

**Titre:** Étude probabiliste du comportement d'éléments structuraux en  
béton renforcé de fibres

**Auteur:** Khadija El Iraki  
Author:

**Date:** 2021

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** El Iraki, K. (2021). Étude probabiliste du comportement d'éléments structuraux en  
béton renforcé de fibres [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/5543/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/5543/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Bruno Massicotte, & Mahdi Ben Ftima  
Advisors:

**Programme:** Génie civil  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Étude probabiliste du comportement d'éléments structuraux en béton  
renforcé de fibres**

**KHADIJA EL IRAKI**

Département des génies Civil, Géologiques et des Mines

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie Civil

Décembre 2020

© Khadija El Iraki, 2020.

# **POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

## **Étude probabiliste du comportement d'éléments structuraux en béton renforcé de fibres**

présenté par

**Khadija EL IRAKI**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**M. Pierre LÉGER**, président

**M. Bruno MASSICOTTE**, membre et directeur de recherche

**M. Mahdi BEN FTIMA**, membre et codirecteur de recherche

**M. Dominic DAVIAU-DESNOYERS**, membre externe

## DÉDICACE

*À mes parents,*

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche M. Bruno Massicotte de m'avoir accordé sa confiance en me permettant de réaliser un projet de maîtrise très intéressant et stimulant. Je le remercie tout particulièrement pour sa supervision tout au long du projet, son expertise, son écoute, ses conseils avisés qui ont alimentés ma réflexion ainsi que son soutien moral et financier.

De même, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M. Mahdi Ben Ftima, mon codirecteur de recherche, pour ses connaissances techniques sur ABAQUS, sa disponibilité, sa rigueur et son accompagnement au quotidien. Les échanges que nous avons eu lors des rencontres ont été très instructifs grâce à l'étendue de ses connaissances et de ses références.

Je remercie également M. Fabien Lagier pour sa pédagogie, ses précieux conseils et ses échanges sur l'évolution du projet.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Pierre Léger et Monsieur Dominic Daviau-Desnoyers d'avoir accepté de participer à ce jury de maîtrise.

Je profite de l'occasion pour exprimer ma gratitude à tous mes amis et collègues pour tous les moments passés à leurs côtés, pour leur gentillesse et leur soutien, en particulier durant la difficile période de pandémie.

Enfin, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien inconditionnel durant tout mon parcours scolaire, et sans qui tout cela n'aurait pas été possible.

## RÉSUMÉ

Afin d'analyser la fissuration dans les structures typiques en béton, un outil de calcul appelé EPM3D (Massicotte & Ben Ftima, 2015) a été développé à l'École Polytechnique de Montréal. Il a ensuite été amélioré pour prendre en compte la fissuration dans les structures en béton armé, en BRF et BFUP. Cependant, cet outil ne tenait pas compte du caractère aléatoire des propriétés mécaniques du béton inhérent à sa nature hétérogène. En effet, la plupart des paramètres d'entrée utilisés pour établir la loi non linéaire du béton sont aléatoires et présentent une variabilité qui ne peut être négligée.

En outre, la vérification à l'état limite ultime prend en compte des facteurs de résistance appliqués aux paramètres du matériau ou à la résistance ultime pour respecter une probabilité de rupture maximale admissible; à savoir  $p_f \leq p_{f \max}$ .

Le présent projet de recherche aborde ces deux questions et se concentre sur le cadre de fiabilité qui sous-tend la conception à l'état limite à la base des codes modernes pour la conception en béton renforcé de fibres. Il aborde la question de l'utilisation des analyses probabilistes non linéaires par élément finis pour la conception des structures en BRF et le problème de transition entre l'étape de l'analyse des éléments concrets à l'étape de la conception de structures complexes en béton.

Tout d'abord, la sous-routine probabiliste permettant de rendre aléatoires certaines propriétés mécaniques du béton ordinaire et du béton renforcé de fibres a été développée. Celle-ci s'intègre parfaitement au code EPM3D préexistant et permet de reproduire de manière très précise les distributions normale, lognormale et la distribution de Weibull.

Par la suite, à partir de la campagne expérimentale réalisée par Sébastien Reygner sur des éprouvettes sollicitées en traction, un modèle de calibration a été développé. À partir de l'analyse du lien de corrélation entre la variabilité entrée et le celle obtenue, une loi a pu être établie. Il s'agit d'une fonction affine reliant ces deux paramètres dont la pente dépend de la taille de maillage employée, de la valeur de la section tendue et du matériau étudié. Ce modèle ainsi établi permet premièrement de s'affranchir de la dépendance à la taille des éléments et deuxièmement de reproduire la variabilité expérimentale obtenue grâce aux essais de Reygner.

La validité de ce modèle établi a été vérifiée grâce à plusieurs exemples d'application sur une poutre simple, des poutres croisées et une dalle simplement appuyée. Par ailleurs, ces exemples ont

permis de montrer que l'augmentation du degré d'hyperstaticité engendre une diminution de la dispersion de la réponse structurale.

Enfin, un cadre de fiabilité découlant de l'approche probabiliste développée dans le cadre de ce mémoire a été introduit pour la conception des structures en BRF. Il fournit une méthodologie pour l'estimation des facteurs de sécurité pour chaque situation de conception (ici pour les poutres simples, poutres croisées et dalles). Les résultats d'un nombre d'analyses non linéaires probabiliste ont été utilisés en conjonction avec la procédure de calibration ainsi que la méthode de Monte Carlo.

## ABSTRACT

To analyze cracking in typical concrete systems, a computational tool named EPM3D (Massicotte & Ben Ftima, 2015) was developed at Polytechnique Montréal. It was then improved to consider cracking in reinforced concrete, fiber-reinforced concrete, and ultra-high-performance -fiber reinforced concrete structures. However, this tool did not consider the random nature of the mechanical properties of concrete inherent to its heterogeneous nature. Indeed, most of the input parameters used to establish the concrete non-linear law are random and have a variability that can not be overlooked.

Furthermore, the verification of the ultimate limit state considers the strength factors applied to the material parameters or the ultimate strength to meet a maximum allowable probability of failure:

$$p_f \leq p_{f \max}.$$

This research project discusses both issues and focuses on the reliability framework underlying the limit state design for fibre-reinforced concrete structures. It addresses the issue of the use of probabilistic nonlinear finite element analysis for the design of FRC structures and the problem of transition from the concrete element analysis to the design of complex concrete structures.

First, the probabilistic subroutine allowing to randomize specific mechanical properties of ordinary concrete and fiber-reinforced concrete has been developed. This integrates perfectly with the pre-existing EPM3D code and enables the normal, lognormal and Weibull distributions to be reproduced very precisely.

Based on the experimental campaign carried out by Sébastien Reygner on tensile specimens, a calibration model was developed. From the analysis of the correlation link between the variability entered and the variability obtained, a law was established. It is an affine function linking these two parameters whose slope depends on the mesh size used, the value of the stretched section and the material studied. This model thus established makes it possible, firstly, to free oneself from dependence on the size of the elements and, secondly, to reproduce the experimental variability obtained from Reygner's tests.

Finally, a reliability framework derived from the probabilistic approach developed in this thesis has been introduced for the design of FRC structures. It provides a methodology for the estimation of safety factors for each design situation (here for simple beams, cross-beams and slabs). The



results of several probabilistic non-linear analyses have been used in conjunction with the procedure developed in Chapter 3 as well as the Monte Carlo method.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VII
TABLE DES MATIÈRES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XII
LISTE DES FIGURES.....	XIII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XIX
LISTE DES ANNEXES .....	XXI
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Généralités.....	1
1.2 Problématique.....	1
1.3 Objectifs et portée du projet de recherche.....	2
1.4 Méthodologie et organisation du mémoire.....	3
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE .....	5
2.1 Les bétons renforcés de fibres .....	5
2.1.1 Généralités.....	5
2.1.2 Les fibres .....	6
2.1.3 Formulation des bétons renforcés de fibres.....	8
2.1.4 Fissuration causée par sollicitation en traction .....	8
2.2 Considérations multi-échelles du béton .....	10
2.2.1 Béton ordinaire.....	10
2.2.2 Bétons renforcés de fibres .....	14

2.3	L'effet d'échelle .....	16
2.3.1	Effet d'échelle d'origine statistique .....	17
2.3.2	Considération de l'effet d'échelle déterministe .....	24
2.3.3	Synthèse .....	30
2.4	Modélisation probabiliste du béton .....	31
2.4.1	Lois probabilistes utilisées .....	32
2.4.2	Présentation du concept de la fiabilité des structures.....	39
2.4.3	Exemples de modélisations probabilistes de béton .....	41
2.4.4	Synthèse .....	43
2.5	Modélisation numérique probabiliste des bétons renforcés de fibres .....	44
2.6	Conclusion.....	48
CHAPITRE 3 MODÉLISATION DE LA VARIABILITÉ SPATIALE DES BÉTONS RENFORCÉS DE FIBRES.....		49
3.1	Implémentation de la sous-routine probabiliste sous EPM3D .....	49
3.1.1	Présentation .....	49
3.1.2	Implémentation du modèle probabiliste .....	53
3.1.3	Vérifications .....	58
3.1.4	Stratégie d'utilisation .....	70
3.2	Modélisation probabiliste d'une éprouvette en traction avec EPM3D .....	72
3.2.1	Campagne expérimentale utilisée.....	72
3.2.2	Présentation du modèle sur ABAQUS .....	76
3.2.3	Étude paramétrique .....	77
3.2.4	Étude de convergence sur le coefficient de variation employé.....	85
3.2.5	Étude de l'impact de la taille maillage sur la dispersion obtenue .....	89
CHAPITRE 4 APPLICATION AUX ÉLÉMENTS STRUCTURAUX.....		94

4.1	Modèle d'une poutre soumise à de la flexion 3 points.....	94
4.1.1	Présentation du modèle .....	94
4.1.2	Influence de la section de la poutre sur le coefficient de variation .....	97
4.1.3	Validation de l'approche probabiliste développée .....	100
4.1.4	Analyse des patrons de fissuration .....	103
4.2	Modèle de deux poutres croisées soumises à la flexion trois points.....	105
4.2.1	Présentation du modèle .....	105
4.2.2	Analyse des résultats .....	106
4.2.3	Analyse des patrons de fissuration .....	107
4.3	Modèle de la dalle simplement appuyée .....	108
4.3.1	Présentation du modèle .....	108
4.3.2	Analyse des résultats .....	110
4.3.3	Analyse du patron de fissuration.....	111
4.4	Calcul des facteurs de résistance .....	113
CHAPITRE 5 CONCLUSION .....		115
5.1	Rappel des objectifs .....	115
5.2	Conclusions .....	115
5.2.1	Sous-routine probabiliste d'EPM3D .....	115
5.2.2	Analyse de la variabilité obtenue .....	116
5.2.3	Méthode d'estimation des facteurs de sécurité .....	118
5.3	Recommandations .....	118
RÉFÉRENCES.....		120
ANNEXES .....		125

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Résumé des différentes approches de modélisation de l'effet d'échelle .....	31
Tableau 2.2 Synthèse des méthodes utilisées pour modéliser l'hétérogénéité du béton .....	44
Tableau 2.3 Synthèse des méthodes utilisées pour modéliser l'hétérogénéité des BRF .....	48
Tableau 3.1 Composition du béton étudié.....	73
Tableau 3.2 Propriétés mécaniques du béton étudié .....	73
Tableau 3.3 Paramètres du modèle EPM3D pour le BRF 70-80 kg .....	77
Tableau 3.4 Paramètres probabilistes et déterministes.....	77
Tableau 3.5 Comparaison des ratios de moyennes (en %) et des coefficients de variation pour des éprouvettes avec différentes tailles de maillage avec ou sans amortissement .....	81
Tableau 3.6 Résumé de l'étude de convergence pour le modèle de l'éprouvette en traction .....	88
Tableau 4.1 Résumé des caractéristiques des deux modèles de poutres .....	96
Tableau 4.2 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale $R_{max}$ pour les deux modèles de poutre.....	99
Tableau 4.3 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale $R_{max}$ pour différentes tailles de maillage.....	101
Tableau 4.4 Moyennes et coefficients de variation en entrée et sortie de la charge maximale pour les trois séries d'analyses .....	102
Tableau 4.5 Moyennes et coefficients de variation en entrée et sortie de la charge maximale pour les deux modèles : poutre simple et poutres croisées.....	107
Tableau 4.6 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale pour tous les modèles .....	110
Tableau 4.7 Valeurs des coefficients de variation de la résistance et du coefficient global de résistance en fonction du modèle considéré.....	114

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Organigramme organisationnel du mémoire .....	4
Figure 2.1 Principaux profils de fibres (Di Prisco et al., 2009) .....	7
Figure 2.2 Comportement en traction uniaxiale des BRF (Daviau-Desnoyers, 2015) .....	9
Figure 2.3 Contribution en post-pic des différentes composantes du BRF.....	10
Figure 2.4 Considérations multi-échelles du béton (Wittmann, 1983) .....	11
Figure 2.5 Exemple de modèle à l'échelle mésoscopique (Schlangen & Van Mier, 1992) : (a) projection de la structure de grain sur le modèle de treillis; (b) définition des poutres équivalentes aux éléments d'agrégats; (c) exemple d'analyse; (d) exemple de résultat de la force en fonction du déplacement .....	12
Figure 2.6 Exemple de modèle à l'échelle mésoscopique (Unger & Eckardt, 2011) .....	13
Figure 2.7 Arrachement d'une fibre droite non inclinée : (a) phase de détachement (Zhan & Meschke, 2013) .....	14
Figure 2.8 Tracé de $P-\sigma$ : Distribution statistique des valeurs de contrainte pour différentes valeurs du module de Weibull ( $m_2 < m_1$ ) (Lamon, 2016) .....	18
Figure 2.9 Le concept de volume élémentaire représentatif (Wu et al., 2012) .....	19
Figure 2.10 Exemples de volumes fortement sollicités pour différents test (Torrent & Brooks, 1985) .....	21
Figure 2.11 Représentation de la dépendance entre $\sigma N$ et la dimension $D$ de la structure : (a) structure comportant une entaille profonde : effet d'échelle de type 2 (b) structure ne comportant pas d'entaille : effet d'échelle de type 1 (Hoover & Bažant, 2014) .....	25
Figure 2.12 Modèle d'endommagement à deux échelles (Saouridis & Mazars, 1992) .....	28
Figure 2.13 Fonction d'atténuation du poids probabiliste (Sellier & Millard, 2014) .....	29
Figure 2.14 Fonction de densité de probabilité de la loi normale (Balakrishnan et al., 2019) .....	33
Figure 2.15 Fonction de densité de probabilité de la loi lognormale pour différentes valeurs des paramètres $\mu$ et $\sigma$ (Balakrishnan et al., 2019) .....	35

Figure 2.16 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs du facteur de localisation $a$ (Rinne, 2008) .....	36
Figure 2.17 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs du facteur d'échelle $b$ (Rinne, 2008).....	37
Figure 2.18 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs de pentes (Rinne, 2008) .....	38
Figure 2.19 Concept général de la fiabilité des structures (Ben Ftima & Massicotte, 2012) .....	40
Figure 2.20 Modèle numérique probabiliste utilisé pour représenter le comportement du béton (Rossi et al., 1994 (b)).....	42
Figure 2.21 (a) Spécimen contenant une fibre horizontale; (b) Les déplacements dans la direction $x$ ; (c) La distribution de la contrainte en traction au sein du spécimen (Ibrahimbegovic, 2009; Rukavina et al., 2019) .....	45
Figure 2.22 Exemple de la nouvelle loi proposée pour décrire l'évolution de la contrainte normale en fonction du déplacement normal à l'élément de contact (Rossi et al., 2015) .....	46
Figure 2.23 Approche multi-échelle de modélisation de la variabilité des BRF en tension (Li et al., 2018).....	47
Figure 3.1 Courbe uniaxiale de la contrainte en fonction de la déformation pour un élément en compression (Massicotte & Ben Ftima, 2015).....	51
Figure 3.2 Courbe typique de la contrainte en fonction de la déformation pour un élément en traction : béton non armé (Massicotte & Ben Ftima, 2015).....	52
Figure 3.3 Définition des constantes relatives au béton renforcé de fibres.....	53
Figure 3.4 Principe de modélisation de la variabilité des BRF.....	55
Figure 3.5 Modèle probabiliste développé dans EPM3D .....	55
Figure 3.6 Principe de fonctionnement de la sous-routine probabiliste pour un béton ordinaire ..	56
Figure 3.7 Principe de fonctionnement de la sous-routine probabiliste pour un béton renforcé de fibres.....	57

Figure 3.8 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction .....	60
Figure 3.9 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression .....	61
Figure 3.10 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction .....	62
Figure 3.11 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression .....	63
Figure 3.12 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction .....	64
Figure 3.13 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression .....	65
Figure 3.14 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres .....	66
Figure 3.15 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres .....	67
Figure 3.16 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres .....	68
Figure 3.17 Valeurs de traction résiduelle (en MPa) pour un cube en BRF sollicité en traction pour un déplacement imposé de 5 mm .....	69
Figure 3.18 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale et des valeurs calculées à partir des données renvoyées par le logiciel ABAQUS .....	70
Figure 3.19 Mensurations de l'éprouvette utilisée pour les essais de traction directe .....	74
Figure 3.20 Courbes de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure pour les six spécimens de la campagne expérimentale .....	75



Figure 3.21 Ajustement réalisé avec la courbe moyenne de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure .....	75
Figure 3.22 Conditions aux limites du modèle éléments finis de l'essai de l'os en traction.....	76
Figure 3.23 Les trois types de maillage utilisés : (a) Maillage tétraédrique manuel (b) Maillage tétraédrique optimisé (c) Maillage hexaédrique.....	79
Figure 3.24 Courbes de la force en fonction du temps pour différentes fréquences du filtre Butterworth.....	82
Figure 3.25 Valeurs des énergies de fissuration (élastique et en post-pic) pour différentes fréquences du filtre Butterworth .....	82
Figure 3.26 Ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimentale en fonction du nombre d'analyses entrée pour différentes lois probabilistes et pour différentes tailles de maillage .	84
Figure 3.27 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré en fonction du nombre d'analyses pour différentes lois probabilistes et pour différentes tailles de maillage.....	85
Figure 3.28 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 25 <i>mm</i> ) .....	86
Figure 3.29 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 16 <i>mm</i> ) .....	87
Figure 3.30 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 10 <i>mm</i> ) .....	87
Figure 3.31 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 5 <i>mm</i> ).....	88
Figure 3.32 Géométrie de l'éprouvette sur laquelle se base la méthode de calibration.....	89

Figure 3.33 Courbe du COV obtenu en fonction du COV entré en fonction de la taille du maillage .....	91
Figure 3.34 Modèle permettant de relier la dispersion à la taille du maillage pour l'éprouvette en traction.....	91
Figure 3.35 Méthodologie d'analyse probabiliste rationnelle pour les BRF .....	93
Figure 4.1 Géométrie, déplacement et conditions aux limites du modèle par éléments finis de la poutre en flexion 3 points.....	95
Figure 4.2 Modélisation de la poutre en flexion 3 points sur ABAQUS (Modèle 1) .....	95
Figure 4.3 Modélisation de la poutre en flexion 3 points sur ABAQUS (Modèle 2) .....	96
Figure 4.4 Courbe de la charge en $kN$ en fonction de la flèche en $mm$ .....	97
Figure 4.5 (a) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour le modèle 1 de poutre (section $400\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ) (b) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour le modèle 2 de poutre (section $50\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ).....	98
Figure 4.6 Comportement en flexion des poutres en BRF (CSA, 2019) .....	98
Figure 4.7 (a) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de $25\text{ mm}$ (série 1) b) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de $12,5\text{ mm}$ (série 2) .....	101
Figure 4.8 Différents patrons de fissurations obtenus pour la poutre avec un maillage de taille $12,5\text{ mm}$ .....	103
Figure 4.9 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de $12,5\text{ mm}$ .....	104
Figure 4.10 Différents patrons de fissurations obtenus pour la poutre avec un maillage de taille $25\text{ mm}$ .....	105
Figure 4.11 Modélisation de la poutre croisée en flexion 3 points sur ABAQUS .....	106
Figure 4.12 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de $25\text{ mm}$ .....	107

Figure 4.13 Différents patron de fissuration obtenus pour les poutres croisées avec un maillage de taille 25 <i>mm</i> .....	108
Figure 4.14 Modélisation de la dalle simplement appuyée sur ABAQUS.....	109
Figure 4.15 Dimensions des différents éléments constituant le modèle .....	109
Figure 4.16 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de 25 <i>mm</i> .....	110
Figure 4.17 Patron de fissuration obtenu pour la dalle avec un maillage de 25 <i>mm</i> .....	111
Figure 4.18 Déformée de la dalle .....	112
Figure 4.19 Dalle avec les vecteurs de force de contact .....	112

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Abréviations :

BRF	Béton Renforcé de Fibres
BFUP	Béton Fibré Ultra-Performant
COV	Coefficient de Variation
EF	Éléments finis
EPM3D	Endommagement progressif multiaxial tridimensionnel
FPZ	Fracture Process Zone
ITZ	Interfacial Transition Zone
S/G	Rapport massique sable/granulats
VER	Volume Élémentaire Représentatif
VFS	Volume Fortement Sollicité
VSR	Volume Statistiquement Représentatif

### Variables :

$A_{cr}$	Aire de la section transversale d'un volume élémentaire représentatif
$D$	Dimension caractéristique de la structure étudiée
$E$	Module de Young
$E_d$	Valeur de la pente adoucissante en post-pic dans le modèle d'EPM3D
$f'_t$	Résistance en traction du béton
$f'_c$	Résistance en compression du béton
$G_f$	Énergie de fissuration
$l_c$	Longueur d'autocorrélation
$m$	Paramètre de forme de la loi de Weibull
$p_f$	Probabilité de rupture

$p_{f \max}$	Probabilité de rupture maximale admissible
$P_s$	Probabilité de survie d'un élément
$R_d$	Valeur de la résistance de conception
$R_m$	Valeur de la résistance moyenne
$V_A$	Volume du plus gros granulat
$V_S$	Volume du spécimen étudié
$V_0$	Volume de référence
$w$	Ouverture de fissure
$W_E$	Travail externe
$\beta$	Indice de fiabilité
$\gamma_G$	Facteur de sécurité
$\tilde{\varepsilon}$	Déformation équivalente
$\sigma^f$	Force de pontage exercée par une fibre
$\sigma_N$	Contrainte nominale
$\sigma_{I,II,III}$	Contraintes principales

## LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Code de la sous-routine probabiliste d'EPM3D .....	125
Annexe B	Analyse des patrons de fissuration de l'éprouvette sollicitée en traction .....	137
Annexe C	Approche analytique de modélisation d'un prisme en traction sous MATLAB.....	151

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

Les bétons renforcés de fibres métalliques sont de plus en plus utilisés dans diverses applications industrielles (FRC, 2014) en raison des propriétés exceptionnelles qu'ils peuvent procurer aux ouvrages en béton. Il y a 20 ans de cela, un effort de consolidation des acquis sur *le béton renforcé de fibres* ou *BRF* a permis de dresser un panorama de ses différentes caractéristiques (ACI 1996) alors que des travaux plus récents ont abouti à des recommandations nationales et internationales (AFREM 1995, RILEM 2003, JSCE 2008, CNR-DT 204 2006, FIB 2010, CSA 2019). Ces recommandations sont efficaces dans le cadre de la conception de structures simples et isostatiques chargées en flexion. Cependant, celles-ci ne permettent pas de proposer des solutions pertinentes pour les structures les plus complexes. Tel est le cas des structures hyperstatiques par exemple.

En outre, le contrôle de l'ouverture des fissures est très important pour la durabilité des ouvrages et constitue un avantage majeur des BRF par rapport aux structures utilisant des barres d'armatures conventionnelles. De nos jours, les recommandations de conception existantes ne sont pas en mesure de fournir suffisamment d'informations pertinentes concernant la fissuration à l'état limite de service. La meilleure approche pour la conception de structures en matière de sécurité et de développement durable consiste donc à utiliser l'analyse par éléments finis.

### 1.2 Problématique

Un outil numérique nommé EPM3D (Massicotte & Ben Ftima, 2015) a été développé à Polytechnique Montréal afin d'analyser la fissuration des structures en béton ordinaire. Il a ensuite été amélioré afin de prendre en compte la fissuration des structures en béton armé, en BRF ou encore en BFUP.

Néanmoins, cet outil ne permettait pas de tenir compte du caractère aléatoire des propriétés mécaniques du béton inhérente à sa nature hétérogène. En effet, la plupart des paramètres d'entrée nécessaires à l'établissement de la loi non linéaire du béton sont aléatoires et possèdent une variabilité qui ne peut être négligée.

Par ailleurs, la vérification à l'état limite ultime prend en compte des facteurs de résistance appliqués aux paramètres du matériau ou à la résistance ultime pour respecter une probabilité de rupture maximale admissible; à savoir  $p_f \leq p_{f \max}$ .

Le présent projet de recherche adresse ces deux points évoqués et s'intéresse au cadre de fiabilité qui sous-tend la conception à l'état limite à la base des codes modernes pour la conception en béton renforcé de fibres. Il aborde la question de l'utilisation des analyses probabilistes non linéaires par élément finis pour la conception des structures en BRF et le problème de transition entre l'étape de l'analyse des éléments concrets à l'étape de la conception de structures complexes en béton.

Plutôt qu'un facteur de résistance spécifié comme le recommandent la plupart des codes de conception, une méthode d'estimation du facteur de résistance global pour un problème de conception donné pourrait être fournie dans les futurs codes. Par conséquent, l'objectif de cette étude est de mettre en avant une application possible de la méthode probabiliste développée aux cadres de fiabilité utilisés pour l'analyse non linéaire par éléments finis dans la conception des structures en béton. Comme on le verra plus loin dans le présent document, ni le concept général de fiabilité impliquant le calcul de la probabilité de défaillance ni le concept de code de conception utilisant des facteurs de charge et de résistance ne sont appropriés pour l'utilisation de l'analyse non linéaire par éléments finis pour la conception de structures en béton. L'alternative, telle que présentée dans ce document, étend le concept de facteur de résistance global déjà introduit dans certains codes internationaux en prenant en compte le modèle probabiliste développé dans le cadre de ce projet de recherche couplé à la précision du calcul des éléments finis non linéaires pour chaque problème de conception.

### 1.3 Objectifs et portée du projet de recherche

Compte tenu des enjeux énoncés, les quatre objectifs principaux de ce projet de maîtrise sont les suivants :

- déterminer l'influence de la variabilité des propriétés mécaniques (comportement post-fissuration) du BRF sur le comportement de certains éléments structuraux, ainsi que de mettre en œuvre les lois probabilistes qui modéliseront cette variabilité;
- coder une sous-routine probabiliste qui viendrait s'ajouter au code existant d'EPM3D permettant d'intégrer l'aspect statistique du comportement en post-fissuration du BRF;



- mettre en œuvre une nouvelle méthodologie de modélisation probabiliste rationnelle et simple pour les structures en BRF en utilisant l'analyse non linéaire par éléments finis;
- en déduire l'influence de l'hyperstaticité sur les facteurs de résistance des éléments structuraux en BRF.

## 1.4 Méthodologie et organisation du mémoire

Les étapes adoptées afin d'atteindre les objectifs du projet préalablement annoncés sont les suivantes :

1. identifier les lois probabilistes et les paramètres d'entrée permettant de modéliser la variabilité des propriétés mécaniques du BRF;
2. coder sous le logiciel FORTRAN une sous-routine permettant de modéliser cette variabilité avec le logiciel EPM3D;
3. trouver le lien de corrélation entre les paramètres en entrée et les paramètres en sortie en fonction de la taille de maillage utilisée;
4. appliquer le modèle trouvé dans l'étape 3 à plusieurs types d'éléments structuraux et étudier la dispersion de la réponse structurale obtenue en sortie;
5. calculer les facteurs de résistance globaux utilisés en conception en s'appuyant sur les dispersions obtenues grâce au modèle probabiliste développé.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Le premier chapitre présente le problème, les objectifs, la méthodologie et l'organisation du mémoire. Le deuxième chapitre explicite les connaissances actuelles nécessaires à la compréhension du projet de mémoire. Le troisième chapitre présente le modèle permettant de rendre compte de la variabilité des propriétés mécaniques des bétons renforcés de fibres. Le quatrième chapitre porte sur diverses applications à de multiples éléments structuraux. Enfin, le chapitre cinq permet de résumer le travail en tirant des conclusions sur l'ensemble des travaux réalisés ainsi que d'émettre des recommandations pour la poursuite du projet. L'organisation du mémoire est présentée dans la Figure 1.1.

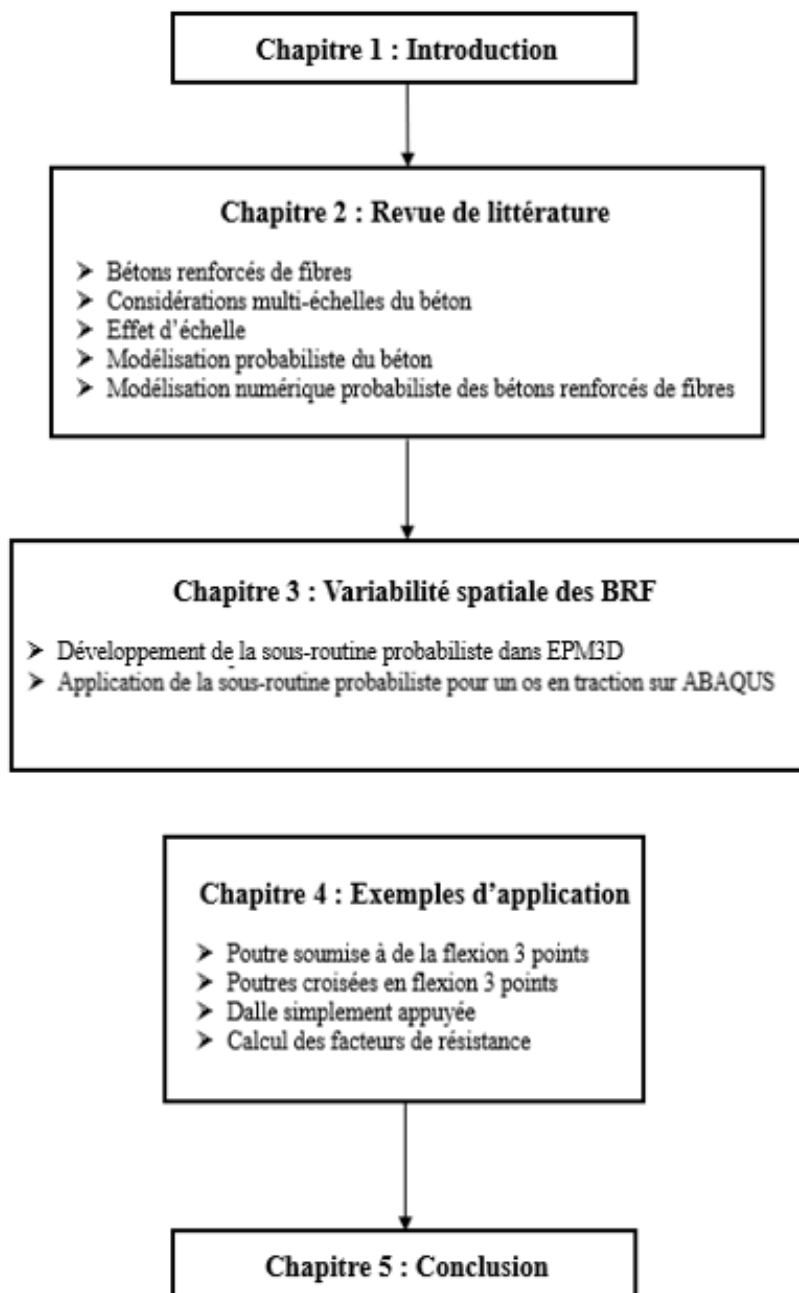


Figure 1.1 Organigramme organisationnel du mémoire

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Considérant les enjeux mis en exergue par les objectifs du projet de recherche, il paraissait essentiel d'aborder les thématiques suivantes afin d'acquérir une bonne compréhension des différents axes de recherche présentés dans les chapitres suivants :

- les bétons renforcés de fibres;
- les considérations multi-échelles du béton;
- l'effet d'échelle;
- la modélisation probabiliste du béton;
- la modélisation numérique probabiliste des BRF.

### 2.1 Les bétons renforcés de fibres

Au cours des dernières décennies, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude des bétons renforcés de fibres en raison de leur grand potentiel. En effet, ce type de matériau est de plus en plus utilisé dans le domaine des structures pour les propriétés mécaniques remarquables qu'il peut conférer aux ouvrages en béton.

Les prochaines sous-sections porteront donc sur la description des bétons de fibres courants. Elles présentent l'ensemble des détails liés à la technologie des bétons renforcés de fibres et plus précisément leur formulation, les types de fibres et, finalement, le comportement mécanique en traction.

#### 2.1.1 Généralités

L'objectif principal de l'ajout de fibres est l'amélioration des propriétés mécaniques du béton et, notamment, le comportement en traction. Dans les structures en béton armé, les armatures sont employées dans le but d'optimiser les caractéristiques mécaniques. Par ailleurs, ces dernières sont continues et sont localisées à des endroits stratégiques permettant de conférer aux éléments structuraux en béton la résistance et la ductilité nécessaires à l'atteinte des objectifs de performance exigés.

Les fibres sont quant à elles discontinues et distribuées de manière aléatoire au sein de la matrice cimentaire. L'utilisation des fibres peut permettre d'éliminer ou encore de réduire le nombre de

barres d'armatures. Grâce à celles-ci, la fissuration à l'état de service est mieux contrôlée, ce qui a pour conséquence directe l'amélioration de la durabilité des structures mais aussi l'atteinte de performances structurales améliorées.

### **2.1.2 Les fibres**

Dans ce paragraphe, seules les fibres en acier seront abordées au vu des travaux présentés dans les chapitres suivants. Les bétons renforcés de fibres courants sont visés, soit ceux contenant des gros granulats de diamètre usuel (10 à 20 mm). Les formes de fibres les plus couramment utilisées sont mises en évidence dans la Figure 2.1. Selon leur géométrie et le type de matrice cimentaire, les fibres agissent différemment (Rossi, 1998). En effet :

- les fibres droites développent des contraintes de liaison à la matrice cimentaire sur toute leur longueur, empêchant ainsi la fissure de s'ouvrir;
- les fibres ondulées peuvent être moins longues puisque celles-ci développent des contraintes supplémentaires dues à l'ancrage conféré par la géométrie courbe;
- les crochets ou l'élargissement aux extrémités des fibres permettent d'améliorer leur ancrage à la matrice, retardant de cette manière l'arrachement des fibres de la matrice tout en dissipant une quantité d'énergie lors du processus d'arrachement.

Par ailleurs, les fibres d'acier peuvent également avoir des revêtements tel que le zinc (reconnu pour augmenter la résistance à la corrosion) ou le laiton (permettant d'améliorer l'ancrage à la matrice).

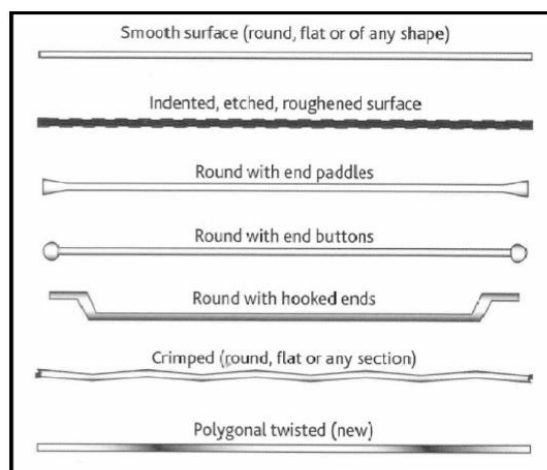


Figure 2.1 Principaux profils de fibres (Di Prisco et al., 2009)

Par ailleurs, et afin d'assurer l'efficacité des fibres au sein du béton, Naaman (2003) affirme que :

- la résistance en traction des fibres et le module d'Young doivent être nettement supérieurs à ceux de la matrice cimentaire (de l'ordre du double ou du triple);
- la ductilité des fibres doit être suffisamment grande pour que ces dernières ne subissent pas de rupture par abrasion ou par flexion;
- la force de liaison entre la matrice cimentaire et les fibres doit être supérieure à la résistance en traction de la pâte de ciment.

En outre, Snyder et Lankard (1972) et Swamy et al. (1974) ont établi un lien de corrélation entre la maniabilité du mélange de béton et le rapport d'élancement des fibres (égal au rapport entre la longueur et le diamètre des fibres), en effet, ils énoncent que :

- pour des rapports d'élancement identiques, l'utilisation de fibres plus courtes entraîne une meilleure maniabilité;
- pour un dosage de fibres donné, la maniabilité d'un BRF diminue lorsque le rapport d'élancement augmente;
- le risque de formation d'oursins de fibres augmente avec l'augmentation du rapport d'élancement pour un dosage donné.

Enfin, Rossi et Richer (1987) ont démontré que l'utilisation de fibres plus courtes (2 à 13 mm) permet de retarder l'apparition de macrofissures, ce qui améliore la ductilité et la résistance en

traction du béton. Les fibres longues (15 à 60 mm) avec ancrage mécanique retardent quant à elles la rupture, ce qui a pour conséquence d'augmenter la capacité portante, la ductilité en flexion et la résistance au cisaillement.

### **2.1.3 Formulation des bétons renforcés de fibres**

Rossi et Harrouche (1990) proposent une méthode de formulation très générale déjà utilisée pour les bétons ordinaires (Baron & Lesage, 1965) et les bétons à haute résistance (contenant de la fumée de silice) et qui a été adaptée aux bétons renforcés de fibres métalliques. Il s'agit de la méthode Baron-Lesage, mise au point dans le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) et utilisée dans la plupart des projets de recherche de Polytechnique Montréal pour optimiser les squelettes granulaires des bétons ordinaires (Massicotte, 2004).

Cette méthode repose sur trois hypothèses clés amplement confirmées par l'expérience :

- pour un rapport Eau/Ciment fixe, le béton le plus maniable est le béton le plus compact et sa formulation est optimale;
- la proportion idéale de granulats ne dépend pas de la nature ou du volume de la pâte de ciment;
- l'ajout de fibres métalliques n'affecte pas la validité des deux premières hypothèses.

Par ailleurs, pour un type et un dosage de fibres métalliques donnés, une longueur de fibres au minimum deux fois plus grande que le plus gros granulat doit être choisie (Rossi, 1998). Enfin, la méthode Baron-Lesage consiste principalement à détecter la meilleure maniabilité et compacité en faisant varier le rapport massique sable/granulats (S/G) pour une quantité de fibres donnée. En général, le maniabilimètre est utilisé pour optimiser le rapport S/G alors que le test d'étalement est utilisé pour optimiser la quantité d'adjuvants.

### **2.1.4 Fissuration causée par sollicitation en traction**

La Figure 2.2 présente un résumé du processus de fissuration des BRF soumis à de la traction uniaxiale. Ce dernier peut être décrit en trois étapes distinctes (Rossi et al., 2015).

1. Au cours de la première étape, la microfissuration diffuse se produit dans tout le volume soumis à de la traction (1). Les fibres d'acier possédant de grandes dimensions (longueur

et diamètre) par rapport à celles de fissures (ouverture de fissure) n'agissent pas sur la formation ni sur l'évolution de ces microfissures.

2. La seconde étape concerne la propagation des microfissures qui conduit, à terme, à l'apparition d'une unique macrofissure et consiste ainsi en la localisation de la fissuration (2). Comme pour la première étape, durant cette étape intermédiaire et brève, les fibres d'acier n'affectent pas la propagation de ces mésosfissures de manière significative.
3. La troisième et dernière étape concerne la propagation des macrofissures (3). Celle-ci coïncide avec la phase adoucissante du matériau. Au cours de cette étape, les fibres transfèrent les efforts à travers les macrofissures, contrôlant de la sorte l'ouverture des fissures et leur propagation.

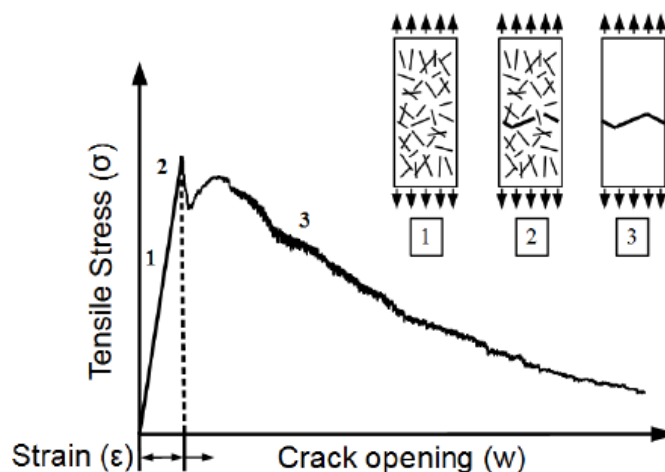


Figure 2.2 Comportement en traction uniaxiale des BRF (Daviau-Desnoyers, 2015)

Pour résumer, il est possible d'affirmer que :

- avant d'atteindre le pic de charge, seule la matrice cimentaire contribue au processus de fissuration du BRF et les fibres métalliques sont considérées comme mécaniquement neutres;
- après le pic, l'action des fibres devient très importante, notamment pour le contrôle de la propagation des macrofissures.

Ainsi, le comportement global d'un béton renforcé de fibres résulte de la sommation de ces deux contributions : la contribution de la matrice cimentaire en post-pic et l'effet de pontage exercé par les fibres en pointe de fissure en post-pic (voir la Figure 2.3).

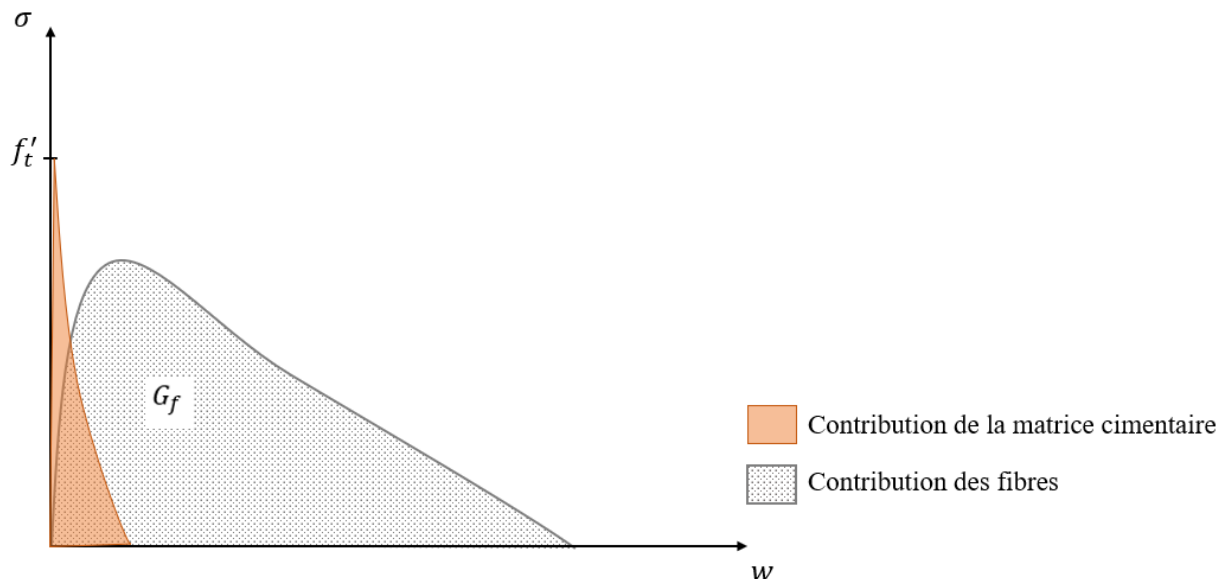


Figure 2.3 Contribution en post-pic des différentes composantes du BRF

Les éléments structuraux rencontrés dans les ouvrages modernes telles que les poutres ou les dalles sont généralement soumis à de la flexion qui à son tour génère de la traction dans les zones tendues de l'élément. Ainsi, l'amélioration de la résistance en flexion est principalement due à l'apport de ductilité amené par les fibres dans la zone tendue d'une poutre. Les fibres permettent de ralentir l'ouverture des macrofissures, ce qui a pour effet d'augmenter la capacité portante, de réduire les flèches pour un même niveau de charge et d'accroître la ductilité de la structure.

## 2.2 Considérations multi-échelles du béton

Cette section présente trois échelles (macroscopique, mésoscopique et microscopique) suivant lesquelles les bétons ordinaires et bétons renforcés de fibres peuvent être considérés.

### 2.2.1 Béton ordinaire

Selon Wittmann (1983), il convient de considérer les bétons ordinaires selon trois échelles distinctes afin de les modéliser : l'échelle *macro*, *méso* et *micro* (voir la Figure 2.4).



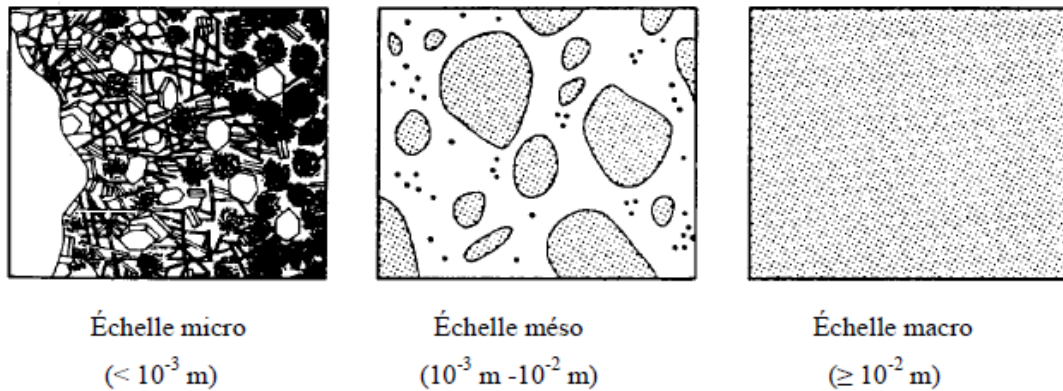


Figure 2.4 Considérations multi-échelles du béton (Wittmann, 1983)

Tout d'abord, l'échelle macroscopique englobe toutes les notions physiques (grandeurs, éléments constitutifs, mouvements, phénomènes) dont la manifestation est visible à l'œil nu. À ce niveau, le matériau est considéré comme étant continu et homogène avec des propriétés moyennes équivalentes.

Ensuite, l'échelle mésoscopique ( $10^{-2}$  à  $10^{-3}$ ) prend en considération les hétérogénéités du béton et rend la théorie des milieux continus inapplicable. Pour modéliser le béton, il faut alors tenir compte des granulats, de la matrice cimentaire et des zones d'interface matrice-granat, également connue sous le nom d'*ITZ* (*Interfacial Transition Zone*).

Un exemple de modélisation mésoscopique est illustré à la Figure 2.5. Il présente un modèle connu sous le nom de *Lattice Model*, formé d'un réseau de treillis ou de poutres avec des propriétés mécaniques différentes représentant un granulat, la matrice cimentaire ou encore une zone d'interface entre les deux. La superposition du patron hétérogène de particules généré aléatoirement et d'un réseau de treillis permet d'attribuer les propriétés mécaniques aux différents éléments finis (voir les Figure 2.5a et 2.5b).

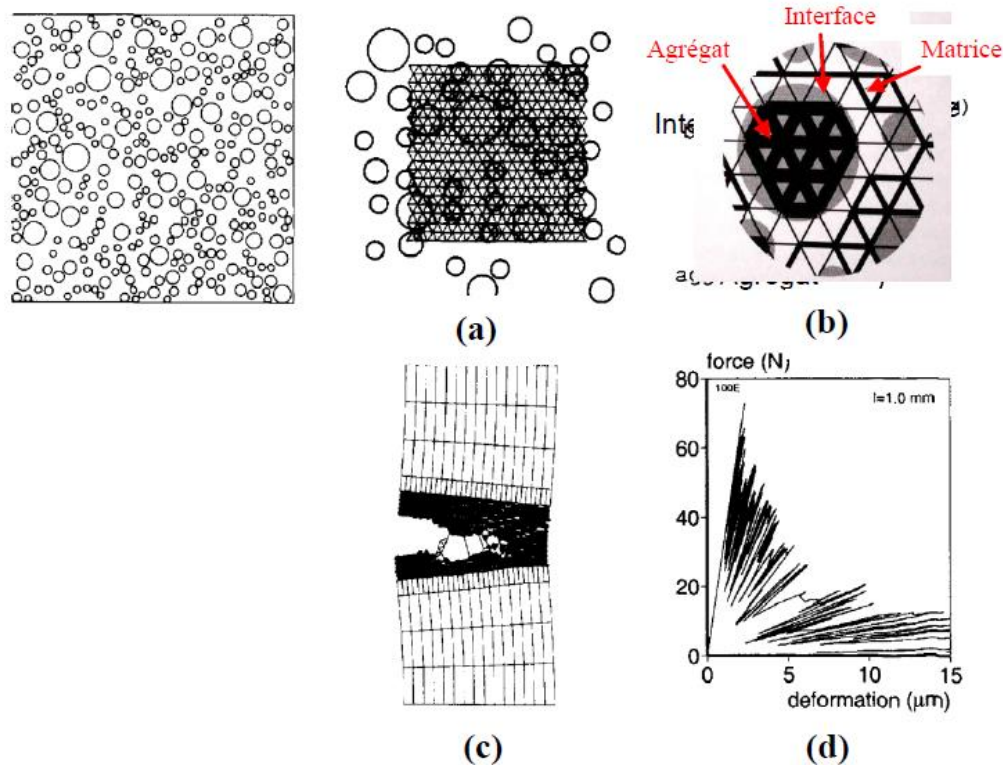


Figure 2.5 Exemple de modèle à l'échelle mésoscopique (Schlangen & Van Mier, 1992) : (a) projection de la structure de grain sur le modèle de treillis; (b) définition des poutres équivalentes aux éléments d'agrégats; (c) exemple d'analyse; (d) exemple de résultat de la force en fonction du déplacement

Un second exemple de modélisation mésoscopique est montré à la Figure 2.6. Les granulats sont représentés sous la forme d'ellipsoïdes et sont obtenus à partir de courbes de granulométrie permettant de caractériser leur distribution. La matrice cimentaire et la zone d'interface sont considérées comme étant des constituants distincts. Chaque élément fini possède des propriétés mécaniques caractéristiques de la famille à laquelle il appartient.

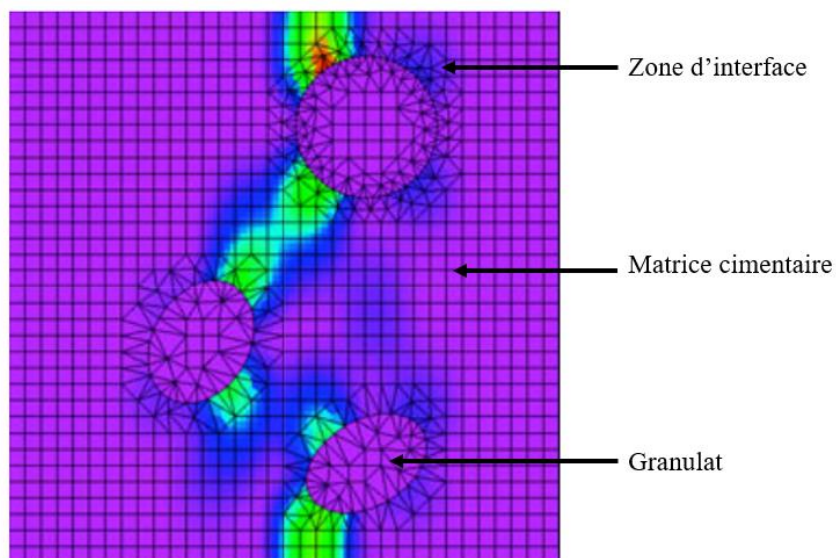


Figure 2.6 Exemple de modèle à l'échelle mésoscopique (Unger & Eckardt, 2011)

Enfin, à l'échelle microscopique, les molécules de CSH (Calcium-Silicates-Hydrates) constitutives de la pâte de ciment sont considérées. Leurs différentes interactions avec l'eau sont également prises en compte, ce qui permet d'analyser l'ensemble des effets qui découlent de ces réactions comme le fluage et le retrait par exemple.

Il paraît donc clair qu'à chacune de ces échelles, différents types de paramètres d'entrée sont envisagés pour la modélisation numérique. À titre d'exemple, un élément fini modélisé à l'échelle macroscopique est considéré comme étant homogène, le représenter à une échelle plus petite révélerait ses hétérogénéités et conduirait à une perte de sens des propriétés mécaniques qui lui ont été préalablement assignées. En réalité, ces propriétés se transforment en résultats de l'analyse et ne sont plus des paramètres d'entrée (c'est le cas par exemple pour la résistance en traction  $f'_t$  ou encore l'énergie de fissuration  $G_f$  qui sont considérées comme des paramètres d'entrée pour une échelle de modélisation macroscopique).

En outre, le constat suivant peut-être fait : le passage vers une échelle plus grande réduit le nombre d'éléments nécessaires à la discrétisation de la structure, réduisant ainsi le temps de calcul de manière significative. Néanmoins, ce changement d'échelle se fait aux dépens de simplifications qui peuvent parfois conduire à la suppression d'un aspect donné (Ben Ftima, 2013).

## 2.2.2 Bétons renforcés de fibres

Les bétons renforcés de fibres étant des matériaux composites typiques, il est important d'examiner certains phénomènes significatifs à l'échelle où ils se produisent. En considérant leur microstructure, les BRP peuvent être modélisés suivant trois niveaux distincts.

Tout d'abord, pour les BRP à l'échelle microscopique, des modèles analytiques ou numériques ont été développés afin de pouvoir décrire l'arrachement d'une unique fibre intégrée à la matrice avec une inclinaison aléatoire (Zhan & Meschke, 2013). L'exemple le plus simple à considérer est celui de la fibre droite qui ne possède pas d'inclinaison par rapport au plan de la fissure. Le processus d'arrachement dans ce cas de figure est divisé en trois étapes : une première phase où la fibre est encore liée à la matrice, une deuxième phase de détachement et enfin une phase d'arrachement (voir la Figure 2.7).

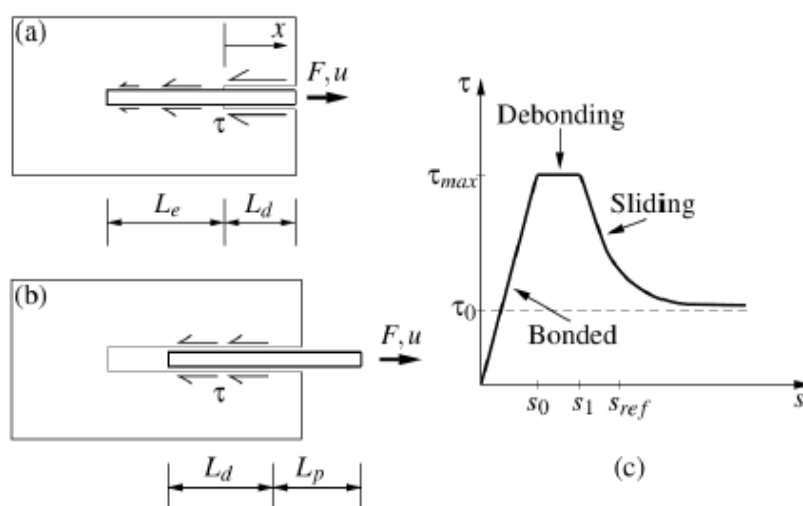


Figure 2.7 Arrachement d'une fibre droite non inclinée : (a) phase de détachement (Zhan & Meschke, 2013)

Le fait de considérer une fibre inclinée par rapport au plan de la fissure implique un niveau de complexité supplémentaire causé par la contrainte de frottement et la déformation plastique dues à la pression latérale exercée par l'interface avec la matrice. Fantilli et Vallini (2007) ont élaboré un modèle analytique afin de rendre compte du comportement des fibres inclinées. Le modèle pour l'arrachement est calibré, dans un premier temps, avec les paramètres propres à l'interface fibre-

matrice alors que dans un second temps, un algorithme est utilisé pour générer le diagramme force-déplacement pour la fibre droite avec un angle d'inclinaison quelconque (Zhan & Meschke, 2013).

Les fibres avec des crochets aux extrémités possèdent une plus grande ductilité lorsque ces dernières sont arrachées. Néanmoins, en raison du comportement local hautement non linéaire des extrémités crochues et de la portion de la matrice qui les entoure, ainsi qu'en raison de la complexité des interactions matrice-fibre, il n'existe que très peu de modèles analytiques décrivant le comportement de ce type de fibre (Alwan et al., 1999). Pour pouvoir mettre en application cette formulation analytique, des modèles numériques par éléments finis ont été développés sur le logiciel ABAQUS (Hibbitt et al., 2014).

Ensuite, afin de pouvoir étudier les BRF à une échelle mésoscopique, il faut considérer un volume statistiquement représentatif du matériau soumis à un chargement en traction. Initialement, toutes les fibres sont encore bien reliées à la matrice de béton et ces deux composants ont un comportement linéaire élastique (Zhan & Meschke, 2013). L'augmentation de la contrainte en traction mène à une initiation de la microfissuration au sein du volume élémentaire représentatif, ou VER, au niveau des points de faiblesses (défauts). À mesure que la charge augmente, ces microfissures s'ouvrent. Néanmoins, et contrairement à un béton ordinaire, l'ouverture est contrôlée par la force de pontage exercée par les fibres qui traversent ces microfissures.

La force de pontage  $\sigma^f$  en fonction de l'ouverture de fissure  $w$  est donnée par la relation suivante (Zhan & Meschke, 2013) :

$$\sigma^f = \frac{1}{A^{cr}} \sum_z \sum_{\theta} F(z, \theta, w) \quad (2.1)$$

où  $A^{cr}$  désigne la section transversale du VER,  $z$  et  $\theta$  désignent respectivement la position et l'orientation de chacune des fibres alors que  $F$  correspond à la force unitaire développée par une fibre calculée grâce au modèle présenté dans la section 2.1.1.2.

À l'échelle macroscopique, la modélisation du béton fibré peut être réalisée à l'aide du concept d'énergie de fissuration déjà utilisé pour le béton conventionnel. Ainsi, l'effet de pontage des fibres est indirectement modélisé via l'utilisation d'une énergie de fissuration  $G_f$  associée aux fibres qui est beaucoup plus importante que celle associée à la matrice cimentaire (Figure 2.3).

Dans ce travail, la modélisation du béton de fibres métalliques est réalisée à l'échelle mésoscopique en raison des difficultés numériques associées à la prise en compte explicite des fibres pour des gros modèles numériques (ex : modèle de dalle). Toutefois, la variabilité aléatoire de l'orientation des fibres a un impact direct sur les caractéristiques mécaniques macroscopiques tel que l'énergie de fissuration et ne peut donc être ignorée. Il est donc important d'utiliser une approche probabiliste pour l'analyse numérique à l'échelle macroscopique plutôt qu'une approche déterministe, tel que décrit dans la section 2.4 plus loin. De plus, le passage d'une échelle mésoscopique à une échelle macroscopique ne doit pas se faire au risque de filtrer ou d'ignorer de phénomènes physiques importants tel que l'effet d'échelle. Il est donc important de comprendre l'origine de cet effet et la façon de le considérer selon une approche macroscopique.

## 2.3 L'effet d'échelle

En mécanique des solides, l'effet d'échelle est communément défini comme étant l'influence de la dimension caractéristique de la structure étudiée  $D$  sur la contrainte nominale  $\sigma_N$  lorsque deux structures présentant une similitude géométrique sont comparées (Bažant, 1999).

Griffith (1921) a été l'un des instigateurs des travaux de recherche sur le phénomène d'effet d'échelle. En effet, celui-ci a montré que la résistance mécanique des fibres de verre augmentait lorsque leur diamètre diminuait. Il en a déduit que « la faiblesse des solides isotropes ... est due à la présence de discontinuités ou de défauts ... La résistance effective des matériaux pourrait être multipliée par 10 ou par 20 si ces défauts étaient éliminés ». À la suite de cette découverte majeure, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'effet d'échelle d'*origine statistique*. Peirce (1926), Tippett (1925) et Von Mises (1936) ont ensuite formulé la théorie du maillon faible ainsi que celle des valeurs extrêmes. Weibull (1939) a finalisé la théorie du maillon faible qui a ainsi donné lieu à une loi de probabilité portant son nom.

L'effet d'échelle peut également être d'*origine déterministe* appelé aussi *énergétique*, tel que l'a identifié Bažant (1984). Il est alors dû à une libération d'une quantité importante d'énergie lorsqu'une grande fissure ou une grande zone d'élaboration de la fissuration (*FPZ*) se développe avant que la charge maximale ne soit atteinte.

Dans cette section, les différents modèles qui ont tenté de reproduire l'effet d'échelle statistique ou encore la combinaison des effets déterministes et statistiques seront présentés. Cette partie s'achèvera par une synthèse recensant les principales caractéristiques des différentes méthodes présentées.

### 2.3.1 Effet d'échelle d'origine statistique

Dans cette partie, nous commencerons par expliquer les fondements de la théorie de Weibull en introduisant tout d'abord le modèle de maillon faible, puis nous présenterons le modèle développé par Rossi et Ulm (1997) découlant de cette même théorie.

#### 2.3.1.1 Le modèle de Weibull

##### 2.3.1.1.1 Le principe de base

Considérons une structure unidimensionnelle constituée de plusieurs éléments placés en série. Cette chaîne de  $N$  maillons (représentées par des éléments de volume) se rompt au niveau de l'élément le moins résistant. Weibull (1939) suppose que les résistances de chacun des éléments de la chaîne constituent des variables aléatoires indépendantes.

La probabilité de survie d'un élément de volume  $V$  sous une contrainte  $\sigma$  est égale à :

$$P_S(V, \sigma) = P_V(\sigma_R > \sigma) \quad (2.2)$$

Avec  $\sigma_R$  désignant la résistance de l'élément.

Étant donné que la rupture d'un élément constitue un évènement indépendant, la probabilité de survie de deux éléments de volumes  $V$  et  $V'$  sous une contrainte  $\sigma$  vaut :

$$P_S(V + V', \sigma) = P_S(V, \sigma) \cdot P_S(V', \sigma) \quad (2.3)$$

Finalement, la densité de probabilité de rupture correspondant à un état de contrainte uniforme appelée distribution de Weibull s'écrit sous la forme suivante (Lamon, 2016) :

$$P(V, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \leq \sigma_u \quad (2.4)$$

$$P(V, \sigma) = 1 - \exp \left[ -\frac{V}{V_0} \cdot \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m \right] \text{ pour } \sigma > \sigma_u \quad (2.5)$$

$m$ ,  $\sigma_u$  et  $\sigma_0$  constituent des paramètres empiriques caractéristiques du matériau ainsi que de la microstructure (Bazant & Planas, 1997).

Le paramètre de forme  $m$  est sans dimension (généralement appelé module de Weibull) et est représentatif de la dispersion. En effet, plus ce dernier augmente, plus la dispersion au sein des éléments de volume diminue (voir Figure 2.8). Le paramètre  $m$  serait également dépendant de la taille du spécimen étudié (Lamon, 2016). Selon Weibull (1939),  $\sigma_0$  est un paramètre d'échelle proportionnel à la moyenne de la résistance,  $\sigma_u$  constitue la limite inférieure de la résistance (i.e. la valeur de la contrainte lorsque la probabilité de la rupture vaut 0). Néanmoins, étant donné qu'il est très difficile d'obtenir la valeur de  $\sigma_u$  expérimentalement et qu'il existe une grande incertitude quant à la valeur obtenue,  $\sigma_u$  est souvent prise comme étant égale à 0 (Lamon, 2016).

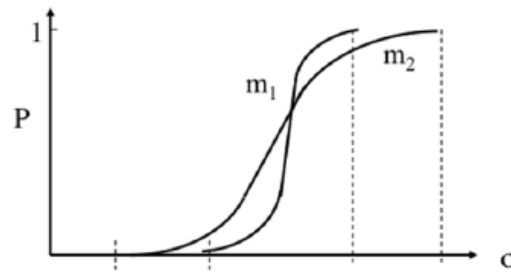


Figure 2.8 Tracé de  $P$ - $\sigma$  : Distribution statistique des valeurs de contrainte pour différentes valeurs du module de Weibull ( $m_2 < m_1$ ) (Lamon, 2016)

Dans l'équation (2.5),  $\sigma$  est une contrainte de traction pure. Dans le cas d'une sollicitation multiaxiale de la structure étudiée, Weibull (1939) considère que la compression et le cisaillement n'ont pas d'influence sur la probabilité de rupture et que cette dernière est uniquement causée par la composante normale en traction de la sollicitation  $\sigma_n$ . Par ailleurs, Barnett (1975) et Freudenthal (1968) ont introduit une approche simple, souvent utilisée, permettant de traiter les cas de contraintes multiaxiales uniformes dans le cadre de la théorie de Weibull. Ils supposent que les contraintes principales en traction sont indépendantes et n'interagissent pas entre elles.

La loi de puissance développée par Weibull (1939) constitue une approximation satisfaisante de la répartition des plus petites résistances en traction. Il s'agit d'un modèle relativement simple, mais qui présente toutefois certaines limites remettant en jeu sa capacité à prédire le comportement de structures aux géométries complexes et soumises à des contraintes multiaxiales comme l'ont souligné plusieurs auteurs (Bazant & Planas, 1997; Lamon, 2016).



### 2.3.1.1.2 Approche du volume statistiquement représentatif (VSR)

Le volume statistiquement représentatif de Weibull est un modèle basé sur la théorie du maillon faible, celui-ci a été développé afin de tenir compte de la diminution de la résistance en traction des matériaux fragiles et quasi-fragiles. Plusieurs modèles qui tentent de reproduire l'effet d'échelle sont tirés de cette théorie (Quinn (2003a, 2003b), Kuguel (1961), Mazars (1984)). Selon Lamou (2016), la notion de volume élémentaire sert à comparer la résistance à la rupture de structures de volumes distincts soumises à différents états de contrainte ou de modes de chargement (solicitation en traction, en flexion pure, en flexion 3 points ou 4 points). Le volume statistiquement représentatif désigne un volume équivalent (du même matériau) soumis à une contrainte uniforme égale au maximum des contraintes principales, définie comme  $\sigma_{max}$  ( $\sigma_{max} = \max(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ ), et qui possède la même probabilité de rupture que le volume total de la structure (voir la Figure 2.9).

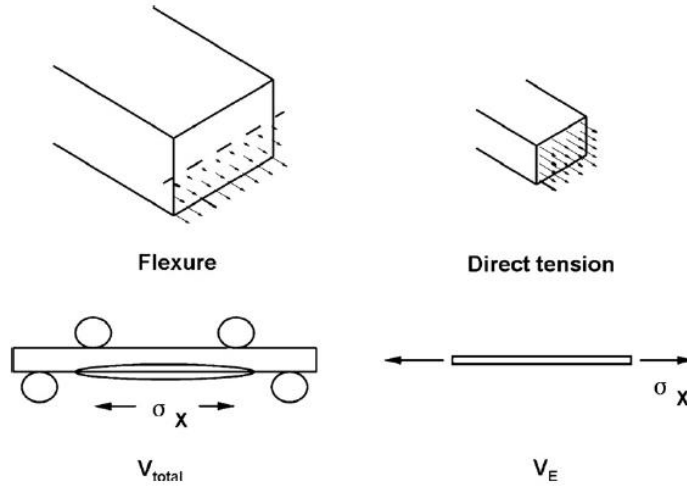


Figure 2.9 Le concept de volume élémentaire représentatif (Wu et al., 2012)

En se basant sur la théorie du maillon faible, la résistance en traction s'écrit sous la forme suivante :

$$f'_t = f_{t/ref} \left( \frac{V_0}{V_E} \right)^{1/m} \quad (2.6)$$

$f_{t/ref}$  et  $V_0$  constituent des paramètres d'entrée correspondant à la structure prise comme référence et  $f_{t/ref}$  est la résistance en traction du volume  $V_0$  associé à un volume de référence qui désigne généralement un spécimen normalisé (par exemple cylindrique ou prismatique) ou encore le plus petit spécimen de la campagne expérimentale.

Le volume statistiquement représentatif  $V_E$  dépend du module de Weibull, du champ de contrainte et du volume total  $V$  de la structure étudiée, il s'écrit sous la forme :

$$V_E = \int \left( \frac{\sigma_I(x, y, z)}{\sigma_{max}} \right)^m dV \quad (2.7)$$

Avec  $\sigma_I$  la première contrainte principale dans le cas d'un chargement élastique ( $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ ). La probabilité de rupture d'un volume s'écrit alors sous la forme (Lamon, 2016) :

$$P(\sigma, V) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \right)^m \frac{V_E}{V_0} \right] = P(\sigma_{max}, V_E) \quad (2.8)$$

Ainsi, le volume  $V_E$  soumis à la contrainte  $\sigma_{max}$  est statistiquement équivalent à  $V$  sous  $\sigma(x, y, z)$ . Pour une contrainte uniaxiale, le volume élémentaire représentatif varie de 0 à  $V$ . Aussi  $V_E = V$  en cas de sollicitation en traction pure alors que  $V = 0$  en cas de compression. Ainsi, la valeur de  $V_E$  est proportionnelle à la sévérité de l'état de contrainte auquel est soumis la structure qui, quant à lui, gouverne la valeur de la probabilité d'existence d'un défaut ou hétérogénéité critique menant à la rupture de la structure étudiée (Lamon, 2016).

#### 2.3.1.1.3 Approche du volume fortement sollicité (VFS)

Certaines approches du volume statistiquement représentatif (*Weibull effective volume*) utilisent le concept du volume fortement sollicité VFS (*Highly Stressed Volume*), initialement développé par Kuguel (1961). Ce modèle-ci est basé sur le fait que dans le cas de rupture en traction de matériaux fragiles (dont le béton fait partie), il n'est pas nécessaire d'analyser ce qu'il se passe dans l'entièreté du volume du spécimen, mais uniquement dans la région la plus critique, autrement dit la région soumise à la plus forte contrainte (Torrent, 1977). Le VFS est ainsi défini comme étant le volume au sein duquel la contrainte en traction dépasse 90 à 95% de  $\sigma_{max}$ . En réalité, cela constitue également la zone critique et par conséquent on suppose que la fissure conduisant à la rupture se développera quelque part dans ce volume-ci (Torrent & Brooks, 1985). La forme adoptée par le volume fortement sollicité est mise en évidence pour différents exemples de tests dans la Figure 2.10.

Plusieurs travaux (Durelli et Parks (1962); Kuguel (1961); Torrent (1977)) suggèrent l'existence d'une relation entre  $f'_t$  et le VFS qui s'écrit sous la forme suivante :

$$f'_t = BV^{-a} \quad (2.9)$$

avec  $V$  le volume fortement sollicité (en  $\text{cm}^3$ ), alors que  $B$  et  $a$  sont deux paramètres déterminés de manière empirique. Le paramètre  $B$  correspond à la résistance en traction d'un VFS d'un centimètre cube,  $a$  est une mesure de la sensibilité du matériau étudié au changement au sein du volume fortement sollicité.

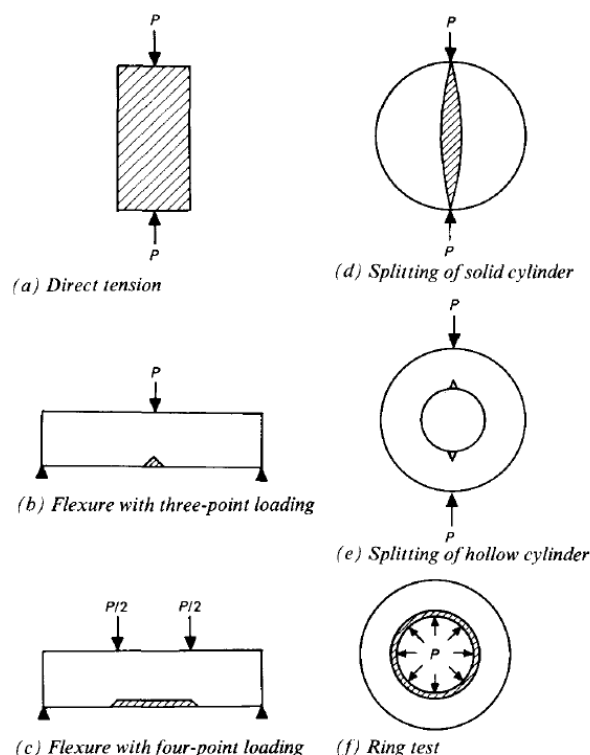


Figure 2.10 Exemples de volumes fortement sollicités pour différents test (Torrent & Brooks, 1985)

Torrent et Brooks (1985) ont démontré que l'approche du VFS n'est pas strictement applicable à la corrélation ou à la prédiction des valeurs de résistance à la traction obtenues à partir de différentes méthodes d'essai, en particulier lorsqu'elles conduisent à des distributions de contraintes très différentes dans le spécimen. Cela peut être attribué au fait que l'approche ne tient pas pleinement compte de la croissance progressive des microfissures avant la rupture. Même si une bonne corrélation peut parfois être obtenue entre  $f'_t$  et le VFS (Torrent, 1977), ces corrélations ne sont pas pertinentes puisque les valeurs des paramètres obtenues dépendent principalement de l'ensemble particulier d'essais concernés et, par conséquent, elles ne sont pas des propriétés intrinsèques du matériau et ne peuvent être utilisées pour les prévisions de résistance.

### 2.3.1.2 Le modèle de Rossi

Tout comme le modèle de Weibull dont elle est issue, la méthode développée par Rossi et al. (1994 (b)) s'inscrit dans les effets d'échelle d'origine statistique.

#### 2.3.1.2.1 Lien entre effet d'échelle et résistance en traction du béton

Pour des spécimens soumis à la traction, Rossi et al. (1994 (b)) ont développé une loi permettant de décrire l'impact de l'effet d'échelle sur  $f'_t$ . Cette loi permet de relier les caractéristiques de la fonction de distribution de  $f'_t$  (moyenne et écart-type) au rapport entre le volume du spécimen et le volume du plus gros granulat (Rossi et al., 1994 (a); Rossi & Richer, 1987; Rossi et al., 1994 (b); Tailhan et al., 2010).

Cette méthode dissocie deux facteurs déterminant la distribution de la résistance en traction du béton. Premièrement, il est supposé que  $f'_t$  est directement reliée à la qualité de la pâte de ciment, car c'est à cet endroit que se situent les points de faiblesse : porosité, microfissures et contraintes initiales. Ce premier facteur est associé à la résistance en compression. En effet, plus  $f'_c$  est élevé, plus le matériau est homogène et plus les caractéristiques mécaniques du matériau deviennent proches de celles des granulats. L'effet d'échelle devient ainsi négligeable lorsque  $f'_c$  est important. Le deuxième facteur est la quantité de la pâte de ciment, celle-ci étant prise en compte par le biais du rapport entre le volume du spécimen et le volume du plus gros granulat. Rossi et al. (1994 (b)) résument la théorie à travers les équations suivantes :

$$\bar{f}'_t = a \left( \frac{V_S}{V_A} \right)^{-b} \quad (2.10)$$

$$a = 6,5$$

$$b = 0,25 - 3,6 \times 10^{-3} f'_c + 1,3 \times 10^{-5} f'^2_c$$

$$\frac{\sigma}{\bar{f}'_t} = A \left( \frac{V_S}{V_A} \right)^{-B} \quad (2.11)$$

$$A = 0,35$$

$$B = 4,5 \times 10^{-2} + 4,5 \times 10^{-3} f'_c - 1,8 \times 10^{-5}$$

où  $\bar{f}_t'$  et  $\sigma$  désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de la résistance en traction,  $V_S$  représente le volume du spécimen étudié, et  $V_A$  le volume du plus gros granulat. Les coefficients  $a$ ,  $A$ ,  $b$  et  $B$  ont été déterminés par analyse inverse à partir de résultats et d'observations expérimentales.

#### 2.3.1.2.2 Lien entre effet d'échelle et module de Young

Rossi et al. (1994 (b)) considère que la valeur moyenne du module de Young ne dépend pas du volume du spécimen tandis que l'écart-type est une fonction décroissante de  $V_S$  et de  $f'_c$  tel que montré dans les équations ci-après :

$$\frac{\sigma}{\bar{E}} = c \left( \frac{V_S}{V_A} \right)^{-d} \quad (2.12)$$

$$c = 0,15$$

$$d = 0,16 + 2,7 \times 10^{-3} f'_c - 3,4 \times 10^{-6} f'^2_c$$

Selon Rossi et al. (1994 (b)), la dispersion du module de Young est liée au fait que le module de Young de la pâte et des granulats sont différents. Plus le spécimen est de petite taille, plus  $E$  devient proche de celui de la pâte seule ou des granulats seuls, et c'est donc le ratio des volumes qui va gouverner cette dispersion. Par ailleurs, pour deux échantillons identiques, le module d'Young en compression est égal au module de Young en traction (Rossi et al., 1994 (b)).

En ce qui concerne les BRF, la variance obtenue expérimentalement est inférieure à la variance calculée à l'aide des équations (2.11) et (2.12). Ceci s'expliquerait par le fait que les fibres agissent comme des renforts au niveau des zones de faiblesse de la matrice. Ceci n'est vrai que dans le cas où les fibres sont distribuées de manière uniforme dans la matrice, dans le cas où la répartition n'est pas homogène, cela aurait pour conséquence d'augmenter l'hétérogénéité de la pâte et donc la dispersion des caractéristiques mécaniques du béton étudié.

Finalement, il est important de mentionner que le modèle de Weibull ainsi que les théories qui en résultent revêtent une importance particulière pour les matériaux fragiles. Dans le cas de matériaux quasi-fragiles tel que le béton ou quasi-ductiles tel que le BRF, l'effet d'échelle appelé déterministe ou énergétique devient important et la considération simultanée des deux sources d'effet d'échelle devient nécessaire.

### 2.3.2 Considération de l'effet d'échelle déterministe

L'effet d'échelle appelé déterministe provient de la dissipation de l'énergie au niveau du front de la fissure d'où son appellation d'effet d'échelle énergétique par certains auteurs. Il est considéré comme étant la source la plus importante d'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles ou quasi-ductiles tel que le béton ordinaire ou le BRF.

#### 2.3.2.1 Le modèle de Bazant

Bazant (1999) a commencé par développer une loi d'effet d'échelle (*size effect law*), dérivée de l'analyse de l'énergie dissipée, pour les structures avec entailles dites de type 2, qui contiennent des entailles de taille supérieure à celle de la FPZ. Dans cette situation, Bazant (1984) estime que l'effet d'échelle d'origine statistique est négligeable. La loi représentant le lien entre spécimens de petites et de grandes tailles s'écrit sous la forme :

$$\sigma_N = \frac{B \cdot f_{t,ref}}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad (2.13)$$

où  $B$  et  $D_0$  sont des coefficients déterminés de manière expérimentale. Par ailleurs, Saouma et al. (2003) et Saouma et Fava (2006) ont pu développer une formulation analytique du paramètre  $B$  qui repose sur des facteurs d'intensité de la contrainte locale et des contraintes cohésives. Ils ont également établi une approche basée sur la notion de fractale inspirée de la loi d'effet d'échelle créée par Bazant (1984).

Cette équation permet de tracer la courbe servant de transition entre l'asymptote horizontale pour les petits spécimens et l'asymptote inclinée de pente  $-1/2$  pour les spécimens plus grands (dans le graphique représentant  $\log \sigma_N$  en fonction de  $\log D$  (voir la Figure 2.11(a)).

L'effet d'échelle de type 1 (énergétique-statistique ou uniquement statistique, dépendamment de la contrainte appliquée) est observé pour des structures non entaillées dites à géométrie positive, pour lesquelles la rupture survient aussitôt qu'une macrofissure s'initie au niveau d'une surface lisse. Néanmoins, la contribution de l'effet d'échelle d'origine statistique est négligeable pour les structures de petite taille, dont le volume n'est pas suffisamment grand en comparaison avec la taille de la FPZ. Ainsi, dans le cas des spécimens soumis à un effet d'échelle énergétique-

statistique, les structures de plus grande taille sont définies par une asymptote de pente  $-n/m$  sur un graphique représentant  $\log \sigma_N$  en fonction de  $\log D$  (voir la Figure 2.11(b)).

Pour conclure, pour les structures dites de type 1, les lois d'effet d'échelle s'écrivent de la façon suivante :

1- Pour l'effet d'échelle d'origine énergétique exclusivement :

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left( 1 + \frac{rD_b}{\bar{D} + l_p} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.14)$$

2- Pour l'effet d'échelle d'origine énergétique et statistique à la fois :

$$\sigma_N = f_{r\infty} \left( \left( \frac{l_s}{l_s + D} \right)^{\frac{rn}{m}} + \frac{rD_b}{\bar{D} + l_p} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.15)$$

avec  $f_{r\infty}$  la résistance nominale de structures de très grande taille,  $D_b$  la longueur approximative de la FPZ,  $l_p$  une caractéristique du matériau permettant de contrôler la transition vers l'asymptote horizontale et  $l_s$  la longueur caractéristique statistique faisant référence à la variabilité spatiale de la probabilité de rupture (Bažant et al., 2007).

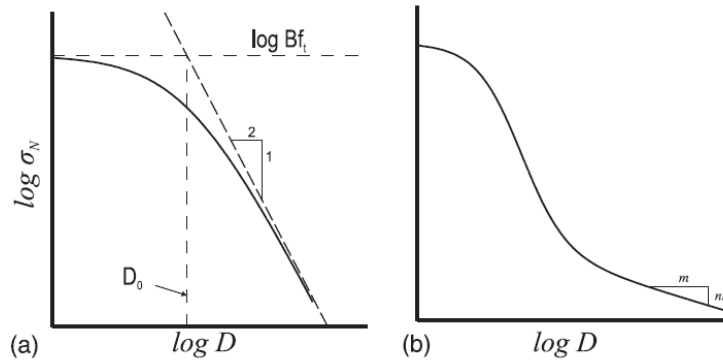


Figure 2.11 Représentation de la dépendance entre  $\sigma_N$  et la dimension  $D$  de la structure : (a) structure comportant une entaille profonde : effet d'échelle de type 2 (b) structure ne comportant pas d'entaille : effet d'échelle de type 1 (Hoover & Bažant, 2014)

### 2.3.2.2 Le modèle de Mazars

Mazars et al. (1991) est parvenu à combiner les deux types d'effet d'échelle (statistique et déterministe) dans un seul modèle d'endommagement non-local continu (*non local continuous damage mechanics*).

#### 2.3.2.2.1 Modèle basé sur le seuil initial d'endommagement

Tout d'abord, l'approche adoptée pour décrire l'initiation de l'endommagement procède de la théorie de Weibull. Mazars (1986) s'intéresse au seuil initial d'endommagement  $\varepsilon_D$ . Dans le cas du béton, l'auteur définit ce seuil comme étant l'état où la déformation en tension a atteint la limite  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_D$ . Le paramètre  $\tilde{\varepsilon}$ , appelé déformation équivalente, représente la déformation en traction accumulée dans le matériau. L'auteur suppose que les défauts initiaux commencent à se propager sous forme de vides ou de fissures lorsque les déformations en traction ont atteint un seuil. Ainsi l'initiation des dommages est donc une fonction de  $\tilde{\varepsilon}$ . L'équation constitutive s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = (1 - D)\Lambda : \varepsilon \quad 0 < D < 1 \quad (2.16)$$

où  $\Lambda$  représente le tenseur du module élastique et  $D$  est la variable représentant l'endommagement. L'auteur suppose que l'endommagement se fait de manière isotrope et donc que ce paramètre peut être exprimée sous la forme d'un scalaire variant de 0 (matériau sain) à 1 (matériau endommagé). La loi d'évolution de l'endommagement en traction (i=t) et en compression (i=c) est égale à :

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_i)}{\tilde{\varepsilon}_M} - \frac{A_i}{\exp[Bi(\tilde{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0})]} \neq 0 \text{ si } \tilde{\varepsilon}_M > \varepsilon_{D0} \quad (2.17)$$

où  $\tilde{\varepsilon}_M$  désigne la déformation équivalente locale maximale.

Par ailleurs, Mazars et al. (1991) énoncent que la probabilité qu'un dommage ne soit pas initié dans un volume  $\Delta V$  (avec  $\Delta V = r \cdot \delta V$ ) est égale à :

$$P_{nd}(\tilde{\varepsilon}, \Delta V) = \exp[-rP_d(\tilde{\varepsilon}, \delta V)] \quad (2.18)$$

Des exigences sont liées à la formulation ci-dessus :

1. pour des valeurs infiniment grandes de  $\tilde{\varepsilon}$ , le volume  $\delta V$  doit obligatoirement être endommagé; dans ce cas-là,  $P_d(\tilde{\varepsilon}, \delta V) = 1$ ;



2. pour des déformations équivalentes inférieures à une constante (par exemple  $\varepsilon_{D0}$ , caractéristique du matériau), le volume  $\delta V$  ne sera pas endommagé et une expression possible de l'endommagement est :

$$P_d(\tilde{\varepsilon}, \delta V) = k(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})^m \delta V \quad (2.19)$$

L'équation (2.18) est fortement inspirée de la théorie de Weibull. Néanmoins, il existe une différence notable avec cette dernière. Dans l'approche de Mazars, le modèle du maillon faible de Weibull est utilisé pour décrire l'initiation de l'endommagement et non la résistance ultime du matériau qui dépend d'autres phénomènes tels que la redistribution de la contrainte.

#### 2.3.2.2.2 *Modèle d'endommagement à deux échelles*

Une fois l'endommagement initié, il faut décrire son évolution. L'évolution de l'endommagement, due à la propagation de microfissures lorsque le matériau est sollicité en traction, est décrite grâce à une variable d'état scalaire, non-locale, représentant la perte en rigidité du béton. Cela peut être réalisé en calculant la valeur de  $\tilde{\varepsilon}$  en fonction de l'état d'un volume représentatif. Cette approche est qualifiée comme étant à deux échelles car celle-ci intègre des informations provenant de deux échelles distinctes : l'échelle du volume élémentaire, dans laquelle les contraintes et les déformations sont déterminées de manière habituelle, et l'échelle du volume représentatif, dans laquelle l'endommagement est défini en fonction de l'hétérogénéité du matériau et de l'interaction entre les microfissures (Saouridis & Mazars, 1992).

La seule modification apportée à la formulation du modèle concerne la loi sur l'évolution de l'endommagement :

$$D = f(\widetilde{\varepsilon}_M) \neq 0 \text{ si } \widetilde{\varepsilon}_M > \varepsilon_{D0} \text{ avec } f(\widetilde{\varepsilon}_M) \text{ définie comme dans l'équation (2.16)}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_M = \frac{\int V_D g(x-s) \tilde{\varepsilon} dV}{\int V_D g(x-s) dV} \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) introduit une nouvelle inconnue :  $g(x-s)$  qui est une fonction de pondération représentant l'intensité de l'interaction entre le point considéré de coordonnée  $x$ , les points de coordonnée  $s$  qui sont situés à son voisinage et le volume représentatif  $V_D$ . La courbe de  $g(x-s)$  est de type gaussienne (voir la Figure 2.12) qui tient compte de  $l_D$ , la longueur caractéristique (plus généralement dénommée longueur interne pour un milieu non local), et qui est une propriété du matériau liée à la taille maximale de l'agrégat tel que  $2l_D = 3\phi_{max}$ .

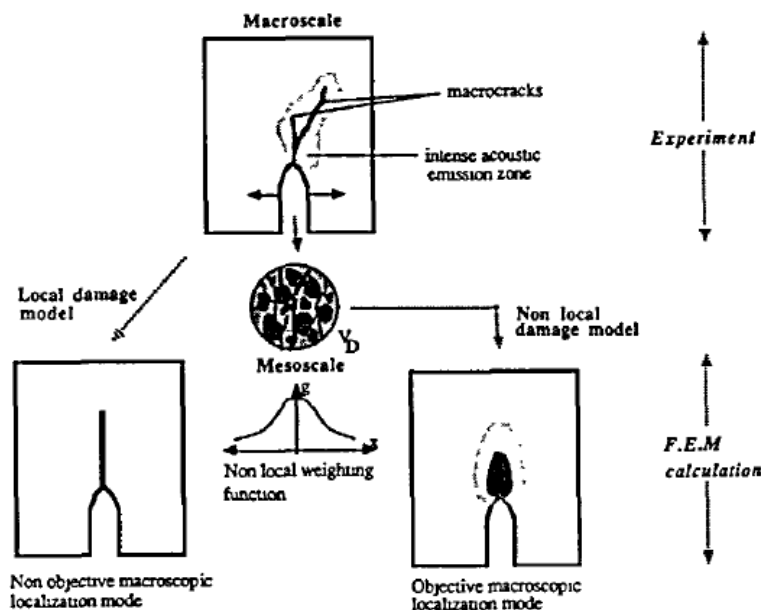


Figure 2.12 Modèle d'endommagement à deux échelles (Saouridis & Mazars, 1992)

Grâce à une comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques, Saouridis et Mazars (1992) ont montré que l'approche dite à deux échelles permet de décrire l'effet d'échelle sur les spécimens entaillés et représente bien en ce sens l'aspect déterministe. Au contraire, dans le cas de spécimens non entaillés où l'effet d'échelle statistique prévaut sur l'effet d'échelle déterministe, il faudrait combiner l'approche à deux échelles avec le modèle d'initiation de l'endommagement.

### 2.3.2.3 Le modèle de Sellier et Millard

Le modèle proposé par Sellier et Millard (2014) permet de prédire les déclenchements successifs dans un élément susceptible de fissurer à plusieurs reprises : par exemple un élément structural de grande dimension avec des fibres ou des armatures et dont la matrice est fragile. Cette nouvelle approche permet également de redistribuer les contraintes aux alentours de la zone fissurée. La conséquence directe de cette nouvelle formulation est que la rupture de la structure n'est pas liée à la rupture de son maillon le plus faible mais seulement à celle qui se produit au niveau du volume statistiquement représentatif qui dépend dans le modèle de Sellier et Millard (2013) d'une longueur dite d'autocorrélation.

La probabilité de fissuration locale est caractérisée par une moyenne et un écart-type qui sont associés à un volume sollicité de référence comme dans la théorie classique de Weibull.

Néanmoins, il existe une distinction qui est importante et qui fait l'originalité de ce modèle : le volume de référence dépend du temps de chargement. En effet, si ce temps est élevé, comme dans le cas des chargements quasi-statiques par exemple, la résistance locale qui est prise comme référence diminue car la probabilité que les liaisons moléculaires passent momentanément par un minimum énergétique augmente (Sellier & Millard, 2014). Par ailleurs, les auteurs précisent que cette théorie est indépendante du type de fissuration utilisé.

Le paramètre  $P_V^S(M, t)$  désigne la probabilité pour qu'un point M, situé dans un volume  $V$  et d'âge  $t$ , puisse transmettre une contrainte  $\sigma(M, t)$ . Cette probabilité est soumise à deux conditions.

- 1- Il faut que le point matériel ait survécu jusqu'au temps  $t$ , ce qui est représenté par l'équation suivante qui fait intervenir l'historique du point M :

$$P_{Vref}^S(M, t) = \prod_{d\tau \in [0, t]} (P_{Vref, tref}^S(M, \tau))^{\frac{d\tau}{tref}} \quad (2.21)$$

- 2- Il faut que le voisinage du point M ait également survécu jusqu'au temps  $t$  afin d'assurer la transmission de la contrainte. Le voisinage immédiat du point M est caractérisé par la fonction de pondération probabiliste  $\psi$  (voir Figure 2.13) qui dépend du point  $x$  considéré et de la longueur d'autocorrélation  $l_c$ . En effet, dans le cas où le matériau possède des propriétés auto-corrélées, ce qui est le cas du béton, si la rupture a lieu dans une zone, il faut suffisamment s'éloigner de cette dernière pour pouvoir retomber sur un endroit où le matériau est capable de reprendre la contrainte  $\sigma$ .

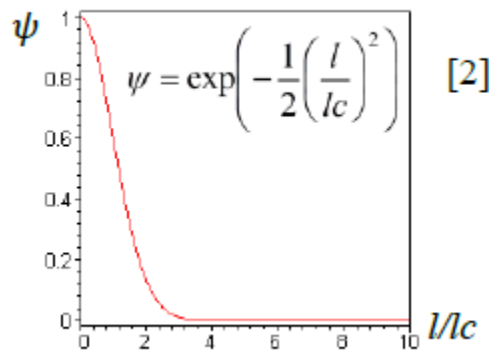


Figure 2.13 Fonction d'atténuation du poids probabiliste (Sellier & Millard, 2014)

Sellier et Millard (2013) stipulent enfin que cette méthode reste déterministe, même si elle est basée sur une théorie probabiliste, puisque la solution obtenue est représentative du mode de fissuration le plus vraisemblable et donc que cette dernière ne requière pas d'utiliser un algorithme de Monte Carlo alors qu'un seul calcul suffit, ce qui engendrerait un gain de temps très important.

#### 2.3.2.4 Le modèle de Ben Ftima et Massicotte

Ben Ftima et Massicotte (2015) ont développé une approche simplifiée permettant de tenir compte des deux sources d'effet d'échelle, déterministe et statistique, et qui est bien adaptée au contexte de modélisation macroscopique du béton. Ils considèrent que pour un matériau quasi-fragile, l'effet d'échelle statistique affecte principalement la phase d'initiation de la fissure et donc la résistance en traction  $f'_t$  et que l'effet d'échelle déterministe affecte la phase de propagation de fissure macroscopique et est pris en compte par l'énergie de fissuration.

L'aspect déterministe est modélisé implicitement par le biais de l'énergie de fissuration  $G_f$  selon une approche de fissuration diffuse où l'endommagement est distribué sur toute la hauteur de l'élément fini. En ce qui concerne l'effet d'échelle d'origine statistique, celui-ci est pris en compte en faisant varier la résistance en traction  $f'_t$  en fonction de la dimension caractéristique  $D$  de l'élément structural à l'aide d'une loi exponentielle décroissante inspirée de la distribution de Weibull. L'expression suivante est ainsi utilisée pour renseigner la valeur de  $f'_t$  pour les modèles par éléments finis :

$$f'_t = 0.5 \sqrt{f'_c} \left( \frac{D}{150} \right)^{-\frac{n_d}{m}} \quad (2.22)$$

avec  $n_d$  la similitude dimensionnelle de la structure (ex  $n_d = 2$  pour une similitude 2D) et  $m$  le module de Weibull pris égal à 24 pour le béton. Il est important de noter que ce modèle se distingue de ceux présentés précédemment par sa simplicité et par le nombre relativement faible de paramètres d'entrée qu'il nécessite.

### 2.3.3 Synthèse

Le Tableau 2.1 contient une synthèse de l'ensemble des méthodes, et de leurs différentes caractéristiques.

Tableau 2.1 Résumé des différentes approches de modélisation de l'effet d'échelle

Nom du modèle	Effet d'échelle statistique	Effet d'échelle statistique-énergétique	Nombre de paramètres d'entrée
<b>Modèle de Weibull (1939)</b>	✓	x	1
<b>Modèle de Rossi (1987)</b>	✓	x	2
<b>Modèle de Bazant (1999)</b>	✓	✓	5
<b>Modèle de Mazars (1992)</b>	✓	✓	3
<b>Modèle de Sellier et Millard (2014)</b>	✓	✓	2
<b>Modèle de Ben Ftima et Massicotte (2015)</b>	✓	✓	2

Même si la considération de l'effet d'échelle statistique demeure importante pour les matériaux quasi-fragiles (ex : béton) et les éléments de grande dimension (e.g. poutre de plus de 1 m de profondeur), son importance demeure questionnable dans le cas de matériau quasi-ductile (ex : BRF) et pour les éléments structuraux de petite dimension (ex : dalle de 150 mm). Ainsi, la considération du concept d'énergie de fissuration lors de la modélisation non linéaire macroscopique de dalles en BRF pourrait s'avérer suffisante pour uniquement tenir compte de l'effet d'échelle déterministe ou énergétique. Toutefois, et tel que mentionné précédemment dans la section 2.2, il est primordial d'inclure dans cette modélisation l'aspect probabiliste lié à l'orientation aléatoire des fibres.

## 2.4 Modélisation probabiliste du béton

Dans le cadre de l'analyse non linéaire par éléments finis, de nombreux paramètres d'entrée (propriétés du matériau, dimensions géométriques, charges appliquées) sont généralement requis. Ces derniers possèdent le plus souvent une variabilité aléatoire qui ne peut être négligée. Dans cette section, les probabilistes utilisées dans la sous-routine d'EPM3D seront d'abord présentées, le concept de fiabilité des structures sera ensuite abordé, enfin, plusieurs exemples de modélisations probabilistes par éléments finis du béton seront détaillés.

### 2.4.1 Lois probabilistes utilisées

La loi normale, la loi lognormale et la loi de Weibull sont les trois distributions aléatoires les plus couramment utilisées dans la littérature pour représenter la variabilité spatiale du béton ordinaire et des bétons renforcés de fibres également. Cette partie comportera une description de ces trois lois probabilistes et explicitera les raisons pour lesquelles celles-ci sont particulièrement adaptées à la modélisation de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques des bétons ordinaires et des bétons renforcés de fibres.

#### 2.4.1.1 Loi Normale

Cette partie établira le cadre théorique de la loi normale, également appelée loi Gaussienne. Elle explicitera aussi les raisons pour lesquelles cette distribution a été utilisée dans la sous-routine probabiliste développée dans le cadre de cette maîtrise pour modéliser la variabilité des propriétés mécaniques du béton.

La loi normale fait partie des distributions les plus couramment utilisées en statistiques et théorie des probabilités et recouvre un très large éventail d'applications (Balakrishnan et al., 2019). Tout d'abord, la fonction de densité de probabilité de la loi normale s'écrit de la manière suivante (voir la Figure 2.14) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.23)$$

avec  $\mu$  la moyenne de la distribution et  $\sigma$  l'écart-type.

Comme le montre la Figure 2.14, 68% de l'aire sous la courbe (et donc des issues obtenues en sortie d'une loi normale) se situe dans l'intervalle  $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ , 95% de l'aire sous la courbe se situe au sein de l'intervalle  $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ , et enfin, 99,7% de l'aire se situe dans  $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ .

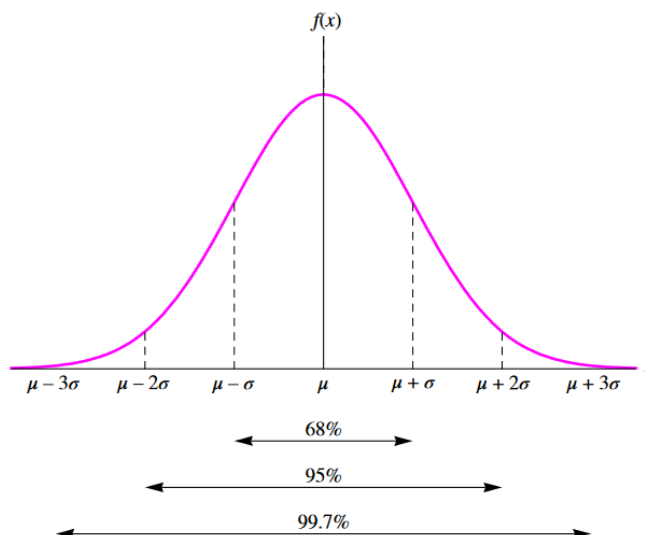


Figure 2.14 Fonction de densité de probabilité de la loi normale (Balakrishnan et al., 2019)

Par ailleurs, la loi normale tronquée (pas de valeurs négatives) a souvent été utilisée dans l'étude des aspects probabilistes de la défaillance des matériaux hétérogènes et fragiles (Rossi et al., 1994 (b)).

Rossi et Richer (1987), Rossi et al. (1994 (a)) et Rossi et al. (1994 (b)) ont développé et mis en œuvre une procédure numérique prenant en compte les aspects statistiques de l'hétérogénéité des bétons. Pour cela, ils ont mené de nombreuses campagnes expérimentales de traction directe sur des spécimens cylindriques, et ce dans le but de définir la distribution statistique de la résistance en traction. Ils ont ainsi réussi à démontrer que la loi normale tronquée et la loi de Weibull correspondaient aux distributions mesurées de manière expérimentale. En effet, des tests statistiques (utilisation de la droite de Henri et de la méthode du  $\chi^2$ ) ont été mis en application afin de vérifier que les distributions expérimentales obtenues suivent bien la loi normale théorique. Ceci a été validé pour des bétons dont la résistance en compression variait entre 35 MPa et 130 MPa.

En outre, dans le cadre d'une étude numérique par éléments finis de l'effet d'échelle statistique de poutres en béton ordinaire soumises à de la flexion 3 points, Syroka-Korol et al. (2013) affectent aux éléments finis des valeurs de résistance à la traction sous forme d'un champ aléatoire spatialement corrélés décrits par une distribution normale tronquée. Les auteurs affirment également que la distribution Gaussienne tronquée est largement utilisée pour décrire la probabilité de défaillance des spécimens de bétons de petites et moyennes tailles. Par contre, pour les grands

échantillons de béton, la fonction de distribution de Weibull est généralement privilégiée (Bazant & Planas, 1997; Syroka-Korol et al., 2013).

En ce qui concerne les bétons renforcés de fibres, Li et al. (2018) ont développé un modèle probabiliste pour saisir la variabilité du comportement en traction des BRF. Afin de représenter l'hétérogénéité de la microstructure du matériau, tous les paramètres micromécaniques (longueur des fibres, diamètre des fibres, module élastique des fibres, résistance des fibres, pourcentage volumique des fibres, module d'Young de la matrice cimentaire, etc.) sont considérés comme des variables aléatoires suivant une distribution normale tronquée.

#### 2.4.1.2 Loi Lognormale

Cette sous-section comportera la définition du cadre théorique de la loi lognormale et explicitera les raisons pour lesquelles celle-ci fait partie des distributions utilisées dans la sous-routine probabiliste d'EPM3D.

Comme mentionné dans le paragraphe précédent, la loi normale fait partie des distributions les plus importantes et les plus utilisées dans le domaine des statistiques et de la théorie des probabilités. Néanmoins, il existe plusieurs situations pratiques dans lesquelles le logarithme d'une variable aléatoire  $X$  suit une distribution normale. Ainsi,  $X$  suit une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  si la variable aléatoire  $Y = \ln(X)$  obéit à une distribution normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . La phrase précédente peut-être abrégée à l'aide de la formulation mathématique suivante :  $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ .

La fonction de densité de probabilité de cette loi s'écrit de la manière suivante (Balakrishnan et al., 2019) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x > 0 \quad (2.24)$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X$  peuvent être exprimés en fonction de l'espérance et l'écart-type (Balakrishnan et al., 2019) :

$$\mu = \ln(E(X)) - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.25)$$

$$\sigma^2 = \ln \left( 1 + \frac{Var(X)}{(E(X))^2} \right) \quad (2.26)$$



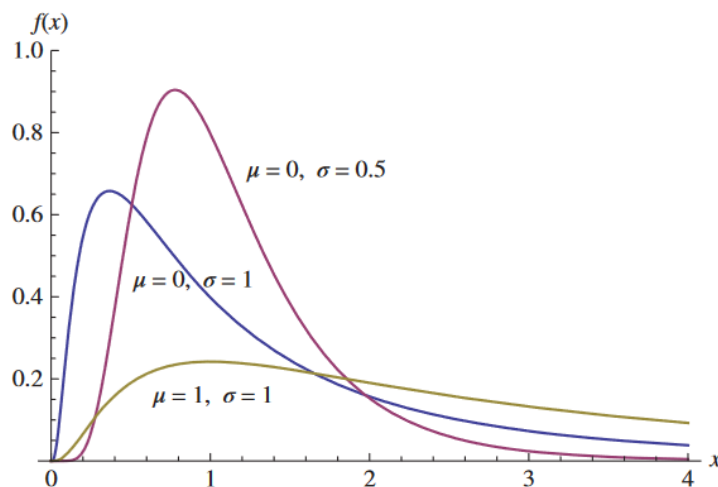


Figure 2.15 Fonction de densité de probabilité de la loi lognormale pour différentes valeurs des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  (Balakrishnan et al., 2019)

La Figure 2.15 met en avant la fonction de densité de probabilité de la distribution lognormale pour trois choix de paramètres distincts : (i)  $\mu = 1$  et  $\sigma = 1$  (ii)  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  (iii)  $\mu = 0$  et  $\sigma = 0.5$ . La caractéristique commune aux trois courbes de la figure est l'asymétrie (la fonction de densité à une queue plus longue à l'extrémité droite du graphique), celle-ci est d'autant plus prononcée pour les distributions pour lesquelles le paramètre  $\sigma$  est élevé.

Par ailleurs, nous avons fait le choix d'utilisation de cette loi dans la sous-routine probabiliste car celle-ci a été employée par divers auteurs dans le but de modéliser l'aspect probabiliste du comportement des bétons ordinaires et des BRF. Par exemple, Colliat et al. (2007) se sont intéressés à l'aspect probabiliste de l'effet d'échelle pour les structures en béton ordinaire. Pour ce faire, ils ont considéré que la limite élastique  $\sigma_y$  et l'écart  $e_f$  entre la contrainte maximale  $\sigma_f$  et  $\sigma_y$  constituaient la principale source d'incertitude, ces deux paramètres étaient ainsi modélisés par des variables aléatoires corrélées suivant la loi lognormale.

En ce qui concerne les bétons renforcés de fibres, Rossi et al. (2015), Tailhan et al. (2013) et Tailhan et al. (2015a) ont développé un modèle de fissuration discrète avec une composante macroscopique lorsque la localisation se produit. Dans cette approche, la valeur de l'énergie de post-fissuration est considérée comme un paramètre probabiliste obéissant à une fonction de distribution de type lognormale.

Étant donné que ce projet de maîtrise se focalise principalement sur les bétons renforcés de fibres et que le paramètre qui a été considéré comme principale source d'incertitude est l'énergie de post-fissuration, la loi lognormale sera particulièrement utilisée dans les exemples d'applications qui seront présentés en détail dans les sections qui apparaissent plus loin dans ce chapitre.

### 2.4.1.3 Loi de Weibull

Cette sous-section suivra une trame identique à celle des paragraphes précédents. Il existe plusieurs modèles physiques à l'origine de la distribution statistique de Weibull, ces derniers aident généralement à interpréter la loi probabiliste et à sélectionner les bons ensembles de données empiriques. Le modèle physique le plus ancien et le plus représentatif de la distribution de Weibull est basé sur la théorie des valeurs extrêmes (Rinne, 2008), il s'agit de la théorie du maillon faible (consulter la Section 2.3.1 pour de plus amples détails), qui a été largement utilisée pour expliquer le phénomène de rupture des matériaux fragiles et quasi-fragiles tels que le béton. Cette théorie consiste en un système physique composé de  $n$  unités identiques d'éléments connectés en série, le système est fonctionnel tant que les  $n$  unités ne sont pas défailtantes, et celui-ci devient non fonctionnel à la première rupture qui survient au sein d'une de ces unités.

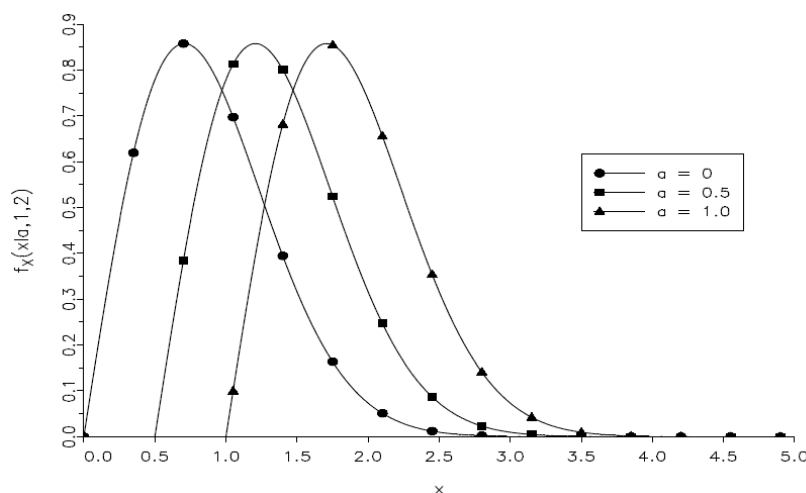


Figure 2.16 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs du facteur de localisation  $\alpha$  (Rinne, 2008)

La répartition, introduite à l'origine par Weibull (1939), dépend de trois paramètres. La fonction de densité de probabilité est donnée par l'équation suivante (Rinne, 2008):

$$f_X(x|a, b, c) = \frac{c}{b} \left( \frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x-a}{b} \right)^c \right\}, x \geq a \quad (2.27)$$

Le premier paramètre  $a$  (voir la Figure 2.16) est généralement appelé origine ou seuil. D'un point de vue statistique, il est désigné par le terme de facteur de localisation, le faire varier tout en maintenant les deux autres données  $b$  et  $c$  constantes aura pour effet de translater la courbe de densité de probabilité selon l'axe des abscisses.

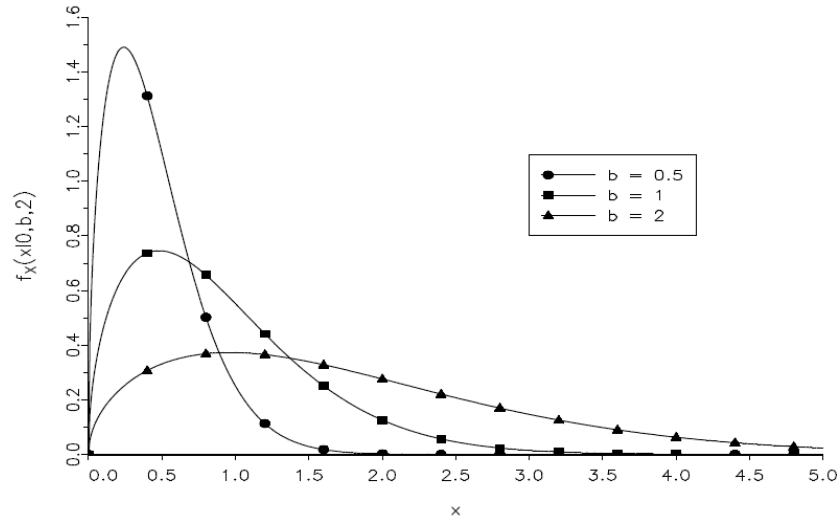


Figure 2.17 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs du facteur d'échelle  $b$  (Rinne, 2008)

Le second paramètre  $b$  est appelé facteur d'échelle (voir la Figure 2.17). Le fait de modifier  $b$  tout en maintenant  $a$  et  $c$  constants modifie la fonction de densité de probabilité verticalement (suivant l'axe des ordonnées). L'augmentation de ce facteur entraîne une compression ou encore une réduction de la densité de probabilité.

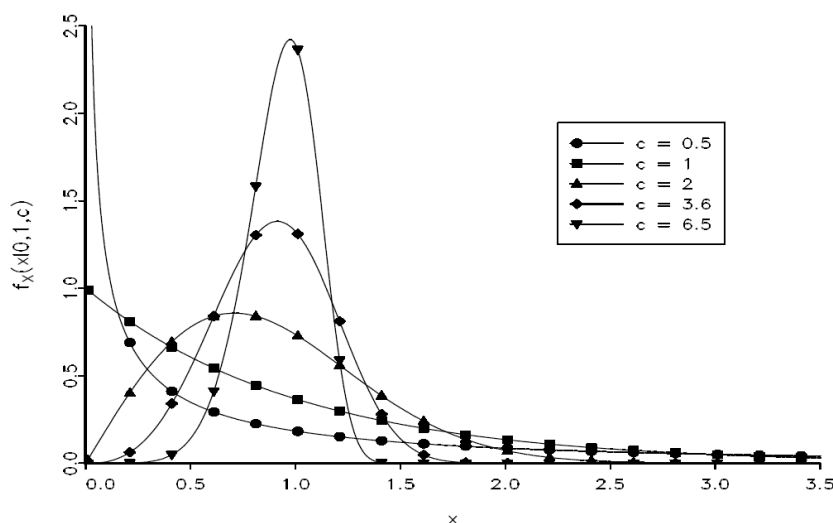


Figure 2.18 Fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull pour différentes valeurs de pentes (Rinne, 2008)

Enfin, le troisième et dernier paramètre est désigné par le terme de pente. D'un point de vue statistique, celui-ci représente un facteur de forme. En effet, la variation de ce dernier entraîne une modification, assez drastique dans certains cas (voir la Figure 2.18), de la courbe de densité de probabilité.

Le fait de neutraliser l'un des trois paramètres, en fixant  $a = 0$  ou  $b = 1$  ou encore  $c = 1$ , transforme la loi de Weibull en une distribution à deux paramètres. Dans le cadre de la sous-routine probabiliste d'EPM3D, il a été choisi de fixer la valeur du paramètre  $a$  à 0. Il s'agit de la forme la plus utilisée en statistique et théorie des probabilités. Cette forme est particulièrement adaptée pour le cadre d'utilisation prévu par le code développé puisque la rupture peut se produire pour n'importe quel élément dont la résistance est comprise entre 0 et un intervalle supérieur déterminé par les deux autres paramètres de la distribution.

Dans le cadre de l'étude des bétons ordinaires, Rossi et Richer (1987), Rossi et al. (1994 (a)) et Rossi et al. (1994 (b)) ont mené plusieurs campagnes expérimentales de traction directe dans le but de déterminer la distribution statistique de la résistance à la traction. Ils en concluent que la loi de Weibull correspond bien aux distributions expérimentales mesurées et se révèle particulièrement adaptée pour l'étude des cas de rupture fragile. Syroka-Korol et al. (2013) se sont intéressés à l'étude du phénomène d'effet d'échelle probabiliste pour les structures en béton ordinaire présentant une similarité géométrique. La campagne expérimentale menée a permis de montrer que

la résistance à la traction prenait la forme de champs aléatoires spatialement corrélés décrits par une distribution gaussienne tronquée. Néanmoins, cette même résistance a subi une transition progressive de la loi normale vers la loi de Weibull pour les spécimens de plus grande taille.

Pour les bétons renforcés de fibres, Tailhan et al. (2013), Tailhan et al. (2015b) et Rossi et al. (2015) ont développé un modèle probabiliste de fissuration discrète utilisant des éléments de contact dans lequel les propriétés mécaniques sont des champs aléatoires suivant la loi de Weibull.

Ainsi, et comme il est possible de le constater au travers des exemples présentés plus haut et du paragraphe 2.3.1, la loi de Weibull est particulièrement adaptée pour la modélisation de l'aspect probabiliste du comportement des matériaux fragiles et quasi-fragiles tels que les bétons ordinaires et les BRF.

## 2.4.2 Présentation du concept de la fiabilité des structures

Cette sous-section décrit le concept général de la fiabilité des structures, présenté à la Figure 2.19. Étant donné une fonction aléatoire de résistance  $R$  et une fonction aléatoire de charge  $U$ , la fonction aléatoire  $Z = R - U$  est alors appelée fonction d'état limite.

Ici,  $R$  dépend des variables aléatoires de résistance entrées (par exemple les propriétés du béton) et  $U$  des variables de charge renseignées (par exemple la charge appliquée au modèle). Le paramètre  $Z$  pourrait désigner la résistance à la flexion ou au cisaillement (fonction d'état limite ultime) ou encore une limite de flèche ou de largeur de fissure à ne pas dépasser (fonction d'état limite de service).

Une mesure de la fiabilité de cette fonction d'état limite est la probabilité de défaillance qui est définie comme  $p_f = p(R - U \leq 0)$ . Une autre mesure possible de cette caractéristique est l'indice de fiabilité  $\beta = \frac{Z_m}{\sigma_Z}$  (avec  $Z_m$  désignant la moyenne et  $\sigma_Z$  l'écart-type de  $Z$ ). Pour le cas particulier de distributions normales indépendantes  $R$  et  $U$ , il est possible de montrer que (Ben Ftima & Massicotte, 2012) :

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (2.28)$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale (moyenne nulle et variance unitaire).

Compte-tenu d'une probabilité de défaillance maximale  $p_{f\_max}$  ou d'un indice de fiabilité minimum requis  $\beta_{min}$  pour la structure, et connaissant les lois des variables aléatoires  $R$  et  $U$ , une conception donnée peut être classifiée comme étant conservatrice, optimale ou encore dangereuse (voir la Figure 2.19 (b)).

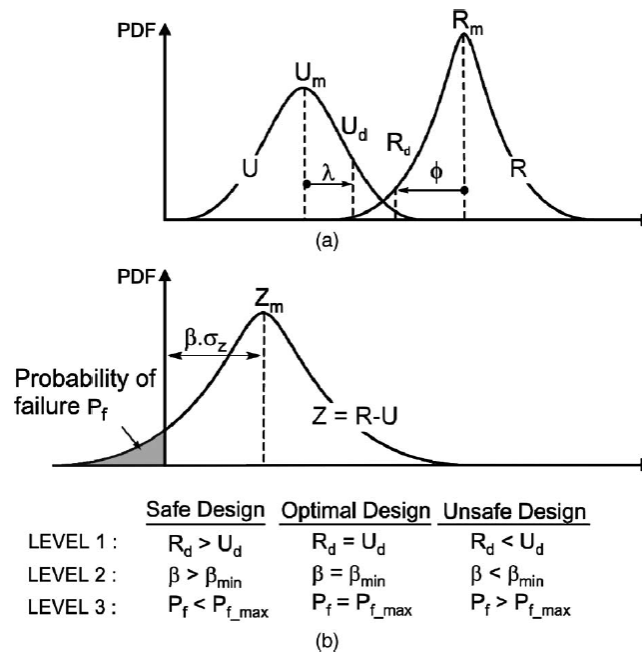


Figure 2.19 Concept général de la fiabilité des structures (Ben Ftima & Massicotte, 2012)

Selon Melchers et Beck (2018), trois niveaux différents de techniques de mesures de la fiabilité peuvent être utilisés en fonction du seuil de précision (Figure 2.19 (b)). Les méthodes appartenant au niveau 3 sont des méthodes exactes visant à estimer la probabilité de défaillance d'une structure en utilisant des modèles probabilistes précis (Ben Ftima & Massicotte, 2012). Cette approche nécessite la connaissance exacte des distributions probabilistes des paramètres d'entrée. En l'absence de telles informations, le niveau 2 peut être utilisé afin d'estimer l'indice de fiabilité et la probabilité nominale de défaillance en utilisant l'équation (2.28). Dans cette situation, seuls la moyenne et le coefficient de variation sont requis et les calculs sont effectués en supposant des distributions normales. Pour le niveau 1, les facteurs de sécurité partiels peuvent être utilisés comme une extension quasi-probabiliste de l'approche traditionnelle du facteur de sécurité : c'est l'approche considérée par les codes modernes de conception aux états limites. Les techniques suivantes ont été utilisées dans la littérature pour la propagation de l'incertitude et l'analyse probabiliste : les méthodes par éléments finis probabilistes, les méthodes de simulations (par

exemple la méthode de Monte Carlo ou encore la méthode du Latin hypercube) et les méthodes d'estimation par points (ex : Ben Ftima et Massicotte (2012)).

Les facteurs de sécurité  $\gamma_G$  utilisés pour trouver la valeur de résistance de conception  $R_d$  sont exprimés au travers la relation suivante :

$$\begin{cases} R_d = \frac{R_m}{\gamma_G} \\ \gamma_G = e^{\beta \alpha V_R} \end{cases} \quad (2.29)$$

avec  $R_m$  la valeur moyenne de la résistance,  $\alpha = 0,75 \pm 0,06$  la fonction de séparation et  $V_R$  le coefficient de variation de  $R$ .

### 2.4.3 Exemples de modélisations probabilistes de béton

Comme mentionné précédemment, il existe une multitude de facteurs qui entrent en compte dans l'évaluation de la fiabilité d'une structure. Dans cette sous-section, seules les propriétés mécaniques du béton seront considérées.

Une des approches les plus simples à implémenter afin de rendre compte de la variabilité spatiale des caractéristiques mécaniques du béton ordinaire consiste à attribuer à chaque volume de matière des propriétés (par exemple  $f'_t$  et  $E$  dans le cas de Rossi et Richer (1987)) suivant une distribution probabiliste donnée, et ensuite à effectuer une simulation numérique grâce à un logiciel d'éléments finis. Une autre méthode consiste à considérer une distribution de défaut dans le volume étudié. Le comportement global est ainsi la somme du comportement élastique-fragile de chacun de ces défauts. Rossi et al. (1994 (a)) utilisent un modèle par éléments finis triangulaires avec des éléments de contact infiniment fins. Le module de Young  $E$  est distribué de manière aléatoire sur les éléments massifs du maillage en utilisant une fonction de répartition qui dépend du rapport entre le volume des éléments et le volume du plus gros grain. La valeur critique de la résistance à la traction  $f'_t$  est affectée aux éléments de contact et suit une fonction de distribution qui dépend du volume total des deux éléments de volume adjacents à l'élément de contact (voir la Figure 2.20).

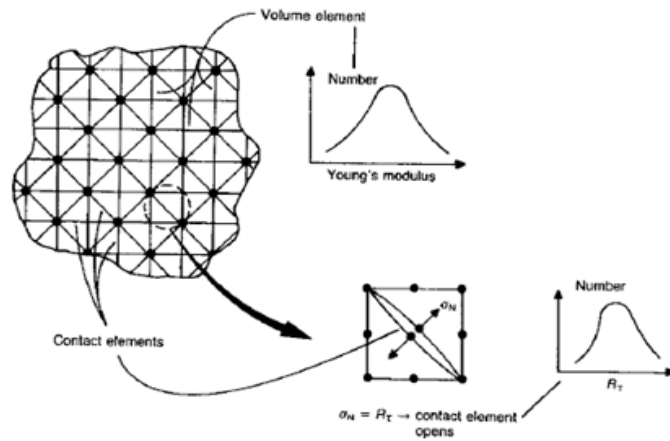


Figure 2.20 Modèle numérique probabiliste utilisé pour représenter le comportement du béton  
(Rossi et al., 1994 (b))

Carmeliet et de Borst (1995) ont utilisé la méthode de discrétisation dite du point médian. Elle consiste à discrétiser le champ aléatoire au niveau du centroïde  $x_c$  de chacun des volumes  $V_e$  qui constituent l'ensemble du spécimen à étudier. La déformation initiale d'endommagement  $\varepsilon_{D0}$  est ainsi aléatoirement distribuée sur l'ensemble des points  $x_c$  et cette distribution est représentée par un champ aléatoire non gaussien qui dépend de trois paramètres qui sont déterminés à l'aide d'une analyse inverse à partir de résultats expérimentaux. Une fonction d'autocorrélation est introduite afin de prendre en compte l'influence de points de faiblesses sur leur entourage proche.

Tang et al. (2011) ont modifié la loi de Weibull en y ajoutant une fonction de corrélation spatiale. Ils ont étudié les effets de la longueur de corrélation  $\theta$  sur la résistance en compression : avec une valeur plus petite de  $\theta$ , ils observent une plus grande dispersion de la branche post-pic de la courbe force-déplacement et des patrons de fissuration des modèles simulés; néanmoins, les valeurs moyennes de la résistance ne connaissent pas de changement important si les mêmes paramètres d'entrée de la loi de Weibull sont utilisés.

Colliat et al. (2007) considèrent la limite élastique  $\sigma_y$  et l'écart  $e_f$  entre la contrainte maximale  $\sigma_f$  et  $\sigma_y$  comme les principales sources d'incertitude. Le module d'Young et l'énergie de fissuration sont considérées comme étant des quantités déterministes. Selon la théorie de Weibull, il aurait fallu modéliser cet ensemble de propriétés par deux champs aléatoires non corrélés. Néanmoins,



les auteurs font le choix de les considérer comme des champs corrélés (donc non indépendants). La distribution choisie est la loi lognormale.

Comme la diminution de la résistance à la traction lors de l'augmentation du volume sollicité est associée à l'hétérogénéité du matériau, Weibull (1939) a développé le concept de maillon faible qui établit une relation entre le volume de la structure étudiée et sa résistance moyenne, qu'on appelle effet d'échelle. Ainsi, dans les modèles de simulation par éléments finis, il est nécessaire de modéliser cette variabilité spatiale conduisant au processus de localisation. Certains auteurs (Colliat et al., 2007; Syroka-Korol et al., 2013; Vořechovský, 2007) ont développé des outils permettant d'utiliser les champs aléatoires dans le but de reproduire l'effet d'échelle pour les matériaux quasi-fragiles. Vořechovský (2007) a montré que le fait de modéliser la variabilité spatiale de la résistance locale des matériaux représente bien la partie statistique de l'effet d'échelle. En outre, Colliat et al. (2007) ont démontré que l'approche probabiliste utilisant les champs aléatoires corrélés est capable de relier la mécanique de l'endommagement continu pour les petites structures et la mécanique de rupture linéaire élastique (LEFM).

#### **2.4.4 Synthèse**

La génération de champs aléatoires discrets implique de nombreuses difficultés tel que le choix des paramètres aléatoires, la méthode probabiliste, la loi probabiliste ou encore la fonction et la longueur d'autocorrélation dans certains cas. Le Tableau 2.2 présente un bref résumé des caractéristiques des champs aléatoires utilisés pour décrire l'hétérogénéité des bétons ordinaires.

Tableau 2.2 Synthèse des méthodes utilisées pour modéliser l'hétérogénéité du béton

Auteur	Méthode de simulation	Loi probabiliste	Paramètres variables	Fonction d'autocorrélation
<b>Carmeliet et de Borst (1995)</b>	Méthode du point médian ( <i>Midpoint method</i> )	Loi non normale	Déformation initiale d'endommagement	$\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)$ $l = 5 \text{ mm}$
<b>Colliat et al. (2007)</b>	Méthode de Karhunen-Loève	Loi lognormale	Limite élastique ; écart entre la contrainte maximale et la limite élastique	$\exp\left(-\frac{x}{l}\right)$ $l = 10 \text{ cm}$
<b>Rossi et al. (1994 (b))</b>	Méthode de Monte-Carlo	Loi normale ou Loi de Weibull	$f'_t$ et $E$	x
<b>Vořechovský (2007)</b>	Méthode de l'hypercube latin	Loi normale	$K_1$	$\exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right)$ $l = 8 \text{ cm}$
<b>Syroka-Korol et al. (2013)</b>	Méthode de l'hypercube latin	Loi normale	$f'_t$	$\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right)$ $l = 5 \text{ cm}$

## 2.5 Modélisation numérique probabiliste des bétons renforcés de fibres

La modélisation la variabilité spatiale des propriétés mécaniques des bétons renforcés de fibres introduit un niveau de complexité supplémentaire. En effet, les fibres constituent une entité totalement indépendante de la matrice cimentaire du point de vue des caractéristiques mécaniques et de la distribution spatiale.

Dobrilla et al. (2018) ont cherché à déterminer la propagation de l'incertitude des paramètres d'entrée du modèle dans la réponse globale et locale d'un spécimen en traction. Ils ont choisi pour cela la méthode de Monte-Carlo.

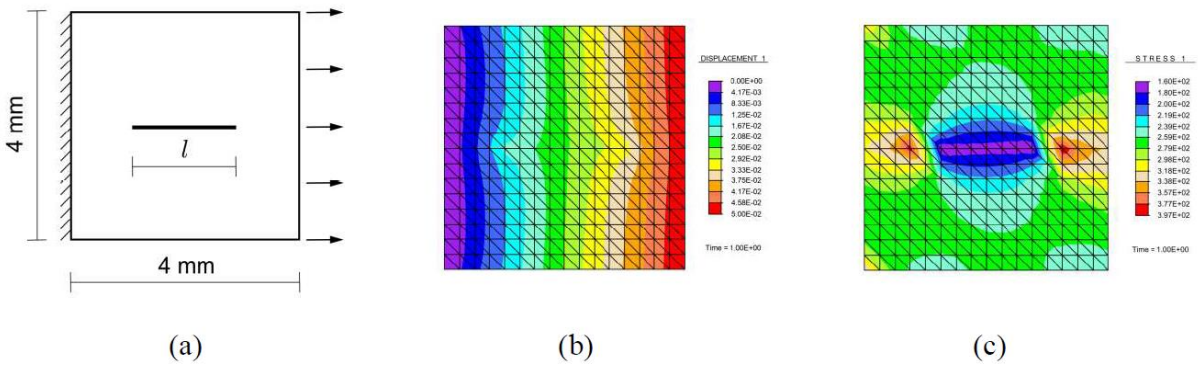


Figure 2.21 (a) Spécimen contenant une fibre horizontale; (b) Les déplacements dans la direction x; (c) La distribution de la contrainte en traction au sein du spécimen (Ibrahimbegovic, 2009; Rukavina et al., 2019)

Les paramètres suivant une distribution probabiliste sont : le module tangent de la réponse à l'arrachement de la fibre, le module de durcissement et le coefficient permettant de relier la résistance ultime à la valeur de l'énergie de fissuration. Ces trois paramètres, qui sont considérés comme étant indépendants, suivent une loi Bêta dont les caractéristiques sont déterminées à partir d'essais expérimentaux.

Rossi et al. (1994 (b)) ont créé un premier modèle qui consistait à introduire une force de rappel qui dépend de la largeur de l'ouverture. Cela était réalisé en imposant au point de Gauss une contrainte normale qui était fonction du déplacement normal de l'élément de contact ouvert. Néanmoins, ce modèle présente plusieurs limites et imperfections.

- Premièrement, la modélisation du comportement post-fissuration n'est pas efficace du point de vue numérique.
- La représentation de la re-fermeture des fissures n'est pas réaliste d'un point de vue physique : seule l'action des fibres vis-à-vis des déplacements normaux des lèvres de la fissure est prise en compte, leur action n'est pas prise en compte pour les déplacements tangentiels. En outre, cette re-fermeture se fait sans ouverture résiduelle.
- Il existe un problème de convergence lorsque trop d'éléments de contact s'ouvrent simultanément.

Rossi et al. (2015) ont par conséquent développé un nouveau modèle pour les bétons renforcés de fibres. Il s'agit d'un mélange entre un modèle discret avec des éléments de contact auxquels on

attribue aléatoirement une valeur de  $f_t'$  (en pré-pic) et entre un modèle macroscopique d'endommagement avec une attribution aléatoire de l'énergie de fissuration (en post-pic), comme on peut le voir sur la Figure 2.22.

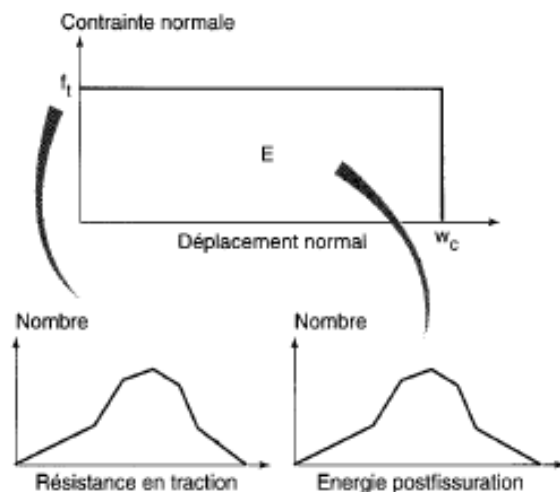


Figure 2.22 Exemple de la nouvelle loi proposée pour décrire l'évolution de la contrainte normale en fonction du déplacement normal à l'élément de contact (Rossi et al., 2015)

Pour résumer, avant le pic, le béton se comporte comme un béton ordinaire et les fibres sont mécaniquement neutres. Après le pic, l'effet des fibres devient bien plus important, et en particulier dans le contrôle de la propagation de la macrofissure.

Li et al. (2018) modélisent la variabilité du béton grâce à une approche multi-échelle. Ils caractérisent le BRF par les trois phases microstructurales qui le constituent à savoir : la fibre, la matrice et l'interface fibre/matrice. Un ensemble de paramètres micromécaniques est utilisé pour décrire ces trois phases, ces paramètres sont considérés comme des variables aléatoires. Cette variabilité à l'échelle microscopique influe la capacité de pontage des fibres et les propriétés de fissuration de la matrice (échelle méso) qui à leur tour régissent le comportement à l'échelle macroscopique : l'allure de la courbe contrainte-déformation, la distribution de la largeur des fissures et la distribution de l'espacement des fissures (voir la Figure 2.23 ).

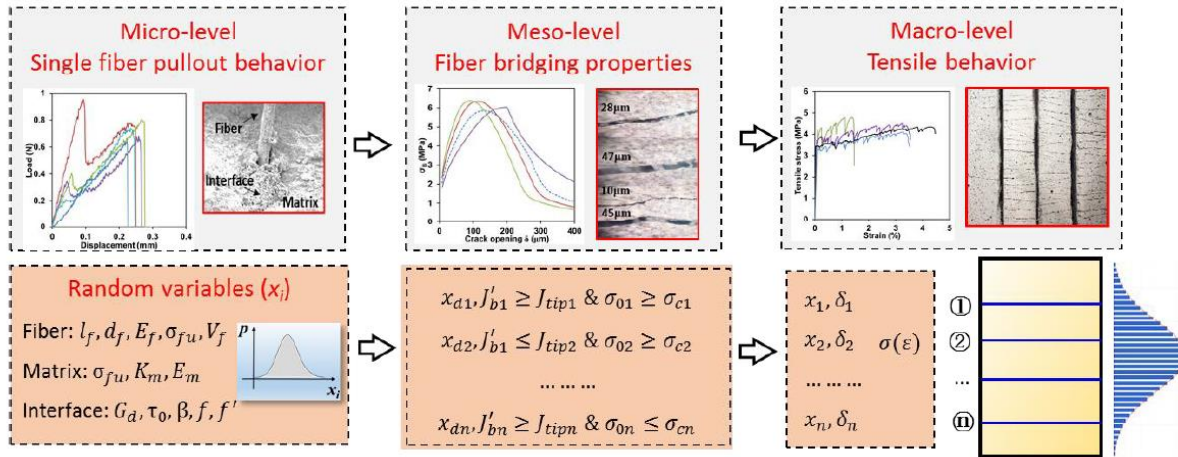


Figure 2.23 Approche multi-échelle de modélisation de la variabilité des BRF en tension (Li et al., 2018)

Vorechovský et al. (2013) se sont également intéressés dans certains travaux à la résistance des bétons renforcés de fibres. Pour cela, les auteurs ont supposé que la position et l'orientation des fibres étaient aléatoires dans les spécimens. En exploitant la fraction volumétrique des fibres, la géométrie des fibres et de l'échantillon et les propriétés de l'interface avec la matrice, l'auteur parvient à obtenir une évaluation de la force totale aléatoire au niveau de la fissure. Ces données sont ensuite réutilisées dans l'estimation de la résistance à la traction de l'ensemble du matériau. Le Tableau 2.3 présente un bref résumé des caractéristiques des champs aléatoires utilisés pour décrire l'hétérogénéité et parfois l'effet d'échelle pour les bétons ordinaires.

Tableau 2.3 Synthèse des méthodes utilisées pour modéliser l'hétérogénéité des BRF

Auteur	Méthode de simulation	Loi probabiliste	Paramètres variables	Fonction d'autocorrélation
<b>Dobrilla et al. (2018)</b>	Méthode de Monte-Carlo	Loi Bêta	module tangent du béton; module de durcissement; coefficient reliant résistance ultime à la valeur de l'énergie de fissuration	x
<b>Rossi et al. (2015)</b>	Méthode de Monte-Carlo	Loi lognormale et loi de Weibull	$f'_t$ et $G_f$	x
<b>Li et al. (2018)</b>	Méthode de Monte-Carlo	Loi normale, uniforme et loi de Weibull	14 paramètres au total	x
<b>Vorechovský et al. (2013)</b>	Méthode de l'hypercube latin	Loi binomiale	Position et orientation des fibres	x

## 2.6 Conclusion

Par souci de faisabilité, il a été décidé dans ce mémoire d'étudier les éléments en BRF à une échelle macroscopique. Contrairement au béton ordinaire, le béton renforcé de fibres présente une plus grande ductilité en post-pic qui est due à l'action de pontage des fibres. On suppose ainsi que l'effet d'échelle énergétique sera prépondérant dans les analyses et que l'utilisation du concept de l'énergie de fissuration sera suffisante. Afin de tenir compte de la variabilité aléatoire des fibres, des analyses de Monte-Carlo seront réalisées à l'échelle du matériau et de l'élément d'une façon similaire à Rossi et al. (2015). Toutefois, l'action de pontage due aux fibres sera prise en compte implicitement via une énergie de fissuration associée aux fibres qui est beaucoup plus grande que l'énergie de fissuration associée à la matrice cimentaire. Cette approche présente une plus grande simplicité puisque seulement le coefficient de variation et la valeur moyenne de l'énergie de fissuration associée aux fibres seront requis lors de simulations des éléments en BRF. Cependant, une étape de calibration à l'échelle du matériau est requise avec cette approche afin de s'assurer que le schéma numérique reproduise la même variabilité à l'échelle matériau peu importe la taille du maillage. Cet aspect important sera détaillé dans le chapitre 3 suivant.

## **CHAPITRE 3      MODÉLISATION DE LA VARIABILITÉ SPATIALE DES BÉTONS RENFORCÉS DE FIBRES**

En raison de sa microstructure, des phénomènes physiques qui se produisent lors du durcissement (contraintes initiales, retrait de séchage, porosité due à l'hydratation) ainsi que de la distribution non uniforme des fibres dans le cas des BRF, le béton est un matériau hautement hétérogène. Cette caractéristique peut expliquer certains aspects du comportement mécanique de ce matériau tels que le passage de la microfissuration diffuse à la localisation d'une macrofissure et le phénomène d'effet d'échelle. Dans ce chapitre, nous présenterons l'approche numérique qui a été développée pour modéliser l'aspect statistique de cette hétérogénéité du béton.

L'implémentation de cette sous-routine probabiliste dans le logiciel EPM3D (Massicotte & Ben Ftima, 2015) est présentée dans un premier temps. Ensuite, un cas d'application de cette sous-routine sur une éprouvette en traction dans le logiciel ABAQUS (Hibbitt et al., 2014) sera étudié. Le but de cet exercice est de mettre en place un modèle de calibration qui permet de relier la dispersion fournie en entrée par l'utilisateur et celle obtenue en sortie.

Enfin, un exemple de modèle sous MATLAB d'un prisme en traction sera présenté. Le but de cette modélisation est de pouvoir prédire d'une autre manière la relation entre les paramètres d'entrée de la loi probabiliste utilisée et les résultats obtenus en sortie.

### **3.1 Implémentation de la sous-routine probabiliste sous EPM3D**

#### **3.1.1 Présentation**

Le logiciel ABAQUS est utilisé dans le contexte de ce projet pour étudier l'impact de la variabilité spatiale du béton renforcé de fibres sur des os sollicités en traction et des poutres soumises à de la flexion 3 points. Les analyses effectuées dans le logiciel ABAQUS sont de type *Explicit* alors que l'aspect probabiliste de la variabilité est pris en compte grâce au modèle de béton non linéaire EPM3D (Bouzaiene & Massicotte, 1997).

##### **3.1.1.1 ABAQUS**

ABAQUS est un logiciel de calcul par éléments finis faisant partie de la nouvelle génération d'outils numériques non linéaires.

Pour ABAQUS/STANDARD, la résolution du problème se fait par itérations successives en calculant à chaque incrément la matrice tangente du système afin de résoudre l'équation suivante (Ben Ftima, 2013) :

$$P - I = 0 \quad (3.1)$$

avec  $P$  le vecteur des forces externes et  $I$  le vecteur des forces internes aux nœuds. Les deux méthodes de résolution les plus couramment utilisées sont la méthode de la longueur d'arc également appelée méthode de Riks et la méthode de Newton-Raphson (Bouzaiene & Massicotte, 1997).

Néanmoins, ce type de résolution devient très complexe lorsque la taille du modèle augmente ou que la fissuration est amorcée (Ben Ftima, 2013). Pour remédier à ce problème, la résolution avec ABAQUS/EXPLICIT a été proposée. Celle-ci est basée sur la résolution de l'équation suivante :

$$M\ddot{u} = P - I \quad (3.2)$$

avec  $\ddot{u}$  le vecteur des accélérations nodales et  $M$  la matrice de masse modale. Dans le cas où l'application de la charge s'effectue de manière très graduelle, le vecteur des accélérations est quasi-nul et l'équation peut ainsi être résolue de manière quasi-statique. Enfin, un des avantages principaux du module explicite d'ABAQUS est sa compatibilité avec la loi de comportement non linéaire du béton ordinaire, armé et renforcé de fibres EPM3D qui a été développée à Polytechnique Montréal.

### 3.1.1.2 EPM3D

Cette section présente un récapitulatif de la modélisation non linéaire des bétons grâce au logiciel EPM3D. Le modèle de béton EPM3D, pour Endommagement Progressif Multiaxial Tridimensionnel, permet de simuler le comportement du béton (ordinaire, armé et renforcé de fibres) sous une charge multiaxiale.

En compression, le modèle obéit à une formulation tridimensionnelle incrémentale tangente (dite hypo-élastique) proposée par Bouzaiene et Massicotte (1997). Dans le domaine des contraintes principales, le comportement du béton en compression est modélisé dans chaque direction à l'aide d'une courbe uniaxiale équivalente (voir la Figure 3.1). Un paramètre d'endommagement scalaire dénoté  $\lambda$  est par ailleurs utilisé afin de quantifier la dégradation cumulée en compression du béton.



Par ailleurs, ce modèle permet également de tenir compte de l'anisotropie, de la dégradation du module élastique sous chargement et déchargement en compression, du point de transition séparant le comportement ductile et le comportement fragile du béton, ainsi que de l'expansion volumétrique inélastique. En pré-pic, la surface de rupture est définie soit par le modèle de Willam et Warnke (1975) à cinq paramètres ou le modèle de Hsieh et al. (1982) à quatre paramètres. En post-pic, le principe de conservation de l'énergie de fissuration est utilisé afin d'assurer l'objectivité du maillage lors de l'adoucissement en compression.

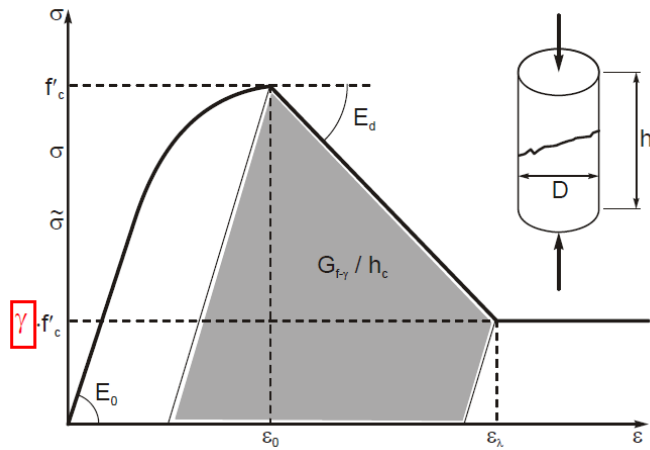


Figure 3.1 Courbe uniaxiale de la contrainte en fonction de la déformation pour un élément en compression (Massicotte & Ben Ftima, 2015)

D'après la Figure 3.1, la pente adoucissante en post-pic  $E_d$  dépend de la longueur caractéristique  $h_c$  de l'élément fini :

$$E_d = -\frac{h_c}{\frac{\delta}{f'_c} - \frac{h_c}{E_0}} \quad (3.3)$$

La constante  $\delta$  (unités de déplacement) est déterminée expérimentalement à partir de tests sur des cylindres soumis à de la compression. Par ailleurs, et à partir de la Figure 3.1, il est possible de définir la relation liant  $G_{f-\gamma}$  à  $\delta$ :

$$G_{f-\gamma} = \frac{1}{2} \delta (1 - \gamma^2) f'_c \quad (3.4)$$

En traction, EPM3D adopte une approche macroscopique de fissuration par bande. Le béton en pré-pic possède un comportement quasi-linéaire caractérisé par une déformation homogène. En

outre, comme pour la compression, une modification a été effectuée en post-pic afin d'éliminer la dépendance à la taille du maillage (voir la Figure 3.2).

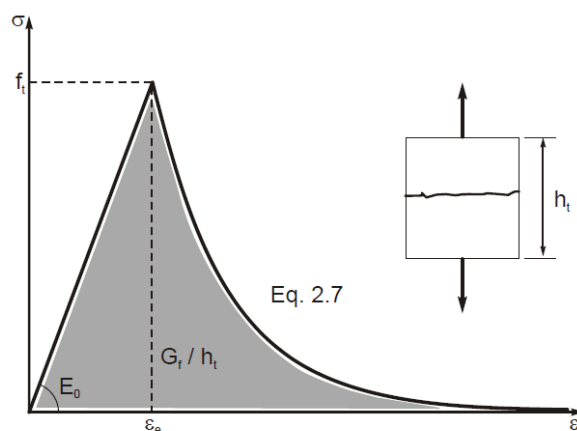


Figure 3.2 Courbe typique de la contrainte en fonction de la déformation pour un élément en traction : béton non armé (Massicotte & Ben Ftima, 2015)

Suite à l'initiation d'une fissure, le matériau entame une phase adoucissante caractérisée par une réduction de la résistance jusqu'à atteindre un état de déformation ultime pour lequel la fissure ne peut plus transmettre aucune contrainte de traction (voir la Figure 3.2). Pour le béton ordinaire, un modèle de raidissement en traction est par ailleurs utilisé pour les zones de béton situées à proximité des armatures afin de représenter l'interaction entre l'acier et le béton.

Dans le cas particulier des bétons renforcés de fibres, il est possible à l'utilisateur d'EPM3D de faire le choix entre 3 types de courbes de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure (voir la Figure 3.3) :

- une fonction exponentielle décroissante ( $C_{36}=1$ );
- un polynôme de degré cinq ( $C_{36}=2$ );
- des portions de droites affines reliées entre elles, dans ce cas-ci, l'utilisateur peut choisir les coordonnées des différents points servant d'éléments de jointure entre les différents segments de droites ( $C_{36}=3$ ).

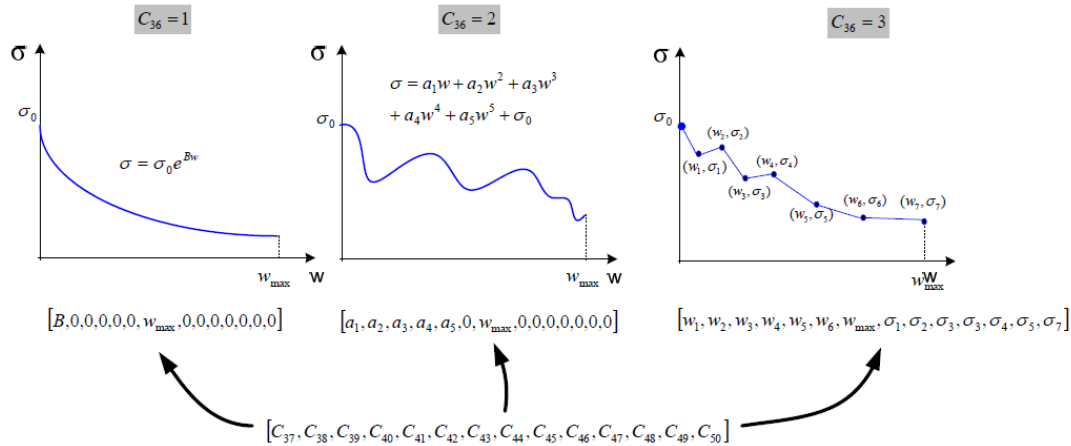


Figure 3.3 Définition des constantes relatives au béton renforcé de fibres

Les constantes  $C_{37}$  à  $C_{50}$  sont à définir par l'utilisateur et représentent les paramètres d'entrées des trois lois permettant de modéliser le comportement du BRF en post-fissuration.

### 3.1.2 Implémentation du modèle probabiliste

#### 3.1.2.1 Principe

Cette sous-partie décrit le principe général de la sous-routine probabiliste qui a été développée dans EPM3D dans le cadre de cette maîtrise recherche, ainsi que ses différentes caractéristiques. L'écriture du code a été initiée en 2012 par David Conciatori, alors associé de recherche au GRS. Ce projet de recherche s'inscrit donc dans la continuité des travaux amorcés par ce dernier.

Tout d'abord, dans cette nouvelle version du modèle de béton EPM3D, il est désormais possible de faire varier la valeur de la résistance à la traction  $f'_t$  ainsi que la valeur de la résistance à la compression  $f'_c$  selon une loi normale, une loi de Weibull ou encore une loi lognormale. L'utilisateur d'EPM3D, lorsqu'il définit la loi de son béton, a le choix de la distribution probabiliste ainsi que de la moyenne et de l'écart-type de celle-ci. Celui-ci peut également décider de faire varier uniquement  $f'_t$  ou  $f'_c$ , les deux simultanément, ou aucune des deux propriétés.

Pour le cas particulier des bétons de fibres, les hypothèses suivantes ont été adoptées.

1. On considère que le comportement quasi-linéaire (qui correspond à la portion pré-pic de la courbe de la contrainte en fonction de la déformation) demeure déterministe. C'est-à-dire que cette portion de courbe ne varie pas d'une simulation à une autre (lorsque les paramètres

de la loi de béton EPM3D demeurent inchangées entre les deux simulations). Cette hypothèse est propre à la présente étude, le but étant d'isoler le comportement probabiliste de la portion post-fissuration.

2. La portion post-pic de la courbe de contrainte en fonction de l'ouverture de fissure peut être décomposée en deux sous-parties (voir la Figure 2.3) : premièrement la contribution de la matrice cimentaire (courbe adoucissante) qui demeure déterministe (pour des raisons similaires à celles de la partie élastique), et deuxièmement la contribution des fibres qui est aléatoire et varie suivant une loi (normale, lognormale, ou Weibull) préalablement choisie par l'utilisateur.

Par ailleurs, dans le cas des BRF, la sous-routine probabiliste n'a été programmée que pour le cas où le comportement en post-pic est de type 3 ( $C_{36}=3$ , consulter la section précédente). L'utilisateur fait le choix des coordonnées des 7 points servant à relier les différentes portions de droites constituant la courbe de contrainte en fonction de l'ouverture de fissure (voir la Figure 3.3). Ces 7 points initialement entrés par l'utilisateur servent à calculer la valeur moyenne de l'énergie de fissuration  $G_f$  (uniquement celle attribuable à l'action des fibres, la partie attribuable à la matrice cimentaire demeurant déterministe), ce dernier doit également choisir un écart-type. Des valeurs aléatoires de  $G_f$  sont ensuite générées en fonction de la distribution choisie par l'utilisateur et des paramètres de la loi sélectionnés. Enfin, à partir de chacune des valeurs de  $G_f$  générées aléatoirement, les 7 points servant à définir la courbe de contrainte-ouverture de fissure sont recalculés comme le montre la Figure 3.4 (voir la Section 3.1.2.2 pour le détail des calculs).

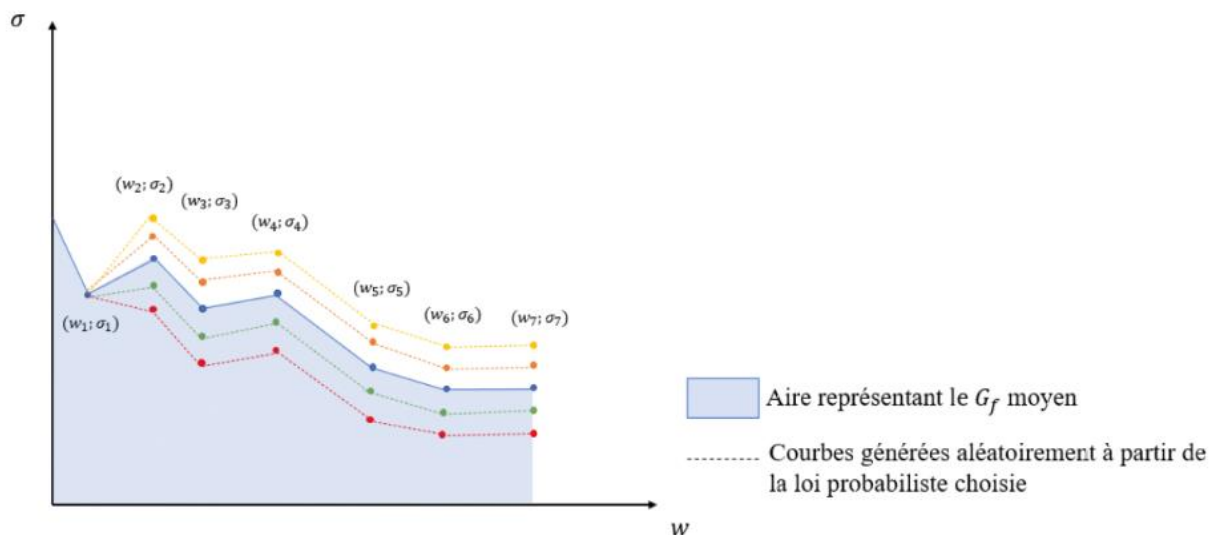


Figure 3.4 Principe de modélisation de la variabilité des BRF

Le processus décrit plus haut est réalisé pour chaque point de Gauss en amont de toute simulation sur ABAQUS. Ainsi, si l'utilisateur fait le choix d'une modélisation probabiliste pour une des propriétés mécaniques ( $f'_t$ ,  $f'_c$  ou  $G_f$  dans le cas d'un BRF), une valeur aléatoire de la distribution (tout en respectant la moyenne et l'écart-type spécifiés par l'utilisateur) sera affectée à chacun des points d'intégration de chaque élément de volume du maillage (voir la Figure 3.5). Dans le schéma de la Figure 3.5, il est supposé qu'il n'y ait qu'un seul point d'intégration par élément de volume.

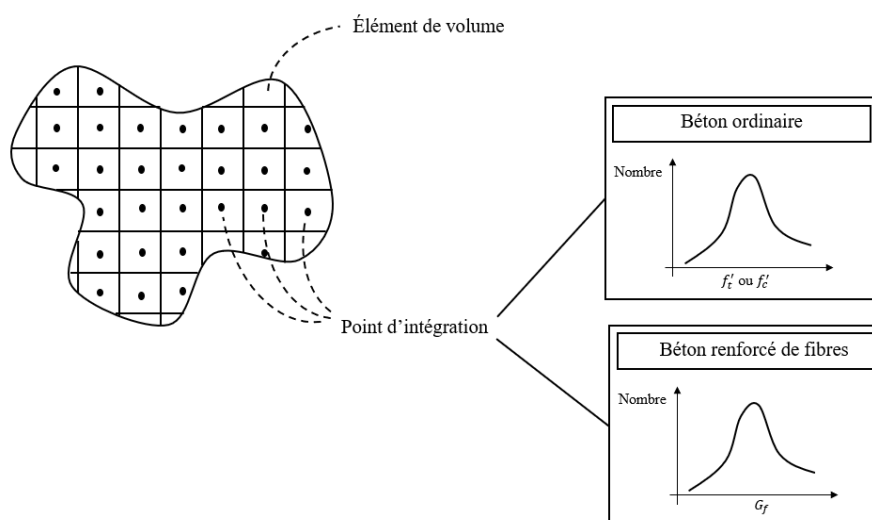


Figure 3.5 Modèle probabiliste développé dans EPM3D

### 3.1.2.2 Présentation du code

Cette sous-section contient une description du code de la sous-routine probabiliste développée dans le cadre de ce projet de maîtrise (consulter l'Annexe A pour l'ensemble du code). Il est important de mentionner que cette sous-routine a été écrite en langage FORTRAN.

Pour les bétons ordinaires, la résistance à la traction et/ou la résistance à la compression peut suivre une distribution normale, lognormale, de Weibull ou encore ne pas subir de traitement probabiliste. Si l'utilisateur fait le choix d'un traitement probabiliste, ce dernier doit fournir les caractéristiques de la loi, à savoir la moyenne et l'écart-type. Dans ce cas-ci, pour chaque point d'intégration, un tirage uniforme et aléatoire est effectué et un nombre entre 0 et 1 est généré. Ce nombre sert ensuite à calculer la propriété mécanique ( $f'_c$  et/ou  $f'_t$ ) qui suit la distribution choisie grâce à la méthode dite inverse cumulée. La Figure 3.6 résume le principe de fonctionnement général de cette sous-routine pour un béton ordinaire.

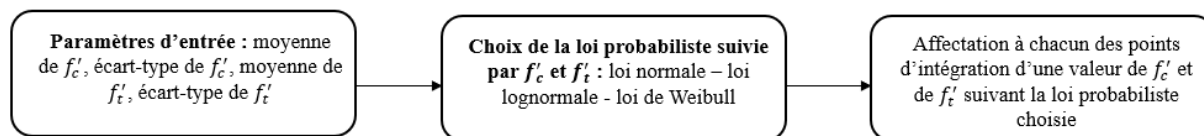


Figure 3.6 Principe de fonctionnement de la sous-routine probabiliste pour un béton ordinaire

Pour les bétons renforcés de fibres, et pour une loi de comportement post-pic de type 3, il est possible de faire varier l'énergie de post-fissuration, en plus de la résistance en traction et en compression. L'utilisateur fournit les coordonnées des 7 points (ouverture de fissure en abscisse et contrainte en ordonnée) servant à relier les portions de segments entre eux. L'aire sous la courbe est ainsi calculée, cette aire de référence sert de moyenne pour la distribution probabiliste, la valeur de l'écart-type doit être renseignée par l'utilisateur. Tel qu'indiqué précédemment, la contribution de la matrice est considérée comme étant déterministe dans le cadre de ce mémoire et seule l'action des fibres est soumise à un champ aléatoire. Ainsi, pour chaque point d'intégration, un tirage aléatoire est effectué et un nombre entre 0 et 1 est généré. Ce nombre sert à calculer l'énergie de post-fissuration (celle uniquement due à l'action des fibres) suivant la distribution choisie grâce à la méthode dite inverse cumulée. Une fois cette valeur générée, il est possible de recalculer les coordonnées des 7 points permettant de définir la loi de comportement en post-fissuration du béton en effectuant l'opération suivante pour chacune des contraintes pour  $i$  allant de 2 à 7 :

$$\sigma_i = \frac{G_{f,fibres}^{aléatoire} + G_{f,béton}^{initial}}{G_{f,fibres}^{initial} + G_{f,béton}^{initial}} \times \sigma_{i,initial} \quad (3.10)$$

Avec  $G_{f,fibres}^{aléatoire}$  la valeur de l'énergie de post-fissuration générée grâce à la loi probabiliste pour un point de Gauss donné;  $G_{f,fibres}^{initial}$  la valeur moyenne calculée à l'aide des coordonnées des 7 points initialement entrées par l'utilisateur et  $G_{f,béton}^{initial}$  la contribution du béton qui demeure déterministe et qui est également calculée grâce aux coordonnées initialement fournies par l'utilisateur.

La Figure 3.7 permet de bien résumer le principe de fonctionnement de la sous-routine dans le cas d'un BRF. Le paramètre  $\sigma_{i(i=2...7)}$  désigne la valeur aléatoire affectée à chacun des points d'intégration et  $\sigma_{i,initial(i=2...7)}$  représente la valeur initialement donnée par l'utilisateur.

Le point de coordonnées  $(w_1, \sigma_1)$  est considéré comme constant et ne suit pas de loi probabiliste afin de s'assurer que la valeur de sa contrainte soit inférieure à la valeur de la résistance en traction.

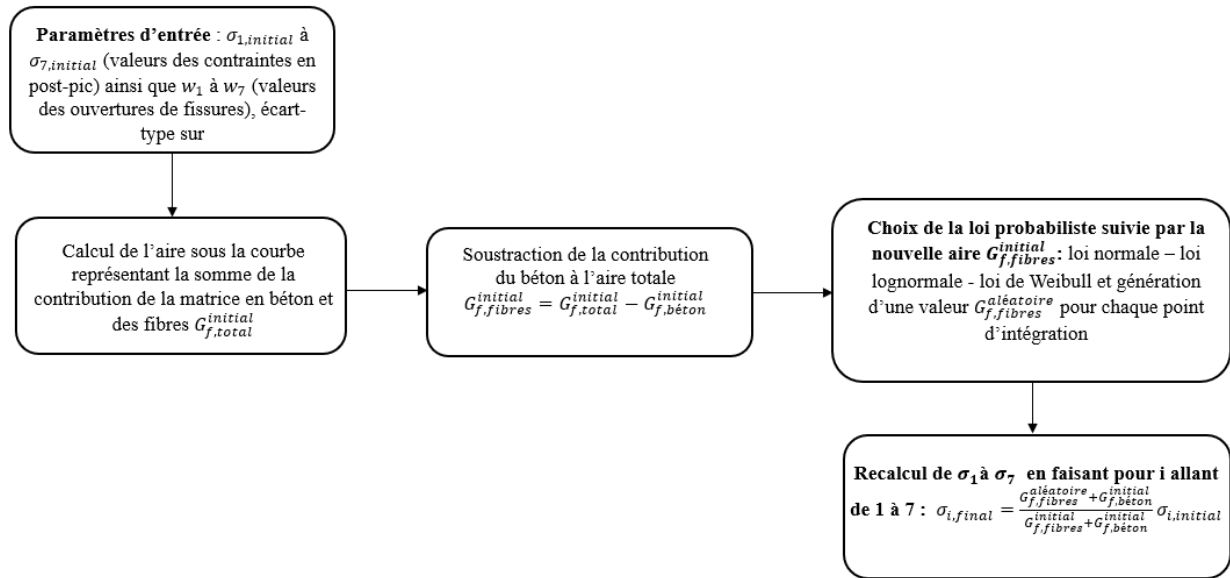


Figure 3.7 Principe de fonctionnement de la sous-routine probabiliste pour un béton renforcé de fibres

En outre, les valeurs d'ouvertures de fissures ( $w_2$  à  $w_7$ ) sont considérées comme constantes (celles-ci demeurent égales aux valeurs initialement entrées par l'utilisateur) et ne varient pas d'un point de Gauss à un autre ni d'une simulation à une autre.

Ainsi, seule la contrainte post-fissuration associée à la contribution des fibres est considérée probabiliste. Ce choix qui a été fait peut-être justifié par le fait que le comportement en post-pic est essentiellement attribuable à l'action des fibres. En effet, il est désormais connu et accepté qu'une grande majorité des BRF possèdent un processus de fissuration qui peut être décrit schématiquement par trois étapes générales.

1. Tout d'abord, une microfissuration diffuse a lieu dans tout le volume du matériau sollicité en tension. Les fibres d'acier, qui possèdent des dimensions (longueur et diamètre) importantes par rapport à celles des fissures (ouverture de fissure), n'ont pas de réel effet sur la formation et la propagation de ces microfissures.
2. La deuxième étape concerne la propagation des microfissures et conduit à l'apparition de macrofissures. Les fissures faisant office de « transition » peuvent être qualifiées de mésosfissures. Comme pour la première étape, les fibres en acier n'affectent pas la propagation de ces fissures méso-scopiques de manière significative.
3. La troisième et dernière étape concerne la propagation des macrofissures. Celle-ci coïncide avec la phase adoucissante du matériau. Au cours de cette étape, les fibres vont transférer l'effort à travers la macrofissure, contrôlant ainsi l'ouverture des fissures et leur propagation.

Pour résumer, il est possible d'affirmer que :

- en pré-pic et avant que la charge maximale en traction soit atteinte, seule la matrice cimentaire contribue au processus de fissuration du BRF et les fibres sont alors considérées comme mécaniquement neutres.
- après le pic, l'effet des fibres devient très important, notamment pour contrôler la propagation des macrofissures.

### 3.1.3 Vérifications

Une fois cette sous-routine programmée, il est nécessaire d'effectuer des vérifications afin de s'assurer du bon fonctionnement de cette dernière avant de pouvoir l'intégrer au code EPM3D préexistant. Pour ce faire, une première vérification des valeurs directement retournées par le code programmé en FORTRAN a été réalisée grâce au logiciel *Microsoft Visual Studio*. Une fois celle-



ci complétée avec succès, une seconde vérification sur un cube en compression modélisée sur ABAQUS a été effectuée.

### 3.1.3.1 Vérification de la programmation sur FORTRAN

Cette sous-section contiendra l'ensemble des vérifications qui ont été réalisées pour le code programmé en FORTRAN grâce au logiciel Microsoft Visual Studio.

Les étapes qui ont été suivies pour réaliser cette vérification peuvent être résumée en quatre points.

1. Pour chacune des trois lois probabilistes (loi normale, lognormale et de Weibull) et pour chacune des propriétés mécaniques suivant une approche probabiliste (résistance en compression, en traction et énergie de post-fissuration pour les BRF), les valeurs sont générées pour l'équivalent de 100 000 points d'intégration.
2. Grâce à un post-traitement effectué dans Excel, il a été possible de tracer le nuage de points représentant le nombre d'occurrence en fonction de la valeur (pour une propriété mécanique et une loi probabiliste données).
3. La courbe théorique de la fonction de densité de probabilité de la loi en question est également représentée sur le même graphique.
4. La dernière étape consiste à analyser la concordance entre le nuage de points représentant les données obtenues en sortie du code FORTRAN et la courbe théorique de la loi probabiliste.

#### Vérification pour la loi normale :

Premièrement, pour la loi normale, la première vérification a été réalisée pour la résistance en traction  $f'_t$ . La Figure 3.8 met en exergue la fonction de densité de probabilité théorique pour une loi normale avec pour paramètres une moyenne égale à  $\overline{f'_t} = 2,33 \text{ MPa}$  et un écart-type égal à  $\sigma = 0,233 \text{ MPa}$  soit un coefficient de variation de 10%. La concordance entre ces deux densités de probabilités est parfaite, ce qui montre que le code renvoie bien les valeurs adéquates pour cette combinaison-ci ( $f'_t$  est modélisée par une distribution Gaussienne).

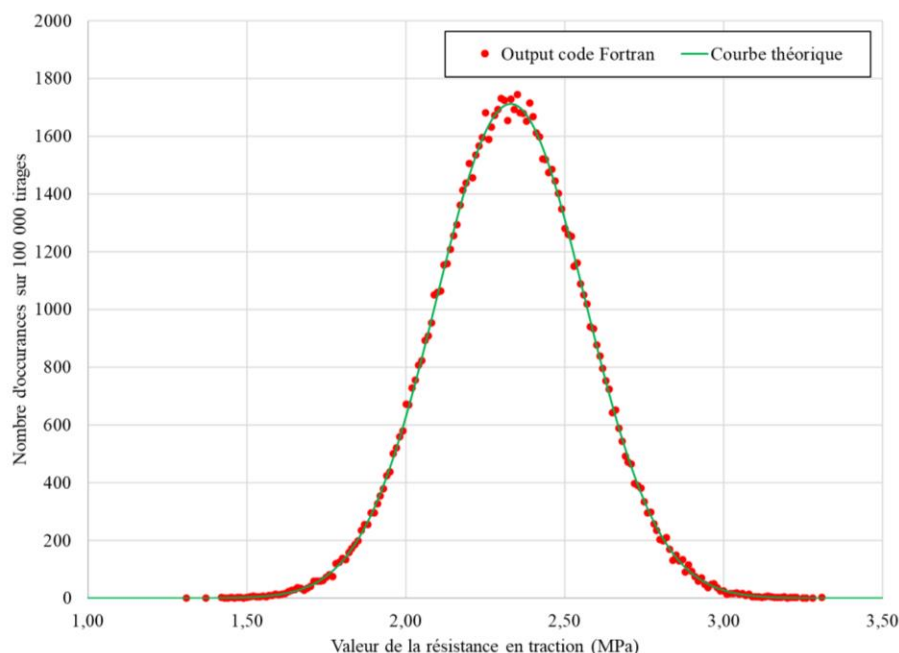


Figure 3.8 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction

La Figure 3.9 permet de comparer la densité de probabilité théorique et celle retournée par le code FORTRAN pour la résistance en compression suivant une loi normale avec pour paramètres d'entrée la moyenne égale à  $\overline{f'_c} = -50 \text{ MPa}$ , un écart type qui vaut  $\sigma = 5 \text{ MPa}$  soit un coefficient de variation d'une valeur de 10%. De même, et comme le met en évidence la Figure 3.9, la concordance est très bonne entre les données théoriques et les données renvoyées par le code FORTRAN.

Il est important de mentionner que la loi utilisée dans le code FORTRAN est une loi normale tronquée. De manière plus générale, une loi tronquée désigne une loi où l'on ne garde que les tirages sur un intervalle défini. En ce qui concerne la sous-routine probabiliste d'EPM3D, une troncature est effectuée pour les valeurs strictement négatives pour la distribution normale. Étant donné que les valeurs de la résistance en compression sont strictement négatives, ces dernières sont traitées par le code en valeur absolue, et elles sont multipliées à la toute fin par  $-1$  avant d'être affectées à leurs points d'intégration respectifs. Comme la loi normale est parfaitement symétrique (fonction de densité de probabilité paire), cette inversion (multiplication par  $-1$ ) n'est pas visible dans la Figure 3.9.

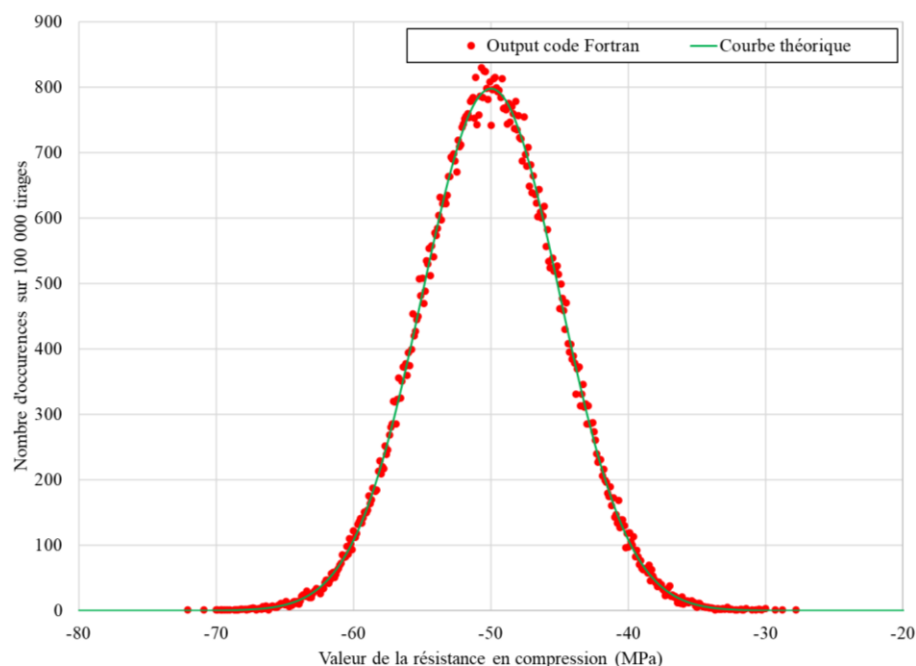


Figure 3.9 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression

#### Vérification pour la loi lognormale :

Les Figure 3.10 et Figure 3.11 mettent en avant les données renvoyées par la sous-routine probabiliste (pour la résistance en traction et en compression) ainsi que la courbe théorique de la fonction de densité de probabilité pour la distribution lognormale. Il est possible d'en déduire que le nuage de points obtenu en sortie du code concorde bien avec la loi probabiliste théorique.

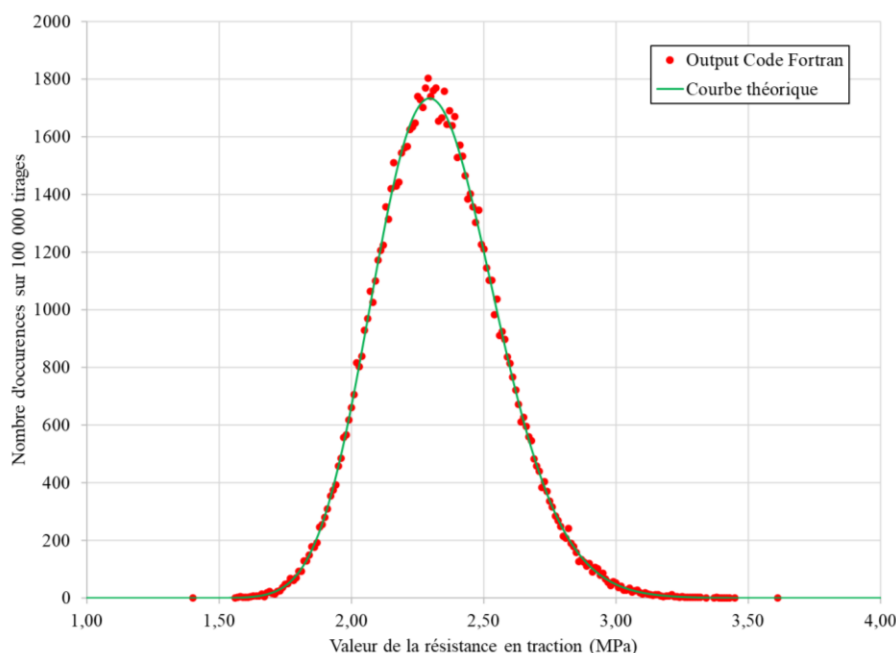


Figure 3.10 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction

Il est important de mentionner que la distribution lognormale est asymétrique (celle-ci est plus étendue du côté droit). Étant donné que cette loi ne renvoie que des valeurs positives, il était nécessaire de traiter les valeurs de résistance en compression en valeur absolue et d'ajouter un facteur multiplicatif de valeur  $-1$  avant leur affectation aux points d'intégration. C'est pour cette raison qu'une « inversion » est observée dans la Figure 3.11 par rapport à la Figure 3.10 (par rapport à l'axe vertical passant par l'extremum de la fonction de densité de probabilité).

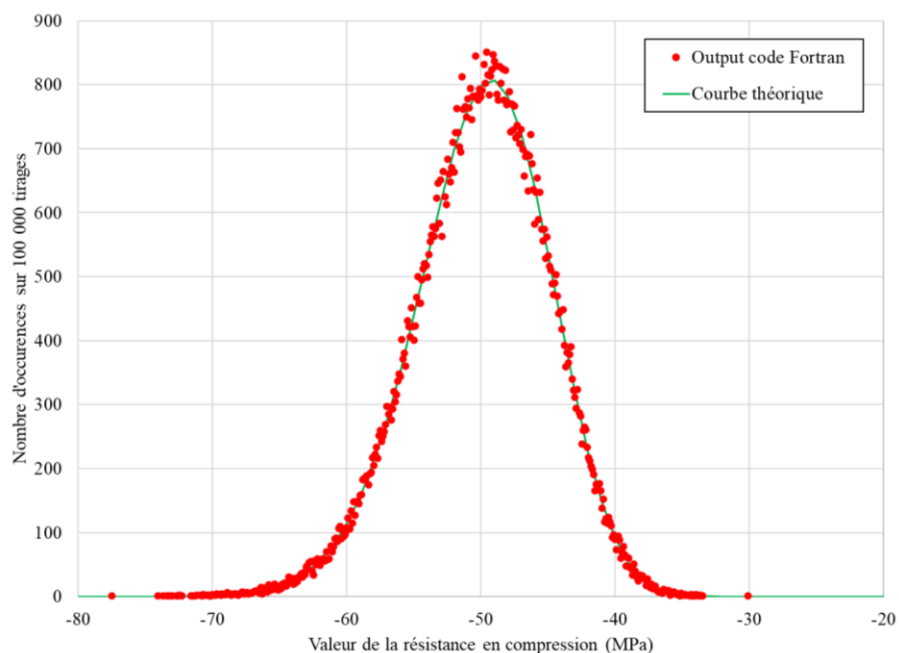


Figure 3.11 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression

#### Vérification pour la loi de Weibull

En ce qui concerne la loi de Weibull, une approche de vérification similaire à celle des lois normale et lognormale a été adoptée pour les résistances en compression et en traction. Les Figure 3.12 et Figure 3.13 mettent en exergue la concordance des valeurs obtenues en sortie du code en FORTRAN et des courbes théoriques des fonctions de densité de probabilité.

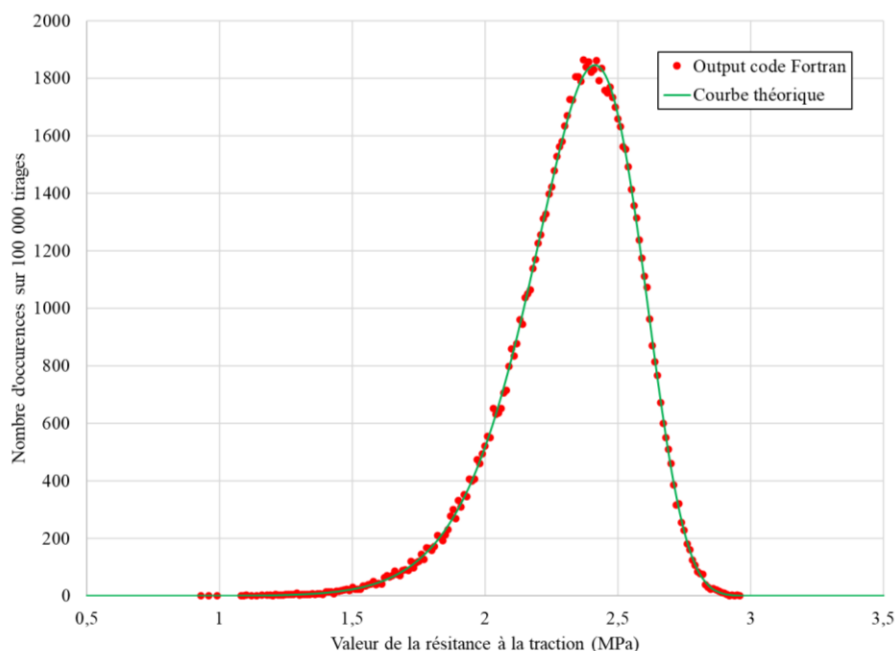


Figure 3.12 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en traction

Comme pour la loi lognormale, la loi de Weibull renvoie des valeurs strictement positives. Pour pouvoir faire varier les valeurs de la résistance en compression suivant cette distribution, il était nécessaire de les traiter en valeur absolue et de multiplier les valeurs en sortie par  $-1$  avant de les affecter à leurs points d'intégration respectifs. Une « inversion » peut ainsi être observée dans la Figure 3.13 par rapport à la Figure 3.12 (par rapport à l'axe vertical passant par l'extremum de la fonction de densité de probabilité).

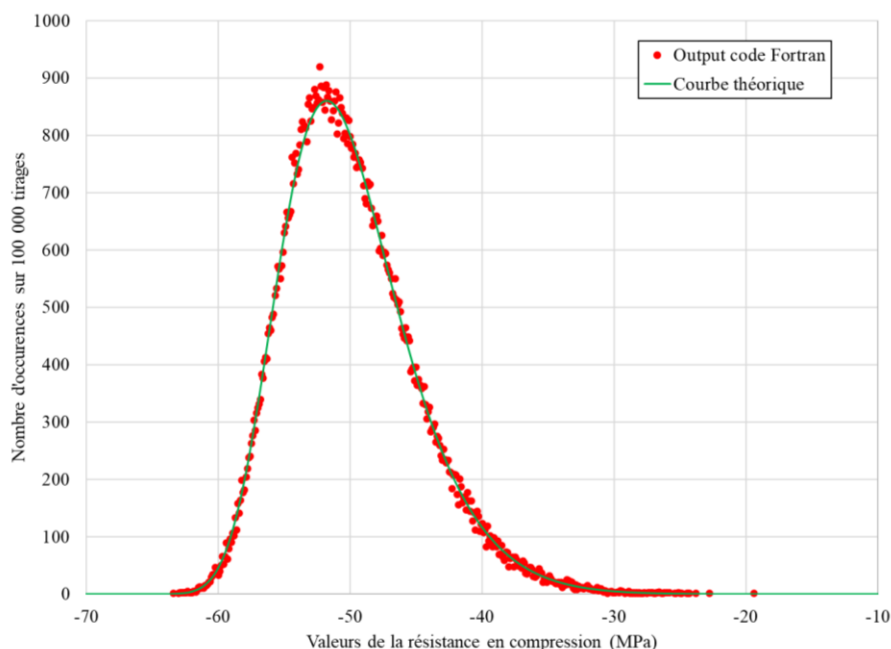


Figure 3.13 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour la résistance en compression

#### Vérification pour les bétons renforcés de fibres

L'approche probabiliste pour les bétons renforcés de fibres étant différente de celles employées pour l'obtention des valeurs de résistance en traction et en compression, une étape supplémentaire était nécessaire pour effectuer le processus de vérification. En effet, étant donné que la sous-routine probabiliste renvoie les valeurs des coordonnées  $\sigma_{i=1...7}$  et  $w_{i=1...7}$ , il a fallu recalculer la valeur de l'aire sous la courbe (sur Excel) afin d'obtenir les valeurs des énergies de fissuration en sortie.

Une fois cette étape réalisée, il a été possible de comparer la courbe théorique de la distribution normale avec les valeurs de l'énergie de fissuration obtenues grâce à la sous-routine comme montré sur la Figure 3.14. Il est possible d'en déduire que le code renvoie des valeurs de moyenne et d'écart-type en adéquation avec la loi et les paramètres spécifiés en entrée.

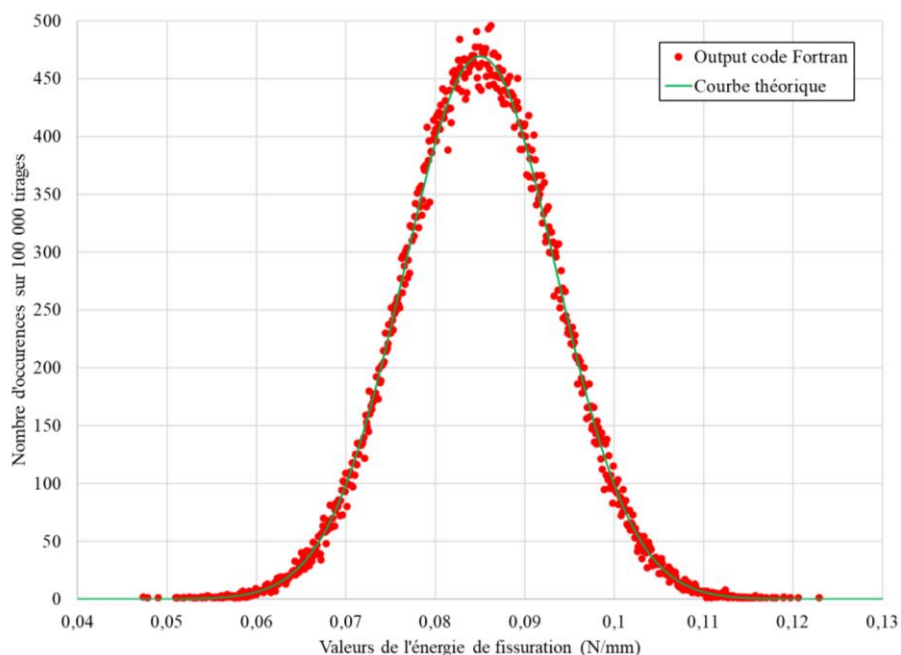


Figure 3.14 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi normale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres

La Figure 3.15 met en évidence la concordance des résultats lorsque la loi lognormale est choisie, dans ce cas de figure-ci, la « déviation » se retrouve du côté droit, en effet, il n'y a pas d'inversion car les données traitées pour l'énergie de fissuration sont positives.



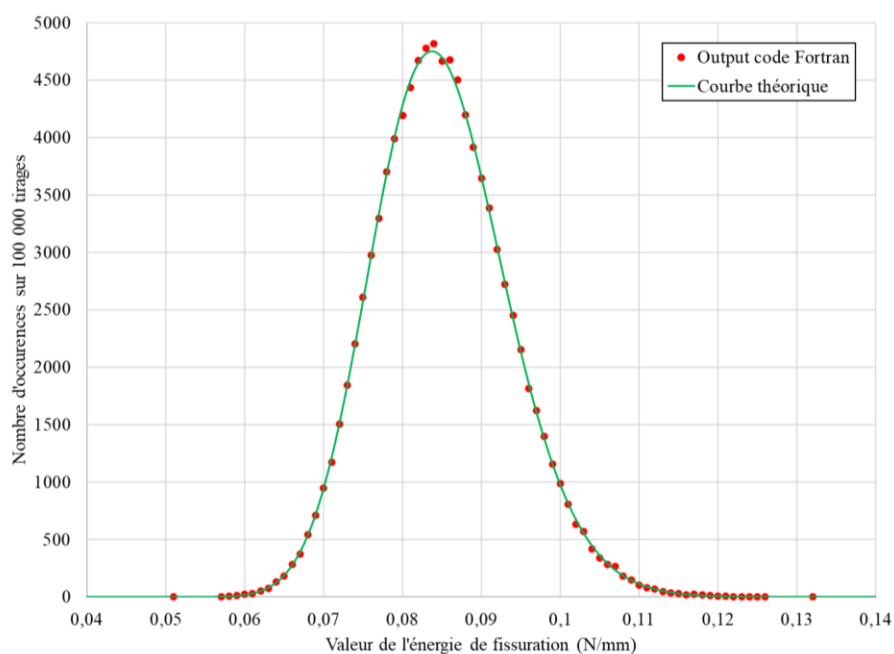


Figure 3.15 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres

Enfin, la Figure 3.16 montre également la correspondance exacte entre les valeurs théoriques et celles obtenues grâce à la sous-routine. Encore une fois, aucune inversion n'est observée puisque les données d'entrée sont positives.

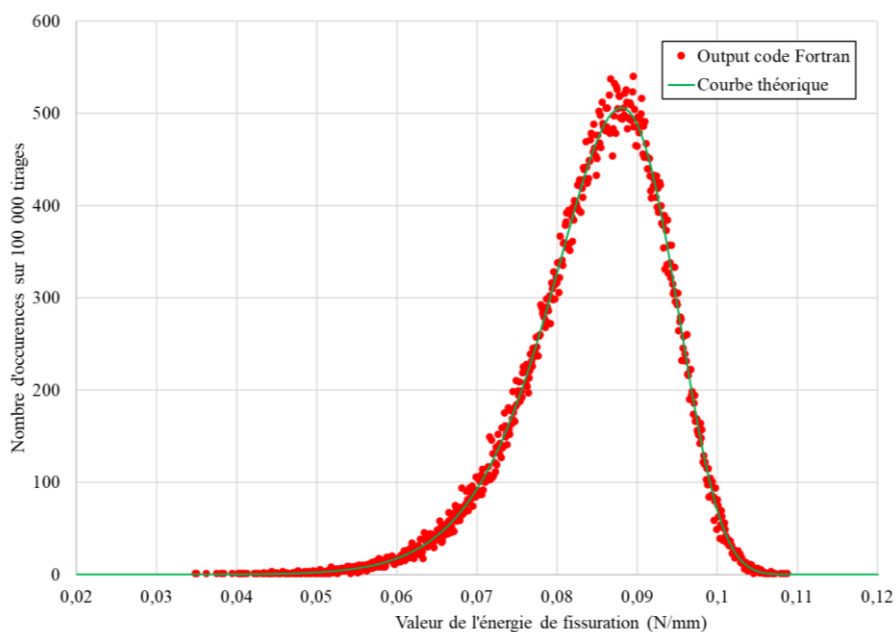


Figure 3.16 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi de Weibull théorique et des données renvoyées par le code FORTRAN pour l'énergie de fissuration des bétons renforcés de fibres

En conclusion, sur une base d'analyse de 100 000 simulations au niveau d'un point d'intégration, cette vérification sur Microsoft Visual Studio a permis de prouver la justesse des résultats obtenus en sortie puisque ceux-ci concordent parfaitement avec les courbes théoriques obtenues et ceux pour les trois propriétés mécaniques suivant un traitement probabiliste ( $f'_t$ ,  $f'_c$  et  $G_f$ ) ainsi que pour les trois distributions probabilistes codées (loi normale, loi lognormale et loi de Weibull).

### 3.1.3.2 Vérification de l'implémentation sur un cube

Une fois l'étape de la vérification immédiate du code complétée, il a été possible d'intégrer la sous-routine au code préexistant et d'implémenter cette nouvelle version sur ABAQUS. Cette sous-section présente l'étape de vérification qui a été réalisée sur le logiciel d'analyse par éléments finis ABAQUS pour un cube en BRF soumis à un effort de compression.

Des vérifications pour les valeurs de résistance en traction et en compression ont été réalisées pour un béton ordinaire mais ne seront pas présentées dans cette sous-partie. En effet, étant donné que ce projet de maîtrise se focalise sur l'étude des BRF, seules les vérifications de l'énergie de

fissuration seront abordées dans cette section. Par ailleurs, des vérifications pour la loi normale et la loi de Weibull ont été effectués mais seront omises de ce paragraphe qui se focalisera sur l'étude de la loi lognormale.

La Figure 3.18 présente les résultats obtenus pour une des valeurs de la contrainte en post-pic ( $\sigma_2$ ). L'option d'ABAQUS permettant de lisser les couleurs en effectuant un moyennage a été désélectionnée au premier abord afin de bien visualiser la répartition des résultats qui présente une distribution aléatoire.

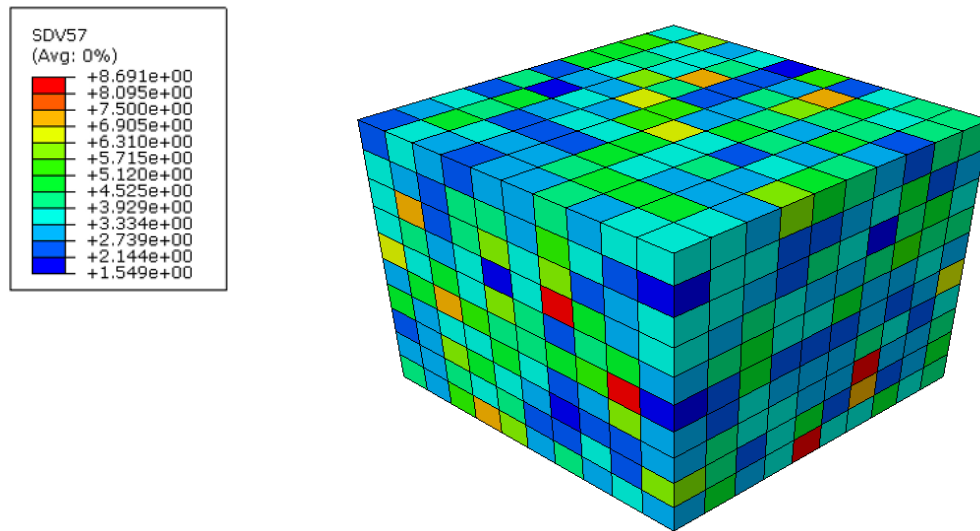


Figure 3.17 Valeurs de traction résiduelle (en MPa) pour un cube en BRF sollicité en traction pour un déplacement imposé de 5 mm

Les valeurs des coordonnées des contraintes de traction résiduelles ont été récupérées pour chaque point d'intégration à chaque incrément de déplacement imposé. Une étape de post-traitement supplémentaire a été réalisée sur Excel afin de pouvoir calculer l'énergie de fissuration attribuée à chacun des éléments. La Figure 3.18 compare la courbe théorique de la fonction de densité de probabilité et les valeurs de  $G_f$  calculées grâce aux données de contraintes renvoyées par ABAQUS.

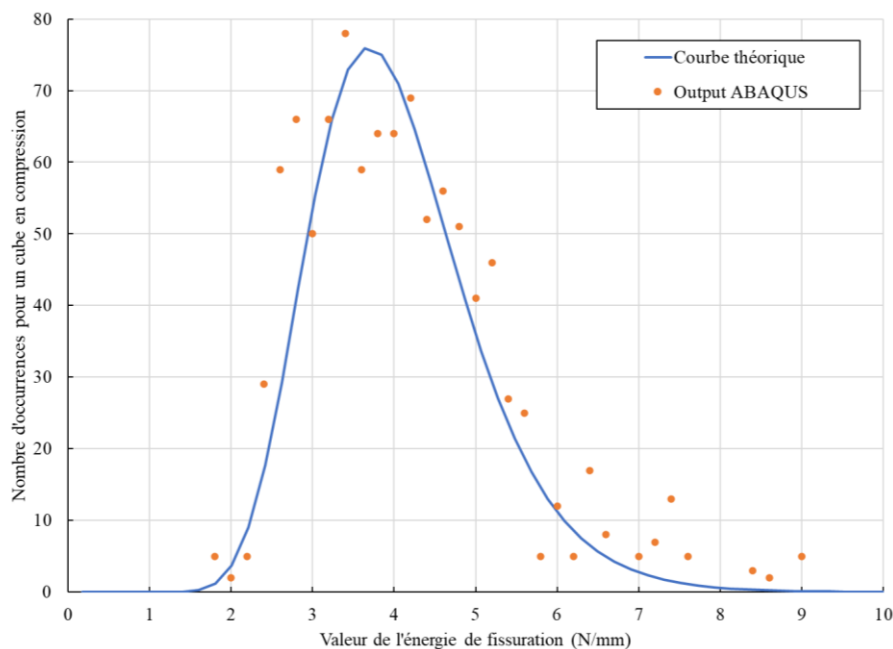


Figure 3.18 Comparaison de la courbe de la fonction de probabilité de la loi lognormale et des valeurs calculées à partir des données renvoyées par le logiciel ABAQUS

Ainsi, le nuage de point suit l'allure de la courbe théorique, par ailleurs, la moyenne et l'écart-type concordent bien avec les paramètres de la loi lognormale entrés par l'utilisateur.

Néanmoins, il subsiste un écart entre la courbe théorique et les valeurs renvoyées par ABAQUS, ceci est probablement dû :

- aux différents arrondis faits lors des différentes étapes de calcul internes au logiciel d'éléments finis et qui engendre une propagation des incertitudes à l'origine des légers écarts observés;
- au nombre de points générés par ABAQUS beaucoup plus faible qui peut expliquer les imprécisions observées sur la Figure 3.18 (1000 points correspondant aux 1000 éléments versus 100 000 pour la vérification effectuée avec le code FORTRAN directement)

### 3.1.4 Stratégie d'utilisation

Le processus de vérification présenté plus haut indique que la programmation des lois probabilistes a été correctement implémentée dans EPM3D. Reste maintenant à choisir l'approche privilégiée

pour son utilisation pour modéliser le comportement d'éléments en béton renforcés de fibres, des spécimens d'essais matériaux (os, prisme en flexion, dalle circulaire) à l'élément structural (poutre, dalles, etc.).

L'objectif est de reproduire les phénomènes physiques des BRF, tout en se limitant au comportement en traction dans le cadre de ce mémoire, en considérant des propriétés probabilistes du BRF de telle sorte à ce que la modélisation soit indépendante de la taille du maillage choisi.

Les travaux de Rossi et al. (2015) et de Bélanger (2000) ont permis de démontrer que, d'un point de vue structural pour des éléments en BRF, la moyenne de la résistance ne varie pas en fonction de la taille des éléments. En revanche, la dispersion des résultats varie avec la taille, augmentant avec la diminution de la taille des éléments structuraux. Ainsi, pour modéliser un volume donné en éléments finis, la moyenne de l'énergie de fissuration devrait être invariable en regard de la taille des éléments alors que le coefficient de variation devra être plus élevé pour un maillage fin que pour celui d'un maillage plus grossier. Deux stratégies peuvent être adoptées pour déterminer les valeurs d'entrées : une approche analytique et une autre basée sur la calibration.

Rossi et al. (2015) ont adopté une approche basée sur la calibration dans laquelle il reproduit les résultats d'essais de traction avec des maillages d'éléments finis de différentes tailles afin de déterminer, par calcul inverse, des lois permettant de déterminer les propriétés d'entrée selon la taille de l'élément. Cette approche présente l'avantage de permettre d'éliminer l'hypothèse de non-corrélation entre les propriétés d'éléments adjacents. En effet, comme physiquement la résistance d'un élément n'est pas indépendante de celle de l'élément voisin (une fibre pouvant traverser plusieurs éléments selon la taille respective des fibres et du maillage), l'utilisation d'une calibration sur des essais réels offre l'avantage de représenter adéquatement le comportement d'un volume de BRF sans aller dans des modèles de grande complexité. Cependant, pour être valide, une telle approche requière un grand nombre d'analyses non linéaires par éléments finis pour la calibration.

L'approche analytique vise à obtenir les mêmes résultats hors d'un environnement d'éléments finis considérant que la calibration en traction directe se fait sur un élément où il est supposé que tous les éléments subissent le même allongement. L'avantage d'une telle approche est qu'elle est beaucoup moins exigeante numériquement.

## 3.2 Modélisation probabiliste d'une éprouvette en traction avec EPM3D

Cette section présente le cas d'application de la sous-routine probabiliste EPM3D à un os soumis à un effort de traction. L'objectif principal de cette partie est de développer un modèle simplifié permettant de relier les caractéristiques de la loi probabiliste entrées par l'utilisateur et celles obtenues en sortie de l'analyse (moyenne et coefficient de variation) en fonction de la taille de maillage employée.

Tout d'abord, la campagne expérimentale sur laquelle se basent les simulations, le modèle ABAQUS ainsi que l'étude paramétrique réalisée seront présentés. Ensuite, l'étude de convergence du coefficient de variation et l'analyse de l'impact de la taille du maillage sur les paramètres statistiques seront présentés ainsi que le modèle qui en découle seront présentés de manière détaillée. Enfin, cette partie s'achèvera par l'analyse des patrons de fissuration qui ont pu être observés dans les différentes analyses.

### 3.2.1 Campagne expérimentale utilisée

Cette sous-section présente la campagne expérimentale sur laquelle se basent l'ensemble des simulations du modèle d'application de l'os en traction sur ABAQUS.

Il s'agit d'essais qui ont été réalisés au sein du laboratoire de Structures de Polytechnique Montréal par Sébastien Reygner (2016). Le but de cette campagne expérimentale était d'évaluer l'influence du dosage en fibres sur le comportement du béton renforcé de fibres en traction directe. Trois formulations de BRF ont été testées mais on ne s'intéressera qu'au BRF70-80kg. La matrice cimentaire utilisée pour effectuer les essais a été élaborée de telle sorte à optimiser l'insertion et l'orientation des fibres. La résistance en compression minimale visée pour le béton était de  $f_{c28j} = 70 \text{ MPa}$ . Les fibres utilisées pour réaliser le mélange possèdent un élanement de 55, avec une longueur égale à 30 mm et un diamètre valant 0,55 mm. Le Tableau 3.1 détaille la formulation du matériau.

Tableau 3.1 Composition du béton étudié

Composition	Dosage
Fibres (Dramix ZP-305)	80 kg/m <sup>3</sup>
Ciment	650 kg/m <sup>3</sup>
Eau	171,60 kg/m <sup>3</sup>
Superplastifiant (Plastol6200EXT)	38,36 kg/m <sup>3</sup>
Sable 1 (Grossier Man)	163,47 kg/m <sup>3</sup>
Sable 2 (Fin Naturel)	653,88 kg/m <sup>3</sup>
Pierre (2.5-10 Gr. St F)	602,92 kg/m <sup>3</sup>

Des essais de caractérisation sur des éprouvettes cylindriques ont été réalisés afin de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau. Trois essais de compression et une mesure du module d'élasticité et du coefficient de poisson ont été effectués. Les résultats de ces essais sont présentés dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2 Propriétés mécaniques du béton étudié

Propriétés	$E_{moy}$	$f'_{c,moy}$	$\nu_{moy}$
	39268 MPa	93,1 MPa	0,206

La géométrie et les mensurations des spécimens d'os sont présentés dans la Figure 3.19. L'essai de caractérisation consiste à solliciter en traction ce spécimen-ci entièrement fait en béton. Comme montré sur la Figure 3.19, chaque spécimen consiste en une plaque de béton de 50 mm d'épaisseur ayant une section centrale réduite de dimension constante afin que la rupture puisse y être localisée.

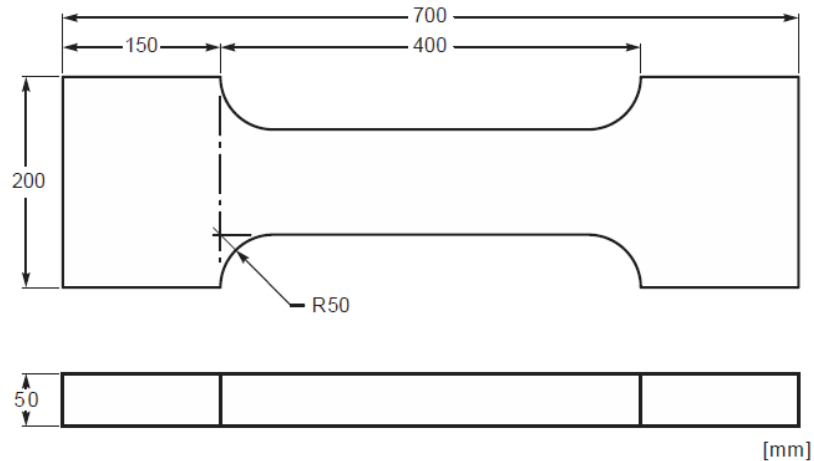


Figure 3.19 Mensurations de l'éprouvette utilisée pour les essais de traction directe

Les extrémités plus larges permettent le serrage de l'os entre les mâchoires de la presse ce qui permet d'encastrer l'os à ses deux extrémités par une application d'une pression de  $6,89 \text{ MPa}$  ( $1000 \text{ psi}$ ). Le chargement se fait par le biais du plateau supérieur de la presse, en imposant un déplacement contrôlé. Quatre capteurs LVDT sont fixés sur les spécimens, deux d'entre eux sont situés sur la partie centrale plus étroite et servent à mesurer les déplacements au niveau de la section réduite et les deux autres sont positionnés sur les parties les plus larges et sont là pour s'assurer du bon déroulement de l'essai. Par ailleurs, les montages ont été réalisés avec précaution afin d'éviter de créer de la flexion ou de la torsion lors de la mise en place du spécimen et de l'essai de caractérisation, ce qui viendrait parasiter les résultats observés.

La Figure 3.20 présente les courbes de contrainte en fonction de l'ouverture de fissure pour les six spécimens qui ont été testés ainsi que la courbe moyenne de ces mesures (voir la Figure 3.21).



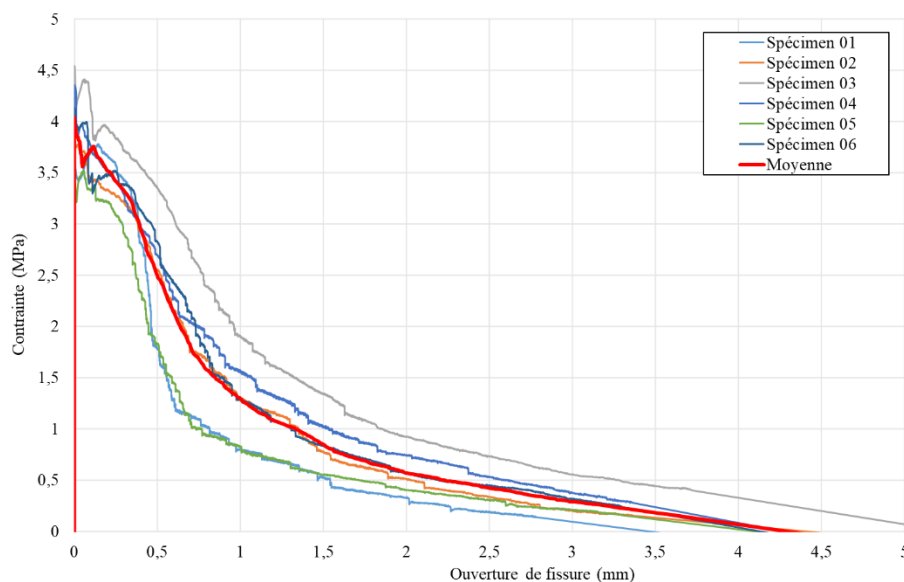


Figure 3.20 Courbes de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure pour les six spécimens de la campagne expérimentale

Un ajustement de cette courbe moyenne a ensuite été réalisé afin de déterminer les coordonnées des sept points qui doivent être introduits afin de définir la loi de béton probabiliste sur EPM3D. L'aire sous les six courbes représentant les énergies de fissuration ont également été calculées afin de pouvoir en déduire l'écart-type également nécessaire à l'établissement de la loi probabiliste sous EPM3D.

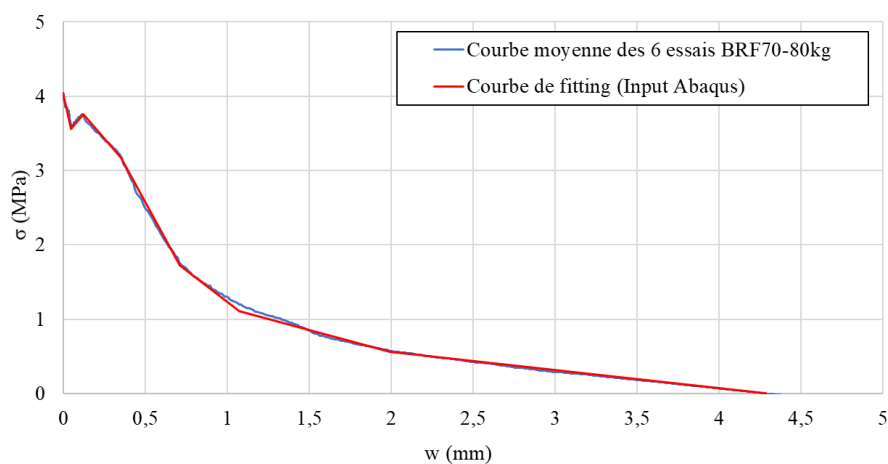


Figure 3.21 Ajustement réalisé avec la courbe moyenne de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure

### 3.2.2 Présentation du modèle sur ABAQUS

Le modèle par éléments finis généré pour les simulations numériques respecte parfaitement les mensurations ainsi que la géométrie exacte des spécimens utilisés pour la campagne expérimentale. Les conditions aux limites considérées pour le modèle d'éléments finis sont représentées dans la Figure 3.22.

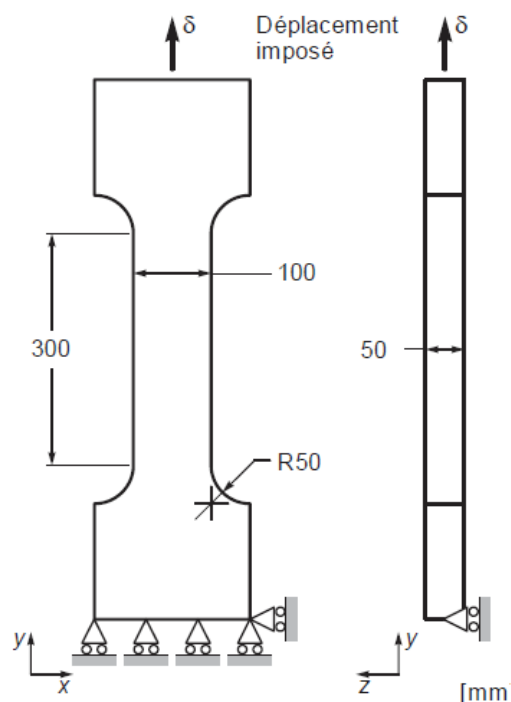


Figure 3.22 Conditions aux limites du modèle éléments finis de l'essai de l'os en traction

La loi de comportement du BRF est directement déduite des résultats de la sous-section précédente, l'ensemble de ces paramètres sont résumés dans le Tableau 3.3.

Tableau 3.3 Paramètres du modèle EPM3D pour le BRF 70-80 kg

Compression		Traction			
$f'_c$ (MPa)	93,1	Pré pic	Post pic		
Général		$f'_t$ (MPa)	4,037	Contrainte (MPa)	Ouv. Fissure (mm)
$E_0$ (MPa)	29268			$\sigma_1 = 3,56$	$w_1 = 0,049$
$\nu(-)$	0,2			$\bar{\sigma}_2 = 3,76$	$w_2 = 0,12$
Env. rupture	Willam-Warnke			$\bar{\sigma}_3 = 3,17$	$w_3 = 0,35$
				$\bar{\sigma}_4 = 1,72$	$w_4 = 0,71$
				$\bar{\sigma}_5 = 1,11$	$w_5 = 1,075$
				$\bar{\sigma}_6 = 0,56$	$w_6 = 1,995$
				$\bar{\sigma}_7 = 0$	$w_7 = 4,285$

Le Tableau 3.4 détaille quels paramètres sont déterministes et quels paramètres sont probabilistes. Les moyennes des paramètres suivant une distribution aléatoire sont indiquées dans le Tableau 3.3 :  $\bar{\sigma}_{i=2...7}$ . Pour le coefficient de variation, ils ne sont pas précisés car ces derniers seront sujet à modification selon ce qui est étudié.

Tableau 3.4 Paramètres probabilistes et déterministes

Paramètres déterministes	Paramètres probabilistes suivant une loi lognormale
$f'_c, f'_t, E_0, \sigma_1, w_{i=1..7}$	$\sigma_{i=2...7}$

### 3.2.3 Étude paramétrique

Dans cette section, une étude paramétrique a été réalisée afin d'analyser les biais éventuels qui pourraient être introduits par certains paramètres tels que le type de maillage utilisé, l'amortissement, la fréquence du filtre passe-bas ou encore la loi probabiliste utilisée. L'ensemble des impacts de ces paramètres seront étudiés et analysés séparément dans les sous-sections suivantes.

### 3.2.3.1 Type de maillage utilisé

Cette sous-section présente l'influence du type de maillage utilisé sur les résultats renvoyés par ABAQUS. Les trois types de maillage qui ont été testés sont présentés dans la Figure 3.23 :

- le maillage (a) est hexaédrique, il a été construit « manuellement » grâce à des partitions au niveau des changements de sections;
- le maillage (b) est également hexaédrique, il a été obtenu grâce à l'algorithme de génération de maillage d'ABAQUS « *Medial Axis* »;
- le maillage (c) est tétraédrique, ce dernier est également automatiquement généré par ABAQUS.

En outre, pour des paramètres en entrée identiques :

- les allures de courbes de la contrainte en fonction du déplacement sont identiques pour les trois maillages;
- la valeur moyenne de l'énergie de fissuration est égale pour les trois maillages;
- les coefficients de variations obtenus diffèrent quant à eux d'un maillage à un autre, ce qui semble logique, puisque le nombre d'éléments change suivant le maillage sélectionné;
- le temps de calcul le plus court est obtenu avec le maillage (b) à l'opposé du maillage (c) qui donne les temps d'analyse les plus longs.

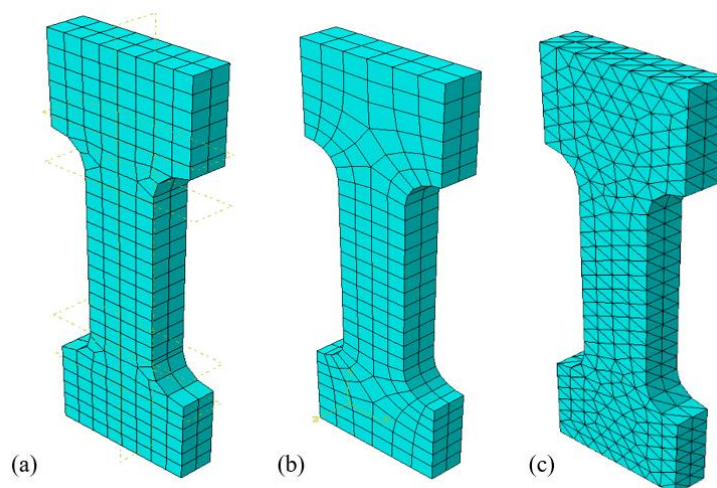


Figure 3.23 Les trois types de maillage utilisés : (a) Maillage tétraédrique manuel (b) Maillage tétraédrique optimisé (c) Maillage hexaédrique

Par ailleurs, pour ce qui est des maillages tétraédriques, le modèle (b) est préférable au modèle (a) en raison de l'absence des éléments distordus dans les coins. En effet, la qualité d'un maillage est quantifiée grâce au ratio entre la plus grande et la plus petite longueur, ce dernier reflète la distorsion des éléments, plus celui-ci est proche de 1, plus le maillage est jugé comme étant de bonne qualité. Ces éléments permettent d'obtenir un incrément de temps plus petit dans ABAQUS *Explicit*. Le maillage (b) semble ainsi être le plus adapté car celui-ci permet d'avoir des temps de simulation faibles, en comparaison avec les deux autres maillages, et ces éléments possèdent peu de distorsion en comparaison avec le maillage (a). Pour la suite des analyses, le maillage (b) sera utilisé.

### 3.2.3.2 Utilisation d'un amortissement

Dans cette sous-section, l'influence de l'amortissement est étudiée. En effet, l'amortissement est une composante importante d'un système mécanique. Le mouvement du système n'étant pas perpétuel, il est important de prendre en compte la perte d'énergie résultant des forces de résistance qui s'opposent au mouvement (telles que la résistance de l'air, les mouvements microstructuraux, etc.).

Tout d'abord, une analyse modale a été réalisée afin de calculer les fréquences naturelles et les déformées modales de l'éprouvette. En effet, ABAQUS permet de calculer :

- les fréquences naturelles ou de résonance (valeurs propres) du modèle.

- les déplacements relatifs de la géométrie lorsque le modèle vibre à ces fréquences.

En ce qui concerne le modèle de l'os en traction, il faut trouver le mode fondamental associé à l'allongement. En effet, la fréquence à considérer est celle de la déformée modale qui se rapproche le plus du mode de sollicitation auquel on s'intéresse, ici l'allongement puisque l'éprouvette est sollicitée en traction. Une valeur de  $f_{allongement} = 1133 \text{ Hz}$  est ainsi obtenue par le biais de l'analyse modale. L'amortissement dit de « Rayleigh » disponible sur ABAQUS se décompose en deux parties : la première composante représentée par le biais du coefficient  $\alpha$  permet d'amortir les gammes de fréquences inférieures (dépendantes de la masse) et la seconde désignée par le terme  $\beta$  les gammes supérieures (dépendantes de la rigidité).

Dans le cadre de l'os en traction étudié, seule la composante proportionnelle à la masse sera considérée, les coefficients de l'amortissement de « Rayleigh » renseignés dans ABAQUS sont donc :

$$\begin{cases} \alpha = 4\pi \cdot f_{allongement} \cdot \xi = 4\pi \times 1133 \times 0,05 = 711 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Le facteur  $\xi$  désigne le ratio d'amortissement que l'on considère comme étant égal à 5%. Afin d'étudier l'influence de l'introduction ou non d'un amortissement dit de « Rayleigh » sur les études probabilistes, deux modèles sans et avec amortissement ont été comparés pour les trois tailles de maillage suivantes : 25 mm, 10 mm et 5 mm. Les paramètres entrés, y compris ceux de la composante probabiliste d'EPM3D sont identiques pour toutes les simulations, indépendamment de la taille de maillage et de l'introduction ou non de l'amortissement de « Rayleigh ». Le nombre de simulations qui ont été réalisées pour chaque cas de figure s'élève à 50. Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 3.5 ci-dessous.

Tableau 3.5 Comparaison des ratios de moyennes (en %) et des coefficients de variation pour des éprouvettes avec différentes tailles de maillage avec ou sans amortissement

Taille des éléments (en mm)	Présence d'un amortissement		Absence d'un amortissement	
	$\frac{Moyenne_{sortie}}{Moyenne_{entrée}}$	$\frac{COV_{sortie}}{COV_{entrée}}$	$\frac{Moyenne_{sortie}}{Moyenne_{entrée}}$	$\frac{COV_{sortie}}{COV_{entrée}}$
25	107	140	108	130
10	104	68	108	65
5	104	48	105	46

D'après le Tableau 3.5, et pour toutes les tailles d'éléments, l'introduction d'un amortissement a pour effet :

- de très légèrement diminuer le ratio entre la moyenne obtenue en sortie et la moyenne entrée.
- d'augmenter de peu le ratio entre le coefficient de variation en sortie et le coefficient de variation en entrée.

Ainsi, et étant donné que l'amortissement n'a pas d'influence majeure sur les résultats de l'analyse probabiliste, celui-ci sera conservé pour la suite des simulations qui seront effectuées sur le modèle de l'éprouvette en traction. Par ailleurs, l'introduction d'un tel paramètre rend le modèle plus représentatif de ce qui se passe dans la réalité et constitue un filtre naturel aux oscillations associées aux analyses explicites. Dans ce qui suit, il a été aussi envisagé d'utiliser un filtre artificiel, mais seulement en phase de post-traitement des résultats, toujours dans l'objectif d'avoir des courbes de résultats plus lisses et plus faciles à interpréter.

### 3.2.3.3 Fréquence du filtre passe-bas employée

Dans ce paragraphe, l'influence de la fréquence du filtre « *Butterworth* » utilisée en post-traitement est analysée. Tout d'abord, le filtre « *Butterworth* » présent dans ABAQUS est un filtre passe-bas généralement utilisé dans le post-traitement des données obtenues en sortie afin d'éliminer le bruit de haute fréquence qui se manifeste généralement sous la forme d'oscillations reliées à la nature quasi-statique de l'analyse explicite.

Ainsi, dans la Figure 3.24, la courbe de force en fonction du temps est filtrée à plusieurs fréquences différentes allant de 10 à 500 Hz. La courbe obtenue à la suite d'un filtrage à  $f = 500 \text{ Hz}$  semble être la plus adaptée et la plus représentative du signal d'origine.

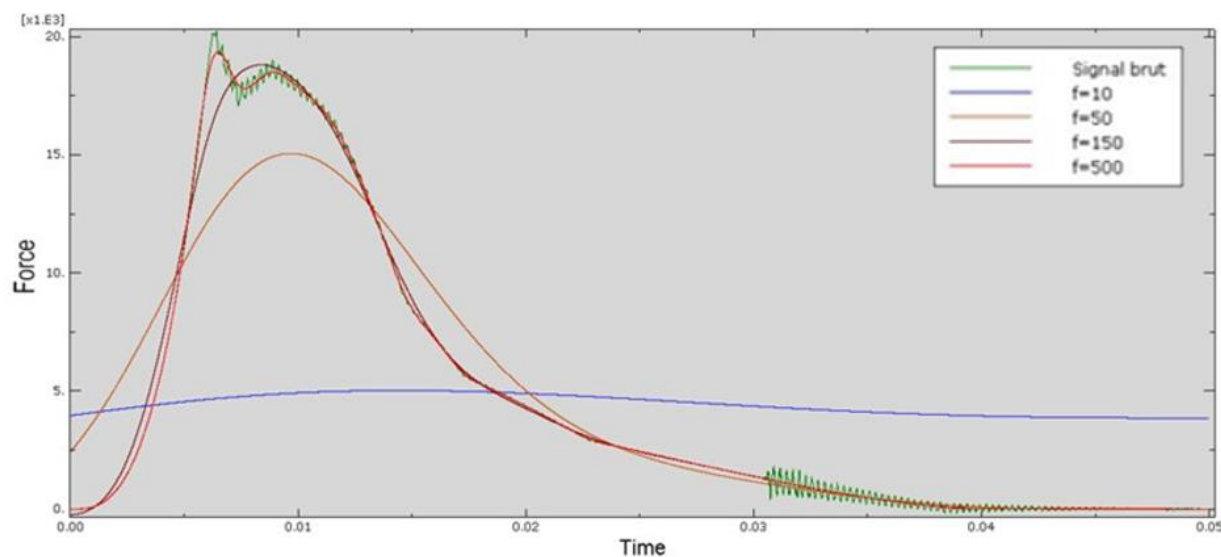


Figure 3.24 Courbes de la force en fonction du temps pour différentes fréquences du filtre Butterworth

En outre, les courbes filtrées aux fréquences valant 500, 600, 700, 1000 et 1250 *Hz* possèdent des allures quasi-identiques. Ainsi, et afin de pouvoir les comparer, un calcul des énergies de fissuration en pré et post-pic a été effectué. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 3.25.

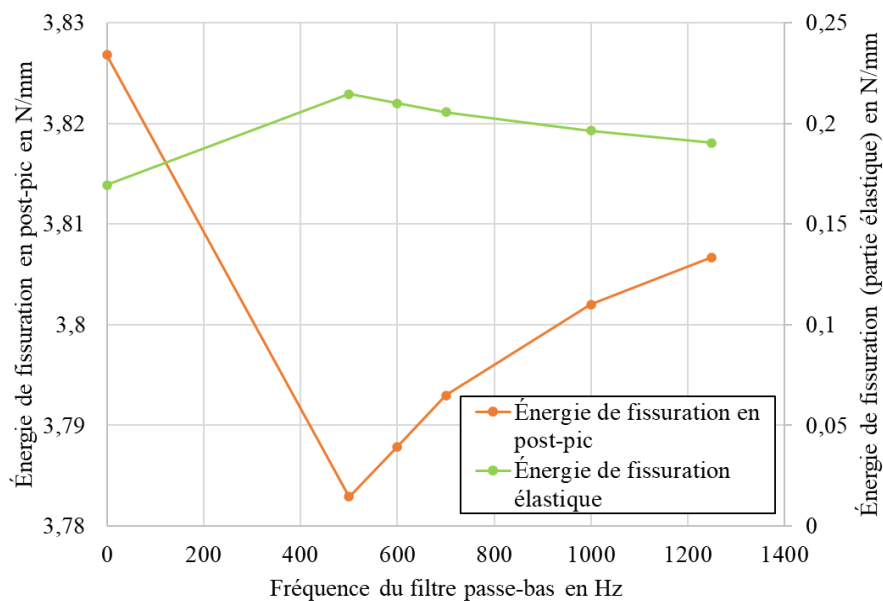


Figure 3.25 Valeurs des énergies de fissuration (élastique et en post-pic) pour différentes fréquences du filtre Butterworth



En ce qui concerne l'énergie de post-fissuration, les écarts de valeurs entre les différentes fréquences ne dépassent pas 1% de la valeur totale moyenne de l'énergie. Néanmoins, pour la partie élastique, les écarts sont un peu plus importants (aux alentours de 20% de la valeur moyenne), la fréquence conservée pour la suite des analyses est  $f = 1250 \text{ Hz}$ , étant donné que celle-ci permet de minimiser l'écart de la valeur de l'énergie en pré-pic entre la courbe filtrée et le signal brut.

#### **3.2.3.4 Étude de l'influence de la loi probabiliste utilisée**

La sous-routine probabiliste a été implémentée de telle sorte à pouvoir choisir entre trois lois probabilistes distinctes : la loi normale, la loi lognormale et la loi de Weibull. Dans cette partie, l'influence de la loi choisie sera étudiée. Pour ce faire, des séries de dix analyses ont été lancées avec des paramètres d'entrée identiques à l'exception de la distribution probabiliste qui diffère d'une série à une autre.

Il est important de mentionner que la campagne expérimentale sur laquelle est basé cet exemple d'application n'est composée que de six essais de traction. Il est donc possible de calculer la moyenne et le coefficient de variation des énergies de fissuration des essais de traction directes de ces six éprouvettes mais le nombre d'essais est insuffisant pour pouvoir identifier la distribution la plus adéquate.

La Figure 3.26 met en avant le ratio entre les moyennes en sortie et la moyenne entrée en fonction du nombre d'analyses pour différentes distributions probabilistes et différentes tailles d'éléments. Sur un très grand nombre d'analyses, les courbes représentées sur la Figure 3.26 tendraient vers la même valeur de ratio puisque la moyenne qui est entrée est identique pour toutes les séries de simulations. Néanmoins, étant donné que nos observations se basent uniquement sur des séries de 10 simulations, des différences existent. En effet, la loi lognormale présente les résultats les plus grands en termes de ratio de moyennes, ceci pourrait s'expliquer par l'allure de cette distribution asymétrique avec une déviation vers la droite. À l'opposé, la distribution de Weibull possède les ratios les plus bas en raison d'une déviation de sa fonction de densité de probabilité vers la gauche.

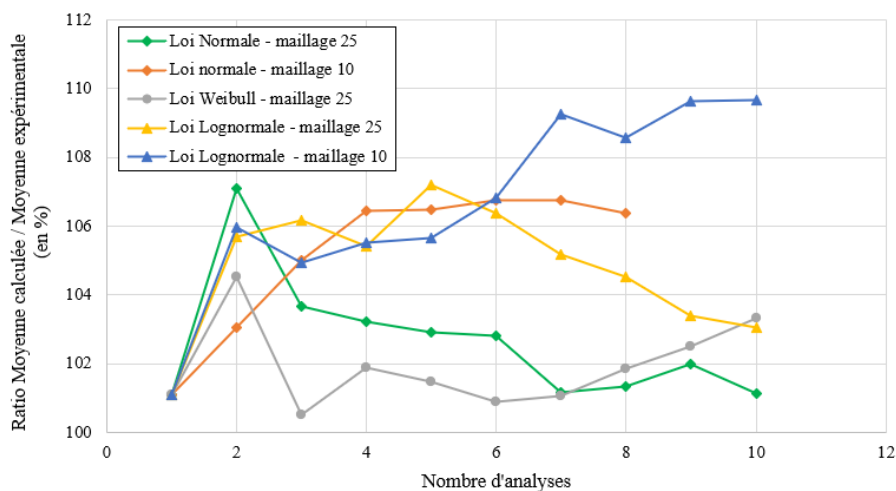


Figure 3.26 Ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimentale en fonction du nombre d'analyses entrée pour différentes lois probabilistes et pour différentes tailles de maillage

La Figure 3.27 met en exergue le ratio entre le coefficient de variation en sortie sur le coefficient de variation en entrée en fonction du nombre d'analyses pour différentes distributions probabilistes et différentes tailles de maillages. À premier abord, les ratios des COV semblent converger vers la même valeur, quel que soit la loi ou la taille de maillage. Néanmoins, la Figure 3.27 ne permet pas de réellement tirer des conclusions en raison du nombre d'analyses insuffisants (consulter la section suivante pour l'étude de convergence).

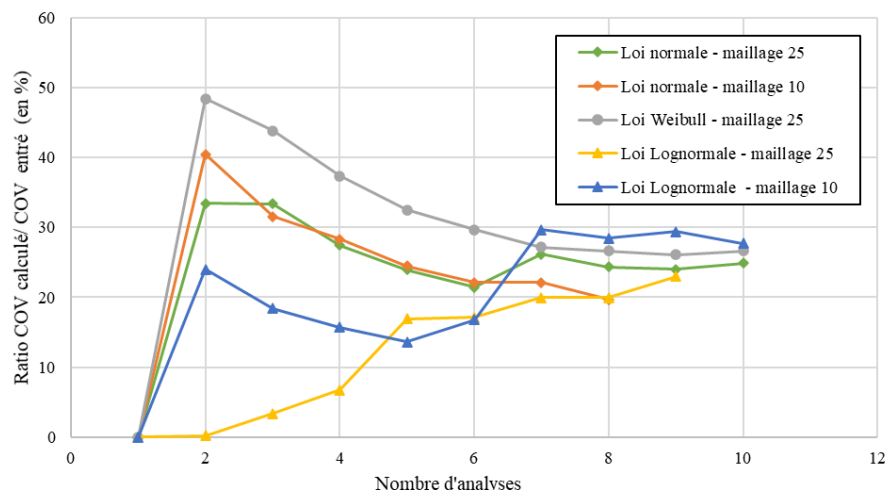


Figure 3.27 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré en fonction du nombre d'analyses pour différentes lois probabilistes et pour différentes tailles de maillage

Finalement, et afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux de Rossi et al. (2015), la loi lognormale a été choisie pour la suite des simulations.

### 3.2.4 Étude de convergence sur le coefficient de variation employé

L'intérêt principal de l'exemple d'application de la sous-routine probabiliste à l'os en traction est de trouver la corrélation entre les paramètres d'entrée (moyenne et écart-type) de la distribution (dans notre cas la loi lognormale) et la taille des éléments utilisés (cette étude détaillée sera présentée dans la sous-section suivante). Pour ce faire, les études se basaient au départ sur des séries de cinquante simulations. Cependant, ces séries possédaient une mauvaise répétabilité, en effet, deux séries aux paramètres d'entrée identiques (incluant la taille de maillage) ne renvoyaient pas la même valeur de moyenne et de coefficient de variation en sortie. C'est pour cette raison qu'une étude de convergence s'est avérée nécessaire afin de déterminer le seuil minimal d'analyses à effectuer afin d'assurer la répétabilité d'une série avec des paramètres d'entrée donnés.

Afin de réaliser cette étude, le ratio entre la moyenne en sortie et la moyenne en entrée ainsi que le ratio entre le coefficient de variation en entrée et le coefficient de variation en sortie en fonction du nombre de simulations sont analysés.

Par ailleurs, il est important de préciser qu'à la  $n$ ème simulation, la nouvelle moyenne ou le nouveau COV sont calculés en prenant en compte les  $(n - 1)$  simulations précédentes. Si sur dix

simulations consécutives les ratios de moyenne et de COV ne varient pas de plus de 5% par rapport aux dix simulations précédentes, on considère alors qu'il y a convergence.

La Figure 3.28 présente l'étude de convergence réalisée pour l'éprouvette maillée à l'aide d'éléments de taille 25 mm. La convergence de la moyenne se fait aux alentours de 150 simulations. En effet, à partir de ce seuil, l'écart entre les différents ratios obtenus ne dépasse pas 2%. Pour ce qui est du ratio des coefficients de variation, à partir d'un seuil de 255 analyses, les écarts entre toutes les valeurs de ratios ne dépassent pas 5%.

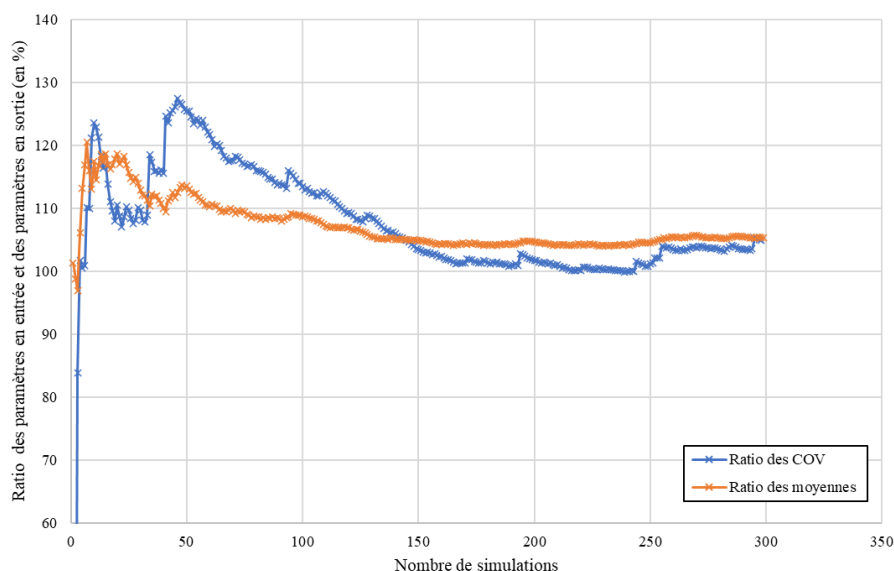


Figure 3.28 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 25 mm)

Pour les éléments de taille 16 mm, la Figure 3.29 montre que la convergence de la moyenne est beaucoup plus rapide que pour le maillage de 25 mm, à partir de 20 simulations environ. À partir de ce seuil-là, l'écart entre les différents ratios obtenus ne dépasse pas 5%. Pour ce qui est du ratio des coefficients de variation, l'écart entre toutes les valeurs de ratios obtenus ne dépasse pas 5% au-delà de 100 simulations.

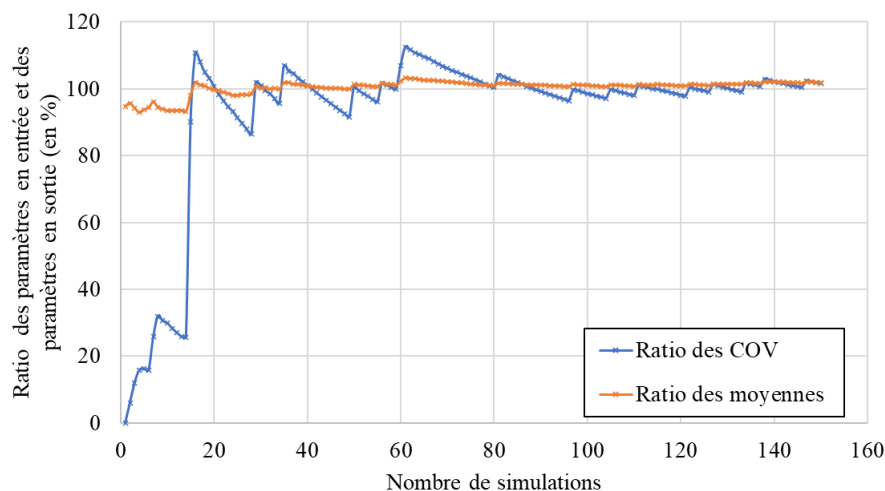


Figure 3.29 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 16 *mm*)

Pour des éléments de taille 10 *mm*, et comme le montre la Figure 3.30, une convergence des deux types de ratio est observée pour un nombre de simulations supérieur ou égal à 80.

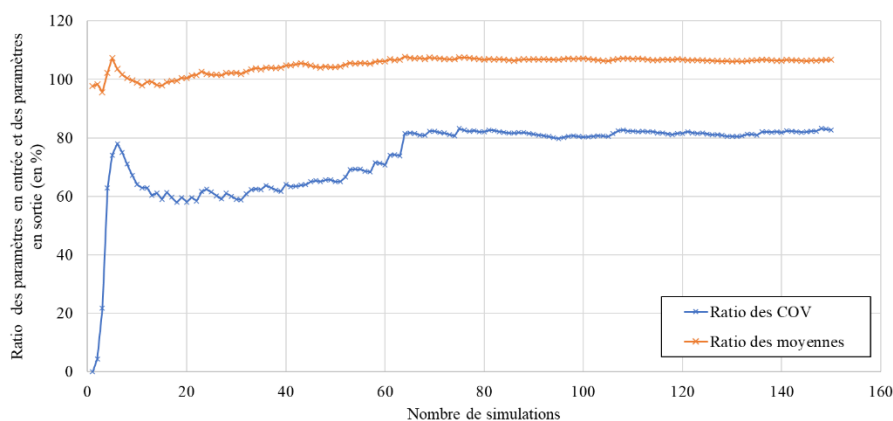


Figure 3.30 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 10 *mm*)

Pour les modèles avec une taille de maillage égale à 5 *mm*, en raison des temps de calcul très importants (environ 4h pour une unique analyse en utilisant 6 cœurs), l'étude de convergence s'est basée sur 50 simulations uniquement. Comme le montre la Figure 3.31, une convergence de la valeur moyenne est observée à partir de 20 simulations environ. En effet, à partir de ce seuil-là,

l'écart entre les différents ratios ne dépasse pas 2%. Pour ce qui est des ratios des coefficients de variation, à partir d'un seuil de 30 analyses, l'écart entre les différentes valeurs ne dépasse pas 3%.

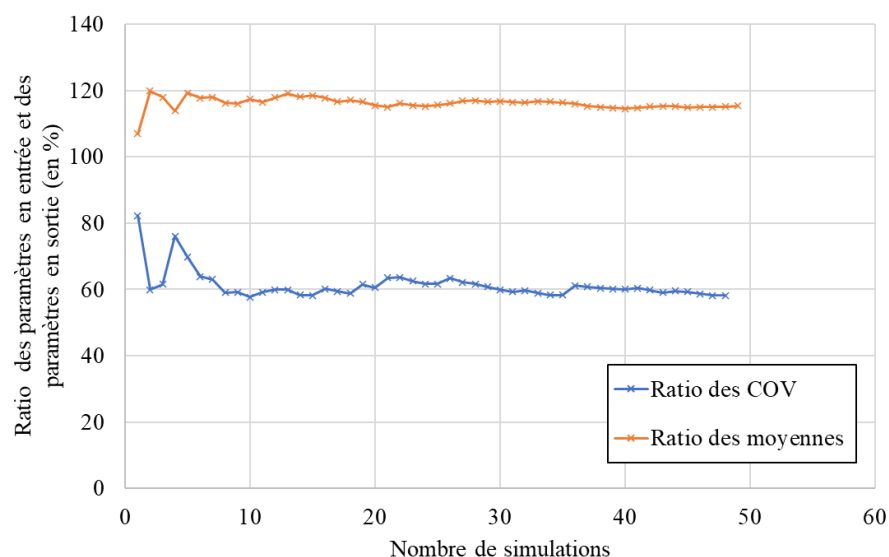


Figure 3.31 Ratio entre le coefficient de variation calculé et le coefficient de variation expérimental entré et ratio entre la moyenne calculée et la moyenne expérimental entrée en fonction du nombre de simulations réalisées (maillage de 5 mm)

Le Tableau 3.6 ci-dessous résume l'ensemble des résultats de cette étude de convergence. Celui-ci présente le seuil minimal d'analyses à réaliser afin d'assurer la convergence en fonction de la taille des éléments utilisés.

Tableau 3.6 Résumé de l'étude de convergence pour le modèle de l'éprouvette en traction

Taille des éléments (mm)	Nombre minimal d'analyses pour assurer la convergence
5	30
10	80
16	100
25	150

Cette étude de convergence permet de mettre en avant la tendance suivante : les spécimens possédant des éléments de plus petite taille convergent plus rapidement. Autrement dit, le seuil minimal d'analyses requises pour assurer la convergence baisse avec la taille du maillage. En effet,

le nombre d'éléments constituant l'éprouvette augmente lorsque la taille du maillage diminue. Pour une analyse donnée, la population « représentative » de la loi probabiliste choisie est plus grande, la distribution ainsi reproduite par les éléments finis est d'autant plus similaire à la courbe de densité de probabilité théorique, ce qui confère plus de répétabilité aux éprouvettes possédant une plus petite taille de maillage et leur assure donc une convergence plus rapide.

### 3.2.5 Étude de l'impact de la taille maillage sur la dispersion obtenue

#### 3.2.5.1 Méthodologie et résultats obtenus avec EPM3D

Cette sous-partie comprend l'étude de l'impact de la taille du maillage sur les caractéristiques de la distribution obtenue en sortie. L'analyse réalisée dans cette sous-section a pour objectif :

- premièrement, de trouver le lien de corrélation entre le COV en entrée et le COV en sortie;
- deuxièmement, et une fois ce lien établi, trouver les paramètres à renseigner en entrée afin d'obtenir en sortie les paramètres escomptés qui correspondent à la moyenne et au coefficient de variation expérimentaux (dans le cadre de ce mémoire, il s'agit des paramètres calculés à partir des résultats de la campagne expérimentale de Sébastien Reygner).

Il est important de rappeler que l'étude porte sur la variabilité de l'énergie de fissuration des BRF, la distribution choisie pour cette modélisation probabiliste est la loi lognormale.

La Figure 3.32 met en avant la géométrie de l'éprouvette sur laquelle se base cette méthode de calibration.  $S$  désigne la section tendue et vaut  $5000 \text{ mm}^2$ .

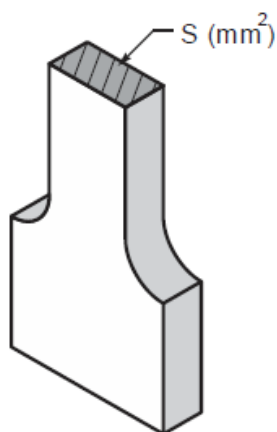


Figure 3.32 Géométrie de l'éprouvette sur laquelle se base la méthode de calibration

Premièrement, concernant la moyenne de la distribution, les différentes séries d'analyses sur ABAQUS ont permis de montrer que cette dernière ne variait pas en fonction de la taille de maillage des éléments utilisés. En effet, et quel que soit la taille des éléments finis de l'éprouvette, la moyenne renseignée en entrée est égale à la moyenne obtenue en sortie.

Ensuite, pour ce qui est de l'étude des coefficients de variation, il est primordial de rappeler que pour chacune des séries d'analyses, le seuil minimal (qui est fonction de la taille du maillage) permettant d'assurer la convergence des résultats a été respecté.

Pour chaque taille d'éléments, la procédure qui a été suivie pour pouvoir obtenir les courbes de la Figure 3.33 peut être décomposée en différentes étapes.

1. Pour la première série d'analyses, le coefficient de variation qui a été renseigné au départ est égal au COV visé (le COV expérimental), ce qui correspond à un ratio  $\frac{COV_{entrée}}{COV_{visé}} = 100\%$  en abscisse. Il faut noter que la moyenne demeure inchangée, étant donné que celle-ci ne dépend pas de la taille de maillage et que la moyenne obtenue en sortie est environ égale à celle renseignée en entrée.
2. En fonction du ratio obtenu en sortie, une nouvelle série d'analyses est lancée avec un nouveau COV en entrée. Le but étant d'obtenir un ratio  $\frac{COV_{sortie}}{COV_{visé}} = 100\%$  en sortie.
3. L'ensemble des points obtenus pour chaque taille d'éléments permettent de tracer des courbes de tendances faisant le lien entre le  $COV_{entrée}$  et le  $COV_{sortie}$ . Ces courbes permettent de trouver le coefficient de variation à renseigner en entrée afin d'obtenir en sortie le COV souhaité, correspondant au COV expérimental du matériau.



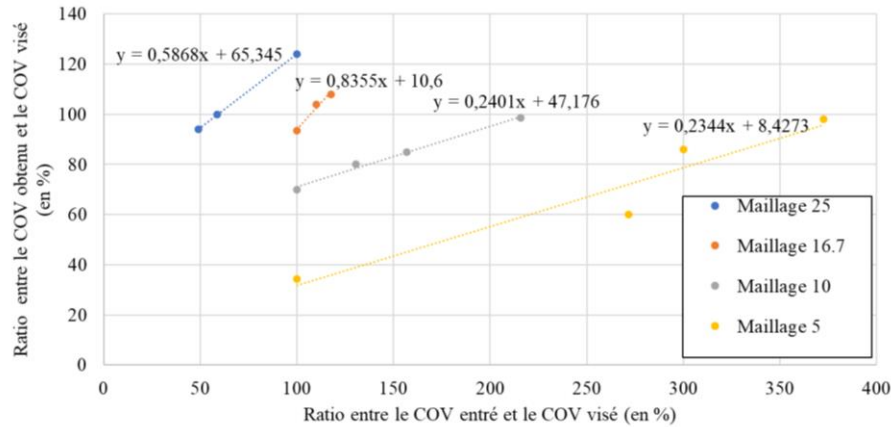


Figure 3.33 Courbe du COV obtenu en fonction du COV entré en fonction de la taille du maillage

Comme le montre la Figure 3.33, les fonctions reliant les ratios des COV en entrée et en sortie semblent être des droites affines.

### 3.2.5.2 Modèle

Ainsi, une loi très simple a été dégagée à partir des tendances observées, il s'agit d'un modèle de fonctions linéaires, les coefficients directeurs de ces droites linéaires dépendent de la taille du maillage  $m$  et de la section de l'éprouvette notée  $S$  ainsi que du matériau étudié (voir la Figure 3.34 et la Figure 3.32).

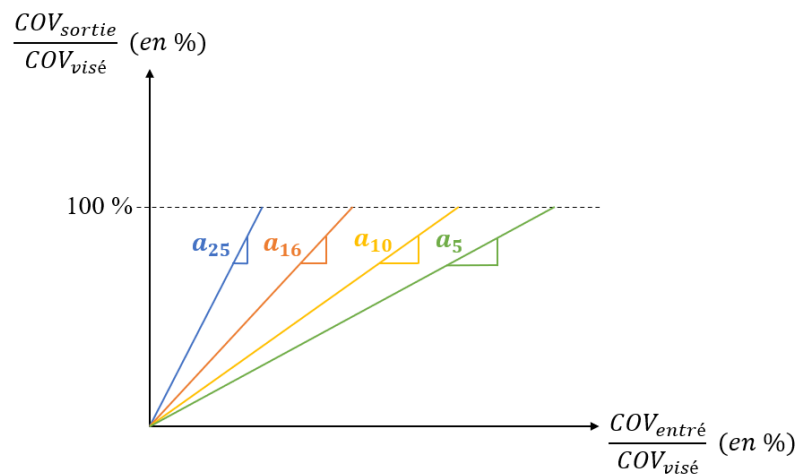


Figure 3.34 Modèle permettant de relier la dispersion à la taille du maillage pour l'éprouvette en traction

Cette nouvelle loi permettant de relier les ratios obtenus en sortie et les ratios renseignés en entrée peut s'exprimer de la manière suivante :

$$COV_{sortie} = a \times COV_{entré} \quad (3.12)$$

avec :

$$a = f(m, S, \text{matériau}) \quad (3.13)$$

$a$  désigne le coefficient directeur des différentes droites linéaires (celui-ci dépend de la taille du maillage),  $m$  la taille du maillage en  $mm$  et  $S$  la section de l'éprouvette tendue en  $mm^2$ .

L'analyse des coefficients directeur obtenus pour les différentes tailles de maillage a permis de dégager la relation suivante :

$$\frac{a(m_1, S, \text{matériau})}{a(m_2, S, \text{matériau})} \approx \frac{m_1}{m_2}$$

$m_1$  et  $m_2$  désignant deux tailles de maillage différentes (par exemple,  $m_1 = 25 \text{ mm}$  et  $m_2 = 5 \text{ mm}$ ).

En effet, il existe un lien de proportionnalité évident entre le coefficient directeur  $a$  des différentes courbes et entre la taille de maillage employée.

Par ailleurs, on considérera pour la suite que  $a(25, S, BRF70 - 80kg) \approx 1$ . Autrement dit, pour le BRF considéré ( $BRF70 - 80kg$ ), la section sollicitée en traction ( $S = 5000 \text{ mm}^2$ ) le maillage de 25 mm donne un ratio  $\frac{COV_{sortie}}{COV_{visé}} \approx 100\%$  pour un ratio  $\frac{COV_{entré}}{COV_{visé}} = 100\%$ .

Néanmoins, il est important de mentionner que ce modèle constitue une approximation des droites obtenues sur ABAQUS, il s'agit en effet d'une simplification des tendances observées. Il faudrait faire plus de séries d'analyses afin d'augmenter la précision des droites obtenues et ainsi pouvoir créer un modèle plus raffiné permettant de représenter l'impact de la taille de maillage sur la dispersion.

Cette nouvelle loi établie constitue la base pour tous les exemples d'application qui seront présentés dans le Chapitre 4. En effet, étant donné que cette loi permet de reproduire la variabilité réellement observée pour les éprouvettes en traction (variabilité qui a été mesurée expérimentalement), le fait de l'appliquer à d'autres éléments structuraux (poutres ou dalles par exemple) permettra d'obtenir

la variabilité qui aurait réellement été obtenue expérimentalement lors de campagnes d'essais (voir la Figure 3.35).

En effet, l'étape 1 dite de calibration (qui vient tout juste d'être présentée) permet de reproduire la variabilité du matériau (celle observée expérimentalement) pour tous les types de maillage sur l'os en traction. Le fait d'appliquer cette méthode là à d'autres structures qui possèdent les mêmes caractéristiques que l'os (section tendue et matériau identiques) permet de recréer la même variabilité à l'échelle du matériau et d'obtenir en sortie la variabilité de la structure.

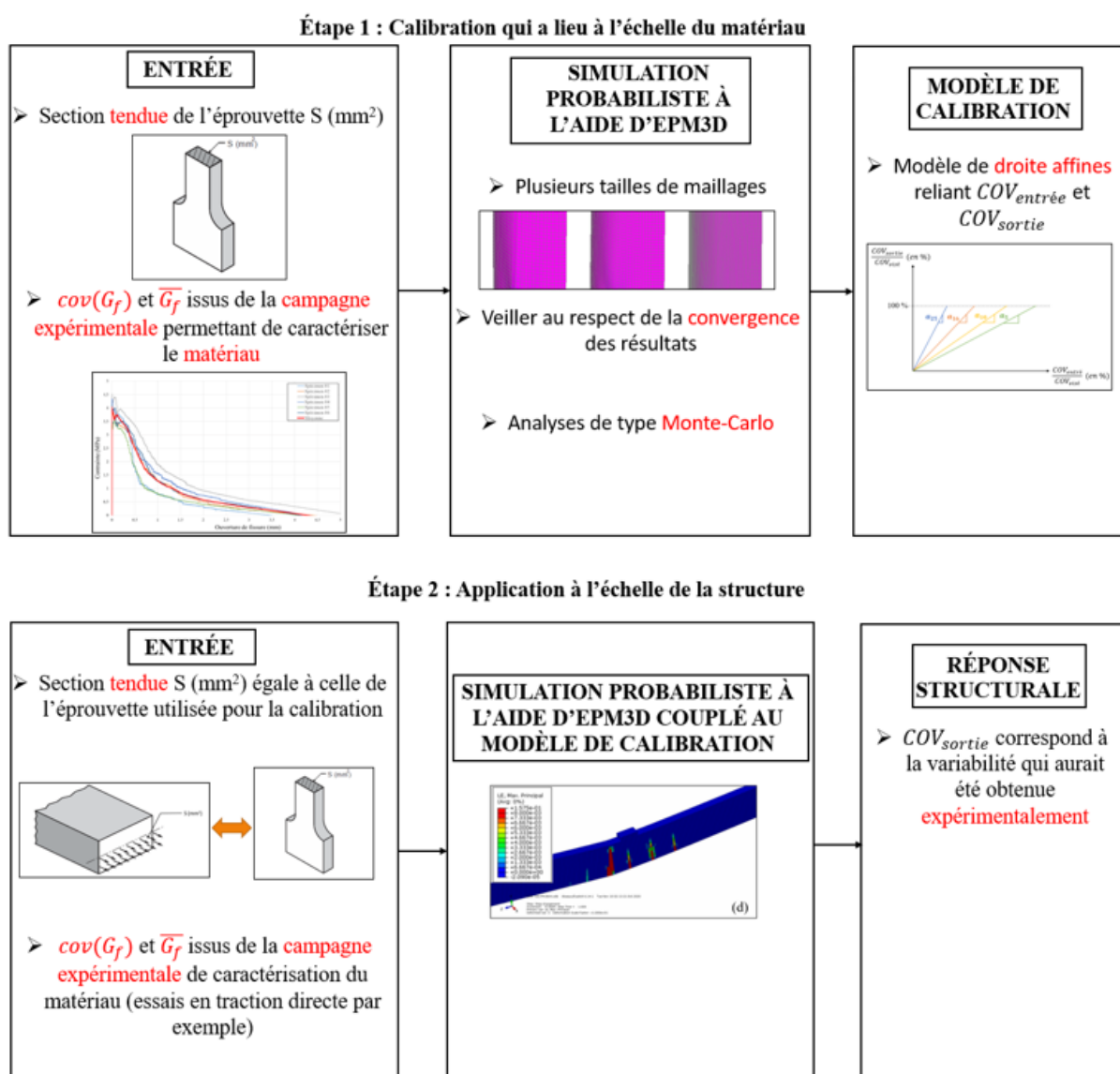


Figure 3.35 Méthodologie d'analyse probabiliste rationnelle pour les BRF

## CHAPITRE 4 APPLICATION AUX ÉLÉMENTS STRUCTURAUX

Ce chapitre présente des exemples d'application à des éléments de structures en BRF (poutre, poutres croisées et dalle) afin de démontrer la faisabilité et la validité de l'approche probabiliste développée et programmée, à l'échelle des éléments structuraux. La variabilité de la charge maximale à l'échelle de l'élément est étudiée pour une variabilité donnée à l'échelle matériau, ainsi que l'influence de plusieurs facteurs tels que la section de l'élément, le raffinement du maillage et le degré d'hyperstaticité.

### 4.1 Modèle d'une poutre soumise à de la flexion 3 points

Dans cette partie, le modèle de la poutre soumise à la flexion 3 points est détaillé. Tout d'abord, l'ensemble des caractéristiques ayant permis de construire ce dernier sur ABAQUS sont présentées. Ensuite, une étude de la dispersion en fonction de plusieurs paramètres est présentée. Enfin, cette section est clôturée par une analyse des différents patrons de fissuration qui ont été obtenus lors des analyses probabilistes.

#### 4.1.1 Présentation du modèle

Le matériau utilisé pour la poutre est un béton renforcé de fibres. Ses propriétés ont été introduites dans ABAQUS via la sous-routine probabiliste programmée dans EPM3D présentée dans le Chapitre 3. Elles sont tirées des résultats expérimentaux présentés à la section 3.3.1.1 (consulter les Tableau 3.3 et Tableau 3.4). Pour les plaques d'acier, celles-ci sont modélisées d'une façon déterministe par un acier de module élastique  $E = 200\,000\text{ MPa}$  et avec un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . La géométrie, le déplacement imposé ainsi que les conditions aux limites sont montrés dans la Figure 4.1.

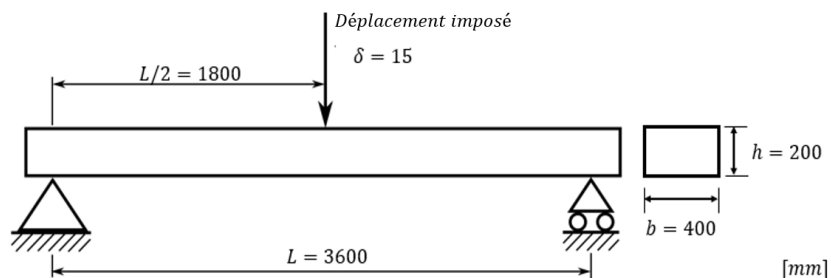


Figure 4.1 Géométrie, déplacement et conditions aux limites du modèle par éléments finis de la poutre en flexion 3 points

La modélisation de la géométrie de la poutre a été réalisée dans ABAQUS/Explicit et est présentée à la Figure 4.2.

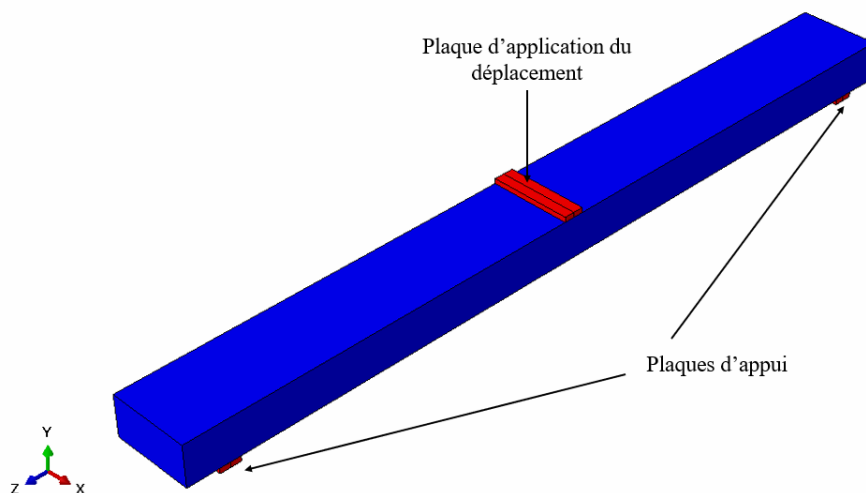


Figure 4.2 Modélisation de la poutre en flexion 3 points sur ABAQUS (Modèle 1)

La poutre est fixée aux trois plaques par le biais d'une contrainte *Tie* (pleine compatibilité des déformations entre les surfaces en contact). Les conditions aux limites montrées à la Figure 4.1 sont imposées aux lignes médianes des deux plaques d'appui (dans le sens de la largeur de la poutre). Un déplacement de 15 mm est imposé au niveau de la ligne médiane de la plaque supérieure. Une amplitude de type *Smooth Step* a été appliquée à ce déplacement. En ce qui concerne le maillage, des éléments Explicit 3D Stress hexaédriques linéaires à intégration réduite et au contrôle de *Hourglass* par *Relax stiffness* (C3D8R) ont été utilisés pour modéliser les éléments en béton et en acier. En effet, dans ABAQUS, une petite quantité d'énergie artificielle est introduite

dans le modèle pour contrôler la propagation de ces modes et éviter le phénomène de *hourglassing* (déformations aux contraintes nulles).

Un second modèle sera également étudié dans cette section (voir la Figure 4.3), il s'agit d'une variante de la première poutre possédant les mêmes caractéristiques et paramètres d'entrée. La seule différence réside dans la valeur de la largeur de la poutre : en effet, le premier modèle possède une largeur  $b = 400 \text{ mm}$  tandis que pour le second, celle-ci vaut  $b = 50 \text{ mm}$ . Le Tableau 4.1 résume les dimensions des deux modèles de poutres étudiés dans cette section. Les propriétés de matériaux correspondent à celles trouvées dans le Chapitre 3 (Tableau 3.3 et Tableau 3.4).

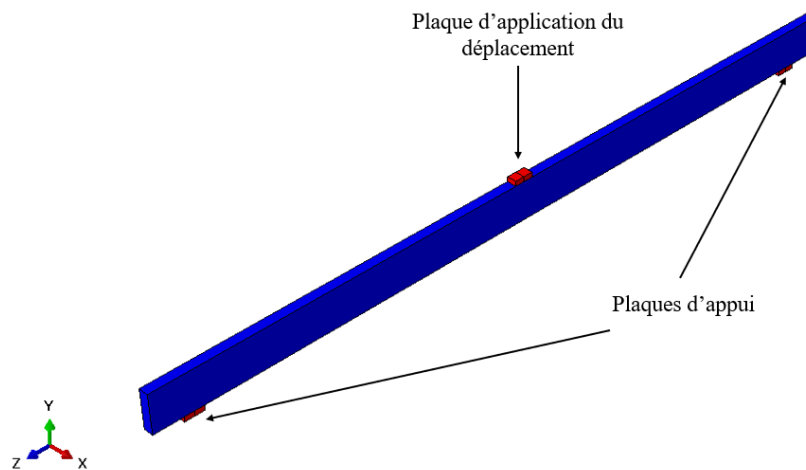


Figure 4.3 Modélisation de la poutre en flexion 3 points sur ABAQUS (Modèle 2)

Tableau 4.1 Résumé des caractéristiques des deux modèles de poutres

Dimensions	Modèle 1	Modèle 2
Hauteur $h$ (mm)	200	200
Largeur $b$ (mm)	400	50
Portée $L$ (mm)	3600	3600

#### 4.1.2 Influence de la section de la poutre sur le coefficient de variation

Afin de minimiser les oscillations dues à la nature quasi-statique de l'analyse et de faciliter l'interprétation des résultats en termes de variabilité de la charge maximale, un filtre de type *Butterworth* a été utilisé pour tous les signaux bruts issus de l'analyse. Tel que montré à la Figure 4.4, l'utilisation d'un filtre *Butterworth* ( $f = 50$  Hz) permet d'adoucir les résultats et donne une courbe filtrée similaire à une moyenne mobile de la courbe brute.

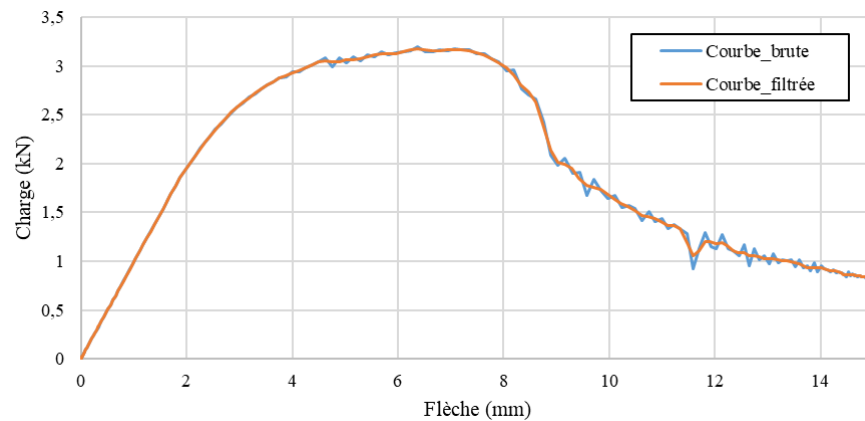


Figure 4.4 Courbe de la charge en  $kN$  en fonction de la flèche en  $mm$

Dans ce qui suit, une comparaison entre les modèles 1 et 2 de poutres présentées à la section précédente sera réalisée afin d'analyser l'impact du changement de section sur la variabilité de la charge maximale  $R_{max}$ . Pour ce faire, deux séries de 10 analyses ont été réalisées pour chacun des deux modèles de poutres (voir la Figure 4.5).

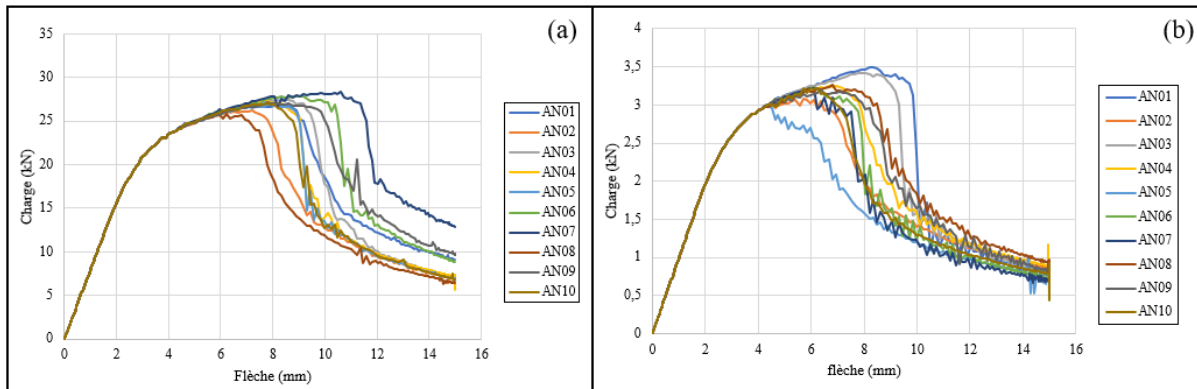


Figure 4.5 (a) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour le modèle 1 de poutre (section  $400\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ) (b) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour le modèle 2 de poutre (section  $50\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ )

Le maillage utilisé pour réaliser ces deux séries d'analyses est de taille  $25\text{ mm}$ . Visuellement, une plus grande dispersion est observée pour les maxima de charge de la plus petite poutre (consulter la Figure 4.5 (b)). Le Tableau 4.2 montre aussi que l'influence de changement de section sur la valeur de  $f_{tu}$  est faible. Cette dernière a été calculée en utilisant la méthode simplifiée de la norme CSA-S6 (voir la Figure 4.6).

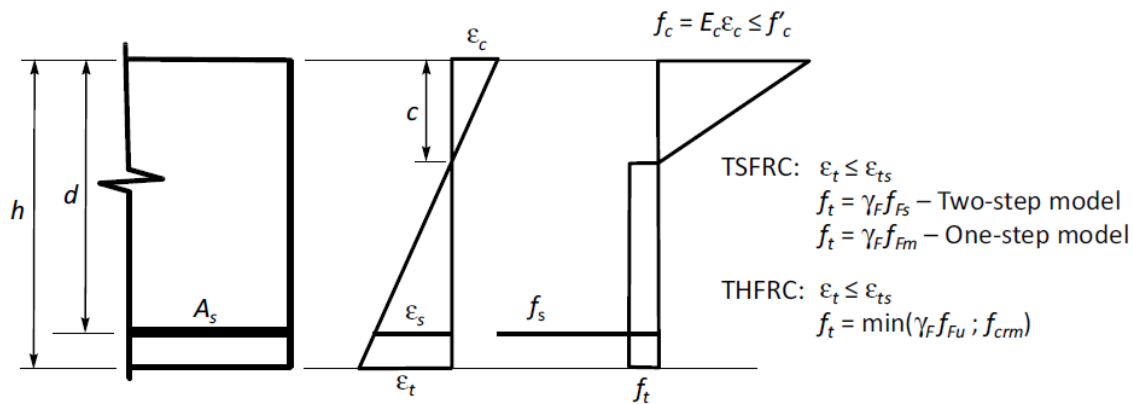


Figure 4.6 Comportement en flexion des poutres en BRF (CSA, 2019)



Tableau 4.2 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale  $R_{max}$  pour les deux modèles de poutre

Aire A de la section tendue ( $mm^2$ )	$f_{tu}$ (MPa)	$cov(R_{max})$	$cov(W_E)$
<b>40 000</b>	3,51	2,72%	10%
<b>5000</b>	3,66	4,4%	9%

Les résultats présentés dans le tableau permettent de confirmer les observations faites à partir de la Figure 4.5. En effet, plus la taille de la poutre est importante, plus le coefficient de variation de la charge maximale atteinte est petit, et donc, plus la dispersion est faible. Il est important de mentionner que le COV en entrée est égal à 20% pour les deux analyses.

D'un point de vue purement probabiliste, cette tendance pourrait s'expliquer par le fait que la plus grande poutre possède plus d'éléments finis (étant donné que la taille de maillage est identique pour les deux modèles), ce qui augmente la population représentative de la loi théorique que l'on cherche à modéliser et offre ainsi une meilleure répétabilité et donc une dispersion moindre entre les différentes analyses. Ce résultat est conforme aux résultats issus de littérature. En effet, d'après Rossi et al. (1994 (a)), le coefficient de variation est inversement proportionnel au volume du spécimen étudié.

Finalement, dans la suite de cette section, le modèle de poutre 2 sera plus amplement étudié car celui-ci possède la même section tendue que l'éprouvette en traction présentée dans le Chapitre 3. En effet, étant donné que la poutre est soumise à de la flexion, une approximation est réalisée, celle-ci consiste à dire que la moitié inférieure de la poutre est en traction tandis que la seconde moitié supérieure est en compression. La section totale est égale à  $S = 10\,000\,mm^2$ , donc l'aire de la section tendue vaut  $S_{traction} = 5000\,mm^2$ , qui est égale à la section de l'éprouvette étudiée dans le chapitre précédent.

Par ailleurs, le Tableau 4.2 présente le coefficient de variation du travail externe  $W_E$  total (incluant la partie élastique), qui est égale à la charge multipliée par le déplacement. Le COV ne varie pas selon la section de la poutre étudiée. Le sens physique derrière ce constat reste à déterminer.

### 4.1.3 Validation de l'approche probabiliste développée

Le but de cette sous-section est de prouver la validité de l'approche probabiliste développée dans le Chapitre 3 en l'appliquant au modèle 2 de la poutre en flexion.

#### 4.1.3.1 Conditions d'analyse et hypothèses

Cette sous-section contient l'ensemble des hypothèses sur lesquelles repose l'analyse présentée dans cette partie.

1. Étant donné que la méthode de calibration développée dans le Chapitre 3 dépend de la section tendue (consulter l'Équation (3.13)), il est important que la poutre possède la même section tendue que l'éprouvette étudiée dans le chapitre précédent, soit  $S = 5000 \text{ mm}^2$ , afin que les lois qui ont été développées puissent être applicables. On suppose donc que la moitié inférieure de la poutre est en traction tandis que la seconde moitié supérieure est en compression.
2. Comme mentionné dans les paragraphes précédents, la poutre étudiée possède les mêmes propriétés de matériau que l'éprouvette du Chapitre 3. Cette condition est importante puisque la méthode de calibration développée n'est valide que pour un seul matériau, le BRF70-80kg (voir Équation (3.13)).
3. Comme évoqué précédemment, on considérera pour la suite que  $a(25, S, \text{BRF70} - 80\text{kg}) \approx 1$ . Autrement dit pour un ratio  $\frac{COV_{\text{entré}}}{COV_{\text{visé}}} = 100\%$ , un ratio  $\frac{COV_{\text{sortie}}}{COV_{\text{visé}}} = 100\%$  est obtenu pour un maillage de taille  $25 \text{ mm}$ .

#### 4.1.3.2 Analyse des résultats

Deux tailles d'éléments différentes sont testées pour le modèle 2 de poutre :  $25 \text{ mm}$  et  $12,5 \text{ mm}$ . Tous les autres paramètres demeurent inchangés. Comme pour la section précédente, des séries de dix analyses sont réalisées pour chacun des deux modèles.

Les Figure 4.7 (a) et Figure 4.7 (b) présentent les résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour les deux tailles d'éléments finis. La poutre possédant un maillage de taille égale à  $25 \text{ mm}$  possède une dispersion plus grande des valeurs de charge maximale, la valeur moyenne

semble quant à elle indépendante de la taille des éléments employés. Ces observations concordent parfaitement avec celles qui ont été faites pour le modèle de l'éprouvette en traction.

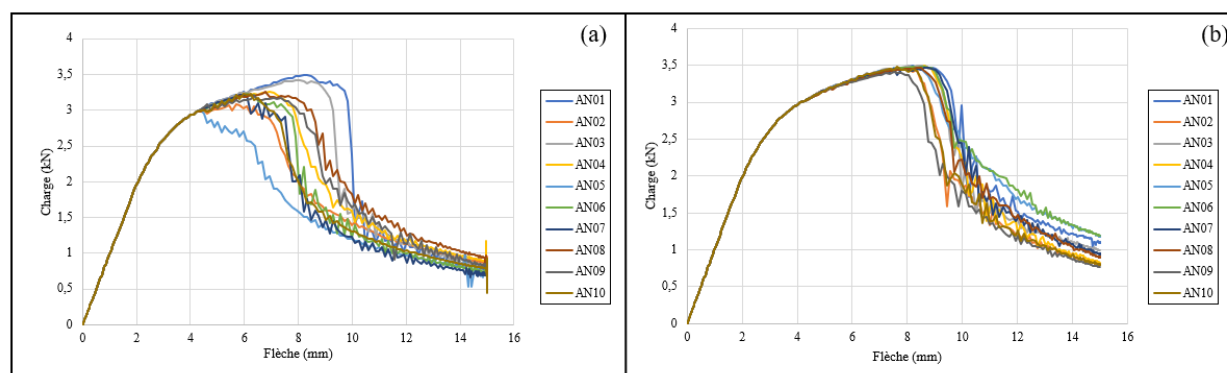


Figure 4.7 (a) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de 25 mm (série 1) b) Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de 12,5 mm (série 2)

Le Tableau 4.3 récapitule les résultats de moyennes et de COV en fonction de la taille de maillage. Effectivement, ce dernier confirme la tendance mise en avant par les courbes de la Figure 4.7 : le coefficient de variation augmente avec la taille des éléments.

Par ailleurs, le Tableau 4.3 présente le coefficient de variation de  $W_E$  total (incluant la partie élastique). Le COV diminue avec la taille des éléments utilisés. L'explication derrière ce constat reste néanmoins à échafauder.

Tableau 4.3 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale  $R_{max}$  pour différentes tailles de maillage

Taille de maillage (mm)	$\overline{R_{max}}(kN)$	$cov(R_{max})$	$cov(W_E)$
25	3,2	4,4%	9%
12,5	3,4	0,7%	4,4%

D'un point de vue purement probabiliste, ceci pourrait s'expliquer par le fait que le nombre d'éléments augmente avec la diminution de la taille de maillage. Ainsi, la distribution obtenue avec une taille de maillage valant 12,5 mm (série 2) est d'autant plus proche de la distribution théorique (en raison du nombre d'éléments plus élevé), ce qui a pour effet la réduction de la dispersion entre les différentes analyses de la série. Par ailleurs, la tendance observée pour la variation de la

dispersion de la charge maximale des poutres en flexion 3 points est similaire à celle constatée pour l'énergie de fissuration des éprouvettes en traction étudiées dans le Chapitre 3.

On présume que la relation entre le coefficient de variation en entrée et le coefficient de variation en sortie est linéaire, à l'identique du modèle de l'éprouvette en traction présenté dans le Chapitre 3.

Afin de vérifier la cohérence de ce modèle présupposé, deux séries d'essais différentes sont étudiées. Tout d'abord, la série notée 1 dans le Tableau 4.4 désigne le modèle avec une taille de maillage égale à 25 mm, celle-ci sera prise comme série de référence, et donc le COV obtenu en sortie correspond au coefficient que l'on aurait obtenu expérimentalement, d'après l'hypothèse 3 du paragraphe précédent.

D'après l'équation (3.13),  $\frac{a(12,5,S,BRF70-80kg)}{a(25,S,BRF70-80kg)} = \frac{12,5}{25}$ . Il faudrait donc introduire un COV deux fois plus important pour le modèle avec un maillage de 12,5 mm afin d'obtenir une dispersion identique à celle des analyses réalisées avec des éléments de 25 mm.

Ce résultat est confirmé par le Tableau 4.4. En effet, pour un  $COV_{entrée}(m = 12,5) \approx 2 \times COV_{entrée}(m = 25)$ , une valeur de  $COV_{sortie}$  environ identique est obtenue pour les deux tailles de maillage (séries 1 et 3).

Tableau 4.4 Moyennes et coefficients de variation en entrée et sortie de la charge maximale pour les trois séries d'analyses

	Série 1 (section 400 × 200) (m=25 mm)	Série 2 (section 50 × 200) (m=12,5 mm)	Série 3 (section 50 × 200) (m=12,5 mm)
<b><math>G_f</math> moyen en entrée (en <math>N/mm^2</math>)</b>	4,6	4,6	4,6
<b><math>\bar{R}_{max}</math> (en kN)</b>	3,2	3,5	3,3
<b>Coefficient de variation de <math>G_f</math> en entrée</b>	20%	20%	40%
<b><math>cov(R_{max})</math></b>	4,4%	0,7%	3,9%
<b><math>cov(W_E)</math></b>	9%	4,4%	14%

La série numéro 3 met en avant le fait qu'il est possible de s'affranchir de l'influence de la taille de maillage sur le coefficient de variation obtenu en sortie en modulant le COV entré à l'aide du modèle énoncé dans les paragraphes précédents (voir le Tableau 4.4).

#### 4.1.4 Analyse des patrons de fissuration

La Figure 4.8 présente les patrons de fissuration obtenus pour la poutre avec un maillage de taille  $12,5\text{ mm}$ . Afin de pouvoir capturer les différentes fissures, il a fallu déterminer la fenêtre de valeurs d'ouvertures de fissures que l'on souhaitait observer. Pour ce faire, l'intervalle inférieur a été fixé à 0 et l'intervalle supérieur à une valeur qui est égale à  $\frac{0,1}{m}$  (avec  $m$  la taille du maillage en  $\text{mm}$ ). En effet, l'œil humain ne peut pas détecter de fissures dont l'ouverture est inférieure à  $0,1\text{ mm}$ . Ce choix-ci a également été fait dans toutes les sections suivantes où les patrons de fissuration ont été analysés.

Premièrement, il existe une variabilité de ces patrons-là inhérente au caractère aléatoire de l'analyse. En effet, les coordonnées de la courbe post-pic des différents points d'intégration sont soumises à une loi lognormale. Ainsi, l'emplacement des éléments faibles au sein de la poutre, ceux possédant une énergie de post-fissuration plus basse, diffère d'une analyse à une autre, d'où les différences des patrons mises en avant par la Figure 4.8. Par ailleurs, il est important de mentionner que ces captures ont été réalisées au dernier incrément de temps.

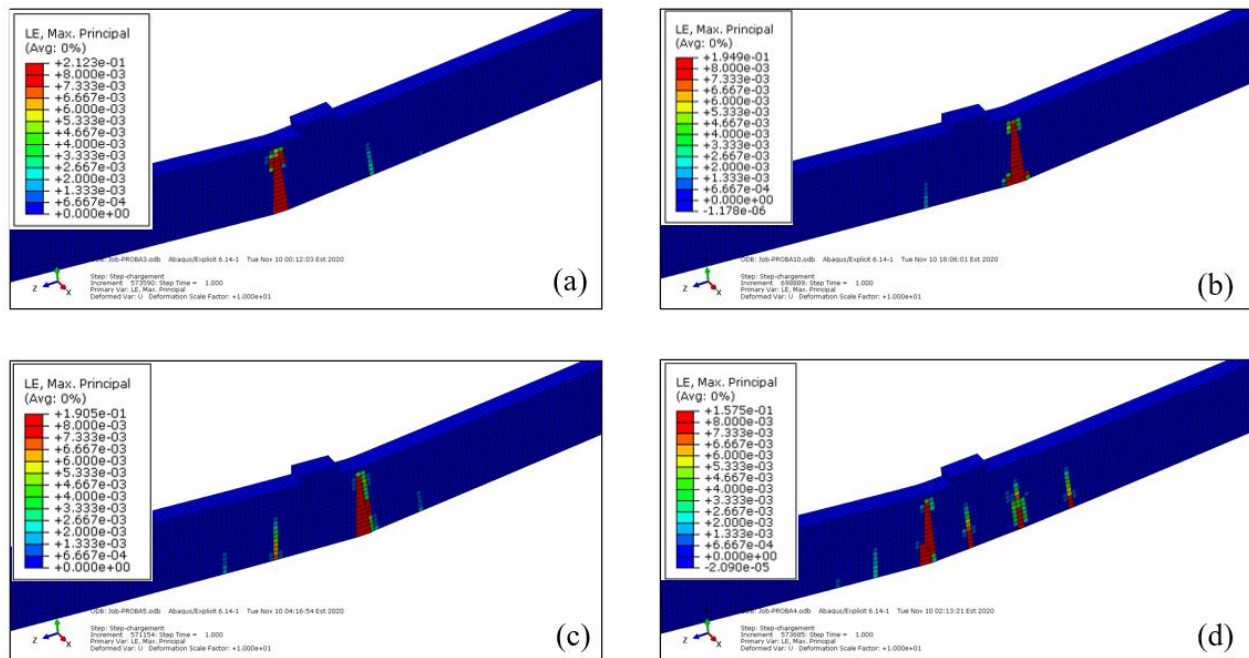


Figure 4.8 Différents patrons de fissurations obtenus pour la poutre avec un maillage de taille  $12,5\text{ mm}$

La Figure 4.9 montre les différentes courbes de charge en fonction de la flèche pour la poutre avec des éléments de taille  $12,5\text{ mm}$ .

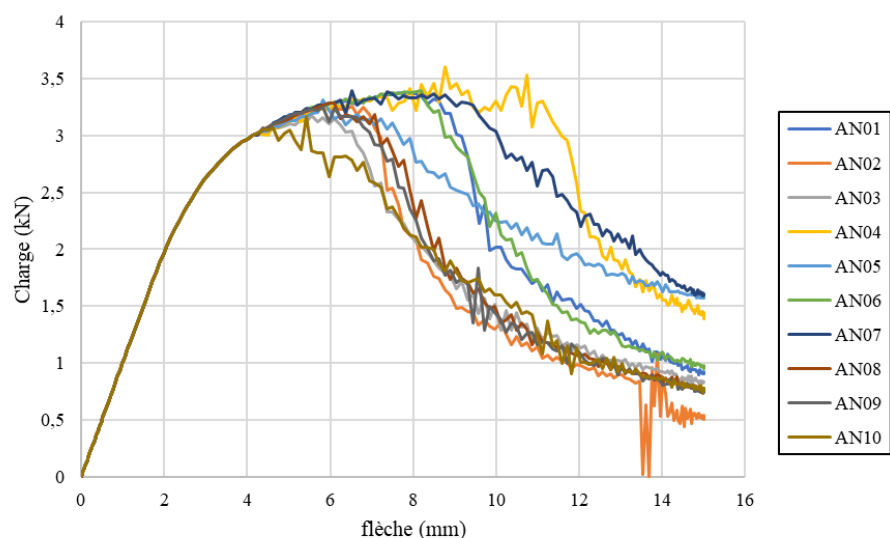


Figure 4.9 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de  $12,5\text{ mm}$

Il est possible d'établir un lien de corrélation entre le comportement en post-pic des poutres pour chacune des analyses et le nombre de macrofissures visibles sur la Figure 4.8. Sur cette figure, les éléments colorés en rouge possèdent une ouverture de fissure de l'ordre du dixième de millimètre pouvant être considérés comme une macrofissure, les éléments dans les tons verts possèdent quant à eux une ouverture de l'ordre du millième de millimètre pouvant être considérés comme des microfissures.

Les Figure 4.8 (a) et (b) correspondent respectivement aux poutres des analyses 3 et 10 dont les courbes de charge en fonction de la flèche sont représentées dans la Figure 4.9. Ces deux poutres possèdent relativement peu de macrofissures comparées aux deux autres vignettes (c) et (d) correspondant respectivement aux analyses 5 et 4. Comme le met en exergue la Figure 4.9, les poutres présentant le plus de multi-fissuration au dernier incrément de l'analyse sont celles qui possèdent une meilleure résistance et ductilité post-pic.

Cette tendance est également observée pour les patrons montrés à la Figure 4.10, la seule différence avec les poutres précédentes est la taille des éléments qui est de  $25\text{ mm}$  cette fois-ci.

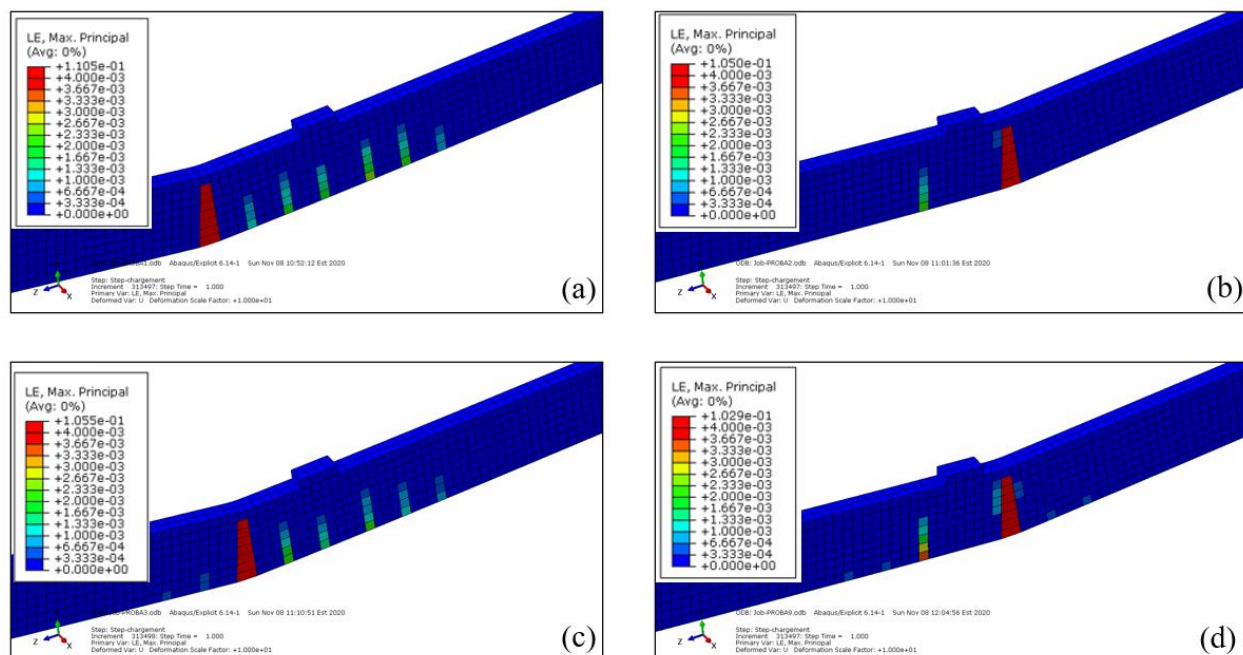


Figure 4.10 Différents patrons de fissurations obtenus pour la poutre avec un maillage de taille  $25\text{ mm}$

Les poutres (b) et (d) de la Figure 4.10 sont celles qui possèdent le nombre le moins élevé de macrofissures. Ces dernières correspondent respectivement aux analyses 2 et 9 de la Figure 4.5 (b) qui démontrent un comportement plus fragile que les analyses 1 et 3 qui correspondent aux patrons (a) et (c) respectivement.

Ainsi, d'après toutes les observations mises en avant, il est possible d'établir un lien clair entre la multi-fissuration d'une poutre en BRF et entre sa résistance. Cette conclusion semble par ailleurs être validée pour les deux tailles de maillage utilisées dans ce chapitre.

## 4.2 Modèle de deux poutres croisées soumises à la flexion trois points

### 4.2.1 Présentation du modèle

Ce paragraphe présente le modèle des poutres croisées soumises à de la flexion 3 points. La Figure 4.11 présente la géométrie de celui-ci tel que modélisé dans ABAQUS.

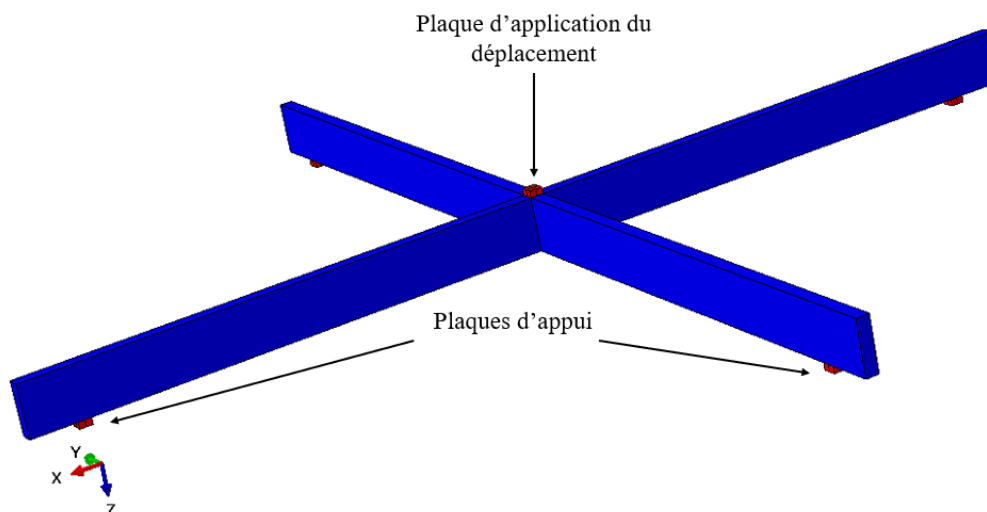


Figure 4.11 Modélisation de la poutre croisée en flexion 3 points sur ABAQUS

Des propriétés de matériau identiques à la section précédente sont utilisées. Par ailleurs, l'unique taille de maillage utilisée dans ces analyses est égale à  $25\text{ mm}$ .

Les conditions aux frontières (voir la Figure 4.1), le déplacement imposé, les différentes mensurations (section et portée) ainsi que le type de maillage sont également identiques au modèle précédent de la poutre en flexion 3 points.

### 4.2.2 Analyse des résultats

La Figure 4.12 montre les résultats des courbes de charge en fonction de la flèche pour les poutres croisées. Cette dernière serait à comparer avec la Figure 4.5 (b). En évaluant les allures des courbes présentes sur ces deux figures, il est possible d'en déduire que les poutres croisées présentent une plus faible dispersion au niveau du pic de charge maximale par rapport au modèle de la poutre simple.



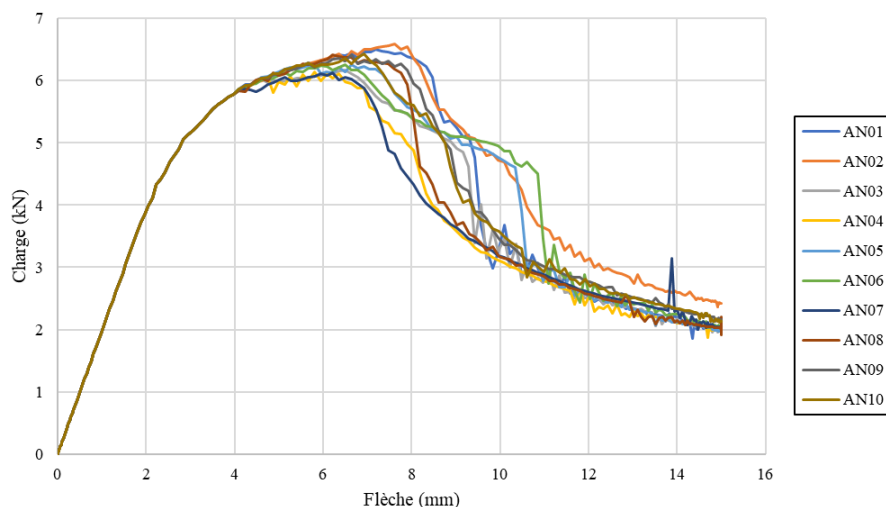


Figure 4.12 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de 25 mm

Cette tendance est confirmée par les résultats du Tableau 4.5. En effet, le COV obtenu en sortie de la série d'analyses des poutres croisées est environ deux fois moins élevé que celui de la série d'analyses de la poutre « simple ». En ce qui concerne la moyenne, celle obtenue en sortie du modèle des poutres croisées est environ deux fois plus élevée, ce qui semble concorder avec la géométrie de la structure étudiée.

Tableau 4.5 Moyennes et coefficients de variation en entrée et sortie de la charge maximale pour les deux modèles : poutre simple et poutres croisées

	$\overline{R_{max}}$ (kN)	$cov(R_{max})$
<b>Poutre simple</b>	3,2	4,4%
<b>Poutres croisées</b>	6,3	2,5%

Ainsi, il est clair d'après ces résultats que l'augmentation de l'hyperstaticité favorise la redistribution des efforts et permet donc de diminuer la dispersion de la réponse structurale.

### 4.2.3 Analyse des patrons de fissuration

Comme le montre la Figure 4.13, il existe une variabilité des patrons de fissuration inhérente à la nature probabiliste des analyses lancées sur ABAQUS. En revanche, cette fois-ci il est difficile de distinguer les différents degrés de fissuration atteints lors du dernier incrément (flèche atteinte de

15 mm). Ceci pourrait s'expliquer par la variabilité beaucoup moins importante des courbes de charge en fonction de la flèche, comme le montre la Figure 4.12. En effet les portions de courbes en post-pic semblent beaucoup plus resserrées.

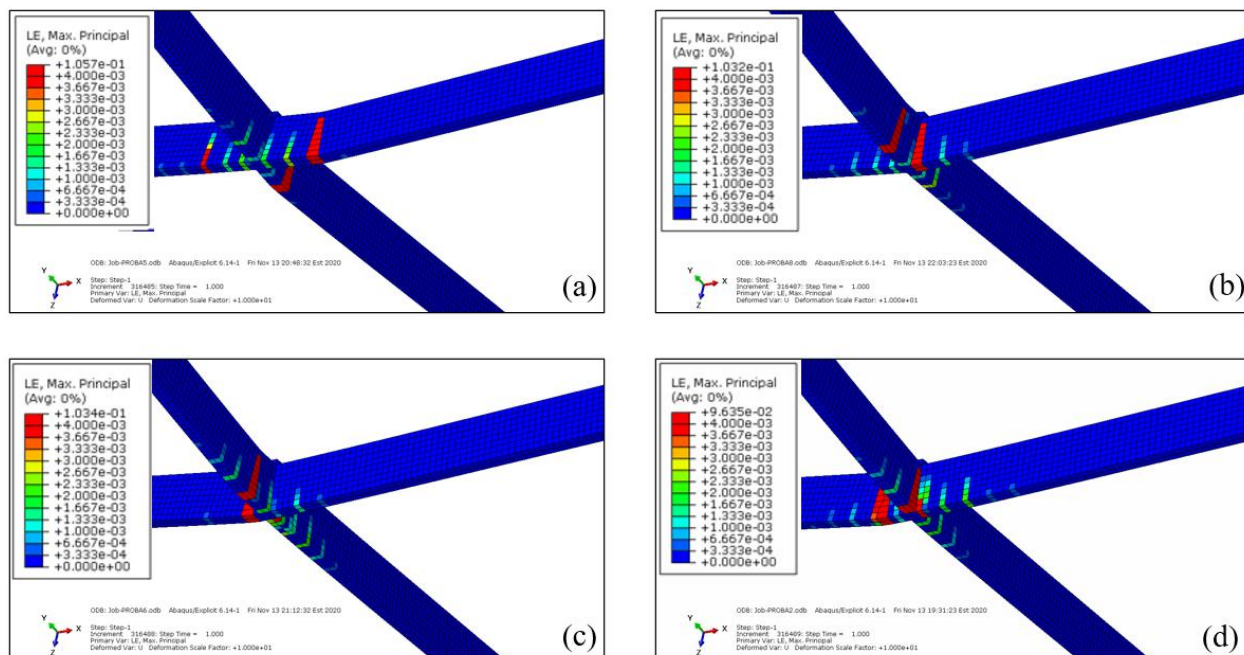


Figure 4.13 Différents patron de fissuration obtenus pour les poutres croisées avec un maillage de taille 25 mm

Néanmoins, il est possible de dire que le modèle montré à la Figure 4.13 (d) correspondant à l'analyse 2 sur la Figure 4.12 présente le plus grand nombre de macrofissures. Il s'agit également de l'analyse présentant le meilleur comportement en termes de résistance et de ductilité, comme le montre la Figure 4.12.

Cette observation confirme encore une fois la tendance dégagée dans la section 4.1.5 : la multifissuration est directement liée à la résistance-ductilité de l'élément structural.

## 4.3 Modèle de la dalle simplement appuyée

### 4.3.1 Présentation du modèle

Les mêmes propriétés de matériaux des sections précédentes sont utilisées.

Une condition de contact sans frottement est imposée entre la dalle et la plaque d'assise du dessous pour permettre aux coins de dalle de se soulever. Un déplacement de  $25\text{ mm}$  est imposé au centre de la plaque supérieure (voir la Figure 4.14). Les autres conditions aux limites sont montrées sur la même figure. Les différentes mensurations des éléments composant le modèle sont présentées à la Figure 4.15.

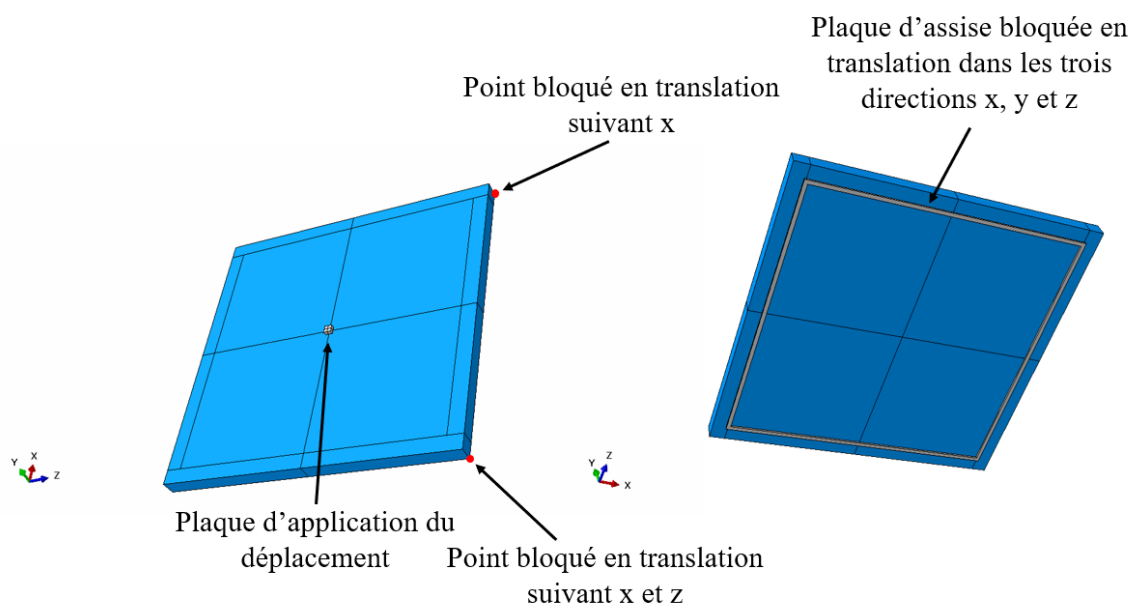


Figure 4.14 Modélisation de la dalle simplement appuyée sur ABAQUS

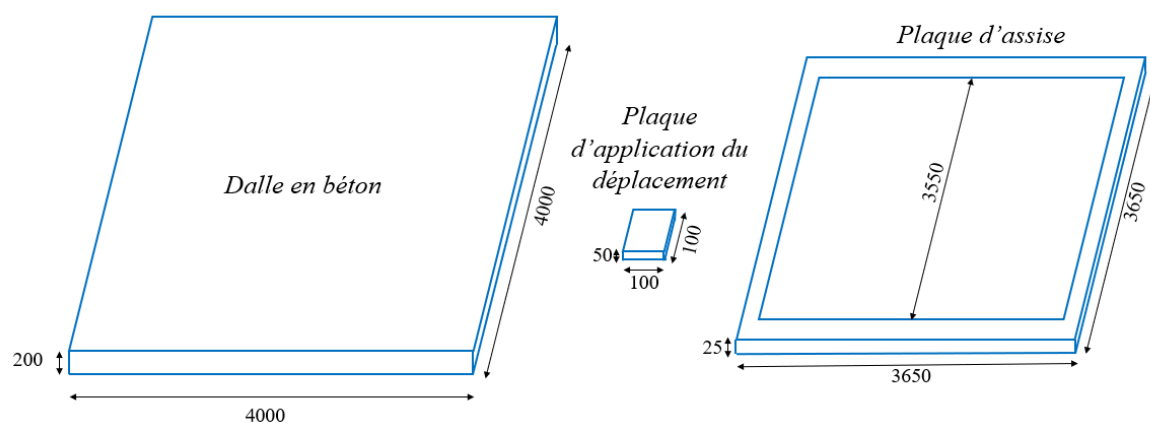


Figure 4.15 Dimensions des différents éléments constituant le modèle

### 4.3.2 Analyse des résultats

La Figure 4.16 montre en avant les courbes de la charge en fonction de la flèche pour la dalle simplement supportée. En comparaison avec les résultats obtenus pour les modèles de poutre, il est possible d'en déduire que le modèle de la dalle présente une variabilité nettement inférieure en ce qui concerne le pic de charge maximale.

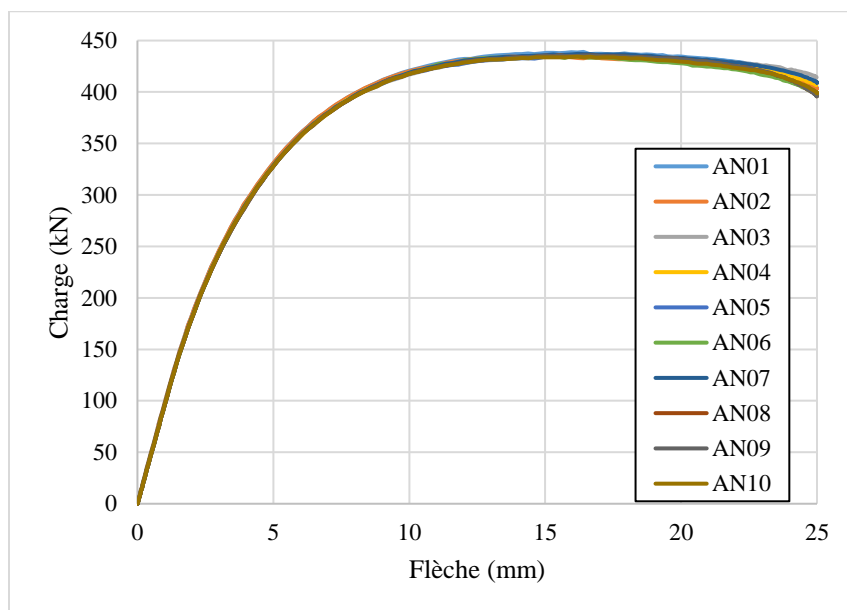


Figure 4.16 Résultats des courbes de la charge en fonction de la flèche pour une taille de maillage de 25 mm

Cette tendance est confirmée par les résultats du Tableau 4.6, en effet, le COV obtenue en sortie de la série d'analyses de la dalle est environ quinze fois moins élevé que celui de la série d'analyses de la poutre « simple » et environ huit fois moins élevé que celui des poutres croisées.

Tableau 4.6 Moyennes et coefficients de variation de la charge maximale pour tous les modèles

	$\overline{R_{max}}$ (kN)	$cov(R_{max})$
<b>Poutre simple</b>	3,2	4,4%
<b>Poutres croisées</b>	6,3	2,5%
<b>Dalle simplement supportée</b>	435,9	0,3%

Les résultats de dalle confirment ainsi que l'augmentation de l'hyperstaticité permet de diminuer la dispersion de la réponse structurale.

### 4.3.3 Analyse du patron de fissuration

À l'opposé des modèles de la poutre simple et des poutres croisées, il a été difficile de distinguer l'effet de variabilité sur le patron de fissuration de dalle. Cette observation semble être en accord avec la dispersion très faible des courbes de la charge en fonction de la flèche (voir la Figure 4.16).

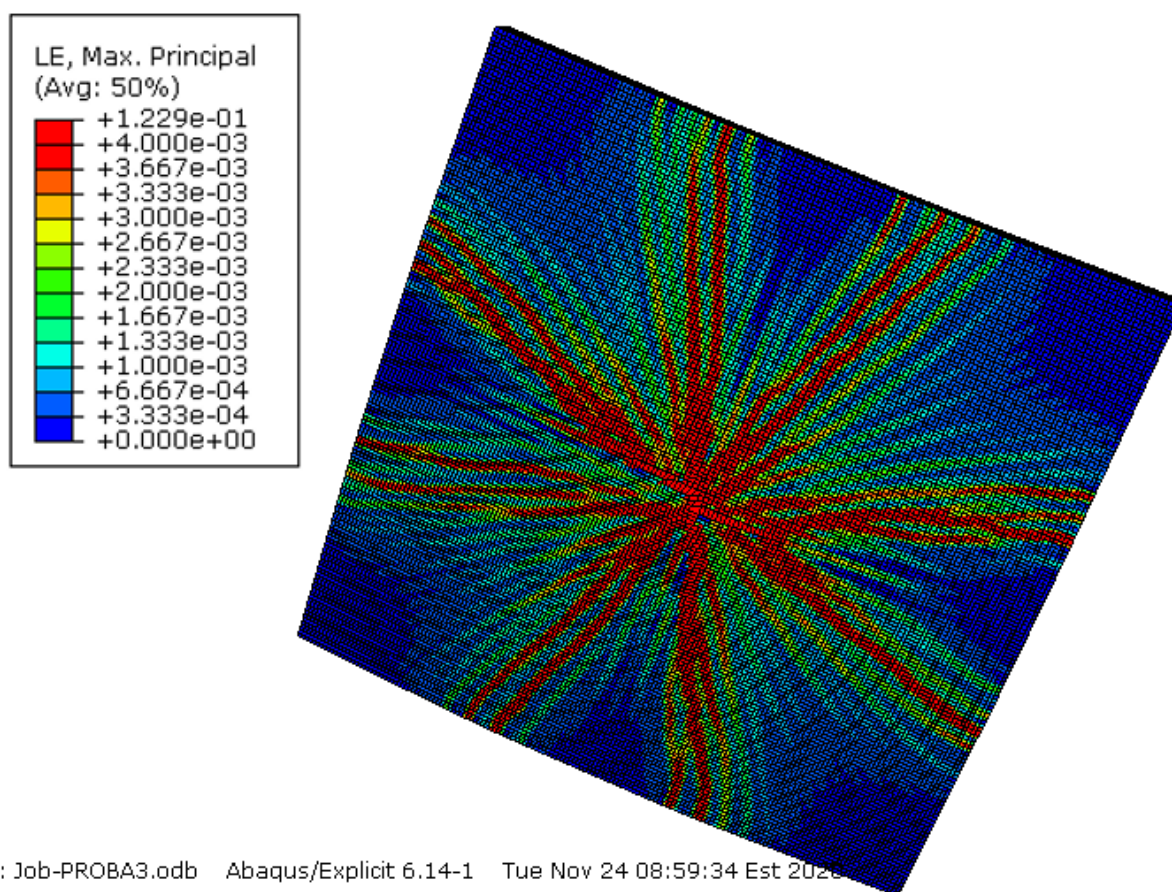


Figure 4.17 Patron de fissuration obtenu pour la dalle avec un maillage de 25 mm

Par ailleurs, la Figure 4.18 et la Figure 4.19 présentent respectivement le déplacement que subit la dalle et les réactions exercées par la plaque support à l'issue de l'analyse (déplacement imposé qui vaut 25 mm).

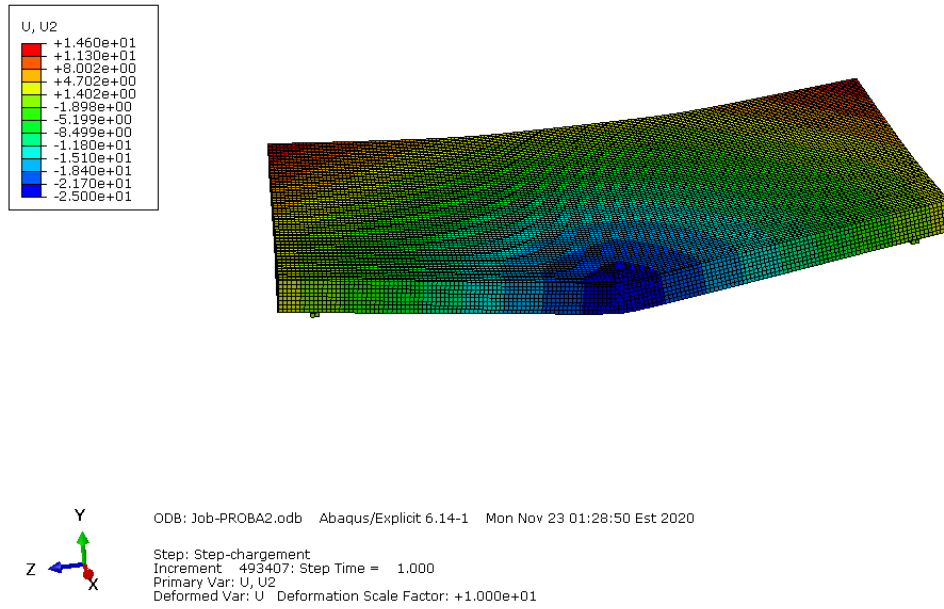


Figure 4.18 Déformée de la dalle

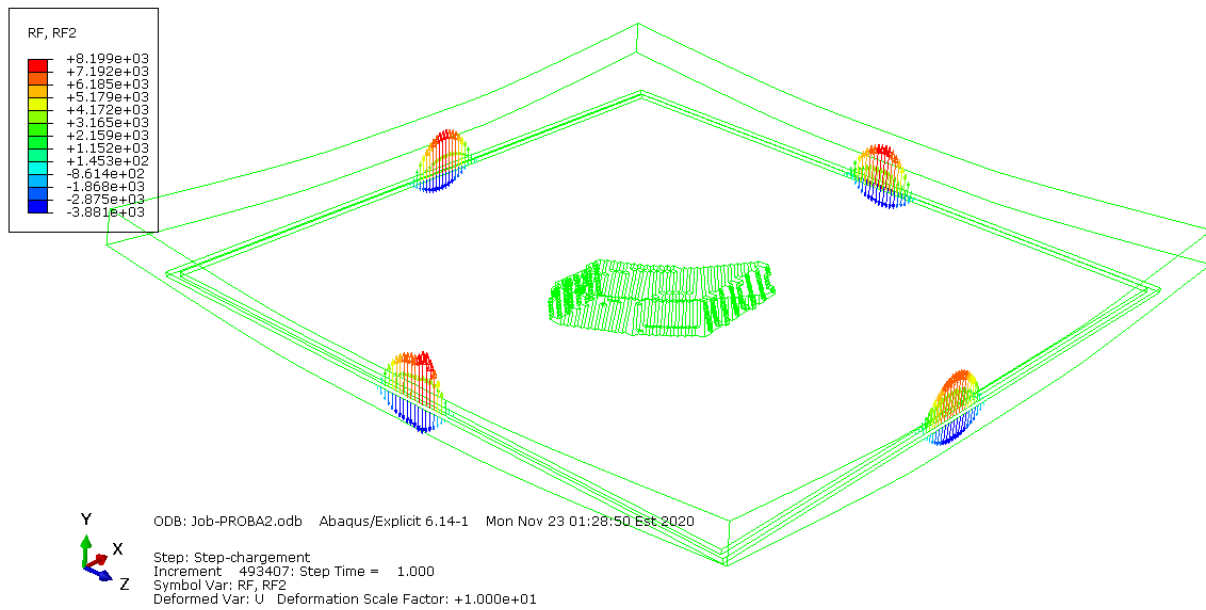


Figure 4.19 Dalle avec les vecteurs de force de contact

## 4.4 Calcul des facteurs de résistance

Une fois la variabilité de la réponse structurale connue ( $COV(R_{max})$ ), il est possible de calculer le facteur de sécurité du côté résistance, en utilisant le principe des approches semi-probabilistes décrites dans le chapitre 2 (Niveau 1 de la Figure 2.19).

Le facteur de sécurité du côté résistance  $\gamma^c$  est utilisé pour calculer la valeur de « conception »  $R_d$  à partir de la résistance moyenne de la structure  $R_m$ . Dans le cas des analyses faites par les éléments finis, on peut considérer l'approximation :  $R_m \approx R_{max}$ . Le calcul du facteur de sécurité nécessite une donnée issue du code, et qui correspond à la probabilité de défaillance maximale acceptable  $p_{fmax}$  ou à l'indice de fiabilité minimum  $\beta_{min}$  requis.

Le paramètre  $R$  est processus aléatoire qui représente la résistance réelle de la structure, il est fonction de nombreuses variables aléatoires d'entrée. Dans le cadre de ce projet,  $R$  dépend uniquement de  $G_f$  qui suit une distribution lognormale.

L'équation de base utilisée dans la conception s'écrit :

$$R_d \geq U_d \quad (4.1)$$

En supposant que  $R$  et  $U$  suivent une loi lognormale et que les coefficients de variation sont relativement petits (inférieurs à 30%), MacGregor (1976) a réécrit l'équation (4.1) sous la forme :

$$R_m e^{-\beta \alpha V_R} \geq U_m e^{\beta \alpha V_U} \quad (4.2)$$

avec  $\alpha$  la fonction de séparation,  $\alpha = 0,75 \pm 0,06$ . Dans le cadre de cette étude,  $\alpha$  est pris égal à 0,80. Le facteur de résistance globale est alors égal à :

$$\gamma^c = e^{-\beta \alpha V_R} \quad (4.3)$$

On considère un indice de fiabilité  $\beta_{min}$  de 3,72 (ce qui correspond à une probabilité  $p_{fmax} = 10^{-4}$ , typique pour les ruptures ductiles d'éléments). Il est possible alors de calculer les facteurs de résistance pour les différents éléments structuraux considérés dans les sections précédentes. Le Tableau 4.7 résume les résultats.

Tableau 4.7 Valeurs des coefficients de variation de la résistance et du coefficient global de résistance en fonction du modèle considéré

Modèle	Coefficient de variation en sortie $V_R$ (en %)	$\gamma^c$
Matériau (BRF70-80kg)	20%	0,55
Poutre simple	3,9%	0,89
Poutres croisées	2,5%	0,93
Dalle simplement appuyée	0,3%	0,99

À partir du Tableau 4.7, il est possible de tirer les conclusions suivantes :

- le fait de se baser sur la dispersion du matériau et non sur celle de la structure étudiée introduit un conservatisme assez important au niveau du coefficient de résistance global  $\gamma^c$ ;
- $\gamma^c$  augmente avec le degré d'hyperstaticité.



## CHAPITRE 5 CONCLUSION

### 5.1 Rappel des objectifs

Les objectifs du mémoire étaient de :

- déterminer les effets de la variabilité des caractéristiques mécaniques du béton fibré sur le comportement de certains éléments structuraux, ainsi que de mettre en œuvre les lois probabilistes qui modéliseraient cette variabilité;
- coder et intégrer la sous-routine probabiliste à EPM3D;
- mettre en œuvre une nouvelle méthodologie de modélisation probabiliste rationnelle et simple pour les structures en BRF en utilisant l'analyse non linéaire par éléments finis;
- en déduire l'influence de l'hyperstaticité sur les facteurs de résistance des éléments structuraux en BRF.

### 5.2 Conclusions

Les conclusions de ce rapport de mémoire sont scindées en trois parties : le bilan de la sous-routine probabiliste d'EPM3D, les conclusions relatives à l'analyse de la dispersion en sortie en fonction de la variabilité renseignée en entrée, et enfin les conclusions relatives aux divers exemples d'application et à la méthode d'estimation des facteurs de résistance.

#### 5.2.1 Sous-routine probabiliste d'EPM3D

Les différentes conclusions tirées par rapport au développement de la sous-routine probabiliste d'EPM3D sont les suivantes.

- Le modèle développé qui est basé sur une approche statistique du comportement physique du béton s'intègre parfaitement au code d'EPM3D préexistant.
- Cette approche probabiliste pourrait être appliquée aux bétons ordinaires (en faisant varier  $f'_t$  et  $f'_c$ ) ou aux bétons fibrés (en prenant l'énergie de fissuration  $G_f$  comme variable aléatoire). Ce travail de recherche s'est focalisé sur les BRF et l'ensemble des conclusions énoncées au travers des points suivants sont reliées à ces derniers.

- Cette sous-routine parvient à reproduire de manière très précise les lois probabilistes théoriques : ceci a pu être vérifié par le biais du code FORTRAN directement exécuté dans Microsoft Visual Basic, et également sur un modèle de cube et d'éprouvette en traction sur ABAQUS.
- L'utilisation de cette sous-routine demeure relativement simple pour l'utilisateur puisque cette dernière nécessite uniquement : (1) la moyenne et le COV de l'énergie de fissuration du BRF étudié qui peuvent être tirés des essais effectués lors d'une campagne expérimentale et (2) l'application du modèle permettant de relier la dispersion fournie en entrée et celle obtenue en sortie.
- L'étude de convergence de la moyenne et du COV obtenus en sortie a permis de mettre en avant la tendance suivante : (1) le seuil minimal d'analyses pour converger varie en fonction de la taille des éléments finis utilisés ; (2) les spécimens maillés à l'aide d'éléments de plus petite taille convergent plus rapidement, autrement dit, le seuil minimal d'analyses requises pour assurer la convergence baisse avec la taille du maillage; (3) la convergence est atteinte plus rapidement pour la moyenne que pour le coefficient de variation.
- Le modèle développé est probabiliste, néanmoins, une seule simulation demeure déterministe. Il est donc requis d'effectuer un grand nombre de simulations pour faire ressortir l'aspect probabiliste. La sous-routine doit ainsi être utilisée en conjonction avec la méthode simulation de Monte-Carlo, le nombre d'analyses requises dépend du seuil de convergence qui, à son tour, dépend de la taille de maillage, tel qu'évoqué précédemment.
- La corrélation entre les éléments adjacents n'a pas été considérée. En effet, cette hypothèse a été rejetée car le but du projet était de modéliser la variabilité à l'échelle macroscopique et non méso ou microscopique. Ainsi, l'introduction d'une fonction et d'une longueur d'autocorrélation ne semblait pas nécessaire.

### **5.2.2 Analyse de la variabilité obtenue**

Tout d'abord, il semble important de rappeler que l'ensemble des conclusions tirées dans ce paragraphe se basent sur un BRF70-80kg et sur la campagne expérimentale réalisée par Sébastien Reygner. Les constats qui ont pu être tirés de l'analyse de la variabilité obtenue en sortie peuvent être résumés au travers des points suivants.

- Pour le modèle de l'éprouvette en traction, la moyenne de l'énergie de fissuration obtenue en sortie est égale à celle fournie en entrée. Elle est par ailleurs indépendante de la taille de maillage employée.
- En ce qui concerne le coefficient de variation, la valeur obtenue en sortie diffère de celle introduite en entrée. De plus, cette dernière est fonction de la taille des éléments finis. En effet, pour une valeur identique du COV fournie en entrée, la valeur obtenue en sortie augmente avec la taille des éléments.
- À partir de l'analyse du lien de corrélation entre le COV entré et le COV obtenu pour le modèle des éprouvettes en traction, une loi a pu être établie. Il s'agit d'une fonction affine reliant ces deux paramètres dont la pente dépend de la taille de maillage employée, de la section tendue et du matériau étudié. Ce modèle ainsi établi permet premièrement de s'affranchir de la dépendance à la taille des éléments et deuxièmement de reproduire la variabilité expérimentale obtenue grâce à la campagne expérimentale de Reygner.
- La validité de ce modèle établi a été vérifiée grâce à un exemple d'application sur des poutres en flexion trois points. L'application de ce dernier a permis de reproduire la variabilité exacte du matériau et ainsi d'obtenir la dispersion qui aurait été obtenue si une campagne expérimentale avait été réalisée pour ces poutres soumises à la flexion.
- L'influence de la taille des poutres a pu être étudiée : plus la taille de la poutre est importante, plus le coefficient de variation de la charge maximale atteinte est petit et donc plus la dispersion est faible.
- Les analyses effectuées sur un modèle de poutres croisées et de dalle simplement appuyée ont permis de montrer que l'augmentation du degré d'hyperstaticité engendre une diminution de la dispersion de la réponse structurale.
- Une variabilité des patrons de fissuration a été observée pour les modèles de poutres simples et de poutres croisées. Par ailleurs, l'analyse de ces derniers a permis d'établir un lien clair entre la capacité de multi-fissuration des structures et entre leur ductilité.
- À l'opposé, aucune variabilité au niveau des patrons de fissuration n'a été relevée pour les éprouvettes en traction et pour les dalles simplement appuyées. Pour le modèle des os en traction, ce constat est attribuable aux conditions aux limites qui ne permettaient pas

d'imposer un déplacement uniforme tout au long du spécimen, ce gradient de déplacement causait une localisation de la fissure au niveau du changement de section, car c'est à cet endroit que le déplacement imposé était le plus important. Pour les dalles, l'hyperstatisme de la structure diminue considérablement la dispersion de la réponse en sortie, ce qui confère un aspect déterministe au phénomène de localisation des macrofissures, et ce, malgré la variabilité des propriétés mécaniques renseignées en entrée.

### **5.2.3 Méthode d'estimation des facteurs de sécurité**

L'utilisation des facteurs de résistance dans les codes suppose implicitement une certaine distribution de la résistance, ce qui ne donne qu'une marge de sécurité nominale.

Un cadre de fiabilité découlant de l'approche probabiliste développée dans le cadre de ce mémoire a été introduit pour la conception des structures en BRF. Il fournit une méthodologie pour l'estimation des facteurs de sécurité pour chaque situation de conception (ici pour les poutres simples, poutres croisées et dalles). Les résultats d'un nombre d'analyses non linéaires probabilistes ont été utilisés en conjonction avec la procédure développée dans le Chapitre 3 ainsi que la méthode de Monte Carlo.

La méthodologie présentée dans le présent document peut être facilement incorporée dans les futurs codes de conception. Elle ouvre la voie à l'identification de programmes existants et futurs qui permettent de passer du matériau aux échelles structurelles et servent à déterminer la variabilité de la réponse structurale et les coefficients de sécurité qui en découlent. En outre, le couplage des connaissances entre les domaines expérimentaux et analytiques, à l'échelle des matériaux et des structures, peut contribuer à optimiser la conception des structures dans le contexte des préoccupations croissantes en matière de sécurité et de développement durable.

## **5.3 Recommandations**

Les recommandations qui pourraient être faites pour la poursuite de ce projet sont résumées au travers des points suivants.

1. Le modèle de calibration ainsi que les divers exemples d'application ont été réalisés pour un BRF70-80kg. Il faudrait étudier l'impact de changement du matériau (plusieurs BRF) sur le modèle de calibration développé dans le Chapitre 3 ainsi que sur les différentes

conclusions qui ont été tirées. Il serait intéressant d'étudier un BFUP au lieu d'un BRF et d'analyser l'influence d'un tel changement.

2. Les conditions aux limites de l'éprouvette en traction doivent être modifiées afin de supprimer le gradient de déplacement et pouvoir observer la variabilité des patrons de fissuration.
3. Les différentes variabilités obtenues pour les poutres ainsi que les dalles doivent être comparées aux dispersions obtenues expérimentalement (Bastien, 2002; Bélanger, 2000; De Broucker, 2013; De Montaignac de Chauvance, 2011) afin de prouver la validité du modèle probabiliste proposé dans le cadre de ce mémoire.
4. La variabilité de la matrice cimentaire devrait être prise en compte en considérant  $f'_t$  et  $E$  comme étant aléatoires. En effet, dans le cadre de ce projet de recherche, les coordonnées des deux premiers points de la portion post-pic de la courbe de contrainte en fonction de l'ouverture de fissure ont délibérément été considérées comme étant fixes.
5. Le dédoublement des faisceaux de courbes observé pour un maillage de taille 25 mm, qui résulte d'un problème purement numérique, pourrait être résolu en imposant un unique plan de fissuration.
6. La variabilité des ouvertures de fissures en post-pic devrait également être prise en compte. Cette dernière a été programmée mais les résultants ne sont pas probants pour le moment.
7. Les lois probabilistes adoptées pour modéliser l'hétérogénéité du BRF ne tiennent pas compte du mode de fabrication, les effets de parois (qui orientent les fibres) ainsi que les éventuels obstacles (qui créent des zones sans fibres) ont été négligés. Il serait intéressant de les considérer et d'analyser leur impact sur la variabilité de la réponse structurale obtenue en sortie.
8. L'influence de la géométrie des éléments (hexaédriques vs tétraédriques) sur la dispersion de la réponse doit être étudiée de manière plus approfondie.

## RÉFÉRENCES

- Alwan, J. M., Naaman, A. E., & Guerrero, P. (1999). Effect of mechanical clamping on the pull-out response of hooked steel fibers embedded in cementitious matrices. *Concrete Science Engineering*, 1(1), 15-25.
- Balakrishnan, N., Koutras, M. V., & Politis, K. G. (2019). *Introduction to Probability: Models and Applications*: John Wiley & Sons.
- Barnett, V. (1975). Probability plotting methods and order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C24*(1), 95-108.
- Baron, J., & Lesage, R. (1965). Pour une étude pratique de la maniabilité: le maniabilimetre Lesage du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. *Bull Liaison LCPC*, 13.
- Bastien, D. (2002). Utilisation structurale du beton fibre pour la conception des dalles de ponts (French text).
- Bažant, Z. (1984). Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. *Archive of applied Mechanics*, 110(4), 518-535.
- Bažant, Z. (1999). Size effect on structural strength: a review. *Archive of applied Mechanics* 69 (9-10), 703-725.
- Bazant, Z., & Planas, J. (1997). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials* (vol. 16): CRC press.
- Bažant, Z., Vořechovský, M., & Novák, D. (2007). Asymptotic prediction of energetic-statistical size effect from deterministic finite-element solutions. *Journal of Engineering Mechanics* 133(2), 153-162.
- Bélanger, A. (2000). *Conception de dalles de ponts avec armature réduite et béton de fibres d'acier*: École Polytechnique de Montréal.
- Ben Ftima, M. (2013). *Utilisation de la méthode des éléments finis non-linéaires pour la conception des structures en béton armé: application aux structures massives*. (Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal).
- Ben Ftima, M., & Massicotte, B. (2012). Development of a reliability framework for the use of advanced nonlinear finite elements in the design of concrete structures. *Journal of Structural Engineering* 138(8), 1054-1064.
- Ben Ftima, M., & Massicotte, B. (2015). Utilization of nonlinear finite elements for the design and assessment of large concrete structures. I: Calibration and validation. *Journal of Structural Engineering*, 141(9), 04014217.
- Bouzaïene, A., & Massicotte, B. (1997). Hypoelastic tridimensional model for nonproportional loading of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11), 1111-1120.
- Carmeliet, J., & de Borst, R. (1995). Stochastic approaches for damage evolution in standard and non-standard continua. *International Journal of Solids Structures*, 32(8-9), 1149-1160.
- Colliat, J.-B., Hautefeuille, M., Ibrahimbegovic, A., & Matthies, H. G. (2007). Stochastic approach to size effect in quasi-brittle materials. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(8), 430-435.

- Daviau-Desnoyers, D. (2015). *Caractérisation et modélisation de l'évolution de la fissuration des bétons renforcés de fibres sous charge soutenue*. (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal).
- De Broucker, W. (2013). *Étude du comportement en flexion et à l'effort tranchant de poutres précontraintes en BRF*. (École Polytechnique de Montréal).
- De Montaignac de Chauvance, R. (2011). *Analyse du comportement d'éléments fléchis en béton renforcé de fibres métalliques: Du matériau à la structure*. (École Polytechnique de Montréal).
- Di Prisco, M., Plizzari, G., & Vandewalle, L. (2009). Fibre reinforced concrete: new design perspectives. *Materials Structures*, 42(9), 1261-1281.
- Dobrilla, S., Friedman, N., Rukavina, T., Matthies, H., & Ibrahimbegovic, A. (2018). *Probabilistic analysis of failure of fiber reinforced concrete* Communication présentée à CILAMCE 2018, Paris/Compiègne, France.
- Durelli, A., & Parks, V. (1962). Relationship of size and stress gradient to brittle failure stress. *Proc. 4 th US Nat. Cong. Appl. Mech*, 931, 938.
- Fantilli, A. P., & Vallini, P. (2007). A cohesive interface model for the pullout of inclined steel fibers in cementitious matrixes. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 5(2), 247-258.
- Freudenthal, A. M. (1968). Statistical approach to brittle fracture. *Fracture, An Advanced Treatise, II*, 591-619.
- Griffith, A. A. (1921). VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582-593), 163-198.
- Hibbitt, D., Karlsson, B., & Sorensen, P. (2014). ABAQUS User-Manual Release 6.14. *Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI*
- Hoover, C. G., & Bažant, Z. (2014). Universal size-shape effect law based on comprehensive concrete fracture tests. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(3), 473-479.
- Hsieh, S., Ting, E., & Chen, W. (1982). A plastic-fracture model for concrete. *International Journal of Solids Structures*, 18(3), 181-197.
- Ibrahimbegovic, A. (2009). *Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods. Mechanics Nonlinear Solid*: Springer, London.
- Kuguel, R. (1961). *A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume*. Communication présentée à proc. ASTM (vol. 61, p. 732-748).
- Lamon, J. (2016). *Brittle fracture and damage of brittle materials and composites: statistical-probabilistic approaches*: Elsevier.
- Li, J., Weng, J., & Yang, E. (2018). *Modelling the stochastic tensile behavior and multiple cracking of strain-hardening cementitious composites (SHCCS)*
- Communication présentée à 10th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures.

- MacGregor, J. (1976). Safety and limit states design for reinforced concrete. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 3(4), 484-513.
- Massicotte, B. (2004). *Implementing SFRC design into North American codes: application to a building floor*. Communication présentée à Invited paper to the International workshop on the advanced in fibre reinforced concrete, Bergamo, Italia, September (p. 24-25).
- Massicotte, B., & Ben Ftima, M. (2015). EPM3D–v3.4 A user-supplied constitutive model for the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures. *Technical Report SR15-08*, Polytechnique Montréal, Montréal.
- Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. (Thèse de Docteur Ès Sciences, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6).
- Mazars, J. (1986). A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6), 729-737.
- Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G., & Saouridis, C. (1991). Size effect and continuous damage in cementitious materials. *International Journal of Fracture*, 51(2), 159-173.
- Melchers, R. E., & Beck, A. T. (2018). *Structural reliability analysis and prediction*: John Wiley & sons.
- Naaman, A. E. (2003). Engineered steel fibers with optimal properties for reinforcement of cement composites. *Journal of Advanced Concrete Technology* 1(3), 241-252.
- Peirce, F. T. (1926). Tensile tests for cotton yarns: "the weakest link" theorems on the strength of long and of composite specimens. *J. Textile Inst*, 17, T355-368.
- Quinn, G. D. (2003a). Weibull effective volumes and surfaces for cylindrical rods loaded in flexure. *Journal of the American Ceramic Society*, 86(3), 475-479.
- Quinn, G. D. (2003b). Weibull strength scaling for standardized rectangular flexure specimens. *Journal of the American Ceramic Society*, 86(3), 508-510.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution: a handbook*: CRC press.
- Rossi. (1998). Bétons de fibres métalliques (BFM). *Techniques De l'Ingénieur Construction*(C2 214).
- Rossi, Casanova, P., Guerrier, F., & Elouard, A. (1994 (a)). Un modèle probabiliste de fissuration des structures en béton.
- Rossi, Daviau-Desnoyers, D., & Tailhan, J.-L. (2015). Analysis of cracking in steel fibre-reinforced concrete (SFRC) structures in bending using probabilistic modelling. *Structural Concrete*, 3(16).
- Rossi, & Harrouche, N. (1990). Mix design and mechanical behaviour of some steel-fibre-reinforced concretes used in reinforced concrete structures. *Materials and Structures*, 23(4), 256.
- Rossi, & Richer, S. (1987). Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach. *Materials and Structures*, 20(5), 334-337.



- Rossi, & Ulm, F. (1997). Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete: physical mechanisms and modelling. *Materials and Structures*, 30(4), 210.
- Rossi, Wu, X., Le Maou, F., & Belloc, A. (1994 (b)). Scale effect on concrete in tension. *Materials and Structures*, 27(8), 437-444.
- Rukavina, T., Ibrahimbegovic, A., & Kozar, I. (2019). Fiber-reinforced brittle material fracture models capable of capturing a complete set of failure modes including fiber pull-out. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 355, 157-192.
- Saouma, V., & Fava, G. (2006). On fractals and size effects. *International Journal of Fracture*, 137(1-4), 231-249.
- Saouma, V., Natekar, D., & Hansen, E. (2003). Cohesive stresses and size effects in elasto-plastic and quasi-brittle materials. *International Journal of Fracture*, 119(3), 287-298.
- Saouridis, C., & Mazars, J. (1992). Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi-scale damage approach. *Engineering Computations*
- Schlangen, E., & Van Mier, J. (1992). Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures* 25(9), 534-542.
- Sellier, A., & Millard, A. (2013). *Dépendances spatio-temporelles de la résistance des matériaux: origines des phénomènes et modélisation pour une prise en compte systématique dans la méthode des éléments finis en contexte non linéaire*. Communication présentée à Congrès français de mécanique.
- Sellier, A., & Millard, A. (2014). WL2, une méthode pour considérer l'effet d'échelle probabiliste dans les modèles de fissuration.
- Snyder, M. J., & Lankard, D. R. (1972). *Factors affecting the flexural strength of steel fibrous concrete strength of steel fibrous concrete*. Communication présentée à Journal Proceedings (vol. 69, p. 96-100).
- Swamy, R., Mangat, P., & Rao, C. K. (1974). The mechanics of fiber reinforcement of cement matrices. *Special Publication*, 44, 1-28.
- Syroka-Korol, E., Tejchman, J., & Mróz, Z. (2013). FE calculations of a deterministic and statistical size effect in concrete under bending within stochastic elasto-plasticity and non-local softening. *Engineering Structures*, 48, 205-219.
- Tailhan, J., Dal Pont, S., & Rossi. (2010). From local to global probabilistic modeling of concrete cracking. *Annals of Solid Structural Mechanics* 1(2), 103-115.
- Tailhan, J., Rossi, & Daviau-Desnoyers, D. (2015a). Probabilistic numerical modelling of cracking in steel fibre reinforced concretes (SFRC) structures. *Cement Concrete Composites*, 55, 315-321.
- Tailhan, J., Rossi, & Daviau-Desnoyers, D. (2015b). Probabilistic numerical modelling of cracking in steel fibre reinforced concretes (SFRC) structures. *Cement Concrete Composites* 55, 315-321.
- Tailhan, J., Rossi, Phan, T., Rastiello, G., & Foulliaron, J. (2013). *Multi Scale Probabilistic Approaches and Strategies for the Modelling of Concrete Cracking*. Communication présentée à VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete

- Structures (FraMCoS-8). JGM Van Mier, G. Ruiz, RC Andrade, Y. Zhang and XX Zhang. Portugal.
- Tang, X., Zhou, Y., Zhang, C., & Shi, J. (2011). Study on the heterogeneity of concrete and its failure behavior using the equivalent probabilistic model. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 23(4), 402-413.
- Tippett, L. (1925). On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. *Biometrika*, 364-387.
- Torrent. (1977). A general relation between tensile strength and specimen geometry for concrete-like materials. *Matériaux et Construction*, 10(4), 187-196.
- Torrent, & Brooks, J. (1985). Application of the highly stressed volume approach to correlated results from different tensile tests of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 37(132), 175-184.
- Unger, J. F., & Eckardt, S. (2011). Multiscale modeling of concrete. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(3), 341.
- Von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. math. Union interbalcanique*, 1, 141-160.
- Vořechovský, M. (2007). Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids Structures*, 44(9), 2715-2731.
- Vorechovský, M., Sadilek, V., & Rypl, R. (2013). Probabilistic evaluation of crack bridge performance in fiber reinforced composites. *Engineering Mechanics*, 20(1), 3-11.
- Weibull. (1939). The phenomenon of rupture in solids. *IVA Handlingar*, 153.
- Willam, K., & Warnke, E. (1975). Constitutive model for the triaxial behavior of concrete international association for bridge and structure engineering proceedings: Bergamo.
- Wittmann, F. H. (1983). *Fracture mechanics of concrete*.
- Wu, S., Chen, X., Zhou, J., & Design. (2012). Tensile strength of concrete under static and intermediate strain rates: Correlated results from different testing methods. *Nuclear Engineering*, 250, 173-183.
- Zhan, Y., & Meschke, G. (2013). *Multiscale oriented concept for the analyses of steel fiber reinforced concrete materials and structures*. Communication présentée à Proceedings of the VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS-8, Toledo, Spain (p. 10-14).

## ANNEXE A CODE DE LA SOUS-ROUTINE PROBABILISTE D'EPM3D

Cette annexe présente le code de la sous-routine probabiliste qui a été développée et intégrée dans EPM3D.

```

29
30
31 Subroutine ppale
32 IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
33 CM_Khadija_17_01_2020
34 DIMENSION PROP(62)
35 DIMENSION IP(3)
36 DIMENSION WA01(57)
37 DIMENSION WA02(57)
38 DIMENSION JCPT(3)
39 CM_Khadija_11_09_2019
40 PROP(3)=-50.0d0 !fc'
41 PROP(5)=4.5d0 !ft'
42 PROP(6)=0.085d0 !Gf
43 PROP(58)=001.0d0 !Type de loi probabiliste
44 PROP(59)=5.0d0 !Variabilité de fc'
45 PROP(60)=0.233d0 !Variabilité de ft'
46 PROP(61)=0.0085d0 !Variabilité de Gf ou de S1 suivant la valeur de Iloi
47 PROP(62)=0.2 !variabilité de Gf pour un BRF
48 CM_Khadija_24_09_2019 Partie pour la variabilité de la courbe post-pic d'un BRF
49 PROP(51)=3.7d0 !S1
50 PROP(52)=5.5d0 !S2
51 PROP(53)=2.5d0 !S3
52 PROP(54)=1.1d0 !S4
53 PROP(55)=0.8d0 !S5
54 PROP(56)=0.2d0 !S6
55 PROP(57)=0.0d0 !S7
56 PROP(44)=0.05d0 !w1
57 PROP(45)=0.2d0 !w2
58 PROP(46)=0.75d0 !w3
59 PROP(47)=1.2d0 !w4
60 PROP(48)=2.0d0 !w5
61 PROP(49)=3.2d0 !w6
62 PROP(50)=4.5d0 !w7

```

```

63 CM_Khadija_25_10_2019_Calcul de Gf totale (méthode des trapèzes)
64     A1=PROP(44)*(PROP(5)+PROP(51))*0.5d0
65     A2=(PROP(45)-PROP(44))*(PROP(51)+PROP(52))*0.5d0
66     A3=(PROP(46)-PROP(45))*(PROP(52)+PROP(53))*0.5d0
67     A4=(PROP(47)-PROP(46))*(PROP(53)+PROP(54))*0.5d0
68     A5=(PROP(48)-PROP(47))*(PROP(54)+PROP(55))*0.5d0
69     A6=(PROP(49)-PROP(48))*(PROP(55)+PROP(56))*0.5d0
70     A7=(PROP(50)-PROP(49))*(PROP(56)+PROP(57))*0.5d0
71     At=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7
72 CM_Khadija_25_10_2019 Soustraction de la contribution du béton
73     Ab=0.5d0*PROP(5)*((PROP(5)*PROP(44))/(PROP(5)-PROP(51)))
74     Amoy=At-Ab
75     WRITE(6,*) 'Amoy=', Amoy
76     WRITE(6,*) 'At=', At
77     WRITE(6,*) 'Ab=', Ab
78     IP(1)=int(PROP(58)/100.d0)
79     IP(2)=int((PROP(58)-IP(1)*100.d0)/10.d0)
80     IP(3)=int((PROP(58)-IP(1)*100.d0-IP(2)*10.d0))
81 CM_Khadija_11_09_2019
82     JCPT=(/0,0,0/)
83     Iloi=1
84 CM_Khadija_08_10_2019
85
86
87     DO 333 IK=1,3
88     IF(IP(IK) .NE. 0) THEN
89 CM_MBF_ADD_10_2_2014
90         LP = IP(IK)
91 c         WRITE(6,*) 'ARRIVEE AU POINT 0, IPAS=', IPAS, ' ITER=',ITER
92     IF(SOMME .eq. zero .or. totaltime .eq. dt) THEN

```

```

93 CM_MBF_10_2_2014
94
95 C CALL RANDOM_SEED()
96 CM_MBF_10_2_2014
97
98 IF (IK .EQ. 1) THEN
99   XX = PROP(3)
100   SX = PROP(59)
101 ELSEIF (IK .EQ. 2) THEN
102   XX = PROP(5)
103   SX = PROP(60)
104 ELSEIF (IK .EQ. 3) THEN
105   IF (Iloi .EQ. 0) THEN
106     XX = PROP(6)
107     SX=PROP(61)
108   ELSE
109     XX=Amoy
110     SX=PROP(62)
111 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
112 C XX = PROP(51)
113   END IF
114 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
115 C SX = PROP(61)
116   ENDIF
117 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014 LP = IP(IK)
118 CALL PROBAB(XX,SX,LP,JCPT,IK)
119 IF (IK .EQ. 1) THEN
120   WA02(55)=XX
121   FPC=XX
122   WRITE(6,*) 'ARRIVEE AU POINT 1, XX=', XX
123 ELSEIF (IK .EQ. 2) THEN
124   WA02(56)=XX
125   FPT=XX
126   WRITE(6,*) 'ARRIVEE AU POINT 2, XX=', XX
127 ELSEIF (IK .EQ. 3) THEN
128   IF (Iloi .EQ. 0) THEN
129     WA02(57)=XX
130     Gf=XX
131     WRITE(6,*) 'ARRIVEE AU POINT 3, XX=', XX
132   ELSE
133     WA02(57)=XX
134     WRITE(6,*) 'Gf', WA02(57)
135     IF (XX .NE. 0.D0) THEN
136 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
137 C S1=XX
138   Ai=XX
139   WRITE(24,*) 'Ai=', Ai
140 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
141 C IF (LP.EQ.1) THEN
142   XMOY=PROP(51) !CM_Khadija : espérance de la loi normale
143 ELSEIF (LP.EQ.2) THEN
144   XMOY=EXP (PROP(51)+0.5d0*PROP(61)**2)
145 ELSEIF (LP.EQ.3) THEN
146   WK=(PROP(61)/PROP(51))**(-1.086d0)
147   WL=PROP(51)/GAMMA(1+(1/WK))
148   XMOY=WL*(LOG(2.d0)**(1.d0/WK)) !médiane de la loi de weibull
149 C_del_khadija XMOY=PROP(51)*(LOG(2.D0)**(1.D0/PROP(61)))
150 C VARIABILITE GF NON NUL
151 C WRITE(1,*) XMOY
152 C   ENDIF

```

```

153 CADD_DC_2014_01_16_D
154 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
155 -C
156 IF (XMOY.EQ.0.D0) THEN
157     IF (Amoy.EQ.0.D0) THEN
158         WRITE(6,*) 'ATTENTION: ERREUR SUR S2 A
159             S7, XMOY=0'
160     ENDIF
161 CADD_DC_2014_01_16_F
162 CM_DEL_Khadija_25_10_2019
163
164 S1=PROP(51)
165 S2=PROP(52)*Ai/Amoy
166 S3=PROP(53)*Ai/Amoy
167 S4=PROP(54)*Ai/Amoy
168 S5=PROP(55)*Ai/Amoy
169 S6=PROP(56)*Ai/Amoy
170 S7=PROP(57)*Ai/Amoy
171 WRITE(6,*) 'Amoy=', Amoy
172 WRITE(6,*) 'S1=', S1
173 WRITE(6,*) 'S2=', S2
174 WRITE(6,*) 'S3=', S3
175 WRITE(6,*) 'S4=', S4
176 WRITE(6,*) 'S5=', S5
177 WRITE(6,*) 'S6=', S6
178 WRITE(6,*) 'S7=', S7
179 S2=PROP(52)*S1/XMOY
180 S3=PROP(53)*S1/XMOY
181 S4=PROP(54)*S1/XMOY
182 S5=PROP(55)*S1/XMOY
183 S6=PROP(56)*S1/XMOY
184 S7=PROP(57)*S1/XMOY
185 WRITE(6,*) 'Temps=',totaltime,'Boucle 1, S1=', PROP(51),', S2=',S2,
186     ', S3=',S3,', S4=',S4,',S5=',S5,', S6=',S6,', S7=',S7

```

```

185 ENDIF
186 WRITE(6,*) 'ARRIVEE AU POINT 3, XX=', XX
187 ENDIF
188 ENDIF
189 ELSE
190 IF (IK .EQ. 1) THEN
191     WA02(55)= WA01(55)
192     FPC=WA02(55)
193 ELSEIF (IK .EQ. 2) THEN
194     WA02(56)= WA01(56)
195     FPT=WA02(56)
196 ELSEIF (IK .EQ. 3) THEN
197     IF (Iloi .EQ. 0) THEN
198         WA02(57)= WA01(57)
199         Gf=WA02(57)
200     ELSE
201 CM_MEDI_BF_MOD_10_2_2014 indice 54 charge a 57
202 WA02(57)= WA01(57)
203 IF (S1 .NE. 0.D0) THEN
204     S1=WA02(57)
205     IF (LP .EQ. 1) THEN
206         XMOY=PROP(51)
207     ELSEIF (LP.EQ.2) THEN
208         XMOY=EXP (PROP (51)+0.5d0*PROP (61)**2)
209     ELSEIF (LP.EQ.3) THEN
210         XMOY=PROP (51) * (LOG (2.D0) ** (1.D0/PROP (61)))
211 C VARIABILITE GF NON NUL
212 C WRITE(1,*) XMOY
213 ENDIF

```

```

214 CADD_DC_2014_01_16_D
215 IF (XMOY.EQ.0.D0) THEN
216     WRITE(6,*) 'ATTENTION: ERREUR SUR S2 A
217         +
218         S7, XMOY=0'
219     ENDIF
220 CADD_DC_2014_01_16_F
221 S2=PROP(52)*S1/XMOY
222 S3=PROP(53)*S1/XMOY
223 S4=PROP(54)*S1/XMOY
224 S5=PROP(55)*S1/XMOY
225 S6=PROP(56)*S1/XMOY
226 S7=PROP(57)*S1/XMOY
227 c
228 c +
229 WRITE(1,*) 'Temps=',totaltime,'Boucle 2, S1=', S1,', S2=',S2,
230     ', S3=',S3,', S4=',S4,',S5=',S5,', S6=',S6,', S7=',S7
231     ENDIF
232     ENDIF
233     ENDIF
234 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014 ELSE
235 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014 IF (IK .EQ. 1) THEN
236 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014     FPC = PROP(3)
237 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014 ELSEIF (IK .EQ. 2) THEN
238 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014     FPT = PROP(5)
239 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014 ELSEIF (IK .EQ. 3) THEN
240 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014     Gf = PROP(6)
241 CM_MEDI_BF_REM_10_2_2014     ENDIF
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261

```

```

243 333 CONTINUE
244 CM DC ADD BLOC 05.07.2012 début
245 IF (JCPT(1) .GT. 0) THEN
246     WRITE(6,*) 'ATTENTION: LA LOI NORMALE DU PARAMETRE FC EST
247     * TRONQUEE, NOMBRE DE POINTS TRONQUES: ', JCPT(1), ' SUR ',km
248 ELSEIF (JCPT(2) .GT. 0) THEN
249     WRITE(6,*) 'ATTENTION: LA LOI NORMALE DU PARAMETRE FT EST
250     * TRONQUEE, NOMBRE DE POINTS TRONQUES: ', JCPT(2), ' SUR ',km
251 ELSEIF (JCPT(3) .GT. 0) THEN
252     WRITE(6,*) 'ATTENTION: LA LOI NORMALE DU PARAMETRE GF EST
253     * TRONQUEE, NOMBRE DE POINTS TRONQUES: ', JCPT(3), ' SUR ',km
254     ENDIF
255 CM DC ADD BLOC 05.07.2012 fin
256
257 CONTAINS
258
259
260 CC SOUS-ROUTINES ADDITIONNELLES
261

```

```

262 C DC =====
263 C DC SOUS-ROUTINE QUI FAIT UN TIRAGE ALEATOIRE UNIFORME ENTRE 0 ET 1
264 C DC =====
265 C SUBROUTINE PROBAB (XX,YY,ZZ,SX,SY,SZ,LP,JCPT1,JCPT2,JCPT3) CM DC DEL LINE 16.08.2012
266 C SUBROUTINE PROBAB (XX,SX,LP,JCPT,IK)
267 C DC
268 CM MB ADD 29.07.2012 : implicit none, integer et real enleves, include 'vaba_param.inc' ajoutee
269 C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
270 C !include 'vaba_param.inc'
271 CM MB REM 29.07.2012 IMPLICIT NONE
272 CM MB REM 29.07.2012 INTEGER I,J,JCPT1,JCPT2,JCPT3,LP
273 CM MB REM 29.07.2012 REAL XX,YY,ZZ,SX,SY,SZ,PP,RR,AM,AS
274 C DC
275 C DC ITERATION SUR LES PARAMETRES PROBABILISTES
276 C DC 1.FC'
277 C DC 2.FT'
278 C DC 3.GF'
279 C DO I=1,3 CM DC DEL LINE 16.08.2012
280 CM DC ADD LINE 16.08.2012
281 DIMENSION JCPT(3)
282 I=IK
283 RR=0.d0
284 DO WHILE (RR .EQ. 0.d0)
285
286 CALL RANDOM_NUMBER(RR)
287 WRITE(6,*) 'ATTENTION: RR=',RR
288 C DC IL FAUT QUE RR SOIT DIFFERENT DE 0 ET DE 1
289 C DC SI CELA ARRIVE, RELANCER LA GENERATION DE NBRE ALEATOIRE
290 IF (RR .EQ. 0.d0) THEN
291 WRITE(6,*) 'ATTENTION: TIRAGE ALEATOIRE=0, SI CELA
292 * SURVIENT DE NOMBREUSES FOIS, POSSIBILITE QUE LA LOI
293 * UNIFORME NE SOIT PLUS UNIFORME'
294 ELSEIF (RR .EQ. 1.d0) THEN
295 WRITE(6,*) 'ATTENTION: TIRAGE ALEATOIRE=1, SI CELA
296 * SURVIENT DE NOMBREUSES FOIS, POSSIBILITE QUE LA LOI
297 * UNIFORME NE SOIT PLUS UNIFORME'
298 ENDIF
299 END DO
300 PP=RR
301 WRITE(6,*) 'RR',RR
302 C DC LP: CHOIX DE LA LOI PROB (1. NORMAL, 2. LOGNORMAL, 3. WEIBULL)
303 IF (I .EQ. 1) THEN
304 AM=-XX
305 AS=SX
306 WRITE(6,*) 'SX',AS
307 ELSEIF (I .EQ. 2) THEN
308 AM=XX
309 AS=SX
310 ELSEIF (I .EQ. 3) THEN
311 AM=XX
312 AS=SX
313 ENDIF
314 IF (LP.EQ.1) THEN
315 C DC AM: MOYENNE
316 C DC AS: ECART-TYPE, TOUJOURS SUPERIEUR A 0
317 IF (AS .LE. 0.d0) THEN
318 WRITE(6,*) 'ERREUR: ECART-TYPE (PARAMETRE DE LA LOI NORMALE)
319 * DOIT ETRE SUPERIEUR A 0'
320 !CALL XPLB_EXIT
321 ENDIF
322 CALL NORMINVIT(PP,AM,AS)
323 C DC ATTENTION SI Y INFÉRIEUR OU ÉGAL A 0, IL FAUT REITERER LE PROCESSUS
324 C DC CELA DONNE UNE LOI NORMALE TRONQUEE) VOIR JCPT1 A JCPT3
325 C IF (I .EQ. 1) THEN CM DC DEL LINE 16.08.2012
326 IF (PP .LE. 0.d0) THEN
327 JCPT1=JCPT1+1 CM DC DEL LINE 16.08.2012
328 JCPT(I)=JCPT(I)+1
329 END IF

```



```

330 C      ELSEIF (I .EQ. 2) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
331 C      IF (PP .LE. 0.d0) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
332 C      JCPT2=JCPT2+1      CM DC DEL LINE 16.08.2012
333 C      END IF      CM DC DEL LINE 16.08.2012
334 C      ELSEIF (I .EQ. 3) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
335 C      IF (PP .LE. 0.d0) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
336 C      JCPT3=JCPT3+1      CM DC DEL LINE 16.08.2012
337 C      END IF      CM DC DEL LINE 16.08.2012
338 C      ENDIF

339      ELSEIF (LP.EQ.2) THEN
340 C DC      AM: LAMBDA
341 C DC      AS: ECART-TYPE, TOUJOURS SUPERIEUR A 0
342      IF (AS .LE. 0.d0) THEN
343          WRITE(6,*) 'ERREUR: KSI (PARAMETRE DE LA LOI LOGNORMALE)
344      *      DOIT ETRE SUPERIEUR A 0'
345 C          CALL XPLB_EXIT
346      ENDIF
347      CALL LOGNORMINVIT(PP,AM,AS)
348      ELSEIF (LP.EQ.3) THEN
349 C DC      AM: LAMBDA, TOUJOURS SUPERIEUR A 0
350 C DC      AS: K, TOUJOURS SUPERIEUR A 0
351      IF (AM .LE. 0.d0) THEN
352          WRITE(6,*) 'ERREUR: LAMBDA (PARAMETRE DE LA LOI DE WEIBULL)
353      *      DOIT ETRE SUPERIEUR A 0'
354 C          CALL XPLB_EXIT
355      ENDIF
356      IF (AS .LE. 0.d0) THEN
357          WRITE(6,*) 'ERREUR: K (PARAMETRE DE LA LOI WEIBULL) DOIT
358      *      ETRE SUPERIEUR A 0'
359 C          CALL XPLB_EXIT
360      ENDIF
361      CALL WEIBULLINV(PP,AM,AS)
362      ENDIF
363      IF (I .EQ. 1) THEN
364          XX=-PP      !fc' est négatif, par contre le tirage se fait dans la partie positive
365      ELSE
366          XX=PP
367      ENDIF
368 C      ELSEIF (I .EQ. 2) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
369 C      YY=PP      CM DC DEL LINE 16.08.2012
370 C      ELSEIF (I .EQ. 3) THEN      CM DC DEL LINE 16.08.2012
371 C      ZZ=PP      CM DC DEL LINE 16.08.2012
372 C      END DO      CM DC DEL LINE 16.08.2012
373 C DC
374      END

```

```

375 C DC
376 C DC =====
377 C DC SOUS-ROUTINE QUI CALCULE LA LOI INVERSE CUMULEE DE WEIBULL
378 C DC =====
379 C SUBROUTINE WEIBULLINV (PP,AM,AS)
380 CM MB ADD 29.07.2012 : implicit none, integer et real enleves, include 'vaba_param.inc' ajoutée
381 C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
382 C !include 'vaba_param.inc'
383 CM MB REM 29.07.2012 IMPLICIT NONE
384 CM MB REM 29.07.2012 REAL PP,AM,AS,AP
385 C AP=PP
386 CADD_DC_2014_01_16_D
387 C IF (AS .EQ. 0.D0) THEN
388 C WRITE(6,*) 'ATTENTION: PP nul division par zero, AS=0'
389 C ENDIF
390 CADD_DC_2014_01_16_F
391 CADD_KHADIJA_2019_10_08
392 C WK=(AS/AM)**(-1.086d0)
393 C WL= AM/GAMMA(1+(1/WK))
394 C PP=WL*(-LOG(1.d0-AP))**(1.d0/WK)
395 C END
396 C DC

```

```

397 C DC =====
398 C DC SOUS-ROUTINE QUI CALCULE LA LOI NORMALE INVERSE CUMULEE
399 C DC =====
400 C SUBROUTINE NORMINVIT (PP,AM,AS)
401 CM MB ADD 29.07.2012 : implicit none, integer et real enleves, include 'vaba_param.inc' ajoutée
402 C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
403 C !include 'vaba_param.inc'
404 CM MB REM 29.07.2012 IMPLICIT NONE
405 CM MB REM 29.07.2012 INTEGER IPOS
406 CM MB REM 29.07.2012 REAL AM,AS,PP,P,ERROR,AER,BER,AX,AXOLD,AX2,FX,FXOLD,FX2,EROLD
407 C ERROR=100.D0
408 C P=PP
409 C AX=AM
410 C IPOS=0
411 C DO WHILE (ERROR .GT. 0.00000001d0)
412 C DC ERROR: PRECISION SUR P
413 C DC LE CALCUL DE AX SE FAIT EN DEUX ETAPES :
414 C DC ETAPE 1: AX=MOYENNE+N*ECART-TYPE
415 C DC AVEC N=1,2,3,... JUSQUE CE QUE AX SOIT BORNE
416 C DC CE QUI SIGNIFIE QUE LORSQUE P SE SITUE BORNE PAR
417 C DC FX(AX) ET FXOLD(AXOLD), ALORS LE PROGRAMME PASSE
418 C DC A L'ETAPE 2
419 C DC ETAPE 2: AX EST OBTENU PAR L'EQUATION D'UNE DROITE QUI EST
420 C DC BORNEE A L'ETAPE 1 ET QUI INTERCEPTE P
421 C DC SI IPOS=0: PREMIERE ITERATION
422 C DC SI IPOS=1: ETAPE 1, AVEC P>0.5
423 C DC SI IPOS=-1: ETAPE 1, AVEC P<0.5
424 C DC SI IPOS=2: ETAPE 2
425 C DC SI IPOS=3: C'EST QUE LA SOLUTION EXACTE EST TROUVEE
426 C IPOSOLD=IPOS
427 C IF (IPOS.NE.2) THEN
428 C CADD_DC_2014_01_16_D
429 C IF (AS .EQ. 0.D0) THEN
430 C WRITE(6,*) 'ATTENTION: FX nul division par zero, AS=0'
431 C ENDIF
432 C CADD_DC_2014_01_16_F
433 C FX=0.5d0*(1.d0+ERF((AX-AM)/(AS*(2.d0**0.5d0))))
434 C ENDIF
435 C IF (IPOS.EQ.2) THEN
436 C CADD_DC_2014_01_16_D

```

```

437 IF (AS .EQ. 0.D0) THEN
438 WRITE(6,*) 'ATTENTION: FX2 nul division par zero, AS=0'
439 ENDIF
440 IF ((FX-FXOLD) .EQ. 0.D0) THEN
441 WRITE(6,*) 'ATTENTION: AX2 nul division par zero,
442         FX-FXOLD=0'
443 ENDIF

```

```

444 CADD_DC_2014_01_16_F
445 AX2=(AX-AXOLD)*(P-FXOLD)/(FX-FXOLD)+AXOLD
446 FX2=0.5d0*(1.d0+ERF((AX2-AM)/(AS*(2.d0**0.5d0))))
447 IF (P.GT.FX2) THEN
448     FXOLD=FX2
449     AXOLD=AX2
450 ELSEIF (P.LT.FX2) THEN
451     FX=FX2
452     AX=AX2
453 ELSE
454     IPOS=3
455     AX=AX2
456     FX=FX2
457 ENDIF
458 ELSEIF (P.GT.FX) THEN
459     IF (IPOS.EQ.-1) THEN
460         IPOS=2
461         AX2=AX
462         FX2=FX
463         AX=AXOLD
464         FX=FXOLD
465         AXOLD=AX2
466         FXOLD=FX2
467     ELSE
468         AXOLD=AX
469         FXOLD=FX
470         AX=AX+AS
471         IPOS=1
472     END IF
473 ELSEIF (P.LT.FX) THEN
474     IF (IPOS.EQ.1) THEN
475         IPOS=2
476     ELSE
477         AXOLD=AX
478         FXOLD=FX
479         AX=AX-AS
480         IPOS=-1
481     ENDIF
482 ELSE
483     IPOS=3
484 ENDIF
485 CADD_DC_2014_01_16_D
486 IF (P .EQ. 0.D0) THEN
487     WRITE(6,*) 'ATTENTION: AER et BER nul division par
488             zero, P=0'
489 ENDIF

```

```

490 CADD DC 2014_01_16_F
491 AER=ABS (FX-P) /P
492 BER=ABS (FXOLD-P) /P
493 EROLD=ERROR
494 IF (AER.LT.BER) THEN
495     ERROR=AER
496 ELSE
497     ERROR=BER
498 ENDIF
499 IF (EROLD.EQ.ERROR) THEN
500     IF (IPOSOLD.EQ.2) THEN
501         APROV=ABS (FX2-P)
502         IF (APROV.LT. 0.00001D0) THEN
503             ERROR=0.D0
504         ENDIF
505     ENDIF
506 ENDIF
507 IF (IPOS.EQ.3) THEN
508     ERROR=0.D0
509 ENDIF
510 END DO
511 IF (IPOS.EQ.3) THEN
512     PF=AX
513 ELSEIF (AER.LT.BER) THEN
514     PF=AX
515 ELSE
516     PF=AXOLD
517 ENDIF
518 END

```

```

519 C DC
520 C DC =====
521 C DC SOUS-ROUTINE QUI CALCULE LA LOI LOGNORMALE INVERSE CUMULEE
522 C DC =====
523 SUBROUTINE LOGNORMINVIT (PP,AM,AS)
524 CM MB ADD 29.07.2012 : implicit none, integer et real enleves, include 'vaba_param.inc' ajoutee
525 C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
526 !include 'vaba_param.inc'
527 CM MB REM 29.07.2012 IMPLICIT NONE
528 CM MB REM 29.07.2012 INTEGER IPOS
529 CM MB REM 29.07.2012 REAL AM,AS,PP,P,ERROR,AER,BER,AX,AXOLD,AX2,FX,FXOLD,FX2,BM,BS,
530 CM MB REM 29.07.2012 * EROLD
531 ERROR=100.D0
532 P=PP
533 BM= LOG (AM) -0.5d0*LOG (1+(AS**2d0/AM**2d0))
534 BS=(LOG (1d0+(AS**2d0/AM**2d0)))**0.5d0
535 C_DEL KE BM=EXP (AM+0.5d0*AS**2)
536 C_DEL KE BS=(BM**2*(EXP (AS**2)-1d0))**0.5d0
537 C DC VERIFICATION TOUJOURS OBSERVEE QU'IL N'Y A PAS DE VALEUR NEGATIVE OU 0 DANS LA RACINE, BS
538 C DC CAR EST TOUJOURS AS**2>0
539 AX=AM
540 C_DEL KE AX=BM
541 IPOS=0
542 DO WHILE (ERROR.GT. 0.00000001d0)
543 C DC ERROR: PRECISION SUR P
544 C DC LE CALCUL DE AX SE FAIT EN DEUX ETAPES :
545 C DC ETAPE 1: AX=MOYENNE+N*ECART-TYPE
546 C DC AVEC N=1,2,3,... JUSQUE CE QUE AX SOIT BORNE
547 C DC CE QUI SIGNIFIE QUE LORSQUE P SE SITUE BORNE PAR
548 C DC FX (AX) ET FXOLD (AXOLD), ALORS LE PROGRAMME PASSE
549 C DC A L'ETAPE 2
550 C DC LA MOYENNE EST BM ET L'ECART-TYPE EST BS, ELLE EST
551 C DC CALCULEE CI-DESSUS AVEC LAMBDA ET KSI, PARAMETRES
552 C DC DE LA LOI LOGNORMALE

```

```

553 C DC      ETAPE 2: AX EST OBTENU PAR L'EQUATION D'UNE DROITE QUI EST
554 C DC      BORNEE A L'ETAPE 1 ET QUI INTERCEPTE P
555 C DC      SI IPOS=0: PREMIERE ITERATION
556 C DC      SI IPOS=1: ETAPE 1, AVEC P>0.5
557 C DC      SI IPOS=-1: ETAPE 1, AVEC P<0.5
558 C DC      SI IPOS=2: ETAPE 2
559 C DC      SI IPOS=3: C'EST QUE LA SOLUTION EXACTE EST TROUVEE
560          IPOSOLD=IPOS
561          IF (IPOS.NE.2) THEN
562 CADD_DC_2014_01_16_D
563          IF (AS .EQ. 0.D0) THEN
564              WRITE(6,*) 'ATTENTION: FX nul division par
565              +          zero, AS=0'
566          ENDIF
567 CADD_DC_2014_01_16_F
568              FX=0.5d0*(1.d0+ERF((LOG(AX)-BM)/(BS*(2.d0**0.5d0))))
569 CM_DEL_KE
570              FX=0.5d0*(1.d0+ERF((LOG(AX)-AM)/(AS*(2.d0**0.5d0))))
571          ENDIF
572          IF (IPOS.EQ.2) THEN
573 CADD_DC_2014_01_16_D
574              IF (AS .EQ. 0.D0) THEN
575                  WRITE(6,*) 'ATTENTION: FX2 nul division par
576                  +          zero, AS=0'
577              ENDIF
578              IF ((FX-FXOLD) .EQ. 0.D0) THEN
579                  WRITE(6,*) 'ATTENTION: AX2 nul division par
580                  +          zero, FX-FXOLD=0'
581              ENDIF
582 CADD_DC_2014_01_16_F
583              AX2=(AX-AXOLD)*(P-FXOLD)/(FX-FXOLD)+AXOLD
584              FX2=0.5d0*(1.d0+ERF((LOG(AX2)-BM)/(BS*(2.d0**0.5d0))))
585              CM_DEL_KE
586              FX2=0.5d0*(1.d0+ERF((LOG(AX2)-AM)/(AS*(2.d0**0.5d0))))
587
588          IF (P.GT.FX2) THEN
589              FXOLD=FX2
590              AXOLD=AX2
591          ELSEIF (P.LT.FX2) THEN
592              FX=FX2
593              AX=AX2
594          ELSE
595              IPOS=3
596              AX=AX2
597              FX=FX2
598          ENDIF
599          ELSEIF (P.GT.FX) THEN
600              IF (IPOS.EQ.-1) THEN
601                  IPOS=2
602                  AX2=AX
603                  FX2=FX
604                  AX=AXOLD
605                  FX=FXOLD
606                  AXOLD=AX2
607                  FXOLD=FX2
608              ELSE
609                  AXOLD=AX
610                  FXOLD=FX
611                  AX=AX+AS
612                  C_DEL_KE
613                  AX=AX+BS
614                  IPOS=1
615              ENDIF
616          ELSEIF (P.LT.FX) THEN
617              IF (IPOS.EQ.1) THEN
618                  IPOS=2
619                  AXOLD=AX
620                  FXOLD=FX
621                  AX=AX-AS
622                  C_DEL_KE
623                  AX=AX-B

```

```

620      IPOS=-1
621      ENDIF
622      ELSE
623      IPOS=3
624      ENDIF
625      CADD_DC_2014_01_16_D
626      IF (P.EQ. 0.D0) THEN
627      WRITE(6,*) 'ATTENTION: AER et BER nul division par
628      +      zero, P=0'
629      ENDIF

```

```

630      CADD_DC_2014_01_16_F
631      AER=ABS(FX-P)/P
632      BER=ABS(FXOLD-P)/P
633      EROLD=ERROR
634      IF (AER.LT.BER) THEN
635      ERROR=AER
636      ELSE
637      ERROR=BER
638      ENDIF
639      IF (EROLD.EQ.ERROR) THEN
640      IF (IPOSOLD.EQ.2) THEN
641      APROV=ABS(FX2-P)
642      IF (APROV.LT. 0.00001D0) THEN
643      ERROR=0.D0
644      ENDIF
645      ENDIF
646      ENDIF
647      IF (IPOS.EQ.3) THEN
648      ERROR=0.D0
649      ENDIF
650      END DO
651      IF (IPOS.EQ.3) THEN
652      PP=AX
653      ELSEIF (AER.LT.BER) THEN
654      PP=AX
655      ELSE
656      PP=AXOLD
657      ENDIF
658      END
659      END

```

## ANNEXE B ANALYSE DES PATRONS DE FISSURATION DE L'ÉPROUVETTE SOLLICITÉE EN TRACTION

Cette sous-section comprend une analyse des différents patrons de fissurations observés pour les analyses probabilistes.

Premièrement, en analysant les courbes de contraintes en fonction du déplacement pour les éprouvettes possédant des éléments de taille  $25\text{ mm}$  (voir la Figure B.1), il est possible de constater la présence de deux fuseaux distincts de courbes, et ce indépendamment de la valeur des paramètres d'entrée (moyenne et coefficient de variation). Il est par ailleurs important de noter que l'ajout d'un amortissement n'a pas d'influence sur ces deux faisceaux de courbes.

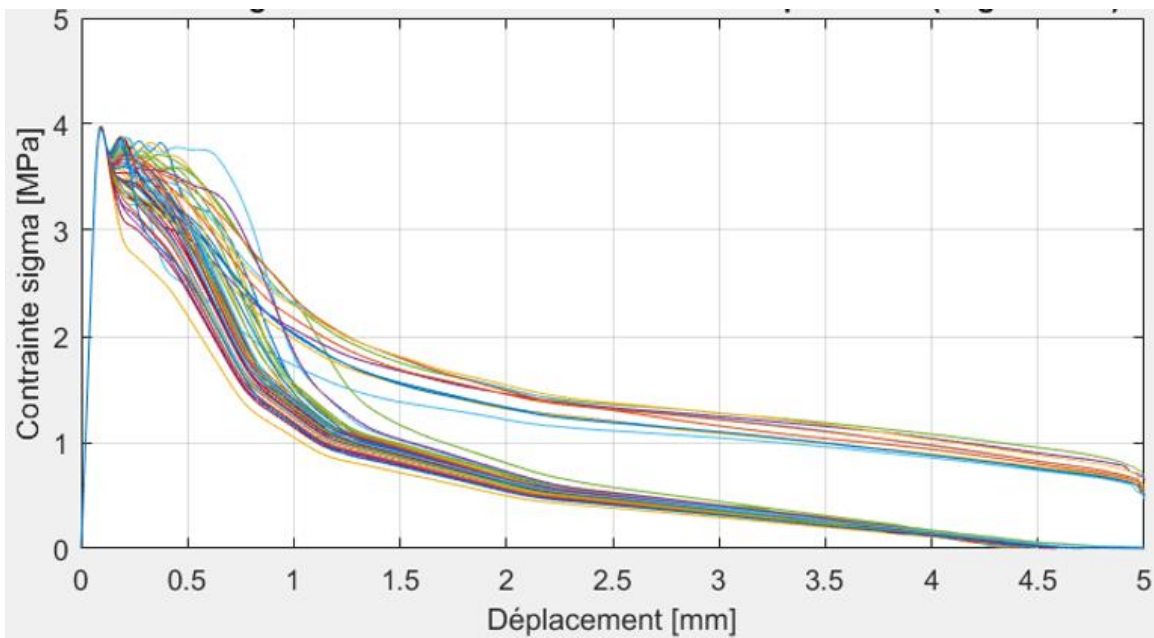


Figure B.1 Courbes de la contrainte en fonction du déplacement pour un os en traction soumis à une loi probabiliste lognormale (maillage de  $25\text{ mm}$ )

Cette distinction nette entre deux faisceaux de courbes est également présente pour les os en traction possédant des éléments de taille  $16\text{ mm}$  (voir la Figure B.2).

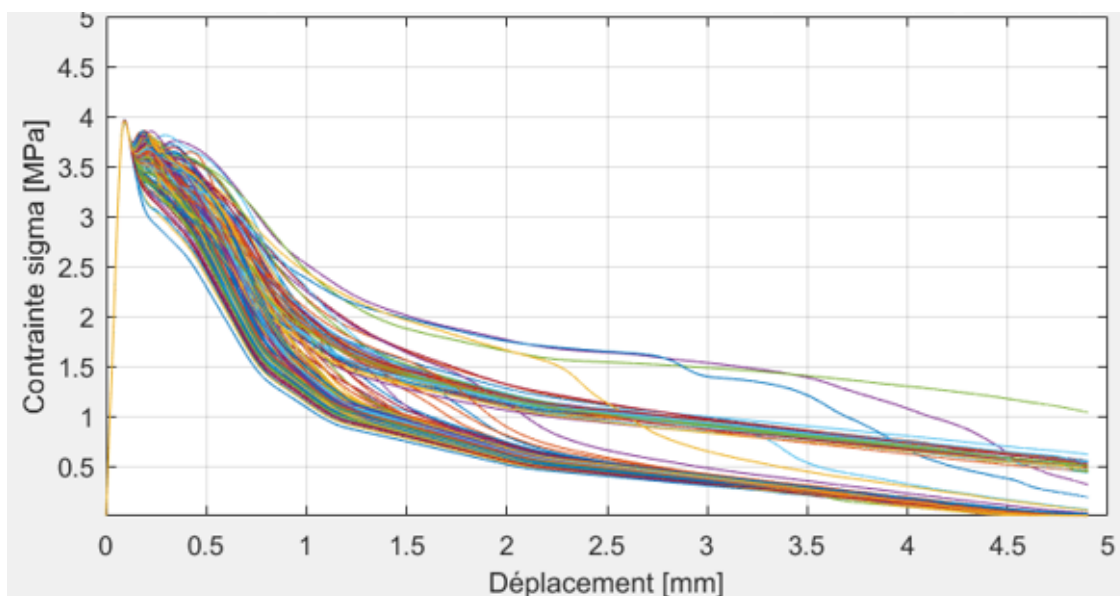


Figure B.2 Courbes de la contrainte en fonction du déplacement pour un os en traction soumis à une loi probabiliste lognormale (maillage de 16 *mm*)

Pour les éléments de taille 10 *mm*, la séparation entre les deux faisceaux de courbes est également présente, comme le montre la Figure B.3.

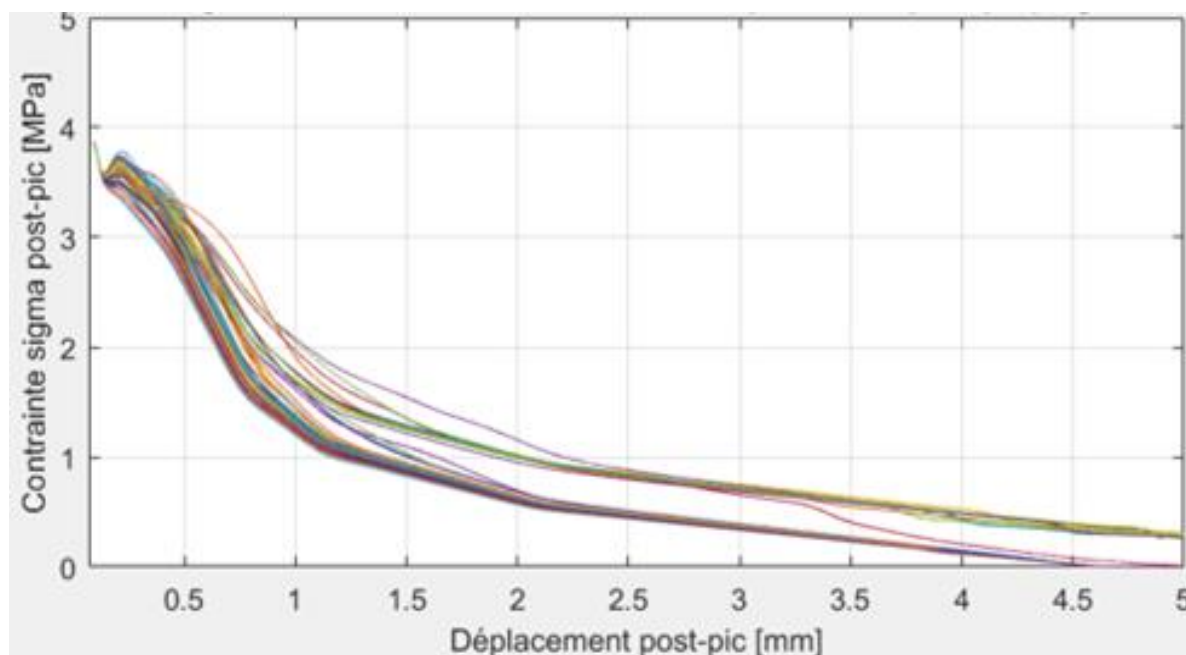


Figure B.3 Courbes de la contrainte en fonction du déplacement pour un os en traction soumis à une loi probabiliste lognormale (maillage de 10 *mm*)



Il est possible de noter que l'écart entre ces deux faisceaux s'amointrit à mesure que la taille du maillage diminue, jusqu'à disparaître totalement pour les éléments finis mesurant 5 *mm*, tel que le montre la Figure B.4.

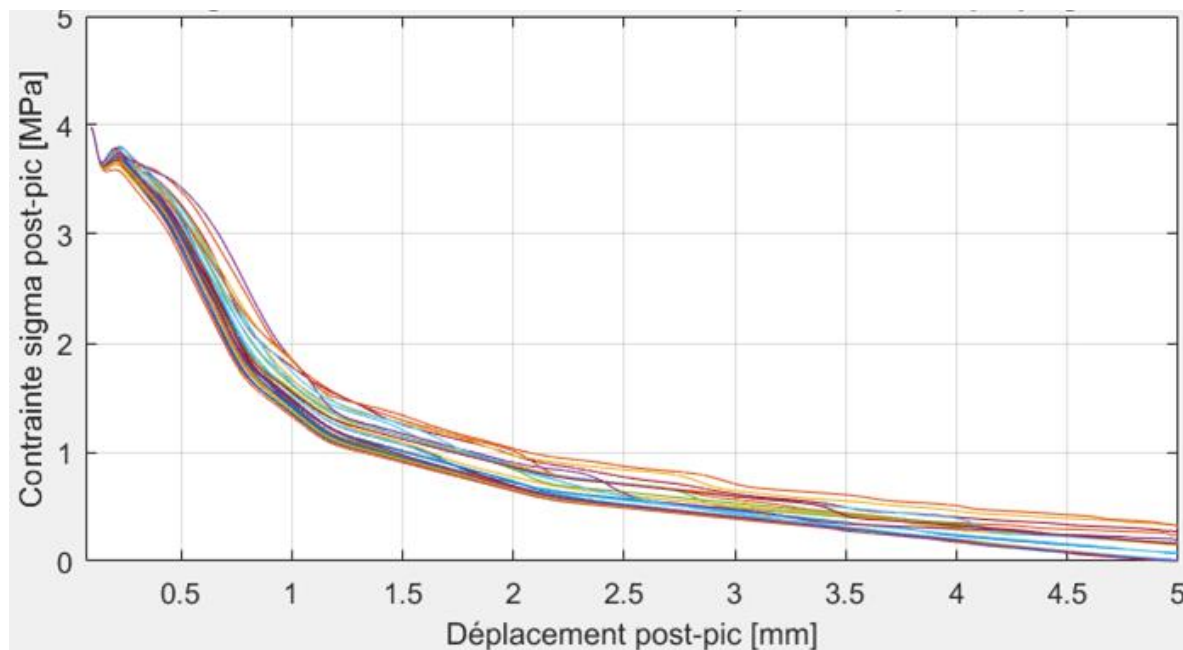
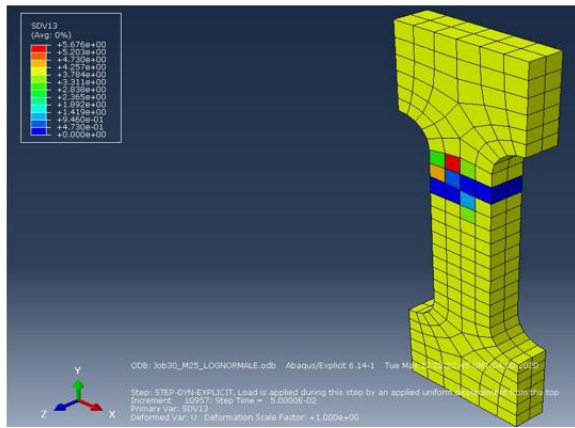


Figure B.4 Courbes de la contrainte en fonction du déplacement pour un os en traction soumis à une loi probabiliste lognormale (maillage de 5 *mm*)

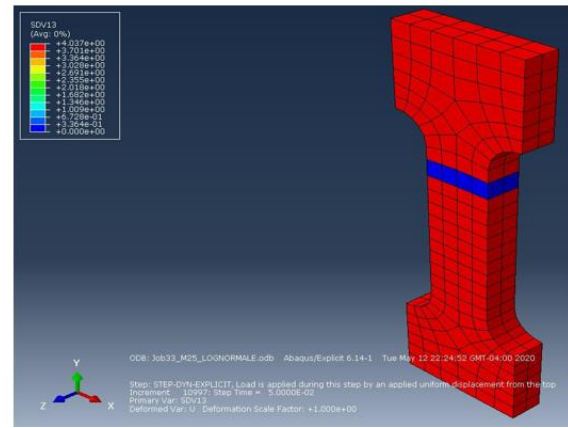
Afin de pouvoir identifier l'origine de ces deux fuseaux de courbes, les patrons de fissurations des différentes éprouvettes ont été examinés. Nous en sommes parvenus aux analyses suivantes :

Le faisceau de courbes supérieur, autrement dit celui qui possède en moyenne les énergies de fissuration les plus élevées correspond à type de fissuration dit « oblique ». En effet, et comme le montrent les Figures B.5 (a) et B.6 (a), les éléments qui fissurent ne se situent pas sur la même rangée mais sur deux lignes différentes.

Le second faisceau, celui qui possèdent les énergies de fissuration les plus faibles correspond à un patron de fissuration dit « droit ». Dans ce cas-ci, les éléments qui fissurent se situent sur la même rangée comme le mettent en avant les Figures B.5 (b) et B.6 (b).



(a)

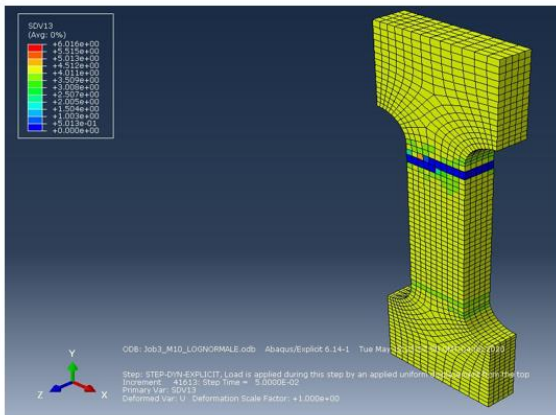


(b)

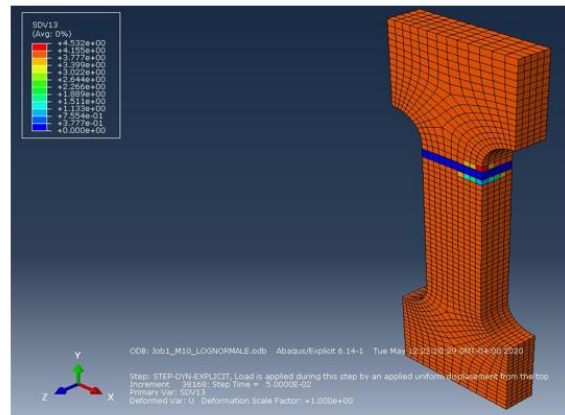
Figure B.5 Patron de fissuration pour un os en traction avec un maillage de 25 mm : (a)

Fissuration oblique (b) Fissuration droite

Seules les captures des éprouvettes avec des éléments de taille 25 et 10 mm sont montrés mais les os avec des éléments finis de taille 16 mm exhibent ces deux types de patrons de fissurations également à l'opposé des éléments de taille 5 mm, qui eux ne fissurent que sur une rangée uniquement. Et c'est pour cette raison qu'il n'existe qu'un seul fuseau de courbes de contrainte-déplacement pour ces éléments.



(a)



(b)

Figure B.6 Patron de fissuration pour un os en traction avec un maillage de 10 mm : (a)

Fissuration oblique (b) Fissuration droite

La Figure B.7 met en exergue les ratios entre la moyenne obtenue en sortie des simulations et la moyenne expérimentale visée en fonction de la taille des éléments utilisés pour mailler l'os. Les patrons de fissuration obliques possèdent un ratio des moyennes plus élevé, ceci concorde parfaitement avec l'allure des courbes de contrainte en fonction de la déformation. En effet, le fuseau des courbes supérieur correspond aux fissures obliques, d'où le ratio de moyennes supérieur. Une analyse analogue peut être faite pour les os possédant une fissure droite, le fuseau des courbes de contrainte-déformation est plus bas, ce qui explique le ratio des moyennes moins élevé.

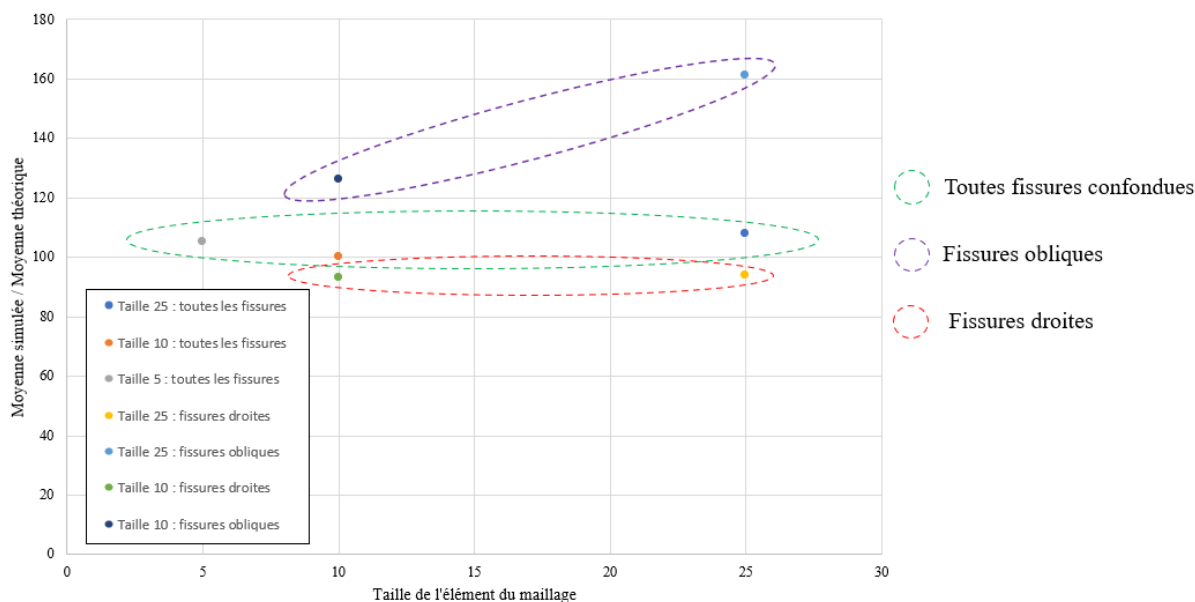


Figure B.7 Ratio entre la moyenne de l'énergie de fissuration calculée et la moyenne expérimentale selon le type de fissuration

La Figure B.8 présente le ratio entre les coefficients de variation obtenus en sortie des simulations et le coefficient de variation expérimental visé en fonction de la taille des éléments de maillage. Il y a deux nuages de points distincts pour chacun des deux types de patrons de fissuration. Par ailleurs, les ratios des coefficients de variation pour ces deux types de fissuration sont moins élevés que lorsqu'on considère l'ensemble des courbes. Ceci semble logique car la dispersion d'un fuseau de courbes à la fois est inférieure à la dispersion de l'ensemble des courbes.

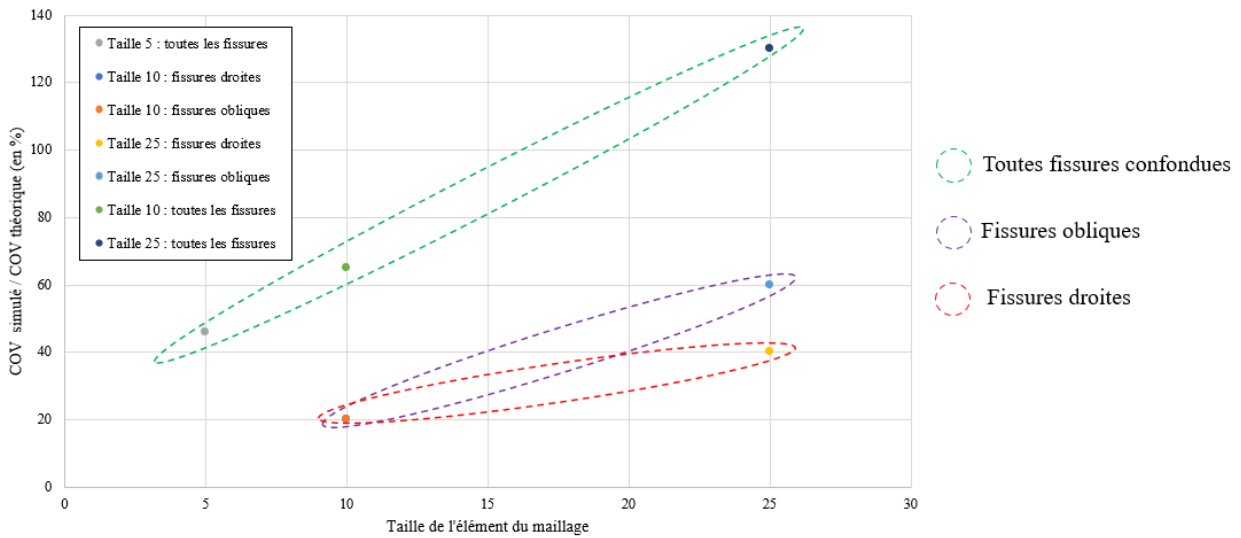


Figure B.8 Ratio entre le coefficient de variation de l'énergie de fissuration calculé et le coefficient de variation expérimental selon le type de fissuration

En outre, il est intéressant de constater qu'étant donné que les courbes de contraintes en fonction du déplacement se scindent en deux fuseaux distincts correspondant à deux types de patrons de fissurations, il est possible de séparer les valeurs des énergies de fissurations en deux populations distinctes également. Ainsi, l'unique distribution lognormale qui est renseignée en entrée donne lieu à une distribution bimodale, chacun des modes est constitué d'une loi lognormale possédant une moyenne et un écart-type ou COV différents des paramètres d'entrée de la loi initialement entrée. La Figure B.9 présente la distribution bimodale de l'énergie de fissuration pour le maillage de taille 25 mm.

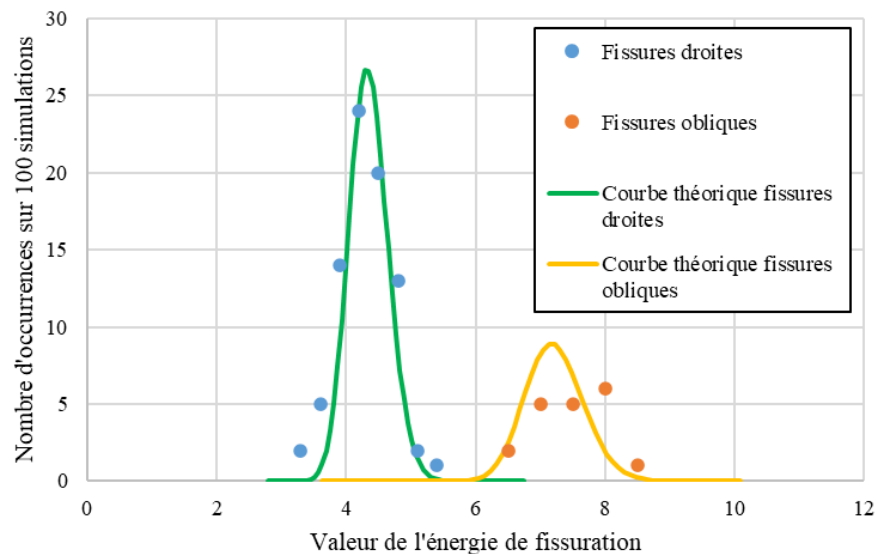


Figure B.9 Distribution bimodale de l'énergie de fissuration (maillage de 25 mm)

La Figure B.10 met également en avant la distribution bimodale pour un maillage de 10 mm. Il est important de noter qu'un resserrement des deux fonctions de densités de probabilités représentatives des deux types de fissurations est observé pour les éléments de 10 mm. Cette observation concorde bien avec les constats faits pour les courbes de contrainte en fonction du déplacement : l'écart entre les deux fuseaux de courbes diminue à mesure que la taille des éléments finis diminue.

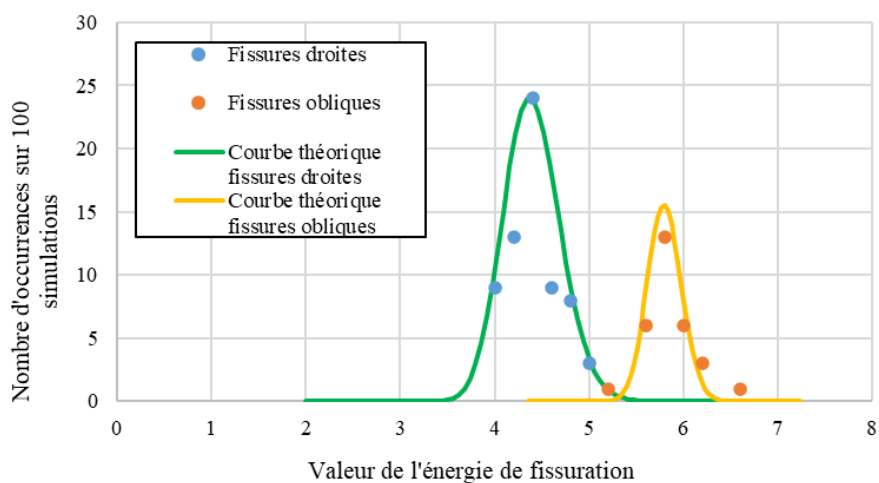


Figure B.10 Distribution bimodale de l'énergie de fissuration (maillage de 10 mm)

Il serait intéressant de réaliser des analyses supplémentaires en ce sens afin de déterminer l'influence de la taille du maillage sur la distribution bimodale obtenue en sortie.

D'autre part, en analysant l'emplacement des fissures sur les os, il a été constaté que la rupture se produisait dans la plupart des cas (90% du temps) au même endroit (au niveau du changement de section). Cette observation n'étant pas en concordance avec le caractère aléatoire des propriétés mécaniques au sein des os instauré grâce à la sous-routine probabiliste, une investigation a été menée sur des spécimens prismatiques. Le choix s'est porté sur des spécimens prismatiques afin d'éliminer l'effet de concentration de contraintes induit par le changement de section qui pourrait rendre déterministe l'emplacement de la fissure. Bien que la forme des éprouvettes ait été modifiée, les conditions aux frontières ainsi que les paramètres de la loi du béton demeurent inchangés par rapport au modèle initial de l'os.

Dans ce qui suit, une procédure a été adoptée afin de vérifier si la fissuration se produit bien à l'endroit du minimum de l'énergie de fissuration. Sur la Figure B.11, une première prospection visuelle est réalisée. Pour cela, sur la Figure B.11 (a), les valeurs des énergies de fissuration sont affichées pour chacun des éléments, néanmoins, il est difficile de trouver l'emplacement du minimum de l'énergie afin de pouvoir le comparer avec l'emplacement de la fissure sur la Figure B.11 (b).

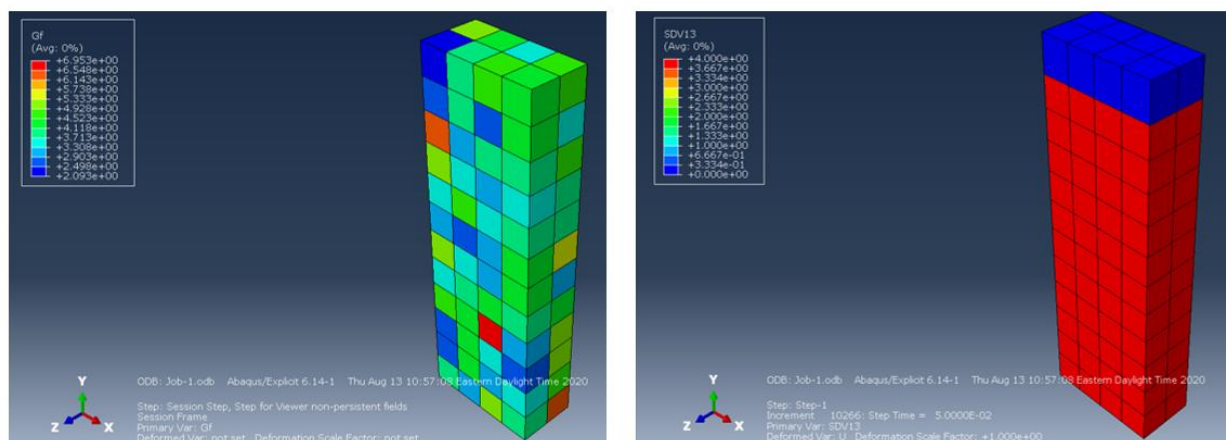


Figure B.11 Prisme sollicité en traction : (a) Valeurs des énergies de fissuration initiales (b) Localisation de la fissure

Pour cette raison, les valeurs moyennes des énergies de fissuration ont été calculées par tranche et les résultats sont présentés dans le Tableau B.1. Le minimum vaut  $3,4 \text{ N/mm}$  et est situé à la deuxième ligne en partant du haut. Pour ce prisme, la fissure se produit au niveau de la première ligne en partant du haut comme le montre la Figure B.11 (b). Ainsi, la fissuration ne se produit pas au niveau du minimum de l'énergie de fissuration.

Tableau B.1 Valeurs de l'énergie de fissuration par tranche pour un prisme soumis à la traction

Numéro de ligne (haut vers le bas)	Moyenne	Coefficient de variation
<b>1</b>	4,1	20
<b>2</b>	3,4	15,8
<b>3</b>	4,2	28
<b>4</b>	4,0	22
<b>5</b>	3,8	19
<b>6</b>	3,9	25
<b>7</b>	4,0	20
<b>8</b>	4,0	12
<b>9</b>	4,4	28
<b>10</b>	4,3	27
<b>11</b>	3,5	21
<b>12</b>	4,2	25

Malgré le fait que la quasi-totalité des analyses présentaient des patrons de fissurations situés sur la ligne supérieure du prisme, certaines simulations se distinguaient par des fissures différentes. Dans ce qui suit, ces patrons ont été analysés afin d'étudier la relation entre l'endroit du prisme où la localisation de la fissure a lieu et l'emplacement de l'énergie de fissuration minimale. Pour ce faire, la démarche présentée plus haut a ainsi été reproduite.

Pour le prisme présenté dans la Figure B.12, la localisation de la fissure a lieu au niveau de la deuxième ligne en partant du haut. Encore une fois, il n'est pas possible visuellement de déceler l'endroit du minimum d'énergie de fissuration. Pour cette raison, les moyennes des énergies ont été calculées par tranche et les résultats sont présentés dans le Tableau B.2.

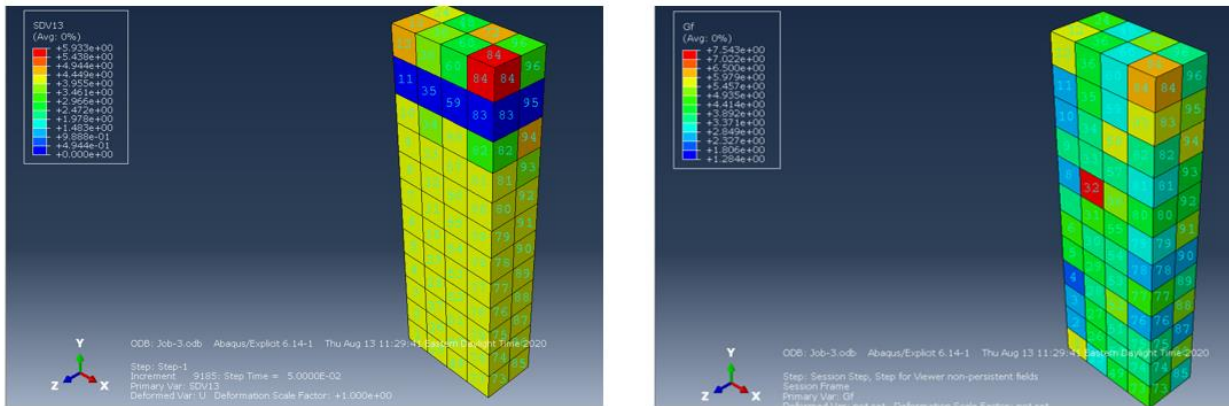


Figure B.12 Prisme sollicité en traction : (a) Localisation de la fissure (b) Valeurs des énergies de fissuration initiales

Le minimum de l'énergie de fissuration par tranche vaut  $3,4 \text{ N/mm}$  et est situé au niveau de la huitième ligne en partant du bas, ce qui ne concorde pas du tout avec la localisation de la fissure retournée à l'issue de l'analyse sur ABAQUS.

Tableau B.2 Valeurs de l'énergie de fissuration par tranche pour un prisme soumis à la traction

Numéro de ligne (haut vers le bas)	Moyenne de l'énergie de fissuration	Coefficient de variation
1	4,2	28%
2	4,2	23%
3	4,3	24%
4	3,6	14%
5	4,7	31%
6	4,4	26%
7	3,6	20%
8	3,4	31%
9	3,7	30%
10	3,5	28%
11	3,9	23%
12	4,0	21%

La Figure B.13 (a) ci-dessous met en avant un autre patron de fissuration (la fissure semble être localisée au niveau de la cinquième ligne en partant du haut). Encore une fois, l'inspection visuelle des énergies de fissurations ne permet pas de repérer l'endroit où est localisé le minimum d'énergie



et il est donc impossible à partir de la Figure B.13 (b) de faire le lien entre la localisation de la fissure et les allocations aléatoires des énergies de fissuration.

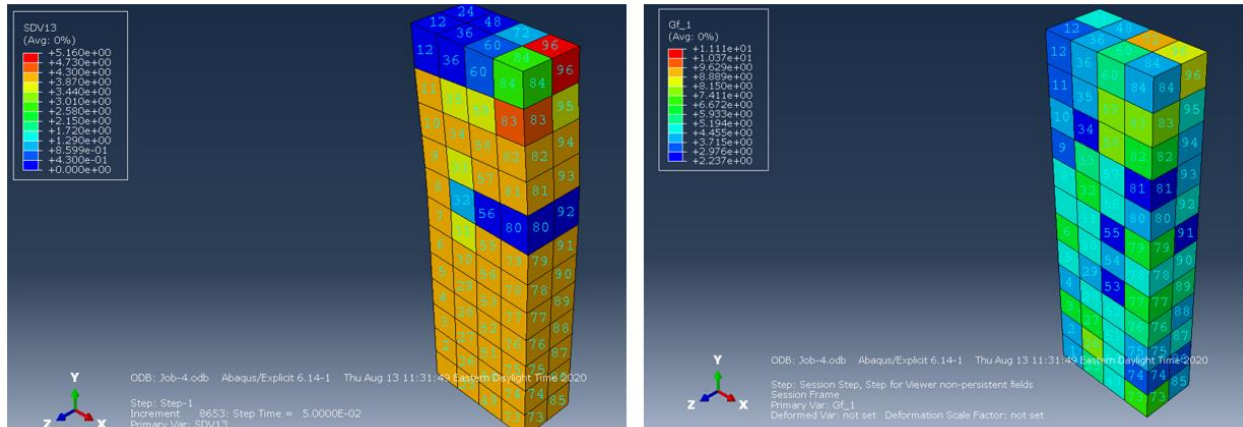


Figure B.13 Prisme sollicité en traction : (a) Valeurs des énergies de fissuration initiales (b) Localisation de la fissure

Pour cette raison, le Tableau B.3 présente les moyennes de l'énergie de fissuration par tranche. Le minimum est situé au niveau de la quatrième ligne en partant du haut, ce qui ne concorde encore une fois pas avec l'emplacement de la macrofissure sur le prisme.

Tableau B.3 Valeurs de l'énergie de fissuration par tranche pour un prisme soumis à la traction

Numéro de ligne (haut vers le bas)	Moyenne de l'énergie de fissuration	Coefficient de variation
1	5,4	38%
2	6	26%
3	4,85	34%
4	4,1	23%
5	5,1	12%
6	4,6	31%
7	5,8	37%
8	5,1	30%
9	4,9	15%
10	5,2	22%
11	5,2	33%
12	5,3	33%

Cette procédure permettant de vérifier si la rupture se produit bien à l'endroit du minimum d'énergie de fissuration a également été suivie pour la seconde version de la sous-routine probabiliste. En effet, il s'agit de la version permettant d'intégrer une variabilité supplémentaire pour les ouvertures de fissures, en plus de celle des contraintes.

À l'identique de la première version de la sous-routine probabiliste, la majorité des prismes présentaient une fissure située au niveau de la première ligne en partant du haut. La Figure B.14 (a) met en exergue les valeurs des énergies de fissuration initialement allouée. Il n'est pas possible de détecter visuellement la localisation de la tranche possédant l'énergie de fissuration la plus basse. C'est pour cela que le Tableau B.4 présente les valeurs des moyennes des énergies de fissuration par tranche.

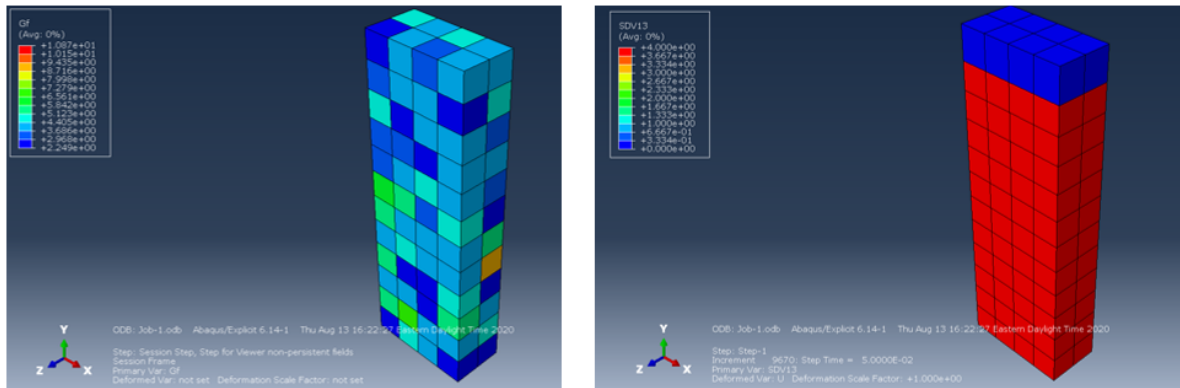


Figure B.14 Prisme sollicité en traction : (a) Valeurs des énergies de fissuration initiales (b) Localisation de la fissure

Le minimum est localisé au niveau de la troisième et quatrième ligne en partant du haut et vaut  $3,5 \text{ N/mm}$ . Encore une fois, l'emplacement de ce minimum ne coïncide pas avec l'endroit où est localisé la macrofissure.

Tableau B.4 Valeurs de l'énergie de fissuration par tranche pour un prisme à la traction

Numéro de ligne (haut vers le bas)	Moyenne de l'énergie de fissuration	Coefficient de variation
1	4,0	14%
2	4,0	25%
3	3,5	23%
4	3,5	16%
5	4,8	49%
6	4,1	32%
7	4,3	16%
8	4,6	34%
9	4,0	31%
10	4,3	17%
11	4,7	27%
12	3,6	28%

Ainsi, d'après les résultats obtenus ci-dessus, il n'existe pas de lien de corrélation entre la localisation des différentes fissures et l'emplacement du minimum d'énergie. L'allocation des énergies de fissuration est aléatoire et suit une distribution lognormale, mais la localisation de la fissure semble être déterministe. Ceci s'explique en réalité par la nature des conditions aux frontières qui sont imposées à l'éprouvette.

En effet, le déplacement imposé à la face supérieure de l'os crée un gradient de déplacement qui engendre un déplacement plus important au niveau de la partie supérieure de l'éprouvette (ou du prisme). Ceci engendre donc une localisation de la fissuration au niveau du changement de section dans la grande majorité des analyses.

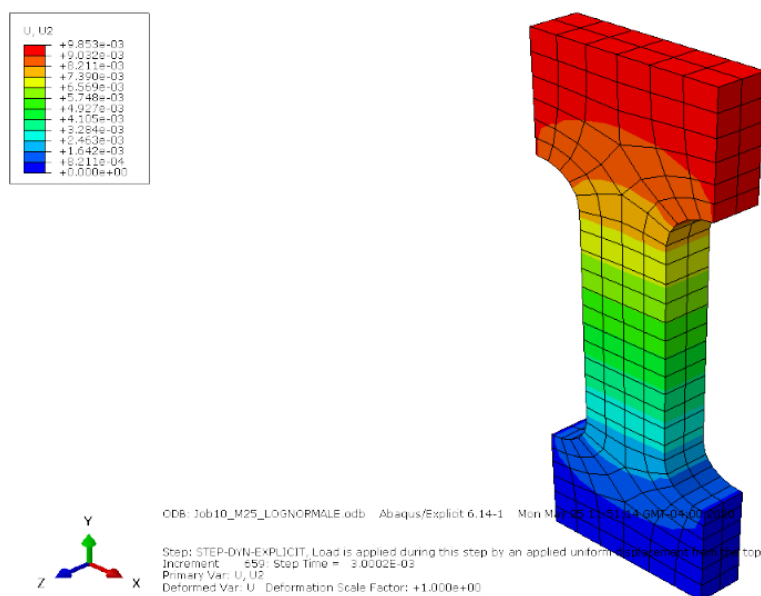


Figure B.15 Valeur du déplacement imposé à l'éprouvette en traction

## ANNEXE C APPROCHE ANALYTIQUE DE MODÉLISATION D'UN PRISME EN TRACTION SOUS MATLAB

Cette section présente le programme préliminaire qui a été développé sur MATLAB dans le but de modéliser des prismes en BRF soumis à un effort de traction. Le prisme modélisé possède des mensurations qui demeureront constantes pour toutes les simulations : une hauteur de 300 *mm*, une largeur de 100 *mm* et une épaisseur de 50 *mm*. Ces dimensions correspondent à celles des os testés au laboratoire de Structures de Polytechnique pour les BFUP mais aussi pour les BRF.

### **C.1 Méthode par tranche**

La première méthode a été nommée méthode « par tranche » car celle-ci se base sur l'hypothèse suivante : la fissuration a lieu uniquement suivant des plans perpendiculaires à l'axe de chargement.

#### **C.1.1 Fonctionnalités**

Cette première approche sur MATLAB, appelée méthode par tranche, permet de réaliser les actions suivantes :

1. subdivision du prisme en éléments de taille définie par l'utilisateur (25 *mm*, 10 *mm* ou encore 5 *mm*);
2. affectation des valeurs d'énergie de fissuration aux différents éléments du maillage suivant la distribution choisie (dans ce cas-ci la loi lognormale) et suivant les paramètres d'entrée de la loi (moyenne et écart-type);
3. calcul du  $\bar{G}_{f, tranche}$  : l'énergie de fissuration moyenne par tranche (voir la figure 3.25).
4. renvoi de la valeur du minimum des  $\bar{G}_{f, tranche}$ , que l'on notera  $\min(\bar{G}_{f, tranche})$ ;
5. répétition des étapes 2, 3 et 4  $N$  fois, un nombre fixé par l'utilisateur, afin d'obtenir une distribution des minimums des énergies de fissuration moyennes par tranche.

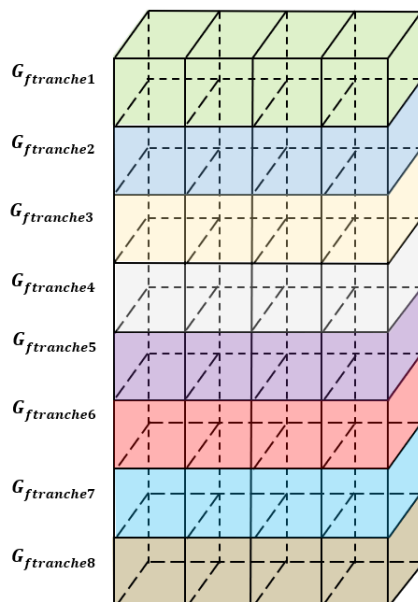


Figure C.1 Méthode de calcul des énergies de fissuration moyennes par tranche sur un échantillon prismatique

### **C.1.2 But**

La nouvelle distribution des énergies de fissuration moyennes minimales par tranche  $\min(\bar{G}_{f, tranche})$  obtenue grâce au code MATLAB possède des toutes nouvelles caractéristiques : une nouvelle moyenne et un nouvel écart-type (ou coefficient de variation) différents des paramètres de la loi d'entrée et éventuellement une nouvelle distribution (différente de la loi lognormale).

Le but de cette analyse est donc de caractériser cette nouvelle variable aléatoire et de trouver le lien de corrélation reliant les paramètres initialement entrés et les paramètres obtenus en sortie du code MATLAB (voir la Figure C.2).

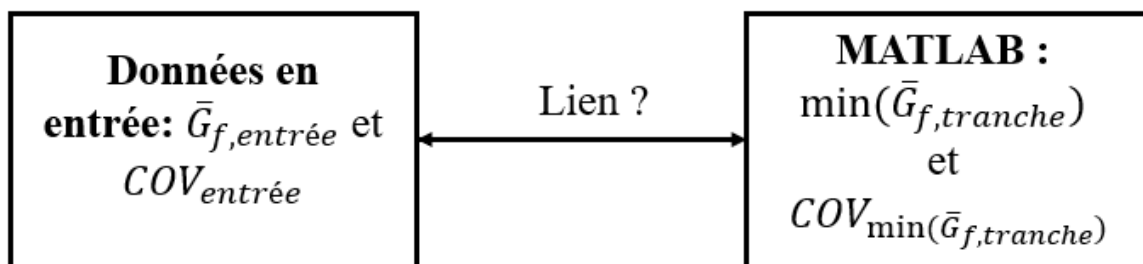


Figure C.2 But du code MATLAB développé

Un second objectif visé par cette analyse est de trouver les valeurs à renseigner en entrée du code (moyenne  $\bar{G}_{f,entrée}$  et coefficient de variation  $COV_{entrée}$ ) afin d'obtenir les valeurs visées par l'utilisateur en sortie, correspondant aux moyennes et coefficients de variation expérimentaux qui ont été obtenus lors de campagnes d'essais de traction directe sur des os par exemple.

Généralement, la rupture pour un prisme en traction survient au niveau de la section la plus critique, et donc par conséquent celle possédant l'énergie de fissuration la moins élevée. Ainsi, l'utilité de ce programme réside dans le fait de pouvoir analyser le lien existant entre le comportement global du matériau (représenté par la distribution en entrée) et le comportement des sections critiques (représenté par la distribution en sortie, puisqu'il s'agit de la distribution des minimums des moyennes des énergies de fissuration par tranche). Cela dit, il est important de rappeler que ce raisonnement repose sur une hypothèse simplificatrice majeure qui est de considérer que la fissuration se produit suivant des plans de rupture parfaitement perpendiculaires à l'axe de chargement.

### **C.1.3 Analyse des résultats obtenus**

Premièrement, la Figure C.3 présente les fonctions de densité de probabilité pour les trois tailles de maillage utilisées (25 mm, 10 mm et 5 mm) alors que le Tableau C.1 donne les valeurs numériques. Pour chacun des 10 000 tirages réalisés, la valeur retenue pour chaque analyse correspond à celle de la tranche de résistance minimale. Une comparaison des densités entrées et obtenues a été réalisé afin de décider si la loi de la distribution obtenue en sortie a été modifiée ou non. Cette dernière ne semble pas avoir changée puisqu'elle concorde bien avec la courbe théorique de la loi lognormale.

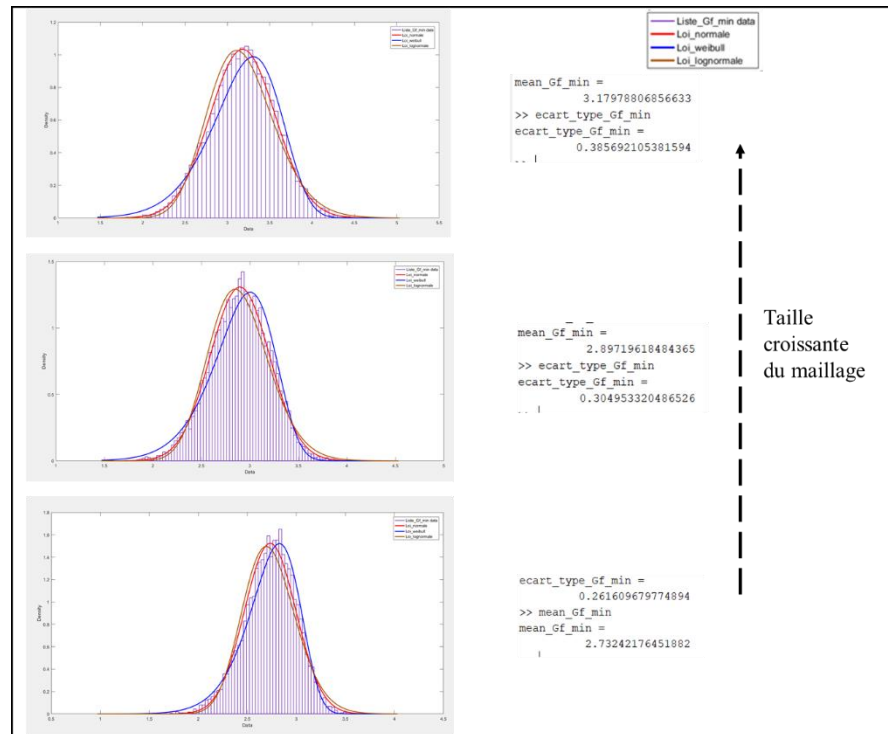


Figure C.3 Fonctions de densité de probabilité des énergies de fissuration minimales renvoyées par le code MATLAB en fonction de la taille du maillage (10 000 itérations)

Tableau C.1 Énergie de fissuration  $G_f$  (N/mm) minimale d'une tranche obtenues grâce au code MATLAB en fonction de la taille de maillage

Taille du maillage	COV en entrée	COV en sortie	Moyenne en entrée	Moyenne en sortie
<b>25</b>	100%	38%	4,6 N/mm	3,18 N/mm
<b>10</b>	100%	28%	4,6 N/mm	2,91 N/mm
<b>5</b>	100%	25%	4,6 N/mm	2,72 N/mm

Comme le montrent la Figure C.3 ainsi que le Tableau C.1, la moyenne en sortie diminue avec la taille du maillage (pour des paramètres d'entrée identiques). Cette observation peut s'expliquer par le fait que diminuer la taille de maillage augmente le nombre d'éléments dans le volume : 96 éléments pour un maillage de 25 mm, 1500 éléments pour une taille de 10 mm et enfin 12 000 éléments pour les plus petits éléments mesurant 5 mm. Ainsi, le nombre de points « échantillonnés



» dans l'intervalle couvert par la fonction de densité de probabilité augmente avec la diminution de la taille des éléments finis. Donc, d'un point de vue purement statistique, l'étendue couverte par les valeurs des énergies de fissuration est plus grande et la probabilité de tomber sur des valeurs extrêmes est ainsi plus importante. Étant donné que l'on récupère à chaque itération le minimum des moyennes d'énergie de fissuration par tranche, la moyenne globale de toutes ces valeurs tend à diminuer lorsqu'on augmente le nombre d'éléments présents dans le prisme.

En outre, la Figure C.3 ainsi que le Tableau C.1 mettent en avant la tendance suivante : le coefficient de variation obtenu en sortie diminue avec la taille du maillage. D'un point de vue purement statistique, le nombre de valeurs d'énergies de fissuration augmente avec la diminution de la taille des éléments, la probabilité de tomber sur des valeurs extrêmes devient plus importante, et étant donné que seules les moyennes minimales par tranche sont gardées, un « resserrement » autour des valeurs minimales se produit, ce qui explique la diminution de la valeur du coefficient de variation.

Néanmoins, ces observations ne sont pas cohérentes du point de vue de la physique. En effet, la moyenne devrait logiquement être indépendante de la taille du maillage alors que le coefficient de variation devrait augmenter lorsque la taille du maillage diminue. En effet, plus la taille d'un élément est importante, plus ce dernier possède des caractéristiques mécaniques représentatives du comportement global du matériau. Un élément de petite taille pourrait au contraire être situé au niveau d'une zone poreuse, ou encore au niveau de l'interface entre un granulat et la matrice cimentaire et par conséquent posséder une faible résistance mécanique. Il pourrait au contraire être situé au niveau d'une fibre idéalement orientée par rapport à la direction d'application de la charge et dans ce cas-ci être doté de propriétés mécaniques remarquables. La moyenne, quant à elle, doit être indépendante de la taille de maillage utilisée puisqu'elle est représentative du comportement global de la structure étudiée.

D'autre part, et comme le Tableau C.1 le montre, la moyenne entrée est supérieure à la moyenne obtenue en sortie, et ce quelle que soit la taille de maillage utilisée.

- Du point de vue de la théorie des probabilités, ceci est tout à fait logique puisque l'on récupère à la sortie le minimum des moyennes des énergies de fissuration calculées par tranche. La valeur moyenne de cette distribution-là est naturellement inférieure à la moyenne introduite en entrée.

- D'un point de vue physique, la tendance observée paraît également cohérente. En effet, il s'agit de la distribution de l'énergie de fissuration des sections critiques qui est obtenue en sortie. En entrée, la distribution fournie représente le comportement global du matériau qui possède naturellement une résistance moyenne supérieure à celle des sections critiques, et donc une moyenne d'énergie de fissuration plus élevée que celle des plans au sein desquels se produit la fissuration.

Le coefficient de variation entré est également supérieur au coefficient de variation obtenu en sortie.

- Du point de vue purement statistique, cette observation s'explique par le fait qu'un moyennage par tranche est réalisée dans un premier temps, ce qui a tendance à diminuer la dispersion et donc le coefficient de variation. Dans un second temps, on ne garde que les valeurs minimales de ces moyennes ce qui resserre davantage la distribution obtenue en sortie et diminue d'autant plus le coefficient de variation de cette dernière.
- Physiquement, cette observation est cohérente avec le fait que la variabilité que l'on retrouve au sein du matériau dans sa globalité est supérieure à la variabilité au sein des sections critiques sujettes à la fissuration uniquement.

Par ailleurs, l'influence du nombre d'itérations ou expériences sur la valeur de la moyenne et du coefficient de variation obtenus en sortie a été étudiée. Des tests ont ainsi été effectués pour un nombre d'expériences égal à 10, 100, 10 000, 100 000 et 1 000 000. Pour des valeurs d'entrée identiques, les valeurs des paramètres en sortie demeurent constantes pour un nombre de simulations supérieur à 100. Il suffit donc d'avoir des distributions avec 100 valeurs de  $\min(\bar{G}_{f, tranche})$  puisqu'au-delà de ce seuil, il y a convergence des valeurs des moyennes et coefficients de variation obtenus en sortie.

D'un autre côté, nous avons étudié l'influence de l'augmentation de la valeur du coefficient de variation entré  $COV_{entrée}$ , tout en gardant la moyenne fixe, sur les valeurs de la moyenne et du coefficient de variation de la distribution en sortie ( $\min(\bar{G}_{f, tranche})$ ).

- L'augmentation du  $COV_{entrée}$  a pour effet la diminution de la moyenne de la distribution obtenue en sortie. Ceci est cohérent puisque l'augmentation de la valeur du coefficient de variation a pour effet d'accroître la dispersion autour de la moyenne et donc « d'éloigner »

les extremums. Les valeurs minimales sont d'autant plus petites, ce qui a pour impact de diminuer la moyenne de la distribution en sortie.

- L'accroissement du  $COV_{entrée}$  a également pour effet d'augmenter la valeur du  $COV$  obtenu en sortie. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que la dispersion des valeurs des énergies de fissuration est plus grande, et donc que la dispersion des valeurs des minimums des valeurs moyennes des énergies de fissuration par tranche soit plus grande par conséquent.

Pour finir, l'impact de l'augmentation de la moyenne entrée  $\bar{G}_{f,entrée}$  (tout en gardant  $COV_{entrée}$  constant) a été étudié. Cela a eu pour effet :

- l'augmentation de la valeur du coefficient de variation de la distribution en sortie.
- l'accroissement de la valeur de la moyenne de la distribution en sortie : en effet, l'augmentation de la moyenne entrée entraîne une translation de la courbe de densité de probabilité vers la droite, ce qui a pour effet de décaler la « queue » de celle-ci vers la droite également et donc d'augmenter la valeur des minimums d'énergie de fissuration.

Par ailleurs, le fait d'augmenter la valeur de l'écart-type donné en entrée tout en gardant la moyenne en entrée fixe a pour impact de diminuer la valeur de la moyenne en sortie, quant à l'écart-type en sortie, son évolution n'est pas monotone : celui-ci tend à croître au départ, jusqu'à une valeur qui est fonction de la taille des éléments puis décroît.

Le fait d'augmenter la moyenne introduite en entrée avec un écart-type demeurant fixe a pour impact d'augmenter la valeur de la moyenne et de l'écart-type obtenus en sortie.

#### **C.1.4 Recommandations**

Supposons que l'on se base sur une campagne expérimentale de traction directe sur des prismes. Celle-ci permet d'obtenir une distribution expérimentale des énergies de fissuration ayant les caractéristiques suivantes : celle-ci suit une distribution lognormale et possède une moyenne  $\bar{G}_{f,exp}$  et un coefficient de variation  $COV_{exp}$ .

Afin que la distribution obtenue en sortie du code MATLAB puisse avoir les mêmes caractéristiques que la distribution expérimentale (moyenne et coefficient de variation en sortie égaux à la moyenne et coefficient de variation en entrée), et en se basant sur les analyses et explications de la section précédente, il faudrait que :

- la moyenne donnée en entrée soit supérieure à  $\bar{G}_{f,exp}$ .
- le coefficient de variation entré soit également supérieur à la valeur de  $COV_{exp}$ .
- le coefficient de variation spécifié en entrée soit d'autant plus grand que les éléments du maillage sont de petite taille, et ce afin d'assurer une cohérence d'un point de vue physique.

### **C.1.5 Problèmes et limites rencontrés**

Un des buts initiaux du code était de trouver les valeurs à donner en entrée afin d'obtenir des valeurs précises en sortie qui correspondraient aux données d'une campagne expérimentale que l'on vise à reproduire.

Ainsi, un algorithme secondaire a été codé afin d'effectuer une itération sur les valeurs entrées afin de les corriger automatiquement dans le but de parvenir aux valeurs visées en sortie. Comme la moyenne et le coefficient de variation semblent interdépendants, le code permettait d'intégrer ces deux paramètres à la fois (voir la Figure C.4). Malheureusement, les valeurs ne convergeaient pas et il a été impossible d'obtenir les valeurs à spécifier en entrée. Il a donc été difficile d'identifier une loi pour relier la moyenne en entrée et la moyenne en sortie et le coefficient de variation en entrée et en sortie.

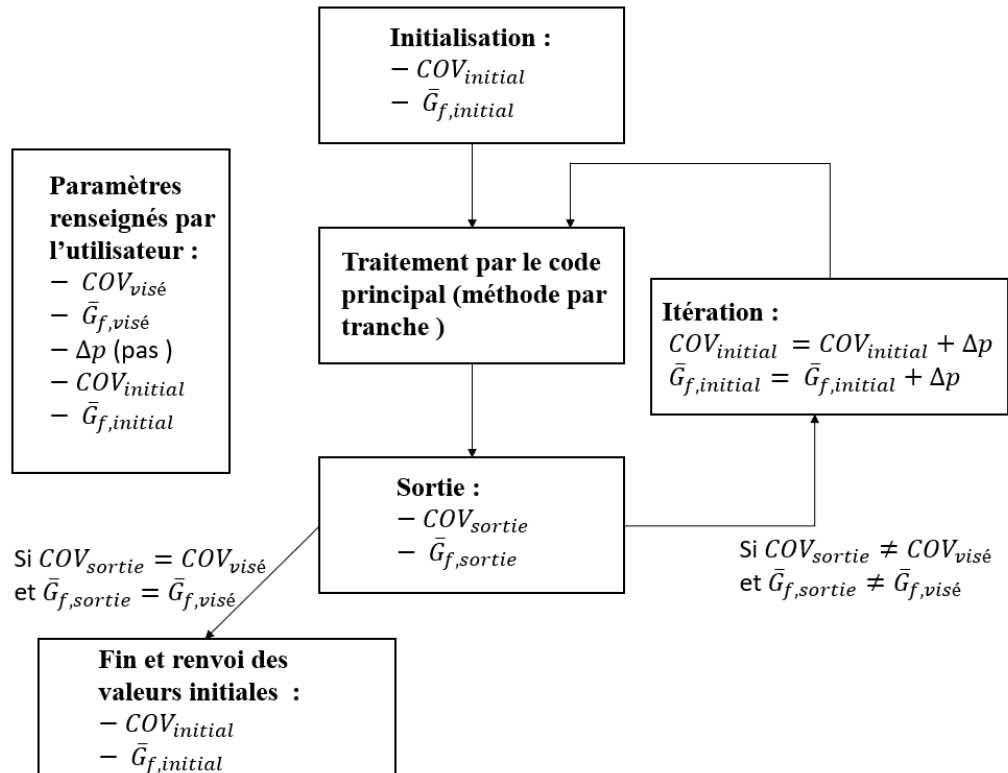


Figure C.4 Fonctionnement de l'algorithme itératif permettant d'obtenir les paramètres d'entrée

Une piste d'amélioration possible pour cet algorithme itératif serait de ne pas faire subir à la moyenne et au coefficient de variation la même évolution, à savoir la même valeur de pas  $\Delta p$  mais plutôt de trouver un pas positif ou négatif qui dépendent de la valeur obtenue en sortie à chaque nouvelle itération.

## C.2 Méthode du patron de fissuration donnant l'énergie minimale

Cette section présente une variante du code expliqué dans le paragraphe précédent. En effet, dans la partie précédente, la fissuration avait toujours lieu suivant un plan parfaitement perpendiculaire à l'axe de chargement. Cette nouvelle méthode permet de considérer un patron de rupture permettant de minimiser l'énergie de fissuration.

### C.2.1 Fonctionnalités

Les différentes étapes réalisées par ce nouveau code peuvent être résumée de la manière suivante.

1. Le prisme est subdivisé en éléments de taille définie par l'utilisateur (25 mm, 10 mm ou encore 5 mm).

2. Affectation des valeurs d'énergie de fissuration aux différents éléments du maillage suivant la distribution choisie (dans ce cas-ci la loi lognormale) et suivant les paramètres d'entrée de la loi (moyenne et écart-type).
3. La première colonne située à l'extrême gauche (composée des éléments 1 à 8 dans la Figure C.5) est parcourue et l'élément possédant l'énergie de fissuration la plus faible est sélectionné. Il est supposé que la fissuration est amorcée au niveau de cet élément, dans le cas où il existe plusieurs rangées d'éléments dans la profondeur du prisme, tous ceux qui sont alignés avec l'élément qui fissure vont également se fissurer.
4. Les énergies des éléments adjacents à l'élément fissuré sont examinées et celui parmi ces trois possédant l'énergie la moins élevée est considéré comme étant fissuré (dans la Figure C.5, l'élément 3 fissure dans la première colonne, les éléments adjacents 10, 11 et 12 sont examinés et c'est l'élément 12 qui a l'énergie la moins élevée qui est sujet à une rupture par conséquent).
5. L'étape 2 est ensuite réitérée pour chaque colonne.
6. Une fois l'ensemble des colonnes parcourues, la moyenne de l'énergie de fissuration de ce patron est calculée (moyenne sur tous les éléments ayant fissurés), elle sera notée  $\bar{G}_{f,patron,min}$ .
7. Les étapes 2, 3 et 4, 5 et 6 sont réitérées  $N$  fois (ce nombre est fixé par l'utilisateur) afin d'obtenir la distribution des minimums des énergies de fissuration moyennes.

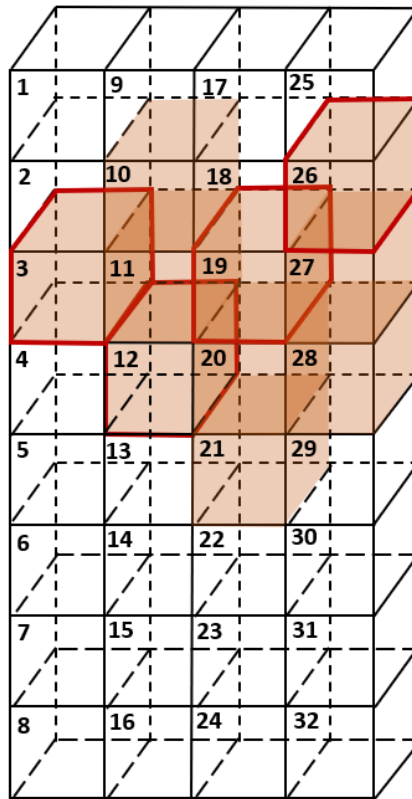


Figure C.5 Méthode du patron de fissuration à énergie minimale sur un échantillon prismatique

### **C.2.2 But**

Cette nouvelle approche possède trois buts distincts.

- Premièrement, et comme pour la première approche par tranche, l'un des objectifs est de caractériser cette nouvelle variable aléatoire retournée par le programme et de trouver un lien de corrélation entre les paramètres initialement entrés et les paramètres obtenus en sortie du code MATLAB.
- Un second objectif visé par le code est de trouver les valeurs à donner en entrée du code (moyenne  $\bar{G}_{f,entrée}$  et coefficient de variation  $COV_{entrée}$ ) afin d'obtenir les valeurs visées par l'utilisateur en sortie, correspondant aux moyennes et coefficients de variation expérimentaux qui ont été obtenus lors de campagnes d'essais de traction directe sur des os par exemple.

- Le troisième et dernier objectif est d'analyser si le type de patron de fissuration choisi (plan parfaitement perpendiculaire à l'axe de chargement versus chemin minimisant l'énergie de fissuration) a un impact sur les résultats obtenus.

### C.2.3 Analyse des résultats obtenus

Les tendances des résultats obtenus sont similaires à celles de la méthode par tranche tel qu'illustré sur la Figure C.6 et selon les valeurs numériques montrées au Tableau C.2.

En analysant la Figure C.6, il est possible d'en déduire que la loi probabiliste n'a pas été modifiée. En effet, la densité de probabilité obtenue en sortie concorde bien avec celle de la courbe théorique de la loi lognormale.

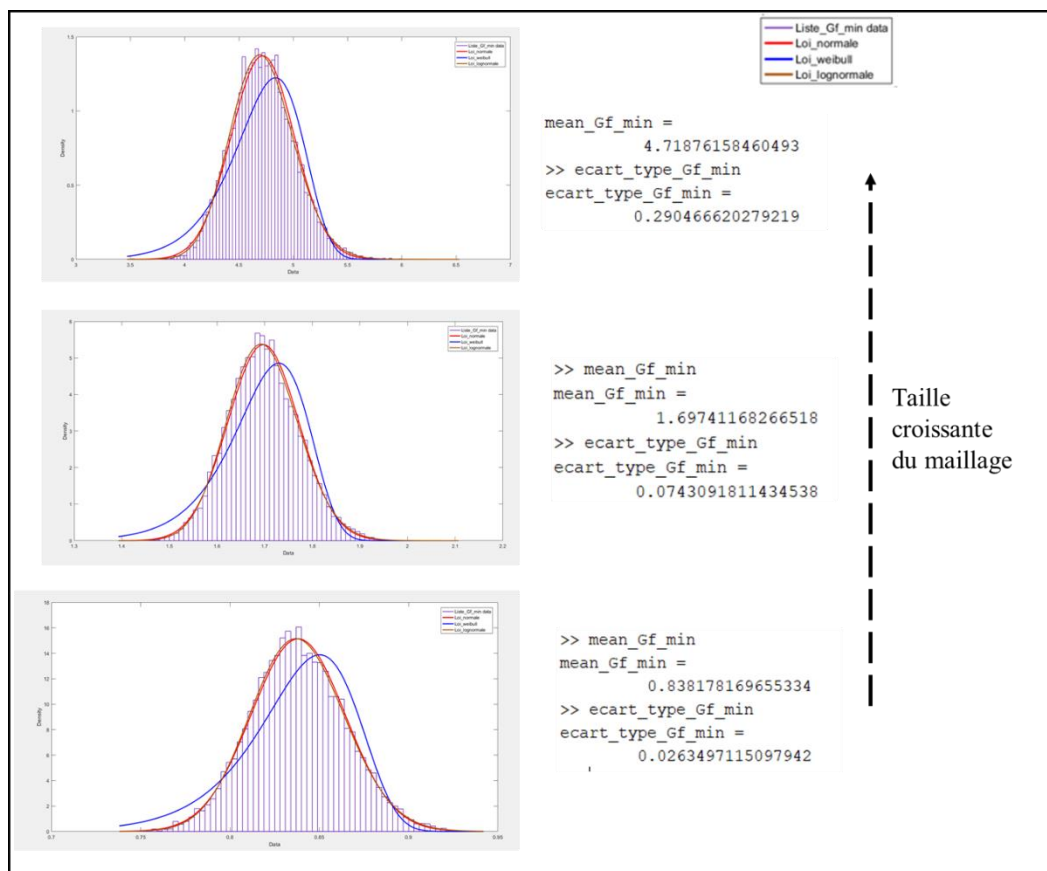


Figure C.6 Fonctions de densité de probabilité des énergies de fissuration minimales renvoyées par le code MATLAB en fonction de la taille du maillage

La Figure C.6 ainsi que le Tableau C.2 permettent de mettre en exergue les tendances suivantes, les explications de ces observations étant identiques à celles de la méthode par tranche présentée



précédemment : la moyenne et le coefficient de variation en sortie diminuent lorsque la taille du maillage diminue (pour des paramètres d'entrée identiques).

Tableau C.2 Énergie de fissuration  $G_F$  (N/mm) minimale d'une tranche obtenues grâce au code MATLAB en fonction de la taille de maillage

Taille du maillage	COV en entrée	COV en sortie	Moyenne en entrée	Moyenne en sortie
<b>25</b>	100%	28%	4,6 N/mm	4,72 N/mm
<b>10</b>	100%	7%	4,6 N/mm	1,70 N/mm
<b>5</b>	100%	2%	4,6 N/mm	0,83 N/mm

D'autre part, et comme le Tableau C.2 le montre, la moyenne et le coefficient de variation entrés sont supérieurs à la moyenne et au coefficient de variation obtenus en sortie, et ce quelle que soit la taille de maillage utilisée (consulter la section 3.2.1.3 pour davantage de détails).

Par ailleurs, l'influence du nombre d'itérations ou expériences sur la valeur de la moyenne et du coefficient de variation obtenus en sortie a été étudiée. Des tests ont ainsi été effectués pour un nombre d'expériences égal à 10, 100, 10 000, 100 000 et 1 000 000. Pour des valeurs d'entrée identiques, les valeurs des paramètres en sortie demeurent constantes pour un nombre de simulations supérieur à 1000. Il suffit donc d'avoir des distributions avec 1000 valeurs de  $\bar{G}_{f,patron,min}$  puisqu'au-delà de ce seuil, il y a convergence des valeurs des moyennes et coefficients de variation obtenus en sortie.

D'un autre côté, nous avons étudié l'influence de l'augmentation de la valeur du coefficient de variation entré  $COV_{entrée}$ , tout en gardant la moyenne fixe, sur les valeurs de la moyenne et du coefficient de variation de la distribution en sortie ( $\bar{G}_{f,patron,min}$ ).

- L'augmentation du  $COV_{entrée}$  a pour effet la diminution de la moyenne de la distribution obtenue en sortie. Ceci est cohérent puisque l'augmentation de la valeur du coefficient de variation a pour effet d'accroître la dispersion autour de la moyenne et donc « d'éloigner » les extremums. Les valeurs minimales sont d'autant plus petites, ce qui a pour impact de diminuer la moyenne de la distribution en sortie.

- L'accroissement du  $COV_{entrée}$  a également pour effet d'augmenter la valeur du  $COV$  obtenu en sortie. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que la dispersion des valeurs des énergies de fissuration est plus grande, et donc que la dispersion des valeurs des minimums des valeurs moyennes des énergies de fissuration par tranche soit plus grande par conséquent.

Pour finir, l'impact de l'augmentation de la moyenne entrée  $\bar{G}_{f,entrée}$  (tout en gardant  $COV_{entrée}$  constant) a été étudié. Cela a eu pour effet :

- l'augmentation de la valeur du coefficient de variation de la distribution en sortie.
- l'accroissement de la valeur de la moyenne de la distribution en sortie. En effet, l'augmentation de la moyenne entrée entraîne une translation de la courbe de densité de probabilité vers la droite, ce qui a pour effet de décaler la « queue » de celle-ci vers la droite également et donc d'augmenter la valeur des minimums d'énergie de fissuration.

Par ailleurs, le fait d'augmenter la valeur de l'écart-type donné en entrée tout en gardant la moyenne en entrée fixe a pour impact de diminuer la valeur de la moyenne en sortie, quant à l'écart-type en sortie, son évolution n'est pas monotone (celui-ci tend à croître au départ, jusqu'à une valeur qui est fonction de la taille des éléments puis décroît).

Le fait d'augmenter la moyenne fournie en entrée avec un écart-type demeurant fixe a pour impact d'augmenter la valeur de la moyenne et de l'écart-type obtenus en sortie.

#### **C.2.4 Comparaison entre les deux approches de modélisation**

Dans cette sous-section, une comparaison entre les deux approches de modélisation qui ont été présentées est réalisée.

Tout d'abord, d'après la Figure C.7 et la Figure C.8, les constats suivants peuvent être faits pour les deux approches de modélisation :

- la moyenne varie linéairement en fonction de la taille de maillage, lorsque le coefficient de variation est maintenu constant.
- le coefficient de variation varie de manière linéaire également en fonction de la taille de maillage lorsque la moyenne est maintenue fixe.

Un modèle pourrait ainsi être développé pour établir un lien de corrélation entre la moyenne et le  $COV$  en entrée et en sortie qui dépendrait de la taille de maillage et de la section de l'éprouvette.

Par ailleurs, il est important de noter que la Figure C.7 a été obtenue en gardant le COV fixe (égal à 20%). De même, la moyenne (égale à la moyenne de l'énergie de fissuration obtenue expérimentalement) demeure fixe pour la Figure C.8.

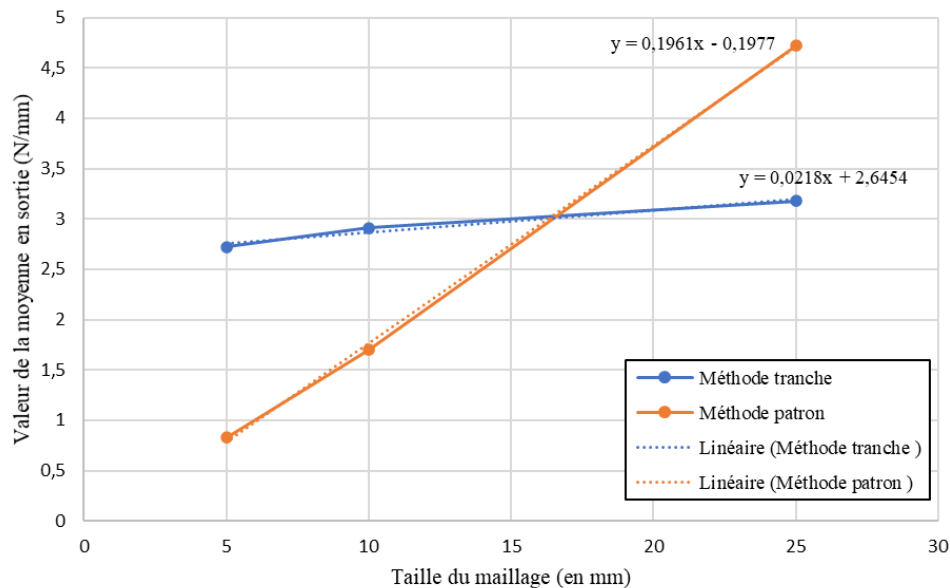


Figure C.7 Valeur de la moyenne obtenue en sortie en fonction de la taille des éléments pour les deux approches de modélisation

D'après la Figure C.7, les moyennes obtenues en sortie pour le modèle du patron de fissuration sont inférieures à celles retournées par la méthode par tranche pour des tailles d'éléments inférieures à 16 mm environ. Cette observation pourrait s'expliquer par le fait que la méthode du patron de fissuration accorde plus de « liberté » en raison de la petite taille des éléments et donc du plus grand choix de chemins possiblement empruntables. De cette façon, cette méthode permet de réellement sélectionner le chemin permettant de minimiser l'énergie de fissuration. Au-delà de 16 mm, les éléments deviennent trop grands, et la méthode du patron devient moins efficace que la méthode par tranche en termes de sélection des énergies minimales.

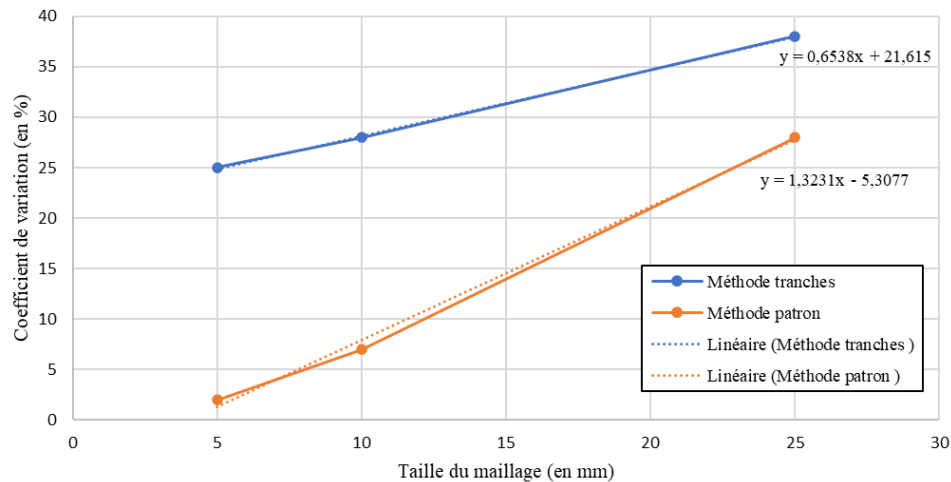


Figure C.8 Valeur du coefficient de variation obtenu en sortie en fonction de la taille des éléments pour les deux approches de modélisation

Enfin, les coefficients de variation renvoyés par la méthode du patron de fissuration sont inférieurs à ceux obtenus grâce à la méthode par tranche. Cette tendance pourrait éventuellement s'expliquer par le fait que la méthode du patron confère plus de liberté dans le choix du patron (jusqu'à une certaine taille d'éléments, comme mentionné plus haut), les chemins ainsi sélectionnés par cette approche permettent l'obtention des énergies les plus basses, de telle sorte à minimiser la dispersion entre ces dernières.

En conclusion, les deux approches ne concordent pas avec la réalité. Ces dernières sont donc à améliorer, notamment en suivant les recommandations stipulées dans le paragraphe C.1.4.