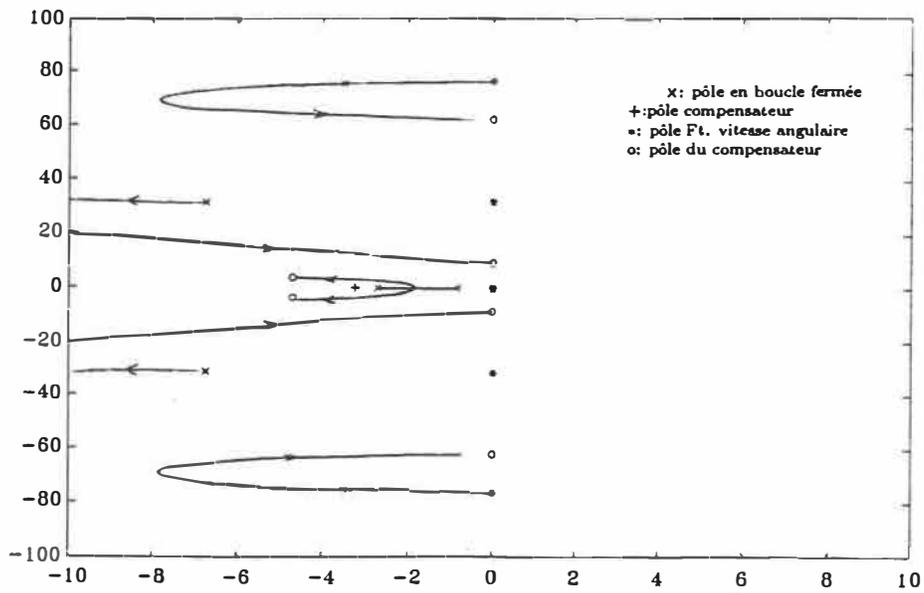


Figure 4.14: Lieu des racines: rétroaction de la vitesse

plus importante du gain k sans pourtant éliminer complètement les zéros à parties réelles positives.

4.6.3 Performances du troisième compensateur

Les compensateurs de l'effort à la base et de la vitesse sont principalement des filtres passe bas. L'avantage d'introduire la boucle de l'effort à la base est de pousser les zéros du compensateur de plus dans le plan négatif.

4.7 Étude de la robustesse

Plusieurs méthodes, présentées dans la littérature, traitent le problème de robustesse. On cite entre autres les méthodes de recouvrement, de boucle interne ainsi que la synthèse dans les espaces H_2 et H_∞ . Dans cette section, L'étude de la robustesse de la commande, basée sur la méthode de recouvrement, est faite en trois étapes:

1. Au niveau du régulateur.
2. Au niveau de l'observateur.
3. En boucle fermée.

4.7.1 Étude de la robustesse du régulateur

Un objectif important de tout contrôleur est d'assurer la stabilité du modèle face à des perturbations. Dans cette section, on étudie dans quelle mesure la commande optimale d'une structure flexible répond à cette caractéristique.

Si on considère que la commande est

$$\mathbf{u}(t) = -{}^v\mathbf{K}_r \mathbf{x}(t) + {}^v\mathbf{K}_r \mathbf{x}_{réf}(t)$$

avec ${}^v\mathbf{K}_r = {}^vR_2^{-1} \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{P}$ le gain du régulateur calculé à partir de la matrice solution de l'équation de Riccati

$$0 = \underline{D}_{11}^T {}^vR_4 \underline{D}_{11} - \underline{P} \mathbf{B}_{11} {}^vR_2^{-1} \mathbf{B}_{11}^T \underline{P} + \underline{A}_{11}^T \underline{P} + \underline{P} \mathbf{A}_{11} \quad (4.36)$$

La capacité du système en boucle fermée à rejeter les perturbations est déterminée par la matrice $\underline{J}(s)$ ⁵ tel que

$$\underline{J}(s) = \mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \underline{A}_{11})^{-1} \mathbf{B}_{11} {}^v\mathbf{K}_r \quad (4.37)$$

Kwakernaak [Kwakernaak 73] démontre, en étudiant l'évolution de cette dernière matrice, que le contrôleur optimal fournit une protection maximale contre les bruits blancs de perturbation. En partant d'une approche asymptotique, qui suppose que la fonction de transfert du système est à phase non minimale, il démontre que la matrice solution de l'équation de Riccati tend asymptotiquement vers zéro en faisant tendre la pondération sur la commande vers zéro. La variable contrôlée reçoit alors une protection maximale contre les perturbations et les variations des paramètres interne du modèle.

La condition de phase minimale limite l'application de cette méthode de recouvrement à la commande du bras flexible. Dans ce cas où la fonction de transfert en boucle ouverte possède des zéros à parties réelles positives, la capacité de rejeter les perturbations est limitée par les pôles en boucle fermée près de l'axe des imaginaires et non neutralisés par les zéros de la boucle ouverte. Zames et Francis [Zames 83] démontrent que la fonction de précision définie par $S(s) = 1/1 + H(s)$ ne peut être restreinte à une valeur inférieure à 1 sur toute la bande passante, en présence des zéros à parties réelles positives dans $H(s)$.

⁵en anglais: Return difference matrix

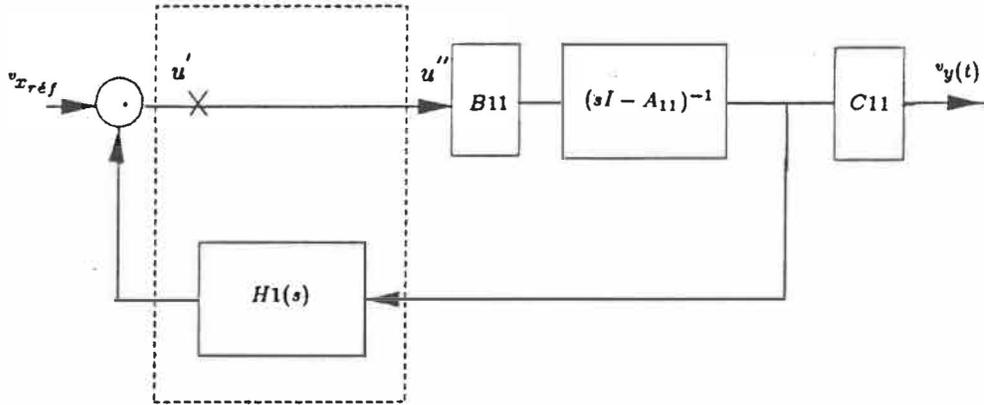


Figure 4.15: Implantation d'une commande optimale avec retour de tous les états

4.7.2 Étude de la robustesse de l'observateur

L'étude de la commande linéaire quadratique a mis en évidence la robustesse de celle-ci en l'absence des zéros à parties réelles positives ainsi que de l'observateur [Safonov 77]. Particulièrement, cette commande assure une marge de gain entre $-6db$ et $+\infty$ et une marge de phase de $+60^\circ$. L'introduction de l'observateur limite ces marges de gain et de phase. On étudie dans ce paragraphe la méthode de recouvrement introduite par Doyle et Stein [Doyle 81] pour palier à ce problème.

Pour cela, on considère les schéma-blocs des deux systèmes, sans observateur et avec observateur (figures 4.15, 4.16)

Les fonctions de transferts de u' à u'' sont calculées par rapport au point de coupure x . Elles sont différentes pour les deux implantations. Ces fonctions sont identiques si la dynamique de l'observateur satisfait l'équation suivante:

$${}^vK_e[\underline{I} + \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A}_{11})^{-1}{}^vK_e]^{-1} = B_{11}[\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A}_{11})^{-1}B_{11}]^{-1} \quad (4.38)$$

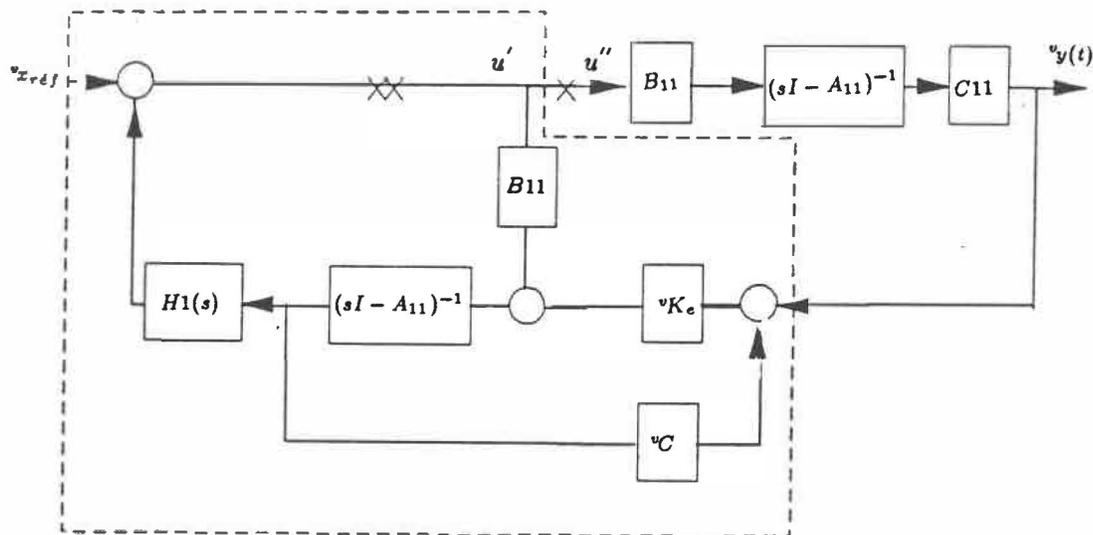


Figure 4.16: Implantation d'une commande optimale avec observateur

pour toute valeur de $s = j\omega$.

L'objectif du recouvrement est de faire tendre la première partie de l'équation 4.38 vers sa seconde partie.

Doyle et Stein démontrent que cette convergence n'est pas obtenue en choisissant les pôles de l'observateur éloignés de l'axe des imaginaires. Cette dernière caractéristique assure la rapidité de l'observateur sans pourtant augmenter ses marges de gain et de phase. Au contraire, un choix correct de la pondération sur le bruit de l'entrée permet de jouer sur les marges de gain et de phase sans être néfaste sur la vitesse de l'observateur.

Le gain de l'observateur est paramétrisé en fonction d'une variable q tel que:

$${}^vK_e(q)/q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} B_{11} \underline{W} \quad (4.39)$$

pour $\forall \underline{W}$ matrice non singulière.

Le gain ${}^vK_e(q)$ de l'observateur est défini par:

$${}^vK_e(q) = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \quad (4.40)$$

\underline{P} est solution de l'équation de Riccati:

$$\underline{A}_{11}\underline{P} + \underline{P}\underline{A}_{11}^T + \underline{Q}(q) - \underline{P}\underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C}\underline{P} = 0 \quad (4.41)$$

La valeur \underline{Q} est choisie égale à

$$\underline{Q}(q) = \underline{Q}_0 + q^2 \underline{B}_{11} \underline{B}_{11}^T \quad (4.42)$$

Avec \underline{Q}_0 la covariance du bruit à l'entrée appropriée au régime nominale. En divisant l'équation 4.41 par q^2 , on obtient:

$$\underline{A}_{11}(\underline{P}/q^2) + (\underline{P}/q^2)\underline{A}_{11}^T + \underline{Q}_0(q)/q^2 + \underline{B}_{11}\underline{B}_{11}^T - q^2(\underline{P}/q^2)\underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C}(\underline{P}/q^2) = 0 \quad (4.43)$$

En faisant tendre $q \rightarrow \infty$, le terme $(\underline{P}/q^2) \rightarrow 0$. Si, en plus, la fonction de transfert ne possède pas de zéros à parties réelles positives alors:

$$q^2(\underline{P}/q^2)\underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C}(\underline{P}/q^2) \rightarrow \underline{B}_{11}\underline{B}_{11}^T \quad (4.44)$$

Le gain de l'observateur vu à partir de l'équation 4.41 tend vers $\underline{B}_{11}\underline{B}_{11}^T$ si:

$$1/q^v \underline{K}_e \rightarrow \underline{B}_{11}\underline{R}^{-1/2} \quad (4.45)$$

Cette étude suppose donc que la fonction de transfert en boucle ouverte est à zéros à parties réelles négatives. Or, le modèle étudié dans ce chapitre est à phase non minimale. L'application de cette méthode, dans ce cas, est fragile mais elle a permis de mettre en évidence les performances dues au choix d'un deuxième capteur au niveau de la base de la membrure. D'après la figure 4.17, on remarque que le modèle en boucle fermée avec observateur à une seule entrée, ne converge pas vers le modèle d'état en boucle fermée sans observateur. La variation de la pondération sur le bruit n'agit pas sur ces marges de gain et de phase. En comparant les diagrammes des bodes des deux systèmes, on remarque que la marge de phase du système avec observateur est inférieure à 30°. Cette réponse est spécifique à un observateur avec pour entrée la position de l'extrémité du manipulateur. Elle caractérise un système à phase non minimale.

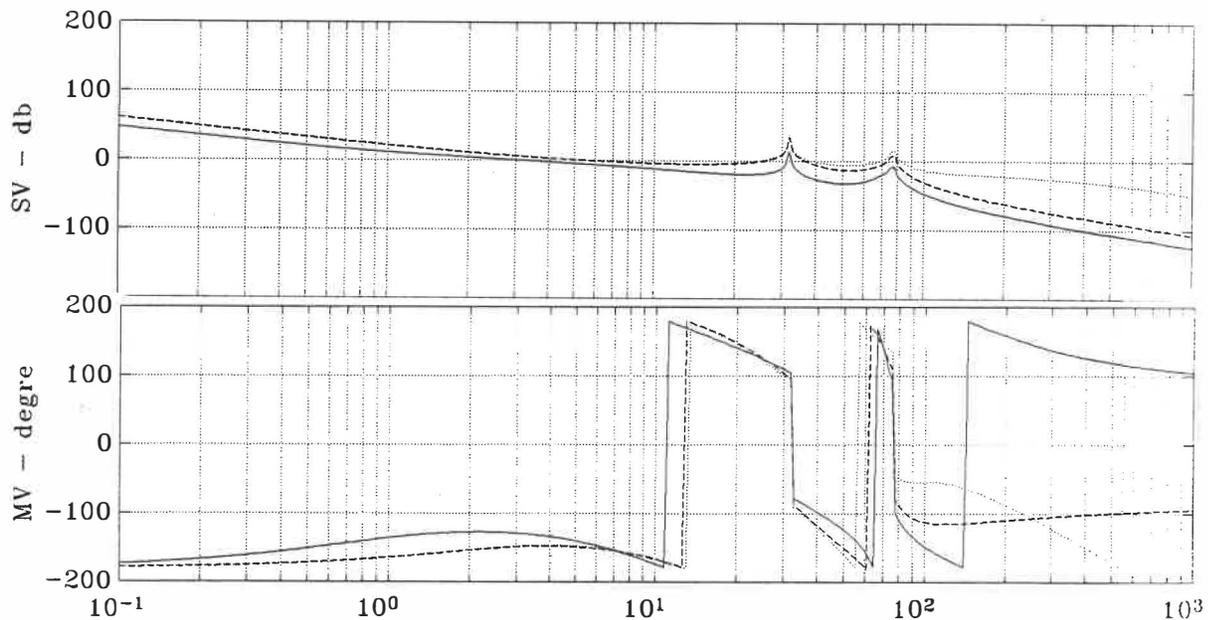


Figure 4.17: LQG/LTR: sortie du système, une seule mesure, variation du bruit à l'entrée

La figure 4.18 met en évidence l'apport d'une ou plusieurs entrées en plus de la position de l'extrémité sur le comportement du système en boucle fermée. La sortie converge vers la réponse du système avec retour des états à partir d'une pondération $\underline{Q} = 1 \times 10^5 \underline{I}$. On remarque une variation importante de la marge de phase en fonction de la covariance du bruit à l'entrée. La marge de phase est alors égale à 80° . Le problème est, qu'avec ce choix de la covariance du bruit, on suppose un faible bruit aux sorties des capteurs.

4.7.3 Étude de la robustesse en boucle fermée

En étudiant un contrôleur en rétroaction un point important à soulever est à quel point le système en boucle fermée peut supporter les perturbations externes sans perdre ses performances?

Dans cette section, on étudie l'effet de deux types de perturbations, l'une propre

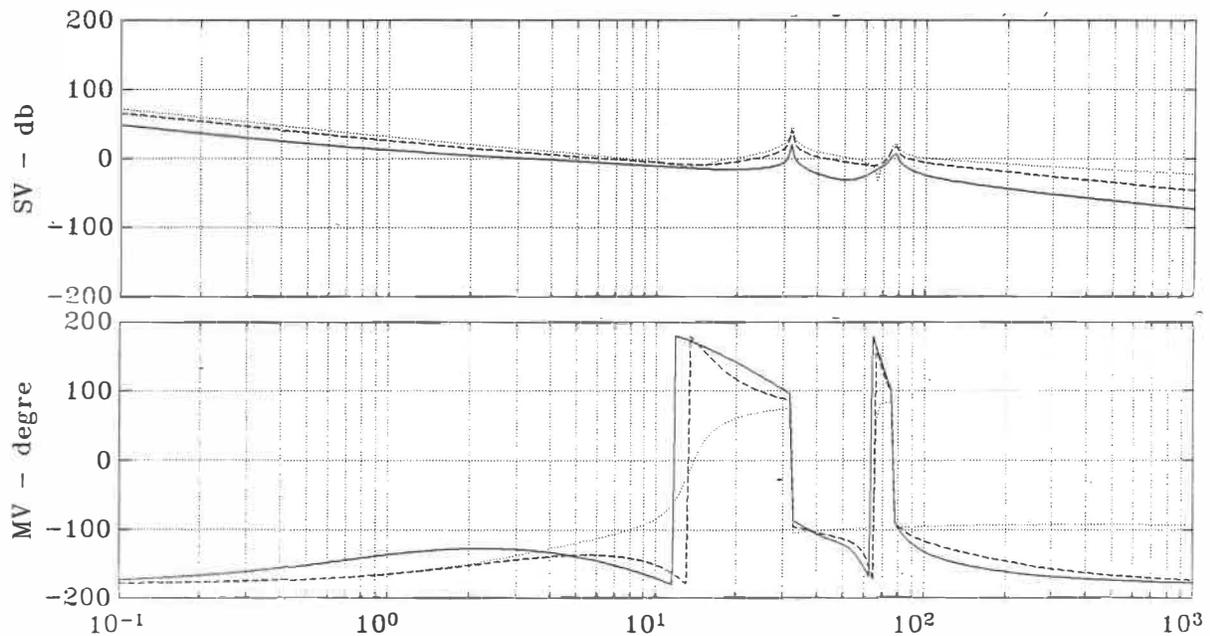


Figure 4.18: LQG/LTR: sortie du système, trois mesures, variation du bruit à l'entrée au système: variation des fréquences naturelles des modes vibratoires, l'autre due à des perturbations externes: une force constante qui agit au niveau de l'extrémité.

Sensibilité à une variation des fréquences naturelles

Cette variation est réalisée en introduisant un amortissement interne au niveau du système. Ce dernier agit au niveau des modes de hautes fréquences. La méthode consiste à calculer le gain de l'observateur pour un amortissement interne nul puis le garder fixe tout en faisant varier l'amortissement du modèle. La simulation de la sortie donne les résultats suivants:

Le premier compensateur, se basant sur la mesure de l'extrémité, donne une réponse divergente pour $\kappa_e = 0.0002$. Ce résultat caractérise la sensibilité des filtres cachés à une variation de la position des pôles du système en boucle ouverte. En fait, la commande optimale a permis l'introduction d'un zéro et d'un pôle compensateur au niveau de chacun des pôles des modes vibratoires. Une variation dans la position du

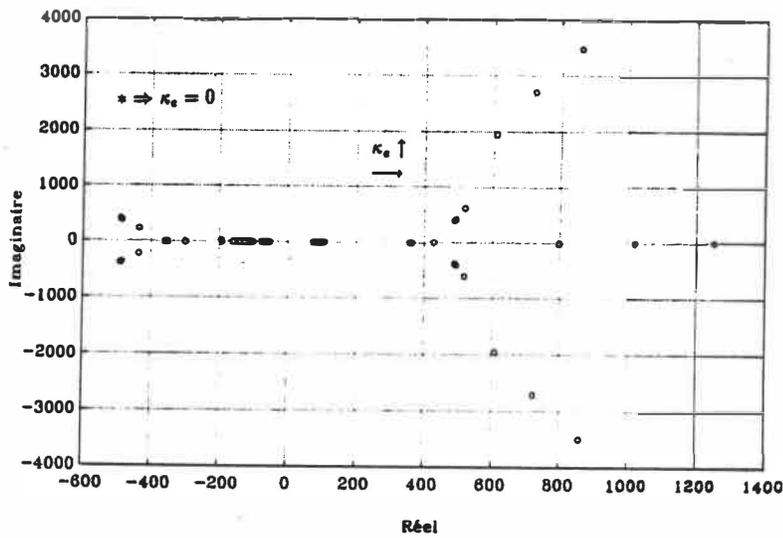


Figure 4.19: Déplacement des zéros lorsque la position de l'extrémité est prise comme sortie pour κ_e de 0 à 0,009

Le deuxième ainsi que le troisième compensateur sont moins sensibles à cette variation. N'empêche que leurs réponses sont aussi divergentes pour un $\kappa_e = 0.00025$.

Les zéros du système en boucle ouverte subissent aussi de l'influence de l'amortissement interne. Ainsi qu'illustré par la figure 4.19, les zéros obtenus lorsque la position de l'extrémité est prise comme sortie sont déplacés vers la droite lorsque κ_e augmente. De plus, les zéros complexes à gauche de l'axe imaginaire tendent vers l'axe des réels tandis que ceux à droite de l'axe s'en éloignent entraînant ainsi une accentuation des conséquences de la phase non minimale.

Marges de stabilité

L'étude des marges de gain et de phase permet de déterminer la robustesse de la commande face à des perturbations dues à l'actionneur ou bien à une perturbation au niveau de l'extrémité.

Pour le premier compensateur, la marge de phase du mode rigide est égale à 30° .

Pour le troisième compensateur, la phase demeure supérieure à -180° . Théoriquement, la marge de gain est alors infini; pratiquement, la phase peut être inférieure à -180° à cause de la présence de modes vibratoires non considérés lors de la modélisation du système. La marge de phase est égale à 80° d'où une amélioration par rapport aux performances du premier compensateur. Ce dernier résultat présente l'avantage d'une plus faible sensibilité à des commandes plus élevées.

D'après les résultats obtenus, l'introduction de la vitesse angulaire dans la boucle observateur permet un comportement en boucle fermée qui se rapproche de celui d'un système à phase minimale.

4.8 Résultats des simulations

Dans cette partie, on effectue une étude comparative entre le comportement du modèle linéaire et du modèle non linéaire à l'application de la commande optimale. En faisant cette comparaison, on joue les valeurs des références ainsi que sur la variation de la charge à l'extrémité.

L'essai réalisé avec le régulateur consiste à déplacer simultanément les joints rotoïde et prismatique du robot. Pour le premier déplacement, la consigne est un tour complet. Verticalement, la translation de référence est égale à un mètre.

D'après les figures 4.20 et 4.21, on remarque que le régulateur optimal arrive bien à contrôler les vibrations verticales: un résultat qu'on n'a pas réussi à avoir à l'aide de la commande proportionnelle dérivée. Malgré la présence des nonlinéarités, le modèle non linéaire assure presque le même temps de réponse en rotation que le modèle linéaire. En translation, on remarque une plus grande rapidité propre au modèle linéaire. Cela est dû au couplage entre la vitesse angulaire et les modes de vibration

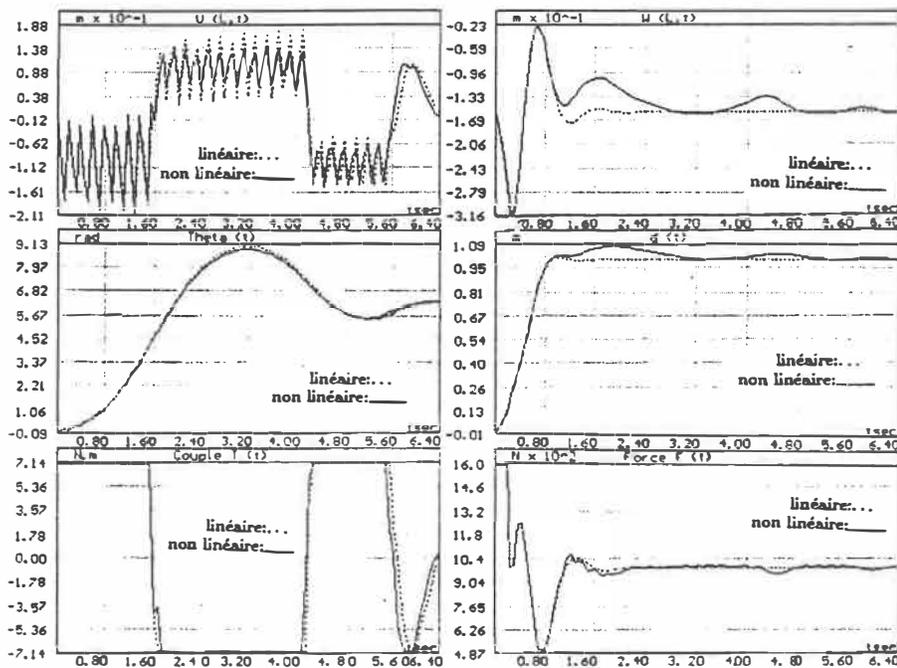


Figure 4.20: Commande optimale sur l'extrémité du bras $AL22: \theta_{ref} = 2\pi$ et $d = 1m$

D'après les figures 4.20 et 4.21, on remarque que le régulateur optimal arrive bien à contrôler les vibrations verticales: un résultat qu'on n'a pas réussi à avoir à l'aide de la commande proportionnelle dérivée. Malgré la présence des nonlinéarités, le modèle non linéaire assure presque le même temps de réponse en rotation que le modèle linéaire. En translation, on remarque une plus grande rapidité propre au modèle linéaire. Cela est dû au couplage entre la vitesse angulaire et les modes de vibration verticale. Ce couplage, caractérisé par une force centrifuge qui tend à rigidifier le bras réalisant ainsi un redressement de cette dernière lui empêchant de se stabiliser autour de l'état d'équilibre statique, causée par la présence de la force de gravité.

L'introduction d'un amortissement interne dans le modèle agit positivement sur le temps de réponse de ce dernier ainsi que sur la déformation horizontale à condition qu'il ne dépasse pas les limites déjà définies dans la section précédente. La figure 4.22 illustre le cas où on considère à la fois un amortissement interne $\kappa_e = 0.0001$ et un amortissement visqueux $\mu_\theta = \mu_d = 0.2$, on remarque une atténuation seulement de

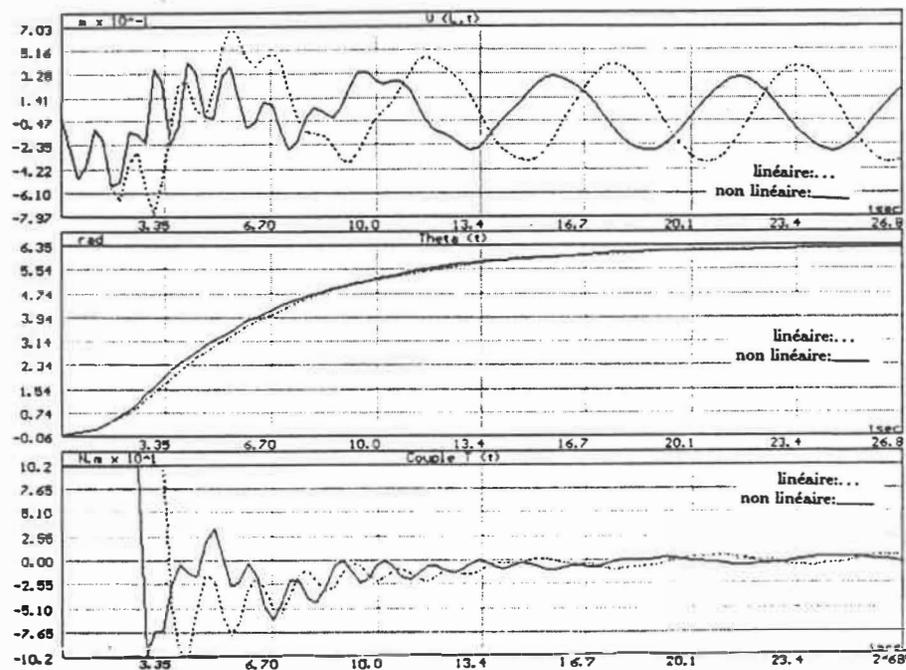


Figure 4.21: Commande optimale sur l'extrémité du bras AL10

la déformation horizontale, les modes flexibles dûs à la déformation verticale ne sont pas sensibles à l'introduction de ces amortissements.

La variation de la charge à l'extrémité est faite en deux étapes: une augmentation de 20% suivie d'une de 50%. On remarque d'après les simulations faites (fig. 4.23, 4.24) que la commande optimale supporte plus cette variation par comparaison aux réponses obtenues à partir de la commande proportionnelle dérivée.

La déformation verticale croît en faisant augmenter la charge ce qui caractérise la présence d'un couplage plus important entre la vitesse angulaire et les modes de vibrations verticales. Ce dernier résultat révèle la présence du phénomène de la torsion propre à une augmentation excessive de la charge.

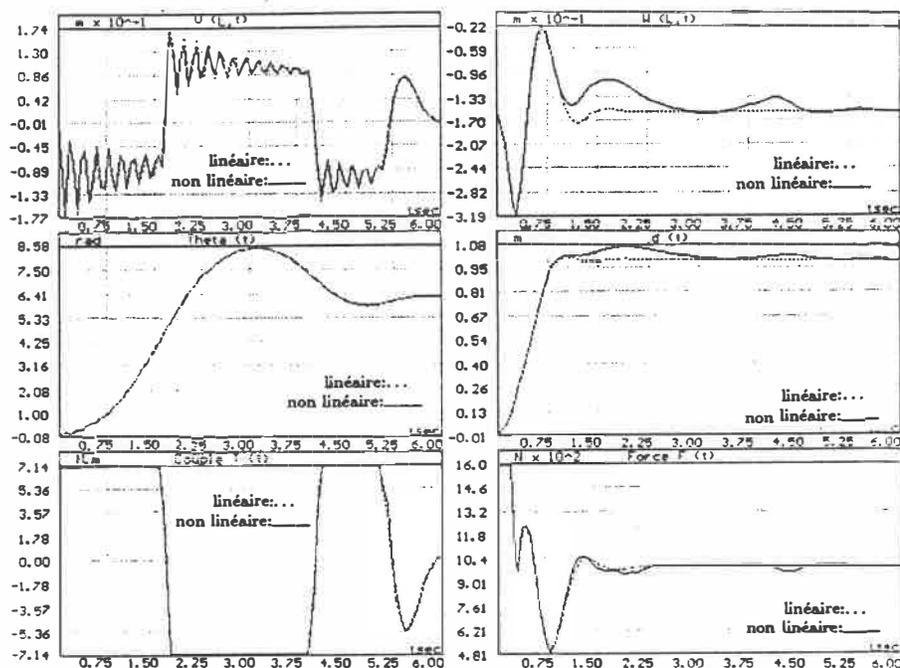


Figure 4.22: Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 amortissement non nul

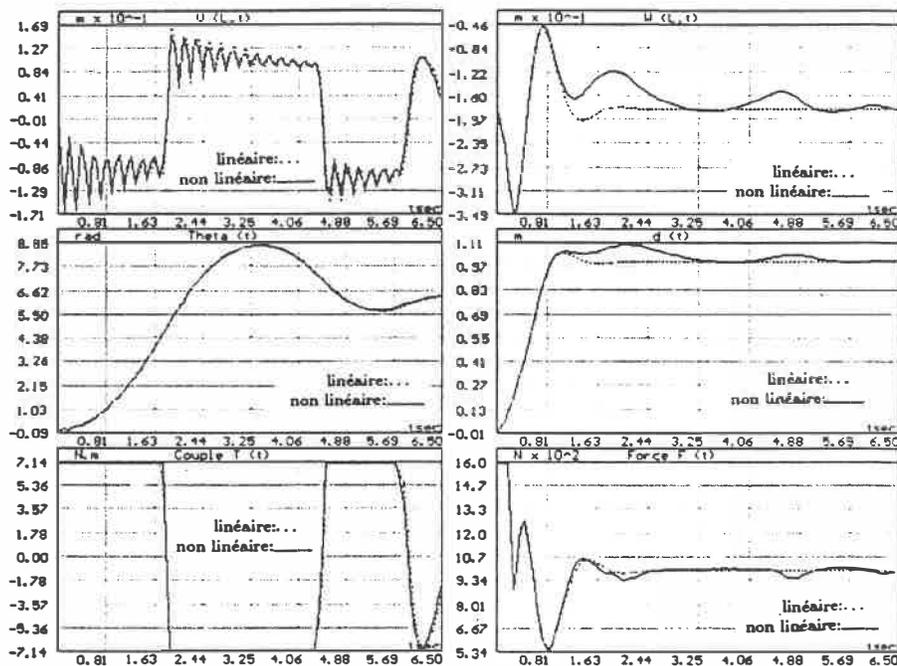


Figure 4.23: Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 faible variation de la charge: 20%

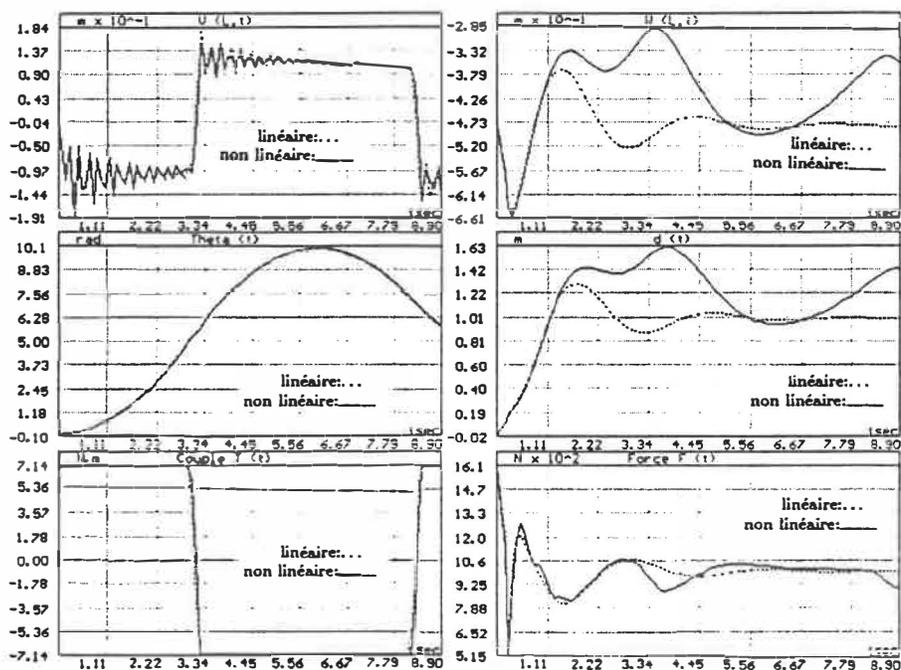


Figure 4.24: Commande optimale sur l'extrémité du bras AL22 grande variation de la charge: 50%

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude de la commande optimale quadratique gaussienne appliquée à un bras flexible a été exposée. Plusieurs problèmes ont été rencontrés lors de cette étude, on a pu les cerner en deux catégories: ceux propres au régulateur et ceux propres à l'observateur.

Lors de la conception du régulateur, on a pu mettre en relief l'influence de la présence des zéros à parties réelles positives sur les performances du régulateur. En effet, ces zéros causent un déphasage entre la sortie et l'entrée entraînant ainsi une limitation de la vitesse de déplacement du manipulateur.

La conception de l'observateur est faite en choisissant les covariances des bruits à l'entrée et aux sorties du système. Ce choix est basé sur les lieux des pôles de l'estimateur. Ces derniers sont tracés en fonction du rapport de la covariance du bruit à l'entrée par rapport à celles des bruits des sorties. Ces rapports définissent l'apport de chacun des capteurs par rapport à celui de l'extrémité.

En calculant les performances du système régulateur observateur, on a étudié l'influence des capteurs au niveau de la base sur ces dernières. L'introduction de ces mesures au niveau de l'observateur a permis d'avoir des propriétés du système en boucle fermée qui approchent celles d'un système à phase minimale. Les marges de stabilité sont considérablement améliorées; la marge de phase de 30° du premier compensateur est de 80° en considérant deux autres entrées colocalisées au niveau de la base en plus de la position de l'extrémité.

Les simulations ont permis d'étudier l'apport de cette commande en particulier le contrôle des vibrations verticales de l'extrémité, un aspect que le PD n'a pas réussi à contrôler. D'autre part, ces simulations ont montré que cette commande linéaire réussit bien à contrôler le modèle non linéaire même dans le cas où le comportement

de ce dernier en boucle ouverte diffère significativement de celui du modèle linéaire ($\dot{\theta} \geq 5.5rad/s$ pour le bras *AL22*).

L'étude de la robustesse de la commande a permis de conclure que:

- La considération de plusieurs entrées au niveau de l'observateur permet d'avoir un système plus robuste face à la variation des fréquences propres des modes vibratoires (une augmentation de 80% par rapport à la variation de l'amortissement considérée pour le compensateur à une seule entrée)
- Pour une variation de la charge à l'extrémité de 50%, le temps de réponse du système demeure acceptable ainsi que la déformation à l'extrémité qui ne dépasse pas ses limites (cas de la commande PD).

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Résumé et apports du mémoire

La commande d'une structure flexible et plus particulièrement celle d'un robot flexible, présente de nombreuses difficultés qui la distinguent de celle des robots rigides classiques. Ces difficultés sont relatives principalement, à la complexité du modèle caractérisé par des équations différentielles non linéaires et à la phase non minimale de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette dernière est caractéristique de la non colocalisation des actionneurs et des capteurs.

Le manipulateur étudié dans ce mémoire, caractérisé par un modèle non linéaire, est à deux degrés de liberté. La loi de contrôle est à partir d'un modèle linéaire simplifié.

Le choix de la commande proportionnelle dérivée ainsi que de la commande optimale quadratique découle du fait que le premier est l'un des régulateurs les plus utilisés dans l'industrie pour la commande des manipulateurs rigides; le second est présenté dans la littérature comme un régulateur performant pour contrôler la flexibilité de la structure.

En étudiant la commande proportionnelle dérivée à actionneurs et capteurs colocalisés, nous avons mis en évidence la limitation de celle-ci à contrôler l'extrémité du bras manipulateur en présence des perturbations externes.

La présence d'une déformation verticale propre au modèle non linéaire lors d'un mouvement de rotation reflète d'une part le couplage entre la vitesse angulaire et les modes vibratoires verticaux, d'autre part l'incapacité de la commande PD à amortir cette déformation.

Le déplacement du capteur vers l'extrémité du bras manipulateur entraîne l'apparition des zéros à parties réelles positives dans la fonction de transfert en boucle ouverte causant ainsi la limitation des gains du contrôleur. La vitesse du bras manipulateur est alors fortement limitée.

Le besoin de contrôler plus précisément la position de l'extrémité et la limitation du gain due à la phase non minimale de la fonction de transfert en boucle ouverte nous ont poussé à adopter la commande LQG. Les performances du système en boucle fermée sont fonctions de celles du régulateur et de l'observateur.

Lors de la conception de l'observateur, les covariances des bruits à l'entrée et aux sorties ont été considérées comme des paramètres permettant ainsi de définir l'apport de chacun des capteurs au niveau de l'observateur.

Le choix d'autres capteurs en plus de celui à l'extrémité a permis une amélioration considérable des performances du système en boucle fermée. En effet, la marge de phase passe de 30° à 80° en considérant comme entrées secondaires la vitesse angulaire et l'effort à la base. Ce dernier résultat montre qu'avec ce choix, les performances du système approchent celles d'un système à phase minimale avec une marge de phase supérieur à 60° .

L'étude d'une version discrète de la commande LQG a mis en évidence la pré-

sence du phénomène de contamination. Ce dernier peut être considéré comme une perturbation interne au système s'il est dû à un seul mode vibratoire. Ce dernier doit avoir un spectre de puissance relativement faible par rapport à ceux des modes qui le précèdent et qui sont considérés lors de la conception du régulateur.

La robustesse de la commande a été testé en faisant varier consécutivement un paramètre interne du modèle: fréquences propres des modes vibratoires ainsi que la charge à l'extrémité.

La première variation, causée par la considération d'un amortissement interne au niveau de la membrure, a montré que la commande LQG peut être affectée par la variation des paramètres internes. Cette sensibilité diminue en considérant l'observateur à plusieurs entrées sans pourtant être annulée. En effet l'introduction d'un amortissement interne au niveau du modèle est fonction de la position des actionneurs et des capteurs. Si ces derniers sont considérés colocalisés, les pôles ainsi que les zéros de la fonction de transfert se déplacent vers la gauche et vers l'axe des réels ce qui engendre des meilleures performances pour la commande. Par contre, dans le cas de la non colocalisation, cette variation entraîne le déplacement des zéros à gauche de l'axe des imaginaires provoquant ainsi l'accentuation des effets de la phase non minimale du système.

La variation de la charge à l'extrémité a permis de conclure qu'avec un LQG le système est plus robuste à une variation de la charge qu'en considérant un simple PD.

5.2 Travaux futurs

Ce mémoire a soulevé plusieurs problèmes dans le contrôle d'un bras flexible et sur lesquels il serait intéressant de poursuivre les travaux

Le premier problème est celui de la variation des paramètres du modèle en fonction de la charge. Un contrôleur adaptatif permet de pallier à ce problème. Le deuxième problème est celui causé par la phase non minimale de la fonction de transfert en boucle ouverte, le régulateur GPC est un régulateur prometteur à ce niveau.

Finalement, la présence de la torsion comme un phénomène physique accompagnant des charges importantes peut être un sujet captivant aussi bien au niveau de la modélisation que du contrôle.

Bibliographie

- [Astrom 89] Karl J. Astrom et Bjorn Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley.
- [Astrom 84] Karl J. Astrom et Bjorn Wittenmark, *Computer Controlled Systems* Prentice-Hall information and System Sciences Series. Thomas Kailath.
- [Athans 71] Michael Athans, "The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design," *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-16, No. 6, Decembre 1971, pp. 529-551.
- [Balas 78] Mark j. Balas, "Modal Control of Certain Flexible Dynamic Systems," *SIAM J. Control and Optimization* Vol. 10, No. 3, Mai 1978.
- [Balas 81] Mark J. Balas, "Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, No. 3, Juin 1982.
- [Bernstein 87] Dennis S. Bernstein, "Sequential Design of Decentralized Dynamic Compensators Using the Optimal Projection Equations: An Illustrative Example Involving Interconnected Flexible Beams," *IEEE Transactions on Automatic Control* 1987, pp. 986-989.
- [Biswas 88] S. K. Biswas et R. D. Klafter, "Dynamic Modeling and Optimal Control of Flexible Robotic Manipulators," *Proc. 1988 IEEE Conf. on Robotics and Automation*, April 1988, pp. 15-20.

- [Book 85] Book et Hasting "Experiments in the Control of a Flexible Robot Arm," *Proceeding Conference ASME, Robot9 1985*, pp. 2045-2075.
- [Bryson 79] A. E. Bryson, JR. "Some Connections Between Modern and Classical Control Concepts," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 101, Juin 1979.
- [Buhler 83] Hansruedi Buhler *Réglages échantillonnés* Presses polytechniques romandes.
- [Cannon 87] R. H. Cannon, Jr. et D. M. Rovner, "Experiments Toward On-line Identification and Control a Very Flexible One-Link Manipulator," *Int. Journal of Robotics Research* Vol. 6, No. 4, Hiver 1987.
- [Cesareo 84] G. Cesareo and R. Marino, "On The Controllability Properties of Elastic Robots," *Int. Symp. MTNS in Beer Sheva, Israel* Juin 1983.
- [Chassiakos 86] A. G. Chassiakos et G. A. Bekey, "On The Modelling And Control of a Flexible Manipulator Arm by Point Actuators," *Proceedings of 25th Conference on Decision and Control* Athens, Greece, 1986.
- [Clarke 84] D. W. Clarke "Self-tuning Control of Nonminimum-phase Systems," *Automatica*, Vol. 20, No. 5, 1984, pp. 501-517.
- [Clarke 87] D. W. Clarke, C. Mohtadi et P. S. Tuffs, "Generalized Predictive Control- Part 1. The Basic Algorithm," *Automatica* Vol. 23, No. 2, 1987, pp. 137-148.
- [Curtain 83] , "Compensators for Infinite Dimensional Linear Systems," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 315, No. 5/6, pp. 331-346.
- [DeLuca 88] Alessandro De Luca, "Dynamic Control of Robots With Joint Elasticity," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphia 1988.

- [Doyle 79] J. C Doyle et G. Stein, "Robustness with Observers," *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-24, 1979, pp. 607-611.
- [Doyle 81] J. C Doyle, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Control," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. Ac-26, 1981, pp. 4-16.
- [Dugard 87] , L. Dugard, "Commande de robot flexible," *Note interne L.A.G. 87-57*, Juin 1987.
- [Gevarter 70] William B. Gevarter, "Basic Relations for Control of Flexible Vehicles," *AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting* 1970, vol 8, pp. 666-672.
- [Gibson 83] , J. S. Gibson et F. Jabbari, "Discrete-time Optimal Control of Flexible Structures," *IEEE Conference on Decision and Control* 1983, pp. 286-290.
- [Greene 85] , Michael Greene, "Control of Flexible Bodies :New Challenges in Control Engineering," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 1985 ,pp. 89-92.
- [Johnson 81] Y. Yam, T. L. Johnson et J. G. Lin, "Aggregation of Large Space Structure Dynamics with Respect to Actuator and Sensor Influences," em *IEEE Int. Conf. on Decision and Control*, 1981.
- [Kano 85] Hideaki Kano et Ho Gil Lee, "Vibration Control of One-Link Flexible Arm," *Proceedings of 24th Conference on Decision and Control* Vol. 4, 1985, pp. 1172-1117.
- [Karkkainen 85] " Compensation Manipulator Flexibility Effects by Modal Space Techniques," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 1985, pp. 972-977
- [Khorasani 88] Khashayar Khorasani "An Optimal Feedback Regulation of Nonlinear Singularly Perturbed Systems via Slow Manifold Approach," *Automatica*, Vol. 24, No. 1, 1988, pp. 105-108.

- [Khorrami 88] F. Khorrami et U. Özgüner "Perturbation Methods in Control of Flexible Link Manipulators," *IEEE Int.Conf.on Robotics and Automation* 1988, pp. 310-315
- [Klafter 88] R.D. Klafter et S.K. Biswas, "Dynamic Modeling and Optimal Control of Flexible Robotic Manipulators," *IEEE Int.Conf.on Robotics and Automation* Vol. 2, 1988, pp. 15-20.
- [Kwakernaak 73] Huibert Kwakernaak, Raphael Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
- [Marino 86] R. Marino et M. W. Spong, "Nonlinear Control Techniques for Flexible Joint Manipulators: A Single Link Case Study," *IEEE int. Conf. on Robotics and Automation* 1986, pp. 1030-1036.
- [Meerkov 86] Richard E. Bellman, Joseph Bentsman et Semyon M. Meerkov, "Vibrational Control of Nonlinear Systems: Vibrational Controllability and Transient Behavior," *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-31, No. 8, Aout 1986.
- [Meerkov 86] Richard E. Bellman, Joseph Bentsman et Semyon M. Meerkov, "Vibrational Control of Nonlinear Systems: Vibrational Stabilizability," *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-31, No. 8, Aout 1986.
- [Meirovitch 67] Meirovitch, Leonard, 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New-York.
- [Miller 85] David F. Miller, "Integration of Structures and Controls: Some Computational Issues," *Proceeding of 24th Conference on Decision and Control* Ft.Lauderdale 1985.

- [Nelson 86] Winston L. Nelson et Debasis Mitra, "Load Estimation and Load-Adaptive Optimal Control for a Flexible Robot Arm," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 1986, pp. 171-175.
- [Piedboeuf 89] Jean-Claude Piedoeuf, *Étude du modèle non linéaire d'un manipulateur avec une membrure flexible*, Ph. D. Thèse, École Polytechnique de Montréal, 1989.
- [Pritchard 87] A. J. Pritchard et D. Salamon "The Linear Quadratic Control Problem For Infinite Dimensional Systems with Unbounded Input and Output Operators," *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 25, No. 1, Janvier 1987.
- [Rovner 88] Daniel M. Rovner et G. F. Franklin, "Experiments in Load-adaptive Control of a Very Flexible One-link Manipulator," *Automatica* Vol. 24, No. 4, 1988, pp. 541-548.
- [Safonov 77] M. G. Safonov et M. Athans, "Gain and Phase Margin of Multiloop LQG Regulators," *IEEE Trans. Automat. Cont.*, Avril 1977.
- [Sakawa 85] Y. Sakawa, F. Matsuno, S. Fukushima, "Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 2, No. 4, 1985, pp. 453-472.
- [Sakawa 86] Y. Sakawa, F. Matsuno, "Modeling and Control of a Flexible Manipulator with a Parallel Drive Mechanism," *Int. Journal of Control*, Vol. 44, No. 2, 1986, pp. 299-313.
- [Schmitz 85] Robert H. Cannon, Jr. et Eric Schmitz, "Initial Experiments on the End-point Control of a Flexible One-Link Robot," *The International Journal of Robotics Research* Vol. 3, No.3, Automne 1985, pp. 62-75.
- [Siciliano 86] Bruno Siciliano, Wayne J. Book et Giuseppe De Maria, "An Integral Manifold Approach to Control of a One Link Flexible Manipulator," *Proceedings of 25th Conference on Decision and Control* Athens. Greece. 1986.

- [Singh 85] Sahjenda N. Singh et Albert A.Schy, "Robust Torque Control of an Elastic Robotic Arm Based on Invertibility and Feedback Stabilization," *Proceedings of 24th Conference on Decision and Control*, Decembre 1985.
- [Singh 86] N.Sing et A.Schy, "Control of Elastic Robotic Systems by Nonlinear Inversion and Modal Damping," *Transactions of the ASME* Vol. 2, 1986, pp. 180-189.
- [Singer 88] Neil C. Singer et Warren P. Seering, "Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Mars 1988.
- [Speyer 86] Minjea Tahk et Jason I. Speyer, "A Parameter Robust LQG Design Synthesis With Applications To Control of Flexible Structures," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986.
- [Usoro 84] P. B. Usoro, R. Nadira, S.S. Mahil "Control of Lightweight Flexible Manipulators: A Feasibility Study," *Proceedings American Control Conference*, Juin 1984.
- [Vidyasagar 88] H. Krishnan et M. Vidyasagar, "Control of a Single Link Flexible Beam Using A Hankel-Norm-Based Reduced Order Model," *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 1988, pp. 9-14.
- [Zames 83] G. Zames et B. A. Francis, "Feedback, Minimax Sensitivity and Optimal Robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control* 1983.

Annexe A

Calculs des paramètres du modèle d'état

Dans cette annexe, les matrices \underline{A}_{ij} sont présentées. Obtenues à partir des équations 2.4 à 2.10, définissant la dynamique du modèle d'ordre réduit.

Dans une deuxième partie de cette annexe, les différentes constantes, utilisées lors de la modélisation sont présentées.

A.1 Les matrices A_{ij}

$$\underline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_0}{J_B} & v_{c1}^1 & \kappa_e v_{c1}^1 & \dots & v_{\nu\nu}^1 & \kappa_e v_{\nu\nu}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_{k1}^5 \frac{\mu_0}{J_B} + 2v_{k1}^2 v_{\eta\dot{\theta}} & -v_{k1}^1 + v_{k1}^2 \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} & -\kappa_e v_{k1}^1 + 2 \sum_k v_{k1k}^3 v_{\eta\dot{\theta}} & \dots & -v_{k1\nu\nu}^1 + v_{k1\nu\nu}^2 \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} & -\kappa_e v_{k1\nu\nu}^1 + 2 \sum_k v_{k1k\nu\nu}^3 v_{\eta\dot{\theta}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v_{k\nu\nu}^5 \frac{\mu_0}{J_B} + 2v_{k\nu\nu}^2 v_{\eta\dot{\theta}} & v_{k\nu\nu}^1 + v_{k\nu\nu}^2 \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} & -\kappa_e v_{k\nu\nu}^1 + 2 \sum_k v_{k\nu\nu k}^3 v_{\eta\dot{\theta}} & \dots & -v_{k\nu\nu\nu}^1 + v_{k\nu\nu\nu}^2 \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} & -\kappa_e v_{k\nu\nu\nu}^1 + 2 \sum_k v_{k\nu\nu k\nu\nu}^3 v_{\eta\dot{\theta}} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

De même \underline{A}_{12} s'écrit:

$$\underline{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{1k1}^4 u \eta_k \dot{\theta} & \dots & 0 & -2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{1k\nu_w}^4 u \eta_k \dot{\theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{\nu_w k1}^4 u \eta_k \dot{\theta} & \dots & 0 & -2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{\nu_w k\nu_w}^4 u \eta_k \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La matrice \underline{A}_{21} est:

$$\underline{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sum_{j=1}^{\nu_w} w k_{1j}^2 u \eta_j \dot{\theta} & 0 & 2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{1k1}^3 u \eta_k \dot{\theta} & \dots & 0 & 2 \sum_{k=1}^{\nu_w} w k_{1k\nu_w}^3 u \eta_k \dot{\theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sum_{j=1}^{\nu_w} w k_{\nu_w j}^2 u \eta_j \dot{\theta} & 0 & 2 \sum_{k=1}^{\nu_w} v k_{\nu_w k1}^3 u \eta_k \dot{\theta} & \dots & 0 & 2 \sum_{k=1}^{\nu_w} w k_{\nu_w k\nu_w}^3 u \eta_k \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Enfin la matrice \underline{A}_{22} s'écrit:

$$\underline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_d}{m_B} & -w_{e1}^1 & \kappa_e w_{e1}^1 & \dots & -w_{e\nu_w}^1 & -\kappa_e w_{e\nu_w}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_{k1}^5 \frac{\mu_d}{m_B} & -w_{k11}^1 + w_{k11}^2 \frac{i^2}{\theta} & -\kappa_e w_{k11}^1 & \dots & -w_{k1\nu_w}^1 + w_{k1\nu_w}^2 \frac{i^2}{\theta} & -\kappa_e w_{k1\nu_w}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & w_{k\nu_w}^5 \frac{\mu_d}{m_B} & -w_{k\nu_w1}^1 + w_{k\nu_w1}^2 \frac{i^2}{\theta} & -\kappa_e w_{k\nu_w1}^1 & \dots & -w_{k\nu_w\nu_w}^1 + w_{k\nu_w\nu_w}^2 \frac{i^2}{\theta} & -\kappa_e w_{k\nu_w\nu_w}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Constantes de modélisation

Dans cette section, on définit les différentes constantes utilisées dans la modélisation du système.

$$v_{e_i}^1 = v_{d_i}^1 / I_B \quad w_{e_i}^1 = w_{d_i}^1 / m_B$$

$$\begin{aligned} {}^{\nu}k_{ij}^1 &= \sum_{k=1}^{\nu_{\nu}} ({}^{\nu}A^2)_{ik}^{-1} ({}^{\nu}A_k^1 e_j^1 + {}^{\nu}H_{kj}) & {}^{\omega}k_{ij}^1 &= \sum_{k=1}^{\nu_{\omega}} ({}^{\omega}A^2)_{ik}^{-1} (-{}^{\omega}A_k^1 e_j^1 + {}^{\omega}H_{kj}) \\ {}^{\nu}k_{ij}^2 &= \sum_{k=1}^{\nu_{\nu}} ({}^{\nu}A^2)_{ik}^{-1} {}^{\nu}A_{kj}^5 & {}^{\omega}k_{ij}^2 &= \sum_{k=1}^{\nu_{\omega}} ({}^{\omega}A^2)_{ik}^{-1} {}^{\omega}A_{kj}^5 \\ {}^{\nu}k_{ijk}^3 &= \sum_{l=1}^{\nu_{\nu}} ({}^{\nu}A^2)_{il}^{-1} {}^{\nu}A_{ljk}^4 & {}^{\omega}k_{ijk}^3 &= \sum_{l=1}^{\nu_{\omega}} ({}^{\omega}A^2)_{il}^{-1} {}^{\omega}A_{ljk}^4 \end{aligned}$$

$${}^{\omega}k_{ijk}^4 = \sum_{l=1}^{\nu_{\omega}} ({}^{\omega}A^2)_{il}^{-1} {}^{\omega}A_{ljk}^8$$

$${}^{\nu}k_i^5 = \sum_{j=1}^{\nu_{\nu}} ({}^{\nu}A^2)_{ij}^{-1} {}^{\nu}A_j^1 \quad {}^{\omega}k_i^5 = \sum_{j=1}^{\nu_{\omega}} ({}^{\omega}A^2)_{ij}^{-1} {}^{\omega}A_j^1$$

$${}^{\omega}E_i = \int_0^L \rho {}^{\omega}\phi_i dx$$

$${}^{\nu}F_i = \int_0^L \rho x {}^{\nu}\phi_i dx$$

$${}^{\nu}G_{ij} = \int_0^L \rho {}^{\nu}\phi_i {}^{\nu}\phi_j dx$$

$${}^{\nu}H_{ij} = \int_0^L EI_z {}^{\nu}\phi_i'' {}^{\nu}\phi_j'' dx$$

$${}^{\nu}K_{ijk} = \int_0^L \rho {}^{\nu}\phi_i' {}^{\nu}\phi_j' {}^{\nu}\phi_k' dx$$

$${}^{\nu}M_{ij} = \int_0^L {}^{\nu}\phi_i' {}^{\nu}\phi_j' dx$$

$${}^{\nu}N_{ij} = \int_0^L \frac{\rho x^2}{2} {}^{\nu}\phi_i' {}^{\nu}\phi_j' dx$$

$${}^{\nu}d_i^1 = EI_z {}^{\nu}\phi_{i0}''$$

$${}^{\omega}G_{ij} = \int_0^L \rho {}^{\omega}\phi_i {}^{\omega}\phi_j dx$$

$${}^{\omega}H_{ij} = \int_0^L EI_y {}^{\omega}\phi_i'' {}^{\omega}\phi_j'' dx$$

$${}^{\omega}K_{ijk} = \int_0^L \rho {}^{\omega}\phi_i' {}^{\omega}\phi_j' {}^{\omega}\phi_k' dx$$

$${}^{\omega}M_{ij} = \int_0^L {}^{\omega}\phi_i' {}^{\omega}\phi_j' dx$$

$${}^{\omega}N_{ij} = \int_0^L \frac{\rho x^2}{2} {}^{\omega}\phi_i' {}^{\omega}\phi_j' dx$$

$${}^{\omega}d_i^1 = EI_y {}^{\omega}\phi_{i0}'''$$

$${}^{\nu}c_i^1 = I_{3C} {}^{\nu}\phi_{iL}'$$

$${}^{\nu}c_{ij}^2 = I_{3C} {}^{\nu}\phi_{iL}' {}^{\nu}\phi_{jL}'$$

$${}^{\nu}c_{ij}^3 = m_C {}^{\nu}\phi_{iL}' {}^{\nu}\phi_{jL}'$$

$${}^{\nu}c_i^4 = m_C L {}^{\nu}\phi_{iL}'$$

$${}^{\omega}c_{ij}^2 = I_{2C} {}^{\omega}\phi_{iL}' {}^{\omega}\phi_{jL}'$$

$${}^{\omega}c_{ij}^3 = m_C {}^{\omega}\phi_{iL}' {}^{\omega}\phi_{jL}'$$

$${}^{\omega}c_i^4 = m_C {}^{\omega}\phi_{iL}'$$

$${}^{\nu}c_i^5 = m_C {}^{\nu}\phi_{iL}' + \rho {}^{\nu}\phi_{iL}'$$

$${}^w c_{ij}^7 = (I_{1c} - I_{3c}) {}^w \phi'_{iL} {}^w \phi'_{jL}$$

$${}^v c_{ijk}^8 = {}^v \phi'_{iL} {}^w c_{jk}^7$$

$$I_t = I_B + \frac{\rho L^3}{3} + m_C L^2 + I_{3C}$$

$$m_t = m_B + \rho L + m_C$$

$${}^v A_{ij}^2 = {}^v G_{ij} + {}^v c_{ij}^3 + {}^v c_{ij}^4$$

$${}^w A_i^1 = {}^w F_i + {}^w c_i^4$$

$${}^v A_{ij}^2 = {}^v G_{ij} + {}^v c_{ij}^3 + {}^v c_{ij}^2$$

$${}^w A_{ij}^2 = {}^w G_{ij} + {}^w c_{ij}^3 + {}^w c_{ij}^2$$

$${}^v A_{ij}^3 = {}^v G_{ij} + {}^v c_{ij}^3$$

$${}^v A_{ijk}^4 = {}^v K_{ijk} - {}^v c_k^5 {}^v M_{ij} \quad {}^w A_{ijk}^4 = {}^w K_{ijk} - {}^v c_k^5 {}^w M_{ij} - {}^w c_{ij}^7 {}^v \phi'_{kL}$$

$${}^v A_{ij}^5 = {}^v A_{ij}^3 + {}^v N_{ij} - c^6 {}^v M_{ij} \quad {}^w A_{ij}^5 = {}^w N_{ij} - c^6 {}^w M_{ij} - {}^w c_{ij}^7$$

Annexe B

Variables de calcul

Cette annexe présente une série de valeurs numériques exprimant les fonctions de transferts en boucle ouverte en considérant pour sortie la position de l'extrémité, ce qui caractérise la présence des zéros à parties réelles positives. Dans une deuxième partie, on présente les valeurs numériques des pôles de l'observateur pour les trois cas étudiés dans le chapitre 4.

B.1 Fonctions de transfert

Dans cette section, les caractéristiques physiques des deux manipulateurs sont exposées

Les fonctions de transfert en boucle ouverte, des bras *AL22* et *AL10*, présentées dans cette annexe, sont calculées pour quatre modes vibratoires.

En considérant le mouvement en rotation, les fonctions de transfert des bras *AL10* et *AL22* sont respectivement:

$$H(s) = \frac{(s \pm 0.84j)(s \pm 9.95)(s - 27.48 \pm 14.83j)(s + 27.48 \pm 14.83j)}{s^2(s \pm j)(s \pm 5.31j)(s \pm 13.44j)(s \pm 32.49j)} \quad (\text{B.1})$$

| | terrestre AL22 | spatial AL10 |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| BASE | | |
| $m_B(kg)$ | 100 | 500 |
| $I_B(kg.m^2)$ | 0.1 | 100 |
| POUTRE | | |
| matériau | aluminium | aluminium |
| $L(m)$ | 2.2 | 10 |
| $r(m)$ | 6.4×10^{-3} | 20×10^{-3} |
| CHARGE | | |
| $m_c(kg)$ | 0.13 | 100 |
| $I_{1c}(kg.m^2)$ | 1.14×10^{-4} | 1270 |
| $I_{2c}(kg.m^2)$ | 1.14×10^{-4} | 1270 |
| $I_{3c}(kg.m^2)$ | 5×10^{-4} | 2525 |
| PARAM ÈTRE μ | | |
| $\mu_0(I_{2c}/\rho L^3)$ | 3.07×10^{-5} | 3.73×10^{-1} |
| $\mu_1(I_{3c}/\rho L^3)$ | 1.35×10^{-6} | 7.41×10^{-1} |
| $\mu_2(m_c/\rho L)$ | 1.74×10^{-1} | 2.93 |
| $\mu_3(I_B/\rho L^3)$ | 2.69×10^{-2} | 2.93×10^{-1} |
| $\mu_4(I_B/\rho L)$ | 1.30×10^2 | 1.47×10^1 |

Tableau B.1: Cas de simulation

$$H(s) = \frac{(s \pm 37.86)(s \pm 179.97)(s - 240.84 \pm 191.16j)(s + 240.84 \pm 191.16j)}{s^2(s \pm 31.83j)(s \pm 76.63j)(s \pm 187.22j)(s \pm 369.77j)} \quad (B.2)$$

Les fonctions de transfert pour le mouvement en translation pour les bras AL10 et AL22 sont respectivement:

$$\frac{d(s)}{F(s)} = \frac{(s \pm 0.44j)(s \pm 1.83j)(s \pm 11.87)(s \pm 31.93)}{s^2(s \pm 0.47j)(s \pm 1.89j)(s \pm 11.94j)(s \pm 32j)} \quad (B.3)$$

$$\frac{d(s)}{F(s)} = \frac{(s \pm 9.11j)(s \pm 62.31j)(s \pm 181.97j)(s \pm 365.79j)}{(s \pm 9.13j)(s \pm 62.36j)(s \pm 182.02j)(s \pm 365.84j)} \quad (B.4)$$

B.2 Pôles des observateurs

Dans cette section, les pôles de l'observateur, obtenus en faisant varier les covariances des bruits à l'entrée ainsi qu'aux sorties, sont présentés.

Les vecteurs suivants représentent les pôles de l'observateur du bras *AL22* obtenus pour, respectivement, une seule entrée au niveau de l'observateur, deux entrées et trois entrées.

$$[-1, -1.51 \pm 30.18j, -4.15 \pm 78.74j, -9.66 \pm 184.35j, -1.45 \pm 370.35, -761] \quad (\text{B.5})$$

$$[-1.04, -13.5 \pm 20j, -46.47 \pm 98.05, -86.05 \pm 213.04j, -142.89 \pm 389.44j, -761] \quad (\text{B.6})$$

$$[-1.01, -7.15, -8.61 \pm 31.44j, -54.99 \pm 69.51j, -129.72 \pm 144.35, -137.65 \pm 264.84j] \quad (\text{B.7})$$

Les pôles de l'observateur du bras *AL10* obtenus pour, respectivement, une seule entrée au niveau de l'observateur, deux entrées et trois entrées sont:

$$[-1, -1.85 \times 10^{-3} \pm 1.09j, -6.37 \times 10^{-3} \pm 5.31j, -1.25 \times 10^{-2} \pm 13.44j, -2.23 \times 10^{-2} \pm 32.49] \quad (\text{B.8})$$

$$[-1.45 \times 10^{-2} \pm 1.09j, -1.12 \pm 5.22j, -41.33 \pm 13.06, -28.81, -7.11 \pm 32.41j] \quad (\text{B.9})$$

$$[-1, -8.04 \times 10^{-2} \pm 1.09j, -2.68 \pm 6.56j, -8.33 \pm 19.87j, -31.63, -1 \times 10^4] \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Méthode des fermetures successives

C.1 Méthode des fermetures successives des boucles

Dans cette annexe, la méthode de fermetures successives des boucles [Schmitz 85] utilisée dans le chapitre 3 est présentée.

C.1.1 Définitions

Étant donné le modèle d'état du système:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{11}u \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La dynamique du compensateur est définie par le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_r &= \mathbf{A}\mathbf{z}_r + \mathbf{B}\mathbf{z} \\ u &= \mathbf{C}_r\mathbf{z}_r \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Pour le cas discuté dans ce mémoire, la matrice \mathbf{B} est constituée de trois vecteurs colonnes définissant les trois sortes de mesures prises au niveau du bras.

La fonction de transfert du compensateur en boucle ouverte est définie par:

$$K(s) = \mathbf{C}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas du compensateur LQG, les matrices \underline{A} , \underline{B} et C_r sont respectivement:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_{11} - B_{11} {}^vK_r - {}^vK_e {}^vD_{11} \\ \underline{B} &= {}^vK_e \\ C_r &= -{}^vK_r\end{aligned}\tag{C.4}$$

vK_e et vK_r sont respectivement le gain du filtre à variance minimale et le gain du régulateur avec retour de tous les états du modèle. L'ordre du compensateur r est égal à la dimension du vecteur d'état ${}^v\mathbf{x}$. La dimension du modèle en boucle fermée est alors égale à deux fois celle du système en boucle ouverte.

L'équation dynamique en boucle fermée dépend particulièrement de la nature des capteurs utilisés au niveau des sorties. On considère ici les trois sorties suivantes: position de l'extrémité du bras, vitesse angulaire à la base et l'effort à la base.

C.1.2 La méthode de fermetures successives

Dans le chapitre 4, on a introduit cette méthode, basée sur un calcul matriciel, pour étudier les performances du compensateur pour les trois sorties considérées.

On étudie dans cette partie le cas du compensateur où l'observateur est à trois entrées. Chaque fermeture de boucle est exécutée en définissant un nouveau modèle d'état du système en boucle ouverte. L'ordre du modèle d'état se trouve augmenter et est égale à la somme de l'ordre de l'observateur et celui du modèle en boucle ouverte.

Pour la fermeture de la boucle vitesse angulaire, le modèle d'état est alors défini par les matrices suivantes:

$$\underline{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & B_{11}C_r \\ \underline{0} & \underline{A} \end{bmatrix}\tag{C.5}$$

$$\underline{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{B}_\theta \end{bmatrix}\tag{C.6}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} D_{11\dot{\theta}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

D'après les calculs, les zéros de la fonction de transfert obtenu comprennent les zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte pour la sortie vitesse angulaire. Ses pôles sont les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi que les zéros du compensateur.

En considérant que la boucle de la vitesse angulaire est déjà fermée, on étudie dans ce paragraphe la fermeture de la boucle correspondante à l'effort à la base. Les matrices du modèle d'état obtenu sont alors définies par:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & B_{11}C_r \\ \underline{B}_{\dot{\theta}}D_{11\dot{\theta}} & \underline{A} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{B}_{\sigma 1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} D_{11\sigma 1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Les zéros de la fonction de transfert correspondante au modèle d'état obtenu comprennent les zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'effort à la base et les zéros de la fonction de transfert du compensateur. Les pôles du système obtenu sont ceux du système dynamique caractérisée par la boucle fermée de la vitesse angulaire.

Finalement, avec les deux boucles internes fermées, on considère la fermeture de la boucle de la position de l'extrémité. Le système est alors caractérisé par les matrices suivantes:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & B_{11}C_r \\ \underline{B}_{\dot{\theta}}D_{11\dot{\theta}} + \underline{B}_{\sigma 1}D_{11\sigma 1} & \underline{A} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{B}_{yt} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\underline{C} = \left[\underline{D}_{11yt} \quad \mathbf{0} \right] \quad (\text{C.13})$$

Les zéros de la fonction de transfert sont alors ceux de la fonction de transfert de la position à l'extrémité et les zéros de la fonction de transfert du compensateur qui a pour seule entrée la position de l'extrémité. Les pôles du système sont ceux du modèle dynamique calculée en considérant la fermeture des deux boucles internes.

C.2 Calcul de la force perturbatrice

L'introduction d'une force perturbatrice au niveau de l'extrémité du bras permet d'étudier les performances du contrôleur implanté sur le système.

Dans le chapitre 3, on a étudié la réponse du système face à une perturbation permanente à l'extrémité. En régime permanent et à la présence d'une force perturbatrice, on a le système suivant:

$$\begin{aligned} {}^v\mathbf{x}_{ss} &= -\underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\Gamma}_t F_t \\ {}^v\mathbf{y}_{ss} &= \underline{\mathbf{C}} {}^v\mathbf{x}_{ss} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

avec

$$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{A}}_{11} - K_p \underline{\mathbf{B}}_{11} \underline{\mathbf{C}}_{11p} - K_v \underline{\mathbf{B}}_{11} \underline{\mathbf{C}}_{11v}) \quad (\text{C.15})$$

l'état statique des sorties est directement déduit en calculant le vecteur ${}^v\mathbf{x}_{ss}$.

Lors de la simulation, on a essayé d'ajuster la force perturbatrice de façon à tenir compte du gain statique du modèle qui est fonction des paramètres du régulateur ainsi que du gain statique de la boucle ouverte.

Enfin la simulation de l'équation 3.7 est effectuée en considérant les conditions initiales découlant de l'équation C.15 et pour la force perturbatrice déjà ajustée. À l'instant de relachement, la force $\underline{\Gamma}_t F_t$ est alors égale à zéro.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00228253 9

CA
UI
19
B