UNIVERSITE DE MONTREAL

ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE CAVITE PARTITIONNEE

par

Ridha BEN YEDDER

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

MEMOIRE PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION

DU GRADE DE MAITRE ES SCIENCES APPLIQUEES (M.Sc.A.)

octobre 1989

© Ridha Ben Yedder 1989

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Canadian Theses Service
Service des thèses canadiennes

Ottawa, Canada
K1A 0N4

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-58164-6

Canada

UNIVERSITE DE MONTREAL

ECOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé:

ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE
DANS UNE CAVITE PARTITIONNEE

présenté par: Ridha BEN YEDDER

en vue de l'obtention du grade de: M.Sc.A

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. Luc Robillard, D.Sc., Président

M. Michel Prud'homme, Ph.D.

M. Ertugrul Bilgen, Ph.D.

Sommaire

La convection naturelle dans des espaces clos a été largement étudiée durant les deux dernières décennies. Le problème puise son intérêt des nombreuses applications que peut avoir la cavité rectangulaire, des applications comme les capteurs solaires, les bâtiments, les boîtes abritant des composantes électriques et électroniques en passant par les systèmes passifs de climatisation.

Le problème que nous nous proposons d'étudier fait partie de la dernière de ces catégories: il s'agit de bâtir un modèle numérique qui simule un mur Trombe composé sujet à différentes conditions aux frontières. Nous avons opté, afin de résoudre ce problème, pour un algorithme numérique appelé SIMPLER. C'est une méthode assez flexible qui a l'avantage de donner de bons résultats même pour un maillage grossier ce qui constitue un évident avantage vu les coûts de plus en plus croissants des simulations numériques sur ordinateur.

Dans le but de s'assurer du comportement du code développé, nous l'avons testé sur des problèmes de référence: les résultats obtenus se comparent très bien avec ceux présentés dans la littérature.

Enfin, nous avons mené une étude extensive sur le problème mur Trombe composé. Tout d'abord, il a fallu séparer les paramètres du problème en deux catégories: l'une regroupant les paramètres géométriques tels les dimensions de la cavité, les dimensions des partitions et leurs positions, l'autre regroupant les paramètres thermiques qui sont l'écart de température et le nombre de *Rayleigh* basé sur le flux q. Nous avons essayé de voir l'influence de ces paramètres sur

le taux de transfert de chaleur vers la pièce considéré comme l'énergie utile du système. En utilisant une technique suggérée par Patankar, nous avons pu incorporer l'effet du mur isolant situé à l'intérieur de la cavité, ce qui à notre connaissance n'a jamais été inclus auparavant.

Les résultats obtenus prouvent qu'en variant les dimensions de la cavité, nous pouvons améliorer le rendement du système. D'autre part, il s'est avéré que le flux q ainsi que l'écart de température ΔT influencent l'allure de l'écoulement et par conséquent le transfert de chaleur vers la pièce. La compilation de ces résultats nous a permis de dégager les valeurs optimales de certains paramètres du problème.

Abstract

Free convection in enclosures is a topic of great interest. In order to have a better understanding of heat transfer induced flows inside cavities, various studies have been published in the past two decades. This is because enclosures are central components in many engineering systems such as solar collectors, building elements, electronic components and passive solar systems.

Using an algorithm called SIMPLER, first conceived by Patankar, we developed a numerical model to simulate a composite Trombe wall system subject to appropriate boundary conditions. This algorithm is well adapted to our problem and it gives realistic results even for coarse grid size, a very attractive feature if we consider the increasing cost of numerical computation.

We have carried out an extensive study on the composite Trombe wall problem including the effect of various geometric parameters such as the aspect ratio, the position of the partitions and their dimensions. In order to explain the phenomena involved in the heat transfer to the dwelling (useful energy), we studied the effects of temperature difference between the outer and inner walls and of the *Rayleigh* number, which is the driving force in this problem. We considered also the conduction in the insulating wall.

The results are reduced in terms of velocity and temperature fields and the *Nusselt* number as a function of various parameters. They indicate that the heat flux q and the temperature difference are two important parameters and that various geometric parameters affect the heat transfer to the dwelling. The

optimal values of some of these parameters are obtained, which may be used in the design of composite Trombe wall systems.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. E. Bilgen mon directeur de recherche pour le soutien qu'il m'a donné tout au long de l'accomplissement de ce travail. Je remercie cordialement tous les membres du *groupe thermique*: Aziz Hammache, Mohammed Hasnaoui, Zan Gong Du et surtout Sylvain Rheault qui m'a été d'une grande aide en ce qui conçerne les détails informatiques. Je les remercie tous pour leur amitié et leur chaleureuse présence qui fait de ce groupe un sain et stimulant milieu de travail.

Je remercie aussi le gouvernement tunisien pour le support financier qu'il m'a accordé et sans lequel je n'aurais pu entamer mes recherches. Et plus particulièrement, ma famille pour les encouragements que ni la distance ni le temps ne peuvent amoindrir.

Table des matières

Sommaire iv

Abstract vi

Remerciements viii

Liste des Figures xii

Liste des Tableaux xiv

Liste des symboles xv

1 Introduction 1

1.1 Types de mur Trombe 1

1.2 Recherche sur le canal vertical 4

1.3 Recherche sur le système mur Trombe 5

1.4 Formulation du problème 7

2 Développement et méthode utilisée 9

2.1 Définition du problème 9

2.2 Utilité et applications 11

2.3 Modèle mathématique 11

2.4 Conditions aux frontières 12

2.5 Adimensionnalisation des équations 13

2.6 Discrétisation des équations 14

2.6.1 Discrétisation de l'équation de mouvement en X 14

2.6.2 Choix du schéma d'interpolation 17

2.6.3 Discrétisation de l'équation de mouvement en Y 18

2.6.4 Discrétisation de l'équation d'énergie 19

2.7 Conditions aux frontières 20

2.7.1 Frontières avec vitesse nulle 20

2.7.2 Frontières avec température spécifiée 21

2.7.3 Frontières avec flux de température nul 22

2.8 Résolution du système: l'algorithme SIMPLER 22

2.9 Considérations numériques 25

3 Validation du programme **27**

3.1 Cas de la cavité carrée 27

3.2 Cas d'une cavité rectangulaire 28

3.3 Cas d'une cavité carrée avec flux 29

3.4 Conclusion 31

4 Résultats et discussion **32**

4.1 Influence des paramètres géométriques 32

4.1.1 Rapport de forme A 32

4.1.2 Largeur du canal S_1 35

4.1.3 Ouverture de ventilation l 37

4.1.4 Hauteur de l'ouverture de ventilation h 40

4.2 Influence des paramètres thermiques 42

4.2.1 Flux q (Exprimé en terme de Ra) 42

4.2.2 Ecart de température ΔT 48

4.3 Conclusion 50

5 Conclusion générale **51**

6 Bibliographie **52**

Liste des Figures

1.1 Schéma du système mur Trombe 2

1.2 Mur Trombe composé 3

1.3 Problème du canal vertical 4

1.4 Description du problème 7

2.1 Modèle mathématique 10

2.2 Volume de contrôle et disposition des noeuds 14

2.3 Maillage décalé pour les vitesses U et V 15

2.4 Vitesse aux frontières 21

3.1 Problème de la cavité carrée 29

3.2 Profil de vitesse et de température pour le problème de la cavité à flux spécifié 31

4.1 Variation de θ_{max} en fonction de Ra et du rapport de forme A pour (a) $\Delta T = 10^oC$ (b) $\Delta T = -10^oC$ 33

4.2 Variation de Nu_2 en fonction du rapport de forme A 34

4.3 Profil de V pour des largeurs de canal différentes 36

4.4 Nu_2 en fonction de la largeur du canal, $Ra = 5 \times 10^6$ 37

4.5 Lignes de courant et isothermes pour $D = \frac{7}{20}$ et pour $D = \frac{1}{5}$, $Ra = 5 \times 10^6$ et $\Delta T = 10^oC$. 38

4.6 Effet de la largeur de l'ouverture de ventilation sur le flux transmis au mur massif, pour $Ra = 5 \times 10^6$ 39

4.7 Effet de l'ouverture de ventilation sur le profil de vitesse horizontale U pour (a)$\Delta T = -10^oC$ et (b)$\Delta T = 10^oC$ 40

4.8 Lignes de courant et isothermes pour (a)$B = 1$ et (b)$B = 1/2$, $Ra = 5 \times 10^6$ et $\Delta T = -10^oC$. 41

4.9 Taux de transfert de chaleur vers le mur en fonction de h, la largeur de l'extrémité du panneau isolant 42

4.10 Lignes de courant pour (a)$h = 0$ et (b)$h = H/40$, $A = 8$ 43

4.11 Profil de V en fonction de Ra à la mi-hauteur de la cavité pour $\Delta T = 10^oC$ et $A = 8$ 44

4.12 Influence conjointe de Ra et de ΔT sur le transfert de chaleur (a)vers la pièce et (b)à travers le vitrage pour $A = 8$ 45

4.13 Lignes de courant et isothermes pour (a)$Ra = 5 \times 10^6$ et (b)$Ra = 2.5 \times 10^7$, tracés à $\Delta T = 10^oC$ 46

4.14 Lignes de courant et isothermes pour (a)$Ra = 5 \times 10^7$ et (b)$Ra = 2.5 \times 10^8$, tracés à $\Delta T = 10^oC$ 47

4.15 Profil de Vitesse à la mi-hauteur de la cavité, $A = 10$ et $Ra = 5 \times 10^6$ 48

4.16 Profil de T à la mi-hauteur de la cavité, $A = 10$ et $Ra = 5 \times 10^6$ 49

Liste des Tableaux

3.1 Résultats comparatifs pour une cavité carrée avec un maillage de $21 \times 21, Ra = 10^4$ 28

3.2 Tableau comparatif de Nu pour une cavité rectangulaire 30

3.3 Tableau comparatif de Nu pour une cavité carrée avec flux imposé 30

Liste des symboles

A : rapport de forme $= H/L$

B : paramètre géométrique $= l/S_1$

C : paramètre géométrique $= h/L$

D : paramètre géométrique $= S_1/L$

C_p : Coefficient de chaleur spécifique, $J/kg \cdot K$

g : accélération de la pesanteur, m/s^2

H : hauteur de la cavité, m

k : conductivité thermique, $W/m^2 \cdot K$

K_r : rapport de la conductivité thermique $= k_{wall}/k_{fluid}$

L : largeur de la cavité, m

Nu : nombre de *Nusselt*

p : pression, Pa

P : pression adimensionnelle

Pr : nombre de *Prandtl*

q : flux de chaleur, W/m^2

Ra : nombre de *Rayleigh*

S : largeur de la cheminée, m

T : température, K

ΔT : écart de temperature entre les murs extérieurs $= T_2 - T_1$

u, v : fluid velocity in x and y direction, m/s

U, V : vitesses adimensionnelle

x, y : coordonnées cartésiennes

X, Y : coordonnées adimensionnelles

α : diffusivité thermique du fluide, m^2/s

β : coefficient d'expansion thermique du fluide, $1/K$

θ : température adimensionnelle

μ : viscosité dynamique , $kg/m \cdot s$

ν : viscosité cinématique, m^2/s

ρ : densité du fluide, kg/m^3

Indices

1 : mur de gauche

2 : mur de droite

e,E : Interface et noeud *est*

n,N : Interface et noeud *nord*

s,S : Interface et noeud *sud*

w,W : Interface et noeud *ouest*

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire globalement les diverses dispositions du mur Trombe, nom qui désigne un système passif inventé par les français Trombe et Michel. Ensuite, nous présenterons les deux principales branches de recherches dérivées du système mur Trombe. Enfin, nous définissons globalement le problème que nous nous sommes proposés de résoudre.

1.1 Types de mur Trombe

Depuis les années 60, période à laquelle les chercheurs du C.N.R.S. ont élaboré le premier modèle du mur Trombe (Fig. 1.1), ce système n'a cessé de s'améliorer. C'est ainsi que nous trouvons les configurations suivantes:

- ajouter un mur isolant amovible dressé devant le vitrage et qu'on abaisse durant les cycles à grande perte thermique.

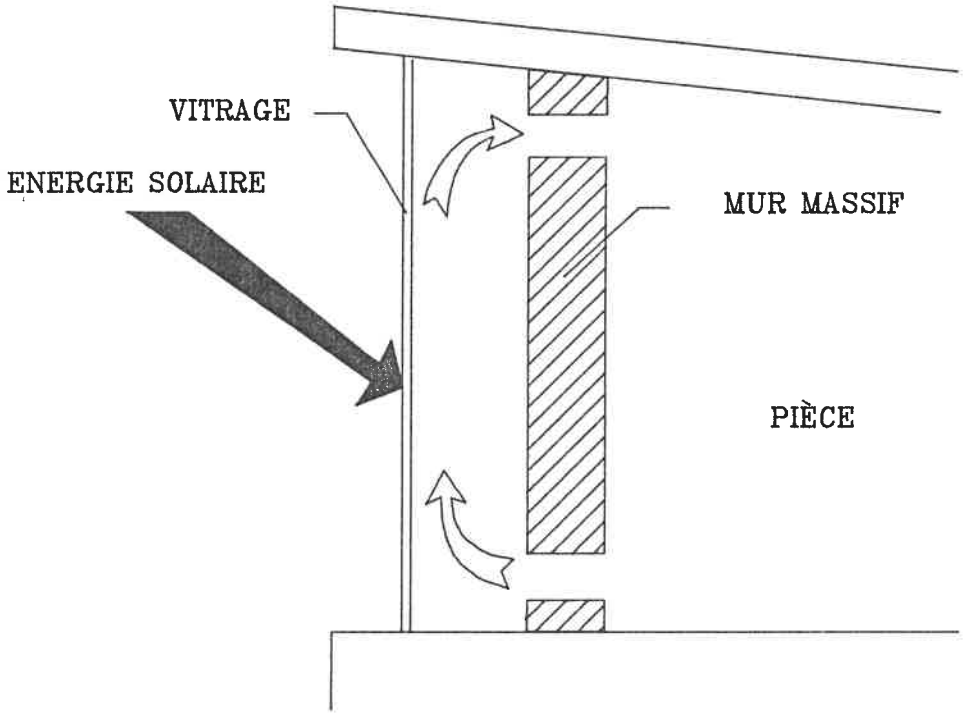


Figure 1.1: Schéma du système mur Trombe

- remplir le canal à l'aide de panneaux isolants, dans ce cas le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction.
- séparer le mur du vitrage à l'aide de rideaux faits d'un matériau isolant.

La configuration dont dérive notre problème a été étudiée par Zrikem et Bilgen (1987) (Fig 1.2). Ils ont montré que ce système est plus efficace qu'un mur Trombe non-convectif. On s'est demandé alors si le fait d'intervertir la position du mur et du panneau isolant n'entraînerait pas une amélioration dans le rendement du système, le mur massif devenant ainsi en contact direct avec la pièce à chauffer. C'est donc sous cette forme que nous allons étudier le mur

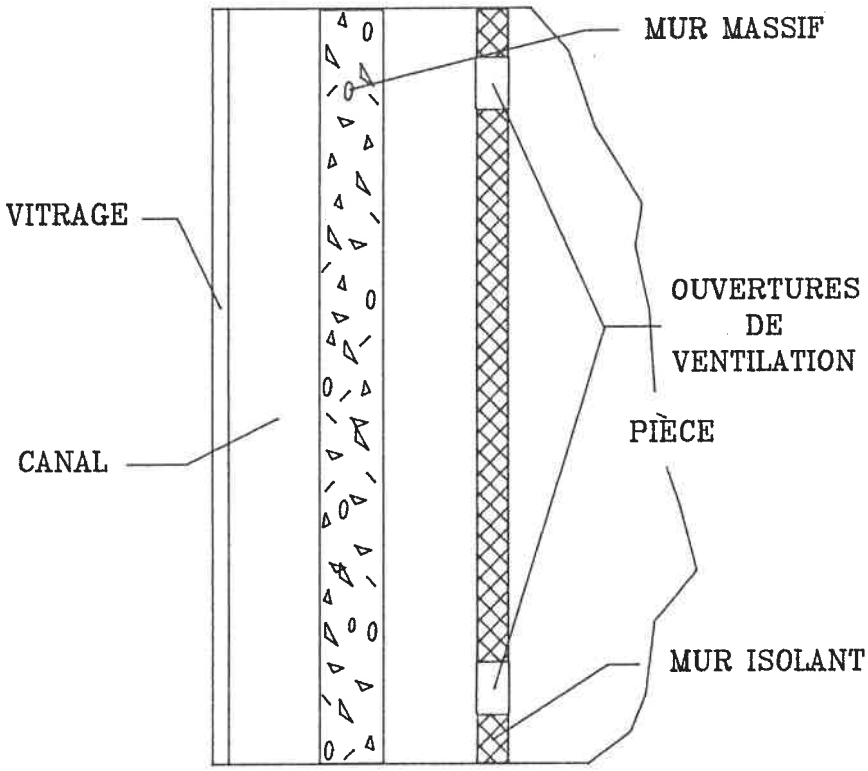


Figure 1.2: Mur Trombe composé

Trombe composé d'autant plus qu'à notre connaissance, cette configuration n'a jamais été abordée dans le passé.

En effet, la recherche en convection naturelle dans le mur Trombe peut se classer en deux catégories: la première traite de l'écoulement entre deux plaques parallèles et constitue une approximation de l'écoulement qui se fait entre le vitrage et le mur. Le deuxième champs de recherche s'intéresse plus spécifiquement au système complet du mur Trombe. Il s'agit alors d'inclure l'effet de bout dans le canal ainsi que l'interaction entre le canal et la pièce

avoisinante. Ce sont ces deux champs de recherches que nous allons survoler dans les paragraphes qui suivent.

1.2 Recherche sur le canal vertical

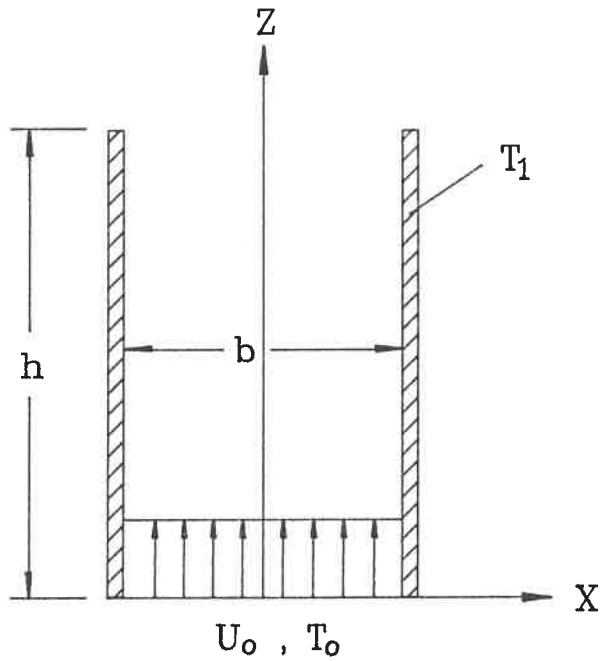


Figure 1.3: Problème du canal vertical

Les premiers travaux conçernant l'écoulement dans un canal vertical remontent aux débuts des années 1940 lorsque W. Elenbaas (1942) publia ses recherches sur la convection naturelle entre deux plaques parallèles ayant une température supérieure à l'ambiante (Fig 1.3). Elenbaas était en quête d'une relation du type:

$$Nu = f(Gr.Pr, b/h); \tag{1.1}$$

Il a réalisé une étude expérimentale extensive puis il a résolu analytiquement les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie pour des plaques infiniment longues dans la direction Y; l'expérience concordait très bien avec la

théorie.

Vingt ans après, Bodoia et Osterle (1962) réalisent la première étude numérique de la convection naturelle dans un canal vertical. Ils étaient intéressés de déterminer les paramètres de l'écoulement et de transfert de chaleur en fonction de la hauteur du canal. L'hypothèse que l'écoulement est complètement développé à la sortie, ce qui est loin d'être vérifié lorsque la hauteur du canal est faible, a été abandonnée. Leur procédure numérique était originale et devrait par la suite alimenter plusieurs recherches dans le domaine. Cette procédure consistait à évaluer les paramétres U, V, θ et P en avançant ligne par ligne le long du canal.

En utilisant cette technique, T. Aihara (1973) conclut que la perte de charge due à l'accélération du fluide à l'entrée doit être incluse dans ce genre d'étude et que les conditions de Bodoia et Osterle semblent ne s'appliquer que pour $Pr > 10$.

1.3 Recherche sur le système mur Trombe

Vers les années 1960, Trombe et Michel ont développé le système qui porta leur nom. C'est un système passif qui utilise l'énergie solaire pour le chauffage de bâtiments. Plusieurs recherches se sont greffées autour de ce sujet dont nous pouvons citer ceux d'Akbari et Borgers (1978), d'A. Akbarzadeh et al.(1981), de Zrikem et Bilgen (1987).

H. Akbari et T. R. Borgers ont étendu les travaux d'Aihara pour les appliquer au mur Trombe et ont exprimé leurs résultats sous forme de corrélations ce

qui simplifie énormément le design de tels systèmes. Dans une deuxième étape, il résolvent le cas turbulent du même problème (Akbari et Borgers, (1983)). Ceci est un pas de plus vers la compréhension des phénomènes d'échange dans le mur Trombe car, et plusieurs chercheurs le reconnaissent, le mur Trombe opère en régime turbulent pendant une bonne partie de son cycle opérationnel.

Pendant ce temps, A. Akbarzadeh et al.(1981) expérimentent en Australie un système mur Trombe où la largeur du canal et des orifices de ventilation entrent en ligne de compte. E. Bilgen et al. poursuivent à l'école polytechnique de Montréal des recherches dans le but d'améliorer l'efficacité du mur Trombe. C'est ainsi que E. Bilgen et M. Chaaban (1981) se proposent d'étudier l'effet de l'insertion d'une partition isolante séparant le vitrage du mur massif. Zrikem et Bilgen (1989) étudient le système mur Trombe composé en incluant le rayonnement solaire dans le problème et conclurent que cette disposition améliore l'efficacité du système: l'ajout du mur isolant a augmenté la résistance thermique globale du système d'où une meilleure performance lors des cycles diurnes ou ceux à ciel couvert, cycles durant lesquels il y a d'importantes pertes de la pièce à chauffer vers l'extérieur.

En 1985, J. Ormiston et al. résolvent numériquement le problème de la convection naturelle dans un système complet incluant la pièce et arrivent à la conclusion que les phénomènes d'échange sont régis par deux nombres de Rayleigh, Ra_I et Ra_E, caractérisant respectivement la convection dans le canal et dans la pièce. La procédure numérique est complexe d'autant plus qu'ils ont utilisé les équations de Navier-Stokes et d'énergie en coordonnées générales. Le domaine de solution exclut cependant le mur de séparation, celui-ci étant considéré comme une simple frontière du système.

1.4 Formulation du problème

Notre sujet de recherche portera sur la convection naturelle engendrée par le rayonnement solaire. Une partie des rayons du soleil est emprisonnée par le vitrage et chauffera l'air du canal, une autre partie sera absorbée par le mur, celui-ci va être refroidi par l'air à un taux que nous considérons constant. L'air du canal ainsi chauffé montera à cause de sa densité plus faible pour passer par les trous de ventilation. De l'autre côté du mur isolant, il cèdera de la chaleur au mur massif avant de rentrer par la base du canal. Cette disposition,

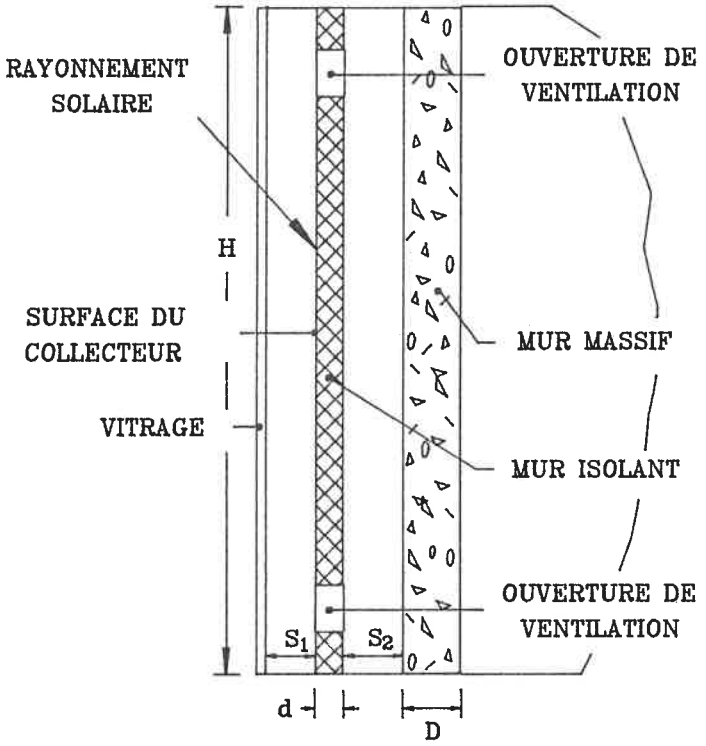


Figure 1.4: Description du problème

qui est une variante du mur Trombe composé, sera étudiée numériquement et nous essayerons de dégager les relations qui existent entre les paramètres de l'écoulement U, V, T et les variables du problème qui sont:

- La hauteur du système que nous exprimerons en terme de rapport de forme A.
- Les dimensions des ouvertures de ventilation.
- La largeur du canal formé par le vitrage et l'isolant.
- Le flux de chaleur spécifié sur la paroi du mur isolant et fonction du nombre de *Rayleigh*.
- Les températures des parois extérieures de la cavité formée par le système mur Trombe.

Tous ces paramètres seront étudiés en intégrant numériquement les équations de continuité, de mouvement et d'énergie en coordonnées cartésiennes. L'écoulement sera considéré:

- bidimensionnel, nous supposerons à cet effet que l'on solutionne le problème dans un plan situé au milieu de la pièce de sorte que nous pouvons, sans erreur appréciable, négliger les effets de bout.
- laminaire, puisque l'écoulement dans un mur Trombe est essentiellement laminaire durant la majeure partie de son fonctionnement.
- permanent, car la solution est obtenue lorsque les phénomènes d'échange à l'intérieur du domaine deviennent indépendants du temps.

La solution numérique est obtenue en utilisant l'algorithme SIMPLER que nous détaillerons plus loin.

Chapitre 2

Développement et méthode utilisée

Le problème de la convection naturelle dans les canaux verticaux, comme nous l'avons vu, n'est pas nouveau. La nouveauté en fait consiste à intégrer l'effet du mur et de la cavité avoisinante. La prospection de ces effets permet une meilleure compréhension des mécanismes d'échange dans le mur Trombe et surtout la quantification le taux de transfert de chaleur vers la pièce.

2.1 Définition du problème

Nous nous proposons de résoudre le problème de convection naturelle dans un mur Trombe composé. Il s'agit globalement de résoudre, en utilisant une méthode numérique, les équations de Navier-Stokes et d'énergie dans une cavité partitionnée de forme rectangulaire. Le domaine de solution est présenté à la Fig. 2.1. Ce domaine, qui est dérivé du schéma physique du problème (Fig. 1.4), est formé par l'espace entre le vitrage et le mur massif et est subdivisé en deux régions par l'insertion d'un mur isolant. En plus de l'utiliser comme isolant pour réduire les pertes thermiques vers l'extérieur, ce mur sert à capter les rayons

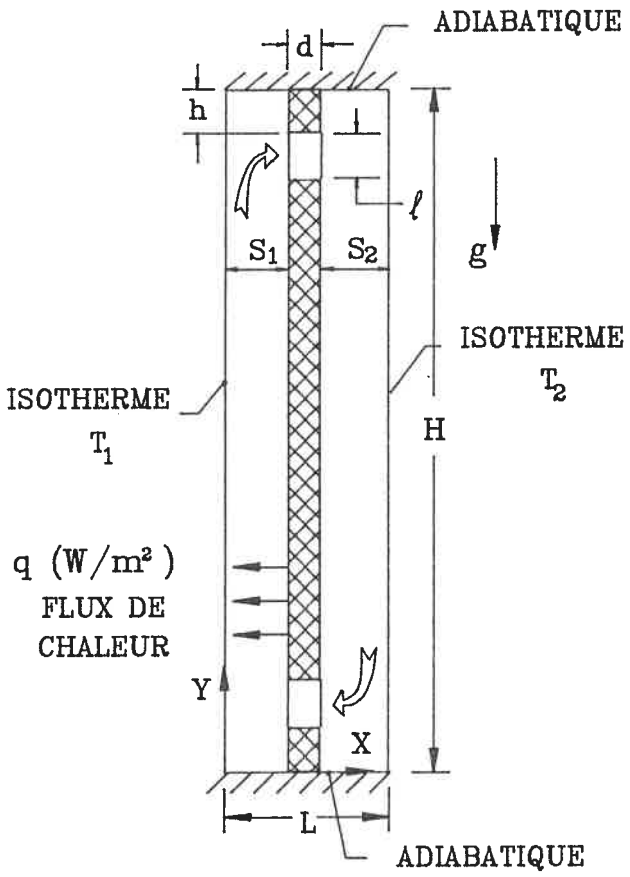


Figure 2.1: Modèle mathématique

solaires et à les réfléchir vers l'intérieur du canal.

La présente étude prend en considération la conduction dans le mur isolant ainsi que la largeur du canal et la largeur des ouvertures de ventilation. Nous essayerons de dégager l'influence de tels paramètres sur le transfert de chaleur vers le mur séparant la pièce du système mur Trombe.

2.2 Utilité et applications

Le mur Trombe est un système passif qui permet d'utiliser efficacement l'énergie solaire sans devoir amener de grands changements dans la structure des bâtiments actuels. Certains chercheurs (Bilgen et Chaaban (1982), Akbarzadeh et al. (1981)) ont d'ailleurs émis l'idée de bâtir des unités préfabriquées faciles à installer.

C'est dans le but d'élargir le champ de connaissance sur le mur Trombe que nous nous sommes lancés dans ce travail. Cependant, la solution de notre problème s'applique, outre le mur Trombe puisque nous utilisons les dimensions et les caractéristiques propres à ce système, à certains types de fenêtres à double paroi, à certains dispositifs et équipements électriques refroidis par convection naturelle et, en général, à tous les systèmes physiques dont la disposition est similaire à celle de la Fig. 2.1 et où la convection libre joue un rôle primordial.

2.3 Modèle mathématique

Pour modéliser le problème, nous supposerons les hypothèses suivantes:

- l'air confiné dans l'espace clos est considéré comme un fluide incompressible.
- l'écoulement est bidimensionnel et permanent.
- l'approximation de Boussinesq, qui stipule que la densité ρ est constante partout sauf dans le terme d'Archimède où $\rho = \rho_\infty[1 - \beta(T - T_\infty)]$, est utilisée.

En appliquant ces hypothèses, les équations intégrales de Navier-Stokes et de l'énergie se réduisent à:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v - g[1 - \beta(T - T_1)] \tag{2.3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\nabla^2 T \tag{2.4}$$

2.4 Conditions aux frontières

Le système d'équations développé plus haut est un système elliptique d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux frontières qu'il faut choisir telles qu'elles reflètent assez fidèlement les conditions réelles du système. C'est ainsi que nous considérons que:

- les parois horizontales sont adiabatiques; aucun transfert de chaleur ne se fait à travers ces parois:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_y = 0$$

- les parois verticales extérieures sont isothermes et ont une température T_1 et T_2 respectivement pour la paroi de gauche et celle de droite.

- la paroi intérieure qui fait face au vitrage délivre la chaleur à un taux constant:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_x = \frac{q}{k}$$

?

$\frac{\partial T}{\partial x}$

- les deux composantes de la vitesse sont nulles sur toutes les parois solides. C'est dire que nous appliquons la condition d'adhérence pour la composante tangentielle et la condition d'imperméabilité pour la composante normale:

$$u = v = 0$$

Pour des raisons de généralité et aussi de commodité, nous allons développer ces équations sous une forme adimensionnelle.

2.5 Adimensionnalisation des équations

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes:

$$X = \frac{x}{L} \qquad Y = \frac{y}{L} \tag{2.5}$$

$$U = \frac{uL}{\nu} \qquad V = \frac{vL}{\nu} \tag{2.6}$$

$$P = \frac{p + \rho g y}{\rho (v/L)^2} \qquad \theta = \frac{T - T_1}{\frac{Lq}{k}} \tag{2.7}$$

nous obtenons:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{2.8}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \nabla^2 U \tag{2.9}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \nabla^2 V + \frac{Ra}{Pr}\theta \tag{2.10}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr}\nabla^2\theta \tag{2.11}$$

2.6 Discrétisation des équations

2.6.1 Discrétisation de l'équation de mouvement en X

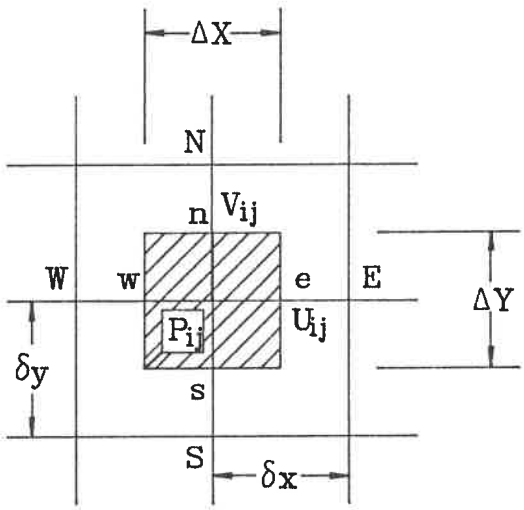


Figure 2.2: Volume de contrôle et disposition des noeuds

L'équation (2.9) sans le terme de pression s'écrit:

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} - \nabla^2 U = 0 \tag{2.12}$$

Multiplions l'équation de continuité par U et ajoutons-la à (2.12):

$$\frac{\partial}{\partial X}(U.U - \frac{\partial U}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(U.V - \frac{\partial U}{\partial Y}) = 0 \tag{2.13}$$

Posons

$$J_x = U.U - \frac{\partial U}{\partial X} \tag{2.14}$$

$$J_y = U.V - \frac{\partial U}{\partial Y} \tag{2.15}$$

de façon que nous obtenions, pour l'équation (2.13), la forme condensée suivante:

$$\frac{\partial J_x}{\partial X} + \frac{\partial J_y}{\partial Y} = 0 \tag{2.16}$$

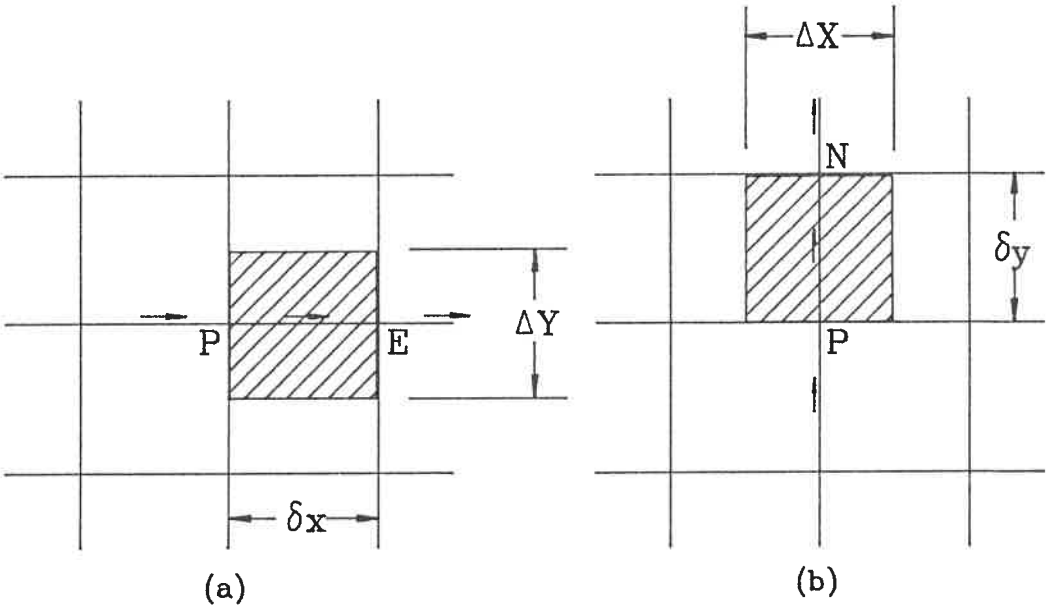


Figure 2.3: Maillage décalé pour les vitesses U et V

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle de la Fig. 2.3(a) est effectuée en remplaçant l'intégrale de volume par une intégrale de surface et nous ne faisons là qu'appliquer le théorème de Gauss.

$$\int_V \frac{\partial J_x}{\partial X} dV + \int_V \frac{\partial J_y}{\partial Y} dV = 0 \tag{2.17}$$

$$\int_e J_x dY - \int_w J_x dY + \int_n J_y dX - \int_s J_y dX = 0 \tag{2.18}$$

$$J_e - J_w + J_n - J_s = 0 \tag{2.19}$$

Nous ajoutons maintenant le terme que nous avons retranché pour obtenir l'équation (2.13), ce terme n'est que l'intégrale de la continuité sur l'élément de volume (Patankar (1980)):

$$(J_e - F_e U_P) - (J_w - F_w U_P) + (J_n - F_n U_P) - (J_s - F_s U_P) = 0 \tag{2.20}$$

ou encore, en écrivant que pour la face e:

$$J_e - F_e U_p = a_E (U_E - U_P) \tag{2.21}$$

nous obtenons l'équation linéarisée du quantité de mouvement selon X:

$$a_P U_P = a_E U_E + a_W U_W + a_N U_N + a_S U_S + b \tag{2.22}$$

Notons, avant d'aller plus loin, que l'égalité spécifiée en (2.21) demande un certain développement que nous omettons ici pour alléger le texte; disons simplement que cette expression traduit le fait que la valeur du flux global à la frontière e est une moyenne pondérée des vitesses qui se situent en amont et en aval de la frontière en question.

Les coefficients a_i obéissent aux relations suivantes:

$$a_E = D_e A(|Pe|) + max(-F_e, 0)$$

$$a_W = D_w A(|Pe|) + max(F_w, 0)$$

$$a_N = D_n A(|Pe|) + max(-F_n, 0)$$

$$a_S = D_s A(|Pe|) + max(F_s, 0)$$

où D et F sont respectivement la diffusivité et le débit massique pour chacune des faces du volume. Ces quantités sont définies comme suit:

$$D_e = \frac{\Delta Y}{(\Delta X)_e} \qquad F_e = U_e \Delta Y \tag{2.23}$$

$$D_w = \frac{\Delta Y}{(\Delta X)_w} \qquad F_w = U_w \Delta Y \tag{2.24}$$

$$D_n = \frac{\delta x}{(\delta y)_n} \qquad F_n = V_n \delta x \tag{2.25}$$

$$D_s = \frac{\delta x}{(\delta y)_s} \qquad F_s = V_s \delta x \tag{2.26}$$

alors que le nombre de Peclet est défini par:

$$Pe \equiv \frac{\rho U L}{\Gamma} = \frac{F}{D} \tag{2.27}$$

Enfin $A(|Pe|)$ est une fonction d'interpolation que nous discuterons dans le paragraphe suivant.

2.6.2 Choix du schéma d'interpolation

Le schéma d'interpolation $A(|Pe|)$ revêtit une importance capitale pour la convergence de la solution. Cette fonction sert à évaluer les coefficients a_i aux interfaces et plusieurs schémas ont été proposés.

a) Schéma aux différences centrées

Pour ce schéma, la fonction $A(|Pe|)$ est donnée par:

$$A(|Pe|) = 1 - 0.5|Pe| \tag{2.28}$$

Il a été montré (Patankar 1980) que ce schéma peut induire des résultats non-physiques dès que les vitesses dépassent un certain seuil. En effet, lorsque le

flux de convection dépasse le flux de diffusion, les coefficients a_i peuvent devenir négatifs et conduire à une solution éronnée. Pour remédier à ce problème, deux solutions se présentent:

- Utiliser un maillage plus fin de façon à réduire le nombre de Peclet.

- Utiliser une fonction d'interpolation plus adaptée.

Etant donné que nous voulons développer un algorithme capable de donner une solution acceptable même en utilisant un maillage grossier, la deuxième solution paraît convenir le mieux à nos besoins.

b) Schéma hybride

Ce schéma, donné par:

$$A(|Pe|) = max(0, 1 - 0.5|Pe|) \tag{2.29}$$

est une assez bonne approximation du schéma exponentiel qui a l'inconvénient d'être trop coûteux à manipuler. Le schéma hybride est une fonction qui enveloppe la courbe exponentielle d'où sa précision.

D'autres fonctions d'interpolation existent mais nous retenons pour la présente étude ce dernier schéma.

2.6.3 Discrétisation de l'équation de mouvement en Y

La discrétisation de l'équation de mouvement dans la direction Y est analogue à celle dans la direction X, nous devrons toutefois noter les différences

qui surgissent à la suite de l'utilisation du maillage décalé.

$$a_P V_P = a_E V_E + a_W V_W + a_N V_N + a_S V_S + b \tag{2.30}$$

$$D_e = \frac{\delta y}{(\delta x)_e} \qquad F_e = U_e \delta y \tag{2.31}$$

$$D_w = \frac{\delta y}{(\delta x)_w} \qquad F_w = U_w \delta y \tag{2.32}$$

$$D_n = \frac{\Delta X}{(\Delta Y)_n} \qquad F_n = V_n \Delta X \tag{2.33}$$

$$D_s = \frac{\Delta X}{(\Delta Y)_s} \qquad F_s = V_s \Delta X \tag{2.34}$$

Comme le montre la Fig. 2.3(b), les valeurs de diffusivité et de convection ne sont pas calculés de la même façon. Cependant, les coefficients de l'équation (2.30) sont calculés en utilisant les équations développées plus haut pour la direction X. Notons aussi la présence du terme source b défini par:

$$b = \frac{Ra}{Pr} \frac{\theta_P + \theta_N}{2} \Delta X \delta y \tag{2.35}$$

2.6.4 Discrétisation de l'équation d'énergie

Les volumes de contrôle dans l'équation d'énergie sont bâtis autour des noeuds principaux, la discrétisation de cette dernière équation est donc plus facile à développer. Nous notons la présence du terme $1/Pr$ dans les termes de diffusion. L'équation linéarisée garde toujours la même forme:

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + a_N \theta_N + a_S \theta_S + b \tag{2.36}$$

où les coeffecients a_i sont développés de la même manière mais en utilisant les termes de diffusivité et de convection suivants:

$$D_e = \frac{1}{Pr} \frac{\Delta Y}{(\delta x)_e} \qquad F_e = U_P \Delta Y \tag{2.37}$$

$$D_w = \frac{1}{Pr}\frac{\Delta Y}{(\delta x)_w} \qquad F_w = U_W \delta y \tag{2.38}$$

$$D_n = \frac{1}{Pr}\frac{\Delta X}{(\delta y)_n} \qquad F_n = V_P \Delta X \tag{2.39}$$

$$D_s = \frac{1}{Pr}\frac{\Delta X}{(\delta y)_s} \qquad F_s = V_S \Delta X \tag{2.40}$$

Le terme source est nul partout sauf à la surface qui délivre un flux constant; nous avons le long de cette surface:

$$b = \frac{\Delta Y}{Pr} \tag{2.41}$$

2.7 Conditions aux frontières

En convection naturelle, nous rencontrons essentiellement deux types de conditions aux frontières: des frontières où la fonction est spécifiée et des frontières où seulement le taux de variation de la fonction est imposé. Selon que l'on rencontre l'une ou l'autre de ces deux conditions, l'équation linéarisée prendra une forme plus ou moins simple. Nous allons développer, en différences finies, les conditions aux frontières que nous nous sommes imposées.

2.7.1 Frontières avec vitesse nulle

Vu que nous utilisons un maillage décalé, la frontière physique du système se superposera avec le volume de contrôle sur un coté et le coupera sur le côté perpendiculaire (voir Fig. 2.4).

Dans le second cas, la vitesse est automatiquement donnée et est nulle. Nous avons donc:

$$U_P = 0 \Rightarrow a_{nb} = 0; \quad a_P = 1 \tag{2.42}$$

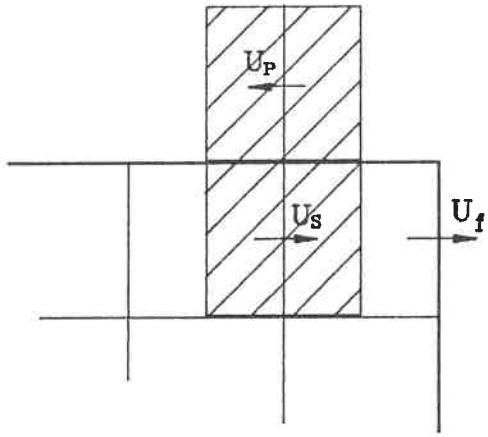


Figure 2.4: Vitesse aux frontières

Dans le premier, nous devons définir un volume de contrôle supplémentaire où l'on spécifie une vitesse opposée à celle qui se situe immédiatement à l'intérieur du domaine.

$$U_f = \frac{U_S + U_P}{2} = 0$$

$$\Rightarrow U_P = -U_S$$

$$\Rightarrow a_P = 1; \quad a_S = -1; \quad a_N = a_W = a_E = 0$$

Un développement analogue s'appliquera pour la vitesse V lorsqu'elle doit être spécifiée sur la frontière.

2.7.2 Frontières avec température spécifiée

Les conditions aux frontières où la température est spécifiée se calculent de la même façon que la vitesse lorsque celle-ci ne coïncide pas avec la frontière

physique du système, nous avons alors:

$$\theta_f = \frac{\theta_W + \theta_P}{2} = 0$$
$$\Rightarrow a_P = 1; \quad a_W = -1; \quad a_N = a_W = a_E = 0; \quad b = 2\theta_f$$

2.7.3 Frontières avec flux de température nul

Les frontières horizontales sont considérées adiabatiques, de ce fait aucun transfert de chaleur ne se fait à travers ces parois. les températures sont alors égales de part et d'autre de la frontière et ce résultat peut être obtenu en discrétisant cette condition:

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{\theta_W - \theta_P}{\delta x} = 0$$
$$\Rightarrow a_P = 1; \quad a_W = 1; \quad a_N = a_S = a_E = b = 0$$

2.8 Résolution du système: l'algorithme SIMPLER

Jusqu'ici, nous avons développé la forme discrète des équations de Navier-Stokes sans tenir compte du gradient de pression. Cependant, il est évident que la résolution du système donnera la solution exacte dès que nous y injecterons le bon champ de pression. L'introduction du terme de pression donnera une equation discrétisée du type:

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + (P_E - P_P) A_e \tag{2.43}$$

où $(P_E - P_P)A_e$ est la force de pression qui agit sur le volume de contrôle de section A_e. L'équation (2.43) peut s'écrire sous la forme plus utile suivante:

$$U_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb}}{a_e} + d_e (P_E - P_P) \tag{2.44}$$

où $d_e = A_e/a_e$

Posons

$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb}}{a_e} \tag{2.45}$$

de façon que (2.44) donne:

$$U_e = \hat{U}_e + d_e(P_E - P_P) \tag{2.46}$$

Des équations semblables peuvent être développées pour les différentes faces du volume ainsi que pour l'équation de mouvement dans la direction Y. En incluant ces quantités dans l'équation de continuité intégrée sur le volume de contrôle:

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \tag{2.47}$$

Nous obtenons la forme discrétisée de la pression:

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \tag{2.48}$$

où:

$$a_E = d_e \Delta Y$$

$$a_W = d_w \Delta X$$

$$a_N = d_n \Delta Y$$

$$a_S = d_s \Delta X$$

$$b = (\hat{U}_w - \hat{U}_e)\Delta Y + (\hat{V}_s - \hat{V}_n)\Delta X$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les lignes générales de l'algorithme SIMPLER:

1. Estimer un champ de vitesse et de température; ces champs peuvent être obtenus à partir de l'éxpérience déja acquise dans le domaine ou tout simplement en posant les vitesses nulles partout et initialiser la température à partir des valeurs obtenues dans le cas d'une conduction pure.

2. Ce champ de vitesse donnera les vitesses approximées notées $\hat{U}, \hat{V}$ en appliquant l'équation (2.45) pour chaque noeud du domaine.

3. Résoudre l'équation de pression (2.48) pour obtenir une solution approximative de P que nous notons P^*.

4. Utiliser ce champ de pression pour résoudre le système d'équations linéaires formé de l'équation (2.43) écrite pour chaque noeud du domaine et obtenir ainsi U^*, V^*.

5. Résoudre l'équation de pression mais en utilisant cette fois-ci les vitesses calculées à l'étape précédente: U^*, V^*, le champ de pression obtenu, noté P', est appelé la correction de pression.

6. Calculer le champ de vitesse final U, V en substituant $\Delta P'$ dans l'équation (2.43).

7. Calculer le champ de température en résolvant le système linéarisé formé par l'équation (2.36).

8. Répéter jusqu'à obtenir la convergence. Nous considérons cette convergence atteinte lorsque la sommation du terme source b obtenu à l'étape 5 est suffisamment petite pour que son calcul n'introduise pas de changement appréciable dans la solution de l'équation de pression.

$$\sum_{i=1}^{imax} \sum_{j=1}^{jmax} b_{ij} < \epsilon$$

2.9 Considérations numériques

La résolution des équations linéarisées (2.43) et (2.48) fait intervenir le schéma numérique TDMA. Cet algorithme utilise le fait que les équations discrétisées forment un système tridiagonal pour les résoudre d'une façon itérative. Pour augmenter la précision de ce schéma, nous balayerons le domaine de solution de haut en bas puis de droite à gauche. La convergence du système à l'itération n est contrôlée par le critère suivant:

$$\|r\|^n \leq \gamma \|r\|^o$$

où $r = [\sum(a_i\phi_i - a_p\phi_p)^2]^{1/2}$ et γ est un facteur de réduction dont la valeur optimale telle que suggérée par J.P. Van Doormaal et G.B. Raithby (1984) est comprise entre 0.05 et 0.25. A titre indicatif, nous avons calculé le temps d'éxécution pour 20 itérations à $Ra = 5 \times 10^6$; il est de 12 secondes CPU sur un IBM 3090 opérant à 17 *mips*.

Enfin, il est intéressant de noter qu'à l'aide d'une astuce proposée par Patankar (1978) et mise en application par plusieurs chercheurs (Jetli et al. (1986), T.M. Nguyen (1989) etc.), nous avons pu tenir compte de la conduction dans le mur sans toutefois modifier le schéma numérique. Il s'agit d'imposer aux noeuds situés dans la région solide une forte valeur de viscosité ($\nu \approx 10^{30}$) ceci induit une vitesse presque nulle dans cette région ($U = V = 10^{-30}$). Par

conséquent, les équations (2.8) à (2.11) reviennent à résoudre l'équation de conduction de Laplace:

$$\nabla^2\theta = 0$$

Chapitre 3

Validation du programme

Un programme non testé est aussi inutile qu'un appareil de mesure non calibré. Ainsi et dans le but d'obtenir les résultats les plus fiables possibles, nous avons résolu certains problèmes dont la solution existe dans la littérature. Ce sont des problèmes classiques qui ont fait l'objet de recherches pendant de nombreuses années et peuvent être considérés comme référence. Dans ce qui suit nous présentons trois de ces cas que nous discuterons brièvement.

3.1 Cas de la cavité carrée

Ce sujet a fait l'objet de plusieurs recherches durant les deux dernières décennies. La publication de De Vahl Davis et I. P. Jones (1984) regroupe les travaux d'une trentaine de chercheurs à travers le monde et c'est à partir de cette publication que nous avons tiré le tableau comparatif 3.1.

Pour résoudre le problème, nous avons adopté les conventions de De Vahl Davis et al., conventions que nous résumons dans la Fig 3.1. Quoique nous avons utilisé un maillage relativement grossier (21×21 contre 41×41 utilisés

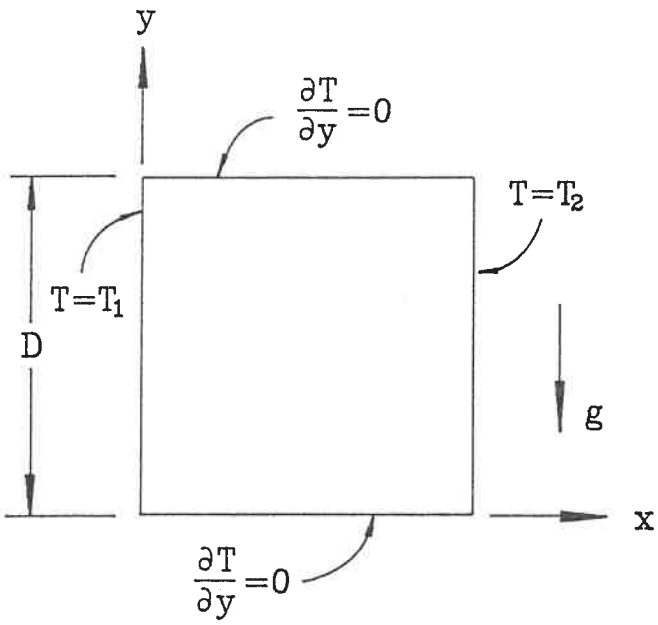
	présente étude	D. Vahl Davis et al.
Nu	2.200	2.238
ψ_{mid}	5.109	5.071
U_{max}	16.170	16.178
Y	0.833	0.823
V_{max}	19.400	19.617
X	0.119	0.119

Table 3.1: Résultats comparatifs pour une cavité carrée avec un maillage de $21 \times 21, Ra = 10^4$

par De Vahl Davis et al.), les résultats que nous avons obtenus se comparent très bien avec ceux de référence. L'erreur relative maximale ne dépasse pas 1.5%.

3.2 Cas d'une cavité rectangulaire

La résolution de ce cas est basée sur les travaux de I. P. Jones (1979). Dans cette publication, il présente les résultats qu'il a obtenus numériquement et les compare à ceux obtenus expérimentalement par Duxbury. Il s'avère ici que nos résultats se situent assez près de ceux de Jones mais généralement loin des résultats expérimentaux de Duxbury. Ceci est probablement dû au fait qu'il est difficile d'obtenir expérimentalement une paroi parfaitement adiabatique en



$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

$$X,\ Y\ =\ x/D,\ y/D$$

$$U,\ V\ =\ uD/k,\ vD/k$$

$$Pr = \nu/k$$

$$Ra = g\beta\Delta T D^3/k\nu$$

Figure 3.1: Problème de la cavité carrée

haut et en bas de la cavité. Le maillage que nous avons utilisé est de 21×31.

3.3 Cas d'une cavité carrée avec flux

Nous nous penchons maintenant sur le cas peu exploité d'une cavité où l'on spécifie un flux de chaleur constant sur le côté. En dépit des nombreuses applications que peut avoir ce système, peu de chercheurs se sont intéressés à ce cas. A. Bejan (1984) étudie le cas d'une cavité rectangulaire avec un flux de chaleur constant spécifié sur les parois verticales. Dans cette étude, il utilise l'eau comme fluide ($Pr = 7$) et compare les résultats qu'il obtient par une simulation numérique avec une étude théorique basée sur l'analyse de la couche limite. Ses résultats sont résumés dans le tableau 3.3 où figurent aussi nos propres résultats.

Ra	Présente étude	Jones	Duxbury
	$A = 5$		
$2.19\ 10^3$	1.12	1.25	1.40
$1.67\ 10^4$	2.07	2.26	2.10
$1.36\ 10^5$	3.87	3.80	4.30
	$A = 10$		
$2.14\ 10^3$	1.01	1.10	1.10
$1.71\ 10^4$	1.69	1.88	2.00

Table 3.2: Tableau comparatif de Nu pour une cavité rectangulaire

Nous avons tracé sur les Figs 3.2(a) et 3.2(b) le profil de vitesse et de température dans la couche limite qui s'est développée à proximité de la paroi chaude. Ces figures sont présentées à titre indicatif et les différences qu'on y décèle par rapport aux profils présentés par Bejan sont probablement dues au maillage plus fin utilisé par ce dernier.

	Bejan		
Ra	Num.	Theo.	Présente étude
$3.5\ 10^5$	4.61	5.80	5.17
$3.5\ 10^6$	7.94	9.68	9.41

Table 3.3: Tableau comparatif de Nu pour une cavité carrée avec flux imposé

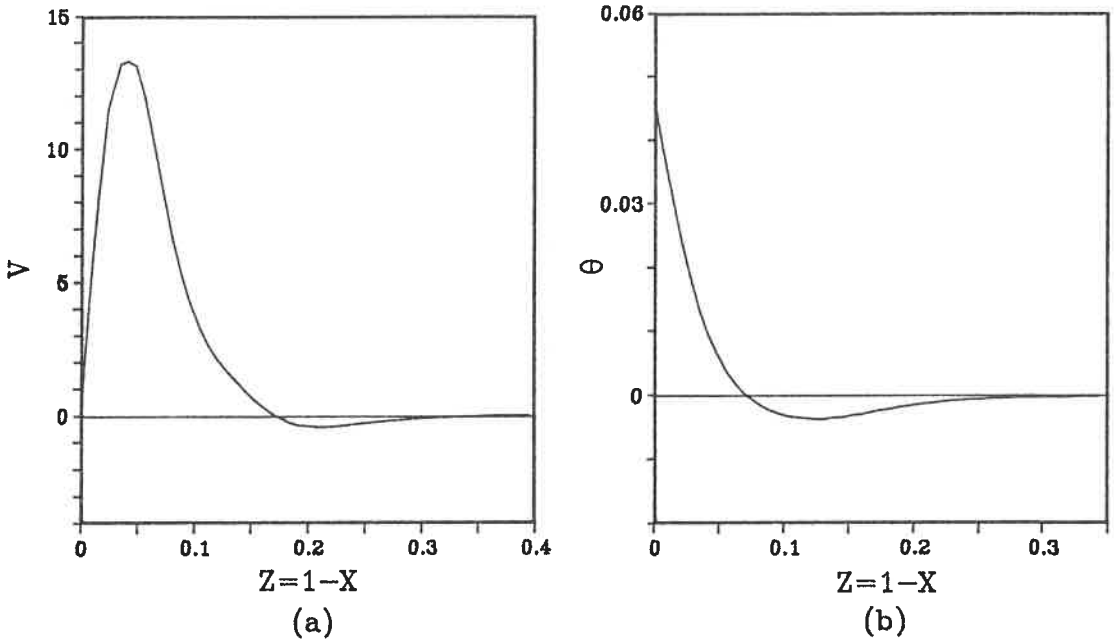


Figure 3.2: Profil de vitesse et de température pour le problème de la cavité à flux spécifié

3.4 Conclusion

Il apparaît, à la lumière de ces expériences numériques, que le programme que nous avons développé peut être utilisé avec assurance. En effet, les résultats qu'il génère rencontrent en général ceux qui figurent dans la littérature. Seuls les résultats obtenus pour la cavité rectangulaire diffèrent sensiblement avec les résultats de Jones, le maillage utilisé par celui-ci étant de loin supérieur au nôtre.

Chapitre 4

Résultats et discussion

Dans ce chapitre, nous allons présenter et discuter les résultats obtenus à la suite de simulations numériques effectuées sur le mur Trombe. Les variables du problème étant nombreuses, nous nous sommes bornés à l'étude des paramètres les plus influents dans ce genre de configuration. Ces paramètres sont regroupés en deux grandes classes: les paramètres d'ordre géométriques dans lesquels nous trouvons le rapport de forme, la largeur des canaux, les ouvertures de ventilation etc. et les paramètres thermiques qui sont la température des surfaces extérieures et le flux, exprimé en terme de nombre de *Rayleigh*, spécifié sur la face du mur isolant. L'influence de ces paramètres est exprimée en terme du nombre de *Nusselt*, du profil des vitesses, de la température maximale obtenue sur la face chaude, du champ de température et de la fonction de courant.

4.1 Influence des paramètres géométriques

4.1.1 Rapport de forme A

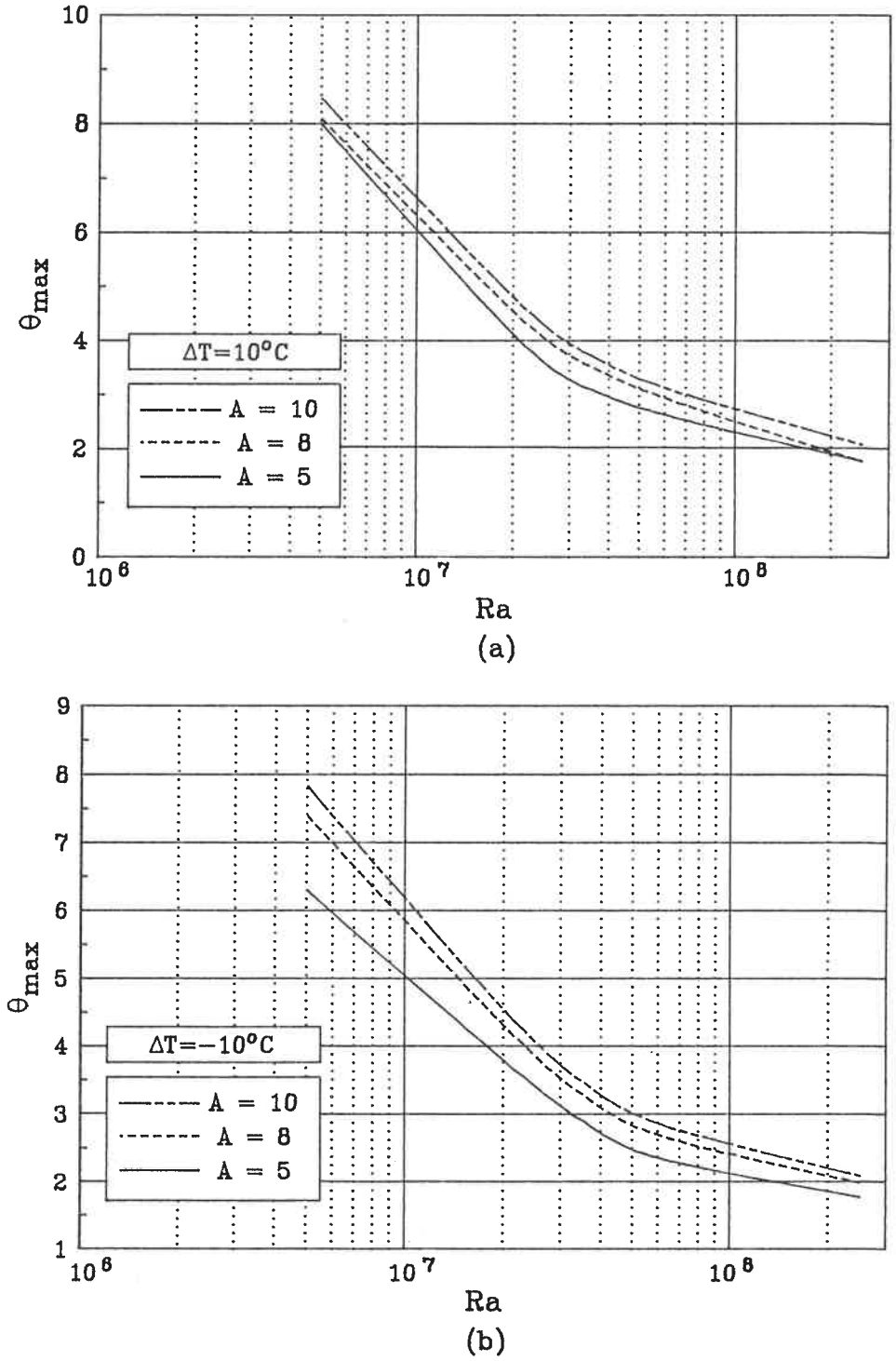


Figure 4.1: Variation de θ_{max} en fonction de Ra et du rapport de forme A pour (a) $\Delta T = 10^oC$ (b) $\Delta T = -10^oC$

La température maximale dans le système est généralement située à l'éxtrémité supérieure de la plaque chauffée car c'est là que le fluide chaud circule.

A la Fig. 4.1, nous avons tracé la température maximale en fonction de Ra pour des rapports de forme variant de 5 à 10. Notons que la température est exprimée sous sa forme adimensionnelle et que l'allure décroissante des courbes n'est qu'apparente; θ étant inversement proportionelle au flux q. Pour un flux

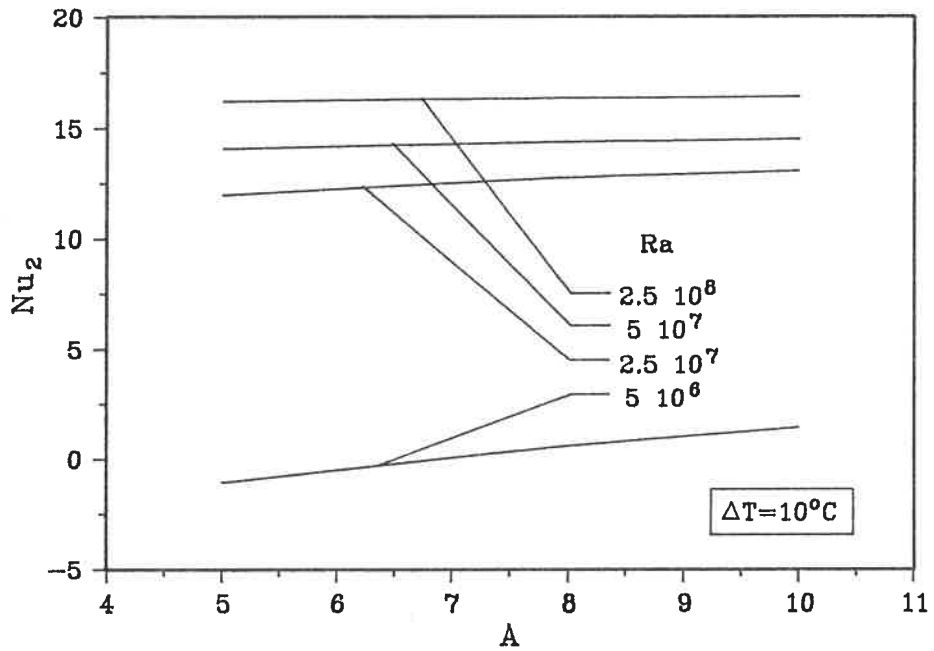


Figure 4.2: Variation de Nu_2 en fonction du rapport de forme A

donné, c'est à dire pour un nombre de *Rayleigh* donné, cette température croît avec le rapport de forme à cause non seulement du fait que la surface réceptrice augmente en aire mais aussi parce que le coin supérieur gauche va être situé plus haut dans la cavité et sera donc soumis à un courant plus chaud. Cet effet est moins prononcé lorsque le flux est plus important (voir Fig 4.1(a) pour $Ra > 2 \times 10^7$) car la circulation étant plus forte il y a une meilleure ventilation

de la plaque chaude.

Quand le côté chaud est celui de droite ($\Delta T = 10^oC$), nous observons à la Fig. 4.1(b) que la variation de θ_{max} est légèrement différente. L'effet du rapport de forme A est plus prononcé pour des valeurs médianes de Ra ($2 \times 10^7 \leq Ra \leq 4 \times 10^7$).

La Figure 4.2 montre que le transfert de chaleur vers le mur massif croît légèrement avec le rapport de forme, ceci est dû d'une part à l'écoulement plus efficace qui a lieu dans une cavité plus longue et d'autre part, à l'augmentation de la surface chauffée comme nous l'avons déja souligné. Nous notons une chute importante du nombre de *Nusselt* qui devient négatif par endroits: lorsque le flux de chaleur délivré par la surface est trop faible pour induire un transfert vers la paroi chaude.

4.1.2 Largeur du canal S_1

Nous notons à la Fig. 4.3, qui présente le profil de la vitesse V pour des largeurs de canal différentes, que ce profil possède la même allure: la vitesse est dirigée vers le bas le long de la paroi froide, s'annulle au milieu du canal puis devient ascendante au voisinage de la paroi chaude. Cependant, l'amplitude va en diminuant lorsqu'on diminue la largeur du canal; l'effet des murs formant le canal est d'autant plus important que la distance qui les séparent est réduite. Le profil de V est similaire à celui obtenu pour une cavité rectangulaire où le côté chaud correspond à la paroi de droite.

A la Fig. 4.4, nous présentons l'influence de S_1 sur le transfert de chaleur

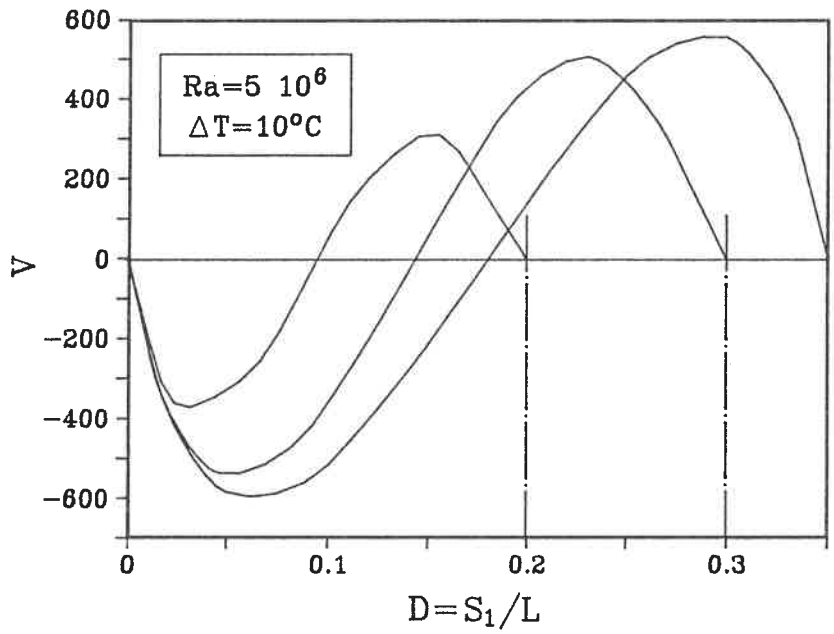


Figure 4.3: Profil de V pour des largeurs de canal différentes

vers la pièce. Exprimé en fonction de Nu_2, ce transfert montre une amélioration accrue à mesure que le canal de gauche devient plus large; ceci est dû au fait que la paroi sur laquelle nous avons spécifié le flux se déplace vers le mur de la pièce et par conséquent cette amélioration dans le taux de transfert de chaleur résulte essentiellement de la conduction à travers le panneau isolant. Cette situation n'est plus aussi évidente pour $\Delta T = 10^oC$ où l'on remarque l'existence d'un certain optimum pour lequel le transfert de chaleur vers la pièce est maximum. A partir de cette valeur, Nu décroit légèrement à cause de l'augmentation du volume d'air à chauffer qui entraînerait une baisse de la température moyenne de l'air dans le canal.

Le tracé des isothermes et des lignes de courant (figure 4.5) montre qu'en

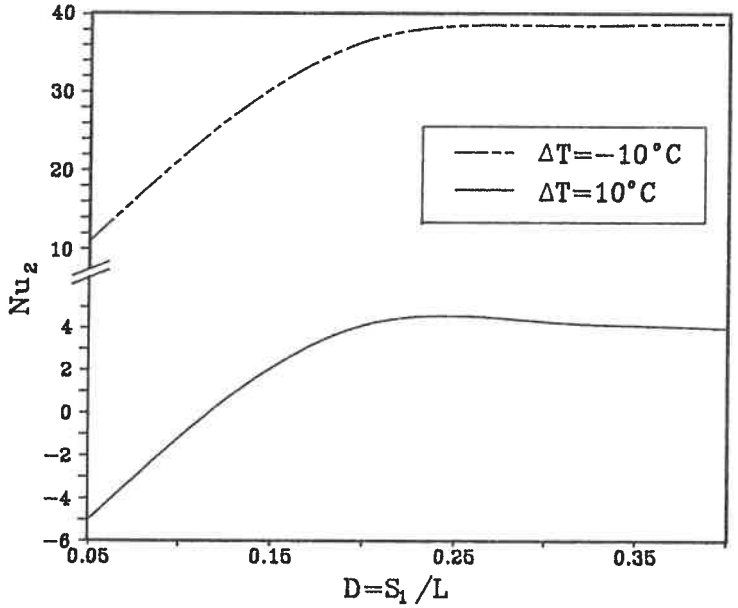


Figure 4.4: Nu_2 en fonction de la largeur du canal, $Ra = 5 \times 10^6$

augmentant la largeur du canal, il y a un risque d'isoler la cellule de gauche et réduire ainsi le transfert d'énergie vers la pièce (mur de droite). le gradient de température est quasi linéaire pour $D = 1/5$ alors qu'on observe une certaine stratification, due à la formation de noyau stagnant, lorsque le canal devient plus large ($D = 7/20$).

4.1.3 Ouverture de ventilation l

L'effet de la largeur des ouvertures de ventilation est illustré à la figure 4.6 et l'on note que le pourcentage du flux délivré à la pièce et qui représente l'énergie utile du système augmente en fonction de l lorsque $\Delta T = -10^oC$ mais diminue pour $\Delta T = 10^oC$. Ce qui paraît étrange à priori peut s'expliquer en

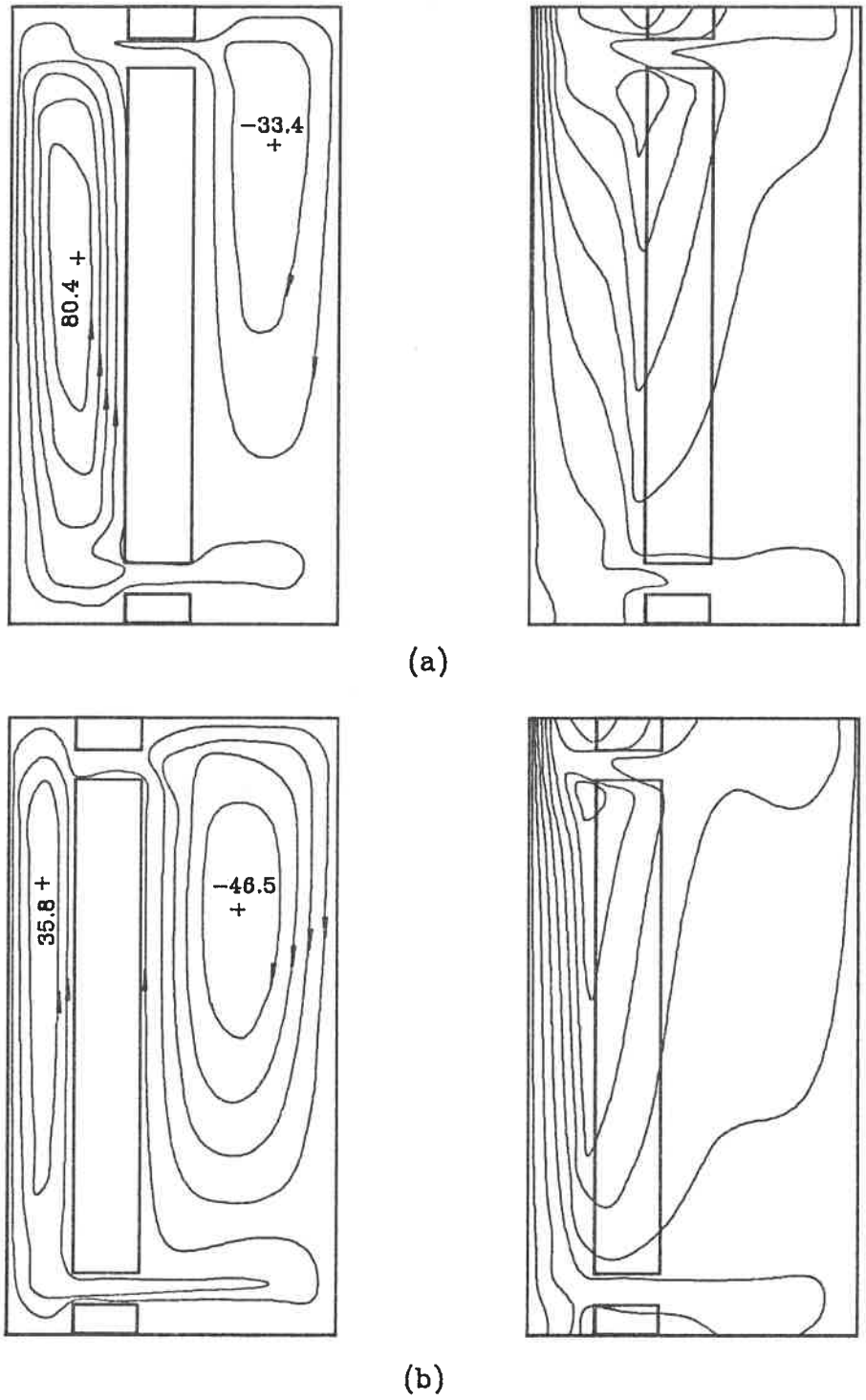


Figure 4.5: Lignes de courant et isothermes pour $D = \frac{7}{20}$ et pour $D = \frac{1}{5}$, $Ra = 5 \times 10^6$ et $\Delta T = 10^oC$.

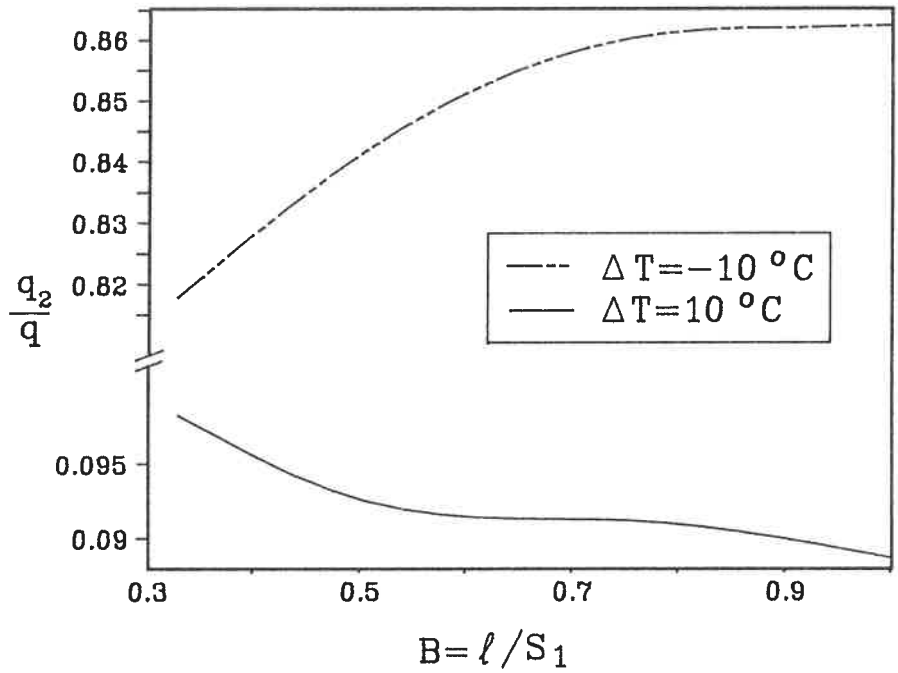


Figure 4.6: Effet de la largeur de l'ouverture de ventilation sur le flux transmis au mur massif, pour $Ra = 5 \times 10^6$

examinant le profil de la vitesse U présenté à la Fig. 4.7: contrairement au cas $\Delta T = -10°C$, le débit se développe essentiellement dans une seule direction, de la droite vers la gauche comme l'indique le signe négatif de Q, coupant ainsi le transfert de chaleur vers la pièce.

Les figures 4.8 montrent que réduire la largeur des ouvertures affecte un peu la cellule qui s'est formée dans la cavité de droite. Diminuant cette largeur au dessus de $l = S_1/2$ n'induit pas de modifications majeures: le profil de vitesse garde d'ailleurs la même allure quoique le pic est plus élevé. Les isothermes sont pratiquement les mêmes pour les différentes largeurs de ventilation et on note une surchauffe à la base du mur isolant.

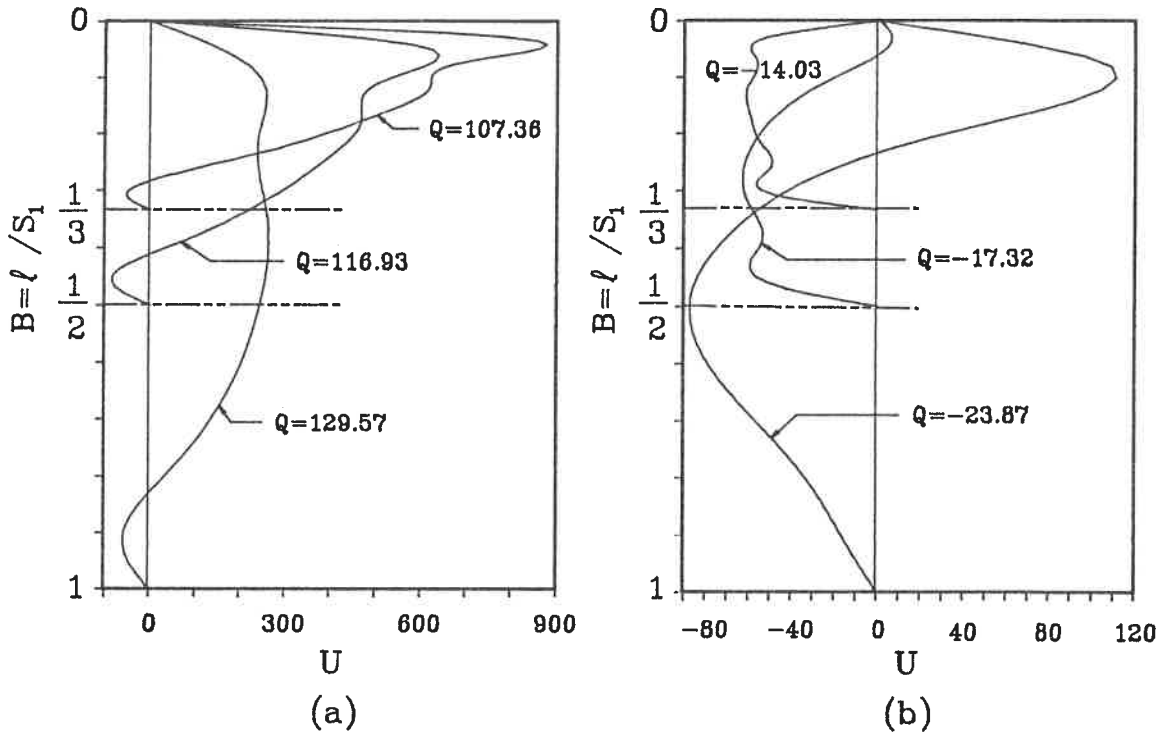
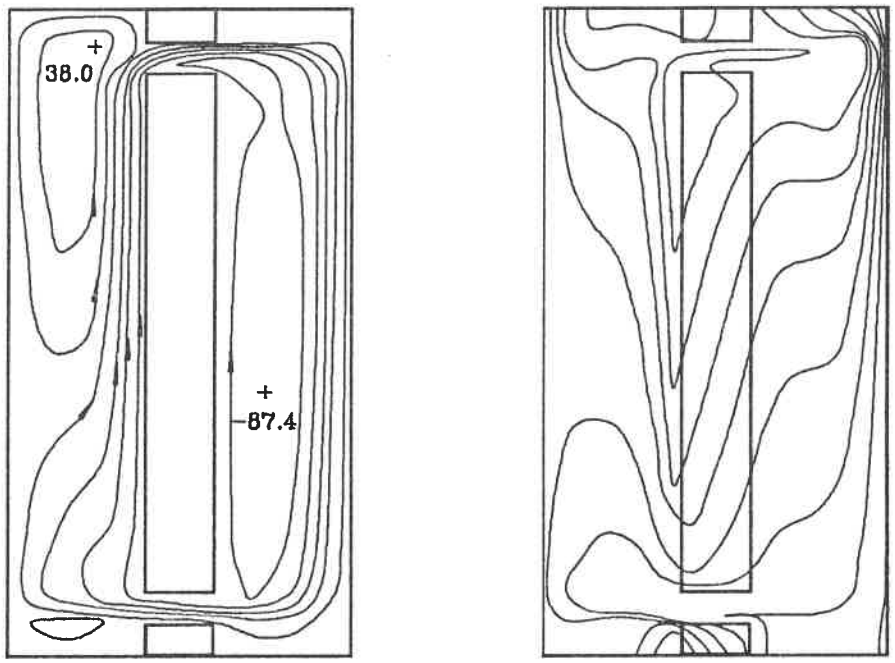


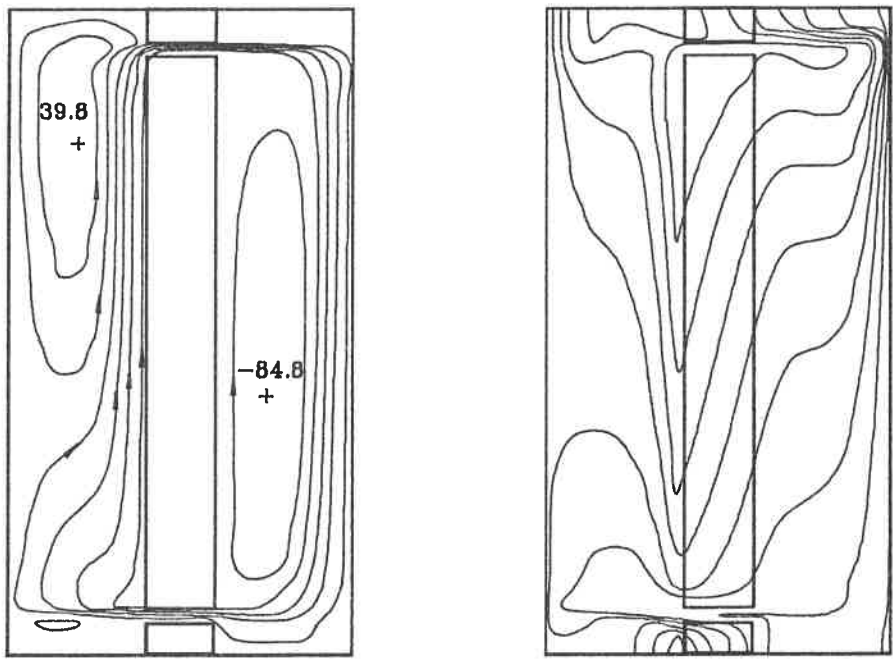
Figure 4.7: Effet de l'ouverture de ventilation sur le profil de vitesse horizontale U pour (a)$\Delta T = -10^oC$ et (b)$\Delta T = 10^oC$

4.1.4 Hauteur de l'ouverture de ventilation h

Augmenter h, ce qui revient à rapprocher les ouvertures de ventilation du milieu de la cavité, a pour effet de diminuer le transfert de chaleur vers la pièce comme il est illustré à la Fig. 4.9 pour $\Delta T = -10^oC$. Les lignes de courant présentées à la Fig. 4.10 visualisent mieux cette tendance et nous notons que l'augmentation de h fait que les deux cellules séparées se rejoignent pour ne former qu'une seule cellule indiquant une circulation plus prononcée du fluide d'où un meilleur transfert thermique. Nous avons aussi remarqué que l'ajout d'un obstacle en haut et en bas de la cavité favorise la circulation du fluide dans



(a)



(b)

Figure 4.8: Lignes de courant et isothermes pour (a)$B = 1$ et (b)$B = 1/2$, $Ra = 5 \times 10^6$ et $\Delta T = -10^oC$.

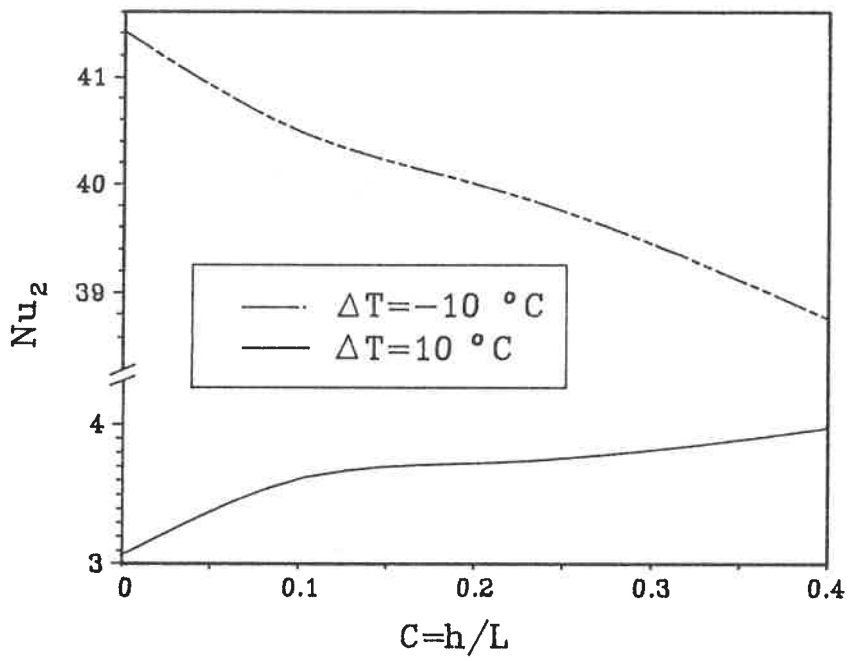


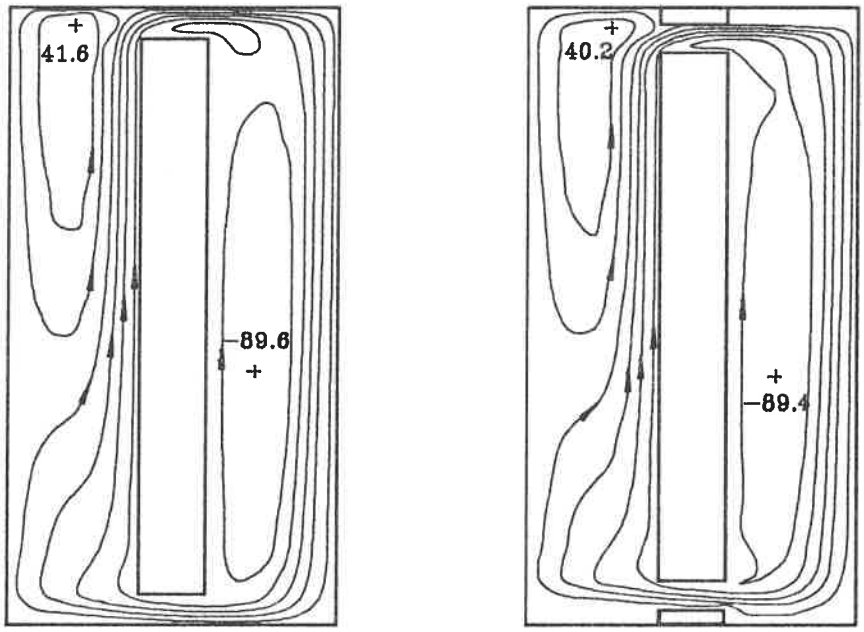
Figure 4.9: Taux de transfert de chaleur vers le mur en fonction de h, la largeur de l'extrémité du panneau isolant

le sens anti-horaire au détriment de la circulation dans le sens horaire engendrée par le flux imposé q. Lorsque $\Delta T = -10°C$, cas où la paroi froide est celle de droite, aucun courant chaud ne parvient de cette paroi ce qui explique le gain en énergie transférée vers la pièce.

4.2 Influence des paramètres thermiques

4.2.1 Flux q (Exprimé en terme de Ra)

Le profil de V en fonction de Ra tracé à la Fig. 4.11 montre que l'écoulement évolue de façon significative: le profil symétrique pour des Ra faibles devient



(a) (b)

Figure 4.10: Lignes de courant pour (a)$h = 0$ et (b)$h = H/40$, $A = 8$

de plus en plus désordonné à mesure qu'on augmente le flux imposé à $X = 0.4$. Ceci est confirmé par le tracé des lignes de courant présenté ci-après: plus nous augmentons Ra plus les lignes de courant dans la cavité de gauche sont confuses et plus les contours sont désordonnés indiquant une circulation plus forte.

L'influence de Ra sur le transfert de chaleur vers la pièce et celui perdu vers l'extérieur est montrée à la Fig. 4.12. Cette figure, qui a été tracée pour $A = 8$, convient tout aussi bien pour d'autres rapports de forme. Notons d'abord que selon nos conventions un nombre de *Nusselt* positif traduit un transfert de chaleur dans la direction X.

En ce qui a trait à Nu_2, qui est une mesure du taux de transfert vers la

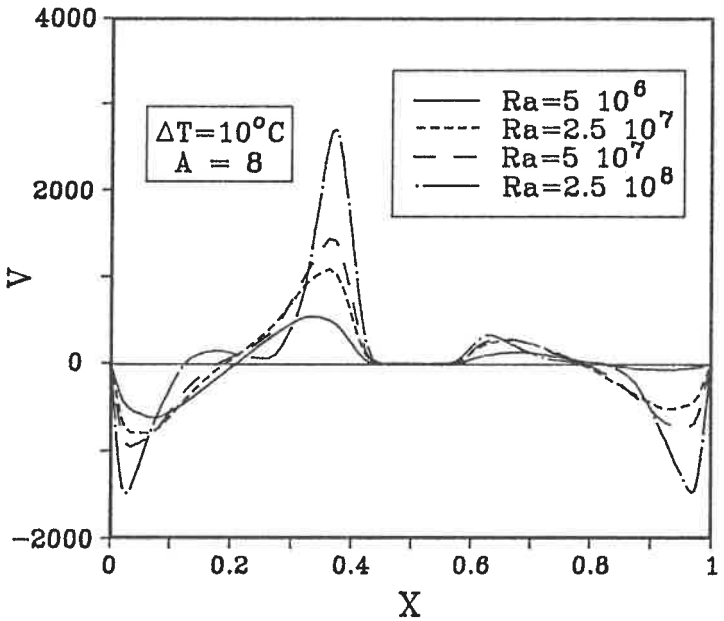


Figure 4.11: Profil de V en fonction de Ra à la mi-hauteur de la cavité pour $\Delta T = 10^oC$ et $A = 8$

pièce, nous voyons que pour un Ra donné, plus nous augmentons la température du mur moins il y a d'énergie utile transférée à la pièce. Cette tendance est moins nuancée pour les valeurs élevées de Ra que pour de faibles valeurs de Ra car pour ces valeurs l'influence de ΔT devient négligeable devant celle de Ra.

Le transfert vers l'éxtérieur, symbolisé par Nu_1 et considéré comme pertes, présente les mêmes propriétés que pour Nu_2. Nous notons aussi une certaine symétrie par rapport à une ligne fictive qui représente le flux q imposé comme terme source. Cette symétrie est tout à fait normale puisqu'en tout temps nous avons l'égalité:

$$q = q_1 + q_2 \tag{4.1}$$

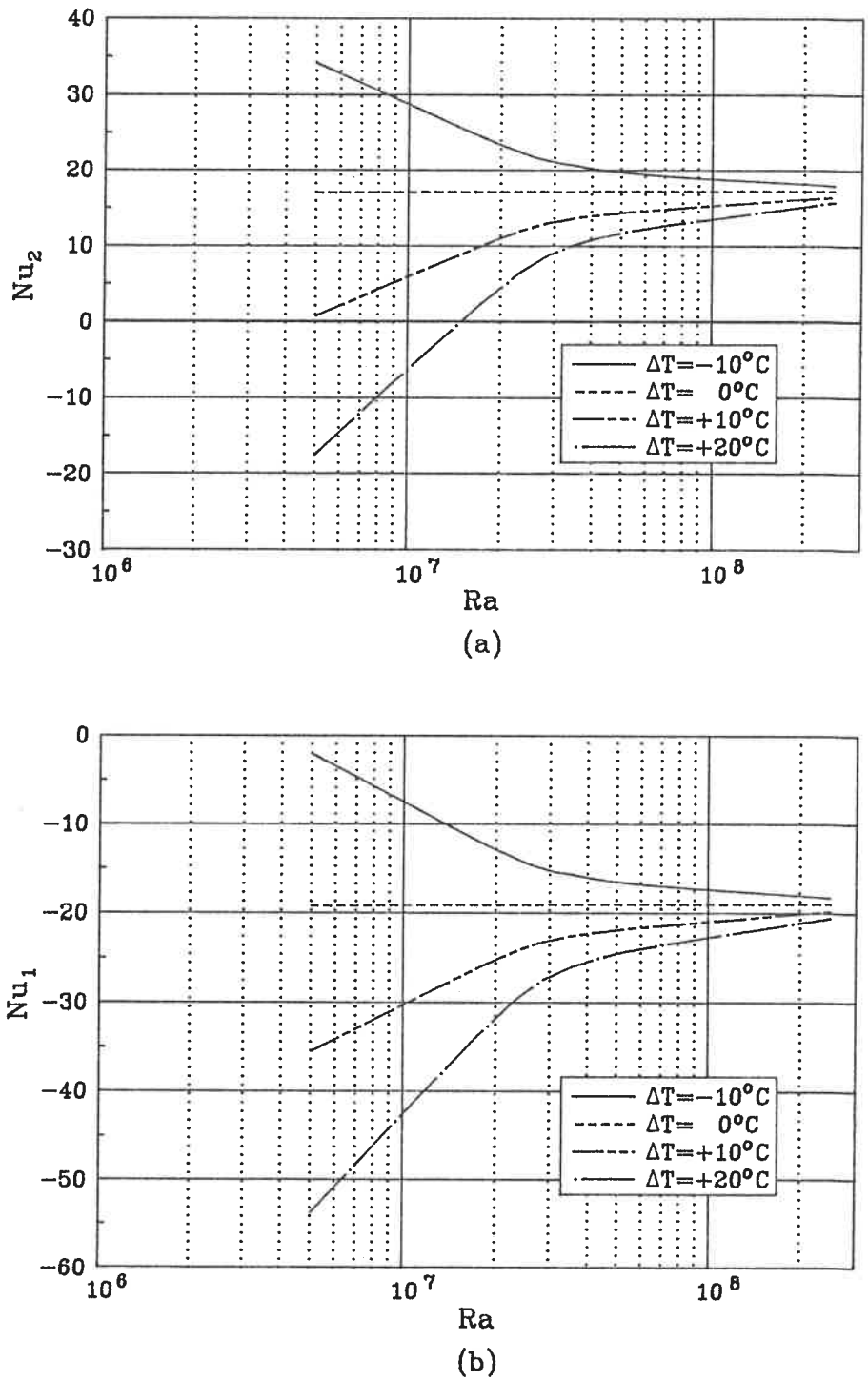
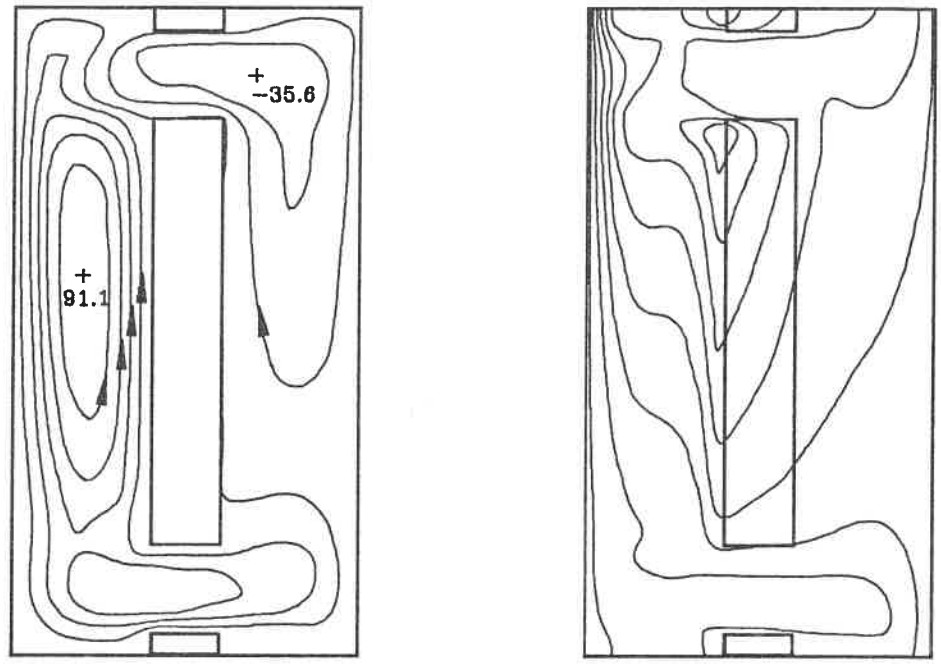
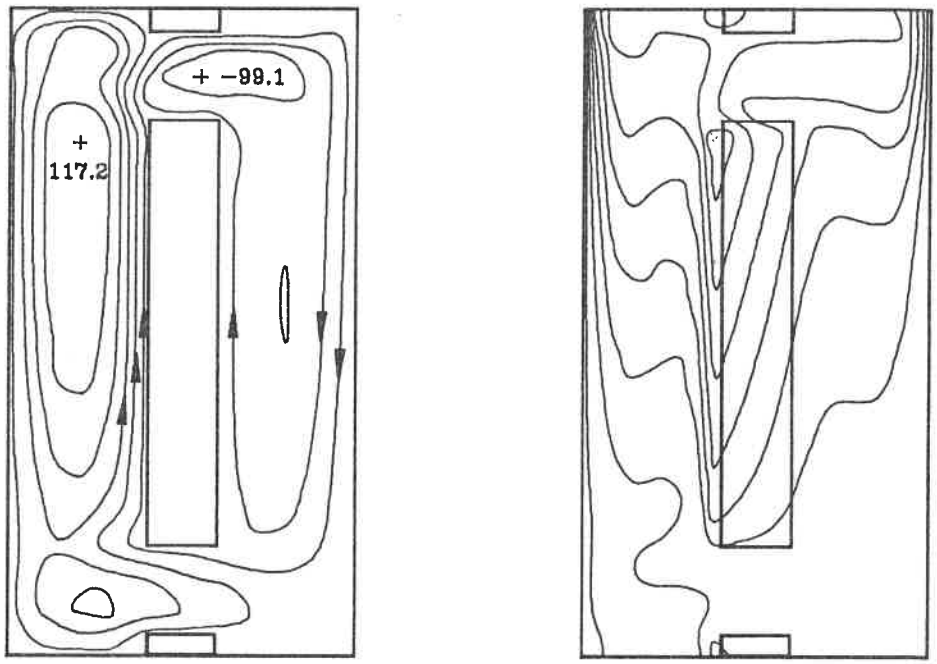


Figure 4.12: Influence conjointe de Ra et de ΔT sur le transfert de chaleur (a)vers la pièce et (b)à travers le vitrage pour $A = 8$

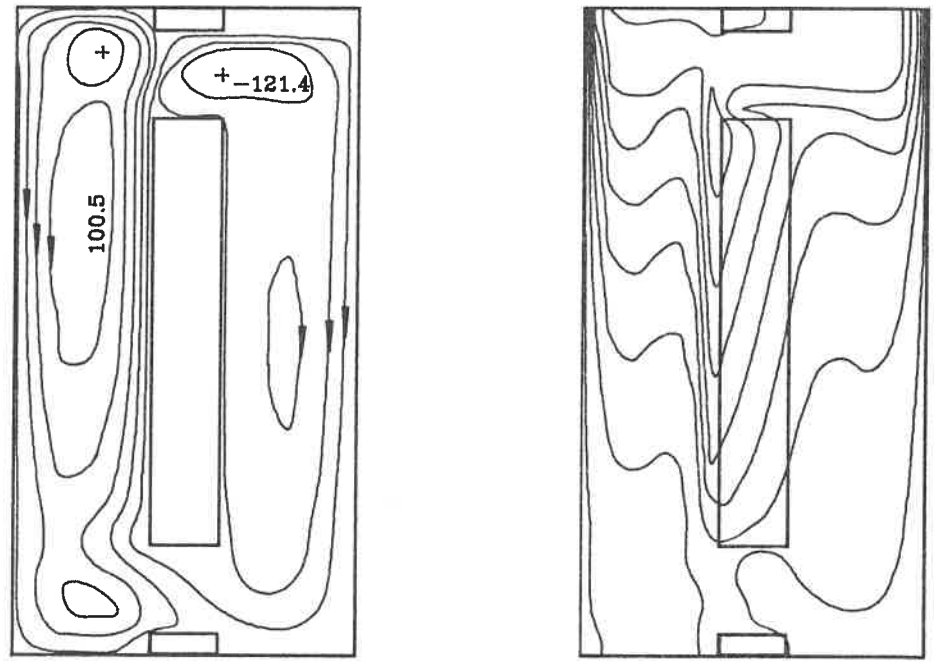


(a)

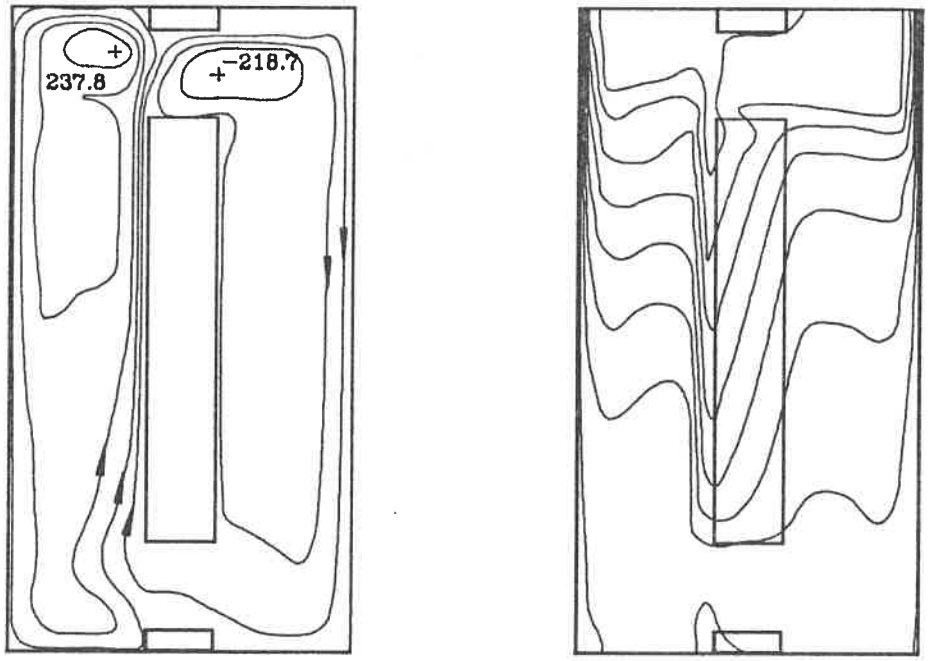


(b)

Figure 4.13: Lignes de courant et isothermes pour (a)$Ra = 5 \times 10^6$ et (b)$Ra = 2.5 \times 10^7$, tracés à $\Delta T = 10^oC$



(a)



(b)

Figure 4.14: Lignes de courant et isothermes pour (a)$Ra = 5 \times 10^7$ et (b)$Ra = 2.5 \times 10^8$, tracés à $\Delta T = 10^oC$

L'allure des lignes de courant et des isothermes est présentée aux Figs. 4.13 et 4.14 où l'on note un acroissement de la circulation du fluide comme le montrent les valeurs de plus en plus élevées de ψ_{max} aussi bien que la tendance de l'écoulement à prendre une forme unicellulaire.

4.2.2 Ecart de température ΔT

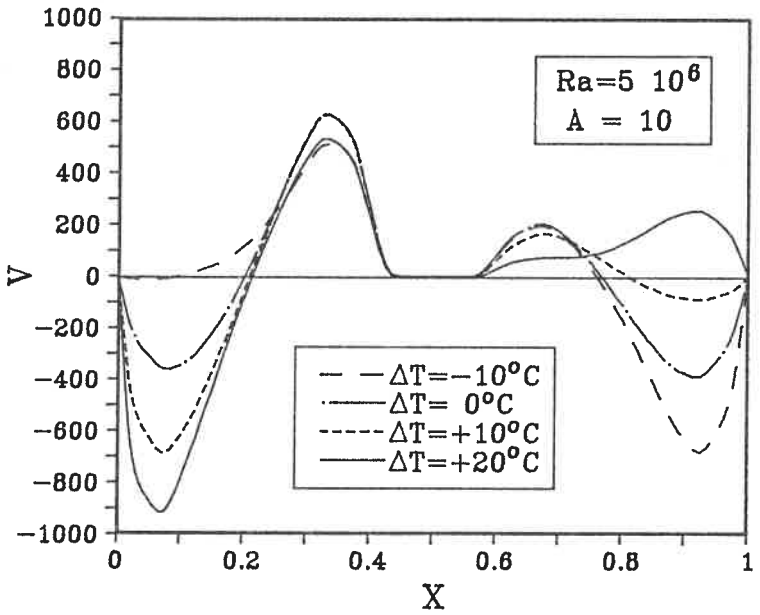


Figure 4.15: Profil de Vitesse à la mi-hauteur de la cavité, $A = 10$ et $Ra = 5 \times 10^6$

L'influence de l'écart de température est montré à la Fig. 4.15 où le profil de V à $Y = A/2$ est tracé pour des différents écarts de température. Dans le canal de gauche les profils gardent la même allure sauf pour celui correspondant à $\Delta T = -10^oC$ où il n'y a presque pas de renversement au voisinage du vitrage. Au niveau de la paroi de droite, celle qui constitue le mur massif, l'écoulement pour $\Delta T = 20^oC$ se distingue par le fait qu'il est complètement développé vers

le haut: cette paroi est très chaude et le fluide ayant désormais une densité plus faible est poussé vers le haut. Cette tendance est déja présente pour les valeurs ultérieures de ΔT. Le profil de T est présenté à la Fig. 4.16. Nous notons le profil quasi linéaire de T à travers l'isolant où le transfert de chaleur se fait uniquement par conduction. Nous soulignons aussi le cas $\Delta T = 20^oC$ qui montre que la température au voisinage du mur massif est inférieure à celle du mur lui même d'où l'apparition d'un flux de chaleur négatif dérigé du mur vers l'espace fluide. Le transfert dans les autres cas se fait dans la direction opposée.

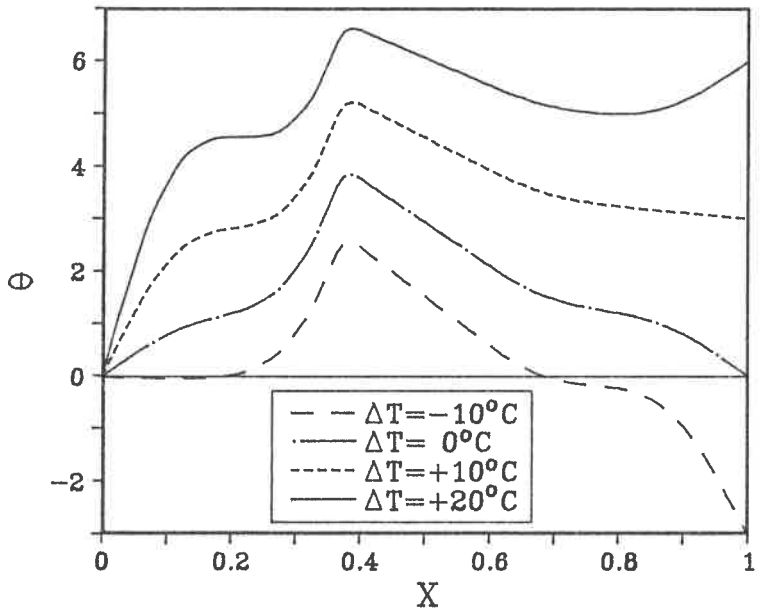


Figure 4.16: Profil de T à la mi-hauteur de la cavité, $A = 10$ et $Ra = 5 \times 10^6$

4.3 Conclusion

L'effet des différents paramètres du problème a été analysé dans ce chapitre, il en ressort que ces paramètres affectent sensiblement le transfert de chaleur vers la pièce, but ultime de ce travail.

Le rapport de forme A est typiquement égal à 10 et c'est effectivement une valeur qui donne de bons résultats. Au delà de cette valeur, le transfert serait encore meilleur mais nous dépassons alors les dimensions rencontrées dans la réalité pour un tel système. L'analyse du paramètre B donne une valeur optimale de 0.7, cette valeur est obtenue pour une ouverture pratiquée sur toute la profondeur de la pièce, une valeur basée sur la section équivalente peut être obtenue pour des ouvertures de ventilation occupant une partie du mur seulement. Il a été aussi constaté que l'abscence de la restriction h, exprimée en terme du paramètre C, améliore les performances du système étant donné qu'on élimine ainsi les tourbillons au niveau des coins de la cavité. De son côté, D montre une valeur optimale de 0.25.

Quant aux paramètres thermiques, leur influence se résume au fait que l'écart de température ΔT affecte énormément le transfert vers la pièce, cet effet peut même devenir plus important que celui de q lorsque Ra est faible. En effet, l'énergie utile transférée à la pièce croît avec q seulement lorsque la température de celle-ci devient supérieure à l'ambiante ($T_2 > T_1$). Lorsque l'écart de température devient trop grand, des pertes de la pièce vers le système mur Trombe ont évidemment lieu.

5 Conclusion générale

Nous avons réalisé, dans ce travail, une étude numérique de la convection naturelle induite dans une cavité partitionnée.

Tout d'abord, nous avons discrétisé les équations aux variables primitives régissant l'écoulement en utilisant l'approche volume de contrôle. Ceci nous a permis d'écrire un programme basé sur cette approche et sur l'algorithme SIMPLER.

Après avoir testé ce programme sur quelques cas classiques, nous avons abordé notre problème principal qui consiste à étudier le système mur Trombe composé, ce système étant un exemple parfait d'une cavité partitionnée. Cette étude, dans laquelle nous avons considéré plusieurs paramètres géométriques aussi bien que les paramètres thermiques induisant le mouvement du fluide, a montré que ces paramètres influencent sensiblement le taux de transfert de chaleur vers la pièce. La discussion de nos résultats a permis d'en ressortir les valeurs optimales de certains paramètres géométriques ce qui pourrait aider dans le design de systèmes passifs comparables. Pour arriver à cette conclusion, il a fallu évidemment présenter et discuter l'effet de ces paramètres sur les variables du problème qui sont les deux composantes de la vitesse U et V et la température θ.

6 Bibliographie

Aihara, T., 1973, Effects of inlet boundary-conditions on numerical solutions of free convection between vertical parallel plates,*Rep. Inst. High Speed Mech.*, Vol. 28, No. 258.

Akbari, H. et Borgers, T.R., 1979, Free convective laminar flow within the Trombe wall channel, *Solar Energy*, Vol. 22, pp. 165-174.

Akbari, H. et Borgers, T.R., 1984, Free convective turbulent flow within the Trombe wall channel. *Solar Energy*, Vol. 33, pp. 253-264.

Akbarzadeh, H., Charters, W.W.S. et Lessile, D.A., 1982, Thermocirculation characteristics of a Trombe wall passive test cell, *Solar Energy*, Vol. 28, pp 461-468.

Baer, S., 1976, Movable insulation, *Proc. Passive Solar Heating and Cooling*, pp. 70-72, Albuquerque, N.M.

Bejan, A., CONVECTION HEAT TRANSFER, 1984, John Wiley and Sons, New York.

Ben Yedder, R., Du, Z-G. et Bilgen, E., Heat transfer by natural convection in composite Trombe wall solar collector, Proc. ASME WA, San Francisco, December 10-15, 1989.

Ben Yedder, R., Du, Z-G. et Bilgen, E., Numerical Study of laminar natural convection in composite Trombe wall systems, soumis pour publication à Solar & Wind Tech. J.

Bilgen, E. and Chaaban, M., 1982, Solar heating ventilating system using a solar chimney, *Solar Energy*, Vol. 28, pp. 227-233.

Bodoia, J.R. et Osterle, J.F., 1962, The development of free convection between heated vertical plates, *J. of Heat Transfer*, Trans. ASME, Ser. C, Vol. 84, pp. 40-44.

Detunq, B. and Bilgen, E., 1984, Etude experimentale d'un capteur solaire du type mur Trombe et validation des formules theoriques, Trans. CSME, Vol. 18, pp. 35-39.

De Val Davis, G. and Jones, I.P., 1983, Natural convection in a square cavity: a comparison exercise, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 227-248.

Elenbaas, W., 1942, Heat dissipation of parallel plates by free convection, *Physica*, Vol. 9, pp. 1-28.

Harisson, D.C., 1976, Bead walls,*Proc. Passive Solar Heating and Cool ing.*, pp. 283-287, Albuquerque, N.M.

Jetli, R., Acharya A. et Zimmerman E., 1986, Influence of baffle location on natural convection in a partially divided enclosure, *Numerical Heat Transfer*, pp. 521-536.

Jones, I.P., 1979, A numerical study of natural convection in an air filled cavity: comparison with experiment, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp.193-213.

Kimura, S. et Bejan, A., 1984, The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, *J. of Heat Transfer*, Vol. 106, pp. 98-103.

Ormiston, S.J., Raithby, G.D. et Hollands, K.G.T., 1986, Numerical predictions of natural convection in a Trombe wall system, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, No. 6, pp. 869-877.

Patankar, S.V., 1978, A numerical method for conduction in composite materials, flow in irregular geometries and conjugate heat transfer,*Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., Toronto*, Vol. 3, pp. 297-302.

Patankar, S.V., 1980, NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW, Hemisphere Publishing Corp., New York.

Patankar, S.V., 1981, A calculation procedure for two-dimensional elleptic situations, *Numerical Heat Transfer*, pp. 409-425.

Raithby, G.D. et Schneider, G.E., 1979, Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, pp. 417-440.

Schlichting, H., 1979, BOUNDARY LAYER THEORY, McGraw-Hill Book Company, New York.

Van Doormaal, J.P. et Raithby, G.D., 1984, Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows, *Numerical Heat Transfer*, pp. 147-163.

Zrikem, Z. and Bilgen, E., 1987, Theoretical study of a composite Trombe -Michel wall solar collector system, *Solar Energy*, 39, 409-419.

Zrikem, Z. and Bilgen, E., 1989, Annual correlation for thermal design of the composite wall solar collectors in cold climates, *Solar Energy*, 42, 427-432.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL
3 9334 00203842 8