POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Une méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements instationnaires complexes
Auteur: Author:	Étienne Muller
Date:	2020
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Muller, É. (2020). Une méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements instationnaires complexes [Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/5481/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/5481/
Directeurs de recherche: Advisors:	Dominique Pelletier
Programme: Program:	Génie mécanique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Une méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements instationnaires complexes

ETIENNE MULLER
Département de Génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
Génie mécanique

Octobre 2020

© Etienne Muller, 2020.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

Une méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements instationnaires complexes

présentée par **Etienne MULLER**
en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

André GARON, président
Dominique PELLETIER, membre et directeur de recherche
Jean-Yves TRÉPANIER, membre
Catherine MAVRIPLIS, membre
Frédéric ALAUZET, membre externe

DÉDICACE

À mon père et à ma mère,
sans qui je ne serais pas allé très loin...

REMERCIEMENTS

En plus de leur dédier mon travail, je souhaite commencer par remercier mes parents. Malgré nos différents, mon père m'a toujours offert un support indéfectible dans les moments importants et/ou difficiles. Ce doctorat n'aurait tout simplement pas vu le jour sans son conseil avisé d'*aller le plus loin possible*[1]. Ma mère a également toujours cru en moi, secondé mes choix, et m'a offert un accueil des plus chaleureux lors de mes passages sur le vieux continent. Je souhaite également saluer mon beau père Daniel, qui s'est toujours montré très généreux lors de mes visites.

Je remercie également chaleureusement ma grand-mère et son conjoint René, pour avoir partagé avec moi l'air pur des basses Vosges, au combien rafraichissant. Ce fut toujours un plaisir renouvelé que de déguster leur jus de pomme, leur vin de cerise, et leurs mirabelles au sirop[2], si généreusement offerts.

De manière générale, je souhaite remercier tous les membres de ma famille qui m'ont manifesté leur affection durant ce long voyage au Québec, renforçant par là-même les liens qui nous unissent.

Je tiens maintenant à remercier "ma blonde" Annaëlle, pour son amour si réconfortant, et pour avoir eu la patience de m'attendre de l'autre côté de l'océan. Les bulles de bonheur que nous avons vécues lors de mes passages en France, et lors des siens au Québec, ont toujours su entretenir ou restaurer ma force de travail, qui je le concède volontiers, fut parfois vacillante. J'en profite pour remercier également sa fratrie et ses parents qui, avec beaucoup de bienveillance, se sont très souvent intéressés à ma progression, en plus de proposer leur aide pour la relecture de ce document.

J'en viens maintenant à remercier mes deux vieux et très proches amis du lycée, Simon et Garance. Malgré que nous ayons parfois couvert l'entièreté des fuseaux horaires à nous trois, vous avez toujours entretenu votre lien avec moi, m'apportant ainsi un soutien précieux.

C'est maintenant mon couple d'amis Victor et Angeline de Québec que je souhaite remercier sincèrement. Les fins de semaine passées avec eux à la Capitale furent de pures bulles d'oxygène et de gaité. Merci également à leur fille Émilie, dont j'ai l'honneur d'être le parrain. Son sourire et sa joie de vivre ont toujours été contagieux.

Il est désormais temps de parler de ceux qui composèrent mon quotidien à Montréal, et

1. J'ose espérer qu'à la lecture de ces travaux, vous conviendrez que je ne me suis pas brûlé les ailes à la manière d'Icare.
2. Veuillez m'excuser pour l'injuste brièveté de cette liste.

en rehaussèrent la saveur. Je tiens à remercier mes colocataires Noëlle et Émeric qui m'ont toujours offert une oreille attentive. Simples colocataires au départ, vous êtes devenus de vrais amis. Merci pour votre joyeuse compagnie lors de notre exploration de l'Ouest Canadien. Ce congé, j'en suis convaincu, a été la source de ma productivité durant tous le reste de l'été qui suivit. Je n'oublie pas Allan, qui a rejoint le navire un peu plus tard. Qu'il soit remercié pour ses nombreux services et ses suggestions vidéoludiques. Bon nombre de mes soirées auraient été plus moroses sans sa présence. J'en viens maintenant au dernier loulou de la bande, mon chat Jasper. Son accueil chaleureux à la porte de l'appartement fut toujours le remède idéal après les longues journées de labeur.

Malgré les mois de confinement que nous avons connus, mon quotidien s'est en grande parti déroulé au C306 à Polytechnique Montréal. C'est dans ce local que je fis la connaissance de celui qui m'aida à affronter vents et marées, tant lors de discussions techniques que personnelles. Il s'agit de Yohann Vautrin. Me précédant de quelques mois dans le marathon doctoral, son aide toujours généreuse et pertinente m'a fait gagné de précieuses minutes dans cette longue course. J'en suis convaincu, je n'aurai pas été en mesure de mener mon projet en ce temps raisonnable sans son aide.

Il ne fut au C306 que durant ma première année de doctorat, mais je veux également remercier Sébastien Lortie pour sa bonne humeur. J'ai toujours eu un grand plaisir à travailler *avec* lui [3]. Alors qu'il n'était au départ qu'un "collègue" québécois, il est rapidement devenu Sébastien de Paris, pratiquant assumé du "du coup" français. Par ailleurs, nos échanges sur les expressions farfelues françaises ont toujours été très stimulants.

Toujours dans un contexte de discussions enrichissantes, je tiens à remercier Bruno Blais pour m'avoir proposé sa compagnie durant de nombreuses pauses cafés. Bien que devenu Professeur à Polytechnique depuis l'époque où je l'avais rencontré au CNRC, il est resté très accessible, discutant toujours volontiers avec moi de ses activités de recherche, en plus de témoigner un intérêt sincère pour les avancées de mon projet.

J'en arrive maintenant à des considérations plus sérieuses. Je souhaite remercier indistinctement les membres de mon jury, pour avoir accordé leur temps précieux à l'évaluation de mes travaux. Plus spécifiquement maintenant, j'adresse mes remerciements aux Professeurs André Garon et Stéphane Étienne. Leur encadrement d'appoint, leur écoute, et leurs suggestions techniques occasionnelles furent très appréciés.

Je tiens ici à donner une place toute particulière à mon superviseur principal, le Professeur Dominique Pelletier. Merci à lui de m'avoir donné ma chance il y a cinq ans, à l'issue d'un entretien au cours duquel je lui exposais timidement mes maigres compétences dans son

3. Ou comme il aimait le penser, *pour* lui.

domaine de spécialité. Merci à lui d'avoir cru en ma capacité à apprendre. Merci à lui d'avoir accepté, après deux denses années de maîtrise, de reconduire l'expérience de m'encadrer, au cours d'un doctorat cette fois. Je veux aussi le remercier pour son humanité et sa sincère bienveillance, et pour avoir maintes fois facilité mes déplacements en France. J'ose croire qu'en plus de liens professionnels, nous avons également tissé des liens amicaux forts.

Je termine en adressant mes cordiaux remerciements au Fonds de Recherche du Québec - Nature et Technologies, pour avoir accepté de financer ce projet de recherche.

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cette thèse le développement d'une procédure générale de résolution des écoulements instationnaires de fluides Newtoniens, construite à partir de la méthode des éléments finis. Ces travaux s'identifiant toutefois davantage à une preuve de concept, la procédure a été formulée dans un contexte 2D uniquement. Cette procédure a pour objectif général de répondre à la difficulté rarement mentionnée de simuler tant adéquatement qu'efficacement cette classe d'écoulements. Pour ce faire, des méthodes adaptatives en espace (adaptation de maillage) et en temps (intégration temporelle adaptative), dont la pertinence a été longuement éprouvée au cours de travaux de recherche antérieurs, sont mises à profit. Se faisant, nous entendons apporter des garanties de précision sur les résultats obtenus, et optimiser le coût de calcul en cours de simulation. La procédure adaptative ainsi mise en place est complètement automatique. Aucune intervention de l'utilisateur n'est donc requise entre l'instant initial et final de l'intervalle de temps simulé. Des procédures similaires ont déjà été proposées dans la littérature, mais l'originalité de celle exposée dans ces pages réside dans le choix et le fonctionnement de ses composantes. Nous avons également mis un accent tout particulier sur la question du transfert d'une solution éléments finis entre deux maillages. Cette opération intervenant après chaque adaptation de maillage, il convient de pouvoir contrôler les inévitables erreurs qui en résultent.

L'adaptation du maillage, combinant une méthode de type h et une méthode de type r, permet d'ajuster localement la finesse du maillage au cours de la simulation, tout en préservant sa qualité d'ensemble. La méthode de type h repose sur une estimation de l'erreur spatiale (commise sur chaque élément du domaine de calcul), déduite d'une reconstruction des gradients de la solution éléments finis sur des patchs nodales. Selon le nombre de variables dépendantes actives pour le problème simulé, l'erreur spatiale peut s'exprimer sous la forme d'une ou plusieurs norme(s) d'erreur (approche mononorme et multinorme, respectivement). L'usage d'un opérateur de transition, dont la formulation vise une équidistribution de l'erreur élémentaire pour chaque norme d'erreur, permet de déterminer la taille optimale de chaque élément du maillage. Qui plus est, nous avons utilisé la formulation de l'opérateur de transition pour identifier les éléments du maillage les plus problématiques, soient ceux dont la taille optimale est sensiblement différente de leur taille courante. En retirant uniquement du maillage courant ces éléments et leurs voisins, nous générons ainsi des poches (ou cavités) que nous discrétisons à nouveau avec des éléments d'une taille plus adaptée. Un mailleur frontal est utilisé pour conduire cette dernière opération. La méthode d'adaptation de maillage de type r, résultant de la combinaison de plusieurs méthodes de relaxation de maillage, est fina-

lement appliquée pour maintenir la qualité d'ensemble des éléments du maillage. Ici encore, nous proposons une formulation locale de cette deuxième méthode d'adaptation, en nous appuyant sur une métrique de qualité élémentaire bien choisie. La relaxation du maillage peut ainsi être réalisée uniquement dans les régions du domaine qui le nécessitent. Dans l'ensemble nous proposons et utilisons donc une méthode d'adaptation locale du maillage, de type hr. Cette approche va dans le sens de la réduction des erreurs de transfert, puisqu'aucun transfert de la solution n'est nécessaire sur les éléments préservés par l'adaptation locale du maillage. De la même façon, cette approche accélère la génération des différents maillages. Par ailleurs, des critères d'arrêt sont utilisés pour déclencher automatiquement les cycles d'adaptation de maillage lorsque cela s'avère nécessaire. Ces critères nécessitent une estimation de l'erreur spatiale à chaque pas de temps, et impliquent la surveillance de plusieurs quantités scalaires dérivant de cette estimation.

L'intégration temporelle adaptative repose quant à elle sur un intégrateur temporel hp-adaptatif, basé sur les méthodes BDF. Il dispose de deux mécanismes principaux. En premier lieu, une estimation de l'erreur de troncature locale permet d'ajuster la taille h du pas de temps à l'issue de chaque pas de temps convergé. Dans l'éventualité où la cible renseignée pour cette erreur ne serait pas atteinte, la solution du pas de temps courant peut être rejetée, afin d'intégrer à nouveau le pas de temps avec une valeur réduite de h. Un second mécanisme permet d'ajuster l'ordre p de l'intégrateur temporel (soit le nombre de pas de la méthode BDF) en fonction de considérations fournies par un indicateur de stabilité. L'ordre de l'intégrateur est au demeurant toujours compris en 1 et 3. Ce deuxième mécanisme régule l'utilisation de la méthode d'ordre 3, qui ne possède pas la propriété de stabilité absolue. Les méthodes BDF d'ordre 2 et 3 n'étant pas auto-démarrantes, nous proposons dans ces travaux une approche permettant, postérieurement à chaque adaptation de maillage, de relancer l'intégrateur temporel en conservant les dernières valeurs de h et p utilisées. Pour cela, nous procédons au transfert de la solution associée à plusieurs pas de temps antérieurs. Cette approche assure également une forme de continuité pour les mécanismes adaptifs, qui peuvent ainsi opérer à l'issue du premier pas de temps réalisé après une adaptation du maillage.

Le transfert de la solution d'un maillage à l'autre a été étudié pour plusieurs méthodes de transfert : l'interpolation linéaire, l'interpolation consistante, et trois formulations de la projection de Galerkin (ou projection L^2). La première formulation de la projection de Galerkin repose sur l'usage d'un maillage auxiliaire (le *supermesh*), construit par intersection du maillage courant et du maillage résultant de son adaptation. Lorsque la frontière du domaine de calcul est composée exclusivement de segments de droite, cette formulation permet de minimiser l'erreur de transfert en norme L^2, en plus de conserver les intégrales sur le domaine des variables dépendantes. La deuxième formulation de la projection de Galerkin applique

des quadratures de Gauss sur l'élément de référence, directement à partir des éléments du maillage adapté. Bien que globalement moins précise cette deuxième formulation, moyennant l'usage d'un nombre suffisant de points de Gauss, permet néanmoins l'obtention de résultats plus précis à proximité des frontières du domaine (ou des interfaces entre fluides) lorsque celles-ci sont courbes. Partant de ce constat, nous avons également proposé une troisième formulation de la projection, qualifiée d'hybride car issue de la combinaison des deux premières formulations. La deuxième formulation est appliquée sur tous les éléments de bord du maillage adapté, tandis que les éléments restants sont traités via la première formulation. De plus, nous avons implémenté une projection de Galerkin 1D pour post-traiter la solution transférée sur les frontières du domaine de calcul. Nous nous sommes aussi intéressés à une situation particulière : l'usage conjoint d'éléments isoparamétriques d'ordre 2 et d'une formulation ALE des équations de Navier-Stokes. Dans cette situation les éléments du maillage courant, au moment de l'adaptation de maillage, sont délimités par des portions de paraboles. Assurer un transfert de solution suffisamment précis dans ces conditions est une tâche extrêmement ardue. Nous proposons donc dans ces travaux une stratégie visant à contourner en partie cette difficulté. La construction d'un maillage hybride, comportant tant des éléments sub-paramétriques qu'isoparamétriques, est préconisée. Finalement, nous avons développé un transfert local de la solution, afin de tirer avantage de l'adaptation locale du maillage. Cette approche permet une réduction substantielle du coût de calcul lié au transfert de la solution, rendant d'autant plus viable la projection de Galerkin.

Faisant suite à une description détaillée des différentes méthodes évoquées, de nombreux résultats de vérification et d'analyse sont également présentés dans cette thèse. Nous avons vérifié en profondeur l'implémentation éléments finis de travail, ainsi que l'implémentation de certains outils développés dans le courant de nos travaux, dont la projection de Galerkin. Plusieurs solutions manufacturées ont été utilisées pour ce faire. Des études de convergence ont été menées pour l'erreur spatiale et temporelle, mais aussi pour l'erreur résultant du transfert d'une solution entre deux maillages. Cette dernière étude a démontré la supériorité de la projection de Galerkin vis-à-vis des méthodes d'interpolation. Nous avons également analysé le comportement des composantes de notre méthode d'adaptation de maillage locale. La formations des poches à remailler, et la relaxation locale du maillage ont notamment été étudiées.

Nous illustrons finalement l'utilisation de notre procédure de résolution en considérant quatre écoulements instationnaires différents : un écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire, un jet laminaire impactant sur une paroi chauffée, un écoulement turbulent dans un canal subissant une brusque variation de section (marche descendante), et l'instabilité de Rayleigh-Taylor entre deux fluides séparés par une interface explicite. La variété de ces pro-

blèmes, et la richesse de la physique impliquée dans chacun d'eux, nous a permis d'éprouver la robustesse et la pertinence des composantes de notre procédure de résolution. Les résultats montrent que la méthode d'adaptation de maillage locale et les critères d'arrêt employés sont particulièrement efficaces pour assurer la capture très progressive des régions critiques dans l'écoulement, tout en sauvegardant une large partie des éléments du maillage à chaque adaptation. La projection de Galerkin a également permis des transferts de solution de qualité, facilitant ainsi le contrôle du niveau de l'erreur spatiale au cours de la simulation. L'intégrateur temporel adaptif, bien qu'ayant démontré sa force lors de l'usage d'un maillage fixe, a cependant vu son fonctionnement sensiblement perturbé par les adaptations de maillage. Nous avons systématiquement observé une recrudescence de l'erreur de troncature locale lors des reprises du calcul. En conséquence, la taille h du pas de temps s'en est trouvée réduite à l'issue du premier pas de temps, après plusieurs rejets de celui-ci. Les erreurs commises lors du transfert de la solution, mais aussi le fait qu'une solution transférée n'est pas pleinement convergée sur le maillage adapté, en sont la cause. Pour ces mêmes raisons, nous avons constaté que l'indicateur de stabilité verrouillait, en tout temps ou presque, l'accès à la méthode BDF d'ordre 3. Il est à noter que ces limites ne font que brider l'efficacité de notre procédure. La précision des résultats n'est en revanche pas affectée. La réduction automatique de h lors des reprises permet au contraire de limiter considérablement les erreurs de nature itérative. Au demeurant, l'adaptation de la taille h du pas de temps s'est avérée efficace dans l'ensemble. En l'état, notre procédure de résolution peut donc être appliquée pour simuler précisément, efficacement, et automatiquement des écoulements complexes de portée industrielle, mais aussi des écoulements faisant intervenir des mécanismes physiques plus fondamentaux. De plus, les écoulements considérés peuvent être monophasiques, ou polyphasiques à phases séparées.

ABSTRACT

We present in this thesis the development of a general solving procedure for unsteady flows of Newtonian fluids, based on the finite element method. However, as this work is more like a proof of concept, the procedure has been designed in a 2D context only. The overall objective of this procedure is to address the neglected difficulty of simulating such flows both accurately and efficiently. To this end, adaptive methods in space (mesh adaption) and in time (adaptive temporal integration), the relevance of which has been proven in many former works, are used. In doing so, we intend to guarantee the accuracy of the results, and to optimize the computing cost of the simulation. The adaptive procedure thus set up is completely automatic. Indeed, no user intervention is needed during the simulation, as the mesh adaption cycles are triggered automatically. Similar procedures have already been suggested in the literature, but the innovation of ours lies in the choice of its components and in the way they work. We have also emphasized a lot the issues resulting from the transfer of a finite element solution between two meshes. As this operation occurs after each mesh adaption, it is essential to control the errors that arise inevitably.

Mesh adaption cycles, performed with a h-adaptive and a r-adaptive methods, allow to locally adjust the mesh size during the simulation, while preserving its overall quality. The h-adaptive method relies on an estimate of the spatial error (committed on each element of the computational domain), derived from a gradient recovery method. Depending on the multiphysics nature of the simulated problem, the spatial error can be translated into one or several error norm(s). Then a transition operator, formulated so to equidistribute the spatial error over the elements of the domain, is used to compute the optimal size of each element of the mesh. Moreover, we used the transition operator to identify the most problematic elements in the mesh, i.e. those whose the optimal size is significantly different from their current size. By removing only these elements and their neighbors from the current mesh, we create pockets (also called cavities) that we can discretize again with elements of a more suitable size. An advancing front meshing tool is used to carry out this last step. The r-adaptive method, which is a combination of several mesh relaxation procedures, is finally applied to maintain the mesh overall quality. Here again, we propose a local formulation of this second method, based on a well-chosen quality metric. The mesh relaxation can thus be carried out only in the regions of the domain that require it the most. Altogether, we are therefore proposing and using a local hr-adaptive mesh adaption method. This approach reduces transfer errors, since a transfer of the solution is only necessary on the elements that do not have an exact match in the previous mesh. This approach also makes the mesh generation more efficient.

In addition, stopping criteria are used to automatically trigger mesh adaption cycles when necessary. These criteria imply the monitoring of several scalar quantities derived from an estimate of the spatial error at each time step.

Adaptive time integration is carried out with a *hp*-adaptive time integrator, based on the BDF methods. It has two main mechanisms. First, an estimate of the local truncation error is used to adjust the time step-size h at the end of each converged time step. In the event that this error is too large, the solution of the current time step can be rejected, so it can be computed again with a smaller h value. A second mechanism allows to adjust the time integrator order p (i.e. the number of steps involved in the BDF method). This is done using a stability indicator. Still, the order of the integrator can only vary between 1 and 3. This second mechanism enables a safe use of the method of order 3, kwown to be conditionnaly stable only. Since the BDF methods of order 2 and 3 are not self-starting, we propose in this work an approach to relaunch the time integration efficiently after each mesh adaption. This approch aims at restarting the temporal integration with the last used values of h and p. To do so, we transfer not only the last solution but also those of previous time steps. This approach also makes sure that the adaptive mechanisms can operate immediately after each mesh adaption cycle.

The solution transfer from one mesh to another has been studied for several transfer methods : linear interpolation, consistent interpolation, and three formulations of the Galerkin projection (also known as L^2 projection). The first formulation of the Galerkin projection makes use of an auxiliary mesh (the *supermesh*), obtained by intersection of the current mesh and the mesh resulting from its adaption. When the boundary of the computational domain is composed exclusively of line segments, this formulation allows to minimize the transfer error computed in L^2 norm, in addition to conserving the integral values of the dependent variables. The second formulation of the Galerkin projection applies Gauss quadrature rules on the reference element, directly from the elements of the adapted mesh. Although globally less accurate, this second formulation, with the use of a sufficient number of Gauss points, nevertheless provides more accurate results close to the domain boundaries (or fluid interfaces) when these are curved. Based on this observation, we have also proposed a third formulation of the projection, called hybrid because it is a combination of the first two : the second one is applied on all the edge elements of the adapted mesh, while the remaining elements are treated with the first one. Besides, we have implemented a 1D Galerkin projection to post-process the transferred solution on the boundaries of the computational domain. We also addressed a particular situation : the use of an ALE formulation of the Navier-Stokes equations together with isoparametric elements of order 2. In this situation elements of the current mesh end up being delimited by portions of parabolas at the time a

mesh adaption cycle goes off. Ensuring a sufficiently accurate solution transfer under these conditions is an extremely difficult task. We therefore propose in this work a strategy to partially circumvent this difficulty. The construction of a hybrid mesh, including both sub-parametric and isoparametric elements, is recommended. Finally, we have developed a local transfer of the solution, in order to take advantage of our local mesh adaption method. This approach allows a substantial reduction of the solution transfer computational cost, making the Galerkin projection all the more viable.

Many verification and analysis activites where carried out as parts of this research project. Following a detailed description of the different methods already mentioned, this thesis also presents some of the results we thereby obtained. We have verified in depth the finite element implementation, as well as the implementation of some tools developed in the course of our work, the Galerkin projection included. Several manufactured solutions have been desgined to perform this task. Convergence studies were conducted for the spatial and temporal errors, but also for the error arising from the solution transfer between two meshes. The latter study demonstrated the superiority of the Galerkin projection over interpolation methods. We have also analyzed the behavior of the components of our local mesh adaption method. In particular, the formation of the pockets to be remeshed, and the local mesh relaxation were studied.

We finally illustrate the use of our solving procedure by considering four different unsteady flows : a laminar flow around a circular cylinder, a laminar impinging jet on a heated wall, a turbulent flow in a channel undergoing a sudden variation of section (backward facing step), and the Rayleigh-Taylor instability between two fluids separated by an explicit interface. The variety of these problems, and the complexity of the physics involved in each of them, allowed us to assess our procedure robustness and relevance. The results show that the local mesh adaption method and the stopping criteria used are particularly effective when it comes to gradually capture the critical regions in the flow, while saving a large part of the mesh elements at each adaption. The Galerkin projection also resulted in accurate solution transfers, making it easier to control the global spatial error during the simulation. The adaptive temporal integrator has however seen its functioning appreciably disturbed by the mesh adaptions. We have systematically observed a recrudescence of the local truncation error each time the computation was resumed. As a result, the time step-size h was automalically reduced following the completion of the first time step, which thus has to be computed again several times. The errors made during the transfer of the solution, but also the fact that a transferred solution is not fully converged on the adapted mesh, are the cause. For these same reasons, we noted that the stability indicator locked, at all times or almost, the access to the BDF method of order 3. It should be noted that these limitations only prevent our solving

procedure from being even more efficient. As a matter of fact, the decrease of the time step-size h acts as a shield against iterative errors, and thus increases the results accuracy. Moreover, the adaption of the step-size h proved to be quite effective on the whole. As it stands, our solving procedure can therefore be applied to accurately, efficiently and automatically compute complex flows of industrial scope, but also flows involving more fundamental physical mechanisms. In addition, the flows considered can either be monophasic, or multiphasic with segregated phases.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ vii

ABSTRACT xi

TABLE DES MATIÈRES xv

LISTE DES TABLEAUX xix

LISTE DES FIGURES xxi

LISTE DES NOTATIONS, OPÉRATEURS ET SIGLES xxvii

LISTE DES ANNEXES xxxii

LISTE DES ALGORITHMES xxxiii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
- 1.1 Introduction générale 1
- 1.2 Plan du mémoire 4

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 6
- 2.1 Intégration temporelle adaptative 7
  - 2.1.1 Intégrateurs temporels d'ordre élevé 7
  - 2.1.2 Intégrateurs temporels h-adaptatifs 9
  - 2.1.3 Intégrateurs temporels p-adaptatifs 12
- 2.2 Adaptation de maillage en régime (in)stationnaire 13
  - 2.2.1 Classification usuelle des méthodes d'adaptation de maillage 13
  - 2.2.2 Estimation de l'erreur spatiale 13
  - 2.2.3 Application aux écoulements instationnaires 16
  - 2.2.4 Méthodes locales 18
- 2.3 Transfert d'une solution d'un maillage à l'autre 21
  - 2.3.1 Quelques notations 21

2.3.2 Principaux domaines d'application 21
2.3.3 Méthodes de transfert courantes 23
2.4 Objectif global et objectifs spécifiques du projet de recherche 31
2.5 Méthodologie retenue 31
2.5.1 Développement d'une méthode d'adaptation de maillage 31
2.5.2 Développement d'une procédure de relance de l'intégration temporelle 34
2.5.3 Vérification de l'implémentation 35
2.5.4 Application de la procédure de résolution 36
2.6 Identification des contributions originales 36

CHAPITRE 3 FORMULATION DES PROBLEMES À RESOUDRE 38
3.1 Équations aux dérivées partielles descriptives des problèmes à résoudre . . 38
3.1.1 Lois de conservation 38
3.1.2 Écoulements laminaires 41
3.1.3 Écoulements turbulents 47
3.2 Méthode des éléments finis en mécanique des fluides 57
3.2.1 Formulation variationnelle du problème 58
3.2.2 Approximation de la solution 61
3.2.3 Choix des fonctions tests 66
3.2.4 Assemblage du système d'équations 67
3.2.5 Erreur éléments finis et taux de convergence 71
3.2.6 Traitement des frontières courbes 73

CHAPITRE 4 MÉTHODES NUMÉRIQUES 75
4.1 Adaptation de maillage 75
4.1.1 Estimation d'erreur *a posteriori* 75
4.1.2 Opérateur de transition 78
4.1.3 Critères d'arrêt 80
4.2 Adaptation de maillage locale 84
4.2.1 Identification des éléments germes 85
4.2.2 Couches protectrices et couche fictive 86
4.2.3 Reconstruction du front initial 88
4.3 Relaxation du maillage 92
4.3.1 Lissage Laplacien 93
4.3.2 Lissage physique 95
4.3.3 Métrique de qualité et relaxation locale 104
4.4 Transfert d'une solution numérique 106

4.4.1 Interpolations 106
4.4.2 Projection de Galerkin 107
4.4.3 Cas des éléments isoparamétriques 122
4.5 Intégration temporelle 122
4.5.1 Les méthodes BDF 123
4.5.2 Formulation adaptative 129
4.5.3 Relance de l'intégrateur 135
4.6 Algorithme adaptatif complet 136

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET ANALYSES 137
5.1 Méthode des solutions manufacturées 138
5.2 Vérification des ordres de convergence 140
5.2.1 Description des cas test 140
5.2.2 Convergence de l'erreur spatiale 143
5.2.3 Convergence de l'erreur temporelle 147
5.2.4 Estimation de l'erreur temporelle 150
5.3 Analyse des distributions de l'erreur spatiale 152
5.3.1 Description des cas test 152
5.3.2 Approche mononorme 153
5.3.3 Approche multinorme 157
5.4 Performance des méthodes de relaxation de maillage 161
5.4.1 Comparaison des méthodes implémentées 161
5.4.2 Analyse de la relaxation locale 164
5.5 Analyse du transfert de la solution d'un maillage à l'autre 167
5.5.1 Convergence de l'erreur de transfert 168
5.5.2 Propriété de conservation des intégrales 174
5.5.3 Évaluation du coût de calcul 177

CHAPITRE 6 ÉTUDES DÉMONSTRATIVES 180
6.1 Cylindre circulaire à Reynolds 100 181
6.1.1 Description du problème à résoudre 181
6.1.2 Stratégies adoptées pour la résolution 182
6.1.3 Analyse des résultats 183
6.1.4 Conclusions 199
6.2 Jet impactant sur plaque chauffante 201
6.2.1 Description du problème à résoudre 202
6.2.2 Stratégies adoptées pour la résolution 203

6.2.3 Analyse des résultats 204
6.2.4 Conclusions 226
6.3 Marche descendante 229
6.3.1 Description du problème à résoudre 229
6.3.2 Stratégie adoptée pour la résolution 231
6.3.3 Analyse des résultats 232
6.3.4 Conclusions 246
6.4 Instabilité de Rayleigh-Taylor 247
6.4.1 Description du problème à résoudre 247
6.4.2 Stratégie adoptée pour la résolution 250
6.4.3 Analyse des résultats 252
6.4.4 Conclusions 261

CHAPITRE 7 CONCLUSION 262
7.1 Bilan des travaux effectués 262
7.2 Limites de la solution proposée et améliorations possibles 265

RÉFÉRENCES 269

ANNEXES 284

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Valeurs des constantes de fermeture du modèle k-ε standard 54

Tableau 4.1 Valeurs maximales du *swing factor* en fonction de la méthode BDF . 132

Tableau 5.1 Formulation ALE - Conditions limites pour les déplacements nodaux 142
Tableau 5.2 Erreur temporelle - Dépendances en temps du problème manufacturé 142
Tableau 5.3 Valeurs des constantes pour le problème manufacturé (5.10) 153
Tableau 5.4 Approche mononorme - Quelques statistiques sur l'erreur exacte pour les maillages 4 et 8 157
Tableau 5.5 Approche multinorme - Erreur relative globale pour chaque norme d'erreur, pour les maillages 4 et 8 159

Tableau 6.1 Cylindre circulaire - conditions limites utilisées 181
Tableau 6.2 Cylindre circulaire - Présentation des différents cas test 183
Tableau 6.3 Cylindre circulaire - Valeurs des tolérances fixes liées aux critères d'arrêt actifs 183
Tableau 6.4 Cylindre circulaire - Amplitudes maximales et valeurs RMS du coefficient de portance 194
Tableau 6.5 Cylindre circulaire - Valeurs moyennes du coefficient de trainée 194
Tableau 6.6 Cylindre circulaire - Nombre d'adaptations de maillage réalisées dans chaque cas étudiés 200
Tableau 6.7 Cylindre circulaire - Nombre de pas de temps résolus dans chaque cas étudiés 200
Tableau 6.8 Jet impactant - Conditions limites utilisées 203
Tableau 6.9 Jet impactant - Configurations étudiées 203
Tableau 6.10 Jet impactant - Tolérances fixes associées aux critères d'arrêt actifs . 204
Tableau 6.11 Jet impactant - Nombre de remaillages pour chaque cas 219
Tableau 6.12 Marche descendante - Conditions limites 230
Tableau 6.13 Marche descendante - Distances de raccordemment utilisées dans la loi de paroi 230
Tableau 6.14 Marche descendante - Tolérances associées aux critères d'arrêt actifs . 232
Tableau 6.15 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Propriétés physiques des fluides . . . 248
Tableau 6.16 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Conditions limites 248

Tableau 6.17 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Tolérances associées aux critères d'arrêt actifs 251

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Processus de résolution adaptatifs des écoulements (in)stationnaires . . 33

Figure 3.1 Représentation schématique de la trajectoire de plusieurs particules fluides dans un écoulement de conduite, en régime laminaire et turbulent . . . 42
Figure 3.2 Représentation schématique du profil de la vitesse longitudinale moyenne dans un écoulement de conduite, en régime laminaire et turbulent . . . 48
Figure 3.3 Représentation de la densité d'énergie cinétique de turbulence, lorsque la turbulence est homogène, isotrope et à l'équilibre 51
Figure 3.4 Principe du traitement de l'écoulement de proche paroi à l'aide d'une loi de paroi 57
Figure 3.5 Déclinaisons sub-paramétrique et isoparamétrique de l'élément de Taylor-Hood P2-P1 dans un contexte 2D 63
Figure 3.6 Fonctions de base linéaire et quadratique liées à un nœud sommet . . . 64
Figure 3.7 Élément de Taylor-Hood P2-P1 de référence dans un contexte 2D . . . 65
Figure 3.8 Élément de référence 1D pour les éléments de bord 69
Figure 3.9 Principe du maillage hybride 74

Figure 4.1 Méthode de Zhu et Zienkiewicz 76
Figure 4.2 Formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur ξ 80
Figure 4.3 Critère de qualité élémentaire sur les éléments isoparamétriques 84
Figure 4.4 Adaptation de maillage locale - Construction de deux couches protectrices et de la couche fictive 87
Figure 4.5 Adaptation de maillage locale - Procédure pour le remaillage local des courbes frontières 90
Figure 4.6 Adaptation de maillage locale - Vérification de l'orientation des segments du front 92
Figure 4.7 Représentation des différents triangles dans la méthode de relaxation basée sur la physique d'un solide élastique 99
Figure 4.8 Représentation d'un élément barre sur un élément du maillage 103
Figure 4.9 Interpolation linéaire et interpolation consistante 106
Figure 4.10 Détection des intersections entre les éléments 113
Figure 4.11 Visualisation des nœuds de l'ancien maillage ayant une influence sur un nœud du nouveau maillage 113

Figure 4.12 Illustration d'un maillage d'intersection dans le cas le plus simple . . . 115
Figure 4.13 Évaluation du point d'intersection entre deux arrêtes de triangle 118
Figure 4.14 Numérotation des points d'intersection entre deux triangles 118
Figure 4.15 Cas pathologique pour la projection avec maillage d'intersection 121

Figure 5.1 Représentation simplifiée du cycle de la modélisation 138
Figure 5.2 Domaines de calcul utilisés pour étudier la convergence des erreurs spatiale et temporelle 142
Figure 5.3 Graphes de convergence des erreurs spatiales pour un raffinement uniforme du maillage 144
Figure 5.4 Comparaison de maillages issus de chaque méthode de raffinement de maillage 145
Figure 5.5 Graphes de convergence des erreurs spatiales pour un raffinement du maillage réalisé par adaptation de maillage 146
Figure 5.6 Graphes de convergence de l'erreur temporelle 148
Figure 5.7 Formulation ALE - Graphes de convergence de l'erreur temporelle . . . 149
Figure 5.8 Formulation ALE - Comparaison des déformations du maillage en fonction des éléments qui le composent 151
Figure 5.9 Approche mononorme - Illustration des maillages 4 et 8 154
Figure 5.10 Approche mononorme - Distribution de l'erreur exacte élémentaire en norme énergie, pour les maillages 4 et 8 154
Figure 5.11 Approche mononorme - Visualisation de l'erreur exacte en norme énergie dans le domaine, et identification des éléments à retirer 156
Figure 5.12 Approche multinorme - Illustration des maillages 4 et 8 157
Figure 5.13 Approche multinorme - Distribution de l'erreur exacte élémentaire en norme énergie, pour les maillage 4 et 8 158
Figure 5.14 Approche multinorme - Visualisation de l'erreur exacte en norme énergie dans le domaine, et identification des éléments à retirer 160
Figure 5.15 Illustration du problème test pour les méthodes de relaxation 162
Figure 5.16 Qualité des éléments sur le maillage initiale (métrique Q_2) 162
Figure 5.17 Comparaison des distributions de qualité élémentaire obtenues par chaque méthode de relaxation 163
Figure 5.18 Géométrie paramétrée d'un triangle 165
Figure 5.19 Comparaison des valeurs des métriques de qualité élémentaire pour différents couple (α, β) 165
Figure 5.20 Relaxation locale - Évolution de la qualité des éléments 166
Figure 5.21 Relaxation locale - Superposition du maillage initial et final 167

Figure 5.22 Domaines de calcul pour l'étude des erreurs de transfert de la solution d'un maillage à l'autre 169
Figure 5.23 Domaine A - Convergence de l'erreur de transfert pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert 170
Figure 5.24 Domaine B - Visualisation de l'erreur de transfert élémentaire sur u sur le dernier maillage, pour différentes méthodes de transfert 172
Figure 5.25 Domaine B - Convergence de l'erreur de transfert pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert 173
Figure 5.26 Domaine A - Évaluation de la propriété de conservation pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert 175
Figure 5.27 Domaine B - Évaluation de la propriété de conservation pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert 176
Figure 5.28 Coûts de calcul des différentes méthodes de transfert de la solution, donnés relativement au coût de l'interpolation linéaire 178
Figure 5.29 Temps de calcul moyen pour les différentes méthodes de transfert en exécution séquentielle 178

Figure 6.1 Cylindre circulaire - Géométrie du domaine de calcul 181
Figure 6.2 Cylindre circulaire - Variation du nombre d'éléments dans le maillage dans chaque cas 183
Figure 6.3 Cylindre circulaire - Vue partielle des maillages utilisés à différents instants pour le cas 1 185
Figure 6.4 Cylindre circulaire - Vue partielle des poches à remailler à différents instants pour le cas 1 186
Figure 6.5 Cylindre circulaire - Évolution des fonctions de préservation pour plusieurs cas 188
Figure 6.6 Cylindre circulaire - Évolution de la qualité élémentaire minimale pour les cas 1 et 6 188
Figure 6.7 Cylindre circulaire - Évolution de l'erreur relative globale en norme énergie 190
Figure 6.8 Cylindre circulaire - Évolution de l'écart-type relatif et de l'asymétrie de la distribution de l'erreur en norme énergie pour les cas 1 et 5 . . . 191
Figure 6.9 Cylindre circulaire - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées, pour les cas 1 et 5 192
Figure 6.10 Cylindre circulaire - Évolution du coefficient de portance pour plusieurs cas 194
Figure 6.11 Cylindre circulaire - Évolution du coefficient de trainée pour plusieurs cas 195

Figure 6.12 Cylindre circulaire - Évolution de la taille h du pas de temps pour plusieurs cas 197
Figure 6.13 Cylindre circulaire - Évolution de l'ordre p de l'intégrateur temporel pour plusieurs cas 198
Figure 6.14 Jet impactant - Géométrie du domaine de calcul 202
Figure 6.15 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 1 . . 207
Figure 6.16 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 2 . . 209
Figure 6.17 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 3 . . 211
Figure 6.18 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 4 . . 213
Figure 6.19 Jet impactant - Vue des poches à remailler à différents instants pour le cas 4 216
Figure 6.20 Jet impactant - Évolution des fonctions de préservation 218
Figure 6.21 Jet impactant - Évolution du nombre d'éléments 218
Figure 6.22 Jet impactant - Évolution des erreurs relatives globales estimées 220
Figure 6.23 Jet impactant - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées 221
Figure 6.24 Jet impactant - Évolution du pas de temps h dans chaque cas 222
Figure 6.25 Jet impactant - Évolution temporelle de la vorticité au point $(x = 1.5, y = -9.95)$ dans le cas 4 224
Figure 6.26 Jet impactant - Évolution du coefficient de frottement C_f sur la frontière 5 225
Figure 6.27 Jet impactant - Évolution du nombre de Nusselt Nu sur la frontière 5 . 227
Figure 6.28 Marche descendante - Géométrie du problème 230
Figure 6.29 Marche descendante - Illustration du maillage à divers instants 234
Figure 6.30 Marche descendante - Vue des poches à remailler à différents instants . 236
Figure 6.31 Marche descendante - Évolution du nombre d'éléments dans le maillage 239
Figure 6.32 Marche descendante - Évolution des fonctions de préservation 239
Figure 6.33 Marche descendante - Construction des poches d'éléments à retirer en fonction du critère de sélection des éléments germes à $t = 45$ 240
Figure 6.34 Marche descendante - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées 241
Figure 6.35 Marche descendante - Évolution du nombre total d'adaptations de maillage au cours de la simulation 241
Figure 6.36 Marche descendante - Évolution des erreurs relatives globales 242
Figure 6.37 Marche descendante - Évolution du pas de temps h 244
Figure 6.38 Marche descendante - Position du point de recollement sur la frontière 3 au cours du temps 245

Figure 6.39 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Géométrie du domaine de calcul et forme initiale de l'interface 248
Figure 6.40 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Représentation de l'interface 250
Figure 6.41 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Visualisation du maillage à plusieurs instants 253
Figure 6.42 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Visualisation de la formation des poches à plusieurs instants 255
Figure 6.43 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Vues rapprochées de la formation des poches sur le maillage final ($t = 0.9$ s) 256
Figure 6.44 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution des fonctions de préservation 256
Figure 6.45 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution du nombre d'éléments 256
Figure 6.46 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'erreur spatiale estimée en norme énergie 258
Figure 6.47 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'écart-type de la distribution de l'erreur 258
Figure 6.48 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'asymétrie de la distribution de l'erreur 258
Figure 6.49 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées 258
Figure 6.50 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution du nombre total d'adaptations de maillage au cours du temps 258
Figure 6.51 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de la taille h du pas de temps en cours de simulation 260
Figure 6.52 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Surface du domaine occupé par chaque fluide au cours du temps 260

Figure A.1 Représentation de la loi de paroi standard, en superposition avec la loi unifiée proposée par Reichardt [3] 286
Figure B.1 Illustration des formulations Eulérienne, Lagrangienne et ALE 291
Figure C.1 Passage d'un front unique à deux fronts disjoints dans la méthode de génération de maillage par avance de front 302
Figure C.2 Principe de l'arborescence en *quadtree* 304
Figure C.3 Recherche dans l'arborescence - Cas pathologique lors de la recherche selon la première approche 305
Figure C.4 Recherche dans l'arborescence - Cas pathologique lors de la recherche selon la seconde approche 306

Figure C.5 Recherche dans l'arborescende - Cas pathologique lors de la recherche d'un nouveau nœud sur une frontière ou une interface incurvée 307
Figure D.1 Jet impactant - Champs de température à différents instants pour le cas 3 308

LISTE DES NOTATIONS, OPÉRATEURS ET SIGLES

Notations

Variables indépendantes

t	Temps
x, y	Coordonnées d'espace dans un repère cartésien 2D

Variables dépendantes

$\boldsymbol{u}$	Champs de vitesse
u, v	Composantes du champs de vitesse dans un repère cartésien 2D
P	Champs de pression
T	Champs de température
k	Énergie cinétique de turbulence massique moyenne
$\mathcal{K}$	Variable de turbulence logarithmique associée à k ($\mathcal{K} = \log(k)$)
ε	Taux de dissipation de k
$\mathcal{E}$	Variable de turbulence logarithmique associée à ε ($\mathcal{E} = \log(\varepsilon)$)
$\boldsymbol{\xi}$	Déplacement nodal
ξ, η	Composantes du déplacement nodal dans un repère cartésien 2D

Espaces fonctionnels

$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
$H^1(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω et dont les composantes du gradient sont aussi de carré intégrable sur Ω

Adaptation de maillage

δ	Taille de maille (parfois aussi notée h)
$\{\mathcal{E}_a\}$	Ensemble des éléments issus de la génération locale du maillage
$\{\mathcal{E}_r\}$	Ensemble des éléments du maillage ayant subi la relaxation
f_{p1}	Fonction de préservation pour la relaxation locale du maillage
f_{p2}	Fonction de préservation pour l'adaptation locale du maillage
f_{p3}	Fonction de préservation globale
Q_{min}	Qualité minimale tolérable d'un élément avant la relaxation de maillage
R_{max}	Variation limite de taille d'un élément lors de la sélection des éléments germes
θ	Opérateur de transition

Intégration temporelle

e_n	Erreur locale au n-ème pas de temps
τ_h	Erreur de troncature locale
h	Taille d'un pas de temps
h_n	Taille du n-ème pas de temps
p	Ordre ou nombre de pas/niveaux de l'intégrateur temporel
s	*Swing factor*
s_{max}	*Swing factor* maximale
$\boldsymbol{q}_n$	Vecteur solution au n-ème pas de temps
$\boldsymbol{q}_0$	Vecteur solution à $t = t_0$
t_0	Instant initial de l'intervalle de temps simulé

Transfert d'une solution

$\mathcal{M}_d$	Maillage donneur de la solution lors du transfert d'une solution entre deux maillages
$\mathcal{M}_t$	Maillage receveur de la solution lors du transfert d'une solution entre deux maillages
Ω_d	Domaine de calcul correspondant au maillage $\mathcal{M}_d$
Ω_t	Domaine de calcul correspondant au maillage $\mathcal{M}_t$
q_d	Solution sur $\mathcal{M}_d$
q_t	Solution sur $\mathcal{M}_t$ issue du transfert de la solution q_d

Tolérances associées aux critères d'arrêt

ε_1	erreur globale relative maximale
ε_2	réduction maximale admissible de la taille d'un élément
ε_3	augmentation maximale admissible de la taille d'un élément
ε_4	écart-type relatif maximal d'une distribution de l'erreur
ε_5	asymétrie maximale d'une distribution de l'erreur
ε_6	qualité minimale des éléments dans le maillage

Propriétés physiques du fluide

λ	Conductivité thermique
λ_t	Conductivité thermique turbulente
c_p	Capacité thermique massique à pression constante
ρ	Masse volumique
ρ_0	Masse volumique caractéristique

ν	Viscosité cinématique
μ	Viscosité dynamique
μ_0	Viscosité dynamique caractéristique
μ_t	Viscosité turbulente dynamique

Nombres adimensionnels

Fr	Nombre de Froude
Nu	Nombre de Nusselt
Pe	Nombre de Péclet
Pr	Nombre de Prandtl
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent
Re	Nombre de Reynolds
Re_t	Nombre de Reynolds turbulent
St	Nombre de Strouhal

Autres notations

a	Scalaire a
$\boldsymbol{a}$	Vecteur $\boldsymbol{a}$
$\underline{\boldsymbol{a}}$	Matrice $\underline{\boldsymbol{a}}$
U_0	Vitesse caractéristique de l'écoulement
L_0	Longueur caractéristique du problème fluide
$\emptyset$	Ensemble/Espace vide
φ, λ	Fonctions tests ou fonctions de forme pour la vitesse/pression
Φ, Λ	Fonctions de base pour la vitesse/pression
N_e	Nombre d'éléments dans un maillage
$\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P)$	Forme compacte des équations de Navier-Stokes
Ω	Domaine de calcul
Ω_h	Domaine de calcul discrétisé
$\delta\Omega$	Frontière du domaine de calcul
$\underline{\boldsymbol{I}}$	Tenseur identité
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur des contraintes totales
$\underline{\boldsymbol{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{Re}$	Tenseur de Reynolds
$\boldsymbol{g}$	Accélération de la pesanteur
$\hat{\boldsymbol{n}}$	Vecteur normal sortant unitaire

Opérateurs et fonctions mathématiques

Opérateurs

$\frac{\mathrm{d}\cdot}{\mathrm{d}\cdot}$	Dérivée totale
$\frac{\partial\cdot}{\partial\cdot}$	Dérivée partielle
$\cup$	Union d'ensembles/d'espaces
$\cap$	Intersection d'ensembles/d'espaces
$\mathbb{E}$	Espérance mathématique
$\nabla()$	Opérateur gradient
$\boldsymbol{\nabla}\cdot$	Opérateur divergence
$\underline{\boldsymbol{a}}^T$	Transposée de $\underline{\boldsymbol{a}}$

Fonctions/Applications

$\lVert\cdot\rVert_{L^2(\Omega)}$	Norme L^2 sur Ω
$\lVert\cdot\rVert_{H^1(\Omega)}$	Norme H^1 sur Ω
$\lVert\cdot\rVert$	Norme Euclidienne
$\underline{\boldsymbol{a}} : \underline{\boldsymbol{b}}$	Double contraction
$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b}$	Produit matrice vecteur
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	Produit scalaire

Sigles

ALE	*Arbitrary Lagrangian Eulerian*
BDF	*Backward Differentiation Formula*
CFD	*Computational Fluid Dynamics*
CFL	*Courant-Friedrichs-Lewy*
CSR	*Compressed Sparse Row*
DES	*Detached Eddy Simulation*
DNS	*Direct Numerical Simulation*
DVS	*Décomposition en Valeurs Singulières*
EDA	*Équation Différentielle Algébrique*
EDO	*Équation Différentielle Ordinaire*
EDP	*Équation aux Dérivées Partielles*
GMRES	*Generalized Minimal RESidual*
DIRK	*Diagonal Implicit Runge-Kutta*
IRK	*Implicit Runge-Kutta*
LBB	*Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi*

LES	*Large Eddy Simulation*
LU	*Lower-Upper*
MMS	*Method of Manufactured Solutions*
PARDISO	*PARallel DIrect Sparse sOlver*
PIV	*Particle Image Velocimetry*
PVI	*Problème aux Valeurs Initiales*
P2-P1	*Approximation quadratique pour la vitesse et linéaire pour la pression*
RANS	*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*
URANS	*Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes*
VLES	*Very Large Eddy Simulation*
VOF	*Volume Of Fluid*
(1,2,3)D	*Une, Deux, ou Trois Dimensions d'espace*

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Lois de paroi standards à une et deux échelles de vitesse 284

Annexe B Formulation ALE 289
B.1 Vitesse de convection et loi de conservation géométrique 289
B.2 Propagation des déplacements 296

Annexe C Génération de maillage 298
C.1 Méthode par avance de front 299
C.1.1 Discrétisation des courbes frontières 299
C.1.2 Discrétisation du domaine 300
C.2 Arborescence de type *quadtree* 303
C.2.1 Principe 303
C.2.2 Stockage d'un maillage 303
C.2.3 Recherche dans l'arbre 304

Annexe D Champs de température à plusieurs instants pour le jet impactant (cas 3) 308

LISTE DES ALGORITHMES

Algorithme 4.1 Forme générale de la procédure de résolution proposée 136

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Introduction générale

Depuis les années 1980, nous vivons dans un monde où l'hégémonie des sciences liées au numérique ne cesse de s'affirmer davantage. Il est désormais de plus en plus difficile, voire déviant, de mener une vie quotidienne dépourvue d'applications électroniques et informatiques. Force est de concéder que les outils nés de ces disciplines sont généralement fort accommodants dans la réalisation de nos tâches professionnelles, en plus d'être parfois la base principale de nos loisirs dans l'enceinte de nos foyers. Le dévouement et la passion des spécialistes du numérique ont permis des avancées fulgurantes en l'espace de seulement quarante ans. Difficile de ne pas s'émerveiller lorsque l'on voit les prouesses techniques rendues possibles par des calculateurs toujours plus performants. Assister à la retransmission d'un lancement d'une fusée Ariane 5 ne peut laisser indifférent. Sentir la poussée des moteurs d'un avion en phase de décollage est toujours étrangement contentant. Les améliorations drastiques qu'ont connues ces applications en l'espace de quarante ans n'eurent toutefois été possibles sans une compréhension croissante des sciences physiques à l'œuvre. Là encore, les sciences numériques sont grandement à remercier. Devenue une alliée de choix de l'expérimentation manuelle [1], la simulation numérique a permis d'éprouver et de questionner nos modélisations de la physique avec un systématisme à nul autre pareil, au point que l'on y réfère parfois en parlant d'*expérience numérique*. En nourrissant ainsi notre compréhension de la physique, la simulation numérique bénéficie en bout de ligne des progrès qu'elle rend possible. C'est ce cercle vertueux d'une part, et l'amélioration continue des ressources informatiques d'autre part, qui expliquent qu'elle soit désormais incontournable dans les bureaux d'étude d'ingénierie. Nul doute que la simulation numérique sera à la base des solutions qu'il nous faut trouver pour résoudre les grandes questions de demain.

Sur la palette des phénoménologies étudiées par simulation numérique, ce mémoire s'inscrit tout particulièrement dans celui de la mécanique des fluides. Grâce aux efforts soutenus d'une communauté toujours plus large, le cadre de la CFD moderne (*Computational Fluid Dynamics*) est en mouvance perpétuelle. Les équipes de recherche, principalement rattachées à des organismes publics et des universités, s'évertuent à soutenir les acteurs industriels en développant des outils de simulation numérique de haute fidélité, nécessaires pour satisfaire un besoin de précision toujours croissant. Toutefois, la viabilité finale d'un outil de simulation

1. Bien que l'acquisition des données sur les système expérimentaux modernes se fassent essentiellement au moyen de systèmes numériques.

dépend aussi grandement du niveau de technicité de son utilisation, du coût de calcul afférent, et surtout de ce que l'on veut simuler. Pour reprendre l'expression d'un de mes anciens professeurs, "Nul ne sert d'utiliser un lance-roquettes pour tuer une mouche". Prenons un exemple plus concret. On conviendra qu'un véhicule utilitaire sport (VUS) permet d'explorer des territoires inaccessibles à la voiture citadine. Ses coûts d'achat et d'entretien sont donc justifiés pour se rendre sur les dits territoires. Mais l'on conviendra également que, ne serait-ce que par son nom, la voiture citadine demeure plus adaptée à la conduite en ville, les routes de Montréal n'étant par exemple que guère caillouteuses [2]. Dans l'idéal, il faudrait donc concevoir un véhicule *adaptatif*, à même de fournir des performances optimales sur tous les terrains. Pour l'heure, cette prouesse reste de l'ordre de la fiction [3]. En revanche, la communauté de CFD a pour sa part réussi à mettre au point des méthodes numériques adaptatives, permettant de concilier des objectifs de précision et de coût sur des problèmes variés. Plus précisément, ces méthodes ont les avantages suivants :

(1) Simplification de la mise en place des simulations

(2) Contrôle des sources d'erreur

(3) Optimisation du coût de calcul

Le premier point n'est pas à négliger. Considérons le cas d'un écoulement instationnaire quelconque qu'un ingénieur souhaiterait simuler. Outre les considérations de conditions limites, qui n'en demeurent pas moins importantes, l'ingénieur devra établir le maillage qu'il souhaite utiliser pour approximer la géométrie du domaine de calcul. Il devra aussi établir la valeur du pas de temps pour le schéma d'intégration temporel retenu. S'il ne s'agit que d'une étude préliminaire, il pourra à raison se réfugier dans le confort des options par défaut que lui offre son code de calcul. Dans le cas contraire, un minimum de réflexion s'impose. La question du maillage peut même devenir très épineuse. En admettant que l'ingénieur ait connaissance de l'évolution générale de l'écoulement, il lui faudra néanmoins raffiner toutes les régions qu'il estime être temporairement critiques. Le coût de calcul de la simulation étant proportionnel au nombre d'éléments de son maillage, cette stratégie peut vite aboutir à un coût de calcul trop important [4]. La fonction d'une méthode adaptative en espace et de définir automatiquement un maillage adapté à la complexité locale de la physique. Dans le contexte plus particulier des écoulements instationnaires, la méthode doit permettre d'adapter le maillage au cours de la résolution du problème, pour tenir compte du déplacement des régions critiques. Une

2. À la rigueur, on admettra l'existence de quelques nids de poules notables sur les autoroutes qui traversent la ville.

3. On pense ici au Bus Magique, qui aura peut-être marqué votre enfance, par sa capacité à se transformer en fusée, en avion, en sous-marin, ou encore en bateau, dépendamment des besoins.

4. Que le code calcul soit hautement parallèle ou non, cette stratégie demeure *usuellement* naïve.

méthode adaptative en temps permet quant à elle de définir automatiquement la taille du pas de temps à utiliser, cette taille pouvant évoluer tout au long de la simulation. En essence, les méthodes adaptatives simplifient donc la réflexion de l'ingénieur, ce qui résulte en un gain de temps parfois sensible.

En plus d'accommoder l'ingénieur, les méthodes adaptatives peuvent offrir un contrôle fin des sources d'erreur. Les erreurs de discrétisation spatiales, liées au choix du type d'élément et à leur organisation dans le maillage, peuvent être adéquatement contrôlées par l'adaptation automatique du maillage. Pour y parvenir, la plupart des méthodes s'appuient justement sur une estimation de ces erreurs. De la même façon, une méthode adaptative en temps permet d'avoir un contrôle sur les erreurs de discrétisation temporelles, intiment liées à la taille du pas de temps, et à la dynamique de l'écoulement. Là encore, le processus adaptatif est le plus souvent piloté par une estimation de ces erreurs. En employant des méthodes adaptatives, l'ingénieur va donc pouvoir, via des niveaux d'erreur cibles [5] renseignés *a priori* de la simulation, contrôler à l'avance la précision du calcul.

Les méthodes adaptatives apportent donc la garantie que le niveau des deux types d'erreur évoqués soient en dessous d'une certaine cible. Dans les faits, elles font très souvent bien mieux. Elles assurent que les niveaux d'erreur demeurent proches de leur cible respective. Cela signifie qu'un niveau de raffinement excessif dans le maillage est évité. Cela signifie aussi que l'on maximisera la taille du pas de temps. En conséquence, le coût de calcul total de la simulation tend à être continuellement optimisé.

L'exemple de l'écoulement instationnaire quelconque, qui nous a servi de fil rouge jusqu'ici, ne résulte pas d'une panne d'inspiration de l'auteur. Ce type d'application a été délibérément choisi car il s'agit justement de l'objet de cette thèse [6]. Les écoulements instationnaires sont intrinsèquement plus complexes à simuler *adéquatement*. Ils interviennent également dans beaucoup de situations liées à des applications d'ingénierie. Ces deux constats expliquent notre intérêt. Que le lecteur soit rassuré, notre exposé sur les méthodes adaptatives n'est pas fortuit non plus. Celles-ci sont intimement liées à notre sujet de recherche. Cette thèse traite d'une méthode de résolution des écoulements instationnaires s'appuyant sur les méthodes adaptatives en espace et en temps. De telles méthodes ont déjà été proposées dans la littérature [112, 128, 135], mais fort heureusement pour nous, les approches rapportées diffèrent en de nombreux points de celle que nous exposons dans ce mémoire. Notre approche découle néanmoins de la même volonté de développer un outil permettant de contrôler finement les erreurs de discrétisation spatiales *et* temporelles. Leur contrôle simultané est une réponse au

5. Dans la suite de ce document, on parlera indifféremment de tolérances d'erreur.

6. Notons qu'il eût été également plus difficile d'introduire les méthodes adaptatives en temps en discutant d'un écoulement stationnaire.

couplage des erreurs. Adapter le maillage n'a aucun intérêt si la discrétisation temporelle est inadaptée. De la même façon, chercher à contrôler les erreurs de discrétisation temporelle sur un maillage trop grossier n'a aucun sens.

Par ailleurs, et nous n'en n'avons pas parlé jusqu'ici, adapter le maillage au cours de la résolution d'un écoulement instationnaire implique de transférer la solution courante de l'écoulement sur le nouveau maillage. Ce processus de transfert devient lui aussi une source d'erreur, qu'il devient nécessaire de contrôler. À cette fin, nos travaux présentent une méthode d'adaptation locale du maillage. On opte ensuite pour un transfert local et fortement conservatif de la solution, limité aux régions du domaine de calcul dont le maillage a été adapté. Ces traitements locaux s'avèrent également beaucoup moins coûteux que des traitements qui seraient appliqués sur l'ensemble du domaine.

Avant de procéder à l'annonce des différents chapitres de ce document, nous souhaitons aviser le lecteur que notre preuve de concept qui en fait l'objet a été formulée en 2D uniquement, pour des raisons techniques liées à l'historique des travaux menés au laboratoire. Nous avons conscience qu'il s'agit ici d'une limite importante. Malgré tout, nous osons croire que nos résultats susciteront un jour son implémentation en 3D, bien que la quantité de travail requise pour étendre nos concepts en 3D puisse être importante.

1.2 Plan du mémoire

Faisant immédiatement suite à cette courte introduction, le lecteur trouvera au Chapitre 2 une revue de littérature succincte sur le thème des méthodes adaptatives en espace et en temps, ainsi que sur le thème du transfert d'une solution entre deux maillages. Ce chapitre se poursuit par l'introduction des objectifs général et spécifiques du projet, et par des considérations de méthodologie. Nos contributions originales à la recherche sont finalement soulignées. Le Chapitre 3, quant à lui, expose et commente les équations aux dérivées partielles qui gouvernent la physique des problèmes fluides que nous avons traités dans ces travaux. On y trouvera les équations de Navier-Stokes, l'équation de l'énergie, ainsi que les équations URANS. Dans un deuxième temps, une méthode d'éléments-finis, que nous avons ici utilisée pour obtenir la formulation semi-discrète de ces équations, est introduite en détails. Le Chapitre 4 est plus largement consacré aux méthodes numériques au cœur de notre procédure de résolution adaptative. On y traite, entre autres, de notre méthode d'adaptation de maillage locale, d'une formulation locale de la projection de Galerkin, et de l'intégrateur temporel adaptatif que nous avons utilisé. Le Chapitre 5 relate les activités de vérification et d'analyse que nous avons menées, en rapport à l'implémentation des différents outils introduits dans ces travaux. Le Chapitre 6 démontre la pertinence et la généralité de notre procédure

de résolution en l'appliquant sur des écoulements instationnaires variés. Finalement, le Chapitre 7 nous permet de conclure sur l'ensemble des travaux réalisés. On insiste notamment sur les limites actuelles de notre procédure, tout en proposant des axes d'amélioration *a priori* pertinents.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre offre une revue de littérature succincte sur les centres d'intérêt sous-jacents à notre projet de recherche. Nous l'avons évoqué en introduction, ces travaux traitent de la question générale du contrôle efficace des sources d'erreur lors de la simulation numérique d'un écoulement instationnaire. Nous avons identifié deux sources prépondérantes, dont on rappelle qu'elles sont couplées :

- Les erreurs de discrétisation temporelles
- Les erreurs de discrétisation spatiales

La spécification d'un pas de temps h et d'une taille de maille δ *a priori* de la simulation n'est pas aisée. Ces quantités vont respectivement conditionner l'amplitude des deux types d'erreur précédents. Le coût de la simulation en découle aussi directement. Les méthodes adaptatives permettent de s'affranchir du choix de h et/ou de δ. Leur usage conjoint peut néanmoins soulever des défis importants. Les méthodes d'adaptation de maillage dans un contexte d'écoulement instationnaire induisent à elles-seules une difficulté bien souvent inévitable : la solution obtenue sur le maillage courant doit être transférée sur le nouveau maillage. Sauf dans quelques cas très particuliers, ce transfert induit des erreurs, au sens que la représentation de la solution d'un maillage à l'autre ne peut être conservée. Dépendamment que l'intégrateur temporel utilisé soit auto-démarrant ou non, il pourra même être nécessaire de transférer la solution de plusieurs pas de temps afin de conserver l'ordre de l'intégrateur. Dans la suite de ce chapitre, on donne donc un éclairage de la littérature sur les trois sujets clés suivants :

(1) Les méthodes d'intégration temporelles adaptatives
(2) Les méthodes d'adaptation de maillage en régime (in)stationnaire
(3) Les méthodes de transfert d'une solution numérique d'un maillage à l'autre

La fin de ce chapitre expose les objectifs de notre projet de recherche. La méthodologie employée pour les atteindre, définie à la lumière de la revue de littérature effectuée, est également présentée. L'identification de nos contributions originales à la recherche clôture ce chapitre.

2.1 Intégration temporelle adaptative

Dans le cas d'une formulation semi-discrète obtenue par la méthode de Galerkin continue, l'intégration en temps des équations de Navier-Stokes consiste à évaluer la dérivée partielle en temps qui persiste dans l'expression du résidu. De nombreuses méthodes existent pour ce faire, et il serait donc vain de prétendre les présenter toutes. Nous avons volontairement orienté cette courte revue sur des travaux portant sur les méthodes d'ordre élevé. Le sujet des méthodes adaptatives est également abordé.

2.1.1 Intégrateurs temporels d'ordre élevé

Parmi les méthodes d'ordre élevé, on distingue encore les méthodes implicites et explicites. Si ces dernières permettent d'évaluer directement la dérivée temporelle sans avoir à inverser un système matriciel, elle souffrent en général d'une condition CFL sévère [108]. De ce fait la taille maximale utilisable pour le pas de temps peut devenir très faible, d'autant plus si le maillage dispose de zones avec un haut niveau de raffinement. Pour cette raison, on peut donc préférer l'usage des méthodes implicites pour lesquels les valeurs admissibles du CFL sont beaucoup plus grandes, voire infinies. En d'autres termes, les méthodes implicites sont souvent considérées pour leur stabilité. Parmi les méthodes implicites les plus répandues, on distingue les méthodes de type Runge-Kutta, et les méthodes linéaires multi-pas. On les aborde successivement dans la suite.

Soit q la valeur nodale d'une variable dépendante du problème à résoudre (une composante de vitesse par exemple). Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} &= f(t,q) \\ q(0) &= q_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Une méthode de Runge-Kutta implicite à p niveau(x) peut être présentée sous la forme générale suivante :

$$q_{n+1} = q_n + h\sum_{i=1}^{p} b_i k_i \tag{2.2}$$

où h désigne la valeur du pas de temps. Par ailleurs, les quantités k_i sont données par :

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, q_n + h\sum_{j=1}^{p} a_{ij} k_j\right) \tag{2.3}$$

Les coefficients a_{ij}, c_i et b_i sont fréquemment définis via le tableau de Butcher relatif à la

méthode de Runge-Kutta employée :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_p & a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{array} = \begin{array}{c|c} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{A} \\ \hline & \boldsymbol{b}^T \end{array} \tag{2.4}$$

Il existe une très vaste déclinaison de méthodes, qui diffèrent les unes des autres par les coefficients intervenant dans le tableau de Butcher. C'est aussi le choix des différents coefficients qui va conditionner l'ordre de la méthode [41], de même que son caractère explicite ou implicite. Dans le cadre d'anciens travaux menés au laboratoire [113], c'est par exemple les méthodes de Radau IIA, bénéficiant d'excellentes propriétés de stabilité, qui ont été utilisées. Elles présentent cependant une limite notable lorsque appliquées à la résolution d'écoulement incompressible. Ce type de problème est décrit par un système d'équations différentielles algébriques d'index 2 [109]. Dans ce cas la variable d'index 2, la pression, présente une consistance en temps d'ordre inférieur à celui des variables de vitesses [131]. On retrouve également dans la littérature un intérêt pour les méthodes DIRK (*Diagonal-implicit Runge-Kutta methods*) [102, 122]. Le problème commun à toutes les méthodes implicites de type Runge-Kutta reste néanmoins d'augmenter d'autant plus la taille du système à résoudre que l'ordre de la méthode augmente [1]. Dans une approche de résolution monolithique, cela peut vite impliquer un coût de calcul prohibitif si le système est résolu par une méthode directe (de type factorisation LU). On préfère dans ce cas recourir à des méthodes itératives de type Jacobi ou Gauss-Seidel. Les méthodes GMRES sont aussi fréquemment utilisées [108]. Des techniques existent afin d'optimiser le stockage mémoire (approche *matrix-free* [76]) et d'améliorer le taux de convergence (*line-implicit method* [59, 90]) de ces méthodes. Toutefois on ne peut retrouver le taux de convergence quadratique de la méthode de Newton.

Une autre philosophie consiste donc à vouloir conserver l'usage d'une méthode directe en recourant à un intégrateur temporel qui n'impacte pas la taille du système matriciel. Dans ce contexte les méthodes linéaires multi-pas sont particulièrement intéressantes pour évaluer la dérivée partielle en temps de la solution. Ces méthodes requièrent uniquement de stocker en mémoire la solution de plusieurs pas de temps précédents. La taille du système linéaire à résoudre reste inchangée [131]. Dans cette famille de méthodes figurent à nouveau des méthodes explicites et implicites. Pour la même raison de stabilité évoquée plus haut, on

1. Il est possible de conserver un système linéaire de même taille, mais il faut alors le résoudre une fois par niveau.

ne s'intéresse qu'aux méthodes implicites. Ces méthodes reposent sur l'interpolation de la solution ou de la dérivée temporelle de la solution. Le second cas fait référence aux méthodes d'Adams-Moulton, mais celles-ci ne se prêtent guère à l'étude de problèmes numériquement raides [121], et sont donc peu adaptés au traitement des équations de Navier-Stokes. À l'inverse, les méthodes BDF, qui s'obtiennent à partir de l'interpolation de Newton de la solution, sont très appropriées pour ces problèmes. Ces méthodes seront largement abordées à la Section 4.5. Néanmoins, précisons déjà les deux grandes limites de cette famille de méthodes : elles ne sont pas auto-démarrantes et la propriété de stabilité absolue (*A-stability*) n'est plus vérifiée pour les méthodes à trois pas ou plus [105].

2.1.2 Intégrateurs temporels h-adaptatifs

Estimateurs/Indicateurs d'erreur temporelle

On aborde maintenant la question de l'adaptativité de l'intégrateur temporel. Les algorithmes bénéficiant d'un pas de temps h adaptatif sont nombreux dans la littérature [112, 119, 122, 128, 144] mais les méthodes d'estimation de l'erreur locale, et les contrôleurs utilisés pour faire varier la taille du pas de temps, sont variées. Pour ce qui relève de l'estimation de l'erreur locale, nous avons référencé plusieurs approches. Une première consiste à évaluer une approximation de l'erreur de troncature [131]. Cette façon d'opérer sera présentée en détails à la Section 4.5.2. Une seconde approche, très courante, estime l'erreur locale en calculant la dérivée temporelle avec deux méthodes de la même famille mais d'ordre différent (*embedded technique*) [119, 122]. Rien n'oblige toutefois à utiliser deux méthodes de la même famille. Mayr *et al.* [144] proposent par exemple d'utiliser une méthode implicite d'ordre p pour intégrer en temps les équations, et une méthode secondaire explicite d'ordre $\tilde{p} \geq p$ pour fournir localement une solution plus précise. Soient $\boldsymbol{q}_n$ et $\tilde{\boldsymbol{q}}_n$ les solutions à l'étape n fournies par le schéma implicite et le schéma explicite respectivement. Chaque composante i de ces vecteurs est relatif à la solution d'une variable dépendante q^i du problème à résoudre. On peut définir un vecteur d'erreur locale $\boldsymbol{e}_n$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{q}_n - \tilde{\boldsymbol{q}}_n \tag{2.5}$$

Soit Ω le domaine de calcul. Le contrôle du pas de temps h vise à maintenir la norme $L^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{e}_n$ en dessous d'une tolérance ε_T^1 :

$$\| \boldsymbol{e}_n \|_{L^2} = \left[\int_\Omega \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}\Omega \right]^{1/2} \leq \varepsilon_T^1 \tag{2.6}$$

Cette formulation est très simple, mais présente deux inconvénients majeurs. D'une part, la tolérance ε_T^1 à fournir est absolue, ce qui la rend difficile à établir. D'autre part, elle est relative à une quantité qui dépend du domaine Ω. Doubler les dimensions du domaine tout en conservant la même évolution de la solution conduira donc à une erreur deux fois plus importante. Une façon simple de s'affranchir des deux problèmes en même temps est de considérer l'erreur locale estimée relativement à la norme de la solution sur le domaine [145]. La tolérance à fournir, portant sur le niveau de cette erreur relative, est alors plus facile à choisir.

Berrone et Maro [112] proposent quant à eux un indicateur η_n^i de l'erreur locale pour chaque variable dépendante q^i. Il est défini comme suit :

$$(\eta_n^i)^2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}=t_n+h_n} \left(\| \boldsymbol{\nabla}(q_{n+1}^i - q_n^i) \|_{L^2} \right)^2 \, \mathrm{d}t \tag{2.7}$$

Cet indicateur est considéré relativement à la quantité σ_n^i suivante :

$$(\sigma_n^i)^2 = \int_{t_n}^{t_{n+1}=t_n+h_n} \left(\| \boldsymbol{\nabla}(q_n^i) \|_{L^2} \right)^2 \, \mathrm{d}t \tag{2.8}$$

Les auteurs cherchent ensuite à s'assurer que l'inégalité suivante est vérifiée pour chaque variable dépendante du problème :

$$(1 - \alpha_T)\varepsilon_T^2 \leq \frac{\eta_n^i}{\sigma_n^i} \leq (1 + \alpha_T)\varepsilon_T^2 \tag{2.9}$$

où ε_T^2 et α_T sont spécifiés par l'utilisateur. La considération du rapport η_n^i/σ_n^i permet de s'affranchir des deux problèmes posés par la formulation de Mayr *et al.* .

Coupez *et al.* [128] utilisent une approche encore différente. Dans le cadre d'un solveur bénéficiant également de l'adaptation de maillage, les auteurs proposent une méthode d'estimation de l'erreur locale inspirée de leur algorithme d'adaptation de maillage anisotrope. L'idée repose sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation pour la dimension temporelle du problème. L'évaluation de l'erreur d'interpolation se fait au moyen d'une reconstruction de la dérivée temporelle en chaque nœud du maillage.

Porta *et al.* [126] utilisent également une méthode de reconstruction pour évaluer l'erreur de discrétisation en temps à chaque pas de temps. L'esprit de leur méthode s'inspire fortement de la méthode d'estimation de l'erreur de discrétisation spatiale développée par Zhu et Zienkiewicz [24]. Dans leurs travaux, le schéma d'intégration temporel fournit une dérivée temporelle discontinue et constante sur chaque pas de temps. L'idée est donc de reconstruire l'évolution temporelle de la solution pour aboutir à une dérivée temporelle continue

et linéaire par morceaux. Soit $\tilde{q}^i$ la solution reconstruite pour la variable dépendante q^i. En chaque nœud j du maillage, de coordonnées $\boldsymbol{x}_j$, les auteurs formulent l'estimateur de l'erreur de discrétisation temporelle suivant :

$$\left[\varphi_n^i(\boldsymbol{x}_j)\right]^2 = \tilde{T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \frac{\partial \tilde{q}^i(\boldsymbol{x}_j)}{\partial t} - \frac{\partial q^i(\boldsymbol{x}_j)}{\partial t} \right|^2 \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

où $\tilde{T}$ est un "facteur d'échelle temporelle pertinent pour le problème à résoudre" [Notre traduction]. L'objet principal de ce facteur est de rendre l'estimateur sans dimension, afin de pouvoir le sommer proprement avec un estimateur de l'erreur de discrétisation spatiale [126]. Une procédure est ensuite appliquée pour déterminer une erreur de discrétisation temporelle globale sur le domaine de calcul.

Calcul de la valeur du prochain pas de temps

Un estimateur ou un indicateur de l'erreur temporelle ne suffit pas pour adapter le pas de temps h. Il faut ensuite introduire un agent permettant de convertir l'information donnée par l'estimateur/indicateur en une nouvelle valeur de h. Cet agent est traditionnellement appelé *swing factor* (ici noté s). Il prend en arguments l'estimateur/indicateur d'erreur, certaines données relatives à l'intégrateur temporel (très souvent son ordre), et la/les tolérance(s) d'erreur (fournies *a priori* par l'utilisateur). On peut alors écrire :

$$h_{n+1} = s\, h_n \tag{2.11}$$

Dans le cas où problème à résoudre ne se limite pas aux équations de Navier-Stokes (ex : résolution couplée avec l'équation de l'énergie, modélisation RANS, etc...), le calcul de l'estimateur/indicateur d'erreur doit obligatoirement se faire par champs de la solution pour des raisons dimensionnelles [119]. Même dans le cas ou le problème repose sur une formulation sans dimension, il est conseillé de conserver cette approche par champs, car les variables résolues peuvent présenter des amplitudes un peu différentes [145]. Dans le cas d'un solveur pour les interactions fluide-structure avec un solide déformable, Mayr *et al.* [144] proposent en ce sens de calculer une estimation de l'erreur locale pour le fluide et le solide indépendamment. Dans ce cas, on évalue la valeur de s pour chaque estimation d'erreur successivement, pour finalement conserver la plus faible valeur obtenue.

Là encore, de nombreuses formulations du *swing factor* sont rapportées dans la littérature [112, 119, 122, 126, 128, 131, 144]. Du fait de la difficulté d'uniformiser les notations utilisées dans ces références, le lecteur intéressé est invité à les consulter directement pour obtenir

plus de détails sur le sujet. La formulation du *swing factor* introduite dans les travaux de Hay *et al.* [131] sera néanmoins abordée en détails à la Section 4.5.2.

Pour clôturer ce paragraphe, soulignons qu'une valeur de s inférieure à 1 témoigne d'un niveau trop élevé de l'erreur temporelle commise sur le dernier pas de temps. Certains algorithmes [131, 144] disposent dans ce cas d'un mécanisme de rejet de la solution du pas de temps courant. Celle-ci est alors calculée à nouveau à partir d'une valeur réduite de h_n.

2.1.3 Intégrateurs temporels p-adaptatifs

Jusqu'ici, nous avons discuté de la possibilité d'adapter la valeur du pas de temps h au cours de la simulation. Ces stratégies, en plus de faciliter grandement la vie de l'utilisateur, qui n'a alors plus à spécifier une valeur éclairée de h pour toute la simulation, permettent de contrôler plus ou moins finement la *précision* de l'intégration temporelle au cours de la simulation. Toutefois, des considérations de stabilité de l'intégration peuvent également entrer en jeu si l'intégrateur à l'usage n'est pas A-stable. Conformément à la seconde barrière de Dahlquist [4, 105], ce sera par exemple le cas si l'intégrateur dérive d'une méthode linéaire multi-pas avec un nombre de pas strictement supérieure à 2. Dans ce contexte, la réduction du pas de temps h permet éventuellement de regagner la région de stabilité, mais la valeur de h peut alors devenir extrêmement faible au regard du niveau d'erreur locale cible. Pour mitiger le problème, on peut envisager d'adapter l'ordre p de l'intégrateur afin de préserver la stabilité de l'intégration, et ainsi maximiser h. Cette idée a notamment été présentée par Skelboe [13] et par Shampine et Gordon [10]. Skelboe suggère de considérer davantage l'erreur de troncature. En présence d'une instabilité numérique, l'erreur de troncature tend à devenir oscillante. Skelboe propose donc de réaliser un test de régularité (*smoothness condition*) et un test de croissance (*growth condition*) sur l'erreur de troncature. Dans le cas ou le test de régularité est négatif et que le test de croissance est positif, l'ordre de l'intégrateur temporelle est réduit de un. L'étude de Shampine et Gordon propose quant à elle un indicateur de stabilité construit en considérant les termes d'ordre élevé d'un développement de Taylor de la solution. Nous y reviendrons à la Section 4.5.2. Cette dernière idée a été appliquée aux équations de Navier-Stokes par Hay *et al.* [131] pour résoudre des écoulements laminaires visqueux instationnaires. À notre connaissance, il s'agit des seuls travaux mettant cette idée *en pratique*. Notons que l'adaptation en ordre n'est pas vraiment nécessaire avec les méthodes IRK, puisqu'il est possible de construire des méthodes A-stables de n'importe quel ordre.

2.2 Adaptation de maillage en régime (in)stationnaire

2.2.1 Classification usuelle des méthodes d'adaptation de maillage

Les méthodes d'adaptation de maillage sont usuellement classifiées de la façon suivante :

- Méthodes r : Elles consistent à réduire l'erreur spatiale en relocalisant les nœuds du maillage. Le nombre total de nœuds est donc maintenu constant. Le déplacement des nœuds est traditionnellement piloté par la minimisation d'une fonctionnelle.
- Méthodes p : Le maillage reste d'apparence inchangé (même nombre d'éléments), mais le degré des éléments est localement modifié. Un élément de degré 3 peut donc être connexe à une élément de degré 2.
- Méthodes h : Le maillage est adapté en modifiant la taille des éléments. Le nombre d'éléments dans le maillage n'est généralement pas maintenu constant.

On peut de plus distinguer les méthodes selon qu'elles sont :

- isotropes : l'élément n'est alors caractérisé que par sa taille moyenne δ [2]. Notons qu'il existe de nombreuses façons d'évaluer δ : longueur de la plus grande/petite arrête de l'élément, rayon du cercle circonscrit/inscrit, ... C'est cette donnée seule qui fait l'objet de l'adaptation, et le processus d'adaptation de maillage résulte en une nouvelle cartographie de la taille de maille en tous points du domaine. L'adaptation repose sur une évaluation de l'erreur élémentaire commise sur une ou plusieurs quantités d'intérêt.
- anisotropes : l'élancement de l'élément et la direction dans laquelle il se fait font également l'objet de l'adaptation. Pour ce faire, on estime usuellement l'erreur d'interpolation sur chaque arrête de l'élément. L'adaptation consiste alors à équidistribuer l'erreur d'interpolation sur chaque arrête du maillage. On réfère le lecteur aux travaux [77, 101, 118, 126, 128, 138, 139] pour davantage de détails sur la mise en place de ces méthodes.

2.2.2 Estimation de l'erreur spatiale

Toutes les méthodes reposent sur l'estimation d'une forme d'erreur liée à la discrétisation spatiale. Il existe plusieurs approches. Dans [125], Fidkowski *et al.* présentent une revue de littérature sur les techniques *Output-based error estimation*. Elles reposent sur la méthode de l'adjoint, aussi couramment utilisée en conception à des fins d'optimisation. Il est

2. Nous employons ici cette notation pour éviter toute confusion avec la taille h d'un pas de temps. Toutefois, la taille d'un élément est très souvent notée h dans la littérature.

souligné dans la revue que cette approche permet de détecter les régions critiques de l'écoulement, soient celles qui, lorsque mal discrétisées, peuvent induire une erreur importante dans d'autres régions de l'écoulement et/ou sur le calcul d'une quantité d'intérêt (ex : coefficients de portance et de traînée). Ceci est particulièrement intéressant pour traiter les écoulements dominés par les effets convectifs (équations à caractère hyperbolique). Toutefois la méthode requière le calcul d'une solution auxiliaire sur une discrétisation spatiale plus riche et la résolution du problème adjoint, ce qui la rend assez coûteuse. Ce type de méthodes est aussi connu sous le nom de *Goal-Oriented methods* [64].

Des méthodes alternatives conçues davantage pour les problèmes elliptiques, connues sous le nom de *residual methods* [66, 112], procède à l'estimation de l'erreur spatiale en injectant la solution discrétisée dans les équations descriptives du problème. On peut ainsi évaluer l'erreur sur une base ponctuelle ou élémentaire à partir des résidus forts non-nuls que l'on obtient.

Enfin, une dernière catégorie de méthodes, au formalisme mathématique assez léger, regroupe les méthodes de reconstruction (*recovery methods*). La méthode de Zhu et Zienkiewicz [24] en est l'exemple le plus connu. L'estimation de l'erreur spatiale repose sur une reconstruction locale de la solution numérique en projetant celle-ci par moindre carrée sur une base polynomiale enrichie. Dans le cas d'éléments P2-P1, l'approche consiste au départ à projeter les gradients de vitesse sur un espace polynomial quadratique. La différence entre la solution numérique et la solution reconstruite renseigne sur le niveau local de l'erreur de discrétisation. L'erreur ainsi mesurée est de plus asymptotiquement exacte. Cette méthode a été largement utilisée au laboratoire, tant pour des écoulements visqueux [31], que turbulents [47] où un estimateur d'erreur pour la viscosité turbulente a montré tout son intérêt. Zhu et Zienkiewicz ont aussi proposé la méthode *Superconvergent patch recovery technique* [34]. C'est une amélioration directe de leur méthode initiale, où l'erreur spatiale est estimée en utilisant la propriété de superconvergence des gradients en certains points [11]. Dans le cas d'un maillage structuré de triangles supportant des fonctions de forme de degré 2, ces points semblent être situés au milieu de chaque arrête. Cependant et à notre connaissance, rien ne garantit que ces points existent bel et bien dans tous les cas.

Peu de temps après, Wiberg *et al.* [36] proposent une nouvelle amélioration à la technique de Zhu et Zienkiewicz en augmentant le degré de la base polynomiale de projection. De plus la solution projetée est contrainte afin de satisfaire les équations de Navier-Stokes. La méthode de pénalisation était employée dans leur travail. Ils observent une convergence de l'erreur spatiale beaucoup plus rapide, mais notent toutefois des résultats plus mitigés pour les éléments aux frontières du domaine numérique. Jusqu'ici, la projection de la solution se faisait

sur une *patch* nodale. La conséquence en est que la reconstruction de la solution sur un élément n'est pas directe. Il est nécessaire de moyenner la contribution des reconstructions obtenues pour chaque noeud de l'élément. Dans une approche alternative [37], Li et Wiberg suggèrent plutôt de reconstruire la solution (et non plus ses gradients) sur une *patch* élémentaire (et non nodale). Ainsi on peut obtenir directement sur chaque élément l'erreur sur la solution sans qu'il soit besoin d'utiliser une quelconque moyenne (phase de récupération). Dans des travaux postérieurs [94], Zhang et Naga partent également d'une reconstruction de la solution dont ils dérivent ensuite des gradients reconstruits. À la façon de Zhu et Zienkiewicz, l'erreur estimée sur chaque élément s'identifie alors à la norme L^2 de la différence entre les gradients de la solution éléments finis et les gradients ainsi reconstruits. Les auteurs rapportent des propriétés de superconvergence (et même d'ultraconvergence [3]) étendues vis à vis de celles rapportées dans [34].

L'estimation de l'erreur ne suffit pas pour définir une méthode d'adaptation de maillage. À l'instar de ce que nous avons dit sur l'adaptation du pas de temps h à la section précédente, il est ensuite nécessaire de faire le lien entre l'estimation de l'erreur et la nouvelle taille de maille. Ce lien prend forme au travers de l'opérateur de transition. Le choix d'un critère d'optimalité est requis pour le définir. Usuellement on recherche une équi-répartition de l'erreur entre les éléments [111]. Dans le cas où des zones critiques existent (présence de forts gradients), un ajustement de ce critère peut être pertinent. Oñate et Castro choisissent par exemple d'équirépartir la densité d'erreur (l'erreur par unité de surface/volume) plutôt que l'erreur élémentaire [29]. Cela résulte en une plus forte concentration d'éléments dans les zones critiques. Toutefois ce procédé risque également d'accroître les effets des singularités géométriques. Pour traiter celles-ci, Lee et Lo ont développé un indice de singularité élémentaire [32]. Soient Ω_i la surface et $\| \boldsymbol{u} \|_i$ la norme énergie de la solution sur l'élément i, et Ω et $\| \boldsymbol{u} \|$ l'équivalent sur le domaine au complet. L'indice de singularité ψ_i sur l'élément i est donné par :

$$\psi_i = \frac{\| \boldsymbol{u} \|_i}{\| \boldsymbol{u} \|} \left(\frac{\Omega}{\Omega_i} \right)^{1/2} \tag{2.12}$$

La question des singularités est aussi soulevée par De Sampaio *et al.* [35] selon un autre point de vue. Lorsque des singularités existent, elles tendent à générer une très forte estimation d'erreur sur les quelques éléments proches, au risque de *noyer* la contribution d'autres éléments avec une erreur non négligeable. Pour contourner le problème, le calcul de la nouvelle taille d'élément se fait en deux temps. On commence par calculer les nouvelles tailles en considérant la contribution de tous les éléments à l'erreur totale. Puis on réalise le calcul à nouveau en purgeant les contributions des éléments qui doivent voir leur taille réduite à

3. Superconvergence d'ordre 2

la taille minimale. Pour compléter l'opérateur de transition et calculer la nouvelle taille de chaque élément, on utilise également une estimation de l'erreur *a priori* [24] et on préscrit une cible d'erreur fixe (en pourcentage de la norme de la solution) ou une réduction de l'erreur d'un certain pourcentage. L'analyse de la méthode des éléments finis permet l'estimation *a priori* de l'erreur élémentaire :

$$\| \mathbf{e} \| \propto \delta^{\min(p,\lambda)} \tag{2.13}$$

où δ désigne toujours la taille d'un élément, p le degré des fonctions de forme qu'il supporte, et $\lambda \leq k$ représente la "force" d'une éventuelle singularité. L'indice de singularité de l'Équation (2.12) peut s'avérer particulièrement utile pour déterminer λ.

Certains auteurs ne calculent toutefois pas une nouvelle taille de maille explicitement, et se limitent à subdiviser les éléments qui présentent une erreur au dessus d'un certain seuil [21, 112, 127]. Cette approche est particulièrement populaire pour traiter les écoulements instationnaires. Compte tenu de la nature de notre projet, on s'intéresse plus largement dans la suite aux approches visant à traiter les écoulements instationnaires.

2.2.3 Application aux écoulements instationnaires

La plupart des méthodes d'estimation d'erreur qui ont été évoquées dans la sous-section précédente ont été conçues pour traiter des écoulements stationnaires. La résolution du problème par une méthode adaptative s'apparente alors à un problème de point fixe pour la solution et le maillage [101]. En d'autres termes, la résolution du problème est considérée terminée dès lors que la solution sur le maillage courant ne diffère plus vraiment de celle obtenue sur le précédent maillage. On parle alors d'une solution convergée en maillage. D'autre part, la résolution adaptative peut à chaque cycle considérer la solution sur le maillage précédent comme une estimation initiale de la solution sur le maillage courant.

Ces considérations sont à revoir lorsque l'on traite un écoulement instationnaire. La propriété de convergence en maillage n'est éventuellement valable qu'à l'instant t de l'adaptation du maillage. Dès que la temps progresse à nouveau, les zones critiques de l'écoulement (la localisation d'un choc par exemple) peuvent se déplacer, menant à une recrudescence plus ou moins rapide de l'erreur de discrétisation spatiale. Vu autrement, le maillage aura tendance à être toujours en retard sur la solution de l'écoulement, puisque l'estimation d'erreur n'est pas en mesure de prédire l'évolution de l'erreur dans le domaine. Dans ce contexte, Alauzet *et al.* [101] ont défini une durée τ, appelée *characteristic time frame*. Il s'agit de la durée maximale pour laquelle la solution présente une erreur spatiale en dessous d'une certaine cible après une adaptation du maillage.

Par ailleurs, la poursuite de l'intégration en temps sur un nouveau maillage exige de transférer la précédente solution sur celui-ci. La procédure de transfert devient une source d'erreurs additionnelles, car les erreurs de transfert sont nécessairement injectées dans l'intégrateur temporel. Ces erreurs peuvent rapidement s'accumuler en fonction de la précision de la méthode de transfert et de la fréquence des adaptations de maillage. Une solution à ces deux problèmes est évidemment de considérer un maillage raffiné dans toutes les régions qui seront (temporairement) critiques dans l'écoulement. Force est toutefois de reconnaitre que cette approche peut être extrêmement couteuse en temps de calcul, en plus d'être très délicate à mettre en place si l'évolution de l'écoulement est inconnue *a priori*.

Les méthodes d'adaptation de maillage en contexte instationnaire se distinguent donc dans leur capacité à maintenir une précision acceptable durant toute la simulation, et dans leur coût. On a recensé plusieurs approches :

- Adapter le maillage tous les N pas de temps [26, 120]. Conceptuellement, c'est de loin l'approche la plus simple. L'implémentation n'exige pas une estimation de l'erreur durant la simulation proprement dite, ce qui est un avantage. Le choix de la valeur de N peut néanmoins poser problème. Une très faible valeur permettra, *a priori*, un bon suivi des structures dans l'écoulement, mais au prix d'une potentielle accumulation des erreurs de transfert qui peut dénaturer complètement la solution. À l'inverse, une trop grande valeur de N limite les erreurs de transfert mais la solution peut perdre grandement en précision si les zones critiques sont convectées dans une région à la taille de maille inadaptée.
- Adapter le maillage tous les Δt. Il s'agit d'une généralisation de l'approche précédente, pratique lorsque l'intégration temporelle est h-adaptative [136].
- Adapter le maillage automatiquement selon l'information fournie par un critère d'arrêt. Cette approche est élégante car la fréquence des adaptations de maillage n'est pas nécessairement constante et deviendra logiquement nulle si un état stationnaire est atteint. Cette approche est par exemple rapportée dans [58]. Les auteurs imposent un intervalle admissible pour l'erreur spatiale dans le domaine, exprimée relativement à la norme de la solution. Toute sortie de l'intervalle résulte en une adaptation du maillage. Une approche similaire est utilisée dans [35]. Ce type de stratégie requiert néanmoins d'estimer l'erreur spatiale à chaque pas de temps. La seule analyse du niveau d'erreur relative peut aussi s'avérer insuffisante pour garantir une évolution suffisamment progressive du maillage.
- Utiliser des couches protectrices (*protective layers*) autour des régions à raffiner. Cette approche a été proposée en premier par Löhner [21] et s'inscrit dans les méthodes

d'adaptation de maillage par (dé)raffinements locaux. Nous y reviendrons plus loin. Ces couches protectrices permettent de raffiner uniformément le maillage autour des éléments qui ont été ciblés en premier lieu par le raffinement. Ce faisant, la valeur de τ est quelque peu allongée.

- Pondérer l'estimation d'erreur par la variation du vecteur vitesse en chaque nœud, afin de définir des régions qui accueilleront *vraisemblablement* l'erreur par la suite [95]. Là encore, l'objectif est d'augmenter la valeur de τ. Malheureusement, la formulation proposée semble difficilement applicable à tous les problèmes instationnaires.
- Réaliser des simulations préliminaires de l'écoulement sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, la valeur de Δt étant fixée par l'utilisateur. Ces simulations permettent d'évaluer, itérativement ou non, l'évolution de l'écoulement sur l'intervalle afin de construire un maillage adapté à l'écoulement sur tout cet intervalle. Une fois ce maillage obtenu, l'écoulement est intégré une nouvelle fois sur le maillage adapté. Le processus peut alors reprendre sur l'intervalle $[t' = t+\Delta t, t'+\Delta t]$. Ce type d'approche est par exemple utilisée par Bockelie et Eiseman [30], dans le cas d'une méthode d'adaptation de maillage de type r. L'approche est aussi proposée dans les travaux de Alauzet *et al.* [101, 118, 138], pour une méthode d'adaptation de maillage isotrope et anisotrope de type h. Là encore, l'objectif est d'augmenter la valeur de τ. Par construction, la méthode aboutit à $\tau \approx \Delta t$. Le nombre de transferts de la véritable solution s'en trouve par conséquent réduit. Par ailleurs, dans les deux études citées, les auteurs recourent à un schéma d'intégration temporelle explicite. Tel que démontré dans [101], l'application de la condition CFL garantit que l'erreur spatiale soit un majorant de l'erreur temporelle. La procédure apporte donc un contrôle sur les deux sources d'erreur. Soulignons pour terminer les travaux de Berrone et Maro [112] qui appliquent cette approche en posant $\Delta t = h$, et avec une méthode d'adaptation par (dé)raffinements locaux. À l'issue de chaque pas de temps, l'erreur est estimée sur chaque élément. Si la distribution d'erreur élémentaire implique de modifier le maillage, la solution du pas de temps courant est calculée à nouveau sur le maillage adapté. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'aucune modification du maillage ne soit requise. La simulation devient donc un problème de point fixe instationnaire pour le maillage et la solution [101] à chaque pas de temps.

2.2.4 Méthodes locales

En régime instationnaire, nous avons déjà soulevé que les transferts de solution peuvent être néfastes lorsque trop nombreux. Cela est d'autant plus vrai si les adaptations de maillage se font globalement. La génération d'un maillage complet sur le domaine peut aussi revêtir

un coût non négligeable. Une autre classification des méthodes d'adaptation de maillage peut donc se faire selon que le nouveau maillage est généré globalement, ou en intervenant localement sur le maillage courant. Cette sous-section se concentre sur cette deuxième classe de méthodes.

Dans ce contexte, les méthodes d'adaptation de maillage par (dé)raffinements locaux sont sans doute les plus connues. Toutes ces méthodes s'appuient sur des maillages dits hiérarchiques ou en arbre. Chaque élément peut être subdivisé en sous-éléments. Ceux-ci deviennent les enfants de l'élément original (le parent). Un des enfants peut ensuite être subdivisé à son tour pour avoir ses propres enfants. Ainsi, on forme des niveaux de raffinement dans le maillage. À l'inverse des enfants, n'ayant pas d'enfants eux-mêmes mais ayant le même parent, peuvent être agglomérés pour réduire le raffinement localement. Cependant, les éléments initiaux du maillage n'ont pas de parent par construction, ce qui limite l'optimisation du coût de calcul si la taille de maille initiale est choisie trop petite.

Ce type d'approche a été explorée pour des maillages de triangles [21, 48, 112], de quadrangles[96, 127], de tétraèdres [33], et de parallélépipèdes rectangles [127]. Les maillages de triangles/tétraèdres offrent un avantage très important : le raffinement n'aboutit pas nécessairement à un maillage non conforme. Ceci est en effet inévitable dans le cas des maillages de quadrangles/parallélépipèdes rectangles. Ces maillages nécessitent un traitement particulier des degrés de liberté situés sur les nœuds orphelins (hanging nodes). Dans [127], des multiplicateurs de Lagrange sont utilisés. Une modification des équations reliées à ces degrés de liberté est également une option (cf. Section 3.2.6). Jones *et al.* soulignent toutefois que le raffinement des éléments triangulaires/tétraédriques exige aussi certaines précautions [48]. Notamment, raffiner en ajoutant un nœud au centre d'un triangle/tétraèdre est aussi simple que dangereux. En effet des raffinements successifs aboutissent alors à des éléments dégénérés.

Ces méthodes présentent de manière générale d'autres limites, dont la complexité des structures de données et des algorithmes qui permettent la mise à jour du maillage. À degré de raffinement égal, un maillage hiérarchique est également beaucoup plus lourd à stocker. Pour chaque élément du maillage, il est en effet nécessaire de stocker toute sa généalogie. Par exemple, si un élément initial a été raffiné 10 fois, il est nécessaire de conserver en mémoire les 9 éléments parents en vue d'un déraffinement éventuel [21]. Finalement, et cela afin de limiter la mise à jour de l'arbre et le degré de non conformité du maillage, la plupart des méthodes de ce type ne permettent qu'un niveau de raffinement par cycle d'adaptation. En conséquence, la capture d'une singularité qui apparaitrait soudainement peut s'avérer complexe sans traitements supplémentaires. Malgré ces limites, ces approches sont extrêmement

efficaces dans la plupart des cas. Elles s'affranchissent également de beaucoup de situations difficiles liées à la génération de maillages non structurées lors des adaptations.

Une autre façon de procéder consiste à appliquer localement des opérations élémentaires sur les éléments, les nœuds, et la topologie du maillage courant. Parmi ces opérations, on trouve l'insertion d'arêtes (*edge recovery*), la division d'arêtes (*edge splitting*), la suppression d'arêtes (*edge collapse*), la permutation d'arêtes (*edge swapping*), et la relocalisation de nœuds (*node repositionning*). Remarquons que d'une certaine façon, les méthodes par (dé)raffinement locaux que l'on vient d'évoquer s'appuient sur les trois premières opérations. Si l'on considère par exemple le raffinement d'un triangle en quatre sous-triangles, des opérations de division et d'insertion d'arêtes sont nécessaires tant pour le raffinement du triangle que pour éviter l'apparition de nœuds orphelins. De manière plus générale, l'usage conjoint de l'ensemble de ces opérations est très répandu dans la littérature pour traiter localement tant des maillages isotropes [75, 81] qu'anisotropes [44, 91, 92, 110]. Notons que ces opérations à elles seules ne permettent pas toujours d'obtenir des résultats pleinement satisfaisants, notamment lorsqu'une zone à altérer est en contact avec une frontière incurvée du domaine de calcul. Un traitement alternatif consiste à retirer les éléments au niveau de la zone en question afin de générer à nouveau le maillage localement. Reliés à cette idée, nous avons recensé les travaux Kaan Karamete *et al.* [70]. Il y est justement question d'une procédure générale, s'appuyant sur la méthode de Delaunay, permettant de mailler un polyèdre quelconque (*cavity triangulation*). La procédure utilise les opérations élémentaires déjà évoquées, entres autres traitements. Une application en a été faite avec succès dans les travaux de Li *et al.* [81].

2.3 Transfert d'une solution d'un maillage à l'autre

2.3.1 Quelques notations

Nous considérerons dans la suite que le transfert de la solution s'effectue d'un maillage $\mathcal{M}_d$ (le *donnor mesh*) vers un maillage $\mathcal{M}_t$ (le *target mesh*), lequel pourra, par exemple, avoir été obtenu par adaptation de $\mathcal{M}_d$ selon les méthodes évoquées dans la section précédente. Soit q une variable dépendante du problème à résoudre sur chacun de ces maillages. On note q_d la solution obtenue sur $\mathcal{M}_d$, et q_t la solution transférée sur $\mathcal{M}_t$ à partir de q_d. On note de plus Ω_d et Ω_t, les domaines de calcul tels que respectivement représentés par les maillages $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}_t$.

2.3.2 Principaux domaines d'application

Le transfert d'une solution numérique d'un maillage $\mathcal{M}_d$ vers un maillage $\mathcal{M}_t$ intervient dans de nombreuses situations. Certaines formulations de la méthode ALE (*Arbitrary Lagragian Eulerian*) exigent par exemple de tels transferts [20, 82, 104, 137]. Dans ces formulations, la méthode ALE est construite autour de deux phases [20] qui se succèdent l'une et l'autre :

(1) La phase lagrangienne : le système d'équations aux dérivées partielles est résolu en formulation lagrangienne pure. Dans le cas de la résolution des équations de Navier-Stokes, les nœuds du maillage $\mathcal{M}_d$ coïncident respectivement avec une même particule fluide en tout temps. Ils se déplacent donc à la même vitesse que ces particules. Cette formulation peut rapidement entraîner des déformations très importantes de $\mathcal{M}_d$, qui justifient la nécessité de la seconde phase.

(2) La phase de 'redécoupage' (*rezoning/remapping*) : Cette phase permet de corriger des déformations éventuellement très importantes du maillage, tout en conservant la position de certains nœuds (qui identifient la position d'une interface entre deux fluides par exemple). Si cette phase est effectuée à chaque pas de temps, on parle de 'redécoupage continu' (*continuous rezoning/remapping*). Dans ce contexte, le maillage $\mathcal{M}_t$ gardera très souvent la même topologie que le maillage $\mathcal{M}_d$. Dans les travaux de Margolin [82], une méthode basée sur un problème d'optimisation (*optimization-based reference Jacobien strategy* est par exemple utilisée pour déplacer adéquatement les nœuds de $\mathcal{M}_d$ pour obtenir $\mathcal{M}_t$. Si cette phase est au contraire conduite occasionnellement, on parlera d'un 'redécoupage intégral' (*integral rezoning/remeshing*). Dans cette approche, la topologie de $\mathcal{M}_t$ peut différer radicalement de celle de $\mathcal{M}_d$. Dans tous les cas, il convient alors de transférer la solution courante de l'écoulement de $\mathcal{M}_d$ vers $\mathcal{M}_t$.

Les simulations multiphysiques figurent également parmi les champs d'application où des transferts de la solution peuvent s'avérer nécessaires. La simulation des interactions fluide-structure dans une approche découplée est un exemple courant [39, 40, 55, 88]. En approche découplée, la résolution de l'écoulement, et des déformations (et/ou du mouvement) du solide, se fait séquentiellement, très souvent via deux solveurs distincts. Cette approche modulaire permet de tirer partie de la force de chaque solveur, souvent spécifiquement développé pour une discipline unique [55]. Dans ce cas-ci, la discrétisation de l'interface entre le fluide et le solide peut différer dans le domaine solide et le domaine fluide. Afin que chaque solveur puisse opérer, il est donc nécessaire de transférer deux informations :

(a) les chargements exercés par le fluide sur le solide : calculés par le solveur fluide, ces chargements définissent les conditions limites pour le problème de mécanique du solide. Ici, la discrétisation de l'interface du côté du fluide s'identifie au maillage $\mathcal{M}_d$.

(b) les déplacements de la paroi du solide : issus de la résolution du problème de mécanique du solide, ces déplacements sont nécessaires pour définir les conditions limites en vitesse pour le fluide. Cette fois, le maillage $\mathcal{M}_d$ correspond donc à la discrétisation de l'interface du côté du solide.

Toujours dans le contexte des simulations multiphysiques, les problèmes de transport multi-espèces s'appuient parfois sur des phases de transfert de la solution. Chippada *et al.* [54] rapportent en effet que l'écoulement et le transport des espèces sont souvent résolus sur des maillages différents du fait des différences marquées entre les échelles spatiales pertinentes pour chaque problème.

Comme nous l'avons déjà dit, car notre intérêt réside ici, le transfert d'une solution est aussi incontournable si des adaptations de maillage sont réalisées pendant la simulation d'un écoulement instationnaire [114, 118, 124, 139]. Dans le cas d'un écoulement stationnaire résolu sur une succession de maillages obtenus par adaptation, le transfert de la solution courante sur le nouveau maillage n'est pas obligatoire, la solution transférée n'étant alors qu'une estimation initiale de la prochaine solution. Pour un écoulement instationnaire, une solution transférée conditionne avant tout la précision de la solution des prochains pas de temps. Les erreurs commises lors du transfert sont en effet injectées dans le schéma d'intégration temporelle.

De nombreux autres domaines d'application, quoi que plus marginaux, existent pour les méthodes de transfert. Par exemple, les transferts de solutions sont aussi partie prenante des méthodes de résolution par décomposition de domaine (*Domain Decomposition methods*) afin d'établir les conditions limites à l'interface des sous-domaines (*transmission conditions*) [74]. Dans le contexte de la mécanique de la rupture et en s'appuyant sur l'approche *Goal-Oriented*

évoquée à la Section 2.2, Rüter *et al.* [107] présentent par ailleurs une méthode d'estimation de l'erreur spatiale, laquelle nécessite le transfert de solutions obtenues sur des maillages distincts d'une même section du domaine (*overlapping grids*). Pour terminer, n'oublions pas de mentionner les activités de visualisation et d'analyse de résultats numériques, qui nécessitent parfois de comparer des solutions obtenues sur des discrétisations spatiales différentes d'un même domaine de calcul.

2.3.3 Méthodes de transfert courantes

Propriétés des méthodes de transfert

À l'image des domaines d'application évoqués plus haut, il existe une grande variété de méthodes pour transférer une solution d'un maillage à un autre. On peut les caractériser en fonction de leur propriétés. Parmi celles-ci, on trouve :

- la monotonie : cette propriété signifie que la solution transférée vérifie le principe du maximum. Le principe du maximum est *globalement* respecté si les valeurs nodales q_t^i de la solution transférée vérifient :

$$\min_j q_d^j \leq q_t^i \leq \max_j q_d^j \tag{2.14}$$

  où q_d^j désigne la valeur nodale de q_d au nœud j de $\mathcal{M}_d$. La propriété de monotonie peut également se formuler *localement*. Soit e_d l'élément de $\mathcal{M}_d$ contenant le nœud i de $\mathcal{M}_t$. Une formulation locale de la propriété de monotonie peut par exemple s'écrire :

$$\min_{j \in e_d} q_d^j \leq q_t^i \leq \max_{j \in e_d} q_d^j \tag{2.15}$$

  Cette propriété est désirable en vue de limiter les oscillations dans la solution transférée. Elle garantit également que toutes les valeurs nodales de la solution transférée seront physiquement acceptables (valeurs négatives impossibles pour certaines variables dépendantes). Toutefois, cette propriété résulte généralement en la diffusion de la solution q_d lors du transfert, ce qui est peut être dommageable si de nombreux transferts sont réalisés.

- la conservation : une méthode de transfert conservative permet de préserver une ou des quantités intégrales définies à partir de la solution q_d. Plus formellement, une telle méthode peut par exemple vérifier :

$$\int_{\Omega_t} q_t \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_t} q_d \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.16}$$

Une propriété de conservation plus forte est donnée par :

$$\int_{\Omega_t} q_t \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_d} q_d \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.17}$$

Cette seconde forme est d'intérêt lorsque $\Omega_d \neq \Omega_t$, ce qui aura tendance à arriver lorsque les frontières du domaine sont incurvées.

- l'ordre : cette propriété réfère à l'ordre de convergence de l'erreur de transfert. Une méthode est dite d'ordre p si elle vérifie :

$$\| \, q_t - q_d \, \|_{L^2(\Omega_t)} \leq C\delta^p \tag{2.18}$$

avec C une constante d'erreur, et δ la taille de maille caractéristique du transfert. Cette dernière est donnée par :

$$\delta = \min\{\delta_d, \delta_t\} \tag{2.19}$$

où δ_d et δ_t désignent les tailles de maille caractéristiques des maillages $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}_t$, respectivement. Alternativement, on réfère parfois à cette propriété en disant qu'une méthode est P^{p-1} exacte, ce qui veut dire que la méthode permet de transférer exactement une solution polynomiale [4] de degré inférieur ou égal à $p-1$[118].

- la précision : liée à la propriété précédente, la précision réfère à la valeur de l'erreur de transfert globale, mesurée dans une certaine norme. La norme L^2, que nous avons utilisée dans l'Équation (2.18), est un choix courant.
- le coût : on réfère ici au coût de calcul de la méthode. Certaines méthodes exigent par exemple de construire et résoudre un système linéaire pour transférer globalement la solution, tandis que d'autres permettent d'opérer localement pour transférer successivement la solution en chacun des nœuds de $\mathcal{M}_t$.

Venons en maintenant aux méthodes de transfert proprement dites.

Interpolation consistante

La méthode de loin la plus connue et la plus utilisée est sans doute l'interpolation consistante. La simplicité de son implémentation séquentielle ou même parallèle, et son faible coût justifient sa popularité [88]. La méthode permet de transférer successivement la solution q_d en chaque nœud de $\mathcal{M}_t$. Le traitement d'un nœud i de $\mathcal{M}_t$ se décompose en deux phases :

4. La solution doit être globalement polynomiale, et non uniquement par morceaux.

(1) Localiser l'élément e_d de $\mathcal{M}_d$ contenant le nœud i : dépendamment de l'algorithme utilisé, cette phase peut-être plus ou moins coûteuse. La méthode naïve (*brute force*) consiste à tester tous les éléments de l'ancien maillage jusqu'à trouver le bon. Bien que d'implémentation triviale, cette méthode peut rapidement devenir coûteuse. D'autres méthodes plus performantes s'appuient sur un stockage des composantes (nœuds et éléments principalement) de $\mathcal{M}_d$ au moyen d'une arborescence hiérarchique (type *quadtree* en 2D ou *octree* en 3D) [137, 139]. L'arborescence permet une navigation récursive dans $\mathcal{M}_d$, ce qui limite le nombre d'éléments à tester pour localiser le nœud i. Si la recherche par cette méthode est plus rapide, il faut néanmoins considérer le coût de mise en place de l'arborescence, qui peut être important [124]. Une fois construite, il est donc judicieux de pluraliser son usage. Les méthodes de génération de maillage par avance de front [22] peuvent par exemple en tirer avantage. Une autre méthode de recherche alternative, basée sur l'usage des coordonnées barycentriques, est rapportée dans [111]. Conscient des cas pathologiques possibles de cette dernière approche, Alauzet et Mehrenberger [118] proposent une méthode s'appuyant sur la connectivité inverse (nœud vers éléments) de $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}_t$.

(2) Déterminer la valeur de q_t^i au nœud d'intérêt i . En s'appuyant sur les fonctions de forme de l'élément e_d, notées φ_d^k, la valeur q_t^i est simplement donnée par :

$$q_t^i = \sum_{k=1}^{n_q} \varphi_d^k(\boldsymbol{x}_i)\, q_d^{\mathcal{C}(k)} \tag{2.20}$$

où n_q désigne le nombre de fonctions de forme pour la variable dépendante q, $\boldsymbol{x}_i$ est le vecteur des coordonnées du nœud i dans l'élément e_d, et $\mathcal{C}$ désigne la table des connectivités de l'élément e_d.

L'interpolation consistante est nodalement exacte. Cependant, elle pâtit de plusieurs limites. Considérons ici des fonctions de forme polynomiales de degré p sur les éléments de $\mathcal{M}_d$. L'interpolation consistante est alors d'ordre p mais la propriété de monotonie n'est vérifiée que si $p = 1$ (interpolation linéaire). De plus, l'interpolation consistante est de manière générale non conservative. Malgré ses défauts, l'interpolation consistante peut fournir des résultats très satisfaisants [55].

Jiao et Heath [88] inclut l'interpolation consistante dans une classe plus générale de méthodes, à laquelle ils réfèrent par l'expression *pointwise interpolation*. Ils y incluent également les méthodes d'interpolation par splines, lesquelles peuvent être construites de diverses façons. On pourrait également rattacher à cette classe la méthode proposée par De Sampaio *et al.* [35]. Dans leur travaux, un interpolant d'ordre supérieure est construit à partir d'une

reconstruction locale de la solution selon la méthode de Zhu et Zienkiewicz [24].

Interpolation sous contraintes

Une amélioration notable de l'interpolation consistante peut être obtenue en la secondant par un problème de minimisation avec contraintes. On parle alors d'interpolations sous contraintes [74, 137, 139]. L'algorithme est construit autour de deux étapes successives :

(1) Interpolation linéaire [139] ou consistante [137] de la solution. On obtient ainsi la solution q_t^* sur le nouveau maillage.

(2) Résolution d'un problème de minimisation sous contraintes, menant à l'obtention de la solution q_t. Le Lagrangien à minimiser peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\mathcal{L}(q_t, \boldsymbol{\lambda}) = \| q_t - q_t^* \|_{L^2} - \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i f_i(q_t, q_d) \tag{2.21}$$

où n_λ est le nombre de multiplicateurs de Lagrange, égale au nombre de contraintes à appliquer, et les $f_i(q_t, q_d)$ sont les contraintes qui visent à conserver certaines quantités liées à la solution q_d. Ces contraintes peuvent être linéaires en q_t ou non. Dans ce dernier cas, l'utilisation d'une méthode de point fixe, telle que la méthode de Newton-Raphson, est nécessaire pour résoudre le problème. En mécanique des fluides, on cherche souvent à conserver :

- la quantité de mouvement ($q = u$ ou $q = v$, avec $(u, v) = \boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse en 2D) :

$$f_1 = \int_{\Omega_t} q_t \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_d} q_d \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.22}$$

  On a supposé ici que la masse volumique ρ du fluide était constante.

- l'énergie cinétique ($q = u$ ou $q = v$) :

$$f_2 = \int_{\Omega_t} {q_t}^2 \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_d} {q_d}^2 \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.23}$$

  Il s'agit typiquement ici d'une contrainte non linéaire en q_t.

- la masse ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}$) :

$$f_3 = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q}_t \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_d} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q}_d \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.24}$$

  Cette contrainte est ici formulée pour un fluide incompressible.

Bien entendu, l'utilisateur est libre de ne considérer que certaines de ces contraintes. Par exemple, les travaux rapportés dans [139] ne traitent que des contraintes linéaires. Le système linéaire issu de la minimisation du Lagrangien dans ce cas peut alors être

résolu à l'aide du complément de Schur pour éviter d'avoir à stocker les multiplicateurs de Lagrange.

Cette méthode présente donc l'avantage d'être conservative au sens fort (cf. Équation (2.17)), potentiellement à plusieurs égards. De plus, l'application de ces contraintes peut améliorer marginalement la précision du transfert [139]. Toutefois la propriété de monotonie n'est pas garantie non plus par cette formulation[137]. En effet, l'application des contraintes peut aller à l'encontre de la monotonie, et ce même si la solution intermédiaire q_t^* possède cette propriété. L'ordre de la méthode est identique à celui de l'interpolation utilisée à la première étape de l'algorithme [139]. Cette méthode est par ailleurs nécessairement plus coûteuse que l'interpolation consistante puis qu'un système linéaire doit être construit et résolu durant la deuxième étape.

Interpolation par redistribution

Dans une approche radicalement différente de la précédente, Alauzet et Mehrenberger [118] proposent également dans un contexte 2D une méthode d'interpolation conservative, d'ordre 2, monotone, et qui ne nécessite la résolution d'aucun système linéaire (*matrix free)*. La méthode a ensuite été formulée en 3D [133]. Une méthode très similaire avait également été présentée dans les travaux de Dukowicz et Kodis [20], bien que celle-ci soit d'ordre 1 seulement. Contrairement aux méthodes jusqu'ici évoquées, celle-ci passent par l'évaluation explicite des intersections entre les éléments de $\mathcal{M}_d$ et de $\mathcal{M}_t$. Soit e un élément de $\mathcal{M}_t$, et soit $\{e_\perp\}$ la collection des $n_\perp$ éléments de $\mathcal{M}_d$ qui intersectent e. On note Ω_e le domaine délimité par l'élément e, et Ω_j le domaine délimité par le $j$ème élément de la collection $\{e_\perp\}$. La méthode de transfert conduit à la solution linéaire q_t^* suivante sur l'élément e :

$$q_t^*(\boldsymbol{x}) = q_t^*(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{\nabla}(q_t^*) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}) \tag{2.25}$$

où $\boldsymbol{G}$ est le vecteur position du barycentre de l'élément e. Les quantités $q_t^*(\boldsymbol{G})$ et $\boldsymbol{\nabla}(q_t^*)$ sont déterminées à partir des éléments dans la collection $\{e_\perp\}$:

$$q_t^*(\boldsymbol{G}) = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} q_t^* = \frac{1}{|\Omega_e|} \sum_{j=1}^{n_\perp} \int_{\Omega_j \cap \Omega_e} q_d \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(q_t^*) = \frac{1}{|\Omega_e|} \sum_{j=1}^{n_\perp} \int_{\Omega_j \cap \Omega_e} \boldsymbol{\nabla}(q_d) \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.27}$$

Dans les travaux sus-cités, la solution q_d est linéaire sur chaque élément de $\mathcal{M}_d$, ce qui signifie que $\boldsymbol{\nabla}(q_d)$ est constant par élément. La triangulation de chaque région $\Omega_j \cap \Omega_e$ et l'usage de quadratures de Gauss permet l'évaluation exacte des intégrales sur ces régions [118]. Notons

que ces intégrales peuvent aussi être évaluées exactement au moyen du théorème de Green (en 2D) ou de la divergence (en 3D) [20]. Une fois l'approximation (2.25) construite sur l'élément e, il est nécessaire de la corriger afin d'obtenir la propriété de monotonie. La correction peut s'effectuer en agissant sur les valeurs nodales de q_t^* sur e [118], ou bien sur la valeur de $\boldsymbol{\nabla}(q_t^*)$ [20]. Dans le second cas, l'application de la correction entraîne néanmoins une chute de l'ordre de la méthode. En l'état, la solution q_t^* ainsi modifiée demeure continue par élément seulement. Si une méthode de Galerkin continue est utilisée pour résoudre le problème d'intérêt (les équations de Navier-Stokes par exemple), la solution q_t doit être continue à l'interface entre les éléments. Pour passer de q_t^* à q_t, une moyenne pondérée est utilisée pour définir des valeurs nodales uniques en chaque nœud de $\mathcal{M}_t$. La méthode développée par Alauzet et Mehrenberger apparaît jusqu'à 10 fois plus précise qu'une interpolation linéaire classique, pour un coût total à peine 3 fois plus élevé.

Projection de Galerkin

Pour terminer, abordons succinctement la méthode de la projection de Galerkin (aussi connue sous le nom de projection L^2). La mathématisation de la méthode sera traitée en détails à la Section 4.4.2. On se contente ici d'énoncer ces propriétés les plus intéressantes, et de commenter rapidement des implémentations proposées dans la littérature.

La projection de Galerkin consiste en la résolution d'un système linéaire global, ou d'une multitude de systèmes linéaires locaux, dérivant de la minimisation de l'erreur de transfert en norme L^2. Elle conduit donc à la solution transférée q_t la plus précise, au sens de cette norme du moins. Si la fonction unité peut être représentée par une combinaison linéaire des fonctions de base de la discrétisation de Ω_t, la méthode est alors conservative au sens de l'Équation (2.16) sur chaque élément de $\mathcal{M}_t$. L'ordre de la méthode correspond par ailleurs au degré des fonctions de base sur $\mathcal{M}_t$. Enfin, la solution transférée q_d est telle que :

$$\| q_t \|_{L^2(\Omega_t)} \leq \| q_d \|_{L^2(\Omega_t)} \tag{2.28}$$

Ce résultat découle du principe d'orthogonalité de l'erreur de transfert. Cela signifie que l'énergie cinétique dans le domaine ne peut augmenter lors du transfert, ce qui est une garantie de stabilité pour les problèmes d'interactions fluide-structure notamment [88].

Afin de vérifier rigoureusement ces propriétés, il est néanmoins requis d'évaluer exactement le produit des fonctions de base de $\mathcal{M}_d$ et de $\mathcal{M}_t$ (termes mixtes) sur chaque élément de $\mathcal{M}_t$. C'est là toute la difficulté de la méthode. À l'instar de l'interpolation développée par Alauzet et Mehrenberger, cela peut se faire en déterminant explicitement les intersections entre les

éléments de $\mathcal{M}_d$ et de $\mathcal{M}_t$ [88, 114, 124, 142]. La triangulation des régions d'intersection et l'usage de quadratures de Gauss [88, 114, 124], ou l'application du théorème de Green (ou de la divergence) [142] permet alors d'évaluer chaque terme mixte avec la rigueur nécessaire. La première approche est connue dans la littérature sous les noms de *common refinement* [88] et de *supermesh strategy* [114, 124]. Notons que le concept de *supermesh*[5] est également introduit par Rüter *et al.* [107] dans une procédure de transfert des gradients qui semble reprendre l'esprit de celle proposée par Alauzet et Mehrenberger [118]. Dans une première approche, Farrell *et al.* [114] propose une procédure permettant de construire globalement le *supermesh* en formulant un problème de génération de maillage sous contraintes (*constrained Delaunay triangulation*). Cette procédure présente toutefois le désavantage d'être extrêmement coûteuse. Une seconde procédure permettant une construction progressive et locale du *supermesh* a donc été introduite postérieurement par Farrell et Maddison [124]. La construction du système linéaire de projection est alors réalisée au moyen d'une boucle principale sur les éléments de $\mathcal{M}_t$. Notons que la détermination des régions d'intersection et leur triangulation peuvent devenir très complexes si les éléments de $\mathcal{M}_d$ et/ou de $\mathcal{M}_t$ sont courbes. Dans ce contexte, une approche a récemment été formulée en 2D par Hermes [142]. L'approche s'appuie sur les concepts de courbes et de triangles de Bézier afin de représenter la géométrie courbe des éléments.

Des implémentations moins lourdes de la projection sont mentionnées dans [39, 40, 63]. Dans celles-ci, les termes mixtes sont approximativement calculées en localisant les points de Gauss des éléments de $\mathcal{M}_t$ dans les éléments de $\mathcal{M}_d$ (*target-based discretization* [39, 63]), ou à l'inverse en localisant les points de Gauss des éléments de $\mathcal{M}_d$ dans $\mathcal{M}_t$ (*donor-based discretization* [40]). Dans le premier cas, les propriétés de minimisation de l'erreur et de conservation sont perdues, mais l'ordre de la méthode est conservée. Également, la précision de la projection demeure généralement bonne. Dans le second cas, la propriété de conservation est maintenue. Néanmoins, ce schéma est d'ordre 0. Par conséquent l'erreur de transfert est généralement élevée [88].

Malgré ces premières propriétés très alléchantes, la projection de Galerkin dans son formalisme naturel ne possède pas la propriété de monotonie. Un moyen de l'obtenir est rapportée dans les travaux de Farrell *et al.* [114]. Soit $\underline{\boldsymbol{A}}$ la matrice du système linéaire de projection. Cette matrice présente des termes non diagonaux. Farrell démontre que la propriété de monotonie est obtenue en remplaçant $\underline{\boldsymbol{A}}$ par la matrice diagonale résultant du report de tous les termes non diagonaux d'une même ligne sur le terme diagonal correspondant (*lumped matrix*). La propriété de conservation est préservée, la résolution du système linéaire devient

5. Afin d'honorer davantage la langue française, on pourra également parler de *maillage d'intersection*

triviale, mais la propriété de minimisation de l'erreur de transfert est perdue. De plus, la propriété de monotonie obtenue n'est que globale. Un traitement supplémentaire est exposée dans la même étude pour tendre vers une monotonie locale tout en limitant la diffusion de la solution q_d d'une part, et tout en préservant la propriété de conservation d'autre part. La propriété de minimisation de l'erreur de transfert en norme L^2 ne peut cependant pas être récupérée. Les auteurs rapportent un coût de calcul 6 fois supérieur à celui d'une interpolation linéaire classique, ce qui reste raisonnable si les transferts de solution se font rares.

Terminons en mentionnant que la précision effective du transfert dépend bien sûr du conditionnement de la matrice du système linéaire de projection. Selon Jiao et Heath [88], le conditionnement dépend uniquement de la qualité du maillage $\mathcal{M}_t$. Il est donc important de veiller à la qualité de chaque élément de celui-ci. Dans le cas où une stratégie de type *supermesh* est employée pour construire le système linéaire, une méthode de calcul robuste et précise des intersections reste cependant nécessaire afin d'évaluer correctement les termes mixtes. Cela peut être complexe, puisque des tests logiques sur des nombres réels sont alors inévitables [118].

2.4 Objectif global et objectifs spécifiques du projet de recherche

L'objectif global de ce projet de recherche peut s'énoncer comme suit :

Développer une procédure de résolution automatique et précise des écoulements instationnaires, à partir d'une méthode d'éléments finis et de méthodes adaptatives en espace et en temps.

Cet objectif global se segmente ensuite en plusieurs objectifs spécifiques, à conduire successivement :

(1) **Développer une méthode d'adaptation de maillage isotrope, automatique et locale pour les écoulements instationnaires.**
(2) **Développer une procédure de relance pour un intégrateur temporel hp-adaptatif basé sur les méthodes BDF.**
(3) **Vérifier l'implémentation des différents outils.**
(4) **Appliquer la procédure de résolution proposée à des cas applicatifs concrets.**

La méthodologie envisagée pour atteindre chacun de ces objectifs est présentée dans la section suivante.

2.5 Méthodologie retenue

2.5.1 Développement d'une méthode d'adaptation de maillage

Comme nous l'avons déjà souligné, une méthode d'adaptation de maillage s'appuie toujours sur une estimation de l'erreur de discrétisation spatiale. Ici, nous avons utilisé l'estimateur d'erreur introduit par Zhu et Zienkiewicz [24]. Ce choix nous inscrit logiquement dans la continuité des travaux menés dans notre laboratoire de recherche. Ceux-ci ayant essentiellement porté sur des écoulements stationnaires, la structure du code éléments finis de travail, écrit en Fortran 77/90, est au début de ces travaux pensée pour le traitement de ces problèmes. La structure initiale du code fait intervenir trois entités distinctes, correspondant à des programmes différents :

(1) *Amiral* : ce premier programme est un préprocesseur. Il pilote la gestion et la vérification des paramètres de simulation, la génération du maillage par une méthode frontale [22], mais aussi l'éventuel transfert d'une précédente solution sur ce maillage.

(2) *Cadyf* : ce second programme est un solveur utilisant la méthode des éléments finis. Il permet l'assemblage parallèle (en mémoire partagée) du sytème linéaire d'équations, et la résolution directe et parallèle (en mémoire partagée) de celui-ci au moyen du solveur PARDISO [89]. *Cadyf* permet aussi la résolution d'un écoulement instationnaire sur une maillage fixe grâce un intégrateur temporel *hp*-adaptatif basé sur les BDF [131].

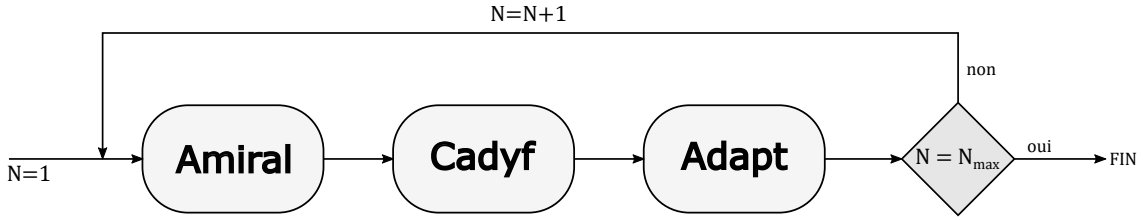
(3) *Adapt* : ce dernier programme pilote l'estimation des erreurs de discrétisation spatiale élémentaires, et définit la carte de la taille de maille optimale dans le domaine de calcul. Cette carte permet à *Amiral* de générer le maillage adapté lors du cycle suivant.

La résolution adaptative d'un écoulement stationnaire peut donc se voir comme une succession de cycles *Amiral-Cadyf-Adapt*, telle qu'illustrée sur la Figure 2.1a. Dans le cas d'un écoulement instationnaire, l'usage de l'adaptation de maillage est possible mais la fréquence des adaptations doit être spécifiée [136]. La situation est dépeinte à la Figure 2.1b.

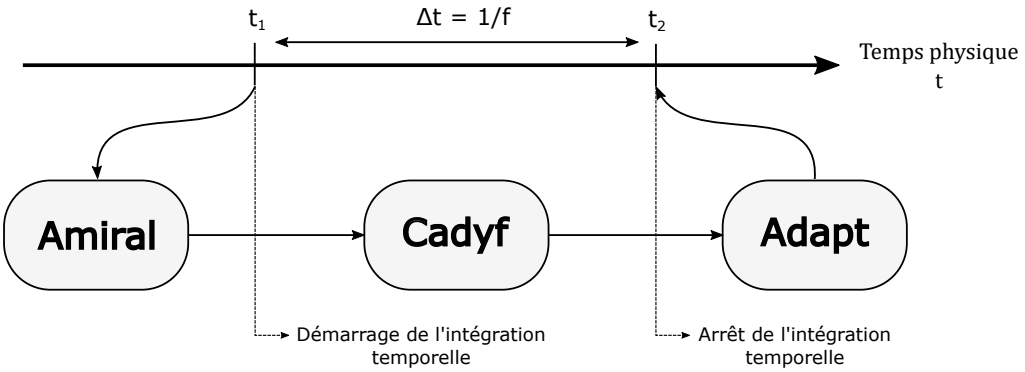
Afin d'automatiser le calcul de la fréquence des adaptations de maillage, nous avons procédé à une restructuration majeure de l'implémentation. Nous avons encapsulé les fonctionnalités d'*Adapt* dans une série de modules Fortran, afin de pouvoir estimer l'erreur spatiale à l'issue de chaque de pas de temps, directement depuis *Cadyf*. À partir de la distribution de l'erreur élémentaire, nous avons ensuite construit une série de critères d'arrêt, à même de suspendre l'intégration temporelle pour adapter le maillage en cas de besoin. Le nouveau processus pour traiter les écoulements instationnaires est illustré à la Figure 2.1c.

L'identification des éléments dont la taille de maille actuelle diffère sensiblement de la taille optimale permet de localiser les portions du maillage qui bénéficieront le plus de l'adaptation de maillage. En retirant ces éléments, on peut former des poches (ou cavités) dans le maillage courant. L'adaptation de maillage peut alors devenir locale si, lors du prochain passage dans *Amiral*, la génération de maillage se réduit à générer une nouvelle triangulation de ces poches. Cela suppose néanmoins de pouvoir former un front initial correspondant à la frontière des poches, afin que le mailleur frontal puisse procéder. À ces multiples fins, des développements ont été réalisés dans *Cadyf* et *Amiral*. Notons que le fonctionnement intrinsèque du mailleur n'a pas été modifié.

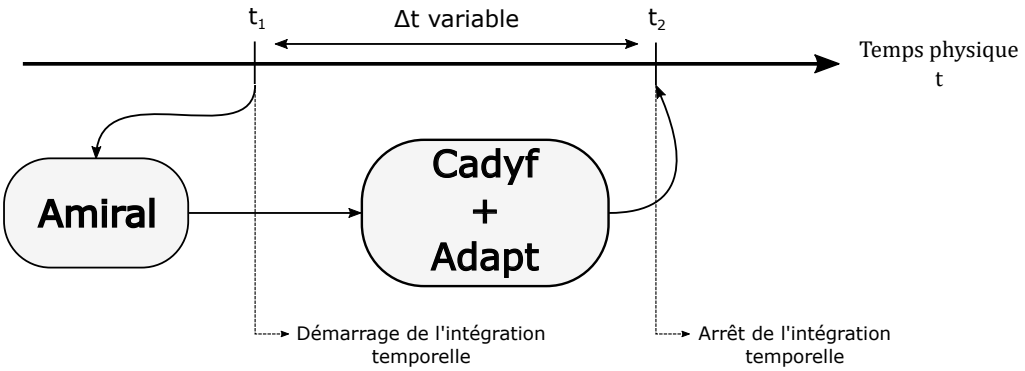
Il a également fallu veiller à la qualité du maillage ainsi généré. Nous avons donc implémenté dans *Amiral* une méthode de relaxation de maillage locale, combinant un lissage Laplacien et une méthode de relaxation physique. Deux formulations de la méthode physique ont été implémentées. Afin de réduire le coût du processus, nous avons parallélisé (en mémoire partagée) l'assemblage et la résolution du système linéaire découlant de la méthode physique. Le solveur direct PARDISO a été employé pour résoudre le système.



(a) Processus pour les écoulements stationnaires



(b) Processus semi-automatique pour les écoulements instationnaires



(c) Processus automatique pour les écoulements instationnaires

Figure 2.1 Processus adaptatifs, construits à partir de notre implémentation de travail, pour la résolution des écoulements (in)stationnaires

2.5.2 Développement d'une procédure de relance de l'intégration temporelle

La résolution d'un écoulement instationnaire selon le processus défini à la Figure 2.1b implique de restaurer les paramètres par défaut de l'intégrateur temporel adaptatif. En d'autres termes, l'ordre de l'intégrateur doit être restauré à $p = 1$ et le pas temps à sa valeur par défaut $h = h_0$. Nous avons donc développé les outils nécessaires afin que l'état de l'intégrateur temporel (valeurs de h et p) puisse être conservé *a posteriori* des adaptations de maillage.

Entre autres, nous avons modifié le pilotage du transfert d'une solution dans *Amiral* afin de pouvoir transférer non plus seulement la dernière solution calculée, mais aussi celles de pas de temps antérieurs. Afin de limiter au maximum les erreurs de transfert dans ce contexte, nous avons implémenté une projection de Galerkin locale. Nous avons retenu la forme classique du système linéaire de projection, permettant de minimiser l'erreur de transfert en norme L^2. Compte tenu que l'adaptation de maillage permet d'avoir une solution assez lisse à l'échelle de chaque élément, la propriété de monotonie ne nous a pas semblés requise. L'application locale de la projection permet d'en limiter le coût, dont on sait qu'il est normalement supérieur à celui d'une interpolation linéaire. Dans le même but, nous avons parallélisé (en mémoire partagée) l'assemblage et la résolution du système linéaire de projection. Ici aussi, le solveur direct PARDISO a été utilisé pour résoudre le système. Nous avons exploré trois implémentations de la projection de Galerkin, différant dans leur façon d'évaluer le membre de droite du système linéaire de projection. Les deux premières s'appuient respectivement sur les stratégies de type *supermesh* et *target-based* que nous avons mentionnées dans la revue de littérature. La troisième est une formulation hybride construite à partir des deux premières. À des fins de comparaison nous avons également implémenté une interpolation quadratique, qui s'identifie à l'interpolation consistante compte tenu des éléments qui constituent nos maillages.

Toujours dans un but de minimisation des erreurs de transfert, nous avons développé un concept de maillage hybride. Un maillage hybride peut être composé d'éléments isoparamétriques et sub-paramétriques. Plus précisément, un tel maillage autorise que les éléments ayant au moins une arête en contact avec une frontière du domaine de calcul soient isoparamétriques, tandis que les éléments restant sont sub-paramétriques. L'usage d'un maillage hybride se justifie lors de la résolution d'un écoulement via une formulation ALE des équations, et que certains aspects du problème exige des éléments isoparamétriques. L'usage d'éléments de degré 2 ou plus implique que les arrêtes de ceux-ci vont s'incurver sous l'effet de la propagation du déplacement des frontières. Il devient alors beaucoup plus complexe d'assurer un transfert précis de la solution. Le maillage hybride permet de confiner ce phénomène sur les arêtes composant la frontière du domaine.

Bien que déjà très utile, le maillage hybride ne bonifie donc pas la précision du transfert sur les éléments adjacents aux frontières du domaine. Pour cette raison, nous avons implémenté une projection de Galerkin 1D, permettant de transférer précisément la solution sur les frontières du domaine. Pour ce faire, la paramétrisation des courbes frontières a été mise à profit.

2.5.3 Vérification de l'implémentation

La poursuite de ce troisième objectif s'est faite via une série d'activités d'analyse et de vérification des différents traitements et outils que l'on vient d'évoquer :

- Nous avons analysé la convergence de l'erreur de transfert d'une solution d'un maillage à l'autre pour les différentes méthodes de transfert explorées. Dans le cas de la projection de Galerkin, nous nous sommes aussi assuré que sa propriété de conservation était bien observée en pratique. Le coût de calcul de chacune des méthodes de transfert a finalement été étudié.
- La procédure de relaxation de maillage a également été analysée en évaluant indépendamment le comportement du lissage Laplacien et de chacune des formulations de la méthode physique. Pour ce faire, nous avons considéré une situation où l'obtention d'un maillage parfait (métrique de qualité unitaire pour tous les éléments) est possible. L'application locale de la relaxation a aussi été étudiée.
- Nous avons également voulu évaluer la pertinence de certains critères d'arrêt que nous avons définis pour automatiser les adaptations de maillage. Pour cela, une étude portant sur l'évolution d'une distribution de l'erreur élémentaire, lorsque plusieurs cycles d'adaptation de maillage sont appliqués, a été conduite. Les résultats ont été analysés dans le cas où plusieurs normes d'erreur participent à l'adaptation du maillage (approche *multinorme*), et dans le cas où une seule norme d'erreur est considérée (approche *mononorme*). Dans le même temps, nous avons observé le comportement de l'adaptation de maillage locale dans ces deux mêmes cas, en focalisant notre attention sur la formation des poches à remailler.

Bien que l'implémentation du solveur éléments-finis et de l'intégrateur temporel ne relève pas directement de nos travaux, il demeure légitime d'imaginer que nos différents développements aient pu avoir une/des incidence(s) facheuse(s) sur leur fonctionnement. Nous avons donc tenu à vérifier les taux de convergence des erreurs spatiale et temporelle obtenues lors de la résolution de problèmes manufacturés simples. L'étude de l'erreur temporelle s'est faite en formulation Eulérienne pure, ainsi qu'en formulation ALE.

2.5.4 Application de la procédure de résolution

Ce dernier objectif est conduit en considérant des écoulements complexes largement étudiés dans la littérature. Nous avons choisi de traiter quatre problèmes instationnaires différents :

- L'écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$
- Un jet impactant sur une plaque chauffante
- L'écoulement turbulent au dessus d'une marche descendante à $Re = 47625$
- L'instabilité de Rayleigh-Taylor

Ce faisant, nous avons pu étudier la pertinence de notre procédure de résolution adaptative dans des situations très variées. La formulation de l'objectif général de ce projet implique en effet que la procédure soit largement applicable.

2.6 Identification des contributions originales

De manière générale, proposer une procédure de résolution adaptative en espace et en temps pour la résolution des écoulements instationnaires n'est pas une contribution originale, conformément à ce qui a été rapporté dans notre revue de la littérature. Toutefois, certaines composantes de notre procédure sont des contributions originales à la communauté de CFD [6] :

(1) Notre méthode d'adaptation de maillage locale, basée sur l'estimation d'erreur de Zhu et Zienkiewicz et sur un mailleur frontal, est inédite.

(2) Le pilotage automatique des adaptations de maillage, au moyen de *plusieurs* critères d'arrêt, est inédit.

(3) Notre méthode de relaxation locale est inédite.

(4) Notre formulation locale de la projection de Galerkin n'a jamais été *appliquée* dans la littérature, et ce bien que Farrell et Maddison [124] l'aient *proposée* comme une amélioration possible de leur approche.

(5) Notre formulation hybride de la projection de Galerkin est inédite.

(6) La relance d'un intégrateur temporel adaptatif non auto-démarrant, au moyen de la projection de Galerkin, n'a jamais été testée.

Également, nous tenons à souligner la modularité de notre procédure, qui la rend particulièrement attractive. À l'exception du mailleur frontal, les outils composant notre procédure peuvent tout à fait être remplacés par des outils alternatifs. Par exemple, une autre méthode

6. Ces contributions ont été identifiées à partir de notre connaissance de la littérature, que l'on se gardera bien de prétendre exhaustive

d'estimation de l'erreur élémentaire pourrait être utilisée en place de celle de Zhu et Zienkiewicz. De même, un intégrateur temporel construit à partir d'une méthode implicite de Runge-Kutta pourrait se substituer à celui que utilisons. D'une certaine façon, notre procédure de résolution s'apparente *juste* à une logique squelette, faisant le lien entre les méthodes numériques utilisées et/ou développées.

CHAPITRE 3 FORMULATION DES PROBLEMES À RESOUDRE

Dans ce chapitre on aborde la mise en place des problèmes que nous avons résolus au cours de nos travaux de recherche. On commence par présenter, à la Section 3.1, les équations aux dérivées partielles (EDP) descriptives de la physique à simuler. Celles-ci dérivent plus généralement de lois de conservation, que l'on explicitera. On présente ensuite à la Section 3.2 la construction du système linéaire à résoudre, découlant des EDP mentionnées, par la méthode des éléments finis.

3.1 Équations aux dérivées partielles descriptives des problèmes à résoudre

Cette section précise les EDP descriptives des problèmes physiques que nous avons résolus. La question des lois de conservation desquelles ces EDP dérivent est traitée en premier lieu.

3.1.1 Lois de conservation

Les lois de conservation traduisent des principes physiques fondamentaux qui régissent le comportement de la nature. En ce qui nous concerne, trois de ces lois nous intéressent particulièrement :

- La conservation de la masse, ou principe de Lavoisier
- La conservation de la quantité de mouvement, ou deuxième loi de Newton
- La conservation de l'énergie totale, ou premier principe de la thermodynamique

Conservation de la masse

Le principe de Lavoisier, énoncé historiquement dans un contexte de génie chimique en 1777, stipule que « *rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme* ». Avant même l'émergence de la théorie atomique moderne, Lavoisier avait en effet constaté que lors d'une réaction chimique la masse total des produits égale la masse totale des réactifs, abstraction faite de la réaction chimique à l'œuvre. On sait dorénavant que la matière est constituée de particules, les atomes, formant très souvent des structures plus complexes, les molécules. Présenté grossièrement, une réaction chimique n'est qu'une réorganisation des atomes constituant des molécules de départ (les réactifs), menant à la formation de nouvelles molécules (les produits). Les réalités de la chimie moderne sont évidemment beaucoup plus complexes. Toutefois, la physique qui nous intéresse dans ces travaux, à savoir celle qui gouverne l'évolution d'un fluide dans un domaine, demeure "simple" puisque que nous n'étudions qu'un déplacement des particules

de fluide. Du point de vue chimique, nous étudions donc une réaction où les produits sont identiques aux réactifs. L'application du principe de Lavoisier implique donc qu'un volume de fluide Ω va conserver sa masse lors de son mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega(t)} \rho \, d\Omega\right) = 0 \tag{3.1}$$

Tel que formulé le principe de Lavoisier suppose l'étude d'un système clos, représentable par un volume bordé d'une frontière hermétique. Ce point de vue se prête bien à l'étude des déformations d'un solide. En supposant des déformations de faibles amplitudes, la forme finale du volume d'un solide sera très proche de sa forme initiale. Dans le cas d'un fluide, l'écoulement de celui-ci va au contraire très largement déformer le volume qui le contient. Chercher à étudier le déplacement de chaque molécule fluide implique donc de pouvoir prendre en compte cette déformation. Cette approche définit le point de vue Lagrangien. Avec la complexité des systèmes d'ingénierie actuels, il est souvent vain de vouloir procéder ainsi en mécanique des fluides. Par ailleurs, il ne serait que très rarement pertinent de le faire. En mécanique des fluides, l'ingénieur s'intéresse en générale à l'évolution d'un système dans lequel un fluide circule. Les frontières de ce système délimitent un volume de contrôle où il convient de pouvoir caractériser l'écoulement du fluide en tout temps. Dis autrement, seuls les particules de fluide présentement dans le volume de contrôle sont d'intérêt. Cette approche différente définit le point de vue Eulérien. Ce point de vue ne permet cependant plus d'appliquer directement le principe de Lavoisier. Il devient ici nécessaire d'utiliser le théorème de transport de Leibniz Reynolds. Soient Ω un volume de fluide, $\delta\Omega$ sa frontière et f une quantité d'intérêt dans Ω (scalaire, vectorielle, ou même tensorielle). Soient également $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide et t la variable de temps. On peut démontrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega(t)} f \, d\Omega\right) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\delta\Omega(t)} f(\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \, dl \tag{3.2}$$

où $\hat{\boldsymbol{n}}$ désigne le vecteur normal sortant et normé à la frontière $\delta\Omega$. Dit simplement, le membre de gauche illustre le point de vue Lagrangien tandis que le membre de droite désigne le point de vue Eulérien. Le théorème de transport rend compte du découplage entre le temps et l'espace qui s'opère en point de vue Eulérien (dérivée partielle en temps), là où l'espace dépend du temps en point de vue Lagrangien (dérivée totale en temps). Par ailleurs le premier terme du membre de droite désigne la dérivée locale (le volume Ω est supposé fixe), tandis que le second terme prend en compte les variations dues à la convection du volume Ω. Si la quantité f s'identifie à la masse volumique ρ du fluide, on obtient la loi de conservation de la masse (sous forme intégrale) dans le volume de contrôle Ω_0 qui coïncide avec le volume Ω

à l'instant t :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\Omega + \int_{\delta\Omega_0} \rho(\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, dl = 0 \tag{3.3}$$

Conservation de la quantité de mouvement

La loi de conservation de la quantité de mouvement participe également à régir le comportement d'un écoulement fluide. Elle découle très simplement de la deuxième loi de Newton. La variation de quantité de mouvement dans un volume de fluide Ω, dont on suit le déplacement (point de vue Lagrangien), égale donc la somme des efforts s'appliquant sur ce volume de fluide. Ces efforts peuvent être volumique (cas de la force de pesanteur) ou surfacique (cas de la force de pression). Sous forme intégrale, il vient de manière générale :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega(t)} \rho \boldsymbol{u}\, d\Omega\right) = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{q}\, d\Omega + \int_{\delta\Omega(t)} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Omega \tag{3.4}$$

Le premier terme du membre de droite désigne les efforts volumiques, et $\boldsymbol{q}$ est la densité volumique de force associée. Le second terme du membre de droite représente les efforts surfaciques, le tenseur $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ désignant le tenseur des contraintes *totales* s'exerçant sur la frontière de Ω. Là encore, cette formulation de la loi suppose de suivre le volume de fluide Ω dans son mouvement, ce qui est difficile en pratique. On peut néanmoins utiliser à nouveau le théorème de transport discuté à la sous-section précédente pour formuler la loi de conservation du point de vue Eulérien. Pour un volume de contrôle Ω_0, on obtient ainsi :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t}\, d\Omega + \int_{\delta\Omega_0} \rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, dl = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{q}\, d\Omega + \int_{\delta\Omega_0} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Omega \tag{3.5}$$

La difficulté majeure liée aux équations de Navier-Stokes apparaît dors et déjà dans cette équation : le terme convectif du membre de gauche est non linéaire.

Conservation de l'énergie

Finalement, la dernière loi qui va nous intéresser ici est celle relative à l'énergie totale E_t d'un système thermodynamique. L'énergie totale résulte de la sommation de deux contributions : l'énergie mécanique E_m (qui elle même est la somme de l'énergie potentielle E_p et cinétique E_c du volume de fluide) et l'énergie interne E_i. Dans le cas d'un système thermodynamiquement clos, le premier principe de la thermodynamique stipule que l'énergie totale de ce système demeure constante en tout temps. Si ce système est ouvert, le premier principe stipule que la variation d'énergie totale du système est égale à la somme de la quantité de chaleur Q

échangée avec l'extérieur et du travail W exercé par le milieu extérieur sur le système :

$$\Delta E_t = \Delta \left(E_c + E_p + E_i \right) = Q + W \tag{3.6}$$

Notons aussi qu'un transfert d'énergie peut s'opérer à l'intérieur du système. Ainsi de l'énergie mécanique peut se transformer en énergie interne. Dans le cas d'un fluide visqueux, la viscosité du fluide va par exemple entrainer une dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur, augmentant par là l'énergie interne du système. La variation d'énergie potentielle sera négligée ici, car supposée faible. En l'absence de prise en compte de la gravité, ce qui sera souvent notre cas, cette variation d'énergie potentielle sera même rigoureusement nulle. En notant e la densité volumique d'énergie interne d'un volume fluide Ω ouvert sur le milieu environnant, on peut appliquer le premier principe pour exprimer la variation d'énergie totale dans le volume de fluide au cours du temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{\Omega(t)} \rho \left(e + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2} \right) \, d\Omega \right) = \int_{\delta\Omega(t)} \boldsymbol{q}_{th} \cdot \boldsymbol{u} \, dl + \int_{\delta\Omega(t)} \left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \right) \cdot \boldsymbol{u} \, dl \tag{3.7}$$

où $\boldsymbol{q}_{th}$ désigne ici le flux de chaleur au travers de la frontière du volume fluide. L'application du théorème de transport de Leibniz Reynolds permet finalement d'exprimer cette loi du point de vue Eulérien, sur un volume de contrôle Ω_0 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2} \right) \right) \, d\Omega + \int_{\delta\Omega_0} \rho \left(e + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}{2} \right) \left(\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \right) d\Omega \\ = \int_{\delta\Omega_0} \boldsymbol{q}_{th} \cdot \boldsymbol{u} \, dl + \int_{\delta\Omega_0} \left(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \right) \cdot \boldsymbol{u} \, dl \end{aligned} \tag{3.8}$$

En combinant cette loi avec celle portant sur la conservation de la quantité de mouvement, et en introduisant le concept d'enthalpie, il est possible de dériver l'équation de l'énergie, gouvernant l'évolution de la température dans le volume fluide. Cette équation sera présentée dans la sous-section suivante.

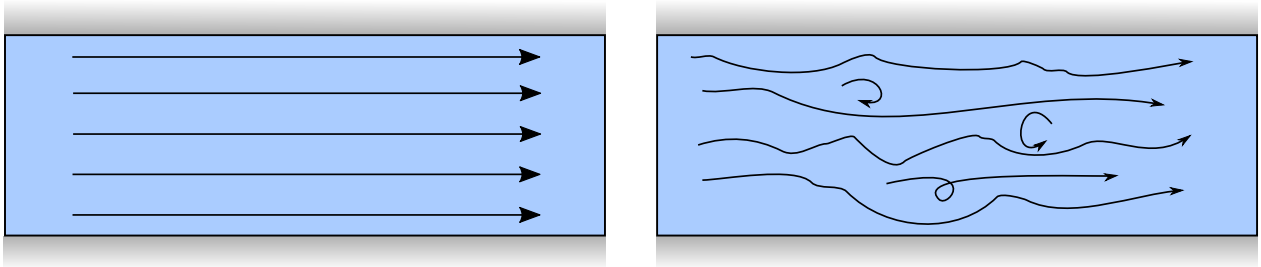
3.1.2 Écoulements laminaires

Une grande partie des écoulements que nous avons étudiés sont laminaires. Par opposition aux écoulements turbulents, les écoulements laminaires sont ordonnés et les particules fluides suivent des trajectoires lisses. Dans le cas d'un écoulement laminaire stationnaire, les particules de fluide positionnées sur une même ligne de courant auront la même trajectoire. En guise d'exemple, on illustre schématiquement sur la Figure 3.1a un écoulement de conduite laminaire. Dans le cas plus général d'un écoulement laminaire instationnaire, le transfert de

quantité de mouvement perpendiculairement aux lignes de courant ne s'effectue que par un mécanisme diffusif au moyen de la viscosité moléculaire du fluide. S'il existe des tourbillons dans l'écoulement (cas de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán), ils forment des structures cohérentes convectées par le fluide. Ces tourbillons ne viennent pas artificiellement augmenter la diffusion de quantité de mouvement dans le fluide en instaurant un effet de mélange supplémentaire. Physiquement parlant, un écoulement laminaire est donc tel que les effets de diffusion sont prépondérants devant ceux de convection. Ce sera l'inverse pour un écoulement turbulent. Dans ce contexte, le fameux nombre de Reynolds Re (historiquement introduit par George Stokes en 1851) évalue le rapport de force entre les effets diffusifs et convectifs :

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0} = \frac{U_0 L_0}{\nu_0} \tag{3.9}$$

où μ_0, et ν_0 sont respectivement la viscosité moléculaire dynamique et cinématique caractéristiques du fluide, tandis que U_0 et L_0 désignent une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement à l'étude. De la même façon, ρ_0 désigne la masse volumique caractéristique du fluide. Physiquement, le numérateur du nombre de Reynolds évalue l'intensité des effets convectifs, tandis que le dénominateur fait de même pour les effets diffusifs. Ce nombre sans dimension est très largement utilisé en mécanique des fluides pour prédire le régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent). Notons toutefois que ce nombre n'est donc pleinement applicable qu'au traitement des fluides Newtonien. Tous les fluides étudiés dans ces travaux sont Newtoniens.



(a) Cas laminaire (b) Cas turbulent

Figure 3.1 Représentation schématique de la trajectoire de plusieurs particules fluides dans un écoulement de conduite, en régime laminaire et turbulent

Équations de Navier-Stokes en régime incompressible

Dans le contexte des écoulements laminaires, l'application des lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse sur un volume de contrôle arbitraire, dont l'échelle

doit être à minima mésoscopique pour considérer le milieu fluide comme continu, permet d'établir l'équation vectorielle suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) = \rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.10}$$

où $\boldsymbol{g}$ est l'accélération de la pesanteur, fixée à $9.81\,m/s^2$ dans les problèmes où nous l'avons considérée. Dans le cas des fluides Newtoniens qui nous intéressent, le tenseur des contraintes internes au fluide $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ est donné par :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(-P + \lambda_1(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\right)\underline{\boldsymbol{I}} + \frac{\lambda_2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right) \tag{3.11}$$

où P désigne la pression dans le fluide. Les coefficients λ_1 et λ_2 sont les coefficients de Lamé du fluide. Le second terme du membre de droite est représentatif des effets de compressibilité dans le fluide. L'application de la loi de conservation de la masse sur un volume mésoscopique arbitraire de fluide permet en effet d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.12}$$

Il s'agit de l'équation de continuité, que l'on peut récrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\rho)\right) \tag{3.13}$$

Si la masse volumique du fluide peut être supposée constante (dans le temps et dans l'espace), cette précédente relation devient simplement :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{3.14}$$

On sera typiquement dans cette situation si le fluide est incompressible (cas des liquides), où si l'écoulement est incompressible (ce qui suppose d'être à un nombre de Mach suffisamment faible). Dans l'ensemble de nos simulations, nous avons indistinctement supposé que l'on se trouvait dans l'une ou l'autre de ces deux situations. Nous avons en effet réalisé la majeure partie de ces travaux avec une formulation sans dimensions des équations, nous permettant de faire abstraction de la nature du fluide. Nous y reviendrons plus bas. Ceci étant, cela nous permet de simplifier l'Équation (3.11) sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = -P\underline{\boldsymbol{I}} + \frac{\lambda_2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right) \tag{3.15}$$

Le second coefficient de Lamé fait finalement apparaître la viscosité dynamique du fluide, dont on sait désormais l'importance pour définir le régime d'écoulement :

$$\lambda_2 = 2\mu \tag{3.16}$$

En injectant l'Équation (3.15) dans l'Équation (3.10), et en supposant la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide constantes, on obtient alors les équations de Navier-Stokes en régime incompressible :

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) &= \rho\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla}(P) + \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Puisque nous ne traiterons pas d'écoulements compressibles dans ces travaux, et par soucis de commodité, nous réfèreront à ces équations en parlant des équations de Navier-Stokes. Cette remarque est valable pour l'ensemble de ce document. Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, nous avons souvent utilisé une forme sans dimension de ces équations par commodité. En plus des quantités caractéristiques de l'écoulement ou du fluide déjà évoquées, nous avons défini les quantités suivantes :

- $t_0 = L_0/U_0$: Temps caractéristique du problème
- $P_0 = \rho_0 {U_0}^2$: Pression dynamique caractéristique dans le fluide
- g_0 : Accélération de la pesanteur caractéristique dans le problème

On pose ensuite les quantités sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}^* = L_0\boldsymbol{\nabla} && t^* = \frac{t}{t_0} && \boldsymbol{u}^* = \frac{1}{U_0}\boldsymbol{u} \\ &\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} && \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0} && P^* = \frac{P}{P_0} && \boldsymbol{g}^* = \frac{1}{g_0}\boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous avons supposé la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide constantes. Il en résulte que $\rho^* = \mu^* = 1$. Les autres variables sans dimensions peuvent être utilisées pour parvenir à la formulation suivante des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}^*)\boldsymbol{u}^*\right) &= \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}^* - \boldsymbol{\nabla}^*(P^*) + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\nabla}^*\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}^*(\boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{\nabla}^*(\boldsymbol{u}^*)^T\right) \\ \boldsymbol{\nabla}^*\cdot\boldsymbol{u}^* &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où Fr est le nombre de Froude. Ce deuxième nombre sans dimension est donné par :

$$Fr = \frac{{U_0}^2}{g_0 L_0} \tag{3.20}$$

Le nombre de Froude évalue pour le fluide l'importance relative de son énergie cinétique macroscopique par rapport à son énergie potentielle de pesanteur.

Par identification entre les Équations (3.17) et (3.19), on constate que l'on peut aisément renseigner le nombre de Reynolds souhaité pour l'écoulement via la valeur affecté à la viscosité dynamique du fluide. En posant $\rho_0 = 1$, $U_0 = 1$ et $L_0 = 1$ (cela suppose d'adimensionnaliser également la géométrie du problème), on obtient même $\mu_0 = 1/Re$. Dans le cas des écoulements compressibles, cette formulation est particulièrement utile pour explorer une large plage de nombre de Reynolds à nombre de Mach constant.

Équation de l'énergie

L'équation de l'énergie, régissant l'évolution de la température dans le domaine de calcul, peut être obtenue à partir des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les manipulations nécessaires pour y parvenir n'ayant guère d'intérêts ici, nous en présentons le résultat directement. Ainsi, dans le cas des écoulements incompressibles auxquels nous nous limitons, l'équation de l'énergie sous forme dimensionnelle s'écrit :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}(T) \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\lambda \boldsymbol{\nabla}(T)) + \underline{\boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) \tag{3.21}$$

où c_p et λ sont respectivement la capacité thermique massique isobare et la conductivité thermique du fluide. Le tenseur $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ désigne le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \mu \left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T \right) \tag{3.22}$$

Le premier terme du membre de droite de l'Équation (3.21) est représentatif du transport de chaleur par diffusion. Le second est un terme de production, dû à l'échauffement visqueux. Ce dernier terme ne sera cependant pas considéré dans les cas qui nous intéressent, car négligeable devant la chaleur apportée au fluide par l'intermédiaire des conditions limites sur le domaine. Notons également que nous avons supposé que la masse volumique du fluide est constante et donc indépendante du champs de température. C'est pourquoi le terme de convection naturelle de Boussinesq ne figure pas dans les équations de Navier-Stokes que nous avons explicitées plus haut. L'évolution de la température dans le domaine de calcul sera donc découplée du champs de vitesse dans le fluide. Toutefois, notre implémentation

conduit à une résolution monolithique de l'écoulement et du transfert de chaleur.

Tout comme pour les équations de Navier-Stokes, nous avons en réalité utilisé une forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie. Pour l'obtenir, il est nécessaire d'identifier trois grandeurs additionnelles, caractéristiques du problème de transfert de chaleur :

- T_0 : une température caractéristique
- c_{p_0} : capacité thermique massique à pression constante caractéristique
- λ_0 : conductivité thermique caractéristique

Ceci nous permet d'introduire les quantités sans dimension suivantes :

$$T^* = \frac{T}{T_0} \qquad c_p^* = \frac{c_p}{c_{p_0}} \qquad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0} \tag{3.23}$$

Plus haut, nous avons supposé que les propriétés physiques sont constantes dans nos problèmes. Ceci implique ici que $c_p^* = \lambda^* = 1$, partout dans le domaine. Nous omettons donc ces quantités dans la forme adimensionnelle retenue pour l'équation de l'énergie. Celle-ci s'écrit :

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \boldsymbol{u^*} \cdot \boldsymbol{\nabla}(T^*)\right) = \frac{1}{P_e}\Delta(T^*) \tag{3.24}$$

Cette forme fait apparaître le nombre de Péclet P_e, dont l'écriture est :

$$P_e = \frac{\rho_0 c_{p_0} U_0 L_0}{\lambda_0} \tag{3.25}$$

Le nombre de Péclet est donc pour le transfert de chaleur ce que le nombre de Reynolds est pour l'écoulement. Il mesure le rapport de force entre le flux de chaleur convectif et le flux de chaleur diffusif. C'est pourquoi il s'écrit également couramment comme le produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl Pr :

$$P_e = Re\ Pr \tag{3.26}$$

Le nombre de Prandtl est représentatif de l'analogie entre le transport de chaleur et le transport de quantité de mouvement. Il mesure le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (qui s'identifie à la viscosité cinématique ν) et la diffusivité thermique α :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu_0/\rho_0}{\lambda_0/(\rho_0 c_{p_0})} = \frac{\mu_0 c_{p_0}}{\lambda_0} \tag{3.27}$$

3.1.3 Écoulements turbulents

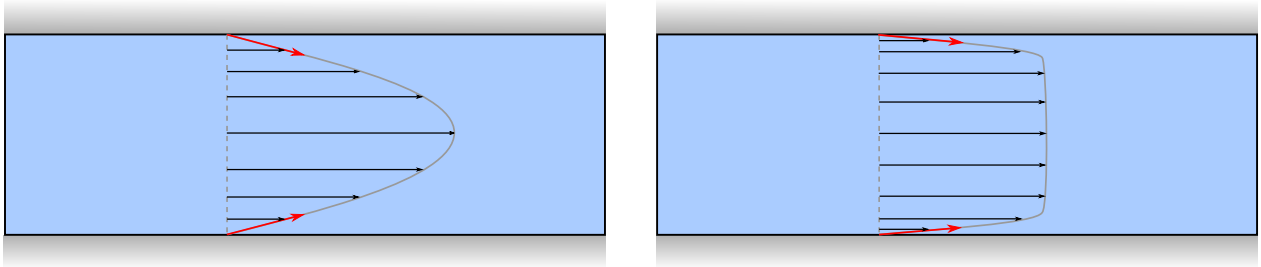
Par opposition aux écoulements laminaires, la structure locale d'un écoulement turbulent est désordonnée et donc plus complexe. Notamment, du transfert de quantité de mouvement s'opère perpendiculairement aux lignes de courant *moyennes*, par un mécanisme tourbillonnaire (cf. Figure 3.1b). L'étude et la compréhension de ces écoulements est d'un intérêt majeur pour le secteur industriel, car la grande majorité des écoulements dans les applications industrielles sont turbulents. En ce qui relève des nos travaux, nous avons justement souhaité étudier le comportement de notre méthode éléments finis adaptative lors de son application à des écoulements turbulents. Dans une étude préliminaire [148], portant sur l'impact des erreurs d'interpolation sur la relance de l'intégrateur temporel après une opération de remaillage, nous avions observé que l'adaptation globale du maillage en cours de simulation instationnaire pouvait nuire sérieusement à l'efficacité de cette relance. Une augmentation notable de l'erreur temporelle locale était détectée par l'intégrateur temporel lors de la reprise du calcul, cela malgré l'usage d'une interpolation consistante de la solution sur le nouveau maillage. La suite de cette sous-section donne davantage de détails sur la physique de la turbulence, qui conditionne les stratégies de modélisation. Nous ferons alors une rapide revue de certaines stratégies existantes. Nous n'insisterons néanmoins que sur les approches statistiques, construites à partir des équations URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*). Nous présenterons alors les équations aux dérivées partielles constitutives du modèle de turbulence $k - \varepsilon$ standard, que nous avons retenu dans ces travaux pour des raisons liées à l'historique de la recherche au laboratoire. Bien que moins précis que beaucoup d'autres modèles de turbulence plus modernes, nous verrons que le modèle $k - \varepsilon$ compense par sa simplicité d'écriture. Nous terminerons cette section en abordant la question du traitement des parois solides lors de l'usage de ce modèle.

Physique de la turbulence

Il est très difficile d'établir une définition de la turbulence tant sa physique est complexe. Il est néanmoins possible de décrire qualitativement les écoulements turbulents. Dans son ouvrage [72], Pope les présente comme étant "instationnaires, irréguliers en temps et en espace, et d'apparence chaotique, au point qu'il devient impossible de décrire le mouvement opéré par chaque particule fluide dans l'écoulement"[Notre traduction]. Regroupant d'autres définitions et explications qualitatives de la turbulence données par les pionners de son étude, Wilcox [100] définit l'écoulement turbulent comme un écoulement laminaire qui devient instable lorsque l'inertie du fluide (ou l'intensité du transport convectif) surmonte la dissipation visqueuse. L'écoulement turbulent manifeste alors des fluctuations rapides de vitesse et de

pression, le rendant tridimensionnel et instationnaire. En ce sens, l'écoulement tend donc à devenir turbulent lorsque la valeur de son nombre de Reynolds est *élevée*. Bien que ne dépendant pas de la nature du fluide, la valeur seuil dépend intrinsèquement du type d'écoulement étudié. Pour un même fluide, la transition vers l'écoulement turbulent s'opère à un nombre de Reynolds d'environ 2300 pour un écoulement de conduite (avec les conditions opératoires fréquemment observées dans l'industrie), et à un nombre de Reynolds d'environ 150 dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire.

En plus de ces propriétés générales, l'écoulement turbulent est tourbillonnaire. Des tourbillons d'échelles spatiales très variées interagissent au sein de l'écoulement, en s'échangeant de l'énergie. La tridimensionnalité de l'écoulement est nécessaire pour que cette mécanique tourbillonnaire se mette en place et perdure. En augmentant les gradients de vitesse perpendiculaires à son axe de rotation, un tube tourbillonnaire permet d'étirer des tubes tourbillonaires plus petits dont les axes de rotation sont perpendiculaires à celui du premier tube. L'intense vorticité tridimensionnelle qui en résulte produit l'effet du brassage turbulent, permettant de diffuser beaucoup plus rapidement la chaleur et la quantité de mouvement dans le fluide. Cet effet est d'ailleurs souhaité dans certaines applications industrielles. Toutefois, le brassage turbulent adoucit les gradients de vitesse dans les régions libres (absence d'une paroi proche) de l'écoulement, ce qui va à l'encontre de la production de turbulence dans ces régions. Dans les cas impliquant des parois, la production de turbulence va donc se retrouver confinée en très proche paroi, où le gradient de vitesse normale à celle-ci est obligatoirement renforcé. Un exemple typique de ce phénomène est la forme du profil de vitesse moyen dans un écoulement de conduite. La Figure 3.2 présente schématiquement ce profil dans le cas d'un écoulement laminaire et turbulent.



(a) Cas laminaire (b) Cas turbulent

Figure 3.2 Représentation schématique du profil de la vitesse longitudinale moyenne dans un écoulement de conduite, en régime laminaire et turbulent

L'interaction entre les échelles tourbillonnaires que nous venons de décrire s'inscrit plus largement dans la théorie de la cascade d'énergie formalisée par Kolmogorov en 1941 [2, 6] après

une explication qualitative du phénomème par Richardson en 1922 [106]. Une discussion critique très détaillée de cette théorie est également disponible dans l'ouvrage de Frisch [38]. Cette théorie énonce que l'énergie cinétique turbulente, contenue dans le champs de vitesse *fluctuant*, circule des plus gros tourbillons vers les plus petits, soit des grandes échelles d'espace vers les plus petites. Notons que le transfert de l'énergie peut s'opérer localement dans l'autre sens s'il y a coalescence de structures tourbillonnaires. Dans le cas général les gros tourbillons puisent leur énergie dans l'écoulement moyen, de laquelle se nourrissent ensuite une série de tourbillons d'échelles plus petites. Ces tourbillons d'échelles intermédiaires forment le régime inertiel de la cascade d'énergie. L'énergie s'extrait ainsi continuellement vers des échelles plus petites jusqu'à premièrement atteindre l'échelle de Taylor. Selon l'hypothèse de Kolmogorov, la dynamique des tourbillons de grande échelle spatiale, supérieure à l'échelle de Taylor, dépend uniquement de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation ε de cette énergie. En revanche les tourbillons dont l'échelle spatiale est inférieure à l'échelle de Taylor voient leur dynamique affectée par la viscosité moléculaire du fluide. L'effet dissipatif de la viscosité sur la dynamique d'un tourbillon est d'autant plus prononcé que l'échelle de celui-ci s'approche de l'échelle de Kolmogorov η. Si u_η désigne la vitesse caractéristique d'un tourbillon à l'échelle de Kolmogorov, alors on a le résultat suivant :

$$R_{e\eta} = \frac{\rho u_\eta \eta}{\mu} = 1 \tag{3.28}$$

L'échelle de Kolmogorov est donc telle que les effets dissipatifs de la viscosité compensent exactement les effets convectifs qui permettent l'existence d'un tourbillon. Autrement dit, il ne peut exister aucun tourbillon d'échelle spatiale inférieure à η. Remarquons au passage que le terme visqueux des équations de Navier-Stokes joue donc un rôle fondamental dans la physique de la turbulence bien que le nombre de Reynolds soit potentiellement très grand. Dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope à l'équilibre, la théorie de Kolmogorov fournit l'estimation de l'échelle η en fonction du nombre de Reynolds macroscopique :

$$\left(\frac{L_0}{\eta}\right)^3 \propto Re^{9/4} \tag{3.29}$$

Présenté sous cette forme, ce résultat donne une estimation du nombre de nœuds nécessaires dans un cube de côté L_0 pour espérer capturer l'ensemble de la physique de la turbulence. Notons que l'application de la théorie des instabilités linéaires conduit à une estimation légèrement moins sévère de l'échelle de Kolmogorov [136] :

$$\left(\frac{L_0}{\eta}\right)^3 \propto Re^{3/2} \tag{3.30}$$

Dans le secteur de l'aéronautique, il n'est pas rare de travailler avec des nombres de Reynolds considérables. Par exemple, dans le cas d'un Airbus A330-300 volant à une vitesse de 900 km/h, et en se basant en première approximation sur la viscosité cinématique de l'air à 20°C et à pression atmosphérique, on obtient un nombre de Reynolds d'environ 10^8. Les plus puissants supercalculateurs aujourd'hui disponibles ne permettent toujours pas de simuler *directement* ce type de problème. Cela justifie donc, encore aujourd'hui, de recourir à une modélisation avancée de la turbulence.

Modélisations de la turbulence

Pour reprendre les mots de Pope [72] au sujet des équations de Navier-Stokes, "leur force est aussi leur faiblesse"[Notre traduction]. L'entièreté de la physique de la cascade d'énergie, soit donc l'évolution spatio-temporelle des plus gros tourbillons comme des plus petits, est contenue dans les équations de Navier-Stokes. Or ces équations sont en apparence très simples. Le terme non linéaire de ces équations contient à lui seul la très majeure partie de la physique de la turbulence. Pour faire écho au commentaire de clôture du paragraphe précédent, les équations de Navier-Stokes sont donc une modélisation peu maniable de la turbulence, puisque les utiliser directement (on parle de simulation numérique directe ou DNS) requiert alors une puissance de calcul bien souvent inaccessible. Une large partie de la recherche sur la simulation numérique de la turbulence est donc consacrée au développement de modélisations plus avancées de la turbulence, afin de pouvoir capturer ses effets pour un coût nettement moindre à celui requis par la DNS. Les différentes approches de modélisation de la turbulence se distinguent par la portion résolue du spectre de l'énergie cinétique de turbulence moyenne massique, que l'on notera k. Plus précisément, k est donnée par :

$$k = \int_0^\infty E(\kappa, t)\, d\kappa \tag{3.31}$$

où $E(\kappa, t)$ est la densité spectrale d'énergie cinétique de turbulence, fonction du nombre d'onde κ (représentatif de l'échelle spatiale d'un tourbillon) et du temps t. La Figure 3.3 fournit une représentation courante de la densité spectrale $E(\kappa, t)$ à un instant t donné, pour une turbulence supposée homogène, isotrope et à l'équilibre. La DNS vise à résoudre la densité spectrale d'énergie pour tous les nombres d'onde présents dans l'écoulement, cela à partir des seules équations de Navier-Stokes. L'effort de modélisation supplémentaire est donc nul, mais l'effort de calcul est gigantesque. De nombreuses approches alternatives ont été proposées en vue d'offrir un ratio plus intéressant entre l'effort de modélisation et de calcul. Les revues proposées par Argyropoulos [130] et Durbin [141] font notamment état des approches courantes suivantes :

- Les approches statistiques, basées sur les équations URANS
- La simulation des grandes échelles (LES :*Large Eddy Simulation*)
- Les approches hybrides, telles que la VLES (Very Large Eddy Simulation) introduite par Speziale [61] et la DES (*Detached-Eddy Simulation*) due à Spalart [117]

La Figure 3.3 représente approximativement la portion résolue du spectre de l'énergie cinétique de turbulence pour chacune de ces grandes approches. Pour des raisons liées à l'historique de la recherche menée dans le laboratoire, nous avons utilisé dans ces travaux une approche statistique.

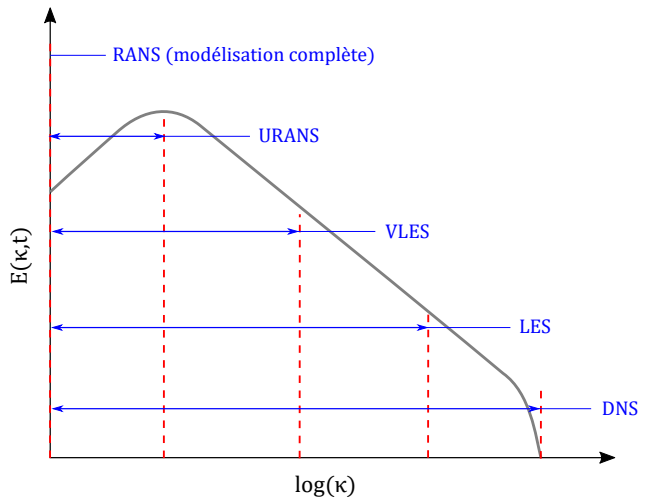


Figure 3.3 Représentation de la densité d'énergie cinétique de turbulence, lorsque la turbulence est homogène, isotrope et à l'équilibre

Les équations URANS sont obtenues en utilisant la décomposition de Reynolds. Chaque variable dépendante X_i est décomposée en une partie moyenne $\overline{X_i}$ et une partie fluctuante X_i' :

$$X_i(\boldsymbol{x}, t) = \overline{X_i}(\boldsymbol{x}, t) + X_i'(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.32}$$

où $\boldsymbol{x}$ désigne le vecteur des coordonnées spatiales, et t le temps. Pour que l'approche ait du sens physiquement, il est nécessaire d'avoir une forte séparation des échelles de temps de la turbulence et de l'écoulement moyen [49]. Le pas de temps utilisé par l'intégrateur temporel doit également rester suffisamment grand devant l'échelle de temps de la turbulence. Nous supposerons que c'est le cas dans ces travaux. La décomposition de Reynolds est introduite dans les équations de Navier-Stokes instationnaires. On applique alors une moyenne d'ensemble sur les équations, pour aboutir aux équations URANS. Dans le cas incompressible, et

en utilisant la convention d'Einstein, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.33}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j)\right) = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_i \partial x_j}\boxed{-\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_i u'_j})} \tag{3.34}$$

La différence majeure avec les équations de Navier-Stokes classiques réside dans le terme encadré, appelé tenseur de Reynolds, et noté $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{Re}$ dans la suite. Il rend compte de l'effet des composantes fluctuantes de la vitesse sur l'écoulement moyen. Ce tenseur introduit respectivement 3 et 6 inconnues supplémentaires selon que le cas d'étude est 2D ou 3D. En l'état, le système d'équation est donc insoluble. Toutes les approches statistiques reposent sur la modélisation de ce terme afin de fermer le système d'équations. On distingue deux type de modèle :

- Les modèles à viscosité turbulente (*eddy viscosity models*)
- Les modèles RS (*Reynolds Stress*)

Les premiers reposent sur l'hypothèse de viscosité turbulente introduite par Boussinesq en 1872 [1]. Pour simplifier le problème de modélisation du tenseur de Reynolds, une analogie est faite avec le tenseur des contraintes pour les fluides Newtoniens (cf. Équation (3.11)) :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{Re} = \alpha_t \underline{\boldsymbol{I}} + \lambda_{t1}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{I}} + \frac{\lambda_{t2}}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}(\overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\overline{\boldsymbol{u}})^T\right) \tag{3.35}$$

où $\overline{\boldsymbol{u}}$ désigne le vecteur des composantes de vitesse moyennes. Par ailleurs, et par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses laminaires, on pose $\lambda_{t2} = -2\,\mu_t$ avec μ_t la viscosité turbulente, liée cette fois-ci au régime d'écoulement et non au fluide considéré. Dans le cas des écoulements incompressibles, le second terme du membre de droite est nul. Enfin le coefficient α_t, analogue au terme de pression pour les fluides Newtoniens, s'obtient aisément à partir de l'énergie cinétique de turbulence massique moyenne k. Dans le cas d'un écoulement 2D on a :

$$\alpha_t = \frac{tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{Re})}{2} = \frac{1}{2}\rho\left(\overline{u_1'^{\,2}} + \overline{u_2'^{\,2}}\right) = \rho k \tag{3.36}$$

L'injection de l'Équation (3.35) dans l'Équation (3.34) donne finalement :

$$\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j)\right) = -\frac{\partial \overline{P_g}}{\partial x_i} + (\mu + \mu_t)\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.37}$$

où $P_g = \overline{P} + \rho k$ désigne la pression globale.

Notons que l'on peut aussi appliquer la moyenne d'ensemble sur l'équation de l'énergie. Il

en résulte alors un terme supplémentaire qu'il faut aussi modéliser afin de pouvoir résoudre l'équation moyennée. En faisant à nouveau l'hypothèse de viscosité turbulente, et en introduisant un nombre de Prandt turbulent Pr_t, l'équation de l'énergie moyennée peut alors s'écrire :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}(T) = \boldsymbol{\nabla} \cdot ((\lambda + \lambda_t)\boldsymbol{\nabla}(T)) \tag{3.38}$$

où λ_t est la conductivité turbulente donnée par :

$$\lambda_t = \frac{c_p\, \mu_t}{Pr_t} \tag{3.39}$$

Tous les modèles à viscosité turbulente reposent sur cette formulation. Dans ces travaux, nous avons utilisé uniquement le modèle k-ε standard de Launder et Spalding [9], qui propose une définition de la viscosité turbulente au moyen de deux équations de transport supplémentaires.

Le modèle k-ε standard

Nous présentons ici formellement les équations URANS en régime incompressible, couplées avec les équations de transport de k et ε telles que proposées par le modèle k-ε de Launder et Spalding. Nous ne nous attarderons pas sur la mise en place de ce modèle, mais des détails à ce sujet peuvent être trouvés dans [136]. Afin d'alléger la présentation, nous omettons dans la suite la notation utilisée précédemment pour repérer les valeurs moyennes des variables dépendantes (cf. Équation (3.32)). Selon que l'écoulement soit laminaire ou turbulent, les notations utilisées pour les variables dépendantes feront donc respectivement référence à la valeur totale de ces variables, ou seulement à leur valeur moyenne. Pour rester dans la lancée de ce que nous avons exposé pour les écoulements laminaires, nous donnons directement la forme adimensionnelle du système d'équations. Cela nécessite d'introduire les trois quantités adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{k}{k_0} = \frac{k}{{U_0}^2} \\ \varepsilon^* &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon L_0}{{U_0}^3} \\ \mu_t^* &= \frac{\mu_t}{\mu_{t0}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

où μ_{t0} désigne une viscosité turbulente caractéristique du problème, dont nous verrons très rapidement qu'elle peut s'exprimer en fonction de k_0 et ε_0. Là encore, nous omettrons dans la suite la notation utilisée pour les grandeurs adimensionnelles par soucis de légèreté. Sauf mentions contraires, toutes les quantités figurant dans les équations sont donc adimension-

nelles. Ceci étant dit, le système d'équations que nous avons résolues numériquement pour les écoulements turbulents prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) &= \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\nabla}(P) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\mu_t}{Re_{t0}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right)\right] \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \\
\frac{\partial k}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})k &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_k}\right)\boldsymbol{\nabla}(k)\right] + \frac{\mu_t}{Re_{t0}}P(\boldsymbol{u}) - C_\mu Re_{t0}\frac{k^2}{\mu_t} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\varepsilon &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nabla}(\varepsilon)\right] + C_\mu C_1 k P(\boldsymbol{u}) - C_2\frac{\varepsilon^2}{k}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

où $P(\boldsymbol{u})$ est le terme de production de turbulence, donné par :

$$P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) : \left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right) \tag{3.42}$$

La viscosité turbulente *dimensionnelle* est quant à elle définie par la relation :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.43}$$

La viscosité turbulente caractéristique *dimensionnelle* est donc donnée par :

$$\mu_{t0} = \rho C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \tag{3.44}$$

Et la viscosité turbulente *adimensionnelle* s'obtient donc par la relation :

$$\mu_t = \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.45}$$

Par ailleurs les quantités σ_k, σ_ε, C_1, C_2 et C_μ constituent les *constantes* de fermeture du modèle de turbulence. Nous utilisons celles proposées par Launder et Spalding pour le modèle k-ε standard. Leurs valeurs sont données dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1 Valeurs des constantes de fermeture du modèle k-ε standard

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.00	1.30

Prenons le temps de noter que ces constantes de fermetures sont réellement constantes. Dans beaucoup de modèles de turbulence dérivant du modèle k-ε standard, et notamment pour certaines versions bas Reynolds du modèle, les ajustements conduisent à redéfinir ces constantes à partir de variables intermédiaires et de fonctions d'amortissement qui introduisent *in fine*

des constantes additionnelles. Bien que conduisant à des améliorations sensibles sur la prédiction des effets de la turbulence sur l'écoulement moyen dans certains cas, ces modifications alourdissent considérablement le modèle original. En conséquence, la vérification de l'implémentation de ces modèles devient également plus lourde à mettre en place. Leur usage devient également plus nébuleux. Par ailleurs, la formulation des fonctions d'amortissement peut introduire des difficultés d'ordre numérique à plusieurs niveaux. À titre d'exemple le modèle k-ε de Launder et Sharma [8] introduit une fonction d'amortissement, faisant intervenir les dérivées secondes du champs de vitesse moyen, dans l'équation de transport de ε. Dépendamment de la discrétisation spatiale utilisée pour représenter le champs de vitesse, cela peut poser d'importants problèmes. Dans notre cas, les variables de vitesse sont représentées sur chaque élément par une fonction polynomiale de degré 2. Les dérivées secondes du champs de vitesses sont donc constantes sur chaque élément, ce qui est une approximation particulièrement pauvre. Cela peut avoir un impact très négatif sur la convergence du système linéaire. Une solution a récemment été proposée au laboratoire dans les travaux de Lambert [147]. La manœuvre implique d'effectuer un relèvement au moyen d'une variable supplémentaire contenant la vorticité de l'écoulement. Toutefois, le modèle devient donc un modèle à 3 équations, sensiblement plus coûteux que le modèle original.

Bien que la formulation des équations de transport dans la forme standard du modèle soit simple, un problème important peut survenir durant la résolution d'un problème. Rien ne garantit que tous les degrés de liberté de k et ε seront positifs à l'issue d'une itération de Newton. En plus de ne pas être physiquement acceptables, des valeurs nodales négatives de k et ε peuvent nuire à la convergence des itérations de Newton. Un moyen élégant d'éviter cette situation a été proposé par Ilinca et Pelletier [56]. On applique sur les équations de transport de k et ε le changement de variables suivant :

$$\mathcal{K} = \log(k) \tag{3.46}$$

$$\mathcal{E} = \log(\varepsilon) \tag{3.47}$$

Avec ce changement de variables dépendantes, les équations de transport de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ s'écrivent désormais :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathcal{K} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_k}\right)\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{K})\right] + \left(\frac{1}{Re} + \frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_k}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{K})\right)^2 \\ + \frac{\mu_t}{Re_{t0}}\mathrm{e}^{-\mathcal{K}}P(\boldsymbol{u}) \\ - C_\mu Re_{t0}\frac{\mathrm{e}^{\mathcal{K}}}{\mu_t}\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{E})\right] + \left(\frac{1}{Re}+\frac{\mu_t}{Re_{t0}\,\sigma_\varepsilon}\right)\cdot(\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{E}))^2 \\ + C_\mu C_1 \mathrm{e}^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} P(\boldsymbol{u}) \\ - C_2 \mathrm{e}^{\mathcal{E}-\mathcal{K}}\end{aligned} \tag{3.49}$$

Et la viscosité turbulente *adimensionnelle* s'écrit maintenant :

$$\mu_t = \mathrm{e}^{2\mathcal{K}-\mathcal{E}} \tag{3.50}$$

Soulignons que la modification de l'écriture des équations du modèle n'en change pas le comportement. Ce changement de variables vise seulement un gain de robustesse lors de la résolution du système d'équations par la méthode de Newton. Les non linéarités introduites, qui peuvent paraître gênantes *a priori*, sont en fait très bénéfiques pour adoucir les gradients des variables de turbulence. Cette formulation est en cela très utile pour traiter les écoulements impliquant des parois solides.

Traitement de l'écoulement de proche paroi

Nous avons souligné au cours de notre exposé sur la modélisation de la turbulence que le modèle k-ε, dans sa forme standard, est un modèle dit haut Reynolds. Il souffre donc de l'incapacité de pouvoir représenter par lui même l'écoulement de proche paroi. Ceci est particulièrement ennuyant quand on sait que la très grande majorité des écoulements d'intérêt industriel impliquent des parois solides. Le modèle k-ε standard peut toutefois être utilisé pour ce genre de problème moyennant l'usage d'un traitement adéquat de la zone de proche paroi. L'idée est de ne pas avoir à résoudre l'écoulement dans cette région, en ajustant les conditions limites sur les parois solides pour qu'elles reflètent la physique de l'écoulement de proche paroi. Plus précisément on vient appliquer pour la vitesse tangentielle une condition de Neumann égale à l'inverse du cisaillement pariétal τ_p, exercé par le fluide sur la paroi solide, sur des éléments de bord situés à une distance d de la paroi physique. On suppose donc implicitement que la contrainte de cisaillement dans le fluide varie très peu entre la paroi physique et la frontière du domaine de calcul (assimilable à une paroi numérique). La distance d est également appelée distance de raccordement, la frontière du domaine étant le lieu de raccordement entre la solution éléments finis et la modélisation de l'écoulement de proche paroi. La situation est représentée sur la Figure 3.4. Notons que cette approche revêt un autre intérêt. Nous l'avons déjà évoqué, la turbulence implique des gradients de vitesse particulièrement élevés en très proche paroi, ce qui nécessite de concentrer beaucoup d'éléments dans cette région pour espérer les capturer correctement. S'affranchir de résoudre l'écoulement de très proche paroi permet donc de réduire sensiblement le coût de la simulation.

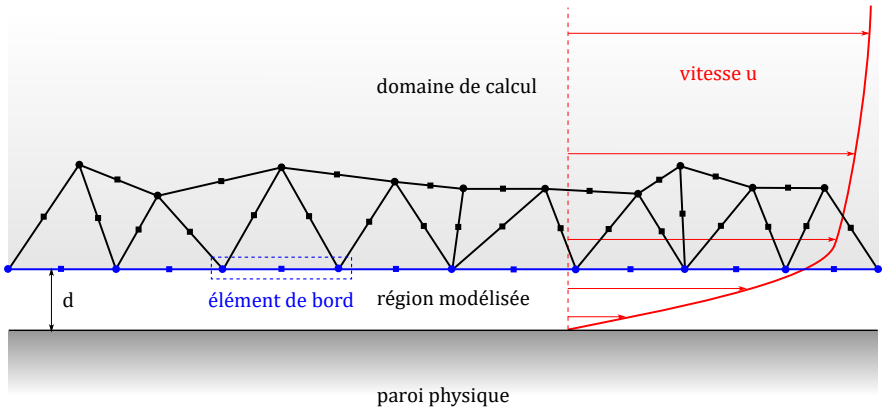


Figure 3.4 Principe du traitement de l'écoulement de proche paroi à l'aide d'une loi de paroi

Ce type de traitement s'appuie sur le notion de loi de paroi. Dans ces travaux, nous nous sommes appuyés sur des lois de paroi standards. Par soucis de concision, nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Le lecteur intéressé pourra toutefois trouver des détails additionnels sur ce sujet dans l'Annexe A.

3.2 Méthode des éléments finis en mécanique des fluides

Cette section offre une présentation détaillée d'une méthode d'éléments finis, appliquée au domaine de la mécanique des fluides. Comme beaucoup d'autres méthodes de résolution, la méthode des éléments finis vise à passer d'un problème formulé par des EDP à un système linéaire d'équations, qui peut alors être résolu par une méthode directe (de type factorisation LU) ou itérative (méthode GMRES par exemple). Tous les systèmes linéaires obtenus dans ces travaux par la méthode des éléments finis ont été résolus par le solveur direct PARDISO [89]. Nous nous focaliserons donc uniquement sur la construction du système linéaire. La formulation forte du problème s'identifie aux EDP gouvernant la physique du problème d'intérêt. Dans la suite nous illustrerons la mise en place du système linéaire d'équations à résoudre en considérant seulement les équations de Navier-Stokes *adimensionnelles* (cf. Équation (3.19)). En se basant sur notre implémentation de travail, plusieurs étapes sont nécessaires pour former le système linéaire :

(1) Établir la formulation variationnelle du problème

(2) Définir une approximation pour la solution

(3) Faire le choix des fonctions tests

(4) Assembler le système d'équations

La suite de cette section aborde successivement chacune de ces étapes. On poursuit ensuite

cette section en énonçant quelques propriétés relatives à l'erreur commise par la méthode des éléments finis. Pour terminer, nous décrivons le concept de maillage hybride, très utile lorsque le domaine de calcul présente des frontières incurvées.

3.2.1 Formulation variationnelle du problème

Les équations de Navier-Stokes sont caractéristiques de la physique locale du problème fluide. Dans les cas d'intérêt pratique, il est nécessaire d'intégrer ces équations sur un domaine de calcul, représenté par un ensemble fermé Ω de l'espace. Plusieurs approches sont possibles pour ce faire. Il existe notamment les méthodes de collocation et les méthodes par moindre carrés. Dans un autre registre, on trouve les méthodes variationnelles. La méthode de Ritz en est un exemple. Elle consiste à minimiser une fonctionnelle [1] représentative du problème. Cette minimisation se fait en introduisant des perturbations admissibles de la solution exacte. Considérons les équations de Navier-Stokes, en omettant pour le moment la contrainte d'incompressibilité. On peut écrire ces équations sous la forme résiduelle suivante :

$$\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P) = \mathbf{0} \tag{3.51}$$

où $\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P)$ est alors donné par :

$$\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right) - \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla}(P) - \frac{1}{Re}\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{u})^T\right) \tag{3.52}$$

Le but de la méthode de Ritz est d'aboutir à une formulation du problème sous la forme :

$$\int_\Omega \varphi\, \mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P)\, d\Omega = \mathbf{0}, \qquad \forall \varphi \in V \tag{3.53}$$

où la fonction φ désigne une perturbation admissible de la solution exacte. L'ensemble V des fonctions φ sera explicité plus loin. Cette équation constitue la formulation variationnelle du problème. Elle dérive de la minimisation d'une fonctionnelle, qu'il est nécessaire de connaître *a priori*. On désigne parfois la formulation variationnelle en parlant de résidu intégral pondéré.

Dans les faits, la fonctionnelle de départ est souvent inconnue. C'est d'ailleurs le cas pour les équations de Navier-Stokes. De cette observation vient la méthode de Galerkin. Elle consiste à construire la formulation variationnelle en partant de la formulation forte. On l'obtient aisément en multipliant celle-ci par la fonction φ, avant d'intégrer le tout sur le domaine de calcul. Dans ce contexte, la fonction φ désigne alors une "fonction test" (ou fonction d'essai).

1. on parle aussi de potentiel

À défaut de pouvoir déterminer la solution exacte, on chercher à déterminer une solution approchée $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{P})$, vérifiant la formulation variationnelle pour de nombreuses fonctions tests différentes. En injectant l'Équation (3.52) dans l'Équation (3.53) et en réorganisant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \int_\Omega \varphi \left[\boldsymbol{\nabla}(\tilde{P}) - \frac{1}{Re}\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right)\right]\, d\Omega \\ = \int_\Omega \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.54}$$

Afin que tous les termes intégrals soient mathématiquement bien définis, il est premièrement nécessaire que l'espace de fonctions V soit inclus dans l'espace de fonctions $L^2(\Omega)$. Ce dernier espace est défini de la façon suivante :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_\Omega f^2\, d\Omega < \infty \right\} \tag{3.55}$$

Cela ne suffit pas. Il faut également que $\tilde{P}$ soit inclus dans l'espace fonctionnel $H^1(\Omega)$, lequel est défini de la façon suivante :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \mid \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \in L^2(\Omega)^3 \right\} \qquad \text{(Cas 2D)} \tag{3.56}$$

Finalement, le terme de diffusion impose que les composantes de $\tilde{\boldsymbol{u}}$ soient dans l'espace de fonctions de Hilbert $H^2(\Omega)$:

$$H^2(\Omega) = \left\{ f \mid \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \in L^2(\Omega)^6 \right\} \qquad \text{(Cas 2D)} \tag{3.57}$$

Les restrictions sur le choix des composantes $\tilde{\boldsymbol{u}}$ sont donc plutôt sévères. On peut toutefois les assouplir en procédant à une intégration par partie de la seconde intégrale de l'Équation (3.54) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \int_\Omega -\tilde{P}\boldsymbol{\nabla}(\varphi) + \frac{1}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}(\varphi)\, d\Omega \\ = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\varphi \tilde{P}\underline{\boldsymbol{I}} + \frac{\varphi}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right)\right)\, d\Omega \\ + \int_\Omega \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.58}$$

Le théorème de la divergence peut alors être utilisé pour transformer la première intégrale

du membre de droite en un terme de bord :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \int_\Omega -\tilde{P}\boldsymbol{\nabla}(\varphi) + \frac{1}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}(\varphi)\, d\Omega \\ = \int_{\delta\Omega} \varphi(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, dl + \int_\Omega \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.59}$$

Le terme de bord peut être utilisé pour spécifier les conditions aux limites naturelles (dites de Neumann) du problème. Ces conditions peuvent s'appliquer sur toute la frontière du domaine ou seulement sur une partie, auquel cas la partie restante de la frontière doit être sujette à des conditions limites essentielles (dites de Dirichlet). Si l'on note respectivement Γ_N et Γ_D les portions de frontières soumises à des conditions de Neumann et de Dirichlet, on a donc :

$$\Gamma_N \cup \Gamma_D = \delta\Omega \qquad\qquad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset \tag{3.60}$$

Cette dernière forme de la formulation variationnelle permet de revoir le choix des espaces de fonctions pour φ, $\tilde{P}$ et $\tilde{\boldsymbol{u}}$. On constate que la fonction test doit désormais être choisie dans $H^1(\Omega)$. Dans le même temps, les restrictions sur $\tilde{P}$ et sur les composantes $\tilde{\boldsymbol{u}}$ ont cependant été *afaiblies*. On peut désormais choisir $\tilde{P}$ dans $L^2(\Omega)$, tandis que les composantes de $\tilde{\boldsymbol{u}}$ peuvent appartenir à $H^1(\Omega)$ seulement. C'est pourquoi l'Équation (3.59) s'appelle la *formulation faible* du problème.

Revenons maintenant à la contrainte d'incompressibilité. On peut également appliquer la méthode de Galerkin pour obtenir sa formulation variationnelle :

$$\int_\Omega \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}})\, d\Omega = 0, \qquad \forall \lambda \in W \tag{3.61}$$

où λ désigne ici une fonction test associée à la contrainte. En termes d'espace de fonctions, cette équation implique que l'espace de fonctions W soit inclus dans $L^2(\Omega)$. Si la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes fournit une équation pour chacune des composantes de $\tilde{\boldsymbol{u}}$, la forme variationnelle de la contrainte peut être vue comme l'équation permettant de déterminer la pression $\tilde{P}$. A première vue, une difficulté de taille apparaît puisque $\tilde{P}$ n'intervient pas dans sa propre équation. Nous verrons cependant dans la Section 3.2.3 que la résolution reste possible. La pression $\tilde{P}$ se comporte en effet comme un multiplicateur de Lagrange vis à vis de la contrainte d'incompressibilité.

3.2.2 Approximation de la solution

Pour aller plus loin avec les formulations variationnelles, il est nécessaire de préciser la forme souhaitée pour la solution approchée des équations. La forme générale retenue est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{u}} &= \sum_{i=1}^{N_u} \tilde{\boldsymbol{u}}_i \Phi_i \\ \tilde{P} &= \sum_{i=1}^{N_P} \tilde{P} \Lambda_i \end{aligned} \tag{3.62}$$

où N_u et N_P désignent respectivement le nombre de degrés de liberté de chacune des composantes de vitesse et de la pression. Ces degrés de libertés sont représentés par les $\tilde{\boldsymbol{u}}_i$ pour le champs de vitesse, et par les $\tilde{P}_i$ pour la pression. Ils constituent les inconnus du problème et représentent la valeur de la solution en différents points dans le domaine, de coordonnées $\boldsymbol{x}_i^{\tilde{\boldsymbol{u}}}$ et $\boldsymbol{x}_i^{\tilde{P}}$: il s'agit des nœuds. Les quantités Φ_i et Λ_i sont quant à elles des fonctions fournies *a priori*. Leur choix n'est pas anodin et s'appuie sur plusieurs critères :

- Elles doivent respecter la propriété de collocation :

$$\begin{aligned} \Phi_i(\boldsymbol{x}_j^{\tilde{\boldsymbol{u}}}) &= \delta_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in [\![1, N_u]\!]^2 \\ \Lambda_i(\boldsymbol{x}_j^{\tilde{P}}) &= \delta_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in [\![1, N_P]\!]^2 \end{aligned} \tag{3.63}$$

  où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Cette propriété est essentielle pour garantir que les ensembles de fonctions $\{\Phi_i\}$ et $\{\Lambda_i\}$ soient des ensembles libres :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{N_u} \tilde{\boldsymbol{u}}_i \Phi_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{u}}_i = 0 \quad \forall i \in [\![1, N_u]\!] \\ \tilde{P} = \sum_{i=1}^{N_P} \tilde{P}_i \Lambda_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{P}_i = 0 \quad \forall i \in [\![1, N_P]\!] \end{aligned} \tag{3.64}$$

- Elles doivent appartenir aux espaces de fonctions contenant $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{P}$. Ce critère, en plus du précédent, revient donc à dire que les ensembles de fonctions $\{\Phi_i\}$ et $\{\Lambda_i\}$ définissent respectivement la base d'un sous-espace V_h de $H^1(\Omega)$ et d'un sous-espace W_h de $L^2(\Omega)$. Par combinaison linéaire, on aura alors $\tilde{\boldsymbol{u}} \in V_h$ et $\tilde{P} \in W_h$.
- Leur support doit être minimal. Elles doivent être nulles sur la très majeure partie du domaine. Cette propriété permet de limiter grandement le nombre de coefficients non nuls dans la matrice du système linéaire final.

Afin d'expliciter davantage les fonctions de base de V_h et W_h, il nous faut introduire la notion d'élément. Un élément e_i définit un sous-domaine fermé dans le domaine de calcul Ω, que

l'on peut noter Ω_i. On note $\overline{\Omega_i}$ les ouverts de l'espace correspondant. Les éléments doivent être construits de sorte à vérifier les deux relations suivantes :

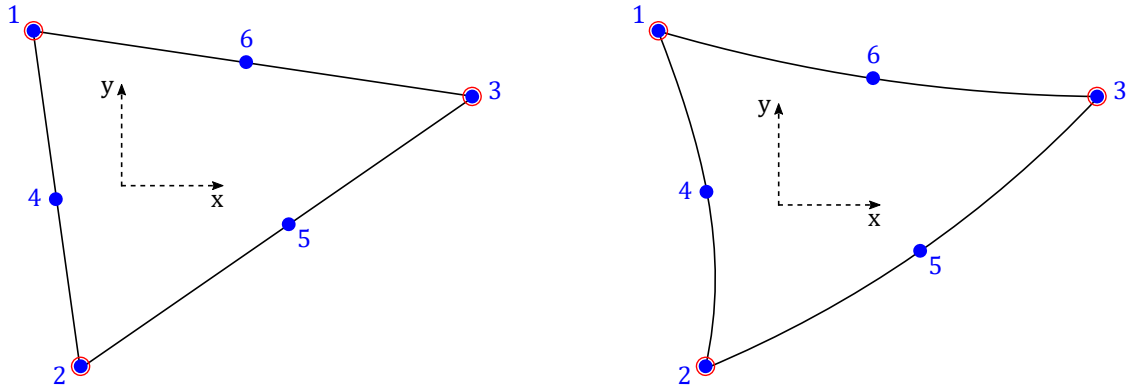
$$\begin{aligned} \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} &= \emptyset \quad \text{si } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_i &= \Omega_h \end{aligned} \tag{3.65}$$

où N_e est le nombre d'éléments dans le domaine de calcul Ω_h. Dépendamment de la géométrie du fermé Ω, et du type d'élément utilisé, il se peut que l'on vérifie juste $\Omega_h \approx \Omega$ et non $\Omega_h = \Omega$. Pour alléger la notation, on conservera toutefois la notation Ω pour désigner le domaine de calcul. Chaque élément est délimité par des frontières, elles-mêmes délimitées par les nœuds déjà évoqués. Les nœuds participant à la définition géométrique de l'élément constituent la table des connectivités de l'élément. On distingue les tables des connectivités locales et globales. Si N_{ne} désignent le nombre de nœuds nécessaires pour définir un élément, la table des connectivités locales de l'élément numérote chacun des nœuds de 1 à N_{ne}. La table des connectivités globales regroupe quant à elle les numéros de nœud globaux de l'élément. Ces tables sont particulièrement utiles lors de la construction des systèmes d'équations élémentaires et de leur assemblage dans le système global. Les éléments et leurs tables de connectivités globales définissent le maillage de Ω.

Dans le cadre de ces travaux nous avons plus particulièrement utilisé des éléments triangulaires de Taylor-Hood, de type P2-P1. Ces éléments sont tels que l'approximation de $\tilde{\boldsymbol{u}}$ sur l'élément se fait par un polynôme de degré 2, tandis que l'approximation de $\tilde{P}$ se fait par un polynôme de degré 1. Ce choix des approximations n'est pas anodin. Il est dicté par la fameuse condition LBB (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi), aussi appelée condition *inf-sup*. Il s'agit d'une extension du théorème de Lax-Milgram, fondement extrêmement important de la méthode des éléments finis. Il précise les conditions que doit remplir une formulation faible pour qu'il y ait existence et unicité de la solution. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, le respect de ces conditions ne peut pas être vérifié. Les causes en sont la non linéarité des équations, et la contrainte d'incompressibilité. La condition LBB s'adresse justement aux problèmes avec contrainte, traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Elle évalue la compatibilité entre l'approximation utilisée pour le multiplicateur de Lagrange et celle utilisée pour la solution. Dans notre cas, il s'agit donc d'évaluer la compatibilité entre l'approximation $\tilde{P}$ de la pression et celle du champs de vitesse, $\tilde{\boldsymbol{u}}$. Il demeure toutefois que la formulation faible doit être linéaire par rapport à la solution, au multiplicateur de Lagrange, et aux fonctions tests. Là encore, ce n'est pas le cas de celle que nous avons obtenue pour les équations de Navier-Stokes. C'est en revanche le cas pour les équations de Stokes. Ces équations s'obtiennent en retirant le terme de convection des équations de Navier-Stokes.

Elles constituent une très bonne approximation pour les écoulements à très faible nombre de Reynolds. Il est possible de montrer que la condition LBB est satisfaite pour le problème de Stokes si les fonctions de base de V_h et W_h sont générées avec le type d'élément susmentionné. Cet élément est alors dit stable. En première approximation on considère qu'un élément stable pour le problème de Stokes l'est également pour les équations de Navier-Stokes.

Il existe donc un lien entre les fonctions de base des espaces V_h et W_h, et le type d'élément utilisé. Revenons maintenant sur l'élément de Taylor-Hood P2-P1. On en distingue les formes sub-paramétriques et isoparamétriques. Dans le premier cas, il existe au moins une variable dépendante pour laquelle l'approximation polynomiale sur l'élément est de plus haut degré que celle de la géométrie. Dans le second cas, l'approximation polynomiale la plus riche pour les variables dépendantes a un degré identique à celle de la géométrie. La Figure 3.5 propose une illustration de chaque cas.

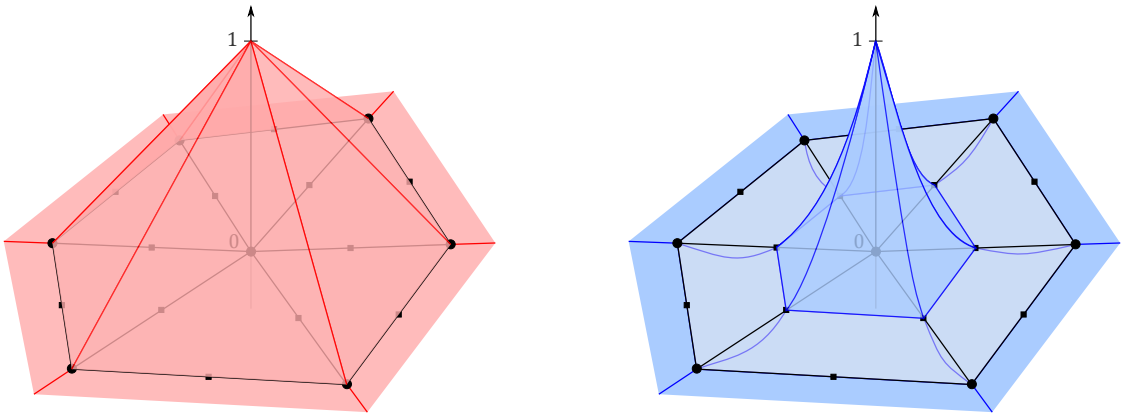


(a) Cas sub-paramétrique (b) Cas isoparamétrique

Figure 3.5 Déclinaisons sub-paramétrique et isoparamétrique de l'élément de Taylor-Hood P2-P1 dans un contexte 2D. Les nœuds rouge correspondent à la localisation des degrés de liberté en pression.

Dépendamment que l'on considère un nœud sommet de l'élément (nœuds 1 à 3), où un nœud milieu (nœuds 4 à 6), on peut distinguer deux types de patch nodal. Dans tous les cas, ces patchs définissent le support minimal des fonctions de base liées au nœud central du patch. Ces fonctions de base sont donc rigoureusement nulles partout à l'extérieur du patch. Considérons un patch lié à un nœud sommet. On illustre sur la Figure 3.6 la forme d'une fonction de base linéaire et quadratique liées à ce nœud sommet. Notons que les fonctions de base quadratiques sont aussi définies pour les nœuds milieux, et que la propriété de collocation est bien vérifiée. Les fonctions de base sont de plus $\mathcal{C}^1$ par élément.

Dans les faits, on ne s'intéresse jamais aux fonctions de base en tant que telles. On se place



(a) Cas linéaire (b) Cas quadratique

Figure 3.6 Fonctions de base linéaire et quadratique liées à un nœud sommet

sur un élément, et on ne considère que les portions des fonctions de base non nulles sur l'élément. On définit ainsi les fonctions de forme de l'élément. La forme explicite de celles-ci dépend néanmoins de la position des nœuds de l'élément, ce qui les rend difficilement manipulables. On peut contourner le problème en utilisant un élément de référence e_{ref} dont la représentation est unique, que l'élément réel soit sub-paramétrique ou isoparamétrique. La Figure 3.7 illustre cet élément de référence. À partir de cette géométrie on peut alors définir les fonctions φ_i et λ_i, appelées fonctions de forme, comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\boldsymbol{r}) &= 2\, l_1(\boldsymbol{r})^2 - l_1(\boldsymbol{r})^2 \\
\varphi_2(\boldsymbol{r}) &= 2\, l_2(\boldsymbol{r})^2 - l_2(\boldsymbol{r})^2 \\
\varphi_3(\boldsymbol{r}) &= 2\, l_3(\boldsymbol{r})^2 - l_3(\boldsymbol{r})^2 \\
\varphi_4(\boldsymbol{r}) &= 4\, l_1(\boldsymbol{r})\, l_2(\boldsymbol{r}) \\
\varphi_5(\boldsymbol{r}) &= 4\, l_2(\boldsymbol{r})\, l_3(\boldsymbol{r}) \\
\varphi_6(\boldsymbol{r}) &= 4\, l_3(\boldsymbol{r})\, l_1(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\boldsymbol{r}) &= l_1(\boldsymbol{r}) \\
\lambda_2(\boldsymbol{r}) &= l_2(\boldsymbol{r}) \\
\lambda_3(\boldsymbol{r}) &= l_3(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{3.67}$$

où $\boldsymbol{r} = (r, s)$ désigne le vecteur coordonnées dans l'espace de référence. Les fonctions inter-

médiaires $l_i(\boldsymbol{r})$ s'écrivent par ailleurs :

$$\begin{aligned} l_1(\boldsymbol{r}) &= 1 - r - s \\ l_2(\boldsymbol{r}) &= r \\ l_3(\boldsymbol{r}) &= s \end{aligned} \tag{3.68}$$

La solution sur l'élément de référence s'exprime alors finalement :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{u}} &= \sum_{i=1}^{6} \tilde{\boldsymbol{u}}_i \varphi_i \\ \tilde{P} &= \sum_{i=1}^{3} \tilde{P}_i \lambda_i \end{aligned} \tag{3.69}$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}_i$ et $\tilde{P}_i$ sont ici les valeurs nodales respectives du champs de vitesse et de la pression sur l'élément réel considéré. Les coordonnées $\boldsymbol{x}$ d'un point à l'intérieur de l'élément réel, ayant pour coordonnées $\boldsymbol{r}$ dans l'élément de référence, sont quant à elles obtenues par la relation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{N_g=6} \boldsymbol{x}_i \varphi_i(\boldsymbol{r}) \quad \text{Cas isoparamétrique} \\ \text{ou } \boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{N_g=3} \boldsymbol{x}_i \lambda_i(\boldsymbol{r}) \quad \text{Cas sub-paramétrique} \end{aligned} \tag{3.70}$$

où $\boldsymbol{x}_i$ désigne les coordonnées du nœud i de l'élément réel, et N_g le nombre de fonctions de forme pour la géométrie.

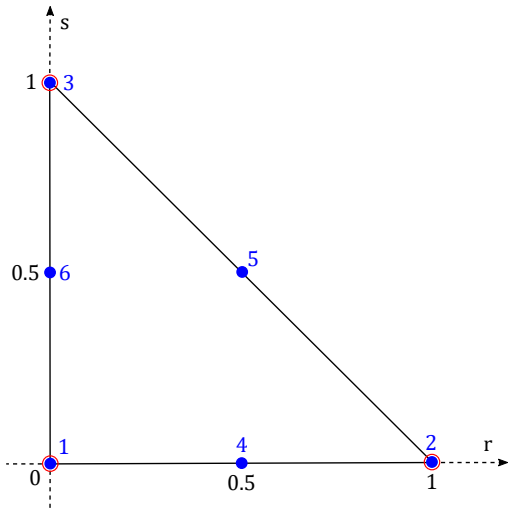


Figure 3.7 Élément de Taylor-Hood P2-P1 de référence dans un contexte 2D

3.2.3 Choix des fonctions tests

Nous avons donc précisé la forme des approximations utilisées pour le champs de vitesse $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et la pression $\tilde{P}$. Ces approximations ont introduit N_u inconnues pour chaque composante du champs de vitesse et N_P inconnues pour la pression. Il nous faut donc, à partir de la formulation faible des équations de Navier-Stokes, établir $2N_u + N_P = N_{eq}$ équations afin de résoudre le problème. La solution consiste à considérer N_u fonctions tests linéairement indépendantes dans V, et N_P fonctions tests linéairement indépendantes dans W. Une multitude de choix possibles existe. Nous utilisons ici l'approche de Galerkin continue, qui consiste à prendre les fonctions tests de V et W respectivement identiques aux fonctions de base de V_h et W_h. Résoudre le problème fluide revient donc à trouver $\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{P} \in V_h \times W_h$ tel que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \int_\Omega -\tilde{P}\boldsymbol{\nabla}(\varphi) + \frac{1}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}(\varphi)\, d\Omega \\
= \int_{\delta\Omega} \varphi(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, dl + \int_\Omega \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}\, d\Omega \\
\int_\Omega \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}})\, d\Omega = 0 \\
\forall(\varphi, \lambda) \in \{\Phi_i\} \times \{\Lambda_i\}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Cette forme nous amène à revenir sur un point déjà mentionné : la pression $\tilde{P}$ est un multiplicateur de Lagrange. Considérons une fonctionnelle $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ à laquelle nous ajoutons la contrainte d'incompressibilité en prenant la pression P comme multiplicateur de Lagrange. On obtient alors la fonctionnelle $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, P)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, P) &= \mathcal{J}(\boldsymbol{u}) - \int_\Omega P(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\, d\Omega \\
&= \mathcal{J}(\boldsymbol{u}) - \int_\Omega P\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega \quad \text{(Cas 2D)}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

En se plaçant dans un contexte 2D, la première variation de $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, P)$ par rapport à u est nulle, car la solution exacte minimise la fonctionnelle. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u + \alpha\varphi, v, P)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{J}(u + \alpha\varphi, v)}{\partial \alpha} - \int_\Omega P \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\Omega = 0 \tag{3.73}$$

où φ désigne alors une perturbation admissible pour u (au sens de la méthode de Ritz). De la même façon, on peut écrire pour la composante de vitesse v :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u, v + \alpha\varphi, P)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{J}(u, v + \alpha\varphi)}{\partial \alpha} - \int_\Omega P \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\Omega = 0 \tag{3.74}$$

où φ devient ici une perturbation admissible pour v. Notons que dans le cas général des perturbations admissibles pour u n'en sont pas forcément pour v. Nous supposerons ici que c'est le cas pour alléger l'exposé. Les deux équations précédentes peuvent être regroupées pour écrire une unique équation vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{J}(u+\alpha\varphi, v)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \mathcal{J}(u, v+\alpha\varphi)}{\partial \alpha} \end{Bmatrix} + \int_\Omega P \boldsymbol{\nabla}(\varphi)\, d\Omega = 0 \tag{3.75}$$

Par ailleurs la pression P doit maximiser l'effet de la contrainte sur la solution u. La première variation de $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, P)$ par rapport à P est donc également nulle et peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u, v, P-\alpha\lambda)}{\partial \alpha} = \int_\Omega \lambda(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\, d\Omega = 0 \tag{3.76}$$

En substituant $\boldsymbol{u}$ par $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et P par $\tilde{P}$ dans les deux équations précédentes, on retrouve la forme des équations constitutives du problème (3.71). Chaque fonction test φ_i faisant parti du problème peut se voir comme une perturbation admissible locale de la solution, dans la région contrôlée par les degrés de liberté $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$. De la même façon, une fonction test λ_i, intervenant dans la contrainte d'incompressibilité, résulte d'une perturbation admissible de $\tilde{P}$ dans la région contrôlée par le degré de liberté $\tilde{P}_i$.

3.2.4 Assemblage du système d'équations

Le problème à résoudre, tel que formulé dans l'Équation (3.71), n'est pas simple à traiter car il est formulé à l'échelle du domaine de calcul Ω. C'est là que la décomposition du domaine en éléments intervient. On peut en effet reformuler le problème à résoudre sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_i} \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_i} -\tilde{P}\boldsymbol{\nabla}(\varphi) + \frac{1}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}(\varphi)\, d\Omega \\ = \int_{\delta\Omega} \varphi(\underline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\, dl + \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_i} \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}\, d\Omega \\ \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_i} \lambda \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}})\, d\Omega = 0 \\ \forall(\varphi, \lambda) \in \{\Phi_i\} \times \{\Lambda_i\} \end{aligned} \tag{3.77}$$

De la même façon que nous avons introduit des éléments pour partitionner Ω, on peut définir N_b éléments de bord b_i pour appliquer la condition limite naturelle figurant dans le terme de bord. Chaque élément de bord coïncide avec une arrête d'un des éléments du domaine Ω. Ces

éléments de bord sont donc ici composés de 3 nœuds. En procédant ainsi on peut exprimer le problème à résoudre sous la forme résiduelle suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_e} \mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}} + \sum_{i=1}^{N_b} \mathcal{R}_{\delta\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}} &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{N_e} \mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{P}} &= 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

où $\delta\Omega_i$ est la portion de frontière de Ω représenté par l'élément de bord i. Notons que ces éléments de bord sont tels que :

$$\bigcup_{i=1}^{N_b} \delta\Omega_i = \Gamma_N \tag{3.79}$$

Sur la portion Γ_D de la frontière, on impose en effet $\varphi = 0 \ \forall \varphi \in \{\Phi_i\}$. De plus on définit les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}} &= \int_{\Omega_i} \varphi \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \varphi(\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}} \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_i} -\tilde{P}\boldsymbol{\nabla}(\varphi) + \frac{1}{Re}\left(\boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\nabla}(\tilde{\boldsymbol{u}})^T\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}(\varphi) \, d\Omega \\ &- \int_{\Omega_i} \varphi \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g} \, d\Omega \\ \mathcal{R}_{\delta\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}} &= \int_{\delta\Omega_i} -\varphi(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \, dl \\ \mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{P}} &= \int_{\Omega_i} \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}}) \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.80}$$

Les vecteurs $\mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}}$ et $\mathcal{R}_{\delta\Omega_i}^{\tilde{\boldsymbol{u}}}$ ont chacun $2N_u$ composantes mais respectivement 12 et 6 composantes non nulles, tandis que $\mathcal{R}_{\Omega_i}^{\tilde{P}}$ a N_P composantes mais seulement 3 composantes non nulles. Dans les faits on ne manipule pas directement ces vecteurs. Pour chaque élément i du domaine, on utilise un vecteur résidu élémentaire $\mathcal{R}_i$. Dans le cas présenté, ces vecteurs auront $12 + 3 = 15$ composantes pour un élément interne au domaine, et 6 composantes pour un élément de bord. Ils sont obtenus en considérant les fonctions de forme de l'élément. Dans le cas d'un élément du domaine, on peut générer les 15 composantes à partir des 12 fonctions de forme pour la vitesse (6 par composante de vitesse) et des 3 fonctions de forme pour la pression. Pour un élément de bord, on pourra générer les 6 composantes à partir des 6 fonctions de forme pour la vitesse (3 par composante de vitesse). Afin d'évaluer les intégrales de chaque résidu, on réalise un changement de variable pour nous placer sur l'élément de référence déjà évoqué. Un élément de référence est également défini pour les éléments de bord. La Figure 3.8 en donne une représentation, sur laquelle nous avons aussi illustré les fonctions de forme pour la vitesse et la pression. Elles définissent respectivement l'interpolation

de Lagrange quadratique et linéaire classiques. Notons que si les éléments du domaine sont sub-paramétriques, les éléments de bord doivent l'être aussi. De la même façon des éléments isoparamétriques dans le domaine nécessitent l'usage d'éléments de bord isoparamétriques.

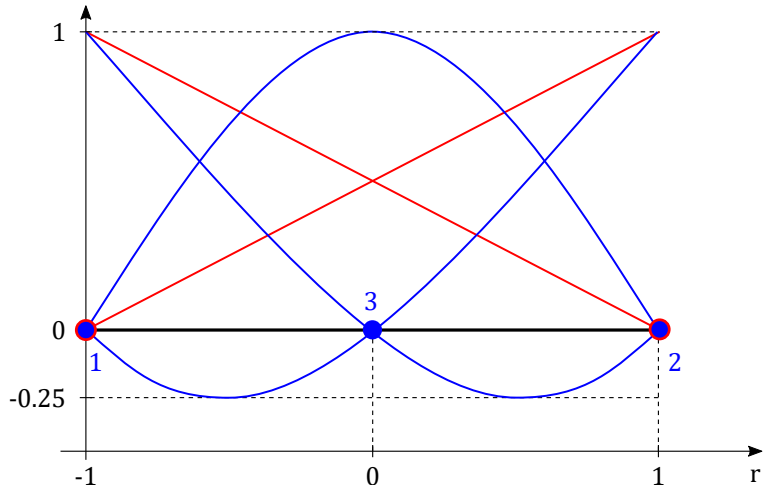


Figure 3.8 Élément de référence 1D pour les éléments de bord. Les fonctions de forme pour la vitesse sont représentées en bleu tandis que celle pour la pression sont représentées en rouge.

Pour un élément du domaine, le passage sur l'élément de référence se fait au moyen de la transformation suivante :

$$\begin{gathered}\mathcal{F} \ : \ \Omega_{ref} \to \Omega_i, \ (r,s) \mapsto (x,y) \\ \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{N_g} x_i \varphi_i^g(r,s) \\ y = \sum_{i=1}^{N_g} y_i \varphi_i^g(r,s) \end{cases}\end{gathered} \tag{3.81}$$

où φ_i^g est une fonction de forme pour la géométrie. On associe à cette transformation le Jacobien J_e :

$$J_e = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}\right) \tag{3.82}$$

Similairement, on a pour un élément de bord la transformation suivante :

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{F} \ : \ \delta\Omega_{ref} \to \delta\Omega_i, \ (r) \mapsto (x,y) \\ \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{N_g} x_i \varphi_i^g(r) \\ y = \sum_{i=1}^{N_g} y_i \varphi_i^g(r) \end{cases}\end{gathered} \tag{3.83}$$

et le Jacobien de la transformation s'écrit alors :

$$J_e = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} \tag{3.84}$$

À titre d'exemple, on peut alors exprimer l'intégrale de $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ sur un élément i du domaine comme suit :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\, d\Omega = \int_{\Omega_{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) J_e\, d\Omega \tag{3.85}$$

On utilise alors une quadrature de Gauss sur l'élément de référence pour évaluer l'intégrale. Une évaluation exacte de l'intégrale requiert cependant que l'intégrande soit polynomiale. Dans l'exemple ci-dessus, l'intégrande fait intervenir certaines quantités relatives à la transformation de coordonnées inverse $\mathcal{F}^{-1}$. Ces quantités ne seront polynomiales que si le Jacobien de la transformation est constant sur l'élément, ce qui n'est pas le cas pour les éléments isoparamétriques. Si des éléments de ce type sont utilisés, toutes les intégrales composant les résidus seront donc évaluées approximativement.

Les résidus en vitesse, pour les éléments du domaine, ne sont pas linéaires vis à vis des vitesses nodales. On emploie donc la méthode de Newton pour dériver un système élémentaire d'équations. Pour un élément i, on obtient schématiquement un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{u}}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{u}}}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{u}}}{\partial \tilde{P}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{v}}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{u}}}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{u}}}{\partial \tilde{P}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{P}}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}_i^{\tilde{P}}}{\partial \tilde{v}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i^{\tilde{u}} \\ \boldsymbol{\delta}_i^{\tilde{v}} \\ \boldsymbol{\delta}_i^{\tilde{P}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_i^{\tilde{u}} \\ \mathcal{R}_i^{\tilde{v}} \\ \mathcal{R}_i^{\tilde{P}} \end{Bmatrix} \tag{3.86}$$

Ce qu'on peut récrire de manière plus compacte :

$$\underline{\boldsymbol{J}_i} \cdot \boldsymbol{\delta}_i = -\mathcal{R}_i \tag{3.87}$$

Ce système considère tous les couplages existants entre les degrés de liberté de vitesse et de pression dans la matrice Jacobienne du système. En ce sens, on dit que l'approche est monolithique. Notre implémentation de travail utilise par ailleurs la méthode du Jacobien numérique. Cette méthode est incontestablement plus coûteuse qu'une méthode analytique, mais présente l'avantage d'être très générique. Il faut néanmoins noter qu'une bonne estimation initiale de la solution ne suffit plus pour garantir une convergence quadratique de la méthode. Les perturbations appliquées sur les degrés de liberté doivent être suffisamment faibles pour limiter les erreurs de troncature, mais suffisamment grandes pour éviter l'accu-

mulation des erreurs d'arrondi [105]. Dans l'implémentation de travail, la perturbation p_j du degré de liberté X_j est calculée de la manière suivante :

$$p_j = \sqrt{\varepsilon_M} \max\left(\overline{|X_j|}, M_j\right) \tag{3.88}$$

où M_j est une valeur typique de la variable dépendante X, et $\varepsilon_M \approx 10^{-16}$ la précision machine. De plus $\overline{|X_j|}$ désigne la valeur absolue moyenne de X sur l'élément i :

$$\overline{|X_j|} = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} |X| \, d\Omega \tag{3.89}$$

Une fois le système élémentaire complètement défini, on procède à son assemblage dans le système global. On utilise pour ce faire le vecteur d'assemblage de l'élément, qui fait le lien entre le numéro local du degré de liberté (compris entre 1 et 15 ici) et son numéro global (compris entre 1 et $2N_u + N_P$). La construction de ce vecteur s'appuie sur les connectivités locales et globales de l'élément, et sur le nombre de variable dépendante dans le problème (ici 3 : $\tilde{u}, \tilde{v},$ et $\tilde{P}$).

Une fois tous les systèmes élémentaires traités pour les éléments du domaine, on traite les contributions liées aux éléments de bord. Les termes de bord sont fixés par l'utilisateur. Le traitement d'un élément de bord consiste donc juste à évaluer son vecteur résidu élémentaire. Celui-ci est alors assemblé dans le vecteur résidu global, selon le même procédé que pour les éléments du domaine.

Finissons par noter que la méthode de Newton évite de devoir pratiquer des relèvements. Des conditions de Dirichlet se traduisent par une correction δ nulle pour le degré de liberté associé (qui dans les faits n'en sont plus). En pratique, les contributions liées à ces degrés de liberté ne sont donc pas assemblées dans le système d'équations global.

3.2.5 Erreur éléments finis et taux de convergence

Pour obtenir la solution exacte au problème fluide par la méthode des éléments finis, plusieurs conditions sont nécessaires :

(1) La dépendance en espace de la solution exacte doit vivre dans les espaces de discrétisation retenus, et cela à chaque instant t.

(2) La dépendance en temps de la solution doit pouvoir être représentée exactement par l'intégrateur temporel.

(3) Les éléments utilisés doivent être sub-paramétriques.

(4) La quadrature de Gauss retenue pour évaluer les termes des résidus élémentaires doit disposer de suffisamment de points de Gauss.

(5) Si l'écoulement est turbulent, la viscosité turbulente doit avoir une forme polynomiale.

Dans le cas général, les deux premières conditions ne seront pas respectées, rendant caduques les deux dernières. On peut dans ce contexte introduire le vecteur d'erreur $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{e} = \begin{Bmatrix} u - \tilde{u} \\ v - \tilde{v} \\ P - \tilde{P} \end{Bmatrix} \tag{3.90}$$

Dans le cas des équations de Stokes, il est possible de montrer que ce vecteur vit dans l'espace $V_h^{\perp} \times V_h^{\perp} \times W_h^{\perp}$. On parle alors du principe d'orthogonalité de l'erreur. Ce résultat ne peut pas être montré rigoureusement pour les équations de Navier-Stokes. Le terme de convection non linéaire peut en effet ramener une partie de l'erreur dans les espaces de discrétisation. On peut néanmoins considérer que cette partie de l'erreur demeure faible devant celle vivant dans les compléments orthogonaux.

La théorie des éléments finis permet de dériver une estimation *a priori* de l'erreur spatiale, tant pour les composantes de vitesse que pour la pression. On peut en effet montrer les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_{H^1(\Omega)} &\leq C_u E_I(\boldsymbol{u}) + B_u E_I(P) \\ \| P - \tilde{P} \|_{L^2(\Omega)} &\leq C_P E_I(\boldsymbol{u}) + B_P E_I(P) \end{aligned} \tag{3.91}$$

où C_u, B_u, C_P, et B_P désignent des constantes d'erreur. Par ailleurs $E_I(P)$ et $E_I(\boldsymbol{u})$ sont respectivement les erreurs d'interpolation de la pression, et des dérivées du champs de vitesse. Elles dépendent du degré de l'approximation polynomiale utilisée pour la pression et la vitesse sur chaque élément. On note δ la taille caractéristique des éléments dans le maillage (taille moyenne par exemple). Dans le cas de l'élément de Taylor-Hood P2-P1, on peut montrer que ces erreurs d'interpolation sont de la forme :

$$\begin{aligned} E_I(\boldsymbol{u}) &= O(\delta^2) \\ E_I(P) &= O(\delta^2) \end{aligned} \tag{3.92}$$

Ainsi on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_{H^1(\Omega)} &\leq O(\delta^2) \\ \| P - \tilde{P} \|_{L^2(\Omega)} &\leq O(\delta^2) \end{aligned} \tag{3.93}$$

L'élément est dit optimal, car l'erreur sur une variable, exprimée dans la norme naturelle de son espace de discrétisation, et son erreur d'interpolation convergent au même ordre. Les autres variables dépendantes que nous devront résoudre seront toutes approximées par une fonction polynomiale de degré 2 sur l'élément. Comme pour les composantes de vitesse, l'erreur en norme H^1 commise sur ces variables devrait donc converger à l'ordre 2 en raffinant la taille de maille δ. Ces résultats ne sont toutefois valables qu'une fois la région asymptotique atteinte.

Lorsqu'une dépendance en temps existe pour la solution, il est possible que l'erreur résultant de la discrétisation temporelle devienne prépondérante. Dans une telle situation, raffiner le maillage n'a donc aucun effet. Un raffinement du pas de temps est nécessaire pour espérer observer la convergence théorique de l'erreur spatiale. Réciproquement, la convergence de l'erreur temporelle peut ne pas se faire à l'ordre théorique si la discrétisation spatiale du problème induit une erreur spatiale trop élevée.

3.2.6 Traitement des frontières courbes

Jusqu'ici nous avons considéré que le maillage était constitué d'un seul type d'élément. D'un élément à l'autre, et pour une variable donnée, le degré de l'approximation polynomiale reste identique. C'est aussi le cas pour l'approximation de la géométrie. Dans certaines applications, les frontières du domaine seront incurvées. Il est désormais bien connu que l'erreur sur les variables dépendantes peut notablement augmenter à proximité de telles frontières si la discrétisation de l'espace se fait au moyen d'éléments sub-paramétriques. Dans ces circonstances, les éléments isoparamétriques sont alors recommandés, à proximité immédiate des frontières incurvées tout du moins. Par ailleurs, les écoulements avec interface exigent également que les éléments qui y sont adjacents soient isoparamétriques, afin de pouvoir satisfaire convenablement les conditions de compatibilité cinématique et dynamique. Dans ce dernier cas, la formulation ALE sera qui plus est active [2]. L'usage d'éléments isoparamétriques dans tout le domaine résulte donc en une augmentation significative du coût de calcul. Le transfert de la solution d'un maillage composé d'éléments isoparamétriques à un autre sera aussi moins précis si aucune disposition particulière n'est prise. Les schémas d'interpolation classiques repèrent les nœuds du nouveau maillage dans l'ancien maillage au moyen des coordonnées barycentriques. Il faut donc faire bien attention à la façon dont celles-ci sont calculées. Si le transfert de la solution se fait par projection de Galerkin, il devient nécessaire de calculer des

2. Notons au passage que le lecteur curieux pourra trouver une présentation détaillée de la formulation ALE à l'Annexe B.

intersections entre des sections de paraboles [3].

Partant de ces constats, nous avons proposé une formulation hybride permettant de faire coexister dans le maillage des éléments sub-paramétriques avec des éléments isoparamétriques. Plus précisément, la formulation permet de confiner les éléments isoparamétriques au contact direct des frontières (incurvées ou non). La Figure 3.9 illustre la situation. Un traitement supplémentaire est cependant nécessaire si le problème est résolu en formulation ALE. Un nœud milieu commun à un élément isoparamétrique et un élément sub-paramétrique est un nœud orphelin pour la géométrie de l'élément sub-paramétrique. Il est donc nécessaire de contraindre le déplacement de ce nœud sur l'élément isoparamétrique afin qu'il demeure au milieu des nœuds sommets adjacents. Une façon simple de le faire est de modifier l'équation pilotant le déplacement $\boldsymbol{\xi}$ du nœud sur l'élément isoparamétrique. En pratique, le déplacement du nœud I sur l'élément isoparamétrique doit minimiser le résidu suivant :

$$\boldsymbol{\xi}_I - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_A + \boldsymbol{\xi}_B) = 0 \tag{3.94}$$

où la notation s'appuie là encore sur la Figure 3.9. Il est ensuite simple d'évaluer analytiquement les contributions non nulles à ajouter dans la matrice du système élémentaire.

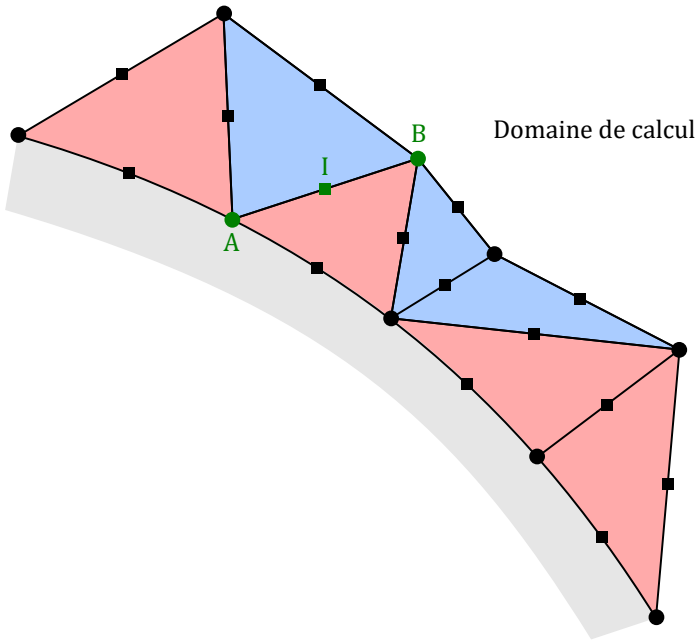


Figure 3.9 Principe du maillage hybride. Les éléments isoparamétriques sont dépeints en rouge, tandis que les éléments sub-paramétriques sont dépeints en bleu.

3. En laissant de côté les cas où les sections de paraboles sont confondues ou disjointes, deux sections de paraboles peuvent définir 1 à 4 points d'intersection

CHAPITRE 4 MÉTHODES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes numériques largement employées et/ou développées au cours de nos activités de recherche. Pour commencer, nous abordons dans la Section 4.1 la question de l'adaptation de maillage globale via l'estimation d'erreur de Zhu et Zienkiewicz. Seulement ensuite, à la Section 4.2, nous introduisons les outils développés afin de n'adapter que localement un maillage. À la Section 4.3, nous traitons ensuite la question de la relaxation de maillage. La Section 4.4 traite le sujet du transfert de la solution d'un maillage à un autre. On y décrit les différentes méthodes que nous avons utilisées pour accomplir cette tâche. Les méthodes BDF, ici retenues pour réaliser l'intégration temporelle, font ensuite l'objet de la Section 4.5. En s'appuyant sur le contenu de tout le reste du chapitre, la Section 4.6 résume finalement la procédure adaptative que nous proposons pour la simulation des écoulements instationnaires.

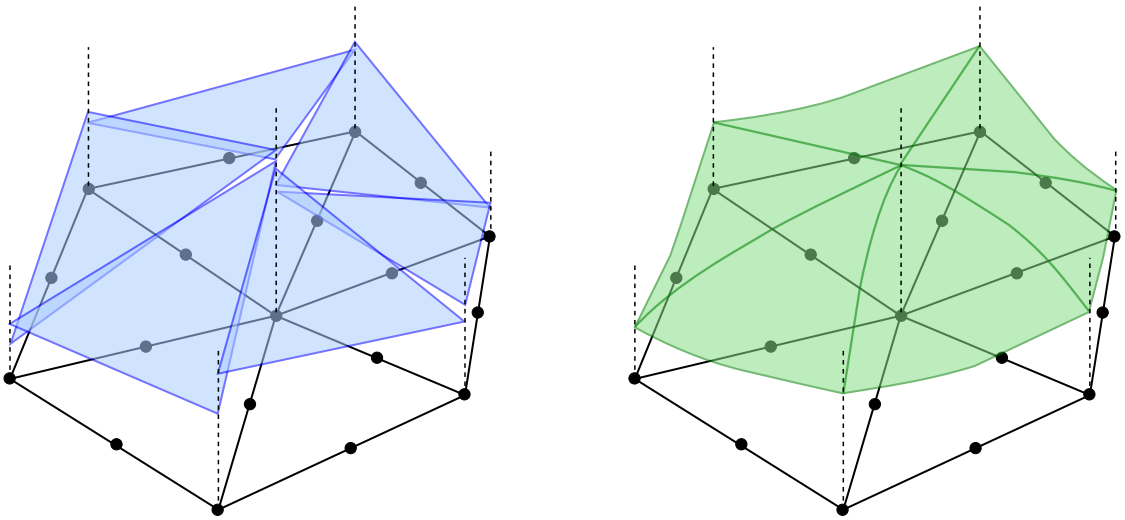
4.1 Adaptation de maillage

Dans notre revue de la littérature, nous avons abordé le thème de l'adaptation de maillage (cf. Section 2.2). Nous avons notamment insisté sur la question sous-jacente de l'estimation de l'erreur spatiale. Sur ce point, nous avons mis l'accent sur les méthodes de reconstruction (*recovery methods*). La méthode de Zhu et Zienkiewicz en est un exemple bien connu. Pour des raisons intimement liées à l'historique de notre laboratoire, c'est cette méthode qui a été retenue dans nos travaux pour estimer l'erreur spatiale. Une description minutieuse de la méthode est proposée au début de cette section. Nous revenons ensuite sur le concept d'opérateur de transition. Un tel opérateur fait le lien entre l'estimation de l'erreur et la grandeur adaptée. Dans ces travaux, celle-ci est la taille δ des éléments (méthode h). Finalement, notre pilotage des adaptations de maillage lors de la simulation d'un écoulement instationnaire est présenté.

4.1.1 Estimation d'erreur *a posteriori*

Nous décrivons ici la méthode de reconstruction des gradients proposée par Zhu et Zienkiewicz [24]. La méthode suggère de reconstruire localement, sur des patchs nodales Ω_p, les gradients de la solution dans un espace de discrétisation enrichi. Si la discrétisation utilisée pour la résolution éléments finis est de type P2-P1, les variables de vitesse bénéficient d'une approximation quadratique, tandis que la pression et les gradients de vitesse sont linéaires par

élément. Le principe d'orthogonalité de l'erreur [1] stipule que l'erreur éléments finis se situe dans le complément orthogonal des espaces de discrétisation retenus pour chaque variable dépendante. Par ailleurs, nous supposons que la solution exacte de chaque variable est $\mathcal{C}^1$ sur tout le domaine. Une estimation de l'erreur sur les gradients de vitesse et la pression peut donc être obtenue par différence avec leur reconstruction quadratique. La Figure 4.1 illustre la méthode. La solution éléments finis sur la patch nodale Ω_p est représentée en bleu, tandis que sa reconstruction quadratique est représentée en vert.



(a) Gradients linéaires (éléments finis) (b) Gradients quadratiques (reconstruction)

Figure 4.1 Méthode de Zhu et Zienkiewicz. Les gradients linéaires par éléments, et discontinus aux arrêtes de ceux-ci, sont reconstruits sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2, continue sur la patch nodale.

Par soucis de clarté, le formalisme de la méthode est introduit dans le cas de la reconstruction d'une quantité scalaire. On note la solution éléments finis de ce scalaire γ_{FE}, et la solution reconstruite γ. On a :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{6} P_i \beta_i \tag{4.1}$$

avec $\boldsymbol{P} = [1, x, y, xy, x^2, y^2]$ la base polynomiale quadratique, et $\boldsymbol{\beta}$ un vecteur de scalaires qui constituent les inconnues du problème. Pour les déterminer on chercher à minimiser la forme quadratique suivante :

$$\int_{\Omega_p} (\gamma_{FE} - \gamma)^2 \, dS \tag{4.2}$$

1. On rappelle que ce principe ne peut pas être rigoureusement démontré pour les équations de Navier-Stokes (cf. Section 3.2.5)

La méthode des moindres carrés est appliquée pour résoudre le problème. On aboutit alors à un système linéaire de la forme :

$$\int_{\Omega_p} P_i P_j \beta_j \, dS = \int_{\Omega_p} P_i \gamma_{FE} \, dS \quad \Longleftrightarrow \quad [A_{ij}]\beta_j = B_i \tag{4.3}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir l'expression de γ. L'erreur sur l'élément i, notée $\| e_i \|$, est alors donnée par la norme $L^2(\Omega_i)$ de la différence entre γ et γ_{FE} :

$$\| e_i \|^2 = \int_{\Omega_i} (\gamma_{FE} - \gamma)^2 \, dS \tag{4.4}$$

Si γ_{FE} est en réalité un tenseur d'ordre 1 ou 2, alors l'erreur élémentaire est respectivement donnée par :

$$\| e_i \|^2 = \int_{\Omega_i} (\boldsymbol{\gamma}_{FE} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot (\boldsymbol{\gamma}_{FE} - \boldsymbol{\gamma}) \, dS \tag{4.5}$$

$$\| e_i \|^2 = \int_{\Omega_i} (\underline{\boldsymbol{\gamma}_{FE}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}) : (\underline{\boldsymbol{\gamma}_{FE}} - \underline{\boldsymbol{\gamma}}) \, dS \tag{4.6}$$

Dans nos travaux, nous avons considéré l'erreur sur les quantités suivantes :

- Le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}_{FE}} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

  Dans ce cas la semi-norme H^1 définie par l'Équation (4.6) porte le nom de norme énergie de l'erreur. Dans certains cas, il peut être utile d'omettre la viscosité. Ceci permet par exemple d'assurer davantage la continuité de l'erreur de part et d'autre d'une interface séparant deux fluides différents.

- La pression

$$\gamma_{FE} = P \tag{4.8}$$

- Le flux de chaleur :

$$\boldsymbol{\gamma}_{FE} = \lambda \boldsymbol{\nabla}(T) \tag{4.9}$$

  Là aussi, il peut être plus judicieux d'omettre la conductivité thermique du fluide.

- Le gradient des variables de turbulence (sous forme logarithmique ou standard) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{FE} &= \boldsymbol{\nabla}(\mathcal{K}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\gamma}_{FE} = \boldsymbol{\nabla}(k) \\ \boldsymbol{\gamma}_{FE} &= \boldsymbol{\nabla}(\mathcal{E}) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\gamma}_{FE} = \boldsymbol{\nabla}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.10}$$

- Le gradient de la viscosité turbulente :

$$\boldsymbol{\gamma}_{FE} = \boldsymbol{\nabla}(\mu_t) \tag{4.11}$$

Ce gradient peut en effet présenter des variations rapides, et ce même si les gradients des variables de turbulence sont relativement lisses [47].

4.1.2 Opérateur de transition

À partir de l'estimation d'erreur élémentaire, notre opérateur de transition permet de prédire la nouvelle taille optimale δ_{new} pour tous les éléments. Un maillage est typiquement dit optimal si l'erreur spatiale commise est équidistribuée sur l'ensemble des éléments du maillage [111]. L'opérateur de transition vise également à réduire l'erreur spatiale globale $\| e_g \|$ pour atteindre une erreur cible $\| e_{gt} \| = \| e_g \| \cdot \xi$. Le scalaire ξ désigne ici le facteur de réduction d'erreur, imposé fixe. On peut exprimer l'erreur globale cible en fonction d'une erreur moyenne cible $\| e_{at} \|$:

$$\| e_{gt} \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{N_e} \| e_i \|^2 \right) \cdot \xi^2 = \| e_g \|^2 \, \xi^2 = N_e \, \| e_{at} \|^2 \tag{4.12}$$

où N_e est le nombre d'éléments dans le maillage courant. Connaissant le taux de convergence théorique φ de l'erreur pour la quantité d'intérêt, l'opérateur de transition θ est alors défini par :

$$\theta(\| e_i \|) = \left(\frac{\| e_{at} \|}{\| e_i \|} \right)^{\frac{1}{\varphi}} = \left(\frac{\xi \, \| e_g \|}{\| e_i \| \sqrt{N_e}} \right)^{\frac{1}{\varphi}} \tag{4.13}$$

Dans notre cas, nous utilisons des éléments de Taylor-Hood P2-P1. Les gradients de toutes les variables (hormis celui de la pression) et la solution en pression voient donc leur erreur converger à l'ordre théorique $\varphi = 2$. La nouvelle taille de l'élément i, notée δ^i_{new}, est déduite de sa taille courante δ^i par la relation :

$$\delta^i_{new} = \theta(\| e_i \|) \cdot \delta^i \tag{4.14}$$

À chaque nœud j du maillage courant on attribue finalement une taille de maille δ^j_{new}, définie comme la moyenne des tailles δ^i_{new} des éléments i contenus dans la patch nodale liée au nœud j (approche *mononorme*). On obtient ainsi le maillage de fond qui servira de support à la génération du prochain maillage. Dans le cas où plusieurs normes d'erreur sont considérées (approche *multinorme*), on aboutit à une valeur de δ^{jk}_{new} pour chaque norme k. La valeur

retenue au nœud j est la valeur minimale :

$$\delta^{j}_{new} = \min_{k} \delta^{jk}_{new} \tag{4.15}$$

On se retrouvera par exemple dans ce cas si l'on calcule l'erreur tant sur le tenseur des contraintes visqueuses que sur la pression [31]. En procédant ainsi, la méthode peut aussi être facilement étendue au cas des écoulements turbulents résolus avec une approximation RANS. Dans ce cas on considèrera également l'erreur sur le gradient des variables de turbulence et sur le gradient de la viscosité turbulente [47]. Toutefois, si plusieurs normes d'erreur sont actives, le principe d'équirépartition de l'erreur n'est en général plus vérifié pour aucune des normes d'erreur. Ce point sera plus largement discuté à la Section 5.3.

En vue de réaliser un contrôle adéquat du niveau de l'erreur spatiale en cours de simulation, l'opérateur de transition ici décrit présente une limite importante . Le facteur de réduction d'erreur ξ intervenant dans sa formulation est fixe, et donc indépendant du niveau courant de l'erreur. En vue d'avoir un meilleur contrôle sur les niveaux de l'erreur spatiale, calculés à partir des différentes normes d'erreur, et ce malgré un nombre potentiellement élevé d'adaptations de maillage, nous avons développé une formulation adaptative pour le facteur de réduction d'erreur ξ. Ce facteur est alors défini indépendamment pour chaque norme d'erreur k, à partir de la quantité suivante :

$$\alpha_k = \frac{\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k}{\varepsilon_1} \tag{4.16}$$

Cette quantité représente le ratio de l'erreur relative globale courante dans la norme k (cf. Équation (4.18)) sur une cible ε_1 fournie par l'utilisateur. La valeur de ξ utilisée pour la norme k est alors donnée par :

$$\xi = \begin{cases} \xi_{max} - (\xi_{max} - \xi_0) \cdot \sin(0.5\pi\alpha_k)^2 & \text{si } \alpha_k \leq 1 \\ \xi_0 & \text{si } \alpha_k > 1 \end{cases} \tag{4.17}$$

où ξ_0 est la valeur qu'on aurait utilisé pour ξ si sa valeur avait été fixe, et ξ_{max} est un facteur à appliquer dans le cas où α_k tend vers 0. De fait, la valeur de ξ_{max} est donc choisie supérieure à 1. Une représentation graphique de cette fonction est donnée à la Figure 4.2, pour $\xi_0 = 0.5$ et $\xi_{max} = 1.2$.

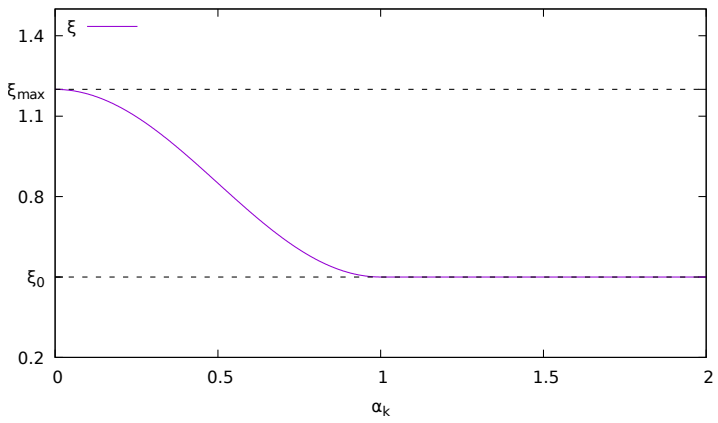


Figure 4.2 Formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur ξ

4.1.3 Critères d'arrêt

À l'origine, la méthode d'adaptation de maillage que nous venons de décrire a été introduite au laboratoire pour traiter des écoulements stationnaires. Le module d'adaptation de maillage *Adapt* était donc externe au solveur éléments finis *Cadyf*. Dans des travaux précédents [145], nous avons proposé une méthode très simple permettant d'utiliser l'estimation d'erreur dans un contexte instationnaire. Dans cette méthode, l'utilisateur était libre de spécifier une fréquence $f = 1/\Delta t$, afin d'établir *a priori* l'occurrence des cycles d'adaptation de maillage. Bien que naïve, cette approche a fourni des résultats très encourageants. Toutefois, la physique d'un écoulement instationnaire n'est que très rarement gouvernée par une unique fréquence temporelle. Nous avons donc proposé une nouvelle approche, permettant d'adapter le maillage en cas de besoin seulement. Son implémentation a nécessité de repenser l'architecture du code. Les capacités d'*Adapt* ont été encapsulées dans des modules, après quoi nous avons inséré des appels à ces modules dans *Cadyf*. Ce faisant, il est devenu possible d'estimer l'erreur spatiale à l'issu de chaque pas de temps. En nous appuyant, entre autres, sur l'estimation de l'erreur spatiale, nous avons ensuite pu définir des indicateurs quantitatifs permettant de juger de la pertinence du maillage courant. Ces indicateurs sont tous respectivement liés à une valeur seuil (une tolérance). Si la valeur prise à par l'indicateur excède le seuil, l'intégration temporelle est suspendue afin d'adapter le maillage. L'ensemble formé par un indicateur et sa tolérance définit un *critère d'arrêt*.

Tel que suggéré par Li et Wiberg [58], notre premier critère d'arrêt porte sur le niveau de l'erreur relative globale, notée $\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k$. L'indice k réfère ici à une norme d'erreur active. La

valeur de $\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k$ est donnée par :

$$\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k = \frac{\| \boldsymbol{e}_g \|_k}{\| \boldsymbol{u} \|_k} \tag{4.18}$$

Le numérateur représente la valeur absolue totale de l'erreur dans la norme choisie, tandis que le dénominateur évalue cette même norme à partir de la solution éléments finis. Ceci peut aussi s'écrire :

$$\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_e} \| \boldsymbol{e}_i \|_k^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_e} \| \boldsymbol{u}_i \|_k^2}} \tag{4.19}$$

Du fait que nous utilisons une formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur dans l'opérateur de transition, nous définissons notre premier critère d'arrêt de la façon suivante :

$$\| \boldsymbol{e}_{gr} \|_k > \varepsilon_1 \tag{4.20}$$

où ε_1 désigne une première tolérance fournie par l'utilisateur. Notons que c'est cette même tolérance qui est utilisée dans l'Équation (4.16). Dès lors que l'Équation (4.20) est vérifiée, l'intégration temporelle est momentanément suspendue afin d'adapter le maillage. Ce critère intuitif et simple souffre pourtant de deux limites importantes. Un surplus d'erreur localement peut se retrouver masqué par la contribution du reste du domaine si l'erreur estimée y est très faible. De plus ce critère ne permet pas d'identifier rapidement les zones bénéficiant d'une finesse de maillage superflue, ce qui empêche donc d'optimiser le temps de calcul en cours de simulation.

Nous avons donc construit un second critère d'arrêt, cette fois-ci à partir d'un indicateur et de *deux* tolérances. Pour chaque norme d'erreur active et pour chaque élément du maillage, nous évaluons la variation de taille de maille prédite par l'opérateur de transition, en posant le facteur de réduction d'erreur $\xi = 1$. Cela revient à calculer la variation de taille de maille qui serait nécessaire afin d'équidistribuer les niveaux d'erreur courants. On peut pour chaque élément i définir le ratio R_δ^{ik} suivant :

$$R_\delta^{ik} = \frac{\delta_{new}^{ik}}{\delta^i} \tag{4.21}$$

Le critère d'arrêt est alors construit autour des deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} &R_\delta^{ik} < \frac{1}{\varepsilon_2} \quad \text{pour au moins une norme } k \\ &R_\delta^{ik} > \varepsilon_3 \quad \forall k \end{aligned} \tag{4.22}$$

où ε_2 et ε_3 sont les deux tolérances évoquées. Si la première relation est vraie, l'élément a besoin de voir sa taille fortement réduite. À l'inverse, si la seconde relation est vraie, cela signifie que la taille de l'élément est injustement petite. Si l'une de ces deux relations est vérifiée pour un élément i, l'intégration temporelle est alors suspendue pour procéder à l'adaptation du maillage. Notons que ce critère est construit pour être cohérent avec l'Équation (4.15).

Le premier critère d'arrêt se fonde sur une grandeur globale, tandis que le second est construit autour d'une quantité calculée pour chaque élément. L'idéal serait donc de pouvoir définir des critères représentatifs d'un niveau intermédiaire. Les deux critères proposés jusqu'ici peuvent être utilisés quelque soit le nombre de normes d'erreur actives (approche *mononorme* ou *multinorme*). Dans une approche mononorme, des critères additionnels peuvent être définis à partir de l'écart-type et de l'asymétrie de la distribution de l'erreur spatiale élémentaire, dont on suppose qu'elle suit une loi normale grâce au principe d'équirépartition de l'erreur. Donné relativement à l'erreur élémentaire moyenne, l'écart-type mesure la "distance" entre le maillage courant et le maillage optimal, sur lequel l'erreur spatiale est parfaitement équidistribuée. L'asymétrie quant à elle, reflète l'accumulation d'éléments trop petits *ou* trop grands dans le maillage. Si des éléments trop petits *et* trop grands s'accumulent en même temps, l'asymétrie peut demeurer faible. Toutefois, cela signifiera que l'on s'écarte beaucoup du maillage optimal, et on constatera donc une augmentation rapide de l'écart-type relatif. En cela, deux critères additionnels respectivement basé sur ces deux quantités sont donc très complémentaires l'un de l'autre.

Soit σ_r, l'écart-type relatif de la distribution de l'erreur spatiale. Cette quantité s'exprime comme suit :

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\| \boldsymbol{e}_m \|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N_e-1} \sum_{i=1}^{N_e} \left(\| \boldsymbol{e}_i \| - \| \boldsymbol{e}_m \| \right)^2}}{\frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \| \boldsymbol{e}_i \|} \tag{4.23}$$

Le numérateur représente l'estimateur non biaisé de l'écart-type de la distribution de l'erreur. Le dénominateur est quand à lui un estimateur non biaisé de la moyenne de cette même distribution. Le premier critère additionnel est alors simplement défini en introduisant une tolérance ε_4 :

$$\sigma_r > \varepsilon_4 \tag{4.24}$$

Pour évaluer l'asymétrie, on utilise le coefficient d'asymétrie γ_1 de Pearson. Soit X une variable aléatoire, m sa moyenne et σ son écart-type. Le coefficient de Pearson est défini par :

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - m}{\sigma} \right)^3 \right] \tag{4.25}$$

Un estimateur fréquemment utilisé [57] de ce coefficient est donné par :

$$\gamma_1 = \frac{{N_e}^2}{(N_e-1)(N_e-2)} \frac{\frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}\left(\| \boldsymbol{e}_i \| - \| \boldsymbol{e}_m \|\right)^3}{\left(\frac{1}{N_e-1}\sum_{i=1}^{N_e}\left(\| \boldsymbol{e}_i \| - \| \boldsymbol{e}_m \|\right)^2\right)^{3/2}} \tag{4.26}$$

Ce coefficient prendra une valeur positive rapidement croissante dès lors que l'erreur élémentaire augmentera localement. À l'inverse si l'erreur élémentaire tend à diminuer sensiblement localement, le coefficient tendra à prendre une valeur négative rapidement décroissante. L'introduction d'une tolérance ε_5, et la volonté de s'affranchir du signe de γ_1, mènent naturellement au critère d'arrêt suivant :

$$|\gamma_1| > \varepsilon_5 \tag{4.27}$$

Notons qu'il est plus difficile de donner une signification évidente à la valeur de la tolérance ε_5, ce qui en complique le choix. Dans la Section 5.3.2, nous introduirons néanmoins une interprétation de l'asymétrie permettant un choix éclairé de la tolérance ε_5.

Les écoulements devant être traités avec une formulation ALE [2] ajoutent une difficulté supplémentaire. La propagation du déplacement des frontières du domaine de calcul peut détériorer considérablement la qualité de certains éléments du maillage. La solution calculée sur les éléments de pauvre qualité peut alors perdre en précision, ce qui conduit à une recrudescence locale de l'erreur spatiale. Si une adaptation de maillage a lieu, et que le maillage comporte des éléments isoparamétriques, le transfert de la solution peut également perdre en précision au niveau de ces éléments. Nous avons donc souhaité établir un dernier critère d'arrêt, dans le but de mitiger quelque peu ces difficultés. Ce critère n'est actif que si la formulation ALE est utilisée. Il consiste à évaluer la qualité des éléments du maillage en regard d'une certaine métrique Q. Nous avons surtout voulu repérer les éléments trop plats, qui tendent à se former à proximité des frontières mobiles. Une métrique proposée par Pebay et Baker [84] pour les éléments triangulaires nous a semblés appropriée. Pour un élément i, elle est définie comme suit :

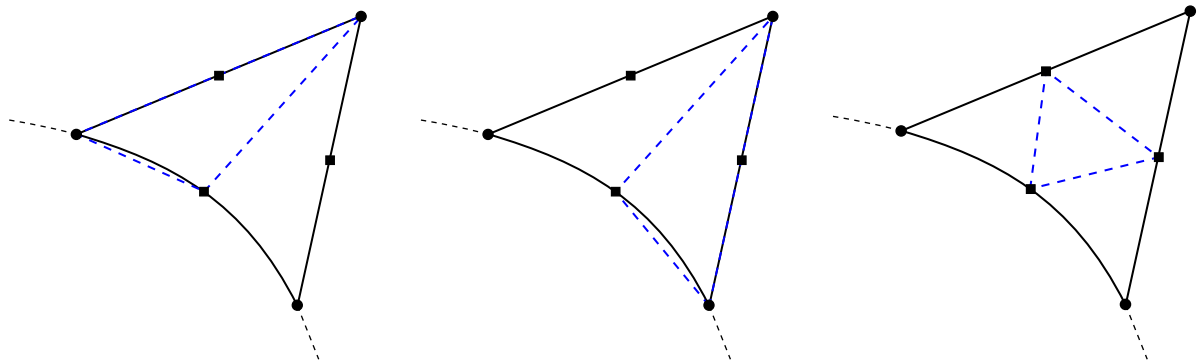
$$Q_i = \frac{4\sqrt{3}A}{l_{max}\sum_{j=1}^{3} l_j} \tag{4.28}$$

où l_{max} désigne la longueur du côté maximal du triangle, et A l'aire de l'élément. La métrique est unitaire pour un élément équilatéral et tend rapidement vers 0 pour les éléments qui tendent à devenir plat. Une détérioration moins sévère de la métrique s'observe pour les éléments allongés. À partir de cette métrique, on formule donc le critère d'arrêt suivant :

$$Q_i < \varepsilon_6 \tag{4.29}$$

2. Cf. Annexe B

Notons que ce critère n'est rigoureusement formulé que pour des éléments sub-paramétriques. Un traitement plus spécifique est adopté pour les éléments de bord isoparamétriques, dans le cas où un maillage hybride serait utilisé. On illustre la situation sur la Figure 4.3.



(a) Triangle 1 (b) Triangle 2 (c) Triangle 3

Figure 4.3 Critère de qualité élémentaire sur les éléments isoparamétriques : il appliqué sur chacun des sous-triangles bleus. La frontière ou l'interface sur laquelle l'élément repose figure en pointillés noir.

4.2 Adaptation de maillage locale

Jusqu'ici, nous avons supposé qu'une opération d'adaptation de maillage consistait à redéfinir entièrement le maillage du domaine de calcul. Dans le contexte des écoulements instationnaires, cela pose un problème que nous avons déjà évoqué : des erreurs importantes sont commises lors du transfert de la solution de l'ancien maillage vers le nouveau. Afin de mitiger ce problème, une méthode a été développée afin de n'altérer le maillage que localement. Cette méthode est utilisée dès lors qu'un de nos critères d'arrêt suspend l'intégration temporelle.

Dans un premier temps, la méthode repère une collection d'éléments, possiblement disjoints, appelés *germes*. Ces éléments sont les plus problématiques du maillage au regard de l'estimation de l'erreur spatiale. Pour chacun d'eux, le ratio entre leur taille courante et leur taille optimale (permettant l'équidistribution de l'erreur) est *sensiblement* différent de l'unité. Afin de les identifier, nous avons mis à profit la logique de l'opérateur de transition introduit à la Section 4.1.2. Si une formulation ALE est active, les éléments de piètre qualité deviennent également des éléments germes. Ce faisant, les déformations du maillage sont contrôlées. Pour chaque élément germe, on construit ensuite des *couches protectrices*, qui regroupent les éléments contenus dans son voisinage direct. Ce sont les éléments germes, et les éléments

situés dans ces couches, qui sont retirés du maillage. Leur retrait aboutit à la formation de poches[3] dans le maillage courant. Ces poches sont les seules zones du maillage qui font l'objet de l'adaptation de maillage. La génération de nouveaux éléments dans les poches se fait au moyen d'un mailleur frontal, également utilisé pour la génération globale du premier maillage. On note $\{\mathcal{E}_a\}$ la collection des nouveaux éléments résultant de la génération locale du maillage. Le fonctionnement de notre mailleur frontal est abordé à l'Annexe C. Afin d'accélérer la constitution du front mobile initial, qui délimite alors les poches, une couche supplémentaire est préalablement construite : la *couche fictive*.

La suite de cette section présente plus en détails chacune des phases de la procédure.

4.2.1 Identification des éléments germes

Cette première phase est conduite depuis *Cadyf*. Elle repose sur un critère de sélection, qu'il convient de définir. On souhaite pouvoir repérer les éléments dont la taille doit varier significativement. La définition du critère de sélection s'appuie donc sur la logique de l'opérateur de transition. Considérons un élément i et une norme d'erreur k. En reprenant la notation utilisée pour définir nos deuxième et troisième critères d'arrêt, le critère de sélection des germes s'exprime :

$$\begin{aligned} &R_\delta^{ik} > R_{max} \quad \forall k \\ &R_\delta^{ik} < \frac{1}{R_{max}} \quad \text{pour au moins une norme } k \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dans l'ensemble des simulations exposées dans les Chapitres 5 et 6, nous avons fixé $R_{max} = 2$, en référence aux méthodes d'adaptation de maillage par subdivision (cf. Section 2.2). Un élément du maillage est un germe s'il satisfait l'une de ces conditions. Si la formulation ALE est active, un élément i peut également devenir un germe pour l'adaptation de maillage si :

$$Q_i < \varepsilon_6 \tag{4.31}$$

où la métrique Q_i est celle définie dans l'Équation (4.28). L'ensemble des germes est récupéré dans un tableau alloué dynamiquement. Ils serviront ensuite de base à la génération de la première couche protectrice. Un masque $\mathcal{M}_e$ est également mis en place. Ce masque représente chaque élément i de la façon suivante :

3. On peut également parler de cavités.

$\mathcal{M}_e(i) = 0$	:	élément conservé n'appartenant pas à la couche fictive
$\mathcal{M}_e(i) = 1$	:	élément germe
$\mathcal{M}_e(i) = n > 1$	:	élément appartenant à la couche protectrice $n-1$
$\mathcal{M}_e(i) = -1$	:	élément conservé appartenant à la couche fictive

À l'issue de cette phase d'identification des éléments germes, le masque $\mathcal{M}_e$ ne contient que des valeurs nulles ou unitaires.

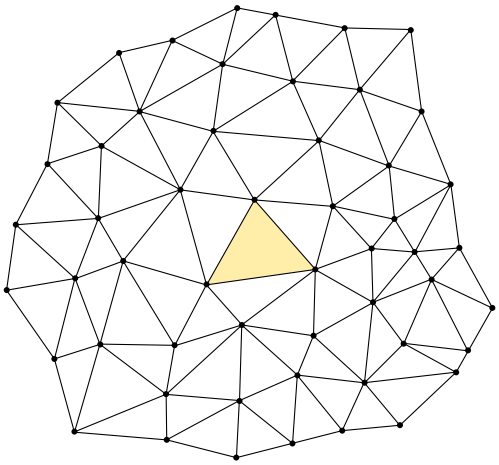
4.2.2 Couches protectrices et couche fictive

Le processus d'identification des éléments germes n'a aucune raison d'aboutir à une collection d'éléments connexes. En pratique, de nombreux éléments germes sont isolés dans le maillage. Retirer uniquement ces éléments du maillage courant conduirait donc à former un ensemble de "petits trous", inexploitables pour adapter *proprement* la taille de maille localement. Dans beaucoup de situations, la logique de la génération de maillage conduirait même à reformer les éléments germes. Les couches protectrices permettent de mitiger ces difficultés. Elles sont utilisées pour générer de véritables poches dans le maillage courant. Ces poches sont alors suffisamment "spacieuses" pour que la taille de maille puisse y varier significativement, lors de la phase de génération locale du maillage. De plus, l'évolution de la taille de maille obtenue est alors plus progressive. En ce sens, ces couches *protègent* donc contre d'éventuels échecs de l'ajustement local de la taille de maille.

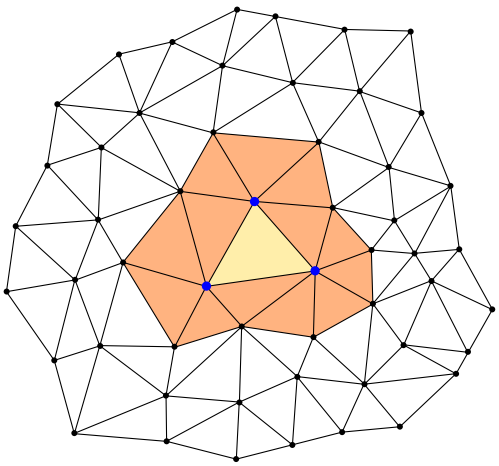
La construction des couches protectrices est également réalisée dans *Cadyf*. Le nombre de couche à créer, noté N_c, est renseigné par utilisateur *a priori* de la simulation. Les couches sont générées successivement. On génère la première en bouclant sur les éléments germes. Au préalable du calcul éléments finis, la connectivité inverse du maillage (nœuds vers éléments) a été calculée et stockée dynamiquement. Grâce à celle-ci on récupère, pour chaque nœud sommet des éléments germes, les éléments adjacents. Ceux-ci forment la première couche protectrice. Un masque logique nodal $\mathcal{M}_n$ est mis en place pour assurer un traitement unique de chaque nœud sommet. On accélère ainsi la construction des couches. Les éléments de la couche n jouent alors le rôle de germes pour la couche $n+1$. On note $\left\{e_p^n\right\}$ les éléments de la couche protectrice n.

La couche fictive est générée selon le même processus. Elle peut se voir comme une couche protectrice $N_c + 1$. Pour autant les éléments qui la constituent ne seront pas retirés du maillage : cette couche n'existe donc *qu'en apparence*. C'est pourquoi ses éléments sont repérés dans le masque $\mathcal{M}_e$ par la valeur -1. On note $\{e_f\}$ l'ensemble des éléments de la couche fictive. Le rôle de cette couche particulière sera précisé à la Section 4.2.3. La Figure 4.4 illustre la création des différentes couches.

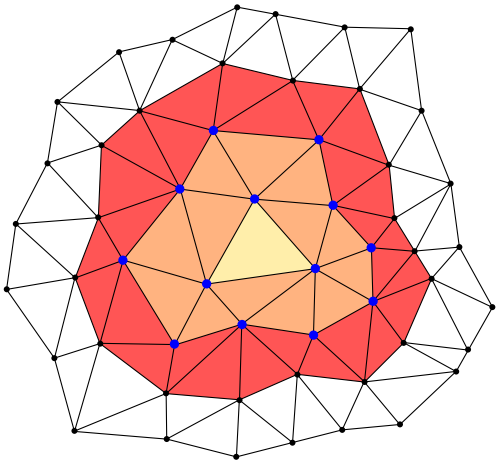
Une fois toutes les couches générées, on exporte dans un fichier la liste des éléments i tels que $\mathcal{M}_e(i) \neq 0$. Pour chacun de ces éléments, la valeur de $\mathcal{M}_e(i)$ est également exportée. Cette étape marque la fin du traitement réalisé directement dans *Cadyf*.



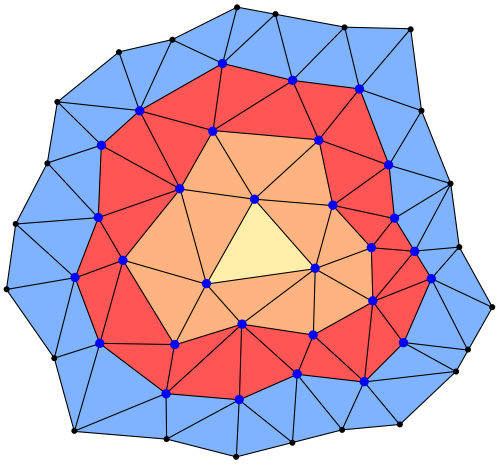
(a) Élément germe



(b) Première couche protectrice



(c) Seconde couche protectrice



(d) Couche fictive

Figure 4.4 Construction de deux couches protectrices et de la couche fictive. La construction d'une couche protectrice s'achève en repérant les nœuds dont on a pris la connectivité inverse pour repérer les éléments de la couche. Ces nœuds, illustrés en bleu, ne doivent pas être réutilisés pour former la prochaine couche.

Cas particulier : écoulement avec interface(s)

Dans notre implémentation, la représentation d'une interface passe par la discrétisation de deux courbes confondues, une pour chaque région du domaine bordée par l'interface [4]. Il est requis que la discrétisation de ces deux courbes (qualifiées de jumelles) soit identique. Cela signifie que si un nœud est retiré d'une des deux courbes, il faut que son nœud jumeau sur l'autre courbe soit retiré également. Les couches protectrice doivent donc pouvoir se propager au travers d'une interface. Cependant, les deux régions du domaine séparées par une interface sont complètement disjointes au sens des connectivités. La propagation des poches ne peut donc se faire selon la logique établie plus haut. Pour traiter le problème, deux ingrédients additionnels sont nécessaires :

— Une table de correspondance $\mathcal{T}$ entre les nœuds jumeaux de l'interface. Si le nœud a est jumeau du nœud b, alors $\mathcal{T}(a) = b$ et $\mathcal{T}(b) = a$

— Un compteur $\mathcal{C}$ pour chacun des nœuds j de l'interface. La valeur initiale de $\mathcal{C}(j)$ correspond au nombre d'éléments connectés au nœud j.

L'idée est de décrémenter le compteur $\mathcal{C}(j)$ dès lors qu'un élément i connecté au nœud j vérifie $\mathcal{M}_e(i) > 0$. Si le compteur d'un nœud a, appartenant à une des deux courbes de l'interface, est réduit à 0, on impose $\mathcal{C}(\mathcal{T}(a)) = \mathcal{C}(b) = 0$. Pour cela on ajoute à la couche protectrice courante tous les éléments j connectés au nœud b tels que $\mathcal{M}_e(j) = 0$. Notons qu'un effet de cascade peut se produire, c'est à dire que cette procédure peut conduire à réduire à 0 le compteur d'autres nœuds de l'interface. Dans un tel cas, il faudra répéter la procédure autant de fois que nécessaire.

4.2.3 Reconstruction du front initial

La suite du traitement est réalisée dans *Amiral*. Concrètement, il s'agit maintenant d'ajuster la logique interne de notre mailleur frontal, afin de ne mailler qu'à l'intérieur des poches définies par les éléments germes et les éléments des couches protectrices. La construction d'un front initial, correspondant à une délimitation orientée des poches, est requise. Cela fait, le mailleur frontal peut ensuite opérer normalement, sans qu'il soit besoin d'en modifier davantage le fonctionnement. En d'autres termes, le processus de création d'un élément demeure inaltéré. Deux approches sont possibles pour construire le front initial :

— Copier le précédent maillage, puis retirer les éléments i contenus dans le fichier de sortie de *Cadyf* tels que $\mathcal{M}_e(i) > 0$.

— Partir d'un maillage vide et repasser au travers des grandes opérations menées par un mailleur frontal (cf. Annexe C).

4. On parle de représentation explicite de l'interface.

Bien qu'elle paraisse beaucoup plus simple et directe, la première approche est en pratique difficile à mettre en place. La seconde approche est celle que nous avons retenue. Via cette approche, la construction du front initial peut se voir comme la succession de trois étapes :

(1) Remaillage local des frontières
(2) Ajout des éléments conservés au maillage et fermeture du front
(3) Contrôle de l'orientation des segments du front

Cette approche est robuste : elle permet de remailler globalement le domaine de calcul le cas échéant. Dans la suite on aborde en détails chacune des étapes mentionnées.

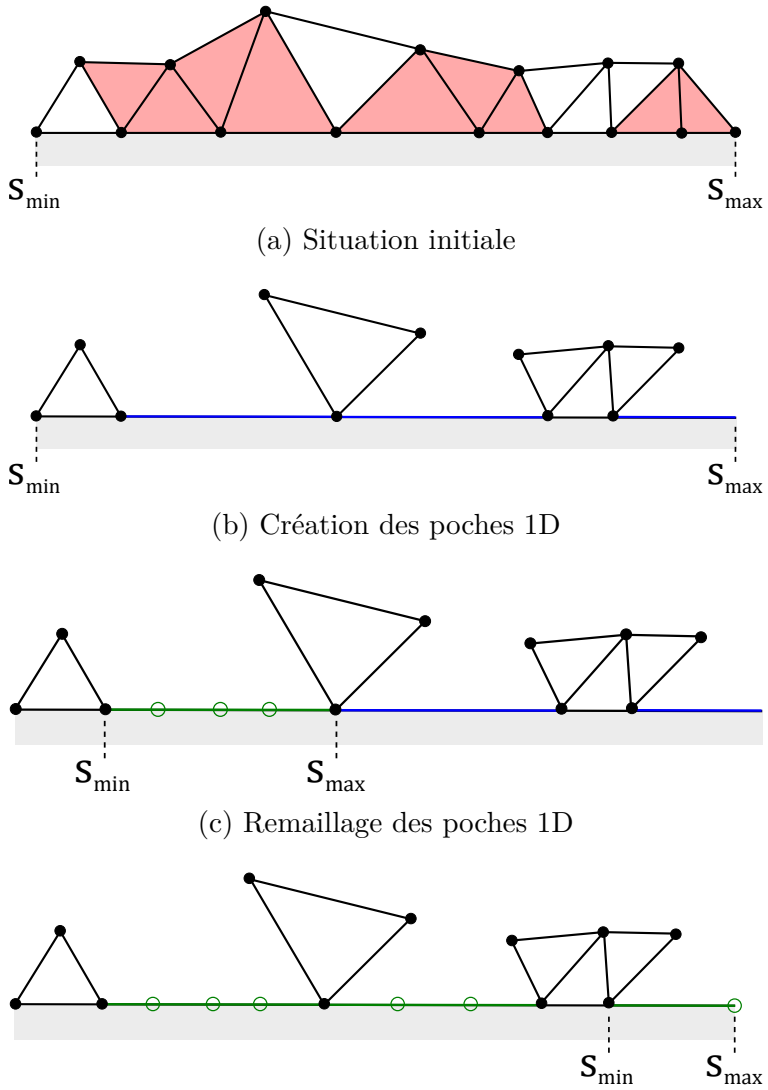
Remaillage des frontières

Tout comme pour la génération de maillage globale, on commence par discrétiser successivement les courbes frontières du domaine au moyen de leur paramétrisation respective (cf. Annexe C). Toutefois des ajustements ont été nécessaires afin de conserver la discrétisation sur les portions préservées de la courbe. Vu autrement, ces ajustements permettent de ne discrétiser que des poches 1D, résultant du contact des poches avec les frontières du domaine. La situation est dépeinte à la Figure 4.5.

Pour chaque courbe frontière, on boucle sur ses anciens nœuds. Pour chacun d'eux, on évalue d'abord s'il doit être ajouté au maillage courant ou non. Un nœud frontière est conservé dès lors qu'un des éléments de sa connectivité inverse l'est également. Si tel est le cas, l'ajout du nœud est direct. Le paramètre de courbe du nœud est lui aussi conservé. Dans le cas où le nœud est à retirer, on cherche le prochain nœud de la courbe devant être conservé. Cela permet de délimiter une poche 1D à rediscrétiser. On récupère alors les anciens paramètres de courbe des nœuds délimitant la poche. Ces deux paramètres, que l'on note s_{min} et s_{max}, sont suffisants pour discrétiser la poche 1D. Les paramètres liés aux nouveaux nœuds sont obtenus en fonction de s_{min} et s_{max}, ainsi que du type de la courbe frontière courante. Cela fait, la procédure se poursuit en se plaçant sur le nœud de l'ancienne discrétisation faisant immédiatement suite à la poche 1D. Le traitement de la courbe courante se termine dès lors que son dernier nœud a été ajouté au maillage courant. La Figure 4.5 illustre la procédure de remaillage d'une courbe frontière. L'ensemble des éléments 1D ayant été ajoutés dans les poches 1D constituent les premiers segments du front initial.

Complétion du front

Le remaillage local des courbes ne permet pas d'aboutir à un front initial fermé. Pour déterminer les segments manquants au front, on commence par ajouter aux maillages tous les éléments conservés dans l'ancien maillage. Cette étape est extrêmement rapide. Dans le même



(a) Situation initiale

(b) Création des poches 1D

(c) Remaillage des poches 1D

(d) Situation finale

Figure 4.5 Procédure pour le remaillage local des courbes frontières. Les éléments à retirer du maillage courant (repérés en rouge), font apparaître des poches 1D (repérées en bleu) sur les frontières du domaine. Le remaillage de ces portions (repéré en vert) se fait au moyen de l'ancienne paramétrisation de la courbe.

temps, on établit deux tableaux $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{T}_n^{-1}$. Elles indiquent la correspondance entre les nœuds du nouveau maillage et de l'ancien maillage. Soit un nœud j du nouveau maillage, on aura $\mathcal{T}_n(j) = j' \neq 0$ si le nœud j correspond au nœud j' de l'ancien maillage. À l'inverse on aura $\mathcal{T}_n^{-1}(j') = j$. Dans le cas où $\mathcal{T}_n(j) = 0$, cela signifie que le nœud j est un nouveau nœud, ajouté dans une poche 1D ou 2D. Réciproquement, un nœud j' tel que $\mathcal{T}_n^{-1}(j') = 0$ identifie un nœud de l'ancien maillage qui a été retiré.

Les segments manquants du front se situent à la frontière entre la portion préservée du domaine de calcul, et la dernière couche protectrice. Pour localiser un tel segment, l'approche naïve consiste à boucler sur tous les éléments du nouveau maillage, et pour chacun d'eux à boucler sur tous les éléments de la dernière couche protectrice. Soient j_1 et j_2 deux nœuds sommets d'un élément du nouveau maillage, et soient j_1' et j_2' deux nœuds sommets d'un élément de la dernière couche protectrice. Le segment $[j_1 j_2]$ est un segment du front initial si l'on vérifie $\mathcal{T}_n(j_1) = j_1'$ et $\mathcal{T}_n(j_2) = j_2'$. Cette approche est fonctionnelle, mais son coût devient rapidement prohibitif sur des maillages comportant un grand nombre d'éléments. La génération de maillage locale doit idéalement conduire à des économies de coût de calcul lorsque comparée à la génération de maillage globale. C'est pourquoi nous avons introduit la notion de couche fictive, déjà évoquée.

Les éléments de cette couche sont, par construction, adjacents aux éléments de la dernière couche protectrice, via un sommet commun ou une arrête commune. On peut donc considérablement accélérer la recherche des segments manquants du front en ne bouclant que sur les éléments de $\{e_f\}$. Pour chacun de ces éléments, on peut récupérer les éléments adjacents selon la procédure décrite à la Section 4.2.2. Soit $e_1 \in \{e_f\}$, et soient j_1' et j_2' deux nœuds sommets de e_1 tels que $\mathcal{T}_n^{-1}(j_1') = j_1$ et $\mathcal{T}_n^{-1}(j_2') = j_2$. Si ces sommets sont partagés par un élément e_2 adjacent de e_1 tel que $e_2 \in \left\{e_p^{N_c}\right\}$, alors le segment $[j_1 j_2]$ est un segment manquant du front. Une fois la boucle sur les éléments de $\{e_f\}$ terminée, le front initial est fermé et complet. Pour autant, il n'a aucunement obligation de délimiter une zone à remailler unique.

Contrôle de l'orientation des segments

Un segment du front mobile doit toujours être orienté de telle sorte que la région à mailler se situe sur sa gauche (cf. Annexe C). La procédure décrite au paragraphe précédent ne permet pas en l'état d'assurer une orientation correcte des segments du front initial. Considérons la Figure 4.6. Afin de s'assurer de la bonne orientation du segment $[AB]$, on évalue le

déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} x_b - x_a & x_d - x_c \\ y_b - y_a & y_d - y_c \end{vmatrix} \tag{4.32}$$

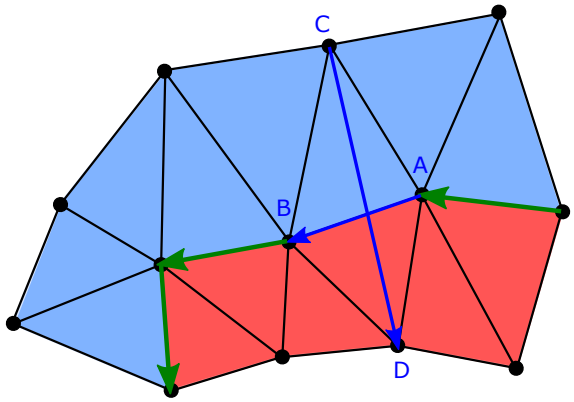


Figure 4.6 Vérification de l'orientation des segments du front. Les éléments de la couche fictive figurent en bleu tandis que les éléments de la dernière couche protectrice sont dépeints en rouge.

Si le résultat est négatif, cela signifie qu'il faut remplacer le segment $[AB]$ du front par le segment $[BA]$. Dans les faits, le test d'orientation est pratiqué sur les segments du front avant qu'ils n'y soient effectivement ajoutés. Une fois le front initial ainsi complété, le mailleur frontal peut procéder normalement pour générer les nouveaux éléments dans les poches.

4.3 Relaxation du maillage

À l'issue de la génération de maillage, globale ou locale, il n'est pas rare que certains éléments présentent un ratio d'aspect en longueur r_l ou en angle r_a peu satisfaisant. Dans le cas d'éléments triangulaires, les valeurs de ces ratios sont donnés par :

$$r_l = \frac{\min_i\{l_i\}}{\max_i\{l_i\}} \qquad r_a = \frac{\min_i\{\alpha_i\}}{\max_i\{\alpha_i\}} \tag{4.33}$$

où l_i réfère à la longueur du côté i du triangle et α_i à l'angle du sommet opposé à ce côté. Dans le cas où le nouveau maillage serait obtenu par adaptation de maillage anisotrope, un ratio d'aspect r_l proche de 0 peut être volontaire. Ce n'est pas notre cas ici. Un élément avec un tel ratio d'aspect n'est donc pas souhaitable, en ce qu'il peut introduire localement un surplus d'erreur lors de la résolution par éléments finis. Nous ne souhaitons pas non plus préserver des éléments trop plats (très faible valeur de r_a). La relaxation de maillage (ou

lissage de maillage) est un outil numérique intéressant, permettant d'améliorer la *qualité* d'un maillage. Elle n'agit que sur la position des nœuds du maillage. En ce sens, la relaxation de maillage s'apparente donc à une méthode d'adaptation de maillage de type r. Canann *et al.* [53] décrivent trois grandes familles de méthodes utilisées pour relaxer un maillage :

- Les méthodes de type Laplacien (*Laplacian smoothing methods*)
- Les méthodes utilisant des lois physiques (*Physics-based methods*)
- Les méthodes avec critère d'optimisation (*Optimization-based methods*)

À la veille de nos travaux, l'implémentation de travail proposait uniquement le lissage Laplacien simultanée classique, opérant sur le maillage globalement. Bien qu'imparfaite, cette méthode présente les avantages d'être peu coûteuse et simple. C'est pourquoi nous l'avons beaucoup utilisée dans un premier temps. Nous avons cependant rapidement exploré la deuxième famille de méthodes pour tenter de palier à certaines limites du lissage Laplacien.

4.3.1 Lissage Laplacien

Le lissage Laplacien est sans aucun doute la technique de relaxation de maillage la plus connue et la plus utilisée. Sa popularité relève de sa simplicité d'implémentation et de son coût minimaliste (aucun système linéaire à résoudre). De nombreuses variantes ont été proposées [53]. Dans sa version la plus simple, la méthode consiste à placer chaque nœud sommet du maillage au barycentre de ses voisins. Soit $\boldsymbol{p}_i$ le vecteur contenant les coordonnées d'un nœud i du maillage après relaxation. On désigne par $Adj(i)$ l'ensemble des nœuds sommets au voisinage direct du nœud i, et par N_n le nombre de nœuds voisins. La position courante d'un nœud j est dénotée par le vecteur $\boldsymbol{q}_j$. Un cycle de lissage Laplacien conduit à :

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{1}{N_n} \sum_{j \in Adj(i)} \boldsymbol{q}_j \tag{4.34}$$

Le traitement des nœuds du maillage peut être séquentiel, ou simultané. Dans le cas d'un traitement séquentiel, les nœuds voient leur position ajustée successivement. Bien qu'il implique un encombrement mémoire inférieur à celui du traitement simultanée, le traitement séquentiel présente un défaut significatif : le maillage final dépend directement de la numérotation des nœuds. Changer l'algorithme de numérotation des nœuds revient donc également à changer le maillage, ce qui n'est pas souhaitable. Par ailleurs Vollmer *et al.* [67] affirment qu'un traitement simultané conduit à une amélioration plus sensible de la qualité du maillage. Il faut également noter que l'opération de lissage Laplacien ne peut pas être appliquée sur les nœuds sommets délimitant les frontières du domaine. Sans cela, il s'observe une réduction progressive de la taille du domaine [67, 98] et la géométrie des frontières n'est pas préser-

vée. De manière générale on désigne dans la suite par $\{n_{fix}\}$ l'ensemble des nœuds devant demeurer fixes, et par $\{n_{mob}\}$ l'ensemble des nœuds pouvant être relocalisés.

L'implémentation de travail utilise en réalité une formulation légèrement plus complexe du lissage Laplacien. On a :

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\alpha}{N_n} \sum_{j \in Adj(i)} \boldsymbol{q}_j + (1-\alpha)\boldsymbol{q}_i \qquad \forall\, i \,\in\, \{n_{mob}\} \tag{4.35}$$

ou α est ici un paramètre tel que $0 \leq \alpha \leq 1$, permettant de pondérer la prochaine position du point par sa position courante. En pratique nous avons toujours utilisé la valeur $\alpha = 1$, ce qui revient au lissage Laplacien classique défini à l'Équation (4.34).

Malgré sa grande simplicité, le lissage Laplacien présente deux limites majeures :

(1) Dans les régions concaves du domaine, la méthode peut induire des retournements de mailles.

(2) La méthode ne s'appuie sur aucune métrique de qualité élémentaire.

Les nœuds sommets sur les frontières, de position fixe, sont à l'origine de la première limite. Il n'existe aucun mécanisme pour informer un nœud $i \in \{n_{mob}\}$ qu'il possède un voisin $j \in \{n_{fix}\}$. Si la frontière du domaine est localement concave, un retournement de maille peut alors se produire. Cette limite a été particulièrement handicapante aux premières heures de notre procédure d'adaptation de maillage locale. Dans bien des cas, la frontière des poches à remailler peut être fortement concave.

Par ailleurs le lissage Laplacien, dans sa forme classique, n'est piloté par aucune donnée relative à qualité des éléments. Dans les faits la qualité du maillage est mesurée aux noeuds. Pour le comprendre, on peut étendre la définition du lissage Laplacien à partir de l'opérateur de Laplace discret. On note $\boldsymbol{\mathcal{L}}_d(i)$ cet opérateur appliqué au nœud $i \in \{n_{mob}\}$. Il vient :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_d(i) = \sum_{j \in Adj(i)} w_{ij}(\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_i) \tag{4.36}$$

où w_{ij} désigne le poids alloué au nœud j relativement au nœud i, tel que :

$$\sum_{j \in Adj(i)} w_{ij} = 1 \quad \forall i \tag{4.37}$$

L'Équation (4.36) peut donc se récrire comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_d(i) + \boldsymbol{q}_i = \sum_{j \in Adj(i)} w_{ij}\boldsymbol{q}_j \tag{4.38}$$

En considérant à nouveau l'Équation (4.34), on constate donc qu'elle est obtenue en posant :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_d(i) = 0 \tag{4.39}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{N_n} \quad \forall j \tag{4.40}$$

Le lissage Laplacien classique peut donc bien s'interpréter comme la minimisation du Laplacien discret, jouant le rôle d'une métrique de qualité *nodale*. Le phénomène de retournement de mailles que nous avons discuté est en réalité une conséquence indirecte de cette seconde limite. Un moyen peu satisfaisant de mitiger le risque de retournement de maille réside dans la *Smart Laplacian method* [45]. Il s'agit d'un lissage Laplacien conditionnel. Avant la mise à jour de la position des nœuds, on insère une étape de vérification reliée à une métrique de qualité élémentaire Q. Pour chaque nœud $i \in \{n_{mob}\}$, on évalue la qualité courante Q_{ij} des éléments j connectés au nœud i. On évalue ensuite la qualité Q'_{ij} des éléments j après déplacement du nœud i. La position du nœud i est effectivement mise à jour si et seulement si :

$$\min_j Q'_{ij} > \beta \min_j Q_{ij} \tag{4.41}$$

où β désigne un coefficient fixé par l'utilisateur. Dans leurs travaux, Freitag *et al.* [45] rapporte que cette méthode implique un coût 2 à 3 supérieur à celui d'un lissage Laplacien classique. Par ailleurs, cette méthode ne garanti pas toujours une amélioration de la qualité d'un élément j.

4.3.2 Lissage physique

Comme leur nom l'indique, les méthodes physiques de relaxation de maillage s'appuie sur des lois physiques pour piloter la mise à jour de la position des nœuds. Deux modèles sont alors couramment utilisés pour représenter le maillage [93] :

— un modèle de solide élastique [146]
— un modèle de type masse/ressort [16]

Dans le premier cas, on résout un problème de mécanique des milieux continus, typiquement au moyen de la loi de Hooke généralisée. Des forces sont ainsi appliquées en chacun des nœuds sommets du maillage et la résolution d'un système linéaire permet de déterminer les déplacements nodaux menant à l'équilibre statique. La résolution du problème se fait par la méthode des éléments finis. Dans le second cas, on résout également un problème d'équilibre statique. Toutefois, les efforts nodaux sont calculés au moyen de système masse/ressort élémentaires. Chaque arrête d'un élément constitue un ressort tandis qu'un nœud sommet est une masse ponctuelle. Là encore, un système linéaire à résoudre permet de coupler tous

les déplacements nodaux. L'assemblage du système ne requiert cependant pas l'usage de la méthode des éléments finis.

Dans la suite on présente plus en détails deux procédures de relaxation que nous avons implémentées pour tenter de circonvenir aux manques du lissage Laplacien. La première consiste à voir le maillage comme un solide élastique. La seconde procédure s'inspire du modèle masse/ressort sans toutefois procéder de la façon classique.

Modèle de solide élastique

L'implémentation de cette procédure s'est largement appuyée sur les travaux de Durand *et al.* [146]. Les auteurs présentent une approche très générale pour relaxer un maillage isotrope par et pour la méthode des éléments finis. Le principe est de faire tendre les ratios d'aspect (cf. Équation (4.33)) de tous les éléments vers une valeur unitaire, tout en conservant au mieux leur aire respective. Pour un élément donné du maillage, on souhaite donc calculer les déplacements minimaux nécessaires de ses nœuds sommets permettant d'obtenir un élément équilatéral de même aire. Pour cela, on considère un élément triangulaire équilatéral e_0 d'aire unitaire. On note $\underline{\boldsymbol{C}}_0$ la matrice des coordonnées (x, y) de ses trois nœuds sommets :

$$\underline{\boldsymbol{C}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ l/2 & \sqrt{3}l/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 & y_1^0 \\ x_2^0 & y_2^0 \\ y_3^0 & y_3^0 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

où $l = 2/\sqrt[4]{3}$ est la longueur d'un côté de l'élément. L'élément e_0 est ensuite mis à l'échelle de l'élément réel e pour former un élément e_{ref}. La matrice des coordonnées des sommets de e_{ref}, noté $\underline{\boldsymbol{C}}_{ref}$ est obtenue simplement par :

$$\underline{\boldsymbol{C}}_{ref} = s\, \underline{\boldsymbol{C}}_0 \tag{4.43}$$

où s est ici un facteur de mise à l'échelle. Pour un élément 2D en démontre aisément que $s = \sqrt{|A|}$, où A désigne l'aire de l'élément e. Il s'agit ensuite de déterminer les déplacements minimaux $\boldsymbol{\xi}_i$ des sommets i de e permettant de retrouver l'élément e_{ref}, à une translation $\boldsymbol{T}$ et une rotation $\underline{\boldsymbol{R}}$ près. Pour cela, on utilise une méthode présentée à l'origine dans les travaux d'Arun *et al.* [23]. On dénote par $\boldsymbol{p}_i$ le vecteur des coordonnées du sommet i de l'élément e_{ref} (on a donc $\boldsymbol{p}_i(j) = (\underline{\boldsymbol{C}}_{ref})_{ij}$), et par $\boldsymbol{p}'_i$ l'équivalent pour l'élément e. La quantité Σ à minimiser est définie comme suit :

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{3} \parallel \boldsymbol{p}'_i - (\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{T}) \parallel^2 \tag{4.44}$$

Il est nécessaire de découpler la recherche de $\underline{\boldsymbol{R}}$ de celle de $\boldsymbol{T}$. Soient $\boldsymbol{p}_i''$ $(i = 1, 2, 3)$ les vecteurs de coordonnées donnés par :

$$\boldsymbol{p}_i'' = \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{T} \tag{4.45}$$

Ces trois vecteurs de coordonnées définissent l'élément e_{fit}, approchant au mieux l'élément e après application des transformations isométriques $\underline{\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{T}$ sur l'élément e_{ref}. La Figure 4.7 représente les différents éléments que nous avons définis. On réfère aux centroïdes respectifs de e^{ref}, e et e_{fit} par les vecteurs de coordonnées $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}'$, et $\overline{\boldsymbol{p}}''$ tels que :

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i \tag{4.46}$$

$$\overline{\boldsymbol{p}}' = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i' \tag{4.47}$$

$$\overline{\boldsymbol{p}}'' = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i'' \tag{4.48}$$

Notons que l'on a également :

$$\overline{\boldsymbol{p}}'' = \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \overline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{T} \tag{4.49}$$

On peut montrer que les éléments e et e_{fit} partagent le même centroïde :

$$\overline{\boldsymbol{p}}'' = \overline{\boldsymbol{p}}' \tag{4.50}$$

Soient maintenant les vecteurs secondaires suivants :

$$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{p}_i - \overline{\boldsymbol{p}} \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{q}_i' = \boldsymbol{p}_i' - \overline{\boldsymbol{p}}' \tag{4.52}$$

En reprenant maintenant l'Équation (4.44), on montre alors que :

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \parallel \boldsymbol{p}'_i - (\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{T}) \parallel^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \parallel \boldsymbol{q}'_i + \overline{\boldsymbol{p}}' - (\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{q}_i + \underbrace{\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \overline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{T}}_{=\overline{\boldsymbol{p}}''}) \parallel^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \parallel \boldsymbol{q}'_i - \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{q}_i + \underbrace{\overline{\boldsymbol{p}}' - \overline{\boldsymbol{p}}''}_{=\boldsymbol{0}} \parallel^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \parallel \boldsymbol{q}'_i - \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{q}_i \parallel^2
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Ce qui permet bien de découpler la recherche de $\underline{\boldsymbol{R}}$ de celle de $\boldsymbol{T}$. Afin de déterminer la matrice de rotation $\underline{\boldsymbol{R}}$, on introduit la matrice $\underline{\boldsymbol{H}}$ suivante :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{q}_i'^T \tag{4.54}$$

Arun *et al.* [23] proposent alors de déterminer la matrice de rotation $\underline{\boldsymbol{R}}$ au moyen de la DVS (*Décomposition en Valeurs Singulières*) de $\underline{\boldsymbol{H}}$:

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}}^T \tag{4.55}$$

Dans notre cas, la matrice $\underline{\boldsymbol{H}}$ est une matrice réelle 2×2. Par conséquent les matrices $\underline{\boldsymbol{U}}$ et $\underline{\boldsymbol{V}}^T$ sont des matrices orthogonales 2×2. La matrice $\underline{\boldsymbol{\Lambda}}$ est par ailleurs une matrice diagonale 2×2. La matrice $\underline{\boldsymbol{R}}$ est alors donnée par :

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \left(\underline{\boldsymbol{U}} \cdot \underline{\boldsymbol{V}}^T\right)^T = \underline{\boldsymbol{V}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}^T \tag{4.56}$$

Le vecteur translation $\boldsymbol{T}$ découle alors des Équations (4.49) et (4.50). Le vecteur déplacement $\boldsymbol{\xi}_i$ est ensuite donné par :

$$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{p}'_i - (\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{T}) \tag{4.57}$$

Arun *et al.* émettent toutefois une remarque importante : l'algorithme reposant sur la DVS pour déterminer $\underline{\boldsymbol{R}}$ peut échouer si l'ensemble des points $\{\boldsymbol{q}_i\}$ et/ou $\{\boldsymbol{q}'_i\}$ sont coplanaires. C'est justement notre cas puisque nous travaillons dans un contexte 2D. Dans un tel cas la matrice $\underline{\boldsymbol{R}}$ définie par l'Équation (4.56) peut être une matrice de réflexion.

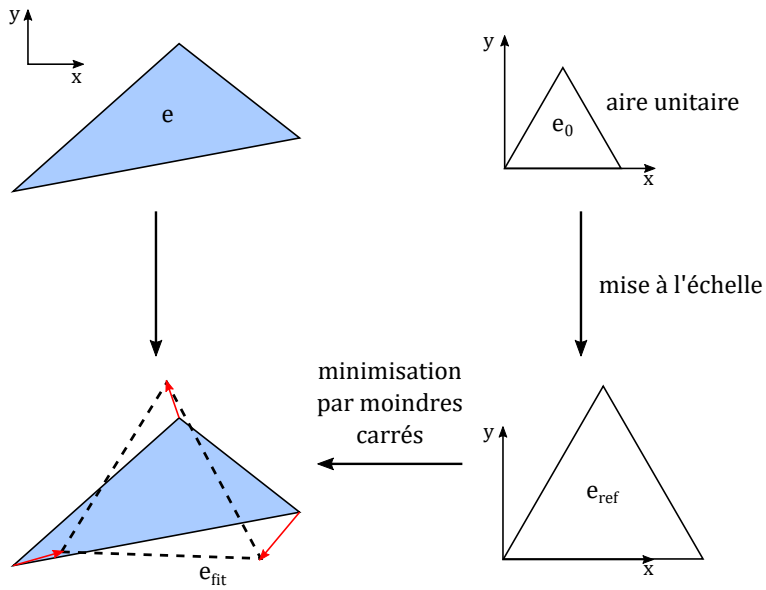


Figure 4.7 Représentation des différents triangles dans la méthode de relaxation basée sur la physique d'un solide élastique. La figure est adaptée de [146].

L'occurrence d'un tel cas est détectée en calculant le déterminant de $\underline{\boldsymbol{R}}$:

- Si $\det(\underline{\boldsymbol{R}}) = 1$, la matrice $\underline{\boldsymbol{R}}$ est bien une matrice de rotation.
- Si $\det(\underline{\boldsymbol{R}}) = -1$, alors la matrice $\underline{\boldsymbol{R}}$ est une matrice de réflexion.

La matrice $\underline{\boldsymbol{R}}$ pourra être une matrice de réflexion si la norme des déplacements $\boldsymbol{\xi}_i$ à calculer est grande. Typiquement, cela peut se produire si les orientations des éléments e et e_{ref} diffèrent. L'élément e_{ref} étant d'orientation positive par définition, cela signifierait que l'élément e est d'orientation négative. La méthode par avance de front est *normalement* censée prévenir la formation d'éléments d'aire strictement négative. Un élément retourné est donc le résultat du dernier cycle de relaxation réalisé. Dans notre implémentation, nous calculons l'aire orientée de tous les éléments avant chaque cycle de relaxation de maillage. Si un élément présente une aire négative ou nulle, on force l'usage du lissage Laplacien pour les cycles de relaxation restants. En cas de retournement de maille, la méthode que nous décrivons présentement n'est pas utilisable. Nous préciserons pourquoi dans la suite.

Il faut maintenant déterminer les forces nodales $\boldsymbol{f}_i$, induites par les déplacements nodaux $\boldsymbol{\xi}_i$ calculés. C'est justement ici que la méthode des éléments finis intervient. On résout sur chaque élément un problème de mécanique des milieux continus. Sous l'effet des déplacements $\boldsymbol{\xi}_i$, on suppose que l'élément atteint un état d'équilibre statique. Cela se traduit par le problème fort suivant :

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}_{se}} = \mathbf{0} \tag{4.58}$$

où $\underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}}$ désigne ici le tenseur des contraintes internes. Le maillage est vu comme un solide élastique. Nous utilisons donc la loi de l'élasticité linéaire de Hooke pour relier les déplacements nodaux et le tenseur des contraintes $\underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}}$:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}} = \lambda_{se}\,\mathrm{Tr}(\underline{\boldsymbol{E}})\underline{\boldsymbol{I}} + 2\mu_{se}\underline{\boldsymbol{E}} \tag{4.59}$$

où $\underline{\boldsymbol{E}}$ est le tenseur des déformations linéarisées :

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\xi})^T) \tag{4.60}$$

Les quantité λ_{se} et μ_{se} sont les coefficients de Lamé de la loi de comportement. Ils sont définis de la façon suivante :

$$\lambda_{se} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu_{se} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.61}$$

où E et ν désignent ici le module d'Young et le coefficient de Poisson du solide. Nous avons suivi la suggestion de Durand [146] en imposant un coefficient de Poisson nul. Cela permet de découpler les déformations pour donner plus de liberté aux déplacement des nœuds. Les efforts $\boldsymbol{f_i}$ que l'on souhaite calculer sont alors tous proportionnels au module d'Young. Par conséquent, on peut l'imposer unitaire. Avec ces hypothèses, la loi de Hooke s'écrit alors simplement :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}} = \underline{\boldsymbol{E}} \tag{4.62}$$

Explicitons maintenant un peu la définition de $\boldsymbol{\xi}_i$ et $\boldsymbol{f}_i$:

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{f}_i = \begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \end{Bmatrix} \tag{4.63}$$

On définit également le vecteur déplacements élémentaire $\boldsymbol{\xi}_e$ et le vecteur forces élémentaire $\boldsymbol{f}_e$ par :

$$\boldsymbol{\xi}_e = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{f}_e = \begin{Bmatrix} f_1^x \\ f_2^x \\ f_3^x \\ f_1^y \\ f_2^y \\ f_3^y \end{Bmatrix} \tag{4.64}$$

Chaque élément du maillage est traité comme un élément sub-paramétrique, si bien que l'approximation des déplacements à l'intérieur de l'élément est linéaire. Soit Ω_e la surface de

l'élément e. La forme faible de l'Équation (4.58) est donnée par :

$$\int_{\Omega_e} \underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}} \cdot \nabla(\varphi)\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\delta\Omega_e} \varphi(\underline{\boldsymbol{\sigma_{se}}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, \mathrm{d}l \tag{4.65}$$

où φ est une fonction test pour le problème. Le membre de droite représente les efforts qui découlent des déplacements nodaux imposés. C'est justement ce que l'on souhaite calculer. L'application de l'approche de Galerkin (cf. Section 3.2.3) résulte en un duo d'équations pour chaque couple (ξ_i, η_i), pour un total de 6 équations. En réordonnant les équations on aboutit à un système élémentaire de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{K}}_e \cdot \boldsymbol{\xi}_e = \boldsymbol{f}_e \tag{4.66}$$

Le calcul des termes de $\underline{\boldsymbol{K}}_e$ suppose d'évaluer des intégrales sur l'élément courant e. Pour cela nous nous ramenons sur l'élément de référence. Comme nous l'avons décrit dans la Section 3.2.4, les intégrales sont alors évaluées par quadratures de Gauss, ce qui suppose d'évaluer le Jacobien de la transformation (élément réel vers éléments de référence) aux points de Gauss. C'est en cela qu'un élément retourné pose problème, car il conduira à des valeurs négatives du Jacobien.

Une fois le système élémentaire résolu, on assemble les contributions élémentaires de $\underline{\boldsymbol{K}}_e$ et $\boldsymbol{f}_e$ pour former un système linéaire global :

$$\underline{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \tag{4.67}$$

où le vecteur de déplacements global $\boldsymbol{X}$ est cette fois-ci l'inconnu. Afin de réaliser des économies importantes en coûts de calcul et en mémoire, la matrice $\underline{\boldsymbol{K}}$ est stockée sous un format CSR (*Compressed Sparse Row*), aussi connu sous le nom de format de Yale. Tout comme pour le lissage Laplacien, on ne souhaite pas relaxer les nœuds présents sur les frontières du domaine. On leur applique pour cela des conditions essentielles de déplacements nulles.

Modèle avec éléments barres

Nous avons également implémenté une seconde méthode, inspirée de l'approche masse/ressort. Aucune notion de masse n'apparaît toutefois dans notre approche. Nous avons modélisé le maillage à l'aide d'éléments barres (*truss elements*). Ces éléments sont très utilisés dans la modélisation des structures métalliques présentant des poutres très élancées. Ils se caractérisent par leur capacité à ne transférer que des efforts axiaux. On donne une représentation schématique d'un tel élément à la Figure 4.8. L'élément barre s'apparente donc à un élément

ressort de raideur $k = EA/L$, où E, A et L désignent respectivement le module d'Young, l'aire de la section de l'élément et la longueur de l'élément. La longueur L désigne aussi la longueur au repos du ressort. Nous reprendrons ici les notations de la méthode précédemment décrite pour désigner les déplacements du nœud i et les efforts qui s'y appliquent. Introduisons toutefois la matrice de rotation $\underline{\boldsymbol{R}}_\theta$:

$$\underline{\boldsymbol{R}}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

En s'appuyant sur la Figure 4.8, il vient :

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1' \\ \eta_1' \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \boldsymbol{\xi}_1' \quad ; \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \begin{Bmatrix} \xi_2' \\ \eta_2' \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \boldsymbol{\xi}_2' \tag{4.69}$$

De la même façon on pose :

$$\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \begin{Bmatrix} f_1^{x\prime} \\ f_1^{y\prime} \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \boldsymbol{f}_1' \quad ; \quad \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \begin{Bmatrix} f_2^{x\prime} \\ f_2^{y\prime} \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \cdot \boldsymbol{f}_2' \tag{4.70}$$

Pour un élément barre on peut alors écrire :

$$\boldsymbol{f}' = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1' \\ \boldsymbol{f}_2' \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1' \\ \boldsymbol{\xi}_2' \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{K}}_b' \cdot \boldsymbol{\xi}' \tag{4.71}$$

Les relations de passage vers le repère global sont données par :

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{T}}_\theta \cdot \boldsymbol{f}' \quad ; \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{Bmatrix} = \underline{\boldsymbol{T}}_\theta \cdot \boldsymbol{\xi}' \tag{4.72}$$

où $\underline{\boldsymbol{T}}_\theta$ est la matrice orthogonale par blocs suivante :

$$\underline{\boldsymbol{T}}_\theta = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{R}}_\theta & \underline{\boldsymbol{0}} \\ \underline{\boldsymbol{0}} & \underline{\boldsymbol{R}}_\theta \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Finalement, la combinaison des Équations (4.71) et (4.72) permet d'obtenir la relation entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{\xi}$, caractéristique du comportement de l'élément barre :

$$\boldsymbol{f} = \underline{\boldsymbol{T}}_\theta \underline{\boldsymbol{K}}_b' \underline{\boldsymbol{T}}_\theta^t \cdot \boldsymbol{\xi} = \underline{\boldsymbol{K}}_b \cdot \boldsymbol{\xi} \tag{4.74}$$

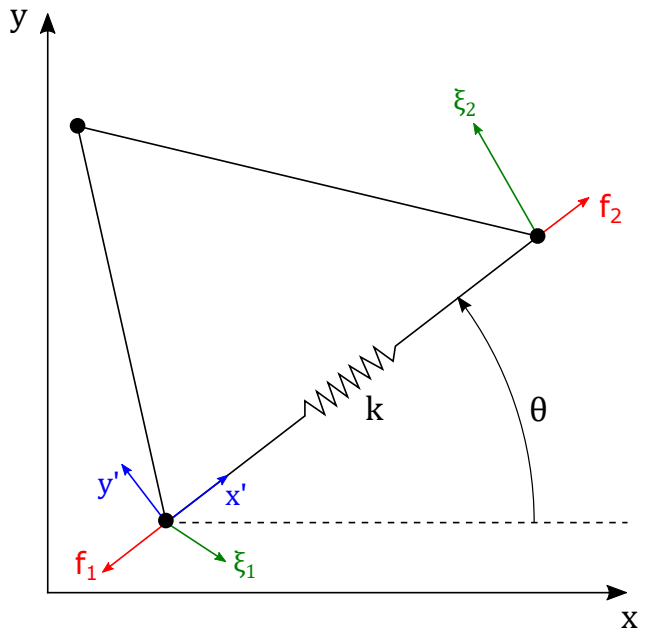


Figure 4.8 Représentation d'un élément barre sur un élément du maillage. Chaque élément du maillage est composé de trois éléments barres.

où la matrice raideur $\underline{\boldsymbol{K}}_b$ s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{K}}_b = \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

avec $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.

Chaque élément du maillage peut se voir comme l'assemblage de trois éléments barres. Par assemblage des contributions de chaque barre, on obtient un système élémentaire de même forme que celui de l'Équation (4.66). L'obtention des déplacements élémentaires, nécessaires au calcul des forces élémentaires, se fait comme pour la méthode de relaxation précédente. La méthode des éléments barres ne diffère donc de la précédente que dans la façon d'établir la matrice de rigidité $\underline{\boldsymbol{K}}_e$. Une étape d'assemblage supplémentaire est requise mais la formulation n'exige jamais d'évaluer une intégrale sur l'élément de référence, rendant la méthode utilisable même en cas d'élément retourné.

4.3.3 Métrique de qualité et relaxation locale

Jusqu'à présent nous avons toujours laissé entendre que la relaxation de maillage devait s'appliquer sur l'ensemble des nœuds sommets du maillage, à l'exception des nœuds positionnés sur les frontières du domaine. Ce faisant on cherche à améliorer la qualité globale du maillage. Toutefois, cela n'est guère pertinent si le maillage à relaxer est issu d'une adaptation de maillage locale (cf. Section 4.2). L'adaptation de maillage locale, on l'a vu, a été pensé pour réduire les erreurs dans le transfert de la solution afin, en bout de ligne, de mitiger en partie la diffusion numérique liée aux cycles d'adaptation de maillage. Si la relaxation se fait globalement, le déplacement des nœuds conservés entrainera un surplus d'erreur de transfert, au même titre qu'une adaptation de maillage globale. Par ailleurs, une réduction sensible de coût de calcul peut être obtenue en procédant localement. Cela est d'autant plus vrai pour les méthodes physiques, qui exigent de résoudre un système linéaire à chaque cycle de relaxation. Tout comme pour l'adaptation de maillage, il nous a donc paru nécessaire de définir une procédure de relaxation de maillage locale. On dénote par $\{\mathcal{E}_r^j\}$ l'ensemble des éléments relaxés au cycle j. Un élément est considéré relaxé dès lors qu'un de ses nœuds sommets a été déplacé. Deux approches sont possibles pour définir la relaxation locale :

- Poser $\{\mathcal{E}_r^j\} = \{\mathcal{E}_a\}$
- Choisir $\{\mathcal{E}_r^j\}$ indépendamment de $\{\mathcal{E}_a\}$

La première approche paraît naturelle puisqu'elle évite tout surplus d'erreur dans le transfert d'une solution. La relaxation locale ainsi définie doit toutefois fixer les nœuds sommets présents sur la frontière des poches. L'expérience a montré que les régions à remailler peuvent présenter des concavités importantes. Tel que discuté à la Section 4.3.1, cette situation favorise les retournements de mailles. Dans une de nos études [149], à l'époque de laquelle nous ne disposions que du lissage Laplacien, nous avions rapporté que cette forme de relaxation locale conduisait effectivement à des retournements de mailles.

La seconde approche est justement celle que nous avons retenue, compte tenu des limites de la première. L'idée principale est de découpler la relaxation de la méthode d'adaptation de maillage utilisée (locale ou globale) pour obtenir une procédure générique. Cela suppose de disposer d'une méthode pour construire l'ensemble $\{\mathcal{E}_r^j\}$. La notion de métrique de qualité peut habilement être utilisée à cette fin. Une métrique de qualité peut être nodale ou élémentaire. Dans les deux cas, c'est une fonction scalaire plus ou moins complexe de la position des nœuds de l'éléments [71]. En vue de l'utilisation du maillage avec la méthode des éléments finis, c'est toutefois la qualité des éléments qui est essentielle. De nombreuses métriques ont été proposées dans la littérature [68, 71, 85, 146]. Notre méthode d'adaptation de maillage étant isotrope, il est nécessaire que la métrique puisse identifier, sans réelle distinctions, tant

les éléments aplatis que les éléments allongés. Par ailleurs, on souhaite retenir une métrique *juste* (Field évoque dans ses travaux une *'fair measure'* [68]). Une telle métrique doit :

(a) fournir une mesure de qualité nulle pour tous les éléments plats
(b) fournir la même mesure pour des éléments similaires
(c) être normée (la mesure doit être comprise entre 0 et 1)

Car elles semblaient *a priori* répondre à nos besoins, nous avons retenu les métriques suivantes après consultation de la littérature :

$$Q_1 = \frac{2\sqrt{3}r}{l_{max}} \qquad Q_2 = \frac{2h_{min}}{\sqrt{3}l_{max}} \qquad Q_3 = \frac{3\alpha_{min}}{\pi} \qquad Q_4 = \frac{4\sqrt{3}A}{\sum_{i=1}^{3} l_i^2} \tag{4.76}$$

Dans ces définitions, r réfère au rayon du cercle inscrit, h_{min} et l_{max} sont respectivement la hauteur minimale et la longueur du plus grand côté, et α_{min} désigne l'angle minimum de l'élément triangulaire. Ces quatre métriques ont été analysées à la Section 5.4. Dans la suite on désigne par Q l'une de ces 4 métriques, sans distinction.

Pour déterminer les éléments de $\{\mathcal{E}_r^j\}$, nous nous sommes inspirés de la méthode d'adaptation de maillage locale (cf. Section 4.2). On procède en deux phases successives :

1) Identifier les éléments i du maillage tel que $Q_i < Q_{min}$, où Q_{min} est une tolérance fixée par l'utilisateur. Ces éléments sont les premiers ajoutés dans $\{\mathcal{E}_r^j\}$. Ils constituent les germes de la relaxation locale.
2) Pour chaque élément germe, on ajoute également dans $\{\mathcal{E}_r^j\}$ les éléments présents dans les couches adjacentes. Ainsi on donne une marge de manœuvre suffisante à la méthode de relaxation utilisée pour améliorer la qualité des éléments germes. Le procédé est en tous points similaire à celui utilisé pour former les couches protectrices dans l'adaptation de maillage locale. Le masque nodal $\mathcal{M}_n$, que nous avions introduit pour accélérer la construction des couches protectrices, est ici d'autant plus utile qu'il permet de déduire directement la liste $\{\mathcal{N}_r^j\}$ des nœuds admissibles à la relaxation.

Dans le cas d'un lissage Laplacien, la simple connaissance de $\{\mathcal{N}_r^j\}$ suffit pour procéder à la relaxation. Dans le cas des méthodes physiques, le format CSR que nous utilisons pour stocker efficacement la matrice de rigidité $\underline{\boldsymbol{K}}$ exige une numérotation continue des nœuds. Il est donc nécessaire d'établir un vecteur de permutation, permettant de passer facilement de la numérotation globale discontinue à une numérotation locale continue. Notons d'ailleurs que la procédure de relaxation locale mène à redéfinir $\{\mathcal{E}_r^j\}$ et $\{\mathcal{N}_r^j\}$ à chaque cycle j de relaxation. Cela signifie que la structure CSR doit être recalculée à chaque cycle de relaxation. Ce surcoût reste cependant mineur devant l'économie résultant de la taille réduite du système linéaire à résoudre. Le masque $\mathcal{M}_n^j$ est utilisé une dernière fois pour appliquer les conditions de

déplacements nulles aux nœuds se situant sur la frontière de la dernière couche protectrice.

On définit finalement l'ensemble des éléments relaxés $\{\mathcal{E}_r\}$ comme suit :

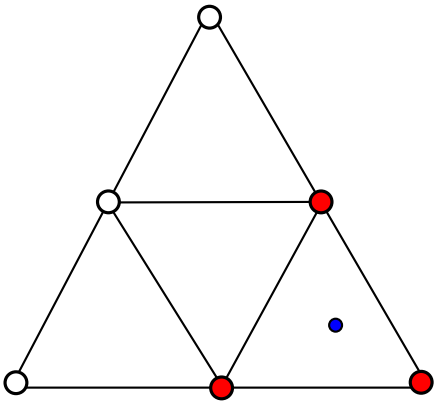
$$\{\mathcal{E}_r\} = \bigcup_j \left\{\mathcal{E}_r^j\right\} \tag{4.77}$$

4.4 Transfert d'une solution numérique

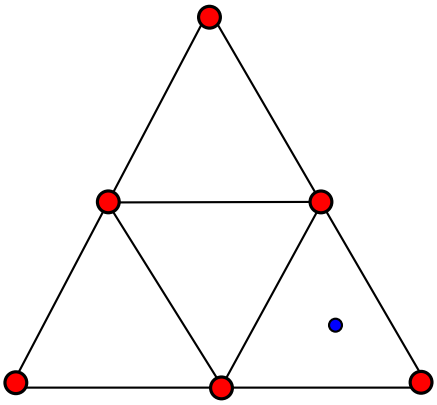
Une fois le nouveau maillage généré et relaxé, on souhaite idéalement pouvoir reprendre le calcul à partir de la dernière solution obtenue. Cela nécessite de transférer la solution courante de l'écoulement sur le nouveau maillage. Trois méthodes de transfert ont été utilisées : l'interpolation linéaire, l'interpolation consistante (quadratique), ainsi que la projection de Galerkin. Les deux dernières méthodes ont été implémentées durant nos travaux.

4.4.1 Interpolations

Nous avons distingué deux types d'interpolation : l'interpolation linéaire et l'interpolation consistante. L'interpolation consistante est une interpolation de même degré que celui de l'approximation polynomiale des variables dépendantes sur un élément. Si des éléments P1-P1 sont utilisés, l'interpolation consistante s'identifie donc à l'interpolation linéaire. La mathématisation relative à l'interpolation consistante ayant été présentée à la Section 2.3.3, nous ne reviendrons pas dessus ici. Seuls quelques détails relatifs à notre implémentation de ces interpolations sont fournis ici.



(a) Interpolation linéaire



(b) Interpolation consistante (quadratique)

Figure 4.9 Interpolation linéaire et interpolation consistante (en bleu : noeud auquel on interpole ; en rouge : noeuds de l'ancien maillage utilisés pour interpoler)

Interpolation linéaire

Pour un maillage composé d'éléments de Taylor-Hood P2-P1, notre interpolation linéaire se fait sur les sous-triangles des éléments. La situation est représentée sur la Figure 4.9a. Chaque sous-triangle est vu comme un élément P1-P1. Pour chaque nouveau nœud du maillage (à l'exception des nœuds situés sur une frontière du domaine), l'interpolation est conduite en trois étapes :

(1) Identifier l'élément de l'ancien maillage qui contient le nouveau nœud : cette phase s'appuie sur une arborescence de type *quadtree*, utilisée pour stocker l'ancien maillage. Une présentation succincte d'une telle arborescence est proposée à l'Annexe C.

(2) Identifier le sous-triangle de l'élément qui contient le nouveau nœud : on fait ici l'usage des coordonnées barycentriques.

(3) Dans le sous-triangle retenu, procéder à l'interpolation linéaire de toutes les variables dépendantes.

Les nœuds sur la frontière du domaine sont traités différemment, au moyen d'une interpolation linéaire 1D exposée dans les travaux de Vautrin [150]. Ceci permet de limiter les erreurs d'interpolation lorsque les frontières du domaine sont incurvées.

Interpolation consistante

L'interpolation consistante est quant à elle implémentée au niveau des éléments (cf. Figure 4.9b). Elle ne repose donc que sur les étapes 1 et 3 de l'interpolation linéaire. De fait, son coût reste très proche de celui de l'interpolation linéaire, et ce malgré qu'il faille évaluer deux fois plus de fonctions de forme. De la même façon que pour l'interpolation linéaire, les nœuds sur les frontières du domaine sont traités avec un interpolation consistante 1D [150].

4.4.2 Projection de Galerkin

La projection de Galerkin, connue aussi sous le nom de projection L^2, est une méthode de transfert alternative. Elle repose sur la résolution d'un système linéaire et se trouve donc de fait sensiblement plus coûteuse qu'une interpolation linéaire ou consistante. Dans la suite on aborde en premier lieu le formalisme de la projection de Galerkin, dont on verra qu'il est relativement simple. Pour autant son implémentation, que l'on aborde dans un second temps, n'est pas triviale. On illustre finalement comment la projection de Galerkin peut s'effectuer localement dans le domaine.

Formalisme mathématique

Nous reprenons ici les notations introduites à la Section 2.3.1, que nous allons néanmoins compléter. Le maillage $\mathcal{M}_d$ est doté de $\mathcal{N}_d$ fonctions de base, représentés par l'ensemble $\{\Phi_d^i\}$. Similairement, le maillage $\mathcal{M}_t$ comporte $\mathcal{N}_t$ fonctions de base, formant l'ensemble $\{\Phi_t^i\}$. On pose finalement $\mathcal{V}_t$ l'espace vectoriel généré par les fonctions de base de $\mathcal{M}_t$: $\mathcal{V}_t = \text{span}\,\{\Phi_t^i\}$. La projection de Galerkin est définie de sorte à fournir, au sens de la norme L^2 (ici notée $\| \,.\, \|$ par commodité), une solution transférée q_t optimale. La solution q_t obtenue vérifie donc :

$$\| \, q_d - q_t \, \| = \min_{q \in \mathcal{V}_t} \| \, q_d - q \, \| \tag{4.78}$$

On a $q \in \mathcal{V}_t$, on peut donc écrire :

$$q = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} \Phi_t^i q_i \tag{4.79}$$

Le membre de droite de l'Équation (4.78) peut être déterminé par la méthode des moindres carrés :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \left(q_d - q\right)^2}{\partial q_i} \, \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall i \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!] \tag{4.80}$$

En injectant la forme de q de l'Équation (4.79) dans l'équation précédente, et en notant que $q = q_t$, il vient [5] :

$$\int_{\Omega_t} q_d \Phi_t^i \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_t} q_t \Phi_t^i \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall i \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!] \tag{4.81}$$

Supposons maintenant que l'espace $\mathcal{V}_t$ possède la fonction unité $\tilde{q} = 1$. On peut écrire :

$$1 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_t} \tilde{q}_i \Phi_t^i \tag{4.82}$$

Dans notre cas, tous nos maillages sont composés exclusivement d'éléments de Taylor-Hood P2-P1. La fonction unité est donc bien contenue dans $\mathcal{V}_t$. Il en résulte la propriété de conservation de la projection de Galerkin :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \tilde{q}_i q_d \Phi_t^i \, \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega_t} \tilde{q}_i q_t \Phi_t^i \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall i \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!] \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega_t} q_d \underbrace{\sum_{i=0}^{\mathcal{N}_t} \tilde{q}_i \Phi_t^i}_{=1} \, \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega_t} q_t \underbrace{\sum_{i=0}^{\mathcal{N}_t} \tilde{q}_i \Phi_t^i}_{=1} \, \mathrm{d}\Omega \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega_t} q_d \, \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega_t} q_t \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{4.83}$$

5. Notons que résoudre le problème $q_t = q_d$ sur Ω_t par la méthode de Galerkin conduit au même résultat.

En pratique nous projetons successivement les champs de chaque variable dépendante du problème fluide à résoudre. Cette propriété est donc très intéressante d'un point de vue physique. Elle signifie que nous aurons conservation de la quantité de mouvement sur Ω_t *en régime incompressible*. Remarquons que le résultat de l'équation précédente demeure valide sur toute surface $\Omega \subset \Omega_t$. Ce résultat sera donc *a fortiori* valide sur tout élément de $\mathcal{M}_t$. Toutefois, dans le cas général nous aurons :

$$\int_{\Omega_d} q_d \, \mathrm{d}\Omega \neq \int_{\Omega_t} q_t \, \mathrm{d}\Omega \tag{4.84}$$

excepté dans le cas particulier où $\Omega_t = \Omega_d$.

Revenons maintenant à l'Équation (4.81). En notant que $q_t \in \mathcal{V}_t$ et que $q_d \in \mathcal{V}_d = \mathrm{span}\,\{\Phi_d^i\}$, il vient :

$$\int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_t} q_t^j \Phi_t^j \Phi_t^k \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} q_d^i \Phi_d^i \Phi_t^k \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall k \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!] \tag{4.85}$$

Ce qui sous forme matricielle donne le système linéaire suivant :

$$\underline{\boldsymbol{M}}_t \cdot \boldsymbol{q}_t = \underline{\boldsymbol{M}}_{td} \cdot \boldsymbol{q}_d \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\boldsymbol{M}}_t \cdot \boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{Q}_d \tag{4.86}$$

où les matrices masse $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{M}}_t)_{ij} &= \int_{\Omega_t} \Phi_t^i \Phi_t^j \, \mathrm{d}\Omega \qquad i, j \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!]^2 \\ (\underline{\boldsymbol{M}}_{td})_{ij} &= \int_{\Omega_t} \Phi_t^i \Phi_d^j \, \mathrm{d}\Omega \qquad i \in [\![1, \mathcal{N}_t]\!], j \in [\![1, \mathcal{N}_d]\!] \end{aligned}$$

De par sa composition la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ est souvent appelée *matrice mixte*. Dans le cas général, il s'agira d'une matrice rectangulaire. Bien que formellement simple, la projection de Galerkin demeure difficile à implémenter *rigoureusement* à cause de cette matrice. En effet, si les fonctions de base de $\mathcal{M}_t$ sont quadratiques sur chaque élément de $\mathcal{M}_t$, ce n'est pas le cas de celles provenant de $\mathcal{M}_d$. Implémenter la projection de Galerkin de sorte à évaluer cette matrice exactement n'est donc pas si évident.

Implémentation

L'implémentation de la projection de Galerkin est construite autour de deux grandes étapes successives :

(1) Assembler le système linéaire de l'Équation (4.86). Cela passe par les sous-étapes suivantes :

   (a) Définir la représentation en matrice creuse des matrices $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$.

   (b) Assembler la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_t$.

   (c) Assembler la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$.

   (d) Évaluer le produit $\underline{\boldsymbol{M}}_{td} \cdot \boldsymbol{q}_d$.

(2) Résoudre le système linéaire au moyen du solveur direct PARDISO. Là encore, le fonctionnement interne de PARDISO implique plusieurs sous-étapes :

   (a) Analyser le système linéaire : entre autres traitements, cette étape vérifie la cohérence de la représentation en matrice creuse de $\underline{\boldsymbol{M}}_t$.

   (b) Factoriser la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ sous forme LU.

   (c) Résoudre le système linéaire en parallèle (mémoire partagée) par substitution successive.

Toutes les variables dépendantes de nos problèmes ont une solution quadratique par morceaux, à l'exception de la pression qui est linéaire par morceaux. Afin d'uniformiser la projection de Galerkin nous avons cependant utilisé une représentation quadratique par morceaux de la pression en évaluant sa valeur aux nœuds milieux des éléments de $\mathcal{M}_t$. Il vient ainsi que les matrices $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ sont identiques pour tous les champs solution à projeter. La phase d'assemblage n'est donc à réaliser dans son entier que lors du traitement du premier champ de la solution. De la même façon, l'analyse du système linéaire et sa factorisation ne peuvent être complétée qu'une seule fois. Plus précisément, le traitement du second champ solution et des suivants ne requiert donc que les sous-étapes (1-d) et (2-c), ce qui réduit considérablement le coût total de la projection de Galerkin. Par ailleurs, et comme le laisse deviner l'étape (1-a), le coût total de la projection et l'encombrement mémoire peuvent encore être notablement réduits en utilisant une formulation du système linéaire en matrice creuse. Sachant que les fonctions de base d'un maillage sont construites de sorte à avoir un support minimal (cf. Section 3.2.2), on peut en effet affirmer que deux nombreux termes des matrices $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ seront nuls. Une description détaillée de l'étape (1) est proposée dans ce qui suit. L'étape (2) de la projection de Galerkin n'a pas demandé un effort d'implémentation important puisque nous utilisons le solveur PARDISO. Cette seconde étape consiste seulement à établir les bons paramètres d'entrée de PARDISO.

L'assemblage du système linéaire est sans doute la partie la plus complexe et coûteuse de l'implémentation. L'étape (1-a) aboutit à un stockage au format CSR des matrices $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$. La mise en place d'un tel format exige de déterminer au mieux les termes des matrices qui seront vraisemblablement non nuls. Dans le cas de la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_t$, cette opération est simple. Une fonction de base Φ_t^i partage une partie de son support avec la fonction de base Φ_t^j si et seulement si les nœuds i et j apparaissent conjointement dans la connectivité d'un élément de $\mathcal{M}_t$. Pour la ligne i de la matrice, les termes non nulles seront donc positionnées dans les colonnes j correspondant aux nœuds directement voisins du nœud i. Ces nœuds sont aisément obtenus en utilisant la connectivité inverse (nœud vers élément) du nœud i et la connectivité (élément vers nœud) de chaque éléments de cette connectivité inverse. Les seules subtilités résident dans l'élimination des doublons [6], puis dans le tri des nœuds voisins par ordre croissant, pour finalement obtenir une liste ordonnée des nœuds voisins. Ce tri est nécessaire pour établir le vecteur $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{a}}^{M_t}$ de la structure en matrice creuse. Le vecteur $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{a}}^{M_t}$ est quant à lui obtenu à partir du nombre de nœuds voisins pour chacun des nœuds de $\mathcal{M}_t$.

Déterminer les termes non nulles de la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ est un peu moins évident. Une fonction de base Φ_t^i partagera une partie de son support avec une fonction de base Φ_d^j si les nœuds i et j appartiennent respectivement à un élément de $\mathcal{M}_t$ et un élément de $\mathcal{M}_d$ dont l'intersection est non vide. Récupérer les indices j tels que $(\underline{\boldsymbol{M}}_{td})_{ij} \neq 0$ exige donc de déterminer les éléments $\left\{e_d^{ik}\right\}$ de $\mathcal{M}_d$ ayant une intersection non vide avec un des éléments de $\mathcal{M}_t$ figurant dans la connectivité inverse du nœud i. Afin de déterminer l'existence d'une intersection entre deux éléments triangulaires, nous avons fait le choix d'utiliser un algorithme de type *hitbox*. Le principe de fonctionnement de cet algorithme est illustré sur la Figure 4.10a. On considère qu'il y a collision (ou intersection) entre deux éléments dès lors que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} h_1 + h_2 \leq H \\ w_1 + w_2 \leq W \end{cases} \tag{4.87}$$

Dans le cas d'éléments triangulaires, cet algorithme peut donner lieu à de fausses intersections, comme l'illustre justement la Figure 4.10b. En pratique nous n'éliminerons donc pas toujours tous les termes nuls de la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$. Mais la simplicité extrême de l'algorithme compense amplement cette limite. Pour des raisons évidentes de coût de calcul, nous avons également souhaité éviter une recherche naïve des couples d'éléments en intersection, qui consisterait à effectuer $N_{et}\, N_{ed}$ fois le test de collision, où N_{et} et N_{ed} sont les nombres d'éléments respectifs des maillages $\mathcal{M}_t$ et $\mathcal{M}_d$. En guise d'alternative, nous avons construit une unique boucle sur les éléments de $\mathcal{M}_t$. Pour chaque élément e_t, on évalue la position de son centroïde. On cherche alors l'élément e_d de $\mathcal{M}_d$ qui le contient au moyen de la structure en *quadtree* utilisée

6. Un nœud voisin j peut apparaître dans la connectivité de plusieurs éléments voisins.

pour stocker $\mathcal{M}_d$. La collision entre e_t et e_d est évidente, mais il est aussi fort probable que certains des éléments voisins de e^d soient également en collision avec e^t. Par un mécanisme de couches successives, similaire à celui utilisé pour générer les poches d'éléments à retirer dans le remaillage local (cf. Section 4.2.2), les tests de collisions sont étendus aux éléments proches de e_d. Ces tests se poursuivent sur les éléments d'une nouvelle couche si au moins une collision a été détectée dans la couche courante. Une fois l'ensemble $\left\{e_d^{ik}\right\}$ ainsi obtenu, on détermine les indices j des colonnes tels que $(\underline{\boldsymbol{M}}_{td})_{ij} \neq 0$ en récupérant l'indice des nœuds de chaque élément de $\left\{e_d^{ik}\right\}$. Une fois encore, on termine par l'élimination des doublons et le tri des nœuds ainsi récupérés pour obtenir une liste ordonnée croissante de l'indice de ces nœuds. Ce traitement nous permet cette fois d'établir les vecteurs $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{a}}^{M_{td}}$ et $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{a}}^{M_{td}}$ de la structure en matrice creuse de $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$. La Figure 4.11 illustre sur un exemple les nœuds j de $\mathcal{M}_d$ à considérer pour un nœud i de $\mathcal{M}_t$.

Venons en maintenant à l'étape (1-b). Nous avons profité de la propriété de symétrie de $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ pour ne stocker que les termes de la partie triangulaire supérieure. En conséquence la quantité de mémoire requise pour stocker $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ a pu être significativement amoindrie. Procéder ainsi permettait également d'utiliser des algorithmes de factorisation et de résolution plus performants dans le solveur PARDISO. Pour rester cohérent avec le format CSR, nous désignerons dans la suite la matrice $\underline{\boldsymbol{M}}_t$ par la notation vectoriel $\boldsymbol{M}_t$. Pour la même raison nous désignerons aussi plus bas $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ par le vecteur $\boldsymbol{M}_{td}$.

Nous avons adopté une approche éléments finis pour établir $\boldsymbol{M}_t$. Nous avons donc procédé par assemblage de matrices élémentaires. Cette approche présente l'avantage de pouvoir se paralléliser aisément. Pour un élément e_t de $\mathcal{M}_t$, une matrice élémentaire $\underline{M}_t^e$ est donnée par :

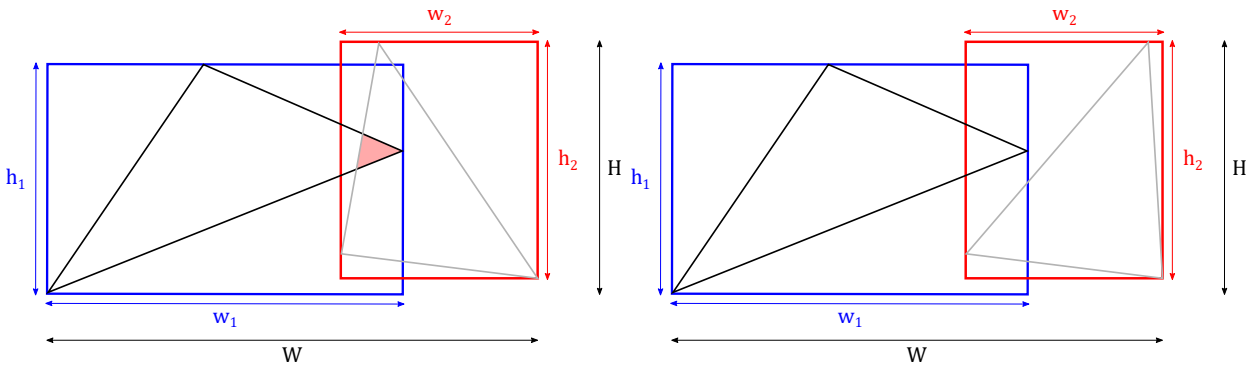
$$(\underline{M}_t^e)_{ij} = \int_{\Omega_e} \Phi_t^i \Phi_t^j \, \mathrm{d}\Omega \qquad i, j \in [\![1, 6]\!]^2 \tag{4.88}$$

Les intégrandes de chacune des termes de la matrice sont des polynômes d'ordre 4. Si l'élément e_t est sub-paramétrique, on peut évaluer les termes de la matrice exactement à partir d'une quadrature de Gauss-Legendre sur l'élément de référence :

$$(\underline{M}_t^e)_{ij} = \sum_{l=1}^{n_g} \Phi_t^i(l) \Phi_t^j(l) \omega(l) \left|J_e\right|(l) \qquad i, j \in [\![1, 6]\!]^2 \tag{4.89}$$

où n_g est le nombre de points de Gauss de la quadrature. Chaque terme de la matrice peut alors être facilement assemblée dans $\boldsymbol{M}_t$ grâce au vecteur d'adressage de l'élément et aux vecteurs $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{a}}^{M_t}$ et $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{a}}^{M_t}$.

Il reste maintenant à assembler le vecteur $\boldsymbol{M}_{td}$, ce qui fait l'objet de l'étape (1-c). Une fois encore nous opérons par assemblage de matrices élémentaires afin de pouvoir paralléliser le



(a) Cas d'une vraie intersection (b) Cas d'une fausse intersection

Figure 4.10 Détection des intersections entre les éléments du nouveau maillage et du précédent par l'algorithme de type *hitbox*

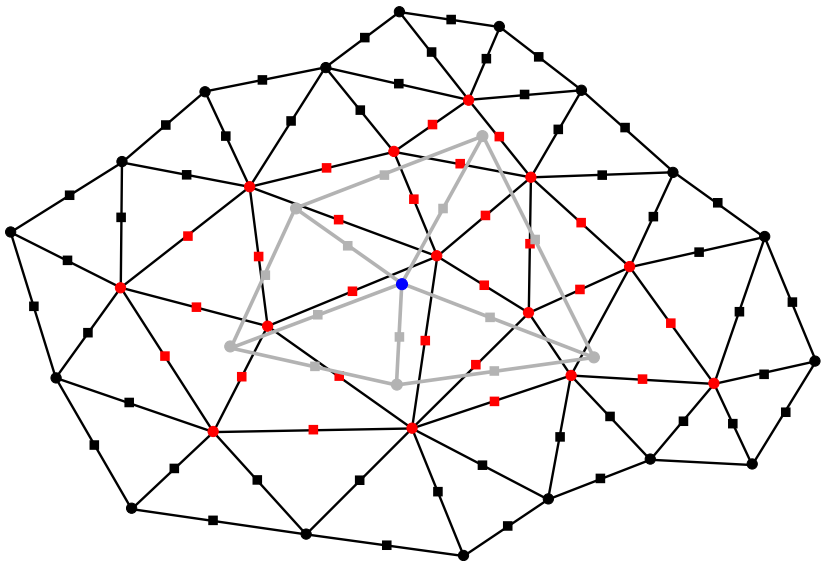


Figure 4.11 Visualisation des nœuds de l'ancien maillage (en rouge) ayant une influence sur le nœud bleu du nouveau maillage. Les fonctions de base respectivement liées à chacun des nœuds rouges partagent en effet une partie de leur support avec celle liée au nœud bleu.

code. Cette étape n'en reste pas moins délicate pour autant. La matrice élémentaire $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^{e}$ est ici rectangulaire, avec 6 lignes mais un nombre de colonne n_c propre à chaque élément de $\mathcal{M}_t$. La valeur de n_c pour un élément donné peut néanmoins se déduire facilement à partir de $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{a}}^{M_t}$. Les dimensions de $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^{e}$ établies, il faut maintenant évaluer chacun de ses termes. À cette fin, nous avons mis à l'essai deux implémentations différentes. Elles procèdent par quadratures de Gauss sur l'élément de référence à partir :

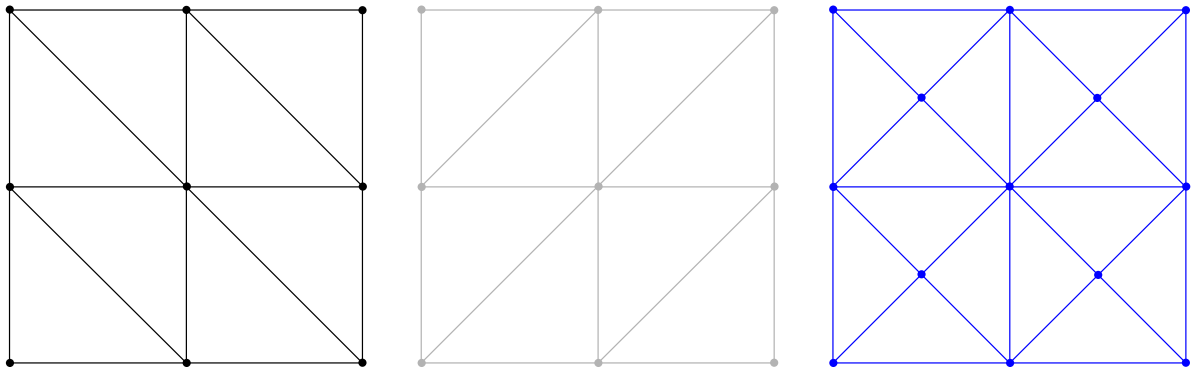
- de l'élément e_t (approche de Geuzaine [63]).
- de sous-éléments de e_t, obtenus en considérant les intersections de e_t avec les éléments de $\mathcal{M}_d$ (approche de Farrell [114, 124]).

L'approche de Geuzaine présente l'avantage d'être simple d'implémentation. Cependant la propriété de conservation donnée par l'Équation (4.83) n'est pas rigoureusement vérifiée. Pour l'élément e_t il vient :

$$\begin{aligned}(\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^{e})_{kl} &= \int_{\Omega_e} \Phi_t^k \Phi_d^l \,\mathrm{d}\Omega \qquad k \in [\![1,6]\!],\ l \in [\![1,n_c]\!] \\ &= \sum_{i=1}^{n_g} \Phi_t^k(i)\Phi_d^l(i)\omega(i)\,|J_e|\,(i)\end{aligned} \tag{4.90}$$

Notons que dans certains cas on aura $\Phi_d^l(i) = 0$ pour une majeure partie des points de Gauss i, voire potentiellement pour tous si l'algorithme de type *hitbox* a validé une fausse intersection. À l'exception de ce dernier cas, la quadrature de Gauss ne peut permettre une évaluation exacte de $(\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^{e})_{kl}$ car la fonction de base Φ_d^l n'est pas polynomiale sur l'élément e_t. C'est justement pour cela que la propriété de conservation n'est pas rigoureusement respectée avec l'approche de Geuzaine. Cette limite peut être en partie mitigée en augmentant le nombre de points de Gauss sur les éléments de $\mathcal{M}_t$, mais au détriment du coût total de la projection. L'approche de Geuzaine exige en effet de localiser l'élément de $\mathcal{M}_d$ contenant chaque point de Gauss de l'élément e_t. Afin d'accélérer la recherche, nous avons réduit la liste des éléments de $\mathcal{M}_d$ à tester à ceux en intersection présumée avec l'élément e_t.

L'approche de Farrell est plus complexe, mais permet d'obtenir la propriété de conservation de la projection à la précision machine. L'union de tous les sous-éléments des éléments de $\mathcal{M}_t$ forme un *supermesh*, ou maillage d'intersection, sur le domaine de calcul. La Figure 4.12 illustre un maillage d'intersection sur un exemple volontairement simple. Dans cet exemple l'intersection de deux éléments conduit naturellement à former un seul élément d'intersection. Une intersection valide de deux triangles définit en réalité 3 à 6 points d'intersection. La construction d'un maillage d'intersection est donc en général une tâche particulièrement délicate. Cela exige en effet une procédure qui impliquera des tests logiques sur des valeurs réelles, ce qui peut s'avérer dangereux. Notre procédure d'évaluation des intersections se



(a) Maillage $\mathcal{M}_d$ (b) Maillage $\mathcal{M}_t$ (c) Maillage d'intersection

Figure 4.12 Illustration d'un maillage d'intersection dans le cas le plus simple : les couples d'éléments en intersection définissent tous trois points d'intersection

décompose en deux phases :

(1) Évaluer si les sommets d'un triangle sont contenus dans l'autre et *vice-versa*.

(2) Évaluer les intersections entre les arrêtes des deux triangles et statuer sur leur validité.

La première phase est menée au moyen des coordonnées barycentriques. Lors du traitement des nœuds sommets du second triangle, il faut veiller à ne pas comptabiliser deux fois une même inclusion, ce qui peut se produire si un sommet du premier triangle est confondu avec un sommet du deuxième. Cette étape aboutit à n_1 inclusions valides. La seconde étape nécessite d'évaluer des intersections entre segments. Plusieurs méthodes sont possibles. Toutefois une méthode réellement digne d'intérêt doit éviter les disjonctions de cas, tout en minimisant le nombre de tests logiques sur des valeurs réelles. Par exemple, chercher la position de l'intersection à partir de deux équations cartésiennes de droite n'est en ce sens pas une solution viable. Pour traiter cette opération, nous avons retenu une méthode basée sur la distance signée d'un point à une droite. Cette méthode est également utilisée dans les travaux de Alauzet et Mehrenberger [118]. Considérons la situation illustrée sur la Figure 4.13. On cherche ici à établir la position du point d'intersection entre le segment $[AB]$ et la droite (CD). Le vecteur $\hat{\boldsymbol{n}}$, désignant ici une normale unitaire à (CD), est donné par :

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}} \begin{Bmatrix} y_C - y_D \\ x_D - x_C \end{Bmatrix} \tag{4.91}$$

L'équation cartésienne de la droite (CD) peut alors s'écrire :

$$n_x x + n_y y + c = 0 \quad \text{avec } c = -(x_C n_x + y_C n_y) \tag{4.92}$$

La distance signée d_M d'un point M du plan à la droite (CD) est ensuite fournie par la relation suivante :

$$d_M = n_x x_M + n_y y_M + c \tag{4.93}$$

On peut appliquer cette dernière relation aux points A et B pour calculer leur distance à la droite (CD), notées respectivement d_A et d_B. En écartant le cas où les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, il y a intersection entre la droite (CD) et le segment $[AB]$ si :

$$d_A \, d_B \leq 0 \tag{4.94}$$

Si cette relation n'est pas vérifiée, on peut directement passer au couple d'arêtes suivant. Dans le cas contraire, on poursuit en déterminant la position du point d'intersection P. On cherche pour cela son abscisse curviligne s_P sur $[AB]$. Celle-ci vérifie nécessairement la relation suivante :

$$d_A(s_B - s_P) + d_B(s_A + s_P) = 0 \tag{4.95}$$

où $s_A = 0$ et $s_B = 1$ sont les abscisses curvilignes respectives de A et B sur $[AB]$. Il vient donc immédiatement :

$$s_P = \frac{-d_A}{d_B - d_A} \tag{4.96}$$

Les coordonnées du points P sont alors données par :

$$x_P = x_A + s_P(x_D - x_C) \tag{4.97}$$

$$y_P = y_A + s_P(y_D - y_C) \tag{4.98}$$

Notons que la satisfaction de la condition donnée par l'Équation (4.94) implique que P soit sur le segment $[AB]$. Afin que le point d'intersection P soit valide, il doit également appartenir au segment $[CD]$. On définit pour cela les quantités m_C et m_D suivantes :

$$m_C = \frac{\| \overrightarrow{CP} \|}{\| \overrightarrow{CD} \|} \qquad m_D = \frac{\| \overrightarrow{DP} \|}{\| \overrightarrow{CD} \|} \tag{4.99}$$

Le point P sera également sur le segment $[CD]$ si la double condition suivante est satisfaite :

$$\begin{cases} 0 \leq m_C \leq 1 \\ 0 \leq m_D \leq 1 \end{cases} \tag{4.100}$$

Si le point P est valide, on termine en s'assurant qu'il n'a pas déjà été ajouté. Cette seconde étape dans l'évaluation des intersections conduit ainsi à considérer n_2 points d'intersection

distincts des n_1 points obtenus à l'issue de la première étape. Conformément à ce que nous avons dit plus haut, l'intersection de deux triangles sera valide si et seulement si :

$$3 \leq n_1 + n_2 \leq 6 \tag{4.101}$$

Si l'inégalité de gauche n'est pas vérifiée, il s'agit vraisemblablement d'une fausse intersection, injustement détectée par l'algorithme de type *hitbox*. En revanche si $n_1 + n_2 > 6$, la situation devient bloquante et la projection de Galerkin selon l'approche de Farrell échoue. Toutefois, la procédure d'évaluation des intersections, telle que nous l'avons décrite, n'a jamais conduit à une telle erreur.

Une fois l'intersection de deux triangles validée par le respect de la condition précédente, il faut encore former les sous-éléments sur cette intersection. Pour ce faire, nous utilisons à nouveau une procédure en trois étapes :

(1) Ordonner les points d'intersection précédemment obtenus.

(2) Former les sous-éléments en fonction du nombre de points d'intersection.

(3) Ajouter les nœuds milieux à chacun des sous-éléments.

L'ordonnancement des points peut se faire aisément à partir de la position du centroïde de la région d'intersection. Chaque point d'intersection i est repéré par l'angle θ_i qu'il décrit par rapport au centroïde et l'axe des x, tel qu'illustré sur la Figure 4.14. Les points d'intersection sont alors ordonnés par angle croissant. La connaissance du nombre de points d'intersection est ensuite suffisante pour former des éléments dans la région d'intersection. Finalement, les sous-éléments doivent être de même type que les éléments de $\mathcal{M}_t$ par souci de consistance, ce qui exige de leur ajouter un noeud au milieu de chacune de leurs arêtes. Dans le principe, il n'est pas nécessaire de stocker ces sous-éléments dès lors que l'évaluation de la matrice élémentaire ($\underline{\boldsymbol{M}}^e_{td}$) est terminée. Conserver en mémoire l'ensemble du maillage d'intersection reste cependant très intéressant, car il permet d'évaluer les erreurs de transferts commises sur chaque élément de $\mathcal{M}_t$ [124]. C'est donc le choix que nous avons fait. En pratique, nous construisons le maillage d'intersection en intégralité *avant* d'assembler la matrice mixte $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$.

L'évaluation des termes de la matrice élémentaire ($\underline{\boldsymbol{M}}^e_{td}$) se fait au moyen d'une boucle sur les sous-éléments de e_t. Soit n_{es} le nombre de sous-éléments sur l'élément e_t. Un terme de ($\underline{\boldsymbol{M}}^e_{td}$) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(\underline{\boldsymbol{M}}^e_{td})_{kl} &= \int_{\Omega_e} \Phi_t^k \Phi_d^l \,\mathrm{d}\Omega \qquad k \in [\![1,6]\!],\ l \in [\![1,n_c]\!] \\ &= \sum_{i=1}^{n_{se}} \int_{\Omega_i} \Phi_t^k \Phi_d^l \,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{4.102}$$

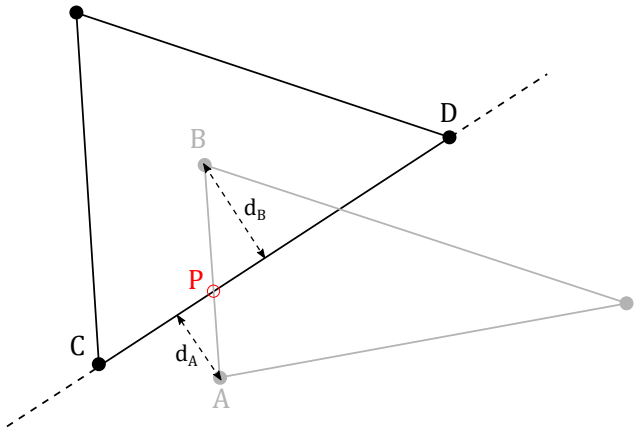


Figure 4.13 Évaluation du point d'intersection entre deux arrêtes de triangle, au moyen de la distance signée à une droite

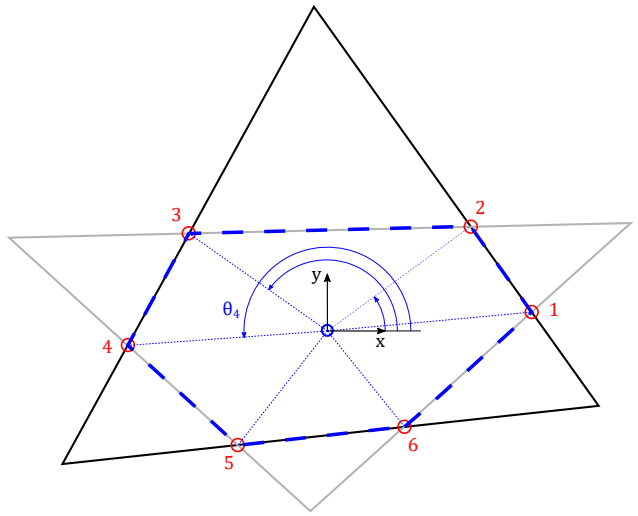


Figure 4.14 Numérotation des points d'intersection entre deux triangles, en vue de mailler la région d'intersection

Par construction du maillage d'intersection, les fonctions de base Φ_d^l sont quadratiques sur chacun des sous-éléments. Il en est de même pour les fonctions de base Φ_t^k. Tous les éléments du maillage d'intersection sont sub-paramétriques. Le produit des fonctions de base Φ_d^l et Φ_t^k peut donc être intégré exactement sur chacun d'eux, via un passage sur l'élément de référence et une quadrature de Gauss-Legendre :

$$(\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^e)_{kl} = \sum_{i=1}^{n_{se}} \sum_{m=1}^{n_g} \Phi_t^k(\boldsymbol{x}_m)\Phi_d^l(\boldsymbol{x}_m)\omega(\boldsymbol{x}_m)\left|J_e\right|_i(\boldsymbol{x}_m) \tag{4.103}$$

Tout comme pour l'assemblage de $\boldsymbol{M}_t$, celui d'une matrice élémentaire $(\underline{\boldsymbol{M}}_{td}^e)$ dans le vecteur $\boldsymbol{M}_{td}$ peut se faire simplement à partir des vecteurs associés de la structure en matrice creuse, $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{a}}^{M_{td}}$ et $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{a}}^{M_{td}}$.

L'étape (1) de la projection de Galerkin se termine en évaluant le membre de droite du système linéaire de l'Équation (4.86). Cette dernière sous-étape, très rapide en comparaison des précédentes, passe par l'évaluation du produit $\underline{\boldsymbol{M}}_{td} \cdot \boldsymbol{q}_d$ à partir de la structure en matrice creuse de $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$. Cette opération ne pause pas de problème particulier.

Traitement des frontières du domaine de calcul

La force de la projection de Galerkin réside dans sa capacité théorique à conserver l'intégrale des variables résolues lors du transfert de la solution, tout en minimisant l'erreur de transfert. En pratique, la propriété de conservation peut cependant être mise à mal dans certains cas, et ce même lorsque la projection s'opère à l'aide d'un maillage d'intersection.

Notamment, la précision de la projection de Galerkin peut se dégrader significativement à proximité des frontières incurvées du domaine. La cause de cette dégradation est illustrée sur la Figure 4.15. Physiquement, la quantité de mouvement présente dans les zones bleues de $\mathcal{M}_d$ ne peut pas être transférée sur $\mathcal{M}_t$. Par ailleurs, de la quantité de mouvement sera *in fine* présente dans les régions rouges alors qu'il n'y en pas dans ces mêmes régions sur le domaine défini par $\mathcal{M}_d$. Il résultera également de cette situation une diffusion de tous les champs solution projetés et d'éventuelles oscillations dans la solution projetée sur les éléments voisins. Dans le cas de l'approche de Geuzaine [63], un point de Gauss d'un élément de $\mathcal{M}_t$ peut n'appartenir rigoureusement à aucun élément de $\mathcal{M}_d$ et se verra donc attribuer l'élément de $\mathcal{M}_t$ le plus proche. Cela conduira à extrapoler les fonctions de forme de cet élément, ce qui n'est pas souhaitable en soi. Cependant, nous verrons dans les analyses présentées à la Section 5.5.1 que la méthode de Farrell semble perdre beaucoup plus vite en précision à proximité des frontières incurvées que la méthode de Geuzaine, au point que cette dernière surpasse la précision de la méthode de Farrell dans ces régions. Nous avons donc développé

deux approches pour mitiger au mieux les erreurs à proximité des frontières incurvées :

(1) Une projection *hybride*

(2) Une projection 1D sur les frontières du domaine

La projection hybride consiste à transférer la solution au moyen d'une combinaison des méthodes de Geuzaine et Farrell. Les éléments de $\mathcal{M}_t$ ayant au moins un nœud en contact avec une frontière du domaine sont traités avec l'approche de Geuzaine, tandis que les éléments au cœur du domaine sont traités par l'approche de Farrell. Cette approche se veut combiner les forces de chacune des méthodes. De plus, le surcoût engendré par l'approche hybride est moindre. Le seul traitement additionnel réside dans l'identification des éléments adjacents aux frontières du domaine.

Une projection de Galerkin 1D, appliquée successivement sur chacune des courbes frontière du domaine (qu'elles soient courbes ou non), s'est aussi avérée être un outil extrêmement intéressant. Elle reprend la plupart des opérations nécessaires à la projection 2D. Les principales différences se trouvent dans le traitement de l'étape (1-a). L'algorithme de type *hitbox* tel que présenté ne convient pas pour détecter les intersections entre des éléments 1D, de même qu'il n'est pas facile de travailler avec des coordonnées 2D dans un contexte 1D. Nous avons donc fait le choix de travailler à partir des paramétrisations des courbes frontière. Pour une courbe frontière donnée, on note $\mathcal{M}_{db}$ son ancienne discrétisation et $\mathcal{M}_{tb}$ la nouvelle. Utiliser la paramétrisation des courbes permet de traiter les courbes fermées et ouvertes sans distinction. Une version 1D de l'algorithme de type *hitbox*, basé sur les paramétrisations, peut alors être utilisée pour détecter les intersections entre les éléments 1D de $\mathcal{M}_{db}$ et ceux de $\mathcal{M}_{tb}$. Le reste des étapes de la projection de Galerkin se poursuit dans ce contexte 1D et ne présente que des différences mineures avec le cas 2D. Notons toutefois que l'assemblage de $\underline{\boldsymbol{M}}_{td}$ se fait systématiquement à l'aide d'un maillage d'intersection 1D, puisque les cas pathologiques évoqués en 2D ne peuvent pas se produire ici. La solution projetée vérifie alors nécessairement la propriété de conservation sur chaque courbe frontière Γ du domaine :

$$\int_{\Gamma_d} q_d \, \mathrm{d}l = \int_{\Gamma_t} q_t \, \mathrm{d}l \tag{4.104}$$

Cette propriété ne tient cependant plus exactement en considérant l'ensemble des courbes frontière, du fait de ce qu'il se passe aux nœuds de jonction entre les courbes. La solution ainsi projetée à la frontière reste cependant de meilleure qualité que celle issue de la projection 2D. Dans le cas d'un problème avec interface explicite, ce traitement est aussi garant du respect de la condition de compatibilité cinématique lors des reprises du calcul.Dans ce contexte, la projection de Galerkin 2D s'effectue par zone, ce qui peut conduire à des valeurs différentes d'un champ projeté sur deux nœuds jumeaux de l'interface.

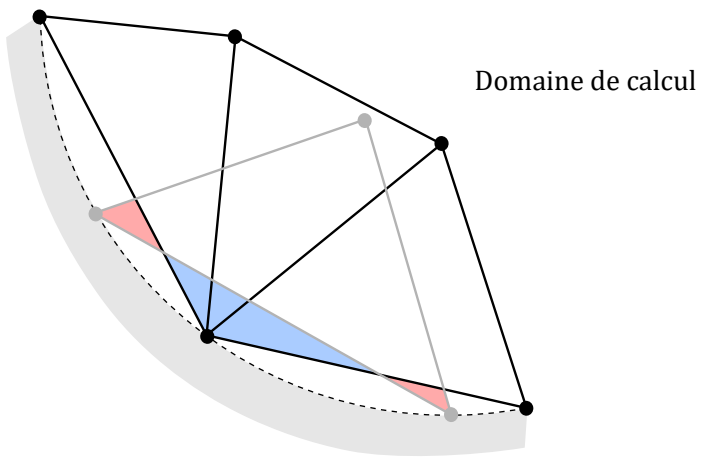


Figure 4.15 Cas pathologique pour la projection avec maillage d'intersection, à proximité directe d'une frontière ou interface incurvée

Utilisation locale

Jusqu'ici nous avons supposé qu'il était nécessaire de projeter la solution sur l'ensemble de la nouvelle discrétisation du domaine. Ce sera effectivement le cas si l'on procède à des adaptations de maillage prenant effet *globalement* sur le domaine. Nous avons vu dans les Sections 4.2 et 4.3.3 qu'il est cependant possible d'opérer localement tant pour l'adaptation que la relaxation du maillage. Nous avons donc développé une formulation locale de la projection de Galerkin. Nous avions respectivement noté $\{\mathcal{E}_r\}$ la liste des éléments du maillage ayant été relaxés, et $\{\mathcal{E}_a\}$ la liste les éléments issus de la génération locale du maillage. La projection de Galerkin peut être appliquée uniquement sur les éléments de $\mathcal{M}_t$ qui n'ont aucune correspondance exacte dans $\mathcal{M}_d$. La liste $\{\mathcal{E}_p\}$ des éléments de $\mathcal{M}_t$ sur lesquels la solution doit être projetée peut donc se restreindre à :

$$\{\mathcal{E}_p\} = \{\mathcal{E}_a\} \bigcup \{\mathcal{E}_r\} \tag{4.105}$$

Le coût total de la fabrication d'un maillage d'intersection dépend directement du nombre de couples d'éléments en intersection. Procéder localement permet de grandement réduire ce nombre de couples. En conséquence le coût de la génération du maillage d'intersection sera aussi notablement réduit. Par ailleurs la projection de Galerkin locale aboutit à un système linéaire à résoudre de taille réduite. Opérer localement permet donc un gain d'efficacité sur tous les plans. Cette approche impose uniquement de renuméroter les degrés de liberté projetés, afin d'assurer une numérotation continue dans le vecteur solution $\boldsymbol{q}_t$. Ce traitement induit toutefois un surcoût négligeable devant les économies de coût de calcul réalisées par ailleurs.

4.4.3 Cas des éléments isoparamétriques

Les procédures permettant de calculer les intersections entre deux éléments, ou de situer un point (un nœud ou un point de Gauss) dans un élément du maillage de fond, font toute l'hypothèse que les éléments de l'ancien et du nouveau maillage sont sub-paramétriques. Nous avons déjà mentionné que certains problèmes exigent des éléments isoparamétriques pour être résolus correctement (cf. Section 3.2.6). Dans le maillage $\mathcal{M}_t$, l'aspect isoparamétrique n'est visible que pour les éléments bordant une frontière incurvée du domaine. Dans le maillage $\mathcal{M}_d$, les éléments isoparamétriques peuvent en revanche être visibles dans l'ensemble du domaine, si une formulation ALE avec propagation des déplacements est active lors de la résolution. Le transfert de la solution sur le nouveau maillage est alors nécessairement détérioré, quelque soit la méthode de transfert utilisée (interpolation ou projection). Un nœud ou un point de Gauss peut être situé dans le mauvais élément du maillage de fond. Traiter l'intersection de deux éléments au moyen de la distance signée à une droite, lors de la construction d'un maillage d'intersection pour la projection de Galerkin, conduit forcément à des résultats erronés si les arrêtes des éléments sont désormais des arcs de parabole. L'algorithme de type *hitbox*, utilisé pour détecter les collisions entre éléments, perd également sa robustesse. Une intersection réelle peut en effet être écartée. La construction d'un maillage d'intersection devient donc très difficile à réaliser exactement.

Plutôt que d'ajuster notre implémentation aux cas des éléments isoparamétriques, nous avons cherché un moyen d'éviter au maximum les difficultés qu'ils impliquent. C'est dans ce but que nous avons introduit la formulation en maillage hybride, décrite à la Section 3.2.6. En utilisant cette formulation, seuls les éléments en contact avec une frontière incurvée, par au moins une arrête, sont isoparamétriques. Les erreurs d'interpolation ou de projection sont donc confinées à la proximité immédiate des frontières du domaine. Le traitement 1D (interpolation ou projection) de celles-ci limite toutefois considérablement ces erreurs. Dans le cas de la projection de Galerkin, l'approche hybride que nous avons évoquée permet également de réduire les erreurs.

4.5 Intégration temporelle

Dans notre implémentation de travail, la prise en compte du temps se fait par une approche semi-discrète. Par opposition aux éléments finis espace-temps, qui interpolent les variables dépendantes tant en espace qu'en temps, l'approche semi-discrète n'utilise des fonctions d'interpolation que pour l'espace. On parle également de *méthode des lignes*, puisqu'une seule variable indépendante (le temps) demeure continue après application de la méthode des élé-

ments finis. Le système d'équations aux dérivées partielles est alors transformé en un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) ou d'équations différentielles algébriques (EDA). Dans notre cas ce système est représentatif d'un problème aux valeurs initiales (PVI), aussi appelé problème de Cauchy. De nombreuses méthodes numériques permettent de résoudre ce genre de problème. Parmi celles-ci, nous avons fait le choix de retenir les méthodes BDF (« *Backward Differentiation Formula* ») pour réaliser l'intégration temporelle. Ce choix est fait pour s'inscrire dans la continuité des travaux menés au laboratoire. Dans la suite de cette section, nous commençons par établir la formulation générale de ces méthodes, avant de nous attarder sur quelques unes de leurs propriétés notables. On décrit ensuite plus en détails les aspects notoires de l'implémentation des méthodes BDF dans *Cadyf*.

4.5.1 Les méthodes BDF

Formulation

Les méthodes BDF font partie de la grande famille des méthodes linéaires multi-pas. Celles-ci gagnent en précision en utilisant l'information de plusieurs pas de temps. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}^{(1)}(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q}(t)) \\ \boldsymbol{q}(t_0) &= \boldsymbol{q_0} \end{cases} \tag{4.106}$$

où $\cdot^{(n)}$ désigne ici la dérivée partielle d'ordre n en temps :

$$\cdot^{(n)} = \frac{\partial^n \cdot}{\partial t^n} \tag{4.107}$$

Si l'on note n l'itération courante, et $\boldsymbol{q}_{n+i}$ et $\boldsymbol{f}_{n+i}$ les approximations numériques de $\boldsymbol{q}(t_{n+i})$ et $\boldsymbol{f}(t_{n+i}, \boldsymbol{q}(t_{n+i}))$, alors les méthodes linéaires multi-pas à p pas sont définies par la relation générale :

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \boldsymbol{q}_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p-1} b_j \boldsymbol{f}_{n-j} - h b_{-1} \boldsymbol{f}_{n+1} \tag{4.108}$$

Dans cette relation, le scalaire h désigne la taille du pas de temps (ou le pas de temps par commodité), supposé constant. Dans le cas à pas variable, cette forme reste valable mais h n'apparaît plus explicitement, tandis que les coefficients a_j et b_j deviennent fonction des différents pas de temps (en plus de rester fonction de p). Les coefficients a_j, et b_j sont caractéristiques de la méthode linéaire multi-pas utilisée. Le coefficient b_{-1} sera nul si la méthode utilisée est explicite. Ce n'est pas le cas des méthodes BDF qui sont justement des méthodes implicites. Les coefficients a_p et b_p sont également supposés non nuls afin que la méthode soit bien à p pas. Nous verrons plus loin que dans leur construction les méthodes

BDF possèdent bien cette forme générale.

Une méthode linéaire multi-pas peut utiliser la solution (coefficients a_j) ou la dérivée temporelle de la solution (coefficients b_j) aux instants précédents pour évaluer la solution au temps t_{n+1}. Les méthodes BDF correspondent au premier cas, tandis que les méthodes d'Adams, d'usage assez fréquent pour traiter les problèmes peu raides, correspondent au second cas.

Les méthodes BDF reposent sur l'interpolation de Newton. On note $\boldsymbol{\mathcal{P}}^p_{n+1}(t)$ le vecteur d'interpolation de Newton de la solution au temps t, construit à partir de la solution aux instants t_{n+1-k} $(k = 0, ..., p)$ délimitant p pas de temps. Ce vecteur s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^p_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{p} \left[\prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n+1-i}) \right] \boldsymbol{\alpha}^j_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} \mathcal{N}_j(t) \boldsymbol{\alpha}^j_{n+1} \tag{4.109}$$

où le vecteur α^j_{n+1} désigne la différence divisée arrière $[\boldsymbol{q}_{n+1}, ..., \boldsymbol{q}_{n+1-j}]$. Celle-ci et les autres peuvent être facilement obtenues par récurrence, selon la relation suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^0_{n+1} & = & [\boldsymbol{q}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}] & = & \boldsymbol{q}_{n+1} \\ \boldsymbol{\alpha}^j_{n+1} & = & [\boldsymbol{q}_{n+1}, ..., \boldsymbol{q}_{n+1-j}] & = & \dfrac{[\boldsymbol{q}_{n+1}, .., \boldsymbol{q}_{n+2-j}] - [\boldsymbol{q}_{n}, .., \boldsymbol{q}_{n+1-j}]}{t_{n+1} - t_{n+1-j}} \end{cases} \tag{4.110}$$

Pour faire plus simple, la construction des différences divisées arrières peut être schématisée comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc}
t_k & \rightarrow & \boxed{\boldsymbol{\alpha}^0_k} & & & & \\
\downarrow & & & \searrow & \boxed{\boldsymbol{\alpha}^1_k} & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
t_{k-1} & \rightarrow & \boldsymbol{\alpha}^0_{k-1} & & & \boxed{\boldsymbol{\alpha}^2_k} & \\
\downarrow & & & \searrow & \boldsymbol{\alpha}^1_{k-1} & \nearrow & \searrow \quad \boxed{\boldsymbol{\alpha}^3_k} \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\
t_{k-2} & \rightarrow & \boldsymbol{\alpha}^0_{k-2} & & & \boldsymbol{\alpha}^2_{k-1} & \\
\downarrow & & & \searrow & \boldsymbol{\alpha}^1_{k-2} & \nearrow & \\
 & & & \nearrow & & & \\
t_{k-3} & \rightarrow & \boldsymbol{\alpha}^0_{k-3} & & & &
\end{array} \tag{4.111}$$

En effet, si l'on considère les cas où $j = 1, 2$ il vient :

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{1} = \frac{[\boldsymbol{q}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n+1}] - [\boldsymbol{q}_n, \boldsymbol{q}_n]}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n}{h_{n+1}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{0} - \boldsymbol{\alpha}_{n}^{0}}{h_{n+1}} \tag{4.112}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{2} = \frac{[\boldsymbol{q}_{n+1}, \boldsymbol{q}_{n}] - [\boldsymbol{q}_n, \boldsymbol{q}_{n-1}]}{t_{n+1} - t_{n-1}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{1} - \boldsymbol{\alpha}_{n}^{1}}{h_{n+1} + h_n} \tag{4.113}$$

Notons que l'interpolation de Newton conduit au même résultat que l'interpolation de Lagrange. Seule l'écriture du polynôme d'interpolation diffère. Toutefois l'interpolation de Newton possède plusieurs avantages. Le vecteur d'interpolation $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{n+1}^{p}(t)$, avec l'écriture Lagrangienne, est donné par :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{n+1}^{p}(t) = \sum_{j=0}^{p} \left[\prod_{\substack{0 \leq i \leq j \\ i \neq j}} \frac{t - t_{n+1-i}}{t_{n+1-j} - t_{n+1-i}} \right] \boldsymbol{q}_{n+1-j} = \sum_{j=0}^{p} \mathcal{L}_j(t) \boldsymbol{q}_{n+1-j} \tag{4.114}$$

Les fonctions $\mathcal{L}_j$ sont les fonctions d'interpolation de Lagrange. Toutes ces fonctions sont des polynômes en t de degré p. L'interpolation de Lagrange ne fait donc pas clairement apparaître une base de l'espace des polynomes de degré p, là où l'écriture Newtonienne nous fournit une base canonique de cet espace via les fonctions $\mathcal{N}_j(t)$. L'écriture Newtonienne est également plus flexible. Si l'on souhaite retirer la contribution de l'instant t_{n+1-p} pour définir le vecteur d'interpolation, il suffit de définir la somme sur j avec $0 \leq j \leq p-1$. Réciproquement, l'ajout de la contribution d'un instant t_{n-p} est tout aussi simple. Dans les deux cas, le polynôme d'interpolation ne nécessite par d'être totalement réécrit. L'écriture Lagrangienne implique au contraire de venir modifier toutes les fonctions $\mathcal{L}_j(t)$, en plus d'ajouter ou retrancher un terme à la somme. Nous verrons dans la Section 4.5.2 que l'écriture Newtonienne est aussi très avantageuse pour dériver un indicateur de stabilité pour l'intégrateur en temps.

Afin d'évaluer la variation temporelle de la solution au temps t_{n+1}, on dérive le polynôme $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{n+1}^{p}(t)$ par rapport au temps. Il vient :

$$\begin{aligned} {\boldsymbol{\mathcal{P}}_{n+1}^{p}}^{(1)}(t) &= \sum_{j=0}^{p} \mathcal{N}_j^{(1)}(t) \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left[\sum_{i=0}^{j-1} \prod_{\substack{0 \leq k \leq j-1 \\ k \neq i}} (t - t_{n+1-k}) \right] \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{j} \end{aligned} \tag{4.115}$$

Une fois exprimée en $t = t_{n+1}$, la dérivée se simplifie pour donner :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{p}_{n+1}{}^{(1)}(t_{n+1}) = \sum_{j=1}^{p} \left[\prod_{k=1}^{j-1} (t_{n+1} - t_{n+1-k}) \right] \boldsymbol{\alpha}^{j}_{n+1} \tag{4.116}$$

En arrangeant les termes différemment cela peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{p}_{n+1}{}^{(1)}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{p} a_i \, \boldsymbol{q}_{n+1-i} \tag{4.117}$$

Pour $p = 2$, on aura par exemple :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{p}_{n+1}{}^{(1)}(t_{n+1}) = & \underbrace{\left[\frac{1}{h_{n+1}} + \frac{1}{h_{n+1} + h_n} \right]}_{a_0} \boldsymbol{q}_{n+1} - \underbrace{\left[\frac{1}{h_{n+1}} + \frac{1}{h_{n+1} + h_n} \left(1 + \frac{1}{h_n} \right) \right]}_{-\,a_1} \boldsymbol{q}_n \\ & + \underbrace{\frac{1}{(h_{n+1} + h_n) h_n}}_{a_2} \boldsymbol{q}_{n-1} \end{aligned} \tag{4.118}$$

Cette exemple permet de mettre en évidence la relation :

$$\sum_{i=0}^{p} a_i = 0 \tag{4.119}$$

Cette relation essentielle est vérifiée quelque soit la valeur de p et reste donc vrai même si le pas de temps est de taille variable. Sans elle, les méthodes BDF seraient incapables de traiter un écoulement stationnaire, ou présentant un état asymptotiquement stationnaire. D'autre part, vu que $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{p}_{n+1}{}^{(1)}(t_{n+1}) = \boldsymbol{f}_{n+1}$, il vient finalement :

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = \sum_{j=1}^{p} a_j \boldsymbol{q}_{n+1-j} - h_{n+1} b_{-1} \boldsymbol{f}_{n+1} \tag{4.120}$$

en posant $b_{-1} = \dfrac{1}{h_{n+1} a_0}$. Cela revient bien, moyennant un ré-arrangement des indices, à un cas particulier de la forme générale décrite par l'Équation (4.108). Cette relation est représentative de la méthode BDF à p pas, que l'on appellera désormais méthode BDF-p pour alléger l'écriture.

Dans le cadre de la résolution éléments finis, l'équation précédente servira de base pour déterminer les dérivées temporelles aux points de Gauss ou aux nœuds des éléments. À partir des valeurs aux points de Gauss, on pourra compléter l'évaluation des résidus élémentaires.

Propriétés numériques

Les propriétés notables des BDF que nous allons exposer ici ont été établies pour la résolution d'un problème de Cauchy, tel que celui défini par l'Équation (4.106), par une méthode multi-pas utilisant une taille de pas de temps h fixe. La théorie mathématique autour de des méthodes multi-pas a été en grande partie développée par Dahlquist [4, 7]. Cette théorie énonce deux théorèmes d'intérêt majeur :

1) La première barrière de Dahlquist : une méthode linéaire multi-pas à k pas sera consistante d'ordre $r \leq k+2$ si k est pair, et consistante d'ordre $r \leq k+1$ si k est impair.
2) La seconde barrière de Dahlquist : seuls les méthodes linéaires multi-pas consistantes d'ordre $r \leq 2$ peuvent être A-stables.

La première barrière de Dahlquist réfère à la notion de consistance de la méthode. Une méthode est dite consistante si elle permet de représenter exactement le problème de Cauchy lorsque $h \to 0$. Mathématiquement cela se traduit par la satisfaction de la relation suivante pour l'erreur de troncature locale τ_h :

$$\lim_{h \to 0} \tau_h = 0 \tag{4.121}$$

Qui plus est, si l'erreur de troncature locale vérifie $\tau_h = O(h^r)$ avec $r \geq 1$, alors la méthode est dite consistante d'ordre r. Dans la Section 4.5.2, nous reviendrons sur la définition de l'erreur de troncature locale, avant de l'appliquer aux méthodes BDF. Selon Hairer et Wanner [121] la consistance d'ordre r est obtenue si, partant d'une solution initiale exacte, la méthode linéaire multi-pas fournit la solution exacte de l'équation :

$$\boldsymbol{q}^{(1)}(t) = mt^{m-1} \qquad \forall m \in [\![1, r]\!] \tag{4.122}$$

La propriété de A-stabilité évoquée dans la seconde barrière a également été introduite par Dahlquist. Une méthode linéaire multi-pas est dite A-stable si toutes les solutions (avec $n \to \infty$) données par l'Équation (4.108) tendent vers 0 lorsque la méthode est appliquée avec un pas fixe $h > 0$ à un problème de la forme :

$$\boldsymbol{q}^{(1)}(t) = \beta \boldsymbol{q} \tag{4.123}$$

où β est ici un nombre complexe avec une partie réelle négative. La propriété de A-stabilité traduit la capacité d'une méthode numérique à fournir une solution $\boldsymbol{q}_n$ proche de $\boldsymbol{q}(t_n)$ quelque soit la valeur de t_n, si la solution initiale $\boldsymbol{q}_0$ est suffisamment proche de $\boldsymbol{q}(t_0)$. Si la méthode vérifie cette propriété pour $\beta = 0$, la méthode est dite stable (ou 0-stable). Si le problème de Cauchy à résoudre n'est pas numériquement raide, le théorème d'équivalence de Dahlquist

stipule qu'une méthode linéaire multi-pas est convergente si et seulement si elle est consistante et stable. Ce théorème est en tout point analogue au théorème de Lax [5], formulé pour les méthodes aux différences finis. Un théorème de convergence additionnel stipule que si la méthode linéaire multi-pas est consistance d'ordre r et stable, alors elle également convergente d'ordre r. Toutefois cette théorie ne tient plus pour les problèmes numériquement raides. Selon Hairer et Wanner [121], ce type de problème survient entre autres lorsque le système d'EDOs provient d'EDPs paraboliques discrétisées spatialement. L'application de la méthode des éléments finis aux équations de Navier-Stokes et instationnaires nous place justement dans une situation. Il n'existe pas vraiment de définition universelle de la raideur numérique. Toutefois un problème numériquement raide est souvent décrit comme un problème exigeant une taille de pas de temps h très petite pour assurer la stabilité de la résolution dans le cas des méthodes explicites. Dans le cadre d'un tel problème la convergence d'ordre r de la méthode d'intégration n'est garantie que si la méthode est consistante d'ordre r et A-stable. Une méthode qui ne serait que 0-stable sera alors dit conditionnellement stable, et donc conditionnellement convergente. Il est possible de montrer que les méthodes multi-pas explicites ne peuvent jamais être A-stable.

Dans le cas des méthodes BDF, il est plus précisément démontré qu'une méthode BDF-p est consistante d'ordre p, ce qui est bien en accord avec la première barrière. Les méthodes BDF étant implicites, l'application de la seconde barrière permet alors de dire que seuls les méthodes BDF-1 et BDF-2 peuvent être A-stables. En pratique, on démontre bien que ces méthodes sont A-stables. Il est par ailleurs démontré que les méthodes BDF-p avec $p > 6$ ne vérifient pas la propriété de 0-stabilité. Elles sont donc inutilisables en pratique. Les méthodes BDF-3 à BDF-6 seront quant à elles conditionnellement stables.

Tout ce qui précède a été établi pour un problème de Cauchy, soit un système d'EDOs muni de conditions initiales. Dans les faits, les équations de Navier-Stokes instationnaires forment un système d'EDAs semi-explicite d'index 2. Le qualificatif semi-explicite réfère à un cas particulier des systèmes d'EDAs. Il réfère à un système d'EDOs muni d'une contrainte. Dans le cas des équations de Navier-Stokes en régime incompressible, la contrainte n'est autre que $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$. Par ailleurs la notion d'index est une mesure de la distance d'un système d'EDAs à un système d'EDOs [109]. Cette distance correspond au nombre d'opération de dérivation qu'il faut appliquer sur les équations du système d'EDAs pour retomber sur un système d'EDOs. Dans leur travaux, Hay *et al.* [131] soulignent bien cette problématique que posent les équations de Navier-Stokes. Toutefois les auteurs rappellent dans ces mêmes travaux que les propriété de consistance et de stabilité des méthodes BDF demeurent valides pour les systèmes d'EDAs semi-explicites d'index 2. Cela signifie notamment que l'ordre de convergence de l'erreur temporelle commise sur la pression demeure optimal. Ce n'est pas le

cas pour certaines méthodes IRK [131].

Dans notre implémentation, les méthodes d'ordre 1 à 5 sont disponibles. Toutefois, nous n'utiliserons en pratique que les méthodes d'ordre 1 à 3 pour limiter les risques d'instabilités numériques.

4.5.2 Formulation adaptative

La formulation des méthodes BDF que nous utilisons est *hp*-adaptative. Elle permet donc de voir varier la taille h du pas de temps, ainsi que l'ordre p de l'intégrateur temporel au cours de la simulation. Un mécanisme de rejet de pas de temps permet également de contrôler plus finement la précision de l'intégration.

Adaptation du pas de temps

L'adaptation du pas de temps est un outil intéressant pour contrôler le niveau de l'erreur localement introduite à chaque pas de temps. Plus précisément l'adaptation vise à maintenir un niveau d'erreur locale e_0 constant au cours du calcul, ce niveau étant spécifié par l'utilisateur (on parlera plus bas de tolérance d'erreur). On note $\boldsymbol{e}_n$ l'erreur locale introduite sur le dernier pas de temps (c'est à dire entre les instants t_{n-1} et t_n). Il faut bien distinguer l'erreur locale de l'erreur globale, qui résulte elle de l'accumulation des erreurs locales. L'erreur globale est bien souvent inaccessible, car nous n'avons pas accès à la solution exacte du problème et la combinaison des erreurs locales est imprévisible. Néanmoins, On peut tenter d'estimer l'erreur locale commise en valeur absolue. Pour ce faire, on suppose que les solutions fournies par le schéma d'intégration aux instants précédents sont exactes. On évalue alors au temps t_n une estimation de l'erreur de troncature locale τ_h dont nous avons déjà parlée. Celle-ci se définit comme l'erreur qui résulte de l'injection de la solution exacte dans le schéma d'intégration temporel utilisé pour résoudre le problème de Cauchy [52]. Ainsi, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}(t_n)) = \boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t_n), t_n) \tag{4.124}$$

Dans la majorité des cas, on aura $\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}(t_n)) \neq 0$. Une estimation de l'erreur de troncature a été dérivée dans les travaux de Hay *et al.* [131], dans le cas où l'intégratation temporelle est conduite au moyen des méthodes BDF. Nous en retranscrivons l'essence dans la suite. En injectant dans l'équation précédente l'approximation $\boldsymbol{f}_n$ fournie par la méthode BDF-p à partir de la solution exacte, il vient :

$$\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}(t_n)) = \sum_{i=0}^{p} a_i \boldsymbol{q}(t_n - H_i) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t_n), t_n) \tag{4.125}$$

où $H_i = t_n - t_{n-i}$. Pratiquons maintenant un développement de Taylor d'ordre q sur chacun des termes de la somme à partir de la solution numérique et non plus de la solution exacte. Pour tout i on obtient :

$$\boldsymbol{q}(t_n - H_i) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{H_i^k}{k!} \boldsymbol{q}_n^{(k)} + O(H_i^{q+1}) \tag{4.126}$$

De plus, en notant que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t_n), t_n) \approx \boldsymbol{q}_n^{(1)}$, et que $\boldsymbol{q}(t_n) \approx \boldsymbol{q}_n$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}_n) \approx \sum_{k=0}^{q} C_k \boldsymbol{q}_n^{(k)} \tag{4.127}$$

où les coefficients C_k sont donnés par :

$$C_k = \frac{(-1)^k}{k!} \left[\sum_{i=1}^{p} a_i H_i^k - \delta_{1k} \right] \tag{4.128}$$

Nous avons mentionné plus haut qu'une méthode BDF-p est consistante d'ordre p sur l'évaluation de la dérivée temporelle. Il vient donc :

$$C_k = 0 \qquad \forall k \in [\![0, p]\!] \tag{4.129}$$

Une approximation au premier ordre non nul de l'erreur de troncature locale, pour une méthode BDF-p, est donc finalement donnée par :

$$\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}_n) \approx C_{p+1} \boldsymbol{q}_n^{(p+1)} \tag{4.130}$$

Lorsque la méthode BDF est appliquée dans sa région de stabilité et que la solution $\boldsymbol{q}$ décrit une fonction suffisamment régulière, Ascher et Petzold [52] ont montré la relation suivante [7] :

$$h_n \left| \boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{q}_n) \right| = \left| \boldsymbol{e}_n \right| (1 + O(h_n)) \tag{4.131}$$

En supposant les deux conditions précédentes respectées on obtient donc, pour la méthode BDF-p, l'estimateur suivant pour l'erreur locale :

$$\left| \boldsymbol{e}_n \right| \approx \left| C_{p+1} \boldsymbol{q}_n^{(p+1)} h_n \right| \tag{4.132}$$

7. Ascher et Petzold mentionnent toutefois que la constante pondérant l'erreur locale dans le membre de droite peut parfois être assez grande, notamment dans le cas des problèmes numériquement raides. Dans ces circonstances, l'estimation fournie par l'erreur de troncature pourra donc être très conservative.

Cette estimation de l'erreur sert de base à l'adaptation de la taille h du pas de temps. Notons qu'en pratique le vecteur solution $\boldsymbol{q}_n$ peut contenir des variables de différentes dimensions. Cela se produira par exemple si l'on résout l'équation de l'énergie en plus des équations de Navier-Stokes. Il convient alors de faire attention lors du traitement de l'estimation d'erreur. Dans des travaux précédents [145], nous avons traité séparément l'estimation d'erreur pour chaque variable dépendante présentant une dépendance explicite au temps dans le problème à résoudre. On note $\{q_{\partial t}\}$ l'ensemble de ces variables. Pour chaque variable $q \in \{q_{\partial t}\}$, nous avons considéré en premier lieu une erreur absolue moyenne :

$$e_{na}^q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_q} e_n(q_i)^2}{N_q}} \tag{4.133}$$

où N_q désigne le nombre de degré de liberté pour la variable q dans le problème. Une erreur absolue perd cependant son sens si l'ordre de grandeur de la variable q est très grand. On a donc également proposé une mesure relative de l'erreur locale :

$$e_{nr}^q = \frac{e_{na}^q}{M(q)} \tag{4.134}$$

où $M(q)$ est défini par :

$$M(q) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_q} {q_i}^2}{N_q}} \tag{4.135}$$

De la même façon une mesure relative n'est pas forcément pertinente si la valeur de $M(q)$ est très faible. On a donc introduit un seuil T_0 [8], choisi par l'utilisateur. Si $M(q) > T_0$, alors on considèrera la mesure d'erreur relative pour la variable q. À l'inverse si $M(q) < T_0$, alors on considèrera la mesure d'erreur absolue. Dans la suite on réfère à la mesure de l'erreur retenue par e_n^q, et à la tolérance d'erreur correspondante par e_0. De la même façon que pour l'adaptation de maillage, on peut définir un opérateur de transition permettant de passer de la mesure de l'erreur à la nouvelle taille h à prescrire pour le prochain pas de temps. Dans ce contexte l'opérateur de transition porte plutôt le nom de *swing factor*, noté s^q. Pour une méthode BDF-p, dont on sait qu'elle est consistante d'ordre p, la valeur de s^q est donnée par :

$$s^q = \min\left\{ s_{max}(p),\ F_s \left(\frac{e_0}{e_n^q}\right)^{\frac{1}{p+1}} \right\} \tag{4.136}$$

où F_s désigne un facteur de sécurité, usuellement fixé à $F_s = 0.95$ [131]. Par ailleurs la valeur de $s_{max}(p)$, correspond au *swing factor* maximal qui peut être utilisé sans que cela n'induise

8. Sa valeur a été fixée à $T_0 = 10^{-2}$ dans toutes les études exposées dans ce mémoire.

d'instabilités numériques. Dans le cas où $p = 1$, ce swing factor est théoriquement infini. En pratique, on pose néanmoins $s_{max}(p = 1) = 5$. Pour $2 \leq p \leq 5$, des valeurs de $s_{max}(p)$ ont été proposées par Skelboe [13]et par Grigorieff [17]. Celles-ci sont présentées dans le Tableau 4.1.

Tableau 4.1 Valeurs maximales du *swing factor* en fonction de la méthode BDF

p	2	3	4	5
$s_{max}(p)$ [13]	2.6	1.9	1.5	1.2
$s_{max}(p)$ [17]	1.721	1.069	1.010	1.002

Les valeurs proposées par Skelboe sont issues d'expériences numériques, et requiert une évolution *suffisamment lisse* du pas de temps. Pour une méthode BDF-p, il est plus précisément supposé que les $p+1$ instants servant de base à la méthode doivent être équidistants dans le temps avant d'autoriser une variation de h. En d'autres termes, si la méthode s'appuie sur p pas de temps, l'adaptation de h ne se fait que tous les p pas de temps. Les valeurs proposées par Grigorieff n'impliquent elles aucune hypothèse préalable sur l'évolution de h. Les résultats théoriques rapportés restent donc valides même en cas d'évolution très erratique de h. Toutefois l'évolution de h est dans notre cas contrôlée par une estimation de l'erreur locale supposée fiable. On s'attend donc à obtenir une variation assez lisse du pas de temps. C'est pourquoi les valeurs de $s_{max}(p)$ retenues en pratique sont celles de Skelboe, et ce même si nous adaptons h à l'issue de chaque pas de temps complété. Notons que la méthode BDF-2, pourtant A-stable, peut donc également induire des instabilités numériques si on tolère une variation trop rapide de h. Par ailleurs il est seulement question ici de majorants de s^q en fonction de p. Dans les faits, on utilise également un minorant pour s^q, si bien que :

$$s^q = \max\left\{ s_{min}(p),\ \min\left\{ s_{max}(p),\ F_s \left(\frac{e_0}{e_n^q}\right)^{\frac{1}{p+1}} \right\}\right\} \tag{4.137}$$

Selon Skelboe, la décroissance de h implique généralement un regain de stabilité. C'est pourquoi nous avons défini la valeur de $s_{min}(p)$ par :

$$s_{min}(p) = \frac{1}{s_{max}(1)} = \frac{1}{5} \qquad \forall p \tag{4.138}$$

Notons toutefois que les travaux de Grigorieff établissent des valeurs beaucoup plus sévères de ces minorants pour $p > 2$ [17].

Tout comme pour l'adaptation de maillage, il reste maintenant à définir la taille h_{n+1} du prochain pas de temps. En s'inspirant de l'approche multinorme (cf. Section 4.1.2), h_{n+1} est

finalement donné par :

$$h_{n+1} = \min_{q \in \{q_{\partial t}\}} \{s^q\} \, h_n \tag{4.139}$$

Rejet de pas de temps

Afin de se prémunir complètement contre un surplus d'erreur locale, relativement à la tolérance d'erreur e_0, un mécanisme de rejet de pas de temps fait également partie de l'implémentation. Un pas de temps est rejeté dès lors que la relation suivante est vérifiée pour une variable $q \in \{q_{\partial t}\}$:

$$e_n^q > e_0 \tag{4.140}$$

Dans un tel cas la résolution du pas de temps recommence avec une valeur plus petite de h, obtenue à partir de l'Équation (4.139). Au delà de pleinement garantir la tolérance d'erreur locale, ce mécanisme est très utile lorsque la tolérance utilisée pour la convergence de la méthode de Newton est trop permissive. Le mécanisme de rejet agit alors comme un bouclier contre les erreurs itératives. Toutefois, il est préférable d'établir dès le départ une tolérance de convergence assez sévère pour la méthode de Newton, puisque le contraire impliquerait non seulement des rejets de pas de temps supplémentaires, mais aussi une valeur moyenne de h sensiblement inférieure. Après une opération d'adaptation de maillage, ce mécanisme est également très appréciable lorsque l'on souhaite relancer l'intégrateur temporelle en préservant les valeurs de h et p (cf. Section 4.5.3). Les solutions transférées sur le nouveau maillage ne sont pas des solutions convergées sur celui-ci. Elles sont donc entachées d'une forme d'erreur itérative, en plus de contenir des erreurs dues au transfert.

Adaptation de l'ordre

L'adaptation de h permet de garantir une précision cible pour l'intégration temporelle. Reste toutefois la question épineuse de la stabilité de l'intégration. Nous avons dors et déjà souligné que les instabilités numériques induites par l'évolution trop rapide de h peuvent être évitées en contraignant la valeur du *swing factor*. Cependant, seules les méthodes BDF-1 et BDF-2 peuvent alors être utilisées sans risque. La question de la stabilité pour les méthodes d'ordre 3 et plus demeure, puisque celles-ci ne sont pas A-stables. Il s'agit donc ici d'introduire un mécanisme garant de la stabilité de l'intégration. En première approche on pourrait se contenter d'adapter h pour retrouver la stabilité. Toutefois, cela peut induire une réduction drastique de la valeur de h, et donc une augmentation significative du coût de l'intégration temporelle. On envisage donc plutôt ici d'adapter l'ordre p de l'intégrateur temporel pour préserver la stabilité. Ce faisant, une diminution de l'ordre p n'impliquera pas nécessairement

une décroissance marquée de h. Afin de statuer sur la stabilité de la méthode courante, il est nécessaire d'appliquer un test pertinent sur la solution. Shampine et Gordon [10] suggèrent un heuristique basé sur la surveillance des termes d'ordre élevé dans le développement de Taylor de la solution. Une instabilité numérique peut se voir comme un bruit de fond dans la solution. Ce bruit se caractérise par une haute fréquence et une amplitude qui tend à augmenter. De manière générale un signal de haute fréquence est amplifié par l'opérateur de dérivation, qui agit comme un filtre passe haut. En présence d'une instabilité numérique, on peut donc s'attendre à ce que le terme d'ordre $n+1$ de la série de Taylor devienne prépondérant devant le terme d'ordre n. Soit le développement de Taylor de la solution à $t = t_n$ à l'ordre $p+3$:

$$\boldsymbol{q}(t_n + h) = \sum_{j=0}^{p+3} \frac{h^j}{j!} \boldsymbol{q}_n^{(j)} = \sum_{j=0}^{p+3} \boldsymbol{\delta}_n^j \tag{4.141}$$

L'heuristique de Shampine et Gordon consiste à réaliser le test suivant :

$$\| \boldsymbol{\delta}_n^{p-1} \| > \| \boldsymbol{\delta}_n^{p} \| > \| \boldsymbol{\delta}_n^{p+1} \| > \| \boldsymbol{\delta}_n^{p+2} \| > \| \boldsymbol{\delta}_n^{p+3} \| \tag{4.142}$$

L'intégration en temps est jugée instable si le test précédent échoue. Notre implémentation est construite autour de cet heuristique. Dans les faits nous n'avons cependant pas accès au développement de Taylor de la solution. Il faut donc pouvoir estimer les $\boldsymbol{\delta}_n^j$. La forme de l'interpolation de Newton, sur laquelle repose les méthodes BDF, est particulièrement utile dans ce contexte. En notant $\overline{h}$ la valeur moyenne du pas de temps sur les p pas de temps précédents on peut écrire :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^p(t) = \sum_{j=0}^{p} \left[\prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n-i}) \right] \boldsymbol{\alpha}_n^j \approx \sum_{j=0}^{p} j! \overline{h}^j \boldsymbol{\alpha}_n^j \tag{4.143}$$

En faisant un parallèle avec le développement en série de Taylor on peut alors écrire l'approximation suivante :

$$\boldsymbol{\delta}_n^j \approx j! \overline{h}^j \boldsymbol{\alpha}_n^j \tag{4.144}$$

On peut donc appliquer le test de Shampine et Gordon à partir à partir de ces approximations. En pratique deux niveaux de sévérité sont implémentés pour statuer sur le résultat du test. Dans le premier, de moindre sévérité, nous considérons que le test est réussi si au moins 3 des 4 inégalités sont satisfaites. Dans le second, les 4 inégalités doivent être vérifiées. Dans toutes les simulations que nous avons menées, nous avons opté pour le premier niveau de sévérité pour faciliter l'évolution vers l'ordre 3. L'ordre courant est jugé stable si au moins 50% des 10 derniers pas de temps passent le test. Seulement, juger uniquement de la stabilité de la méthode courante n'est pas pleinement satisfaisant car on ne pourrait alors envisager

qu'une diminution de l'ordre de la méthode. En pratique ces tests de stabilité sont réalisés pour tous les ordres disponibles, et la méthode BDF d'ordre supérieure devient utilisable si 100% des 10 derniers pas de temps passent le test avec cette méthode. Notons également que cette étude de stabilité est conduite pour toute variable $q \in \{q_{\partial t}\}$. Une méthode n'est donc en réalité jugée stable que si toutes les études de stabilité s'accordent sur le sujet. Pour de plus amples détails sur les aspects adaptatifs de l'intégration temporelle, le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Hay *et al.* [131].

4.5.3 Relance de l'intégrateur

Les méthodes BDF ne sont pas auto-démarrantes. Dans son état initial, l'implémentation de travail ne permettait pas véritablement de relancer l'intégration temporelle après les cycles d'adaptation de maillage. Chaque « relance » devait se faire en réinitialisant l'ordre de l'intégrateur à $p = 1$, ainsi que la taille du pas de temps à sa valeur initiale h_0. Cette approche n'était pas satisfaisante pour deux raisons. Premièrement, la taille du dernier pas de temps précédent le remaillage est souvent d'un voire deux ordres de grandeur plus grand que h_0. Rétablir $h = h_0$ induit donc une augmentation notable du coût de l'intégration temporelle vue dans son ensemble. Par ailleurs, la méthode d'Euler implicite est connue pour être très diffusive. En pratique, on ne peut donc garantir la conservation de la précision de l'intégration à la relance, et ce malgré l'usage d'un pas de temps souvent beaucoup plus petit que celui qui précède l'adaptation de maillage. Dans les rares cas où $h_f/h_0 = O(1)$, la perte de précision est inévitable si l'ordre p est différent de 1 avant l'adaptation de maillage. Pour palier à ces difficultés nous avons donc implémenté une procédure de relance alternative, permettant de reprendre le calcul avec les mêmes valeurs de h et p. La procédure permet également de sauvegarder l'intégralité de l'historique des estimations de l'erreur locale et des tests de stabilité ayant été effectués avant l'adaptation de maillage. Ainsi, l'adaptation de h et de p peut se faire dès le premier pas de temps après la relance. Néanmoins, cette nouvelle procédure exige de transférer les solutions de plusieurs instants précédents sur le nouveau maillage, là où la procédure d'origine permettait de ne transférer que la dernière solution. En pratique cela peut donc induire un surplus d'erreur de transfert. Nous avons notamment constaté que transférer la solution par une interpolation linéaire conduisait parfois à rétablir la taille du pas de temps h à sa valeur initiale h_0, et cela dès le premier pas de temps suivant le remaillage [148]. À la reprise du calcul, l'estimation de l'erreur locale tend à augmenter sous l'effet des erreurs de transfert, ce qui peut induire de multiples rejet de pas de temps.

4.6 Algorithme adaptatif complet

L'Algorithme 4.1 présente de façon synthétique la place, dans notre procédure de résolution adaptative, des différentes méthodes et outils numériques exposés dans ce chapitre. La répartition des tâches entre *Amiral* et *Cadyf* est clairement identifiée.

Algorithme 4.1 : Forme générale de la procédure de résolution proposée

```
C_r ← 0                                                    // Nombre de remaillages
while T_init < T_fin do
    // AMIRAL
    SetParameters()
    if C_r < N_r then
        local ← false
    else
        local ← true
    end if
    GenerateMesh(local)                                    // Mailleur frontal
    SmoothMesh(local)                                      // Relaxation du maillage
    if C_r > 0 then
        TransfertSol(local)                                // Interpolation ou Projection
    else
        InitSol()
    end if
    // CADYF
    t_n ← T_init
    InitTimeIntegration(h, p)
    t_{n+1} ← t_n + h
    NewtonSolveTimeStep(t_{n+1}, p)
    CheckLocalError(reject, h, p)                          // Adapter h et p
    if reject == true then
        1
    end if
    CheckSpatialError(stop)                                // Évaluer les critères d'arrêt
    if stop == true || t_{n+1} > T_fin then
        AdaptMesh()                                        // Définir les tailles de maille idéales
        SelectElemsToRmv()                                 // Définition des poches à remailler
        T_init ← t_{n+1}
        C_r ← C_r + 1
        GoTo 1
    else
        t_n ← t_{n+1}
        GoTo 1
    end if
end while
```

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET ANALYSES

La vérification d'un code est un des pilliers supportant la confiance d'un utilisateur envers son outil de simulation [79]. Elle participe à la *quantification des incertitudes* sur les résultats issus de l'outil de simulation. En plus de la vérification du code, la quantification des incertitudes s'appuie sur deux autres concepts distincts : la vérification du calcul et la validation.

Tel que précisé par Roache [80], la différence fondamentale entre les deux types de vérification réside dans la façon d'évaluer l'erreur. La vérification d'un code requiert une évaluation exacte de l'erreur, tandis que la vérification d'un calcul repose sur l'estimation de l'erreur. Dans les deux cas toutefois, il s'agit d'analyser le comportement asymptotique de l'erreur au moyen d'une étude de convergence. Dépendamment que l'erreur soit de nature temporelle ou spatiale, on pourra procéder par raffinements successifs de la discrétisation correspondante. Notons que la vérification est un concept purement *mathématique*. On souhaite uniquement s'assurer qu'une fonctionnalité programmée, par exemple issue d'une modélisation mathématique de la physique, procure les résultats théoriques attendus. En ce sens, la vérification peut porter sur le processus de résolution des équations retenues pour modéliser la physique. Dit autrement, il s'agit alors d'apporter une réponse claire à la question : les équations sont-elles *bien* résolues ?

La préoccupation de la validation est d'ordre *physique* [79, 80]. Elle repose sur la comparaison des prédictions du modèle informatisé, qui doit avoir été préalablement vérifié, avec des résultats expérimentaux, en regards de certaines métriques qui intéressent l'ingénieur. Cette fois, on souhaite donc apporter une réponse à la question [123] : résout-on les *bonnes* équations pour prédire la physique d'intérêt ? À défaut d'avoir accès à des résultats expérimentaux, on peut toujours effectuer une validation *numérique*, en réalisant la comparaison avec des résultats provenant d'une autre implémentation. Idéalement, cette implémentation de référence doit avoir été vérifiée, et avoir fait l'objet d'une *vraie* validation. En pratique, on ne dispose pas toujours de preuves tangibles à cet égard. La figure Figure 5.1 présente une vision simplifiée du cycle de la modélisation, lequel fait toujours intervenir la vérification et la validation.

Ce chapitre est consacré à la présentation de résultats issus de la vérification du code de travail, et de l'analyse du fonctionnement de certains composants que nous avons développés. Dans un premier temps, nous introduisons dans la Section 5.1 la méthode des solutions manufacturées. La Section 5.2 présente ensuite les résultats des études de convergence de l'erreur spatiale et de l'erreur temporelle. La Section 5.3 présente ensuite une analyse des distributions de l'erreur suite à de multiples adaptations de maillage. La Section 5.4 expose

une comparaison des performances des méthodes de relaxation de maillage que nous avons développées et/ou utilisées. On y présente également une comparaison de plusieurs métriques de qualité élémentaire, et on illustre ensuite la relaxation de maillage locale en considérant une métrique en particulier. Finalement, la Section 5.5 dresse une analyse comparative des méthodes que nous avons utilisées pour transférer la solution d'un maillage à l'autre.

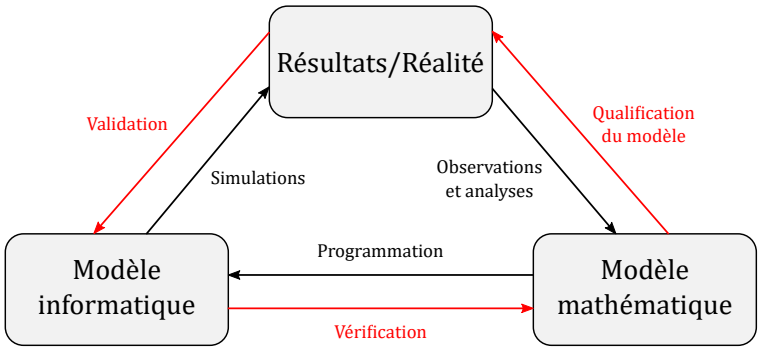


Figure 5.1 Représentation simplifiée du cycle de la modélisation. Figure adaptée de [79].

5.1 Méthode des solutions manufacturées

La vérification d'un code consiste à évaluer une erreur de résolution exacte pour un problème dont on connait justement la solution exacte. Nous l'avons déjà dit, cette activité est purement mathématique. Cela signifie en théorie que la solution exacte choisie n'a aucunement besoin de faire preuve de réalisme physiquement [1]. La méthode des solutions manufacturées, proposée par Roache [80], tire parti de cette observation. Considérons les équations de Navier-Stokes sous forme résiduelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P) &= \mathcal{R}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{u}) &= \mathcal{R}_P \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'opérateur $\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P)$ est identique à celui que nous avions introduit dans l'Équation (3.52). Les résidus $\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}$ et $\mathcal{R}_P$ sont nuls si les formes choisies pour $\boldsymbol{u}$ et P forment une solution analytique pour le problème fluide considéré. On peut dans ce cas mener une étude de convergence de l'erreur spatiale et temporelle sans aucun traitement supplémentaire. Il existe toutefois

1. Si cette observation est vraie pour les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie, nous émettons malgré tout une réserve concernant les équations des variables de turbulence. L'expérience a en effet montré que choisir une solution exacte trop fantaisiste pour ces variables pouvait nuire à la convergence des itérations de Newton lors de la résolution.

très peu de solutions analytiques aux équations de Navier-Stokes. De plus, ces rares solutions nécessitent bien souvent l'annulation de certains termes dans l'opérateur $\mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P)$ [2]. Du point de vue de la vérification, ces solutions analytiques ont donc moins d'intérêt. Comme le fait remarquer Roache [80], il est nécessaire que la forme de la solution choisie soit suffisamment complexe pour activer tous les termes des EDP considérées. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit donc veiller à ce que les dérivées premières et secondes des composantes de vitesse, ainsi que les dérivées premières de la pression, soient non nulles. L'idée des solutions manufacturées et donc de spécifier une forme arbitraire pour chaque variable dépendante, satisfaisant néanmoins ce critère de complexité suffisante. Toutefois les résidus $\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}}$ et $\mathcal{R}_P$, obtenus en injectant les formes choisies pour $\boldsymbol{u}$ et P dans les équations, ne seront plus nécessairement nuls. C'est pourquoi on définie les termes sources suivants :

$$\begin{aligned} Q_{\boldsymbol{u}} &= -\mathcal{R}_{\boldsymbol{u}} \\ Q_P &= -\mathcal{R}_P \end{aligned} \tag{5.2}$$

En lieu et place des équations de Navier-Stokes, on considère alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{NS}(\boldsymbol{u}, P) + Q_{\boldsymbol{u}} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{u}) + Q_P &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Les formes analytiques choisies pour $\boldsymbol{u}$ et P forment la solution exacte pour ce problème modifié. Afin de pouvoir traiter ce problème par la méthode des éléments finis, il suffit alors juste de dériver des conditions limites à partir des formes analytiques de $\boldsymbol{u}$ et P. Toutes les autres EDP que nous avons présentées dans la Section 3.1 peuvent être traitées selon la même procédure. La méthode des solutions manufacturées est donc particulièrement simple. Elle requiert un effort d'implémentation minime, puisqu'il s'agit juste d'ajouter un terme source supplémentaire. Cette simplicité rend la méthode d'autant plus élégante.

Advenant que la résolution éléments finis fournirait une solution très erronée au problème modifié, la source d'erreur peut avoir deux provenances principales :

- Les termes source additionnels ont mal été implémentés ou calculés. En plus de spécifier la forme analytique de la solution, il faut également calculer la forme de toutes ses dérivées apparaissant dans les équations. Dépendamment de la complexité de la solution choisie, il sera fortement utile de recourir à un outil de calcul symbolique pour éviter ce genre d'erreur.
- Un ou plusieurs des termes de la formulation faible originale (en l'absence du terme source additionnel) est/sont mal calculé(s). L'activité de vérification du code de calcul

2. On pense ici aux solutions des écoulements de Couette et de Poiseuille par exemple.

est alors complètement justifiée, puisqu'elle aura permis de déceler un vrai problème. Dans ce cas, il est utile de définir des solutions manufacturées additionnelles, permettant d'activer seulement certains termes des équations, de manière à pouvoir identifier les termes fautifs plus facilement.

5.2 Vérification des ordres de convergence

Cette section présente les études de convergence qui ont été menées pour l'erreur spatiale et l'erreur temporelle, issues respectivement de la discrétisation spatiale éléments finis et de la discrétisation temporelle fournie par l'intégrateur temporel. La méthode des solutions manufacturées a été utilisée pour construire deux problèmes test, nécessitant une résolution monolithique des équations de Navier-Stokes, de l'équation de l'énergie, et des équations du modèle de turbulence k-ε standard. Toutes ces équations ont été considérées dans leur forme *adimensionnelle*. Nous avons toutefois omis le terme de gravité dans les équations de Navier-Stokes. Tous les nombres adimensionnels (Re, Pr et Pr_t) ont été fixés à une valeur unitaire, et cela dans les deux problèmes test.

5.2.1 Description des cas test

Nous avons souhaité découpler l'erreur spatiale de l'erreur temporelle, afin de faciliter l'étude de la convergence de chacune de ces erreurs. Nous avons donc considéré une première solution manufacturée stationnaire, inspirée de l'écoulement de Couette axisymétrique. Les formes retenues pour chacune des variables sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-y}{r}\left(0.75r - \frac{0.1875}{r}\right) \\
v &= \frac{x}{r}\left(0.75r - \frac{0.1875}{r}\right) \\
P &= 1.75r^2 + 0.8r + 0.12 \\
T &= 2(1-r) \\
k &= -0.1r + 0.2 \\
\varepsilon &= -0.01r + 0.08
\end{aligned} \tag{5.4}$$

où r est un rayon donné par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.5}$$

Si le problème manufacturé est résolu dans un repère cartésien, la solution exacte ne peut être obtenue pour aucune des variables avec les formes analytiques choisies. En effet, aucune de ces

formes ne figure dans l'espace de discrétisation de la variable correspondante. On s'assure ainsi de générer de l'erreur spatiale sur toutes les variables. Pour autant, le critère de complexité suffisante énoncé par Roache est vérifié. Les formes choisies permettent en effet d'activer tous les termes des équations à résoudre, à l'exception des termes instationnaires. Nous soulignons que les variables de turbulence ont été traitées dans leur forme logarithmique. Le domaine de calcul et les conditions limites utilisées sont par ailleurs présentés sur la Figure 5.2a.

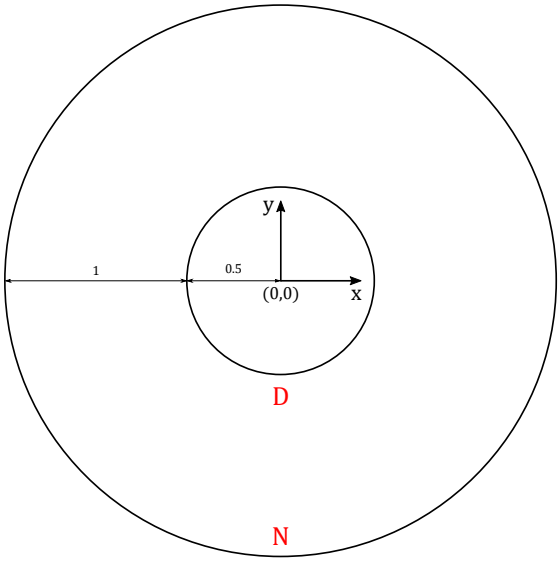
Dans le même esprit, nous avons souhaité nous affranchir complètement de l'erreur issue de la discrétisation spatiale pour étudier la convergence de l'erreur temporelle [3]. Cela nécessite de construire un problème manufacturé vérifiant les conditions que nous avons énoncées dans la Section 3.2.5, à l'exception de celle portant sur l'erreur temporelle puisque l'on souhaite justement l'étudier. Nous avons donc proposé les formes analytiques suivantes pour les variables à résoudre :

$$\begin{aligned}
u &= f_1(t)[-0.5xy + y^2] \\
v &= f_1(t)[0.5x + 0.25y^2] \\
P &= f_1(t)[0.1x - 0.05y + 0.05^2] \\
T &= f_1(t)[x^2 + y^2 + xy] \\
k &= f_1(t)[(0.19y^2 - 0.38y + 0.22) + 0.01x] \\
\varepsilon &= 0.1 f_1(t)[(0.19y^2 - 0.38y + 0.22) + 0.01x] = 0.1k
\end{aligned} \tag{5.6}$$

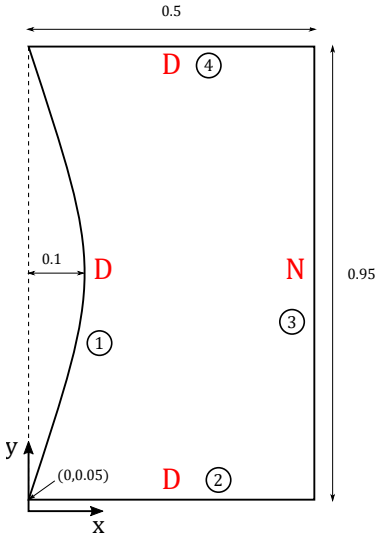
Le domaine de calcul pour ce deuxième problème manufacturé, ainsi que les conditions limites utilisées, sont présentés sur la Figure 5.2b. Notons que pour vérifier la conformité de niveau 3 de notre formulation ALE (cf. Annexe B), nous nous sommes également appuyés sur ce problème manufacturé. Pour piloter la déformation du domaine de calcul nous avons par ailleurs spécifié des conditions limites pour les déplacements nodaux. Elles sont résumées dans le Tableau 5.1. Les dépendances en temps $f_i(t)$ sont par ailleurs explicitées dans le Tableau 5.2.

Cette fois-ci les formes choisies pour la solution n'activent pas rigoureusement tous les termes des équations. Toutefois, les termes inactifs sont relatifs à la discrétisation spatiale du problème. Ce n'est donc pas tellement un souci ici puisqu'on souhaite ici vérifier l'implémentation de l'intégrateur temporel.

3. Cela permet aussi de mener l'étude de convergence sur un maillage relativement grossier, ce qui est appréciable pour accélérer l'exécution des calculs.



(a) Cas de la solution manufacturée (5.4)



(b) Cas de la solution manufacturée (5.6)

Figure 5.2 Domaines de calcul utilisés pour étudier la convergence des erreurs spatiale et temporelle. Les conditions limites de Dirichlet ('D') et de Neumann ('N') utilisées, découlant des solutions manufacturées, sont repérées.

Tableau 5.1 Formulation ALE - Conditions limites pour les déplacements nodaux

Courbe	1	2	3	4
ξ	$0.4 f_2(t)$	libre	0	libre
η	0	0	0	0

Tableau 5.2 Erreur temporelle - Dépendances en temps du problème manufacturé

$f_1(t)$	$f_2(t)$
$1 + 0.25\sin(t)$	$\dfrac{1-\cos(t)}{2}$

5.2.2 Convergence de l'erreur spatiale

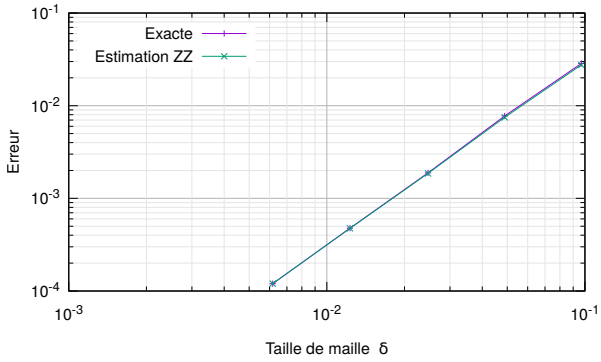
Afin d'étudier la convergence de l'erreur spatiale, nous avons procédé par raffinements de maillage successifs. Ces raffinements peuvent être uniformes ou résulter de l'adaptation de maillage. Nous avons tenu à vérifier que nous obtenions des résultats similaires dans les deux cas. Nous avons évalué l'erreur sur les variables au moyen des normes d'erreur décrites à la Section 4.1.1. La théorie sur l'erreur éléments finis appliquée aux éléments de Taylor-Hood P2-P1 nous permet de déduire les taux de convergence minimaux théoriques (cf. Section 3.2.5) de chacune des erreurs calculées au moyen de ces normes, lorsque l'on raffine la taille de maille δ. Ces taux théoriques sont tous égales à 2. Dans la suite, on présente les graphes de convergence obtenus.

Dans un premier temps on présente sur la Figure 5.3 les graphes de convergence de l'erreur spatiale dans les normes évoquées pour un raffinement de maillage réalisé en divisant successivement et uniformément la taille de maille δ par 2. Du fait de la relaxation de maillage, la taille de maille n'est toutefois pas rigoureusement uniforme dans le domaine. Pour chaque maillage, nous avons donc évalué la taille δ de la façon suivante :

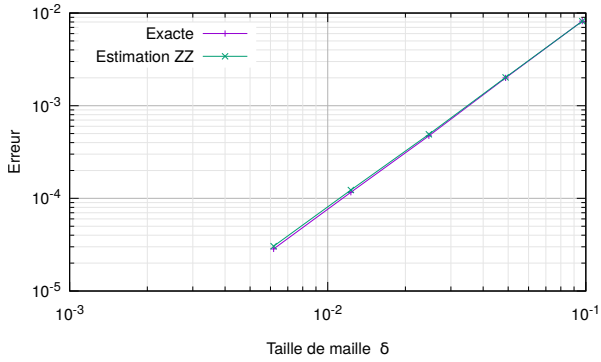
$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_e} A_i}{N_e}} \tag{5.7}$$

où A_i est l'aire de l'élément i.

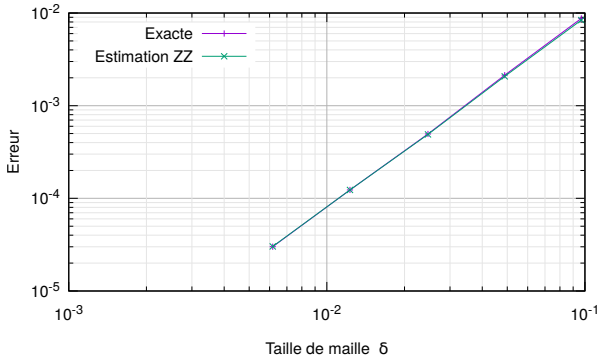
Nous avons fait figurer sur chaque graphes l'erreur exacte et l'erreur estimée par la méthode de Zhu et Zienkiewicz ("Estimation ZZ"). Ces erreurs convergent bien à l'ordre 2, tel qu'attendu. De plus on constate que l'estimation de l'erreur est une excellente approximation de l'erreur exacte pour ce problème manufacturé et cela sur tous les maillages utilisés. Ceci est essentiellement dû au fait que les formes analytiques choisies pour les différentes variables demeurent assez simples. Sur des solutions manufacturées plus complexes, telles que celles préconisées par Eça *et al.* [103] pour représenter le développement d'une couche limite turbulente sur une plaque plane, la fidélité de l'estimation d'erreur à l'erreur exacte n'est pas nécessairement observée sur des maillages relativement grossiers. Nous aurons l'occasion de présenter cette solution manufacturée à la Section 5.3.3.



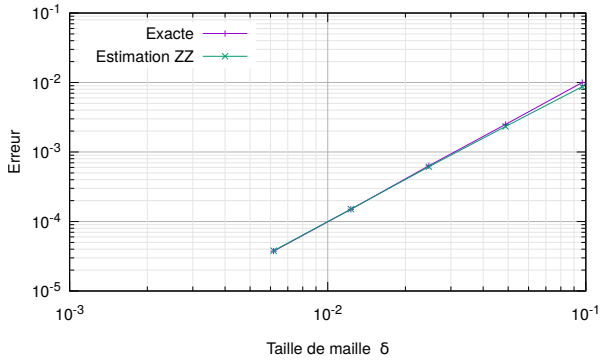
(a) Erreur sur $\boldsymbol{u}$



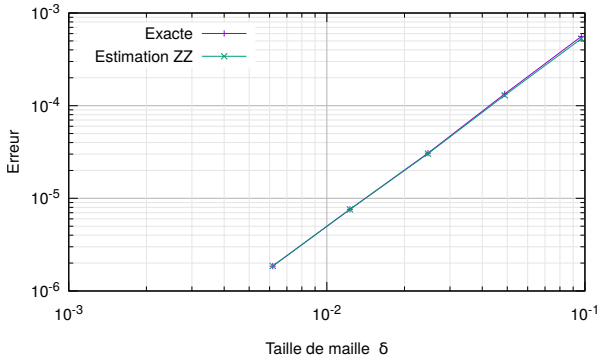
(b) Erreur sur P



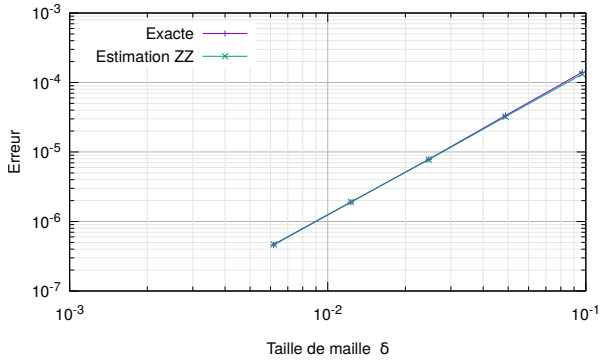
(c) Erreur sur T



(d) Erreur sur k



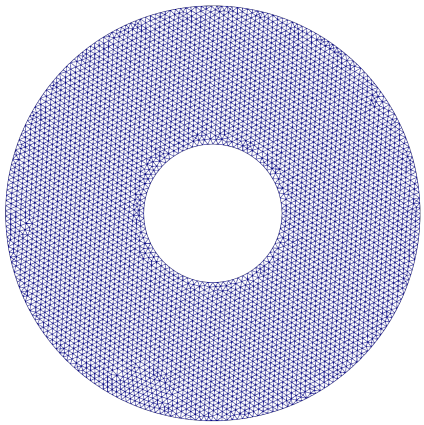
(e) Erreur sur ε



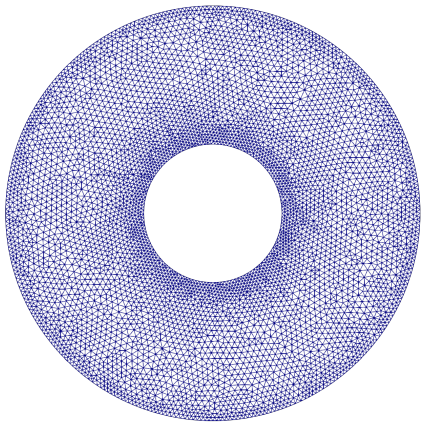
(f) Erreur sur μ_t

Figure 5.3 Graphes de convergence des erreurs spatiales pour un raffinement uniforme du maillage

On présente maintenant à la Figure 5.5 les graphes de convergence obtenus lorsque le maillage est raffiné par adaptations de maillage successives. Pour chaque adaptation de maillage nous avons utilisé un facteur de réduction d'erreur $\xi = 0.5$. Avant même de relaxer le maillage, la taille de maille δ pour un maillage donné n'aura aucune raison d'être uniforme dans le domaine de calcul. On associe donc là encore à chaque maillage une taille de maille moyenne telle que donnée par l'Équation (5.7). À nouveau, on observe que l'on retrouve bien les taux de convergence théoriques de l'erreur pour chacune des normes utilisées, que l'erreur soit évaluée exactement ou estimée. À titre informatif, on présente à la Figure 5.4 le troisième maillage obtenu par raffinement uniforme et le quatrième maillage obtenu par adaptation de maillage. Ces maillages présentent une taille de maille moyenne très similaire.

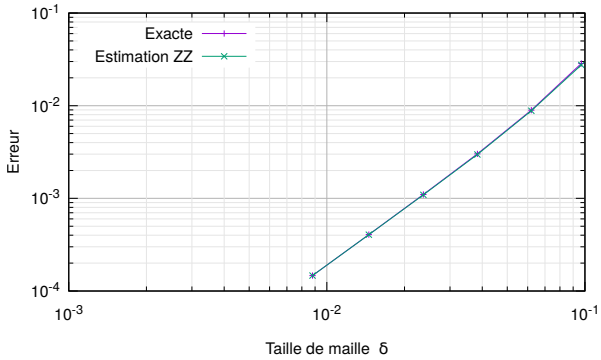


(a) Raffinement uniforme (10335 éléments)

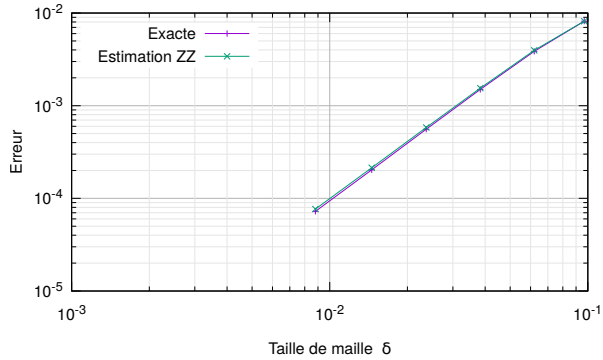


(b) Raffinement par adaptation de maillage (11303 éléments)

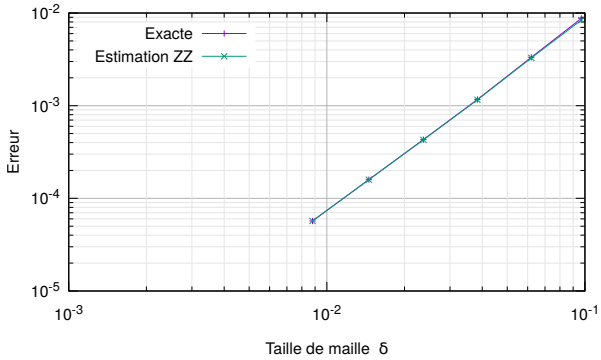
Figure 5.4 Comparaison de maillages issus de chaque méthode de raffinement de maillage



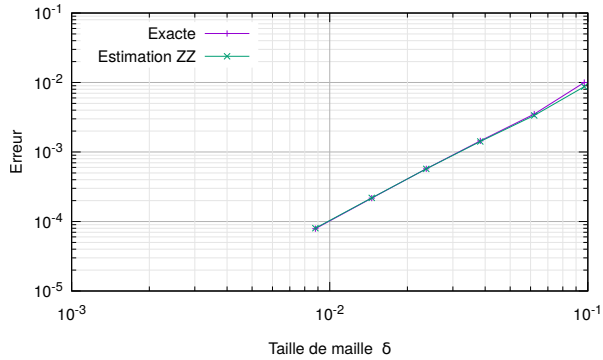
(a) Erreur sur $\boldsymbol{u}$



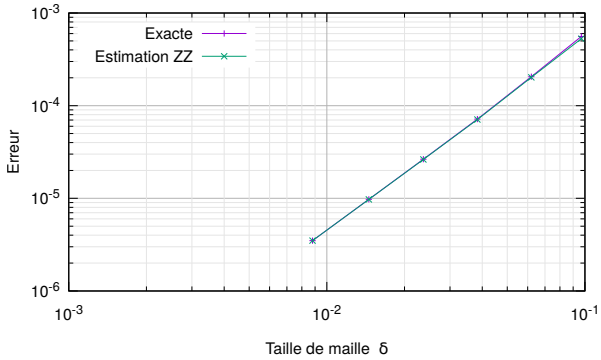
(b) Erreur sur P



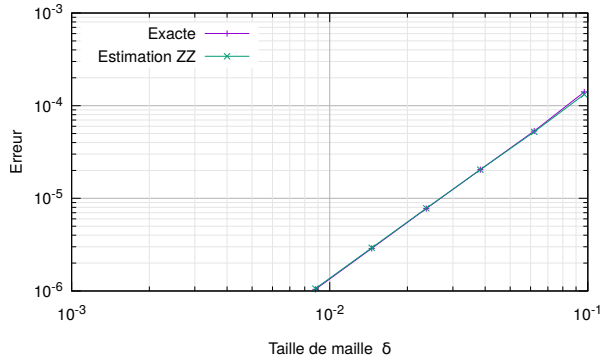
(c) Erreur sur T



(d) Erreur sur k



(e) Erreur sur ε



(f) Erreur sur μ_t

Figure 5.5 Graphes de convergence des erreurs spatiales pour un raffinement du maillage réalisé par adaptation de maillage

5.2.3 Convergence de l'erreur temporelle

Formulation Eulérienne

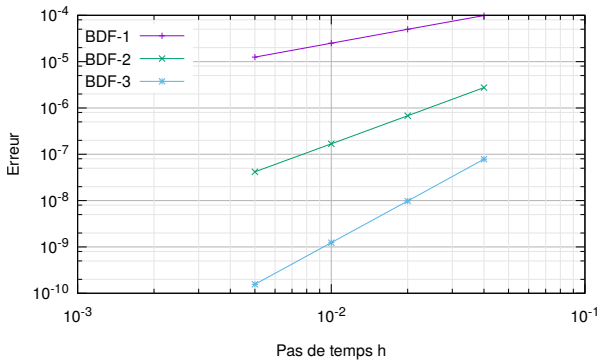
L'étude de la convergence de l'erreur temporelle a été menée pour les méthodes BDF-p avec $p \leq 3$ seulement, puisque nous avons restreint notre usage à ces trois méthodes dans toutes nos simulations. Pour chaque méthode nous avons intégré le problème manufacturé (5.6) de $t = 0$ et $t = 0.8$, et cet intervalle de temps a été divisé en un nombre croissant de pas de temps. Là encore, l'erreur temporelle est calculée au moyen des normes d'erreur décrites à la Section 4.1.1. Considérer l'erreur temporelle via l'erreur sur les dérivées spatiales de la solution n'est pas un problème, puisque nous avons fait en sorte que la discrétisation spatiale ne génère aucune erreur dans le second problème manufacturé. Dit autrement, l'erreur spatiale mesurée dans ce problème est uniquement due à l'erreur de discrétisation temporelle. Nous cherchons ici à retrouver les taux de convergence théoriques de cette erreur pour les méthodes BDF étudiées. Nous avons évoqué qu'une méthode BDF-p est consistante d'ordre p. De plus, si la méthode est A-stable, alors l'erreur temporelle doit théoriquement converger à l'ordre p en raffinant la taille h du pas de temps. Ce sera le cas pour les méthodes BDF-1 et BDF-2. Dans le cas de la méthode BDF-3, qui est conditionnellement stable, il faut supposer que les valeurs de h utilisées permettent d'opérer dans la région de stabilité de la méthode. On présente à la Figure 5.6 les graphes de convergences de l'erreur pour chaque norme d'erreur en fonction de la taille du pas de temps.

Les ordres de convergence théoriques sont bien retrouvés pour chaque méthode BDF. Leur implémentation est donc vérifiée. Il nous reste maintenant à regarder si ces ordres de convergence sont conservés lorsque la formulation ALE est active. Ceci fait l'objet de la sous-section suivante.

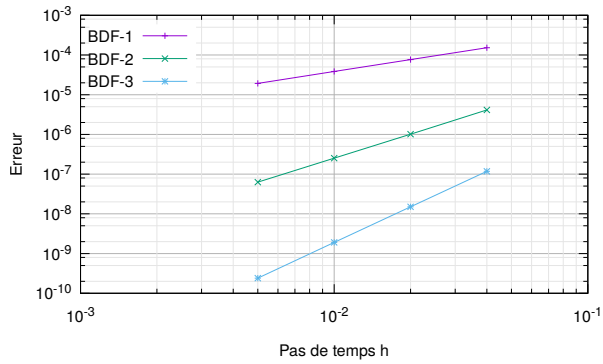
Formulation ALE

On cherche ici à statuer sur la conformité de niveau 3 de notre formulation ALE. Cette propriété implique que les taux de convergence de l'erreur temporelle soient conservés si le problème manufacturé (5.6) est résolu en formulation ALE. Nous avons repris exactement les mêmes paramètres de simulation que ceux utilisés dans la sous-section précédente. Entre autres, nous avons donc encore traité le problème avec des éléments subparamétriques afin de garantir une erreur de discrétisation spatiale nulle. On présente à la Figure 5.7 les graphes de convergence de l'erreur temporelle obtenus dans ce contexte.

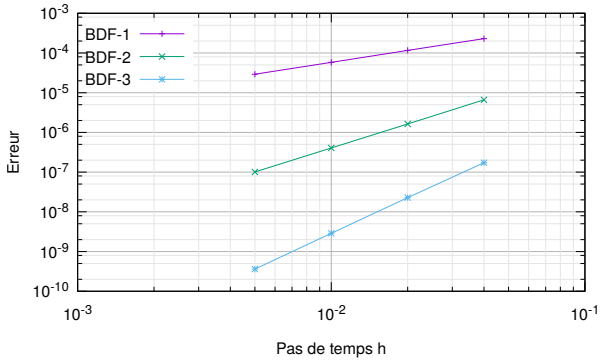
Les taux de convergence théoriques de l'erreur temporelle sont donc bien conservés en formulation ALE. De plus les niveaux d'erreur en formulation ALE sont sensiblement les mêmes



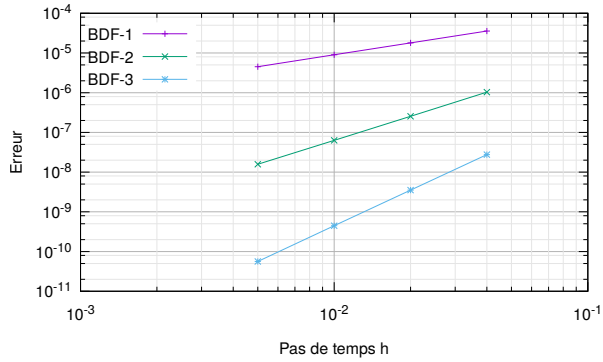
(a) Erreur sur $\boldsymbol{u}$



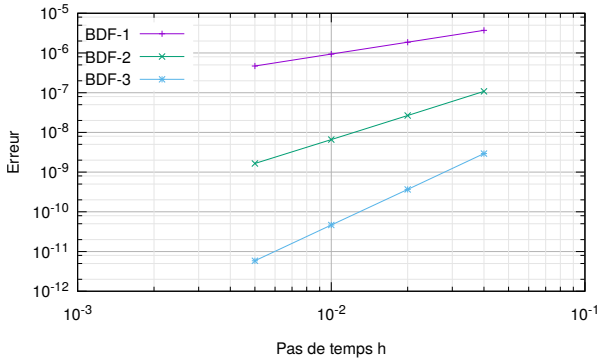
(b) Erreur sur P



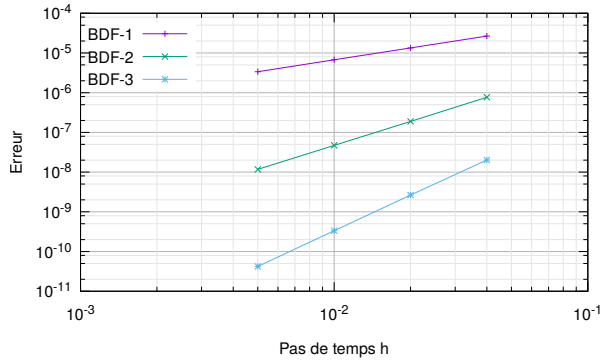
(c) Erreur sur T



(d) Erreur sur k

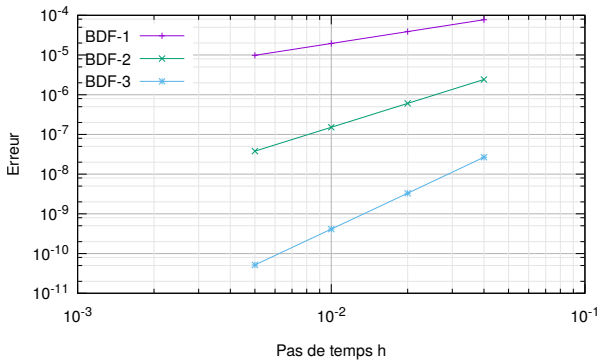


(e) Erreur sur ε

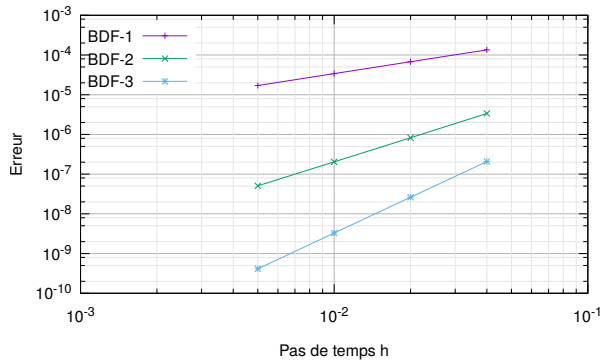


(f) Erreur sur μ_t

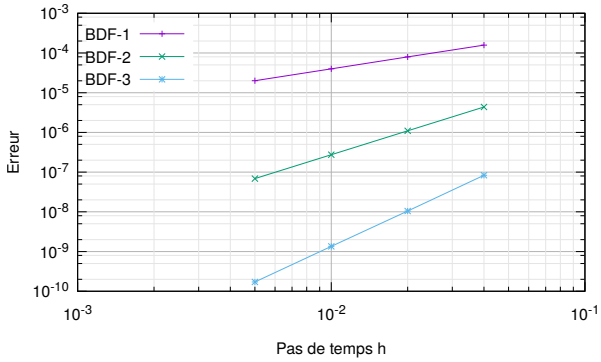
Figure 5.6 Graphes de convergence de l'erreur temporelle



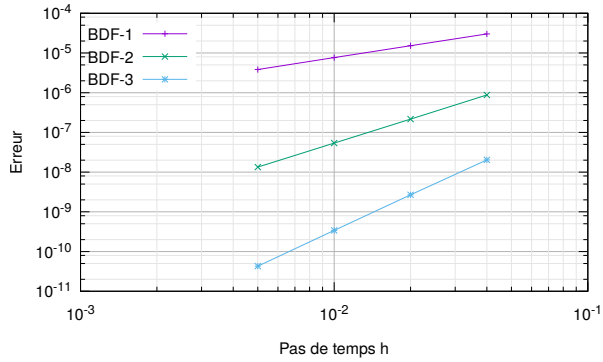
(a) Erreur sur $\boldsymbol{u}$



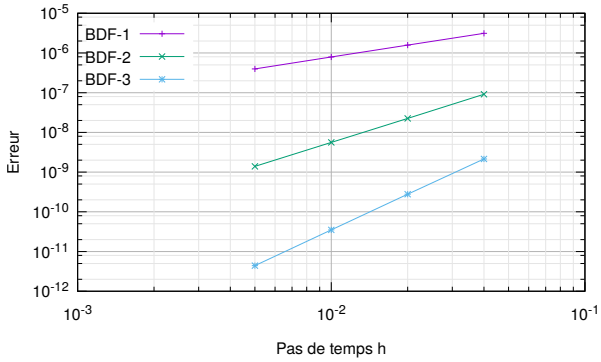
(b) Erreur sur P



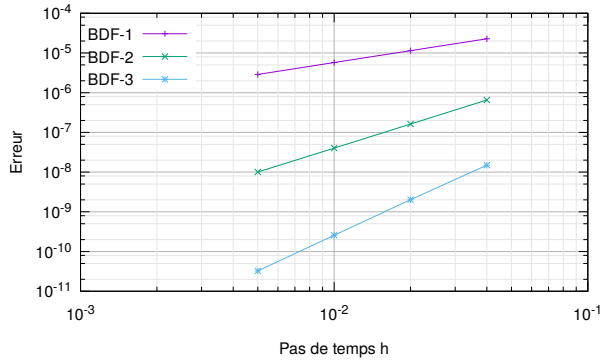
(c) Erreur sur T



(d) Erreur sur k



(e) Erreur sur ε



(f) Erreur sur μ_t

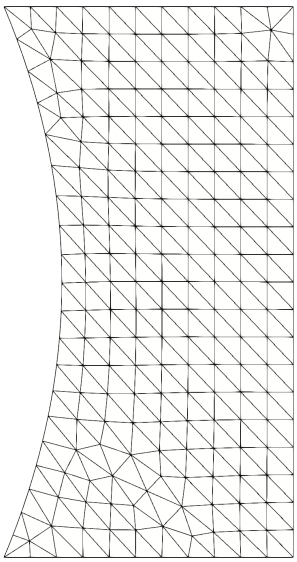
Figure 5.7 Formulation ALE - Graphes de convergence de l'erreur temporelle

que ceux que nous avons obtenus à la sous-section précédente. La conformité de niveau 3 de notre formulation ALE est ainsi vérifiée.

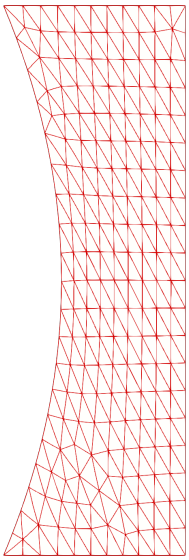
Avant de clôturer cette sous-section, on se propose d'illustrer les différences de déformation du maillage en formulation ALE, dépendamment qu'il soit hybride (cf. Section 3.2.6), ou composé exclusivement d'éléments isoparamétriques ou subparamétriques. Afin de bien mettre en évidence les différences, nous avons intégré le problème manufacturé jusqu'à l'instant $t = 1.5$ avec une méthode BDF-2. On présente à la Figure 5.8 une superposition des maillages obtenus dans chaque cas à l'instant final. On constate que l'approche hybride tend à concentrer les déformations du maillage à proximité des frontières du domaine. Ceci s'explique par le fait que les éléments isoparamétriques ont une meilleure capacité à se déformer. En revanche la déformation du maillage est plutôt uniforme dans les maillages non hybdrides. Cette différence de comportement est extrêmement importante. Elle justifie l'existence du critère d'arrêt basé sur la qualité des éléments, que nous avons introduit à la Section 4.1.3. Ce critère sera extrêmement pratique pour contrôler la qualité des éléments près des frontières lors de l'usage d'un maillage hybride. Une autre solution pour mitiger ce problème est d'augmenter la rigidité des éléments isoparamétriques en jouant sur le module d'Young utilisé dans la loi de Hooke. Nous avons également mis en pratique cette idée.

5.2.4 Estimation de l'erreur temporelle

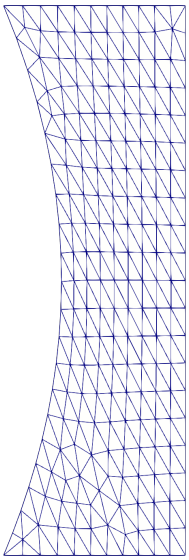
Comme nous l'avons vu à la Section 4.5.2, une estimation de l'erreur de troncature locale est utilisée afin de piloter la taille h du pas de temps au cours de la simulation. Dans des travaux préliminaires entrepris au début de ce projet doctoral [148], nous avons analysé l'estimation de l'erreur de troncature locale en considérant une solution manufacturée simple. En imposant là encore une dépendance en temps sous la forme d'une fonction sinus pour chaque variable résolue, et en déphasant ces dépendances en temps, nous avons pu facilement nous assurer de la cohérence de l'estimation de l'erreur temporelle dans plusieurs cas. L'évolution de h dans ces mêmes cas fut conforme à ce qui était théoriquement attendu. Afin d'obtenir tous les détails de cette analyse, le lecteur intéressé pourra consulter la référence sus-citée.



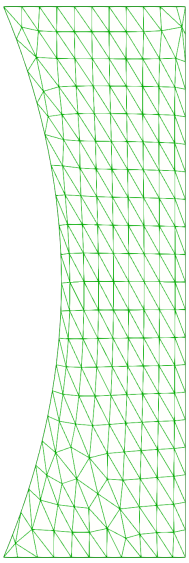
(a) Maillage initial



(b) Maillage final - Éléments isoparamétriques



(c) Maillage final - Éléments subparamétriques



(d) Maillage final - Cas hybride

Figure 5.8 Formulation ALE - Comparaison des déformations du maillage en fonction des éléments qui le composent

5.3 Analyse des distributions de l'erreur spatiale

Dans cette section, on se propose d'étudier l'évolution des distributions de l'erreur spatiale lorsque l'adaptation de maillage est utilisée. On considère pour cela deux nouveaux problèmes manufacturés. Ces problèmes nous permettent d'illustrer respectivement l'approche mononorme et multinorme pour l'estimation de l'erreur et le remaillage local. L'étude permet d'évaluer la pertinence de plusieurs critères d'arrêt que nous avons définis à la Section 4.1.3.

5.3.1 Description des cas test

Nous avons considérés deux problèmes manufacturés différents. Ils imitent dans les deux cas le développement d'une couche limite sur une plaque plane. Le premier problème est laminaire. La solution manufacturée utilise les formes suivantes pour les différentes variables :

$$\begin{aligned} u &= 1 - \mathrm{e}^{-\alpha} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{4x}}\left[1 - (\alpha+1)\mathrm{e}^{-\alpha}\right] \\ P &= x \end{aligned} \tag{5.8}$$

où α est une variable intermédiaire définie par :

$$\alpha = \frac{y}{\sqrt{x}} \tag{5.9}$$

Ce problème est une version simplifiée d'une solution manufacturée proposée par Hétu [28] pour la vérification des équations de Navier-Stokes compressibles. Nous l'utilisons ici pour étudier la forme de la distribution de l'erreur élémentaire en norme énergie lorsque le maillage est adapté uniquement en fonction de cette norme d'erreur (approche mononorme). Le nombre de Reynolds a encore une fois été fixé à $Re = 1$.

Le second problème manufacturé est turbulent. Il a été proposé par Eça *et al.* [103]. Dans les travaux réalisés à la maîtrise [136], nous nous étions basé sur ce problème pour procéder à la vérification des lois de paroi standards. Les formes voulues pour chaque variables sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
u &= \mathrm{erf}(\beta_1) \\
v &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\left(1 - \mathrm{e}^{-{\beta_1}^2}\right) \\
P &= 0.5\left[\log(2x - x^2 + 0.35)\log\left(4(y-y_0)^3 - 3(y-y_0)^2 + 1.25\right)\right] \\
k &= k_1{\beta_2}^2\mathrm{e}^{-{\beta_2}^2} + k_0 \\
\varepsilon &= 0.36\frac{k_1^2}{\nu_0}\mathrm{e}^{-{\beta_2}^2} + \varepsilon_0
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

où β_1 et β_2 sont encore deux variables intermédiaires données par :

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\sigma(y-y_0)}{x} \\
\beta_2 &= \frac{\sigma_\nu(y-y_0)}{x}
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

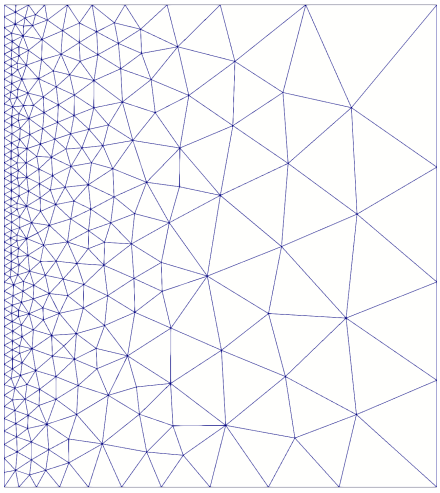
Les quantités restantes sont des constantes. Nous les résumons dans le Tableau 5.3. Cette fois-ci, le nombre de Reynolds a été fixé à $= 10^6$.

Tableau 5.3 Valeurs des constantes pour le problème manufacturé (5.10)

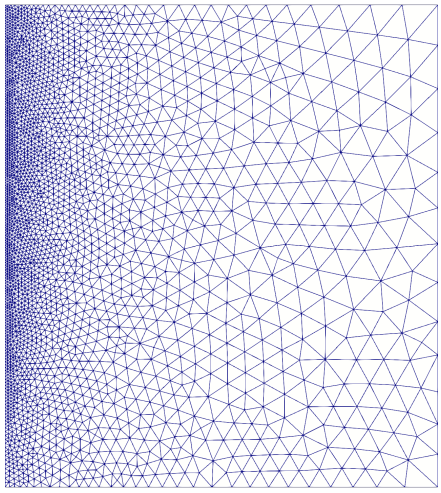
σ	σ_ν	y_0	ν_0	k_1	k_0	ε_0
4	10	0.006	$\frac{10^3}{Re}$	0.01	10^{-5}	10^{-3}

5.3.2 Approche mononorme

On considère ici le problème manufacturé (5.8). Nous avons résolu ce problème sur un total de 8 maillages. Les maillages 2 à 8 ont été obtenus par adaptation de maillage, en considérant uniquement l'erreur exacte en norme énergie (approche mononorme). La cible à atteindre pour l'erreur relative globale a été fixée à $\varepsilon_1 = 0.05\%$. Le formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur ξ a été utilisée ici. On présente les maillages 4 et 8 sur la Figure 5.9. Les distributions de l'erreur exacte élémentaire obtenues respectivement sur chacun d'eux sont par ailleurs présentées sur la Figure 5.10.

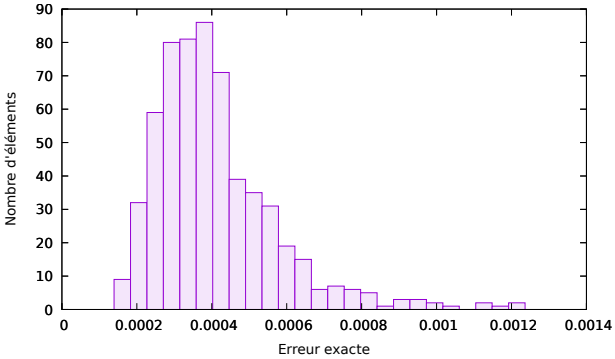


(a) Maillage 4 (596 éléments)

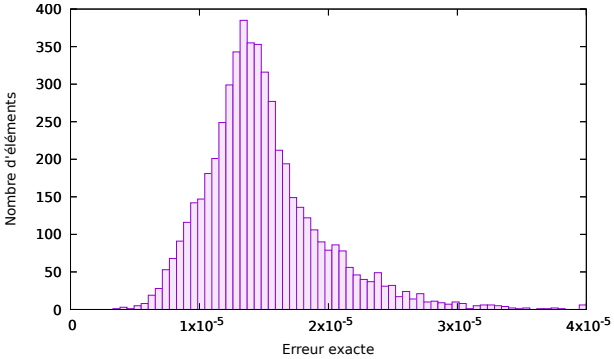


(b) Maillage 8 (5358 éléments)

Figure 5.9 Approche mononorme - Illustration des maillages 4 et 8



(a) Maillage 4



(b) Maillage 8

Figure 5.10 Approche mononorme - Distribution de l'erreur exacte élémentaire en norme énergie, pour les maillages 4 et 8

On constate que la distribution de l'erreur tend vers une distribution normale. Une légère asymétrie positive subsiste toutefois. Dans le contexte de la loi normale, une interprétation pratique de la valeur absolue de l'asymétrie γ_1 est possible. Imaginons un maillage de 1000 éléments et supposons que la distribution de l'erreur exacte élémentaire $\{e_i\}$ suive exactement une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. L'asymétrie d'une telle distribution de l'erreur est nulle. Soient maintenant N éléments dont l'erreur élémentaire e_i est telle que $e_i \approx m$. Si ces éléments voient leur erreur augmenter subitement de 10σ, alors une estimation de l'asymétrie de la distribution de l'erreur résultante est donnée par :

$$\gamma_1 \approx \frac{1}{1000}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{1000-N}\left(\frac{e_i-m}{\sigma}\right)^3}_{\approx 0} + N\left(\frac{10\sigma}{\sigma}\right)^3\right] \approx N \tag{5.12}$$

Cette approximation reste valable pour $N \ll 1000$, soit par exemple $N \leq 10$. Pour des grandes valeurs de N, on ne peut notamment plus considérer que m et σ demeurent inchangés dans la distribution modifiée de l'erreur. L'interprétation de l'asymétrie donnée par cette approximation est particulièrement utile en vue d'établir la tolérance ε_5 discutée à la Section 4.1.3.

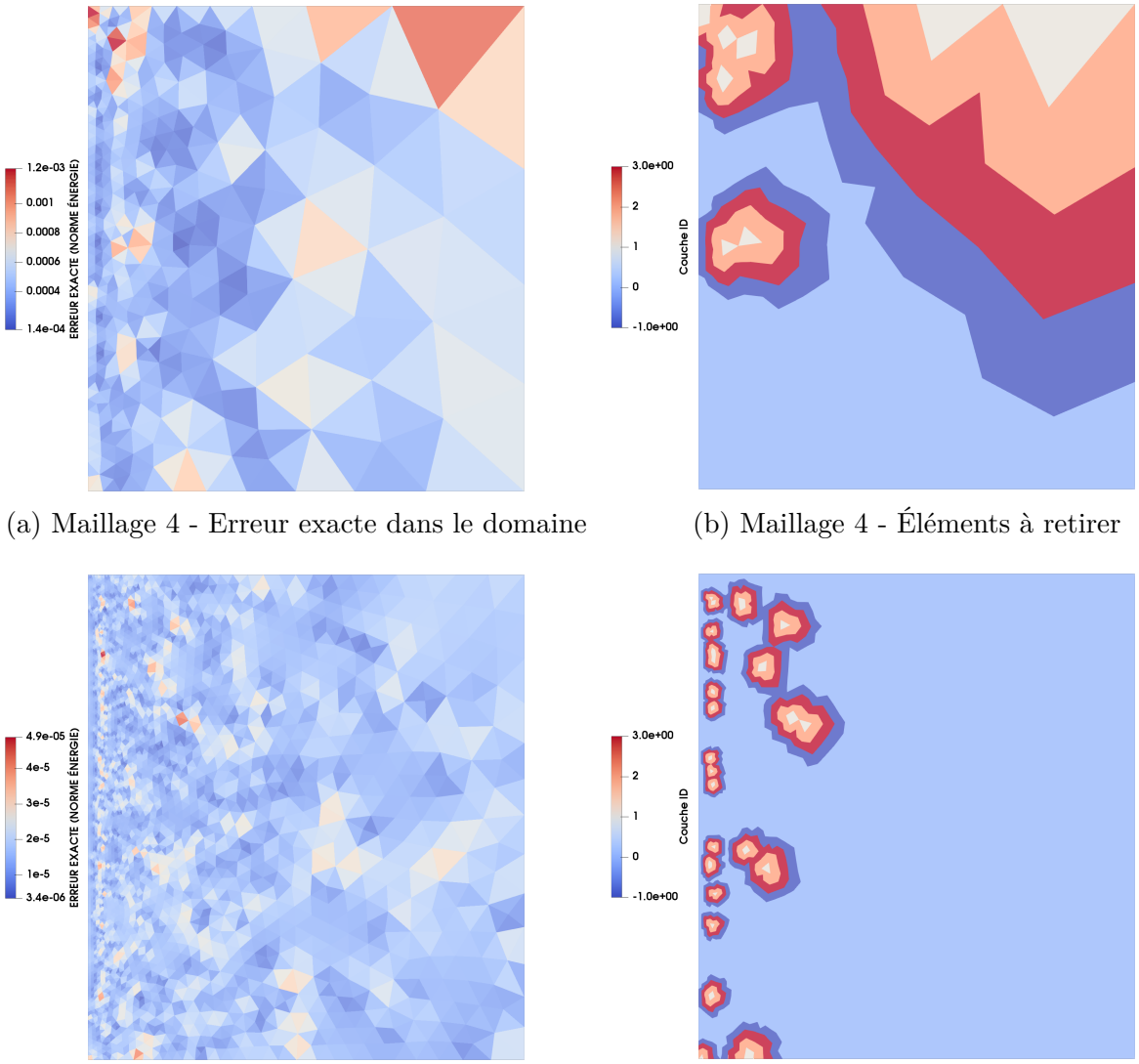
L'écart type de la distribution de l'erreur réelle, exprimé relativement à l'erreur élémentaire moyenne, est également une donnée intéressante lorsque la distribution de l'erreur suit approximativement une loi normale. Pour une loi normale de moyenne m et d'écart type σ, on peut en effet montrer que 99.7% des erreurs élémentaires e_i vérifient :

$$1 - \frac{3\sigma}{m} \leq \frac{e_i}{m} \leq 1 + \frac{3\sigma}{m} \tag{5.13}$$

La mesure de l'écart-type relatif réel est donc dans ce contexte une mesure de la qualité de l'équidistribution de l'erreur dans le domaine de calcul.

Intéressons nous maintenant à la localisation de l'erreur exacte dans le domaine de calcul. En cas de remaillage locale, le processus de sélection des éléments germes (cf. Section 4.2.1) doit, en approche mononorme, permettre de cibler les éléments sur lesquels l'erreur exacte est aux extrema de la distribution de l'erreur exacte. C'est en effet pour ces éléments que le ratio de changement de taille prédit par l'opérateur de transition sera le plus important. Toujours pour les maillages 4 et 8, on juxtapose sur la Figure 5.11 une cartographie de l'erreur élémentaire exacte dans le domaine avec l'identification des éléments à retirer. On constate bien que les germes, repérés par une ID unitaire, correspondent aux éléments sur lesquels l'erreur exacte est, en l'occurence, la plus importante. Ceci est cohérent avec les distributions

de l'erreur de la Figure 5.10. Notons également que le raffinement du maillage se traduit par une sélection d'autant plus locale des éléments germes. Le Tableau 5.4 regroupe pour les maillages 4 et 8 la valeur de l'erreur relative globale, et la valeur de l'écart type relatif, tels que définis à la Section 4.1.3. On constate que la cible ε_1 pour l'erreur relative globale est atteinte sur le dernier maillage. La valeur de l'écart-type relatif tend également à diminuer avec le raffinement du maillage.



(a) Maillage 4 - Erreur exacte dans le domaine

(b) Maillage 4 - Éléments à retirer

(c) Maillage 8 - Erreur exacte dans le domaine

(d) Maillage 8 - Éléments à retirer

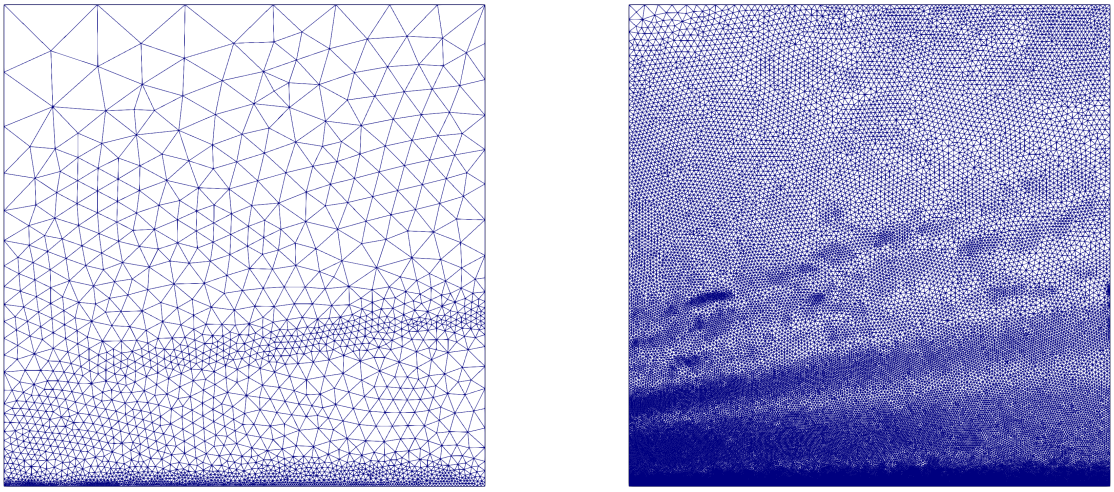
Figure 5.11 Approche mononorme - Visualisation de l'erreur exacte en norme énergie dans le domaine, et identification des éléments à retirer ($1 \leq$ Couche ID ≤ 3) en cas de remaillage local

Tableau 5.4 Approche mononorme - Quelques statistiques sur l'erreur exacte pour les maillages 4 et 8

	$\parallel \boldsymbol{e}_{gr} \parallel_{\boldsymbol{u}}$	σ_r
Maillage 4	0.436%	35.8%
Maillage 8	0.049%	29.8%

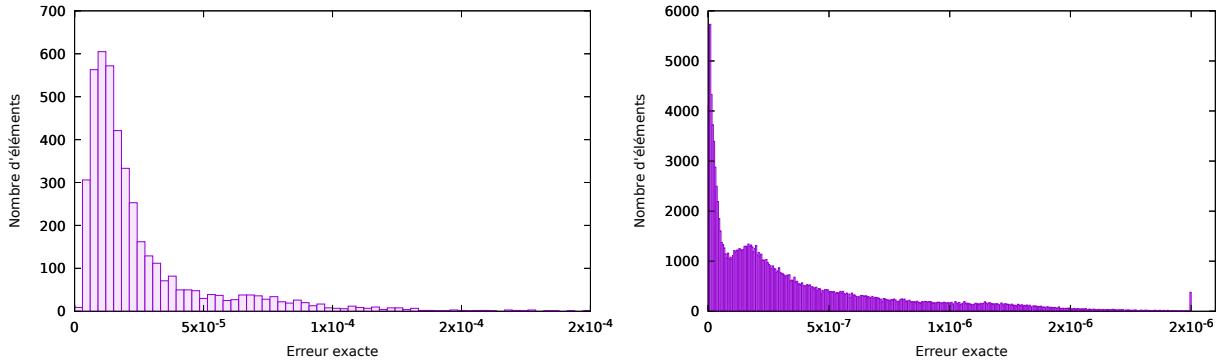
5.3.3 Approche multinorme

On s'intéresse maintenant au problème manufacturé (5.10). Ce problème a aussi été résolu sur 8 maillages différents, tous obtenus par adaptations de maillage successives, à l'exception du premier qui est un maillage régulier imposé. Cette fois-ci, l'adaptation de maillage est pilotée par l'erreur exacte en norme énergie, mais également par l'erreur exacte en semi-norme H^1 pour les variables k et ε, ainsi que pour la viscosité turbulente μ_t. Pour chaque norme, la cible à atteindre pour l'erreur relative globale a été fixée ici aussi à $\varepsilon_1 = 0.05\%$. Le facteur de réduction ξ est là encore ajusté automatiquement, et indépendamment *pour chaque norme*. On propose ici une nouvelle étude sur la distribution de l'erreur exacte en norme énergie, en considérant les résultats obtenus sur les maillages 4 et 8. Ces maillages sont présentés à la Figure 5.12. On donne ensuite sur la Figure 5.13 une représentation des distributions de l'erreur exacte en norme énergie sur chacun de ces maillages.



(a) Maillage 4 (4335 éléments) (b) Maillage 8 (143084 éléments)

Figure 5.12 Approche multinorme - Illustration des maillages 4 et 8



(a) Maillage 4 (b) Maillage 8

Figure 5.13 Approche multinorme - Distribution de l'erreur exacte élémentaire en norme énergie, pour les maillage 4 et 8

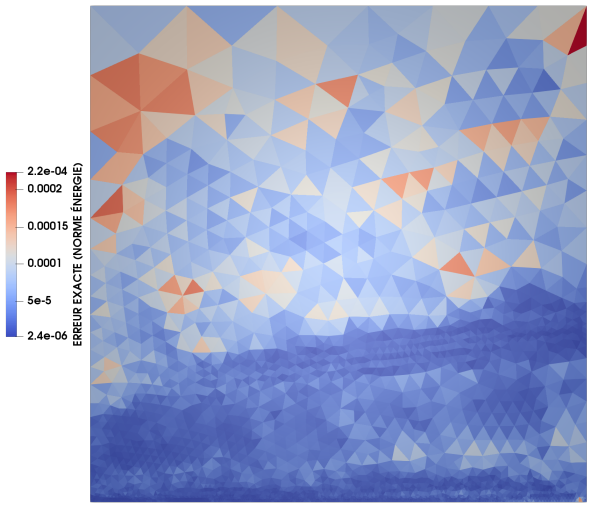
Contrairement à ce que nous avions pu observer en approche mononorme, la distribution de l'erreur ne tend pas cette fois à suivre une loi normale. Sur le dernier maillage, on observe clairement deux pics dans la distribution. Le second regroupe les éléments dont la taille dépend de l'erreur exacte en norme énergie, tandis que le premier regroupe tous les éléments dont la taille est contrôlée par une autre norme d'erreur. Cette situation est particulièrement représentative de ce qui peut se passer dans le cas général en approche multinorme. La localisation de l'erreur dans le domaine n'a aucune raison d'être la même pour toutes les normes. De fait, les interprétations que nous avions proposées pour les valeurs de l'asymétrie et de l'écart type dans la sous-section précédente n'ont plus de sens ici. Établir une tolérance pour les critères d'arrêt basés sur ces quantités n'a pas plus de sens, car le processus d'adaptation de maillage ne permet plus de contrôler ces quantités pour chaque norme d'erreur. C'est pourquoi ces critères sont inactifs en approche multinorme.

En imaginant vouloir procéder à une adaptation de maillage locale à partir des maillages 4 et 8, intéressons nous maintenant à la localisation des éléments qui devraient être retirés pour ce faire. On juxtapose sur la Figure 5.14 la cartographie de l'erreur exacte en norme énergie dans le domaine, et la localisation des éléments à retirer pour remailler localement. On observe à nouveau des différences significatives par rapport aux résultats obtenus en approche mononorme. Cette-fois ci les éléments germes ne coïncident plus totalement avec les éléments où l'erreur en norme énergie est importante. Par endroits, les germes correspondent même à des éléments pour lesquels l'erreur en norme énergie est presque minimale. On pourrait penser que ces éléments ont été sélectionnés car leur taille peut beaucoup augmenter du point de vue de la norme énergie. La simple consultation du maillage 8 à la Figure 5.12 infirme cette hypothèse, car le maillage a été raffiné dans des zones où l'erreur en norme énergie est très

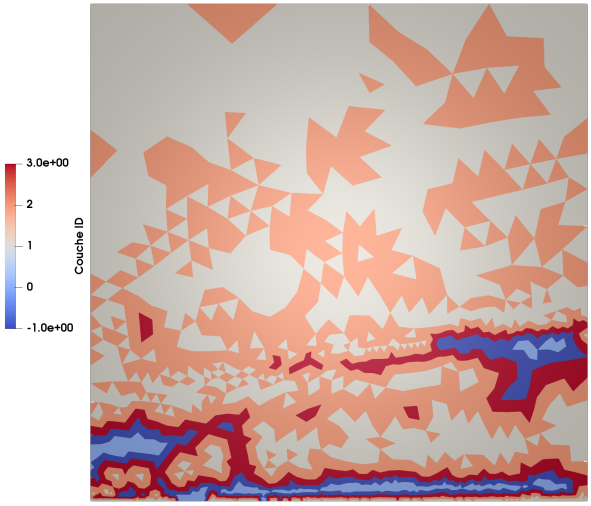
faible. Ceci démontre que certains éléments germes résultent de la considération d'une autre norme d'erreur. Si les localisations des erreurs mesurées par les différentes normes diffèrent, et si les erreurs relatives globales demeurent encore loin de la cible ε_1, on peut donc s'attendre à observer des germes dans la très majeure partie du domaine. C'est bien ce qu'on observe pour le maillage 4. Les erreurs relatives globales pour chaque norme d'erreur active, rassemblées dans le Tableau 5.5, le confirment. Dans le cas du maillage 8, la cible est largement respectée pour la norme énergie. La cible n'est pas encore atteinte pour les normes d'erreur sur k et ε, mais les écarts à la cible sont faibles. Ceci explique qu'une large partie du maillage 8 puisse être conservé.

Tableau 5.5 Approche multinorme - Erreur relative globale pour chaque norme d'erreur, pour les maillages 4 et 8

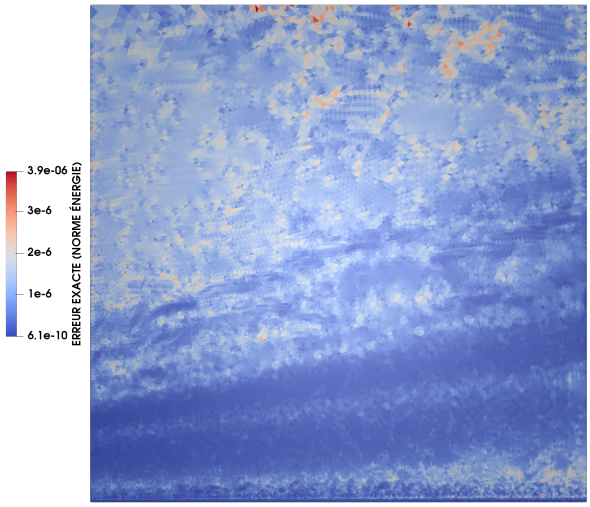
	$\parallel \boldsymbol{e}_{gr} \parallel_{\boldsymbol{u}}$	$\parallel \boldsymbol{e}_{gr} \parallel_{k}$	$\parallel \boldsymbol{e}_{gr} \parallel_{\varepsilon}$	$\parallel \boldsymbol{e}_{gr} \parallel_{\mu_t}$
Maillage 4	0.111%	4.77%	18.7%	0.583%
Maillage 8	0.00971%	0.0579%	0.139%	0.00978%



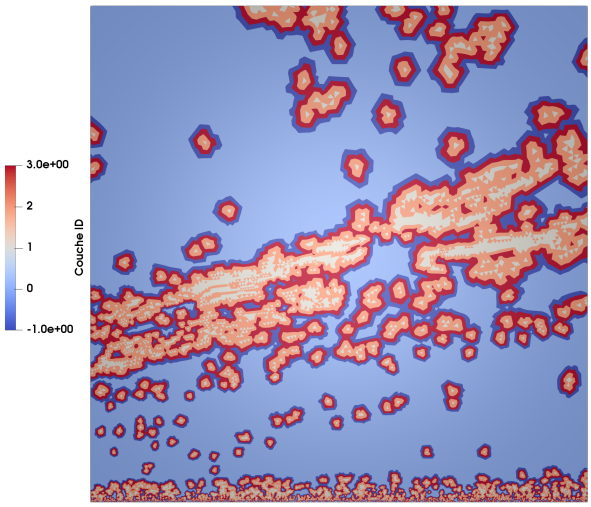
(a) Maillage 4 - Erreur exacte dans le domaine



(b) Maillage 4 - Éléments à retirer



(c) Maillage 8 - Erreur exacte dans le domaine



(d) Maillage 8 - Éléments à retirer

Figure 5.14 Approche multinorme - Visualisation de l'erreur exacte en norme énergie dans le domaine, et identification des éléments à retirer ($1 \leq$ Couche ID ≤ 3) en cas de remaillage local

5.4 Performance des méthodes de relaxation de maillage

Dans la Section 4.3, nous avons présenté les différentes méthodes de relaxation de maillage sur lesquelles, et avec lesquelles nous avons travaillées :

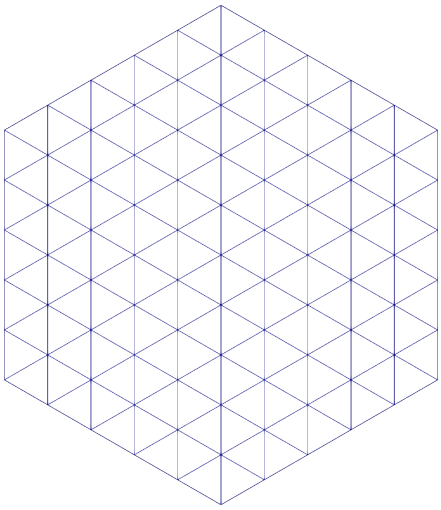
- Le lissage Laplacien
- La méthode physique voyant le maillage comme un solide élastique
- La méthode physique voyant le maillage comme une structure composée d'éléments barres

Dans cette section, on propose une courte étude comparative de ces méthodes à partir d'un cas test simple, afin d'évaluer les performances de chacune. On aborde ensuite plus particulièrement la question de la relaxation locale du maillage. Dans ce contexte, on propose également une étude comparative des différentes métriques de qualité élémentaire présentées à la Section 4.3.3.

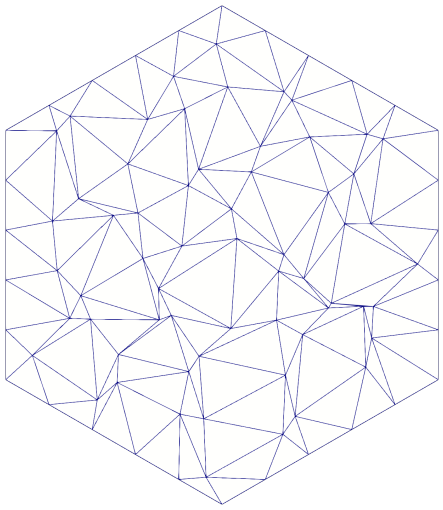
5.4.1 Comparaison des méthodes implémentées

Afin d'établir une stratégie pertinente pour relaxer le maillage, il est nécessaire de comparer l'aptitude de chacune des méthodes rappelées plus haut à améliorer la qualité du maillage. L'évaluation de la qualité du maillage peut se faire au moyen d'une métrique de qualité élémentaire. Nous avons retenu ici la métrique Q_2, définie à la Section 4.3.3. Les trois méthodes ont été comparées à partir d'un cas test unique, construit de telle sorte que la qualité de chaque élément puisse effectivement être unitaire. La géométrie du domaine de calcul est un hexagone régulier de côté L, telle que représentée sur la Figure 5.15a. Si une taille de maille uniforme δ, sous multiple de la longueur L, est spécifiée dans ce domaine, alors la méthode de génération de maillage permettra d'obtenir un maillage de parfaite qualité. En appliquant des déplacements randomisés d'amplitude maximale bien choisie sur chacun des nœuds sommets du domaine (à l'exception de ceux sur les frontières), on obtient le maillage de piètre qualité représenté à la Figure 5.15b. Ce maillage décrit la situation initiale avant l'application des cycles de relaxation. En complément, on donne à la Figure 5.16 la cartographie de la qualité initiale des éléments, calculée selon la métrique Q_2.

Pour chaque méthode de relaxation, nous avons appliqué 10 cycles de relaxation sur le maillage initial. On propose sur la Figure 5.17 une comparaison des résultats obtenus. Dans l'ensemble, on constate que le lissage Laplacien converge plus rapidement vers la bonne réponse sur les quatre premiers cycles de relaxation. Toutefois, le lissage Laplacien ne parvient pas à rétablir complètement le maillage issu de la génération de maillage. Les deux méthodes physiques y parviennent, bien que plus lentement dans l'ensemble pour la méthode utilisant



(a) Géométrie du problème test ($L = 5$, $\delta = 1$) et son maillage avant application des déplacements nodaux



(b) Maillage obtenu après application des déplacements nodaux randomisés

Figure 5.15 Illustration du problème test pour les méthodes de relaxation

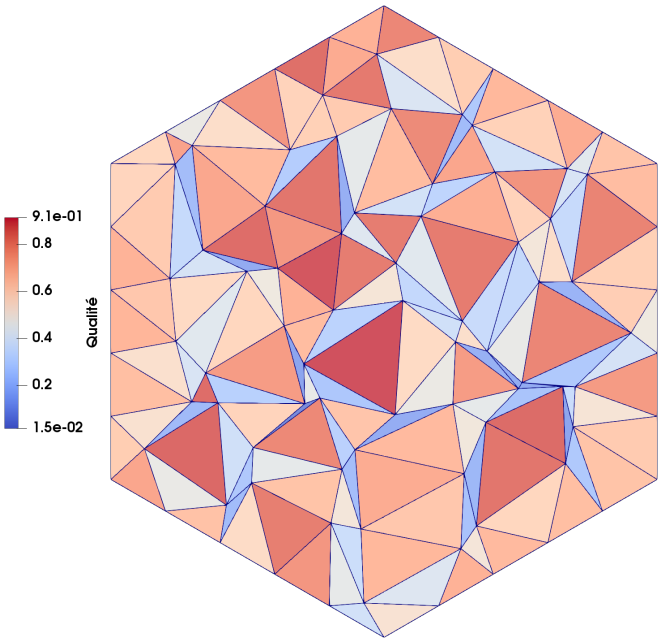
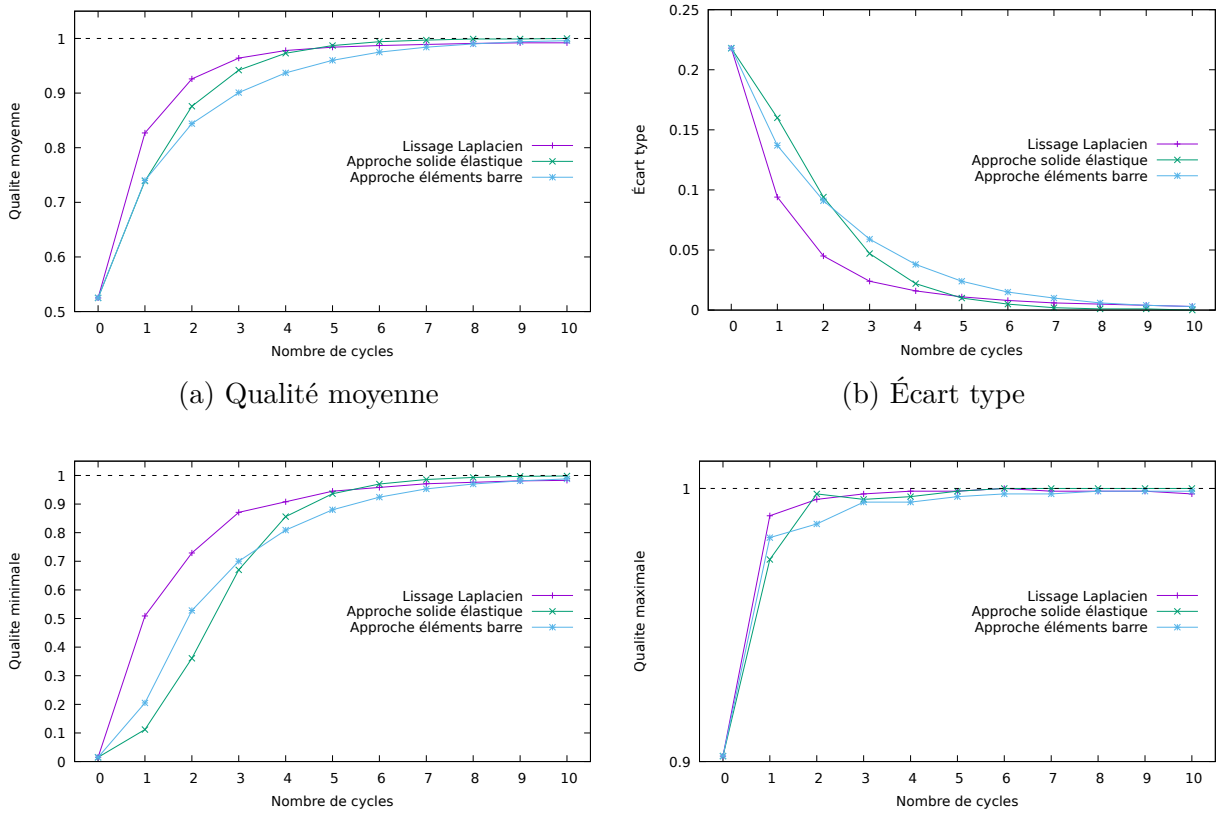


Figure 5.16 Qualité des éléments sur le maillage initiale (métrique Q_2)

des éléments barres. Ce n'est en soi pas surprenant puisque la formulation de la méthode avec élément barre est construite en supposant le maillage fixe. En revanche la méthode basée sur la physique d'un solide élastique semble avoir plus de difficultés à traiter les éléments dont la qualité est très proche de 0. L'élément de qualité minimale sur le maillage initial est en effet quasiment plat.



(a) Qualité moyenne

(b) Écart type

(c) Qualité minimale

(d) Qualité maximale

Figure 5.17 Comparaison des distributions de qualité élémentaire obtenues par chaque méthode de relaxation

Compte tenu de ces résultats, une stratégie pertinente pour relaxer le maillage sera d'exécuter un cycle de lissage Laplacien pour ensuite effectuer les cycles restants à partir de la méthode utilisant la physique d'un solide élastique. Dans les études exposées dans le Chapitre 6, nous utiliserons à chaque fois cette stratégie. La méthode utilisant les éléments barres reste toutefois un outil intéressant, puisqu'elle tend à regrouper les forces des deux autres méthodes. Nous tenons à souligner que ces conclusions dérivent d'un cas test où le domaine maillé est convexe. Il pourrait être intéressant de définir un problème test ou le domaine maillé est localement concave afin d'explorer le comportement des trois méthodes dans ce contexte complémentaire.

5.4.2 Analyse de la relaxation locale

Nous avons vu à la Section 4.3.3 qu'il peut être très intéressant de ne procéder qu'à une relaxation partielle du maillage. L'idée consiste à cibler les éléments dont la qualité n'est pas satisfaisante, pour ensuite appliquer la relaxation sur ces éléments et leurs voisins proches. Une métrique de qualité élémentaire est un outil tout à fait pertinent pour établir la liste des éléments à relaxer en premier lieu. Nous avions de fait identifié quatre métriques potentiellement intéressantes à cette fin. On présente pour commencer une courte étude comparative de ces métriques. Dans un deuxième temps on illustre l'utilisation locale de la relaxation au moyen de la métrique retenue.

Comportement des métriques de qualité

Les quatre métriques que nous avions évoquées à la Section 4.3.3 sont les suivantes :

$$Q_1 = \frac{2\sqrt{3}r}{l_{max}} \qquad Q_2 = \frac{2h_{min}}{\sqrt{3}l_{max}} \qquad Q_3 = \frac{3\alpha_{min}}{\pi} \qquad Q_4 = \frac{4\sqrt{3}A}{\sum_{i=1}^{3} l_i^2} \tag{5.14}$$

Dans ces définitions, r réfère au rayon du cercle inscrit, h_{min} et l_{max} sont respectivement la hauteur minimale et la longueur du plus grand côté, α_{min} désigne l'angle minimum de l'élément triangulaire, tandis que A est l'aire de l'élément triangulaire. Pour évaluer la pertinence de ces métriques, nous avons considéré la situation dépeinte à la Figure 5.18. En jouant sur les valeurs de α et β, on peut aisément étudier des éléments tant plats qu'allongés. Pour être cohérent avec la génération de maillage isotrope de notre implémentation de travail, il est nécessaire que la métrique utilisée puisse cibler sans distinction ces deux types d'éléments détériorés. Autrement dit, on souhaite que la mesure de la qualité soit constante ou presque pour toute valeur de α à β constant, lorsque la valeur de β tend vers 0 (critère 1). Par ailleurs, il faut que la mesure donnée par la métrique nous permette de choisir une tolérance de qualité éclairée (critère 2). On présente à la Figure 5.19 les résultats obtenus pour les différentes métriques.

En premier lieu, on peut remarquer qu'un triangle équilatéral ($\alpha = 0.5, \beta = \sqrt{3}/2$) résulte bien pour chaque métrique en une valeur unitaire. Pour des valeurs de β régulièrement espacées entre 0 et $\sqrt{3}/2$, la mesure de qualité donnée par la métrique Q_3 présente une évolution assez régulière à α constant. Ceci pourrait être intéressant, mais cette métrique ne vérifie pas du tout le critère 1 que nous avons établi. La métrique est globalement plus sévère avec les éléments allongés qu'avec les éléments plats. C'est également le cas pour la métrique Q_4, bien qu'à moindre échelle. L'évolution de la métrique Q_4 pour des valeurs croissantes de β avec $\alpha = 0.5$ n'est par ailleurs pas très linéaire, ce qui en complique l'exploitation. Les mé-

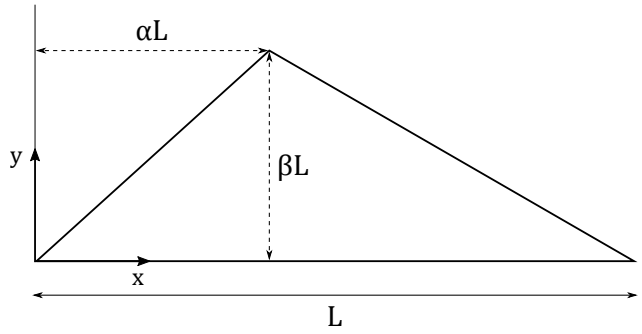
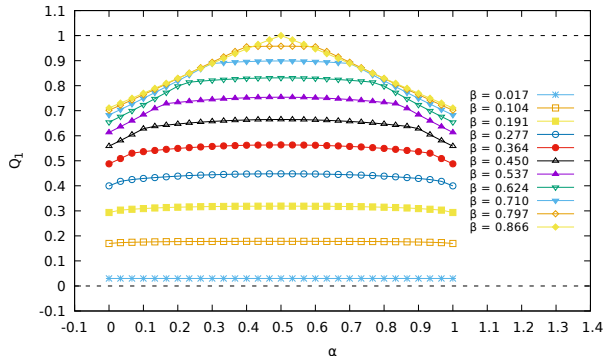
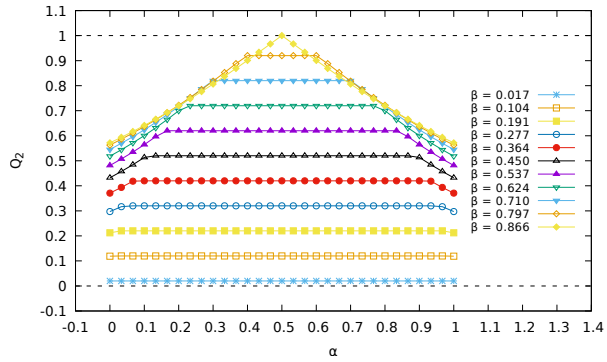


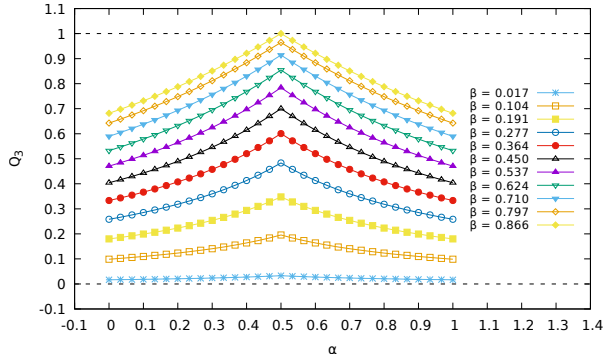
Figure 5.18 Géométrie paramétrée d'un triangle, permettant l'analyse du comportement des métriques de qualité



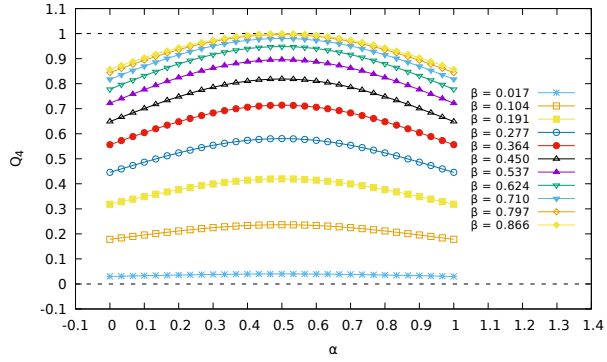
(a) Métrique Q_1



(b) Métrique Q_2



(c) Métrique Q_3



(d) Métrique Q_4

Figure 5.19 Comparaison des valeurs des métriques de qualité élémentaire pour différents couple (α, β)

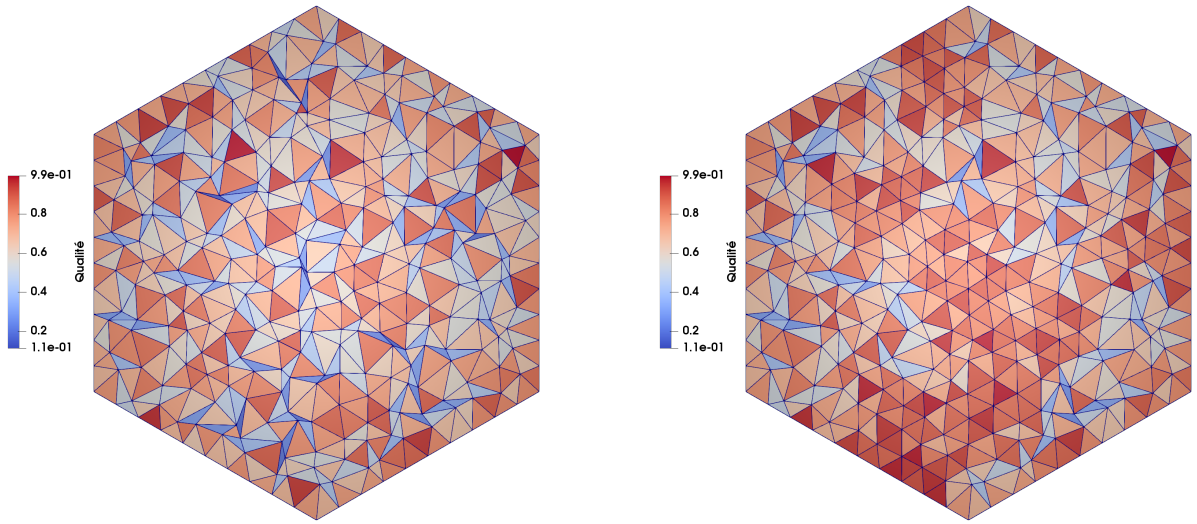
triques Q_1 et Q_2 présentent des résultats beaucoup plus intéressants vis à vis du critère 1. La métrique Q_2, de par sa définition, présente de plus l'avantage d'évoluer linéairement en fonction de β pour $\alpha = 0.5$:

$$Q_2(\alpha = 0.5, \beta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\beta \tag{5.15}$$

Pour de faible valeur de β, on peut même considérer que $Q_2 \approx \beta$. Ceci est particulièrement intéressant pour établir la tolérance sur la qualité des éléments. C'est pourquoi nous avons finalement retenue la métrique Q_2 pour piloter le lissage local du maillage.

Illustration du fonctionnement

On considère à nouveau le problème test de la Section 5.4.1, pour lequel on impose toutefois une taille de maille δ réduite. Après applications de déplacements randomisés sur les nœuds internes du maillage, on obtient la situation dépeinte à la Figure 5.20a. La tolérance sur la qualité des éléments, relativement à la métrique Q_2, a été fixée à $Q_{min} = 0.2$. On présente le maillage obtenu après un seul cycle de lissages Laplacien à la Figure 5.20b. Un unique cycle est ici suffisant pour atteindre la qualité cible pour tous les éléments du maillage. La relaxation a été effectuée sur les éléments dont la qualité était inférieure à la tolérance, ainsi que sur les éléments présents dans les deux couches voisines. Afin de l'illustrer davantage, la Figure 5.21 superpose le maillage issu de la relaxation locale (en bleu) sur le maillage initial (en rouge). On constate bien que seule une partie restreinte du maillage a subi la relaxation.



(a) Maillage initial (b) Maillage final

Figure 5.20 Relaxation locale - Évolution de la qualité des éléments

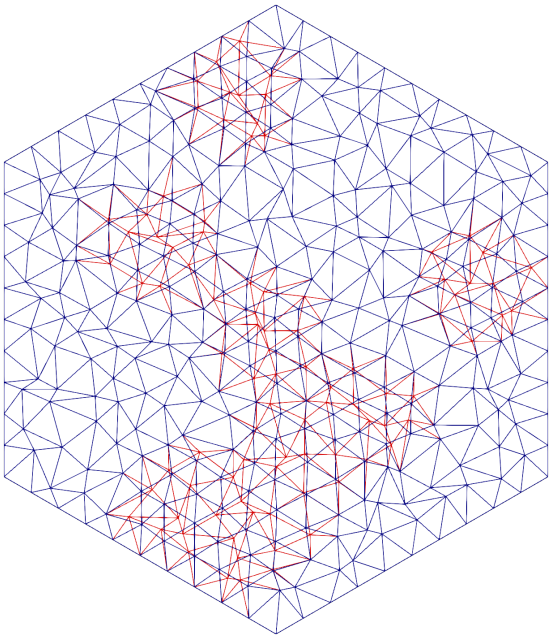


Figure 5.21 Relaxation locale - Superposition du maillage initial et final

En plus d'être peu coûteuse, la relaxation locale s'avère donc être un outil particulièrement intéressant dès lors que le maillage est adapté localement durant une simulation. Le maintien de la qualité du maillage ne vient alors pas nécessairement à contre-courant de l'adaptation de maillage locale. Dans tous les cas d'application présentés au Chapitre 6, nous utiliserons cette approche locale pour assurer une qualité suffisante des maillages successivement utilisés. Comme nous le verrons, cette approche est d'autant plus intéressante qu'elle tend à cibler naturellement les éléments issus de la génération locale du maillage. Ces éléments s'avèrent souvent de faible qualité, et pourront donc être repérés en utilisant une tolérance Q_{min} de l'ordre de 0.3.

5.5 Analyse du transfert de la solution d'un maillage à l'autre

Dans cette section on s'intéresse à nouveau aux différentes méthodes de transfert présentées dans la Section 4.4 :

- l'interpolation linéaire
- l'interpolation consistante (quadratique)
- la projection A : projection de Galerkin par quadratures de Gauss à partir des éléments du maillage d'intersection (approche de Farrell [124])
- la projection B : projection de Galerkin par quadratures de Gauss à partir des éléments du maillage courant (approche de Geuzaine [63])

- la projection C : projection de Galerkin hybride

Dans un premier temps on propose une vérification de leur implémentation, en s'appuyant sur le taux de convergence théorique de l'erreur de transfert pour chacune d'elle. On évalue ensuite leur capacité à préserver l'intégrale des variables résolues sur le domaine de calcul avant de comparer leur coût de calcul respectif. Pour traiter ces différents points, nous sommes repartis du problème manufacturé (5.4). Nous avons toutefois rajouté une constante dans l'expression de u et v :

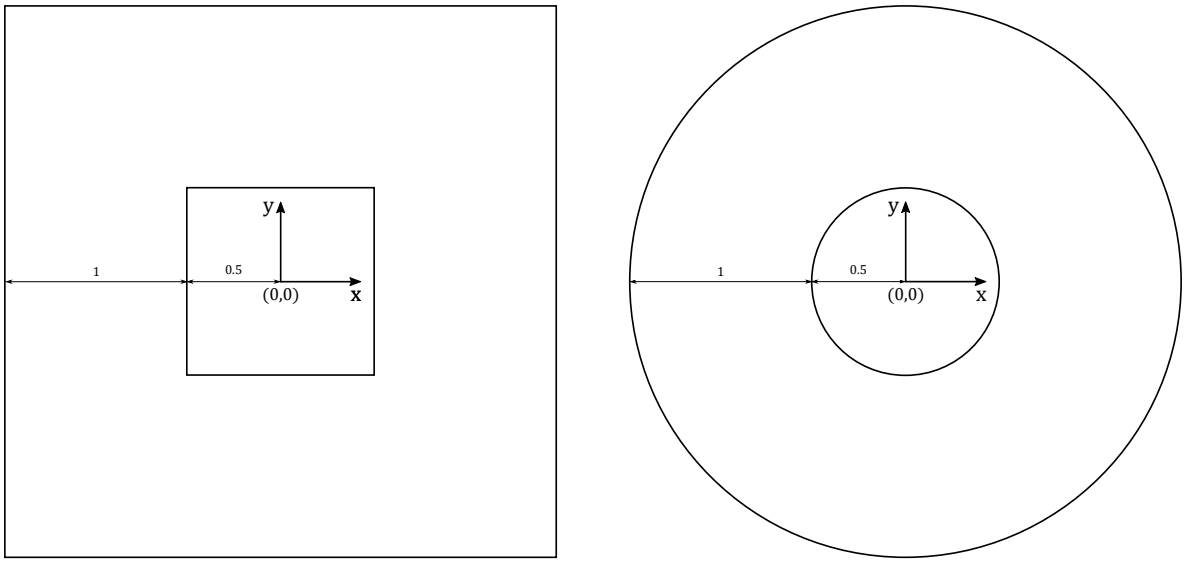
$$\begin{aligned} u &= \frac{-y}{r}\left(0.75r - \frac{0.1875}{r}\right) + 0.15 \\ v &= \frac{x}{r}\left(0.75r - \frac{0.1875}{r}\right) + 0.15 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ceci permet de garantir que l'intégrale des composantes de vitesse sur le domaine soit non nulle. L'ordinateur dispose de moyens limités pour représenter les nombres réels dont la valeur est très proche de zéro. Cette modification s'imposait donc afin de pouvoir étudier convenablement la conservation des intégrales des composantes de vitesse pour chacune des méthodes de transfert.

Par ailleurs, nous avions évoqué à la Section 4.4.2 qu'une série de difficultés peut subvenir lors du transfert de la solution sur les éléments s'appuyant sur une frontière incurvée du domaine. Afin de pouvoir quantifier les erreurs induites dans cette situation, nous avons considéré le problème manufacturé sur deux domaines de calcul différents, illustrés à la Figure 5.22.

5.5.1 Convergence de l'erreur de transfert

À l'exception de l'interpolation linéaire, dont l'erreur de transfert doit théoriquement converger à l'ordre 2, toutes les autres méthodes doivent permettre une convergence de l'erreur à l'ordre 3. Une exception doit cependant s'observer pour la pression, vu que celle-ci est représentée par un polynôme linéaire sur chaque élément. L'ordre de convergence de l'erreur de transfert sera donc théoriquement de 2 pour toutes les méthodes de transfert. On considère pour commencer le problème manufacturé sur le domaine A. Les différents maillages, de finesse croissante, ont été obtenus par adaptation de maillage, en imposant la valeur du facteur de réduction d'erreur à $\xi = 0.5$ pour toutes les normes d'erreur. Tous les éléments des maillages sont sub-paramétriques. L'adaptation de maillage a été réalisée indépendamment pour chaque méthode de transfert, ce qui a pu induire une évolution très légèrement différente du nombre de nœuds dans le domaine. L'erreur de transfert a été mesurée en norme L^2 sur le domaine, via les éléments du maillage d'intersection entre le maillage courant et le précédent maillage. Pour chaque variable du problème, la Figure 5.23 présente les graphes

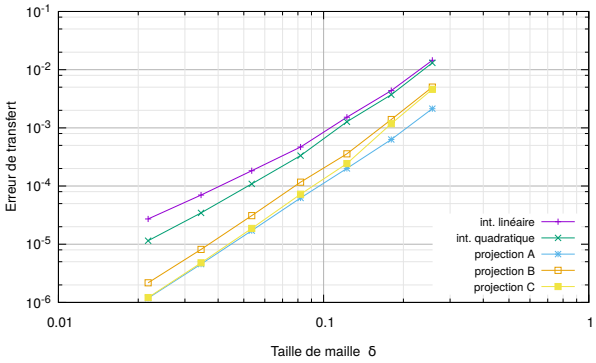


(a) Domaine A (b) Domaine B

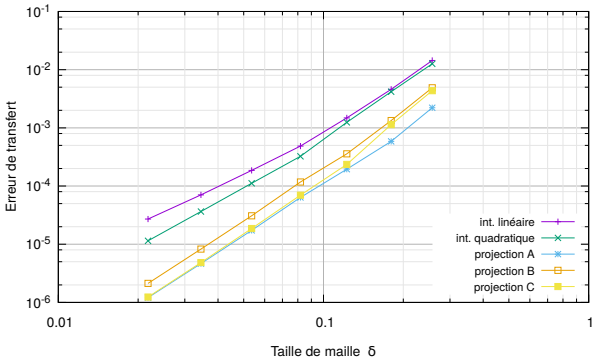
Figure 5.22 Domaines de calcul pour l'étude des erreurs de transfert de la solution d'un maillage à l'autre

de convergence de l'erreur pour chaque méthode de transfert. L'interpolation 1D a été appliquée sur les frontières tant pour l'interpolation linéaire que pour l'interpolation quadratique. En revanche, les résultats pour la projection sont ceux obtenus avant post-traitement des frontières par la projection 1D.

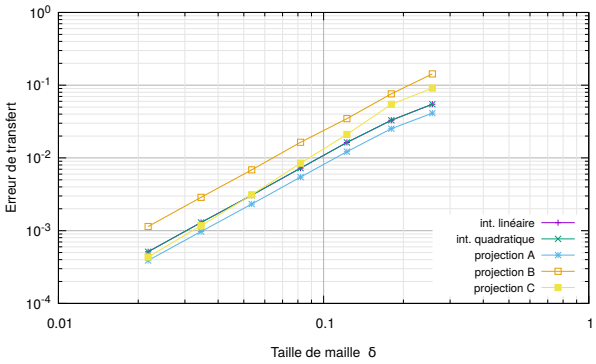
Commençons par analyser les résultats pour la pression. On observe bien une convergence de l'erreur à l'ordre 2 pour toutes les méthodes de transfert. La limite induite par l'approximation polynomiale linéaire de la pression sur chaque élément est donc bien observée. Notons toutefois que l'erreur de transfert est calculée à partir d'une reconstruction quadratique de la pression pour toutes les méthodes de transfert par soucis de généralité de l'implémentation. L'erreur de transfert obtenue en considèrant l'approximation linéaire induite par la reconstruction quadratique de la pression est très certainement supérieure. Dans le cas des écoulements incompressibles, auxquels on se limite dans ces travaux, ce n'est cependant pas un problème. La solution transférée pour la pression n'agit que comme une estimation initiale du champs de pression au pas de temps suivant. La reconstruction de la pression donnée par la projection B résulte en une erreur de transfert supérieure à celle obtenue par l'interpolation linéaire. Ces résultats sont très probablement imputables au fait que la projection B n'est qu'une implémentation approchée de la projection de Galerkin. On constate en effet que la



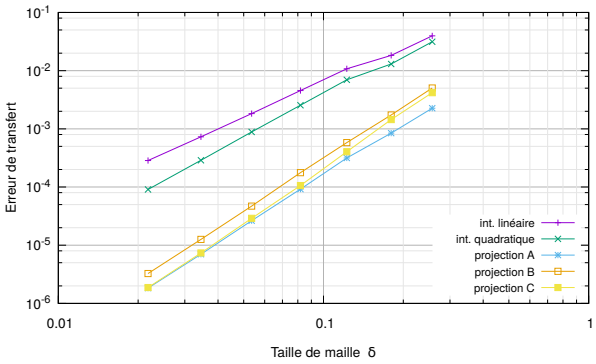
(a) Erreur sur u



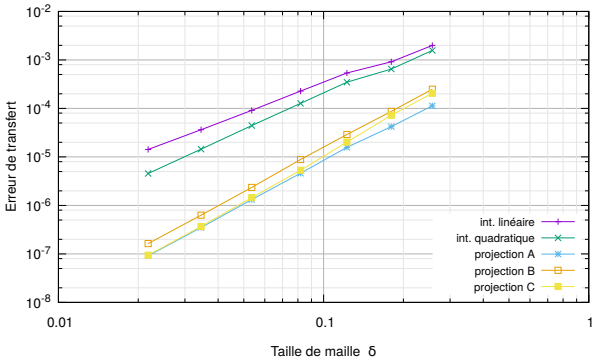
(b) Erreur sur v



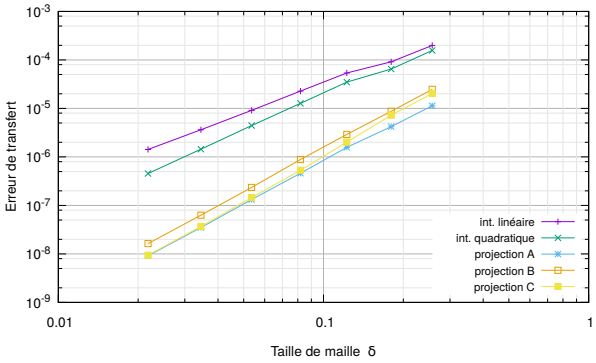
(c) Erreur sur P



(d) Erreur sur T



(e) Erreur sur k



(f) Erreur sur ε

Figure 5.23 Domaine A - Convergence de l'erreur de transfert pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert

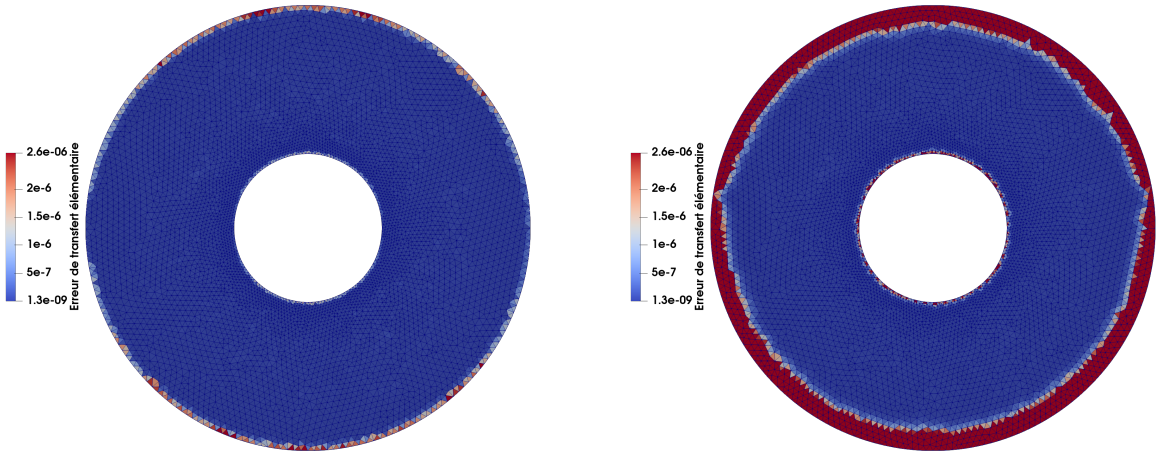
projection A, qui implémente la projection de Galerkin de manière exacte, fournit la plus faible valeur de l'erreur de transfert sur tous les maillages.

Pour ce qui est des autres variables, on observe bien que l'erreur commise par l'interpolation linéaire converge à l'ordre 2 une fois la région asymptotique atteinte. Le taux de convergence obtenu avec l'interpolation quadratique est en revanche légèrement inférieure à 3, valeur ici attendue. L'usage des projections A, B et C mènent en revanche bien à une convergence de l'erreur à l'ordre 3. La région asymptotique pour la projection B semble commencer un peu tôt que celle de la projection A et des interpolations. Le comportement attendu pour la projection C est aussi bien retrouvé. On constate en effet que le niveau de l'erreur de transfert est toujours intermédiaire à ceux obtenus avec les projections A et B. De plus, les erreurs résultant des projections A et C tendent à devenir identiques en raffinant le maillage. Via l'adaptation de maillage, le nombre total d'éléments dans le domaine A augmente plus rapidement que le nombre d'éléments adjacents aux frontières, ce qui explique ce résultat. Finalement, la projections de Galerkin, quelque soit l'approche utilisée, permet d'atteindre un niveau d'erreur sensiblement plus faible que celui obtenu avec les interpolations. L'erreur de transfert minimale résulte de la projection A. Ceci est cohérent avec la propriété de minimisation de l'erreur (en norme L^2) de la projection de Galerkin.

La suprématie de la projection A est cependant ébranlée lorsque le problème est résolu sur le domaine B. Les graphes de convergence de l'erreur de transferts calculée sur ce domaine sont présentés sur la Figure 5.25. On constate en effet que l'erreur de transfert résultant de la projection A est désormais la plus élevée. Son taux de convergence est aussi fortement dégradé, tombant ainsi à l'ordre 1. Cette détérioration du taux de convergence s'observe aussi pour les autres méthodes, bien que moindrement. Seul l'erreur issue de l'interpolation linéaire présente le taux de convergence attendu pour toutes les variables. Ceux de l'interpolation quadratique et des projections B et C sont conformes à la théorie pour la pression, mais légèrement réduits pour les autres variables.

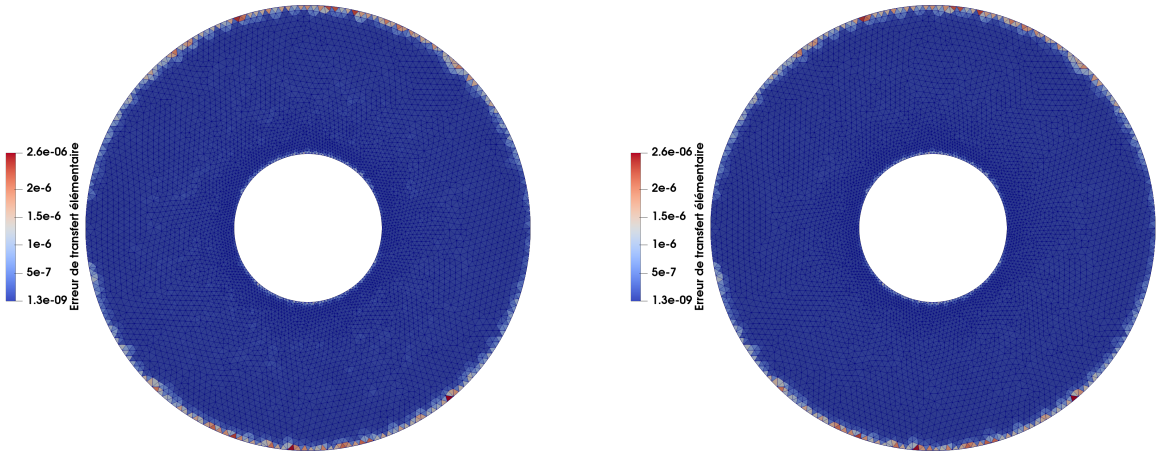
L'imprécision du transfert à proximité des frontières courbes du domaine B est à l'origine de cette détérioration. La Figure 5.24 illustre l'erreur de transfert élémentaire commise sur la variable u pour l'interpolation quadratique et les projections de Galerkin. Dans chaque cas l'erreur est concentrée à proximité des frontières du domaine de calcul. Par ailleurs, les erreurs élémentaires dans le cas de la projection A expliquent très bien le niveau de l'erreur de transfert obtenu avec cette méthode. Le surplus d'erreur ne se limite pas aux seuls éléments adjacents à une frontière. L'erreur se répercute sur plusieurs couches d'éléments à l'intérieur du domaine. Dans le cas de la projection de Galerkin, les valeurs nodales des champs projetés sont couplées via le système linéaire à résoudre, ce qui n'est pas le cas pour les

méthodes d'interpolation. Commettre une erreur importante sur les degrés de liberté situés sur les frontières du domaine impacte donc très négativement les degrés de liberté voisins. La propagation de l'erreur dans le domaine s'observe également pour la projection B, mais à nettement moindre échelle. L'erreur commise sur les éléments adjacents aux frontières est considérablement réduite en comparaison de celle obtenue avec la projection A. Au demeurant, la projection A a par construction la capacité de minimiser l'erreur au cœur du domaine de calcul. C'est pourquoi nous avons conçu la méthode de projection hybride (projection C), afin de bénéficier des forces des projections A et B dans ces circonstances.



(a) Interpolation quadratique

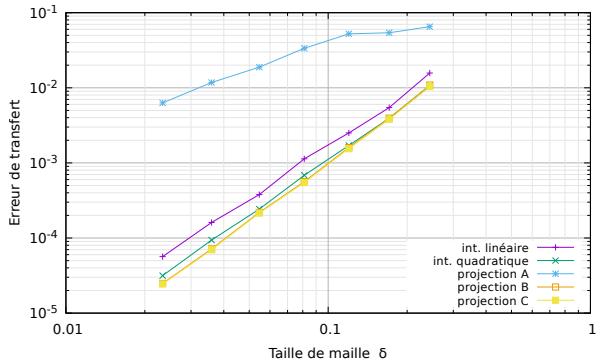
(b) Projection A



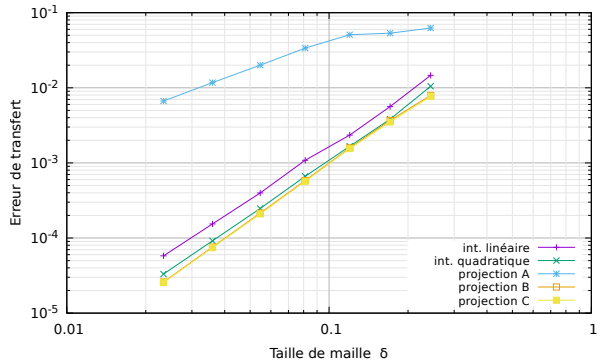
(c) Projection B

(d) Projection C

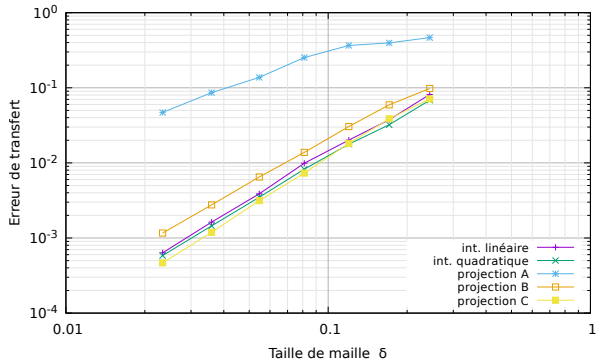
Figure 5.24 Domaine B - Visualisation de l'erreur de transfert élémentaire sur u sur le dernier maillage, pour différentes méthodes de transfert. L'échelle d'erreur a été fixée à partir des résultats obtenus avec la projection C.



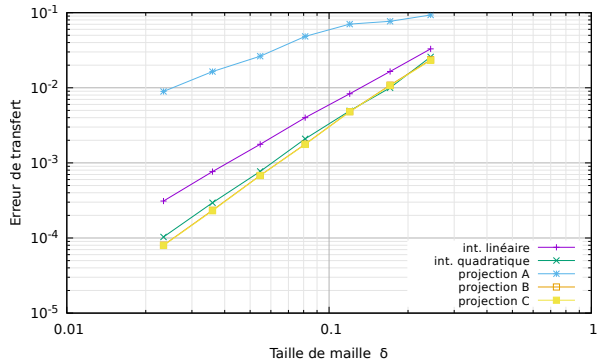
(a) Erreur sur u



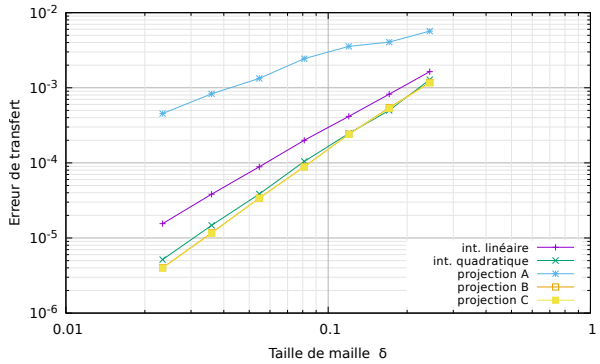
(b) Erreur sur v



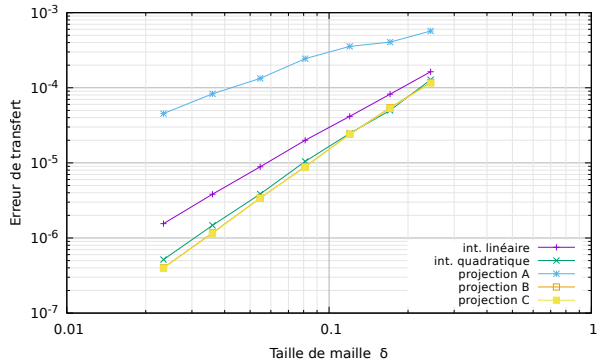
(c) Erreur sur P



(d) Erreur sur T



(e) Erreur sur k



(f) Erreur sur ε

Figure 5.25 Domaine B - Convergence de l'erreur de transfert pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert

5.5.2 Propriété de conservation des intégrales

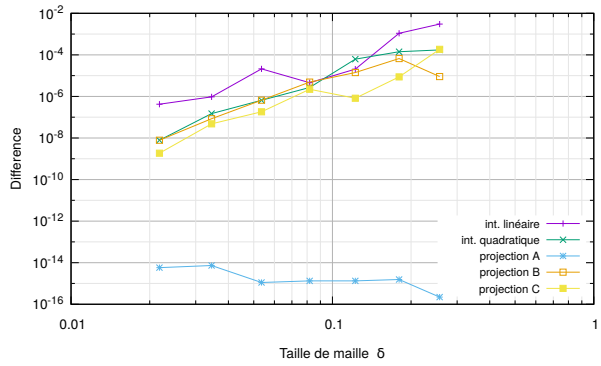
La conservation des intégrales des variables sur le domaine est physiquement désirable. Nous avions évoqué que la projection de Galerkin, si réalisée de façon exacte via un maillage d'intersection, possède cette propriété de conservation. Nous avons donc également cherché à retrouver ce résultat pour vérifier notre implémentation de la projection. La capacité des autres méthodes à conserver les intégrales a aussi été évaluée. Nous avons à nouveau utilisé les résultats issus de la résolution du problème manufacturé sur les domaines de calcul A et B. Les Figures 5.26 et 5.27 présentent les erreurs commises sur la conservation des intégrales, respectivement sur chacun de ces domaines.

Sur le domaine A, la projection de Galerkin, quelque soit l'approche utilisée pour l'appliquer, procure dans l'ensemble les meilleurs résultats. Les projections B et C fournissent des résultats similaires. Ceci n'est pas surprenant car la projection C applique la projection B sur les éléments au bord du domaine, qui deviennent les "maillons faibles" pour la propriété de conservation. Celle-ci est en revanche très bien retrouvée pour la projection A. L'erreur sur la conservation des intégrales est en effet de l'ordre de la précision machine pour toutes les variables. Ces résultats, joints à ceux présentés dans la sous-section précédente, complètent la vérification de la projection de Galerkin.

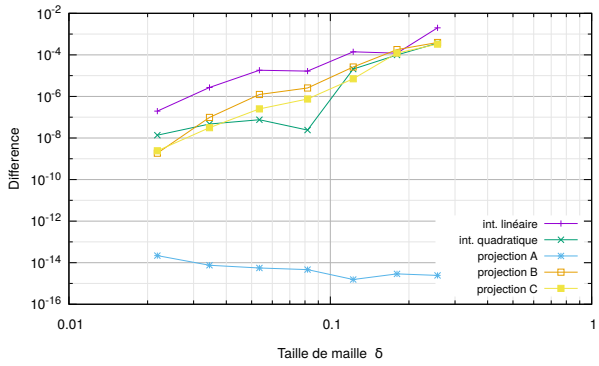
Concernant les méthodes d'interpolation, l'interpolation quadratique aboutit dans l'ensemble à de meilleurs résultats que l'interpolation linéaire. Notons également que les erreurs sur la conservation de l'intégrale de la pression, obtenues avec les méthodes d'interpolation, sont inférieures à celle obtenue avec les projections B et C. La conservation de la pression obtenue par la projection A est aussi à relativiser. C'est la reconstruction quadratique de P donnée par la projection A qui permet de conserver l'intégrale de P sur le maillage précédent. L'approximation linéaire de la pression, résultant de sa reconstruction quadratique, ne conserve cependant pas l'intégrale de P.

Sans surprise, les résultats sur le domaine B démontrent que la propriété de conservation de la projection A n'est pas maintenue sur un domaine de calcul avec des frontières incurvées. La faute en est que certaines parties de l'ancien maillage ne sont pas contenues dans le nouveau. Or la projection A conserve seulement les intégrales sur le domaine de calcul défini par le nouveau maillage. Toutefois, les cycles de raffinements de maillage tendent à améliorer la représentation des frontières incurvées, ce qui limite de plus en plus les régions de l'ancien maillage non contenues dans le nouveau. C'est pourquoi on observe une diminution très lisse de l'erreur sur la propriété de conservation, au point qu'elle soit davantage respectée avec la projection A qu'avec les autres méthodes. En se rappelant maintenant du niveau de l'erreur de transfert sur le domaine B pour la projection A, cela montre à quel point la propriété

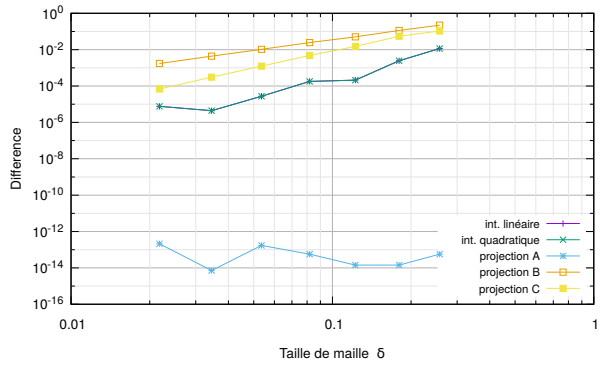
de conservation n'est pas, à elle seule, un indicateur pertinent de la qualité du transfert de la solution. Les résultats obtenus via les autres méthodes démontrent également une amélioration de la propriété de conservation en raffinant le maillage, bien que cette tendance puisse être plus erratique.



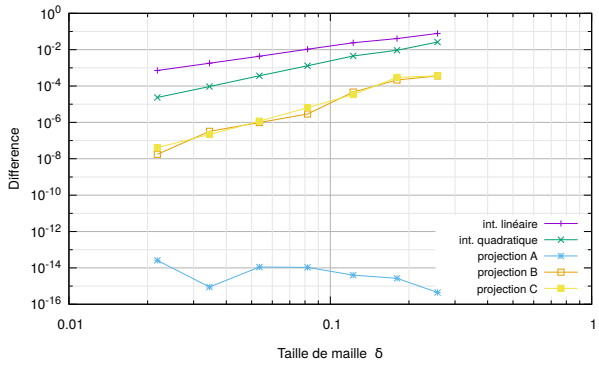
(a) Conservation de l'intégrale de u



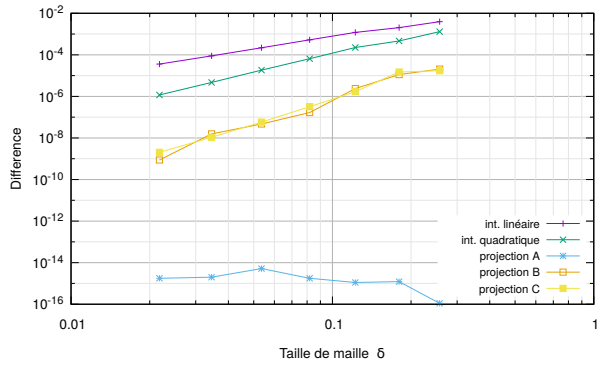
(b) Conservation de l'intégrale de v



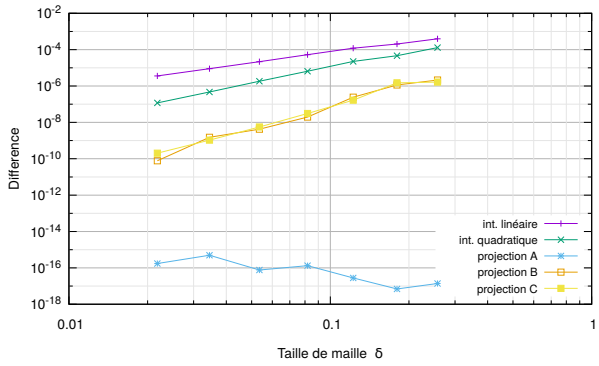
(c) Conservation de l'intégrale de P



(d) Conservation de l'intégrale de T

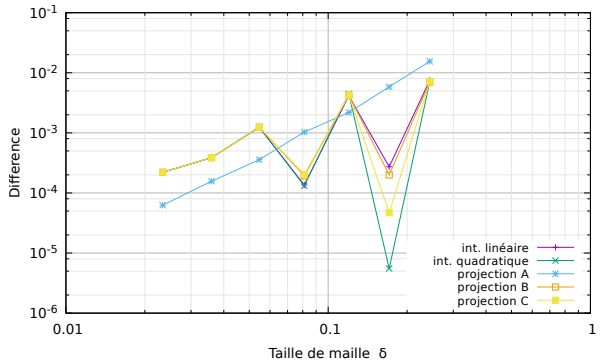


(e) Conservation de l'intégrale de k

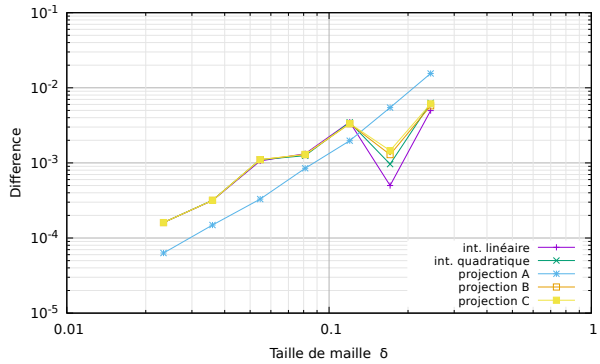


(f) Conservation de l'intégrale de ε

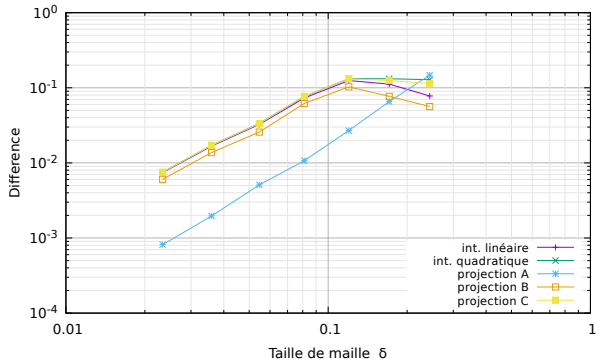
Figure 5.26 Domaine A - Évaluation de la propriété de conservation pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert



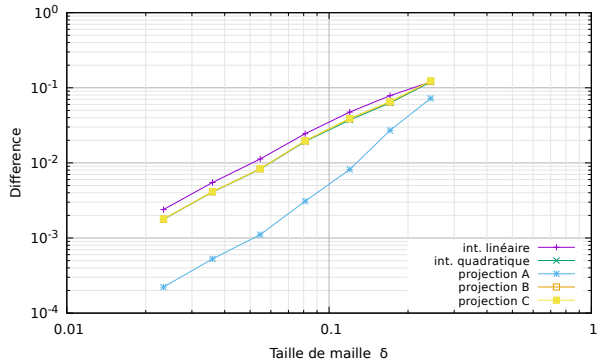
(a) Conservation de l'intégrale de u



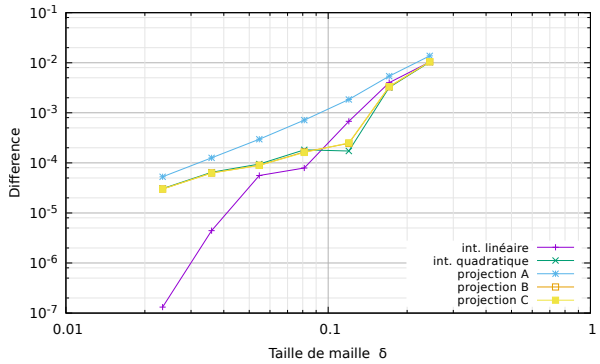
(b) Conservation de l'intégrale de v



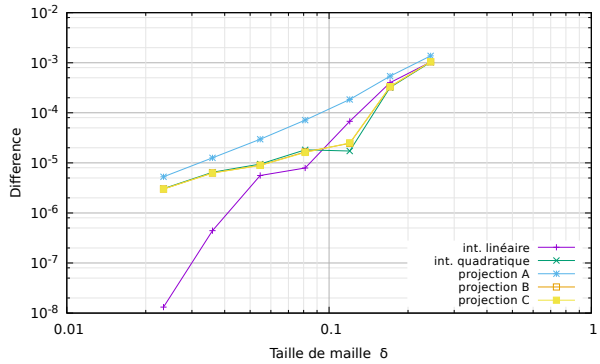
(c) Conservation de l'intégrale de P



(d) Conservation de l'intégrale de T



(e) Conservation de l'intégrale de k



(f) Conservation de l'intégrale de ε

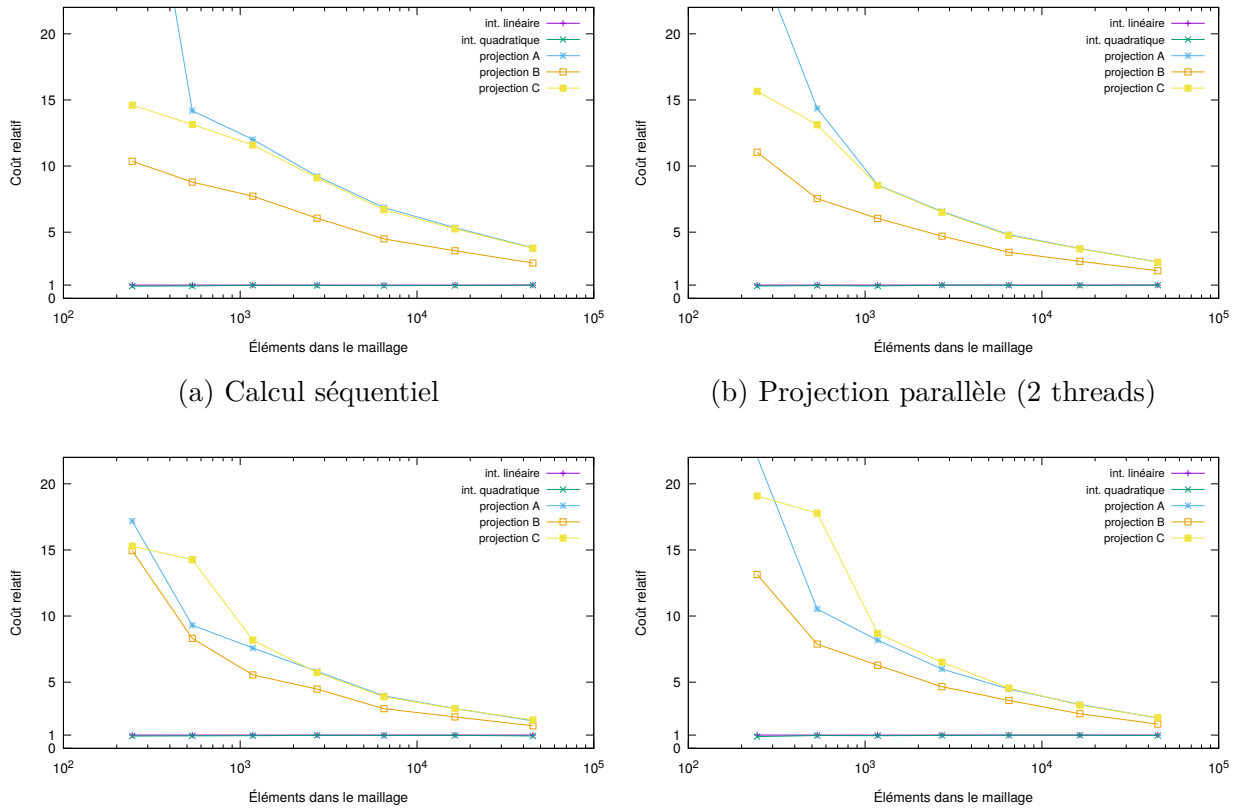
Figure 5.27 Domaine B - Évaluation de la propriété de conservation pour chaque variable résolue et pour chaque méthode de transfert

5.5.3 Évaluation du coût de calcul

Le coût de calcul de chaque méthode a été évalué en prenant la moyenne de son temps d'exécution pour 25 réalisations. Le temps de calcul a été mesuré sur plusieurs maillages du domaine A, de finesse croissante. Les processeurs sur la machine utilisée étaient des *Intel(R) Core(TM) i7-6700K 4.00GHz*. Les calculs ont été réalisés en séquentiel, et également avec 2, 4 et 6 threads actifs. Notons toutefois que les interpolations linéaire et quadratique ne sont pas parallélisées pour des raisons liées à leur implémentation. Quant aux projections de Galerkin, nous avons seulement pu paralléliser l'assemblage du système linéaire et sa résolution. Du fait du stockage dynamique des intersections entre les éléments du maillage courant et du précédent, la phase de reconnaissance de ces intersections demeure séquentielle. Il en est de même pour la phase de construction du maillage d'intersection. Afin de faire abstraction de la machine utilisée, les temps de calcul sont d'abord donnés relativement à ceux obtenus avec l'interpolation linéaire sur chaque maillage. Les résultats sont présentés à la Figure 5.28. Les temps de calcul sont ensuite présentés dans le cas séquentiel à la Figure 5.29.

Que la projection soit exécutée en séquentiel ou en parallèle, la même tendance générale s'observe. Le coût relatif de la projection de Galerkin décroit fortement avec le nombre d'éléments dans le maillage. La parallélisation partielle de la projection peut réduire davantage ce coût relatif. Sur le dernier maillage, la projection B coute seulement 2 fois plus cher qu'une interpolation linéaire ou quadratique lorsque 4 threads sont utilisés. Cependant, utiliser 6 threads ne permet pas vraiment d'améliorer davantage le coût relatif des projections. D'une part, ceci s'explique par l'usage d'un bloc d'atomicité lors de l'assemblage des matrices élémentaires dans le système linéaire global, cela afin d'éviter des situations de compétitions entre les threads (on parle de *race condition* en anglais) lors de l'accès à la mémoire partagée. D'autre part, nous avons précisé que de nombreuses opérations nécessaires à l'établissement du système de projection demeurent séquentielles. Le temps de calcul afférent est donc 'incompressible' et finit par représenter la majeure partie du coût de calcul total de la projection.

La diminution du coût relatif des projections avec l'augmentation du nombre d'éléments dans le maillage est expliquée par la Figure 5.29. On constate en effet que la complexité des interpolations en regard du nombre d'éléments est non linéaire. Le coût de calcul de l'interpolation est dû en très majeure partie à la recherche des nœuds dans l'ancien maillage via l'arborescence en *quadtree* (cf. Annexe C). La complexité de la recherche dans l'arbre évolue en fonction du logarithme du nombre d'éléments dans l'ancien maillage. Par ailleurs la recherche doit être conduite pour chaque nœud du nouveau maillage. Compte tenu du type d'élément utilisé, il y a environ deux fois plus de nœuds dans le maillage que d'éléments. Finalement l'adaptation de maillage, avec le facteur de réduction ξ choisi, a permis à chaque



(a) Calcul séquentiel

(b) Projection parallèle (2 threads)

(c) Projection parallèle (4 threads)

(d) Projection parallèle (6 threads)

Figure 5.28 Coûts de calcul des différentes méthodes de transfert de la solution, donnés relativement au coût de l'interpolation linéaire

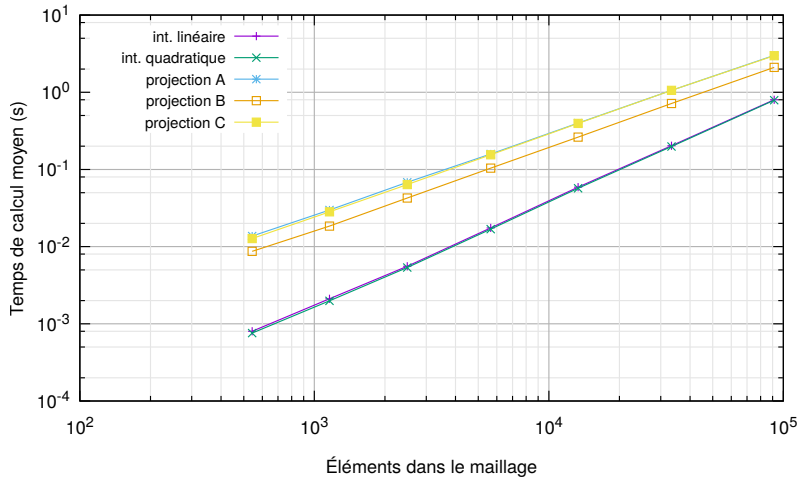


Figure 5.29 Temps de calcul moyen pour les différentes méthodes de transfert en exécution séquentielle

cycle d'environ doubler le nombre d'éléments dans le maillage. En première approximation, la complexité de l'interpolation linéaire et quadratique est donc en $O(N_e \log(N_e))$. Pour les projections, la majeure partie du coût est lié à l'assemblage des matrices élémentaires. En considérant que chaque élément du nouveau maillage est en intersection avec le même nombre d'éléments de l'ancien maillage, le coût de la phase d'assemblage dépend linéairement du nombre d'élément dans le nouveau maillage. La complexité des projections est donc en $O(N_e)$.

L'ensemble des résultats pour la projection de Galerkin, exposés dans cette sous-section et les précédentes, démontrent donc que la projection de Galerkin est un outil extrêmement intéressant. Pour un surcoût totalement acceptable sur des maillages fins, la projection peut améliorer notablement le transfert de la solution d'un maillage à l'autre. Ces conclusions sont de plus dressées dans le contexte d'une adaptation globale du maillage. Le coût de calcul de la projection de Galerkin peut être notablement réduit si l'adaptation de maillage est locale. En supposant que l'adaptation de maillage et la relaxation locales permettent de sauvegarder 70% du maillage, le coût de la projection de Galerkin sera donc réduit d'environ 70% si elle est appliquée uniquement sur les nouveaux éléments. À termes, l'application locale de la projection peut donc être plus économique qu'une interpolation globale.

CHAPITRE 6 ÉTUDES DÉMONSTRATIVES

Dans ce chapitre, on souhaite évaluer la pertinence de l'approche que nous proposons pour traiter les écoulements instationnaires. Pour ce faire, nous avons considéré les quatre cas d'étude suivants :

- L'écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$.
- Un jet impactant sur une plaque chauffante.
- L'écoulement turbulent au dessus d'une marche descendante à $Re = 47625$.
- L'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Ce chapitre les aborde successivement. Leur variété permet de caractériser le comportement de notre algorithme de résolution dans des situations très diverses.

Dans chacun de ces cas, on étudiera notamment l'évolution du maillage pour un ou plusieurs paramétrages des critères d'arrêt. On s'intéressera par exemple à l'évolution du nombre d'éléments dans le maillage en fonction de la tolérance sur l'erreur relative globale. On évaluera également dans quelle proportion il est possible de préserver le domaine de calcul à chaque adaptation de maillage. Pour cette raison, nous introduisons dès maintenant trois fonctions de préservation :

(1) Fraction des éléments d'un maillage n'ayant pas subi la relaxation :

$$f_{p1} = \frac{N_e - \text{card}\,\{\mathcal{E}_r\}}{N_e} \tag{6.1}$$

(2) Fraction des éléments d'un maillage provenant du maillage précédent :

$$f_{p2} = \frac{N_e - \text{card}\,\{\mathcal{E}_a\}}{N_e} \tag{6.2}$$

(3) Fraction des éléments d'un maillage provenant du maillage précédent, et conservés tels quels :

$$f_{p3} = \frac{N_e - \text{card}\ \{\mathcal{E}_a\} \bigcup \{\mathcal{E}_r\}}{N_e} \tag{6.3}$$

Ces fonctions, dont la valeur de sortie est nécessairement comprise entre 0 et 1, nous renseignent sur l'efficacité et la complémentarité des traitements locaux. Une valeur de sortie proche de 1 pour ces fonctions démontre tout l'intérêt de procéder localement pour les opérations d'adaptation et de relaxation de maillage. À l'inverse, si ces trois quantités tendent vers 0, l'intérêt de nos procédures locales sera beaucoup plus discutable.

6.1 Cylindre circulaire à Reynolds 100

Ce problème a été abondamment étudié numériquement et expérimentalement. La valeur du nombre de Reynolds utilisée garantit que l'écoulement soit laminaire et 2D [43, 51]. Cet écoulement a donc été modélisé au moyen des équations de Navier-Stokes adimensionnelles en 2D (cf. Système (3.19)).

6.1.1 Description du problème à résoudre

Le domaine de calcul est défini sur la Figure 6.1 tandis que les conditions limites sont précisées dans le Tableau 6.1.

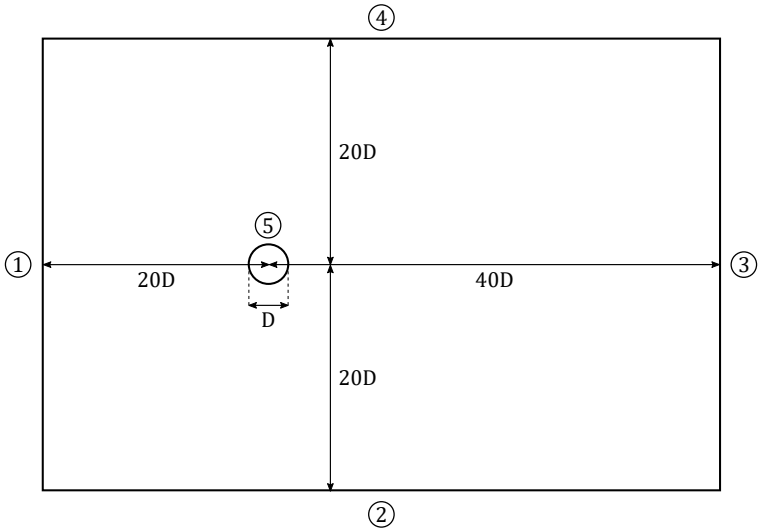


Figure 6.1 Cylindre circulaire - Géométrie du domaine de calcul

Tableau 6.1 Cylindre circulaire - conditions limites utilisées

Courbe	1	2	3	4	5
u	$f(t)$	libre	libre	libre	0
v	0	0	libre	0	0

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t <= 0 \\ (1-\cos(t))/2 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 1 & \text{si } t >= \pi \end{cases} \quad (6.4)$$

La rampe en temps appliquée sur la vitesse axiale à l'entrée du domaine permet de garantir la conservation de la masse à $t = 0$, les composantes de vitesse étant initialisées à 0 dans le domaine. Cette rampe garantit de plus une évolution continue de la dérivée temporelle de u en entrée, ce qui est souhaitable. Les conditions limites de symétrie sur les frontières latérales 2 et 4 permettent à l'écoulement de s'établir directement dans le domaine au complet. Par ailleurs notons que la géométrie du domaine est construite en fonction du diamètre du

cylindre. Ce diamètre a été pris unitaire, de sorte à pouvoir spécifier le nombre de Reynolds de l'écoulement directement à partir de la viscosité du fluide.

6.1.2 Stratégies adoptées pour la résolution

Pour ce cas d'étude, nous avons souhaité évaluer l'effet de plusieurs paramètres sur la résolution :

- le type de remaillage : local ou global
- la méthode de transfert de la solution : interpolation linéaire/consistante ou projection de Galerkin (hybride)
- la tolérance sur l'erreur relative globale (tolérance ε_1)
- la tolérance sur la qualité minimale des éléments pour la relaxation (tolérance Q_{min})

Nous avons donc défini 6 cas différents, que l'on explicite dans le Tableau 6.2. Nous avons dans chaque cas intégré 150 unités de temps, en utilisant après chaque remaillage la procédure de relance des BDF que nous avons décrite à la Section 4.5.3. Dans tous les cas, l'ordre de l'intégrateur en temps est libre de varier entre 1 et 3, selon les considérations fournies par l'indicateur de stabilité. Les tolérances pour l'erreur locale absolue et relative sont respectivement de 10^{-6} et 10^{-4}.

L'adaptation de maillage a été pilotée dans tous les cas par la norme énergie uniquement (approche mononorme). Deux couches protectrices ont été utilisées pour réaliser l'adaptation et la relaxation locales du maillage. Les tolérances fixées pour les différents critères d'arrêt actifs sont précisées dans le Tableau 6.3. Soulignons que la tolérance ε_3 n'est pas très sévère. Cela s'explique par la difficulté de pouvoir *effectivement* augmenter la taille d'un élément dans certaines situations. Nous aurons l'occasion de discuter davantage ce point dans la Section 6.3. Le facteur de réduction d'erreur ξ intervenant dans l'opérateur de transition de l'adaptation de maillage a été déterminé adaptativement selon la procédure discutée à la Section 4.1.2, avec $\xi_{max} = 1.1$ et $\xi_0 = 0.5$. L'expérience nous a montré qu'il n'était pas simple de contrôler le niveau d'erreur spatiale sur une solution dont les valeurs nodales sont proches de 0, car les erreurs résultants du transfert de la solution sur le nouveau maillage sont, relativement à ces valeurs, trop importantes. Afin d'éviter des adaptations de maillage en chaine sur l'écoulement rampant observé en tout début de simulation, les critères d'arrêt ne sont véritablement actifs qu'à compter de $t = 3$. Notons finalement que tous les maillages utilisés sont hybrides (cf. Section 3.2.6), de sorte à représenter au mieux le cylindre.

Tableau 6.2 Cylindre circulaire - Présentation des différents cas test

Cas	Tolérance ε_1 (%)	Type de remaillage	Transfert de la solution	Tolérance Q_{min}
1	1.5	local	projection	0.3
2	10	local	projection	0.3
3	1.5	local	interpolation quad.	0.3
4	1.5	local	interpolation lin.	0.3
5	1.5	global	projection	0.3
6	1.5	local	projection	0.15

Tableau 6.3 Cylindre circulaire - Valeurs des tolérances fixes liées aux critères d'arrêt actifs

ε_2	ε_3	ε_4 (%)	ε_5
5	10	100	5

6.1.3 Analyse des résultats

Évolution du maillage

On commence par présenter à la Figure 6.2 l'évolution du nombre d'éléments dans le maillage pour chaque cas simulé.

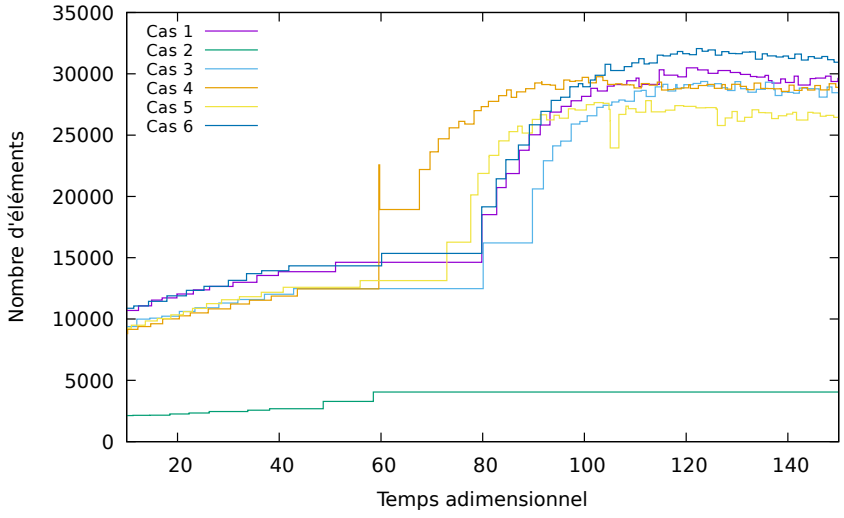


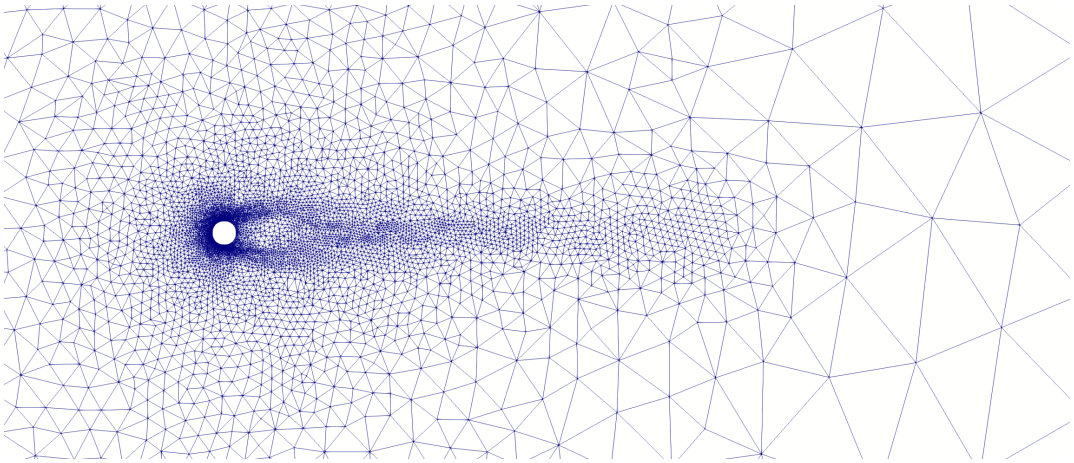
Figure 6.2 Cylindre circulaire - Variation du nombre d'éléments dans le maillage dans chaque cas

On constate que la tolérance ε_1 a un impact direct sur l'évolution du nombre d'éléments. L'utilisation d'une tolérance plus stricte induit logiquement une augmentation de la densité d'éléments dans le maillage. À tolérance fixée, on observe que les autres paramètres ici étudiés n'ont que peu d'impact sur l'évolution du nombre d'éléments. Que ce soit dans la phase

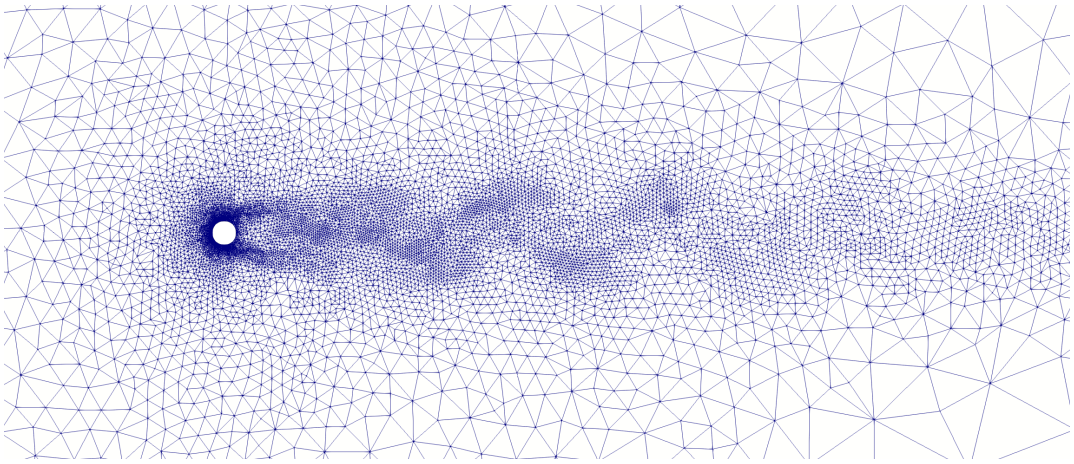
de croissance des zones de recirculation à l'aval du cylindre (phase 1 : $0 \leq t \leq 50$), ou bien dans la phase de relâché tourbillonnaire (phase 2 : $t \geq 100$), les trois méthodes de transfert conduisent à des évolutions du nombre d'éléments très similaires. On notera toutefois que tolérer des éléments de moindre qualité dans le maillage (cas 6) semble induire une augmentation plus franche du nombre d'éléments dans la phase 2. Nous aurons l'occasion de l'expliquer un peu plus loin. A contrario, adapter globalement le maillage (cas 5) permet ici de limiter l'augmentation du nombre d'éléments. Cela signifie que les éléments conservés lors des remaillages locaux sont en moyenne des éléments qui pourraient voir leur taille légèrement augmenter. Finalement, l'évolution du nombre d'éléments dans chaque cas reflète bien la différence de complexité de la physique entre les phases 1 et 2. La formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur ξ semble donc très bien fonctionner.

La Figure 6.3 illustre le maillage à différents instants dans le cas 1. Son évolution reflète très bien la physique de l'écoulement. La Figure 6.4 présente quant à elle la formation des germes, des couches protectrices et de la couche fictive sur ces maillages. Les éléments à retirer sont en très grande majorité à l'aval du cylindre. Une fois l'allée tourbillonnaire en place, les poches à remailler sont pleinement situées dans celle-ci. Ce comportement est exactement celui attendu. L'estimation d'erreur de Zhu et Zienkiewicz en norme énergie repère particulièrement bien les vortex relâchés à l'aval du cylindre car les gradients de vitesse y varient rapidement. De fait, la convection des tourbillons déplace sans cesse les zones où l'erreur estimée est élevée, ce qui entraîne un remaillage d'une large partie de l'allée tourbillonnaire. En outre, on peut noter que la frontière du cylindre est presque entièrement épargnée par le remaillage locale. En conséquence, le surplus d'erreur de transfert à proximité des frontières courbes est ici évité.

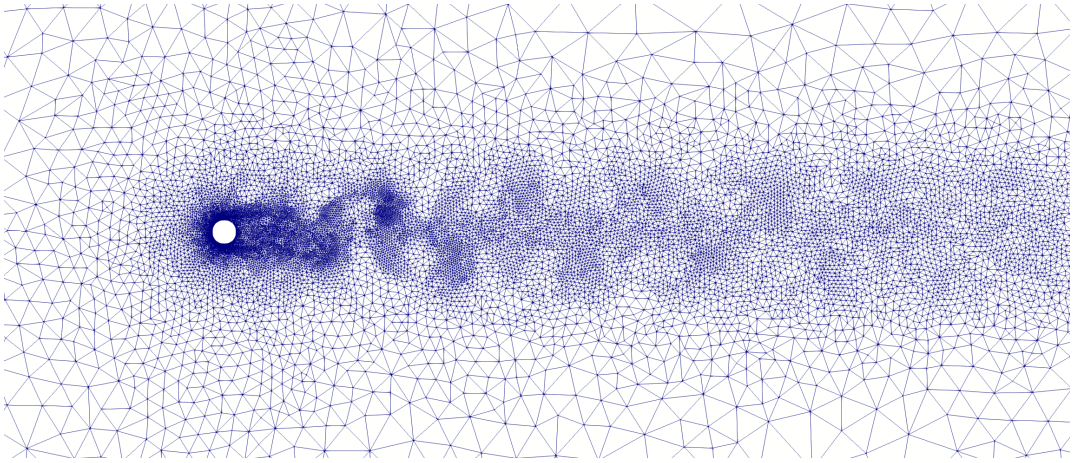
Intéressons-nous maintenant aux fonctions de préservation que nous avons définies en début de chapitre. La Figure 6.5 en illustre l'évolution pour plusieurs des cas étudiés. Là encore, on retrouve bien dans les cas présentés les deux phases de l'écoulement. Le relâché tourbillonnaire est plus contraignant pour le remaillage local. Ce n'est en soi pas une surprise car l'allée tourbillonnaire est une région densément maillée, et c'est justement là que le remaillage local opère. Durant la phase 1 cependant, la combinaisons des traitements locaux résulte en 80% d'éléments ayant une correspondance exacte dans l'ancien maillage, et cela à chaque adaptation de maillage. Ce résultat est extrêmement satisfaisant. Concernant la procédure de relaxation locale, on voit qu'une tolérance $Q_{min} = 0.3$ se traduit par une corrélation importante des fonctions f_{p1} et f_{p2}. Néanmoins, le décalage entre les fonctions f_{p2} et f_{p3} démontrent qu'il n'y a pas identité entre les nouveaux éléments et les éléments relaxés. À en juger par les écarts entre les courbes, on peut estimer qu'environ 70% des éléments relaxés se situent dans les poches qui ont été remaillées. La tendance générale montre de plus que



(a) À $t = 25$ (phase 1)

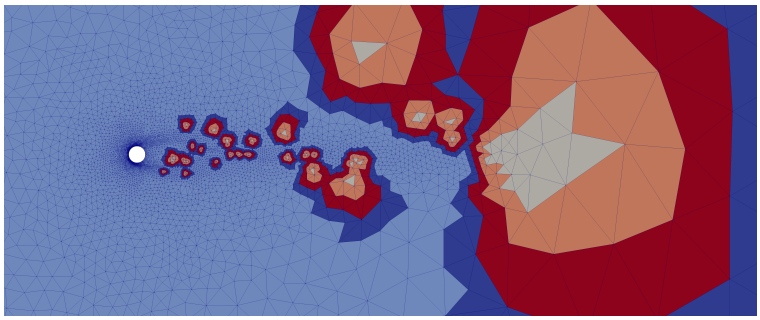


(b) À $t = 80$ (transition)

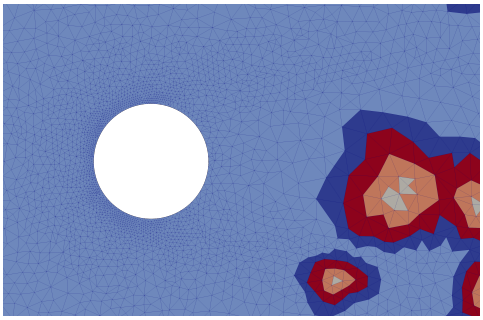


(c) À $t = 150$ (phase 2)

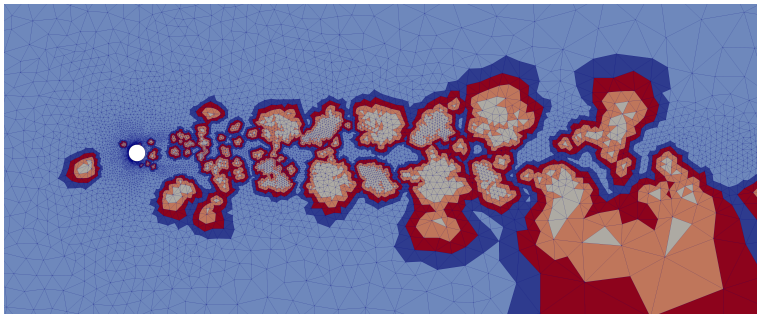
Figure 6.3 Cylindre circulaire - Vue partielle des maillages utilisés à différents instants pour le cas 1



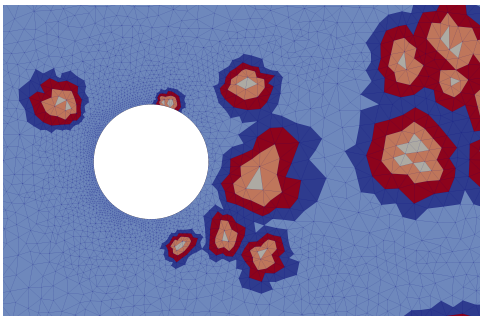
(a) À $t \approx 25$



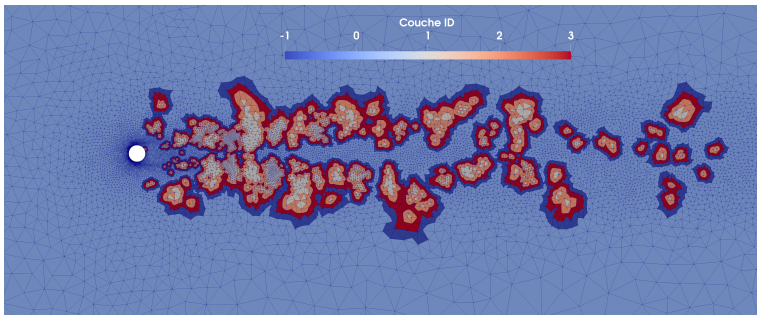
(b) À $t \approx 25$ (zoom)



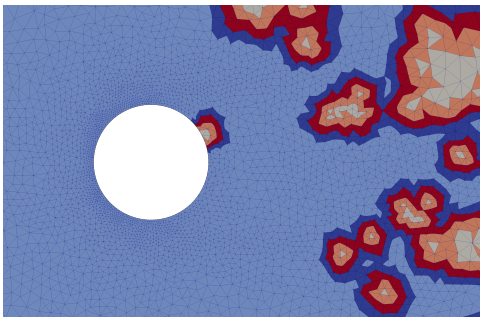
(c) À $t \approx 80$



(d) À $t \approx 80$ (zoom)



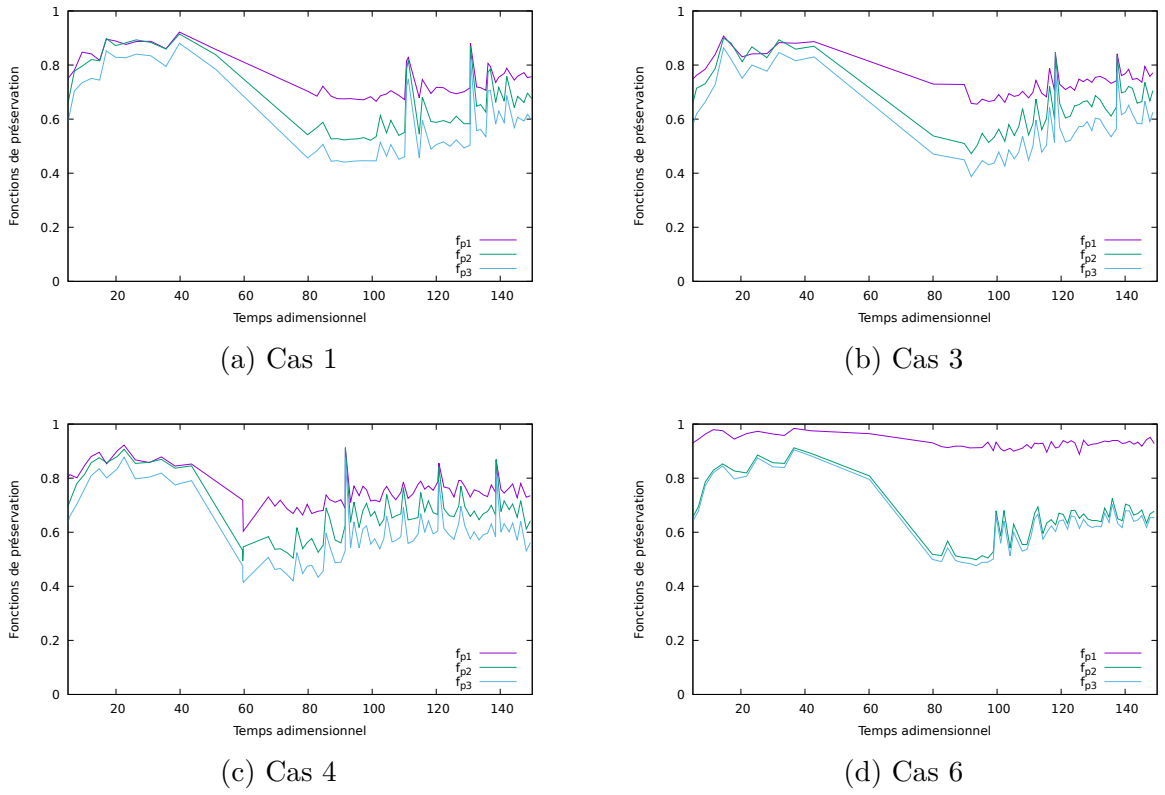
(e) À $t \approx 150$



(f) À $t \approx 150$ (zoom)

Figure 6.4 Cylindre circulaire - Vue partielle des poches à remailler à différents instants pour le cas 1. Les éléments germes sont repérés avec une ID unitaire. Les deux couches protectrices ont une ID de 2 et 3 respectivement, tandis que la couche fictive est repérée par l'ID -1. Les éléments conservés possèdent une ID nulle.

la tolérance Q_{min} choisie conduit en valeur absolue à un nombre d'éléments relaxés plus faible que le nombre de nouveaux éléments dans le maillage. Ceci est d'autant plus flagrant lorsque l'on réduit la tolérance Q_{min}. Pour le cas 6, on observe en effet une forte réduction du nombre d'éléments relaxés, alors que le nombre de nouveaux éléments dans le maillage demeure presque inchangé. Relaxer localement le maillage n'est donc pas vraiment un frein à la réduction des erreurs de transfert de la solution d'un maillage à l'autre. Nous verrons même un peu plus loin qu'une tolérance suffisamment sévère est recommandée afin d'éviter des adaptations de maillage supplémentaires. Enfin, on pourra remarquer que la tolérance $Q_{min} = 0.3$ ne conduit à relaxer que 25% des éléments du maillage au maximum. Cette information démontre que la qualité d'ensemble du maillage est bonne. Quant à la qualité élémentaire minimale dans le maillage, on ne peut réellement garantir qu'elle soit atteinte à l'issue des cycles de relaxation. La procédure de relaxation locale permet malgré tout de bien s'en approcher, tel qu'illustré sur la Figure 6.6. Notons également qu'une fois la phase 2 pleinement établie, environ 60% des éléments sont exactement conservés lors des adaptations de maillage. Ceci permet de réduire grandement à chaque fois la taille du système linéaire de projection. Le transfert de la solution est de fait beaucoup plus rapide. Ce taux de préservation du maillage témoigne aussi d'un suivi satisfaisant des structures tourbillonnaires convectées à l'aval du cylindre.



(a) Cas 1

(b) Cas 3

(c) Cas 4

(d) Cas 6

Figure 6.5 Cylindre circulaire - Évolution des fonctions de préservation pour plusieurs cas

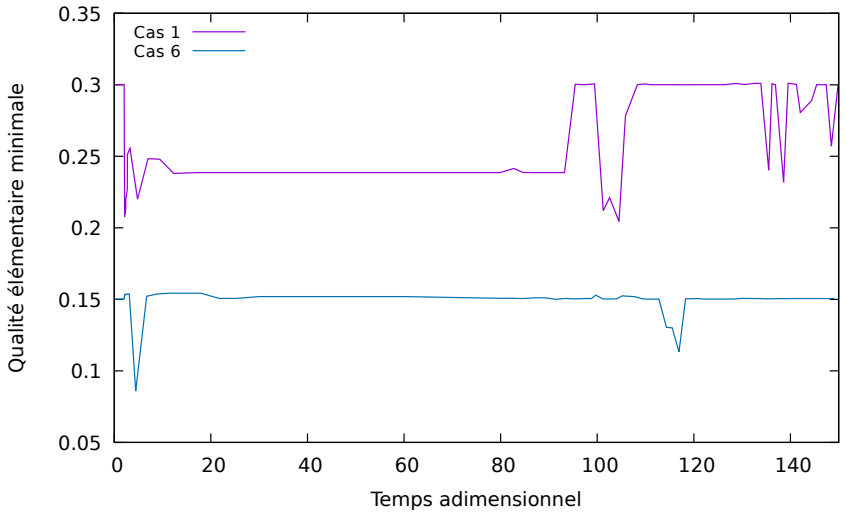


Figure 6.6 Cylindre circulaire - Évolution de la qualité élémentaire minimale pour les cas 1 et 6

Pilotage des adaptations de maillage

Nous avons également étudié les statistiques de la distribution de l'erreur qui supportent nos critères d'arrêt. On commence par présenter à la Figure 6.7 l'évolution de l'erreur relative globale en norme énergie pour tous les cas à l'exception du cas 2. On remarque immédiatement que la tolérance $\varepsilon_1 = 1.5\%$ est bien respectée dans tous les cas. Les très rares occurrences d'un dépassement de la tolérance sont suivies d'une réduction immédiate de l'erreur, induite par une adaptation du maillage avec un facteur de réduction d'erreur $\xi = 0.5$. L'usage des autres critères d'arrêt permet d'avoir un très bon contrôle sur le niveau d'erreur au cours du temps en fournissant une marge confortable vis à vis de la tolérance ε_1.

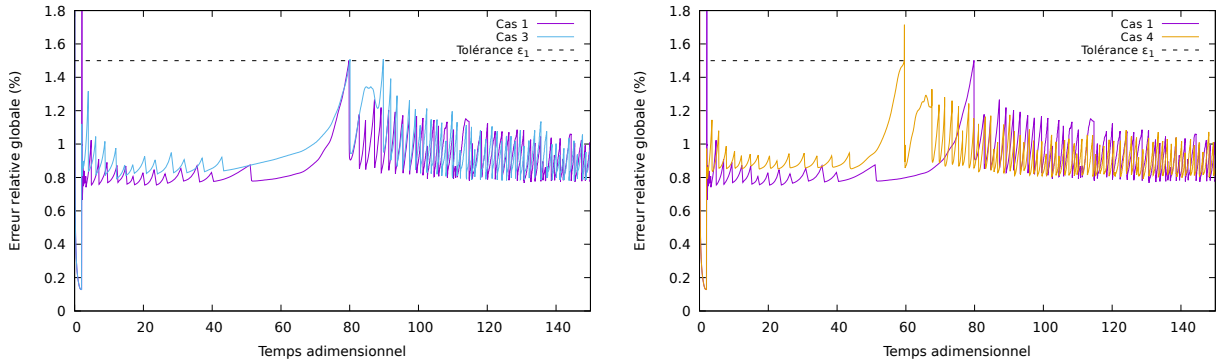
Une analyse plus fine des niveaux d'erreur nous permet de faire des remarques additionnelles :

(1) L'usage de l'interpolation quadratique et de la projection de Galerkin fournit des résultats très similaires dans la phase 2. L'écart entre les niveaux d'erreur dans la phase 1 semble pouvoir être imputé à une fréquence de remaillage légèrement plus élevée dans le cas de la projection. Cela permet néanmoins de maintenir un niveau d'erreur très légèrement moindre à celui obtenu avec l'interpolation quadratique, ce qui est rassurant.

(2) Le niveau d'erreur obtenu avec l'interpolation linéaire est en revanche plus intéressant. Son évolution dans la phase 2 témoigne d'un nombre d'adaptations de maillage sensiblement plus élevé que dans les cas 1 et 3. Malgré cela, on peut constater en fin de simulation que la projection de Galerkin résulte en un niveau d'erreur inférieur à celui obtenu avec l'interpolation linéaire après chaque adaptation de maillage. Ces observations contradictoires *a priori* nous révèlent que le cas 4 souffre d'une accumulation plus importante des erreurs.

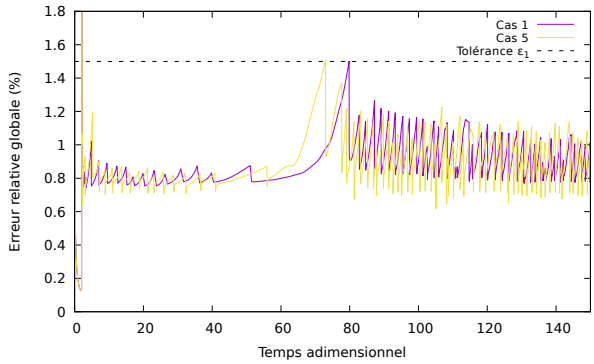
(3) Une adaptation de maillage globale permet d'abaisser davantage le niveau d'erreur dans le domaine de calcul. Ce résultat ne devient toutefois réellement visible que dans la phase 2 de l'écoulement, ce qui nous indique que l'adaptation de maillage locale cible bien les régions les plus problématiques du maillage. En phase 2, remarquons également que le niveau d'erreur obtenu en adaptation de maillage global augmente plus rapidement à la reprise que celui obtenu avec l'adaptation de maillage local. Ceci est la conséquence du surplus d'erreur de transfert injecté dans la solution projetée. Nous verrons un peu plus loin que ce surplus d'erreur se manifeste également dans le comportement de l'intégrateur temporel adaptatif.

(4) Similairement à ce que nous avons observé pour le cas 4, l'usage d'un maillage de moindre qualité résulte en un niveau d'erreur très légèrement plus élevé dans l'ensemble. Bien que peu flagrant, ce résultat justifie l'importance de veiller au maintien de la qualité du maillage en cours de simulation.

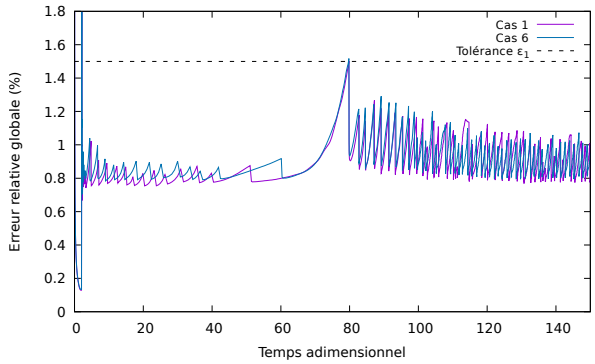


(a) Cas 1 et 3

(b) Cas 1 et 4



(c) Cas 1 et 5

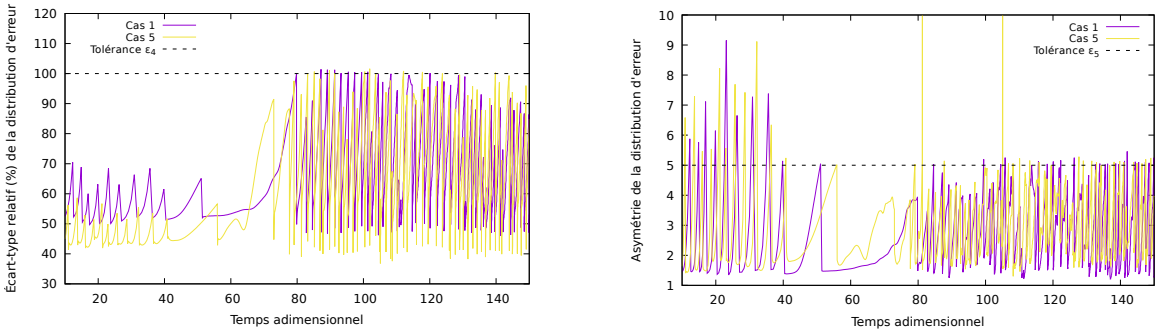


(d) Cas 1 et 6

Figure 6.7 Cylindre circulaire - Évolution de l'erreur relative globale en norme énergie

On illustre également sur la Figure 6.8, pour les cas 1 et 5 seulement, l'évolution de l'écart-type relatif et de l'asymétrie de la distribution de l'erreur. Là encore, on observe que les tolérances renseignées sont bien respectées, et chaque dépassement provoque une adaptation de maillage. De plus, on peut d'ores et déjà remarquer que la tolérance sur l'asymétrie est particulièrement utile en phase 1 pour capturer la croissance des zones de recirculation.

Adapter globalement le maillage permet de minimiser davantage l'écart-type relatif. Ce résultat est cohérent. L'adaptation de maillage globale jouit en effet de davantage de liberté pour équidistribuer l'erreur. En revanche, l'adaptation de maillage locale offre dans l'ensemble un meilleur contrôle sur l'asymétrie de la distribution de l'erreur car la méthode cible les éléments dont la taille doit varier le plus. Ce comportement est très intéressant. La méthode induit donc surtout un changement de forme de la distribution de l'erreur, dont le resserrement est une conséquence. L'adaptation de maillage globale, au contraire, vise en premier lieu un resserrement de la distribution de l'erreur autour de la moyenne. La réduction de l'écart-type relatif est l'objectif, tandis que la réduction de l'asymétrie est un "bienfait collatéral".



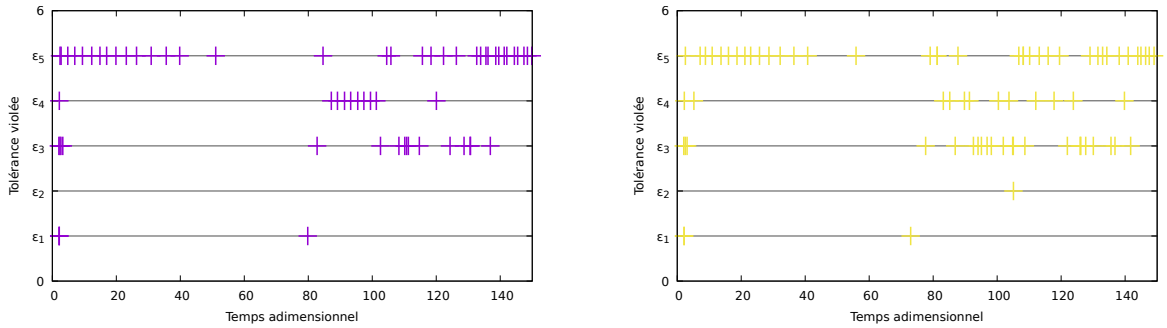
(a) Écart-type relatif

(b) Asymétrie

Figure 6.8 Cylindre circulaire - Évolution de l'écart-type relatif et de l'asymétrie de la distribution de l'erreur en norme énergie pour les cas 1 et 5

La Figure 6.9 présente quant à elle, toujours pour les cas 1 et 5, les différents critères d'arrêt qui sont intervenus au cours du temps. Les résultats sont dans l'ensemble assez similaires, avec une majorité d'arrêts provoqués par le critère 5, portant sur l'asymétrie de la distribution de l'erreur. Les critères d'arrêt 3 à 5, avec les tolérances choisies, s'avèrent particulièrement complémentaires. Le critère 3, pour lequel nous avions choisi une tolérance assez permissive, s'est malgré tout activé un grand nombre de fois. En revanche le critère 2 ne s'est jamais activé dans le cas 1 et une seule fois dans le cas 5. Ceci témoigne bien, d'une part, de la difficulté à faire grossir localement les éléments, et d'autre part d'un contrôle très satisfaisant des surplus d'erreur locaux au moyen du critère 5. Le critère d'arrêt basé sur la tolérance

ε_1 effectue une mesure globale. À moins que la physique de l'écoulement ne se complexifie uniformément dans le domaine, ce critère ne devrait dans l'idéal s'activer qu'en début de simulation pour atteindre la précision d'erreur cible. C'est bien le cas ici, à l'exception d'un arrêt durant la période de transition entre les phases 1 et 2.



(a) Cas 1 (b) Cas 5

Figure 6.9 Cylindre circulaire - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées, pour les cas 1 et 5

Évolution des coefficients d'effort

On présente ici l'évolution des coefficients de portance C_l et de trainée C_d. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$C_l = \frac{2F_l}{\rho {U_0}^2 D} \tag{6.5}$$

$$C_d = \frac{2F_d}{\rho {U_0}^2 D} \tag{6.6}$$

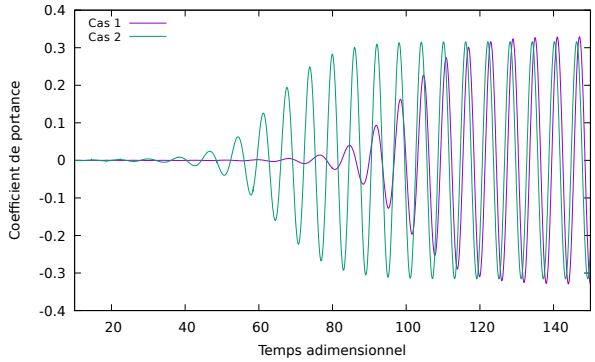
où F_l et F_d désigne la valeur algébrique des efforts de portance et de trainée correspondants, subits par le cylindre. La valeur de U_0 réfère ici aussi à la vitesse caractéristique du fluide dans l'écoulement. Compte tenu des conditions limites appliquées en entrée, cette vitesse est unitaire, tout comme le diamètre du cylindre. La valeur de ρ est également unitaire, car les équations de Naviers-Stokes sont ici considérées dans leur forme adimensionnelle.

Ces coefficients sont pour ce cas les données ayant sans doute le plus d'importance pour l'ingénieur. Compte tenu de l'adimensionnalisation de la vitesse et de la géométrie, ces coefficients égalent, à un facteur 2, les forces de portance et de trainée correspondantes subies par le cylindre. Les historiques des deux coefficients sont respectivement fournis sur les Figures 6.10 et 6.11. Il apparait que l'allée tourbillonaire se déclenche sensiblement plus tôt dans les cas 2 et 4. Pour le cas 2, c'est évidemment la tolérance ε_1 trop permissive qui l'ex-

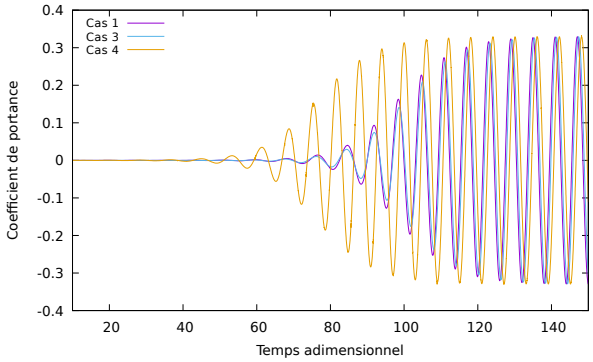
plique. La grossièreté du maillage à proximité du cylindre permet d'introduire rapidement une dissymétrie suffisante dans la solution, ce qui déclenche l'instabilité. En revanche, c'est l'interpolation linéaire qui est en cause dans le cas 4. Bien que l'interpolation linéaire soit très diffusive, la finesse du maillage à proximité du cylindre permet d'accumuler les erreurs d'interpolation, qui finissent par rompre la symétrie dans l'écoulement. En utilisant les 3 dernières périodes du coefficient de portance, nous avons malgré tout obtenu un nombre de Strouhal de $St = 0.166$ dans tous les cas étudiés. Sur la base des résultats de DNS de Henderson [46], Williamson et Brown [62] ont proposé la relation suivante entre le nombre de Strouhal St et le nombre de Reynolds Re ($47 \leq Re \leq 1200$) :

$$St = 0.2731 - \frac{1.1129}{\sqrt{Re}} + \frac{0.4821}{Re} \tag{6.7}$$

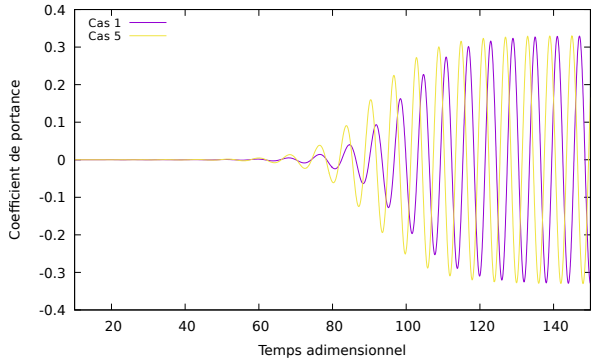
Pour un nombre de Reynold $Re = 100$, la valeur attendue est donc $St = 0.167$, ce qui est en excellent accord avec nos résultats. Les Tableaux 6.4 et 6.5 résument respectivement les valeurs maximales et RMS du coefficient de portance, et la valeur moyenne du coefficient de trainée. Là encore, ces valeurs sont calculées sur l'intervalle de temps délimitant les quatre dernières périodes du coefficient de portance dans chaque cas. Les valeurs que nous obtenons sont dans l'ensemble en très bon accord avec les résultats rapportés dans la littérature [60, 99, 116, 134]. Remarquons toutefois que l'amplitude du coefficient de portance dans le cas 2 est légèrement moindre que dans les autres cas. De la même façon, la moyenne du coefficient de trainée est légèrement plus faible. La tolérance d'erreur ε_1 utilisée pour ce cas n'est pas suffisante pour obtenir une solution pleinement convergée en maillage, bien que la prédiction du nombre de Strouhal soit déjà correcte. Un autre résultat intéressant peut être observé pour les cas 2 et 4 sur l'évolution du coefficient de trainée. Des discontinuités, d'amplitude parfois importante, apparaissent à plusieurs reprises. Elles sont consécutives à des cycles d'adaptation de maillage, et donc à une reprise de l'intégration temporelle à partir d'une solution transférée. Malgré qu'une projection de Galerkin hybride soit employée dans le cas 2, la grossièreté du maillage à proximité du cylindre entraîne des imprécisions dans le transfert de la solution. Le nombre de discontinuités est toutefois nettement plus faible que dans le cas 4. L'usage de l'interpolation linéaire semble donc introduire beaucoup d'erreur dans la solution transférée. L'absence de discontinuités dans le cas 5, alors même que l'adaptation du maillage est globale, conforte cette hypothèse. Compte tenu que l'usage de l'interpolation quadratique ne provoque pas non plus de discontinuités, nous pouvons librement conclure qu'il est essentiel de transférer la solution d'un maillage à l'autre avec une procédure dont l'ordre est à minima égal à celui de l'approximation des variables sur un élément.



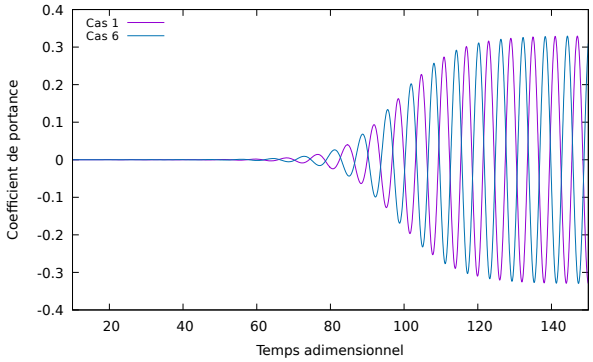
(a) Cas 1 et 2



(b) Cas 1, 3, et 4



(c) Cas 1 et 5



(d) Cas 1 et 6

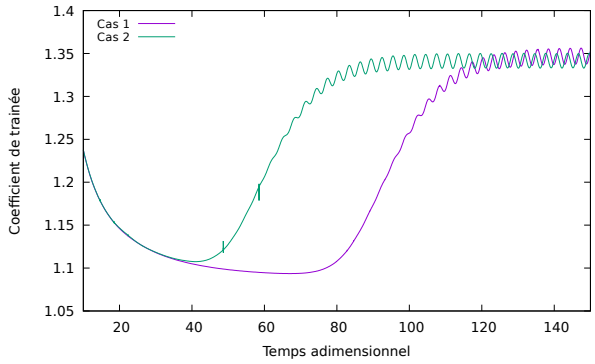
Figure 6.10 Cylindre circulaire - Évolution du coefficient de portance pour plusieurs cas

Tableau 6.4 Cylindre circulaire - Amplitudes maximales et valeurs RMS du coefficient de portance

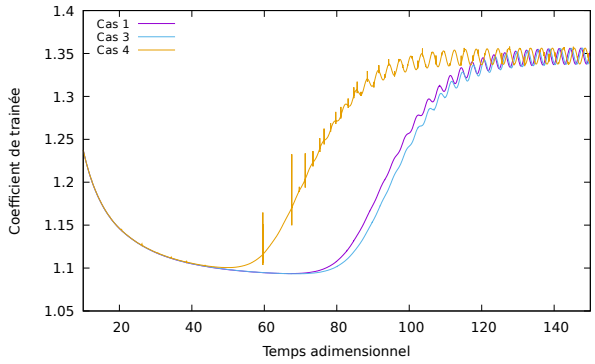
Cas	1	2	3	4	5	6
Amplitude maximale	0.329	0.315	0.329	0.329	0.329	0.329
Valeur RMS	0.232	0.223	0.231	0.233	0.232	0.231

Tableau 6.5 Cylindre circulaire - Valeurs moyennes du coefficient de trainée

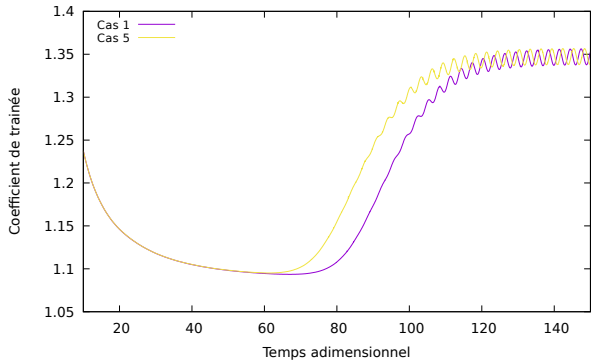
Cas	1	2	3	4	5	6
Valeur moyenne	1.346	1.341	1.346	1.347	1.347	1.346



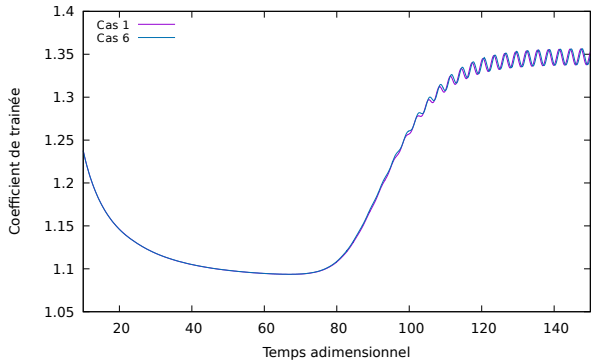
(a) Cas 1 et 2



(b) Cas 1, 3, et 4



(c) Cas 1 et 5



(d) Cas 1 et 6

Figure 6.11 Cylindre circulaire - Évolution du coefficient de trainée pour plusieurs cas

Comportement de l'intégrateur temporel adaptatif

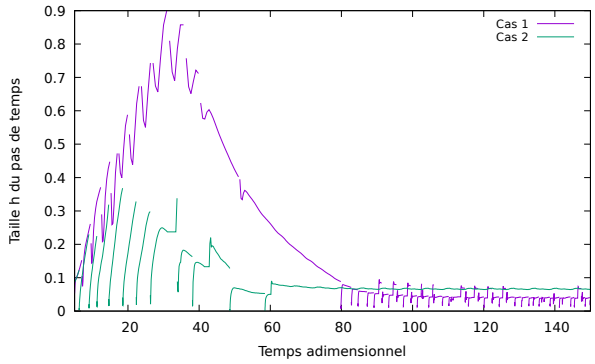
On s'intéresse maintenant au comportement de l'intégrateur temporel dans chaque cas. Nous avons notamment analysé l'évolution de la taille h du pas de temps et de l'ordre p de l'intégrateur temporel en cours de simulation (cf. Figures 6.12 et 6.13).

Les différences notables dans l'évolution de h montrent immédiatement que la méthode employée pour assurer les transferts de la solution a un impact majeur sur l'évolution de l'erreur locale estimée postérieurement à une adaptation du maillage. Le surplus d'erreur de transfert résultant de l'interpolation linéaire, que nous avons déjà pu indirectement observer dans les résultats précédents, est détecté par l'estimation d'erreur locale. Cela démontre bien que toutes les sources d'erreur sont couplées. Les erreurs de transfert sont comparables à des erreurs itératives importantes. En d'autres termes, les solutions transférées par interpolation linéaire sont des solutions très faiblement convergées sur le nouveau maillage. La première solution calculée sur le nouveau maillage doit cependant être convergée au sens des critères de convergence prescrits. L'estimation d'erreur locale perçoit donc cette correction qui s'applique sur la solution. La tolérance ε_1 sur le niveau d'erreur spatiale a elle aussi un effet sur l'efficacité de la relance de l'intégration temporelle. Nous avons vu que rendre cette tolérance plus permissive revenait à réduire le nombre d'éléments dans le maillage. En conséquence, la taille de maille moyenne dans le maillage augmente et l'erreur de transfert de la solution ne peut qu'augmenter elle aussi. De la même façon que pour l'interpolation linéaire, le surplus d'erreur de transfert est capté par l'estimation d'erreur locale, ce qui provoque une réduction importante de h lors des reprises du calcul. Les résultats obtenus pour le cas 5 montrent tout l'intérêt de n'adapter que localement le maillage. L'ajustement global du maillage implique inévitablement des erreurs de transfert additionnelles. Bien que celles-ci soient commises sur des éléments possédant une taille presque idéale, leur accumulation est ressentie par l'estimation de l'erreur locale lors des reprises. Les résultats obtenus avec l'interpolation consistante et la projection de Galerkin sont très similaires. Plus précises, ces méthodes assurent une bien meilleure conservation h lors des reprises dans la phase 1. De manière générale, l'évolution de h lors des reprises reflètent donc indirectement les erreurs commises durant le transfert de la solution. Le mécanisme de rejet de pas de temps, qui permet la réduction effective de h, agit bien comme un bouclier tentant de limiter les effets des erreurs de transfert.

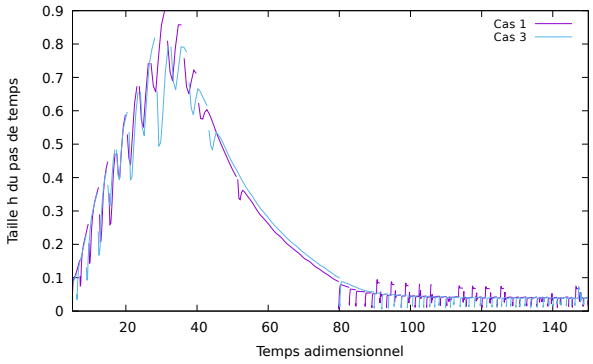
L'évolution de l'ordre p de l'intégrateur temporel dans les différents cas corrobore les observations que nous venons de faire. Rappelons que l'indicateur de stabilité, utilisé pour piloter l'évolution de p, est par construction extrêmement sensible au bruit dans la solution. La solution transférée peut se voir comme la solution convergée sur le nouveau maillage, mais polluée par un tel bruit. Le rapport signal à bruit est d'autant plus mauvais que le transfert

de la solution est imprécis. De plus, l'indicateur de stabilité utilise la solution de nombreux pas de temps transférés. Les effets néfastes des erreurs de transfert sont donc d'autant plus durables. C'est pourquoi, dans l'ensemble, l'intégrateur temporel peine à atteindre l'ordre 3. L'ordre 3 est largement utilisé dans le cas 2, mais la cause en est que la dernière adaptation de maillage a lieu vers $t \approx 58.5$. En tenant compte de l'instant auquel se déclenche l'allée tourbillonnaire dans les cas 1, 3, 4 et 5, on peut néanmoins constater une meilleur propension à atteindre l'ordre 3 lorsque la projection hybride est utilisée. Ceci laisse donc penser que la solution projetée est moins bruitée que les solutions interpolées. Bien qu'il soit audacieux de tirer des conclusions à partir de résultats portant sur un seul type d'écoulement, la projection de Galerkin semble donc *in fine* plus intéressante que l'interpolation quadratique.

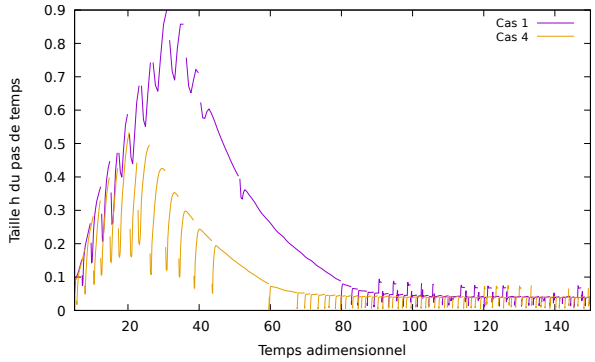
Comparons pour terminer le nombre de pas de temps total calculés et le nombre d'adaptations de maillage effectuées dans chaque cas. Ces données sont rassemblées dans les Tableaux 6.6



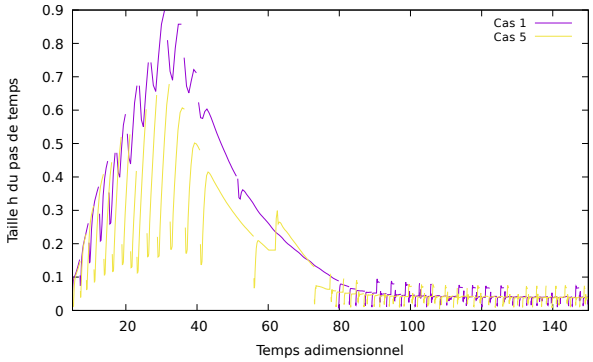
(a) Cas 1 et 2



(b) Cas 1 et 3

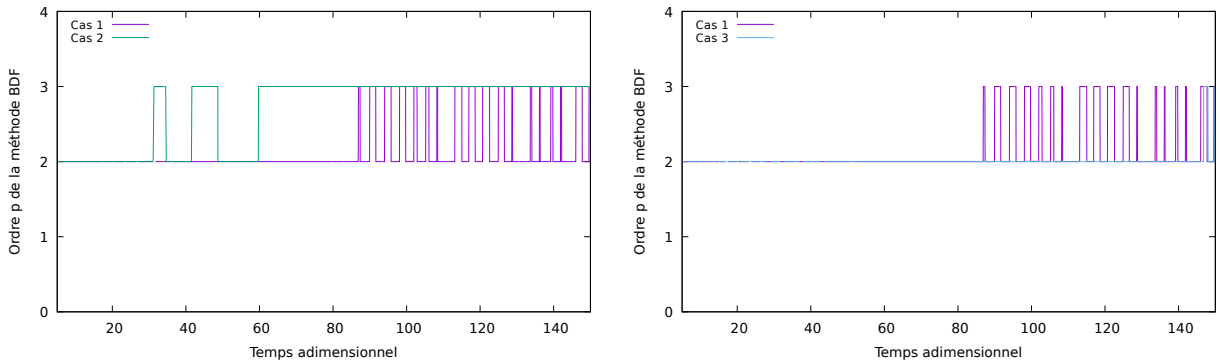


(c) Cas 1 et 4



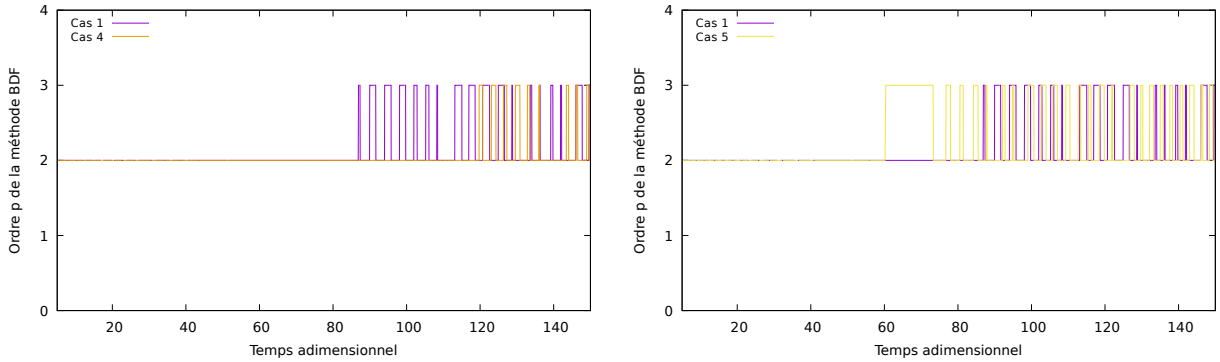
(d) Cas 1 et 5

Figure 6.12 Cylindre circulaire - Évolution de la taille h du pas de temps pour plusieurs cas



(a) Cas 1 et 2

(b) Cas 1 et 3



(c) Cas 1 et 4

(d) Cas 1 et 5

Figure 6.13 Cylindre circulaire - Évolution de l'ordre p de l'intégrateur temporel pour plusieurs cas

et 6.7, respectivement. L'interprétation des résultats pour le nombre de pas de temps calculés se doit d'être prudente. S'il l'allée tourbillonnaire se déclenche plus tôt dans un cas, on peut *a priori* s'attendre à ce que le nombre de pas de temps total soit plus élevé que dans un autre cas. Par exemple, il n'est donc pas surprenant que le nombre de pas de temps calculés dans le cas 4 soit presque 50% plus grand que dans le cas 1. Toutefois on enregistre pour le cas 2 le nombre de pas de temps calculés le plus faible, alors même que ce cas correspond au déclenchement le plus prématuré de l'allée tourbillonaire. Deux éléments expliquent ce résultat. En premier lieu le nombre de remaillages pour ce cas est nettement plus faible, ce qui évite des baisses répétées de la valeur de h lors des reprises. La deuxième cause est liée à la première. L'absence de remaillages après $t \approx 60$ permet d'utiliser la méthode BDF d'ordre 3 sans interruption jusqu'à la fin de la simulation. En conséquence, la valeur moyenne de h durant la phase 2 est environ 50% plus élevée que dans les autres cas, ce qui réduit considérablement le nombre de pas de temps à résoudre. La difficulté à utiliser une méthode BDF d'ordre 3 en cas de remaillages fréquents est donc une limite importante de notre procédure.

Revenons maintenant sur les cas 3 et 4. La Figure 6.11 nous indique que l'allée tourbillonnaire dans le cas 4 se déclenche environ 25 unités de temps plus tôt que dans le cas 1, tandis qu'elle se déclenche très légèrement plus tard dans le cas 3. Dans le cas 1, la valeur moyenne de h dans la phase 2 est d'environ 0.40. L'intégration de 25 unités de temps supplémentaires exigerait donc un peu plus de 600 pas de temps. Ceci pris en compte, le nombre de pas de temps total dans le cas 1 reste donc sensiblement plus faible que dans le cas 4. Cette différence s'explique par un nombre de remaillage plus important dans la phase 2 pour le cas 4, conséquence des imprécisions de l'interpolation linéaire lors du transfert de la solution. En ce qui concerne le cas 3, le nombre de pas de temps total est très légèrement supérieure à ce que l'on obtient dans le cas 1. Ceci s'expliquent pas l'usage temporaire de la méthode BDF d'ordre 3 dans le cas 1, qui compense un nombre de remaillages pourtant supérieur à celui du cas 3.

Finalement, les résultats obtenus pour le cas 6 insistent davantage sur la nécessité de maintenir une qualité de maillage suffisante malgré la volonté de l'adapter localement. Le déclenchement de l'allée tourbillonnaire est presque simultané dans les cas 1 et 6. Pour autant, le nombre de remaillages est un peu plus grand dans la phase 2 pour le cas 6, ce qui explique un nombre de pas de temps total calculés un peu plus important. Ces adaptations de maillage additionnelles sont directement liées à la qualité du maillage.

6.1.4 Conclusions

L'ensemble de cette première étude nous permet donc déjà de souligner les points suivants :

Tableau 6.6 Cylindre circulaire - Nombre d'adaptations de maillage réalisées dans chaque cas étudiés

Cas	1	2	3	4	5	6
Nombre de pas de temps	2008	1982	2094	2857	2286	2108

Tableau 6.7 Cylindre circulaire - Nombre de pas de temps résolus dans chaque cas étudiés

Cas	1	2	3	4	5	6
Nombre de remaillages	65	15	59	82	75	71

(1) Des trois méthodes de transfert évaluées, la projection de Galerkin fournit les meilleurs résultats. L'interpolation consistante a toutefois fourni de très bons résultats également. Les résultats obtenus avec l'interpolation linéaire montrent la nécessité d'assurer un transfert de la solution à partir d'une reconstruction de même ordre, *au minimum*.

(2) La tolérance ε_1 sur le niveau d'erreur nous permet bien de contrôler la finesse du maillage, et donc la précision de la résolution. Les deux niveaux testés, 10% et 1.5%, sont respectivement représentatifs d'une étude préliminaire (utile pour analyser l'évolution générale de l'écoulement), et d'une étude intermédiaire (plus coûteuse mais plus précise). Dépendamment de la complexité de l'écoulement, ce niveau intermédiaire peut-être suffisant pour que la solution soit bien convergée en maillage. Une simulation supplémentaire non présentée ici, conduite avec les paramètres du cas 1 mais avec $\varepsilon_1 = 0.5\%$, nous a permis de constater que c'était justement le cas ici.

(3) L'adaptation locale du maillage préserve bien une grande partie du maillage existant, ce qui permet de réduire efficacement les erreurs de transfert. Ce cas d'étude est en plus une forme de cas limite, car la physique évolue rapidement dans l'allée tourbillonaire, et les régions à (dé)raffiner se déplacent constamment. Les critères d'arrêt choisis et les tolérances prescrites assurent néanmoins une évolution très progressive du maillage. Au demeurant, il faut admettre qu'un maillage fixe bien choisi peut aussi être intéressant pour traiter un problème comme celui-ci. Nous avons fait l'essai dans une de nos études [149]. L'absence d'adaptation de maillage a notamment permis d'utiliser l'intégrateur temporel d'ordre 3 pendant toute la phase de relâché tourbillonnaire. De ce point de vue, une importante économie de coût de calcul a été obtenue (de l'ordre de 30%). Pour autant, la cible ε_1 est apparue non respectée durant plusieurs dizaines d'unités de temps, et cela bien que le maillage fixe comporte 4 fois plus d'éléments que les maillages successivement utilisés avec l'approche adaptative. De plus, les évolutions de l'écart-type relatif et de l'asymétrie de la distribution d'erreur ont, sans surprise, souligné l'optimalité douteuse de ce maillage fixe.

(4) La relaxation locale a également prouvé son efficacité et son importance. L'usage d'une tolérance de qualité intermédiaire telle que $Q_{min} = 0.3$ assure un maintien très satisfaisant de la qualité générale du maillage tout en ne réduisant que très peu le nombre d'éléments préservés dans l'ancien maillage.

6.2 Jet impactant sur plaque chauffante

Ce type de problème a lui aussi été très largement étudié dans la littérature, car de nombreux procédés industriels s'appuient sur des jets impactants. Dans le secteur automobile, le refroidissement des pistons peut par exemple s'effectuer par jet d'huile impactant. De la même façon, les pales des différents étages d'un moteur d'avion peuvent être refroidies par jet d'huile. Des procédés de trempe de matériaux métalliques reposent également sur l'utilisation d'un jet d'eau impactant. Dans ces trois exemples, l'objectif est à chaque fois de refroidir un matériau en tirant profit d'une répartition de coefficients de transfert thermique élevés et générés par le jet au niveau de la zone d'impact. À l'inverse, un jet peut permettre un apport de chaleur profitable pour sécher une surface. Ce type de procédé est largement utilisé dans l'industrie papetière et textile. Les jets chauds sont également un élément clé des procédés de projection thermique, très utilisés pour appliquer des revêtements sur des pièces mécaniques. Le contrôle de l'épaisseur de revêtement peut aussi se faire à l'aide d'un jet impactant incliné.

Au delà des intérêts industriels évidents, c'est aussi la complexité de la physique de l'écoulement qui explique le très grand nombre d'études sur le sujet. L'écoulement fait notamment intervenir un cisaillement important, tant aux abords de la zone d'impact que dans la couche de mélange entre le jet et le fluide environnant. Pour des nombres de Reynolds importants, le taux de croissance de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz induite dans la couche de mélange est suffisant pour générer d'intenses tourbillons, convectés vers la zone d'impact. Ces tourbillons portent alors le nom de tourbillons primaires. Dans le même temps, des gradients de pression adverses à distance suffisante de la zone d'impact peuvent provoquer un décollement des couches limites, ce qui donne alors naissance à des tourbillons secondaires. Dans la majorité des applications industrielles, le nombre de Reynolds à l'usage est tel que l'écoulement est turbulent. La richesse des structures tourbillonnaires, la nature 3D de l'écoulement, et les lignes de courant fortement incurvées exigent alors des approches numériques à haute fidélité (type LES ou DNS) afin d'espérer obtenir des résultats fiables. Notons que malgré les progrès réalisés sur les techniques de mesure telle que la PIV (*Particle Image Velocimetry*), l'étude expérimentale de ce type d'écoulement demeure aussi extrêmement ardue. Bon nombre d'investigations ont donc été réalisées en régime laminaire afin d'acquérir une meilleure compréhension de certains mécanismes physiques à l'œuvre dans l'écoulement [12,

78, 83]. Dans cette section, nous proposons nous aussi une étude d'un jet impactant en régime laminaire, dans un contexte 2D.

6.2.1 Description du problème à résoudre

La géométrie du domaine de calcul est fournie à la Figure 6.14. On s'intéresse ici tout particulièrement à une application de type refroidissement. Pour simplifier les choses, nous supposons que la frontière solide matérialisée par la courbe 5 est maintenue à une température fixe $T_w = 1$, tandis qu'à l'instant $t = 0$ l'ensemble du fluide est à une température $T = 0$. On remarquera le canal d'arrivée du jet, qui nous permet d'obtenir un écoulement de canal pleinement développé laminaire, de débit unitaire. Toutes les conditions limites sont précisées dans le Tableau 6.8. La géométrie du domaine de calcul a été adimensionnalisée à partir du diamètre D de la conduite. Ainsi on a $D = 1$, et on pose $H = n_H D$ et $L = n_L D$. Plusieurs combinaisons de (n_H, n_L) ont été utilisées. Le nombre de Reynolds est formulé à partir du diamètre D et d'une vitesse unitaire (le débit à l'entrée du canal étant lui aussi unitaire). Le nombre de Prandtl est fixé à $Pr = 0.71$.

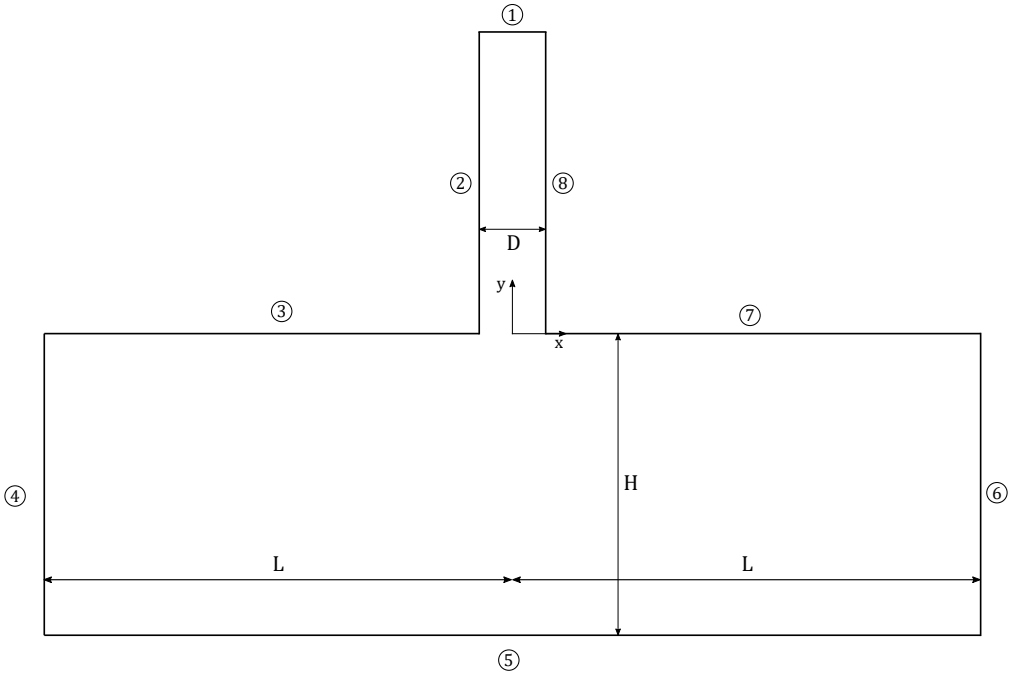


Figure 6.14 Jet impactant - Géométrie du domaine de calcul

La rampe en temps utilisée sur la vitesse d'entrée est encore donnée par l'Équation (6.4).

Tableau 6.8 Jet impactant - Conditions limites utilisées

courbe	1	2	3	4	5	6	7	8
u	0	0	0	libre	0	libre	0	0
v	$f(t)g(x)$	0	0	libre	0	libre	0	0
T	0	0	0	adiabatique	T_w	adiabatique	0	0

$$g(x) = 6x^2 - 1.5 \tag{6.8}$$

6.2.2 Stratégies adoptées pour la résolution

Tout comme pour le problème fluide précédent, nous avons ici aussi étudié plusieurs configurations, résumées dans le Tableau 6.9. L'objectif est surtout d'étudier l'effet du nombre de Reynolds pour une valeur donnée de n_H. Les valeurs de n_L sont choisies pour s'affranchir suffisamment bien des effets de bord selon la valeur de n_H retenue.

Tableau 6.9 Jet impactant - Configurations étudiées

Cas	Re	n_H	n_L	Unités de temps simulées
1	500	4	15	60
2	300	4	15	60
3	500	10	20	80
4	300	10	20	80

En plus de l'erreur en norme énergie, la résolution de la température dans le domaine implique d'utiliser la norme d'erreur sur les gradients de température pour piloter adéquatement l'évolution du maillage. De fait, nous utilisons ici l'approche multinorme : les critères d'arrêt basés sur l'écart-type relatif et l'asymétrie d'une distribution de l'erreur sont donc désactivés. Les tolérances pour les critères d'arrêt utilisés sont précisées dans le Tableau 6.10, et ceux-ci deviennent véritablement actifs à compter de $t = 3$. Nous avons utilisé une tolérance encore plus permissive pour ε_3, pour la même raison qu'évoquée dans la section précédente. On utilise pour compenser une tolérance ε_2 un peu plus sévère. Ceci paraît d'autant plus naturel que le critère d'arrêt portant sur l'asymétrie de la distribution de l'erreur est inactif ici. On peut malgré tout s'attendre à une évolution du maillage suffisamment lisse dans le temps, avec des zones de raffinement de maillage qui se propageront plus vite au besoin. Les adaptations de maillage seront aussi l'occasion de rétablir progressivement un maillage plus grossier dans les zones qui le permettent, bien que les adaptations soient provoquées par un besoin de raffiner localement. Compte tenu des conclusions établies pour le problème fluide précédent, nous avons fait le choix d'assurer tous les transferts de solution au moyen de la projection de Galerkin. La frontière du domaine de calcul n'est constituée que de segments, ce

qui nous permet d'utiliser l'approche avec maillage d'intersection à proximité des frontières. Le remaillage local a également fait ses preuves dans la section précédente. Toutes les adaptations de maillage ont donc été conduites localement dans les quatre configurations d'essai, en utilisant deux couches protectrices autour des éléments germes. Le facteur de réduction d'erreur ξ est adaptatif pour chaque norme d'erreur, avec ici $\xi_0 = 0.5$ et $\xi_{max} = 1.1$. Enfin, nous avons également utilisé la méthode de relaxation de maillage locale pour maintenir un maillage de qualité au cours de la simulation. La tolérance de qualité élémentaire minimale est fixée à $Q_{min} = 0.3$, et deux couches protectrices sont utilisées autour des éléments à relaxer. Concernant l'ordre de l'intégrateur temporel, il est libre de varier entre 1 et 3. Les tolérances absolues et relatives pour l'erreur locale sont respectivement de 10^{-6} et 10^{-4}.

Tableau 6.10 Jet impactant - Tolérances fixes associées aux critères d'arrêt actifs

ε_1 (%)	ε_2	ε_3
1.5	4	20

6.2.3 Analyse des résultats

Évolution du maillage

Les Figures 6.15 à 6.18 illustrent l'évolution du maillage dans les quatre configurations étudiées. Le champs de vorticité est superposé sur tous les maillages. On constate immédiatement la pertinence de l'estimation d'erreur par la méthode de Zhu et Zienkiewicz, qui permet bien de raffiner le maillage dans les régions où des structures tourbillonnaires se développent. Le suivi de ces structures est également très convainquant. Le raffinement dans le domaine est essentiellement dû à l'erreur calculée en norme énergie. Toutefois, la norme thermique est également responsable du raffinement dans certaines portions du domaine. Dans chaque cas, la première image met clairement en évidence deux régions de raffinement distinctes à proximité de mur maintenu à la température T_w. Ces zones de raffinement s'expliquent par la diffusion progressive de la chaleur dans le fluide. Au fur à mesure que le temps progresse, l'évolution de la température à proximité du mur (mais suffisamment loin de la zone d'impact) devient plus lisse, ce qui explique la transition vers un maillage plus grossier dans cette région. Du fait de la valeur du nombre de Péclet utilisé dans les 4 cas ($Pe = Re\,Pr$), l'évolution de la température dans le fluide est, dans l'ensemble, dominée par les effets convectifs. Des gradients de température variés sont notamment convectés après l'impact du jet sur le mur chauffé. L'estimation d'erreur sur les gradients de température permet un suivi adéquat de ces régions, essentiellement situées à la périphérie des structures tourbillonaires. De fait,

l'usage de cette norme d'erreur supplémentaire participe donc aussi activement au suivi de ces structures.

Également, l'analyse des derniers maillages obtenus démontre clairement une rupture de la symétrie de l'écoulement dans les cas 1 et 3, dont le point commun est la valeur du nombre de Reynolds $Re = 500$. Cette rupture de la symétrie est due à l'impact, sur le jet, de deux appariements tourbillonnaires eux mêmes issus de l'impact du jet sur la paroi chauffée. La synchronisation imparfaite de l'impact de part et d'autre du jet induit une perturbation que les mécanismes diffusifs dûs à la viscosité du fluide ne sont pas capables d'éliminer. Il en résulte un jet oscillant, qui vient définitivement rompre la symétrie selon l'axe du jet.

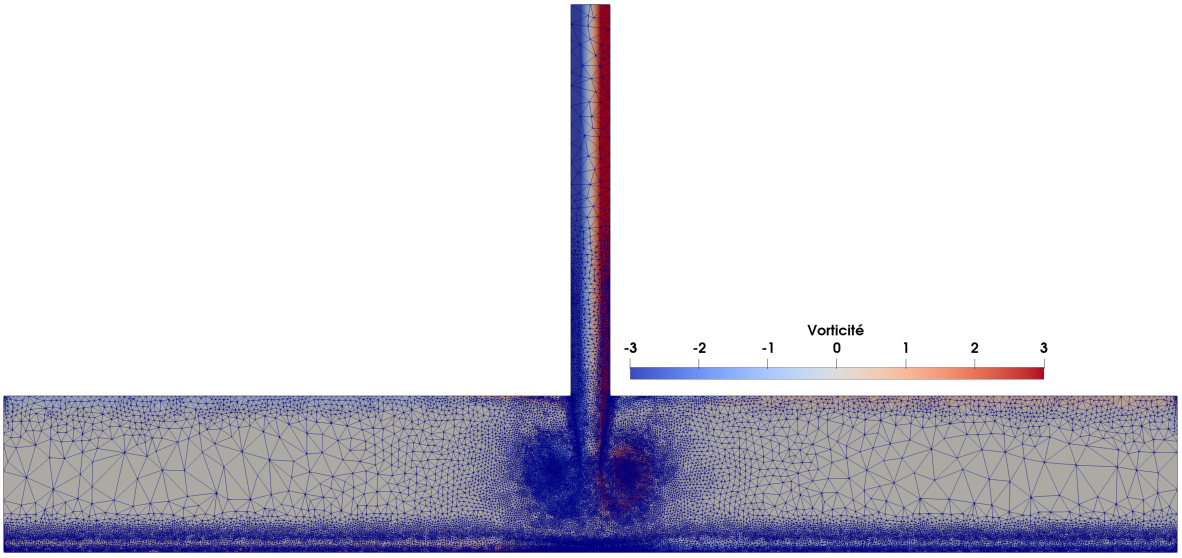
Une étude 2D d'un jet impactant laminaire a également été proposée par Chung *et al.* [78]. Les auteurs utilisent une configuration assez similaire à la nôtre, pour des nombres de Reynolds égaux à ceux testés ici. Une approche de type DNS, construite à partir d'un schéma de type différences finies d'ordre 6 et un intégrateur explicite de Runge-Kutta d'ordre 3, est utilisée dans leur travaux. Un maillage structuré de 65000 ou 90000 nœuds (dépendamment du Reynolds), symétrique par rapport à l'axe du jet et avec une concentration de nœuds accrue près de la paroi d'impact du jet (courbe 5), permet la discrétisation de leur domaine de calcul [1]. Notons que leur domaine est sensiblement moins large que le nôtre ($n_L = 5$), car des conditions limites non réflexives sont appliquées sur les deux frontières de sortie (courbes 4 et 6). Soulignons également qu'un solveur compressible est utilisé dans leur étude, mais pour un nombre de Mach fixé à 0.3. Les effets de compressibilité demeurent donc *a priori* assez faibles. Enfin, le profil de leur écoulement d'entrée diffère aussi du nôtre. Cependant, leur profil reflète davantage un écoulement d'entrée turbulent.

Les résultats rapportés pour $Re = 500$, obtenus sur 80 unités de temps, ne font état d'aucune asymétrie dans la solution. Cette différence majeure avec le comportement que nous observons peut s'expliquer par la différence dans les valeurs de n_L prescrites. La visualisation de nos résultats nous indique que les deux appariements tourbillonnaires venant impacter le jet se déplacent en grande partie à l'extérieur du domaine de calcul utilisé par Chung *et al.* . Du fait de leurs conditions limites sur les frontières latérales, les tourbillons seront logiquement aspirés vers l'extérieur. L'usage d'un maillage symétrique selon l'axe du jet apporte très certainement un effet stabilisateur supplémentaire, si l'on se réfère au principe de symétrie de Pierre Curie. Toujours d'après les résultats de Chung *et al.* , l'écoulement demeure 2D et laminaire jusqu'à une valeur du nombre de Reynolds d'environ 1000. À la vue de nos résultats, on peut néanmoins remettre en question cette affirmation. Bien que l'instabilité observée dans

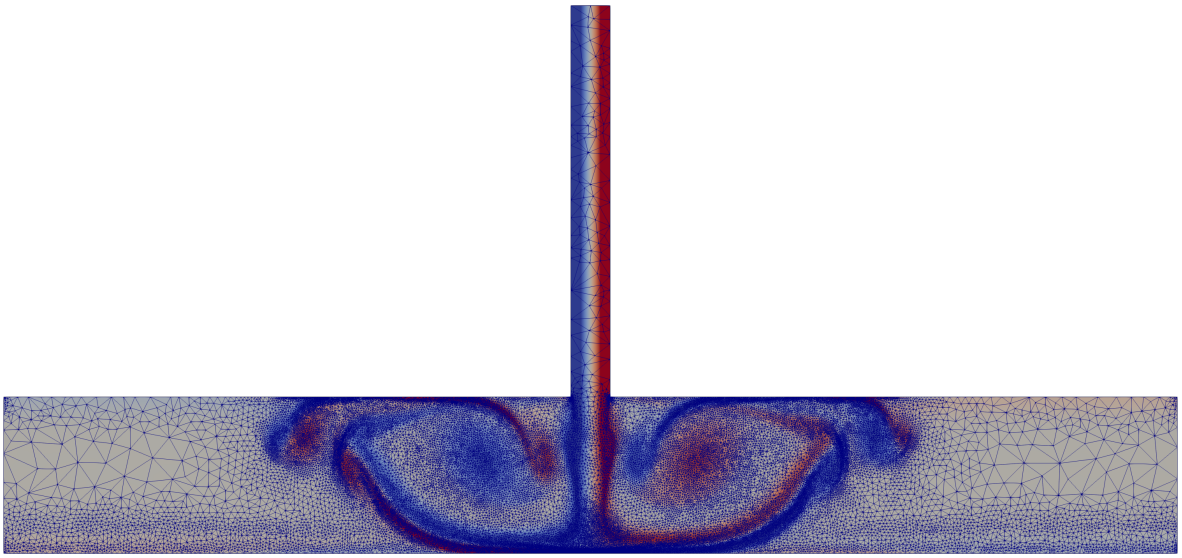
1. À titre d'information, nos plus gros maillages, obtenus avec le cas 3, comportaient environ 300000 nœuds.

nos deux cas à $Re = 500$ n'implique pas nécessairement un passage en régime turbulent, ni même l'apparition d'effets tridimensionnels, il serait intéressant d'explorer l'évolution de cet écoulement dans un domaine 3D pour statuer sur la justesse des résultats de Chung *et al.* . Il pourrait aussi être intéressant de simuler les cas 1 et 3 avec une tolérance ε_1 plus sévère, afin d'évaluer si l'instabilité est toujours capturée. À l'inverse, il serait tout aussi intéressant de simuler les cas 2 et 4 avec une tolérance ε_1 plus permissive pour évaluer si une instabilité parvient à se développer. Enfin, une étude menée avec des maillages fixes de finesse croissante pourrait également s'avérer judicieuse, afin d'évaluer la part de responsabilité des erreurs de transfert sur l'instabilité du jet.

L'objectif principal de cette étude, partagé par l'ensemble des études proposées dans ce chapitre, reste néanmoins d'évaluer la pertinence de la procédure de résolution adaptative développée dans ces travaux. Nous laissons donc le soin à nos successeurs d'explorer davantage la physique de cet écoulement, au combien riche et intéressante.

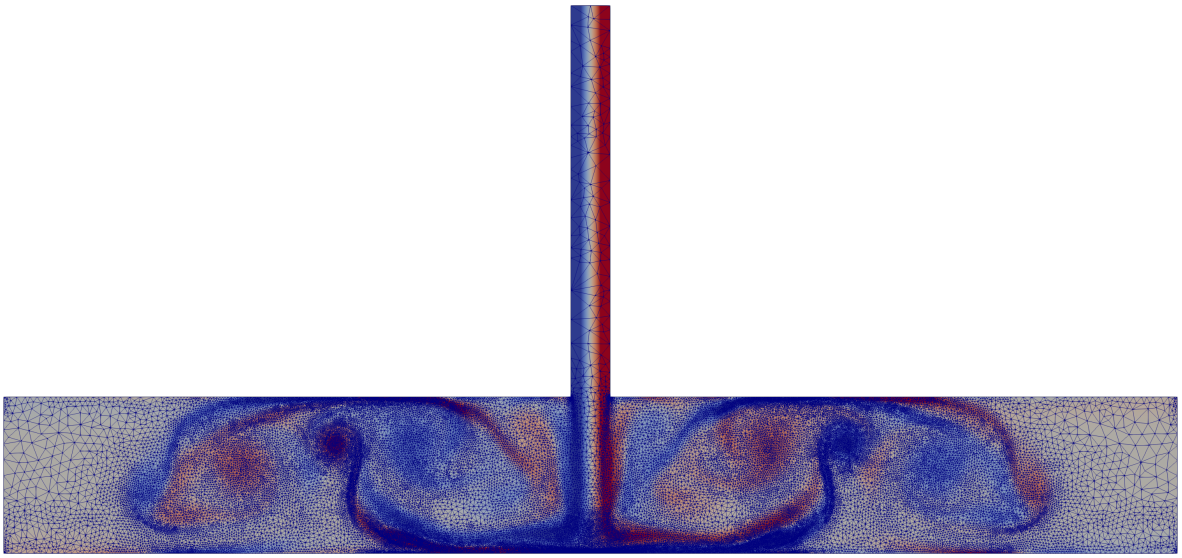


(a) À $t = 10$

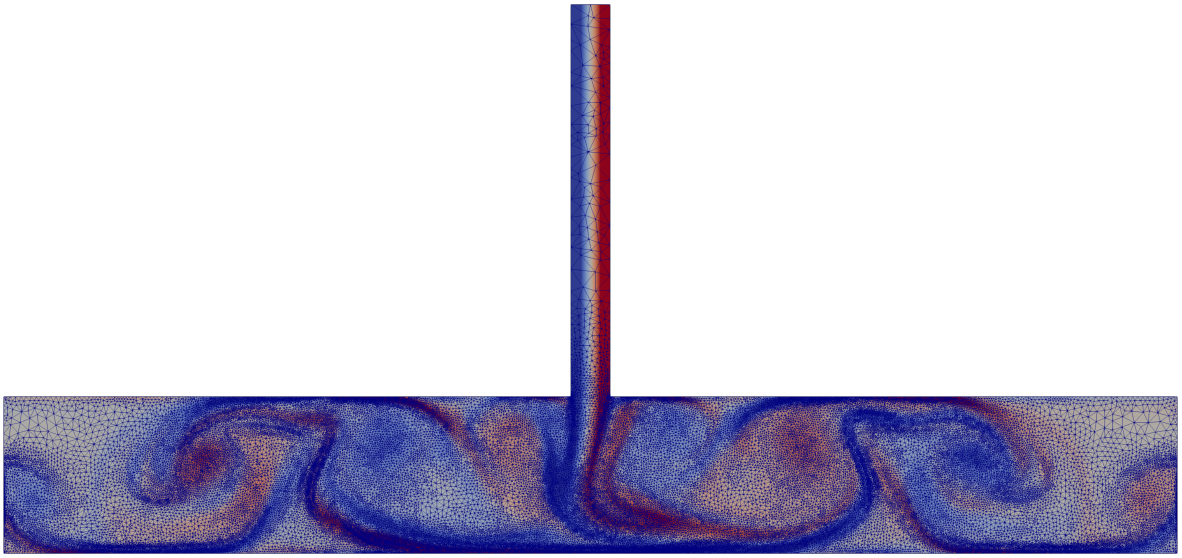


(b) À $t = 30$

Figure 6.15 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 1. On superpose sur chaque maillage la vorticité dans une échelle saturée.

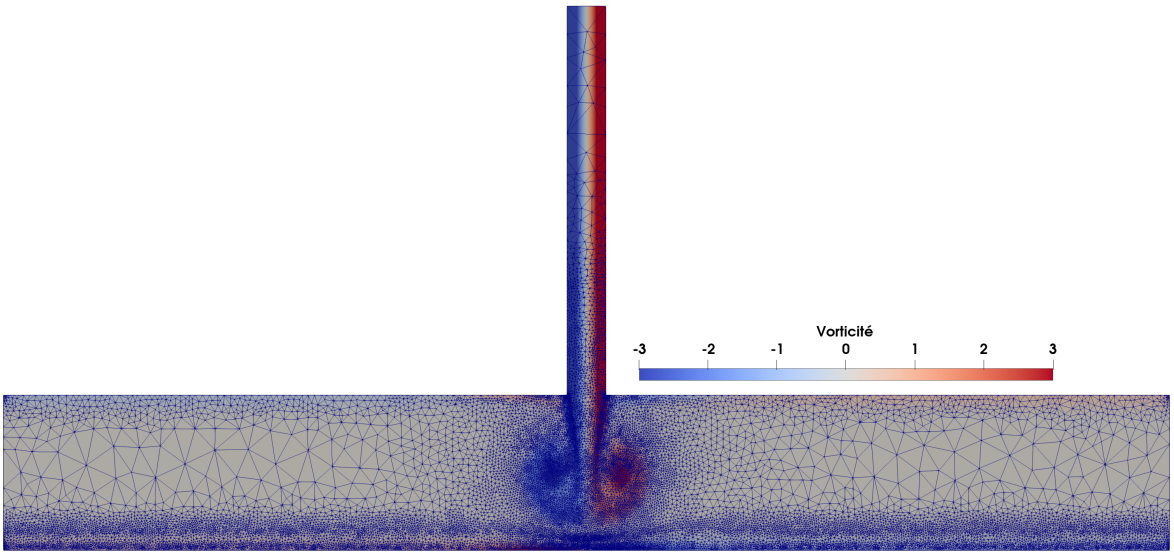


(c) À $t = 45$

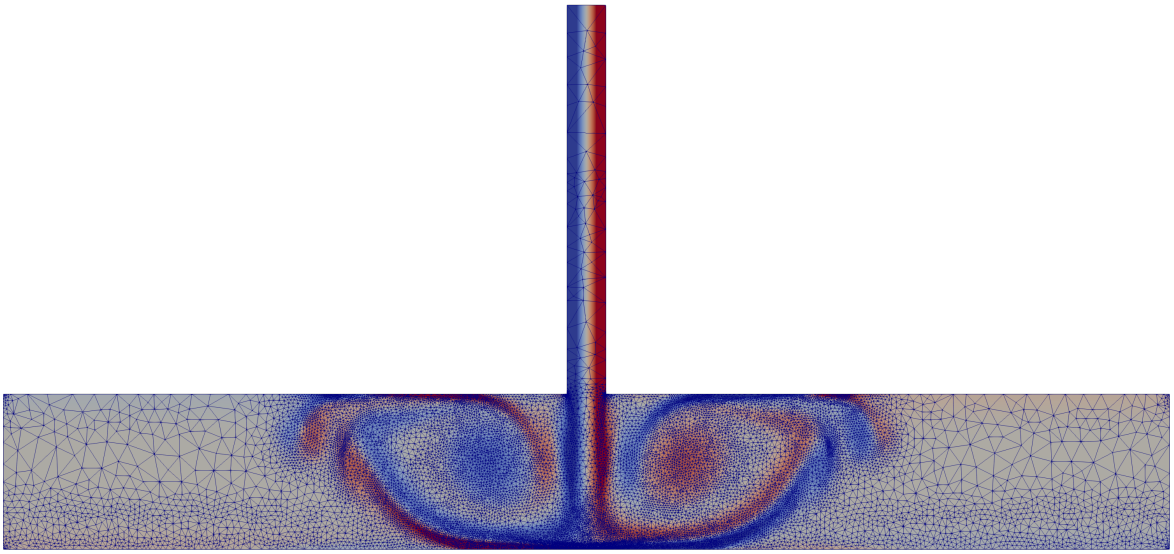


(d) À $t = 60$

Figure 6.15 (suite) Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 1

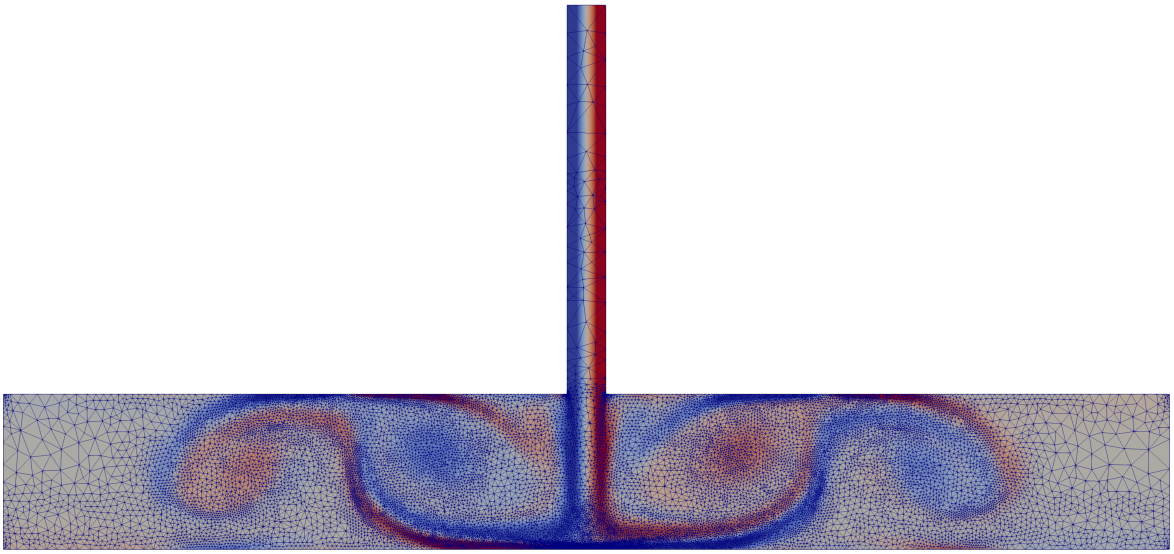


(a) À $t = 10$

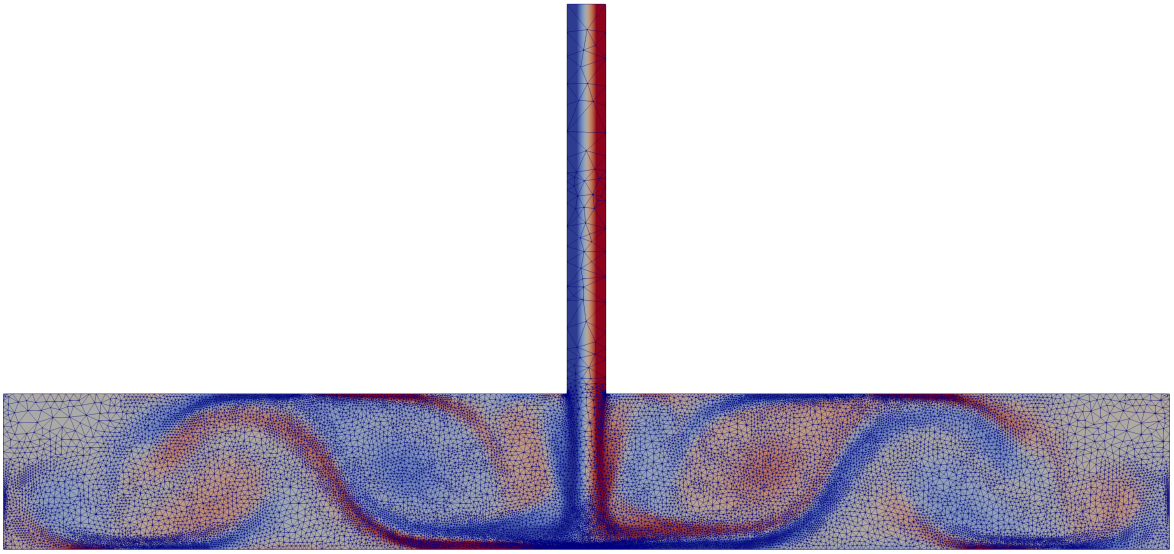


(b) À $t = 30$

Figure 6.16 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 2. On superpose sur chaque maillage la vorticité dans une échelle saturée.

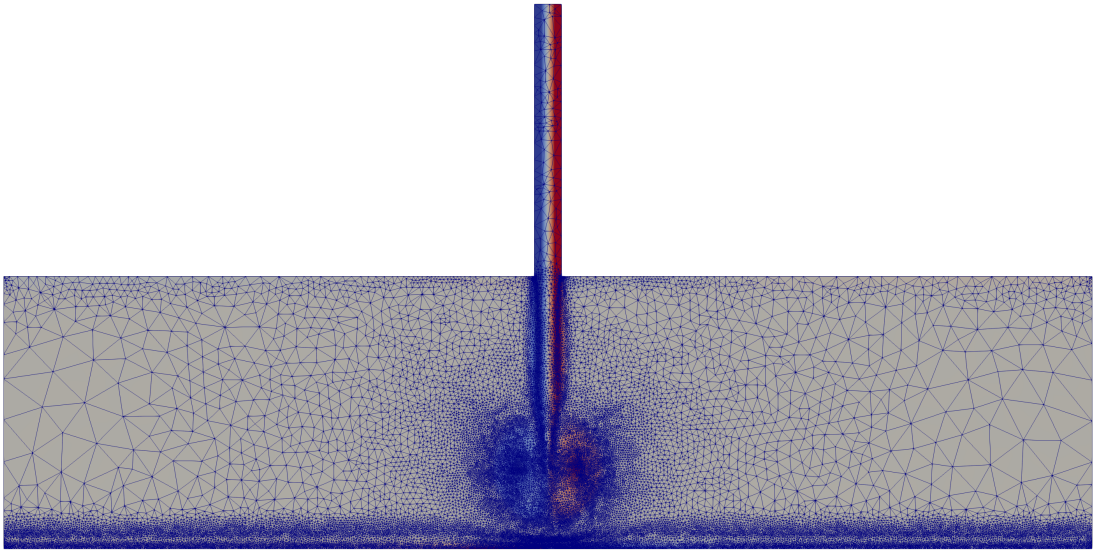


(c) À $t = 45$

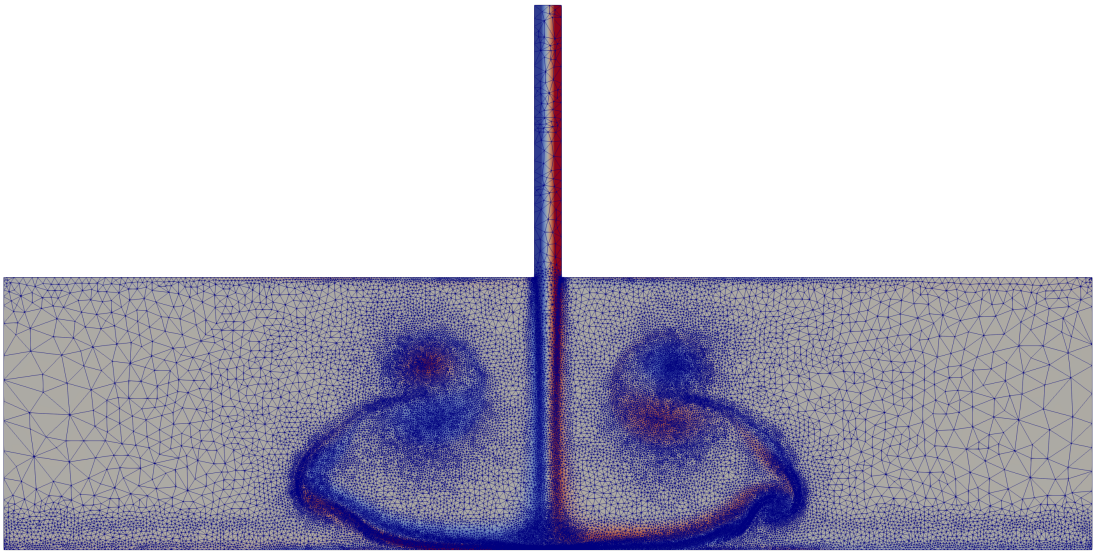


(d) À $t = 60$

Figure 6.16 (suite) Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 2

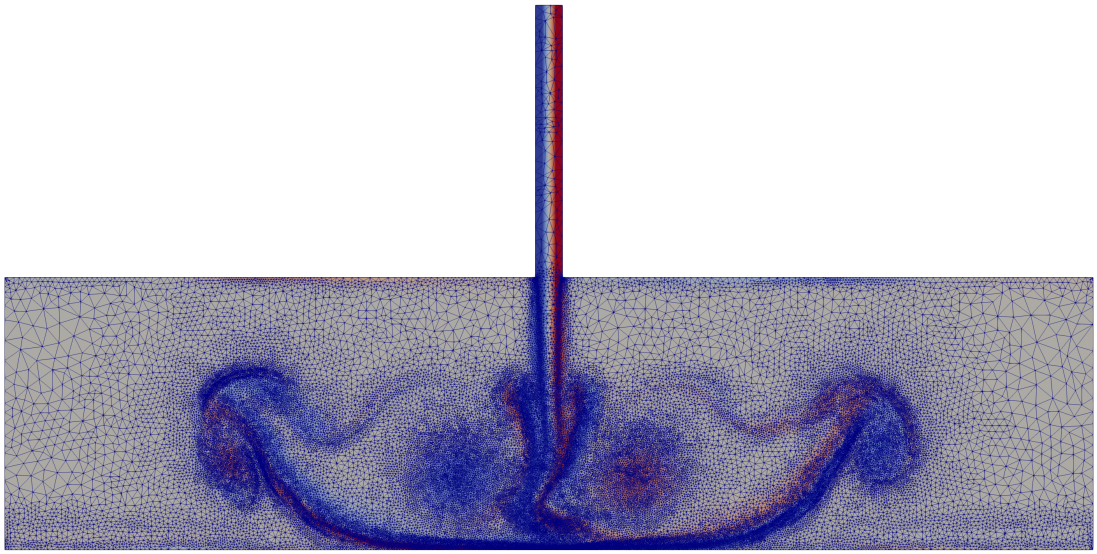


(a) À $t = 20$

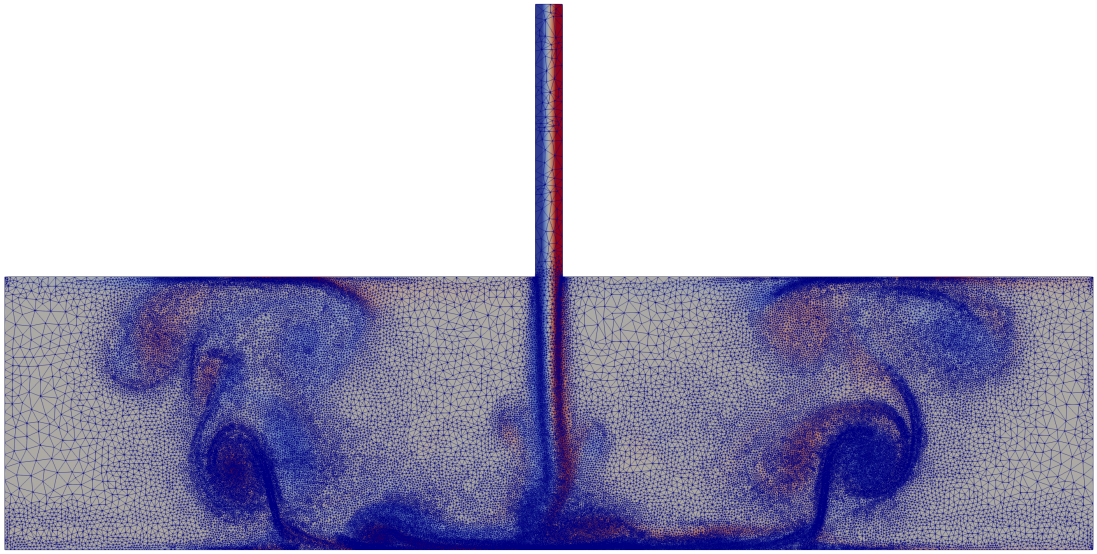


(b) À $t = 45$

Figure 6.17 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 3. On superpose sur chaque maillage la vorticité dans une échelle saturées

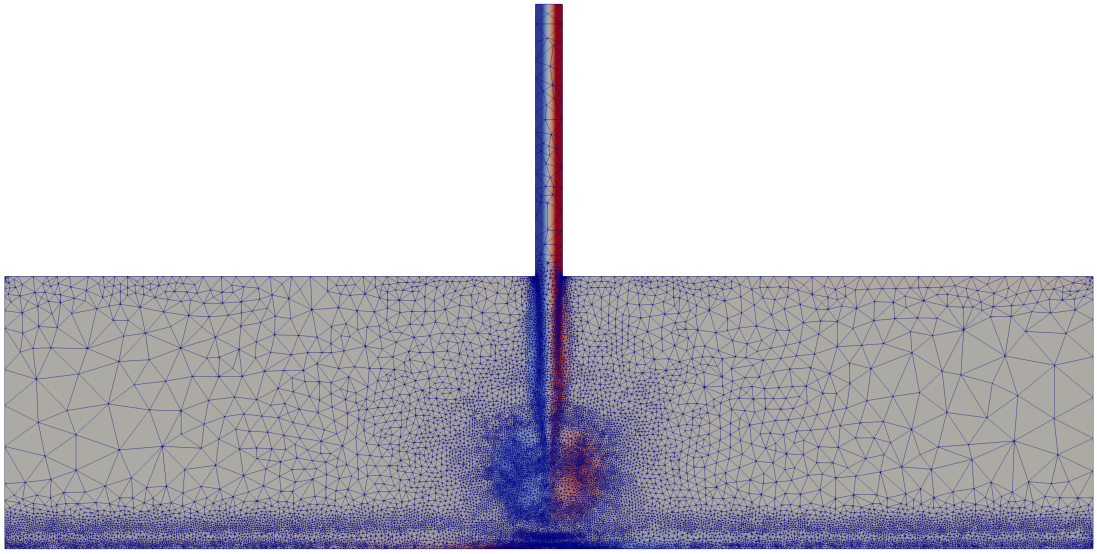


(c) À $t = 60$

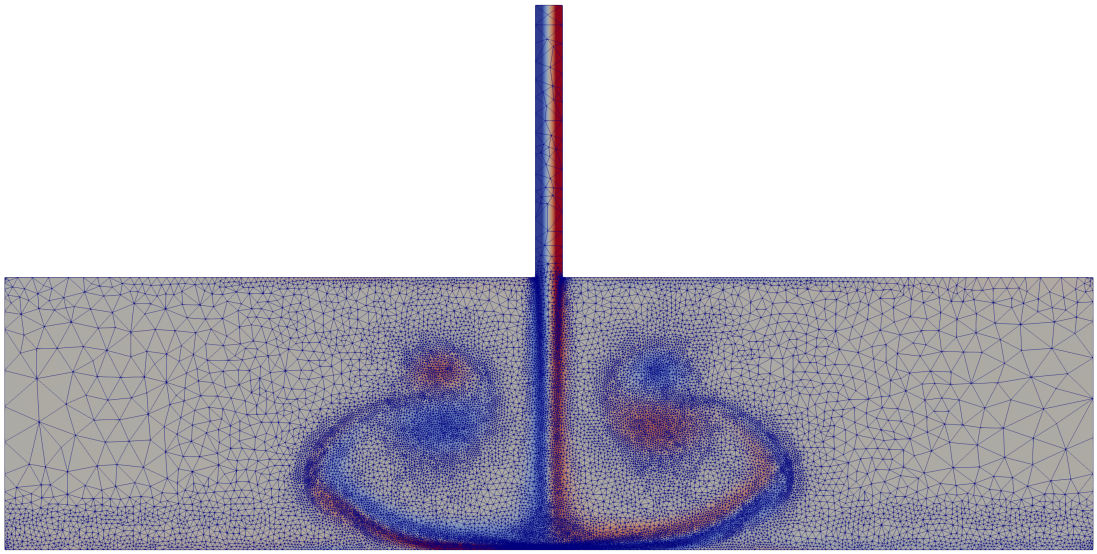


(d) À $t = 80$

Figure 6.17 (suite) Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 3

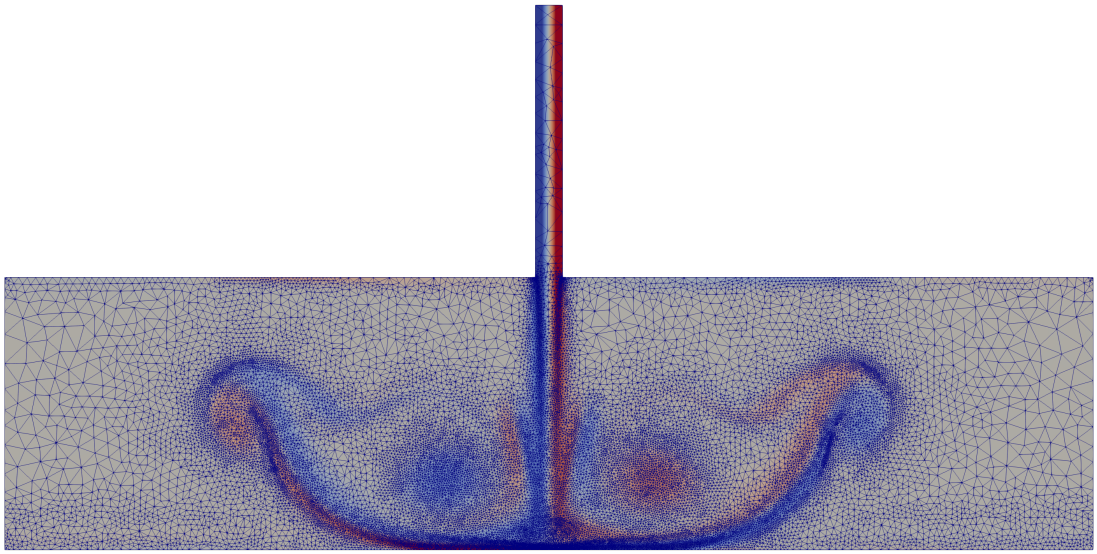


(a) À $t = 20$

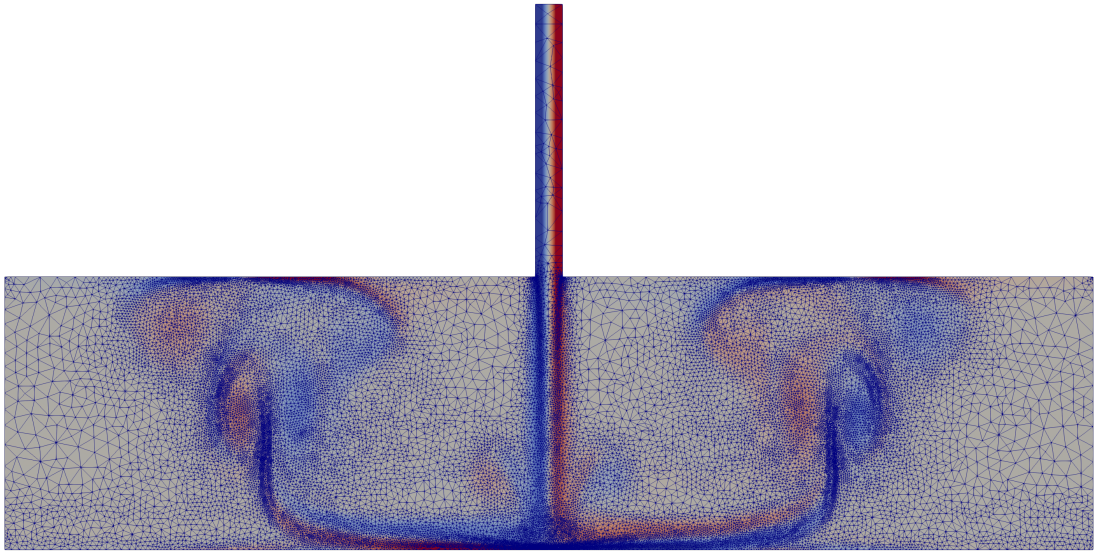


(b) À $t = 45$

Figure 6.18 Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 4. On superpose sur chaque maillage la vorticité dans une échelle saturée.



(c) À $t = 60$



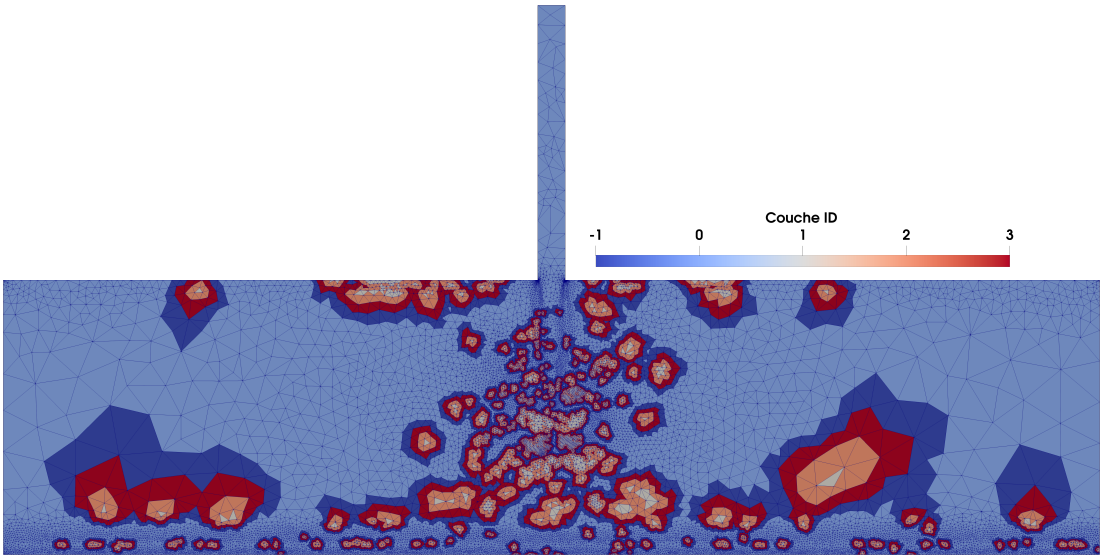
(d) À $t = 80$

Figure 6.18 (suite) Jet impactant - Maillages utilisés à différents instants pour le cas 4

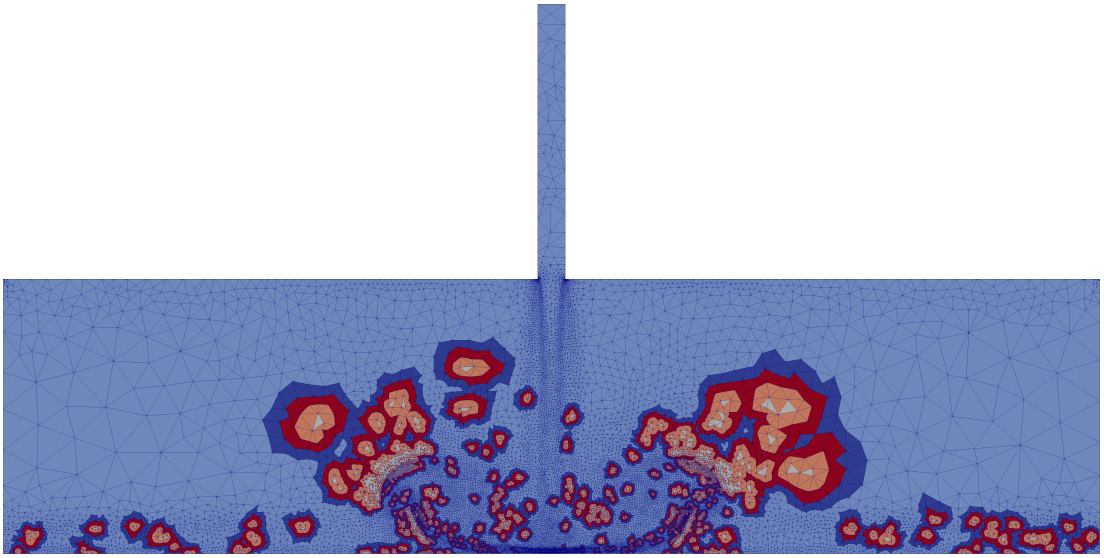
Venons en à l'analyse du comportement de l'algorithme d'adaptation de maillage locale. Afin de ne pas alourdir inutilement l'exposé, la Figure 6.19 présente la formation des poches à remailler à différents instants pour le cas 4 uniquement. Contrairement à ce que nous avions observé pour le cas d'étude précédent, les poches sont ici beaucoup plus fragmentées, ce qui met bien en valeur la physique particulièrement complexe de cet écoulement. Là encore, on observe une symétrie évidente dans la répartition des poches, à l'image de celle de l'écoulement qui perdure jusqu'à la fin pour ce cas. Tous les clichés, exception faite du premier, mettent en évidence le déplacement des structures tourbillonnaires. On observe en effet des duos de poches de géométrie similaires séparées par quelques éléments à conserver. L'une des poches est représentative de la région à raffiner, tandis que l'autre contient des éléments dont la taille peut désormais augmenter.

La sauvegarde du domaine semble par ailleurs extrêmement satisfaisante dans tous les cas. La Figure 6.20, qui présente l'évolution des trois fonctions de préservation pour chaque cas, le confirme. Après l'impact du jet sur la paroi chauffée, l'adaptation de maillage local conduit en moyenne à 70% d'anciens éléments dans le nouveau maillage. Tout comme pour l'étude de l'écoulement autour du cylindre, on observe une très forte corrélation entre le taux d'éléments relaxés et le taux d'anciens éléments dans le nouveau maillage. De plus, les paramètres choisis pour piloter la relaxation locale (tolérance Q_{min} et nombre de couches protectrices) permettent d'obtenir en tout temps ou presque un nombre d'éléments relaxés inférieur au nombre de nouveaux éléments.

La Figure 6.21 présente l'évolution du nombre d'éléments dans le maillage dans tous les cas. L'influence du nombre de Reynolds apparait clairement. Pour une tolérance d'erreur relative ε_1 identique, augmenter le nombre de Reynolds conduit à augmenter le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre la tolérance. Ceci n'est en soi pas surprenant car les effets convectifs dominent davantage les mécanismes diffusifs qui tendent à lisser l'évolution des gradients au cours du temps. L'augmentation du nombre de Reynolds tend également à renforcer les gradients, ce qui exige donc des éléments de plus petite taille pour les capturer adéquatement. Le nombre d'adaptations de maillage réalisées dans chaque configuration étudiée est précisé dans le Tableau 6.11. À nouveau on peut observer qu'augmenter le nombre de Reynolds se traduit par une augmentation naturelle de la fréquence moyenne de remaillage. Il s'agit bien du comportement souhaité. En augmentant la valeur du nombre de Reynolds, la convection de gradients de plus forte intensité sur des régions du domaine trop grossièrement maillées conduit à une augmentation locale plus rapide de l'erreur de discrétisation estimée. La réduction de taille calculée par l'opérateur de transition sur les éléments concernés aura donc tendance à dépasser rapidement la tolérance ε_2.

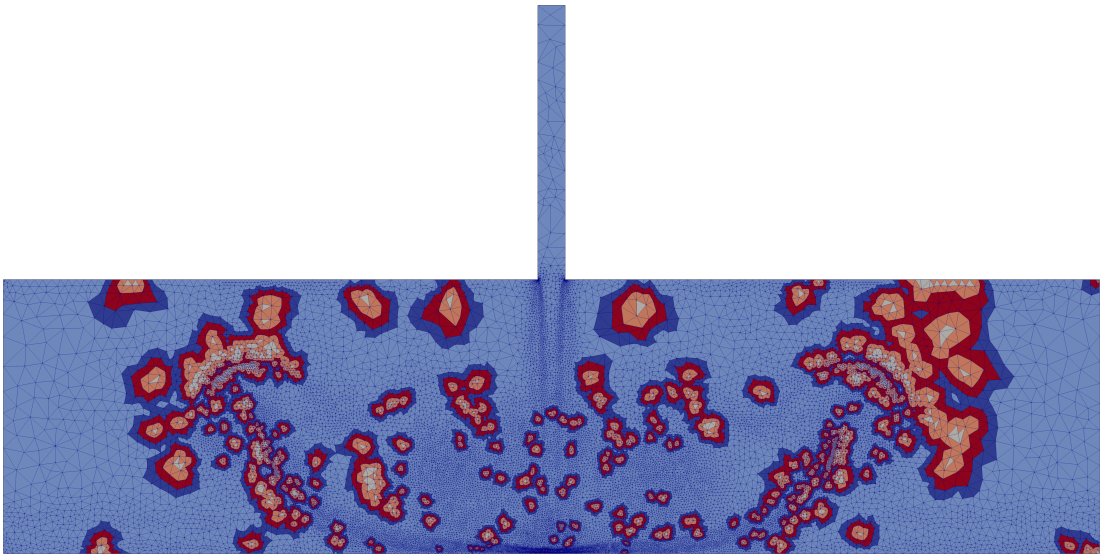


(a) À $t = 15$

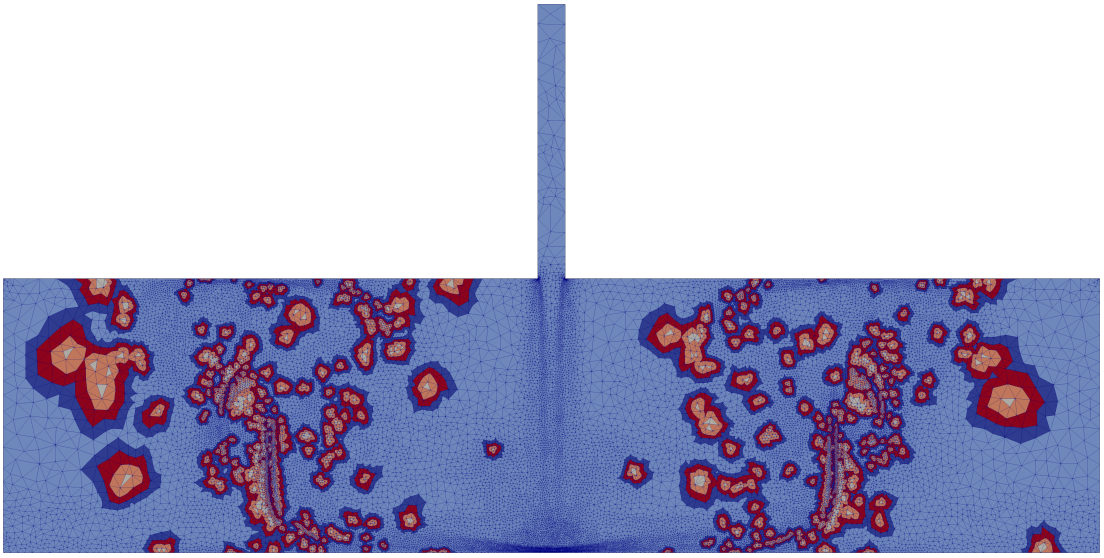


(b) À $t = 30$

Figure 6.19 Jet impactant - Vue des poches à remailler à différents instants pour le cas 4. Les éléments germes sont repérés avec une ID unitaire. Les deux couches protectrices ont une ID respective de 2 et 3, tandis que la couche fictive est repérée par l'ID -1. Les éléments conservés possèdent une ID nulle.

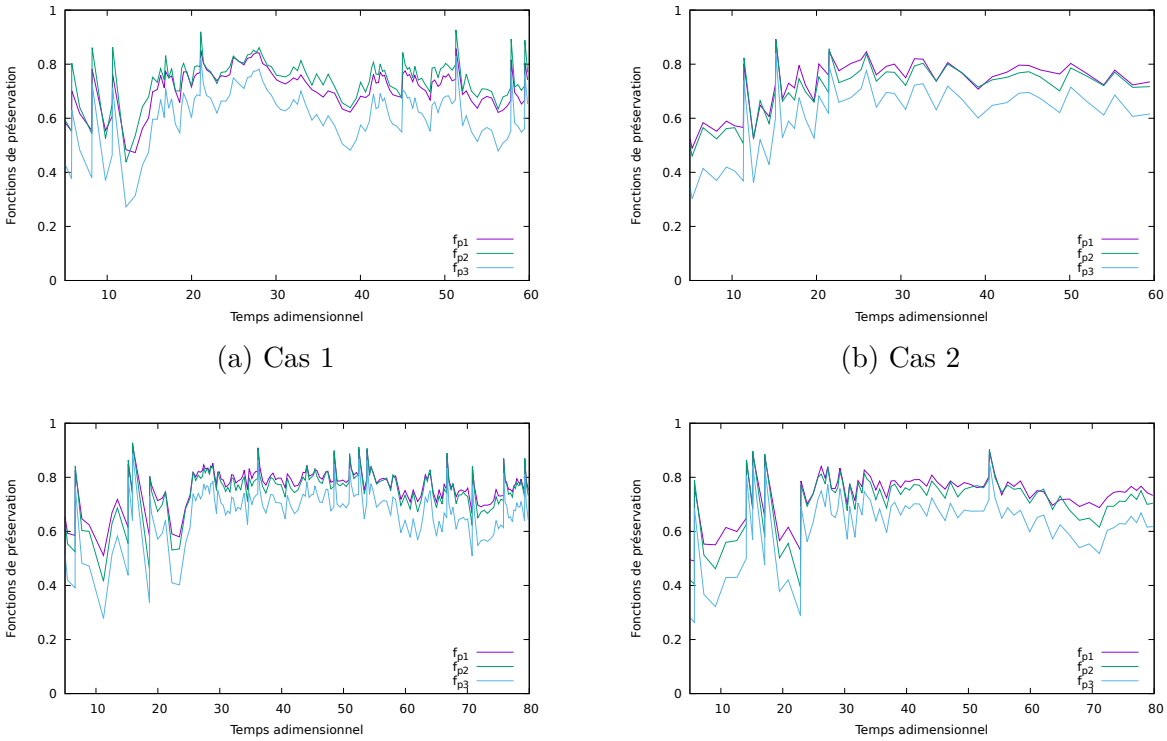


(c) À $t = 60$



(d) À $t = 80$

Figure 6.19 (suite) Jet impactant - Vue des poches à remailler à différents instants pour le cas 4



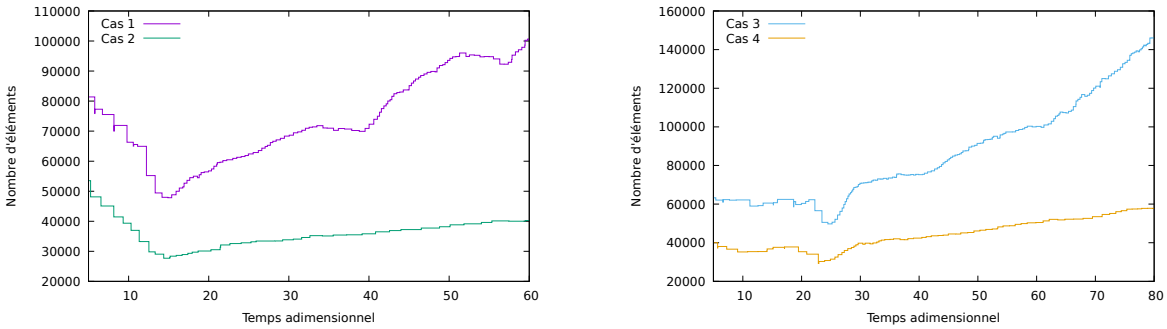
(a) Cas 1

(b) Cas 2

(c) Cas 3

(d) Cas 4

Figure 6.20 Jet impactant - Évolution des fonctions de préservation



(a) Cas 1 et 2

(b) Cas 3 et 4

Figure 6.21 Jet impactant - Évolution du nombre d'éléments

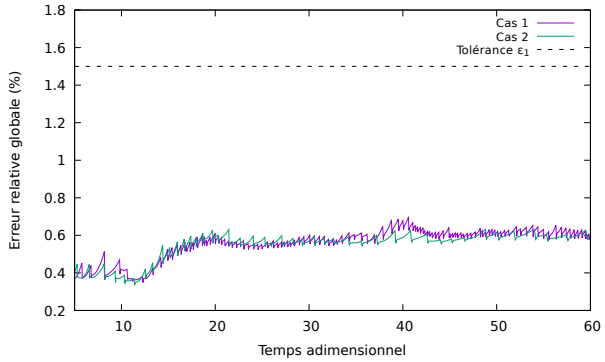
Tableau 6.11 Jet impactant - Nombre de remaillages pour chaque cas

Cas	1	2	3	4
Nombre de remaillage	133	59	181	88

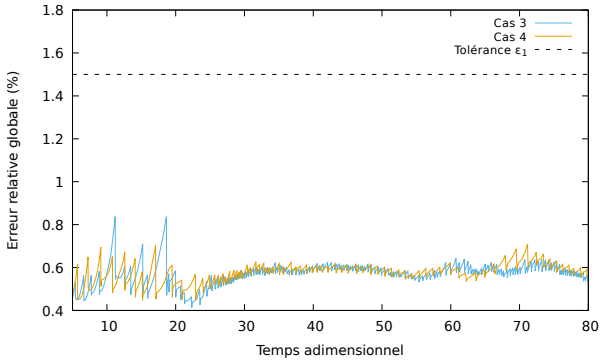
Pilotage des adaptations de maillage

Le pilotage des adaptations de maillage dans cette étude ne s'appuie que sur trois critères d'arrêt. Tout comme pour l'écoulement autour du cylindre, il est préférable que le critère d'arrêt basé sur la tolérance ε_1 ne s'active que lors des premières adaptations de maillage, pour atteindre la cible d'erreur relative souhaitée pour chaque norme d'erreur. L'évolution des erreurs relatives globales estimées est fournie à la Figure 6.22. La tolérance ε_1 est largement respectée au cours de la simulation dès lors que la cible est atteinte pour la première fois. Notons également que le niveau d'erreur dans les deux normes est similaire au cours du temps. Ce n'est absolument pas garanti en approche multinorme.

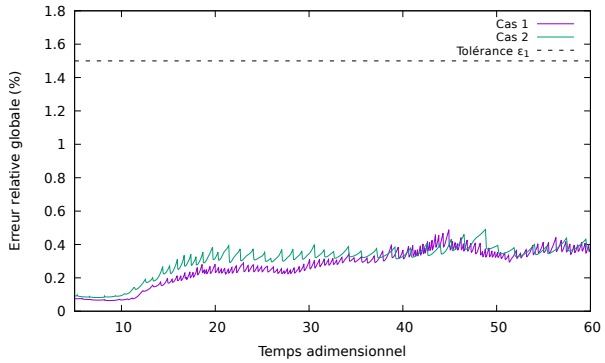
Les adaptations de maillage réalisées sont donc déclenchées par un des critères d'arrêt portant sur la variation de taille élémentaire prescrite par l'opérateur de transition. La Figure 6.23 présente les critères d'arrêt à l'origine des adaptations de maillage au cours de chaque simulation. Le critère lié à l'augmentation de taille préconisée pour un élément n'a cette fois conduit qu'à un nombre très réduit d'adaptations de maillage. Compte tenu de la valeur très permissive donnée à la tolérance ε_3, il s'agit du comportement espéré. C'est donc le besoin local de raffinement de maillage qui est à l'origine de la très grande majorité des adaptations. Un peu plus haut, nous avions souligné le très bon suivi des structures présentes dans l'écoulement par le maillage. Le critère d'arrêt lié à la tolérance ε_2 apparaît donc tout à fait pertinent en approche multinorme, moyennant le choix d'une valeur suffisamment sévère (mais pas trop) pour cette tolérance. Soulignons pour finir que la fréquence des remaillages n'est pas constante au cours des simulations. L'usage d'une procédure d'adaptation de maillage complètement automatique, par opposition à celle que nous avions présentée durant la maîtrise qui a précédé ce doctorat [136], est donc tout à fait désirable pour optimiser le coût et le temps de calcul dans un tel cas.



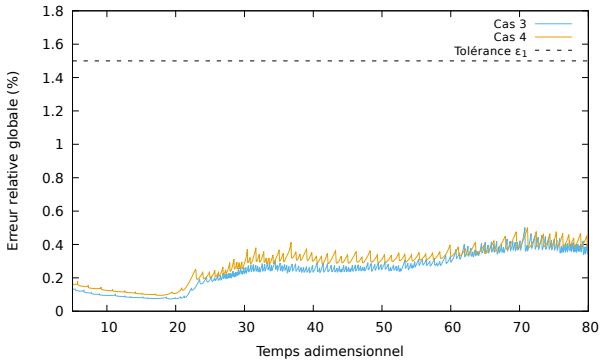
(a) Cas 1 et 2



(b) Cas 3 et 4

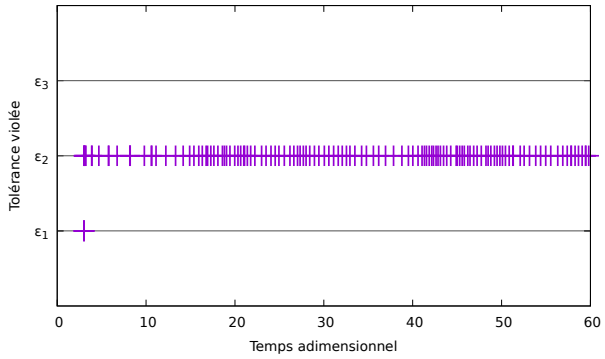


(c) Cas 1 et 2

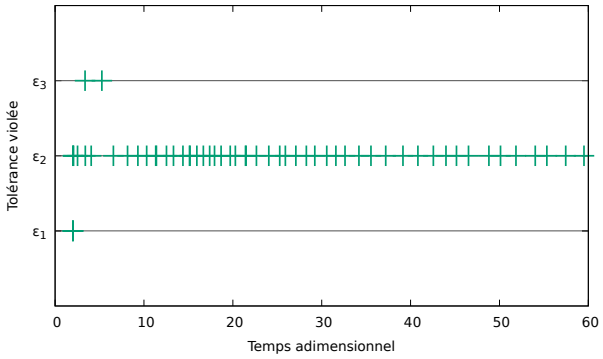


(d) Cas 3 et 4

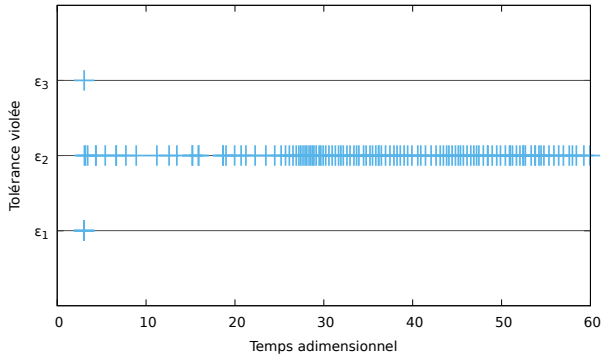
Figure 6.22 Jet impactant - Évolution des erreurs relatives globales estimées. En haut figure l'erreur en norme énergie, tandis qu'on trouve en bas l'évolution de l'erreur sur les gradients de température.



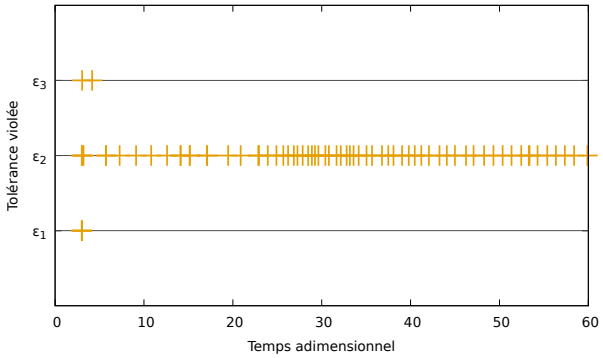
(a) Cas 1



(b) Cas 2



(c) Cas 3



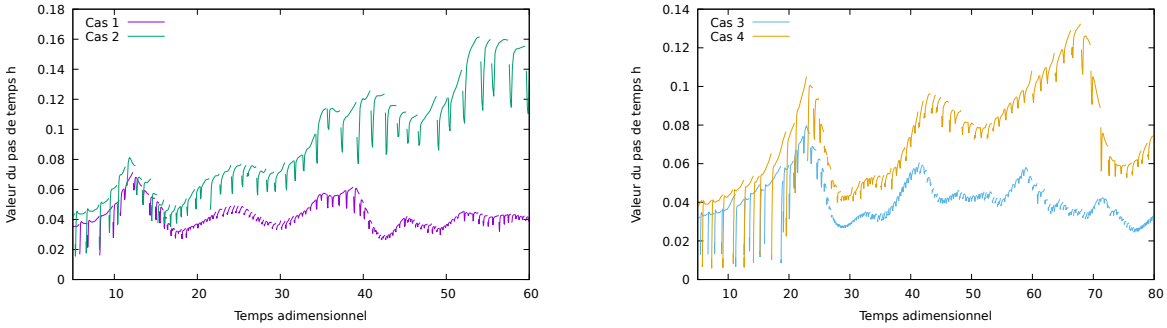
(d) Cas 4

Figure 6.23 Jet impactant - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées

Comportement de l'intégrateur temporel adaptatif

On s'intéresse ici seulement à la variation de la taille h du pas de temps au cours de chaque simulation. Dans les quatre cas, l'intégrateur temporel s'est toujours maintenu à l'ordre $p = 2$. La variation de h au cours de chaque simulation est donnée à la Figure 6.24.

L'influence du nombre de Reynolds est à nouveau visible. Une augmentation du nombre de Reynolds induit une dynamique d'écoulement globalement plus complexe, nécessitant un pas de temps de taille h réduite pour atteindre le niveau d'erreur locale souhaité. Dans tous les cas, les plus faibles valeurs de h sont essentiellement observées en début de simulation, soit durant la phase de progression du jet vers le mur. Cette phase implique une dynamique d'écoulement assez rapide et rappelle celle du relâché tourbillonnaire dans le problème étudié à la section précédente. Le jet convecte les deux tourbillons situés à son extrémité, qui présentent une forte vorticité . Les adaptations de maillage induisent une variation locale importante de la solution au niveau de ces tourbillons, ce qui provoque une décroissance marquée de h lors des reprises du calcul dans cette phase. Après l'impact du jet, on observe dans chaque cas (tout particulièrement dans le cas 4) une évolution assez cyclique de h, ce qui semble traduire la présence d'un ou plusieurs mécanismes physiques périodiques. Remarquons également que la valeur de h est dans l'ensemble mieux conservée lors des reprises pour les cas à $Re = 500$. Ceci est sans doute lié à la plus grande finesse des maillages utilisés dans ces deux cas.



(a) Cas 1 et 2

(b) Cas 3 et 4

Figure 6.24 Jet impactant - Évolution du pas de temps h dans chaque cas

Évolutions du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt sur la frontière chauffée

Cette sous-section ne saurait se terminer sans une courte étude portant sur l'évolution du coefficient de frottement C_f, et du nombre de Nusselt Nu sur la frontière chauffée du domaine. Ces quantités sont d'un grand intérêt pour l'ingénieur, et les études numériques et expérimentales portant sur les jets impactants proposent donc très souvent une évaluation de ces quantités. Les étudier est donc aussi un bon moyen pour nous d'évaluer la pertinence de nos résultats. Les Figures 6.26 et 6.27 présentent respectivement l'évolution de C_f et Nu sur la frontière d'intérêt, pour chaque cas.

La rupture de la symétrie de l'écoulement dans les cas à $Re = 500$ est, sans surprise, également visible ici. Dans le cas 1, la rupture de la symétrie se produit entre $t = 40$ et $t = 60$, ce qui est relativement tardif vu que l'impact du jet se produit vers $t \approx 12$. Dans le cas 3, l'asymétrie de l'écoulement est visible dès $t = 40$, bien que l'impact du jet se produise plus tard du fait de la valeur plus élevée de n_H. Une faible valeur de n_H tend donc à stabiliser le jet. Une analogie intéressante peut être dressée avec le phénomène de flambement observé dans les structures élancées soumise à une charge axiale. La contrainte critique d'Euler fait en effet intervenir la longueur de la structure au dénominateur.

La conservation de la symétrie semble parfaite au temps final pour le cas 2. Néanmoins une très légère dissymétrie dans les valeurs de C_f et Nu peut s'observer au temps final pour le 4. Il est probable que cette configuration conduise elle aussi, *in fine*, au développement d'une instabilité pour le jet, d'amplitude probablement moindre à celle observée dans le cas 3. Cette différence entre les cas 2 et 4 démontre à nouveau le rôle critique de la valeur de n_H sur la stabilité du jet.

Intéressons nous maintenant plus particulièrement à l'évolution du coefficient de frottement C_f. Celui-ci est donné par la relation suivante :

$$C_f = 2\tau_w \tag{6.9}$$

où t_w désigne le cisaillement pariétal. Les dérivées du champs de vitesse sont discontinues aux interfaces entre les éléments. Afin d'évaluer une valeur unique du cisaillement pariétal en chaque nœud présent sur la frontière d'intérêt, nous avons donc utilisé la reconstruction quadratique des gradients de vitesse intervenant dans l'estimation de l'erreur spatiale en norme énergie. Dans les cas à $Re = 500$, l'évolution du profil de C_f au cours du temps témoigne bien d'une complexification de la physique de l'écoulement à proximité de la frontière d'impact. Les points de décollement et recollement, dont la présence est repérée par des valeurs nulles

de C_f, se font plus nombreux au temps final. Au fur et à mesure que le temps progresse, les premiers points de décollement à proximité de la zone d'impact semble s'écarter du point de stagnation central. L'observation des résultats obtenus pour les cas 2 et 4 confirme cette tendance. Le comportement oscillant du jet est très bien mis en évidence dans le cas 3. On observe en effet, via la valeur de C_f, un déplacement du point de stagnation de part et d'autre de l'axe du jet. On remarque aussi des variations importantes de l'amplitude maximale de C_f au cours du temps, tout spécialement dans les cas 1, 3 et 4. Si les oscillations du jet jouent clairement un rôle dans les cas 1 et 3, ces variations sont principalement dues à l'interaction de structures tourbillonnaires primaires, formées le long du jet près de la zone d'impact puis convectées, avec l'écoulement de type couche limite qui opère près de la paroi. La Figure 6.25 illustre, pour le cas 4, la vorticité en un point très proche de la frontière d'impact et suffisamment loin de l'axe du jet. L'évolution de la vorticité sur les 40 dernières unités de temps met en évidence un mécanisme périodique. Les valeurs ont été extraites toutes les 0.25 unités de temps. Une analyse par transformée de Fourier a identifié une contribution notable de la fréquence 0.17. En considérant les mêmes vitesse et longueur caractéristiques que celles utilisées pour définir le nombre de Reynolds, on obtient un nombre de Strouhal $St = 0.17$. Dans leur étude, Chung *et al.* [78] identifie également un mécanisme périodique présentant un nombre de Strouhal $St \approx 0.2$. Nos résultats semblent donc cohérents. Au demeurant, les valeurs obtenues pour C_f sont cohérentes avec les résultats rapportés dans [12].

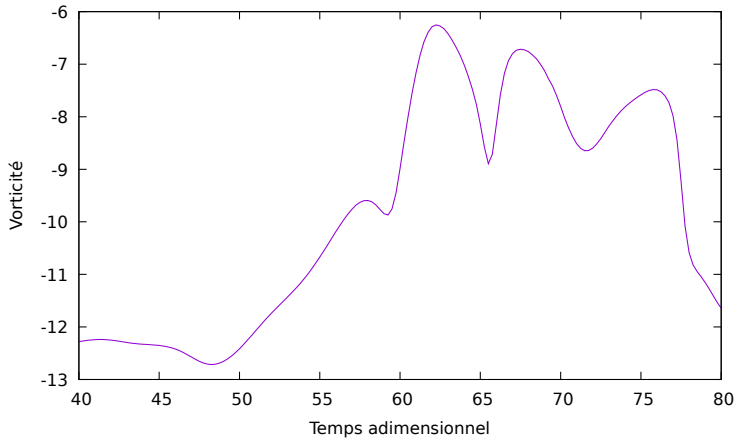
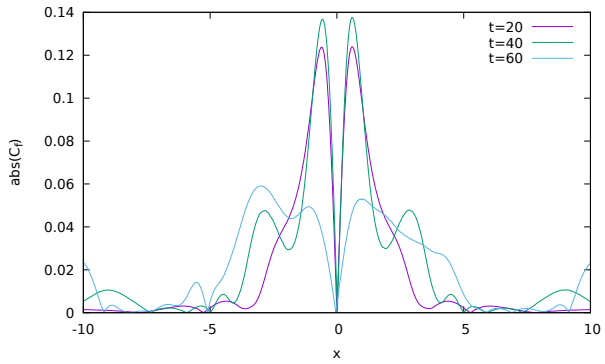
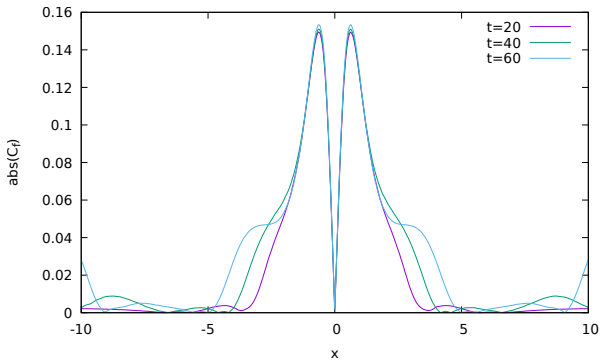


Figure 6.25 Jet impactant - Évolution temporelle de la vorticité au point $(x = 1.5, y = -9.95)$ dans le cas 4

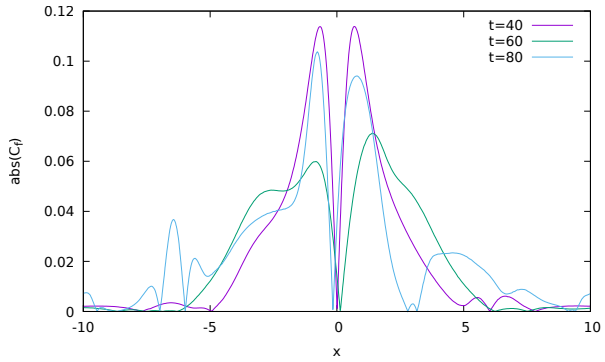
Il nous reste maintenant à analyser spécifiquement l'évolution du nombre de Nusselt sur la



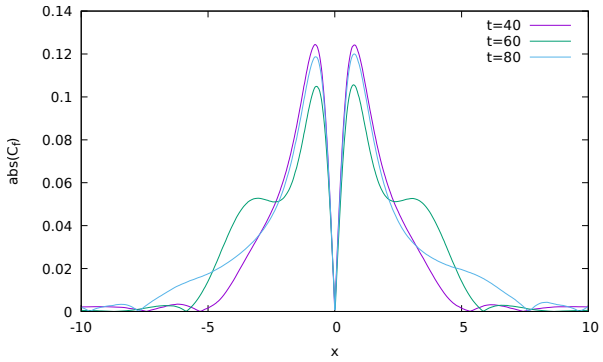
(a) Cas 1



(b) Cas 2



(c) Cas 3



(d) Cas 4

Figure 6.26 Jet impactant - Évolution du coefficient de frottement C_f sur la frontière 5, à proximité du point d'impact initial

paroi chauffée. En prenant encore pour longueur caractéristique du problème le diamètre D unitaire de la conduite, un bilan thermique sur une couche d'épaisseur infinitésimale au contact direct de la paroi chauffée nous permet ici d'écrire que :

$$Nu = -\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=y_w} \tag{6.10}$$

Le nombre de Nusselt s'identifie donc, à la conductivité thermique près, au flux de chaleur normal à la paroi chauffée. Dans l'ensemble, les profils que l'on obtient à proximité de l'axe du jet sont tout à fait cohérents avec les résultats présentés dans [12, 78]. Tout comme lors de l'analyse de C_f, l'oscillation du jet et les mécanismes périodiques de l'écoulement induisent d'importantes variations dans l'amplitude locale du nombre de Nusselt. Ce comportement est à prendre en considération lors de la conception d'une application d'ingénierie afin d'optimiser le refroidissement. Ceci justifie le fait que la plupart des études rapportent un profil de nombre de Nusselt moyenné dans le temps. On remarquera pour finir, dans les cas 1 et 2, une augmentation notable du nombre de Nusselt au temps final à $|x| = 10$. Cela correspond à des points de stagnation secondaires, que l'on peut d'ailleurs observer sur les Figures 6.15d et 6.16d.

En complément de cette dernière analyse, des illustrations du champs de température à plusieurs instants dans le cas 3 sont disponibles en Annexe D. La domination des effets convectifs dans le transfert de chaleur est particulièrement visible.

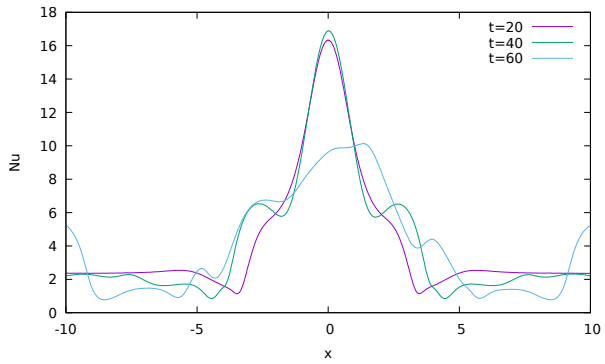
6.2.4 Conclusions

Cette seconde étude démontre elle aussi la pertinence de l'approche adaptative proposée dans cette thèse. Nous avons notamment pu souligner les résultats suivants :

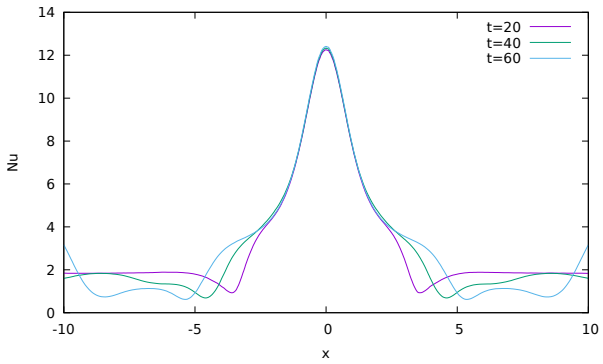
(1) Pour une tolérance d'erreur ε_1 fixée et une valeur croissante du nombre de Reynolds, la procédure d'adaptation de maillage conduit naturellement à raffiner davantage le maillage, tandis que les adaptations se font plus nombreuses. Ceci apporte une garantie supplémentaire quand à la robustesse et la flexibilité de notre approche adaptative.

(2) Nous avons observé que le nombre d'éléments pouvait passer du simple au double au cours de la simulation. Un maillage fixe à même d'assurer une capture suffisante de toutes les structures tourbillonnaires observées comporterait *a minima* autant d'éléments que le maillage le plus fin utilisé dans notre étude, soient environ 150000. De ce point de vue, utiliser un tel maillage fixe impliquerait donc un coût de calcul total jusqu'à 4 fois supérieur à celui obtenu avec notre approche adaptative [2].

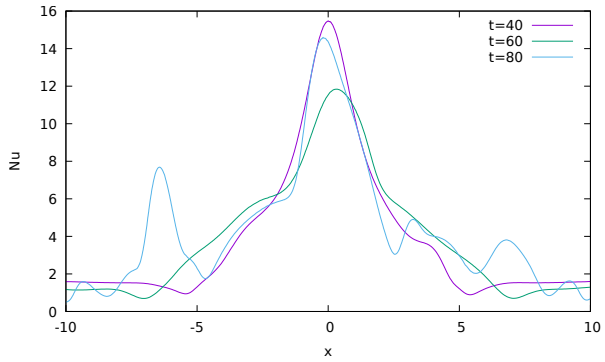
2. La matrice du système linéaire à résoudre serait en effet jusqu'à 4 fois plus grosse.



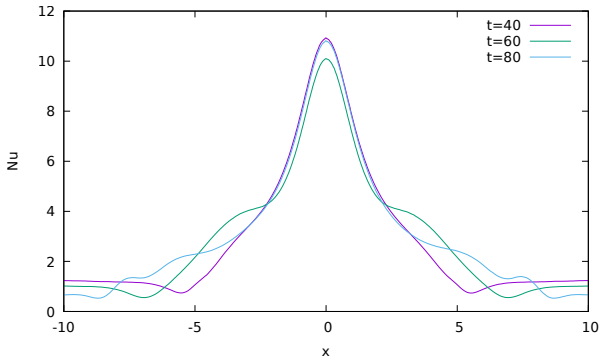
(a) Cas 1



(b) Cas 2



(c) Cas 3



(d) Cas 4

Figure 6.27 Jet impactant - Évolution du nombre de Nusselt Nu sur la frontière 5, à proximité du point d'impact initial

(3) Bien que l'approche soit multinorme pour ce second problème d'étude, la logique employée pour piloter l'adaptation locale du maillage permet de conserver une très large partie des éléments. La tolérance de qualité élémentaire associée à la relaxation de maillage locale se révèle ici encore très pertinente, puisqu'elle n'impacte que très peu le nombre d'éléments conservés par l'adaptation locale du maillage.

(4) Le critère d'arrêt basé sur la réduction de taille maximale prescrite par l'opérateur de transition est apparu extrêmement convainquant pour compenser l'indisponibilité du critère lié à l'asymétrie d'une distribution de l'erreur. Il pourrait donc tout à fait s'y substituer dans le cas d'un écoulement traité en approche mononorme également.

(5) La stratégie de relance de l'intégrateur temporelle apparait ici aussi très pertinente, puisque la taille h du pas de temps est dans l'ensemble bien préservée lors des relances du calcul.

6.3 Marche descendante

Dans cette section, nous proposons l'étude d'un écoulement turbulent dans un canal présentant une brusque variation de section, sous la forme d'une marche descendante. La richesse de la physique dans cet écoulement lui vaut un grand un intérêt dans la communauté. Cet écoulement présente en effet une séparation induite par la géométrie, du cisaillement de paroi, du cisaillement libre, le développement d'une zone de recirculation, et un recollement de couche limite [140]. La compréhension de la physique de cet écoulement et des mécanismes qui la régulent est donc un enjeu dans de nombreuses applications industrielles. Ce cas d'étude est aussi très largement étudié en CFD pour évaluer les performances des différentes modélisations de la turbulence.

6.3.1 Description du problème à résoudre

La géométrie du problème est donnée à la Figure 6.28. Les conditions limites utilisées pour simuler l'écoulement sont résumées dans le Tableau 6.12. La rampe $f(t)$ appliquée pour u sur la frontière d'entrée du domaine est toujours identique à celle donnée par l'Équation (6.4). L'écoulement à proximité des parois latérales a été modélisé à l'aide d'une loi de paroi standard à deux échelles de vitesse (Cf. Annexe A). Les distances de raccordement d retenues pour chacune des courbes concernées sont données dans le Tableau 6.13. Ce problème a lui aussi été simulé à partir de la forme adimensionnelle des équations URANS. De fait, la géométrie a également été adimensionnalisée en posant $H = 1$. Le nombre de Reynolds du problème est fixé à $Re = 47625$. Il est ici défini à partir de la hauteur H de la marche et d'une vitesse caractéristique unitaire, correspondant à la vitesse maximum atteinte à l'entrée du domaine. Les effets de la turbulence ont été pris en compte avec la formulation en variables logarithmiques du modèle de turbulence k-ε standard (cf. Section 3.1.3). Le nombre de Reynolds turbulent imposé au temps initial est de $Re_t = (\rho U_0 L_0)/\mu_t = 1/\mu_t = 4444$ dans tous le domaine. Cette valeur est consistante avec celle imposée en entrée. Notons que ces valeurs des nombres de Reynolds ont été choisies à l'origine dans les travaux de Illinca [42], où il s'agissait alors de simuler ce même écoulement dans un contexte stationnaire. Ce problème avait ensuite été étudié au laboratoire par Gammacurta [115] en régime instationnaire. Les similarités entre nos travaux conduits en maîtrise [136] et ceux de Gammacurta nous ont naturellement amenés à considérer nous aussi ce cas d'école. Il nous a ici semblés judicieux de traiter une fois encore ce problème afin d'évaluer les avantages conférés par l'approche adaptative développée dans ces travaux. En effet, La dynamique de l'écoulement rend ce problème particulièrement intéressant pour étudier le remaillage local, du fait du développement de la zone de recirculation à l'aval de la marche, entre autres.

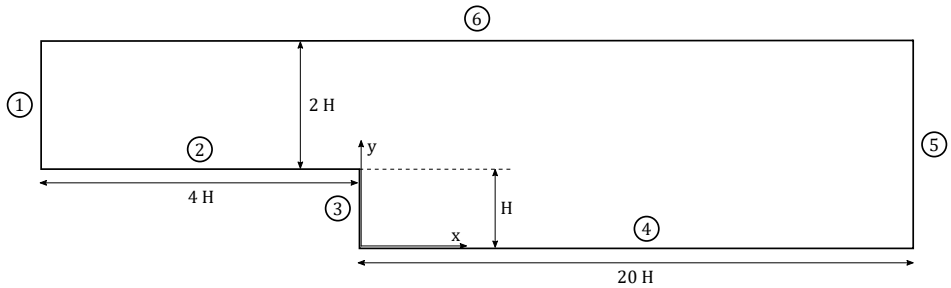


Figure 6.28 Marche descendante - Géométrie du problème

Tableau 6.12 Marche descendante - Conditions limites. Les parois solides sont traitées à l'aide d'une loi de paroi (LDP) standard à deux échelles de vitesse

courbe	1	2	3	4	5	6
u	$f(t)$	LDP	LDP	LDP	libre	LDP
v	0	LDP	LDP	LDP	libre	LDP
k	0.005	LDP	LDP	LDP	libre	LDP
ε	0.01	LDP	LDP	LDP	libre	LDP

Tableau 6.13 Marche descendante - Distances de raccordemment utilisées dans la loi de paroi

courbe	2	3	4	6
d/H	0.04	0.05	0.025	0.05

6.3.2 Stratégie adoptée pour la résolution

La simulation a consisté en l'intégration de 100 unités de temps, l'ordre p de l'intégrateur temporel étant libre de varier entre 1 et 3. Tout comme pour les deux problèmes d'étude précédents, la taille h du pas temps est adaptée via l'estimation de l'erreur locale. Conformément à ce que nous avons décrit à la Section 4.5.2, l'erreur locale est estimée indépendamment pour toutes les variables actives qui dépendent explicitement du temps, soit ici pour u, v, k, et ε. Les tolérances pour les niveaux absolu et relatif des erreurs locales sont les mêmes qu'utilisées précédemment.

Concernant l'erreur spatiale, elle est estimée sur le tenseur des contraintes visqueuses (norme énergie) ainsi que sur les gradients de k, ε, et μ_t. Ceci nous oblige donc à faire l'usage de l'approche multinorme pour piloter les adaptations de maillage au cours de la simulation. Les critères d'arrêt basés sur la surveillance de l'écart-type relatif et de l'asymétrie d'une distribution de l'erreur sont donc désactivés. Les critères d'arrêt deviennent réellement actifs à partir de $t = 2.5$.

Les tolérances choisies pour les critères d'arrêt actifs sont présentées dans le Tableau 6.14. La tolérance ε_2 a été fixée à la même valeur que pour le problème du jet impactant. Nous avions en effet conclu que la surveillance de la réduction de taille maximale, préconisée par l'opérateur de transition, est un critère particulièrement adéquat pour piloter l'évolution du maillage en l'absence des critères réservés à l'approche mononorme. On notera que la tolérance ε_1 renseignée est en pratique de 10% sur les 10 premières unités de temps simulées. Il est apparu impossible en pratique d'atteindre une cible de 5% d'erreur relative à $t = 2.5$, du fait de la forte erreur spatiale estimée dans chaque norme à proximité du coin supérieure de la marche. L'absence d'un congé de raccordement à cet endroit induit une singularité dans le champs de vitesse, à l'origine de gradients très importants. Afin d'éviter la divergence des itérations de Newton, il a été nécessaire de restreindre la taille minimale admise pour les éléments du domaine. En conséquence, il n'était pas possible de réduire les erreurs spatiales relatives au niveau prescrit. Toutefois, retarder l'activation des critères d'arrêt n'a pu être une option. On a en effet observé une divergence des itérations de Newton sur le maillage initial vers $t \approx 3$. La contribution de la singularité au niveau de l'erreur spatiale relative se faisant déjà sensiblement plus faible vers $t \approx 10$, la stratégie a donc été d'abaisser la cible d'erreur à cet instant. Ce faisant, le domaine conserve des frontières droites, ce qui autorise des transferts de la solution via la projection de Galerkin avec maillage d'intersection dans le domaine de calcul au complet. Ici aussi, le facteur de réduction d'erreur ξ de l'opérateur de transition est adaptatif, sa valeur étant comprise entre $\xi_{max} = 1.4$ et $\xi_0 = 0.6$. La valeur de ξ_{max} ici choisie est plus élevée que pour le problème précédent. Les niveaux d'erreurs

relatives obtenus pour le jet impactant étaient en effet très conservatifs. Cette valeur est donc une tentative d'optimisation de l'effort de calcul. Finalement on remarquera le niveau toujours très élevé utilisé pour ε_3. Comme nous le verrons plus loin, piloter l'augmentation de taille des éléments est particulièrement délicat dans ce problème. Pour finir, notons que deux couches protectrices ont été utilisées pour adapter localement le maillage.

La tolérance de qualité élémentaire est toujours fixée à $Q_{min} = 0.3$, cette valeur ayant déjà prouvé sa pertinence. Deux couches protectrices ont été utilisées tant pour la relaxation que l'adaptation locale du maillage.

Tableau 6.14 Marche descendante - Tolérances associées aux critères d'arrêt actifs

ε_1 (%)	ε_2	ε_3
3	4	20

6.3.3 Analyse des résultats

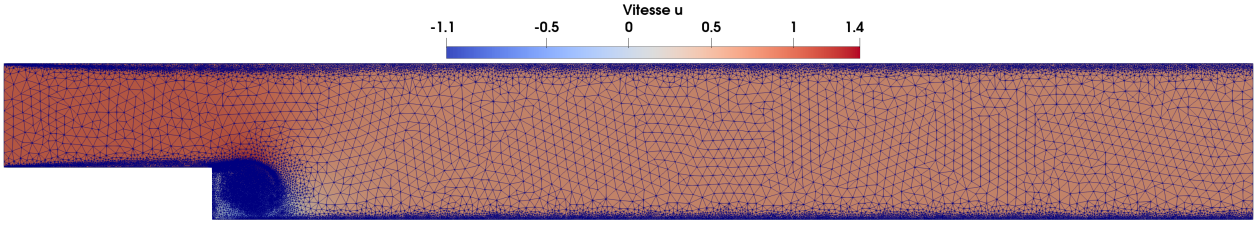
Évolution du maillage

La Figure 6.29 fait état de l'évolution du maillage et du champs de vitesse u au cours du temps. À nouveau le maillage est très représentatif de l'évolution de la physique de l'écoulement. On observe une concentration des éléments au niveau des couches limites près des frontières solides du canal, et également au niveau de la zone de recirculation. Au début de l'écoulement, la variation rapide des gradients de vitesse entre le cœur du canal et la zone de recirculation est particulièrement bien capturée. La croissance de cette zone de recirculation est également bien visible sur les deux premiers clichés. Après un certain temps, on observe la progression du cœur potentiel de l'écoulement d'entrée, délimité grossièrement par les zones de raffinements les plus proches du centre du canal. On observe d'ailleurs un resserrement de ce cœur potentiel, bien visible à $t = 30$ et $t = 45$. Ce resserrement semble induit par la zone de recirculation, et se retrouve convecté vers la sortie du domaine. Un état vraisemblablement stationnaire est atteint au temps final. On verra en effet un peu plus loin que la taille h du pas de temps atteint une valeur unitaire (valeur maximale imposée) en fin de simulation. Toutefois, nous avons constaté que la méthode de Newton ne convergeait pas en une itération sur les dernières unités de temps, ce qui témoigne de l'existence d'une légère instationnarité résiduelle dans la solution. On remarquera de plus, via la consultation du maillage au temps final, que le cœur potentiel n'a pas complètement disparu à la sortie du canal. Les conditions de traction nulle imposées en sortie pour les variables de vitesse ne sont donc pas vraiment adaptées ici. Néanmoins, la longueur de la zone de recirculation est la quantité la plus intéressante dans ce problème. On le verra également plus loin, notre formulation conduit à une

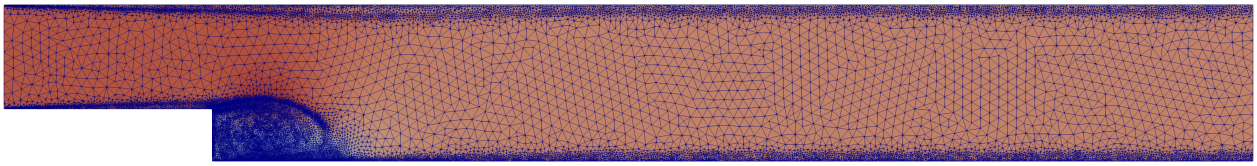
longueur de la zone de recirculation d'environ 6.3. La distance de la sortie du domaine à la zone de recirculation est donc, *a priori*, suffisamment grande pour que cette valeur ne soit pas impactée par les conditions limites de sortie. Il serait toutefois intéressant de considérer un domaine de calcul dont la sortie est à plus grande distance de la marche. L'évolution du nombre d'éléments dans le maillage, représentée à la Figure 6.31, témoigne bien de la progression du cœur potentiel de l'écoulement d'entrée. On observe en effet une augmentation du nombre d'éléments au fur et à mesure que ce cœur potentiel progresse vers la frontière de sortie du domaine. Peu avant $t = 50$, l'augmentation rapide du nombre d'éléments dans le maillage rend compte de l'impact du cœur potentiel sur la frontière de sortie. L'incompatibilité des conditions limites de sortie avec l'évolution naturelle de l'écoulement induit un raffinement important au niveau de cette frontière. Le nombre d'éléments finit par diminuer après que l'écoulement de sortie se soit ajusté.

La Figure 6.30 illustre quant à elle la formation des poches d'éléments à retirer à plusieurs instants. Ceux-ci sont situés à proximité des parois solides et au niveau des délimitations du cœur potentiel. On peut remarquer ce qui semble être une recrudescence du nombre d'éléments germes à $t = 10$ en comparaison de qu'il se passe à $t = 5$. L'explication réside dans l'ajustement de la tolérance ε_1 en cours de simulation, réalisée peu avant $t = 10$. De fait, la valeur du coefficient de réduction d'erreur a été durablement réduite sur les unités de temps qui ont suivis, ce qui a eu pour conséquence d'augmenter temporairement la fraction d'éléments retirés du maillage. On constate bien à $t = 20$ que cet effet s'est totalement estompé. Dans la suite de la simulation, les poches d'éléments à retirer sont en très majeure partie localisées à l'extrémité de la délimitation inférieure du cœur potentiel. Le temps avançant, cette délimitation progresse de la gauche vers la droite, en conséquence du développement de l'écoulement dans le partie inférieure du canal.

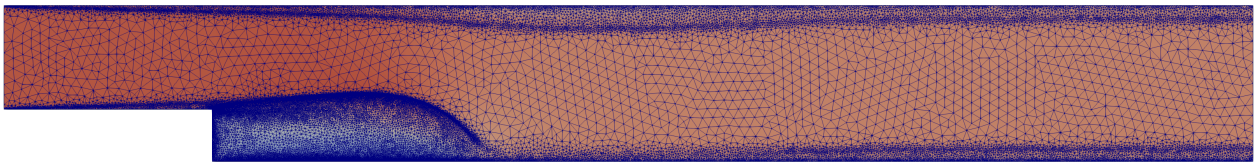
Ces résultats sont particulièrement satisfaisants. Une très large partie du maillage est en effet conservé lors des adaptations, en témoigne également l'évolution des fonctions de préservation illustrée à la Figure 6.32. On constate en effet que l'adaptation de maillage locale sauvegarde environ 90% des éléments dans les maillages. La relaxation locale des nouveaux maillages laisse également indemnes environ 85% des éléments, menant à des nouveaux maillages dont 80% des éléments proviennent exactement du précédent. Cette fois-ci, on observe en effet que le nombre d'éléments relaxés est plus important que le nombre d'éléments provenant du remaillage des poches. Les fonctions de préservation f_{p1} et f_{p2} restent toutefois fortement corrélées. Une baisse significative du niveau des fonctions de préservation est observable vers $t = 10$. Ceci est également dû à la modification de la tolérance ε_1 au cours de la simulation.



(a) À $t = 5$

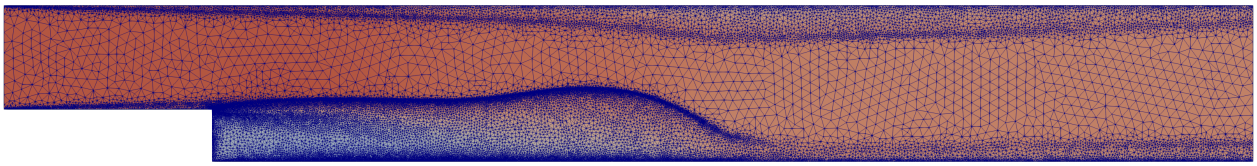


(b) À $t = 10$

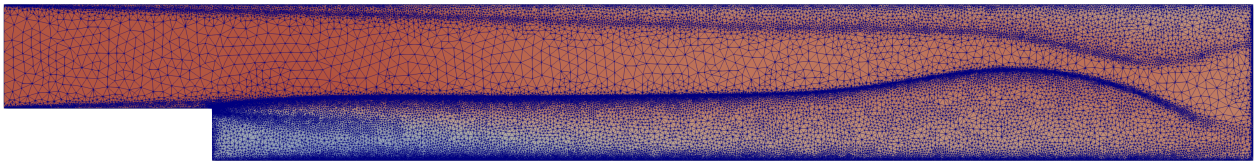


(c) À $t = 20$

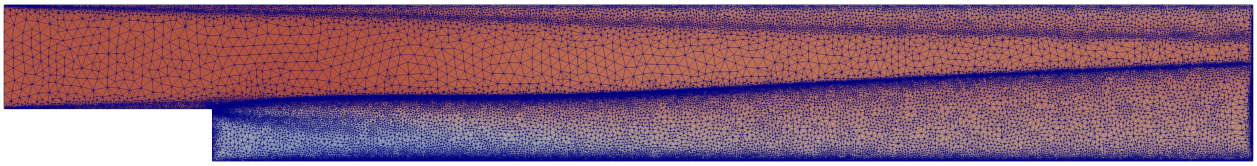
Figure 6.29 Marche descendante - Illustration du maillage à divers instants. On y a superposé, dans une échelle légèrement saturée, la solution instantannée de la variable de vitesse u.



(d) À $t = 30$

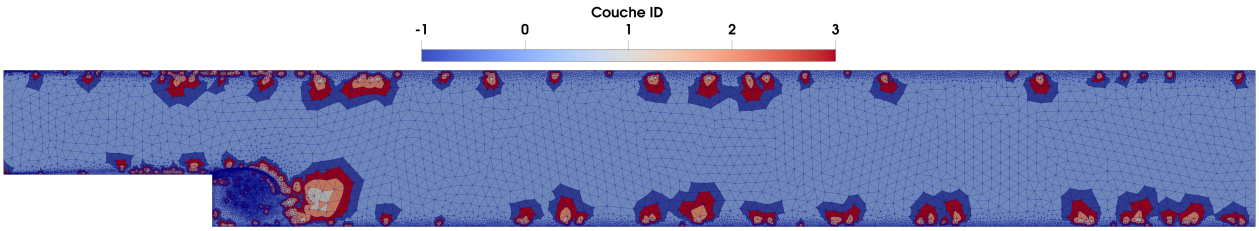


(e) À $t = 45$

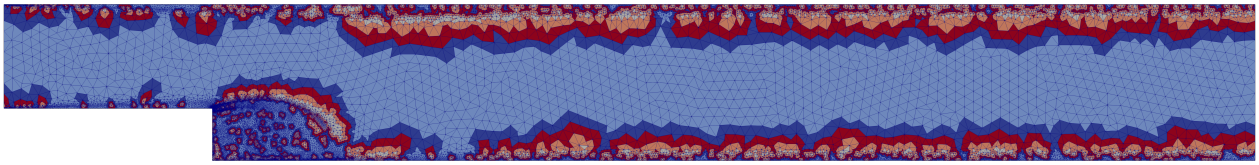


(f) À $t = 100$

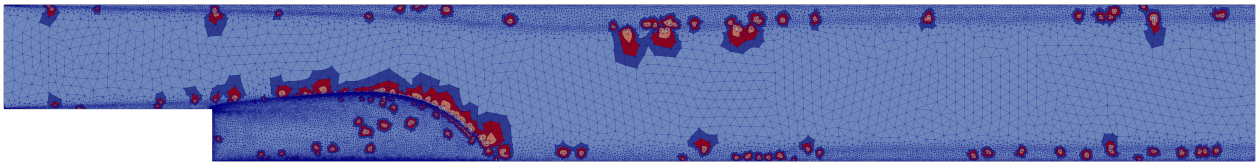
Figure 6.29 (suite) Marche descendante - Illustration du maillage à divers instants



(a) À $t = 5$

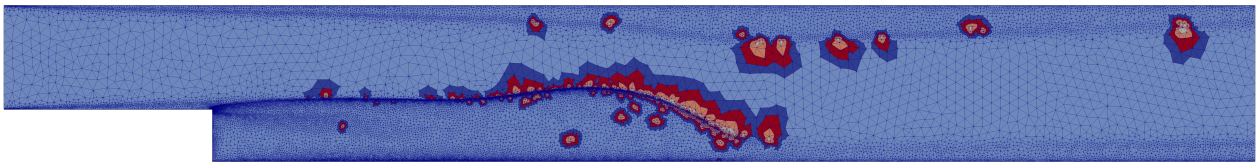


(b) À $t = 10$

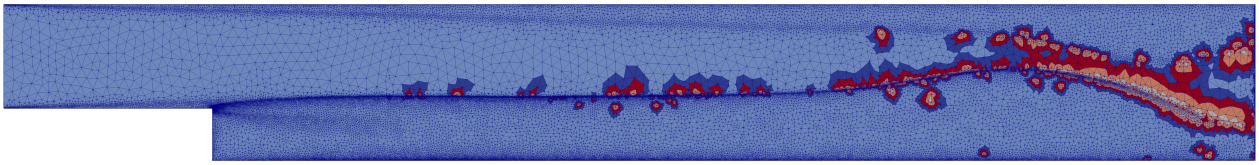


(c) À $t = 20$

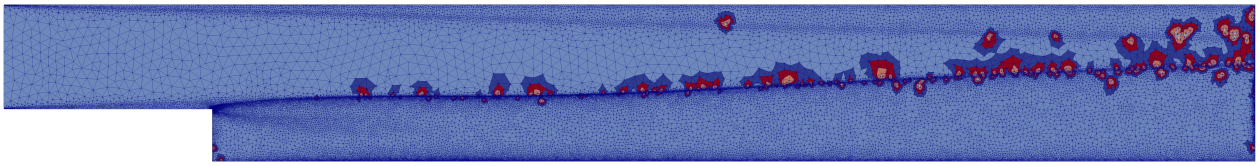
Figure 6.30 Marche descendante - Vue des poches à remailler à différents instants. Les éléments germes sont repérés avec une ID unitaire. Les deux couches protectrices ont une ID respective de 2 et 3, tandis que la couche fictive est repérée par l'ID -1. Les éléments conservés possèdent une ID nulle.



(d) À $t = 30$



(e) À $t = 45$



(f) À $t = 90$

Figure 6.30 (suite) Marche descendante - Vue des poches à remailler à différents instants

Les valeurs particulièrement élevées des fonctions de préservation sur ce cas ont pu être obtenues grâce à une modification du critère de sélection des éléments germes dans l'algorithme d'adaptation de maillage locale (cf. Section 4.2.1). Nous avons souligné plusieurs fois que la gestion des éléments dont la taille devrait idéalement augmenter peut être difficile. Le retrait des éléments germes sélectionnés pour motif d'une taille injustement petite, et des éléments figurant dans leurs couches protectrices, ne conduisent pas nécessairement à une augmentation significative de la taille de maille dans la poche ainsi créée, lors de la génération locale du maillage. Dans la majorité des cas, une variation rapide de la taille de maille préconisée dans la poche en est la cause. Les éléments germes initialement sélectionnés sont bien souvent des éléments *tampon*, qui assurent une transition dans la taille de maille. De fait, la taille de ces éléments se retrouve décorrélée du niveau de l'erreur spatiale. Le niveau d'erreur sur ces éléments peut donc être sensiblement inférieur à l'erreur moyenne, et l'opérateur de transition recommande donc naturellement une augmentation importante de la taille de ces éléments. Afin de mitiger le problème, nous avons souhaité écarter ces éléments lors de la sélection des éléments germes. Pour ce faire, nous avons ajouté un test supplémentaire. Soit $\{\mathcal{E}_g\}$ la collection d'éléments formée par un tel germe et ses voisins directs (soient les éléments contenus dans ce qui serait une première couche protectrice). Soit δ_i la taille de l'élément e_i appartenant à cette collection [3]. Le test additionnel se formule simplement par l'évaluation de l'inégalité suivante :

$$\frac{\max\limits_{e_i \in \{\mathcal{E}_g\}} \delta_i}{\min\limits_{e_i \in \{\mathcal{E}_g\}} \delta_i} \leq \Delta_{max} \tag{6.11}$$

où Δ_{max} est une tolérance que nous avons ici fixée à 4. Ce faisant, si un élément de la collection $\{\mathcal{E}_g\}$ possède une taille 4 fois supérieur à un autre élément de cette collection, l'élément germe qui s'y rattache est finalement écarté de la sélection. La différence obtenue dans la formation des poches, selon que la modification du critère de sélection des germes soit considérée ou non, est illustrée sur la Figure 6.33. L'effet de la modification proposée est bien visible. Son utilisation permet d'éviter de remailler la région de proche paroi à l'entrée du domaine. De la même façon, on évite de remailler une large partie de la frontière de sortie. Enfin, la délimitation inférieur du cœur potentiel, est davantage épargnée. À titre de référence, nous avons également exposé ce qu'aurait été la formation des poches si les éléments germes liés à une augmentation de taille avaient été totalement écartés, *i.e.*, avec $\Delta_{max} = 0$. Comme on peut le voir, l'application de la condition (6.11), avec $\Delta_{max} = 4$, implique donc le rejet d'une bonne partie de ces éléments germes.

3. Dans l'implémentation de travail, cette taille correspond à la longueur de la plus grande arrête de l'élément

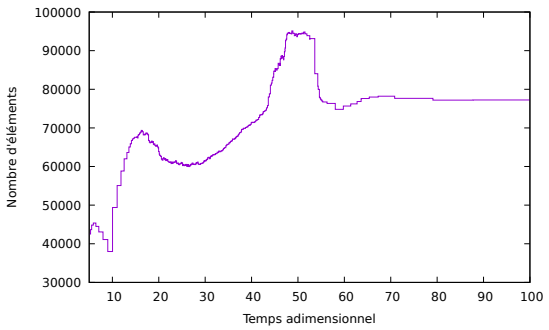


Figure 6.31 Marche descendante - Évolution du nombre d'éléments dans le maillage

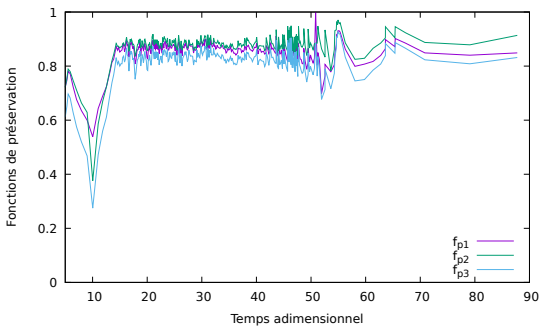
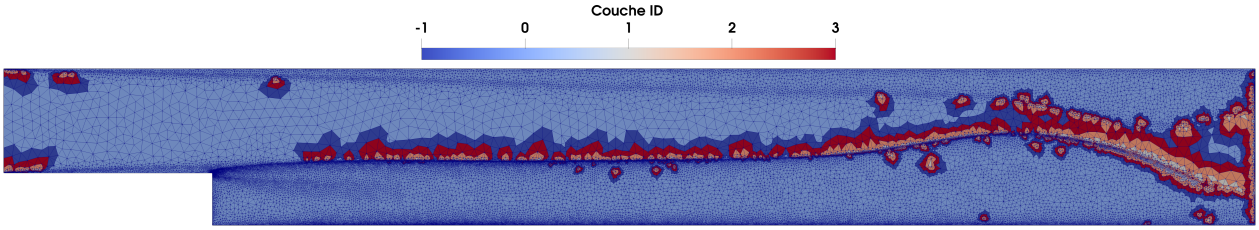


Figure 6.32 Marche descendante - Évolution des fonctions de préservation

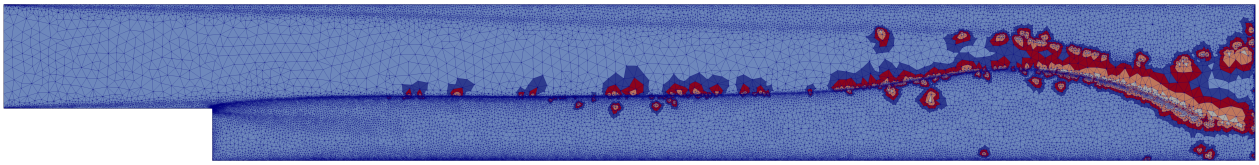
Pilotage des adaptations de maillage

Comme nous l'avons dit plus haut, les adaptations de maillage ne sont ici pilotées que par trois critères d'arrêt. De la même façon que pour le jet impactant étudié précédemment, on souhaite ici que l'évolution du maillage soit contrôlée par le critère lié à la réduction de taille des éléments. Ceci apporte une garantie quant au fait que le niveau d'erreur spatiale est satisfait tout au long de la simulation, sauf sur les premières unités de temps où il est justement question d'atteindre la cible prescrite pour la première fois. On présente l'évolution des erreurs spatiales relatives ici considérées à la Figure 6.36. Une fois l'ajustement de la tolérance ε_1 effectué, vers $t \approx 9.5$, les niveaux d'erreur sont tous en dessous de la cible et le demeurent. Par ailleurs, on observe ici des niveaux d'erreur relativement similaires dans toutes les normes. De plus, ces niveaux ne sont pas trop conservatifs. Le coût de calcul est donc bien optimisé. Toutefois, l'effet de l'augmentation de ξ_{max}, dans la formulation adaptative du facteur de réduction, n'est que peu visible.

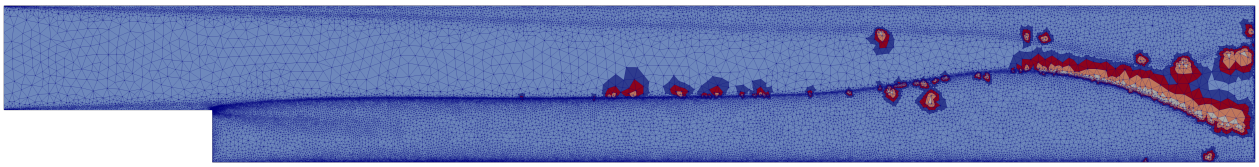
Les adaptations du maillage sont donc déclenchées par les critères d'arrêt liés aux variations de taille maximales admissibles pour les éléments. La Figure 6.34 illustre la responsabilité des différents critères d'arrêt pour chaque adaptation de maillage. La très majeure partie des adaptations de maillage sont déclenchées par le viol de la tolérance ε_2. Il s'agit bien du comportement souhaité. Toutefois, on remarque que la tolérance ε_3 a été violée un grand nombre de fois vers $t = 50$. C'est là encore une conséquence de l'impact du cœur potentiel de l'écoulement d'entrée sur la frontière de sortie. La variation extrêmement rapide de la taille de maille près de la sortie du domaine conduit à former des éléments tampons dont la taille est beaucoup trop petite au regard de l'erreur estimée sur ces éléments. Notons que l'évaluation de la condition (6.11) était pourtant réalisée lors de la considération du critère d'arrêt lié à la tolérance ε_3. Ces résultats démontrent donc d'autant plus la difficulté



(a) Critère de sélection de base



(b) Critère de sélection modifié ($\Delta_{max} = 4$)



(c) Critère de sélection modifié ($\Delta_{max} = 0$)

Figure 6.33 Marche descendante - Construction des poches d'éléments à retirer en fonction du critère de sélection des éléments germes à $t = 45$

intrinsèque à la gestion des éléments dont il s'agirait d'augmenter la taille. L'évolution du nombre total de remaillage au cours du temps, donnée à la Figure 6.35, permet bien d'observer une augmentation significative de la fréquence de remaillage peu avant $t = 50$, conséquence du viol parasite de la tolérance ε_3. L'arrivée vers un état (quasi) stationnaire est aussi bien visible sur les 40 dernières unités de temps, en témoigne la raréfaction des adaptations de maillage. Finalement, la fréquence de remaillage est relativement constante entre $t = 20$ et $t = 40$. Elle est comprise entre 4 et 5. Ceci est cohérent avec la fréquence qui avait été imposée dans les travaux réalisés à la maîtrise [136].

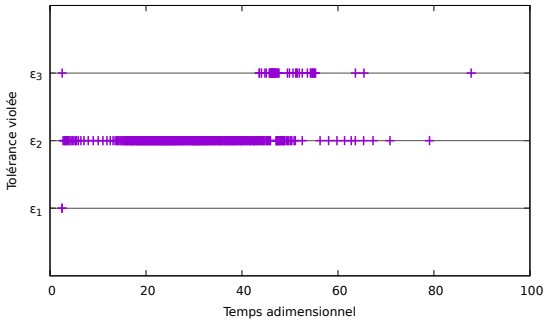


Figure 6.34 Marche descendante - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées

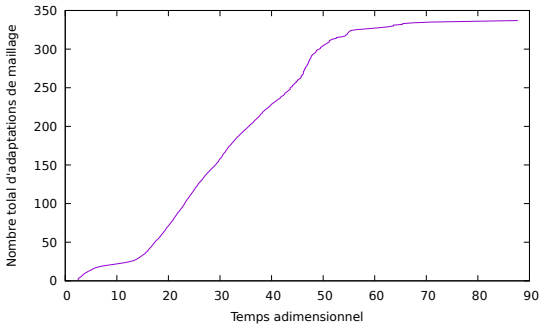
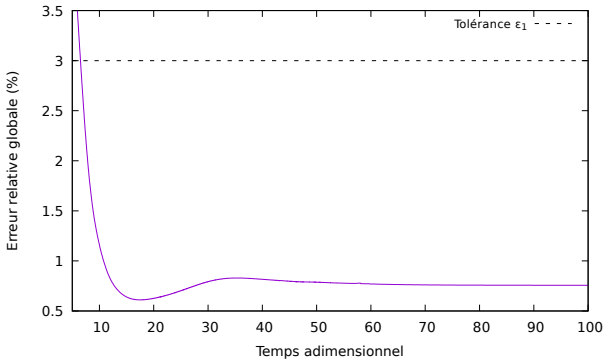
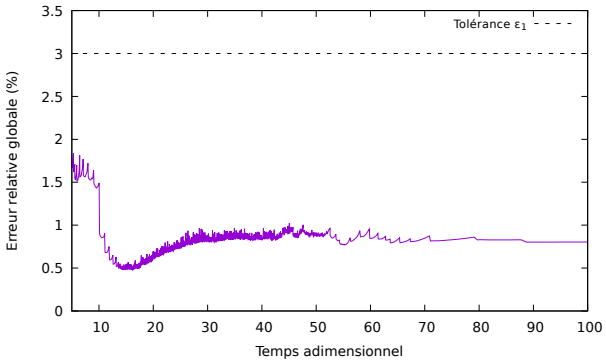


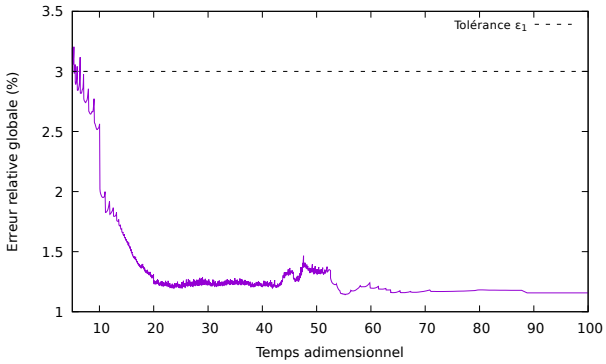
Figure 6.35 Marche descendante - Évolution du nombre total d'adaptations de maillage au cours de la simulation



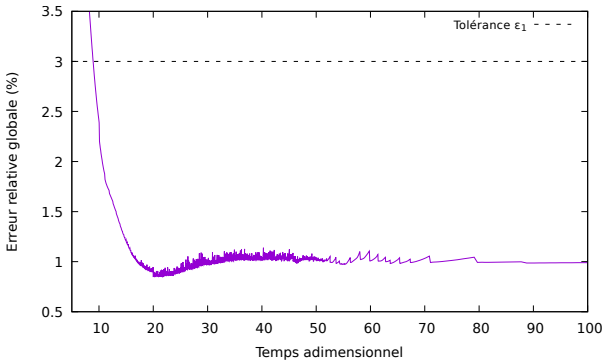
(a) Erreur en norme énergie



(b) Erreur sur $\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{K})$



(c) Erreur sur $\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{E})$



(d) Erreur sur $\boldsymbol{\nabla}(\mu_t)$

Figure 6.36 Marche descendante - Évolution des erreurs relatives globales

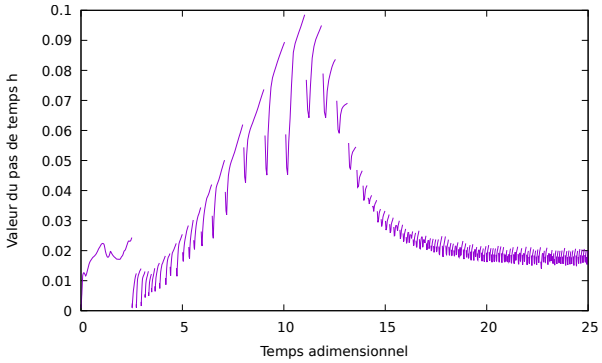
Comportement de l'intégrateur temporel adaptatif

Tout comme pour les simulations du jet impactant, l'ordre de l'intégrateur temporel s'est maintenu à $p = 2$ pendant la quasi totalité de l'intégration temporelle. On a relevé uniquement deux excursions à l'ordre $p = 3$, qui n'ont duré que quelques pas de temps seulement. On ne présente donc ici que des résultats sur la variation de la taille h du pas de temps au cours de la simulation, rassemblés à la Figure 6.37.

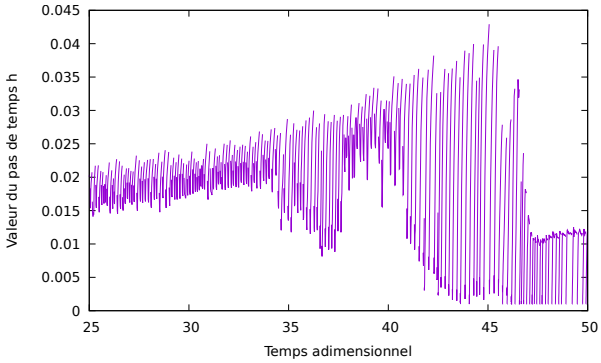
L'augmentation de h sur les 10 premières unités de temps rend compte de la lente croissance de la zone de recirculation. Une accélération de la dynamique de l'écoulement est ensuite visible entre $t = 10$ et $t = 15$. La progression du cœur potentiel de l'écoulement d'entrée se fait selon une dynamique à peu près constante entre $t = 15$ et $t = 40$. On observe d'ailleurs un maintien très satisfaisant de la valeur de h malgré les adaptations de maillage durant cette phase.

Les difficultés posées par l'approche du cœur potentiel vers la frontière de sortie se ressentent dans la valeur de h à partir de $t = 40$. Dès lors, chaque adaptation de maillage entraîne une chute très importante de la valeur de h, voir même un rétablissement de la valeur minimale ($h_0 = 0.001$). Ce comportement rend compte d'une hausse importante de l'erreur locale pour au moins une des variables résolues et dépendant du temps. Nous avons observé en pratique une hausse importante de l'erreur locale pour la vitesse v. Une investigation plus avancée a montré que l'erreur locale était concentrée à proximité directe de la frontière de sortie. Ce comportement n'est pas simple à expliquer. Nous pensons que l'ajustement de l'écoulement à la condition limite de sortie s'est traduit par des fluctuations importantes du champs de vitesse v sur la frontière de sortie, lesquelles ont induit des variations rapides dans les erreurs élémentaires estimées et donc une multitude d'adaptations de maillage. Le champs de vitesse v a alors d'autant plus souffert des erreurs commises durant les transferts de la solution.

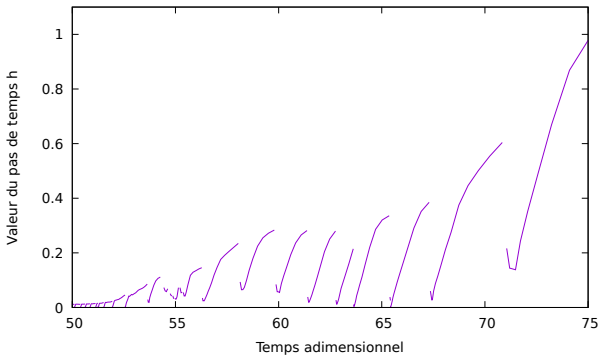
À partir de $t = 50$, on observe un ralentissement progressif de la dynamique de l'écoulement, comme le montre l'augmentation plus marquée de h. L'écoulement tend vers un état stationnaire. Toutefois, on notera une chute toujours très marquée de la valeur de h après chaque adaptation de maillage, ce qui indique des fluctuations persistantes dans la solution à proximité de la frontière de sortie. Malgré tout, la valeur de h devient unitaire (valeur maximale imposée) dans les 25 dernières unités de temps. La dernière adaptation de maillage résulte en une chute moins prononcée de la valeur de h, ce qui est cohérent avec l'atteinte d'un état stationnaire en fin de simulation.



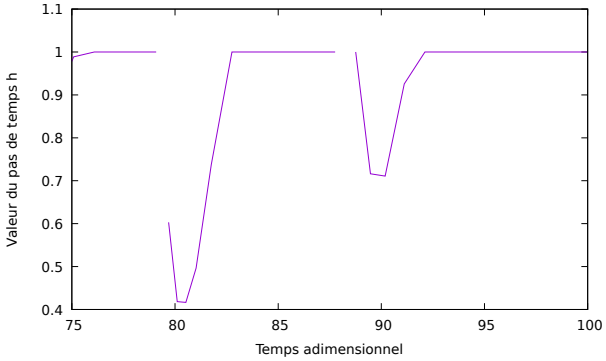
(a) $0 \leq t \leq 25$



(b) $25 \leq t \leq 50$



(c) $50 \leq t \leq 75$



(d) $75 \leq t \leq 100$

Figure 6.37 Marche descendante - Évolution du pas de temps h. Les discontinuités dans la courbe témoignent de l'occurence des adaptations du maillage.

Longueur de la zone de recirculation

L'évolution de la longueur de la zone de recirculation au cours du temps est donnée à la Figure 6.38. Ces résultats rappellent en tous points ceux que nous avions obtenus en maîtrise [136], ce qui est rassurant. La simulation alors menée s'était appuyée sur des maillages légèrement plus fins. On obtient donc une longueur finale de la zone de recirculation de 6.33 en considérant le cisaillement pariétal donné par la loi de paroi. Le cisaillement pariétale calculé à partir de la reconstruction des gradients par la méthode de Zhu et Zienkiewicz donne une valeur de 6.28. Cette légère différence est vraisemblablement imputable au fait que la reconstruction des gradients ne prend pas en compte la condition de Neumann appliquée via la loi de paroi. De ce point de vue, la première valeur mentionnée est donc plus fiable. Rappelons que cette valeur se situe bien dans l'intervalle 7 ± 1, déterminé expérimentalement par Kim *et al.* [15] pour un nombre de Reynolds $Re = 1300$ construit à partir de l'épaisseur de quantité de mouvement sur le coin supérieure de la marche. À partir de la solution à l'instant final, nous avons grossièrement estimé une épaisseur de quantité de mouvement de 0.02 à cet endroit. En prenant cette longueur en remplacement de la hauteur unitaire de la marche, nous obtenons un nombre de Reynolds $Re \approx 950$, ce qui est légèrement inférieur à la valeur des travaux de Kim *et al.* . Toutefois les auteurs rapportent que "l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur une plage limitée est négligeable" [Notre traduction] [15].

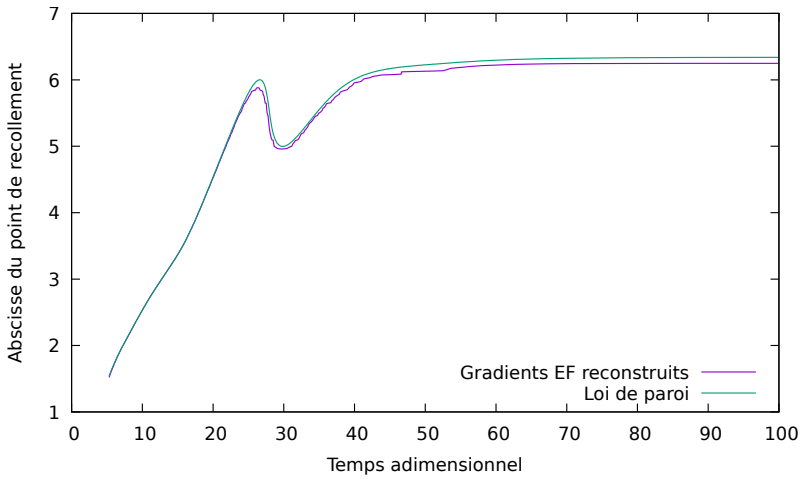


Figure 6.38 Marche descendante - Position du point de recollement sur la frontière 3 au cours du temps

6.3.4 Conclusions

Ce troisième cas d'étude a montré encore une fois la pertinence de l'approche adaptative proposée dans ces travaux.

(1) La légère modification apportée au critère de sélection des éléments germes permet de sauvegarder beaucoup d'éléments supplémentaires dans le maillage. La relaxation locale du nouveau maillage n'impacte que très légèrement la sauvegarde effective du maillage. On a effectivement observé que la fraction des éléments traités par la relaxation restait fortement corrélée avec la fraction des nouveaux éléments dans le maillage.

(2) En conséquence direct du point précédent, on obtient une réduction drastique du coût de calcul de la projection de Galerkin lors des transferts locaux de la solution. Cet outil devient donc extrêmement intéressant si l'on prend pour référence le coût de l'interpolation des champs solutions dans tout le domaine.

(3) Appliquer $\xi_{max} = 1.4$ dans la formulation adaptative du facteur de réduction a maintenu un bon contrôle des erreurs spatiale estimées, puisqu'on obtient un coefficient de sécurité de l'ordre de 3 pour chacune d'entre elles en regard de la tolérance ε_1. Les effets de cette augmentation ne sont toutefois pas flagrants, puisque nous avons observé un coefficient de sécurité semblable pour l'erreur en norme énergie dans le cas du jet impactant, alors même que nous avions $\xi_{max} = 1.1$.

(4) La procédure de relance de l'intégration temporelle s'est dans l'ensemble montrée efficace à nouveau. La conservation du pas de temps lors des reprises, du moins sur les 40 premières unités de temps, a été satisfaisante. L'adaptation du pas de temps a par ailleurs réduit considérablement le temps de calcul sur les 25 dernières unités de temps.

6.4 Instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est une instabilité pouvant se manifester à l'interface entre deux fluides de densités différentes. Plus précisément, cette instabilité se développera dès lors que le fluide le plus lourd sera à même de pousser le fluide le plus léger, ou inversement. Pour cela il est nécessaire que l'un des fluides soit accéléré en direction du domaine occupé par l'autre fluide. La juxtaposition d'un fluide lourd au dessus d'un fluide léger dans un champs de gravité pourra par exemple donner lieu à l'instabilité, si l'interface séparant les fluides n'est pas rigoureusement perpendiculaire au champs de gravité sur toute sa longueur. Le gradient de densité à l'interface n'est alors plus aligné avec le gradient de pression, ce qui va générer de la vorticité à l'interface, permettant ainsi à la gravité de fournir une accélération au fluide lourd. On considère ici un problème de ce genre initialement traité par Puckett *et al.* en 1997 [50] dans le contexte d'une méthode VOF (*Volume of Fluid*), repris par Popinet *et al.* [65] avec une méthode de type *front tracking*, et investigué à nouveau dans les travaux de Vautrin [150, 151] pour illustrer une méthode avec interface explicite. Notre intérêt est ici d'analyser le fonctionnement de la procédure de résolution adaptative que nous avons développé, en s'appuyant sur la méthode exposée par Vautrin. Nous avions vu à la Section 4.2.2 que la méthode d'adaptation de maillage locale exige un traitement particulier lors de l'usage d'une interface explicite entre deux fluides.

6.4.1 Description du problème à résoudre

Le problème est cette fois-ci traité en formulation *dimensionnelle*. La géométrie du domaine de calcul est présentée à la Figure 6.39. La géométrie initiale de l'interface est représentée au moyen d'une spline naturelle, utilisée pour interpoler une fonction sinus d'amplitude 0.05 m et dont la fréquence spatiale correspond à la largeur du domaine. Cette perturbation est nécessaire pour déclencher l'instabilité. La masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ de chaque fluide sont précisées dans le Tableau 6.15. Les valeurs utilisées pour ρ correspondent à de l'air pour le fluide pesant (fluide (a)) et à de l'hélium pour le fluide léger (fluide (b)). L'accélération de la pesanteur est fixée à $g = 9.81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ et $\boldsymbol{g} = (0, -g)$. Notons également qu'une tension superficielle nulle est appliquée sur l'interface entre les deux fluides. Les effets d'une tension superficielle non nulle ont été mis en évidence par Vautrin [151]. L'écoulement est supposé laminaire et incompressible.

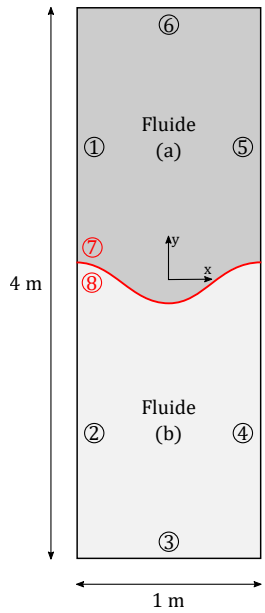


Figure 6.39 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Géométrie du domaine de calcul et forme initiale de l'interface

.

Tableau 6.15 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Propriétés physiques des fluides

	fluide (a)	fluide (b)
ρ $(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3})$	1.225	0.1694
μ $(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1})$	3.13×10^{-3}	

Tableau 6.16 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Conditions limites

courbe	u	v	ξ	η
1	0	libre	0	libre
2	0	libre	0	libre
3	libre	0	libre	0
4	0	libre	0	libre
5	0	libre	0	libre
6	libre	0	libre	0

Les conditions limites appliquées sur les frontières du domaine sont résumées dans le Tableau 6.16. On remarquera les conditions limites relatives aux déplacements nodaux $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, la formulation ALE étant ici nécessaire pour propager dans le domaine les déplacements de l'interface (cf. Annexe B). Les nœuds présents sur les courbes superposées composant l'interface (courbes 7 et 8) ne sont pas sujets à des conditions limites mais à des conditions de compatibilité. Afin de les expliciter, on expose schématiquement à la Figure 6.40 un des multiples éléments composant l'interface. Les nœuds 1 et 6 sont dits jumeaux, tout comme les nœuds 2 et 5, et les nœuds 3 et 4. Les nœuds composant une paire sont géométriquement confondus. Les conditions de compatibilité s'appliquent sur les paires de nœuds jumeaux. Soit (i, i') une paire de nœuds jumeaux. Les conditions de compatibilité sont les suivantes :

(1) Condition de compatibilité cinématique (continuité de la vitesse des fluides à l'interface) :

$$\boldsymbol{u}_i = (u_i, v_i) = (u_{i'}, v_{i'}) = \boldsymbol{u}_{i'} \tag{6.12}$$

(2) Conditions de compatibilité du déplacement de l'interface (interface matérielle) :

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right|_i \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right|_{i'} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u}_i \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{6.13}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i'} \tag{6.14}$$

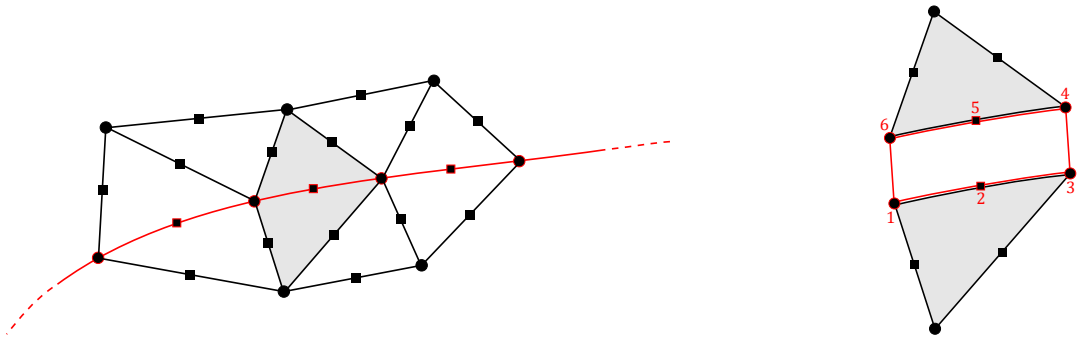
où $\hat{\boldsymbol{n}}$ est le vecteur normal à l'interface. Une condition dite *de régularité* est finalement imposée pour piloter le déplacement des nœuds dans la direction tangentielle à l'interface. Pour plus de détail à ce sujet, le lecteur peut consulter la référence [150].

(3) Condition de compatibilité dynamique (continuité du vecteur contrainte normal à l'interface).

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{i'} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{6.15}$$

Notons que cette condition, telle qu'écrite ici, n'est plus vérifiée si la tension superficielle de l'interface est non nulle [150].

L'implémentation de travail n'offrant pas encore d'option de changements topologiques en cours de simulation, nous n'avons pu simuler que 0.9 s de temps physique. Comme nous le verrons plus loin, l'extrémité des polypes du fluide (a) résultant du développement de l'instabilité sont alors trop proches des frontières latérales du domaine de calcul.



(a) Vue d'une portion de l'interface. Celle-ci est représentée en rouge. La figure de droite propose une vue éclatée au niveau des éléments grisés.

(b) Visualisation d'un élément d'interface, représenté en rouge. En pratique, son aire est nulle.

Figure 6.40 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Représentation de l'interface

6.4.2 Stratégie adoptée pour la résolution

La stratégie de résolution utilisée pour traiter ce problème est en grande partie commune à celles exposées pour les autres problèmes. L'adaptation de maillage locale en cours de simulation est à nouveau utilisée. Trois couches protectrices ont toutefois été appliquées autour des éléments germes, de sorte à faciliter la reconstruction locale du maillage. De la même façon, la relaxation locale a été conduite avec trois couches protectrices, la tolérance de qualité élémentaire minimale étant par ailleurs toujours $Q_{min} = 0.3$. L'erreur spatiale a été estimée en norme énergie uniquement, ce qui nous a permis de nous placer en approche mononorme pour piloter les adaptations de maillage. Les critères basés sur l'écart-type relatif et l'asymétrie de la distribution de l'erreur sont donc ici activés. Par ailleurs, l'usage de la formulation ALE suggère l'utilisation du critère d'arrêt basé sur la qualité des éléments (cf. Section 4.1.3). Les tolérances relatives aux critères d'arrêt actifs sont résumées dans le Tableau 6.17. On remarquera la valeur extrêmement élevée de la tolérance ε_3. Le retour d'expérience acquis sur les problèmes précédents nous a incité à choisir cette valeur. Elle permet d'éviter des adaptations de maillage parasites, tout en ne désactivant pas complètement le critère d'arrêt associé. La tolérance ε_1 est au contraire plutôt sévère afin d'assurer une discrétisation suffisamment fine de l'interface. Une forme d'instabilité numérique au niveau de l'interface a en effet été constatée lors d'un essai préliminaire avec $\varepsilon_1 = 1\%$. Notons que la première évaluation des critères se fait à $t = 0.15$ s afin de laisser l'écoulement se développer sur le maillage initial. Ici encore, nous avons opté pour une formulation adaptative du facteur de réduction d'erreur ξ, en posant $\xi_{max} = 1.1$ et $\xi_0 = 0.5$. Finalement, les trois premières adaptations de maillage sont réalisées globalement sur le domaine afin d'ajuster rapidement le maillage.

Tableau 6.17 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Tolérances associées aux critères d'arrêt actifs

ε_1 (%)	ε_2	ε_3	ε_4 (%)	ε_5	ε_6
0.25	4	100	100	4	0.12

Concernant l'intégrateur temporel, nous avons ici restreint son ordre maximal à 2, afin de s'affranchir d'éventuelles instabilités numériques causées par l'ordre 3. Les tolérances utilisées pour l'erreur locale absolue et relative sont encore de 10^{-6} et 10^{-4}, respectivement.

La stratégie de résolution choisie pour ce cas est complétée par quelques subtilités supplémentaires. Tout comme nous l'avions fait pour le problème de l'écoulement autour du cylindre circulaire, nous avons opté pour un maillage hybride. Les éléments dont au moins une arrête est adjacente à une courbe frontière ou à l'interface sont donc isoparamétriques, tandis que les éléments restants sont sub-paramétriques. Cette approche est d'autant plus intéressante ici que la formulation ALE est active. Cependant, nous avions noté dans la Section 5.2.3 que les éléments isoparamétriques encaissent la majeure partie des déformations du maillage, ce qui n'est pas souhaitable ici. Pour limiter ce phénomène, nous avons renforcé le module d'Young du pseudo-solide dans les éléments isoparamétriques. Plus précisément, la valeur du module d'Young affectée aux point de Gauss de ces éléments est six fois supérieure. Ce choix a donné des résultats très satisfaisants sur le problème test traité à la Section 5.2.3, en permettant une déformation du maillage assez uniforme.

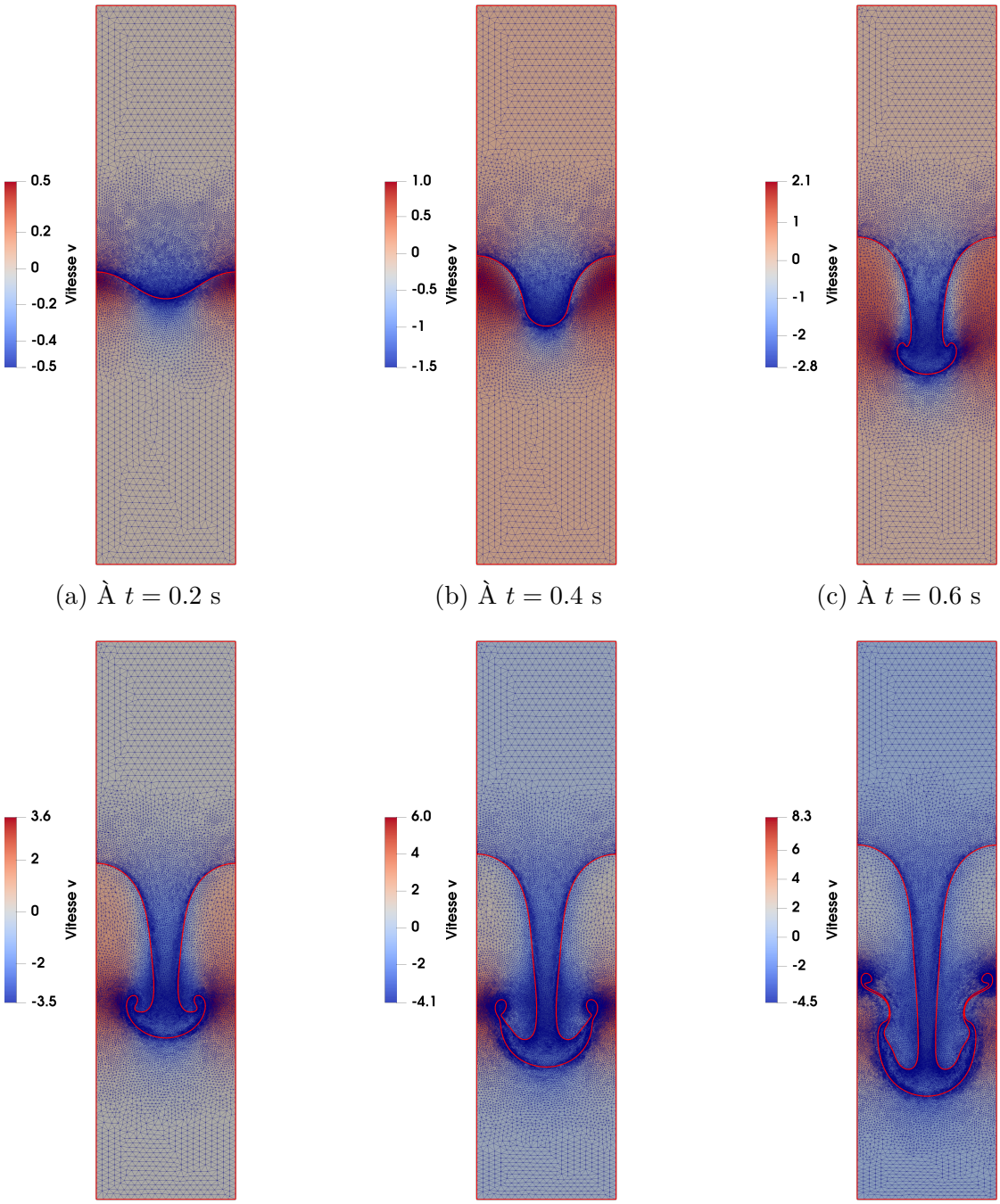
Les essais préliminaires ont également montré que des éléments ayant leurs trois sommets sur l'interface tendaient à se former lors des adaptations de maillage. Nous avons donc construit une procédure de reconnaissance de ce cas pathologique, de même qu'une procédure récursive de type *edge swapping* permettant de résoudre le problème. Par ailleurs, l'usage d'un maillage hybride et la courbure de l'interface ont naturellement orienté le choix de la procédure de transfert de la solution d'un maillage à l'autre vers la projection hybride. Enfin, nous avons mis à contribution la procédure de remaillage des frontières déformables de Vautrin [151] lors des adaptations de maillage. Elle consiste à adapter le maillage des frontières sur la configuration initiale (non déformée). La position des nouveaux nœuds dans la configuration déformée s'obtient par interpolation des déplacements nodaux, à partir de la paramétrisation des courbes. Nous avons cependant légèrement modifié cette procédure pour tenir compte de la dilatation ou compression locale des courbes par rapport à la configuration non déformée. Si une taille de maille δ est spécifiée en un point d'une courbe qui s'est localement déformée d'un facteur γ ($\gamma > 1$: dilatation, $\gamma < 1$: compression) par rapport à la configuration initiale, alors il convient de considérer une taille de maille δ/γ en ce point sur la configuration initiale.

6.4.3 Analyse des résultats

Évolution du maillage

Les maillages du domaine de calcul à plusieurs instants sont présentés à la Figure 6.41. On y a superposé à chaque fois le champs de vitesse v, l'écoulement se faisant principalement selon la direction y. On observe un raffinement de maillage autour de l'interface, particulièrement prononcé dans les régions où la courbure de celle-ci est importante. On remarque également un raffinement plus marqué du côté du fluide lourd dans la partie centrale du domaine. Ceci rend compte de son accélération importante sous l'effet de la gravité, qui plus est dans un couloir étroit. De manière générale, l'estimation d'erreur sur le tenseur des contraintes visqueuses permet donc une évolution très pertinente du maillage. Les disparités visibles dans la taille de maille appliquée dans le domaine sont notables. Bien que peu apparent sur le dernier cliché, la portion la plus étroite des polypes formés par le fluide lourd ne font que deux éléments d'épaisseur. On pourra consulter la Figure 6.43b pour l'observer de façon nette. On peut vraisemblablement penser qu'une fragmentation de l'interface aurait lieu dans la nature, libérant l'extrémité de chaque polype. Cette évolution de l'interface est néanmoins identique à celle obtenue dans les travaux de Vautrin [150, 151] et très semblable à celle rapportée dans les travaux de Popinet *et al.* [65].

La formations des poches, sur l'ensemble du domaine et à plusieurs instants, est illustrée à la Figure 6.42. Le cliché à $t = 0.2$ s témoigne d'un raffinement progressif du maillage dans le voisinage proche et intermédiaire de l'interface, induit par la mise en mouvement des deux fluides. Rapidement, la surface occupée par les poches se réduit fortement. Ceci s'explique par le critère d'arrêt impliqué dans l'adaptation de maillage. Nous verrons plus loin que les adaptations de maillage sont majoritairement déclenchées par le critère portant sur la qualité des éléments. De fait, la distribution de l'erreur n'est pas en cause, et la raréfaction des poches est une preuve indirecte que la distribution de l'erreur présente un faible écart-type. Dans l'ensemble, on notera qu'une large portion de l'interface est laissée indemne par l'adaptation de maillage locale. De plus, on observe bien une propagation des poches au travers de l'interface. Ceci est d'autant plus visible sur la Figure 6.43. On rappelle que cette propagation est nécessaire pour que le retrait d'un nœud sur une courbe de l'interface implique obligatoirement le retrait du nœud jumeau, sur l'autre courbe composant l'interface.



(a) À $t = 0.2$ s (b) À $t = 0.4$ s (c) À $t = 0.6$ s

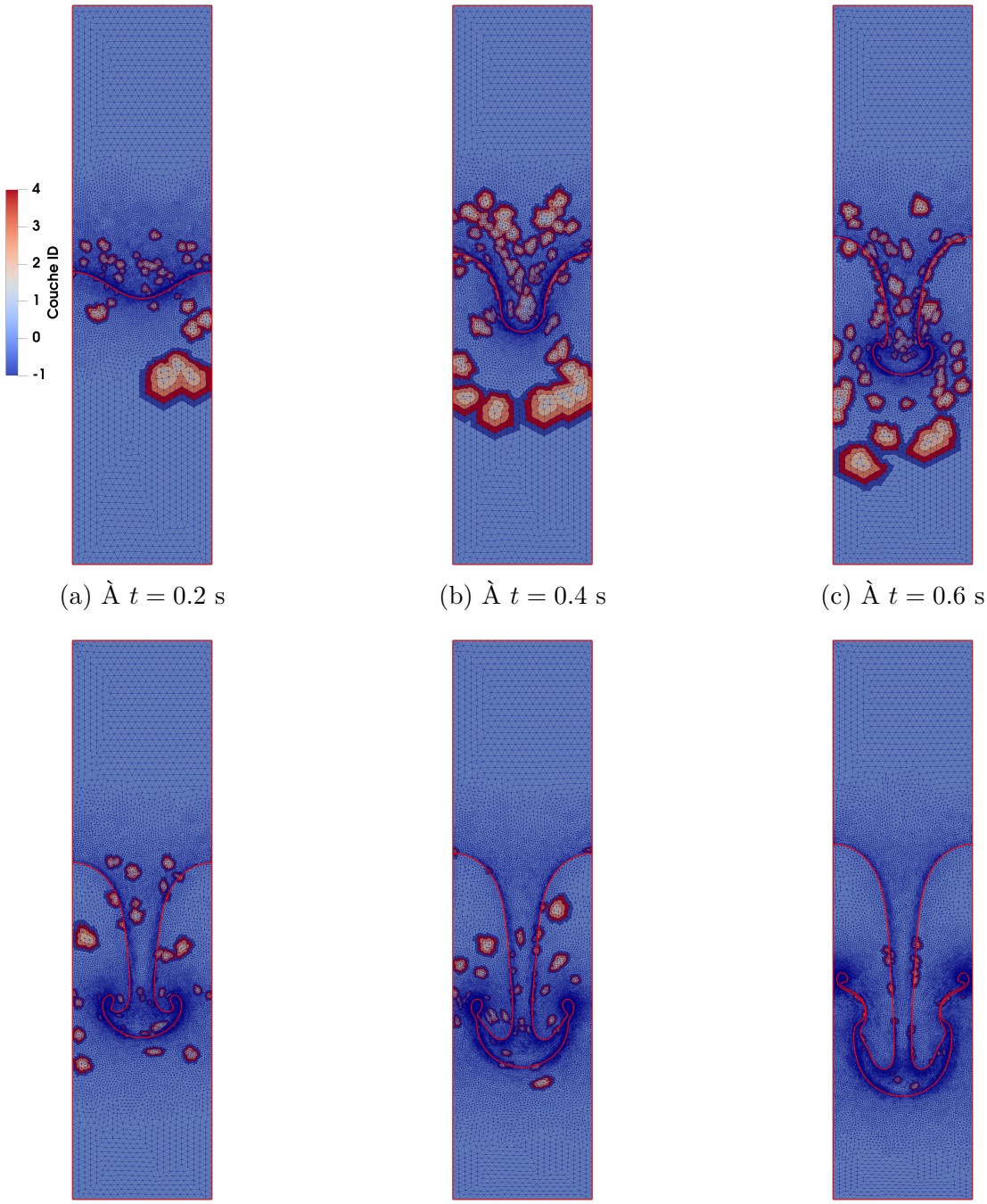
(d) À $t = 0.7$ s (e) À $t = 0.8$ s (f) À $t = 0.9$ s

Figure 6.41 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Visualisation du maillage à plusieurs instants. Le champs de vitesse v a été superposé sur chaque cliché. Les frontières du domaine et l'interface sont dépeintes en rouge.

La conservation de l'interface que nous constatons ne va pas obligatoirement de soi. La taille de maille δ, spécifiée en un nœud de l'interface, est la valeur minimale des tailles calculées pour la paire de nœuds jumeaux correspondante. Les deux régions fluides sont déconnectées au sens des connectivités. La taille de maille préconisée en un nœud de la paire provient donc d'une reconstruction du tenseur des contraintes visqueuses dans la zone à laquelle ce nœud se rattache. Par conséquent, la taille δ_i calculée en un nœud de la paire n'a aucune raison d'être identique à la taille $\delta_{i'}$ calculée pour l'autre nœud, ce qui justifie que l'on retienne la valeur minimale. Il est en effet requis que la cartographie de taille de mailles sur les deux courbes composant l'interface soit la même, de sorte à ce que leurs discrétisations soient identiques. Au demeurant, les tailles δ_i et $\delta_{i'}$ peuvent être significativement différentes, si bien que les éléments générés d'un côté de l'interface peuvent avoir une taille injustement petite. Il n'est donc pas surprenant d'observer des éléments germes au contact de l'interface.

Les résultats présentés jusqu'ici sont donc extrêmement satisfaisants. Les éléments conservés par l'adaptation de maillage locale sont majoritaires malgré l'usage de trois couches protectrices dans ce problème. Afin d'exposer cette conservation de manière plus quantitative, la Figure 6.44 présente l'évolution des fonctions de préservation au cours du temps. On constate donc bien qu'environ 80% des éléments des maillages proviennent du précédent, à partir de $t = 0.6$ s. Toutefois, une limite importante de l'approche proposée apparaît ici. La relaxation locale opère sur un nombre d'éléments très supérieur au nombre de nouveaux éléments dans le maillage.

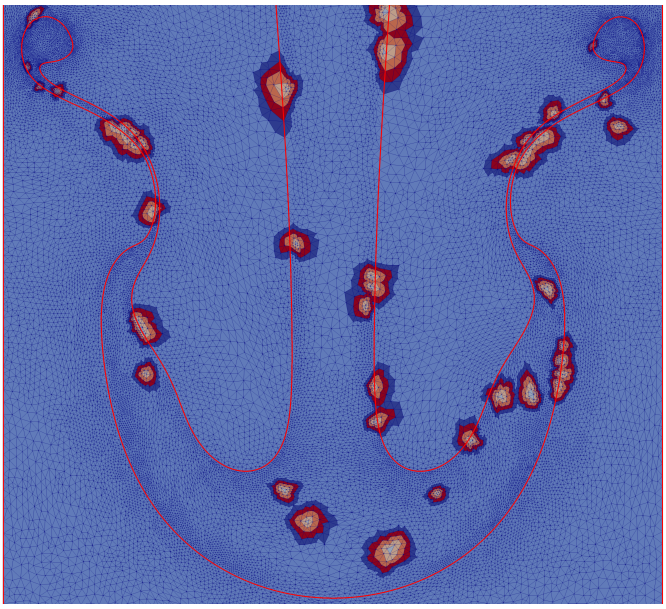
La formulation ALE en est la cause. Certains éléments tendent en effet à se déformer au cours de l'écoulement, et cela sans que l'erreur spatiale estimée sur ceux-ci augmente significativement. Cette déformation induit une chute de la qualité élémentaire pour de nombreux éléments qui ne sont pas ciblés par l'adaptation de maillage locale. La relaxation locale vient ainsi à contre courant des déformations du maillage provoquées par le déplacement de l'interface, ce qui n'est pas toujours évident. En bout de ligne, le nombre d'éléments provenant d'une conservation exacte dans les nouveaux maillages est sensiblement réduit. L'économie réalisée sur le temps de calcul de la projection de Galerkin est également moindre. Une solution *a priori* pertinente serait de restreindre les potentiels éléments germes de la relaxation aux nouveaux éléments du maillage, ainsi qu'aux éléments ayant été ciblés par un cycle de relaxation antérieur. On notera toutefois que ce problème se fait moins marqué à la fin de l'écoulement, puisqu'environ 70% des éléments d'un maillage proviennent exactement du précédent.



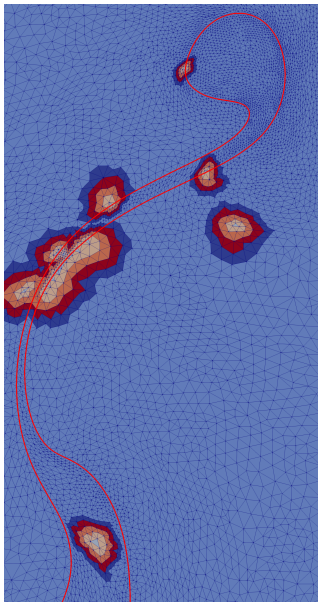
(a) À $t = 0.2$ s (b) À $t = 0.4$ s (c) À $t = 0.6$ s

(d) À $t = 0.7$ s (e) À $t = 0.8$ s (f) À $t = 0.9$ s

Figure 6.42 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Visualisation de la formation des poches à plusieurs instants. Les éléments germes sont repérés avec une ID unitaire. Les trois couches protectrices ont une ID respective de 2, 3, et 4, tandis que la couche fictive est repérée par l'ID -1. Les éléments conservés possèdent une ID nulle.



(a) Vue centrée sur les deux polypes



(b) Vue centrée sur le polype de droite

Figure 6.43 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Vues rapprochées de la formation des poches sur le maillage final ($t = 0.9$ s)

La Figure 6.45 présente finalement l'évolution du nombre d'éléments dans le maillage au cours de la simulation. On constate qu'il augmente très lentement jusqu'à $t = 0.5$ s, après quoi il croît rapidement. Ceci est à l'image de la complexification de l'écoulement, bien visible sur la Figure 6.41. Par ailleurs, on notera qu'entre $t = 0.15$ s et $t = 0.9$ s, le nombre d'éléments dans le maillage a été multiplié par un facteur compris entre 2 et 3. Ceci démontre encore l'intérêt de notre approche adaptative, en vue d'aboutir à un coût de calcul nettement inférieur à celui résultant de l'usage d'un maillage fixe.

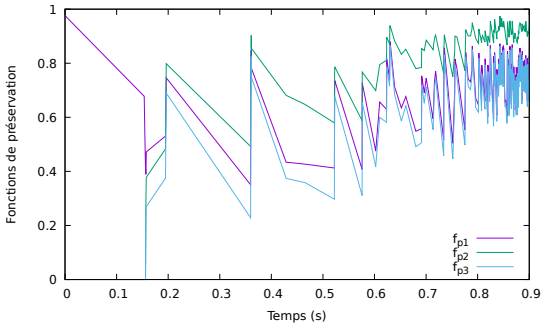


Figure 6.44 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution des fonctions de préservation

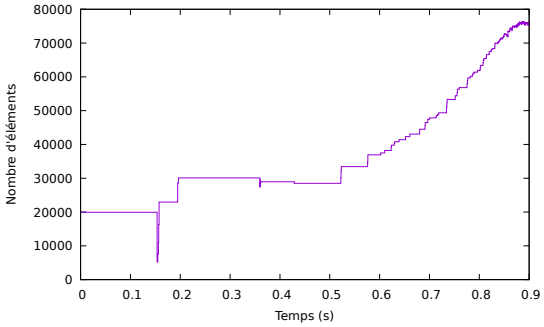


Figure 6.45 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution du nombre d'éléments

Pilotage des adaptations de maillage

Ce dernier problème d'étude présente l'intérêt d'activer tous les critères d'arrêt que nous avons exposés à la Section 4.1.3. En premier lieu, nous exposons respectivement aux Figures 6.46 à 6.48 l'évolution de l'erreur spatiale estimée, ainsi que l'écart-type relatif et l'asymétrie de sa distribution élémentaire. Le niveau d'erreur spatiale cible, représenté par la tolérance ε_1, est satisfait pour toute la durée de l'écoulement à partir de $t = 0.15$ s, instant correspondant à l'occurrence des premières adaptations de maillage. Vers $t \approx 0.36$ s, on observe néanmoins une augmentation marquée du niveau d'erreur. Il en est de même pour l'écart-type relatif et l'asymétrie de la distribution de l'erreur. Une investigation de l'évolution du maillage a montré qu'un déraffinement rapide de l'interface, sur les portions proches de ses deux points d'ancrage, a eu lieu au même moment. Ces augmentations synchrones et soudaines des quantités d'intérêt rendent compte d'une erreur importante commise lors du transfert de la solution au niveau de l'interface. Ce résultat illustre bien les difficultés qui peuvent apparaître lors du transfert de la solution au niveau d'une frontière incurvée. L'évolution de l'asymétrie dans son ensemble le démontre tout particulièrement, car à la différence de ce qu'on observe pour les deux autres quantités d'intérêt, une adaptation de maillage entraîne une augmentation du niveau d'asymétrie. Malgré tout, l'algorithme adaptatif maintien la qualité de la distribution de l'erreur, en témoignent les tolérances ε_4 et ε_5 qui apparaissent elles aussi bien respectées au cours de la simulation.

Pour revenir sur les critères d'arrêt, la Figure 6.49 expose l'activation de ceux-ci au cours de la simulation. Comme on peut le voir, le critère basé sur la qualité des éléments a déclenché la très grande majorité des adaptations de maillage. La déformation de l'interface tend à réduire la qualité des éléments à proximité ou à son contact direct. Ce critère d'arrêt est donc essentiel afin d'assurer un transfert satisfaisant de la solution en tout temps. Utiliser une tolérance ε_5 plus permissive ne garantirait pas nécessairement une réduction du nombre d'adaptations de maillage. Un transfert imprécis de la solution au niveau de l'interface induirait vraisemblablement l'activation du critère portant sur l'asymétrie de la distribution de l'erreur, à minima.

La fréquence des adaptations de maillage tend à augmenter de plus en plus au cours de la simulation, comme le montre également la Figure 6.50. La déformation rapide de l'interface après $t = 0.6$ s se traduit par des activations rapprochées du critère portant sur la qualité des éléments. De nombreux transferts de la solution sont donc nécessaires. L'accumulation des erreurs est néanmoins limitée par la préservation satisfaisante des maillages à chaque adaptation.

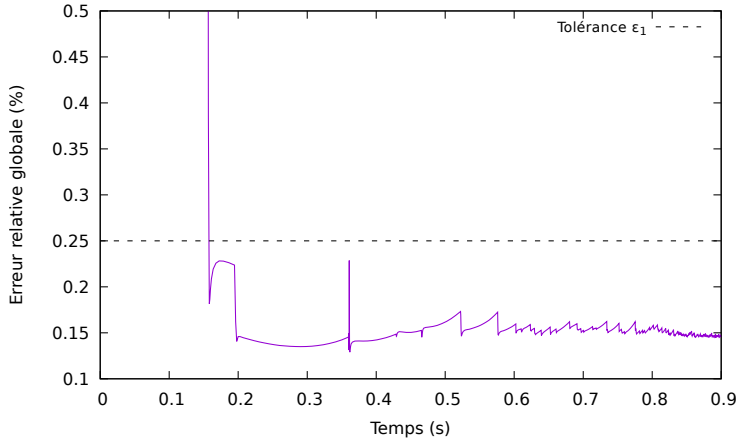


Figure 6.46 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'erreur spatiale estimée en norme énergie

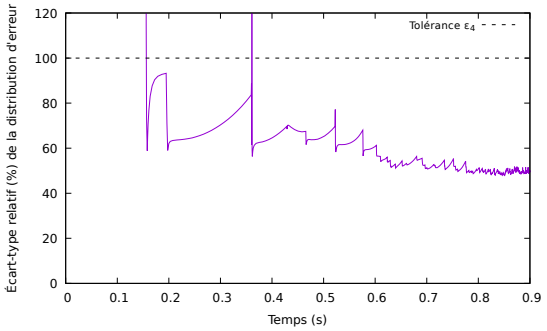


Figure 6.47 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'écart-type de la distribution de l'erreur

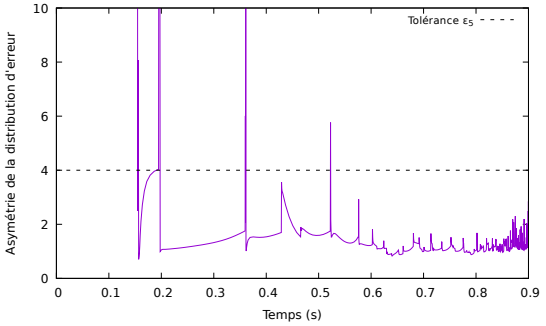


Figure 6.48 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de l'asymétrie de la distribution de l'erreur

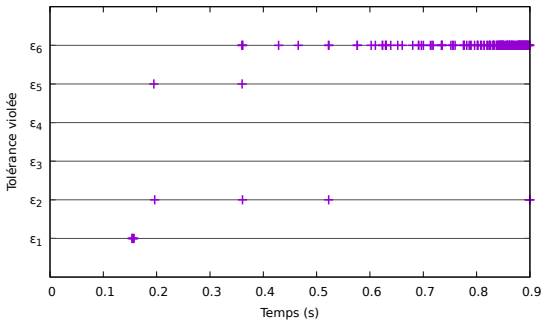


Figure 6.49 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Critères d'arrêt associés aux adaptations de maillage déclenchées

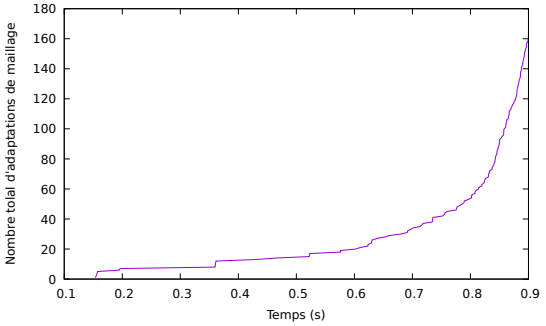


Figure 6.50 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution du nombre total d'adaptations de maillage au cours du temps

Comportement de l'intégrateur temporel adaptatif

L'évolution de la taille h du pas de temps au cours de la simulation est présentée sur la Figure 6.51. Les adaptations de maillage, repérées par les discontinuités dans la courbe, se traduisent ici par une forte diminution de la valeur de h, du moins en apparence. Il nous faut ici préciser qu'à $t = 0$ s, nous avons imposé $h = 0.00001$ s. L'échelle logarithmique appliquée sur l'axe des ordonnées montre qu'une adaptation de maillage induit en réalité une réduction de la valeur de h d'environ une décade. Pour autant, la valeur de h au cours de la simulation est toujours supérieure à la valeur initiale d'au moins une décade. De $t = 0$ s à $t = 0.5$ s, on peut observer jusqu'à 3 décades de différence entre la valeur courante de h et sa valeur initiale. L'usage d'un intégrateur en temps adaptatif montre donc tout son intérêt ici. Les adaptations de maillage lors de cette phase permettent de conserver une valeur de h environ 50 fois supérieure à la valeur initiale. Nous avions vu à la Section 4.5.2 que le *swing factor*, pour une méthode BDF adaptative d'ordre $p = 2$, avait pour valeur minimale et maximale 0.2 et 2.6, respectivement. La réduction de la valeur de h à chaque reprise, par le biais de plusieurs rejets du premier pas de temps, reste donc plus intéressante que la relance du calcul avec la valeur initiale de h. De plus, la valeur initiale de h étant très faible, il est préférable d'éviter son usage pour s'affranchir de potentielles erreurs d'arrondi dans l'évaluation des différences divisées intervenant dans la formulation des BDF.

L'analyse des erreurs locales estimées lors des reprises du calcul nous a permis d'identifier la variable dépendante majoritairement responsable de la réduction de h. Il s'agit de la variable de déplacement η. Nous avons souligné que notre formulation de la projection de Galerkin implique, par soucis de généralité et d'efficacité, une reconstruction quadratique de chaque variable dépendante. Nous avons ici fait l'usage d'un maillage hybride, composé en très grande majorité par des éléments sub-paramétriques. L'approximation du déplacement sur ces éléments est linéaire. Les déplacements projetés, quadratiques par élément, peuvent donc être incompatibles avec la solution obtenue à la reprise du calcul.

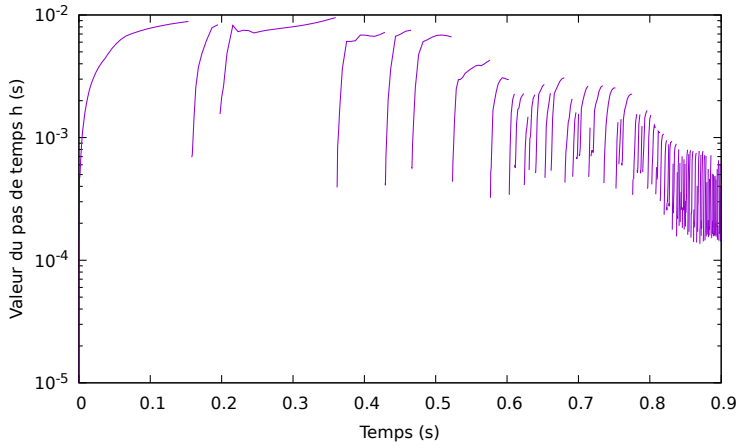


Figure 6.51 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Évolution de la taille h du pas de temps en cours de simulation

Commentaire additionnel

Pour terminer cette sous section d'analyse, on propose à la Figure 6.52 un dernier résultat. Il s'agit de l'évolution de la surface occupée par chaque fluide dans notre domaine de calcul 2D. La masse volumique de chaque fluide étant constante, la conservation des masses de fluide est tributaire de la conservation de ces surfaces. On constate que celles-ci sont très bien préservées au cours du calcul malgré la déformation importante de l'interface au cours de la simulation. La variation relative de chaque surface est de l'ordre de 0.005%.

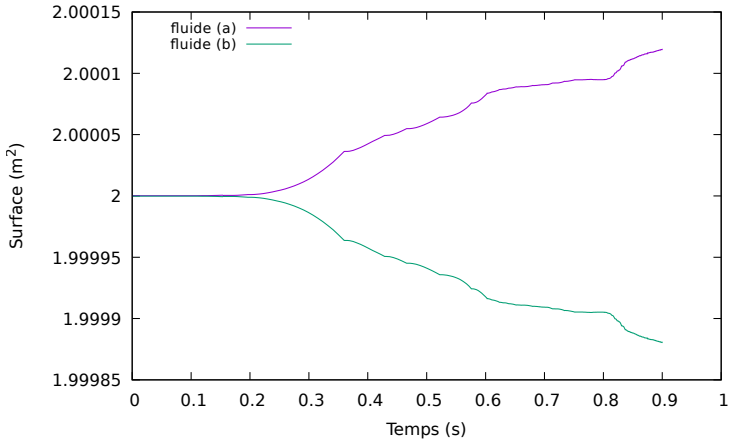


Figure 6.52 Instabilité de Rayleigh-Taylor - Surface du domaine occupé par chaque fluide au cours du temps

6.4.4 Conclusions

Cette dernière étude a donc permis d'illustrer à nouveau le fonctionnement très satisfaisant de notre procédure de résolution adaptative sur un problème notablement plus complexe :

(1) Le critère d'arrêt opérant sur la qualité des éléments s'est avéré ici très pertinent en plus d'être essentiel. Il a en effet permis une évolution adaptée du maillage tout en provoquant des ajustements très localisés, puisque la distribution de l'erreur spatiale élémentaire estimée n'était pas directement en cause.

(2) Le niveau d'erreur spatiale dans le domaine a été finement contrôlée, avec un facteur de sécurité moyen d'à peine 2 par rapport à la tolérance ε_1. Le critère sur l'asymétrie de la distribution de l'erreur s'est avéré très pertinent pour capter les erreurs de transfert commises sur les nouveaux éléments adjacents à l'interface.

(3) En lien avec le point précédent, la projection de Galerkin hybride s'est donc révélée adaptée pour traiter ce problème, là où une projection de Galerkin avec maillage d'intersection uniquement aurait injecté trop d'erreur au niveau de l'interface [4].

(4) L'usage conjoint d'un maillage hybride et de la rigidification des éléments isopamétriques est néanmoins requis pour assurer un fonctionnement satisfaisant de la projection de Galerkin [5].

(5) La relaxation locale, du fait de la formulation ALE, est toutefois apparue ici comme un frein à la préservation effective des maillages.

4. Nous avons fait le test, la consigne sur le niveau d'erreur cible n'a pu être maintenue.

5. Là encore nous avons tenté, sans succès, d'appliquer une projection hybride sur un maillage composé uniquement d'éléments isoparamétriques.

CHAPITRE 7 CONCLUSION

7.1 Bilan des travaux effectués

Les objectifs spécifiques que nous avons formulés à la Section 2.4 ont bien été atteints :

(1) La méthode d'adaptation de maillage locale et automatique a été développée avec succès. En nous appuyant sur l'estimation d'erreur proposée par Zhu et Zienkiewicz [24], et sur un opérateur de transition visant à équidistribuer l'erreur élémentaire, nous avons pu mettre en place un processus efficace d'identification des éléments les plus problématiques dans le maillage, lesquels ont été appelés les éléments *germes*. Ce processus diffère en fonction du nombre de normes d'erreur spatiale actives (approche *mononorme* ou *multinorme*). Les éléments germes sont ceux dont la taille est la plus inadaptée au regard de l'équidistribution de l'erreur. Ils regroupent donc tant des éléments trop gros que des éléments trop petits. Dans le premier cas, il convient de pouvoir raffiner ces éléments pour assurer la précision de la solution. Dans le second cas, ces éléments induisent un surcoût de calcul inutile pour atteindre le niveau d'erreur cible. Les retirer pour mailler plus grossièrement les régions qu'ils occupent résulte donc en une réduction admissible du coût de calcul. Afin de faciliter l'évolution de la taille de maille localement, nous avons repris l'idée des *couches protectrices* de Löhner [21]. Ces couches contiennent les éléments situés au voisinage direct des éléments germes. Retirer l'ensemble de ces éléments du maillage permet de générer des *poches* (ou *cavités*), qu'il convient ensuite de mailler à nouveau. Cette opération est conduite au moyen d'un mailleur frontal, dont l'implémentation s'appuie sur les travaux de Peraire [22]. La génération du maillage dans les poches implique de pouvoir bâtir un front initial regroupant les arrêtes délimitant les poches. Pour ce faire, nous avons modifié la phase de discrétisation des courbes frontières, en plus d'introduire le concept de *couche fictive*. En revanche, l'algorithme pilotant la génération des éléments a été laissé intact. Une fois le maillage localement généré, nous avons pris soin de veiller à sa qualité d'ensemble en appliquant une procédure de relaxation locale, dont le fonctionnement s'inspire beaucoup de l'adaptation de maillage locale. En effet, les concepts d'éléments germes et de couche protectrices sont encore une fois utilisés, bien que la sélection des éléments germes s'appuie cette fois-ci sur une métrique de qualité élémentaire.

Par ailleurs, la procédure a été rendue automatique grâce à une restructuration de l'implémentation de travail, permettant de réaliser l'estimation de l'erreur spatiale à l'issue de chaque de pas de temps. On souligne que le surcoût engendré n'est pas

si important. Le coût de l'estimation d'erreur est inférieur à celui d'une itération de Newton lors de la résolution d'un pas de temps. À partir de la (des) distribution(s) de l'erreur élémentaire, nous avons mis en place des critères d'arrêt, pilotant la suspension de l'intégration temporel pour adapter localement le maillage. Certains critères sont actifs uniquement en approche mononorme. Le coût d'évaluation des critères d'arrêt demeure lui aussi négligeable devant le coût des itérations de Newton.

(2) La stratégie de relance de l'intégrateur adaptatif basé sur les méthodes BDF a elle aussi été implémentée. Pour la mettre en place, nous avons revu complètement la phase de transfert d'une solution sur un nouveau maillage. Ce transfert a été élargi à la solution de plusieurs pas de temps antérieurs, autant que nécessaires pour que l'indicateur de stabilité de l'intégrateur puisse être évalué pour les méthodes d'ordre 1 à 3. Ce faisant, l'ordre courant de l'intégrateur a pu être conservé lors des adaptations de maillage, de même que la taille du pas de temps.

Afin de réduire au maximum les erreurs résultant de ces multiples transferts, nous avons implémenté trois formulations locales de la projection de Galerkin. Celles-ci ne transfèrent la solution que sur les nouveaux éléments du maillage (éléments issus du remaillage des poches et éléments relaxés) afin de réduire sensiblement le coût du transfert. Ainsi, si 90% des éléments du nouveau maillage ont une correspondance exacte avec un élément du maillage précédent, alors le coût de la projection de Galerkin est divisé par 10. Dans certaines circonstances que nous avons identifiées, un transfert conservatif de la solution est possible. Notre formulation hybride de la projection, tâchant de regrouper les forces des formulations de Farrell [114, 124] et de Geuzaine [63], permet l'obtention d'un très faible niveau d'erreur dans toutes les situations. Si une formulation ALE du problème à résoudre est adoptée, cela suppose néanmoins d'utiliser un maillage hybride, tel que nous l'avons défini. L'implémentation d'une projection de Galerkin 1D pour transférer la solution sur les courbes frontières autorise également une réduction sensible des erreurs de transfert. Là encore, l'ensemble de ces traitements participent donc à la précision de notre procédure de résolution.

(3) Les activités d'analyses et de vérifications exposées au Chapitre 5 apportent des preuves rigoureuses quant au bon fonctionnement de l'implémentation éléments finis de travail, ainsi que des outils que nous avons implémentés :

- Les études de convergence de l'erreur temporelle et de l'erreur spatiale démontrent que l'implémentation éléments finis n'a pas souffert de nos divers développements.
- L'analyse de plusieurs méthodes de relaxation de maillage a permis de mettre en évidence l'intérêt de combiner certaines de ces méthodes.

- L'étude de convergence de l'erreur de transfert d'une solution manufacturée, réalisée tant sur un domaine aux frontières droites qu'aux frontières incurvées, a permis de vérifier l'implémentation de la projection de Galerkin. Dans les cas qui théoriquement le permettent, la propriété de conservation des intégrales a en effet été observée avec la formulation de Farrell. Lorsque que comparées à une interpolation linéaire ou consistante, nos trois formulations de la projection de Galerkin ont conduit à des erreurs de transfert moindres dans ces mêmes cas. La formulation de Farrell a conduit à l'erreur minimale, ce qui est cohérent avec la propriété de minimisation de l'erreur en norme L^2 que possède cette formulation. Par ailleurs, la comparaison des coûts de calcul de chaque méthode de transfert exécutée en séquentiel a montré que la projection de Galerkin devient très intéressante sur des maillages comprenant beaucoup d'éléments. Le coût de la projection de Galerkin, donné relativement à celui de l'interpolation linéaire, décroit de façon non linéaire avec l'augmentation du nombre d'éléments dans le maillage.
- En utilisant deux problèmes manufacturés stationnaires, nous avons également analysé l'évolution d'une distribution de l'erreur élémentaire, consécutivement à plusieurs adaptations de maillages, en approche mononorme et multinorme. Les résultats obtenus ont permis de justifier la désactivation de certains critères d'arrêt en approche multinorme, et de vérifier qualitativement le processus d'identification des éléments germes dans chaque approche.

(4) La variété des quatre problèmes d'étude traités au Chapitre 6 a bel et bien permis de statuer sur la pertinence générale de notre procédure de résolution des écoulements instationnaires. Nous avons vu que la procédure peut notamment être utilisée pour traiter des écoulements diphasiques à phases séparées par une interface, ou bien encore des écoulements turbulents. Dans l'ensemble, la procédure a manifesté les forces suivantes :

- La procédure assure un très bon contrôle du niveau de l'erreur spatiale relative globale, et ce dans chaque norme d'erreur active. En approche multinorme, le calcul de la taille optimale d'un élément ne permet cependant de garantir que tous les niveaux d'erreur soient identiques. Dans le cas général, l'équidistribution de l'erreur ne peut en effet être vérifiée pour chacune des normes d'erreur.
- L'adaptation de maillage locale s'est montrée très efficace, en préservant souvent 70% des éléments des maillages, ou plus. L'application de la relaxation locale tend à réduire la conservation effective des maillages de façon mineure, mais au bénéfice majeur de la qualité générale des maillages. La seule exception est apparue lors de la simulation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, à cause de la formulation ALE.

Au demeurant, le critère d'arrêt basé sur la qualité des éléments et le concept de maillage hybride ont démontré leur intérêt pour mener cette simulation adéquatement.

- Pour plusieurs des simulations effectuées, nous avons pu constater que le nombre d'éléments dans le maillage pouvait doubler voire presque tripler au cours de la simulation. Bien que les multiples adaptations de maillage, les pas de temps rejetés lors des reprises de l'intégration temporelle, et l'estimation de l'erreur spatiale ajoutent un coût de calcul non négligeable [1], celui-ci demeure faible au regard du coût qui résulterait de l'usage d'un maillage fixe adapté pour toute la durée de l'écoulement. En effet, le maillage fixe comportera *a minima* autant d'éléments que le maillage adapté le plus fin utilisé pour la simulation considérée. Transitoirement, l'usage d'un maillage fixe peut donc s'avérer entre 4 et 9 fois plus couteux que notre approche adaptative. De plus, il ne faut pas oublier que la construction d'un tel maillage fixe est bien souvent manuelle. De fait, elle peut demander beaucoup de temps. L'approche adaptative peut à l'inverse être utilisée pour générer très rapidement un maillage initial pertinent.
- La complémentarité des critères d'arrêt actifs pour chaque problème étudié est également apparue très satisfaisante. On a en effet observé une évolution très progressive du maillage grâce à ces critères.
- L'intégration temporelle adaptative est aussi apparue convaincante avec des augmentations significatives de la taille du pas de temps lorsque possible. La conservation de la taille du pas temps lors des relances de l'intégration temporelle a été satisfaisante dans l'ensemble.

7.2 Limites de la solution proposée et améliorations possibles

Malgré qu'elle fournisse des résultats très satisfaisants dans l'ensemble, notre procédure de résolution souffre de plusieurs limites :

- Bien qu'automatique, la procédure fait intervenir de nombreux paramètres et de nombreuses tolérances que l'utilisateur doit fournir *a priori* du lancement de la simulation. De prime abord, la procédure peut donc s'avérer complexe à utiliser. Nous osons cependant croire que les explications, les analyses et les différents résultats présentés dans les chapitres précédents seront suffisants pour en permettre une prise en main rapide.

1. Nous avons grossièrement estimé que ce coût représentait jusqu'à 30% du coût de calcul total lors de l'utilisation de notre approche adaptative.

- L'adaptation de maillage demeure non prédictive. Lors des adaptations de maillage locales, nous n'avons en effet ajouté aucun traitement permettant de raffiner en avance le maillage à proximité des zones sensibles. Toutefois, cela n'est pas fortuit. Un tel traitement pourrait être incompatible avec nos critères d'arrêt, en plus de rendre la génération de maillage plus complexe. De plus, l'optimisation du coût de calcul ne serait plus vraiment possible. Advenant que nous voudrions mettre un tel traitement en place, il nous faudrait vraisemblablement désactiver totalement le critère d'arrêt portant sur l'augmentation de taille maximale prévue par l'opérateur de transition, cela afin d'éviter des arrêts intempestifs lors des reprises de l'intégration temporelle. Toutes choses considérées, ce ne serait pas forcément un mal compte tenu des difficultés que nous a posées ce critère d'arrêt lors de nos simulations. Du reste, appliquer un raffinement préventif pourrait se faire facilement à l'aide des couches protectrices, à la manière de Löhner [21]. Une alternative *a priori* tout aussi efficace serait d'implémenter une approche similaire à celle d'Alauzet et Mehrenberger [118]. Il s'agirait alors uniquement de procéder à des intersections de cartes de taille de maille. Notons qu'il demeurerait possible d'adapter localement le maillage.
- L'adaptation de maillage est isotrope. Nul besoin de contester la supériorité des méthodes d'adaptation de maillage anisotropes. Bien que le formalisme mathématique sous-jacent soit sensiblement plus complexe, elles permettent une bien meilleure optimisation du coût de calcul, en plus d'éviter de potentielles raideurs numériques dues au maillage. Un axe de recherche subséquent à notre projet pourrait donc être l'adaptation de maillage locale et anisotrope, toujours au moyen d'une génération locale du maillage. Dans ce contexte, la méthode de relaxation de maillage sera toutefois à revoir complètement.
- L'augmentation locale de la taille des éléments peut être difficile à obtenir effectivement. Le problème de la marche descendante l'a bien mis en évidence. Lorsque des gradients de taille de maille importants existent, la génération de maillage conduit à former des éléments tampons, dont la taille est pilotée par la nécessité d'assurer une transition entre les gros éléments et les petits. Ces éléments présentent alors un niveau d'erreur spatiale souvent très faible, et le processus d'identification des germes les repère donc naturellement. Dans ce genre de situation, il est nécessaire de modifier le processus pour filtrer ces éléments. Une modification simple mais imparfaite, proposée lors du traitement de la marche descendante, a fourni des résultats satisfaisants. Par la suite, il pourrait être intéressant de parfaire cette modification pour la rendre très générique.
- La procédure de résolution proposée est formulée en 2D. Bien que l'estimation de l'erreur spatiale, la formation des poches à remailler, et les critères d'arrêt puissent être

généralisés assez facilement, certaines composantes de notre procédure exigeront une refonte importante pour s'appliquer en 3D :

- La génération locale du maillage : même en admettant que l'on dispose d'un mailleur frontal 3D, l'obtention du front initial 2D sera plus difficile. En 3D, les frontières d'un domaine de calcul sont des surfaces, possiblement non planes. En supposant qu'un maillage soit composé de tétraèdres, le front défini dans le mailleur frontal est alors composé de triangles, qui correspondent à des faces de tétraèdres. Afin de former le front initial 2D, il sera nécessaire de pouvoir générer localement les triangles manquants sur les frontières du domaine. Cela suppose de pouvoir créer sur chaque frontière un front initial 1D. Le stockage des tétraèdres composant la couche fictive dans un cas 3D devra donc être pensé de sorte à pouvoir récupérer facilement les faces de ceux-ci qui appartiennent aux frontières du domaine. Sur chacune d'elles, on pourra alors créer une couche fictive 2D. À partir de là, la logique de notre remaillage local sera applicable pour compléter le maillage des frontières. La complétion du front initial 2D et la génération locale du maillage volumique peuvent alors se faire selon une logique très similaire à celle de notre procédure 2D.
- La projection de Galerkin : la construction d'un maillage d'intersection devient plus complexe puisqu'il faut désormais résoudre des intersections surfaciques. Le maillage des régions d'intersection est également un peu plus compliqué à mettre à place. Toutefois, des travaux figurant déjà dans la littérature [133, 143] peuvent fournir une très bonne base de travail. Par ailleurs, notons que la localisation d'un nouvel élément dans l'ancien maillage pourra se faire via une arborescence en *octree*, qui se prête mieux au 3D que l'arborescence en *quadtree*. La projection de Galerkin 2D, nécessaire pour assurer le transfert de la solution sur les frontières 2D du domaine, ne pourra s'identifier directement à celle que nous avons implémentée. Dans le cas de frontières non planes, une stratégie de type *common refinement* [88] devra être envisagée.

- La relance de notre intégrateur temporel adaptatif a montré des limites. La taille du pas de temps est parfois réduite d'un facteur important lors des reprises. Ceci peut considérablement augmenter le coût total d'une simulation. Les erreurs de transfert sont en majeure partie responsables de cette réduction. Les méthodes BDF n'étant pas auto-démarrantes, la relance d'une méthode à p pas implique de transférer la solution des p derniers pas de temps, ce qui augmente nécessairement les erreurs de transfert. Toutefois, l'ajustement de la solution dans les régions localement remaillées induit lui aussi une recrudescence normale de l'erreur temporelle estimée. L'indicateur de stabilité est lui aussi apparu fortement perturbé lors des reprises pour les deux mêmes raisons.

En conséquence, l'intégrateur d'ordre 3 est bien souvent resté inaccessible à l'usage. Ce retour d'expérience nous incite à penser qu'un intégrateur temporel auto-démarrant bénéficierait davantage à notre procédure. De plus il serait à notre avis préférable d'utiliser un intégrateur d'ordre fixe et A-stable. Les méthodes implicites de Runge-Kutta sont ici à considérer. Bien que leur coût soit plus important que celui des méthodes BDF, les gains en précision et en fiabilité nous semblent amplement compenser.

- En l'état, notre procédure n'est pleinement valide que pour les écoulements incompressibles. Si l'écoulement à simuler est compressible, la projection de Galerkin des variables primitives ne permet plus de conserver la quantité de mouvement est l'énergie interne du fluide. Il devient nécessaire de projeter les variables conservatives. La projection additionnelle de ρ permet alors, en plus d'assurer la conservation de la masse, de déduire les variables primitives aux nœuds. Si des éléments de Taylor-Hood P2-P1 sont utilisés, il faudra de plus assembler un système de projection spécifique pour la pression, afin d'obtenir une minimisation réelle de l'erreur de transfert. Notons au passage qu'un tel système pourra également s'avérer utile pour projeter les déplacements nodaux en formulation ALE, si les éléments utilisés sont sub-paramétriques.
- Le coût de notre procédure de résolution n'est pas pleinement optimisé, pour plusieurs raisons :
  - La structure de notre code de travail sous la forme *Amiral-Cadyf* n'est pas idéale, car elle implique de répéter un grand nombre de fois plusieurs opérations qui pourraient être unitaires, telle que l'analyse, la vérification et l'encodage des paramètres de simulation. Une accélération des phases d'adaptation de maillage locale devrait être obtenue en fusionnant *Amiral* et *Cadyf*. À n'en point douter, une telle refonte exigerait cependant beaucoup de travail.
  - L'estimation de l'erreur spatiale n'est pas parallélisée. Dans un premier temps, une simple parallélisation en mémoire partagée de la boucle de construction des systèmes de projection locaux permettrait d'obtenir un gain de performance appréciable.
  - Seul un parallélisme en mémoire partagée est utilisé dans les phases d'assemblage et de résolution des systèmes linéaires découlant de la méthode de Newton. En vue de s'attaquer à des problèmes beaucoup plus exigeants, la mise en place d'un parallélisme en mémoire distribuée semble incontournable. Là encore, il ne s'agit toutefois pas d'un menu travail.

RÉFÉRENCES

[1] J. Boussinesq, *ESSAI SUR LA THÉORIE DES EAUX COURANTES*. Imprimerie Nationale, 1877.

[2] A. Kolmogorov, « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers », *C. R. Acad. Sci. URSS*, t. 30, p. 301–305, 1941.

[3] H. Reichardt, « Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen », *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, t. 31, n° 7, p. 208–219, 1951, issn : 15214001. doi : 10.1002/zamm.19510310704.

[4] G. Dahlquist, « Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations », *Mathematica Scandinavica*, t. 4, p. 33–53, 1956.

[5] P. D. Lax et R. D. Richtmyer, « Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, t. 9, p. 267–293, 1956.

[6] A. N. Kolmogorov, « A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 13, n° 1, p. 82–85, 1962, issn : 14697645. doi : 10.1017/S0022112062000518.

[7] G. G. Dahlquist, « A special stability problem for linear multistep methods », *BIT*, t. 3, n° 1, p. 27–43, 1963, issn : 0006-3835. doi : 10.1007/BF01963532.

[8] B. Launder et B. Sharma, « Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc », *Letters in Heat and Mass Transfer*, t. 1, n° 2, p. 131–137, 1974, issn : 00944548. doi : 10.1016/0094-4548(74)90150-7.

[9] B. Launder et D. Spalding, « The numerical computation of turbulent flows », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 3, n° 2, p. 269–289, 1974, issn : 00457825. doi : 10.1016/0045-7825(74)90029-2.

[10] L. F. Shampine et M. K. Gordon, *COMPUTER SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS : THE INITIAL VALUE PROBLEM*. W.H. Freeman, 1975.

[11] J. Barlow, « Optimal stress locations in finite element models », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 10, n° 2, p. 243–251, 1976, issn : 0029-5981. doi : 10.1002/nme.1620100202.

[12] N. R. Saad, W. J. M. Douglas et A. S. Mujumdar, « Prediction of Heat Transfer under an Axisymmetric Laminar Impinging Jet », *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, t. 16, n° 1, p. 148–154, 1977. doi : 10.1021/i160061a027.

[13] S. Skelboe, « The control of order and steplength for backward differentiation methods », *BIT*, t. 17, n° 1, p. 91–107, 1977, issn : 0006-3835. doi : 10.1007/BF01932401.

[14] P. D. Thomas et C. K. Lombard, « Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids », *AIAA Journal*, t. 17, n° 10, p. 1030–1037, 1979, issn : 00011452. doi : 10.2514/3.61273.

[15] J. Kim, S. J. Kline et J. P. Johnston, « Investigation of a Reattaching Turbulent Shear Layer : Flow Over a Backward-Facing Step », *Journal of Fluids Engineering*, t. 102, n° 3, p. 302–308, 1980, issn : 0098-2202. doi : 10.1115/1.3240686.

[16] P. A. Gnoffo, « A vectorized, finite-volume, adaptive-grid algorithm for Navier-Stokes calculations », *Applied Mathematics and Computation*, t. 10-11, p. 819–835, 1982, issn : 00963003. doi : 10.1016/0096-3003(82)90224-7.

[17] R. D. Grigorieff, « Stability of multistep-methods on variable grids », *Numerische Mathematik*, t. 42, n° 3, p. 359–377, 1983, issn : 0092-599X. doi : 10.1007/BF01389580.

[18] H. Samet, « The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures », *ACM Computing Surveys (CSUR)*, t. 16, n° 2, p. 187–260, 1984, issn : 15577341. doi : 10.1145/356924.356930.

[19] D. Lo, « A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 21, n° 8, p. 1403–1426, 1985, issn : 10970207. doi : 10.1002/nme.1620210805.

[20] J. K. Dukowicz et J. W. Kodis, « Accurate Conservative Remapping (Rezoning) for Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computations », *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, t. 8, n° 3, p. 305–321, 1987, issn : 0196-5204. doi : 10.1137/0908037.

[21] R. Löhner, « An adaptive finite element scheme for transient problems in CFD », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 61, n° 3, p. 323–338, 1987, issn : 00457825. doi : 10.1016/0045-7825(87)90098-3.

[22] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan et O. Zienkiewicz, « Adaptive remeshing for compressible flow computations », *Journal of Computational Physics*, t. 72, n° 2, p. 449–466, 1987, issn : 00219991. doi : 10.1016/0021-9991(87)90093-3.

[23] K. S Arun, T. S Huang et S. D Blostein, « Least-squares fitting of two 3-D point sets (computer vision). », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, t. vol.PAMI-9, n° no.5, p. 698–700, 1987.

[24] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu, « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 24, n° 2, p. 337–357, 1987. doi : 10.1002/nme.1620240206.

[25] K. Ho-Le, « Finite element mesh generation methods : a review and classification », *Computer-Aided Design*, t. 20, n° 1, p. 27–38, 1988, issn : 00104485. doi : 10.1016/0010-4485(88)90138-8.

[26] J. Wu, J. Z. Zhu, J. Szmelter et O. C. Zienkiewicz, « Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows », *Computational Mechanics*, t. 6, n° 4, p. 259–270, 1990, issn : 0178-7675. doi : 10.1007/BF00370106.

[27] J.-P. Chabard, « Projet N3S de mécanique des fluides - manuel théorique de la version 3. Technical report EDF HE-41/91.30B », Electricité de France, rapp. tech., 1991.

[28] J. F. Hétu, « Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles », thèse de doct., École Polytechnique de Montréal, 1991.

[29] E. Oñate et J. Castro, « Adaptive Mesh Refinement Techniques for Structural Problems », in *The finite element method in the 1990's*, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1991, p. 133–145. doi : 10.1007/978-3-662-10326-5_14.

[30] M. J. Bockelie et P. R. Eiseman, « Adaptive grid method for unsteady flow problems », *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, t. 2, n° 2, p. 171–190, 1992, issn : 09615539. doi : 10.1108/eb017488.

[31] J.-F. Hetu et D. H. Pelletier, « Adaptative remeshing for viscous incompressible flows », *AIAA Journal*, t. 30, n° 8, p. 1986–1992, 1992, issn : 0001-1452. doi : 10.2514/3.11170.

[32] C. K. Lee et S. H. Lo, « An automatic adaptive refinement finite element procedure for 2D elastostatic analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 35, n° 10, p. 1967–1989, 1992, issn : 0029-5981. doi : 10.1002/nme.1620351004.

[33] R. Löhner et J. D. Baum, « Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, t. 14, n° 12, p. 1407–1419, 1992, issn : 0271-2091. doi : 10.1002/fld.1650141204.

[34] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu, « The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 33, n° 7, p. 1365–1382, 1992, issn : 0029-5981. doi : 10.1002/nme.1620330703.

[35] P. A. de Sampaio, P. R. Lyra, K. Morgan et N. P. Weatherill, « Petrov-Galerkin solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables with adaptive remeshing », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 106, n° 1-2, p. 143–178, 1993, issn : 00457825. doi : 10.1016/0045-7825(93)90189-5.

[36] N. E. Wiberg et F. Abdulwahab, « Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 36, n° 16, p. 2703–2724, 1993, issn : 10970207. doi : 10.1002/nme.1620361603.

[37] X. D. Li et N. E. Wiberg, « A posteriori error estimate by element patch post-processing, adaptive analysis in energy and L2 norms », *Computers and Structures*, t. 53, n° 4, p. 907–919, 1994, issn : 00457949. doi : 10.1016/0045-7949(94)90378-6.

[38] U. Frisch, *TURBULENCE, THE LEGACY OF A. N. KOLMOGOROV*. Cambridge University Press, 1995, isbn : 9780521451031. doi : 10.1017/CBO9781139170666.

[39] N. Maman et C. Farhat, « Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations : A parallel approach », *Computers and Structures*, t. 54, n° 4, p. 779–785, 1995, issn : 00457949. doi : 10.1016/0045-7949(94)00359-B.

[40] J. H. Cebral et R. Löhner, « Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems », *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, n° January, 1996. doi : 10.2514/6.1996-797.

[41] E. Hairer et G. Wanner, *SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS II : STIFF AND DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC PROBLEMS*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[42] F. Ilinca, « Méthodes d'éléments-finis adaptatives pour les écoulements turbulents », thèse de doct., École Polytechnique de Montréal, 1996.

[43] C. H. K. Williamson, « Vortex Dynamics in the Cylinder Wake », *Annual Review of Fluid Mechanics*, t. 28, n° 1, p. 477–539, 1996, issn : 0066-4189. doi : 10.1146/annurev.fl.28.010196.002401.

[44] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi et O. Pironneau, « Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, t. 25, n° 4, p. 475–491, 1997, issn : 02712091. doi : 10.1002/(SICI)1097-0363(19970830)25:4<475::AID-FLD575>3.0.CO;2-6.

[45] L. A. Freitag et C. Ollivier-Gooch, « Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 40, n° 21, p. 3979–4002, 1997, issn : 00295981. doi : 10.1002/(SICI)1097-0207(19971115)40:21<3979::AID-NME251>3.0.CO;2-9.

[46] R. D. Henderson, « Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition », *Journal of Fluid Mechanics*, t. 352, p. 65–112, 1997, issn : 0022-1120. doi : 10.1017/S0022112097007465.

[47] F. ILinca, D. Pelletier et F. Arnoux-Guisse, « An Adaptive Finite Element Scheme for Turbulent Free Shear Flows », *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, t. 8, n° 3, p. 171–188, 1997, issn : 1061-8562. doi : 10.1080/10618569708940803.

[48] M. T. Jones et P. E. Plassmann, « Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes », *Finite Elements in Analysis and Design*, t. 25, n° 1-2, p. 41–60, 1997, issn : 0168874X. doi : 10.1016/S0168-874X(96)00039-X.

[49] B. Mohammadi et O. Pironneau, « Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and k - ε model », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 148, n° 3-4, p. 393–405, 1997, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(97)00060-1.

[50] E. G. Puckett, A. S. Almgren, J. B. Bell, D. L. Marcus et W. J. Rider, « A High-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows », *Journal of Computational Physics*, t. 130, n° 2, p. 269–282, 1997, issn : 00219991. doi : 10.1006/jcph.1996.5590.

[51] M. Zdravkovich, *FLOW AROUND CIRCULAR CYLINDERS - VOLUME I : FUNDAMENTALS*. Oxford University Press, 1997.

[52] U. M. Ascher et L. R. Petzold, *COMPUTER METHODS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1998, p. 314, isbn : 978-0-89871-412-8.

[53] S. A. S. S. A. Canann, J. J. R. Tristano et M. M. L. Staten, « An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes », *7th International Meshing Roundtable*, p. 479–494, 1998.

[54] S. Chippada, C. N. Dawson, M. L. Martínez et M. F. Wheeler, « A projection method for constructing a mass conservative velocity field », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 157, n° 1-2, p. 1–10, 1998, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(98)80001-7.

[55] C. Farhat, M. Lesoinne et P. LeTallec, « Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 157, n° 1-2, p. 95–114, 1998, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(97)00216-8.

[56] F. Ilinca et D. Pelletier, « Positivity Preservation and Adaptive Solution for the k-ε Model of Turbulence », *AIAA Journal*, t. 36, n° 1, p. 44–50, 1998, issn : 0001-1452. doi : 10.2514/2.350.

[57] D. N. Joanes et C. A. Gill, « Comparing measures of sample skewness and kurtosis », *Journal of the Royal Statistical Society Series D (The Statistician)*, t. 47, n° 1, p. 183–189, 1998, issn : 00390526. doi : 10.1111/1467-9884.00122.

[58] X. D. Li et N. E. Wiberg, « Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 156, n° 1-4, p. 211–229, 1998, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(97)00207-7.

[59] D. J. Mavriplis, « Multigrid Strategies for Viscous Flow Solvers on Anisotropic Unstructured Meshes », *Journal of Computational Physics*, t. 145, n° 1, p. 141–165, 1998, issn : 00219991. doi : 10.1006/jcph.1998.6036.

[60] J. Park, K. Kwon et H. Choi, « Numerical Solutions of F l o w Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 160 », *KSME International Journal*, t. 12, n° 6, p. 1200–1205, 1998.

[61] C. G. Speziale, « Turbulence Modeling for Time-Dependent RANS and VLES : A Review », *AIAA Journal*, t. 36, n° 2, p. 173–184, 1998, issn : 0001-1452. doi : 10.2514/2.7499.

[62] C. Williamson et G. Brown, « A series in $1/\sqrt{R_e}$ to represent the Strouhal-Reynolds number relationship of the cylinder wake », *Journal of Fluids and Structures*, t. 12, n° 8, p. 1073–1085, 1998, issn : 08899746. doi : 10.1006/jfls.1998.0184.

[63] C. Geuzaine, B. Meys, F. Henrotte, P. Dular et W. Legros, « A galerkin projection method for mixed finite elements », *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 35, n° 3 PART 1, p. 1438–1441, 1999, issn : 00189464. doi : 10.1109/20.767236.

[64] J. T. Oden et S. Prudhomme, « On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 176, p. 313–331, 1999.

[65] S. Popinet et S. Zaleski, « A Front-Tracking Algorithm For Accurate Representation of Surface Tension », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, t. 30, p. 775–793, 1999.

[66] R. Verfürth, « A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 176, n° 1-4, p. 419–440, 1999, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(98)00347-8.

[67] J. Vollmer, R. Mencl et H. Müller, « Improved laplacian smoothing of noisy surface meshes », *Computer Graphics Forum*, t. 18, n° 3, p. 131–138, 1999, issn : 01677055. doi : 10.1111/1467-8659.00334.

[68] D. A. Field, « Qualitative measures for initial meshes », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 47, n° 4, p. 887–906, 2000, issn : 00295981. doi : 10.1002/(SICI)1097-0207(20000210)47:4<887::AID-NME804>3.0.CO;2-H.

[69] H. Guillard et C. Farhat, « On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 190, n° 11-12, p. 1467–1482, 2000, issn : 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(00)00173-0.

[70] B. K. Karamete, M. W. Beall et M. S. Shephard, « Triangulation of arbitrary polyhedra to support automatic mesh generators », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 49, p. 167–191, 2000, issn : 00295981. doi : 10.1002/1097-0207(20000910/20)49:1/2<167::aid-nme928>3.0.co;2-l.

[71] P. M. Knupp, « Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part II - A framework for volume mesh optimization and the condition number of the Jacobian matrix », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 48, n° 8, p. 1165–1185, 2000, issn : 00295981. doi : 10.1002/(SICI)1097-0207(20000720)48:8<1165::AID-NME940>3.0.CO;2-Y.

[72] S. B. Pope, *TURBULENT FLOWS*. Cambridge University Press, 2000.

[73] C. Farhat, P. Geuzaine et C. Grandmont, « The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids », *Journal of Computational Physics*, t. 174, n° 2, p. 669–694, 2001, issn : 00219991. doi : 10.1006/jcph.2001.6932.

[74] G. Houzeaux et R. Codina, « Transmission conditions with constraints in finite element domain decomposition methods for flow problems », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, t. 17, n° 3, p. 179–190, 2001, issn : 10698299. doi : 10.1002/cnm.397.

[75] B. Kaan Karamete, R. V. Garimella et M. S. Shephard, « Recovery of an arbitrary edge on an existing surface mesh using local mesh modifications », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 50, p. 1389–1409, 2001, issn : 00295981. doi : 10.1002/1097-0207(20010228)50:6<1389::AID-NME75>3.0.CO;2-5.

[76] P. Rasetarinera et M. Y. Hussaini, « An efficient implicit discontinuous spectral Galerkin method », *Journal of Computational Physics*, t. 172, n° 2, p. 718–738, 2001, issn : 00219991. doi : 10.1006/jcph.2001.6853.

[77] F. Alauzet, P. J. Frey et B. Mohammadi, « Unstructured mesh adaptation for transient problems », *Comptes Rendus Mathematique*, t. 335, n° 9, p. 773–778, 2002. doi : DOI:10.1016/S1631-073X(02)02553-0.

[78] Y. M. Chung et K. H. Luo, « Unsteady Heat Transfer Analysis of an Impinging Jet », *Journal of Heat Transfer*, t. 124, n° 6, p. 1039–1048, 2002, issn : 0022-1481. doi : 10.1115/1.1469522.

[79] W. L. Oberkampf et T. G. Trucano, « Verification and validation in computational fluid dynamics », *Progress in Aerospace Sciences*, t. 38, n° 3, p. 209–272, 2002, issn : 03760421. doi : 10.1016/S0376-0421(02)00005-2.

[80] P. J. Roache, « Code Verification by the Method of Manufactured Solutions », *Journal of Fluids Engineering*, t. 124, n° 1, p. 4–10, 2002, issn : 0098-2202. doi : 10.1115/1.1436090.

[81] X. Li, M. S. Shephard et M. W. Beall, « Accounting for curved domains in mesh adaptation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 58, p. 247–276, 2003, issn : 0029-5981. doi : 10.1002/nme.772.

[82] L. G. Margolin et M. Shashkov, « Second-order sign-preserving conservative interpolation (remapping) on general grids », *Journal of Computational Physics*, t. 184, n° 1, p. 266–298, 2003, issn : 00219991. doi : 10.1016/S0021-9991(02)00033-5.

[83] T. Park, H. Choi, J. Yoo et S. Kim, « Streamline upwind numerical simulation of two-dimensional confined impinging slot jets », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, t. 46, n° 2, p. 251–262, 2003, issn : 00179310. doi : 10.1016/S0017-9310(02)00270-3.

[84] P. P. Pébay et T. J. Baker, « Analysis of triangle quality measures », *Mathematics of Computation*, t. 72, n° 244, p. 1817–1840, 2003, issn : 0025-5718. doi : 10.1090/s0025-5718-03-01485-6.

[85] J. Sarrate, J. Palau et A. Huerta, « Numerical representation of the quality measures of triangles and triangular meshes », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, t. 19, n° 7, p. 551–561, 2003, issn : 10698299. doi : 10.1002/cnm.585.

[86] D. Boffi et L. Gastaldi, « Stability and geometric conservation laws for ALE formulations », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 193, n° 42-44, p. 4717–4739, 2004, issn : 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2004.02.020.

[87] J. Donea, A. Huerta, J.-P. Ponthot et A. Rodriguez-Ferran, « Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods », *Encyclopedia of Computational Mechanics*, p. 1–25, 2004, issn : 0045-7825. doi : 10.1002/0470091355.ecm009.

[88] X. Jiao et M. T. Heath, « Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 61, n° 14, p. 2402–2427, 2004, issn : 00295981. doi : 10.1002/nme.1147.

[89] O. Schenk et K. Gärtner, « Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO », *Future Generation Computer Systems*, t. 20, p. 475–487, 2004, issn : 0167739X. doi : 10.1016/j.future.2003.07.011.

[90] K. J. Fidkowski, T. A. Oliver, J. Lu et D. L. Darmofal, « p-Multigrid solution of high-order discontinuous Galerkin discretizations of the compressible Navier–Stokes equations », *Journal of Computational Physics*, t. 207, n° 1, p. 92–113, 2005, issn : 00219991. doi : 10.1016/j.jcp.2005.01.005.

[91] X. Li, M. S. Shephard et M. W. Beall, « 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 194, n° 48-49, p. 4915–4950, 2005, issn : 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2004.11.019.

[92] J. F. Remacle, X. Li, M. S. Shephard et J. E. Flaherty, « Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 62, n° 7, p. 899–923, 2005, issn : 00295981. doi : 10.1002/nme.1196.

[93] J. Teran, N. Molino, R. Fedkiw et R. Bridson, « Adaptive physics based tetrahedral mesh generation using level sets », *Engineering with Computers*, t. 21, n° 1, p. 2–18, 2005, issn : 01770667. doi : 10.1007/s00366-005-0308-8.

[94] Z. Zhang et A. Naga, « A new finite element gradient recovery method : Superconvergence property », *SIAM Journal on Scientific Computing*, t. 26, n° 4, p. 1192–1213, 2005, issn : 10648275. doi : 10.1137/S1064827503402837.

[95] P. A. Cavallo, S. Arunajatesan, N. Sinha et T. J. Baker, « Transient mesh adaptation using an error wake and projection method », *Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, t. 18, n° January, p. 13 932–13 946, 2006.

[96] T. Dunne, « An Eulerian approach to fluid - Structure interaction and goal-oriented mesh adaptation », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, t. 51, n° 9-10, p. 1017–1039, 2006, issn : 02712091. doi : 10.1002/fld.1205.

[97] C. Förster, W. A. Wall et E. Ramm, « On the geometric conservation law in transient flow calculations on deforming domains », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, t. 50, n° 12, p. 1369–1379, 2006, issn : 02712091. doi : 10.1002/fld.1093.

[98] A. Nealen, T. Igarashi, O. Sorkine et M. Alexa, « Laplacian mesh optimization », *Proceedings - GRAPHITE 2006 : 4th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and Southeast Asia*, p. 381–389, 2006. doi : 10.1145/1174429.1174494.

[99] D. Pan, « An Immersed Boundary Method on Unstructured Cartesian Meshes for Incompressible Flows with Heat Transfer », *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, t. 49, n° 3, p. 277–297, 2006, issn : 1040-7790. doi : 10.1080/10407790500290709.

[100] D. C. Wilcox, *TURBULENCE MODELING FOR CFD (THIRD EDITION)*. 2006, isbn : 9781928729082.

[101] F. Alauzet, P. J. Frey, P. L. George et B. Mohammadi, « 3D transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems : Application to CFD simulations », *Journal of Computational Physics*, t. 222, n° 2, p. 592–623, 2007, issn : 10902716. doi : 10.1016/j.jcp.2006.08.012.

[102] J. Butcher, « Runge-Kutta methods », *Scholarpedia*, t. 2, n° 9, p. 3147, 2007, issn : 1941-6016. doi : 10.4249/scholarpedia.3147.

[103] L. Eça, M. Hoekstra, a. Hay et D. Pelletier, « A manufactured solution for a two-dimensional steady wall-bounded incompressible turbulent flow », *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, t. 21, n° 3-4, p. 175–188, 2007, issn : 1061-8562. doi : 10.1080/10618560701553436.

[104] R. Garimella, M. Kucharik et M. Shashkov, « An efficient linearity and bound preserving conservative interpolation (remapping) on polyhedral meshes », *Computers and Fluids*, t. 36, n° 2, p. 224–237, 2007, issn : 00457930. doi : 10.1016/j.compfluid.2006.01.014.

[105] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, *MÉTHODES NUMÉRIQUES : ALGORITHMES, ANALYSE ET APPLICATIONS*. Springer, 2007.

[106] L. F. Richardson, *WEATHER PREDICTION BY NUMERICAL PROCESS*, Second Edi. Cambridge University Press, 2007, p. 1–236, isbn : 9780511618291. doi : 10.1017/CBO9780511618291.

[107] M. Rüter, S. Korotov et C. Steenbock, « Goal-oriented error estimates based on different FE-spaces for the primal and the dual problem with applications to fracture mechanics », *Computational Mechanics*, t. 39, n° 6, p. 787–797, 2007, issn : 01787675. doi : 10.1007/s00466-006-0069-2.

[108] Z. Wang, « High-order methods for the Euler and Navier–Stokes equations on unstructured grids », *Progress in Aerospace Sciences*, t. 43, n° 1-3, p. 1–41, 2007, issn : 03760421. doi : 10.1016/j.paerosci.2007.05.001.

[109] S. Campbell, V. Linh et L. Petzold, « Differential-algebraic equations », *Scholarpedia*, t. 3, n° 8, p. 2849, 2008, issn : 1941-6016. doi : 10.4249/scholarpedia.2849.

[110] C. Dobrzynski et P. Frey, « Anisotropic Delaunay Mesh Adaptation for Unsteady Simulations », in *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008, p. 177–194. doi : 10.1007/978-3-540-87921-3_11.

[111] R. Löhner, *APPLIED COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS TECHNIQUES : AN INTRODUCTION BASED ON FINITE ELEMENTS METHODS (SECOND EDITION)*. Wiley, 2008.

[112] S. Berrone et M. Marro, « Space-time adaptive simulations for unsteady Navier-Stokes problems », *Computers and Fluids*, t. 38, n° 6, p. 1132–1144, 2009, issn : 00457930. doi : 10.1016/j.compfluid.2008.11.004.

[113] S. Étienne, A. Garon et D. Pelletier, « Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ALE simulations of incompressible flow », *Journal of Computational Physics*, t. 228, n° 7, p. 2313–2333, 2009, issn : 10902716. doi : 10.1016/j.jcp.2008.11.032.

[114] P. E. Farrell, M. D. Piggott, C. C. Pain, G. J. Gorman et C. R. Wilson, « Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 198, n° 33-36, p. 2632–2642, 2009, issn : 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2009.03.004.

[115] E. Gammacurta, « Analyse de sensibilité d'écoulements turbulents instationnaires », mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2009, p. 140.

[116] D. Z. Noor, M. J. Chern et T. L. Horng, « An immersed boundary method to solve fluid-solid interaction problems », *Computational Mechanics*, t. 44, n° 4, p. 447–453, 2009, issn : 01787675. doi : 10.1007/s00466-009-0384-5.

[117] P. R. Spalart, « Detached-Eddy Simulation », *Annual Review of Fluid Mechanics*, t. 41, n° 1, p. 181–202, 2009, issn : 0066-4189. doi : 10.1146/annurev.fluid.010908.165130.

[118] F. Alauzet et M. Mehrenberger, « P 1 -conservative solution interpolation on unstructured triangular meshes », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 84, n° 13, p. 1552–1588, 2010, issn : 00295981. doi : 10.1002/nme.2951.

[119] P. Birken, K. J. Quint, S. Hartmann et A. Meister, « A time-adaptive fluid-structure interaction method for thermal coupling », *Computing and Visualization in Science*, t. 13, n° 7, p. 331–340, 2010, issn : 1432-9360. doi : 10.1007/s00791-010-0150-4.

[120] E. Gammacurta, S. Etienne, D. Pelletier et A. Garon, « Adaptive Remeshing for Unsteady RANS Computations », in *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, American Institute of

Aeronautics et Astronautics, 2010, ISBN : 978-1-60086-959-4. DOI : 10.2514/6.2010-1070.

[121] E. Hairer et G. Wanner, « Linear multistep method », *Scholarpedia*, t. 5, n° 4, p. 4591, 2010, ISSN : 1941-6016. DOI : 10.4249/scholarpedia.4591.

[122] V. John et J. Rang, « Adaptive time step control for the incompressible Navier–Stokes equations », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 199, n° 9-12, p. 514–524, 2010, ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2009.10.005.

[123] D. Pelletier, « Verification, validation, and uncertainty in computational fluids dynamics », *Canadian Journal of Civil Engineering*, t. 37, n° 7, p. 1003–1013, 2010, ISSN : 0315-1468. DOI : 10.1139/L10-032.

[124] P. Farrell et J. Maddison, « Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 200, n° 1-4, p. 89–100, 2011, ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2010.07.015.

[125] K. J. Fidkowski et D. L. Darmofal, « Review of output-based error estimation and mesh adaptation in computational fluid dynamics », *AIAA Journal*, t. 49, n° 4, p. 673–694, 2011, ISSN : 00011452. DOI : 10.2514/1.J050073.

[126] G. M. Porta, S. Perotto et F. Ballio, « A space-time adaptation scheme for unsteady shallow water problems », *Mathematics and Computers in Simulation*, t. 82, n° 12, p. 2929–2950, 2012, ISSN : 03784754. DOI : 10.1016/j.matcom.2011.06.004.

[127] F. Casadei, P. Díez et F. Verdugo, *AN ALGORITHM FOR MESH REFINEMENT AND UN-REFINEMENT IN FAST TRANSIENT DYNAMICS*, 4. 2013, t. 10, p. 1–31, ISBN : 0219876213500. DOI : 10.1142/S0219876213500187.

[128] T. Coupez, G. Jannoun, N. Nassif, H. C. Nguyen, H. Digonnet et E. Hachem, « Adaptive time-step with anisotropic meshing for incompressible flows », *Journal of Computational Physics*, t. 241, p. 195–211, 2013, ISSN : 10902716. DOI : 10.1016/j.jcp.2012.12.010.

[129] A. Hay, K. R. Yu, S. Etienne, A. Garon et D. Pelletier, « High-order temporal accuracy for 3D finite-element ALE flow simulations », *Computers and Fluids*, t. 100, p. 204–217, 2014, ISSN : 00457930. DOI : 10.1016/j.compfluid.2014.04.036.

[130] C. D. Argyropoulos et N. C. Markatos, *Recent advances on the numerical modelling of turbulent flows*, 2015. DOI : 10.1016/j.apm.2014.07.001.

[131] A. Hay, S. Etienne, D. Pelletier et A. Garon, « hp-Adaptive time integration based on the BDF for viscous flows », *Journal of Computational Physics*, t. 291, p. 151–176, 2015, ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2015.03.022.

[132] D. Lo, *FINITE ELEMENT MESH GENERATION*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.

[133] F. Alauzet, « A parallel matrix-free conservative solution interpolation on unstructured tetrahedral meshes », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 299, p. 116–142, 2016, issn : 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2015.10.012.

[134] D. Durante, E. Rossi, A. Colagrossi et G. Graziani, « Numerical simulations of the transition from laminar to chaotic behaviour of the planar vortex flow past a circular cylinder », *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, t. 48, p. 18–38, 2017, issn : 10075704. doi : 10.1016/j.cnsns.2016.12.013.

[135] K. J. Fidkowski, « Output-based space–time mesh optimization for unsteady flows using continuous-in-time adjoints », *Journal of Computational Physics*, t. 341, p. 258–277, 2017, issn : 10902716. doi : 10.1016/j.jcp.2017.04.005.

[136] É. Muller, « Application de modèles de turbulence à deux équations à la résolution éléments finis d'écoulements instationnaires », mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2017.

[137] A. Pont, R. Codina et J. Baiges, « Interpolation with restrictions between finite element meshes for flow problems in an ALE setting », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 110, n° 13, p. 1203–1226, 2017, issn : 10970207. doi : 10.1002/nme.5444.

[138] F. Alauzet, A. Loseille et G. Olivier, « Time-accurate multi-scale anisotropic mesh adaptation for unsteady flows in CFD », *Journal of Computational Physics*, t. 373, p. 28–63, 2018, issn : 10902716. doi : 10.1016/j.jcp.2018.06.043.

[139] C. Bahbah, Y. Mesri et E. Hachem, « Interpolation with restrictions in an anisotropic adaptive finite element framework », *Finite Elements in Analysis and Design*, t. 142, n° November 2017, p. 30–41, 2018, issn : 0168874X. doi : 10.1016/j.finel.2017.11.011.

[140] L. Chen, K. Asai, T. Nonomura, G. Xi et T. Liu, « A review of Backward-Facing Step (BFS) flow mechanisms, heat transfer and control », *Thermal Science and Engineering Progress*, t. 6, p. 194–216, 2018, issn : 24519049. doi : 10.1016/j.tsep.2018.04.004.

[141] P. A. Durbin, « Some Recent Developments in Turbulence Closure Modeling », *Annual Review of Fluid Mechanics*, t. 50, n° 1, p. 77–103, 2018, issn : 0066-4189. doi : 10.1146/annurev-fluid-122316-045020.

[142] D. Hermes et P.-O. Persson, « High-order solution transfer between curved triangular meshes », *ArXiv preprint arXiv :1810.06806*, 2018.

[143] S. A. Landier, S. Peron et T. Renaud, « New CFD capabilities based on intersecting arbitrary polyhedral meshes : P1-conservative interpolations and overset CFD applications », in *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2018, p. 1–19, isbn : 978-1-62410-524-1. doi : 10.2514/6.2018-1498.

[144] M. Mayr, W. Wall et M. Gee, « Adaptive time stepping for fluid-structure interaction solvers », *Finite Elements in Analysis and Design*, t. 141, nº December 2017, p. 55–69, 2018, issn : 0168874X. doi : 10.1016/j.finel.2017.12.002.

[145] E. Muller, D. Pelletier et A. Garon, « Adaptive Meshing and Time-Integrators for Monolithic Finite Element Solution of the URANS equations », in *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting*, American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2018, isbn : 978-1-62410-524-1. doi : 10.2514/6.2018-0367.

[146] R. Durand, B. G. Pantoja-Rosero et V. Oliveira, « A general mesh smoothing method for finite elements », *Finite Elements in Analysis and Design*, t. 158, nº October 2018, p. 17–30, 2019, issn : 0168874X. doi : 10.1016/j.finel.2019.01.010.

[147] L. Lambert, « Lois de paroi compatibles pour les modèles de turbulence à bas-Reynolds », mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2019.

[148] E. Muller, D. Pelletier et A. Garon, « Interactions between adaptive time-integrators and adaptive meshing in a monolithic FEM solver », *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, t. 29, nº 7, p. 2297–2323, 2019, issn : 0961-5539. doi : 10.1108/HFF-09-2018-0495.

[149] E. Muller, Y. Vautrin, D. Pelletier et A. Garon, « A local adaptive remeshing procedure for unsteady incompressible viscous flows », in *AIAA Scitech 2020 Forum*, American Institute of Aeronautics et Astronautics (AIAA), 2020. doi : 10.2514/6.2020-0085.

[150] Y. Vautrin, « Modélisation et simulation d'écoulements diphasiques de fluides séparés par une interface avec une méthode d'éléments finis adaptative en espace et en temps », thèse de doct., École Polytechnique de Montréal, 2020.

[151] Y. Vautrin, E. Muller, D. Pelletier, S. Etienne et C. Béguin, « Automatic adaptive remeshing for unsteady interfacial flows with surface tension », in *AIAA Scitech 2020 Forum*, Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2020, p. 1–20, isbn : 978-1-62410-595-1. doi : 10.2514/6.2020-0338.

ANNEXE A LOIS DE PAROI STANDARDS À UNE ET DEUX ÉCHELLES DE VITESSE

Le mot "loi" vient de l'universalité supposée de la physique de l'écoulement turbulent en proche paroi. Dans le cas d'un écoulement de Couette pleinement développé et sans gradient de pression (la notion d'universalité est donc bien douteuse), il est en effet possible d'identifier deux zones remarquables dans l'écoulement de proche paroi :

- Une région en contact immédiat avec la paroi solide : c'est la sous-couche visqueuse. L'effet de la viscosité moléculaire du fluide y est dominant et l'écoulement est localement laminaire.
- Une région suffisamment loin de la paroi pour ne plus subir les effets de la viscosité moléculaire, mais toutefois suffisamment proche pour ne pas subir les effets opérant à l'échelle de la largeur du canal : il s'agit de la région logarithmique.

Notons que ces deux zones ne sont pas directement en contact. Il existe une zone tampon entre les deux. Avant d'expliciter la loi d'évolution de la vitesse dans ces deux zones, introduisons les deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned} u_\tau &= \sqrt{\frac{|\tau_p|}{\rho}} \\ \delta_\nu &= \frac{\nu}{u_\tau} \end{aligned} \tag{A.1}$$

La quantité u_τ est la vitesse dite de frottement. Par construction, elle se veut caractéristique du cisaillement pariétal. La deuxième quantité est homogène à une distance, également caractéristique du cisaillement pariétal. Ces quantités se substituent donc respectivement à U_0 et L_0 qui sont peu représentatives de l'écoulement de proche paroi. À partir de ces quantités, il est possible d'adimensionnaliser la vitesse locale de l'écoulement et la distance à la paroi. En supposant que la paroi coïncide avec l'axe des abscisses du repère cartésien, on pose alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^+ &= \frac{\boldsymbol{u}}{u_\tau} \\ y^+ &= \frac{y}{\delta_\nu} \end{aligned} \tag{A.2}$$

La quantité y^+, de par sa définition, est analogue à un nombre de Reynolds local. A la différence du nombre de Reynolds global que nous avons déjà défini, il est beaucoup plus représentatif du régime de l'écoulement en proche paroi.

L'analyse asymptotique des équations URANS, et l'anisotropie locale de la turbulence à

proximité immédiate de la paroi, permettent alors d'aboutir à la loi suivante pour la vitesse longitudinale de l'écoulement dans la sous couche visqueuse :

$$u^+ = y^+ \tag{A.3}$$

Cette loi, dite linéaire, est fidèle à la réalité tant que $y^+ \leq 5$. L'analyse dimensionnelle, au moyen du théorème Π de Vaschy-Buckingham, permet ensuite de déduire la loi d'évolution de la vitesse longitudinale dans la région logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \tag{A.4}$$

où κ est la constante de Von Kármán, et E la constante de rugosité. L'expérience a permis d'établir $\kappa \approx 0.41$ et, dans le cas d'une paroi supposée parfaitement lisse, $E \approx 9.0$. Cette seconde loi d'évolution est communément appelée loi logarithmique. L'expérience montre que cette loi est valide pour $30 \leq y^+ \leq f(Re)$. La zone de validité de cette loi est typiquement d'autant plus étendue que le nombre de Reynolds global de l'écoulement est grand. Finalement, la vitesse normale à la paroi v^+ est supposée nulle dans chacune des deux zones que nous avons identifiées, ainsi que dans la zone tampon située entre celles-ci.

La loi de paroi standard, à une échelle de vitesse (il s'agit de u_τ), est construite à partir des deux lois décrites par les Équations (A.3) et (A.4). En première approximation, elle néglige l'existence d'une zone tampon. Cette loi de paroi s'exprime donc comme suit :

$$\begin{cases} u^+ &= y^+ & \text{si } y^+ \leq y_c^+ \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) & \text{si } y^+ \geq y_c^+ \\ v^+ &= 0 & \forall y^+ \end{cases} \tag{A.5}$$

La valeur de y_c^+ peut être déterminée en résolvant l'équation suivante par une méthode de point fixe :

$$y_c^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey_c^+) \tag{A.6}$$

On obtient alors $y_c^+ \approx 11.6$. La Figure A.1 fournit une représentation de cette loi de paroi. Il convient alors de déterminer le cisaillement pariétal à partir de cette loi, afin de l'appliquer sur les éléments de bord figurant sur la paroi numérique. Rappelons que le modèle k-ε standard est incapable de représenter la sous couche visqueuse et la zone tampon. Il est donc impératif que le raccordement entre la solution éléments finis et le modèle 1D de la loi paroi se fasse dans la région logarithmique. La détermination de l'effort tangent exercé par le solide sur le fluide, noté τ_{sf} peut donc se faire de la façon suivante :

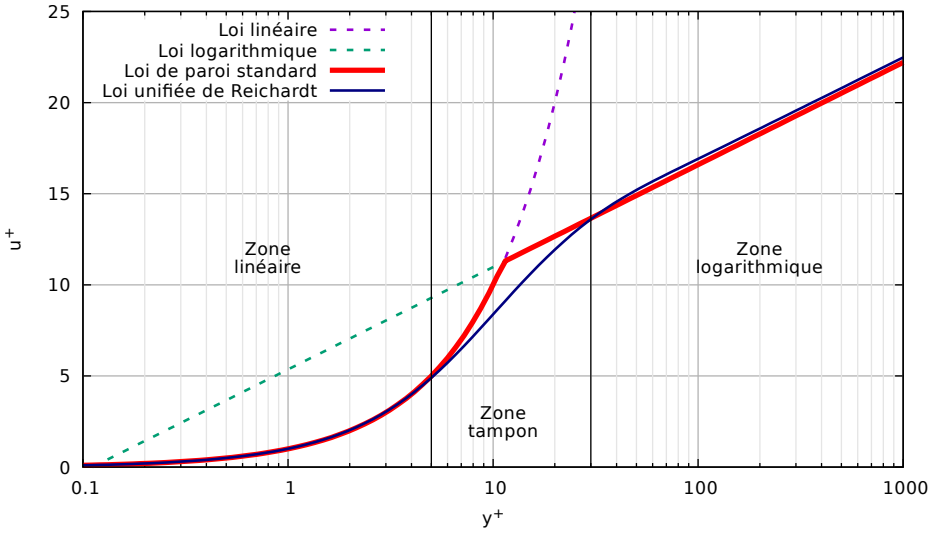


Figure A.1 Représentation de la loi de paroi standard, en superposition avec la loi unifiée proposée par Reichardt [3]

(1) On suppose que le raccordement a lieu dans la région logarithmique. La vitesse de frottement u_τ peut alors être calculée en résolvant l'équation suivante par une méthode de Newton :

$$u_\tau \log(\frac{Edu_\tau}{\nu}) - u\kappa = 0 \tag{A.7}$$

(2) On déduit alors la valeur de τ_{sf} à partir de la définition de la vitesse de frottement u_τ :

$$\tau_{sf} = -\text{sign}(u)\rho u_\tau^2 \tag{A.8}$$

L'hypothèse faite à l'étape (1) peut induire des résultats très douteux si les valeurs de y^+ aux différents nœuds de la paroi numérique sont sensiblement inférieures à 30. On ne peut toutefois vérifier la justesse de cette hypothèse qu'*a posteriori* de la simulation. Ceci rend l'usage des lois de paroi beaucoup plus complexes pour les écoulements instationnaires turbulents simulés avec le modèle k-ε standard. Pour la vitesse normale à la paroi (v dans le contexte établi), on peut juste appliquer la condition de Dirichlet $v = 0$.

Dans le cas où la paroi ne coïncide pas avec un des axes principaux du repère cartésien, fixer à 0 la vitesse normale à la paroi devient sensiblement plus compliqué. La condition de Neumann sur l'écoulement tangent doit être projetée sur les axes principaux du repère cartésien. Toutefois, les conditions limites pour chaque composante du champs de vitesse $\boldsymbol{u}$ sont alors incomplètes. Il est nécessaire de spécifier une condition traduisant la tangence de l'écoulement à la paroi. Il existe plusieurs moyen de le faire. Nous avons opté pour une

méthode permettant *en théorie* de conserver la convergence quadratique des itérations de Newton : la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La condition de tangence devient une contrainte pour l'écoulement. Soit $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u})$ la fonctionnelle à minimiser issue des équations URANS en l'absence de contrainte de tangence, et $\delta\Omega_p$ la portion de la frontière sur laquelle on utilise la loi de paroi. La fonctionnelle avec contrainte, notée $\boldsymbol{\mathcal{L}}_f(\boldsymbol{u})$, s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}) - \int_{\delta\Omega_p} f(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\, dl \tag{A.9}$$

où f est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte.

Il reste finalement la question des conditions limites à appliquer sur la paroi numérique pour les variables de turbulence. Une fois encore, l'analyse dimensionnelle et l'analyse asymptotique des équations de k et ε en proche paroi a permis de montrer qu'il convenait d'imposer les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{aligned} k &= \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \\ \varepsilon &= \frac{u_\tau^3}{\kappa d} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Ces conditions limites restent cependant variables d'une itération de Newton à l'autre. Il est donc très commode de les appliquer sous forme résiduelle. En se replaçant en variables logarithmiques, les formes résiduelles des conditions aux limites de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} - \log\left(\frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}\right) &= 0 \\ \mathcal{E} - \log\left(\frac{u_\tau^3}{\kappa d}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Les lois de paroi à une échelle de vitesse proposent donc un moyen particulièrement intéressant d'étendre le champs d'utilisation du modèle k-ε standard. Toutefois, l'usage d'une seule échelle de vitesse peut induire un comportement à l'encontre de la physique. On voit notamment que si le cisaillement pariétal s'annule, alors la valeur de k s'annule aussi et la valeur de $\mathcal{K}$ tend vers moins l'infini. En plus de pouvoir poser des problèmes numériques, ce cas pathologique peut dénaturer la production d'énergie cinétique de turbulence. Une illustration typique de cette situation est le point de stagnation qui existe en amont d'un cylindre soumis à un écoulement transverse. Une solution astucieuse a été proposée dans les travaux de Chabard [27]. Elle consiste à introduire une échelle de vitesse supplémentaire u_k, définie

de la manière suivante :

$$u_k = \left(\sqrt{C_\mu}\mathrm{e}^{\mathcal{K}}\right)^{1/2} \tag{A.12}$$

L'échelle de longueur δ_ν est alors donnée en fonction de u_k, ce qui vient modifier la définition de y^+ :

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{yu_k}{\nu} \tag{A.13}$$

Et le cisaillement pariétal τ_{sf} est désormais obtenu par la relation :

$$\tau_{sf} = -\mathrm{sign}(u)\rho u_k u_\tau \tag{A.14}$$

La formulation de la loi paroi standard, donnée par le système (A.5), reste cependant inchangée. Afin d'évaluer τ_{sf} il est toujours nécessaire de déterminer u_τ. C'est cependant beaucoup plus simple ici. La loi logarithmique permet de déduire u_τ directement :

$$u_\tau = \frac{u}{\frac{1}{\kappa}\log(Ey^+)} \tag{A.15}$$

Cette formulation a également l'avantage d'utiliser une condition limite de Neumann pour $\mathcal{K}$ pour "assouplir" le système d'équations. Il n'est en effet plus possible d'utiliser la condition de Dirichlet précédente, sans quoi on retomberait directement sur le modèle à une échelle de vitesse. L'hypothèse de cisaillement constant entre la paroi solide et la paroi numérique implique que :

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} \approx 0 \tag{A.16}$$

La condition pour ε, toujours en forme résiduelle, s'obtient en remplaçant u_τ par u_k :

$$\mathcal{E} - \log\left(\frac{{C_\mu}^{3/4}}{\kappa d}\right) - \frac{3}{2}\mathcal{K} = 0 \tag{A.17}$$

ANNEXE B FORMULATION ALE

Certains problèmes d'un grand intérêt pratique impliquent la déformation ou simplement le déplacement des frontières du domaine de calcul. On pense notamment ici aux problèmes d'interactions fluide-structure, et aux écoulements diphasiques à phases séparés. Dans le premier cas, l'écoulement du fluide va induire un mouvement de corps rigide et/ou la déformation du solide. Les nœuds présents sur la frontière du solide vont donc se déplacer dans le domaine de calcul, à une vitesse imposée par le mouvement du solide. Dans le second cas, les conditions de compatibilité dynamique et cinématique vont provoquer une déformation plus ou moins importante de l'interface entre les deux fluides. Si cet interface est explicitement représentée par la topologie du maillage, les nœuds présents sur l'interface vont eux aussi devoir se déplacer, à une vitesse égale à celle du fluide. Dans les deux cas, maintenir tous les autres nœuds du maillage fixes conduira très certainement à des retournements de mailles. De manière générale, il devient donc nécessaire de propager le déplacement des frontières dans le maillage, en appliquant un déplacement sur chaque nœud à l'intérieur du domaine de calcul. Les déplacements de ces nœuds sont totalement découplés de ceux des particules fluides qui y coïncident à l'instant considéré, et sont donc d'une certaine façon arbitraires. La formulation est alors dite ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*). La Figure B.1 présente schématiquement la différence entre les formulations Eulérienne, Lagrangienne, et ALE.

Nous soulignons que tous les développements présentés dans cette sous-section se font sous une forme *dimensionnelle*.

B.1 Vitesse de convection et loi de conservation géométrique

La formulation ALE est donc au carrefour de la formulation Eulérienne et Lagrangienne. De fait, on peut donc identifier trois repères différents [87] pour étudier le problème fluide :

- Le repère matériel : il correspond à la formulation Lagrangienne. La position courante $\boldsymbol{x}$ d'une particule fluide dépend de sa position initiale $\boldsymbol{X}_0$ à $t = 0$, et du temps t :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}_0, t) \tag{B.1}$$

  Le temps est donc la seule variable indépendante du problème dans ce repère.
- Le repère spatial : il correspond à la formulation Eulérienne. Aucune déformation de l'espace n'a lieu dans ce repère. Les coordonnées d'espace deviennent alors des variables indépendantes du problème et les nœuds du maillage sont identifiés par leurs coordon-

nées fixes $\boldsymbol{x}$. Soit α_L une quantité scalaire décrite d'un point de vue Lagrangien et α_E cette même quantité décrite d'un point de vue Eulérien. La relation de passage entre les deux est la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \alpha_E}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} \tag{B.2}$$

où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse de la particule fluide passant en $\boldsymbol{x}$ à l'instant t. La dérivée dans le membre de gauche porte alors le nom de dérivée matérielle, ou dérivée particulaire. Elle correspond à la variation de α dans le temps pour une particule donnée. On peut donc également écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_L}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial \alpha_L}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X_0}} \tag{B.3}$$

La dérivée partielle en temps dans le membre de droite de l'Équation (B.2) porte le nom de dérivée locale, tandis que l'autre terme désigne la dérivée convective.

- Le repère de travail : il correspond à la formulation ALE. Les nœuds du maillage sont identifiés par leur position initiale $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0$. Cette position initiale et le temps déterminent la position courante $\boldsymbol{x}$ d'un nœud :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_0, t) \tag{B.4}$$

La vitesse $\hat{\boldsymbol{v}}$ d'un nœud (on parle aussi de vitesse de maillage) s'exprime alors comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_0, t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{X}_0}} \tag{B.5}$$

Soit α_{ALE} la même quantité scalaire qu'évoquée précédemment mais vue en formulation ALE. En considérant que la vitesse du maillage est celle d'un fluide fictif, la formulation ALE devient alors la formulation Lagrangienne pour ce fluide fictif. En appliquant l'Équation (B.2), ceci nous permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_{ALE}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \alpha_E}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} \tag{B.6}$$

En combinant les Équations (B.2) et (B.6), on obtient alors la relation de passage suivante :

$$\left.\frac{\partial \alpha_L}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X_0}} = \left.\frac{\partial \alpha_{ALE}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{X}_0}} + \frac{\partial \alpha_E}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{c} \tag{B.7}$$

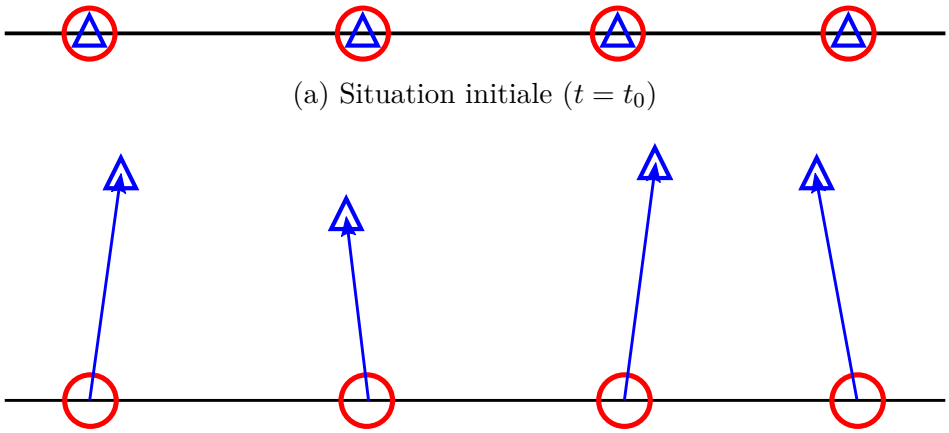
où $\boldsymbol{c}$ est alors la vitesse relative de la particule fluide vis à vis du nœud située en $\boldsymbol{x}$, par lequel la particule passe à l'instant t :

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{v}} \tag{B.8}$$

On peut alors identifier deux cas particuliers :

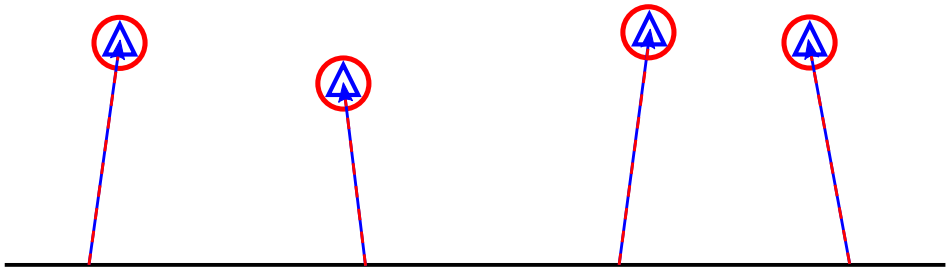
(1) $\hat{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}$: on retombe sur la formulation Eulérienne.

(2) $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}$: on retombe sur la formulation Lagrangienne.

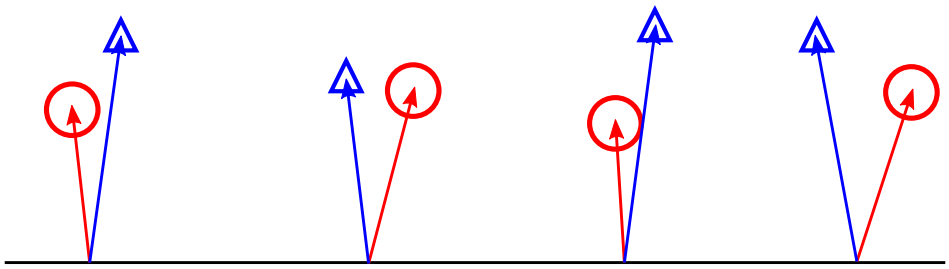


(a) Situation initiale ($t = t_0$)

(b) Formulation Eulérienne ($t = t_0 + \Delta t = t_1$)



(c) Formulation Lagrangienne ($t = t_0 + \Delta t = t_1$)



(d) Formulation ALE ($t = t_0 + \Delta t = t_1$)

Figure B.1 Illustration des formulations Eulérienne, Lagrangienne et ALE. Les triangles bleus représentent des particules fluide, tandis que les ronds rouges représentent des nœuds du maillage. Les particules fluides considérées sont celles coïncidant avec les nœuds du maillage à l'instant $t = t_0$. Figure adaptée de [87].

En pratique, l'usage de la formulation ALE implique donc *juste* de modifier la vitesse du champs convectif intervenant dans la dérivée convective. En guise d'exemple, l'équation de continuité est dans ce contexte :

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X_0}} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\rho) = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \tag{B.9}$$

Obtenir rigoureusement ce résultat, en passant par la forme intégrale de la conservation de la masse, n'est cependant pas si direct. Considérons justement cette forme intégrale. En suivant un raisonnement analogue à celui utilisé pour déterminer la dérivée particulaire en formulation ALE, on peut montrer que :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{X}_0}} \int_{\Omega_{ALE}(t)} \rho \, d\Omega + \int_{\delta\Omega_{ALE}(t)} \rho \boldsymbol{c} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dl = 0 \tag{B.10}$$

Cette formulation ressemble à celle de l'Équation (3.3). On remarque toutefois qu'ici la dérivée partielle en temps est située à l'extérieur de la première intégrale, car le volume Ω_{ALE} est désormais une fonction du temps. Dans le cas d'un écoulement incompressible et de vitesse uniforme $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}(t)$, on peut écrire :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{X}_0}} \int_{\Omega_{ALE}(t)} 1 \, d\Omega = \int_{\delta\Omega_{ALE}(t)} \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dl \tag{B.11}$$

Cette équation constitue la loi de conservation géométrique *continue* (CGCL), introduite notamment par Thomas et Lombard [14] dans des travaux portant sur la méthode des différences finies. Physiquement, elle stipule que la variation du volume Ω_{ALE} dans le temps doit être rigoureusement égale à la somme des aires algébriques balayées par la frontière de ce volume. En intégrant cette loi dans le temps, sur l'équivalent d'un pas de temps $h_n = t_{n+1} - t_n$, on obtient alors la loi de conservation géométrique *discrète* (DGCL) :

$$\Omega_{ALE}(t_{n+1}) - \Omega_{ALE}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{\delta\Omega_{ALE}(t)} \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dl \right) dt \tag{B.12}$$

Si la formulation du problème permet de calculer exactement le membre de gauche de cette équation, il devient donc nécessaire de calculer exactement les flux impliqués dans le membre de droite. Cette formulation se prête bien à aux méthodes de volumes finis. Ce n'est toutefois pas le cas en éléments finis, où il est plus commode de considérer la divergence de la vitesse du maillage $\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}$.

La question de la DGCL a été longuement étudiée par Farhat *et al.* [69, 73], principalement

dans le contexte des volumes finis. Ils démontrent par exemple que satisfaire la DGCL avec un schéma d'intégration en temps précis à l'ordre p sur un maillage fixe est une condition suffisante pour que le schéma soit *au moins* d'ordre 1 sur le maillage mobile [69]. Faisant suite à des travaux ayant rapporté des instabilités numériques lors de l'usage de schémas ne satisfaisant pas la DGCL, Farhat *et al.* [73] ont également montré, pour un certain nombre de schémas d'intégration en temps, que la satisfaction de la DGCL est une condition nécessaire et suffisante pour que ces schémas conservent, sur maillage mobile, leur propriété de stabilité non linéaire sur maillage fixe. La relation entre stabilité du schéma et DGCL restent toutefois très controversée [86].

Jusqu'ici, la satisfaction de la DGCL a été énoncée pour un écoulement incompressible à vitesse uniforme. Dans la continuité des travaux de Farhat, Etienne *et al.* [113] ont proposé une nouvelle perspective sur la formulation ALE dans le contexte des éléments finis. Cette perspective introduit trois niveaux de conformité d'une formulation ALE vis à vis de la DGCL :

(1) Niveau 1 : Une formulation ALE respectant la DGCL doit être capable de résoudre exactement l'écoulement nul sur une grille mobile arbitraire.
(2) Niveau 2 : Extension du niveau 1 au cas des écoulements à vitesse uniforme.
(3) Niveau 3 : Une formulation ALE respectant la DGCL et adéquatement construite doit permettre de préserver, sur maillage mobile, le taux de convergence théorique de l'intégrateur temporel sur maillage fixe, et ce pour un écoulement arbitraire.

Une approche de niveau 3 a été introduite par Förster *et al.* [97]. Elle s'inscrit également dans le contexte de la méthode des éléments finis. La formulation proposée ne nécessite pas de calculer la divergence de la vitesse du maillage. Aucune modification de l'intégrateur temporel n'est par ailleurs requise. L'idée est de ramener la forme intégrale du problème sur l'élément de référence pour chaque élément du domaine. Ce faisant il devient possible de permuter la dérivée temporelle et l'intégrale sur le terme instationnaire. Pour illustrer simplement les choses, considérons la loi de conservation de la quantité de mouvement en l'absence de forces volumiques. En formulation ALE, la forme intégrale de cette loi s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{ALE}(t)} \rho \boldsymbol{u}\, d\Omega + \int_{\delta\Omega_{ALE}(t)} \rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{c}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\, dl = \int_{\delta\Omega_{ALE}(t)} \underline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, d\Omega \tag{B.13}$$

Le théorème de la divergence permet de transformer les termes surfaciques en termes volumiques :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{ALE}(t)} \rho \boldsymbol{u}\, d\Omega + \int_{\Omega_{ALE}(t)} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{c})\; d\Omega = \int_{\Omega_{ALE}(t)} \boldsymbol{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{\sigma}}\, d\Omega \tag{B.14}$$

En considérant que Ω_{ALE} représente un élément du domaine de calcul, on peut exprimer ces équations sur l'élément de référence. Cette opération fait typiquement apparaître le Jacobien de la transformation $J_e(t)$ de l'élément réel vers l'élément de référence. L'élément réel subissant des déformations, le Jacobien est en effet une fonction du temps. Cependant, l'élément de référence est indépendant du temps. On peut donc permuter la dérivée temporelle et l'intégrale dans le terme instationnaire. Il vient :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \rho \boldsymbol{u} J_e}{\partial t}\, d\Omega + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{c})\, J_e\, d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} J_e\, d\Omega \tag{B.15}$$

Un raisonnement similaire pour la conservation de la masse en formulation ALE permet de montrer :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \rho J_e}{\partial t}\, d\Omega + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{c})\, J_e\, d\Omega = 0 \tag{B.16}$$

Cette dernière équation est valide quelque soit l'élément de référence considéré, on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \rho J_e}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{c})\, J_e \tag{B.17}$$

Remarquons que l'on peut aussi retrouver la CGCL en considérant l'Équation (B.16). En explicitant davantage la dérivée temporelle et le terme de divergence il vient :

$$\int_{\Omega_0} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) \right)}_{=0} J_e\, d\Omega + \int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial J_e}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \hat{\boldsymbol{v}})\, J_e\, d\Omega = 0 \tag{B.18}$$

On reconnait dans la première intégrale la loi de conservation de la masse telle qu'obtenue en formulation Eulérienne. Ce premier terme est donc nul. Il suffit ensuite de supposer une masse volumique constante pour le fluide, puis de repasser sur l'élément réel pour retrouver la CGCL. L'hypothèse d'écoulement uniforme n'est donc plus nécessaire lorsque l'on passe par l'élément de référence. Si l'on analyse maintenant le terme de convection de l'Équation (B.15), on peut montrer sans hypothèse supplémentaire que :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{c}) = \rho (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{u} + [\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{c})]\, \boldsymbol{u} \tag{B.19}$$

En explicitant le terme instationnaire on a par ailleurs :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u} J_e}{\partial t} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} J_e + \boldsymbol{u} \frac{\partial \rho J_e}{\partial t} \tag{B.20}$$

La combinaisons des Équations (B.17), (B.19) et (B.20) nous permet de simplifier grandement

l'Équation (B.15) pour obtenir :

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} J_e \, d\Omega + \int_{\Omega_0} \rho (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{u} J_e \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} J_e \, d\Omega \tag{B.21}$$

Afin de satisfaire la GCL avec une conformité de niveau 2, cette formulation exige donc seulement une évaluation exacte du Jacobien de la transformation. Notre formulation éléments finis utilise des éléments de type Taylor-Hood P2-P1 (sub-paramétriques ou isoparamétriques). Le Jacobien de la transformation de l'élément réel vers l'élément de référence est ainsi polynomial. Toutefois les intégrandes de la deuxième et de la troisième intégrales ne seront polynomiales que pour les éléments sub-paramétriques. Dans ce cas, une quadrature de Gauss-Legendre avec suffisamment de points de Gauss permet d'évaluer exactement chaque intégrale. La discrétisation en temps peut s'effectuer comme dans le cas de la formulation Eulérienne. Atteindre une conformité de niveau 3 pour la GCL exige toutefois de calculer la vitesse du maillage à partir d'une discrétisation en temps de même ordre que celle utilisée pour évaluer le terme instationnaire des équations [97]. Dans des travaux relativement récents menés au laboratoire, Hay *et al.* Hay2014 ont utilisé cette formulation avec des intégrateurs temporels d'ordre élevé (BDF et Runge-Kutta implicite). La conformité de niveau 3 de la GCL a bien été observée.

Pour terminer sur le sujet de la GCL, notons encore que l'Équation (B.21) est valide sur un élément de référence quelconque. Ceci nous permet alors de déduire les équations de Navier-Stokes en formulation ALE, en l'absence de forces volumiques :

$$\begin{gathered} \rho \left(\left. \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{x_0}} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \, \boldsymbol{u} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{gathered} \tag{B.22}$$

La méthode des éléments finis avec l'approche de Galerkin peut alors être utilisée pour discrétiser ces équations en espace. Cependant l'application du schéma d'intégration temporelle exige d'abord de ramener le problème sur l'élément de référence [129]. En suivant un raisonnement très analogue à celui que nous avons exposé pour démontrer l'approche de Förster *et al.* , on peut également déduire la formulation ALE des autres équations de transport que nous avons déjà évoquées. Les changements vis à vis de la formulation Eulérienne se résument à chaque fois à remplacer la vitesse de convection $\boldsymbol{u}$ par la vitesse relative $\boldsymbol{c}$.

B.2 Propagation des déplacements

Au delà de modifier très légèrement la forme des équations à résoudre, nous avons déjà souligné que la formulation ALE exige surtout de pouvoir propager adéquatement dans le domaine de calcul les déplacements de ses frontières. Il existe une grande variété d'outils pour ce faire [87] :

- l'interpolation transfinie, ou l'interpolation classique des déplacements
- la relaxation de maillage
- la méthode du pseudo-solide

Cette liste n'est pas exhaustive. Ces trois types d'outils ont pour point commun de préserver la topologie du maillage. Ils sont ainsi assimilables à de l'adaptation de maillage de type r. Aucun transfert de la solution éléments finis n'est nécessaire après la mise-à-jour du maillage. Notre implémentation de travail repose sur le troisième outil. L'idée consiste à voir le domaine occupé par le fluide comme un solide déformable. La physique du problème fluide simulé fournit les déplacements des nœuds à la frontière du domaine de calcul. Ces déplacements définissent alors les conditions limites pour le problème régissant la mécanique du pseudo-solide. Le problème fort dans ce contexte est celui de l'équilibre statique du pseudo-solide en l'absence de forces volumiques. Il s'exprime donc comme suit :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}_{ps}} = \mathbf{0} \tag{B.23}$$

où $\underline{\boldsymbol{\sigma}_{ps}}$ est le tenseur des contraintes internes dans le solide. Dans notre cas, $\underline{\boldsymbol{\sigma}_{ps}}$ est donné par la loi de l'élasticité linéaire de Hooke :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}_{ps}} = \lambda_{ps} \mathrm{Tr}\,(\underline{\boldsymbol{E}})\,\underline{\boldsymbol{I}} + 2\mu_{ps}\underline{\boldsymbol{E}} \tag{B.24}$$

où $\underline{\boldsymbol{E}}$ désigne ici le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarisé, et λ_{ps} et μ_{ps} sont les coefficients de Lamé du pseudo-solide. En notant $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ le vecteur déplacements propre à chaque nœud du domaine de calcul, le tenseur $\underline{\boldsymbol{E}}$ s'exprime alors :

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\xi})^T) \tag{B.25}$$

Les coefficients de Lamé sont par ailleurs donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_{ps} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu_{ps} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{B.26}$$

Les quantités E et ν désignent ici respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du pseudo-solide [1]

La résolution de ce problème de mécanique peut tout à fait se faire par la méthode des éléments finis. C'est d'ailleurs ainsi que nous procédons. La résolution du système d'équations permet de mettre à jour le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ en chaque nœud du domaine au temps courant. La vitesse du maillage $\hat{\boldsymbol{v}}$ est finalement donnée en chacun des nœuds par la relation suivante :

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \tag{B.27}$$

1. En pratique on peut choisir de faire varier ces coefficients dans le domaine. Cela peut se révéler très utile pour rigidifier le maillage à proximité des frontières mobiles.

ANNEXE C GÉNÉRATION DE MAILLAGE

Beaucoup de méthodes existent pour traiter la question de la génération de maillage en éléments finis. Dès 1988 [25], Ho-Le propose une première classification de ces méthodes et en donne une comparaison succincte selon quatre critères :

- Type d'élément
- Forme des éléments
- Contrôle de la densité de maillage
- Coût de calcul

Quant à la classification des méthodes, elle repose sur quatre grandes catégories :

1- Topologie du maillage en premier
2- Noeuds en premier
3- Noeuds et éléments en même temps
4- Maillage auxiliaire

Dans la première catégorie, on doit disposer de la topologie du maillage en premier, ce qui n'est possible que si l'on dispose d'un précédent maillage. Cette catégorie regroupe les approches utilisant un opérateur de lissage du maillage. La seconde catégorie repose sur la connaissance de l'emplacement des noeuds, et les méthodes diffèrent par la façon dont on procède à leur connexion. La troisième catégorie regroupe les méthodes qui ne font pas de réelle distinction entre une phase de positionnement des noeuds et une phase de génération de la topologie. La méthode de maillage par avance de front en est un exemple typique. Enfin la dernière catégorie repose sur l'usage d'un maillage auxilliaire, qui peut être adapté à la géométrie du domaine de calcul de plusieurs façons. Ce type de méthode est particulièrement utile pour générer des maillages structurés. Une présentation alternative des méthodes de génération de maillage pour les domaines 2D, sans classification particulière, est aussi proposée par Lo [132]. Il y aborde notamment les techniques de décomposition en *quadtree*, et la triangulation de Delaunay. La première technique est particulièrement utile en vue d'adapter un maillage par (dé)raffinements locaux. La méthode de Delaunay est par ailleurs très populaire pour la qualité de la triangulation qu'elle fournit. Celle-ci possède en effet une propriété particulièrement intéressante pour la simulation numérique par éléments finis : de toutes les triangulations possibles à partir d'un ensemble de points en 2D, celle de Delaunay maximise la sommes des angles minimums de chaque triangle. On limite ainsi le risque d'aboutir à des éléments dégénérés. Une partie non triviale dans les algorithmes de génération de maillage par méthode de Delaunay demeure néanmoins l'insertion de nouveaux points. Une façon élégante

de contourner le problème est de recourir à une méthode hybride, reposant sur l'insertion de points par la méthode de front mobile, et la génération d'éléments par la méthode de Delaunay.

Afin de générer la discrétisation spatiale du domaine de calcul, nous utilisons ici une méthode de maillage par avance de front (ou par front mobile). Son origine remonte aux travaux de Lo en 1985 [19]. L'algorithme de génération de maillage est plus précisément basé sur la méthode développée par Peraire *et al.* [22]. On présente dans la suite cette méthode telle qu'implémentée dans le code assurant la génération de maillage. On aborde ensuite assez longuement la question de l'arborescence en *quadtree*. Au cours des travaux, cette structure de donnée a été largement utilisée à plusieurs fins, dont la principale est celle de la génération de maillage.

C.1 Méthode par avance de front

La méthode par avance de front peut être décomposée en deux étapes successives :

(1) la discrétisation des frontières du domaine

(2) la discrétisation intérieure du domaine

La première étape aboutit à la formation du front initial, composé d'éléments 1D si un maillage 2D doit être généré (ce sera toujours notre cas ici). La deuxième étape consiste à faire avancer ce front pour générer les éléments 2D du maillage. La suite décrit davantage chacune de ces deux étapes.

C.1.1 Discrétisation des courbes frontières

La formation du front initial suppose de discrétiser les courbes délimitant le domaine. Cette discrétisation doit se faire conformément à une cartographie de la taille de maille δ à générer dans le domaine. La cartographie est représentée sous forme discrète, à partir d'un maillage de fond. La taille δ est spécifiée en chacun des nœuds de ce maillage, tandis que les fonctions de forme associées à chaque élément permettent de reconstruire localement une approximation linéaire de la taille δ. Afin d'ajouter les nœuds sur une courbe, un échantillonnage adaptatif de celle-ci est défini à partir de l'évolution de δ le long de la courbe. Il en résulte un nombre de point d'échantillonnage $N_s = f(\delta)$. Le nombre de nœuds sommet N_c ajoutés sur la courbe

est alors obtenu par :

$$\begin{aligned} N_c &= \left\lfloor \int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{1}{\delta(s)}\, ds \right\rfloor + n_c \\ &= \left\lfloor \sum_{i=1}^{N_s-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta(s_i)} + \frac{1}{\delta(s_{i+1})} \right) \cdot (s_{i+1} - s_i) \right\rfloor + n_c \end{aligned} \tag{C.1}$$

La valeur de n_c diffère selon que la courbe est ouverte ou fermée. Si la courbe est fermée on a $n_c = 1$, tandis que pour une courbe ouverte on aura $n_c = 2$. Par ailleurs les quantités s_{min} et s_{max} réfèrent aux paramètres de début et de fin de la courbe à discrétiser. Chaque courbe est associée à une paramétrisation bornée par les valeurs de s_{min} et s_{max}. Le paramètre de courbe peut se voir comme une abscisse curviligne. Chaque nœud j de la courbe se voit attribuer une valeur s_j du paramètre qui peut ensuite, selon le type de courbe à discrétiser (arc linéaire, arc quadratique, cercle, spline ...), être convertie en coordonnées d'espace 2D (x, y).

L'ensemble des segments reliant deux nœuds sommet adjacents forment alors une collection d'éléments de bord 1D qui s'identifie au front initial. Il importe toutefois que chacun des segments soit orienté convenablement, soit de telle sorte que la région à mailler se situe sur leur gauche.

C.1.2 Discrétisation du domaine

La génération des éléments dans le domaine peut débuter dès lors qu'un front initial fermé est obtenu. Conformément à la recommandation de Peraire [22], les segments du front sont classés par longueur de sorte à toujours traiter le plus court en premier. Ainsi, on s'assure de pouvoir créer les éléments plus petits en premier pour respecter au mieux la cartographie de δ. La génération des éléments 2D consiste typiquement en une boucle *while* sur les segments du front, leur épuisement constituant la condition de sortie de la boucle. Le traitement du plus petit segment du front se fait selon plusieurs étapes :

(1) Évaluer la taille δ au milieu du segment, ainsi que l'étirement S et la direction d'étirement $\boldsymbol{D}_s = (\alpha_x, \alpha_y)$ le cas échéant.
(2) Établir la liste des nœuds candidats pour fermer l'élément en instance de création.
(3) Établir le candidat à retenir et former l'élément.
(4) Mettre à jour la liste des segments du front.

On note A et B les extrémités du segment du front en cours de traitement, et I le milieu de [AB]. On note par ailleurs (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_I, y_I) les coordonnées de ces points dans le plan physique. La première étape consiste en l'interpolation du triplet $(\delta, S, \boldsymbol{D}_s)$ au point I pour définir une matrice de transformation $\underline{\boldsymbol{M}}$ du plan physique réel vers un plan transformé,

où l'élément à ajouter serait un triangle équilatéral de côté unitaire. La matrice $\underline{\boldsymbol{M}}$ est donnée par :

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\delta S} \begin{bmatrix} \alpha_x^2 + S\alpha_y^2 & (1-S)\alpha_x\alpha_y \\ (1-S)\alpha_x\alpha_y & S\alpha_x^2 + \alpha_y^2 \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

En pratique l'étirement S et sa direction $\boldsymbol{D}_s$ ne sont pertinents que si la génération de maillage fait suite à une méthode d'adaptation de maillage anisotrope. Ce ne sera pas notre cas ici. Par défaut on pose donc $S = 1$ et $\boldsymbol{D}_s = (1, 0)$. On a donc finalement :

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

À partir de cette matrice l'étape 2 établit la position idéale du nouveau nœud sommet à ajouter au maillage pour fermer l'élément. On note A', B' et I' les correspondances respectives de A, B et I dans le plan transformé, et (x'_A, y'_A), (x'_B, y'_B) et (x'_I, y'_I) leurs coordonnées. On a :

$$\boldsymbol{A'} = \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{A} \tag{C.4}$$

$$\boldsymbol{B'} = \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{B} \tag{C.5}$$

$$\boldsymbol{I'} = \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{I} \tag{C.6}$$

On peut alors définir un point C' de coordonnées (x'_C, y'_C) tel que :

$$\begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_I + (y'_A - y'_B)H \\ y'_I + (x'_B - x'_A)H \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

où la quantité H est une fonction de $\parallel A'B' \parallel$ [22]. Le point C' correspond, dans le plan transformé, au point idéal pour fermer l'élément à créer. On note C sa correspondance dans le plan physique, de coordonnées (x_C, y_C). Il vient :

$$\boldsymbol{C} = \underline{\boldsymbol{M}^{-1}} \cdot \boldsymbol{C'} \tag{C.8}$$

Le point C devient le candidat principal pour compléter l'élément dans le plan physique. Toutefois, on considère également comme candidats les nœuds sommets du front (autres que A et B) se trouvant dans un rayon R du point C. Les candidats sont alors classés en fonction de leur distance au segment [AB].

L'étape 3 permet d'établir le candidat à retenir. Pour ce faire, la validité des candidats est évaluée. Un candidat M est valide dès lors que :

(a) Le triangle ABM ne contient aucun autre point candidat à l'exception de C

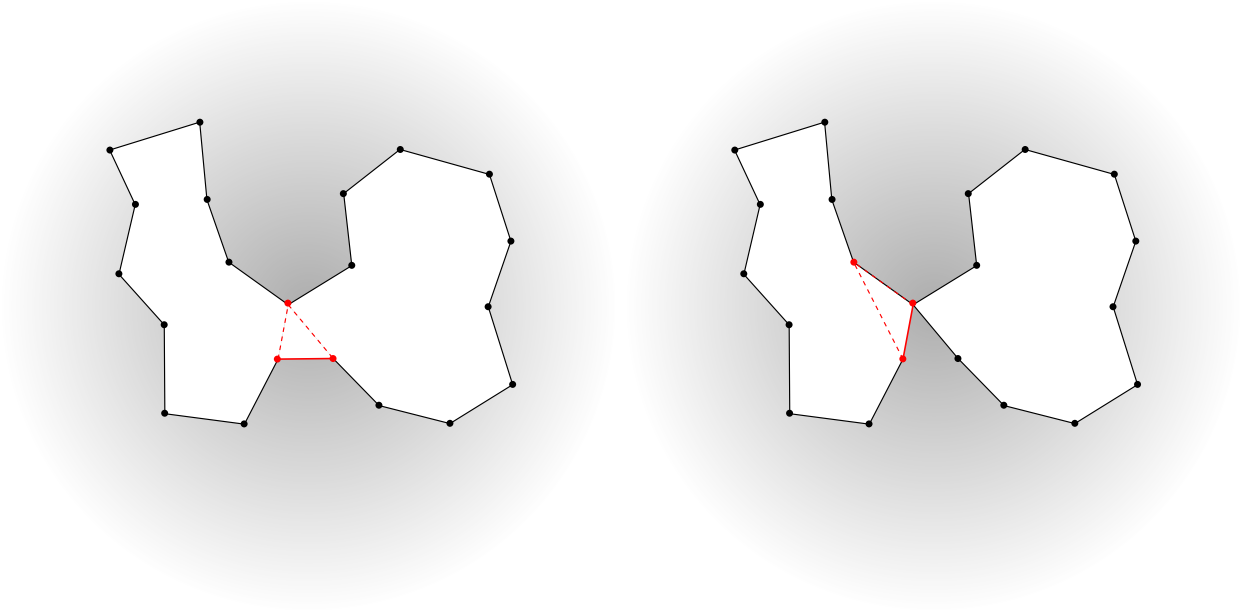
(b) Le segment [IM] n'intersecte aucun autre segment du front

(c) Le triangle ABM a une surface positive

La liste des candidats est traversée selon le classement défini à la fin de l'étape 2. Le premier candidat valide devient le candidat retenu. On peut alors ajouter l'élément complété au maillage.

Finalement, l'ajout d'un élément implique de mettre à jour la liste des segments constituant le front. Le segment [AB], formant la base du nouvel élément, est toujours retiré du front. Dépendamment de la nature du point M retenu, plusieurs cas sont ensuite possibles. Si le segment [AM] était déjà un segment du front, il est lui aussi retiré. Dans le cas contraire, ce segment est ajouté au front. Le traitement du segment [BM] suit la même logique.

Nous terminons ici par une remarque extrêmement importante : la méthode par avance de front ne nécessite absolument pas que le front soit continu. En d'autres termes, le front peut délimiter plusieurs zones disjointes à mailler lors de la discrétisation du domaine. Le front a pour seul requis d'être fermé. La Figure C.1 illustre le passage d'un front unique à deux fronts disjoints.



(a) Front unique (b) Deux fronts disjoints

Figure C.1 Passage d'un front unique à deux fronts disjoints dans la méthode de génération de maillage par avance de front. Le segment rouge représente la base du prochain triangle généré.

C.2 Arborescence de type *quadtree*

C.2.1 Principe

En début de chapitre, nous avons évoqué la décomposition en *quadtree* comme une possibilité viable pour générer un maillage. Toutefois le terme de *quadtree* réfère plus généralement à un concept de structure de données hiérarchique, ou d'arborescence. Cette structure de données peut notamment être utilisée pour stocker une collection de polygones [18] telle qu'un maillage. L'arborescence en *quadtree* est basée sur le principe de la décomposition récursive. Un *quad* est une entité, éventuellement divisée en quatre sous-entités égales en regard d'une certaine mesure. Ces sous-entités peuvent être subdivisées à leur tour pour former des *quad* fils. A l'inverse on appelle fréquemment *quad* feuille un *quad* qui n'a pas été divisé. Un rectangle, divisé en quatre rectangles d'aire égale, est une façon commode de représenter un *quad* et ses enfants. La division d'un *quad* permet d'identifier quatre secteurs dans le *quad* : le nord-ouest(NO), le nord-est(NE), le sud-ouest(SO) et le sud-est(SE). La subdivision des *quad* doit être telle que chaque *quad* feuille contienne une donnée simple (on parle de *clé*) permettant d'identifier un objet de base à stocker, et ce sans confusion possible. Afin de naviguer efficacement dans l'arbre, la représentation informatique d'un *quad* doit comporter plusieurs pointeurs : un vers le *quad* parent, et un vers chaque *quad* fils (ceux-ci pouvant ne pas être associés si le *quad* courant est un *quad* feuille). Via ce mécanisme, chaque *quad* se voit attribuer un étage dans l'arbre. L'unique *quad* d'étage 0 porte le nom de *quad* racine. La Figure C.2 tente d'illustrer au mieux ce qui vient d'être dit. Un lecteur intéressé par cette structure de données pourra également consulter, en complément de ce qui suit, le livre de Rainald Löhner [111].

C.2.2 Stockage d'un maillage

Dans notre cas, nous utilisons l'arborescence en *quadtree* afin de stocker le maillage de fond évoqué à la sous-section précédente. En guise d'objet de base à stocker dans les *quad* feuilles, le choix s'est tourné vers les éléments du maillage (et non vers les nœuds). La clé d'un *quad* est donc un numéro d'élément. Le remplissage de la structure est simple. Le programme boucle sur les éléments du maillage de fond. Pour chaque élément, on calcule la position de son centroïde et on localise celui-ci dans un *quad* actuellement feuille. Si ce *quad* est déjà associé à un élément du maillage de fond, il est divisé. On doit alors réaffecter chacun des deux éléments à un des *quads* fils. Dans le cas où le même *quad* fils contiendrait les centroïdes des deux éléments, on répète la procédure de subdivision sur ce quad. On poursuit ainsi jusqu'à ce que les deux éléments soient affectés à des *quads* fils distincts.

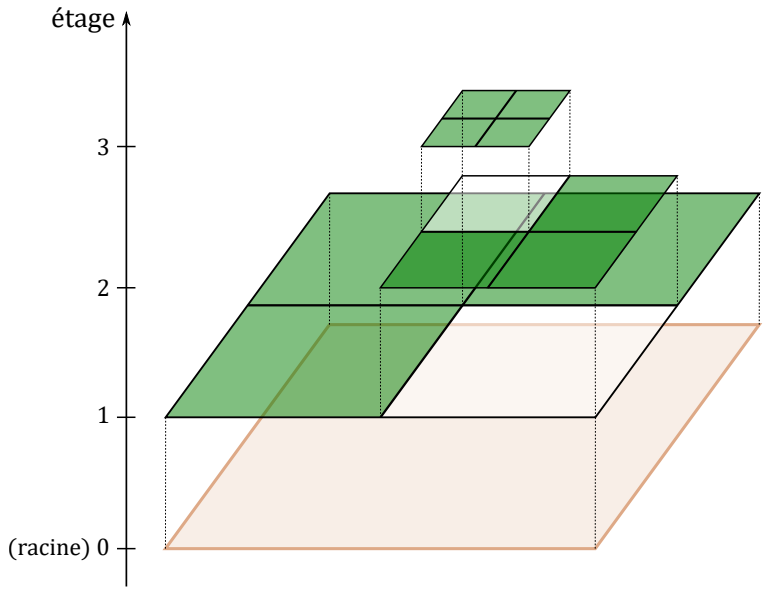


Figure C.2 Principe de l'arborescence en *quadtree*. Les *quads* feuille sont dépeints en vert, tandis que le *quad* racine est dépeint en marron.

C.2.3 Recherche dans l'arbre

Lors de la génération de maillage, nous avons souligné qu'il était nécessaire d'interpoler la taille de maille à générer dans le maillage de fond aux points milieux des segments du front. Pour chacun de ces noeuds, cela suppose donc de pouvoir localiser l'élément du maillage de fond qui les contient. C'est ici que la structure en *quadtree* démontre tout son intérêt. Elle permet en général une recherche de complexité $O(\log(n))$, là où une recherche brutale (tous les éléments sont testés jusqu'à trouver le bon) serait de complexité $O(n)$. La complexité logarithmique n'est pas sans rappeler la complexité de la recherche dichotomique, logarithmique elle aussi. Le principe de la recherche dans un *quadtree* est d'ailleurs le même : *diviser pour mieux régner*. La première étape consiste à trouver le *quad* contenant le nœud faisant l'objet de la recherche. La recherche démarre du *quad* racine. À l'aide des coordonnées (x, y) du nœud, et des coordonnées du centre du *quad* (x_{mid}, y_{mid}), on détermine quel secteur (et donc quel *quad* fils) contient le nœud avant de passer à l'étage suivant. Le *quad* fils retenu joue alors le rôle de *quad* racine. Ce processus se répète jusqu'à atteindre un *quad* feuille. On teste alors si l'élément qu'il représente contient lui-même le nœud. Dans beaucoup de cas la recherche s'arrêtera là. Toutefois, il peut arriver que cet élément ne contienne pas le nœud. Plusieurs stratégies peuvent alors s'envisager pour poursuivre la recherche :

1) Tester l'élément contenu dans des *quads* "voisins"
2) Tester les éléments adjacents à celui fouillé

3) Remonter dans l'arbre puis redescendre fouiller les feuilles proches

Au début de nos travaux, la recherche s'opérait selon la première approche. Les voisins directs d'un *quad* ne sont toutefois pas simples à récupérer, car un *quad* n'a connaissance que de son parent et de ses éventuelles enfants. En d'autres termes il n'est pas possible de naviguer directement d'une branche de l'arbre à une autre. Pour récupérer les *quads* voisins, le code utilisait à l'origine la largeur L et la hauteur H du *quad*, ainsi que les coordonnées de son centre (x_{mid}, y_{mid}). À partir de ces données on peut en effet définir 8 points autour du *quad* :

$$\begin{array}{lcllll}
(x_1, y_1) & = & (& x_{mid} + L & , & y_{mid} \quad) \\
(x_2, y_2) & = & (& x_{mid} + L & , & y_{mid} + H \quad) \\
(x_3, y_3) & = & (& x_{mid} & , & y_{mid} + H \quad) \\
(x_4, y_4) & = & (& x_{mid} - L & , & y_{mid} + H \quad) \\
(x_5, y_5) & = & (& x_{mid} - L & , & y_{mid} \quad) \\
(x_6, y_6) & = & (& x_{mid} - L & , & y_{mid} - H \quad) \\
(x_7, y_7) & = & (& x_{mid} & , & y_{mid} - H \quad) \\
(x_8, y_8) & = & (& x_{mid} + L & , & y_{mid} - H \quad)
\end{array} \tag{C.9}$$

Un *quad* feuille d'étage égal ou inférieur à celui du *quad* contenant le nœud, et qui contient un de ces 8 points, définit un *quad* voisin valide. L'élément qu'il contient, s'il existe, est testé pour évaluer s'il contient le nœud d'intéret. Dans la très grande majorité des cas, cette procédure permet de localiser le nœud d'intérêt. Néanmoins, des cas pathologiques peuvent se produire si le maillage comporte des éléments allongés. Le centroïde de l'élément contenant le nœud d'intérêt peut alors se situer dans un *quad* qui n'est pas adjacent au *quad* feuille contenant le nœud. Ce cas pathologique est présenté à la Figure C.3.

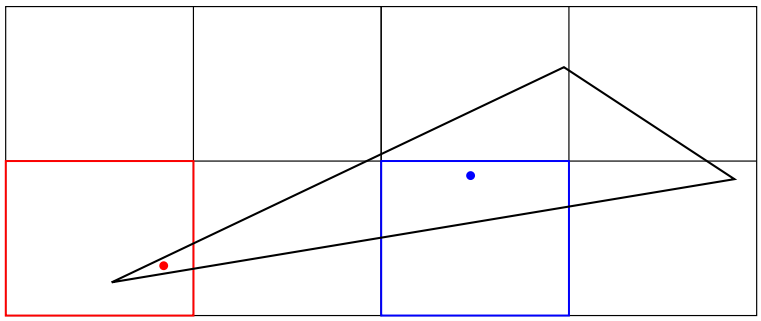


Figure C.3 Recherche dans l'arborescence - Cas pathologique lors de la recherche selon la première approche. Le nœud à localiser est en rouge. Le *quad* qui le contient est également repéré en rouge. L'élément qui contient le nœud, dont le centroïde est repéré par le point bleu, est contenu dans le *quad* bleu. Ce *quad* n'est pas un voisin direct du *quad* rouge.

Dans la seconde approche, les éléments adjacents de l'élément fouillé sont aisément récupérables à l'aide de la connectivité inverse (nœud vers élément) des nœuds sommet de cet élément. Cependant, un cas pathologique peut se produire dès lors que l'élément fouillé et ses éléments adjacents ne couvrent pas l'aire du *quad* feuille contenant le nœud d'intérêt. Cette situation est illustrée à la Figure C.4.

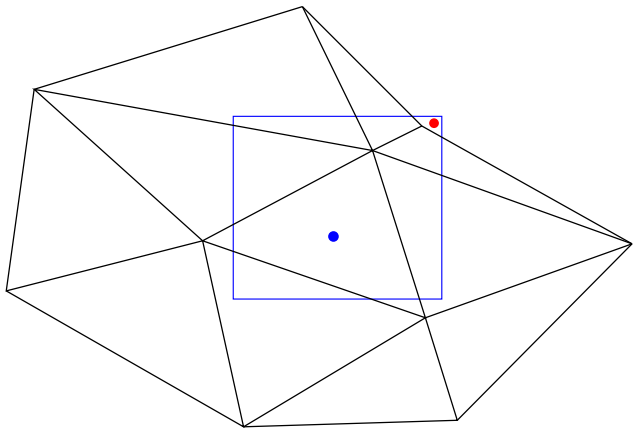


Figure C.4 Recherche dans l'arborescence - Cas pathologique lors de la recherche selon la seconde approche. Le nœud à localiser est en rouge. Les éléments voisins de l'élément stocké dans le *quad* bleu ne contiennent pas le nœud rouge.

La dernière approche est celle retenue dans notre implémentation. Cette approche a le mérite d'être robuste dans tous les cas, à une exception près que nous aborderons dans la suite. Son coût est sa principale limite. La structure en arbre et la notion d'étage sont mises à profit dans cette approche. Le *quad* contenant le nœud d'intérêt est un *quad* feuille, il n'est donc pas possible de monter à un étage supérieure. L'idée est donc de descendre d'un étage pour fouiller successivement les *quads* frères de celui contenant le nœud. Si un élément n'est toujours pas trouvé pour le nœud d'intérêt, on répète la procédure en descendant à nouveau d'un étage, et cela jusqu'à trouver l'élément recherché ou jusqu'à être descendu jusqu'au *quad* racine. Cette dernière éventualité peut se produire lorsque le nœud d'intérêt figure sur une frontière incurvée du domaine. Dans un tel cas, le nœud peut n'appartenir rigoureusement à aucun élément du maillage de fond. Pour mitiger cette situation, illustrée à la Figure C.5, un pointeur vers l'élément le plus proche du nœud d'intérêt est mis à jour au cours de la recherche. Si aucun élément ne contient rigoureusement le nœud, celui-ci est alors localisé de force dans l'élément le plus proche.

Nous souhaitons émettre une remarque importante. Le coût nécessaire pour remonter jusqu'au *quad* racine via la troisième approche pourrait être potentiellement réduit en changeant la clé utilisée pour chaque *quad*. Telle que nous l'avons utilisé, l'arborescence est construite

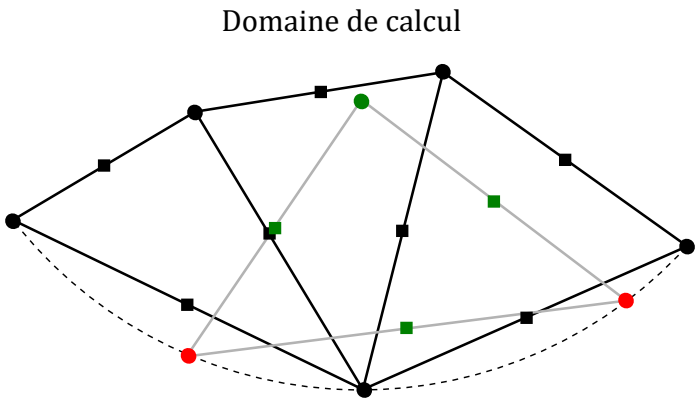
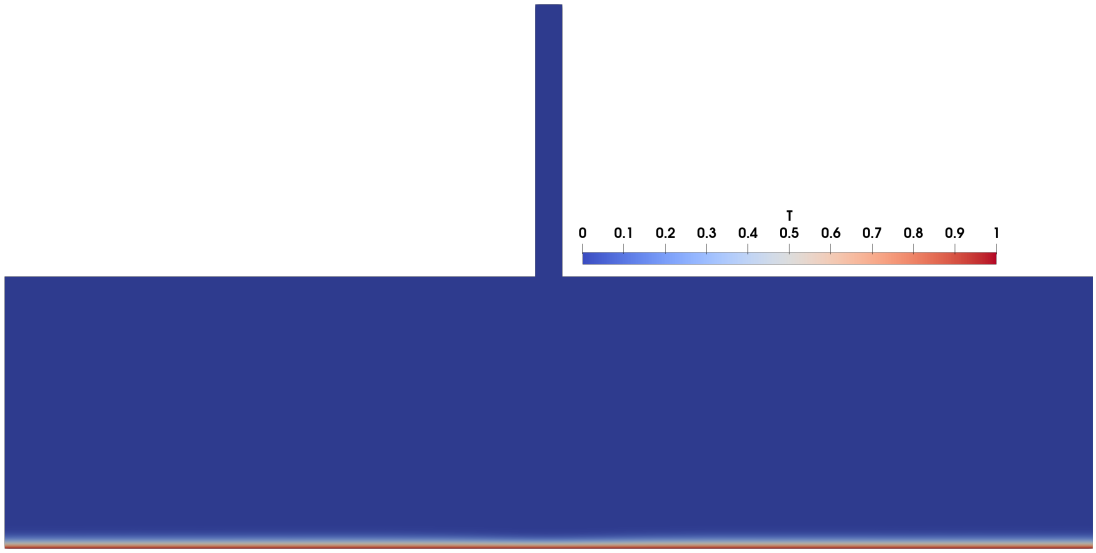


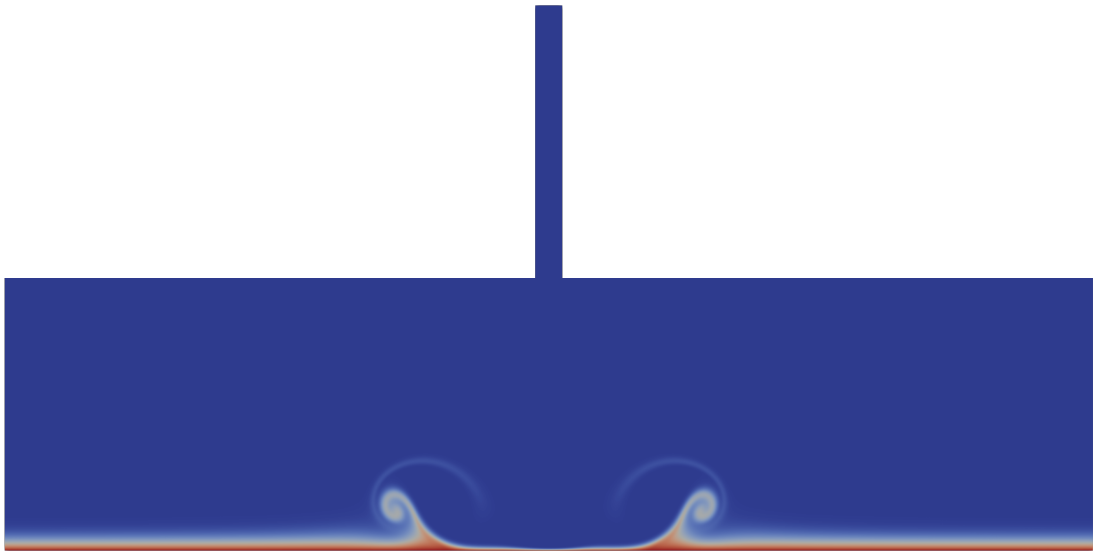
Figure C.5 Recherche dans l'arborescende - Cas pathologique lors de la recherche d'un nouveau nœud sur une frontière ou une interface incurvée (repérée par la courbe en pointillés). Les éléments du maillage de fond sont dépeints en noir, tandis qu'un élément du nouveau maillage est représenté en gris. Ses nœuds verts pourront être localisés rigoureusement dans le maillage de fond. Ce n'est pas le cas pour les nœuds rouges.

pour stocker les éléments du maillage de fond. Il pourrait être plus efficace de stocker ses nœuds sommets. En deux dimensions d'espace, on compte sensiblement plus de triangles que de nœuds sommets dans un maillage. Le nombre de *quads* nécessaires pour stocker le maillage de fond en serait donc réduit en optant pour un stockage des nœuds sommet. Le nombre d'étages dans l'arbre serait dans bien des cas réduit lui aussi. Ce faisant, la progression du *quad* feuille contenant le nœud d'intérêt vers le *quad* racine (ou inversement) serait plus rapide. Toutefois il serait hasardeux d'affirmer qu'un gain en temps de calcul est garanti pour localiser l'ensemble des nœuds du nouveau maillage. En effet, un *quad* feuille possèderait alors plusieurs éléments à tester, obtenus par connectivité inverse du nœud sommet stocké dans le *quad*. La forme de stockage la plus efficace, entre élément et nœud sommet, est intimement liée à la complexité du maillage de fond et du nouveau maillage.

ANNEXE D CHAMPS DE TEMPÉRATURE À PLUSIEURS INSTANTS POUR LE JET IMPACTANT (CAS 3)

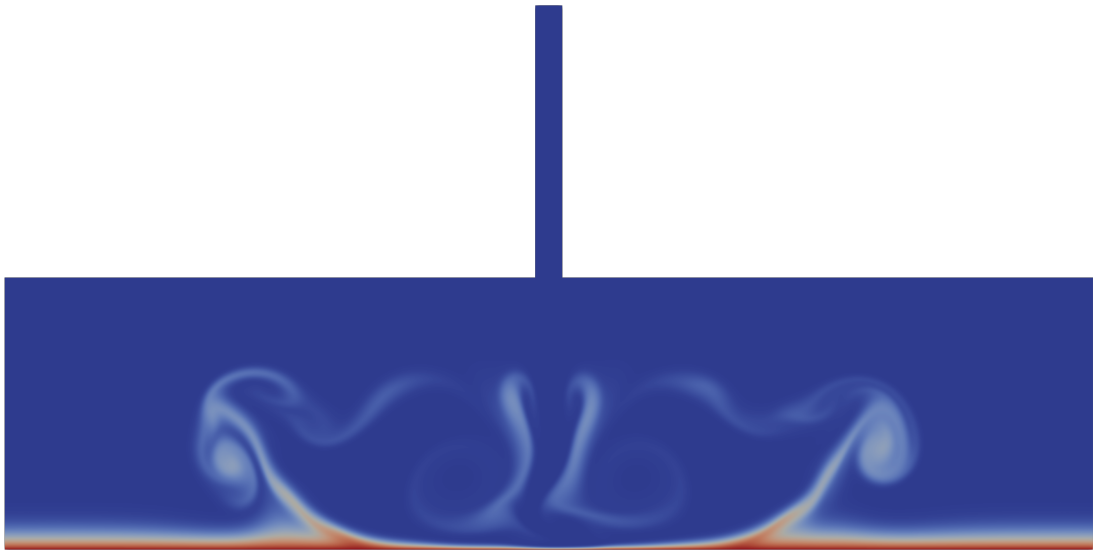


(a) À $t = 15$



(b) À $t = 30$

Figure D.1 Jet impactant - Champs de température à différents instants pour le cas 3



(c) À $t = 60$

(d) À $t = 80$

Figure D.1 (suite) Jet impactant - Champs de température à différents instants pour le cas 3