

Titre: Modélisation numérique des écoulements diphasiques dispersés
Title:

Auteur: Sarra Zoghlami
Author:

Date: 2020

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Zoghlami, S. (2020). Modélisation numérique des écoulements diphasiques dispersés [Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/5531/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/5531/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Stéphane Étienne, Alberto Teysedou, & Cédric Béguin
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES
DISPERSÉS**

SARRA ZOGHLAMI

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
génie mécanique

Décembre 2020

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES
DISPERSÉS**

présentée par **Sarra ZOGHLAMI**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

André GARON, président

Stéphane ÉTIENNE, membre et directeur de recherche

Alberto TEYSSEDOU, membre et codirecteur de recherche

Cédric BÉGUIN, membre et codirecteur de recherche

David VIDAL, membre

Guillaume RICCIARDI, membre externe

DÉDICACE

*À mes parents Nouredine & Amel,
pour votre soutien et amour inconditionnel,
À mes enfants Adam & Amin,
mes rayons de Soleil,*

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherche, Stéphane Étienne, Cédric Béguin et Alberto Teyssedou de m'avoir offert la possibilité de travailler sur ce sujet de recherche. Je tiens à leur exprimer ma gratitude pour leurs disponibilités quotidiennes et leurs écoutes. J'aimerais également leur souligner ma reconnaissance pour leurs qualités personnelles, leur optimisme et leur support qui m'ont permis de surmonter les défis et les différentes épreuves rencontrées durant mon doctorat. Je remercie également David Scott et Laurent Bornard de General Electric pour nos discussions intéressantes ainsi que leurs conseils avisés.

Je présente mes remerciements à André Garon, David Vidal et Guillaume Ricciardi pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour le temps qu'ils ont consacré pour s'acquitter des tâches qui en découlent tout comme Robert Legros pour le rôle de représentant du directeur des études supérieures.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes parents Amel et Nouredine pour avoir pavé la voie à mon épanouissement et réussite, pour tous les efforts et les sacrifices qu'ils ont fait pour que j'arrive à réaliser et aller jusqu'au bout de mes ambitions. Merci pour leur patience, encouragement et amour inconditionnel. Ils sont ma source de force et d'inspiration.

Je tiens à présenter ma gratitude à mon mari Mohamed pour son encouragement, sa présence, son implication et son soutien. Je remercie mes deux rayons de soleil Adam et Amin pour la générosité de leur amour et leurs beaux sourires, ma source quotidienne d'énergie. Leur présence dans ma vie est inestimable. Je tiens à remercier mes deux frères Wassim et Anas pour leurs écoutes, leurs supports et leurs encouragements.

Je remercie également mes amis, mes collègues et toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail et qui ont permis par leur soutien et leurs conseils de le mener à bien.

À cette fin de mon parcours scolaire, j'aimerais présenter une reconnaissance à tous les enseignants et les professeurs, du primaire jusqu'à l'université, qui ont contribué à ma formation académique et à mon développement personnel.

J'aimerais, enfin, remercier la Chaire de Recherche Industrielle CRSNG-General Electric en Écoulement Diphasique et le programme de Génie par la simulation de Polytechnique Montréal ainsi que le Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique Tunisien pour leurs supports financiers.

RÉSUMÉ

Les écoulements diphasiques à bulles sont largement rencontrés dans de nombreuses applications industrielles, à l'instar du transfert de masse (turbines aéranes), du transfert de chaleur (générateurs de vapeur), des réactions chimiques (ozonation dans le traitement des eaux usées). La mécanique des fluides numérique est un outil essentiel pour concevoir des systèmes industriels efficaces. La compréhension de la dynamique des nuages de bulles est essentielle pour développer des outils numériques précis. Cependant, en raison de la complexité des configurations diphasiques, de nombreux phénomènes diphasiques restent totalement ou partiellement non résolus. En particulier, la modélisation de la physique des phénomènes à l'origine du mélange des bulles dans une matrice liquide reste un défi majeur. L'une des faiblesses de la plupart des modèles existants d'écoulement diphasique est due au traitement incomplet de la dispersion des bulles. En effet, la dispersion peut découler de nombreux phénomènes complexes, tels que la turbulence, la distribution de pression locale et les interactions entre bulles.

Cette thèse porte sur l'étude des effets de la masse ajoutée sur la dispersion des bulles. La contribution de la force de masse ajoutée dans la dispersion est quantifiée par le développement de la force de Meshchersky. Cette dernière est une conséquence naturelle de la variation de la masse ajoutée. Nous avons comparé nos calculs numériques aux données expérimentales obtenues pour une colonne à bulles. Nous avons observé l'effet dispersif de la force de Meshchersky dans les deux directions horizontale et transversale. De plus, nous avons constaté que la force de Meshchersky contribue à l'arrangement de bulles sur des plans horizontaux parallèles. Ce comportement a été observé dans des applications industrielles et des études expérimentales. Par contre la physique responsable de ce mécanisme n'est pas encore complètement identifiée.

Nous avons constaté que pour l'approche Euler-Euler, l'effet de masse ajoutée sur la dispersion des bulles est encore incomplet en raison de la perte d'informations provenant du processus du calcul de la moyenne des équations de conservation. En effet, pour bien saisir la dispersion dans la description eulérienne, nous devons prendre en compte la distribution locale des bulles. Cela est possible en incluant l'effet du gradient de taux de vide dans la modélisation de la masse ajoutée. Dans ce contexte, nous proposons un modèle complet de masse ajoutée, qui inclut la distribution locale des bulles via le gradient de taux de vide. Le gradient de taux de vide permet de prendre en compte l'asymétrie du nuage de bulles autour d'une bulle de référence. Cependant, ce modèle ne peut représenter que des nuages de bulles réguliers. Cette méthodologie permet une prise en compte plus cohérente des effets

de masse ajoutée ainsi que des forces de Meshchersky, qui devraient être incluses dans les modèles hydrodynamiques des écoulements diphasiques dispersés. L'approche proposée peut être mise en œuvre dans un modèle Euler-Euler destiné à prendre en compte la dispersion des bulles induite par l'effet de la masse ajoutée.

ABSTRACT

Bubbly two-phase flows are largely encountered in many industrial applications, amongst others for mass transfer (aerating turbines), heat transfer (steam generators) and chemical reaction (ozonation in wastewater treatment). Computational fluid dynamics is an essential tool to design efficient industrial systems. The understanding of the mechanics of the bubble cloud dynamics is essential in order to develop accurate numerical tools. However, due to the complexity of its configurations, many complex two-phase flow phenomena have not been explained or are partially resolved questions. In particular, modeling the physics of the phenomena driving the mixing of bubbles in a liquid matrix is still a major challenge. One of the weaknesses of most existing two-phase flow models are due to the incomplete handling of bubble dispersion mechanisms. In fact, dispersion can be driven by numerous complex phenomena, such as turbulence, local pressure conditions and bubble-bubble interactions.

This thesis is devoted to the study of the effect of added mass on the dispersion of bubbles. In the Euler-Lagrange modeling, the contribution of the added mass force in bubbly flow dispersion is quantified by the development of a new force. This force is a consequence of the added mass variation. We called it the Meshchersky force. For the Euler-Euler model, we compared our numerical calculations to experimental data from a bubble column. We observed the dispersive effect of the Meshchersky force on both horizontal and transverse directions. In addition, we have found that the Meshchersky force is one of the mechanisms responsible for horizontal bubble clustering. This type of behavior has been encountered in several industrial applications and experimental studies. Nevertheless, the physics responsible for it is not yet fully understood.

However, the added mass effect on the void fraction spreading is still incomplete because of the loss of information from the averaging process of conservation equations. Indeed, in order to properly capture the dispersion in the Eulerian description, we must take into account the distribution of the bubbles. This is possible by including the effect of the void fraction gradient in the added mass modeling. In this context, we propose a complete added mass model, which includes local bubble configuration via the void fraction gradient. The void fraction gradient allows us to account for the asymmetry of the bubble cloud around a single central bubble. However, this model can only represent regular bubble clouds. This methodology results in a more consistent consideration of the added mass effects as well as the Meshchersky force, that should be included in hydrodynamic two-phase flow models. The proposed approach can be implemented in an Euler-Euler model intended to consider the dispersion of bubbles caused by the effect of added mass.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvi
LISTE DES ANNEXES	xviii
1 INTRODUCTION	1
1.1 Mise en contexte : Turbine hydroélectrique aérée	1
1.2 Problématique : Modélisation de la masse ajoutée	2
1.3 Objectifs de ce travail de recherche	4
1.4 Organisation de la thèse	5
1.5 Communications scientifiques	6
2 REVUE DE LITTÉRATURE	8
2.1 Les écoulements diphasiques	8
2.1.1 Définitions	8
2.2 Les écoulements à bulles	11
2.3 L'approche Euler-Euler	14
2.3.1 Les équations de conservation moyennées	15
2.3.2 La modélisation de la turbulence diphasique	16
2.3.3 Les forces interfaciales	17
2.4 L'approche Euler-Lagrange	23
2.4.1 Les équations de mouvement des bulles	24
2.5 Les corrélations des coefficients de traînée	26
2.5.1 Le coefficient de traînée pour une bulle isolée	26
2.5.2 Le coefficient de traînée pour un nuage de bulles	31
2.6 Les corrélations de masse ajoutée	33
2.6.1 Les corrélations de la masse ajoutée en description lagrangienne	34
2.6.2 Les corrélations de la masse ajoutée en description eulérienne	38

2.7	Interactions hydrodynamiques entre les bulles	41
2.8	Conclusion	44
3	LES EFFETS DE LA FLUCTUATION DE MASSE AJOUTÉE SUR LA DISPERSION DE NUAGES DE BULLES	46
3.1	Le développement théorique de la force de Meshchersky	47
3.1.1	Le développement de la force de masse ajoutée	49
3.1.2	Le développement de la force de Meshchersky	52
3.1.3	L'analyse théorique de l'effet de la force de Meshchersky	54
3.2	L'analyse numérique de l'effet de la force de Meshchersky	56
3.2.1	Le choix du modèle de la force de la masse ajoutée	57
3.2.2	Le développement du tenseur de la masse ajoutée	57
3.2.3	Le choix du modèle de la force de traînée	62
3.2.4	Le modèle d'impact entre les bulles	63
3.2.5	La méthode de résolution numérique	63
3.2.6	Les résultats numériques	70
3.2.7	La discussion des résultats	88
3.3	Conclusion	89
4	LA FORCE DE MESHCHERSKY EN MODÉLISATION EULER-EULER	91
4.1	La force de Meshchersky en description eulérienne	91
4.1.1	Le calcul de la force de Meshchersky	92
4.2	La simulation numérique d'une colonne à bulle	93
4.3	Le modèle physique	93
4.3.1	Les schémas de résolution numérique	94
4.3.2	Montage expérimental	100
4.3.3	Conditions aux frontières	101
4.4	L'Analyse de l'effet de la force de Meshchersky pour une colonne à bulle . . .	108
4.5	Conclusion	111

5	LES EFFETS DE LA CONFIGURATION DU NUAGE DE BULLES SUR LA MASSE AJOUTÉE EN MODÉLISATION EULER-EULER	113
5.1	La résolution de l'écoulement potentiel autour d'un nuage de bulles	114
5.2	Le calcul du coefficient de masse ajoutée dans un nuage	115
5.3	L'étude de convergence sur le nombre de polynômes associés de Legendre . .	117
5.4	La validation de la méthode numérique	118
5.5	Étude de sensibilité de la masse ajoutée au nombre total de bulles dans le nuage	121
5.6	Masse ajoutée pour des nuages de distributions aléatoires	124
5.7	Le calcul du taux de vide	126
5.8	La modélisation de la masse ajoutée	129
5.8.1	Le cas de nuages de bulles réguliers	129
5.8.2	Le cas de nuages de bulles irréguliers	131
5.8.3	Formulation générale	138
5.8.4	Discussion	143
5.9	Conclusion	144
6	CONCLUSION	146
6.1	Synthèse des travaux	146
6.2	Limitations des modèles	148
6.3	Recommandations et améliorations futures	149
6.3.1	Pour les applications industrielles	149
6.3.2	Pour la communauté scientifique	150
	RÉFÉRENCES	152
	ANNEXES	160

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Corrélations de C_D recommandés par Clift et al. [1] pour une sphère rigide avec $w = \log_{10} \text{Re}$	30
Tableau 3.1	Corrélations de coefficients de traînée	62
Tableau 3.2	Les propriétés physiques caractéristiques de l'écoulement au temps initial de la simulation de référence.	67
Tableau 4.1	Propriétés physiques utilisées dans la simulation.	101
Tableau 4.2	Dimensions du maillage.	104
Tableau 4.3	Effet de pas du temps pour la maille 1.	105
Tableau 4.4	Effet de pas du temps pour la maille 2.	105
Tableau 4.5	Effet de pas du temps pour la maille 3.	105
Tableau 5.1	La sensibilité de calcul du coefficient de masse ajoutée à l_{max} . . .	118
Tableau 5.2	La comparaison des corrélations de la masse ajoutée pour des configurations de nuages réguliers	135
Tableau 5.3	Écart quadratique moyen pour le cas des nuages de distribution aléatoire.	141
Tableau B.1	Coefficients de distribution du taux de vide	165

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Sources d’approvisionnement énergétique d’électricité et répartition des émissions de gaz à effet de serre (GES) au Québec (tirée de [2, 3])	1
Figure 2.1	Configurations possibles d’écoulement diphasique ascendant pour une conduite circulaire et verticale [4].	12
Figure 2.2	Vue en coupe de la turbine Francis de la centrale Norris montrant les méthodes d’aération [5]. (La figure a été publiée avec la permission de l’auteur correspondant Patrick March)	13
Figure 2.3	Cartes de configurations de Oshinowa et Chales [6].	14
Figure 2.4	La comparaison des coefficients de traînée	31
Figure 2.5	Illustrations des paramètres géométriques des équations (2.87) et (2.88)	37
Figure 2.6	La comparaison entre les corrélations du coefficient de masse ajoutée dans la description lagrangienne pour deux bulles (a) qui accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central, (b) qui accélèrent selon la direction perpendiculaire à leur axe central	39
Figure 2.7	Corrélations de la valeur du coefficient de masse ajoutée en fonction du taux de vide, en description eulérienne	40
Figure 2.8	Trajectoires de deux bulles dans un fluide newtonien. le rayon des bulles est égal à 2.8 mm, $E\ddot{o} = 0.9$ et $Re=1.3$ [7]. (la figure a été publiée avec la permission de l’auteur correspondant Roberto Zenit)	43
Figure 3.1	Systèmes de coordonnées pour les deux bulles sphériques.	56
Figure 3.2	La comparaison des coefficients de masse ajoutée obtenus par l’équation (3.30) et le calcul direct par la résolution de l’écoulement potentiel autour de 27 bulles de rayon $a = 1$ mm, distribuées selon une configuration hexagonale.	60
Figure 3.3	La comparaison des coefficients de masse ajoutée obtenus par l’équation (3.30) et le calcul direct par la résolution de l’écoulement potentiel autour de 7 bulles de rayon $a = 1$ mm, placées selon (a) l’horizontal (b) la vertical.	61
Figure 3.4	Impact bulle-bulle.	63
Figure 3.5	La durée de calcul en fonction du choix de pas de temps initial pour $Reltol = 10^{-8}$ et $Abstol = 10^{-8}$	68
Figure 3.6	La durée de calcul en fonction de la tolérance de contrôle d’erreur.	69
Figure 3.7	Les RMS en fonction de la tolérance de contrôle d’erreur.	69

Figure 3.8	La comparaison de la vitesse d'ascension terminale d'une bulle de rayon $a = 1$ mm à la solution analytique et aux mesures expérimentales de Talaia [8].	72
Figure 3.9	(a) Les trajectoires et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles en ascension côte à côte ($\theta = 0^\circ$), de rayon $a = 1$ mm, séparées initialement de $\Delta x_0 = 2.5a$, avec une vitesse initiale $U_{0x} = 0.01$ m/s, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	75
Figure 3.10	(a) La distance de séparation selon l'axe des x et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles en ascension côte à côte ($\theta = 0^\circ$), de rayon $a = 1$ mm, séparées initialement de $\Delta x_0 = 2.5a$, avec une vitesse initiale $U_{0x} = 0.02$ m/s, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	76
Figure 3.11	(a) La distance de séparation selon l'axe des z et (b) les composantes verticales des vitesses de deux bulles en ascension l'une derrière l'autre ($\theta = 90^\circ$), de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos et séparées d'une distance $\Delta z_0 = 4a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	77
Figure 3.12	(a) Les trajectoires et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 10^\circ$ et séparées d'une distance égale à $2.5a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	80
Figure 3.13	(a) Les trajectoires (b) l'orientation relative de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 25^\circ$ et séparées d'une distance égale à $2.5a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	81
Figure 3.14	(a) Les trajectoires (b) l'orientation relative de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 60^\circ$ et séparées d'une distance égale à $4a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.	82
Figure 3.15	Historique du déplacement horizontal de la bulle à l'extrémité pour divers arrangements de bulles en 2D.	83
Figure 3.16	Vues de dessus d'une configuration tridimensionnelle d'un nuage de bulles avec 125 bulles à $t = 0$ s, $t = 1$ s et $t = 2$ s.	84
Figure 3.17	Nuage aléatoire de 20 bulles (a) à $t = 0$ s (b) à $t = 30$ s	85
Figure 3.18	L'histogramme des positions dans la direction verticale pour un nuage aléatoire de 20 bulles.	86

Figure 3.19	Vue de dessus d'un nuage aléatoire de 20 bulles à $t = 0$ s et $t = 30$ s.	86
Figure 3.20	Nuage aléatoire de 80 bulles (a) à $t = 0$ s (b) à $t = 30$ s.	87
Figure 3.21	L'histogramme des positions dans la direction verticale pour un nuage aléatoire de 80 bulles.	88
Figure 4.1	L'illustration d'un exemple de construction du Volume de Contrôle pour un maillage 2D dans CFX (tirée et traduit de [9]).	95
Figure 4.2	La position des points d'intégration pour un élément de maille (tirée et traduite de [9]).	96
Figure 4.3	La géométrie de la colonne à bulles de Deen [10]. (la figure a été publiée avec la permission de l'auteur correspondant Niels Deen) .	100
Figure 4.4	Configuration du champ de vitesses du liquide et du taux de vide à $t = 5$ s. (a) Zone d'air libre (b) Dégazage (c) Condition de pression fixe.	103
Figure 4.5	Une vue de devant du maillage de la colonne à bulle. (a) grossier (maille 1), (b) moyen (maille 2) et (c) fin (maille 3).	104
Figure 4.6	L'effet de la taille des mailles sur le calcul des vitesses moyennées dans le temps dans du (a) gaz et (b) du liquide à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s.	107
Figure 4.7	L'effet de la force de Meshchersky sur le calcul du taux de vide moyenné dans le temps à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s. . . .	109
Figure 4.8	L'effet de la force de Meshchersky sur le calcul des vitesses moyennées dans le temps dans du (a) gaz et (b) du liquide à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s.	110
Figure 5.1	La variation de l'écart relatif Er des coefficients de masse ajoutée en fonction du nombre de polynômes de Legendre associés l_{max} . .	118
Figure 5.2	La comparaison entre les résultats numériques et la solution analytique de Van Wijngaarden [11] pour le calcul de la variation de la masse ajoutée en fonction de la distance de séparation pour les cas deux bulles qui accélèrent (a) côte à côte et (b) l'une derrière l'autre.	120
Figure 5.3	La variation du coefficient de masse ajoutée en fonction du nombre total des bulles dans le nuage (a) Nuage 1 (b) Nuage 2.	122
Figure 5.4	L'écart relatif entre deux simulations successives.	123

Figure 5.5	Coefficients de masse ajoutée pour des nuages de bulles de distributions aléatoires.	125
Figure 5.6	Taux de vide d'une bulle au bord du volume de contrôle.	127
Figure 5.7	(a) Taux de vide et (b) Distribution de la norme du gradient du taux de vide d'une bulle de rayon $a = \frac{R_c}{5}$ dans un volume de contrôle de rayon R_c en fonction de la position radiale pour différentes fonctions de pondération.	128
Figure 5.8	Configurations régulières de nuage de bulles.	129
Figure 5.9	Variation des coefficients de masse ajoutée pour les nuages de configurations symétriques.	131
Figure 5.10	Transformation de la configuration cubique simple.	132
Figure 5.11	Variation du coefficient de masse ajoutée pour les nuages de bulles accélérant dans la direction parallèle au gradient du taux de vide. (a) Cubique centrée (b) Cubique faces centrées.	134
Figure 5.12	Variation du coefficient de masse ajoutée pour les nuages de bulles accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide. (a) Cubique centrée (b) Cubique faces centrées.	136
Figure 5.13	Les coefficients de masse ajoutée numérique par rapport à la corrélation. (a) Orthogonale au gradient du taux de vide (b) Parallèle au gradient du taux de vide.	137
Figure 5.14	Composantes du vecteur accélération relative \vec{a}_r	138
Figure 5.15	La variation des coefficients de masse ajoutée pour les nuages de bulles qui s'accélèrent dans une direction formant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport au gradient du taux de vide. (a) C_{mz} (b) C_{mx}	140
Figure 5.16	La comparaison entre les résultats numériques et la corrélation (5.37) du coefficient de masse ajoutée pour les nuages aléatoires accélérant dans la direction z	142
Figure 5.17	Une approximation linéaire de la fonction du taux de vide, donnée par l'équation (5.19) pour $n = 2$	143
Figure B.1	Fonction de pondération de taux de vide.	162

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

A	Section de passage	(m ²)
a	Rayon de bulle	(m)
Bo	Nombre de Bond	
C_D	Coefficient de traînée	
C_m	Coefficient de masse ajoutée	
$\overline{C_m}$	Tenseur de masse ajoutée	
C_M	Coefficient de Meshchersky	
C_L	Coefficient de portance	
D	Longueur caractéristique	(m)
d	Diamètre	(m)
E	Énergie totale par unité de masse	(J/kg)
Eö	Nombre d'Eötvös	
F	Force	(N)
Fr	Nombre de Froude	
g	Accélération gravitationnelle	(m/s ²)
I	Matrice identité	
j	Vitesse superficielle	(m/s)
m	Masse	(kg)
M	Transfert de la quantité de mouvement	(N)
Mo	Nombre de Morton	
P	Pression	(bar)
Q	Débit volumique	(m ³ /s)
R_c	Rayon de Cylindre	(m)
Re	Nombre de Reynolds	
S	Taux de glissement	
S_E	Source d'énergie par unité de volume, par unité de temps	(J/m ³ s)
S_k	Surface de la $k^{\text{ème}}$ bulle	(m)
Sc	Nombre de Schmid	
t	temps	(s)
T	Température	(K)
U	Vitesse	(m/s)
V	Volume	(m ³)
We	Nombre de Weber	

W	Débit massique	(kg/s)
x	Position	(m)
Φ	Potentiel de vitesse	(m ² /s)
ϕ	Fonction potentielle	(m)
Γ	Taux local de production de masse par unité de volume	(kg/m ³ s)
κ	Énergie cinétique turbulente	m ² /s
ϵ	Dissipation turbulente	(J/kg)
ε	Taux de vide	
α	Taux de vide local	
β	Titre volumique	
μ	Viscosité dynamique	(Pa.s)
θ	Angle	(rad)
ρ	Masse volumique	(kg/m ³)
σ	Tension superficielle	(N/m)
ϕ	Fonction potentielle	(m ² /t)
ν	Viscosité cinématique	(m ² /s)
\mathcal{D}	Coefficient de diffusion massique	(m ² /s)
$\overline{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses	(kg/ms ²)
$\overline{\overline{\tau}}^{\text{Re}}$	Tenseur des tensions de Reynolds	(kg/ms ²)
λ	Coefficient de conduction thermique	(W/mK)
χ	Rapport d'aspect d'une bulle	

Indices

b	Bulle
c	Critique
D	Traînée
f	Flottabilité
g	Gaz
k	phase
ℓ	Liquide
L	Portance
m	Masse ajoutée
M	Meshchersky
r	Relative
w	Paroi

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Opérateurs mathématiques	160
Annexe B	Le calcul du taux de vide	161

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Mise en contexte : Turbine hydroélectrique aériée

L'énergie hydroélectrique représente une filière de production d'énergie qui constitue la principale source d'énergie électrique au Québec ainsi qu'au Canada. Actuellement, l'énergie hydraulique fournit 60% de l'énergie électrique au Canada et 16.6% de l'énergie électrique mondiale [12]. La figure 1.1 montre les filières de production d'électricité au Québec au cours de l'année 2017 et la répartition des émissions de gaz à effet de serre pour différents secteurs d'activité en 2016. On constate que l'hydroélectricité fournit 94% de l'approvisionnement d'énergie électrique totale du Québec [2]. De plus, sa contribution de la production de l'électricité aux émissions des gaz à effet de serre est très faible (0.3%) par rapport aux autres secteurs d'activité [3].

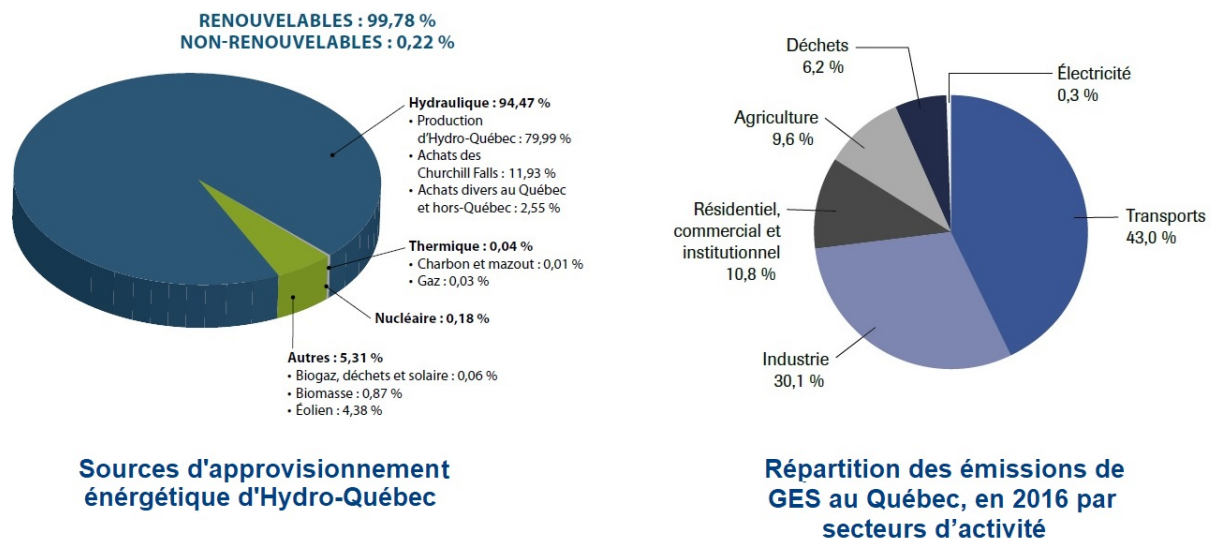


Figure 1.1 Sources d'approvisionnement énergétique d'électricité et répartition des émissions de gaz à effet de serre (GES) au Québec (tirée de [2, 3])

L'hydroélectricité est une énergie propre et renouvelable qui contribue considérablement à la réduction des problèmes écologiques mondiaux tels que le changement climatique et les émissions de gaz à effet de serre. Néanmoins, l'empreinte environnementale des barrages hydroélectriques n'est pas nulle. Elle peut impacter la faune et la flore aquatiques locales. En effet, l'oxygénation naturelle de l'eau s'effectue au niveau de la surface en contact avec l'air

et les produits de la photosynthèse du phytoplancton, des algues marines et d'autres plantes aquatiques. Comme les réservoirs sont généralement profonds, ils se stratifient, et la concentration d'oxygène diminue considérablement avec la profondeur. Ainsi, l'eau qui se trouve au fond des réservoirs des barrages est souvent dépourvue d'oxygène. De plus, les conditions météorologiques jouent un rôle important dans la qualité de l'eau dans les barrages. Dans les pays chauds, la décomposition par les bactéries et les animaux qui vivent dans les sédiments augmente la consommation d'oxygène dissous. Dans les pays très froids, une couche de glace au niveau de la surface de l'eau empêche l'échange d'oxygène avec l'air et elle présente un obstacle pour les rayons de soleil, freinant ainsi la photosynthèse sous-marine. Citons l'exemple de l'étude limnologique menée par Jones et al. [13] à l'Institut national de la recherche scientifique (INRS), qui ont analysé la qualité de l'eau du réservoir Manicouagan à la Côte-Nord au Québec. Ce dernier alimente les centrales hydroélectriques Manic-5 et le barrage Daniel-Johnson d'Hydro-Québec. Les mesures de concentrations de l'oxygène dissous à la fin de la période de stratifications hivernale ont présenté un taux de saturation en oxygène entre 35% à 60% sauf au niveau du barrage Daniel-Johnson qui a été complètement dépourvu d'oxygène dissous [13]. De ce fait, l'eau, aspirée du fond des réservoirs et turbinée dans les rivières, présente un très faible taux d'oxygène dissous. La diminution soudaine et brusque du niveau d'oxygène dans les rivières est nocive pour l'écosystème aquatique. Elle contribue à la dégradation de la qualité de l'eau potable et à la disparition de certaines espèces de poissons [13].

D'après le conseil canadien des ministres de l'Environnement, un niveau sain d'oxygène dissous dans une rivière devrait être supérieur à 5.5 mg/L [14]. L'utilisation d'une turbine aérée est l'une des solutions pour compenser l'appauvrissement en oxygène dissous et réduire considérablement cet impact sur l'environnement. Le processus d'aération implique l'injection d'air au niveau de la turbine. Cette pratique oxygène l'eau et présente une solution efficace pour améliorer la stabilité de la turbine et réduire les effets nuisibles de la cavitation [15].

1.2 Problématique : Modélisation de la masse ajoutée

La conception des turbines aérées et l'optimisation du processus d'oxygénation s'appuient en grande partie sur notre capacité de comprendre et de modéliser les mélanges eau-bulles d'air. L'engouement d'étudier et de démystifier la physique d'un tel écoulement provient de ses nombreuses applications industrielles telles que l'industrie chimique, navale, nucléaire, aéronautique et pétrolière.

La présence de deux phases, telles que l'air et l'eau par exemple, dans un écoulement défi-

nit un écoulement diphasique. La configuration d'un écoulement diphasique change selon les propriétés physiques des deux fluides, la géométrie de la conduite et les conditions d'opération. Par conséquent, le développement d'un modèle numérique précis, capable de prédire adéquatement la dynamique d'un tel écoulement, est un processus complexe.

L'un des défis, présents dans la modélisation des écoulements diphasiques, est la compréhension des phénomènes responsables de la dispersion des petites bulles. Ce phénomène provient de différentes sources comme la turbulence, les conditions de pressions locales et les interactions bulle-bulle. L'un des mécanismes physiques, très peu étudié, est l'effet de la fluctuation de la masse ajoutée. En effet, nous allons montrer au chapitre suivant sur la revue de littérature que très peu d'études ont abordé la variation de la masse ajoutée due à la présence de bulles voisines [16–18]. Cependant, les effets de cette variation sur la dynamique des bulles n'ont pas été antérieurement analysés.

Afin d'évaluer le rôle de la masse ajoutée sur la dispersion des bulles, nous devons représenter de manière plus appropriée la masse ajoutée d'un groupe de bulles. Dans la modélisation lagrangienne, nous avons de l'information sur la position, la vitesse et l'accélération de chacune des bulles de l'écoulement pour chaque pas de temps. Cette information nous permet de modéliser adéquatement l'effet des bulles voisines sur la masse ajoutée d'une bulle quelconque de référence. Cependant, pour la modélisation eulérienne, nous considérons les propriétés moyennées de l'écoulement. Cela engendre la perte d'informations utiles, telle que la distribution locale des bulles, qui joue un rôle significatif sur la dynamique du nuage et en particulier sur la modélisation de la masse ajoutée. Afin de récupérer cette information, il faut recourir à des relations de fermeture.

Dans plusieurs études [19–21], l'effet de la présence des bulles est négligé et on considère que la masse ajoutée d'un nuage de bulles est égale à la masse ajoutée d'une bulle isolée dans un milieu infini. Cette hypothèse est valide pour des écoulements à très faible taux de vide. Cependant, elle devient inappropriée lorsque la valeur du taux de vide devient plus importante. En effet, pour des écoulements à taux de vide élevés, l'effet des interactions entre les bulles devient important, ce qui influence la quantité du liquide transportée par les bulles [22]. L'effet de la présence des bulles a été introduit dans quelques modèles [18, 23, 24], qui ont considéré la variation du taux de vide. Il est vrai que le taux de vide joue un rôle important dans la variation de la masse ajoutée, cependant, ces modèles négligent les effets de la configuration locale de l'écoulement. Nous avons démontré dans Zoghalmi et al. [25] que la distribution des bulles joue un rôle important sur la masse ajoutée et son effet sur la dynamique d'un nuage de bulle. Par conséquent, il est nécessaire d'inclure la distribution des bulles afin de modéliser convenablement la masse ajoutée.

1.3 Objectifs de ce travail de recherche

La section précédente nous a permis d'exposer deux problématiques non résolues dans la modélisation de la masse ajoutée. Le premier point concerne le fait que l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dispersion de petites bulles a été très peu étudié. De plus, il n'existe pas un modèle physique qui quantifie l'effet de cette variation sur la dynamique du nuage de bulles. Le second point révèle l'absence des modèles de masse ajoutée en description eulérienne, qui tiennent compte de la configuration locale de l'écoulement.

Dans ce contexte, l'objectif général de cette thèse est d'établir une modélisation complète de la masse ajoutée qui nous permettrait d'évaluer convenablement son effet sur la dispersion des bulles. Nous devons préciser que dans ce travail, nous traitons des écoulements diphasiques sans changement de phase. L'hypothèse principale dans notre processus de modélisation est de considérer que le modèle de l'écoulement potentiel est une approche suffisante pour modéliser la force de masse ajoutée. Une approximation couramment utilisée dans la modélisation de la masse ajoutée [26, 27] et qui a été validée expérimentalement [28].

Afin d'atteindre notre objectif, nous avons procédé en deux parties :

1. La première partie consiste à calculer la force induite par la variation de la masse ajoutée, à partir de l'équilibre des forces au niveau de la surface de la bulle. Ainsi, nous avons démontré que pour une bulle dans un nuage, il est possible de traiter le système comme un système à masse variable. Nous avons ainsi baptisé cette force : la force de Meshchersky [29]. En effet, les équations de la dynamique des systèmes à masse variable ont été initialement développées par Meshchersky [29]. La force de Meshchersky est couramment utilisée dans l'étude de la dynamique des fusées et dans la mécanique des objets célestes [30]. Cependant, le développement d'une telle approche dans la modélisation des écoulements à bulles représente une innovation. Nous avons ensuite utilisé cette force dans un modèle numérique afin d'évaluer son effet sur la dynamique d'un nuage de bulles.
2. La deuxième partie se penche sur la modélisation de la force de masse ajoutée dans une description eulérienne. Nous avons évoqué le fait que la masse ajoutée est sensible à la configuration locale des bulles et qu'il n'existe pas de modèle qui prend en compte cet effet. Nous avons donc établi une méthodologie qui permet d'inclure la distribution locale des bulles à travers la variation du taux de vide et de son gradient.

1.4 Organisation de la thèse

La suite du document s'organise comme suit. Le prochain chapitre (chapitre 2) présente une étude bibliographique qui porte sur les définitions et les notions théoriques utiles dans la réalisation de cet étude. Nous allons commencer par la présentation des deux approches Euler-Euler et Euler-Lagrange qui sont les deux modèles les plus utilisés dans la description des écoulements diphasiques dispersés. Ensuite, nous énoncerons les modèles et les corrélations, de la littérature, des forces qui agissent sur les bulles, dont la force de la masse ajoutée. Enfin, nous présenterons un survol des études qui ont analysé les interactions hydrodynamiques entre les bulles.

Le chapitre 3 établit l'approche analytique à partir de laquelle nous dériverons le modèle de la force de Meshchersky. Ensuite, nous utiliserons cette force dans un modèle numérique lagrangien. Ce modèle nous permettra d'évaluer l'effet de la force de Meshchersky pour des paires de bulles, des configurations uniformes et des configurations aléatoires de bulles. Nous conclurons ce chapitre par une discussion sur les résultats numériques et des observations expérimentales trouvées dans la littérature.

Au chapitre 4, nous établirons le modèle de la force de Meshchersky dans l'approche Euler-Euler. Ensuite, nous l'implanterons dans le code de calcul Ansys-CFX afin de simuler l'expérience d'une colonne à bulles [10]. L'objectif des simulations est d'évaluer l'effet de la force de Meshchersky sur le comportement du nuage de bulles. Par conséquent, nous éliminerons les effets de la turbulence ainsi que tous les autres phénomènes physiques qui influencent la dispersion des nuages de bulles et susceptibles de masquer les effets dispersifs de la force de Meshchersky.

Le chapitre 5 est consacré au développement d'une nouvelle corrélation du coefficient de masse ajoutée en modélisation eulérienne. L'originalité de ce modèle consiste à prendre en compte l'effet de la distribution spatiale des bulles à partir du gradient de taux de vide. Ainsi, nous commencerons par présenter la méthode de résolution de l'écoulement potentiel autour d'un nuage de bulle. Cette méthode nous a permis de calculer les coefficients de masse ajoutée pour des configurations différentes de nuages de bulles. Par la suite, nous allons établir la relation entre le coefficient de masse ajoutée et le taux de vide pour des configurations symétriques avec un gradient de taux de vide nul. Ensuite, nous appliquerons une transformation sur les distributions des bulles afin de créer un gradient de taux de vide unidimensionnel. À la fin de ce chapitre, nous discuterons de la portée et des limites du modèle proposé.

Enfin, le chapitre 6 résume les résultats principaux obtenus dans le cadre de cette thèse, décrit les contributions originales des modèles proposés, discute de leurs limites et présente des perspectives pour des travaux futurs.

1.5 Communications scientifiques

Cette section rassemble les communications réalisées au cours de cette thèse, dont deux articles de journaux. Le premier a été soumis en octobre 2020 au journal *physics of fluids*. Le deuxième article de journal est en processus de rédaction et sera soumis en décembre 2020, dans le même journal. De plus, trois articles de conférences ont été présentés dans des conférences internationales avec comités de lecture. Et deux communications orales ont été présentées sans comité de lecture.

Articles de journaux

S. Zoghlami , C. Béguin, A. Teyssedou, D. Scott, L. Bornard, and S. Etienne, “Bubble cloud configuration effect on the added mass.”, soumis au journal *physics of fluids*.

Cet article propose un modèle de la force de la masse ajoutée en description eulérienne. L’innovation de ce modèle est d’inclure l’effet de l’arrangement de bulles dans un nuage en tenant compte de l’effet du gradient du taux de vide. Ainsi, dans cet article, nous avons évalué l’effet du gradient du taux de vide sur la variation de la masse ajoutée et nous avons proposé un nouveau modèle qui améliore la précision sur le calcul de la masse ajoutée. Les détails de notre approche de modélisation et les résultats de cet article sont détaillés au chapitre 5 de la thèse.

S. Zoghlami , C. Béguin, A. Teyssedou, D. Scott, L. Bornard, and S. Etienne, “The role of added mass in the dispersion of bubble clouds : Meshchersky force.”, serait soumis au journal *physics of fluids*, (En processus de rédaction, pour décembre 2020).

Dans cet article, nous avons présenté la démonstration théorique qui nous a permis de développer la force de Meshchersky pour une bulle dans un nuage. Ensuite, nous avons évalué numériquement le rôle de cette force sur la dispersion des nuages de petites bulles. Des éléments de cet article sont présentés dans les chapitres 3 et 5 de la thèse.

Conférences avec comité de lecture

S. Zoghlami , C. Béguin, S. Etienne, A. Teyssedou, D. Scott, and L. Bornard, “Small Bubble cloud configuration Influence on Added Mass For the Eulerian Approach.”, in *Symposium of the 38th IAHR World Congress*, Panama City, Panama(2019).

S. Zoghlami , C. Béguin, S. Etienne, D. Scott, and L. Bornard, “The role of added mass in

the dispersion of bubble clouds,” in *Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, Kyoto, Japan(2018).

S. Zoghlami , C. Beguin and S. Etienne, "Development of a Numerical Model for Quasi-Periodic Forces of Two-Phase Cross Flow in Tube Bundles.", in *Pressure Vessels and Piping Conference*. Vol. 46018. American Society of Mechanical Engineers, 2014.

Cet article décrit un modèle d'écoulement diphasique que nous avons développé afin de calculer les forces qui agissent sur les faisceaux de tubes dans les générateurs de vapeur. L'objectif de ce modèle est d'identifier les mécanismes physiques responsables des comportements quasi-périodiques des forces pariétales observés expérimentalement.

Cette étude a été réalisée dans le cadre des objectifs de recherche de la Chaire de recherche industrielle en interaction Fluide-Structure de Polytechnique Montréal et ne sera pas présenté dans cette thèse.

Communications sans comité de lecture

18th International Workshop On Trends In Numerical And Physical Modeling For Industrial Multiphase Flows, Marrakech , Morocco, 2019

Titre : Effect of added mass on the dispersion of small bubbles (présentation).

Journée Génie par simulation

Polytechnique Montréal, Quebec, Canada 2019

Titre : Effect of added mass on the dispersion of small bubbles (Poster).

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

L'objectif principal de ce travail de recherche est de contribuer au développement d'un modèle numérique précis pour la simulation des écoulements diphasique à bulles. En particulier, nous nous sommes penchés sur l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dispersion des bulles. Nous débutons la revue de littérature en définissant les variables et les paramètres qui nous seront utiles pour décrire l'écoulement diphasique. Ensuite, nous présentons les approches les plus utilisées dans la description des écoulements dispersés. Puis, nous présentons les forces qui agissent à la surface des bulles. Enfin, nous présentons une revue de littérature sur les observations expérimentales qui analysent les interactions hydrodynamiques entre une paire et un groupe de bulles.

2.1 Les écoulements diphasiques

Une phase est définie par l'état physique de la matière, chaque état physique ayant des propriétés thermodynamiques distinctes. Ainsi, une phase peut décrire un état solide, liquide ou gazeux. Par conséquent, un écoulement diphasique est un écoulement comprenant deux phases. Les deux phases peuvent être soit de la même composition, mais d'états physiques, différents tels que les écoulements eau-vapeur, soit de compositions différentes telles que les écoulements air-eau et air-huile. Dans ce travail, on s'intéresse principalement aux écoulements diphasiques de type liquide-gaz. Ainsi, pour ce qui suit, nous désignons par l'indice ℓ la phase liquide, qui constituera la phase continue, et l'indice g la phase gazeuse, qui sera présente sous forme de bulles.

2.1.1 Définitions

Dans cette section, nous allons définir les paramètres qui nous ont permis de caractériser l'écoulement.

Grandeurs caractéristiques

Le taux de vide moyen ε est la fraction du volume de contrôle occupée par la phase gazeuse à un instant donné :

$$\varepsilon = \frac{V_g}{V_g + V_\ell} \quad (2.1)$$

où V_g et V_ℓ sont les volumes occupés respectivement par le gaz et le liquide dans un volume de contrôle (constant) : $V_c = V_g + V_\ell$.

Le taux de vide local α est la fraction de temps occupé par une phase gazeuse à un point donné \vec{x} par rapport à un temps d'acquisition ($t_T = t_g + t_\ell$) :

$$\alpha = \frac{t_g(\vec{x})}{t_g(\vec{x}) + t_\ell(\vec{x})} \quad (2.2)$$

En effet, pour une durée de temps d'acquisition totale t_T , t_g est défini comme la somme des intervalles de temps durant lesquels la phase gaz a occupé la position de mesure \vec{x} et t_ℓ est défini comme la somme des intervalles de temps durant lesquels la phase liquide a occupé la position de mesure \vec{x} .

Les vitesses superficielles des phases J_g et J_ℓ sont les rapports du débit volumique par la section de passage A :

$$J_g = \frac{Q_g}{A} \quad (2.3)$$

$$J_\ell = \frac{Q_\ell}{A} \quad (2.4)$$

où Q_g et Q_ℓ sont respectivement les débits volumiques de la phase gazeuse et de la phase liquide, définis par :

$$Q_g = A_g \|\vec{U}_g\| \quad (2.5)$$

$$Q_\ell = A_\ell \|\vec{U}_\ell\| \quad (2.6)$$

avec $A_g = \varepsilon A$ et $A_\ell = (1 - \varepsilon)A$ les sections de passage des phases et $\|\vec{U}_g\|$ et $\|\vec{U}_\ell\|$ les moyennes de vitesses des phases sur les sections de passage.

La vitesse superficielle du mélange $J_{2\phi}$ est la somme des deux vitesses superficielles J_g et J_ℓ :

$$J_{2\phi} = J_g + J_\ell \quad (2.7)$$

Nombres adimensionnels

La structure de l'écoulement dépend principalement des grandeurs physiques suivantes : les masses volumiques des phases ρ_g et ρ_ℓ , les viscosités dynamiques des phases μ_g et μ_ℓ , la pesanteur g , une longueur caractéristique D , les vitesses des phases \vec{U}_g et \vec{U}_ℓ et la tension de surface σ . Il est nécessaire de présenter les nombres adimensionnels qu'on utilisera pour définir les relations entre les variables caractéristiques de l'écoulement. Afin de caractériser la configuration d'un écoulement diphasique, huit nombres adimensionnels sont utilisés :

Le rapport des masses volumiques :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_g}{\rho_\ell} \quad (2.8)$$

Le rapport des viscosités dynamiques :

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_g}{\mu_\ell} \quad (2.9)$$

Le nombre d'Eötvös ou le nombre de Bond qui est le rapport entre les forces gravitationnelles et la tension de surface :

$$\text{Eö} = \text{Bo} = \frac{\Delta\rho g D^2}{\sigma} \quad (2.10)$$

avec $\Delta\rho = (\rho_\ell - \rho_g)$.

Le nombre de Morton qui est utilisé avec le nombre de Bond pour caractériser la forme des bulles dans l'écoulement :

$$\text{Mo} = \frac{\mu_\ell^4 \Delta\rho g}{\rho_\ell^2 \sigma^3} \quad (2.11)$$

Le nombre de Weber est le rapport des forces d'inertie et des forces superficielles. Il est utilisé avec le nombre de Bond pour définir les conditions de coalescence, de rebond et d'éclatement des bulles :

$$\text{We}_g = \frac{\rho_g U_r^2 D}{\sigma} \quad (2.12)$$

$$\text{We}_\ell = \frac{\rho_\ell U_r^2 D}{\sigma} = \frac{\text{We}_g}{\bar{\rho}} \quad (2.13)$$

avec U_r le module de la vitesse relative entre les phases (connue aussi par la vitesse de glissement) donné par :

$$U_r = \|\vec{U}_g - \vec{U}_\ell\| \quad (2.14)$$

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses définit par :

$$\text{Re} = \frac{\rho_\ell U_r D}{\mu_\ell} \quad (2.15)$$

Le nombre de Froude pour chaque phase est défini par le rapport des forces d'inertie et des forces gravitationnelles :

$$\text{Fr}_g = \frac{\|\vec{U}_g\|^2}{gD} \quad (2.16)$$

$$\text{Fr}_\ell = \frac{\|\vec{U}_\ell\|^2}{gD} \quad (2.17)$$

Le titre volumique β est la fraction du débit volumique de gaz rapportée au débit volumique

total :

$$\beta = \frac{Q_g}{Q_g + Q_\ell} \quad (2.18)$$

Q_g est le débit volumique de la phase gazeuse donné par $Q_g = A_g \|\vec{U}_g\|$ et Q_ℓ est le débit volumique de la phase liquide donné par $Q_\ell = A_\ell \|\vec{U}_\ell\|$. $A_g = \varepsilon A$ et $A_\ell = (1 - \varepsilon)A$ sont les sections de passage des phases et $\|\vec{U}_g\|$ et $\|\vec{U}_\ell\|$ sont les vitesses respectives de la phase gazeuse et la phase liquide moyennées sur la surface de la section de passage. Ainsi, β devient :

$$\beta = \frac{A_g}{A_g + \frac{A_\ell}{S}} \quad (2.19)$$

avec le rapport S est le taux de glissement défini comme suit :

$$S = \frac{\|\vec{U}_g\|}{\|\vec{U}_\ell\|} = \frac{\sqrt{Fr_g}}{\sqrt{Fr_\ell}} \quad (2.20)$$

2.2 Les écoulements à bulles

La configuration d'un écoulement décrit sa topologie ou sa structure géométrique. Pour les écoulements diphasiques, elle dépend des lois de la mécanique des fluides, des interactions entre les phases, de la forme de la conduite, de la direction de l'écoulement et du type d'écoulement : liquide-gaz, liquide-liquide ou liquide-solide. Afin de concevoir et construire des systèmes diphasiques industriels efficaces et sécuritaires, il est important de caractériser la nature de l'écoulement et sa dépendance aux paramètres de fonctionnement.

Pour un même mélange liquide-gaz, l'écoulement peut avoir différentes configurations. La figure 2.1 illustre un exemple de configurations d'écoulements rencontrés dans une conduite verticale pour un écoulement diphasique ascendant. En fonction des conditions d'opération, l'écoulement peut être à bulles (a), à bouchons (b), agité (c), annulaire (d) ou à filament liquide (e).

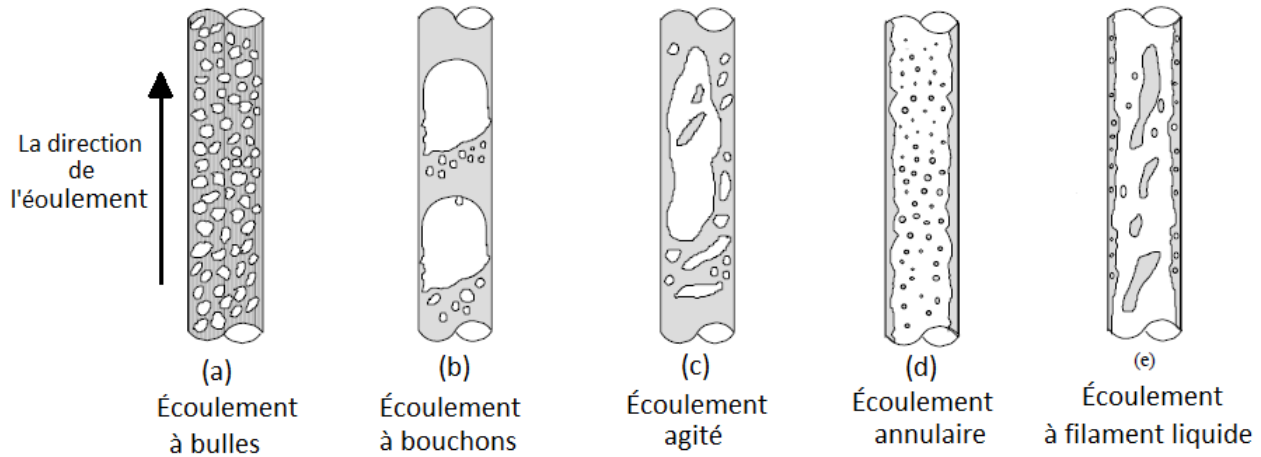


Figure 2.1 Configurations possibles d'écoulement diphasique ascendant pour une conduite circulaire et verticale [4].

La complexité des configurations diphasiques fait en sorte qu'il n'existe pas un modèle unique afin de décrire l'écoulement. En conséquence, pour choisir le modèle approprié qui prédit numériquement le comportement du mélange air-eau en aval de la turbine, il est nécessaire d'identifier la configuration de l'écoulement. Dans les turbines aérées, trois procédés d'injection, représentés à la figure 2.2, sont généralement utilisés : l'aération centrale au niveau de l'arbre (en bleu), l'aération distribuée au niveau des aubes (en vert) et l'aération distribuée en périphérique (en jaune) [5]. L'air injecté se mélange avec l'eau turbinée formant ainsi un mélange diphasique qui sera transporté par un tuyau en forme de divergent coudé (appelé aspirateur) vers la rivière. Afin d'optimiser l'oxygénation de l'eau, on doit augmenter l'interface d'échange de matière entre les phases. C'est pourquoi la configuration à petites bulles représente la configuration d'écoulement idéale pour une oxygénation efficace.

Afin de déterminer la configuration de l'écoulement à la sortie de la turbine, c'est à dire, à l'entrée de l'aspirateur, nous avons recours à des cartes d'écoulement. Ces cartes sont un outil permettant d'identifier la configuration du mélange diphasique selon les différentes propriétés physiques de l'écoulement, la géométrie et les conditions d'opérations du système. La figure 2.3 illustre un exemple de carte pour un écoulement diphasique air-liquide descendant.

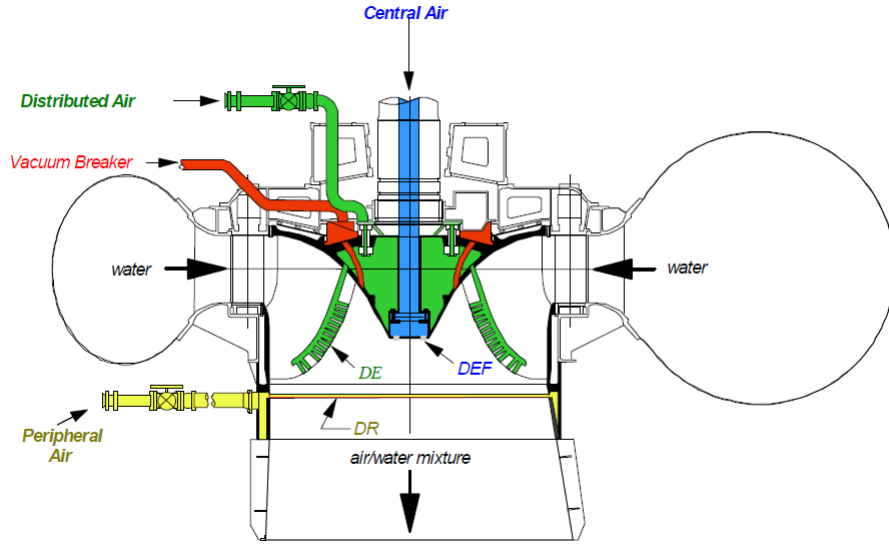


Figure 2.2 Vue en coupe de la turbine Francis de la centrale Norris montrant les méthodes d'aération [5]. (La figure a été publiée avec la permission de l'auteur correspondant Patrick March)

Oshinowa et Chales [6] ont choisi d'utiliser comme abscisse et ordonnée respectivement les rapports $\frac{Fr}{\Lambda}$ et $\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$. Où β est le titre volumique défini par l'équation (2.19), Fr est le nombre de Froude du mélange calculé comme suit :

$$Fr = \frac{(j_g + j_l)^2}{gD} \quad (2.21)$$

et Λ est un coefficient prenant en compte les propriétés physiques du liquide définit comme tel :

$$\Lambda = \frac{\mu_l}{\mu_{eau}} \left[\frac{\rho_l}{\rho_{eau}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{eau}} \right) \right]^{-\frac{1}{4}} \quad (2.22)$$

Les propriétés ayant pour indices *eau* sont les valeurs des propriétés de l'eau à 20°C et à une pression de 1 bar. Ainsi, $\Lambda \in [0.65, 1.5]$ pour des températures d'eau $T \in [5^\circ, 40^\circ]$.

Dans les conditions de fonctionnement des turbines Francis, à l'entrée de l'aspirateur, la vitesse de la phase liquide atteint entre 2 m/s à 6 m/s, le diamètre à l'entrée de l'aspirateur est de l'ordre de 1 m à 5 m [31] et le taux de vide de l'air injecté est de l'ordre de 0% à 9% [32].

Ainsi, pour ces conditions de fonctionnement, on obtient des rapports $\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \in [0, 0.32]$ et

$\frac{Fr}{\Lambda} \in [0.05, 5.63]$ pour des températures d'eau $T \in [5^\circ, 40^\circ]$. Ces intervalles, que nous avons illustrés à la figure 2.3 par le carré gris, appartiennent dans le domaine de l'écoulement à

bulles. Par conséquent, lorsque l'écoulement de gaz est injecté sous forme de petites bulles à la sortie de la turbine, l'écoulement demeure de type à bulle dans le divergent coudé en aval.

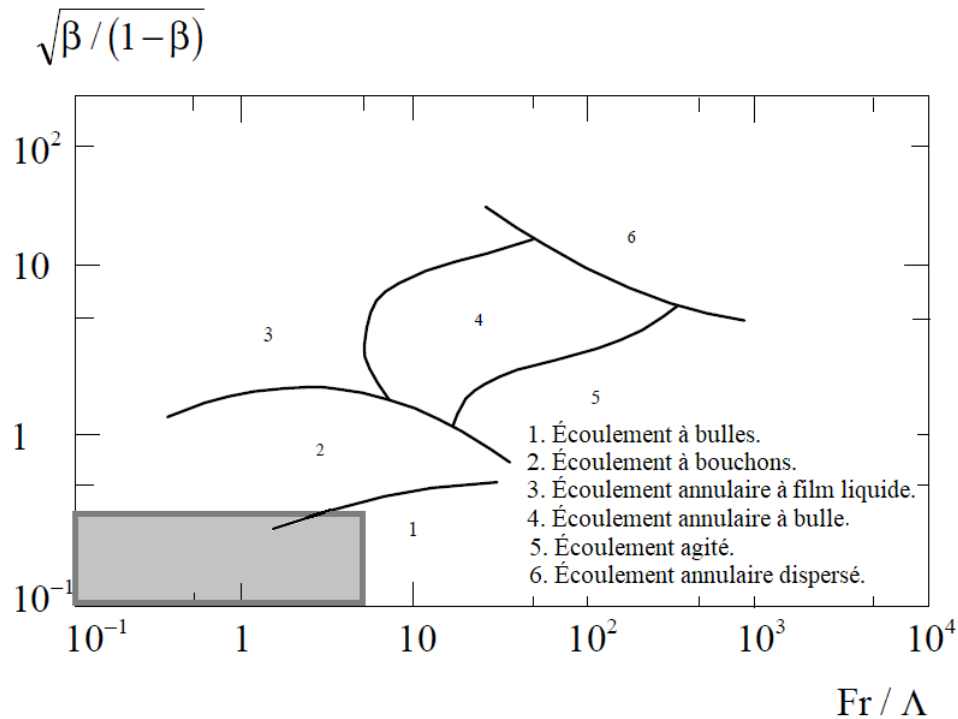


Figure 2.3 Cartes de configurations de Oshinowa et Chales [6].

Dans cette perspective, dans ce projet, nous nous sommes intéressés à l'étude des écoulements à petites bulles. Les deux approches couramment utilisées dans la description des écoulements à bulles sont les modèles Euler-Euler et Euler-Lagrange. Dans le modèle Euler-Euler, on résout les équations de Navier Stokes moyennées en volume et en temps pour les deux phases. Ainsi, les interactions entre les phases sont introduites à travers les forces interfaciales. Cependant, dans le modèle Euler-Lagrange, on résout les équations de Navier Stokes moyennées pour la phase continue (eau) et les équations de mouvement (deuxième loi de Newton) pour la phase dispersée (air). Une description détaillée, de ces deux approches, est présentée dans les deux prochaines sections.

2.3 L'approche Euler-Euler

L'approche Euler-Euler décrit, dans un référentiel eulérien, les phases continues et dispersées comme des continus interpénétrants. Sa formulation est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées dans le temps et dans le volume.

2.3.1 Les équations de conservation moyennées

Les équations de conservation locales pour un écoulement diphasique sont obtenues à partir de l'application du théorème de transport de Reynolds [33] dans un volume de contrôle contenant deux phases séparées par une interface. Dans ce qui suit, nous allons considérer que toutes les propriétés de l'écoulement sont moyennées dans le temps et dans l'espace. Pour un écoulement à deux phases, l'équation moyennée de conservation de masse pour la phase k ($k = \ell$ ou g) est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \rho_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k) = \Gamma_k \quad (2.23)$$

Où Γ_k est le taux local de production de masse de la phase k par unité de volume.

L'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement pour une phase k est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k \otimes \vec{U}_k) = & - \nabla (\varepsilon_k P_k) + \varepsilon_k \rho_k \vec{g} \\ & + \nabla \cdot (\varepsilon_k \bar{\bar{\tau}}_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \bar{\bar{\tau}}_k^{Re}) + \vec{M}_k^i \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les termes de droite, de l'équation (2.24) définissent respectivement les forces par unité de volume, en raison du gradient de pression, de la gravité, du tenseur des contraintes visqueuses ($\bar{\bar{\tau}}_k$), du tenseur des tensions de Reynolds ($\bar{\bar{\tau}}_k^{Re}$) et du transfert de la quantité de mouvement entre les deux phases à travers l'interface (\vec{M}_k^i). Les deux tenseurs de contraintes $\bar{\bar{\tau}}_k$ et $\bar{\bar{\tau}}_k^{Re}$ feront l'objet d'une discussion à la section 2.3.2.

L'équation moyennée de conservation de l'énergie totale E_k pour une phase k est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k E_k) = & - \nabla \cdot (\varepsilon_k P_k \vec{U}_k) - \nabla \cdot (\varepsilon_k \lambda_k \nabla T_k) \\ & + \nabla \cdot (\varepsilon_k \vec{U}_k \cdot \bar{\bar{\tau}}_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \vec{U}_k \cdot \bar{\bar{\tau}}_k^{Re}) \\ & + \varepsilon_k \vec{U}_k \cdot \vec{M}_k^i + S_E \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec E_k l'énergie totale par unité de masse de la phase k . Le terme $\varepsilon_k \nabla \cdot (\lambda_k \nabla T_k)$ représente le flux de chaleur par conduction où λ_k est le coefficient de conduction thermique du fluide k . Le terme $\nabla \cdot (\varepsilon_k \vec{U}_k \cdot \bar{\bar{\tau}}_k)$ est le travail dû aux contraintes visqueuses. Le terme $\varepsilon_k \vec{U}_k \cdot \vec{M}_k^i$ définit le travail dû au transfert de quantité de mouvement au niveau de l'interface et S_E décrit le terme source d'énergie par unité de volume, par unité de temps. Pour en apprendre plus sur les procédures du calcul de la moyenne, ainsi que les hypothèses utilisées dans le développement des équations de conservations moyennées, on réfère les lecteurs intéressés aux livres de Lahey et Moody [34] et Ishii et Hibiki [35].

2.3.2 La modélisation de la turbulence diphasique

La somme des tenseurs des contraintes $\bar{\tau}_k + \bar{\tau}_k^{Re}$, dans l'équation (2.24) de conservation de la quantité de mouvement est souvent exprimée comme suit :

$$\bar{\tau}_k + \bar{\tau}_k^{Re} = -\mu_{eff} \left(\nabla \vec{U}_k + (\nabla \vec{U}_k)^T - \frac{2}{3} \bar{I} (\nabla \cdot \vec{U}_k) \right) \quad (2.26)$$

Où μ_{eff} est la viscosité effective qui permet la modélisation des fluctuations turbulentes non résolues par le calcul. Pour la phase liquide, on considère que la viscosité effective comporte trois contributions ; la viscosité moléculaire μ_ℓ , la viscosité turbulente $\mu_{T,\ell}$ et un terme additionnel $\mu_{BI,\ell}$ qui modélisent la turbulence induite par la présence des bulles [36]. Ainsi :

$$\mu_{eff} = \mu_\ell + \mu_{T,\ell} + \mu_{BI,\ell} \quad (2.27)$$

Des modèles de turbulence classique sont souvent utilisés pour la modélisation de la viscosité turbulente $\mu_{T,\ell}$. L'un des modèles les plus populaires est le modèle $\kappa - \epsilon$. Dans ce modèle κ réfère à l'énergie cinétique turbulente et ϵ est la dissipation turbulente.

La viscosité turbulente $\mu_{T,\ell}$ est modélisée ainsi par la corrélation suivante :

$$\mu_{T,\ell} = C_\mu \rho_\ell \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (2.28)$$

Avec C_μ une constante de modélisation égale à 0.09. L'énergie cinétique turbulente κ et la dissipation turbulente ϵ sont déterminées à partir de la résolution de leurs équations de conservation.

Un autre modèle aussi couramment utilisé est le modèle de simulation des grandes échelles (LES) [36]. Ce modèle applique un filtre par convolution, généralement effectuée dans l'espace dans le but de déterminer l'effet des échelles de mouvement non résolues sur les échelles résolues.

Pour la modélisation de la turbulence induite par la présence des bulles, aussi appelée la pseudo-turbulence, le modèle le plus simple a été proposé par Sato et Sekoguchi [37] :

$$\mu_{BI,\ell} = \rho_\ell C_{\mu,BI} \varepsilon_g d_b |\vec{U}_g - \vec{U}_\ell| \quad (2.29)$$

Avec le facteur $C_{\mu,BI} = 0.6$. Ce modèle a été déduit à partir d'un développement analytique de l'écoulement liquide autour de "bulles d'air" de surfaces rigides (indéformables). Il décrit la turbulence induite par les bulles indépendamment de la turbulence de la phase liquide. L'incohérence de ce modèle vient du fait qu'il néglige le fait que lorsque la présence des bulles modifie le champ de vitesse du liquide, ce dernier affecte le mouvement des bulles, et

ainsi de suite. De plus, même pour un écoulement laminaire où la turbulence induite par les contraintes visqueuses de cisaillement n'a pas eu lieu, les mesures expérimentales de Hosokawa et Tomiyama [38] ont montré que le modèle de Sato et Sekoguchi [37] sous-estime le calcul des tensions de Reynolds.

Les expériences de Lance et Bataille [39] ont montré que la turbulence classique et la turbulence induite par les bulles sont deux mécanismes couplés. Ainsi, l'une des approches appliquées, afin d'inclure ce couplage dans le modèle $\kappa - \epsilon$, est de tenir compte de l'effet des forces interfaciales liées à la génération d'énergie cinétique turbulente. Ceci est effectuée par l'ajout de termes sources dans les équations de conservation de l'énergie cinétique et de la dissipation turbulente. Ce dernier est défini à partir d'un temps caractéristique de la turbulence dont la définition n'est pas encore complètement établie. En fait, certains auteurs utilisent le temps caractéristique pour la turbulence monophasique [40]. Cette approximation néglige l'effet des bulles. D'autres études ont défini ce paramètre à partir de la taille et de la vitesse des bulles [41]. Rzehak et Krepper [42] ont proposé un modèle mixte qui tient compte de l'énergie cinétique turbulente et de la taille des bulles.

En bref, pour les écoulements diphasiques, la turbulence classique est souvent utilisée pour la modélisation de la turbulence de la phase liquide. Cependant, Lance et Bataille [39] ont observé expérimentalement que pour des écoulements à bulles, lorsque le taux de vide est supérieur à 1% [39], l'effet de la turbulence classique induite par les contraintes de cisaillement visqueuses disparaît et la turbulence résulte principalement du mouvement des bulles. Ainsi, il est incohérent d'utiliser les modèles de turbulence classiques sans tenir compte des limites imposées dans le changement du comportement de l'écoulement liquide autour des bulles.

La turbulence induite par la présence des bulles, s'appelle aussi la pseudo-turbulence. Elle résulte des interactions complexes entre les deux phases. Le développement d'un modèle physique précis décrivant ce mécanisme est important dans la description de la dispersion diphasique. En effet, les principales forces utilisées dans la littérature pour la modélisation de la migration transversale des bulles sont la force de portance (équation (2.37)) et la force de dispersion turbulente (équation (2.49)) [43]. La cohérence de la modélisation de la pseudo-turbulence affecte ainsi l'effet de ses deux forces sur le comportement des bulles. Toutefois, la compréhension des paramètres physiques qui y contribuent et la mise en équation de ces mécanismes sont des défis qui ne sont pas encore totalement compris.

2.3.3 Les forces interfaciales

Le terme décrivant le transfert de la quantité de mouvement \vec{M}_k^i dépend fortement de la configuration de l'écoulement. Ainsi pour les écoulements à bulles sans changement de phase,

la quantité de mouvement engendrée par le transfert de masse au niveau de l'interface est négligeable. Par conséquent, le transfert de la quantité de mouvement \vec{M}_k^i se limite aux forces d'interactions hydrodynamiques entre les phases. Pour les écoulements dispersés, ce terme représente la somme des forces, par unité de volume, agissant par le fluide sur la particule (et inversement). On calcule donc le transfert de quantité de mouvement \vec{M}_g^i à partir des forces qui agissent sur chacune des bulles comme suit :

$$\vec{M}_g^i = -\vec{M}_\ell^i = \frac{1}{V_c} \sum_{n=1}^{N_b} \vec{F}_{gn}^i \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{V_c} N_b \langle \vec{F}_g^i \rangle \quad (2.31)$$

avec \vec{F}_{gn}^i la force qui agit sur la $n^{\text{ème}}$ bulle et $\langle \vec{F}_g^i \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{n=1}^{N_b} \vec{F}_{gn}^i$ la moyenne de la force \vec{F}_{gn}^i sur l'ensemble de N_b bulles à l'intérieur du volume de contrôle V_c . Le volume total occupé par la phase gazeuse dans le volume de contrôle est égal à

$$V_g = N_b \frac{4}{3} \pi \langle a^3 \rangle = \varepsilon V_c \quad (2.32)$$

et,

$$\vec{M}_g^i = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\langle a^3 \rangle} \langle \vec{F}_g^i \rangle. \quad (2.33)$$

Avec $\langle a^3 \rangle = \frac{1}{N_b} \sum_{n=1}^{N_b} a_n^3$.

Les forces dominantes pour un écoulement à bulle sont la force de traînée \vec{f}_{Dk} , la force de portance \vec{f}_{Lk} , la force de masse ajoutée \vec{f}_{mk} et la force de la dispersion turbulente \vec{f}_{TDk} [44]. Nous obtenons :

$$\vec{M}_\ell^i = -\vec{M}_g^i = \vec{f}_{D\ell} + \vec{f}_{L\ell} + \vec{f}_{m\ell} + \vec{f}_{TD\ell} \quad (2.34)$$

de la somme de ces forces. Il faut noter que, comme indiqué par l'équation (2.31), les efforts décrites dans cette section sont des forces par unité de volume.

On remarque que la force de flottabilité n'est pas présente dans l'équation précédente. En effet, cette force est due au champ de gravité \vec{g} et à la variation de la pression hydrostatique. Ces deux effets sont déjà présents dans l'équation (2.24) de conservation de la quantité de mouvement, dans les termes respectifs $\varepsilon_k \rho_k \vec{g}$ et $-\nabla(\varepsilon_k P_k)$.

La force de traînée

La force de traînée représente la résistance qu'un fluide exerce sur un objet en mouvement. Ainsi, elle se comporte comme une force de frottement et s'oppose aux mouvements relatifs de la phase dispersée par rapport au mouvement du liquide. Elle est donnée par :

$$\vec{f}_{D_\ell} = \frac{1}{V_c} N_b \langle \vec{F}_D \rangle = -\frac{3}{8} \rho_\ell C_D \frac{\langle a^2 \rangle}{\langle a^3 \rangle} \|\vec{U}_g - \vec{U}_\ell\| (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (2.35)$$

où $\langle a \rangle = \frac{\langle a^3 \rangle}{\langle a^2 \rangle}$ est le rayon de Sauter que nous allons noter par a . Ainsi,

$$\vec{f}_{D_\ell} = -\frac{3}{8} \varepsilon \rho_\ell \frac{C_D}{a} \|\vec{U}_g - \vec{U}_\ell\| (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (2.36)$$

où C_D est le coefficient de traînée. Ce dernier est souvent calculé en fonction du nombre de Reynolds (Re). De plus, quelques modèles ont utilisé le nombre d'Eötvös (Eö) afin de tenir compte des effets de formes des bulles. Pour les écoulements diphasiques, la majorité des modèles utilisent des corrélations obtenues pour une bulle isolée. Ces modèles ajoutent ensuite une correction en fonction du taux de vide pour inclure l'effet de la présence des bulles. Un aperçu plus détaillé sur les différents modèles existants dans la littérature sur le coefficient de traînée est présenté à la section 2.5.

La force de portance

La force de portance est la composante perpendiculaire à la force exercée par le fluide sur les bulles. Cette force s'oppose à la vorticité de l'écoulement de fond [45]. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{f}_{L_\ell} = -C_L \varepsilon_g \rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \wedge (\nabla \wedge \vec{U}_\ell) \quad (2.37)$$

où C_L est le coefficient de portance. Pour une bulle sphérique, $C_L = 0.5$. Pour des bulles ellipsoïdales, Tomiyama et al. [46] ont proposé le modèle suivant :

$$C_L = \begin{cases} \min(0.288 \tanh(0.121 \text{Re}), f(\text{E}\ddot{o}^*)) & \text{si } \text{E}\ddot{o}^* < 4, \\ f(\text{E}\ddot{o}^*) & \text{si } 4 \leq \text{E}\ddot{o}^* \leq 10.7. \end{cases} \quad (2.38)$$

où la fonction $f(\text{E}\ddot{o}^*)$ est défini comme suit :

$$f(\text{E}\ddot{o}^*) = 0.00105(\text{E}\ddot{o}^*)^3 - 0.0159(\text{E}\ddot{o}^*)^2 - 0.024\text{E}\ddot{o}^* + 0.474. \quad (2.39)$$

avec $E\ddot{o}^*$ le nombre d'Eötvös modifié :

$$E\ddot{o}^* = \frac{g(\rho_\ell - \rho_g)d_H^2}{\sigma} \quad (2.40)$$

La longueur caractéristique d_H utilisée dans le nombre Eötvös modifié est définie par la dimension horizontale maximale de la bulle.

En examinant la corrélation de Tomiyama et al. [46], on constate que le coefficient de portance est positif pour les petites bulles, ce qui explique, d'après les auteurs, que les petites bulles ont tendance à migrer vers les parois de la conduite. Cependant, pour les plus grandes bulles, le coefficient de portance est négatif. Ainsi, la force de portance est l'effet responsable de la migration des bulles plus larges vers le centre de la conduite. Néanmoins, les différentes études sur la force de portance ont analysé le cas d'une bulle isolée. Par conséquent, l'effet des bulles voisines est souvent ignoré. Un exemple sur les limites du modèle de la force de portance actuel a été rencontré dans les simulations de Zhang et al. [47]. En effet, ils ont effectué deux simulations d'un écoulement à bulle dans une colonne rectangulaire verticale, avec deux niveaux d'eau H différents ($H = 0.45$ m et $H = 0.9$ m). Les auteurs ont constaté qu'un coefficient de portance C_L de 0.5 permet d'obtenir des résultats satisfaisants pour la simulation avec le niveau d'eau le plus bas. Par contre, pour le niveau d'eau le plus grand, il a fallu prendre une valeur de 0.29 du coefficient de portance, valeur donnée par de la corrélation de Tomiyama et al. [46], afin que la solution numérique corresponde aux mesures expérimentales. Ainsi, le fait que le choix de la valeur du coefficient de portance dépend de la hauteur du canal présente en apparence une incohérence. En effet, la différence dans les résultats numériques pour les deux cas de simulation est due au fait que la configuration locale de l'écoulement est différente. Ainsi, le coefficient de portance doit dépendre du taux de vide ainsi que de son gradient. Ceci n'est pas encore pris en compte par les modèles de la force de portance.

Dans le même contexte, le modèle de la turbulence diphasique affecte la force de portance par son effet sur le gradient de vitesse. Comme nous l'avons relevé à la section 2.3.2, l'utilisation de la turbulence classique se limite aux écoulements à très faible taux de vide. De plus, la compréhension et la modélisation de la turbulence diphasique sont des sujets ouverts de recherche auquel il n'existe pas encore des résultats concluants. Par conséquent, l'effet de la présence des bulles sur la force de portance reste une question ouverte dans la modélisation des écoulements diphasiques.

La force de masse ajoutée

Le mouvement de la bulle dans le fluide entraîne un déplacement de ce dernier. On modélise la part d'inertie ajoutée par ce fluide par une masse ajoutée. Ainsi, le fluide entraîné applique une force sur la bulle en lui communiquant une accélération. Cette force est appelée la force de masse ajoutée et elle est généralement définie comme suit :

$$\vec{f}_{m\ell} = \varepsilon\rho_\ell C_m \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (2.41)$$

où C_m est le coefficient de masse ajoutée. Dans la littérature, on utilise souvent un coefficient de masse ajoutée constant égal à $C_m = 0.5$. Cette valeur définit la masse ajoutée d'une bulle isolée obtenue à partir de l'approche des écoulements potentiels. En revanche, il existe quelques études qui se sont intéressées à l'effet de la présence d'autres bulles sur la masse ajoutée. Dans cette thèse, nous prêtons une attention particulière à cette force et à l'effet de la variation de la masse ajoutée d'une bulle sur la dynamique du nuage. Ainsi, une étude bibliographique sur les différentes corrélations de la littérature sera présentée à la section 2.6.

Outre la modélisation du coefficient de la masse ajoutée, la définition de l'accélération relative $\vec{A}_r = \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell)$ entre les phases est encore une question ouverte. En effet, la dérivée totale d'une variable ψ est donnée par :

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla\psi) \quad (2.42)$$

avec \vec{U} est la vitesse d'advection. Si on considère la variable ψ comme la vitesse relative. La définition de la vitesse d'advection au niveau de l'interface reste un sujet controversé. En effet, cette définition doit assurer l'invariance par transformation galiléenne de la force de la masse ajoutée.

Wallis [48] a défini la vitesse du gaz comme étant la vitesse d'advection et il a proposé le modèle suivant :

$$\vec{A}_{REL} = \frac{D_g \vec{U}_g}{Dt} - \frac{D_g \vec{U}_\ell}{Dt} \quad (2.43)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) + \vec{U}_g \cdot \nabla (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (2.44)$$

Ainsi, Wallis [48] a caractérisé la vitesse de l'interface par la vitesse de la phase gazeuse. Par contre, ce modèle ne respecte pas la condition d'invariance par transformation galiléenne. En fait, si on note par (R) un référentiel supposé galiléen dans lequel les vitesses de gaz et

du liquide sont respectivement \vec{U}_g et \vec{U}_ℓ . Ainsi, l'accélération relative telle qu'elle est définie par Wallis [48] est donnée par l'équation (2.44). Ensuite, on définit un second référentiel (R') en mouvement de translation rectiligne uniforme, de vitesse \vec{U}' par rapport à (R). Dans le référentiel (R'), les vitesses de gaz et du liquide sont respectivement $\vec{U}'_g = \vec{U}_g + \vec{U}'$ et $\vec{U}'_\ell = \vec{U}_\ell + \vec{U}'$. Par conséquent, l'accélération relative dans (R') s'écrit comme suit :

$$\vec{A}'_{REL} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) + (\vec{U}_g + \vec{U}') \cdot \nabla (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \neq \vec{A}_{REL} \quad (2.45)$$

La définition de Wallis [48] pour l'accélération relative n'assure par l'invariance de la masse ajoutée.

Drew et al. [49], en se basant sur une analyse objective purement mathématique, ils ont proposé le modèle suivant :

$$\vec{A}_{REL} = \frac{D_\ell \vec{U}_g}{Dt} - \frac{D_g \vec{U}_\ell}{Dt} + (1 - \lambda)(\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot \nabla (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (2.46)$$

λ est un paramètre non physique qui dépend du taux de vide et doit être déterminé expérimentalement. Pour les taux de vide élevés $\lambda \rightarrow 0$ et pour les faibles taux de vide $\lambda \rightarrow 2$. Ce modèle assure l'invariance par transformation galiléenne, mais la définition mathématique du paramètre λ ne représente pas la physique de la masse ajoutée pour une bulle sphérique.

Drew et Lahey Jr [50] ont considéré qu'au niveau de l'interface, chaque phase est connectée par sa propre vitesse. Ainsi, ils ont proposé l'expression suivante :

$$\vec{A}_{REL} = \frac{D_g \vec{U}_g}{Dt} - \frac{D_\ell \vec{U}_\ell}{Dt} \quad (2.47)$$

Ce modèle de masse ajoutée est le plus utilisé dans les codes de simulation numérique tels que Ansys-CFX et Fluent. Par contre, la force de masse ajoutée, telle qu'elle est définie par Drew et Lahey Jr [50], ne respecte pas la condition d'invariance par transformation galiléenne. Pour cette raison, Drew et Lahey Jr [50] ont affirmé que pour assurer l'objectivité de leur modèle, il faut ajouter une correction sous la forme d'une force de portance [50] :

$$\vec{f}_{L\ell} = -\varepsilon \rho_\ell C_m (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot [\nabla \vec{U}_\ell - (\nabla \vec{U}_\ell)^T] \quad (2.48)$$

Mathématiquement, le modèle de Drew et Lahey Jr [50] respecte la condition d'invariance par transformation galiléenne, mais il est physiquement incohérent. En effet, la force de por-

tance, contrairement à la force de masse ajoutée, dépend fortement du nombre de Reynolds. Ainsi, on ne peut pas utiliser le même coefficient pour les deux forces.

La force de dispersion turbulente

La force de dispersion turbulente présente les interactions entre la turbulence et les bulles. Cette interaction a été modélisée par Simonin et Violet [51] comme suit :

$$\vec{f}_{TD_\ell} = -D_{gl}^{turb} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right) \quad (2.49)$$

où D_{gl}^{turb} est le coefficient de diffusion turbulente calculé comme suit :

$$\left(D_{gl}^{turb} \right)_{ii} = \frac{1}{Sc} \frac{\mu_{T,\ell}}{\rho_\ell} \quad (2.50)$$

où Sc est le nombre de Schmidt qui représente le rapport entre le taux de diffusion visqueuse et le taux de diffusion moléculaire :

$$Sc = \frac{\nu}{\mathcal{D}} \quad (2.51)$$

Où ν est la viscosité cinématique et \mathcal{D} est le coefficient de diffusion massique.

Par conséquent, la modélisation de la force de dispersion turbulente est directement liée au modèle de viscosité turbulente. Or, comme nous l'avons mentionné à la section 2.3.2, à cause de la complexité des interactions entre les mécanismes qui interviennent dans la turbulence diphasique, il n'existe pas de modèle qui décrit la physique de la force de dispersion turbulente. Les modèles actuels se limitent aux expériences à partir desquelles ils ont été développés.

2.4 L'approche Euler-Lagrange

L'approche Euler-Lagrange utilise une approche eulérienne afin de modéliser l'écoulement continu, et une approche lagrangienne pour décrire la phase dispersée. Dans notre modèle la phase continue est l'eau, tandis que les bulles d'air représentent la phase dispersée. Ainsi, l'approche lagrangienne consiste à suivre la trajectoire dans le temps, de chacune des bulles dans le nuage.

Afin d'assurer une représentation précise de la dynamique d'un nuage, il faut considérer les forces agissant sur chaque bulle, mais aussi tenir compte des interactions directes bulle-bulle (exemple : collision) et des effets hydrodynamiques induits par la présence des bulles voisines.

C'est dans ce contexte que se place l'importance de notre contribution dans l'analyse de la physique qui régit les effets hydrodynamiques induits par la présence des bulles sur la masse ajoutée.

2.4.1 Les équations de mouvement des bulles

Les trajectoires des bulles sont calculées par la résolution de la deuxième loi de Newton. Par conséquent, il est nécessaire d'identifier les forces qui agissent sur la bulle.

Pour une bulle sphérique dans l'eau, la deuxième loi de Newton s'écrit sous la forme suivante :

$$m_b \frac{D\vec{U}_b}{Dt} = \sum \vec{F} \quad (2.52)$$

avec $\sum \vec{F}$ la force totale qui agit sur la bulle. D'une manière générale, les forces qui agissent sur une bulle incompressible sont la flottabilité \vec{F}_f , la traînée \vec{F}_D , la portance \vec{F}_L , la masse ajoutée \vec{F}_m , et la force de paroi \vec{F}_W . Soit,

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_D + \vec{F}_L + \vec{F}_m + \vec{F}_W \quad (2.53)$$

La relation entre les forces de cette équation et les forces interfaciales du modèle Euler-Euler (présentées à la section 2.3.3) est défini par l'équation (2.31).

Nous rappelons les lecteurs que dans le modèle Euler-Euler, on traite les bulles comme une phase continue, en moyennant leurs propriétés dans un volume de contrôle. Les interactions entre les phases sont prises en compte à partir de relations de fermetures modélisant les échanges au niveau de l'interface de séparation entre les deux phases. Ainsi, les forces décrites à la section 2.3.3 définissent les efforts qu'agissent chaque phase sur l'autre au niveau de l'interface.

Tandis que, dans le modèle lagrangien, les efforts, qui agissent sur chacune des bulles dans l'écoulement, sont appliqués sans passer par le processus de moyennage. Par conséquent, nous avons de l'information sur la position, la vitesse et l'accélération de chacune des bulles à chaque instant. Cela nous permet de modéliser adéquatement les interactions entre les bulles. Si tous les mécanismes sont bien pris en compte, cette approche est très efficace pour décrire les écoulements dispersés. Cependant, ces informations utiles sont moyennées dans l'approche eulérienne et il faut recourir à des relations de fermeture afin de récupérer les structures fines des phénomènes filtrées lors du moyennage.

Une autre remarque à ajouter est que dans le modèle eulérien, les effets de la gravité et du gradient de la pression sont inclus dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement 2.24. Pour le modèle lagrangien, ils sont modélisés par la force de flottabilité qui est due au champ de gravité \vec{g} et à la variation de la pression hydrostatique. Cette force est égale à la différence entre le poids de la bulle et le poids du fluide qui occupe le même volume :

$$\vec{F}_f = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho_g - \rho_\ell)\vec{g} \quad (2.54)$$

ou

$$\vec{F}_f = \frac{4}{3}\pi a^3\vec{\nabla}P \quad (2.55)$$

Lorsqu'une bulle s'approche d'un mur, un écoulement de liquide est généré et celui-ci est chassé vers l'extérieur. La pression dans cet écoulement crée une force de réaction qui s'oppose au mouvement d'approche de la sphère [52]. Cette force définit la force de lubrification des parois et elle est donnée par le modèle de Tomiyama et al. [53] :

$$\vec{F}_W = -C_W a \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(L-y)^2} \right] \rho_\ell \left| (\vec{U}_b - \vec{U}_\ell) \cdot \vec{n}_z \right|^2 \vec{n}_w \quad (2.56)$$

Où \vec{n}_z est un vecteur unitaire parallèle à la direction de la gravité, \vec{n}_w est un vecteur unitaire dans la direction normale à la paroi, L est la dimension du système dans la direction normale à la paroi, y est la distance entre la bulle et la paroi et C_W est le coefficient de la paroi [53] donné par :

$$C_W = \begin{cases} \exp(-0.933E\ddot{o} + 0.179) & , \quad 1 \leq E\ddot{o} \leq 5 \\ 0.007E\ddot{o} + 0.04 & , \quad 5 < E\ddot{o} \leq 33 \\ 0.179 & , \quad 33 < E\ddot{o} \end{cases} \quad (2.57)$$

Cette force est négligeable pour les valeurs de Reynolds Re élevées, c'est à dire lorsque la viscosité est négligeable par rapport à l'inertie de la bulle.

La force de portance dans le modèle lagrangien est définie par [54] :

$$\vec{F}_L = -C_L \frac{4\pi a^3}{3} \rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \wedge (\nabla \wedge \vec{U}_\ell) \quad (2.58)$$

Les modèles pour le coefficient de portance C_L sont les mêmes utilisés dans l'équation (2.37).

La force de traînée visqueuse modélise le frottement qu'exerce la viscosité de la phase continue

sur la bulle et elle s'exprime comme suit :

$$\vec{F}_D = -\rho_\ell C_D \frac{\pi a^2}{2} \left\| \vec{U}_b - \vec{U}_\ell \right\| (\vec{U}_b - \vec{U}_\ell) \quad (2.59)$$

L'effet de la viscosité est introduit à l'intermédiaire du nombre de Reynolds dans la modélisation du coefficient de la traînée C_D . Les différents modèles de ce coefficient seront présentés à la section 2.5.

La force de masse ajoutée exercée sur une bulle est donnée par :

$$\vec{F}_m = -\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} C_m \frac{D}{Dt} (\vec{U}_b - \vec{U}_\ell) \quad (2.60)$$

avec C_m le coefficient de masse ajoutée égale à 0.5 pour une bulle isolée.

Batchelor [55] a proposé une définition tensorielle de la masse ajoutée de la forme suivante :

$$\vec{F}_m = -\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} \overline{\overline{C_m}} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{U}_b - \vec{U}_\ell) \quad (2.61)$$

Où $\overline{\overline{C_m}}$ est le tenseur de masse ajoutée. Pour une bulle isolée ce tenseur est égal à $\overline{\overline{C_m}} = 0.5 \overline{\overline{I}}$; avec $\overline{\overline{I}}$ le tenseur identité.

Pour un nuage de bulles en translation, le tenseur de masse ajoutée est défini par une matrice de dimension (3×3) . Lorsqu'on tient compte de la rotation des bulles, la vitesse s'exprime avec 6 degrés de liberté et le tenseur de masse ajoutée dans ce cas est défini par une matrice de dimension (6×6) [18]. Une revue de littérature sur la modélisation de la masse ajoutée sera discutée à la section 2.6.

Dans ce qui suit, nous allons présenter un survol de la littérature existante sur les modèles de force de traînée (qui sera présente dans nos simulations) et de force de masse ajoutée (qui représente l'objectif de cette étude).

2.5 Les corrélations des coefficients de traînée

2.5.1 Le coefficient de traînée pour une bulle isolée

Cette section présente une revue de la littérature concernant les corrélations utilisées pour estimer la force de traînée. La figure 2.4 compare les différentes corrélations avec des données expérimentales soigneusement choisies de la littérature (afin d'éliminer les effets de parois),

par Brown et Lawler [56], pour des particules sphériques.

Plusieurs études se sont penchées sur la détermination analytique du coefficient de traînée pour des particules sphériques. Pour les écoulements à faible nombre de Reynolds (écoulement de Stokes : $Re < 1$), les effets visqueux dominent les effets inertiels. Pour ce type d'écoulement, Stokes [57] a démontré que le coefficient de traînée pour une sphère rigide est inversement proportionnel au nombre de Reynolds Re selon la relation suivante :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (2.62)$$

Cette corrélation a été obtenue par la résolution des équations de Stokes autour d'une sphère rigide pour un écoulement visqueux avec une condition de non-glissement au niveau de l'interface, en négligeant les termes non linéaires d'inerties. On observe sur cette figure que l'approximation de l'écoulement de Stokes, décrit bien la variation du coefficient de traînée pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds. Ce résultat était attendu, car l'hypothèse de négliger les effets inertiels par rapport aux effets de la viscosité n'est plus valide pour des nombres de Reynolds plus élevés que 1.

Afin de concevoir un modèle plus général, Oseen [58] a proposé de linéariser les termes d'inertie de l'équation de Navier-Stokes, par la vitesse du liquide à l'infini (loin de la particule). Ainsi il obtient :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (2.63)$$

Comme le montre la figure 2.4, cette corrélation est valide pour $Re < 5$. Ainsi, en tenant compte du terme d'inertie dans l'équation de Stokes, la corrélation de Oseen [58] converge vers une constante pour les nombres de Reynolds élevés. Cependant, cette constante surestime les valeurs réelles du coefficient de traînée. Ceci est dû à l'hypothèse de linéarisation des termes d'inertie qui est appliquée afin de pouvoir résoudre mathématiquement les équations de Navier-Stokes et n'a pas de signification physique rigoureuse.

Mei et al. [59] ont imposé une condition de glissement au niveau de la surface de la sphère. Ainsi, ils ont proposé la corrélation suivante :

$$C_D = \frac{16}{Re} \left[1 + \frac{2}{\frac{16}{Re} + \frac{3.315}{\sqrt{Re}} + 1} \right] \quad (2.64)$$

on remarque que lorsqu'on impose une condition de glissement à la surface de la sphère, le coefficient de la traînée devient une fonction du rapport $\frac{16}{Re}$ au lieu de $\frac{24}{Re}$ pour une condition

de non-glissement. De plus, on l'observe à la figure 2.4, la corrélation de Mei et al. [59] décrit qualitativement la variation du coefficient de traînée pour les faibles nombres de Reynolds ($Re < 1$). Toutefois, les valeurs données par la corrélation de Mei et al. [59] sont inférieures à celles prédites par la corrélation de Stokes [57]. En effet, la condition de glissement imposée par Mei et al. [59] à la surface de la bulle n'est valide que pour des surfaces de bulles propres (écoulement pur, sans surfactants). Cependant dans des conditions expérimentales standard, l'eau est souvent contaminée. La présence des impuretés dans l'écoulement liquide joue alors le rôle de surfactants et peut changer la propriété de glissement sur la surface de la bulle à des conditions de non-glissement.

Le nombre de Reynolds et le nombre d'Eötvös sont considérés comme de bons indicateurs sur la forme des bulles. Ainsi, Dijkhuizen [60] a généralisé la corrélation de Mei et al. [59], en incluant l'effet de la dimension de la sphère via le nombre d'Eötvös $E\ddot{o}$:

$$C_D = \sqrt{C_D(Re)^2 + C_D(E\ddot{o})^2} \quad (2.65)$$

où $C_D(Re)$ est donné par l'équation (2.64) et $C_D(E\ddot{o})$ est la correction du coefficient de traînée qui inclut l'effet de la dimension de la sphère :

$$C_D(E\ddot{o}) = \frac{4E\ddot{o}}{E\ddot{o} + 9.5} \quad (2.66)$$

Le nombre d'Eötvös $E\ddot{o}$ est défini par l'équation (2.10).

On conclut de ce qui précède que, pour déterminer le coefficient de traînée à partir de la résolution des équations de Navier-Stokes, on a recours à des hypothèses de simplifications. Ces hypothèses consistent, à négliger les effets inertiels ou à les linéariser à partir d'une approximation, et à définir des conditions aux limites imposées au niveau de la surface de la bulle (glissement ou non-glissement). Par conséquent, l'application des corrélations analytiques se limite aux hypothèses de simplification qui ont permis la résolution mathématique des équations de Navier-Stokes.

Pour les nombres de Reynolds importants ($Re > 1000$), les effets inertiels dominent les effets visqueux. Par conséquent, on traite les bulles comme des sphères solides dont le coefficient de traînée est une constante : $C_D \approx 0.44$ [35].

Pour les nombres de Reynolds, $Re \geq 1$, l'hypothèse de Stokes n'est plus valide ce qui complexifie la résolution des équations de Navier Stokes. Ainsi, la majorité des corrélations se sont appuyées sur des méthodes empiriques. Comme les conditions expérimentales affectent

la prédiction du coefficient de traînée, ceci limite les domaines d'applications de ces modèles. En effet, le coefficient de traînée est souvent déterminé expérimentalement lorsque la bulle atteint sa vitesse d'ascension terminale. Lorsqu'on injecte une bulle dans une colonne d'eau, avec une vitesse initiale nulle, elle accélère grâce à sa force de flottabilité. Cette accélération est ralentie par frottements visqueux. Au moment où les forces de traînée et de flottabilité atteignent un équilibre dynamique, la vitesse de la bulle demeure constante. Cette dernière définit la vitesse d'ascension terminale d'une bulle sphérique. Ainsi, à partir du moment d'équilibre, l'équation de mouvement de la bulle (2.53) se réécrit :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_D = 0 \quad (2.67)$$

On a alors,

$$\rho_\ell C_D \frac{\pi a^2}{2} \left\| \vec{U}_{terminale} \right\|^2 = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_g - \rho_\ell) g \quad (2.68)$$

Comme la vitesse terminale $\left\| \vec{U}_{terminale} \right\|^2$ est mesurable expérimentalement, le coefficient de traînée est calculé comme suit :

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{2a(\rho_g - \rho_\ell)}{\rho_\ell \left\| \vec{U}_{terminale} \right\|^2} g \quad (2.69)$$

Parmi les corrélations les plus populaires dans la littérature, on cite la corrélation proposée par Schiller [61] :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) \quad (2.70)$$

Cette corrélation a été développée initialement pour les écoulements ayant un nombre de Reynolds inférieur à 800. Par la suite, Clift et Gauvin [62] ont démontré que le domaine d'application s'étend jusqu'à $\text{Re} < 3 \times 10^5$. Clift et al. [1] ont comparé les prédictions de plusieurs expressions de C_D existantes dans la littérature avec différentes données expérimentales. Ils ont conclu que la validité des corrélations empiriques est limitée aux conditions expérimentales dont elles sont déduites et ne présentent pas une bonne description de C_D sur toutes les gammes de Re . Par conséquent, ils ont divisé toute la gamme du nombre de Reynolds sur 10 et ils ont proposé une corrélation pour chaque intervalle. Ces corrélations sont présentées au tableau 2.1. Afin d'obtenir ces corrélations, ils ont exclu tous les effets extérieurs qui peuvent influencer le mouvement de la sphère tels que les effets des parois et de la compressibilité. De plus, ils ont affirmé que leurs corrélations sont les plus cohérentes pour décrire la courbe standard de la variation de C_D en fonction de Re .

Mikhailov et Freire. [63] ont corrélé les données expérimentales de Roos et Willmarth [64] et

Tableau 2.1 Corrélations de C_D recommandés par Clift et al. [1] pour une sphère rigide avec $w = \log_{10} \text{Re}$.

Gamme	Corrélation
(A) $\text{Re} < 0.01$	$C_D = \frac{3}{16} + \frac{24}{\text{Re}}$
(B) $0.01 \leq \text{Re} \leq 20$	$C_D = \frac{24}{\text{Re}} [1 + 0.1315 \text{Re}^{(0.82-0.05w)}]$
(C) $20 \leq \text{Re} \leq 260$	$C_D = \frac{24}{\text{Re}} [1 + 0.1935 \text{Re}^{0.6305}]$
(D) $260 \leq \text{Re} \leq 1500$	$\log_{10} C_D = 1.6435 - 1.1242w + 0.1558w^2$
(E) $1.5 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 1.2 \times 10^4$	$\log_{10} C_D = -2.4571 + 2.5558w - 0.9295w^2 + 0.1049w^3$
(F) $1.2 \times 10^4 \leq \text{Re} \leq 4.4 \times 10^4$	$\log_{10} C_D = -1.9181 + 0.6370w - 0.0636w^2$
(G) $4.4 \times 10^4 \leq \text{Re} \leq 3.38 \times 10^5$	$\log_{10} C_D = -4.3390 + 1.5809w - 0.1546w^2$
(H) $3.38 \times 10^5 \leq \text{Re} \leq 4 \times 10^5$	$C_D = 29.78 - 5.3w$

Brown et Lawler [56]. En fonction du nombre de Reynolds, ils ont obtenu les deux corrélations suivantes :

Pour $5.33 < \text{Re} < 10^5$:

$$C_D = \frac{777 \left(\frac{669806}{875} + \frac{114976}{1155} \text{Re} + \frac{707}{1380} \text{Re}^2 \right)}{646 \text{Re} \left(\frac{32869}{952} + \frac{924}{643} \text{Re} + \frac{1}{385718} \text{Re}^2 \right)} \quad (2.71)$$

Pour $0.1 < \text{Re} < 10$:

$$C_D = \frac{3808 \left(\frac{1617933}{2030} + \frac{178861}{1063} \text{Re} + \frac{1219}{1084} \text{Re}^2 \right)}{681 \text{Re} \left(\frac{77531}{422} + \frac{13529}{976} \text{Re} + \frac{1}{71154} \text{Re}^2 \right)} \quad (2.72)$$

Cheng [65] a proposé la corrélation suivante en utilisant les données expérimentales de Brown et Lawler [56] :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.27 \text{Re})^{0.43} + 0.47 \left[1 - e^{-0.04 \text{Re}^{0.38}} \right] \quad (2.73)$$

La comparaison des différentes corrélations empiriques, présentée dans la figure 2.4, indique

que la corrélation de Cheng [65] sous-estime le coefficient de traînée pour les nombres de Reynolds élevés. Par contre, les corrélations de Schiller [61], Clift et al. [1] et Mikhailov et Freire. [63] présentent des bonnes approximations sur toute la gamme du nombre de Reynolds.

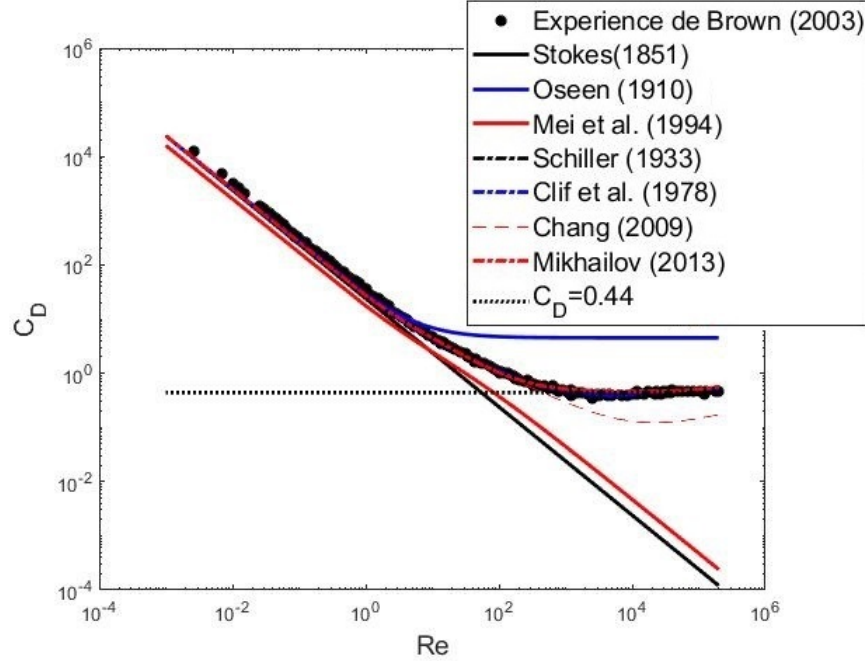


Figure 2.4 La comparaison des coefficients de traînée

2.5.2 Le coefficient de traînée pour un nuage de bulles

Comme énoncé précédemment, les études qui ont développé des modèles de coefficient de traînée pour un nuage de bulles ont utilisé des corrélations pour une bulle isolée et ils ont ajouté ensuite une correction sous la forme d'une fonction qui dépend du taux de vide afin d'inclure l'effet de la présence des bulles.

Pour tenir compte de l'effet des bulles voisines, Wen [66] a modifié la corrélation de Schiller [61] (2.70) afin d'inclure la dépendance au taux de vide :

$$C_D = (1 - \varepsilon)^{-1.65} \max \left(\frac{24}{Re'} (1 + 0.15 Re'^{0.687}), 0.44 \right) \quad (2.74)$$

avec $Re' = (1 - \varepsilon)Re$

Ishii et Zuber [21] ont pris en compte l'effet des bulles sur la viscosité du fluide. En introduisant la notion de la viscosité du mélange, ils ont proposé l'expression suivante :

$$C_D = \frac{24}{Re_m} (1 + 0.15 Re_m^{0.687}) \quad (2.75)$$

avec :

$$\text{Re}_m = \frac{2a\rho_\ell |\vec{U}_g - \vec{U}_\ell|}{\mu_m} \quad (2.76)$$

où $\mu_m = \mu_\ell (1 - \varepsilon)^{-2.5\mu^*}$ et $\mu^* = \frac{\mu_g + 0.4\mu_\ell}{\mu_g + \mu_\ell}$. Cette corrélation a été validée pour $\text{Re} < 2 \times 10^5$ [21].

Beguin et al. [67] ont modifié la corrélation de Mei (2.64) afin de proposer un nouveau modèle qui tient compte de la dépendance au taux de vide local :

$$C_D = \frac{16}{\text{Re}} \left(1 + \frac{2 \left(\frac{2 + 3\bar{\mu}}{2 + 2\bar{\mu}} \right)^2}{1 + \frac{\text{Re}_c}{\text{Re}}} \right) \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \varepsilon^{1/3})^3} \frac{P_1(\varepsilon) + \bar{\mu}P_2(\varepsilon)}{P_3(\varepsilon) + \bar{\mu}P_4(\varepsilon)} \quad (2.77)$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{Re}_c &= 33 + 50000\varepsilon \\ P_1(\varepsilon) &= 4 + 6\varepsilon^{5/3} \\ P_2(\varepsilon) &= 6 - 6\varepsilon^{5/3} \\ P_3(\varepsilon) &= 4 + 6\varepsilon^{1/3} + 6\varepsilon^{2/3} + 4\varepsilon \\ P_4(\varepsilon) &= 4 + 3\varepsilon^{1/3} - 3\varepsilon^{2/3} - 4\varepsilon \end{aligned}$$

Cette corrélation est valide pour les bulles sphériques et pour $\text{Re} \leq 300$, $\varepsilon \leq 50\%$ et $(\bar{\mu}, \bar{\rho})$ entre 10^{-3} et 10^3 .

Rusche et Issa [68] ont analysé des données expérimentales de la littérature. Ils ont constaté que la valeur de C_D augmente de façon significative avec le taux de vide et ils ont proposé l'approximation suivante :

$$\frac{C_D}{C_{D\infty}} = e^{K_1\varepsilon} + \varepsilon^{K_2} \quad (2.78)$$

Les exposants K_1 et K_2 dépendent de la nature de la particule. Selon les données expérimentales, pour des bulles d'air, $K_1 = 3.64$ et $K_2 = 0.864$. Cette corrélation a été utilisée dans le modèle Euler-Euler développé par Behzadi et al. [69] pour des écoulements à bulle de taux de vide faible jusqu'à des taux de vide élevés. Leurs résultats ont montré que cette corrélation est valide pour un écoulement dilué (faible taux de vide). Cependant, sa précision devient faible pour des taux de vide élevés.

Un autre modèle empirique a été proposé par Simonnet et al. [70]. Ils ont évalué expérimenta-

lement l'influence du taux de vide sur la vitesse relative de la bulle. Ainsi, ils ont affirmé que la vitesse relative diminue en fonction du taux de vide, jusqu'à atteindre une valeur critique ε_{crit} . À partir de cette valeur, la vitesse augmente. Ainsi, Simonnet et al. [70] ont proposé la forme suivante pour C_D :

$$\frac{C_D}{C_{D\infty}} = (1 - \varepsilon) \left[(1 - \varepsilon)^m + \left(4.8 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^m \right]^{\frac{-2}{m}} \quad (2.79)$$

où $C_{D\infty}$ est le coefficient de traînée pour une bulle isolée. L'exposant m dépend de la valeur de ε_{crit} . Ainsi, pour leurs expériences, Simonnet et al. [70] ont obtenu $m = 25$ pour un $\varepsilon_{crit} = 15\%$. Cette approximation est valide pour des bulles de diamètres entre 5 mm et 10 mm et pour un taux de vide local inférieur à 30%.

Roghair et al. [71] ont développé un modèle numérique utilisant la méthode de front-tracking afin d'analyser les effets de la variation du nombre d'Eötvös et du nombre de Morton Mo sur le coefficient de traînée d'une bulle dans un nuage. Ils ont déduit que dans la gamme étudiée ($4 \times 10^{-12} \leq Mo \leq 2 \times 10^{-9}$), le C_D est indépendant du nombre de Morton. Par contre, ils ont observé une dépendance entre C_D et le nombre d'Eötvös $E\ddot{o}$ pour $1 \leq E\ddot{o} \leq 5$. Ainsi, la corrélation suivante a été proposée :

$$\frac{C_D}{C_{D\infty}} = (1 - \varepsilon) \left[1 + \left(\frac{18}{E\ddot{o}} \right) \varepsilon \right] \quad (2.80)$$

Afin d'obtenir cette corrélation, Roghair et al. [71] ont utilisé la corrélation Dijkhuizen [60] pour le calcul du $C_{D\infty}$.

2.6 Les corrélations de masse ajoutée

Cette section présente un survol de la littérature existante sur les modèles de masse ajoutée. Les effets de la présence des bulles sur la masse ajoutée sont souvent négligés dans les calculs. Par conséquent, la majorité des modèles numériques utilisent une valeur de coefficient de masse ajoutée constante qui est égale à $C_m = 0.5$, pour une bulle sphérique. Cette valeur a été obtenue analytiquement à partir de l'approche d'écoulement potentiel, pour une bulle isolée. Cette valeur est en accord avec les mesures expérimentales [28]. Cependant, au chapitre 3, nous démontrerons l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dynamique du nuage et l'importance de tenir compte de l'effet de la présence des bulles. Ainsi, la validité de l'approximation de la bulle isolée pour le calcul de la masse ajoutée se limite aux écoulements

avec des taux de vide très faibles, sans concentration locale de bulles.

Les études qui abordent l'effet des bulles voisines sur la masse ajoutée sont peu nombreuses. Deux catégories de corrélations ont été rencontrées dans la littérature. Le premier type de corrélation tient compte des distances de séparation entre les bulles. Cette information n'est accessible que lorsqu'on applique la description lagrangienne. Étant donné que la description eulérienne est basée sur le processus de calcul de la moyenne, le deuxième type de corrélations utilise le taux de vide afin d'inclure l'effet de la présence des bulles voisines.

2.6.1 Les corrélations de la masse ajoutée en description lagrangienne

Dans ce qui suit, nous allons appeler l'axe central de deux bulles, la direction qui passe par leurs centres de masses.

Van Wijngaarden [11] a résolu analytiquement l'écoulement potentiel autour d'une paire de bulles ayant la même accélération. Il propose deux corrélations, en fonction de l'orientation de leurs accélérations par rapport à la direction de leur axe central. Ainsi, pour deux bulles identiques d'indices k et n qui accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central, le coefficient de masse ajoutée est donné par :

$$C_{nk//} = \frac{1}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^6 + 9 \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^8 - 3 \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^9 + \dots \right] \quad (2.81)$$

Cependant, lorsque la direction de l'accélération des bulles est perpendiculaire à leur axe central, le coefficient de masse ajoutée devient :

$$C_{nk\perp} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^6 + 3 \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^8 + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r_{nk}} \right)^9 + \dots \right] \quad (2.82)$$

Où a est le rayon des bulles et r_{nk} est la distance qui sépare les deux bulles. Nous avons noté par l'indice $//$ lorsque le coefficient de masse ajoutée est obtenu à partir du cas de deux bulles accélérant dans la direction parallèle à leur axe central et par l'indice \perp lorsque le coefficient de masse ajoutée est obtenu à partir de deux bulles accélérant dans la direction orthogonale à leur axe central.

À partir de la méthode de calcul numérique directe, Simcik et al. [72] ont évalué la variation de masse ajoutée. Ils ont proposé les corrélations suivantes :

Pour des bulles accélérant selon la direction parallèle à leur axe central, le coefficient de masse

ajoutée est donné par :

$$C_{nk_{//}} = 0.35 + 0.15 \frac{\frac{r_{nk}}{2a} - 1}{\frac{r_{nk}}{2a} - 0.546} \quad (2.83)$$

Ainsi, le coefficient de masse ajoutée est égal à 0.35 lorsque les bulles se touchent et 0.5 lorsque la distance entre les bulles devient importante.

Dans le cas des bulles qui s'accélèrent dans la direction perpendiculaire à leur axe central, le coefficient de masse ajoutée devient :

$$C_{nk_{\perp}} = 0.61 - 0.11 \frac{\frac{r_{nk}}{2a} - 1}{\frac{r_{nk}}{2a} - 0.862} \quad (2.84)$$

Ainsi, le coefficient de masse ajoutée est égal à 0.61 lorsque les bulles se touchent et 0.5 lorsque la distance qui les sépare devient grande.

Pour deux bulles positionnées selon une orientation θ par rapport à la direction orthogonale à leur accélération, le coefficient de masse ajoutée est donné par :

$$C_{nk_{\theta}} = A \sin(2(\theta - 45^\circ)) + B \quad (2.85)$$

Avec : $A = \frac{1}{2}(C_{nk_{//}} - C_{nk_{\perp}})$ et $B = \frac{1}{2}(C_{nk_{//}} + C_{nk_{\perp}})$.

Béguin et al. [18] ont utilisé un modèle semi-analytique afin de résoudre l'écoulement potentiel autour de nuages N_b bulles. Ainsi, ils ont proposé le modèle suivant pour la force de masse ajoutée d'une bulle de référence quelconque k , dans le nuage :

$$\vec{F}_{mk} = -\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}_k + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \vec{f}_{kn} + \vec{f}_{nk_{ind}} \right) \quad (2.86)$$

avec :

- $-\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{2} \ddot{\vec{x}}_k$ est la force de masse ajoutée d'une bulle k sans tenir compte de l'effet de la présence des bulles voisines (équivalent à la masse ajoutée d'une bulle isolée).
- $-\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} \vec{f}_{kn}$ est une correction de la force de masse ajoutée, proportionnelle à l'accélération de la bulle k , induite par la présence des bulles voisines. C'est à dire c'est l'effet de la perturbation de la bulle n sur la masse ajoutée de la bulle k , si elle est présente dans l'écoulement

sans bouger. Et, \vec{f}_{kn} s'écrit comme suit :

$$\vec{f}_{kn} = \left(C_{nk_{\perp}} - \frac{1}{2} \right) \|\ddot{\vec{x}}_k\| \sin \alpha_{kn} \vec{T}_{kn} + \left(C_{nk_{//}} - \frac{1}{2} \right) \|\ddot{\vec{x}}_k\| \cos \alpha_{kn} \vec{N}_{kn} \quad (2.87)$$

Comme illustré à la figure (2.5), le vecteur \vec{N}_{kn} définit le vecteur unitaire dans la direction de l'axe central, \vec{T}_{kn} est le vecteur unitaire orthogonal au vecteur \vec{N}_{kn} , dans le plan contenant l'axe central et le vecteur accélération $\vec{a}_k = \ddot{\vec{x}}_k$, et α_{kn} est l'orientation relative de l'accélération de la bulle k par rapport à la direction \vec{N}_{kn} .

• $-\rho_{\ell} \frac{4\pi a^3}{3} \vec{f}_{nk_{\text{ind}}}$ est la force de masse ajoutée induite par l'accélération des bulles voisines, avec l'indice $n \neq k$ et $n \in [1, N_b]$. Ainsi, $\vec{f}_{nk_{\text{ind}}}$ décrit l'effet de la perturbation induite par le mouvement de la bulle n . Elle est donnée par :

$$\vec{f}_{nk_{\text{ind}}} = C_{nk_{\perp \text{ind}}} \|\ddot{\vec{x}}_n\| \sin \alpha_{nk} \vec{T}_{nk} + C_{nk_{// \text{ind}}} \|\ddot{\vec{x}}_n\| \cos \alpha_{nk} \vec{N}_{nk} \quad (2.88)$$

où le vecteur $\vec{N}_{nk} = -\vec{N}_{kn}$, où \vec{T}_{nk} est le vecteur unitaire orthogonal au vecteur \vec{N}_{nk} , dans le plan contenant l'axe central et le vecteur accélération $\ddot{\vec{x}}_n$ et $\alpha_{nk} = -\alpha_{kn}$.

Les coefficients $C_{nk_{//}}$ et $C_{nk_{// \text{ind}}}$ sont respectivement les coefficients de masse ajoutée et de masse ajoutée induite calculés à partir de la résolution de l'écoulement potentiel autour de deux bulles qui accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} C_{nk_{//}} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3}{64} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^6 + \frac{9}{256} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^8 + \frac{9}{512} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^{10} + \dots \right] \\ C_{nk_{// \text{ind}}} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{8} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^3 - \frac{3}{512} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^9 - \frac{9}{1024} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^{11} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

Les coefficients $C_{nk_{\perp}}$ et $C_{nk_{\perp \text{ind}}}$ sont les coefficients de masse ajoutée et la masse ajoutée induite calculés à partir de la résolution de l'écoulement potentiel autour de deux bulles qui accélèrent dans la direction perpendiculaire à leur axe central :

$$\begin{aligned} C_{nk_{\perp}} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3}{256} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^6 + \frac{3}{256} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^8 + \frac{27}{4096} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^{10} + \dots \right] \\ C_{nk_{\perp \text{ind}}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{16} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^3 + \frac{3}{4096} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^9 + \frac{3}{2048} \left(\frac{2a}{r_{nk}} \right)^{11} + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.90)$$

Bien que Béguin et al. [18] et Van Wijngaarden [11] ont résolu l'écoulement potentiel autour d'une paire de bulles pour développer leurs modèles, on remarque que leurs corrélations sont différentes. En fait, dans le modèle Van Wijngaarden [11], le cas de deux bulles qui accé-

lèrent dans la même direction a été traité. Par conséquent, les coefficients proposés par Van Wijngaarden [11] inclus l'effet de la présence de la deuxième bulle, ainsi que la perturbation induite par son mouvement.

Tandis que Béguin et al. [18] ont analysé le mouvement de deux bulles, dont une accélère et la deuxième au repos. Par conséquent, les coefficients $C_{nk_{\perp}}$ et $C_{nk_{//}}$ proposés par Béguin et al. [18] sont les masses ajoutées de la bulle lorsque la deuxième bulle est au repos. Ainsi, ces coefficients présentent l'effet de la présence de la deuxième bulle lorsqu'elle ne bouge pas. Ensuite, $C_{nk_{//ind}}$ et $C_{nk_{\perp ind}}$ décrivent l'effet de la perturbation induite par le mouvement de la deuxième bulle. Par conséquent si on associe les deux coefficients de Béguin et al. [18], on obtient l'effet sur la masse ajoutée de la présence de la deuxième bulle ainsi que la perturbation induite par son mouvement. Suite à la linéarité de la fonction potentielle, l'addition des deux coefficients de Béguin et al. [18] ($C_{nk_{\bullet}} + C_{nk_{\bullet ind}}$) permettent de décrire les mêmes coefficients proposés Van Wijngaarden [11].

La comparaison de ces corrélations, présentée à la figure 2.6, nous indique que lorsque des bulles qui accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central, se rapprochent, leurs masses ajoutées diminuent et prennent des valeurs inférieures à 0.5. Cependant lorsque les bulles sont côte à côte, leurs masses ajoutées augmentent en se rapprochant et prennent des valeurs supérieures à 0.5. Comme les deux corrélations de Van Wijngaarden [11] et Béguin et al. [18] sont construites à partir de la résolution de l'écoulement potentiel autour d'une paire de bulles, leurs estimations de la masse ajoutée sont très proches. La légère différence, entre ces deux corrélations, observée sur la figure 2.6 est due au fait que Van Wijngaarden [11] a présenté sa corrélation jusqu'à l'ordre 9 et l'ordre 11 a été utilisé pour les corrélations de Béguin et al. [18]. Les corrélations Simcik et al. [72] ont été développées à partir d'une approche différente et elles présentent aussi un bon accord avec les autres corrélations pour

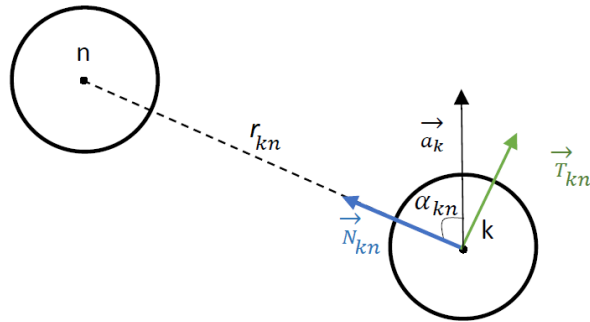


Figure 2.5 Illustrations des paramètres géométriques des équations (2.87) et (2.88)

le calcul de $C_{nk_{\perp}}$. Cependant, les valeurs de $C_{nk_{//}}$ sont inférieures à celles des deux autres modèles.

2.6.2 Les corrélations de la masse ajoutée en description eulérienne

Pour déterminer la relation entre le coefficient de masse ajoutée et le taux de vide, Zuber [23] et Wallis [24] ont utilisé la solution développée par Lamb [16] pour la résolution d'écoulement potentiel pour deux sphères concentriques. Zuber [23] a résolu analytiquement le mouvement d'une particule sphérique dans un domaine fluide sphérique stationnaire. Il a considéré une particule sphérique mobile de rayon a à l'intérieur d'une sphère fixe de rayon R_s remplie de fluide. Il a défini le taux de vide par le rapport entre le volume du corps sphérique et celui du domaine. Ainsi, il a obtenu le coefficient de masse ajoutée suivant :

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{1 + 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (2.91)$$

Pour les faibles taux de vide, la formule de Zuber [23] se simplifie en [73] :

$$C_m = \frac{1}{2} (1 + 3\varepsilon) \quad (2.92)$$

La corrélation de Zuber [23] implique que la masse ajoutée accroît en fonction du taux de vide. Cependant, Wallis [24] a considéré le même modèle en permettant le mouvement du domaine fluide. Ses résultats indiquent que la masse ajoutée décroît en fonction du taux de vide selon la relation suivante :

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{2 - 2\varepsilon}{2 + \varepsilon} \quad (2.93)$$

Cai et Wallis [74] ont appliqué la même approche afin de développer un modèle plus général en considérant une impédance λ qui représente le rapport entre les impulsions ressenties par la surface du domaine et la surface de la particule. De cette façon, ils ont proposé le modèle suivant :

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{(2 - 2\varepsilon) + \lambda(1 + 2\varepsilon)}{(2 + \varepsilon) + \lambda(1 - \varepsilon)}, \quad (2.94)$$

La corrélation de Cai et Wallis [74] permet d'obtenir la corrélation de Zuber [23] lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, la corrélation de Wallis [24] lorsque $\lambda \rightarrow 0$ et la masse ajoutée d'une bulle isolée ($C_m = 0.5$) lorsque $\lambda = 1$.

Van Wijngaarden [11] résout l'écoulement potentiel autour de paires de bulles aléatoirement orientées. Ensuite, par un processus de moyennage sur l'ensemble des positions relatives

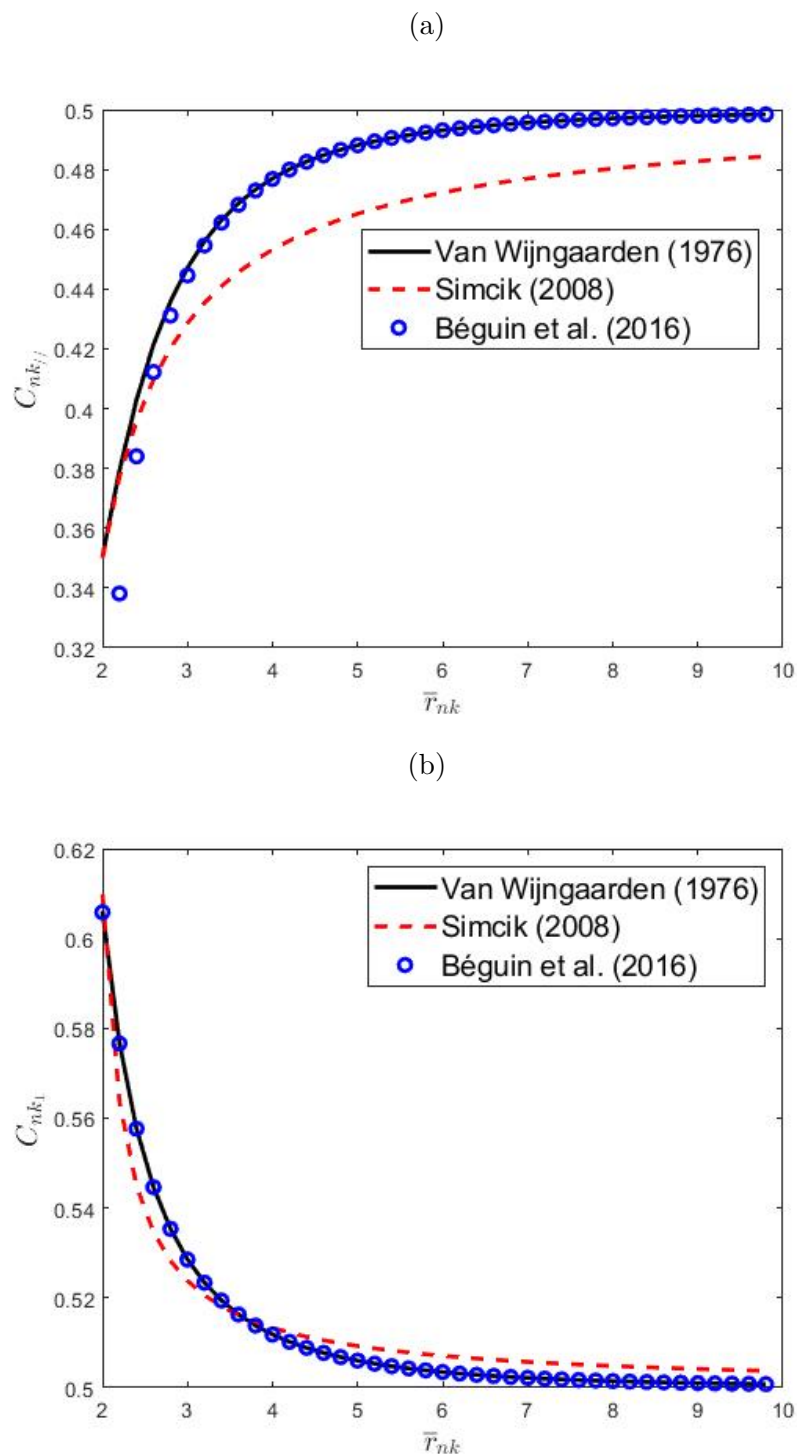


Figure 2.6 La comparaison entre les corrélations du coefficient de masse ajoutée dans la description lagrangienne pour deux bulles (a) qui accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central, (b) qui accélèrent selon la direction perpendiculaire à leur axe central

possibles, il a proposé la corrélation suivante :

$$C_m = \frac{1}{2} (1 + 2.78\varepsilon) \quad (2.95)$$

Cette formule est très proche de la formule simplifiée de Zuber [23] pour les faibles taux de vide.

Beguin et al. [18] ont calculé les masses ajoutées de plusieurs nuages de bulles, de distributions aléatoires, par la résolution de l'écoulement potentiel. Ensuite, par le calcul de la moyenne de leurs résultats, ils ont proposé la corrélation suivante :

$$C_m = \frac{1}{2} + 0.34\varepsilon^2 \quad (2.96)$$

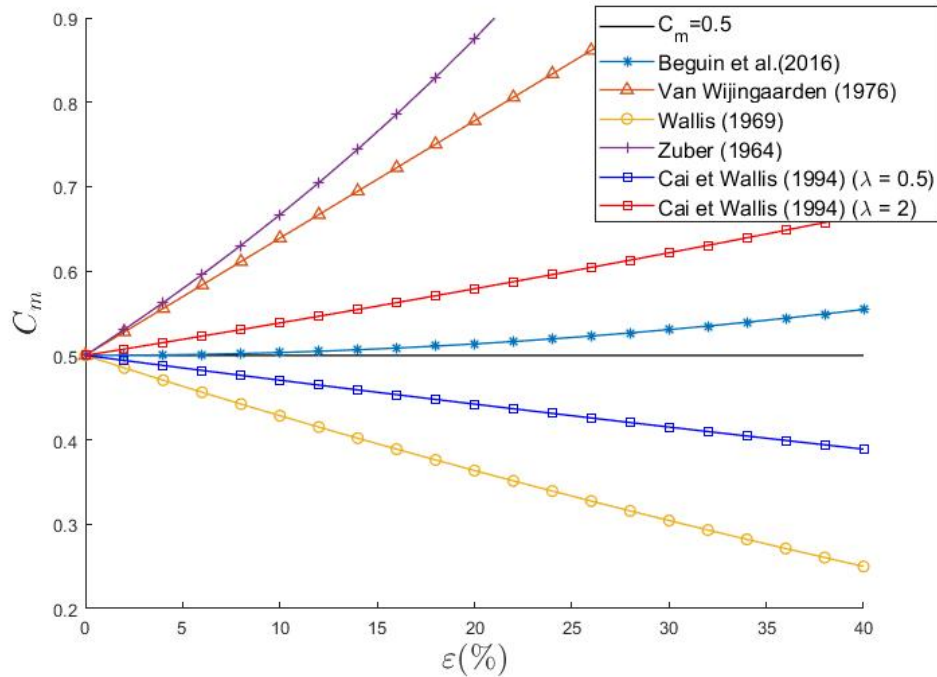


Figure 2.7 Corrélations de la valeur du coefficient de masse ajoutée en fonction du taux de vide, en description eulérienne

La figure 2.7 compare le comportement de la masse ajoutée en fonction du taux de vide calculé à partir des corrélations que nous avons cité dans cette section. On constate que les corrélations de Zuber [23] et Van Wijngaarden [11] décrivent les valeurs supérieures de la masse ajoutée, la corrélation de Wallis [74] présente la borne inférieure et la corrélation de Beguin et al. [18] décrit les valeurs moyennes. La corrélation de Cai et Wallis [74], selon la

valeur de λ , permet de balayer toutes les gammes des valeurs de la masse ajoutée. Cependant, la valeur du paramètre λ dépend des hypothèses de modélisation ou des conditions expérimentales et sa valeur varie de 0 à l’infini. Ainsi, λ est une constante de modélisation qui n’a pas une définition générale qui permet d’appliquer la corrélation de Cai et Wallis [74] dans le cadre général de nuages de bulles. Par conséquent, la figure 2.7 nous indique qu’il n’existe pas un consensus sur la nature de l’effet du taux de vide sur la variation de la masse ajoutée. De plus, nous avons comparé dans Zoghlami et al. [75], les résultats obtenus par ces corrélations à des valeurs de masses ajoutées de nuages de distributions aléatoires, calculées à partir de l’approche d’écoulement potentiel. Cette comparaison sera présentée dans le chapitre 5. Ainsi, nous avons conclu qu’aucune de ces corrélations ne présente une modélisation adéquate de la variation de la masse ajoutée en description eulérienne. En effet, d’après les modèles de Van Wijngaarden [11], Simcik et al. [72] et Béguin et al. [18], la masse ajoutée dépend de la distribution locale des bulles. En modélisation eulérienne, cette information est perdue dans le processus de calcul de la moyenne. Ainsi, les modèles actuels de masse ajoutée en fonction du taux de vide sont incomplets et nécessitent une investigation plus approfondie. Cette problématique définit l’un des objectifs de cette thèse. Le développement d’un modèle plus général de la masse ajoutée qui inclut l’effet de la distribution locale des bulles sera présenté dans le chapitre 5.

2.7 Interactions hydrodynamiques entre les bulles

Plusieurs auteurs ont évalué expérimentalement les interactions hydrodynamiques dans un groupe de bulles, d’autres ont recours à la modélisation numérique afin d’identifier les différents types d’interactions. Dans l’objectif de comprendre la dynamique d’un nuage de bulles, nous avons commencé par étudier les interactions hydrodynamiques entre une paire de bulles. L’expérience de Fortes et al. [76] est considérée comme étant la référence pour l’analyse des interactions entre des bulles sphériques indéformables. Ils ont évalué expérimentalement les interactions entre des sphères solides en chute libre dans une colonne d’eau stagnante. Ainsi, ils ont observé que le mouvement des deux sphères alignées verticalement est instable. Les deux sphères s’attirent, entrent en collision et s’organisent dans une direction transverse au mouvement. Ensuite, elles se repoussent jusqu’à atteindre une distance de stabilité où les interactions hydrodynamiques n’affectent plus leurs mouvements. Ils ont appelé ce type d’interaction par le “*Drafting, kissing and tumbling rearrangement mechanisms*”.

Pour un groupe de sphères, Fortes et al. [76] ont observé que les particules sphériques ont tendance à s’organiser dans la direction horizontale sur des plans parallèles stables. Le même type d’interactions a été observé expérimentalement par Kok [77] et Vélez-Cordero et al. [7]

pour une paire de bulles d'air sphériques. Kok [77] a été le premier à identifier expérimentalement les interactions hydrodynamiques entre deux bulles. Il a étudié les trajectoires de deux bulles en ascension dans de l'eau filtrée. Il a injecté deux bulles d'air disposées verticalement dans un réservoir d'eau stagnante. Ses expériences ont montré que les interactions hydrodynamiques entre les bulles d'air dépendent de la qualité de l'eau. En effet, dans l'eau filtrée, les deux bulles s'attirent, pivotent dans la direction transverse, entrent en collision et coalescent [77]. La durée avant la coalescence dépend de la taille des bulles et de la distance initiale qui les sépare.

Lorsque Kok [77] a ajouté un surfactant dans l'eau, le comportement des bulles devient très semblable aux interactions entre deux sphères solides, observées par Fortes et al. [76]. En effet, le surfactant limite la probabilité de coalescence entre les bulles, et les fait rebondir dans la direction transverse. Les observations expérimentales de Kok [77] sont en accord avec les résultats analytiques de Biesheuvel et Van Wijngaarden [26] et Kok [78].

Vélez-Cordero et al. [7] ont mené des expériences afin de comparer les interactions hydrodynamiques d'une paire de bulles dans un fluide newtonien et non-newtonien. Puisque nous nous intéressons seulement aux écoulements air-eau à bulles, nous ne discuterons que des interactions entre les bulles dans un écoulement newtonien. Ainsi, ils ont injecté deux bulles d'air dans un mélange de glycérine et eau dans lequel ils ont ajouté un surfactant afin d'éviter la coalescence. La figure 2.8 montre des images instantanées des trajectoires des deux bulles dans le mélange [7]. On peut voir que les bulles se comportent de la même façon que des sphères solides. En effet, Vélez-Cordero et al. [7] ont injecté deux bulles d'air alignées verticalement. Ainsi, les deux bulles se sont rapprochées, entrent en collision, se placent horizontalement et se repoussent.

Kitagawa et al. [79] ont réalisé des expériences afin d'analyser statistiquement le comportement d'un nuage de bulles. Les bulles ont été injectées uniformément dans une colonne d'huile de Silicone. Les analyses statistiques des positions de bulles, réalisées par Kitagawa et al. [79], ont démontré que les bulles ont tendance à se placer sur des plans horizontaux. De plus ils ont observé que la vitesse des bulles au niveau de l'injection est parallèle à la verticale. Par contre, loin de la zone d'injection, une composante horizontale apparaît due aux interactions hydrodynamiques entre les bulles. La valeur de cette composante de vitesses peut atteindre jusqu'à 10% de la valeur de la vitesse verticale.

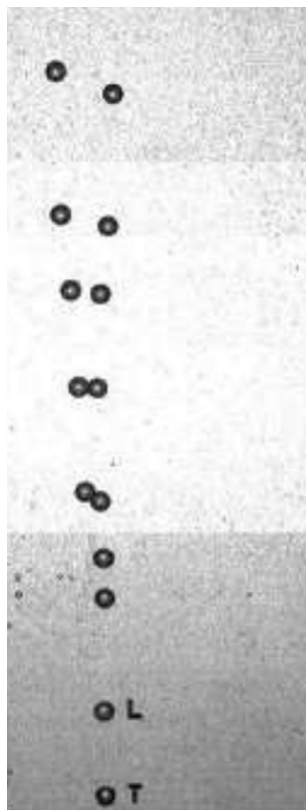


Figure 2.8 Trajectoires de deux bulles dans un fluide newtonien. le rayon des bulles est égal à 2.8 mm, $E\ddot{o} = 0.9$ et $Re=1.3$ [7]. (la figure a été publiée avec la permission de l'auteur correspondant Roberto Zenit)

Le même comportement a été discuté par Biesheuvel et Van Wijngaarden [26] qui ont calculé la trajectoire de deux sphères identiques à partir des solutions analytiques d'écoulement potentiel. Ils ont observé trois types de comportements en fonction de l'orientation relative des sphères θ . On note, respectivement, par $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$, lorsque les bulles sont horizontalement côte à côte et lorsqu'elles sont alignées verticalement. Pour les faibles θ , les deux bulles se repoussent. Lorsque θ augmente (environ 30°), la position relative des deux bulles oscille et les bulles finissent par se repousser. Pour θ autour de 31° , la position relative des deux bulles oscille et les bulles finissent par s'attirer. Pour un plus grand θ , la position relative diminue, ainsi les bulles sont attirées l'une vers l'autre. Kok [78] est arrivé à la même conclusion à partir de la solution analytique de l'écoulement potentiel. Il a observé les trois types d'interaction hydrodynamique entre deux bulles de gaz en ascension dans un liquide pur. L'angle de transition entre les trois types d'interactions dépend de la taille des bulles, de la distance initiale qui les sépare et du nombre de Reynolds. Les résultats analytiques de Kok [78] ont été validés par ses observations expérimentales [77]. Wenyuan et Hiaohong [80]

ont aussi abouti à la même constatation par l'utilisation de la méthode de volume de fluide (volume of fluid VOF) afin d'analyser les interactions de bulles en ascension côte à côte.

2.8 Conclusion

À partir des études modélisant la masse ajoutée pour un groupe de bulles en description lagrangienne, présentées à la section 2.6, nous avons conclu que la masse ajoutée dépend de la distribution spatiale des bulles. D'une part, lorsque deux bulles accélèrent côte à côte, leurs masses ajoutées augmentent lorsqu'elles s'approchent l'une de l'autre. D'autre part, lorsqu'elles accélèrent selon la direction parallèle à leur axe central, leurs masses ajoutées diminuent. Cependant, l'effet hydrodynamique de la variation de la masse ajoutée sur la dynamique du nuage de bulles a été très peu étudié.

Les observations expérimentales, présentées à la section 2.7, nous indiquent que les interactions hydrodynamiques entre les bulles varient entre attraction et répulsion selon leurs arrangements. En effet, à partir d'une analyse énergétique, Kok [77] a expliqué la répulsion et l'attraction, observées dans ses expériences, par la dépendance des composantes du tenseur d'inertie au mouvement relatif. Cela est particulièrement vrai pour les particules légères et les bulles, car la majeure partie de l'inertie du système réside dans le fluide porteur entraîné par leurs mouvements.

Dans cette perspective, nous avons consacré les deux prochains chapitres à l'investigation de l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dynamique d'un nuage. À ce propos, il a été démontré que la variation de la masse d'un système affecte la dynamique de son mouvement. En effet, Meshchersky [29] était le premier à analyser l'influence de la variation de la masse sur le mouvement d'un système et a proposé une modification de la deuxième loi de Newton afin d'inclure cet effet dans les équations du mouvement. L'application la plus populaire d'un tel effet est connue par l'équation de Tsiolkovsky [81] qui constitue l'équation fondamentale de l'astronautique. Cette équation décrit la variation du mouvement d'un astronef suite à la variation de sa masse, qui est due à la quantité de gaz expulsés lors de sa propulsion. L'effet Meshchersky a été aussi appliqué dans l'étude des mouvements d'objets célestes ainsi que pour les interactions entre les astres et les galaxies. Mineur [82] a développé l'équation du mouvement d'une masse variable dans un champ de gravitation quelconque. Il en a démontré que la variation de la masse du Soleil induit des perturbations dans les mouvements planétaires. Burcev [83] a généralisé les équations de Meshchersky dans le cadre de la relativité générale d'Einstein.

En dépit du fait que la mécanique des systèmes à masses variables a été utilisée dans plu-

sieurs applications industrielles et pour expliquer la physique de phénomènes naturels divers, l'analyse de son effet et sa modélisation pour la dynamique de nuages de bulles représentent une innovation dans l'étude des écoulements diphasiques dispersés.

Ensuite, à partir des études sur la masse ajoutée d'un nuage de bulles en description eulérienne, présentées à la section 2.6.2, nous avons constaté que les modèles de la littérature considèrent seulement l'effet du taux de vide. Cette variable permet de tenir compte de l'effet de la présence des bulles. Cependant, il ne représente pas adéquatement l'effet de leurs distributions spatiales. Par conséquent, il n'y a pas accord dans la littérature sur l'effet du taux de vide sur la masse ajoutée.

Dans cette optique, nous avons analysé l'effet du taux de vide et de son gradient sur la masse ajoutée pour plusieurs configurations de bulles. En effet, à notre connaissance, aucune étude ne s'est penchée sur l'analyse de l'influence de la variation du gradient de taux de vide sur la masse ajoutée. Ensuite, nous proposerons un nouveau modèle de la masse ajoutée en description eulérienne. Cette corrélation permet de mieux tenir compte de l'effet de la distribution spatiale des bulles sur la masse ajoutée et servira plus tard à une meilleure modélisation de l'effet de sa variation sur la dynamique du nuage.

CHAPITRE 3 LES EFFETS DE LA FLUCTUATION DE MASSE AJOUTÉE SUR LA DISPERSION DE NUAGES DE BULLES

Dans le premier chapitre, nous avons évoqué la question concernant la physique de la dispersion diphasique qui n'est toujours pas complètement développée. Plusieurs études ont analysé la variation de la masse ajoutée d'une bulle en présence d'autres bulles [11, 16–18, 72]. Ils ont affirmé que la masse ajoutée varie selon leurs distributions spatiales, ainsi que leurs accélérations. Leurs constatations nous ont menés à nous questionner à propos de l'effet de cette variation sur la dynamique des nuages de bulles, sujet qui n'a pas été évoqué auparavant. Ainsi, nous avons relevé deux questions suivantes :

- Est-il possible de traiter la variation de la masse ajoutée d'une bulle dans un nuage comme étant un système à masse variable ?
- Quel effet pourrait avoir la variation de la masse ajoutée sur la dynamique du nuage de bulles ?

Dans cette perspective, ce chapitre présente une analyse théorique de l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dynamique du nuage de petites bulles. Notre approche s'appuie sur la théorie des écoulements potentiels, qu'on appelle aussi la théorie des fluides parfaits. Cette approximation consiste à négliger l'effet de la viscosité du fluide. Cette approche est souvent utilisée dans la modélisation de la masse ajoutée. En effet, Moore [84] a montré que l'écoulement à la surface d'une bulle d'air sphérique est proche d'un comportement non-visqueux. Par conséquent, il peut être décrit par un écoulement potentiel. De plus, Biesheuvel et Van Wijngaarden [26] et Kumaran et Koch [27] ont utilisé cette approche dans la modélisation de la masse ajoutée et leurs résultats sont proches des mesures expérimentales. En outre, Fackrell [28] a mesuré expérimentalement la masse ajoutée pour des sphères solides, de différentes tailles, en mouvement dans un fluide réel. Ses résultats expérimentaux ont aussi montré que les valeurs mesurées de la masse ajoutée sont très proches de la solution théorique calculée à partir de l'approximation d'écoulement potentiel.

Dans cette section, nous développons la force qui quantifie l'effet de la variation de la masse ajoutée sur l'interaction hydrodynamique entre les bulles. Nous l'appelons force de Meshchersky, du nom du scientifique qui l'a définitivement mise en évidence [29]. Ainsi, la variation de la masse ajoutée conduit à considérer le mouvement d'une bulle dans un nuage comme un système à masse variable.

La force de Meshchersky est souvent reliée au changement du mouvement d'un système suite à la variation temporelle de sa masse propre. L'originalité de ce travail consiste, tout d'abord, à démontrer analytiquement l'existence d'un effet Meshchersky pour une bulle dans un nuage. Cet effet ne découle pas de la variation de la masse propre de la bulle, mais de la fluctuation de sa masse ajoutée induite par la présence des bulles voisines et de leurs mouvements relatifs. En vue d'évaluer le rôle de la force de Meshchersky sur la dynamique d'un nuage de bulles, nous avons résolu les équations de mouvement de différents arrangements de bulle. Enfin, nous avons conclu ce chapitre par une discussion sur les résultats obtenus ainsi qu'une comparaison avec des observations expérimentales de la littérature.

3.1 Le développement théorique de la force de Meshchersky

Dans cette section, nous allons présenter notre démarche théorique qui nous a permis d'aboutir à la modélisation de la force de Meshchersky pour des nuages de petites bulles. Les hypothèses principales de notre développement sont les suivantes :

- i) Nous avons considéré que l'approximation d'écoulement potentiel est appropriée pour déterminer la force de Meshchersky.
- ii) L'écoulement du fluide autour des bulles est incompressible.
- iii) Nous avons traité les petites bulles comme des sphères rigides en translation. Cette approximation n'est valide que pour des bulles d'air de petite taille. En effet, la forme d'une bulle d'air dans l'eau demeure sphérique lorsque son diamètre équivalent est inférieur à 2 mm [85].

L'approximation d'écoulement potentiel nous permet d'aborder le fluide autour des bulles comme non-visqueux, incompressible et irrotationnel. Par conséquent, lorsque l'écoulement est irrotationnel, la vitesse du liquide \vec{U}_ℓ autour d'un nuage de N_b bulles rigides et sphériques s'écrit à partir d'une fonction scalaire Φ , qu'on appelle une fonction potentielle, comme suit :

$$\vec{U}_\ell = \nabla\Phi \quad (3.1)$$

Nous avons extrait la force qui agit sur une bulle quelconque k , considérée comme référence du système, à partir de l'intégrale de la pression P sur sa surface :

$$\vec{F}_k \text{ totale} = - \int_{S_k} P d\vec{S}_k \quad (3.2)$$

où S_k est la surface de la bulle k et $d\vec{S}_k$ désigne le vecteur élément de surface normal à la surface de la sphère.

La pression P est déduite à partir de la formule de Bernoulli instationnaire :

$$P = -\rho_\ell \frac{D\Phi}{Dt} + \vec{U}_b \nabla \Phi - \frac{1}{2} \rho_\ell \vec{U}_\ell^2 - \rho_\ell g z \quad (3.3)$$

où ρ_ℓ est la masse volumique de la phase liquide, g est l'accélération de la pesanteur et z est l'altitude.

Le premier terme de l'équation (3.3) présente l'effet instationnaire de la fonction potentielle. Le deuxième terme a été interprété par Kumaran et al. [27]. Il représente une compensation du mouvement du système de coordonnées sphériques avec la bulle. Le troisième terme définit la pression dynamique et le dernier terme indique l'effet de la gravité. L'hypothèse d'écoulement potentiel implique que le fluide est non-visqueux. Ainsi, nous avons négligé, l'effet des contraintes de cisaillement.

La masse ajoutée est un effet instationnaire de l'écoulement, ainsi, nous nous sommes intéressés seulement aux développements du premier terme de l'équation (3.3). Par conséquent, la force, qui agit sur une bulle de référence k , due au terme instationnaire de la pression, est donnée par :

$$\vec{F}_k = \rho_\ell \int_{S_k} \frac{D\Phi}{Dt} d\vec{S}_k \quad (3.4)$$

La propriété d'incompressibilité (c'est-à-dire $\rho_\ell = \text{constante}$) de l'écoulement potentiel permet de réécrire l'équation de conservation de la masse come suit :

$$\nabla \cdot \vec{U}_\ell = 0 \quad (3.5)$$

Ainsi, à partir des équations (3.1) et (3.5), on en déduit que la fonction potentielle est une solution de l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.6)$$

Par conséquent, étant donné la linéarité de cette équation, Batchelor [55] a exprimé le potentiel de vitesse, autour d'une sphère rigide en translation, comme suit :

$$\Phi = \vec{\varphi}(\vec{x}) \cdot \vec{U} \quad (3.7)$$

où \vec{U} est la vitesse de translation de la sphère et $\vec{\varphi}(\vec{x})$ est une fonction vectorielle indépen-

dante de la vitesse \vec{U} , qui ne dépend que de la position \vec{x} de la bulle. Le choix de la fonction $\vec{\varphi}(\vec{x})$ doit respecter la condition de non-pénétration, c'est-à-dire que le fluide ne peut pas traverser la paroi de la bulle. Ainsi, la composante de vitesse normale à la paroi doit être nulle, soit $\frac{\partial \Phi}{\partial x_N} = 0$, où x_N est une coordonnée dans une direction normale à la paroi de la bulle [86].

L'équation (3.7) généralisée pour un nuage de N_b bulles est donnée par [18] :

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N_b} \vec{\varphi}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n \quad (3.8)$$

où $\sum_{n=1}^{N_b}$ désigne la sommation sur toutes les bulles dans l'écoulement, \vec{x}_n est la position de la bulle d'indice n , $\dot{\vec{x}}_n = \vec{U}_n = \frac{D\vec{x}_n}{Dt}$ est la vitesse de la bulle d'indice n . Dans l'équation (3.8), la fonction $\vec{\varphi}_n$ doit respecter la condition de non-pénétration du liquide au niveau des parois de toutes les bulles dans l'écoulement. Ainsi, $\vec{\varphi}_n$ est une fonction des positions \vec{x}_n de toutes les bulles, avec $n \in [1, N_b]$.

Nous remplaçons cette dernière expression de la fonction scalaire Φ dans l'équation (3.4) de la force qui agit sur la bulle k . Ainsi :

$$\vec{F}_k = \rho_\ell \int_{S_k} \sum_{n=1}^{N_b} \frac{D(\vec{\varphi}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n)}{Dt} d\vec{S}_k \quad (3.9)$$

Cette dernière peut être réécrite sous la forme d'une somme de deux termes $\vec{F}_{k(I)}$ et $\vec{F}_{k(II)}$ comme suit :

$$\vec{F}_k = \underbrace{\rho_\ell \int_{S_k} \sum_{n=1}^{N_b} \left(\vec{\varphi}_n \cdot \frac{D\dot{\vec{x}}_n}{Dt} \right) d\vec{S}_k}_{\vec{F}_{k(I)}} + \underbrace{\rho_\ell \int_{S_k} \sum_{n=1}^{N_b} \left(\frac{D\vec{\varphi}_n}{Dt} \cdot \dot{\vec{x}}_n \right) d\vec{S}_k}_{\vec{F}_{k(II)}} \quad (3.10)$$

Dans les deux prochaines sections, nous expliciterons les deux forces $\vec{F}_{k(I)}$ et $\vec{F}_{k(II)}$ afin de déterminer leurs significations physiques.

3.1.1 Le développement de la force de masse ajoutée

Le premier terme $\vec{F}_{k(I)}$ de l'équation (3.10) est proportionnel à l'accélération de la bulle k et celles des bulles voisines. De ce fait, cette force définit la force de la masse ajoutée due à l'accélération de la bulle k ainsi que la force de la masse ajoutée induite par l'accélération

des bulles voisines :

$$\vec{F}_{k(I)} = \vec{F}_{m_k} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \int_{S_k} (\vec{\varphi}_n \cdot \ddot{\vec{x}}_n) d\vec{S}_k \quad (3.11)$$

Nous avons appliqué l'identité du produit dyadique suivante, pour trois vecteurs quelconques \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{w}) \quad (3.12)$$

avec \otimes l'opérateur de produit dyadique défini à l'annexe A. Suite aux propriétés de commutativité du produit scalaire, l'équation (3.11) est réécrite sous la forme suivante :

$$\vec{F}_{m_k} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \left(\int_{S_k} \ddot{\vec{x}}_n \cdot \vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k \right) \quad (3.13)$$

Comme l'accélération de la bulle s'applique à son centre de masse et non pas sur sa surface, l'équation (3.11) s'exprime comme suit :

$$\vec{F}_{m_k} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \ddot{\vec{x}}_n \cdot \left(\int_{S_k} \vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k \right) \quad (3.14)$$

Soit $\overline{\overline{C_{nk}}}$ le tenseur défini par :

$$\overline{\overline{C_{nk}}} = -\frac{3}{4\pi a_k^3} \int_{S_k} \vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k \quad (3.15)$$

L'indice nk réfère au fait que $\overline{\overline{C_{nk}}}$ est le tenseur de masse ajoutée calculé à la surface de la bulle k , proportionnelle à l'accélération $\ddot{\vec{x}}_n$ de la $n^{\text{ème}}$ bulle.

Comme nous l'avons mentionné en tout début de ce chapitre, on pose l'hypothèse que les bulles dans le nuage sont indéformables et en mouvement de translation. Ainsi, la fonction $\vec{\varphi}_n$ est définie par un vecteur à 3 dimensions qui est une fonction des positions de toutes les bulles dans le nuage (c.-à-d. $\vec{\varphi}_n(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n, \dots, \vec{x}_{N_b})$). Par conséquent, le tenseur de la masse ajoutée $\overline{\overline{C_{nk}}}$ est défini par une matrice de dimension 3×3 qui ne dépend que de la distribution spatiale des bulles.

En incluant le tenseur $\overline{\overline{C_{nk}}}$ (3.15) dans l'équation (3.14), la force de masse ajoutée s'écrit

comme suit :

$$\vec{F}_{m_k} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{n=1}^{N_b} \overline{\overline{C_{nk}}} \cdot \ddot{\vec{x}}_n \quad (3.16)$$

$$= \underbrace{-\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \left(0.5\overline{\overline{I}} \right) \cdot \ddot{\vec{x}}_k}_{\text{terme1}} \underbrace{-\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \left(\overline{\overline{C_{kk}}} - 0.5\overline{\overline{I}} \right) \cdot \ddot{\vec{x}}_k}_{\text{terme2}} \underbrace{-\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \overline{\overline{C_{nk}}} \cdot \ddot{\vec{x}}_n}_{\text{terme3}} \quad (3.17)$$

où le tenseur $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur unitaire représenté par une matrice (3×3) définie comme suit :

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

- Le premier terme de l'équation (3.17) est équivalent à la force de la masse ajoutée pour une bulle isolée [55].
- Le deuxième terme de l'équation (3.17) est la composante de la force de masse ajoutée proportionnelle à l'accélération de la bulle k , générée par la présence des bulles voisines.
- Le troisième terme de l'équation (3.17) représente la composante de la force de masse ajoutée induite par la présence des bulles voisines, proportionnelle à leurs accélérations.

Afin de mieux illustrer ces trois composantes, imaginons un cas purement hypothétique d'une bulle isolée de référence qui accélère dans un écoulement liquide. En absence d'autres bulles, la force de la masse ajoutée qui agit sur cette bulle est égale au premier terme de l'équation (3.17). Ensuite, cette bulle rencontre un groupe de bulles qui ne bougent pas (une hypothèse théorique considéré à titre d'un exercice de pensée) ou qui suivent un mouvement rectiligne uniforme (leurs accélérations sont nulles). Ainsi, la présence de ces bulles perturbe le fluide autour de la bulle de référence. Ceci induit un terme supplémentaire à la force de masse ajoutée décrit par la deuxième composante. C'est-à-dire, le terme 2 de l'équation (3.17) résulte de l'accélération de la bulle de référence et de la distribution spatiale des autres bulles. Finalement, si les bulles voisines accélèrent, ceci produit une masse ajoutée additionnelle décrite par le terme 3. Cette dernière dépend de la distribution spatiale des bulles et de leurs accélérations.

3.1.2 Le développement de la force de Meshchersky

La deuxième composante $\vec{F}_{k(II)}$, de l'équation (3.10), résulte de la dépendance de la fonction vectorielle $\vec{\varphi}_n$ par rapport à la distribution spatiale des bulles :

$$\vec{F}_{k(II)} = \rho_\ell \int_{S_k} \sum_{n=1}^{N_b} \left(\frac{D\vec{\varphi}_n}{Dt} \cdot \dot{\vec{x}}_n \right) d\vec{S}_k \quad (3.19)$$

Comme nous avons considéré des bulles de surfaces indéformables, les limites de l'intégrale sur la surface de la bulle sont indépendantes du temps et de l'espace. Ainsi, l'identité présentée par l'équation (3.12) mène à exprimer la force (3.19) comme suit :

$$\vec{F}_{k(II)} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \dot{\vec{x}}_n \cdot \left(\int_{S_k} \frac{D\vec{\varphi}_n}{Dt} \otimes d\vec{S}_k \right) \quad (3.20)$$

On peut réécrire la force $\vec{F}_{k(II)}$ de la façon suivante :

$$\vec{F}_{k(II)} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \dot{\vec{x}}_n \cdot \left[\int_{S_k} \frac{D}{Dt} (\vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k) \right] - \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \dot{\vec{x}}_n \cdot \left(\int_{S_k} \vec{\varphi}_n \otimes \frac{D}{Dt} d\vec{S}_k \right) \quad (3.21)$$

Or, comme on traite des bulles indéformables, le deuxième terme de cette équation est nul. De plus, en appliquant la règle d'intégration de Leibniz présentée à l'annexe A, comme les bornes d'intégration sont indépendantes du temps et de l'espace, l'équation (3.21) se réécrit de la façon suivante :

$$\vec{F}_{k(II)} = \rho_\ell \sum_{n=1}^{N_b} \dot{\vec{x}}_n \cdot \left[\frac{D}{Dt} \int_{S_k} (\vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k) \right] \quad (3.22)$$

À partir de la définition du tenseur de la masse ajoutée $\overline{\overline{C_{nk}}}$, donné par l'équation (3.15), cette dernière équation se réécrit comme suit :

$$\vec{F}_{k(II)} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{n=1}^{N_b} \dot{\vec{x}}_n \cdot \frac{D\overline{\overline{C_{nk}}}}{Dt} \quad (3.23)$$

Par conséquent, la force $\vec{F}_{k(II)}$ résulte de la variation de la masse ajoutée de la bulle k induite par la présence d'autres bulles dans le nuage. Ainsi, cette force définit l'effet Meshchersky \vec{F}_{M_k} , que subit la $k^{\text{ème}}$ bulle et qui se réécrit comme suit :

$$\vec{F}_{k(II)} = \vec{F}_{M_k} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{n=1}^{N_b} \frac{D\overline{\overline{C_{nk}}}}{Dt} \cdot \dot{\vec{x}}_n \quad (3.24)$$

À partir de l'équation (3.15) ainsi que la définition de la fonction potentiel $\vec{\varphi}_n$, le tenseur de masse ajoutée $\overline{\overline{C_{nk}}}$ dépendant seulement des positions de toutes les bulles dans l'écoulement. Par conséquent, la règle de la dérivation en chaîne nous permet d'exprimer la dérivée temporelle du tenseur de la masse ajoutée de la manière suivante :

$$\frac{D\overline{\overline{C_{nk}}}}{Dt} = \sum_{p=1}^{N_b} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{pi}} \cdot \dot{x}_{pi} \quad (3.25)$$

où $\sum_{p=1}^{N_b}$ est une sommation sur toutes les bulles de l'écoulement et $\sum_{i=1}^3$ est la sommation des composantes des vecteurs dans les trois directions du repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ainsi, l'équation (3.24) se réécrit comme suit :

$$\vec{F}_{M_k} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{n=1}^{N_b} \sum_{p=1}^{N_b} \sum_{i=1}^3 \dot{\vec{x}}_n \cdot \left(\frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{pi}} \cdot \dot{x}_{pi} \right) \quad (3.26)$$

Ainsi, comme l'indique cette dernière équation, la force de Meshchersky, pour une bulle dans un nuage, est une conséquence de la variation spatiale de la masse ajoutée, induite par la présence des bulles voisines.

En conclusion, à partir de la théorie des écoulements potentiels, nous avons déduit la force exercée par le fluide sur la particule générée par la partie instationnaire de la pression. Cette approche nous a permis d'exprimer l'effet de la présence des bulles sur la masse ajoutée. Ainsi, pour une bulle dans un nuage, deux composantes s'ajoutent sur l'expression, bien connue, de la masse ajoutée pour une bulle isolée. La première composante définit l'effet, proportionnel à l'accélération propre de la bulle, de la présence des bulles voisine sur sa masse ajoutée. La seconde composante définit la force de la masse ajoutée induite par la présence des autres bulles dans l'écoulement, proportionnelle à leurs accélérations. De plus, nous avons constaté que le tenseur de la masse ajoutée pour une bulle dans un nuage, est défini par une matrice de dimension 3×3 et qui varie en fonction de la distribution spatiale des bulles. Cette fluctuation de la masse ajoutée produit une interaction hydrodynamique de type Meshchersky [29].

En général, la force de Meshchersky [29] est souvent définie comme la rétroaction de la variation temporelle de la masse d'un système sur son mouvement. Elle est utilisée dans plusieurs domaines d'étude tels que la description de la dynamique des fusées [87] et des objets célestes [81], l'analyse des interactions entre les galaxies [82], le cadre de la relativité générale d'Einstein [83] et la description du mouvement de certaines créatures marines [88].

Cependant, dans cette étude purement analytique, nous avons démontré que pour une bulle dans un nuage, l'effet Meshchersky est généré par la variation spatiale de la masse ajoutée

produite par la présence des autres bulles. L'effet de la variation de la masse ajoutée sur l'hydrodynamique d'une paire de bulles a été évoqué par Milne et Thomson [17] et Biesheuvel et Van Wijngaarden [26]. Toutefois, la quantification et le développement de l'expression explicite de l'effet Meshchersky représentent une innovation dans l'analyse de la physique des nuages de bulles. Par conséquent, dans la modélisation des écoulements diphasiques à petites bulles, le fait d'inclure la variation de la masse ajoutée, nous permet de traiter les bulles comme étant un système à masse variable. Ainsi, prendre en compte la force de Meshchersky, donnée par l'équation (3.26), dans les équations de mouvement des bulles, permet une meilleure représentation de la physique qui régit les interactions hydrodynamiques entre les bulles dans un nuage.

3.1.3 L'analyse théorique de l'effet de la force de Meshchersky

À partir des observations dans la littérature sur le comportement de la masse ajoutée, nous allons discuter des effets possibles de la force de Meshchersky sur l'interaction hydrodynamique pour le cas de deux bulles. Afin de différencier les deux bulles, nous avons utilisé les indices 1 et 2. Le premier cas consiste à considérer que la bulle 1 est en mouvement vers la bulle 2, qui est au repos, sans présence de forces extérieures. Dans un tel scénario, Milne-Thomson [17] affirme que la masse ajoutée de la bulle 1 accroît en se rapprochant de la bulle 2. À partir de l'équation de Meshchersky, lorsque la bulle 2 est au repos, on a :

$$\vec{F}_{M_1} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \frac{D\overline{C}_{12}}{Dt} \cdot \dot{\vec{x}}_1 \quad (3.27)$$

Afin de simplifier cet analyse, nous allons considérer la forme courante de la masse ajoutée dont le tenseur \overline{C}_{12} est défini par par une matrice diagonale de composantes égales ($\overline{C}_{12} = C_{12}\overline{\overline{I}}$). Ainsi, la force de Meshchersky s'écrit :

$$\vec{F}_{M_1} = -\rho_\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \overline{\overline{I}} \frac{DC_{12}}{Dt} \cdot \dot{\vec{x}}_1 \quad (3.28)$$

Où C_{12} est le coefficient de la masse ajoutée de la bulle 1, induit par la présence de la bulle 2.

Par conséquent, lorsque la masse ajoutée accroît, le signe du facteur $\frac{DC_{12}}{Dt}$ est positif (> 0), la force de Meshersky agit dans la direction inverse du mouvement de la bulle 1.

Ceci peut être expliqué par une simple analyse énergétique. En effet, la masse ajoutée résulte de l'énergie cinétique dans le liquide due au mouvement des bulles. Par conséquent, si une bulle se déplace vers une autre bulle, sans l'existence de forces extérieures, l'énergie totale

du système doit demeurer constante. Ainsi, lorsque la masse ajoutée de la bulle augmente, sa vitesse doit diminuer. La force de Meshchersky agit ainsi comme une force répulsive afin de conserver l'énergie.

Le deuxième cas analysé, illustré à la figure 3.1, est basé sur les observations de Simcik et al. [72] à partir des simulations numériques directes de l'écoulement autour de deux bulles qui accélèrent dans la direction verticale. Leurs résultats numériques ont montré que la variation de la masse ajoutée ne dépend pas seulement de la distance qui sépare les bulles, mais aussi de leur orientation par rapport à l'accélération. L'axe central, de deux bulles, est défini par la ligne qui traverse leurs centres de masse. Ainsi, dans la figure 3.1, l'angle θ présente l'orientation de l'accélération par rapport à l'axe central. Selon Simcik et al. [72], pour $\theta = 0^\circ$, lorsque la distance entre les bulles diminue, leur masse ajoutée augmente. On s'attend ainsi à un effet répulsif de la force de Meshchersky. Pour $\theta = 90^\circ$, la masse ajoutée des bulles décroît lorsque les bulles se rapprochent. Dans cette situation le signe du facteur $\frac{DC_{12}}{Dt}$ serait négatif et la force de Meshchersky serait attractif.

Pour un angle θ quelconque, lorsque la distance entre les bulles décroît, la masse ajoutée varie de la valeur limite verticale ($\theta = 90^\circ$) vers la valeur limite horizontale ($\theta = 0^\circ$) en passant par un angle critique $\theta = 30^\circ$ pour lequel le coefficient de la masse ajoutée $C_{12} = 0.5$. Cette dernière valeur définit la valeur du coefficient de la masse ajoutée pour une bulle isolée. Dans une telle situation, on s'attend ainsi à ce que lorsque $\theta < 30^\circ$, l'effet répulsif de la force de Meshchersky soit dominant et pour $\theta > 30^\circ$, c'est l'effet attractif qui l'emporte. De plus, pour $\theta = 30^\circ$, il y aura probablement des fluctuations entre les deux types d'interaction.

On conclut que la variation de la masse ajoutée est une fonction qui dépend de la distance qui sépare les bulles ainsi que de leur orientation par rapport à leurs accélérations. Par conséquent, en fonction de la distribution des bulles, la force de Meshchersky peut jouer le rôle soit d'une force répulsive soit d'une force attractive.

Dans la section suivante, nous avons développé un modèle lagrangien qui résout les équations de mouvement d'un groupe de bulle. Ce modèle permettra d'évaluer numériquement la contribution de la force de Meshchersky dans les interactions hydrodynamiques d'une paire de bulles, ainsi que son rôle sur la dynamique d'un nuage.

Au chapitre suivant, nous allons définir la force de Meshchersky en description eulérienne et nous allons l'intégrer dans un modèle Euler-Euler afin d'évaluer son effet sur la dispersion de l'écoulement à bulles.

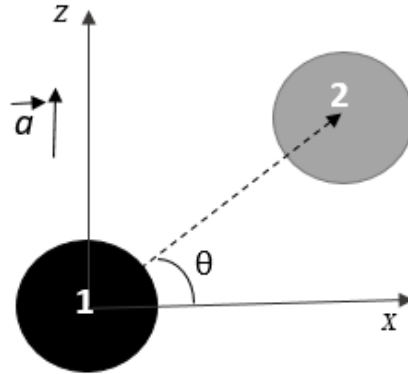


Figure 3.1 Systèmes de coordonnées pour les deux bulles sphériques.

3.2 L'analyse numérique de l'effet de la force de Meshchersky

Nous avons développé un modèle lagrangien afin d'analyser l'effet de la force de Meshchersky sur la dynamique d'un nuage de bulles. En effet, dans la modélisation lagrangienne, on suit le mouvement de chacune des bulles dans l'écoulement. Par conséquent, nous disposons de l'information de la distribution spatiale du nuage à chaque instant. Cette information est nécessaire afin de modéliser adéquatement les effets générés par la force de Meshchersky sur le nuage.

Ainsi, nous avons résolu les équations de mouvement des bulles décrites dans la section 2.4.1. Nous avons considéré que le seul couplage entre l'écoulement liquide et les bulles est à travers les forces d'interactions hydrodynamiques. En effet, d'une manière générale, les forces qui agissent sur une bulle en translation dans un fluide continu sont données par l'équation (2.53). Cependant, dans notre analyse, nous avons traité des bulles dans un milieu infini. Par conséquent, nous n'avons pas considéré l'effet de la paroi sur le mouvement.

De plus, l'objectif de cette étude est d'évaluer l'influence de la variation de la masse ajoutée à travers la force de Meshchersky. De ce fait, nous avons ajouté la force de Meshchersky \vec{F}_M dans l'équation de mouvement des bulles. En outre, les études numériques de Zhang et al. [47] ont montré que le modèle de turbulence et la force de portance influencent la dispersion transversale de nuages de bulles. Comme notre objectif est d'isoler la contribution de la force de Meshchersky sur la dispersion diphasique, nous allons considérer que l'écoulement est laminaire et nous avons négligé l'effet de la force de portance. Par conséquent, l'équation de

mouvement des bulles décrites par l'équation (2.52) devient :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_D + \vec{F}_m + \vec{F}_M \quad (3.29)$$

Pour le calcul de la force de masse ajoutée, nous avons considéré la forme de la force de masse ajoutée développée dans l'équation (3.17). Les choix des modèles utilisés pour le calcul des forces de masse ajoutée et de la traînée seront présentés, respectivement, aux sections (3.2.1) et (3.2.3).

3.2.1 Le choix du modèle de la force de la masse ajoutée

En description lagrangienne, le coefficient de la masse ajoutée est généralement considéré égal à 0.5. Cependant, l'effet de la variation de la masse ajoutée due à la présence de bulles voisines est souvent négligé. Dans Zoghliami et al. [25], nous avons évalué le rôle de la variation de masse ajoutée sur l'hydrodynamique des bulles et l'importance d'inclure ce mécanisme afin d'améliorer la physique des résultats numériques.

Les trois modèles énoncés dans la section 2.6 considèrent l'effet, sur la masse ajoutée, de la distribution spatiale des bulles dans le nuage. Il est ainsi possible de les utiliser afin d'évaluer l'effet du premier terme de l'équation (3.26) de la force de Meshchersky. Le modèle de Béguin et al. [18] tient compte de l'effet induit, proportionnel à l'accélération de bulles voisines. Cet effet n'a pas été considéré dans les corrélations de Van Wijngaarden [11] et Simcik et al. [72]. Ainsi, le modèle de Béguin et al. [18], nous permet d'avoir une représentation plus complète pour évaluer l'effet de la force de Meshchersky que nous avons développé dans la section (3.1).

3.2.2 Le développement du tenseur de la masse ajoutée

Le modèle de Béguin et al. [18], décrit par l'équation (2.86), représente une approximation de la force de masse ajoutée développée précédemment dans l'équation (3.17). En effet, pour inclure l'effet de la présence de bulles sur la masse ajoutée, Béguin et al. [18] ont posé l'hypothèse que cet effet est égal à la somme des masses ajoutées induites par paire de bulles. Afin de calculer la force de Meshchersky, nous devons, tous d'abord, construire le tenseur de la masse ajoutée \overline{C}_{nk} à partir des coefficients de la corrélation (2.86). Ainsi, nous avons élaboré l'équation (2.86), afin de l'exprimer sous une forme équivalente à la forme de l'équation (3.17). En d'autres termes, nous devons déterminer les composantes des tenseurs \overline{C}_{nk} et $\overline{C}_{nk_{ind}}$ en fonction des coefficients $C_{nk_{\perp}}$, $C_{nk_{//}}$, $C_{nk_{\perp ind}}$ et $C_{nk_{// ind}}$, de la corrélation (2.86).

Pour y parvenir, nous avons noté par i et $j = 1, 2, 3$ les indices respectifs aux trois directions

du repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le composante de la force de masse ajoutée, suivant la direction \vec{e}_i , s'exprime ainsi comme suit :

$$\left(\vec{F}_{mk}\right)_i = -\rho_\ell \frac{4\pi a^3}{3} \left[0.5 \left(\ddot{\vec{x}}_k\right)_i + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \sum_{j=1}^3 \left(\overline{C_{nk}}\right)_{ij} \cdot \left(\ddot{\vec{x}}_k\right)_j + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \sum_{j=1}^3 \left(\overline{C_{nk_{\text{ind}}}}\right)_{ij} \cdot \left(\ddot{\vec{x}}_n\right)_j \right] \quad (3.30)$$

Où $\left(\overline{C_{nk}}\right)_{ij}$ est la composante du tenseur $\left(\overline{C_{nk}}\right)$ ($i, j = 1, 2, 3$) et $\left(\ddot{\vec{x}}_k\right)_j$ est la composante du vecteur accélération de la bulle k dans la direction \vec{e}_j .

Dans l'équation (2.87), à partir de la définition du produit scalaire entre deux vecteurs on a :

$$\left\| \ddot{\vec{x}}_k \right\| \cos \alpha_{kn} \vec{N}_{kn} = \left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \vec{N}_{kn} \right) \vec{N}_{kn} \quad (3.31)$$

et,

$$\left\| \ddot{\vec{x}}_k \right\| \sin \alpha_{kn} \vec{T}_{kn} = \ddot{\vec{x}}_k - \left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \vec{N}_{kn} \right) \vec{N}_{kn} \quad (3.32)$$

La définition des vecteurs \vec{N}_{kn} , \vec{T}_{kn} et l'angle α_{kn} ont été illustrés précédemment à la figure 2.5.

De cette manière, l'équation (2.87) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{kn} &= \left(C_{nk_\perp} - \frac{1}{2} \right) \left[\ddot{\vec{x}}_k - \left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \vec{N}_{kn} \right) \vec{N}_{kn} \right] + \left(C_{nk_{//}} - \frac{1}{2} \right) \left[\left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \vec{N}_{kn} \right) \vec{N}_{kn} \right] \\ &= \left(C_{nk_\perp} - \frac{1}{2} \right) \left[\ddot{\vec{x}}_k - \left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \frac{\vec{r}_{kn}}{r_{kn}} \right) \frac{\vec{r}_{kn}}{r_{kn}} \right] + \left(C_{nk_{//}} - \frac{1}{2} \right) \left[\left(\ddot{\vec{x}}_k \cdot \frac{\vec{r}_{kn}}{r_{kn}} \right) \frac{\vec{r}_{kn}}{r_{kn}} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

où \vec{r}_{kn} est le vecteur position relative entre les bulles k et n donné par $\vec{r}_{kn} = \vec{x}_k - \vec{x}_n = r_{kn} \vec{N}_{kn}$. Ainsi, la composante i du vecteur \vec{f}_{kn} s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\vec{f}_{kn}\right)_i &= \left[C_{nk_\perp} - \frac{1}{2} + \left(C_{nk_{//}} - C_{nk_\perp} \right) \frac{(\vec{r}_{kn})_i^2}{r_{kn}^2} \right] \left(\ddot{\vec{x}}_k\right)_i \\ &+ \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \left(C_{nk_{//}} - C_{nk_\perp} \right) \frac{(\vec{r}_{kn})_j (\vec{r}_{kn})_i}{r_{kn}^2} \right] \left(\ddot{\vec{x}}_k\right)_j \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nous avons suivi le même processus afin d'exprimer la composante i du terme $\vec{f}_{nk_{\text{ind}}}$ donnée par l'équation (2.88) de cette manière :

$$\begin{aligned} \left(\vec{f}_{nk_{\text{ind}}}\right)_i &= \left[\left(C_{nk_{//\text{ind}}} - C_{nk_{\perp\text{ind}}} \right) \frac{(\vec{r}_{nk})_i^2}{r_{kn}^2} \right] \left(\ddot{\vec{x}}_n\right)_i \\ &+ \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \left(C_{nk_{//\text{ind}}} - C_{nk_{\perp\text{ind}}} \right) \frac{(\vec{r}_{nk})_j (\vec{r}_{nk})_i}{r_{kn}^2} \right] \left(\ddot{\vec{x}}_n\right)_j \end{aligned} \quad (3.35)$$

À partir de l'équation (3.34), les composantes du tenseur $\overline{\overline{C_{nk}}}$ s'expriment selon la forme suivante :

$$\overline{\overline{C_{nk}}}_{ii} = C_{nk_{\perp}} - \frac{1}{2} + \left(C_{nk_{//}} - C_{nk_{\perp}} \right) \frac{(\vec{r}_{kn})_i^2}{r_{kn}^2} \quad (3.36)$$

$$\overline{\overline{C_{nk}}}_{ij} = \left(C_{nk_{//}} - C_{nk_{\perp}} \right) \frac{(\vec{r}_{kn})_j (\vec{r}_{kn})_i}{r_{kn}^2} \quad (3.37)$$

À partir de l'équation (3.35), les composantes du tenseur $\overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}$ s'expriment ainsi :

$$\overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}_{ii} = \left(C_{nk_{\perp ind}} - C_{nk_{// ind}} \right) \frac{(\vec{r}_{nk})_i^2}{r_{kn}^2} \quad (3.38)$$

$$\overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}_{ij} = \left(C_{nk_{\perp ind}} - C_{nk_{// ind}} \right) \frac{(\vec{r}_{nk})_j (\vec{r}_{nk})_i}{r_{kn}^2} \quad (3.39)$$

Ensuite, grâce à l'hypothèse considérant que les tenseurs de masse ajoutée $\overline{\overline{C_{nk}}}$ et de masse ajoutée induite $\overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}$ ne dépendent que de la position des bulles n et k , l'équation (3.25) devient :

$$\frac{D\overline{\overline{C_{nk}}}}{Dt} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{kj}} \cdot \dot{x}_{kj} + \frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{nj}} \cdot \dot{x}_{nj} \right) \quad (3.40)$$

$$\frac{D\overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}}{Dt} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}}{\partial x_{kj}} \cdot \dot{x}_{kj} + \frac{\partial \overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}}{\partial x_{nj}} \cdot \dot{x}_{nj} \right) \quad (3.41)$$

Par conséquent, la force de Meshchersky donnée par l'équation (3.26) est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{M_k} = & -\rho\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{kj}} \cdot \dot{x}_{kj} + \frac{\partial \overline{\overline{C_{nk}}}}{\partial x_{nj}} \cdot \dot{x}_{nj} \right) \cdot \dot{\vec{x}}_k \\ & -\rho\ell \frac{4\pi a_k^3}{3} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{N_b} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}}{\partial x_{kj}} \cdot \dot{x}_{kj} + \frac{\partial \overline{\overline{C_{nk_{ind}}}}}{\partial x_{nj}} \cdot \dot{x}_{nj} \right) \cdot \dot{\vec{x}}_n \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dans l'équation précédente, $\sum_{j=1}^3$ désigne la sommation des composantes des vecteurs, dans les trois directions $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Afin de déterminer les limites de validité de l'hypothèse de considérer l'effet de la présence des bulles sur la masse ajoutée comme la somme des effets induits par paire de bulles, nous

avons comparé le calcul de la masse ajoutée obtenu par l'équation (3.30) et par un calcul direct. Ce dernier consiste à résoudre l'écoulement potentiel autour des bulles par la méthode décrite dans la section 5.1. Les figures 3.2 et 3.3 illustrent les valeurs des coefficients de masse ajoutée dans la direction de l'accélération de la bulle noire, en fonction de la distance de séparation entre les bulles. Pour un petit nombre de bulles, la figure 3.3 nous indique que les résultats obtenus par les deux méthodes sont très proches. Par contre, en analysant un nombre de bulles plus grand, comme le montre la figure 3.2 pour une distribution hexagonale, la corrélation (3.30) surestime les valeurs de la masse ajoutée par rapport au calcul direct. En effet, lorsqu'on traite les interactions des bulles par paires, cela revient à négliger les effets des bulles intermédiaires. Or en réalité, l'existence de ces dernières présente un obstacle et réduit les interactions entre la paire de bulles. Par conséquent, le fait de les négliger revient à une surestimation des interactions entre les paires de bulles.

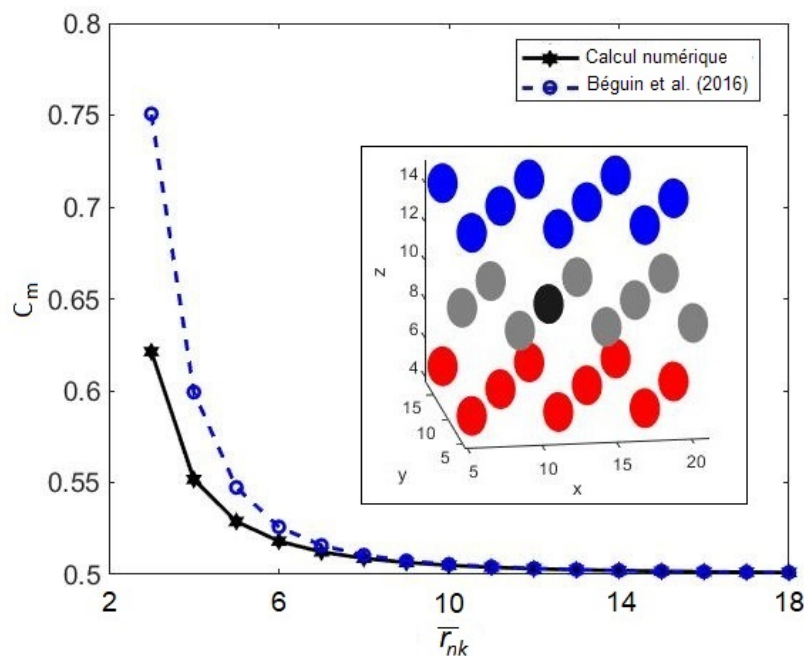


Figure 3.2 La comparaison des coefficients de masse ajoutée obtenus par l'équation (3.30) et le calcul direct par la résolution de l'écoulement potentiel autour de 27 bulles de rayon $a = 1$ mm, distribuées selon une configuration hexagonale.

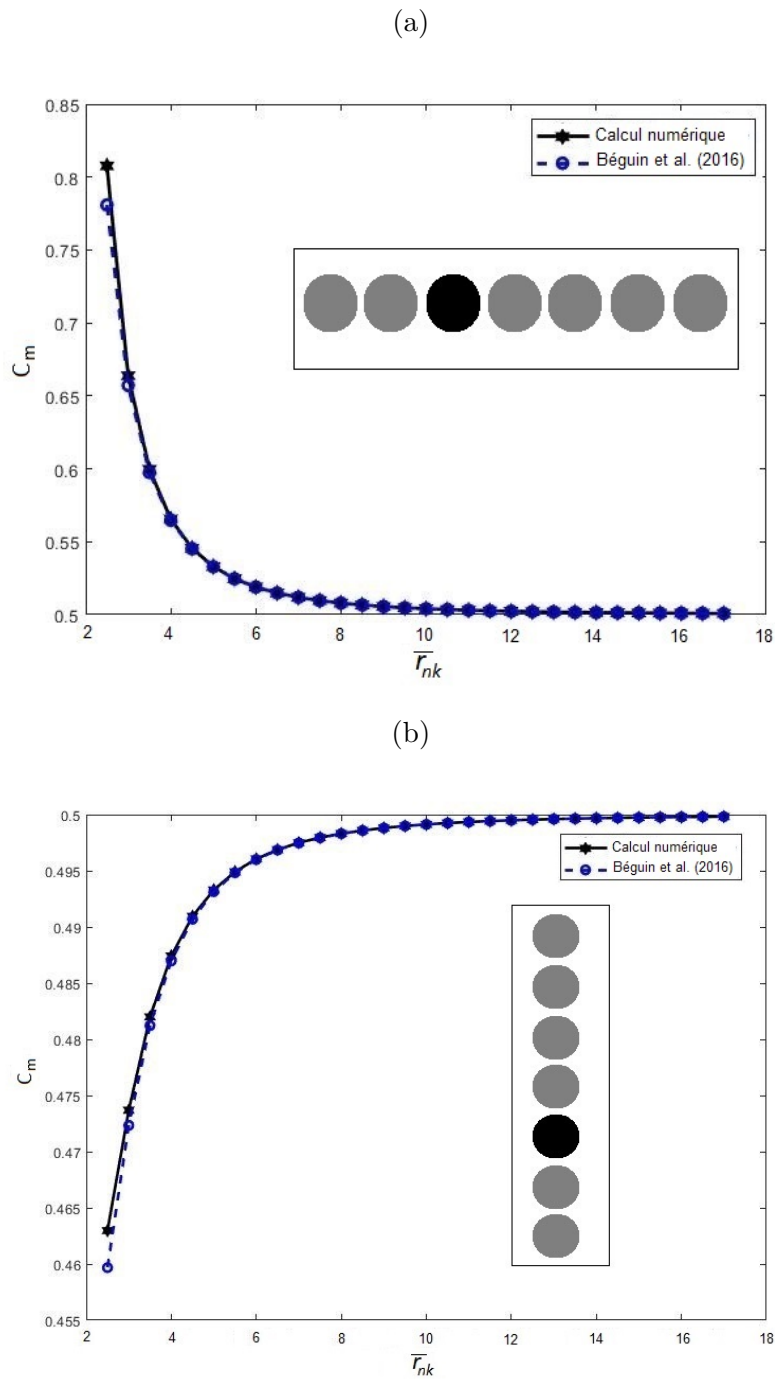


Figure 3.3 La comparaison des coefficients de masse ajoutée obtenus par l'équation (3.30) et le calcul direct par la résolution de l'écoulement potentiel autour de 7 bulles de rayon $a = 1$ mm, placées selon (a) l'horizontal (b) la vertical.

3.2.3 Le choix du modèle de la force de traînée

Dans la littérature, il existe des corrélations qui permettent de prendre en compte l'effet des bulles sur le coefficient de traînée [21, 66–71]. Cependant, l'objectif de cette étude est d'évaluer l'effet de la force de Meshchersky sur la dynamique du nuage et non pas de reproduire des données expérimentales. Ainsi, dans notre modèle, les seules interactions hydrodynamiques permises entre les bulles sont celles de la force de la masse ajoutée et la force de Meshchersky. Par conséquent, pour le calcul du coefficient de traînée, nous avons choisi l'utilisation d'une corrélation développée pour une bulle isolée qui ne considère pas l'effet des bulles voisines. Au tableau (3.1), nous avons comparé les valeurs des coefficients calculés par les différents modèles décrits dans la section 2.5, aux données expérimentales trouvées dans la littérature par Brown et Lawler [56]. La comparaison entre les corrélations a été établie par le calcul de l'écart quadratique moyen défini par l'expression suivante :

$$Erreur = \sqrt{\frac{1}{N_{pts}} \sum_1^{N_{pts}} \left(\frac{C_{D_{corrélation}} - C_{D_{expérimental}}}{C_{D_{expérimental}}} \right)^2} \quad (3.43)$$

où N_{pts} est le nombre total de points expérimentaux, $C_{D_{corrélation}}$ est la valeur du coefficient de traînée calculé à partir des corrélations et $C_{D_{expérimental}}$ est la valeur expérimentale du coefficient de traînée.

Tableau 3.1 Corrélations de coefficients de traînée

Corrélations	Erreur (%)
Schiller [61]	14.3
Clift et al. [1]	14.4
Mikhailov et Freire. [63]	15.6
Brown et Lawler [56]	37.5
Cheng [65]	35.8

Les corrélations, qui n'apparaissent pas au tableau (3.1), ont générée des valeurs d'erreurs qui dépassent les 50%. Les données du tableau (3.1) montrent que la corrélation de Schiller [61] présente l'erreur la plus petite. De plus à la figure 2.4, on observe que pour une bulle isolée la corrélation de Schiller [61] permet d'obtenir une bonne description des données expérimentales. Nous avons ainsi choisi d'utiliser cette corrélation pour effectuer nos calculs.

Comme notre objectif est d'analyser la contribution de la force de Meshchersky sur la dispersion des bulles, la précision de la corrélation du coefficient de traînée influencera le calcul de la vitesse d'ascension des bulles, mais n'aura pas d'effet important sur la dispersion des bulles.

3.2.4 Le modèle d'impact entre les bulles

Pour l'interaction directe bulle-bulle, on considère que l'impact est parfaitement élastique [89]. La figure 3.4 montre les paramètres du modèle d'impact. On définit par x l'axe d'impact et y l'axe orthogonal. Après l'impact, la composante de vitesse le long de l'axe y est conservée et la composante de vitesse le long de l'axe x est calculée à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. Les vitesses des bulles après l'impact \vec{U}'_1 et \vec{U}'_2 sont données par :

$$\begin{cases} U'_{1y} = U_{1y} \\ U'_{2y} = U_{2y} \\ U'_{1x} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) U_{1x} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) U_{2x} \\ U'_{2x} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) U_{1x} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) U_{2x} \end{cases} \quad (3.44)$$

Dans ce qui suit, nous avons considéré des bulles d'air identiques. Par conséquent, les bulles ont la même masse $m_1 = m_2$. Ainsi, $U'_{1x} = U_{2x}$ et $U'_{2x} = U_{1x}$.

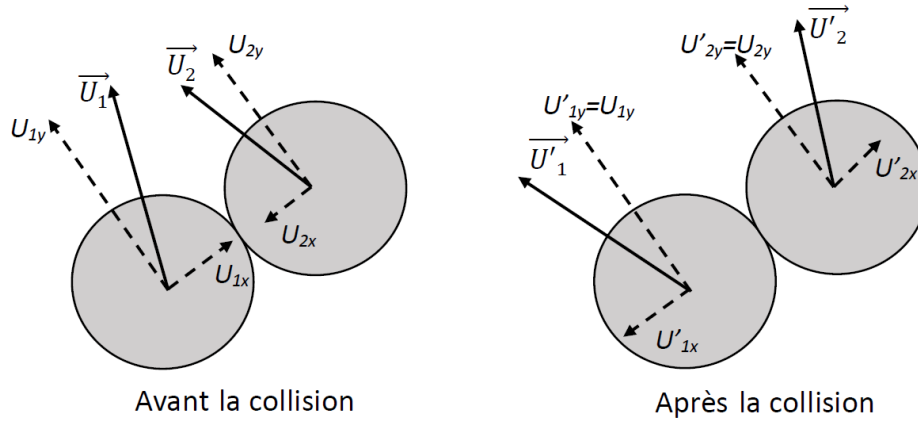


Figure 3.4 Impact bulle-bulle.

3.2.5 La méthode de résolution numérique

Pour résoudre les équations de mouvement des bulles (3.29), nous avons utilisé la solution numérique ode45 de Matlab. Ce dernier est une méthode numérique à pas variable. Elle utilise la méthode de Dormand-Prince [90] qui est basée sur une implémentation simultanée de deux méthodes explicites Runge-Kutta de quatrième et cinquième ordre. La différence entre les résultats des deux méthodes est alors considérée comme l'erreur de la solution

du quatrième ordre. Ainsi, à chaque itération, en comparant les solutions obtenues par les méthodes Runge-Kutta 4 et 5, on calcule le pas de temps optimal qui permet d'obtenir le taux de convergence choisi par l'utilisateur à l'entrée du code. Le fait que la méthode Dormand-Prince [90] ajuste le pas de temps à chaque itération selon la tolérance de contrôle d'erreur souhaitée, permet de maximiser la précision et l'efficacité du calcul. De plus, l'efficacité de cette méthode dans la résolution de plusieurs types de problèmes a été vérifiée [91–93]. En outre, cette méthode a été efficace dans la résolution de plusieurs modèles lagrangiens de forme similaire à l'équation (3.29) de notre problème [94–96].

L'équation (3.29) est une équation différentielle non linéaire d'ordre 2. Ainsi, nous l'avons réécrit sous la forme vectorielle suivante :

$$Y'(t) = f(Y(t)) \quad (3.45)$$

avec

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} (\dot{x}_1)_1 \\ (\dot{x}_1)_2 \\ (\dot{x}_1)_3 \\ \vdots \\ (\dot{x}_{N_b})_1 \\ (\dot{x}_{N_b})_2 \\ (\dot{x}_{N_b})_3 \\ (\ddot{x}_1)_1 \\ (\ddot{x}_1)_2 \\ (\ddot{x}_1)_3 \\ \vdots \\ (\ddot{x}_{N_b})_1 \\ (\ddot{x}_{N_b})_2 \\ (\ddot{x}_{N_b})_3 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} (\vec{x}_1)_1 \\ (\vec{x}_1)_2 \\ (\vec{x}_1)_3 \\ \vdots \\ (\vec{x}_{N_b})_1 \\ (\vec{x}_{N_b})_2 \\ (\vec{x}_{N_b})_3 \\ (\dot{\vec{x}}_1)_1 \\ (\dot{\vec{x}}_1)_2 \\ (\dot{\vec{x}}_1)_3 \\ \vdots \\ (\dot{\vec{x}}_{N_b})_1 \\ (\dot{\vec{x}}_{N_b})_2 \\ (\dot{\vec{x}}_{N_b})_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

et

$$f(Y(t)) = \begin{bmatrix} (Y)_{3Nb+1} = (\dot{\vec{x}}_1)_1 \\ (Y)_{3Nb+2} = (\dot{\vec{x}}_1)_2 \\ (Y)_{3Nb+3} = (\dot{\vec{x}}_1)_3 \\ \vdots \\ (Y)_{6Nb-2} = (\dot{\vec{x}}_{N_b})_1 \\ (Y)_{6Nb-1} = (\dot{\vec{x}}_b)_2 \\ (Y)_{6Nb} = (\dot{\vec{x}}_{N_b})_3 \\ \frac{1}{m_1} (\vec{F}_{f1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{M1})_1 \\ \frac{1}{m_1} (\vec{F}_{f1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{M1})_2 \\ \frac{1}{m_1} (\vec{F}_{f1} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{M1})_3 \\ \vdots \\ \frac{1}{m_{N_b}} (\vec{F}_{fN_b} + \vec{F}_{DN_b} + \vec{F}_{mN_b} + \vec{F}_{MN_b})_1 \\ \frac{1}{m_{N_b}} (\vec{F}_{fN_b} + \vec{F}_{D1} + \vec{F}_{mN_b} + \vec{F}_{MN_b})_2 \\ \frac{1}{m_{N_b}} (\vec{F}_{fN_b} + \vec{F}_{DN_b} + \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{MN_b})_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La notation $(Y)_i$ désigne la composante du vecteur Y selon la direction i avec $i = 1, 2, 3$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Ensuite, pour construire les méthodes Runge-Kutta, à chaque instant t^k , on calcul les coefficients suivants [90] :

$$k_1 = hf(t^k, Y^k) \quad (3.49)$$

$$k_2 = hf\left(t^k + \frac{1}{5}h, Y^k + \frac{1}{5}k_1\right) \quad (3.50)$$

$$k_3 = hf\left(t^k + \frac{3}{10}h, Y^k + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right) \quad (3.51)$$

$$k_4 = hf\left(t^k + \frac{4}{5}h, Y^k + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right) \quad (3.52)$$

$$k_5 = hf\left(t^k + \frac{8}{9}h, Y^k + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right) \quad (3.53)$$

$$k_6 = hf\left(t^k + h, Y^k + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 + \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right) \quad (3.54)$$

$$k_7 = hf\left(t^k + h, Y^k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right) \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

où h est le pas de temps et l'exposant k réfère à la discrétisation temporelle. Ainsi, Y^k est la valeur du vecteur Y à l'instant t^k .

Ainsi, à partir de ses coefficients, on construit la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 comme suit :

$$Y^{k+1} = Y^k + \left(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right) \quad (3.57)$$

Et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 est calculée ainsi :

$$Y^{k+1} = Y^k + \left(\frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7\right) \quad (3.58)$$

La méthode Runge-Kutta 5 est utilisée pour le contrôle du pas de temps h ainsi que l'erreur. On note par Y_{RK4}^{k+1} et Y_{RK5}^{k+1} les solutions respectives à partir des méthodes Runge-Kutta 4 et Runge-Kutta 5.

À l'initiation de la méthode de Dormand-Prince, nous devons préciser le pas de temps initial et les valeurs de la tolérance de contrôle d'erreur relative $Reltol$ et absolue $AbsTol$. À l'instant t^{k+1} , la condition de convergence est évaluée comme suit :

$$|Er| \leq \max(RelTol * |Y^{k+1}|, AbsTol) \quad (3.59)$$

où Er est l'écart relatif entre les solutions de deux itérations successives.

Tant qu'on n'atteint pas la condition de convergence souhaitée, le pas de temps optimal $h_{optimal}$, pour l'itération suivante, est calculé en multipliant le pas de temps adaptatif h par un coefficient s défini comme suit [97] :

$$s = \left(\frac{tol h}{2|Y_{RK5}^{k+1} - Y_{RK4}^{k+1}|} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.60)$$

Ainsi, nous avons réalisé plusieurs simulations avec des *Reltol* et des *Abstol* différents qui appartiennent à l'intervalle $[10^{-1}, 10^{-15}]$ et des pas de temps $h \in [10^{-1}, 10^{-6}]$. Nous avons choisi comme cas de référence, la simulation de deux bulles identiques de rayon $a = 1$ mm en ascension libre côte à côte sans vitesse initiale. Les paramètres de la simulation sont présentés dans le tableau 3.2. Les propriétés de l'eau et de l'air décrites sur ce tableau sont utilisées pour toutes les simulations présentées dans ce chapitre.

Tableau 3.2 Les propriétés physiques caractéristiques de l'écoulement au temps initial de la simulation de référence.

Phase	U_0 (m s ⁻¹)	a (m)	ρ (kg m ⁻³)	μ (Pa s)	σ (N m ⁻¹)
Liquide	0	-	1.0 10 ³	1.0 10 ⁻³	7.2 10 ⁻²
Gaz	0	1.0 10 ⁻³	1.2	18.5 10 ⁻⁶	

Nous avons constaté que le choix de pas de temps initial, n'affecte pas la précision des résultats. Cependant, pour des valeurs de pas de temps initiaux élevés, la durée de simulation est plus longue parce qu'elle nécessite plus d'itération afin d'aboutir au pas de temps optimal permettant d'atteindre la condition de convergence. La figure 3.5 est un exemple de l'évolution de la durée de la simulation pour *Reltol* = 10⁻⁸ et *Abstol* = 10⁻⁸. Ainsi, on constate que les durées de simulations les plus courtes sont obtenues pour $h \in [10^{-2}, 10^{-4}]$.

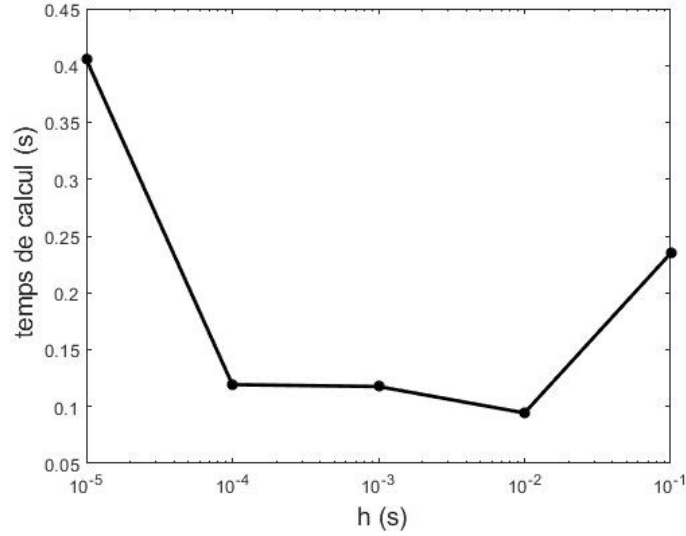


Figure 3.5 La durée de calcul en fonction du choix de pas de temps initial pour $Reltol = 10^{-8}$ et $Abstol = 10^{-8}$

La figure 3.6 illustre la variation du temps de calcul en fonction du $Abstol$ et $Reltol$ pour un pas de temps initial $h = 10^{-4}$ s. Sur cette figure, on observe que le temps de calcul augmente considérablement lorsque le taux de convergence est inférieur à 10^{-8} . Nous avons ensuite calculé les erreurs RMS entre deux simulations avec des valeurs de tolérances successives comme suit :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_{pt}} \sum_{t=0}^T (V_{tol2}(t) - V_{tol1}(t))^2} \quad (3.61)$$

où t est le temps, T est la durée totale de la simulation. Les variables V pour lesquelles nous avons analysé la précision sont les vitesses U_z et les positions verticales z . Ainsi, V_{tol2} est le résultat numérique pour la variable V obtenu à partir du taux de convergence V_{tol2} , V_{tol1} est le résultat numérique pour la variable V obtenu à partir du taux de convergence $V_{tol1} \in [10^{-4}, 10^{-15}]$ avec $V_{tol2} = 10^{-1}V_{tol1}$ et N_{pt} est la dimension du vecteur solution à la sortie du code.

La figure 3.7 illustre la variation de l'erreur RMS en fonction du taux de convergence. Cette figure montre que pour une tolérance égale à 10^{-8} , les RMS sont de l'ordre de 10^{-8} . Comme la valeur terminale de la vitesse d'ascension de bulles de rayon 1 mm est de l'ordre de 0.2 m/s, en 1 s la bulle parcourt une distance ≈ 0.2 m. On considère, ainsi, qu'une précision égale à 10^{-8} est largement suffisante pour le calcul des trajectoires et des vitesses des bulles tout en optimisant la durée de calcul. Par conséquent, nous avons utilisé la valeur $h = 10^{-4}$ s comme valeur initiale de pas de temps, $Reltol = 10^{-8}$ et $Abstol = 10^{-8}$ comme critère de

convergence dans nos prochaines simulations.

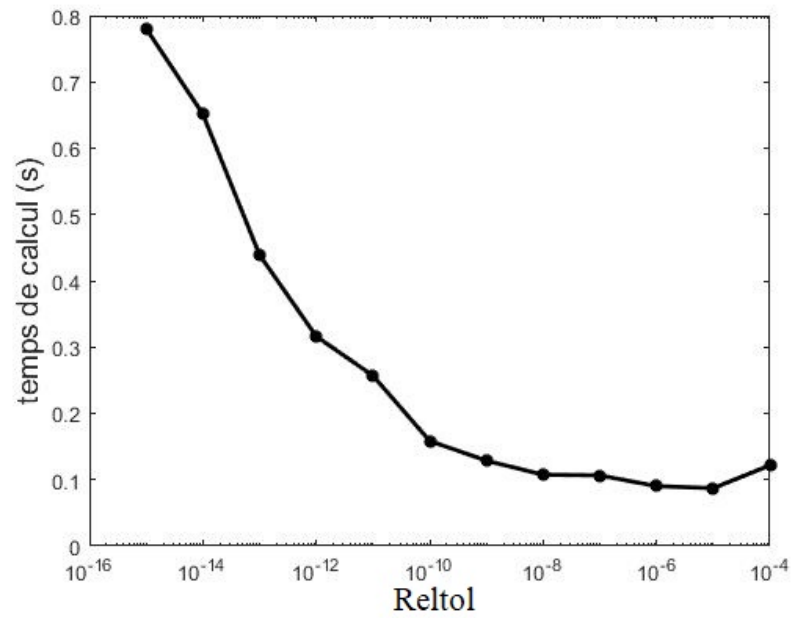


Figure 3.6 La durée de calcul en fonction de la tolérance de contrôle d'erreur.

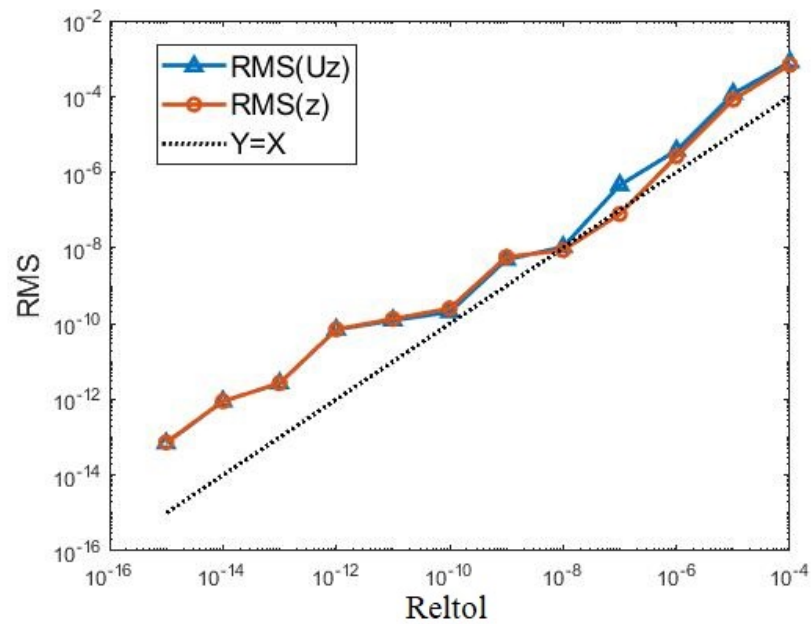


Figure 3.7 Les RMS en fonction de la tolérance de contrôle d'erreur.

3.2.6 Les résultats numériques

Afin d'évaluer le rôle de la force de Meshchersky dans un système contenant un grand nombre de bulles, nous devons comprendre son effet sur une paire de bulles. Nous résolvons les équations du mouvement pour deux bulles rigides sphériques identiques en ascension libre dans de l'eau stagnante. Les forces agissant sur les bulles sont la force de traînée, la force de flottabilité, la force de masse ajoutée et les forces résultantes des interactions hydrodynamiques bulle-bulle. Ces dernières contiennent les effets de la force de masse ajoutée induite et la force de Meshchersky.

a) Vitesse d'ascension terminale d'une bulle

Afin de valider le modèle numérique pour la résolution des équations de mouvement des bulles, nous avons comparé notre solution aux valeurs expérimentales $U_z \text{ exp}$ mesurées par Talaia [8]. En effet, Talaia [8] a injecté des bulles de différents diamètres, à vitesse initiale nulle, dans une colonne d'eau stagnante à une température égale à 20°C. La vitesse des bulles a été mesurée par des caméras vidéo rapides. Pour des bulles de rayons égales à 1 mm, les vitesses terminales mesurées sont situées dans l'intervalle 0.2 ± 0.02 m/s.

De plus, nous avons comparé les résultats de notre modèle numérique à une solution analytique obtenus pour le cas d'une bulle isolée. En effet, l'équation de mouvement des bulles 3.29 est une équation différentielle non linéaire d'ordre 2. La seule solution analytique possible est le cas d'une bulle isolée avec une masse ajoutée constante $C_m = 0.5$ et une approximation du coefficient de traînée C_D définie à partir de la corrélation de Stokes [57] comme suit :

$$C_D = \max \left(\frac{24}{Re_b}, 0.44 \right) \quad (3.62)$$

à la figure 2.4 qui indique l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds, on constate que l'approximation (3.62) revient à décrire C_D par la corrélation de Stokes jusqu'au point d'intersection avec la droite $C_D = 0.44$. Ce point d'intersection définit le Reynolds critique calculé comme suit [98] :

$$Re_c = \frac{24}{\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{g(\rho_\ell - \rho_g)}{\sigma}}} \quad (3.63)$$

où σ est la tension superficielle de l'eau.

L'équation de mouvement de la bulle pour un coefficient de masse ajoutée constant $C_m = 0.5$

est défini comme suit :

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\rho_g + 0.5\rho_\ell)\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_\ell C_D \pi a^2 U^2 - \frac{4}{3}\pi a^3(\rho_g - \rho_\ell)g \quad (3.64)$$

Pour

$$C_D = \frac{24}{Re_b} \quad (3.65)$$

En remplaçant le coefficient de traînée par son expression dans l'équation (3.64), on obtient :

$$\frac{4}{3}a^3(\rho_g + 0.5\rho_\ell)\frac{dU}{dt} = -6\mu_\ell a U - \frac{4}{3}a^3(\rho_g - \rho_\ell)g \quad (3.66)$$

ainsi,

$$\frac{dU}{\frac{9\mu_\ell}{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}U + \frac{(\rho_g - \rho_\ell)g}{\rho_g + 0.5\rho_\ell}} = -dt \quad (3.67)$$

L'intégrale de l'équation précédente est donnée par :

$$\log \left[\frac{9\mu_\ell}{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}U + \frac{(\rho_g - \rho_\ell)g}{\rho_g + 0.5\rho_\ell} \right] = -\frac{9\mu_\ell}{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}(t + cste) \quad (3.68)$$

ainsi, la vitesse d'ascension est calculée comme suit :

$$U = \frac{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}{9\mu_\ell} \left[e^{-\frac{9\mu_\ell}{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}(t + cste)} - \frac{(\rho_g - \rho_\ell)g}{\rho_g + 0.5\rho_\ell} \right] \quad (3.69)$$

où *cste* est une constante déterminée à partir de la condition initiale pour $t = 0$ s. Pour notre cas d'étude, la vitesse initiale de la bulle est nulle. Ainsi,

$$cste = \frac{-2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}{9\mu_\ell} \log \left[\frac{(\rho_g - \rho_\ell)g}{\rho_g + 0.5\rho_\ell} \right] \quad (3.70)$$

Par conséquent, la solution analytique pour la vitesse d'ascension d'une bulle isolée, relâchée sans vitesse initiale est définie comme suit :

$$U = \frac{2a^2(\rho_g - \rho_\ell)g}{9\mu_\ell} \left(e^{-\frac{9\mu_\ell}{2a^2(\rho_g + 0.5\rho_\ell)}t} - 1 \right) \quad (3.71)$$

Nous avons appliqué le même raisonnement pour $C_D = 0.44$ et nous avons obtenu l'expression

suivante :

$$U = \sqrt{\frac{8a(\rho_\ell - \rho_g)g}{3\rho_\ell C_D}} \left(1 - \frac{2}{1 - e^{\sqrt{\frac{3\rho_\ell(\rho_\ell - \rho_g)gC_D}{2a(\rho_g + 0.5\rho_\ell)^2}}t}} \right) \quad (3.72)$$

La figure 3.8 illustre une comparaison entre le résultat numérique et la solution analytique pour la vitesse d'ascension d'une bulle de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos. Les propriétés physiques caractéristiques de l'écoulement au temps initial de la simulation sont présentées au tableau 3.2. On constate sur cette figure que les valeurs numériques pour la vitesse d'ascension de la bulle appartiennent à la gamme des valeurs mesurées expérimentalement par Talaia [8]. De plus, la solution numérique montre un très bon accord avec la solution analytique. En fait, l'écart quadratique moyen (RMS) entre les deux solutions est de l'ordre de 10^{-5} m/s. La précision est suffisante pour assurer la validation de notre modèle numérique.

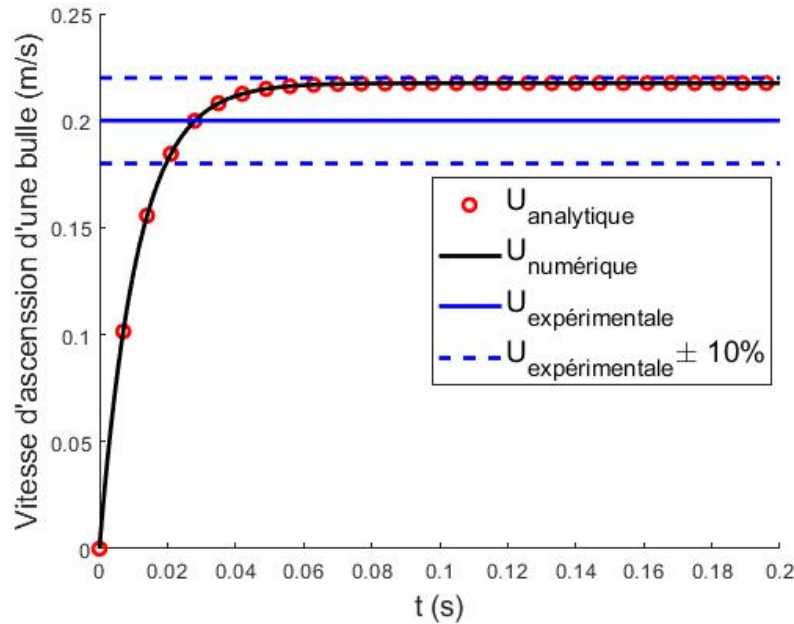


Figure 3.8 La comparaison de la vitesse d'ascension terminale d'une bulle de rayon $a = 1$ mm à la solution analytique et aux mesures expérimentales de Talaia [8].

b) Analyse d'un système contenant deux bulles

La figure 3.1 présente le système de coordonnées utilisé pour décrire les positions des bulles et leurs orientations relatives. Ainsi, nous avons noté, respectivement, par l'axe z et l'axe x les directions parallèle et orthogonale à la pesanteur. L'angle θ définit l'orientation relative des bulles par rapport à l'axe des x . Par conséquent, $\theta = 0^\circ$ lorsque les centres de masse des deux bulles sont placés sur l'axe des x et $\theta = 90^\circ$ lorsque les centres de masse des deux bulles sont alignés selon la direction z .

Cas de deux bulles placées côte à côte ($\theta = 0^\circ$) :

Nous avons analysé le mouvement de deux bulles d'air, identique de rayon a , placées horizontalement côte à côte dans de l'eau stagnante. Initialement, les deux bulles sont séparées par une distance $\Delta x_0 = 2.5a$. Dans un premier temps, nous avons imposé une vitesse initiale égale à $U_{0x} = 0.01$ m/s qui fait rapprocher les bulles l'une vers l'autre.

Aux figures 3.9, nous avons présenté respectivement les trajectoires des bulles (a) et la variation des composantes horizontales de leurs vitesses (b) avec et sans l'effet de la force de Meshchersky. On constate à la figure 3.9 (a) que les trajectoires des bulles sans et avec la force de Meshchersky sont différentes. En effet, en absence de l'effet de la force de Meshchersky, les deux bulles se rapprochent à cause de leurs vitesses horizontales initiales. Ensuite, la figure 3.9 (b) nous indique que cette composante de vitesse s'affaiblit à cause du frottement visqueux (la force de traînée) jusqu'à s'annuler. Les deux bulles continuent ainsi leurs mouvements selon une trajectoire verticale.

En incluant l'effet de la force de Meshchersky, nous observons l'apparition d'un nouveau type de comportement. En fait, comme dans la première situation, les deux bulles se rapprochent initialement sous l'effet de la vitesse initiale imposée. Cependant, à partir d'une certaine distance leurs vitesses au lieu de s'annuler, changent de direction et partent dans la direction opposée (voir la figure 3.9 (b)). La présence de l'effet Meshchersky repousse les bulles l'une de l'autre et produit un retard d'environ 1.5 à 2 s dans le comportement dynamique des bulles. Par conséquent, les deux bulles s'écartent jusqu'à atteindre une distance assez importante pour que l'effet Meshchersky s'affaiblisse et la force de traînée (le frottement visqueux) l'emporte sur leurs mouvements. À partir de cette distance, les composantes horizontales des vitesses des bulles s'annulent et elles continuent leurs mouvements selon la direction verticale. Par la suite, nous avons refait le même calcul en augmentant la valeur de la vitesse initiale horizontale à $U_{0x} = 0.02$ m/s. Aux figures 3.10, nous avons illustré la distance de séparation des bulles Δx (a) et les composantes horizontales des vitesses (b). On observe qu'en augmentant la valeur de la vitesse initiale, nous avons généré un impact pour le cas des bulles en ascension

sans l'effet de la force de Meshchersky. Ainsi, dans cette situation, à la figure 3.10 (a), on observe que les deux bulles se rapprochent, se touchent et s'écartent dues à l'effet de l'impact. De plus, à la figure 3.10 (b), on remarque que le changement des directions des vitesses est brusque après l'impact.

Par contre, lorsqu'on tient compte de la force de Meshchersky, les deux bulles se repoussent avant même de se toucher. De plus, la distance d'écartement est 46% plus importante que lorsqu'on néglige l'effet Meshchersky.

Par conséquent, on déduit à partir de ces observations que lorsque deux bulles se rapprochent horizontalement, la force de Meshchersky joue le rôle d'une force répulsive. Cette constatation confirme l'observation de Milne-Thomson [17] sur le fait que lorsque deux bulles se rapprochent horizontalement, leurs masses ajoutées augmentent, ainsi, une force répulsive surgie afin de conserver l'énergie totale du système. Notre modèle de force de Meshchersky permet ainsi de quantifier la constatation de Milne-Thomson [17].

L'effet répulsif de la force de Meshchersky contribue à la dispersion horizontale du taux de vide. De plus, il a un rôle important dans la diminution de probabilité de collision entre les petites bulles.

Cas de deux bulles avec $\theta = 90^\circ$:

Nous avons analysé le mouvement de deux bulles d'air sphériques, identiques de rayon a , placées de telle manière à ce que leur axe central soit parallèle à la direction verticale z . Initialement, les deux bulles sont au repos et séparées d'une distance $\Delta z_0 = 4a$. Aux figures 3.11, nous avons présenté l'évolution dans le temps de la distance de séparation verticale des deux bulles et la variation des composantes verticales de leurs vitesses avec et sans l'effet de la force de Meshchersky. Ainsi, on remarque que si on ne tient pas compte des effets de la force de Meshchersky, les deux bulles accélèrent dans la direction verticale avec des vitesses identiques, en gardant une distance de séparation constante. Cependant, on observe à la figure 3.11 (a), qu'en présence de l'effet Meshchersky, la distance de séparation verticale entre les deux bulles décroît au cours du temps. Par conséquent, la force de Meshchersky attire les bulles l'une vers l'autre. De plus, à la figure 3.11 (b), on constate que cet effet attractif entraîne l'accélération de la bulle inférieure et une décélération de la bulle supérieure. Ainsi, contrairement au cas précédent des bulles en ascension côte à côte, pour des bulles placées l'une derrière l'autre, la force de Meshchersky a un effet attractif.

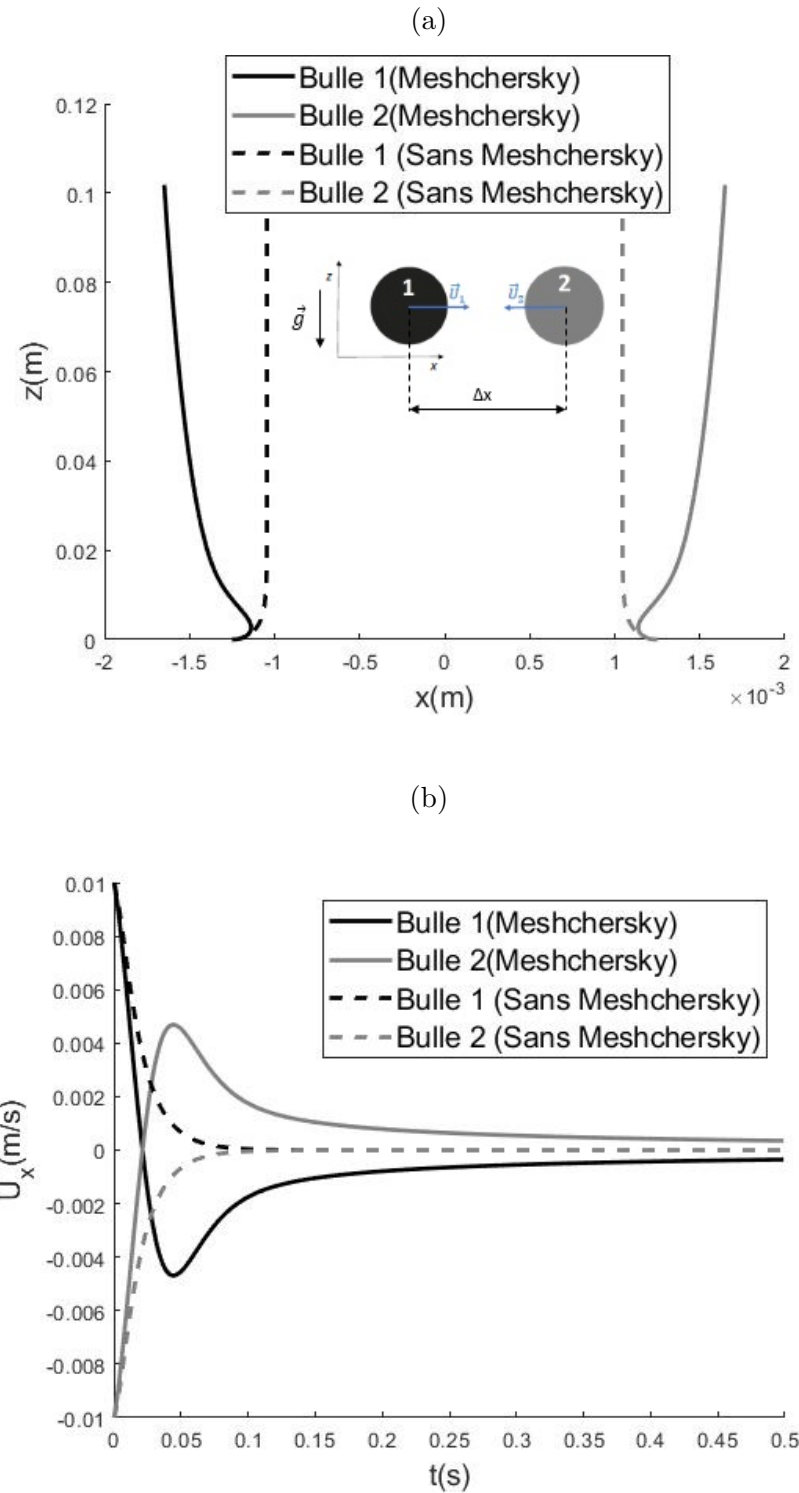


Figure 3.9 (a) Les trajectoires et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles en ascension côte à côte ($\theta = 0^\circ$), de rayon $a = 1 \text{ mm}$, séparées initialement de $\Delta x_0 = 2.5a$, avec une vitesse initiale $U_{0x} = 0.01 \text{ m/s}$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.

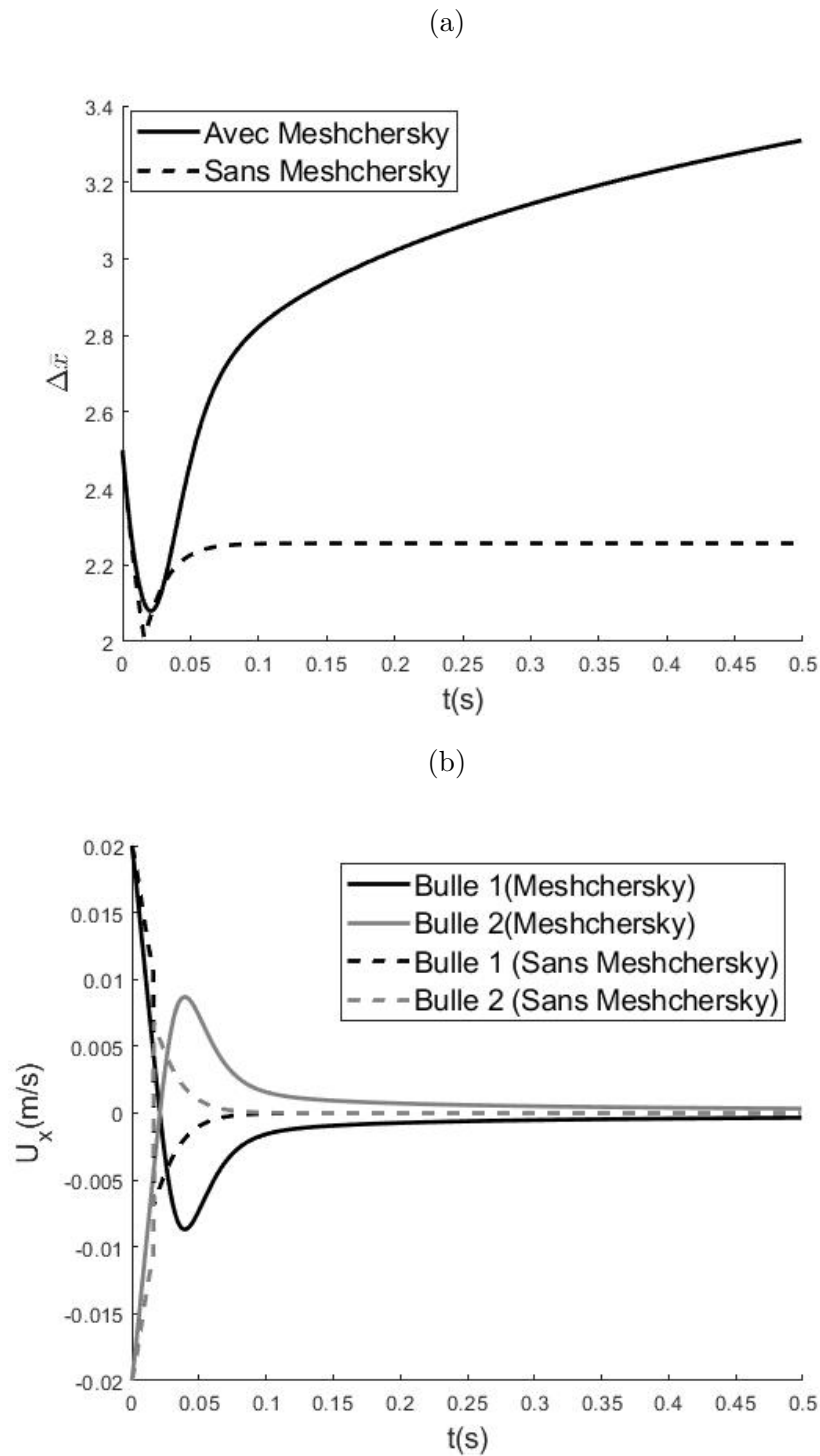


Figure 3.10 (a) La distance de séparation selon l'axe des x et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles en ascension côte à côte ($\theta = 0^\circ$), de rayon $a = 1$ mm, séparées initialement de $\Delta x_0 = 2.5a$, avec une vitesse initiale $U_{0x} = 0.02$ m/s, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.

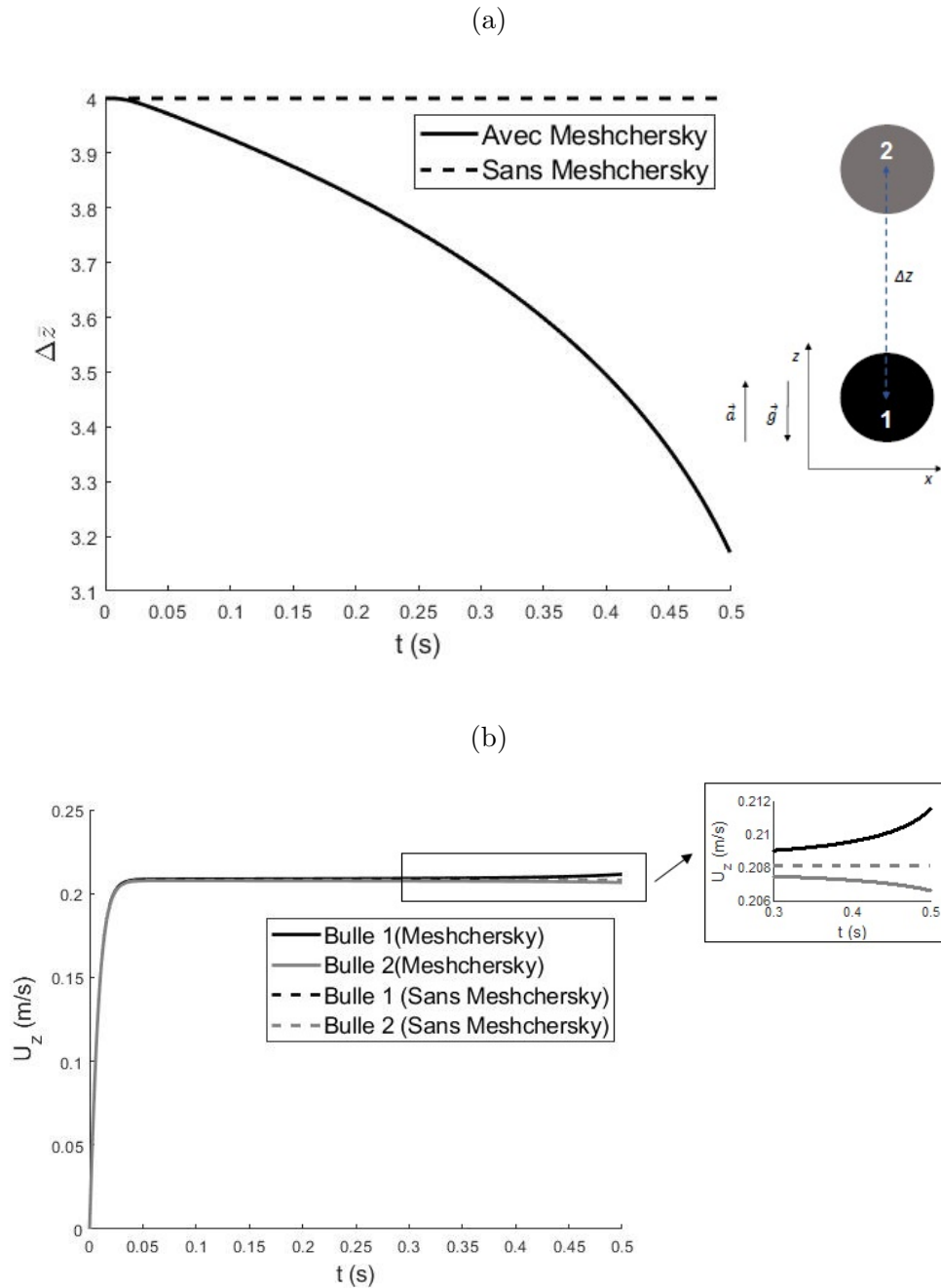


Figure 3.11 (a) La distance de séparation selon l'axe des z et (b) les composantes verticales des vitesses de deux bulles en ascension l'une derrière l'autre ($\theta = 90^\circ$), de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos et séparées d'une distance $\Delta z_0 = 4a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.

Cas de deux bulles avec un angle ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) :

Pour une orientation relative quelconque ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), trois types d'interactions résultent de la force de Meshchersky. L'angle de transition entre les différentes interactions dépend de la taille des bulles et de la distance qui les sépare. Ainsi, selon la valeur initiale de l'orientation relative θ_0 entre les bulles, trois types d'interactions induites par la force de Meshchersky ont été observées. Ces dernières sont réparties sur trois intervalles d'orientation relative initiale θ_0 . Le premier intervalle est défini par $0^\circ < \theta_0 \leq 19^\circ$, le deuxième est défini par $19^\circ < \theta_0 \leq 27,5^\circ$ et le dernier intervalle par $27,5^\circ < \theta_0 < 90^\circ$.

a) Cas de deux bulles avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$:

Aux figures 3.12, on illustre un exemple du premier intervalle pour $\theta_0 = 10^\circ$. On constate qu'en absence de l'effet Meshchersky, il n'y a pas d'interaction entre les deux bulles et les composantes horizontales des vitesses demeurent nulles le long du mouvement. Cependant, lorsqu'on inclut la force de Meshchersky, on constate à la figure 3.12 (a), qui présente les trajectoires des bulles, qu'au début du mouvement, les deux bulles partent horizontalement dans la même direction. De plus, les composantes de vitesses horizontales, illustrées à la figure 3.12 (b), augmentent. Ainsi, au début du mouvement, la bulle inférieure est attirée par l'accélération de la bulle supérieure. Par contre, la bulle supérieure est repoussée par le mouvement de la bulle inférieure. Durant cette interaction, l'orientation relative entre les deux bulles diminue jusqu'à atteindre une valeur faible. Ainsi, la composante de vitesse de la bulle inférieure change de direction. À partir de cette position, la distance horizontale qui sépare les bulles augmente et les bulles se repoussent. La position relative selon la direction verticale continue à diminuer jusqu'à ce que θ s'annule. Ainsi, les deux bulles se placent sur l'horizontale et elles se repoussent jusqu'à atteindre une distance de séparation assez importante pour que l'effet de la force de Meshchersky s'atténue. Par conséquent, dans la première plage de θ_0 , initialement, on a observé que la bulle inférieure est attirée par la bulle supérieure. Mais, en se rapprochant d'elle, la bulle supérieure est repoussée. Ensuite le mouvement de la bulle inférieure s'inverse et les deux bulles se repoussent.

b) Cas de deux bulles avec un angle $\theta_0 = 25^\circ$:

Dans la deuxième intervalle de θ_0 , nous avons illustré à la figure 3.13 les trajectoires et l'orientation relative de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, orientées selon $\theta_0 = 25^\circ$ et séparées d'une distance égale à $2.75a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky. En absence de la force de Meshchersky, le comportement des bulles est similaire au comportement décrit précédemment. En tenant compte de l'effet Meshchersky,

les trajectoires des bulles nous indiquent qu'au départ, la bulle inférieure s'approche de la bulle supérieure, en la repoussant. Lors du rapprochement de la bulle du bas, la distance de séparation des deux bulles diminue et les bulles s'attirent. Ensuite, en s'attirant, l'orientation relative décroît et les deux bulles finissent pas se repousser. Par conséquent, dans cet intervalle, on a observé une oscillation entre l'effet attractif et répulsif de la force de Meshchersky. Ensuite, les bulles finissent par se repousser.

c) Cas de deux bulles avec un angle $\theta_0 = 60^\circ$:

Dans le dernier intervalle de θ_0 , nous illustrons à la figure 3.14, les trajectoires et l'orientation relative de deux bulles orientées initialement selon $\theta_0 = 60^\circ$. Au départ, comme dans les deux exemples précédents, on observe que la bulle inférieure est attirée par la bulle supérieure, et que la bulle supérieure est repoussée. Cependant contrairement aux cas précédents, l'orientation relative augmente et continue à croître le long du mouvement. Ainsi, lorsque l'orientation relative θ s'approche de 90° , la vitesse horizontale de la bulle inférieure s'inverse et les bulles s'attirent jusqu'à ce qu'elles se touchent.

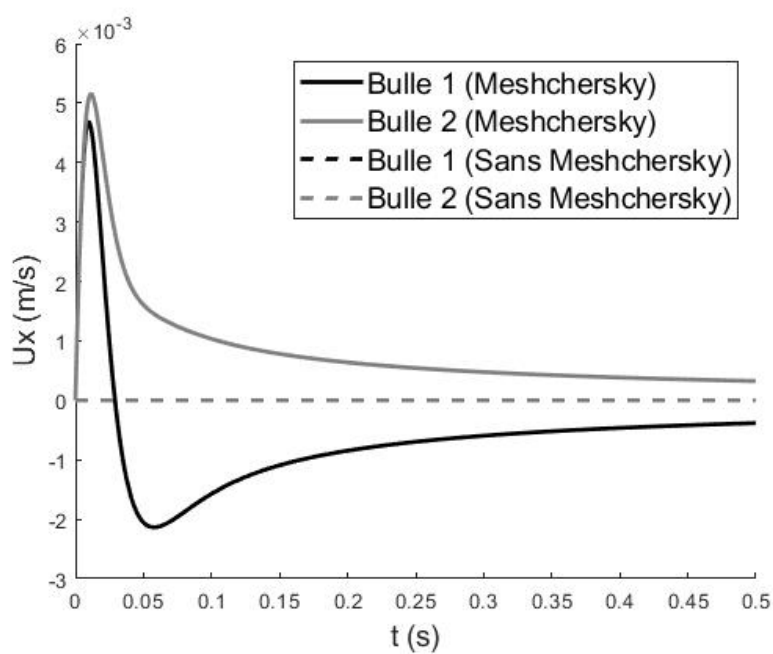
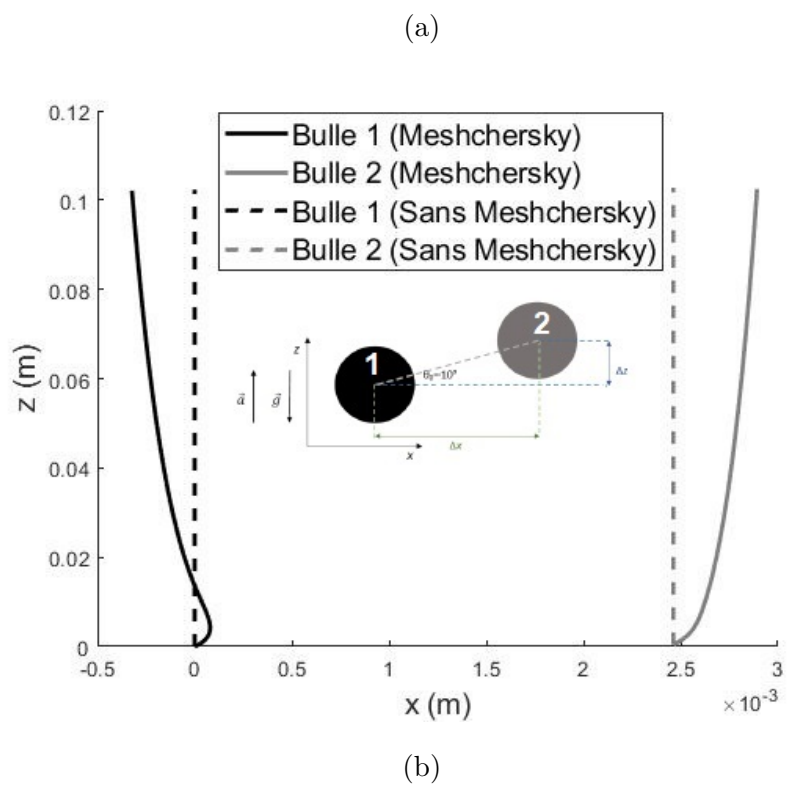
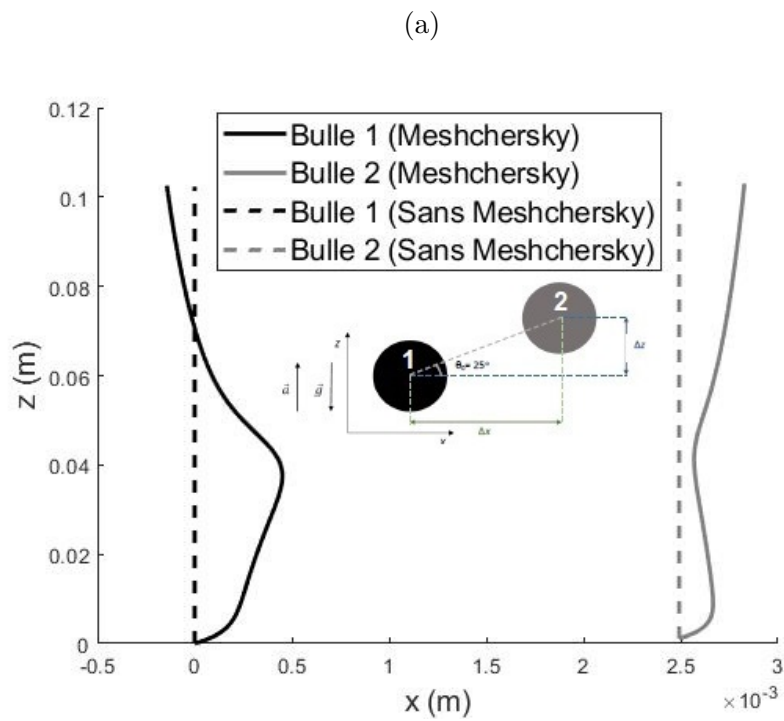


Figure 3.12 (a) Les trajectoires et (b) les composantes horizontales des vitesses de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 10^\circ$ et séparées d'une distance égale à $2.5a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.



(b)

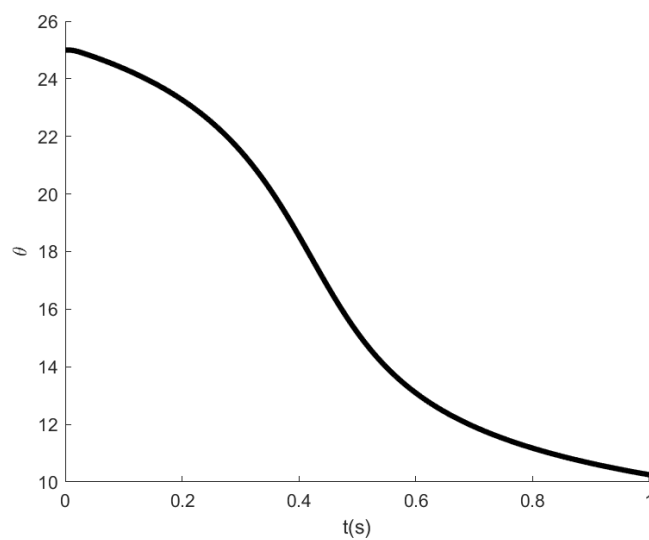


Figure 3.13 (a) Les trajectoires (b) l'orientation relative de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 25^\circ$ et séparées d'une distance égale à $2.5a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.

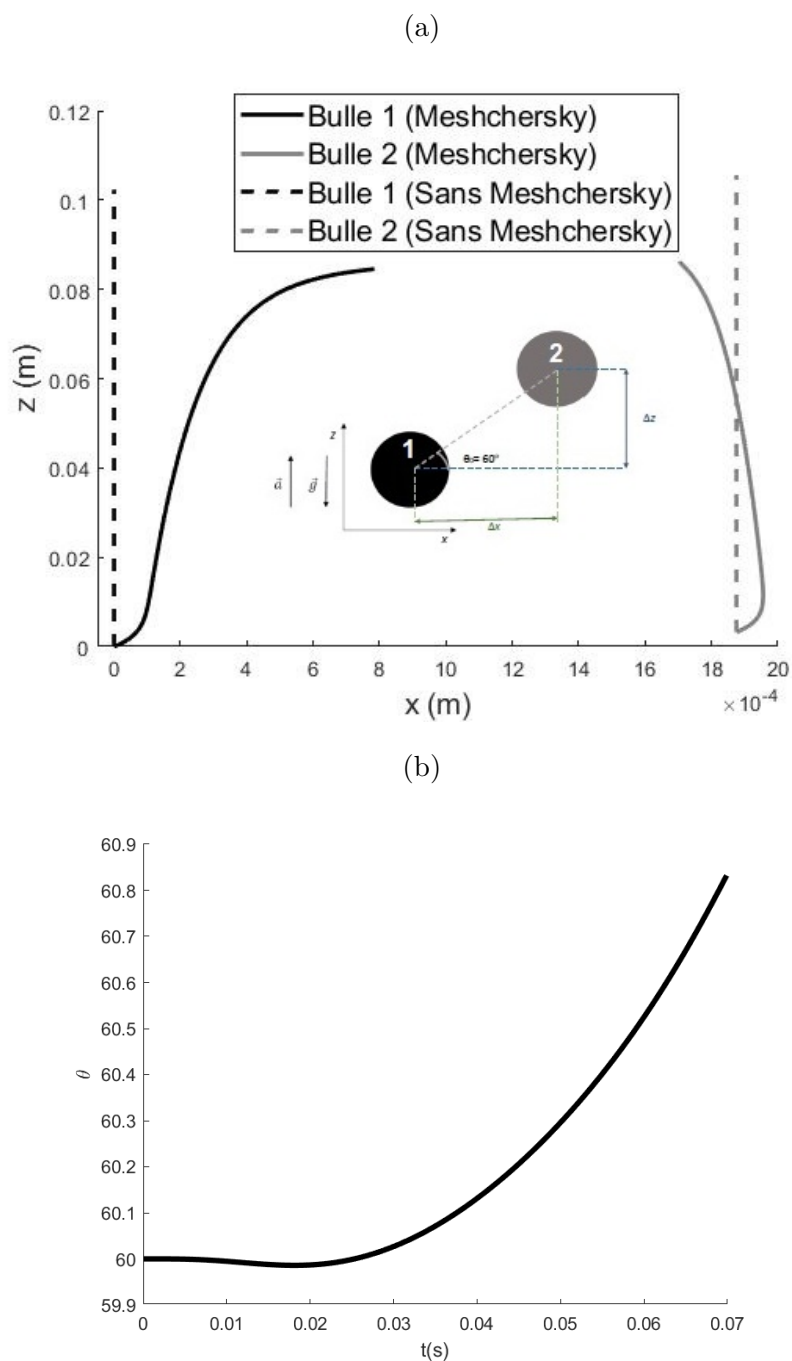


Figure 3.14 (a) Les trajectoires (b) l'orientation relative de deux bulles, de rayon $a = 1$ mm, initialement au repos, placée avec $\theta_0 = 60^\circ$ et séparées d'une distance égale à $4a$, calculées avec et sans l'effet de la force de Meshchersky.

c) Analyse d'un système contenant plusieurs bulles

Afin d'évaluer les effets de la force de Meshchersky sur la dynamique d'un nuage de bulles, nous avons d'abord considéré des arrangements uniformes de bulles. Ensuite, nous avons généré des configurations aléatoires de nuages de bulles. Les premières configurations sont des arrangements horizontaux de N_b bulles ($N_b = 2, 5, 9$), de rayon $a = 1$ mm et des distances de séparation entre les bulles de 2.25 mm et 2.5 mm. Les bulles sont en ascension libre sans vitesse initiale dans de l'eau stagnante. L'historique du déplacement horizontal de la bulle à l'extrémité gauche de chaque configuration est illustré à la figure 3.15. On déduit de la figure 3.15 que le déplacement de la bulle dépend du nombre de bulles dans la configuration et des distances de séparation entre les bulles. Ainsi, plus nous avons de bulles dans une configuration, plus le déplacement latéral des bulles est important. En outre, plus les bulles sont proches les unes des autres, plus l'effet dispersif de la force de Meshchersky est important. D'ailleurs, on observe que la distribution spatiale des configurations de bulles s'est élargie de plus de 25 % durant les premières 5 s.

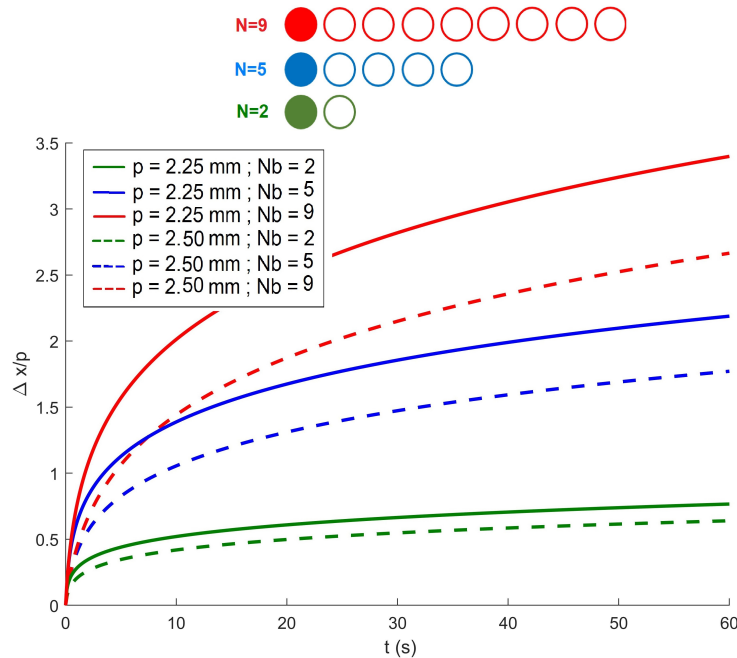


Figure 3.15 Historique du déplacement horizontal de la bulle à l'extrémité pour divers arrangements de bulles en 2D.

Par la suite nous avons considéré des arrangements 3D de N_b ($3^3, 5^3$) bulles dans une configuration cubique simple. Les distances entre les bulles p considérées sont respectivement égales

à 2.5 mm, 2.25 mm et 5 mm. La figure 3.16 présente une vue de dessus des positions des bulles pour un arrangement cubique de 125 bulles à trois instants différents ($t = 0, 1$ et 2 s). On observe que durant un intervalle de temps de 2 s, le volume occupé par le nuage de bulles a augmenté de plus de 32 % pour le nuage de 5^3 bulles et d'environ 45 % pour 3^3 bulles.

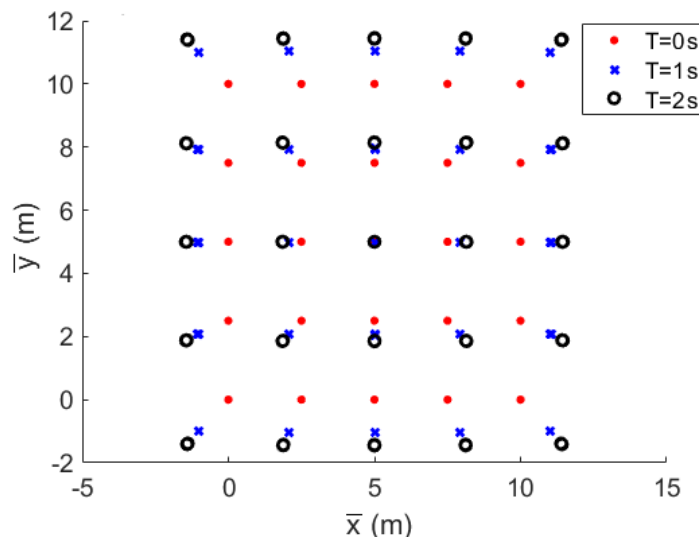
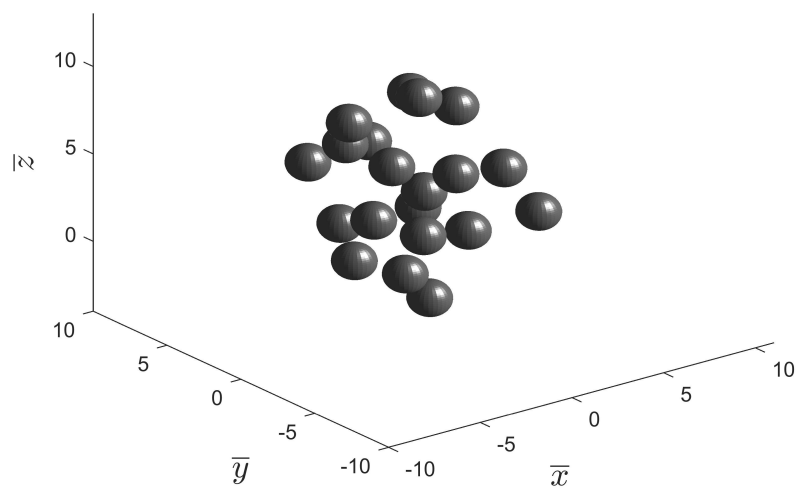


Figure 3.16 Vues de dessus d'une configuration tridimensionnelle d'un nuage de bulles avec 125 bulles à $t = 0$ s, $t = 1$ s et $t = 2$ s.

Nous avons simulé un nuage aléatoire de 20 bulles dans un milieu infini d'eau stagnante. Les bulles sont d'abord au repos et elles s'élèvent sous les effets des forces de flottabilité, de traînée, de masse ajoutée et de Meshchersky. La figure 3.17 représente les configurations du nuage de bulles à $t = 0$ s et à $t = 30$ s. À la figure 3.17, on observe qu'à cause des interactions induites par la force de Meshchersky, l'arrangement des bulles évolue d'une configuration aléatoire à un plan horizontal de bulles. La figure 3.18 présente l'histogramme des positions des bulles dans la direction verticale. $\Delta\bar{z} = \frac{\Delta z}{a}$ est la position verticale par rapport à la bulle qui occupe la position la plus inférieure dans le nuage. Au départ, les bulles sont uniformément réparties dans la direction verticale. Puis, la distribution des bulles se concentre en formant un maximum qui représente la position verticale du plan de bulles à cause de l'effet de la force de Meshchersky. À la figure 3.19, qui présente une vue de dessus des positions des bulles à $t = 0$ s et à $t = 30$ s, on observe après que les bulles se soient arrangées sur un plan horizontal, elles continuent à se repousser jusqu'à ce qu'elles atteignent une distance de séparation (de l'ordre de $4a$) pour laquelle l'effet de la force de Meshchersky devient insignifiant par rapport à la force de traînée.

(a) : $t = 0$ s



(b) : $t = 30$ s

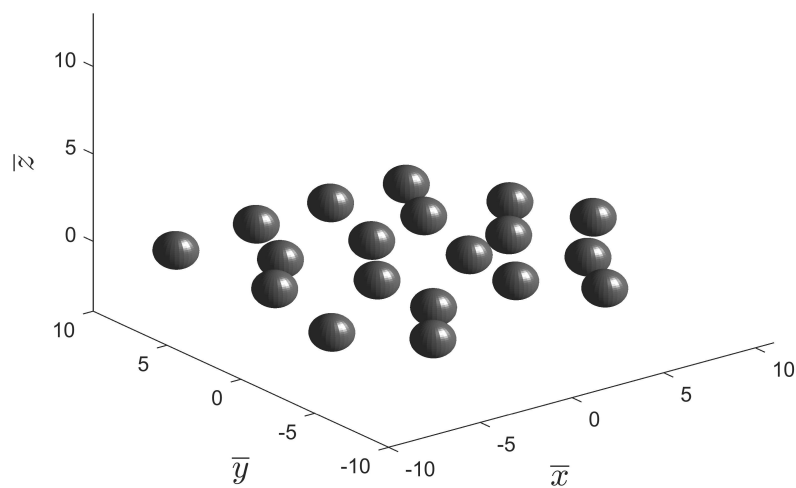


Figure 3.17 Nuage aléatoire de 20 bulles (a) à $t = 0$ s (b) à $t = 30$ s

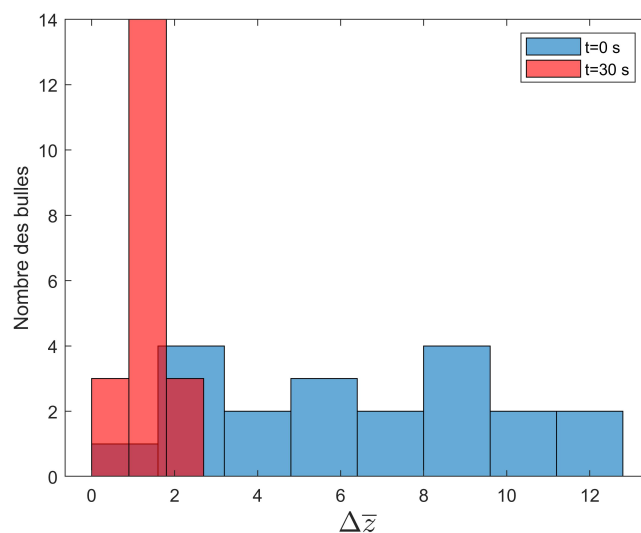


Figure 3.18 L'histogramme des positions dans la direction verticale pour un nuage aléatoire de 20 bulles.

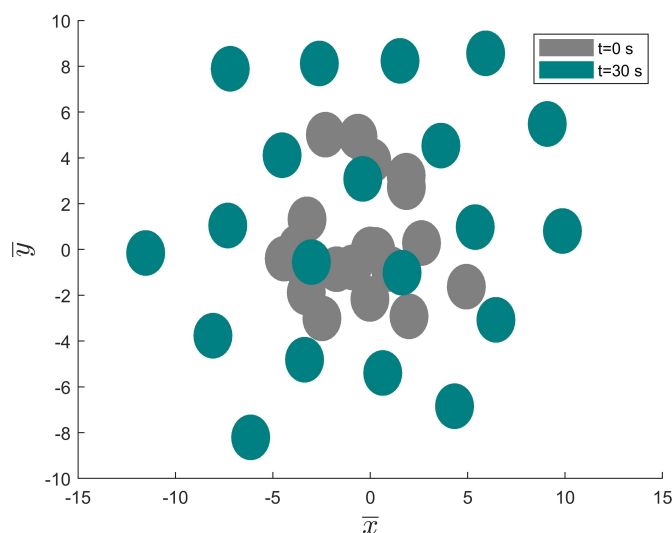


Figure 3.19 Vue de dessus d'un nuage aléatoire de 20 bulles à $t = 0$ s et $t = 30$ s.

À la figure 3.20, on présente l'évolution d'un nuage aléatoire de 80 bulles. Sous l'effet de la force de Meshchersky, la configuration des bulles est passée d'une configuration aléatoire à un arrangement de trois plans horizontaux parallèles. Ceci est également illustré par l'histogramme des positions dans la direction verticale des bulles représentée à la figure 3.21. La distribution des bulles évolue pour former trois maxima qui représentent les trois regroupe-

ments en plans horizontaux. De plus, sur cette figure, on constate que la distance entre les plans est de l'ordre de $40a$.

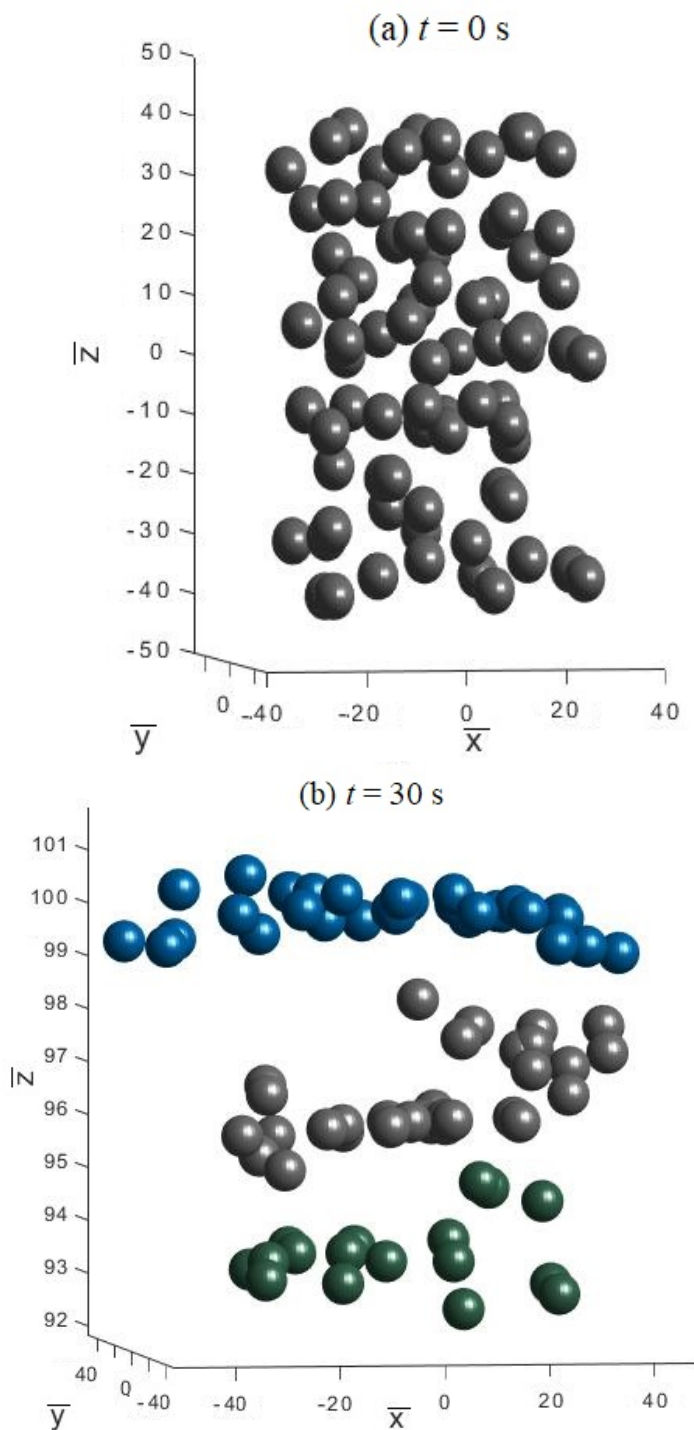


Figure 3.20 Nuage aléatoire de 80 bulles (a) à $t = 0$ s (b) à $t = 30$ s.

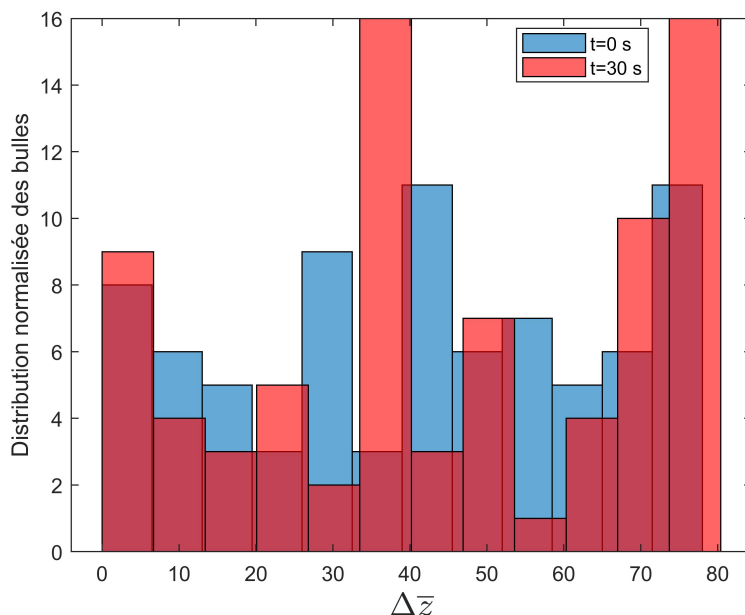


Figure 3.21 L’histogramme des positions dans la direction verticale pour un nuage aléatoire de 80 bulles.

3.2.7 La discussion des résultats

D’après les résultats numériques, pour une paire de bulles, l’attraction et la répulsion hydrodynamiques induites par les effets de la force de Meshchersky dépendent de leur orientation relative. Ainsi, lorsque les bulles sont côte à côte, elles se repoussent et quand elles accélèrent l’une derrière l’autre selon la direction verticale, elles s’attirent. Dans la section 2.7, nous avons présenté des études expérimentales qui ont observé ce type d’interactions qui sont connues sous le nom “*Drafting, kissing and tumbling rearrangement mechanisms*”. [76]. La figure 2.8, tirée des expériences de Vélez-Cordero et al. [7], illustre bien un exemple de ce mécanisme pour deux bulles d’air. Dans cette expérience, le nombre de Reynolds est de l’ordre de 1.3. À cet ordre de grandeur, les sillages de la bulle en avant sont très petits et ne peuvent pas aspirer la bulle en arrière. Par conséquent, le phénomène d’attraction entre ces deux bulles est seulement expliqué par l’effet Meshchercky que nous avons démontré l’existence à partir d’une approche analytique.

Tel qu’il a été déjà exposé dans la section 2.7, les trois types d’interactions, selon l’orientation relative des bulles, que nous avons observées dans cette étude, a été déjà discuté par Biesheuvel et Van Wijngaarden [26] et Kok [78]. À partir d’une approche énergétique, [78] a expliqué la répulsion et l’attraction par la dépendance des composantes du tenseur d’inertie au mouvement relatif. Ce qu’on appelle par tenseur d’inertie dans Kok [78] définit le tenseur

de la masse ajoutée. Ainsi, par une approche différente, nous avons confirmé l'affirmation de Kok [78], que ce type d'interaction entre les bulles est bel et bien une résultante de l'effet de la variation des composantes du tenseur de la masse ajoutée en fonction du mouvement relatif entre les bulles. De plus, notre modèle de la force de Meshchersky, permet de quantifier cet effet et le généraliser pour un plus grand nombre de bulles afin de l'inclure dans la modélisation des écoulements dispersés.

Pour les nuages de bulles, les interactions hydrodynamiques induites par la force de Meshchersky organisent les bulles sur des plans horizontaux parallèles. Ce phénomène de regroupement des bulles sur des plans horizontaux parallèles, a été également observé expérimentalement [76, 79]. Ceci a été expliqué par le fait que les bulles s'attirent jusqu'à ce qu'elles se touchent et qu'elles se heurtent dans une position transversale stable. Dans les expériences de Kitagawa et al. [79], on a constaté que, loin de la zone d'injection, une composante horizontale de la vitesse apparaît, résultante des interactions hydrodynamiques entre les bulles. La valeur maximale de cette composante peut atteindre 10% de la composante verticale [79]. Pour les simulations présentées précédemment, la valeur maximale de la composante horizontale de vitesse a atteint 8% de la composante verticale, en soulignant que le nombre de bulles que nous avons analysé est très faible par rapport au nombre de bulles dans les expériences de Kitagawa et al. [79].

Ainsi, nous avons conclu que les interactions hydrodynamiques induites par la force de Meshchersky sont en accord avec d'autres observations théoriques et expérimentales. En outre, la force de Meshchersky contribue dans le regroupement horizontal de bulles, un phénomène dont les mécanismes physiques ne sont pas complètement identifiés.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le rôle de la masse ajoutée sur la dispersion des nuages de bulles a été évalué. Nous avons envisagé une représentation plus complète des effets de la masse ajoutée qui prend en compte la force de Meshchersky. Cette force apparaît naturellement à partir de l'analyse de la pression en écoulement potentiel. Cette partie de la force de la masse ajoutée résulte du fait que la masse ajoutée varie dans l'espace. Nous sommes donc confrontés à un problème à masse variable. Les résultats numériques ont montré que l'effet de la force de Meshchersky dépend de la distribution des bulles. En effet, pour une paire de bulles en ascension côte à côte, la force de Meshchersky est répulsive. Par contre, lorsque les bulles accélèrent l'une derrière l'autre verticalement, elle est attractive. De plus, la force de Meshchersky contribue à regrouper des bulles sur des plans horizontaux parallèles.

L'effet de la variation de la masse ajoutée sur les interactions de paires de bulles a été évoqué

par Biesheuvel et Van Wijngaarden [26]. Ce pendant, il n'existe pas de modèle qui permet d'évaluer l'effet de cette force pour un nuage de bulle. Par conséquent, notre modèle de force de Meshchersky permet de généraliser leurs constatations et de quantifier cet effet afin de l'inclure dans les simulations des nuages de bulles.

L'analyse de l'effet de la force de Meshchersky a été établie par une modélisation lagrangienne. Ce modèle résout l'équation du mouvement de chacune des bulles dans le nuage. De plus, afin de permettre une modélisation précise, on doit inclure les interactions de chaque bulle avec les bulles voisines. Ainsi, lorsque toute la physique de la dynamique de nuage de bulles est prise en compte, une modélisation lagrangienne permet d'obtenir une description précise de l'écoulement. Cependant, pour des écoulements à taux de vide élevés, elle est très coûteuse du point de vue de l'effort de calcul et du temps de simulation. Ceci présente une limite pour son utilisation pour des applications à l'échelle industrielle. Pour cette raison, nous allons dans le prochain chapitre analyser l'effet de la force de Meshchersky pour l'approche Euler-Euler. Ce modèle est basé sur la résolution des équations de conservations moyennées et son utilisation est plus pratique.

CHAPITRE 4 LA FORCE DE MESHCHERSKY EN MODÉLISATION EULER-EULER

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré, à partir de la théorie des écoulements potentiels, qu'un effet Meshchersky résulte de la variation de la masse ajoutée due à la présence d'autres bulles dans l'écoulement. Cette constatation nous permet de considérer le mouvement des bulles dans un nuage comme étant un problème à masse variable. Par la suite, à partir d'un modèle lagrangien, nous avons évalué l'effet de la force de Meshchersky sur la dynamique des nuages de bulles. Toutefois, l'approche Euler-Lagrange n'est pas développée pour les bulles dans les codes de calcul commerciaux. Ce développement demande de pouvoir tenir compte des forces des interactions hydrodynamiques entre les bulles. Un couplage entre les particules (bulles) est donc requis.

Dans cette optique, nous avons consacré ce chapitre à l'étude de la force de Meshchersky en description eulérienne. Cette approche est par contraste assez développée dans les codes commerciaux. De plus, l'approche Euler-Euler résout les équations de conservation moyennées pour les deux phases, et ne nécessite pas le suivi de mouvement de chacune des bulles dans l'écoulement. Par conséquent, elle est considérée comme la méthode la plus efficace à l'échelle industrielle (2.31). Ainsi, dans ce chapitre, nous avons commencé par développer la force de Meshchersky en description eulérienne. Par la suite, nous avons utilisé des corrélations de la masse ajoutée issues de la littérature, afin d'implanter la force de Meshchersky dans le code de calcul numérique Ansys-CFX. Enfin, nous avons simulé une expérience d'une colonne à bulles verticale [10] pour évaluer l'effet de la force de Meshchersky sur le comportement de l'écoulement.

4.1 La force de Meshchersky en description eulérienne

On rappelle, tout d'abord, qu'en description eulérienne, les forces interfaciales sont calculées à partir de la moyenne des forces qui agissent sur les bulles, dans le volume de contrôle (équation (2.31)). Par conséquent, les efforts, que nous allons développer dans ce chapitre, sont des forces par unité de volume.

La force de la masse ajoutée en description eulérienne est donnée par :

$$\vec{f}_{m,g} = -\varepsilon\rho_\ell C_m \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (4.1)$$

Nous avons discuté, dans le chapitre 4, l'importance de la variation de la masse ajoutée et son effet sur la dynamique du nuage de bulles. C'est pour cette raison que nous avons considéré le deuxième terme de masse ajoutée qui définit l'effet Meshchersky. Comme l'effet Meshchersky est une conséquence directe de la variation de la masse ajoutée et par analogie avec l'équation (3.24), la force de Meshchersky en description eulérienne est définie par :

$$\vec{f}_{M,g} = -\varepsilon\rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \frac{DC_m}{Dt} \quad (4.2)$$

En général, dans les modèles numériques, la variation de la masse ajoutée est souvent négligée. Par conséquent, l'effet de la force de Meshchersky n'a jamais été analysée auparavant dans l'étude des écoulements à bulles en modélisation Euler-Euler. Dans le but d'analyser cet effet, nous avons utilisé des corrélations de la littérature pour le calcul de la masse ajoutée. Les corrélations existantes prennent en compte l'effet de la présence des bulles sur la variation de la masse ajoutée à travers le taux de vide. Ensuite, à partir de ces modèles, nous avons calculé la force de Meshchersky. Enfin, nous avons implanté la force de masse ajoutée à coefficient variable et la force de Meshchersky dans le code de calcul numérique Ansys-CFX afin de simuler l'écoulement dans une colonne à bulle.

4.1.1 Le calcul de la force de Meshchersky

Les corrélations de la masse ajoutée de la littérature, présentées à la section 2.6.2, sont une fonction du taux de vide. Par conséquent, à partir du théorème de dérivation des fonctions composées, la force de Meshchersky (4.2) se réécrit comme suit :

$$\vec{f}_{M,g} = -\varepsilon\rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \frac{dC_m}{d\varepsilon} \frac{D\varepsilon}{Dt} \quad (4.3)$$

$$= -\varepsilon\rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \frac{dC_m}{d\varepsilon} \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot \nabla\varepsilon \right] \quad (4.4)$$

Dans la solution numérique, nous avons comparé l'effet de la variation de la masse ajoutée à partir de deux corrélations différentes. La première corrélation est celle de Zuber (2.91) qui décrit les valeurs supérieures de la masse ajoutée et celle de Béguin et al. (2.96) qui décrit les valeurs moyennes de la masse ajoutée [75]. L'objectif de cet exercice est d'évaluer l'effet de la force de Meshchersky sur le comportement de l'écoulement et la sensibilité de cette dernière aux choix de la corrélation.

En utilisant la corrélation de Zuber (2.91), la force de Meshchersky s'écrit comme suit :

$$\vec{f}_{M,g} = -\frac{3}{2}\varepsilon\rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot \nabla\varepsilon \right] \quad (4.5)$$

À partir de la corrélation de Béguin et al. (2.96), la force de Meshchersky devient :

$$\vec{f}_{M,g} = -0.72\varepsilon.^2\rho_\ell (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot \nabla\varepsilon \right] \quad (4.6)$$

Nous avons ainsi implanté les deux corrélations de la masse ajoutée (2.91) et (2.96) ainsi que les deux forces de Meshchersky qui en résultaient (4.5) et (4.6) dans le code de calcul numérique Ansys-CFX.

4.2 La simulation numérique d'une colonne à bulle

Afin d'analyser l'effet de la force de Meshchersky sur la dispersion des nuages de bulles, nous avons utilisé le code commercial de calcul numérique Ansys-CFX pour simuler une colonne à bulle tridimensionnelle utilisée dans la réalisation des expériences de Deen [10].

4.3 Le modèle physique

On rappelle que dans le modèle Euler-Euler, on résout les équations de conservation moyennées de masse, quantité de mouvement et de l'énergie. D'une manière générale, lorsqu'on traite un écoulement isotherme, sans changement de phase, l'équation de la conservation de l'énergie est omise. Par conséquent, les équations de conservations qui seront résolues sont celles de la masse et la quantité de mouvement ($k = \ell$ ou g) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \rho_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k) = 0 \quad (4.7)$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \rho_k \vec{U}_k \otimes \vec{U}_k) = & - \nabla (\varepsilon_k P_k) + \varepsilon_k \rho_k \vec{g} \\ & + \nabla \cdot (\varepsilon_k \overline{\overline{\tau}}_k) + \nabla \cdot (\varepsilon_k \overline{\overline{\tau}}_k^{Re}) + \vec{M}_k^i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En ce qui concerne la modélisation des termes de contraintes de cisaillement ($\overline{\overline{\tau}}_k + \overline{\overline{\tau}}_k^{Re}$), comme nous l'avons exposé à la section 2.3.2, la modélisation de la turbulence diphasique n'est pas encore développée et les approximations actuelles sont basées sur la turbulence

monophasique. De plus, il n'existe pas des modèles qui permettent d'inclure adéquatement l'effet de la présence des bulles sur la turbulence. Enfin, la turbulence, ainsi que les forces de portance et de dispersion turbulente sont des mécanismes qui ont un effet dominant sur le comportement de l'écoulement, plus précisément sur la dispersion des petites bulles. Par conséquent, afin d'éviter que ces mécanismes masquent l'effet Meshchersky, nous avons décidé de ne pas utiliser de modèle de turbulence et de traiter l'écoulement comme laminaire.

Dans cette hypothèse, la viscosité effective décrite par l'équation (2.27) se réduit à la viscosité moléculaire et le terme décrivant le transfert de la quantité de mouvement \vec{M}_g^i est décrit par :

$$\vec{M}_g^i = \vec{f}_{Dg} + \vec{f}_{mg} + \vec{f}_{Mg} \quad (4.9)$$

Pour le coefficient de masse ajoutée, nous avons utilisé le coefficient de Zuber (2.91). Notre choix est due au fait que, comme nous l'avons constaté sur la figure 2.7, la corrélation de Zuber (2.91) décrit les valeurs supérieures de la masse ajoutée. Ceci nous permettra de mieux capturer l'effet de la force de Meshchersky sur la masse ajoutée. Ainsi, c'est l'équation (4.5) qui a été implantée dans CFX afin d'inclure l'effet Meshchersky.

Le coefficient de traînée souvent utilisé [36, 47, 99–101] pour la simulation de la colonne à bulle de Deen [10] est le modèle de Ishii et Zuber [21] (Éq. (2.75)). Ce modèle est considéré comme le plus général des modèles implantés dans Ansys-CFX. En fait, il permet d'inclure l'effet de la forme des bulles et du taux de vide [9].

4.3.1 Les schémas de résolution numérique

Le code Ansys-CFX permet la résolution des équations de Navier-Stokes que nous avons décrites dans la section 2.3. Il se base sur la méthode des volumes finis. Cette méthode consiste à intégrer les équations de conservation de la masse (2.23) et de la quantité de mouvement (2.24) dans un volume de contrôle V_c . Ce dernier est construit à partir du maillage. En effet, le code CFX utilise des mailles tridimensionnelles. Cependant, à la figure 4.1, pour des raisons de simplification, nous avons illustré un exemple sur la construction du volume de contrôle à partir d'une maille bidimensionnelle. Ainsi, autour de chaque noeud d'une maille, les frontières du volume de contrôle sont définies par des droites joignant les centres des arêtes et les centres des éléments entourant le noeud.

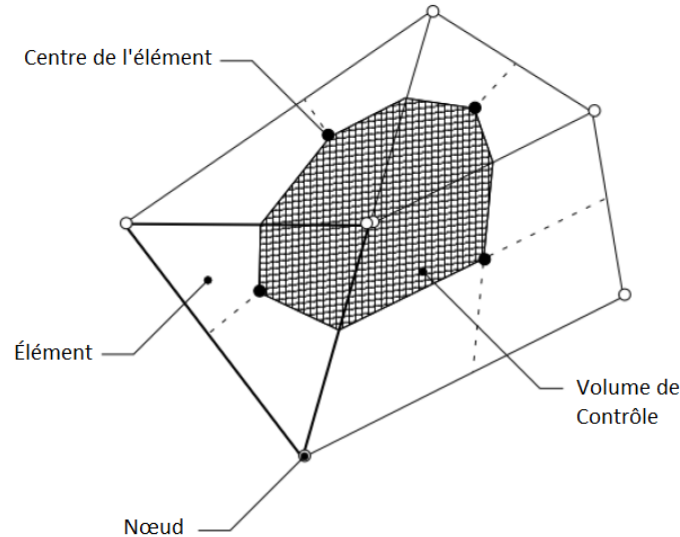


Figure 4.1 L'illustration d'un exemple de construction du Volume de Contrôle pour un maillage 2D dans CFX (tirée et traduit de [9]).

Discrétisation temporelle

Le logiciel CFX permet l'intégration des termes transitoires par deux méthodes. La première est la méthode d'Euler implicite de premier ordre qui utilise les valeurs de la fonction à intégrer au pas de temps actuel et du pas précédent. Ainsi la dérivée temporelle d'une fonction quelconque ψ à l'instant t_{n+1} se calcule comme suit :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{n+1} = \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (4.10)$$

La méthode d'Euler implicite est inconditionnellement stable. Par contre, c'est une méthode de premier ordre et peut induire des erreurs de discrétisation qui peuvent diffuser des gradients temporels brusques qui nuisent à la convergence du système [9]. Par conséquent, la méthode d'Euler implicite de second ordre est la plus recommandée [9]. Cette méthode utilise les valeurs de la fonction à intégrer au pas de temps actuel et des deux pas de temps précédents comme suit :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}\psi_{n+1} - 2\psi_n + \frac{1}{2}\psi_{n-1}}{t_{n+1} - t_n} \quad (4.11)$$

Ce schéma est robuste, conservatif en temps et inconditionnellement stable [9].

Discrétisation spatiale

Afin d'illustrer la méthode d'intégration par volume fini, nous allons considérer l'équation de conservation d'une fonction scalaire ψ quelconque définie comme suit :

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \psi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \right] + S_\psi \quad (4.12)$$

où x_j et U_j sont respectivement les composantes de la position de la vitesse dans la direction \vec{e}_j , Γ_{eff} est une fonction scalaire et S_ψ est un terme source.

Afin d'intégrer cette équation dans le volume de contrôle, on applique le théorème de divergence de Gauss qui permet de transformer une intégrale volumique incluant une divergence à une intégrale surfacique. En général, ce théorème s'énonce comme suit :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{U}) dV = \int_A \psi \vec{U} \cdot d\vec{A} \quad (4.13)$$

avec $\vec{A} = A\vec{n}$ et \vec{n} le vecteur normal à la surface A . Ainsi, l'intégrale dans le volume de contrôle de l'équation (4.12) s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \psi dV + \int_{A_c} \rho U_j \psi dA_j = \int_{A_c} \Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dA_j + \int_{V_c} S_\psi dV \quad (4.14)$$

Les intégrales de volume sont discrétisées dans chaque secteur de l'élément et cumulées dans le volume de contrôle correspondant. Les intégrales de surface sont discrétisées aux points d'intégration ip_n situés au centre de chaque segment de surface de l'élément (voir l'exemple illustré dans la figure 4.2).

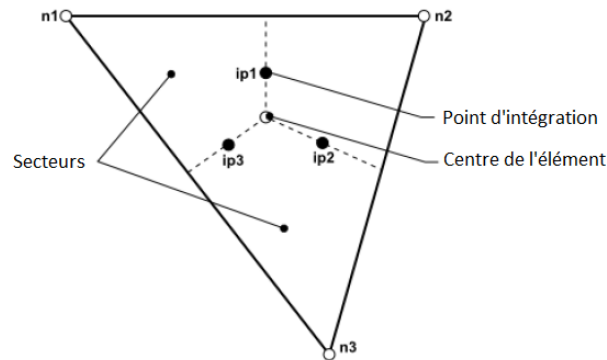


Figure 4.2 La position des points d'intégration pour un élément de maille (tirée et traduite de [9]).

Pour les termes transitoires, la méthode d'intégration temporelle utilisée dans cette étude est la méthode Euler implicite de second ordre. Par conséquent, l'équation de conservation de la fonction ψ s'écrit comme suit :

$$V_c \frac{\frac{3}{2}\rho_{t_n}\psi_{t_n} - 2\rho_{t_{n-1}}\psi_{t_{n-1}} + \frac{1}{2}\rho_{t_{n-2}}\psi_{t_{n-2}}}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{ip} (\rho\psi U_j A_c n_j)_{ip} = \sum_{ip} \left(\Gamma_{eff} A_c \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right)_{ip} + \overline{S}_\psi V_c \quad (4.15)$$

L'indice ip correspond à l'évaluation de la valeur de la grandeur au point d'intégration et \sum_{ip} est la sommation sur tous les points d'intégration dans le volume de contrôle V_c .

Les solutions et les propriétés de l'écoulement sont stockées dans les nœuds de maillage. Cependant, comme l'indique l'équation précédente, il est nécessaire d'approximer les différentes grandeurs au point d'intégration. Ainsi, Ansys-CFX utilise des fonctions de formes, connues aussi dans la méthode d'éléments-finis par des fonctions d'interpolation de l'élément. Ses fonctions décrivent la variation de la fonction ψ dans un élément comme suit :

$$\psi = \sum_{i=1}^{N_{noeuds}} N_i \psi_i \quad (4.16)$$

où N_i est la fonction de forme pour le nœud i , la fonction ψ_i qui est égale à la valeur de la fonction ψ au nœud correspondant et $\sum_{i=1}^{N_{noeuds}}$ est la sommation sur tous les nœuds de l'élément. Les fonctions de formes doivent respecter la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_{noeuds}} N_i = 1 \quad (4.17)$$

Les fonctions de forme utilisées dans Ansys-CFX sont linéaires en termes de coordonnées paramétriques. Elles sont dépendantes de la géométrie de la maille et elles sont décrites dans le guide de CFX [9] pour chaque type de maillage.

Afin d'évaluer la valeur du gradient d'une fonction ψ à un nœud, Ansys-CFX applique la forme modifiée du théorème de divergence de Gauss, aussi connu comme théorème du gradient, comme suit :

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{A_c}{V_c} \sum_{ip} (\psi_{ip} \vec{n}_{ip}) \quad (4.18)$$

Avec \vec{n}_{ip} le vecteur normal extérieur à la surface au point d'intégration ip et ψ_{ip} la grandeur calculée au point d'intégration ip à partir des fonctions de formes.

En ce qui concerne les termes de diffusion, les fonctions de formes sont aussi utilisées afin

d'évaluer les valeurs des dérivées aux points d'intégration comme suit :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{ip} = \sum_n \left(\frac{\partial N_n}{\partial x}\right)_{ip} \psi_n \quad (4.19)$$

où \sum_n est la sommation sur toutes les fonctions de forme de l'élément correspondant.

Le terme d'advection nécessite que les valeurs des différentes grandeurs aux points d'intégration soient approximées aux valeurs aux noeuds par la relation suivante :

$$\psi_{ip} = \psi_{up} + \beta \nabla \psi \cdot \vec{r} \quad (4.20)$$

où ψ_{up} est la valeur de la fonction ψ au noeud en amont et \vec{r} est le vecteur position par rapport au noeud en amont du point d'intégration ip . Différentes valeurs de β produisent différents schémas d'advection. Ainsi, lorsque $\beta = 0$, le schéma d'advection est de premier ordre à pas spatial vers l'amont (*Upwind Difference Scheme*). Ce schéma est très robuste, mais il introduit des erreurs de discrétisation qui peuvent brouiller les gradients spatiaux élevés [9]. Si $\beta = 1$, le schéma est d'ordre 2 à pas spatial vers l'amont. Ce schéma peut introduire des erreurs de discrétisation dispersives qui ont tendance à provoquer des oscillations non physiques dans les régions de variation rapide de la solution [9].

Le schéma utilisé dans cette étude est un schéma à haute résolution [102]. Cette approche considère un β variable et localement calculé pour chaque noeud afin d'approcher 1, en respectant les conditions limites définies par le schéma TVD (Total Variation Diminishing), développé par Barth et Jespersen [102]. Ces conditions sont définies par ψ_{min} et ψ_{max} , respectivement les valeurs minimales et maximales de la grandeur ψ évaluées aux noeuds voisins. Ainsi, on détermine les valeurs de β qui assurent la condition ($\psi_{min} < \psi < \psi_{max}$). Par conséquent, les valeurs de β aux points d'intégration sont calculées par la résolution de la relation suivante aux points d'intégration :

$$\psi_{min} < \psi_{up} + \beta \nabla \psi \cdot \vec{r} < \psi_{max} \quad (4.21)$$

Ensuite, pour chaque noeud, on utilise la valeur de β la plus petite obtenue sur tous les points d'intégration qui l'entoure. Pour les lecteurs intéressés, une description plus détaillée de cette méthode est présentée par Darwish et Moukalled [103].

Méthode de résolution

Ansys-CFX utilise la méthode de factorisation *Multigrid (MG) accelerated Incomplete Lower Upper (ILU)* pour la résolution du système discret d'équations linéarisées [9]. C'est une

méthode de résolution itérative dans lequel la solution exacte des équations est approchée au cours de plusieurs itérations. Ainsi, après la discrétisation des équations de conservation, Ansys-CFX les rassemble sous la forme d'un système matriciel linéaire comme suit :

$$[A] Y = b \quad (4.22)$$

avec A la matrice coefficient, Y le vecteur solution et b le terme de droite.

Cette équation est résolue d'une manière itérative à partir d'une solution approximative Y^j du vecteur solution Y . À chaque itération, cette solution est améliorée, par rapport à l'itération précédente, par un terme de correction Y' tel que :

$$Y^{j+1} = Y^j + Y' \quad (4.23)$$

où Y' est la solution de l'équation suivante :

$$[A] Y' = Res^j \quad (4.24)$$

avec Res^j le résidu calculé comme suit :

$$Res^j = b - [A] Y^j \quad (4.25)$$

Ainsi, ce calcul se répète jusqu'à atteindre la condition de convergence décrite dans la section suivante.

Critère de convergence

Pour chaque variable ψ de la solution, cette condition est définie par la normalisation du résidu comme suit :

$$\widetilde{Res} = \frac{Res}{a_p \Delta \psi} \quad (4.26)$$

où a_p est un facteur représentatif des coefficients de la matrice $[A]$ et $\delta\psi$ défini une variation représentative de la variable dans le volume de contrôle. La méthode exacte du calcul de ses deux paramètres n'est pas fournie par le guide de CFX. Cependant, on précise que \widetilde{Res} est indépendant de l'approximation initiale et du pas de temps. De plus, pour les écoulements diphasiques, si les équations de conservation pour les deux phases sont couplées par les termes de transfert au niveau des interfaces, le facteur a_p est calculé à partir des propriétés du mélange.

Pour les simulations des colonnes à bulle, dans la littérature, on recommande comme condition de convergence de définir une valeur de résidu \widetilde{Res} inférieur ou égal à 10^{-4} . Ainsi, afin d'assurer la précision de nos résultats, dans les simulations réalisées dans le cadre de cette étude, la condition de convergence choisie est $\widetilde{Res} = 10^{-5}$.

4.3.2 Montage expérimental

La colonne à bulles utilisée dans les expériences de Deen [10], illustrée dans la figure 4.3, est une colonne 3D de section carrée de dimensions $0.15 \text{ m} \times 0.15 \text{ m}$, remplie d'eau distillée jusqu'à une hauteur de 0.45 m . L'air a été introduit dans le domaine par une plaque perforée qui contient 49 trous de 1 mm de diamètre. La surface d'entrée est de $0.03 \text{ m} \times 0.03 \text{ m}$ et la vitesse superficielle (Éq. 2.3) d'entrée du gaz $J_{g_{in}}$ de 4.9 mm/s . Selon les mesures effectuées par Deen et al. [10], le diamètre moyen des bulles à l'entrée est égal à $2a = 4 \text{ mm}$. Les propriétés physiques des deux phases sont présentées dans le tableau. 4.1

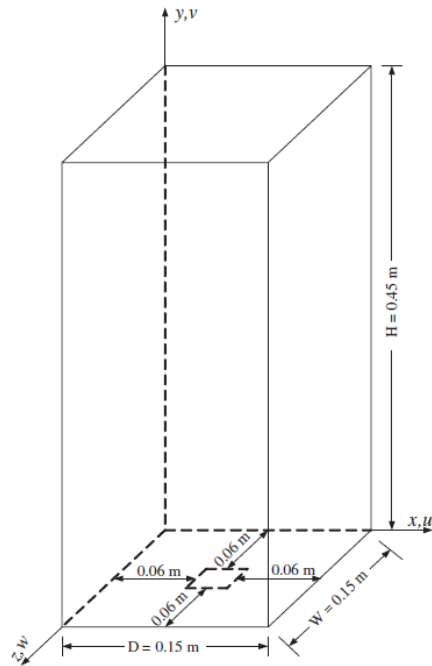


Figure 4.3 La géométrie de la colonne à bulles de Deen [10]. (la figure a été publiée avec la permission de l'auteur correspondant Niels Deen)

Tableau 4.1 Propriétés physiques utilisées dans la simulation.

Phase	ρ (kg m ⁻³)	μ (Pa s)	σ (N m ⁻¹)
Liquide	1.0 10 ³	1.0 10 ⁻³	7.2 10 ⁻²
Gaz	1.2	1.7 10 ⁻⁵	

4.3.3 Conditions aux frontières

Vitesse d'entrée

La vitesse du gaz à l'entrée de la colonne a été calculée à partir de l'expression suivante [10] :

$$v_{g,in} = \frac{J_{gin} WD}{\varepsilon_g A_{in}} \quad (4.27)$$

où $J_{gin} = 4.9$ mm/s est la vitesse superficielle à l'entrée de l'air, WD est la surface de la section de passage de la colonne (0.15 m \times 0.15 m), ε_g est le taux de vide qui est égal à 1 à l'entrée et A_{in} est la surface de la plaque perforée (0.03 m \times 0.03 m). À partir de ces paramètres, la vitesse d'entrée de l'air est égale à $v_{g,in} = 0.1225$ m/s.

Condition aux parois

Une condition de non-glissement a été imposée pour les deux phases au niveau des parois afin de modéliser les effets de friction et d'imperméabilité au niveau et à travers les parois [104]. Cette condition impose que les composantes des vitesses tangentielles et normales aux murs soient nulles.

Condition à la sortie

Trois approches sont possibles afin de modéliser les conditions de sortie de la colonne à bulles. La première approche est de définir une zone d'air libre au-dessus de la phase liquide. Dans ce cas, il faut définir correctement les conditions initiales de la pression hydrostatique au niveau de la région d'air dans le domaine. Cette approche permet la variation du niveau de la phase liquide ainsi que sa recirculation à la sortie de la colonne. Cette option décrit bien la réalité. Par contre, nous avons défini la phase d'air comme étant une phase dispersée. Or, la zone d'air libre présente une phase continue et les termes de transfert de quantité de mouvement au niveau de l'interface séparant les deux phases ne sont plus valides. De plus, cette approche nécessite un domaine plus large. Ainsi, elle est plus coûteuse du point de vue du temps de

calcul.

La deuxième approche consiste à définir la surface à la sortie comme étant une surface libre à pression constante. Cette condition permet aux deux phases de s'échapper du domaine et au niveau d'eau de varier lors de l'injection du gaz. Cependant, lorsqu'on choisit la condition de pression fixe, Ansys-CFX impose un mur fictif pour empêcher l'écoulement dans le sens inverse. Ainsi, l'écoulement liquide échappé du domaine ne serait pas récupéré. Ceci peut induire des problèmes de convergence au niveau des équations de conservation de la masse. Une solution à ce problème est de définir un taux de vide non nul, dans les conditions initiales du canal. Cependant, la convergence du problème devient sensible au choix du taux de vide initiale.

Dans cette étude nous avons appliqué la troisième option connue comme condition de dégazage. Cette approche est équivalente à une condition de pression fixe. Afin d'éviter la perte de l'écoulement liquide du domaine, Ansys-CFX impose un mur fictif qui permet seulement à la phase gazeuse de s'échapper du domaine. La phase liquide aperçoit, ainsi, la surface à la sortie comme étant un mur fictif à glissement libre et ne peut pas s'échapper du domaine. Cette approche est l'approximation recommandée par [105] pour la simulation des colonnes à bulle et elle est la plus utilisée dans la littérature.

À la figure 4.4, nous avons comparé la configuration de l'écoulement et la vitesse du liquide moyennée dans le temps pour une durée de 5 s pour les trois conditions de sortie. Pour la figure 4.4 (a), comme nous l'avons déjà indiqué, il est incohérent de décrire le transfert de la quantité de mouvement au niveau de l'interface par des modèles d'écoulement dispersé. Pour la condition de pression constante (la figure 4.4(c)), les vecteurs vitesse au niveau de la surface supérieure nous indiquent que le liquide est en train de s'échapper du domaine. Pour la condition de dégazage, à la figure 4.4(b), on observe que la présence de mur, qui empêche la phase liquide de s'échapper du domaine, induit des zones de recirculation plus intense que celle observée dans l'approche précédente.

Maillage

Pour créer le maillage, nous avons utilisé le logiciel de maillage Ansys-Meshing [105]. Pour la simulation des colonnes à bulles, le guide d'utilisation de CFX recommande l'utilisation d'un maillage hexaédrique. Selon le guide de CFX [105], ce type de maillage permet d'avoir la meilleure qualité de maillage du point de vue de la qualité des cellules, du facteur d'asymétrie et du coefficient d'orthogonalité. Ce type de maillage est souvent utilisé dans la littérature pour ce même cas d'étude [36, 47, 99–101].

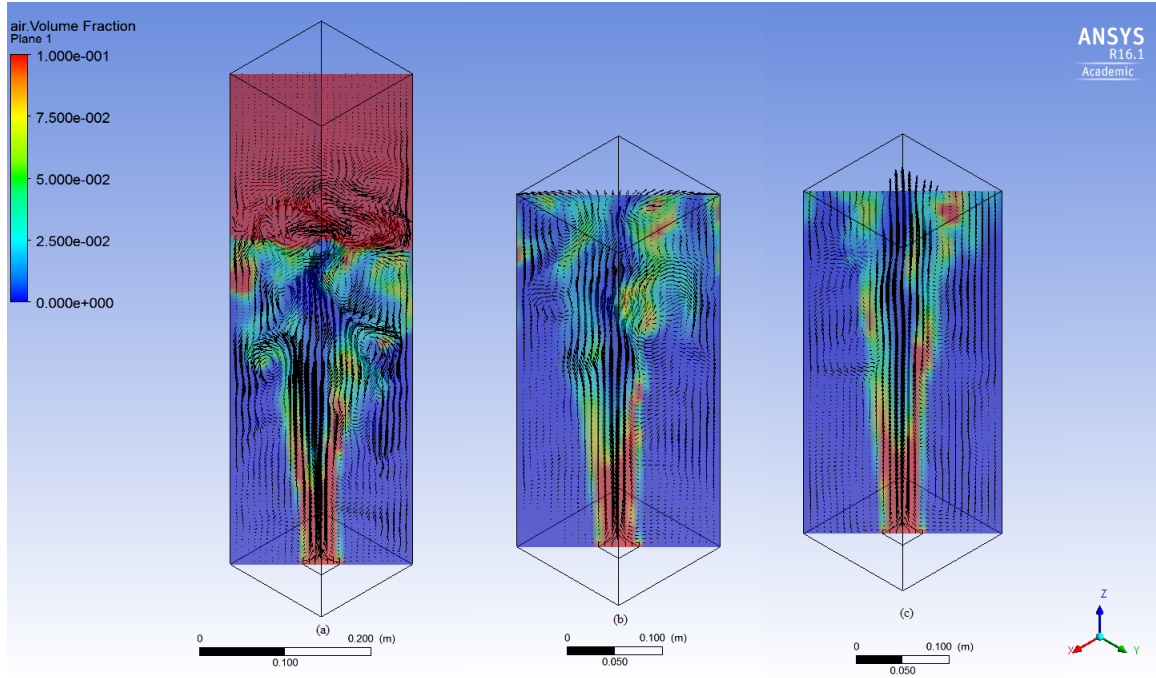


Figure 4.4 Configuration du champ de vitesses du liquide et du taux de vide à $t = 5$ s. (a) Zone d'air libre (b) Dégazage (c) Condition de pression fixe.

En ce qui concerne la taille du maillage, pour la simulation des écoulements dispersés en simulation Euler-Euler, impose que la taille des mailles doit être suffisamment grande pour contenir tous les détails de l'interface air-eau afin de permettre une modélisation adéquate des termes de transfert d'énergie et de quantité de mouvement au niveau de l'interface [47]. Cette limitation a été aussi relevée par Stenmark. [106], qui a souligné le fait que pour que le calcul de la moyenne des équations de conservation soit correct, le modèle Euler-Euler, dans Ansys-CFX, exige que la taille des mailles soit supérieure à la dimension de la bulle. Ainsi, comme le diamètre des bulles, mesuré dans l'expérience de Deen [10], est égal à 4 mm, les études qui ont simulé cette expérience ont utilisé un maillage grossier de dimension $15 \times 15 \times 45$ éléments, donc des arêtes de dimensions ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10$ mm), et $30 \times 30 \times 90$ éléments, pour un maillage fin ce qui revient à des arêtes de dimensions ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ mm) [36,47,99–101]. Leurs simulations ont été réalisées en utilisant des pas de temps compris entre 0.005 s et 0.01 s, en fonction de la résolution. Le pas de temps a été sélectionné en appliquant le critère du nombre de courant CFL, c'est-à-dire $dt \leq \frac{\Delta z}{|\bar{U}|}$.

Dans cette étude, nous avons effectué des calculs transitoires pour plusieurs grandeurs de maillages ($\Delta x = \Delta y = \Delta z \in [4, 10]$ mm), illustrées à la figure 4.5 et des pas de temps constants compris entre 0.001 s et 0.01 s. Les tailles des mailles utilisées sont présentées au

tableau 4.2.

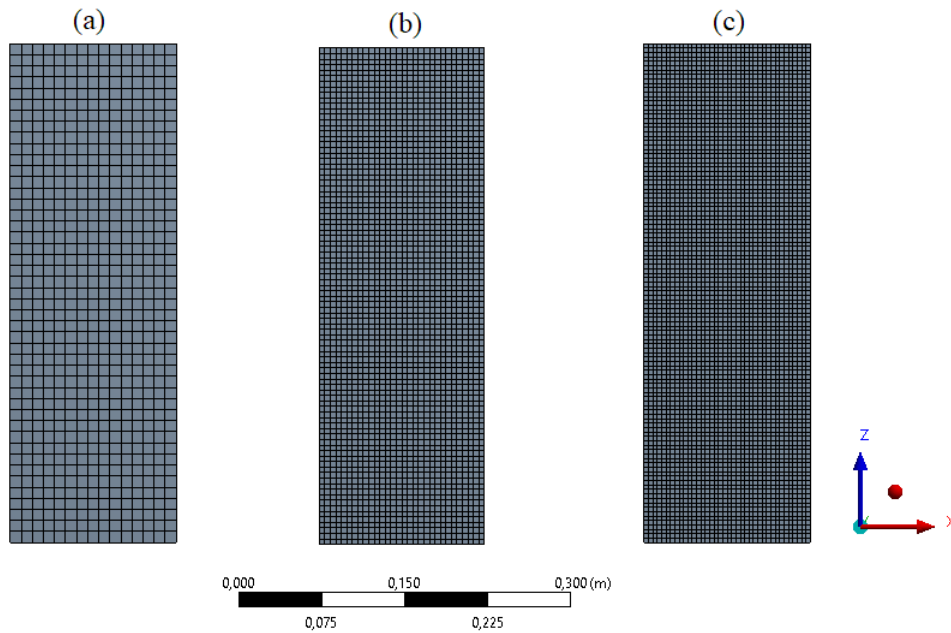


Figure 4.5 Une vue de devant du maillage de la colonne à bulle. (a) grossier (maille 1), (b) moyen (maille 2) et (c) fin (maille 3).

Tableau 4.2 Dimensions du maillage.

	type	Δz (mm)	Nombre de noeuds	Nombre d'éléments
Maille 1	maillage grossier	10	11 776	10 125
Maille 2	maillage moyen	5	87 451	81 000
Maille 3	maillage fin	4	173 394	163 172

Sur les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, nous avons évalué l'effet de la variation du pas de temps pour chacune des mailles, par le calcul de l'écart absolu, entre les solutions du pas de temps courant par rapport au pas de temps le plus petit. Ainsi :

$$EA = |Variable(dt_{\min}) - Variable(dt_{\text{courant}})| \quad (4.28)$$

Les variables que nous avons analysées sont les moyennes temporelles de la vitesse verticale de la phase gazeuse et du liquide. Ces deux paramètres seront utilisés plus tard afin de comparer avec les mesures expérimentales de Deen [10]. La durée totale des simulations que nous avons réalisées est $T = 100$ s. Afin de permettre à l'écoulement de se développer, nous

avons calculé la moyenne temporelle des différentes variables durant les dernières 50 s de la simulation. Ainsi, la moyenne de la vitesse calculée à l'instant t_n est calculée à partir de la moyenne de vitesse à l'instant t_{n-1} comme suit :

$$\bar{U}_n = \frac{n - n_0 - 1}{n_n - n_0} \bar{U}_{n-1} + \frac{1}{n - n_0} U_n \quad (4.29)$$

avec n le pas de temps correspondant à l'instant t_n et n_0 le pas de temps à partir duquel on commence le calcul de la moyenne.

Tableau 4.3 Effet de pas du temps pour la maille 1.

Maille 1		
Pas de temps (ms)	EA (U_{gz})	EA (U_{lz})
10	$3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
5	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
3	$2 \cdot 10^{-4}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$
1.5	-	-

Tableau 4.4 Effet de pas du temps pour la maille 2.

Maille 2		
Pas de temps (ms)	EA (U_{gz})	EA (U_{lz})
10	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
5	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
3	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
2	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
1.5	-	-

Tableau 4.5 Effet de pas du temps pour la maille 3.

Maille 3		
Pas de temps (ms)	EA (U_{gz})	EA (U_{lz})
10	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$
5	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
3	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
2	-	-

Ainsi, on constate dans le tableau 4.3, qu'on obtient un écart absolu de l'ordre de 10^{-4} sur les vitesses obtenues avec les pas de temps 5 ms et 1.5 ms. Pour le maillage moyen (tableau 4.4),

on considère que l'écart absolu $\approx 10^{-4}$ obtenu entre les solutions des pas de temps 3 ms et 1.5 ms présente une précision suffisante pour le calcul des vitesses. Pour le maillage fin (tableau 4.5), l'écart absolu le plus faible ($\approx 10^{-4}$) est obtenu pour les solutions des deux pas de temps 3 ms et 2 ms.

La taille du volume de contrôle est imposée par la taille des mailles. Ainsi, le raffinement du maillage est limité par la dimension des bulles afin d'assurer la cohérence du calcul de la moyenne. La deuxième limite est imposée par la méthode de discrétisation des termes transitoires. En effet, la méthode d'Euler implicite de second ordre permet une erreur d'ordre supérieur par rapport à la méthode d'ordre 1. Elle offre une meilleure précision. Néanmoins, nous avons remarqué qu'elle génère des instabilités pour des pas de temps très petits. Par conséquent, elle produit des oscillations qui peuvent nuire à la convergence [9].

La figure 4.6 illustre l'effet de la dimension du maillage sur le calcul des vitesses moyennées dans le temps du gaz et du liquide à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s. Les pas de temps pour chacune des mailles sont respectivement $dt = 5$ ms pour le maillage grossier, $dt = 3$ ms pour le maillage moyen et $dt = 2$ ms pour le maillage fin. On constate sur ces figures, qu'il existe une différence entre le résultat obtenu par le maillage grossier et le maillage moyen. En revanche, la différence entre les solutions obtenues par le maillage moyen et fin est négligeable par rapport au comportement global du profil des vitesses. Ainsi, nous avons considéré par la suite que le maillage moyen et un pas de temps $dt = 3$ ms sont suffisants afin d'atteindre une précision de l'ordre de 10^{-4} sur le calcul des vitesses et du taux de vide.

Sur ces figures, nous avons comparé les résultats numériques aux mesures expérimentales de [10]. Les mesures ont été effectuées au centre du canal à une hauteur égale à 25 cm. On constate, ainsi, à la figure 4.6, que les résultats des simulations surestiment le calcul des vitesses du gaz et du liquide au centre du canal. Cet écart est dû au fait qu'on utilise un modèle laminaire et qu'on ne tient pas compte de l'effet de la force de portance. En effet, Deen et al. [99] ont analysé l'effet de chacune des forces interfaciales sur les profils des vitesses du liquide et du gaz, moyennées dans le temps. Ils ont constaté que lorsqu'on tient compte seulement des forces de traînée et de masse ajoutée, les résultats numériques surestiment la prédiction de la vitesse du gaz au centre du canal. L'aplatissement du profil de la vitesse du gaz a été modélisé en utilisant le modèle LES pour la turbulence et en tenant compte de la force de portance avec un coefficient $C_L = 0.5$. Or, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3.2, la physique derrière les modèles actuels de la turbulence diphasique et de la force de portance est un sujet de questionnement. De plus, leurs contributions dans la dispersion des petites bulles peut masquer l'effet Meshchersky. Dans le cadre des objectifs de notre analyse, nous avons ainsi décidé de ne pas les inclure dans notre modèle. Toutefois, dans les

applications industrielles, le taux de vide des écoulements dispersés est généralement faible. Ainsi, il est recommandé d'utiliser un modèle de turbulence afin d'approcher les solutions numériques aux mesures expérimentales. Cependant, la validité de ces modèles est limitée dans les régions de taux de vide local élevé.

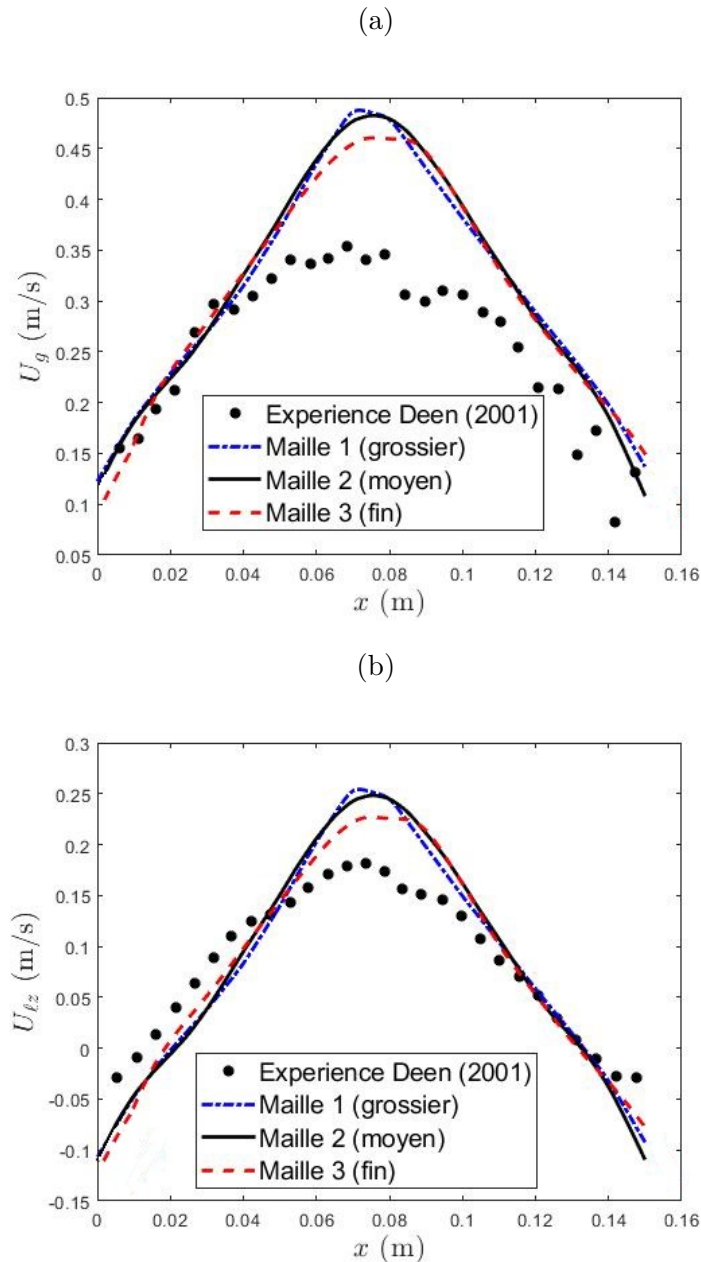


Figure 4.6 L'effet de la taille des mailles sur le calcul des vitesses moyennées dans le temps dans du (a) gaz et (b) du liquide à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s.

4.4 L'Analyse de l'effet de la force de Meshchersky pour une colonne à bulle

En résumant ce qui précède, afin d'évaluer l'effet de la force de Meshchersky, nous avons simulé le cas de la colonne à bulle de Deen [10]. Le code numérique utilisé dans nos simulations est Ansys-CFX. Ce code résout les équations de Navier-Stokes moyennées. Il utilise la méthode des volumes finis pour l'intégration spatiale et nous avons choisi la méthode d'Euler implicite de second ordre pour l'intégration temporelle. La condition de convergence définie par l'équation (4.26), a été fixé à 10^{-5} .

En ce qui concerne les conditions aux frontières, la vitesse d'entrée du canal est égale à 0.1225 ms. Cette valeur a été calculée à partir de la vitesse superficielle du gaz et de la géométrie du canal. Au niveau des parois, nous avons imposé une condition de non-glissement. Et pour la sortie du canal, nous avons appliqué une condition de dégazage.

À partir de l'étude de sensibilité de la solution numérique aux dimensions du maillage et du choix du pas de temps, nous avons choisi la maille 2 de type hexaédrique uniforme de dimension ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ mm) ce qui revient à 87451 noeuds et 81000 éléments et un pas de temps fixe égal à $dt = 3$ s.

Nous avons traité l'écoulement comme étant laminaire. Ainsi, on n'applique pas un modèle de turbulence et on néglige la force de portance et la force de dispersion turbulente.

Nous avons implanté la force de Meshchersky que nous avons calculé à partir des corrélations de masse ajoutée de Zuber [23] (équation (4.5)) et Béguin et al. [18] (équation (4.6)), dans le code Ansys-CFX. Par la suite, nous avons comparé les solutions obtenues par les simulations avec une masse ajoutée constante ($C_m = 0.5$), donc sans force de Meshchersky, et des masses ajoutées variables, en tenant compte de la force de Meshchersky. À la figure 4.7, nous avons analysé l'effet de la force de Meshchersky sur le profil du taux de vide moyenné dans le temps à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation égale à $T = 100$ s. De plus, aux figures 4.8, nous avons comparé les résultats pour le calcul des vitesses moyennées dans le temps de la phase gazeuse (a) et la phase liquide (b) à la même position que pour la figure précédente.

En tenant compte de la force de Meshchersky, la figure 4.7 montre un aplatissement du profil du taux de vide. De plus, on constate que l'effet de la force de Meshchersky sur la migration latérale des bulles est plus important lorsqu'il est calculé à partir de la corrélation de Zuber [23]. Ainsi, l'effet dispersif de la force de Meshchersky est sensible au choix de la corrélation de masse ajoutée. En fait, comme nous l'avons constaté à la figure 2.7, la corrélation de Zuber (2.91) décrit les valeurs supérieures de la masse ajoutée. Par conséquent, elle permet de mieux capturer l'effet de la force de Meshchersky sur la dispersion des bulles.

Aux figures 4.8, on constate que la force de Meshchersky permet de mieux approcher les me-

sures expérimentales des vitesses. Cette amélioration est plus importante au milieu du canal pour la corrélation de Zuber (2.91). Par conséquent, notre modèle de force de Meshchersky résulte en une meilleure représentation de la migration transversale du taux de vide. De plus, la prise en compte de cet effet permet une représentation plus proche de la physique des écoulements à bulles. L'effet Meshchersky a permis d'améliorer la précision du modèle numérique en rapprochant la solution des calculs de vitesses aux valeurs mesurées expérimentalement.

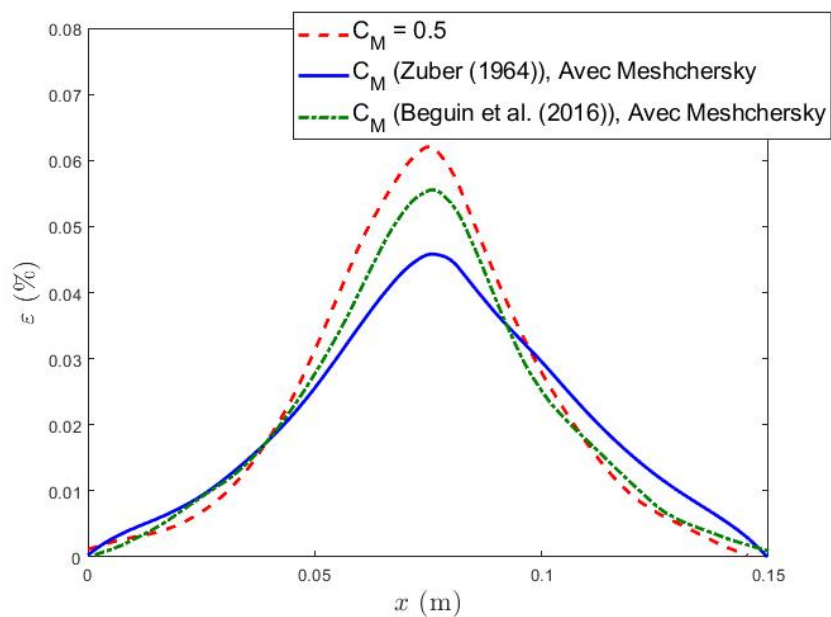


Figure 4.7 L'effet de la force de Meshchersky sur le calcul du taux de vide moyenné dans le temps à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s.

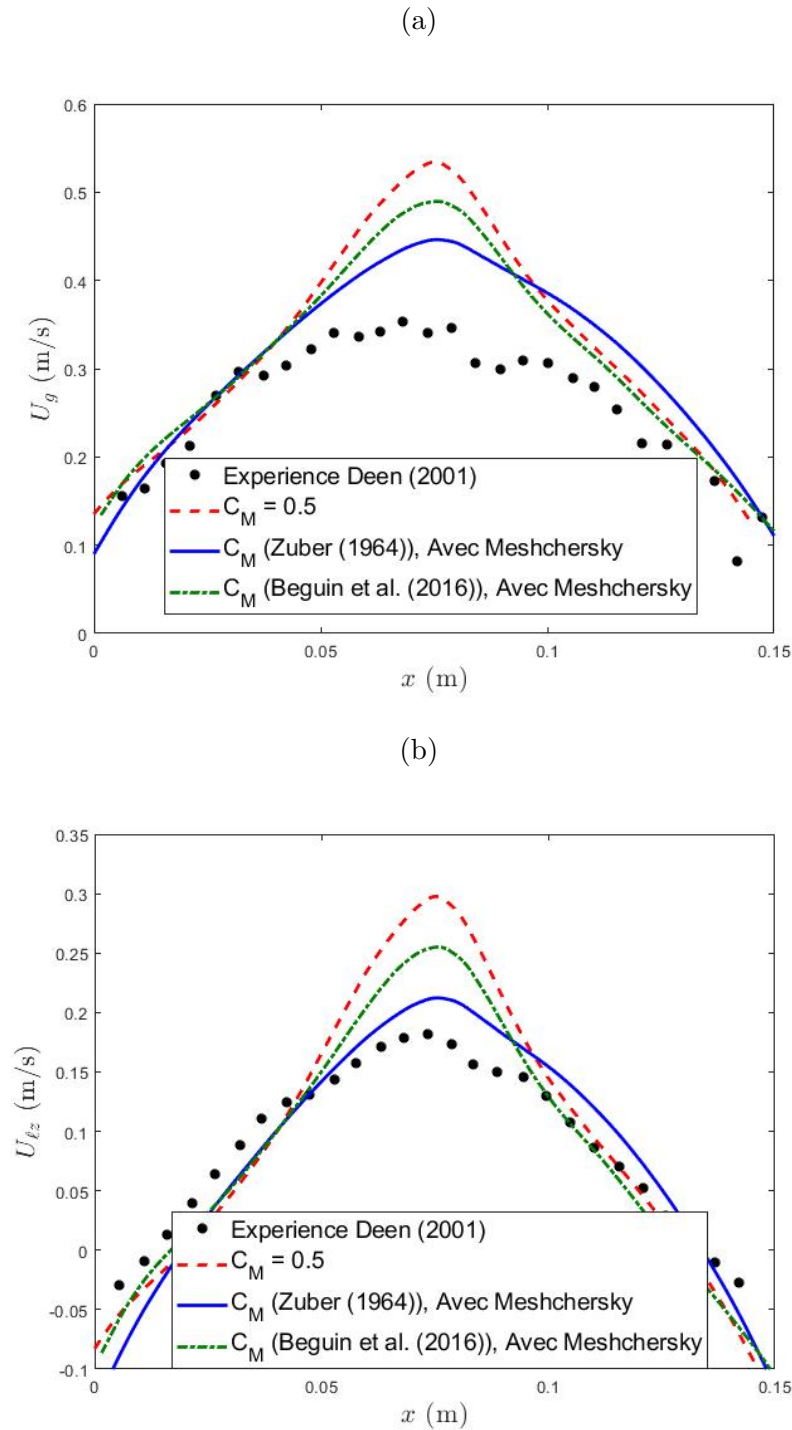


Figure 4.8 L'effet de la force de Meshchersky sur le calcul des vitesses moyennées dans le temps dans du (a) gaz et (b) du liquide à une distance égale à 25 cm par rapport à l'entrée du canal et pour une durée de simulation $T = 100$ s.

4.5 Conclusion

Le rôle de la masse ajoutée sur la dispersion des nuages de bulles a été évalué. Nous avons envisagé une représentation plus complète des effets de la masse ajoutée qui prend en compte la force de Meshchersky. Cette force apparaît naturellement à partir de l'analyse de la pression en écoulement potentiel. Cette partie de la force de la masse ajoutée provient du fait que la masse ajoutée varie dans l'espace. Nous sommes donc confrontés à un problème à masse variable. Deux types de simulations numériques ont été entrepris pour tester l'effet de cette représentation plus complète de la masse ajoutée sur les nuages de bulles. Les approches Euler-Euler et Euler-Lagrange ont été utilisées afin d'inclure des modèles de masse ajoutée et de masse ajoutée induite, et de discuter de leur capacité à représenter les interactions hydrodynamiques entre les bulles. Dans l'approche Euler-Lagrange, on connaît les positions et les vitesses de chacune des bulles dans l'écoulement. Par conséquent, les effets locaux sur la force de Meshchersky ont été adéquatement modélisés et son rôle sur la dispersion du nuage de bulles a été observé.

Pour l'approche Euler-Euler, nous avons constaté que la force de Meshchersky contribue à la migration latérale du taux de vide. Ainsi, la prise en compte de l'effet Meshchersky a permis de se rapprocher des mesures expérimentales. Par conséquent, la contribution de la force de Meshchersky sur la dispersion transverse de l'écoulement a été mise en évidence. Ainsi, afin de mieux représenter la physique responsable à la migration transversale du taux de vide, il est important d'inclure l'effet Meshchersky dans les solutions numériques. Toutefois, l'effet de la force de Meshchersky dépend du choix du modèle du coefficient de masse ajoutée. En fait, comme nous l'avons exposé dans la section 2.6.2, dans la littérature, il n'existe pas un consensus concernant l'effet du taux de vide sur la variation de la masse ajoutée. La masse ajoutée est très sensible à l'arrangement local des bulles. Cependant, en modélisation eulérienne, cette information est perdue par le processus de calcul de la moyenne. Par conséquent, les modèles actuels de masse ajoutée qui tiennent compte de la présence de bulles à partir du taux de vide ne permettent pas de capturer les effets locaux de la configuration de l'écoulement.

Une meilleure modélisation de la masse ajoutée pourrait permettre de considérer la masse ajoutée comme un tenseur plutôt qu'un scalaire. Le gradient de taux de vide pourrait être un moyen afin de tenir compte de l'asymétrie du nuage de bulles autour de la bulle centrale. Par conséquent, dans le chapitre suivant, nous proposons une corrélation pour le tenseur de la masse ajoutée qui considère l'effet du gradient de taux de vide. Cela pourrait permettre de modéliser de manière plus cohérente la force de la masse ajoutée et la force de Meshchersky, ce qui mènera à une représentation plus précise de la dispersion des bulles induite par la

variation de la masse ajoutée en description Euler-Euler.

Nous tenons aussi à noter que l'implémentation des équations en formulation Euler-Euler considère un volume de contrôle basé sur la taille des mailles. Or, cela n'est pas cohérent avec le processus de moyennage qui s'appuie sur une taille de volume de contrôle imposé par le type de dispersion à simuler et non pas la taille des mailles. Par conséquent, la taille du maillage devient limitée par la dimension de la phase dispersée. De plus, cela implique que deux simulations avec des tailles de mailles différentes, ne résolvent pas les mêmes équations, puisque la surface de moyennage change en fonction du maillage.

Un autre point à souligner est qu'il est préférable de choisir un maillage cartésien puisqu'il n'est pas certain que la variation spatiale du volume de contrôle soit prise en compte dans le code de calcul CFX.

Ceci dit, l'effet Meshchersky que nous tenions à mettre en évidence sur un cas test physique couramment étudié, pour lequel on dispose de données expérimentales, est bien net. En somme, notre analyse de convergence spatiale est difficile à montrer parce que les équations résolues dépendent de la taille de la maille. Les autres tests tels que la convergence temporelle sont par contre adaptés.

CHAPITRE 5 LES EFFETS DE LA CONFIGURATION DU NUAGE DE BULLES SUR LA MASSE AJOUTÉE EN MODÉLISATION EULER-EULER

Nous avons évoqué, au chapitre 3, la sensibilité de la masse ajoutée à la distribution locale des bulles dans le nuage. Lorsque le nuage de bulles évolue dans le temps, sa masse ajoutée fluctue, ce qui crée un effet Meshchersky. Au chapitre 2, nous avons constaté que les corrélations qui existent dans la littérature en modélisation eulérienne ne considèrent pas la distribution locale des bulles. Par conséquent, elles ne permettent pas une représentation adéquate de la force de Meshchersky. En effet, en modélisation eulérienne, l'information sur les positions relatives entre les bulles est perdue par le processus du moyennage, ce qui entraîne une incohérence dans l'évaluation de la masse ajoutée. Ainsi, les corrélations actuelles ne prennent pas en compte l'effet de la variation de la distribution spatiale des bulles. Ceci entraîne une déficience dans la modélisation de la force de Meshchersky.

Comme la force de Meshchersky est une conséquence directe de la variation de la masse ajoutée, il est nécessaire d'établir un modèle plus complet pour la masse ajoutée qui permette une représentation plus juste de l'effet Meshchersky. Les corrélations de masse ajoutée actuelles utilisent le taux de vide afin d'inclure l'effet de la présence des bulles dans le nuage. Cependant, ce paramètre ne permet pas d'inclure l'effet de la distribution locale du nuage. Par conséquent, la prise en compte de la dépendance au taux de vide est insuffisante pour modéliser adéquatement la masse ajoutée, ainsi que la force de Meshchersky. À cet égard, ce chapitre porte sur le développement d'une nouvelle corrélation de masse ajoutée qui tient compte de la distribution locale des bulles via le taux de vide ainsi que son gradient. Les coefficients de masse ajoutée des nuages de bulles, ont été calculés à partir de la résolution de l'écoulement potentiel.

Dans l'hypothèse où le gradient du taux de vide est un paramètre qui permet de tenir compte de la distribution locale des bulles, le tenseur de la masse ajoutée s'écrit

$$\overline{\overline{C_m}} = \overline{\overline{f(\varepsilon, \vec{\nabla} \varepsilon)}} \quad (5.1)$$

Pour déterminer cette relation, nous avons défini une fonction de distribution du taux de vide qui permet d'inclure l'effet de la distance entre les bulles dans la modélisation de la masse ajoutée. Dans un premier temps, nous avons analysé des nuages de bulles de configuration régulière, dans le but d'éliminer l'effet du gradient du taux de vide et d'établir la dépendance de la masse ajoutée au taux de vide. Puis, nous avons appliqué une transformation sur les nuages réguliers, afin de créer artificiellement un gradient du taux de vide unidirectionnel.

Cette approche permet d'évaluer l'effet du gradient du taux de vide sur la masse ajoutée du nuage et de proposer un modèle plus général de la masse ajoutée. Nous avons alors comparé le modèle proposé aux valeurs des coefficients de masse ajoutée pour des nuages aléatoires. Enfin, nous avons conclu ce chapitre par une discussion sur la portée et les limites du modèle proposé.

5.1 La résolution de l'écoulement potentiel autour d'un nuage de bulles

Cette section présente la méthodologie que nous avons utilisée pour la résolution de l'écoulement potentiel autour d'un nuage de bulles et qui nous a permis de calculer les coefficients de masse ajoutée pour chacune des bulles dans le nuage.

La fonction potentielle est une solution de l'équation de Laplace (3.6). Par conséquent, la résolution de l'écoulement autour du nuage de bulles revient à définir les fonctions harmoniques, qui satisfont les conditions aux limites suivantes :

- À l'infini, la vitesse converge vers zéro.
- La fonction potentielle Φ respecte la condition de non-pénétration au niveau des surfaces des bulles, c'est-à-dire que le fluide ne peut pas traverser les parois de toutes les bulles du nuage.

Comme les harmoniques sphériques sont des solutions de l'équation de Laplace [107] et elles sont invariantes aux rotations, la fonction potentielle autour d'un nuage de N_b bulles, peut s'exprimer par la somme des harmoniques sphériques régulières $R_l^m(\vec{r})$ et irrégulières $S_l^m(\vec{r})$ comme suit [18] :

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N_b} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,n}^m R_l^m(\vec{r}_n) + g_{l,n}^m S_l^m(\vec{r}_n), \quad (5.2)$$

où $\sum_{n=1}^{N_b}$ définit la sommation sur l'ensemble des bulles, \vec{r}_n est le vecteur position exprimé dans le référentiel de la $n^{\text{ème}}$ bulle. $g_{l,n}^m$ et $f_{l,n}^m$ sont des constantes déterminées par les conditions aux limites et les harmoniques sphériques sont définies comme suit :

$$R_l^m(\vec{r}) = R_l^m(r, \vartheta, \zeta) = (-1)^{\frac{|m|+m}{2}} r^l \tilde{Y}_l^m(\vartheta, \zeta) \quad (5.3)$$

$$S_l^m(\vec{r}) = S_l^m(r, \vartheta, \zeta) = (-1)^{\frac{|m|+m}{2}} \frac{\tilde{Y}_l^m(\vartheta, \zeta)}{r^{l+1}} \quad (5.4)$$

avec $-l \leq m \leq l$.

Les \tilde{Y}_l^m représentent les harmoniques sphériques normalisées. Elles sont définies par [18] :

$$\tilde{Y}_l^m(\vec{r}) = \tilde{Y}_l^m(r, \vartheta, \zeta) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\zeta}. \quad (5.5)$$

où $-l \leq m \leq l$ et P_l^m sont les polynômes associés de Legendre.

D'une manière générale, pour une variable quelconque x , les polynômes associés de Legendre sont donnés par [108] :

$$P_l^m = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (5.6)$$

Afin que l'équation (5.2) respecte la première condition aux limites (qui consiste à converger la vitesse à l'infini vers zéro), les constantes $f_{l,n}^m$ doivent être nulles. Ainsi, l'équation de l'écoulement potentiel autour du nuage de bulles se réduit à :

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N_b} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{l,n}^m S_l^m(\vec{r}_n), \quad (5.7)$$

Les constantes $g_{l,n}^m$ seront déterminées à partir des conditions de non-pénétration qui consistent en l'égalité entre la composante normale de la vitesse à la surface de la $n^{\text{ème}}$ bulle et la composante normale de la vitesse à la surface d'une bulle isolée [18]. La solution analytique du potentiel autour d'une bulle isolée est déjà connue par :

$$\phi_n = -\frac{\vec{U}_n a_n^3 \cos\vartheta}{2 r^2} \quad (5.8)$$

Les constantes $g_{l,n}^m$ sont calculées à partir de la relation suivante :

$$\frac{d\Phi}{dr_n}(r = a_n) = \frac{d\phi_n}{dr_n}(r = a_n) \quad (5.9)$$

Pour les lecteurs qui s'intéressent à la méthode numérique de résolution de l'équation (5.7), nous vous invitons à consulter l'article de Béguin et al. [18].

5.2 Le calcul du coefficient de masse ajoutée dans un nuage

Pour déterminer les coefficients de masse ajoutée pour les bulles dans un nuage, nous avons posé les hypothèses suivantes

- i) L'approximation d'écoulement potentiel est suffisante pour déterminer la masse ajoutée [26, 27, 84].
- ii) Les transferts de masse et de chaleur au niveau des interfaces ne sont pas considérés.
- iii) Les bulles sont identiques, rigides, sphériques et accélèrent uniformément.

Cette dernière hypothèse est applicable dans le cadre de la description eulérienne. En effet, pour une méthode eulérienne, dans un volume de contrôle, on considère le rayon équivalent des bulles ainsi que leurs accélérations moyennes.

L'ensemble de ces hypothèses permettent d'utiliser l'approche de Takahira et al. [109] afin de résoudre l'écoulement potentiel autour de N_b bulles sphériques.

Afin de déterminer les composantes de la masse ajoutée, données par l'équation (3.15), nous avons exprimé le vecteur élément de surface donné dans la base de coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\vec{dS}_k = a_k^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos \zeta \\ \sin^2 \vartheta \sin \zeta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\zeta \quad (5.10)$$

où ϑ et ζ sont respectivement la colatitude et la longitude dans le système de coordonnées sphérique.

Et le vecteur $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Ainsi, le tenseur $\overline{\overline{C_{nk}}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C_{nk}}} &= -\frac{3}{4\pi a_k^3} \int_{S_k} \vec{\varphi}_n \otimes d\vec{S}_k \\ &= -\frac{3}{4\pi a_k} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \varphi_{n1} \sin^2 \vartheta \cos \zeta & \varphi_{n2} \sin^2 \vartheta \cos \zeta & \varphi_{n3} \sin^2 \vartheta \cos \zeta \\ \varphi_{n1} \sin^2 \vartheta \sin \zeta & \varphi_{n2} \sin^2 \vartheta \sin \zeta & \varphi_{n3} \sin^2 \vartheta \sin \zeta \\ \varphi_{n1} \sin \vartheta \cos \vartheta & \varphi_{n2} \sin \vartheta \cos \vartheta & \varphi_{n3} \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\zeta \end{aligned} \quad (5.12)$$

Par conséquent, le tenseur $\overline{\overline{C_{nk}}}$, pour un nuage de bulles en transition est donné par une matrice (3×3).

Nous rappelons la relation entre le potentiel de vitesse Φ et la fonction vectorielle $\vec{\varphi}_n$ qui est donnée par la relation (3.8), comme suit :

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N_b} \sum_{j=1}^3 \varphi_{nj} \cdot \dot{\vec{x}}_{nj} \quad (5.13)$$

où $\sum_{j=1}^3$ indique la sommation sur les composantes des vecteurs dans la base de coordonnées $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\sum_{n=1}^{N_b}$ indique la sommation sur toutes les bulles du nuage.

Ainsi, l'équation (5.13) indique que, pour une bulle de référence quelconque k , la composante φ_{ki} correspond à la valeur de la fonction Φ lorsque $\dot{x}_{ki} \neq 0$, $\dot{x}_{kj} = 0$, ($j \neq i$) et $\dot{x}_{nj} = 0$ pour

$n \neq k$ et $j = 1, 2, 3$. Par conséquent, nous avons appliqué la méthode de résolution décrite à la section 5.1 afin de déterminer les composantes du vecteur $\vec{\varphi}_k$. Ensuite, les composantes de la matrice de masse ajoutée de la bulle k sont calculées à partir de l'équation (5.12). Nous rappelons que le vecteur potentiel $\vec{\varphi}_k$ est une fonction de la position de toutes les bulles dans le nuage. Ainsi, le tenseur de masse ajoutée de la bulle k dépend de la distribution locale du nuage.

Comme décrit dans la section 5.1, nous avons utilisé les harmoniques sphériques dans la résolution de l'écoulement potentiel. Ces dernières sont fonction des polynômes associés de Legendre. Par conséquent, en vue de nous assurer de la précision de nos calculs, nous avons établi deux études de convergence. La première vise à déterminer le nombre approprié de polynômes associés de Legendre l_{max} requis pour obtenir une précision souhaitée. La deuxième consiste à analyser la sensibilité du calcul de la masse ajoutée au nombre total de bulles dans le nuage.

5.3 L'étude de convergence sur le nombre de polynômes associés de Legendre

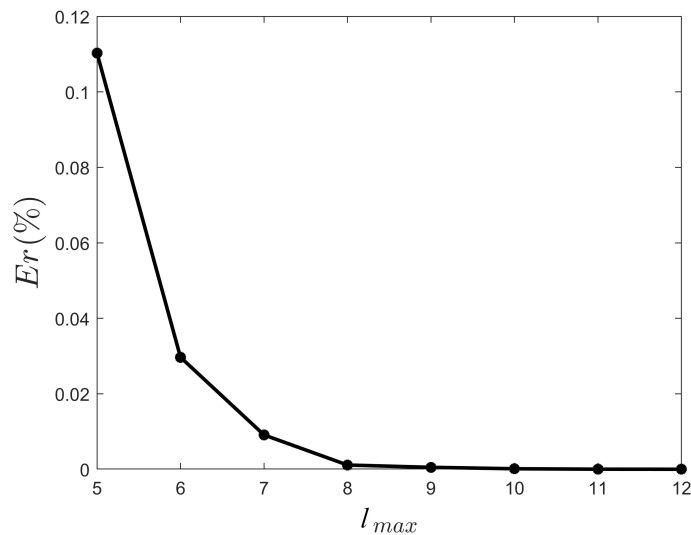
Pour déterminer le nombre approprié de polynômes associés de Legendre l_{max} , nous avons calculé le coefficient de masse ajoutée pour un nuage de bulles de distribution aléatoire pour des $l_{max} = [1, 12]$. Le tableau (5.1), présente les valeurs du coefficient de masse ajoutée pour une bulle de référence, ainsi que l'écart relatif Er entre les résultats obtenus pour deux valeurs de l_{max} successives défini comme

$$Er = \frac{|C_m(l_{max}) - C_m(l_{max} - 1)|}{C_m(l_{max} - 1)} \quad (5.14)$$

La figure 5.1 présente la variation de l'écart relatif Er en fonction de l_{max} . On observe sur cette figure qu'à partir de $l_{max} = 5$, l'écart relatif décroît d'une manière monotone. De plus, l'écart relatif entre les coefficients de masse ajoutée obtenue à partir de $l_{max} = 10$ et $l_{max} = 11$ est de l'ordre de 10^{-7} . Nous avons considéré, ainsi, que cet écart est suffisamment petit afin d'utiliser $l_{max} = 10$ pour toutes les simulations de cette étude.

Tableau 5.1 La sensibilité de calcul du coefficient de masse ajoutée à l_{max}

l_{max}	C_m	Er
1	0.39295095	
2	0.39847569	$1.4 \cdot 10^{-2}$
3	0.40600248	$1.8 \cdot 10^{-2}$
4	0.40599298	$2.3 \cdot 10^{-5}$
5	0.40644059	$1.1 \cdot 10^{-3}$
6	0.40656119	$2.9 \cdot 10^{-4}$
7	0.40659817	$9.1 \cdot 10^{-5}$
8	0.40659361	$1.1 \cdot 10^{-5}$
9	0.40659569	$5.1 \cdot 10^{-6}$
10	0.40659624	$1.3 \cdot 10^{-6}$
11	0.40659632	$1.9 \cdot 10^{-7}$
12	0.40659633	$2.4 \cdot 10^{-8}$

Figure 5.1 La variation de l'écart relatif Er des coefficients de masse ajoutée en fonction du nombre de polynômes de Legendre associés l_{max} .

5.4 La validation de la méthode numérique

Les corrélations (2.81) et (2.82) de Van Wijngaarden [11] sont des solutions analytiques de la résolution de l'écoulement potentiel autour de deux bulles. Par conséquent, afin de valider les résultats des calculs numériques, à la figure 5.2, nous avons comparé la solution numérique avec les valeurs obtenues par les modèles de Van Wijngaarden [11], pour la variation de la masse ajoutée en fonction de la distance de séparation pour les cas de deux bulles qui

accélèrent côte à côte, et l'une derrière l'autre.

Les figures 5.2 montrent un bon accord entre le calcul numérique et la solution analytique. L'écart quadratique moyen entre les deux solutions a été calculé comme suit :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_{cas}} \sum \left(C_{m_{\text{calcul direct}}} - C_{m_{\text{solution analytique}}} \right)^2} \quad (5.15)$$

Pour le cas de bulles qui accélèrent côte à côte le RMS obtenu est de l'ordre de 10^{-3} et pour le deuxième de $RMS \approx 10^{-4}$. Par conséquent, les calculs numériques permettent de reproduire les résultats analytiques avec une précision élevée.

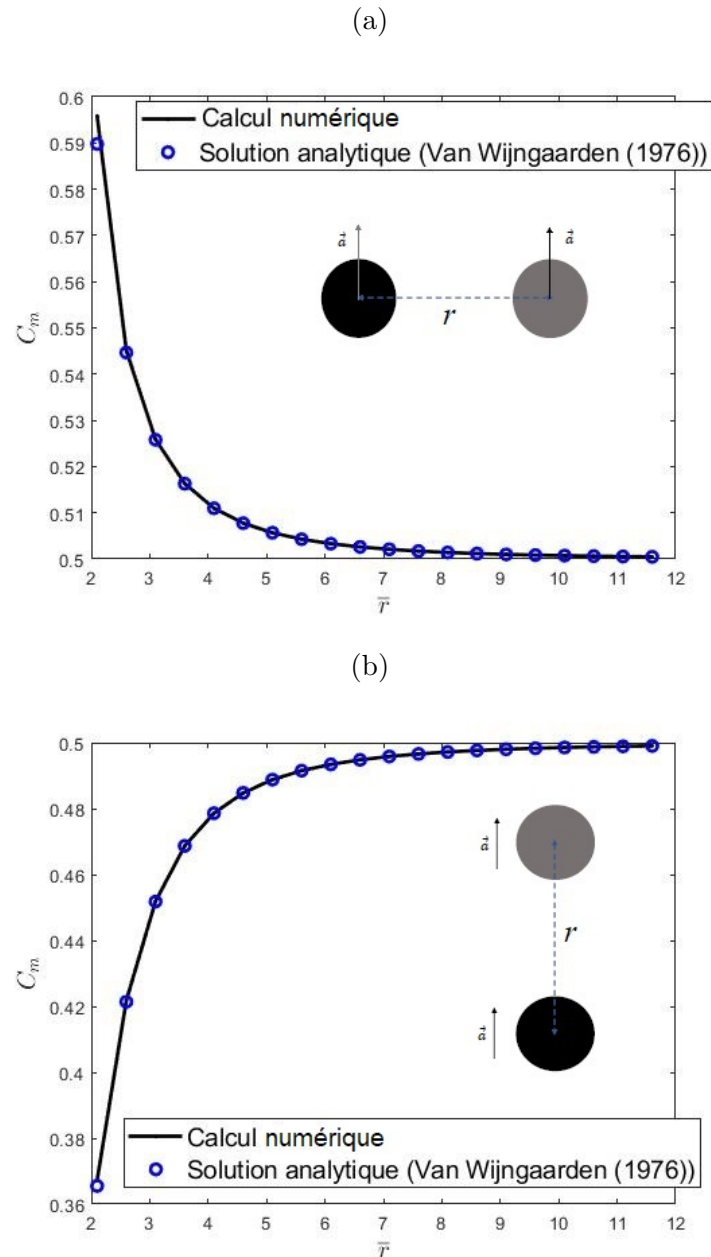


Figure 5.2 La comparaison entre les résultats numériques et la solution analytique de Van Wijngaarden [11] pour le calcul de la variation de la masse ajoutée en fonction de la distance de séparation pour les cas deux bulles qui accélèrent (a) côte à côte et (b) l'une derrière l'autre.

5.5 Étude de sensibilité de la masse ajoutée au nombre total de bulles dans le nuage

Dans cette section, nous présentons l'évaluation de l'effet du nombre total de bulles et de la position de la bulle la plus éloignée, dans le calcul du coefficient de masse ajoutée d'une bulle de référence qui occupe le centre du nuage. De ce fait, nous avons calculé le coefficient de masse ajoutée pour deux nuages de distributions aléatoires, contenant chacune un nombre initial de 500 bulles. Les bulles sont identiques de rayon a . Le premier nuage a été généré aléatoirement, tandis que dans le deuxième nuage, un critère de sélection qui assure une distribution uniforme du taux de vide dans le nuage a été employé. En d'autres termes, nous avons défini un volume de contrôle et nous nous sommes assurés que le taux de vide dans le volume de contrôle soit équivalent au taux de vide total dans le nuage. La valeur du rayon du volume de contrôle a été choisie en analysant l'effet de la distance qui sépare les bulles sur la masse ajoutée de la bulle de référence. Comme il est montré aux figures 3.3, la contribution des bulles voisines situées dans un rayon inférieur ou égal à $R_c = 5a$, dans la variation de la masse ajoutée de la bulle de référence est plus importante que l'effet des bulles plus loin. À cet égard, à chaque simulation, nous avons calculé le coefficient de masse ajoutée en retirant les 20 bulles les plus éloignées de la bulle de référence. Nous avons, ensuite, refait le même calcul jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de bulles en dehors du volume de contrôle.

La figure 5.3 montre la variation du coefficient de masse ajoutée de la bulle de référence en fonction du nombre total de bulles dans le nuage. Nous avons constaté que le coefficient de masse ajoutée est quasi-stable à partir d'un nombre total de 360 bulles. La figure 5.4 montre la variation de l'écart relatif entre deux simulations successives, défini comme suit :

$$Er = \frac{|C_m(N_b) - C_m(N_b - 20)|}{C_m(N_b - 20)} \quad (5.16)$$

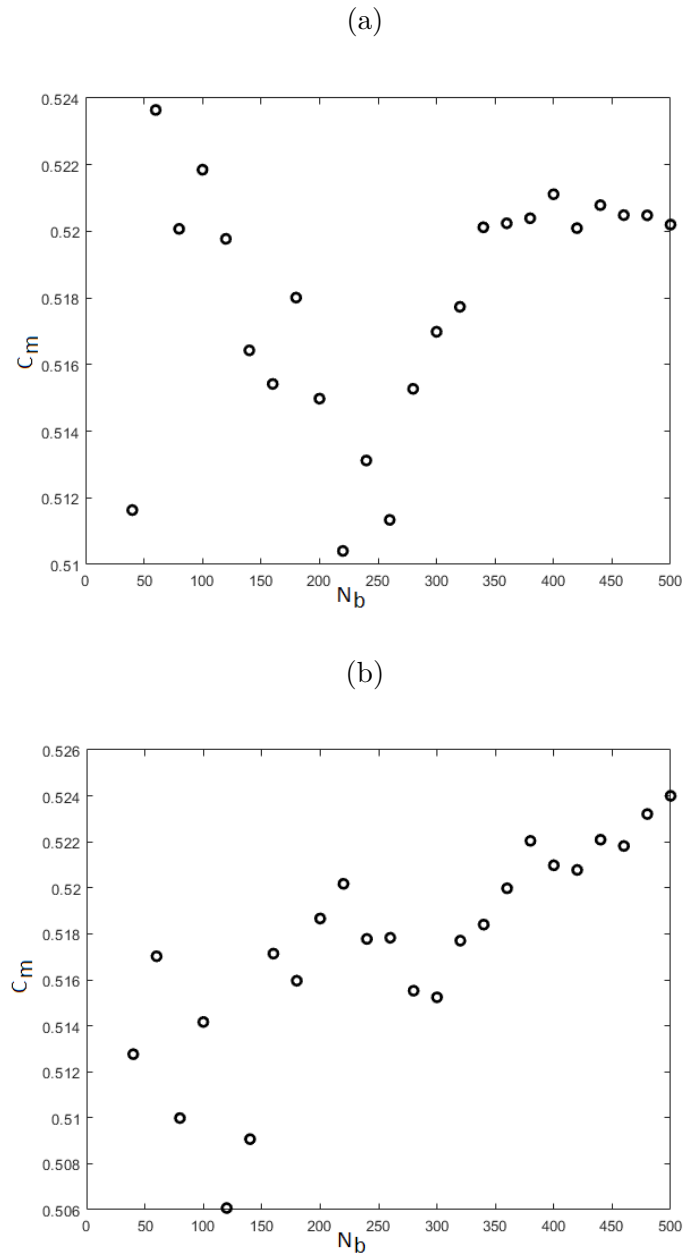


Figure 5.3 La variation du coefficient de masse ajoutée en fonction du nombre total des bulles dans le nuage (a) Nuage 1 (b) Nuage 2.

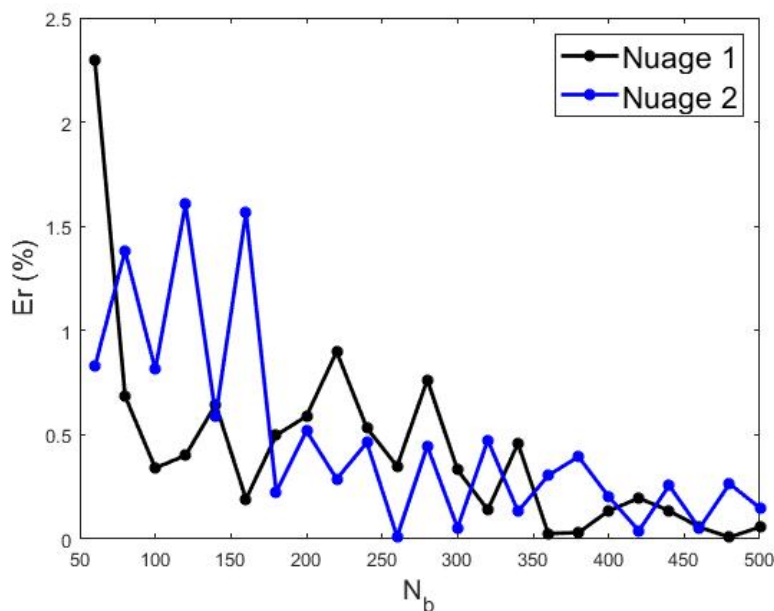


Figure 5.4 L'écart relatif entre deux simulations successives.

La figure 5.4 montre que l'écart relatif est faible ($Er \leq 0.2\%$) pour des nuages avec un nombre de bulles supérieur à 360. Ainsi, le fait d'éliminer les 140 bulles lointaines affecte faiblement la masse ajoutée de la bulle de référence. Tandis que, pour les nuages contenant un nombre de bulles inférieur à 360, l'écart relatif fluctue. Par conséquent, seules les 360 bulles les plus proches de la bulle de référence affectent sa masse ajoutée. De plus, on observe que cet effet devient de plus en plus important lorsqu'on change la distribution du nuage tout en se rapprochant de la bulle de référence.

Nous avons constaté que, pour les nuages de 360 bulles, la position de la bulle la plus éloignée de la bulle de référence est égale à $13.1 a$ pour le premier nuage et $13.02 a$ pour le second. De ce fait, pour les nuages avec un nombre élevé de bulles, afin de réduire l'effort numérique et le temps de calcul, nous avons considéré que les bulles positionnées au-delà du rayon de $13 a$, n'ont pas d'effet significatif sur le calcul du coefficient de masse ajoutée de la bulle de référence.

Le but de la section suivante est d'examiner l'exactitude des modèles de masse ajoutée actuels, présentés à la section 2.6.2. Dans cette perspective, à partir de la théorie des écoulements potentiels, nous avons calculé la masse ajoutée pour des nuages de bulles de distribution aléatoire. Par la suite, nous avons comparé les résultats obtenus aux valeurs de masse ajoutée données par les différentes corrélations.

5.6 Masse ajoutée pour des nuages de distributions aléatoires

Nous avons utilisé l'approche présentée à la section 5.2 afin de résoudre l'écoulement potentiel autour des nuages de bulles de distribution aléatoire accélérant uniformément selon la direction z . La figure 5.5 illustre les valeurs des composantes du tenseur de masse ajoutée calculées. Le coefficient C_{mz} définit la composante de la masse ajoutée dans la direction parallèle à l'accélération du nuage. Les coefficients C_{mx} et C_{my} sont les composantes de la masse ajoutée dans les directions orthogonales à l'accélération.

Nous avons par la suite comparé les corrélations de la masse ajoutée qui considèrent l'effet du taux de vide, présentées à la section 2.6.2. Toutes ces corrélations modélisent le coefficient de masse ajoutée C_{mz} dans la direction de l'accélération. Aucune de ces corrélations ne permet de calculer les composantes C_{mx} et C_{my} de la masse ajoutée. Nous observons sur la figure 5.5 que les formules de Zuber (2.91) et de Van Wijngaarden (2.95) décrivent la limite supérieure des valeurs de coefficient de masse ajoutée. La formule de Wallis (2.93) correspond à la limite inférieure et celle de Béguin et al. [18] (2.96) décrit les valeurs moyennes de la masse ajoutée. Toutefois, aucune des corrélations de la littérature ne décrit convenablement la dépendance de la masse ajoutée au taux de vide. En effet, pour un même taux de vide, la composante C_{mz} de la masse ajoutée peut avoir des valeurs très différentes (de 0.3 à 0.8). En outre, pour de nombreux nuages, les valeurs des composantes non diagonales du tenseur de la masse ajoutée présentent des valeurs relativement considérables (de $-0,25$ à $0,25$). Ces valeurs sont non négligeables et peuvent avoir un effet significatif sur la dynamique de l'écoulement. Par conséquent, à notre sens, il ne suffit pas de considérer seulement l'effet du taux de vide afin de modéliser convenablement les effets de la masse ajoutée. Nous avons déjà discuté de l'importance de la distribution locale des bulles dans le calcul de la masse ajoutée. Cette information n'est pas fournie à travers le taux de vide.

Nous avons analysé les nuages de bulles avec des valeurs de coefficients de masse ajoutée C_{mz} élevées (≈ 0.8). Ainsi, nous avons remarqué que les bulles les plus proches de la bulle de référence sont localisées sur le plan orthogonal à la direction de l'accélération. Pour les nuages avec des valeurs de coefficient de masse ajoutée C_{mz} relativement faibles (≈ 0.3), les bulles les plus proches sont localisées sur la direction parallèle à l'accélération. Quant aux coefficients C_{mx} et C_{my} , ils résultent de l'existence de bulles dans une orientation relative différente de 0° et de 90° . Par conséquent, nous avons déduit que les variations observées sont attribuées à l'asymétrie du nuage autour de la bulle centrale.

Dans cette perspective, nous avons établi une approche afin de développer un nouveau modèle de la masse ajoutée qui permet d'inclure l'effet de la configuration locale du nuage de bulles. Notre démarche s'appuie sur l'hypothèse que le gradient de taux de vide permet d'inclure

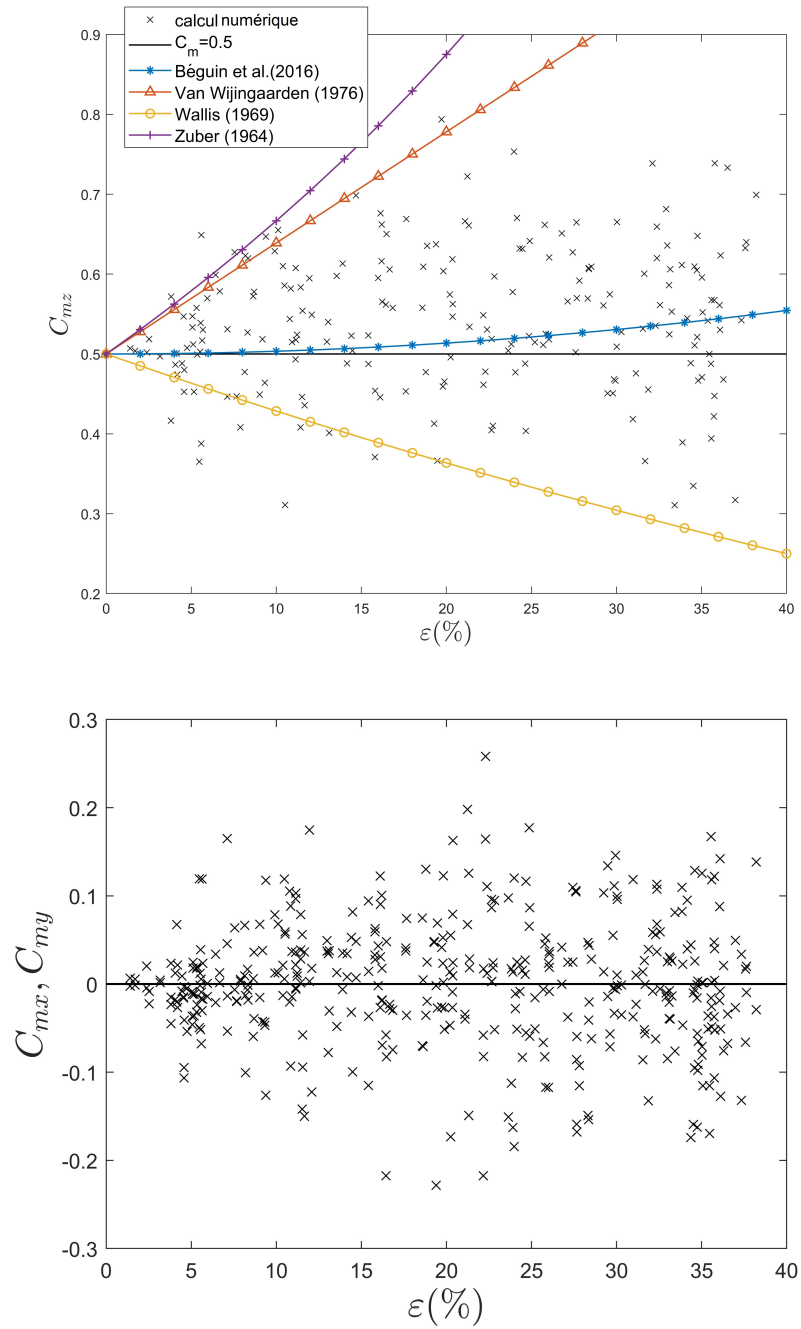


Figure 5.5 Coefficients de masse ajoutée pour des nuages de bulles de distributions aléatoires.

l'asymétrie du nuage autour d'une bulle de référence. À cette fin, nous avons commencé par définir une fonction de distribution du taux de vide qui permet d'inclure la position relative entre les bulles dans le calcul du taux de vide et de son gradient.

5.7 Le calcul du taux de vide

Les petites bulles dans un écoulement dispersé sont considérées comme des systèmes discrets. Dans l'approche lagrangienne, le mouvement de chaque bulle dans l'écoulement peut être décrit en utilisant la deuxième loi de Newton. Cependant, la description eulérienne considère que la phase gazeuse est continue. Ainsi, la moyenne des propriétés de l'écoulement est calculée dans un volume de contrôle. Dans l'optique de relier les variables discrètes aux variables continues, nous avons défini une fonction de pondération pour calculer le taux de vide. Cette approche a été initialement proposée par Zhu et al. [110] pour la simulation des écoulements granulaires. En général, la fonction de pondération $f(\bar{r})$ doit satisfaire une condition de normalisation sur tout le volume de contrôle, une condition de continuité pour le processus de dérivation et garantir que les propriétés moyennées varient de manière monotone sur tout le domaine. De plus, elle doit être positive, décroître de façon monotone à l'intérieur du volume de contrôle et tendre vers zéro à l'extérieur [110]. Cette dernière condition assure que la contribution des bulles dans la variation de la masse ajoutée varie en fonction de la distance qui les séparent de la bulle de référence. Autrement dit, plus la bulle est proche, plus son effet est pris en compte. Une fonction habituellement utilisée pour évaluer le taux de vide dans l'approche eulérienne est

$$f_0 = \frac{1}{V_c} \quad (5.17)$$

où V_c est le volume de contrôle. Cette fonction ne respecte pas la condition de décroissance monotone. Par conséquent, elle ne permet pas d'inclure l'effet de la distance entre les bulles sur la masse ajoutée. Afin de surmonter ce problème, nous avons proposé une forme polynomiale d'une fonction de pondération qui respecte toutes les conditions énoncées ci-dessus. Ainsi, la fonction de pondération est définie comme suit :

$$f(\bar{r}) = \begin{cases} A_p (\bar{r}^{2p} - 2\bar{r}^p + 1), & \text{si } \bar{r} < 1 \\ 0, & \text{si } \bar{r} \geq 1 \end{cases} \quad (5.18)$$

où $\bar{r} = \frac{r}{R_c}$. Avec r la position radiale et R_c le rayon du volume de contrôle de la bulle. Pour chaque facteur p , le coefficient A_p est déduit de la condition de normalisation. Les valeurs de A_p sont présentées à l'annexe (B).

Par conséquent, le taux de vide d'une bulle quelconque k , de rayon constant a entièrement ou partiellement à l'intérieur d'un volume de contrôle de rayon constant R_c est donné par :

$$\varepsilon_k(d, a, R_c) = \int_{V_b \cap V_c} f(\bar{r}) dV \quad (5.19)$$

Comme illustré sur la figure 5.6, d est la distance entre le centre de la bulle k et le centre du volume de contrôle V_c , a est le rayon de la bulle et R_c est le rayon du volume de contrôle. Pour les bulles entièrement à l'intérieur du volume de contrôle, la fonction de pondération est intégrée sur le volume de la bulle V_b . Quant aux bulles situées sur le bord du volume de contrôle, comme illustré à la figure 5.6, nous n'avons considéré que la partie du volume de la bulle située à l'intérieur du volume de contrôle.

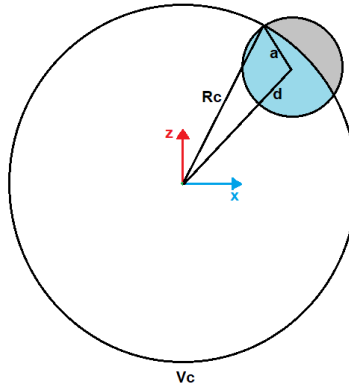


Figure 5.6 Taux de vide d'une bulle au bord du volume de contrôle.

Le gradient de taux de vide d'une bulle k est donné par définition comme suit :

$$\vec{\nabla} \varepsilon_k = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z} \vec{k} \quad (5.20)$$

Pour un nuage contenant N_b bulles, le taux de vide et le gradient du taux de vide sont calculés comme suit :

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_b} \varepsilon_k \quad (5.21)$$

$$\vec{\nabla} \varepsilon = \sum_{k=1}^{N_b} \vec{\nabla} \varepsilon_k \quad (5.22)$$

Sur la figure 5.7, nous avons comparé les distributions du taux de vide et du gradient du

taux de vide d'une bulle à l'intérieur d'un volume de contrôle en utilisant les fonctions f_0 et $f(\bar{r})$. On observe que lorsque p augmente, le comportement de la fonction $f(\bar{r})$ se rapproche du comportement de la fonction f_0 .

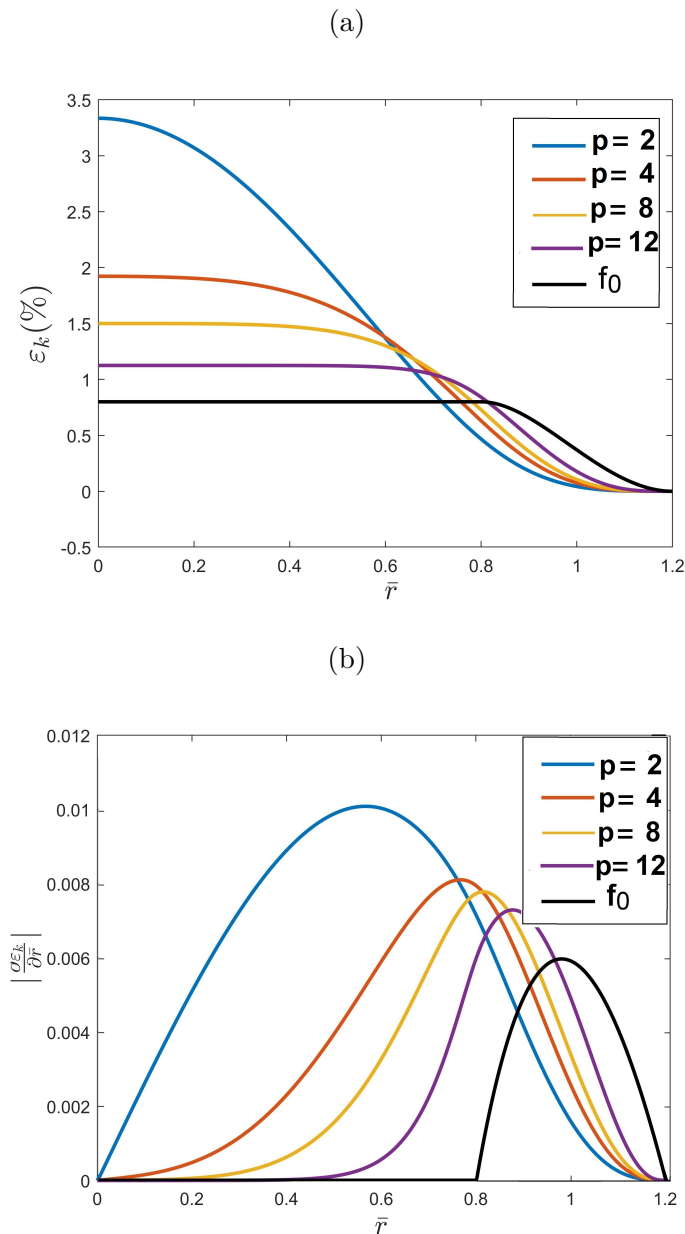


Figure 5.7 (a) Taux de vide et (b) Distribution de la norme du gradient du taux de vide d'une bulle de rayon $a = \frac{R_c}{5}$ dans un volume de contrôle de rayon R_c en fonction de la position radiale pour différentes fonctions de pondération.

5.8 La modélisation de la masse ajoutée

Afin d'évaluer l'effet du taux de vide sur la masse ajoutée, nous avons commencé par examiner des configurations régulières de nuages de bulles, c'est-à-dire les configurations cubiques simples, cubiques centrées, cubiques faces centrées et hexagonales (voir la figure 5.8). Une approche similaire a été utilisée par Chhabra [111] pour analyser l'effet de la configuration des bulles sur le coefficient de traînée. Par la suite, nous avons appliqué une transformation géométrique uniforme sur toutes les configurations afin de créer artificiellement un gradient de taux de vide. Cette méthode permet de contrôler la direction du gradient du taux de vide, et ainsi, une meilleure compréhension de sa contribution sur la variation de la masse ajoutée.

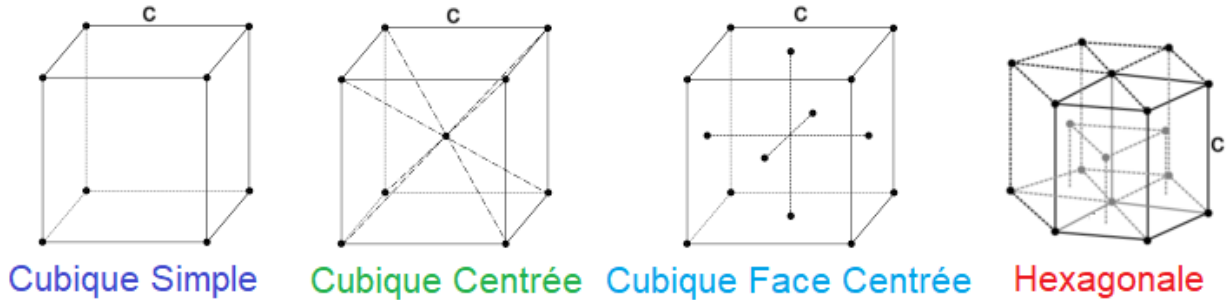


Figure 5.8 Configurations régulières de nuage de bulles.

5.8.1 Le cas de nuages de bulles réguliers

Notre objectif dans cette section est d'établir une relation entre la masse ajoutée et le taux de vide en excluant l'effet de son gradient. Par conséquent, nous avons considéré des distributions de bulles symétriques. Ainsi, le gradient du taux de vide défini par l'équation (5.22) s'annule. Toutes les bulles sont identiques de rayon a et accélèrent dans la direction z . On note par c la longueur caractéristique de la configuration telle que présentée sur la figure 5.8. En nous basant sur les formes des corrélations trouvées dans la littérature, nous avons analysé deux types de relations possibles entre le taux de vide et le coefficient de masse ajoutée. La première corrélation est une relation linéaire donnée par :

$$C_{mr1} = \frac{1}{2} + B_1\varepsilon \quad (5.23)$$

Et la deuxième relation est une forme quadratique :

$$C_{mr2} = \frac{1}{2} + B_2\varepsilon^2 \quad (5.24)$$

Les coefficients B_1 et B_2 ont été déterminés en calculant l'écart quadratique moyen, entre les corrélations et les valeurs de la masse ajoutée obtenues par la résolution de l'écoulement potentiel.

En effet, le calcul du taux de vide dépend de deux paramètres : l'exposant p dans la fonction de pondération (5.18) et le rayon du volume de contrôle R_c . Ainsi, pour chaque coefficient $p = [1, 6]$ et pour les rayons de contrôles $R_c = [3a, 10a]$, nous avons calculé les coefficients B_1 et B_2 qui donnent la valeur RMS la plus faible. Ensuite, dans nos corrélations, nous avons choisi les coefficients calculés à partir du couple (p, R_c) qui donne l'écart quadratique moyen le plus faible pour l'ensemble des simulations, c.à.d pour les configurations symétriques et asymétriques. Ces dernières seront abordées dans la prochaine section.

Pour l'ensemble des simulations, le couple $(p = 8, R_c = 5)$ donne la valeur RMS la plus faible. Pour ce couple, le coefficient B_1 de la corrélation (5.23) est égal à 0.12 avec une valeur RMS de 0.019 et le coefficient B_2 de la corrélation (5.24) est égal à 0.28 avec une valeur RMS de 0.0095. Par conséquent les deux corrélations proposées sont :

$$C_{mr1} = \frac{1}{2} + 0.12\varepsilon \quad (5.25)$$

et

$$C_{mr2} = \frac{1}{2} + 0.28\varepsilon^2 \quad (5.26)$$

Sur la figure 5.8, nous avons comparé les résultats des coefficients de masse ajoutée obtenus par la résolution de l'écoulement potentiel autour des nuages symétriques et les corrélations proposées. On constate que le coefficient de masse ajoutée de la bulle centrale croît avec l'augmentation du taux de vide. Nous observons notamment que les corrélations de Zuber (2.91), Wallis (2.93) et Van Wijngaarden (2.95) s'écartent fortement des résultats numériques. Les deux corrélations de forme quadratique (l'équation (5.26) et la corrélation de Béguin et al. (2.96)) décrivent qualitativement mieux la variation de la masse ajoutée en fonction du taux de vide, que la corrélation de forme linéaire (5.25). Puisque Béguin et al. [18] ont considéré des nuages aléatoires sans tenir compte de l'effet le gradient du taux de vide, leur modèle inclut la contribution de l'irrégularité de l'arrangement des bulles. Ainsi, la corrélation de Béguin et al. [18] surestime avec une valeur RMS de 0.013 le coefficient de masse ajoutée pour les configurations régulières.

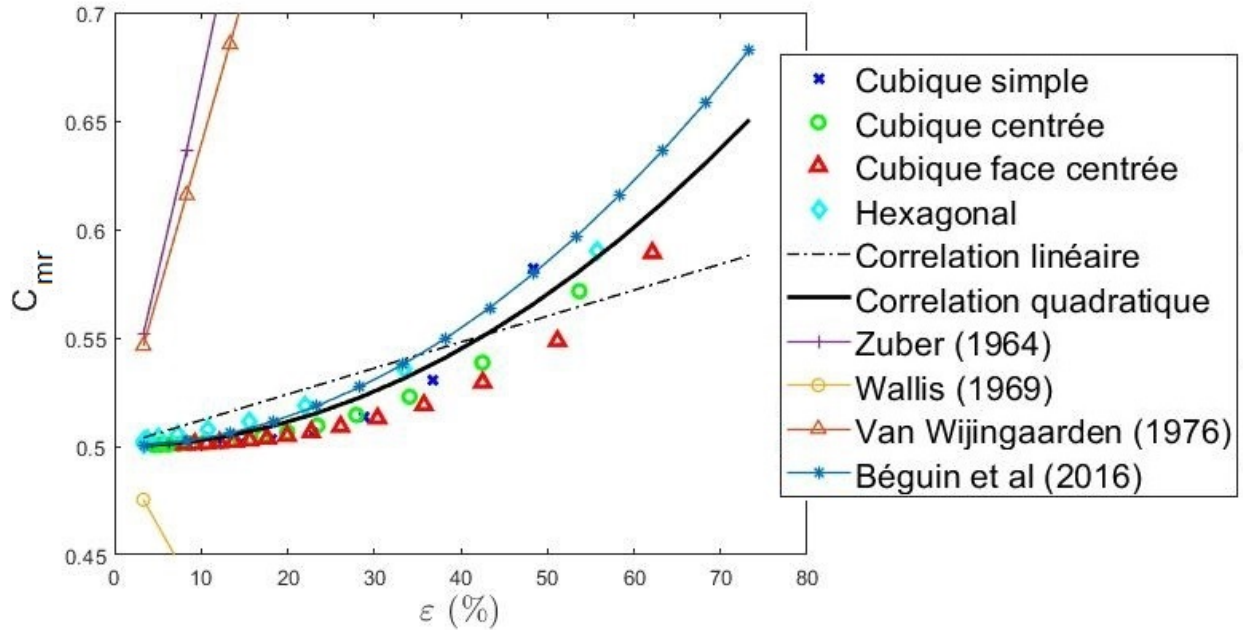


Figure 5.9 Variation des coefficients de masse ajoutée pour les nuages de configurations symétriques.

Enfin, la corrélation (5.26) présente l'écart quadratique moyen le plus faible et donne la meilleure estimation de la variation de la masse ajoutée en fonction du taux de vide pour les nuages symétriques. Nous avons déterminé, ainsi, la relation entre la masse ajoutée et le taux de vide en éliminant l'effet du gradient du taux de vide. Pour la suite de nos calculs, nous avons noté par $C_{mr} = C_{mr2}$. De cette façon, l'équation (5.1) se réécrit comme suit :

$$\overline{\overline{C_m}} = C_{mr} \overline{\overline{I}} + f(\overline{\overline{\nabla \varepsilon}}) \quad (5.27)$$

où $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur unitaire représenté par une matrice (3×3) défini par l'équation (3.18).

5.8.2 Le cas de nuages de bulles irréguliers

Dans cette section, nous avons évalué l'effet du gradient du taux de vide sur la variation de la masse ajoutée. Dans cette perspective, nous avons appliqué une expansion géométrique contrôlée sur les nuages de bulles réguliers pour créer un gradient de taux de vide unidirectionnel selon la direction x . La transformation a été soigneusement choisie afin de maintenir une distance moyenne égale entre la bulle de référence et les bulles voisines selon les trois

directions x , y et z . Ainsi, elle suit la loi suivante :

$$\begin{cases} x_t = \frac{2c\alpha}{1+\alpha} \frac{1-\alpha}{x_{reg}} \frac{c}{1-\alpha} \\ y_t = y_{reg} \alpha \frac{c}{x_{reg}} \\ z_t = z_{reg} \alpha \frac{c}{x_{reg}} \end{cases} \quad (5.28)$$

où α est un coefficient de transformation, $(x_{reg}, y_{reg}, z_{reg})$ est la position de la bulle dans la configuration régulière exprimée dans le référentiel de la bulle centrale et (x_t, y_t, z_t) est la position de la bulle après la transformation exprimée dans le même référentiel (c.à.d par rapport à la position de la bulle centrale). La figure 5.10 montre un exemple de la transformation appliquée sur une configuration cubique simple. Nous avons choisi soigneusement les paramètres c et α afin de créer des nuages de bulles uniformément réparties dans les intervalles de taux de vide $\varepsilon \in [3, 45] \%$ et des gradients de taux de vide $\|\vec{\nabla} \varepsilon\| \in [0, 3] \%$ avec

$\vec{\nabla} \varepsilon = \begin{pmatrix} \|\vec{\nabla} \varepsilon\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\bar{x} = \frac{x}{a}$. Cette condition permet de générer des nuages de bulles répartis

uniformément sur toutes les gammes $(\varepsilon, \|\vec{\nabla} \varepsilon\|)$. Par conséquent, tous les nuages, avec des couples $(\varepsilon, \|\vec{\nabla} \varepsilon\|)$ différents, contribuent d'une manière équivalente au le développement des corrélations de la masse ajoutée.

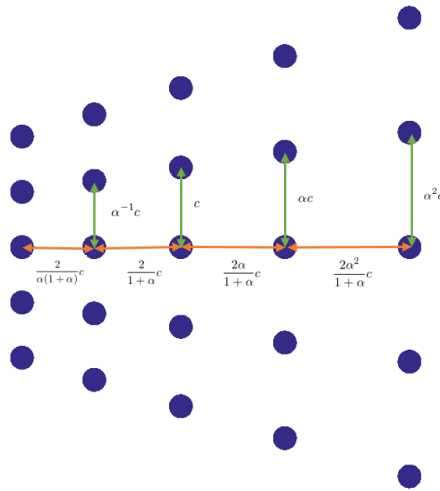


Figure 5.10 Transformation de la configuration cubique simple.

Nous avons ensuite calculé les coefficients de masse ajoutée pour des nuages accélérant dans la direction parallèle au gradient du taux de vide. Les figures 5.11 montrent que, pour un même taux de vide, le coefficient de masse ajoutée décroît lorsque la norme du gradient du taux de vide augmente. Pour les nuages accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide, les figures 5.12 montrent que le coefficient de masse ajoutée augmente lorsque la norme du gradient du taux de vide augmente.

En vue de déterminer la relation entre le coefficient de masse ajoutée et le gradient du taux de vide, nous avons considéré trois formes de corrélations possibles. La première équation suppose une variation linéaire entre le coefficient de masse ajoutée et la norme du gradient du taux de vide :

$$C_m = C_{mr} + A_1 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\| \quad (5.29)$$

Ensuite, nous avons considéré une variation quadratique comme suit :

$$C_m = C_{mr} + A_2 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^2 \quad (5.30)$$

La dernière forme consiste à considérer les développements en série de Taylor, d'ordre 1 jusqu'à l'ordre 4, de la masse ajoutée en fonction du taux de vide ε et du module de son gradient $\left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|$. Ainsi :

$$\begin{aligned} C_m = & 0.5 + P_1\varepsilon + P_2 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\| + P_3\varepsilon^2 + P_4 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^2 + P_5\varepsilon \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\| + P_6\varepsilon^3 \\ & + P_7 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^3 + P_8\varepsilon \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^2 + P_9\varepsilon^2 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\| + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

Pour chaque couple (p, R_c) , $A_1, A_2, P_1, \dots, P_9$... sont les coefficients qui permettent d'obtenir la valeur de l'écart quadratique moyen le plus faible.

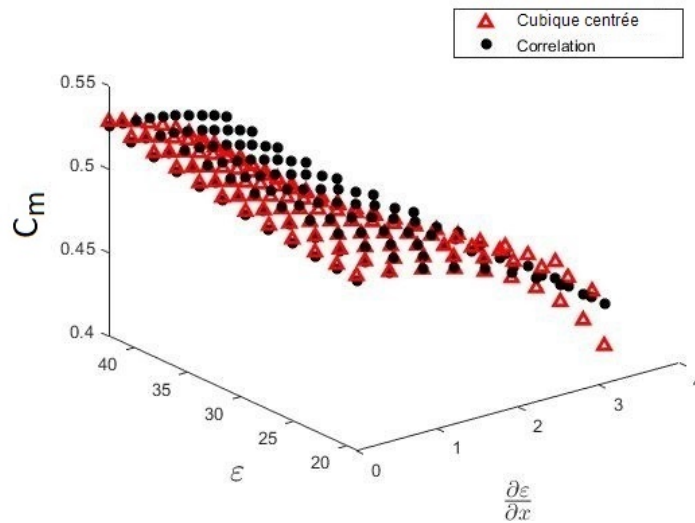
Nuages de bulles accélérant dans la direction parallèle au gradient de taux de vide

Pour les nuages accélérant dans la même direction que le gradient de taux de vide, la forme quadratique (5.30) nous a permis d'obtenir une valeur *RMS* plus faible ($\approx 0,01$) pour un coefficient $A_2 = -68$. Ainsi, pour ce cas, nous avons proposé la corrélation suivante :

$$\begin{aligned} C_m &= C_{mr} + C_{//} \\ C_{//} &= -68a^2 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

L'indice // indique que cette corrélation a été obtenue à partir de nuages ayant une accélération parallèle au gradient du taux de vide.

(a)



(b)

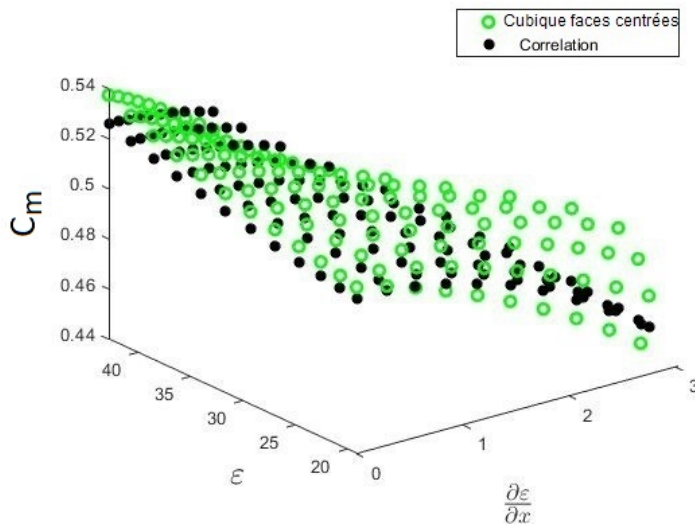


Figure 5.11 Variation du coefficient de masse ajoutée pour les nuages de bulles accélérant dans la direction parallèle au gradient du taux de vide. (a) Cubique centrée (b) Cubique faces centrées.

Nuages de bulles accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide

Pour les nuages de bulles accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide, la forme quadratique (5.30) nous a permis d'obtenir le *RMS* le plus faible (≈ 0.003) pour un coefficient $A_2 = 24$. Ainsi, pour ce cas, nous avons proposé la corrélation suivante :

$$\begin{aligned} C_m &= C_{mr} + C_{\perp} \\ C_{\perp} &= 24a^2 \left\| \vec{\nabla} \varepsilon \right\|^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

L'indice \perp indique que cette corrélation a été obtenue pour des nuages avec une accélération dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide.

À la figure 5.13, nous avons comparé les valeurs numériques des coefficients de masse ajoutée et les corrélations (5.32) et (5.33). Plus les points sont proches de la fonction $Y = X$, plus la corrélation est précise. Les deux corrélations concordent avec les résultats numériques. Cependant, la corrélation 5.33, développée pour des nuages accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide, présente une meilleure précision.

Au tableau 5.2, nous avons calculé l'écart quadratique moyen *RMS* obtenu à partir des corrélations proposées ainsi que les corrélations de la littérature. En comparant les valeurs des *RMS*, on constate que les corrélations Zuber [23], Wallis [24] et Van Wijngaarden [11] ne présentent pas une bonne estimation des coefficients de masse ajoutée. La corrélation de Beguin et al. [18] présente des *RMS* plus faibles que la corrélation classique pour une bulle isolée ($C_m = 0.5$). Cependant, les corrélations développées dans le cadre de cette étude présentent les *RMS* les plus faibles. En outre, la corrélation, proposée pour le cas de nuages accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide, améliore considérablement l'estimation du coefficient de masse ajoutée.

Tableau 5.2 La comparaison des corrélations de la masse ajoutée pour des configurations de nuages réguliers

Corrélations	Nuages réguliers ($\vec{\nabla} \varepsilon = \vec{0}$) <i>RMS</i>	Nuages irréguliers ($\vec{a} // \vec{\nabla} \varepsilon$) <i>RMS</i>	Nuages irréguliers ($\vec{a} \perp \vec{\nabla} \varepsilon$) <i>RMS</i>
Nouvelles corrélations	0.0095	0.0099	0.0037
$C_m = 0.5$	0.035	0.018	0.025
Zuber [23]	0.83	0.72	0.71
Wallis [24]	0.19	0.21	0.22
Van Wijngaarden [11]	0.33	0.43	0.41
Beguin et al. [18]	0.013	0.018	0.015

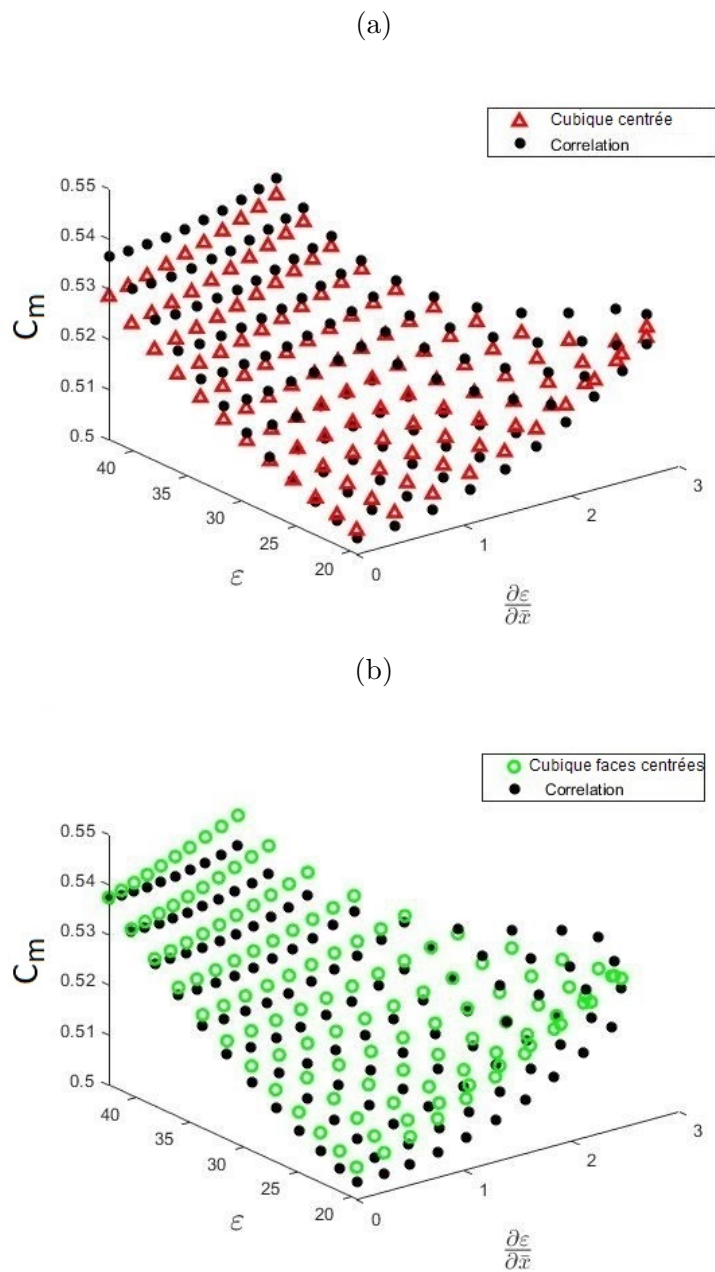


Figure 5.12 Variation du coefficient de masse ajoutée pour les nuages de bulles accélérant dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide. (a) Cubique centrée (b) Cubique faces centrées.

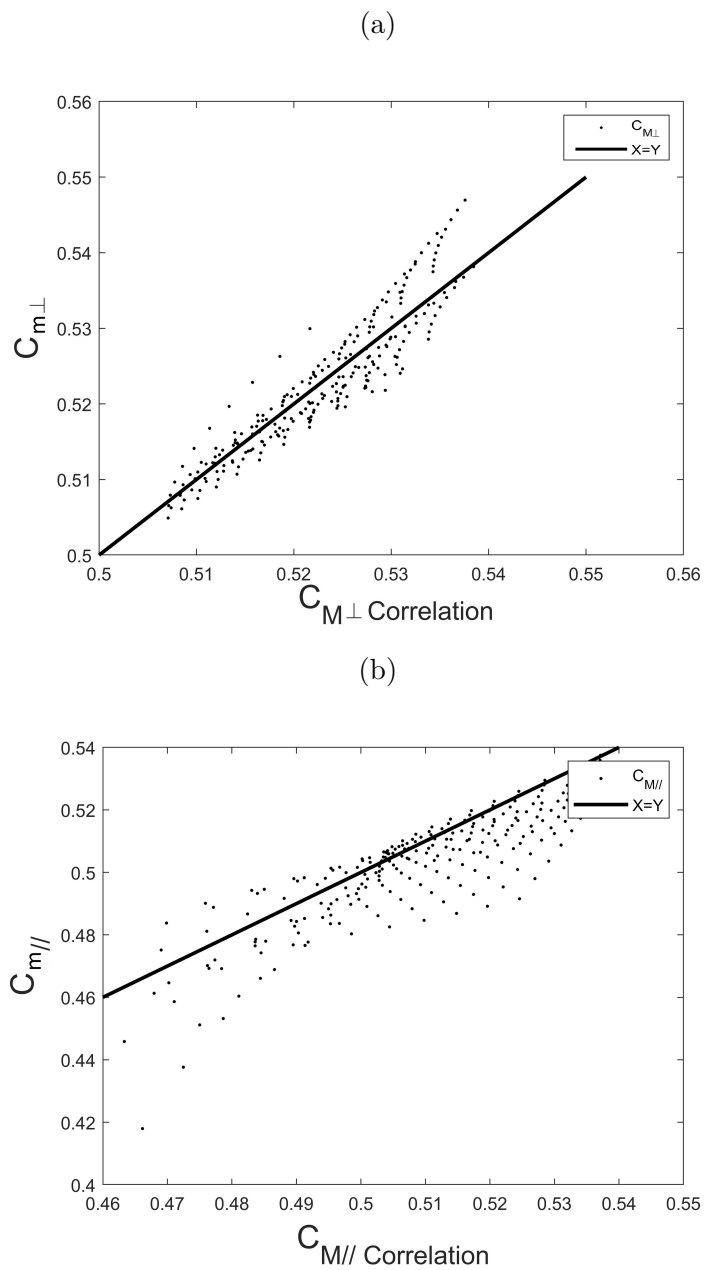


Figure 5.13 Les coefficients de masse ajoutée numérique par rapport à la corrélation. (a) Orthogonale au gradient du taux de vide (b) Parallèle au gradient du taux de vide.

5.8.3 Formulation générale

En vue de proposer un modèle général de masse ajoutée, nous avons noté par \vec{a}_r l'accélération relative entre la phase liquide et la phase gazeuse définie par :

$$\vec{a}_r = \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \quad (5.34)$$

La figure 5.14 illustre les composantes du vecteur accélération \vec{a}_r par rapport à la direction du gradient du taux de vide pour les nuages de bulles s'accélération dans une direction aléatoire.

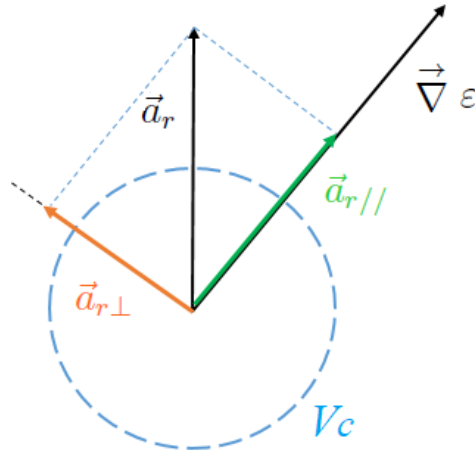


Figure 5.14 Composantes du vecteur accélération relative \vec{a}_r .

Par conséquent, la composante de l'accélération relative parallèle au gradient du taux de vide est donnée par :

$$\vec{a}_{r//} = \left(\vec{a}_r \cdot \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|} \right) \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|} \quad (5.35)$$

La composante de l'accélération relative orthogonale au gradient du taux de vide est définie comme suit :

$$\vec{a}_{r\perp} = \left[\vec{a}_r - \left(\vec{a}_r \cdot \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|} \right) \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|} \right] \quad (5.36)$$

La force par unité de volume de masse ajoutée totale est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{m,\ell} &= \varepsilon \rho_\ell \left[(C_{mr} + C_\perp) \vec{a}_{r\perp} + (C_{mr} + C_{//}) \vec{a}_{r//} \right] \\
&= \varepsilon \rho_\ell (C_{mr} + C_\perp) \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \\
&\quad + \varepsilon \rho_\ell (C_{//} - C_\perp) \left[\frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \cdot \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|} \right] \frac{\vec{\nabla} \varepsilon}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Comme l'expression générale de la force de masse ajoutée, par unité de volume, est donnée par :

$$\vec{f}_{m,\ell} = \varepsilon \rho_\ell \overline{\overline{C_m}} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{U}_g - \vec{U}_\ell) \tag{5.38}$$

Nous avons déduit les composantes de $\overline{\overline{C_m}}$ de la masse ajoutée. Ainsi, les composantes diagonales sont données par :

$$(\overline{\overline{C_m}})_{ii} = (C_{mr} + C_\perp) + (C_{//} - C_\perp) \frac{(\vec{\nabla} \varepsilon)_i^2}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|^2} \tag{5.39}$$

Et les composantes non diagonales sont définies par :

$$(\overline{\overline{C_m}})_{ij} = (C_{//} - C_\perp) \frac{(\vec{\nabla} \varepsilon)_i (\vec{\nabla} \varepsilon)_j}{\|\vec{\nabla} \varepsilon\|^2} \tag{5.40}$$

Cas de nuages de bulles accélérant dans la direction formant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport au gradient du taux de vide

Afin de vérifier l'équation (5.38), nous avons calculé les composantes de la masse ajoutée pour des nuages qui accélèrent dans une direction formant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport au gradient de taux de vide. Les figures (5.15) montrent la variation des composantes de la masse ajoutée. C_{mz} est la composante de la masse ajoutée dans la direction orthogonale au gradient du taux de vide. C_{mx} est la composante de la masse ajoutée dans la direction parallèle au gradient du taux de vide. On observe sur ces figures que la composante de la masse ajoutée perpendiculaire au gradient du taux de vide, C_{mz} , augmente lorsque le gradient du taux de vide croît et inversement pour la composante parallèle C_{mx} . En comparant la corrélation (5.38) au calcul direct de la masse ajoutée, nous avons obtenu un $RMS = 0.008$ pour le calcul de C_{mz} et $RMS = 0.016$ pour le calcul de C_{mx} .

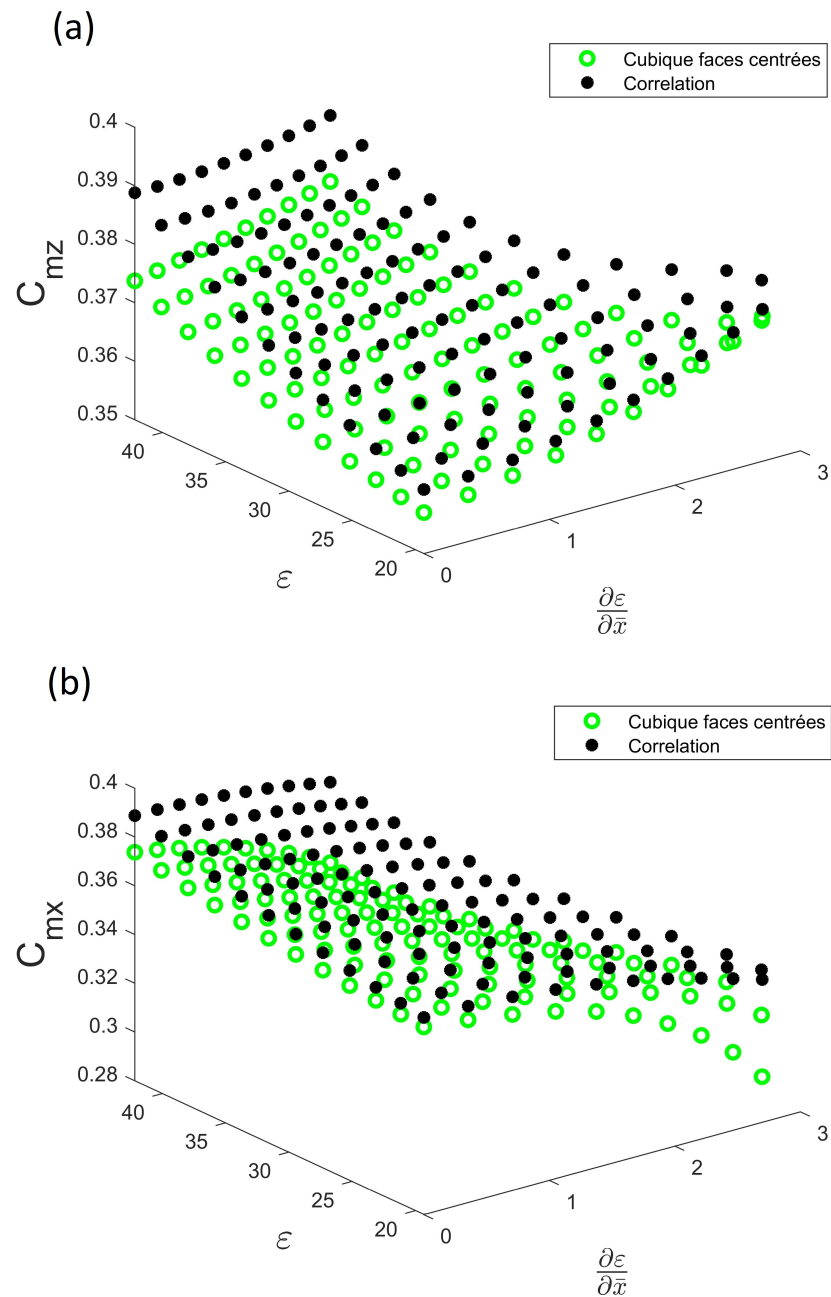


Figure 5.15 La variation des coefficients de masse ajoutée pour les nuages de bulles qui s'accélèrent dans une direction formant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport au gradient du taux de vide. (a) C_{mz} (b) C_{mx} .

Cas des nuages aléatoires

Nous avons simulé des distributions de bulles aléatoires de tailles différentes en supposant que toutes les bulles sont identiques et qu'elles accélèrent uniformément dans la direction z . Nous avons résolu l'écoulement potentiel pour chaque distribution de bulles afin d'obtenir les coefficients de masse ajoutée. La figure 5.5 présente les composantes des coefficients de masse ajoutée dans les directions z , x et y .

Nous portons sur la figure 5.16, la comparaison de la masse ajoutée calculée à partir de la corrélation (5.37) à la masse ajoutée obtenue par l'approche d'écoulement potentiel. Comme le montre cette figure, les résultats obtenus à partir de l'équation (5.37) ne décrivent pas convenablement le coefficient de masse ajoutée pour des distributions de bulles aléatoires. Cependant, les valeurs de l'écart quadratique moyen, présentées au tableau 5.3, montrent que la corrélation (5.37) présente la valeur de RMS la plus faible par rapport aux corrélations de la littérature. En plus, c'est le seul modèle qui permet de calculer les composantes orthogonales de la masse ajoutée, C_{mx} et C_{my} , avec un $RMS = 0.072$.

Tableau 5.3 Écart quadratique moyen pour le cas des nuages de distribution aléatoire.

Corrélations	Nuages aléatoires $RMS (C_{mz})$
Nouvelles corrélations (5.37)	0.086
$C_m = 0.5$	0.094
Zuber [23]	0.46
Wallis [24]	0.21
Van Wijngaarden [11]	0.29
Beguïn et al. [18]	0.093

La corrélation (5.37) permet l'amélioration du calcul de masse ajoutée par rapport aux corrélations existantes. En outre, ce modèle est la seule corrélation en description eulérienne qui permet de calculer les termes de la masse ajoutée orthogonaux à l'accélération. Par conséquent, il présente une meilleure modélisation de l'effet dispersif dû à la variation de la masse ajoutée.

La précision de notre modèle est plus élevée pour les distributions de bulles régulières que pour les distributions aléatoires. Cette différence est due à notre approche pour le calcul de la moyenne qui a permis la transition de la description lagrangienne à l'approche eulérienne. À la section suivante, nous discuterons de ce processus et démontrerons les limites de notre méthodologie.

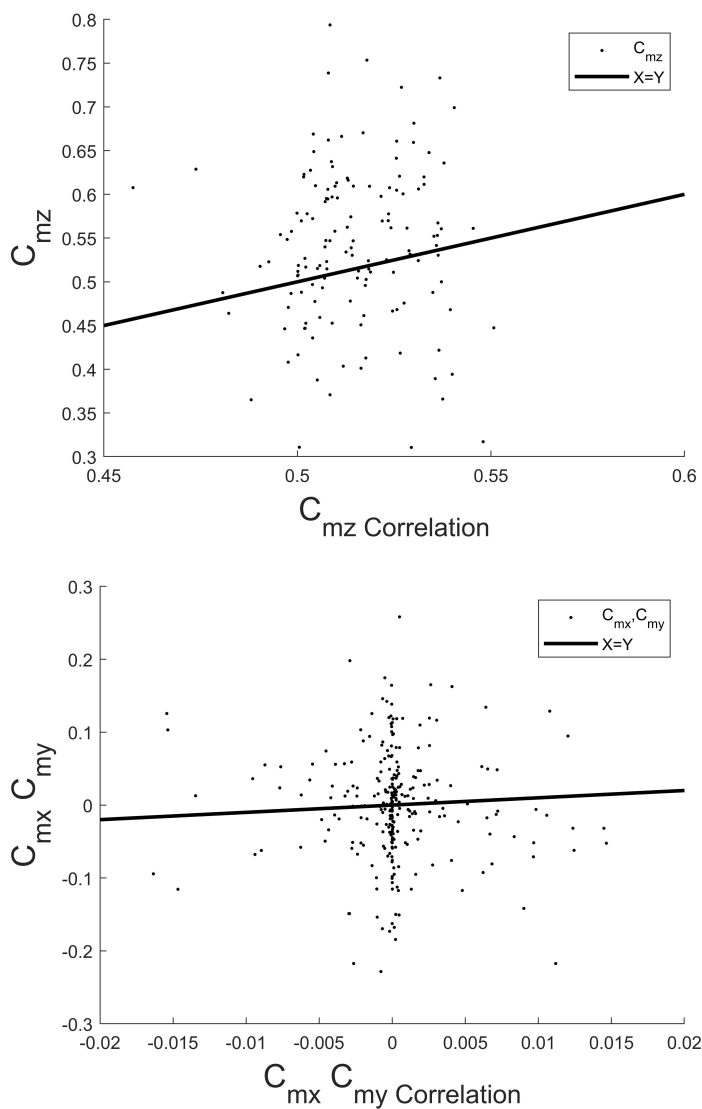


Figure 5.16 La comparaison entre les résultats numériques et la corrélation (5.37) du coefficient de masse ajoutée pour les nuages aléatoires accélérant dans la direction z .

5.8.4 Discussion

Pour passer des propriétés d'écoulement lagrangiennes aux propriétés eulériennes, nous avons utilisé une fonction de distribution du taux de vide présentée à la section 5.7. La figure 5.17 présente une approximation linéaire de la fonction de distribution du taux de vide. La différence entre la fonction de distribution du taux de vide et son approximation linéaire n'est pas significative ($RMS = 0.002$).

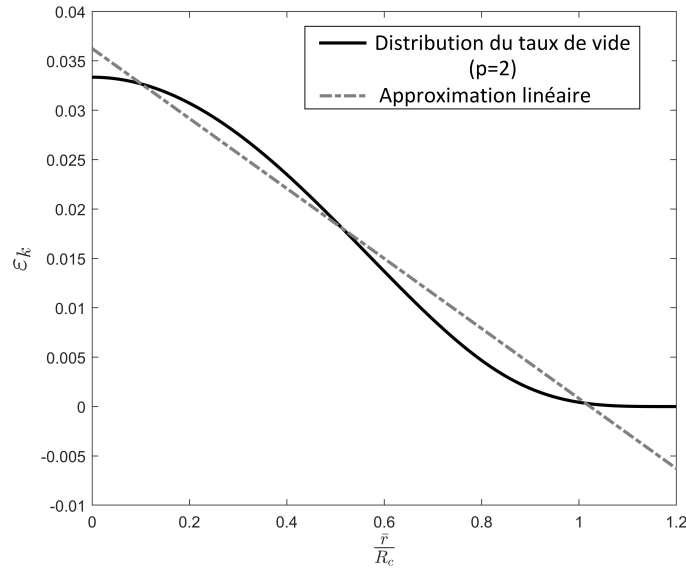


Figure 5.17 Une approximation linéaire de la fonction du taux de vide, donnée par l'équation (5.19) pour $n = 2$

Ainsi, pour des raisons de simplification, cette approximation permet de supposer que le taux de vide de la $n^{\text{ème}}$ bulle suit la loi linéaire suivante :

$$\varepsilon_n = cd_n + b \quad (5.41)$$

Notons que d_n est la distance entre la $n^{\text{ème}}$ bulle et le centre du volume de contrôle V_c . À partir d'un changement de variable qui permet d'inclure l'équation (5.41) dans le modèle de la masse ajoutée, en description lagrangienne donnée par l'équation (2.86), les composantes des coefficients de masse ajoutée d'une bulle de référence k , placée au centre du volume de contrôle, sont données par :

$$\begin{aligned}
C_{xk} &= -\frac{9}{32c^2} \sum_{n \neq k}^{N_b} \left(\frac{2ac}{\varepsilon_n - b} \right)^3 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial x} \\
C_{yk} &= -\frac{9}{32c^2} \sum_{n \neq k}^{N_b} \left(\frac{2ac}{\varepsilon_n - b} \right)^3 \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial y} \\
C_{zk} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{32} \sum_{k \neq n}^{N_b} \left(\frac{2ac}{\varepsilon_n - b} \right)^3 \\
&\quad - \frac{9}{32c^2} \sum_{n \neq k}^{N_b} \left(\frac{2ac}{\varepsilon_n - b} \right)^3 \frac{\partial \varepsilon_n^2}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Néanmoins, la fonction de pondération, que nous avons présentée à la section 5.7, nous permet seulement de calculer le produit suivant :

$$\sum_{n \neq k}^{N_b} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z} \sum_{n \neq k}^{N_b} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial x},$$

Comme :

$$\sum_{n \neq k}^{N_b} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial x} \neq \sum_{n \neq k}^{N_b} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z} \sum_{n \neq k}^{N_b} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial x}, \tag{5.43}$$

De ce fait, les définitions du gradient du taux de vide, données par l'équation (5.22), ne permettent pas le calcul de la somme de deux composantes multipliées du gradient de taux de vide. Pour les nuages réguliers, nous avons utilisé une transformation géométrique qui crée un gradient de taux de vide unidirectionnel. Par conséquent, la somme de deux composantes multipliées du gradient du taux de vide s'annule et les résultats ont une meilleure précision que pour le cas des nuages aléatoires.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle pour la force de la masse ajoutée pour la modélisation Euler-Euler. Ce nouveau modèle prend en compte l'effet de la configuration locale du nuage de bulles via le gradient de taux de vide. Les coefficients de masse ajoutée ont été obtenus par une approche semi-analytique utilisant des harmoniques sphériques pour résoudre l'écoulement potentiel en 3D autour des bulles. D'abord, nous avons considéré des configurations régulières pour établir la relation entre la masse ajoutée et le taux de vide. Nous avons constaté que le coefficient de masse ajoutée augmente de manière monotone avec le taux de vide. Ensuite, nous avons appliqué une transformation géométrique uniforme pour créer un gradient du taux de vide unidirectionnel. Pour les nuages de bulles accélérant

orthogonalement au gradient du taux de vide, le coefficient de masse ajoutée augmente en fonction de la valeur du gradient. Cependant, il décroît pour les nuages de bulles qui accélèrent dans la direction parallèle au gradient du taux de vide. Ces observations généralisent les observations de Lamb [16] et Milne-Thomson [17] pour deux sphères en mouvement à un nuage de bulles régulier.

Nous avons extrapolé les résultats obtenus à partir de nuages réguliers pour proposer un modèle de masse ajoutée générale, donné par l'équation (5.38), pour un nuage de bulles accélérant dans une direction aléatoire. Cette corrélation donne une bonne concordance avec les coefficients de masse ajoutée pour les nuages réguliers. Pour les nuages aléatoires, en comparant avec les corrélations de la littérature, notre modèle améliore considérablement la précision sur la prédiction du coefficient de masse ajoutée. De plus, c'est le seul modèle qui permet d'inclure l'asymétrie du nuage et de calculer les composantes de la masse ajoutée orthogonale à l'accélération. Ce qui permet d'inclure l'effet dispersif induit par la variation de la masse ajoutée.

Nous avons démontré le rôle du gradient de taux de vide dans la variation de la masse ajoutée. De plus, nous avons proposé un modèle plus complet pour le calcul de la force de la masse ajoutée. La précision de ce modèle est plus élevée pour des arrangements réguliers de bulles que pour des arrangements aléatoires. Toutefois, nous avons discuté à la section 2.7 que les bulles s'arrangent naturellement par plans successifs et donc se rapprochent d'un arrangement régulier. Ainsi, même pour des configurations aléatoires, la précision de notre modèle reste élevée pour des nuages de bulles uniformément injectés ou lorsque le nuage atteint un état stable.

Le modèle proposé a été développé à partir de nuages avec des bulles sphériques identiques accélérant uniformément. Or, puisque nous considérons le diamètre équivalent des bulles ainsi que leurs accélérations moyennes dans l'approche Euler-Euler dans un volume de contrôle, notre modèle reste valable même pour les écoulements poly-dispersés.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

À travers ce travail de recherche, une contribution dans le développement d'un modèle diphasique robuste pour les simulations des écoulements à bulles a été réalisée. Ces écoulements sont très présents dans les applications industrielles. Par contre, selon la géométrie des systèmes et les conditions de fonctionnement, ils peuvent avoir plusieurs configurations (à bulles, à bouchons, annulaires...). Selon la configuration de l'écoulement, les interactions entre les phases sont complexes et ne sont pas encore complètement identifiées. Par conséquent, la modélisation des écoulements diphasique présente encore un important défi.

L'une des pistes potentielles à étudier est l'échange de la quantité de mouvement à travers l'interface de séparation entre les deux phases. Ceci dépend de la géométrie de l'interface. Par exemple, pour un écoulement à bulle, le transfert de la quantité de mouvement à l'interface est déterminé par les forces instantanées agissant sur la phase dispersée, qui comprennent la flottabilité, la traînée, la portance, la dispersion turbulente et les forces de masse ajoutée. Tandis que lorsque les deux phases sont continue, comme dans le cas des écoulements stratifiés, nous devons modéliser les phénomènes de cisaillement interfacial.

Le cadre industriel de la thèse s'inscrit dans l'analyse et l'optimisation du processus de l'aération au niveau des turbines hydroélectriques. Une aération optimale revient à maximiser l'interface d'échange d'oxygène entre l'air et l'eau. Par conséquent, les écoulements à petites bulles représentent la meilleure configuration qui permet une oxygénation efficace. Nous nous sommes intéressées à la modélisation des transferts au niveau de l'interface de la quantité de mouvement pour des écoulements à petites bulles. Plus précisément, nous nous sommes penché sur l'analyse de l'effet de la variation la masse ajoutée sur la dynamique du nuage de petites bulles. Un mécanisme très peu étudié et nous avons constaté l'absence de modèle qui permet de l'inclure dans des modèles numériques.

6.1 Synthèse des travaux

À partir d'une analyse analytique, nous avons modélisé l'effet de la variation de la masse ajoutée sur la dynamique des nuages de bulles. En fait, il a été montré que la masse ajoutée est sensible à la distribution locale des bulles. Sa fluctuation induite par les bulles environnantes résulte en une force de type Meshchersky.

Cette force a un effet répulsif lorsque les bulles sont en ascension côte à côte. Par contre, elle est attractive lorsque les bulles accélèrent en ligne. Ces interactions hydrodynamiques

contribuent à l'organisation des bulles dans des plans parallèles. Un comportement qui a été observé dans de nombreuses études expérimentales et applications industrielles. Cependant, les mécanismes qui le génèrent ne sont pas complètement identifiés.

D'après nos connaissances, il s'agit de la première fois que l'effet de Meshchersky est introduit dans les calculs de la dispersion des bulles dans un nuage diphasique. Il faut, cependant, mentionner que ce phénomène est présentement utilisé pour comprendre le comportement dynamique des galaxies en utilisant la relativité générale d'Einstein [83].

En description lagrangienne, on suit le mouvement de chacune des bulles dans l'écoulement par la résolution de l'équation de son mouvement. Par conséquent, nous connaissons la position, la vitesse et l'accélération de chacune des bulles à chaque instant. Pour une bulle quelconque de référence, toutes ces informations nous permettent d'identifier les bulles avoisinantes et de prendre en compte des effets induits par leur présence. Par conséquent, l'effet de la force de Meshchersky a bien été identifié en description lagrangienne.

En description eulérienne, nous avons mis en évidence la contribution de la force de Meshchersky sur la dispersion transversale des bulles. En fait, nous avons constaté que la prise en compte de l'effet Meshchersky, aplatit le profil du taux de vide et réduit l'écart entre les solutions numériques et les mesures expérimentales sur les vitesses des deux phases.

Le calcul de la force de Meshchersky est sensible au choix de l'information sur la distribution locale des bulles qui est perdue par le calcul de la moyenne spatiale. Par conséquent, nous avons constaté que les corrélations actuelles de masse ajoutée ne permettent pas une modélisation adéquate de la force de Meshchersky. C'est ainsi que dans la deuxième partie de cette étude, nous avons présenté notre approche de modélisation d'une corrélation plus générale de masse ajoutée.

Pour différentes distributions uniformes de bulles, nous avons résolu l'écoulement potentiel autour du nuage afin d'analyser l'effet de la variation du taux de vide et de son gradient sur la masse ajoutée. Nous avons constaté que pour des nuages symétriques dont le gradient de taux de vide est nul, la masse ajoutée croît en fonction du taux de vide. Toutefois, pour des nuages de distributions non uniformes, le comportement de la masse ajoutée dépend de l'orientation relative entre l'accélération du nuage et le gradient de taux de vide. Une constatation qui n'a pas été relevée dans la littérature auparavant. En effet, lorsque le nuage de bulles accélère dans la même direction que le gradient de taux de vide, la masse ajoutée décroît en fonction de la norme de ce dernier. Cependant, lorsque l'accélération du nuage et le gradient de taux de vide sont orthogonaux, la masse ajoutée augmente. Comme ces deux comportements ne sont pas pris en compte dans les modèles de masse ajoutée actuels, nous avons proposé une nouvelle approximation plus générale de la force de masse ajoutée. La principale originalité de notre modèle consiste en la prise en compte de l'effet de l'arrangement local des bulles par

l'intermédiaire du gradient de taux de vide.

En comparant avec les modèles actuels, nous avons constaté que notre modèle permet d'améliorer la précision sur la prédiction de la masse ajoutée pour les configurations uniformes de bulles. Par contre, sa validité pour les nuages de distributions aléatoires est limitée. Cependant, il a été observé expérimentalement que la distribution aléatoire des bulles est instable. Ainsi, les bulles ont tendance à former des plans horizontaux parallèles. Par conséquent, notre modèle de masse ajoutée en modélisation eulérienne est valide lorsque le nuage de bulles atteint sa configuration stable qui est une configuration uniforme.

6.2 Limitations des modèles

La première limitation à laquelle nous nous sommes confrontés lors du développement de cette étude a été l'implantation des forces de masse ajoutée et de Meshchersky dans le modèle Euler-Lagrange dans le code commercial Ansys-CFX. Ce dernier représente l'outil numérique de notre partenaire industriel. En effet, nos modèles de forces se calculent en fonction des paramètres de mouvement relatif entre les bulles. Ainsi, il est nécessaire d'identifier toutes les bulles dans l'écoulement afin de déterminer la liste des bulles les plus proches et de pouvoir adéquatement modéliser l'effet de leur présence. L'identifiant des bulles est un paramètre utilisé par Ansys-CFX pour marquer chacune des bulles générées, afin de pouvoir les retracer au cours de la simulation. Cependant, ce paramètre n'est pas accessible pour les utilisateurs. Plusieurs tentatives d'identification des bulles à partir de leurs vitesses et positions aux pas de temps antérieurs et d'autres variables itératives accessibles pour les utilisateurs par des expressions en langage CEL de CFX [105] ont été effectuées. Par la suite, après une discussion avec les développeurs de Ansys, on nous a affirmé que l'implantation d'un tel modèle n'est pas possible sur ANSYS-CFX. En revanche, il existe d'autres logiciels de simulation numérique, tel que Ansys-Fluent et OpenFoam qui permettent l'accès aux marqueurs des bulles. Par conséquent, la validation de l'effet de la force de Meshchersky sur le nuage de bulles, en description lagrangienne, fera l'objet d'un travail futur. Pour cela, il est nécessaire de vérifier que le code numérique utilisé à cet effet permet l'identification des bulles et des propriétés de leurs mouvements à chaque instant de la simulation. Ceci permettra une évaluation plus complète de l'effet de la force de Meshchersky sur la dynamique du nuage de bulles.

La deuxième limitation concerne le développement du modèle de la masse ajoutée en description Euler-Euler. En fait, l'analyse et la prise en compte de l'effet du gradient du taux de vide représentent une approche innovante dans la modélisation de la masse ajoutée. Cette démarche a permis d'évaluer l'effet du gradient de taux de vide sur la variation de la masse

ajoutée et de proposer un modèle plus général pour l'estimer. Notre modèle a permis l'amélioration de la précision du calcul de la masse ajoutée pour des distributions de bulles uniformes. Cependant, pour les distributions aléatoires, nous avons constaté que les résultats sont limités par le choix de la fonction de pondération du taux de vide. Par conséquent, une étude plus poussée devrait être effectuée afin de déterminer la fonction de pondération qui permettra une meilleure modélisation de l'effet du gradient du taux de vide sur la masse ajoutée. Dans ce contexte, une fois que le modèle de Meshchersky serait implanté et validé dans un modèle Euler-Lagrange, ce dernier permettra la détermination d'une approximation plus adéquate de la distribution des bulles dans le nuage. Ce résultat serait utilisé afin de réévaluer l'effet du gradient du taux de vide sur la variation de la masse ajoutée.

Enfin, les mesures expérimentales de la masse ajoutée pour une bulle dans un nuage sont inexistantes. En fait, suite à la complexité des interactions hydrodynamique entre les bulles, il est difficile d'isoler cet effet à partir de mesures expérimentales. Par conséquent, la validation de notre modèle se limite à la solution analytique de l'écoulement potentiel autour de deux bulles, à la résolution numérique de l'écoulement potentiel autour d'un plus grand nombre de bulles et à une comparaison avec des modèles de la littérature.

6.3 Recommandations et améliorations futures

6.3.1 Pour les applications industrielles

- À travers cette recherche, nous avons mis en évidence l'existence d'un effet Meshchersky qui agit sur les bulles. Cette force résulte de la variation de la masse ajoutée en fonction de la distribution spatiale des bulles. De plus, nous avons constaté que la force de Meshchersky a un effet dispersif et contribue à la distribution uniforme du nuage de bulles.

Dans les conditions de fonctionnement des turbines hydroélectrique, nous avons vérifié que lorsqu'on injecte des petites bulles à la sortie de la turbine, l'écoulement demeure de type à bulles à l'entrée de l'aspirateur. De plus, l'eau turbinée contient des impuretés qui jouent le rôle de surfactants. Par conséquent, les bulles auront un comportement analogue à celle de particules à parois rigides. Ainsi, dans la conception des turbines aérantes, la prise en compte de la force de Meshchersky permet d'éviter l'agglomération locale de bulles, par conséquent, une oxygénation uniforme et donc plus proche de la réalité.

- En description lagrangienne, les modèles de masse ajoutée et de Meshchersky sont appliqués par paire de bulles. Par conséquent, afin de pouvoir les utiliser dans des

simulations numériques, il faut s'assurer que le code de calcul permet l'intégration d'un couplage hydrodynamique entre les bulles. Ensuite, dans le but d'optimiser l'effort de calcul, pour chacune des bulles de l'écoulement, il est recommandé d'identifier la liste des bulles voisines afin d'éviter d'étendre les calculs inutilement sur toutes les bulles de l'écoulement. De toute manière, nous avons constaté que seulement les bulles les plus proches ont un effet significatif sur la variation de la masse ajoutée d'une bulle quelconque de référence.

6.3.2 Pour la communauté scientifique

- Les modèles développés dans cette recherche sont proposés à partir de plusieurs distributions de bulles de diamètres identiques accélérant uniformément. Cette hypothèse ne représente pas une limite en description eulérienne. En effet, en modèle Euler-Euler, nous considérons le diamètre, la vitesse et l'accélération moyennés dans le temps et dans l'espace. Cependant, en description lagrangienne, la forme générale de la force de Meshchersky est valide pour les écoulements polydispersés. Toutefois, lorsqu'on a évalué numériquement le rôle de la force de Meshchersky, le choix du modèle de masse ajoutée dans la littérature se limite à des bulles de diamètres identiques. Par conséquent, afin d'avoir une modélisation numérique plus adéquate de la force de Meshchersky, il est recommandé d'améliorer les modèles de masse ajoutée afin d'étendre leurs validité pour des écoulements polydispersés.
- Nous avons consacré cette recherche à l'étude de l'effet de la variation de la masse ajoutée générée par la présence des bulles. Cependant, d'autres mécanismes physiques peuvent induire la variation de la masse ajoutée. Nous citons à titre d'exemples, l'effet la rotation de la bulle, sa vibration, son aplatissement et son changement de volume. Ces mécanismes génèrent un effet Meshchersky qui nécessite une analyse future plus approfondie.
- Nous avons étudié l'effet hydrodynamique de la variation de la masse ajoutée par le développement de la force de Meshchersky pour des nuages de bulles. Bien que nous avons analysé le rôle de cette force dans la dispersion des petites bulles, d'autres mécanismes, qui y contribuent, restent des questions de recherche partiellement ou totalement non résolues. Parmi ces mécanismes, nous citons, à titre d'exemple, la modélisation de la turbulence diphasique, l'effet de la présence des bulles sur la force de portance et la force de dispersion diphasique. Dans plusieurs études numériques, on se contente d'appliquer des modèles développés pour des bulles isolées. Cette approximation se limite à des taux de vide très faibles ($\varepsilon < 1\%$). Toutefois, ceci se traduit par des résultats insatisfaisants dans les régions avec des taux de vide locaux élevés.

En effet, la présence de plusieurs bulles dans le nuage induit des interactions hydrodynamiques complexes. Les origines de ces derniers ne sont pas entièrement comprises. Par conséquent, les solutions obtenues par des modèles de bulle isolée s'avèrent insatisfaisantes. Ainsi, des recherches additionnelles analysant ces mécanismes devraient être menées afin de construire un modèle numérique plus cohérent pour la simulation des écoulements à bulles.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Clift, J. R. Grace et M. E. Weber, *Bubbles, drops, and particles*. Courier Corporation, 2005.
- [2] I. Landry, “Approvisionnement en électricité et émissions atmosphériques,” Hydro-Quebec, Hydro-Quebec, Rapport technique, 2018.
- [3] D. France, L. Vicky, N. Stéphane et P. Julie, “Inventaire québécois des émissions de gaz à effet de serre en 2016 et leur évolution depuis 1990,” Direction générale de la réglementation carbone et des données d’émission, ministère de l’Environnement et de la Lutte contre les changements climatiques, Rapport technique, 2018.
- [4] A. Tapucu, *The thermal-hydraulics of two-phase systems*. École Polytechnique de Montréal, 2009.
- [5] P. March, “Hydraulic and environmental performance of aerating turbine technologies,” dans *EPRi Conference on Environmentally Enhanced Hydropower Turbines*, 2011, p. 19–21.
- [6] T. Oshinowo et M. Charles, “Vertical two-phase flow part i. flow pattern correlations,” *the Canadian Journal of Chemical engineering*, vol. 52, n°. 1, p. 25–35, 1974.
- [7] J. R. Vélez-Cordero, D. Sámano, P. Yue, J. J. Feng et R. Zenit, “Hydrodynamic interaction between a pair of bubbles ascending in shear-thinning inelastic fluids,” *Journal of non-Newtonian fluid mechanics*, vol. 166, n°. 1-2, p. 118–132, 2011.
- [8] M. A. Talaia, “Terminal velocity of a bubble rise in a liquid column,” *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 28, p. 264–268, 2007.
- [9] ANSYS, *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*. ANSYS, 2013.
- [10] N. Deen, “An experimental and computational study of fluid dynamics in gas-liquid chemical reactors,” Thèse de doctorat, Aalborg University, 2001.
- [11] L. Van Wijngaarden, “Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 77, p. 27–44, 1976.
- [12] Hydro-Quebec, “Carte de production d’électricité,” 2013.
- [13] H. G. Jones, M. Leclerc, M. Meybeck, M. Ouelett et A. Rousseau, “Etude limnologique préliminaire du réservoir manitouagan, québec : Avec 5 figures et 4 tableaux dans le texte,” *Internationale Vereinigung für theoretische und angewandte Limnologie : Verhandlungen*, vol. 19, n°. 3, p. 1758–1767, 1975.

- [14] CCME, “Recommandations canadiennes pour la qualité des eaux : protection de la vie aquatique,” *Conseil canadien des ministres de l’environnement*, 1999.
- [15] D. Chirkov, P. Shcherbakov, S. Cherny, V. Skorospelov et P. Turuk, “Numerical investigation of the air injection effect on the cavitating flow in francis hydro turbine,” *Thermophysics and Aeromechanics*, vol. 24, n°. 5, p. 691–703, 2017.
- [16] H. Lamb, “Hydrodynamics, ed. 6-th,” *NY Dover publ*, vol. 194, n°. 5, 1945.
- [17] L. Milne-Thomson, “Theoretical hydrodynamics, macmillan & co,” *LTD, London-New York*, p. 504, 1960.
- [18] C. Béguin, E. Pelletier et S. Etienne, “Void fraction influence on added mass in a bubbly flow,” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 56, p. 28–45, 2016.
- [19] A. Tomiyama, G. Celata, S. Hosokawa et S. Yoshida, “Terminal velocity of single bubbles in surface tension force dominant regime,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 28, n°. 9, p. 1497–1519, 2002.
- [20] J.-W. Park, D. Drew et R. Lahey Jr, “The analysis of void wave propagation in adiabatic monodispersed bubbly two-phase flows using an ensemble-averaged two-fluid model,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 24, n°. 7, p. 1205–1244, 1999.
- [21] M. Ishii et N. Zuber, “Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows,” *AIChE Journal*, vol. 25, n°. 5, p. 843–855, 1979.
- [22] E. E. Paladino et C. R. Maliska, “Virtual mass in accelerated bubbly flows,” *Proceedings of 4th European Thermal Sciences, 29th-31st March, National Exhibition Centre, Birmingham, UK*, 2004.
- [23] N. Zuber, “On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime,” *Chemical Engineering Science*, vol. 19, n°. 11, p. 897–917, 1964.
- [24] G. B. Wallis, “Inertial coupling in dispersed potential flow : macroscopic properties of suspensions in an inviscid fluid,” *Multiphase Science Technology*, vol. 5, p. 238–361, 1989.
- [25] S. Zoghliami, C. Béguin, S. Etienne, D. Scott et L. Bornard, “The role of added mass in the dispersion of bubble clouds,” *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, vol. 240, n°. 6, p. 062050, 2019.
- [26] A. Biesheuvel et L. Van Wijngaarden, “The motion of pairs of gas bubbles in a perfect liquid,” *Journal of engineering Mathematics*, vol. 16, n°. 4, p. 349–365, 1982.
- [27] V. Kumaran et D. L. Koch, “The effect of hydrodynamic interactions on the average properties of a bidisperse suspension of high reynolds number, low weber number bubbles,” *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 5, n°. 5, p. 1123–1134, 1993.

- [28] S. Fackrell, “Study of the added mass of cylinders and spheres,” Thèse de doctorat, University of Windsor, 2011.
- [29] I. Meshcherky, “Works on the mechanics of bodies with variable mass [in russian], with an introduction by aa kosmodemyansky,” *Moscow, Leningrad : GITTL*, 1949.
- [30] R. C. Hall, *Essays on the History of Rocketry and Astronautics : Proceedings of the Third Through the Sixth History Symposia of the International Academy of Astronautics, Volume 2*. NASA, 1977.
- [31] T. M. Arispe, W. de Oliveira et R. G. Ramirez, “Francis turbine draft tube parameterization and analysis of performance characteristics using cfd techniques,” *Renewable Energy*, vol. 127, p. 114–124, 2018.
- [32] A. Marzotto, “Air injection in the draft tube of a francis turbine to improve the efficiency : a sperimental study,” Thèse de doctorat, Università Degli Studi Di Padova, 2015.
- [33] J. C. Slattery, “General balance equation for a phase interface,” *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 6, n^o. 1, p. 108–115, 1967.
- [34] R. Lahey Jr et F. J. Moody, *The thermal hydraulics of a boiling water nuclear reactor*. La Grange Park, IL, USA : American Nuclear Society, 1993.
- [35] M. Ishii et T. Hibiki, *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [36] M. Dhotre, B. Niceno et B. Smith, “Large eddy simulation of a bubble column using dynamic sub-grid scale model,” *Chemical Engineering Journal*, vol. 136, n^o. 2-3, p. 337–348, 2008.
- [37] Y. Sato et K. Sekoguchi, “Liquid velocity distribution in two-phase bubble flow,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 2, n^o. 1, p. 79–95, 1975.
- [38] S. Hosokawa et A. Tomiyama, “Bubble-induced pseudo turbulence in laminar pipe flows,” *International journal of heat and fluid flow*, vol. 40, p. 97–105, 2013.
- [39] M. Lance et J. Bataille, “Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air–water flow,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 222, p. 95–118, 1991.
- [40] M. Politano, P. Carrica et J. Converti, “A model for turbulent polydisperse two-phase flow in vertical channels,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 29, n^o. 7, p. 1153–1182, 2003.
- [41] A. Serizawa, I. Kataoka et I. Michiyoshi, “Turbulence structure of air-water bubbly flow—i. measuring techniques,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 2, n^o. 3, p. 221–233, 1975.

- [42] R. Rzehak et E. Krepper, “Cfd modeling of bubble-induced turbulence,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 55, p. 138–155, 2013.
- [43] B. Magolan et E. Baglietto, “Assembling a bubble-induced turbulence model incorporating physical understanding from dns,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 116, p. 185–202, 2019.
- [44] J.-W. Suh, J.-W. Kim, Y.-S. Choi, J.-H. Kim, W.-G. Joo et K.-Y. Lee, “Development of numerical eulerian-eulerian models for simulating multiphase pumps,” *Journal of Petroleum Science and Engineering*, vol. 162, p. 588–601, 2018.
- [45] T. H. Van Den Berg, S. Luther, I. M. Mazzitelli, J. M. Rensen, F. Toschi et D. Lohse, “Turbulent bubbly flow,” *Journal of Turbulence*, n^o. 7, 2006.
- [46] A. Tomiyama, H. Tamai, I. Zun et S. Hosokawa, “Transverse migration of single bubbles in simple shear flows,” *Chemical Engineering Science*, vol. 57, n^o. 11, p. 1849–1858, 2002.
- [47] D. Zhang, N. Deen et J. Kuipers, “Numerical simulation of the dynamic flow behavior in a bubble column : a study of closures for turbulence and interface forces,” *Chemical Engineering Science*, vol. 61, n^o. 23, p. 7593–7608, 2006.
- [48] G. B. Wallis, *One-dimensional two-phase flow*. McGraw-Hill, 1969.
- [49] D. Drew, L. Cheng et R. Lahey Jr, “The analysis of virtual mass effects in two-phase flow,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 5, n^o. 4, p. 233–242, 1979.
- [50] D. Drew et R. Lahey Jr, “The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 13, n^o. 1, p. 113–121, 1987.
- [51] O. Simonin et P. Viollet, “Modelling of turbulent two-phase jets loaded with discrete particles,” *Phenomena in multiphase flows*, p. 259–269, 1990.
- [52] J. Schillings, “Etude numérique et expérimentale d’écoulements diphasiques,” Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, mai 2016.
- [53] A. Tomiyama, T. Matsuoka, T. Fukuda et T. Sakaguchi, “A simple numerical method for solving an incompressible two-fluid model in a general curvilinear coordinate system,” *Multiphase Flow*, vol. 95, 1995.
- [54] T. Auton, “The lift force on a spherical body in a rotational flow,” *Journal of fluid Mechanics*, vol. 183, p. 199–218, 1987.
- [55] C. K. Batchelor et G. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.

- [56] P. P. Brown et D. F. Lawler, "Sphere drag and settling velocity revisited," *Journal of environmental engineering*, vol. 129, n^o. 3, p. 222–231, 2003.
- [57] G. G. Stokes, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*. Pitt Press, 1851, vol. 9.
- [58] C. Oseen, "Arkiv for matematik," *Astronomi och Eysik*, vol. 6, 1910.
- [59] R. Mei, J. F. Klausner et C. J. Lawrence, "A note on the history force on a spherical bubble at finite reynolds number," *Physics of fluids*, vol. 6, n^o. 1, p. 418–420, 1994.
- [60] W. Dijkhuizen, *Deriving closures for bubbly flows using direct numerical simulations*. University of Twente, 2008.
- [61] L. Schiller, "Über die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftaufbereitung," *Z. Ver. Deut. Ing.*, vol. 77, p. 318–326, 1933.
- [62] R. Clift et W. Gauvin, "Motion of particles in turbulent gas streams," dans *British Chemical Engineering*, vol. 16, n^o. 2-3, 1971, p. 229.
- [63] M. Mikhailov et A. S. Freire, "The drag coefficient of a sphere : an approximation using shanks transform," *Powder technology*, vol. 237, p. 432–435, 2013.
- [64] F. W. Roos et W. W. Willmarth, "Some experimental results on sphere and disk drag," *AIAA journal*, vol. 9, n^o. 2, p. 285–291, 1971.
- [65] N.-S. Cheng, "Comparison of formulas for drag coefficient and settling velocity of spherical particles," *Powder Technology*, vol. 189, n^o. 3, p. 395–398, 2009.
- [66] C. Y. Wen, "Mechanics of fluidization," dans *Chem. Eng. Prog., Symp. Ser.*, vol. 62, 1966, p. 100–111.
- [67] C. Beguin, "Modélisation des écoulements diphasiques : amortissement, forces interfaciales et turbulence diphasique." Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2010.
- [68] H. Rusche et R. Issa, "The effect of voidage on the drag force on particles, droplets and bubbles in dispersed two-phase flow," dans *Japanese European Two-Phase Flow Meeting, Tshkuba, Japan*, 2000.
- [69] A. Behzadi, R. Issa et H. Rusche, "Modelling of dispersed bubble and droplet flow at high phase fractions," *Chemical Engineering Science*, vol. 59, n^o. 4, p. 759–770, 2004.
- [70] M. Simonnet, C. Gentric, E. Olmos et N. Midoux, "Experimental determination of the drag coefficient in a swarm of bubbles," *Chemical Engineering Science*, vol. 62, n^o. 3, p. 858–866, 2007.

- [71] I. Roghair, Y. Lau, N. Deen, H. Slagter, M. Baltussen, M. V. S. Annaland et J. Kuipers, “On the drag force of bubbles in bubble swarms at intermediate and high reynolds numbers,” *Chemical engineering science*, vol. 66, n°. 14, p. 3204–3211, 2011.
- [72] M. Simcik, M. Ruzicka et J. Drahos, “Computing the added mass of dispersed particles,” *Chemical Engineering Science*, vol. 63, p. 4580–4595, 2008.
- [73] H. Senez et S. Etienne, “Development of a numerical model to represent two-phase flow configurations in a tube bundle,” dans *ASME 2011 Pressure Vessels and Piping Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2011, p. 195–209.
- [74] X. L. Cai et G. B. Wallis, “A more general cell model for added-mass in 2-phase flow,” *Chemical Engineering Science*, vol. 49, p. 1631–1638, 1994.
- [75] S. Zoghalmi, C. Béguin, S. Étienne et A. Teysseidou, “Small bubble cloud configuration effect on added mass for euler-euler modeling,” *E-proceedings of the 38th IAHR World Congress September*, 2019.
- [76] A. F. Fortes, D. D. Joseph et T. S. Lundgren, “Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 177, p. 467–483, 1987.
- [77] J. Kok, “Dynamics of a pair of gas-bubbles moving through liquid. 2. experiment,” *European journal of mechanics. B, Fluids*, vol. 12, n°. 4, p. 541–560, 1993.
- [78] J. Kok, “Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. i : Theory,” *European journal of mechanics. B, Fluids*, vol. 12, n°. 4, p. 515–540, 1993.
- [79] A. Kitagawa, K. Sugiyama et Y. Murai, “Experimental detection of bubble–bubble interactions in a wall-sliding bubble swarm,” *International journal of multiphase flow*, vol. 30, n°. 10, p. 1213–1234, 2004.
- [80] F. Wenyuan et Y. Xiaohong, “Numerical study on interaction between two bubbles rising side by side in cmc solution,” *Chinese Journal of Chemical Engineering*, vol. 21, n°. 7, p. 705–713, 2013.
- [81] f. w. b. K. Tsiolkovsky et I. Meshchersky, “Mdv+ v1dm-‘o (l),” dans *NASA Conference Publication*, n°. 2104-2105. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space . . . , 1977, p. 115.
- [82] H. Mineur, “La mécanique des masses variables. le problème des deux corps,” dans *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, vol. 50, 1933, p. 1–69.
- [83] P. Burcev, “Meshchersky’s equations in the general theory of relativity,” *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, vol. 14, p. 124, 1963.
- [84] D. W. Moore, “The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 23, p. 749–766, 12 1965.

- [85] B. Bunner et G. Tryggvason, “Effect of bubble deformation on the properties of bubbly flows,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 495, p. 77, 2003.
- [86] M. F. José Bico et M. Reyssat, *Mécanique des Fluides*. ESPCI Paris, 2020.
- [87] A. A. Kosmodemiansky, “First works by ke tsiolkovsky and iv meshchersky on rocket dynamics,” *NASA, Washington Essays on the History of Rocketry and Astronautics, Vol. 1*, 1977.
- [88] X. Bi et Q. Zhu, “Dynamics of a squid-inspired swimmer in free swimming,” *Bioinspiration & Biomimetics*, vol. 15, n°. 1, p. 016005, 2019.
- [89] D. Darmana, N. Deen et J. Kuipers, “Parallelization of an euler-lagrange model using mixed domain decomposition and a mirror domain technique : Application to dispersed gas liquid two-phase flow,” *Journal of Computational Physics*, vol. 220, n°. 1, p. 216 – 248, 2006.
- [90] J. R. Dormand et P. J. Prince, “A family of embedded runge-kutta formulae,” *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 6, n°. 1, p. 19–26, 1980.
- [91] D. Houcque, “Applications of matlab : Ordinary differential equations (ode),” *Robert R. McCormick School of Engineering and Applied Science-Northwestern University, Evanston*, 2008.
- [92] N. A. F. Senan, “A brief introduction to using ode45 in matlab,” *University of California at Berkeley, USA*, 2007.
- [93] C. Anyigor et J. Afiukwa, “Application of matlab ordinary differential equation function solver (ode45) in modelling and simulation of batch reaction kinetics,” *Am. J. Sci. Ind. Res*, vol. 4, n°. 3, p. 285–287, 2013.
- [94] H. Khalilia, R. Jarrar et J. Asad, “Numerical study of motion of a spherical particle in a rotating parabola using lagrangian,” *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, vol. 12, 2018.
- [95] C. L. Cuell, “Lagrange-d’alembert integrators,” Thèse de doctorat, Citeseer, 2007.
- [96] Z. Zheng, B. Simeon et L. Petzold, “A stabilized explicit lagrange multiplier based domain decomposition method for parabolic problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 227, n°. 10, p. 5272–5285, 2008.
- [97] J. H. Mathews, K. D. Fink *et al.*, *Numerical methods using MATLAB*. Pearson prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2004, vol. 4.
- [98] T. Z. Harmathy, “Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent,” *AIChE Journal*, vol. 6, n°. 2, p. 281–288, 1960.

- [99] N. G. Deen, T. Solberg et B. H. Hjertager, “Large eddy simulation of the gas–liquid flow in a square cross-sectioned bubble column,” *Chemical Engineering Science*, vol. 56, n° 21, p. 6341–6349, 2001.
- [100] B. Ničeno, M. Boucker et B. Smith, “Euler-euler large eddy simulation of a square cross-sectional bubble column using the neptune_cfd code,” *Science and Technology of Nuclear Installations*, vol. 2009, 2008.
- [101] D. Darmana, N. Deen, J. Kuipers, W. Harteveld et R. Mudde, “Numerical study of homogeneous bubbly flow : influence of the inlet conditions to the hydrodynamic behavior,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 35, p. 1077–1099, 2009.
- [102] T. Barth et D. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes,” dans *27th Aerospace sciences meeting*, 1989, p. 366.
- [103] M. Darwish et F. Moukalled, “Tvd schemes for unstructured grids,” *International Journal of heat and mass transfer*, vol. 46, n° 4, p. 599–611, 2003.
- [104] H. P. Morvan, “Three-dimensional simulation of river flood flows,” Thèse de doctorat, University of Glasgow, 2001.
- [105] ANSYS, *ANSYS CFX Reference Guide*. ANSYS, 2015.
- [106] E. Stenmark, “On multiphase flow models in ansys cfd software,” Mémoire de maîtrise, Chalmers University of Technology, 2013.
- [107] M. van Gelderen, “The shift operators and translations of spherical harmonics.” *DEOS Progress Letter*, vol. 98(1), p. 57–67, 1998.
- [108] G. B. Arfken, H. J. Weber et F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*. Elsevier Inc, 2012.
- [109] H. Takahira, T. Akamatsu et S. Fujikawa, “Dynamics of a cluster of bubbles in a liquid : Theoretical analysis,” *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, vol. 37, n° 2, p. 297–305, 1994.
- [110] H. Zhu, A. Yu *et al.*, “A weighting function in the averaging method of granular material,” *Chemeca 2000 : Opportunities and Challenges for the Resource and Processing Industries*, p. 120, 2000.
- [111] R. Chhabra, “Further remarks on the drag of a swarm of bubbles,” *International journal of engineering science*, vol. 33, n° 12, p. 1849–1852, 1995.

ANNEXE A OPÉRATEURS MATHÉMATIQUES

A.1 Le produit dyadique

Soit les deux vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

et

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Le produit dyadique de ces deux vecteurs est défini comme suit :

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 b_2 b_3) \quad (\text{A.3})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

A.2 La règle d'intégration de Leibniz

La règle de Leibniz pour une quantité scalaire $\psi(t, x)$ s'écrit comme suit :

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \psi(t, x) dx - \psi(t, x) \frac{\partial \beta(t)}{\partial t} + \psi(t, x) \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

ANNEXE B LE CALCUL DU TAUX DE VIDE

B.1 Le calcul du taux de vide

Afin de créer un gradient de taux de vide dans un volume de contrôle V_c , nous avons défini une fonction de pondération du taux de vide $f(\bar{r})$. Nous avons proposé une forme polynomiale d'une fonction de pondération qui respecte les conditions de Zhu et al. [110]. Nous rappelons ici son expression :

$$f(\bar{r}) = \begin{cases} A_n (\bar{r}^{2n} - 2\bar{r}^n + 1), & \text{si } \bar{r} < 1 \\ 0, & \text{si } \bar{r} \geq 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\bar{r} = \frac{r}{R_c}$: r est la position radiale et R_c est le rayon du volume de contrôle de la bulle. Pour chaque facteur n , le coefficient A_n est déduit de la condition de normalisation comme suit :

$$\int_{V_c} f(\bar{r}) dV = 1 \quad (\text{B.2})$$

Les valeurs de A_n sont présentées au tableau (B.1).

Dans cette annexe, nous allons présenter, à titre d'exemple, le calcul du taux de vide et de son gradient pour $n = 2$.

À l'intérieur du volume de contrôle V_c , la fonction de pondération illustrée à la figure B.1 est définie comme suit :

$$f(\bar{r}) = \frac{105}{32 R_c^3 \pi} (\bar{r}^4 - 2\bar{r}^2 + 1) \quad (\text{B.3})$$

Avec $\bar{r} = \frac{r}{R_c}$, r la position radiale et R_c le rayon du volume de contrôle.

Pour calculer le taux de vide d'une bulle k de rayon a et à la position radiale d , deux cas sont présentés. Le premier cas est celui où la bulle est entièrement à l'intérieur du volume de contrôle, ce qui se traduit par $d + a \leq R_c$. Dans ce cas, le taux de vide de la bulle k est défini comme suit :

$$\varepsilon_k(d, a, R_c) = \int_{V_b} f(\bar{r}) dV \quad (\text{B.4})$$

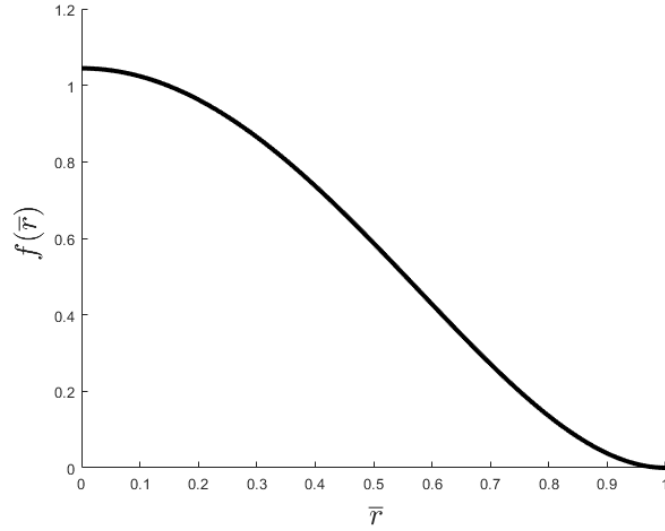


Figure B.1 Fonction de pondération de taux de vide.

En utilisant les coordonnées cylindriques,

$$\varepsilon_k(d, a, Rc) = \int_{z=d-a}^{d+a} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-(z-d)^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(\bar{r}) r \sin \theta dz dr d\theta \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, le taux vide d'une bulle entièrement à l'intérieur du volume de contrôle est donné par :

$$\varepsilon_k(\bar{d}, \bar{a}) = \frac{\bar{a}^3}{8} (35\bar{d}^4 + 15\bar{a}^4 + 70\bar{d}^2\bar{a}^2 - 70\bar{d}^2 - 42\bar{a}^2 + 35) \quad (\text{B.6})$$

Le gradient du taux de vide est analytiquement calculé comme suit :

$$\nabla \varepsilon_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} \vec{i} \quad (\text{B.7})$$

Pour des bulles rigides ($a = \text{constante}$) et dans un volume de contrôle de rayon constant, le taux de vide ε_k ne dépend que de la variable d , qui définit la distance de la bulle par rapport au centre du volume de contrôle. Ainsi :

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} = \frac{35\bar{a}^3 x_i}{2 Rc^2} (\bar{a}^2 + \bar{d}^2 - 1) \quad (\text{B.8})$$

Le deuxième cas est celui d'une bulle partiellement dans le volume de contrôle. Ainsi, pour

$d + a \geq R_c$ le taux de vide de la bulle k est calculé comme suit :

$$\varepsilon_k(d, a, Rc) = \int_{V_b \cap V_c} f(\bar{r}) dV \quad (\text{B.9})$$

En utilisant les coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(d, a, Rc) &= \int_{z=d-a}^{z_l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-(z-d)^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(\bar{r}) r \sin \theta dz dr d\theta \\ &+ \int_{z=z_l}^{Rc} \int_{r=0}^{\sqrt{R_c^2-z^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(\bar{r}) r \sin \theta dz dr d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{avec } z_l = \frac{R_c^2 - a^2 + d^2}{2d}.$$

Dans ce cas, le taux de vide est donné par,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(\bar{d}, \bar{a}) &= \frac{(\bar{a} - \bar{d} + 1)^4}{256 \bar{d}} (-35 \bar{a}^4 + 100 \bar{a}^3 \bar{d} + 140 \bar{a}^3 - 90 \bar{a}^2 \bar{d}^2 - 260 \bar{a}^2 \bar{d} - 210 \bar{a}^2 + 20 \bar{a} \bar{d}^3 \\ &+ 100 \bar{a} \bar{d}^2 + 188 \bar{a} \bar{d} + 140 \bar{a} + 5 \bar{d}^4 + 20 \bar{d}^3 + 22 \bar{d}^2 - 12 \bar{d} - 35) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

et le gradient du taux de vide s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} = -\frac{35 x_i}{256 Rc^2 \bar{d}^3} (\bar{a}^2 + 6 \bar{a} \bar{d} + \bar{d}^2 - 1) (-\bar{a}^2 + 2 \bar{a} \bar{d} - \bar{d}^2 + 1)^3 \quad (\text{B.12})$$

La fonction de pondération, fréquemment utilisée, ne dépend que de la taille du volume de contrôle :

$$f_0 = \frac{1}{V_c} \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R_c^3} \quad (\text{B.14})$$

Lorsque la bulle est entièrement à l'intérieur du volume de contrôle :

$$\varepsilon_k(a, Rc) = \frac{V_b}{V_c} \quad (\text{B.15})$$

$$\varepsilon_k(\bar{a}) = \bar{a}^3 \quad (\text{B.16})$$

Lorsque la bulle est partiellement dans le volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(d, a, Rc) &= f_0 \int_{z=d-a}^{z_l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-(z-d)^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} r \sin \theta dz dr d\theta \\ &+ f_0 \int_{z=z_l}^{Rc} \int_{r=0}^{\sqrt{Rc^2-z^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} r \sin \theta dz dr d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\varepsilon_k(\bar{d}, \bar{a}) = \frac{(\bar{a} - \bar{d} + 1)^2}{16 \bar{d}} \left(-3 \bar{a}^2 + 2 \bar{a} \bar{d} + 6 \bar{a} + \bar{d}^2 + 2 \bar{d} - 3 \right) \quad (\text{B.18})$$

Et :

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \bar{d}} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x_i} \quad (\text{B.19})$$

$$= -\frac{3 x_i}{16 Rc^2 \bar{d}^3} \left(-\bar{a}^4 + 2 \bar{a}^2 \bar{d}^2 + 2 \bar{a}^2 - \bar{d}^4 + 2 \bar{d}^2 - 1 \right) \quad (\text{B.20})$$

n	A
2	$\frac{105}{32 \text{ Rc}^3 \pi}$
4	$\frac{231}{128 \text{ Rc}^3 \pi}$
6	$\frac{45}{32 \text{ Rc}^3 \pi}$
8	$\frac{627}{512 \text{ Rc}^3 \pi}$
10	$\frac{897}{800 \text{ Rc}^3 \pi}$
12	$\frac{135}{128 \text{ Rc}^3 \pi}$
14	$\frac{1581}{1568 \text{ Rc}^3 \pi}$
16	$\frac{1995}{2048 \text{ Rc}^3 \pi}$
18	$\frac{91}{96 \text{ Rc}^3 \pi}$
20	$\frac{2967}{3200 \text{ Rc}^3 \pi}$

Tableau B.1 Coefficients de distribution du taux de vide