



Titre: Analyse de l'interaction acoustique-structure entre modes de disques
Title: disques

Auteur: Raphaël Joseph Marcel Jean
Author:

Date: 2023

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Jean, R. J. M. (2023). Analyse de l'interaction acoustique-structure entre modes de disques [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/54834/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/54834/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Frederick Gosselin
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Analyse de l'interaction acoustique-structure entre modes de disques

RAPHAËL JOSEPH MARCEL JEAN

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise en sciences appliquées*

Génie mécanique

Août 2023

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Analyse de l'interaction acoustique-structure entre modes de disques

présenté par **Raphaël Joseph Marcel JEAN**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise en sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Roberto PAOLI, président

Frédéric GOSSELIN, membre et directeur de recherche

Sébastien HOUDE, membre

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	x
REMERCIEMENTS	xi
RÉSUMÉ	xii
ABSTRACT	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
LISTE DES ANNEXES	xvi
1 INTRODUCTION	1
2 REVUE DE LITTÉRATURE	6
2.1 Interaction fluide-structure (IFS)	6
2.2 Masse ajoutée et hypothèse d'incompressibilité	9
2.2.1 Facteur AVMI (Added virtual mass incremental)	9
2.3 Insertion de la rotation	14
2.3.1 co-rotation et contre-rotation (mode-split)	14
2.3.2 Interaction rotor-stator	16
2.4 Interaction roue-couvercle	17
2.5 Interaction acoustique-structure	18
2.5.1 Modèle synthétique du couplage acoustique-structure	21
2.5.2 Couplage lors d'un rapprochement des modes individuels	23
3 Objectifs de la recherche	31
3.1 Synthèse de la revue de littérature	31
3.2 Objectifs	31
4 Interaction acoustique-structure : Théorie	33

4.1	Étude dimensionnelle et adimensionnement du problème	33
4.1.1	Variables adimensionnelles	33
4.1.2	Adimensionnement des équations	34
4.1.3	Relations de dispersion	35
4.1.4	Considérations énergétiques	37
4.2	Modèle de la cavité unidimensionnelle	38
4.2.1	Description du modèle longitudinal	38
4.2.2	Résolution du modèle	41
4.2.3	Étude géométrique	42
4.2.4	Étude complète du système gyroscopique à deux degrés de liberté . .	46
4.2.5	Extension au cas à N modes surfaciques	62
4.3	Synthèse et conclusion du chapitre	63
5	Application du couplage aux géométrie idéalisées de disques	66
5.1	Développement du modèle	66
5.1.1	Modèle du double disques	66
5.1.2	Méthodologie globale	66
5.1.3	Obtention des fonctions naturelles annulaires	67
5.1.4	Adimensionnement du système complet	72
5.1.5	Mise en équation	73
5.2	Résultats du modèle	79
5.2.1	Paramètres pris en compte	79
5.2.2	Étude de convergence	81
5.2.3	Brèves validation	83
5.2.4	Solutions	87
5.2.5	Études paramétrique	93
6	Discussion, réflexions pratiques et ouverture	100
6.1	Cas pratique	100
6.2	Limites et ouverture de la recherche	102
7	CONCLUSION	105
	ANNEXES	114

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Adimensionnement du couplage acoustique/structure	34
Tableau 5.1	Conditions aux rives structurales R_I étant le rayon intérieur et R_E le rayon extérieur	69
Tableau 5.2	Pulsation propre $k_{3,p}$	71
Tableau 5.3	Les paramètres mécaniques	80
Tableau 5.4	Les paramètres mécaniques	80
Tableau 5.5	Paramètres de la turbine pour l'intégration de l'interaction rotor-stator	81
Tableau 5.6	Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique	84
Tableau 5.7	Tableau de comparaison des modes entre Ansys et la méthode de Ritz pour le modèle de validation une structure et un domaine acoustique	84
Tableau 5.8	Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique	86
Tableau 5.9	Tableau de comparaison des résultats entre avec le modèle de Kang, Ansys et le modèle de Ritz.	86
Tableau 5.10	Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique	88
Tableau 5.11	Tableau de comparaison entre Louyot, Exp Presas, Ansys sans conti- nuité acc., Ansys avec continuité acc. et la méthode de Ritz sans continuité acc.	88
Tableau 5.12	Contributions énergétiques de chaque fonctions pour les différens do- maines	91
Tableau 5.13	Contributions énergétiques de chaque fonctions pour les différens do- maines	91
Tableau 5.14	Les différents scénarios considérés pour l'étude paramétrique	95
Tableau 6.1	Caractéristiques mécaniques et géométrique de la turbine considéré .	100
Tableau 6.2	Valeurs des nombres adimensionnels	101

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Types de turbines selon les conditions hydrauliques de la centrale : (a) charte de sélection en fonction de la hauteur de chute et de la vitesses spécifique qui lie le débit, la fréquence de rotation et la hauteur de chute (figure tirée de Karassik et al. (2008)); (b) aplatissement de la géométrie de roue Francis avec la hauteur de chute avec mode de disque pour les roues de haute chute	4
Figure 1.2	Schéma du système considéré : (a) Modélisation 3D d'une pompe turbine (image de Andritz-Hydro); (b) Schéma et nomenclature de la turbine	4
Figure 2.1	Interaction fluide-structure	7
Figure 2.2	Simplification par matrices structurelles ajoutées, À gauche on considère deux domaines distincts : fluide et structure. À droite, on considère une partie des effets du fluide sur la structure par une rigidité K_a ajoutée, un amortissement ajouté C_a et une masse ajoutée M_a	8
Figure 2.3	Idéalisation géométrique : la roue et le couvercle sont modélisés par des disques et sont séparés par une cavité annulaire remplie d'eau	8
Figure 2.4	Phénomène de séparation des modes inspiré de Louyot et al. (2020); (a) Schéma illustrant les deux sens de propagation des ondes; (b) graphique illustrant la séparation fréquentielle des ondes avec la vitesse de rotation relative	15
Figure 2.5	Illustration de l'interaction rotor-stator; (a) Schéma de la l'interaction; (b) illustration du champ d'excitation développé (figure tiré de Hefny et al. (2019))	17
Figure 2.6	(a) Mode de vibration en phase, (b) Mode de vibration en contre phase	18
Figure 2.7	Dégénérescence de la vibration d'une structure en symétrie cubique	26
Figure 2.8	Évolution des modes propres du système 2.19, la figure (a) représente l'évolution des valeurs propres, les figures (b) et (c) représentent les contributions énergétiques des formes propres u_s et u_a pour les deux modes propres et la figure (d) illustre la rotation des vecteurs propres dans la base $(\vec{u}_s, \vec{u}_a)$	30

Figure 4.1	schéma du modèle unidimensionnel	40
Figure 4.2	Variation des valeurs propres en fonction de F_A ; (a) variations de $\tilde{\omega}_z^2$; (b) variations de ω_n (dégradé : noir pour la mode 0 à gris clair pour le mode 7).	43
Figure 4.3	Évolution du couplage des 8 premières valeurs propres en fonction de $\tilde{\ell}$ (dégradé : noir pour la mode 0 à gris clair pour le mode 7); (a) : $\tilde{\ell} = 1$, (b) : $\tilde{\ell} = 10$, (c) : $\tilde{\ell} = 50$	45
Figure 4.4	(a) ω_0 , (b) ω_1 en fonction de F_A . ((—) : modèle longitudinal, (- - -) : système à deux degrés de liberté); $L = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]$ en dégradé de noir à gris clair	47
Figure 4.5	Évolution de ω_0 et ω_1 en fonction de F_A , dégradé du gris au noir : augmentation de C_G	49
Figure 4.6	Figure qui illustre l'évolution des contributions énergétiques du premier mode propre; (a) évolution des valeurs propres ω_i ; (b) évolution de l'énergie structurale ε_S ; (b) évolution de l'énergie surfacique échangée ε_{ex} ; (c) évolution de l'énergie potentielle compressible acoustique $\varepsilon_{A,P}$ et de l'énergie cinétique acoustique $\varepsilon_{A,C}$. Les courbes sont tracés selon un dégradé allant du noir au gris avec les valeurs suivantes de β : $[0.01, 1, 2, 3, 4, 5]$	53
Figure 4.7	Evolution de la fonction g en fonction de β	53
Figure 4.8	Tracé des plages de comportement; (a) représente les bornes de comportements formant les plages de transition 1 et 2, la plage de couplage 1 correspondant à $\beta = 10$, la plage 2 correspondant à $\beta = 3$; (b) représente l'évolution des bornes en fonction du paramètre de couplage β	56
Figure 4.9	Figures représentant les plages de comportement énergétiques du système; (a) représente les zones de comportement en échelle linéaire; (b) représente les zones de comportement en échelle log-log; ((- - -) : les bornes de la plage de transition; (. . .) : la fréquence structurale incompressible $1/\sqrt{1+\beta}$)	56
Figure 4.10	$ H_{1,2} $ et sa phase en fonction de ω pour $F_A = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]$, pour des valeurs d'amortissement $c_a = c_s = 0.1$	59

Figure 4.11	Analyse de l'influence de la rotation Ω_R sur les pulsations propres ; (- - -) : co-rotation, (—) : contre-rotation ; (a) Graphique représentant les ω en fonction de F_A , pour différentes valeurs de Ω_R en dégradé du gris clair au noir : $[0, 0.3, 0.6]$, () ; (b) Graphique représentant les deux premières valeurs propres ω en fonction de Ω_R pour différentes valeurs de F_A en dégradé du gris clair au noir : $[0.2, 0.4, +\infty]$	63
Figure 5.1	Représentations schématiques du système ; (a) schéma du système avec les différents éléments ; (b) géométrie idéalisée : superposition de disques de différentes épaisseurs.	67
Figure 5.2	Exemple du couple $n = 3$ et $p = 2$; (· · · ·) : diamètres nodaux et (— — —) : cercles nodaux	70
Figure 5.3	Illustration des conditions aux limites imposées au rotor et au stator .	70
Figure 5.4	Discontinuité vs continuité de la déformation du stator	72
Figure 5.5	Schéma des cavités à symétrie angulaire. (a) Cavité cylindrique, (b) Cavité annulaire	73
Figure 5.6	Schéma des interactions dans le système	75
Figure 5.7	Schéma représentant la surface S_G définie par l'écart radiale	77
Figure 5.8	Fonctions p_R et p_C qui libèrent le degré de liberté de vitesse acoustique orthogonale à la paroi	79
Figure 5.9	Convergence de la méthode en utilisant les fonctions de correction polynomiale ; (a) évolution de la forme $\phi(x)$ de la solution numérique ; (b) Convergence de la solution avec et sans correction.	80
Figure 5.10	Étude de convergence du système ; (a) représente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de fonctions radiales prises en compte sans fonction de correction ; (b) représente l'évolution de l'erreur sur une échelle loglog, avec un tracé de régressions linéaires correspondantes : $(a_1, a_2) \approx (-4.42, -4.42)$ sans fonction de correction ; (c) représente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de fonctions radiales prises en compte sans fonction de correction ; (d) représente l'évolution de l'erreur sur une échelle loglog, avec un tracé de régressions linéaires correspondantes : $(a_1, a_2) \approx (-3.8, -3.6)$ sans fonction de correction. .	82
Figure 5.11	Interaction fluide-structure	84
Figure 5.12	Schéma représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 2 domaines acoustiques	85
Figure 5.13	Schéma représentant les modèles de la littérature utilisés pour la validation ; (a) modèle de Louyot ; (b) modèle de Presas	85

Figure 5.14	Visualisation 3D du premier mode de vibration de type varicose. . . .	88
Figure 5.15	Tracé des solutions en phase et en contre-phase, les dégradés sur l'échelle de gris correspond à l'amplitude de la vibration	89
Figure 5.16	Tracé des solutions en phase et en contre-phase sur la coupe longitudinale; (a) et (b) respectivement mode varicose et en phase sans les fonctions de corrections longitudinales; (c) et (d) respectivement mode varicose et en phase avec les fonctions de corrections longitudinales . .	90
Figure 5.17	Diagramme en bâton représentant les contributions de tout les domaines sur chaque solution, les barre représentant les solutions sont distribuées selon leur fréquence adimensionnée. Pour les trois premières solutions, le couple (n, p) de la fonction qui contribue le plus sur chaque domaine est affichée	92
Figure 5.18	Évolution des valeurs propres en fonction de F_A ; (a) Visualisation sur une grande plage de solution ω ; (b) Visualisation sur une plage plus réduite qui fait apparaître la transistion premiers modes de couplage.	94
Figure 5.19	Évolution de la pulsation propre et des contributions énergétiques du premier mode : en contre-phase avec F_A ; (a) sans fonction de corrections; (b) grossissement sur la région d'écartement sans correction; (c) avec fonction de corrections; (d) grossissement sur la région d'écartement avec correction; (—) : $F_C = 1$; co-rotation; (- - -) : $F_C = 2$: contre-rotation, (.) : $F_C = \infty$	96
Figure 5.20	Résultat vitesse orthogonale non-nulle	97
Figure 5.21	Séparation des modes; (a) mode en contre-phase, (b) mode en phase; (- - -) : co-rotation, (—) : contre-rotation; (.) : moyenne, dégradé du gris au noir : $F_A = 0.3$, $F_A = 1$, $F_A = \infty$	97
Figure 5.22	Réponse harmonique à une excitation de type RSI; (- - -) : $F_A = \infty$ zone de couplage incompressible, (—) : $F_A = 0.3$ zone de transition; (.) : $F_A = 0.1$ zone acoustique.	99

DÉDICACE

À ma famille.

REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mon professeur Frédérick pour sa précieuse guidance dans la réalisation des deux précédents projets de recherche de maîtrise, menés en collaboration avec Andritz Hydro, portant sur la mécanique vibratoire des turbines hydrauliques Berthet (2021); Louyot et al. (2020). Son encadrement attentif a été déterminant et j'apprécie grandement la chance qui m'a été donnée de travailler sur un troisième projet sous sa direction. Je suis également reconnaissant pour son suivi attentif tout au long de ma maîtrise, ainsi que pour sa dévotion, sa compréhension et sa flexibilité.

Je tiens ensuite à exprimer mes remerciements envers l'équipe d'Andritz Hydro, composée d'Olivier, Bernd et Christine, pour leur accueil chaleureux, leur écoute attentive et leurs encouragements constants.

Une mention spéciale revient à Émilie, dont la rencontre a été des plus précieuses. Elle est devenue un pilier essentiel de mon travail, m'apportant une assistance et des encouragements incroyablement bénéfiques. Mes remerciements s'étendent également à tous les amis du laboratoire, dont la motivation constante a été une source essentielle de soutien.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers mes proches, en particulier mes colocataires à Montréal rue Boucher, pour leur encouragement et leur soutien indéfectibles tout au long de ce projet.

RÉSUMÉ

Les roues Francis à haute chute ou les turbines-pompes ont souvent des rapports de vitesse et de dimension qui font que les fréquences naturelles acoustiques et structurelles tendent à se rapprocher, ainsi que la fréquence d'excitation du rotor-stator. Lorsque la compressibilité devient significative, le simple effet de la masse ajoutée qui déplace les fréquences naturelles de la structure n'est pas suffisant pour modéliser le système fluide-structure. Il est alors difficile de distinguer la nature, c'est-à-dire acoustique ou structurelle, de chaque mode et l'effet d'amplification associé de la réponse forcée.

L'objectif principal du projet est d'étudier le comportement d'un système disque-disque dans l'eau (cavité acoustique) pour les cas où les fréquences acoustiques et structurelles sont proches, en tant que modèle simplifié d'une roue de turbine-pompe. Dans un premier temps, les paramètres adimensionnels qui caractérisent l'interaction acoustique/structure sont identifiés. Ensuite, nous identifions les modes naturels de vibration des disques, les modes naturels de vibrations dans la cavité et les cohérences de mode entre les deux systèmes. Ce travail se concentre sur les modes excités par l'interaction rotor-stator (avec le diamètre nodal 3), et les modes vibratoires correspondants dans la cavité.

La méthode de Ritz analyse l'effet de la compressibilité de l'eau sur les fréquences naturelles, en utilisant une décomposition de Bessel pour le domaine structurel et du fluide. Elle se concentre sur les interactions fluide-structure et permet une compréhension physique de ces interactions. Avec moins de degrés de liberté que l'analyse par éléments finis, elle offre un calcul plus rapide et des études paramétriques plus faciles. Les résultats sont vérifiés par une analyse par éléments finis acoustiques, plus réaliste.

Une étude paramétrique est menée pour comprendre comment les modes structurels et acoustiques interagissent pour une large gamme de paramètres adimensionnels tels que le paramètre de compressibilité, le rapport des densités (entre le fluide et la structure), la dimension de la cavité et les épaisseurs des disques. D'abord, en faisant varier le paramètre de compressibilité, nous analysons la transition entre un modèle simple incompressible et un modèle compressible. Ensuite, des plages d'intérêt sont identifiées, à savoir lorsque seuls quelques modes interagissent. Dans de tels cas, des systèmes très simples de 2, 3 et 4 degrés de liberté peuvent représenter analytiquement le comportement du système. Ce travail contribue à améliorer la compréhension des vibrations de turbine dans les cas où les modes acoustiques et structurels sont potentiellement excités et interagissent.

ABSTRACT

High head Francis or pump-turbine runners often have speed and dimension ratios that cause acoustic and structural natural frequencies to approach each other as well as the rotor-stator excitation frequency. When the compressibility becomes significant, the simple effect of added mass which shifts the natural frequencies of the structure is not sufficient to model the fluid-structure system. It is then difficult to distinguish the nature, i.e. acoustic or structural, of each mode and the associated amplification effect of the forced response.

The main aim of the project is to study the behavior of a disk-disk system in water (acoustic cavity) for cases where acoustic and structural frequencies are close, as a simplified model of a pump-turbine runner in its casing. At first, nondimensional parameters that characterize the acoustic/structure interaction are identified. Then we identify the natural modes of vibration of the disks, the natural modes of vibrations in the cavity and the mode coherences between the two systems. This work focusses on the modes excited by the rotor-stator interaction (with the nodal diameter 3), and the corresponding vibrating modes in the cavity.

The Ritz method analyzes water compressibility on frequencies using Bessel decomposition. It focuses on fluid-structure interactions, aiding interpretation and understanding. With fewer degrees of freedom (20 vs. 100k), computation is faster and parametric studies are easier. Results are verified with acoustic finite element analysis for a more complete representation.

A parametric study is conducted to understand how structural and acoustic modes interact for a wide range of nondimensional parameters such as the compressibility parameter, the ratio of the densities (between fluid and structure), the dimension of the cavity and the disks thicknesses. First, varying the compressibility parameter, we analyse the transition between a simple incompressible model to a compressible one. Then, ranges of interests are identified, namely when only a few modes interact. In such cases very simple systems of 2, 3 and 4 degrees of freedom can represent analytically the system behavior. This work helps to improve the understanding of turbine vibration in cases where acoustic and structural modes are potentially excited and interacting.

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

RSI	Rotor stator interaction
AVMI (β)	Added virtual mass incremental : incrément de masse ajoutée virtuelle
NAVMI ($\hat{\beta}$)	AVMI non dimensionnée
F_A	ratio entre la fréquence fondamentale acoustique et la fréquence fondamentale structurelle
F_S	ratio entre la fréquence fondamentale stator et la fréquence fondamentale rotor
D	Rigidité en flexion perpendiculaire à la structure
Ω_R	vitesse relative entre le milieu le rotor et le milieu acoustique
h_i	épaisseur du domaine i
ℓ	longueur longitudinale
E	Module de Young
ρ	Masse volumique
$\tilde{x}$	adimensionnement de la variable x
R_i	Rayon du domaine i
ω	pulsation
f	fréquence
k	pulsation spatiale
$\mathcal{M}$	nombre de masse
u	déplacement
ϕ	potentiel de vitesse acoustique
v	vitesse acoustique
p	pression acoustique
ε	énergie
Γ	intercorrelation spatiale
Chapitre théorique	
A	Domaine acoustique
S	Domaine structurel

Chapitre modèle de disques

A	Domaine acoustique
R	Rotor
S	Stator

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Résolution par différences finies	114
----------	---	-----

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Lors de la COP21 en 2015, une coalition internationale constituée de 196 pays à travers le monde s'est réunie pour signer les accords de Paris. L'objectif de cet accord est d'absolument maintenir l'augmentation de la température moyenne mondiale par rapport à l'ère pré-industrielle en dessous de 2°C et de continuer les efforts pour la limiter à 1.5°C. Cette augmentation de température est actuellement d'environ 1.2°C, selon le rapport de 2022 GIEC (2022). Chaque dixième de degré entraîne des conséquences dramatiques en termes de dérèglement climatique, d'augmentation des feux de forêts, des risques de catastrophes météorologiques et de fonte de la calotte glaciaire. Ces conséquences ont des répercussions tragiques sur l'environnement, la biodiversité, l'économie et la société Nations-Unies. Il est donc nécessaire de prévoir un plan de transition à moyen et long terme pour atteindre cet objectif.

Mais il ne suffit pas d'agir uniquement dans un futur lointain. Les effets des changements climatiques, accentués par les conditions géopolitiques, se font déjà ressentir en Europe avec le déclenchement d'une crise énergétique (euronews, 2022) et d'une pénurie d'eau (Parlement européen, 2023).

Le développement des énergies décarbonées est l'un des piliers de l'accélération de la transition énergétique. Selon le rapport du GIEC (2022), les systèmes énergétiques mondiaux sont capables de s'adapter pour accélérer notre transition. C'est notamment le cas de l'énergie hydraulique : "L'utilisation efficace de l'eau et la gestion de l'eau, notamment dans les centrales hydroélectriques et les centrales à cycle combiné dans les zones sujettes à la sécheresse, présentent une grande faisabilité" (GIEC, 2022).

L'énergie hydraulique présente des qualités remarquables et se distingue des autres types d'énergie renouvelable de bien des manières (HydroQuebec, 2020). En effet, par rapport aux systèmes solaires et éoliens, les installations hydroélectriques ont une capacité distinctive : celle de réguler la production énergétique en optant pour la rétention de l'eau. De plus, l'électricité produite par l'énergie hydraulique est de meilleure qualité que celle produite par des sources d'énergie dont la puissance fluctue au fil du temps, comme le solaire et l'éolien. Les pompes-turbines, qui reposent sur le principe des turbines à réaction de type Francis pour la génération d'électricité, permettent également de pomper l'eau et ainsi de stocker l'énergie potentielle hydraulique. Ces systèmes établissent un lien entre les avantages de l'énergie hydraulique et les autres énergies renouvelables intermittentes. En effet, ils ont la capacité de stocker mécaniquement l'énergie excédentaire provenant de sources éoliennes

ou solaires. Cette énergie stockée peut ensuite être utilisée pour produire une électricité de meilleure qualité que celle qui avait été initialement générée.

La transition énergétique vers les énergies renouvelables, comme l'éolien et le solaire, pose un défi majeur en raison de la variabilité de la production. La production d'électricité doit être en phase avec la demande en tout temps, ce qui se complexifie lorsque la demande fluctue et que la production dépend d'éléments naturels imprévisibles tels que le vent et le soleil. Les systèmes doivent donc être en mesure de démarrer et d'arrêter fréquemment afin de compenser ces fluctuations, ce qui peut mettre une forte pression sur les machines. Cela contraste avec un fonctionnement constant à un niveau de rendement optimal, où les machines peuvent opérer de manière stable et efficace. Pour relever ce défi, ces événements transitoires doivent être pris en compte dès leur dimensionnement (Trivedi et al., 2013).

Pour optimiser la génération et le stockage d'énergie à partir de l'énergie hydraulique, il est préférable de concevoir des centrales de grande envergure (Hydro-Québec, 2015; O'connor, 2016). Par exemple, la station de pompage-turbinage de haute chute de Bath County, inaugurée aux États-Unis en 1985, est capable de stocker 24 GWh et a une capacité de production maximale de 3 GW répartie sur 6 pompes-turbines (Dominion, 2022). Le diamètre de chaque pompe-turbine est d'environ 10 mètres. La compréhension de systèmes mécaniques d'une telle ampleur est complexe mais primordiale pour garantir leur efficacité, leur stabilité et leur longévité. En effet, tout au long de leur exploitation, les turbines hydrauliques sont soumises à des forces externes qui entraînent une fatigue importante et peuvent provoquer une perte de rendement (Coutu et al., 2004, 2008). C'est notamment le cas de l'interaction rotor-stator (RSI), une excitation qui fluctue dans le temps et qui est inévitable pour ce type de turbine (Seidel et al., 2012).

Il est donc essentiel de s'assurer que les modes de vibration naturels de la roue n'entrent pas en résonance avec de telles excitations harmoniques, ou du moins de vérifier que l'amplitude de ces résonances reste inférieure à un seuil critique. Sinon, les vibrations pourraient être amplifiées et entraîner une fatigue précoce du matériau, pouvant éventuellement conduire à la rupture de la machine.

Les turbines hydrauliques sont des systèmes vibratoires complexes qui ont la particularité d'interagir avec l'eau, un fluide dense. Cet interaction cause différents phénomènes vibratoire qu'il convient de saisir pour un dimensionnement optimal.

Les vibrations de la structure provoquent le mouvement de l'eau dans les espaces confinés entourant la roue. Ce phénomène hydrodynamique, plus connu sous le nom de masse ajoutée, augmente l'inertie totale du système, ce qui conduit à une diminution de ses fréquences de vibration. L'article de référence Lamb (1920) a depuis longtemps conceptualisé cette obser-

vation cruciale lorsqu'il s'agit de concevoir des turbines hydrauliques, en particulier lorsque les espaces confinés sont restreints. Une étude expérimentale démontre que cet effet est significatif pour les turbines hydrauliques (Valentín et al., 2017) : plus les écarts axiaux et radiaux entre la roue et les parois de la cavité sont réduits, plus les fréquences de vibration diminuent.

Les turbines Francis et les pompes-turbines à haute chute se distinguent par leur forme particulière. En effet, à mesure que la chute augmente, le fluide contient davantage d'énergie sous forme de pression, ce qui nécessite que les turbines soient capables de rediriger le flux pour exploiter cette énergie. Ainsi, avec une augmentation de la chute, les turbines Francis adoptent une forme de plus en plus aplatie verticalement, passant d'une forme cylindrique à une configuration semblable à un disque, comme illustré dans la Figure 1.1. Les premiers modes de vibration de ces turbines sont des modes de disque (Egusquiza et al., 2016), et leur analyse peut être approximée en considérant la roue de la turbine comme un disque fixé au centre de l'arbre et libre à l'extérieur. De plus, contrairement aux turbines Francis à haute chute, les pompes-turbines présentent moins d'aubes, ce qui signifie que les modes de disque sont prédominants par rapport aux modes de vibration des pales. Par conséquent, l'analyse des modes de disque pour les pompes-turbines à haute chute apporte des informations essentielles pour garantir leur résistance à ce comportement vibratoire.

L'eau qui entoure la roue de la turbine complexifie également le système global en connectant mécaniquement les différentes structures de la cavité hydraulique. En effet, les vibrations de la roue sont transmises au couvercle supérieur (Fig 1.2) et, en commençant à vibrer à son tour, il influence les vibrations de l'ensemble du système. Des études telles que Valentín et al. (2017) et Weder et al. (2019) ont montré, par exemple, que la prise en compte de la flexibilité du couvercle influence de manière significative les vibrations de la roue. Le système étudié par la suite est donc composé de la roue, du couvercle et de l'eau, comme illustré sur la Figure 1.2.

Enfin, la particularité d'une turbine hydraulique réside dans sa capacité à générer une rotation en entraînant le fluide à proximité (Poncet et al., 2005). Cependant, la différence de vitesse angulaire entre la structure (la roue) et le fluide entraîne la séparation de deux types de modes qui étaient initialement identiques : les modes de vibration correspondant aux ondes se déplaçant dans le même sens que la rotation du système, et les modes de vibration se déplaçant dans le sens opposé à la rotation du système. L'analyse de ce phénomène a été menée de manière analytique et numérique par Louyot et al. (2020) et Berthet (2021) lors de recherches précédentes, dans le but d'améliorer la compréhension au sein d'Andritz Hydro Canada Inc.

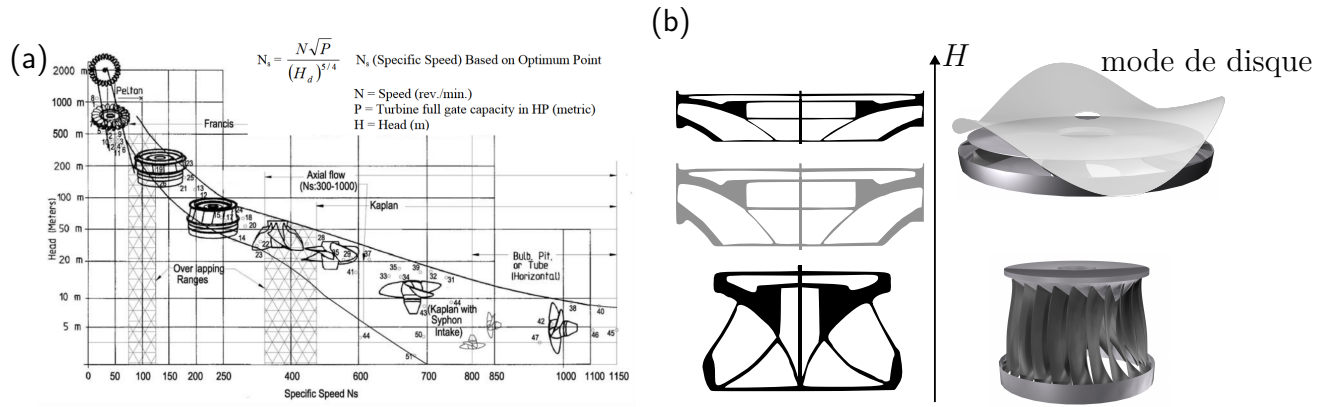


FIGURE 1.1 Types de turbines selon les conditions hydrauliques de la centrale : (a) charte de sélection en fonction de la hauteur de chute et de la vitesses pécifique qui lie le débit, la fréquence de rotation et la hauteur de chute (figure tirée de Karassik et al. (2008)) ; (b) aplatissement de la géométrie de roue Francis avec la hauteur de chute avec mode de disque pour les roues de haute chute

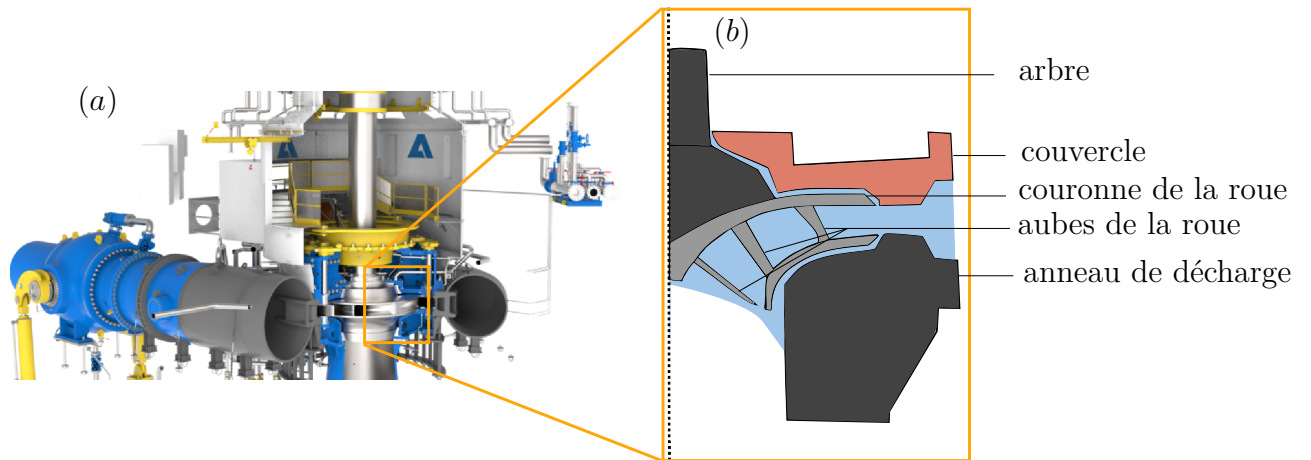


FIGURE 1.2 Schéma du système considéré : (a) Modélisation 3D d'une pompe turbine (image de Andritz-Hydro) ; (b) Schéma et nomenclature de la turbine

Ces études antérieures ont supposé que l'eau en contact avec le système vibratoire était incompressible. Ceci est une hypothèse acceptable lorsque les fréquences de vibrations de la chambre acoustiques sont largement supérieures aux fréquences de vibrations d'intérêts de la structure. C'est en général le cas car la célérité acoustique de l'eau est élevée ($\approx 1400m/s$). Cependant, cette hypothèse ne tient pas pour certains types de turbines, les modes acoustiques interviennent : la cavité hydraulique lorsque les fréquences de vibrations acoustiques se rapprochent des fréquences d'intérêt.

Lors de l'adaptation des pompes-turbines aux hautes chutes, deux options sont envisagées : soit augmenter le diamètre de la turbine, soit accroître la vitesse de rotation de la roue. Dans le premier cas, cela entraîne un agrandissement de la cavité entourant la turbine, ce qui réduit les fréquences naturelles acoustiques qui s'y développent et les rapproche davantage des fréquences d'excitation. Dans le second cas, la fréquence d'excitation du système augmente et se rapproche des fréquences naturelles acoustiques. Dans les deux situations, les fréquences d'excitation externes se rapprochent des fréquences naturelles acoustiques de la cavité hydraulique. Par conséquent, il devient impossible de négliger la compressibilité de l'eau lors de l'analyse des vibrations de la turbine.

L'objectif principal de cette recherche de maîtrise est d'étendre les analyses vibratoires incompressibles afin de prendre en compte l'effet de la compressibilité de l'eau sur les vibrations d'un système structural spécifique composé d'une cavité acoustique, comprenant une roue et un couvercle supérieur. Le mémoire est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, une revue de littérature est réalisée en se concentrant principalement sur les théories développées avec l'hypothèse d'incompressibilité. Ensuite, la littérature pertinente sur l'interaction acoustique-structure est recensée et synthétisée dans un chapitre dédié, où les principaux objectifs de la recherche sont établis. Par la suite, un chapitre théorique approfondit l'interaction acoustique-structure en décrivant les principaux effets observés à l'aide de systèmes simples à faible nombre de degrés de liberté. Ce chapitre est suivi d'un modèle idéalisé, dit disque-cavité-disque, qui reflète les informations précédentes et les présente sur un système plus réaliste. Enfin, un chapitre de discussion conclut l'étude en examinant ses implications pratiques et en proposant quelques axes d'ouverture pour la recherche future.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

L’objectif est d’étendre les études vibratoires théoriques de Louyot et al. (2020) et Berthet (2021) à un modèle compressible de l’eau.

La revue de littérature débute en situant l’analyse linéaire théorique fondée sur la théorie des écoulements potentiels dans le contexte plus vaste de l’interaction fluide-structure des turbines hydrauliques. Ensuite, elle examine les résultats principaux de cette théorie dans le cas où l’on considère que le fluide est incompressible, puis elle se concentre particulièrement sur les aspects de l’interaction entre l’acoustique et la structure.

2.1 Interaction fluide-structure (IFS)

Les problèmes d’interaction fluide-structure correspondent à des situations où un fluide et une structure entrent en contact. Dans ce contexte, le fluide influence le mouvement de la structure en exerçant des forces de pression qui se transmettent à celle-ci, tandis que la structure affecte l’écoulement du fluide en générant des vitesses de déformation qui se propagent au sein du fluide. Ces interactions mutuelles sont schématisées dans la Figure 2.1.

Dans le contexte des turbines hydrauliques, l’interaction fluide-structure revêt une importance primordiale en raison des nombreux problèmes qui émergent de l’intensité de cette interaction entre le fluide et la structure Hübner et al. (2016); Trivedi and Cervantes (2017). Voici quelques-unes des problématiques rencontrées dans ce domaine :

- L’entraînement du fluide lors des vibrations structurelles (Lamb, 1920) et le phénomène de masse ajoutée
- L’effet du mouvement rotationnel des aubes de roue par rapport au vannes fixes qui induit l’apparition d’un champ de pression connu sous le nom d’interaction rotor-stator (Seidel et al., 2012)
- L’effet de l’écoulement autour des aubes de la roue des turbines (Nennemann et al., 2016) qui induit un amortissement ajouté.
- Le lâcher tourbillonnaire au niveau des directrices et des aubes, qui peut créer des dommages considérables (Luna-Ramírez et al., 2016).
- L’écoulement du fluide dans les labyrinthes très minces constituant l’écart entre le rotor et le stator dans la turbine (Hsu and Brennen, 2002)
- L’étude de la dynamique des paliers lubrifiés (Muszynska, 1986) pour la jonction mécanique entre les éléments fixes et en rotation

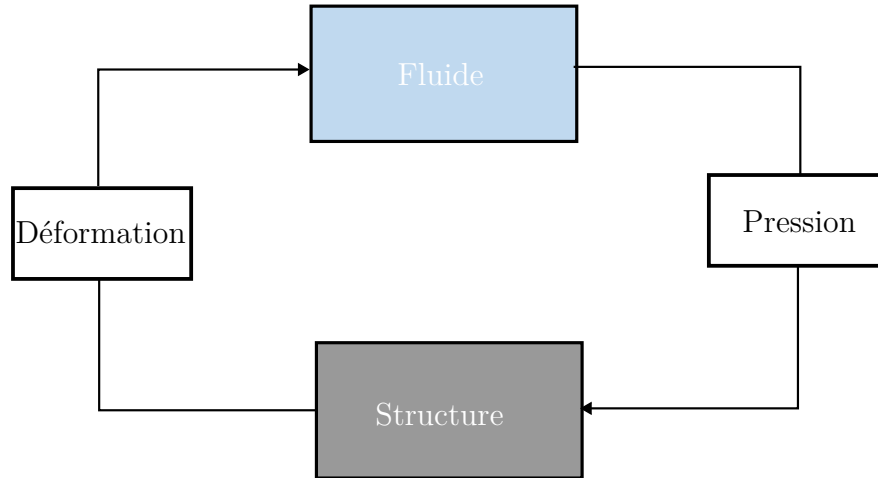


FIGURE 2.1 Interaction fluide-structure

— L'apparition et les conséquences de la cavitation (Kumar and Saini, 2010)

Il est incontestable que la modélisation réaliste de systèmes prenant en compte tous les phénomènes d'interaction fluide-structure dépasse actuellement les capacités de calcul disponibles. Par conséquent, afin de mieux comprendre les résultats globaux, les fabricants de turbines simplifient leur approche en analysant chaque phénomène individuellement. Dans de nombreux cas, ils tentent de synthétiser les effets de ces phénomènes d'interaction fluide-structure en introduisant des coefficients dans les matrices structurelles. Ces coefficients sont connus sous le nom de matrices de raideur, d'amortissement et de masse ajoutées (Dehkharghani et al., 2019), comme illustré dans la Figure 2.2. Cette approche permet d'effectuer des calculs plus économiques, car seuls les degrés de liberté structurels sont pris en compte pour évaluer les vibrations et la stabilité de la structure. Cependant, cette méthode présente un inconvénient majeur : les coefficients sont basés sur une théorie linéarisée et dépendent donc du point de fonctionnement de la machine, sans tenir compte des phénomènes non linéaires et transitoires du fluide.

Un avantage de partitionner l'étude des différents phénomènes réside également dans la possibilité de développer une théorie analytique ou semi-analytique basée sur des géométries idéalisées, afin de mieux comprendre les résultats complexes obtenus. Cela est particulièrement le cas pour l'influence des cavités remplies d'eau, où les modèles utilisés pour cette analyse sont basés sur des géométries idéalisées de disques représentant la roue et le couvercle de la turbine (Berthet, 2021; Jeong, 2006; Louyot et al., 2020; Valentín et al., 2017), comme illustré dans la Figure 2.3.

Dans le contexte des petits déplacements structurels et des fluides irrotationnels, qui conduisent à la théorie de l'écoulement potentiel (Batchelor, 1973), toutes les équations sont linéarisées,

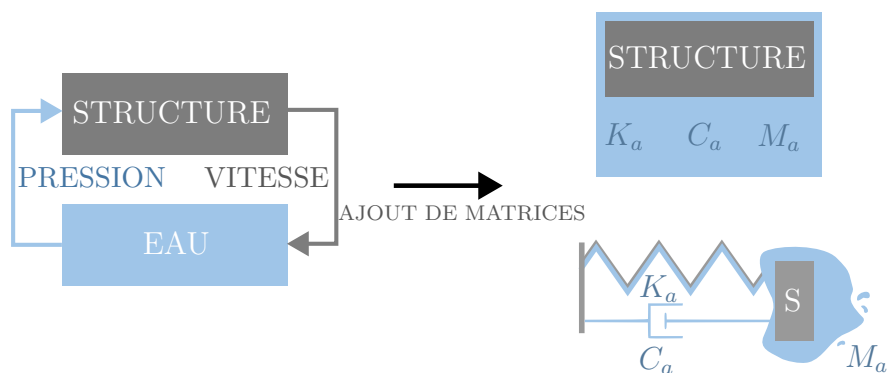


FIGURE 2.2 Simplification par matrices structurelles ajoutées, À gauche on considère deux domaines distincts : fluide et structure. À droite, on considère une partie des effets du fluide sur la structure par une rigidité K_a ajoutée, un amortissement ajouté C_a et une masse ajoutée M_a

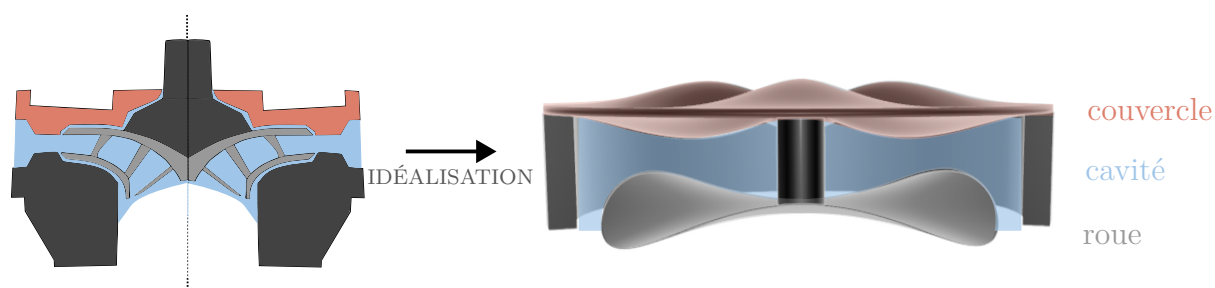


FIGURE 2.3 Idéalisation géométrique : la roue et le couvercle sont modélisés par des disques et sont séparés par une cavité annulaire remplie d'eau

ce qui permet d'obtenir des résultats analytiques concernant l'interaction fluide-structure. Jusqu'à présent, les fabricants de turbines ont développé une compréhension physico-mathématique de cette interaction, en se basant sur l'hypothèse d'incompressibilité de l'eau. Cette hypothèse permet de réduire l'influence de l'eau sur la roue à un coefficient modélisant la masse ajoutée, appelé facteur AVMI (added virtual mass incremental) (Amabili and Kwak, 1996; Kwak and Kim, 1991; Lamb, 1920), ou plus généralement à une matrice de masse ajoutée. Ce concept est développé plus en détail dans la section suivante de la revue de littérature.

2.2 Masse ajoutée et hypothèse d'incompressibilité

Cette partie a pour objectif de développer une preuve analytique du concept de masse ajoutée en appliquant l'algèbre linéaire élémentaire aux opérateurs linéaires qui définissent les équations sur les différents domaines afin d'expliquer mathématiquement ce phénomène.

2.2.1 Facteur AVMI (Added virtual mass incremental)

Il est possible de démontrer que lorsque le fluide en contact avec la structure est considéré comme incompressible, l'analyse modale du système complet (fluide, structure) peut être réduit à un problème purement structurel en ajoutant une matrice de masse ajoutée.

La démonstration mathématique est assez simple. Avec la théorie des écoulements potentiels (Batchelor, 1973), la pression p du fluide satisfait l'équation de Laplace dans son domaine, avec des conditions aux limites qui dépendent du déplacement u de la structure en contact :

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \vec{n}} p &= -\rho_F \ddot{u},\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur perpendiculaire à la paroi et ρ_F la masse volumique du fluide.

Ainsi, la solution du problème fluide pour la pression p est exprimée de manière linéaire en fonction de l'accélération $\ddot{u}$. Plus spécifiquement, la pression de contact p_n appliquée sur le domaine structurel est également une fonction linéaire de $\ddot{u}$, ce qui se traduit par l'équation $p_n = \mathbf{M}_a(\ddot{u})$. L'opérateur $\mathbf{M}_a$ représente l'opérateur de masse ajoutée. En intégrant cet opérateur dans l'équation structurelle de la plaque citée dans (Leissa, 1969) (ce raisonnement peut être généralisé à toute équation structurelle linéaire pour une structure en contact avec

un fluide) :

$$\begin{aligned}\nabla^4 u + \ddot{u} &= p_n, \\ &= M_a(\ddot{u}), \\ \nabla^4 u + (1 + \mathbf{M}_a)\ddot{u} &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

La difficulté réside donc dans la détermination de l'opérateur M_a et dans la résolution de l'équation structurelle avec la masse ajoutée.

Dans le cas d'une structure unique en contact avec le fluide, telle qu'un disque, une approximation réaliste peut être effectuée en supposant que les modes de vibration conservent la même forme que dans le vide. Cette approximation est confirmée par l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz, comme démontré par (Kwak and Kim, 1991). Selon cette hypothèse, l'opérateur fonctionnel M_a est supposé diagonal dans la base des modes propres obtenus dans le vide.

Ainsi, l'utilisation du coefficient de Rayleigh pour déterminer la pulsation propre ω_F avec la présence du fluide associée à un mode propre u_0 donné est utilisé :

$$\begin{aligned}\omega_F^2 &= \frac{\langle u_0, \nabla^4 u_0 \rangle}{\langle u_0, (1 + M_a)u_0 \rangle}, \\ &= \frac{\langle u_0, \nabla^4 u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle + \langle u_0, \mathbf{M}_a u_0 \rangle}.\end{aligned}$$

Or, la pulsation naturelle dans le vide ω_S s'obtient aussi par le quotient de Rayleigh :

$$\omega_S^2 = \frac{\langle u_0, \nabla^4 u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle}.$$

Ceci permet de déduire une expression de ω_F en fonction de ω :

$$\begin{aligned}\omega_F &= \frac{\omega_S}{\sqrt{1 + \frac{\langle u_0, \mathbf{M}_a u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle}}}, \\ &= \frac{\omega_S}{\sqrt{1 + \beta}}.\end{aligned}$$

Ce raisonnement a conduit à la formulation du concept de facteur AVMI (added virtual mass incremental) β , qui a été développé dans la littérature. Le facteur AVMI permet d'établir une relation entre la fréquence de vibration naturelle dans le fluide et la fréquence de vibration naturelle dans le vide.

Ce facteur est défini comme un rapport d'énergie. Il correspond au rapport de l'énergie cinétique du fluide induite par la structure $E_{F,S}$ à l'énergie cinétique de la structure E_S

(Lamb, 1920) :

$$\beta = \frac{\langle u_0, \mathbf{M}_a u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle} = \frac{E_{F,S}}{E_S}.$$

Dans le cas des plaques circulaires immergées dans un fluide infini, il est possible de séparer la partie adimensionnelle, qui dépend exclusivement de la configuration du système mécanique, du coefficient NAVMI (Non-dimensional Added Virtual Mass Index) $\hat{\beta}$ (Amabili and Kwak, 1996), de la partie dimensionnelle, qui est influencée par les propriétés des matériaux et l'épaisseur de la plaque.

$$\beta = \hat{\beta} \frac{\rho_F a}{\rho_S h},$$

où ρ_F est la densité du fluide, ρ_S la densité de la structure, a le rayon du disque vibrant et h son épaisseur.

Dans le cas des structures de disques en contact avec le fluide, les modes propres structuraux u_S pris en compte sont les solutions analytiques $u_{n,p}$. Ainsi, pour chaque couple de nombre de diamètres nodaux et de cercles nodaux (n, p) , le coefficient adimensionnel $\tilde{\beta}_{n,p}$ peut être calculé pour déterminer les fréquences de vibration naturelles en présence de l'eau.

Dans le cas général, la difficulté réside principalement dans le calcul de l'énergie cinétique de l'eau induite par le mouvement de la structure, c'est-à-dire $E_{F,S} = \langle u_S, p_n \rangle = \langle u_S, \mathbf{M}_a u_S \rangle$. En particulier, dans le calcul de la pression $p_n = \mathbf{M}_a u_S$. Ainsi, il est nécessaire de résoudre l'équation de Laplace dans le fluide en appliquant la condition de déplacement de la structure en tant que condition aux limites. Une méthode couramment utilisée consiste à appliquer la transformation d'Hankel, qui permet d'exprimer la solution de manière pratique sous la forme d'une intégrale avec la décomposition en fonctions de Bessel. Des auteurs tels que Kwak and Kim (1991) et Louyot et al. (2020) ont recours à cette méthode dans leurs travaux.

Généralisation du facteur AVMI à plusieurs modes

L'utilisation du coefficient de Rayleigh pour passer d'un problème dans le vide à un problème avec fluide n'est possible que sous l'hypothèse que l'opérateur M_a est diagonal. Cependant, cette hypothèse ne s'applique pas lorsque plusieurs structures indépendantes sont en contact avec le fluide. Dans ce cas, le fluide incompressible interagit avec les deux structures, ce qui introduit des opérateurs croisés.

De plus, cette hypothèse ne tient pas non plus lorsque l'on abandonne l'idée que la forme des modes propres reste la même au contact du fluide par rapport au vide. Par exemple, Amabili

and Kwak (1996) retire cette hypothèse et calcule les fréquences propres dans le fluide en considérant la solution comme une décomposition de plusieurs modes propres de disques $u_{n,p}$. Leurs résultats montrent que l'hypothèse selon laquelle les modes propres ne changent pas entre le vide et l'eau est suffisante pour obtenir une bonne approximation (<10%) des fréquences propres.

Dans ce cas-là, la solution structurelle s'exprime sous la forme :

$$u = \sum_i^{\infty} x_i u_i, \quad (2.3)$$

où les u_i sont les solutions propres de l'équation structurelle et les x_i sont les inconnues du problème.

La méthode de Ritz-Galerkin, pour considérer un ensemble de modes consiste à sélectionner un nombre fini de modes parmi l'ensemble infini de modes possibles et à discrétiser l'équation structurelle avec le fluide en utilisant également ces modes propres comme fonctions tests. Les solutions recherchées sont alors représentées par un vecteur $X = (x_i)$.

L'opérateur $\mathbf{M}_a$, qui permet d'établir une relation linéaire entre la pression appliquée sur le fluide et le déplacement de la structure, n'est plus diagonal dans ce cas.

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_a) \{\ddot{X}\} + \mathbf{K} \{X\} &= 0, \\ (-\omega_F^2 (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_a) + \mathbf{K}) \{X\} &= 0, \end{aligned}$$

où la matrice $\mathbf{M}_0 = (\langle u_i, u_j \rangle)$ et $\mathbf{M}_a = (\langle u_i, \mathbf{M}_a u_j \rangle)$ et $\mathbf{K} = (\langle u_i, \nabla^4 u_j \rangle)$.

Cas de plusieurs structures

L'étude du couplage de plusieurs structures en contact avec un fluide est un concept important à comprendre, et cela a été abordé par plusieurs auteurs dans le contexte de disques en contact avec une même cuve d'eau (Berthet, 2021; Jeong, 2003, 2006; Weder, 2018).

Dans le cadre de l'étude de deux structures, désignées respectivement par les indices 1 et 2, il est possible de constater, à partir de l'équation de Laplace mentionnée précédemment, que la pression exercée sur la structure 1 est proportionnelle à l'accélération de la structure 1 ainsi qu'à l'accélération de la structure 2. De manière similaire, la pression exercée par le fluide sur la structure 2 est proportionnelle à l'accélération de la structure 2 ainsi qu'à l'accélération

de la structure 1 :

$$\begin{aligned} p_n^1 &= \mathbf{M}_a^{1,1} \ddot{u}_1 + \mathbf{M}_a^{1,2} \ddot{u}_2, \\ p_n^2 &= \mathbf{M}_a^{2,1} \ddot{u}_1 + \mathbf{M}_a^{2,2} \ddot{u}_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où u_1 et u_2 représentent les déplacements des structures 1 et 2 respectivement, et les opérateurs M_a sont des opérateurs linéaires de masse ajoutée qui relient le fluide et le solide.

Le système d'équations structurelles obtenu est le suivant :

$$\nabla^4 u_1 + (1 + \mathbf{M}_a^{1,1}) \ddot{u}_1 + \mathbf{M}_a^{1,2} \ddot{u}_2 = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla^4 u_2 + (1 + \mathbf{M}_a^{2,2}) \ddot{u}_2 + \mathbf{M}_a^{2,1} \ddot{u}_1 = 0. \quad (2.6)$$

La question qui se pose est de savoir comment obtenir les modes propres de telles équations structurelles d'une manière similaire à l'utilisation du quotient de Rayleigh. En réalité, il est possible de faire l'hypothèse que la forme propre du système, qui décrit la forme des deux structures, se décompose en utilisant un mode naturel dans le vide u_0^1 pour la première structure et u_0^2 pour la deuxième structure :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u_0^1 & 0 \\ 0 & u_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Ainsi, pour calculer la forme des modes, il suffit de déterminer les valeurs de x_1 et x_2 . En appliquant des produits scalaires aux équations, de la même manière que pour l'application du coefficient de Rayleigh, il est alors possible d'obtenir un système linéaire en x_1 et x_2 :

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_a) \{ \ddot{X}_F \} + K \{ X_F \} = 0, \quad (2.8)$$

$$(-\omega_F^2 (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_a) + K) \{ X \}_F = 0, \quad (2.9)$$

avec la matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle u_0^1, u_0^1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle u_0^2, u_0^2 \rangle \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \langle u_0^1, M_a^{1,1} u_0^1 \rangle & \langle u_0^1, M_a^{1,2} u_0^2 \rangle \\ \langle u_0^2, M_a^{2,1} u_0^1 \rangle & \langle u_0^2, M_a^{2,2} u_0^2 \rangle \end{bmatrix}}_{\text{masse ajoutée } \mathbf{M}_a} \quad (2.10)$$

et la matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \langle u_0^1, \nabla^4 u_0^1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle u_0^2, \nabla^4 u_0^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le système en question présente une résolution particulièrement simple, donnant lieu à l'obtention de deux modes qui constituent un mélange entre le premier mode naturel individuel et le deuxième mode naturel individuel. C'est l'approche analytique est employée par Berthet (2021) et Jeong (2006) pour l'analyse d'un système comportant deux disques séparés par une cavité hydraulique.

Il est important de noter que ces résultats peuvent être généralisés à des géométries plus complexes que celle des disques, pour lesquelles il n'est pas toujours possible de calculer analytiquement les modes propres. Les modes propres dans le vide peuvent être obtenus à l'aide de méthodes par éléments finis. En effectuant une transformation de base des matrices nodales vers des matrices exprimées dans la base des modes propres dans le vide, il est possible de réduire le système nodal, qui peut comporter des milliers voire des millions de degrés de liberté, à un système comprenant seulement quelques degrés de liberté qui correspondent aux modes de disque dans le vide. Cette approche présente plusieurs avantages : les calculs sont plus rapides, permettant ainsi des études paramétriques, et les matrices résultantes sont plus simples à manipuler, car elles représentent des phénomènes physiques plutôt que des effets géométriques nodaux. De plus, l'ajout de coefficients de raideur et d'amortissement supplémentaires peut être facilement implémenté dans ces matrices réduites.

2.3 Insertion de la rotation

2.3.1 co-rotation et contre-rotation (mode-split)

Lorsque le rotor de la turbine est en rotation à une vitesse Ω_R , le fluide environnant est entraîné à une vitesse moyenne plus faible $\Omega_A = \kappa\Omega_R$ Poncet et al. (2005). Cela induit une rotation relative entre le fluide et la structure $\Omega_{R/A}$. Les modes de vibration de la roue peuvent être envisagés comme des ondes qui se propagent dans le sens de rotation $\Omega_{R/A}$ ainsi que dans le sens opposé à cette rotation. L'onde structurelle se propageant dans le sens de rotation perçoit les variations du champ de pression induites par le fluide plus rapidement que l'onde se propageant dans l'autre sens. Par conséquent, les deux modes sont affectés différemment par le fluide environnant. À mesure que la vitesse de rotation de la roue augmente par rapport à celle du fluide, les modes initialement à la même fréquence de vibration se séparent en deux modes : l'un avec une fréquence de vibration plus élevée et l'autre avec une fréquence plus basse que la fréquence initiale à $\Omega_R = 0$. Ce phénomène est illustré dans la figure 2.4.

Le phénomène de séparation des modes a été initialement étudié à partir d'un modèle prenant en compte uniquement les vibrations angulaires (dépendant de θ) par Kubota and Ohashi (1991). Une étude similaire a été réalisée par Louyot et al. (2020), qui a considéré les modes

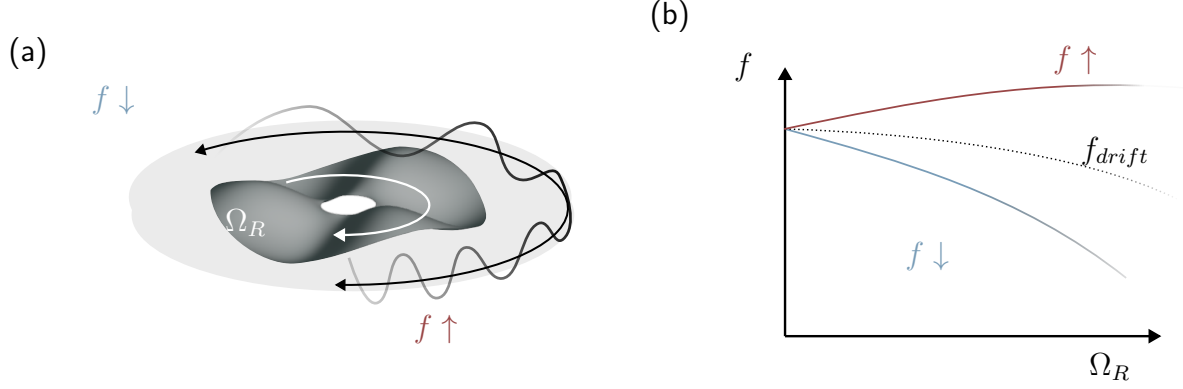


FIGURE 2.4 Phénomène de séparation des modes inspiré de Louyot et al. (2020) ; (a) Schéma illustrant les deux sens de propagation des ondes ; (b) graphique illustrant la séparation fréquentielle des ondes avec la vitesse de rotation relative

de vibrations radiaux : des fonctions de vibration dépendant à la fois de θ et de r . Ces études ont conduit à une modification du facteur AVMI β , en introduisant un nouveau coefficient β_n qui dépend du nombre de diamètres nodaux et de la vitesse de rotation du rotor :

$$\omega_F = \frac{\omega_V}{\sqrt{1 + \beta_n}}, \quad (2.12)$$

$$\beta_n = \left(1 + \frac{\Omega_{R/F}}{\omega_F} n\right)^2 \beta, \quad (2.13)$$

où $\Omega_{R/F}$ représente la vitesse de rotation du rotor par rapport à la vitesse de rotation moyenne du fluide. Cette relation conduit à une équation du second degré en ω_F qui peut être résolue facilement, aboutissant à l'expression suivante :

$$\omega_F = \frac{\sqrt{(\beta + 1)\omega_V^2 - \beta(n\Omega_{R/F})^2} - n\beta\Omega_{R/F}}{\beta + 1}. \quad (2.14)$$

Le nombre de diamètres nodaux peut être positif ou négatif. Si $n < 0$, les modes de vibration observés se propagent dans le même sens que la rotation du rotor. En revanche, si $n > 0$, les modes de vibration se propagent dans le sens opposé à la rotation.

Ce phénomène a été étudié numériquement par Valentín et al. (2016) en utilisant la méthode des éléments finis sur une géométrie simplifiée. De plus, il a été étudié expérimentalement par Presas et al. (2015), qui a observé les fréquences de résonance du disque soumis à une excitation. Ensuite, Berthet (2021) a intégré ce phénomène dans son modèle semi-analytique, prenant en compte l'interaction entre les vibrations du rotor et du stator (le couvercle).

La comparaison des fréquences expérimentales de Presas et al. (2015) et des fréquences ana-

lytiques obtenues par la méthode de Louyot et al. (2020) montre que les solutions analytiques ont un écart d'environ 5% avec les solutions expérimentales.

La suite de ce document va généraliser ce phénomène au cas du fluide considéré comme compressible.

2.3.2 Interaction rotor-stator

Dans la géométrie des turbines Francis, l'espace entre les aubes de la roue et les directrices est très réduit. Cette proximité entre les aubes rotatives et les directrices fixes crée un champ de pression qui varie dans le temps à une fréquence proportionnelle à la vitesse de rotation de la roue. Ce phénomène, connu sous le nom d'interaction rotor-stator, est illustré dans la figure 2.5. L'interaction rotor-stator revêt une importance cruciale dans la conception des turbines, car elle engendre des vibrations tout au long du fonctionnement de la turbine, pouvant entraîner des défaillances (Ohashi, 1994).

Les fabricants de turbines prennent en compte ce phénomène à différents stades de conception. Lors de la phase de prédimensionnement, ils utilisent des modèles simples pour appréhender cette problématique (Nicolet et al., 2006; Tanaka, 2011). En revanche, lors d'une étape plus avancée de la conception, où il est nécessaire de déterminer avec précision les amplitudes et les fréquences exactes des vibrations, une étude numérique plus détaillée et géométriquement précise est généralement adoptée (Hefny et al., 2019).

Dans leur étude, Nicolet et al. (2006) développe un modèle unidimensionnel basé sur la modulation des champs de pression induits par les deux structures (rotor et stator). À partir de cette analyse, ils proposent la décomposition suivante de la pression :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{r,s} p_{r,s}, \\ &= \sum_{r,s} A_{r,s} (\cos(rZ_B\Omega t - (rZ_B - sZ_0)\theta + \phi_0) + \cos(rZ_B\Omega t - (rZ_B + sZ_0)\theta - \phi_0)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans cette expression, Z_B représente le nombre d'aubes, Z_0 est le nombre de directrices, et Ω est la vitesse de rotation du rotor. Cette formule permet de représenter à la fois temporellement et spatialement le champ de pression variable qui se développe en fonction des différents paramètres de la turbine (Z_B et Z_0) et de son fonctionnement (sa vitesse de rotation).

Ainsi pour chaque couple d'entier r, s , il existe un mode d'excitation $p_{r,s}$. Les pulsations des excitations ω_r sont proportionnelles à Ω et au nombre d'aubes : $\omega_r = rZ_B\Omega$. Le champ de pression est distribué selon θ avec un nombre de diamètres nodaux $rZ_B - sZ_0$ ou $rZ_B + sZ_0$. Comme mentionné dans les sections précédentes, les modes de vibration du disque avec ces

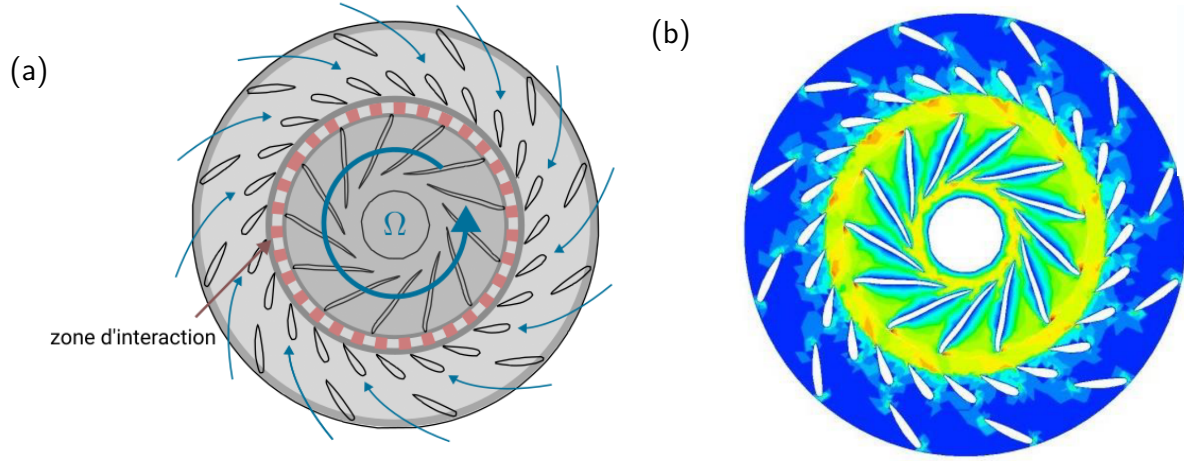


FIGURE 2.5 Illustration de l'interaction rotor-stator ; (a) Schéma de la l'interaction ; (b) illustration du champ d'excitation développé (figure tiré de Hefny et al. (2019))

nombre de diamètres nodaux seront excités lors du fonctionnement de la turbine. Ainsi, lorsque le fabricant connaît le nombre d'aubes et de directrices, il peut déterminer quels modes de vibration structurels peuvent potentiellement être excités par ce type d'excitation et à quelles fréquences.

Un exemple pratique pour les pompes turbines hautes chutes correspond à $Z_B = 9$ et $Z_0 = 24$ (Braun et al., 2019). Pour ces caractéristiques, on peut identifier que le diamètre nodal $n = 3 \times Z - 1 \times Z_0 = 3$ et donc peut potentiellement excité les modes de disques à n diamètres nodaux avec une pulsation $\omega_r = 3 \times 9 \times \Omega$.

2.4 Interaction roue-couvercle

Dans le cas des turbines hydrauliques, la prise en compte des vibrations du couvercle lors du calcul des modes de vibration de la roue modifie les fréquences de vibrations lorsque le couvercle est considéré comme infiniment rigide. En effet, Valentín et al. (2017) et Weder et al. (2019) ont montré expérimentalement que la flexibilité du couvercle a une influence significative sur la fréquence de vibration du système total. En parallèle, Berthet (2021) a étudié ce phénomène d'une manière semi-analytique. La section précédente 2.2.1 explique de manière générale comment le contact de l'eau met en relation les deux structures par le biais de termes croisées dans la matrice de masse ajoutée.

Pour tenir compte du couvercle, il est nécessaire d'inclure simultanément les deux structures dans le modèle et d'étudier leur interaction avec l'eau environnante. Les modes de vibration

de la roue et du couvercle se combinent, ce qui donne lieu à deux types de modes : les modes en phase (sinuous) et les modes en contre-phase (varicose). La figure 2.6 illustre ces deux types de modes. Les modes de vibration en contre-phase ont une fréquence plus basse que les modes de vibration en phase, ce qui correspond à une masse ajoutée plus élevée. Cela est dû au fait que l'énergie cinétique du fluide en mouvement est plus importante pour le mode varicose, avec le développement d'accélération radiales significatives, par rapport au mode en phase (Weder, 2018).

2.5 Interaction acoustique-structure

En faisant l'hypothèse de l'incompressibilité du fluide et en supposant que la forme des modes de vibration ne changeait pas d'une cavité vide à une cavité remplie d'eau, une évaluation du facteur AVMI décrit dans la section 2.2.1 permettait de prendre en compte les changements de fréquences dus à la masse ajoutée. Cette évaluation permettait d'obtenir une approximation relativement réaliste des modes de vibration de la structure dans l'eau. L'utilisation d'un tel facteur était une manière approximative pour le mécanicien des vibrations de rester focalisé sur la structure et de considérer les effets du fluide comme une perturbation externe.

Dans le cas des pompes turbines haute chute, les aubes des turbines étant plus longues et donc les canaux plus grands, les propriétés acoustiques de l'eau deviennent plus importantes par rapport aux modes de vibrations excités par l'interaction rotor-stator, cela a été montré par l'analyse CFD compressible de Yan et al. (2010). En effet, les simulations CFD incompressibles sont généralement suffisamment précises pour prédire les fluctuations de pression qui induisent l'excitation rotor-stator dans l'espace restreint entre les directrices du stator et les aubes du rotor. Cependant, ces simulations ne sont pas capables de prédire les fluctuations

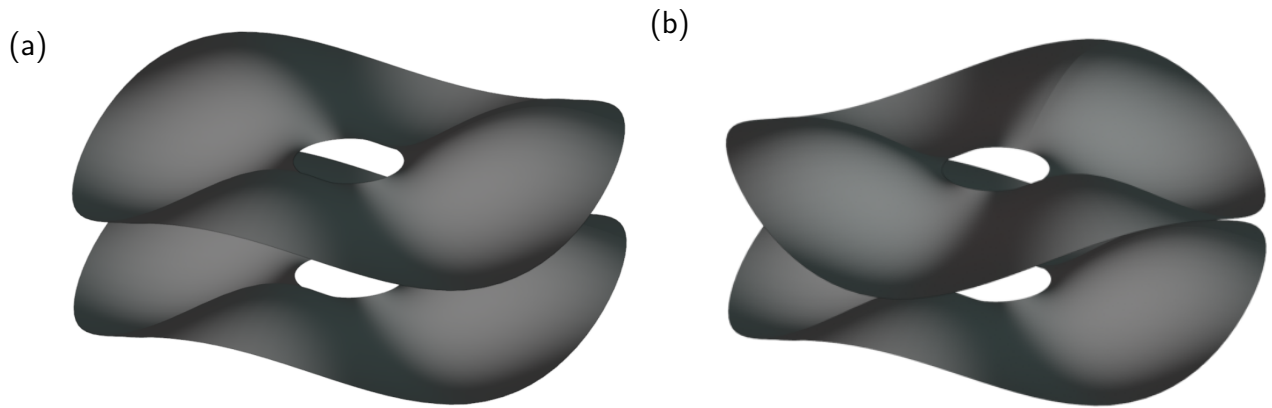


FIGURE 2.6 (a) Mode de vibration en phase, (b) Mode de vibration en contre phase

de pression dues aux résonances acoustiques qui peuvent se produire avec l'augmentation de la taille de la turbine. Dans la continuité de ces simulations, Braun et al. (2019) ont montré que le logiciel de CFD commercial CFX était capable de prédire de manière assez précise les pics de résonance acoustique en comparant les résultats des simulations avec des mesures expérimentales réalisées sur un modèle de turbine dans l'air. Cependant, les analyses CFD ne prennent en compte que le comportement du fluide. Cela serait justifié si la structure était considérée comme infiniment rigide et sans interaction avec les fluctuations de pression acoustiques. Toutefois, en raison des caractéristiques de l'eau ainsi que des propriétés vibratoires de la structure telle que la roue, il se pourrait que les fréquences des vibrations acoustiques de l'eau coïncident avec celles des vibrations structurelles. Ceci pourrait entraîner un véritable mélange des modes entre ces deux domaines, ce qui compliquerait la prédiction précise des modes acoustiques résultant de cette interaction à travers les simulations CFD. Ce type d'analyse est très précis du point de vue du fluide, mais néglige généralement la vibration de la structure qui joue un rôle crucial dans l'ensemble du système.

Pour l'hydraulicien, il est possible de prendre en compte les vibrations de la structure dans son étude des résonances acoustiques en considérant une vitesse effective du son qui tient compte de la flexibilité de la structure environnante. Cette vitesse effective a été analysée pour la première fois lors de l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les tuyaux, connue sous le nom de phénomène "du coup du bélier". En effet, Young et Korteweg (1878) ont conclu qu'il existait une vitesse effective du son qui prend en compte le fait que l'onde peut se propager à la fois dans le milieu liquide et dans le milieu structurel :

$$\frac{1}{c_{eff}^2} = \frac{c_0^2}{1 + \rho_f c_0^2 \frac{D}{Ee}}, \quad (2.16)$$

où c_{eff} est la célérité effective du son, c_0 la célérité du son dans le milieu liquide, D le diamètre du canal, E la module de Young du matériau et e l'épaisseur de la structure du tuyau. Ce résultat permet, à la manière du facteur AVMI, de prendre en compte le changement de fréquence acoustique lors du contact entre un fluide et une structure mais ne prend pas en compte le fait que le mouvement de la structure peut aussi modifier plus profondément les modes de vibrations acoustiques en affectant leur forme.

Il devient alors nécessaire de résoudre le problème de l'interaction acoustique-structure, en prenant en compte simultanément les aspects mécaniques des structures et hydrauliques. Une approche globale est requise, permettant à la structure et au fluide qui l'entoure d'interagir librement et d'échanger leur énergie. L'objectif de ce mémoire est spécifiquement de répondre à la question de savoir si les modes qui se développent sont principalement des modes stric-

tement acoustiques, strictement structurels, ou plutôt un mélange de modes acoustiques et structurels.

L'outil majoritairement utilisé aujourd'hui dans l'industrie de la turbine hydraulique est un code d'éléments finis qui permet de prendre en compte les vibrations structurels et les vibrations acoustiques en même temps (codes commerciaux tels que Ansys ou Nastran). Les équations solutionnées par ces codes sont des équations structurelles linéaires couplées avec l'équation acoustique de Helmholtz sur le potentiel fluide. Cette analyse par éléments finis permet d'obtenir des résultats beaucoup plus réalistes que l'approximation d'un facteur pour exprimer la masse ajoutée Dörfler et al. (2012), en effet cette analyse prend en compte la compressibilité du fluide et la modification des modes de vibration structurels lors de l'ajout d'un fluide.

L'outil de calcul utilisé permet en effet de prendre en compte de manière très précise les vibrations acoustiques et structurelles simultanément. Cependant, il est important de noter que cette analyse repose sur une approximation linéaire des faibles déplacements structurels. De plus, cette analyse permet d'observer un champ de vitesse fluide avec de faibles variations de vitesse à moyenne nulle (variations acoustiques), ce qui ne permet pas d'intégrer la non-linéarité de l'écoulement global. Ainsi, des phénomènes non-linéaires tels que l'absorption des phénomènes acoustiques par l'écoulement permanent (acoustic streaming) ou des déplacements importants lors des résonances peuvent entraîner des différences entre les résultats du calcul linéaire et la réalité observée. Ces disparités pourraient expliquer les différences observées entre les résultats linéaires de Berthet (2021) et les résultats expérimentaux de Weder et al. (2019). Malgré cela, cet outil reste très intéressant pour l'analyse des vibrations soumises à des excitations de faible amplitude.

L'utilisation d'un tel outil est en effet très avantageuse pour obtenir des résultats précis sur des géométries 3D complexes. Cependant, il peut être assez lourd à utiliser pour analyser des phénomènes spécifiques qui peuvent, à première vue, être décrits par des géométries simplifiées telles que des disques ou des cavités cylindriques ou annulaires. Les équations utilisées par ces outils sont basées sur des millions de nœuds d'un maillage, ce qui peut donner une vision détaillée mais peu synthétique et rend donc difficilement interprétable le comportement physique du système. Par conséquent, ce mémoire se concentrera sur le choix et le développement de méthodes visant à intégrer la physique naturelle du système dans les calculs, afin de comprendre intrinsèquement les phénomènes de couplage entre l'acoustique et la structure.

Dans les parties qui suivent, nous nous sommes tout d'abord attachés à expliquer les différentes méthodes de modélisation des systèmes acoustico-structurels. Ensuite, nous avons

discuté des phénomènes généraux d'interaction entre plusieurs modes, en mettant l'accent sur les notions de symétrie et de rapprochement des modes propres dans l'espace des valeurs propres.

2.5.1 Modèle synthétique du couplage acoustique-structure

Depuis de nombreuses années, la modélisation de l'interaction entre une cavité acoustique et une plaque structurale a été un sujet de recherche majeur. Cette problématique revêt une importance particulière dans le domaine de la recherche aéronautique, où la compressibilité de l'air entraîne des propriétés acoustiques significatives autour des structures exposées à des turbulences. Une approche semi-analytique a été proposée pour la première fois par Dowell and Voss (1962), soutenu par l'entreprise Boeing, permettant de calculer les modes de vibration des plaques adjacentes à une cavité acoustique. Ce modèle a été largement adopté en raison de sa capacité à réduire les coûts et à faciliter l'interprétation des calculs. Par exemple, Kang and Raman (2006) ont utilisé cette méthode pour analyser la stabilité des disques durs en rotation rapide à l'intérieur d'une cavité acoustique, tandis que Gopinathan et al. (2001) l'ont appliquée au calcul d'un contrôleur actif de bruit. De même, Venkatesham et al. (2008) ont utilisé cette méthode pour évaluer la radiation acoustique d'un système à la sortie d'une cavité rectangulaire.

La méthode implique tout d'abord la recherche des modes propres de l'équation structurale dans le vide, notés u_n . Ensuite, on cherche les modes propres de l'équation acoustique dans la cavité en supposant que les parois sont infiniment rigides, notés ϕ_n (représentant le potentiel de vitesse dans le fluide). Pour des géométries simples telles que des rectangles ou des disques pour la plaque, ou des parallélépipèdes ou des cylindres pour la cavité, une solution analytique existe pour chaque domaine. Ensuite, la solution du problème couplé est obtenue en décomposant les solutions couplées du déplacement de la structure u et du potentiel de vitesse fluide ϕ dans la base des solutions non couplées :

$$\begin{aligned} u &= \sum_n^{\infty} x_{u,n} u_n, \\ \phi &= \sum_n^{\infty} x_{\phi,n} \phi_n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour obtenir une solution numérique approximative du problème, il est nécessaire de tronquer ces séries, tout en garantissant leur convergence dans la norme hilbertienne L^2 . La décomposition ainsi tronquée est ensuite incorporée dans le système d'équations aux dérivées partielles, ce qui permet d'obtenir une discrétisation du problème sous forme d'un système

matriciel défini par blocs, utilisant la méthode de Ritz-Galerkin. Les inconnues du système sont les vecteurs $\{X_u\} = \{x_{u,n}\}$ et $\{X_\phi\} = \{x_{\phi,n}\}$, et le système se discrétise de la manière suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \{\ddot{X}_u\} \\ \{\ddot{X}_\phi\} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}\mathbf{R}_{s,a} \\ -f_{a,s}\mathbf{R}_{s,a} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} \{\dot{X}_u\} \\ \{\dot{X}_\phi\} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{M}\text{diag}(\omega_{u,n}^2) & 0 \\ 0 & f_{a,s}\text{diag}(\omega_{\phi,n}^2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \{X_u\} \\ \{X_\phi\} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} = 0,$$

où $\mathcal{M}$ et F_A représentent respectivement, sans entrer dans les détails, le rapport de masse entre le fluide et la structure, et le rapport des fréquences fondamentales acoustique et structurelle. En considérant l'inconnue du fluide comme un potentiel de vitesse, tel que suggéré par Dowell and Voss (1962), l'ensemble du couplage peut être regroupé dans une matrice gyroscopique antisymétrique G . Ainsi, le problème discrétisé peut être formulé comme un problème de type gyroscopique, un concept bien connu de la communauté scientifique qui a été étudié dans des travaux antérieurs tels que ceux de Meirovitch (1975). En particulier, ce système est conservatif et démontre un échange d'énergie sans perte entre le domaine acoustique et le domaine structurel. De plus, cette approche simplifiée de la résolution permet de comprendre comment les deux réalités physiques, les vibrations acoustiques et structurelles, se couplent en utilisant un nombre restreint de modes dans chaque domaine. En contraste, la méthode des éléments finis présente peu de réalité physique dans sa définition des équations et demande plus d'effort pour l'analyse et la compréhension des résultats.

La convergence de cette méthode et la proximité des modes par rapport à la véritable solution sont des questions cruciales, étant donné que cette méthode a été largement utilisée pour analyser le couplage acoustique/structure dans de nombreux systèmes. L'article de Ginsberg (2010) a spécifiquement étudié cette méthode dans le cas simple d'une cavité unidimensionnelle couplée à un piston accroché à un ressort, pour lequel la solution analytique du problème peut être obtenue. Cet article a fait l'objet de la réponse de Dowell. L'échange indirect par le biais d'articles scientifiques entre les chercheurs souligne les limitations de cette approche simplifiée et met en évidence les scénarios dans lesquels la précision des résultats peut être compromise.

En effet, le point sensible de la méthode de Dowell réside dans la manière de traiter les solutions fluides. Dans cette approche, les solutions fluides sont considérées comme une décomposition de solutions où les parois de la cavité sont supposées infiniment rigides ($\partial\phi/\partial n = 0$). Cependant, cette condition est physiquement impossible lorsque l'une des parois, correspondant à la plaque structurelle vibrante, peut se déplacer. Selon la condition de non-pénétration, la vitesse des particules fluides en contact avec la paroi doit être égale à la vitesse de dépla-

gement de la paroi, qui ici est non nulle ($\partial\phi/\partial n = \dot{w} \neq 0$). Bien que cette condition soit une condition naturelle et non essentielle, le système converge tout de même, mais de manière moins rapide et ne convergera jamais ponctuellement (en norme infinie), en particulier aux abords des parois de la plaque vibrante. L'activation du mouvement de la structure près du fluide modifie intrinsèquement le champ acoustique, et dans certains cas, il est nécessaire de prendre en compte cette modification du champ.

L'article de Ginsberg (2010) propose une manière de compléter la méthode de Dowell en ajoutant des formes acoustiques orthogonales dont la dérivée ne s'annule pas aux abords de la paroi flexible. Cela permet d'obtenir une solution qui prend en compte la vitesse près des parois. Le commentaire de Dowell nuance cette critique, en expliquant que dans certains cas, la vitesse près des parois flexibles importe peu et que cette méthode suffit pour obtenir une solution réaliste du problème.

Jeong (2006) propose une manière analytique de résoudre un cas de couplage acoustique-structure entre deux diques et une cavité annulaire. La manière de résoudre ce problème ressemble au cas unidimensionnel. Il obtient un problème aux valeurs propres dont le déterminant est non polynomiale qu'il résout itérativement. Cette manière de résoudre le problème prend en compte le fait que la vibration de la structure modifie le champ de vitesse acoustique et en particulier le champ de vitesses acoustiques qui sont orthogonales à la paroi vibrante. Cependant, les résultats obtenus par une telle approche permettent difficilement d'obtenir une formule synthétique décrivant l'intensité du couplage.

Dans quels cas faut-il alors considérer la méthode simplifiée de Dowell ? Et dans quels cas faut-il prendre en compte la méthode de analytique Jeong ? L'analyse du système simplifié basée sur la méthode de Dowell est très utile pour comprendre les échanges d'énergie qui peuvent se produire entre les deux systèmes en vibration simplifiée. Ainsi, une question se pose : peut-on utiliser cette méthode dans notre modèle idéalisé des turbines hydrauliques à haute chute ? La réponse à cette question constitue l'un des objectifs du mémoire.

2.5.2 Couplage lors d'un rapprochement des modes individuels

Dans cette section, un système composé de deux sous-systèmes, notés 1 et 2, est étudié. Dans un souci de simplicité, il est supposé qu'un seul mode de vibration est associé à chaque sous-système pris individuellement : le mode $(f_1, \vec{u}_1)$ pour le sous-système 1 et le mode $(f_2, \vec{u}_2)$ pour le sous-système 2, où f représente la fréquence propre du mode et $\vec{u}$ représente la forme de vibration associée.

Il est supposé que les deux sous-systèmes sont couplés linéairement dans le système global. Si

l'on considère $X = [x_1, x_2]$ comme les contributions respectives des formes propres $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, alors le système peut être exprimé sous la forme suivante (en négligeant l'amortissement) :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M}_{1,2} \\ \mathbf{M}_{2,1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_C} \right) \{ \ddot{X} \} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & L_{1,2} \\ L_{2,1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_C} \{ \dot{X} \} + \left(\begin{bmatrix} (2\pi f_1)^2 & 0 \\ 0 & (2\pi f_2)^2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K_{1,2} \\ K_{2,1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_C} \right) \{ X \} = 0.$$

Ainsi, ce couplage donne lieu à deux modes propres qui sont des fonctions des modes propres individuels ainsi que des matrices de couplage M_C, L_C, K_C :

$$(f_{i,C}, \vec{u}_{i,C}) = F((f_1, \vec{u}_1), (f_2, \vec{u}_2)). \quad (2.18)$$

Si les matrices de couplage, c'est-à-dire M_C, L_C, K_C , sont nulles, cela signifie qu'il n'y a pas de couplage entre les sous-systèmes. Dans ce cas, les modes de vibrations du système couplé correspondent logiquement aux modes de vibrations des modes individuels des sous-systèmes. Cela signifie que le couplage entre les sous-systèmes n'affecte pas les modes de vibrations du système global, et chaque sous-système peut être étudié de manière indépendante.

Si l'une des deux fréquences est beaucoup plus grande que l'autre, c'est-à-dire $f_1 \gg f_2$, et que le domaine d'application se situe principalement à basse fréquence, le système peut être réduit à l'étude d'un seul degré de liberté. Cette approximation est utilisée dans le cas incompressible, où la fréquence acoustique est considérée beaucoup plus élevée que les fréquences structurelles. Ainsi, en considérant les modes acoustiques, on peut supposer que les fréquences structurelles se rapprochent des modes structurels, c'est-à-dire $f_1 \rightarrow f_2$.

Lorsque deux modes propres individuels présentent des similitudes en termes de valeurs propres (cohérence fréquentielle) et de vecteurs propres (cohérence spatiale), et qu'ils sont couplés, cela peut entraîner des phénomènes intéressants. Le couplage peut induire des modifications dans les propriétés des modes propres résultants, tels que des déplacements ou des fréquences modifiés par rapport aux modes individuels. Ces modifications dépendront des caractéristiques spécifiques du couplage et des propriétés des modes individuels. L'analyse de ce type de couplage est importante pour comprendre les interactions entre les modes et les effets résultants sur le système global.

Symétrie et dégénérescence modale

L'étude du phénomène de deux modes de vibrations du système proches fréquentiellement peut être interprétée en termes de dégénérescence modale.

En physique dynamique, un système présente des caractéristiques précises telles qu'une répartition de masse, de rigidité, des conditions aux limites ou une distribution de perméabilité électromagnétique. Lorsqu'elles sont intégrées aux équations, ces caractéristiques conduisent à un problème aux valeurs propres. Les solutions de ce problème forment une collection discrète, où chacune d'entre elles définit l'une des modes propres du système, qui représente une manière naturelle pour le système de vibrer, à la fois spatialement et fréquentiellement.

Parfois, un système peut présenter plusieurs modes différents ayant des fréquences de vibration identiques. On utilise alors le terme "dégénérés" pour décrire ces modes, qui sont largement étudiés en mécanique quantique C Cohen-Tannoudji (1986). Une analyse géométrique d'un système quantique permet notamment de déterminer avec précision le nombre de dégénérescences vibratoires (Jana, 2009). De même, dans le cas d'un système mécanique, si la géométrie d'une structure est symétrique, certains modes seront dégénérés. Par exemple, un cube peut subir des déformations identiques dans les trois directions x, y, z (figure 2.7).

L'importance de ce concept en interaction fluide-structure réside dans le fait que la mise en contact d'un domaine fluide avec la structure conduit souvent à la rupture de la symétrie du système structurel. Les paragraphes suivants fournissent quelques exemples de ce type de rupture de symétrie.

Un bon exemple de cela est la séparation des modes par rotation, également appelée "mode-split" (voir la section 2.3.1). En l'absence de fluide en rotation par rapport à la structure, il existe une symétrie dans la direction de propagation de l'onde mécanique. En raison de la symétrie du système, l'onde se propage de la même manière dans les deux directions du disque. Cependant, lorsque le fluide est en rotation par rapport au solide, l'onde ne se propage plus de la même manière dans la direction de rotation et dans la direction opposée. Cette rotation entraîne en effet une séparation des modes.

Un autre exemple parlant est le couplage de plusieurs structures via un fluide, qu'il soit compressible ou incompressible. Prenons l'exemple du couplage d'un rotor avec un couvercle. Supposons qu'il y ait un mode de vibration pour chaque disque à des fréquences respectives f_R et f_C , tels que $f_R = f_C$. Lorsque les deux disques sont superposés dans le vide, ils n'interagissent pas, ce qui signifie que leur mode de vibration n'affecte pas le système global "couplé", peu importe s'ils vibrent en phase ou en opposition de phase. Ainsi, dans ce cas, le système couplé possède deux modes avec les mêmes fréquences, à savoir $f_1 = f_2 = f_R = f_C$. Cependant, lorsque l'on ajoute un fluide comme de l'eau entre les deux disques, la situation change. En effet, l'eau ne réagit pas de la même manière aux vibrations des disques selon qu'ils vibrent en phase ou en opposition de phase. L'eau brise donc la symétrie entre ces deux modes. Ainsi, les fréquences f_1 et f_2 ne sont plus égales, et les modes ne sont plus dégénérés.

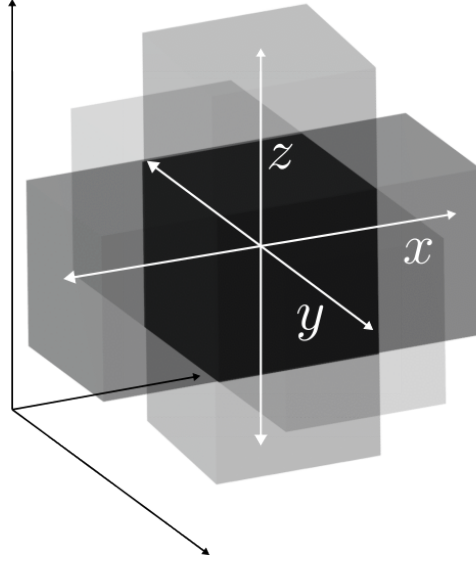


FIGURE 2.7 Dégénérescence de la vibration d'une structure en symétrie cubique

L'interprétation de la dégénérescence des modes à l'aide des symétries d'un système nous permet de comprendre ce qui se passe lorsqu'un mode structural de fréquence f_s se couple avec un mode acoustique de fréquence $f_a \rightarrow f_s$. Étant donné que le domaine acoustique ne satisfait pas la même équation spatiale (l'équation de Laplace) que le domaine structural (l'équation au bi-Laplacien), il n'y a pas de symétrie entre les deux domaines. Par conséquent, les modes du système couplé, quelles que soient les valeurs des paramètres, ne pourront jamais être dégénérés.

Cela signifie que les fréquences f_1 et f_2 du système couplé ne pourront pas se croiser, même si $f_A = f_S$.

Sachant que les modes du système couplé acoustique-structure ne peuvent pas se croiser, qu'est-ce que cela implique sur le comportement du système lorsque les modes acoustiques et structuraux se rapprochent ?

Région d'écartement des modes "veering region"

Dans la littérature, il est observé que lorsqu'il y a une interaction acoustique/structure et que les fréquences acoustiques et structurales se rapprochent en raison d'un changement de paramètre (géométrique, structural ou acoustique), les fréquences propres du système, qui étaient initialement entièrement acoustiques ou entièrement structurales, vont s'éloigner les unes des autres plutôt que de se croiser (Davis, 2017) (Figure 2.8 (a, b, c)). De plus, le comportement de chaque mode propre ainsi écarté va continuellement évoluer, passant par

exemple d'une contribution purement acoustique à une contribution mixte, pour finalement aboutir à une contribution purement structurelle.

L'auteur démontre, à l'aide de plusieurs exemples d'interaction entre un domaine acoustique et une plaque, comment il est possible d'étudier cette interaction de manière simplifiée. Cette région où les fréquences propres individuelles s'éloignent plutôt que de se croiser est connue dans la littérature sous le nom de "veering region", que l'on peut traduire par "région d'écartement".

Cette caractéristique n'est pas spécifique aux couplages acoustiques-structures, mais elle se manifeste dans de nombreux systèmes mécaniques. Les premières observations de ces phénomènes ont été faites lors d'études sur les systèmes vibratoires (Nair and Durvasula, 1973; Petyt and Fleischer, 1971; Webster, 1968). C'est dans l'article de Leissa (1974) que ce terme a été mentionné pour la première fois. Initialement, cette région de veering était considérée comme une aberration mathématique résultant de la discrétisation d'un problème continu, et donc comme une erreur de calcul. Cependant, il s'est avéré que ce phénomène est bien réel et apparaît dans de nombreux systèmes physiques, comme l'explique Vidoli (2005). C'est Perkins (1986) qui a introduit le tout premier critère d'écartement des modes, démontrant ainsi que cette région d'écartement n'est pas une aberration des systèmes discrets.

Manconi (2017) et Vidoli (2005) fournissent une revue détaillée de la littérature sur ce phénomène. Dans son étude, Manconi (2017) observent que ce phénomène se manifeste dans de nombreux systèmes mécaniques, ce qui l'amène à proposer une étude généralisée. Il distingue deux cas dans son étude : celui où le couplage est faible et celui où le couplage est fort.

Pour illustrer ce phénomène dans le cas du couplage acoustique-structure, considérons un système à deux degrés de liberté : un degré de liberté acoustique représenté par le vecteur $\vec{u}_a$ (correspondant au potentiel de vitesse acoustique) et un degré de liberté structurel représenté par le vecteur $\vec{u}_s$ (correspondant au déplacement de la structure). Ces deux modes sont liés par une matrice d'interaction gyroscopique $\vec{G}$, qui est une matrice antisymétrique spécifique à l'interaction acoustique-structure.

Cette matrice $\vec{G}$ apparaît dans le cadre de l'interaction acoustique-structure et reflète la nature du couplage entre les deux degrés de liberté. Elle joue un rôle crucial dans la compréhension du comportement du système couplé.

On considère donc x_s et x_a comme étant les contributions des modes qui décrivent l'ensemble du système. Ces deux contributions forment un vecteur $X = \begin{bmatrix} x_s & x_a \end{bmatrix}$ qui satisfait l'équation

du second ordre de la mécanique classique :

$$\mathbf{M} \{\ddot{X}\} + \mathbf{G} \{\dot{X}\} + \mathbf{K} \{X\} = 0, \quad (2.19)$$

avec,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = C_G \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_{0,s}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{0,a}^2 \end{bmatrix}.$$

Le paramètre C_G permet de quantifier l'amplitude de l'interaction gyroscopique. Pour chaque valeur propre du système couplé, un vecteur propre lui est associé. Ce vecteur propre se décompose dans la base des modes individuels non couplés de la manière suivante, pour $\omega_{C,i}$:

$$\vec{v}_i = x_{s,i} \vec{u}_s + x_{a,i} \vec{u}_a. \quad (2.20)$$

La figure 2.8 illustre la région d'écartement des valeurs propres lorsque la valeur propre acoustique $\omega_{0,a}$ évolue linéairement en fonction du paramètre C , avec un coefficient directeur $k_a = 1$. Comme mentionné précédemment, dans cette région d'écartement, les trajectoires des valeurs propres changent avec l'évolution du paramètre, ce qui entraîne également des changements de forme des vecteurs propres associés. En particulier, lorsque ces vecteurs propres sont représentés dans la base $\vec{u}_a, \vec{u}_s$, ils subissent une rotation en fonction du paramètre C . Cette rotation peut être interprétée comme une transition graduelle du comportement d'un mode, passant d'une contribution plutôt acoustique à une contribution plutôt structurale, et traversant ainsi un angle précis où le transfert d'énergie entre la structure et la cavité acoustique est maximale. Cela correspond à un couplage maximal entre les deux domaines. Pour un mode donné, l'énergie transférée d'un domaine à l'autre peut être calculée comme suit :

$$E_{s,a,i} = \{X\}^t \mathbf{G} \{X\} = x_{s,i} x_{a,i} C_G.$$

D'après cette formule, en considérant que X a été normalisé et appartient donc au cercle unitaire, on remarque que l'énergie transférée est effectivement maximale lorsque $x_{s,i} = x_{a,i}$, ce qui signifie que l'angle que fait le vecteur propre par rapport à l'axe des x est de 45 degrés, comme illustré sur la Figure 2.8 (d). L'intensité de ce transfert énergétique d'un mode à l'autre peut poser problème, en particulier dans le cas des turbines hydrauliques. En effet, l'interaction rotor-stator induit des fluctuations de pression qui excitent naturellement la

cavité acoustique en premier lieu. Si l'intensité du transfert d'énergie est maximale, alors une grande partie de l'énergie qui était auparavant stockée sous forme de bruit acoustique se transmet aux vibrations structurelles.

Ainsi, afin d'éviter qu'un tel couplage se produise, il est nécessaire d'éviter que le système se retrouve dans une région d'écartement où les valeurs propres devraient normalement se croiser. Dans l'espace des paramètres, Vidoli (2005) montrent que plus l'intensité du couplage est élevée, c'est-à-dire lorsque C_G est élevé, plus cette région de couplage est étendue, ce qui augmente les chances de s'y retrouver. De plus, Davis (2017) démontrent, à l'aide d'un système à deux degrés de liberté, que l'intensité du couplage C_G est proportionnelle à la corrélation spatiale entre le mode acoustique et le mode structural, pris en compte au niveau de la paroi :

$$C_G \propto \int_S f_s f_a,$$

où f_s et f_a sont respectivement les vecteurs $\vec{v}_s$ et $\vec{v}_a$ qui correspondent aux formes propres. Ce résultat est intéressant car cette intercorrélacion, dans le cas de modes normalisés, reflète la similarité naturelle entre les modes acoustiques et structuraux. Sa valeur dépend de la géométrie de la cavité, de la géométrie de la structure et des conditions aux limites. Plus les géométries des deux domaines se ressemblent, plus ce paramètre est élevé.

Ainsi, est-il possible de définir des paramètres précis qui caractérisent le couplage acoustique-structure des turbines hydrauliques? Peut-on alors comprendre dans quelle région de ces paramètres le couplage serait maximal, et s'il est inévitable, comment le minimiser?

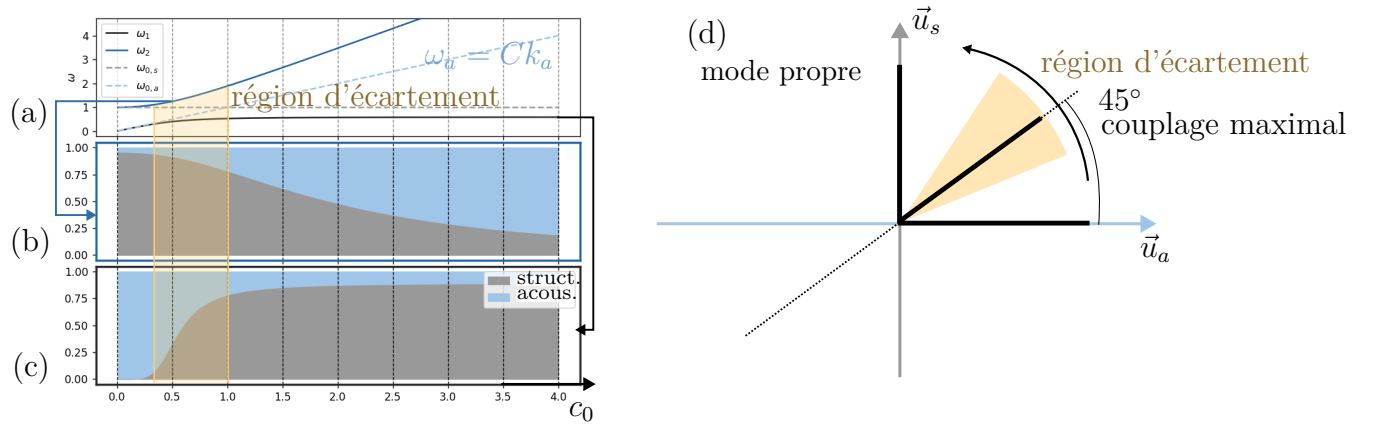


FIGURE 2.8 Évolution des modes propres du système 2.19, la figure (a) représente l'évolution des valeurs propres, les figures (b) et (c) représentent les contributions énergétiques des formes propres u_s et u_a pour les deux modes propres et la figure (d) illustre la rotation des vecteurs propres dans la base $(\vec{u}_s, \vec{u}_a)$

CHAPITRE 3 Objectifs de la recherche

3.1 Synthèse de la revue de littérature

Les études sur les phénomènes vibratoires liés aux structures acoustiques dans une cavité remplie d'eau font partie des problèmes à faible déplacement structurel et à faibles vitesses acoustiques. Ces problèmes peuvent être résolus de manière monolithique, c'est-à-dire en résolvant simultanément les équations structurelles et acoustiques. Cette approche peut être réalisée analytiquement et/ou semi-analytiquement pour des géométries simplifiées, et numériquement pour des géométries complexes.

La modélisation des différents composants de la turbine en utilisant des géométries idéalisées a été largement étudiée, que ce soit de manière expérimentale, analytique ou numérique. Ces géométries idéalisées permettent de comprendre différents phénomènes qui se produisent lorsque la roue de la turbine est immergée dans l'eau. Les principaux phénomènes pris en compte sont :

- la masse ajoutée ;
- la séparation des modes par rotation relative de la roue par rapport à l'eau ;
- le couplage avec le couvercle.

Dans la plupart de ces études, l'effet de la compressibilité de l'eau a été négligé, car cette hypothèse est valable dans la plupart des cas et pour la majorité des prototypes des turbines Francis. Certaines études de ce type de systèmes ont pris en compte les modes acoustiques, mais sans se concentrer réellement sur cet aspect.

Cependant, pour certains modèles de turbines, en particulier les pompes turbines à haute chute, l'inclusion de l'hypothèse de compressibilité dans certains calculs numériques entraîne une modification des solutions et l'apparition de pics de résonance pour des points de fonctionnement plausibles. Par conséquent, les praticiens aimeraient disposer d'un modèle permettant d'identifier les cas où les vibrations sont de nature structurelle incompressible, acoustique ou un mélange des deux, ainsi que les conséquences qui en découlent.

3.2 Objectifs

L'objet principal de cette recherche est de pouvoir appréhender l'inclusion de la compressibilité dans les modèles précédemment incompressible en se concentrant, en particulier :

- définir un panel de nombres adimensionnels pour caractériser l'interaction acoustique-

structure

- construire et résoudre un système idéalisé d'interaction acoustique-structure ;
- interpréter les résultats et identification des différentes zones vibration :
 - zone acoustique,
 - zone structurelle,
 - zone de mélange,
- extrapoler les conclusions au point de vue des fabricants de turbine pour faciliter leur pré-dimensionnement et leur interprétation de leur calcul.

Le document qui suit est structuré en trois chapitres distincts. Le premier chapitre se concentre sur l'analyse conceptuelle de l'interaction acoustique/structure, dans le but d'identifier les paramètres essentiels, les conséquences de la compressibilité sur le système, ainsi que les différentes zones d'interaction. Ce chapitre examine la qualité du modèle de Dowell and Voss (1962) pour l'application au modèle idéalisé de disques. L'essentiel du contenu de ce chapitre consiste en l'analyse de systèmes simples, avec peu de degrés de liberté, ce qui facilite leur compréhension.

Le second chapitre concerne l'application de la méthode de résolution de Dowell and Voss (1962) à un système idéalisé permettant de modéliser l'interaction entre la roue et le couvercle dans une cavité remplie d'eau. En particulier, il permet de comparer les résultats des différents phénomènes obtenus en supposant l'incompressibilité avec ceux obtenus en prenant en la prenant en compte. Cette partie illustre notamment comment les résultats très simples obtenus dans le chapitre précédent permettent déjà de comprendre ce modèle plus réaliste, et montre aussi comment un fabricant de turbines pourrait lui-même comprendre ces résultats pour des cas réels.

Enfin, un troisième et dernier chapitre d'ouverture aborde l'utilisation d'une telle théorie pour des cas d'applications réels, tels que des calculs sur des géométries complexes ou des interprétations de mesures.

CHAPITRE 4 Interaction acoustique-structure : Théorie

Ce chapitre a pour objectif d'explorer en détail les questionnements théoriques soulevés par le concept d'interaction acoustique-structure. Son principal objectif n'est pas l'application pratique des modèles de calculs, mais plutôt une compréhension approfondie du concept d'acoustique-structure.

4.1 Étude dimensionnelle et adimensionnement du problème

4.1.1 Variables adimensionnelles

Afin de cerner le problème et de minimiser le nombre de variables mises en jeu, il est préférable de commencer par faire une étude adimensionnelle.

Une cavité acoustique au repos (sans écoulement moyen) peut être caractérisée par trois paramètres : la masse volumique ρ_A , la fréquence fondamentale de vibration f_A et la taille caractéristique L_A . De manière similaire, une structure, peut être décrite par trois paramètres similaires : sa fréquence fondamentale de vibration f_S à vide, sa masse volumique ρ_S et sa taille caractéristique L_S .

En tout, il y a donc 6 paramètres dimensionnels à prendre en compte pour un tel couplage. En définissant une échelle de temps, d'espace et de masse, seuls 3 paramètres non-dimensionnels sont nécessaires pour décrire un tel problème.

On définit le ratio $F_A = f_A/f_S$ qui permet d'établir un lien entre la fréquence fondamentale de vibration de la structure et celle de la cavité acoustique. Lorsque ce ratio est faible, cela indique que la cavité est très compressible par rapport à la rigidité de la structure. Les parois de la cavité peuvent alors être considérées comme infiniment rigides, ce qui correspond à un problème purement acoustique. En revanche, lorsque ce ratio est très élevé, cela signifie que la structure est peu rigide par rapport aux effets acoustiques. Dans ce cas, les fréquences de vibrations acoustiques sont suffisamment élevées par rapport aux fréquences d'excitations extérieures proches de celle de la structure, ce qui permet de considérer le fluide comme incompressible.

Le deuxième nombre adimensionnel est le ratio de masse $\mathcal{M}_A = \rho_a/\rho_s$. Ce ratio permet de quantifier l'influence de la masse du fluide par rapport à la masse structurelle. Plus ce nombre est élevé, plus la force de pression du fluide sur la structure est importante. Ce ratio intervient dans la définition du facteur AVMI qui prend en compte la géométrie et la configurations des

deux milieux.

Enfin le troisième nombre adimensionnel est naturellement le ratio des longueurs caractéristiques $\tilde{L}_A = L_A/L_S$ de chacun des domaines. Le tableau 4.1 récapitule les différents nombres adimensionnels.

TABLEAU 4.1 Adimensionnement du couplage acoustique/structure

nombre	faible valeur cas d'usage	grande valeur cas d'usage
$F_A = f_A/f_S$	acoustiques des salles	propagation de la pression dans les artères
$\mathcal{M}_A = \rho_A/\rho_S$	air	eau
$\tilde{L}_A = L_A/L_S$	-	-

4.1.2 Adimensionnement des équations

Afin d'adimensionner les équations du problème, nous allons d'abord les exprimer de manière dimensionnelle. Pour ce faire, nous allons décrire les concepts de pression et de vitesse acoustiques. La pression et la vitesse acoustique sont des champs additionnels (avec une moyenne nulle) ajoutés à l'écoulement moyen, se propageant selon l'hypothèse de compressibilité du fluide. L'écoulement total du fluide (V, P) , représentant la vitesse et la pression, est ainsi décrit de la manière suivante :

$$V = v + v_A; P = p + p_A \quad (4.1)$$

où v représente la vitesse moyenne du fluide et v_A est la vitesse acoustique. De plus, p correspond à la pression moyenne et p_A à la pression acoustique.

Les équations dimensionnelles de couplage entre une paroi structurelle et une cavité acoustique au repos (vitesse moyenne v nulle) s'obtiennent en prenant en compte de petites déplacements et l'irrotationnalité du fluide. La pression acoustique est insérée dans le membre de droite de l'équation de la structure et la condition de non pénétration est insérée dans la condition aux limites de la cavité acoustique.

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u + \rho_S h_S \ddot{u} &= \rho_a \dot{\phi}, \\ \nabla^2 \phi + \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} &= 0, \\ \nabla \phi \cdot \vec{n}_u &= \dot{u}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

où u représente le déplacement de la structure, ϕ désigne le potentiel de vitesse acoustique,

h_S l'épaisseur de la plaque, ρ_S et ρ_A représentent respectivement la masse volumique de la structure et du fluide, D correspond à la rigidité en flexion de la structure, $\vec{n}_u$ représente le champ de vecteur unitaire normal à la structure, et enfin c_0 représente la célérité du son dans le fluide.

Les nombres adimensionnels jouent un rôle crucial en simplifiant les équations couplées. Ainsi, nous adimensionnons les quantités suivantes : $\tilde{\nabla} = L_S \nabla$, $\tilde{\partial}_t = \partial_t / f_S$, $\mathbf{u} = u / \ell$, $\tilde{h} = h / L_S$, et $\phi = \phi / L_S \ell f_S$, où ℓ représente la longueur caractéristique de la dimension orthogonale à la paroi structurale. Le système d'équations adimensionnées devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{k}_{0,S}^4} \tilde{\nabla}^4 \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}} &= \mathcal{M}_A / \tilde{h} \dot{\phi}, \\ \frac{1}{\tilde{k}_{0,A}^2} \tilde{\nabla}^2 \phi + \frac{1}{F_A^2} \ddot{\phi} &= 0, \\ \tilde{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_u &= \dot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Les nombres $\tilde{k}_{0,S}$ et $\tilde{k}_{0,A}$ représentent respectivement les pulsations spatiales fondamentales pour le domaine structurel et le domaine acoustique. Ces pulsations spatiales sont les premières valeurs propres adimensionnelles naturelles : $\tilde{\nabla}^4 \mathbf{u} = \tilde{k}_{0,S}^4 \mathbf{u}$ et $\tilde{\nabla}^2 \phi = \tilde{k}_{0,A}^2 \phi$. Elles dépendent uniquement de la géométrie de chaque domaine ainsi que de leurs conditions aux limites.

4.1.3 Relations de dispersion

Avant de chercher à résoudre le système, il est important d'analyser ce qui se passe dans chaque domaine individuellement. Cette analyse peut fournir des informations importantes. En effet, les relations de dispersion pour la structure et l'acoustique sont fondamentalement différentes, car la structure fait intervenir l'opérateur bi-laplacien, tandis que la cavité acoustique fait intervenir l'opérateur laplacien :

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,S}^4} \nabla^4 \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}} = 0 \implies \tilde{k}_S^4 = \tilde{\omega}_S^2 \tilde{k}_{0,S}^4, \tag{4.4}$$

$$\frac{F_A^2}{\tilde{k}_{0,A}^4} \nabla^2 \phi + \ddot{\phi} = 0 \implies \tilde{k}_A^2 = \frac{\tilde{\omega}_A^2}{F_A^2} \tilde{k}_{0,A}^2, \tag{4.5}$$

où $\tilde{\omega}_S$, $\tilde{k}_S$ et $\tilde{\omega}_A$, $\tilde{k}_A$ représentent respectivement les pulsations temporelles et spatiales adimensionnelles pour chaque domaine. Cela permet d'obtenir les vitesses de phase des deux

types de domaines :

$$v_S^\varphi = \tilde{k}_S/\tilde{\omega}_S = \tilde{k}_{0,S}/\tilde{k}_S = \tilde{\lambda}_S/\tilde{\lambda}_{0,S}, \quad (4.6)$$

$$v_A^\varphi = \tilde{k}_A/\tilde{\omega}_A = \tilde{k}_{0,A}/F_A = 2\pi/\tilde{\lambda}_{0,A}F_A, \quad (4.7)$$

où $\tilde{\lambda}_i$ fait référence à la longueur d'onde. La vitesse de phase de la structure v_S^φ est proportionnelle à sa longueur d'onde $\tilde{\lambda}_S$, ce qui signifie que les ondes se propageant dans la structure sont dispersives. En revanche, la vitesse de phase acoustique v_A^φ est constante par rapport à sa longueur d'onde, indiquant que le milieu acoustique est non dispersif. Étant donné que les ondes se dispersent différemment dans les deux domaines en raison de leurs propriétés distinctes, toute modification de la géométrie et donc des longueurs d'onde des modes propres dans chaque domaine entraîne inévitablement un croisement de leurs fréquences propres. En effet,

$$\tilde{\omega}_S = \tilde{k}_S^2/\tilde{k}_{0,S}^2 = (\alpha_S/\tilde{k}_{0,S}^2)/(\tilde{L}_S)^2 = \gamma_S/(\tilde{L}_S)^2, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\omega}_A = \tilde{k}_A^2/\tilde{k}_{0,A}^2 = F_A(\alpha_A/\tilde{k}_{0,A}^2)/(\tilde{L}_A) = F_A\gamma_A/(\tilde{L}_A), \quad (4.9)$$

où α_i est une constante adimensionnelle qui quantifie le mode spécifique et $\tilde{L}_i$ correspond aux tailles caractéristiques adimensionnelles des deux milieux. Par exemple, pour le mode harmonique $\cos(n\theta)$, la constante α correspond à n . Ainsi, les constantes γ_i sont essentiellement des constantes adimensionnelles qui dépendent uniquement de la géométrie de chaque domaine et du mode considéré. En égalisant les pulsations structurelles et acoustiques, on obtient une condition fréquentielle qui permet au domaine structurel et au domaine acoustique d'entrer en couplage :

$$\gamma_S\tilde{L}_A = F_A\gamma_A\tilde{L}_S^2. \quad (4.10)$$

Cette relation permet de définir un rapport fréquentiel réduit $\hat{F}_A = F_A\tilde{L}_S^2/\tilde{L}_A\gamma_A/\gamma_S$. Ce nombre fréquentiel réduit permet d'étudier l'interaction entre un mode acoustique et un mode structurel à une échelle bien définie. En effet, les fréquences naturelles individuelles des deux modes se croisent lorsque $\hat{F}_A = 1$. Ainsi, l'étude du couplage de n'importe quel couple de modes se fait autour de cette valeur.

Le paramètre $\hat{F}_A$ est proportionnel à trois paramètres adimensionnels, chacun ayant une signification différente. F_A est le rapport entre les fréquences acoustiques et structurelles. Ce nombre représente le rapport entre les caractéristiques temporelles des deux domaines, obtenu par la comparaison des rigidités et des inerties des deux milieux. $\eta = \tilde{L}_S^2/\tilde{L}_A$ correspond aux rapports entre les tailles caractéristiques des deux milieux vis à vis du comportement

vibratoire. $\gamma = \gamma_A/\gamma_S$ est le rapport entre les modes propres résultant des caractéristiques géométriques adimensionnelles des deux milieux. Il quantifie également les modes considérés dans l'étude du couplage. Ainsi, le paramètre $\hat{\mathbf{F}}_A$ permet de prendre en compte ces différentes influences dans l'analyse de l'interaction entre les modes acoustiques et structurels.

4.1.4 Considérations énergétiques

Une fois les équations de couplage adimensionnées et les solutions du problème disponibles, il devient essentiel de les interpréter. Étant donné que les solutions sont réparties sur deux domaines distincts et ne sont pas exprimées dans les mêmes dimensions, il est nécessaire de les rapporter à un espace doté de dimensions équivalentes. L'utilisation de la dimension énergétique s'avère être un outil physique puissant pour comparer des variables provenant de domaines différents, car toute solution d'un problème physique peut être transposée dans cet espace énergétique. Dans cette perspective, la méthode de calcul des contributions énergétiques des composantes structurelles et acoustiques est examinée, et permet d'interpréter les solutions obtenues.

Les composantes énergétiques sont d'abord définies de manière dimensionnelle, puis elles sont adimensionnées pour permettre une interprétation directe à partir des solutions adimensionnelles. La densité énergétique acoustique se décompose en une énergie potentielle, associée à la compressibilité du fluide, et une énergie cinétique, liée au mouvement des particules fluides. Il est important de noter que cette énergie ne représente pas l'énergie totale du fluide, mais plutôt l'énergie vibratoire acoustique, qui ne tient pas compte de l'énergie de l'écoulement moyen.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_A &= \varepsilon_A^p + \varepsilon_A^c, \\
 &= \frac{1}{2}\chi p_A^2 + \frac{1}{2}\rho_A v_A^2, \\
 &= \frac{1}{2}\frac{\rho_A}{c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\rho_A \|\nabla\phi\|^2, \\
 \tilde{\varepsilon}_A &= \frac{1}{2}\mathcal{M}_A \frac{k_{0,A}^2}{F_A^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{M}_A \|\tilde{\nabla}\phi\|^2,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

où χ est la compressibilité du fluide, p_A sa pression acoustique, v_A sa vitesse acoustique et $\tilde{\varepsilon}_A$ la densité énergétique adimensionnelle définie par : $\tilde{\varepsilon}_A = \varepsilon_A/\rho_s \ell^2 f_{0,S}^2$.

Le comportement vibratoire d'une cavité acoustique est déterminé par son énergie potentielle de compressibilité. Lorsque cette énergie est élevée, la cavité vibre comme un ressort. En revanche, si cette énergie est faible par rapport à l'énergie cinétique, la cavité se comporte plutôt comme une masse entraînée par un système externe, perdant ainsi ses caractéristiques naturelles telles que sa fréquence de vibration propre. L'observation de cette quantité permet

de déterminer si le mode peut être considéré comme compressible ou incompressible.

La même procédure est suivie pour la densité énergétique de la paroi structurale :

$$\begin{aligned}\varepsilon_S &= \varepsilon_S^p + \varepsilon_S^c, \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{e} (\nabla^2 u)^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2, \\ \tilde{\varepsilon}_S &= \frac{1}{2} k_{0,s}^4 (\nabla^2 \mathbf{u})^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Ensuite, il convient de calculer l'énergie surfacique échangée entre le domaine fluide et le domaine structurel au cours des vibrations. L'énergie ε_{ex} fournie par le fluide à la structure est transmise par le biais des forces de pression et est calculée en multipliant le déplacement de la structure par la pression exercée par le fluide sur la surface de la paroi structurale :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ex} &= p_A u, \\ &= \rho_A \dot{\phi} u, \\ \tilde{\varepsilon}_{ex} &= \mathcal{M}_A \dot{\phi} \mathbf{u},\end{aligned}\tag{4.13}$$

où $\tilde{\varepsilon}_{ex}$ représente la puissance adimensionnelle échangée par le fluide à la structure, exprimée comme $\tilde{\varepsilon}_{ex} = \varepsilon_{ex} / \rho_S \ell^2 f_{0,S}^2$.

4.2 Modèle de la cavité unidimensionnelle

4.2.1 Description du modèle longitudinal

Afin d'illustrer, d'expliquer et de comparer les différents modèles d'analyse de l'interaction acoustique-structure, un modèle longitudinal est présenté. Selon les travaux de recherche de Ginsberg (2010), le modèle de cavité unidimensionnelle permet de tirer des conclusions sur l'influence de la structure sur les modes acoustiques. Comme évoqué dans la section de littérature 2.5.1 le modèle de Dowell souffre d'une simplification en négligeant les vitesses parallèles au déplacement à proximité de la structure vibrante.

Contrairement à l'approche de Ginsberg qui ne tient pas compte des modes de vibrations surfaciques, le modèle de cavité unidimensionnelle est étendu au cas tridimensionnel en considérant la surface perpendiculaire à la dimension de la cavité unidimensionnelle. Ce modèle permet de tirer des conclusions sur l'influence de la géométrie, c'est-à-dire l'impact du rapport entre la taille de la surface et la profondeur de la cavité sur les résultats obtenus. Cette analyse permet notamment d'évaluer la qualité des solutions issues des différentes méthodes de couplage acoustique-structure.

Une cavité tridimensionnelle est prise en considération, étant délimitée par une surface Σ de taille caractéristique δ (diamètre dans le cas d'un disque) perpendiculaire à un axe de longueur ℓ défini par la variable z . La forme de la surface peut varier, qu'il s'agisse d'une forme rectangulaire ou circulaire. On suppose que le mode de vibration acoustique naturel sur une telle surface est connu. Par exemple, si la surface est un disque, les modes correspondants sont des fonctions de Bessel de première espèce.

La structure environnante est considérée comme infiniment rigide, à l'exception de la surface en $z = 0$ qui est modélisée comme une plaque souple. Les modes de vibration de cette plaque sont supposés connus, et dans ce modèle, seul un mode est pris en compte. Sa forme est notée $u(\sigma)$, où σ est la variable spatiale indiquant sa position sur la surface Σ , et sa pulsation dans le vide est notée ω_S .

Le potentiel de vitesse $\phi(\sigma, z)$ est utilisé pour décrire la cavité acoustique, où σ représente un point de la surface S . En raison de l'orthogonalité entre la surface Σ et l'axe z , les modes de vibration acoustique peuvent être séparés en un mode surfacique ϕ_S (avec une pulsation adimensionnelle $\tilde{\omega}_\Sigma$) et un mode unidimensionnel ϕ_z qui est décrit le long de l'axe z :

$$\phi = x_\phi(t)\phi_\Sigma(\sigma)\phi_z(z). \quad (4.14)$$

L'ensemble du système est représenté dans la figure 4.1. Les équations adimensionnelles 4.3 vérifiées par l'interaction entre la cavité acoustique et le mode structurel peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\sigma) + \frac{1}{\tilde{k}_{0,S}^4} \nabla^4 u(\sigma) &= \mathcal{M}_A / \tilde{h} \phi_z(0) \phi_\Sigma(\sigma) \dot{x}_\phi, \\ \frac{1}{F_A^2} \ddot{\phi} - \frac{1}{\tilde{k}_{0,A}^2} \nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi(\sigma, z=0) &= \dot{u}(\sigma), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi = 0 \text{ sur toutes autres parois.} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En notant $x_u(t)$ la contribution et $\tilde{u}$ la forme normalisée de u , tels que $\int_\Sigma \tilde{u}^2 = 1$ représente l'amplitude de vibration du mode structurel, et en supposant que ϕ_Σ est aussi normalisée.

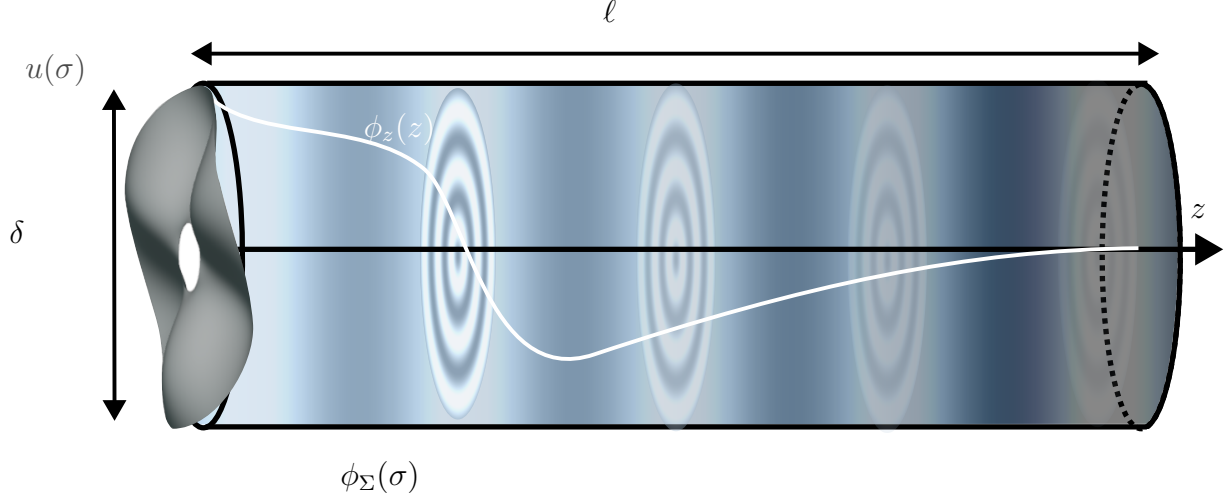


FIGURE 4.1 schéma du modèle unidimensionnel

En multipliant les équations par les fonctions tests u_Σ et ϕ_Σ sur les surfaces Σ :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_u + \tilde{\omega}_S^2 x_u &= \mathcal{M}_A / \tilde{h} \phi_z(0) \dot{x}_\phi \underbrace{\int_\Sigma \tilde{u} \tilde{\phi}_\Sigma}_{\Gamma}, \\
 \frac{1}{F_A^2} \phi_z \ddot{x}_\phi + (\tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 \phi_z - \frac{1}{k_{0,A}^2} \phi_z'') x_\phi &= 0, \\
 \phi_z'(0) &= \dot{x}_u \int_\Sigma \tilde{u} \tilde{\phi}_S \\
 \phi_z'(\tilde{\ell} = \ell/\delta) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\tilde{\omega}_S$ représente le rapport entre la pulsation structurale et la pulsation fondamentale structurale $\tilde{k}_{0,S}^2$. De même, $\tilde{\omega}_{A,\Sigma}$ correspond au rapport entre la pulsation acoustique surfacique et la pulsation fondamentale acoustique adimensionnelle $\tilde{k}_{0,a}$ (ces rapports permettent de raisonner sur le rapport réduit des fréquences $\tilde{F}_A$ défini dans 4.1.3)

Ainsi, en recherchant ϕ_z sous la forme de la fonction hyperbolique $\phi_z(z) = \cosh(\tilde{\omega}_z z) + \alpha_z \sinh(\tilde{\omega}_z z)$, et en supposant que $x_u, x_\phi \propto \exp(i\omega t)$, le système peut être réécrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 x_u + \tilde{\omega}_S^2 x_u &= j\omega \mathcal{M}_A / \tilde{h} x_\phi \Gamma, \\
 -\omega^2 \frac{1}{F_A^2} x_\phi + (\tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 - \tilde{\omega}_z^2) x_\phi &= 0, \\
 -\tanh(\tilde{\omega}_z \ell) \tilde{\omega}_z x_\phi &= j\omega x_u \Gamma,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

avec $\tilde{\omega}_z$ le ratio $\omega_z / \tilde{k}_{0,A}$.

4.2.2 Résolution du modèle

Finalement, la solution de ce problème est donnée par le vecteur $\{X\} = [x_u, x_\phi]$, ainsi que $\tilde{\omega}_z$ qui est un paramètre déterminant l'évolution de l'onde acoustique le long de l'axe des z . L'ensemble de ces inconnues satisfait le problème matriciel suivant :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_A^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{X\} + j\omega \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_A/\tilde{h}\Gamma \\ 0 & 0 \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix} \{X\} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 - \tilde{\omega}_z^2 \\ 0 & \tanh(\tilde{\omega}_z \tilde{\ell})\tilde{\omega}_z \end{bmatrix} \{X\} = 0. \quad (4.18)$$

La deuxième ligne correspond à la relation de dispersion, elle peut être éliminée en exprimant $\tilde{\omega}_z$ en termes de ω et $\tilde{\omega}_{A,\Sigma}$:

$$\tilde{\omega}_z(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 - \omega^2/F_A^2} & \text{si } \omega < \tilde{\omega}_{A,\Sigma}F_A \\ j\sqrt{\omega^2/F_A^2 - \tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2} & \text{si } \omega > \tilde{\omega}_{A,\Sigma}F_A \end{cases}. \quad (4.19)$$

Lorsque la valeur est imaginaire ou nulle, cela indique que la fonction ϕ_z se comporte comme une fonction harmonique, soit en cosinus, soit en sinus. Dans ce cas, l'énergie potentielle de compressibilité générée par les vibrations longitudinales est positive, car $\tilde{\omega}_z^2 \geq 0$. Cela signifie que cette dimension renforce le comportement vibratoire acoustique de l'interaction.

En revanche, lorsque la valeur est réelle, cela suggère que ϕ_z a un comportement hyperbolique, et l'énergie potentielle générée par les vibrations longitudinales est négative. Ainsi, cette dimension affecte le comportement de la cavité en réduisant ses qualités de compressibilité.

Ainsi, en définissant la fonction $f(\omega) = \tanh(\tilde{\ell}\tilde{\omega}_z(\omega))\tilde{\omega}_z(\omega)$, alors :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{X\} + j\omega \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_A/\tilde{h}\Gamma \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix} \{X\} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S^2 & 0 \\ 0 & f(\omega) \end{bmatrix} \{X\} = 0. \quad (4.20)$$

Le déterminant d'une telle matrice permet donc de déterminer les valeurs propres ω_n du problème couplé :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\omega}_S^2 - \omega^2 & -j\omega\mathcal{M}_A/\tilde{h}\Gamma \\ j\omega\Gamma & f(\omega) \end{vmatrix} = (\tilde{\omega}_S^2 - \omega^2)f(\omega) - \omega^2\mathcal{M}_A\Gamma^2 = 0. \quad (4.21)$$

La technique des différences finies le long de l'axe z est employée pour obtenir une solution pour l'ensemble des modes, comme expliqué en annexe B. Cette approche permet d'obtenir

directement les premiers modes, contrairement à une résolution numérique de l'équation 4.21, où seule une solution proche de la solution de départ peut être trouvée (par exemple : méthode de Newton). Cela rend difficile l'obtention exhaustive de tous les modes.

Les valeurs propres obtenues ω_n sont quantifiées, et les modes propres correspondent à un mélange entre un mode acoustique et un mode structurel. L'étude paramétrique du système en fonction du ratio fréquentiel entre l'acoustique et la structure F_A permet de mettre en évidence ce qui se produit lorsque les fréquences acoustiques naturelles se rapprochent de la fréquence naturelle de la structure dans le vide. La Figure 4.2 représente l'évolution des valeurs propres en fonction de F_A , en (a) est tracé l'évolution de $\tilde{\omega}_z$ et en (b) est tracé l'évolution de $\tilde{\omega}_n$.

La figure (a), illustre comment les valeurs propres ω_n sont déviées en cascade en passant par la valeur propre structurelle $\tilde{\omega}_S = 1$. En effet, les valeurs propres diminuent chaque fois qu'elle passe par cette valeur : pour chaque valeur propre ω_n , il existe une valeur de $F_{A,n}$ où la pente est minimale, correspondant à l'endroit précis où la structure commence à contribuer au mode couplé, pour $F_A < F_{A,n}$ le mode acoustique n n'est pas couplé avec la structure, et au-delà de cette valeur le mode acoustique est couplé, son énergie potentielle de compressibilité diminue pour laisser place à de l'énergie mécanique. De plus la figure de "veering" en cascade signifie que l'énergie structurelle est transmise d'un mode après l'autre.

La figure (b) illustre comment les pulsations propres le long de l'axe z , $\omega_{z,n}^2 = \omega_{A,\Sigma}^2 - \omega_n^2/F_A^2$, subissent un saut négatif à chaque fois qu'un mode ω_n approche la pulsation structurelle dans le vide : chacun des modes de vibration prend exactement le comportement vibratoire du mode inférieur n , la diminution d'énergie est donc quantifiée. Cela modifie le comportement orthogonal de la cavité au contact de la paroi structurelle vibrante : l'énergie potentielle de compressibilité longitudinale diminue. En particulier, pour le mode ayant la plus basse fréquence ω_n , $\tilde{\omega}_{z,0}^2 < 0$, ce qui entraîne un changement du comportement de la cavité d'un comportement harmonique à un comportement hyperbolique : le mode de vibration acoustique longitudinal est uniquement entraîné par la structure.

4.2.3 Étude géométrique

La question est maintenant de comprendre comment la géométrie d'une telle cavité a une influence sur le couplage des modes globaux du système. Analysons le comportement du couplage des modes vis-à-vis du rapport $\tilde{\ell} = \ell/\delta$.

La Figure 4.3 est constituée de trois sous-figures, chacune montrant l'évolution des pulsations propres ω_n en fonction de F_A pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$. Cela permet d'illustrer le

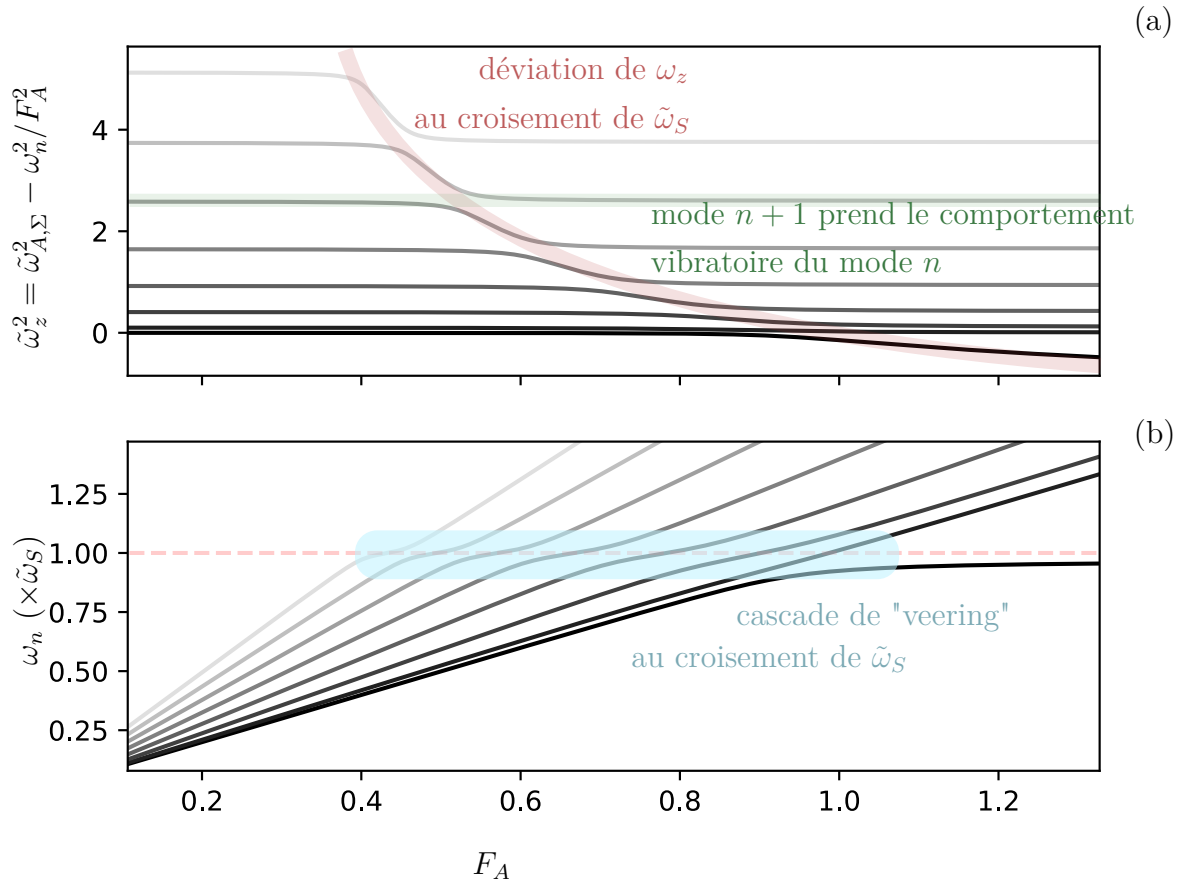


FIGURE 4.2 Variation des valeurs propres en fonction de F_A ; (a) variations de $\tilde{\omega}_z^2$; (b) variations de ω_n (dégradé : noir pour la mode 0 à gris clair pour le mode 7).

comportement du système vis-à-vis de la géométrie.

La figure illustre comment le mode structurel change avec l'augmentation de $\tilde{\ell}$. Plus $\tilde{\ell}$ est grand, plus les pulsations propres acoustiques selon z sont faibles par rapport à selon Σ . Les valeurs propres selon $\tilde{\omega}_z$ deviennent continuellement réparties entre 0 et l'infini à mesure que $\tilde{\ell}$ tend vers l'infini et il en va donc de même pour $\omega_n = \sqrt{\tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 + \tilde{\omega}_{n,z}^2}$ qui évolue aussi continuellement sur $[\tilde{\omega}_{A,\Sigma}, +\infty[$ (graphique (c)). Si $\tilde{\omega}_{A,\Sigma} F_A \leq \tilde{\omega}_S$, dans l'espace des modes propres couplés, une zone proche de $\tilde{\omega}_S$ sera déformée en raison du couplage avec la structure. Ainsi le région d'écartement des modes ("veering region") est répartie de manière continue pour toute valeur de $(F_A \leq \tilde{\omega}_S/\tilde{\omega}_{A,\Sigma})$

Pour une analyse plus approfondie, une formulation continue du problème est nécessaire, mais elle n'est pas traitée ici car nous nous concentrons sur les systèmes avec une petite dimension orthogonale $\tilde{\ell} \leq 1$.

Le système, pour une valeur intermédiaire $\tilde{\ell} = 10$, présente un comportement de cascade de couplage. En réduisant suffisamment $\tilde{\ell}$ de manière à obtenir $\tilde{\ell} \leq 1$, l'éventail de valeurs propres illustré sur le graphique (c) se referme pour ressembler à celui du graphique (a). Cela donne lieu à une distinction notable entre les pulsations propres globales $\tilde{\omega}_n$, et plusieurs valeurs bien définies de F_A où le mode structurel croise un mode acoustique. Les segments entre ces valeurs sont des modes structurellement dominés ayant une pulsation propre équivalente à $\tilde{\omega}_S$. Dans ce scénario, pour des valeurs de F_A proches de $\tilde{\omega}_S/\tilde{\omega}_{A,\Sigma}$, une région de couplage existe entre les deux plus petites pulsations propres : la pulsation propre structurelle $\tilde{\omega}_S$ et la pulsation propre $\tilde{\omega}_{A,\Sigma}$. Plus précisément, cette région de couplage délimite la zone où le fluide peut être considéré comme incompressible, et celle où persistent des modes acoustiques dont la pulsation propre est inférieure à la pulsation structurelle.

L'analyse asymptotique de ce nombre est intéressante, car lorsque $\tilde{\omega}_z \tilde{\ell} \ll 1$, $\tanh(\omega_z \tilde{\ell}) \simeq \omega_z \tilde{\ell}$, ce qui implique que $f(\omega) = (\omega_S^2 - \omega^2/F_A^2)\tilde{\ell}$. Ainsi, le système adopte la forme d'un système avec couplage gyroscopique (modèle gyroscopique) :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_A^2} \end{bmatrix} \{X\} + j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_A/\tilde{h}\Gamma \\ -\Gamma/\tilde{\ell} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \{X\} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{A,\Sigma}^2 \end{bmatrix} \{X\} = 0. \quad (4.22)$$

Lorsque $\omega_z \tilde{\ell}$ tend vers 0, on néglige l'influence des modes le long de l'axe z . Cela signifie que les pulsations de ces modes longitudinaux sont considérablement plus élevées que celle du mode surfacique Σ , et donc qu'ils n'interfèrent pas dans le système pour des excitations plausibles.

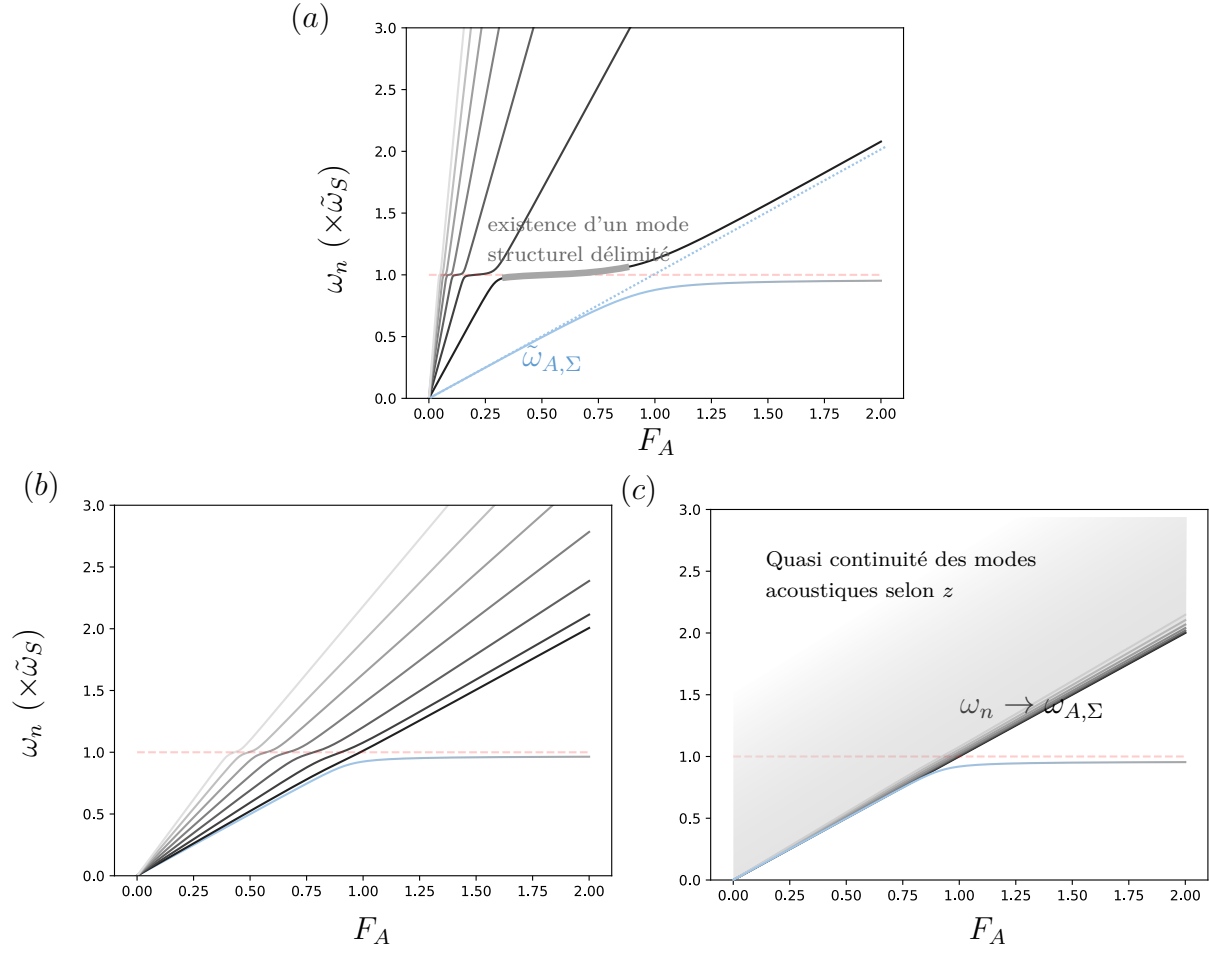


FIGURE 4.3 Évolution du couplage des 8 premières valeurs propres en fonction de $\tilde{\ell}$ (dégradé : noir pour la mode 0 à gris clair pour le mode 7) ; (a) : $\tilde{\ell} = 1$, (b) : $\tilde{\ell} = 10$, (c) : $\tilde{\ell} = 50$

Dans la suite de l'analyse, nous allons donc nous concentrer sur les deux premiers modes, caractérisés par les valeurs propres naturellement nommées ω_0 et ω_1 . Ces modes initiaux sont d'une importance significative car ils se manifestent aux fréquences les plus basses. De plus, ce sont précisément ces modes qui se croisent et subissent ensuite une déviation par rapport à F_A . Le couplage entre ces deux modes permet de déterminer la frontière entre un modèle compressible et un modèle incompressible. Notre objectif est de comparer le modèle longitudinal au modèle gyroscopique, qui ne prend en compte que le mode surfacique et le mode structurel.

La Figure 4.4 est le tracé des valeurs propres $\omega_0(F_A)$ et $\omega_1(F_A)$. Elle permet de comparer l'évolution de $\omega_0(F_A)$ des deux modèles : le modèle gyroscopique à deux degrés de liberté et le modèle longitudinal pour plusieurs valeurs du rapport $\tilde{\ell}$. Ce graphique permet de confirmer que pour de faibles valeurs de $\tilde{\ell}$, jusqu'à $\tilde{\ell} = 1$, l'étude de ce mode à l'aide de l'approximation d'un système gyroscopique à deux degrés de liberté est réaliste. Lors que $\tilde{\ell}$ devient très grand, la dynamique selon l'axe des z prend le dessus sur la dynamique de vibration surfacique.

L'analyse réalisée a démontré que lorsque $\tilde{\ell} = \ell/\delta \ll 1$, les deux premiers modes sont les principaux contributeurs dans le couplage acoustique-structure. Cette interaction peut être modélisée par une interaction gyroscopique entre le mode structural et le mode acoustique surfacique. Ainsi, seule l'information du mode surfacique doit être prise en compte, et l'interaction structurelle ainsi que l'amplitude des vitesses acoustiques parallèles au déplacement de la paroi peuvent être négligées par rapport à celles perpendiculaires.

Ainsi, il semble que la modélisation proposée par Dowell and Voss (1962) soit une bonne approximation du couplage lorsque les dimensions de la cavité acoustique perpendiculaire à la paroi sont plus petites que celles parallèles à la paroi vibrante. De plus, il est intéressant de remarquer que si l'on suppose que les formes des modes acoustiques surfaciques et structuraux demeurent inchangées après le couplage, il en découle que l'utilisation d'un système à deux degrés de liberté permet de modéliser de manière réaliste le système global de couplage acoustique-structure.

4.2.4 Étude complète du système gyroscopique à deux degrés de liberté

Étude des valeurs propres

On suppose maintenant que $\tilde{\ell} \ll 1$ et nous allons étudier en détail le couplage gyroscopique qui se produit entre le mode surfacique (ω_A, ϕ_A) de la cavité acoustique (ω_A correspond au mode surfacique $\omega_{A,\Sigma}$ de la section précédente) et le mode structurel (ω_S, u_S) dans le vide. Le mode de couplage est une solution du système 4.22. L'équation aux valeurs propres est

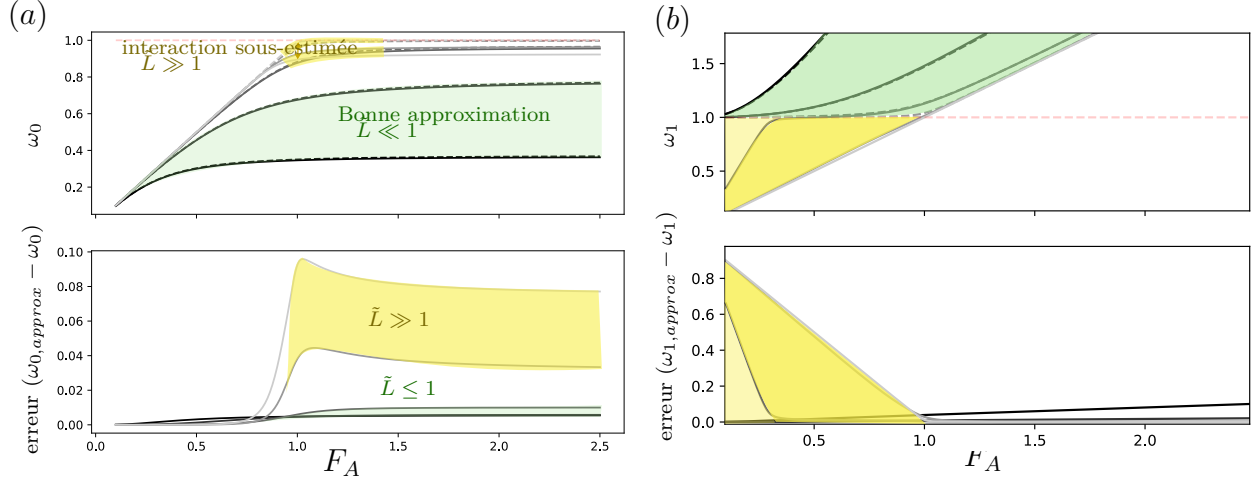


FIGURE 4.4 (a) ω_0 , (b) ω_1 en fonction de F_A . ((—) : modèle longitudinal, (- - -) : système à deux degrés de liberté); $L = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]$ en dégradé de noir à gris clair

obtenue en prenant le déterminant de la matrice :

$$(\tilde{\omega}_S^2 - \omega^2)(\tilde{\omega}_A^2 - \omega^2/F_A^2) - \omega^2 \mathcal{M}_A \Gamma^2 / (\tilde{\ell} \tilde{h}) = 0. \quad (4.23)$$

$$(\tilde{\omega}_S^2 - x)(\tilde{\omega}_A^2 - x/F_A^2) - x \mathcal{M}_A \Gamma^2 / (\tilde{\ell} \tilde{h}) = 0. \quad (4.24)$$

Cette équation met en évidence le paramètre adimensionnel d'interaction gyroscopique C_G , défini comme $C_G = \mathcal{M}_A \Gamma^2 / \tilde{\ell} \tilde{h}$.

L'avantage d'un tel système est que les pulsations propres de couplage $\omega_{0/1}$ peuvent être calculées de manière explicite :

$$\omega_{0/1}^2 = \frac{\tilde{\omega}_S^2 + (\tilde{\omega}_A^2 + C_G)F_A^2 \mp \sqrt{[\tilde{\omega}_S^2 + (\tilde{\omega}_A^2 + C_G)F_A^2]^2 - 4\tilde{\omega}_S^2 \tilde{\omega}_A^2 F_A^2}}{2}, \quad (4.25)$$

$$= \frac{\tilde{\omega}_S^2 + \tilde{\omega}_A^2(1 + \beta)F_A^2 \mp \sqrt{[\tilde{\omega}_S^2 + \tilde{\omega}_A^2(1 + \beta)F_A^2]^2 - 4\tilde{\omega}_S^2 \tilde{\omega}_A^2 F_A^2}}{2} \quad (4.26)$$

où $\beta = C_G / \tilde{\omega}_A^2$ est le facteur AVMI qui a été discuté dans la revue de littérature (Lamb, 1920). De plus il est possible d'identifier le facteur NAVMI $\hat{\beta}$ qui ne dépend que de la configuration des deux systèmes (Kwak and Kim, 1991) :

$$\beta = \Gamma^2 \mathcal{M}_A / \tilde{\ell} \tilde{h} = \hat{\beta} \mathcal{M}_A / \tilde{\ell} \tilde{h} \quad (4.27)$$

Contrairement au modèle de (Kwak and Kim, 1991) où $\ell = \infty$, $\tilde{\ell}$ intervient dans l'expression de β de la même manière que $\tilde{h}$. De plus, le facteur NAVMI β correspond exactement au facteur d'intercorrélacion spatiale entre les deux milieux.

La Figure 4.5 est un tracé de l'évolution des valeurs propres en fonction de F_A avec différentes valeurs de couplage gyroscopique β . Ce graphique met en évidence plusieurs points importants. Il révèle trois régions bien délimitées dans un système d'interaction acoustique-structure.

La première région est la région compressible, où le comportement vibratoire est initialement linéaire par rapport à F_A . Cette région se manifeste pour de faibles valeurs de F_A .

En revanche, lorsque F_A devient très élevé, la valeur propre se situe dans une région asymptotique et tend vers une valeur constante inférieure à la pulsation structurelle $\tilde{\omega}_S$. Cette pulsation plus basse correspond à la pulsation structurelle de la structure en vibration dans un fluide incompressible. C'est le phénomène de masse ajoutée, où le système se comporte comme un système purement structurel.

Entre ces deux régions, pour des valeurs de F_A où les pulsations structurelles et acoustiques sont égales, il existe une région où la valeur propre s'écarte de sa trajectoire linéaire acoustique pour atteindre sa trajectoire constante structurelle. Par la suite cette zone va s'appeler zone de transition.

La valeur de β influence considérablement les courbes. Plus β est élevé, plus la zone de couplage incompressible est étendue et moins la transition entre la région acoustique et la région structurelle est abrupte. De plus, à mesure que β augmente, la masse ajoutée incompressible augmente également.

Il est également très important de noter que la valeur asymptotique incompressible du système $\omega_{0,\infty}$, déjà décalée par rapport à la pulsation de la structure dans le vide $\tilde{\omega}_S$, constitue une borne supérieure de la pulsation du système en fonction de F_A . Ainsi, dans la zone de transition, les valeurs de la pulsation du système sont inférieures à cette pulsation asymptotique incompressible. Cela signifie que dans cette zone, le décalage fréquentiel du système couplé est encore plus marqué que dans le cas d'un fluide incompressible.

Contributions énergétiques des domaines

Afin de comprendre comment se caractérise les vibrations de chaque domaine en fonction de différentes zone, l'évolution des contributions énergétiques acoustiques et structurelles en fonction de la variable F_A est examinée, tout comme l'évolution du transfert énergétique entre ces deux domaines.

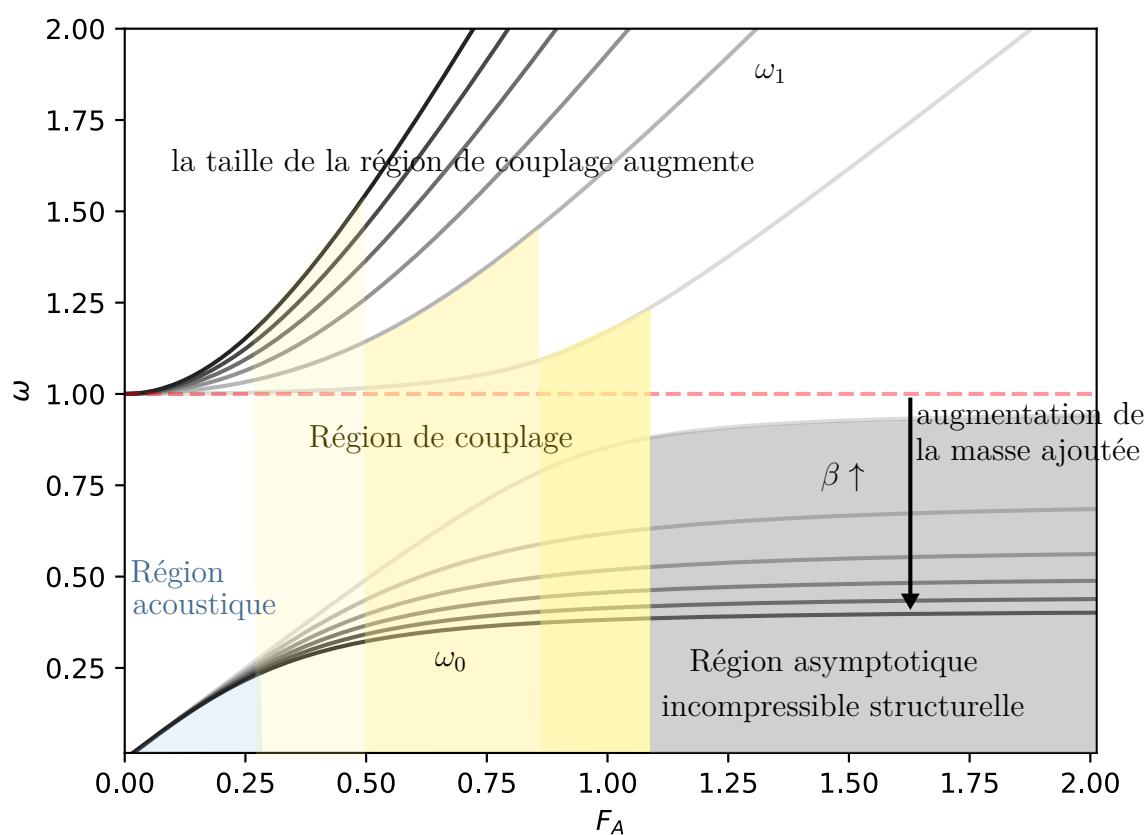


FIGURE 4.5 Évolution de ω_0 et ω_1 en fonction de F_A , dégradé du gris au noir : augmentation de C_G

Soit (ω_C, ϕ_C, u_C) le premier mode de couplage, où ϕ_C représente la forme spatiale du potentiel de vitesse de couplage et u_C désigne le déplacement spatial de couplage de la paroi structurelle. Pour évaluer ces contributions, les expressions d'énergie développées dans la section 4.1.4 sont utilisées. Ainsi, la contribution en énergie acoustique s'exprime comme suit :

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2} \mathcal{M}_A \tilde{\ell} \left(\frac{1}{F_A^2} \omega_C^2 \phi_C^2 + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_A^2 \phi_C^2 \right). \quad (4.28)$$

Cette expression fournit une information intéressante concernant l'évolution de la contribution en énergie potentielle de compressibilité. En effet, lorsque $F_A \ll 1$, la pulsation propre est égale à la pulsation propre sans prendre en compte l'influence de la structure. Ainsi, l'équation de dispersion satisfait à la relation $\omega_C^2/F_A^2 = \tilde{\omega}_A^2$. Cela implique qu'il y a autant d'énergie potentielle de compressibilité que d'énergie cinétique pour le mode couplé.

En revanche, lorsque $F_A \gg 1$, le comportement du système atteint le comportement structurel asymptotique et $\omega_C^2/F_A^2 \rightarrow 0$. Cela induit que l'énergie potentielle de compressibilité devient négligeable pour le fluide. Le fluide perd sa propriété de compressibilité et peut donc être considéré comme incompressible. La seule énergie présente dans le fluide est alors l'énergie cinétique générée par la structure.

On procède de la même manière pour exprimer la contribution énergétique de la structure.

$$\varepsilon_S = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_S^2 u_C^2 + \frac{1}{2} \omega_C^2 u_C^2. \quad (4.29)$$

Cette fois, lorsque $F_A \ll 1$, $\omega_C \ll 1$ et l'énergie potentielle de la structure est prépondérante par rapport à son énergie cinétique. En effet, lorsque $F_A \ll 1$, la structure peut être considérée comme infiniment rigide, ce qui signifie qu'elle ne se déplace pas et ne possède donc pas d'énergie cinétique, seulement une énergie interne de flexion potentielle.

En revanche, pour de très grands F_A , $\omega_C \rightarrow \tilde{\omega}_S/\sqrt{1+\beta}$, où β est le facteur AVMI défini dans la revue de littérature. Ainsi, la part d'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle de la structure est égale à $1/(2+\beta)$. Le facteur β vient donc diminuer la part d'énergie cinétique lorsque la structure se trouve dans le vide (répartition égale entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle). En effet, le facteur β tient compte du fait que l'énergie cinétique du système est répartie à la fois dans la structure et dans le fluide.

En ce qui concerne l'énergie surfacique échangée entre le fluide et le solide, elle peut être exprimée de la manière suivante :

$$\tilde{\varepsilon}_{ex} = \mathcal{M}_A \omega_C \phi_S u. \quad (4.30)$$

Dans une analyse modale, il est nécessaire de normaliser chaque quantité, car les modes sont définis à une constante près. Afin de normaliser les quantités avec des unités cohérentes, elles sont normalisées par rapport à l'énergie totale du système modal.

En intégrant ces différentes densités énergétiques sur l'ensemble des domaines, les contributions énergétiques totales s'expriment très facilement :

$$E_a = \frac{1}{2} \mathcal{M}_A (\omega_C^2 \begin{bmatrix} 0 & x_a^* \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_a^* \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ x_a \end{bmatrix}), \quad (4.31)$$

$$E_s = \frac{1}{2} \tilde{h} \left(\begin{bmatrix} x_s^* & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_s \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_C^2 \begin{bmatrix} x_s^* & 0 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_s \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (4.32)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ex} = \omega_C \tilde{h} \begin{bmatrix} x_s^* & 0 \end{bmatrix} \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ x_a \end{bmatrix} = \mathcal{M}_A \Gamma / \tilde{h} x_s^* x_a. \quad (4.33)$$

Avec ces expressions énergétiques, il est possible de calculer l'évolution à la fois des contributions énergétiques des deux domaines pour les deux types de modes et l'évolution de la puissance échangée entre la cavité acoustique et la structure. La Figure 4.6 correspond au tracé des contributions énergétiques du premier mode de couplage en fonction de F_A . En particulier, elle correspond à la superposition de 4 graphiques : le graphique (a) montre l'évolution des valeurs propres, le graphique (b) montre l'évolution de la contribution structurelle, la figure (c) montre l'évolution de l'énergie surfacique échangée et enfin, la figure (d) montre l'évolution des énergies potentielles et cinétiques du fluide, différentes courbes ont été tracées pour différentes valeurs de facteur AVMI β . Pour tracer ces courbes, afin de garder une symétrie entre les domaines acoustiques et structurels, les paramètres considérés sont : $\mathcal{M}_A = 1$, $\tilde{\ell} = 1$ et $\tilde{h} = 1$. C'est le paramètre Γ qui permet de faire varier β .

Les contributions du mode (ω_C, ϕ_C, u_C) évoluent de la manière suivante : pour $F_A \ll 1$, la structure peut être considérée comme infiniment rigide, ce qui signifie que l'énergie modale se trouve uniquement dans le domaine acoustique (figure (b)). Ensuite, lorsque F_A augmente et que le système entre dans la région de transition, la contribution structurelle commence à augmenter, pour atteindre $\varepsilon_S = 1/2$ pour $F_A = 1$ en raison de la symétrie du système prise en compte. Ensuite, cette énergie atteint une valeur asymptotique constante pour $F_A \gg 1$, lorsque la cavité acoustique peut être considérée comme incompressible.

Il semble que le comportement du système vis-à-vis de F_A évolue drastiquement suivant la valeur de β . En effet, pour $\beta = 0.01 \ll 1$, les courbes $\omega_i(F_A)$ du graphique (a) sont très proches les unes des autres, la courbe (b) de l'énergie structurelle présente un point d'inflexion

en $F_A = 1$, la courbe (c) d'énergie échangée présente un maximum au même point, et enfin, les courbes (d) des énergies cinétique et potentielle acoustique sont quasiment égales jusqu'à atteindre ce point particulier ($F_A = 1$) où elles commencent à s'éloigner. Ce comportement diffère notablement des autres courbes. Cela invite à envisager une valeur critique β_C à partir de laquelle le comportement du système change. Avant cette valeur critique, le système est dit en couplage faible, après cette valeur critique, le système est dit en couplage fort (Manconi (2017) a étudié ces deux types de couplages pour un système à 2 et N degrés de liberté afin de décrire à quelles conditions le phénomène de "veering" se manifeste ou pas).

Cette valeur de paramètre critique β_C peut s'obtenir numériquement en déterminant le zéro d'une fonction bien choisie. En effet, si on part du principe qu'au-delà du seuil de couplage, le maximum de ε_{ex} n'existe plus, c'est-à-dire que sa dérivée en ce point est non nulle et que la fonction devient croissante. En supposant que le maximum se situe aux alentours de 1, on peut définir la fonction :

$$g(\beta) = (\varepsilon_{ex}(1) - \varepsilon_{ex}(1 - \delta))(\varepsilon_{ex}(1) - \varepsilon_{ex}(1 + \delta)), \quad (4.34)$$

où $\delta \ll 1$. Cette fonction est positive tant qu'il existe un maximum proche de 1 et devient négative lorsqu'il n'existe plus. La valeur de β_C peut ainsi être déterminée numériquement en trouvant le zéro de cette fonction. La fonction est tracée sur la Figure 4.7. La solution numérique ainsi obtenue est :

$$\beta_C = 0.04648526077097532. \quad (4.35)$$

Les comportements notables du couplage acoustique-structure

L'un des objectifs de cette étude est d'identifier les différents comportements d'une interaction acoustique-structure. D'après les analyses précédentes, les deux paramètres adimensionnels qui semblent caractériser ce phénomène de couplage sont le rapport des fréquences entre les deux domaines et le facteur AVMI. Ainsi, l'objectif est de dresser une carte de ces paramètres où les trois zones possibles de couplage sont spécifiquement identifiées :

- La zone acoustique où le mode acoustique est complètement découplé de la structure ;
- La zone incompressible où le mode acoustique se comporte comme une masse ajoutée vis-à-vis de la structure ;
- La zone de transition où les deux domaines possèdent des caractéristiques vibratoires naturelles importantes. (énergies potentielles de vibrations importantes)

En restant sur l'approximation précédente du système à deux degrés de liberté, cette identi-

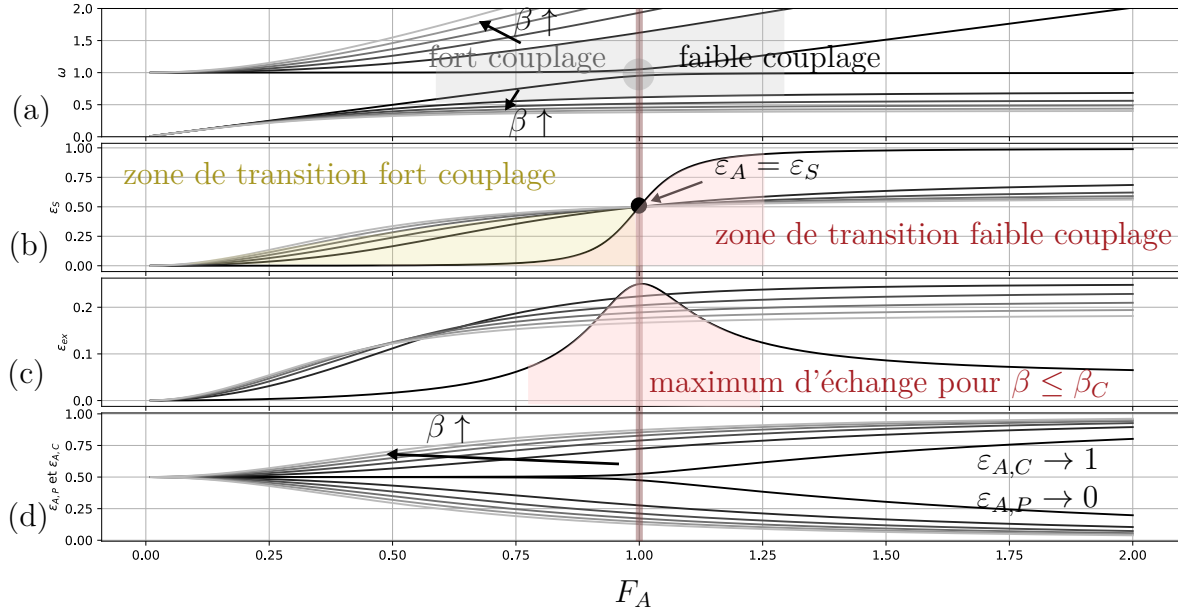


FIGURE 4.6 Figure qui illustre l'évolution des contributions énergétiques du premier mode propre ; (a) évolution des valeurs propres ω_i ; (b) évolution de l'énergie structurale ε_S ; (b) évolution de l'énergie surfacique échangée ε_{ex} ; (c) évolution de l'énergie potentielle compressible acoustique $\varepsilon_{A,P}$ et de l'énergie cinétique acoustique $\varepsilon_{A,C}$. Les courbes sont tracées selon un dégradé allant du noir au gris avec les valeurs suivantes de β : [0.01, 1, 2, 3, 4, 5]

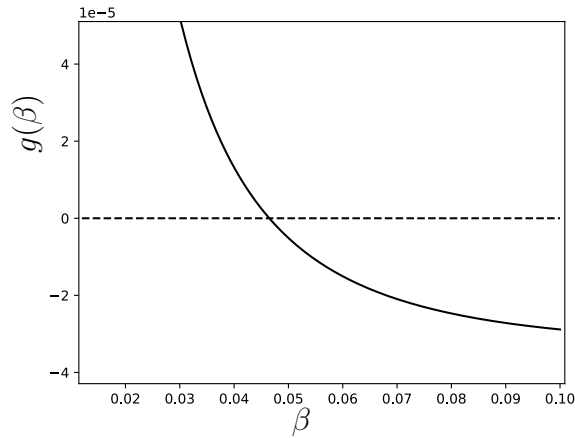


FIGURE 4.7 Evolution de la fonction g en fonction de β

fication peut être réalisée de manière analytique. L'expression des pulsations propres de couplage étant complexes, obtenir une expression analytique du maximum de puissance échangée ou de la plage de couplage est une tâche complexe. Pour simplifier ce travail analytique, on va passer par des développements asymptotiques. En effet, lorsque $F_A \rightarrow 0$ et $F_A \rightarrow +\infty$, il semble que les valeurs des pulsations propres possèdent des asymptotes (Figure 4.5). Ainsi, une stratégie consiste à calculer à partir de quelle valeur de F_A la courbe de la valeur propre de couplage ω_C est déviée de son asymptote. Cette analyse permet d'obtenir l'équation des asymptotes et de définir les trois zones de couplage : la zone acoustique, la zone de mélange au couplage maximal et la zone incompressible.

Ici, nous allons nous concentrer sur l'expression de la première pulsation propre. Commençons par effectuer son développement asymptotique lorsque $F_A \gg 1$:

$$\omega_C^2 = \frac{\tilde{\omega}_S^2 + \tilde{\omega}_A^2(1 + \beta)F_A^2 - \sqrt{[\tilde{\omega}_S^2 + \tilde{\omega}_A^2(1 + \beta)F_A^2]^2 - 4\tilde{\omega}_S^2\tilde{\omega}_A^2F_A^2}}{2}, \quad (4.36)$$

$$\underset{F_A \gg 1}{=} \frac{\tilde{\omega}_S^2}{1 + \beta} - \left(\frac{2}{(1 + \beta)^2} - \frac{1}{(1 + \beta)^3} \right) \frac{\tilde{\omega}_S^4}{\tilde{\omega}_A^2 F_A^2}.$$

Lorsque F_A est très grand, la pulsation naturelle converge vers la pulsation structurelle avec masse ajoutée : $\tilde{\omega}_{S,\infty} = \tilde{\omega}_S / \sqrt{1 + \beta}$. Afin de se fixer une borne supérieure sur F_A à partir de laquelle on considère que la valeur propre a atteint sa valeur asymptotique, on souhaite vérifier :

$$|\omega_C^2 - \tilde{\omega}_{S,\infty}^2| \geq \delta_0^2 \tilde{\omega}_{S,\infty}^2, \quad (4.37)$$

où δ_0 correspond à l'écart que l'on se donne entre la valeur asymptotique et la valeur réelle. En utilisant le développement asymptotique, on obtient l'expression de la borne supérieure pour F_A :

$$F_A \geq \sqrt{\frac{2}{1 + \beta} - \frac{1}{(1 + \beta)^2} \frac{\tilde{\omega}_S}{\tilde{\omega}_A}} / \delta_0 = F_{A,supp}(\beta, \delta_0). \quad (4.38)$$

Puis on procède de la même manière pour déterminer une borne inférieure sur F_A pour que le comportement du système tende vers un comportement asymptotique acoustique. On commence par déterminer un développement asymptotique en 0 :

$$\begin{aligned} \omega_C^2 &\underset{F_A \ll 1}{=} \tilde{\omega}_A^2 F_A^2 - C_G \tilde{\omega}_A^2 / \tilde{\omega}_S^2 F_A^4, \\ &= \tilde{\omega}_A^2 F_A^2 - \beta \frac{\tilde{\omega}_A^4}{\tilde{\omega}_S^2} F_A^4. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Cette fois-ci, cette expression indique que l'asymptote en 0 correspond au mode acoustique $\tilde{\omega}_A F_A$. De même, on cherche à quantifier la distorsion de l'asymptote due au phénomène

d'écartement :

$$\left| \omega_C^2 - \tilde{\omega}_A^2 F_A^2 \right| \geq \delta_0 \tilde{\omega}_A^2 F_A^2. \quad (4.40)$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la borne inférieure sur F_A :

$$F_A \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\tilde{\omega}_S}{\tilde{\omega}_A} \delta_0 = F_{A,inf}(\beta, \delta_0). \quad (4.41)$$

Ainsi, pour δ_0 suffisamment petit, on obtient deux bornes qui permettent de définir les trois comportements. En dessous de la borne inférieure, le système se trouve dans la zone acoustique. Au-dessus de la borne supérieure, le système agit comme une structure incompressible. Entre les deux bornes, le système se trouve dans la zone de transition.

Ces plages de comportement sont illustrées sur la Figure 4.8. On remarque que plus le paramètre β , est élevé, plus le système entre en couplage pour de petites valeurs de F_A , laissant ainsi une très grande plage de valeurs incompressibles. Elles ne prennent pas en considération le cas du faible couplage. Il est possible d'obtenir la plage de comportement de transition de manière numérique en considérant des conditions énergétiques plutôt que fréquentielles (sur les valeurs propres). On peut considérer que la transition se manifeste lorsque l'énergie structurelle devient non négligeable devant l'énergie totale, ce qui peut être défini avec la condition $\varepsilon_S > \delta_1$. Cette transition se termine lorsque l'énergie structurelle atteint une grande partie de la contribution structurelle asymptotique ($\varepsilon_{S,\infty}$), ce qui peut se matérialiser avec la condition : $\varepsilon_S > \varepsilon_{S,\infty} - \delta_2$. Les valeurs δ_1 et δ_2 sont prises suffisamment faibles.

Une analyse numérique de ce type est réalisée et aboutit à la Figure 4.9. Cette figure regroupe les courbes (a) qui représentent le tracé des deux bornes définissant la zone de transition dans l'espace (β, F_A) à l'échelle linéaire, de même pour les courbes (d) à l'échelle log-log. Les trois zones de comportement sont discernables sur ces deux figures. L'échelle log-log permet de visualiser un changement de comportement marqué lorsque les courbes dépassent β_C . Avant de franchir ce seuil, les deux limites s'écartent de manière linéaire en échelle log-log, puis la limite supérieure atteint un maximum, suivi d'une décroissance des deux limites au même rythme.

De plus, il est important de remarquer que la fréquence adimensionnelle $1/\sqrt{1+\beta}$ se trouve à l'intérieur de la zone de transition (entre la limite inférieure et supérieure).

Analyse harmonique

Comme discuté précédemment, l'un des phénomènes notables dans la zone de couplage est l'échange énergétique qui peut se produire entre les deux domaines.

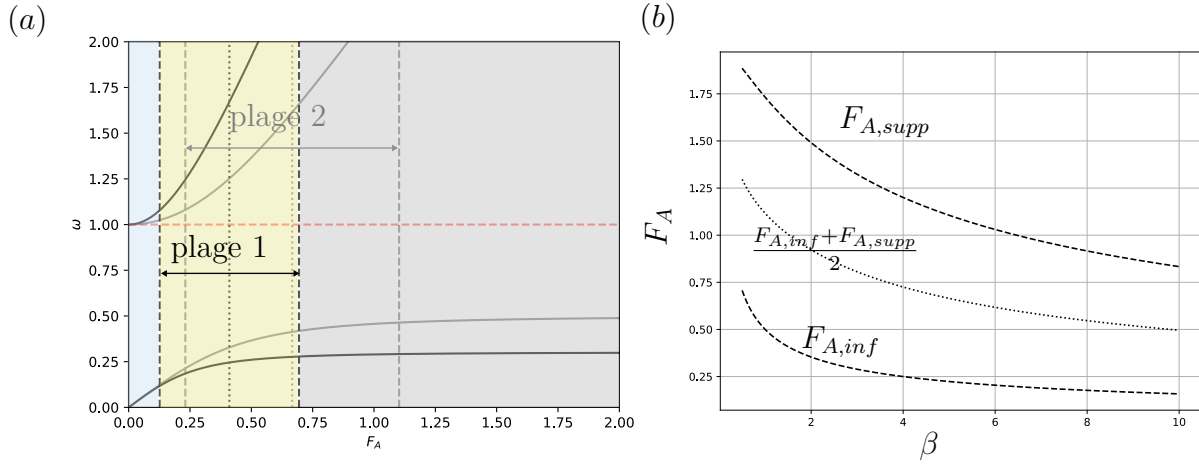


FIGURE 4.8 Tracé des plages de comportement ; (a) représente les bornes de comportements formant les plages de transition 1 et 2, la plage de couplage 1 correspondant à $\beta = 10$, la plage 2 correspondant à $\beta = 3$; (b) représente l'évolution des bornes en fonction du paramètre de couplage β

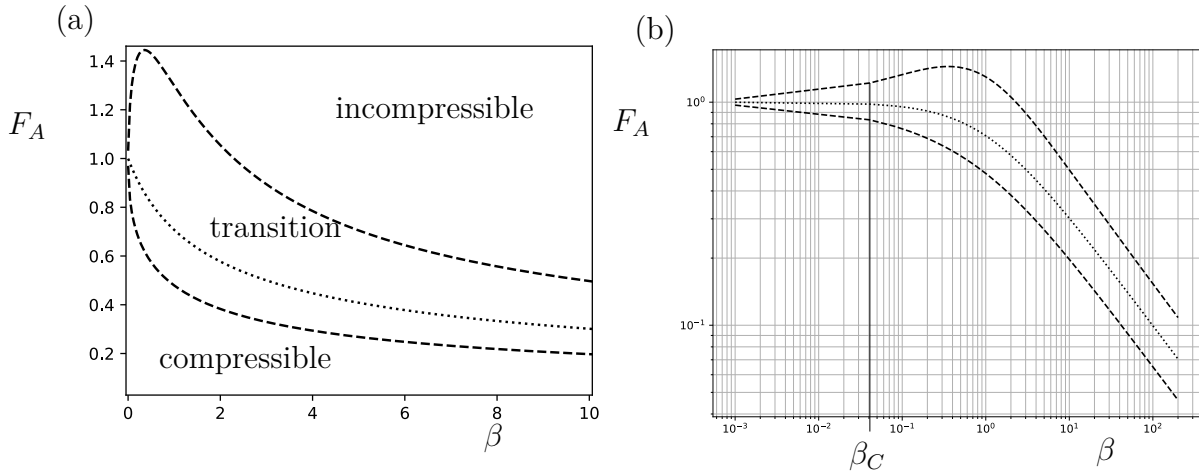


FIGURE 4.9 Figures représentant les plages de comportement énergétique du système ; (a) représente les zones de comportement en échelle linéaire ; (b) représente les zones de comportement en échelle log-log ; ((- - -)) : les bornes de la plage de transition ; (· · ·) : la fréquence structurale incompressible $1/\sqrt{1+\beta}$

Il est intéressant d'examiner ce qui se passe en pratique lorsque une excitation extérieure est appliquée à l'un des domaines et quelle est la réponse de l'autre domaine à cette excitation. Prenons le cas du domaine acoustique qui est excité par un écoulement voisin. Dans le contexte des turbines hydrauliques, l'interaction rotor-stator (RSI) correspond à un écoulement qui génère des fluctuations de pression acoustique se propageant dans le reste de la cavité acoustique, mais qui peut également être restitué à la structure. Ainsi, considérons une excitation acoustique extérieure variable harmoniquement dans le système.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \{\ddot{X}\} + (\mathbf{G} + \mathbf{C}) \{\dot{X}\} + \mathbf{K} \{X\} &= \{F\} \exp(j\omega t), \\
\left(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega(G + \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_a \end{bmatrix}) + \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_s \\ f_a \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S^2 - \omega^2 + j\omega c_s & j\omega\Gamma/\tilde{h} \\ -j\omega\Gamma/\tilde{\ell} & \tilde{\omega}_A^2 - \omega^2/F_A^2 + j\omega c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_s \\ f_a \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S^2 - \omega^2 + j\omega c_s & j\omega\Gamma/\tilde{h} \\ -j\omega\Gamma/\tilde{\ell} & \tilde{\omega}_A^2 - \omega^2/F_A^2 + j\omega c_a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_s \\ f_a \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{\det(\omega)} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_A^2 - \omega^2/F_A^2 + j\omega c_a & -j\omega\mathcal{M}_A\Gamma/\tilde{h} \\ j\omega\Gamma/\tilde{\ell} & \tilde{\omega}_S^2 - \omega^2 + j\omega c_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(\omega)} \begin{bmatrix} f_s \\ f_a \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

où C est la matrice d'amortissement du système considérée diagonale dans la base du mode structural et du mode acoustique, $\det(\omega) = (\tilde{\omega}_S^2 - \omega^2 + j\omega c_s)(\tilde{\omega}_A^2 - \omega^2/F_A^2 + j\omega c_a) - \tilde{\omega}_A^2\beta\omega^2$, et $\mathbf{H}(\omega)$ est la fonction de transfert du système.

Le transfert énergétique d'une excitation acoustique vers le domaine structural est caractérisé par le coefficient $H_{1,2}(\omega)$ de la fonction de transfert matricielle. Sur la Figure 4.10, ce coefficient est tracé (en valeur absolue et en phase) en fonction de ω pour différentes valeurs de F_A . Pour ce tracé, un amortissement équivalent a été considéré à la fois dans le domaine acoustique et dans le domaine structural : $c_a = c_s = 0.1$. La figure présente les différentes zones : la zone de comportement acoustique, la zone de comportement structural (incompressible) et la zone de transition.

La zone acoustique se caractérise par un pic de résonance très étroit qui se situe quasiment sur la pulsation naturelle acoustique : $\omega = F_A\tilde{\omega}_a$, avec une phase qui varie rapidement. En revanche, dans la zone de comportement structural pour des valeurs de F_A , les pics de résonance sont beaucoup plus larges que dans la région acoustique, la phase diminue plus lentement, et l'intensité du pic de résonance est modérée par rapport aux autres pics

de résonance. Au milieu, dans la zone de transition, pour des valeurs de F_A autour de 1, l'amplitude des résonances atteint une valeur maximale, ce qui reflète le fait que l'énergie transférée entre les deux domaines est maximale dans cette zone. De plus, la largeur des pics, bien qu'elle soit inférieure à celle des pics dans la zone structurelle, reste nettement plus élevée que dans la zone acoustique. De plus, le décalage des pics par rapport à la pulsation structurelle dans le vide $\tilde{\omega}_S = 1$ est plus important dans la zone de couplage car la pulsation dans cette zone est attirée par la pulsation acoustique $F_A \tilde{\omega}_a \leq \tilde{\omega}_S$.

La différence de largeur des pics entre la zone incompressible structurelle et la zone compressible acoustique peut s'expliquer par l'échange d'énergie entre les deux milieux. Dans le cas incompressible, l'énergie échangée est élevée, tandis que dans le cas compressible, elle est presque nulle. Ainsi, lorsque l'excitation acoustique externe génère un flux d'énergie vers la structure, le fluide perçoit cette transmission comme une perte d'énergie, entraînant un amortissement supplémentaire. Cela se traduit par des pics plus larges. La largeur des pics est donc liée à la quantité d'énergie échangée entre les deux milieux.

Dans la zone de transition, l'amplitude du transfert est maximale. Cela s'interprète par le fait que l'excitation acoustique externe peut à la fois s'intensifier dans le domaine acoustique en s'accumulant sous forme d'énergie potentielle vibratoire (énergie potentielle non nulle) et également transmettre cette énergie dans la zone incompressible structurelle ($\varepsilon_{ex} \neq 0$, voir Figure 4.6).

Intégration de la rotation dans le système

Dans cette section, nous considérons que le mode structurel correspond à un mode de disque en rotation dans une cavité annulaire ou cylindrique.

L'utilité d'utiliser un tel modèle réduit à deux degrés de liberté réside dans la possibilité d'étudier analytiquement et de comprendre des phénomènes qui pourraient sembler complexes à première vue. Cela permet d'étudier l'effet de la rotation du disque sur le mode couplé d'une interaction acoustique-structure.

Lorsqu'un disque est mis en rotation à une vitesse Ω_S dans un fluide, il entraîne le fluide environnant avec un champ de vitesse V . Une approximation courante pour modéliser l'écoulement induit par l'entraînement du fluide est de considérer que le fluide tourne comme un corps rigide à une vitesse de rotation Ω_A inférieure à Ω_S . Selon le cas d'utilisation, on peut déterminer de manière empirique un coefficient d'entraînement $\kappa = \Omega_A/\Omega_S$ qui est généralement inférieur à 1 (Poncet et al., 2005).

Ainsi, la structure est en rotation par rapport au fluide à une vitesse relative $\Omega_R = \Omega_A - \Omega_S$

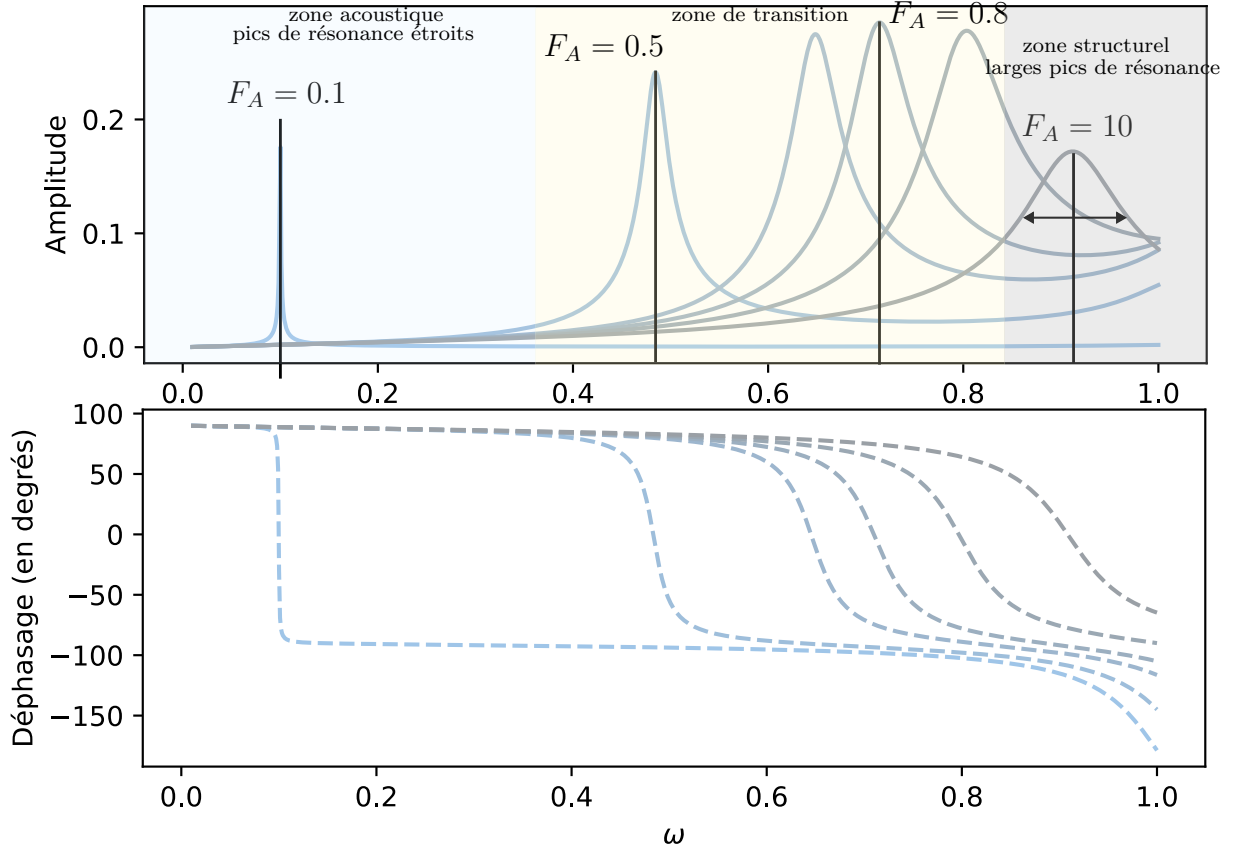


FIGURE 4.10 $|H_{1,2}|$ et sa phase en fonction de ω pour $F_A = [0.01, 0.1, 1, 10, 100]$, pour des valeurs d'amortissement $c_a = c_s = 0.1$

(ici, les vitesses de rotation sont adimensionnées par la fréquence fondamentale structurelle). Cette rotation relative entraîne une modification des équations générales du système en introduisant la nécessité de prendre en compte la dérivée particulaire dans les termes d'interaction. En reprenant les équations initiales 4.15 :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \frac{1}{\tilde{k}_{0,s}^4} \nabla^4 u &= -\mathcal{M}_A / \tilde{h} \frac{D}{Dt} \phi = -\mathcal{M}_A / \tilde{h} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_R \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \phi, \\ \frac{1}{F_A^2} \ddot{\phi} - \frac{1}{\tilde{k}_{0,a}^2} \nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi(z=0) &= \frac{D}{Dt} u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_R \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u, \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi = 0 \text{ sur toutes autres parois.} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ce système peut être formulé de manière faible en utilisant les produits scalaires surfaciques et en négligeant la variation selon z de la section 4.2 :

$$\begin{aligned} u &\in H^2(S), \phi \in H^1(S), \\ \forall \tilde{u} \in H^2(S), \int_S \nabla^2 u \nabla^2 \tilde{u} + \int_S \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \tilde{u} &= -\mathcal{M}_A / \tilde{h} \left(\int_S \frac{\partial}{\partial t} \phi \tilde{u} + \Omega_R \int_S \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \tilde{u} \right), \\ \forall \tilde{\phi} \in H^1(S), \int_S \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} + \frac{1}{C^2} \int_S \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \tilde{\phi} &= 1/\tilde{\ell} \left(\int_S \frac{\partial}{\partial t} u \tilde{\phi} + \Omega_R \int_S \frac{\partial}{\partial \theta} u \tilde{\phi} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

L'ajout de la rotation brise la symétrie angulaire et nécessite de prendre en compte, pour chaque mode de chaque domaine, le mode en $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$, où n représente le nombre de diamètres nodaux. On note u^C et u^S les modes en cosinus et sinus pour la structure, et de même pour ϕ . Ainsi, le modèle, qui était initialement à deux degrés de liberté, passe maintenant à $2 \times 2 = 4$ degrés de liberté.

Les termes proportionnels à Ω_R , forment après discrétisation, une matrice de rigidité ajoutée :

$$\mathbf{K}_R = \Omega_R \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_A / \tilde{h} A \\ -A/\tilde{\ell} & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \int_S \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^S u^S = 0 & \int_S \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^C u^S = n\Gamma \\ -n\Gamma & \int_S \frac{\partial}{\partial \theta} \phi^S u^S = 0 \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$= n\Omega_R \mathbf{\Gamma}_R. \quad (4.46)$$

Ce qui conduit au nouveau problème modal :

$$\mathbf{M} \{ \ddot{X} \} + \mathbf{L} \{ \dot{X} \} + (\mathbf{K} + n\Omega_R \mathbf{\Gamma}_R) \{ X \} = 0. \quad (4.47)$$

Et se traduit en problème aux valeurs propres :

$$(\omega^2 - \tilde{\omega}_S^2)(\omega^2/F_A^2 - \tilde{\omega}_A^2) - \tilde{\omega}_A^2\beta(\omega^2 + \Omega_R^2 n^2 \pm 2n\Omega_R\omega) = 0. \quad (4.48)$$

C'est une équation du 4e degré, et il est souvent trop complexe d'obtenir des solutions analytiques explicites. Par conséquent, nous allons commencer par simplifier cette équation en considérant le cas incompressible :

$$\begin{aligned} \omega^2(1 + \beta) + \beta(\Omega_R^2 n^2 \pm 2n\Omega_R\omega) + \tilde{\omega}_S^2 &= 0, \\ \omega^2 + \frac{\beta}{1 + \beta}(\Omega_R^2 n^2 \pm 2n\Omega_R\omega) + \frac{\tilde{\omega}_S^2}{1 + \beta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

On remarque que le terme central, qui dépend de la vitesse de rotation du rotor Ω_R , modifie l'équation et donc la solution attendue qui devrait être la pulsation structurale avec la masse ajoutée. Les solutions qui sont obtenues sont :

$$\omega = \frac{\sqrt{(1 + \beta)\tilde{\omega}_S^2 - n^2\Omega_R^2\beta \pm n\beta\Omega_R}}{1 + \beta}. \quad (4.50)$$

Ce sont exactement les solutions obtenues par Louyot et al. (2020) pour leur étude du phénomène de "mode-split".

Maintenant, nous allons observer comment la prise en compte de la compressibilité modifie ces solutions en résolvant numériquement le système général 4.47 en utilisant la technique de résolution explicitée en annexe ???. Les résultats de cette étude sont illustrés sur la Figure 4.11. La figure (a) trace l'évolution des fréquences propres en fonction de F_A , tandis que la figure (b) concerne l'évolution des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation.

Sur le graphique (a), on remarque que l'effet de la rotation sur la zone de couplage des valeurs propres se manifeste simplement par un décalage de la courbe : vers des pulsations propres plus élevées en co-rotation et vers des pulsations propres plus faibles en contre-rotation. Sur le graphique (b), qui se concentre sur l'évolution des valeurs propres en fonction de Ω_R , on observe le phénomène de "mode-split" Louyot et al. (2020) pour différentes valeurs de compressibilité du fluide. On remarque que plus la compressibilité du fluide est élevée (c'est-à-dire lorsque F_A est faible), plus les valeurs propres diminuent en général, et plus l'intensité du phénomène de mode-split tend également à diminuer. En effet, l'écart induit par la rotation est moins important, en particulier lorsque F_A est élevé, le mode en co-rotation a tendance à être plus faible que sa valeur en cas d'incompressibilité à $\Omega_R = 0$. Ainsi, pour des valeurs faibles de F_A , les deux valeurs propres ont tendance à diminuer avec Ω_R , mais la

valeur propre en co-rotation diminue moins rapidement que celle en contre-rotation.

De plus, l'équation généralisée à l'acoustique 4.48 permettrait de réaliser une étude de stabilité en fonction de la vitesse de rotation à la manière de Louyot et al. (2020). Cependant, en raison de contraintes de temps, cette étude n'a pas été réalisée.

4.2.5 Extension au cas à N modes surfaciques

Dans les sections précédentes de ce chapitre, la solution a été déterminée en supposant qu'elle était constituée d'un seul mode.

Lorsque l'inconnue est décomposée dans une base de N formes propres admissibles dans le domaine structural et le domaine acoustique, le système discrétisé converge vers la solution réelle lorsque $N \rightarrow \infty$. La méthode utilisée repose sur l'utilisation d'une base de fonctions orthonormées.

$$\begin{aligned} u &= \sum_n^{N_u} x_n^u u_n, \\ \phi &= \phi_z \sum_n^{N_\phi} x_n^\phi \phi_{\Sigma,n}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Les inconnues recherchées sont les coefficients x_n^ϕ et x_n^u . Dans le système à deux degrés de liberté, toute l'interaction provenait du coefficient Γ qui représentait la corrélation spatiale surfacique entre les deux domaines. Dans le système à $N_u + N_\phi$ modes surfaciques, cette information d'interaction est maintenant encapsulée dans une matrice $\mathbf{\Gamma}$ de taille $N_u \times N_\phi$:

$$\Gamma_{n,m} = \int_S u_n \phi_{\Sigma,n}. \quad (4.52)$$

Tout comme le coefficient Γ dans le système à 2 modes, cette matrice est essentielle pour caractériser le couplage du système, car c'est elle qui brise la symétrie du système. Si l'on néglige les variations selon z , le système devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}/F_A^2 \end{bmatrix} \{ \ddot{X} \} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{\Gamma} \mathcal{M}_A / \tilde{h} \\ \mathbf{\Gamma}^T / \tilde{\ell} & 0 \end{bmatrix} \{ \dot{X} \} + \begin{bmatrix} \text{diag}(\tilde{\omega}_{S,n}) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{\omega}_{A,n}) \end{bmatrix} \{ X \} = 0, \quad (4.53)$$

avec $\{X\} = [x_n^u, x_n^a]$, un tel système donne lieu à un problème aux valeurs propres qui peut être résolu numériquement.

En supposant que le fluide est incompressible pour les modes couplés structuraux et que

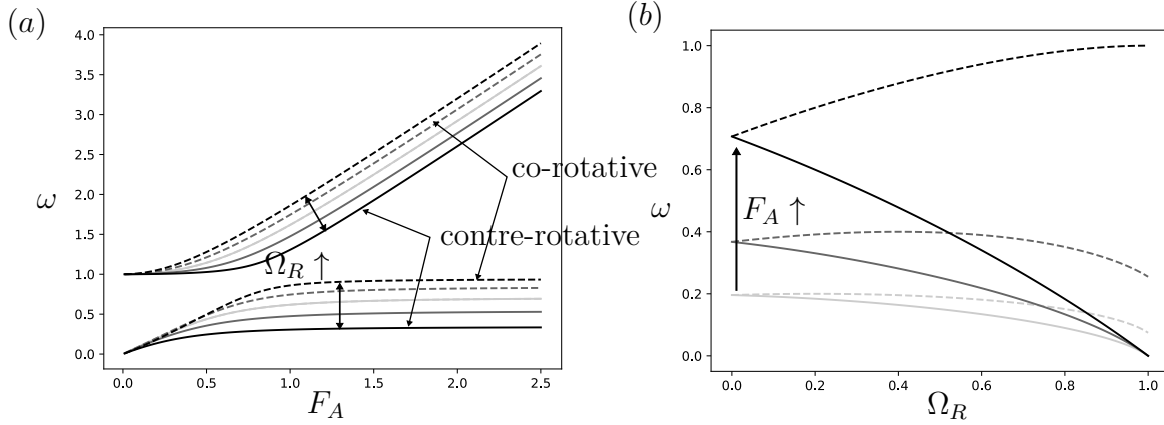


FIGURE 4.11 Analyse de l'influence de la rotation Ω_R sur les pulsations propres ; (- - -) : co-rotation, (—) : contre-rotation ; (a) Graphique représentant les ω en fonction de F_A , pour différentes valeurs de Ω_R en dégradé du gris clair au noir : $[0, 0.3, 0.6]$, () ; (b) Graphique représentant les deux premières valeurs propres ω en fonction de Ω_R pour différentes valeurs de F_A en dégradé du gris clair au noir : $[0.2, 0.4, +\infty]$

$\min(\tilde{\omega}_{A,n} F_A^2) \gg \omega_C$, le système se simplifie :

$$(I + M_a)\ddot{X}_S + \text{diag}(\tilde{\omega}_{S,n})X_S = 0, \quad (4.54)$$

avec $\mathbf{M}_a = \mathbf{\Gamma} \text{diag}(1/\tilde{\omega}_{A,n}) \mathbf{\Gamma}^T \mathcal{M}_A / (\tilde{h}\tilde{\ell})$, où $\mathcal{M}_A$ est une matrice donnée, qui représente le facteur AVMI généralisé. Ainsi, à partir de telles notations matricielles, les considérations établies précédemment peuvent être facilement retrouvées.

Pour une structure donnée, si les valeurs propres $\tilde{\omega}_s^n$ de la structure sont suffisamment éloignées les unes des autres, il est possible de faire l'approximation que le fluide n'affecte pas les modes propres de la structure. Dans ce cas, seul un mode structurel doit être pris en compte et le système se simplifie :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I/F_A^2 \end{bmatrix} \{\ddot{X}\} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{\Gamma} \mathcal{M}_A / \tilde{h} \\ \mathbf{\Gamma}^T / \tilde{\ell} & 0 \end{bmatrix} \{\dot{X}\} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_S & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{\omega}_{A,n}) \end{bmatrix} \{X\} = 0. \quad (4.55)$$

4.3 Synthèse et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons commencé par développer un modèle tridimensionnel qui prend en compte la dimension orthogonale à la paroi vibrante afin de déterminer l'influence de la vitesse du fluide orthogonale à la paroi sur les vibrations couplées. Ce chapitre a montré que pour des cavités de petite taille, avec une faible longueur ℓ , en particulier lorsque $\tilde{\ell} < 1$,

l'influence de cette dimension sur la vibration peut être négligée.

On a alors négligé l'influence de cette dimension et supposé que seuls deux modes acoustiques/structures peuvent interagir entre eux. Cela est généralement vrai lorsqu'une seule structure est prise en compte, car la forme des modes de la structure ne change pas avec ou sans eau. Ces hypothèses nous ont conduit au développement d'un système à deux degrés de liberté qui permet de caractériser le couplage acoustique-structure et de confirmer certains résultats de la théorie incompressible, en particulier ceux liés au facteur AVMI.

Trois régions distinctes se dégagent du couplage. Dans la première région, les modes acoustiques ont des fréquences trop faibles par rapport aux modes structurels. Dans ce cas, les domaines sont imperméables à toute interaction avec leur voisin : la structure est trop rigide pour vibrer avec l'influence du son, et inversement, le domaine acoustique ne peut pas être excité par la structure qui vibre trop rapidement. Dans cette région ($\tilde{F}_A \ll 1$), aucun couplage n'est observé.

En revanche, lorsque les fréquences acoustiques sont beaucoup plus élevées que les fréquences structurelles ($\tilde{F}_A \gg 1$), le domaine acoustique peut être considéré comme incompressible et agit comme une masse supplémentaire accrochée à la structure. Cette fois-ci, c'est la structure qui dicte la vibration du système et l'énergie acoustique du fluide se présente uniquement sous forme d'énergie cinétique. Comme la structure est considérée avec une masse supplémentaire, la fréquence de vibration du système diminue par rapport à la fréquence de vibration de la structure prise dans le vide.

Entre ces deux régions, le mode qui était auparavant acoustique évolue graduellement vers le mode de couplage incompressible. Plus le couplage est élevé, c'est-à-dire plus le facteur AVMI β est élevé, plus cette évolution graduelle commence tôt sur l'axe des F_A . Dans cette zone de transition, si le couplage est faible ($\beta < \beta_C$), il existe un ratio $F_A \approx 1$ où la puissance échangée entre les deux domaines est maximale.

De plus, dans cette région de transition, le mode qui passe du mode acoustique au mode structurel possède une fréquence plus basse que le mode de vibration incompressible avec masse ajoutée. Plus le couplage est élevé, plus la fréquence du mode évolue lentement dans l'espace des F_A vers la fréquence du mode incompressible.

La zone de transition possède des propriétés à la fois de la zone de couplage incompressible et de la zone de non-couplage. L'étude harmonique menée sur le système permet de montrer comment des caractéristiques telles que la largeur du pic de résonance et la fréquence de résonance se transmettent de manière progressive entre les deux zones de couplage. De plus, la réponse harmonique démontre qu'une excitation acoustique engendre une réponse structurelle

avec une contribution maximale dans la zone de transition.

Il est donc crucial pour les fabricants de turbines de prendre en compte cette zone de transition, car bien que les fréquences propres des deux domaines s'écartent, il arrive un moment où les deux fréquences résultantes du couplage deviennent suffisamment proches pour être perçues comme un dédoublement de modes (dans le cas d'un couplage faible). En effet, dans cette zone de transition, à la fois le mode acoustique et le mode structurel contribuent aux deux domaines, ce qui crée un mélange d'énergie. Cependant, plus l'interaction entre le fluide et la structure est élevée, plus les modes des deux domaines s'écartent considérablement et le dédoublement de modes ne peut plus être observé (couplage fort).

De plus, le phénomène de dédoublement de mode est influencé par la compressibilité du fluide environnant. En effet, plus la compressibilité du fluide est faible, moins l'écartement des modes dus à la rotation est prononcé.

CHAPITRE 5 Application du couplage aux géométries idéalisées de disques

Maintenant que la théorie centrée sur le couplage acoustique-structure a été développée dans le chapitre précédent, ce chapitre va permettre d'obtenir des résultats sur un modèle moins conceptuel dont le comportement vibratoire ressemble à celui des turbines. Est-ce que ce modèle va suivre les différentes observations discutées sur le système simple à 2 degrés de liberté ? Est-il ainsi possible d'extrapoler les résultats sur des systèmes encore plus complexes tels que celui des turbines hydrauliques ?

5.1 Développement du modèle

5.1.1 Modèle du double disques

Comme expliqué en introduction, la roue d'une turbine haute chute a une géométrie particulière. Sa dimension caractéristique axiale H est beaucoup plus faible que son diamètre D . Ainsi les modes privilégiés par la structure sont les modes de disques explicités dans la section suivante 5.1.3.

Les domaines structuraux pris en considération sont : le disque équivalent à une roue (nommé rotor) et le disque équivalent au couvercle (nommé stator). Le domaine acoustique pris en considération est la cavité qui se trouve entre les deux domaines. La géométrie idéalisée et la présentation des différentes dimensions sont présentées dans la figure 5.1. En effet, il y a le rayon intérieur R_I , le rayon extérieur du rotor R_0 et le rayon extérieur de la cavité acoustique R_A . Le modèle idéalisé consiste à considérer l'ensemble des domaines comme des disques d'épaisseur h_R pour le rotor, h_C pour le stator et h_A pour l'acoustique. Comme démontré dans la section 4.2.3, considérer la cavité acoustique comme un disque est valable lorsque $e_A \ll R_A$.

5.1.2 Méthodologie globale

L'obtention des solutions pour les équations du système à résoudre nécessite plusieurs étapes de calcul. Il faut tout d'abord obtenir les modes propres individuels naturels pour chaque domaine. Ces modes s'obtiennent directement en résolvant analytiquement les équations sur des domaines à symétrie circulaire. Ensuite, il faut évaluer les matrices d'interactions qui se calculent à partir de l'intégrale des solutions analytiques déterminées sur chaque domaine aux interfaces. Enfin, il faut résoudre le système aux valeurs propres discrétisées.

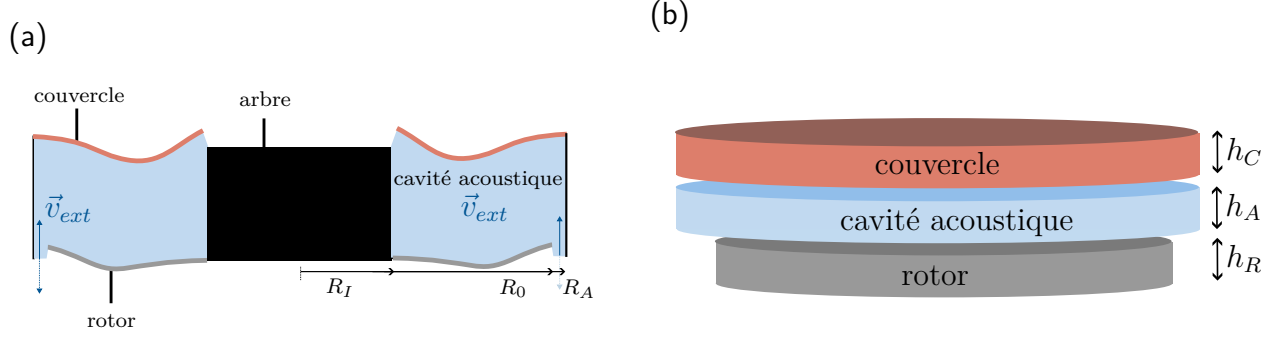


FIGURE 5.1 Représentations schématiques du système ; (a) schéma du système avec les différents éléments ; (b) géométrie idéalisée : superposition de disques de différentes épaisseurs.

La suite de cette partie s'organise de la manière suivante : tout d'abord, un développement est fait pour montrer comment les solutions analytiques sont obtenues à partir des équations sur chacun des domaines. Ensuite, la discrétisation du système est établie. Enfin, le système aux valeurs propres est résolu en utilisant la fonction "eig" du module "scipy" sous Python, qui permet de résoudre des problèmes aux éléments propres pour des matrices non symétriques.

5.1.3 Obtention des fonctions naturelles annulaires

Pour la structure et le domaine acoustique, les modes naturels s'obtiennent analytiquement à partir des équations linéaires et des conditions aux limites qui caractérisent le champ dans le milieu.

Vibrations de disques

Cette partie s'attache à expliquer comment déterminer analytiquement les modes structurels des disques qui décrivent les vibrations des deux domaines : rotor et stator.

Le livre de référence de Leissa (1969) regroupe les différentes théories des vibrations des structures en l'absence de fluide (Southwell, 1922; Vogel and Skinner, 1965), notamment celles des plaques et des disques avec différentes conditions aux limites. Les hypothèses qui permettent d'approximer la structure comme une plaque sont :

- L'épaisseur h de la plaque doit être très petite par rapport aux autres dimensions.
- Les déplacements et contraintes doivent être faibles.
- Les contraintes de cisaillement transversal doivent être négligeables.

Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, l'équation fondamentale pour le déplacement vertical

u de la plaque vérifie l'équation linéaire :

$$D\nabla^4 u + \rho h \ddot{u} = 0, \quad (5.1)$$

où D représente la rigidité en flexion de la plaque, ρ est sa masse volumique, et h est son épaisseur. La rigidité en flexion de la plaque est donnée par $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$, où E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson du matériau.

Pour un disque, la symétrie circulaire conduit à exprimer cette équation en utilisant des coordonnées polaires $u = u(r, \theta, t)$. En exprimant le bi-laplacien de l'équation 5.1 dans ces coordonnées, l'équation des plaques devient :

$$D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] + \rho h \ddot{u} = 0.$$

Ensuite, en effectuant une séparation des variables sur $u = u_r(r)u_\theta(\theta) \exp(j\omega t)$, chaque facteur unidimensionnel vérifie un problème aux valeurs propres spécifique. Selon θ , étant donné que la fonction doit être continue sur l'ensemble du disque, les solutions sont une combinaison de fonctions $\cos(n\theta)$ et de fonctions $\sin(n\theta)$, où n est un entier naturel correspondant au nombre de nœuds diamétraux. Selon r , pour une valeur fixée de n , la solution est une décomposition dans la base des fonctions de Bessel de première et seconde espèces :

$$u_{r,n}(r) = A_{r,n}J_n(k_{r,n}r) + B_{r,n}Y_n(k_{r,n}r) + C_{r,n}I_n(k_{r,n}r) + D_{r,n}K_n(k_{r,n}r), \quad (5.2)$$

où $k_{r,n}$ est la pulsation spatiale radiale du problème. Cette pulsation spatiale ainsi que les amplitudes des fonctions de Bessel se déterminent en appliquant les conditions aux limites spécifiques du disque en question. Les conditions aux limites naturelles portant sur la réaction V_r et le moment fléchissant M_r ont des expressions complexes qui méritent d'être écrites :

$$V_r|_{r=R} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u \right) \Big|_{r=R}, \quad (5.3)$$

$$M_r|_{r=R} = \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 u) + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{1}{r^3} u \right) \Big|_{r=R}. \quad (5.4)$$

Pour l'évaluation de la pulsation spatiale et des coefficients, 4 conditions aux limites sont nécessaires ($C = [C_1, C_2, C_3, C_4] = 0$). Étant donné que ces conditions sont linéaires par rapport à la décomposition précédente, il existe une matrice M dépendant de $k_{r,n}$ qui satisfait

l'équation suivante :

$$C = M(k_{r,n}) \begin{bmatrix} A_{r,n} \\ B_{r,n} \\ C_{r,n} \\ D_{r,n} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.5)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisées, où $\det(M(k_{r,n}))$ n'est pas une fonction polynomiale des $k_{r,n}$. Pour résoudre ce problème, il suffit de chercher les solutions de l'équation $\det(M(k_{r,n})) = 0$, puis de déterminer un vecteur $[A_{r,n}, B_{r,n}, C_{r,n}, D_{r,n}]$. Les solutions de ce problème sont discrètes et quantifiées. Ainsi, $k_{r,n}$ peut être indexé par un entier p , de sorte que $(k_{n,p})_p$ forme une suite croissante et p correspond au nombre de cercles nodaux. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation des plaques forme un tenseur d'ordre deux, indexé par n et p :

$$u_{n,p}(r, \theta) = (\cos(n\theta) \vee \sin(n\theta)) \times [A_{p,n}J_n(k_{p,n}r) + B_{p,n}Y_n(k_{p,n}r) + C_{p,n}I_n(k_{p,n}r) + D_{p,n}K_n(k_{p,n}r)]. \quad (5.6)$$

Le nombre de diamètres nodaux n correspond au nombre de tranches diamétrales où $u_{n,p}$ s'annule, tandis que le nombre de nœuds radiaux p correspond au nombre de tranches circulaires où $u_{n,p}$ s'annule. Un exemple d'une solution correspondant à la paire $n = 3, p = 2$ est représenté sur la Figure 5.2.

Les conditions aux rives du rotor et du stator sont décrites dans le tableau 5.1 et sont illustrées sur la figure 5.3.

Les conditions aux limites du rotor et du stator sont naturellement différentes l'une de l'autre. En effet, certaines conditions aux limites offrent plus de liberté que d'autres, ce qui peut limiter les modes de vibration possibles pour le disque. Par exemple, le rotor qui est fixé sur l'arbre à un rayon spécifique peut vibrer de toutes les manières possibles, ce qui signifie qu'il existe un mode de vibration pour chaque paire d'entiers n et p . Cette propriété n'est

TABLEAU 5.1 Conditions aux rives structurales R_I étant le rayon intérieur et R_E le rayon extérieur

positions	rotor	stator
R_I	fixé	libre
R_E	libre	fixé

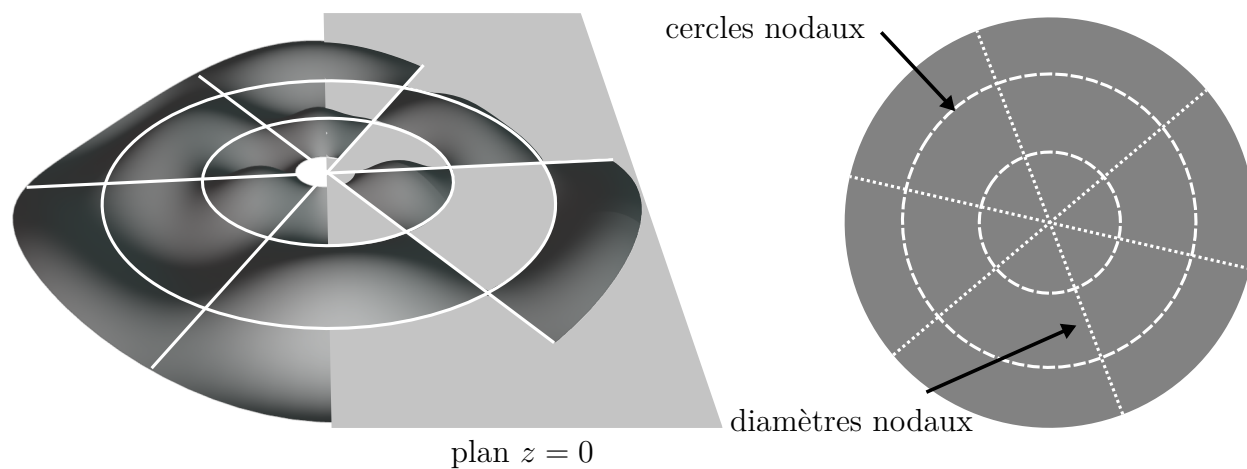


FIGURE 5.2 Exemple du couple $n = 3$ et $p = 2$; ($\cdots$) : diamètres nœuds et ($- - -$) : cercles nœuds

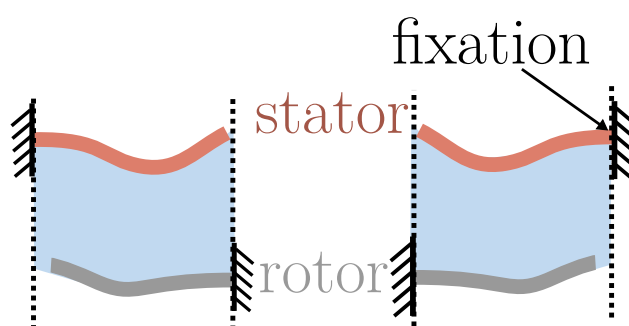


FIGURE 5.3 Illustration des conditions aux limites imposées au rotor et au stator

cependant pas vérifiée par le stator, qui est fixé à l'extérieur. En effet, lorsque $n > 0$, le déplacement du disque varie en fonction du rayon, ce qui implique que les vibrations du disque doivent nécessairement être nulles au centre. Sinon, des discontinuités apparaissent dans la géométrie déformée, entraînant une discontinuité du déplacement et du gradient, comme indiqué sur la figure 5.4. En d'autres termes, si $n > 0$, alors $p > 0$ pour le stator. La pulsation spatiale minimale pour un mode de vibration du stator est naturellement supérieure à la pulsation spatiale minimale du rotor. Par conséquent, le stator est naturellement plus rigide que le rotor, même avec des paramètres structurels similaires (module de Young et épaisseur). Un exemple des premières valeurs propres adimensionnelles $\tilde{k}_{n,p} = k_{n,p}R_E$ avec $R_I = 0.6R_E$ obtenues pour $n = 3$ est illustré dans le tableau 5.2.

Puis, les valeurs propres fréquentielles $\omega_{n,p}$ s'obtiennent par le biais de la relation de dispersion :

$$\omega_{n,p} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} k_{n,p}^4. \quad (5.7)$$

Chambre acoustique annulaire

Le fait que le fluide soit compressible implique que les particules fluides qui forment la cavité ont un comportement dynamique. Elles vibrent avec des variations de la pression et de la vitesse autour des quantités moyennes qui sont faibles. Tant que ces quantités moyennes restent faibles et que le fluide possède un écoulement moyen dont la vitesse caractéristique U est faible devant la vitesse du son moyenne c_0 du milieu, la pression et le potentiel de vitesse fluide ϕ vérifient l'équation linéaire de Helmholtz Bruneau (2006) :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = 0, \quad (5.8)$$

où c_0 est la vitesse du son moyenne. Dans le cas où les parois de la cavité sont considérées infiniment rigides, les conditions aux limites considérées sont les conditions de Neumann : $\partial\phi/\partial n = 0$.

Lorsque la cavité tridimensionnelle présente une symétrie cylindrique ou annulaire (voir figure

TABLEAU 5.2 Pulsation propre $k_{3,p}$

(n, p)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
rotor	3.53	7.29	10.63	13.9
stator	—	7.14	10.5	16.9

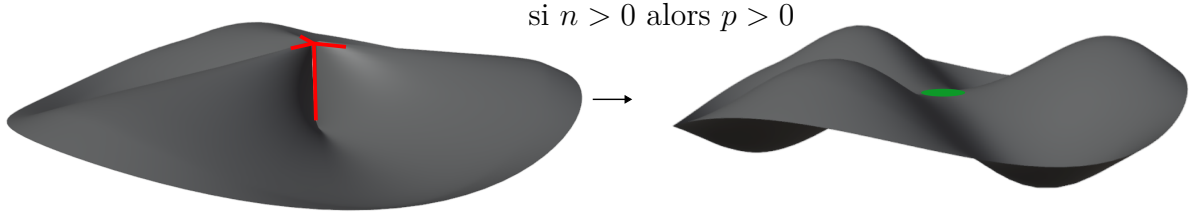


FIGURE 5.4 Discontinuité vs continuité de la déformation du stator

5.5), cette équation prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = 0. \quad (5.9)$$

Les solutions $\phi(r, \theta, z, t)$ peuvent alors être recherchées sous une forme séparée :

$$\phi = \phi_r(r) \phi_\theta(\theta) \phi_z(z) \exp(j\omega t).$$

Chacune de ces fonctions vérifie alors un problème aux valeurs propres distinct qui dépend des conditions aux limites et permet de quantifier les nombres d'onde. La solution vérifie alors l'équation suivante :

$$\phi_{n,p,q} = (\cos(n\theta) \vee \sin(n\theta)) [A_{p,n} J_n(k_{r,p,n} r) + B_{p,n} Y_n(k_{r,p,n} r)] \cos(k_{z,q} z). \quad (5.10)$$

Ensuite, les valeurs propres $\omega_{n,p,q}$ sont obtenues à l'aide de la relation de dispersion :

$$\omega_{n,p,q} = \sqrt{k_{r,p,n}^2 + k_{z,q}^2}. \quad (5.11)$$

Dans cette partie, il convient de préciser que les modes naturels selon z sont négligés car H est petit devant le rayon décrivant les surfaces cylindriques ou annulaires de la cavité. Ainsi, $k_{z,q} \approx 0$.

5.1.4 Adimensionnement du système complet

Définition des variables

Pour l'adimensionnement des structures, on va prendre comme référence les dimensions suivantes : le rayon R_0 du rotor, sa fréquence de vibration fondamentale dans le vide f_R^0 et sa masse volumique du rotor ρ_R . L'ensemble des longueurs présentées sur la figure 5.1 sont donc

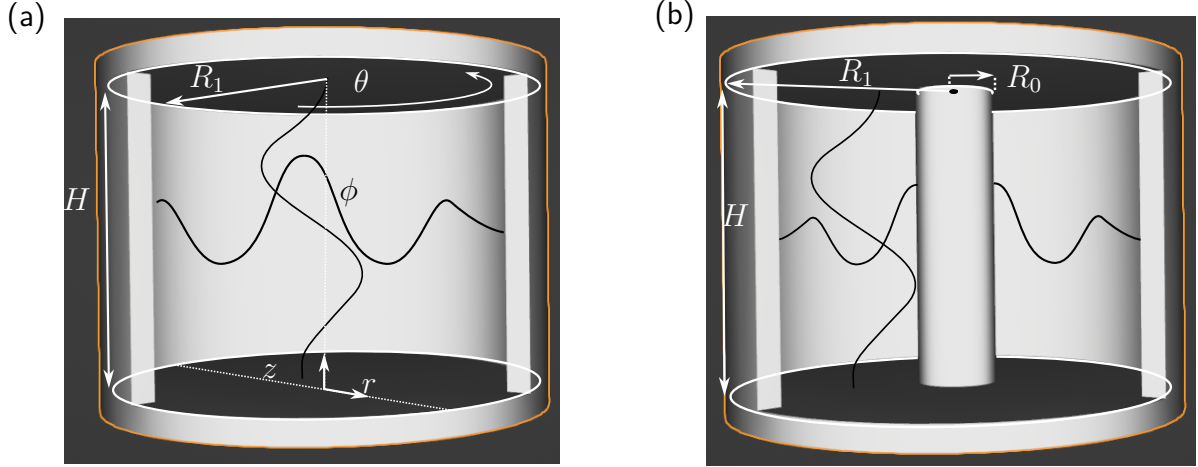


FIGURE 5.5 Schéma des cavités à symétrie angulaire. (a) Cavité cylindrique, (b) Cavité annulaire

adimensionnées par le rayon R_0 :

$$\tilde{R}_i = R_i/R_0, \tilde{h}_i = h_i/R_0. \quad (5.12)$$

où R_i sont les rayons de l'ensemble des disques (rotor, stator, acoustique) et h_i sont les épaisseurs de l'ensemble des disques.

Comme un nouveau domaine s'est ajouté par rapport au domaine acoustique et structural discuté précédemment, deux nouveaux nombres adimensionnels vont faire leur apparition. En effet, ces nombres permettent de comparer les dimensions temporelles et massiques du stator par rapport au rotor. Le rapport $F_C = f_C^0/f_R^0$ entre la fréquence fondamentale du stator et la fréquence fondamentale du rotor, et on continue de noter $F_A = f_A^0/f_R^0$ le rapport entre la fréquence fondamentale acoustique et la fréquence fondamentale du rotor. Le rapport $\mathcal{M}_C = \rho_C/\rho_R$ représente le nombre de masse entre les masses volumiques du stator et du rotor. De même, on note $\mathcal{M}_A = \rho_A/\rho_R$ le nombre de masse entre la cavité et le rotor.

5.1.5 Mise en équation

Cette section permet d'expliquer comment les systèmes d'équations de couplage entre les différents domaines sont obtenus.

Équations modales

La mise en équations du système complet se fait de la manière suivante :

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,R}^4} \nabla^4 u_R + \ddot{u}_R = -\mathcal{M}_A / \tilde{h}_R \phi, \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,C}^4} \nabla^4 u_C + \frac{1}{F_C^2} \ddot{u}_C = \mathcal{M}_A / \mathcal{M}_C / \tilde{h}_C \phi, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,A}^2} \nabla^4 \phi + \frac{1}{F_A^2} \ddot{\phi} = 0, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi = \dot{u}_R \text{ (sur } S_R), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi = -\dot{u}_C \text{ sur } (S_C), \quad (5.16)$$

où S_i définissent les surfaces de contact entre la cavité et les structures. ϕ définit le potentiel de vitesse acoustique de la cavité, u_i définissent les déplacements des disques, et les $\tilde{k}_{0,i}$ définissent les pulsations spatiales fondamentales adimensionnelles du domaine i .

Afin de résoudre ces équations, elles sont converties sous forme faible en multipliant par les fonctions tests $\tilde{u}_i, \tilde{\phi}$ et en les intégrant sur les différentes surfaces :

$$\forall \tilde{u}_R \in H^2, \quad \frac{1}{\tilde{k}_{0,R}^4} \int_{S_R} \nabla^2 u_R \nabla^2 \tilde{u}_R + \int_{S_R} \ddot{u}_R \tilde{u}_R = \mathcal{M}_A / \tilde{h}_R \int_{S_R} \dot{\phi} \tilde{u}_R, \quad (5.17)$$

$$\forall \tilde{u}_C \in H^2, \quad \frac{1}{\tilde{k}_{0,C}^4} \int_{S_C} \nabla^2 u_C \nabla^2 \tilde{u}_C + \frac{1}{F_C^2} \int_{S_C} \ddot{u}_C \tilde{u}_C = -\mathcal{M}_A / \mathcal{M}_C / \tilde{h}_C \int_{S_C} \dot{\phi} \tilde{u}_C, \quad (5.18)$$

$$\forall \tilde{\phi} \in H^1, \quad \frac{1}{\tilde{k}_{0,A}^2} \int_{S_A} \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} + \frac{1}{F_A^2} \int_{S_A} \ddot{\phi} \tilde{\phi} d\Omega = 1 / \tilde{h}_A \left(- \int_{S_R} u_R \tilde{\phi} + \int_{S_C} u_C \tilde{\phi} \right). \quad (5.19)$$

Les fonctions adaptées à la décomposition sur chaque domaine sont constituées du produit avec une fonction sur θ décrivant l'évolution du champ angulaire. Cette fonction est harmonique cosinus ou sinus et elle est caractérisée par le nombre n de diamètre nodal. Deux fonctions avec des diamètres nodaux différents sont orthogonales, ainsi chaque diamètre nodal n correspond à un système d'équations différent.

Ainsi, en fixant le nombre de diamètre nodal à nn , on décompose la solution dans la base de

fonctions radiales orthonormées définies dans la section 5.1.3, adaptée à chaque domaine :

$$u_R = \sum_p^{P_R} x_p^R u_{n,p,R}, \quad (5.20)$$

$$u_C = \sum_p^{P_C} x_p^C u_{n,p,C}, \quad (5.21)$$

$$\phi = \sum_p^{P_A} x_p^A \phi_{n,p,A}, \quad (5.22)$$

où P_i correspond au nombre de cercles nodaux pris en compte. Les solutions sont alors discrétisées dans le vecteur $\{X\} = [x_{n,p}^R, x_{n,p}^C, x_{n,p}^A]$ et vérifient l'équation obtenue par la méthode de Ritz-Galerkin :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{\ddot{X}\} + \mathbf{L} \{\dot{X}\} + \mathbf{K} \{X\} = 0, \\ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I/F_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & I/F_A^2 \end{bmatrix} \{\ddot{X}\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{\Gamma}_R \mathcal{M}_A / \tilde{h}_R \\ 0 & 0 & \mathbf{\Gamma}_C \mathcal{M}_A / \mathcal{M}_C / \tilde{h}_C \\ \mathbf{\Gamma}_R / \tilde{h}_A & -\mathbf{\Gamma}_C / \tilde{h}_A & 0 \end{bmatrix} \{\dot{X}\}, \\ + \begin{bmatrix} \text{diag}(\tilde{k}_{n,p,R}^4) / \tilde{K}_{0,R}^4 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{k}_{n,p,C}^4) / \tilde{K}_{0,C}^4 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\tilde{k}_{n,p,A}^2) / \tilde{K}_{0,A}^2 \end{bmatrix} \{X\} = 0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

où les matrices $\mathbf{\Gamma}_i$ sont les produits scalaires entre la fonction acoustique et les domaines structuraux, et permettent de caractériser l'interaction entre les différents domaines. Ces interactions sont représentées sur la figure 5.6. Le problème étant adimensionné, ces matrices dépendent uniquement de la géométrie des différents domaines et de celle de la surface de contact.

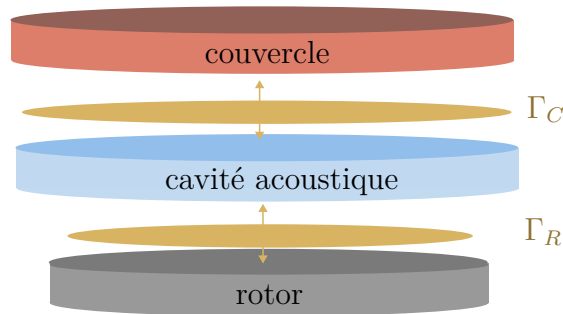


FIGURE 5.6 Schéma des interactions dans le système

Excitation externe et interaction rotor-stator (RSI)

Supposons que l'on souhaite intégrer un champ d'excitation externe F_i au système qui s'applique sur le domaine i . Alors on décompose ce champ de force dans la base appropriée au domaine :

$$F_i = \sum_n^{\infty} \langle F_i, \psi_n^i \rangle \psi_n^i, \quad (5.24)$$

où ψ^i correspond à la famille de fonctions du domaine i .

Comme discuté dans la revue de littérature, le champ de pression induit par l'interaction rotor-stator est décomposé comme une somme de fonctions à symétrie circulaire qui possède $n_{r,s} = rZ_b - sZ_0 \vee rZ_b + sZ_0$ diamètres nodaux, où r et s sont des entiers quelconques et Z_b et Z_0 sont les nombres respectifs d'aubes. De plus, la pulsation d'excitation ω est égale à $rZ_b\Omega_R$.

Ces informations nous permettent de modéliser l'excitation induite par ce phénomène dans l'écart radial qui se situe entre le rayon R_0 du rotor et le rayon R_A de la cavité (dimension représentée sur la figure 5.1 (a)). Pour simplifier la prise en compte de cette excitation, on va considérer qu'elle résulte en un champ de vitesse $\vec{v}_{\text{ext}}$ orthogonal à la surface S_G (schématisée sur la figure 5.7), formée par l'écart radial, qui en norme vaut :

$$v_{\text{ext}} = A \cos(n\theta) \exp(j\omega t), \quad (5.25)$$

où A est l'intensité du champ. Ainsi, pour n fixé, seuls les modes avec n diamètres nodaux vont être excités. Le champ de vitesse est modélisé comme constant selon r puisque cet écart est très faible.

Cette excitation s'inclut dans les équations du système en considérant la condition aux limites sur la vitesse acoustique en entrée de l'écart radial :

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,R}^4} \nabla^4 u_R + \ddot{u}_R = -\mathcal{M}_A / \tilde{h}_R \phi, \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,C}^4} \nabla^4 u_C + \frac{1}{F_C^2} \ddot{u}_C = \mathcal{M}_A / \mathcal{M}_C / \tilde{h}_C \phi, \quad (5.27)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{0,A}^2} \nabla^4 \phi + \frac{1}{F_A^2} \ddot{\phi} = 0, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi = \dot{u}_R \text{ sur } (S_R), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi = -\dot{u}_C \text{ sur } (S_C), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi = \mathbf{v}_{\text{ext}} \text{ sur } (S_G). \quad (5.29)$$

Cette condition aux limites est incluse dans le système avec le vecteur $\{F\} = [F_p]$ qui

correspond à la décomposition de ce champ de vitesse sur le champ acoustique :

$$v_{ext} = A \cos(n\theta) \sum_p^{P_A} F_p \phi_p(r), \quad (5.30)$$

$$= A \cos(n\theta) \sum_p^{P_A} \int_{R_0}^{R_A} \phi_p(r) dr \phi_p(r). \quad (5.31)$$

Le système 5.23 devient alors un système avec second membre.

Rigidité ajoutée par la rotation

On suit le même raisonnement qui a été développé dans la section 4.2.4 sur le modèle simplifié à 4 degrés de liberté. Cette fois-ci, il faut prendre en compte la rotation des trois domaines : le rotor qui a une rotation Ω_R , la cavité acoustique qui a une rotation Ω_A , et le couvercle ou stator qui a une rotation nulle $\Omega_C = 0$, le tout par rapport au référentiel fixe. Ainsi, il y a deux vitesses de rotation relatives à prendre en compte dans l'application des termes d'interaction entre les domaines acoustiques et structuraux : $\Omega_{R/A} = \Omega_R - \Omega_A$ et $\Omega_{C/A} = \Omega_C - \Omega_A = -\Omega_A$. Pour le calcul de la vitesse d'entraînement du domaine acoustique Ω_A , on utilise la valeur du coefficient d'entraînement κ calculé par Poncet et al. (2005) et confirmé par Louyot et al. (2020) pour un fluide qui se trouve entre un disque statique et un disque en rotation :

$$\kappa \approx 0.45 \quad (5.32)$$

pour un nombre de Reynolds $Re = \frac{\Omega_R R_0^2}{\nu} \in [10^6, 4.5 \times 10^6]$.

De la même manière que dans la partie 4.2.4, la rotation est intégrée par l'ajout d'une matrice de rigidité proportionnelle à la rotation du rotor, $K_R = n\Omega_R \Gamma_R$, où Γ_R met en interaction les fonctions $\cos(n\theta)$ structurelles avec les fonctions $\sin(n\theta)$ acoustiques et vice-versa.

Il est possible de prendre en compte naturellement l'influence de l'intégration rotor-stator dans le système modal. En effet, la pulsation d'excitation est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor, d'où la pulsation propre $\omega = rZ_b\Omega_R$. Ainsi, en remplaçant Ω_R dans l'ex-

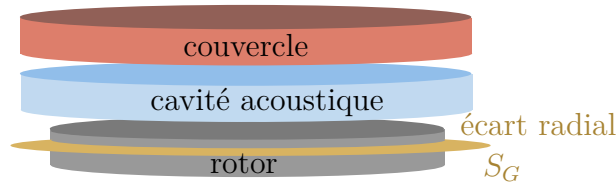


FIGURE 5.7 Schéma représentant la surface S_G définie par l'écart radiale

pression de la matrice de rigidité ajoutée, on obtient l'équation aux valeurs propres suivante :

$$-\omega^2 MX + \omega(jL + \frac{n}{kZ_b} K_R)X + KX = 0. \quad (5.33)$$

Méthode pour la prise en compte de la vitesse orthogonale à la paroi

Lors du développement du modèle, nous avons utilisé une méthode numérique qui utilise une fonction polynomiale pour libérer le degré de liberté de la vitesse orthogonale à la paroi. Cette méthode s'inspire de celle développée par Shi et al. (2018) pour modéliser la continuité acoustique entre plusieurs cavités.

Cette méthode consiste à séparer la fonction ϕ selon l'axe z orthogonal à la paroi structurelle et selon la surface Σ parallèle à cette même paroi. Selon z , ϕ_z se décompose comme la somme de fonctions harmoniques $\phi_z^q(z) = \cos(qz/\tilde{h}_A)$ dont la dérivée s'annule en 0 et en $\tilde{h}_A$ pour satisfaire les conditions naturelles de paroi infiniment rigides. Ainsi que de deux fonctions polynomiales permettant de libérer le degré de liberté de la vitesse orthogonale sur le rotor et le stator :

$$\begin{aligned} p_R(z) &= (z/\tilde{h}_A)(1 - z/\tilde{h}_A)^2, \\ p_C(z) &= (z/\tilde{h}_A)^2(1 - z/\tilde{h}_A). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ces fonctions ont la forme représentée sur le graphique 5.8. Ces fonctions ont une dérivée non nulle au point $\tilde{z}$ où se trouve la paroi vibrante qu'il faut modéliser.

Ces fonctions ont été introduites afin de prendre en compte la continuité acoustique qu'il peut y avoir entre plusieurs chambres. Cependant, cet aspect n'a pas été concrétisé dans le travail de recherche en raison du manque de temps. Néanmoins, ces fonctions ont été utilisées pour modéliser la vitesse orthogonale à la paroi dans le système global de couplage acoustique-structure. L'introduction de ces fonctions forme un autre modèle dont les solutions peuvent être comparées aux solutions où la cavité est modélisée uniquement par des disques.

La qualité de la méthode pour la modélisation d'un tel problème longitudinal a été testée sur le problème statique qui présente une condition aux limites non nulle en 1. Ce problème s'apparente au problème unidimensionnel de la vitesse acoustique orthogonale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \phi(0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \phi(1) = w. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Pour la résolution de ce type de problème, on utilise la même méthode que Dowell and Voss (1962) en considérant tout d'abord des fonctions harmoniques ϕ_n avec une dérivée nulle aux

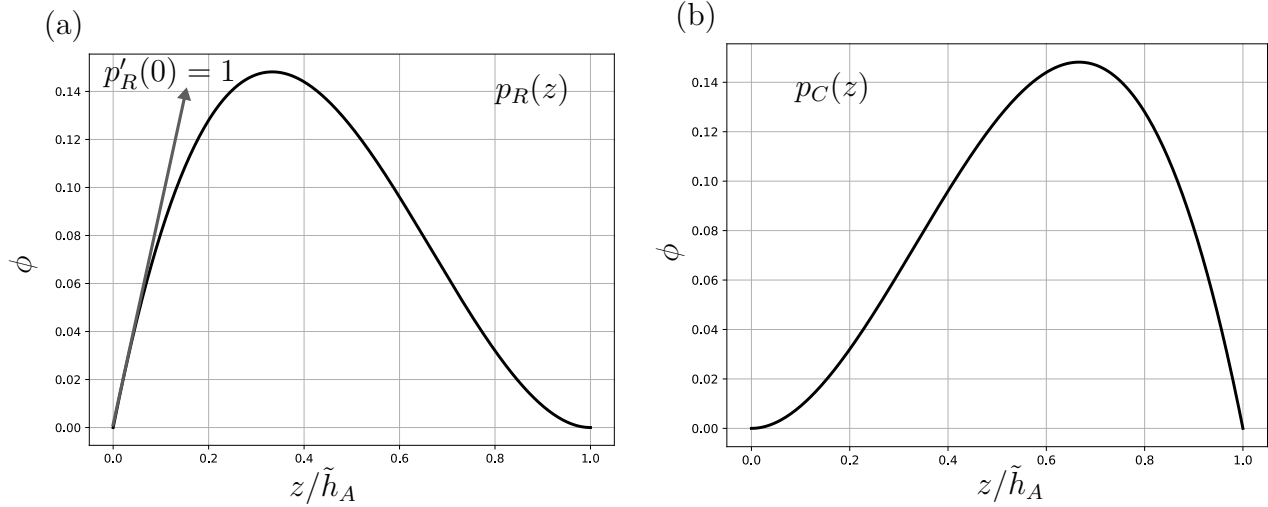


FIGURE 5.8 Fonctions p_R et p_C qui libèrent le degré de liberté de vitesse acoustique orthogonale à la paroi

extrémités telles que $\cos(nx)$, et on considère la fonction de correction polynomiale p_S pour libérer le degré de liberté ϕ' en 1. On étudie la convergence de la méthode avec et sans la prise en compte de la fonction de correction polynomiale. La figure 5.9 présente les résultats de cette étude. La méthode semble converger beaucoup plus rapidement avec la correction. En effet, la forme des modes sans correction ne permet pas de vérifier la forme de la solution pour des valeurs locales proches de 1. Ainsi, sans la correction, la méthode, bien qu'elle converge globalement (en norme L^2), ne converge pas localement.

5.2 Résultats du modèle

On commence par étudier l'évolution du comportement vibratoire modal du système sans intégrer la rotation. Ensuite, la rotation est intégrée dans le système modal, puis dans une analyse harmonique.

5.2.1 Paramètres pris en compte

Les paramètres qui sont fixés sont listés dans le tableau 5.4. Ils correspondent à un cas où le rotor et le stator ont la même masse volumique et le même coefficient de Poisson qui caractérisent l'acier. De plus, les tailles prises en compte correspondent à des géométries équivalentes de la roue, du disque et du couvercle pour une pompe turbine haute chute déterminées avec Andritz Hydro (cf le cas pratique 6.1).

La masse volumique prise en compte pour le domaine acoustique est celle de l'eau, de sorte

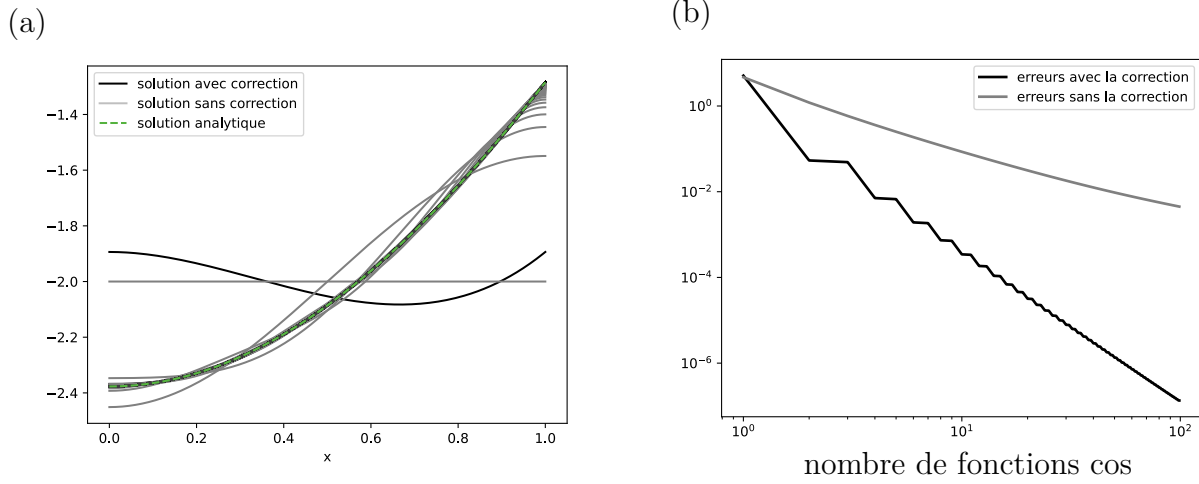


FIGURE 5.9 Convergence de la méthode en utilisant les fonctions de correction polynomiale ; (a) évolution de la forme $\phi(x)$ de la solution numérique ; (b) Convergence de la solution avec et sans correction.

que $\mathcal{M}_A \approx 0.15$.

TABLEAU 5.3 Les paramètres mécaniques

Paramètres	$\tilde{R}_I$	$\tilde{R}_0$	$\tilde{R}_A$	$\tilde{h}_A$	$\tilde{h}_R$	$\tilde{h}_C$	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{M}_C$	ν
valeur	0.6	1	1.1	0.05	0.1	0.15	0.15	1	0.30

TABLEAU 5.4 Les paramètres mécaniques

Paramètres	$\tilde{R}_I$	$\tilde{R}_0$	$\tilde{R}_A$	$\tilde{h}_A$	$\tilde{h}_R$	$\tilde{h}_C$	$\beta_{M,R}$	$\beta_{M,C}$	ν
valeur	0.6	1	1.1	0.05	0.1	0.15	30	20	0.30

Les autres paramètres définissant les ratios des fréquences de vibrations F_A et F_S ne sont pas fixés, on considère qu'il est possible de les modifier en modifiant la rigidité des structures. En général, $F_S > 1$ car le couvercle est bien plus épais et rigide que le rotor en pratique.

De plus, on considère l'exemple pratique défini dans la partie 2.3.2 en ce qui concerne le nombre d'aubes Z_B et le nombre de directrices Z_0 , qui permettent de déterminer un cas pratique du nombre de diamètres nodaux n et du couple d'entiers (r, s) qui permettent de définir l'excitation rotor/stator. Ces paramètres sont listés dans le tableau 5.5.

TABLEAU 5.5 Paramètres de la turbine pour l'intégration de l'interaction rotor-stator

Paramètres	Z_B	Z_0	n	r, s
valeur	9	24	3	3, 1

5.2.2 Étude de convergence

On commence par étudier le comportement du système sans tenir compte de la rotation du rotor. Pour cela, on rappelle que pour un nombre de diamètres nodaux n donné, dans chaque domaine, on se donne autant de fonctions radiales $P_R = P_C = P_A = P$. On va étudier la convergence des pulsations propres du système vis-à-vis de l'évolution de ce nombre de fonctions radiales. L'étude de la convergence porte sur les deux premiers modes de vibration qui apparaissent : le mode où le rotor et le stator sont en contre-phase et le mode où ils sont en phase.

On note $\omega_{1,p}$ la pulsation en contre-phase et $\omega_{2,p}$ calculée pour p fonctions radiales. On fait varier le nombre de fonctions radiales prises en compte de $p = 1$ à $p = P = 19$ et on étudie l'évolution du pourcentage d'erreur entre la solution p et la solution P pour les quantités suivantes :

$$E = \frac{\omega_{i,p} - \omega_{i,P}}{\omega_{i,P}}. \quad (5.36)$$

La figure 5.10 illustre l'évolution de l'erreur avec et sans l'utilisation des fonctions de correction. Tout d'abord, sans utiliser de fonctions de correction, on remarque que dès $p = 1$, l'erreur est de seulement 4% pour le mode en phase et de moins de 1% pour le mode en contre-phase. En fait, le cas $p = 1$ correspond au cas du système à 2 degrés de liberté qui est généralisé à 3 degrés de liberté en ajoutant le domaine du stator. Ainsi, la convergence montre que la précision atteinte par la méthode de Ritz, qui ne prend en compte qu'un seul mode dans chaque domaine, est déjà de très bonne qualité par rapport à la précision obtenue avec $P = 19$ fonctions radiales prises en compte.

De plus, l'augmentation du nombre de fonctions radiales implique une diminution exponentielle de l'erreur d'ordre supérieur à 4 sans les fonctions de correction. La convergence est rapide, comme cela est représenté sur le graphique (b).

D'après l'étude de la convergence du modèle avec les fonctions de correction, on remarque que ce modèle converge plus lentement que sans l'utilisation des fonctions de correction. Cela signifie-t-il que les solutions sont plus précises sans l'utilisation de ces fonctions ?

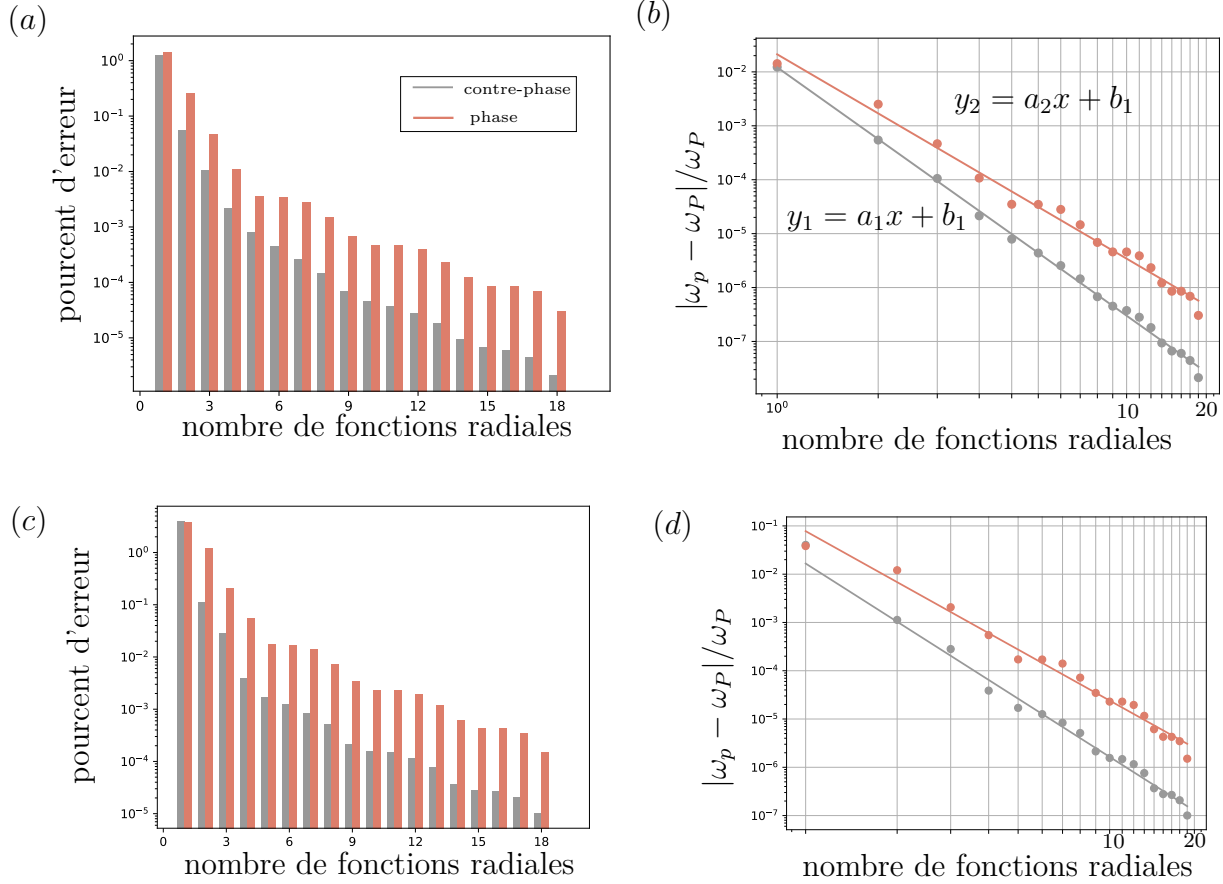


FIGURE 5.10 Étude de convergence du système; (a) représente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de fonctions radiales prises en compte sans fonction de correction; (b) représente l'évolution de l'erreur sur une échelle loglog, avec un tracé de régressions linéaires correspondantes : $(a_1, a_2) \approx (-4.42, -4.42)$ sans fonction de correction; (c) représente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de fonctions radiales prises en compte sans fonction de correction; (d) représente l'évolution de l'erreur sur une échelle loglog, avec un tracé de régressions linéaires correspondantes : $(a_1, a_2) \approx (-3.8, -3.6)$ sans fonction de correction.

5.2.3 Brèves validation

Pendant le travail de recherche, l'aspect de validation a été négligé en raison de contraintes de temps et de motivation. En effet, l'attention s'est portée sur des modèles conceptuels qui sont relativement simples à modéliser mathématiquement, ce qui réduit l'importance de la validation par rapport à des modèles plus complexes. L'objectif principal était de déterminer si la physique générale est valide, plutôt que de vérifier si le modèle converge vers une solution très proche de la réalité. De plus, le modèle avec les fonctions de correction n'a pas fait l'objet d'une validation.

Plusieurs modèles de disques et de cavités ont été considérés pour la validation. Cette procédure de validation a été réalisée en utilisant Ansys APDL et en comparant certains résultats avec ceux de la littérature.

Modèle une structure et un domaine acoustique

Le premier modèle comparé à Ansys est un modèle très simple dans lequel seuls un disque et une cavité sont en contact. Le schéma du modèle avec les différentes dimensions est représenté sur la Figure 5.11. Les différents paramètres du problème sont répertoriés dans le tableau 5.6. Enfin, les fréquences propres obtenues sont répertoriées dans le tableau 5.7. Cette validation prouve que les résultats avec Ansys concordent avec le modèle de manière assez précise.

Modèle une structure et deux domaines acoustiques

Le modèle en question a l'allure présentée sur la Figure 5.12. L'avantage de ce système est qu'il a été étudié dans la littérature. Par exemple, Kang and Raman (2006) résout le système correspondant à ce modèle. De plus, Louyot et al. (2020) a étudié ce modèle en considérant un rayon infini pour la cavité acoustique, tout comme Presas et al. (2015) qui a considéré la continuité acoustique entre les domaines. Ces deux modèles sont représentés sur la Figure 5.13. De même, la validation permet de montrer que même pour une cavité avec une hauteur plus élevée, les résultats semblent concorder avec Ansys.

Les caractéristiques techniques utilisés dans le modèle de Kang and Raman (2006) sont répertoriés dans le tableau 5.8. Les validations avec ce modèle se trouvent dans le tableau 5.9.

Enfin, les caractéristiques des modèles de Louyot et al. (2020) et Presas et al. (2015) se trouvent dans le tableau 5.10. La comparaison des différents résultats se trouve dans le tableau 5.11. Il y a une disparité entre les résultats du modèle et les résultats de Louyot et al.

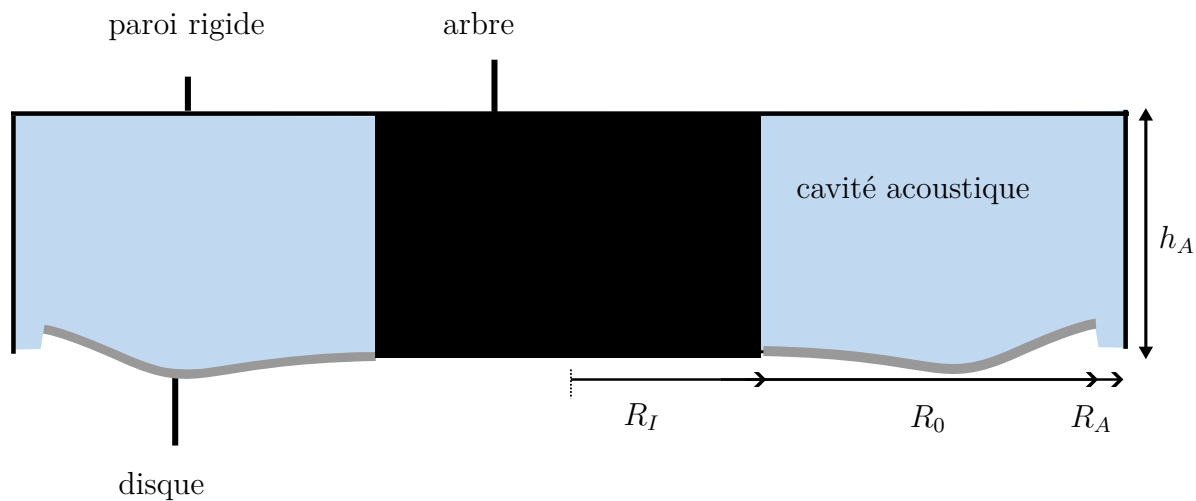


FIGURE 5.11 Interaction fluide-structure

TABLEAU 5.6 Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique

E	200	GPa
ν	0.3	
ρ_S	7680	kg/m^3
ρ_A	997	kg/m^3
R_0	0.2	m
R_A	0.207	m
R_I	0.025	m
h_S	0.01	m
h_A	0.1	m
c_0	1430	m/s

TABLEAU 5.7 Tableau de comparaison des modes entre Ansys et la méthode de Ritz pour le modèle de validation une structure et un domaine acoustique

mode	Ansys	Ritz	Différence relative (%)
(1, 0)	183.51	186.46	1.58
(2, 0)	280.67	283.8	1.10
(3, 0)	608.05	612.82	0.78
(4, 0)	1061.68	1073.4	1.09
(1, 1)	1405.95	1433.75	1.94
(5, 0)	1622.11	1646.47	1.48
(2, 1)	1825.24	1861.82	1.96

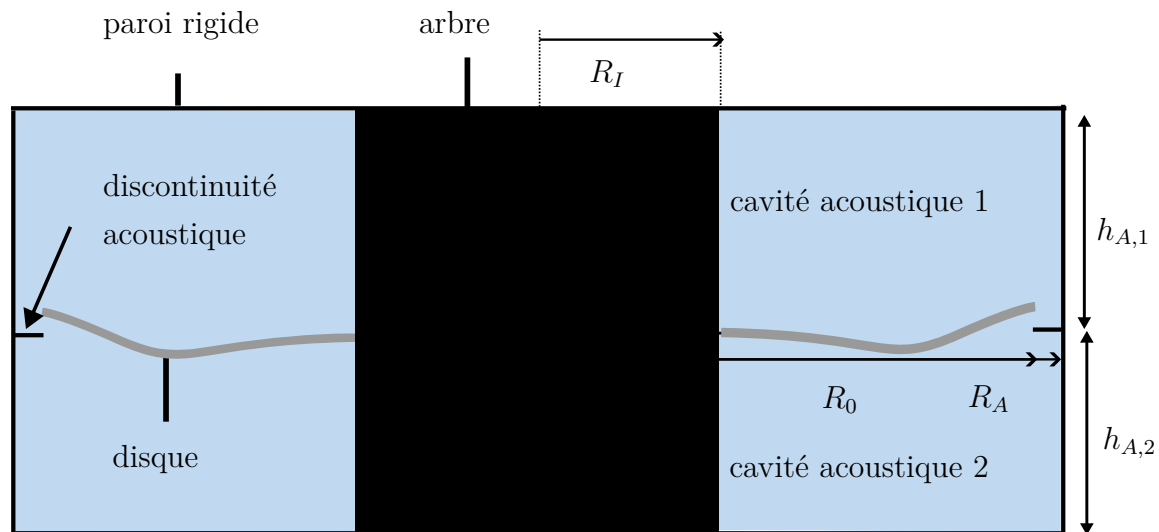


FIGURE 5.12 Schéma représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 2 domaines acoustiques

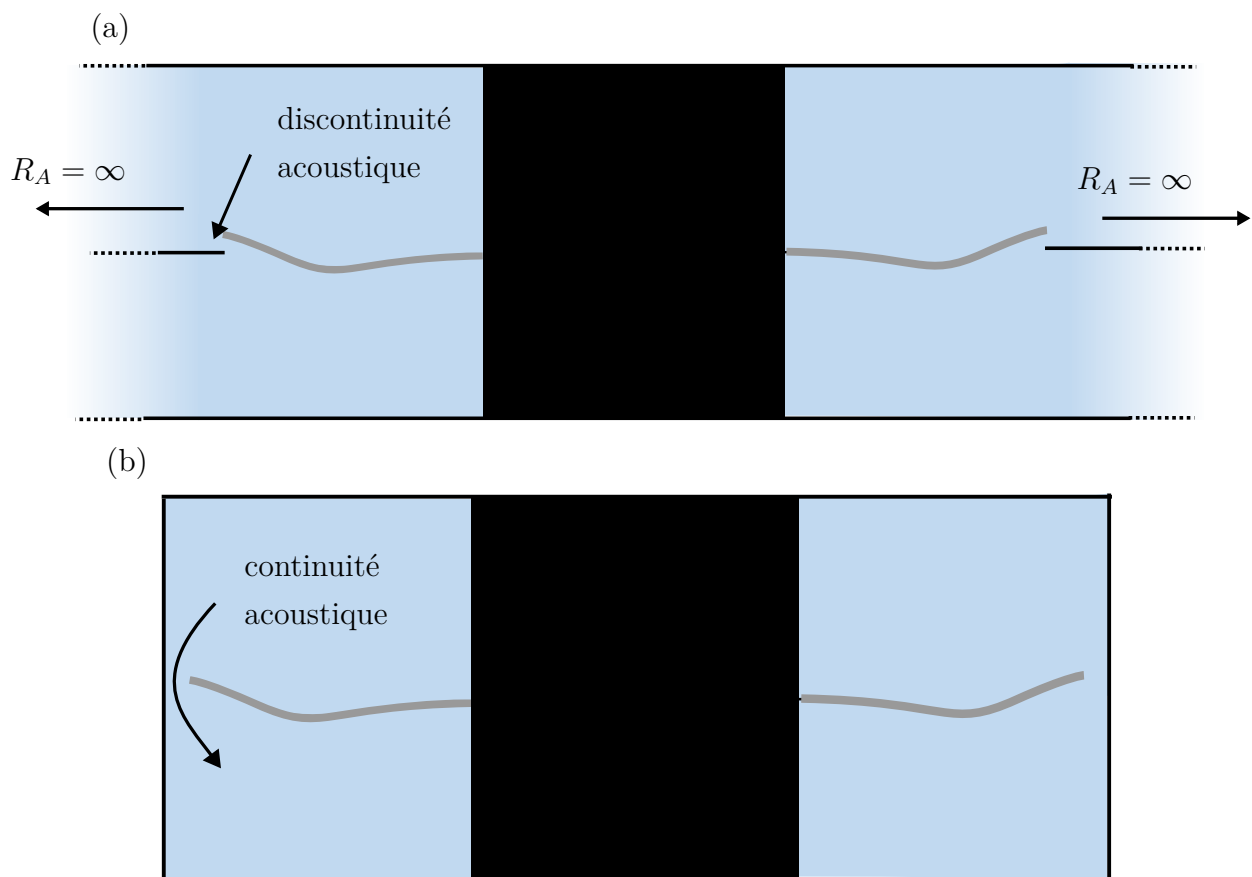


FIGURE 5.13 Schéma représentant les modèles de la littérature utilisés pour la validation ; (a) modèle de Louyot ; (b) modèle de Presas

TABLEAU 5.8 Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique

E	71	GPa
ν	0.33	
ρ_S	7680	kg/m^3
ρ_A	1.2	kg/m^3
R_0	4.74	cm
R_A	4.94	cm
R_I	1.56	cm
h_S	0.079	cm
$h_{A,1}$	1	cm
$h_{A,2}$	1	cm
c_0	343	m/s

TABLEAU 5.9 Tableau de comparaison des résultats entre avec le modèle de Kang, Ansys et le modèle de Ritz.

Mode	Kang	Ansys	Ritz	Différence relative Kang (%)	Différence relative Ansys (%)
(3, 0)	1024	1056	1061	3.49	0.47
(3, 1)	4890	5088	5124	4.57	0.70

(2020) et Presas et al. (2015) qui provient du fait que les modèles sont différents dans chacun des cas. Cependant, les solutions du modèle sont tout de même proches des résultats Ansys sans continuité. On remarque que les fréquences des modes calculés avec la méthode de Ritz sont inférieures aux résultats des autres modèles.

5.2.4 Solutions

On rappelle que les solutions correspondent à la décomposition radiale des fonctions définissant les différents domaines. Pour un diamètre nodal fixé, nous nous concentrons sur l'analyse des deux premiers modes de vibration, qui correspondent au mode de vibration en contre-phase et en phase.

Dans cette partie, nous visualisons et confrontons les résultats pour une famille de paramètres donnée pour chacune des deux méthodes : avec et sans les fonctions polynomiales de correction décrites dans la section 5.1.5, qui permettent de prendre en compte la vitesse perpendiculaire à la paroi.

Les paramètres pris en compte pour cette étude sont : $F_S = 1.5$ et $F_A = 0.8$. Ces paramètres, pris aux alentours de l'unité, permettent de situer la solution dans la zone d'intérêt, c'est-à-dire lorsque les modes de chaque domaine sont proches fréquemment. Une illustration de la solution du premier mode de couplage, un mode varicose où le rotor et le stator sont en contre-phase, est tracée sur la Figure 5.14.

Tout d'abord, observons les modes de disques qui apparaissent dans chacun des domaines suite à l'application de la méthode de Ritz. La Figure 5.15 montre les solutions dans chacun des domaines pour les deux modes de vibration. On remarque effectivement que les maximums d'amplitude du rotor selon θ correspondent aux minimums pour le mode en contre-phase, et vice versa pour le mode en phase. L'échelle fournie dans ces figures est l'échelle des modes propres, qui correspond aux déplacements pour le rotor et le stator, et à l'amplitude du potentiel de vitesse pour la cavité acoustique.

Il est possible de comparer les déplacements du rotor et du stator entre eux : le rotor semble avoir des amplitudes de déplacement plus importantes que le stator. Cependant, il est impossible de comparer directement le potentiel de vitesse au déplacement des structures sans passer par une interprétation énergétique.

On peut remarquer que le mode acoustique qui semble être mis en jeu est plus complexe pour le mode varicose que pour le mode en phase. En effet, le mode en phase fait intervenir $p = 1$ diamètre nodal, tandis que le mode varicose ne fait intervenir aucun diamètre nodal.

Afin d'illustrer l'effet des fonctions de correction sur la forme des modes, nous avons tracé les

TABLEAU 5.10 Tableau représentant les caractéristiques prises en compte pour la validation 1 structure - 1 domaine acoustique

E	200	GPa
ν	0.27	
ρ_S	7680	kg/m^3
ρ_A	997	kg/m^3
R_0	0.198	m
R_A	0.205	m
R_I	0.025	m
h_S	0.079	m
$h_{A,1}$	0.01	m
$h_{A,2}$	0.097	m
c_0	∞	m/s

TABLEAU 5.11 Tableau de comparaison entre Louyot, Exp Presas, Ansys sans continuité acc., Ansys avec continuité acc. et la méthode de Ritz sans continuité acc.

Mode	Louyot	Exp Presas	Ansys sans continuité acc.	Ansys avec continuité acc.	Ritz sans continuité acc.
(2, 0)	117.1	127	94	142	96
(3, 0)	312.2	321	261	353	268
(4, 0)	626	642	538	676	557

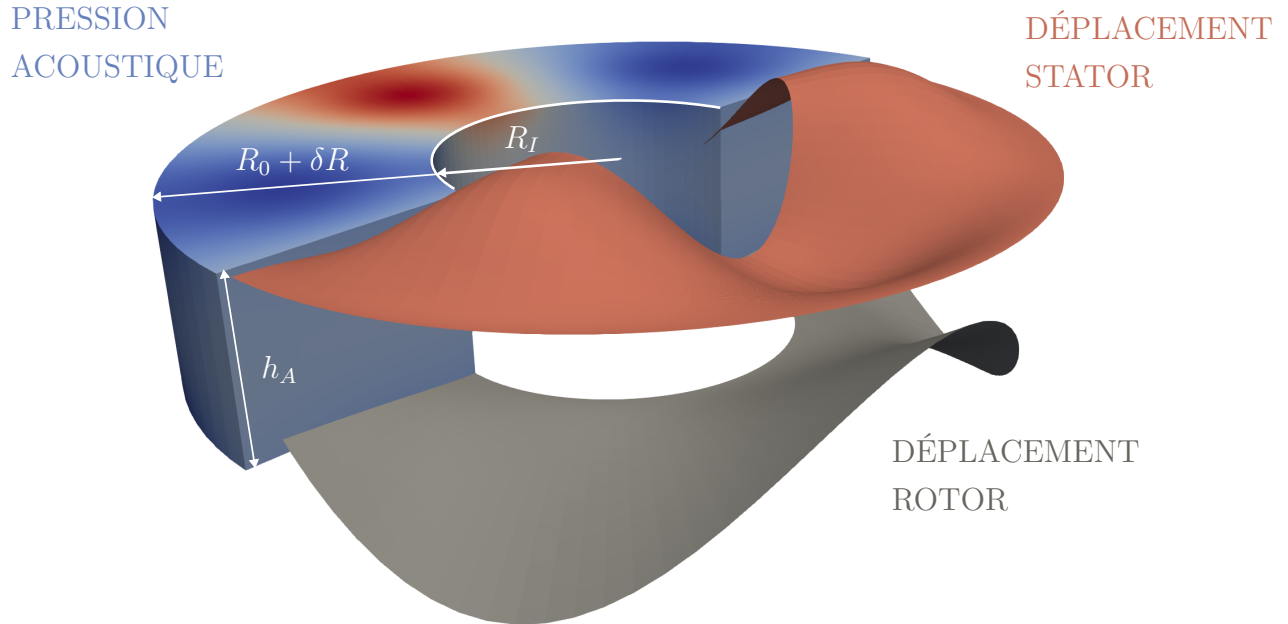


FIGURE 5.14 Visualisation 3D du premier mode de vibration de type varicose.

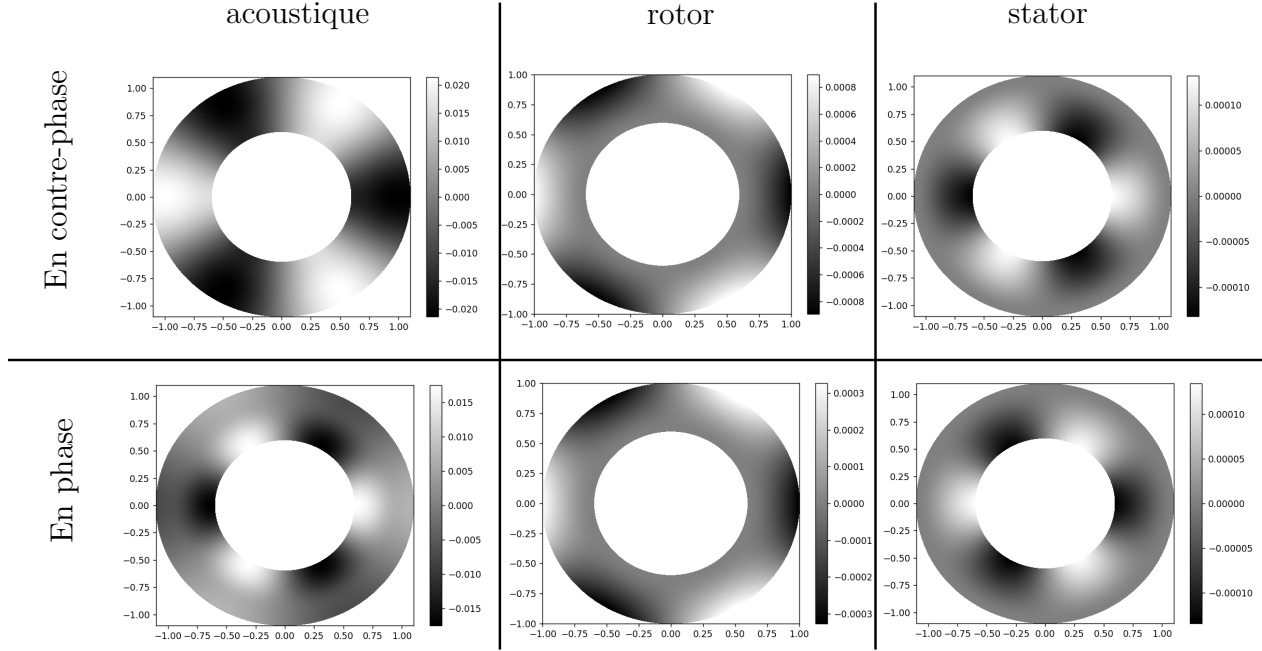


FIGURE 5.15 Tracé des solutions en phase et en contre-phase, les dégradés sur l'échelle de gris correspond à l'amplitude de la vibration

solutions dans le plan de coupe radial et longitudinal sur la Figure 5.16. Cette vue permet de visualiser les variations longitudinales du champ de pression.

Sur les figures (a) et (b), qui correspondent aux modes sans l'utilisation des fonctions de correction, les modes n'ont naturellement aucune variation longitudinale, seulement une variation radiale. En revanche, les modes (c) et (d) présentent une grande variation de pression longitudinale, ce qui indique une vitesse non négligeable à proximité des parois. Cette observation est en désaccord avec l'analyse du système développée dans la section 4.2. En effet, il a été démontré que pour des cavités de faible épaisseur, la vitesse selon z doit être négligeable par rapport à la vitesse selon r .

Par ailleurs, comme sur la Figure 5.15, l'amplitude des déplacements des structures est comparable, mais il n'est pas possible de les comparer directement avec le dégradé qui représente le champ de potentiel de vitesse.

L'avantage d'avoir les solutions décomposées sous la forme d'un système modal est que chaque amplitude de degré de liberté correspond à un mode qui a une signification physique globale. Ainsi, le calcul de l'énergie est très simple. En revanche, les solutions obtenues à partir de modèles par éléments finis, où les nœuds sont des degrés de liberté ayant une signification physique locale, sont plus complexes à interpréter en termes d'énergie, qui est une grandeur macroscopique.

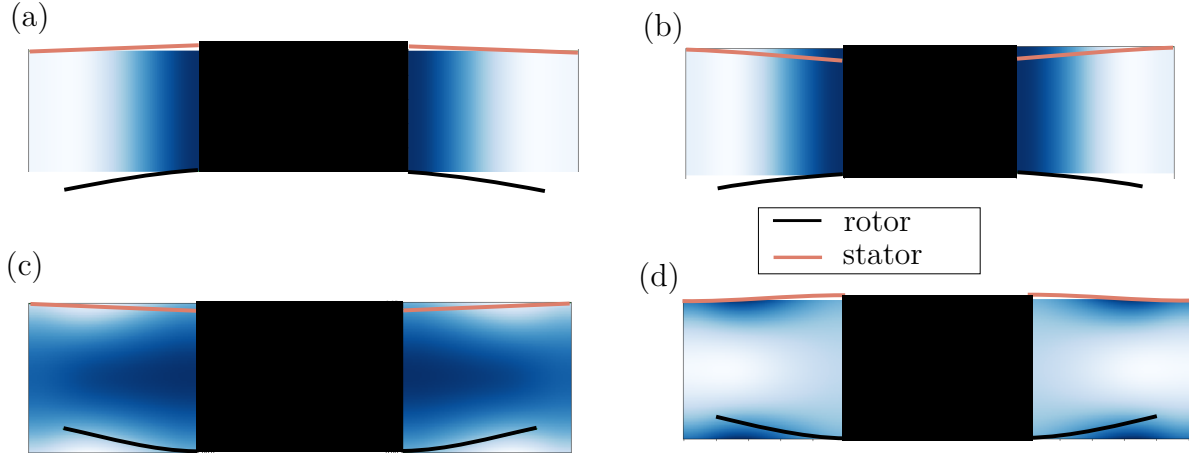


FIGURE 5.16 Tracé des solutions en phase et en contre-phase sur la coupe longitudinale ; (a) et (b) respectivement mode varicose et en phase sans les fonctions de corrections longitudinales ; (c) et (d) respectivement mode varicose et en phase avec les fonctions de corrections longitudinales

Les solutions du modèle se résument donc par la contribution énergétique de chaque fonction, où chaque fonction radiale est représentée par le couple (n, p) correspondant au nombre de diamètres et de cercles nodaux. Ainsi, la solution sans fonction de correction, qui est tracée sur la figure 5.15, peut être résumée dans le tableau 5.12. De même, ces contributions peuvent être représentées graphiquement à l'aide d'un diagramme en bâtons, comme illustré sur la figure 5.17. On remarque que le mode en contre-phase a une fréquence propre inférieure à celle du mode en phase. La fréquence en contre-phase est égale à $0.59 < 1$, ce qui correspond au mode fondamental du rotor avec une diminution de fréquence en présence du milieu acoustique. Le mode en phase a une fréquence adimensionnelle égale à $1.2 < 1.5 = F_S$, ce qui correspond au mode fondamental du couvercle avec également une diminution en présence de l'eau. De plus, comme mentionné précédemment lors de l'analyse visuelle des modes de disque 5.15, le domaine acoustique pour le mode en phase présente une contribution non négligeable du mode $(3, 1)$.

Si l'on compare ces résultats avec les résultats obtenus en considérant les fonctions de correction longitudinales (5.12), on remarque que les fréquences des modes obtenues sont proches des fréquences obtenues sans l'utilisation des fonctions : $0.52 \approx 0.59$ pour le mode varicose et $1.18 \approx 1.20$ pour le mode en phase. On remarque également que les fréquences de vibrations

avec la correction sont plus basses que sans la correction. Cela s'explique par le fait qu'en ajoutant des degrés de liberté, on augmente la taille de l'espace sur lequel est appliquée la méthode de Ritz. Or, l'évaluation des fréquences propres correspond à un problème de minimisation (quotient de Rayleigh-Ritz), et en augmentant la taille de l'espace de recherche du minimum, on diminue nécessairement ce minimum.

En ce qui concerne l'évaluation des contributions énergétiques, pour le mode varicose, les contributions des deux méthodes se ressemblent. Cependant, pour le mode en phase, le mode acoustique semble dominer le système dans le cas des fonctions de correction, tandis que dans le cas sans correction, c'est le domaine du rotor qui domine. La libération des degrés de liberté semble ainsi permettre d'augmenter la contribution énergétique du fluide. Il est possible que cette contribution énergétique soit surévaluée en considérant la vitesse perpendiculaire aux parois, qui est normalement négligeable.

TABLEAU 5.12 Contributions énergétiques de chaque fonctions pour les différents domaines

Fonction	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)
fréquence - mode	0.59	contre-phase	
acoustique	0.71	0.0019	-
rotor	0.27	5×10^{-4}	-
stator	-	0.009	2×10^{-4}
fréquence - mode	1.20	phase	
acoustique	0.28	0.1	0.01
rotor	0.47	1.1×10^{-3}	-
stator	-	0.1313	1×10^{-5}

TABLEAU 5.13 Contributions énergétiques de chaque fonctions pour les différents domaines

Fonction	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)
fréquence - mode	0.52	contre-phase	
acoustique	0.75	-	-
rotor	0.19	4×10^{-4}	-
stator	-	0.0068	-
fréquence - mode	1.18	phase	
acoustique	0.06	0.68	-
rotor	0.02	2×10^{-3}	-
stator	-	0.1	1.2×10^{-4}

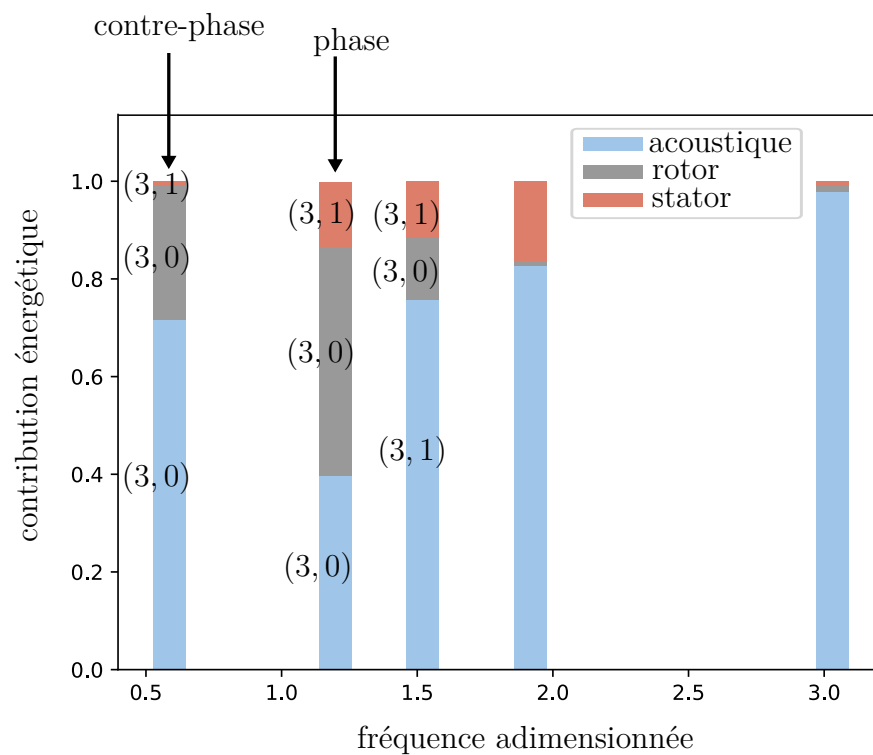


FIGURE 5.17 Diagramme en bâton représentant les contributions de tout les domaines sur chaque solution, les barre représentant les solutions sont distribuées selon leur fréquence adimensionnée. Pour les trois premières solutions, le couple (n, p) de la fonction qui contribue le plus sur chaque domaine est affichée

5.2.5 Études paramétrique

Les études paramétriques ont plusieurs objectifs. Premièrement, elles visent à confirmer les observations faites sur le modèle simplifié présenté dans la section 4.2.4. De plus, elles permettent de prendre conscience des difficultés potentielles liées à l'analyse des régions de couplage d'un système à plusieurs degrés de liberté. Ces études vont également permettre de comparer les méthodes avec et sans les fonctions de correction. Enfin, elles permettent de tirer des conclusions sur l'effet du stator sur les vibrations du système complet, ainsi que sur la rotation du rotor, en analysant la figure d'écartement des modes et la réponse structurelle à une excitation RSI lors de la rotation du rotor.

Paramètres F_A et F_C

L'étude paramétrique de F_A et F_C est réalisée en considérant différents scénarios décrits dans le tableau 5.14.

En fixant l'ensemble des paramètres et en faisant varier F_A , la Figure 5.18 illustre l'évolution des valeurs propres. On peut remarquer que les valeurs propres des modes acoustiques augmentent avec ce paramètre et se rapprochent du croisement des valeurs propres structurales. Toutes les valeurs propres s'écartent, mais la taille des zones d'écartement varie en fonction des modes propres. Cela peut s'expliquer par le fait que certains modes acoustiques ont une corrélation spatiale très faible avec certains modes structuraux, ce qui entraîne un croisement sans interaction, tandis que d'autres ont une corrélation spatiale très élevée avec les modes structuraux, ce qui conduit à un écartement significatif des valeurs propres sur une plage plus large.

De plus, la Figure (b) montre comment les premiers modes, qui étaient initialement des modes individuels du rotor et du stator, se transforment en modes de couplage en phase et en contre-phase au fur et à mesure de l'approche des valeurs propres acoustiques. Cette transition s'effectue à travers une cascade d'écartement similaire à celle illustrée dans la figure 4.2 du chapitre précédent.

La Figure 5.19 résume l'ensemble des résultats concernant la région de transition du premier mode et compare les solutions obtenues avec les deux modèles (avec et sans fonctions polynomiales de correction). Tout d'abord, on observe les mêmes types d'évolution des valeurs propres que pour le modèle à deux degrés de liberté :

- pour les deux modèles, on observe une région d'écartement ;
- Pour les deux modèles, la contribution énergétique passe d'un mode totalement acoustique dans la région compressible à un mode où les énergies sont mélangées dans la

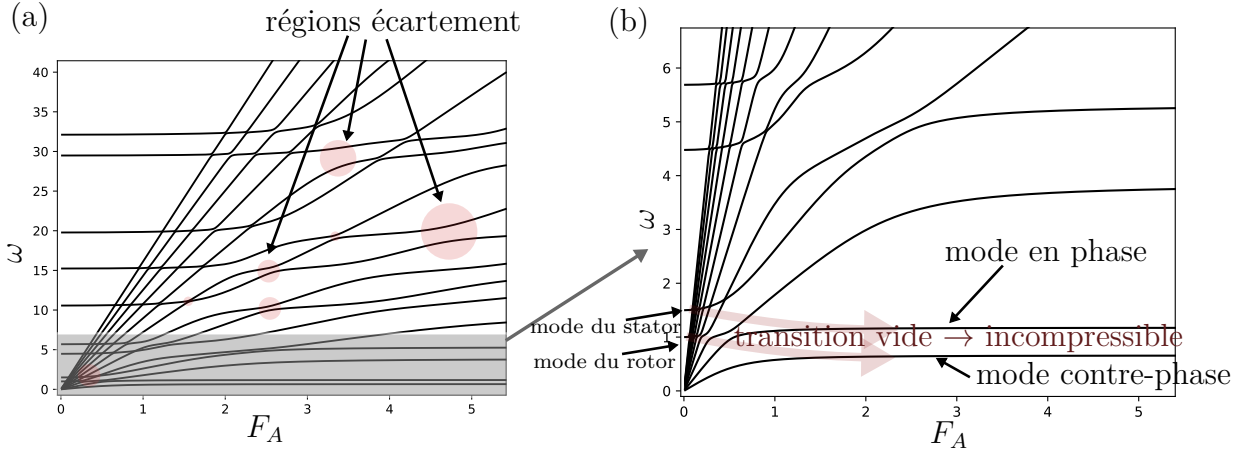


FIGURE 5.18 Évolution des valeurs propres en fonction de F_A ; (a) Visualisation sur une grande plage de solution ω ; (b) Visualisation sur une plage plus réduite qui fait apparaître la transition premiers modes de couplage.

région incompressible ;

L'effet de la rigidité du stator est important. Tout d'abord, en ce qui concerne les valeurs propres, dans la région incompressible, celles-ci diminuent lorsque F_S diminue et donc lorsque la fréquence du stator se rapproche de celle du rotor. En effet, lorsque le stator est souple, il offre une flexibilité supplémentaire au système complet. Il semble qu'entre $F_S = 2$ et $F_S = \infty$, il y a peu d'évolution de la valeur propre. En effet, de la même manière que pour l'évolution de F_A , le système atteint rapidement une asymptote qui correspond à la fréquence du système si le couvercle était considéré comme infiniment rigide. En rendant le couvercle flexible, on libère des degrés de liberté pour le système complet, ce qui élargit l'espace des solutions et conduit à une pulsation minimale plus faible.

Le paramètre F_C influence également les contributions énergétiques finales du système. En effet, pour les deux modèles, lorsque F_C se rapproche de 1 et que la fréquence de vibration du stator se rapproche de celle du rotor, l'énergie totale du système structural se répartit entre les deux structures. En revanche, lorsque $F_S = \infty$, l'énergie totale du système est entièrement concentrée sur le rotor.

Finalement, le paramètre F_C a également un impact sur la zone de transition. En diminuant F_C , le système devient plus souple, ce qui réduit la plage de F_A sur laquelle la transition se produit.

En comparant les résultats des deux méthodes, on constate que l'utilisation des fonctions de correction réduit la taille de la zone de transition et l'importance de la contribution

énergétique structurelle dans le système global.

Enfin, la figure 5.20 présente l'évolution de la puissance transmise à chaque structure en fonction de F_A , ces résultats étant obtenus avec les fonctions de correction. On observe une augmentation rapide de cette énergie pour de faibles valeurs de F_A , passant de la zone compressible à la zone de transition. Ensuite, cette énergie atteint un maximum au cœur de la zone de transition, puis elle se stabilise à une valeur asymptotique non négligeable dans la zone incompressible.

Séparation des modes avec Ω_R

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'influence de la rotation du rotor dans le système. Tout d'abord, nous étudions l'effet du dédoublement des modes sur les deux premiers modes de vibration. La figure 5.21 illustre ce phénomène de dédoublement des modes qui se produit lorsque le rotor est soumis à une rotation.

Nous observons le même phénomène que celui décrit dans la partie 4.2.4 pour les deux modes de vibration. De plus, l'écart entre les modes est plus important lorsque le système est considéré dans le domaine incompressible.

Étude harmonique de l'excitation (RSI)

On effectue une étude harmonique pour analyser la réponse du système à une excitation harmonique de la vitesse extérieure, qui correspond à la perturbation résultant de l'interaction rotor-stator. Nous étudions plus précisément la réponse en amplitude des différentes structures en balayant les fréquences de rotation du rotor $\Omega_R = \omega_{ex}/rZ_B$. La figure 5.22 illustre cette réponse harmonique, où trois courbes sont tracées pour différentes valeurs de F_A , permettant d'observer la réponse dans chacune des zones de couplage.

On observe que la courbe correspondant à la zone acoustique présente plusieurs harmoniques très rapprochées, situées à de petites fréquences. En effet, les fréquences adimensionnelles

TABLEAU 5.14 Les différents scénarios considérés pour l'étude paramétrique

F_S (rigidité stator vs. rotor)		F_A (rigidité acoustique vs. rotor)	
Scénario	Valeur	Scénario	Valeur
rigidité stator = rigidité rotor	1	rotor rigide, énergie échangée optimale	0.1
stator modérément rigide	2	flexibilité du rotor = compressibilité acoustique	0.3
stator infiniment rigide	∞	cas incompressible	∞

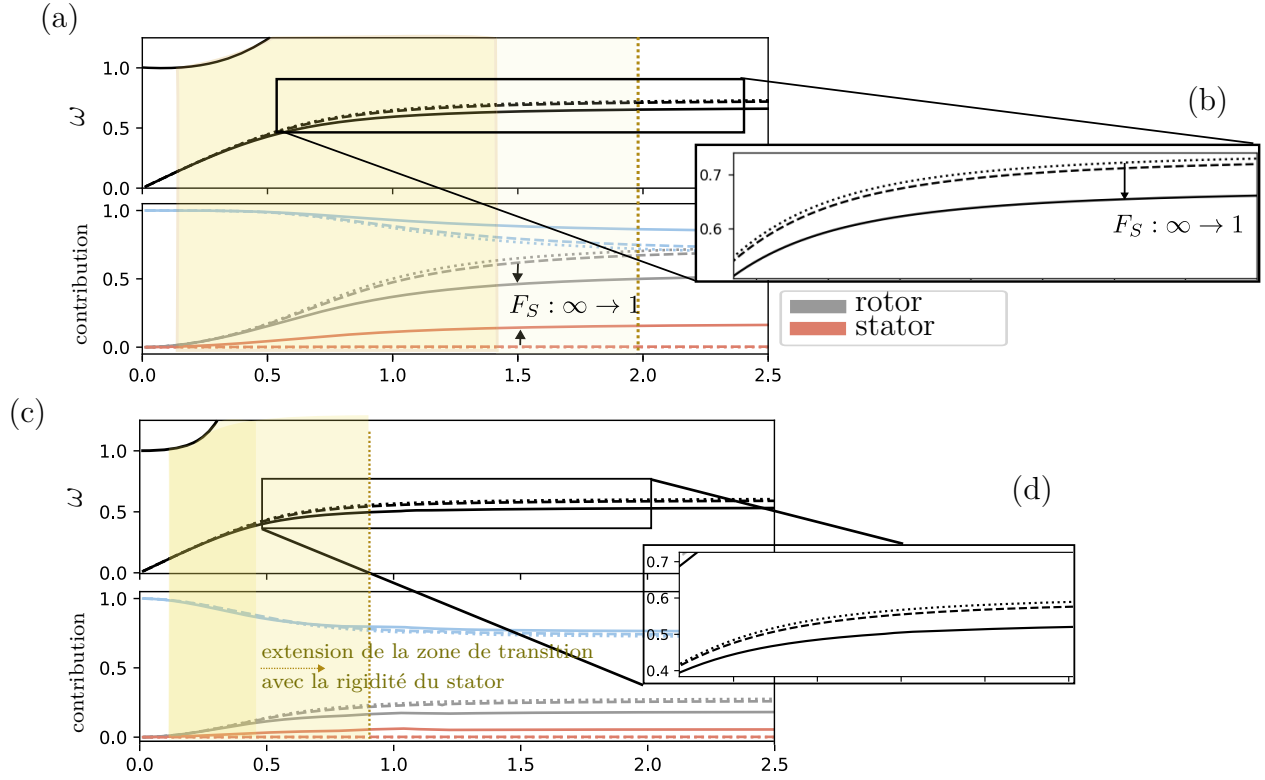


FIGURE 5.19 Évolution de la pulsation propre et des contributions énergétiques du premier mode : en contre-phase avec F_A ; (a) sans fonction de corrections ; (b) grossissement sur la région d'écartement sans correction ; (c) avec fonction de corrections ; (d) grossissement sur la région d'écartement avec correction ; (—) : $F_C = 1$; co-rotation ; (- - -) : $F_C = 2$: contre-rotation, (·····) : $F_C = \infty$.

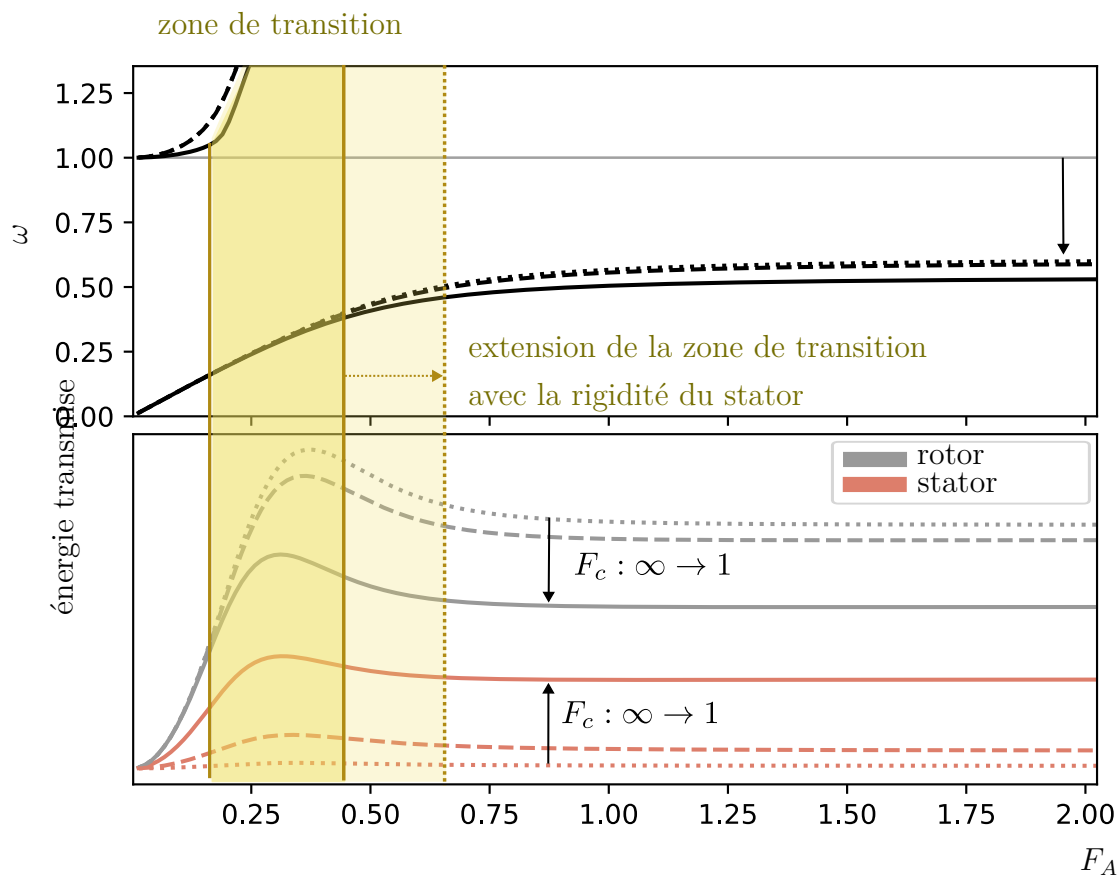
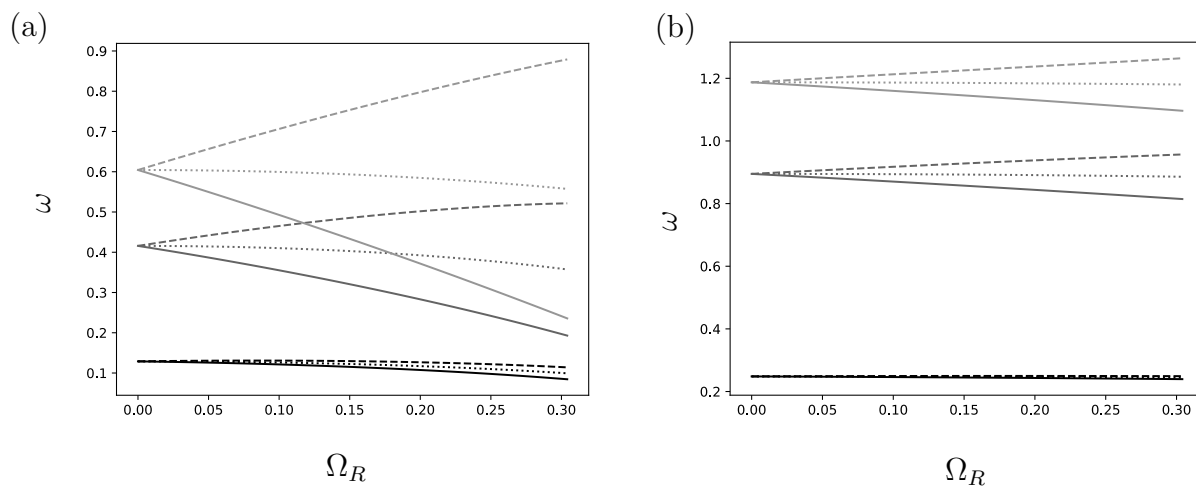


FIGURE 5.20 Résultat vitesse orthogonale non-nulle

FIGURE 5.21 Séparation des modes ; (a) mode en contre-phase, (b) mode en phase ; (- - -) : co-rotation, (—) : contre-rotation ; (····) : moyenne, dégradé du gris au noir : $F_A = 0.3$, $F_A = 1$, $F_A = \infty$

acoustiques sont proportionnelles à F_A . Il s'agit de modes entièrement acoustiques qui ont du mal à exciter la structure en raison de sa rigidité élevée. Pour ces modes, le phénomène de dédoublement dû à la rotation n'est pas prononcé.

Ensuite, à mesure que le paramètre F_A augmente, ces modes acoustiques commencent à s'éloigner et laissent place à des modes de transition vers la zone incompressible. Ces modes de transition possèdent à la fois des caractéristiques des modes acoustiques et des modes structuraux. Leurs pics de résonance sont légèrement moins étroits que ceux des modes acoustiques, mais beaucoup plus étroits que ceux des harmoniques dans la zone de couplage incompressible. Le maximum de transmission se situe dans cette zone. Dans la zone dite incompressible, le phénomène de "mode-split" est très prononcé, conformément à l'analyse modale préalablement réalisée. Comme pour l'étude harmonique du système à deux degrés de liberté, l'amplitude du pic est modérée mais sa largeur est très grande. Il est important de souligner ce point, car pour des excitations aléatoires présentant une distribution d'énergie fréquentielle étendue, c'est le mode de couplage incompressible qui présente la réponse la plus problématique. En revanche, si l'excitation présente une harmonique bien définie qui correspond à la résonance pour un système en transition entre compressible et incompressible, la réponse à ce type de résonance pourrait entraîner des dommages importants.

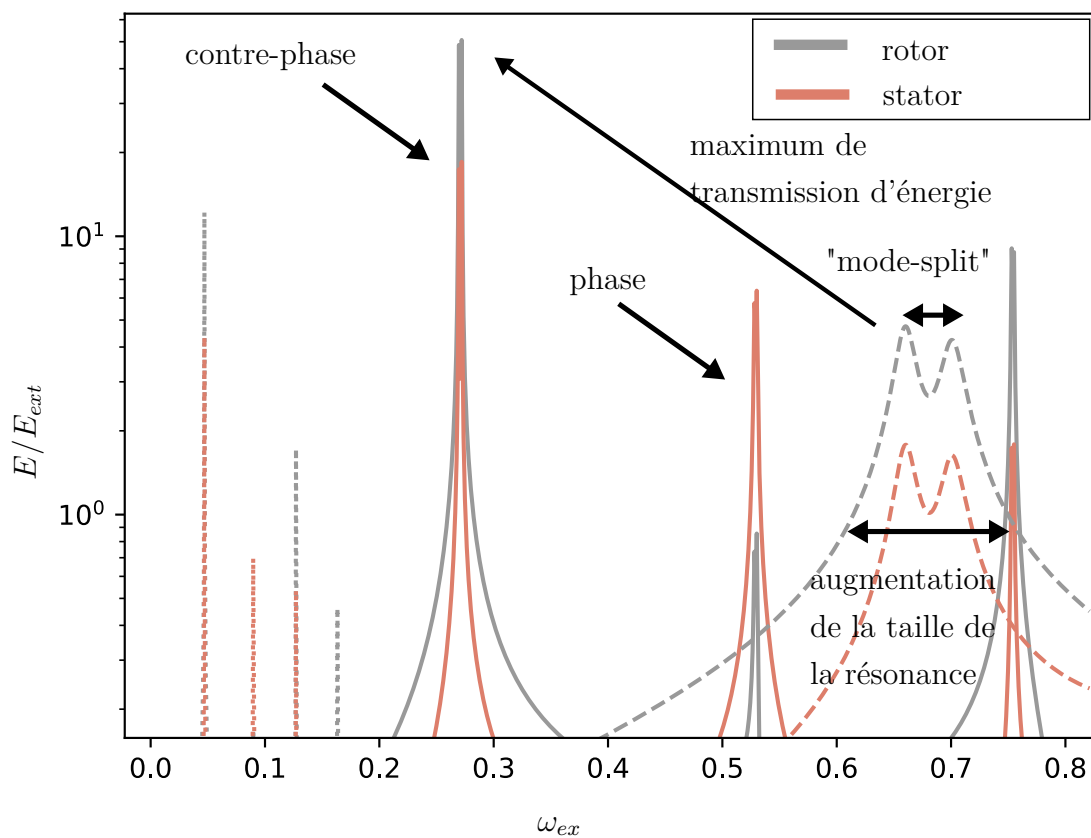


FIGURE 5.22 Réponse harmonique à une excitation de type RSI; (- - -) : $F_A = \infty$ zone de couplage incompressible, (—) : $F_A = 0.3$ zone de transition; (····) : $F_A = 0.1$ zone acoustique.

CHAPITRE 6 Discussion, réflexions pratiques et ouverture

6.1 Cas pratique

Afin d'illustrer les différents résultats, nous examinerons un cas pratique de vibrations de turbine hydraulique. Nous considérons une turbine hydraulique qui présente des caractéristiques mécaniques et vibratoires typiques d'une turbine Francis à haute chute. La fréquence vibration $f_{3,0}$ est tirée d'une analyse d'éléments finis sur une géométrie réelle.

TABLEAU 6.1 Caractéristiques mécaniques et géométrique de la turbine considéré

Paramètre	ρ	ν	E	R_0	h	R_S	$f_{3,0}$
Valeur	7680	0.3	210×10^9	4	0.2	0.2	360
Unité	kg/m^3	-	Pa	m	m	m	Hz

Où R_0 représente le rayon de la roue, R_S représente le rayon de l'arbre (shaft) et $f_{3,0}$ est la fréquence de vibration correspondant au mode de disque $n, p = 3, 0$ du rotor.

En effet, l'ensemble de ces paramètres est redondant car il suffit de ρ , ν , E , h , R_0 et R_d pour calculer la fréquence $f_{3,0}$. D'après la formule 5.7, la fréquence de vibration hypothétique du disque équivalent, $f_{3,0}^H$, est seulement de 30 Hz, soit plus de 10 fois plus faible que la fréquence attendue $f_{3,0}$.

Comme la roue de la turbine n'est pas un anneau d'épaisseur uniforme, le disque équivalent a des amplitudes de vibrations bien plus élevés à l'extérieur qu'en son centre, ainsi, il est possible de considérer que le rayon intérieur R_I qui doit être considéré n'est pas le rayon de l'arbre mais un rayon équivalent. Un rayon équivalent de l'ordre de $0.6R_0$ semble être acceptable en observant la déformation de la roue pour ce mode de vibration.

De plus, la présence d'aubes et la géométrie tridimensionnelle de la roue de la turbine éloignent ses fréquences naturelles de vibration de celles d'un simple disque en la rigidifiant. Par conséquent, l'utilisation de la formule 5.7 est incorrecte dans ce cas. Cependant, dans le contexte donné, la fréquence de vibration est fournie, ce qui permet de déterminer la forme de vibration et de calculer les coefficients d'intercorrélation Γ avec l'eau environnante en supposant la forme de vibration du disque. De plus, les valeurs des coefficients ρ et h permettent d'obtenir l'inertie du disque par rapport à celle de l'eau, ce qui est pris en compte dans les équations pour calculer le facteur AVMI β .

En ce qui concerne les fréquences de vibration de la cavité remplie d'eau, on considère une

cavité acoustique de rayon similaire avec une vitesse du son dans l'eau d'environ 1500m/s et une masse volumique de $\rho_A = 1000, \text{kg/m}^3$. La fréquence de vibration du mode (3, 0) est d'environ $f_{3,0}^A = 220\text{Hz}$. De plus, en supposant que la hauteur H de la cavité au-dessus de la roue est de 20cm, on peut déduire les nombres adimensionnels de fréquence et de masse. Les différentes valeurs des coefficients non dimensionnels sont indiquées dans le tableau 6.2. $F_A = 0.8 \approx 1$, ce qui indique qu'il se trouve potentiellement dans la zone de transition.

TABLEAU 6.2 Valeurs des nombres adimensionnels

Variable	F_A	M_A	$\tilde{h}_A$
Valeur	0.6	0.13	0.05

On peut calculer le facteur AVMI β correspondant au système à deux degrés de liberté en utilisant l'équation 4.27 et en considérant une intercorrélacion spatiale $\Gamma \approx 0.5$. Ainsi, on obtient $\beta = 13$. C'est un facteur AVMI élevé caractéristique des applications des turbines. En observant le graphique des zones de comportement dans la figure 4.9 (c), on remarque que pour un couple $(\beta, F_A) = (0.8, 13)$, le système se situe dans la zone de couplage acoustique en transition, proche de la zone incompressible. De plus, d'après le graphique 4.8, le système a passé la zone d'écartement des modes et se trouve donc dans la zone asymptotique en termes fréquentiel, ainsi $f_C = f_{3,0}/\sqrt{1+\beta} = 115\text{Hz}$

Supposons maintenant que nous prenions en compte non seulement l'épaisseur de la cavité au-dessus de la roue, mais aussi l'épaisseur située en dessous du disque supérieur de la roue, avec $h_I = 80\text{cm}$. Ainsi, nous avons une épaisseur acoustique totale de $h_A = 1\text{m}$, où $h_I < R_0$. Dans ce cas, l'approximation du disque pour la cavité reste plausible, et nous obtenons une valeur d'environ $\beta = 3$. Le système se trouve encore dans la zone de transition énergétique et il se situe aussi dans la zone de transition fréquentielle. Pour ce type de mode, qui se trouve en plein dans la zone de transition, il est possible de calculer une estimation rapide de la fréquence naturelle en prenant la moyenne entre la fréquence naturelle incompressible et la fréquence naturelle acoustique en fin de comportement compressible :

$$f_{eq} = (f_{3,0}^S/\sqrt{1+\beta} + f_{3,0}^S/\sqrt{\beta})/2 = f_{3,0}^S \times \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}) = 150\text{Hz}. \quad (6.1)$$

ce qui est plus faible que la fréquence incompressible qui vaudrait 180Hz pour $\beta = 3$.

Dans les deux cas, le système se trouve dans une zone de transition, ce qui nécessite une étude complète et précise de la réponse du système à une excitation acoustique.

Cette partie a illustré comment la théorie développée précédemment peut être rapidement appliquée à un cas d'utilisation pour le dimensionnement d'une turbine hydraulique. L'esti-

mation des deux paramètres adimensionnels F_A et β peut fournir une première approximation de la zone de couplage dans laquelle se trouve le système.

6.2 Limites et ouverture de la recherche

La recherche effectuée est principalement conceptuelle et n'a pas été spécifiquement axée sur une confrontation avec des cas pratiques. Bien que certaines validations aient été réalisées avec des paramètres spécifiques, il aurait été intéressant de mener des études paramétriques en utilisant des modèles Ansys appropriés pour comparer le comportement du système aux abords des zones de transition acoustique-structure.

De plus, le modèle pourrait être amélioré et utilisé de différentes manières pour représenter de manière plus précise les géométries spécifiques des roues de turbines hydrauliques. Par exemple, le développement de la continuité acoustique pourrait être approfondi pour modéliser de manière globale la cavité située sous le disque supérieur de la roue de la turbine. Ensuite, une analyse détaillée du modèle unidimensionnel pourrait être effectuée pour mieux comprendre l'interaction des résonances acoustiques entre les aubes de la roue et le couvercle supérieur.

Pour pousser les études numériques encore plus loin et permettre une interprétation plus précise des résultats, il serait intéressant d'étudier le comportement d'une roue à géométrie complexe avec une chambre acoustique.

Enfin, il existe peu de résultats expérimentaux dans la littérature concernant l'interaction acoustique-structure qui peut se produire dans les turbines hydrauliques. Ainsi un travail expérimental pour évaluer ce type de d'interaction serait très intéressant. L'évaluation de ces interactions pourrait être développée en analysant la réponse fréquentielle de la roue à une excitation harmonique variable du fluide. En effet, à partir de l'épaisseur et de l'intensité des pics de résonances il est possible d'identifier dans quel zone spécifique d'interaction (compressible, incompressible ou transition) le système se trouve.

Études dans la continuité directe

Tout d'abord, ce travail a démontré la puissance des modèles à faible nombre de degrés de liberté pour l'analyse de ce type d'interaction. Cependant, il reste encore plusieurs résultats à tirer et à préciser. Par exemple, l'analyse harmonique qui a été effectuée est assez limitée et mériterait d'être étudiée sous l'angle des deux paramètres F_A et β , plutôt que de se concentrer uniquement sur F_A . De plus, il serait intéressant d'explorer les zones de stabilité en utilisant l'équation des valeurs propres pour le "mode-split" acoustique, de manière similaire à ce qui

a été fait par Louyot et al. (2020) pour le cas incompressible.

De plus, au cours de ce mémoire, un modèle à 3 degrés de liberté a été développé pour modéliser l'interaction structure-acoustique-structure. Cependant, ce modèle n'a pas pu être étudié en détail en raison de contraintes de temps. Une analyse approfondie d'un tel système apporterait certainement des informations précieuses sur le couplage entre plusieurs structures en présence d'un fluide compressible.

Enfin, il serait intéressant de généraliser la carte de zones de comportement de couplage à des systèmes avec un plus grand nombre de degrés de liberté, afin de pouvoir analyser clairement les modes propres obtenus à partir d'analyses par éléments finis sur un système couplé. Cela permettrait une compréhension plus approfondie des phénomènes de couplage dans des systèmes plus complexes.

Calcul des excitations acoustiques à partir de l'écoulement moyen

Ce mémoire se concentre sur la démonstration de la manière dont une structure en contact avec un domaine acoustique peut se mettre à vibrer en réponse à une excitation acoustique spécifique. Ces excitations acoustiques peuvent provenir de divers phénomènes, mais l'interaction rotor-stator (RSI) est particulièrement importante. En effet, les fluctuations du champ de pression peuvent entraîner des vibrations acoustiques qui, à leur tour, peuvent faire vibrer la structure. Cependant, ces champs de pression sont liés à un écoulement macroscopique qui ne semble pas initialement être des vibrations acoustiques. Une partie de cet écoulement se transforme néanmoins en vibrations acoustiques. Comment peut-on déterminer le champ acoustique résultant d'un tel écoulement macroscopique ? Ce problème est étudié depuis longtemps dans le domaine de l'aérodynamique, notamment pour évaluer le bruit généré par des moteurs d'avion (tel que le jet aérodynamique).

C'est LightHill (1951) qui a décrit pour la première fois comment incorporer le champ de vitesse provenant d'un écoulement moyen dans les équations de propagation d'ondes acoustiques linéaires par le biais du tenseur de LightHill $T_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_A &= \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i \partial x_j}, \\ T_{i,j} &= \frac{\partial(\rho_A u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j + p \delta_{i,j} - \tau_{i,j})}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

où u_i , p et $\tau_{i,j}$ sont respectivement les vitesses de l'écoulement moyen, la pression et le tenseur des contraintes visqueuses du champ de vitesse moyen considéré comme découplé de l'onde acoustique ainsi générée.

Il serait bénéfique d'appliquer cette théorie et de calculer les résidus acoustiques résultant de l'écoulement généré par l'interaction rotor-stator. Cela permettrait d'obtenir précisément la distribution de l'excitation nécessaire dans le domaine fluide pour une utilisation dans un logiciel de calcul par éléments finis qui prend en compte de manière précise l'interaction entre l'acoustique et la structure.

CHAPITRE 7 CONCLUSION

La recherche développée dans ce travail s'est concentrée sur des aspects conceptuels de l'interaction acoustique-structure. En effet, elle s'est tout d'abord penchée sur l'identification d'un modèle permettant de modéliser de manière claire le couplage entre une cavité acoustique et une plaque structurale en contact. En développant un modèle unidimensionnel pour la dimension orthogonale à la paroi structurale, le mémoire a conclu que modéliser les systèmes acoustiques et structuraux à la manière de Dowell and Voss (1962) était une très bonne approximation lorsque la longueur considérée était faible par rapport à la taille caractéristique de la paroi.

L'avantage d'un tel modèle est de pouvoir modéliser le problème d'interaction en couplant les modes des deux domaines (a priori indépendants) à partir de coefficients de couplage dérivés de l'intercorrélation spatiale entre les deux types de modes. Ce modèle a permis de considérer initialement un modèle à deux degrés de liberté très simple mais riche pour comprendre en profondeur ce type d'interaction. Les résultats obtenus avec ce modèle, lors d'une étude asymptotique incompressible, correspondent exactement aux résultats obtenus lors des études précédentes sur le phénomène de masse ajoutée et l'écartement des modes en rotation, ce qui permet de les généraliser au cas compressible.

Ce modèle à deux degrés de liberté a permis d'obtenir des résultats très intéressants sur la nouvelle dimension qui intervient : la fréquence acoustique. Le ratio F_A (ou réduit $\hat{F}_A$) entre la fréquence acoustique et la fréquence structurale étudiées permet de mettre en évidence trois zones de comportement différentes pour le système en interaction : une zone compressible, une zone incompressible et une zone de transition. La taille de ces zones évolue en fonction du facteur AVMI β , il est donc nécessaire de caractériser ces zones dans le plan F_A, β , ce qui a été fait pour le modèle à deux degrés de liberté.

Ensuite, un modèle faisant intervenir la méthode de Ritz qui fait interagir plusieurs modes de disques structuraux et plusieurs modes de disques acoustiques (en prenant en compte la faible hauteur de la cavité) dans un système linéaire a été développé. Ce modèle a pris en compte deux disques qui sont tous deux couplés au domaine acoustique. Parallèlement, un autre modèle permettant de libérer les degrés de liberté de vitesse acoustique aux abords de la paroi structurale a été mis en place et a permis d'offrir une source de comparaison.

Le nombre élevé de degrés de liberté rend l'analyse plus complexe, mais certaines observations concordent avec la théorie développée dans la section précédente, ce qui renforce les résultats généraux tirés des modèles théoriques.

De plus, l'une des conclusions concernant l'application aux turbines hydrauliques est que, en raison de la masse volumique élevée de l'eau, les modes de couplage observés se produisent à des valeurs élevées de β . Cela signifie que la plage de fréquences acoustiques pour lesquelles le régime incompressible peut être considéré est plus large que ce que l'on pourrait penser (lorsque $f_A > f_S$) : cette plage débute pour des fréquences acoustiques qui sont encore plus basses que les fréquences structurelles dans le vide ($f_A > f_S/\sqrt{1+\beta} < f_S$) puisqu'il y a la masse ajoutée à prendre en compte.

RÉFÉRENCES

- M. Amabili and M. K. Kwak. FREE VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES COUPLED WITH LIQUIDS : REVISING THE LAMB PROBLEM. *Journal of Fluids and Structures*, 10(7) :743–761, October 1996. ISSN 0889-9746. doi : 10.1006/jfls.1996.0051. URL .
- G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1973.
- Lucas Berthet. Mode Split Prediction for Rotating Disks with Flexible Stator Coupling. page 95, 2021.
- O. Braun, B. Horisberger, N. Ruchonnet, A. Taruffi, and A. Gehrler. Validation of CFD analysis of acoustic effects in pump-turbine runners. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 240 :062011, March 2019. ISSN 1755-1315. doi : 10.1088/1755-1315/240/6/062011. URL . Publisher : IOP Publishing.
- Michel Bruneau. *Fundamentals of acoustics*. ISTE Ltd, London ; Newport Beach, CA, 2006. ISBN 978-1-905209-25-5. OCLC : ocm68711955.
- F Laloe C Cohen-Tannoudji, B Diu. *Quantum Mechanics Volume 1*. Hermann, 1986. ISBN 978-2-7056-8392-4. Google-Books-ID : e_Ec0IISbMMC.
- André Coutu, Daniel Proulx, Stuart Coulson, and Alain Demers. Dynamic Assessment of Hydraulic Turbines. pages 16–20, 2004.
- André Coutu, Michel D. Roy, Christine Monette, and Bernd Nennemann. Experience with Rotor-Stator Interactions in High Head Francis Runner. page 10, Foz do Iguassu, Brazil, October 2008.
- R.B. Davis. A simplified approach for predicting interaction between flexible structures and acoustic enclosures. *Journal of Fluids and Structures*, 70 :276–294, April 2017. ISSN 08899746. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.003. URL .
- Arash Soltani Dehkharghani, Jan-Olov Aidanpää, Fredrik Engström, and Michel J. Cervantes. A Review of Available Methods for the Assessment of Fluid Added Mass, Damping, and Stiffness With an Emphasis on Hydraulic Turbines. *Applied Mechanics Reviews*, 70(5) : 050801, January 2019. ISSN 0003-6900. doi : 10.1115/1.4042279. URL .
- Energy Dominion. Bath county pumped storage station. , 2022. Accessed : 2010-09-30.

E H Dowell. Comment on “On Dowell’s simplification for acoustic cavity-structure interaction and consistent alternatives” [J. Acoust. Soc. Am. 127, 22–32 (2010)] (L).

E H Dowell and H M Voss. the effect of a cavity on panel vibration. 1962.

Peter Dörfler, Mirjam Sick, and André Coutu. *Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery : Engineer’s Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting*. Springer Science & Business Media, August 2012. ISBN 978-1-4471-4252-2. Google-Books-ID : zfBT3k5inH8C.

Eduard Egusquiza, Carme Valero, Alex Presas, Xingxing Huang, Alfredo Guardo, and Ulrich Seidel. Analysis of the dynamic response of pump-turbine impellers. Influence of the rotor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 68-69 :330–341, February 2016. ISSN 08883270. doi : 10.1016/j.ymssp.2015.05.034. URL .

euronews. Guerre, réchauffement climatique, crise énergétique et économique : les défis de l’année 2023, 2022.

GIEC. *CLIMATE CHANGE 2022 IMPACTS, ADAPTATION AND VULNERABILITY*. CAMBRIDGE UNIV PRESS UK, CAMBRIDGE, 1st ed edition, 2022. ISBN 978-1-00-932584-4. OCLC : 1373670817.

Jerry H. Ginsberg. On Dowell’s simplification for acoustic cavity-structure interaction and consistent alternatives. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(1) :22–32, January 2010. ISSN 0001-4966. doi : 10.1121/1.3268606. URL .

Senthil V. Gopinathan, Vasundara V. Varadan, and Vijay K. Varadan. Rayleigh-Ritz formulation for active control of the acoustics in cabin enclosures. In *Smart Structures and Materials 2001 : Modeling, Signal Processing, and Control in Smart Structures*, volume 4326, pages 58–67. SPIE, August 2001. doi : 10.1117/12.436507. URL .

Ezz Eldin Mohamed Hefny, Ibrahim Kamal Mohamed, Tarek Abdelmalak Meakhail, and Waleed Ahmed Abdelfadeel. Numerical Study of the Flow in Rotor-Stator of Francis Turbine. 2019.

Y. Hsu and C. E. Brennen. Fluid Flow Equations for Rotordynamic Flows in Seals and Leakage Paths. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :176–181, March 2002. ISSN 0098-2202, 1528-901X. doi : 10.1115/1.1436093. URL .

Hydro-Québec. Hydropower and the electricity market. Technical report, 2015.

- HydroQuebec. *La production d'énergie hydroélectrique au Québec et l'environnement*. 2020.
- B. Hübner, W. Weber, and U. Seidel. The role of fluid-structure interaction for safety and life time prediction in hydraulic machinery. In *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, volume 49, page 072007. IOP Publishing, 2016. URL .
- Debnarayan Jana. Quantum degeneracy in two dimensional systems. *Physics Education*, 171, 2009.
- Kyeong-Hoon Jeong. Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 260(4) :653–670, February 2003. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/S0022-460X(02)01012-X. URL .
- Kyeong-Hoon Jeong. Hydroelastic vibration of two annular plates coupled with a bounded compressible fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 22(8) :1079–1096, November 2006. ISSN 0889-9746. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2006.07.001. URL .
- Namcheol Kang and Arvind Raman. Vibrations and stability of a flexible disk rotating in a gas-filled enclosure—Part 2 : Experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4) :676–689, October 2006. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/j.jsv.2005.09.023. URL .
- Igor J. Karassik, Joseph P. Messina, Paul Cooper, and Charles C. Heald. *Pump Handbook*. McGraw-Hill Education, 4th edition edition, 2008. ISBN 978-0-07-146044-6. URL .
- D. J. Korteweg. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren. *Annalen der Physik und Chemie*, 241(12) :525–542, 1878. ISSN 00033804, 15213889. doi : 10.1002/andp.18782411206. URL .
- Y Kubota and H Ohashi. A study on the natural frequencies of hydraulic pumps. pages 4–7, 1991.
- Pardeep Kumar and R.P. Saini. Study of cavitation in hydro turbines—A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14(1) :374–383, January 2010. ISSN 13640321. doi : 10.1016/j.rser.2009.07.024. URL .
- M. K. Kwak and K. C. Kim. Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 146(3) :381–389, May 1991. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(91)90696-H. URL .

- Horace Lamb. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 98(690) :205–216, November 1920. doi : 10.1098/rspa.1920.0064. URL . Publisher : Royal Society.
- Arthur W. Leissa. Vibration of Plates,. Technical report, OHIO STATE UNIV COLUMBUS, OHIO STATE UNIV COLUMBUS, 1969. URL .
- Arthur W. Leissa. On a curve veering aberration. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 25(1) :99–111, January 1974. ISSN 1420-9039. doi : 10.1007/BF01602113. URL .
- M. J. LightHill. On sound generated aerodynamically I. General theory. 1951.
- Max Louyot, Bernd Nennemann, Christine Monette, and Frédérick P. Gosselin. Modal analysis of a spinning disk in a dense fluid as a model for high head hydraulic turbines. *Journal of Fluids and Structures*, 94 :102965, April 2020. ISSN 08899746. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2020.102965. URL . arXiv : 1910.14001.
- Alberto Luna-Ramírez, Alfonso Campos-Amezcuca, Oscar Dorantes-Gómez, Zdzislaw Mazur-Czerwicz, and Rodolfo Muñoz-Quezada. Failure analysis of runner blades in a francis hydraulic turbine—case study. *Engineering Failure Analysis*, 59 :314–325, 2016.
- Elisabetta Manconi. Veering and Strong Coupling Effects in Structural Dynamics. 2017. doi : 10.1115/1.4035109.
- L. Meirovitch. A Modal Analysis for the Response of Linear Gyroscopic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2) :446–450, June 1975. ISSN 0021-8936, 1528-9036. doi : 10.1115/1.3423597. URL .
- A. Muszynska. Whirl and whip—Rotor/bearing stability problems. *Journal of Sound and Vibration*, 110(3) :443–462, November 1986. ISSN 0022460X. doi : 10.1016/S0022-460X(86)80146-8. URL .
- P. S. Nair and S. Durvasula. On quasi-degeneracies in plate vibration problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 15(12) :975–986, December 1973. ISSN 0020-7403. doi : 10.1016/0020-7403(73)90107-0. URL .
- Nations-Unies. Nations unies - action climat. . Accessed : 2010-09-30.

- Bernd Nennemann, Christine Monette, and Joël Chamberland-Lauzon. Hydrodynamic damping and stiffness prediction in Francis turbine runners using CFD. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49(7) :072006, 2016. ISSN 1755-1315. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072006. URL .
- Christophe Nicolet, Nicolas Ruchonnet, and François Avellan. One-Dimensional Modeling of Rotor Stator Interaction in Francis Pump-Turbine. 2006.
- Patrick O’connor. A new chapter for america’s 1st renewable electricity source. 2016.
- Hideo Ohashi. Case Study of Pump Failure Due to Rotor-Stator Interaction. *International Journal of Rotating Machinery*, 1(1) :53–60, 1994. ISSN 1023-621X. doi : 10.1155/S1023621X94000059. URL .
- UE Parlement européen. L’essentiel de la plénière 12-15 juin 2023, 2023.
- C. D. Perkins, N. C. et Mote. Comments on curve veering in eigenvalue problems. *Journal of Sound and Vibration*, 106(3) :451–463, May 1986. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(86)90191-4. URL .
- M. Petyt and C. C. Fleischer. Free vibration of a curved beam. *Journal of Sound and Vibration*, 18(1) :17–30, September 1971. ISSN 0022-460X. doi : 10.1016/0022-460X(71)90627-4. URL .
- Sebastien Poncet, Marie-Pierre Chauve, and Roland Schiestel. Batchelor versus Stewartson flow structures in a rotor-stator cavity with throughflow. *Physics of Fluids*, 17(7) :075110, July 2005. ISSN 1070-6631. doi : 10.1063/1.1964791. URL .
- Alexandre Presas, David Valentin, Eduard Egusquiza, Carme Valero, and Ulrich Seidel. ON THE EXCITATION OF A SUBMERGED DISK-LIKE STRUCTURE WITH RSI PATTERNS. Ljubljana, Slovenia, September 2015. URL .
- U Seidel, B Hübner, J Löfflad, and P Faigle. Evaluation of RSI-induced stresses in Francis runners. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15(5) :052010, November 2012. ISSN 1755-1307, 1755-1315. doi : 10.1088/1755-1315/15/5/052010. URL .
- Shuangxia Shi, Guoyong Jin, Bin Xiao, and Zhigang Liu. Acoustic modeling and eigenanalysis of coupled rooms with a transparent coupling aperture of variable size. *Journal of Sound and Vibration*, 419 :352–366, April 2018. ISSN 0022460X. doi : 10.1016/j.jsv.2018.01.024. URL .

- R. V. Southwell. On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at Its Centre ; and on the Effects of Rotation. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 101(709) :133–153, May 1922. ISSN 1364-5021, 1471-2946. doi : 10.1098/rspa.1922.0032. URL .
- Hiroshi Tanaka. Vibration behavior and dynamic stress of runners of very high head reversible pump-turbines. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 4(2) :289–306, 2011. URL .
- Chirag Trivedi and Michel J. Cervantes. Fluid-structure interactions in Francis turbines : A perspective review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 68 :87–101, 2017. URL .
- Chirag Trivedi, Bhupendra Gandhi, and Cervantes J Michel. Effect of transients on francis turbine runner life : a review. *Journal of Hydraulic Research*, 51(2) :121–132, 2013.
- David Valentín, Alexandre Presas, Eduard Egusquiza, and Carme Valero. On the Capability of Structural–Acoustical Fluid–Structure Interaction Simulations to Predict Natural Frequencies of Rotating Disklike Structures Submerged in a Heavy Fluid. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(3) :034502–034502–6, April 2016. ISSN 1048-9002. doi : 10.1115/1.4032726. URL .
- David Valentín, Alexandre Presas, Eduard Egusquiza, Carme Valero, and Mònica Egusquiza. Experimental Study of a Vibrating Disk Submerged in a Fluid-Filled Tank and Confined With a Nonrigid Cover. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139(2) :021005, April 2017. ISSN 1048-9002, 1528-8927. doi : 10.1115/1.4035105. URL .
- B. Venkatesham, Mayank Tiwari, and M. L. Munjal. Analytical prediction of the breakout noise from a rectangular cavity with one compliant wall. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5) :2952–2962, November 2008. ISSN 0001-4966. doi : 10.1121/1.2977671. URL .
- Fabrizio Vidoli, Stefano et Vestroni. Veering Phenomena in Systems With Gyroscopic Coupling. *Journal of Applied Mechanics*, 72(5) :641–647, September 2005. ISSN 0021-8936, 1528-9036. doi : 10.1115/1.1940666. URL .
- S. M. Vogel and D. W. Skinner. Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 32(4) :926–931, December 1965. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.3627337. URL .

- J. J. Webster. Free vibrations of rectangular curved panels. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(7) :571–582, July 1968. ISSN 0020-7403. doi : 10.1016/0020-7403(68)90058-1. URL .
- Mario Weder. *Vibration of Rotor–Stator Systems Coupled by Viscous Liquids : Theory, Experiment and Simulation*. PhD thesis, ETH Zurich, 2018. URL . Artwork Size : 239 p. Medium : application/pdf Pages : 239 p.
- Mario Weder, Beat Horisberger, Christine Monette, Mirjam Sick, and Jürg Dual. Experimental modal analysis of disk-like rotor–stator system coupled by viscous liquid. *Journal of Fluids and Structures*, 88 :198–215, July 2019. ISSN 0889-9746. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2019.05.003. URL .
- Jianping Yan, Jiri Koutnik, Ulrich Seidel, and Bjorn Hubner. Compressible Simulation of Rotor-Stator Interaction in Pump-Turbines. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 3(4) :315–323, December 2010. ISSN 1882-9554. doi : 10.5293/IJFMS.2010.3.4.315. URL .
- T. Young. Hydraulic investigations, subservient to an intended Croonian lecture on the motion of the blood.

ANNEXE A RÉSOLUTION PAR DIFFÉRENCES FINIES

La résolution par différences finis se fait à partir de la discrétisation de l'équation 4.16 le long de l'axe z . Pour cette discrétisation, on considère le vecteur $Z = (Z_n) = (\phi_z(n\Delta z))$. En concaténant ce vecteur avec l'inconnue x_u , on forme le vecteur global des solutions $X = [x_u, Z]$. En discrétisant les opérateurs de dérivations et de laplaciens et en incorporant les équations correspondantes aux conditions aux limites, on obtient le système matriciel à résoudre :

$$M\ddot{X} + G\dot{X} + KX = 0 \tag{A.1}$$

Ce système matricielle est ensuite convertie en problème aux valeurs propres généralisé qu'il suffit de résoudre en utilisant la fonction "eig" de la bibliothèque "sympy".