

Titre: Modélisation d'un couplemètre magnétoélastique pour évaluer
Title: l'impact de ses paramètres de conception

Auteur: Xavier Tousignant
Author:

Date: 2020

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Tousignant, X. (2020). Modélisation d'un couplemètre magnétoélastique pour
évaluer l'impact de ses paramètres de conception [Master's thesis, Polytechnique
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/5468/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/5468/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: David Ménard
Advisors:

Programme: Génie physique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Modélisation d'un couplemètre magnétoélastique pour évaluer l'impact de ses
paramètres de conception**

XAVIER TOUSIGNANT

Département de génie physique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie physique

Septembre 2020

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Modélisation d'un couplement magnétoélastique pour évaluer l'impact de ses paramètres de conception

présenté par **Xavier TOUSIGNANT**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Arthur YELON, président

David MÉNARD, membre et directeur de recherche

Frédéric SIROIS, membre

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche David Ménard pour m'avoir maintenu dans la bonne direction à plusieurs reprises. Le projet m'amenait souvent dans des directions obscures et j'aurais eu de la difficulté à maintenir le cap sans son aide.

J'en profite pour remercier l'équipe du laboratoire de magnétisme, en particulier Antoine Morin pour le support moral dans le bureau, et Christian Lacroix pour l'assistance technique en laboratoire.

J'aimerais aussi remercier Steve Boulet de Kongsberg Automotive Shawinigan, pour m'avoir inclus dans un projet de recherche appliquée et d'avoir été patient avec mes exposés et théories variés.

Je remercie particulièrement l'organisme MITACS pour avoir embarqué dans ce projet ambitieux avec Kongsberg Automotive. J'ai fait mes premiers pas dans l'industrie grâce à cet organisme et j'en suis reconnaissant.

Finalement, j'aimerais remercier mon père qui m'a soutenu sous plusieurs formes tout au long de mon aventure à la maîtrise.

RÉSUMÉ

Un modèle numérique est développé pour évaluer l'impact des paramètres de conception sur le gain et l'uniformité du signal d'un couplémètre magnétoélastique passif. Ce type de couplémètre est particulièrement intéressant pour des applications automobiles comme la direction assistée grâce à sa grande sensibilité, son intégration facile dans l'architecture de l'automobile et la possibilité de mesures sans contact. Il consiste en un cylindre avec une ou plusieurs bandes magnétiques ayant une aimantation circonférentielle. Ces bandes magnétiques réagissent aux couples appliqués en modifiant l'orientation de leur aimantation, qui devient alors mesurable avec des magnétomètres près de la surface du cylindre.

Le fonctionnement du couplémètre magnétoélastique met en évidence quelques paramètres importants comme la taille des bandes magnétiques, la distance des magnétomètres de la surface du cylindre ainsi que leur orientation. L'étude de ces paramètres peut être difficile dans un contexte expérimental, car plusieurs contributions au signal total sont difficilement contrôlables. Il y a par exemple les contraintes résiduelles dans le cylindre, la variation des propriétés du matériau, la non-uniformité de l'aimantation, et l'interaction des bandes magnétiques avec le reste du dispositif. Pour éliminer ces contributions et extraire l'impact des paramètres de conception, un modèle numérique du dispositif est approprié car il permet de l'étudier dans des conditions idéales. En effet, des différences significatives dans le gain du dispositif ont été observées en modifiant les paramètres de conception listés plus tôt. Par exemple, une configuration radiale des magnétomètres profite d'un gain supérieur qu'une configuration axiale malgré sa sensibilité accrue aux déplacements des capteurs.

Puis, l'impact des fluctuations dans la configuration magnétique du couplémètre sur ses performances est évalué. De telles fluctuations peuvent être présentes dans un matériau réel à cause des contraintes résiduelles, des défauts, et de la nature polycristalline du matériau. Le cas spécifique d'une maille cristallographique cubique est étudié, montrant que cette dernière limite le gain à 0.73 fois sa valeur maximale. En effet, les fluctuations dans la configuration magnétique du couplémètre diminuent le gain du dispositif. En plus de cela, elles ajoutent un signal résiduel qui peut causer des problèmes lors du fonctionnement du couplémètre.

Finalement, le modèle est utilisé pour calculer le champ magnétique résiduel d'un couplémètre magnétoélastique défini par des configurations magnétiques non idéales. Ces dernières consistent en des variations spatiales des propriétés du matériau qui peuvent apparaître à cause de l'usinage de la pièce, des traitements thermiques de la pièce ou encore de la procédure de magnétisation qui a été utilisée pour définir les bandes magnétiques. Sachant que

le signal résiduel peut affecter négativement le fonctionnement du dispositif, il est pertinent d'identifier son origine pour faciliter sa correction. Or, il est difficile de sonder l'intérieur du cylindre magnétisé sans le détruire. Le modèle numérique est alors employé afin de reproduire les tendances du champ magnétique résiduel en incluant des distributions non uniformes de la profondeur de la bande magnétique. La correspondance des champs magnétiques permet alors d'obtenir de l'information sur la configuration magnétique du couplemètre problématique.

Tous ces résultats sont obtenus à partir d'un modèle reproduisant un couplemètre magnétoélastique passif. La théorie derrière ce modèle est aussi détaillée dans ce travail. Pour commencer, une représentation intuitive du couplage magnétoélastique est développée à partir des principes de base de la thermodynamique. Le résultat est une matrice élastomagnétique qui décrit l'effet d'une contrainte mécanique et d'un champ magnétique externe quelconque sur l'aimantation et la déformation d'un échantillon ferromagnétique dans un formalisme commode. Puis, les expressions des énergies pertinentes au problème sont détaillées en explicitant notamment l'origine microscopique du couplage magnétoélastique.

Les développements théoriques sont ensuite adaptés au principe de fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique. D'abord, le couple mécanique qui est mesuré par le dispositif est relié à une contrainte de torsion dans une forme qui s'adapte bien aux développements précédents. L'effet de cette contrainte sur l'aimantation est ensuite calculé pour un monodomaine magnétique soumis à une anisotropie magnétique et un champ magnétique externe. L'expression ainsi obtenue décrit le fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique passif comme expliqué plus tôt. Cette dernière constitue la base du modèle 3D du couplemètre magnétoélastique passif développé dans ce travail.

Le modèle numérique est finalement présenté sous tous ses angles en passant par la construction du maillage, l'initialisation des éléments magnétiques, l'application du couple mécanique, et le calcul de la courbe de signal. Le modèle est ensuite comparé à un problème d'éléments finis pour mettre en évidence l'impact de l'approximation des dipôles indépendants utilisés dans le modèle. Ce dernier se résume à l'absence d'interactions entre les bandes magnétiques ainsi que l'absence du guidage de flux magnétique dans les matériaux métalliques adjacents. La validité du modèle proposé est donc limitée à des systèmes magnétiques avec des aimantations préalablement connues. Toutefois, ceci n'empêche pas de reproduire les caractéristiques principales de la courbe de signal d'un couplemètre magnétoélastique passif et de l'utiliser pour faire ressortir des comportements intéressants du couplemètre.

ABSTRACT

A numerical model is developed to evaluate the impact of various design parameters on the gain and the signal uniformity of a passive magnetoelastic torquemeter. This type of torquemeter is particularly interesting for automotive applications such as power steering due to its high sensitivity, its versatility and the possibility of contactless measurements. The device consists of a ferromagnetic cylinder with one or many artificially defined magnetic bands of circumferential magnetization. Those magnetized bands react to the applied torque by modifying the orientation of their magnetization due to the magnetoelastic coupling. The resulting magnetization then becomes measurable with magnetometers close to the cylinder surface.

The model is useful to study and optimize a magnetoelastic torquemeter because it allows us to measure the impact of different parameters under ideal conditions. This study uses the model first to study the width of the magnetized bands, the distance of the magnetometers from the surface and their orientation. The effects of those parameters are significant on the torquemeter gain. For example, regarding the orientation of the magnetometers, a radial configuration offers a larger gain but tends to be more sensitive to position errors.

Another test consisted in adding fluctuations to the initial magnetization of the torquemeter to measure its effect on the gain. Such fluctuations simulate the real tendencies of a material to have non-ideal magnetization due to residual stresses, defects and its polycrystalline nature. The specific case of a polycrystal with cubic lattices shows that crystallinity can decrease the gain to 0.73 times its theoretical maximum. The decreasing gain is expected because fluctuations tend to decrease the azimuthal magnetization that reacts to the applied torque. Furthermore, increasing the fluctuations potentially increases the offset of the signal that leads to further practical problems.

The last test was to compute the residual magnetic field of various torquemeters in order to identify possible origins of problematic signal offsets. Those torquemeters had non-uniform spatial distributions of the material properties that can appear from the sample machining, its heat treatment and the magnetization procedure used to define the magnetic bands. Knowing that the residual magnetic field can be detrimental to the torquemeter performance, it is useful to know its origin in order to correct it. However, it is difficult to probe the interior of the cylinder without destroying it. The numerical model is then used as an alternative. The test consisted in reproducing the trends of the measured residual field with the results from a model torquemeter with non-uniform magnetized bands. The similarities in the magnetic

fields provide insights on the magnetic configuration of the problematic torquemeter.

All those results were obtained with a magnetoelastic torquemeter model. The theory behind it is also detailed in this work. First, a convenient representation of the magnetoelastic coupling is developed from the first principles of thermodynamics. The resulting elastomagnetic matrices describe the linear effect of mechanical stresses and an external magnetic field on the strain and the magnetization of a ferromagnetic sample. Then, the magnetoelastic coupling is studied in more depth with the relevant energy expressions to go beyond the linear response and understanding its origin.

Those theoretical developments are subsequently adapted to the working principles of a magnetoelastic torquemeter. The first step is to convert the applied torque to a torsional stress within the cylinder in a matrix format. Its effect on the magnetization is then determined for a magnetic monodomain defined by a magnetic anisotropy under an external magnetic field. The solution describes effectively the response signal of passive magnetoelastic torquemeters as explained before and forms the basis of the 3D numerical model developed in this study.

Finally, the model is fully detailed with the mesh creation, the initialization of the magnetized bands, the application of the torque and the computation of the signal curve. The results from the model are then compared to an equivalent finite element calculation to highlight the impact of the independent magnetic dipole approximation. The result is that the model neglects the interactions between magnetized bands as well as the magnetic flux guidance in the adjacent metallic parts of the device. Because of that, the validity of the model is limited to magnetic systems in which the magnetization is known in all its volume. However, the model can still reproduce the main characteristics of a torquemeter signal and be used to highlight its interesting behavior.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES ANNEXES	xvi
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Couplage magnétoélastique	2
1.2 Fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique	4
1.2.1 Couplemètre actif	4
1.2.2 Couplemètre passif	5
1.3 Modélisation d'un couplemètre passif	6
1.4 Objectifs de recherche	7
1.5 Plan du mémoire	8
 CHAPITRE 2 CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES	9
2.1 Système mécanique	9
2.1.1 Matrice de déformation	9
2.1.2 Matrice de contrainte	11
2.1.3 Travail mécanique	12
2.2 Système magnétique	14
2.2.1 Définition des vecteurs magnétiques	14
2.2.2 Travail magnétique	15
2.3 Thermodynamique d'un système élastomagnétique	17
2.3.1 Équations d'état du système	19
2.4 Construction des matrices élastomagnétiques	21
2.4.1 Symétrie d'un système magnétique	22

2.4.2	Effet d'une opération de symétrie sur un tenseur	24
2.4.3	Matrices élastomagnétiques simplifiées	25
2.5	Énergie d'un système élastomagnétique	26
2.5.1	Énergie d'anisotropie magnétocristalline	27
2.5.2	Énergie mécanique	29
2.5.3	Énergie de couplage magnétoélastique	30
2.5.4	Énergie de Zeeman	36
2.5.5	Énergie magnétostatique	37
CHAPITRE 3 EFFETS D'UNE TORSION SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES		40
3.1	Modélisation de la torsion sur un cylindre	41
3.2	Effet d'une torsion sur un domaine aimanté sans champ magnétique externe	44
3.2.1	Correspondance avec la matrice élastomagnétique	47
3.2.2	Solution générale	48
3.3	Effets d'une torsion sur un domaine aimanté avec champ magnétique externe	49
3.3.1	Énergie d'un domaine dans la symétrie cylindrique	50
3.3.2	Minimisation de l'énergie	51
3.3.3	Courbes d'aimantation	54
3.3.4	Calcul de la susceptibilité magnétique	56
CHAPITRE 4 MODÉLISATION D'UN COUPLEMETRE MAGNÉTOÉLASTIQUE PASSIF		59
4.1	Géométrie et maillage	60
4.1.1	Test de convergence	62
4.2	Initialisation des éléments magnétiques	65
4.3	Application du couple mécanique	66
4.4	Calcul du signal	68
4.4.1	Calcul du champ magnétique de fuite	68
4.4.2	Courbes de signal	70
4.5	Validation et limites du modèle	72
4.5.1	Champ dipolaire d'un cube	72
4.5.2	Approximation des dipôles indépendants	73
CHAPITRE 5 ÉVALUATION DE L'IMPACT DES PARAMÈTRES DE CONCEPTION ET DE LA BANDE MAGNÉTIQUE		77
5.1	Orientation des magnétomètres et géométrie du dispositif	77
5.2	Fluctuations dans la configuration magnétique	80

5.3 Variation spatiale des propriétés magnétiques	83
5.3.1 Variation azimutale	85
5.3.2 Variation azimutale et axiale	88
CHAPITRE 6 CONCLUSION	91
6.1 Synthèse des travaux	91
6.2 Limites de la solution proposée	93
6.3 Améliorations futures	94
RÉFÉRENCES	96
ANNEXES	102

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Liste des propriétés thermodynamiques d'un échantillon ferromagnétique en fonction de la température, d'une contrainte mécanique et d'un champ magnétique.	20
Tableau 2.2	Type, rang et taille des tenseurs présents dans l'équation 2.54. L'indice s indique que le tenseur est symétrique.	21
Tableau 3.1	Comparaison des solutions calculées pour décrire l'aimantation axiale en fonction d'une torsion et d'un champ magnétique axial via $\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$ et $\zeta = \mu_0M_sH_z/K_u$	54
Tableau 4.1	Valeurs des paramètres de la figure 4.11 pour comparer le modèle de dipôles avec FEMM	74
Tableau 5.1	Valeurs des paramètres utilisés pour les résultats de la figure 5.2 . . .	79
Tableau 5.2	Valeurs des paramètres utilisés pour l'étude de la variation azimutale de la profondeur de la bande magnétique	86

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Différence entre la magnétostricion, la magnétostricion inverse et le piézomagnétisme à partir d'une aimantation spontanée d'un ferromagnétique. Les flèches pleines indiquent la direction de l'effet sur l'aimantation d'une contrainte uniaxiale $\pm\sigma$ ou un champ magnétique externe $\pm H$.	3
Figure 1.2	Courbes caractéristiques de (a) la magnétostricion, (b) la magnétostricion inverse et (c) le piézomagnétisme. La courbe grise dans la figure (b) est pour une aimantation initiale nette non nulle, sinon l'aimantation reste nulle.	3
Figure 2.1	Géométrie de la déformation	9
Figure 2.2	Définition des composantes de la matrice de contrainte σ_{ij}	12
Figure 2.3	Cristal cubique centré aimanté dans la direction [001]	23
Figure 2.4	Schéma du modèle de paires pour l'énergie magnétocristalline.	28
Figure 2.5	Schéma du modèle de paires pour le couplage magnétoélastique.	31
Figure 3.1	(a) Effet de la torsion sur tout le cylindre ; (b) Effet d'une rotation d'un angle Ψ sur la position d'un point A se rendant au point B.	42
Figure 3.2	Décomposition d'une torsion en une contrainte en tension ($+\sigma$) et une contrainte en compression ($-\sigma$) sur la surface d'un cylindre.	43
Figure 3.3	Représentation du système avec les axes faciles associés aux constantes K_u et K_σ ainsi que la décomposition de l'aimantation \mathbf{M} dans la base cylindrique.	45
Figure 3.4	Représentation de la composante α_z de l'aimantation avec la fonction $\alpha_z = \sin(0.5 \arctan(b\sigma_n))$. Le paramètre d'échelle $b = 3\lambda_s\sigma_0/2K_u$ et la contrainte normalisée $\sigma_n = \sigma/\sigma_0$ sont sans unité.	46
Figure 3.5	(a) Représentation des directions des anisotropies énergétiques K_u et K_σ ainsi que l'aimantation finale $\hat{\alpha}$. (b) Comportement de l'aimantation selon sa région initiale pour $\lambda_s\sigma > 0$	49
Figure 3.6	Dépendance en contrainte des courbes d'aimantation suivant l'équation 3.38. Les lignes pleines sont α_z et les lignes pointillées, α_ϕ .	55
Figure 3.7	Dépendance en contrainte de la susceptibilité χ_{ij} suivant les équations 3.49 et 3.53.	58

Figure 4.1	(a) Maillage cylindrique avec $(N_r, N_\phi, N_z) = (4, 12, 4)$. Les zones grises sont ajoutées par souci de clarté. (b) Géométrie d'un élément délimité par $r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, z_1$ et z_2 avec son centre géométrique.	60
Figure 4.2	Maillage uniforme (a) et non uniforme (b) dans les directions radiales et azimutales avec $N_r = 6$ et $N_\phi = 38$. Le capteur est à droite.	62
Figure 4.3	Champ d'induction B généré par une distribution de N éléments aimantés aléatoirement ($M_s = 1.6$ MA/m) dans un cylindre ($R = 9$ mm, $L = 40$ mm). L'axe supérieur indique la taille moyenne des éléments cubiques.	64
Figure 4.4	Champ d'induction B généré par une distribution de 10 millions d'éléments aimantés aléatoirement ($M_s = 1.6$ MA/m) dans un cylindre ($R = 9$ mm, $L = 40$ mm) pour différentes distances d par rapport à la surface du cylindre.	64
Figure 4.5	Coupe d'un cylindre initialisé suivant les trois bandes magnétiques d'un couplemêtre magnétoélastique passif délimitées par la zone grise. Les flèches indiquent l'orientation de l'aimantation et les régions blanches correspondent à la zone désaimantée de l'échantillon.	66
Figure 4.6	Coupe d'un cylindre initialisé suivant la figure 4.5 et soumis à un couple mécanique. L'aimantation gagne une composante axiale $\pm M_z$ selon l'orientation initiale de l'aimantation, le sens du couple appliqué et le signe de λ_s . Les flèches indiquent la variation de l'aimantation par rapport à l'état initial.	67
Figure 4.7	Représentation du champ magnétique produit par la configuration magnétique du cylindre de la figure 4.6. Les aimantations axiales $\pm M_z$ du cylindre produisent un champ magnétique radial $\pm B_r$ aux intersections des bandes magnétiques.	68
Figure 4.8	Notation utilisée pour le calcul du champ magnétique de fuite d'un échantillon de volume V défini par une distribution de moments magnétiques $\mathbf{m}(\mathbf{r}')$	69
Figure 4.9	Courbe de signal typique $S(\tau)$ en fonction du couple appliqué τ mettant en évidence le gain G et le signal résiduel S_0 . Les unités du signal peuvent varier selon la définition employée.	71
Figure 4.10	(a) Variation relative du champ magnétique d'un cube t^3 par rapport au champ dipolaire à l'extérieur du cube selon la géométrie de (b). Le cube est aimanté uniformément et parallèlement à l'axe d	73

Figure 4.11	Coupe du couplemètre magnétoélastique passif idéalisé défini par les longueurs w, L, R et a . La zone grise correspond à la bande magnétique et le cylindre est plein. La mesure du champ magnétique est faite à une distance d de la surface le long dans la direction axiale z .	74
Figure 4.12	Profils du champ magnétique axial B_z normalisé du problème de la figure 4.11 calculés avec la méthode des dipôles, avec FEMM, et avec FEMM sans cylindre métallique.	75
Figure 4.13	Coupe axisymétrique de la solution du problème d'éléments finis de la figure 4.11 avec FEMM. Les deux figures partagent le même axe z . Les lignes de flux B suivent l'aimantation de la bande magnétique (aimant permanent). Les arcs bleus délimitent l'espace de calcul par des conditions frontières ouvertes IABC.	76
Figure 5.1	Coupe d'un couplemètre magnétoélastique passif à trois bandes en configurations radiale et axiale. Les carrés et les cercles représentent la position des magnétomètres, alors que les flèches indiquent l'orientation du champ magnétique à ces positions. Dans le cylindre, le changement d'aimantation dû à l'application du couple est montré par les flèches horizontales.	78
Figure 5.2	Courbes du gain ($\mu\text{T}/\text{Nm}$) des couplemètres en configuration (a) axiale et (b) radiale en fonction de la largeur des bandes magnétiques w et de la distance des capteurs d . Les autres paramètres du modèle sont listés dans le tableau 5.1	79
Figure 5.3	Gain normalisé d'un couplemètre en fonction de l'écart-type des fluctuations dans l'aimantation du cylindre. Parmi tous les paramètres de conception de la figure 5.1, seul le rayon affecte cette courbe.	82
Figure 5.4	Coupe du couplemètre magnétoélastique passif idéalisé à 1 bande défini par les longueurs w, L, R et a . La zone grise correspond à la bande magnétique et le cylindre est plein. La mesure du champ magnétique est faite à une distance d de la surface à une position azimutale ϕ et axiale z .	84
Figure 5.5	Variation azimutale de la profondeur de la bande magnétique $a(\phi)$. Les cercles sont des sections du cylindre explicitant la profondeur de la bande magnétique.	86

Figure 5.6	Résultats du calcul du champ magnétique avec la distribution d'épaisseur $a(\phi)$ de l'équation 5.4. (a) Profils du champ magnétique axial B_z pour différents angles azimutaux ϕ_i autour du cylindre. (b) Profil de B_z autour du cylindre à $z = 6$ mm. (c) Transformée de Fourier du profil $B_z(\phi)$	87
Figure 5.7	Section du cylindre avec une variation azimutale $a(\phi)$ de la profondeur de la bande magnétique. La région rouge conserve la symétrie cylindrique et ne produit pas de champ magnétique. La section bleue est responsable du signal de la figure 5.6a.	88
Figure 5.8	Variation linéaire de l'épaisseur $a(z)$ le long de la bande magnétique de largeur w . Les cercles schématisent la bande magnétique pour différentes épaisseurs.	89
Figure 5.9	Profils du champ magnétique axial B_z pour différents angles azimutaux ϕ_i autour du cylindre avec la distribution d'épaisseur $a(\phi, z)$ de l'équation 5.5.	90

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Notation de Voigt	102
Annexe B	Exemple d'application du principe de Neumann	103
Annexe C	Énergie mécanique	105
Annexe D	Développement de l'expression du champ dipolaire en coordonnées cylindriques	106

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La mesure de couple mécanique joue un rôle important dans plusieurs applications industrielles, car elle permet d'obtenir de l'information sur des composantes en rotation. Dans l'industrie automobile par exemple, les couplemètres sont omniprésents parce qu'ils facilitent notamment l'analyse de l'efficacité énergétique, de la qualité de transmission, et des contraintes en torsion soumises aux composantes [1]. La mesure de couple constitue donc un aspect important du contrôle de systèmes motorisés.

Diverses technologies ont été développées au cours des années pour mesurer des couples mécaniques. Le couplemètre idéal pour une certaine application dépend tout de même des paramètres de mesure et de l'environnement dans lequel il se trouve. Par exemple, pour mesurer des couples à l'échelle atomique, des couplemètres optomécaniques résonants sont conçus pour atteindre des sensibilités jusqu'à 2.9×10^{-24} Nm/ $\sqrt{\text{Hz}}$, se rapprochant ainsi de la limite théorique d'une mesure de couple [2, 3].

Dans une application automobile comme la direction assistée, l'environnement est moins bien contrôlé et la sensibilité requise n'est pas si petite. Dans ces conditions, les couplemètres typiques se basent sur les déformations élastiques de l'échantillon ou encore sur la variation de l'aimantation. Les mesures par déformation peuvent être faites en mesurant une résistance électrique avec des jauge de déformations [4], une variation de capacité électrique [5] ou encore un angle de rotation [6, 7].

Une alternative bien adaptée aux besoins de haute performance d'une direction assistée est le couplemètre magnétoélastique [8, 9]. Ce dispositif se base sur la variation de l'aimantation en fonction de la contrainte mécanique appliquée à l'échantillon, soit le couplage magnétoélastique. Cette variation d'aimantation est ensuite mesurée à distance avec, par exemple, un magnétomètre captant le champ magnétique de fuite issu de cette aimantation [10]. Plusieurs types de couplemètres magnétoélastiques existent et sont présentés dans les sections suivantes.

Mais avant de discuter davantage des couplemètres magnétoélastiques, une clarification du couplage magnétoélastique et des termes utilisés dans la littérature est de mise pour éviter de confondre le piézomagnétisme et la magnétostriction inverse. Suivant cette clarification, une revue de la littérature sur les couplemètres magnétoélastiques est présentée en mettant l'accent sur leur conception, les différentes approches de mesure, et leur modélisation. Finalement, la motivation de cette étude ainsi que ses objectifs sont décrits dans les dernières sections.

1.1 Couplage magnétoélastique

Le couplage entre des quantités mécaniques et magnétiques est à l'origine de plusieurs phénomènes décrits dans la littérature. D'un côté, des propriétés mécaniques comme le module de Young ou encore la vitesse du son du matériau peuvent être affectés par la présence d'une aimantation et d'un champ magnétique. D'un autre côté, des propriétés magnétiques comme la susceptibilité ou l'aimantation d'un échantillon peuvent être modifiées par des contraintes mécaniques [11].

Plusieurs noms sont employés dans la littérature afin de décrire le couplage magnétoélastique selon le contexte du problème. Par exemple, le terme magnétostriction décrit la déformation d'un échantillon causée par son aimantation alors que la magnétostriction inverse décrit la variation de l'aimantation en fonction d'une contrainte mécanique. Pour des problèmes plus spécifiques comme l'effet d'une torsion sur l'aimantation d'une tige, l'effet de Wiedemann inverse est plus couramment utilisé [12].

Dans le cadre de ce projet, le phénomène considéré est l'effet d'une contrainte mécanique sur l'aimantation. Dans la littérature, la magnétostriction inverse et le piézomagnétisme décrivent cet effet. À premier abord, il est difficile de distinguer la magnétostriction inverse du piézomagnétisme, car leurs effets sont similaires aux ordres de grandeur typiquement étudiés. Toutefois, leur origine est différente, et le concept d'une aimantation variant avec la contrainte mécanique peut être abordé de différentes manières.

Pour mettre en évidence la différence entre la magnétostriction inverse et le piézomagnétisme, la figure 1.1 présente les phénomènes de magnétostriction, de magnétostriction inverse et de piézomagnétisme sur un ferromagnétique isotrope sans aimantation nette, mais ordonné en domaines magnétiques. Seulement trois domaines sont illustrés dans la figure 1.1, mais le cristal idéalisé contient un grand nombre de domaines. Dans cette figure, chaque ellipse représente un domaine aimanté dans la direction de sa flèche intérieure. Pour compléter cette distinction, la figure 1.2 illustre les courbes typiques des trois mêmes phénomènes pour le cristal 1D.

D'abord, l'état d'équilibre sans champ magnétique externe et sans contrainte mécanique ($H = 0, \sigma = 0$) révèle déjà une déformation du matériau à cause de la magnétostriction spontanée, mais l'aimantation totale reste nulle, car il s'agit d'un matériau isotrope [13]. En effet, aucune orientation de l'aimantation n'est favorisée et la somme de toutes les contributions s'annule.

L'effet d'un champ magnétique externe H sur ce cristal est de modifier l'orientation de l'aimantation de chacun des domaines pour s'aligner avec le champ H . En effet, l'énergie de Zeeman est minimale quand l'aimantation est parallèle à ce champ. La réorientation des

Aimantation spontanée $H = 0$ $\sigma = 0$	Magnétostriction $+H$ $-H$	Magnétostriction inverse $+σ$ $-σ$	Piézomagnétisme $+σ$ $-σ$
l $M = 0$	$l + dl$ $+M$ $-M$	$l + dl$ $M = 0$	$l + dl$ $+M$ $-M$

Figure 1.1 Différence entre la magnétostriction, la magnétostriction inverse et le piézomagnétisme à partir d'une aimantation spontanée d'un ferromagnétique. Les flèches pleines indiquent la direction de l'effet sur l'aimantation d'une contrainte uniaxiale $\pm\sigma$ ou un champ magnétique externe $\pm H$.

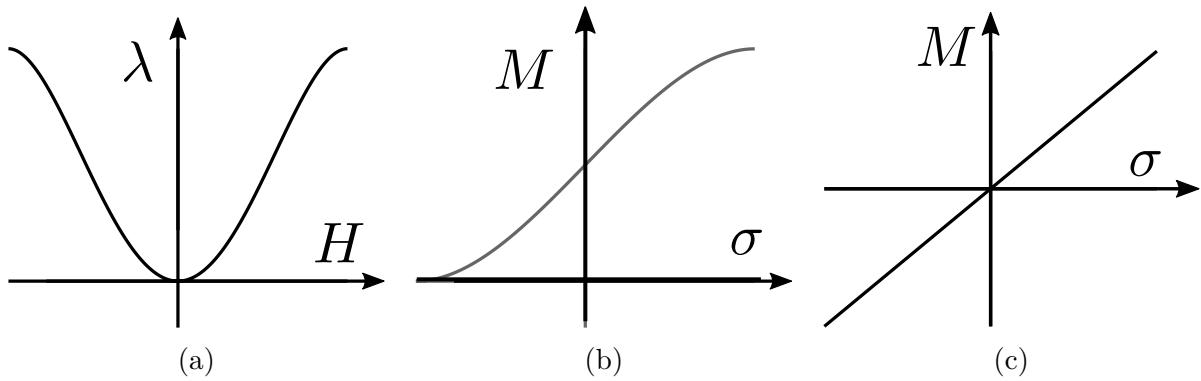


Figure 1.2 Courbes caractéristiques de (a) la magnétostriction, (b) la magnétostriction inverse et (c) le piézomagnétisme. La courbe grise dans la figure (b) est pour une aimantation initiale nette non nulle, sinon l'aimantation reste nulle.

domaines modifie ainsi la longueur du cristal d'une quantité dl , peu importe le signe du champ magnétique externe. La magnétostriction est donc définie par la déformation relative $\lambda = dl/l$ par rapport à une longueur de référence l . Bref, la dépendance de $\lambda(H)$ doit être une fonction paire du champ H qui tend vers une constante λ_s quand tous les domaines sont alignés entre eux. Cette courbe est représentée dans la figure 1.2a.

L'effet inverse de la magnétostriction est la modification de l'aimantation en fonction d'une contrainte. Son comportement diffère de la magnétostriction standard puisque l'énergie de la contrainte uniaxiale possède deux minima plutôt qu'un et ne permet pas de distinguer les directions parallèles et antiparallèles. Ainsi, l'aimantation nulle initiale est conservée, peu importe le sens de la contrainte, même si une déformation λ est observée. Toutefois, l'aimantation de chacun des domaines varie en fonction de la contrainte. Cela suggère que la présence d'une aimantation nette non nulle permet d'observer une magnétostriction inverse. De plus, l'aimantation sature lorsqu'elle atteint son maximum M_s ou son minimum $M = 0$. La figure 1.2b met en évidence ces deux comportements. Dans cette même figure, une tendance linéaire de la *variation* de l'aimantation ΔM est observée pour des petites contraintes. Ce régime constitue la magnétostriction inverse linéaire qui s'apparente au piézomagnétisme, bien que leur origine soit différente.

Finalement, le piézomagnétisme décrit une relation linéaire entre l'aimantation et la contrainte. Il s'agit de l'analogue magnétique de la piézoélectricité, soit en remplaçant la polarisation par l'aimantation. Bref, l'effet du piézomagnétisme est de modifier l'orientation de l'aimantation de chacun des domaines de manière linéaire en fonction de la contrainte. Au final, une aimantation totale est observée et suit une relation linéaire en fonction de l'amplitude de la contrainte, comme le montre la figure 1.2c.

1.2 Fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique

Différentes méthodes de mesure peuvent être employées pour mesurer un couple appliqué à un échantillon via le couplage magnétoélastique. Deux grandes familles se distinguent par la présence ou l'absence d'une excitation externe pour mesurer l'effet du couple sur les propriétés magnétiques de l'échantillon. La distinction suggère les noms de couplemètre actif et de couplemètre passif.

1.2.1 Couplemètre actif

Un couplemètre actif repose sur une composante active comme une source de champ magnétique externe pour exciter l'échantillon. La réponse de l'échantillon face à cette excitation est ensuite mesurée en fonction de la torsion. En général, la propriété magnétique détectée est la susceptibilité, mais d'autres quantités peuvent être utilisées, tel que mis en évidence par Sablik dans son étude numérique des propriétés hystérotiques d'un matériau magnétostrictif soumis à des torsions [14].

La mise en oeuvre d'un couplemètre actif se résume à concevoir un circuit magnétique per-

mettant de mesurer la variation de la susceptibilité en fonction de la torsion. Les composantes essentielles sont une source externe de flux magnétique, un matériau magnétostrictif et un cœur magnétique pour compléter le circuit magnétique.

Dans le cas particulier d'une mesure de couple, différents designs ont été développés depuis les années 1980. Une analyse comparative des trois géométries principales de couplemètre actif, soit en multibranches, en croix, et en solénoïde, a été réalisée par Fleming en 1990 [15]. Le principe est basé sur la décomposition de la contrainte de torsion en deux axes orthogonaux sur lesquels sont appliquées des contraintes de signe inverse. L'application du couple vient donc favoriser l'orientation de l'aimantation dans un des deux axes dépendamment du signe de la magnétostriiction du matériau. Ce déséquilibre crée une anisotropie pour la susceptibilité magnétique de l'échantillon et celle-ci est mesurée.

Quelques innovations intéressantes pour le design de couplemètre actif incluent la microfabrication du dispositif [16], l'utilisation de circuits imprimés [17], l'utilisation d'un revêtement magnétostrictif [18,19] et l'ajout d'un second capteur pour limiter des effets parasites [20]. Des calculs théoriques permettent aussi de prédire les paramètres de fonctionnement optimaux telles l'amplitude et la fréquence du signal excitateur [15, 21].

Encore aujourd'hui, le développement de couplemètres magnétoélastiques actifs est un sujet de recherche important dans l'industrie alors que plusieurs brevets sont publiés régulièrement. [22–25]

1.2.2 Couplemètre passif

Dans le cas où aucune source externe n'est employée dans la mesure de la torsion, le couplemètre est dit passif. Le fonctionnement d'un tel dispositif se base uniquement sur la variation de l'aimantation causée par la torsion. Cette variation est généralement mesurée à partir du champ magnétique de fuite de l'échantillon, mais il est aussi possible de mesurer le courant généré par l'aimantation. Ces deux méthodes sont basées respectivement sur les effets de Wiedemann inverse et de Matteucci [12].

Les deux méthodes sont théoriquement possibles, mais la méthode par courant n'est pas adaptée à la mesure d'une torsion sur un cylindre faisant partie d'un plus grand système mécanique, car le courant traversant l'échantillon est difficilement mesurable. Malgré cela, l'effet de Matteucci est à la base d'autres applications comme la génération de pulses de courant [26] ou encore la mesure de la vitesse de rotation [27].

Pour ce qui est de la méthode par champ de fuite, son développement a connu du succès, notamment dans le domaine du transport par son application dans le système de guidage

d'une automobile de course [8] ou encore d'un véhicule de débarquement à coussin d'air (LCAC) [9]. La théorie et l'application d'un couplemètre magnétoélastique passif basé sur la mesure du champ de fuite sont décrites dans la littérature et seront détaillées dans ce travail [10, 12, 28].

Un des premiers designs de ce type de couplemètre passif a été présenté par Garshelis en 1992 [10]. Le système de détection consiste en un anneau magnétostrictif aimanté azimutalement et placé autour d'un cylindre, qui lui est soumis à la torsion. La friction entre les deux composantes fait en sorte que la torsion du cylindre est aussi ressentie par l'anneau aimanté. Ainsi, l'aimantation de l'anneau est affectée par la torsion et un champ magnétique de fuite est généré. L'amplitude et le signe de ce champ magnétique varient en fonction de l'amplitude et le sens de la torsion, rendant possible la mesure du couple qui a été appliqué.

Des améliorations ont été amenées à cette première version du dispositif dans les années suivantes. Il y a notamment l'utilisation de deux bandes magnétiques plutôt qu'une pour augmenter les performances et limiter l'effet du bruit externe [29], l'aimantation sur l'échantillon lui-même plutôt que sur un anneau externe pour simplifier le dispositif [30] et l'ingénierie du matériau magnétostrictif [31, 32].

Dans les dernières années, les publications sur le sujet sont davantage axées sur l'application en industrie du dispositif en optimisant le signal tout en réduisant les effets parasites et les dimensions du dispositif [33–35]. D'autres aspects importants qui sont abordés dans la littérature sont la procédure d'aimantation qui délimite les bandes aimantées du couplemètre et la configuration des capteurs magnétiques [31]. Différents designs permettent notamment de limiter l'effet de champ magnétique externe seulement par une configuration ingénieuse des capteurs magnétiques [36].

1.3 Modélisation d'un couplemètre passif

Portant une attention particulière aux couplemètres magnétoélastiques passifs qui sont le sujet de ce travail, leur fonctionnement peut être décrit à partir d'un développement simple des énergies d'un monodomaine magnétique [10]. Or, cette approche est limitée par ses approximations qui sont que les bandes magnétostrictives sont uniformément aimantées et isotropes, en plus de négliger les effets parasites de l'environnement. Dans un dispositif réel, il est difficile de justifier la validité d'un tel modèle, notamment à cause de la présence de métaux autour du dispositif qui viennent interférer avec le signal désiré, mais aussi à cause de la non-uniformité des propriétés mécaniques et magnétiques du dispositif [31].

Dans le but d'optimiser le design d'un couplemètre magnétoélastique passif, des outils de

modélisation sont développés pour évaluer l'impact des différents paramètres de conception comme le choix du matériau, les dimensions du dispositif et la configuration des domaines et des capteurs. Ces modèles doivent donc considérer l'effet d'une contrainte mécanique, notamment d'une torsion, sur l'aimantation ainsi que calculer le champ magnétique de fuite produit par cette aimantation.

Pour ce qui est de l'effet de la contrainte mécanique, il y a deux approches dans la littérature. D'un côté, il y a les modèles multi échelles avec des calculs micromagnétiques, qui permettent de reproduire à un certain point la réalité du matériau [37–41]. En bref, l'échantillon est sous-divisé en petits éléments faisant partie de domaines magnétiques et de grains cristallins pour ensuite minimiser l'énergie localement dans chacun des éléments de l'échantillon. De l'autre côté, il y a les approches phénoménologiques de la magnétostriction qui introduisent une pléthora de paramètres, souvent difficilement mesurables, pour décrire le comportement de l'aimantation face à une contrainte mécanique [14, 42]. L'interprétation des résultats obtenus reste donc qualitative lorsque le matériau étudié est peu documenté.

Enfin, pour le calcul du champ de fuite, différents outils ont été développés dans la littérature pour calculer le champ magnétique généré par un échantillon magnétique. Il y a notamment des méthodes se basant sur une distribution de dipôles magnétiques [43, 44], d'autres sur des courants magnétiques [45] ou encore des charges magnétiques [37, 46].

1.4 Objectifs de recherche

L'objectif principal de ce travail est d'évaluer de l'impact des paramètres de conception d'un couplemètre magnétoélastique. Cette étude ne vise que les couplemètres passifs, mais la plupart des développements théoriques peuvent être utilisés pour l'étude des couplemètres actifs. Le travail se sépare en quatre parties :

1. Déterminer l'effet d'une contrainte mécanique sur les propriétés magnétiques d'un échantillon ferromagnétique ;
2. Identifier les équations caractérisant le fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique passif ;
3. Modéliser un couplemètre magnétoélastique passif de manière à pouvoir calculer sa courbe de signal ;
4. Évaluer l'impact des paramètres de conception d'un couplemètre magnétoélastique passif.

1.5 Plan du mémoire

Le mémoire suit les quatre étapes présentées dans la section 1.4. Chacune de ces étapes est développée dans un chapitre distinct. D'abord, une présentation de la théorie sur le couplage magnétoélastique permet de clarifier la notation utilisée tout au long de ce travail ainsi que de mettre de l'avant son origine microscopique. Puis, la théorie est appliquée au cas spécifique d'un couplemètre afin de comprendre le fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique. Ensuite, la modélisation d'un couplemètre est réalisée en détaillant les différents paramètres introduits et les méthodes de calcul. Finalement, plusieurs tests sont réalisés avec le modèle pour évaluer l'impact de différents paramètres de conception d'un couplemètre magnétoélastique passif. Bien entendu, une conclusion suivra le dernier chapitre et des annexes de nature variée viennent compléter l'ouvrage.

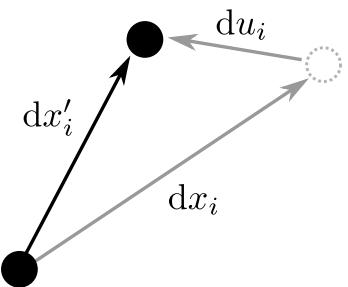
CHAPITRE 2 CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

Ce chapitre a pour objectif de clarifier la notation et les conventions utilisées dans ce travail. Il définit en premier lieu les quantités relatives aux systèmes mécanique et magnétique, et en deuxième lieu, développe les propriétés d'un système magnétique soumis à différentes conditions tels une température, une contrainte mécanique et un champ magnétique externe. Ces propriétés sont étudiées d'un point de vue thermodynamique afin de construire des matrices élastomagnétiques qui représentent de manière efficace les effets de perturbations magnétiques et mécaniques sur tout système élastomagnétique. Finalement, les énergies liées à ce système couplé sont développées.

2.1 Système mécanique

Le système mécanique décrit dans ce travail consiste en un corps solide composé d'un matériau continu déformable sous l'action de forces. La déformation de ce type de corps se décrit mathématiquement avec à la théorie de l'élasticité linéaire [47, 48]. Cette déformation est ensuite utilisée pour définir les contraintes subites dans le corps et finalement pour décrire le travail mécanique qu'une déformation effectue sur le corps. Bref, la matrice de déformation, la matrice de contrainte et le travail mécanique sont définis ci-bas.

2.1.1 Matrice de déformation



La déformation s'interprète par une variation relative d'un élément de longueur dans le corps. Pour décrire cette quantité, la distance entre deux points très près l'un de l'autre est considérée comme présentée dans la figure 2.1. Ces deux points sont connectés par un petit vecteur dx_i , dont la norme est la distance entre ces deux points. Quand le corps se déforme, un vecteur de déplacement du_i est ajouté pour atteindre un nouveau vecteur de distance dx'_i .

Figure 2.1 Géométrie de la déformation

$$dx'_i = dx_i + du_i. \quad (2.1)$$

Les indices i représentent la composante des vecteurs. Cette notation est employée tout au long de ce travail pour traiter les vecteurs. Comme il s'agit d'une petite variation, le

déplacement du_i peut se définir en fonction de ses dérivés dans les trois directions.

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (2.2)$$

Finalement, l'expression de la distance entre les points après la déformation, soit la norme de dx'_i , permet d'identifier la matrice de déformation ε_{ij} . Il s'agit de la matrice qui décrit comment un élément de longueur change dans la direction i quand le corps est déformé dans la direction j .

$$dl'^2 = (dx_i + du_i)^2 \quad (2.3)$$

$$= dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \quad (2.4)$$

$$= dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_j dx_i \quad (2.5)$$

$$= dl^2 + 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dx_i dx_j \quad (2.6)$$

$$= dl^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (2.7)$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne dissimule un changement d'indice. En général, les déformations sont assez petites pour négliger le troisième terme de la définition de ε_{ij} . En effet, la définition courante de la matrice de déformation est simplement

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.8)$$

qui génère une matrice 3×3 symétrique. Cette matrice n'a donc que 6 composantes indépendantes incluant 3 composantes diagonales et 3 composantes hors diagonales. Alors que les déformations diagonales ($i = j$) représentent un changement de volume, les déformations hors diagonale correspondent à un changement de forme. La définition 2.8 n'est valide que pour les déformations dans une base orthonormée dans un système cartésien. Dans certains cas, pour les déformations d'un cylindre par exemple, il peut être avantageux de travailler dans une autre base. Dans le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) , les composantes

de déformation sont plutôt données par les équations 2.9.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

2.1.2 Matrice de contrainte

Lorsqu'un corps est déformé, l'équilibre thermodynamique du système est perturbé de telle sorte que des contraintes internes naissent dans le matériau. D'un point de vue microscopique, ces contraintes internes s'expliquent par les interactions interatomiques à courte portée, mais dans la vision plus globale de la théorie de l'élasticité qui suppose un milieu continu, ces interactions sont considérées locales, soit à portée nulle. Ainsi, les contraintes ressenties par un élément de volume ne sont présentes qu'à sa surface [47].

Suivant cette approche, la force totale d'un système agissant sur un de ses éléments de volume peut s'écrire soit par une intégrale de volume du système d'une densité de force f_i ou soit par une intégrale de surface de l'élément de volume d'une quantité σ_{ij} .

$$F_i = \int_V f_i \, dV \quad (2.10)$$

$$= \oint_S \sigma_{ij} \, dS_j \quad (2.11)$$

Ce σ_{ij} correspond en fait à la matrice de contrainte (interne). Une sommation des indices j est implicite dans l'équation 2.11 via la convention d'Einstein. Avec cette notation, tout indice qui se répète doit être sommé sur toutes ses valeurs possibles, ici sur les trois composantes. Mathématiquement, l'équivalence des deux intégrales se justifie par l'analyse vectorielle et le théorème de la divergence. Ce dernier indique que l'intégrale de volume de la divergence d'un vecteur peut s'écrire comme l'intégrale de surface du même vecteur. Dans le cas de l'équation 2.10, qui utilise un vecteur, le passage à une intégrale de surface requiert plutôt une quantité de rang 2, soit une matrice. En effet, chacune des trois composantes du vecteur de force doit être décrite par la divergence d'un vecteur.

$$F_i = \nabla_j \cdot \sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

La matrice σ_{ij} constitue à la matrice de contrainte dont les composantes s'interprètent en

analysant l'équation 2.11. Cette dernière indique que l'expression $\sigma_{ij} dS_j$ équivaut à la composante F_i de la force sur l'élément de surface dS_j . Ensuite, l'orientation des éléments de surface est choisie telle que leur normal coïncide avec les axes x_i d'un système de coordonnées cartésien. Ce choix permet d'obtenir la définition habituelle de la matrice de contrainte. Bref, l'interprétation de la composante σ_{ij} est la contrainte (en N/m²) exercée dans la direction i sur une surface perpendiculaire à la direction j comme le suggère la figure 2.2.

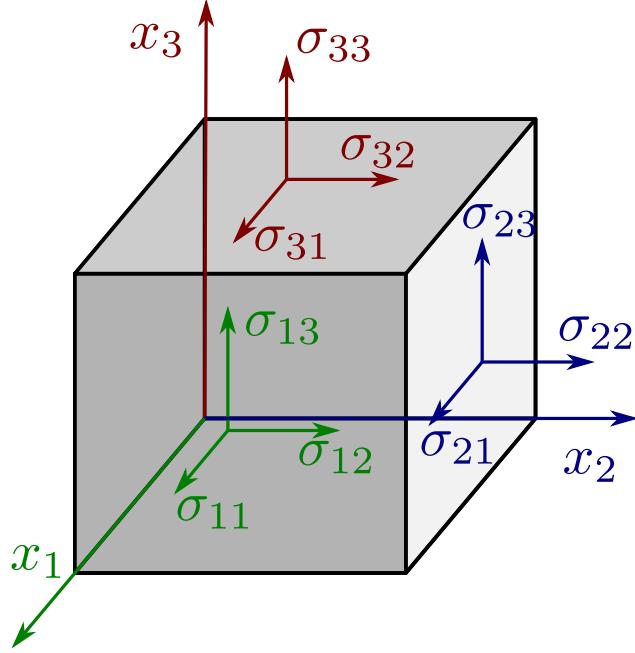


Figure 2.2 Définition des composantes de la matrice de contrainte σ_{ij}

Bref, la matrice σ_{ij} est une matrice 3×3 symétrique, tout comme la matrice de déformation. La symétrie de la matrice de contrainte est moins évidente à prouver que celle de la matrice de déformation. En quelques mots, un corps n'est jamais à l'équilibre si la contrainte σ_{ij} n'est pas symétrique, car un moment net non nul serait présent. De plus, la matrice σ_{ij} peut toujours être réduite à une forme symétrique [47].

2.1.3 Travail mécanique

Le travail mécanique est le travail effectué par les contraintes internes du système alors que sa déformation varie. Soit un système déformé de sorte que le vecteur de déplacement u_i varie d'un incrément δu_i . Cette variation génère un travail par unité de volume δw qui se calcule en multipliant la densité de force locale f_i à cette variation.

$$\delta w = f_i \delta u_i \quad (2.13)$$

Ensuite, pour obtenir le travail total, une intégrale sur le volume V du système est réalisée pour accumuler toutes les contributions locales δw . Puis, cette expression est développée avec une intégration par partie afin de mettre en évidence deux contributions distinctes venant de la surface et du volume respectivement [47].

$$\delta W = \int_V \delta w \, d^3r \quad (2.14)$$

$$= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, d^3r \quad (2.15)$$

$$= \oint_S \sigma_{ij} \delta u_i \, dS_j - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \, d^3r \quad (2.16)$$

Dans ce développement, la force locale F_i est déjà exprimée à partir du tenseur de contrainte σ_{ij} comme le suggère l'équation 2.12. Pour simplifier davantage l'expression du travail total, un milieu infini est considéré de telle sorte que la contribution de surface est annulée par la déformation nulle à sa frontière. Ainsi, le premier terme de l'équation 2.16 tombe. Pour traiter le deuxième terme, la symétrie intrinsèque du tenseur de contrainte est exploitée ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), car elle permet de réarranger les termes dans la somme implicite de l'intégrande pour retrouver la matrice de déformation ε_{ij} définie plus tôt par l'équation 2.8.

$$\delta W = - \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \, d^3r \quad (2.17)$$

$$= - \int_V \sigma_{ij} \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \, d^3r \quad (2.18)$$

$$= - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, d^3r \quad (2.19)$$

L'égalité entre la première et deuxième ligne du développement précédent suppose que la dérivée d'une variation est égale à la variation de la dérivée. Cette propriété est valide pour la plupart des fonctions. Une démonstration simple est que si on considère la variation $u \rightarrow u + \delta u$ d'une variable quelconque u , alors sa dérivée devient

$$\frac{d}{dx}(u + \delta u) = \frac{du}{dx} + \frac{d(\delta u)}{dx}. \quad (2.20)$$

La variation de cette dérivée est donc

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(u + \delta u) - \frac{du}{dx} = \frac{d(\delta u)}{dx}, \quad (2.21)$$

qui démontre l'égalité entre la variation de la dérivée et de la dérivée de la variation. Bref,

l'équation 2.19 révèle l'expression du travail mécanique réalisé par la déformation du système. On note aussi le signe négatif qui signifie que le travail est appliqué au système. Finalement, l'expression $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ représente un produit scalaire double (*double dot product* en anglais) des deux tenseurs qui s'exprime de plusieurs façons :

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta\varepsilon} = \text{Tr}\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\delta\varepsilon})^\top\}. \quad (2.22)$$

L'hypothèse du milieu infini utilisée pour annuler l'intégrale de surface de l'équation 2.16 semble à priori limiter la validité de ce résultat, mais ce n'est pas le cas. En effet, le même résultat peut être obtenu si un formalisme de travail virtuel est utilisé [48]. Cette méthode consiste à définir les conditions frontières sur le déplacement δu_i plutôt qu'à la contrainte.

2.2 Système magnétique

Un système magnétique est couramment décrit par différentes quantités vectorielles comme le champ magnétique \mathbf{H} , la densité de flux magnétique \mathbf{B} et l'aimantation \mathbf{M} . Ces champs vectoriels sont définis ci-bas à partir de l'équation de Maxwell-Ampère, puis le travail magnétique d'un champ magnétique externe est dérivé.

2.2.1 Définition des vecteurs magnétiques

Les équations de Maxwell décrivent mathématiquement les champs électromagnétiques dans l'espace-temps. L'une d'elles, soit l'équation de Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.23)$$

relie le rotationnel de la densité de flux magnétique \mathbf{B} à une densité de courant \mathbf{j} et à la variation temporelle du champ électrique \mathbf{E} . Son développement permet de définir les trois vecteurs magnétiques étudiés. Dans un système stationnaire, la variation temporelle du champ électrique s'annule, et il ne reste que la contribution de la densité de courant dans le membre de droite. Cette densité de courant se sépare en deux contributions de type différent, soit un courant de conduction électrique \mathbf{j}_c et un courant d'aimantation \mathbf{j}_m . Toutefois, le courant d'aimantation est une quantité difficile à définir et est très difficile, voire impossible, à mesurer directement [46]. Une interprétation classique de ce courant est le mouvement des électrons autour de leur noyau qui génère un moment magnétique. Suivant cette définition, le courant d'aimantation s'écrit plus convenablement en fonction d'un champ vectoriel \mathbf{M}

s'interprétant par le champ d'aimantation [49].

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2.24)$$

L'équation 2.24 permet d'introduire le champ d'aimantation dans l'équation de Maxwell-Ampère stationnaire. Puis, un champ auxiliaire \mathbf{H} macroscopique est introduit pour simplifier la forme de l'équation.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_c + \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_c \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c \quad (2.27)$$

Ce nouveau champ \mathbf{H} est en fait le champ magnétique (A/m), qui dissimule une dépendance de l'aimantation, bien que l'équation 2.27 laisse croire qu'il ne dépend que d'un courant de conduction. Il est donc possible d'identifier deux contributions distinctes à ce champ :

1. un champ magnétique généré par une densité de courant de conduction \mathbf{j}_c et
2. un champ magnétique généré par la distribution du champ d'aimantation \mathbf{M} .

La deuxième contribution est souvent nommée le champ de fuite ou le champ de désaimantation \mathbf{H}_d , selon si le champ est à l'extérieur ou à l'intérieur du corps magnétique. De tout ce développement ressort l'équation constitutive reliant les trois vecteurs magnétiques avec la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$.

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.28)$$

Les unités du champ d'induction \mathbf{B} sont les teslas, alors que celles du champ magnétique \mathbf{H} et du champ d'aimantation \mathbf{M} sont des A/m .

2.2.2 Travail magnétique

De manière générale, le travail magnétique appliqué par une variation $\delta\mathbf{B}$ à un système est donné par

$$\delta W = - \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3r, \quad (2.29)$$

dont l'intégrale couvre tout l'espace incluant le corps magnétique et ses environs [46]. Cette expression utilise le champ magnétique \mathbf{H} défini par les équations de Maxwell, qui inclut le champ magnétique externe \mathbf{H}_0 ainsi que le champ de désaimantation \mathbf{H}_d . D'autres contribu-

tions comme le champ de Lorentz doivent être considérées si une approche microscopique est suivie, ce qui n'est pas le cas ici. Bref, le champ magnétique est exprimé par

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d. \quad (2.30)$$

Ce champ est alors introduit dans l'équation constitutive 2.28 afin d'obtenir la relation avec le champ magnétique externe \mathbf{H}_0 , la densité de flux magnétique \mathbf{B} et l'aimantation \mathbf{M} dans le matériau.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d + \mathbf{M}) \quad (2.31)$$

Cette dernière permet de développer la définition du travail magnétique 2.29 en plusieurs termes incluant la contribution du champ externe.

$$\delta W = -\mu_0 \int (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d) \cdot (\delta \mathbf{H}_0 + \delta \mathbf{H}_d + \delta \mathbf{M}) d^3r \quad (2.32)$$

$$= -\mu_0 \left(\underbrace{\int \mathbf{H}_0 \cdot \delta \mathbf{H}_0 d^3r}_{(1)} + \underbrace{\int \delta(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_d) d^3r}_{(2)} + \underbrace{\int \mathbf{H}_d \cdot \delta \mathbf{H}_d d^3r}_{(3)} + \underbrace{\int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M} d^3r}_{(4)} \right) \quad (2.33)$$

Encore une fois, ces intégrales couvrent tout l'espace. Le premier terme ne contient que le champ magnétique externe, et n'est donc pas intrinsèque au système étudié. Il est négligé pour la suite. Le deuxième terme, qui s'obtient après un réarrangement des termes de la multiplication de l'équation 2.32, s'annule en vertu des propriétés solénoïdale et conservative des champs \mathbf{H}_0 et \mathbf{H}_d respectivement [46]. La démonstration de ce résultat suppose entre autres l'absence de courant de conduction et un champ magnétique nul à une distance infinie du système.

Pour le troisième terme, il est jumelé au quatrième terme via l'énergie magnétostatique afin de retrouver la variation d'aimantation $\delta \mathbf{M}$. L'énergie magnétostatique ϵ_m consiste en l'énergie emmagasinée dans le système alors qu'il génère son champ magnétique de désaimantation \mathbf{H}_d . Cette énergie s'exprime de deux manières équivalentes, soit par une intégrale de volume du système en fonction du champ \mathbf{H}_d et de l'aimantation \mathbf{M} ou soit par une intégrale de tout l'espace seulement en fonction du champ \mathbf{H}_d [46].

$$\epsilon_m = -\frac{1}{2} \mu_0 \int_V \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M} d^3r \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \int \mathbf{H}_d^2 d^3r \quad (2.35)$$

L'équation 2.35 permet directement d'identifier le troisième terme du travail magnétique, car la variation de cette énergie s'exprime par

$$\delta\epsilon_m = \mu_0 \int \mathbf{H}_d \cdot \delta\mathbf{H}_d d^3r, \quad (2.36)$$

qui correspond au troisième terme de l'équation 2.33 à un signe près. Ensuite, pour obtenir une expression en fonction de la variation d'aimantation $\delta\mathbf{M}$, l'équivalence des deux définitions de l'énergie magnétostatique et le théorème de réciprocité sont appliqués.

$$\delta\epsilon_m = -\frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{H}_d \cdot \delta\mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{H}_d d^3r \quad (2.37)$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 \int_V \mathbf{H}_d \cdot \delta\mathbf{M} + \mathbf{H}_d \cdot \delta\mathbf{M} d^3r \quad (2.38)$$

$$= -\mu_0 \int_V \mathbf{H}_d \cdot \delta\mathbf{M} d^3r \quad (2.39)$$

En quelques mots, le théorème de réciprocité indique que l'énergie d'interaction de deux systèmes magnétiques $(\mathbf{M}_1, \mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{M}_2, \mathbf{H}_2)$ peut être définie de manière équivalente par les couples $(\mathbf{M}_1, \mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{M}_2, \mathbf{H}_1)$. Toutefois, ce théorème n'est valide en général que pour des systèmes linéaires. Heureusement, il demeure valide dans le cas étudié puisque le système est déjà supposé linéaire en vertu des petites variations.

Finalement, avec les équations 2.36 et 2.39, l'expression du travail 2.32 se simplifie en ré-introduisant le champ magnétique externe $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_d$. L'intégrale de tout l'espace du quatrième terme est réduite à une intégrale du volume du système, car l'aimantation n'est nulle qu'en-dehors de celui-ci. Bref, le travail magnétique d'un champ magnétique externe sur un système dont l'aimantation varie de $\delta\mathbf{M}$ est

$$\delta W = -\mu_0 \int_V \mathbf{H}_0 \cdot \delta\mathbf{M} d^3r. \quad (2.40)$$

2.3 Thermodynamique d'un système élastomagnétique

La thermodynamique est une méthodologie pour obtenir des relations linéaires entre les différentes variables d'un système. Pour que la théorie soit valide, il suffit de supposer que les perturbations du système soient suffisamment petites et lentes pour assurer une transition réversible entre l'état du système non perturbé et l'état du système perturbé. Dans le cas présent, le système est représenté par un échantillon ferromagnétique soumis à une température, à une contrainte mécanique et à un champ magnétique externe.

En équations, l'approche thermodynamique consiste à identifier l'état d'équilibre thermo-

dynamique du système en minimisant son énergie totale. La première étape est donc de déterminer l'expression de la variation de l'énergie interne du système. Pour cela, la première loi de thermodynamique est employée :

$$dU = \delta Q - \delta W. \quad (2.41)$$

Elle exprime la relation entre la variation de l'énergie interne dU du système, d'une variation de chaleur δQ et d'une variation de travail δW effectué par le système suite à la perturbation. En supposant le processus réversible, la variation de chaleur s'exprime aussi en fonction d'une variation d'entropie dS à une température T grâce à la deuxième loi de la thermodynamique, soit

$$\delta Q = T dS. \quad (2.42)$$

Quant à elle, la variation de travail δW dépend du système traité. L'approche standard est d'utiliser le travail réalisé par un changement de volume à une certaine pression ($\delta W = P dV$), mais cette approche n'est pas adéquate pour le système couplé magnétoélastique étudié dans ce travail. La variation de travail est plutôt exprimée en fonction de deux couples de variables conjuguées pertinentes au problème ; mécaniques et magnétiques.

En utilisant les expressions 2.19 et 2.40 du travail mécanique et du travail magnétique respectivement, la variation de l'énergie interne est exprimée en fonction de tous les paramètres importants du système magnétoélastique. Il suffit d'introduire ces résultats dans la définition de l'énergie interne 2.41.

$$dU(S, \varepsilon, \mathbf{M}) = T dS + \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d^3r + \mu_0 \int_V H_i dM_i d^3r \quad (2.43)$$

Dans cette expression et pour le reste du développement thermodynamique, le champ magnétique externe est représenté par H_i plutôt que $H_{0,i}$ précédemment défini. La convention d'Einstein est employée pour faciliter la lecture de cette expression. Il est aussi plus convenable d'utiliser des quantités volumiques pour éliminer les intégrales. Ainsi, la densité d'énergie $u = U/V_0$ et la densité d'entropie $S = S/V_0$ sont introduites avec le volume V_0 du système non perturbé. Bref, tous les termes de la nouvelle expression

$$du(S, \varepsilon, \mathbf{M}) = T dS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \mu_0 H_i dM_i \quad (2.44)$$

ont des unités de J/m^3 . L'interprétation de cette dernière est que des perturbations de densité d'entropie, de déformation et d'aimantation modifient linéairement la densité d'énergie d'une quantité du . Or, dans le cas d'une expérience, ces perturbations sont difficilement contrôlées.

tables. Il est donc préférable d'avoir la température, la contrainte et le champ magnétique externe comme variables indépendantes, car elles constituent les conditions expérimentales imposées au système.

Pour cela, un nouveau potentiel thermodynamique \mathcal{G} est défini en appliquant une transformation de Legendre à l'équation 2.44 de sorte à modifier les variables indépendantes. Le potentiel ainsi obtenu s'apparente à l'énergie libre de Gibbs, mais ne concorde pas exactement, car il ne s'agit pas des mêmes couples de variables conjuguées. Cette énergie particulière \mathcal{G} est nommée *énergie libre de Gibbs généralisée* et sa variation est exprimée par l'équation 2.45 [11].

$$d\mathcal{G}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) = -S dT - \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \mu_0 M_i dH_i. \quad (2.45)$$

Il est maintenant possible d'exprimer la densité d'entropie, la déformation et l'aimantation en fonction des paramètres expérimentaux, soit la température, la contrainte mécanique et le champ magnétique externe. En effet, puisque $d\mathcal{G}$ est une différentielle exacte, les dérivées partielles suivantes caractérisent la réponse du système.

$$S = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.47)$$

$$M_i = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial H_i} \quad (2.48)$$

2.3.1 Équations d'état du système

Avec les équations 2.46, 2.47 et 2.48, la réponse du système en fonction de perturbations externes est connue. Or, il n'est pas évident de mesurer le potentiel thermodynamique \mathcal{G} dans un contexte expérimental, non plus sa dérivée. C'est la raison pour laquelle les équations d'état du système sont introduites. Elles décrivent l'état du système $(S, \varepsilon_{ij}, M_i)$ en fonction de conditions externes (T, σ_{ij}, H_i) . Pratiquement, il s'agit d'une linéarisation de l'énergie libre de Gibbs généralisée selon les trois variables indépendantes.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}, H_k} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T, H_k} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial S}{\partial H_i} \right)_{T, \sigma_{kl}} dH_i \quad (2.49)$$

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_{\sigma_{kl}, H_m} dT + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{T, H_m} d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial H_k} \right)_{T, \sigma_{lm}} dH_k \quad (2.50)$$

$$dM_i = \left(\frac{\partial M_i}{\partial T} \right)_{\sigma_{jk}, H_l} dT + \left(\frac{\partial M_i}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{T, H_j} d\sigma_{kl} + \left(\frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right)_{T, \sigma_{kl}} dH_j \quad (2.51)$$

De toutes ces dépendances ressortent 55 coefficients indépendants qui caractérisent le système [11]. Ils sont détaillés dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 Liste des propriétés thermodynamiques d'un échantillon ferromagnétique en fonction de la température, d'une contrainte mécanique et d'un champ magnétique.

Propriété	Notation	Nombre de coefficients	Définitions des coefficients
Chaleur spécifique	C	1	$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\sigma,H} = -T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial T^2} \right)_{\sigma,H}$
Rigidité	s_{ijkl}	21	$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right)_{T,H} = - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right)_{T,H}$
Susceptibilité magnétique	χ_{ij}	6	$\left(\frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right)_{T,\sigma} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial H_i \partial H_j} \right)_{T,\sigma}$
Expansion thermique	α_{ij}	6	$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_{\sigma,H} = \left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T,H}$
Pyromagnétisme	i_j	3	$\left(\frac{\partial M_j}{\partial T} \right)_{\sigma,H} = \left(\frac{\partial S}{\partial H_j} \right)_{T,\sigma}$
Piezomagnétisme	d_{ijk}	18	$\left(\frac{\partial M_k}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T,H} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial H_k} \right)_{T,\sigma}$

Alors que les trois premières familles de coefficients correspondent à des termes purement thermiques, mécaniques et magnétiques respectivement, les trois autres représentent des couplages entre ces dernières. Pour le système étudié, les effets thermiques sont négligés et tous les coefficients liés à la température sont éliminés. Ainsi, les expressions 2.50 et 2.51 de la déformation et de l'aimantation sont simplifiées en ne conservant qu'un sous-ensemble des coefficients.

$$d\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} d\sigma_{kl} + d_{kij} dH_k \quad (2.52)$$

$$dB_i = d_{ijk} d\sigma_{jk} + \mu_{ij} dH_j \quad (2.53)$$

Les équations 2.52 et 2.53 décrivent un comportement linéaire des variables dépendantes (ε_{ij}, M_i) en fonction des deux variables indépendantes (σ_{ij}, H_i). En rappel, ce développement n'est valide que pour des petites perturbations du système, ici en contrainte mécanique $d\sigma_{ij}$ et en champ magnétique dH_i .

2.4 Construction des matrices élastomagnétiques

Plutôt que de garder les deux équations 2.52 et 2.53 séparément, il est plus convenable de construire une unique matrice incluant tous les coefficients. Cette matrice nommée *matrice élastomagnétique* lie directement les quantités mécaniques et magnétiques suivant l'équation matricielle 2.54. La notation des petites variations dx est négligée dans cette définition bien qu'elle est sous-entendue.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{d} & \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

La forme de l'équation 2.54 impose le rang des quantités en jeu, car il s'agit d'une équation matricielle composée de deux vecteurs et d'une matrice. Par exemple, les matrices de déformation et de contrainte doivent être réduites en vecteur (rang 1), alors que les tenseurs de coefficients doivent tous être réduits à des matrices (rang 2). Cette transformation est possible grâce à la notation de Voigt et à la symétrie intrinsèque des matrices de déformation et de contrainte. L'annexe A introduit la notation de Voigt et le tableau 2.2 détaille les propriétés des quantités de l'équation 2.54 avant et après la contraction par la notation de Voigt. Le type des tenseurs est aussi présenté dans ce tableau bien que cette propriété sera défini dans la section 2.4.2.

Tableau 2.2 Type, rang et taille des tenseurs présents dans l'équation 2.54. L'indice s indique que le tenseur est symétrique.

Quantité	$\boldsymbol{\varepsilon}$	\mathbf{M}	$\boldsymbol{\sigma}$	\mathbf{H}	\mathbf{s}	χ	\mathbf{d}
Type	P	A	P	A	P	P	A
Rang	2	1	2	1	4	2	3
Taille	$(3 \times 3)_s$	3×1	$(3 \times 3)_s$	3×1	$((3 \times 3)_s \times (3 \times 3)_s)_s$	3×3	$3 \times (3 \times 3)_s$
Rang (Voigt)	1	1	1	1	2	2	2
Taille (Voigt)	6×1	3×1	6×1	3×1	6×6	3×3	3×6

Bref, la matrice élastomagnétique contient 81 composantes qui sont explicitées dans l'équation 2.55. De ces 81 composantes ressortent 45 coefficients indépendants grâce aux symétries intrinsèques de la matrice. L'apparition des facteurs 2 pour les déformations de cisaillement (ε_{ij} , $i \neq j$) permet de conserver le caractère tensoriel dans la nouvelle représentation de Voigt. La notion de déformation d'ingénierie (*engineering strain*) est alors introduite $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ [50].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} & d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{36} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \chi_{12} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \chi_{13} & \chi_{23} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

D'un point de vue expérimental, 45 coefficients à déterminer est une tâche énorme et il est préférable de réduire le plus possible ce nombre. Heureusement, des propriétés de symétrie permettent de le réduire considérablement grâce au principe de Neumann. Le principe de Neumann impose l'invariance du tenseur de propriété sous l'action des opérations de symétrie propres au système étudié. La validité de ce principe inclut les opérations dans l'espace-temps (dont l'inversion du temps) tant que la propriété soit statique [51]. La symétrie temporelle doit être considérée dans un système magnétique, car des quantités comme l'aimantation et le champ magnétique changent de signe suivant l'inversion du temps. Bref, connaissant les symétries du système étudié, la matrice élastomagnétique peut être simplifiée en déterminant les composantes de la matrice qui respecte l'invariance du tenseur.

De plus, il n'est pas nécessaire d'appliquer le principe de Neumann pour toutes les symétries du système, car celles-ci peuvent être réduites à un sous-ensemble de 1 à 5 matrices génératrices. Ces matrices constituent une sorte de base pour reproduire toutes les opérations de symétrie du groupe. Il suffit donc d'appliquer le principe de Neumann que pour ces quelques matrices génératrices. Des tables sont disponibles dans la littérature pour identifier les matrices génératrices d'un groupe de symétrie [52].

2.4.1 Symétrie d'un système magnétique

Classiquement, la symétrie d'un groupe cristallin se caractérise par un des 32 groupes ponctuels. Ces groupes sont construits en fonction des opérations de symétries qui n'affectent pas le système, soit les opérations qui laissent le système invariant. Par exemple, le fer à température ambiante prend une structure cristalline cubique centrée respectant les symétries du groupe ponctuel $m\bar{3}m$, avec la notation de Hermann-Mauguin [46].

Maintenant, si le cristal possède une certaine distribution de spins résultant en une aimantation nette non nulle comme l'illustre la figure 2.3, alors la symétrie globale du système

diminue, car une asymétrie lui a été ajoutée. Pour traiter ce type de système, 90 groupes ponctuels magnétiques sont introduits. Ceux-ci contiennent les 32 groupes classiques ainsi que leurs combinaisons avec la nouvelle opération de symétrie : l'inversion du temps \mathcal{R} . Cette dernière est toujours une symétrie d'un système classique, mais le moment magnétique change d'orientation suite à son application à cause de son caractère axial.

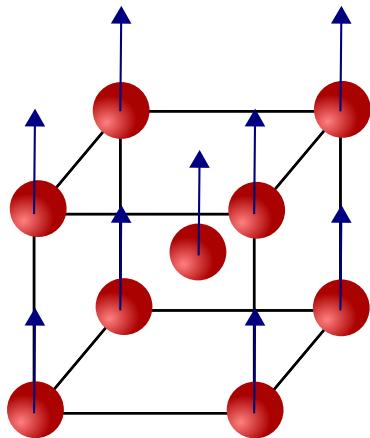


Figure 2.3 Cristal cubique centré aimanté dans la direction [001]

Il n'y a pas que l'inversion du temps qui affecte l'orientation des moments magnétiques. Puisqu'un moment magnétique est représenté par un vecteur axial, l'application d'une opération impropre telle une réflexion inverse aussi son orientation. Ainsi, un cristal cubique centré avec une aimantation orientée dans la direction [001] est caractérisé par le groupe magnétique $4/m\bar{m}m$ apparent à une symétrie tétragonale. Les opérations soulignées comme \underline{m} indiquent qu'une inversion du temps est requise, soit $\underline{m} = m\mathcal{R}$.

À la base, l'application des symétries est effectuée pour diminuer le plus possible le nombre de termes indépendants dans la description des tenseurs de propriété. Or, l'application de la symétrie magnétique a tendance à diminuer la symétrie globale, et ainsi augmenter le nombre de termes indépendants.

Il serait donc idéal de pouvoir limiter l'effet de la phase magnétique sur la forme d'un tenseur. Toutefois, la séparation des effets de la structure cristalline et de l'orientation des spins n'est pas évidente à traiter et ne peut pas se justifier avec des considérations de symétrie [52]. Pour cela, des arguments physiques doivent être appliqués. L'indépendance d'une propriété en fonction de l'orientation des spins se justifie soit par l'expérience jusqu'à l'incertitude expérimentale permise ou soit par la théorie selon la limite du modèle.

Par exemple, le tenseur de rigidité s_{ijkl} représente une propriété purement mécanique qui, à première vue, ne devrait pas dépendre de l'orientation des spins. Or, il est possible d'identifier une petite contribution magnétique aux propriétés mécaniques, notamment par l'effet ΔE . L'effet ΔE est une variation du module de Young d'un matériau causée par la déformation additionnelle de la magnétostriction [53]. Comme la magnétostriction varie en fonction de l'orientation de l'aimantation et donc, de l'orientation des spins, le module de Young est affecté par les propriétés magnétiques. En d'autres mots, l'utilisation des symétries classiques dans un cristal magnétique néglige des effets de deuxième ordre comme l'effet ΔE dans le tenseur s_{ijkl} .

2.4.2 Effet d'une opération de symétrie sur un tenseur

Pour traiter la symétrie dans les matrices élastomagnétiques, il est d'abord nécessaire de distinguer le type des quantités en jeu, car les opérations de symétrie s'appliquent différemment sur des tenseurs de type différent. Dans le système étudié, deux types de tenseurs sont présents :

- P, polaire et symétrique dans le temps ;
- A, axial et antisymétrique dans le temps.

Comme le montre le tableau 2.2, les vecteurs liés à des quantités mécaniques (ε_i et σ_i) sont de type P, alors que les vecteurs magnétiques (M_i et H_i) sont de type A. Pour les tenseurs de propriété, leur type est déterminé en fonction des quantités qu'ils lient [51]. Par exemple, le tenseur de rigidité s_{ijkl} qui lie deux quantités P est aussi un tenseur de type P. Similairement, le tenseur de susceptibilité χ_{ij} est de type P, car le caractère A des vecteurs M_i et H_j est balancé. Là où la distinction est importante est pour le tenseur de piézomagnétisme d_{ijk} qui est de type A, car il lie une quantité P (σ_{jk}) à une quantité A (M_i).

La nomenclature utilisée a été introduite par Birss [51] et est inspirée des vecteurs axiaux qui changent de signe suite à une opération de symétrie impropre telle une réflexion. À l'opposé, les vecteurs polaires ne changent pas de signe dans cette situation. Ces différences font en sorte que l'effet d'une opération de symétrie quelconque varie d'un tenseur à l'autre selon son type. Bref, l'effet d'une l'opération de symétrie Q_{ij} sur un tenseur de rang 2 T_{ij} génère un nouveau tenseur T'_{ij} suivant [51] :

$$\text{Type P : } T'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}T_{kl} \quad (2.56)$$

$$\text{Type A : } T'_{ij} = |Q|Q_{ik}Q_{jl}T_{kl} \quad (2.57)$$

Ces définitions s'appliquent de manière générale à des tenseurs d'ordre quelconque ; il suffit d'y insérer des matrices Q_{im} supplémentaires pour chaque indice m du tenseur initial. Le déterminant $|Q| = \det(Q_{ij})$ est toujours égal à ± 1 selon si l'opération Q_{ij} est propre (+1) ou impropre (-1). Ce facteur permet d'inclure directement le caractère axial des tenseurs de type A. Une autre distinction concerne l'application de l'opération d'inversion du temps \mathcal{R} . Comme le type P est symétrique dans le temps, l'effet de \mathcal{R} sur le tenseur est nul. À l'opposé, l'effet de \mathcal{R} sur un tenseur de type A résulte en un signe négatif supplémentaire.

$$\text{Type P : } \mathcal{R}T_{ij} = T_{ij} \quad (2.58)$$

$$\text{Type A : } \mathcal{R}T_{ij} = -T_{ij} \quad (2.59)$$

2.4.3 Matrices élastomagnétiques simplifiées

Connaissant le groupe magnétique du système, sa matrice élastomagnétique peut être simplifiée en appliquant successivement le principe de Neumann pour toutes les matrices génératrices du groupe ponctuel. Un exemple de simplification est présenté dans l'annexe B. En pratique, il est plus facile d'utiliser des tables pour identifier directement la forme des tenseurs selon leur type, leur rang et la symétrie du système [51].

La matrice élastomagnétique d'un système cubique centré $m\bar{3}m$ aimanté dans la direction [001] prend la forme de l'équation 2.60 respectant ainsi la symétrie du groupe magnétique $4/m\bar{3}m$. Cette matrice contient 11 termes indépendants (6 mécaniques, 3 piézomagnétiques et 2 magnétiques).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \chi_{11} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Dans le cas d'un système cubique $m\bar{3}m$ sans aimantation nette, la matrice élastomagnétique se simplifie davantage, car il s'agit d'une plus grande symétrie. Particulièrement, le nombre de termes indépendants tombe à 4 (3 mécaniques et 1 magnétique), car le tenseur piézomagnétique d_{ijk} s'annule complètement et les 3 axes sont maintenant équivalents.

À première vue, il semble que le couplage magnétoélastique soit interdit pour un cristal cubique sans aimantation nette, mais ce n'est pas le cas. La symétrie $m\bar{3}m$ n'interdit que le piézomagnétisme, qui a une origine cristalline, alors que la magnétostriction reste toujours présente. Cette dernière permet d'identifier un *pseudo-piézomagnétisme* dans lequel chaque domaine magnétique est considéré individuellement. Chacun de ses domaines possède une aimantation nette et est représenté par une symétrie cylindrique dont l'axe de rotation coïncide avec l'orientation de l'aimantation. Le groupe magnétique associé est le $\infty/m\bar{3}m$. Dans cette symétrie, la matrice élastomagnétique s'apparente à celle de l'équation 2.60 avec la seule différence que $2s_{66} = s_{11} - s_{12}$. Ainsi, un échantillon possédant une aimantation nette non nulle se comporte comme un matériau piézomagnétique, bien qu'il ne possède pas nécessairement

de propriétés piézomagnétiques.

2.5 Énergie d'un système élastomagnétique

Alors que l'approche thermodynamique permet de déterminer comment des perturbations mécaniques et magnétiques affectent un système particulier, elle limite l'interprétation physique des phénomènes magnétoélastiques par des relations linéaires. Pour combler ce vide, une approche énergétique plus générale est considérée. Ainsi, l'énergie d'un système magnétoélastique par unité de volume est exprimée en fonction des variables mécaniques et magnétiques, soit la déformation ε_{ij} et les cosinus directeurs du vecteur d'aimantation $\alpha_i = M_i/M$.

De manière générale, l'expression de la densité d'énergie u est développée par une série de Maclaurin contenant trois types de dépendance : mécanique (ε_{ij}), magnétique (α_i) et magnétoélastique (ε_{ij} et α_i).

$$\begin{aligned} u = & f_0 + a_i \alpha_i + a_{ij} \alpha_i \alpha_j + \dots \\ & + c_{ij} \varepsilon_{ij} + c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \\ & + b_{ijk} \alpha_i \varepsilon_{jk} + b_{ijkl} \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

Cela correspond en fait à la densité d'énergie interne de l'équation 2.45, mais avec des termes d'ordres supérieurs. Un terme f_0 est ajouté pour inclure toutes les autres contributions énergétiques comme l'effet Zeeman et l'énergie magnétostatique qui seront détaillées subséquemment.

Une autre approche parfois utilisée est de développer ces dépendances par une série d'harmoniques sphériques propres au système étudié [52,54]. La décomposition par séries de Maclaurin est suffisante pour les besoins de ce travail. Dans l'équation 2.61, des tenseurs généraux $a_{ij\dots n}$, $c_{ij\dots n}$ et $b_{ij\dots n}$ sont introduits afin que chacun des termes soit un scalaire comme l'énergie. Le rang et le type des tenseurs sont déterminés par les quantités qu'ils lient comme expliqué dans la section 2.4.1. Finalement, la distinction des trois dépendances permet de séparer l'énergie en différentes contributions, soit une énergie d'anisotropie magnétocristalline u_a , une énergie mécanique u_m et une énergie magnétoélastique u_{me} .

$$u = f_0 + u_a + u_m + u_{me} \quad (2.62)$$

Avant de développer chacune des contributions, une première simplification s'impose. Comme l'énergie doit être symétrique dans le temps, soit qu'aucune direction du temps ne doit être favorisée par rapport à l'autre, tous les tenseurs de type A doivent s'annuler, car ils sont

antisymétriques en temps par définition [51]. En d'autres mots, seuls les termes contenant un nombre pair de cosinus directeurs α_i restent dans l'expression totale. Des invariances géométriques en translation et en rotation doivent aussi être respectées pour l'énergie du système, mais elles ne permettent pas de simplifier davantage l'équation 2.61 [11].

2.5.1 Énergie d'anisotropie magnétocristalline

L'énergie d'anisotropie magnétocristalline représente la tendance de l'aimantation à s'orienter selon certains axes plutôt que d'autres. Ces axes sont déterminés par la structure cristalline du système et permettent de définir des axes faciles et difficiles de l'aimantation. Il est énergétiquement favorable d'avoir une aimantation dans l'axe facile plutôt que dans l'axe difficile, car le travail requis pour aimanter le système (équation 2.32) est plus faible. L'origine et les expressions énergétiques de ce phénomène sont présentées ci-dessous.

Origine de l'anisotropie magnétocristalline

L'origine microscopique de l'anisotropie magnétique se résume par la présence d'une anisotropie de l'interaction entre atomes et du couplage spin-orbite. En effet, les propriétés anisotropiques de l'interaction entre atomes sont partagées avec l'orientation des spins, ou de l'aimantation grâce à l'interaction quantique du couplage spin-orbite [53]. Un développement classique du phénomène est décrit pour calculer l'énergie d'une paire de spins selon leur orientation.

Soit deux atomes magnétiques f et g tels que schématisés dans la figure 2.4. Leur moment magnétique \mathbf{m} est identique et forme un angle ψ avec le vecteur \mathbf{r} reliant les deux atomes. On admet que tous les moments dans un domaine magnétique sont parallèles. Puis, l'énergie d'interaction s'écrit à l'aide d'un développement en polynômes de Legendre $P_l(\cos \psi)$ et leur coefficient $A_l(r)$ comme le montre l'équation 2.63.

$$W_{fg}(r, \psi) = A_0(r) + A_2(r) \left(\cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + A_4(r) \left(\cos^4 \psi - \frac{6}{7} \cos^2 \psi + \frac{3}{35} \right) + \dots \quad (2.63)$$

L'absence des termes avec l impair est justifiée par l'invariance de l'énergie sous l'inversion du temps, car le moment magnétique s'inverse suite à cette opération [55]. De plus, le choix des polynômes de Legendre permet de simplifier l'expression de l'énergie, notamment parce que l'anisotropie magnétique prend la même symétrie que le champ cristallin local [53]. En effet, puisque le champ cristallin local est un potentiel électrostatique $1/r$, il peut s'exprimer par des polynômes de Legendre [56].

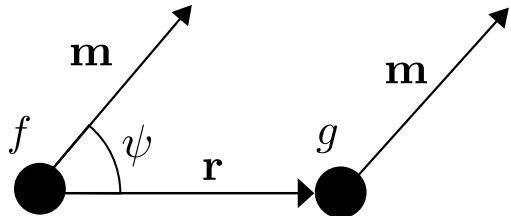


Figure 2.4 Schéma du modèle de paires pour l'énergie magnétocristalline.

Figure 2.4 Schéma du modèle de paires pour l'énergie magnétocristalline. Le diagramme montre deux sphères noires, f et g , représentant des moments magnétiques \mathbf{m} . Les moments sont indiqués par des flèches sortant des sphères. La distance entre les deux sphères est indiquée par un vecteur \mathbf{r} . L'angle entre le vecteur \mathbf{r} et chaque moment \mathbf{m} est dénommé ψ .

Dans l'équation 2.63, le premier terme est un terme isotrope indépendant de l'angle ψ qui représente l'énergie d'échange des deux moments, qui est minimale lorsque les moments sont parallèles. Quant à eux, les deuxième et troisième termes décrivent différents niveaux d'anisotropie. Le second terme, soit le terme dipolaire, est associé aux symétries uniaxiales alors que le troisième terme, un terme quadripolaire, est plutôt associé aux symétries cubiques. Comme de fait, la somme des énergies d'interaction W_{fg} dans un cristal cubique ne contient que des termes quadripolaires. Pour un cubique centré comme pour le groupe ponctuel $m\bar{3}m$ du fer, l'énergie magnétocristalline devient

$$u_a^{(cub)} = \frac{K_1}{2} (\sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \sin^2 2\phi), \quad (2.64)$$

avec les angles sphériques (θ, ϕ) et une constante énergétique K_1 (J/m^3) [53]. L'équation 2.64 est une correction de l'expression présentée dans la référence [53]. Les angles θ et ϕ qui minimisent cette énergie correspondent aux axes faciles du cristal. Par exemple, pour l'équation 2.64 avec une constante $K_1 > 0$, les axes faciles coïncident avec les axes $\langle 100 \rangle$ du cristal cubique.

Expression de l'énergie magnétocristalline

L'approche microscopique de la section précédente décrit l'origine de l'anisotropie magnétocristalline, mais l'expression obtenue par celle-ci, comme l'équation 2.64, n'est pas idéale pour le calcul de l'énergie, car les constantes microscopiques sont difficilement mesurables. En pratique, une approche macroscopique est employée dans laquelle les symétries cristallines sont exploitées pour simplifier les termes en α_i de l'équation initiale 2.61. Spécifiquement, l'énergie magnétocristalline prend la forme suivante :

$$u_a = a_0 + a_{ij}\alpha_i\alpha_j + a_{ijkl}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l + \dots \quad (2.65)$$

Maintenant, il suffit d'appliquer le principe de Neumann sur les tenseurs $a_{ij..n}$ pour une symétrie cubique $m\bar{3}m$ par exemple. Il n'est pas nécessaire de définir le groupe magnétique pour cette énergie, car les effets de couplage sont considérés explicitement dans l'énergie magnétoélastique. La symétrie cubique permet d'éliminer beaucoup de termes notamment grâce à l'équivalence des trois axes et de l'invariance de l'énergie par permutations des indices

$(\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i)$. Sans les détails, l'équation 2.65 se simplifie par

$$u_a^{(cub)} = K_0 + K_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2) + K_2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2) + \dots \quad (2.66)$$

qui est la forme habituelle de l'énergie magnétocristalline cubique. Les constantes K_i (J/m^3) peuvent être liées aux composantes des tenseurs $a_{ij\dots n}$ [52]. Le terme constant K_0 est souvent ignoré, car c'est la variation d'énergie qui est importante dans la plupart des études. Comme valeurs typiques, les constantes d'anisotropie magnétocristalline du fer à température ambiante s'élèvent à $K_1 = 48 \text{ kJ}/\text{m}^3$ et $K_2 = -10 \text{ kJ}/\text{m}^3$ [53]. Cette expression de l'énergie ajoute un terme de plus que l'approche microscopique (équation 2.64) via la constante K_2 . Cette dernière modifie les axes faciles du cristal cubique selon son importance relative par rapport à K_1 .

Dans le cas d'une symétrie uniaxiale, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline s'exprime par l'équation 2.67 ou 2.68 selon le système de coordonnées utilisé. La seconde expression est en fonction de l'angle θ par rapport à l'axe principal x_3 .

$$u_a^{cyl} = K_0 + K_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + K_4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 \quad (2.67)$$

$$= K_0 + K_2 \sin^2 \theta + K_4 \sin^4 \theta \quad (2.68)$$

Une autre forme pratique de cette énergie d'anisotropie uniaxiale est l'équation 2.69 qui définit l'axe principal de l'anisotropie selon une direction arbitraire β_i , plutôt que x_3 .

$$u_a^{cyl} = K'_0 - K_2(\alpha_i \beta_i)^2 + \dots \quad (2.69)$$

La constante K_2 de cette équation est équivalente à celle des équations 2.67 et 2.68. En effet, le produit scalaire $\alpha_i \beta_i$ est équivalent à $\cos \theta$, et donc $(\alpha_i \beta_i)^2 = 1 - \sin^2 \theta$.

2.5.2 Énergie mécanique

L'énergie mécanique constitue l'énergie emmagasinée dans le matériau alors qu'une contrainte le déforme [48]. Le travail effectué par la contrainte a déjà été établi par l'équation 2.19. À partir de cette équation, l'énergie mécanique se calcule en intégrant le travail d'une contrainte variant de 0 à σ_{ij} , supposant que la transition demeure quasi-statique.

$$u_m = \int_0^{\sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} \quad (2.70)$$

Cette expression prend déjà la forme d'une densité d'énergie plutôt que d'une énergie totale

et le signe négatif du travail disparaît grâce à la relation entre le travail et l'énergie potentielle (égaux à un signe près). Pour développer cette intégrale, une relation linéaire entre la déformation ε_{ij} et la contrainte σ_{ij} est utilisée telle que

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (2.71)$$

Il s'agit en fait de la loi de Hooke généralisée inverse et elle se retrouve sans surprise dans le développement thermodynamique (équation 2.52), car ce dernier suppose aussi une dépendance linéaire entre les deux variables mécaniques. Bref, l'énergie mécanique devient

$$u_m = \int_0^{\sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d(s_{ijkl}\sigma'_{kl}) \quad (2.72)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.73)$$

Le développement de l'intégrale doit se faire en considérant les sommes implicites de la notation d'Einstein. La démonstration est présentée dans l'annexe C. Parfois, cette énergie est exprimée seulement en fonction des déformations ε_{ij} ou des contraintes σ_{ij} . Pour obtenir ces expressions, il suffit de réintroduire la loi de Hooke dans l'équation 2.73. Les coefficients d'élasticité C_{ijkl} et de rigidité s_{ijkl} apparaissent aussi dans ces cas.

Pour un corps élastique, cette énergie est complètement récupérable une fois que le corps retourne à son état initial. L'équation 2.73 demeure donc valide tant que le régime élastique est respecté. Sinon, un traitement non linéaire de la théorie de l'élasticité doit être employé. Les expressions ainsi obtenues sont requises pour comprendre des phénomènes apparaissant à grande contrainte [57].

2.5.3 Énergie de couplage magnétoélastique

L'énergie de couplage magnétoélastique peut s'interpréter par l'énergie d'interaction entre les moments magnétiques alors que leur distance relative est modifiée par une déformation. Cette interprétation se justifie théoriquement à partir du modèle microscopique de paires proposé par Néel [58] et présenté ci-bas. Suite à ce développement, l'expression de l'énergie de couplage est dérivée à l'aide des propriétés de symétrie.

Origine microscopique du couplage magnétolélastique

Soit 2 atomes magnétiques f et g séparés d'une distance \mathbf{r}_0 au repos avec leur moment magnétique identique \mathbf{m} formant un angle ψ avec la direction du lien interatomique. La figure

2.5 illustre cette situation. L'énergie d'interaction est développée en une série de polynômes de Legendre $P_l(\cos \psi)$ avec des coefficients $A_l(r)$ comme pour le développement de l'énergie magnétocristalline. Cette fois, seulement le premier terme anisotrope est nécessaire. Bref, l'énergie d'interaction W_{fg} entre les deux atomes s'exprime par

$$W_{fg}(r, \psi) = A_0(r) + A_2(r) \left(\cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + \dots \quad (2.74)$$

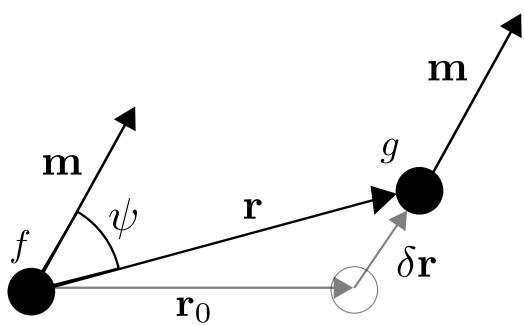


Figure 2.5 Schéma du modèle de paires pour le couplage magnétoélastique.

Encore une fois, le premier terme est une contribution isotrope comme l'énergie d'échange des deux atomes. Le terme suivant est plus intéressant, car il varie en fonction de l'orientation du moment magnétique. L'énergie d'interaction est ensuite calculée alors qu'une petite déformation ($\delta r \ll r_0$) est appliquée à la paire d'atomes comme représenté dans la figure 2.5. Sous cette condition, la fonction $A_2(r)$ s'exprime adéquatement par les premiers termes d'un développement en une série de Taylor :

$$A_2(r) = A_2(r_0) + r_0 \frac{\partial A_2}{\partial r} \left(\frac{\delta r}{r_0} \right) + \dots \quad (2.75)$$

Puis, la variation δr peut s'exprimer en fonction de la matrice de déformations ε_{ij} et des cosinus directeurs β_i du lien interatomique initial. Le développement pour le couplage de premier ordre, soit pour une dépendance linéaire des déformations ε_{ij} permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\delta r}{r_0} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{2}{3} \left(\varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \right) \left(\beta_3^2 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(\beta_1^2 - \beta_2^2) + 2(\varepsilon_{yz}\beta_2\beta_3 + \text{cycl.}) + \dots \end{aligned} \quad (2.76)$$

Les termes d'ordre supérieurs sont explicités dans la littérature [11]. L'indication *cycl.* dans le dernier terme de l'équation 2.76 dissimule les deux autres permutations *xz* et *xy*. Après cette déformation, la direction du lien interatomique est aussi modifiée, ce qui modifie l'angle ψ . Cette nouvelle direction, exprimée par le vecteur (u, v, w) , se développe à partir de la direction initiale du lien β_i et des composantes de déformation ε_{ij} . L'équation suivante décrit

la composante u de la nouvelle direction :

$$\begin{aligned} u = & \beta_1 \left[1 + \varepsilon_{xx}(1 - \beta_1^2) - \varepsilon_{yy}\beta_2^2 - \varepsilon_{zz}\beta_3^2 - 2\varepsilon_{yz}\beta_2\beta_3 \right] \\ & + \varepsilon_{zx}\beta_3(1 - 2\beta_1^2) + \varepsilon_{xy}\beta_2(1 - \beta_1^2). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Les deux autres composantes v et w se trouvent par une permutation cyclique des indices. Encore une fois, seuls les termes du premier ordre sont présentés, le reste étant détaillé dans la littérature [11]. Connaissant maintenant les coordonnées du système déformé, l'orientation de l'aimantation et ses cosinus directeurs α_i peuvent s'exprimer par rapport à ce nouveau système. Simplement, le cosinus de l'angle ψ s'écrit à l'aide d'un produit scalaire

$$\cos \psi = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w. \quad (2.78)$$

Finalement, lorsque tous les morceaux sont mis ensemble, soit la substitution des équations 2.75-2.78 dans l'expression 2.74, alors l'énergie d'interaction $W_{fg}(r, \varepsilon_{ij}, \beta_i)$ est exprimée en fonction des paramètres initiaux. Pour obtenir l'énergie totale du système, il suffit d'additionner les énergies d'interaction entre toutes les paires d'atomes du système. Dans ce type de calcul, il est convenable de séparer le problème en deux cas selon la portée de l'interaction : à longue portée ou à courte portée.

D'abord, pour calculer l'énergie d'interaction à longue portée, la somme doit inclure tous les moments magnétiques du système, ce qui rend cette énergie dépendant de la forme du système. L'interaction à longue portée est donc une anisotropie de forme apparentée à un champ dipolaire. Toutefois, cette énergie contribue peu à l'énergie totale comparativement à l'énergie d'interaction à courte portée et ne permet donc pas d'expliquer le couplage magnétoélastique de premier ordre [59]. Elle est donc négligée dans ce développement.

Par conséquent, seule l'interaction à courte portée est importante, et cela limite la somme des énergies de paire aux plus proches voisins. Cette somme, qui varie selon la structure cristalline étudiée, permet d'obtenir une expression analytique de l'énergie magnétoélastique du système en fonction du coefficient $A_2(r)$, de sa dérivée, de la déformation ε_{ij} et de l'orientation de l'aimantation. La somme élimine effectivement tous les β_i dans l'expression de l'énergie, car chaque voisin possède sa propre direction β_i . Par exemple, pour une symétrie cubique, l'énergie magnétoélastique prend la forme

$$\begin{aligned} u_{me} = & B_1(\varepsilon_{11}(\alpha_1^2 - 1/3) + \varepsilon_2(\alpha_2^2 - 1/3) + \varepsilon_{33}(\alpha_3^2 - 1/3)) \\ & + B_2(\varepsilon_{23}\alpha_2\alpha_3 + \varepsilon_{13}\alpha_1\alpha_3 + \varepsilon_{12}\alpha_1\alpha_2), \end{aligned} \quad (2.79)$$

avec des constantes énergétiques B_1 et B_2 liées à la fonction d'interaction $A_2(r)$ et de sa dérivée [11]. En pratique, il n'est pas évident de connaître cette fonction et l'approche macroscopique des symétries est préférable.

Expression de l'énergie magnétoélastique

Repartant du développement en série de Maclaurin de l'équation 2.61, l'énergie magnétoélastique est exprimée simplement par

$$u_{me} = b_{ijkl}\alpha_i\alpha_j\varepsilon_{kl} + \dots \quad (2.80)$$

En général, le premier terme non nul de ce développement est suffisant pour décrire adéquatement le couplage magnétoélastique. Les termes d'ordre supérieur sont requis lors d'une étude plus approfondie des propriétés du matériau comme la propagation d'ondes acoustiques dans un ferromagnétique soumis à un champ magnétique [11]. En d'autres mots, comme le présent travail ne traite pas de ce type de phénomène, les corrections d'ordres supérieurs sont négligées.

Ainsi, l'énergie magnétoélastique de premier ordre se résume à un tenseur de rang 4 b_{ijkl} qui doit respecter certaines conditions de symétrie. Il y a notamment la symétrie intrinsèque de la déformation $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ et la permutation des cosinus directeurs $\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$. Par contre, la permutation de paires d'indices dans le tenseur b_{ijkl} n'est pas une opération de symétrie ($b_{ijkl} \neq b_{klij}$) puisque chaque paire d'indices représente une quantité différente ($\alpha_i\alpha_j$ ou ε_{kl}).

Pour réduire davantage le nombre de composantes de ce tenseur, les symétries du système sont considérées. Pour un système cubique par exemple, l'énergie magnétoélastique s'exprime en fonction de trois composantes indépendantes.

$$\begin{aligned} u_{me}^{(cub)} = & B_0(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + B_1(\varepsilon_{11}\alpha_1^2 + \varepsilon_{22}\alpha_2^2 + \varepsilon_{33}\alpha_3^2) \\ & + B_2(\varepsilon_{23}\alpha_2\alpha_3 + \varepsilon_{13}\alpha_1\alpha_3 + \varepsilon_{12}\alpha_1\alpha_2) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Les constantes B_i peuvent non seulement être liées aux composantes du tenseur b_{ijkl} , mais aussi aux constantes microscopiques de l'équation 2.79. En effet, le développement du modèle de paires permet d'obtenir la même expression d'énergie qu'avec les symétries cubiques. Des valeurs typiques des constantes sont par exemple $B_1 = -2.9 \times 10^6$ J/m³ et $B_2 = 5.8 \times 10^6$ J/m³ pour le fer à la température ambiante, notant que la constante B_0 est négligée puisqu'elle définit un terme indépendant de l'aimantation [53].

Autre notation : constante de magnétostriction

Plutôt que d'utiliser les coefficients B_i pour caractériser le couplage magnétoélastique, d'autres notations ont été introduites au cours des années. Une de celles-ci introduit les constantes de magnétostriction λ pour définir la déformation causée par la présence d'un champ magnétique. Pour une symétrie cubique par exemple, deux nouvelles constantes λ_{100} et λ_{111} sont définies par rapport aux propriétés mécaniques et magnétoélastiques du matériau [60].

$$\lambda_{100} = -\frac{2}{3} \frac{B_1}{c_{11} - c_{12}} \quad (2.82)$$

$$\lambda_{111} = -\frac{1}{3} \frac{B_2}{c_{44}} \quad (2.83)$$

L'indice de ces constantes indique la direction cristalline dans laquelle la déformation magnétostrictive se produit, d'au moins en première approximation [11]. Avec ces constantes, la déformation dans un axe quelconque peut être calculée en les combinant adéquatement [53].

Dans le cas particulier d'une magnétostriction isotrope, les deux constantes de magnétostriction sont égales : $\lambda_{100} = \lambda_{111}$. Suivant leur définition respective, cette condition impose que le matériau soit isotrope non seulement selon ses propriétés mécaniques ($2c_{44} = c_{11} - c_{12}$), mais aussi selon ses propriétés magnétoélastiques ($B_1 = B_2$). Une constante unique λ_s est donc définie.

Or, les constantes de magnétostriction λ_{100} et λ_{111} sont généralement différentes et produisent une anisotropie dans les propriétés magnétoélastiques. Il est quand même possible de calculer une magnétostriction effective λ_s de manière approximative. Cette approche est appropriée dans quelques cas spécifiques comme pour un matériau polycristallin dans lequel les différentes orientations d'anisotropie ont tendance à se moyenner et à produire une isotropie effective. Bien que cela reste une approximation, des règles empiriques ont été développées pour calculer une magnétostriction effective λ_s d'un polycrystal cubique omniprésent dans les matériaux ferromagnétiques [61].

$$\lambda_s = \kappa \lambda_{100} + (1 - \kappa) \lambda_{111} \quad (2.84)$$

Une valeur courante pour κ est $2/5$. Il s'agit de la relation d'Akulov obtenue en moyennant toutes les orientations avec une contrainte constante sur toutes les frontières de domaines magnétiques. Cette valeur n'est toutefois pas bien représentative de la magnétostriction du matériau. Différents modèles un peu plus fidèles ont été développés pour évaluer κ , mais il n'en reste que ce sont des approximations [61].

L'intérêt d'employer les constantes de magnétostriction plutôt que les coefficients B_i est qu'elles peuvent être mesurées directement, car elles sont effectivement des déformations mécaniques. Un autre avantage des λ est de pouvoir exprimer l'énergie directement en fonction de la contrainte σ_{ij} plutôt que la déformation ε_{ij} comme le montre l'équation suivante :

$$u_{me}^{(cub)} = -\frac{3}{2}\lambda_{100}(\alpha_1^2\sigma_{11} + \text{cycl.}) - 3\lambda_{111}(\alpha_2\alpha_3\sigma_{23} + \text{cycl.}) \quad (2.85)$$

Dans un contexte expérimental, il peut être plus facile de contrôler une contrainte qu'une déformation. Dans le cas particulier d'une contrainte uniaxiale et d'une magnétostriction isotrope, l'énergie de couplage prend la forme courante

$$u_{me}^{(uni)} = \frac{3}{2}\lambda_s\sigma_0 \sin^2 \theta \quad (2.86)$$

pour un angle θ entre l'aimantation et la contrainte. Il s'agit effectivement d'une énergie d'anisotropie magnétique uniaxiale dans la direction de la contrainte d'amplitude σ_0 . La constante de magnétostriction à saturation λ_s apparaît dans cette formulation, bien qu'elle peut aussi s'exprimer en fonction des constantes B_i et s_{ijkl} [60].

Autre notation : champ magnétique effectif

Le couplage magnétoélastique peut aussi être interprété par la création d'un champ magnétique effectif \mathbf{H}_σ de la contrainte σ . Cette approche a été utilisée dans la littérature pour expliquer des processus irréversibles en présence de contraintes [62]. L'idée est de définir une contribution au champ magnétique qui est causée par la contrainte appliquée. Repartant de la densité d'énergie interne d'un système magnétoélastique (équation 2.44, ici répétée)

$$du = T \mathrm{d}S + \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \mu_0 H_i \mathrm{d}M_i, \quad (2.87)$$

un champ magnétique effectif H'_i peut être calculé en dérivant par rapport à l'aimantation M_i . Le champ effectif total se développe comme suit :

$$H'_k = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}M_i} \quad (2.88)$$

$$= H_k + \frac{\sigma_{ij}}{\mu_0} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}M_k} \quad (2.89)$$

$$= H_k + H_k^\sigma. \quad (2.90)$$

Le champ magnétique effectif est donc une combinaison du champ magnétique externe et d'un champ magnétique effectif généré par la contrainte σ_{ij} . Pour mettre en évidence la composante de la déformation totale ε_{ij} qui varie avec l'aimantation, la déformation magnétostrictive ϵ_{ij} est introduite. Bref, le champ effectif est défini par

$$H_k^\sigma = \frac{\sigma_{ij}}{\mu_0} \frac{d\epsilon_{ij}}{dM_k}. \quad (2.91)$$

Pour aller plus loin, il faut calculer la déformation magnétostrictive ϵ_{ij} , soit la déformation à l'équilibre (de Joule). Cela se fait en minimisant l'énergie du système par rapport à chacune des composantes ϵ_{ij} . Des systèmes simples comme la symétrie cubique ou encore un système isotrope peuvent être résolus analytiquement [53]. Par exemple, la déformation magnétostrictive d'un système isotrope est donnée par l'équation 2.92.

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \lambda_s \begin{bmatrix} \alpha_1^2 - 1/3 & 2\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_3 \\ 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 - 1/3 & 2\alpha_2\alpha_3 \\ 2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_2\alpha_3 & \alpha_3^2 - 1/3 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

En introduisant cette dernière dans l'expression du champ magnétique effectif pour une contrainte σ_{ij} générale, les trois composantes du champ \mathbf{H}_σ sont explicitées.

$$\mathbf{H}_\sigma = \frac{3\lambda_s}{\mu_0 M_0} \begin{bmatrix} \alpha_1\sigma_{11} + 2\alpha_2\sigma_{12} + 2\alpha_3\sigma_{13} \\ 2\alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{22} + 2\alpha_3\sigma_{23} \\ 2\alpha_1\sigma_{13} + 2\alpha_2\sigma_{23} + \alpha_3\sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Ce champ effectif peut être utilisé pour calculer l'énergie magnétoélastique

$$u_{me} = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_\sigma, \quad (2.94)$$

qui est l'énergie du système magnétique interagissant avec le champ magnétique \mathbf{H}_σ . Le facteur 1/2 est important, car il s'agit d'une interaction de paires.

2.5.4 Énergie de Zeeman

L'énergie de Zeeman ou encore l'énergie du champ magnétique externe est l'énergie emmagasinée dans le système alors qu'il interagit avec un champ magnétique externe. En quelques mots, l'énergie de Zeeman est minimale lorsque l'aimantation $\mathbf{M} = M_0 \hat{\mathbf{a}}$ est parallèle au

champ magnétique externe $\mathbf{H} = H_0\hat{\eta}$.

$$u_z = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 M_0 H_0 \hat{\alpha} \cdot \hat{\eta} \quad (2.95)$$

Cette contribution n'est pas incluse directement dans le développement en série de MacLaurin de l'équation 2.61, car elle n'intervient seulement qu'en présence d'un champ magnétique externe. En effet, le développement de l'équation 2.61 ne prend pas en compte ce type de perturbation.

2.5.5 Énergie magnétostatique

L'énergie magnétostatique, aussi appelée l'énergie de désaimantation, est essentiellement l'énergie dipolaire entre les moments magnétiques du système. À l'opposé de l'énergie de Zeeman qui favorise une même direction pour tous les moments dans un échantillon, l'énergie magnétostatique tend à orienter les moments de manière à minimiser leur énergie d'interaction. Comme l'énergie d'interaction entre deux moments magnétiques dépend de leur distance relative, l'énergie magnétostatique doit nécessairement dépendre de la forme de l'échantillon. Cette conclusion justifie l'absence de cette contribution dans le développement en série de MacLaurin de l'équation 2.61 qui traite de phénomènes microscopiques.

Bref, l'énergie magnétostatique u_{ms} s'exprime en fonction d'un champ de désaimantation \mathbf{H}_d et de l'aimantation \mathbf{M} [53].

$$u_{ms} = -\frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_d \quad (2.96)$$

L'équation 2.96 a une forme similaire à l'énergie de Zeeman à la différence près d'un facteur $1/2$. Ce dernier est justifié par le fait que le champ de désaimantation est un champ créé par l'interaction des moments magnétiques plutôt qu'un champ externe comme dans le cas de l'énergie de Zeeman. Le facteur $1/2$ permet d'éviter de compter 2 fois chaque paire de moments.

Partant de l'équation 2.96, il est possible d'obtenir une forme plus convenable de l'énergie magnétostatique et ainsi éviter de calculer le champ de désaimantation explicitement. Pour cela, le champ de désaimantation est décrit par une relation linéaire avec l'aimantation via un facteur de désaimantation \mathbf{N} est une matrice 3×3 telle que

$$\mathbf{H}_d = -\mathbf{NM}. \quad (2.97)$$

Si l'aimantation est uniforme dans l'échantillon, comme c'est le cas pour une géométrie ellip-

tique, alors cette relation est exacte. Toutefois, pour une géométrie plus complexe, l'aimantation n'est pas nécessairement uniforme et l'utilisation d'un facteur \mathbf{N} constant devient une approximation. Bref, cette définition est substituée dans l'énergie de désaimantation pour obtenir

$$u_{ms} = \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{NM}. \quad (2.98)$$

Dans le cas d'un cylindre de section circulaire dont l'axe principal coïncide avec l'axe z , le facteur de désaimantation \mathbf{N} est approximé par celui d'un ellipsoïde équivalent, soit une matrice diagonale avec 2 composantes différentes, soit $N_x = N_y$ et N_z . En introduisant maintenant les cosinus directeurs α_i de l'aimantation de norme M_0 , le développement suivant est

$$u_{ms} = \frac{1}{2}\mu_0 M_0^2 \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_x & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 M_0^2 (N_x \alpha_x^2 + N_x \alpha_y^2 + N_z \alpha_z^2) \quad (2.100)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 M_0^2 (N_x - N_x \alpha_z^2 + N_z \alpha_z^2) \quad (2.101)$$

$$= \text{const.} + \frac{1}{2}\mu_0 M_0^2 (N_z - N_x) \alpha_z^2. \quad (2.102)$$

Le passage de l'équation 2.100 à l'équation 2.101 est permis grâce à la normalisation des cosinus directeurs. Pour simplifier davantage l'expression de l'énergie magnétostatique, une propriété du facteur de désaimantation est exploitée, liant ainsi les composantes N_x et N_z . En effet, la trace de \mathbf{N} doit toujours être unitaire, et donc

$$2N_x + N_z = 1. \quad (2.103)$$

Avec cette condition, l'énergie de désaimantation devient

$$u_{ms} = u_{d,0} + \frac{1}{4}\mu_0 M_0^2 (3N_z - 1) \alpha_z^2, \quad (2.104)$$

avec un terme constant $u_{d,0}$. La même expression est obtenue en calculant la différence d'énergie emmagasinée dans l'échantillon alors qu'il est aimanté selon ses axes faciles ou difficiles [46].

L'équation 2.104 présente deux tendances opposées selon la valeur du facteur de désaimantation N_z . S'il est inférieur à $N_z < 1/3$, alors l'aimantation selon l'axe principal du cylindre

est favorisée. À l'opposé, s'il est supérieur à $N_z > 1/3$, alors l'aimantation transverse (azimutale et radiale) est favorisée. En règle générale, plus un cylindre est long par rapport à son diamètre, plus son facteur de désaimantation N_z tend à diminuer.

Des calculs micromagnétiques permettent de calculer le facteur de désaimantation N_z d'un cylindre de géométrie variable ou plus précisément le champ de désaimantation [63]. Des tables de valeurs sont aussi présentées dans la littérature [64]. Pour le cylindre, il existe des formules simples pour estimer le facteur de désaimantation N_z . Il y a notamment

$$N_z = \left(1 + \frac{4n}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1}, \quad (2.105)$$

qui donne le facteur N_z pour un cylindre d'une longueur n fois plus grande que son diamètre. L'erreur varie avec n , mais reste inférieure à 5 % pour n entre 0.1 et 100 [65].

CHAPITRE 3 EFFETS D'UNE TORSION SUR LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES

À l'aide des développements théoriques du chapitre précédent, les effets d'une torsion sur les propriétés magnétiques d'un échantillon magnétostrictif sont déterminés. Pour cela, la torsion est d'abord définie sous la forme d'une matrice de contrainte en utilisant une approche géométrique et linéaire de la déformation causée par l'application d'un couple de force sur un échantillon cylindrique [66]. Le traitement linéaire est suffisant pour ce travail bien que la déformation causée par une torsion peut être traitée plus en détail en considérant des effets non linéaires et des géométries quelconques [48].

Une fois les composantes de la torsion définies, la correspondance avec les expressions de l'énergie totale du chapitre précédent est réalisée afin de décrire les effets de la torsion sur un échantillon magnétostrictif et d'évaluer la validité du formalisme des matrices élastomagnétiques. La correspondance avec la matrice élastomagnétique permet de lier les deux approches qui peuvent sembler distinctes à priori. Plus spécifiquement, la rotation de l'aimantation d'un domaine magnétique et son effet sur sa susceptibilité en fonction de la torsion appliquée sont détaillés dans ce chapitre.

Dans la littérature, l'effet de la torsion sur l'aimantation a déjà été calculé pour un cas idéalisé qui s'approche d'un couplemètre magnétoélastique passif, montrant effectivement une rotation de l'aimantation suivant l'équation 3.18 [29]. L'expression obtenue est toutefois limitée à un système possédant une aimantation uniforme, ce qui restreint son application. Une solution plus générale est donc développée pour considérer une anisotropie magnétique quelconque qui sera utile pour le développement du modèle dans le chapitre suivant. Il s'agit de l'équation 3.24.

En ajout à cela, la réponse magnétoélastique d'un matériau ferromagnétique est développée en présence d'un champ magnétique externe. Généralement, cet ajout complique suffisamment l'analyse du couplage magnétoélastique pour justifier l'emploi de méthodes plus exhaustives comme des calculs micromagnétiques [39] ou des méthodes phénoménologiques [53, 67]. Dans ce travail, une approche simple est employée afin d'obtenir une solution explicite des courbes d'aimantations (équation 3.38) et des composantes du tenseur de susceptibilité magnétique en fonction de l'amplitude de la torsion. Les développements mathématiques de cette section sont originaux bien qu'ils soient inspirés par la littérature [10, 37].

3.1 Modélisation de la torsion sur un cylindre

La torsion est une contrainte mécanique de cisaillement générée par l'application d'un couple de force. Son effet est de faire vriller l'objet dans la même direction que le couple de force. En première approximation, l'amplitude d'une contrainte de torsion σ (Pa) est linéairement proportionnelle au couple de force appliqué τ (Nm) et pour un cylindre, cette relation est :

$$\sigma(r) = \frac{r}{J_T} \tau. \quad (3.1)$$

La constante de proportionnalité r/J_T contient la distance r à partir de l'axe de rotation et la constante de torsion J_T . La constante de torsion est une quantité géométrique liée à la forme de la section de l'objet. En général, une fonction de gauchissement (*wrapping* en anglais) doit être considérée pour calculer la constante de torsion. Dans le cas simple d'un cylindre avec une section circulaire, la constante J_T est équivalente au moment quadratique J_{zz} (l'axe z suit le long axe du cylindre) et n'a pas besoin de fonction de gauchissement. Ainsi, la constante de torsion est simplement $J_T = \pi R^4/2$ pour un rayon de cylindre R . Cela permet de réécrire l'équation 3.1 :

$$\sigma(r) = \frac{2r\tau}{\pi R^4}. \quad (3.2)$$

L'équation 3.2 permet de calculer l'amplitude de la contrainte de torsion en fonction du moment appliqué au cylindre. Or, elle ne permet pas obtenir les composantes de la matrice de contrainte σ_{ij} . Pour cela, le cas général d'un cylindre soumis à des moments opposés $\pm\tau$ à ses extrémités est considéré. La figure 3.1 illustre cette situation.

Puisque la section est circulaire, ses couples n'engendrent qu'une rotation de la section du cylindre d'un angle $\Psi(z)$. Cette rotation permet ensuite de déterminer la matrice de déformation ε_{ij} et subséquemment, la matrice de contrainte σ_{ij} via la loi de Hooke généralisée (équation 2.71).

Comme le suggère la figure 3.1a, l'angle de rotation $\Psi(z)$ varie linéairement avec la position axiale z . Il est donc exprimé avec un taux de rotation constant $\psi = \partial\Psi/\partial z$ tel que $\Psi = \psi z$. Cette transformation est utile, car le taux de rotation ψ est relié aux paramètres du problème, soit le couple appliqué τ au cylindre de rayon R , le module de cisaillement G du matériau et le moment quadratique $J_{zz} = \pi R^4/2$.

$$\tau = G\psi I_p = \frac{G\pi R^4}{2} \psi \quad (3.3)$$

La déformation de la section du cylindre est représentée par la figure 3.1b dans laquelle un

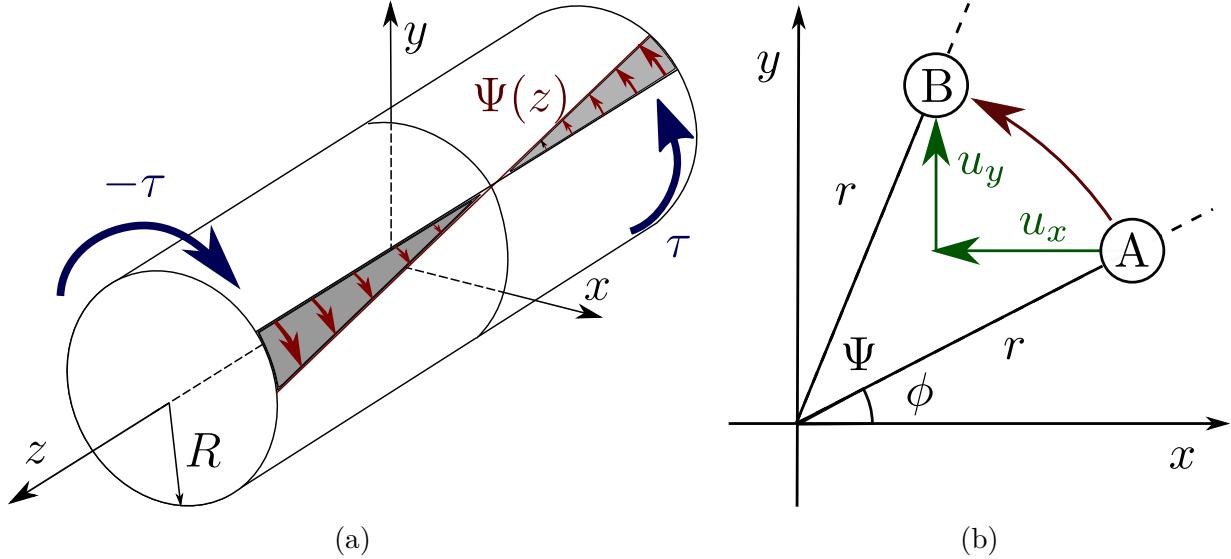


Figure 3.1 (a) Effet de la torsion sur tout le cylindre ; (b) Effet d'une rotation d'un angle Ψ sur la position d'un point A se rendant au point B.

point A se déplace au point B à cause de la torsion. Cette construction géométrique permet de décrire les déplacements (u_x, u_y, u_z) utilisés pour définir la matrice ε_{ij} . Toujours dans l'approximation de déplacements infinitésimaux, ceux-ci prennent la forme suivante :

$$u_x = -\psi z r \cos(\pi/2 - \phi) = -\psi z y \quad (3.4a)$$

$$u_y = \psi z r \sin(\pi/2 - \phi) = \psi z x \quad (3.4b)$$

$$u_z = 0. \quad (3.4c)$$

la matrice de déformation ε_{ij} est ensuite obtenue avec la définition 2.8 en notant qu'il s'agit bien d'une contrainte de cisaillement, car seules les composantes hors diagonales sont non nulles.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\psi r}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \cos \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Finalement, le tenseur de contrainte σ_{ij} s'obtient avec la loi de Hooke généralisée $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Pour des systèmes isotropes ou cubiques, la contrainte garde la même forme que la déformation, car le tenseur de rigidité c_{ijkl} est diagonal pour les déformations hors diagonales. Bref,

une contrainte en torsion s'écrit

$$\sigma_{ij} = \sigma(r) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \cos \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\sigma(r) = \frac{2\tau r}{\pi R^4} \quad (3.7)$$

$$= \sigma_0 \frac{r}{R}. \quad (3.8)$$

Le préfacteur $\sigma(r)$ correspond à l'amplitude de la contrainte, exprimée en unité de pression (Pa). Quant à lui, le facteur $\sigma_0 = 2\tau/\pi R^3$ est la contrainte maximale appliquée à la surface du cylindre. En notation de Voigt, ce tenseur s'écrit par un vecteur de taille 6×1 :

$$\sigma_A = \sigma(r) [0 \ 0 \ 0 \ \cos \phi \ -\sin \phi \ 0]^\top. \quad (3.9)$$

De plus, le signe de la contrainte indique le sens de la torsion puisqu'une inversion du sens des torsions dans la figure 3.1 équivaut à l'effet d'un moment $-\tau$ plutôt que $+\tau$. Ainsi, le signe de σ indique le sens de la torsion appliquée.

Décomposition d'une torsion en contraintes uniaxiales

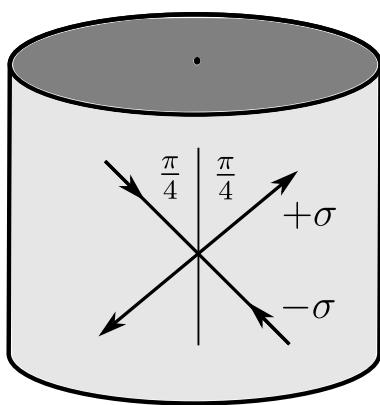


Figure 3.2 Décomposition d'une torsion en une contrainte en tension ($+\sigma$) et une contrainte en compression ($-\sigma$) sur la surface d'un cylindre.

La définition d'une torsion à partir des composantes de la matrice de contrainte σ_{ij} met en évidence les contraintes de cisaillement d'une torsion. Par contre, il est souvent plus adéquat de décomposer la torsion en deux contraintes uniaxiales pour comprendre l'effet d'une torsion sur les propriétés du matériau. La figure 3.2 illustre cette décomposition avec une contrainte en tension ($+\sigma$) et une contrainte en compression ($-\sigma$) perpendiculaires entre elles.

Pour démontrer l'équivalence des deux formulations, il suffit de démontrer que la matrice de déformation est équivalente dans les deux interprétations. En d'autres mots, la combinaison linéaire des

deux contraintes uniaxiales de la figure 3.2 doit permettre de retrouver l'équation 3.6. Pour simplifier le calcul, les matrices de contrainte sont exprimées à l'aide des cosinus directeurs

γ_i^\pm des contraintes uniaxiales σ^\pm .

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^- \quad (3.10)$$

$$= +\sigma\gamma_i^+\gamma_j^+ - \sigma\gamma_i^-\gamma_j^- \quad (3.11)$$

La direction des contraintes pourrait s'exprimer clairement dans la base cylindrique, car la décomposition se fait à la surface du cylindre, mais la matrice de contrainte σ_{ij} doit être dans la base cartésienne pour avoir une correspondance avec les développements théoriques du chapitre 2. Ainsi, les cosinus directeurs γ_i^\pm cartésiens sont dépendants de l'angle azimutal ϕ . Suivant la décomposition présentée dans la figure 3.2, les cosinus directeurs sont

$$\gamma_i^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ \pm 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

En substituant cette expression dans l'équation 3.10, la matrice de contrainte est obtenue. Sans surprise, elle concorde avec l'équation 3.6 obtenue à partir de la rotation du cylindre. En d'autres mots, la torsion sur un cylindre peut s'interpréter par deux contraintes uniaxiales de signes opposés et orientées à $\pm 45^\circ$ de l'axe du cylindre.

3.2 Effet d'une torsion sur un domaine aimanté sans champ magnétique externe

Dans le but de comprendre l'effet d'une torsion sur l'aimantation totale du cylindre, une étude plus locale est effectuée en ne considérant qu'un domaine aimanté. Celle-ci révèle comment une torsion affecte l'aimantation et le résultat est utilisé pour généraliser l'effet global sur le cylindre dépendamment de son aimantation initiale.

Soit un domaine magnétique à l'intérieur d'un échantillon cylindrique soumis à une contrainte de torsion σ en l'absence d'un champ magnétique externe. Bien que l'amplitude de la contrainte σ varie selon la position radiale du domaine dans le cylindre comme explicité par l'équation 3.7, elle est traitée comme une constante dans les développements suivants. Il suffit d'ajuster la valeur de σ dans les résultats obtenus en fonction de la position du domaine dans le cylindre pour évaluer l'effet de la torsion dans tout le cylindre.

Le domaine magnétique en question est caractérisé par un axe facile choisi dans la direction azimutale $\hat{\phi}$ pour simuler l'aimantation d'un couplemètre magnétoélastique passif [10]. L'énergie associée à cet axe facile est décrite par l'équation 2.68 avec une constante énergétique K_u . Quant à lui, le couplage magnétoélastique se décrit avec l'équation 2.86 pour un

axe facile à 45° de l'axe \hat{z} comme suggéré par la décomposition de la torsion en contraintes uniaxiales. La constante énergétique $K_\sigma = 3\lambda_s\sigma/2$ est l'équivalent magnétoélastique de la constante K_u . La figure 3.3 représente les différentes quantités du problème et met en évidence l'effet de la torsion sur l'orientation de l'aimantation par une rotation de l'aimantation d'un angle θ .

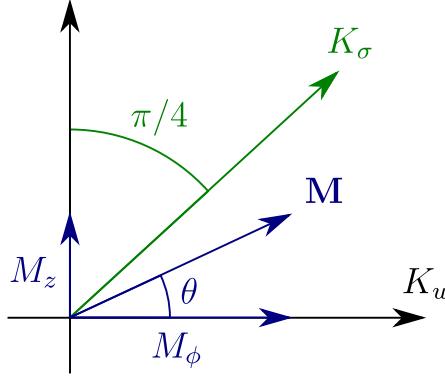


Figure 3.3 Représentation du système avec les axes faciles associés aux constantes K_u et K_σ ainsi que la décomposition de l'aimantation \mathbf{M} dans la base cylindrique.

Le système étudié est représenté en deux dimensions, car la composante radiale de l'aimantation M_r n'est pas affectée par la torsion. En équation, la densité d'énergie du système est

$$u = K_u \sin^2 \theta + K_\sigma \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right). \quad (3.13)$$

Cette énergie est ensuite minimisée pour calculer l'aimantation d'équilibre, soit en calculant l'angle θ_0 qui annule la dérivée $\partial u / \partial \theta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2K_u \sin \theta \cos \theta - 2K_\sigma \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \quad (3.14)$$

$$= K_u \sin(2\theta) - K_\sigma \cos(2\theta) \quad (3.15)$$

$$= 0 \quad (3.16)$$

L'angle θ_0 décrivant l'aimantation à l'équilibre est donc

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{3\lambda_s}{2K_u} \sigma \right). \quad (3.17)$$

Cet angle permet de calculer les composantes axiale $M_z = M_s \sin \theta$ et azimuthale $M_\phi =$

$M_s \cos \theta$ comme le suggère la figure 3.3. Par exemple, la composante axiale est

$$M_z = M_s \sin \left(\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{3\lambda_s}{2K_u} \sigma \right) \right), \quad (3.18)$$

qui correspond à l'expression présentée dans la littérature [29]. Cette fonction est représentée dans la figure 3.4 pour différentes valeurs du paramètre $b = 3\lambda_s \sigma_0 / (2K_u)$ qui représente la facilité du matériau à modifier son aimantation par la présence d'une contrainte de torsion.

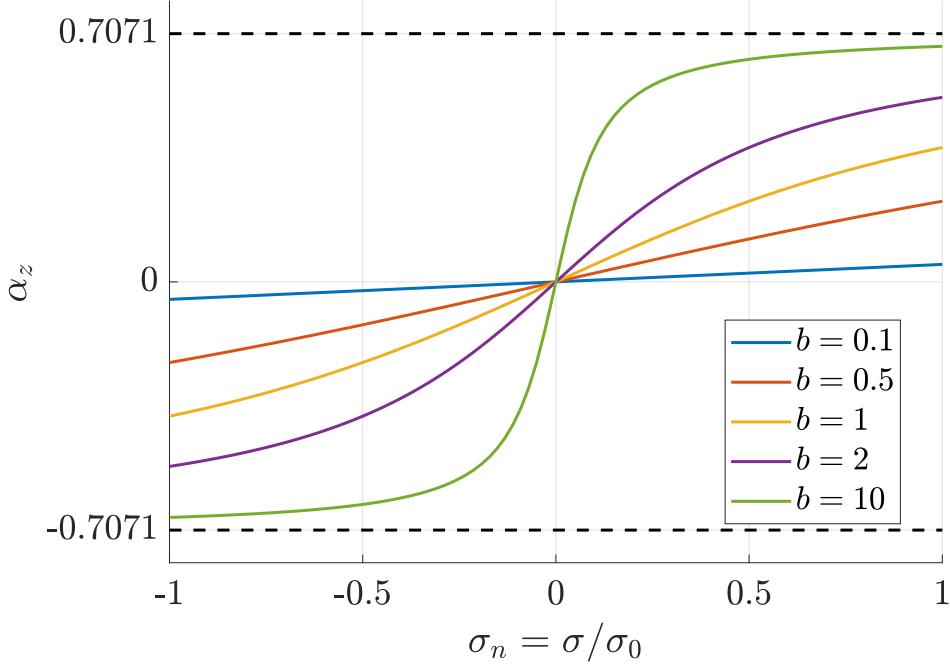


Figure 3.4 Représentation de la composante α_z de l'aimantation avec la fonction $\alpha_z = \sin(0.5 \arctan(b\sigma_n))$. Le paramètre d'échelle $b = 3\lambda_s \sigma_0 / (2K_u)$ et la contrainte normalisée $\sigma_n = \sigma / \sigma_0$ sont sans unité.

Une première observation de ces courbes est qu'elles sont bornées par $\pm 1/\sqrt{2}$. Ceci est normal, car l'énergie magnétoélastique est considérée comme une anisotropie uniaxiale à un angle $\pi/4$ et que son importance augmente avec l'argument $b\sigma_n$ de la fonction. Dans le cas d'un cylindre aimanté azimuthalement ($\hat{\phi}$) ou axialement (\hat{z}), la torsion a tendance à modifier l'aimantation de sorte qu'elle forme une hélice avec un angle d'inclinaison de 45° .

Une deuxième observation des courbes de la figure 3.4 est la dépendance linéaire de la fonction quand l'argument est petit. En effet, le développement en série de Maclaurin de cette fonction révèle une partie linéaire $b\sigma_n/2$:

$$y = \frac{1}{2}b\sigma_n + \frac{3}{16}(b\sigma_n)^3 - \frac{31}{256}(b\sigma_n)^5 + \dots \quad (3.19)$$

Une erreur de 1 % par rapport à la linéarisation est atteinte quand le produit $b\sigma_n$ est 0.376. Le comportement linéaire permet de faire un lien avec les coefficients thermodynamiques définis plus tôt.

Le développement théorique de cette section est réalisé avec un axe facile dans l'axe azimutal $\hat{\phi}$. Le résultat est l'apparition d'une composante axiale M_z purement due à la contrainte de torsion. Si l'axe facile suivait plutôt l'axe du cylindre (\hat{z}), alors la torsion créerait plutôt une composante azimutale M_ϕ . Un cas général avec un axe facile dans une direction arbitraire est étudié dans la section 3.2.2.

3.2.1 Correspondance avec la matrice élastomagnétique

Les matrices élastomagnétiques définies dans la section 2.4 sont bâties à partir de considérations thermodynamiques qui supposent une dépendance linéaire de l'aimantation en fonction d'une contrainte et d'un champ magnétique externe. Plus spécifiquement pour une contrainte en torsion qui n'a que 4 composantes hors diagonales agissant sur un système avec une symétrie cylindrique $\infty/m\bar{m}m$ dans l'axe x_3 , les composantes de l'aimantation s'expriment par

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{15}\sigma_5 \\ d_{15}\sigma_4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Cette relation est obtenue en appliquant la matrice élastomagnétique de l'équation 2.60 pour une contrainte qui ne contient que les termes σ_4 et σ_5 , soit une torsion. L'axe de symétrie correspond en fait à la direction de l'aimantation initiale, soit $\hat{\beta}$. À cause de cela, cette relation reste une approximation, car dès que les perturbations sont appliquées, l'orientation de l'aimantation est modifiée et la symétrie cylindrique autour de $\hat{\beta}$ n'est plus applicable. Toutefois, tant que l'effet sur l'aimantation reste petit, il est raisonnable de supposer que les effets dominants sont ceux permis par le groupe $\infty/m\bar{m}m$.

L'équation 3.20 met en évidence la dépendance linéaire de l'aimantation en fonction de la contrainte avec une constante d_{15} . En comparant avec le développement de la section précédente qui décrit la composante axiale M_z par l'équation 3.18, un lien s'établit entre le coefficient piézomagnétique d_{15} et les constantes énergétiques λ_s et K_u du matériau :

$$d_{15} = \frac{3\lambda_s M_s}{4K_u}. \quad (3.21)$$

Comme ordre de grandeur typique, cette pente s'élève à 75 (A/m)/MPa pour $\lambda_s = 10^{-6}$,

$M_s = 10^6 \text{ A/m}$ et $K_u = 10 \text{ kJ/m}^3$. Toutefois, ce résultat n'est valable que lorsque la variation de l'aimantation est petite ou quand le produit $\Lambda = b\sigma$ est assez petit, comme le montre la figure 3.4. La quantité Λ représente essentiellement le ratio entre l'énergie magnétoélastique et l'énergie d'anisotropie, soit $\Lambda = K_\sigma/K_u$. Les valeurs typiques indiquent qu'une erreur de linéarité de 1 % est atteinte pour une contrainte $\sigma = 2.5 \text{ GPa}$.

3.2.2 Solution générale

La solution 3.18 aussi développée dans la littérature [29] se limite à un problème à deux dimensions qui néglige la composante radiale de l'aimantation et qui suppose que l'anisotropie magnétique est purement azimutale. Une solution plus générale de l'effet d'une torsion sur l'aimantation s'obtient en considérant une anisotropie (ou une aimantation initiale) dans une direction arbitraire $\hat{\beta}$. Cette direction est décomposée en un angle β dans le plan $z\phi$ (celui de la torsion) et un angle δ dans le plan transversal. Les composantes de cette orientation sont donc

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_r \\ \beta_\phi \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \cos \beta \\ \cos \delta \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Avec cette dernière, la densité d'énergie du domaine magnétique s'écrit maintenant

$$u = K_u \sin^2(\beta - \theta) + K_\sigma \sin^2(\pi/4 - \theta). \quad (3.23)$$

L'absence de l'angle δ dans cette équation montre que la composante radiale de l'aimantation n'est pas affectée par la torsion ; seulement les composantes axiale α_z et azimutale α_ϕ en sont affectées. La figure 3.5 illustre les différentes contributions de cette énergie dans le plan $z\phi$ de la torsion. Pour déterminer l'angle d'équilibre θ^* , il faut minimiser l'équation 3.23. Les quatre solutions analytiques sont les suivantes :

$$\theta_{1,2,3,4}^* = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\pm \cos(2\beta)}{\sqrt{1 + \Lambda^2 + 2\Lambda \sin(2\beta)}} \right), \quad (3.24)$$

avec $\Lambda = K_\sigma/K_u$. Pour identifier la bonne solution, il faut connaître l'orientation initiale de l'aimantation, soit l'angle β , par rapport aux axes de l'anisotropie magnétoélastique $\pm K_\sigma$. Une fois que la région est identifiée, l'angle d'équilibre θ^* est calculé directement. La solution doit refléter le comportement de l'aimantation qui a tendance à s'aligner avec les axes $\pm K_\sigma$ selon le signe du produit $\lambda_s \sigma$, comme le montre la figure 3.5b. Finalement, les composantes

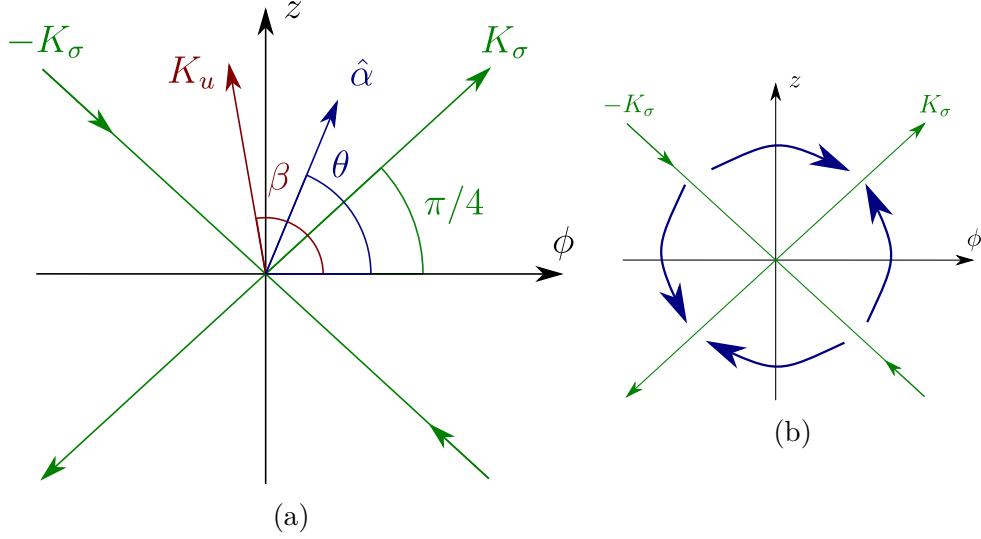


Figure 3.5 (a) Représentation des directions des anisotropies énergétiques K_u et K_σ ainsi que l'aimantation finale $\hat{\alpha}$. (b) Comportement de l'aimantation selon sa région initiale pour $\lambda_s \sigma > 0$

de l'aimantation sous torsion sont :

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \cos \theta^* \\ \cos \delta \sin \theta^* \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

3.3 Effets d'une torsion sur un domaine aimanté avec champ magnétique externe

L'intérêt d'ajouter un champ magnétique externe dans le système est de pouvoir étudier la courbe d'aimantation de l'échantillon et décrire la variation de la susceptibilité magnétique en fonction de la torsion appliquée à l'échantillon. Ces caractéristiques permettent par exemple de modéliser un couplemètre actif exploitant la variation de la susceptibilité sous l'effet de la torsion [15]. De plus, ce genre de traitement aide à comprendre l'effet d'un champ magnétique externe sur le signal d'un couplemètre magnétoélastique passif.

La susceptibilité magnétique s'interprète par la facilité à laquelle un matériau s'aimante dans une direction i par la présence d'un champ magnétique externe dans la direction j . Elle prend donc la forme d'une matrice χ_{ij} de taille 3×3 comme présentée dans la section 2.3.1 introduisant les coefficients thermodynamiques. Suivant cette approche thermodynamique, la susceptibilité devrait être constante et donc, indépendante de la contrainte appliquée σ_{ij} . Toutefois, il s'agit d'une approximation et une analyse plus complète révèle quelques varia-

tions de la susceptibilité par rapport à un champ magnétique externe et à une contrainte.

L'analyse plus complète consiste à calculer la susceptibilité à partir d'une approche énergétique quasi statique, sans supposer la linéarité de celle-ci en fonction des perturbations. L'idée est donc de calculer l'aimantation à l'équilibre en minimisant l'énergie totale du domaine magnétique soumis à une contrainte en torsion et à un champ magnétique externe. Il s'agit d'une méthode courante pour étudier un système magnétostatique [10, 37] bien que le développement présenté ici est original. Pour finir, les courbes d'aimantation et la susceptibilité sont calculées pour décrire leurs tendances.

3.3.1 Énergie d'un domaine dans la symétrie cylindrique

La densité d'énergie d'un domaine magnétique ayant une anisotropie magnétique uniaxiale avec une constante K_u et soumis à un champ magnétique externe H_0 ainsi qu'une contrainte en torsion σ est

$$u = -\mu_0 H_0 M_s (\hat{\alpha} \cdot \hat{\eta}) - K_u (\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta})^2 + \frac{1}{2} B_2 s_{44} \sigma (\cos \phi \alpha_2 \alpha_3 - \sin \phi \alpha_1 \alpha_3), \quad (3.26)$$

avec les cosinus directeurs cartésiens $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\eta}$ de l'orientation de l'aimantation, de l'axe facile et du champ magnétique externe respectivement. Ceux-ci sont exprimés dans la base cartésienne afin d'être conséquent avec la contrainte σ_{ij} , aussi exprimée dans la base cartésienne.

Le terme du couplage magnétoélastique est une forme équivalente à l'équation 2.81, mais avec les composantes de la contrainte σ_{ij} plutôt que la déformation ε_{ij} . Spécifiquement, les composantes ε_{23} et ε_{13} deviennent $s_{44}\sigma_{23}/2$ et $s_{44}\sigma_{13}/2$ respectivement. Cette opération impose donc une condition sur la symétrie des propriétés élastiques du système telle que le tenseur de rigidité s_{AB} soit diagonal pour les contraintes de cisaillement ($s_{AB} = 0$ pour $A \neq B$ et $A, B > 3$). C'est le cas notamment pour les symétries cubique, cylindrique et sphérique pertinentes au problème étudié. Finalement, les composantes d'une contrainte en torsion introduisent l'amplitude de la torsion σ ainsi que les fonctions $\cos \phi$ et $\sin \phi$ comme montrées par l'équation 3.9.

Une autre simplification est de supposer un matériau isotrope autant pour ses propriétés mécaniques que magnétoélastiques dans le monodomaine magnétique. Cela permet de remplacer les coefficients $B_2 s_{44}$ par la magnétostriction à saturation $-3\lambda_s$. L'intérêt d'utiliser cette notation est qu'il est plus facile d'inclure la polycristallinité d'un matériau via λ_s plutôt que $B_2 s_{44}$. Il y a notamment des règles semi-empiriques pour lier les magnétostrictions anisotropes λ_{100} et λ_{111} d'une maille cubique à la magnétostriction à saturation λ_s [53]. Cette notation a été détaillée dans la section 2.5.3. Pratiquement, l'utilisation d'une seule constante

facilite le développement mathématique sans toutefois limiter l'impact d'un matériau polycristallin. Bref, pour le reste du développement, cette notation est employée. Voici la nouvelle expression de la densité d'énergie :

$$u = -\mu_0 H_0 M_s (\hat{\alpha} \cdot \hat{\eta}) - K_u (\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta})^2 - \frac{3}{2} \lambda_s \sigma (\cos \phi \alpha_y \alpha_z - \sin \phi \alpha_x \alpha_z) \quad (3.27)$$

Pour simplifier davantage cette expression, les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) sont utilisées. En effet, les deux termes magnétoélastiques s'unissent par la définition $\alpha_\phi = \alpha_y \cos \phi - \alpha_x \sin \phi$. Au final, l'équation 3.27 devient

$$u = -\mu_0 H_0 M_s (\hat{\alpha} \cdot \hat{\eta}) - K_u (\hat{\alpha} \cdot \hat{\beta})^2 - \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \alpha_\phi \alpha_z, \quad (3.28)$$

avec les orientations $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\eta}$ exprimées dans la base cylindrique. Il est possible de montrer que le couplage magnétoélastique exprimé ainsi est équivalent à la forme de l'équation 3.13 à une constante près. Or, il n'est pas avantageux ici d'utiliser des fonctions trigonométriques, car l'énergie de Zeeman est d'ordre 1 en fonction des α_i , rendant les relations trigonométriques plus difficiles à traiter.

3.3.2 Minimisation de l'énergie

La minimisation de l'énergie peut se faire de différentes manières. La plus évidente est de résoudre un système d'équations tel que la solution est l'orientation de l'aimantation à l'équilibre. Ce système d'équations se trouve en considérant un multiplicateur de Lagrange ξ qui assure la normalisation des cosinus directeurs α_i de l'aimantation. La forme générale du Lagrangien \mathcal{L} avec une condition de normalisation est

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi) = u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \xi(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 1). \quad (3.29)$$

Cette dernière suggère que le multiplicateur de Lagrange doit avoir des unités de densité d'énergie (J/m^3) et que la contrainte de normalisation agit en quelque sorte comme une énergie additionnelle. Sa particularité est qu'un minimum est atteint quand la normalisation est respectée et quand le multiplicateur est négatif ($\xi < 0$). Si la condition sur le multiplicateur n'est pas respectée, alors la solution ne respecte pas la condition de normalisation et est considérée non physique.

Les points critiques du Lagrangien de l'équation 3.29 sont maintenant calculés en annulant

les quatre dérivées, soit

$$\nabla \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_3}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

La quatrième équation de ce système est tout simplement la condition de normalisation des cosinus directeurs. La minimisation de l'énergie est d'abord employée pour le cas particulier d'une aimantation azimutale favorisée $\hat{\beta} = (0, 1, 0)$ et d'un champ magnétique axial $\hat{\eta} = (0, 0, 1)$. L'énergie totale d'un tel système est

$$u = -\mu_0 H_z M_s \alpha_z - K_u \alpha_\phi^2 - \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \alpha_z \alpha_\phi. \quad (3.31)$$

La méthode du Lagrangien permet d'obtenir le système d'équations 3.32 qui élimine directement la composante $\alpha_1 = \alpha_r$, car elle ne modifie pas l'énergie.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_\phi} = -2K_u \alpha_\phi - \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \alpha_z - 2\xi \alpha_\phi = 0 \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_z} = -\mu_0 H_z M_s - \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \alpha_\phi - 2\xi \alpha_z = 0 \quad (3.32b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = \alpha_\phi^2 + \alpha_z^2 - 1 = 0 \quad (3.32c)$$

Le facteur de Lagrange ξ est éliminé en combinant l'équation 3.32a à l'équation 3.32b. Le résultat de cette opération est l'équation 3.33.

$$-\frac{3}{2} \lambda_s \sigma \alpha_\phi \left(1 - \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_\phi} \right)^2 \right) + 2K_u \alpha_z - \mu_0 M_s H_z = 0 \quad (3.33)$$

Ensuite, la condition de normalisation permet d'éliminer une seconde variable et d'obtenir une équation à une inconnue. Par exemple, l'équation à résoudre pour obtenir la composante axiale α_z de l'aimantation à l'équilibre est la suivante :

$$-\frac{3}{2} \lambda_s \sigma \sqrt{1 - \alpha_z^2} \left(1 - \frac{\alpha_z^2}{1 - \alpha_z^2} \right) + 2K_u \alpha_z - \mu_0 M_s H_z = 0. \quad (3.34)$$

Une approche numérique peut être employée pour résoudre cette équation non linéaire, mais sa complexité rend difficile l'analyse des racines de la fonction. Plutôt que cela, des approximations sont utilisées pour obtenir un résultat théorique qui représente les tendances

générales de l'aimantation sous perturbations. Ces approximations sont les suivantes :

$$\alpha_z^2 \ll \alpha_\phi^2 \quad (3.35a)$$

$$\sqrt{1 - \alpha_z^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha_z^2. \quad (3.35b)$$

Elles sont justifiées par une petite variation de l'aimantation par rapport à son état d'équilibre. Dans le cas étudié, l'aimantation garde une forte composante azimutale α_ϕ même sous la perturbation du champ magnétique axial H_z et de la torsion. Bref, l'équation 3.33 est simplifiée de sorte à obtenir une équation quadratique qui se résout facilement.

$$\frac{3}{4}\lambda_s\sigma\alpha_z^2 + 2K_u\alpha_z - \mu_0M_sH_z - \frac{3}{2}\lambda_s\sigma = 0 \quad (3.36)$$

Les deux solutions à cette équation sont obtenues avec la formule quadratique :

$$\alpha_z^\pm = \frac{1}{\Lambda} \left(\sqrt{2\sqrt{2 + \zeta\Lambda + \Lambda^2}} \pm 2 \right). \quad (3.37)$$

Les ratios adimensionnels $\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$ et $\zeta = \mu_0M_sH_z/K_u$ sont introduits pour faciliter leur lecture. Ces ratios indiquent à quel point les énergies magnétoélastique et de Zeeman compétitionnent avec l'énergie d'anisotropie effective.

Il reste maintenant à distinguer les solutions positive et négative de l'équation 3.37. L'analyse de ces fonctions révèle que la solution α_z^+ possède une singularité quand la contrainte σ est nulle ($\Lambda = 0$), alors que la solution α_z^- est continue dans tout le domaine étudié. L'unique solution physique est donc α_z^- . Cette conclusion est aussi obtenue en restreignant le multiplicateur de Lagrange ξ à une valeur négative comme suggérée plus tôt.

Ainsi, la composante axiale α_z d'une aimantation initialement purement azimutale et soumise à un champ magnétique externe H_z ainsi qu'une torsion d'amplitude σ est calculée à partir de

$$\alpha_z = \frac{1}{\Lambda} \left(\sqrt{2\sqrt{2 + \zeta\Lambda + \Lambda^2}} - 2 \right). \quad (3.38)$$

La composante azimutale α_ϕ est ensuite calculée avec la normalisation. Pour des fins de validation, une comparaison de cette expression avec la solution sans champ magnétique (équation 3.18) est réalisée. L'équivalent sans champ magnétique de l'équation 3.38, soit avec $\zeta = 0$, est développé en série :

$$\alpha_z(\Lambda) = \frac{1}{2}\Lambda - \frac{1}{16}\Lambda^3 + \frac{1}{64}\Lambda^5 - \dots \quad (3.39)$$

Tableau 3.1 Comparaison des solutions calculées pour décrire l'aimantation axiale en fonction d'une torsion et d'un champ magnétique axial via $\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$ et $\zeta = \mu_0 M_s H_z / K_u$.

Référence	Expression α_z	Développement en série ($H_z = 0$)	Détails
3.18	$\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(\Lambda)\right)$	$\frac{1}{2}\Lambda + \frac{3}{16}\Lambda^3 - \dots$	Solution analytique en l'absence de champ magnétique
3.24	$\cos\delta \sin\left(\theta_{1,2,3,4}^*(\Lambda)\right)$	-	Généralisation de l'équation 3.18 pour une anisotropie magnétique quelconque
3.38	$\frac{1}{\Lambda} \left(\sqrt{2} \sqrt{2 + \zeta\Lambda + \Lambda^2} - 2 \right)$	$\frac{1}{2}\Lambda - \frac{1}{16}\Lambda^3 + \dots$	Approximation de deuxième ordre en présence d'un champ magnétique axial
3.40	$\frac{1}{2}(\zeta + \Lambda)$	$\frac{1}{2}\Lambda$	Linéarisation de la solution 3.38 et ne tient pas compte de la normalisation

Ce développement révèle un terme linéaire commun et un écart d'au moins $\Lambda^3/4$ par rapport au développement en série de la solution précédente (équation 3.19). La différence des deux solutions s'explique par les approximations utilisées dans le développement de la solution avec champ magnétique (équation 3.35b).

Une solution plus simple peut s'obtenir en linéarisant l'équation 3.34, soit en supposant que $\alpha_\phi \approx 1$. La solution linéaire se trouve directement :

$$\alpha_z = \frac{\mu_0 M_s H_z}{2K_u} + \frac{3\lambda_s\sigma}{4K_u} \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2}(\zeta + \Lambda) \quad (3.41)$$

Le tableau 3.1 compare les différentes solutions décrivant l'aimantation axiale α_z en fonction de la torsion σ obtenues dans cette section et la précédente.

3.3.3 Courbes d'aimantation

Avec l'expression de l'aimantation M_i en fonction du champ magnétique externe H_j , la courbe d'aimantation peut être obtenue dans toutes les directions. Dans le cas précédent d'un champ magnétique axial H_z appliqué à un monodomaine magnétique avec une anisotropie magné-

tique dans la direction azimutale et en présence d'une contrainte en torsion, la courbe d'aimantation est décrite par la solution 3.38. La condition de normalisation permet d'obtenir aussi la composante azimutale α_ϕ de l'aimantation à partir de cette solution. La figure 3.6 illustre cette dépendance en fonction du couplage magnétoélastique $\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$ et du champ magnétique externe via le paramètre $\zeta = \mu_0 M_s H_z / K_u$ et ce, pour différentes amplitudes de torsion.

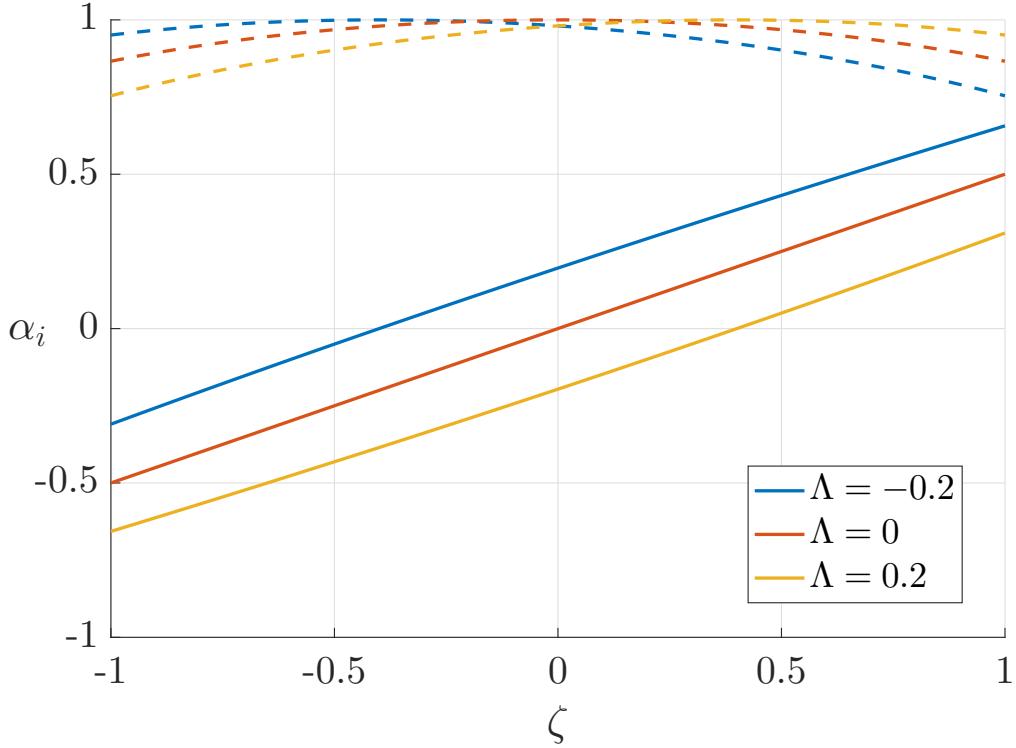


Figure 3.6 Dépendance en contrainte des courbes d'aimantation suivant l'équation 3.38. Les lignes pleines sont α_z et les lignes pointillés, α_ϕ .

En rappel, le problème étudié est un domaine initialement aimanté dans la direction azimutale α_ϕ (lignes pointillées) qui se réoriente dans la direction axiale α_z (lignes pleines). Dans les ordres de grandeur prescrits par l'approximation des petites variations, les courbes de la figure 3.6 sont représentées adéquatement par les coefficients thermodynamiques introduits plus tôt. En effet, la matrice élastomagnétique pour une symétrie cylindrique $\infty/m\bar{m}\bar{m}$ propre au problème étudié permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} M_\phi \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{15}\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{zz}H_z \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Comme cette relation le suggère, la composante axiale $\alpha_z = M_z/M_s$ a une tendance li-

néaire avec l'amplitude du champ magnétique H_z et la composante azimutale est à peu près constante $\alpha_\phi \approx 1$ autour de $\zeta = 0$. De plus, l'effet de la torsion est de donner une contribution additionnelle à la composante α_z selon le signe de la contrainte. Une différence par rapport à cette matrice élastomagnétique est la présence d'une contribution $\chi_{\phi z} H_z$ qui modifie la composante azimutale M_ϕ . La pente non nulle de M_ϕ est un effet de deuxième ordre causé par la normalisation de l'aimantation. Cette contribution n'est pas considérée dans l'approche linéaire. Bref, l'équation 3.42 devrait plutôt être

$$\begin{bmatrix} M_\phi \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{15}\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{\phi z} H_z \\ \chi_{zz} H_z \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

avec des susceptibilités $\chi_{\phi z}$ et χ_{zz} définies à partir des courbes d'aimantation obtenues.

3.3.4 Calcul de la susceptibilité magnétique

La susceptibilité χ_{ij} est calculée en prenant la dérivée de l'aimantation M_i en fonction d'un champ magnétique externe H_j à un champ nul, soit

$$\chi_{ij} = \left[\frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right]_{H_j=0}. \quad (3.44)$$

En d'autres mots, il s'agit de la pente des courbes d'aimantation de la figure 3.6 à champ nul ($\zeta = 0$). Le calcul théorique de la susceptibilité s'effectue en appliquant la définition 3.44 avec la solution α_z de l'équation 3.38. La solution linéaire 3.40 est utilisée uniquement pour obtenir une expression plus simple de la composante $\chi_{\phi z}$. Voici le développement pour les

susceptibilités χ_{zz} et $\chi_{\phi z}$:

$$\chi_{zz} = \left[\frac{\partial M_z}{\partial H_z} \right]_{H_z=0} \quad (3.45)$$

$$= \left[M_s \frac{\partial \alpha_z}{\partial H_z} \right]_{H_z=0} \quad (3.46)$$

$$= \left[M_s \frac{\partial \alpha_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial H_z} \right]_{H_z=0} \quad (3.47)$$

$$= \left[M_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\zeta\Lambda+2\Lambda^2}} \right) \left(\frac{\mu_0 M_s}{K_u} \right) \right]_{H_z=0} \quad (3.48)$$

$$= \frac{\mu_0 M_s^2}{2K_u} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\Lambda^2}} \quad (3.49)$$

$$\chi_{\phi z} = \left[\frac{\partial M_\phi}{\partial H_z} \right]_{H_z=0} \quad (3.50)$$

$$= -\chi_{zz} \left[\frac{\alpha_z}{\sqrt{1-\alpha_z^2}} \right]_{H_z=0} \quad (3.51)$$

$$= -\chi_{zz} \frac{\Lambda}{\sqrt{4-\Lambda^2}} \quad (3.52)$$

$$= -\frac{\mu_0 M_s^2}{2K_u} \frac{\sqrt{2}\Lambda}{\sqrt{8+2\Lambda^2-\Lambda^4}}. \quad (3.53)$$

La figure 3.7 représente la dépendance en contrainte ($\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$) des composantes de la susceptibilité χ_{zz} et $\chi_{\phi z}$ suivant les équations 3.49 et 3.53.

Ces deux courbes mettent en évidence le caractère pair et impair des composantes χ_{zz} et $\chi_{\phi z}$ respectivement. De plus, la composante hors diagonale $\chi_{\phi z}$ s'annule en $\sigma = 0$, ce qui correspond à l'approche thermodynamique de l'équation 3.42. Dans l'approximation des petites variations, soit quand $\Lambda \ll 1$, ces deux courbes peuvent être représentées par des polynômes de degré 0 et 1 suivant leur développement en série de Taylor.

$$\chi_{zz}(\Lambda) = \frac{\mu_0 M_s^2}{2K_u} \left(1 - \frac{1}{4}\Lambda^2 + \frac{3}{32}\Lambda^4 - \dots \right) \quad (3.54)$$

$$\chi_{\phi z}(\Lambda) = \frac{\mu_0 M_s^2}{2K_u} \left(-\frac{1}{2}\Lambda + \frac{1}{16}\Lambda^3 - \frac{11}{256}\Lambda^5 + \dots \right) \quad (3.55)$$

En rappel, la variable Λ est liée à la contrainte par $\Lambda = 3\lambda_s\sigma/2K_u$. Ainsi, la pente de la susceptibilité $\chi_{\phi z}$ est de l'ordre 5 GPa^{-1} pour des valeurs typiques $M_s = 10^6 \text{ A/m}$, $\lambda_s = 10^{-6}$ et $K_u = 10^4 \text{ J/m}^3$.

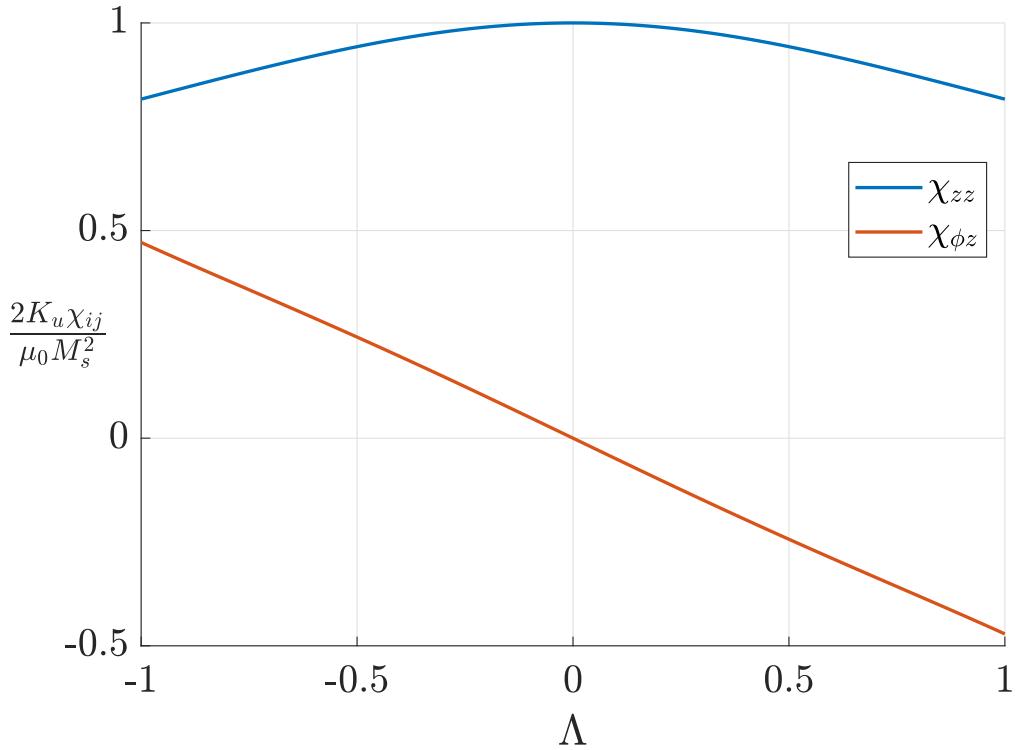


Figure 3.7 Dépendance en contrainte de la susceptibilité χ_{ij} suivant les équations 3.49 et 3.53.

Une note importante face à ses résultats est qu'il s'agit de la susceptibilité magnétique issue de la rotation de l'aimantation, alors qu'en réalité d'autres phénomènes contribuent à la susceptibilité. En effet, dans un matériau réel, la susceptibilité est aussi due aux déplacements des frontières des domaines magnétiques. L'ajout de cette contribution est hors de portée de ce travail, mais il est tout de même possible de la calculer séparément [53].

CHAPITRE 4 MODÉLISATION D'UN COUPLEMETRE MAGNÉTOÉLASTIQUE PASSIF

L'effet de l'application d'un couple mécanique sur un échantillon cylindrique possédant une aimantation nette non nulle a été détaillé dans le chapitre précédent. Ces développements sont maintenant intégrés dans un modèle théorique permettant de reproduire les caractéristiques principales du signal d'un couplemètre magnétoélastique passif. Différents modèles sont proposés dans la littérature pour l'analyse de ce type de dispositif. Il y a par exemple la méthode de la minimisation de l'énergie d'un monodomaine magnétique afin de calculer l'orientation finale de son aimantation lorsqu'il est en présence de la torsion, de contraintes résiduelles et d'un champ magnétique externe [29, 37]. Cette dernière est toutefois difficile à planter si la solution explicite n'est pas connue car la minimisation peut demander beaucoup de ressources informatiques. Les modèles proposés supposent donc que la zone active du couplemètre magnétoélastique réagit uniformément en fonction de la torsion. Pour inclure l'effet de champs magnétiques externes, ce qui n'est pas considéré dans le modèle proposé, des modèles de l'hystérosis du dispositif sont réalisés avec des relations phénoménologiques [67]. Ces modèles tendent toutefois à introduire une pléthore de paramètres qui sont difficilement mesurables expérimentalement.

Le modèle proposé dans ce travail emploi la méthode de la minimisation de l'énergie, mais en incluant une discrétisation de la zone active du couplemètre. Cela permet donc d'étudier des systèmes non-uniformes au dépend d'un temps de calcul plus grand ou de l'utilisation d'hypothèses simplificatrices. En bref, le modèle consiste à sous-diviser le volume d'un cylindre en petits éléments ayant chacun leur aimantation et leurs propriétés magnétiques et magnétoélastiques suivant la configuration du dispositif. Puis, le couple mécanique est appliqué, résultant en une modification de l'aimantation de chaque élément suivant le couplage magnétoélastique défini plus tôt. Cette nouvelle configuration magnétique permet finalement de calculer le champ magnétique autour de l'échantillon ainsi que la courbe de signal du dispositif. Spécifiquement, ce chapitre inclut une description de la géométrie du modèle, de l'initialisation de l'aimantation, de l'application du couple mécanique, du calcul du signal et pour finir, de la validation et les limites du modèle. Une approche similaire a été détaillée dans la littérature pour un couplemètre magnétoélastique passif qui inclut notamment des contraintes résiduelles, l'anisotropie cubique de chacun des éléments et un champ magnétique externe, mais qui suppose un matériau uniforme.

4.1 Géométrie et maillage

La modélisation d'un couplemètre magnétoélastique passif commence par une sous-division du volume total du cylindre en plusieurs petits éléments magnétiques physiquement bornés et possédant chacun leurs propriétés magnétoélastiques. Cette approche est particulièrement intéressante pour étudier des distributions non uniformes des propriétés magnétiques et des fluctuations dans l'aimantation du cylindre.

La construction du maillage des éléments magnétiques dans le cylindre est réalisée à partir de trois nombres entiers N_r , N_ϕ , et N_z indiquant le nombre d'éléments dans chacun des axes définissant le cylindre. Ces axes sont respectivement les directions radiale, azimutale et axiale. Le nombre total d'éléments magnétiques est donc le produit de ces trois nombres $N = N_r N_\phi N_z$. La figure 4.1 illustre le maillage uniforme d'un cylindre avec $(N_r, N_\phi, N_z) = (4, 12, 4)$ ainsi que la géométrie d'un élément.

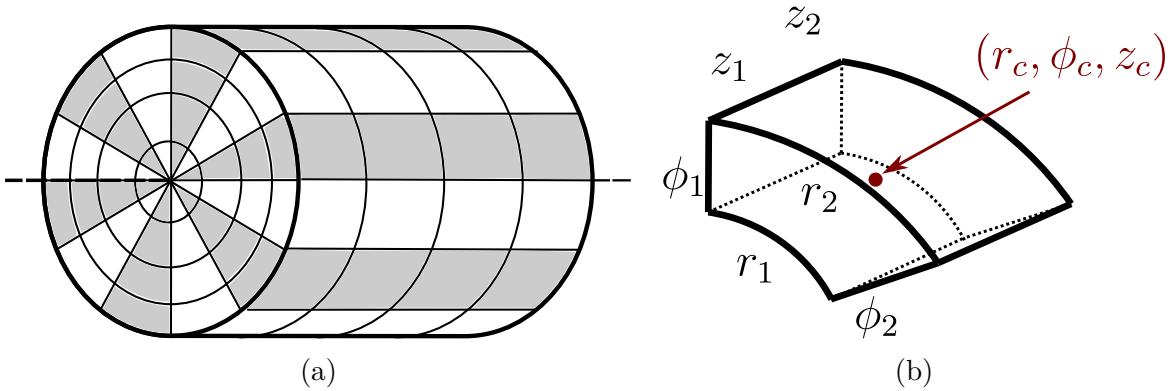


Figure 4.1 (a) Maillage cylindrique avec $(N_r, N_\phi, N_z) = (4, 12, 4)$. Les zones grises sont ajoutées par souci de clarté. (b) Géométrie d'un élément délimité par r_1 , r_2 , ϕ_1 , ϕ_2 , z_1 et z_2 avec son centre géométrique.

Une contrainte intéressante à considérer pour le choix des paramètres de maillage est la géométrie des éléments magnétiques résultants. Un choix judicieux pour les N_i permet de construire des éléments magnétiques se rapprochant le plus possible de cubes. Ce détail devient important lorsque le reste du modèle est considéré. En effet, chaque élément magnétique est éventuellement remplacé par un dipôle magnétique. Pour que cette approche soit valide, il faut que les éléments soient sphériques. Dans la géométrie proposée, cela correspond à des cellules se rapprochant le plus possible d'une forme cubique. L'effet d'une cellule cubique plutôt que sphérique est évalué dans la section 4.5.1. Bref, pour construire un maillage d'éléments

quasi cubique, la relation entre les N_i est

$$N_r = N_\phi / 2\pi = RN_z / L \quad (4.1)$$

pour un cylindre de rayon R et de longueur L . En utilisant le rayon maximal R plutôt que les rayons intermédiaires, ce sont les éléments en surface qui sont le plus cubiques. Ce choix est justifié par le fait que le champ magnétique à un point à l'extérieur de cylindre provient majoritairement des éléments magnétiques en surface.

Toujours en lien avec l'approximation dipolaire, la position du dipôle équivalent est choisie au centre de l'élément magnétique. Le centre géométrique \mathbf{x}_c de l'élément se calcule par intégrale avec son volume V_e . Il s'agit en fait du centre de masse de l'élément, car toutes ses propriétés sont uniformes.

$$\mathbf{x}_c = \frac{1}{V_e} \iiint \mathbf{x}_c dV \quad (4.2)$$

$$V_e = \iiint 1 dV = \Delta z \Delta \phi \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \quad (4.3)$$

Bref, la position du centre de l'élément est :

$$r_c = \frac{2}{3} \frac{r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (4.4a)$$

$$\phi_c = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (4.4b)$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (4.4c)$$

Une autre quantité intéressante à déterminer en lien avec le maillage est la taille moyenne des éléments magnétiques. Celle-ci se calcule en fonction du volume total V_0 de l'échantillon, du nombre d'éléments N et de la taille d'un élément magnétique cubique $V_e = t^3$:

$$t = \left(\frac{V_0}{N} \right)^{1/3}. \quad (4.5)$$

Cette grandeur définit la longueur moyenne à l'intérieur de laquelle les propriétés du matériau sont uniformes. Il est possible de retrouver cette grandeur dans des matériaux réels. Par exemple pour un paramagnétique, cette borne délimite la maille cristalline, alors que pour un ferromagnétique, elle représente la longueur caractéristique du matériau. Cette dernière varie généralement entre 10 nm et 20 nm [68]. Pour un problème plus macroscopique comme la modélisation d'un couplemètre magnétoélastique, la taille t correspond plutôt à la granularité

du système, qui n'est pas forcément la longueur caractéristique. La granularité peut être par exemple la taille des cristaux dans le polycristal ou encore la taille des monodomains magnétiques selon les approximations du modèle.

Prévoyant que les éléments près du capteur contribuent davantage au champ magnétique mesuré, des distributions non uniformes pourraient être considérées afin de réduire le temps de calcul. Toutefois, ces distributions ont tendance à déformer les éléments hors de la forme cubique espérée. La figure 4.2 illustre des sections du cylindre avec des distributions uniforme et non uniforme dans les directions radiale et azimutale. Pour le reste de l'étude, la distribution uniforme est employée pour garder des éléments quasi cubiques.

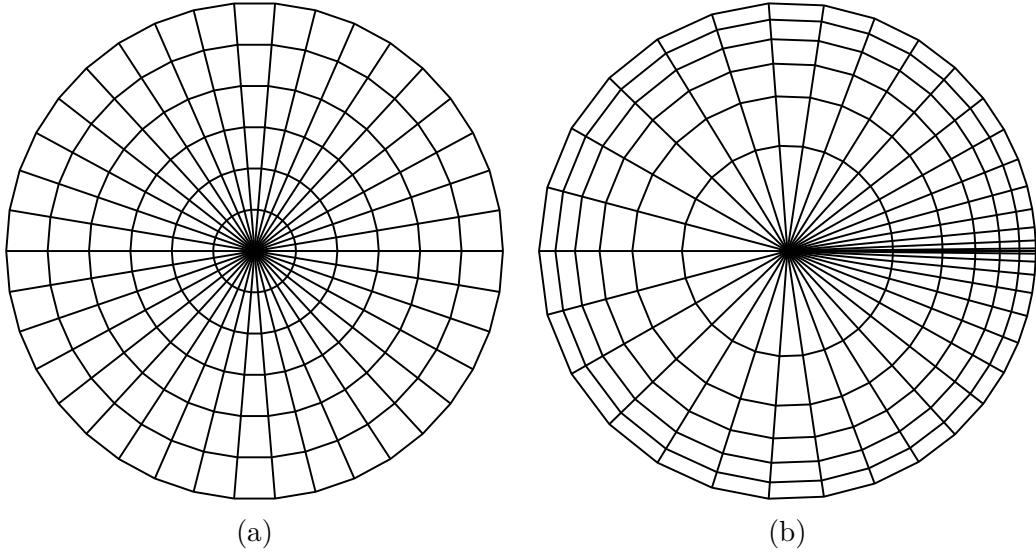


Figure 4.2 Maillage uniforme (a) et non uniforme (b) dans les directions radiales et azimutales avec $N_r = 6$ et $N_\phi = 38$. Le capteur est à droite.

4.1.1 Test de convergence

Pour évaluer l'effet de la taille des éléments sur le résultat final, une analyse de convergence est réalisée. L'idée est de générer le maillage du cylindre avec N éléments aimantés aléatoirement. Dans cette configuration, le champ magnétique à un point dans l'espace autour du cylindre s'approche de 0 plus le nombre d'éléments dans le cylindre augmente, car les propriétés sont uniformes et isotropes. Le point dans l'espace correspond par exemple à la position d'un capteur de champ magnétique.

La figure 4.3 présente la norme du champ d'induction B calculé pour un capteur situé à 2 mm de la surface d'un cylindre de rayon $R = 9$ mm et de longueur $L = 40$ mm avec une aimantation à saturation $M_s = 1.6 \times 10^6$ A/m². Chaque point représente un calcul de champ

magnétique pour un maillage différent et des aimantations aléatoires différentes. Tous les mailles sont construits en gardant la contrainte du maillage quasi cubique de l'équation 4.1.

Bien qu'il y ait une grande variabilité dans les résultats, une courbe de tendance peut tout de même être obtenue. Cette dernière s'exprime par

$$B(N) = (4.5 \pm 1.1)N^{-0.48 \pm 0.04} \text{ T.} \quad (4.6)$$

Cette équation prend essentiellement la forme $B(N) = C/\sqrt{N}$ pour une constante C . Ce type de relation est typique d'un résultat qui dépend de la taille d'un échantillon. Outre que pour démontrer la convergence du champ magnétique, il serait intéressant d'utiliser l'équation 4.6 pour investiguer la granularité magnétique d'un cylindre désaimanté à partir de son champ magnétique résiduelle.

En effet, la figure 4.3 met en évidence le lien entre la taille moyenne des éléments magnétiques et du champ magnétique résiduel. Toutefois, il faut que l'échantillon corresponde au cylindre modélisé avec toutes ses hypothèses, ce qui limite beaucoup l'applicabilité de cette méthode. Même pour un cylindre idéal, l'incertitude venant de la distribution de valeurs est très grande (± 0.5 mm) comparativement à d'autres méthodes d'imagerie comme la microscopie par imagerie d'électrons polarisés en spin (spin-SEM), qui peut atteindre des résolutions spatiales de 3 nm [69, 70]. Bref, comparer le champ magnétique résiduel d'un échantillon avec celui du modèle pour évaluer la granularité d'un cylindre désaimanté n'est pas une méthode idéale, mais permet une caractérisation rapide.

Un autre de test de validité pour le modèle est la tendance du champ de fuite à diminuer plus on s'éloigne de la source. Ce test de convergence se fait en calculant le champ magnétique d'un cylindre aimanté en fonction de la distance du capteur. Théoriquement, le champ magnétique à l'extérieur du cylindre s'approche de 0 plus la distance par rapport à sa surface augmente. Il s'agit bien de la tendance observée comme montre la figure 4.4.

Dans cette figure, chaque point représente un calcul de champ magnétique à une distance d avec des aimantations différentes à chaque fois. Les différentes aimantations entre chaque calcul justifient la variabilité dans les résultats. Le nombre d'éléments est gardé constant à 10 millions avec le même cylindre que pour la figure 4.3, soit $R = 9$ mm et $L = 40$ mm. Ce maillage crée des éléments quasi cubiques longs de 100 μm . La courbe de tendance est exprimée par une relation de puissance :

$$B(d) = (7.1 \pm 0.7)d^{(-1.8 \pm 0.2)} \text{ mT,} \quad (4.7)$$

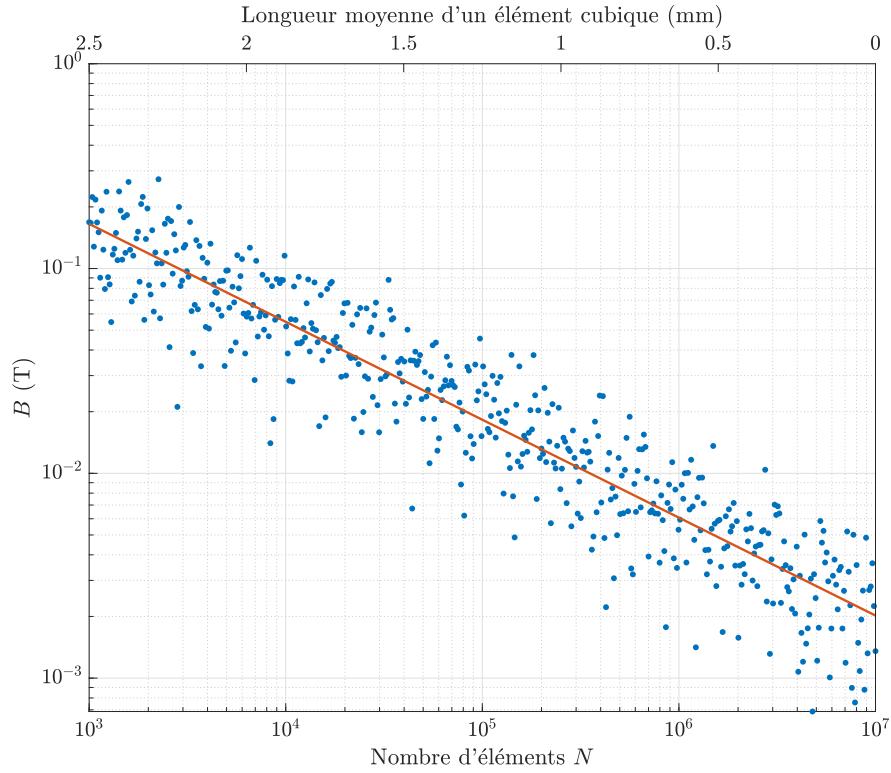


Figure 4.3 Champ d'induction B généré par une distribution de N éléments aimantés aléatoirement ($M_s = 1.6$ MA/m) dans un cylindre ($R = 9$ mm, $L = 40$ mm). L'axe supérieur indique la taille moyenne des éléments cubiques.

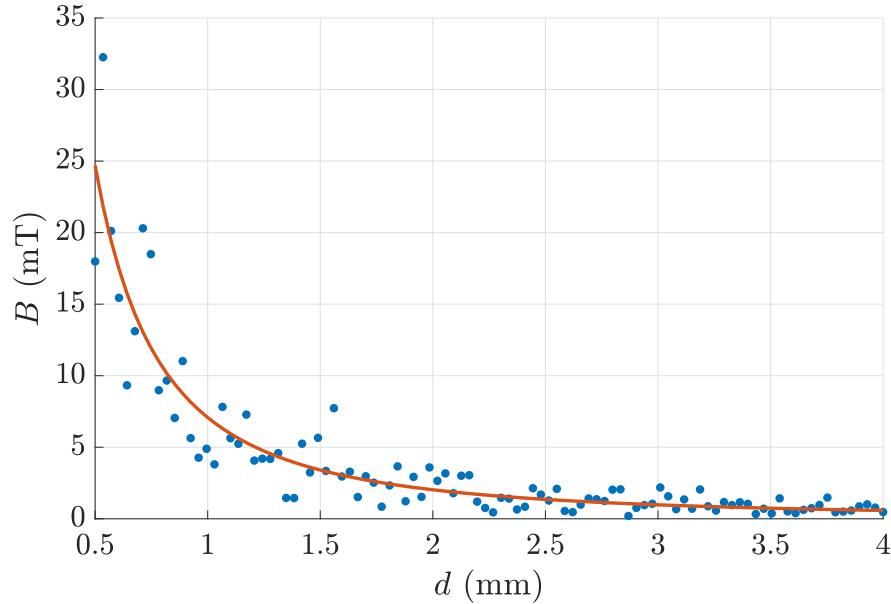


Figure 4.4 Champ d'induction B généré par une distribution de 10 millions d'éléments aimantés aléatoirement ($M_s = 1.6$ MA/m) dans un cylindre ($R = 9$ mm, $L = 40$ mm) pour différentes distances d par rapport à la surface du cylindre.

avec la distance d exprimée en mm. Cette tendance convergence bien vers 0 pour de grandes distances et il est normal d'avoir une relation qui décroît moins vite que $1/d^3$ prédict par l'équation 4.9 du champ dipolaire. En effet, comme le champ total B inclut la contribution de plusieurs champs dipolaires aléatoires à différentes positions, la tendance globale est moins prononcée.

D'un point de vue pratique, l'effet de la discrétisation sur le résultat final du modèle est une rugosité dans le résultat final. Il est toutefois possible d'obtenir un résultat suffisamment lisse et uniforme avec beaucoup d'éléments. Ce nombre est déterminé pour chaque problème afin que le résultat ne change pas significativement en augmenter le nombre d'éléments. Généralement, ce nombre est autour de 10 millions.

4.2 Initialisation des éléments magnétiques

Une fois que la géométrie est construite, les propriétés du matériau sont ajoutées à chacun des éléments. Dans ce modèle, les propriétés importantes sont le rapport entre le coefficient de magnétostriction λ_s et la constante d'anisotropie magnétique effective K_u ainsi que l'aimantation $\mathbf{M} = M_s \hat{\alpha}$. Alors que le rapport λ_s/K_u quantifie l'effet d'un couple sur l'aimantation, l'initialisation de l'aimantation permet de définir les bandes aimantées des couplemètres. Ces bandes aimantées sont distinguées des zones désaimantées présentes dans le reste du cylindre soumis au couple mécanique.

Les bandes aimantées d'un couplemètre magnétoélastique passif consistent en une région du cylindre définie par une aimantation azimutale $\pm\hat{\phi}$. Une telle configuration est représentée dans la figure 4.5 pour un couplemètre à trois bandes magnétiques avec un maillage grossier. En pratique, une telle configuration s'obtient par exemple en faisant pivoter le cylindre près d'un aimant permanent [31].

Dans un modèle théorique, il est facile de poser une telle aimantation à tous les éléments faisant partie de la bande aimantée. Or dans un matériau réel, il peut y avoir des petites déviations de l'aimantation, même si l'aimantation moyenne reste azimutale ($\pm\hat{\phi}$). Ces fluctuations de l'aimantation sont causées par des contraintes résiduelles, des défauts cristallographiques, la polycristallinité du matériau et la non-uniformité des propriétés magnétiques dans le cylindre [31]. Pour modéliser ces fluctuations, deux déviations γ_r et γ_z sont introduites à l'aimantation initiale des éléments. Elles représentent respectivement des angles d'élévation

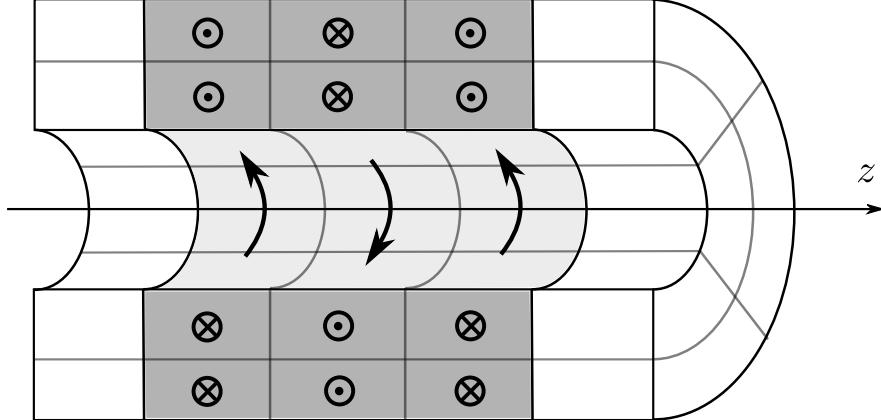


Figure 4.5 Coupe d'un cylindre initialisé suivant les trois bandes magnétiques d'un couplemètre magnétoélastique passif délimitées par la zone grise. Les flèches indiquent l'orientation de l'aimantation et les régions blanches correspondent à la zone désaimantée de l'échantillon.

vers les axes \hat{r} et \hat{z} à partir de l'axe $\hat{\phi}$. En équation, les composantes de l'aimantation sont :

$$\begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma_r \\ \cos \gamma_r \cos \gamma_z \\ \cos \gamma_r \sin \gamma_z \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Avec cette définition, il est aisé d'introduire une distribution normale autour de l'orientation azimutale $\hat{\phi}$ en déterminant un couple de nombres aléatoires (γ_r, γ_z) pour chaque élément magnétique. Ces nombres appartiennent à une distribution normale à deux variables avec des valeurs moyennes nulles. Il s'agit d'une généralisation de la distribution normale à une variable, mais en considérant les moyennes et écarts-types de chacun des nombres en plus de leur corrélation. Une corrélation nulle signifie que γ_r et γ_z sont indépendants. Les écarts-types et les corrélations peuvent être utilisés comme paramètre du modèle pour évaluer par exemple, l'effet de la qualité d'une procédure d'aimantation sur les performances du couplemètre.

Mis à part les bandes aimantées du couplemètre magnétoélastique passif, le cylindre est dans un état désaimanté. Cela signifie que plusieurs éléments magnétiques ne font pas partie des bandes aimantées, et donc ne possèdent pas d'aimantation spécifique. L'aimantation de ces éléments est initialisée de manière totalement aléatoire afin de reproduire l'état désaimanté du matériau.

4.3 Application du couple mécanique

L'étape suivante dans le modèle est l'application du couple mécanique sur le cylindre. Le couple est ressenti dans chacun des éléments par une torsion σ suivant la distribution radiale

de l'équation 3.2. Cette torsion modifie l'aimantation de chacun des éléments magnétiques grâce au couplage magnétoélastique dont l'effet a été détaillé dans le chapitre 3. Par exemple, la configuration initiale de la figure 4.5 produit des aimantations axiales comme le montre la figure 4.6.

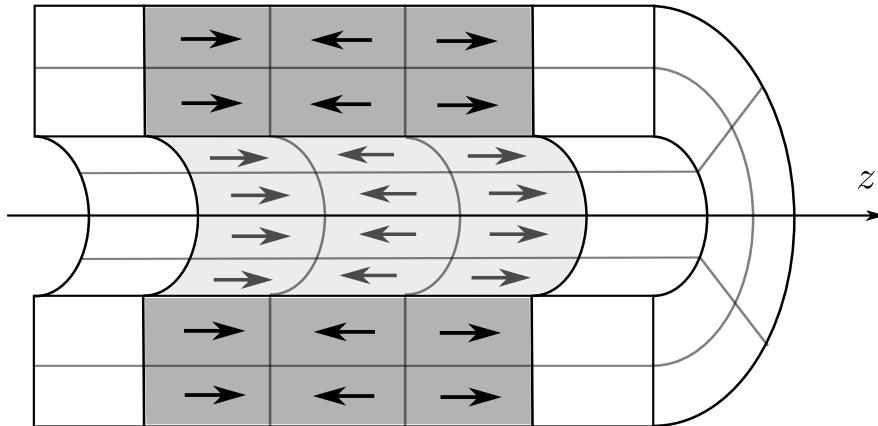


Figure 4.6 Coupe d'un cylindre initialisé suivant la figure 4.5 et soumis à un couple mécanique. L'aimantation gagne une composante axiale $\pm M_z$ selon l'orientation initiale de l'aimantation, le sens du couple appliqué et le signe de λ_s . Les flèches indiquent la variation de l'aimantation par rapport à l'état initial.

Comme valeurs typiques pour une application dans le domaine du transport, un cylindre de 9 mm de rayon soumis à un couple mécanique de 20 Nm ressent une contrainte maximale en torsion de 17.5 MPa. Cette torsion modifie alors l'aimantation azimutale M_ϕ du cylindre en lui donnant une composante axiale M_z . L'amplitude relative des composantes est par exemple $M_z = 0.0131M_\phi$ pour un ratio $\lambda_s/K_u = 10^{-9} \text{ m}^3/\text{J}$ typique.

Dans le modèle présenté ici, aucun champ magnétique externe n'est présent et l'orientation initiale de l'aimantation est variée (bandes aimantées et zones désaimantées). L'équation 3.24 est donc la solution la plus appropriée puisqu'elle décrit la rotation de l'aimantation en fonction de l'amplitude de la torsion et de l'aimantation initiale définie dans les trois axes. Il s'agit de la solution générale en l'absence de champ magnétique externe.

Si un champ magnétique externe est introduit dans le modèle, alors l'équation 3.24 n'est plus adéquate. Dans ce cas, il faut revisiter l'expression de l'énergie d'un domaine magnétique et la minimiser de sorte à calculer l'orientation à l'équilibre de l'aimantation. Un exemple d'un tel développement a été fait dans la section 3.3 pour une aimantation azimutale soumise à une torsion et un champ magnétique externe axial. La solution obtenue est une approximation qui est valide pour des petites variations d'aimantation et pour ces orientations spécifiques. Bref, le modèle n'est pas bien adapté à la présence de champ magnétique externe. Il serait préférable d'utiliser une méthode par éléments finis pour inclure cette perturbation [71, 72].

4.4 Calcul du signal

L'application du couple mécanique sur le cylindre modifie l'orientation des aimantations dans le matériau. Ces nouvelles orientations modifient le champ magnétique de fuite, qui lui est mesuré par des capteurs magnétiques positionnés adéquatement autour du cylindre. La figure 4.7 illustre le champ magnétique produit par le cylindre sous torsion de la figure 4.6 à quatre positions stratégiques.

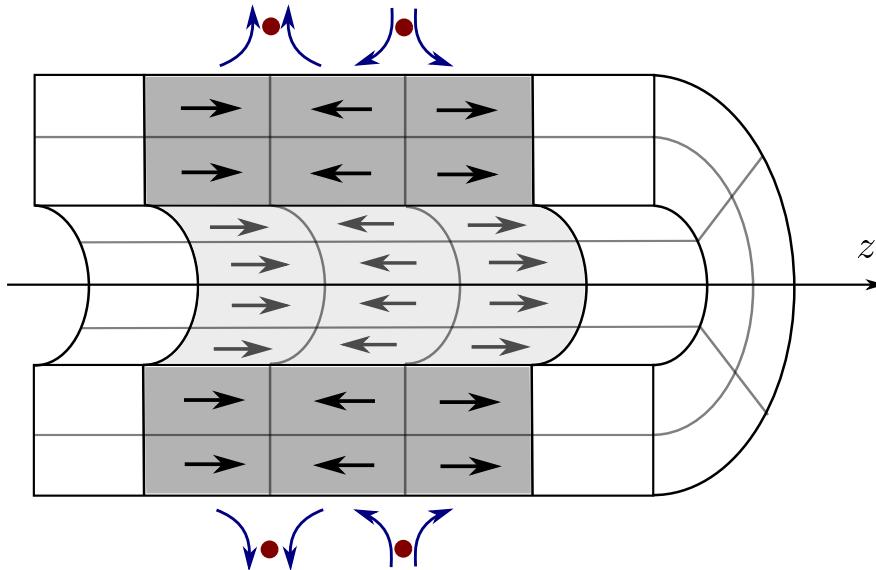


Figure 4.7 Représentation du champ magnétique produit par la configuration magnétique du cylindre de la figure 4.6. Les aimantations axiales $\pm M_z$ du cylindre produisent un champ magnétique radial $\pm B_r$ aux intersections des bandes magnétiques.

En d'autres mots, le signal du couplemètre se calcule à partir du champ magnétique produit par une configuration de dipôles dans l'espace. Finalement, la configuration des capteurs permet d'obtenir une courbe de réponse avec un gain et un décalage.

4.4.1 Calcul du champ magnétique de fuite

Différents outils ont été développés dans la littérature pour calculer le champ magnétique d'un corps aimanté. Il y a notamment des méthodes se basant sur une distribution de dipôles magnétiques [43,44], d'autres sur des courants magnétiques [45] ou encore des charges magnétiques. [46] Dans ce travail, l'approche choisie est la sommation de dipôles, car elle s'adapte bien aux calculs numériques et permet de modifier facilement l'orientation individuelle des moments magnétiques.

À cette fin, une notation est introduite pour distinguer les différentes positions, soit la position

à laquelle on calcule le champ magnétique \mathbf{r} et la position du dipôle \mathbf{r}' par rapport à l'origine O . La figure 4.8 représente un échantillon de volume V possédant une aimantation \mathbf{M} (A/m) et une distribution de moments magnétiques $\mathbf{m}(\mathbf{r}')$ (Am^2).

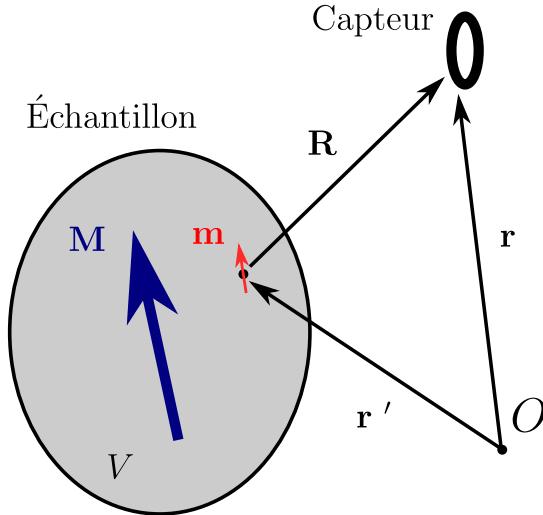


Figure 4.8 Notation utilisée pour le calcul du champ magnétique de fuite d'un échantillon de volume V défini par une distribution de moments magnétiques $\mathbf{m}(\mathbf{r}')$.

Avec cette notation, le champ magnétique produit par un moment magnétique dans la base cartésienne est

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})}{|\mathbf{R}|^5} - \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{R}|^3} \right). \quad (4.9)$$

Cette expression s'obtient à partir du potentiel magnétique scalaire d'un dipôle et n'est valide qu'à l'extérieur du volume occupé par le moment magnétique. De plus, l'équation 4.9 permet aussi de décrire le champ magnétique à l'extérieur d'une sphère magnétisée uniformément avec un moment magnétique effectif $\mathbf{m} = VM$ [53]. Cette caractéristique est la base du calcul de champ magnétique dans le modèle du couplemètre.

Pour obtenir le champ magnétique total, il suffit d'additionner la contribution $\Delta\mathbf{H}_i$ de tous les dipôles magnétiques dans l'échantillon. En équations, ceci équivaut à

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \sum_i \Delta\mathbf{H}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{R})}{|\mathbf{R}|^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{|\mathbf{R}|^3} \right). \quad (4.10)$$

Il est aussi possible d'exprimer cette somme avec le champ d'aimantation \mathbf{M} si l'échantillon est sous-divisé en petits éléments de volume ΔV_i .

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{M}_i \Delta V_i \quad (4.11)$$

Avec cette équivalence et en explicitant la position du capteur par rapport à l'origine, l'équation 4.10 se réécrit par

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)(\mathbf{M}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^5} - \frac{\mathbf{M}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \Delta V_i. \quad (4.12)$$

Cette somme peut aussi être transformée en une intégrale de volume si les volumes ΔV_i sont suffisamment petits.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] d^3\mathbf{r}' \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R})}{R^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R^3} \right] d^3\mathbf{r}' \quad (4.14)$$

Cette dernière expression permet de calculer théoriquement le champ magnétique de fuite pour n'importe quel volume, tant que l'intégrale peut être calculée. Par exemple, des solutions analytiques pour des aimants permanents cylindriques ont été développées dans la littérature à partir de cette intégrale [73]. Dans ce développement, les composantes radiales et axiales du champ magnétique de fuite sont exprimées par une combinaison d'intégrales elliptiques. Bien que des domaines cylindriques similaires à de tels aimants permanents sont considérés dans ce travail, la sommation 4.12 est employée, car elle permet de calculer le champ magnétique d'une configuration arbitraire de dipôles.

Dans le modèle du couplemètre magnétoélastique passif, il peut être préférable de travailler avec les coordonnées cylindriques plutôt que cartésiennes. L'équivalent à l'équation 4.9 en cylindrique est

$$\begin{bmatrix} H_r \\ H_\phi \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_r \\ m_\phi \\ m_z \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

avec des coefficients B_{ij} et la distance R explicités dans l'annexe D. Le développement de cette expression inclut plusieurs changements de base et des simplifications trigonométriques aussi présentés dans l'annexe D.

4.4.2 Courbes de signal

Une fois que le champ magnétique est calculé aux positions des capteurs magnétiques pour différents couples mécaniques, la courbe de signal $S(\tau)$ s'obtient facilement selon la configuration des capteurs. La plupart du temps, le signal est une combinaison linéaire de plusieurs

capteurs de sorte à diminuer les effets de bruit externe ou les erreurs de mesure [36]. Il suffit donc de combiner le champ magnétique à ces capteurs pour chaque valeur de couple et une courbe telle la figure 4.9 est obtenue.

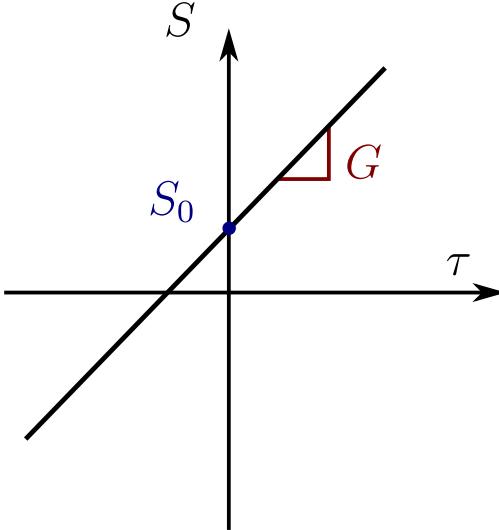


Figure 4.9 Courbe de signal typique $S(\tau)$ en fonction du couple appliqué τ mettant en évidence le gain G et le signal résiduel S_0 . Les unités du signal peuvent varier selon la définition employée.

Cette courbe met en évidence les deux caractéristiques principales du signal qui seront étudiées dans ce travail, soit le gain G (la pente) et le signal résiduel S_0 (l'ordonnée à l'origine). Dans une courbe de signal réelle, d'autres quantités comme l'hystérosis, la linéarité, l'exac-titude et la répétabilité sont utilisées pour caractériser le signal [74], mais celles-ci sont difficilement applicables dans le contexte du modèle théorique présenté dans ce travail.

Les unités du signal varient selon la définition utilisée. Il est par exemple plus adéquat d'utiliser des Volts si le but est de comparer les performances de différents types de couplemètres. Il faut toutefois porter attention à la différence de capteurs et de circuit électriques. Dans le cadre de ce travail, le signal est plutôt défini avec des Tesla (T), soit les unités du champ d'induction **B**, car les comparaisons se font indépendamment de la performance des capteurs magnétiques. Ainsi, le signal résiduel S_0 partage ces unités (T), alors que le gain G est défini en T/Nm. Une autre note importante par rapport aux unités du signal d'un couplemètre est l'utilisation du couple appliqué τ (Nm) plutôt que de la contrainte maximale σ_0 (Pa) puisque cette dernière dépend de la géométrie de l'échantillon. En rappel, l'équation 3.1 montre que la contrainte est non seulement proportionnelle au moment mécanique, mais aussi à la constante de torsion J_T qui elle, varie avec les dimensions de l'objet en torsion.

L'utilisation des Teslas comme unité de signal n'exclut pas la possibilité de comparer les

couplemètres magnétoélastiques passifs, mais il faut quand même considérer les différents paramètres affectant le signal. Quelques-uns de ces paramètres sont la position et l'orientation des capteurs, l'amplitude du couplage magnétoélastique du matériau et l'aimantation initiale du cylindre. Un des intérêts de la modélisation d'un couplemètre magnétoélastique passif est justement de pouvoir cibler quelques paramètres tout en contrôlant parfaitement les autres.

4.5 Validation et limites du modèle

Le modèle présenté dans les sections précédentes est une idéalisation d'un couplemètre magnétoélastique passif et d'un matériau magnétique. Différentes approximations sont sous-entendues dans son développement. Parmi celles-ci se trouvent la discréétisation du matériau magnétique, l'utilisation du champ dipolaire (équation 4.9) pour décrire le champ magnétique d'un volume non sphérique, et l'indépendance des dipôles magnétiques. Alors que la discréétisation a déjà été abordée dans la section 4.1.1, l'impact des deux autres approximations est évalué dans les sous-sections suivantes.

4.5.1 Champ dipolaire d'un cube

Dans le modèle, les éléments magnétiques sont construits de sorte à reproduire le plus possible une forme cubique et ainsi se rapprocher d'un élément sphérique. L'élément sphérique est idéal, car le champ magnétique qu'il produit à l'extérieur de son volume est décrit exactement par le champ dipolaire de l'équation 4.9. Or, cette équation est utilisée pour des éléments non sphériques, causant ainsi une erreur dans le champ magnétique.

Afin d'évaluer l'impact de cette approximation, un problème simple est considéré. La figure 4.10b illustre sa géométrie avec un cube aimanté uniformément dans la même direction que l'axe d . Le champ magnétique est calculé le long de cet axe en sous-divisant suffisamment le cube en éléments magnétiques pour reproduire la solution théorique. Finalement, ce champ magnétique est comparé au champ dipolaire. La courbe de convergence est présentée dans la figure 4.10a.

Cette courbe est invariante selon tous les paramètres du problème, notamment la taille du cube t . Elle montre par exemple qu'une erreur de 1 % est atteinte à une distance $d = 1.2t$, soit une distance 1.2 fois la largeur du cube à partir de sa surface. Comme valeurs typiques dans l'application du modèle, la taille d'un élément magnétique est $(100 \mu\text{m})^3$ avec une distance de 1 mm par rapport à sa surface. Selon la figure 4.10a, l'erreur causée par la forme cubique dans cette situation est inférieure à 0.1 %. Bien entendu, les éléments magnétiques du modèle ne sont pas cubiques non plus, alors une erreur plus grande est attendue. Il est

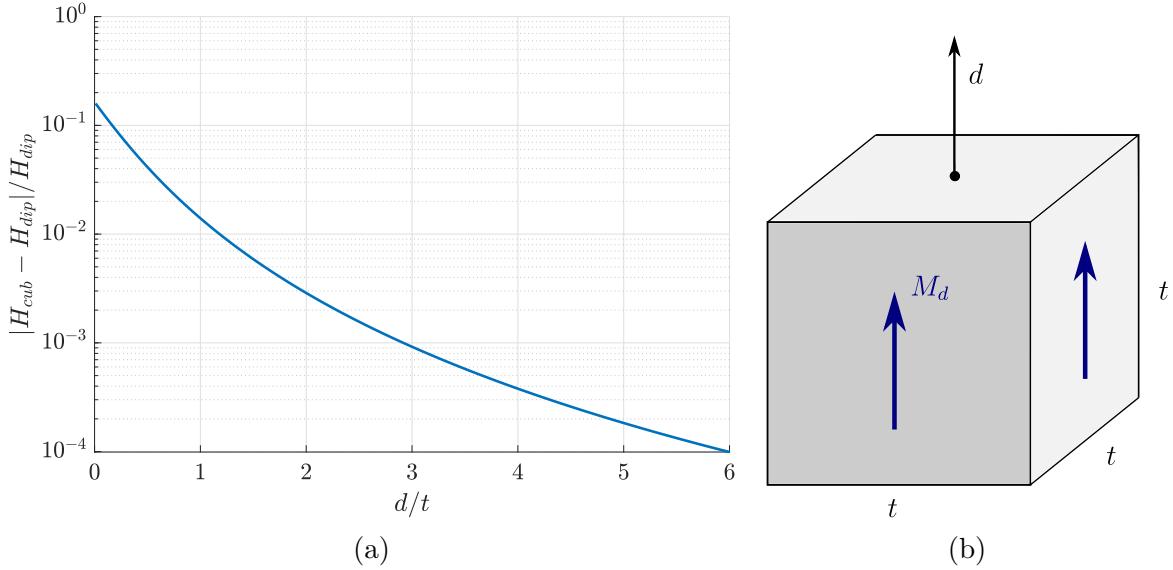


Figure 4.10 (a) Variation relative du champ magnétique d'un cube t^3 par rapport au champ dipolaire à l'extérieur du cube selon la géométrie de (b). Le cube est aimanté uniformément et parallèlement à l'axe d .

toutefois raisonnable de supposer que l'effet de forme des éléments impacte très peu le résultat final pour les grandeurs typiques étudiées.

4.5.2 Approximation des dipôles indépendants

L'aimantation des éléments magnétiques est déterminée soit par leur initialisation ou soit par l'application d'un couple mécanique. Aucune autre interaction ne modifie l'aimantation. Il est toutefois attendu qu'une interaction entre dipôles est présente afin de respecter les conditions frontières du matériau magnétique. Un test est réalisé afin de mettre en évidence l'impact de cette approximation dans les résultats obtenus avec le modèle. Pour cela, le calcul *avec interaction* est réalisé à l'aide du programme Finite Element Method Magnetics (FEMM) qui calcule le champ magnétique d'un système magnétique par la méthode des éléments finis [71].

Le problème étudié consiste en un couplemêtre magnétoélastique passif idéalisé avec une bande magnétique déjà sous torsion, soit aimanté axialement. Le reste du cylindre est un métal ferromagnétique. La figure 4.11 illustre la géométrie du problème et le tableau 4.1 liste les paramètres utilisés. Les coefficients de couplage magnétoélastique, ainsi que l'aimantation à saturation et la force de l'aimant permanent ne sont pas requis, car les champs magnétiques sont normalisés. La normalisation met en évidence les différents comportements du champ magnétique des deux modèles.

Tableau 4.1 Valeurs des paramètres de la figure 4.11 pour comparer le modèle de dipôles avec FEMM

Nom	Variable	Valeur (mm)
Longueur du cylindre	L	20
Longueur de la bande magnétique	w	10
Rayon du cylindre	R	9
Profondeur de la bande magnétique	a	2
Distance de la mesure	d	1

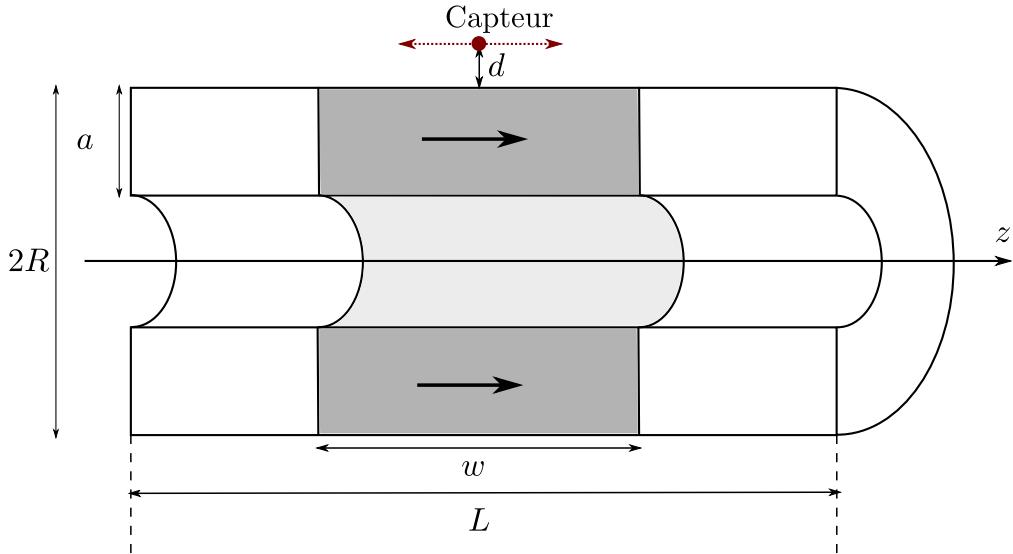


Figure 4.11 Coupe du couplémètre magnétoélastique passif idéalisé défini par les longueurs w, L, R et a . La zone grise correspond à la bande magnétique et le cylindre est plein. La mesure du champ magnétique est faite à une distance d de la surface le long dans la direction axiale z .

Dans le modèle des dipôles, ce problème est équivalent à aimant permanent suivant la zone grise de la figure 4.11 entouré d'air. Dans FEMM, ce problème est défini avec un aimant permanent pour la bande magnétique et par du fer dans le reste du cylindre. À l'extérieur du cylindre, des conditions frontières asymptotiques improvisées (IABCs) adaptées au problème magnétostatique sont utilisées pour reproduire un espace ouvert [75].

La figure 4.12 présente le profil du champ magnétique axial B_z normalisé calculé avec le modèle des dipôles, avec FEMM et une autre fois avec FEMM, mais avec un cylindre d'air plutôt que de fer.

La concordance des profils calculés par la méthode des dipôles et avec FEMM sans cylindre métallique montre que le modèle des dipôles reproduit bien les comportements d'un aimant permanent. Cela étant dit, cette méthode néglige l'environnement de la bande magnétique comme le montre la différence de son profil avec celui calculé par FEMM avec le cylindre de

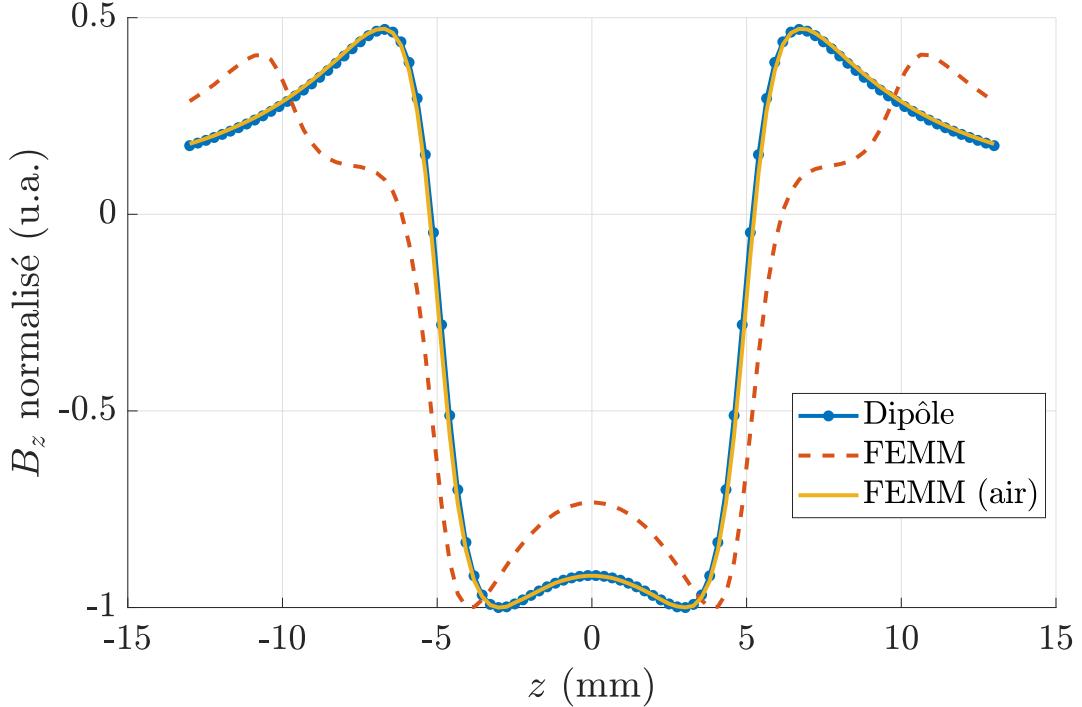


Figure 4.12 Profils du champ magnétique axial B_z normalisé du problème de la figure 4.11 calculés avec la méthode des dipôles, avec FEMM, et avec FEMM sans cylindre métallique.

fer. La différence est cohérente avec l'approximation des dipôles magnétiques indépendants du modèle. En effet, le métal hors de la bande magnétique a tendance à s'aimanter à cause de l'aimant permanent qu'est la bande magnétique. L'aimantation du métal se distribue de sorte à minimiser son énergie et à suivre ses conditions frontières. Ce comportement est négligé dans le modèle des dipôles indépendants, et l'effet de cette absence se voit dans la figure 4.12.

La présence de métal autour de la bande magnétique modifie de deux manières principales le profil du champ B_z , soit par l'amplification de la bosse au centre de la bande magnétique et par le décalage du pic aux extrémités. Afin d'expliquer la différence, la solution FEMM est présentée dans la figure 4.13 montrant le champ B à l'intérieur du cylindre.

Cette figure montre que le flux magnétique se referme en passant par le centre du cylindre et non par l'extérieur. Ce guidage de flux montre aussi que le métal reproduit les caractéristiques de la bande magnétique sur une certaine région à gauche et à droite de la bande magnétique. Cet élargissement effectif de la bande magnétique justifie les variations des profils de champ magnétique observées dans la figure 4.12.

D'abord, l'élargissement de la bande magnétique augmente la contribution de sources lointaines au champ magnétique du centre de la bande. Cela diminue effectivement l'amplitude du champ magnétique, car les dipôles trop loin du centre contribuent négativement au total.

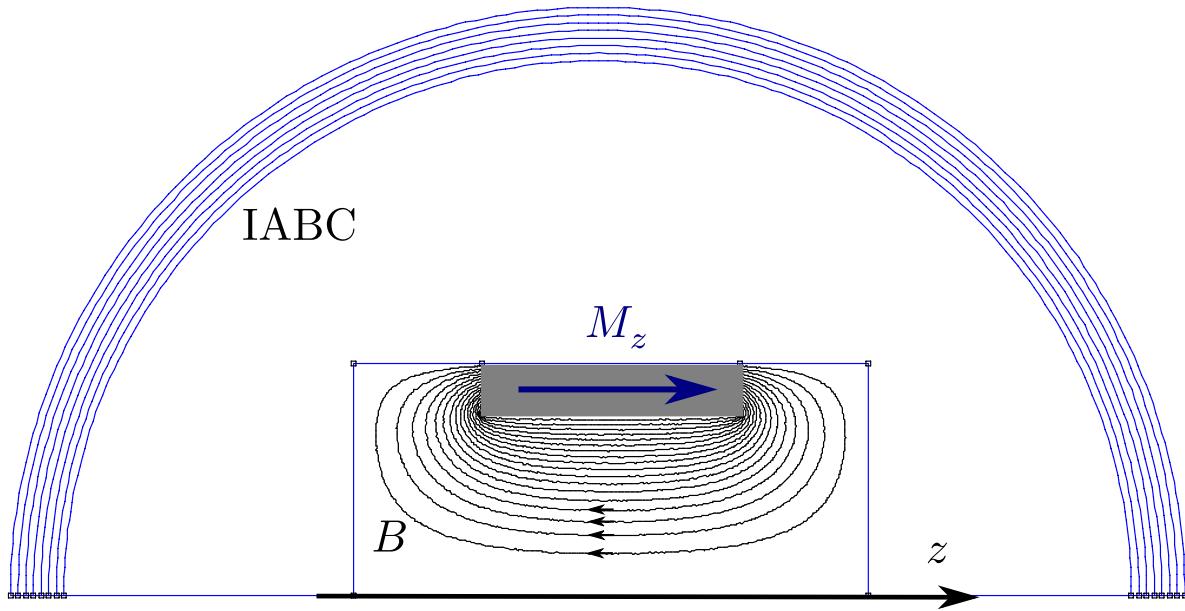


Figure 4.13 Coupe axisymétrique de la solution du problème d'éléments finis de la figure 4.11 avec FEMM. Les deux figures partagent le même axe z . Les lignes de flux B suivent l'aimantation de la bande magnétique (aimant permanent). Les arcs bleus délimitent l'espace de calcul par des conditions frontières ouvertes IABC.

Similairement, la bande magnétique prolonge suffisamment ses caractéristiques dans le métal adjacent de sorte à repousser le pic jusqu'à l'extrémité du cylindre. En effet, les pics apparaissent à la fin des domaines aimantés, soit aux extrémités de la bande magnétique pour le modèle des dipôles indépendants et aux extrémités du cylindre pour FEMM.

En conclusion, le modèle des dipôles néglige l'interaction entre les bandes magnétiques et le guidage du flux magnétique dans le reste du cylindre métallique. L'effet de cette simplification a été analysé pour le profil du champ magnétique axial B_z à l'extérieur du cylindre, montrant différents comportements au centre et aux extrémités de la bande magnétique. La validité du modèle des dipôles est donc limitée à des systèmes magnétiques avec des aimantations préalablement connues. Si ce modèle est utilisé pour simuler un couplemètre magnétoélastique comme la figure 4.11, alors il faut considérer l'absence du métal environnant dans l'interprétation des résultats.

CHAPITRE 5 ÉVALUATION DE L'IMPACT DES PARAMÈTRES DE CONCEPTION ET DE LA BANDE MAGNÉTIQUE

Dans la littérature, différents concepts de couplemètres magnétoélastiques passifs sont proposés, avec leurs avantages et inconvénients. A priori, ces différentes approches sont difficilement comparables à cause de la variation dans les dispositifs et des mesures effectuées. Il est donc intéressant d'employer un modèle numérique d'un couplemètre idéalisé afin de comparer ses différentes versions. Le modèle présenté plus tôt est justement utilisé pour évaluer l'impact de différents paramètres de conception d'un couplemètre magnétoélastique passif. Ces paramètres incluent l'orientation des magnétomètres, la géométrie des bandes magnétiques, les fluctuations dans la configuration magnétique, ainsi que la variation spatiale des propriétés magnétiques dans le cylindre.

Dans la littérature, d'autres facteurs et propriétés du signal ont déjà été étudiés à l'aide d'un modèle numérique, des observations expérimentales et/ou des calculs théoriques. Ces facteurs incluent notamment l'hystéresis et la linéarité du signal [67, 76, 77], l'effet des contraintes résiduelles sur le signal [37], la qualité de la procédure d'aimantation [78] ainsi que les propriétés des matériaux [31].

5.1 Orientation des magnétomètres et géométrie du dispositif

Le premier test consiste à évaluer l'impact de l'orientation des magnétomètres et de la géométrie du dispositif sur le gain d'un couplemètre magnétoélastique passif. Ces deux aspects sont étudiés simultanément, car une modification dans la géométrie du dispositif, soit la largeur des bandes magnétiques et la distance des capteurs, affecte différemment le signal selon l'orientation des magnétomètres. Bref, deux configurations d'un même couplemètre magnétoélastique passif sont comparées pour différentes géométries. La figure 5.1 illustre le dispositif complet selon ces deux configurations.

Cette figure montre un cylindre de rayon R et de longueur L à l'intérieur duquel sont définies trois bandes aimantées azimutalement de largeur w et de profondeur a . Les trois bandes magnétiques sont supposées de taille identique pour cette étude. Les magnétomètres sont tous à une distance d de la surface du cylindre et positionnés de façon à maximiser le champ magnétique mesuré. En effet, la composante axiale du champ magnétique produite par le cylindre sous torsion est maximale au centre des bandes magnétiques, alors que la composante radiale est maximale aux intersections des bandes magnétiques. Dans cette étude, le gain est

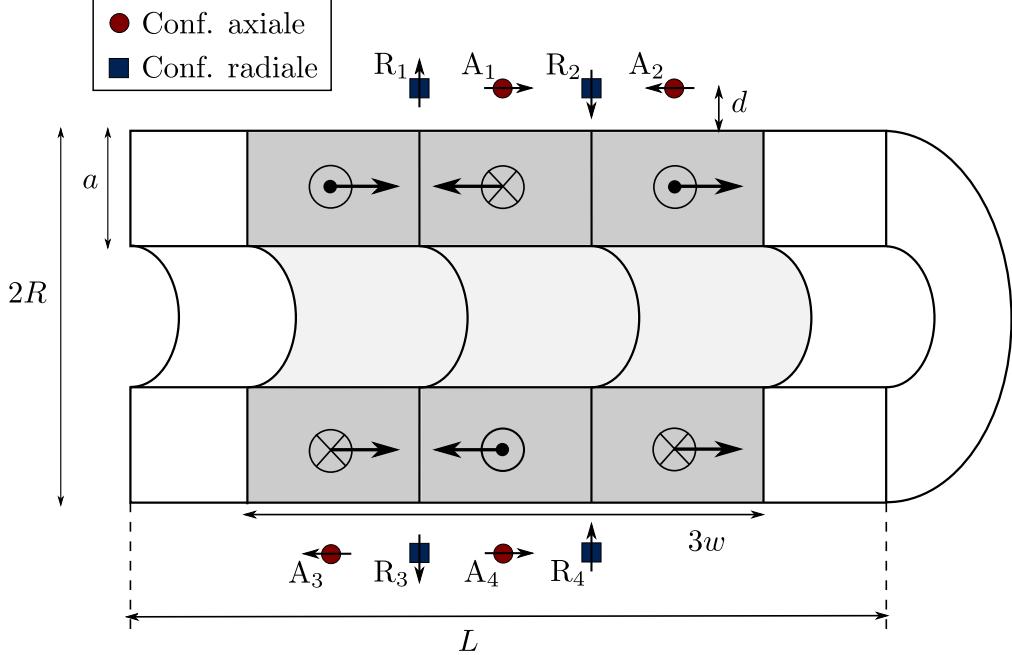


Figure 5.1 Coupe d'un couplemêtre magnétoélastique passif à trois bandes en configurations radiale et axiale. Les carrés et les cercles représentent la position des magnétomètres, alors que les flèches indiquent l'orientation du champ magnétique à ces positions. Dans le cylindre, le changement d'aimantation dû à l'application du couple est montré par les flèches horizontales.

calculé pour différentes largeurs w et distances d .

Toujours dans la figure 5.1, les flèches à l'intérieur des capteurs indiquent l'orientation du champ magnétique mesuré à ces positions lorsque le cylindre est sous torsion. Ces orientations permettent de construire un signal total qui combine les signaux individuels des capteurs pour éliminer certains signaux parasites comme un champ externe dans le cas de la configuration axiale [36] ou tout simplement pour minimiser l'effet du bruit. En équations, les signaux totaux S_z et S_r pour les configurations axiale et radiale, respectivement, sont :

$$S_z = A_2 + A_3 - A_1 - A_4 \quad (5.1)$$

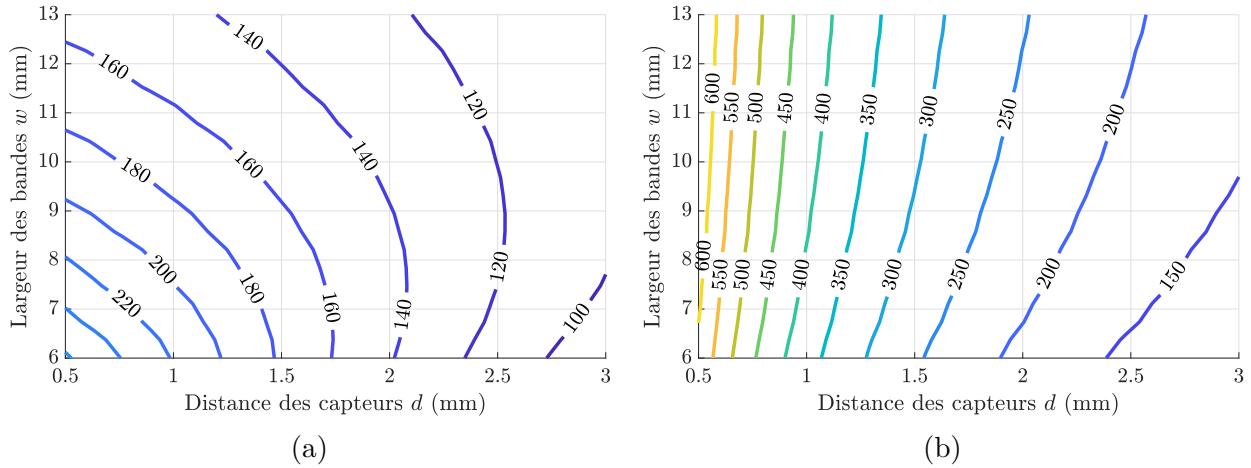
$$S_r = R_1 + R_3 - R_2 - R_4 \quad (5.2)$$

Ces signaux permettent de calculer la courbe de signal $S(\tau)$ du couplemêtre, incluant le gain G et le décalage S_0 présentés dans la section 4.4.2. Alors que le décalage demeure nul pour toutes les géométries étudiées dans ce test, car il s'agit d'un dispositif idéal, le gain varie beaucoup.

La figure 5.2 présente les courbes de niveau du gain des couplemètres dans les deux configurations en fonction de la largeur des bandes magnétiques w et de la distance des capteurs

Tableau 5.1 Valeurs des paramètres utilisés pour les résultats de la figure 5.2

Nom	Variable	Valeur
Longueur du cylindre	L	40 mm
Longueur de la bande magnétique	w	[6,13] mm
Rayon du cylindre	R	9 mm
Profondeur de la bande magnétique	a	2 mm
Distance de la mesure	d	[0.5,3] mm
Aimantation à saturation	M_s	1.6 MA/m
Constante de magnétostriction	λ_s	10^{-5}
Constante d'anisotropie magnétique	K_u	10 kJ/m ³

Figure 5.2 Courbes du gain ($\mu\text{T}/\text{Nm}$) des couplemètres en configuration (a) axiale et (b) radiale en fonction de la largeur des bandes magnétiques w et de la distance des capteurs d . Les autres paramètres du modèle sont listés dans le tableau 5.1

d. Les valeurs des autres paramètres sont données dans le tableau 5.1 et sont choisies pour reproduire un dispositif réel avec des propriétés de matériau réaliste [31, 53]. Le maillage utilisé contient 10 millions d'éléments avec une taille moyenne de $(101 \mu\text{m})^3$.

Pour les paramètres étudiés, la configuration radiale génère un gain en moyenne 2.0 fois plus grand que la configuration axiale. Le ratio s'élève à 4.2 pour des petites distances et des bandes magnétiques très larges. L'ordre de grandeur des gains calculés avec le modèle est 300 $\mu\text{T}/\text{Nm}$, alors que des dispositifs similaires décrits dans la littérature ont des gains de l'ordre de 10 $\mu\text{T}/\text{Nm}$ [31, 32]. Cette différence est justifiée par le choix des propriétés des matériaux utilisés et par le modèle simplifié des dipôles indépendants. Si l'approximation des dipôles indépendants est considérée, alors le gain pour la configuration axiale diminuerait à cause de l'élargissement effectif de la bande magnétique, comme montré dans la section 4.5.2. Tout de même, la conclusion demeure inchangée, car l'amplitude du gain ne modifie pas la différence relative des gains des deux configurations.

De retour à la figure 5.2, le gain diminue en fonction de la distance des magnétomètres, ce qui est attendu du champ magnétique qui diminue aussi avec la distance. Cette tendance est commune aux deux configurations, mais le gain radial est davantage affecté par une variation de la distance. En effet, le gradient du gain radial en fonction de la distance d est plus grand que celui du gain axial, notamment pour des petites distances. Par exemple, un déplacement radial de +0.1 mm des capteurs pour le couplemètre défini plus tôt avec des bandes magnétiques $w = 10$ mm modifie le signal de 2.0 % et 6.5 % de sa valeur attendue à $d = 1$ mm pour les configurations axiale et radiale respectivement.

Dans un dispositif réel pour lequel un signal stable avec un gain constant est souhaité, un gradient du gain le plus faible possible est souhaité. Ainsi, des déplacements relatifs des capteurs par rapport à la surface du cylindre causés par des contraintes ou l'expansion thermique affectent négativement la configuration radiale comparativement à la configuration axiale.

Concernant la taille des bandes magnétiques w , le gain des couplemètres est affecté différemment selon la configuration. En effet, pour une distance constante d , le gain radial est purement croissant avec la taille des bandes magnétiques, alors que le gain axial augmente, puis diminue après avoir atteint une largeur w optimale. Cette valeur optimale croît avec la distance d . La différence de comportement s'explique par les lignes courbées du champ magnétique des dipôles lointains qui contribuent négativement au signal total. Plus les bandes magnétiques sont larges, plus ces contributions sont importantes. Ce comportement n'est pas observé pour la configuration radiale pour laquelle des bandes magnétiques plus larges génèrent toujours un gain plus élevé.

Bref, la configuration radiale permet d'atteindre des gains environ 2.0 fois plus élevés que la configuration axiale. De manière générale, un gain plus élevé est favorable pour un couplemètre, car il permet de mesurer des plus petites variations de couple. Toutefois, la configuration radiale est plus sensible à des variations de position des capteurs. Cette sensibilité peut limiter les tolérances d'un concept de couplemètre magnétoélastique passif.

5.2 Fluctuations dans la configuration magnétique

Le deuxième test consiste à étudier l'effet des fluctuations dans la configuration magnétique. Dans un cas idéal comme représenté dans la figure 5.1, l'aimantation des bandes magnétiques est purement azimutale et en directions opposées. Or, des déviations du cas idéal peuvent apparaître à cause des contraintes résiduelles, des défauts et de la nature polycristalline du matériau [31]. Par exemple, dans un échantillon cylindrique polycristallin à mailles cubiques,

les axes faciles selon lesquels pointent les aimantations rémanentes (en absence de champ) ne sont pas nécessairement alignés avec la direction azimutale. Ces axes faciles sont toutefois séparés de $\pi/2$ radians entre eux, ce qui limite les déviations à $\pi/3$ radians par rapport à la direction azimutale pour une magnétisation idéale. Cette valeur s'applique au modèle proposé puisque l'anisotropie magnétique qui compétitionne avec l'effet magnétoélastique est d'origine cristallographique.

Pour modéliser ce comportement, des fluctuations sont ajoutées à l'aimantation azimutale des bandes magnétiques d'un couplemètre magnétoélastique passif. Ces fluctuations correspondent à des petites déviations dans les directions axiale et radiale suivants des distributions gaussiennes, tout en gardant l'aimantation moyenne constante. Elles ont été définies plus tôt dans la section 4.2. En rappel, les composantes de l'aimantation azimutale modifiée par des déviations γ_z et γ_r sont :

$$\begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma_r \\ \cos \gamma_r \cos \gamma_z \\ \cos \gamma_r \sin \gamma_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Comme il s'agit de distributions gaussiennes, l'amplitude des fluctuations est définie par l'écart-type de ces distributions. Plus cet écart-type est élevé, plus l'aimantation initiale aura tendance à être modifiée. Pour cette étude, les déviations axiale γ_z et radiale γ_r partagent le même écart-type σ_f . Même si un écart-type nul est improbable dans un dispositif réel à cause de la cristallinité et des autres sources mentionnées plus tôt, il est toutefois intéressant de déterminer le gain qu'un dispositif parfait peut générer si la texture cristalline était optimisée. Quantitativement, une bonne configuration magnétique d'un cylindre polycristallin devrait avoir un écart-type de $\sigma_f = \pi/9$ de sorte que 99.7 % des aimantations ne dévient pas plus de $\pi/3$ par rapport à leur orientation initiale, soit une aimantation dans l'axe facile le plus près de l'axe azimutale pour une symétrie cubique.

L'effet de ce bruit gaussien sur la courbe de signal du couplemètre est d'ajouter un décalage aléatoire S_0 au signal sans couple appliqué et de réduire le gain du dispositif. D'un côté, le décalage provient de la non-uniformité de l'aimantation du cylindre, qui perd alors sa symétrie et génère un champ magnétique autour de ce dernier. Ainsi, une augmentation des fluctuations, ou de l'écart-type σ_f , augmente potentiellement le décalage dans la courbe de signal et peut causer des problèmes lors du fonctionnement du dispositif. D'un autre côté, le gain diminue plus les fluctuations sont fortes, car la composante azimutale de l'aimantation qui est responsable de la réponse magnétoélastique diminue aussi avec le bruit gaussien. La figure 5.3 montre la diminution relative du gain par rapport au cas idéal ($\sigma_f = 0$) en fonction de l'amplitude des fluctuations. L'utilisation d'un gain normalisé permet entre autres

d'éliminer l'effet de l'approximation des dipôles indépendants utilisée dans le modèle.

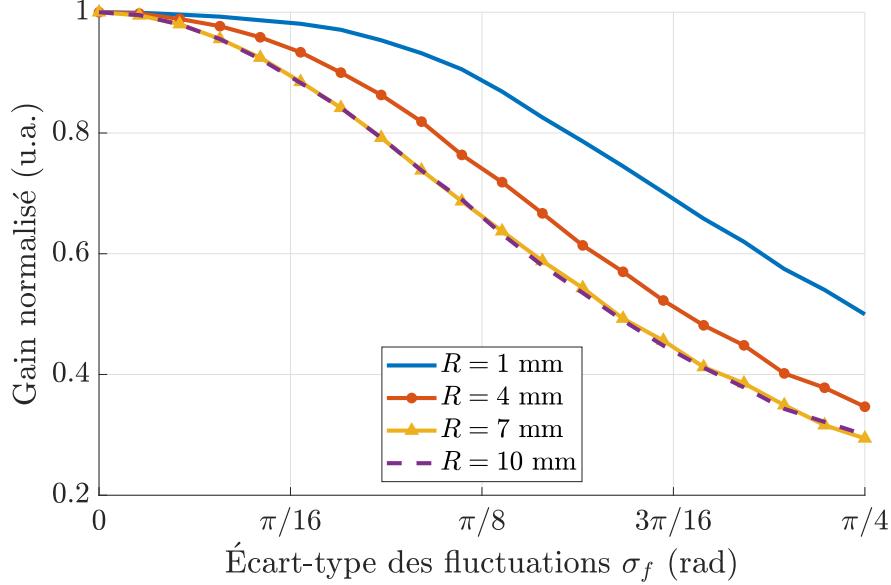


Figure 5.3 Gain normalisé d'un couplemêtre en fonction de l'écart-type des fluctuations dans l'aimantation du cylindre. Parmi tous les paramètres de conception de la figure 5.1, seul le rayon affecte cette courbe.

Cette figure montre que le gain diminue effectivement avec un écart-type σ_f croissant et que le rayon du cylindre R modifie la courbe jusqu'à un certain point. Il s'agit en fait du seul paramètre de conception du couplemêtre présenté dans la figure 5.1 qui modifie cette courbe, incluant les deux configurations. L'origine de ce comportement est la dépendance géométrique de la torsion $\sigma(r)$ pour un même couple mécanique τ (équation 3.2). En effet, comme la torsion varie en r/R^4 , un rayon plus grand réduit la torsion ressentie dans le cylindre, réduit la réponse magnétoélastique, et finalement augmente l'importance relative des fluctuations. Cela résulte en des courbes de gain normalisé qui décroît plus rapidement, plus le rayon R est grand. L'effet devient toutefois de moins en moins significatif due à la relation r/R^4 .

Cette dépendance met en évidence qu'un petit rayon est favorable pour concevoir un couplemêtre qui minimise l'impact des fluctuations de l'aimantation. Or, dans un dispositif réel, un plus petit rayon diminue aussi sa gamme dynamique, car la torsion générée par un même couple mécanique atteint plus facilement les limites du matériau. Par exemple, la valeur typique de 1 GPa de la limite d'élasticité d'un acier traité SAE4340 [79] est atteinte pour des couples de 1.57 Nm et 100 Nm pour des rayons de 1 mm et 4 mm respectivement.

Bref, les résultats de la figure 5.3 suggèrent que le gain d'un couplemêtre magnétoélastique passif est fortement dépendant des fluctuations dans sa configuration magnétique et que des

plus petits rayons modifient cette dépendance. Suivant les calculs précédents, la configuration magnétique idéale d'un échantillon cylindrique polycristallin avec $\sigma_f = \pi/9$ à un gain 0.73 fois la valeur du gain maximal à $\sigma_f = 0$. En d'autres mots, une texture cristallographique optimisée peut augmenter le gain jusqu'à 1.37 fois de sa valeur normale.

5.3 Variation spatiale des propriétés magnétiques

Dans les tests précédents, le couplemètre est modélisé avec une distribution uniforme des propriétés du matériau. Or, dans un dispositif réel, les propriétés ne sont pas nécessairement uniformes dans le cylindre aimanté à cause de plusieurs facteurs comme l'usinage du cylindre, les traitements thermiques de ce dernier, et la procédure de magnétisation. La non-uniformité des propriétés du matériau peut causer des problèmes dans le fonctionnement du couplemètre, notamment quand le signal varie le long de sa circonférence, car la symétrie cylindrique est perdue et un signal non uniforme est détecté même sans couple appliqué. Une cause possible de cette variation est la distribution non uniforme de la composition du matériau, notamment la présence de carbone dans l'acier, qui modifie l'aimantation à saturation $M_s(r, \phi, z)$ dans le cylindre [80]. Similairement, une bande magnétique avec une profondeur non uniforme $a(\phi, z)$, qui serait par exemple causée par une procédure de magnétisation mal adaptée, brise aussi la symétrie cylindrique et génère un champ magnétique résiduel.

Sachant que des signaux résiduels sont effectivement mesurés dans des couplemètres magnétoélastiques réels et qu'ils nuisent à leur performance [81], il est pertinent d'identifier les sources possibles de ces signaux résiduels afin d'optimiser les dispositifs. Une méthode directe d'investigation serait la mesure des propriétés du matériau dans tout le volume du cylindre pour révéler leur distribution non uniforme. Cette dernière serait ensuite reproduite dans un calcul numérique du champ magnétique produit par cette distribution dans le but de reproduire les mesures expérimentales.

La grande difficulté de cette analyse est la mesure des propriétés partout dans le cylindre considérant la taille typique des couplemètres. En effet, il est difficile de sonder les propriétés du matériau dans tout son volume par des techniques non destructives, car elles se limitent à la surface de l'échantillon. Par exemple, la caractérisation des propriétés mécaniques peut se faire par des mesures de dureté et par des analyses de microstructures. Quant à la distribution des domaines magnétiques sur une surface, des techniques d'imagerie comme la méthode Bitter, la microscopie Kerr, ou encore l'imagerie par électrons secondaires sont possibles [69, 82].

Pour employer ces techniques à l'intérieur du cylindre, l'usinage de la pièce est requis. Or,

cet usinage rend la pièce obsolète et limite l'application de ces techniques dans un contexte industriel. De plus, l'usinage de l'échantillon peut modifier les propriétés magnétiques et mécaniques du matériau à sa surface à cause des contraintes résiduelles laissées par l'usinage [83, 84], compliquant ainsi l'analyse des résultats.

Une alternative à cette méthode est de reconstruire la configuration magnétique à l'intérieur du cylindre à partir du champ magnétique qu'il produit. Cette méthode non destructive permettrait idéalement de révéler la distribution non uniforme de la configuration magnétique (M_s et a par exemple) ainsi que les contraintes internes dans l'échantillon, et ce, sans rendre l'échantillon inutilisable [85]. Il s'agit toutefois d'un problème très complexe qui est hors de la portée de ce travail. Malgré cela, le modèle développé dans le chapitre 4 permet d'obtenir de l'information sur la configuration magnétique, notamment grâce aux propriétés du signal mesuré.

Suivant cette idée, des variations spatiales des propriétés du matériau sont insérées dans le modèle pour calculer le champ magnétique résultant. La résolution spatiale de ces variations est de l'ordre de $101 \mu\text{m}$ pour les maillages utilisés dans cette étude. Bien entendu, le modèle est approximatif considérant que l'hypothèse des dipôles indépendants néglige le guidage de flux magnétique dans le cylindre, comme explicité dans la section 4.5.2. Toutefois, le modèle reproduit bien les caractéristiques générales du champ magnétique produit par le cylindre aimanté, ce qui est l'objectif du test. Pour ce faire, le couplemètre idéalisé à une bande de la figure 5.4 est utilisé comme dispositif de base.

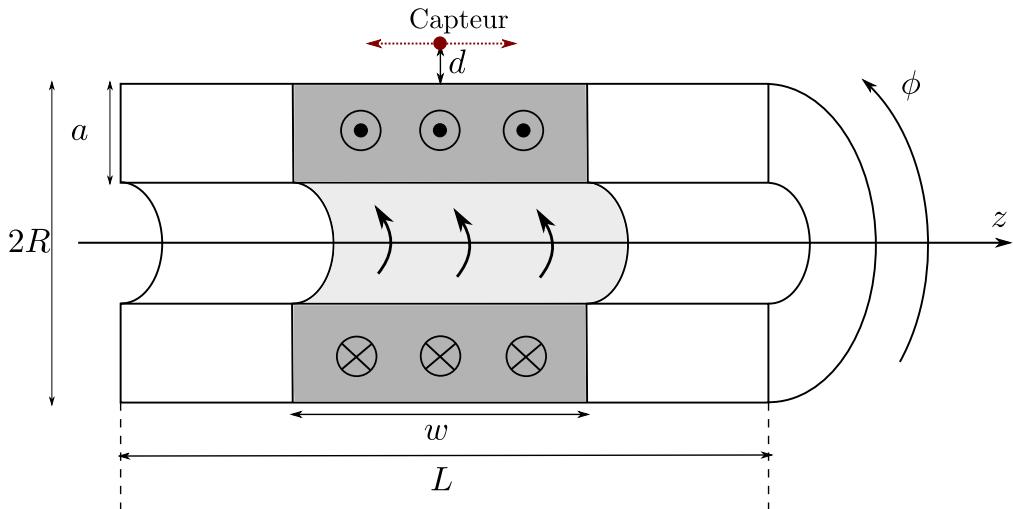


Figure 5.4 Coupe du couplemètre magnétoélastique passif idéalisé à 1 bande défini par les longueurs w, L, R et a . La zone grise correspond à la bande magnétique et le cylindre est plein. La mesure du champ magnétique est faite à une distance d de la surface à une position azimutale ϕ et axiale z .

Comme il est présenté dans la figure 5.4, le dispositif ne produit aucun champ magnétique autour du cylindre, car la symétrie cylindrique est conservée. Or, dans un dispositif réel contenant des variations des propriétés dans son volume, la symétrie est perdue et un signal résiduel indésirable peut être généré. Pour les tests de cette étude, deux distributions non uniformes de la profondeur de la bande magnétique (paramètre a de la figure 5.4) sont générées dans le cylindre pour calculer son champ magnétique. La première distribution est une variation de la profondeur $a(\phi)$ le long de la circonférence du cylindre, et la deuxième couple cette variation azimutale à une variation axiale pour obtenir une profondeur $a(\phi, z)$ qui varie dans les deux directions.

Les effets d'une distribution d'aimantation à saturation $M_s(r, \phi, z)$ ne sont pas explicitement traités dans cette étude plutôt qualitative, car les analyses et les conclusions sont fortement similaires. Il a quand même été calculé que le champ magnétique résiduel est d'un ordre similaire pour des variations relatives $\Delta M_s = \Delta a$ de distributions équivalentes. Ces quantités sont définies dans les sections suivantes.

5.3.1 Variation azimutale

La profondeur de la bande magnétique est modifiée azimutalement suivant la fonction suivante :

$$a(\phi) = a_0(1 + \Delta a \cos \phi) \quad (5.4)$$

avec une épaisseur moyenne a_0 et une amplitude de variation relative Δa . Cette fonction est arbitraire dans l'étude présente, mais elle peut être attribuée à des causes physiques. Par exemple, l'équation 5.4 peut être le résultat d'un revêtement magnétique déposé non uniformément sur un cylindre non magnétique ou encore d'une procédure de magnétisation peu optimisée [78]. La figure 5.5 illustre cette relation avec la fonction sinusoïdale ainsi qu'une représentation des sections du cylindre. Cette étude utilise les paramètres présentés dans le tableau 5.2 et le maillage est construit avec des éléments assez petits pour que les résultats ne changent pas en augmentant le nombre d'éléments.

Avec ces paramètres, le champ magnétique est calculé à différentes positions à l'extérieur du cylindre. Le résultat de ce calcul est présenté dans la figure 5.6. Cette dernière contient le profil du champ magnétique axial B_z à différents angles azimutal ϕ_i , le profil de B_z autour du cylindre à $z = 6$ mm et la transformée de Fourier de ce profil. Seule la composante axiale B_z du champ magnétique est présentée ici, mais il est possible d'enrichir l'analyse avec les trois dimensions du signal résiduel. La considération des autres composantes permettrait de restreindre davantage les propriétés de la configuration magnétique.

Tableau 5.2 Valeurs des paramètres utilisés pour l'étude de la variation azimutale de la profondeur de la bande magnétique

Nom	Variable	Valeur
Longueur du cylindre	L	30 mm
Longueur de la bande magnétique	w	15 mm
Rayon du cylindre	R	9 mm
Profondeur moyenne	a_0	2 mm
Variation de la profondeur	Δa	0.5
Distance de la mesure	d	1 mm
Aimantation à saturation	M_s	1.6 MA/m
Constante de magnétostricction	λ_s	10^{-5}
Constante d'anisotropie magnétique	K_u	10 kJ/m ³

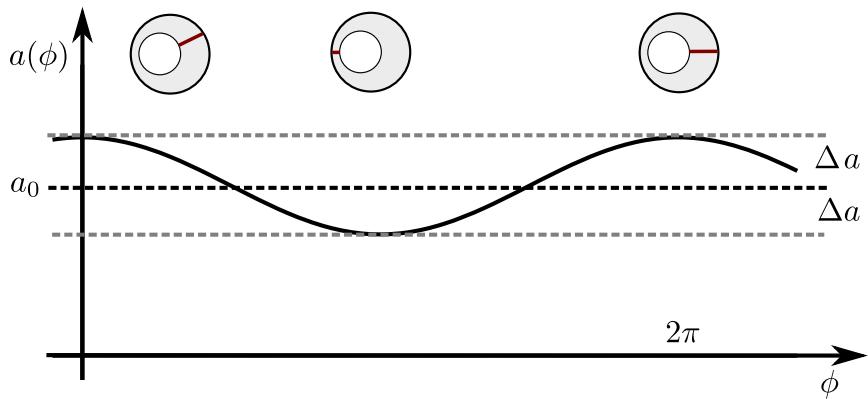


Figure 5.5 Variation azimuthale de la profondeur de la bande magnétique $a(\phi)$. Les cercles sont des sections du cylindre explicitant la profondeur de la bande magnétique.

Ces résultats montrent effectivement que le champ magnétique n'est pas nul lorsque la variation azimuthale de la profondeur $a(\phi)$ est introduite dans le cylindre. Les courbes comportent aussi les mêmes caractéristiques que le signal résiduel d'un couplemètre magnétoélastique passif réel [81]. Ces dernières sont

1. une variation azimuthale $B_z(\phi)$ sinusoïdale, et
2. un champ magnétique B_z impair avec la position axiale ($B_z(z) = -B_z(-z)$).

Ces deux caractéristiques sont liées à la distribution $a(\phi)$ de l'équation 5.4. D'abord, la propriété 1 est mise en évidence avec les figures 5.6b et 5.6c dans lesquelles le profil $B_z(\phi)$ est présenté et analysé. Ce profil semble suivre majoritairement une fonction sinusoïdale avec une fréquence de $1/360^\circ$, soit 1 période par circonférence du cylindre. Les harmoniques d'ordre supérieur semblent être causées par la discréétisation du modèle, car le premier pic devient de plus en plus dominant en augmentant le nombre d'éléments dans le calcul.

La fréquence dominante de $1/360^\circ$ correspond aussi à la fréquence de l'équation 5.4. Il y a

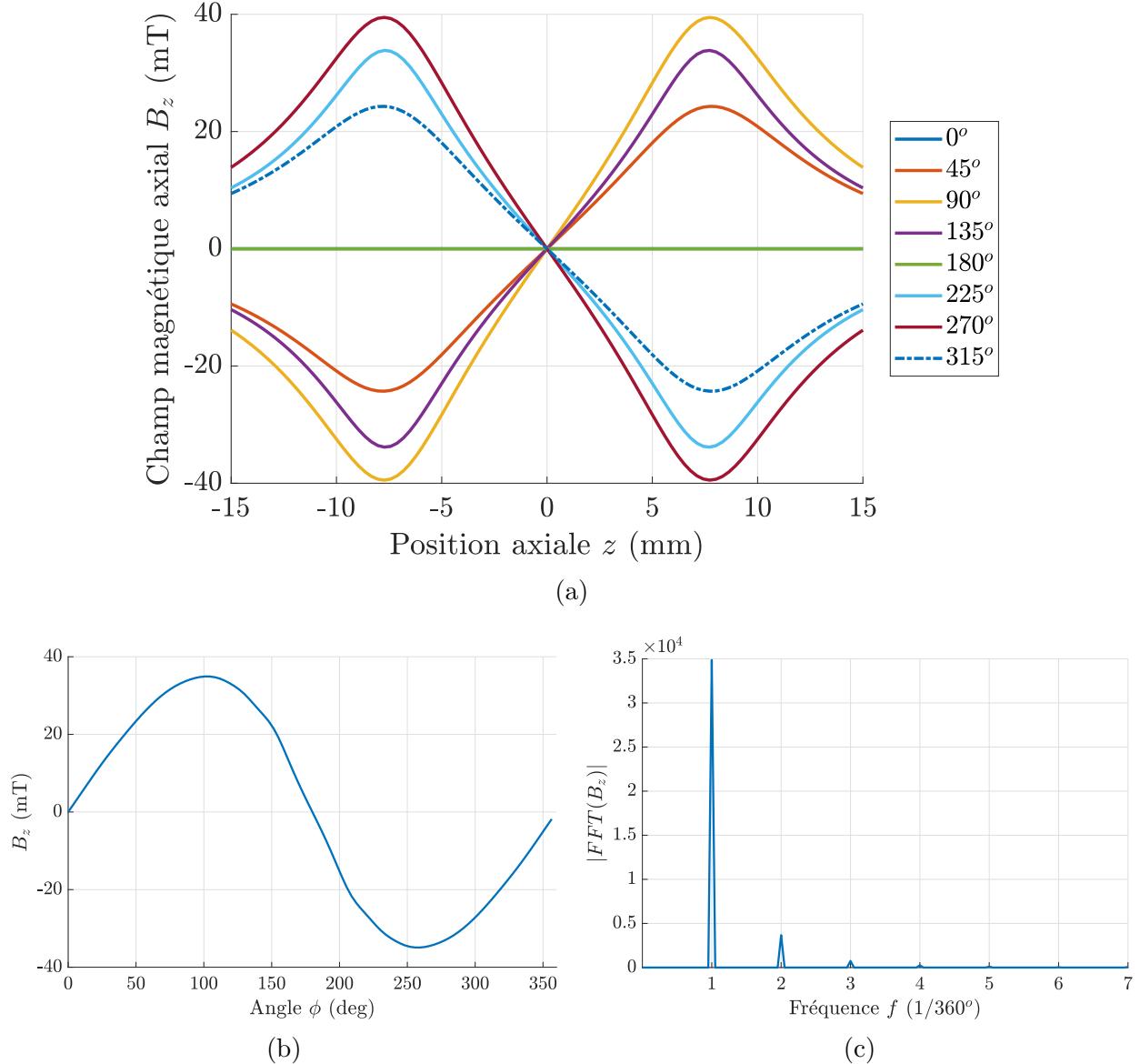


Figure 5.6 Résultats du calcul du champ magnétique avec la distribution d'épaisseur $a(\phi)$ de l'équation 5.4. (a) Profils du champ magnétique axial B_z pour différents angles azimutaux ϕ_i autour du cylindre. (b) Profil de B_z autour du cylindre à $z = 6$ mm. (c) Transformée de Fourier du profil $B_z(\phi)$.

donc un lien direct entre le profil $B_z(\phi)$ et la distribution de l'épaisseur $a(\phi)$. Des tests supplémentaires montrent que cette correspondance n'est pas une coïncidence. En d'autres mots, l'analyse de ce profil dans un contexte expérimental permettrait d'obtenir des informations sur la distribution de la profondeur de la bande magnétique du dispositif.

Quant à elle, la deuxième propriété est expliquée par la symétrie de la bande magnétique dans la direction axiale z . En effet, comme l'épaisseur $a(\phi)$ ne varie pas avec la position

z , les signaux en $\pm z$ sont équivalents à un signe près. La différence de signe s'explique par l'orientation des dipôles qui contribuent au champ magnétique résiduel. Pour visualiser ces dipôles, la figure 5.7 montre une section du cylindre avec une épaisseur suivant l'équation 5.4.

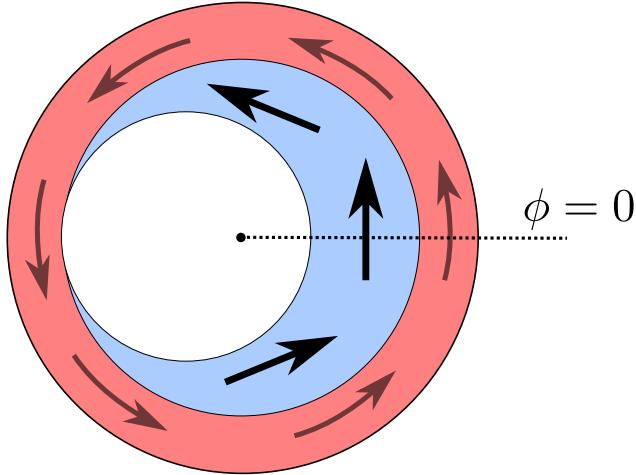


Figure 5.7 Section du cylindre avec une variation azimutale $a(\phi)$ de la profondeur de la bande magnétique. La région rouge conserve la symétrie cylindrique et ne produit pas de champ magnétique. La section bleue est responsable du signal de la figure 5.6a.

Seule la zone bleue du centre contribue au champ magnétique résiduel observé dans la figure 5.6a, car le reste contient la symétrie cylindrique et ne produit pas de champ magnétique. L'antisymétrie de la zone bleue par rapport aux angles $\pm\phi$ justifie la propriété 1. Pour la propriété 2, il suffit de visualiser le champ magnétique généré par le dipôle dans la zone bleue à $\phi = 0$ dans les directions $\pm z$ (normales à la feuille).

En conclusion, une variation azimutale de la profondeur de la bande magnétique génère un champ magnétique résiduel avec des caractéristiques qui peuvent aider à reconstruire la configuration magnétique d'un couplemètre magnétoélastique. Ceci permet par exemple de diagnostiquer des dispositifs générant des signaux indésirables.

5.3.2 Variation azimutale et axiale

Dans la section précédente, l'épaisseur de la bande magnétique n'est variée que le long de la circonférence du cylindre. Rien n'empêche d'ajouter une dépendance axiale à ce paramètre. Voici par exemple une fonction qui décrit une épaisseur $a(\phi, z)$ qui varie dans les deux directions :

$$a(\phi, z) = a_0 \left(1 + \Delta a_z \frac{z}{w} \right) (1 + \Delta a_\phi \cos \phi) \quad (5.5)$$

avec l'épaisseur moyenne a_0 et des variations relatives Δa_z et Δa_ϕ dans les deux directions. Un exemple pratique de cette distribution est la variation azimutale précédente avec une procédure de magnétisation mal alignée. Par exemple, un aimant permanent qui n'est pas bien aligné avec le cylindre en rotation lors de la magnétisation produit une variation axiale de l'épaisseur $a(z)$, car l'amplitude du champ magnétique qui magnétise le cylindre varie avec z . La variation axiale est représentée par une fonction linéaire le long de la bande magnétique comme illustrée dans la figure 5.8.

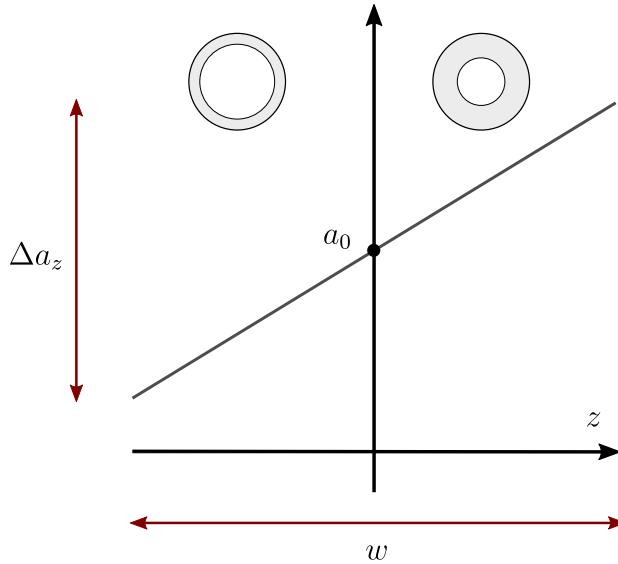


Figure 5.8 Variation linéaire de l'épaisseur $a(z)$ le long de la bande magnétique de largeur w . Les cercles schématisent la bande magnétique pour différentes épaisseurs.

Il n'est pas pertinent de tester une variation axiale seule, car la symétrie cylindrique serait toujours conservée et aucun champ magnétique résiduel ne serait mesuré. Toutefois, le couplage des deux variations modifie le champ magnétique résiduel par rapport à la figure 5.6. En effet, la distribution d'épaisseur de l'équation 5.5 génère les résultats de la figure 5.9 pour le même cylindre. Les variations relatives sont $\Delta a_z = \Delta a_\phi = 0.5$.

L'ajout de la variation axiale dans la distribution de l'épaisseur de la bande magnétique modifie un peu le champ magnétique résiduel, mais l'effet n'est pas significatif. Les variations les plus notables sont autour du centre de la bande ($z = 0$), car le champ magnétique est faible à cet endroit. Le profil $B_z(\phi)$ et sa transformée de Fourier pour ce test sont très similaires au test précédent et ne sont donc pas présentés. Bref, il semble que la variation axiale de l'épaisseur $a(\phi, z)$ ne modifie pas beaucoup le signal résiduel comparativement à la variation uniquement azimutale $a(z)$.

Cette ressemblance peut nuire à l'idée d'utiliser le modèle pour reconstruire la configuration magnétique d'un couplemêtre magnétoélastique, car deux distributions différentes génèrent

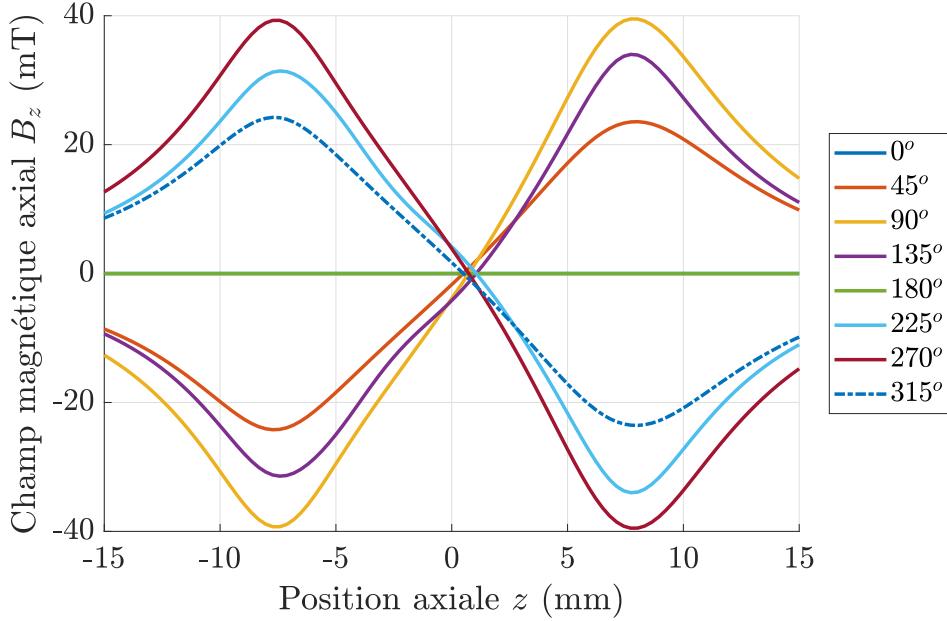


Figure 5.9 Profils du champ magnétique axial B_z pour différents angles azimutaux ϕ_i autour du cylindre avec la distribution d'épaisseur $a(\phi, z)$ de l'équation 5.5.

des signaux similaires. Par contre, les variations près du centre de la bande magnétique peuvent être utiles, notamment pour un couplemêtre dans la configuration axiale, car les capteurs sont justement situés au centre des bandes magnétiques. Ce comportement est justement observé expérimentalement pour un couplemêtre réel [81]. Ainsi, les résultats suggèrent qu'une variation axiale des propriétés magnétiques du cylindre est responsable d'un signal non nul au centre de la bande magnétique. D'un point de vue pratique, cette conclusion permet de cibler les problèmes du couplemêtre à ceux qui causent des variations axiales dans la configuration magnétique. Il est donc plus facile de corriger et d'optimiser le dispositif.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

Pour conclure ce travail, une synthèse des travaux effectués est d'abord effectuée. Elle reprend les points importants de chacun des chapitres en explicitant le lien avec les objectifs du projet. Puis, les limites de la solution proposée et du modèle utilisé sont exposées. Finalement, des améliorations possibles au modèle et des avenues possibles pour des recherches futures sont présentées.

6.1 Synthèse des travaux

L'objectif principal du travail étant d'évaluer l'impact des paramètres de conception d'un couplemètre magnétoélastique, l'introduction met en contexte cette technologie par une revue de littérature. Les deux types de couplemètre magnétoélastique, soit actif et passif, sont ainsi présentés, tout en démêlant les termes associés au couplage magnétoélastique. Suivant cette mise en contexte, les bases théoriques du travail sont établies dans le chapitre 2 en développant d'abord les matrices élastomagnétiques par une approche thermodynamique, puis en détaillant les expressions des énergies pertinentes au problème. Alors que les matrices élastomagnétiques décrivent un comportement linéaire entre les quantités magnétiques et mécaniques, l'approche énergétique permet de traiter des problèmes plus complexes en tenant compte des ordres supérieurs et de contributions énergétiques variées. Bref, ces développements décrivent l'effet d'une contrainte mécanique et d'un champ magnétique externe sur la déformation et l'aimantation d'un échantillon ferromagnétique.

Le traitement général de ce chapitre est ensuite adapté au fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique dans le chapitre 3. Premièrement, le couple mécanique appliqué au couplemètre est converti en une contrainte de torsion sous la forme matricielle avec une amplitude qui varie radialement dans le cylindre. Deuxièmement, l'effet de cette torsion sur l'orientation de l'aimantation d'un monodomaine magnétique soumis à une anisotropie magnétique et un champ magnétique externe est développé. L'expression ainsi obtenue décrit le fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique passif. Spécifiquement, le couple appliqué au cylindre mène à une composante axiale de l'aimantation des domaines circonférentiels initiaux. La direction et l'amplitude de cette composante axiale dépendent du couple appliqué, qui devient alors mesurable avec des magnétomètres près de la surface du cylindre.

Le chapitre 4 prend les développements du chapitre précédent et les adapte à un modèle 3D d'un couplemètre magnétoélastique passif. Ce modèle est présenté sous tous ses angles

en passant par le maillage, l'initialisation des éléments magnétiques, l'application du couple mécanique, et le calcul de la courbe de signal. Le modèle est finalement comparé à un calcul d'éléments finis pour mettre en évidence l'impact de l'approximation des dipôles indépendants sur les résultats. Ce dernier se résume à l'absence d'interactions entre les bandes magnétiques ainsi que l'absence du guidage de flux magnétique dans les matériaux métalliques adjacents. La validité du modèle des dipôles est donc limitée à des systèmes magnétiques avec des aimantations préalablement connues. Toutefois, ceci n'empêche pas de reproduire les caractéristiques principales de la courbe de signal d'un couplemètre magnétoélastique passif.

Ayant maintenant accès à la courbe de signal d'un couplemètre magnétoélastique idéalisé, différents tests sont effectués pour évaluer l'impact de certains paramètres de conception du dispositif. La taille des bandes magnétiques, la distance des magnétomètres et leur orientation sont d'abord étudiées pour évaluer leurs effets sur le gain du couplemètre. Des différences significatives ont été observées entre tous ces paramètres, montrant notamment qu'une configuration radiale des magnétomètres profite d'un gain supérieur qu'une configuration axiale, malgré sa plus grande sensibilité aux variations de position des capteurs.

Un autre résultat intéressant est l'impact des fluctuations dans la configuration magnétique sur la courbe de signal. Ces fluctuations simulent la tendance de l'aimantation à s'orienter dans différentes directions à cause des contraintes résiduelles, des défauts, et de la nature polycristalline du matériau. Dans le cas spécifique d'un échantillon polycristallin à mailles cubiques, le gain est réduit à 0.73 fois sa valeur maximale. En plus de cette diminution, les fluctuations génèrent un signal résiduel qui peut aussi affecter les performances et l'application d'un couplemètre.

Finalement, le modèle est appliqué à la problématique réelle des couplemètres magnétoélastiques passifs qui possèdent un champ magnétique résiduel mesurable en l'absence de couple appliqué. Le modèle idéalisé du dispositif suggère que des variations spatiales des propriétés magnétiques sont responsables de ce signal résiduel. Plus précisément, deux distributions non uniformes de la profondeur de la bande magnétique sont utilisées pour reproduire avec succès les tendances des courbes expérimentales de la composante axiale du champ magnétique résiduel. Ce type d'étude peut donc aider à diagnostiquer des couplemètres en reconstruisant partiellement la configuration magnétique du dispositif et en déduisant l'origine du signal résiduel. Cette méthode de caractérisation est bien adaptée aux couplemètres magnétoélastiques passifs, car elle est non destructive et permet d'obtenir de l'information sur la configuration magnétique à l'intérieur du cylindre, contrairement aux méthodes d'imagerie de surface.

6.2 Limites de la solution proposée

La modélisation du couplemètre magnétoélastique passif a permis de calculer des courbes de signal pour différents dispositifs et d'évaluer l'impact de certains paramètres de conception. Ces résultats sont toutefois obtenus avec un modèle simplifié qui limite beaucoup son application pour un dispositif réel, bien qu'il soit versatile. Les limites du présent travail sont les hypothèses simplificatrices du modèle, et la difficulté de déduire la configuration magnétique initiale à partir du champ magnétique résiduel.

D'abord, le modèle est limité à une approche de dipôles magnétiques indépendants. Il a été démontré dans la section 4.5.2 que cette hypothèse ne permet pas de reproduire exactement le champ magnétique attendu d'un système magnétique qui inclut des régions ferromagnétiques non aimantées. Bien que les tests du chapitre 5 sont construits d'une manière à minimiser l'impact de cette approximation, elle est toujours présente. Il est par exemple difficile de justifier les valeurs numériques du gain calculées dans la section 5.1, même si leur comparaison reste raisonnable.

Une autre limite du modèle est la simplicité des paramètres du matériau. Le modèle n'utilise que deux paramètres pour définir le matériau, soit l'aimantation à saturation M_s et le ratio λ_s/K_u entre la constante de magnétostriction et la constante d'anisotropie magnétique. D'abord, l'utilisation de l'aimantation à saturation dans le contexte du modèle proposé suppose que les éléments magnétiques ont des propriétés uniformes dans tout leur volume respectif. Cette granularité a été choisie à $(101 \mu\text{m})^3$ pour la plupart des tests de sorte qu'une valeur plus petite n'affecte pas significativement les résultats. Physiquement, ce $(101 \mu\text{m})^3$ représente la taille de grains magnétiques uniformément aimantés dans la bande magnétique du matériau isotrope défini dans le modèle numérique.

Puis, l'utilisation du ratio λ_s/K_u est une simplification du couplage magnétoélastique et de la nature polycristalline du matériau. En effet, pour un échantillon polycristallin à mailles cubiques, la constante λ_s n'est qu'une approximation de la magnétostriction qui devrait plutôt être anisotrope [11]. Similairement, l'orientation de l'anisotropie magnétique de la constante K_u devrait suivre la maille cristalline plutôt que de supposer qu'elle est parallèle à l'aimantation initiale. Cette tendance a été traitée à un certain point dans la section 5.2, dans laquelle des fluctuations sont ajoutées à la configuration magnétique initiale. Outre cela, l'utilisation d'une unique constante K_u suppose que l'aimantation dans un cylindre est uniforme et que le matériau est uniforme dans tout le volume du dispositif.

L'autre aspect du travail qui limite l'envergure des résultats s'applique particulièrement aux résultats de la section 5.3, dans laquelle différentes configurations magnétiques sont utilisées

pour reproduire les courbes expérimentales du signal résiduel d'un couplemètre magnétoélastique. Cette méthode n'est pas idéale considérant qu'un grand nombre de configurations différentes peut reproduire le même signal, bien qu'il soit possible de réduire la taille de l'espace de solutions à l'aide des résultats et d'hypothèses réalistes s'appliquant au contexte. L'alternative à cette méthode d'essais et erreurs est la résolution du problème inverse de calculer l'aimantation d'un échantillon à partir de son champ magnétique. Cette méthode est toutefois hors de la portée de ce travail.

6.3 Améliorations futures

La section précédente révèle les limites du travail présenté par rapport à deux aspects, soit les hypothèses du modèle et la méthode pour déduire la configuration magnétique du cylindre à partir de son champ magnétique. En premier lieu, la plus grande amélioration au modèle serait l'ajout d'une interaction entre les bandes magnétiques et les zones désaimantées du reste du cylindre. Cette dernière permettrait de reproduire plus fidèlement le champ magnétique autour du couplemètre. Pour ce faire, le modèle de dipôles pourrait être converti à un calcul d'éléments finis représentant mieux la réalité des systèmes magnétiques grâce à des conditions frontières adéquates. Des variations spatiales des propriétés des matériaux pourraient aussi être ajoutées à ce nouveau problème.

En deuxième lieu, il serait intéressant d'inclure un champ magnétique externe dans le modèle pour évaluer son impact sur le fonctionnement d'un couplemètre magnétoélastique passif. Cette addition consisterait à modifier l'effet de la contrainte sur l'aimantation en fonction du champ magnétique à la position de l'élément magnétique. À première vue, il n'est pas évident d'implanter cette modification, car il n'y a pas de solution explicite de l'aimantation à l'équilibre pour un domaine affecté par une torsion et un champ magnétique quelconque. Le cas spécifique étudié dans la section 3.3 révèle tout de même une solution approximative de l'effet d'un champ magnétique axial sur l'aimantation pour un couplemètre magnétoélastique idéalisé. Dans le calcul par éléments finis, un champ externe quelconque peut être ajouté aisément avec des conditions frontières adéquates.

En plus d'un champ magnétique externe, il serait possible d'ajouter des contraintes internes variées dans le modèle. Cela permettrait par exemple d'étudier l'effet des contraintes résiduelles sur les courbes de signal d'un couplemètre magnétoélastique. L'ajout d'une contrainte additionnelle dans le calcul de l'aimantation se ferait en repartant de l'expression générale de l'énergie magnétoélastique et en minimisant l'énergie de chaque élément magnétique selon leur contrainte locale. Cela demanderait une grande puissance de calcul considérant le nombre élevé d'éléments magnétiques d'une modélisation adéquate (10^7) et d'un nombre

équivalent d'équations à résoudre. Une alternative plus pratique serait d'exploiter les relations linéaires des matrices élastomagnétiques et d'ajouter ces perturbations au résultat final calculé normalement.

Outre ces trois améliorations au modèle, il est envisageable de bonifier la méthode d'analyse de la section 5.3 quant à la déduction de la configuration magnétique d'un échantillon à partir de son champ magnétique. Idéalement, le problème inverse devrait être traité, mais il s'agit d'un projet de grande envergure. Sinon, une étude plus systématique de l'effet de différents paramètres sur le champ magnétique permettrait de mieux représenter la configuration magnétique de l'échantillon. En rappel, la section 5.3 ne présente que l'effet d'une variation de la profondeur de la bande magnétique sur le champ résiduel. Il serait aussi adéquat de comparer ces résultats avec des caractérisations structurale et chimique du cylindre dans un contexte expérimental.

Finalement, une autre avenue possible de projets futurs serait la modélisation d'un couplemètre actif plutôt que passif. Un bon point de départ pour ce projet est le développement théorique de la section 3.3 qui décrit l'orientation de l'aimantation en fonction d'une anisotropie magnétique, d'une contrainte de torsion et d'un champ magnétique externe. Le développement mène à une solution spécifique pour des orientations bien définies, mais n'est pas une solution générale. Il faut toutefois porter attention à la définition de la susceptibilité, qui est à la base du fonctionnement du couplemètre magnétoélastique actif. Le calcul précédent suppose que seule la rotation de l'aimantation est responsable de la susceptibilité, alors qu'en réalité, le déplacement des parois de domaines magnétiques pourraient aussi jouer un rôle important dans la susceptibilité du matériau [11, 31].

RÉFÉRENCES

- [1] W. J. Fleming, “Automotive torque measurement : A summary of seven different methods,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 31, n°. 3, p. 117–124, Aug 1982.
- [2] P. H. Kim *et al.*, “Approaching the standard quantum limit of mechanical torque sensing,” *Nature Communications*, vol. 7, n°. 1, p. 13165, 2016.
- [3] J. E. Losby, V. T. K. Sauer et M. R. Freeman, “Recent advances in mechanical torque studies of small-scale magnetism,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 51, n°. 48, p. 483001, sep 2018.
- [4] H. Dzapo, Z. Stare et N. Bobanac, “Digital measuring system for monitoring motor shaft parameters on ships,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 58, n°. 10, p. 3702–3712, Oct 2009.
- [5] J. D. Turner, “Development of a rotating-shaft torque sensor for automotive applications,” *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, vol. 135, n°. 5, p. 334–338, Sep. 1988.
- [6] J. C. S. Borges *et al.*, “New contactless torque sensor based on the Hall effect,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 17, n°. 16, p. 5060–5067, Aug 2017.
- [7] C. Yeh *et al.*, “Digital high-resolution torque sensor and signal processing,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 15, n°. 4, p. 2093–2100, April 2015.
- [8] S. Bitar, J. S. Probst et I. J. Garshelis, “Development of a magnetoelastic torque sensor for Formula 1 and CHAMP car racing applications,” *SAE Transactions*, vol. 109, p. 42–49, 2000.
- [9] R. J. Kari *et al.*, “Magnetoelastic torquemeter system for LCAC hovercraft turboshaft engine monitoring and control,” *ASME, Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 5, n°. 44717, p. 339–348, 2012.
- [10] I. J. Garshelis, “A torque transducer utilizing a circularly polarized ring,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n°. 5, p. 2202–2204, Sep. 1992.
- [11] E. Du Trémolet de Lacheisserie, *Magnetostriction : theory and applications of magnetoelasticity*. Boca Raton : CRC Press, 1993.
- [12] A. Hernando et J. Barandiaran, “The initial Matteucci effect,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 8, n°. 7, p. 833–840, Mai 1975.

- [13] D. Jiles, *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Second Edition.* Taylor & Francis, 1998.
- [14] M. J. Sablik et D. C. Jiles, “Modeling the effects of torsional stress on hysteretic magnetization,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, n°. 1, p. 498–504, Jan 1999.
- [15] W. J. Fleming, “Magnetostrictive torque sensors - comparison of branch, cross, and solenoidal designs,” dans *SAE Technical Paper*. SAE International, 02 1990.
- [16] F. Umbach *et al.*, “Contactless measurement of torque,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 33, n°. 26, p. 1091 – 1096, 2000, iFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, 18-20 September 2000.
- [17] I. Sasada, Y. Etoh et K. Kato, “A figure-of-eight flexible pickup coil for a magnetostrictive torque sensor,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n°. 10, p. 3309–3311, Oct 2006.
- [18] K. Ishikawa *et al.*, “Compensation for temperature variation in magnetostrictive torque sensor using perpendicularly magnetizing coils,” *IEEE Translation Journal on Magnetics in Japan*, vol. 8, n°. 4, p. 269–276, April 1993.
- [19] M. F. S. V. Neves, “A contactless torque sensor based on the magnetostriction property of amorphous iron,” dans *Proceedings of IEEE. AFRICON '96*, vol. 2, Sep. 1996, p. 661–664 vol.2.
- [20] D. Killat et W. Langheinrich, “Signal processing for magnetic micro torque sensors,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 46, n°. 1, p. 315 – 319, 1995.
- [21] Y.-H. Yu et J.-W. Dong, “Characteristic analysis on a torque sensor based on inverse magnetostrictive mechanism,” *Wuhan Ligong Daxue Xuebao/Journal of Wuhan University of Technology*, vol. 39, p. 68–72 and 78, 01 2017.
- [22] D. T. Lu *et al.*, “Gap compensation for magnetostrictive torque sensors,” Brevet US 2019/0 049 320 A1, 14 fév. 2019.
- [23] D. T. Lu et P. T. Sipila, “Temperature compensated torque sensor,” Brevet US 2019/0 017 888 A1, 17 jan. 2019.
- [24] P. C. Raths *et al.*, “Magnetoelastic torque sensor,” Brevet US 2018/0 231 425 A1, 16 août 2018.
- [25] H. Wakiwaka et A. Furukawa, “Magnetostriction type torque detection sensor,” Brevet US 2019/0 107 449 A1, 1 avr. 2019.
- [26] K. Mohri *et al.*, “Large Barkhausen effect and Matteucci effect in amorphous magnetostrictive wires for pulse generator elements,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, n°. 5, p. 2017–2019, Sep. 1985.

- [27] K. Mohri et S. Takeuchi, "Sensitive bistable magnetic sensors using twisted amorphous magnetostrictive ribbons due to Matteucci effect," *Journal of Applied Physics*, vol. 53, n°. 11, p. 8386–8388, 1982.
- [28] M. Vazquez *et al.*, "The influence of the torsional strain and the azimuthal field on the inverse Wiedemann effect for iron whiskers," *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 13, n°. 9, p. 1713–1718, Sep 1980.
- [29] I. J. Garshelis et C. R. Conto, "A torque transducer utilizing two oppositely polarized rings," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n°. 6, p. 4629–4631, Nov 1994.
- [30] I. J. Garshelis et C. A. Jones, "A torque transducer based on local bands of naturally stabilized remanent circumferential magnetization," *Journal of Applied Physics*, vol. 85, n°. 8, p. 5468–5470, 1999.
- [31] I. J. Garshelis, "Collarless circularly magnetized torque transducer and method for measuring torque using same," Brevet US 6 260 423 B1, 17 juillet 2001.
- [32] M. S. Boley, D. K. Rigsbee et D. A. Franklin, "The effects of heat treatment on the magnetic behavior of ring-type magnetoelastic torque sensors," dans *SIcon/01. Sensors for Industry Conference. Proceedings of the First ISA/IEEE. Sensors for Industry Conference (Cat. No.01EX459)*, Nov 2001, p. 203–206.
- [33] Y. Iwasaki, "Rotation torque measuring device," Brevet JP 2016/217922 A, 22 déc. 2016.
- [34] B. Steinacher, "Magnetostrictive sensor for actuators in aircraft," Brevet WO 2015/0078724 A1, 4 juin 2015.
- [35] G. Simard, "DéTECTEUR de couple magnéto-élastique bi-bande," Brevet CA 3 046 180 A1, 21 juin 2019.
- [36] S. J. Lee, "Magnetoelastic torque sensor with ambient field rejection," Brevet US 8 578 794 B2, 12 nov. 2013.
- [37] R. Andreeescu, B. Spellman et E. Furlani, "Analysis of a non-contact magnetoelastic torque transducer," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 320, n°. 12, p. 1827 – 1833, 2008.
- [38] J. Dean *et al.*, "The incorporation of the Cauchy stress matrix tensor in micromagnetic simulations," *Journal of Applied Physics*, vol. 108, n°. 7, p. 073903, 2010.
- [39] D. Vanoost *et al.*, "Multiscale and macroscopic modeling of magneto-elastic behavior of soft magnetic steel sheets," *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 31, n°. 2, p. e2255, 2018.

- [40] B. Zhu *et al.*, “Micromagnetic modeling of the effects of stress on magnetic properties,” *Journal of Applied Physics*, vol. 89, n°. 11, p. 7009–7011, 2001.
- [41] C.-Y. Liang *et al.*, “Modeling of magnetoelastic nanostructures with a fully coupled mechanical-micromagnetic model,” *Nanotechnology*, vol. 25, n°. 43, p. 435701, oct 2014.
- [42] X. Zhang *et al.*, “Novel non-contact torque measurement using the magnetomechanical effect,” *Instrumentation Science & Technology*, vol. 47, n°. 1, p. 107–116, 2019.
- [43] R. Engel-Herbert et T. Hesjedal, “Calculation of the magnetic stray field of a uniaxial magnetic domain,” *Journal of Applied Physics*, vol. 97, n°. 7, p. 074504, 2005.
- [44] J. M. Camacho et V. Sosa, “Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry,” *Revista mexicana de fÍsica E*, vol. 59, p. 8 – 17, 06 2013.
- [45] D. V. Vagin, T. N. Gerasimenko et P. A. Polyakov, “Exact analytical expression for magnetic field induction of rectangular shape sample,” *Moscow University Physics Bulletin*, vol. 63, n°. 6, p. 422–424, Dec 2008.
- [46] J. M. D. Coey, *Magnetism and Magnetic Materials*. Cambridge University Press, 2010.
- [47] E. Lifshitz, A. Kosevich et L. Pitaevskii, “Chapter I - Fundamental Equations,” dans *Theory of Elasticity*, 3^e éd. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1986, p. 1 – 37.
- [48] M. H. Sadd, *Elasticity : Theory, Applications, and Numerics*, 2^e éd. US : Academic Press, 2009.
- [49] W. Nolting et A. Ramakanth, *Quantum Theory of Magnetism*. Berlin/Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [50] P. Helnwein, “Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and fourth-order tensors,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n°. 22, p. 2753 – 2770, 2001.
- [51] R. R. Birss, “Macroscopic symmetry in space-time,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 26, n°. 1, p. 309, jan 1963.
- [52] ——, *Symmetry and magnetism : by Robert R. Birss*. Amsterdam : North-Holland Pub. Co, 1964, vol. 3.
- [53] R. O’Handley, *Modern Magnetic Materials : Principles and Applications*. Wiley, 1999.
- [54] E. Callen et H. Callen, “Anisotropic magnetization,” *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 16, n°. 3, p. 310 – 328, 1960.
- [55] E. R. Callen et H. B. Callen, “Static magnetoelastic coupling in cubic crystals,” *Phys. Rev.*, vol. 129, p. 578–593, Jan 1963.

- [56] M. Fujimoto, *The Legendre Expansion of Potentials.* New York, NY : Springer New York, 2007, p. 64–82.
- [57] A. Maceri, *Nonlinear Elasticity.* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010, p. 663–704.
- [58] L. Néel, “Anisotropie magnétique superficielle et surstructures d'orientation,” *Journal de Physique et le Radium*, vol. 15, n°. 4, p. 225–239, 1954.
- [59] R. Becker, “Zur theorie der magnetisierungskurve,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 62, n°. 3, p. 253–269, Mar 1930.
- [60] E. W. Lee, “Magnetostriction and Magnetomechanical Effects,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 18, p. 184–229, janv. 1955.
- [61] H. B. Callen et N. Goldberg, “Magnetostriction of polycrystalline aggregates,” *Journal of Applied Physics*, vol. 36, n°. 3, p. 976–977, 1965.
- [62] D. Jiles, “Theory of the magnetomechanical effect,” *Journal of physics D : applied physics*, vol. 28, n°. 8, p. 1537, 1995.
- [63] A. S. Arrott *et al.*, “Micromagnetics of curling configurations in magnetically soft cylinders,” *Journal of Applied Physics*, vol. 50, n°. B3, p. 2387–2389, 1979.
- [64] R. M. Bozorth, *Measurement of Magnetic Quantities.* IEEE, 1978.
- [65] M. Sato et Y. Ishii, “Simple and approximate expressions of demagnetizing factors of uniformly magnetized rectangular rod and cylinder,” *Journal of Applied Physics*, vol. 66, n°. 2, p. 983–985, 1989.
- [66] G. T. Mase et G. Mase, *Continuum Mechanics for Engineer.* Boca Raton : CRC Press, 1999.
- [67] M. J. Sablik *et al.*, “A model for hysteretic magnetic properties under the application of noncoaxial stress and field,” *Journal of Applied Physics*, vol. 74, n°. 1, p. 480–488, 1993.
- [68] G. S. Abo *et al.*, “Definition of magnetic exchange length,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, n°. 8, p. 4937–4939, 2013.
- [69] R. J. Celotta *et al.*, *Techniques to Measure Magnetic Domain Structures.* American Cancer Society, 2012, p. 1–15.
- [70] K. Koike, “Spin-polarized scanning electron microscopy,” *Microscopy*, vol. 62, n°. 1, p. 177–191, 01 2013.
- [71] D. Meeker, “Finite element method magnetics,” Version 4.2, 21 Avr. 2019. [En ligne]. Disponible : <http://femm.info>
- [72] J. R. Cardoso, *Electromagnetics through the Finite Element Method : A Simplified Approach Using Maxwell's Equations.* Milton : CRC Press Inc, 2016.

- [73] R. Ravaud *et al.*, “Analytical calculation of the magnetic field created by permanent-magnet rings,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, n°. 8, p. 1982–1989, Aug 2008.
- [74] J. Vojtko, “Optimization of torque sensor input parameters and determination of sensor errors and uncertainties,” *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 5, n°. 3, p. 309–402, Sep 2006.
- [75] D. Meeker, “Improvised open boundary conditions for magnetic finite elements,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, n°. 10, p. 5243–5247, 2013.
- [76] F. T. Calkins, R. C. Smith et A. B. Flatau, “Energy-based hysteresis model for magnetostrictive transducers,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, n°. 2, p. 429–439, 2000.
- [77] I. J. Garshelis et J. M. Cuseo, ““negative” hysteresis in magnetoelastic torque transducers,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, n°. 10, p. 4471–4474, 2009.
- [78] I. J. Garshelis et S. P. L. Tollens, “Influence of geometric factors on the polarity of a remanent magnetization,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n°. 10, p. 2796–2798, Oct 2005.
- [79] W.-S. Lee et T.-T. Su, “Mechanical properties and microstructural features of AISI 4340 high-strength alloy steel under quenched and tempered conditions,” *J. of Materials Process. Technol.*, vol. 87, n°. 1, p. 198 – 206, 1999.
- [80] J. N. Mohapatra *et al.*, “Correlation of magnetic properties with mechanical properties of a high tensile grade steel in various heat treated conditions,” *Transactions of the Indian Institute of Metals*, vol. 71, n°. 10, p. 2361–2374, Oct 2018.
- [81] Communication privée avec un partenaire industriel.
- [82] T. Kohashi, “Magnetization analysis by spin-polarized scanning electron microscopy,” *Scanning*, vol. 2018, p. 2420747, Feb 2018.
- [83] K. Trapp, L. Käfer et D. Bähre, “Effects of machining ferromagnetic materials on magnetic property changes,” *Procedia Manufacturing*, vol. 1, p. 721 – 727, 2015, 43rd North American Manufacturing Research Conference, NAMRC 43, 8-12 June 2015, UNC Charlotte, North Carolina, United States.
- [84] M. Mohammadpour, M. Razfar et R. Jalili Saffar, “Numerical investigating the effect of machining parameters on residual stresses in orthogonal cutting,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 18, n°. 3, p. 378 – 389, 2010.
- [85] S. G. H. Staples *et al.*, “Solving the inverse problem of magnetisation–stress resolution,” *Journal of Applied Physics*, vol. 113, n°. 13, p. 133905, 2013.

ANNEXE A NOTATION DE VOIGT

La notation de Voigt permet de diminuer le rang de tenseurs symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$) afin de simplifier leur représentation et les opérations entre tenseurs. Par exemple, les tenseurs de déformation ε_{ij} et de contrainte σ_{ij} peuvent être réduits en vecteurs. La conversion de matrice en vecteur se fait comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{23} \\ a_{13} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Une matrice 3×3 symétrique ne contient que 6 termes indépendants, 3 diagonaux et 3 hors-diagonaux. Donc, en disposant ces 6 termes dans un vecteur, la totalité de l'information contenue dans la matrice 3×3 est aussi présente dans le vecteur de Voigt 6×1 . Toutefois, les matrices ou vecteurs ainsi obtenus ne constituent pas des tenseurs à proprement dit. Une correction aux composantes doit être faite dans certains cas pour que les propriétés tensorielles soient conservées, notamment pour le tenseur de déformation. [11, 50]

Suivant cette notation, un tenseur de rang supérieur à 2 est aussi réduit si ce dernier est lié à un tenseur affecté par la notation de Voigt. Par exemple pour un tenseur de rang 4, chaque paire d'indice est réduit suivant la notation de Voigt :

$$\text{Voigt}(a_{1231}) = \text{Voigt}\left(a_{(12)(31)}\right) = a_{65}. \quad (\text{A.2})$$

ANNEXE B EXEMPLE D'APPLICATION DU PRINCIPE DE NEUMANN

Partant de la matrice élastomagnétique complète, il est possible de réduire le nombre d'éléments non nuls en appliquant le principe de Neumann. Ce dernier impose l'invariance de la matrice élastomagnétique par rapport aux opérations de symétrie du système étudié. Un exemple de simplification est donné ici pour le groupe magnétique $4/m\bar{m}m$. Les matrices génératrices de ce groupe sont données par l'équation B.1. [51]

$$\begin{aligned} Q^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & Q^1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \underline{Q^2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathcal{R}, & Q^7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Pour appliquer le principe de Neumann, il suffit d'appliquer ces matrices dans les équations 2.56 et 2.57 selon le type de tenseur et de forcer l'invariance des tenseurs $T'_{ij} = T_{ij}$. Par exemple, le tenseur de rang 3 de piézomagnétisme d_{ijk} sous l'action de la matrice génératrice $\underline{Q^2}$ permet d'obtenir le développement suivant.

Le tenseur d_{ijk} est de type A et l'opération de symétrie $\underline{Q^2}$ inclut l'inversion du temps. Alors, un signe négatif est introduit dans l'équation 2.57 et est suivie de l'application de l'opération classique Q^2 .

$$d'_{ijk} = (-1)|Q^2|Q_{il}^2 Q_{jm}^2 Q_{kn}^2 d_{lmn} \quad (\text{B.2})$$

$$= -Q_{il}^2 Q_{jm}^2 Q_{kn}^2 d_{lmn} \quad (\text{B.3})$$

Puis, l'équation B.3 est répétée pour différents triplets (i, j, k) pour obtenir un système d'équations reliant les différentes composantes. Pour l'opération Q^2 qui est diagonale, son effet est facile à calculer, car le produit du terme de droite de l'équation B.3 se simplifie par

$$d'_{ijk} = -Q_{ii}^2 Q_{jj}^2 Q_{kk}^2 d_{ijk}. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, il suffit de multiplier les éléments diagonaux de Q^2 selon le triplet (i, j, k) choisi. Si ce produit est négatif, alors le terme d_{ijk} est non nul, car l'équation B.4 se simplifie par

$d'_{ijk} = d_{ijk}$. À l'opposé, si le produit est positif, le terme d_{ijk} est nul, car l'unique solution à l'équation $d'_{ijk} = -d_{ijk}$ est $d_{ijk} = 0$. Bref, la matrice génératrice \underline{Q}^2 permet de simplifier le tenseur piézomagnétique par la forme

$$d_{ijk} = \begin{bmatrix} d_{111} & d_{122} & d_{133} & 0 & d_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{223} & 0 & d_{212} \\ d_{311} & d_{322} & d_{333} & 0 & d_{313} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

dans la notation de Voigt avec la symétrie intrinsèque $d_{ijk} = d_{ikj}$. Le processus de simplification continue avec les trois autres matrices génératrices B.1 ainsi que pour les deux autres tenseurs s_{ijkl} et χ_{ij} de la matrice élastomagnétique.

ANNEXE C ÉNERGIE MÉCANIQUE

Afin d'obtenir l'expression simple de l'énergie mécanique en fonction des matrices de déformation ε_{ij} et de contrainte σ_{ij} , une intégrale doit être réalisée. Cette dernière est l'équation 2.72 qui est reprise ici :

$$u_m = \int_0^{\sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d(s_{ijkl}\sigma'_{kl}). \quad (\text{C.1})$$

En rappel, le tenseur de rigidité s_{ijkl} lie la déformation et la contrainte suivant la loi de Hooke généralisée inverse, soit $\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}$. Pour traiter l'intégrale, il suffit de considérer les sommes implicites par la notation d'Einstein et de manipuler les termes. L'équation C.1 est équivalente à

$$u_m = \sum_{ij} \int_0^{\sigma_{ij}} \sigma'_{ij} d\left(\sum_{kl} s_{ijkl}\sigma'_{kl}\right). \quad (\text{C.2})$$

Sans perte de généralité, ce type d'intégrale prend la forme suivante, dont la solution se trouve aisément par un changement de variable $u = ax + y$.

$$\int_0^x x' d(ax' + y) = \int_0^u a^{-1}(u' - y) du' \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{1}{2}a^{-1}u^2 - a^{-1}yu \quad (\text{C.4})$$

Par comparaison, la solution de l'intégrale C.2 devient

$$u_m = \sum_{ij} \left[\frac{1}{2}s_{ijij}^{-1} \left(\sum_{kl} s_{ijkl}\sigma_{kl} \right)^2 - s_{ijij}^{-1} \left(\sum_{kl \neq ij} s_{ijkl}\sigma_{kl} \right) \left(\sum_{kl} s_{ijkl}\sigma_{kl} \right) \right]. \quad (\text{C.5})$$

Puis, en utilisant la loi de Hooke généralisée inverse, l'équation se réécrit plus simplement pour éventuellement retrouver l'expression simple de l'énergie mécanique.

$$u_m = \sum_{ij} \left[\frac{1}{2}s_{ijij}^{-1}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - s_{ijij}^{-1}(\varepsilon_{ij} - s_{ijij}\sigma_{ij})\varepsilon_{ij} \right] \quad (\text{C.6})$$

$$= \sum_{ij} \left[\frac{1}{2}s_{ijij}^{-1}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - s_{ijij}^{-1}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + s_{ijij}^{-1}s_{ijij}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \right] \quad (\text{C.7})$$

$$= \sum_{ij} \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + (1)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \right] \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (\text{C.9})$$

ANNEXE D DÉVELOPPEMENT DE L'EXPRESSION DU CHAMP DIPOLAIRE EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

D'abord, voici l'expression du champ dipolaire $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ exprimé en cartésien pour un moment magnétique $\mathbf{m} = m\hat{\alpha}$ situé en \mathbf{r}' :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{m}{4\pi R^5} (3\mathbf{R}(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{R}) - R^2 \hat{\alpha}). \quad (\text{D.1})$$

La distance $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ est le vecteur reliant le dipôle à la position dans l'espace. Ce vecteur s'exprime avec les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \phi - r' \cos \phi' \\ r \sin \phi - r' \sin \phi' \\ z - z' \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Ensuite, les cosinus directeurs du dipôle $\hat{\alpha}$ se transforment en coordonnées cylindriques, passant de $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ à $(\alpha_r, \alpha_\phi, \alpha_z)$ avec une matrice de rotation. L'angle ϕ' est utilisé, car il s'agit de la position du dipôle.

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi' & -\sin \phi' & 0 \\ \sin \phi' & \cos \phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Avec les équations D.2 et D.3, le produit scalaire $\hat{\alpha} \cdot \mathbf{R}$ se développe avec les coordonnées cylindriques.

$$\hat{\alpha} \cdot \mathbf{R} = \alpha_x R_x + \alpha_y R_y + \alpha_z R_z \quad (\text{D.4})$$

$$= (\alpha_r \cos \phi' - \alpha_\phi \sin \phi')(r \cos \phi - r' \cos \phi') \\ + (\alpha_r \sin \phi' + \alpha_\phi \cos \phi')(r \sin \phi - r' \sin \phi') + \alpha_z(z - z') \quad (\text{D.5})$$

$$= \alpha_r(r \cos(\phi - \phi') - r') + \alpha_\phi(r \sin(\phi - \phi')) + \alpha_z(z - z') \quad (\text{D.6})$$

$$= \alpha_r R_r + \alpha_\phi R_\phi + \alpha_z R_z \quad (\text{D.7})$$

Puis, le résultat D.7 est introduit dans l'expression du champ dipolaire cartésien pour l'ex-

primer en fonction des cosinus directeurs cylindriques.

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{m}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} 3R_x(\alpha_r R_r + \alpha_\phi R_\phi + \alpha_z R_z) - R^2 \alpha_x \\ 3R_y(\alpha_r R_r + \alpha_\phi R_\phi + \alpha_z R_z) - R^2 \alpha_y \\ 3R_z(\alpha_r R_r + \alpha_\phi R_\phi + \alpha_z R_z) - R^2 \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$= \frac{m}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} 3R_x R_r - R^2 \cos \phi' & 3R_x R_\phi + R^2 \sin \phi' & 3R_x R_z \\ 3R_y R_r - R^2 \sin \phi' & 3R_y R_\phi - R^2 \cos \phi' & 3R_y R_z \\ 3R_z R_r & 3R_z R_\phi & 3R_z^2 - R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$= \frac{m}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

La dernière étape est de transformer les composantes cartésiennes du champ dipolaire en composantes cylindriques. Encore une fois, la matrice de rotation est utilisée, mais avec l'angle ϕ , car c'est la position à laquelle le champ \mathbf{H} est calculé.

$$\begin{bmatrix} H_r \\ H_\phi \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$= \frac{m}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$= \frac{m}{4\pi R^5} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\phi \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Les coefficients de la matrice B_{ij} sont explicités ici en introduisant une nouvelle quantité $R_a = r - r' \cos(\phi - \phi')$ pour simplifier la lecture.

$$B_{11} = 3R_r R_a - R^2 \cos(\phi - \phi')$$

$$B_{12} = 3R_\phi R_a - R^2 \sin(\phi - \phi')$$

$$B_{13} = 3R_z R_a$$

$$B_{21} = (3R_r r' + R^2) \sin(\phi - \phi')$$

$$B_{22} = 3rr' \sin^2(\phi - \phi') - R^2 \cos(\phi - \phi')$$

$$B_{23} = 3R_z r' \sin(\phi - \phi')$$

$$B_{31} = 3R_z R_r$$

$$B_{32} = 3R_z R_\phi$$

$$B_{33} = 3R_z^2 - R^2$$

La norme de la distance est aussi exprimée en coordonnées cylindriques.

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2 \quad (\text{D.14})$$