



**Titre:** Roue Cyr et matériaux composites : modéliser une discipline de cirque pour enrichir son langage acrobatique  
**Title:**

**Auteur:** Charlotte Dubost  
**Author:**

**Date:** 2020

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Dubost, C. (2020). Roue Cyr et matériaux composites : modéliser une discipline de cirque pour enrichir son langage acrobatique [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/5578/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/5578/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Frederick Gosselin, Annie Ross, & Daniel Therriault  
**Advisors:**

**Programme:** Génie mécanique  
**Program:**

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Roue Cyr et matériaux composites : modéliser une discipline de cirque pour  
enrichir son langage acrobatique**

**CHARLOTTE DUBOST**

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Génie mécanique

Décembre 2020

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Roue Cyr et matériaux composites : modéliser une discipline de cirque pour  
enrichir son langage acrobatique**

présenté par **Charlotte DUBOST**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Alain HÉBERT**, président

**Frédéric GOSSELIN**, membre et directeur de recherche

**Annie ROSS**, membre et codirectrice de recherche

**Daniel THERRIAULT**, membre et codirecteur de recherche

**Aouni LAKIS**, membre

## DÉDICACE

*A Émilie Yu.*



## REMERCIEMENTS

Merci à mes directeurs de recherche, Frédérick Gosselin, Annie Ross et Daniel Therriault pour l'énergie et le temps qu'ils ont accordé à l'accompagnement de ce projet ainsi que pour leur vivacité d'esprit et l'excellence de leurs expertises dont j'ai eu la chance de bénéficier.

Merci à toute l'équipe du pavillon JAB pour leur accueil et leur bonne humeur. En particulier, un grand merci à Jean-François et Juliette pour leur temps et leur aide aussi précieuse qu'indispensable.

Merci à Marion Cossin pour son soutien, ses précieux conseils et son appui au sein de l'Ecole Nationale de Cirque de Montréal dès le début du projet.

Merci à Magali Marcheschi qui m'a orientée vers l'école Polytechnique Montréal pour me permettre de réaliser ce projet.

Merci à l'équipe de l'Ecole Nationale de Cirque pour sa collaboration.

Et merci à mes parents qui m'ont toujours encouragée à poursuivre mes passions, en me témoignant un soutien inconditionnel. C'est à vous que je dois ces deux années qui viennent clôturer en beauté mes études.

## RÉSUMÉ

La roue Cyr, agrès de cirque, est un anneau métallique à taille humaine. L'utilisateur s'y agrippe et exécute des figures acrobatiques en tournant. Le poids, la rigidité et la géométrie de la roue sont des paramètres déterminants pour le mouvement de l'utilisateur. Depuis son invention, cet agrès a été revisité par les artistes et les fabricants, qui se sont basés sur le concept de la roue Cyr pour créer de nouveaux agrès. Alors que le cirque s'approprie les matériaux composites utilisés pour l'équipement sportif, les adeptes de la roue Cyr se demandent ce qu'une roue plus légère et plus flexible apporterait à la discipline. Ces roues sont constituées de poutres courbes connectées par des manchons, ce qui implique des coûts de fabrication excluant la méthode 'essai-erreur' pour répondre à la question. Tous les projets alliant roue Cyr et matériaux composites restent ainsi inachevés.

A ce jour la roue Cyr ne fait l'objet d'aucune publication scientifique. Cependant, son mouvement est similaire à celui du disque d'Euler : nous adaptons donc les modèles théoriques issus de la littérature comme base pour déterminer comment la géométrie de la roue Cyr influence sa stabilité dynamique. Nous étudions aussi le saut d'une roue comprimée puis relâchée, en référant aux travaux de Yang et Kim sur le stockage d'énergie élastique dans des anneaux.

La conception, la fabrication et les tests d'une roue Cyr en matériaux composites combinent une expérience pratique de l'agrès, l'impression 3D de matériaux composites à grande échelle et la dynamique du disque d'Euler. L'issue de ces travaux contribuera à clarifier l'intérêt, pour les fabricants, d'investir dans les roues Cyr en composites. Notre objectif est de déterminer les propriétés du matériau et la géométrie optimales pour la stabilité et le saut d'une roue Cyr, d'imprimer un prototype et de tester son potentiel acrobatique avec des artistes de cirque.

Parmi les matériaux compatibles avec le procédé de fabrication choisi, le nylon renforcé avec des fibres de carbone courtes s'est révélé être le plus adapté.

A l'issue de cette étude nous avons déterminé que pour une roue Cyr d'un rayon standard de 0.9 m on choisira, afin d'optimiser le saut, un rayon de section intérieur de 15.2 mm et un rayon de section extérieur de 18 mm. Pour ce qui concerne les figures où la roue Cyr roule sur sa tranche, on optimisera la stabilité dynamique de la roue en maximisant son rayon et en minimisant le rayon externe de sa section.

## ABSTRACT

A Cyr wheel is a circus apparatus consisting of a human sized metallic ring. The user stands inside the wheel and performs acrobatic figures while spinning. The weight, stiffness and geometry of the wheel are thus determinant parameters for the user's motion. Since it has been invented, the Cyr wheel has been revisited by circus artists and manufacturers to create hybrid apparatuses. As composite manufacturing for sports spreads to circus, Cyr wheel adepts wonder what a lighter, more flexible wheel would result in. These wheels are composed of curved beams connected by sleeves : this implies fabrication costs and excludes the 'trial and error' method to answer the question. Thus, no composite Cyr wheel project has been completed yet.

To this day there is no scientific publication specific to Cyr wheel. Nevertheless, its dynamics relate to Euler's disk. We adapt theoretical models in the literature as a basis to determine how the Cyr wheel geometry influences dynamic stability. We also focus on the jump of a wheel being bent and released, and thus refer to Yang and Kim article about energy storage in elastic rings as a comparative study.

The design, manufacturing and test of a 3D printed composite Cyr wheel prototype combine practical experience of the apparatus, familiarity with composite materials, large-scale 3D printing processes and dynamics of Euler's disk-like motions. The outcome will shed light on the interests for manufacturers to invest in composite Cyr wheels. Our objective is to determine which mechanical properties and geometry will optimize the stability and jumps of a Cyr wheel, 3D print a prototype and test acrobatic possibilities with circus artists.

Among the materials which were suitable for the chosen manufacturing process, carbon fiber reinforced nylon turned out to be the most relevant choice.

Following this study, we found that in order to optimize the jumping motion of a 0.9 m radius Cyr wheel, the inner and outer radii of the cross-section should be respectively 15.2 mm and 18 mm. Concerning the rolling motion of the wheel, optimizing its dynamic stability is obtained by maximizing its radius and minimizing the outer radius of its section.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xxii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	1
1.1.1 Définitions . . . . .	1
1.1.2 Intérêt artistique de la roue Cyr . . . . .	1
1.1.3 Les figures de roue Cyr . . . . .	3
1.2 Problématique . . . . .	7
1.2.1 Conception . . . . .	7
1.2.2 Fabrication . . . . .	8
1.2.3 Tests . . . . .	8
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	10
1.3.1 Objectif global . . . . .	10
1.3.2 Objectifs spécifiques . . . . .	10
1.4 Plan du mémoire . . . . .	10
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	11
2.1 Le disque d'Euler . . . . .	11
2.1.1 Définition générale et lien avec la roue Cyr . . . . .	11
2.1.2 Modèle mathématique et intégration numérique . . . . .	13

2.1.3	Étude de la stabilité en régime permanent . . . . .	13
2.2	Elasticité et saut d'une roue Cyr . . . . .	15
2.3	Impression 3D : angle de tranchage optimisé . . . . .	16
2.4	Conclusion . . . . .	19
CHAPITRE 3 MODÉLISATION THÉORIQUE DU SAUT D'UNE ROUE CYR . .		20
3.1	Cadre de l'étude . . . . .	20
3.1.1	Description du mouvement . . . . .	20
3.2	Mise en équations . . . . .	22
3.3	Résultats . . . . .	26
3.3.1	Influence de la force appliquée . . . . .	26
3.3.2	Valeurs limites . . . . .	28
3.3.3	Limite en comportement linéaire . . . . .	28
3.3.4	Mise en évidence de différents régimes de saut . . . . .	30
3.4	Travail expérimental . . . . .	30
3.4.1	Méthodologie . . . . .	30
3.4.2	Résultats et comparaison avec les points de l'article <i>Jumping hoops</i> .	34
3.4.3	Discussion . . . . .	36
3.5	Conclusion . . . . .	38
CHAPITRE 4 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET MODÉLISATION ÉLÉMENTS		
FINIS . . . . .		39
4.1	Étude de $H_{max}$ en fonction de la géométrie de la section . . . . .	39
4.1.1	Introduction . . . . .	39
4.1.2	Méthodologie . . . . .	39
4.2	Résultats . . . . .	43
4.3	Discussion . . . . .	48
4.4	Conclusion . . . . .	50
CHAPITRE 5 STABILITÉ DYNAMIQUE DU MOUVEMENT DE ROTATION D'UNE		
ROUE CYR . . . . .		51
5.1	Étude théorique . . . . .	51
5.1.1	Description du mouvement . . . . .	51
5.1.2	Référentiels et système considérés . . . . .	51
5.1.3	Hypothèses . . . . .	53
5.1.4	Mise en équations . . . . .	53
5.2	Réponse à une perturbation . . . . .	60

5.3	Manipulations expérimentales . . . . .	61
5.3.1	Méthodologie . . . . .	61
5.3.2	Influence du capteur sur le mouvement de la roue . . . . .	62
5.3.3	Résultats . . . . .	65
5.3.4	Discussion . . . . .	78
CHAPITRE 6	Impression 3D . . . . .	80
6.1	Design du prototype à réaliser . . . . .	80
6.2	Machine permettant la réalisation . . . . .	82
6.3	Approche de réalisation . . . . .	83
6.4	Angle de tranchage . . . . .	87
6.5	Résultats préliminaires . . . . .	89
6.6	Conclusion . . . . .	91
CHAPITRE 7	DISCUSSION . . . . .	92
7.1	Synthèse des travaux . . . . .	92
7.2	Nouvelles possibilités acrobatiques . . . . .	92
7.3	Limitations . . . . .	94
7.4	Recommandations pratiques . . . . .	96
7.5	Perspectives . . . . .	96
7.6	Conclusion . . . . .	97
CHAPITRE 8	CONCLUSION . . . . .	98
ANNEXES	. . . . .	103

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Dimensions des 4 anneaux de section rectangulaire imprimés en 3D et utilisés dans les manipulations expérimentales. . . . .	30
Tableau 3.2	Dimensions des 4 anneaux de section rectangulaire imprimés en 3D et utilisés dans les manipulations expérimentales. . . . .	32
Tableau 5.1	Taux de décroissance $\tau_d$ , durées $t_{phase}$ de chaque phase et conditions initiales pour chacun des lancers. . . . .	67
Tableau 6.1	Paramètres d'impression des essais avec du PLA sur le robot Fanuc. .	90

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	La roue Cyr à ses débuts : (a) Daniel Cyr au 24e festival mondial de demain en 2003 [6] et (b) Helga Tempel en 1950 sur l'Einrefen, ancêtre de la roue Cyr [4]. . . . .	2
Figure 1.2	Agrès de cirque dérivés de la roue Cyr [1] : cube composé de 6 roues Cyr (a), deux roues Cyr formant un angle droit imbriquées l'une dans l'autre (b), une roue Cyr dont on a remplacé la partie supérieure par une forme rectangulaire (c). . . . .	3
Figure 1.3	Quelques figures de roue Cyr : valse avec lâcher de pied (a), saut de main (b), corner (c), suspension (d), pièce (e), superman (f) [8]. . . .	6
Figure 1.4	Diagramme résumant les étapes de conception et de fabrication de la roue. La problématique de l'étude est découpée en trois parties : optimisation du mouvement pour les sauts (en jaune), optimisation de la stabilité dynamique pour le mouvement de roulement (en violet) et étude de la résistance de la roue (en bleu). Ces trois parties permettent de déterminer le matériau et la géométrie optimaux pour chaque type de mouvement, ainsi que les valeurs minimales pour préserver la roue de l'endommagement lors de l'utilisation (en vert). Ces paramètres sont ensuite combinés entre eux pour établir une zone de design à partir de laquelle sera déployé le plan de fabrication : prototypage à échelle réduite, tests puis prototypage à l'échelle 1 (en orange). . . . .	9
Figure 2.1	Modélisation du disque d'Euler en mouvement [13]. L'angle $\theta$ décrit l'inclinaison du disque, $\phi$ décrit sa rotation autour de l'axe principal perpendiculaire à son diamètre et $\psi$ décrit sa rotation autour de l'axe fixe vertical $Z$ . . . . .	12
Figure 2.2	Trajectoire typique du centre de masse du disque d'Euler en mouvement, projeté sur le plan horizontal. Le tracé rouge correspond à une mesure expérimentale et le noir, à une simulation avec des conditions initiales correspondantes. La forme de la trajectoire s'explique par la décroissance rapide de l'angle de nutation $\theta$ [13]. . . . .	12
Figure 2.3	Modélisation du disque d'Euler lors de la phase de roulement [10]. $\theta$ décrit l'inclinaison de la roue par rapport à la verticale $Z$ et $d\psi/dt$ , la vitesse à laquelle la roue décrit des cercles en roulant sur sa tranche. .	14



Figure 2.4	Carte de stabilité du mouvement de roulement du disque d'Euler en régime permanent [10]. Elle indique si pour chaque couple $(\theta, r)$ , le mouvement est stable (s), instable en cas de perturbation (u), ou si l'équilibre dynamique ne peut pas exister (0). $\theta$ décrit l'inclinaison de la roue et $r$ correspond au rayon des cercles décrits par le disque lorsqu'il roule sur sa tranche. . . . .	14
Figure 2.5	Modélisation du disque d'Euler en phase de <i>wobbling</i> [15]. L'angle $\alpha$ correspond à la mesure $\frac{\pi}{2} - \theta$ . L'épaisseur du disque est négligée et on ne considère que le mouvement autour de l'axe instantané de rotation ( $PO$ ). . . . .	15
Figure 2.6	Évolution temporelle de l'inclinaison du disque d'Euler [11] pour 3 cas expérimentaux. $t_f$ désigne le temps auquel le disque s'immobilise. L'utilisation d'une échelle logarithmique permet de valider la loi $(\frac{\pi}{2} - \theta) \propto (t_f - t)^{\frac{2}{3}}$ établie par Ma Daolin, car la pente du logarithme est la même pour les 3 lancers de disques, et vaut $2/3$ . . . . .	16
Figure 2.7	Résultats des expériences de Yang et Kim [16]. Le saut d'un anneau élastique enregistré par vidéo lors d'une expérience avec un anneau en polyimide de rayon $R = 16mm$ , d'épaisseur $\tau = 125\mu m$ et une déformation initiale de $\delta = 14mm$ est présenté en (a). Cette manipulation est reproduite pour différents types d'anneaux et la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de l'anneau est tracée en fonction de la déformation initiale en (b), sous forme de grandeurs adimensionnelles. $h_c = E/\rho g$ où $E$ est le module d'Young du matériau considéré et $\rho$ sa masse volumique. . . . .	17
Figure 2.8	Procédé de tranchage optimisé. Afin d'avoir un découpage qui permet d'éviter l'affaissement du filament, ou l'ajout de supports, on applique successivement au fichier destiné à l'impression les étapes suivantes : partition des régions, modification de l'orientation des parties concernées par transformation des coordonnées, tranchage et transformation inverse de coordonnées. Image adaptée de [17]. . . . .	18

Figure 2.9	Comparaison entre l'impression 3D avec supports et l'impression 3D sans support en adaptant l'angle de tranchage pour une même pièce. La pièce imprimée avec un angle de tranchage optimisé (D,E) est partitionnée en trois régions $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ pour lesquelles les angles de tranchage sont différents. La pièce imprimée avec des supports ( <i>Assisted Supporting Structures</i> sur l'image (A)) présente une surface (C) de moins bonne qualité que la surface (F) de la pièce imprimée avec un angle de tranchage optimisé. Images tirées de [17]. . . . .	18
Figure 3.1	Géométrie et physique considérées : on applique la force $F$ au sommet d'une roue de rayon $R$ , de rayons de section intérieur et extérieur $r_1$ et $r_2$ et d'aire de section $A$ . On relâche ensuite la roue qui effectue un saut : la hauteur $H_{max}$ correspond à la différence entre la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de la roue lors du saut et la position du centre de gravité de la roue au repos. . . . .	21
Figure 3.2	Système au repos. Le ressort de longueur à vide $2R$ et de raideur $k$ est écrasé par le poids de la masse supérieure. . . . .	22
Figure 3.3	Saut du système. Pour $t < -t_0$ , le système est écrasé par une force $F$ . Il est relâché à $t = -t_0$ , et la masse inférieure quitte le sol à $t = 0$ . Le centre de gravité du système atteint sa hauteur maximale pour $t = t_f$ . . . . .	23
Figure 3.4	Évolution temporelle des positions des masses et du centre de gravité lors du saut du système. . . . .	27
Figure 3.5	Variations de la hauteur maximale de saut adimensionnelle $\eta_{max}$ (a) et du ratio d'efficacité énergétique $E_{p,g}/E_{tot}$ (b) en fonction du ratio $F/m_r g$ , en échelle logarithmique. La hauteur maximale de saut augmente de manière exponentielle avec la force de compression appliquée à la roue, alors que l'efficacité énergétique décroît avec la force de compression. . . . .	29
Figure 3.6	Comparaison entre une étude éléments finis d'une roue en éléments poutres, dans laquelle on prend en compte les non linéarités géométriques, et le modèle théorique linéaire où la force appliquée et le déplacement sont liés par la constante $k$ selon la relation $F = k\delta$ . . . . .	29

- Figure 3.7 Carte des différents régimes de saut possibles pour une roue Cyr en fonction des ratios  $F/kR$  et  $F/m_r g$ . Pour  $F/m_r g < 1$ , la force de compression  $F$  ne permet pas de décoller la roue du sol : il n'y a pas de saut. Pour  $F/m_r g > 1$ , plus le ratio augmente, plus il y a de vibrations lors du saut et plus on perd de l'énergie : l'efficacité énergétique  $E_{p,g}/E_{tot}$  décroît et finit par tendre vers 0.5. Lorsque  $F/kR > 0.1$ , on sort du domaine géométrique linéaire tel que défini dans les présents travaux. 31
- Figure 3.8 Schéma du montage de l'expérience avec un anneau en PLA (a). Le sommet supérieur de l'anneau repose sur un axe fixe, un poids est attaché au sommet inférieur par un fil. Le fil est ensuite coupé et les positions de l'anneau sont enregistrées et analysées grâce au logiciel *Tracker* (b). Le logiciel repère les positions des sommets de l'anneau par rapport aux axes roses, dont l'origine correspond à la position du sommet inférieur lorsque l'anneau est au repos. La hauteur  $H_{max}$  correspond à la différence entre la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de l'anneau lors du saut et la position du centre de gravité au repos. . . . . 33
- Figure 3.9 Résultats bruts de nos expériences, comparées à celles de Yang et Kim :  $H_{max}$  en fonction de la force appliquée à l'anneau (a) et  $H_{max}$  en fonction de la raideur  $k$  propre à chaque anneau (b). Chacune de nos séries de mesure, en symboles pleins, est désignée selon les dimensions de l'anneau et la masse qu'on y suspend : PLA  $(R, L, l, m)$ . Les symboles vides correspondent aux expériences de Yang et Kim [16]. Les barres d'erreur représentent l'écart-type pour chaque série de mesures. . . . 35
- Figure 3.10 Résultats de l'expérience : mise à l'échelle de  $H_{max}$  avec des variables adimensionnelles (a) et efficacité énergétique en fonction du ratio adimensionnel  $F/m_r g$  (b). Chaque série de mesure est désignée selon les dimensions de l'anneau et la masse qu'on y suspend : PLA  $(R, L, l, m)$ . Les symboles vides correspondent aux expériences de Yang et Kim [16] : nous avons conservé uniquement les points respectant l'inégalité  $\delta/R < 0.35$  afin de limiter l'influence des effets de non linéarité, non pris en compte par notre modélisation. Nos résultats expérimentaux concordent avec ceux de Yang et Kim et notre modèle théorique. . . . 37
- Figure 4.1 Conditions aux rives et chargement appliqué à la roue dans les études par éléments finis. On applique la force  $F$  au sommet de la roue, et le point de contact avec le sol est contraint par un encastrement. . . . . 41

Figure 4.2	Modélisation éléments finis d'une roue Cyr en nylon-fibre de carbone ( $E = 9 \text{ GPa}$ , $\sigma_r = 63 \text{ MPa}$ ) comprimée par une force exercée à son sommet : la roue au repos est superposée à la roue soumise à l'effort de compression $F$ . Les contraintes maximales, exprimées en MPa dans la légende, se situent au niveau du rayon interne de la roue à l'endroit où on applique la force et au niveau du point de contact avec le sol. La section de la roue a pour dimensions $r_1 = 17 \text{ mm}$ , $r_2 = 19 \text{ mm}$ et le rayon de la roue est $R = 900 \text{ mm}$ . La norme de la force appliquée au sommet de la roue est $F = 1 \text{ N}$ , et la contrainte maximale correspondante est $\sigma_{max} = 8.65 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$ . Comme il s'agit d'une étude linéaire, on en déduit la force qui génère la contrainte $\sigma_r = 63 \text{ MPa}$ et provoque l'endommagement de la roue : $F_r = 63/(8.65 \cdot 10^{-2})$ . On obtient $F_r = 728 \text{ N}$ : $F_r < F_s = 900 \text{ N}$ , on ajuste donc la section en augmentant son épaisseur. . . . .	42
Figure 4.3	Modélisation éléments finis de l'écrasement de la section d'une roue Cyr en nylon-fibre de carbone ( $E = 9\text{GPa}$ , $\sigma_r = 63\text{MPa}$ ) entre les pieds de l'utilisateur et le sol lors de l'impact dû à l'atterrissage. La section de la roue a pour dimensions $r_1 = 16\text{mm}$ , $r_2 = 19\text{mm}$ et la force appliquée par l'utilisateur $F_d = 4500\text{N}$ est modélisée par une pression sur une zone correspondant à la surface occupée par ses pieds joints sur la roue (a). La zone de contraintes maximales (b), en rouge, indique l'endroit auquel la roue sera endommagée en cas de chargement trop important. Ici, la contrainte maximale est de $30\text{MPa}$ : elle est inférieure à $63\text{MPa}$ , il n'y a donc pas d'endommagement. . . . .	44
Figure 4.4	Couples $(r_1, r_2)$ pour lesquels on est à la limite du flambement et de l'écoulement dans la roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes, pour une force $F$ appliquée à son sommet. Les résultats sont présentés en termes de rayon interne (a) et d'épaisseur de la section (b). Ces valeurs sont obtenues au moyen d'analyses éléments finis, par dichotomie. Les barres d'erreur en (b) représentent les intervalles obtenues par la méthode de dichotomie, avec une précision de $0.4 \text{ mm}$ . . . . .	44

Figure 4.5	Ratio $\delta/R$ en fonction de $r_1$ pour un $r_2$ donné. La droite horizontale en pointillés correspond à la valeur 0.1 au delà de laquelle on quitte le domaine de comportement linéaire. L'intersection de cette droite avec chacune des courbes donne la valeur de $r_1$ à ne pas dépasser pour rester dans le domaine linéaire géométrique. Les calculs sont réalisés pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian $R = 0.9$ m, avec une force $F_s = 900$ N appliquée à son sommet. . . . .	46
Figure 4.6	Hauteur maximale de saut en fonction de $r_1$ , pour des $r_2$ donnés (a). Les points d'intersection des courbes $H_{max} = f(r_1)$ avec les limites en pointillés correspondent aux valeurs pour lesquelles la hauteur de saut de la roue est maximisée sans endommager la roue ou sortir du domaine linéaire et donnent 3 nouvelles courbes représentées en (b). On prendra donc comme limite globale la plus petite des trois dans chacun des cas, ce qui donne la zone de design représentée en bleu. La section optimale correspond à l'intersection des trois courbes représentant chacune un type de limite (flambement/écoulement, $\delta/R > 0.1$ et écrasement de section). Les calculs sont réalisés pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian $R = 0.9$ m, avec la force $F_s$ appliquée à son sommet. . . . .	49
Figure 5.1	Systèmes de coordonnées. On utilise trois référentiels : le référentiel fixe $OXYZ$ , et les référentiels mobiles $C_{xzy}$ et $C_{\xi\eta\zeta}$ ayant pour origine le centre de gravité de la roue. $C_{xzy}$ est décalé de $OXYZ$ par une rotation d'angle $\psi$ autour de l'axe $\vec{Z}$ et $C_{\xi\eta\zeta}$ est décalée de $C_{xzy}$ par une rotation d'angle $\theta$ autour de l'axe $\vec{x}$ . Ces référentiels sont adaptés de l'article de Batista [10]. Nous étudions ici non pas un disque mais une roue Cyr à la géométrie torique, ce qui change, entre autres, l'expression de la position du point de contact $P$ . . . . .	52
Figure 5.2	Première partie de la carte de stabilité adimensionnelle. La frontière détermine l'existence d'une position d'équilibre dynamique pour chaque couple $(\theta_0, d\phi/dt\sqrt{(R + r_2)/g})$ . . . . .	59
Figure 5.3	Carte de stabilité (a) et grossissement au niveau de la zone instable en cas de perturbation (b). Les frontières déterminent l'existence d'une position d'équilibre dynamique pour chaque couple $(\theta, d\phi/dt\sqrt{(R + r_2)/g})$ . . . . .	61
Figure 5.4	Arduino nano 33IoT et module adafruit BNO055 utilisés lors des mesures . . . . .	62

Figure 5.5	Capteur fixé sur la roue Cyr en mouvement. La roue Cyr utilisée mesure $R = 0.925$ m, $r_1 = 16$ mm, $r_2 = 19$ mm et pèse 18.4 kg. Elle est constituée de 5 morceaux en aluminium reliés par des manchons en acier que l'on visse entre deux parties. Le capteur avec son boîtier pèse 204 g. . . . .	63
Figure 5.6	Capteur, représenté comme une masse ponctuelle sur la roue . . . . .	63
Figure 5.7	Évolution en fonction du temps de l'inclinaison $\theta$ , de la vitesse angulaire $d\phi/dt$ et de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison $\theta$ de la roue Cyr lors du premier lancer, juxtaposée à la carte de stabilité adimensionnelle correspondant à la roue utilisée, d'un rayon $R = 0.925$ m et d'un rayon de section $r_2 = 19$ mm. La carte de stabilité permet de conclure sur la stabilité dynamique du mouvement en fonction des couples $(\theta, d\phi/dt)$ : les valeurs de ces deux paramètres lors du lancer y sont reportées en ajoutant des marqueurs permettant de situer le mouvement dans le temps. La fréquence des oscillations de $\theta$ est calculée en mesurant les intervalles de temps entre les sommets du tracé de $\theta$ en fonction du temps. A la vitesse $1.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la roue fait un tour en 4.2 secondes : on observe environ une oscillation pour un demi tour. La présence du capteur, négligeable par rapport à la masse de la roue ne permet pas de justifier de telles oscillations. Celles-ci sont liées à la nature instable du mouvement mise en évidence par la carte de stabilité. On constate, en effet, que l'intégralité du mouvement se déroule en zone instable. .	66
Figure 5.8	Mesure des différentes phases du mouvement délimitées par l'évolution de la vitesse angulaire $d\phi/dt$ de la roue Cyr, de sa vitesse d'oscillation $d\theta/dt$ et de son inclinaison $\theta$ , pour le lancer 1. La phase de roulement est séparée de la phase de <i>wobbling</i> (phase d'oscillation) par une phase de transition durant laquelle la roue passe progressivement d'un mouvement à l'autre. On distingue les phases les unes des autres en observant la pente moyenne de $d\phi/dt$ : trois pentes nettement différentes apparaissent traduisent à chaque fois une modification du mouvement. Le passage de la phase de roulement à la phase de <i>wobbling</i> est aussi mis en évidence en comparant les vitesses d'oscillation $d\theta/dt$ et de rotation $d\phi/dt$ : ces deux vitesses sont associées respectivement à l'énergie de <i>wobbling</i> et à l'énergie de roulement. Dans la phase de roulement, $d\phi/dt$ prédomine et dans la phase de <i>wobbling</i> , c'est $d\theta/dt$ qui prédomine, comme le montre le tracé du ratio des deux vitesses au carré. .	69

Figure 5.9	Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour les lancers 2 et 3. A inclinaisons initiales égales, lorsqu'on augmente la vitesse angulaire initiale de la roue, l'amplitude des oscillations de $d\phi/dt$ et de $\theta$ diminue.	70
Figure 5.10	Carte de stabilité adimensionnelle correspondant à la roue Cyr utilisée pour les manipulations expérimentales ( $R = 0.925$ m, $r_2 = 19$ mm) avec le tracé du lancer 3 et des repères temporels. Contrairement aux lancers pour lesquels la vitesse initiale est moins élevée, une partie significative du mouvement se déroule dans la zone stable, de $t=0$ s à $t=10$ s. . . . .	71
Figure 5.11	Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour les lancers 4 et 5. Lorsqu'on augmente l'inclinaison initiale de la roue, on rend son mouvement plus irrégulier, comme on peut l'observer sur le tracé de $\theta$ .	72
Figure 5.12	Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour pour les lancers 6 et 7. . . . .	73
Figure 5.13	Superpositions des tracés de l'évolution de l'inclinaison de la roue Cyr $\theta$ et de sa vitesse angulaire autour de son axe $d\phi/dt$ pour les 7 lancers. Pour chaque lancer, on indique l'inclinaison initiale $\theta_i$ et la vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}_i$ . Les lancers 1 et 2 correspondent à une faible inclinaison et une faible vitesse initiale, les lancers 3 et 4, correspondent à une inclinaison moyenne et une vitesse initiale élevée, le lancer 5 correspond à une inclinaison importante et une vitesse initiale élevée, le lancer 6 correspond à une inclinaison importante et une vitesse initiale élevée, et le lancer 7 correspond à une inclinaison moyenne et une vitesse initiale élevée. . . . .	75
Figure 5.14	Superposition des tracés de l'évolution de l'inclinaison de la roue Cyr $\theta$ pour les 7 lancers en inversant l'échelle temporelle. La constante $t_f$ représente l'instant auquel la roue s'immobilise. La fin du mouvement est similaire quelles que soient les conditions initiales. . . . .	76
Figure 5.15	Superposition des tracés de l'évolution de la vitesse angulaire de la roue Cyr $d\phi/dt$ pour les 7 lancers en inversant l'échelle temporelle. La constante $t_f$ représente l'instant auquel la roue s'immobilise. La fin du mouvement est similaire quelles que soient les conditions initiales. . .	77
Figure 5.16	Superposition des tracés de l'évolution de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison $\theta$ pour les 7 lancers de roue Cyr. . . . .	77

Figure 5.17	Superposition des tracés de l'évolution de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison $\theta$ pour les 7 lancers de roue Cyr en inversant l'échelle temporelle. La constante $t_f$ représente l'instant auquel la roue s'immobilise.	78
Figure 5.18	Evolution des temps des phases de roulement $t_{phase}$ , de transition et de <i>wobbling</i> ainsi que des taux de décroissance $\tau_d$ de la vitesse angulaire $d\phi/dt$ pour les phases de roulement et de transition en fonction de l'inclinaison initiale $\theta_i$ et de la vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}_i$ .	79
Figure 6.1	Schéma et dimensions du prototype de roue Cyr à réaliser. La roue sera divisée en trois parties identiques qui seront imprimées séparément, les unes après les autres. Le rayon médian de la roue est $R = 900$ mm, et les rayons interne et externe de section sont respectivement $r_1 = 15.2$ mm et $r_2 = 18$ mm.	81
Figure 6.2	Pièces de connexion pour une roue Cyr classique. Les différentes parties, en noir, sont reliées entre elles par des manchons et des vis. La roue est également recouverte d'un revêtement en PVC de 2,5 mm d'épaisseur [24].	81
Figure 6.3	Pièces de connexion pour la roue Cyr composite. Les trois parties de la roue Cyr seront reliées entre elles par des attaches <i>snap pin</i> (a) : un axe passant dans un trou commun aux deux tubes imbriqués l'un dans l'autre est maintenu par une attache faisant le tour du tube [25]. Les extrémités de chacun des trois tubes composant la roue Cyr comporteront des variations de diamètre de section afin de s'emboîter les unes dans les autres (b) et (c).	83
Figure 6.4	Représentations 3D du robot Fanuc utilisé pour l'impression du prototype de roue Cyr : bras robotique 6 axes (a) sur lequel est montée la tête d'impression (b). Cette dernière peut accueillir deux buses d'impression avec des matériaux différents et est équipée d'un système de ventilation pour chaque buse. Document interne du laboratoire Lm <sup>2</sup> de Polytechnique Montréal.	84
Figure 6.5	Robot Fanuc en cours d'impression pour un essai avec du PLA. On imprime une fraction de roue Cyr de rayon de courbure identique au rayon prévu pour le prototype final. Pour les essais, le filament est déposé sur un lit chauffant carré de 450 mm de côté. Les tuyaux bleus servent à aspirer les vapeurs dégagées par le chauffage du matériau.	85



- Figure 6.6 Étapes résumant l'impression d'une partie de roue Cyr. Un cylindre droit au format *.STL* est traité à l'aide du logiciel *Simplify3D* afin de définir les paramètres d'impression. Le fichier *.GCODE* obtenu est ensuite traité par un code *Matlab* qui permet de passer du cylindre droit à un cylindre courbé. Le résultat est ensuite transmis au logiciel *RobotDK* qui paramètre la trajectoire du robot et renvoie un fichier au format *.LS* transmis ensuite au robot Fanuc pour l'impression. . . . . 86
- Figure 6.7 Paramétrage de l'impression sur Simplify 3D : on place des supports seulement sous la roue (en gros sur la figure) et on imprime d'abord en suivant le sens de la courbure (en bleu sur la figure) puis perpendiculairement à la direction initiale (en orange sur la figure). La partie orange correspond à la partie critique de l'impression. Une fois cette partie terminée, on reprend l'impression dans le sens de la courbure. . 88
- Figure 6.8 Optimisation du tranchage de la section de la roue Cyr. tranchage horizontal par défaut (a) comparé à un tranchage optimisé (b). Pour le tranchage par défaut, la section est découpée à l'horizontale, de manière uniforme, ce qui n'est pas optimal. Le procédé de tranchage optimisé, adapté de [17], appliqué à l'impression du prototype de roue Cyr permet d'obtenir de meilleurs résultats sans utiliser de supports, ni modifier la direction d'impression. Ce découpage est adapté à la géométrie de la section de la roue et permet de gagner en temps et en qualité. Pour l'obtenir, on effectue la partition des différentes régions de la section de la roue, on modifie leur orientation par transformation des coordonnées de manière à ce que le tranchage soit optimal pour chaque partie, on réalise le tranchage puis la transformation inverse de coordonnées pour reconstituer la pièce. . . . . 89
- Figure 6.9 Impression de parties de roue Cyr en PLA sur le robot Fanuc selon deux méthodes différentes. Une première pièce (a) est imprimée à l'échelle 1/3 avec supports à l'intérieur de la roue : sa surface est lisse et son épaisseur est régulière. Une seconde pièce (b) est imprimée à l'échelle 1/1 sans supports à l'intérieur, en imprimant selon une direction perpendiculaire à la longueur de la pièce à partir d'une certaine hauteur : l'épaisseur est moins régulière que pour la méthode précédente. . . . . 91
- Figure 7.1 Exemples de figures de roue Cyr auxquelles adapter les possibilités d'une roue composite spécialement conçue pour optimiser le saut : (a) saut prolongé, (b) saut de mains et (c) corner [27, 28]. . . . . 93

- Figure 7.2 Exemples de figures de roue Cyr que l'on favorise en optimisant la stabilité dynamique du mouvement : roue (a) et pièce (b) [27, 29]. . . 95
- Figure B.1  $\Omega_0$  en fonction de  $\theta_0$  et  $\omega_0$ . Les tracés en tirets représentent la solution  $\Omega_{01} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} - \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \hat{L}^2}$ , et les tracés en pointillés,  $\Omega_{02} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} + \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \hat{L}^2}$ . On observe une divergence pour  $\Omega_{02}$  dont les valeurs sont trop élevées comparées aux vitesses du mouvement réel. On considéra uniquement  $\Omega_{10}$ . . . . . 120

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ENC	Ecole Nationale de Cirque
CNAC	Centre National des Arts du Cirque
FEDEC	Fédération Européenne Des Ecoles de Cirque professionnelles
2DDL	Deux degrés de liberté
PLA	Acide polylactique
IMU	Inertial Measurement Unit

## LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Réponse à une perturbation . . . . .	103
Annexe B	Expression de $\sigma$ en fonction de $\theta_0$ et $\omega_0$ . . . . .	119
Annexe C	Calcul des vecteurs propres . . . . .	121
Annexe D	Expression des fréquences propres dans le référentiel du capteur . . .	124

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La roue Cyr se trouve à mi-chemin entre les disciplines acrobatiques, l'équilibrisme et la manipulation d'objet [1]. En effet, s'il s'agit d'un support d'acrobatie entraînant le corps de l'utilisateur dans un mouvement de rotation, elle peut aussi être manipulée par ce dernier. La réalisation de figures acrobatiques repose sur l'équilibre dynamique entre la roue et le corps de l'utilisateur. Ce dernier module le rythme et la force qu'il applique à la roue en fonction de sa masse, son inertie et sa géométrie. La popularité croissante des matériaux composites pour la fabrication d'équipements acrobatiques comme les mats ou les portiques de trapèze éveille la curiosité de la communauté du cirque sur les possibilités nouvelles qu'une roue Cyr en composites apporterait. Concernant l'impression 3D d'une roue Cyr en matériaux composites, l'enjeu est double : ce procédé de fabrication offrant un éventail de possibilités géométriques inaccessibles avec les métaux ainsi qu'un choix de propriétés mécaniques plus varié, c'est une opportunité d'optimiser des mouvements déjà existants mais aussi d'inventer de nouvelles figures.

### 1.1 Définitions et concepts de base

#### 1.1.1 Définitions

**Circassien(ne) :** relatif au cirque

**Agrès de cirque :** équipement nécessaire à la pratique d'une discipline circassienne. Exemples : la roue Cyr, le trapèze, le tissu aérien, les cannes d'équilibre, le mat chinois, etc.

**Disque d'Euler :** disque ayant un mouvement de rotation similaire à celui d'une pièce de monnaie qu'on fait tourner sur une surface plane. Lorsque son mouvement entre en phase terminale sa vitesse de rotation augmente de façon impressionnante, ce qui lui a valu de devenir un jouet éducatif, mais aussi de faire l'objet de nombreuses publications scientifiques. Son mouvement est similaire à un des mouvements caractéristiques de la roue Cyr.

#### 1.1.2 Intérêt artistique de la roue Cyr

La roue Cyr que l'on retrouve dans les spectacles de cirque contemporains doit son nom à Daniel Cyr, qui fabriqua sa première roue en 1996 [2]. A cette dernière, faite en une seule pièce

d'acier recouverte d'un revêtement en PVC, succéda rapidement une roue Cyr démontable en plusieurs parties. La première apparition marquante de la roue Cyr sur la scène circassienne eut lieu en 1998 dans un spectacle du Cirque Eloize, dont Daniel Cyr est le co-fondateur. Une médaille d'argent remportée en 2003 par ce dernier au Festival Mondial du Cirque de Demain acheva d'asseoir la popularité de ce nouvel agrès dans le secteur du cirque, mais également en tant que sport.

Cependant l'idée d'une roue à la géométrie torique dont le diamètre avoisine la taille humaine est bien antérieure à la création de Daniel Cyr [3-5]. En effet, plusieurs agrès d'apparence similaire à celle de la roue Cyr sont apparus du côté de l'Allemagne dès le début du vingtième siècle. On remarquera en particulier l'Einrefen, inventé en 1930 par Adalbert von Rekowski, qui diffère de la roue Cyr par des poignées intérieures pour les mains et les pieds. La figure 1.1 présente une photographie de la roue Cyr présentée par son créateur au grand public pour la première fois, côte à côte avec des images de son ancêtre, l'Einrefen.

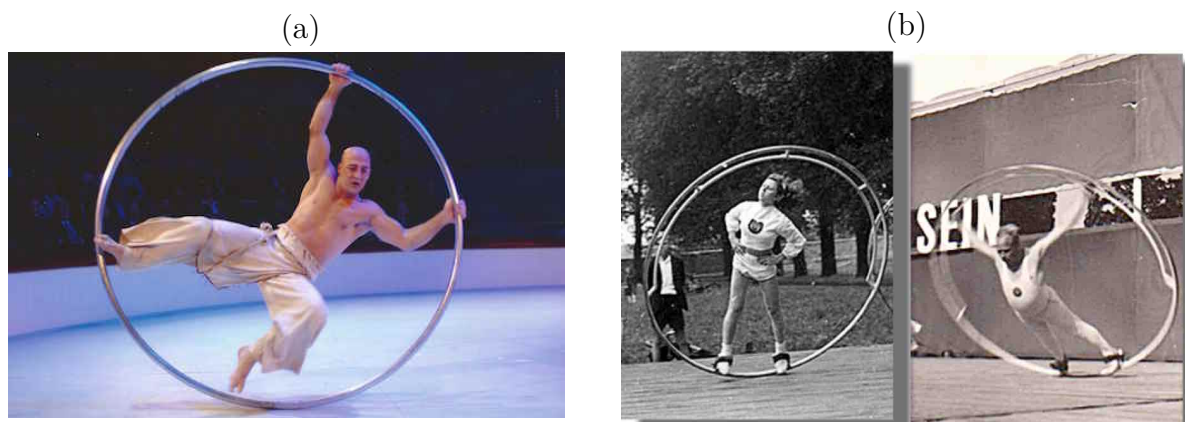


Figure 1.1 La roue Cyr à ses débuts : (a) Daniel Cyr au 24e festival mondial de demain en 2003 [6] et (b) Helga Tempel en 1950 sur l'Einrefen, ancêtre de la roue Cyr [4].

Depuis, la roue Cyr continue d'évoluer, comme le montre l'apparition progressive de nouveaux agrès conçus en dérivant le concept de la roue Cyr : quelques exemples sont présentés à la figure 1.2. Les possibilités acrobatiques se trouvent ainsi de plus en plus diversifiées. Les procédés de fabrication se sont eux aussi affinés [7], et les roues Cyr lumineuses programmables ont vu le jour.

Avec la généralisation de l'utilisation des matériaux composites dans le secteur de l'équipement sportif, l'utilisation de ces matériaux pour la fabrication de roues Cyr se présente aujourd'hui comme l'étape suivante dans l'évolution de l'agrès.

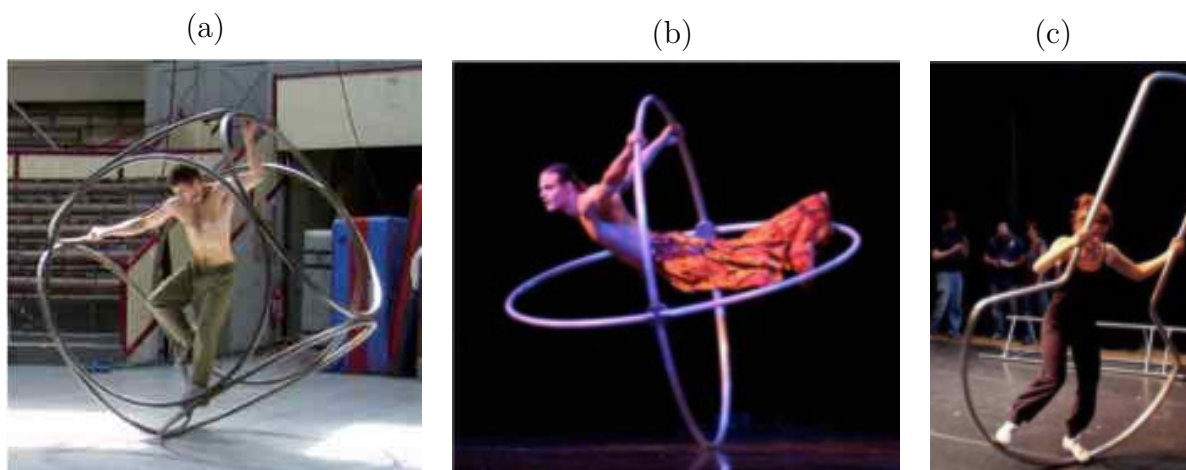


Figure 1.2 Agrès de cirque dérivés de la roue Cyr [1] : cube composé de 6 roues Cyr (a), deux roues Cyr formant un angle droit imbriquées l'une dans l'autre (b), une roue Cyr dont on a remplacé la partie supérieure par une forme rectangulaire (c).

### 1.1.3 Les figures de roue Cyr

Nous présentons ici les figures de roue Cyr constituant la base principale de la discipline. Ces dernières, ainsi que d'autres figures plus avancées sont détaillées dans le manuel de la Fédération Européenne Des Ecoles de Cirque professionnelles (FEDEC) [1]. Notre étude vise à enrichir les possibilités acrobatiques de la roue Cyr en développant de nouvelles figures, complètement inédites ou basées sur des figures classiques comme celles présentées ci-dessous. Modifier la masse et la rigidité de la roue rendra l'exécution de chacune de ces figures différente : leur connaissance permet d'imaginer comment les adapter pour qu'elles restent possibles, ou les développer pour donner de nouvelles figures.

#### La valse (ou pas de base)

Le corps est positionné de façon symétrique, avec bras et jambes chacun inclinés à  $45^\circ$  de la verticale. L'utilisateur initie la rotation d'une poussée du pied puis accompagne le mouvement de la roue en utilisant le transfert de son poids, tirant et poussant successivement la roue dans le sens de la rotation.

Ce mouvement se décline en plusieurs variations : par exemple un lâcher de pied, qui avec un arc de cercle de la jambe devient un arabesque. Il s'exécute aussi à une seule main, les mains croisées, en serrant et croisant les jambes ou en les écartant jusqu'au grand écart latéral. Il

est aussi possible de placer un pied sur la roue au niveau de la tête, en grand écart facial. D'autres variantes jouent avec la position du corps : de profil, dans le plan de la roue, arqué vers l'intérieur, tendu vers l'extérieur, etc.

### **Les tours**

Le mouvement est dissocié : la roue tourne mais le corps reste fixe. Ce type de figure s'exécute en effectuant un demi-tour, un tour complet, ou même un tour en suspension avec l'utilisateur suspendu à la roue par une main.

### **Les vrilles**

Il s'agit de l'inverse des tours : le corps tourne dans le référentiel de la roue. De même, ce type de figure se décline de la demi vrille à la vrille complète en suspension.

### **Les suspensions**

Comme l'indique le nom, les pieds ne sont pas sur la roue. On peut par exemple exécuter la valse en suspension, sans les pieds, ou simplement prendre de l'élan puis lâcher les pieds et adopter une position groupée en tournant sur place, ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse de rotation. Il est possible de se suspendre par une ou deux mains, par les coudes, les bras tendus ou fléchis. La suspension est la base de la figure du Superman : corps gainé, jambes tendues vers l'arrière.

### **Le drapeau**

La roue n'est tenue que par la main et le pied d'un même côté. La rotation est alimentée en poussant et tirant avec la main et le pied restants, tout en tendant puis groupant successivement la main et le pied lâchés.

### **Les sauts prolongés**

La roue tourne sur elle-même, l'utilisateur saute et prend appui comme il le souhaite, bras tendus, pliés, ou même en position assise sur la roue. Il maintient sa position pour quelques tours et peut ensuite atterrir sur le sol ou directement sur la roue.



### **Le corner ou inclinaison horizontale**

L'utilisateur se décale sur un côté de la roue jambes serrées, prend appui jambes fléchies puis plonge vers le sol, jambes tendues : le corps se retrouve en position horizontale pour un demi-tour. Cette figure peut se réaliser en lâchant un bras, un pied, ou un bras et un pied simultanément.

### **Le saut de mains**

L'utilisateur pousse la roue vers le sol avec une main, accompagne le renversement avec son poids, ouvre les doigts quand sa main arrive au niveau du sol puis la tire au dessus de sa tête et la pousse avec ses jambes afin de revenir à l'endroit. Cette figure s'exécute en avant, en arrière, en position de profil ou à une jambe.

### **La roue**

La roue roule sur sa tranche et l'utilisateur entretient le mouvement au moyen de transferts de poids. On peut enchaîner plusieurs roues le long d'une trajectoire circulaire ou rectiligne. Il est possible de la combiner avec d'autres figures ou changements de direction et d'enchaîner ainsi les roues dans des sens différents.

### **La pièce**

Ce mouvement est semblable à la rotation d'une pièce de monnaie dans la phase terminale du mouvement. L'utilisateur, gainé, ouvre successivement les doigts pour ne pas les écraser lorsque ses mains arrivent au niveau du sol, et transfère son poids pour accompagner le mouvement et l'alimenter aussi longtemps qu'il le souhaite. Cette figure peut s'exécuter à différentes hauteurs du sol, plus la pièce est basse, plus la vitesse sera élevée. On peut aussi la réaliser à l'envers, le corps arqué (pièce dorsale).

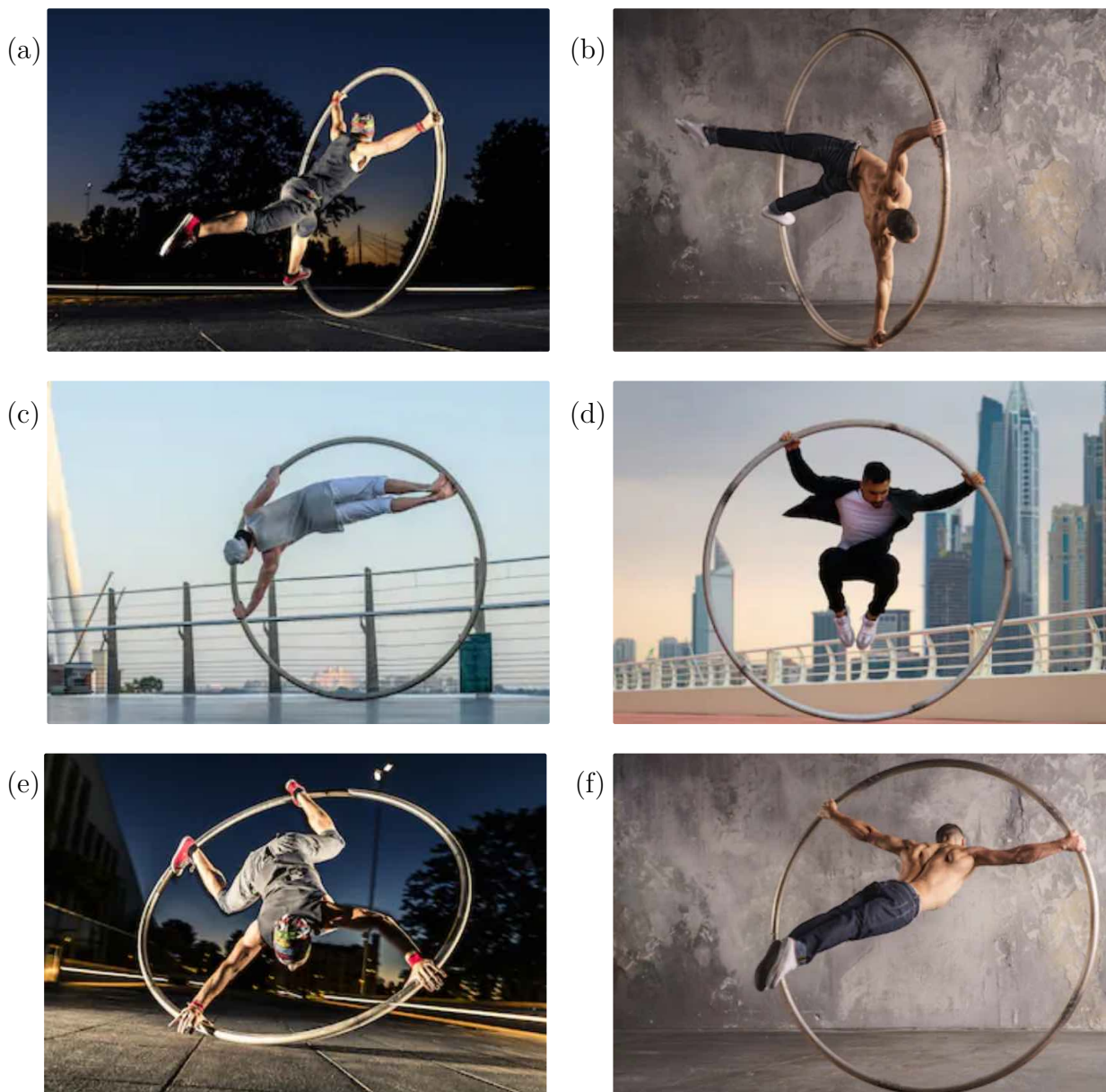


Figure 1.3 Quelques figures de roue Cyr : valse avec lâcher de pied (a), saut de main (b), corner (c), suspension (d), pièce (e), superman (f) [8].

## 1.2 Problématique

L'intérêt des matériaux composites haute performance, à base de fibres de carbone ou de fibres de verre, réside dans le fait qu'ils allient légèreté et flexibilité tout en étant capables de supporter des efforts importants. Ceci explique leur popularité dans le secteur de l'équipement sportif. La création d'une roue Cyr imprimée en 3D avec des matériaux composites haute performance enrichira la discipline de nouvelles figures et possibilités scéniques. En effet une roue en matériau de type polyamide renforcé avec des fibres aura des propriétés différentes de celles des roues Cyr classiques en métal en termes de poids, de flexibilité et de résistance. Ce projet se trouve au carrefour de la science, de la technique acrobatique et de l'art. Ceci nécessite de réunir des expertises issues de ces différents domaines, couplés à des moyens de fabrication adéquats. La figure 1.4 présente le découpage de la problématique selon les trois étapes clés : conception, fabrication et tests.

### 1.2.1 Conception

Il s'agit de déterminer quels paramètres parmi les propriétés mécaniques du matériau et la géométrie de la roue Cyr influencent les mouvements de cette dernière, puis de caractériser cette influence quantitativement.

A cet effet des modèles théoriques de deux mouvements caractéristiques sont développés :

- Le saut : la possibilité d'intégrer des sauts aux figures de roue Cyr déjà existantes est une des lignes directrices du projet. La roue est déformée par l'exercice d'une force verticale dont l'axe coïncide avec son diamètre, puis relâchée. Une part de l'énergie élastique stockée par la roue est convertie en saut.
- Le mouvement de roulement : il est similaire au mouvement d'une pièce de monnaie qui roule sur sa tranche en décrivant des cercles, puis entre en phase terminale au cours de laquelle elle oscille de plus en plus rapidement avant de tomber à plat sur le sol. Pour ce mouvement de corps rigide seule la géométrie de la roue exerce une influence.

En se basant sur chacun des modèles théoriques correspondants, l'objectif est de déterminer séparément les paramètres géométriques et mécaniques qui :

- permettent à l'utilisateur de sauter le plus haut possible avec la roue.
- permettent d'optimiser le mouvement de roulement en termes de stabilité dynamique.
- conduisent au meilleur compromis entre les deux réponses aux questions précédentes.

Parallèlement, il est nécessaire d'étudier les contraintes et déformations dans la roue afin d'anticiper les potentielles situations d'endommagement et de flambement et de les prendre en compte dans l'étape de conception.

### 1.2.2 Fabrication

Il s'agit de concrétiser l'étude théorique issue de la phase de conception avec un procédé adapté de fabrication par impression 3D. En utilisant les technologies existantes et disponibles pour le projet, comment imprimer un tore d'un diamètre avoisinant les deux mètres ? Comment assurer des propriétés conformes à celles déterminées par les modèles théoriques établis au préalable ?

### 1.2.3 Tests

Malgré la popularité du sujet au sein de la communauté circassienne, la roue en matériaux composites ne figure pas dans l'offre des fabricants d'équipement de cirque. Cela s'explique en partie par la difficulté à évaluer concrètement ce qu'apporterait une telle roue Cyr et donc estimer si les adeptes de la discipline seraient prêts à l'acquérir pour un prix supérieur à celui d'une roue métallique. Leur fabrication nécessite un investissement qui ne peut être engagé sans avoir de certitude sur sa rentabilité. Avec le prototype obtenu à l'issue de l'étape de fabrication, une phase de recherche artistique sera menée en collaboration avec des artistes de cirque. Les nouvelles possibilités introduites par une roue Cyr composite seront ainsi mises en évidence, aussi bien en termes d'acrobatie que de jeu de scène. Les fabricants seront alors en mesure d'évaluer si une véritable demande peut exister.

En outre, plusieurs artistes de roue Cyr ont déjà tenté d'approcher ces nouvelles possibilités, avec des roues Cyr fabriquées de manière artisanale dans des matériaux plus légers ou plus flexibles que les métaux (par exemple une roue Cyr en osier a été fabriquée par des élèves du Centre National des Arts du Cirque (CNAC) en France [9]) cependant ces projets d'expérimentation n'ont pu être menés à terme, les roues se retrouvant rapidement endommagées et hors service. Fournir un prototype fonctionnel et solide permettra à ces artistes de continuer d'approfondir leur recherche avec une sécurité accrue.

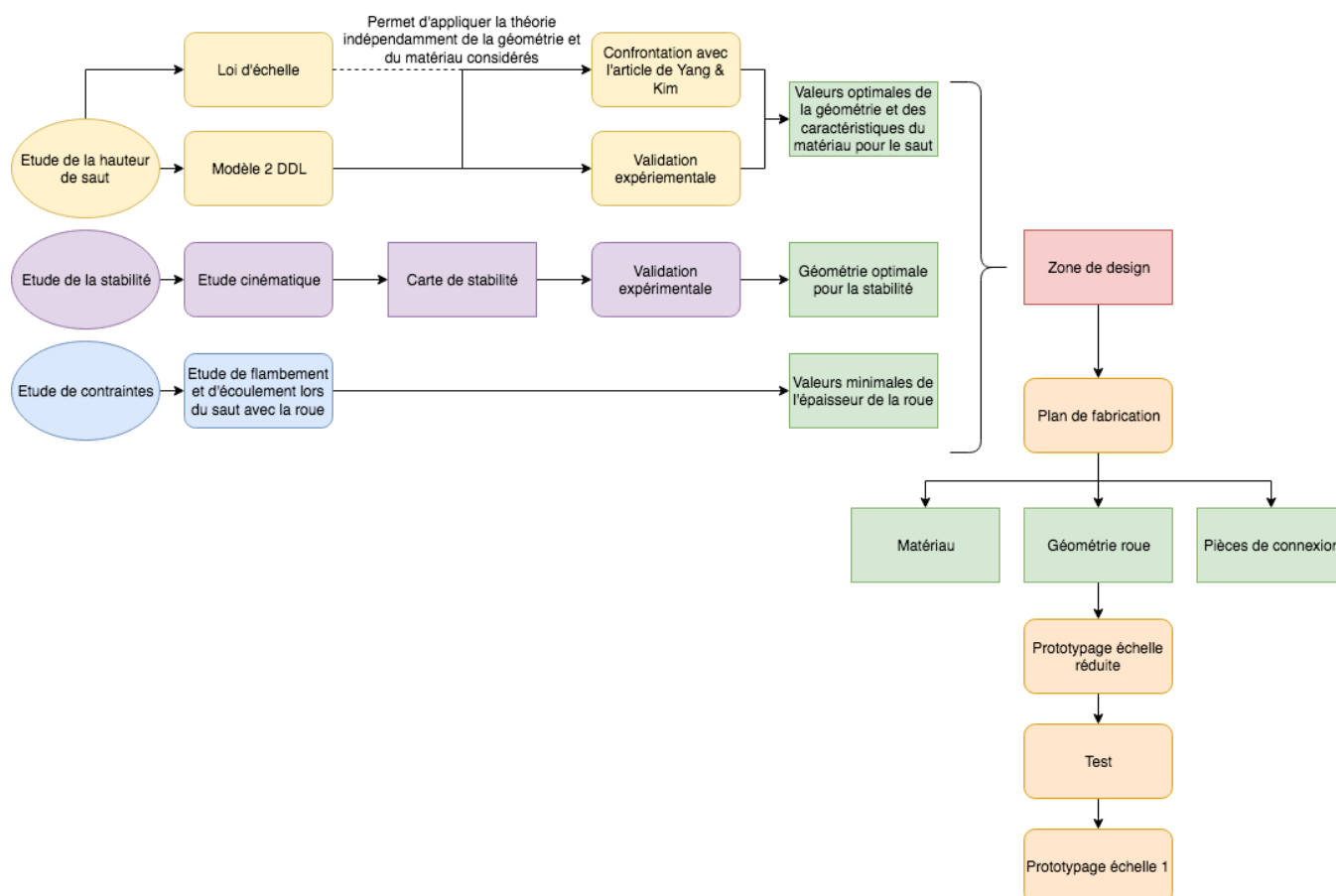


Figure 1.4 Diagramme résumant les étapes de conception et de fabrication de la roue. La problématique de l'étude est découpée en trois parties : optimisation du mouvement pour les sauts (en jaune), optimisation de la stabilité dynamique pour le mouvement de roulement (en violet) et étude de la résistance de la roue (en bleu). Ces trois parties permettent de déterminer le matériau et la géométrie optimaux pour chaque type de mouvement, ainsi que les valeurs minimales pour préserver la roue de l'endommagement lors de l'utilisation (en vert). Ces paramètres sont ensuite combinés entre eux pour établir une zone de design à partir de laquelle sera déployé le plan de fabrication : prototypage à échelle réduite, tests puis prototypage à l'échelle 1 (en orange).

## 1.3 Objectifs de recherche

### 1.3.1 Objectif global

L'objectif global de ce projet de recherche est de comprendre le mouvement de la roue par la modélisation afin de concevoir un prototype de roue Cyr optimisée grâce aux matériaux composites et à l'impression 3D, qui permettront d'obtenir une roue Cyr à la fois légère, flexible et résistante, puis de tester avec des artistes les nouvelles possibilités offertes par cet agrès.

### 1.3.2 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques du projet sont les suivants :

1. Caractériser expérimentalement et théoriquement l'influence des propriétés mécaniques et de la géométrie sur le comportement de la roue Cyr lors d'un saut.
2. Modéliser les contraintes dans la roue lors d'un saut et identifier les limites, en termes de géométrie et d'épaisseur de section, qui permettent de garantir que la roue ne sera pas endommagée.
3. Caractériser l'influence de la géométrie de la roue Cyr sur sa stabilité dynamique lors du mouvement de rotation.
4. Fabriquer un prototype de roue Cyr optimisée et développer une recherche artistique autour de ce nouvel agrès.

## 1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire s'organise en 6 chapitres. Le deuxième chapitre est constitué d'une revue de littérature centrée sur la roue Cyr, recensant les publications traitant de systèmes s'en rapprochant par leurs formes et leurs mouvements. Les quatre chapitres qui suivent correspondent aux sous-objectifs spécifiques structurant le projet : le chapitre 3 expose une modélisation du saut d'une roue Cyr et sa validation expérimentale, le chapitre 4 étudie la résistance de la roue Cyr soumise aux impacts et aux contraintes de l'utilisateur, le chapitre 5 présente un modèle du mouvement de rotation d'une roue Cyr et en étudie la stabilité dynamique. Le chapitre 6 traite de la fabrication et du procédé d'impression 3D choisi pour fabriquer un prototype de roue Cyr optimisée.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Le disque d'Euler

#### 2.1.1 Définition générale et lien avec la roue Cyr

Le disque d'Euler est un disque plein homogène, mince, uniforme et indéformable. Son mouvement peut être découpé en deux phases [10], [11] :

- Phase de roulement : Le disque, incliné, roule sur sa tranche en suivant une trajectoire circulaire.
- Phase terminale, ou phase d'oscillation (*wobbling*) : le centre de masse du disque se déplace uniquement selon la verticale, le disque se met à tourner de telle manière que le point de contact avec le sol se déplace de plus en plus rapidement le long de son contour, un mouvement d'oscillation apparaît, accompagné d'un son vibratoire [12], et atteint sa fréquence maximale avant que le disque tombe à plat sur le sol.

C'est de la phase terminale que le disque d'Euler tient sa popularité. Son côté spectaculaire en a fait un jouet éducatif, tandis que l'arrêt abrupt du mouvement et l'augmentation marquée des fréquences acoustiques émises par le disque lors du *wobbling* attisent les curiosités scientifiques [12]. Il a été déterminé que le comportement du disque au terme de cette phase était dû à la viscosité de l'air.

Son mouvement est généralement modélisé à l'aide des angles d'Euler et de différents référentiels, comme schématisé sur la figure 2.1. L'angle  $\theta$  décrit l'inclinaison du disque,  $\phi$  décrit sa rotation autour de l'axe principal perpendiculaire à son diamètre et  $\psi$  décrit sa rotation autour de l'axe fixe vertical  $Z$ . Ces trois angles et leurs dérivées sont les variables à partir desquelles nous étudierons la stabilité dynamique de la roue Cyr.

La roue roule sur sa tranche en décrivant des cercles de plus en plus petits, avant d'entrer en phase terminale. Un exemple typique de trajectoire du centre de masse du disque d'Euler en mouvement est représenté à la figure 2.2. Ces deux phases correspondent respectivement aux deux figures fondamentales de roue Cyr que sont la roue et la pièce, présentées à l'introduction. Il s'agit également de l'un des mouvements qu'on souhaite modéliser afin d'identifier les paramètres mécaniques et géométriques déterminants pour la stabilité dynamique et de caractériser leur influence.

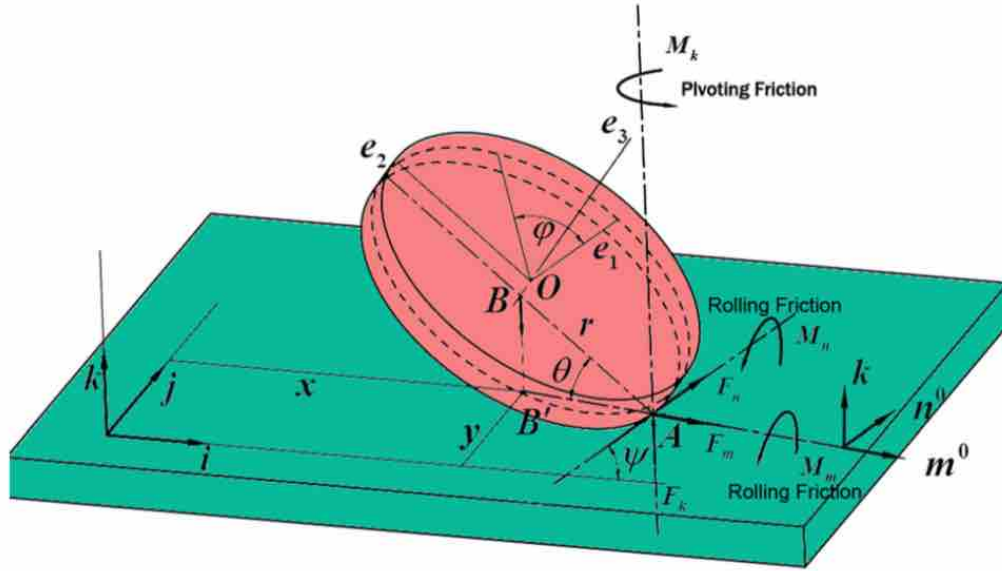


Figure 2.1 Modélisation du disque d'Euler en mouvement [13]. L'angle  $\theta$  décrit l'inclinaison du disque,  $\phi$  décrit sa rotation autour de l'axe principal perpendiculaire à son diamètre et  $\psi$  décrit sa rotation autour de l'axe fixe vertical  $Z$ .

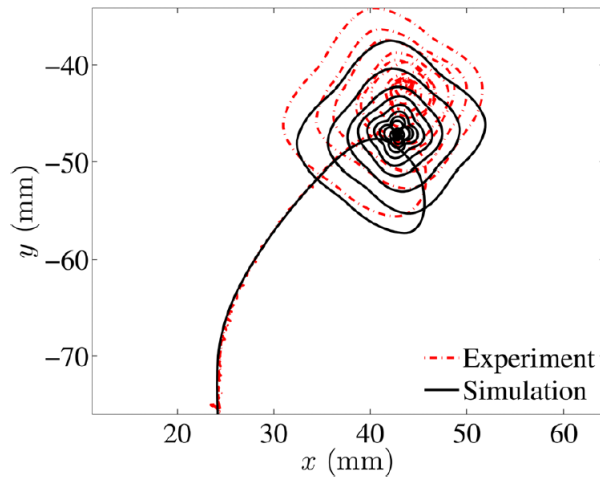


Figure 2.2 Trajectoire typique du centre de masse du disque d'Euler en mouvement, projeté sur le plan horizontal. Le tracé rouge correspond à une mesure expérimentale et le noir, à une simulation avec des conditions initiales correspondantes. La forme de la trajectoire s'explique par la décroissance rapide de l'angle de nutation  $\theta$  [13].



### 2.1.2 Modèle mathématique et intégration numérique

Kessler et O'Reily [12] et Campos *et al* [14] développent des modèles mathématiques du disque d'Euler en vue d'une intégration numérique. Il caractérisent son comportement en termes de trajectoire du point de contact avec le sol, de variation d'énergie et de fréquence.

### 2.1.3 Étude de la stabilité en régime permanent

Considérons une roue de rayon  $R$ , roulant sur un plan horizontal  $XY$  et dont la position verticale est donnée par  $Z$ . L'inclinaison de la roue est donnée par  $\theta$  (noté  $\theta_0$  en régime permanent), qui est l'angle entre le plan de la roue et l'axe vertical  $Z$ . On considère uniquement la phase de roulement en régime permanent : la roue roule sur sa tranche en décrivant des cercles, sans perte d'énergie. On note  $r$  le rayon des cercles décrits par le point de contact entre la roue et le sol et  $d\psi/dt$ , la vitesse à laquelle le disque décrit ces cercles. La figure 2.3 présente un schéma sur lequel ces variables et ces systèmes d'axes sont représentés.

Batista [10] étudie la stabilité en régime permanent du mouvement de roulement du disque d'Euler. Il définit les conditions d'existence d'une position d'équilibre dynamique en fonction du signe de  $(d\psi/dt)^2$ . Ce signe dépend de  $\theta_0$  et  $r$ , chaque couple  $(\theta_0, r)$  permet donc de déterminer si l'équilibre dynamique est possible ou non. Avec un raisonnement similaire, on détermine si, en cas de stabilité, le système reste stable ou non lorsqu'on ajoute une petite perturbation. Le résultat final est une carte de stabilité d'abscisse  $\theta_0$  et d'ordonnée  $r$ , présentée à la figure 2.4, où la couleur de chaque point correspond à un des trois cas : stable, indéfini (l'équilibre dynamique ne peut pas exister), ou instable en cas de perturbation.

Moffatt [15] développe un modèle simplifié du disque d'Euler en phase terminale, schématisé à la figure 2.5. Son but est de démontrer que la viscosité de l'air est à l'origine de la manière brusque qu'a le disque de s'immobiliser à la fin du mouvement. A des fins de simplification, l'épaisseur du disque est négligée et on ne considère que le mouvement autour de l'axe instantané de rotation ( $PO$ ). On note  $t$  la variable temps et  $t_f$ , le temps auquel le disque s'immobilise à plat sur le sol et  $\theta$ , l'inclinaison du disque par rapport à la verticale. En considérant que la seule source de dissipation d'énergie est le frottement visqueux dû à la couche d'air entre le disque et le support, Moffatt obtient une loi de proportionnalité entre l'angle  $\frac{\pi}{2} - \theta$  et  $(t_f - t)^{\frac{1}{3}}$ .

Contrairement à Moffatt, Ma Daolin [11] affirme que les mécanismes de dissipation d'énergie dominants sont la résistance au roulement et la résistance au pivotement du disque d'Euler. Il modélise ces phénomènes avec des lois de frottement visqueux pour traduire l'évolution compliquée de la pression de contact entre le disque et le support. De ce modèle découle la

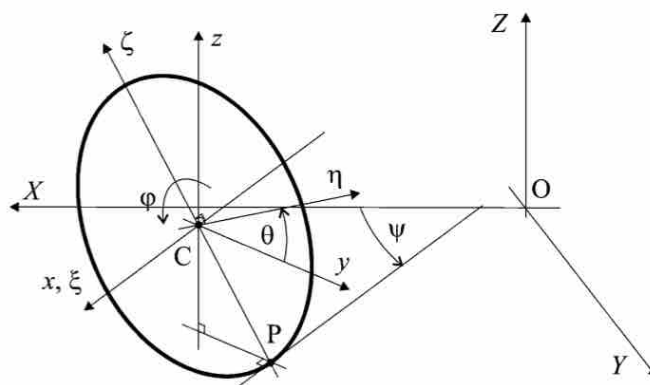


Figure 2.3 Modélisation du disque d'Euler lors de la phase de roulement [10].  $\theta$  décrit l'inclinaison de la roue par rapport à la verticale  $Z$  et  $d\psi/dt$ , la vitesse à laquelle la roue décrit des cercles en roulant sur sa tranche.

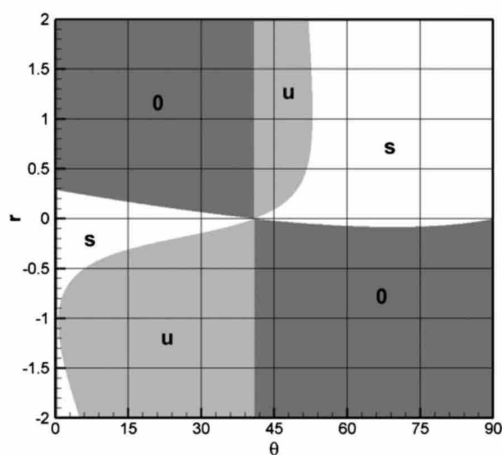


Figure 2.4 Carte de stabilité du mouvement de roulement du disque d'Euler en régime permanent [10]. Elle indique si pour chaque couple  $(\theta, r)$ , le mouvement est stable (s), instable en cas de perturbation (u), ou si l'équilibre dynamique ne peut pas exister (0).  $\theta$  décrit l'inclinaison de la roue et  $r$  correspond au rayon des cercles décrits par le disque lorsqu'il roule sur sa tranche.

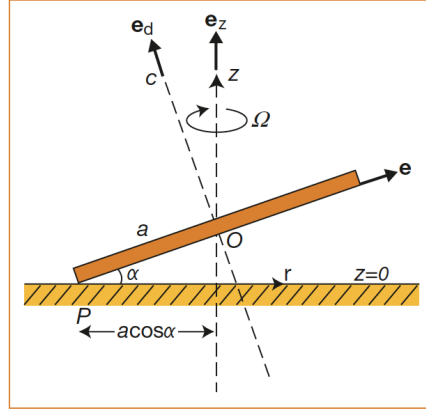


Figure 2.5 Modélisation du disque d'Euler en phase de *wobbling* [15]. L'angle  $\alpha$  correspond à la mesure  $\frac{\pi}{2} - \theta$ . L'épaisseur du disque est négligée et on ne considère que le mouvement autour de l'axe instantané de rotation ( $PO$ ).

loi de puissance  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \propto (t_f - t)^{\frac{2}{3}}$ . La figure 2.6 présente les tracés en échelle logarithmique de l'évolution de l'inclinaison du disque en fonction du temps pour trois cas expérimentaux, et  $t_f$  désigne le temps auquel le disque s'immobilise. Un lancer se déroule ainsi : on place le disque sur sa tranche, puis on lui applique une poussée. Il se met alors à rouler, incliné, sur sa tranche et son centre de masse décrit des cercles de plus en plus petits avant de s'immobiliser. La pente du logarithme est la même pour les 3 lancers de disques, et vaut  $2/3$ , ce qui permet à Ma Daolin de valider sa loi de puissance théorique.

## 2.2 Elasticité et saut d'une roue Cyr

Yang et Kim étudient dans leur article *Jumping hoops* [16] le comportement d'anneaux de diamètres millimétriques, faits de polyimides ou d'acier et de sections variables, lorsque ceux-ci sont comprimés puis relâchés. Les résultats sont traités sous forme d'études adimensionnelles de l'énergie et de la hauteur maximale de saut,  $H_{max}$ , puis confrontés à un modèle théorique développé à partir d'un bilan d'énergie. La figure 2.7 présente une séquence d'images capturées lors d'un saut, et les mesures de la hauteur adimensionnelle des sauts en fonction du rayon  $R$ , de l'épaisseur  $\tau$  et de la déformation initiale  $\delta$  pour des anneaux de diamètre, d'épaisseurs et de matériaux différents. La hauteur adimensionnelle mesurée est proportionnelle au ratio  $\tau^2 \delta^2 / R^4$ . Comme l'énergie élastique fournie à l'anneau par déformation est proportionnelle à  $\delta^2$  et que l'énergie potentielle gravitationnelle correspondant au saut est proportionnelle à  $H_{max}$ , cela signifie que, quels que soient l'anneau et la déformation, la proportion d'énergie élastique transformée en énergie de saut est toujours la même.

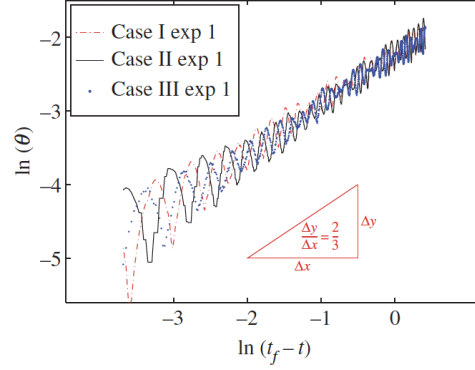


Figure 2.6 Évolution temporelle de l'inclinaison du disque d'Euler [11] pour 3 cas expérimentaux.  $t_f$  désigne le temps auquel le disque s'immobilise. L'utilisation d'une échelle logarithmique permet de valider la loi  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \propto (t_f - t)^{\frac{2}{3}}$  établie par Ma Daolin, car la pente du logarithme est la même pour les 3 lancers de disques, et vaut  $2/3$ .

### 2.3 Impression 3D : angle de tranchage optimisé

Lorsqu'on imprime une pièce en 3D à partir d'un fichier au format *.STL* qui décrit sa géométrie en trois dimensions, on découpe le solide en tranches horizontales afin de définir le parcours de la tête d'impression : il s'agit de l'étape de *slicing*, ou tranchage. Zhao [17] présente une méthode de tranchage permettant de s'affranchir des supports d'impression utilisés dans les procédés classiques. Son procédé, schématisé à la figure 2.9 consiste à incliner la direction des tranches, habituellement horizontale, pour l'adapter à la forme de la pièce : pour cela il faut partitionner les régions et modifier leur orientation avant d'effectuer le tranchage, puis reconstituer l'objet. En plus de gagner du temps lors de l'impression et de réduire la quantité de matière utilisée, cette méthode permet d'obtenir une pièce de meilleure qualité. La figure 2.8 présente un exemple de comparaison entre une pièce imprimée en utilisant des supports avec un tranchage uniforme horizontal et la même pièce imprimée sans supports, séparée en trois régions pour lesquelles on optimise l'angle de tranchage. Les résultats obtenus montrent que la pièce obtenue avec un angle de tranchage optimisé est de meilleure qualité : sa surface est plus lisse, il n'y a pas d'écart entre les filaments.

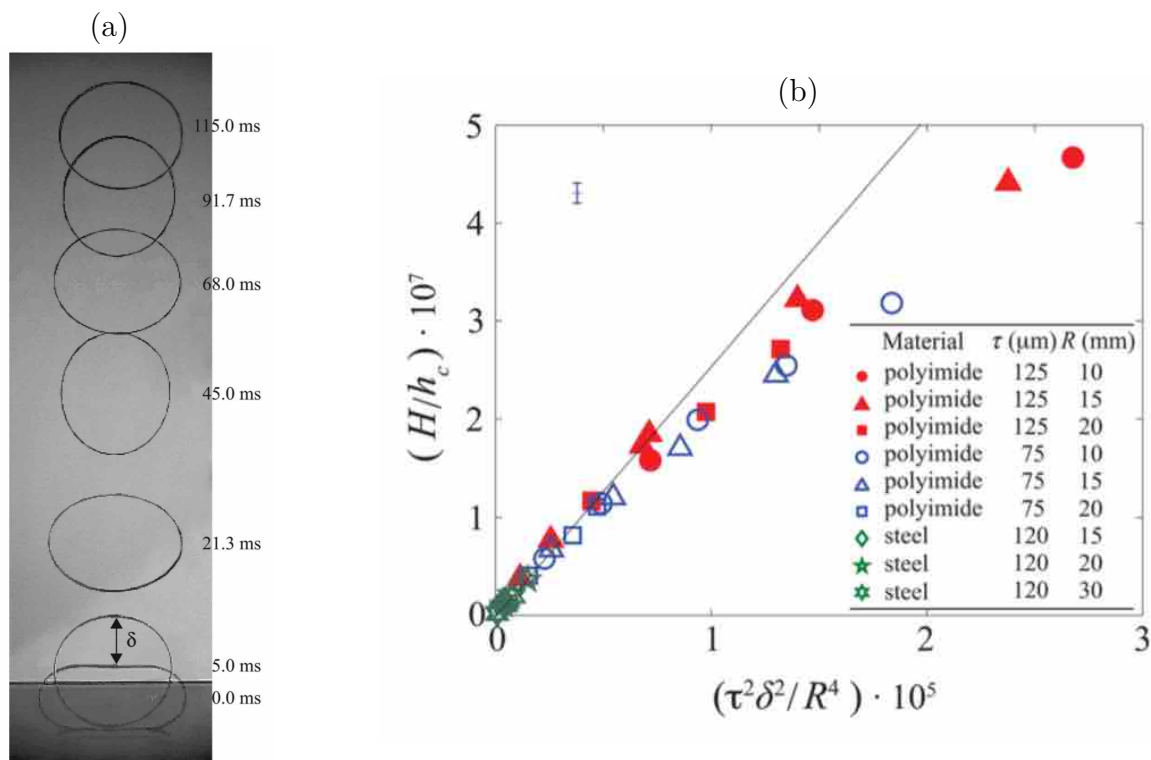


Figure 2.7 Résultats des expériences de Yang et Kim [16]. Le saut d'un anneau élastique enregistré par vidéo lors d'une expérience avec un anneau en polyimide de rayon  $R = 16\text{mm}$ , d'épaisseur  $\tau = 125\mu\text{m}$  et une déformation initiale de  $\delta = 14\text{mm}$  est présenté en (a). Cette manipulation est reproduite pour différents types d'anneaux et la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de l'anneau est tracée en fonction de la déformation initiale en (b), sous forme de grandeurs adimensionnelles.  $h_c = E/\rho g$  où  $E$  est le module d'Young du matériau considéré et  $\rho$  sa masse volumique.

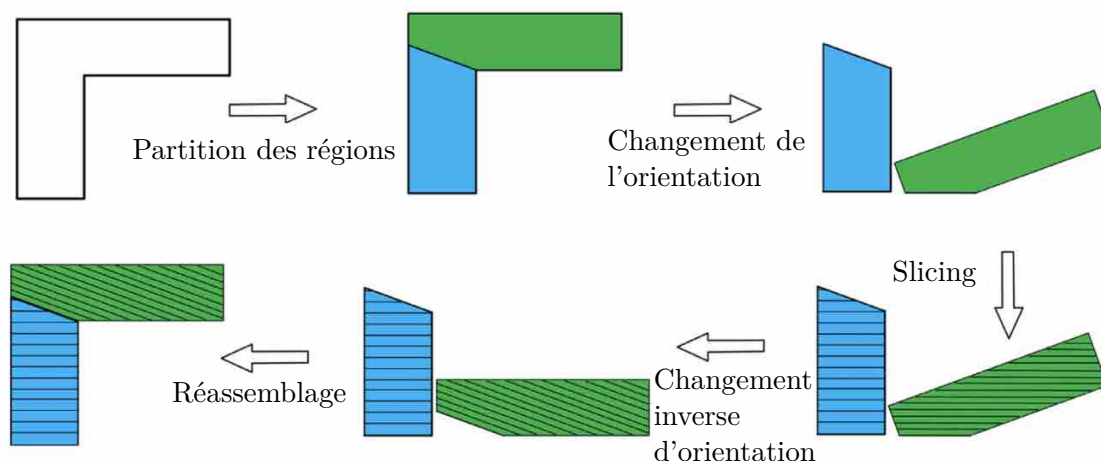


Figure 2.8 Procédé de tranchage optimisé. Afin d'avoir un découpage qui permet d'éviter l'affaissement du filament, ou l'ajout de supports, on applique successivement au fichier destiné à l'impression les étapes suivantes : partition des régions, modification de l'orientation des parties concernées par transformation des coordonnées, tranchage et transformation inverse de coordonnées. Image adaptée de [17].

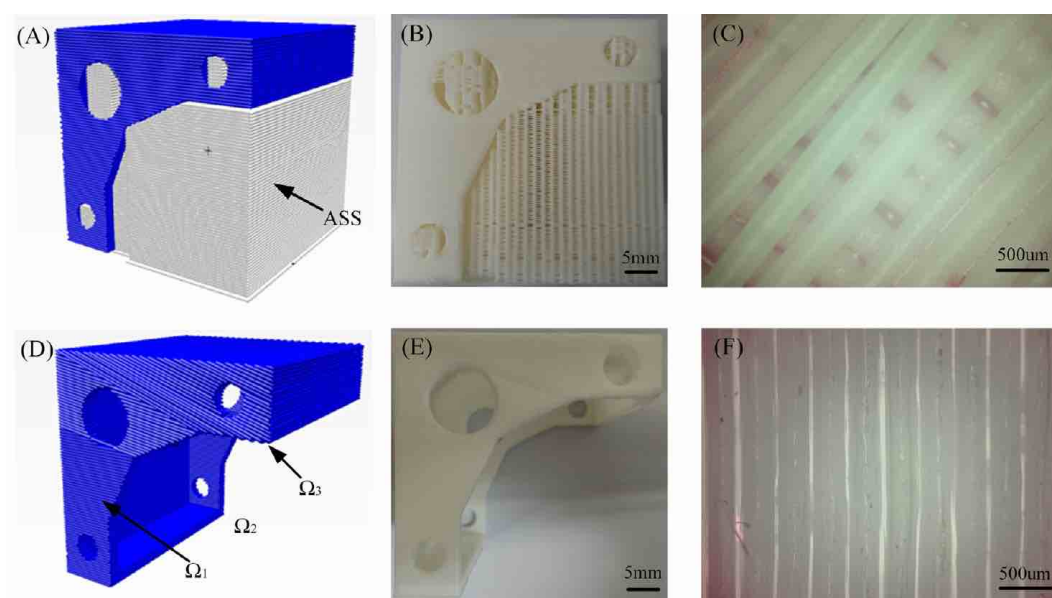


Figure 2.9 Comparaison entre l'impression 3D avec supports et l'impression 3D sans support en adaptant l'angle de tranchage pour une même pièce. La pièce imprimée avec un angle de tranchage optimisé (D,E) est partitionnée en trois régions  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  pour lesquelles les angles de tranchage sont différents. La pièce imprimée avec des supports (*Assisted Supporting Structures* sur l'image (A)) présente une surface (C) de moins bonne qualité que la surface (F) de la pièce imprimée avec un angle de tranchage optimisé. Images tirées de [17].

## 2.4 Conclusion

Bien qu’aucun article sur la roue Cyr à proprement parler ne soit disponible dans la littérature scientifique, les travaux analysant des systèmes à la géométrie cylindrique fournissent des modèles que nous réadaptions afin de répondre à notre problématique. La démarche de Yang et Kim dans l’article *Jumping hoops*[16] sert de modèle et de point de comparaison pour le développement de l’étude du saut d’une roue Cyr. Les articles sur le disque d’Euler, quant à eux, servent de base pour modéliser le mouvement d’une roue Cyr qui roule sur sa tranche en décrivant des cercles et étudier la stabilité dynamique de ce mouvement. En se basant sur ces travaux on développe ainsi des relations qui permettent d’évaluer l’influence des propriétés du matériau et de la géométrie de la roue Cyr sur ses performances. Une fois confrontées à des résultats expérimentaux, ces relations nous guident pour la définition d’une zone de design d’un prototype de roue Cyr optimisée. La section circulaire creuse de la roue Cyr pose la question des supports : les travaux sur l’impression 3D éclairent nos choix en termes de procédé et posent les bases d’une optimisation de ce dernier.

## CHAPITRE 3    MODÉLISATION THÉORIQUE DU SAUT D'UNE ROUE CYR

Dans ce chapitre, on établit un modèle théorique d'une roue Cyr que l'on comprime puis relâche afin d'étudier les variations de la hauteur maximale de saut ainsi que l'efficacité énergétique. Les équations issues du modèle sont ensuite confrontées à une étude expérimentale. La figure 3.1 schématise la géométrie et la physique considérées.

### 3.1    Cadre de l'étude

#### 3.1.1    Description du mouvement

La roue Cyr de rayon  $R$  est comprimée par une force verticale  $F$  exercée selon l'axe de son diamètre, puis relâchée. Une partie de l'énergie de déformation élastique est transformée en saut. On notera  $H_{max}$  la hauteur correspondant à l'énergie potentielle par laquelle s'élève le centre de gravité de la roue depuis sa position au repos jusqu'à sa hauteur maximale.

#### Hypothèses

La modélisation est construite sur la base des hypothèses suivantes :

- On considère que le support contre lequel la roue est comprimée est parfaitement rigide.
- On néglige les efforts aérodynamiques.
- La répartition des masses est idéale.

#### Modèle deux degrés de liberté

On modélise la roue Cyr par deux masses ponctuelles égales à  $m_r/2$  reliées par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $2R$ , où  $R$  correspond au rayon médian de la roue.

La raideur équivalente de la roue est donnée par [16] :

$$k = \frac{4\pi EI}{(\pi^2 - 8)R^3}, \quad (3.1)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $I$  est le moment moment quadratique de la section de la roue.

Les positions des masses sont repérées par les ordonnées  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . La figure 3.2 schématise le système au repos.



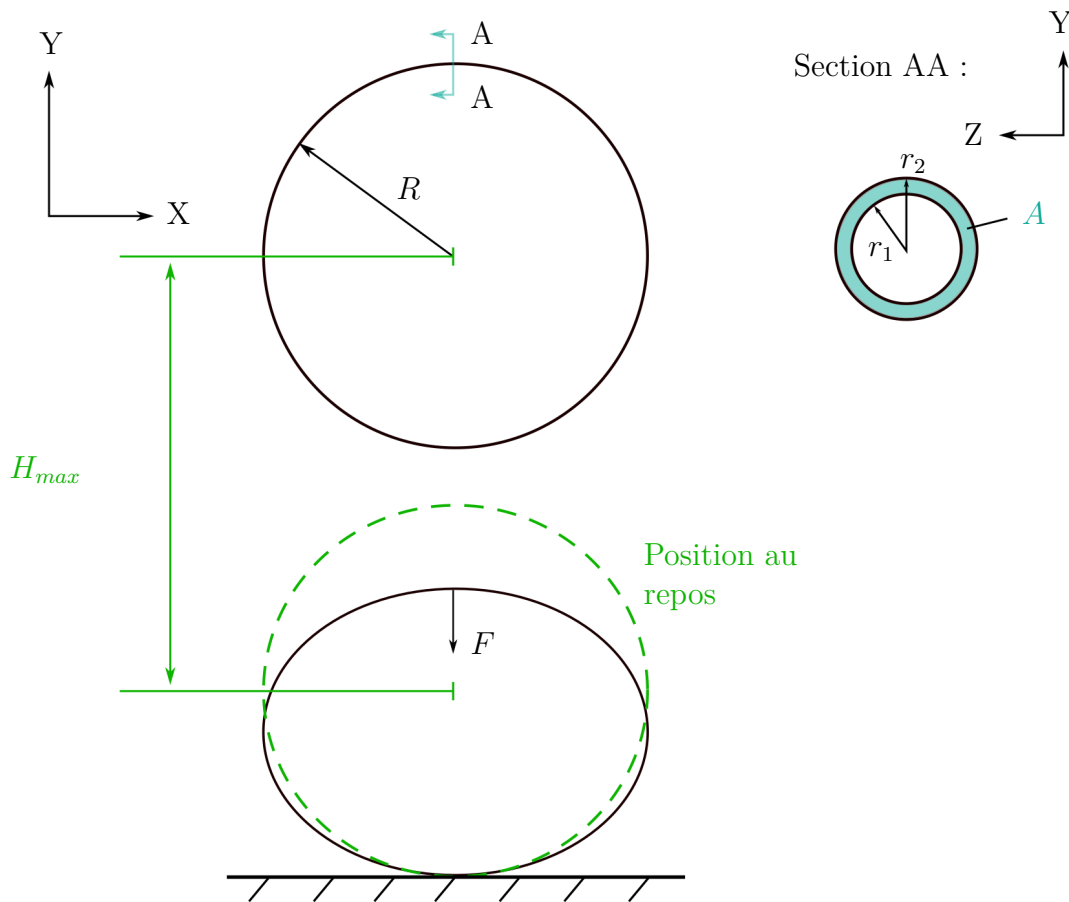


Figure 3.1 Géométrie et physique considérées : on applique la force  $F$  au sommet d'une roue de rayon  $R$ , de rayons de section intérieur et extérieur  $r_1$  et  $r_2$  et d'aire de section  $A$ . On relâche ensuite la roue qui effectue un saut : la hauteur  $H_{max}$  correspond à la différence entre la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de la roue lors du saut et la position du centre de gravité de la roue au repos.

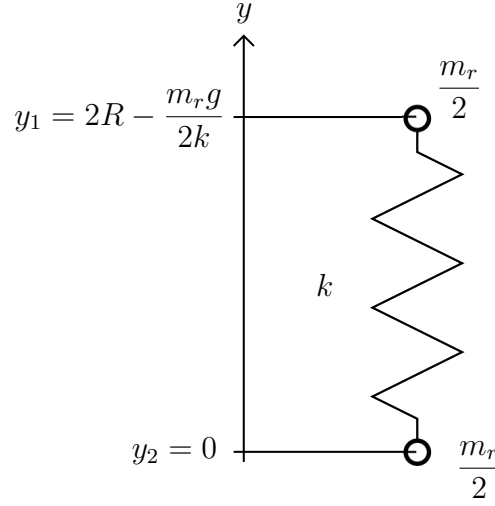


Figure 3.2 Système au repos. Le ressort de longueur à vide  $2R$  et de raideur  $k$  est écrasé par le poids de la masse supérieure.

### 3.2 Mise en équations

Les variables temporelles suivantes décrivent le mouvement du système comprimé puis relâché, schématisé à la figure 3.3 : à  $t = -t_0$  on relâche le ressort, à  $t = 0$  la masse inférieure quitte le sol et à  $t = t_f$  le centre de gravité du système atteint sa hauteur maximale.

Pour  $-t_0 < t < 0$ , la masse supérieure est soumise à deux forces verticales : son propre poids de norme  $-m_r g/2$ , et la force élastique de norme  $-k(y_1 - 2R)$ . Son mouvement est régi par :

$$\frac{m_r}{2} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k(y_1 - 2R) + \frac{m_r}{2} g = 0, \quad (3.2)$$

avec les condition initiales :

$$\begin{aligned} y_1(t)|_{t=-t_0} &= 2R - \frac{F}{k} - \frac{m_r g}{2k}, \\ \frac{dy_1}{dt}|_{t=-t_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle.

Pour  $0 < t < t_f$ , la force que le ressort exerce sur la masse inférieure devient suffisante pour prendre le dessus sur la gravité :  $m_r g/2 = k(y_1 - 2R)$ , et le mouvement des deux masses est

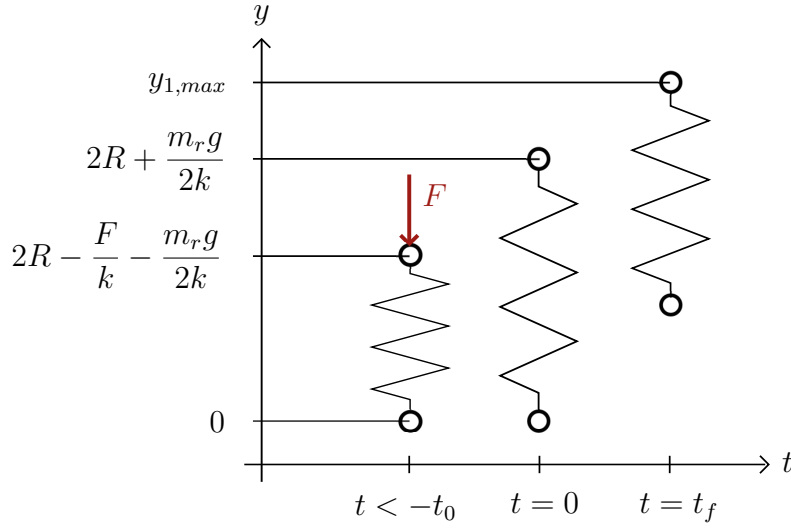


Figure 3.3 Saut du système. Pour  $t < -t_0$ , le système est écrasé par une force  $F$ . Il est relâché à  $t = -t_0$ , et la masse inférieure quitte le sol à  $t = 0$ . Le centre de gravité du système atteint sa hauteur maximale pour  $t = t_f$ .

régi par :

$$\begin{aligned} \frac{m_r}{2} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k(y_1 - y_2 - 2R) + \frac{m_r}{2} g &= 0, \\ \frac{m_r}{2} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + k(y_2 - y_1 + 2R) + \frac{m_r}{2} g &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} y_1(t)|_{t=0} &= 2R + \frac{m_r g}{2k}, & \frac{dy_1}{dt}|_{t=0} &= v_{10}, \\ y_2(t)|_{t=0} &= 0, & \frac{dy_2}{dt}|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Avant de résoudre le problème, on le réécrit sous forme adimensionnelle. Utiliser des variables adimensionnelles permet d'affranchir l'étude des effets d'échelle. On définit ainsi le temps adimensionnel  $\tau = t\sqrt{\frac{2k}{m_r}}$  et les variables positions adimensionnelles  $\xi_1 = y_1 \frac{2k}{m_r g}$  et  $\xi_2 = y_2 \frac{2k}{m_r g}$ .

L'équation 3.2 devient :

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \xi_1 - \xi_2 + 1 = 0, \quad (3.6)$$

pour  $-\tau_0 < \tau < 0$ , avec  $\xi_0 = \frac{4Rk}{m_r g}$ ,  $\tau_0 = t_0 \sqrt{\frac{2k}{m_r}}$ ,  $\xi_1|_{\tau=-\tau_0} = \xi_0 - \frac{2F}{m_r g} - 1$  et  $\frac{d\xi_1}{d\tau}|_{\tau=-\tau_0} = 0$ .

On note  $\zeta_{10}$  la vitesse initiale adimensionnelle de la masse supérieure. L'équation 3.4 devient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + \xi_1 - \xi_2 - \xi_0 + 1 &= 0, \\ \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + \xi_2 - \xi_1 + \xi_0 + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

pour  $0 < \tau < \tau_f$ , avec  $\tau_f = t_f \sqrt{\frac{2k}{m_r}}$  et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau)|_{\tau=0} &= \xi_0 + 1, & \frac{d\xi_1}{d\tau}|_{\tau=0} &= \zeta_{10}, \\ \xi_2(\tau)|_{\tau=0} &= 0, & \frac{d\xi_2}{d\tau}(\tau)|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En résolvant 3.6 avec les conditions initiales, on obtient l'équation du mouvement 3.9 pour  $-\tau_0 < \tau < 0$  :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{2F}{m_r g} (\cos(-\tau_0) \cos \tau + \sin(-\tau_0) \sin \tau) + \xi_0 - 1, \\ \xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En résolvant 3.7 avec les conditions initiales 3.8, on obtient l'équation du mouvement 3.10 pour  $0 < \tau < \tau_f$  :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\zeta_{10}}{2}\tau + \frac{\zeta_{10}}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\tau) + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}\tau) + \xi_0 + \frac{1}{2}, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\zeta_{10}}{2}\tau - \frac{\zeta_{10}}{2\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\tau) - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}\tau) - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La vitesse initiale adimensionnelle de la masse supérieure s'exprime par :

$$\zeta_{10} = \frac{d\xi_1}{d\tau}|_{\tau=0} = -\frac{2F}{m_r g} \sin(-\tau_0). \quad (3.11)$$

D'après les conditions initiales 3.8 appliquées à l'équation 3.9, on a par continuité :

$$\cos(-\tau_0) = -\frac{m_r g}{F}. \quad (3.12)$$

On substitue 3.12 à l'intérieur de 3.11, en utilisant l'identité  $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$  :

$$\zeta_{10} = \sqrt{\left(\frac{2F}{m_r g}\right)^2 - 4}. \quad (3.13)$$

La position adimensionnelle du centre de gravité du système s'écrit  $\xi_{cdg}(\tau) = \frac{\xi_1(\tau) + \xi_2(\tau)}{2}$ . En substituant 3.10 dans cette expression, on obtient :

$$\xi_{cdg}(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\zeta_{10}}{2}\tau + \frac{\xi_0 + 1}{2}. \quad (3.14)$$

En substituant 3.13 dans 3.14 on obtient :

$$\xi_{cdg}(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau\sqrt{\left(\frac{F}{m_r g}\right)^2 - 1} + \frac{\xi_0 + 1}{2}. \quad (3.15)$$

Durant l'élévation du centre de gravité de la roue, on observe des déformations correspondant au second mode vibratoire d'un anneau, représenté à la figure 2.7 qui présente les déformations planes lors du saut d'un anneau comprimé par une force exercée selon son diamètre puis relâché.

Lorsqu'on arrive à  $\tau = \tau_f$ , la vitesse du centre de gravité s'annule. En dérivant 3.15, on trouve l'expression de  $\tau_f$  :

$$\tau_f = \sqrt{\left(\frac{F}{m_r g}\right)^2 - 1}. \quad (3.16)$$

On substitue ensuite 3.16 à l'intérieur de 3.15 pour obtenir l'expression de la hauteur maximale du centre de gravité :

$$\xi_{cdg,max} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{F}{m_r g} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\xi_0 + 1}{2}. \quad (3.17)$$

On soustrait ensuite à 3.17 sa position adimensionnelle à l'équilibre statique  $\xi_{cdg,ref} = \frac{\xi_0 - 1}{2}$  pour obtenir l'expression adimensionnelle de la hauteur maximale de saut  $\eta_{max} = \frac{2k}{m_r g} H_{max}$  :

$$\eta_{max} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{F}{m_r g} \right)^2 + 1 \right). \quad (3.18)$$

Ainsi, les paramètres influençant la hauteur maximale de saut du système sont :

- La force de compression  $F$  à laquelle ce dernier est soumis initialement.
- La masse du système, déterminée par sa géométrie et la masse volumique du matériau.
- La raideur équivalente du système qui dépend de sa géométrie et du module d'Young du matériau.

On identifie deux modes pour le mouvement du système : le mode de translation caractérisé par l'évolution de la position du centre de gravité donnée à l'équation 3.15 et le mode de vibration, obtenu par la soustraction des positions des deux masses données dans l'équation 3.10 :

$$\begin{aligned}\xi_{translation}(\tau) &= -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau\sqrt{\left(\frac{F}{m_r g}\right)^2 - 1} + \frac{2Rk}{m_r g} + \frac{1}{2}, \\ \xi_{vibration} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\tau)\sqrt{\left(\frac{2F}{m_r g}\right)^2 - 4} + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}\tau) + \frac{2Rk}{m_r g} + \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

L'expression de  $H_{max}$  permet d'étudier l'efficacité énergétique du système, c'est à dire la fraction de l'énergie totale  $E_{tot}$  fournie au système sous forme de déformation élastique qui est convertie en énergie potentielle gravitationnelle  $E_{p,g}$  servant au saut.

Avec  $E_{tot} = \frac{F^2}{2k}$  et  $E_{p,g} = m_r g H_{max}$ , l'efficacité énergétique s'exprime :  $\frac{E_{p,g}}{E_{tot}} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{m_r g}{F} \right)^2 + 1 \right)$ .

### 3.3 Résultats

Dans la partie qui suit, on étudie les variations de la hauteur maximale de saut adimensionnelle et du ratio d'efficacité énergétique en fonction de différents paramètres.

La figure 3.4 présente l'évolution temporelle des positions verticales des deux masses et du centre de gravité obtenue à partir des équations 3.10 et 3.15.

#### 3.3.1 Influence de la force appliquée

Les tracés adimensionnels de la hauteur maximale de saut et de l'efficacité énergétique en fonction de la force appliquée au sommet de la roue sont présentés à la figure 3.5. Ces tracés, en échelle logarithmique, montrent que la hauteur maximale de saut augmente de manière exponentielle avec la force de compression appliquée à la roue, alors que l'efficacité énergétique décroît avec la force de compression. Ces comportements s'expliquent à l'aide des expressions des modes de translation et de vibration à l'équation 3.19. La hauteur maximale de saut  $H_{max}$  et l'énergie dissipée par vibration sont caractérisées respectivement par les amplitudes des modes de translation et de vibration. Ces dernières augmentent avec le ratio  $F/m_r g$ .

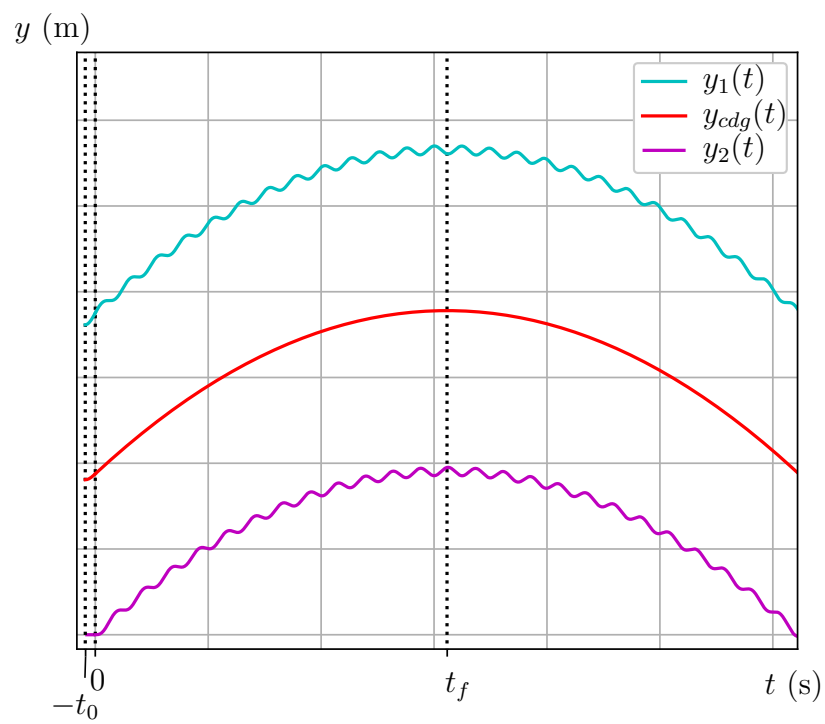


Figure 3.4 Évolution temporelle des positions des masses et du centre de gravité lors du saut du système.

Ainsi lorsqu'on fait varier le ratio  $F/m_r g$ , l'efficacité énergétique du saut décroît à mesure que  $H_{max}$  augmente.

### 3.3.2 Valeurs limites

Les paramètres  $F$ ,  $k$  et  $m_r$  doivent rester supérieurs aux valeurs limites suivantes, en dessous desquelles le modèle n'est plus valide :

- Pour  $F$  : l'énergie de déformation élastique doit être suffisante pour faire décoller le système, ce qui se traduit par :  $F/m_r g > 1$
- Pour  $k$  : le ressort doit pouvoir soutenir la masse 1, la raideur doit donc respecter  $m_r g/2k < 2R$ , c'est à dire  $k > m_r g/4R$ . Il y a aussi une valeur maximale de  $F$  à ne pas dépasser pour rester dans le domaine linéaire en termes de déformation. Ce point sera développé dans la section suivante.
- Pour  $m_r$  : diminuer  $m_r$  revient à retirer de la matière, il y a donc une masse limite dépendant des propriétés mécaniques du matériau en dessous de laquelle il y aura endommagement lors de l'utilisation, la roue étant devenue trop fragile.

### 3.3.3 Limite en comportement linéaire

A partir d'une certaine flèche  $\delta$  imposée par une force de compression  $F$ , l'anneau ne se comporte plus de manière linéaire et on ne peut plus utiliser la loi de Hooke : la relation  $F = k\delta$ , où  $k$  est la constante définie dans l'équation 3.1, n'est plus valable. La valeur limite  $\delta_l$  au delà de laquelle on sort du domaine de comportement linéaire, est définie avec une étude par éléments finis prenant en compte les non linéarités d'ordre géométrique, que l'on compare avec le modèle théorique linéaire à la figure 3.6. Dans cette étude, réalisée avec Abaqus, la roue est modélisée avec des éléments poutres, le déplacement  $\delta$  est imposé comme paramètre d'entrée et la force  $F$ , relevée comme donnée de sortie, pour des raisons de convergence.

On considère qu'on sort de la zone de comportement linéaire lorsque la valeur absolue de l'erreur relative entre les deux modèles,  $\epsilon = \frac{F_{\text{éléments finis}} - F_{\text{théorique}}}{F_{\text{théorique}}}$  dépasse 10%. La limite du domaine de comportement linéaire correspond donc à  $\delta/R < 0.1$

La raideur s'exprime  $k = dF/d\delta$ . Cette relation est valable dans le domaine linéaire, pour  $\delta/R < 0.1$



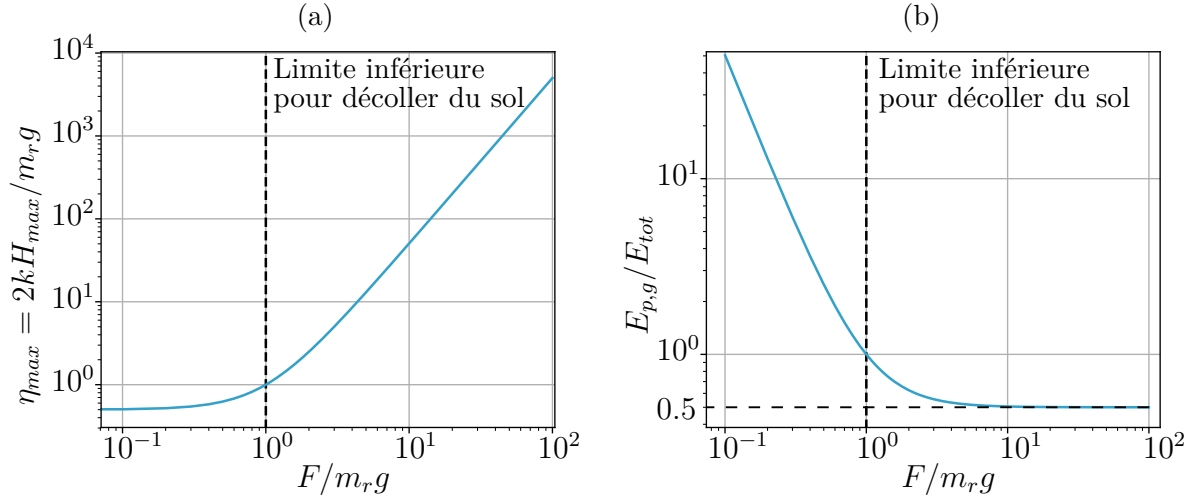


Figure 3.5 Variations de la hauteur maximale de saut adimensionnelle  $\eta_{max}$  (a) et du ratio d'efficacité énergétique  $E_{p,g}/E_{tot}$  (b) en fonction du ratio  $F/m_rg$ , en échelle logarithmique. La hauteur maximale de saut augmente de manière exponentielle avec la force de compression appliquée à la roue, alors que l'efficacité énergétique décroît avec la force de compression.

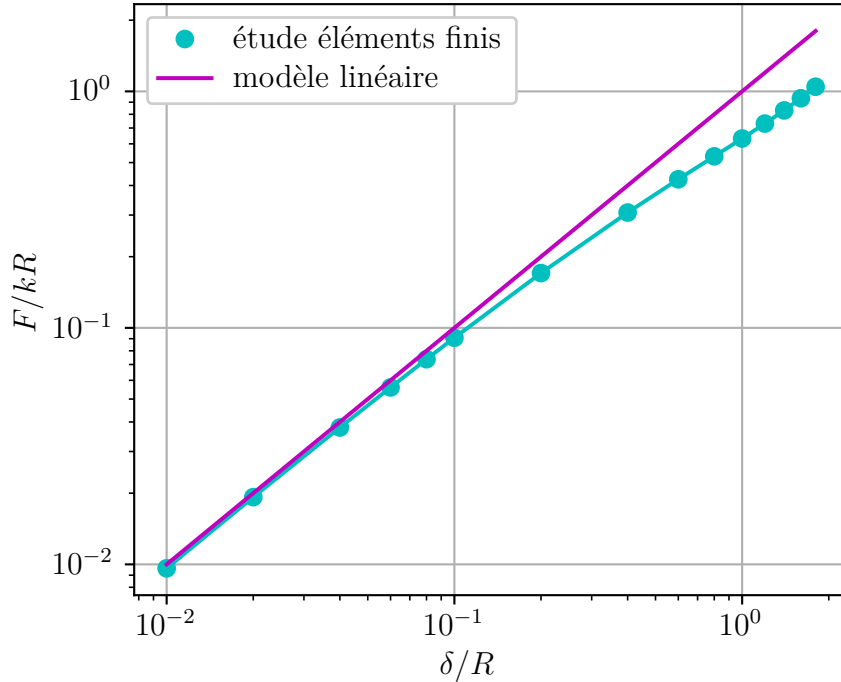


Figure 3.6 Comparaison entre une étude éléments finis d'une roue en éléments poutres, dans laquelle on prend en compte les non linéarités géométriques, et le modèle théorique linéaire où la force appliquée et le déplacement sont liés par la constante  $k$  selon la relation  $F = k\delta$ .

### 3.3.4 Mise en évidence de différents régimes de saut

Les résultats et conclusions des sous-sections précédentes sont synthétisés à la figure 3.7. On différencie d’une part le régime linéaire du régime non linéaire selon la valeur du ratio  $\delta/R$ , où  $\delta$  est la flèche imposée par la force  $F$ . On rappelle que la valeur limite en comportement linéaire a été fixée à  $\delta/R = 0.1$ . Il existe également trois régimes de saut distincts, en fonction du ratio  $F/m_r g$ . Le premier, trivial, correspond au cas où la force appliquée ne suffit pas à soulever la roue : il n’y a pas de saut. Le deuxième régime de saut correspond au cas où l’énergie de déformation est presque entièrement convertie en énergie potentielle de pesanteur : il y a peu de vibrations, l’efficacité énergétique est proche de 1. Le troisième régime de saut correspond au cas où l’amplitude des vibrations lors du saut est importante : l’efficacité énergétique converge vers la valeur 0.5. Le passage d’un saut efficace énergétiquement à un saut peu efficace est déterminé par la part d’énergie perdue par vibration : plus la force augmente par rapport au poids de la roue, plus l’amplitude du mode de vibration augmente, et plus l’efficacité énergétique du saut décroît. On rappelle que ce modèle ne prend pas en compte l’amortissement dû aux efforts aérodynamiques, par souci de simplification.

## 3.4 Travail expérimental

### 3.4.1 Méthodologie

En plus des résultats de Yang et Kim, nous confrontons notre modèle théorique à des expériences réalisées à l’aide d’anneaux en acide polylactique (PLA).

Le PLA utilisé a pour module d’Young  $E_{PLA} = 3.1$  GPa et pour masse volumique  $\rho_{PLA} = 1250$  kg  $\cdot$  m<sup>-3</sup>.

On fabrique, à l’aide d’une imprimante *Raise3D*, 4 anneaux différents de sections rectangulaires. Le tableau 3.1 liste les dimensions des anneaux.

Tableau 3.1 Dimensions des 4 anneaux de section rectangulaire imprimés en 3D et utilisés dans les manipulations expérimentales.

Paramètre	Longueur de section $L$ (mm)	Largeur de section $l$ (mm)	Rayon médian $R$ (mm)
Anneau 1	5	2	50
Anneau 2	5	2	60
Anneau 3	4	1	50
Anneau 4	8	1	60

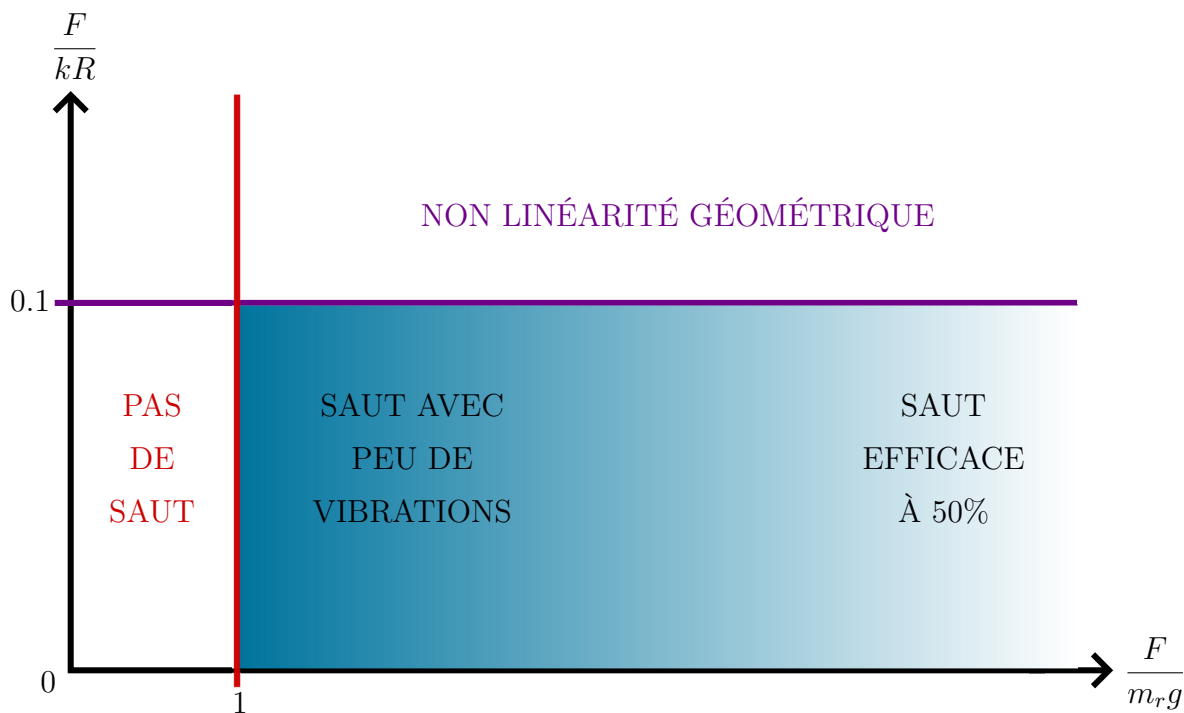


Figure 3.7 Carte des différents régimes de saut possibles pour une roue Cyr en fonction des ratios  $F/kR$  et  $F/m_r g$ . Pour  $F/m_r g < 1$ , la force de compression  $F$  ne permet pas de décoller la roue du sol : il n'y a pas de saut. Pour  $F/m_r g > 1$ , plus le ratio augmente, plus il y a de vibrations lors du saut et plus on perd de l'énergie : l'efficacité énergétique  $E_{p,g}/E_{tot}$  décroît et finit par tendre vers 0.5. Lorsque  $F/kR > 0.1$ , on sort du domaine géométrie linéaire tel que défini dans les présents travaux.

Chaque anneau est suspendu à un axe et un poids est accroché par un fil à son sommet inférieur. Le fil est ensuite coupé : l'anneau effectue un saut. Les positions sont enregistrées par vidéo et analysées à l'aide du logiciel *Tracker*, qui permet de placer des repères et des marqueurs de position. La figure 3.8 présente une capture d'écran de l'enregistrement des positions successives prises par le centre de gravité, ainsi qu'un schéma des paramètres et du montage de l'expérience.

Cette expérience correspond au mouvement de notre modèle à deux degrés de liberté assimilant l'anneau à un ressort que l'on comprime puis relâche, excepté qu'ici la déformation élastique est un allongement et non une compression, ce qui n'empêche pas le saut par rapport à la position d'équilibre d'obéir aux mêmes lois. Cette configuration a été choisie pour des raisons pratiques : il est plus facile d'immobiliser l'anneau en le suspendant.

Chaque anneau fait l'objet de deux séries de 5 mesures, et pour chaque série, un poids différent est attaché à l'anneau. Le tableau 3.2 liste les masses des poids en fonction de l'anneau et de la série de mesure.

Tableau 3.2 Dimensions des 4 anneaux de section rectangulaire imprimés en 3D et utilisés dans les manipulations expérimentales.

Anneau utilisé	Masse attachée à l'anneau, série 1 (g)	Masse attachée à l'anneau, série 2 (g)
Anneau 1	34	64
Anneau 2	12	17
Anneau 3	34	64
Anneau 4	17	20

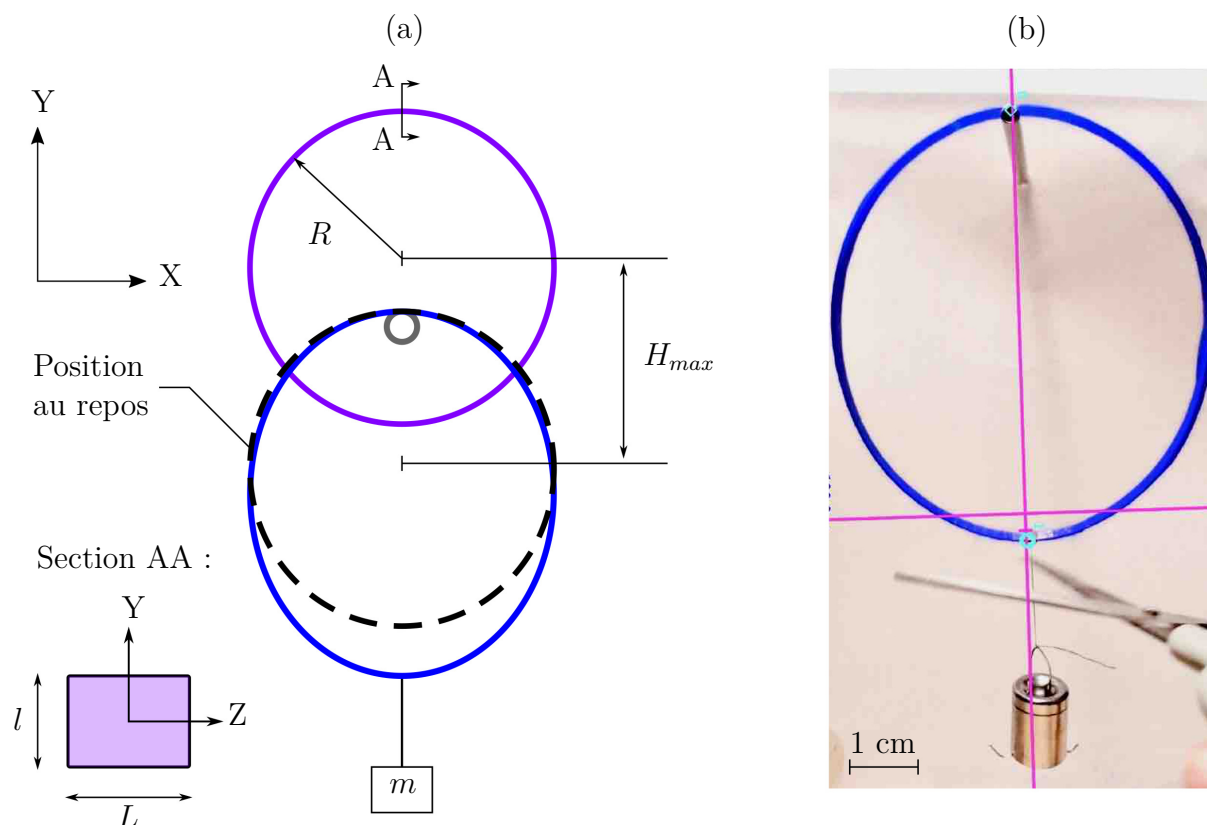


Figure 3.8 Schéma du montage de l'expérience avec un anneau en PLA (a). Le sommet supérieur de l'anneau repose sur un axe fixe, un poids est attaché au sommet inférieur par un fil. Le fil est ensuite coupé et les positions de l'anneau sont enregistrées et analysées grâce au logiciel *Tracker* (b). Le logiciel repère les positions des sommets de l'anneau par rapport aux axes roses, dont l'origine correspond à la position du sommet inférieur lorsque l'anneau est au repos. La hauteur  $H_{max}$  correspond à la différence entre la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité de l'anneau lors du saut et la position du centre de gravité au repos.

### 3.4.2 Résultats et comparaison avec les points de l'article *Jumping hoops*

Yang et Kim [16] étudient le saut d'anneaux comprimés puis relâchés. Leur modèle théorique est basé sur des bilans énergétiques réalisés au moment où l'anneau quitte le sol et au moment où son centre de gravité atteint sa hauteur maximale. Ce modèle est complété par leurs résultats expérimentaux présentés à la revue de littérature du chapitre 2.

La figure 3.9 présente les résultats bruts de nos expériences, représentés par des symboles pleins, mis côte à côte avec ceux de Yang et Kim, représentés par des symboles vides. On trace  $H_{max}$  en fonction de la force  $F$  appliquée à l'anneau et  $H_{max}$  en fonction de la raideur  $k$  propre à chaque anneau. Les barres d'erreur correspondent à l'écart type pour chaque série de mesures. Les anneaux utilisés lors de nos expériences sont identifiés par leur matériau (PLA) et le quadruplet  $(R, L, l, m)$  décrivant les dimensions des anneaux en mm et la masse suspendue à l'anneau en g. Les anneaux de section rectangulaire utilisés par Yang et Kim sont identifiés dans la légende par leur matériau (acier ou polyimide) et par leurs dimensions décrites par le couple  $(R, l)$ , où  $R$  est le rayon de l'anneau en mm, et  $l$  la largeur de sa section en  $\mu\text{m}$ . Ils ont tous la même longueur de section  $L = 3\text{mm}$ . En calculant pour chacun des points de Yang et Kim la valeur du ratio  $\delta/R$  puis en la comparant à la valeur limite 0.1 définie en amont, au delà de laquelle on sort de la zone de comportement linéaire, on constate que pour tous les points expérimentaux de Yang et Kim  $\delta/R > 0.1$ . Pour pouvoir les comparer avec nos expériences, nous sélectionnons les points pour lesquels les déformations appliquées sont les plus proches possibles du domaine linéaire : nous traçons uniquement les points pour lesquels  $\delta/R < 0.35$ . On constate sur ces tracés la différence d'échelle entre nos anneaux et ceux de Yang et Kim : afin de pouvoir les comparer plus facilement, on utilise des tracés avec des variables adimensionnelles.

La figure 3.10 présente les tracés adimensionnels des résultats expérimentaux de Yang et Kim, des courbes issues de nos modèles théoriques et de nos propres résultats expérimentaux. Selon notre modèle théorique, la hauteur  $H_{max}$  est proportionnelle au ratio  $F^2 R^2 / (E \rho g I A)$ . Une fois mis à l'échelle, nos points expérimentaux et ceux de Yang et Kim concordent avec le modèle théorique. Certains de nos points sont légèrement éloignés de la courbe théorique : ceci peut être expliqué par des défauts de fabrication lors de l'impression des anneaux. Les essais répétés auraient aussi pu induire des déformations plastiques affectant la raideur des anneaux.

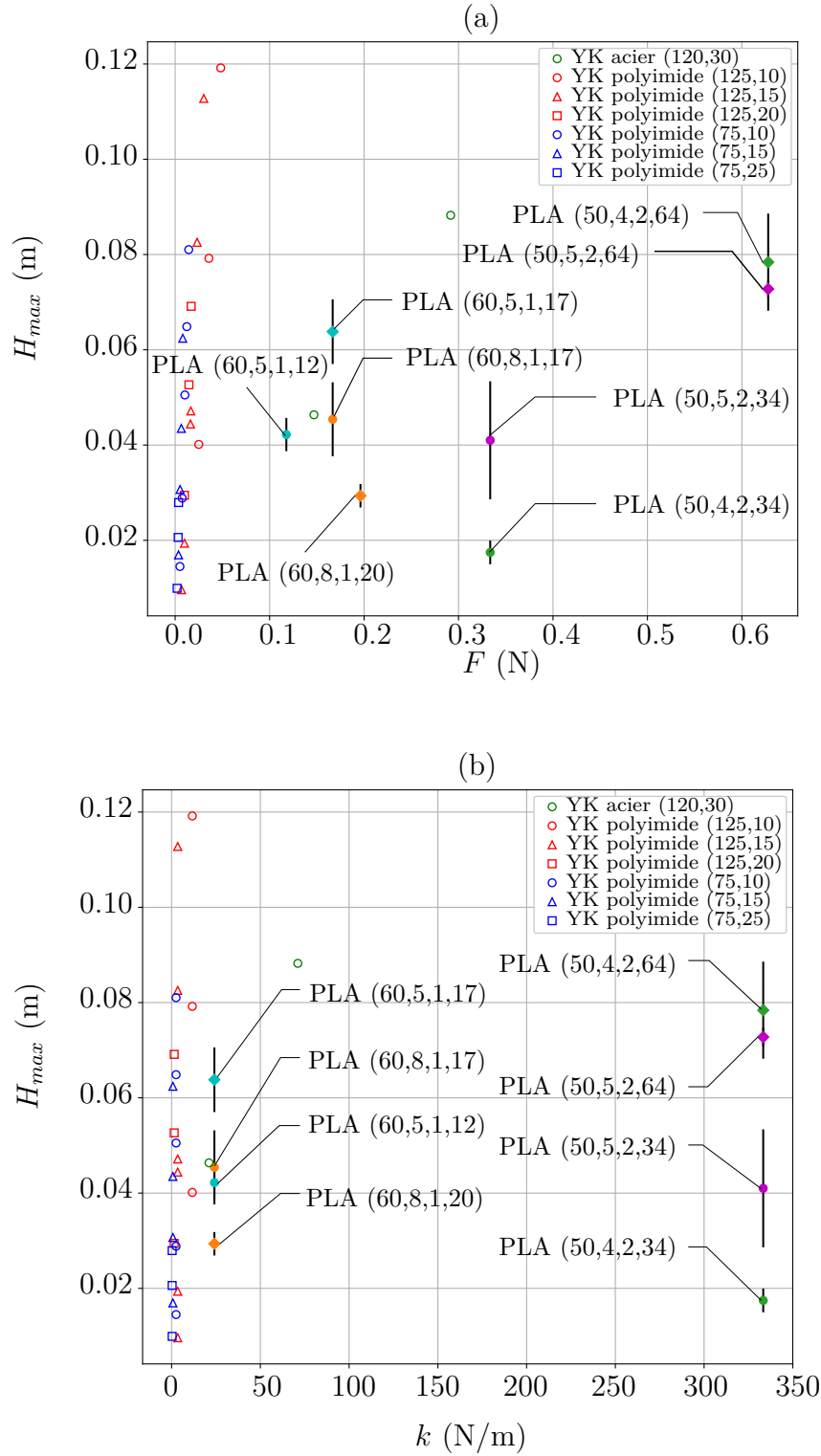


Figure 3.9 Résultats bruts de nos expériences, comparées à celles de Yang et Kim :  $H_{max}$  en fonction de la force appliquée à l'anneau (a) et  $H_{max}$  en fonction de la raideur  $k$  propre à chaque anneau (b). Chacune de nos séries de mesure, en symboles pleins, est désignée selon les dimensions de l'anneau et la masse qu'on y suspend : PLA  $(R,L,l,m)$ . Les symboles vides correspondent aux expériences de Yang et Kim [16]. Les barres d'erreur représentent l'écart-type pour chaque série de mesures.

Pour l'efficacité énergétique  $E_{p.g}/E_{tot}$  nos résultats expérimentaux et ceux de Yang et Kim concordent également avec notre modèle théorique à deux degrés de liberté : pour des petites déformations appliquées aux anneaux, l'énergie de déformation est presque entièrement convertie en saut, et plus l'effort appliqué aux anneaux augmentent, plus la part d'énergie élastique convertie en énergie potentielle gravitationnelle tend vers 50%. Nos résultats expérimentaux et ceux de Yang et Kim nous permettent ainsi de valider notre modèle théorique à deux degrés de liberté.

### 3.4.3 Discussion

Les résultats de l'expérience sont affectés par les défauts de fabrication des anneaux : ces derniers ne sont pas parfaitement symétriques, ce qui cause un déséquilibre lors des sauts. La raideur des anneaux pourrait aussi être affectée par des déformations plastiques temporaires dues au fluage, induit par le temps écoulé entre le moment où on attache le poids à l'anneau et l'instant où on coupe le fil. Les anneaux ayant les raideurs les plus basses, c'est à dire ceux ayant les plus grands diamètres sont plus sensibles à ce phénomène. On rappelle également qu'on a négligé, dans le modèle théorique, la dissipation d'énergie due aux efforts aérodynamiques. Pour nos essais expérimentaux, nous avons veillé à appliquer des déformations suffisamment petites aux anneaux pour rester dans le domaine linéaire, assurant la validité de la relation  $F = k\delta$ . Ce n'est pas le cas pour les expériences de Yang et Kim.

Un autre point discutable de notre modèle théorique concerne l'équivalence entre la roue Cyr et le ressort, en termes centres de de masse. Dans les sections 3.1 et 3.2, on modélise la roue Cyr par deux masses ponctuelles reliées par un ressort de longueur à vide  $2R$  : on a choisi de concentrer la masse aux deux extrémités de la roue. Si on sépare la roue en deux moitiés, le centre de masse de chaque moitié ne se situe pas au niveau des sommets : il est bien sur l'axe du diamètre, mais plus proche du centre de la roue. Dans notre modèle les positions  $y_1$  et  $y_2$  des masses représentent donc la réalité à une constante près. Cependant, comme notre étude porte sur  $H_{max}$ , qui correspond à la différence entre la hauteur du centre de masse de la roue entière au repos et la hauteur du centre de masse de la roue à l'apogée du saut. Comme on calcule  $H_{max}$  en faisant la moyenne des positions de chacune des deux masses, le fait qu'elles soient placées au sommet n'a pas d'influence sur les résultats de notre étude.



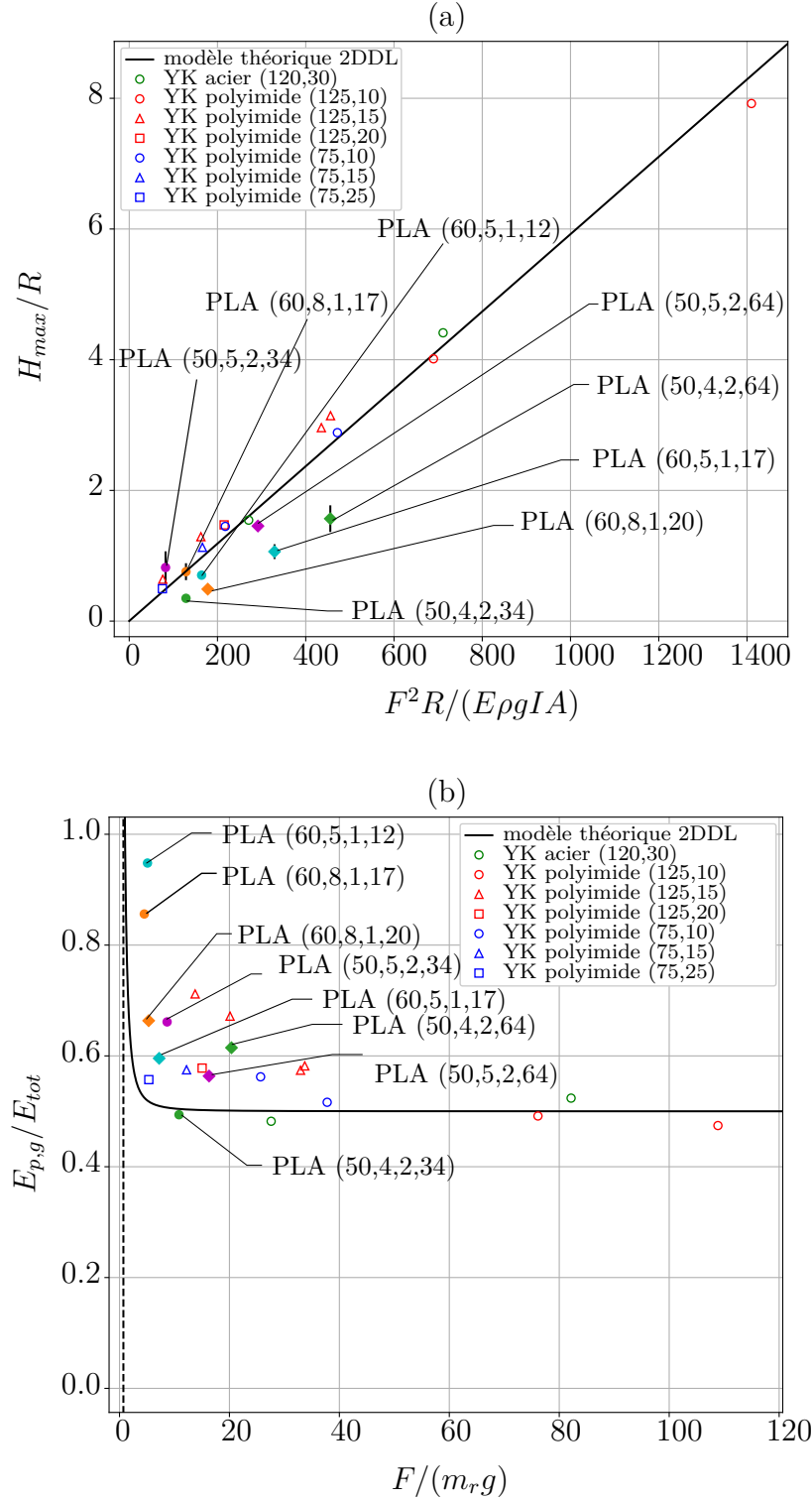


Figure 3.10 Résultats de l'expérience : mise à l'échelle de  $H_{max}$  avec des variables adimensionnelles (a) et efficacité énergétique en fonction du ratio adimensionnel  $F/m_r g$  (b). Chaque série de mesure est désignée selon les dimensions de l'anneau et la masse qu'on y suspend : PLA  $(R, L, l, m)$ . Les symboles vides correspondent aux expériences de Yang et Kim [16] : nous avons conservé uniquement les points respectant l'inégalité  $\delta/R < 0.35$  afin de limiter l'influence des effets de non linéarité, non pris en compte par notre modélisation. Nos résultats expérimentaux concordent avec ceux de Yang et Kim et notre modèle théorique.

### 3.5 Conclusion

Le modèle à deux degrés de liberté du saut d'une roue Cyr développé dans ce chapitre est ainsi validé par les résultats de nos manipulations expérimentales ainsi que par la comparaison de nos travaux avec les résultats de l'article *Jumping hoops* de Yang et Kim. Ce modèle peut donc servir de base pour estimer la hauteur maximale de saut d'une roue Cyr comprimée puis relâchée, en fonction de différents paramètres tels que ses dimensions ou la masse volumique et la raideur du matériau qui la constitue. Intuitivement on se doute que, par exemple, en réduisant l'épaisseur de section et donc la masse on augmente la hauteur de saut. Il faut cependant veiller à ne pas retirer trop de matière, sous peine d'obtenir une roue incapable de supporter les chargements appliqués par l'utilisateur sans être endommagée. Les prédictions issues du chapitre 3 débouchent sur des pistes d'optimisation qui doivent ainsi être complétées par une étude en résistance des matériaux.

## CHAPITRE 4    RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET MODÉLISATION ÉLÉMENTS FINIS

Au chapitre 4, nous étudions les efforts auxquels est soumise la roue Cyr durant un saut. On s'intéresse en particuliers aux contraintes dans la roue lors la compression et de l'atterrissage. Ces études sont ensuite confrontées au modèle du chapitre précédent dans le but d'établir une zone de design permettant à la fois de s'assurer de la résistance de la roue tout en optimisant la hauteur maximale de saut.

### 4.1 Étude de $H_{max}$ en fonction de la géométrie de la section

#### 4.1.1 Introduction

Nous avons vu que la rigidité  $k$  et la masse  $m_r$  de la roue sont des paramètres déterminants pour  $H_{max}$ . D'après 4.1, on peut moduler  $k$  et  $m_r$  en jouant sur les propriétés du matériau avec la masse volumique  $\rho$  et le module d'Young  $E$ , ou bien en jouant sur la géométrie avec le rayon médian de la roue  $R$  et les rayons intérieur et extérieur de la section  $r_1$ ,  $r_2$  qui déterminent l'aire de section  $A$  et le moment quadratique de section  $I$ .

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\pi EI}{(\pi^2 - 8)R^3}, & I &= \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4), \\ m_r &= 2\pi R\rho A, & A &= \pi(r_2^2 - r_1^2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les dimensions de la section, caractérisées par  $r_1$  et  $r_2$ , sont les paramètres les plus malléables. Nous allons étudier leur influence sur la hauteur maximale de saut puis en déduire des valeurs optimisées.

#### 4.1.2 Méthodologie

Au chapitre 3, nous avons utilisé des anneaux en PLA imprimés en laboratoire pour valider expérimentalement notre modèle à deux degrés de liberté de la roue Cyr. A présent, on s'intéresse aux contraintes dans la roue Cyr lors du saut, ainsi qu'à l'influence de la géométrie de sa section. On s'intéresse donc au matériau à partir duquel sera imprimé le prototype de roue Cyr. Le matériau considéré dans cette étude est le matériau pour lequel  $E$  est le plus élevé parmi ceux disponibles pour l'imprimante 3D utilisée.

Il s'agit du nylon renforcé avec des fibres de carbone courtes [18], ayant pour masse volumique

$\rho = 1170 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , pour module d'Young  $E = 9.0 \text{ GPa}$ , pour module de cisaillement  $G = 3.8 \text{ GPa}$  et une contrainte à la rupture  $\sigma_r = 63.0 \text{ MPa}$ .

Le rayon médian  $R$  de la roue sera compris entre 0.8 m et 1.0 m : nous fixons sa valeur à 0.9 m.

Les conditions aux rives et le chargement sont schématisés à la figure 4.1. On considère deux types de chargement pour la force de compression  $F$  appliquée au sommet de la roue :  $F_s = 900 \text{ N}$ , soit la force statique correspondant au poids supposé de l'utilisateur suspendu par une seule main à la roue, et la force dynamique  $F_d = c_d F_s$ , où le coefficient d'effort dynamique  $c_d = 5$  rend compte des effets dynamiques. Le choix de la valeur de  $c_d$  est basé sur des articles traitant des efforts dynamiques à l'impact exercés par des gymnastes lors de mouvements acrobatiques [19-22], ainsi que sur les travaux de Marion Cossin, mesurant les efforts exercés par des circassiens suspendus à des agrès aériens [23] : dans son étude, les agrès les plus proches de la roue Cyr en termes d'efforts dynamiques lors de l'utilisation sont le cerceau aérien et le trapèze : pour ces agrès, les coefficients  $c_d$  sont respectivement 3.3 et 4.8.

La hauteur maximale de saut  $H_{max}$  décroît avec  $k$  et  $m_r$  selon les relations modélisées dans les sections précédentes. Maximiser  $H_{max}$  en jouant sur les paramètres  $r_1$  et  $r_2$  revient à minimiser les valeurs de  $I$  et de  $A$ , et donc réduire l'épaisseur de section.

La première étape qui s'impose est de définir des limites inférieures de l'épaisseur de section pour s'assurer qu'il n'y aura ni flambement de la roue, ni écoulement et qu'on restera dans le domaine de comportement linéaire. Dans ce qui suit pour chaque valeur fixe du rayon externe  $r_2$ , comprise entre 10 mm et 50 mm, nous étudierons le comportement de la roue pour un rayon interne  $r_1$  variant de 0.0 mm à  $r_2 - 0.01 \text{ mm}$ .

### Chargement au sommet de la roue : limites en flambement et en écoulement

Lorsqu'on exerce une force de compression au sommet de la roue, comme schématisé à la figure 4.1, des phénomènes de flambement et d'écoulement apparaissent si sa section n'est pas assez épaisse. Pour chaque valeur du rayon externe  $r_2$ , compris entre 10 mm et 50 mm, on cherche à savoir quelle est la valeur maximale du rayon interne  $r_1$  permettant d'éviter ces phénomènes. Pour répondre à cette question, on utilise une modélisation par éléments finis du problème réalisée avec Abaqus, représentée à la figure 4.2. On modélise la roue par un solide maillé avec des éléments tétraédriques. La roue foncée représente le système au repos et la roue en couleurs représente le système soumis à la force de compression  $F$ . Les contraintes maximales se situent au niveau du rayon interne de la roue à l'endroit où on applique la force et au niveau du point de contact avec le sol. Il s'agit des zones où on observera de

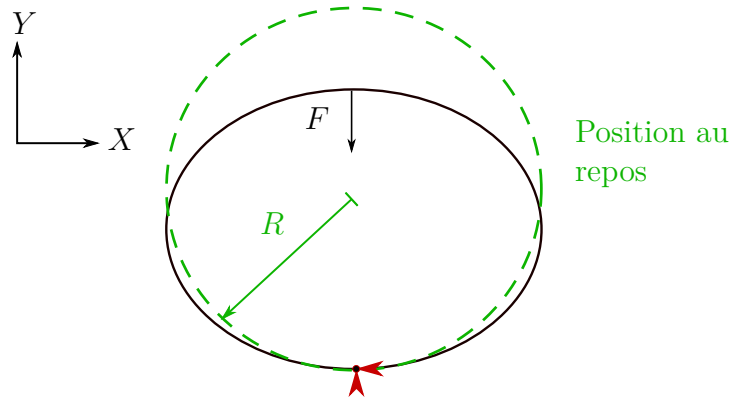


Figure 4.1 Conditions aux rives et chargement appliqué à la roue dans les études par éléments finis. On applique la force  $F$  au sommet de la roue, et le point de contact avec le sol est contraint par un encastrement.

l'écoulement lors de la compression de la roue si elle est sous-dimensionnée.

Pour chaque valeur du rayon externe  $r_2$ , compris entre 10 mm et 50 mm, une étude linéaire par éléments finis nous donne le rayon interne  $r_1$  à partir duquel il y a flambement dans la roue. De même manière, une étude linéaire des contraintes dans la roue par éléments finis nous donne pour chaque  $r_2$ , le  $r_1$  à partir duquel il y a écoulement.

Pour chaque  $r_2$ , on cherche à déterminer l'épaisseur de section permettant de se placer à la limite du flambement et de l'écoulement. Pour cela, on combine les deux études par éléments finis : pour chaque  $r_2$ , on ajuste  $r_1$  jusqu'à ce que la différence entre les chargements qui provoquent chacun de ces deux phénomènes atteigne sa valeur minimale.

### Chargement dans la partie inférieure de la roue : limites en écoulement à l'impact

Lorsque l'utilisateur saute avec la roue, la partie entre ses pieds et le sol est soumise à des contraintes dues à l'impact de l'atterrissage qui créent de l'écoulement et un écrasement de la section si son épaisseur n'est pas suffisante.

Le saut peut s'effectuer pieds joints ou pieds écartés. La configuration pieds joints étant celle qui génère le plus de contraintes, c'est la seule que nous étudierons.

De même que précédemment, pour chaque valeur du rayon externe  $r_2$ , compris entre 10 mm et 50 mm, une étude linéaire par éléments finis réalisée avec Abaqus nous donne le rayon interne  $r_1$  à partir duquel il y a écoulement dans la section.

Pour cette étude, on modélise uniquement la partie inférieure de la roue, qu'on approxime par un cylindre maillé avec des éléments hexaédriques auquel est appliquée la pression cor-

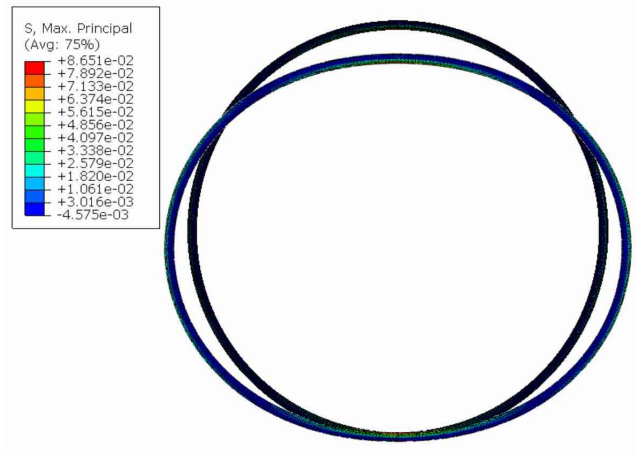


Figure 4.2 Modélisation éléments finis d'une roue Cyr en nylon-fibre de carbone ( $E = 9$  GPa,  $\sigma_r = 63$  MPa) comprimée par une force exercée à son sommet : la roue au repos est superposée à la roue soumise à l'effort de compression  $F$ . Les contraintes maximales, exprimées en MPa dans la légende, se situent au niveau du rayon interne de la roue à l'endroit où on applique la force et au niveau du point de contact avec le sol. La section de la roue a pour dimensions  $r_1 = 17$  mm,  $r_2 = 19$  mm et le rayon de la roue est  $R = 900$  mm. La norme de la force appliquée au sommet de la roue est  $F = 1$  N, et la contrainte maximale correspondante est  $\sigma_{max} = 8.65 \cdot 10^{-2}$  MPa. Comme il s'agit d'une étude linéaire, on en déduit la force qui génère la contrainte  $\sigma_r = 63$  MPa et provoque l'endommagement de la roue :  $F_r = 63 / (8.65 \cdot 10^{-2})$ . On obtient  $F_r = 728$  N :  $F_r < F_s = 900$  N, on ajuste donc la section en augmentant son épaisseur.

respondant à la force  $F_d$  répartie sur la surface de contact entre les pieds de l'utilisateur et la roue. Le chargement et les conditions aux rives de l'analyse par éléments finis sont présentés à la figure 4.3. La zone de contraintes maximales, en rouge, indique l'endroit auquel la roue sera endommagée en cas de chargement trop important.

### Limites en comportement linéaire

Pour rester dans le domaine de comportement linéaire géométrique défini au début du chapitre la flèche  $\delta$  imposée par l'utilisateur ne doit pas dépasser 10% du rayon médian  $R$ . Cette condition s'applique au cas d'utilisation courant de la roue, le chargement correspondant est la force  $F_s$ . On évalue la flèche avec son expression théorique :  $\delta = F_s/k$ , où  $k$  est la constante élastique définie plus haut, pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian  $R = 0.9$  m. Pour chaque  $r_2$  donné, on obtient ainsi la valeur maximale de  $r_1$  pour rester dans le domaine linéaire. La section 4.2 présente l'analyse quantitative correspondant à cette démarche.

### Optimisation de la section pour le saut de la roue Cyr

Les limites obtenues dans les trois sections précédentes sont combinées à l'étude de la hauteur maximale de saut en fonction du rayon de section intérieur  $r_1$ , pour chaque rayon extérieur  $r_2$  donné. On estime la hauteur de saut avec notre modèle à deux degrés de liberté en considérant que la roue est comprimée d'une force de 900 N puis relâchée.

## 4.2 Résultats

A l'issue de ce chapitre, on aboutit à une zone de design permettant de dimensionner la section de la roue Cyr de manière optimale.

Tout d'abord, les résultats de l'étude du flambement et de l'écoulement dans la roue lors de sa compression sont présentés à la figure 4.4. Pour chaque rayon extérieur de la section  $r_2$ , il existe un rayon intérieur  $r_1$  pour lequel la différence entre le chargement provoquant l'écoulement et le chargement provoquant le flambement atteint son minimum. On obtient donc les tracés de  $r_1$  en fonction de  $r_2$  (a) et de l'épaisseur de section correspondante en fonction de  $r_2$  (b). A partir de  $r_2 = 20$  mm,  $r_1$  augmente de manière linéaire avec  $r_2$  et l'épaisseur de section se stabilise autour de 2.3 mm. La légère oscillation de 0.15 mm d'amplitude qu'on observe sur le tracé (b) est due à la précision de la méthode dichotomique utilisée, qui donne des intervalles de 0.4 mm représentées par les barres d'erreur.

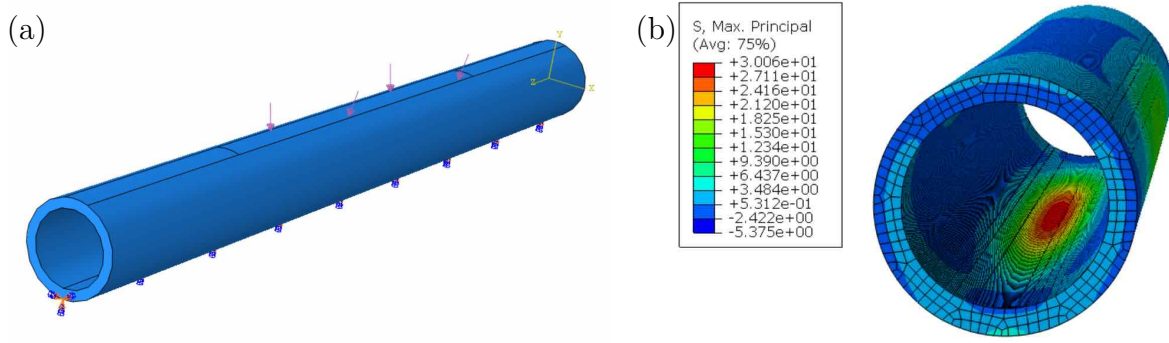


Figure 4.3 Modélisation éléments finis de l'écrasement de la section d'une roue Cyr en nylon-fibre de carbone ( $E = 9\text{GPa}$ ,  $\sigma_r = 63\text{MPa}$ ) entre les pieds de l'utilisateur et le sol lors de l'impact dû à l'atterrissage. La section de la roue a pour dimensions  $r_1 = 16\text{mm}$ ,  $r_2 = 19\text{mm}$  et la force appliquée par l'utilisateur  $F_d = 4500\text{N}$  est modélisée par une pression sur une zone correspondant à la surface occupée par ses pieds joints sur la roue (a). La zone de contraintes maximales (b), en rouge, indique l'endroit auquel la roue sera endommagée en cas de chargement trop important. Ici, la contrainte maximale est de  $30\text{MPa}$  : elle est inférieure à  $63\text{MPa}$ , il n'y a donc pas d'endommagement.

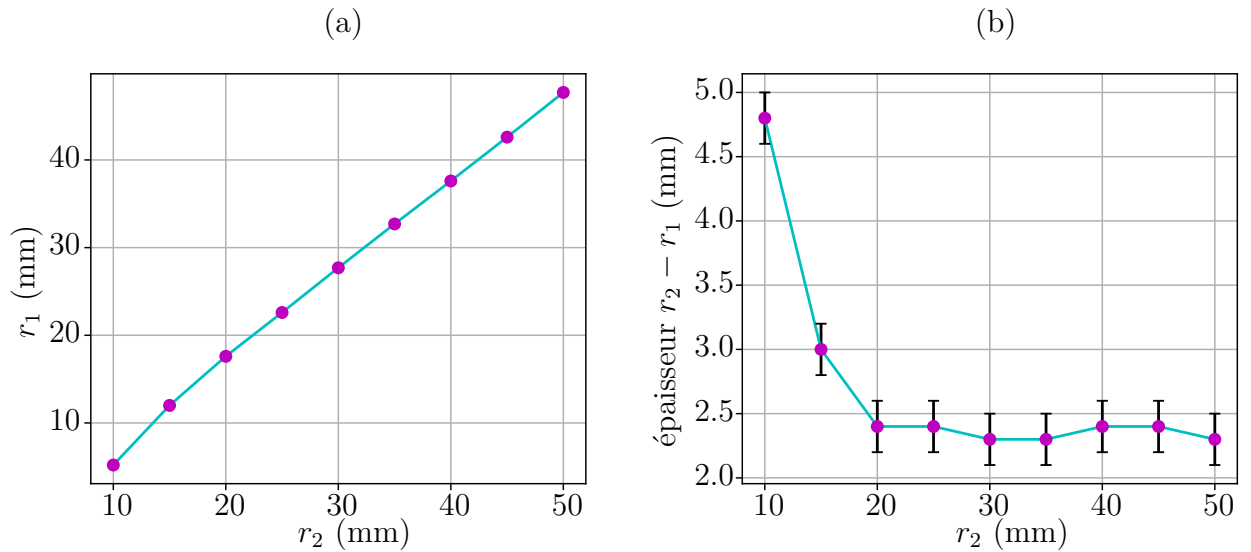


Figure 4.4 Couples  $(r_1, r_2)$  pour lesquels on est à la limite du flambement et de l'écoulement dans la roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes, pour une force  $F$  appliquée à son sommet. Les résultats sont présentés en termes de rayon interne (a) et d'épaisseur de la section (b). Ces valeurs sont obtenues au moyen d'analyses éléments finis, par dichotomie. Les barres d'erreur en (b) représentent les intervalles obtenues par la méthode de dichotomie, avec une précision de  $0.4\text{ mm}$ .



A cela s'ajoutent les résultats de l'étude des limites à ne pas dépasser pour rester dans le domaine géométrique linéaire. La figure 4.5 met en évidence la valeur maximale du rayon intérieur  $r_1$  permettant de rester dans le domaine linéaire pour chaque rayon extérieur  $r_2$  donné. La ligne pointillée noire représente la limite définie dans la modélisation du chapitre précédent :  $\delta/R = 0.1$ . Les courbes  $\delta/R = f(r_1)$  tracées pour chaque  $r_2$  donné divergent lorsque  $r_1$  tend vers  $r_2$ , ce qui est normal car on tend alors vers une section d'épaisseur nulle. Plus  $r_2$  est important, plus il est possible de diminuer l'épaisseur de la section sans sortir du domaine géométrique linéaire. On remarque que pour  $r_2 = 10$  mm il n'est pas possible d'avoir un comportement linéaire, la courbe se trouvant entièrement au delà du seuil  $\delta/R = 0.1$ . On éliminera donc le cas  $r_2 = 10$  mm pour la suite. On choisit de conserver le cas  $r_2 = 15$  mm malgré le fait que sa courbe soit très proche du seuil.

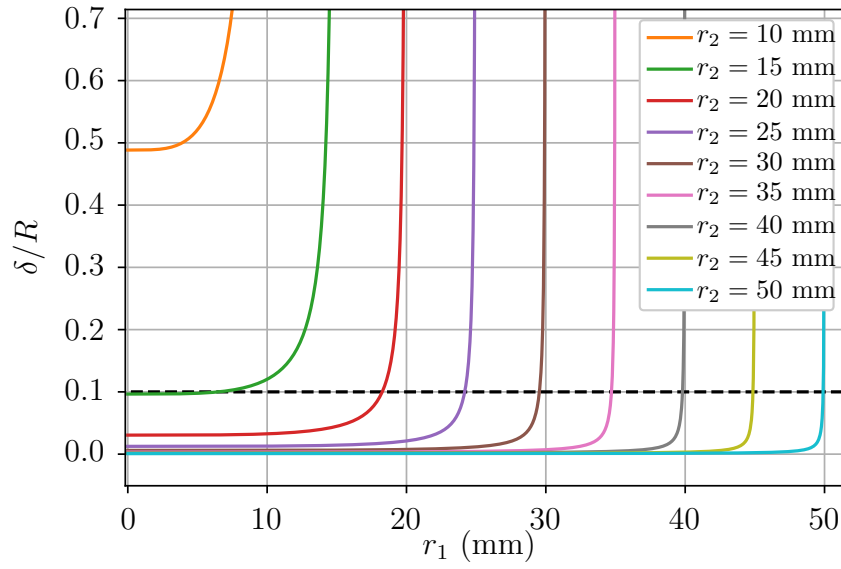


Figure 4.5 Ratio  $\delta/R$  en fonction de  $r_1$  pour un  $r_2$  donné. La droite horizontale en pointillés correspond à la valeur 0.1 au delà de laquelle on quitte le domaine de comportement linéaire. L'intersection de cette droite avec chacune des courbes donne la valeur de  $r_1$  à ne pas dépasser pour rester dans le domaine linéaire géométrique. Les calculs sont réalisés pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian  $R = 0.9$  m, avec une force  $F_s = 900$  N appliquée à son sommet.

On combine ensuite les valeurs limites du rayon de section intérieur  $r_1$  obtenues grâce à l'étude du flambement et de l'écoulement dans la roue lors de la compression, l'étude de l'écoulement lors de l'impact et l'étude des limites du domaine géométrique de comportement linéaire. Comme on cherche à optimiser la hauteur maximale de saut de la roue tout en la préservant de l'endommagement, on intègre également l'étude de la hauteur maximale de saut  $H_{max}$  en fonction des dimensions de la section, grâce au modèle à deux degrés de liberté développé au chapitre précédent. La figure 4.6 (a) présente l'évolution de  $H_{max}$  en fonction de  $r_1$  pour chaque rayon extérieur  $r_2$  compris entre 15 mm et 50 mm. Pour chaque courbe, les trois limites décrites précédemment sont indiquées par des lignes verticales. Elle décrivent la limite physiquement atteignable pour  $H_{max}$  : par exemple, pour  $r_2 = 15$  mm on obtient des sauts de plusieurs mètres lorsque  $r_1$  avoisine les 14 mm, cependant on sortira de la zone de comportement linéaire, la roue sera sujette au flambement et à l'écoulement lors de sa compression et il y aura écrasement de section à l'impact lors des sauts. Pour maximiser la hauteur de saut de la roue sans l'endommager ou sortir du domaine linéaire le rayon  $r_1$  limitant sera le plus petit parmi les trois limites. Les points d'intersection de chaque courbe  $H_{max} = f(r_1)$  avec chacune des trois limites de  $r_1$  correspondent aux hauteurs de saut optimisées permettant d'éviter le flambement, l'écoulement et la sortie du domaine linéaire.

Ces points d'intersection reliés entre eux donnent trois nouvelles courbes correspondant chacune à un type de limite : flambement-écoulement en compression, écoulement à l'impact, sortie du domaine géométrique linéaire, qui sont représentées sur la figure 4.6 (b). L'étude est centrée sur la zone correspondant à un  $r_2$  compris entre 15 mm et 20 mm, car c'est dans cette zone que se trouve l'intersection des trois courbes, qui correspond à une section optimisée. Pour chaque  $r_2$ , l'épaisseur de section minimale est déterminée par la plus basse des trois valeurs minimales de  $r_1$ , correspondant chacune à un type de limite. Cette valeur minimale de  $r_1$ , permettant d'avoir une épaisseur de section aussi fine que possible et de maximiser  $H_{max}$  sans dommages, en gardant un comportement linéaire. En reliant ces valeurs entre elles sur la figure 4.6 (b), on obtient alors une zone de design qui regroupe les couples  $(r_1, r_2)$  possibles tout en indiquant les hauteurs  $H_{max}$  atteignables par la roue pour ces valeurs. Comme il s'agit d'une étude discrète on remplit uniquement l'espace sous les points reliés entre eux et non l'espace sous les courbes.

On remarque que la courbe noire, qui correspond aux limites en termes de flambement et d'écoulement n'a pas d'influence : avant l'intersection des trois courbes, la valeur limite de  $r_1$  correspond à la sortie du domaine géométrique linéaire, et après l'intersection, c'est l'écrasement de section qui restreint le design. Ce constat n'est cependant pas généralisable à tout type de matériau : par exemple pour un matériau ayant un module d'Young proche de celui du nylon renforcé aux fibres de carbone mais une contrainte à la rupture plus faible,

la limite en flambement et écoulement pourra être plus basse que la limite en comportement linéaire, et donc déterminer partiellement la zone de design.

### 4.3 Discussion

Les modèles utilisés dans ce chapitre ne prennent pas en compte l'influence du revêtement en PVC dont la roue Cyr sera recouverte sur les déformations de cette dernière lors de la compression, et sa rigidité. L'ajout d'un tel revêtement risque de diminuer la hauteur de saut maximale estimée théoriquement. La roue Cyr ne sera pas imprimée en 3D d'un seul bloc, mais en plusieurs morceaux ce qui modifie la répartition des contraintes : les zones de jonction entre deux morceaux de roue seront plus exposées à la rupture.

Ces deux aspects seront à considérer dans le cas d'une étude plus approfondie. En outre, on a considéré que la section était circulaire creuse, mais l'impression 3D offre un large éventail de possibilités à explorer : un autre axe d'approfondissement serait de reprendre ces études pour des sections plus complexes (formes différentes, remplissage en nids d'abeille, etc.) qui mériteraient d'être mises à profit.

La présence de l'utilisateur à l'intérieur de la roue n'a pas été intégrée à l'étude : nous avons fait l'hypothèse que ce dernier sauterait de manière synchronisée avec la roue et négligé son influence sur le mouvement de la roue. Nous avons ainsi considéré que maximiser la hauteur de saut de la roue seule maximiserait la hauteur de la roue avec l'utilisateur. L'intégration de l'influence de l'utilisateur lorsqu'il saute avec la roue reste néanmoins une piste intéressante pour compléter le modèle.

Pour ce qui concerne les non-linéarités, la limite que nous avons établie afin de ne pas sortir du domaine de comportement linéaire de la roue Cyr limite les performances de cette dernière. En effet dans certains cas, si on ne tient pas compte de cette limite et qu'on diminue encore l'épaisseur de la section, on augmente la hauteur de saut de la roue. Hors de ce domaine, nos modèles ne sont plus valides, cependant le domaine non-linéaire mérite d'être exploré car, en nous affranchissant d'une partie des limites de design, il est possible d'optimiser encore plus les performances de la roue.

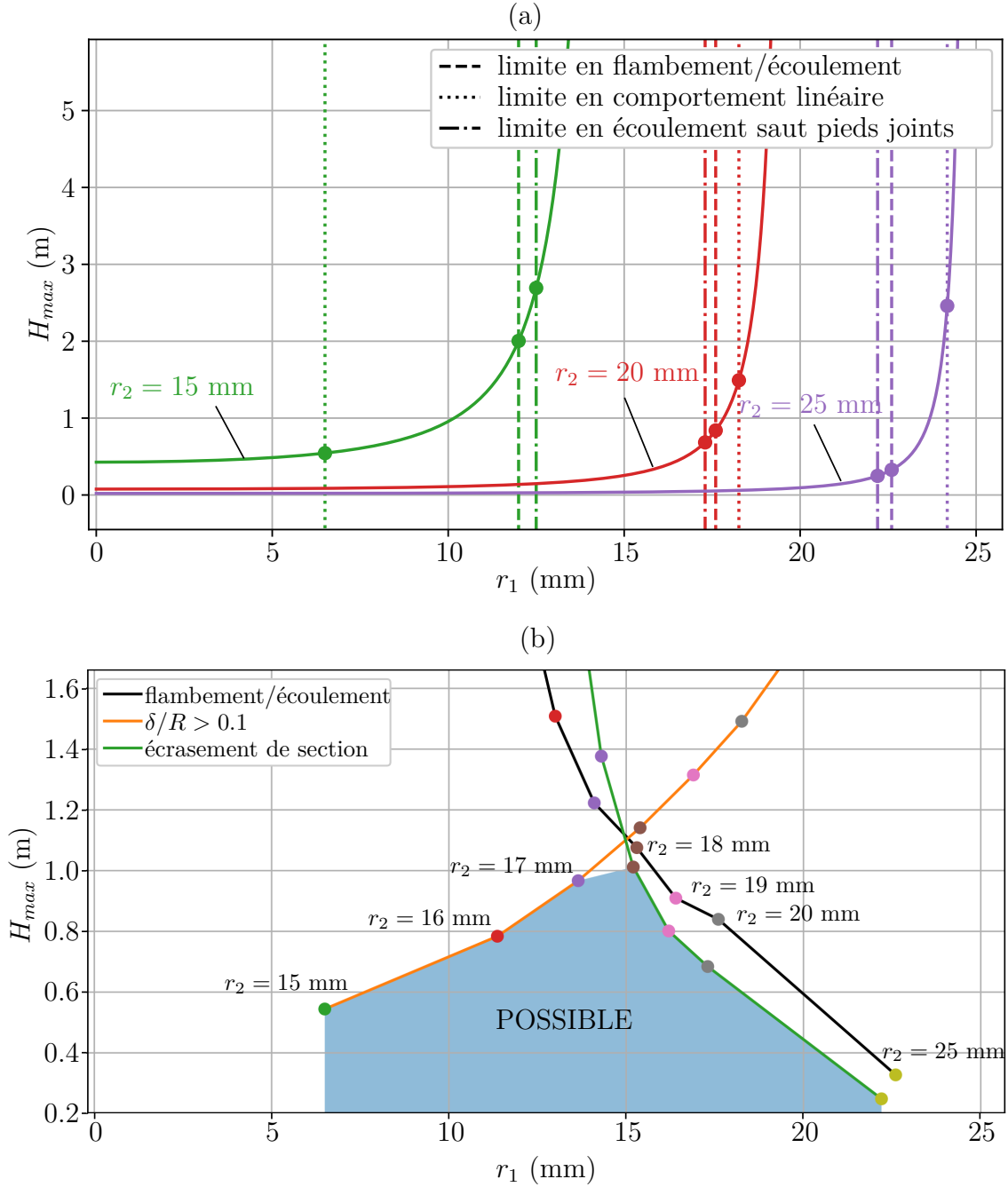


Figure 4.6 Hauteur maximale de saut en fonction de  $r_1$ , pour des  $r_2$  donnés (a). Les points d'intersection des courbes  $H_{max} = f(r_1)$  avec les limites en pointillés correspondent aux valeurs pour lesquelles la hauteur de saut de la roue est maximisée sans endommager la roue ou sortir du domaine linéaire et donnent 3 nouvelles courbes représentées en (b). On prendra donc comme limite globale la plus petite des trois dans chacun des cas, ce qui donne la zone de design représentée en bleu. La section optimale correspond à l'intersection des trois courbes représentant chacune un type de limite (flambement/écoulement,  $\delta/R > 0.1$  et écrasement de section). Les calculs sont réalisés pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian  $R = 0.9 \text{ m}$ , avec la force  $F_s$  appliquée à son sommet.

#### 4.4 Conclusion

A l'aide du modèle de roue Cyr à deux degrés de liberté développé au chapitre 3, combiné à des études par éléments finis par lesquelles on étudie les contraintes dans la roue lors de l'utilisation, on aboutit à une zone de design permettant d'optimiser la section de la roue Cyr, en maximisant, la hauteur de ses sauts tout en évitant son endommagement et la sortie du domaine géométrique de comportement linéaire, au-delà duquel notre modèle n'est plus valide. Pour une roue en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes de rayon médian  $R = 0.9$  m, les dimensions de section optimales sont ainsi  $r_2 = 18$  mm et  $r_1 = 15.2$  mm, et la hauteur maximale de saut correspondante est  $H_{max} = 1.01$  m pour une force  $F_s = 900$  N appliquée à son sommet. L'étude du saut de la roue Cyr est ainsi complète et aboutit à une démarche d'optimisation de sa section reproductible pour différents rayons médians et différents types de matériaux.

## CHAPITRE 5 STABILITÉ DYNAMIQUE DU MOUVEMENT DE ROTATION D'UNE ROUE CYR

L'objectif de ce chapitre est de modéliser un autre mouvement caractéristique de la roue Cyr : la rotation qui s'apparente au mouvement d'une pièce de monnaie qu'on fait rouler sur sa tranche. Afin de comprendre comment optimiser la stabilité dynamique de ce mouvement, un modèle théorique est développé puis complété par des manipulations expérimentales.

### 5.1 Étude théorique

Dans cette section on établit un modèle théorique de la rotation de la roue Cyr afin d'en étudier la stabilité dynamique en régime permanent et en cas de perturbation. Au moyen de ce modèle nous identifions ensuite les paramètres géométriques permettant d'optimiser la stabilité de la roue.

#### 5.1.1 Description du mouvement

On étudie ici le mouvement de la roue Cyr correspondant à celui du disque d'Euler, composé de deux phases : une première phase au cours de laquelle la roue décrit des cercles en roulant sur sa tranche, puis une deuxième phase où elle oscille en tournant de plus en plus vite avant de tomber à plat, stoppant net le mouvement. Ces deux phases correspondent à l'enchaînement de deux figures de roue Cyr, la "roue" pour la phase 1, qu'on nommera phase de roulement et la "pièce" pour la phase 2, phase de *wobbling*.

Dans les sections 5.1 et 5.2, la modélisation du disque d'Euler développée par Batista [10] est adaptée à la géométrie torique de la roue Cyr. De même que pour Batista, l'objectif est de développer des cartes de stabilité dynamique, mais avec d'autres variables : elles seront évaluées et tracées avec l'inclinaison de la roue  $\theta$  et sa vitesse angulaire  $d\phi/dt$ .

#### 5.1.2 Référentiels et système considérés

On définit trois référentiels, présentés à la figure 5.1 : le référentiel fixe  $OXYZ$ , et les référentiels mobiles  $C_{xzy}$  et  $C_{\xi\eta\zeta}$  ayant pour origine le centre de gravité de la roue.  $C_{xzy}$  est décalé de  $OXYZ$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $\vec{Z}$  et  $C_{\xi\eta\zeta}$  est décalé de  $C_{xzy}$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{x}$ .

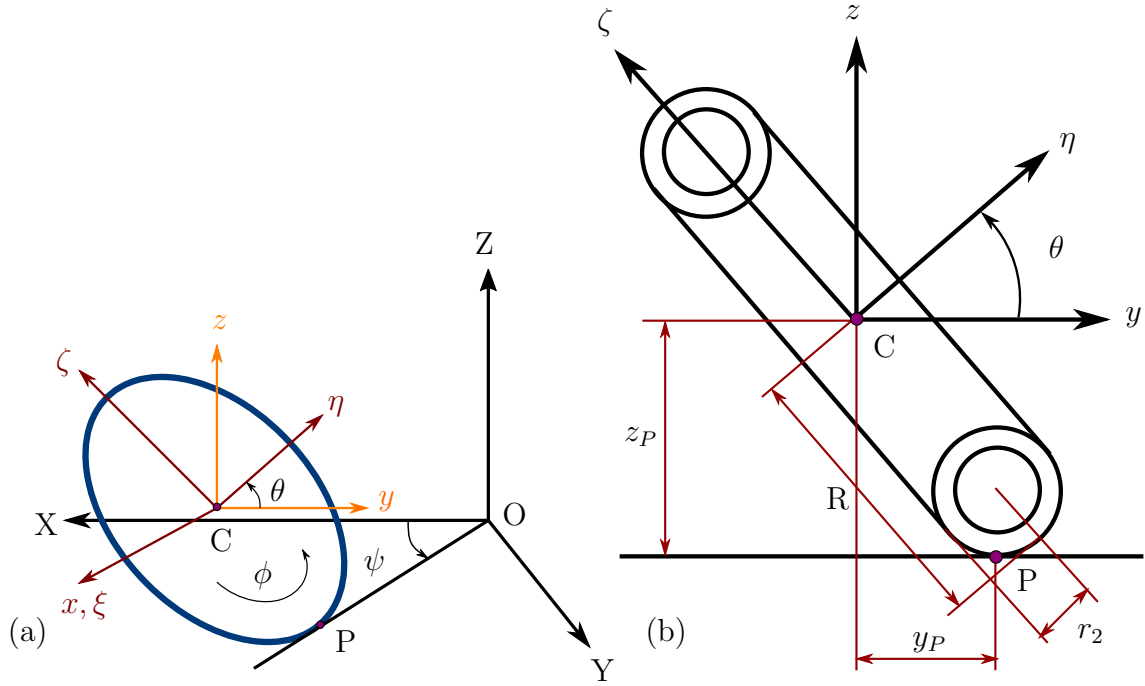


Figure 5.1 Systèmes de coordonnées. On utilise trois référentiels : le référentiel fixe  $OXYZ$ , et les référentiels mobiles  $C_{xzy}$  et  $C_{\xi\eta\zeta}$  ayant pour origine le centre de gravité de la roue.  $C_{xzy}$  est décalé de  $OXYZ$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $\bar{Z}$  et  $C_{\xi\eta\zeta}$  est décalée de  $C_{xzy}$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\bar{x}$ . Ces référentiels sont adaptés de l'article de Batista [10]. Nous étudions ici non pas un disque mais une roue Cyr à la géométrie torique, ce qui change, entre autres, l'expression de la position du point de contact  $P$ .



On considère une roue à géométrie torique de rayon externe  $R$  et de rayon de section externe  $r_2$ . La position de la roue dans les référentiels présentés à la figure 5.1 est décrite par les angles d'Euler :

$\theta$  décrit son inclinaison par rapport à la verticale : pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , la roue est à plat sur le sol ;

$\phi$  décrit la rotation de la roue, autour de son axe  $\vec{\eta}$  ;

$\psi$  décrit la rotation de la roue autour de l'axe  $\vec{Z}$  du référentiel fixe.

### 5.1.3 Hypothèses

Afin de simplifier le modèle, on adopte les hypothèses suivantes :

- On se place en régime stationnaire : les variables qui prennent des valeurs constantes seront indicées d'un 0.
- On considère que la roue évolue sur un sol sans glissement.
- Le mouvement est étudié pour  $0 < \theta < \pi/2$  radians.

### 5.1.4 Mise en équations

On se place en régime permanent : certaines des variables deviennent des constantes et seront indexées d'un zéro dans ce qui suit. On note  $(X_C, Y_C, Z_C)$  la position du centre de gravité dans le référentiel fixe  $OXYZ$ ,  $(v_{Cx0}, v_{Cy0}, v_{Cz0})$  les composantes de la vitesse du point C dans  $C_{xzy}$ , décalé de  $OXYZ$  d'une rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $\vec{Z}$ ,  $(\frac{d\theta_0}{dt}, \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0, \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0)$  les composantes de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  dans  $C_{xyz}$ ,  $\frac{d\phi}{dt}$  la vitesse angulaire par rapport à l'axe  $\vec{\eta}$  et  $\frac{d\psi}{dt}$  la vitesse angulaire par rapport à l'axe  $\vec{Z}$ .

La dérivée de la position du centre de gravité  $(X_C, Y_C, Z_C)$  s'exprime en fonction de sa vitesse dans  $C_{xzy}$  projetée dans  $OXYZ$  :

$$\begin{aligned} \frac{dX_C}{dt} &= v_{Cx0} \cos \psi - v_{Cy0} \sin \psi, \\ \frac{dY_C}{dt} &= v_{Cx0} \sin \psi + v_{Cy0} \cos \psi, \\ \frac{dZ_C}{dt} &= v_{Cz0}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les coordonnées du point de contact P dans  $C_{xzy}$ , schématisé à la figure 5.1, s'expriment :

$$\begin{aligned}x_P &= 0, \\y_P &= R \sin \theta_0, \\z_P &= -R \cos \theta_0 - r_2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

La règle de transport des torseurs donne la vitesse du point de contact dans  $C_{xzy}$  :

$$v_{\vec{P}0} = v_{\vec{C}0} + \vec{\omega} \wedge \vec{CP},\tag{5.3}$$

avec  $\vec{\omega} = \left( \frac{d\theta_0}{dt}, \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0, \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \right)$  et  $\vec{CP} = (0, R \sin \theta_0, -R \cos \theta_0 - r_2)$ .

La substitution de 5.2 dans 5.3 donne les composantes de la vitesse au point de contact dans  $C_{xzy}$  :

$$\begin{aligned}v_{Px_0} &= v_{Cx_0} - (d\phi/dt + d\psi/dt \sin \theta)(R \cos \theta_0 + r_2) - (d\psi/dt \cos \theta_0)R \sin \theta_0, \\v_{Py_0} &= v_{Cy_0} + d\theta_0/dt(R \cos \theta_0 + r_2) = v_{Cy_0}, \\v_{Pz_0} &= v_{Cz_0} + d\theta_0/dt R \sin \theta_0 = v_{Cz_0}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

On a fait l'hypothèse d'un sol rugueux : on a donc  $v_{Px_0} = v_{Py_0} = 0$ , et comme le contact entre le sol et la roue est permanent,  $v_{Pz_0} = 0 = v_{Cz_0}$ .

Les composantes de l'accélération du centre d'inertie de la roue dans  $C_{xzy}$  s'obtiennent en dérivant l'équation 5.1 projetée dans  $C_{xzy}$ . Comme on est en régime permanent, les vitesses  $v_x, v_y, v_z$  sont constantes et donc de dérivées nulles :

$$\begin{aligned}a_{Cx_0} &= -\frac{d\psi}{dt} v_{Cy_0}, \\a_{Cy_0} &= \frac{d\psi}{dt} v_{Cx_0}, \\a_{Cz_0} &= 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

L'équation 5.5 combinée à la relation fondamentale de la dynamique en translation donne :

$$\begin{aligned} m_r \frac{d\psi}{dt} v_{Cy0} &= -F_x, \\ m_r \frac{d\psi}{dt} v_{Cx0} &= F_y, \\ m_r \frac{dv_{Cz0}}{dt} &= -m_r g + F_z = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sont les composantes de la force de réaction  $\mathbf{F}$  au point P, dans  $C_{xyz}$ .

Le moment cinétique au centre de masse est  $\vec{L}_{C0} = I \cdot \vec{\omega}$ , avec pour tenseur d'inertie :

$$I = \begin{pmatrix} m_r(\frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & m_r(R^2 + \frac{3}{4}r_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_r(\frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r_2^2) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Notons  $k_1^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r_2^2$  et  $k_2^2 = R^2 + \frac{3}{4}r_2^2$ .

D'après 5.7, les composantes du moment cinétique en  $C$  dans  $C_{xyz}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} L_{Cx0} &= m_r k_1^2 \frac{d\theta_0}{dt} = 0, \\ L_{Cy0} &= m_r k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right), \\ L_{Cz0} &= m_r k_1^2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

La relation fondamentale de la dynamique en rotation appliquée au centre de masse de la roue dans le référentiel  $C_{xyz}$  donne :

$$\frac{d\mathbf{L}_{C0}}{dt} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{L}_{C0} = \mathbf{M} + \overrightarrow{CP} \wedge \mathbf{F}, \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{R}$  est la vitesse angulaire de  $C_{xyz}$  par rapport à  $C_{\xi\eta\zeta}$  et  $\mathbf{M}$  est le moment de réaction au point P dans  $C_{xyz}$ .

La vitesse angulaire  $\mathbf{R}$  est égale à la vitesse angulaire  $\omega$  sans la rotation en  $\phi$  autour de l'axe

$\vec{\eta}$ . On a donc :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

En régime permanent, 5.10 devient :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

En substituant 5.8 et 5.11 dans 5.9, on obtient :

$$\begin{aligned} m_r(k_2^2 t \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) - k_1^2 \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) F_y + R \sin \theta_0 F_z + M_x &= 0, \\ -(R + r_2) F_x + M_y \cos \theta_0 + M_z \sin \theta_0 &= 0, \\ r_2 F_x - M_y \sin \theta_0 + M_z \cos \theta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

La dérivée de l'énergie mécanique s'exprime par :

$$\frac{dE}{dt} = P_F + P_M, \quad (5.13)$$

avec  $P_F$  et  $P_M$ , les puissances de la fore de réaction  $F$  et du moment de réaction  $M$ , ce qui donne :

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}_P \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}. \quad (5.14)$$

En régime stationnaire, on a  $\frac{dE}{dt} = 0$ , et comme on a fait l'hypothèse de l'absence de glissement,  $\vec{v}_P = \vec{0}$ , 5.14 devient donc :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{M}.$$

Le disque doit avoir une vitesse de rotation pour qu'il y ait un mouvement à étudier, on en déduit donc  $\vec{M} = \vec{0}$ .

Les équations 5.6 et 5.12 deviennent alors :

$$F_y = m_r \frac{d\psi}{dt} v_{Cx0},$$

$$m_r (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) - k_1^2 \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0) \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) m_r \frac{d\psi}{dt} v_{Cx0} + R \sin \theta_0 m g = 0. \quad (5.15)$$

Or, on sait de l'équation 5.1 que :

$$\left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) = \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0, \quad (5.16)$$

et de l'équation 5.2 que :

$$v_{Cx0} = (R + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) - r_2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0. \quad (5.17)$$

On substitue 5.16 et 5.17 dans 5.15 :

$$m_r \left( k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \right) \tan \theta_0 \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \right)$$

$$+ (R \cos \theta_0 + r_2) m_r \frac{d\psi}{dt} \left( (R + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 \right) - r_2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \right) + R \sin \theta_0 m_r g = 0. \quad (5.18)$$

En simplifiant, 5.18 devient :

$$[(k_2^2 - k_1^2) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) [(R + r_2) \sin \theta_0 - r_2 \cos \theta_0]] \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2$$

$$+ \frac{d\phi}{dt} [k_2^2 \cos \theta_0 + (R + r_2)(R \cos \theta_0)] \frac{d\psi}{dt} + R g \sin \theta_0 = 0. \quad (5.19)$$

On définit la longueur adimensionnelle :

$$\hat{L} = \frac{\sqrt{(k_2^2 - k_1^2) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) [(R + r_2) \sin \theta_0 - r_2 \cos \theta_0]}}{R \sin \theta_0}.$$

L'équation 5.19 devient :

$$\frac{R \sin \theta_0 \hat{L}^2}{g} \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{d\phi}{dt} \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{Rg \tan \theta_0} \frac{d\psi}{dt} + 1 = 0. \quad (5.20)$$

L'équation 5.20 se traduit ainsi : pour que le régime stationnaire puisse exister, l'équation polynomiale en  $d\psi/dt$  doit avoir une solution réelle. L'existence de cette solution dépend des valeurs de  $(\theta_0, d\phi/dt)$ . On peut ainsi tracer une première partie de la carte de stabilité, en séparant graphiquement les cas où le régime stationnaire est possible, et les cas où il ne peut pas exister.

On résout 5.20 :

$$\frac{d\psi}{dt} = g \frac{\frac{d\phi}{dt} \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{Rg \tan \theta_0} \pm \sqrt{\Delta}}{2R \sin \theta_0 \hat{L}^2}, \quad (5.21)$$

avec :

$$\Delta = \left( \frac{d\phi}{dt} \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{Rg \tan \theta_0} \right)^2 - 4 \frac{\hat{L}^2 R \sin \theta_0}{g}. \quad (5.22)$$

Pour que  $d\psi/dt$  soit un réel, il faut  $\Delta \geq 0$  Lorsque  $\Delta < 0$  l'équilibre dynamique n'existe pas.

La frontière de l'équilibre dynamique est décrite par l'équation :

$$\left( \frac{d\phi}{dt} \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{Rg \tan \theta_0} \right)^2 - 4 \frac{\hat{L}^2 R \sin \theta_0}{g} = 0. \quad (5.23)$$

On résout 5.23 :

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{2\hat{L}R \tan \theta_0 \sqrt{Rg \sin \theta_0}}{k_2^2 + R(R + r_2)}. \quad (5.24)$$

Lorsque

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| < \frac{2\hat{L}R \tan \theta_0 \sqrt{Rg \sin \theta_0}}{k_2^2 + R(R + r_2)},$$

la force centrifuge et la réaction du sol ne peuvent plus contrebalancer l'effet de la gravité.

La figure 5.2 traduit cette condition par une première frontière sur la carte de stabilité.

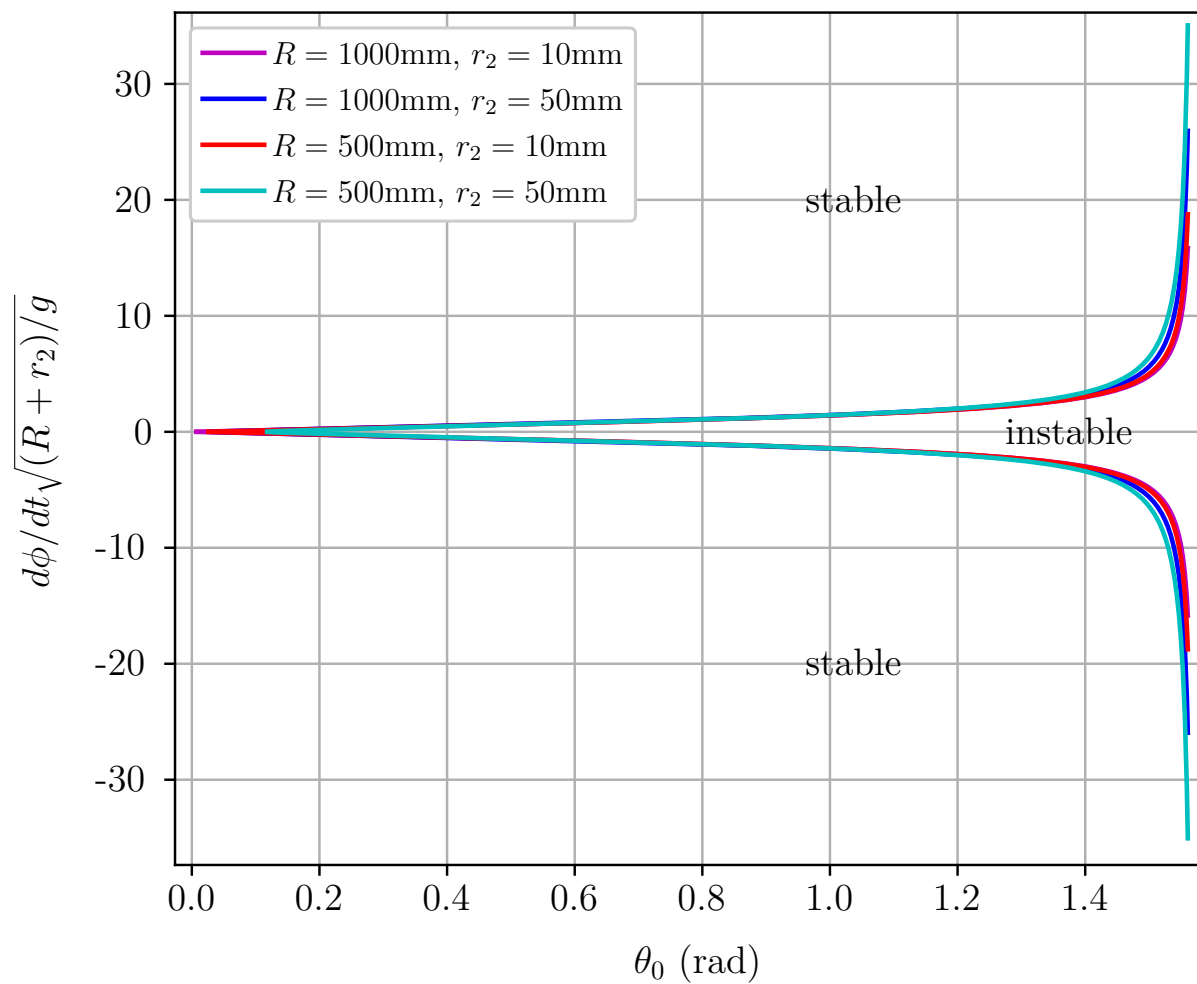


Figure 5.2 Première partie de la carte de stabilité adimensionnelle. La frontière détermine l'existence d'une position d'équilibre dynamique pour chaque couple  $(\theta_0, d\phi/dt \sqrt{(R+r_2)/g})$ .

## 5.2 Réponse à une perturbation

On étudie à présent la réponse du système en régime permanent à une petite perturbation. Pour cela, on ajoute un terme de pulsation  $\sigma$  à  $\theta$  et à  $d\theta/dt$ ,  $d\phi/dt$ ,  $d\psi/dt$ . On note  $d\phi/dt|_0$  et  $d\psi/dt|_0$ , les vitesses angulaires  $d\phi/dt$  et  $d\psi/dt$  en régime permanent.

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta_0}{dt} + \epsilon \frac{d\tilde{\theta}}{dt} e^{i\sigma t} = \epsilon \frac{d\tilde{\theta}}{dt} e^{i\sigma t}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{dt}|_0 + \epsilon \frac{d\tilde{\phi}}{dt} e^{i\sigma t}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi}{dt}|_0 + \epsilon \frac{d\tilde{\psi}}{dt} e^{i\sigma t}.\end{aligned}\tag{5.25}$$

La suite des calculs de cette section se trouve en annexe à la fin du mémoire, du fait de leur densité. On utilise le logiciel Mathematica comme outil de mise en forme des équations.

La carte de stabilité correspondante, combinant l'étude de l'existence d'une position d'équilibre dynamique et celle de la stabilité de cette dernière en cas de perturbation est présentée à la figure 5.3. Les frontières délimitent les couples  $(\theta, d\phi/dt \sqrt{(R + r_2)/g})$  pour lesquels l'équilibre dynamique existe (zone stable) et ceux pour lesquels il peut exister, mais ne résiste pas aux perturbations (zone instable en cas de perturbation). Dans la zone instable, l'équilibre dynamique ne peut pas exister. En pratique, à cause des imperfections du sol et de la roue, il y aura toujours des perturbations, la zone instable en cas de perturbation est donc équivalente à une zone instable. Afin d'optimiser la stabilité dynamique du mouvement, on cherchera donc à maximiser l'aire occupée par les zones stables. Prenons le cas particulier d'une roue de rayon  $R_p$  et de rayon externe de section  $r_{2p}$ . Cette roue, inclinée de  $\theta_0 = 0.1$  rad et tournant à la vitesse angulaire  $d\phi/dt = \sqrt{g/(R_p + r_{2p})}$  décrira des cercles de façon stable. En revanche si on augmente l'inclinaison de la roue, on se rapproche de la frontière : à  $\theta_0 \sim 0.75$  on entre dans la zone instable et il n'y aura plus d'équilibre dynamique. Considérons à présent le cas où on lance cette même roue avec un angle d'inclinaison fixe,  $\theta_0 = 0.2$ , mais à des vitesses différentes. Pour une vitesse angulaire de  $d\phi/dt = 5\sqrt{g/(R_p + r_{2p})}$ , on est dans la zone stable : la roue décrit des cercles de façon stable. En revanche, pour  $d\phi/dt = 0.4\sqrt{g/(R_p + r_{2p})}$ , on entre dans la zone d'instabilité en cas de perturbation : en pratique les imperfections du sol et de la roue rendront impossible l'équilibre dynamique. En diminuant encore la vitesse jusqu'à atteindre  $d\phi/dt = 0.1\sqrt{g/(R_p + r_{2p})}$ , on se retrouve dans la zone instable : l'équilibre dynamique ne peut exister. D'après cette carte de stabilité, optimiser le mouvement de la roue en minimisant les zones d'instabilité revient à maximiser  $R$  et minimiser  $r_2$ .



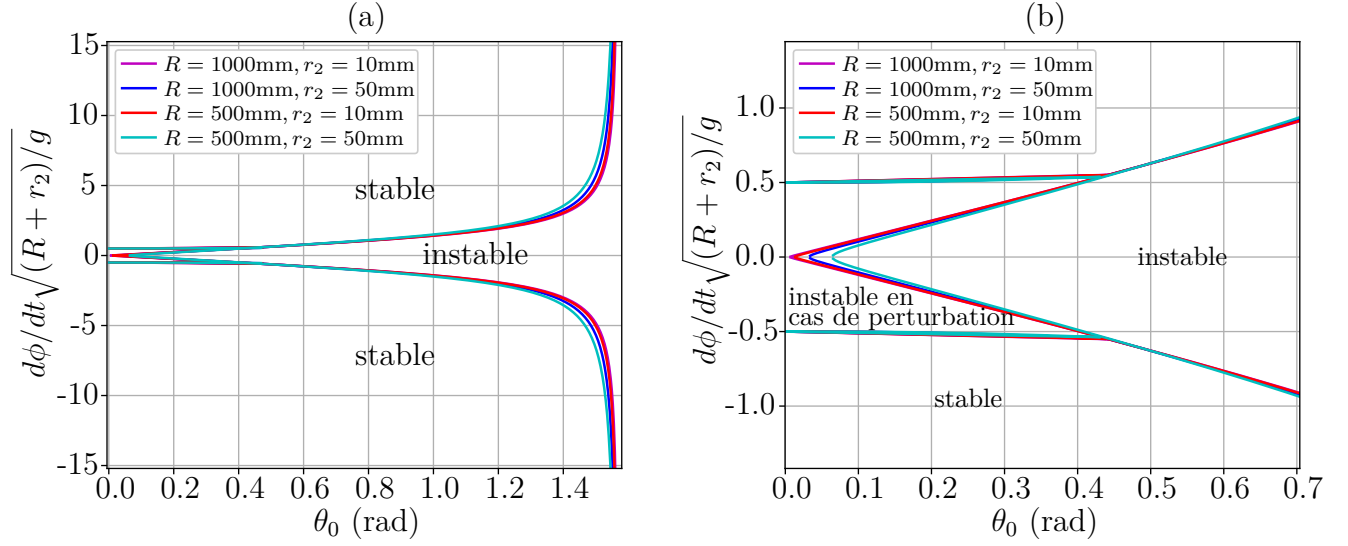


Figure 5.3 Carte de stabilité (a) et grossissement au niveau de la zone instable en cas de perturbation (b). Les frontières déterminent l'existence d'une position d'équilibre dynamique pour chaque couple  $(\theta, d\phi/dt \sqrt{(R+r_2)/g})$ .

### 5.3 Manipulations expérimentales

Dans cette section, on complète le modèle théorique développé précédemment par une étude du mouvement réel. On s'intéresse en particulier aux évolutions de l'inclinaison et de la vitesse angulaire de la roue à partir desquelles on met en évidence différentes phases du mouvement. On cherche également à évaluer l'influence des conditions initiales sur le mouvement.

#### 5.3.1 Méthodologie

Le module Adafruit BNO055 est un capteur à 9 degrés de liberté : son IMU (*Inertial Measurement Unit*) permet de mesurer l'accélération et la vitesse angulaire. Ces mesures, complétées par celles de son magnétomètre permettent d'obtenir l'orientation absolue du capteur. Un algorithme de fusion intégré dans le module permet de combiner l'accéléromètre, le gyroscope et le magnétomètre en une sortie stable donnant l'orientation du capteur dans l'espace, sous forme de quaternions. Le module Adafruit BNO055 est relié au microcontrôleur Arduino Nano 33IoT, qui joue le rôle de système d'acquisition et enregistre les données du BNO055 sur une carte SD. L'Adafruit BNO055 et l'Arduino Nano 33IoT sont représentés à la figure 5.4. Le système est placé dans un boîtier de protection puis fixé sur la roue Cyr : il permet de mesurer l'orientation absolue de cette dernière. La figure 5.5 présente montage du capteur

sur la roue.

A partir des quaternions donnés par le capteur on extrait des mesures l'évolution de l'inclinaison  $\theta$  et sa vitesse angulaire autour de l'axe  $\vec{\eta}$ ,  $d\phi/dt$ . On s'intéresse aussi à la fréquence d'oscillation de  $\theta$ .

La roue Cyr utilisée mesure  $R = 0.925$  m,  $r_2 = 19$  mm et pèse 18.4 kg.

Lors d'un lancer, la roue repose en équilibre sur la paume à plat à l'inclinaison souhaitée, puis on lui donne de l'autre main la vitesse initiale souhaitée. Pour les lancers où l'on souhaite donner à la roue une vitesse initiale importante on accompagne le début du mouvement en continuant de donner de l'élan à la roue après l'impulsion initiale. Les résultats présentés correspondent au mouvement de la roue lorsque celle-ci roule de manière libre, sans intervention extérieure.

On enregistre au total 7 lancers en faisant varier les conditions initiales en termes d'inclinaison et de vitesse initiales.

### 5.3.2 Influence du capteur sur le mouvement de la roue

Avant d'étudier les résultats des manipulations expérimentales, on cherche à déterminer à quel point le capteur perturbe le mouvement de la roue. On modélise le capteur comme une masse ponctuelle sur la roue, schématisée à la figure 5.6. On considère que lorsque  $\phi = 0$  le capteur coïncide avec l'axe  $\vec{x}$ .

On note  $m_c$  la masse du capteur. Le tenseur d'inertie exprimé en 5.7 devient alors :

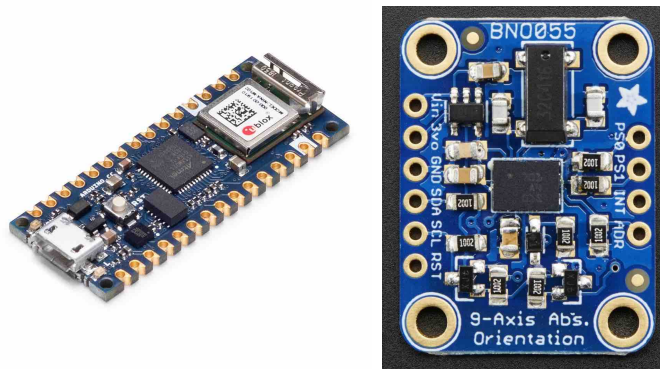


Figure 5.4 Arduino nano 33IoT et module adafruit BNO055 utilisés lors des mesures

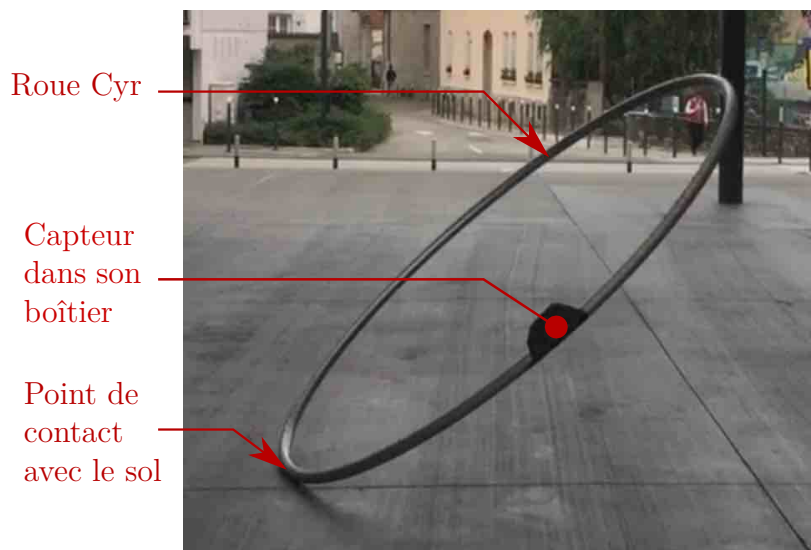


Figure 5.5 Capteur fixé sur la roue Cyr en mouvement. La roue Cyr utilisée mesure  $R = 0.925$  m,  $r_1 = 16$  mm,  $r_2 = 19$  mm et pèse 18.4 kg. Elle est constituée de 5 morceaux en aluminium reliés par des manchons en acier que l'on visse entre deux parties. Le capteur avec son boîtier pèse 204 g.

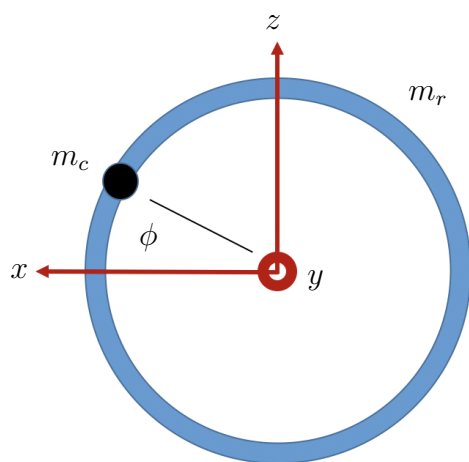


Figure 5.6 Capteur, représenté comme une masse ponctuelle sur la roue

$$I = \begin{pmatrix} m_r k_1^2 + m_c (R \sin \phi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_r k_2^2 + m_c R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_r k_1^2 + m_c (R \cos \phi)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

avec  $k_1^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r_2^2$  et  $k_2^2 = R^2 + \frac{3}{4}r_2^2$ , les composantes du tenseur d'inertie de la roue sans le capteur.

Les composantes du moment cinétique au centre de masse,  $\vec{L}_C = I \cdot \vec{\omega}$ , deviennent donc :

$$\begin{aligned} L_{Cx} &= (m_r k_1^2 + m_c (R \sin \phi)^2) \frac{d\theta}{dt}, \\ L_{Cy} &= (m_r k_2^2 + m_c R^2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right), \\ L_{Cz} &= (m_r k_1^2 + m_c (R \cos \phi)^2) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Pour quantifier l'influence du capteur sur le mouvement de la roue, on étudie pour chaque axe le ratio du moment d'inertie du capteur sur le moment d'inertie total du système :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{m_c (R \sin \phi)^2}{m_r k_1^2 + m_c (R \sin \phi)^2}, \\ q_2 &= \frac{m_c R^2}{m_r k_2^2 + m_c R^2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

avec  $k_1^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r_2^2$  et  $k_2^2 = R^2 + \frac{3}{4}r_2^2$ .

Les ratios  $q_1$  et  $q_2$  décrivant l'influence du capteur lors d'une rotation de la roue sont majorés par :

$$\frac{m_c R^2}{m_r k_1^2 + m_c R^2}. \quad (5.29)$$

Le ratio 5.29 est lui même majoré par :

$$\frac{m_c R^2}{m_r \frac{1}{2}R^2 + m_c R^2} = \frac{1}{\frac{m_r}{2m_c} + 1}. \quad (5.30)$$

Or, avec  $m_c = 204$  g et  $m_r = 18.4$  kg les masses respectives du capteur et de la roue utilisés lors des manipulations expérimentales, la valeur numérique du ratio 5.30 est 0.02. La présence du capteur se traduit ainsi par un balourd de 2% sur le système : son influence est donc négligeable.

### 5.3.3 Résultats

#### Inclinaison, vitesses angulaires et fréquences d'oscillation

Pour le premier lancer, les tracés des évolutions de  $\theta$ ,  $d\phi/dt$  et de la fréquence d'oscillation de  $\theta$  en fonction du temps sont présentés à la figure 5.7 côte-à-côte avec la carte de stabilité correspondant aux dimensions de la roue utilisée. La position angulaire  $\theta$  de la roue évolue en oscillant depuis l'inclinaison initiale jusqu'à la valeur  $\pi/2$ , qui correspond à une position à plat sur le sol. Les oscillations sont dues aux perturbations engendrées par les imperfections de l'environnement (uniformité du sol, vent) et de la roue utilisée. La vitesse angulaire  $d\phi/dt$  évolue elle aussi en oscillant, depuis sa valeur initiale jusqu'à 0. Ces oscillations traduisent des ralentissements et accélérations réguliers autour de la valeur moyenne de  $d\phi/dt$ . Elles sont elles aussi liées aux oscillations de  $\theta$  : sur la figure 5.7, on observe des concordances entre les sommets des oscillations de  $d\phi/dt$  et de  $\theta$ . La valeur moyenne de  $d\phi/dt$  décroît et devient négative avant de revenir à 0 : le sens de rotation de la roue autour de l'axe  $\vec{\eta}$  s'inverse à la fin du mouvement. Ce comportement est confirmé par les enregistrements vidéo. La fréquence des oscillations de  $\theta$  est calculée en mesurant les intervalles de temps entre les sommets du tracé de  $\theta$  en fonction du temps sur la figure 5.7. Cette fréquence augmente de manière exponentielle et atteint son maximum juste avant que le mouvement se termine. De la même manière qu'une pièce de monnaie qu'on ferait tourner sur sa tranche, la roue oscille de plus en plus vite avant de s'immobiliser brusquement, à plat sur le sol. En observant la carte de stabilité, on constate que l'intégralité du mouvement se déroule en zone instable : le mouvement commence dans la zone correspondant à l'instabilité en cas de perturbation et se poursuit dans la zone correspondant à la non-existence d'une position d'équilibre dynamique. Ce caractère instable du mouvement concorde avec les oscillations observées sur les tracés de  $\theta$  et  $d\phi/dt$ .

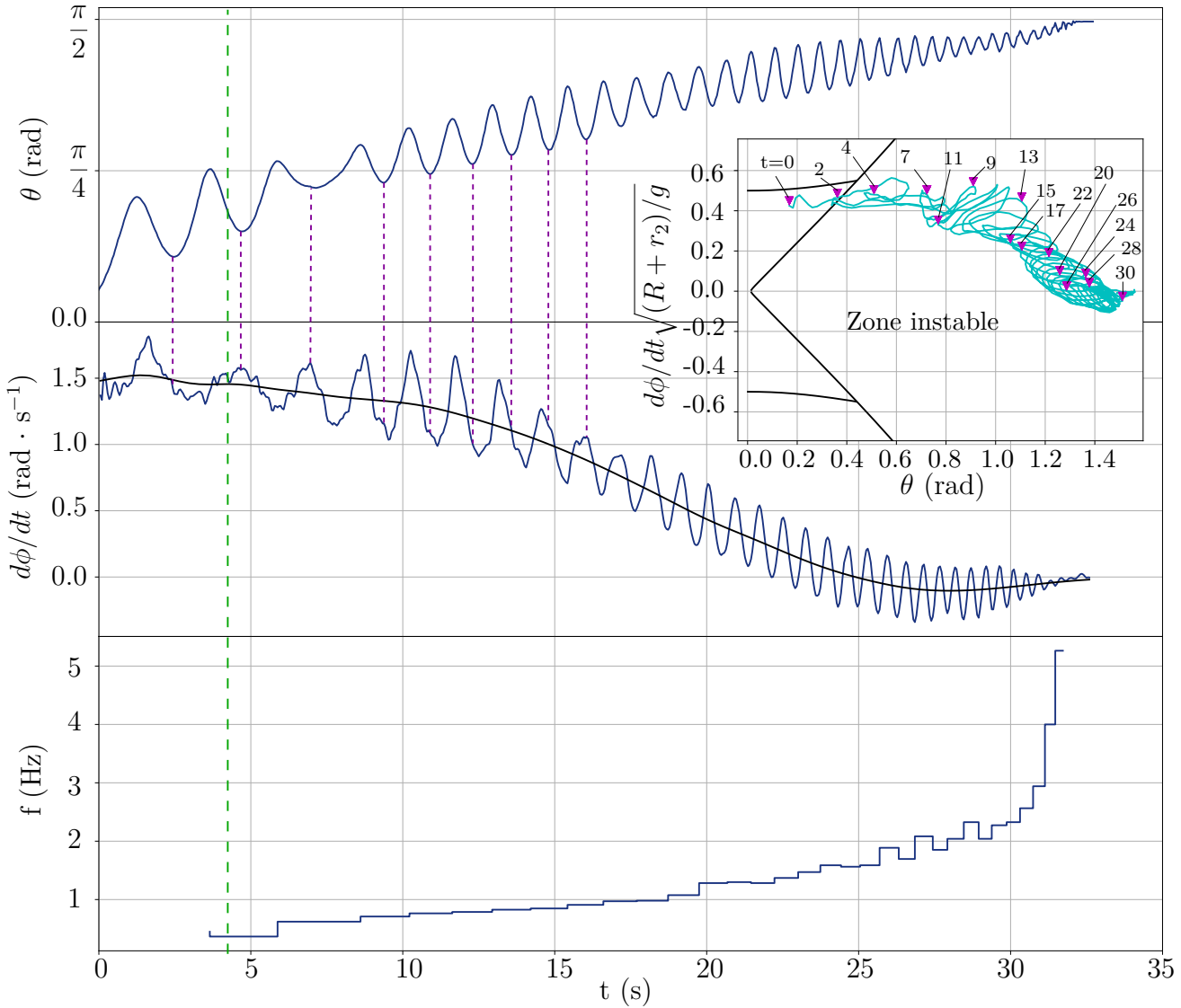


Figure 5.7 Évolution en fonction du temps de l'inclinaison  $\theta$ , de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$  et de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison  $\theta$  de la roue Cyr lors du premier lancer, juxtaposée à la carte de stabilité adimensionnelle correspondant à la roue utilisée, d'un rayon  $R = 0.925$  m et d'un rayon de section  $r_2 = 19$  mm. La carte de stabilité permet de conclure sur la stabilité dynamique du mouvement en fonction des couples  $(\theta, d\phi/dt)$  : les valeurs de ces deux paramètres lors du lancer y sont reportées en ajoutant des marqueurs permettant de situer le mouvement dans le temps. La fréquence des oscillations de  $\theta$  est calculée en mesurant les intervalles de temps entre les sommets du tracé de  $\theta$  en fonction du temps. A la vitesse  $1.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la roue fait un tour en 4.2 secondes : on observe environ une oscillation pour un demi tour. La présence du capteur, négligeable par rapport à la masse de la roue ne permet pas de justifier de telles oscillations. Celles-ci sont liées à la nature instable du mouvement mise en évidence par la carte de stabilité. On constate, en effet, que l'intégralité du mouvement se déroule en zone instable.

## Distinction entre les phases du mouvement

Le mouvement se décompose en deux phases distinctes :

- La phase de roulement, qui est celle que nous avons modélisée et étudiée dans la partie théorique traitant des cartes de stabilité. La roue roule sur sa tranche en décrivant des cercles.
- La phase de *wobbling* : la roue ne pivote quasiment plus autour de l'axe  $\vec{\eta}$ , mais oscille sur place de plus en plus rapidement jusqu'à s'immobiliser à plat au sol.

La figure 5.8 présente l'évolution de l'inclinaison  $\theta$  et de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$  lors du premier lancer de la roue. L'inclinaison  $\theta$  converge vers  $\pi/2$ , qui correspond à la configuration où la roue est à plat sur le sol. On observe trois pentes moyennes bien distinctes sur le tracé de  $d\phi/dt$ . Graphiquement, on identifie les phases de roulement et de *wobbling* à l'aide de la courbe représentant  $d\phi/dt$  : la phase de *wobbling* correspond à une valeur moyenne de  $d\phi/dt$  stabilisée autour de 0 et la phase de roulement pure correspond à un taux de décroissance constant pour la valeur moyenne de  $d\phi/dt$ . Lors du passage d'une phase à l'autre, on observe un changement de pente pour la valeur moyenne de  $d\phi/dt$  : on définit cet entre-deux comme la phase de transition entre le roulement et le *wobbling*. Pour identifier ces différentes phases du mouvement pour les 6 autres lancers, on répète la même démarche pour chaque lancer : les résultats sont présentés aux figures 5.9, 5.11 et 5.12. Lorsque la vitesse initiale est plus importante, l'amplitude des oscillations de  $\theta$  et  $d\phi/dt$  diminue : le mouvement est plus régulier et la phase de roulement est plus longue. Le tableau 5.1 détaille les conditions initiales, les taux de décroissance et les durées de chaque phase pour chacun des 7 lancers.

La carte de stabilité adimensionnelle correspondant à la roue Cyr utilisée pour les manipulations expérimentales est présentée à la figure 5.10. En y traçant le troisième lancer, dont les conditions initiales correspondent à une vitesse initiale élevée et à une faible inclinaison, on constate que contrairement aux lancers dont la vitesse initiale est moins élevée, une part

Tableau 5.1 Taux de décroissance  $\tau_d$ , durées  $t_{phase}$  de chaque phase et conditions initiales pour chacun des lancers.

Lancer n°	1	2	3	4	5	6	7
$t_{phase}$ roulement (s)	13.5	13.4	27.6	25.4	10	12.6	21.2
$t_{phase}$ transition (s)	10.6	11.1	9.4	10.6	8.9	8.2	10
$t_{phase}$ <i>wobbling</i> (s)	8.3	6.3	6.9	8.2	7.2	7.4	9.8
$\tau_d$ roulement ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ )	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.09	0.07
$\tau_d$ transition ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ )	0.1	0.09	0.15	0.15	0.16	0.17	0.17
$\theta_i$ (rad)	0.17	0.21	0.47	0.58	0.87	0.87	0.49
$(d\phi/dt)_i$ ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )	1.4	1.4	2.9	3.1	2.0	2.5	3.5

non négligeable du mouvement (de  $t = 0$  s à  $t = 10$  s) se déroule dans la zone stable, où l'équilibre dynamique peut exister. Puis la vitesse décroît et l'inclinaison de la roue augmente : on repasse en zone instable, dans laquelle l'équilibre dynamique ne peut exister. En confrontant cette carte de stabilité aux tracés de l'évolution temporelle de  $\theta$  et de  $d\phi/dt$  lors du lancer 3 sur la figure 5.9, on constate que l'amplitude des oscillations sur les deux courbes est moins importante que pour les deux lancers précédents. Ces résultats expérimentaux concordent avec ce qui a été établi lors du modèle théorique à l'origine de la carte de stabilité : dans notre modèle, augmenter la vitesse et diminuer l'inclinaison de la roue permet de se rapprocher de la zone correspondant à un mouvement stable. Selon les courbes de nos résultats expérimentaux, augmenter la vitesse initiale et diminuer l'inclinaison initiale de la roue entraîne une diminution de l'amplitude des oscillations de  $\theta$  et de  $d\phi/dt$  : le mouvement est plus régulier et plus stable. En revanche il n'y a pas de lien entre le franchissement des frontières sur la carte de stabilité et la délimitation des différentes phases du mouvement : les marqueurs temporels sur les cartes de stabilité attestent que le franchissement du seuil se produit au milieu de la phase de roulement : la phase de roulement ne correspond pas à la zone de stabilité dynamique.

Remarque : si on note  $L_{C,\eta}$  et  $L_{C,x}$  les composantes du moment cinétique par rapport à C projeté selon les axes  $\vec{\eta}$  et  $\vec{x}$ , l'énergie cinétique caractéristique de la phase de roulement s'exprime par  $E_r = \frac{1}{2}L_{C,\eta}\frac{d\phi}{dt}$  et celle de la phase de *wobbling* s'exprime par  $E_w = \frac{1}{2}L_{C,x}\frac{d\theta}{dt}$ . Le rapport des deux énergies s'exprime par :

$$\frac{E_r}{E_w} = \frac{8R^2 + 6r_2^2}{5R^2 + 4r_2^2} \left( \frac{d\phi/dt}{d\theta/dt} \right)^2. \quad (5.31)$$

On remplace  $R$  et  $r_2$  par les dimensions de la roue utilisée dans l'expérience dans 5.31 :  $\frac{E_r}{E_w} = 1.6 \left( \frac{d\phi/dt}{d\theta/dt} \right)^2$ .

Le passage de la phase de roulement au *wobbling* peut aussi être décrite par la condition :  $E_w > E_r$ , c'est à dire  $\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 > 1.6 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$ . En traçant l'évolution du ratio  $\left( \frac{d\theta/dt}{d\phi/dt} \right)^2$  sur la figure 5.8, on constate que cette condition correspond au passage de la phase de transition à la phase de *wobbling* : on dispose donc d'un critère quantitatif pour évaluer le seuil transition/*wobbling* qui vient s'ajouter à notre critère graphique. On a choisi ce critère graphique (le changement de pente de la moyenne de  $d\phi/dt$ ) pour distinguer les trois phases les unes des autres car ce changement de pente dénote clairement un changement dans le comportement de la roue Cyr, observable sans calculs ni hypothèses intermédiaires. Physiquement, le passage du roulement au *wobbling* se traduit par un changement net dans le mouvement de la roue, qui arrête de tourner autour de l'axe  $\eta$  et se met à osciller avec une fréquence croissante.



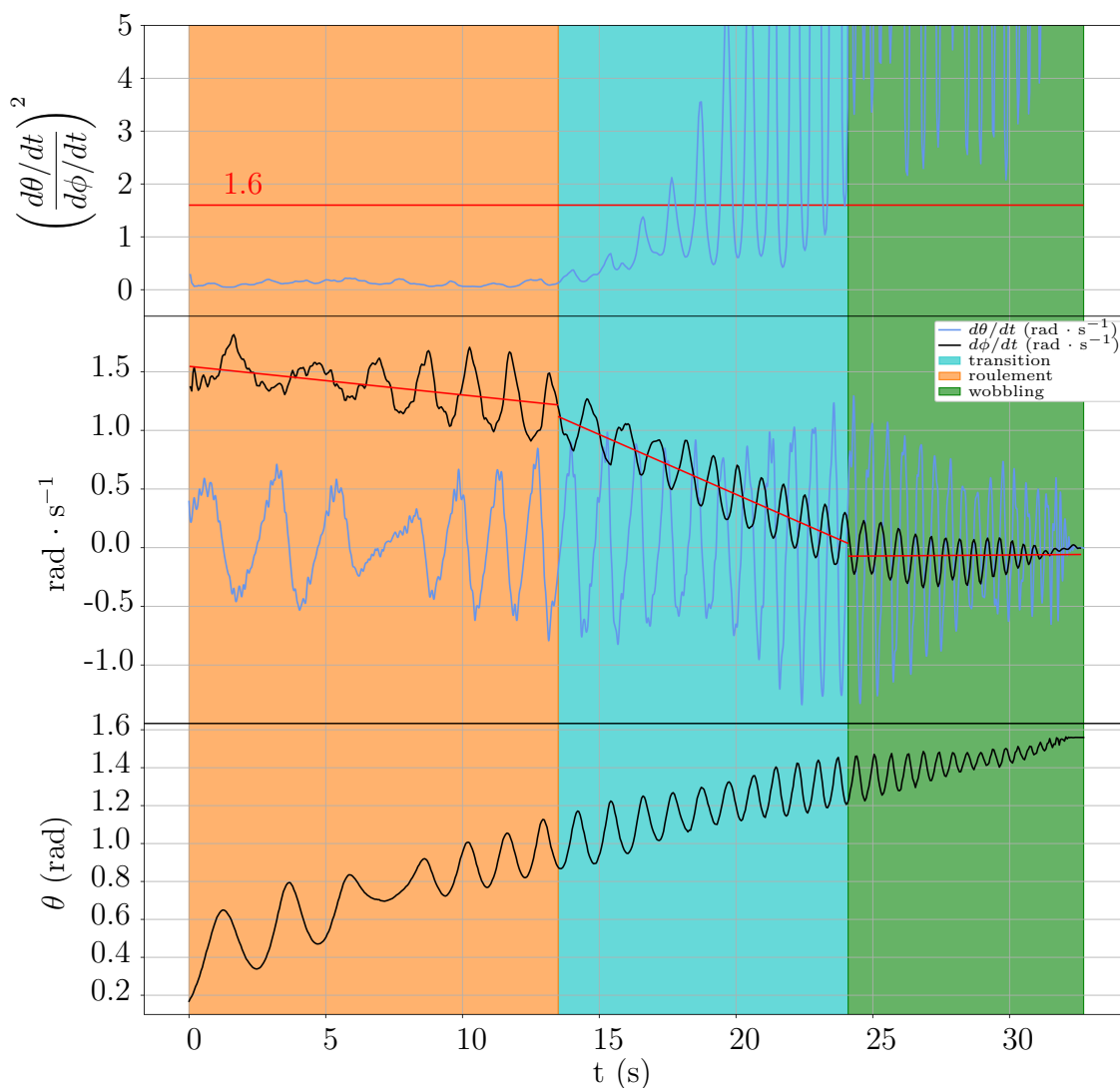


Figure 5.8 Mesure des différentes phases du mouvement délimitées par l'évolution de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$  de la roue Cyr, de sa vitesse d'oscillation  $d\theta/dt$  et de son inclinaison  $\theta$ , pour le lancer 1. La phase de roulement est séparée de la phase de *wobbling* (phase d'oscillation) par une phase de transition durant laquelle la roue passe progressivement d'un mouvement à l'autre. On distingue les phases les unes des autres en observant la pente moyenne de  $d\phi/dt$  : trois pentes nettement différentes apparaissent traduisent à chaque fois une modification du mouvement. Le passage de la phase de roulement à la phase de *wobbling* est aussi mis en évidence en comparant les vitesses d'oscillation  $d\theta/dt$  et de rotation  $d\phi/dt$  : ces deux vitesses sont associées respectivement à l'énergie de *wobbling* et à l'énergie de roulement. Dans la phase de roulement,  $d\phi/dt$  prédomine et dans la phase de *wobbling*, c'est  $d\theta/dt$  qui prédomine, comme le montre le tracé du ratio des deux vitesses au carré.

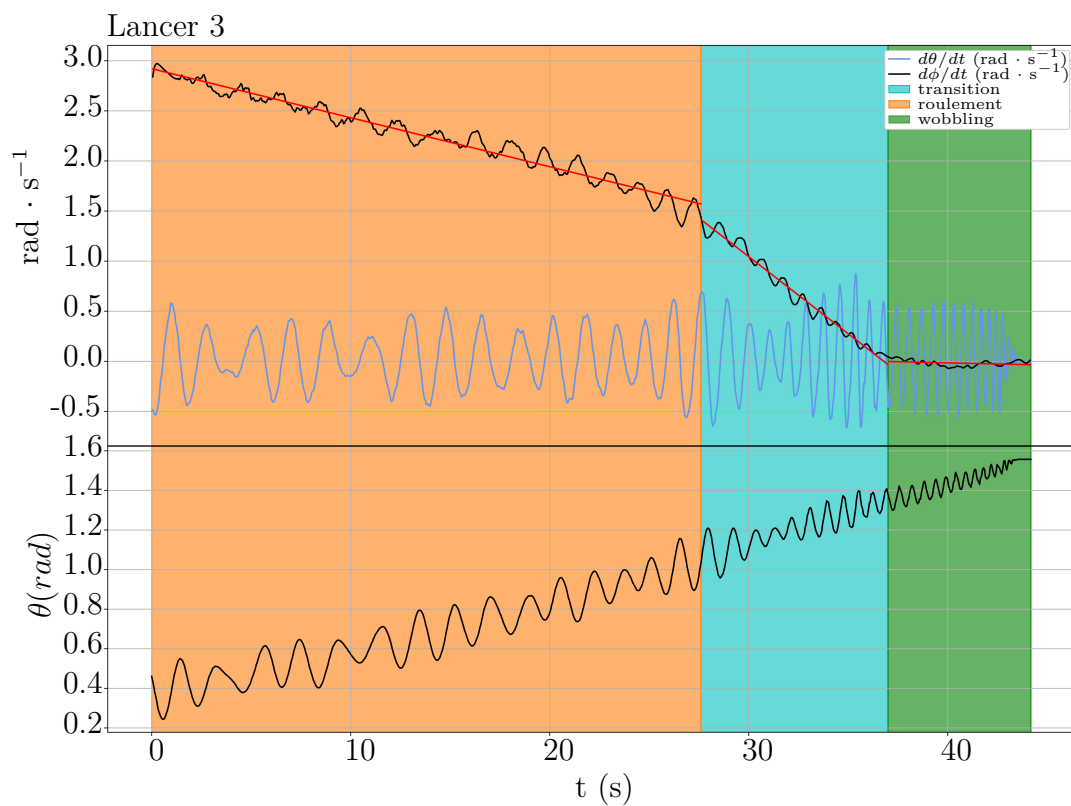
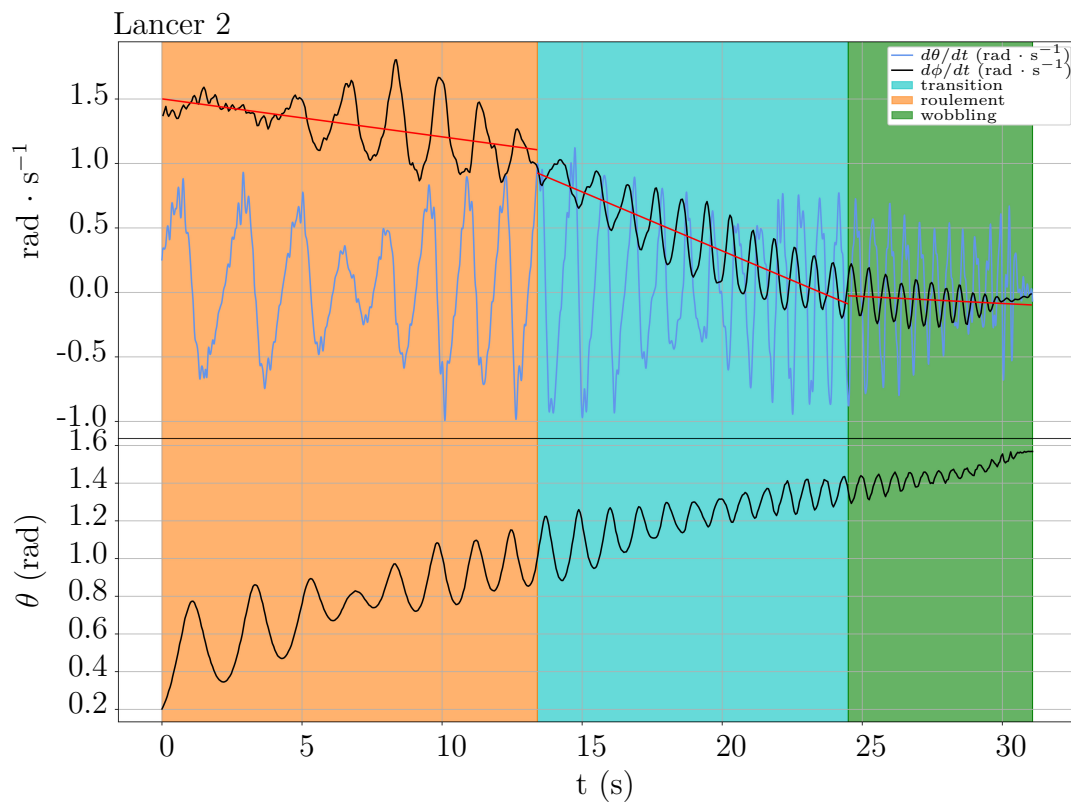


Figure 5.9 Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour les lancers 2 et 3. A inclinaisons initiales égales, lorsqu'on augmente la vitesse angulaire initiale de la roue, l'amplitude des oscillations de  $d\phi/dt$  et de  $\theta$  diminue.

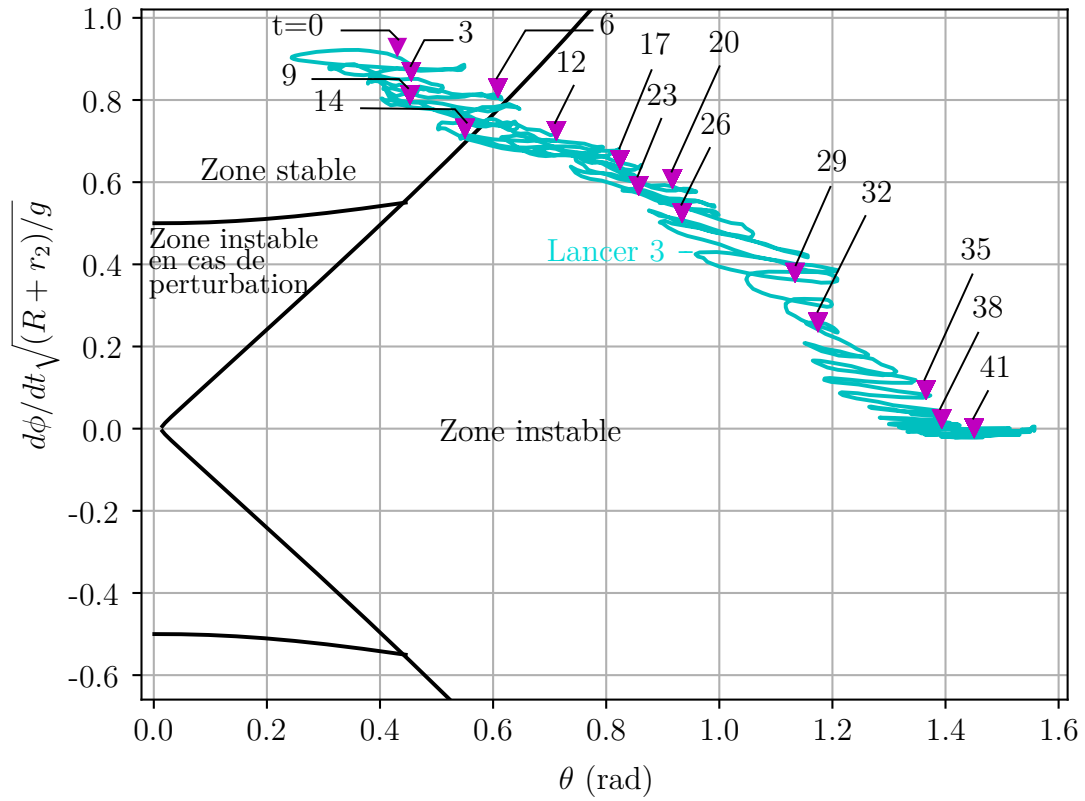


Figure 5.10 Carte de stabilité adimensionnelle correspondant à la roue Cyr utilisée pour les manipulations expérimentales ( $R = 0.925$  m,  $r_2 = 19$  mm) avec le tracé du lancer 3 et des repères temporels. Contrairement aux lancers pour lesquels la vitesse initiale est moins élevée, une partie significative du mouvement se déroule dans la zone stable, de  $t=0$  s à  $t=10$  s.

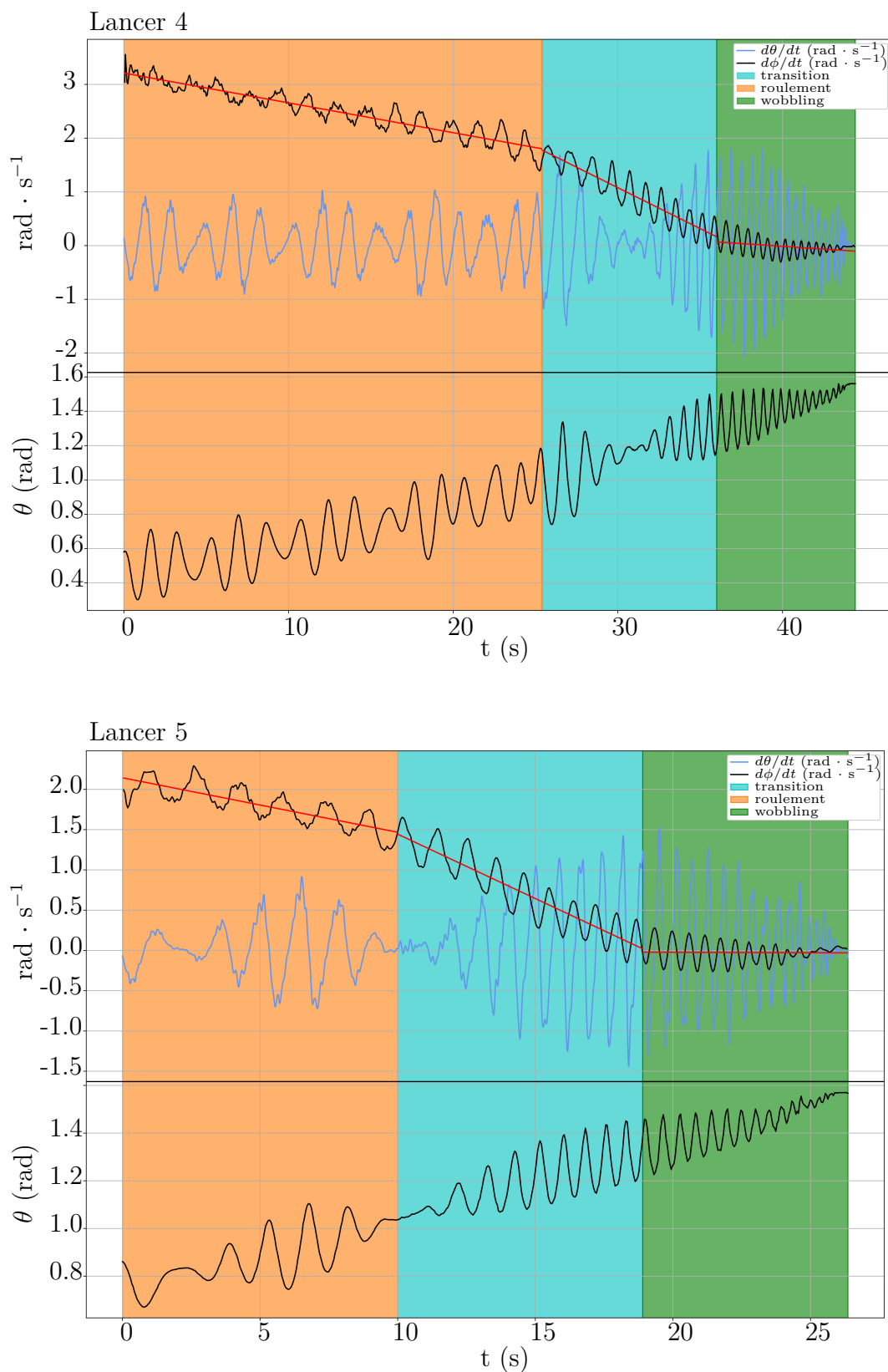


Figure 5.11 Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour les lancers 4 et 5. Lorsqu'on augmente l'inclinaison initiale de la roue, on rend son mouvement plus irrégulier, comme on peut l'observer sur le tracé de  $\theta$ .

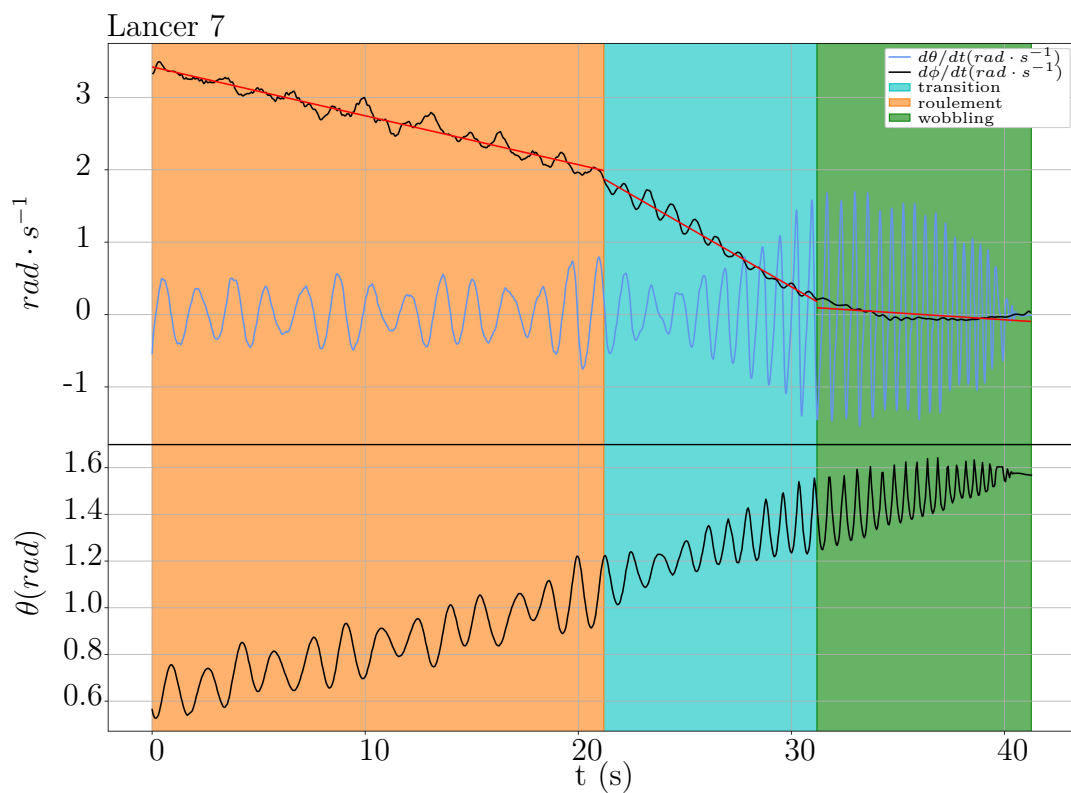
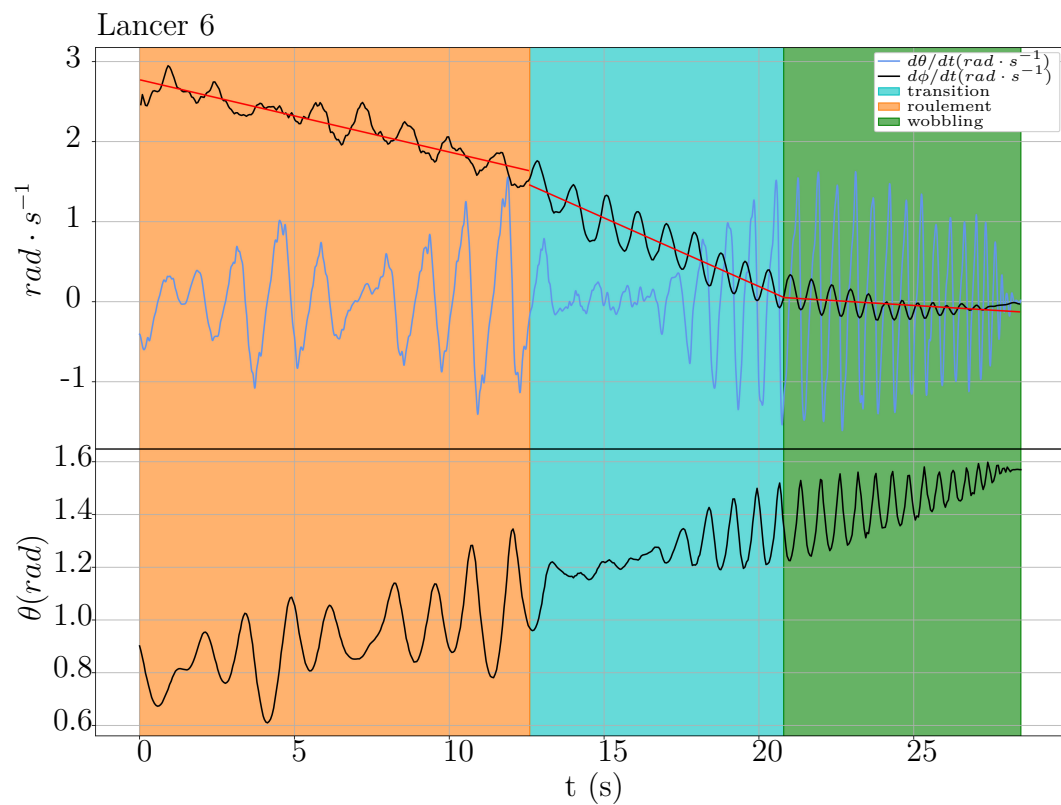


Figure 5.12 Vitesse angulaire et inclinaison de la roue Cyr pour pour les lancers 6 et 7

## Superposition des lancers

Pour comparer les 7 lancers entre eux, on superpose les tracés de  $\theta$ ,  $d\phi/dt$  et des fréquences d'oscillation de  $\theta$ . La figure 5.13 présente la superposition de ces tracés pour les 7 lancers, en précisant l'inclinaison initiale  $\theta_i$  et la vitesse angulaire initiale  $\dot{\phi}_i$  de la roue pour chaque lancer. Les formes de  $\theta$  et  $d\phi/dt$  varient selon les conditions initiales : les courbes des lancers 1 et 2, dont les conditions initiales sont les mêmes (faible élan et faible inclinaison), se superposent. Il en est de même pour les lancers 3 et 4 dont les conditions initiales sont proches (élan important, faible inclinaison). Les courbes des lancers 5 et 6 diffèrent légèrement, à l'image de leurs conditions initiales : inclinaison importante, faible élan pour le lancer 5 et élan plus important pour le lancer 6. Le lancer 7 est quant à lui effectué avec les conditions initiales suivantes : élan important et inclinaison moyenne.

Dans notre modélisation de la roue Cyr en rotation, on a négligé les phénomènes de dissipation d'énergie, et considéré que la roue évoluait sur le sol sans glisser. Lors des expérimentations, on constate qu'il y a du glissement lors de la phase de transition au cours de laquelle la roue passe de la phase de roulement à la phase de *wobbling*. Lors du lancer de la roue Cyr, cette dernière roule sur sa tranche en décélérant jusqu'à ce que la vitesse soit assez basse pour que la roue commence à glisser au point de contact et que le *wobbling* prenne le dessus. La phase de *wobbling* débutant sans intervention extérieure, on suppose que cette dernière est identique pour tous les lancers. Cette hypothèse est confirmée en observant les résultats sur une échelle temporelle inversée (on utilise en abscisse, à la place de  $t$ , la variable  $t_f - t$ , où  $t_f$  est l'instant auquel le mouvement se termine). Sur les figures 5.14 et 5.15, on représente les évolutions de l'inclinaison  $\theta$  et de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$ . Chacun des lancers a des conditions initiales différentes en termes d'inclinaison et de vitesse initiale. On remarque que quelles que soient les conditions initiales, les phases de *wobbling* ont des apparences similaires et se superposent.

La superposition des évolutions de la fréquence d'oscillation de  $\theta$  pour tous les lancers est présentée à la figure 5.16. Malgré des durées de mouvement différentes en fonction des conditions initiales, les courbes représentant les fréquences d'oscillation ont des formes similaires.

En inversant l'échelle temporelle on montre que la forme de la fréquence d'oscillation de  $\theta$  est la même pour chacun des lancers. La figure 5.17 présente la superposition des évolutions de la fréquence d'oscillation de  $\theta$  sur une échelle temporelle inversée : elle a la même forme pour chacun des tracés, ce qui permet de confirmer que l'évolution de cette fréquence d'oscillation est indépendante des conditions initiales.

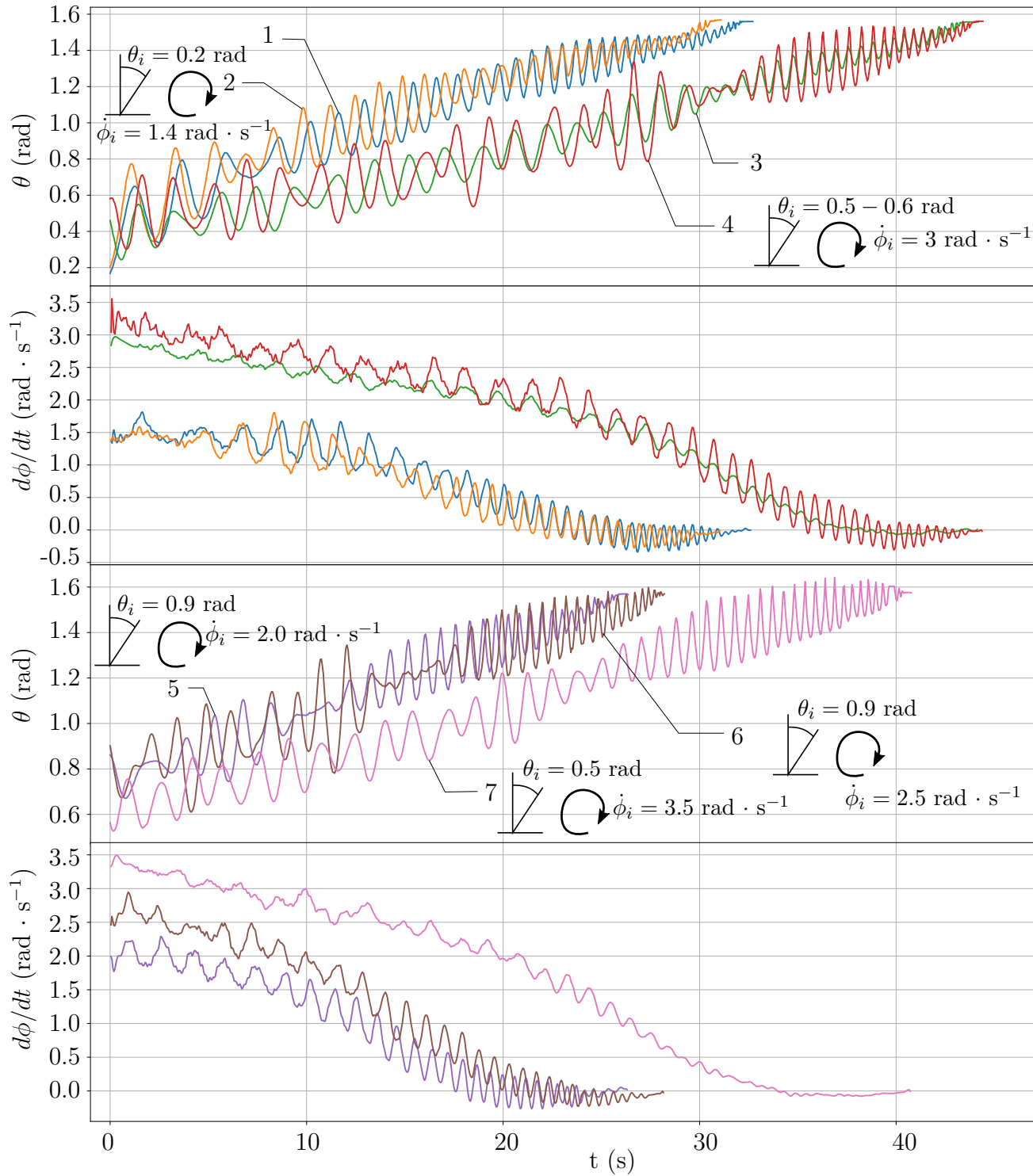


Figure 5.13 Superpositions des tracés de l'évolution de l'inclinaison de la roue Cyr  $\theta$  et de sa vitesse angulaire autour de son axe  $d\phi/dt$  pour les 7 lancers. Pour chaque lancer, on indique l'inclinaison initiale  $\theta_i$  et la vitesse angulaire initiale  $\dot{\phi}_i$ . Les lancers 1 et 2 correspondent à une faible inclinaison et une faible vitesse initiale, les lancers 3 et 4, correspondent à une inclinaison moyenne et une vitesse initiale élevée, le lancer 5 correspond à une inclinaison importante et une faible vitesse initiale, le lancer 6 correspond à une inclinaison importante et une vitesse initiale élevée, et le lancer 7 correspond à une inclinaison moyenne et une vitesse initiale élevée.

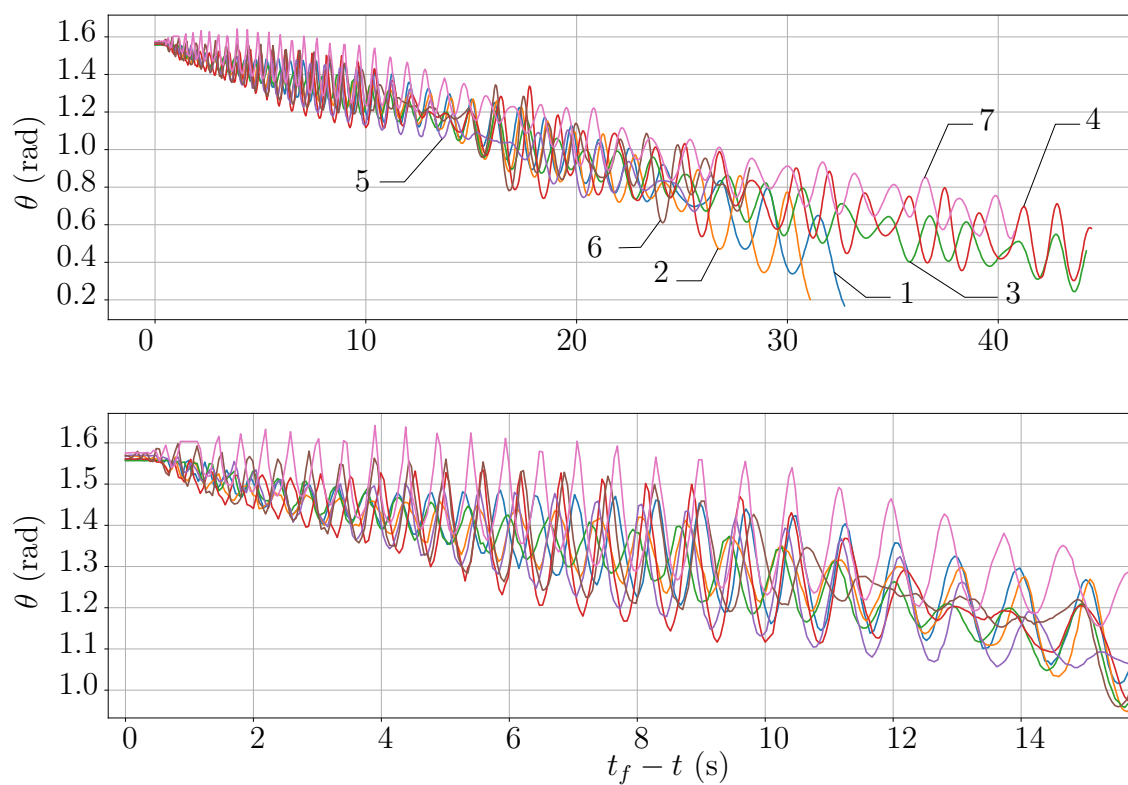


Figure 5.14 Superposition des tracés de l'évolution de l'inclinaison de la roue Cyr  $\theta$  pour les 7 lancers en inversant l'échelle temporelle. La constante  $t_f$  représente l'instant auquel la roue s'immobilise. La fin du mouvement est similaire quelles que soient les conditions initiales.



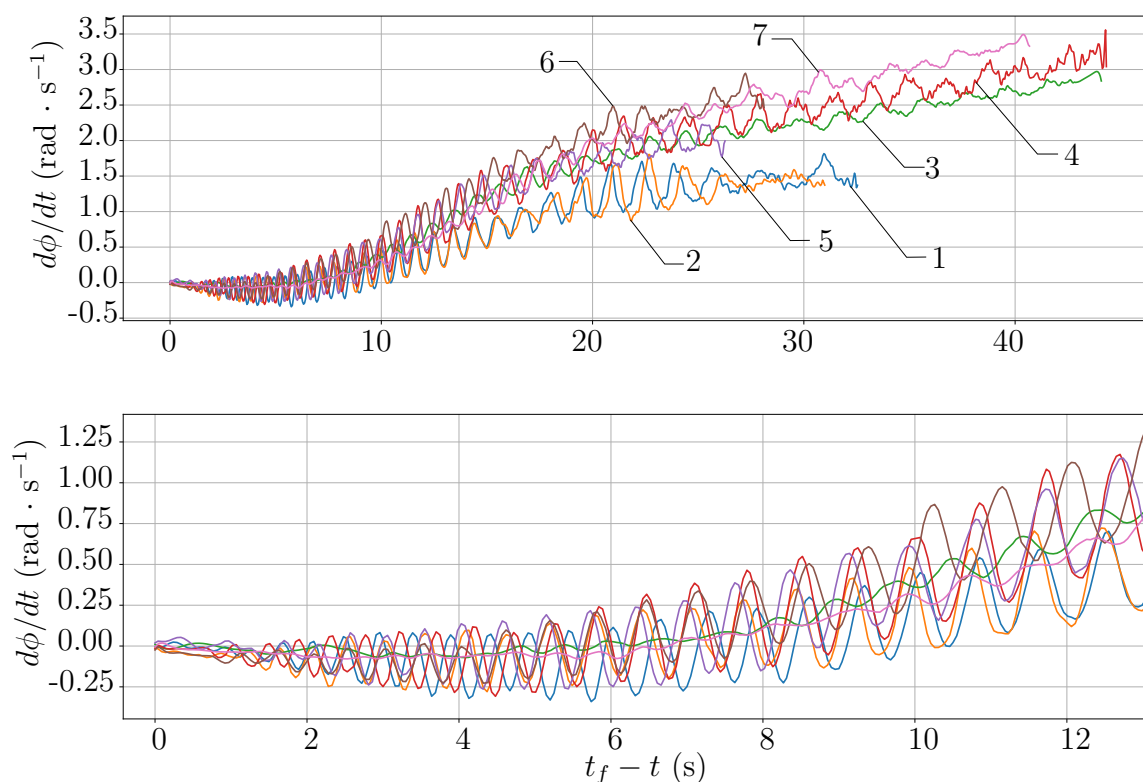


Figure 5.15 Superposition des tracés de l'évolution de la vitesse angulaire de la roue Cyr  $d\phi/dt$  pour les 7 lancers en inversant l'échelle temporelle. La constante  $t_f$  représente l'instant auquel la roue s'immobilise. La fin du mouvement est similaire quelles que soient les conditions initiales.

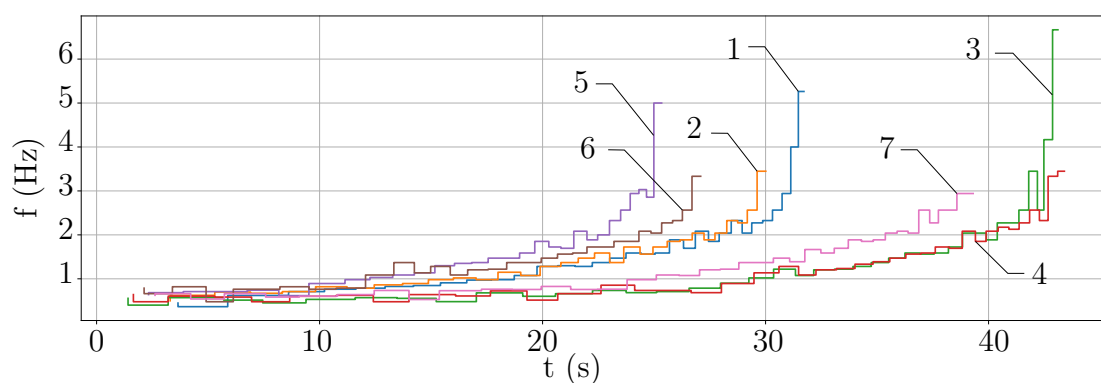


Figure 5.16 Superposition des tracés de l'évolution de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison  $\theta$  pour les 7 lancers de roue Cyr.

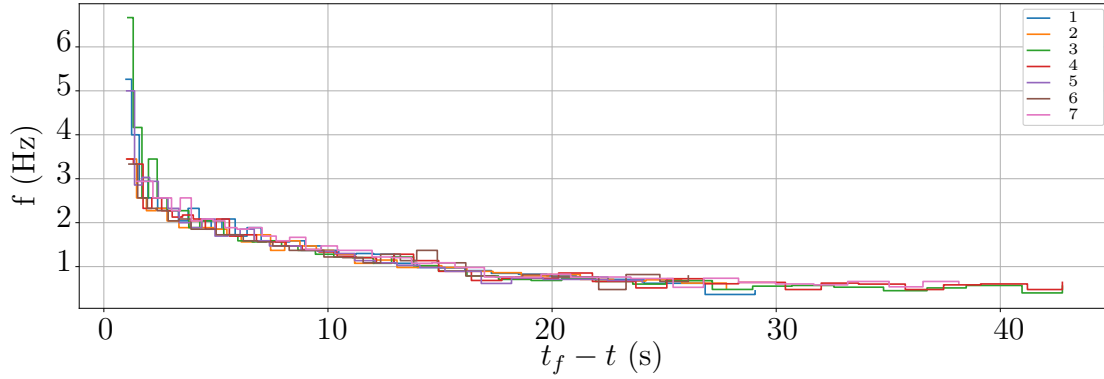


Figure 5.17 Superposition des tracés de l'évolution de la fréquence d'oscillation de l'inclinaison  $\theta$  pour les 7 lancers de roue Cyr en inversant l'échelle temporelle. La constante  $t_f$  représente l'instant auquel la roue s'immobilise.

### 5.3.4 Discussion

La figure 5.18 présente les tracés des données issues du tableau 5.1 : on y représente l'évolution des durées  $t_{phase}$  des phases de roulement, de transition et de *wobbling* ainsi que l'évolution des taux de décroissance  $\tau_d$  de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$  pour les phases de roulement et de transition en fonction de l'inclinaison initiale  $\theta_i$  et de la vitesse angulaire initiale  $\dot{\phi}_i$ .

La durée de la phase de *wobbling* reste à peu près constante quelles que soient l'inclinaison et la vitesse initiale : elle est indépendante de ces dernières. Ce résultat concorde avec le fait que les courbes superposent lorsqu'on réunit sur le même graphique les tracés des 7 lancers en inversant l'échelle temporelle. Pour une roue de masse et de dimensions données, la fin du mouvement, caractérisée par la phase de *wobbling*, est donc indépendante des conditions initiales, de même que l'évolution de la fréquence des oscillations de l'inclinaison  $\theta$ .

Pour ce qui concerne les durées des autres phases du mouvement, la durée de la phase de transition décroît à mesure que  $\theta_i$  augmente. En revanche, il n'est possible de dégager aucune tendance simple entre la durée de la phase de transition et  $\dot{\phi}_i$ , ni entre la durée de la phase de roulement et  $\theta_i$  ou  $\dot{\phi}_i$ . Les taux de décroissance  $\tau_d$  des phases de roulement et de transition augmentent avec  $\theta_i$ . En revanche, il n'est pas possible de déterminer une tendance simple de leur évolution en fonction de  $\dot{\phi}_i$ .

En plus de ces résultats, qui décrivent le comportement de la roue et l'influence des conditions initiales sur les différents paramètres du mouvement, on a remarqué que pour une inclinaison initiale donnée, augmenter la vitesse initiale revient à améliorer la stabilité du mouvement, ce qui concorde avec le modèle théorique dont la carte de stabilité 5.3 est issue.

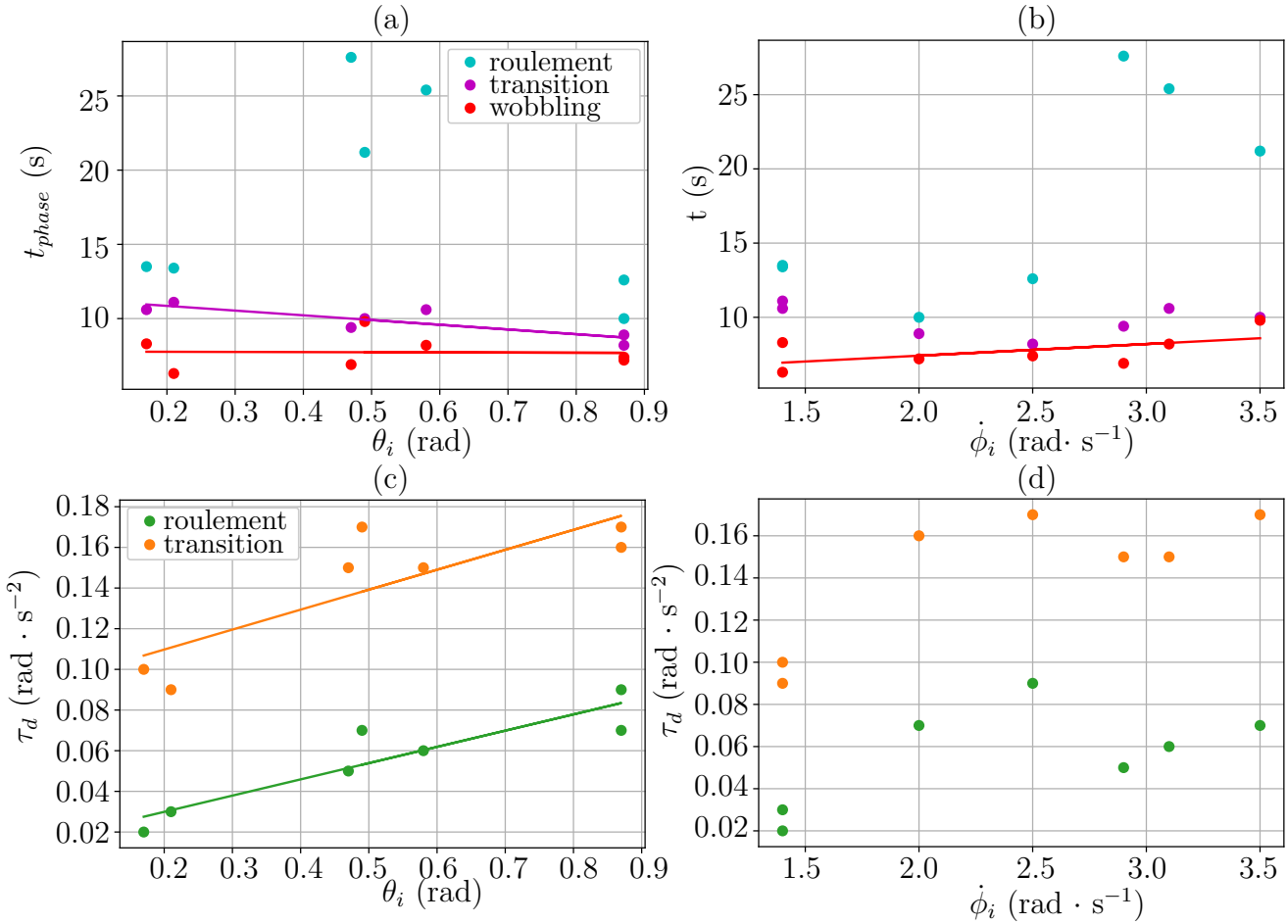


Figure 5.18 Evolution des temps des phases de roulement  $t_{phase}$ , de transition et de *wobbling* ainsi que des taux de décroissance  $\tau_d$  de la vitesse angulaire  $d\phi/dt$  pour les phases de roulement et de transition en fonction de l'inclinaison initiale  $\theta_i$  et de la vitesse angulaire initiale  $\dot{\phi}_i$ .

## CHAPITRE 6 Impression 3D

Une fois nos modèles théoriques validés, on peut utiliser ces derniers comme outils d'aide à la conception, dont les prédictions nous permettront de déterminer le design optimal de la roue Cyr. La fabrication d'un prototype de roue permettra de procéder à une phase de tests comme validation finale de notre démarche, ainsi que de mener une recherche artistique autour de cet agrès, pour explorer son potentiel acrobatique et produire des preuves tangibles de son intérêt. Le chapitre 6 présente le procédé de fabrication de la roue Cyr en donnant des détails sur l'impression 3D et le design de la roue. Il présente également des tests d'impression réalisés avec de l'acide polylactique (PLA). Deux principaux défis sont liés à cette fabrication : la taille imposante des pièces à imprimer, ainsi que la nécessité d'un procédé adapté à la section cylindrique creuse de la roue.

En raison de la Covid-19 les travaux sur l'impression 3D du prototype ont été interrompus : seules des impressions partielles de la roue ont été réalisés. Ces essais nous ont tout de même permis de sélectionner le procédé d'impression le plus adapté à la géométrie de la roue Cyr.

### 6.1 Design du prototype à réaliser

D'après les modèles développés aux chapitres précédents, le prototype de roue Cyr optimisée que l'on souhaite fabriquer sera imprimé en nylon renforcé par des fibres de carbone courtes. la figure 6.1 présente les dimensions prévues pour le prototype : le rayon médian vaut  $R = 900$  mm, et les rayons intérieur et extérieur de la section valent respectivement  $r_1 = 15.2$  mm et  $r_2 = 18.0$  mm.

Pour une roue Cyr classique en métal, les différentes parties sont reliées entre elles par des manchons et des vis. La figure 6.2 présente un exemple de roue Cyr démontée en cinq parties. La roue est composée de tubes métalliques cintrés dans lesquels on visse des manchons de même rayon de courbure que les tubes, qui permettent de les relier entre eux. Cette solution permet d'obtenir une roue Cyr démontable, ce qui est essentiel pour le transport. Lors de la conception de la roue, ces connexions doivent faire l'objet d'une attention particulière car il constituent des points de fragilité : c'est à cet endroit que la roue sera endommagée en premier par l'usure et les chocs. On peut également observer sur la photographie que la roue est recouverte d'un revêtement en PVC : une gaine souple épouse les contours du tube métallique et favorise son adhérence avec le sol ainsi qu'avec le corps de l'artiste.

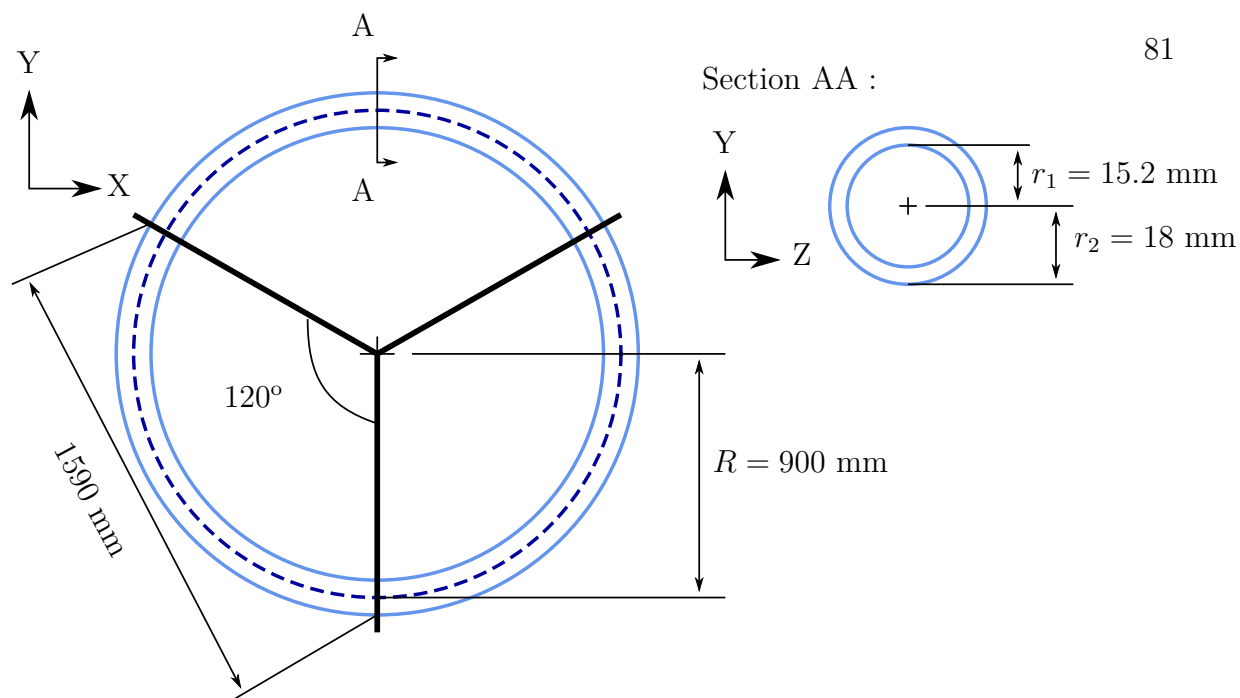


Figure 6.1 Schéma et dimensions du prototype de roue Cyr à réaliser. La roue sera divisée en trois parties identiques qui seront imprimées séparément, les unes après les autres. Le rayon médian de la roue est  $R = 900 \text{ mm}$ , et les rayons interne et externe de section sont respectivement  $r_1 = 15.2 \text{ mm}$  et  $r_2 = 18 \text{ mm}$ .



Figure 6.2 Pièces de connexion pour une roue Cyr classique. Les différentes parties, en noir, sont reliées entre elles par des manchons et des vis. La roue est également recouverte d'un revêtement en PVC de 2,5 mm d'épaisseur [24].

Pour les connexions de notre prototype de roue composite la solution retenue est une attache de type *snap pin*. L'assemblage est schématisé sur la figure 6.3 : un axe passant dans un trou commun aux deux tubes imbriqués l'un dans l'autre est maintenu par une attache faisant le tour du tube. Les roues Cyr qu'on trouve sur le marché sont généralement divisées en 5 parties. On trouve aussi des roues divisées en 3 ou en 6. Augmenter le nombre de parties revient à multiplier les points de fragilité dans la roue. Notre prototype de roue sera donc divisé en 3 parties. Le prototype sera également entouré d'un revêtement en PVC afin de favoriser l'adhérence.

## 6.2 Machine permettant la réalisation

Le prototype que nous souhaitons fabriquer est un tore de 1,80 m de diamètre : même divisé en trois parties, la longueur d'une pièce à imprimer dépasse 1,50 m : le volume est trop important pour les imprimantes 3D classiques. L'impression du prototype se fera donc à l'aide d'un robot Fanuc, un bras robotique 6 axes adapté aux impressions de pièces de tailles importantes. Le robot est relié à un contrôleur qui lui transmet les fichiers d'impression et permet de surveiller son état depuis l'extérieur : l'impression se déroule dans une enceinte fermée et ventilée. Il est, de plus, équipé de capteurs qui entraînent l'arrêt de l'impression en cas de non-respect des conditions de sécurité ainsi que d'une caméra qui permet de surveiller le déroulement de l'impression. La figure 6.4 présente des représentations 3D du bras robotique et de la tête d'impression. Le bras robotique a une portée de 1,80 m : il sera adapté pour imprimer notre prototype de roue Cyr divisé en trois parties. La tête d'impression peut accueillir deux buses pour des impressions avec des matériaux différents en séquentiel, ou deux impressions de la même pièce en simultané. Les tuyaux bleus servent à aspirer les vapeurs dégagées par le chauffage et le filament à la sortie de la buse est refroidi par un ventilateur situé à côté de la buse.

On commence par imprimer des fractions de roue d'une trentaine de centimètres, de rayon de courbure identique au rayon prévu pour le prototype final, afin d'ajuster le procédé d'impression avant de passer à l'impression des pièces entières. La figure 6.5 présente le robot Fanuc en cours d'impression lors d'un essai avec du PLA. Lors de l'impression, le filament de matière qui s'écoule de la buse est déposé sur un lit chauffant. Pour les premiers essais, on utilise le lit chauffant déjà installé sur le robot : il s'agit d'un lit carré de 450 mm de côté. Lors de l'impression du prototype dans son entièreté, un lit chauffant de dimensions adaptées sera utilisé.

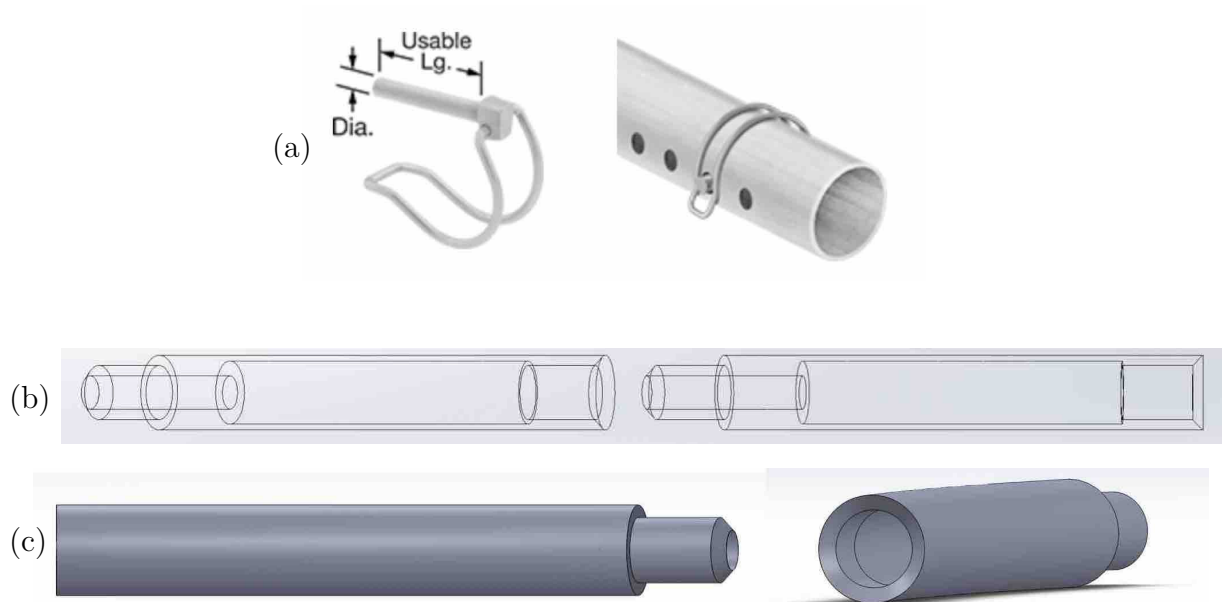


Figure 6.3 Pièces de connexion pour la roue Cyr composite. Les trois parties de la roue Cyr seront reliées entre elles par des attaches *snap pin* (a) : un axe passant dans un trou commun aux deux tubes imbriqués l'un dans l'autre est maintenu par une attache faisant le tour du tube [25]. Les extrémités de chacun des trois tubes composant la roue Cyr comporteront des variations de diamètre de section afin de s'emboîter les unes dans les autres (b) et (c).

### 6.3 Approche de réalisation

Le procédé d'impression est schématisé à la figure 6.6. Pour adapter l'impression à la forme courbée de la roue tout en évitant les discontinuités dans le déplacement du robot, on part d'une géométrie de cylindre droit dont on paramètre l'impression à l'aide du logiciel *Simplify3D*. L'objet 3D au format *.STL* est ainsi découpé en tranches horizontales (procédé de tranchage) par le logiciel à l'aide duquel on paramètre la trajectoire et la vitesse de l'outil d'impression, la température, la ventilation, l'espacement entre les filaments de matière, la présence de supports (un dépôt additionnel de matériau pour éviter l'affaissement aux endroits où le filament n'a pas de couche inférieure sur laquelle s'appuyer, comme les trous verticaux, par exemple). Le résultat est un fichier *.GCODE* qui est ensuite traité par un programme *Matlab* pour ajouter la courbure. Le tout est envoyé vers le logiciel *RobotDK* qui adapte le format et permet de paramétrer les mouvements du robot Fanuc.

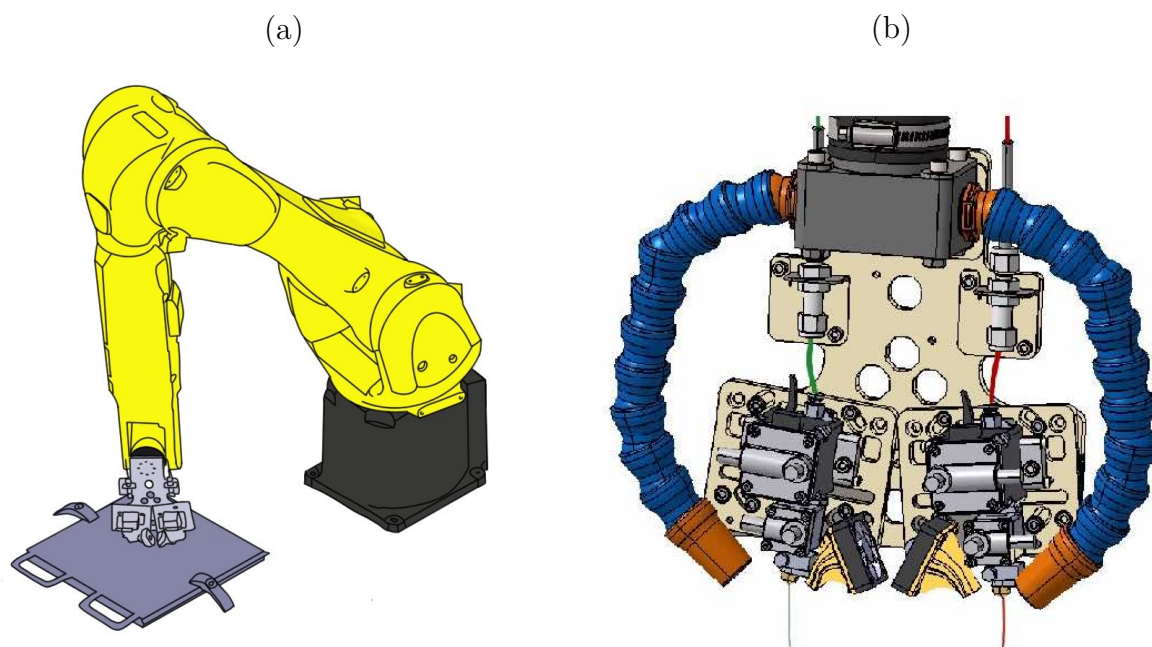


Figure 6.4 Représentations 3D du robot Fanuc utilisé pour l'impression du prototype de roue Cyr : bras robotique 6 axes (a) sur lequel est montée la tête d'impression (b). Cette dernière peut accueillir deux buses d'impression avec des matériaux différents et est équipée d'un système de ventilation pour chaque buse. Document interne du laboratoire Lm<sup>2</sup> de Polytechnique Montréal.



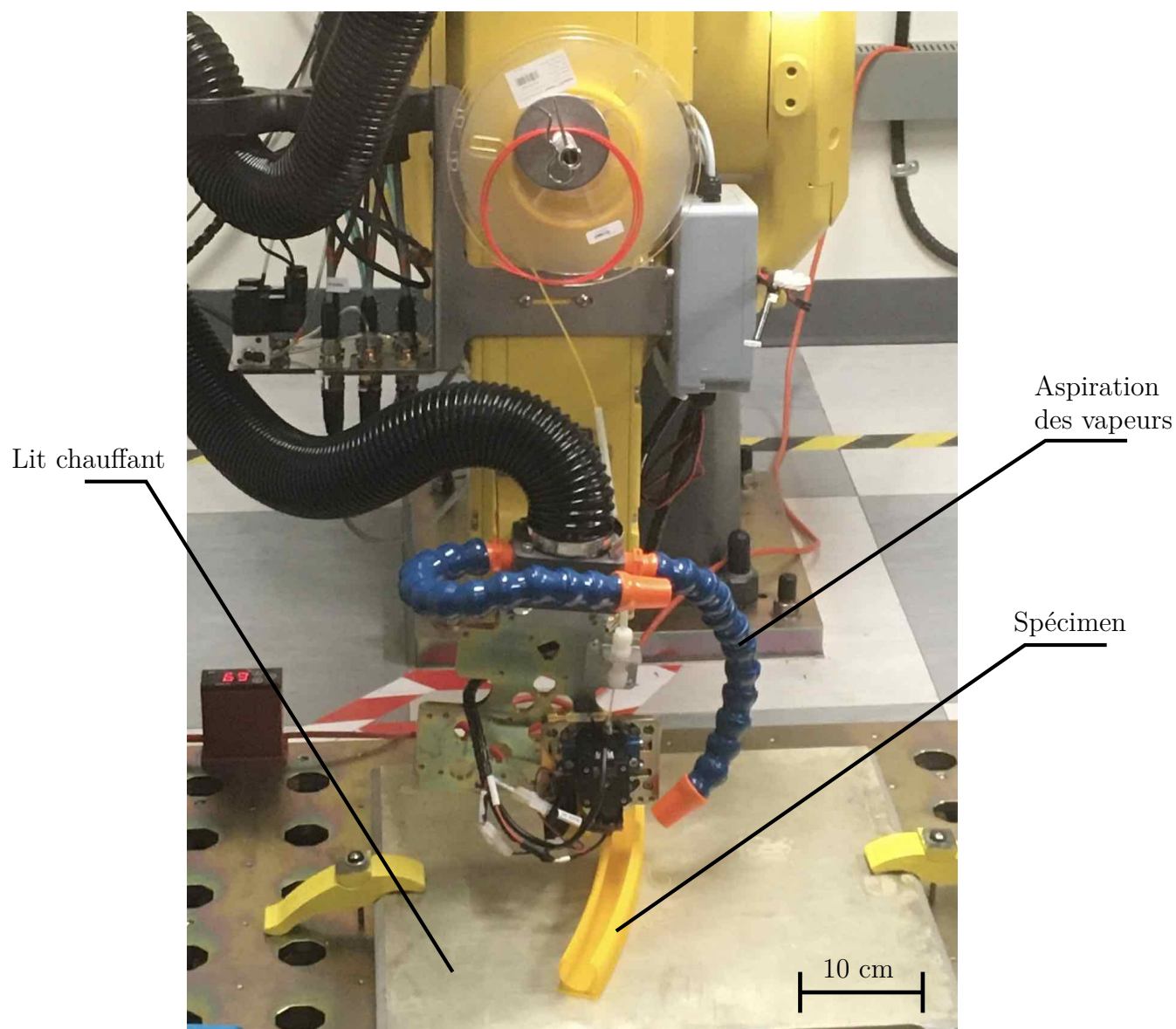


Figure 6.5 Robot Fanuc en cours d'impression pour un essai avec du PLA. On imprime une fraction de roue Cyr de rayon de courbure identique au rayon prévu pour le prototype final. Pour les essais, le filament est déposé sur un lit chauffant carré de 450 mm de côté. Les tuyaux bleus servent à aspirer les vapeurs dégagées par le chauffage du matériau.

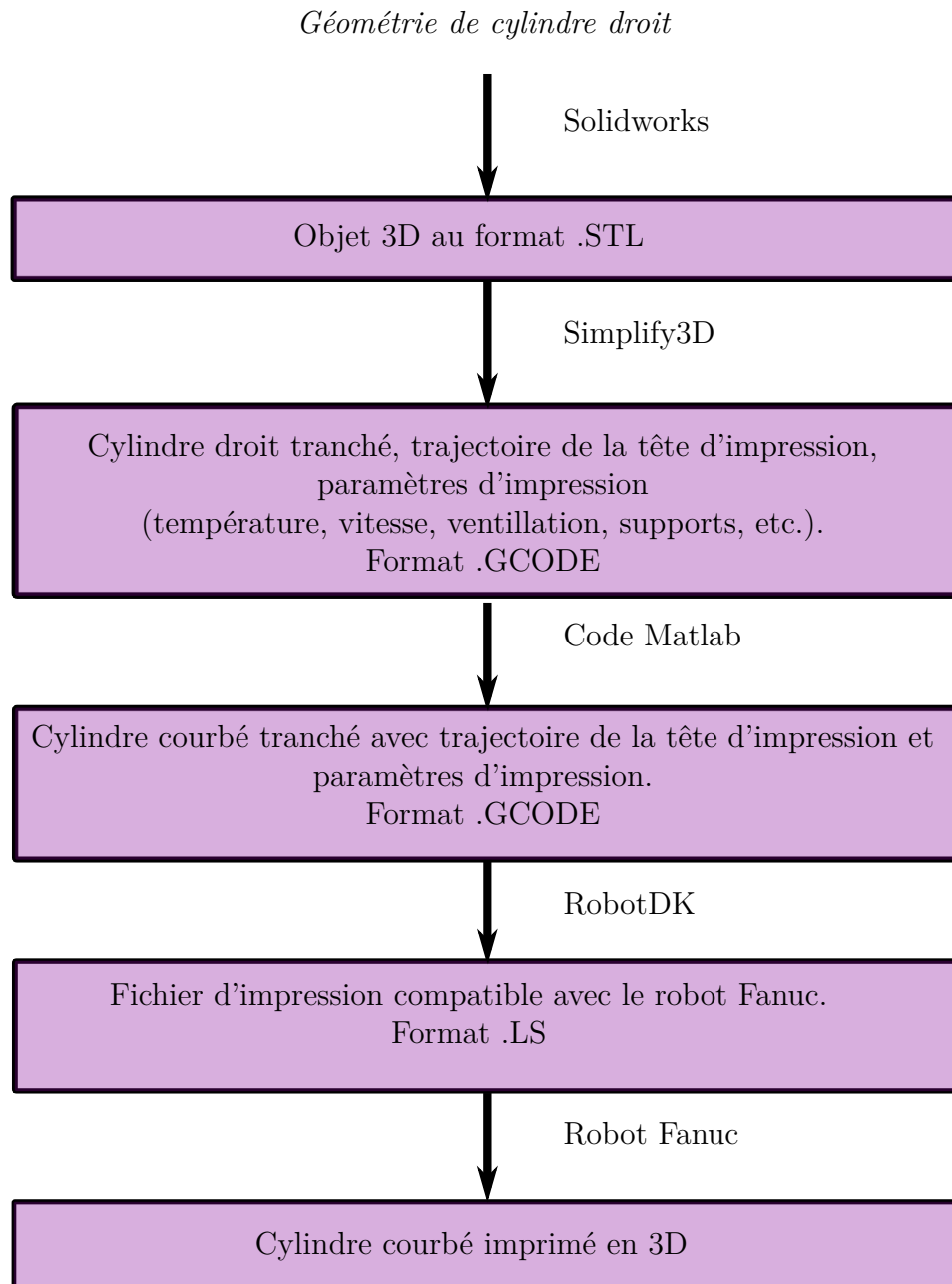


Figure 6.6 Étapes résumant l'impression d'une partie de roue Cyr. Un cylindre droit au format *.STL* est traité à l'aide du logiciel *Simplify3D* afin de définir les paramètres d'impression. Le fichier *.GCODE* obtenu est ensuite traité par un code *Matlab* qui permet de passer du cylindre droit à un cylindre courbé. Le résultat est ensuite transmis au logiciel *RobotDK* qui paramètre la trajectoire du robot et renvoie un fichier au format *.LS* transmis ensuite au robot Fanuc pour l'impression.

Pour imprimer notre prototype de roue Cyr, constitué de trois cylindres creux et courbés qui seront ensuite assemblés entre eux, deux solutions sont possibles.

La première possibilité est l'impression de supports solubles, en polyacétate de vinyle (PVA), à l'intérieur de la section de la roue afin d'éviter l'affaissement de la partie supérieure du cylindre lors de l'impression. Techniquement, ce choix rend nécessaire l'utilisation de deux buses en séquentiel, comme on imprime avec deux matériaux différents.

La deuxième méthode consiste à utiliser deux directions d'impression : on imprime d'abord en effectuant des aller-retours dans le sens de la longueur puis, à partir d'un certain niveau, on imprime en suivant une direction perpendiculaire à la direction initiale, pour éviter l'affaissement du filament. La figure 6.7 schématise ce procédé d'impression paramétré sur *Simplify3D*. L'avantage de cette technique est sa rapidité comparée à la première méthode, puisqu'on s'affranchit des supports à l'intérieur de la roue. De plus, elle ne nécessite qu'une seule buse d'impression.

## 6.4 Angle de tranchage

Une autre piste d'optimisation du procédé d'impression est de s'intéresser au tranchage. En effet, dans les essais d'impression exposés plus haut, on tranche la pièce uniformément, à l'horizontal, et c'est ce qui pose problème pour le dépôt de filament qui a tendance à s'affaisser au niveau de la partie supérieure et oblige le recours à des solutions contraignantes, comme les supports en PVA à l'intérieur de la roue ou le changement de la direction d'impression.

Lors du traitement du fichier numérique destiné à l'impression, isoler les régions ne se prêtant pas à un dépôt de filament horizontal et modifier l'orientation du tranchage permet de régler le problème [17, 26]. La figure 6.8 schématise l'optimisation de l'angle de tranchage pour la section de la roue Cyr. On partitionne la section de la roue, puis on applique un angle de tranchage spécialement adapté à chaque région. Pour cela, on modifie l'orientation de chaque région, on effectue le tranchage, puis on applique la transformation inverse de coordonnées afin de reconstituer la pièce. L'orientation des filaments des différentes parties de la section de la roue Cyr n'est donc plus uniforme. Comme la nouvelle orientation favorise l'empilement des filaments les uns sur les autres, le comportement de la pièce qui en résulte n'en est pas altéré, au contraire.

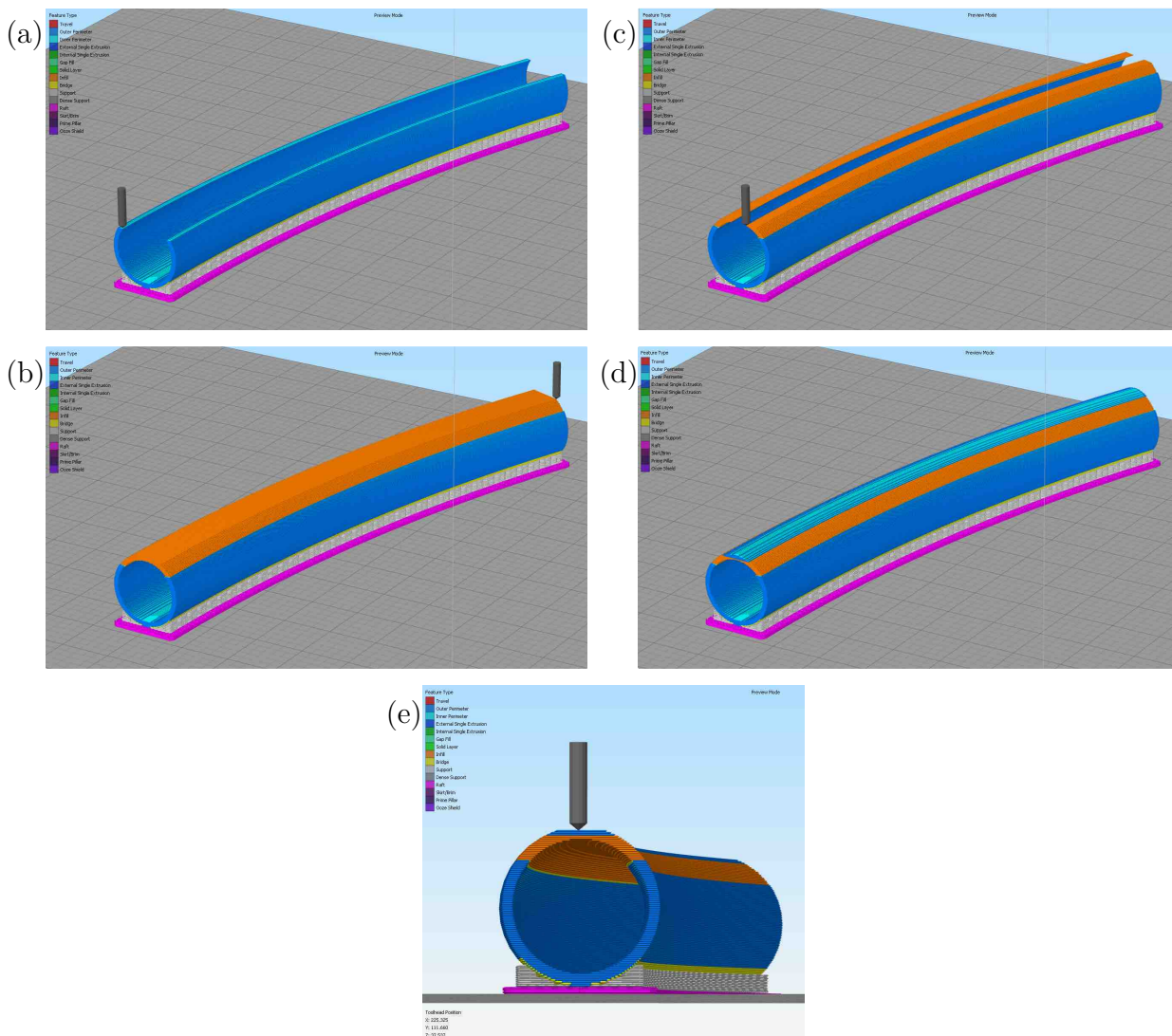


Figure 6.7 Paramétrage de l'impression sur Simplify 3D : on place des supports seulement sous la roue (en gros sur la figure) et on imprime d'abord en suivant le sens de la courbure (en bleu sur la figure) puis perpendiculairement à la direction initiale (en orange sur la figure). La partie orange correspond à la partie critique de l'impression. Une fois cette partie terminée, on reprend l'impression dans le sens de la courbure.

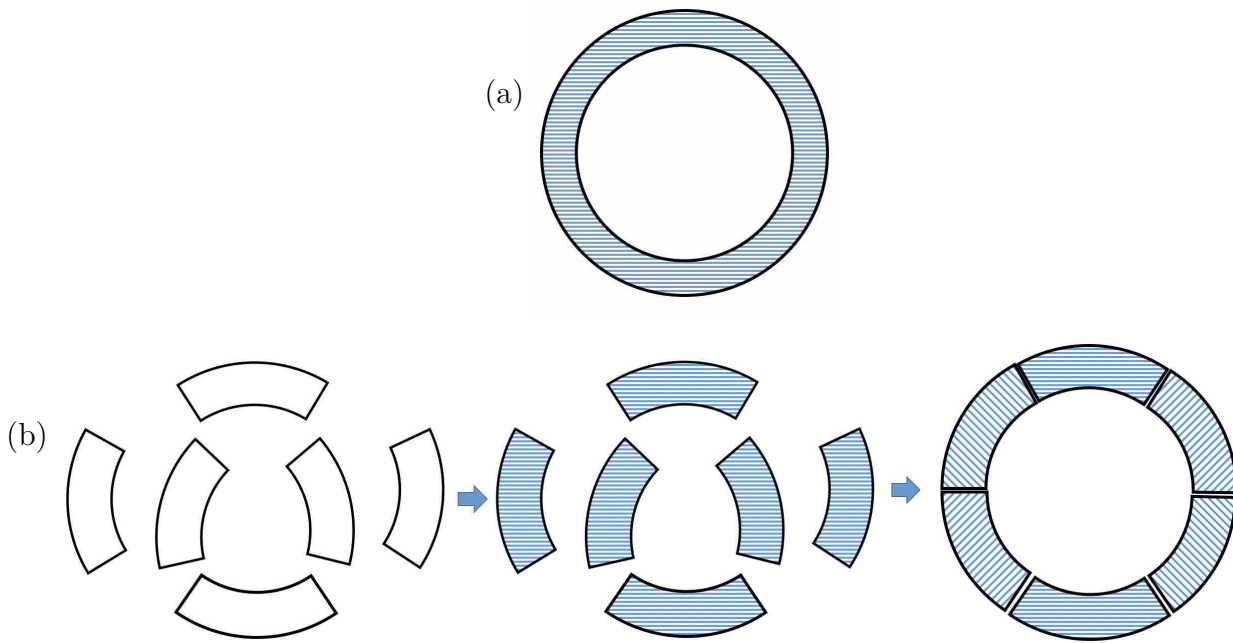


Figure 6.8 Optimisation du tranchage de la section de la roue Cyr. tranchage horizontal par défaut (a) comparé à un tranchage optimisé (b). Pour le tranchage par défaut, la section est découpée à l'horizontale, de manière uniforme, ce qui n'est pas optimal. Le procédé de tranchage optimisé, adapté de [17], appliqué à l'impression du prototype de roue Cyr permet d'obtenir de meilleurs résultats sans utiliser de supports, ni modifier la direction d'impression. Ce découpage est adapté à la géométrie de la section de la roue et permet de gagner en temps et en qualité. Pour l'obtenir, on effectue la partition des différentes régions de la section de la roue, on modifie leur orientation par transformation des coordonnées de manière à ce que le tranchage soit optimal pour chaque partie, on réalise le tranchage puis la transformation inverse de coordonnées pour reconstituer la pièce.

## 6.5 Résultats préliminaires

L'optimisation de l'angle de tranchage de la section de la roue Cyr nécessite le développement préalable d'un programme intégrant la partition des régions et les transformations de coordonnées au tranchage de la pièce. On commence donc par faire des essais avec les deux autres solutions qu'il est possible de mettre en oeuvre sans délai : l'impression avec des supports solubles et l'impression en modifiant la direction de dépôt de filament pour la partie haute de la section. Ces premiers essais sont réalisés avec du PLA. Le tableau 6.1 résume les paramètres d'impression utilisés pour nos impressions avec le robot Fanuc. Pour les deux essais, on a paramétré l'impression d'un *raft* : un support qui améliore l'adhérence du filament lors du dépôt des premières couches de la pièce sur le lit d'impression et qui facilite son décollage une fois l'impression terminée. Il s'agit de la première étape de l'impression.

Tableau 6.1 Paramètres d'impression des essais avec du PLA sur le robot Fanuc.

Diamètre de la buse	0.6 mm
Distance de rétractation	3 mm
Vitesse de rétractation	40 mm/s
Couches supérieures du <i>raft</i>	2
Couches de base du <i>raft</i>	2
Décalage entre le <i>raft</i> et la pièce	3 mm
Remplissage du <i>raft</i>	50%
Température de la buse	210
Refroidissement	100%
Vitesse de la buse	70 mm/s

La figure 6.9 présente les photographies de pièces issues de deux essais d'impression au cours desquels on imprime des morceaux de roue Cyr afin d'ajuster le procédé d'impression en fonction des résultats. Ces essais sont réalisés avec de l'acide polylactique (PLA), moins coûteux. Chacune des deux solutions d'impression envisageables est mise en oeuvre avec le Fanuc. Une première partie de roue est imprimée à l'échelle 1/3 avec des supports à l'intérieur de la section (a). Dans un premier temps, on ne change pas de matériau pour les supports : ils sont imprimés en PLA, comme le reste de la roue. La pièce obtenue présente une surface lisse, une épaisseur régulière et un aspect uniforme. Une autre partie de roue est imprimée à l'échelle 1/1, sans supports, en changeant la direction de dépôt du filament pour l'impression de la partie supérieure de la section (b). On remarque sur le résultat de cette impression des discontinuités dans l'épaisseur au niveau de la partie haute, pour laquelle le dépôt de filament est justement rendu délicat par l'absence de supports. La surface est moins lisse, certains filaments se désolidarisent de la pièce.

Une épaisseur irrégulière de la section créerait des zones de fragilité dans la roue, dont le design optimisé nous place déjà à la limite de ses possibilités en termes de résistance. Entre les deux solutions testées, on retient donc l'impression avec supports solubles, qui permet d'obtenir une pièce uniforme.

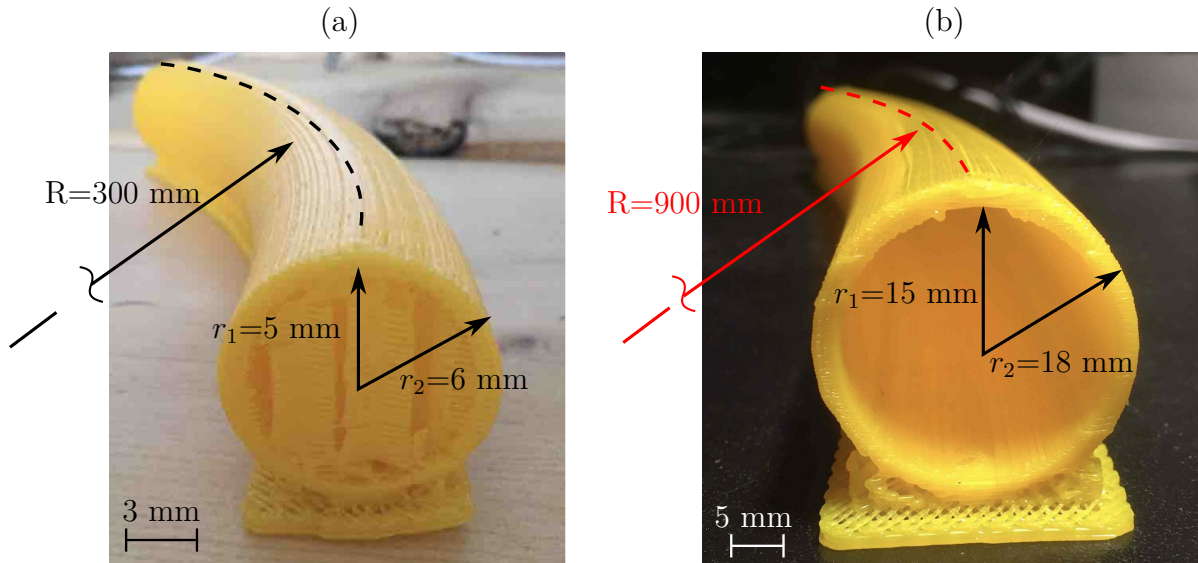


Figure 6.9 Impression de parties de roue Cyr en PLA sur le robot Fanuc selon deux méthodes différentes. Une première pièce (a) est imprimée à l'échelle 1/3 avec supports à l'intérieur de la roue : sa surface est lisse et son épaisseur est régulière. Une seconde pièce (b) est imprimée à l'échelle 1/1 sans supports à l'intérieur, en imprimant selon une direction perpendiculaire à la longueur de la pièce à partir d'une certaine hauteur : l'épaisseur est moins régulière que pour la méthode précédente.

## 6.6 Conclusion

A l'issue de ce chapitre, nous avons défini les derniers détails du design de la roue en nylon-fibre de carbone, qui sera démontable en trois parties et entourée d'un revêtement en PVC. Suite aux premiers essais d'impression avec du PLA sur le robot Fanuc, on constate que l'impression avec des supports à l'intérieur de la section permet d'obtenir une pièce de meilleure qualité, avec une épaisseur constante, ce qui est essentiel pour garantir la résistance de l'agrès lors des impacts et des déformations auxquels il sera soumis lors de l'utilisation. Il reste cependant une marge d'amélioration : dans la perspective de travaux futurs, le développement d'un programme optimisant l'angle de tranchage de la pièce permettrait de gagner en temps et en qualité d'impression.

En raison des restrictions liées à la Covid-19, les travaux en laboratoire relatifs à l'impression 3D et la fabrication d'un prototype de roue Cyr optimisée ont été interrompus et l'impression du prototype final n'a pas été menée à terme.

## CHAPITRE 7 DISCUSSION

### 7.1 Synthèse des travaux

En modélisant la roue Cyr, nous avons développé une démarche permettant d’optimiser sa conception. D’une part, le modèle à deux degrés de liberté du saut d’une roue Cyr, validé par des manipulations expérimentales, nous a permis d’identifier les paramètres déterminant la hauteur de saut de la roue Cyr et de quantifier leur influence. L’étude des contraintes dans la roue lors de sa déformation et de son impact avec le sol complète ce modèle en fixant les limites d’une zone de design permettant de concevoir la roue de manière à optimiser la conversion de l’énergie fournie par l’utilisateur sous forme de déformation en saut, tout en la préservant de l’endommagement. Pour un matériau donné, nous sommes ainsi en mesure de déterminer les dimensions de section pour lesquelles la hauteur du saut sera maximale.

En établissant un modèle de la roue Cyr qui décrit des cercles en roulant sur sa tranche nous avons caractérisé l’influence de la géométrie sur la stabilité dynamique du mouvement et identifié une géométrie idéale en termes de stabilité. Cette modélisation, couplée à un travail expérimental, met en évidence des aspects caractéristiques du mouvement tels que l’oscillation de la roue, la pluralité des phases du mouvement et l’inversion de son sens de rotation en phase terminale. Les résultats des manipulations expérimentales avec une roue Cyr classique en métal viennent également compléter la compréhension intuitive que l’artiste se fait de son agrès.

A partir des résultats de ces deux modélisations, on est capable de définir un dimensionnement idéal de la roue Cyr, selon le type de figure que l’on souhaite favoriser le plus. Parmi les matériaux compatibles avec l’impression 3D, nous avons constaté que celui qui répond le mieux aux attentes, à la fois en termes de performance et de résistance, est le nylon renforcé aux fibres de carbone courtes. Pour finir, en vue de fabriquer un prototype de roue Cyr optimisée, nous avons déterminé quel était le procédé d’impression 3D le plus adapté à notre géométrie à l’aide d’essais d’impression avec de l’acide polylactique.

### 7.2 Nouvelles possibilités acrobatiques

Une roue Cyr optimisée pour le saut ouvre la voie à une multitude de figures inédites qui viendront donner un nouvel élan à l’évolution de la discipline. Une fois le prototype imprimé, ce dernier sera soumis à des essais mécaniques avant de passer à l’exploration artistique et acrobatique, afin de garantir la sécurité de l’utilisateur. Cette roue Cyr permettra de réutiliser



l'énergie élastique fournie à la roue lorsqu'on lui impose une déformation. Ceci ouvre une nouvelle plage d'exploration pour enrichir le potentiel acrobatique de la roue Cyr : on pourra développer des figures inédites, possibles uniquement avec ce prototype de roue, plus léger que son analogue en métal, mais aussi repartir de figures déjà existantes et les adapter aux possibilités de notre roue Cyr en nylon renforcé aux fibres de carbone. La figure 7.1 présente quelques exemples de figures de roue Cyr qui pourraient servir de bases auxquelles intégrer des sauts. Par exemple, on peut reprendre la figure du saut prolongé (a) où l'utilisateur saute et prend appui bras tendus, ou assis au sommet de la roue : avec la roue composite on pourrait utiliser l'énergie de déformation de la roue pour s'élever plus haut et prendre appui en équilibre sur les mains au sommet. Il sera également possible de se baser sur des figures telles que le saut de mains (b) ou le corner (c) et d'y intégrer des sauts : faire décoller la roue du sol permettra de rendre ces figures plus dynamiques. On peut également imaginer des sauts répétés mêlés au pas de base, la valse, ou même sur place : un élément intéressant pour enrichir son jeu de scène.

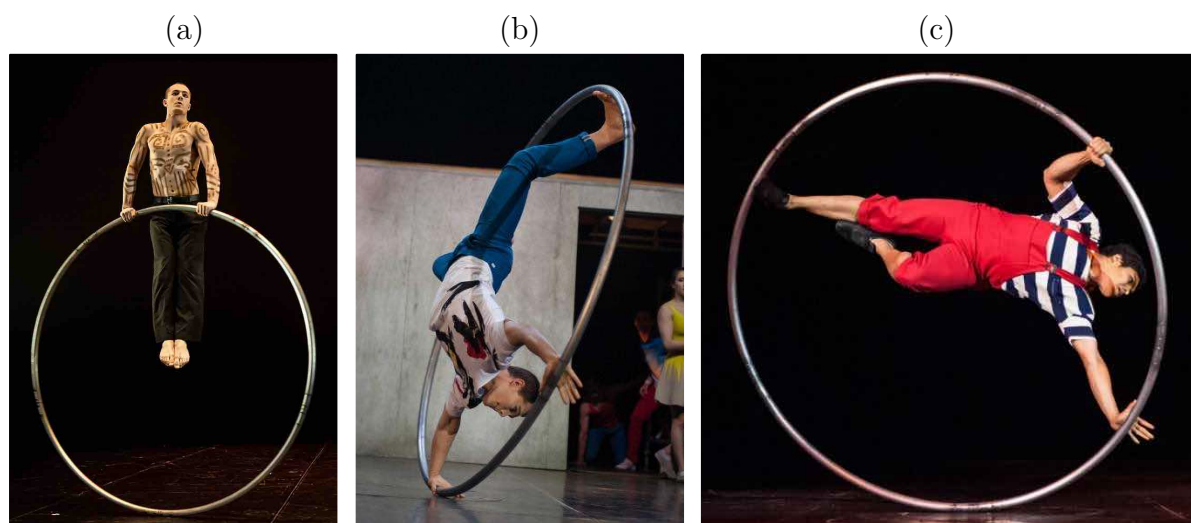


Figure 7.1 Exemples de figures de roue Cyr auxquelles adapter les possibilités d'une roue composite spécialement conçue pour optimiser le saut : (a) saut prolongé, (b) saut de mains et (c) corner [27, 28].

Si on souhaite privilégier les figures comme la roue et la pièce, illustrées par les photographies de la figure 7.2, où les mains et les pieds de l'utilisateur se retrouvent tour à tour en appui face au sol de manière périodique, on cherchera à optimiser la stabilité de la roue Cyr pour ce type de mouvement. Pour cela, nous avons vu qu'il fallait maximiser le rayon médian de la roue (tout en veillant à que la roue reste adaptée à la taille de l'utilisateur) et minimiser le rayon extérieur de sa section. L'inertie de notre roue, plus faible que pour une roue en métal, permettra également de gagner en dynamisme pour ces types de figures, en y intégrant par

exemple des arrêts brusques et des changements de direction.

Le prototype de roue Cyr nylon renforcé aux fibres de carbone courtes aura un poids avoisinant les 2 kg. Cette différence avec les roues Cyr classiques qui pèsent habituellement entre 10 kg et 20 kg ouvre un large champ de possibilités dans le domaine de la manipulation : on pourra soulever la roue facilement, la mettre en équilibre sur des parties du corps, la faire rouler, la lancer ou l'utiliser à la manière d'un hula hoop, autre discipline de cirque dont on adaptera des figures à la manipulation de la roue Cyr.

Une fois imprimé, le prototype de roue permettra ainsi d'explorer de nouveaux pans du vocabulaire acrobatique de la roue Cyr.

### 7.3 Limitations

Certaines approximations à la base des modèles théoriques de roue Cyr développés dans nos travaux sont susceptibles d'entraîner des différences entre nos prévisions et le comportement réel du prototype de roue composite. Tout d'abord, nos modèles ne tiennent pas compte du fait que la roue sera composée de plusieurs parties démontables. Ceci est susceptible de créer du jeu et d'affecter la rigidité de la roue. De plus, l'usinage au niveau des connections fragilisera l'ensemble. Les modèles théoriques ne tiennent pas non plus compte du fait que la roue sera recouverte d'un revêtement en PVC destiné à faciliter l'adhérence avec le sol : ce revêtement affectera à la fois la rigidité de la roue et son comportement dynamique. Plus spécifiquement, nous n'avons tenu compte des phénomènes de dissipation dans aucun de nos modèles : nous avons négligé les efforts aérodynamiques en modélisant le saut, et la dissipation par frottement avec le sol en modélisant la rotation de la roue.

Tout au long de l'étude, on a développé des modèles de la roue en mouvement, sans tenir compte de la présence de l'artiste à l'intérieur de la roue. On a considéré que l'artiste s'adaptait parfaitement au mouvement de la roue, en sautant avec elle de manière parfaitement synchronisée, par exemple. Nous avons ainsi fait l'hypothèse qu'optimiser le mouvement de la roue seule revenait à optimiser le mouvement avec l'artiste à l'intérieur de la roue. La manière dont sa présence perturbera le comportement dynamique de la roue lors du saut et de sa rotation n'a donc pas été étudiée.

En raison des restrictions liées à la Covid-19, le prototype de roue Cyr en nylon renforcé aux fibres de carbone courtes n'a pas pu être fabriqué et testé. Cette phase de test, visant à explorer les nouvelles possibilités de l'agrès devait également nous éclairer sur la possibilité de réaliser une catégorie de figures classiques de roue Cyr, basées sur l'élan et donc l'inertie de la roue : il s'agit des suspensions, des vrilles et des drapeaux, présentés à l'introduction.

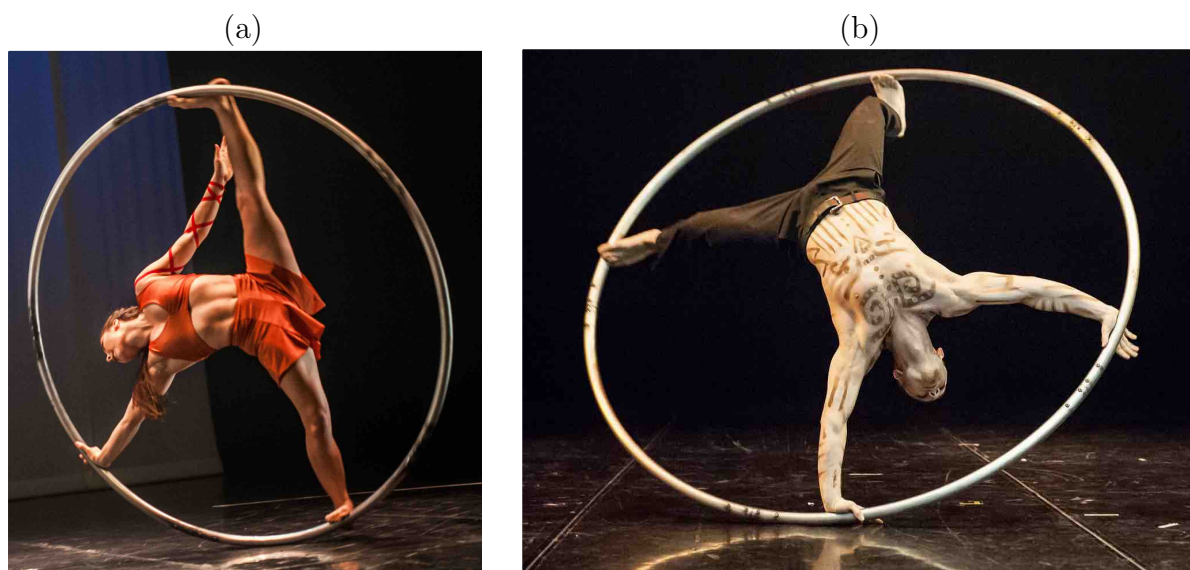


Figure 7.2 Exemples de figures de roue Cyr que l'on favorise en optimisant la stabilité dynamique du mouvement : roue (a) et pièce (b) [27, 29].

En effet, du fait de la différence de poids, la possibilité d'effectuer de telles figures n'est pas acquise. Dans le cas où le prototype de roue Cyr ne permettrait pas de réaliser certaines figures classiques, il faudra alors prévoir un système pour moduler le poids de ce dernier et l'alourdir si besoin, ou bien l'artiste devra prévoir une roue différente pour cette catégorie de figure reposant sur l'inertie. Cette facette des possibilités de notre roue Cyr reste donc une question ouverte.

En dehors du fait que la Covid-19 ait empêché l'aboutissement de l'impression 3D d'un premier prototype de roue Cyr en matériaux composites ainsi que la phase de recherche artistique prévue en collaboration avec l'École Nationale de Cirque de Montréal, la limitation majeure du projet tient dans le fait que les possibilités offertes par l'impression 3D ne sont pas utilisées à leur plein potentiel. En effet, dans tous les chapitres les modèles sont développés pour des roues à section cylindriques creuses, alors que l'utilisation d'une imprimante 3D offre une infinité de possibilités : section elliptique, section pleine ou partiellement remplie selon un motif géométrique particulier, etc. En particulier le remplissage de la roue avec une structure de type nid d'abeilles serait intéressant dans une démarche d'optimisation, puisqu'elle permettrait d'augmenter la solidité de la roue tout en réduisant sa masse.

## 7.4 Recommandations pratiques

Prenons l'exemple de la fabrication d'un prototype de roue Cyr optimisée pour le saut, en choisissant un rayon standard de  $R = 0.9$  m. En appliquant les outils développés dans notre étude, on choisira un rayon de section extérieur  $r_2 = 18$  mm et un rayon de section intérieur  $r_1 = 15.2$  mm. Le nylon renforcé aux fibres de carbone courtes choisi pour la fabrication du prototype a une masse volumique  $\rho_c = 1170 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  : une roue de géométrie  $R = 0.9$  m,  $r_1 = 15.2$  mm,  $r_2 = 18$  mm aura un poids de 1.9 kg.

## 7.5 Perspectives

A l'issue de ce projet, différents axes de travail restent ouverts. La finalisation de l'impression du prototype avec le robot Fanuc et la réalisation d'une phase de test et de recherche artistique autour du prototype en partenariat avec l'Ecole Nationale de Cirque s'inscrivent dans la suite logique du projet. Ils permettront, en plus de faire progresser la discipline, d'obtenir un support visuel à présenter aux fabricants d'équipement de cirque pour prouver l'intérêt d'investir dans la fabrication de roues Cyr en matériaux composites.

A ces questions s'ajoute l'approfondissement de l'optimisation du design de la roue, en prenant cette fois en compte toutes les possibilités de variation de section offertes par l'imprimante 3D avec la modélisation et le test des performances de roues avec une section elliptique, en arc de cercle, creuse ou partiellement remplie. En allant un cran plus loin, on peut aussi imaginer modifier la géométrie de la roue en la prolongeant sur un d'autres plans, ou en imbriquant plusieurs roues les unes dans les autres, de manière similaire aux agrès dérivés de la roue Cyr présentés à l'introduction. Dans ce cas, l'utilisation de l'imprimante 3D devient une vraie force et décuple les possibilités, en comparaison à l'usinage du métal, pour une roue aux formes plus complexes. La participation d'artistes de cirque pour un travail de la sorte permettrait de multiplier les idées et les points de vue, ainsi que de favoriser l'appropriation de l'agrès par les artistes lors des tests et de la recherche artistique.

Une autre piste de développement possible serait d'étudier les procédés de fabrication, une fois la phase de prototypage validée. En effet, si le nylon renforcé aux fibres de carbone courtes a été sélectionné c'est parce qu'il est le plus adapté parmi les matériaux compatibles avec le robot utilisé pour la fabrication du prototype. Cependant, des matériaux à fibres continues pourraient donner des résultats encore meilleurs, auquel cas l'étude des procédés de fabrication compatibles avec la géométrie choisie et les matériaux à fibres continues sera pertinente.

L'utilisateur à l'intérieur de la roue, lorsqu'elle roule sur sa tranche ou lorsqu'elle tourne sur

elle-même, lui applique des efforts en permanence en tirant ou poussant avec les mains et les pieds, pour entretenir le mouvement. Des modélisations approfondies du mouvement de la roue Cyr intégrant la présence de l'artiste dans la roue mériteraient d'être étudiées. On pourrait ainsi évaluer l'influence de l'artiste sur la rigidité, l'inertie et les mouvements de cette dernière.

Le développement d'une roue Cyr multifonctionnelle avec des capteurs intégrés est un autre axe de travail possible : on pourrait imaginer ajouter à la roue des patches piezoélectriques mesurant les déformations de la roue Cyr en mouvement, ou des capteurs de pression. Ces capteurs pourraient aussi bien servir à mesurer le comportement d'une roue Cyr utilisée comme outil d'expérimentation qu'à alimenter un circuit de LED sur une roue utilisée dans le cadre d'un spectacle.

Les essais expérimentaux conduits avec une roue Cyr en métal ont permis de caractériser son comportement physique. Du fait de l'inertie de la roue et de son poids, comparable à celui de l'artiste, ce dernier doit s'adapter au comportement de la roue. En effet, s'il peut manipuler la roue, et entretenir son mouvement, il est également emporté par cette dernière et il ne peut pas s'opposer brusquement à son élan : la pratique est basée sur l'équilibre de deux corps qui s'entraînent mutuellement. Ce travail pourrait ainsi servir de point de départ à une étude en kinésiologie portant sur la pratique de la roue Cyr classique en métal.

## 7.6 Conclusion

Dans cette étude, des modélisations théoriques de la roue Cyr, validées expérimentalement, nous ont permis de développer des outils de travail à la conception permettant de faire des prédictions sur le comportement de la roue, que nous avons ensuite appliqués au plan de fabrication d'un prototype de roue Cyr optimisée. La perspective d'une telle roue Cyr élargit le champ des possibles en termes de figures acrobatiques et appelle à une multitude d'idées nouvelles d'utilisation de l'agrès qui enrichiront la discipline.

## CHAPITRE 8 CONCLUSION

Au cours de ces travaux, on détermine comment enrichir le potentiel acrobatique de la roue Cyr en déployant une démarche scientifique, sans jamais perdre de vue l’objet de son application : le monde des arts du cirque. Les objectifs de l’étude étaient de comprendre deux mouvements caractéristiques de la roue Cyr par la modélisation et de déterminer comment les optimiser, puis d’appliquer ces résultats au plan de fabrication d’un prototype permettant le développement de figures acrobatiques inédites. Plus précisément, il était question de caractériser et de quantifier l’influence du matériau et de la géométrie de la roue Cyr sur son comportement lors du saut et de sa rotation. Dans la perspective d’imprimer un prototype de roue Cyr optimisée, il s’agissait également de modéliser les contraintes dans la roue lors de sa déformation et de son impact avec le sol, afin de la préserver de l’endommagement.

Pour répondre à ces objectifs, nous avons développé des modèles théoriques du saut de la roue Cyr et de sa rotation sur sa tranche. Lors de la modélisation du saut, basée sur l’approximation de la roue Cyr par deux masses ponctuelles reliées par un ressort, on prête une attention particulière aux contraintes en termes de comportement linéaire et aux efforts dans la roue lors des chocs et des déformations. Pour la modélisation de la roue en rotation, notre modèle s’appuie sur des articles scientifiques concernant le disque d’Euler en s’appropriant leur complexité pour les adapter à notre géométrie et à nos objectifs. Chacun de ces modèles a été confronté à des manipulations expérimentales qui ont permis sa validation : d’une part, nous avons mesuré les sauts d’anneaux dont il a fallu gérer les déformations pour garantir un comportement linéaire. D’autre part, nous avons complété notre étude de la roue en rotation par le positionnement d’un capteur sur une roue Cyr classique en métal afin d’étudier l’évolution des positions angulaires et des vitesses, les points les plus délicats étant l’extraction et le traitement des résultats enregistrés par le capteur. Le tout, couplé à l’étude des contraintes au moyen de simulations par éléments finis nous a permis d’optimiser la roue tout en assurant sa solidité en vue d’une fabrication par impression 3D.

Au cours de ces travaux, nous avons mis en évidence les paramètres clefs influant sur le mouvement de la roue Cyr : les propriétés du matériau utilisé, son rayon et les dimensions de sa section, ce qui nous a permis de déterminer comment optimiser sa conception en vue de favoriser le saut de la roue ou sa stabilité dynamique lors d’un mouvement de rotation. Nous avons également déterminé des limites en termes d’épaisseur de section, destinées à garantir la solidité du prototype. Le matériau que nous avons sélectionné pour l’impression 3D est le nylon renforcé par des fibres de carbone courtes et, à l’issue d’essais d’impression, nous avons

constaté que l'impression avec des supports solubles était le procédé de fabrication le plus adapté à la géométrie de la roue Cyr.

Une fois fabriqué et soumis à des essais mécaniques, ce prototype de roue Cyr optimisée donnera lieu à une phase de recherche artistique qui mettra en évidence les possibilités acrobatiques amenées par ce nouvel agrès. Il sera mis à disposition de la communauté circassienne comme nouveau support d'expression et outil de création ouvrant la voie à des innovations dans le monde du spectacle vivant.

## RÉFÉRENCES

- [1] Sven DEMEY et al. *Roue Cyr, Manuel pédagogique*. First. Stockholm, Suède : Fédération Européenne Des Ecoles de Cirque professionnelles (FEDEC), 2011.
- [2] Valérie INERTIE. *The Cyr wheel*. 2019. URL : [http://www.inertie.ca/historique\\_roue.php](http://www.inertie.ca/historique_roue.php).
- [3] Valérie INERTIE. *History of previous wheel devices*. 2019. URL : [http://www.inertie.ca/historique\\_appareils.php](http://www.inertie.ca/historique_appareils.php).
- [4] GYMEDIA. *The real History of Mono Wheel*. 2012. URL : <http://www.gymmedia.com/wheel-gymnastics/real-History-Mono-Wheel-Cyr-Wheel>.
- [5] Dave ROOS. *History of Acrobatic Wheels*. 2015. URL : <https://entertainment.howstuffworks.com/arts/circus-arts/cyr-wheel1.htm>.
- [6] Festival mondial du cirque de DEMAÏN. *Gallery of the 24th festival mondial du cirque de demain*. 2003. URL : <https://www.cirquededemain.paris/en/medias/galleries/gallery/25>.
- [7] Corbin DUNN. *Circus/Cyr Wheel*. 2016. URL : <https://www.corbinstreehouse.com/blog/category/circus-and-silk/>.
- [8] SHUTTERSTOCK. *Images : Cyr wheel*. 2020. URL : <https://www.shutterstock.com/fr/search/cyr+wheel>.
- [9] CNAC. *Les roues et les structures*. 2020. URL : <https://cirque-cnac.bnf.fr/fr/acrobatie/engins-mobiles/les-roues-et-structures>.
- [10] Milan BATISTA. “Steady motion of a rigid disk of finite thickness on a horizontal plane”. In : *IEEE International Journal of Non-Linear Mechanics* 41.4 (mai 2006), p. 605-621.
- [11] MA DAOLIN et al. “Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc”. In : *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 470.2169 (sept. 2014), p. 20140191. DOI : 10.1098/rspa.2014.0191. URL : <https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa.2014.0191> (visité le 17/01/2019).
- [12] P. KESSLER et O.M. O'REILY. “The ringing of Euler’s disk”. en. In : *Regular and Chaotic Dynamics* (2005), p. 247-260. ISSN : 1816448X, 18175155. DOI : 10.20537/nd0502007. URL : <http://nd.ics.org.ru/nd0502007/> (visité le 01/03/2019).



- [13] Daolin MA et Caishan LIU. “Dynamics of a Spinning Disk”. en. In : *Journal of Applied Mechanics* 83.6 (mar. 2016), p. 061003. ISSN : 0021-8936. DOI : 10.1115/1.4032993. URL : <http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?doi=10.1115/1.4032993> (visité le 17/01/2019).
- [14] Cédric M. CAMPOS et al. “Discrete Lagrange-d’Alembert-Poincaré equations for Euler’s disk”. In : *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas* 106.1 (mar. 2012), p. 225-234. ISSN : 1578-7303, 1579-1505. DOI : 10.1007/s13398-011-0053-3. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s13398-011-0053-3> (visité le 23/01/2019).
- [15] MOFFATT. “Euler’s disk and its finite-time singularity”. In : *Nature* (2000).
- [16] Eunjin YANG et Ho-Young KIM. “Jumping hoops”. In : *American Journal of Physics* 80.1 (déc. 2011), p. 19-23. ISSN : 0002-9505. DOI : 10.1119/1.3633700. URL : <https://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.3633700> (visité le 07/01/2019).
- [17] Fu,Jian-zhong Qiu,Jing-jiang ZHAO, HAI-MING He,Yong. “Inclined layer printing for fused deposition modeling without assisted supporting structure”. en. In : *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 2 ().
- [18] 3DXTECH. *Gen3 CarbonX<sup>TM</sup> Carbon Fiber Reinforced Nylon 3D Filament*. 2020. URL : <https://www.3dxttech.com/carbon-fiber-3d-filaments/carbonx-pa6-cf-gen3/>.
- [19] Miha MARINŠEK. “BASIC LANDING CHARACTERISTICS AND THEIR APPLICATION IN ARTISTIC GYMNASTICS”. en. In : 2.2 (), p. 9.
- [20] “Ground Reaction Forces Among Gymnasts and Recreational Athletes in Drop Landings”. In : ().
- [21] Peter J McNAIR et Harry PRAPAVESSIS. “Normative data of vertical ground reaction forces during landing from a jump”. en. In : *Journal of Science and Medicine in Sport* 2.1 (mar. 1999), p. 86-88. ISSN : 14402440. DOI : 10.1016/S1440-2440(99)80187-X. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S144024409980187X> (visité le 25/01/2020).
- [22] Harry PRAPAVESSIS et Peter J. McNAIR. “Effects of Instruction in Jumping Technique and Experience Jumping on Ground Reaction Forces”. en. In : *Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy* 29.6 (juin 1999), p. 352-356. ISSN : 0190-6011, 1938-1344. DOI : 10.2519/jospt.1999.29.6.352. URL : <http://www.jospt.org/doi/10.2519/jospt.1999.29.6.352> (visité le 25/01/2020).
- [23] Marion COSSIN. “MESURE DES EFFORTS DYNAMIQUES DANS LES AGRÈS DE CIRQUE”. fr. In : (), p. 127.

- [24] FIRETOYS. *5 parts Cyr wheel*. 2020. URL : <https://www.firetoys.co.uk/unicycles-and-balance/balance-props/cyr-wheels-german-wheels/5-part-stainless-steel-cyr-wheel.html>.
- [25] Rockwest COMPOSITES. *Button pin*. 2020. URL : <https://www.rockwestcomposites.com/shop/connector-accessories/locking-telescoping-mechanisms/button-clips/button-clip-ss-group>.
- [26] Larkin, van Duin DING,PAN Li,Cuiuri. “MULTI-DIRECTION SLICING OF STL MODELS FOR ROBOTIC WIRE-FEED ADDITIVE MANUFACTURING”. en. In : 2 ().
- [27] Justin DALE. *Figures de roue Cyr*. 2020. URL : <https://www.justindaleperformance.com/>.
- [28] École nationale de CIRQUE. *Épreuve synthèse de Justin Buss, et spectacle La matrice de Morphée* © Roland Lorente. 2014. URL : <https://ecolenationaledecirque.ca/>.
- [29] École nationale de CIRQUE. *Épreuve synthèse de Shena Tschofen* © Roland Lorente. 2016. URL : <https://ecolenationaledecirque.ca/>.

## ANNEXE A RÉPONSE À UNE PERTURBATION

On étudie à présent la réponse du système en régime permanent à une petite perturbation. Pour cela, on ajoute un terme de pulsation  $\sigma$  à  $\theta$  et à  $d\theta/dt$ ,  $d\phi/dt$ ,  $d\psi/dt$ . On note  $d\phi/dt|_0$  et  $d\psi/dt|_0$ , les vitesses angulaires  $d\phi/dt$  et  $d\psi/dt$  en régime permanent.

$$\begin{aligned}
 \theta &= \theta_0 + \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}, \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta_0}{dt} + \epsilon \frac{d\tilde{\theta}}{dt} e^{i\sigma t} = \epsilon \frac{d\tilde{\theta}}{dt} e^{i\sigma t}, \\
 \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{dt}|_0 + \epsilon \frac{d\tilde{\phi}}{dt} e^{i\sigma t}, \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi}{dt}|_0 + \epsilon \frac{d\tilde{\psi}}{dt} e^{i\sigma t}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Avec les variables A.1, les coordonnées du point de contact P dans  $C_{xzy}$ , schématisées à la figure 5.1 s'expriment :

$$\begin{aligned}
 x_P &= 0, \\
 y_P &= R \sin \theta, \\
 z_P &= -R \cos \theta - r_2,
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

et les composantes de la vitesse angulaire deviennent :

$$\vec{\omega} = \left( \frac{d\theta}{dt}, \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right), \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right). \tag{A.3}$$

En substituant A.2 et A.3 dans 5.3, et en conservant l'hypothèse d'un sol parfaitement rugueux ( $\vec{v}_P = \vec{0}$ ) on obtient la nouvelle expression des composantes de la vitesse du centre de gravité dans  $C_{xzy}$  :

$$\begin{aligned}
 v_{Cx} &= (R \cos(\theta) + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin(\theta) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right), \\
 v_{Cy} &= -(R \cos(\theta) + r_2) \frac{d\theta}{dt}, \\
 v_{Cz} &= -R \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

En simplifiant A.4 avec les développements limités A.5, en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $\epsilon$ , on obtient A.6 :

$$\begin{aligned}\cos(\theta_0 + \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t}) &= \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t} + o(\epsilon), \\ \sin(\theta_0 + \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t}) &= \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t} + o(\epsilon), \\ \tan(\theta_0 + \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t}) &= \tan \theta_0 + (1 + \tan^2 \theta_0) \epsilon\tilde{\theta}e^{i\sigma t} + o(\epsilon),\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}v_{Cx} &= (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \epsilon e^{i\sigma t} [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\ &\quad + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \cos \theta \right)], \\ v_{Cy} &= - (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}, \\ v_{Cz} &= - R \sin \theta_0 \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}.\end{aligned}\tag{A.6}$$

L'équation 5.1 projetée dans  $C_{xzy}$  donne l'accélération du centre d'inertie de la roue dans  $C_{xzy}$  :

$$\begin{aligned}a_{Cx} &= \frac{dv_{Cx}}{dt} - \frac{d\psi}{dt} v_{Cy}, \\ a_{Cy} &= \frac{dv_{Cy}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} v_{Cx}, \\ a_{Cz} &= \frac{dv_{Cz}}{dt}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

On substitue A.6 à l'intérieur de A.7 :

$$\begin{aligned}
a_{Cx} &= i\sigma\epsilon e^{i\sigma t} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right] \tilde{\theta} \\
&\quad + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}, \\
a_{Cy} &= -i\sigma (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} + \frac{d\psi}{dt} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon e^{i\sigma t} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right] \tilde{\theta} \right. \\
&\quad \left. + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right], \\
a_{Cz} &= -i\sigma R \sin \theta_0 \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

D'après A.8 et la relation fondamentale de la dynamique en translation :

$$\begin{aligned}
&i\sigma\epsilon e^{i\sigma t} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right] \tilde{\theta} \\
&\quad + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} = \frac{F_x}{m_r}, \\
&-i\sigma (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} + \frac{d\psi}{dt} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon e^{i\sigma t} \left[ (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right] \tilde{\theta} \right. \\
&\quad \left. + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right] = \frac{F_y}{m_r}, \\
&-i\sigma R \sin \theta_0 \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} = -g + \frac{F_z}{m_r}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Le moment cinétique au centre de masse s'exprime  $\vec{L}_C = I \cdot \vec{\omega}$ , le tenseur d'inertie est donné par 5.7. Les composantes du moment cinétique dans  $C_{xyz}$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
L_{Cx} &= m_r k_1^2 \omega_1, \\
L_{Cy} &= m_r k_2^2 \omega_2, \\
L_{Cz} &= m_r k_1^2 \omega_3.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

De même qu'en 5.9, on applique la relation fondamentale de la dynamique en rotation au centre de masse de la roue dans le référentiel  $C_{\xi\eta\zeta}$  :

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{L}_C = \mathbf{M} + \overrightarrow{CP} \wedge \mathbf{F}, \quad (\text{A.11})$$

avec  $\mathbf{R}$  la vitesse angulaire de  $C_{xyz}$  par rapport à  $C_{\xi\eta\zeta}$  et  $\mathbf{M}$  le moment de réaction au point P projeté dans  $C_{\xi\eta\zeta}$ .

L'expression de  $\mathbf{R}$  a été déterminée en 5.10 :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \omega_3 \tan \theta \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

En substituant A.10 et A.12 dans A.11, on obtient :

$$\begin{aligned} k_1^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \left( k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + (R \cos \theta + r_2) \frac{F_y}{m_r} + R \sin \theta \frac{F_z}{m_r}, \\ k_2^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) &= -(R + r_2) \frac{F_x}{m_r}, \\ k_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) &= \left( -k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta \right) \frac{d\theta}{dt} + r_2 \frac{F_x}{m_r}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

On substitue A.1 dans A.13, en simplifiant les expressions à l'aide de développements limités et on néglige les termes de perturbation d'ordre supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} k_1^2 i\sigma \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^i &= \left( k_2^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \epsilon e^{i\sigma t} \left[ k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) \right. \\ &+ k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_0) \tilde{\theta} \Big] \\ &+ (R(\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}) + r_2) \frac{F_y}{m_r} + R(\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}) \frac{F_z}{m_r}, \\ k_2^2 i\sigma \epsilon \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) e^{i\sigma t} &= -(R + r_2) \frac{F_x}{m_r}, \\ k_1^2 i\sigma \epsilon \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) e^{i\sigma t} &= \left( -k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \right) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} + r_2 \frac{F_x}{m_r}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

On substitue ensuite A.9 dans A.14 :

$$\begin{aligned}
k_1^2 i \sigma \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} = & (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& + \epsilon e^{i\sigma t} [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan \theta_0^2) \tilde{\theta}] \\
& + (R(\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}) + r_2) [-i\sigma (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} \\
& + \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \right) + \left( \left( \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \right) + \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0^2} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \right) \epsilon e^{i\sigma t} ] [(R \cos \theta_0 \\
& + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& + \epsilon e^{i\sigma t} [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta}]] \\
& + R(\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \epsilon \tilde{\theta} e^{i\sigma t}) [g - i\sigma R \sin \theta_0 \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}], \\
k_2^2 i \sigma \epsilon \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) e^{i\sigma t} = & - (R + r_2) [i\sigma \epsilon e^{i\sigma t} [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \\
& + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}], \\
k_1^2 i \sigma \epsilon \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) e^{i\sigma t} = & (-k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t} \\
& + r_2 [i\sigma \epsilon e^{i\sigma t} [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \\
& + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \epsilon \frac{\tilde{d}\theta}{dt} e^{i\sigma t}]. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

En regroupant les termes A.15 devient :

$$\begin{aligned}
& \epsilon e^{i\sigma t} \left[ k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \right. \\
& - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_0) \tilde{\theta} - k_1^2 i\sigma \frac{\tilde{d}\theta}{dt} \\
& + (R \cos \theta_0 + r_2) (-i\sigma (R \cos \theta_0 + r_2) \frac{\tilde{d}\theta}{dt} \\
& + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right] \\
& + \left( \left( \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \right) + \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \right) ((R \cos \theta_0 \\
& + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) - i\sigma R^2 \sin^2 \theta_0 \frac{\tilde{d}\theta}{dt} \\
& - R \sin \theta_0 \tilde{\theta} \left( \frac{d\psi}{dt} \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) + R \cos \theta_0 g \tilde{\theta}] + (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& \tan \theta_0) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + (R \cos \theta + r_2) \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right. \\
& \left. + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + R \sin \theta_0 g \right) = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} \left[ \frac{k_2^2}{(R + r_2)} i\sigma \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \right. \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} \right. \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \frac{\tilde{d}\theta}{dt} = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} \left[ k_1^2 i\sigma \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) \frac{\tilde{d}\theta}{dt} \right. \\
& - r_2 i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} \right. \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) - r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \frac{\tilde{d}\theta}{dt}] = 0. \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$



On sait de A.1 que :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (\text{A.17})$$

ce qui donne :

$$\frac{\tilde{d}\theta}{dt} = i\sigma\tilde{\theta}. \quad (\text{A.18})$$

On substitue A.18 à l'intérieur de A.16 :

$$\begin{aligned}
& \epsilon e^{i\sigma t} [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan \theta_0^2) \tilde{\theta} + k_1^2 \sigma^2 \tilde{\theta} \\
& + (R \cos \theta_0 + r_2) [\sigma^2 (R \cos \theta_0 + r_2) \tilde{\theta} + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& + \left( \left( \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \right) + \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0^2} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \right) ((R \cos \theta_0 \\
& + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right))] + \sigma^2 R^2 \sin \theta_0^2 \tilde{\theta} \\
& - R \sin \theta_0 \tilde{\theta} \left( \frac{d\psi}{dt} \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) + R \cos \theta_0 g \tilde{\theta}] + (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& + (R \cos \theta + r_2) \left( \frac{d\psi}{dt} \right) [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)] + R \sin \theta_0 g = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} \left[ \frac{k_2^2}{(R + r_2)} i\sigma \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 \right. \\
& \left. - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right] + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) i\sigma \tilde{\theta} = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} [k_1^2 i\sigma \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) i\sigma \tilde{\theta} \\
& - r_2 i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& - r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) i\sigma \tilde{\theta}] = 0.
\end{aligned}
\tag{A.19}$$

On étudie ici la réponse du système à une perturbation autour d'une position d'équilibre dynamique.

L'équation 5.15 est donc valable :  $m_r(k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + (R \cos \theta_0 + r_2) m_r \frac{d\psi}{dt} v_{Cx0} + R \sin \theta_0 m g = 0$ .

Le terme d'ordre 0 dans A.19 se simplifie, et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \epsilon e^{i\sigma t} [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) \\
& + k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \sin \theta \right) - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) \\
& - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan \theta_0^2) \tilde{\theta} + k_1^2 \sigma^2 \tilde{\theta} + (R \cos \theta_0 + r_2) [\sigma^2 (R \cos \theta_0 + r_2) \tilde{\theta} \\
& + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) [(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \tilde{\theta} + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right)] \\
& + \left( \left( \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \right) + \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0^2} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tilde{\theta} \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} \right. \\
& \left. + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right)] + \sigma^2 R^2 \sin \theta_0^2 \tilde{\theta} \\
& - R \sin \theta_0 \tilde{\theta} \left( \frac{d\psi}{dt} \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + R \cos \theta_0 g \tilde{\theta}] = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} \left[ \frac{k_2^2}{(R + r_2)} i\sigma \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \sin \theta \right) + i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \sin \theta \right) \right. \\
& \left. + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right) \tilde{\theta} \right. \\
& \left. + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) i\sigma \tilde{\theta} = 0, \\
& \epsilon e^{i\sigma t} [k_1^2 i\sigma \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) + (k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0) i\sigma \tilde{\theta} - r_2 i\sigma ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d\psi}}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right) \tilde{\theta} \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \tilde{\cos \theta} \right) - r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) i\sigma \tilde{\theta}] = 0.
\end{aligned}$$

(A.20)

Sous forme matricielle, A.19 s'écrit :

$$\epsilon e^{i\sigma t} \mathbf{M}(\sigma) \cdot \mathbf{Y} = 0, \quad (\text{A.21})$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \frac{d\phi}{dt} + \frac{\tilde{d}\psi}{dt} \sin \theta \\ \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la matrice  $\mathbf{M}$  s'expriment :

$$\begin{aligned} M_{11} &= -k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_0) + \sigma^2 (k_1^2 + R^2 \sin^2 \theta_0) + \sigma^2 (R \cos \theta_0 + r_2)^2 \\ &\quad + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) R (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0 \right) \\ &\quad + \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \left( (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right) + R g \cos \theta_0, \\ M_{12} &= k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2)^2, \\ M_{13} &= k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 + \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) R (R \cos \theta_0 + r_2) \tan \theta_0 \\ &\quad + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \left( R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right), \\ M_{21} &= i\sigma \left[ R \left( \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0 \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2) \right], \\ M_{22} &= i\sigma \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right), \\ M_{23} &= i\sigma R \sin \theta_0, \\ M_{31} &= i\sigma \left[ k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - r_2 R \cos \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - r_2 R \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right], \\ M_{32} &= -i\sigma r_2 (R \cos \theta_0 + r_2), \\ M_{33} &= i\sigma (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Nous allons maintenant trouver les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}$ , en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

On développe A.23 :

$$M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} - M_{13}M_{22}M_{31} - M_{12}M_{21}M_{33} - M_{11}M_{23}M_{32} = 0. \quad (\text{A.24})$$

On écrit  $M_{11}$  sous la forme  $A_m + \sigma^2 B_m$ , avec

$$\begin{aligned} A_m = & -k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_0) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) R(R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 \\ & - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0 \\ & + \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0^2} r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) + Rg \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

et

$$B_m = k_1^2 + R^2 \sin^2 \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2)^2. \quad (\text{A.26})$$

Pour chaque coefficient  $M_{ij}$ , on note  $\hat{M}_{ij} = \frac{\text{Im}(M_{ij})}{\sigma}$ .

En substituant A.22 dans A.24 on obtient :

$$\sigma^2 = \frac{\hat{M}_{22}\hat{M}_{33}A_m + M_{12}\hat{M}_{23}\hat{M}_{31} + M_{13}\hat{M}_{21}\hat{M}_{32} - M_{13}\hat{M}_{22}\hat{M}_{31} - M_{12}\hat{M}_{21}\hat{M}_{33} - \hat{M}_{23}\hat{M}_{32}A_m}{B_m(\hat{M}_{23}\hat{M}_{32} - \hat{M}_{22}\hat{M}_{33})}. \quad (\text{A.27})$$

Dans A.27,  $\sigma^2$  est un nombre réel. Si  $\sigma^2 < 0$ , alors il existe un réel  $a > 0$  tel que  $\sigma = \pm i\sqrt{a}$ . Dans le cas  $\sigma = -i\sqrt{a}$ , l'exponentielle introduite en A.1 devient un terme divergent : le système est instable.

Le dénominateur de A.27 s'exprime :

$$\begin{aligned} B_m(\hat{M}_{23}\hat{M}_{32} - \hat{M}_{22}\hat{M}_{33}) = & (k_1^2 + R^2 \sin^2 \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2)^2)[-R \sin \theta_0 r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) \\ & - \left( \frac{k_1^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Rappelons que  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ . Dans notre géométrie, on a  $r_2 < \frac{R}{2}$ , donc  $R r_2 < \frac{R^2}{2} < k_1^2$ , le terme  $(k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)$  dans A.28 est ainsi toujours positif. Le dénominateur de A.27 est donc strictement négatif, quelles que soient les valeurs des paramètres  $R, r_2, \theta_0$ .

C'est donc le signe du numérateur qui détermine la stabilité du système en cas de perturbation : s'il est positif, le système sera instable et s'il est négatif le système sera stable. L'équation de la frontière est donc :

$$\hat{M}_{22}\hat{M}_{33}A_m + M_{12}\hat{M}_{23}\hat{M}_{31} + M_{13}\hat{M}_{21}\hat{M}_{32} - M_{13}\hat{M}_{22}\hat{M}_{31} - M_{12}\hat{M}_{21}\hat{M}_{33} - \hat{M}_{23}\hat{M}_{32}A_m = 0. \quad (\text{A.29})$$

En substituant les coefficients de A.22 dans A.29 on obtient :

$$\begin{aligned}
& [R \sin \theta_0 r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) + \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_1^2 \\
& - R r_2 \sin \theta_0)] [-k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_0) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) R (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 \\
& - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0] + \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0^2} r_2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) ((R \cos \theta_0 + r_2) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& + R \sin \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)) + R g \cos \theta_0] + [k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 \\
& + r_2)^2] R \sin \theta_0 [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - k_1^2 \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \\
& - r_2 R \cos \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - r_2 R \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - \frac{r_2}{\cos \theta_0} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) (R \cos \theta_0 + r_2)] + [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) - 2k_1^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \tan \theta_0 \\
& + \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) R (R \cos \theta_0 + r_2) \tan \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( \left( R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right) \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \right. \\
& \left. + R \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \right)] (-[R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 \\
& - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0] + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2)] r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) \\
& - \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) [k_2^2 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - k_1^2 \tan \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - r_2 R \cos \theta_0 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) - r_2 R \sin \theta_0 \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \\
& - \frac{r_2}{\cos \theta_0} \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) (R \cos \theta_0 + r_2)] - [k_2^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 \\
& + r_2)^2] [R \left( \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta_0 \\
& - \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta_0] + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) (R \cos \theta_0 + r_2)] (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0) = 0.
\end{aligned}
\tag{A.30}$$

On rappelle l'équation 5.16 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta\right) &= \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0, \\ \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta\right) &= \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0,\end{aligned}$$

En substituant 5.16 à l'intérieur de A.30, on obtient :

$$\begin{aligned}& [R \sin \theta_0 r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) + \left(\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2\right) (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)] \left[-k_1^2 \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0\right)^2 (1\right. \\& \quad + \tan^2 \theta_0) + \frac{d\psi}{dt} R (R \cos \theta_0 + r_2) \left(\frac{d\psi}{dt} \cos(2\theta_0) - \frac{d\phi}{dt} \sin \theta_0\right) + \tan \theta_0 r_2 \frac{d\psi}{dt} ((R \cos \theta_0 \\& \quad + r_2) \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0\right) + R \sin \theta_0 \cos \theta_0 \frac{d\psi}{dt} + R g \cos \theta_0) + [k_2^2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \\& \quad + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)^2] R \sin \theta_0 [k_2^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 (k_2^2 - k_1^2) - r_2 R \frac{d\psi}{dt} - r_2 R \sin \theta_0 \frac{d\phi}{dt} \\& \quad - r_2 \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)] + [k_2^2 \frac{d\phi}{dt} + (k_2^2 - 2k_1^2) \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0 + \frac{d\psi}{dt} R (R \cos \theta_0 + r_2) \sin \theta_0 \\& \quad + (R \cos \theta_0 + r_2) \left(R + \frac{r_2}{\cos \theta_0}\right) \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta_0\right) + R \sin \theta_0 \frac{d\psi}{dt} \Big] \Big] (-[R \left(\frac{d\psi}{dt} \cos(2\theta_0) \right. \\& \quad - \frac{d\phi}{dt} \sin \theta_0) + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)] r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) - \left(\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2\right) [k_2^2 \frac{d\phi}{dt} \\& \quad + (k_2^2 - k_1^2) \sin \theta_0 \frac{d\psi}{dt} - r_2 R \frac{d\psi}{dt} - r_2 R \sin \theta_0 \frac{d\phi}{dt} - r_2 \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)] - [k_2^2 \frac{d\psi}{dt} \cos \theta_0 \\& \quad + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)^2] [R \left(\frac{d\psi}{dt} \cos(2\theta_0) - \frac{d\phi}{dt} \sin \theta_0\right) + \frac{d\psi}{dt} (R \cos \theta_0 + r_2)] (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0) = 0.\end{aligned}\tag{A.31}$$

En regroupant les termes de A.31, la condition de stabilité se traduit par une équation de la forme :

$$A \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + B \frac{d\psi}{dt} + C = 0,\tag{A.32}$$



avec :

$$\begin{aligned}
A = & [(k_2^2 - 2k_1^2) \sin \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( 3R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right) \sin \theta_0] [-r_2(R \cos \theta_0 + r_2)(R \cos \theta_0 \\
& + r_2 + R \cos(2\theta_0)) - \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) [(k_2^2 - k_1^2) \sin \theta_0 - r_2 R - r_2(R \cos \theta_0 + r_2)]] \\
& + [R \sin \theta_0 r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) + \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)] [-k_1^2 \\
& + R(R \cos \theta_0 + r_2) \cos(2\theta_0) + r_2 \sin \theta_0^2 \left( 2R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right)] + [k_2^2 \cos \theta_0 \\
& + (R \cos \theta_0 + r_2)^2] [R \sin \theta_0 [\sin \theta_0 (k_2^2 - k_1^2) - r_2 R - r_2(R \cos \theta_0 + r_2)] \\
& - (R \cos(2\theta_0) + R \cos \theta_0 + r_2)(k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)], \\
B = & \frac{d\phi}{dt} \left[ k_1^2 \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) - R r_2 \sin \theta_0 \frac{k_2^2}{R + r_2} \right] [-R^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\
& + \tan \theta_0 r_2^2] + R \sin \theta_0 [k_2^2 \cos \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2)^2] (k_1^2 + k_2^2 - 2r_2 R \sin \theta_0) \\
& + (k_2^2 + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right)) [-r_2(R \cos \theta_0 + r_2)(R \cos \theta_0 + r_2 + R \cos(2\theta_0)) \\
& - \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) [(k_2^2 - k_1^2) \sin \theta_0 - r_2 R - r_2(R \cos \theta_0 + r_2)]] \\
& + (r_2 R (R \cos \theta_0 + r_2) \sin \theta_0 - \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_2^2 - r_2 R \sin \theta_0)) [(k_2^2 \\
& - 2k_1^2) \sin \theta_0 + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( 3R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right) \sin \theta_0], \\
C = & \frac{d\phi^2}{dt} \left( k_2^2 + (R \cos \theta_0 + r_2) \left( R + \frac{r_2}{\cos \theta_0} \right) \right) [r_2 R (R \cos \theta_0 + r_2) \sin \theta_0 \\
& - \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_2^2 - r_2 R \sin \theta_0)] + R g \cos \theta_0 [R \sin \theta_0 r_2 (R \cos \theta_0 + r_2) \\
& + \left( \frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos \theta_0 + r_2 \right) (k_1^2 - R r_2 \sin \theta_0)]. \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Pour que l'équation ait une solution, la condition

$$\Delta = B^2 - 4AC \geq 0, \tag{A.34}$$

doit être respectée.

Notons  $B = \frac{d\phi}{dt} B_1$  et  $C = \frac{d\phi^2}{dt} C_1 + C_2$ . En substituant A.33 dans A.34, on obtient :

$$\frac{d\phi^2}{dt} \geq \frac{4AC_2}{B_1^2 - 4AC_1}, \tag{A.35}$$

L'équation de la frontière  $\frac{d\phi}{dt} = f(\theta_0)$  déterminant la stabilité du système en cas de perturbation se trouve donc à  $\frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{4AC_2}{B_1^2 - 4AC_1}}$ .

Si  $|\frac{d\phi}{dt}| < \pm \sqrt{\frac{4AC_2}{B_1^2 - 4AC_1}}$ , le système est instable.

De même que dans la section précédente on utilise la vitesse de rotation adimensionnelle  $\frac{\hat{d}\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \sqrt{\frac{R+r_2}{g}}$ . L'équation de frontière correspondante s'écrit :

$$\frac{\hat{d}\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{R+r_2}{g}} \sqrt{\frac{4AC_2}{B_1^2 - 4AC_1}}. \quad (\text{A.36})$$

## ANNEXE B    EXPRESSION DE $\sigma$ EN FONCTION DE $\theta_0$ ET $\omega_0$

D'après A.22 et A.27,  $\sigma^2 = N/D$  avec :

$$\begin{aligned}
 N = & [R \sin(\theta_0) r_2 (R \cos(\theta_0) + r_2) + (\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos(\theta_0) + r_2)(k_1^2 - R r_2 \sin(\theta_0))] [-k_1^2 (\Omega_0 \cos \theta_0)^2 (1 \\
 & + \tan(\theta_0)^2) + \Omega_0 R (R \cos(\theta_0) + r_2) (\Omega_0 \cos(2\theta_0) - \omega_0 \sin(\theta_0)) + \tan(\theta_0) r_2 \Omega_0 ((R \cos(\theta_0) \\
 & + r_2)(\omega_0 + \Omega_0 \sin \theta_0) + R \sin(\theta_0) \cos \theta_0 \Omega_0) + R g \cos(\theta_0)] + [k_2^2 \Omega_0 \cos \theta_0 \\
 & + \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)^2] R \sin(\theta_0) [k_2^2 \omega_0 + \Omega_0 \sin \theta_0 (k_2^2 - k_1^2) - r_2 R \Omega_0 - r_2 R \sin(\theta_0) \omega_0 \\
 & - r_2 \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)] + [k_2^2 \omega_0 + (k_2^2 - 2k_1^2) \Omega_0 \sin(\theta_0) + \Omega_0 R (R \cos(\theta_0) + r_2) \sin(\theta_0) \\
 & + (R \cos(\theta_0) + r_2) ((R + \frac{r_2}{\cos(\theta_0)}) (\omega_0 + \Omega_0 \sin \theta_0) + R \sin(\theta_0) \Omega_0)] (-[R (\Omega_0 \cos(2\theta_0) \\
 & - \omega_0 \sin(\theta_0)) + \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)] r_2 (R \cos(\theta_0) + r_2) - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos(\theta_0) + r_2) [k_2^2 \omega_0 \\
 & + (k_2^2 - k_1^2) \sin(\theta_0) \Omega_0 - r_2 R \Omega_0 - r_2 R \sin(\theta_0) \omega_0 - r_2 \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)]) - [k_2^2 \Omega_0 \cos \theta_0 \\
 & + \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)^2] [R (\Omega_0 \cos(2\theta_0) - \omega_0 \sin(\theta_0)) + \Omega_0 (R \cos(\theta_0) + r_2)] (k_1^2 - R r_2 \sin(\theta_0))
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 D = & (k_1^2 + R^2 \sin(\theta_0)^2 + (R \cos(\theta_0) + r_2)^2) [-R \sin(\theta_0) r_2 (R \cos(\theta_0) + r_2) \\
 & - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos(\theta_0) + r_2) (k_1^2 - R r_2 \sin(\theta_0))]
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$\Omega_0$  est solution d'une équation polynomiale du second degré (équation 5.21). Cependant,

la valeur  $\Omega_{01} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} - \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \dot{L}^2}$  a du sens physiquement (figure B.1), car pour  $\Omega_{02} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} + \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \dot{L}^2}$  la vitesse de rotation diverge et est trop rapide par rapport à ce qui est atteignable en pratique. On conservera uniquement  $\Omega_{01}$  pour la suite. On obtient donc ainsi une expression de  $\sigma$  dépendant seulement de  $\theta_0$  et  $\omega_0$ , qui seront les variables mesurées expérimentalement. Il faut maintenant faire le lien entre le référentiel du capteur et  $C_{xyz}$ , dans lequel sont exprimées les équations du modèle.

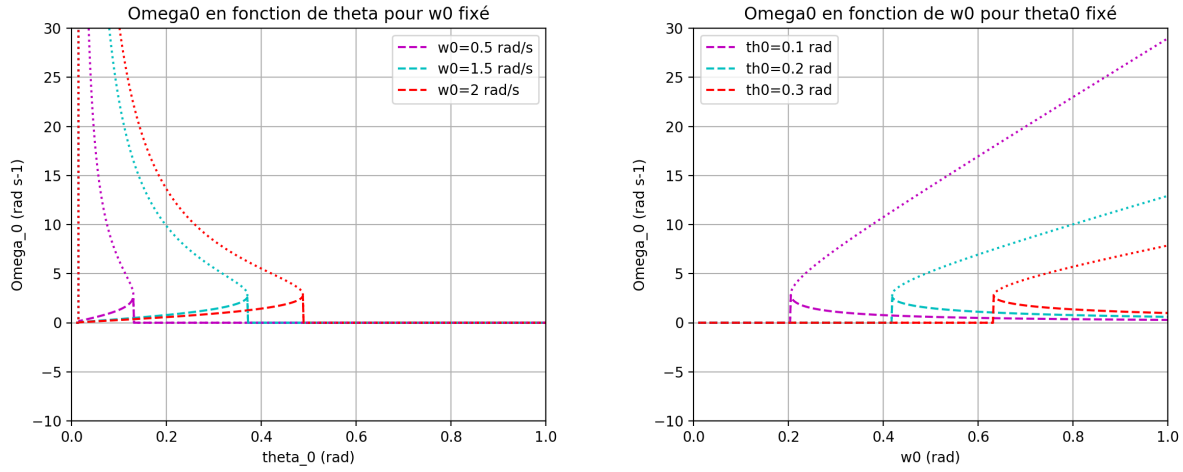


Figure B.1  $\Omega_0$  en fonction de  $\theta_0$  et  $\omega_0$ . Les tracés en tirets représentent la solution  $\Omega_{01} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} - \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \hat{L}^2}$ , et les tracés en pointillés,  $\Omega_{02} = g \frac{\hat{\omega}_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{R \tan(\theta_0) \sqrt{g(R+r_2)}} + \sqrt{\Delta}}{2R \sin(\theta_0) \hat{L}^2}$ . On observe une divergence pour  $\Omega_{02}$  dont les valeurs sont trop élevées comparées aux vitesses du mouvement réel. On considère uniquement  $\Omega_{10}$ .

## ANNEXE C    CALCUL DES VECTEURS PROPRES

### Expression générale

On a vu que  $\sigma^2 = a$ , où  $a$  est un nombre réel (équation A.27). Selon son signe, les valeurs propres correspondantes sont réelles,  $\sigma = \pm\sqrt{a}$ , ou imaginaires pures,  $\sigma = \pm i\sqrt{-a}$ .

Rappelons l'équation A.21 :

$$\epsilon e^{i\sigma t} \mathbf{M}(\sigma) \cdot \mathbf{Y} = 0,$$

avec :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de  $\mathbf{M}(\sigma)$  sont détaillés en A.22.

Les vecteurs propres associés à  $\mathbf{M}$  et  $\sigma$  s'écrivent sous la forme  $\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_i \\ \tilde{\omega}_{2_i} \\ \tilde{\omega}_{3_i} \end{pmatrix}$ .

On pose  $\tilde{\theta}_i = 1$ , puis on résout le système  $\mathbf{M}(\sigma) \cdot \mathbf{Y}_i = \mathbf{0}$ .

On obtient :

$$\mathbf{Y}_i(\theta_0, \omega_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{M_{21}M_{33} - M_{31}M_{23}}{M_{32}M_{23} - M_{22}M_{33}} \\ \frac{M_{22}M_{31} - M_{21}M_{32}}{M_{32}M_{23} - M_{22}M_{33}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

### Valeurs particulières

Pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{rad}$  et  $\omega_0 = \cos \alpha t$ , avec  $\alpha$  un réel quelconque, les coefficients de  $\mathbf{M}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
M_{21} &= i\sigma [R(\omega_{30} \cos(\theta_0) - \omega_{20} \sin(\theta_0)) + \frac{\omega_{30}}{\cos(\theta_0)} (R \cos(\theta_0) + r_2)] \\
M_{22} &= i\sigma (\frac{k_2^2}{R + r_2} + R \cos(\theta_0) + r_2) \\
M_{23} &= i\sigma R \sin(\theta_0) \\
M_{31} &= i\sigma [k_2^2 \omega_{20} - k_1^2 \tan(\theta_0) \omega_{30} - r_2 R \cos(\theta_0) \omega_{30} - r_2 R \sin(\theta_0) \omega_{20} - \frac{r_2}{\cos(\theta_0)} \omega_{30} (R \cos(\theta_0) + r_2)] \\
M_{32} &= -i\sigma r_2 (R \cos(\theta_0) + r_2) \\
M_{33} &= i\sigma (k_1^2 - R r_2 \sin(\theta_0))
\end{aligned} \tag{C.2}$$

On substitue l'équation 5.16 :

$$\begin{aligned}
\omega_{20} &= \omega_0 + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \\
\omega_{30} &= \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

dans C.2 :

$$\begin{aligned}
M_{21} &= i\sigma [-R \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} + \Omega_0 (\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)] \\
M_{22} &= i\sigma (\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \\
M_{23} &= i\sigma \frac{R}{\sqrt{2}} \\
M_{31} &= i\sigma [k_2^2 (\omega_0 + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}} (\omega_0 + \Omega_0 (\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] \\
M_{32} &= -i\sigma r_2 (\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \\
M_{33} &= i\sigma (k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Avec ces valeurs de  $\theta_0, \omega_0$  on a aussi (5.20) :

$$\Omega_0 = g \frac{\omega_0 \frac{k_2^2 + R(R+r_2)}{Rg} - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{2} R \hat{L}^2}, \tag{C.4}$$

avec

$$\Delta = (\omega_0 \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{Rg})^2 - 4 \frac{\hat{L}^2 R}{g\sqrt{2}} \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{L} = \sqrt{\frac{(k_2^2 - k_1^2)}{R^2} + \frac{\sqrt{2}r_2}{R} + 1}$$

On substitue C.3 dans C.6 :

$$\mathbf{Y}_i(\frac{\pi}{4}, \cos \alpha t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{[-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)](k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}) - [k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] \frac{R}{\sqrt{2}}}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \\ \frac{(\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)[k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] + [-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)]r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

avec :

$$\Omega_0 = \cos \alpha t \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{R\sqrt{2}(\frac{k_2^2 - k_1^2}{R} + \sqrt{2}r_2 + R)} - \sqrt{(\cos \alpha t \frac{k_2^2 + R(R + r_2)}{R(\sqrt{2}(\frac{k_2^2 - k_1^2}{R} + \sqrt{2}r_2 + R)))^2 - \frac{2g}{\sqrt{2}(\frac{k_2^2 - k_1^2}{R} + \sqrt{2}r_2 + R)}} \quad (\text{C.7})$$

Or on a défini le mouvement selon (équation A.1) :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \tilde{\theta} e^{i\sigma t} \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \tilde{\omega}_2 e^{i\sigma t} \\ \omega_3 &= \omega_{30} + \tilde{\omega}_3 e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

On substitue 5.16 et C.6 à l'intérieur de C.8 :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} + e^{i\sigma t} \\ \omega_2 &= \cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} + \left[ \frac{[-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)](k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}) - [k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] \frac{R}{\sqrt{2}}}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i\sigma t} \\ \omega_3 &= \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} + \left[ \frac{(\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)[k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] + [-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)]r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R + r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

## ANNEXE D    EXPRESSION DES FRÉQUENCES PROPRES DANS LE RÉFÉRENTIEL DU CAPTEUR

### Matrice de rotation

Soit  $\mathbf{r}_{\text{capteur}} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$  les vitesses angulaires autour des axes  $x_c, y_c, z_c$  du capteur fixé à la roue (figure ??). Les composantes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  de la vitesse angulaire dans  $C_{\xi, \eta, \zeta}$  sont liées à  $\mathbf{r}_{\text{capteur}}$  par la relation :

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & -\cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

où  $\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} -\cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & -\cos \phi \end{pmatrix}$  est la matrice de rotation qui permet de passer de  $C_{\xi, \eta, \zeta}$  au référentiel du capteur.

Comme  $\omega_1 = \frac{d\theta}{dt}$ , le système d'équations C.9 s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= i\sigma e^{i\sigma t} \\ \omega_2 &= \cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} + \left[ \frac{[-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)](k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}) - [k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] \frac{R}{\sqrt{2}}}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i\sigma t} \\ \omega_3 &= \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} + \left[ \frac{(\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)[k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2} + 1) - r_2^2 \Omega_0)] + [-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)] r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Et les vitesses de rotation mesurées par le capteur s'expriment :

$$\begin{aligned} r_x &= -\cos \phi \omega_1 + \sin \phi \omega_3 \\ r_y &= \omega_2 \\ r_z &= -\sin \phi \omega_1 - \cos \phi \omega_3 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$



On substitue D.2 à l'intérieur de D.3 :

$$\begin{aligned}
r_x &= -\cos \phi i \sigma e^{i \sigma t} + \sin \phi \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \\
&+ \sin \phi \left[ \frac{(\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)[k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2}+1) - r_2^2 \Omega_0) + [-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)]r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i \sigma t} \\
r_y &= \cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} + \left[ \frac{[-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)](k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}) - [k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2}+1) - r_2^2 \Omega_0)] \frac{R}{\sqrt{2}}}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i \sigma t} \\
r_z &= -\sin \phi i \sigma e^{i \sigma t} - \cos \phi \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \\
&- \cos \phi \left[ \frac{(\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)[k_2^2(\cos \alpha t + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}) - k_1^2 \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos \alpha t + \Omega_0(\sqrt{2}+1) - r_2^2 \Omega_0) + [-R \frac{\cos \alpha t}{\sqrt{2}} + \Omega_0(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)]r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)}{-r_2(\frac{R}{\sqrt{2}} + r_2) \frac{R}{\sqrt{2}} - (\frac{k_2^2}{R+r_2} + \frac{R}{\sqrt{2}} + r_2)(k_1^2 - r_2 \frac{R}{\sqrt{2}})} \right] e^{i \sigma t}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

L'angle  $\phi$  est lié à  $\omega_0 = \cos \alpha t$  selon :

$$\phi = \int_0^t \cos \alpha t dt = \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \tag{D.5}$$

On substitue D.5 puis on utilise les développements limités en zéro à l'ordre 4  $\sin(\sin \alpha t) = \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{\sin \alpha t^3}{6\alpha^3}$  et  $\cos(\sin \alpha t) = 1 - \frac{\sin \alpha t^2}{2\alpha^2} + \frac{\sin \alpha t^4}{24\alpha^4}$ , ainsi que les linéarisations  $\sin \alpha t^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha t}{2}$ ,  $\sin \alpha t^3 = -\frac{\sin 3\alpha t - 3\sin \alpha t}{4}$  et  $\sin \alpha t^4 = \frac{\cos 4\alpha t - 4\cos 2\alpha t + 3}{8}$ .

Pour les conditions  $\theta_0 = \pi/4$  et  $\omega_0 = \cos \alpha t$ , avec  $\alpha$  réel non nul, on s'attend donc à mesurer les fréquences :

- $\alpha, 3\alpha, \alpha + \sigma, 3\alpha + \sigma, 2\alpha + \sigma, 4\alpha + \sigma$  pour  $r_x$
- $\alpha, \alpha + \sigma$  pour  $r_y$
- $2\alpha, 4\alpha, \alpha + \sigma, 2\alpha + \sigma, 3\alpha + \sigma, 4\alpha + \sigma, 5\alpha + \sigma$  pour  $r_z$ .