

**Titre:** Stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques en béton :  
Title: développement et applications d'éléments fibres hydromécaniques

**Auteur:** Van Trung Do  
Author:

**Date:** 2020

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Do, V. T. (2020). Stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques en béton :  
développement et applications d'éléments fibres hydromécaniques [Thèse de  
doctorat, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/5458/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/5458/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Pierre Léger  
Advisors:

**Programme:** Génie civil  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques en béton : développement  
et applications d'éléments fibres hydromécaniques**

**VAN TRUNG DO**

Département des Génies civil, Géologiques et des Mines

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiae*

*Doctor Génie civil*

Septembre 2020

# **POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

## **Stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques en béton : développement et applications d'éléments fibres hydromécaniques**

présentée par **Van Trung DO**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiae Doctor*

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Bruno MASICOTTE**, président

**Pierre LÉGER**, membre et directeur de recherche

**Mahdi BENFTIMA**, membre

**Charles-Philippe LAMARCHE**, membre externe

## DÉDICACE

*à ma mère parce qu'elle m'a donné la vie et une source infinie d'encouragement*  
*gửi Mẹ của con, người đã cho con cuộc sống và nguồn động viên vô hạn*

*à mon père parce que 'il est l'homme le plus droit que je connaisse*  
*gửi Bố của con, người đàn ông nghĩa khí nhất mà con biết*

*à Minh, Khải et Marielle (Tue Anh) avec tout l'amour que je leur donne*  
*gửi các con Minh, Khải và Marielle (Tuệ Anh) với tất cả tình yêu của ba*

*à ma chère Trang, car tes sacrifices et ton amour sont toujours présents...*  
*gửi vợ của anh, Trang, bởi sự hi sinh và tình yêu của em giành cho anh...*

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, professeur Pierre Léger, qui m'a soutenu tout au long de cette thèse. Je le remercie pour sa patience, sa gentillesse, sa disponibilité et ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je souhaite remercier tous les professeurs et associés de recherche du groupe de recherche en génie des structures de Polytechnique Montréal qui m'ont aidé pour finir cette thèse doctorale. Mes remerciements vont également aux organismes qui, tout au long de mes études, ont contribué financièrement ou techniquement à leur bon déroulement : CRSNG, FQRNT, École Polytechnique de Montréal.

Je tiens à remercier spécialement mon ami Lucien Stefan, pour son aide précieuse et sa gentillesse.

J'aimerais remercier les membres du jury pour leur patience de lire et commenter cette thèse. Je souhaite remercier mes amis à Polytechnique Montréal, mes amis dans le groupe « Xom om mon lam giao » pour leurs soutiens sans conditions tout au long de mes études et de ma vie quotidienne.

Finalement, je tiens à dire un immense merci et toute ma reconnaissance à ma femme, Trang Nguyen, mes enfants, Minh, Khai et Marielle pour leur soutien tout au long de mes études et surtout vers la fin... Son amour et son énergie m'ont donné chaque jour la force nécessaire pour mener à bien cette thèse de doctorat.

## RÉSUMÉ

• **Problématique :** Les méthodes tridimensionnelles d'analyse structurale des piliers d'évacuateurs de crues en béton non armé peuvent être divisées en trois catégories de complexité croissante: (1) méthode de gravité (MG); (2) méthode d'éléments fibres et (3) méthode d'éléments finis 3D solides (MEF 3D). La MG, qui fait l'hypothèse d'une distribution linéaire des contraintes de flexion, est utilisée fréquemment dans la pratique en se basant sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli (EB) des « sections planes qui restent planes » après le chargement. Par ailleurs, les distorsions de gauchissement de la torsion et du cisaillement sont ignorées. La MEF 3D permet de capturer l'effet du gauchissement des sections profondes due au cisaillement et à la torsion. Cependant, l'utilisation de la MEF 3D en calcul non linéaire requiert (1) beaucoup d'expertise, (2) souffre souvent de problèmes de convergence, (3) demande de longs temps de calcul et (4) demande le développement d'outils de post-traitement exhaustifs afin de déterminer les indicateurs de la stabilité structurale (facteur de sécurité au glissement, position de la résultante des forces ...). La méthode **d'éléments fibres** utilisant les paramètres familiers de la théorie de poutre, conduit à des résultats plus précis que la MG et avec moins de complexité que la MEF 3D non linéaire en termes de ressources d'ingénierie, temps de calcul et ressource d'interprétation des résultats pour prendre des décisions sur l'adéquation des indicateurs de stabilité par rapport aux exigences réglementaires. La méthode des éléments fibres présente donc plusieurs avantages par rapport à la MEF 3D, tout particulièrement pour les applications industrielles. En réalité, les piliers d'évacuateur de crues sont des structures ayant des sections profondes dont les distorsions de gauchissement ne sont pas négligeables, qui sont soumises à des chargements tridimensionnels provenant notamment de l'impact des glaces flottantes, des sollicitations sismiques selon l'axe faible et la présence de souspressions dans les fissures. Cependant, les modèles d'éléments fibres existants dans la littérature et les logiciels de recherche ou commerciaux sont limités à la théorie d'EB, le plus souvent pour des sections élancées et ne considèrent pas la pénétration des sous-pressions dans les fissures.

• **Objectifs:** En réponse à ces lacunes, cette thèse présente (1) le développement, (2) l'implémentation numérique, (3) la vérification et la validation, et (4) l'application d'un modèle constitutif original **d'éléments fibres 3D « hydromécaniques »**, de type poutre incluant les déformations gauchies dues aux efforts tranchants et au moment de torsion pour les ouvrages hydrauliques en béton non armé. Cet élément permet de calculer directement les indicateurs de

performance de ces ouvrages avec sections profondes, fissuration et sous-pression sous l'action des charges 3D incluant l'effet pseudo-statique de l'impact de la glace.

- **Méthodologie :** Les solutions sectionnelles à ce problème peuvent être développées en utilisant deux approches : (1) l'utilisation des fonctions de déformation et de contraintes en théorie de l'élasticité pour l'élaboration d'un nouvel élément fibre 3D, ce qui correspond à ce travail de recherche, ou (2) la MEF 3D, qui est utilisée ici pour développer des solutions de référence pour valider les développements proposés. Les objectifs sont de calculer avec précision la distribution des contraintes normales et de cisaillement, puis la fissuration des sections. Ensuite, la stabilité structurale 3D est évaluée pour les piliers d'évacuateur de crues. L'élément fibre 3D développé ici possède une matrice de rigidité  $18 \times 18$  et le vecteur des charges nodales correspondantes incluant la déformation au gauchissement due à la torsion et aux efforts tranchants. Cet élément a deux nœuds et 9 degrés de liberté (DDL) chacun – 6 DDL classiques, deux DDL supplémentaires pour les déplacements dues au gauchissement causé par les efforts tranchants bi directionnels et 1 DDL pour le déplacement due au gauchissement en torsion. La matrice de rigidité d'un élément est basée sur une méthode mixte utilisant des formulations iso-paramétriques : (1) la méthode de flexibilité est utilisée pour établir la matrice de rigidité de l'élément fibre sous l'action de la flexion et du cisaillement; (2) la méthode des déplacements est utilisée pour établir la matrice de rigidité de l'élément fibre sous l'action de la torsion St-Venant et des distorsions de la torsion gauche (bi-moment). Les sections de géométrie quelconque sont localisées aux points de Gauss le long de l'élément et sont analysées en utilisant la MEF 2D. Les propriétés mécaniques de ces sections sont intégrées numériquement pour formuler les matrices élémentaires de l'élément. Le modèle constitutif du béton permet la fissuration en traction et la rupture en cisaillement selon le critère de Mohr-Coulomb. Ce modèle prédéfinit des plans de rupture potentielle à la position des joints de reprises de bétonnage sur la hauteur des ouvrages et est programmé à l'aide de la plateforme MATLAB dans le contexte d'un nouveau logiciel de calcul, "**FIDAM3D**".

- **Résultats clés :** Le calcul de vérification et de validation (V&V), est effectué avec une approche de complexité progressive allant (1) du niveau de la section au niveau de la structure globale, (2) des structures de poutres élancées aux poutres profondes, (3) des structures élastiques aux structures inélastiques. Au niveau des structures profondes élastiques étudiées, typiques des piliers, l'écart maximal est égal à 6% pour la valeur des contraintes normales et 5% pour les contraintes de

cisaillement selon la direction profonde de la section en comparaison avec la solution de la MEF 3D. Au niveau inélastique (fissuration), le modèle fibre proposé a aussi montré un écart de  $\pm 3\%$  pour les contraintes normales non linéaires et moins de 10% pour les contraintes de cisaillement des piliers profonds lors de la V&V par rapport aux solutions de la MEF 3D. Finalement, le modèle proposé a été appliqué à un pilier profond existant en béton non armé ayant la géométrie suivante : hauteur de 8.535m, profondeur de section de 19.2m et la largeur de section de 2.44m. Ce pilier a été analysé par 4 combinaisons de charges incluant l'effet statique équivalent de l'impact de la glace qui occasionne de très importants moments de torsion. Les valeurs d'indicateurs de performances obtenues ont présenté un écart maximal de 6% par rapport à la solution de référence ABAQUS avec des éléments de contact cohésif le long des joints de reprises de bétonnage (facteur de sécurité au glissement, aire fissuré, position de la résultante des forces). Le modèle d'éléments fibres proposé permet également (1) de sauver beaucoup de temps de calcul par rapport à la MEF 3D - ABAQUS (2h vs 24h), et (2) de minimiser les problèmes de convergence en évitant l'utilisation d'éléments de contact. L'élément fibre proposé pourrait être implanté dans les logiciels de calcul spécialisés comme CADAM3D, OpenSees, etc...pour faciliter les études de stabilité des piliers profonds en béton non armé dans un contexte industriel par rapport à l'utilisation de la MEF non linéaire 3D.

## ABSTRACT

- **Research Problem:** Three-dimensional methods for structural analysis of unreinforced concrete spillway piers can be divided into three categories of increasing complexity: (1) Gravity Method (GM); (2) 3D fiber elements; (3) 3D Finite Element Method (FEM). The GM, which assumes a linear distribution of bending stresses, is frequently used in practice based on the Euler-Bernoulli (EB) hypothesis of "plane sections which remain plane" after loading. However, the warping effects of torsion and shear are ignored. The FEM 3D captures the warping effects of deep sections due to torsion and shear forces. Yet, the FEM in nonlinear computation (1) requires a lot of expertise, (2) often suffers from convergence problems, (3) requires long computational time, and (4) requires the development of comprehensive post-processing tools to calculate structural stability indicators (sliding safety factor, position of the force resultant, etc....). The **3D fiber element** method using the familiar parameters of beam theory, leads to more precise results than the GM and with less complexity than nonlinear 3D FEM in terms of engineering resources and interpretation of the results to take decisions on the adequacy of stability indicators in relation to regulatory requirements. The fiber element method therefore has several advantages over the 3D MEF, especially for industrial applications. Realistically, spillway piers are structures with deep sections whose warping effects are not negligible, which are subjected to 3D loads originating from the impact of floating ice inducing significant torsion, seismic forces along the weak axis, and the presence of uplift pressures (UP) in cracks. However, the existing fiber element models described in the literature, or in commercial software, are limited to EB theory, most often for slender sections and do not consider the penetration of UPs in cracks.
- **Objectives:** In response to these shortcomings, this thesis presents (1) the development, (2) the numerical implementation, (3) the verification and validation, and (4) the application of an original constitutive model of **3D “hydromechanical” fiber elements** of beam type including warping deformations due to applied shear forces and torque for hydraulic concrete structures. This element makes it possible to directly calculate the performance indicators for these concrete structures with deep sections, cracking and uplift-pressure under the action of 3D loads including the effect pseudo-static impact of ice floes.
- **Methodology:** Sectional solutions to this problem can be developed using two approaches: (1) the use of displacement and stress functions from elasticity theory for the development of a new

3D fiber element, which corresponds to this research work ,or (2) the 3D MEF, which is used herein to develop reference solutions to validate the proposed developments. The objectives are to calculate with precision the distribution of the normal and shear stresses, then the cracking of the sections. Subsequently, the 3D structural stability is assessed for the concrete spillway piers. The 3D fiber element developed herein has an 18x18 stiffness matrix, and the corresponding nodal load vector, including warping deformations due to torsion and shear forces. This element has two nodes and 9 degrees of freedom (DOF) each - 6 conventional DOF, two additional DOF for displacements due to warping caused by bi-directional shear forces and 1 DOF for displacement due to warping torsion. The element stiffness matrix is based on a mixed isoparametric formulations: (1) the flexibility method is used to establish the stiffness matrix of the element under the flexural and shear actions; (2) the displacement method is used to establish the element stiffness matrix under torsion from Saint – Venant and bi-moment. The cross sections of fiber element is analyzed using the 2D FEM. The number of analyzed cross sections is selected from Gauss points to perform numerical Gauss integral. The mechanical properties of these sections are integrated numerically to formulate the matrices of the element. The constitutive model of the concrete allows the cracking in tension and failure in shear according to the Mohr-Coulomb criterion. This fiber model predefines potential failure planes at the position of the concrete lift joints over the height of the structures and is programmed using the MATLAB platform within the context of a new software "**FIDAM3D**".

- **Key results:** For verification and validation (V&V), calculations are carried out (1) from the section level to the overall structure level, (2) from slender beam structures to deep beams, (3) from elastic structures to inelastic structures (cracking). For deep elastic structures, typical of piers, the maximum difference is equal to 6% for the nonlinear normal stresses and 5% for the shear stresses in deep direction of section in comparison with the 3D FEM solution. For inelastic analyses, the proposed fiber model also showed a deviation  $\pm 3\%$  for normal stresses and less than 10% for shear stresses for deep piers in V&V compared to 3D MEF solutions. Finally, the proposed model was applied to an existing concrete pier with the following geometry: height of 8.535m, depth of section of 19.2m, and section width of 2.44m. It was analyzed for 4 load combinations including the pseudo-static effect of ice floes impact inducing significant torsion. The performance indicators obtained (sliding safety factors, maximum compressive stresses, cracked sectional areas) presented

a maximum deviation of 6% compared to the ABAQUS solution. The proposed model saves significant computation time compared to 3D MEF - ABAQUS (2h vs 24h), is robust with very good convergence properties, and is easy to use avoiding contact elements. The proposed fiber element could be advantageously implemented in specialized software like CADAM3D, OpenSees, etc, to facilitate stability studies of deep concrete piers in an industrial context compared to the use of 3D nonlinear FEM.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ .....	V
ABSTRACT .....	VIII
TABLE DES MATIÈRES .....	XI
LISTE DES TABLEAUX.....	XVI
LISTE DES FIGURES .....	XVIII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XXVII
LISTE DES SYMBOLES.....	XXIX
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Généralités .....	1
1.2 Problématique de recherche.....	7
1.3 Objectifs .....	8
1.4 Méthodologie.....	9
1.5 Contributions originales .....	10
1.6 Contenu de la thèse doctorale .....	11
CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE .....	12
2.1 Introduction.....	12
2.2 Évaluation de la stabilité structurale des piliers d'évacuateurs de crues.....	12
2.2.1 Mécanisme de défaillances .....	12
2.2.2 Distribution des contraintes sur les sections profondes.....	14
2.2.3 Pilier faiblement armé .....	20
2.2.4 Lignes directrices, codes applicables, facteurs de sécurité, performances requises ..	21

2.3	Effets des sous-pressions ; modélisation hydromécanique .....	22
2.4	Analyses non linéaires de sections de géométries quelconques .....	25
2.4.1	Propriétés de sections quelconques .....	25
2.4.2	Flexion composée, $P-M_x-M_y$ ( <i>PMM</i> ) .....	27
2.4.3	Cisaillement, $V_x-V_y-T$ .....	29
2.4.4	Torsion et gauchissement .....	31
2.5	Développement des éléments fibres.....	34
2.5.1	Éléments fibres en flexion composée, $P-M_x-M_y$ ( <i>PMM</i> ) .....	36
2.5.2	Éléments fibres en cisaillement, $V_x-V_y$ .....	37
2.5.3	Éléments fibres sous l'action de torsion, $T$ .....	39
2.5.4	Éléments fibres sous l'action 3D, $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ .....	40
2.6	Analyse non linéaire de structures en béton non armé et faiblement armé par modèles constitutifs différents .....	46
2.7	Conclusions.....	48
<b>CHAPITRE 3</b>	<b>FORMULATION D'ÉLÉMENTS FIBRES 3D POUR LES SECTIONS PROFONDES .....</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction.....	49
3.2	Modèles constitutifs pour le béton non armé.....	52
3.2.1	Fissuration en traction et contraintes admissibles.....	52
3.2.2	Rupture en compression-cisaillement (Mohr-Coulomb).....	53
3.3	Poutre de Timoshenko incluant la torsion gauche .....	54
3.3.1	Stratégie de formulations d'un élément fibre de Timoshenko.....	56
3.3.2	Analyses sectionnelles et fissuration.....	58
3.3.3	Calcul des matrices de rigidité d'un élément fibre.....	69

3.4	Poutre profonde incluant des déformations au gauchissement de cisaillement.....	77
3.4.1	Description d'élément fibre de poutres profondes.....	80
3.4.2	Analyses sectionnelles et matrice de rigidité de section .....	81
3.4.3	Calcul des matrices de rigidité d'un élément de poutres profondes.....	84
3.5	Développement d'un élément fibre adapté aux piliers d'évacuateur de crues .....	89
3.5.1	Matrice de rigidité pour un élément fibre 14DDL .....	90
3.5.2	Matrice de rigidité pour un élément fibre 3D avec extension rigide – 18DDL.....	94
3.6	Résolution du système d'équations non linéaires .....	95
3.7	Considération des sous-pressions .....	95
3.7.1	Barrage-poids calcul 3D .....	101
3.7.2	Pilier d'évacuateurs de crues .....	104
3.8	Calcul des indicateurs de performance.....	107
3.8.1	Contraintes admissibles .....	108
3.8.2	Aire fissurée .....	108
3.8.3	Position de la résultante et noyau central .....	108
3.8.4	Facteur de sécurité au glissement global .....	110
3.8.5	Facteur de sécurité au glissement local .....	111
3.9	Conclusions.....	112
CHAPITRE 4	DÉVELOPPEMENT ET IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUES DES MODÈLES CONSTITUTIFS PROPOSÉS.....	114
4.1	Introduction.....	114
4.2	Outils de calcul .....	114
4.3	Description du logiciel « FIDAM 3D ».....	115
4.4	Analyses sectionnelles : béton non armé.....	117

4.4.1	Algorithme de résolution pour l'action P-M <sub>x</sub> -M <sub>y</sub> .....	118
4.4.2	Algorithme de résolution pour l'action V <sub>x</sub> -V <sub>y</sub> .....	119
4.4.3	Algorithme de résolution pour l'action de St-Venant et gauche.....	122
4.4.4	Considération des sous-pressions.....	124
4.4.5	Critères de convergences .....	124
4.5	Algorithme de résolution : niveau des éléments.....	125
4.6	Algorithme de résolution : niveau de la structure .....	127
4.6.1	Algorithme de résolution .....	127
4.6.2	Critères de convergence.....	129
4.7	Conclusions.....	129
CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU LOGICIEL « FIDAM 3D ».....		132
5.1	Introduction.....	132
5.2	Stratégie de vérification et validation (V&V) .....	132
5.3	Analyses sectionnelles.....	137
5.4	V&V des problèmes élastiques .....	147
5.4.1	Problème No.1 : Poutre élancée en porte-à-faux .....	147
5.4.2	Problème No.2 : Pilier profond rectangulaire élastique .....	153
5.4.3	Problème No.3 : Pilier profond rectangulaire élastique avec géométrie variable....	163
5.4.4	Problème No.4 : Pilier existant élastique.....	167
5.5	V&V des problèmes de fissuration .....	172
5.5.1	Problème No.5 : Pilier rectangulaire élancé - fissuration.....	174
5.5.2	Problème No.6 : pilier rectangulaire profond et fissuration .....	179
5.5.3	Problème No.7 : pilier profond, géométrie variable et fissuration.....	186
5.6	Synthèses et Conclusions .....	191

CHAPITRE 6 ÉTUDE DE CAS - PILIER EXISTANT .....	194
6.1 Introduction.....	194
6.2 Description de l'ouvrage hydraulique étudié.....	195
6.2.1 Géométrie d'un pilier typique étudié.....	195
6.2.2 Matériau et chargement à considérer.....	197
6.3 Modèle CADAM 3D .....	204
6.4 Modèle FIDAM 3D.....	205
6.5 Modèle ABAQUS .....	207
6.6 Calcul et interprétation des indicateurs de performance .....	208
6.6.1 Combinaison 1 .....	208
6.6.2 Combinaison 2 .....	210
6.6.3 Combinaison 3 .....	212
6.6.4 Combinaison 4 .....	216
6.7 Conclusions.....	221
CHAPITRE 7 SOMMAIRE, CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	224
RÉFÉRENCE .....	230

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1: Combinaisons de charges et indicateurs de performance.....	22
Tableau 2.2 : Résumé des caractéristiques des logiciels pour déterminer les propriétés sectionnelles .....	27
Tableau 2.3 : Générations des contraintes et équations équilibrées (Sapountzakis & Dikaros, 2015). .....	32
Tableau 2.4 Résumé de modèles des éléments fibres importants pour le développement du sujet de recherche .....	45
Tableau 2.5 Caractéristiques des logiciels pour l'analyse structurale.....	47
Tableau 3.1: Les étapes pour l'analyse de la section.....	82
Tableau 3.2 : Contraintes normales admissibles en compression (CDA, 2013).....	108
Tableau 3.3 : Valeurs requises pour le facteur de sécurité au glissement (CDA, 2013) .....	111
Tableau 4.1 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour $P-M_x-M_y$ à la $i^{\text{ème}}$ itération .....	119
Tableau 4.2 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour $V_x-V_y$ à la $i^{\text{ème}}$ itération .....	122
Tableau 4.3 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour la torsion à la $i^{\text{ème}}$ itération .....	124
Tableau 4.4 : Algorithme de résolution au niveau structural.....	128
Tableau 5.1 : Problèmes de validations : (procédure de V&V) .....	135
Tableau 5.2 : Propriétés de section rectangulaire de Dikaros et Sapountzakis (2014).....	141
Tableau 5.3 : Propriétés de section rectangulaire ( $v = 0.17$ ) .....	141
Tableau 5.4 : Propriétés de section trapézoïdale ( $v = 0.3$ ).....	143
Tableau 5.5 : Propriétés sectionnelles de la section du pilier réel.....	144
Tableau 5.6 : Déplacement maximum à la tête de poutre en porte-à-faux .....	148
Tableau 5.7 : Évaluation de la rotation maximale à l'extrémité libre de la poutre .....	152
Tableau 5.8 : Évaluation des contraintes maximales et minimales.....	152

Tableau 5.9 : Évaluation du déplacement maximal.....	155
Tableau 5.10 : Évaluation de contraintes maximales et minimales .....	156
Tableau 5.11 : Évaluation de la rotation à la tête du pilier .....	157
Tableau 5.12 : Évaluation des contraintes maximales et minimales .....	157
Tableau 5.13 : Évaluation des contraintes normales selon la théorie de l'élasticité et FIDAM 3D pour la section $L_s = 0.25L$ [kPa] .....	160
Tableau 5.14 : Évaluation de contraintes normales FIDAM 3D versus ABAQUS pour la section $L_s = 0.25L$ [kPa].....	165
Tableau 5.15 : Évaluation des contraintes de FIDAM 3D pour la section $L_s = 0.25L$ [kPa].....	170
Tableau 5.16 : Évaluation des indicateurs de performance à la section $L_s = 2m$ .....	175
Tableau 5.17 : Évaluation des critères de performances de la section au joint ( $L_s = 2.0m$ ).....	178
Tableau 5.18 : Évaluation des critères de performances de la section de joint ( $L_s = 2.0m$ ).....	179
Tableau 5.19 : Évaluation de des critères de performances de la section de joint ( $L_s = 0.25L$ )..	180
Tableau 5.20 : Résumés de résultats de sous-pressions pour un pilier d'évacuateur de crue.....	185
Tableau 5.21 : Évaluation des critères de performances de la section au joint ( $L_s = 2.254m$ )....	187
Tableau 6.1 : Propriétés mécaniques du béton et des joints de reprises de bétonnage.....	198
Tableau 6.2 : Combinaison de charges considérées .....	198
Tableau 6.3 : Coefficient de forme du nez (CÉSEC 1990 – tiré de CADAM 3D) .....	202
Tableau 6.4 : Coefficient d'inclinaison (CÉSEC 1990 – tiré de CADAM 3D).....	202
Tableau 6.5 Calcul de forces d'impact de la glace.....	203
Tableau 6.6 Vérification des réactions à la base du pilier .....	209
Tableau 6.7 : Vérification des réactions à la base du pilier – Combinaison 2.....	211
Tableau 6.8 : Indicateurs de performance pour la combinaison 3 avec $f_t = 0$ kPa .....	213
Tableau 6.9 : Indicateurs de performance pour la combinaison 4 avec $f_t = 0$ et 482 kPa .....	217

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Ouvrages hydrauliques et piliers typiques d'évacuateur de crues.....	2
Figure 1.2 Piliers d'évacuateur de crues avec effets de glace en hiver (a, b, c); Pilier de pont avec impact de bateau (d), de camion (e) et (f) de débris flottants lors d'une crue.....	3
Figure 1.3 Piliers existants: (a) pilier avec joints de reprises de bétonnage ; (b) pilier endommagé .....	4
Figure 1.4 Modèle d'un pilier sous l'action 3D et la présence des pressions hydrostatiques et sous-pressions : a) pilier d'évacuateur de crue ; (b) modèle 3D équivalent ; (c) modèle d'éléments finis solides 3D (Stefan et Léger (2012)); (d) modèle d'éléments fibres 3D.....	6
Figure 1.5 Les principaux types de piliers.....	7
Figure 2.1 La définition de poutre profonde : (a) Poutre profonde selon ACI-318 (2002) ; (b) Le mur trapu selon (Paulay & Priestley, 1992) .....	13
Figure 2.2 Mécanismes de défaillance d'un pilier : (a) Modèle structural ; (b) et (c) Rupture en flexion ; (d) Rupture en cisaillement ; (e) Rupture en torsion ; (f) Rupture en glissement ...	14
Figure 2.3 Problèmes typiques des poutres port-à-faux. ....	15
Figure 2.4 Variations des contraintes de Dahake et al. (2018) : (a) normales à l'encastrement ( $x = 0$ ); (b) de cisaillement à la proche de l'encastrement ( $x = 0.01L$ ).....	16
Figure 2.5 Distribution de contraintes normales selon le ratio D/L par Patel et al. (2014).....	17
Figure 2.6 Distribution de contraintes normales selon le ratio L/D à la section au milieu de la poutre (Kusanale et al., 2014) .....	18
Figure 2.7 Analyse d'un barrage en béton : (a) Définition du problème ; (b) $V_x = 1000 \text{ kN}$ ; (c) $V_y = 1000 \text{ kN}$ ; (d) $P = -1000 \text{ kN}$ , $e_x = 1\text{m}$ , $e_y = 1\text{m}$ (Stefan & Léger, 2011).....	19
Figure 2.8 Mécanismes de défaillance d'armature dans le béton .....	20
Figure 2.9 Mécanismes de défaillances de murs trapus en béton armé (Gulec & Whittaker, 2009): (a) Rupture en tension diagonale; (b) Rupture en compression diagonale; (c) Rupture au glissement .....	21

Figure 2.10 Distribution des sous-pressions pour le barrage-poids (adaptée de CDA (2013)) .....	24
Figure 2.11 Étapes de calcul pour déterminer les propriétés sectionnelles (Mixon, 2008).....	26
Figure 2.12 Les modes des déformations sur la section : (a) les modes primaires du moment de flexion et de torsion ; (b) les modes secondaires de cisaillement causant les distorsions ; (c) l'ordre secondaire de distorsion pour le bi-moment (Sapountzakis & Dikaros, 2015) .....	33
Figure 2.13 Principe d'un élément fibre quelconque (adaptée de Le Corvec (2012) ) .....	34
Figure 2.14 Élément poutre ayant 14 DDL de Sapountzakis (2013) .....	42
Figure 2.15 Notions de degrés de liberté supplémentaires internes $n_\omega$ (Le Corvec, 2012).....	43
Figure 2.16 Notions de degrés de liberté supplémentaires internes $n_\omega$ (Capdevielle et al., 2016) : (a) Maillage de la section pour calculer la fonction de gauchissement; (b) Fonction de gauchissement de la section .....	43
Figure 2.17 Élément de poutre ayant 20 DDL de Sapountzakis et Dikaros (2015).....	44
Figure 3.1 Modèle d'éléments fibres 3D (a) : Pilier typique ; (b) : Élément fibre; (c) : Élément fibre de Timoshenko incluant l'effet de torsion (7DDL par nœud) ; (d) : Élément fibre incluant l'effet de cisaillement secondaire et l'effet de torsion (9DDL par nœud). .....	49
Figure 3.2 Méthodologie de formulation de modèles d'éléments fibres 3D .....	50
Figure 3.3 Relation de contraintes - déformation pour le béton : (a) béton en compression ; (b) béton en tension.....	52
Figure 3.4 Modèle de sous-pressions avec différence des niveaux d'eau amont et aval (Stefan & Léger, 2008) .....	53
Figure 3.5 Rupture en compression-cisaillement pour les joints de reprises de bétonnage selon critère de Mohr-Coulomb.....	54
Figure 3.6: Élément fibre 3D hydromécanique et non linéaire.....	55
Figure 3.7 : Déplacements nodaux et forces nodales d'un élément .....	55
Figure 3.8 : Effets de la torsion : (a) Torsion de St-Venant ; (b) Torsion gauche .....	56

Figure 3.9: Proposition de développement des éléments fibres 3D de poutre de Timoshenko (14 DDL) .....	57
Figure 3.10 : Géométrie d'un élément fibre 3D et notions des paramètres : (a) Vue en 3D; (b) Conditions aux frontières ; (c) Section quelconque analysée.....	60
Figure 3.11 Section discrétisée par les fibres triangulaires.....	61
Figure 3.12: Notations de forces ( $\bar{S}_i$ ) et déplacements ( $\bar{r}_i$ ) .....	71
Figure 3.13 Les forces nodales d'un élément avec les modes de corps rigide .....	71
Figure 3.14 Élément fibre avec les modes de corps rigide en torsion au centre de cisaillement... .....	74
Figure 3.15 Modes de déformations de sections rectangulaires : (a) l'effet primaire en flexion ; (b) l'effet secondaire en flexion due aux cisaillements secondaires (adapté de Sapountzakis (2015)).....	78
Figure 3.16 Distribution de contraintes normales selon l'effet primaire et secondaire selon Sapountzakis et Dikaros (2015).....	79
Figure 3.17 Effet de cisaillement sur une section profonde : (a) Théorie de poutre de Timoshenko; (a) Premier ordre de cisaillement; (c) Deuxième ordre de cisaillement ; (d) Modèle proposé (Fibre 3D- 18DDL).....	79
Figure 3.18 Un élément fibre 3D incluant les modes de corps rigide pour la poutre profonde.....	80
Figure 3.19 Un élément fibre 3D sur les appuis simples pour la poutre profonde.....	84
Figure 3.20 Les forces nodales d'un élément de la mode de corps rigide.....	85
Figure 3.21 Modèle d'éléments fibres 3D proposé pour des pilier d'évacuateur de crues : (a) 7DDL et (b) 9 DDL par nœud.....	89
Figure 3.22 Élément fibre 3D adapté aux pilier d'évacuateur de crues : (a) Élément fibre 3D -14 DDL ; (b) Élément fibre 3D -18 DDL .....	90
Figure 3.23 Calcul des sous-pressions par deux méthodes (a) section non drainée; (b) section drainée .....	97
Figure 3.24 Exemple de calcul sur un barrage (a) section non drainée; (b) section drainée .....	99

Figure 3.25 Méthode de calcul de sous-pressions dans la fissure : (a) Effet des sous-pressions; (b) Distribution des contraintes normales causées par des charges; (c) Distribution des contraintes normales finales.....	100
Figure 3.26 Effets des sous-pressions pour un segment de barrage-poids : (a) vue 3D d'un segment du barrage-poids sous l'action de charges et des sous-pressions ; (b) Segment de barrage-poids; (c) Section fissurée sous l'action des charges et de sous-pressions; (d) Distribution initiale des sous-pressions ; (e) Prolongation des sous-pressions dans la section fissurée ;	103
Figure 3.27 Algorithme de calcul de sous-pressions prolongées dans les fissures pour un barrage-poids.....	104
Figure 3.28 Effets de sous-pression dans les fissures : (a) Pilier d'évacuateurs de crues; (b) Sous-pressions pour la fondation; (b) Distribution de sous-pression initiale de la section B-B; (d-f) Prolongation de sous-pressions dans la section fissurée en fonction de l'axe neutre ;.....	106
Figure 3.29 Algorithme de calcul de sous-pressions prolongées dans les fissures pour la section du pilier d'évacuateur de crue .....	107
Figure 3.30 Détermination de noyau central : (a) Section arbitraire (b) Algorithme de calcul du noyau central. ....	110
Figure 4.1 Programme principal du logiciel FIDAM3D .....	116
Figure 4.2 Algorithme général pour analyse sectionnelle à la $i^{\text{ème}}$ itération.....	117
Figure 4.3 Principe de modification de la distribution de contrainte de cisaillement pour respecter l'équilibre entre les efforts internes et externes.....	121
Figure 4.4 Algorithme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément fibre dans <i>FIDAM 3D</i> .....	126
Figure 4.5 Algorithme itératif de résolution de <i>FIDAM 3D</i> au niveau structural.....	127
Figure 4.6 Modules principaux de <i>FIDAM 3D</i> .....	131
Figure 5.1 Schéma général de la stratégie de V&V (Schlesinger, 1979) .....	133
Figure 5.2 Stratégie de V&V de FIDAM3D.....	134
Figure 5.3 Géométrie des problèmes de V&V.....	136

Figure 5.4 Sections analysées : (a) Section rectangulaire; (b) Section trapézoïdale; (c) Section du pilier réel .....	138
Figure 5.5 Section rectangulaire de Dikaros et Sapountzakis (2014) .....	139
Figure 5.6 Section rectangulaire avec $\nu = 0.17$ .....	140
Figure 5.7 Section trapézoïdale avec $\nu = 0.3$ .....	142
Figure 5.8 Section du pilier réel, cas $V_x = 1N$ .....	145
Figure 5.9 Section du pilier réel, cas $V_y = 1N$ .....	146
Figure 5.10 Poutre élancée en porte-à-faux sous deux cas de charges : (1) $V_x = 1$ (Charge unitaire) et $T=1$ (charge unitaire).....	147
Figure 5.11 Déplacement selon l'axe z.....	148
Figure 5.12 Distributions de contraintes à la section $x = 2.5$ (m) : (a) contraintes de cisaillement ; (b) contraintes normales.....	149
Figure 5.13 Distributions de contraintes normales et de cisaillement à la section 0.2m de l'encastrement.....	150
Figure 5.14 Rotation selon la longueur de la poutre .....	152
Figure 5.15 FIDAM 3D 18 et 14 DOFs vs ABAQUS, Distributions des contraintes à la section $x = 2.5m$ : (a) contraintes normales; (b) et (c) contraintes de cisaillement.....	153
Figure 5.16 Pilier rectangulaire élastique : (a) géométrie ; (b) modèle ABAQUS avec 34 560 éléments solides 3D; (c) Modèle d'éléments fibres proposé, 4 éléments avec 45 DDL ....	154
Figure 5.17 Déplacement, $U_x$ , selon la hauteur du pilier.....	155
Figure 5.18 Distributions des contraintes à la section au niveau de $L_s = 2.1334(m)$ : (a) distribution de contraintes normales; (b) distribution de contraintes de cisaillement.....	156
Figure 5.19 Rotation selon la hauteur du pilier.....	157
Figure 5.20 Distributions des contraintes normales et des contraintes de cisaillement à la section .....	158
Figure 5.21 Pilier sous l'effet hydrostatique.....	159

Figure 5.22 Distributions de contraintes normales selon les paramètres géométriques (H, B, L) pour la section $L_s = 0.25L$ : (a) $H = 2B$ ; (b) $H = 10B$ .....	161
Figure 5.23 Distributions de contraintes normales à la section $L_s = 0.1L$ .....	162
Figure 5.24 Géométrie variable, matériaux et charges appliquées pour un pilier élastique profond.	
.....	163
Figure 5.25 Distributions des contraintes; (1) Figs a <sub>1</sub> à a <sub>3</sub> pour le cas de charge P, V <sub>x</sub> ; (2) Figs b <sub>1</sub> à b <sub>3</sub> pour le cas de charge V <sub>y</sub> .....	166
Figure 5.26 Pilier existant sous l'action de V <sub>x</sub> = 1000 kN et V <sub>y</sub> = 1000 kN.....	167
Figure 5.27 Distribution de contraintes normales et de cisaillement pour un pilier existant : Figs a1-a3 pour le cas V <sub>x</sub> = 1000kN avec v = 0 ; Figs b1-b3 pour le cas V <sub>y</sub> = 1000kN avec v = 0 ..	168
Figure 5.28 Distribution de contraintes normales et de cisaillement pour un pilier existant : Figs a1-a3 pour le cas V <sub>x</sub> = 1000kN avec v = 0.2 ; Figes b1-b3 pour le cas V <sub>y</sub> = 1000kN avec v = 0.2 .....	169
Figure 5.29 Comportement typique linéaire élastique de traction-séparation, (a) avec adoucissement en tension, (b) élasto-fragile. ....	173
Figure 5.30 Pilier rectangulaire élancée fissuré : (a) Géométries ; (b) Modèle en ABAQUS ; (c) Cas de charges et propriétés du béton.....	175
Figure 5.31 Pilier rectangulaire élancé pour le cas 1: (a) Modèle ABAQUS avec éléments de joints ( $S_{22} = \sigma_z$ (kPa)); (b) Distribution des contraintes normales par ABAQUS ; (c) Section du joint par FIDAM 3D. ....	176
Figure 5.32 Distribution de contraintes pour le cas 1: (a) Contraintes normales ; (b) Contraintes en cisaillement.....	177
Figure 5.33 Pilier rectangulaire élancé sous l'action de P-V <sub>x</sub> , hydrostatique et sous-pressions : (a) Distribution des sous-pressions pour la section fissurée; (b) Distribution des contraintes normales .....	178
Figure 5.34 Pilier rectangulaire profond sous l'action de P-V <sub>x</sub> : (a) Géométries et matériaux; (b) Modèle en ABAQUS ; (c) Discrétisation pour FIDAM 3D.....	180

Figure 5.35 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales (Pa) ; (c) Distribution des contraintes de cisaillement (Pa).....	181
Figure 5.36 Distribution de contraintes: (a) Contrainte normale; (b) Contrainte de cisaillement. ....	182
Figure 5.37 Distribution des sous-pressions pour un pilier : (a) Distribution 3D; (b) Sous-pressions à la ligne $y = 0$ .....	183
Figure 5.38 Diagramme des moments en flexion : (a) Moment primaire en flexion ; (b) Moment secondaire en flexion .....	185
Figure 5.39 Pilier rectangulaire élancé sous l'action de $P-V_x$ : (a) Géométries et matériaux; (b) Modèle en ABAQUS avec les éléments contacts cohésifs .....	186
Figure 5.40 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS ayant un joint de reprise du bétonnage ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec $v = 0$ : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales ( $S_{22} = \sigma_z(\text{Pa})$ ) ; (c) Distribution des contraintes en cisaillement ( $S_{12} = \tau_{xz} (\text{Pa})$ ).....	188
Figure 5.41 Distribution des contraintes : (a) Contraintes normales; (b) Contraintes de cisaillement pour la section du joint ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec $v = 0$ .....	189
Figure 5.42 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS ayant un joint de reprise du bétonnage ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec $v = 0.2$ : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales ( $S_{22} = \sigma_z(\text{Pa})$ ) ; (c) Distribution des contraintes en cisaillement ( $S_{12} = \tau_{xz} (\text{Pa})$ ).....	190
Figure 5.43 Distribution de contraintes : (a) Contrainte normale; (b) Contrainte de cisaillement pour la section du joint ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec $v = 0.2$ .....	191
Figure 6.1 Plan général de l'aménagement de Coteau 1,2 et 3 (Miron, 1997) .....	194
Figure 6.2 Plan général de l'aménagement de Coteau 1 : (a) plan des piliers; (b) plan partiel ; (c) Évaluation d'un pilier (Miron, 1997).....	195
Figure 6.3 Pilier typique étudié No.12: (a) vue en plan; (b) vue en élévation (adapté de Miron 1997; Ducharme 2001) .....	196
Figure 6.4 Coupes transversales et élévations pour les caractéristiques géométriques du pilier No.12 (adaptées de Miron 1997; Ducharme 2001) .....	197

Figure 6.5 Niveaux de l'eau considérés pour les poussées hydrostatiques et sous-pressions .....	199
Figure 6.6 Modèle proposé pour calculer la charge de poussée des vannes.....	200
Figure 6.7 : Modèle proposée pour l'impact de glace .....	201
Figure 6.8 Force d'impact longitudinal de la glace (adapté CÉSEC 1990, tirée de Leclerc et Léger 2007) .....	203
Figure 6.9 Force d'impact transversal de la glace (adapté CÉSEC 1990, tirée de Leclerc et Léger 2007) .....	204
Figure 6.10 Modèle CADAM 3D d'un pilier typique .....	205
Figure 6.11 Modèle d'un pilier typique par les éléments fibres 3D dans FIDAM 3D (14 ou 18 DDL) : (a) et (b) géométrie du pilier étudié; (c) modèle d'éléments fibres 3D équivalent. ....	206
Figure 6.12 Modèle d'un pilier typique par ABAQUS : (a) Des joints de reprises de bétonnage et charges appliquées ; (b) Discrétisation du modèle 3D.....	207
Figure 6.13 Modèle de chargement pour l'effet de l'impact de la glace : (a) Charges appliquées proposées dans FIDAM 3D ; (b1 et b2) Charges appliquées proposées dans ABAQUS....	208
Figure 6.14 Combinaison de charge 1 avec toutes les vannes fermées.....	209
Figure 6.15 Distribution des contraintes pour un joint à 0.3L de la base : (a1-a3) le cas exclut les sous-pressions; (b1-b3) : le cas inclut les sous-pressions .....	210
Figure 6.16 Pilier typique dans le cas d'une vanne fermée – une vanne ouverte .....	211
Figure 6.17 Distribution de contraintes – combinaison 2 pour un joint à $L_s = 0.3L$ de la base : excluant les sous-pressions;.....	212
Figure 6.18 Distribution de contraintes pour la combinaison 3 pour un joint situé à $L_s=0.1L$ : (a) distribution des contraintes normales; (b) distribution des contraintes de cisaillement, $\tau_{xz}$ ; (c) distribution de contraintes de cisaillement, $\tau_{yz}$ . ....	214
Figure 6.19 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs – Combinaison 3 joint à $L_s=0.1L$ . .....	215

Figure 6.20 Influence de l'impact de glace sur les indicateurs de performance – Combinaison 3 avec impact de glace, variable joint à $L_s=0.1L$ .....	216
Figure 6.21 Distribution de contraintes pour la combinaison 4 avec $f_t=0$ pour le joint à $L_s=0.1L$ : (a) distribution des contraintes normales; distribution des contraintes de cisaillement (b) $\tau_{xz}$ , (c) $\tau_{yz}$ .....	218
Figure 6.22 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs – Combinaison 4 ( $f_t \approx 0$ ) joint à $L_s=0.1L$ . .....	219
Figure 6.23 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs, FIDAM3D 14DOFs – et ABAQUS, Combinaison 4 ( $f_t = 482$ kPa) joint à $L_s=0.1L$ . .....	220
Figure 6.24 Distribution de contraintes par FIDAM 3D 14DOFs, 18 DOFs et ABAQUS, Combinaison 4, $f_t = 482$ kPa : deux lignes de résultats $y_1 = 0.82m$ et $y_2 = 0.407m$ .....	221

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Sigles

ACB / CDA	= Association Canadienne des Barrages / Canadian Dam Association
ACI	= American Concrete Institute
CEHQ	= Centre d'Expertise Hydrique du Québec
FERC	= Federal Energy Regulatory Commission
HQ	= Hydro-Québec
USACE	= United States Army Corps of Engineers
USBR	= United States Bureau of Reclamation

### Abréviations

3D, 2D, 1D	= dimensionnalité spatiale : 3, 2 ou 1 dimensions
AN (NA)	= Axe Neutre (Neutral Axis)
BAV	= Boundary Analytical Value
BEM	= Boundary Element Method
CC (SC)	= Centre de Cisaillement (Shear Center)
CG	= Centre de Gravité
CF	= Conditions Frontières
DDL (DOF)	= Dégrée De Liberté (Degree of Freedom)
ED	= Équation Différentielle
EF (FE)	= Éléments Finis (Finite Element).
FSG (SSF)	= Facteur de Sécurité au Glissement (Sliding Safety Factor)
MEF (FEM)	= Méthode des Éléments Finis (Finite Element Method)
MG (GM)	= Méthode de Gravité (Gravity Method)
OH (HS)	= Ouvrages Hydrauliques (Hydraulic Structures)
P	= Primaire
PMMVVT	= $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ chaque lettre étant associé avec une force/moment dans la direction correspondante
S	= Secondaire
SP (UP)	= Sous-Pressions (Uplift Pressure)
SV	= St-Venant (torsion)

TE	= Théorie de l'Élasticité (Theory of Elasticity)
W	= Warping (torsion)/ Gauchissement
XFEM	= Extended Finite Element Method

## LISTE DES SYMBOLES

$A$	= aire de la section
$A_c$	= aire comprimée de la section
$A_{crk}$	= aire fissurée (en général pour le diagramme multicritère)
$A_g$	= aire brute de la section
$A_{nf}$	= aire non fissurée de la section
$A^P_{x, y \text{ ou } xy}$	= aire effective de cisaillement primaire selon l'axe x, y ou le produit de x, y
$A^S_{x,y \text{ ou } xy}$	= aire effective de cisaillement secondaire selon l'axe x, y ou le produit de x, y
$b (b_s), h (h_s)$	= dimensions d'une section (rectangulaire), la plus petite et la plus grande
$C, G$	= centroïde de la section initiale
$S$	= centre de cisaillement de la section initiale
$\Gamma, C_w$	= constante de gauchissement
$c$	= cohésion du matériau
$E, G, v$	= module de Young et de cisaillement, coefficient de Poisson
$e_x, e_y$	= excentricités de la charge $P$ par rapport à un système de référence $Oxy$ selon l'axe $x$ ou $y$
$f'_c$	= résistance en compression du béton
$f'_t$	= résistance en traction du béton
$I_x, I_y$	= moment d'inertie de la section par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$
$I_{xy}$	= produit d'inertie par rapport au plan $Oxy$
$I_{\psi\psi x}, I_{\psi\psi y}$	= moment d'inertie secondaire par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$
$I_{\psi\alpha\psi y}$	= produit d'inertie secondaire par rapport au plan $Oxy$
$J$	= constante de torsion de St-Venant
$L$	= longueur / hauteur de l'élément
$L_n$	= longueur de la normale extérieure du contour de la section analysée $\Gamma$
$L_{ns}$	= longueur de la normale extérieure 3D de la surface $\Omega$
$L_s$	= position de la section de référence
$l, m, n$	= composantes $x, y$ , and $z$ de la normale extérieure $\vec{n}$ du contour de la section analysée $\Gamma$

$l_s, m_s, n_s$	= composantes $x, y$ , and $z$ de la normale extérieure $\vec{n}_s$ 3D de la surface $\Omega$
$M$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$ (notation générique)
$M_x$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Ox$
$M_y$	= moment de flexion par rapport à l'axe $Oy$
$O$	= origine d'un système cartésien d'axes $Oxyz$
$Ox, Oy, Oz$	= axe du système cartésien $Oxyz$
$P$	= charge axiale appliquée sur la section (notation générique)
$RM_x, RM_y$	= moments résultants totaux dans la direction $x$ et $y$
$R_{UP}$	= résultante axiale des sous-pressions
$R_{UPex}, R_{UPey}$	= excentricités de la résultante des sous-pressions par rapport au système de référence centroidal selon l'axe $x$ ou $y$
$T$	= moment de torsion
$T_{SV}$	= torsion St-Venant (l'indice $sv$ est utilisé pour "St-Venant")
$T_{tot}$	= torsion totale
$B, T_W$	= distorsion ou bi-moment (l'indice $w$ est utilisé pour la torsion "gauche")
$u, v, w$	= déplacements dans la direction $x, y$ , et $z$
$V$	= effort tranchant par rapport à l'axe $Ox$ ou $Oy$ (notation générique)
$V_x$	= effort tranchant par rapport à l'axe $Ox$
$V_y$	= effort tranchant par rapport à l'axe $Oy$
$x, y, z$	= coordonnée générique " $x$ ", " $y$ ", " $z$ "
$x_{Dv}, y_{Dv}$	= coordonnées du centre de cisaillement de la section variable
$x_g, y_g$	= coordonnées du centroïde d'une section
$x_{gP}, y_{gP}$	= coordonnées du centroïde de la section où la charge axiale est appliquée
$y_{AN}$	= coordonnée $y$ de l'axe neutre quand elle est parallèle à l'axe $Oy$
$\Gamma$	= courbe fermée définissant la section analysée; les indices additionnels $u$ et $d$ sont pour amont/aval ou gauche/droite
$\Omega$	= surface 3D extérieure définissant l'élément analysé avec les indices additionnels $u$ et $d$ sont pour amont/aval ou gauche/droite
$\alpha$	= angle du moment résultant
$\alpha_u, \alpha_d$	= angle entre la normale extérieure des plans en amont/aval et l'horizontale

- $\beta$  = coefficient pour le calcul de la constante de torsion des sections rectangulaires
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  = déformations axiales dans la direction  $x, y$  et  $z$
- $\phi$  = coefficient de friction (angle de friction)
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  = déformation de cisaillement selon les plans  $xy, xz$ , et  $yz$
- $\theta$  = angle de rotation pour la torsion
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  = contraintes normales dans la direction  $x, y$  et  $z$ ; les indices additionnels <sup>P</sup> et <sup>W</sup> sont pour "flexion" et "gauchissement"
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  = contraintes de cisaillement dans les plans  $xy, xz$ , et  $yz$ ; les indices additionnels  $s, sv, w, t$  sont "cisaillement", "St-Venant", "gauchissement" et "total"
- $\psi, \psi_G =$  fonctions de gauchissement 2D pour cisaillement pur ( $\psi_G = \psi \cdot G$ )
- $\psi^P_x, \psi^S_x$  = fonctions de gauchissement 2D pour cisaillement primaire et secondaire selon l'axe  $x$ ;
- $\psi^P_y, \psi^S_y$  = fonctions de gauchissement 2D pour cisaillement primaire et secondaire selon l'axe  $y$ ;
- $\psi, \psi^s$  = fonctions de gauchissement 2D pour cisaillement primaire et secondaire selon due à la torsion;

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

#### • Type de structures à l'étude

Les ouvrages hydrauliques en béton jouent un rôle important dans l'économie et la vie quotidienne en fournissant une source d'énergie propre, l'hydroélectricité. Ces ouvrages contrôlent également les inondations pour assurer la sécurité des populations. La méthode d'évaluation de la stabilité structurale des ouvrages hydrauliques s'est développée dans le temps, allant de théories simples basées sur la résistance des matériaux, à celles compliquées faisant appel aux éléments finis non linéaires 3D. Au Canada, les lignes directrices qui sont utilisées pour l'évaluation de la stabilité structurale des ouvrages hydrauliques, sont élaborées par l'association Canadienne des barrages (ACB) depuis 1995.

Les ouvrages hydrauliques sont construits depuis le début du siècle dernier en utilisant du béton non armé ou faiblement armé. Le vieillissement occasionne des dégradations de la résistance mécanique et les révisions périodiques des charges de crues et sismiques (le plus souvent à la hausse) exigent une vérification de stabilité des ouvrages existants approximativement tous les 10 ans selon la législation québécoise sur la sécurité des barrages.

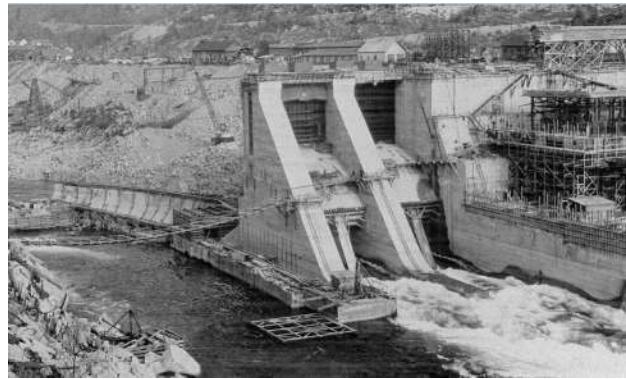
Un évacuateur de crues est une structure attenante à un barrage. Il est constitué de différentes composantes selon le mode de déversement; en crête ou avec des vannes amovibles. Un évacuateur à vannes est constitué des piliers en béton, de vannes en acier et d'un système de levage permettant la manutention des vannes pour leur ouverture. L'évacuateur est utilisé principalement afin de contrôler le niveau d'eau lors de crues. Par ailleurs, un évacuateur peut servir de support pour un pont routier et ainsi permettre la circulation de piétons et véhicules d'une rive à l'autre (Figure 1.1).

Les piliers d'évacuateur de crues à vannes sont soumis à des charges tridimensionnelles (3D). Les charges prescrites par CDA (2013) sont de types mécaniques, thermiques et chimiques (réaction alcalis-granulats). Les chargements mécaniques, comprennent le poids-propre de l'ouvrage, la poussée des sédiments, la pression hydrostatique, les sous-pressions, la pression des glaces, l'impact de glace et les séismes qui doivent être considérés lors des analyses. Les ouvrages hydrauliques au Québec sont situés dans une région ayant des températures très basses en hiver.

Les conditions d'une vanne ouverte adjacentes à une vanne fermée, et le chargement d'impact de glaces flottantes au printemps doivent être considérés car ils peuvent causer de la torsion et un moment en flexion selon l'axe faible du pilier. Le même type de problème se présente pour les piliers de ponts, l'impact de bateaux, d'objets flottants ou des camions pour les ponts et viaducs, induisent des forces latérales d'une grande magnitude (Figure 1.2d, e, f).



(a) Ouvrages hydrauliques et piliers d'évacuateur de crues



(b) Piliers en cours de construction



(c) Piliers d'évacuateur de crues



(d) Piliers d'évacuateur de crues

Figure 1.1 Ouvrages hydrauliques et piliers typiques d'évacuateur de crues

En plus du chargement 3D, les piliers d'évacuateur de crues existants sont des structures en béton non armé ou faiblement armé ayant des caractéristiques particulières telles que (i) des sections profondes, (ii) une résistance en traction du béton limitée ou nulle le long des reprises de bétonnage et du contact béton-rocher qui constituent alors des plans de rupture potentiels. Les joints de reprise de bétonnage sont présentés sur un vieux pilier d'évacuateur de crue avec une dégradation importante du béton le long de ces joints à la Figure 1.3a. Un type d'endommagement fréquent (Figure 1.3b) est la zone d'érosion provoquée par l'écoulement de l'eau.



(a) Piliers d'évacuateur de crues en hiver



(b) Impact de glace sur un pilier



(c) Piliers d'évacuateur de crues avec effets d'impact de glace



(d) Pilier de pont ayant subi un impact de bateau



(e) Pilier de pont avec impact de camion



(f) Pilier de pont avec impact de débris flottants

Figure 1.2 Piliers d'évacuateur de crues avec effets de glace en hiver (a, b, c); Pilier de pont avec impact de bateau (d), de camion (e) et (f) de débris flottants lors d'une crue

#### • Contexte du projet de recherche

Les dimensions profondes,  $h$  est la hauteur des sections de piliers et  $L$ , est la hauteur du pilier, causent des difficultés de modélisation et de calcul précis des contraintes. Une section élancée est

bien adaptée pour la théorie de poutre d'Euler – Bernoulli (Figure 1.5a). La section qui est moyennement trapue ( $L/h \leq 4.0$ ) comme les piliers de ponts (ACI-318, 2002), est calculée par la théorie de poutre de Timoshenko (Figure 1.5b) pour capturer le champ de déplacements avec la distribution linéaire de contraintes normales. Pour le cas de sections trapues, comme les piliers d'évacuateur de crues (Figure 1.5c) ( $L/h \leq 2$ ) (Paulay & Priestley, 1992), on doit considérer les effets de gauchissement qui sont causés par les efforts tranchants ( $V_x - V_y$ ) et la torsion (de St-Venant et de gauchissement). C'est pourquoi, les théories de poutres (de Euler – Bernoulli et Timoshenko) ne sont plus précises. Ces problèmes sont traités analytiquement par la théorie de l'élasticité mais seulement pour les matériaux élastiques et quelques cas particuliers. Il existe un besoin de développer un nouveau modèle pour bien adapter au calcul des sections profondes et le matériau fissuré dans le contexte particulier des ouvrages hydrauliques où les sous-pressions affectent la stabilité des ouvrages.



Figure 1.3 Piliers existants: (a) pilier avec joints de reprises de bétonnage ; (b) pilier endommagé

La méthode des éléments finis non linéaire 3D est une bonne approche afin de traiter le problème de la distribution de contraintes et la fissuration dans l'analyse des structures. Pourtant, cette méthode est difficile d'application pratique pour les structures hydrauliques (nouvelles ou existantes) à cause (i) de la demande en ressources de calcul (ii) des problèmes de convergence lors de l'utilisation de nombreux éléments de contact le long des joints de reprises de bétonnage, (iii) des besoins en post-traitement pour les nombreuses combinaisons de charges pour l'évaluation des indicateurs de stabilité (aires fissurées, facteur de sécurité au glissement), (iv) l'introduction des sous-pression et (v) la présence des fissures existantes.

Dans le contexte d'une approche progressive, Leclerc et Léger (2007) ont présenté une méthode de gravité (MG) via le logiciel CADAM 3D (en fait 2D extrudé) pour analyser la stabilité de piliers d'évacuateurs sous l'action des chargements qui s'appliquent présentement selon une seule

direction: amont/aval en présence de sous-pressions. Dans le cas réel, un pilier est souvent soumis à l'effet de charges 3D ( $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ ) et la présence de l'influence de l'eau (Figure 1.4). Les problèmes de charges 3D doivent également être considérés pour les barrage-poids ayant des fondations inclinées suivant la direction rive gauche - rive droite.

Stefan et Léger (2012) ont développé un modèle d'évaluation de la stabilité des piliers d'évacuateurs sous l'action des charges 3D par la méthode de gravité en permettant l'analyse de sections de géométries arbitraires et fissurées incluant le cisaillement biaxial et la torsion uniforme et non uniforme. Cependant, cette approche présente les limitations suivantes :

- ✓ Le calcul est effectué seulement au niveau sectionnel à l'aide de diagrammes de corps libres; on respecte l'équilibre global mais pas la compatibilité des déplacements le long du pilier;
- ✓ La distribution des contraintes normales sur la section est linéaire selon l'hypothèse que les sections planes restent planes. Cette hypothèse néglige le comportement de la section trapue de la poutre profonde qui induit des contraintes normales non linéaires, un phénomène important pour les piliers d'évacuateur de crues;
- ✓ La fissuration n'est pas considérée sous l'action de la torsion induisant du gauchissement et des contraintes normales. Ils ont supposé que l'aire fissurée soit déterminée par les contraintes normales provenant de l'action de la flexion composée en excluant la contrainte normale due à la torsion gauche;
- ✓ L'effet de  $V_x-V_y-T$  n'est considéré que par rapport à la section d'aire comprimée (après la fissuration sous l'action de PMM). Il n'y a pas d'interaction des efforts internes (PMM versus VVT) pour déterminer l'incidence des contraintes normales causées par le gauchissement sur le calcul d'aires comprimées;
- ✓ Ce modèle n'analyse que les sections transversales qui satisfont le principe de Saint-Venant sans considérer les sections proches de la fondation (proche des conditions aux frontières).

À titre d'exemple, afin d'améliorer l'application de la théorie des **poutres élancées** sans pour autant utiliser la MEF 3D, Capdevielle (2016) a présenté un modèle couplé d'éléments multifibres 3D pour les structures en béton armé incluant les effets du gauchissement, limité à la torsion. Cependant dans cette recherche, les déformations gauchies sont considérées dues à la torsion sans mentionner ces déformations dues aux efforts tranchants qui sont important pour les sections profondes. De plus, l'auteure a implémenté un grand nombre de degrés de liberté de gauchissement

( $n_w$ ) qui correspondent aux points de maillages de la discréétisation de la section ce qui alourdirait le calcul pour les sections profondes.

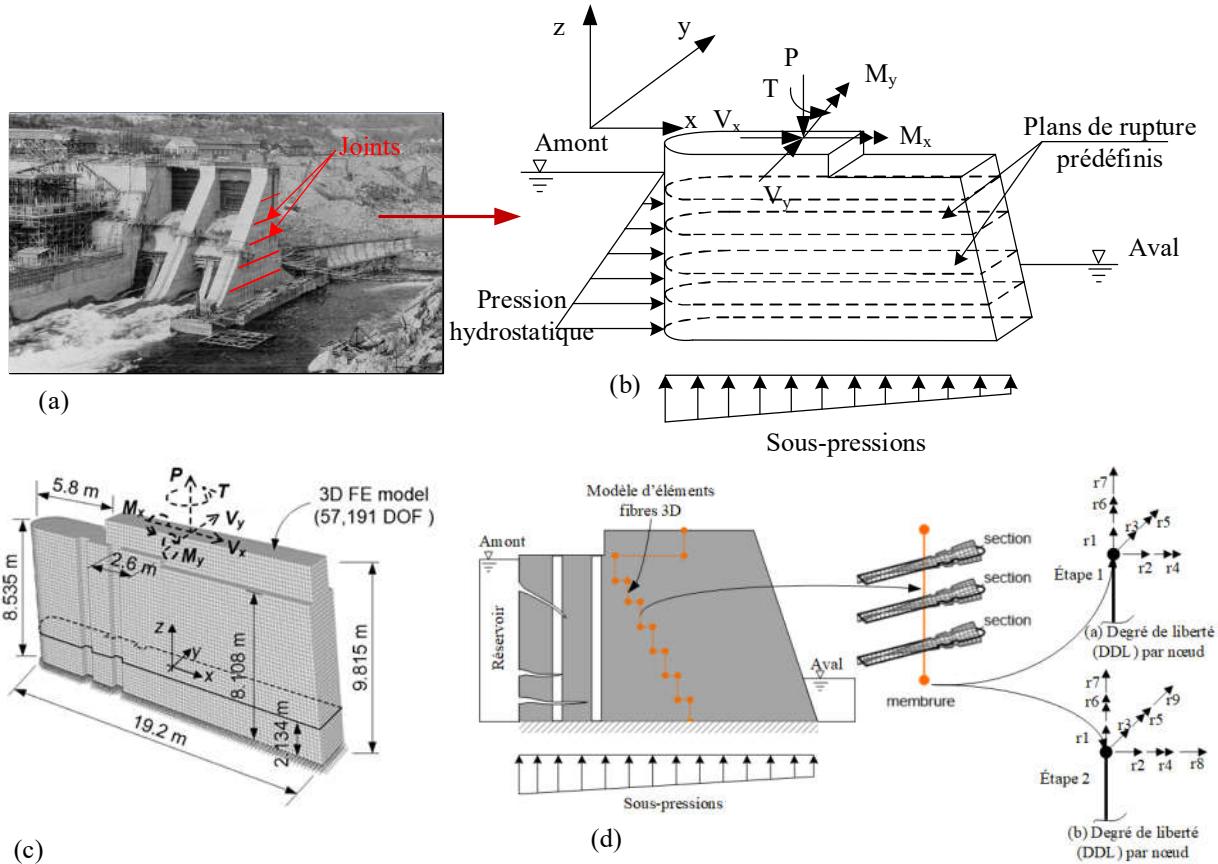


Figure 1.4 Modèle d'un pilier sous l'action 3D et la présence des pressions hydrostatiques et sous-pressions : a) pilier d'évacuateur de crue ; (b) modèle 3D équivalent ; (c) modèle d'éléments finis solides 3D (Stefan et Léger (2012)); (d) modèle d'éléments fibres 3D

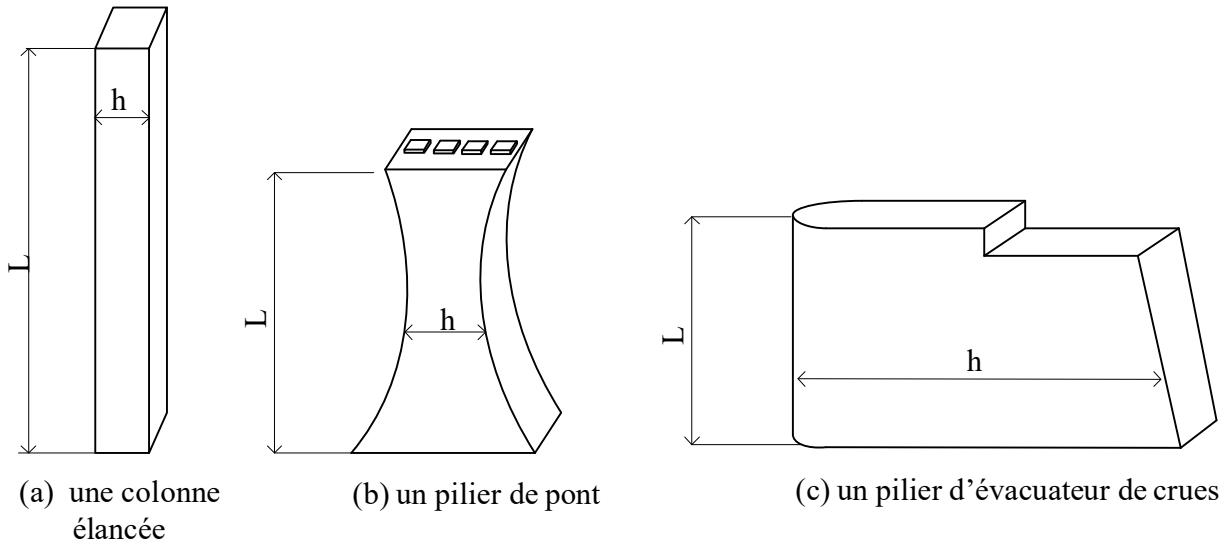


Figure 1.5 Les principaux types de piliers

## 1.2 Problématique de recherche

Les structures hydrauliques, telles que les piliers d'évacuateurs de crues avec des sections profondes, sont donc soumises à des chargements tridimensionnels ( $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ ) en présence de sous-pressions (Figure 1.4a, b). On doit alors évaluer la stabilité structurale 3D des piliers et adapter les critères de performance des lignes directrices définies presqu'exclusivement pour les analyses de stabilité 2D dans la direction amont-aval. Pour effectuer le calcul de stabilité le long des joints de reprises de bétonnage, on peut utiliser diverses méthodes allant d'approches simplifiées basées sur la théorie classique des poutres (méthode de gravité), aux méthodes des éléments finis (MEF) non linéaires 3D à l'aide de logiciels commerciaux (ABAQUS, ANSYS, LS-Dyna). Cependant, la MEF demande des ressources importantes et le développement de post-processeurs spécialisés pour calculer des indicateurs de la stabilité facilement interprétable (i.e. facteur de sécurité au glissement, position de la résultante, aire fissurée, contraintes maximales de compression).

Ce travail de recherche a pour but (i) le développement, (ii) la vérification, (iii) la validation et (iv) l'application d'un nouvel élément poutre-colonne filaire 3D avec des sections profondes de géométries quelconques discrétisées en éléments finis triangulaires 2D ou "fibres" aux points de Gauss (Figure 1.4d) afin de tenir compte du gauchissement, de la fissuration et des sous-pressions. Cet élément est implanté dans un nouveau logiciel d'analyse structural des ouvrages hydrauliques

en béton, FIDAM 3D, programmé sous MATLAB. FIDAM3D conduit à des résultats plus précis que la méthode de gravité et avec moins de complexité que la MEF 3D non linéaire en termes robustesse de calcul, de ressources d'ingénierie et d'interprétation des résultats pour prendre des décisions sur l'adéquation des indicateurs de stabilité par rapport aux exigences réglementaires.

### 1.3 Objectifs

En considérant la problématique de recherche, les objectifs de ce projet sont les suivants :

- Effectuer une revue critique de littérature sur les modèles, les méthodes d'analyse, allant de la section à la structure, pour le calcul de stabilité des ouvrages hydrauliques en béton;
- Développer un modèle d'éléments finis 2D pour analyser les sections profondes le long des joints de reprises de bétonnage en incluant les déformations gauches dues à la torsion et aux cisaillements à l'aide des fonctions de gauchissement primaires et secondaires. Ce modèle permet de calculer l'intensité et la distribution non linéaire des contraintes normales et de cisaillement sur la section afin d'améliorer la solution de la méthode de gravité.
- Développer un modèle de sous-pression afin de modéliser le comportement hydromécanique pour les sections non fissurée ou fissurée avec un axe neutre de position arbitraire;
- Développer un nouveau modèle constitutif d'éléments poutres-colonnes filaires 3D ayant 14DDL sous l'action des charges 3D et de la présence des sous-pressions. Ce modèle est développé à partir de l'élément filaire classique ayant 12DDL en ajoutant un DDL à chaque extrémité pour l'effet de torsion gauche et considère la déformation de cisaillement constante de Timoshenko ;
- Développer un deuxième modèle d'élément filaire 3D ayant 18DDL soumis aux charges 3D et la présence de sous-pressions pour les sections profondes incluant les analyses sectionnelles des éléments finis 2D considérant les déformations gauches dues à la torsion et aux efforts tranchants; Ce modèle considère les modes de gauchissement sous l'action de l'effet des efforts tranchants ( $V_x - V_y$ ) et de la torsion par 3DDL ajoutés par nœud par rapport aux éléments filaires classiques ayant 6DDL par nœud (pour un total de 9 DDL par nœud ou 18 DDL par élément).
- Implanter le nouvel élément fibre de 18DDL dans un nouveau logiciel d'analyse structural, FIDAM3D, qui est développé à l'aide de MATLAB dans le cadre de cette thèse. FIDAM3D doit inclure un module de calcul des indicateurs de performance comme le facteur de sécurité au glissement; l'aire fissurée; la position de la résultante des forces, etc.

- Vérifier, valider et appliquer les modèles proposés afin d'évaluer la stabilité structurale d'ouvrages hydrauliques en béton soumis aux chargements 3D et la présence de sous-pressions afin de quantifier les améliorations des résultats en comparaisons rapport à la méthode classique de gravité et la méthode des éléments finis solides linaires et non linéaires 3D.

## 1.4 Méthodologie

Pour atteindre les objectifs énoncés, les étapes ci-dessous décrivent brièvement la méthodologie utilisée. Ces étapes sont présentées en détails dans le chapitre 3. En plus de la revue de littérature, il y a trois parties importantes pour réaliser ce projet de recherche : (1) le développement des formulations constitutives et des algorithmes numériques ; (2) le développement, la validation et la vérification d'un logiciel, FIDAM3D, par des exemples de complexités croissantes ; (3) les études de cas sur les indicateurs de stabilité pour un ouvrage hydraulique réel sous l'action de charges 3D. La méthodologie suivie comprend notamment :

- Le développement d'un modèle constitutif du béton non armé qui est bien adapté par rapport aux caractéristiques des ouvrages hydrauliques avec des joints de reprise de bétonnage. Ce modèle considère deux modes de rupture : (i) la résistance limitée en traction et (ii) la résistance limitée en compression-cisaillement.
- Le développement d'une formulation d'élément finis 2D pour l'analyse sectionnelle en utilisant les éléments triangulaires (**CST-Constant Strain Triangle**) pour discréteriser la section quelconque à l'aide du logiciel *Gmesh* (Geuzaine & Remacle, 2009). Les fonctions de gauchissement (primaires et secondaires) sont calculées à l'aide des équations de Poisson et de Laplace pour considérer les déformations en cisaillement et gauchissement dues à la torsion et aux efforts tranchants.
- Le développement de deux nouveaux modèles d'éléments filaires (poutres-colonnes) 3D non linéaires en béton non armé ayant 14 et 18 DDL soumis aux chargements 3D et à la présence de sous-pressions. Les sections profondes de géométries quelconques sont discréterisées en éléments finis triangulaires 2D ou "fibres" aux points de Gauss (Figure 1.4d) afin de tenir compte du gauchissement. Ces modèles sont formulés par une méthode mixte : (1) la matrice de flexibilité est utilisée pour caractériser le comportement sous l'action de P-Mx-My-Vx-Vy ; (2) la méthode de rigidité est utilisée pour caractériser le comportement sous l'action de la torsion, T. Ces modèles

sont programmés à l'aide du logiciel MATLAB.

- Le développement d'un modèle de sous-pression afin de représenter le comportement hydromécanique pour les sections non fissurées ou fissurées ayant une position arbitraire de l'axe neutre. Ce modèle est mis à jour à chaque itération de calcul afin de considérer l'interaction entre les charges appliquées et les sous-pressions pour calculer l'aire fissurée finale;
- La vérification et la validation des nouveaux modèles pour s'assurer que les résultats obtenus sont bien en accord avec la théorie de l'élasticité et les résultats des logiciels de recherche et commerciaux tels que CADAM3D, OpenSees, SAP2000 et ABAQUS. Des structures simples sont validées en appliquant les développements proposés.
- Le développement d'algorithmes pour calculer directement les indicateurs de performance pour les ouvrages hydrauliques soumis aux charges 3D en considérant la fissuration et le critère de rupture de Mohr-Coulomb.
- Analyser une étude de cas d'un pilier existant en béton non armé par les modèles proposés. Ces résultats sont comparés à la méthode des éléments finis solides non linéaires 3D (ABAQUS)

## 1.5 Contributions originales

À la connaissance de l'auteur, ce projet de recherche présente les contributions originales suivantes:

- La formulation d'éléments finis 2D, considérées comme des "fibres" pour l'analyse sectionnelle de sections profondes soumises aux sollicitations PMM-VVT. Les effets primaires et secondaires de cisaillement sont considérés par des fonctions de gauchissement. Les effets de la torsion de St-Venant et de la torsion gauche sont inclus. Cette formulation permet le calcul de l'intensité et la distribution non linéaire des contraintes normales et de cisaillement sur la section.
- La formulation d'un nouvel élément poutre-colonne filaire non linéaire 3D ayant 18DDL. On considère les 12 DDL de la théorie classique des poutres et 6DDL pour capturer les distorsions causée (i) par la torsion, T, et (ii) par le gauchissement de la section sous les effets bidirectionnels des efforts tranchants,  $V_x, V_y$ . La matrice de rigidité est développée par une méthode mixte : (i) la méthode de flexibilité pour les sollicitations 3D PMM-VV; et (ii) la méthode de rigidité pour la torsion, T. Les non-linéarités de matériaux incluant la fissuration en traction et la rupture en compression-cisaillement sont incluses.

- Le développement d'un modèle de sous-pressions adapté aux éléments fibres qui représente la distribution initiale des sous-pressions le long des plans de rupture potentielle d'un pilier d'évacuateur, et leurs l'évolution 3D selon une géométrie quelconque de fissuration.
- Le développement d'un nouveau logiciel d'analyse structural des ouvrages hydrauliques en béton, FIDAM3D, programmé sous MATLAB. FIDAM3D conduit à des résultats plus précis que la méthode de gravité et avec moins de complexité que la MEF 3D non linéaire en termes robustesse de calcul, de ressources d'ingénierie et d'interprétation des résultats pour prendre des décisions sur l'adéquation des indicateurs de stabilité par rapport aux exigences réglementaires.
- La vérification et validation (V&V) du modèle d'éléments fibres 3D proposé, implanté dans FIDAM3D, à l'aide de comparaisons systématiques sur plusieurs problème tests de complexité croissante. Les logiciels ProseC, CADAM3D, OpenSees, ABAQUS ont été utilisés pour fins de comparaisons.
- L'application de FIDAM3D dans le contexte d'une étude de cas d'un pilier existant d'évacuateur de crues soumis aux charges d'exploitation 3D symétriques et non symétriques tout en incluant les sous-pressions afin d'évaluer les indicateurs de performance en tenant compte de la distribution non linéaire réelle des contraintes normales, de cisaillement dues à la flexion biaxiale, aux efforts tranchants et à la torsion.

## 1.6 Contenu de la thèse doctorale

Ce document est rédigé en 7 chapitres. Le premier chapitre présente l'introduction du sujet, la problématique de recherche ainsi que les objectifs et les contributions originales. Le deuxième chapitre documente la revue de la littérature pour la recherche qui est complétée par des références pertinentes dans les chapitres suivants. Le troisième chapitre présente les fondements théoriques des formulations proposées pour atteindre les objectifs de recherche. Les implémentations numériques des formulations proposées sont abordées dans le chapitre quatre. Ensuite, les procédures de vérification et validation (V&V) pour les formulations théoriques et leurs implémentations numériques sont décrites au chapitre cinq. Les applications pour les études de cas sont présentées au chapitre six. Enfin, les conclusions et perspectives sont présentées dans le chapitre 7.

## **CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE**

### **2.1 Introduction**

Dans ce chapitre, on présente la revue critique de la littérature afin de recenser les connaissances de base pour le projet de recherche. On y traite de l'analyse non linéaire des sections quelconques et des analyses structurales sous l'actions des charges 3D ( $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ ) par différentes méthodes qui vont des plus simplifiées aux plus complexes : (a) méthode de gravité ; (b) éléments fibres 3D ; (c) éléments finis 3D (solide). Les problèmes particuliers abordés sont les sections profondes, la fissuration, les sous-pression, la résistance au cisaillement limitée dans l'analyse de stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques.

### **2.2 Évaluation de la stabilité structurale des piliers d'évacuateurs de crues**

#### **2.2.1 Mécanisme de défaillances**

En général, les mécanismes de défaillances des barrage-poids en béton sont présentés dans le guide d'évaluation de la stabilité des ouvrages CDA (2013) comprenant:

- Le glissement, soit au niveau de la fondation (plans préférentiels ou au contact béton-roche), soit dans le béton (changement de géométrie ou aux joints de reprises de bétonnage) ;
- La rupture en compression par contraintes excessives ;
- L'ouverture et la propagation de fissures entraînant la ruine de l'ouvrage ou des conséquences inacceptables (reversement) ;
- Le soulèvement des ouvrages.

La poutre profonde est une poutre pour laquelle le calcul n'est pas validé par la théorie classique de poutres. La déformation en cisaillement est importante et non négligeable. Par ailleurs, l'hypothèse que "la section reste plane après la déformation" n'est pas correcte. Dans la littérature, la notion de poutre profonde est souvent évoquée par le ratio entre la hauteur de la section,  $h$  et la portée de la poutre,  $L$ . Le code ACI-318 (2002) donne une définition de poutre profonde quand  $L/h \leq 4.0$  (la portée nette/la hauteur de la section) ou  $a/h \leq 2.0$  (la variable,  $a$ , présente la distance entre l'appui et une charge concentré).

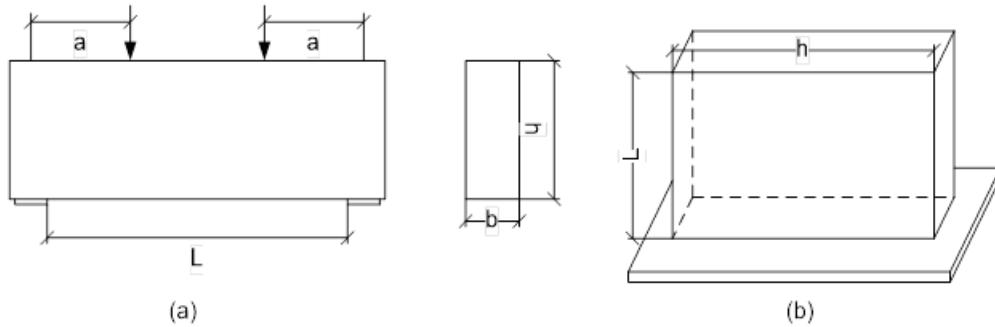


Figure 2.1 La définition de poutre profonde : (a) Poutre profonde selon ACI-318 (2002) ; (b) Le mur trapu selon (Paulay & Priestley, 1992)

Paulay et Priestley (1992) ont présenté une définition du mur trapu avec le ratio  $L/h \leq 2,0$  (la hauteur du mur/ la profondeur de la section). Dans le cas particulier d'un pilier d'évacuateur, le comportement structural peut être considéré comme celui d'un mur trapu (squat wall) ayant souvent un ratio  $L/h$  qui est inférieur à 2.

Les mécanismes de défaillances de ce type de structure dépendent des charges appliquées et de la présence ou non d'acier d'armature (béton armé ou béton non armé). Beaucoup de recherches se concentrent sur le comportement des mécanismes de rupture de murs trapus sous l'action des charges statiques et sismiques. On présente un pilier en béton non armé sous l'action de chargement 3D les des mécanismes de défaillances anticipés à la Figure 2.2. Le premier mécanisme de défaillance, qui est la rupture en flexion, est présenté par les fissurations dans la zone de traction ou la rupture dans la zone en compression, normalement, à la base du mur (Figure 2.2b, c). Le cisaillement causera un mécanisme de défaillance par la tension diagonale ou la compression diagonale (Figure 2.2d) et la torsion (Figure 2.2e). Un autre mécanisme causé par le cisaillement est le glissement le long des joints de construction (Figure 2.2f).

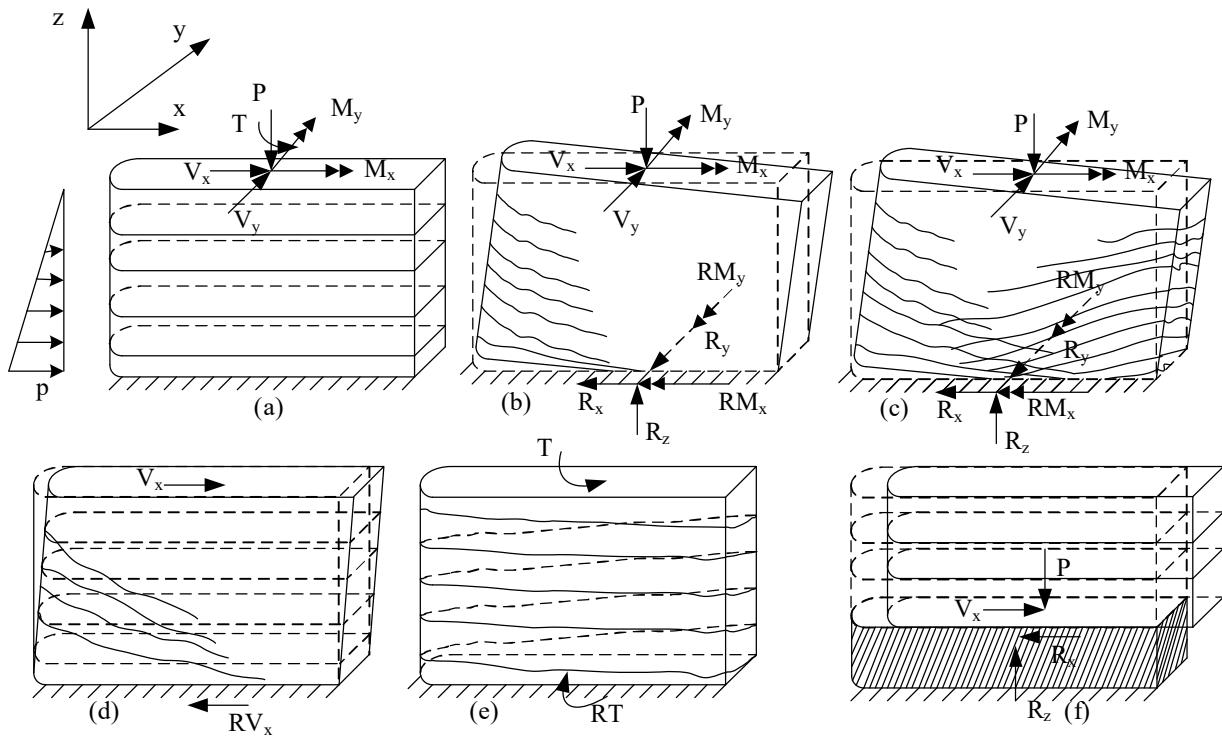


Figure 2.2 Mécanismes de défaillance d'un pilier : (a) Modèle structural ; (b) et (c) Rupture en flexion ; (d) Rupture en cisaillement ; (e) Rupture en torsion ; (f) Rupture en glissement

## 2.2.2 Distribution des contraintes sur les sections profondes

Dans cette section, on étudie la revue de littérature sur le problème de la distribution de contraintes normales qui dépendent les ratios de dimensions de poutres profondes ( $L/h$  ou  $a/L$ ) comme les notions dans ACI (2002) et Paulay et Priestley (1992). Les résultats de recherches par les méthodes des éléments finis 3D ont identifié la distribution non linéaire des contraintes normales par rapport la théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli) où la distribution des contraintes normales est linéaire.

Les premières solutions qui sont basées sur la théorie d'élasticité afin de résoudre exactement les problèmes de poutres, sont présentées par Timoshenko et Goodier (1970) et Slaughter (2012) pour s'adapter aux problèmes de poutres aux Figure 2.3a et Figure 2.3c en utilisant la fonction de contraintes Airy. La solution du problème à la Figure 2.3a est corrigée selon la réponse du déplacement vertical incluant l'effet d'effort tranchant mais la distribution des contraintes normales n'est pas adaptée pour les poutres profondes ou pour les sections qui sont très proches de

l'encastrement. Le problème à la Figure 2.3c représente la charge hydrostatique des barrages – poids. Ce problème est bien traité avec une distribution de contraintes normales non linéaire sur les sections transversales. Les deux solutions sont correctes pour les sections qui satisfont le principe de St-Venant. Les contraintes aux sections frontières qui sont proches de l'encastrement, ne sont pas solutionnées correctement. Le problème d'une poutre soumise des charges réparties uniformes et des charges simples, est considéré par Zhan et Liu (2015) en utilisant la fonction de contraintes Airy (Figure 2.3b). Cette solution a modifié les conditions aux frontières pour le déplacement longitudinal à l'encastrement afin d'améliorer la précision de la solution d'élasticité.

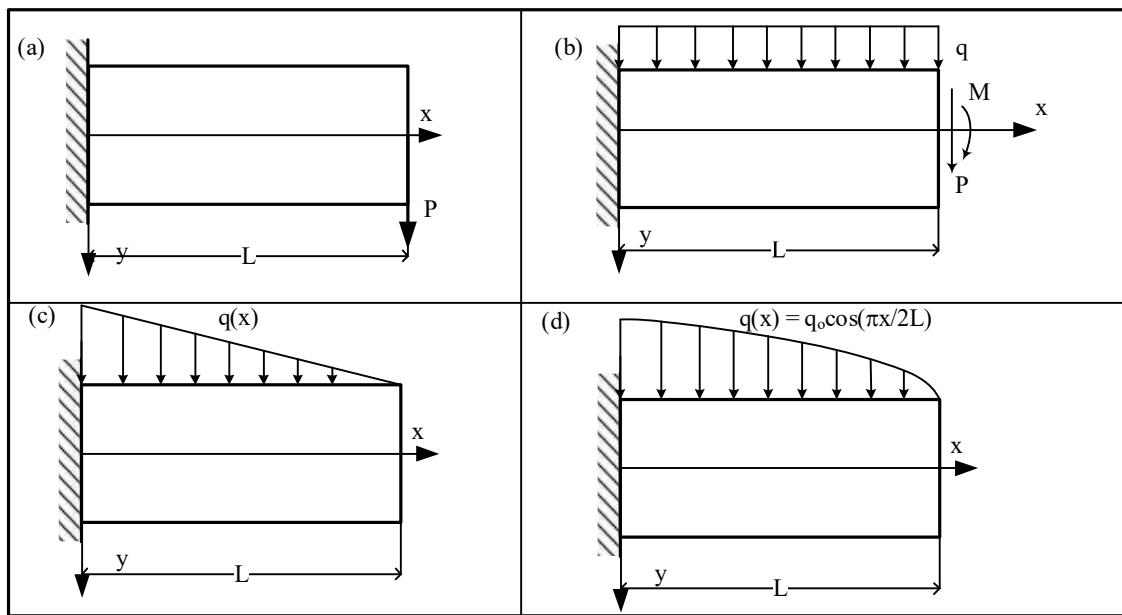


Figure 2.3 Problèmes typiques des poutres port-à-faux.

Pour une charge cosinus, la solution exact est développée par Dahake, Kapdis, Kalwane et Salunkhe (2018) pour une poutre profonde en aluminium incluant l'effet des déformations de cisaillement considérées par la théorie de déformation trigonométrique en cisaillement (Figure 2.3d) en utilisant une fonction sinusoïdale dans le champs de déplacements pour capturer les effets de cisaillement . Cette méthode permet de calculer les contraintes normales et cisaillement pour les sections qui sont proches de l'encastrement (Figure 2.4). La théorie de l'élasticité a présenté les solutions exactes pour les poutres en porte – à – faux soumise à des charges simples et indépendantes. Cependant, ces solutions n'incluent pas les charges compliquées ou 3D (PMM-VVT).

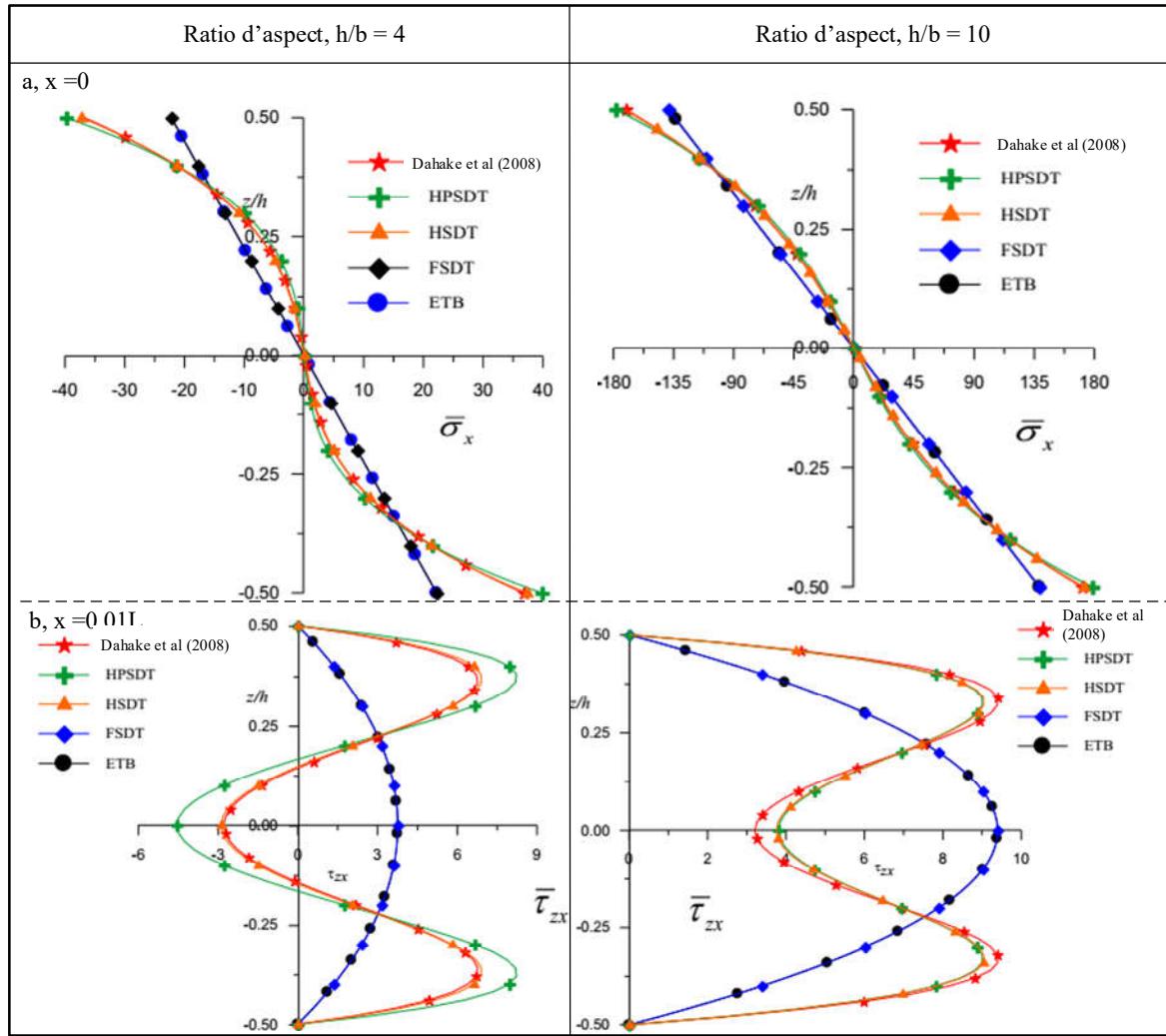


Figure 2.4 Variations des contraintes de Dahake et al. (2018) : (a) normales à l'encastrement ( $x = 0$ ); (b) de cisaillement à la proche de l'encastrement ( $x = 0.01L$ ).

Pour les méthodes basées sur la théorie de l'élasticité, Patel, Dubey et Pathak (2014) ont montré les résultats de la distribution de contraintes normales et de cisaillement sous l'action de charges réparties uniformes en utilisant la théorie classique de poutre, la méthode de fonctions initiales (MIF-Method of Initial Function) et la méthode des éléments finis. Ces résultats sont présentés à la Figure 2.5 selon le ratio de D/L (D est la hauteur de la section et L est la portée de la poutre). Ces résultats montrent que si le ratio D/L est petit ( $D/L = 0.133$ ), la distribution des contraintes normales est linéaire. Cependant, quand la valeur de D/L est grande ( $D/L = 0.5$ ), la distribution obtenue des contraintes normales est non linéaire.

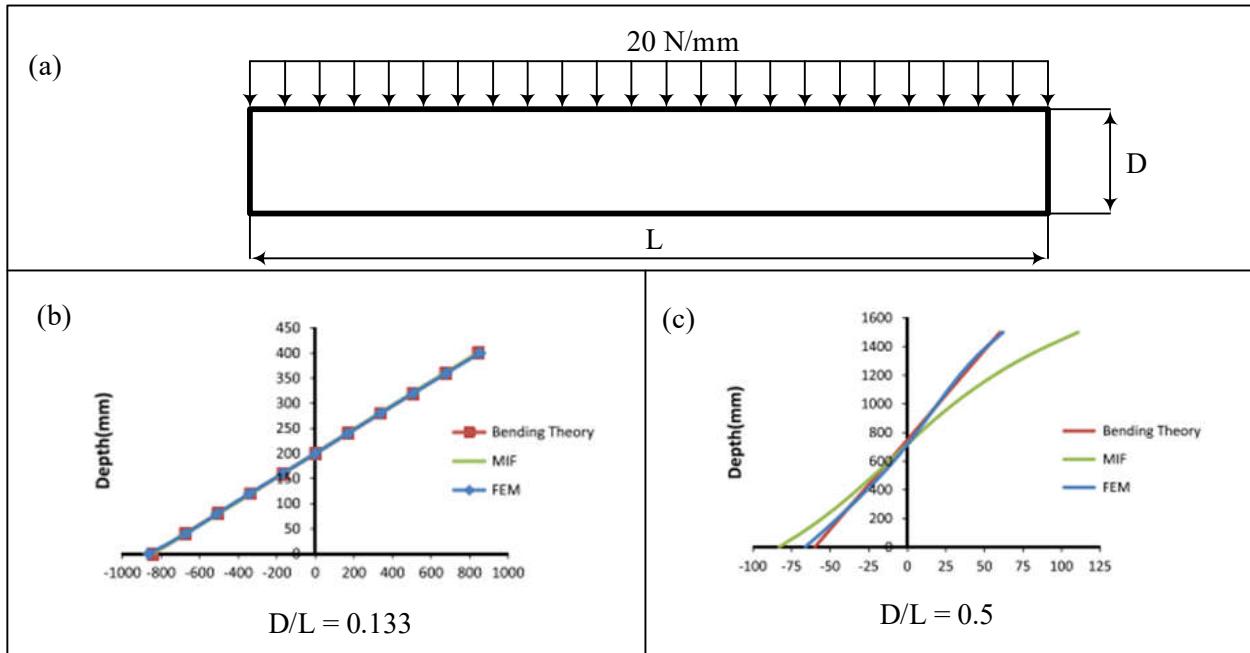


Figure 2.5 Distribution de contraintes normales selon le ratio  $D/L$  par Patel et al. (2014)

Pour une poutre profonde en béton armé, Kusanale, Kadam et Tande (2014) ont présenté l'analyse et conception d'une poutre profonde en supposant le matériau élastique par la méthode des éléments finis (Figure 2.6). Les résultats montrent que la distribution de contraintes normales pour la section au milieu de la poutre est non linéaire et varie selon le ratio de la portée de la poutre ( $L$ ) et la hauteur de la section ( $D$ ) qui est changée par trois cas  $D = 400 \text{ mm}$  (Figure 2.6b);  $450\text{mm}$  (Figure 2.6c) et  $500\text{mm}$  (Figure 2.6d).

Stefan et Léger (2011) ont analysé une section élastique trapue sous l'actions des charges 3D par un logiciel des éléments finis 3D (SAP2000) en comparaison avec ses méthodes proposées (Figure 2.7). Selon ces résultats, la distribution de contraintes normales de la méthode des éléments finis 3D est non linéaire pour tous les cas de charges.

En analysant les résultats de recherches précédentes, on constate que la distribution des contraintes normales pour les sections profondes est non linéaire. Il existe donc un besoin de développer un nouveau modèle pour tenir compte de l'influence de l'effet de gauchissement causé par les efforts tranchants et la torsion sur les sections profondes. Ce modèle sera développé dans les chapitres suivants pour le matériau fissuré (comme le béton non armé).

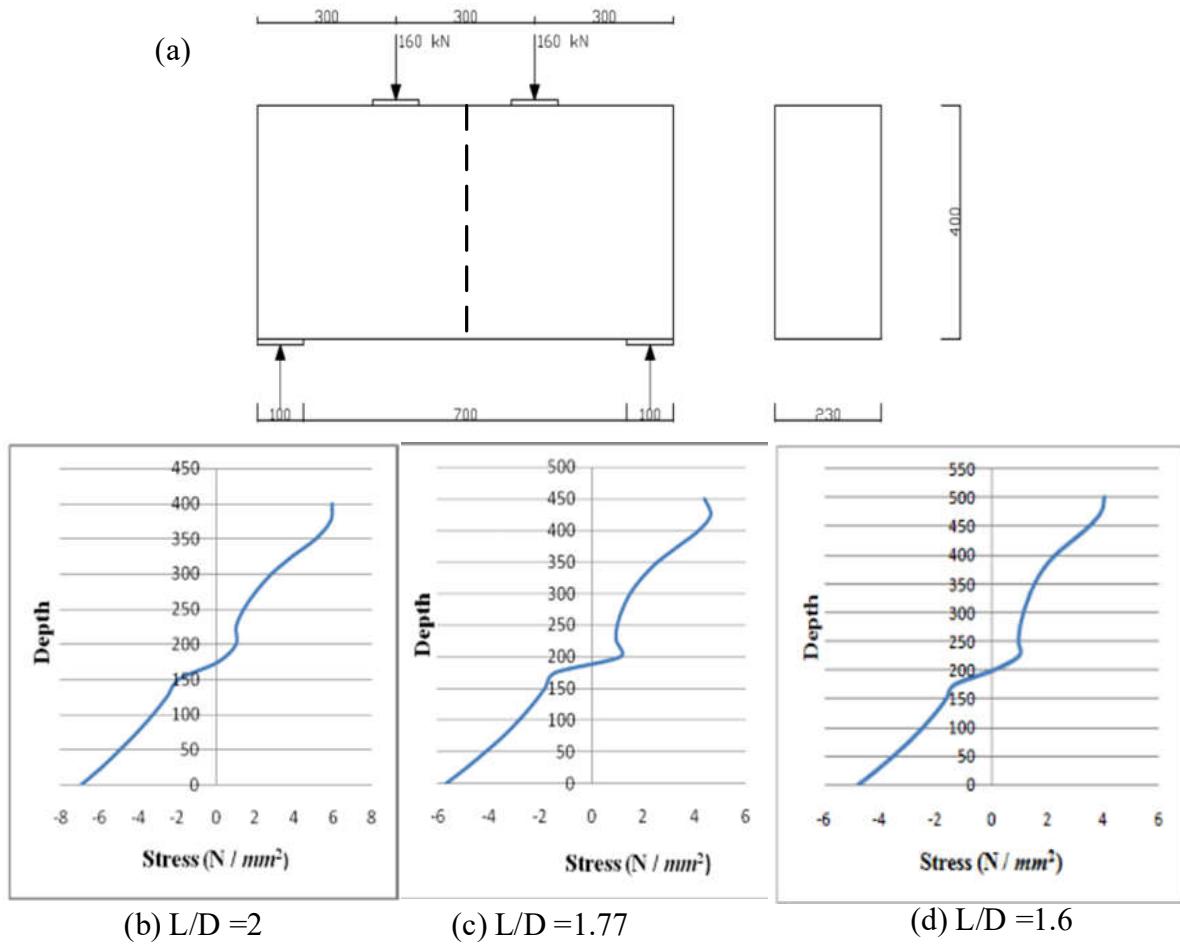


Figure 2.6 Distribution de contraintes normales selon le ratio  $L/D$  à la section au milieu de la poutre (Kusanale et al., 2014)

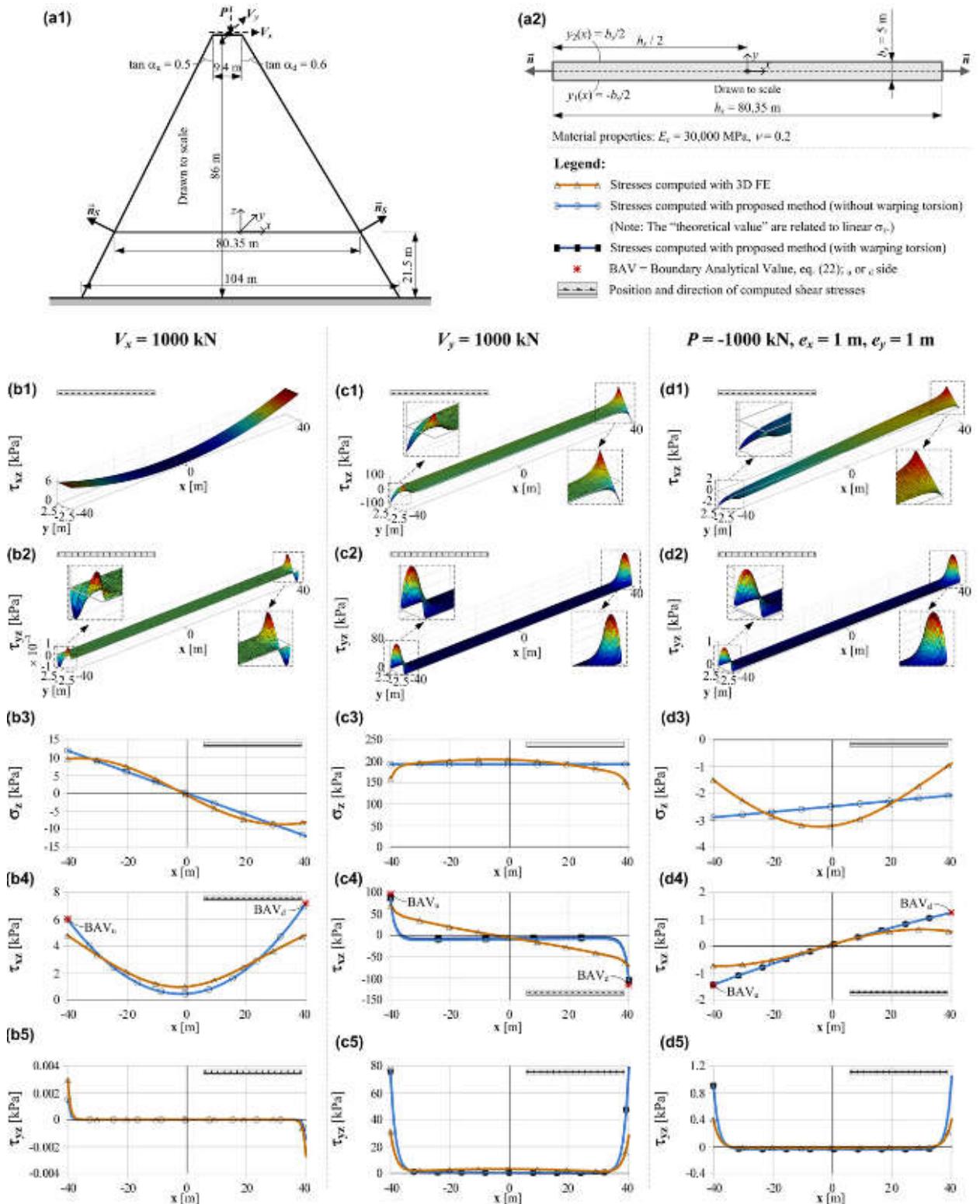


Figure 2.7 Analyse d'un barrage en béton : (a) Définition du problème ; (b)  $V_x = 1000 \text{ kN}$  ; (c)  $V_y = 1000 \text{ kN}$  ; (d)  $P = -1000 \text{ kN}, e_x = 1\text{m}, e_y = 1\text{m}$  (Stefan & Léger, 2011).

### 2.2.3 Pilier faiblement armé

Les mécanismes de défaillances d'un pilier en béton faiblement armé sont similaires à ceux en béton non armé, car le taux des armatures était très faible lors de la construction des ouvrages hydrauliques des années trente du siècle dernier. Dans ce cas, les quelques armatures de peau qui ont été utilisées sont souvent lisses et de faible longueur d'ancrage. La contribution de ces armatures n'est pas considérée pour la ductilité avec une longueur du développement insuffisante. Le mécanisme de défaillance aura lieu par la plastification pour l'armature en tension si la longueur de développement est suffisante (Figure 2.8b), sinon, le glissement de la barre se produira selon la direction de traction (Figure 2.8c).

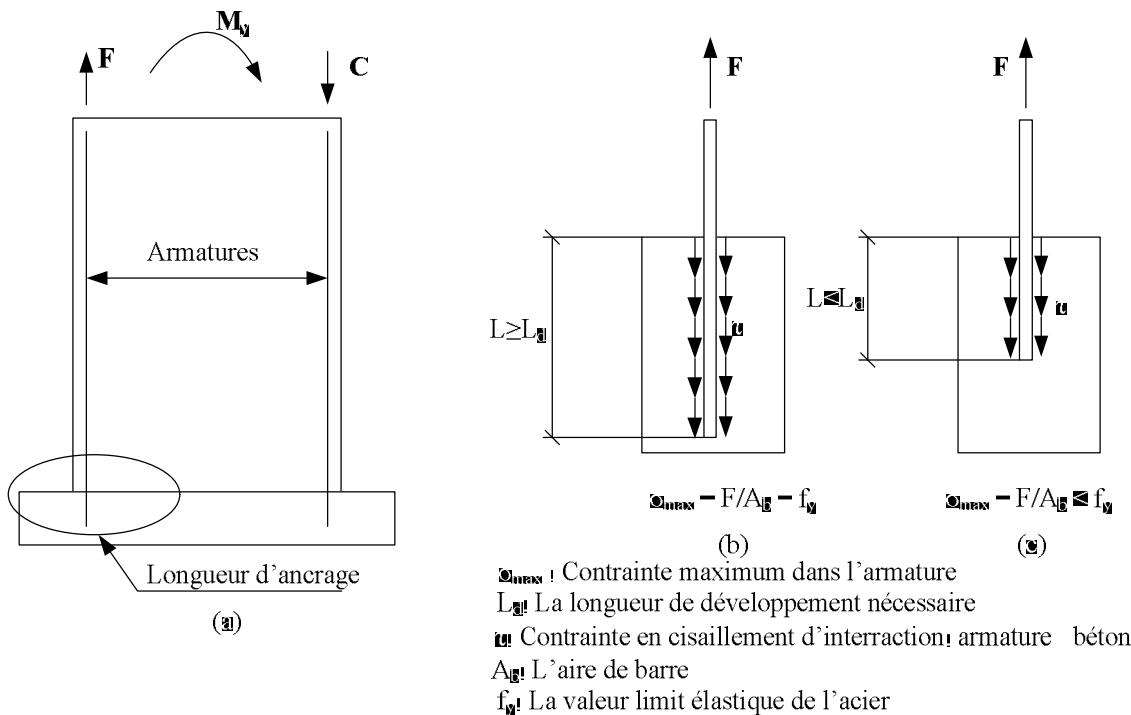


Figure 2.8 Mécanismes de défaillance d'armature dans le béton

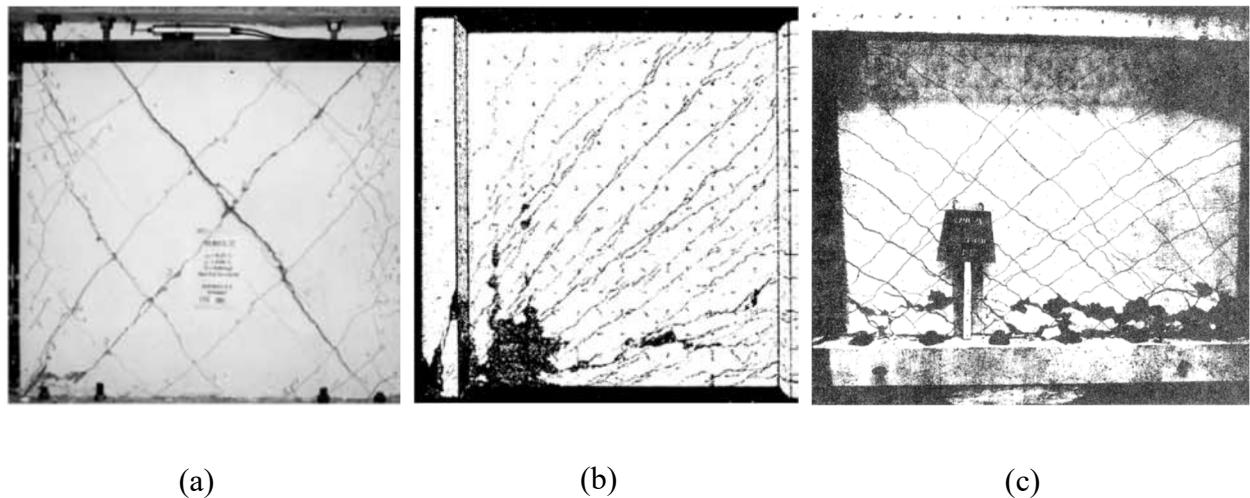


Figure 2.9 Mécanismes de défaillances de murs trapus en béton armé (Gulec & Whittaker, 2009):

(a) Rupture en tension diagonale; (b) Rupture en compression diagonale; (c) Rupture au glissement

Pour un pilier en béton armé, selon Paulay et Priestley (1992), les mécanismes de défaillances de cisaillement sont de trois types communs : (1) la tension diagonale ; (2) la compression diagonale ; (3) le glissement. Gulec et Whittaker (2009) ont documenté dans la littérature les mécanismes de défaillance de cisaillement pour le cas de la tension diagonale (Figure 2.9a), de la compression diagonale (Figure 2.9b) et du glissement causé par le cisaillement à la base du mur (Figure 2.9c) pour les murs trapus en béton armé.

#### **2.2.4 Lignes directrices, codes applicables, facteurs de sécurité, performances requises**

Dans la norme de CDA (2013), l'évaluation des piliers de l'évacuateur de crues quand ils font partie du barrage est similaire à un barrage-poids lorsque la stabilité globale est envisagée. Les piliers devraient également être évalués sous l'action biaxiale de flexion, cisaillement et/ou torsion qui sont causées par le résultat des charges comme :

- La pression hydrostatique résultant d'une vanne en position fermée quand un passage adjacent est ouvert et l'eau déverse ;
- L'expansion de la glace entre les piliers tandis qu'un passage adjacent est utilisé pour déverser ;

- Les effets dynamiques se produisent par les blocs de glace flottante qui frappent un pilier ;
- Les effets sismiques et l'interaction avec les superstructures de levage.

Les armatures d'un pilier jouent un rôle important pour mitiger l'effet thermique en peau de l'ouvrage et contrôler la fissuration. Cependant, dans CDA (2013), la contribution des armatures n'est pas considérée afin de calculer la stabilité globale d'un pilier.

Les combinaisons de charges sont considérées comme habituelles, inhabituelles et extrêmes pour chaque période de retour en utilisant les critères de performances comme la position de la résultante, la contrainte en compression et le facteur de sécurité au glissement CDA (2013). Stefan et Léger (2010) ont résumé les critères de performance pour les ouvrages hydrauliques en béton pour toutes les combinaisons de charges dans les autres codes applicables (Tableau 2.1).

Tableau 2.1: Combinaisons de charges et indicateurs de performance  
(adapté de Stefan et Léger (2010))

Combinaison de charges	Code de calcul	Période de retour (ans)	Position de la résultante	Aire fissurée (%)	Contrainte normale en compression	FSG
Normal FSG 1.5 sans cohésion	CDA (2013) USACE (1995, 2005) FERC (2002)	$\leq 50$ $< 10$ -	Avec noyau Tier central Intérieur de base	0 0 -	$< 0.3f_c$ $< 0.3f_c$ $< 0.33f_c$	$\geq 1.5; 3.0$ $\geq 2.0$ $\geq 1.5; 3.0$
Inhabituel	CDA (2007, 2013) USACE (1995, 2005) FERC (2002)	$50 < T \leq 100$ $10 < T \leq 300$ -	- Moitié centrale Intérieur de base	$\leq 25$ $\leq 25$ -	$< 0.5f_c$ $< 0.5f_c$ $< 0.5f_c$	$\geq 1.5; 2.0$ $\geq 1.7$ $\geq 1.25; 2.0$
Extrême	CDA (2013) Inondation CDA (2013) Séisme USACE (1995, 2005)	$T \geq 100$ $T > 300$	Intérieur de base Intérieur de base Intérieur de base	- - -	$< 0.5f_c$ $< 0.9f_c$ $< 0.9f_c$ $< 0.9f_c$	$\geq 1.1; 1.3$ $\geq 1.1$ $\geq 1.1$ $\geq 1.1$

### 2.3 Effets des sous-pressions ; modélisation hydromécanique

Les ouvrages hydrauliques sont en contact avec l'eau, ce qui provoque plusieurs incidences sur le comportement structural causées par la pression hydrostatique et les sous-pressions (SP). Les effets des sous-pressions influencent les fissures, les reprises de bétonnage et le joint béton – roc de fondation. Les normes indiquent que la distribution des SP est linéaire ou non linéaire (Figure 2.10) en tenant compte de la présence de drains ou non dans CDA (2013). Pour modifier les sous-pressions hydrostatiques, Stefan et Léger (2008) ont présenté une méthode de modification afin de

mettre à jour l'influence 3D de sous-pressions dans la fissure. Stefan (2011) a documenté que dans la littérature deux méthodes utilisées pour considérer l'influence des sous-pressions sur la structure : (1) les sous-pressions sont considérées comme charges internes constituant une partie des contraintes normales (se mesure en Pa) via le principe de superposition; (2) elles sont considérées comme des charges externes appliquées sur la structure (se mesure en N). Les résultats de ces deux méthodes sont les mêmes pour les sections non drainées, mais sont différents pour les sections drainées. Zienkiewicz (1963) a conclu que les influences d'effets des SP sur les structures hydrauliques sont similaires aux effets de température. C'est-à-dire, les SP peuvent être considérées comme une force externe pour analyser la stabilité des ouvrages hydrauliques. Les codes de calcul recommandent les deux méthodes de calcul des SP pour les ouvrages hydrauliques : CDA (2013), USACE (1995), USBR (1987) en considérant les SP comme une charge externe mais USBR(1987) ne considère que cette méthode dans le cas de la prolongation des fissures. Cependant, FERC (1991, 2002) et USBR (1987) calculent les contraintes normales en considérant toutes les forces appliquées mais excluant les effets de SP afin de terminer les contraintes totales des sections. Les contraintes effectives sont calculées par la soustraction des sous-pressions.

Pourtant, les sections des ouvrages hydrauliques sont souvent en forme de poutre profonde. De plus, la théorie des poutres n'est pas validée et la distribution des contraintes normales est non linéaire sur la section trapue sous l'action des charges. Il faut considérer la distribution de sous-pressions sur les contraintes finales incluant les interactions des charges 3D, le problème de l'axe neutre arbitraire et les zones particulières pour les conditions aux frontières (la position de vanne et la présence de drains). Par conséquent, la distribution de contraintes normales finales est non linéaire et doit être considérée pour les sections profondes.

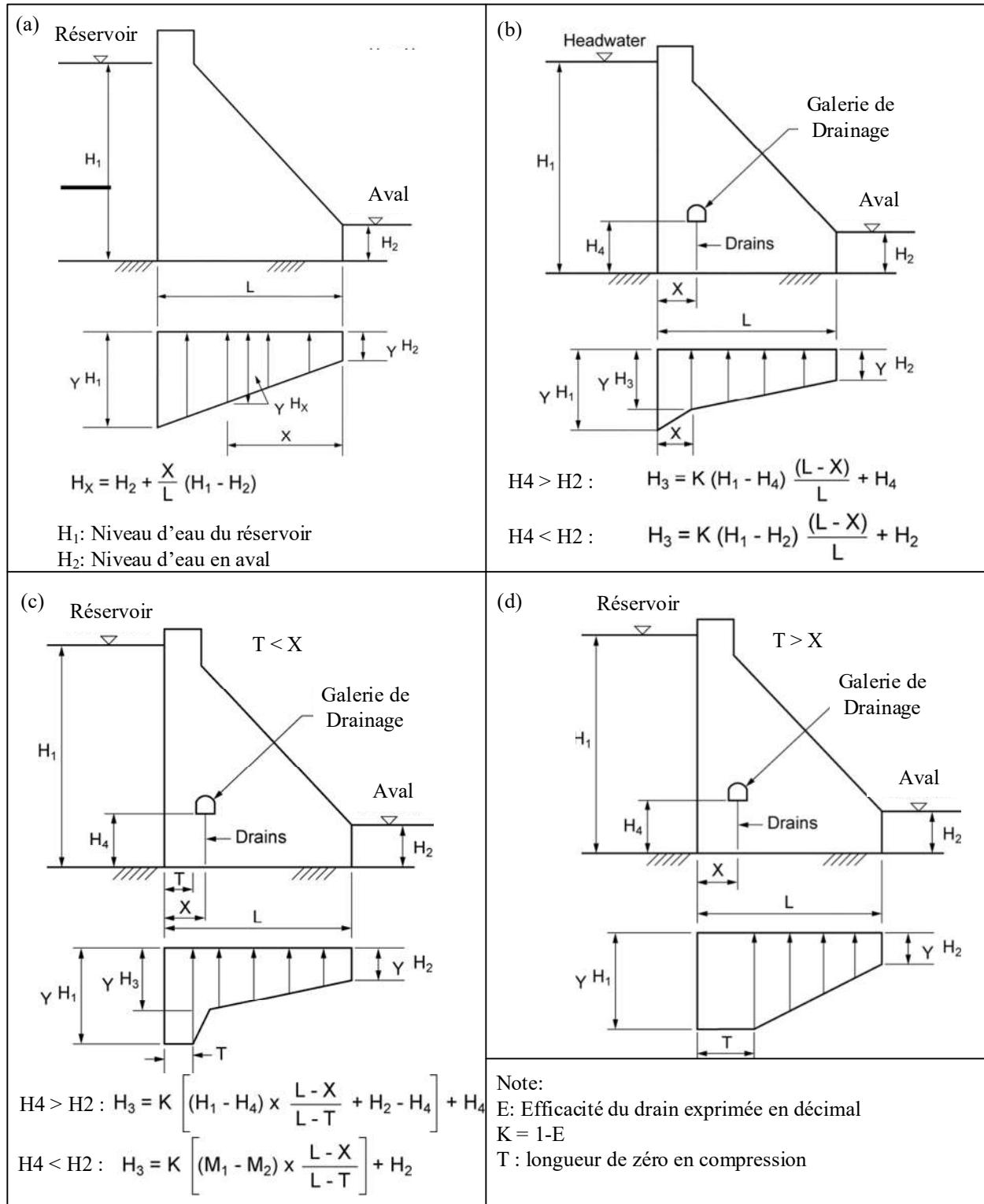


Figure 2.10 Distribution des sous-pressions pour le barrage-poids (adaptée de CDA (2013))

## 2.4 Analyses non linéaires de sections de géométries quelconques

### 2.4.1 Propriétés de sections quelconques

Les propriétés géométriques sectionnelles sont divisées en deux catégories: celles qui sont indépendantes du gauchissement et celles qui sont dépendantes du gauchissement. Les propriétés indépendantes du gauchissement sont très générales comme l'aire de la section, les moments d'inertie, etc. Les propriétés dépendantes du gauchissement sont nécessaires pour caractériser deux comportements : (1) le gauchissement non restreint et (2) le gauchissement restreint. Le cas de gauchissement non restreint représente la torsion selon la théorie de St-Venant. On calcule alors la constante de la torsion ( $J$ ). Le cas de gauchissement restreint est nécessaire pour déterminer la constante de gauchissement ( $C_w$  ou  $\Gamma$ ).

Pilkey (2002) a présenté les formulations analytiques et la méthode des éléments finis afin de calculer les propriétés sectionnelles à l'aide de logiciels programmés en Fortran 90 en utilisant un maillage par éléments rectangulaires de 4 nœuds pour discréteriser la section. Mixon (2008) a développé un logiciel MATLAB pour calculer toutes les propriétés des sections transversales quelconques en utilisant la méthode des éléments finis 2D avec des éléments triangulaires de 3 nœuds et de 6 nœuds incluant la condition limite de Dirichlet et Neumann pour solutionner le problème de torsion (Figure 2.11). Les éléments triangulaires 3 nœuds sont plus adaptés pour raffiner le maillage des sections avec des ouvertures ou des régions circulaires en comparaison avec les éléments rectangulaires de 4 nœuds. Pour les sections transversales en forme circulaire (comme le cercle, l'ovale), les triangles à 6 nœuds donnent des résultats plus exacts que les éléments à 3 ou 4 nœuds car le problème de discréétisation est très difficile pour construire le maillage si des éléments à 4 nœuds sont utilisés. De la même façon Stefan et Léger (2012) ont développé un logiciel "Varsec 3D" pour déterminer toutes les propriétés d'une section à l'aide d'éléments triangulaires à 3 noeuds.

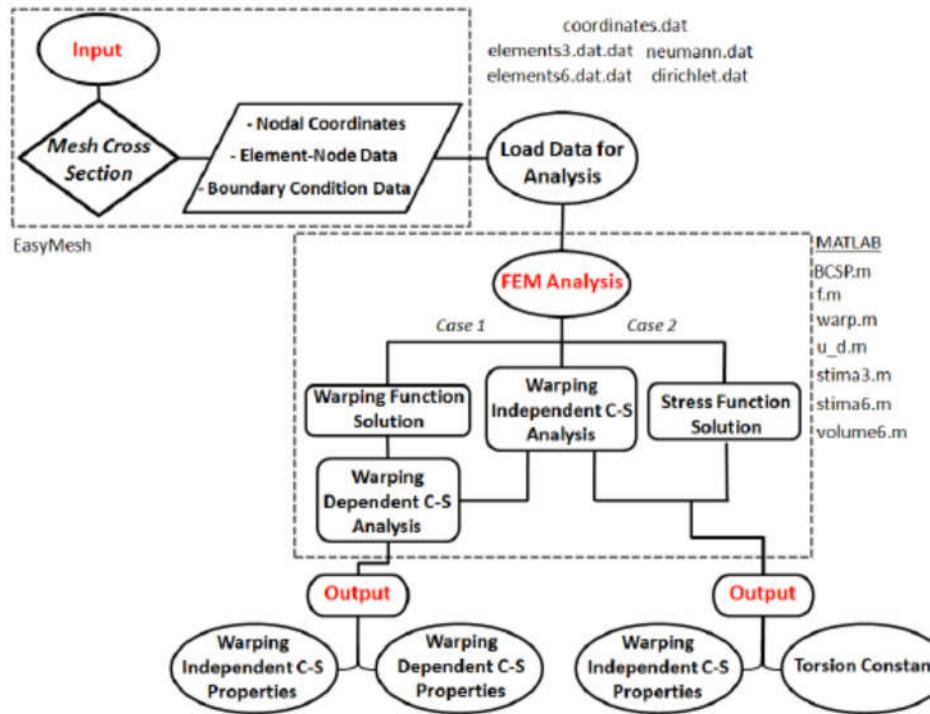


Figure 2.11 Étapes de calcul pour déterminer les propriétés sectionnelles (Mixon, 2008)

Les logiciels commerciaux comme ANSYS, Prokon (Prosec), Shapebuider, etc. sont bien adaptés pour calculer les propriétés des sections transversales. Dans le Tableau 2.2, on présente la comparaison des logiciels et les recherches pour calculer les propriétés des sections. Pourtant, ces logiciels ne peuvent pas traiter le cas particulier d'un pilier d'évacuateur de crue pour analyser les comportements structuraux avec les demandes particulières comme la présence des sous-pressions, le matériau fissuré et les sections non homogènes en béton-acier. Dans ce projet doctoral, un module initialement basé sur le logiciel "Varsec 3D" de Stefan et Léger (2012) est développé afin de calculer toutes les propriétés sectionnelles de premier ordre et de deuxième ordre incluant les fonctions de gauchissement en utilisant les éléments triangulaires à 3 nœuds (CST).

Tableau 2.2 : Résumé des caractéristiques des logiciels pour déterminer les propriétés sectionnelles.

Logiciel/ Paramètres	Prosec (Prokon)	Shape builder	Shape Designer	Pilkey (2002) (4 nœuds)	Mixon (2008) (CST + 6 noeuds)	"Varsec 3D" (CST)	Fidam3D (CST)
A	x	x	x	x	x	x	x
$I_x$	x	x	x	x	x	x	x
$I_y$	x	x	x	x	x	x	x
$I_{xy}$	x	x	x	x	x	x	x
J	x	x	x	x	x	x	x
$C_w$	x	x	x	x	x	x	x
$\omega$	x	x	-	x	x	x	x
$C(x_C, y_C)$	x	x	x	x	x	x	x
$S(x_S, y_S)$	x	x	x	x	x	x	x
$A_{sx}^P$	-	-	x	x	-	-	x
$A_{sy}^P$	x	-	x	x	-	-	x
$A_{sx}^S, A_{sy}^S$	-	-	-	-	-	-	x
$I_{ppx}$	-	-	-	-	-	-	x
$I_{ppy}$	-	-	-	-	-	-	x
$I_{ppxy}$	-	-	-	-	-	-	x

J : Constante de torsion (St-Venant) ;

$C_w$ : Constante de gauchissement (Torsion gauche);

$\omega$  : Fonction de gauchissement ;

$C(x_C, y_C)$  : Centre de gravité;

$S(x_S, y_S)$  : Centre de cisaillement ;

$A_{sx}^P$  : Aire effective primaire (Timoshenko) de cisaillement selon l'axe x;

$A_{sy}^P$  : Aire effective primaire (Timoshenko) de cisaillement selon l'axe y;

$A_{sx}^S, A_{sy}^S$  : Aire effective secondaire de cisaillement respectivement selon l'axe x et y;

$I_{ppx}$  : Moment d'inertie secondaire pour l'effet de distorsion autour de l'axe x due à l'effort tranchant selon l'axe y;

$I_{ppy}$  : Moment d'inertie secondaire pour l'effet de distorsion autour de l'axe y due à l'effort tranchant selon l'axe x;

$I_{ppxy}$  : Produit de moment d'inertie secondaire pour l'effet de distorsion.

## 2.4.2 Flexion composée, $P-M_x-M_y$ (PMM)

Les éléments en flexion composés font partie des bâtiments (poteaux, murs de refend, etc.), des ponts (pilier, pieux) et des ouvrages hydrauliques (piliers d'évacuateur de crues, barrage-poids). La conception de ces éléments est basée sur deux méthodes principales : la première approche détermine la position de l'axe neutre ; la deuxième approche demande la résolution mathématique

des systèmes d'équations non linéaires d'équilibre écrits en termes de contraintes. Bresler (1960) a proposé deux méthodes simplifiées pour estimer la capacité des sections rectangulaires en béton armé : l'établissement d'une enveloppe d'interactions  $P-M_x-M_y$  et les équations de charges réciproques. Furlong, Hsu et Mirza (2004) ont documenté les algorithmes et les méthodes qui sont utilisées effectivement dans la littérature pour analyser les sections en béton armés. Stefan (2011) a identifié trois grands groupes des méthodes de calcul précédentes dans la littérature pour calculer les contraintes PMM sur une section quelconque : (1) la méthode analytique avec ou sans la décomposition en trapèze; (2) la méthode numérique avec les éléments fibres pour la section (cette méthode est considérée en détail dans la section 2.5); (3) l'utilisation des intégrales de surface et intégrales linéaires (Rodrigues, 2015).

En considérant un pilier d'évacuateur de crue, la méthode classique PM (non pas PMM) est la « méthode de gravité » (MG) 2D par le modèle couplé hydromécanique dans le logiciel CADAM « 3D » (en fait 2D extrudé) par Leclerc et Léger (2007). Cette méthode est basée sur la théorie de poutre et sur les hypothèses suivantes : (1) la distribution des contraintes normales est linéaire sur la section ; (2) les charges sont appliquées seulement dans une direction amont/aval. Stefan et Léger (2008) ont développé une extension tridimensionnelle de la méthode de gravité pour les sections transversales arbitraires du pilier d'évacuateur de crues sous l'action d'une combinaison PMM incluant le problème d'interaction hydromécanique (la présence de la sous-pression en plan 2D de fissuration). Cette extension détermine la position du noyau central « kernel » de la section arbitraire en matériau homogène, de l'axe neutre, et la distribution des contraintes normales. Un développement de cette méthode a permis d'analyser les sections arbitraires non armée ou armée, les sections endommagées et les sections transversales renforcées en considérant des multicitrères de performance (la compression, l'aire fissurée et la position de la résultante de toutes les forces) via une l'enveloppe d'interaction 3D  $P-M_x-M_y$  (Stefan & Léger, 2010).

Les méthodes précédentes présentent quelques limitations et les hypothèses simplifiées suivantes :

- La distribution des contraintes normales est linéaire, c'est-à-dire que la théorie de poutre est utilisée pour analyser une section arbitraire. Le problème de la section profonde (les poutres profondes), de la charge concentrée et de l'interaction hydromécanique dans la fissuration, n'est pas vraiment validé avec la théorie de poutre.

- La section en béton armé est seulement considérée par le problème de rupture en résistance ultime. Le mécanisme de la rupture du glissement des armatures, n'est pas considéré surtout les vieux piliers avec les armatures lisses qui ont besoin d'une importante longueur de développement et d'ancrage pour développer une pleine résistance.

#### **2.4.3 Cisaillement, $V_x$ - $V_y$ -T**

Dans cette section, on présente les méthodes de calcul des contraintes de cisaillement ( $V_x$ - $V_y$ -T) dans la littérature pour les structures en béton non armé et en béton armé avec des sections transversales trapues « squat cross-section ». Dans ce cas, les déformations en cisaillement sont notables et l'hypothèse des sections transversales planes qui restent planes n'est pas valide et devient questionable. Les deux sources de cisaillement sont les efforts tranchants ( $V_x$ - $V_y$ ) et le moment de torsion (T). Pour le problème de cisaillement causé par les efforts tranchants, les méthodes de calcul peuvent être divisées en trois groupes : (1) la méthode simplifiée par le modèle de bielles et tirants (MBT) ; (2) la méthode de « poutre de Timoshenko » ; (3) la méthode basée de la théorie d'élasticité.

La première méthode est utilisée fréquemment dans les codes applicables pour concevoir et vérifier la résistance des structures en béton armé. Cette méthode représente le champ de déplacement ou des contraintes par une fonction quelconque. Il faut déterminer la zone en compression et en tension afin d'identifier un modèle de treillis qui est bien adapté au comportement des structures. Ruiz et Muttoni (2007) ont développé des versions de la méthode des éléments finis (MEF) pour déterminer les champs de déplacements ou des contraintes. À partir de ces résultats, les modèles de bielles et tirants sont construits automatiquement. Cette méthode est bien adaptée avec le modèle de charges simples et les modèles existants. Cependant, les structures sont soumises à des charges compliquées avec plusieurs modèles de treillis possibles. Dans ce cas, le calcul a besoin d'un logiciel de MEF pour trouver les champs de déplacements et de contraintes.

La deuxième méthode est présentée par Cowper (1966) utilisant un coefficient de correction pour calculer l'aire effective de cisaillement et tenir compte la déformation en cisaillement présumée constante sur la sections sous l'action de l'effort tranchant. La méthode énergétique est utilisée pour déterminer le coefficient de cisaillement. On fait l'hypothèse qu'une distribution constante de cisaillement sur une section équivalente qui doit avoir l'énergie de déformation en cisaillement

approximativement égale à l'énergie de déformation réelle sur la section considérée. Il y a deux approches pour formuler le coefficient de cisaillement : (1) la fonction de gauchissement ; (2) la fonction de contraintes.

La dernière méthode est basée sur la théorie d'élasticité. Le champ de contraintes admissibles est utilisé par Vu-Quoc et Léger (1992) afin de trouver la distribution de contraintes de cisaillement sur les éléments ayant des sections variables selon sa longueur (les propriétés sectionnelles sont variables). La théorie de champs en compression modifiée (MCFT) est présentée par Vecchio et Collins (1986) afin d'analyser le cisaillement des structures en béton armé. La MCFT est basée sur les valeurs moyennes des déformations et des contraintes pour établir les équations d'équilibre, les conditions de compatibilités de contraintes et les relations entre les déformations – contraintes. Une technique développée est basée sur la MCFT et la MEF afin de faire la simulation d'une section élancée ou trapue sous l'action des contraintes de cisaillement (Palermo & Vecchio, 2007). Pavazza et Matoković (2016) ont développé une solution approximative basée sur la théorie de poutre de Vlasov pour analyser les contraintes sur la section en ajoutant trois paramètres indépendants au gauchissement causées par le cisaillement. Dikaros et Sapountzakis (2014) ont présenté une solution par BEM pour les sections soumises aux effets de cisaillements non-uniformes incluant la déformation gauche due à l'effort tranchant. Les résultats ont présenté la distribution non linéaire de contraintes normales en considérant l'effet secondaire du cisaillement par le développement d'une fonction secondaire de gauchissement mais cette solution a été appliquée sur les matériaux élastiques et composites.

Le problème de cisaillement de torsion incluant les efforts tranchants ( $V_x$ - $V_y$ - $T$ ) est formulé par les solutions analytiques et numériques afin d'analyser une section quelconque en matériau élastique par Pilkey (2002). Stefan et Léger (2012) ont présenté un algorithme d'extension de la méthode de gravité qui est basée sur la théorie de l'élasticité et sur la MEF 2D pour analyser les contraintes de cisaillement sur la section pour un élément structural ayant des sections quelconques de géométrie variable selon la longueur en béton non armé et fissuré sous l'action  $V_x$ - $V_y$ - $T$ .

Les méthodes ci-dessus présentent l'analyse sectionnelle en cisaillement qui seront utilisées dans nos travaux de recherches. Il faut les modifier pour les adapter aux caractéristiques d'un pilier d'évacuateur ayant des propriétés variables selon sa longueur en raison de la géométrie structurale. Dans ce contexte, les développements originaux que nous proposons dans ce projet de recherche

doctoral toucheront les trois points suivants : (a) la déformation gauche due aux cisaillement doit être considérée pour la section profonde; (b) les éléments fibres seront utilisés afin d'évaluer la variation des propriétés sectionnelles selon la longueur tout en considérant l'équilibre et la compatibilité des déformations le long de la structure ;(c) la distribution de contrainte normale non linéaire pour la section profonde; (d) la matrice de rigidité de la section ayant des termes de Timoshenko pour l'effet primaire de cisaillement et des termes de cisaillement secondaire due à la déformation gauche.

#### **2.4.4 Torsion et gauchissement**

Dans la littérature, le problème de torsion est divisé en deux types principaux : la torsion de St-Venant et la torsion de gauchissement. Les hypothèses pour ces deux types sont différentes : (a) l'angle de rotation varie linéairement selon la longueur de la membrure pour la torsion de St-Venant; (b) le changement de rotation n'est pas linéaire, mais quelconque pour la torsion non uniforme. La solution générale pour tous les cas de torsion est formulée par la méthode des éléments finis en utilisant l'approche de Vlasov et la fonction de gauchissement par Schulz et Filippou (1998). De plus, la torsion de gauchissement est divisée en deux catégories par Pilkey (2002): (a) la torsion du gauchissement non restreinte; (b) la torsion du gauchissement restreinte.

Les solutions de la torsion de St-Venant ont été présentées depuis les années soixante en se basant sur la théorie de l'élasticité par la description analytique originale de St-Venant (Timoshenko & Goodier, 1970) et la solution numérique par la méthode des éléments finis de Herrmann (1965). Le paramètre principal qui doit être déterminé est la constante de torsion ( $J$ ). Pilkey (2002) a utilisé deux approches pour déterminer ce paramètre et analyser les contraintes de cisaillement: (a) en utilisant la fonction de gauchissement ; (b) en utilisant la fonction de contrainte.

D'autre part, le paramètre géométrique principal qui est intitulé « la constante de gauchissement ( $C_w$  ou  $\Gamma$ ) » est défini par le problème de « flexion-torsion » en considérant l'influence de la torsion au gauchissement par Mohareb et Nowzartash (2004). Sapountzakis et ses collègues ont mené beaucoup de recherches sur le problème de torsion au gauchissement. Sapountzakis (2000) a utilisé la théorie de l'élasticité et trois contraintes du tenseur associé. Ce sont deux contraintes de cisaillement causées par la torque,  $T$ , et une contrainte normale causée par le bi-moment,  $B$  (analogie de la flexion  $M_x, M_y$ ). L'effet de cisaillement secondaire, qui est causé par le bi-moment

dans le calcul de la déformation au gauchissement sur les sections élastiques, est décrit par Mokos et Sapountzakis (2011). Au niveau des sections élastiques et composites, Sapountzakis et Dikaros (2015) ont présenté une méthode incluant les sections gauchies sous l'action du cisaillement qui cause les contraintes normales et de l'effet secondaire de bi-moment causé par la torsion (Figure 2.12). Les distorsions dues aux efforts tranchants sont définies par les efforts internes supplémentaires dans la Figure 2.12b. Les étapes de calcul sont décrites dans le Tableau 2.3.

Tableau 2.3 : Générations des contraintes et équations équilibrées (Sapountzakis & Dikaros, 2015).

Torsion non uniforme (a)			
$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P \end{Bmatrix}$	Génération du gauchissement ( primaire ) $\rightarrow$	$\sigma_{zz}^P$	Équation d'équilibre de variation $\rightarrow$
$\boxed{\psi_z^P}$			$\frac{\partial \sigma_{zz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^S}{\partial y} = 0$
$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^S \\ \tau_{yz}^S \end{Bmatrix}$	Génération du gauchissement ( secondaire ) $\rightarrow$	$\sigma_{zz}^S$	Équation d'équilibre de variation $\rightarrow$
$\boxed{\psi_z^S}$			$\frac{\partial \sigma_{zz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^T}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^T}{\partial y} = 0$
Flexion non uniforme (b)			
$\sigma_{zz}^P$	Équation d'équilibre de variation $\rightarrow$	$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P \end{Bmatrix}$	Génération du gauchissement ( primaire ) $\rightarrow$
$\frac{\partial \sigma_{zz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^P}{\partial y} = 0$			$\sigma_{zz}^S$
			Équation d'équilibre de variation $\rightarrow$
			$\frac{\partial \sigma_{zz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^S}{\partial y} = 0$

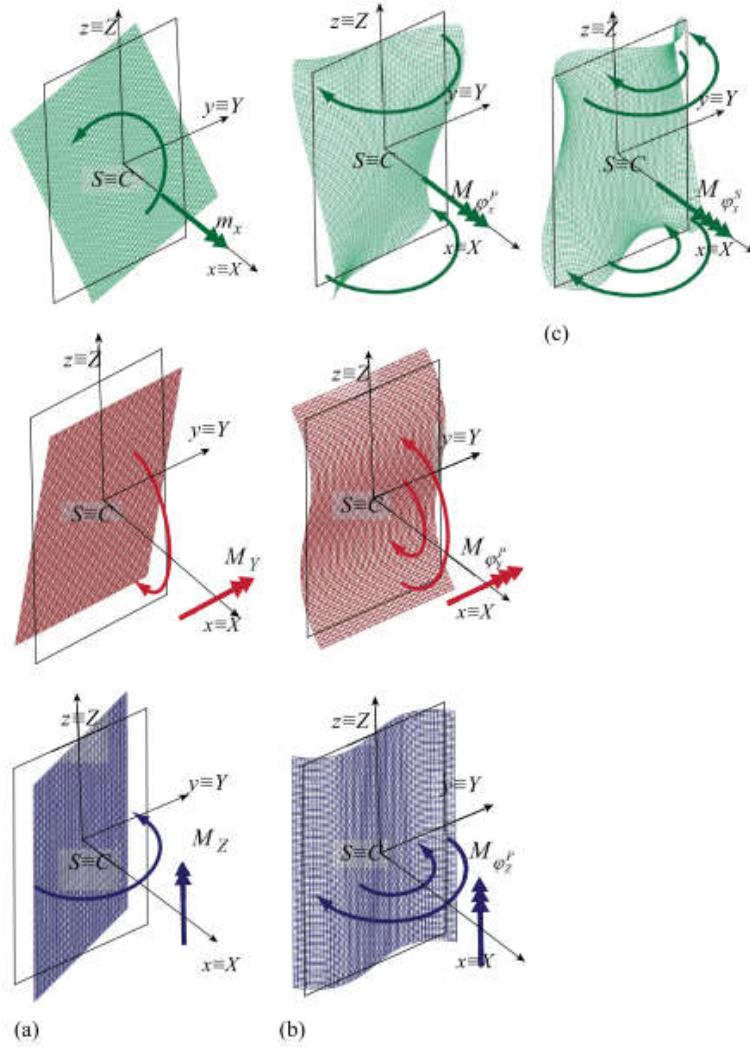


Figure 2.12 Les modes des déformations sur la section : (a) les modes primaires du moment de flexion et de torsion ; (b) les modes secondaires de cisaillement causant les distorsions ; (c) l'ordre secondaire de distorsion pour le bi-moment (Sapountzakis & Dikaros, 2015)

Pour un pilier d'évacuateur de crue, une analyse a été présentée par Stefan et Léger (2012) pour une section arbitraire sous l'action 3D et la pénétration d'eau des sous-pressions dans les fissures. La torsion de gauchissement est considérée sur la section fissurée par la méthode des éléments finis, mais cette solution n'a pas considéré l'influence de la contrainte normale de gauchissement en déterminant la position de l'axe neutre ou l'aire fissurée de la section. Les limitations des méthodes précédentes sont les suivantes :

- L'analyse sectionnelle est considérée, mais les propriétés des structures peuvent varier au long d'élément en raison de la géométrie, des charges et de la fissuration, la compatibilité des

déformations le long de la structure n'est pas prise en compte ;

- Il y a des méthodes qui présentent les formulations pour les éléments élastiques, mais ils ne considèrent pas de matériaux fissurés ;
- L'apport des contraintes de cisaillement n'est pas considéré pour les déformations de gauchissement dues aux cisaillements ( $V_x, V_y$ ) sur le problème des sections trapues. L'interaction de PMM-VVT n'est pas considérée afin d'analyser une section quelconque.

## 2.5 Développement des éléments fibres

Dans cette partie, nous discutons du problème d'analyse non linéaire de structures en béton armé, non armé, ou en béton faiblement armé par les éléments fibres. L'élément fibre est défini par l'intégration de sections discrétisées en fibres selon l'axe longitudinal de l'élément. Le principe de l'élément fibre est présenté à la Figure 2.13. Selon l'approche, on peut diviser les éléments fibres en deux groupes principaux : (1) les éléments basés sur la flexibilité ; (2) les éléments basés sur la rigidité. Selon l'analyse des charges appliquées, les éléments sont divisés : (a) en éléments en flexion composée  $P-M_x-M_y$ ; (b) en éléments fibres en cisaillement  $V_x-V_y$ ; (c) en éléments en torsion avec le gauchissement,  $T$ .

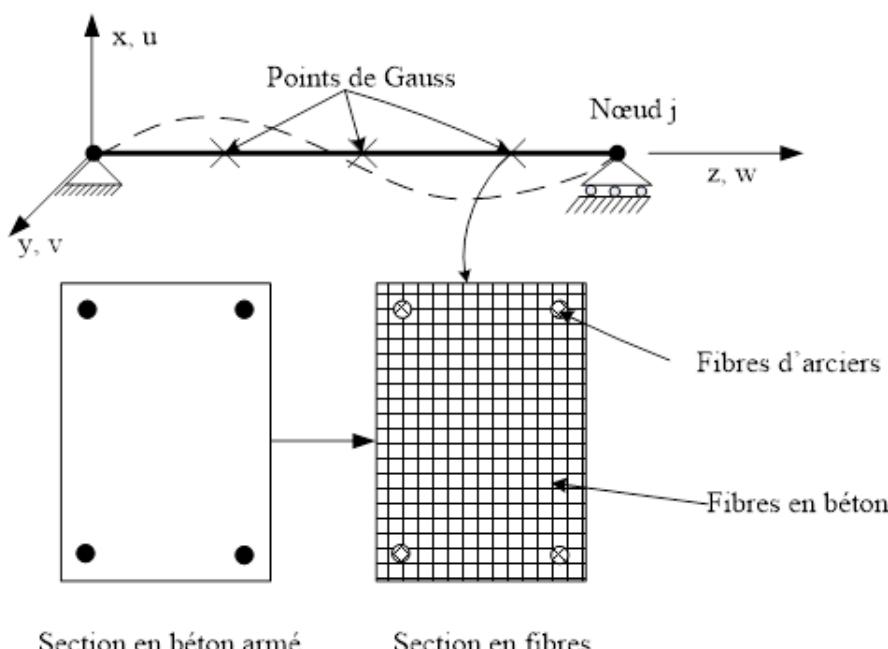


Figure 2.13 Principe d'un élément fibre quelconque (adaptée de Le Corvec (2012))

## **Les éléments basés sur la rigidité**

L'approche la plus commune dans la formulation des éléments finis dans les logiciels commerciaux est la méthode des déplacements (ou rigidité). Cette approche est basée sur les fonctions d'interpolation appropriées pour les déplacements (axiaux et transversaux) d'un élément. Généralement pour les éléments filaires de type poutres-poteaux, on utilise des polynômes cubiques de Hermite pour déterminer le champ de déplacement et les fonctions de forme pour le déplacement axial, qui présentent la solution exacte pour la poutre linéaire élastique et prismatique. Neuenhofer et Filippou (1997) et Le Corvec (2012) ont indiqué que cette approche donne des résultats qui représentent des variations de courbure linéaire et des déformations axiales constantes le long de l'élément. Cependant, la formulation en rigidité présente plusieurs inconvénients dans l'analyse non linéaire. Ces limitations peuvent être traitées par le choix des fonctions d'interpolation de déplacement avec des ordres supérieurs.

## **Les éléments basés sur la flexibilité**

Les formulations des éléments basés sur la flexibilité utilisent des fonctions d'interpolation pour les efforts internes. Pour la des structures, ces formulations sont simples à utiliser car elles reposent sur l'équilibre des efforts internes et externes appliqués aux DDL. Les polynômes sont faciles à définir pour satisfaire l'équilibre des éléments dans un sens rigoureux telle que la force axiale constante et la variation linéaire de moment de flexion en l'absence des charges d'élément. Ces fonctions d'interpolation représentent la solution exacte pour les équations gouvernantes, indépendamment de la géométrie et la loi constitutive des éléments de poutre. Les erreurs de discrétisation susceptibles d'apparaître souvent dans la méthode de rigidité ne se produisent pas avec la méthode de flexibilité.

Neuenhofer et Filippou (1997) ont évalué le modèle de rigidité et de flexibilité pour la formulation des éléments fibres pour les poutres-poteaux structuraux avec comportement non linéaire de matériaux. La méthode de flexibilité, qui utilise des fonctions des forces exactes, présente la solution ayant seulement des erreurs causées par l'intégration numérique. Cette limitation peut se traiter par l'augmentation du nombre de points d'intégration numériques. Les principales difficultés de cette méthode sont leur non-disponibilité dans les logiciels d'éléments finis comme ABAQUS, ANSYS, SAP 2000 qui propose des éléments filaires prismatiques basés sur les polynômes cubiques d'interpolation des déplacements. L'autre désavantage est dans la procédure de la solution

des équations d'équilibres des éléments. La méthode de flexibilité a besoin de convertir la matrice de flexibilité de l'élément en matrice de rigidité puis passer à l'ajout des mouvements de corps rigides. Cet algorithme peut être instable dans quelques cas lorsque la matrice de flexibilité est singulière. Par conséquent, l'algorithme de la méthode de flexibilité est plus complexe que celui de la méthode de rigidité. Pourtant, la méthode de rigidité, qui est basée sur les fonctions d'interpolation de déplacement, a besoin de raffiner la discrétisation et de l'effort de calcul plus élevé pour obtenir une précision comparable.

### **2.5.1 Éléments fibres en flexion composée, $P\text{-}M_x\text{-}M_y$ (PMM)**

Les recherches sur les éléments fibres ont été menées depuis les années quatre-vingt-dix du siècle dernier. Neuenhofer et Filippou (1998) ont présenté ces formulations pour analyser des structures de géométries quelconques en se basant sur la théorie de poutre d'Euler - Bernoulli. Le problème de poutre-poteaux a été traité par Taylor, Filippou, Saritas et Auricchio (2003) utilisant les formulations mixtes de la méthode des éléments finis incluant la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko afin d'analyser des structures élastiques sous l'action de force axiale, des forces latérales et de moment en flexion. Lee et Filippou (2009) ont utilisé les formulations mixtes ayant des sections fibres avec des points d'intégration pour analyser une poutre sous l'action du moment de flexion incluant le cisaillement par la poutre de Timoshenko. Jafari, Vahdani et Rahimian (2010) ont développé la matrice de flexibilité de l'élément ayant la géométrie quelconque incluant l'effet de cisaillement par la théorie de poutre de Timoshenko. Cependant, ces méthodes sont appliquées aux éléments ayant un matériau homogène et non fissuré (souvent en acier).

En considérant les structures en béton armé, Zeris et Mahin (1991) se sont servis du modèle d'éléments fibres basé sur la méthode de flexibilité pour analyser les structures en béton armé en prenant les éléments de poutre-poteaux sous l'action de PMM, mais en excluant l'effet de cisaillement dans la réponse et en utilisant le comportement de matériaux uni axiaux. Spacone, Filippou et Taucer (1996) ont développé les formulations basées sur la méthode de flexibilité avec des éléments fibres de poutre-colonnes pour l'analyse non linéaire statique et dynamique des cadres en béton armé avec l'hypothèse que les sections planes restent planes, perpendiculaires à l'axe longitudinal, en ne considérant pas l'effet du cisaillement et de la liaison - glissement ("bond-slip"). Marmo (2007) a présenté les formulations analytiques par les éléments fibres pour capturer la réponse non linéaire des sections arbitraires en béton armé sous l'action de PMM. Dans sa thèse,

deux approches ont été employées pour l'estimation de la résistance ultime d'une section arbitraire en béton armé par l'approche tangentielle améliorée et le développement des lois constitutives élasto-plastiques.

Les méthodes précédentes sont utilisées pour les structures ayant un matériau homogène ou du béton armé. L'hypothèse des "sections planes restent planes, perpendiculaires à l'axe longitudinal" est considérée pour formuler le problème par les éléments de poutre-poteaux. Lee et Filippou (2009) ont développé un modèle d'éléments fibres pour une section singulière par les formulations mixtes de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli en utilisant le principe de Veubeke–Hu–Washizu avec des fonctions d'interpolation des contraintes explicites sur la section de l'élément. Kostic et Filippou (2012) ont présenté sur l'influence du nombre de points d'intégration sur la section fibre de l'élément de poutre-poteaux sous l'action de PMM, de l'effet des contraintes résiduelles dans les armatures et de l'effet de fissuration dans le béton armé.

Dans le cas des ouvrages hydrauliques, il y a trois problèmes principaux qui doivent être considérés : (a) l'influence de sous-pression dans les fissures ; (b) l'hypothèse des sections planes devient questionable dans le cas des sections profondes ; (c) la fissuration du béton et la loi constitutive pour les éléments en béton non armé.

### **2.5.2 Éléments fibres en cisaillement, $V_x$ - $V_y$**

L'approche classique utilisée des éléments fibres de poutre, est de négliger l'effet de cisaillement et de prendre l'hypothèse d'Euler - Bernoulli : les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe de la poutre. Les premières solutions pour tenir compte des déformations en cisaillement sont basées sur la théorie de poutre de Timoshenko Cowper (1966) qui assume que la déformation en cisaillement est constante sur la section et sur la longueur de l'élément. Pour obtenir une distribution plus précise, la théorie de poutre d'ordre supérieur a été proposée pour éviter la nécessité d'un facteur de correction de cisaillement. Les polynômes d'interpolation de troisième ordre sont utilisés pour estimer la variation des déformations transversales de cisaillement sur la hauteur de section. Ces recherches ont été résumées par Ghugal et Shimpi (2001) dans une revue extensive de littérature des théories de cisaillement de poutre.

Le développement des modèles d'éléments finis basés sur la méthode de rigidité (déplacement) représente un défi important pour inclure les déformations de cisaillement. Plusieurs propositions

existent pour la poutre de Timoshenko. Les polynômes linéaires ont été utilisés pour l'interpolation indépendante des déplacements transversaux et de rotation dans la poutre de Timoshenko pour estimer l'effet de cisaillement. Pourtant, quand la poutre est élancée, l'effet de cisaillement peut être négligeable. Cependant, le problème de convergence mathématique est un grand inconvénient de cette approche, on appelle ce phénomène : "le verrouillage de cisaillement". Pour éviter ce phénomène, il existe deux méthodes : (1) on utilise l'intégration réduite des termes de cisaillement en utilisant les polynômes d'interpolation d'ordre équivalent ; (2) on utilise des polynômes d'interpolation d'ordres différents pour les déplacements transversaux et les rotations. Les recherches récentes ont bien traité le verrouillage de cisaillement. Triantafyllou et Koumousis (2011) ont proposé les formulations extensives de la méthode de déplacements en prenant la théorie de poutre de Timoshenko et les fonctions de formes exactes pour contrôler le problème de verrouillage de cisaillement. Un modèle d'éléments finis a été développé par Stramandinoli et La Rovere (2012) pour l'analyse non linéaire des poutres en béton armé incluant les déformations de cisaillement en utilisant la théorie de poutre de Timoshenko et un élément de trois nœuds ayant sept degrés de liberté par un élément. Li, Li et Xie (2013) ont développé un modèle de sections fibres basé sur la théorie de poutre de Timoshenko en utilisant les fonctions de forme interdépendante de cisaillement-flexion pour l'analyse non linéaire des éléments poutre-poteau incluant les déformations axiales, de flexion et de cisaillement. Les fonctions de forme de l'élément, qui sont dérivées de la solution exacte homogène des équations d'équilibre de l'hypothèse de Timoshenko, sont utilisées pour traiter le verrouillage de cisaillement. Une solution 2D de Lignola, Spena, Prota et Manfredi (2017) a été présentée afin d'obtenir la matrice de rigidité exacte en considérant l'effet de cisaillement de premier ordre pour une poutre élastique.

Le développement des modèles des éléments finis basés sur la méthode de flexibilité présente des avantages par rapport à la méthode de rigidité. L'avantage principal de la méthode de flexibilité est la distribution des forces internes à l'axe longitudinal des éléments de poutre-poteau qui est exactement posée par les équations d'équilibre dans la configuration isostatique auxiliaire. L'effet de cisaillement calculé par cette méthode présente l'avantage selon lequel la déformation de cisaillement est automatiquement considérée et le blocage en cisaillement est éliminé. Saritas et Filippou (2009) ont appliqué cette méthode pour établir un modèle de fibre multiaxiale non linéaire en utilisant les formulations mixtes entre la méthode de flexibilité et les fonctions de formes pour capturer la réponse élastique et inélastique de la théorie de poutre de Timoshenko avec un élément

pour une travée. Pour un élément structural en béton armé, Ceresa, Petrini, Pinho et Sousa (2009) ont présenté un modèle constitutif des fibres biaxiales incluant la déformation de cisaillement par l'élément de poutre-poteau de Timoshenko 2D. La solution basée sur la méthode de flexibilité utilise le modèle de poutre de Timoshenko ayant la géométrie non linéaire décrite par Jafari et al. (2010) mais ce problème a été considéré seulement pour des sections en matériau homogène. Récemment, Vásquez, Llera et Hube (2016) ont proposé un modèle des éléments fibres pour analyser un mur en béton armé sous l'action des forces axiales, du moment de flexion et de l'effort tranchant. L'effet de cisaillement dans ce modèle est considéré par la méthode du champ de compression modifiée (MCFT).

Par conséquent, pour analyser les ouvrages hydrauliques, les modèles des éléments fibres précédents doivent être modifiés pour considérer les points suivants : (1) considération de l'effet de variation de géométrie des sections le long des éléments et de matériau non homogène, fissuré (comme le béton non armé et le béton faible armé); (2) considération de l'effet de cisaillement sur la section profonde des pilier d'évacuateur de crue; (3) considération des fissures existantes sur la longueur de l'élément.

### **2.5.3 Éléments fibres sous l'action de torsion, $T$**

L'effet de torsion se décline selon deux types principaux : (a) la torsion de St-Venant; (b) la torsion de gauchissement. Dans cette partie, on revoit la littérature sur la torsion pour les éléments fibres.

La méthode des éléments finis, qui est basée sur l'élément de poutre multi-fibres a montré sa capacité à calculer précisément le comportement cyclique non linéaire des éléments structuraux minces sous l'action de P-M-M. Cependant, Mazars, Kotronis et Davenne (2002) ont indiqué que les éléments de poutres multi-fibres provoquent une grande erreur dans l'analyse de l'effet de cisaillement pour les poutres profondes (ou les poutres courtes) ou les éléments soumis à la torsion. Dans la littérature, il y a plusieurs auteurs qui ont modifié les éléments multi-fibres pour faire des corrections des déformations de cisaillement qui proviennent du gauchissement de la section sous l'action de torsion. Casaux, Ragueneau, Kotronis et Mazars (2004) et Mazars, Kotronis, Ragueneau et Casaux (2006) ont présenté un modèle des éléments multi-fibres de poutre pour le problème de la torsion et du cisaillement. Pour contrôler le verrouillage en cisaillement, les auteurs ont utilisé les fonctions d'interpolation d'ordre supérieur en développant la théorie de poutre de Timoshenko

pour les éléments de poutres multi-fibres. Le problème de gauchissement restreint obtenu est basé sur l'équilibre élastique initial de la section soumise à la torsion. Bairan et Mari (2007) ont développé les formulations pour la matrice de rigidité de la section et le vecteur de force de sollicitation tenant compte de la déformation et de la distorsion due à la torsion de la section. Les déplacements supplémentaires induits par la déformation et la distorsion sont calculés à chaque itération. Pelletier (2015) a développé un modèle numérique des éléments fibres (WCMM - Wide-Column Model with Modules) dans le logiciel de calcul OpenSees afin de considérer la torsion pour l'analyse sismique non linéaire de noyaux en béton armé. Ce modèle est constitué par des modules qui sont les segments planaires de la section et des colonnes composées d'éléments fibres non linéaires situées au centroïde de chaque module. Récemment, Capdevielle, Grange, Dufour et Desprez (2016) ont utilisé le modèle de Mazars et al. (2006) et développé des éléments fibres 3D pour les sections de formes arbitraires et en matériaux non linéaire, particulièrement pour le béton non armé et béton armé.

Cependant, le problème des ouvrages hydrauliques avec des sections profondes et l'influence de la section gauchie n'est pas négligeable. Il est donc nécessaire de développer un modèle d'éléments fibres ayant des sections profondes en considérant les effets secondaires de la torsion pour le matériau fissuré.

#### **2.5.4 Éléments fibres sous l'action 3D, P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub>-V<sub>x</sub>-V<sub>y</sub>-T**

Dans la littérature, la réponse sous l'effet des charges 3D par les éléments fibres a été rarement discutée. Une solution est présentée dans logiciel Opensees (2016) sous le vocable de "section Aggregator" pour analyser le problème des charges 3D. Cette approche est basée sur une combinaison de chaque effet de force dans un modèle de déplacements - forces de la section. Chaque force est considérée par un degré de liberté (DDL) en utilisant le comportement de matériau uniaxial. Il n'y a pas d'interaction entre les DDL. Cette limitation ne représente pas de comportement réel de la structure.

Ribas (2011) a présenté un modèle d'éléments fibres 3D pour l'analyse sous l'action des charges 3D. L'élément fibre de ce modèle avec deux nœuds et 12 DDL est l'intégration des sections en fibres rectangulaires. Ce modèle ne considère pas de déformations en cisaillement et en gauchissement.

Sapountzakis (2013) a créé un nouveau modèle d'éléments fibres 3D ayant 14 degrés de liberté (DDL) par chaque élément à partir des analyses sectionnelles de Mokos et Sapountzakis (2011) pour calculer les structures élastiques sous l'action des charges 3D (Figure 2.14). Murín, Kutiš, Královič et Sedlár (2012) ont développé un modèle d'éléments de poutres ayant 14 DDL avec la matrice de transformation des coordonnées 14x14 afin d'analyser les structures élastiques soumises aux charges 3D mais excluant la théorie de poutre de Timoshenko.

Le Corvec (2012) a proposé un modèle 3D des éléments fibres de poutre par les formulations mixtes qui sont basées sur un potentiel de Hu-Washizu incluant le déplacement de gauchissement avec les fonctions d'interpolation indépendantes pour le profil de gauchissement sur la section et la distribution de gauchissement sur l'axe d'élément. La déformation gauche est considérée par les degrés de liberté supplémentaires internes,  $n_\omega$  par quelques points sur la section transversale (Figure 2.15). En même principe, Capdevielle, Grange, Dufour et Despres (2016) ont développé un modèle d'éléments fibres par la méthode de déplacements incluant les déformations gauches dues à la torsion et aux cisaillements utilisant les degrés de liberté supplémentaires internes par les points de maillages (Figure 2.16)

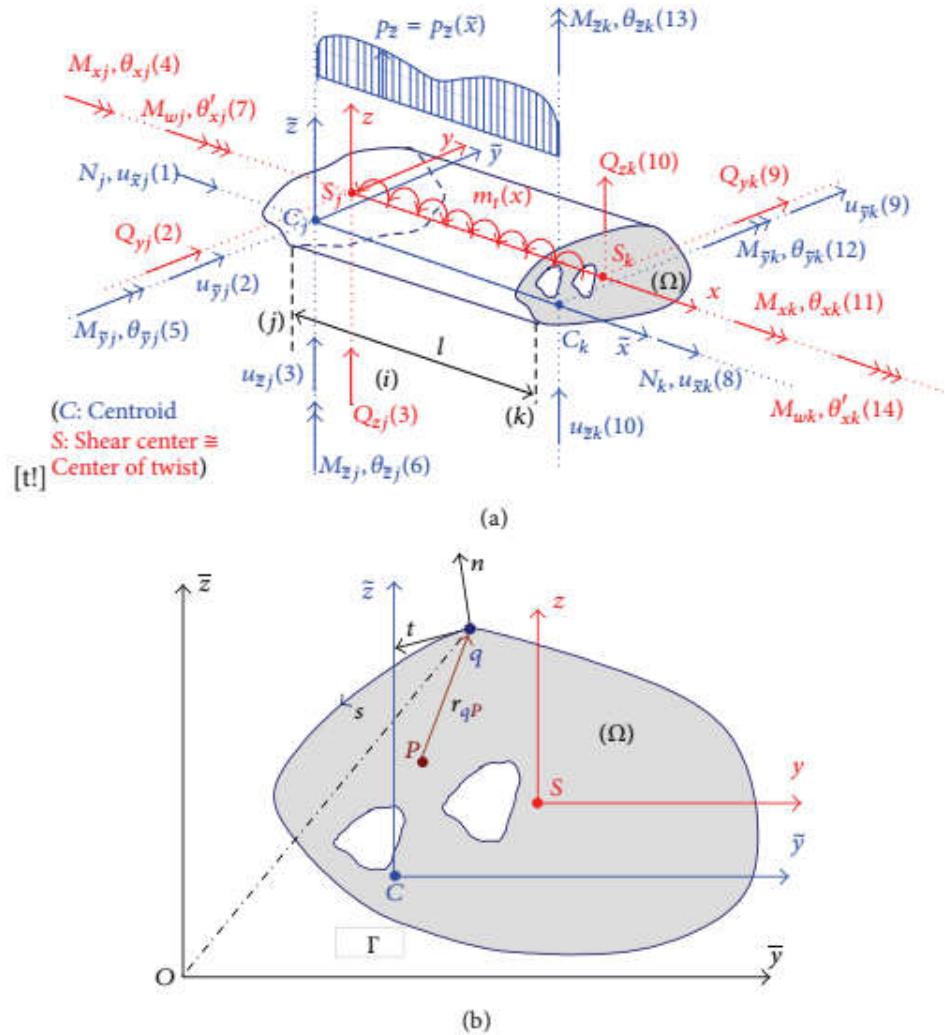


Figure 2.14 Élément poutre ayant 14 DDL de Sapountzakis (2013)

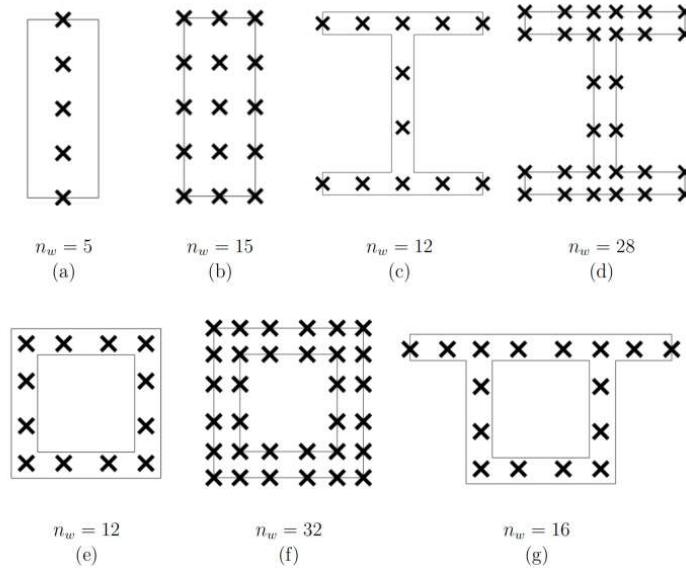


Figure 2.15 Notions de degrés de liberté supplémentaires internes  $n_w$  (Le Corvec, 2012)

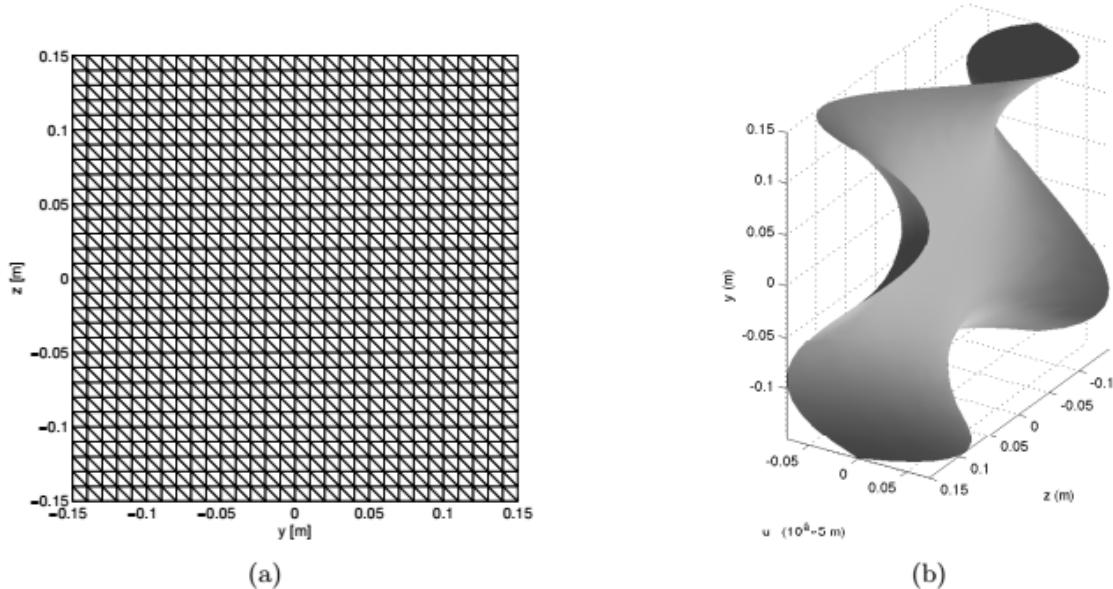


Figure 2.16 Notions de degrés de liberté supplémentaires internes  $n_w$  (Capdevielle et al., 2016) :  
 (a) Maillage de la section pour calculer la fonction de gauchissement; (b) Fonction de gauchissement de la section

Récemment, Sapountzakis et Dikaros (2015) ont développé un nouveau modèle élastique d'éléments finis filaires (poutre-poteaux) 3D incluant les effets de cisaillement secondaires et l'effet de la torsion due au gauchissement secondaire (Figure 2.17). Cet élément a 20 DDL total

avec chaque nœud ajoutant deux DDL pour l'effet de cisaillement secondaire et deux DDL pour l'effet de bi-moment primaire et secondaire. Cependant, cet élément n'est pas développé dans le contexte d'éléments fibres permettant la fissuration de la section. Tous les modèles précédents cités sont résumés au Tableau 2.4.

Par conséquent, il faut s'inspirer des modèles existants pour les adapter aux ouvrages hydrauliques ayant des sections profondes surtout pour bien représenter le comportement des piliers en béton non armé. Il s'agit (1) de développer un nouveau modèle d'éléments fibres 3D pouvant inclure l'effet des déformations non uniformes de cisaillement et de torsion qui causent le gauchissement de la section; (2) d'introduire un modèle constitutif du matériau fissuré et non linéaire ; (3) de considérer des propriétés géométriques variables selon l'axe de l'élément, incluant des fissures existantes et les sous-pressions.

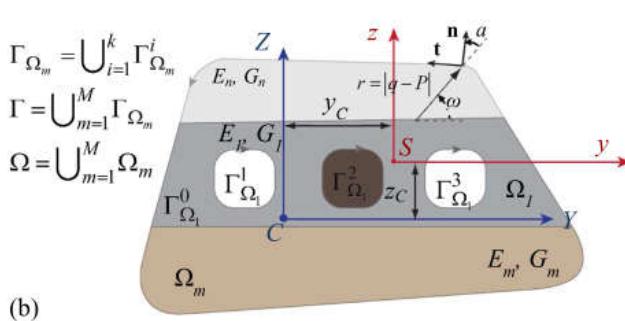
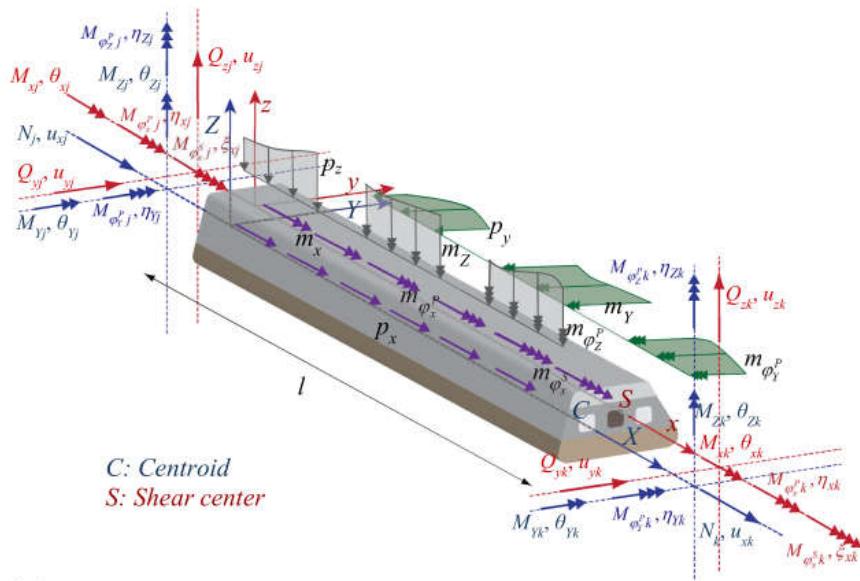


Figure 2.17 Élément de poutre ayant 20 DDL de Sapountzakis et Dikaros (2015)

Tableau 2.4 Résumé de modèles des éléments fibres importants pour le développement du sujet de recherche

Auteurs	Niveau analysé	Distribution des contraintes normales	Effet de cisaillement	Effet de torsion	Matériaux	Nombre de DDL par élément et commentaires
Stefan et Léger (2012)	Section	Linéaire	FEM 2D Sans gauchissement	FEM 2D Gauchissement	Béton fissuré	Non applicable (pas d'éléments)
Ribas (2011)	Structure	Linéaire	FEM2D Sans gauchissement	FEM 2D Sans gauchissement	Élastique	12
Le Corvec (2012)	Structure	Non linéaire	Euler – Bernoulli et Timoshenko	FEM 2D Gauchissement	Élastique	$12+ 2n_w$ $n_w$ : est le nombre de points choisis sur la section. Il est difficile de trouver $n_w$ optimal
Sapountzakis (2013)	Structure	Non linéaire	FEM 2D Sans gauchissement	FEM 2D Gauchissement	Élastique	14
Sapountzakis et Dikaros (2015)	Structure	Non linéaire	FEM 2D Gauchissement primaire	FEM 2D Gauchissement primaire, secondaire	Élastique	20
Capdevielle et al. (2016)	Structure	Non linéaire	FEM 2D Gauchissement	FEM 2D Gauchissement	Béton non armé, Béton armé, fissuré	$12+ 2n_w$ (très grand) - $n_w$ : est le nombre de points de maillage de la section.
FIDAM 3D (Do, 2020)	Structure	Non linéaire	FEM 2D Gauchissement primaire, secondaire	FEM 2D Gauchissement primaire	Béton non armé, fissuré, Sous-pressions hydrostatiques	18 - Le nombre de DDL est fixé à 9 par noeud. - La géométrie variable est traitée par l'augmentation du nombre de points de Gauss.

## 2.6 Analyse non linéaire de structures en béton non armé et faiblement armé par modèles constitutifs différents

Les méthodes d'analyses structurales tridimensionnelles (3D) peuvent être divisées en trois catégories des approches simplifiées aux plus complexes : (1) méthode de Gravité (MG) ; (2) éléments fibres 3D; (3) éléments finis 3D. Les principaux logiciels commerciaux et de recherche qui permettent chaque méthode ci-dessus, sont présentés au Tableau 2.5. Chaque logiciel a besoin des paramètres différents et est adapté à un aspect particulier dans la réalité. Le logiciel CADAM 3D est bien adapté pour analyser la stabilité structurale des barrages sous l'action des charges unidimensionnelles amont-aval et des sous-pressions. Les modèles dans OpenSees et ABAQUS peuvent analyser les structures en considérant tous les effets de charges appliquées mais il est difficile de modéliser l'effet des sous-pressions dans les fissures. Les modèles d'éléments fibres 3D dans OpenSees considèrent seulement les effets de cisaillement de premier ordre (la théorie de poutre de Timoshenko).

Lu, Xie, Guan, Huang et Lu (2015) ont développé un modèle OpenSees d'éléments de coques multi-couches (Multi-layer shell element model) pour bien capturer les effets couplés de flexion en plan ou hors plan ainsi que le cisaillement direct ou le couplage de cisaillement – flexion pour les structures en béton armé. Cette approche utilise les modèles constitutifs uni-axiaux pour les matériaux (béton, acier) qui sont implémentés pour chaque couche modélisée. ABAQUS 3D avec éléments solides peut considérer tous les effets des déformations en cisaillement et est bien adapté pour les analyses non linéaires du béton. Cependant, il est difficile de modéliser une structure particulière comme les ouvrages hydrauliques parce que les demandes en ressources de calcul et d'expertise sont importantes, l'introduction d'un grand nombre d'éléments de contact le long des joints de reprises de bétonnage pose souvent des difficultés numériques de convergence, le post-traitement pour le calcul des indicateurs de stabilité est difficile (longueurs des fissures, facteur de sécurité au glissement). L'introduction des sous-pression et la présence des fissures existantes sont laborieuses. Dans ce projet de recherche doctorale, un nouveau logiciel, FIDAM3D, est développé pour analyser la stabilité structurale 3D des structures hydrauliques en béton avec sections profondes en vue d'améliorer les modèles dans OpenSees, CADAM 3D, mais en étant moins de complexe que les éléments finis solides 3D (ABAQUS, SAP 2000) (voir Tableau 2.6).

Tableau 2.5 Caractéristiques des logiciels pour l'analyse structurale

Logiciel/ Index	CADAM 3D (MG)	OpenSees Fibre 3D	OpenSees Aggregator (Fibre 3D)	OpenSees Shells	SAP 2000 (3D solide)	ABAQUS (3D solide)	FIDAM3D (Filaire 3D)
Modèle constitutif de matériaux	Béton non armé fissuré, Hydromécanique	Béton non armé Béton armé Fissuré	Béton non armé Béton armé fissuré	Béton non armé Béton armé fissuré	Élastique	Béton non armé Béton armé fissuré	Béton non armé Hydromécanique fissuré
Modèle	RDM	Euler – Bernoulli	Timoshenko	FEM 3D (coque)	FEM 3D (solide)	FEM 3D solides	Élément Fibre 3D
Flexion	x	x	x	x	x	x	x
Cisaillement - premier ordre	-	-	x	x	x	x	x
Cisaillement gauche	-	-	-	x	x	x	x
Torsion S. Venant	-	x	x	x	x	x	x
Torsion gauche	-	-	-	x	x	x	x
<b>Paramètres</b>							
$f_t$	x	x	x	x	x	x	x
E	x	x	x	x	x	x	x
$E_{ts}$	-	x	x	x	-	x	-
$G_F$	-	-	-	-	-	x	-
$f_c$	x	x	x	x	-	x	x
$\phi$	x	-	-	-	-	x	x
c	x	-	-	-	-	x	x
Sous-pressions	x	-	-	-	-	-	x

$f_t$ : la résistance en traction du béton ;

$G_F$  : Énergie de fissuration ;

E : Module d'élasticité ;

$\phi$  : Angle de friction ;

$E_{ts}$  : Module d'adoucissement en tension ;

c : Coefficient de cohésion

## 2.7 Conclusions

Selon la revue de littérature, les principaux travaux de recherche pertinents à la problématique de recherche de ce projet doctoral ont été présentés afin de développer les éléments fibres proposés. Les principales limitations des travaux de recherche répertoriés sont les suivantes :

- La distribution de contraintes normales est linéaire sur la section profonde en béton non armé ;
- La section fissurée et la pénétration d'eau sous pression dans les fissures est difficile à traiter par les éléments finis classiques ;
- L'effet de cisaillement qui cause le moment de gauchissement (analogie avec le moment en flexion) doit être considéré pour construire les éléments fibres 3D pour le problème des sections profondes ;
- L'effet de torsion due au gauchissement qui cause le bi-moment doit être considéré pour capturer la contribution de cet effet sur la distribution et l'intensité des contraintes normales ;
- L'interaction entre les efforts internes (effet du gauchissement en cisaillement et en torsion sur les contraintes normales) doit être considérée afin d'évaluer la solution non linéaire entre les sections considérées par les éléments fibres 3D.
- Le demande de calcul des indicateurs de performance pour les sections soumises aux charges 3D et aux sous-pressions pour les sections quelconques, est plus précise de la méthode de gravité (CADAM 3D) et moins complexes de la méthode des éléments finis (ABAQUS).

# CHAPITRE 3 FORMULATION D'ÉLÉMENTS FIBRES 3D POUR LES SECTIONS PROFONDES

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose un nouveau modèle d'éléments fibres 3D tenant compte des relations contraintes-déformations dues au cisaillement et au gauchissement des sections (le gauchissement restreint) sous l'effet des charges 3D ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$ - $T$ ) et de la présence des souspressions et de la fissuration qui est considérée (Figure 3.1). Ce modèle est un outil pour évaluer la stabilité d'un pilier en béton non armé à l'aide d'indicateurs de performance classiques tel que le facteur de sécurité au glissement et l'aire fissurée.

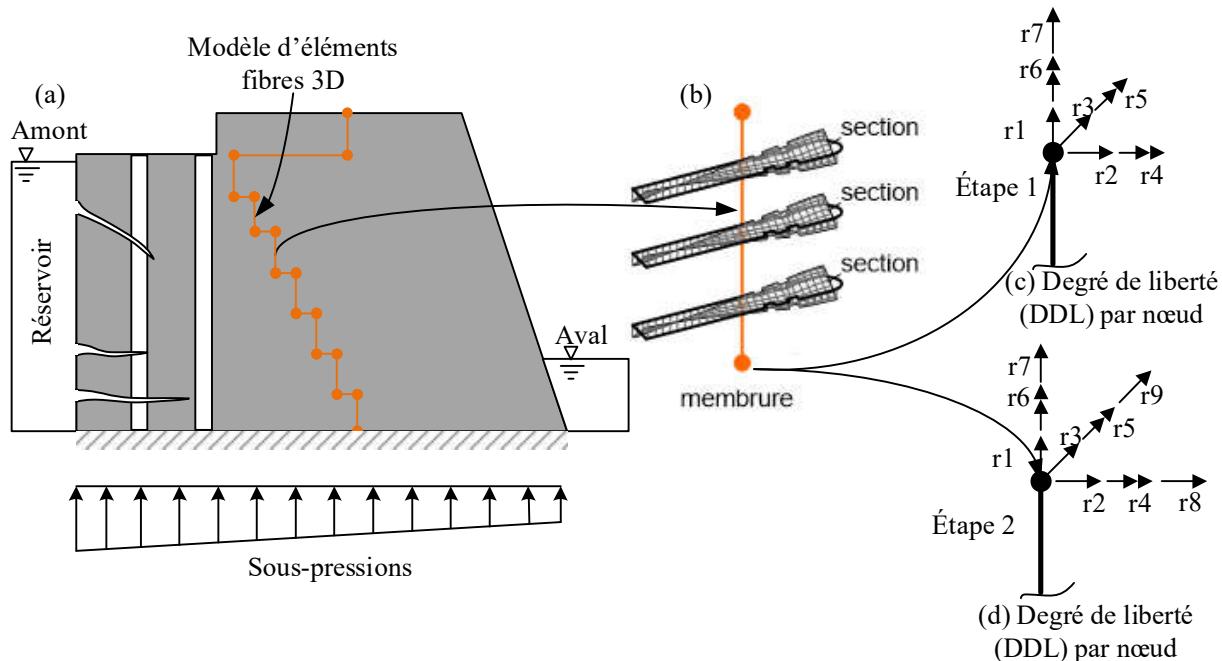


Figure 3.1 Modèle d'éléments fibres 3D (a) : Pilier typique ; (b) : Élément fibre; (c) : Élément fibre de Timoshenko incluant l'effet de torsion (7DDL par nœud) ; (d) : Élément fibre incluant l'effet de cisaillement secondaire et l'effet de torsion (9DDL par nœud).

Dans ce chapitre, la formulation d'éléments fibres 3D est développée suivant les items qui sont résumés à la Figure 3.2.

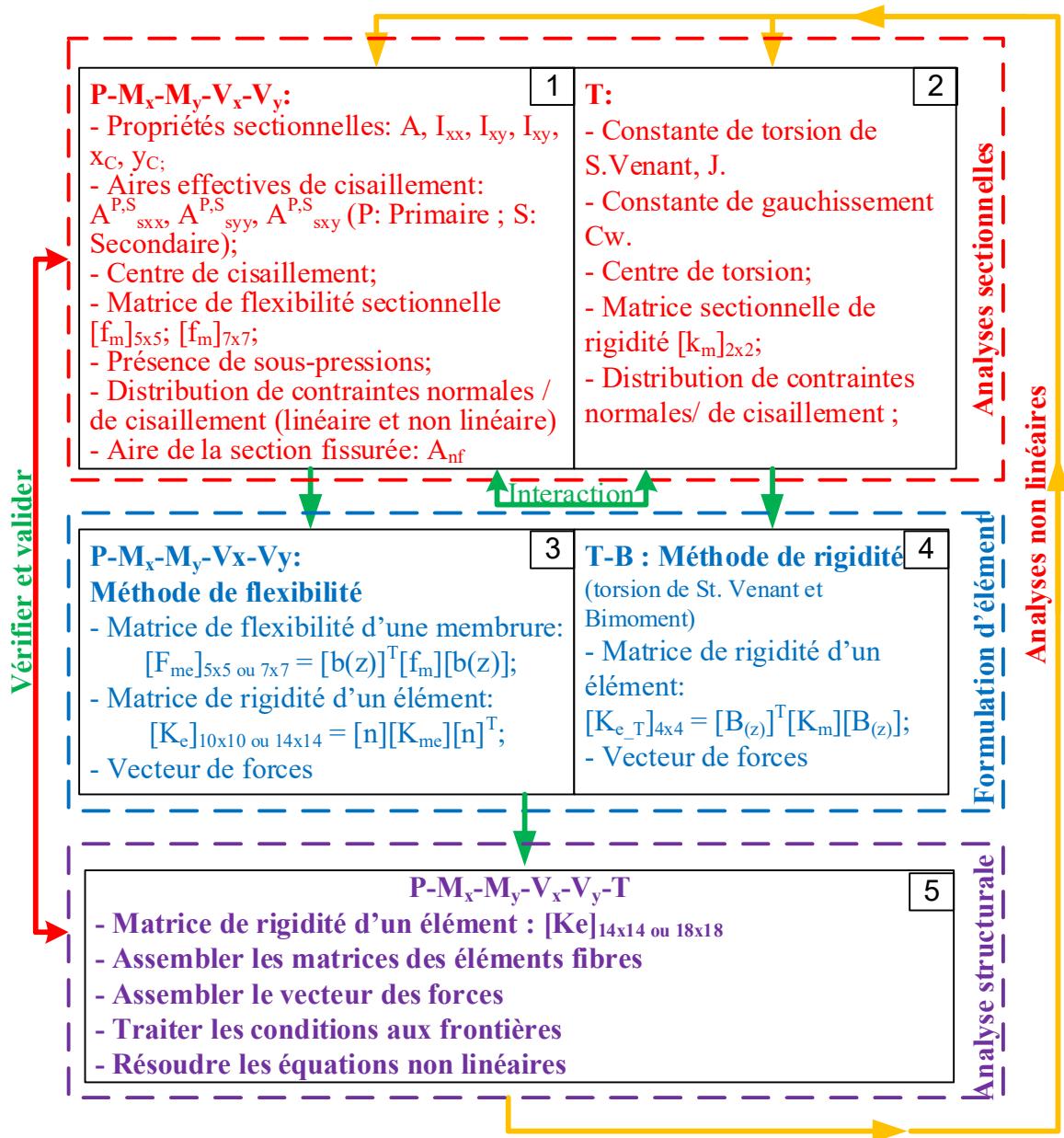


Figure 3.2 Méthodologie de formulation de modèles d'éléments fibres 3D

(1) Modèles constitutifs des matériaux (béton non armé et faiblement armé): Le comportement en compression du béton non armé est basé sur le comportement du matériau linéaire élastique. Le comportement en tension est basé sur le matériau fragile;

(2) Analyses sectionnelles par la méthode des éléments finis 2D : Les contraintes normales et de cisaillement sur la section analysée considèrent deux effets : primaire et secondaire.

- L'effet en flexion biaxiale primaire est adapté de la théorie de poutre Spaccone et al. (1996) utilisant les éléments triangulaires pour discréteriser la section à l'aide du logiciel *Gmsh* (Geuzaine & Remacle, 2009).
- L'effet de cisaillement primaire et l'effet de torsion (St-Venant et gauche) sont adaptés des algorithmes de Stefan et Léger (2011) à l'aide des fonctions primaire de gauchissement pour le cisaillement de primaire et secondaire pour la torsion en ajoutant le calcul des coefficients de cisaillement de Timoshenko (coefficients primaire).
- Les effets secondaires de cisaillements sont considérés par les fonctions de gauchissement secondaires en se basant sur les algorithmes de Dikaros et Sapountzakis (2014) avec une modification de la fonction de gauchissement secondaire de cisaillement afin de capturer l'effet des déformations de cisaillement non uniforme sur la distribution de contraintes normales (qui deviennent non linéaires) pour les sections profondes. Les constantes des propriétés secondaires (moment d'inertie en flexion secondaire et l'aires effectives de cisaillement secondaire) sont calculées à l'aide des fonctions de gauchissement secondaires afin de formuler les éléments fibres 3D dans ce projet.

(3) Formulations d'éléments fibres : une méthode mixte est utilisée pour formuler un élément fibre 3D par l'intégration numérique dans la coordonnée naturelle.

- La méthode de flexibilité est utilisée afin de formuler un élément fibre sous l'action de la flexion composée et de l'effet de cisaillement. La méthode de rigidité est utilisée pour introduire l'action de la torsion (St-Venant et torsion non uniforme).
- Un élément fibre ayant des extensions rigides est proposé afin de développer un modèle de type « brochette » qui est représentatif d'une structure ayant une géométrie non uniforme.

(4) L'effet de sous-pressions dans les fissures est adapté de la modification des sous-pressions de Stefan et Léger (2008) sur les sections fissurées. Cet effet est considéré afin de construire un modèle d'éléments fibres hydromécaniques non linéaires en considérant l'interaction de charges appliquées PMMVVT et les SP pour déterminer l'aire fissurée des sections analysées aux points de Gauss. Dans la solution de Stefan et Léger (2008), l'aire fissurée est déterminée seulement par interaction de PMM et la SP excluant de VVT;

## 3.2 Modèles constitutifs pour le béton non armé

### 3.2.1 Fissuration en traction et contraintes admissibles

Le modèle de béton non armé considéré est divisé en deux types : (1) linéaire ; (2) non linéaire. La relation de contraintes - déformations du béton en compression est supposé linéaire. Pour le comportement en compression, le module élastique du béton,  $E_c$ , est considéré avec la relation linéaire de déformations - contraintes (Figure 3.1.a). Cette relation est illustrée par l'équation (3.1).

$$\sigma_c = \varepsilon_c E_c \quad (3.1)$$

Pour le comportement en tension, on propose un modèle non linéaire fragile pour le béton. Le modèle élasto-fragile lorsque la contrainte de tension du béton atteint la valeur de la résistance à la traction, le béton se fissure instantanément (Figure 3.1.b). Ces relations de déformations-constraintes du béton en tension sont présentées par les équations (3.2).

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \varepsilon_t E_c \leq f_t \text{ avec } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \\ \sigma_t &= 0 \text{ avec } \varepsilon_t > \varepsilon_{cr} \end{aligned} \quad (3.2)$$

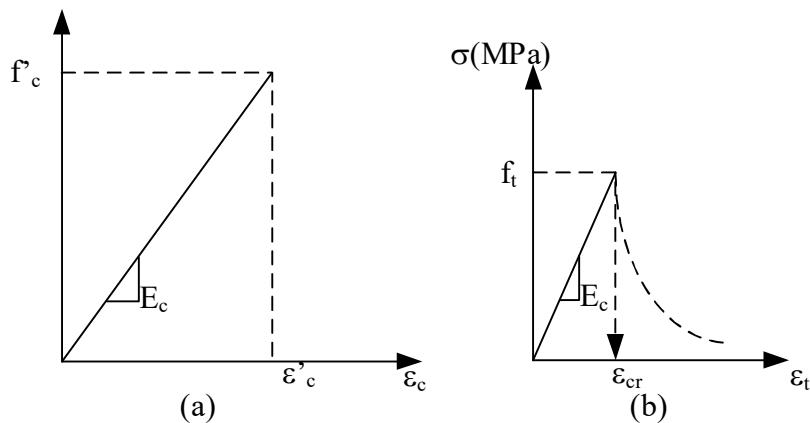


Figure 3.3 Relation de contraintes - déformation pour le béton : (a) béton en compression ; (b) béton en tension.

Le modèle constitutif hydromécanique pour le béton non armé considère la présence des sous-pressions dans chaque partie de la section. Cette distribution dépend de la zone fissurée de la section, la hauteur de l'eau (amont et aval) et si la section est drainée ou non drainée (Figure 3.4).

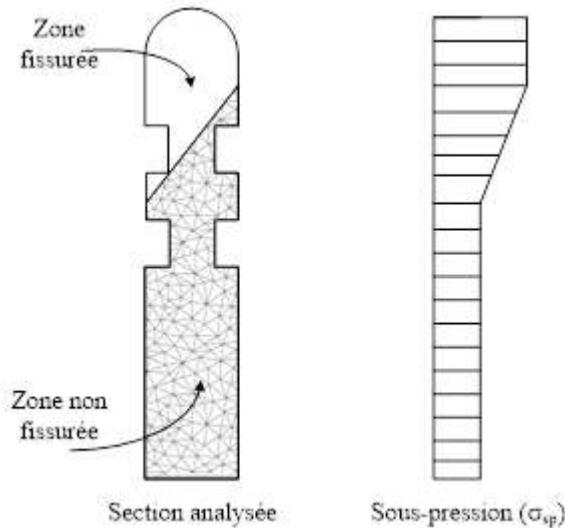


Figure 3.4 Modèle de sous-pressions avec différence des niveaux d'eau amont et aval (Stefan & Léger, 2008)

### 3.2.2 Rupture en compression-cisaillement (Mohr-Coulomb)

Le critère de Mohr-Coulomb est probablement le plus utilisé dans la pratique pour vérifier la sécurité contre le glissement. Sa simplicité est un avantage majeur et il sera utilisé dans ce travail. En considérant la capacité en tension d'un joint de reprise de bétonnage, l'enveloppe de Mohr-Coulomb est présentée à la Figure 3.5. Il y a des codes et logiciels développés utilisant cette enveloppe pour considérer les modes de ruptures pour les joints de reprises du bétonnage des ouvrages hydrauliques (CDA, 2013; FERC, 2002; USACE, 1995; CADAM 3D, 2007). Mais le calcul est appliqué pour les charges uni-axiale amont/aval. Ce travail considère la rupture en compression-cisaillement pour tous les points sur la section considérée soumise aux charges 3D afin de calculer le facteur de sécurité au glissement local et global incluant ce mode de rupture. La valeur maximale de contrainte de cisaillement,  $\tau_{max}$  est calculée par l'équation (3.3) :

$$\tau_{max} = \sigma_n \cdot \tan(\phi) + c \quad (3.3)$$

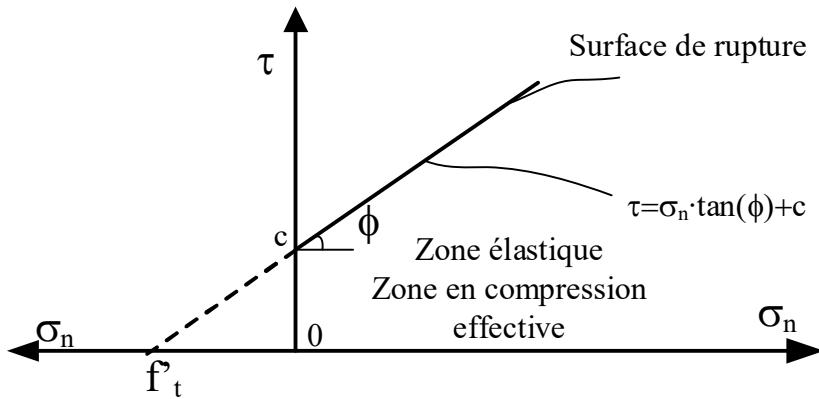


Figure 3.5 Rupture en compression-cisaillement pour les joints de reprises de bétonnage selon critère de Mohr-Coulomb

La surface de rupture est linéaire selon l'équation (3.3) en compression-cisaillement pour les joints non cohésifs, la résistance à la traction et au cisaillement est nulle et la cohésion est nulle. Dans le cas où la résistance à la traction est différente zéro, on propose que la cohésion soit effective seulement sur la zone comprimée. Donc, l'aire comprimée est mise à jour selon le critère de Mohr-Coulomb proposé dans l'équation (3.3).

### 3.3 Poutre de Timoshenko incluant la torsion gauche

Un élément fibre 3D hydromécaniques et non linéaires en béton non armé est proposé pour une membrure (Figure 3.6) par l'intégration des sections fibres le long de son axe longitudinal z. Les charges appliquées sont la force axiale (P), la flexion ( $M_x, M_y$ ), les efforts tranchants ( $V_x, V_y$ ) et la torsion ( $T_z$ ). La section fibre de l'élément en béton non armé a les propriétés sectionnelles variables selon l'axe z de l'élément ( $A(z), I_{xx}(z), I_{yy}(z), J(z)$ , etc.). Les sections quelconques sont analysées sous l'action des charges 3D incluant la présence des sous-pressions par l'interaction hydromécanique pour identifier deux zones : (a) la zone non fissurée; (b) la zone fissurée (Figure 3.6). Ces sections le long de l'axe longitudinal de la poutre sont considérées aux points d'intégration de Gauss pour obtenir les propriétés de l'élément.

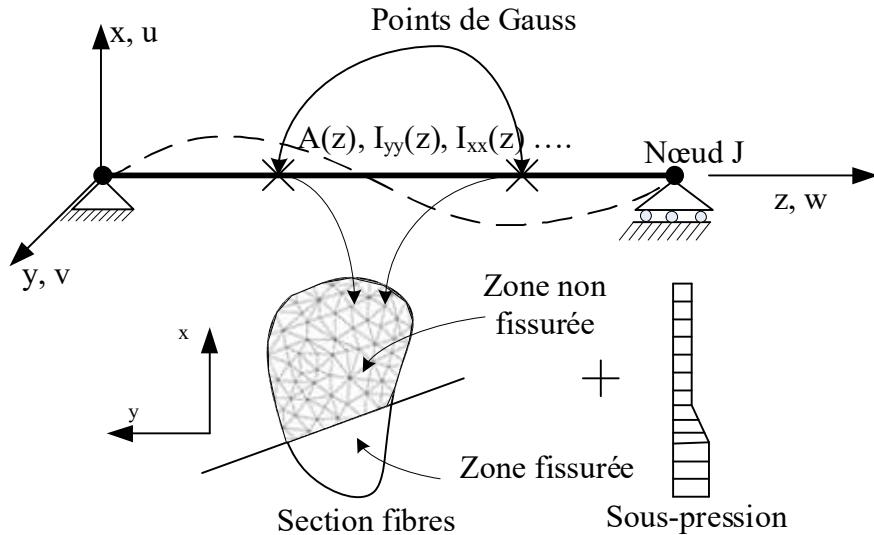


Figure 3.6: Élément fibre 3D hydromécanique et non linéaire

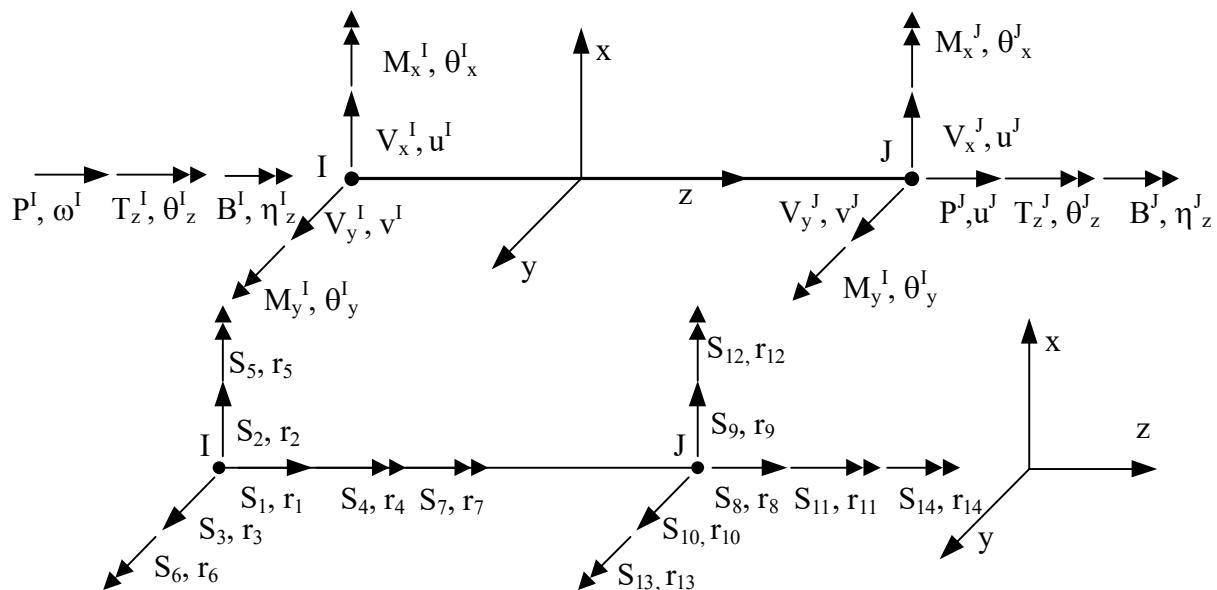


Figure 3.7 : Déplacements nodaux et forces nodales d'un élément

En considérant un élément (Figure 3.7) ayant les nœuds I et J, il y a 7 degrés de liberté (DDL) par nœud et 14 DDL totaux. Le septième DDL modélise la torsion due au gauchissement. L'effort interne qui correspond au septième DDL est le bi-moment, B (en analogie aux moments de flexion \$M\_x, M\_y\$). Le bi-moment cause la déformation gauche normale et des contraintes normales sur la section. À la Figure 3.8, les effets de torsion sont considérés à l'aide des fonctions de gauchissement

primaire,  $\psi$  et secondaire,  $\psi_s$  pour obtenir les contraintes de cisaillements primaires – St-Venant, et secondaires (voir en détail dans la section 3.3.2) et les contraintes normales causées par la torsion gauche.

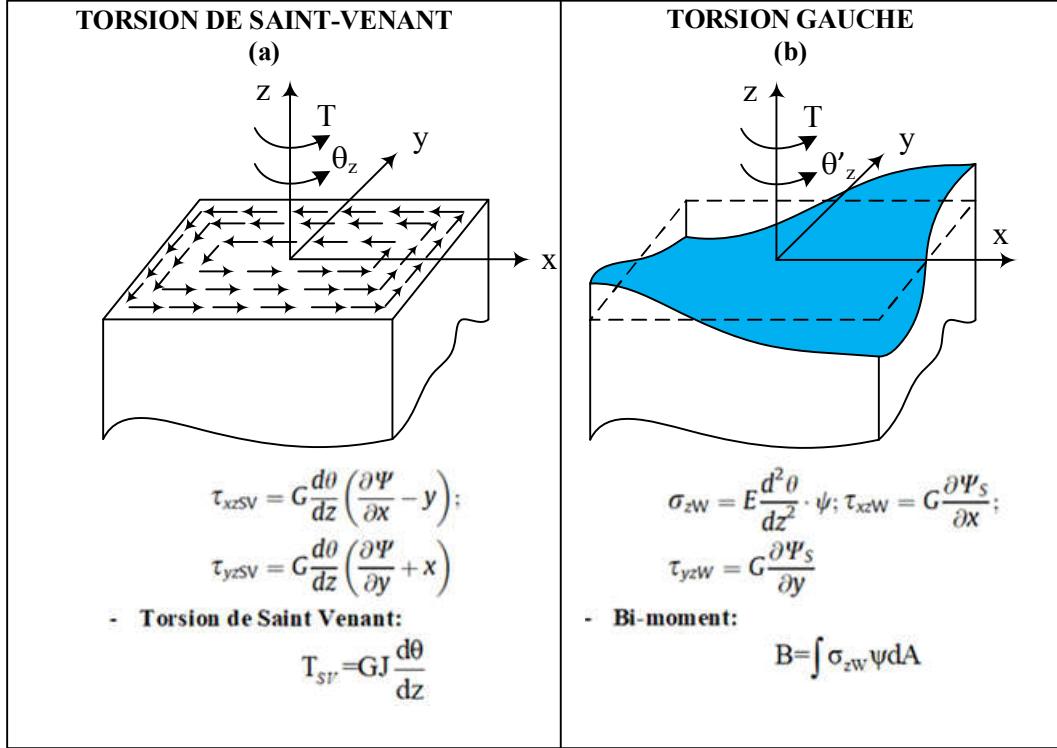


Figure 3.8 : Effets de la torsion : (a) Torsion de St-Venant ; (b) Torsion gauche

Le vecteur de déplacements est présenté par l'équation (3.4).

$$\{u^e\} = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \ r_6 \ r_7 \ r_8 \ r_9 \ r_{10} \ r_{11} \ r_{12} \ r_{13} \ r_{14}]_{14 \times 1}^T \quad (3.4)$$

Le vecteur des forces nodales correspond à :

$$\{S^e\} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ S_{10} \ S_{11} \ S_{12} \ S_{13} \ s_{14}]_{14 \times 1}^T \quad (3.5)$$

### 3.3.1 Stratégie de formulations d'un élément fibre de Timoshenko

Dans cette partie, on présente les propositions pour établir les formulations des éléments finis pour un élément fibre 3D en béton non armé en prenant la théorie de poutre incluant la distribution des contraintes et des déformations dues au gauchissement causé par la torsion. Les formulations sont divisées en trois niveaux (Figure 3.9) : (I) l'analyse des sections quelconques (le nombre de sections

est déterminé par le nombre de points d'intégration de Gauss) ; (II) la formulation de la matrice de rigidité d'un élément fibre par l'intégration numérique des sections quelconques ; (III) l'analyse des structures par l'assemblage des éléments fibres.

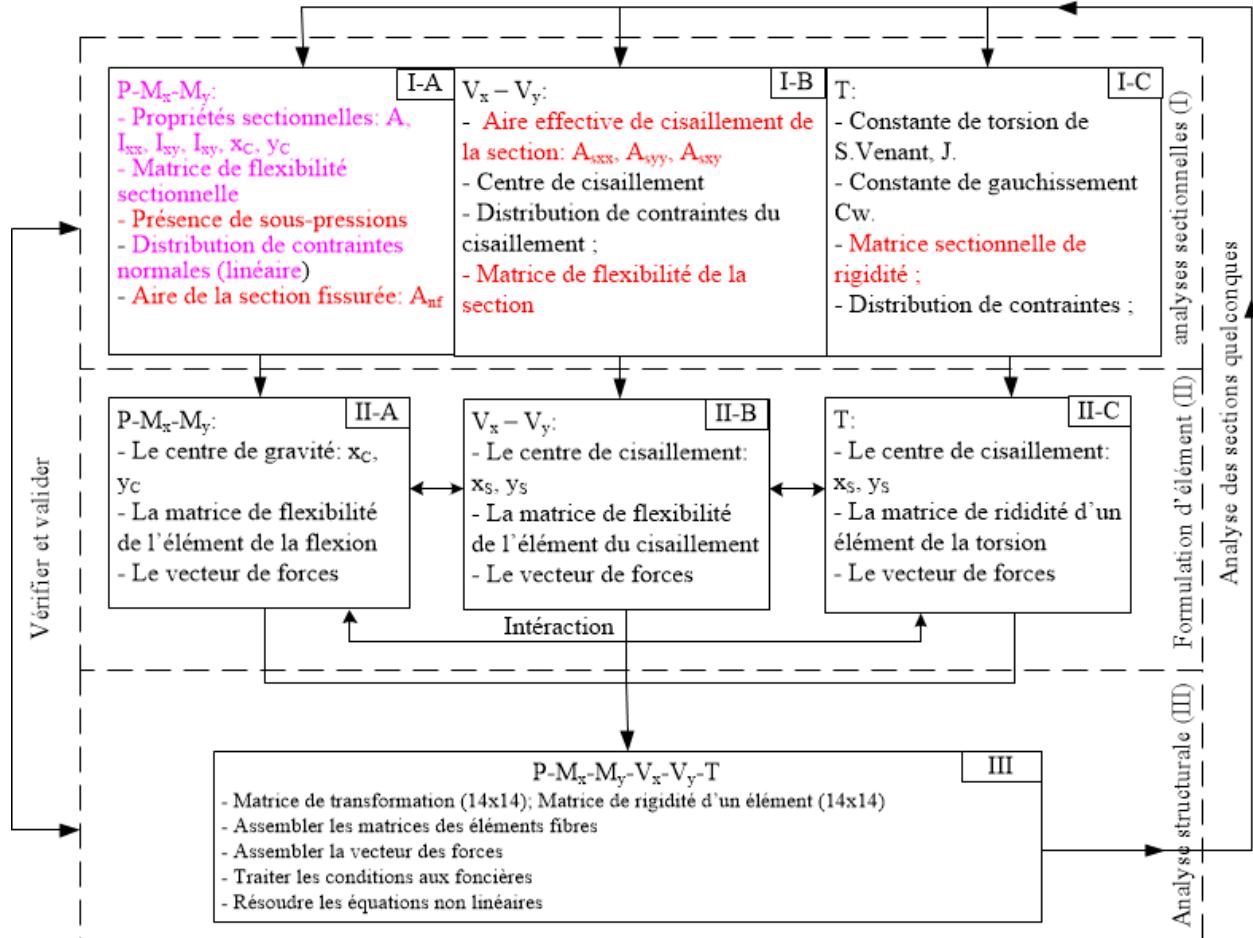


Figure 3.9: Proposition de développement des éléments fibres 3D de poutre de Timoshenko (14 DDL)

À partir de l'analyse sectionnelle de Stefan et Léger (2012), le modèle d'élément fibre 3D de la poutre de Timoshenko (14DDL) est développé pour améliorer les points suivants :

(1) Faire une analyse structurale globale en considérant l'interaction des efforts internes. La solution de Stefan et Léger (2012) a été considérée seulement une section au niveau de joint par deux effets séparés : (i) effet de PMM incluant la SP afin de déterminer l'aire compressive ; (ii) effet de VVT pour l'aire compressive obtenue de l'effet de PMM. Le modèle proposé de Timoshenko est considéré tous les deux effets ensemble pour déterminer l'aire non fissurée (avec la résistance à la traction du joint est nulle ou différente à zéro).

(2) Stefan et Léger (2012) ont considéré les sections indépendantes. Ce modèle fait une analyse par l'intégrale numérique en considérant l'interaction entre des sections analysées aux points de Gauss.

(3) L'analyse structurale globale est effectuée par l'algorithme non linéaire itératif et la distribution de la SP est mise à jour à chaque itération en implantant deux méthodes de calcul : (i) méthode de superposition de contraintes; (ii) méthode de l'utilisation de la résultante de la SP.

### 3.3.2 Analyses sectionnelles et fissuration

Les sections sont analysées pour obtenir la distribution des contraintes, les propriétés sectionnelles et la matrice de flexibilité sectionnelle (Figure 3.9.I). Quelques sections arbitraires à la position des points de Gauss sont discrétisées par des éléments triangulaires à 3 nœuds et analysés pour trois effets séparés : (1) la flexion composée ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ); (2) le cisaillement causé par les efforts tranchants ( $V_x$ - $V_y$ ) ; (3) l'effet de la torsion ( $T$ ). Les contraintes normales totales sur une section sont calculées par des algorithmes adaptées de Stefan et Léger (2011) via l'équation (3.6). On considère un élément fibre quelconque ayant une géométrie non uniforme avec la notation des paramètres indiquée à la Figure 3.10. La contrainte normale d'Euler- Bernoulli est déterminée sur une section quelconque à la position  $z$  par l'équation (3.7).

$$\sigma_z(x,y,z) = \sigma_z^P(x,y,z) + \sigma_z^W(x,y,z) \quad (3.6)$$

$$\sigma_z^P(x,y,z) = -E \left( \sigma_{0z}(z) + \sigma_{1z}(z) \left( x - x_g(z) \right) + \sigma_{2z}(z) \left( y - y_g(z) \right) \right) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{0z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{P(z)}{A(z)} \quad (3.8)$$

$$\sigma_{1z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot -\frac{RM_y(z)}{I_y(z)} \quad (3.9)$$

$$\sigma_{2z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{RM_x(z)}{I_x(z)} \quad (3.10)$$

$RM_x(z)$  : la somme de moment en flexion autour de l'axe x par rapport au centre de gravité (CG) de la section analysée ;

$RM_y(z)$ : la somme de moment en flexion autour de l'axe y par rapport au CG de la section analysée;

$P(z)$  : la somme de la force axiale au CG de la section ;

$T(z)$  : la somme de la torsion au centre de cisaillement (CC) de la section analysée;

$B(z)$  : le bi-moment au CC de la section analysée

Ces efforts internes sont calculés à l'aide des fonctions d'interpolation des forces ou des déplacements à partir des forces nodales d'un élément fibre 3D.

$\sigma_z^p(x, y, z)$ : Contraintes normales déterminées par la théorie de poutre Euler – Bernoulli.

$\sigma_z^w(x, y, z)$ : Contraintes normales causées par l'effet de torsion gauchie (Bi-moment).

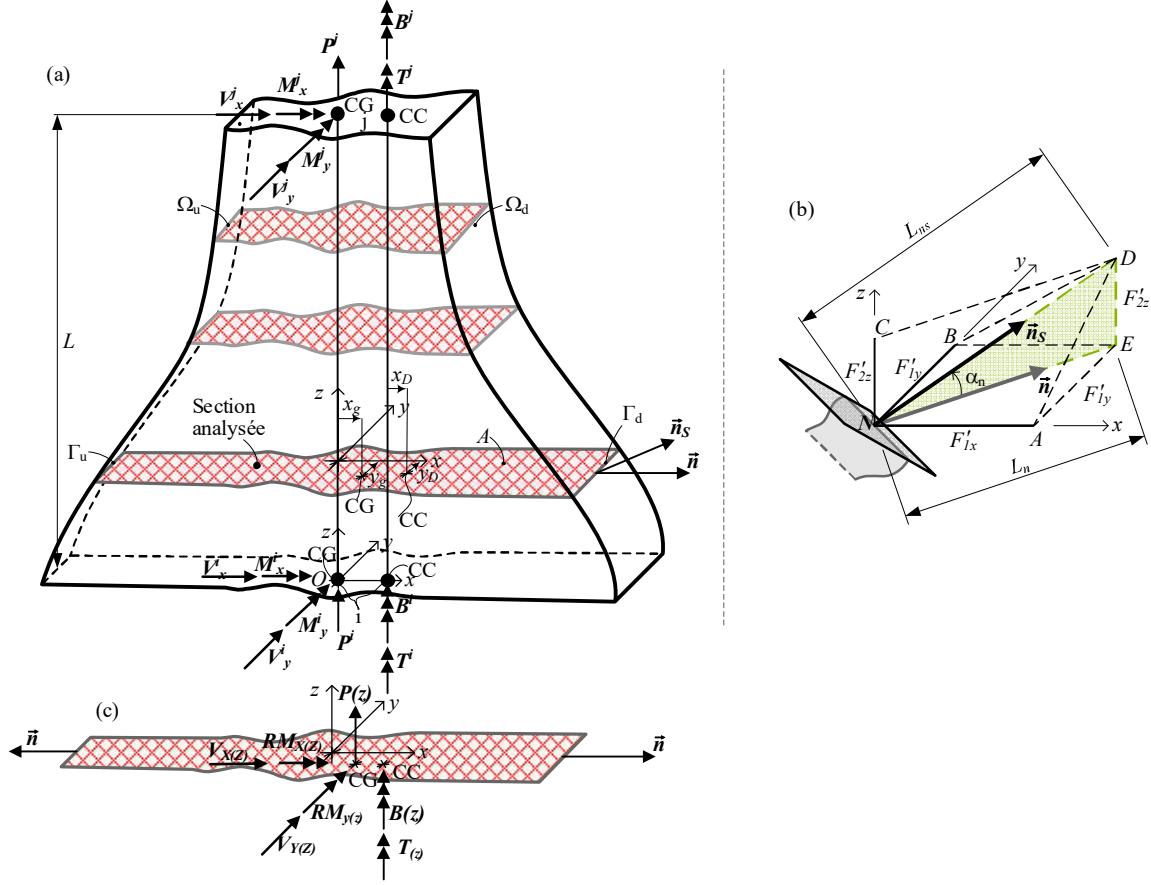


Figure 3.10 : Géométrie d'un élément fibre 3D et notions des paramètres : (a) Vue en 3D; (b) Conditions aux frontières ; (c) Section quelconque analysée

### 3.3.2.1 Flexion composée d'Euler Bernoulli

Pour l'effet de la flexion composée, l'approche de Spacone et al. (1996) est utilisée tout d'abord en se basant sur l'hypothèse « des sections qui restent toujours en planes » par les sections fibres triangulaires pour trouver la distribution de contraintes normales linéaire et la matrice de flexibilité de la section (Figure 3.9.I-A). La section est discrétisée par les triangles (Figure 3.11) à l'aide du logiciel *Gmsh* (Geuzaine & Remacle, 2009). La relation entre la déformation et la position sur la section peut être calculée linéairement  $\varepsilon(x, y, z) = I(x, y, z)d(z)$ , où  $I(x, y, z)$  est le vecteur géométrique sur la section et  $d(z)$  est le vecteur des déformations sur la section.

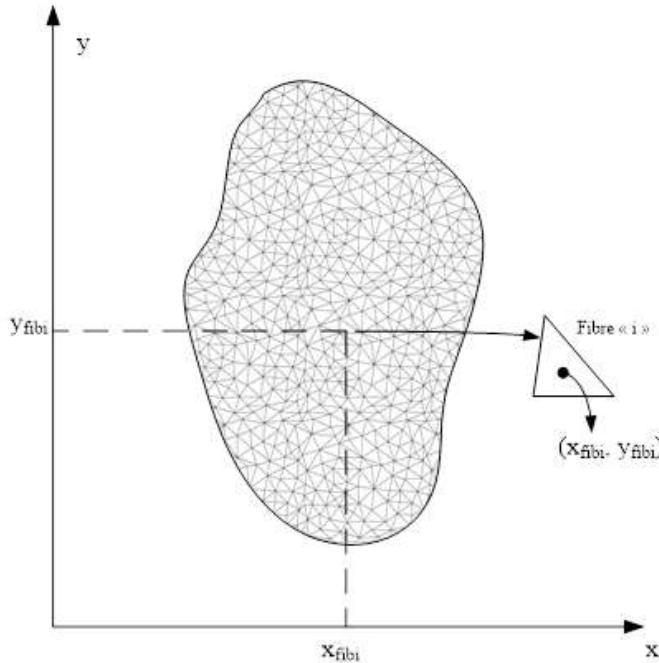


Figure 3.11 Section discrétisée par les fibres triangulaires

$$I(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$d(z) = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon(z)} & \kappa_y & \kappa_x \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

Où, x, y sont respectivement la position quelconque sur la section selon le système de coordonnées rectangulaires.  $\overline{\varepsilon(z)}$  est la déformation moyenne qui est causée par la force axiale.  $\kappa_y$  et  $\kappa_x$  sont respectivement les courbures qui sont causées par les moments en flexion selon x et y.

La déformation  $\varepsilon(x, y, z)$  est calculée par le ratio de la contrainte normale  $\sigma(x, y, z)$  et le module élastique du matériau  $E(x, y, z)$ . La matrice de rigidité, de la section,  $[k_s(z)]$  est calculée selon l'équation (3.13) :

$$[k_s(z)]_{3x3} = \int_A I^T(x, y, z) E(x, y, z) I(x, y, z) dA \quad (3.13)$$

Le vecteur de forces sur la section :

$$[D(z)]_{3x1} = \int_A I^T(x, y, z) \sigma(x, y, z) dA \quad (3.14)$$

La section est discrétisée par  $n_{fib(z)}$  fibres triangulaires. Les contraintes et déformations sont déterminées au centre de gravité d'une fibre. La matrice de rigidité de la section et le vecteur des forces sont présentés aux équations (3.15) et (3.16).

$$[k_s(z)]_{3x3} = \sum_{i=1}^{n_{fib}(z)} I^T(x_{fib_i}, y_{fib_i}, z)_{3x1} (E_{fib_i} A_{fib_i})_{1x1} I(x_{fib_i}, y_{fib_i}, z)_{1x3} \quad (3.15)$$

$$\{D(z)\} = \sum_{i=1}^{n(z)} I^T(x_{fib_i}, y_{fib_i}, z)_{3x1} \sigma(x_{fib_i}, y_{fib_i}, z) A_{fib_i} \quad (3.16)$$

Où,  $(x_{fib_i}, y_{fib_i})$  sont définis à la Figure 3.11, le centre de gravité de la fibre «  $i$  ».  $E_{fib_i}$  est le module élastique de la fibre «  $i$  ».  $A_{fib_i}$  est l'aire de la fibre «  $i$  ».

Dans le cas particulier, les axes  $x, y$  sont les axes principaux, la matrice de rigidité de la section peut être écrite par l'équation (3.17)

$$[k_s(z)]_{3x3} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_x & 0 \\ 0 & 0 & EI_y \end{bmatrix}_{3x3} \quad (3.17)$$

La matrice de flexibilité en flexion composée de la section  $[f_s^P(z)]$  est obtenue par l'inversion de la matrice de rigidité  $[k_s(z)]$ . Après l'analyse sectionnelle sous l'action de la flexion composée, les résultats obtenus sont l'aire de la section non fissurée et l'équation des contraintes normales. Ces résultats seront utilisés comme les conditions initiales pour analyser les effets de cisaillement ( $V_x, V_y$ ) et de la torsion ( $T$ ).

### 3.3.2.2 Effet de cisaillement primaire ( $V_x$ - $V_y$ )

L'effet du cisaillement propre ( $V_x, V_y$ ) sur la section (dans la boîte de Figure 3.9.I-B) est calculé en utilisant les analyses sectionnelles de Stefan et Léger (2011) pour trouver les propriétés sectionnelles (l'aire effective de cisaillement, le centre de cisaillement, la constante de torsion et la constante de gauchissement) et obtenir la distribution de contraintes sur la section fissurée. Les

fonctions primaires du gauchissement du cisaillement  $\psi_x^p$  et  $\psi_y^p$  sont utilisées pour déterminer les déformations et les contraintes du cisaillement sur la section. Les aires effectives du cisaillement ( $A_{sxx}^p$ ,  $A_{sxy}^p$ ,  $A_{syy}^p$ ) sont calculées par la méthode des éléments finis en prenant la valeur moyenne de déplacements sur la section.

Selon Stefan et Léger (2011), les déplacements sont déterminés par les intégrations (la forme des fonctions  $\phi(y, z)$  et  $\varphi(x, z)$  respecte de la condition  $\gamma_{xy} = 0$ ) :

$$u^p(x, y, z) = -\frac{\nu}{E} \int \sigma_z dx + \varphi(y, z); \quad \varphi(y, z) = -\nu \cdot \sigma_{1z} \frac{y^2}{2} - \theta(z)y \quad (3.18)$$

$$v^p(x, y, z) = -\frac{\nu}{E} \int \sigma_z dy + \phi(x, z); \quad \phi(x, z) = -\nu \cdot \sigma_{2z} \frac{x^2}{2} + \theta(z)x \quad (3.19)$$

$$w^p(x, y, z) = - \int \left( \sigma_{0z} + \sigma_{1z} (x - x_g) + \sigma_{2z} (y - y_g) \right) dz + \psi(x, y) \quad (3.20)$$

La fonction  $\psi(x, y)$  est la fonction primaire de gauchissement en cisaillement :

$$\psi(x, y) = \psi_x^p(x, y) + \psi_y^p(x, y) \quad (3.21)$$

$\psi_x^p(x, y)$ ,  $\psi_y^p(x, y)$ : Fonctions primaires de gauchissement respectivement selon l'axe x et y;

Les déformations en cisaillements sont calculées par les équations (3.50) et (3.51):

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \nu \left( x \frac{d\sigma_{0z}}{dz} + \left( \frac{x^2 - y^2}{2} - x_g x \right) \frac{d\sigma_{1z}}{dz} - x \sigma_{1z} \frac{dx_g}{dz} + x(y - y_g) \frac{d\sigma_{2z}}{dz} + x \sigma_{2z} \frac{dy_g}{dz} \right) \\ &- y \frac{d\theta}{dz} - \int \sigma_{1z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \nu \left( y \frac{d\sigma_{0z}}{dz} + \left( x - x_g \right) y \frac{d\sigma_{1z}}{dz} - y \sigma_{1z} \frac{dx_g}{dz} + \left( \frac{y^2 - x^2}{2} - y_g y \right) \frac{d\sigma_{2z}}{dz} - y \sigma_{2z} \frac{dy_g}{dz} \right) \\ &+ x \frac{d\theta}{dz} - \int \sigma_{2z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.23)$$

En prenant les équations d'équilibre dans la théorie d'élasticité (Timoshenko & Goodier, 1970), l'équation différentielle de Poisson est dérivée ( $\psi_G = \psi \cdot G$ ) et adaptée pour les problèmes 3D (Stefan & Léger, 2012) :

$$\left( \frac{\partial \tau_{xz}^p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^p}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \psi_G = f(x, y) \Big|_{z=0} \quad (3.24)$$

La section analysée est localisée à l'élévation  $z = z_0$ . La fonction  $f(x, y)$  est déterminée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \sigma_{zB}}{\partial z} + \underbrace{\frac{1}{2(1+\nu)} \int \nabla^2 \sigma_{zB} dz}_{=0 \text{ (pour plan de } \sigma_z \text{)}} = f_{fc} + x \cdot f_{fx} + y \cdot f_{fy} \quad (3.25)$$

$$f_{fc} = \frac{f_{vc}}{1+\nu}; \quad f_{fx} = \frac{f_{cx} + f_{vx}}{1+\nu}; \quad f_{fy} = \frac{f_{cy} + f_{vy}}{1+\nu}; \quad f_{cx} = \frac{V_x I_x - V_y I_{xy}}{I_c}; \quad f_{cy} = \frac{V_y I_y - V_x I_{xy}}{I_c} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} f_{vc} &= f_{1P} + f_{1RMx} + f_{1RMy} ; \quad f_{vx} = f_{2Px} + f_{2RMxx} + f_{2RMyx} ; \\ f_{vy} &= f_{2Py} + f_{2RMxy} + f_{2RMyy} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$f_{1P} = -\frac{P}{A^2} A'; \quad f_{2Px} = -\frac{P}{I_c} (I_x \dot{x}_g - I_{xy} \dot{y}_g); \quad f_{2Py} = -\frac{P}{I_c} (I_y \dot{y}_g - I_{xy} \dot{x}_g) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} f_{1RMx} &= \frac{RM_x}{I_c} (I_y \dot{y}_g - I_{xy} \dot{x}_g); \quad f_{2RMxx} = \frac{RM_x}{I_c} \left( -\frac{I_{xy}}{I_c} I_c' + I_{xy}' \right); \\ f_{2RMxy} &= \frac{RM_x}{I_c} \left( \frac{I_y}{I_c} I_c' - I_y' \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} f_{1RMy} &= \frac{RM_y}{I_c} (I_x \dot{x}_g - I_{xy} \dot{y}_g); \quad f_{2RMyx} = \frac{RM_y}{I_c} \left( \frac{I_x}{I_c} I_c' - I_x' \right); \\ f_{2RMyy} &= \frac{RM_y}{I_c} \left( -\frac{I_{xy}}{I_c} I_c' + I_{xy}' \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

**Conditions aux frontières pour le problème 3D :**

En se basant sur l'équation de la théorie d'élasticité de Timoshenko et Goodier (1970) (Équation (3.31)) Stefan et Léger (2011) ont présenté les conditions 3D aux frontières pour résoudre l'équation (3.24) dans la Figure 3.10c.

$$\tau_{xz}^p l_s + \tau_{xz}^p m_s + \sigma_z^p \cdot n_s = 0 \quad (3.31)$$

Ces conditions sont basées sur la relation entre le vecteur normal unitaire 3D de surface ( $\Omega$ ),  $\vec{n}_s$  et le vecteur normal unitaire 2D de la section ( $\Gamma$ ),  $\vec{n}$ . La surface,  $\Omega$  est déterminée par une fonction  $\Omega(x, y, z) = F_1(x, y) + F_2(z)$  et la section à la hauteur quelconque,  $z_0$ , son périmètre est déterminé par une fonction,  $\Gamma(x, y) = F_1(x, y) + F_2(z_0)$ . Selon la Figure 3.10c, on peut calculer les termes de  $\vec{n}_s$  et  $\vec{n}$  :

$$\begin{aligned} \vec{n}_s &= \left\langle \frac{F'_{1x}}{L_{ns}}, \frac{F'_{1y}}{L_{ns}}, \frac{F'_{2z}}{L_{ns}} \right\rangle, \quad L_{ns} = \sqrt{F'^2_{1x} + F'^2_{1y} + F'^2_{2z}} \\ \vec{n} &= \left\langle \frac{F'_{1x}}{L_n}, \frac{F'_{1y}}{L_n} \right\rangle, \quad L_n = \sqrt{F'^2_{1x} + F'^2_{1y}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

La relation entre  $\vec{n}_s$  et  $\vec{n}$  est obtenue par le dérivé de  $F_1(x, y)$  selon respectivement x et y dans l'équation (3.32). Les ratios  $L_n / L_{ns}$  et  $F'_{2z} / L_{ns}$ , sont respectivement la sinus et cosinus de l'angle entre la normale et l'horizontal,  $\alpha_n$ . Dans le plan z, le terme  $n_s = \tan(\alpha_n) = F'_{2z} / \sqrt{F'^2_{1x} + F'^2_{1y}}$ , en substituant dans l'équation (3.31), on trouve des conditions aux frontières par l'équation (3.33) :

$$\left( \tau_{xz}^p I + \tau_{xz}^p m = -\sigma_z^p \cdot n_s \right) \Big|_{z=z_0} \Rightarrow \frac{\partial \psi_G}{\partial \vec{n}} = \left( -\sigma_z^p n_s - \vec{h}_n(x, y) \cdot \vec{n} \right) \Big|_{z=z_0} \quad (3.33)$$

$$\vec{h}_n(x, y) = \langle h_{nx}, h_{ny} \rangle \quad (3.34)$$

$$h_{nx}(x,y) = -\frac{\nu}{2} \left( x f_{fc} + \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot f_{fx} + xy \cdot f_{fy} \right) \quad (3.35)$$

$$h_{ny}(x,y) = -\frac{\nu}{2} \left( y \cdot f_{fc} + xy \cdot f_{fx} - \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot f_{fy} \right) \quad (3.36)$$

Les contraintes de cisaillement sont déterminées par l'équation (3.37) :

$$\tau_{xzS}^p = \frac{\partial \psi_G}{\partial x} + h_{nx}; \quad \tau_{yzS}^p = \frac{\partial \psi_G}{\partial y} + h_{ny} \quad (3.37)$$

#### **Détermination du centre de cisaillement :**

Le centre de cisaillement est déterminé par l'équilibre des moments de torsion entre le moment interne et externe. Selon Pilkey (2002), le principe pour déterminer le centre de cisaillement est décrit par l'équation (3.38) :

$$M_z = x_D V_Y = \int_A (x \tau_{yzS}^p + y \tau_{xzS}^p) dA = 0; \quad M_z = y_D V_X = \int_A (x \tau_{yzS}^p + y \tau_{xzS}^p) dA = 0; \quad (3.38)$$

En substituant les contraintes de cisaillement de l'équation (3.37) à (3.38) le centre de cisaillement obtenu est à l'équation (3.39) :

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{1}{V_Y} \int_A \left[ x \left( \frac{\partial \psi_{YG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right) + y \left( \frac{\partial \psi_{YG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right) \right] dA \\ y_D &= \frac{1}{V_X} \int_A \left[ x \left( \frac{\partial \psi_{XG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right) + y \left( \frac{\partial \psi_{XG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (3.39)$$

#### **Détermination des coefficients effectifs de cisaillement primaire:**

Pilkey (2002) a présenté le principe pour déterminer les coefficients effectifs de cisaillement de Timoshenko en se basant sur l'équilibre d'énergie interne et externe de la poutre à l'équation(3.40) :

$$\begin{aligned} U_0^p &= \int_A \left( \frac{(\tau_{yzS}^p)^2 + (\tau_{xzS}^p)^2}{2G} \right) dA ; \\ U_{Beam}^p &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{xx} V_x^2}{G} + \frac{\alpha_{yy} V_y^2}{G} + \frac{\alpha_{xy} V_x V_y}{G} + \frac{\alpha_{yx} V_x V_y}{G} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pour déterminer, il faut appliquer séparément et respectivement les charges unitaires pour chaque direction. Ces coefficients sont obtenus par l'équation (3.41) :

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \frac{A}{V_x^2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi_{xG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_{xG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right)^2 \right] dA ; \\ \alpha_{yy} &= \frac{A}{V_y^2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi_{yG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_{yG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right)^2 \right] dA ; \\ \alpha_{xy} &= \frac{A}{V_x V_y} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \psi_{yG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right) \left( \frac{\partial \psi_{xG}^P}{\partial x} + h_{nx} \right) + \left( \frac{\partial \psi_{yG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right) \left( \frac{\partial \psi_{xG}^P}{\partial y} + h_{ny} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (3.41)$$

### **Forme matricielle de flexibilité de la section pour l'effet de cisaillement primaire :**

Les valeurs des aires effectives de cisaillement primaire sont calculées par l'équation (3.42)

$$A_X^p = \frac{A}{\alpha_{xx}} ; A_Y^p = \frac{A}{\alpha_{yy}} ; A_{XY}^p = \frac{A}{\alpha_{xy}} ; \quad (3.42)$$

La matrice de flexibilité de la section en cisaillement,  $[f_s^V(z)]$  est calculée facilement dans l'équation (3.43), où G est le module élastique de cisaillement du matériau.

$$\left[ f_s^V(z) \right]_{2x2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA_X^P} & \frac{1}{GA_{XY}^P} \\ \frac{1}{GA_{XY}^P} & \frac{1}{GA_Y^P} \end{bmatrix}_{2x2} \quad (3.43)$$

### **3.3.2.3 Effet de la torsion : St-Venant et gauchissement**

L'effet de la torsion est adapté de l'analyse sectionnelle de Stefan et Léger (2011) et divisé en deux effets séparés : (1) la torsion de St-Venant; (2) la torsion due au gauchissement (Figure 3.9.I-C).

Les fonctions du gauchissement sont utilisées pour calculer les contraintes, les déplacements et les propriétés sectionnelles : la constante de torsion ( $J$ ) pour l'effet de torsion de St-Venant et la constante de gauchissement ( $C_w$ ) pour la torsion gauche.

### **Torsion de St-Venant :**

L'effet de torsion de St-Venant ne provoque pas de contrainte normale sur la section analysée. Stefan et Léger (2011) se sont basés sur la méthode des éléments finis 2D Sapountzakis et Mokos (2004) en prenant l'équation de Laplace pour déterminer les contraintes de cisaillement dues à la torsion selon l'équation (3.44) et la constante de torsion de St-Venant ( $J$ ) selon l'équation (3.45) :

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = (y \cdot l - x \cdot m) \Big|_{z=0} \end{cases} \quad \text{avec } \tau_{xzSV} = G \frac{d\theta}{dz} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right); \tau_{yzSV} = G \frac{d\theta}{dz} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (3.44)$$

$$J(z) = \int_{A(z)} x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA \quad (3.45)$$

### **Torsion due au gauchissement :**

Les contraintes normales sont dues au gauchissement restreint sur la section analysée. Stefan et Léger (2011) ont utilisé la méthode de Sapountzakis et Mokos (2004) pour capturer des contraintes de cisaillement et des contraintes normales dues à l'effet de torsion gauche. Une méthode des éléments finis 2D est utilisée afin de résoudre l'équation de Poisson en prenant les conditions aux frontières de Neumann pour trouver les contraintes et la constante de torsion gauche ( $C_w$ ) :

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi_s = \left( 2(1+\nu) \cdot \frac{d^3 \theta}{dz^3} \cdot \Psi \right) \Big|_{z=z_0} \\ \frac{\partial \psi_s}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\sigma_{zw} = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \cdot \Psi; \tau_{xzW} = G \frac{\partial \Psi_s}{\partial x}; \tau_{yzW} = G \frac{\partial \Psi_s}{\partial y}$$

$$C_w(z) = \int_{A(z)} \Psi^2 dA \quad (3.47)$$

Où  $\Psi$  est la fonction de gauchissement calculée à la section analysée ( $z = z_0$ ). La contribution de torsion de St-Venant et la torsion gauche à la résistance totale de la section est déterminée par (Sapountzakis & Mokos, 2004) selon :

$$T_{sv} = GJ \frac{d\theta_z}{dz}; \quad B = -E \frac{d}{dz} \left( C_w \frac{d^2\theta_z}{dz^2} \right); \quad T_{sv} + B = T_{tot} \quad (3.48)$$

La matrice de flexibilité de la section en torsion est présentée par l'équation (3.49).

$$\begin{bmatrix} f_s^T(z) \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GJ} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EC_w} \end{bmatrix}_{2x2} \quad (3.49)$$

La matrice de rigidité de la section en torsion est décrite par l'équation (3.50)

$$\begin{bmatrix} k_s^T(z) \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} GJ & 0 \\ 0 & EC_w \end{bmatrix}_{2x2} \quad (3.50)$$

La matrice de flexibilité de la section s'obtient par l'assemblage des matrices partielles représentant chaque mécanisme de déformation. Cette matrice est présentée par l'équation (3.51).

$$\begin{bmatrix} f_s(z) \end{bmatrix}_{7x7} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_s^{PMM}(z) \end{bmatrix}_{3x3} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} f_s^V(z) \end{bmatrix}_{2x2} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} f_s^T(z) \end{bmatrix}_{2x2} \end{bmatrix}_{7x7} \quad (3.51)$$

### 3.3.3 Calcul des matrices de rigidité d'un élément fibre

Dans le calcul de la matrice de rigidité de l'élément (Figure 3.9.II), le calcul est divisé en deux effets : (1) action de P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub>-V<sub>x</sub>-V<sub>y</sub> ; (2) action de la torsion (le moment de torsion et le bimoment). Le premier effet sera traité par la méthode des forces (flexibilité) en utilisant la matrice

des fonctions d'interpolation des forces avec un élément fibre 3D ayant deux nœuds et cinq degrés de liberté par nœud (Figure 3.13). Le deuxième effet sera calculé par la méthode des déplacements (rigidité) en utilisant les fonctions d'interpolation de déplacement avec un élément fibre ayant deux nœuds et deux degrés de liberté par nœud (Figure 3.14).

- L'effet de flexion composée et de cisaillement primaire ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ ;  $V_x$ - $V_y$ )**

En considérant un élément fibre simplement appuyé à la Figure 3.12 sous l'action de  $P$ - $M_x$ - $M_y$ . Le vecteur de forces et de déplacements sont décrits par les équations (3.52) et (3.53)

$$\{\bar{u}^e\} = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \bar{r}_3 \quad \bar{r}_4 \quad \bar{r}_5]^T \quad (3.52)$$

$$\{\bar{S}^e\} = [\bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3 \quad \bar{S}_4 \quad \bar{S}_5]^T \quad (3.53)$$

La Figure 3.13 présente un élément fibre avec les modes de corps rigide. Les déplacements et forces nodales sont décrits par les équations (3.54) et (3.55) :

$$\{u^e\} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_8 \quad r_9 \quad r_{10} \quad r_{11} \quad r_{12}]^T \quad (3.54)$$

$$\{S^e\} = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_8 \quad S_9 \quad S_{10} \quad S_{11} \quad S_{12}]^T \quad (3.55)$$

La matrice de flexibilité d'un élément peut se calculer par l'intégration des matrices de flexibilité des sections de long de la poutre. La formule générale détermine la matrice de flexibilité d'un élément par l'équation (3.56), où  $[b(z)]$  est la matrice des fonctions d'interpolation des forces.

$$[F]_{5x5} = \int_0^L [b(z)]_{5x5}^T [f_s^{PMV}(z)]_{5x5} [b(z)]_{5x5} dz \quad (3.56)$$

La matrice de flexibilité,  $[f_s^{PMV}(z)]$  de la section sous l'action de  $P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$  s'obtient par l'assemblage de chaque matrice partielle :  $[f_s^P(z)]$  est la matrice de flexibilité sous l'action de  $P$ - $M_x$ - $M_y$  et  $[f_s^V(z)]$  est la matrice de flexibilité sous l'action de  $V_x$ - $V_y$ . La matrice,  $[f_s^{PMV}(z)]$  est décrite par l'équation (3.57) :

$$\begin{bmatrix} f_s^{PMV}(z) \end{bmatrix}_{5x5} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_s^P(z) \end{bmatrix}_{3x3} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} f_s^V(z) \end{bmatrix}_{2x2} \end{bmatrix}_{5x5} \quad (3.57)$$

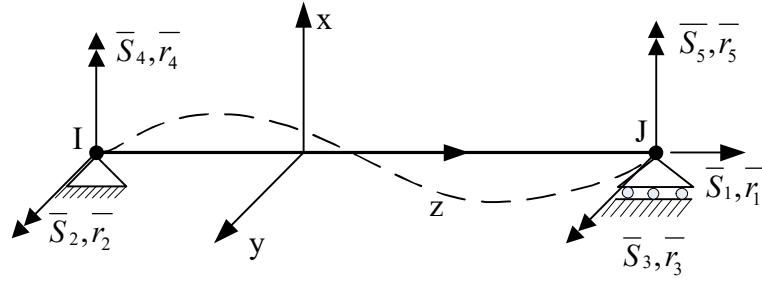


Figure 3.12: Notations de forces ( $\bar{S}_i$ ) et déplacements ( $\bar{r}_i$ )

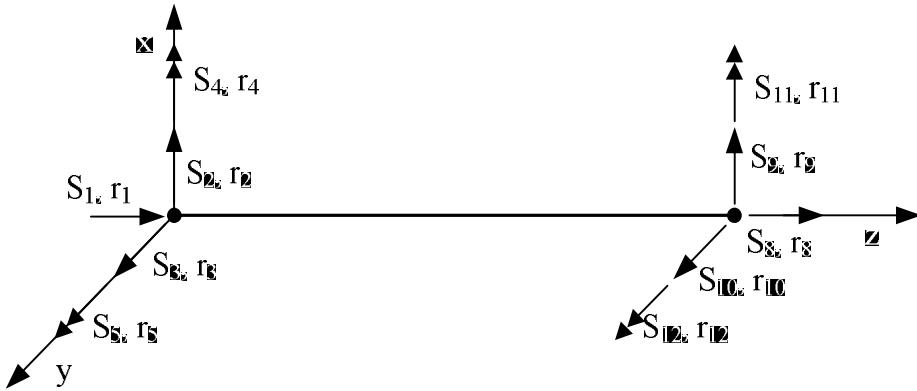


Figure 3.13 Les forces nodales d'un élément avec les modes de corps rigide

La matrice  $[b(z)]$  est déterminée par l'équilibre d'une membrure (Figure 3.12) en considérant l'application des forces virtuelles unitaires. L'expression de  $[b(z)]$  est présentée par l'équation (3.58).

$$[b(z)]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 - \frac{z}{L} & 0 & \frac{z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{z}{L} & 0 & \frac{z}{L} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (3.58)$$

Pour calculer l'intégrale de l'équation (3.56), on utilise l'intégrale numérique par points de Gauss. Il faut sélectionner le nombre de points de Gauss pour atteindre la précision désirée. Cette valeur va dicter la position des sections qui doivent être analysées pour calculer leurs matrices de flexibilités. L'expression de la matrice de flexibilité d'une membrure est donnée par l'équation (3.59), où,  $n$  est le nombre de points d'intégrale numérique,  $\omega_i$  est le poids de chaque point de Gauss

$$[F_e]_{5 \times 5} = \int_{-1}^1 b^T(\xi) f_s(\xi) b(\xi) |J(\xi)| d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i b^T(\xi_i) f_s(\xi_i) b(\xi_i) |J(\xi_i)| \quad (3.59)$$

Pour appliquer la méthode des éléments finis, il faut définir la matrice de rigidité,  $[K_e]$  d'un élément avec les modes de corps rigide. Il faut transformer la matrice de rigidité de la membrure simplement supporté à la matrice complète incluant les modes de corps rigide (Figure 3.13) par l'application de la matrice de transformation,  $[n]$ .

$$\left[ K_e^{PM} \right]_{10x10} = [n]_{5x10} [K] [n]^T_{10x5} \quad (3.60)$$

$$[S^e] = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[n]} \quad \boxed{[S^e]} \quad (3.61)$$

- ***Effet de la torsion de St-Venant et de la torsion gauche***

En considérant un élément fibre 3D avec les modes de corps rigide qui est soumis un moment de la torsion (T) comme la Figure 3.14, il faut inclure l'effet du gauchissement sur la section qui est causé par le bi-moment (en analogie avec le moment de flexion  $M_x - M_y$ ). Les forces nodales incluent deux termes : le moment de la torsion (T) et le bi-moment (B). Le déplacement qui correspond à l'effet du moment de torsion est la rotation  $\theta_z(z)$ , selon l'axe longitudinal de l'élément. Le déplacement qui est causé par l'effet du bi-moment est la première dérivée de la rotation  $\theta_z(z)$ ,  $\theta_z'(z)$ . Ces déplacements sont numérotés respectivement par  $r_6$ ,  $r_7$  au nœud I et  $r_{13}$ ,  $r_{14}$  au nœud J. Le vecteur des déplacements et des forces nodales sont décrits par les équations (3.62) et (3.63):

$$\{u^e\} = \begin{bmatrix} \theta_z^I \\ \theta_z^{J'} \\ \theta_z^J \\ \theta_z^{J'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_6 \\ r_7 \\ r_{13} \\ r_{14} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\{S^e\} = \begin{bmatrix} T^I \\ B^I \\ T^J \\ B^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_6 \\ S_7 \\ S_{13} \\ S_{14} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

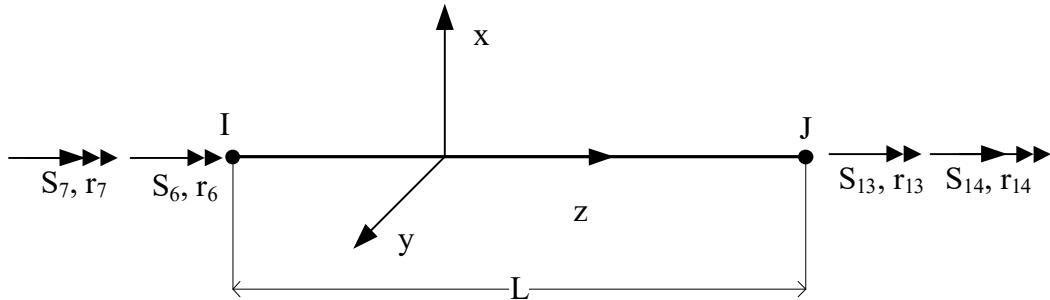


Figure 3.14 Élément fibre avec les modes de corps rigide en torsion au centre de cisaillement

En considérant une section quelconque avec  $k_s^T(z)$ , la matrice de rigidité de la section, on peut calculer les efforts internes :

$$S_S(z) = [k_s^T(z)] u_S(z) \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} T_s(z) \\ B_s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ & 0 \\ 0 & EC_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_z'(z) \\ \theta_z''(z) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas,  $\varepsilon(x, y, z)$  est le vecteur de la rotation, donné par l'équation (3.65):

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} \theta_z'(z) \\ \theta_z''(z) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Pour établir la matrice de rigidité de cet élément, on propose que la fonction du déplacement de rotation  $\theta_z(z)$  par l'équation (3.66) :

$$\begin{aligned}\theta_z(z) &= [H(z)] \{ u^e \} \\ [H(z)] &= [H_6(z) \ H_7(z) \ H_{13}(z) \ H_{14}(z)]\end{aligned}\tag{3.66}$$

Avec  $H(z)$  sont les fonctions d'interpolations cubiques d'Hermite. L'expression de ces fonctions est décrite par les équations (3.112):

$$\begin{aligned}H_6(z) &= 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} & H_7(z) &= z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \\ H_{13}(z) &= -\frac{2z^3}{L^3} + \frac{3z^2}{L^2} & H_{14}(z) &= \frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L}\end{aligned}\tag{3.67}$$

Pour utiliser l'intégration numérique, il faut transformer les équations (3.67) au système de coordonnées naturelles. Les nouvelles fonctions sont obtenues par les équations (3.68) :

$$\begin{aligned}H_6(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + \xi)(1 - \xi)^2 & H_7(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \xi)^2 \\ H_{13}(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - \xi)(1 + \xi)^2 & H_{14}(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(1 + \xi)^2\end{aligned}\tag{3.68}$$

L'expression de la rotation selon l'axe longitudinal dans le système de coordonnées naturelles est obtenue par l'équation (3.69):

$$\theta_z(\xi) = H_6(\xi)r_6 + H_7(\xi)\left.\frac{d\theta_z}{d\xi}\right|_{r=-1} + H_{13}(\xi)r_{13} + H_{14}(\xi)\left.\frac{d\theta_z}{d\xi}\right|_{r=1}\tag{3.69}$$

Avec  $\xi = \frac{2(z - z_c)}{L}$ , on peut calculer  $\frac{d\theta_z}{d\xi}$  :

$$\frac{d\theta_z}{d\xi} = \frac{dz}{d\xi} \frac{d\theta_z}{dz} = \frac{L}{2} \frac{d\theta_z}{dz}$$

C'est-à-dire, les fonctions  $[H(\xi)]$  sont réécrites selon l'équation (3.70):

$$[H(\xi)] = \begin{bmatrix} H_6(\xi) & \frac{L}{2}H_7(\xi) & H_{13}(\xi) & \frac{L}{2}H_{14}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

On a la relation entre  $\{u^e\}$  et  $\varepsilon(x, y, z)$  par l'équation (3.71) :

$$\varepsilon(x, y, z) = [B(z)] \{u^e\} \quad (3.71)$$

Où, la matrice  $B(z)$  est calculée par le dérivé les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite. L'expression de  $B(z)$  est donnée par l'équation (3.72) :

$$[B(z)] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 H(z)}{dz^2} \\ \frac{dH(z)}{dz} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Dans le système de coordonnées naturelles, on peut trouver  $[B(\xi)]$  par l'équation (3.73)

$$[B(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{J^2} \frac{d^2 H(\xi)}{d\xi^2} \\ \frac{1}{J} \frac{dH(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Avec :  $J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}$

En prenant le travail virtuel, la matrice de rigidité de l'élément en torsion est calculée par l'équation (3.74)

$$\left[ K_e^T \right]_{4x4} = \int_0^L [B(z)]^T [k_s^T(z)] [B(z)] dz \quad (3.74)$$

En appliquant l'intégration numérique avec les points de Gauss proposés, on peut obtenir la matrice de rigidité d'un élément par l'équation (3.75) :

$$\left[ K_e^T \right]_{4 \times 4} = \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [k_s^T(\xi)] [B(\xi)] J d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i [B(\xi_i)]^T [k_s^T(\xi_i)] [B(\xi_i)] \quad (3.75)$$

Où n est le nombre de points de Gauss,  $\omega_i$  est la valeur de pondération de Gauss à la position de  $\xi_i$ .

La matrice de rigidité complète d'un élément peut être exprimée par l'équation (3.76):

$$\left[ K_e \right]_{14 \times 14} = \begin{bmatrix} \left[ K_e^{PMV} \right]_{10 \times 10} & 0 \\ 0 & \left[ K_e^T \right]_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{14 \times 14} \quad (3.76)$$

### 3.4 Poutre profonde incluant des déformations au gauchissement de cisaillement.

Les formulations des éléments fibres 3D dans la section précédente considèrent seulement l'effet constant de cisaillement sur la section par l'hypothèse « des sections planes restent toujours planes » de la théorie de poutre ayant la déformation de cisaillement constante sur la section de poutre de Timoshenko. Le problème du gauchissement de la section n'est considéré que sur l'analyse sectionnelle sous l'action de torsion gauche. Il n'y a pas d'hypothèse pour analyser la distribution de contrainte normale sur la section gauchie. Dans cette partie, on présentera une proposition des éléments fibres 3D ayant la section gauchie sous l'action des charges 3D incluant l'effet des sous-pressions et du matériau fissuré. Cette approche est développée à partir des éléments 3D de Sapountzakis et Dikaros (2015) en considérant l'effet secondaire du cisaillement ( $V_x, V_y$ ) pour les structures en béton non armé ayant une section profonde. Cet élément permet de calculer la distribution de contraintes normales non linéaires, et considère l'équilibre local des contraintes de cisaillement sur la section.

L'effet secondaire du cisaillement est le gauchissement de la section sous l'action des efforts tranchants ( $V_x-V_y$ ) (Figure 3.15.b). Cet effet cause des efforts internes qui sont les moments secondaires de flexion. Ces moments génèrent la distribution des contraintes normales secondaires non linéaire.

Un exemple est présenté dans la Figure 3.16, la distribution des contraintes normales selon l'axe x (la hauteur de la section) est calculé par la somme du mode primaire en flexion et du mode

secondaire en cisaillement. Les résultats obtenus sont non linéaires et adaptés pour le problème de la section profonde.

Dans ce projet, en particulier, les effets secondaires de cisaillement sont considérés pour les éléments fibres 3D ayant 18DDL afin d'obtenir des résultats améliorés pour les poutres profondes, c'est-à-dire calculer la distribution et la magnitude non linéaires des contraintes normales sur la section. Ces effets sont indiqués à la Figure 3.17 pour les sections profondes sous l'action du cisaillement.

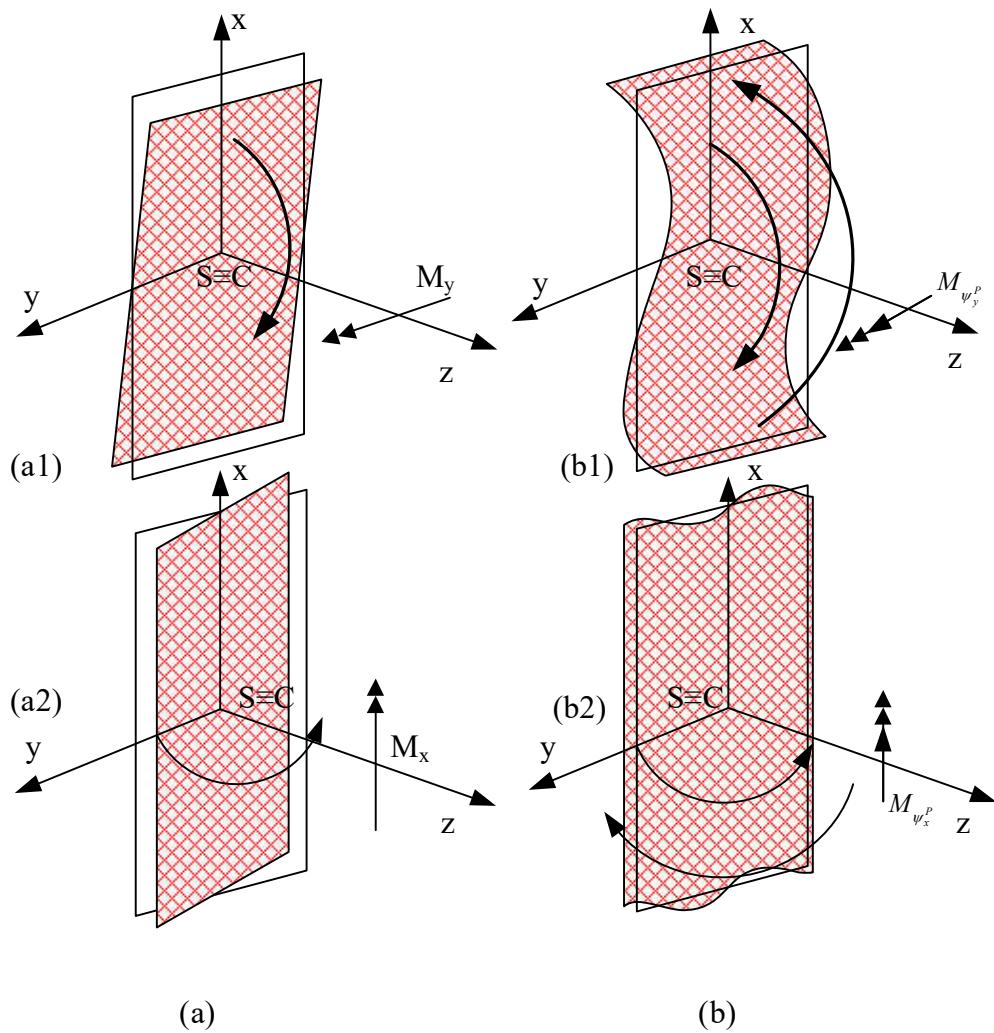


Figure 3.15 Modes de déformations de sections rectangulaires : (a) l'effet primaire en flexion ; (b) l'effet secondaire en flexion due aux cisaillements secondaires (adapté de Sapountzakis (2015))

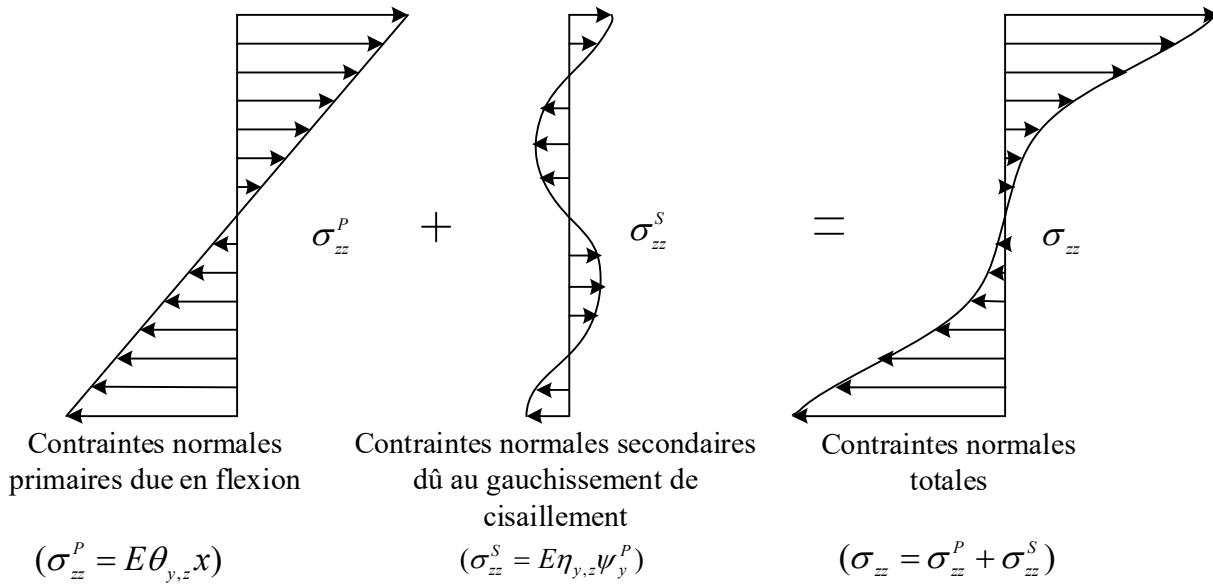


Figure 3.16 Distribution de contraintes normales selon l'effet primaire et secondaire selon Sapountzakis et Dikaros (2015)

Modèle	Déformations	Contraintes de cisaillement	Contraintes normales	Équation équilibre
a, Théorie de poutre de Timoshenko				$\frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^P}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^P}{\partial z} = 0$
b, Premier ordre de cisaillement			$\sigma_z^P = \frac{M_y}{I_y} x$	$\psi_x^P$ : fonction de gauchissement primaire due au cisaillement
c, Deuxième ordre de cisaillement			$\sigma_z^w = \frac{M_y}{I_{\psi\psi_x}} \psi_x^S$	$\frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^S}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^w}{\partial z} = 0$
d, Modèle proposé (FIDAM-18DOFs)			$\sigma_z = \sigma_z^P + \sigma_z^w$	Fonction de gauchissement secondaire due au cisaillement: $\psi_x^S = \psi_x^P - X$

Figure 3.17 Effet de cisaillement sur une section profonde : (a) Théorie de poutre de Timoshenko; (a) Premier ordre de cisaillement; (c) Deuxième ordre de cisaillement ; (d) Modèle proposé (Fibre 3D- 18DDL)

### 3.4.1 Description d'élément fibre de poutres profondes

Dans la section 3.3, on a proposé un modèle des éléments fibres 3D selon la théorie de poutre de Timoshenko et l'effet du gauchissement de torsion. Dans ce modèle, un élément fibre 3D a deux nœuds, sept DDL par nœud et 14DDL totaux pour élément. Dans cette partie, on propose une extension d'un élément fibre 3D pour la poutre profonde ayant deux nœuds, 9 DDL par nœuds et 18 DDL totaux, en utilisant l'intégration des sections fibres, discrétisées par des éléments triangulaires, selon l'axe longitudinal z. Dans ce cas, 2 DDL sont ajoutés à chaque nœud pour analyser l'effet du gauchissement causé par les forces latérales en deux directions x ( $V_x$ ) et y ( $V_y$ ). Il y a deux axes pour chaque élément considéré : (1) l'axe du centre de gravité des sections permettant de calculer l'effet de la flexion composée (PMM) ; (2) l'axe du centre de cisaillement des sections pour analyser l'effet du cisaillement et de la torsion (VVT).

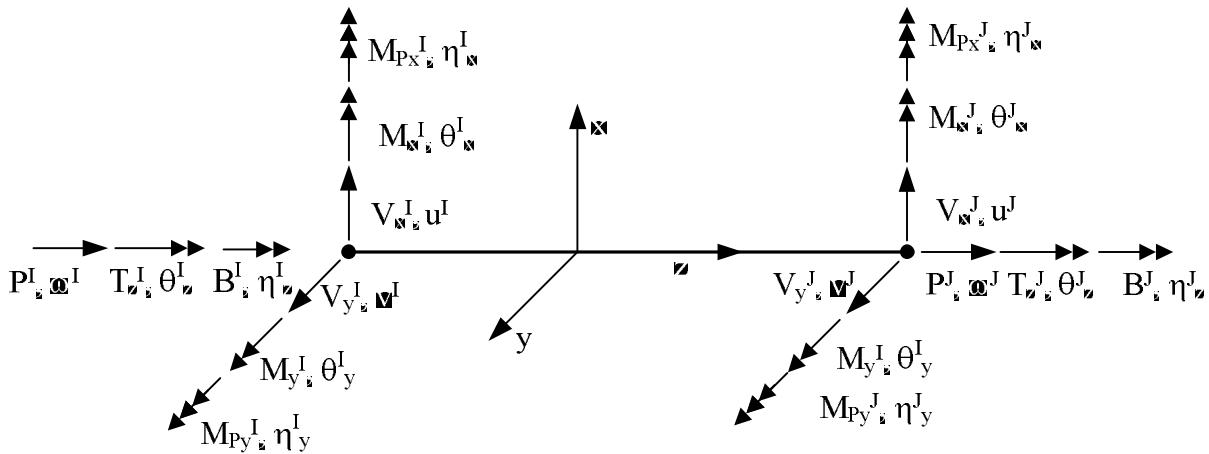


Figure 3.18 Un élément fibre 3D incluant les modes de corps rigide pour la poutre profonde

Les résultats obtenus sont calculés pour deux effets : (1) l'effet primaire avec la distribution linéaire de contraintes normales qui est similaire de la théorie de poutre de Timoshenko; (2) l'effet secondaire par les fonctions du gauchissement pour considérer la section gauchie et les contraintes normales non linéaires. La Figure 3.18 présente les déplacements aux nœuds et les forces nodales pour un élément fibre 3D avec les modes de corps rigide. Les forces primaires sont correspondantes aux 7 DDL classiques :  $P - M_x - M_y - V_x - V_y - T - B$  (B pour bi-Moment). Les effets secondaires ajoutés sont représentés par les forces  $M_{px}$ ,  $M_{py}$ , qui correspondent aux 2 DDL ajoutés :  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  et

déterminées par 2 fonctions secondaires du gauchissement :  $\psi_x^S, \psi_y^S$ . Le vecteur des déplacements nodal dans les coordonnées locales, selon la Figure 3.18 est décrit par l'équation (3.77) :

$$\{u^e\}_{18 \times 1} = [w^I \ u^I \ v^I \ \theta_x^I \ \theta_y^I \ \theta_z^I \ \eta_x^I \ \eta_y^I \ \theta_z^I \ w^J \ u^J \ v^J \ \theta_x^J \ \theta_y^J \\ \theta_z^J \ \eta_x^J \ \eta_y^J \ \theta_z^J]^T \quad (3.77)$$

Le vecteur des forces nodales est écrit pour un élément dans l'équation (3.78) :

$$\{Q^e\}_{18 \times 1} = [P^I \ V_x^I \ V_y^I \ M_x^I \ M_y^I \ T^I \ M_{Px}^I \ M_{Py}^I \ B^I \ P^J \ V_x^J \ V_y^J \ M_x^J \\ M_y^J \ M_{Px}^J \ M_{Py}^J \ B^J]^T \quad (3.78)$$

Le champ de déplacement d'un point arbitraire sur la section peut calculer par la somme de deux effets :

$$\bar{u}(z) = \underbrace{u_z + \theta_x y - \theta_y x}_{\text{ primaire}} + \underbrace{\eta_x \psi_x^S + \eta_y \psi_y^S + \theta_z \psi_z^S}_{\text{ secondaire}} \quad (3.79)$$

### 3.4.2 Analyses sectionnelles et matrice de rigidité de section

Les procédures d'analyse sectionnelle sont adaptées de Sapountzakis et Dikaros (2015) pour les effets secondaires des charges. Un développement pour le problème de la fissuration – endommagement est ajouté dans le calcul des contraintes normales et des cisaillements secondaires. Les étapes sont décrites par le Tableau 3.1. L'analyse sectionnelle de chaque étape est adaptée de la méthode des éléments finis 2D décrite à la section 3.3.2.

La distribution de contraintes normales sur une section quelconque est déterminée par l'équation (3.80) :

$$\sigma_z(x, y, z) = \sigma_z^p(x, y, z) + \sigma_z^w(x, y, z) \quad (3.80)$$

$\sigma_z^p(x, y, z)$ : Contraintes normales déterminées par la théorie de poutre Euler – Bernoulli dans l'équation (3.7) ;

$\sigma_z^w(x, y, z)$ : Contraintes normales dues à l'effet secondaire de cisaillement et à l'effet de torsion gauche par l'équation (3.81) ;

$$\begin{aligned}\sigma_z^w(x, y, z) = & EI_{\psi_x \psi_x} \frac{d\eta_y}{dz} \psi_x^s(x, y, z) + EI_{\psi_y \psi_y} \frac{d\eta_x}{dz} \psi_y^s(x, y, z) \\ & + EC_w \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \psi_z(x, y, z)\end{aligned}\quad (3.81)$$

$\varphi_x^s(x, y, z)$ ,  $\varphi_y^s(x, y, z)$ : Fonctions au gauchissement secondaires sous l'effet de cisaillement selon l'axe x et l'axe y.

$\eta_x(x, y, z)$ ,  $\eta_y(x, y, z)$ : Paramètres indépendants au gauchissement de la section gauchie respectivement l'effet de cisaillement selon l'axe x et l'axe y;

$\varphi_z(x, y, z)$ : Fonction de gauchissement sous l'effet de torsion gauchie;

Après d'analyse sectionnelle, on peut calculer la matrice de rigidité de la section de chaque l'effet analysé. La matrice de rigidité d'un élément est établie par l'intégration des matrices de rigidité des sections selon l'axe z.

Tableau 3.1: Les étapes pour l'analyse de la section

Effet	Flexion composée non uniforme P-M <sub>x</sub> -M <sub>y</sub> -V <sub>x</sub> -V <sub>y</sub>	Torsion non uniforme (T)
primaire (6 DDL par noeud)	$\sigma_{zz}^P \xrightarrow{\text{Équation d'équilibre}} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P \end{array} \right\}$ $\frac{\partial \sigma_{zz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^P}{\partial y} = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}^P \\ \tau_{yz}^P \end{array} \right\}$
secondaire (9 DDL par noeud)	<p style="text-align: center;">Génération du gauchissement primaire</p> $\boxed{\psi_x^P; \psi_y^P}$ $\sigma_{zz}^S \xrightarrow{\text{Équation d'équilibre}} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}^S \\ \tau_{yz}^S \end{array} \right\}$ $\frac{\partial \sigma_{zz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^S}{\partial y} = 0$	<p style="text-align: center;">Génération du gauchissement primaire</p> $\boxed{\psi_z^P}$ $\sigma_{zz}^P \xrightarrow{\text{Équation d'équilibre}} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}^S \\ \tau_{yz}^S \end{array} \right\}$ $\frac{\partial \sigma_{zz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^S}{\partial y} = 0$

Les effets secondaires de cisaillement sont considérés à l'aide des fonctions au gauchissement secondaires. Ces fonctions seront générées par les fonctions primaires de gauchissement  $\psi_x^p$  et  $\psi_y^p$  selon la méthode de Dikaros et Sapountzakis (2014) par l'équation (3.82)

$$\psi_x^s(x, y, z) = \psi_x^p \frac{A_x^P}{V_x} - x; \quad \psi_y^s(x, y, z) = \psi_y^p \frac{A_y^P}{V_y} - y \quad (3.82)$$

Les contraintes normales et de cisaillements secondaires qui causent par les effets secondaires de cisaillements, sont calculées par les équations (3.83):

$$\begin{aligned} \sigma_z^w &= EI_{\psi_x \psi_x} \frac{d\eta_y}{dz} \psi_x^s(x, y, z) + EI_{\psi_y \psi_y} \frac{d\eta_x}{dz} \psi_y^s(x, y, z) \\ \tau_{xz}^w &= G\gamma_x^s \psi_{x,x}^s(x, y, z) + G\gamma_y^s \psi_{y,x}^s(x, y, z); \\ \tau_{yz}^w &= G\gamma_y^s \psi_{x,y}^s(x, y, z) + G\gamma_x^s \psi_{y,y}^s(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Les effets secondaires de cisaillements sont représentés par les aires effectives de cisaillement secondaire qui sont calculées selon (Dikaros & Sapountzakis, 2014) par l'équation (3.84)

$$A_x^s = A - A_x^P; \quad A_y^s = A - A_y^P; \quad A_{XY}^s = 0 \quad (3.84)$$

La matrice de cisaillement totale d'une section quelconque est déterminée par l'effet de cisaillement primaire (3.43) et l'effet de cisaillement secondaire :

$$\left[ k_s^{VV} \right]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} GA_X^P & GA_{XY}^P & 0 & 0 \\ GA_{XY}^P & GA_Y^P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_X^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GA_Y^s \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

L'effet de flexion secondaire est considéré comme les effets en flexion primaire ( $M_x, M_y$ ) en utilisant les moments d'inerties secondaires (comme la constante de torsion gauchie). Ces constantes sont calculées par l'équation :

$$I_{\psi_x \psi_x} = \int_A (\psi_x^S)^2 dA; \quad I_{\psi_y \psi_y} = \int_A (\psi_y^S)^2 dA; \quad I_{\psi_x \psi_y} = \int_A \psi_x^S \psi_y^S dA; \quad (3.86)$$

La matrice de rigidité en flexion secondaire de la section quelconque est déterminée par l'équation :

$$\left[ k_s^{M\psi} \right]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} EI_{\psi_x \psi_x} & EI_{\psi_x \psi_y} \\ EI_{\psi_y \psi_x} & EI_{\psi_y \psi_y} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Les effets de torsion sont considérés comme la poutre de Timoshenko incluant la déformation de torsion gauche dans la section 3.3.2. La matrice de rigidité de la section est représentée dans l'équation (3.50).

### 3.4.3 Calcul des matrices de rigidité d'un élément de poutres profondes

On considère deux effets séparément : (1) l'effet de flexions biaxiales incluant les déformations de cisaillement secondaires par la méthode de flexibilité; (2) l'effet de torsion incluant la déformation de torsion gauchie et de torsion de St-Venant par la méthode de rigidité.

**Formulation d'un élément fibre sous l'action en flexions biaxiales ( $P-M_x-M_y-V_x-V_y$ ) :**

En considérant un élément fibre ayant les appuis simples, les forces appliquées sur les noeuds de l'élément sont présentées dans la Figure 3.19. Les vecteurs de forces et de déplacements sont décrits par les équations (3.90) et (3.91):

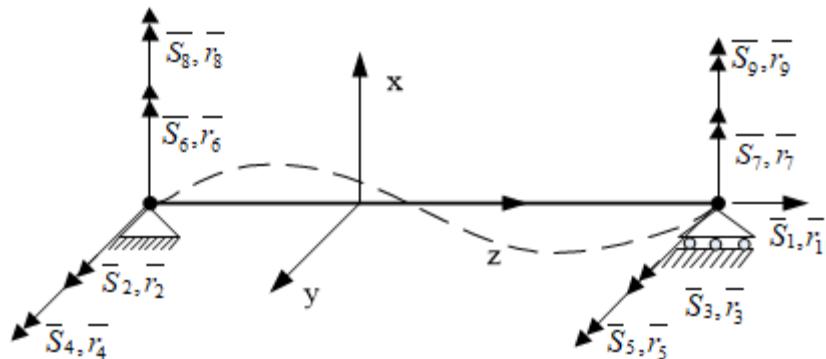


Figure 3.19 Un élément fibre 3D sur les appuis simples pour la poutre profonde

$$\{\bar{u}^e\} = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \bar{r}_3 \quad \bar{r}_4 \quad \bar{r}_5 \quad \bar{r}_6 \quad \bar{r}_7 \quad \bar{r}_8 \quad \bar{r}_9]^T \quad (3.88)$$

$$\{\bar{S}^e\} = [\bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3 \quad \bar{S}_4 \quad \bar{S}_5 \quad \bar{S}_6 \quad \bar{S}_7 \quad \bar{S}_8 \quad \bar{S}_9] \quad (3.89)$$

La Figure 3.20 présente un élément filaire avec les modes de corps rigide. Les déplacements et forces nodales sont décrits par les équations (3.90) et (3.91) :

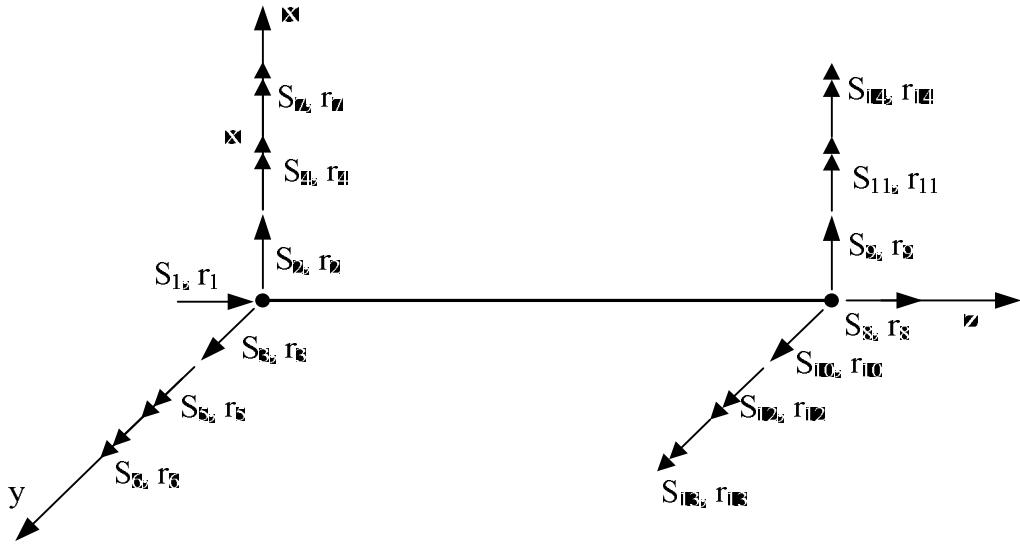


Figure 3.20 Les forces nodales d'un élément de la mode de corps rigide

$$\{u^e\} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_6 \quad r_7 \quad r_8 \quad r_9 \quad r_{10} \quad r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad r_{14}]^T \quad (3.90)$$

$$\{S^e\} = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6 \quad S_7 \quad S_8 \quad S_9 \quad S_{10} \quad S_{11} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{14}]^T \quad (3.91)$$

La matrice de flexibilité d'un élément peut calculer par l'intégration des matrices de flexibilité des sections. La formule générale détermine la matrice de flexibilité d'un élément par l'équation (3.92) , où  $[b(z)]$  est la matrice des fonctions d'interpolation des forces.

$$[F]_{9 \times 9} = \int_0^L [b(z)]_{9 \times 9}^T [f_s^{PMV}(z)]_{9 \times 9} [b(z)]_{9 \times 9} dz \quad (3.92)$$

La matrice de flexibilité,  $[f_s^{PMV}(z)]$  de la section sous l'action de P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub>-V<sub>x</sub>-V<sub>y</sub> s'obtient par l'assemblage de chaque matrice partielle :  $[f_s^P(z)]$  est la matrice de flexibilité sous l'action de P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub>;  $[f_s^V(z)]$  est la matrice de flexibilité sous l'action de V<sub>x</sub>-V<sub>y</sub> et  $[f_s^{M\psi}(z)]$  est la matrice de flexibilité en flexions secondaires. La matrice,  $[f_s^{PMV}(z)]$  est écrite par l'équation (3.93) :

$$[f_s^{PMV}(z)]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [f_s^P(z)]_{3 \times 3} & & \\ & [f_s^V(z)]_{4 \times 4} & \\ & & [f_s^{M\psi}(z)]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

La matrice  $[b(z)]$  est déterminée par l'équilibre d'une membrure (Figure 3.19) en prenant la force virtuelle unitaire. Pour compter les effets de cisaillement primaire et secondaire, les équations différentielles qui présentent les relations entre les moments en flexion et les efforts tranchants, sont considérées dans l'équation (3.94). L'expression de  $[b(z)]$  est présentée par l'équation (3.95).

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dz} &= V_y; & \frac{dM_y}{dz} &= V_x \\ \frac{dM_x^S}{dz} &= V_y^S; & \frac{dM_y^S}{dz} &= V_x^S \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(z) \\ V_x^P(z) \\ V_y^P(z) \\ M_y^P(z) \\ M_x^P(z) \\ V_x^S(z) \\ V_y^S(z) \\ M_x^S(z) \\ M_x^S(z) \end{array} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1-\frac{z}{L} & -\frac{z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{z}{L} & -\frac{z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{z}{L} & -\frac{z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{z}{L} & \frac{z}{L} \end{bmatrix}}_{[b(z)]_{9 \times 9}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{S_1} \\ \overline{S_6} \\ \overline{S_7} \\ \overline{S_2} \\ \overline{S_3} \\ \overline{S_8} \\ \overline{S_9} \\ \overline{S_4} \\ \overline{S_5} \end{array} \right\} \quad (3.95)$$

Pour calculer l'intégrale dans l'équation (3.92), on utilise l'intégrale numérique par les points de Gauss. Il faut spécifier le nombre de points de Gauss à utiliser. Ce nombre va spécifier les sections qui doivent être analysées pour trouver leurs matrices de flexibilités. L'expression de la matrice de flexibilité d'une membrure est donnée par l'équation (3.96), où,  $n$  est le nombre de points d'intégrale numérique,  $\omega_i$  est le poids de Gauss.

$$[F_e] = \int_{-1}^1 b^T(\xi) f_s(\xi) b(\xi) |J(\xi)| d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i b^T(\xi_i) f_s(\xi_i) b(\xi_i) |J(\xi_i)| \quad (3.96)$$

Pour appliquer la méthode des éléments finis, il faut avoir la matrice de rigidité,  $[K_e]$  d'un élément avec les modes de corps rigide. Il faut transformer la matrice de rigidité de la membrure à la matrice incluant les modes de corps rigide (Figure 3.18) par la matrice de transformation,  $[n]$ .

$$\left[ K_e^{PMV} \right]_{14 \times 14} = [n][K][n]^T \quad (3.97)$$

$$\left[ S^e \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9 \times 14} \quad (3.98)$$

### **Formulation d'un élément fibre sous l'action de torsion incluant la torsion gauche:**

Cette partie a été formulée dans la section 3.3.3 pour un élément fibre sous l'action de torsion de St-Venant et de torsion gauche. La matrice de rigidité ayant la dimension 4x4, est formulée par la méthode de rigidité et est représentée dans l'équation (3.75).

### **Formulation d'un élément fibre sous l'action 3D:**

Enfin, la matrice de rigidité d'un élément fibre 3D de poutre profonde ayant la dimension 18x18 peut être exprimée par l'équation en ordres des équations (3.97) et (3.75).

$$[K_e]_{18 \times 18} = \begin{bmatrix} [K_e^{PMV}]_{14 \times 14} & 0 \\ 0 & [K_e^T]_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (3.99)$$

### 3.5 Développement d'un élément fibre adapté aux piliers d'évacuateur de crues

Un pilier d'évacuateur de crue sera modélisé par des éléments verticaux (membrure) et horizontaux (Figure 3.21). Les éléments verticaux sont les éléments fibres 3D déformables qui sont formulés à la section 3.3 pour un élément de poutre 3D de Timoshenko (14DDL) et la section 3.4 pour un élément fibre 3D adapté aux sections profondes (18DDL). Les éléments horizontaux sont les éléments rigides qui ne sont pas déformés sous l'action des charges et qui transfèrent seulement les efforts internes entre deux nœuds. Dans ce projet, on propose un élément fibre 3D (Figure 3.21) ayant une extension horizontale rigide (non déformable) et un élément vertical (partie déformable).

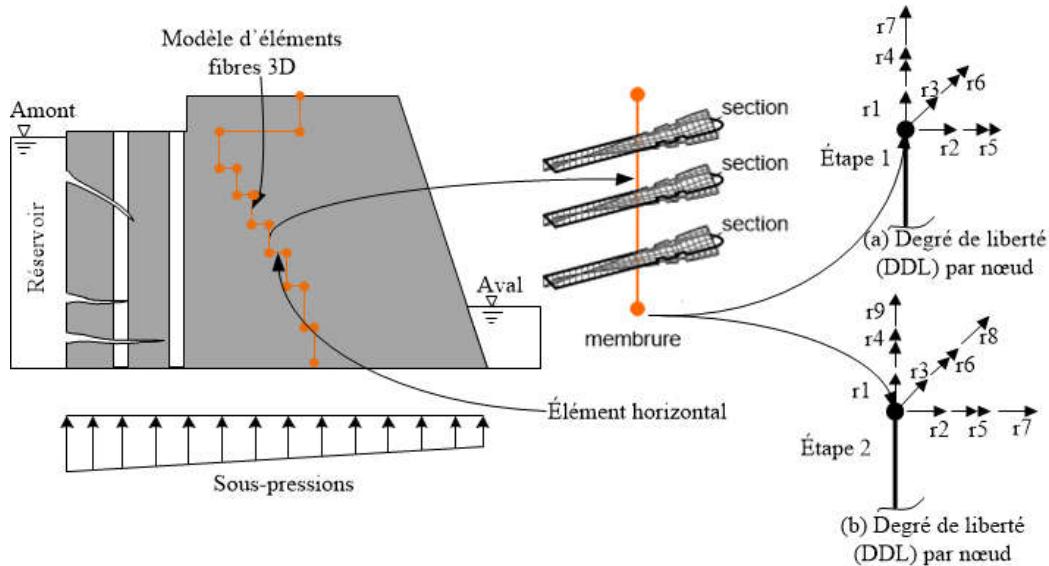


Figure 3.21 Modèle d'éléments fibres 3D proposé pour des piliers d'évacuateur de crues : (a) 7DDL et (b) 9 DDL par nœud

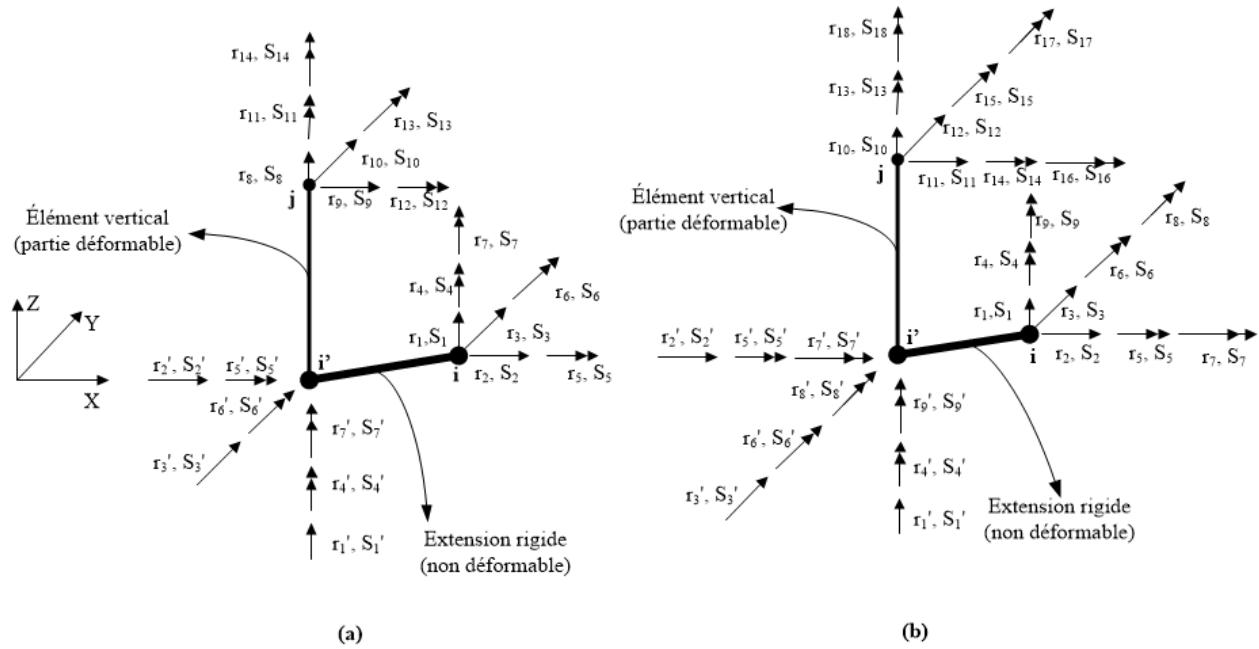


Figure 3.22 Élément fibre 3D adapté aux piliers d'évacuateur de crues : (a) Élément fibre 3D -14 DDL ; (b) Élément fibre 3D -18 DDL

Un nouvel élément fibre est proposé (Figure 3.22) ayant deux nœuds comme pour un élément classique (i & j) avec une transformation pour les extensions rigides non déformables. On utilise deux transformations dans le plan horizontal (Oxy): (1) la transformation pour les effets de flexion et de forces latérales (centre de gravité) ; (2) la transformation pour les effets des efforts tranchants et de torsion (centre de cisaillement). Dans ce cas, le nœud « i » est le centre de gravité pour la première transformation et soit le centre de cisaillement pour la deuxième transformation. En se basant la formulation de Papadrakakis et Sapountzakis (2017) pour les éléments 3D classiques ayant des extensions rigides, on propose la matrice de transformation [T] pour le nouvel élément fibre 3D. Cette matrice, [T] est une 14x14 pour un élément ayant 14 DDL et une 18x18 pour celui ayant 18DDL.

On considère le point « i » dans le plan OXY ayant le centre de gravité ( $x_{gi}$ ,  $y_{gi}$ ) et le centre de cisaillement ( $x_{Di}$ ,  $y_{Di}$ ). Le point « i' » possède les coordonnées ( $x_{Gi'}$ ,  $y_{Gi'}$ ) et ( $x_{Di'}$ ,  $y_{Di'}$ ).

### 3.5.1 Matrice de rigidité pour un élément fibre 14DDL

La relation cinématique entre deux points « i » et « i' » est décrite selon l'équation (3.100) :

$$\begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \\ r'_5 \\ r'_6 \\ r'_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Y_G & -\Delta X_G & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta Y_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta X_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

Où :

$$\Delta X_G = x_G i - x_G i' ; \Delta X_D = x_D i - x_D i'$$

$$\Delta Y_G = y_G i - y_G i' ; \Delta Y_D = y_D i - y_D i'$$

On considère un élément ayant une partie rigide comme la Figure 3.22, le vecteur de déplacement pour un élément déformable :

$$\begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \\ r'_5 \\ r'_6 \\ r'_7 \\ r'_8 \\ r'_9 \\ r'_{10} \\ r'_{11} \\ r'_{12} \\ r'_{13} \\ r'_{14} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Y_G & -\Delta X_G & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta Y_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta X_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 7} \begin{Bmatrix} [0]_{7 \times 7} \\ [0]_{7 \times 7} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{7 \times 7} \\ I_{7 \times 7} \end{bmatrix}_{14 \times 14} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{Bmatrix} \quad (3.101)$$

Où,  $[I]_{7 \times 7}$  est la matrice identité de  $7 \times 7$  pour le nœud « j ». On a la matrice d'excentricité  $[e]_{14 \times 14}$  qui montre la relation entre les déplacements d'un élément déformable,  $\{v'\}$  et les déplacements

d'un élément ayant extension rigide  $\{v\}$ . L'équation (3.101) peut être décrite sous la forme matricielle (Équation (3.102)):

$$\{v^l\} = [e]_{14 \times 14} \{v\} \quad (3.102)$$

En prenant les étapes similaires, on obtient la relation des forces nodales entre les deux extrémités des extensions rigides. La transformation des forces entre le nœud « i » et « i' » est décrite dans l'équation (3.103) :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta Y_D & \Delta X_D & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta Y_G & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta X_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ S'_4 \\ S'_5 \\ S'_6 \\ S'_7 \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

Pour un élément fibre 3D avec extension rigide, la relation est déterminée par l'équation (3.104).

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta Y_D & \Delta X_D & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta Y_G & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta X_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{7 \times 7} \left[ \begin{array}{l} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ S'_4 \\ S'_5 \\ S'_6 \\ S'_7 \\ S'_8 \\ S'_9 \\ S'_{10} \\ S'_{11} \\ S'_{12} \\ S'_{13} \\ S'_{14} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} [0]_{7 \times 7} \\ [0]_{7 \times 7} \\ [I]_{7 \times 7} \end{array} \right] \quad (3.104)$$

On peut écrire l'équation (3.104) sous la forme plus simple par l'équation (3.105), avec  $\{F\}$  est le vecteur de forces nodales d'un élément fibre 3D avec extension rigide;  $\{F'\}$  est celui de forces nodales d'un élément fibre déformable 3D et  $[e]_{14 \times 14}^T$  est la matrice d'excentricité transposée.

$$\{F\} = [e]_{14 \times 14}^T \{F'\} \quad (3.105)$$

Finalement, on a la relation entre le vecteur des forces nodales et celui des déplacements pour un élément déformable 3D par la matrice de rigidité de l'équation (3.99):

$$\{F'\} = [K_e] \{\nu'\} \quad (3.106)$$

En multipliant deux termes (gauche et droit) avec la matrice d'excentricité transposée,  $[e]_{14 \times 14}^T$ , on obtient l'équation suivante :

$$[e]_{14 \times 14}^T \{F'\} = [e]_{14 \times 14}^T [K_e]_{14 \times 14} [e]_{14 \times 14} \{v\} \quad (3.107)$$

En utilisant l'équation (3.105) dans l'équation (3.107), on peut obtenir la relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux pour un élément fibre 3D :

$$\{F\} = [e]_{14 \times 14}^T [K_e]_{14 \times 14} [e]_{14 \times 14} \{v\} \quad (3.108)$$

Finalement, la matrice de rigidité pour cet élément fibre avec extension rigide est obtenue par :

$$[K_e^{ij}]_{14 \times 14} = [e]_{14 \times 14}^T [K_e]_{14 \times 14} [e]_{14 \times 14} \quad (3.109)$$

La matrice de rigidité pour un élément fibre 3D avec extension rigide de Timoshenko,  $[K_e^{ij}]_{14 \times 14}$  est utilisée afin de modéliser et analyser un pilier d'évacuateur de crue sous l'action de charges 3D et de sous-pressions dans les fissures.

### 3.5.2 Matrice de rigidité pour un élément fibre 3D avec extension rigide – 18DDL

Par les étapes similaires, on peut construire la matrice de rigidité d'un élément fibre avec extension rigide -18DDL pour les poutres profondes dans l'équation :

$$[K_e^{ij}]_{18 \times 18} = [e]_{18 \times 18}^T [K_e]_{18 \times 18} [e]_{18 \times 18} \quad (3.110)$$

Dans ce cas, on propose que l'effet de cisaillement secondaire soit négligé dans la matrice d'excentricité,  $[e]_{18 \times 18}$ . Cette hypothèse est vérifiée par les procédures de vérification et validation (V&V) dans chapitre 5 en comparaison avec des modèles d'éléments finis solides 3D. Par les processus similaires pour construire  $[e]_{14 \times 14}$ , on peut obtenir cette matrice pour un élément fibre 3D avec extension rigide pour les poutres profondes :

$$[e]_{18 \times 18} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Y_G & -\Delta X_G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta Y_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta X_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad [0]_{9 \times 9} \quad [I]_{9 \times 9} \quad [0]_{9 \times 9} \quad [I]_{9 \times 9} \quad [I]_{18 \times 18} \quad (3.111)$$

### 3.6 Résolution du système d'équations non linéaires

Le système d'équations globales non linéaires à résoudre est présenté par l'équation

$$[K] \{u\} = \{Q\} \quad (3.112)$$

La matrice de la structure, [K], est obtenue par l'assemblage des matrices de rigidité de chaque élément. Le vecteur des chargements total, Q, est le résultat de l'assemblage des vecteurs des charges de chaque élément. Le vecteur, u, est les déplacements nodaux. Le système d'équations non linéaire est résolu par des algorithmes non linéaires itératifs qui sont décrits en détail au chapitre 4.

### 3.7 Considération des sous-pressions

Dans ce projet, l'effet des sous-pressions est considéré pour deux types de structures : les barrages-poids et les piliers d'évacuateurs de crues. La distribution initiale des sous-pressions le long des plans de rupture potentielle est définie selon les lignes directrices des guides de sécurité des barrages. Lorsque la fissuration se produit, la magnitude et la distribution spatiale des sous-pressions sont mises à jour selon des algorithmes itératifs. Cette section présente les algorithmes de calcul des sous-pressions pour les ouvrages hydrauliques avec sections profondes (barrage-poids et pilier d'évacuateur de crues).

Les effets des sous-pressions sont considérés selon deux méthodes reconnues dans la littérature se basant sur la méthode de gravité pour calculer les contraintes normales : (1) la méthode de superposition des contraintes normales mécaniques et des sous-pressions et (2) la méthode de calcul de la résultante de sous-pressions qui sert alors au calcul des contraintes normales. Les deux méthodes sont décrites à la Figure 3.23. La première méthode considère la sous-pression comme une source de contraintes normales agissant sur la section analysée. La contrainte normale effective est calculée à l'aide de l'équation (3.113). La deuxième méthode considère l'effet des sous-pressions comme la résultante des pressions appliquées sur la section analysée. Le calcul est effectué en utilisant la résultante des forces incluant les sous-pressions par l'équation (3.114). Les deux méthodes présentent les mêmes résultats pour la section non drainée (Figure 3.23a). Si le drainage existe sur le plan considéré, les résultats de deux méthodes sont différents (Figure 3.23b). Moftakhar et Ghafouri (2011) ont effectué des comparaisons des critères de stabilité pour les barrages en béton entre organismes reconnus (FERC, 2002; USACE, 1995; USBR, 1987). USACE (1995) et CDA (2013) ont recommandé d'utiliser la deuxième méthode afin d'analyser la stabilité sous l'action des charges incluant les sous-pressions et l'effet de drainage. La première méthode est utilisée dans USBR (1987) et FERC (2016). Toutes les deux méthodes ont des avantages et des inconvénients. La première méthode est très simple par addition directement des contraintes normales totales dues aux charges externes et des sous-pressions. Mais ce calcul est plus conservateur que la deuxième méthode dans le cas de drainage (Moftakhar & Ghafouri, 2011) pour le calcul des critères de stabilité. La deuxième méthode a un seul inconvénient. Il faut calculer la résultante des sous-pressions pour le cas drainé ayant une distribution de sous-pressions non linéaire. Mais cette méthode présente une distribution de contraintes plus proche de la solution exacte pour une section non fissurée (Zienkiewicz & James, 1958)

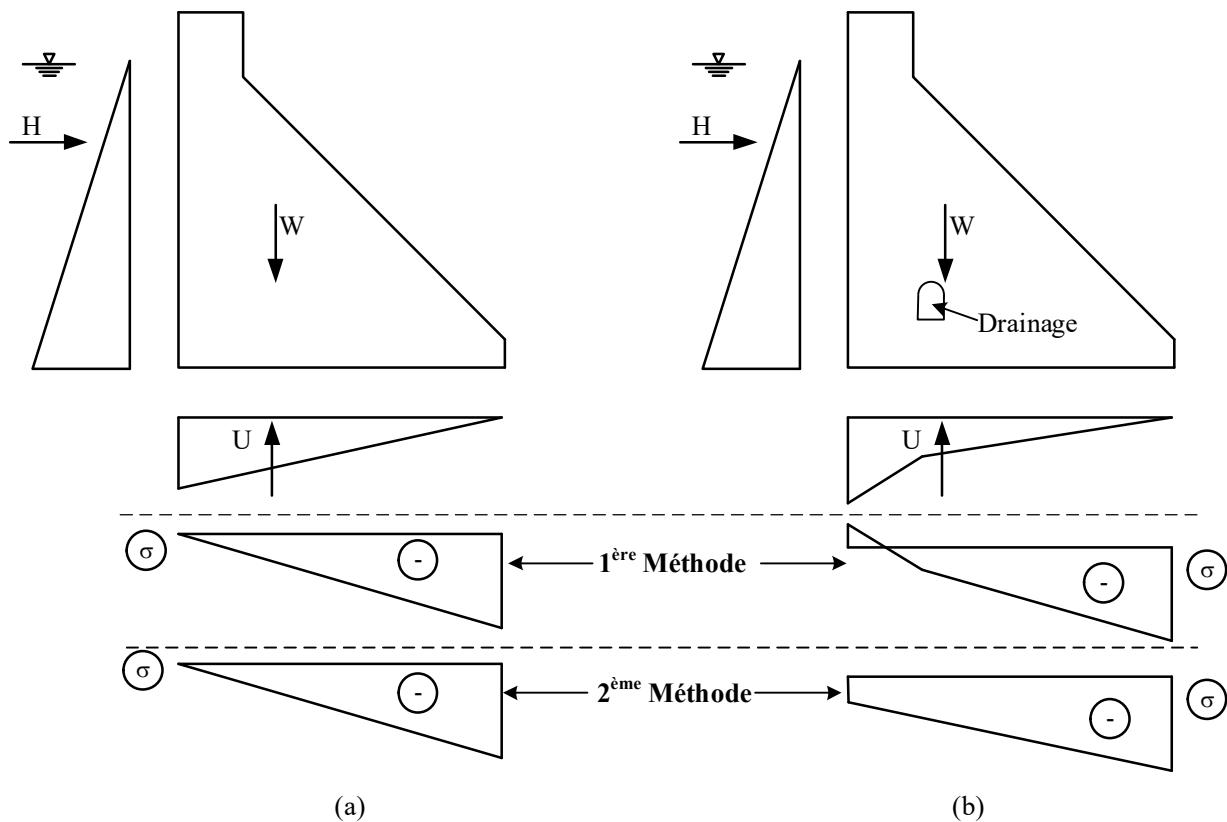


Figure 3.23 Calcul des sous-pressions par deux méthodes (a) section non drainée; (b) section drainée

Calcul selon la méthode 1 – superposition des contraintes normales

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} y - U \quad (3.113)$$

Où,

P = somme de toutes les forces verticales appliquées sans sous-pressions;

A = aire de la section analysée;

M = moment en flexion autour du centre de gravité due aux toutes les forces appliquées sans sous-pressions;

I = moment d'inertie de la section analysée

y = distance du centre de gravité de la section analysée à la location calculée;

U = sous-pression à la position de calcul

Pour calculer les contraintes normales selon la méthode 2 – U est inclut dans le calcul de P et de M selon l'équation (3.114)

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} y \quad (3.114)$$

Afin d'illustrer les deux méthodes de calcul, on considère un simple exemple comme un barrage-poids ayant la géométrie de la Figure 3.24 dans deux configurations : non drainée et drainée. La distribution des sous-pressions est définie selon CDA (2013). Le calcul est effectué à l'aides des équations (3.113) et (3.114) respectivement pour la première méthode et la deuxième méthode. Dans le cas non drainé, les résultats de deux méthodes donnent les mêmes valeurs (Figure 3.24a). Il y a des différences pour les résultats dans le cas drainé (Figure 3.24b). Le calcul est effectué pour une efficacité de drainage de 67% avec un drain positionné à 5% de la hauteur du barrage de la face amont. La première méthode présente une contrainte normale en traction à l'amont. La contrainte normale est en compression par la deuxième méthode. La première méthode est plus simple par rapport à celle de la deuxième dans le cas drainé. Elle évite de calculer la résultante des sous-pressions ayant une distribution bilinéaire. La solution est plus compliquée pour une structure hydraulique soumise à des charges 3D (PMM-VVT) ayant la position de l'axe neutre arbitraire.

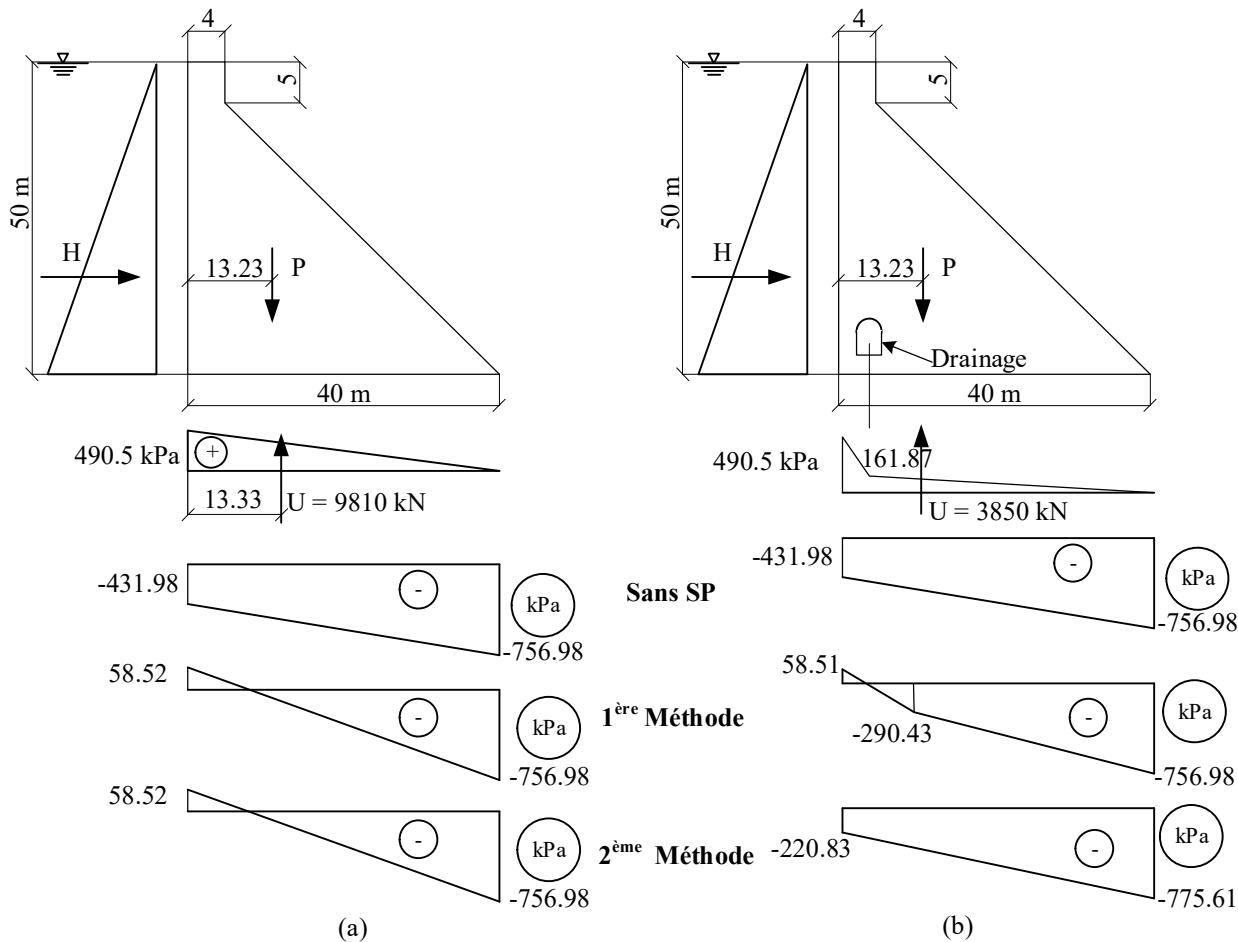


Figure 3.24 Exemple de calcul sur un barrage (a) section non drainée; (b) section drainée

Les ouvrages hydrauliques comme les barrages ou les piliers d'évacuateurs de crues sont soumis aux sollicitations 3D (PMM-VVT) ayant des sections profondes à la base. Le calcul qui est utilisé via les équations (3.113) et (3.114) ne sont pas précises pour les sections profondes car l'hypothèse « des sections planes restent planes » n'est pas respectée. La distribution des contraintes normales est non linéaire. Les deux méthodes sont utilisées et présentées à la Figure 3.25 pour une section profonde d'un pilier d'évacuateur de crue.

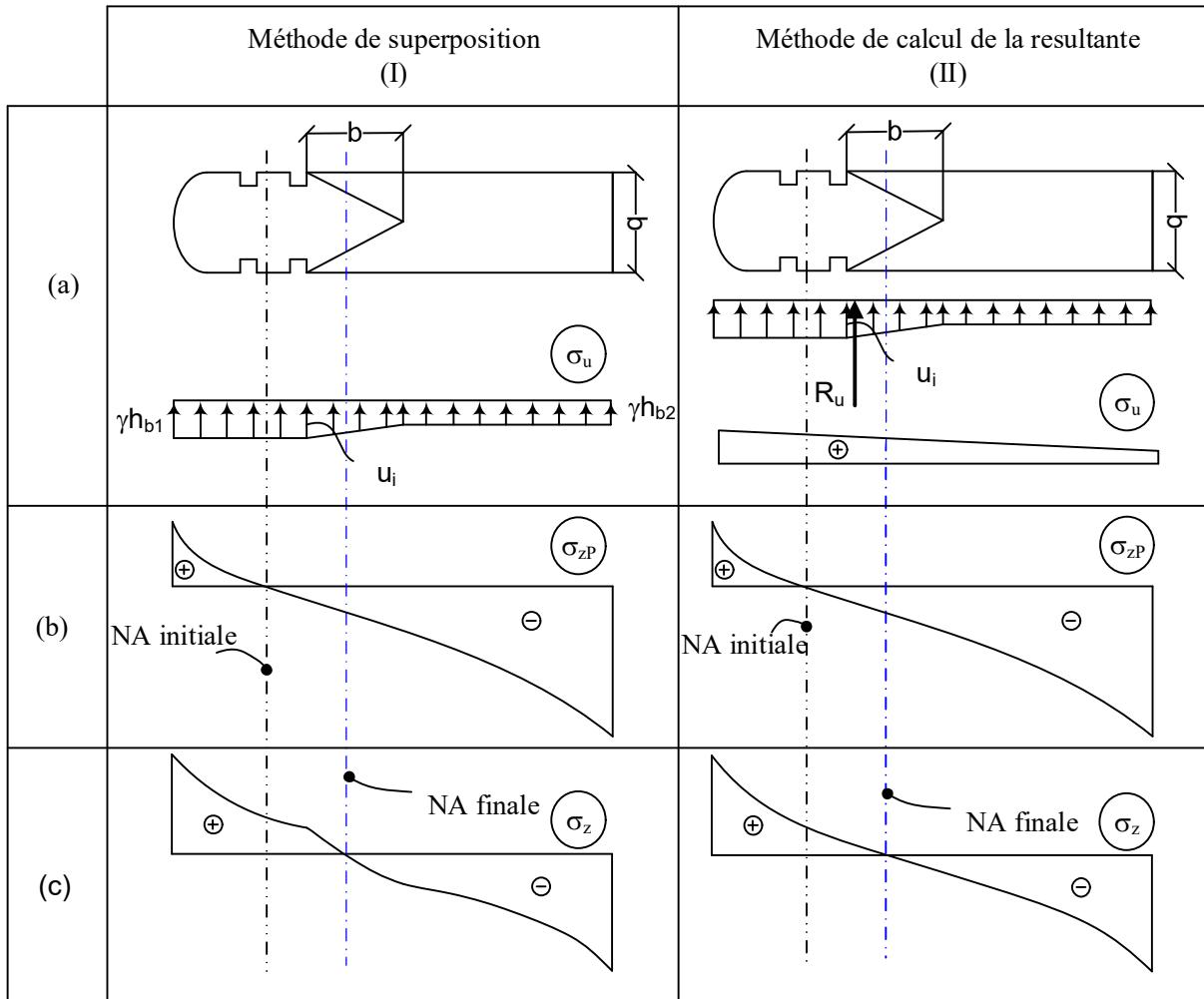


Figure 3.25 Méthode de calcul de sous-pressions dans la fissure : (a) Effet des sous-pressions; (b) Distribution des contraintes normales causées par des charges; (c) Distribution des contraintes normales finales

La méthode de calcul de la résultante considère la distribution des sous-pressions comme une charge externe répartie sur la section. On calcule la distribution des contraintes normales sous l'action combinée des forces résultantes des sous-pressions par l'équation (3.115) et les autres forces résultantes (poids-propre, poussée hydrostatique ...).

$$R_u = \int_A g(x, y) \cdot dA; \quad M_{xu} = \int_A g(x, y) \cdot y \cdot dA; \quad M_{yu} = \int_A g(x, y) \cdot x \cdot dA \quad (3.115)$$

Où :

$R_u$  : est la résultante de force axiale de sous-pression ;

$M_{xu}$  : est le moment en flexion autour de l'axe x causé par la résultante de force,  $R_u$ , excentricité;

$M_{yu}$  : est le moment en flexion autour de l'axe x causé par la résultante de force,  $R_u$ , excentricité;

$g(x,y)$  : est l'équation de la distribution de sous-pressions sur la section. Cette équation est décrite par chaque zone divisée dans la Figure 3.26 pour les barrage-poids et la Figure 3.28 pour les piliers d'évacuateur de crue. Chaque zone est déterminée par les points spéciaux sur la section afin de décrire l'équation  $g(x,y)$  correspondante.

La contrainte normale finale est déterminée par l'équation (3.116) :

$$\sigma_z = \sigma_{zp} + \sigma_u \quad (3.116)$$

Avec  $\sigma_u$  est la contrainte normale causée par l'effet de sous-pressions. Elle est calculée par l'équation (3.117) :

$$\sigma_u = C + C_x \cdot y - C_y \cdot x \quad (3.117)$$

Où :

$$C = \frac{R_u}{A} \quad C_x = \frac{M_{xu}I_y + M_{yu}I_{xy}}{I_xI_y - I_{xy}^2} \quad C_y = \frac{M_{yu}I_x + M_{xu}I_{xy}}{I_xI_y - I_{xy}^2} \quad (3.118)$$

### 3.7.1 Barrage-poids calcul 3D

Un barrage-poids est considéré sous l'action des charges 3D ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$ - $T$ ). Si une section est non fissurée, l'effet des sous-pressions est calculé selon la distribution initiale recommandée dans les lignes directrices (ex-CDA 2013 qui a adopté USACE 1995). La section analysée peut se fissurer selon un axe neutre incliné. La modification des sous-pressions en cas de fissuration qui est proposée par Stefan et Léger (2008), est alors adaptée afin de modéliser la pénétration des sous-pressions dans les fissures pour une section non drainée et drainée. Stefan et Léger (2008) ont effectué seulement le calcul de sous-pressions par la deuxième méthode et la section non drainée. Dans ce cas, la distribution spatiale et la magnitude sont essentiellement basées sur CDA (2013) dans la direction amont/aval avec une variation linéaire des sous-pressions. À la Figure 3.26, on

considère généralement un segment de barrage-poids sous l'action de charges 3D et les effets de l'eau à l'amont et à l'aval. La section est fissurée. On suppose qu'il existe un axe neutre oblique (Figure 3.26c). L'effet des sous-pressions est prolongé sur la section fissurée selon la Figure 3.26e. Les sous-pressions sont divisées en trois plans qui correspondent avec les parties de la section fissurée et non fissurée. Pour inclure les sous-pressions, il faut écrire les équations de chaque plan pour calculer les valeurs des pressions pour chaque point de maillage. Le plan 1 ( $P'_1, P'_2, P'_5, P'_6$ ) est illustré pour la partie de section fissurée ayant la valeur de sous-pressions,  $\gamma H_a$ . Le plan 2 ( $P'_3, P'_5, P'_6$ ) et le plan 3 ( $P'_3, P'_5, P'_4$ ) font partie de la section non fissurée.

La mise à jour des sous-pressions demande du calcul non linéaires et itératifs. Il faut mettre à jour la position de l'axe neutre et la distribution spatiale et la magnitude des sous-pressions pour chaque itération. L'algorithme de calcul est présenté à la Figure 3.27.

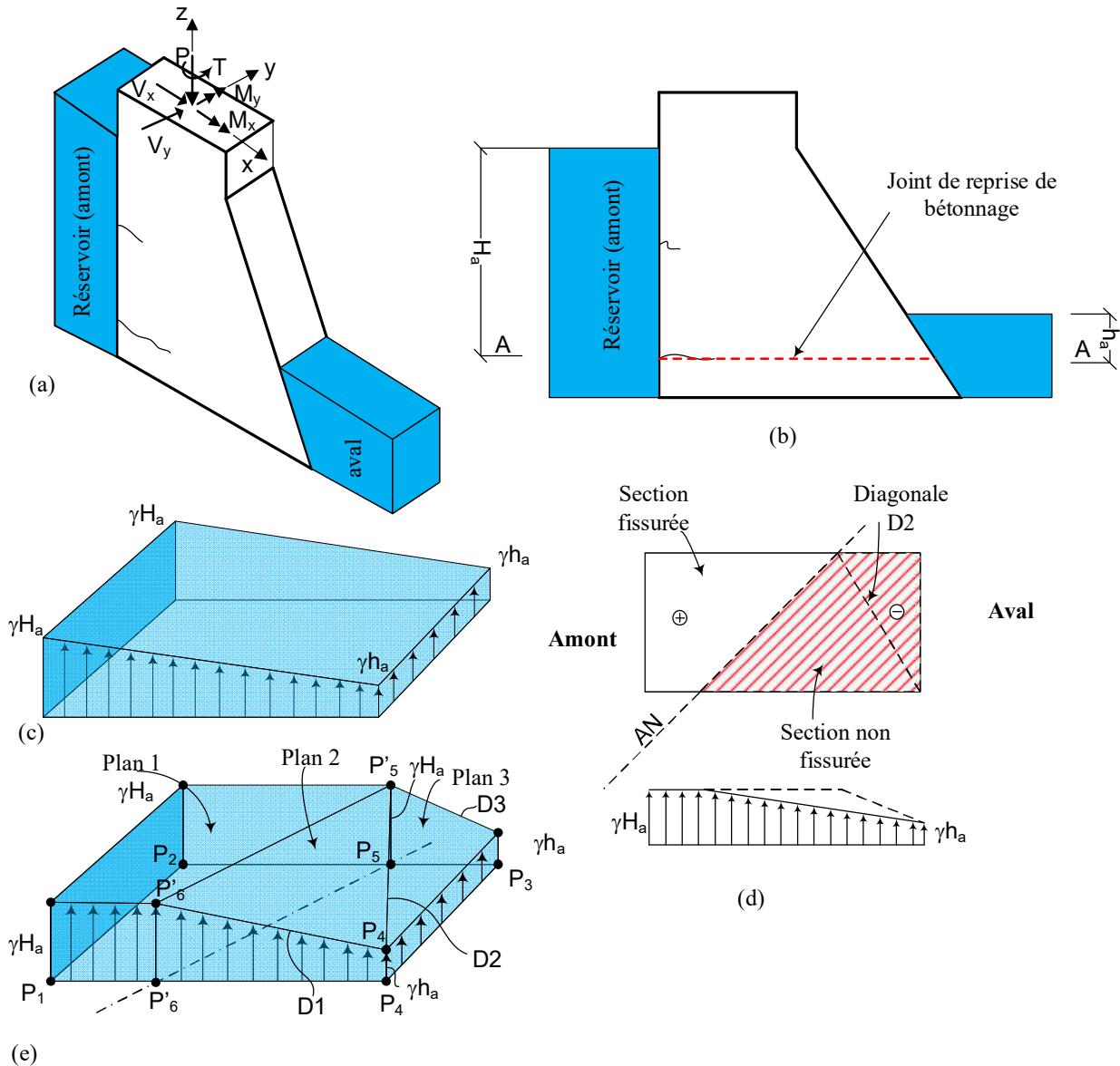


Figure 3.26 Effets des sous-pressions pour un segment de barrage-poids : (a) vue 3D d'un segment du barrage-poids sous l'action de charges et des sous-pressions ; (b) Segment de barrage-poids; (c) Section fissurée sous l'action des charges et de sous-pressions; (d) Distribution initiale des sous-pressions ; (e) Prolongation des sous-pressions dans la section fissurée ;

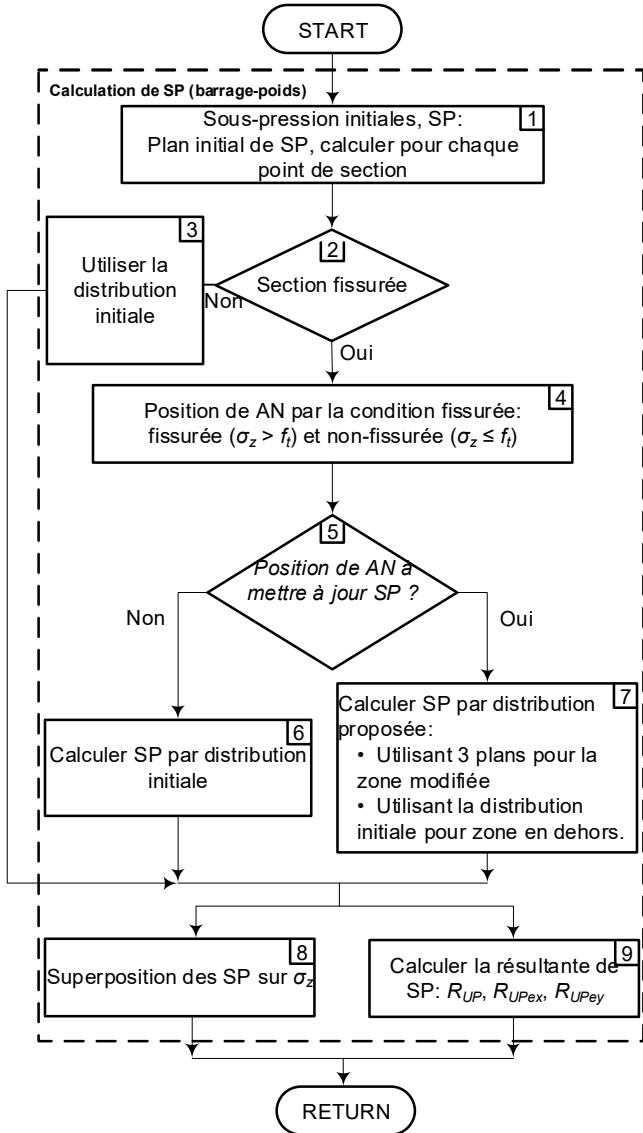


Figure 3.27 Algorithme de calcul de sous-pressions prolongées dans les fissures pour un barrage-poids.

### 3.7.2 Pilier d'évacuateurs de crues

Les effets de sous-pressions sur un pilier d'évacuateurs de crue sont un peu différents par rapport aux barrage-poids. Les piliers d'évacuateurs de crue ont toujours une partie dans l'eau et les conditions d'écoulement en milieu poreux sont modifiés au voisinage de la position de la vanne. On considère un pilier d'évacuateur de crue comme sur la Figure 3.28 sous l'action de l'eau. La fondation est considérée comme celle d'un barrage-poids sous l'action des charges 3D et des sous-pressions (Figure 3.28b). Le corps du pilier inclut la position de vanne comme la Figure 3.28b et

la Figure 3.28c. Sous l'action de charges 3D, la section analysée est fissurée avec une axe neutre oblique et divisée par deux parties non fissurée et fissurée.

La distribution initiale des sous-pressions pour une section de pilier est divisée en 3 zones : (1) zone 1 – la zone submergée; (2) zone 2 – la zone de transition vanne-pilier; (3) zone3 – la zone contrôlée par les conditions périphériques du pilier au-delà de la vanne. La zone 1, avant de la position de vanne, a toujours une distribution de pression uniforme,  $\gamma H_i$  avec  $H_i$  est la hauteur de l'eau pour la section « i » à l'amont. Cette zone est invariable que la section soit fissurée ou non. La zone 2, est très proche de la vanne. Cette zone est proposée comme une pyramide avec la longueur égale à la largeur équivalente de la section. Les sous-pressions dans cette zone sont variées de la valeur de la zone 1 à celle de la zone 3. La zone 3, est une zone après la région d'influence de la vanne. Cette zone peut être submergée ou non. Si cette zone est submergée, la valeur des sous-pressions est égale  $\gamma h_i$ , avec  $h_i$  est la hauteur de l'eau en aval par rapport la section considérée « i » (Figure 3.28c). Si cette zone n'est pas submergée, la valeur des sous-pressions est zéro. Les zones 2 et 3 peuvent varier en fonction de la position de l'axe neutre.

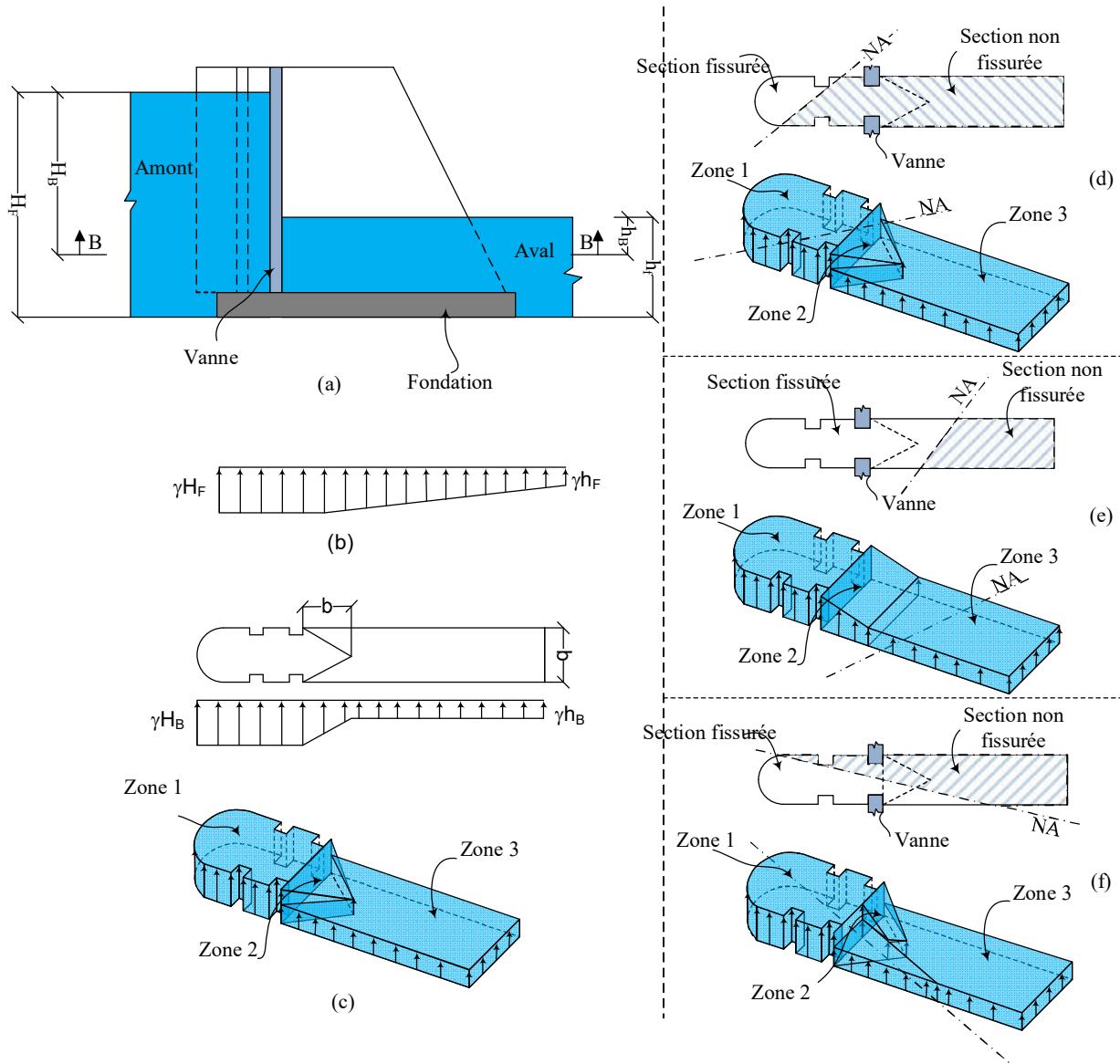


Figure 3.28 Effets de sous-pression dans les fissures : (a) Pilier d'évacuateurs de crues; (b) Sous-pressions pour la fondation; (b) Distribution de sous-pression initiale de la section B-B; (d-f) Prolongation de sous-pressions dans la section fissurée en fonction de l'axe neutre ;

L'algorithme de calcul des sous-pressions pour une section du pilier d'évacuateurs de crues est présentée à la Figure 3.29. Cet algorithme est l'extension de celui pour une section de barrage-poids avec quelques modifications qui sont adaptées pour les conditions particulières d'un pilier.

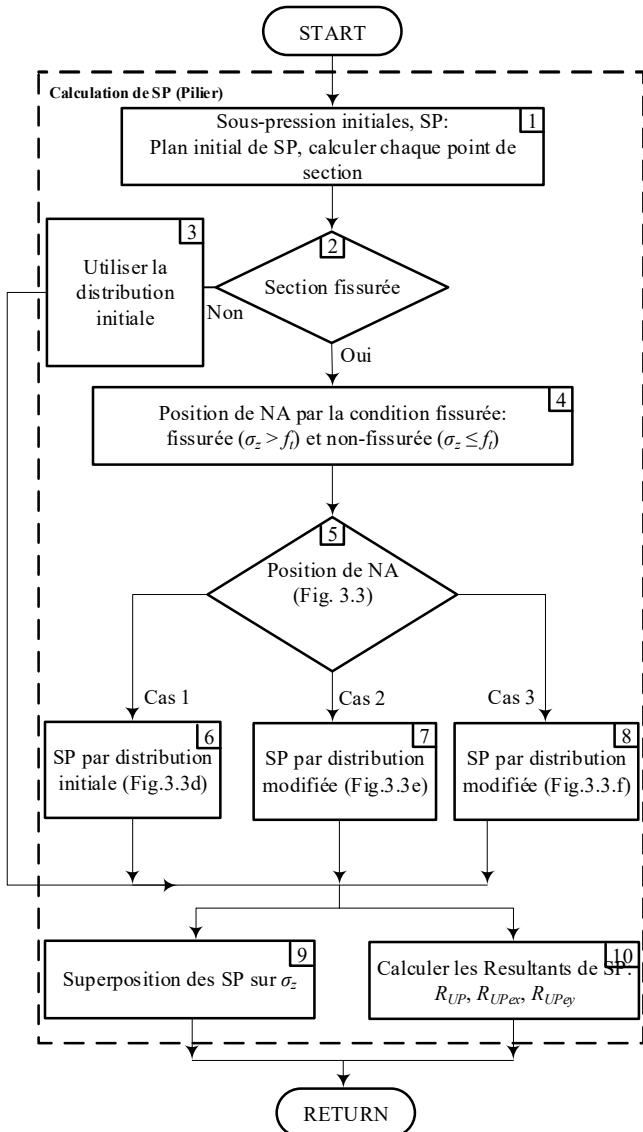


Figure 3.29 Algorithme de calcul de sous-pressions prolongées dans les fissures pour la section du pilier d'évacuateur de crue

### 3.8 Calcul des indicateurs de performance

Le but principal de ce projet de recherche est de calculer des indicateurs de performance pour les ouvrages hydrauliques (barrage-poids et pilier d'évacuateur de crue) sous l'action des charges 3D et des sous-pressions dans la fissure. Dans CDA (2013), les indicateurs de performance sont présentés afin d'analyser un ouvrage hydraulique selon la charge uni-direction amont/aval. Dans ce projet, ces indicateurs sont adaptés aux charges 3D et aux mises à jour des sous-pressions sur le plan de la section analysée.

### 3.8.1 Contraintes admissibles

Les contraintes admissibles sont la contrainte normale en compression, en tension et la contrainte de cisaillement. Dans le cas du chargement habituel, les contraintes imposées peuvent persister longtemps. Dans ce projet, on considère le comportement en tension des joints béton/béton pour un pilier ou un barrage-poids. La contrainte de cisaillement est considérée par une distribution non-uniforme par la fonction de gauchissement de cisaillement et de torsion. Le critère de Mohr-Coulomb est utilisé afin d'évaluer la zone qui est effective pour contre le cisaillement. Dans CDA (2013), la contrainte normale en tension peut être acceptée la valeur limite de  $0.05f_c'$ , pour le joint de bétonnage du barrage-poids. Les critères de contraintes normales en compression sont présentés dans le Tableau 3.2

Tableau 3.2 : Contraintes normales admissibles en compression (CDA, 2013)

Combinaison de charges	Contrainte normale en compression
Normale	$< 0.3xf_c'$
Inhabituelle	$< 0.5xf_c'$
Crue extrême	$< 0.5xf_c'$
Séisme extrême	$< 0.9xf_c'$
Post-séisme	$< 0.5xf_c'$

### 3.8.2 Aire fissurée

Le barrage-poids ou un pilier d'évacuateur de crue peut être fissuré sous l'action de charges, hydrostatiques et des sous-pressions. La fissure sera apparue et prolongée quand la valeur de contrainte normale en tension est plus grande la capacité en tension du joint de bétonnage. Dans CDA (2013), pour les combinaisons de charges habituelles, la section fissurée n'est pas acceptée. Mais elle est acceptée avec 25% de l'aire fissurée pour la combinaison de charges inhabituelle. Dans ce projet, on utilisera ces critères afin d'évaluer la sécurité structurale d'un ouvrage hydraulique.

### 3.8.3 Position de la résultante et noyau central

Dans CDA (2013) pour le cas de charge amont/aval, la stabilité au renversement est vérifiée à l'aide de calcul de la position de la résultante de forces le long du plan de rupture considéré dans

l'équation (3.119). Cette valeur ne doit pas dépasser le tiers médian de la longueur du plan de section considérée de sorte que toute la section soit en compression.

$$x_{position} = \frac{\sum M_y}{\sum P} \quad (3.119)$$

. Dans le cas de section arbitraire non fissurée sous l'action de charge 3D, le noyau central est utilisé afin de vérifier la position de la résultante.

$$x_{position} = \frac{\sum M_y}{\sum P}; \quad y_{position} = \frac{\sum M_x}{\sum P} \quad (3.120)$$

Où :

$\sum M_y$  : est la somme de moments autour de l'axe y;

$\sum M_x$  : est la somme de moments autour de l'axe x;

$\sum P$  : est la somme de forces verticales incluant les sous-pressions.

L'algorithme de calcul du noyau central est présenté dans la Figure 3.30, est développé à partir de Stefan et Léger (2008) par les modifications qui sont bien adaptées pour la section discrétisée par un maillage. À la Figure 3.30a, on considère une section arbitraire sous la forme d'un polygone avec des points de périmètre  $(P_1^s, P_2^s, P_3^s \dots P_n^s)$ . La section est maillée par les triangles ayant des point  $P_i$  ( $x_i, y_i$ ). On suppose que les points de maillages,  $P_i$ , de section sont bien satisfaits la condition de l'équation (3.121) :

$$\begin{aligned} LA \cdot x + LB \cdot y + LC = 0; \\ \text{avec: } LA = y_i - y_{i+1}; LB = x_i - x_{i+1}; LC = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \end{aligned} \quad (3.121)$$

Les coordonnées du noyau central, sont calculées par l'équation (3.122) :

$$x_i^k = x_g + \frac{LA \cdot I_y + LB \cdot I_{xy}}{LC \cdot A}; \quad y_i^k = y_g + \frac{LB \cdot I_x + LA \cdot I_{xy}}{LC \cdot A} \quad (3.122)$$

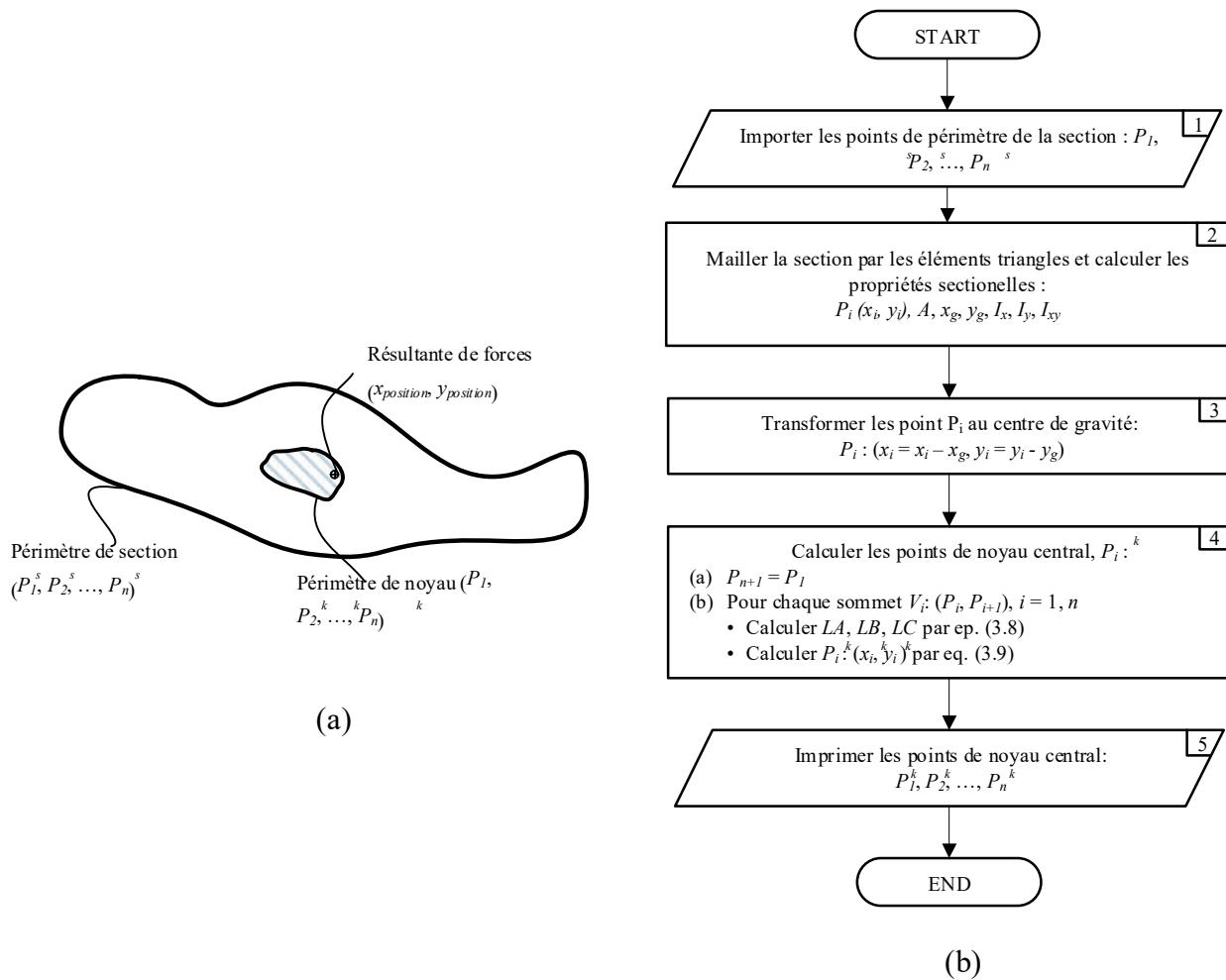


Figure 3.30 Détermination de noyau central : (a) Section arbitraire (b) Algorithme de calcul du noyau central.

### 3.8.4 Facteur de sécurité au glissement global

Dans CDA (2013), le calcul du facteur de sécurité au glissement global s'effectue à l'aide de la formule (3.123), développée pour un plan horizontal :

$$FSG_G = \frac{[(\sum P - U) \tan \phi + cA_c]}{\sum V} \quad (3.123)$$

Où :

$\sum V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  : force latérale combinée par deux termes d'efforts tranchants les  $V_x, V_y$

$\sum P$  : somme des forces verticales sans les sous-pressions;

$U$  : résultante des sous-pressions normale au plan considéré;

$\phi$  : angle de friction;

$c$  : cohésion;

$A_c$  : aire de contact en compression;

Dans ce projet, l'aire de contact en compression est calculée par une méthode incluant l'effet de cisaillement secondaire et de torsion au gauchissement. Dans CDA (2013), le facteur de sécurité au glissement à respecter est recommandé selon les combinaisons de charges au Tableau 3.3 :

Tableau 3.3 : Valeurs requises pour le facteur de sécurité au glissement (CDA, 2013)

Combinaison de charges	Facteur au glissement (Seulement résistance au friction)	Facteur au glissement (Résistance de friction et cohésion)	
		Avec essai	Non essai
Normale	$\geq 1.5$	$\geq 2.0$	$\geq 3.0$
Inhabituelle	$\geq 1.3$	$\geq 1.5$	$\geq 2.0$
Inondation extrême	$\geq 1.1$	$\geq 1.1$	$\geq 1.3$

### 3.8.5 Facteur de sécurité au glissement local

Dans ce projet, on présente un facteur de sécurité au glissement local selon le critère de rupture de Mohr – Coulomb. Sous l'action de charges 3D, le plan du joint de reprises de bétonnage est analysé en considérant l'effet du cisaillement primaire et secondaire occasionné par  $V_x$ - $V_y$ - $T$  sur l'aire comprimée,  $A_c$ . On calcul alors une nouvelle aire,  $A_{cr}$ , de sorte que la résistance en compression-cisaillement n'est pas atteinte. Le critère local de Mohr-Coulomb est présenté dans l'équation (3.124).

$$\tau \leq \sigma \cdot \tan \phi + c \quad (3.124)$$

Où :

$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$  : contrainte de cisaillement combinée pour un élément considéré;

$\tau_{xz}; \tau_{yz}$  : contraintes de cisaillement totales sous l'action de charges 3D;

$\sigma$  : contrainte normale effective de l'élément considéré.

Le facteur de sécurité au glissement local est calculé pour chaque point de la section considérée par l'équation (3.125):

$$SSF_{local} \leq \frac{\sigma \cdot \tan \phi + c}{\tau} \quad (3.125)$$

### 3.9 Conclusions

Ce chapitre présente des modèles constitutifs pour introduire les gauchissements dues aux cisaillements et à la torsion dans deux modèles d'éléments fibres 3D ayant 14 DDL pour l'élément de type Timoshenko et 18 DDL pour celui de la poutre profonde avec gauchissement causé par les efforts tranchants ( $V_x$ - $V_y$ ), et la torsion (T). Ces modèles sont formulés par une méthode mixte : (i) la méthode de forces (flexibilité) pour l'élément soumis aux sollicitations PMM-VV; et (ii) la méthode de rigidité pour l'élément soumis à la torsion incluant le gauchissement. Dans les deux cas, on utilise des intégrales numériques pour les sections analysées le long de l'élément poutre aux points de Gauss. Les conditions d'équilibre ont été utilisées pour formuler une matrice d'excentricité afin de construire un élément 3D ayant des extensions rigides aux extrémités pour l'analyse des structures avec une géométrie variable.

L'analyse sectionnelle utilise des éléments finis 2D triangulaires CST. Elle se base sur la théorie de l'élasticité via les équations de Poisson et de Laplace, développées à partir de la solution primaire. Cette formulation permet de calculer les fonctions de gauchissement primaires et secondaires dues à la torsion et aux cisaillements. La réponse sectionnelle considère alors l'interaction PMM-VVT. Par ailleurs, on propose un modèle de modification des sous-pressions incluant les effets de charges 3D PMM-VVT.

Afin d'évaluer la stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques, les indicateurs de performance sont développés pour les problèmes soumis aux charges 3D à partir des recommandations pour les structures 2D de CDA (2013). On propose un facteur de sécurité local pour l'état de compression-cisaillement à l'aide du critère de Mohr-Coulomb.

Les formulations proposées sont implémentées dans un nouveau logiciel FIDAM3D à l'aide du langage de programmation MATLAB au Chapitre 4.

## **CHAPITRE 4 DÉVELOPPEMENT ET IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUES DES MODÈLES CONSTITUTIFS PROPOSÉS**

### **4.1 Introduction**

Dans ce chapitre, on présente l'implémentation numérique des algorithmes proposés au Chapitre 3. Ceci conduit au développement du logiciel « FIDAM 3D » afin d'évaluer la stabilité structurale 3D des ouvrages hydrauliques en béton non armé à l'aide d'éléments fibres de type poutres-colonnes. Ce logiciel est programmé à l'aide de MATLAB et le logiciel supplémentaire (Gmesh) pour le maillage 2D des sections. Dans « FiDAM3D », il y a 3 niveaux de formulation et d'analyse: (1) le niveau sectionnel ; (2) le niveau des éléments et (3) le niveau des structures.

Le niveau sectionnel permet de calculer les propriétés sectionnelles et la distribution des contraintes normales et de cisaillement en tenant compte des sous-pressions sous l'action des charges 3D ( $P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$ - $T$ ). Les effets du gauchissement causés par le cisaillement et la torsion sont considérés pour les sections fissurées en béton non armé en utilisant les fonctions de gauchissement primaires et secondaires. La méthode des éléments finis 2D est utilisée afin de calculer les fonctions de gauchissement et les contraintes sur les sections. Les matrices de rigidité des sections sont calculées aux points de Gauss afin de construire la matrice de rigidité de l'élément fibre 3D hydromécanique. La matrice de rigidité d'un élément est construite en utilisant deux méthodes : (1) la méthode de flexibilité pour l'effet de flexion biaxiale et des efforts tranchants; (2) la méthode des déplacements pour l'effet de torsion.

Au niveau des structures, les algorithmes sont utilisés pour résoudre les équations d'équilibre non linéaires et déterminer itérativement l'aire fissurée des sections incluant les effets des efforts internes.

### **4.2 Outils de calcul**

Les algorithmes de calcul sont adaptés, développés et programmés à l'aide du logiciel MATLAB à partir du logiciel d'analyse sectionnelle "Varsec 3D" de Stefan et Léger (2012) pour implanter et appliquer la méthode des éléments fibres au niveau des éléments et de la structure globale. Les logiciels ABAQUS, OpenSees et CADAM 3D sont utilisés pour valider et comparer les résultats des modèles proposés d'éléments fibres 3D.

Le logiciel CADAM 3D, basé sur la méthode de gravité, est utilisé pour valider le problème simple des ouvrages hydrauliques selon la théorie classique des poutres avec des analyses sectionnelles découplées quand les charges sont appliquées seulement dans la direction amont/aval. Le logiciel OpenSees contient des modules d'éléments fibres ayant des éléments prismatiques avec des comportements différents (linéaires ou non linéaires) des matériaux (du béton, béton armé). Ce logiciel permet de vérifier et comparer les résultats des nouveaux modèles développés et ceux de modèles existants qui ne considèrent pas l'effet de poutre profonde. La méthode des éléments finis 3D avec les éléments solides est présentée par ABAQUS pour tous les problèmes (linéaires et non linéaires) afin de vérifier et valider en détails les nouveaux modèles constitutifs proposés pour les poutres élancées et les poutres profondes.

### **4.3 Description du logiciel « FIDAM 3D »**

Les modèles sont programmés à l'aide du logiciel MATLAB. Le point de départ est la source des codes de Stefan et Léger (2012) pour l'analyse sectionnelle. Des nouveaux modules sont développés pour améliorer les limitations et les hypothèses Stefan et Léger (2012) et autres restrictions décrites dans la littérature pour l'analyse sectionnelle des ouvrages hydrauliques. Le logiciel principal FIDAM3D est constitué de la collection des modules développés. Les étapes ci-dessous décrivent les techniques de programmations :

- Discrétisation de quelques sections ayant géométries arbitraires le long d'un élément typique par le logiciel *Gmesh* (Geuzaine & Remacle, 2009) ;
- Construction des modules supplémentaires de calcul par le logiciel MATLAB ; (i) Section analysée soumise aux flexions composées ; (ii) ajout du gauchissement en cisaillement causé par les efforts tranchants et la torsion ; (iii) modèle constitutif non linéaire hydromécanique pour le béton non armé incluant ; (iv) un modèle de sous-pressions, (v) la fissuration ; (vi) la rupture en compression – cisaillement ;
- Construction d'un logiciel principal en ajoutant (i) les modules supplémentaires pour la formulation des matrices élémentaires, (ii) l'assemblages de la matrice de rigidité de la structure, (iii) la résolution du système d'équations non linéaires et (iv) le calcul des indicateurs de stabilité comme les facteurs de sécurité au glissement (global et local), l'aire fissurée, la position de la résultante des forces et les contraintes normales maximales en compression. Ce logiciel est décrit à la Figure 4.1.

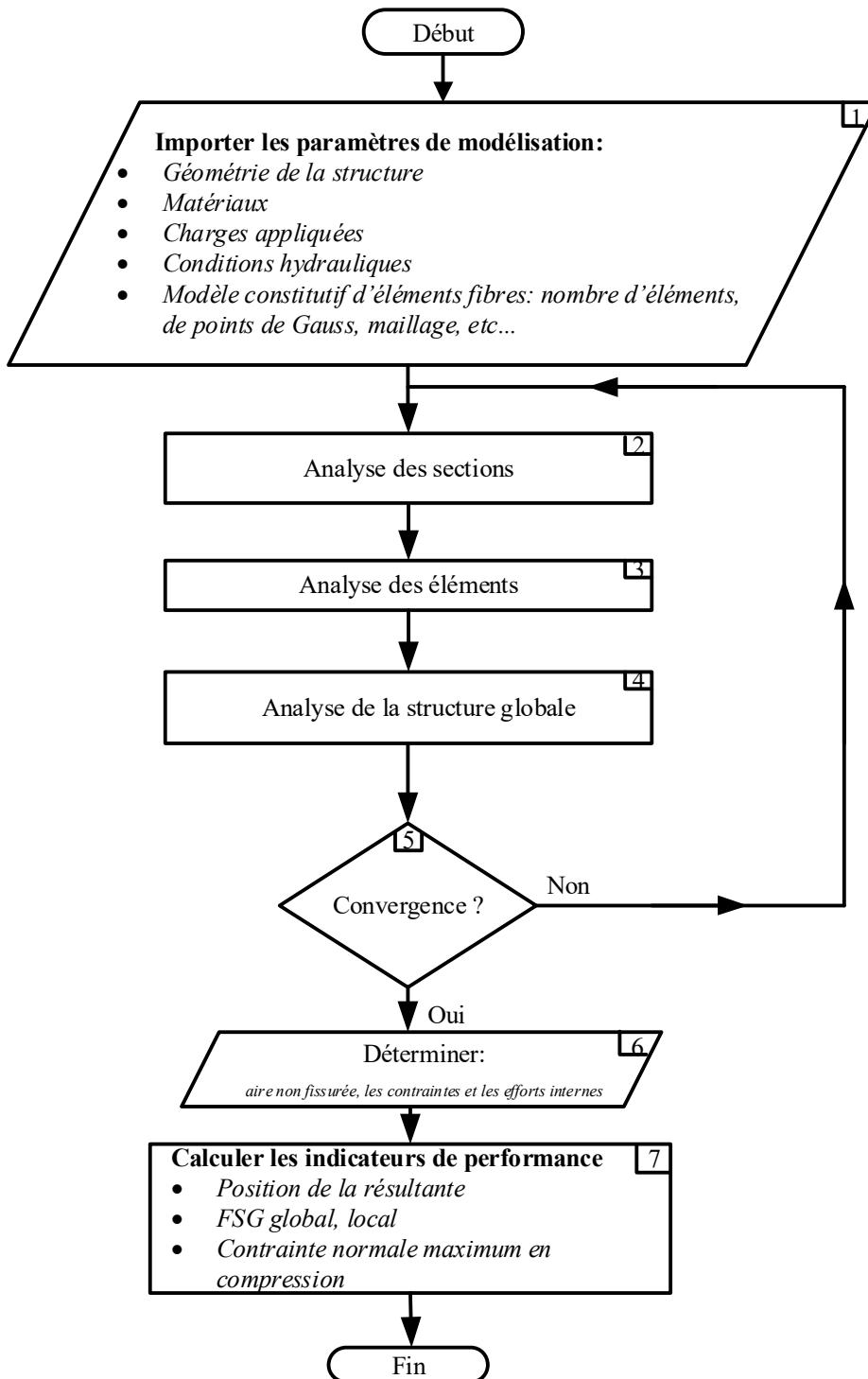


Figure 4.1 Programme principal du logiciel FIDAM3D

#### 4.4 Analyses sectionnelles : béton non armé

Les sections sélectionnées sont analysées afin de calculer la distribution des contraintes normales et des contraintes de cisaillement sous l'action des charges 3D et la présence de sous-pressions. L'algorithme utilisé est itératif. À chaque itération « i » d'analyse du système, il faut mettre à jour les propriétés sectionnelles des sections à cause de l'évolution de la fissuration. Cet algorithme est présenté à la Figure 4.2.

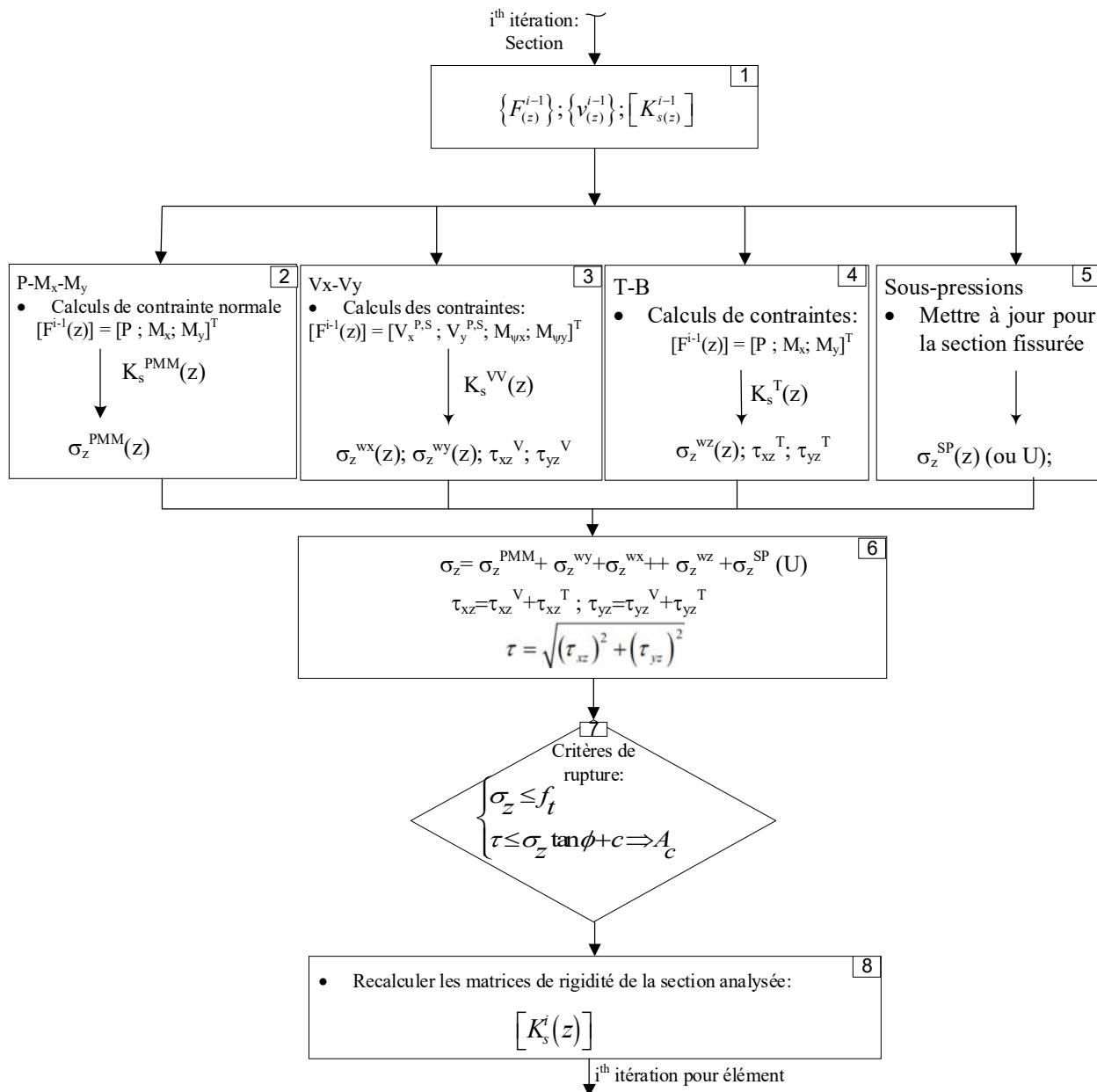


Figure 4.2 Algorithme général pour analyse sectionnelle à la i<sup>ème</sup> itération

Où :

$\{F^{i-1}(z)\}$  : Les efforts internes de la section analysée à l’itération (i-1);

$[K_s^{i-1}(z)]$ ,  $[K_s^i(z)]$  : la matrice de rigidité de la section analysée à l’itération i-1 et à l’itération i;

$K_s^{PMM}(z)$  : la matrice de rigidité de la section analysée à l’itération i-1 pour l’effet de la force axiale et de la flexion biaxiale ( $P-M_x-M_y$ );

$K_s^{VV}(z)$  : la matrice de rigidité de la section analysée à l’itération i-1 pour l’effet de cisaillement incluant des déformations de gauchissement;

$K_s^T(z)$  : la matrice de rigidité de la section analysée à l’itération i-1 pour l’effet de torsion incluant des déformations de gauchissement (bi-moment);

#### 4.4.1 Algorithme de résolution pour l’action $P-M_x-M_y$

Le but principal de cette étape est de calculer la distribution des contraintes normales sous l’action des charges primaires ( $P-M_x-M_y$ ). L’algorithme de résolution de ce problème est résumé au Tableau 4.1. À l’itération « i », les efforts internes (PMM) sont calculés à la section analysée à l’aide des fonctions d’interpolation de forces. La matrice de rigidité de la section est utilisée à l’itération précédente. Les déformations et les contraintes normales sont calculées par les équations des étapes 3 et 4. Les critères de performance (rupture) à l’étape 4 sont traités via les contraintes normales et les contraintes de cisaillement du problème PMM-VVT avec gauchissement et sous-pressions. L’étape 5 est utilisée pour déterminer la position de l’axe neutre et l’enveloppe de la partie non fissurée de la section considérée. La dernière étape est de recalculer la matrice de rigidité de la partie non fissurée de la section sous l’action de PMM afin de mettre à jour la rigidité de la structure globale.

Tableau 4.1 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour P-M<sub>x</sub>-M<sub>y</sub> à la i<sup>ème</sup> itération

1. Calcul des efforts internes de la section sélectionnée

$$F^{i-1}(z) = \{P; M_x; M_y\}^T; [K_s^{PMM}(z)] = [K_s^{i-1}(z)]$$

2. Calcul de la déformation sous l'action des efforts internes

$$\varepsilon^i(x_{ifib}, y_{ifib}, z) = [K_s^{PMM}(z)]^{-1} \{F^{i-1}\}; E^{i-1}(x_{ifib}, y_{ifib})$$

3. Calcul des contraintes normales sur les éléments finis triangulaires

$$\sigma^i(x_{ifib}, y_{ifib}, z) = E^{i-1} [I(x_{ifib}, y_{ifib}, z)] \varepsilon^i(x_{ifib}, y_{ifib}, z)$$

4. Considération des critères de ruptures sous les contraintes normales avec souspressions
5. Mise à jour de la position de l'axe neutre, nouvelle section obtenue
6. Recalcul de la matrice de rigidité pour la partie non fissurée de la section

$$K_s^{PMV} = \sum_{ifib=1}^{nfb} [I(x_{ifib}, y_{ifib}, z)]^T E(x_{ifib}, y_{ifib}, z)^i [I(x_{ifib}, y_{ifib}, z)]$$

#### 4.4.2 Algorithme de résolution pour l'action V<sub>x</sub>-V<sub>y</sub>

Les déformations de cisaillement sont des plus importantes dans ce projet afin de capturer leur influence sur les sections profondes. L'objectif de l'algorithme décrit ci-dessous est d'obtenir la matrice de rigidité d'une section quelconque en tenant compte des termes primaires et secondaires. Le calcul est effectué à l'aide de l'algorithme de la méthode des éléments finis 2D en utilisant les équations de Poisson. L'algorithme de résolution est montré au

Tableau 4.2. À l'étape 1, les efforts internes correspondants à la section, sont calculés à partir du vecteur de forces de l'élément fibre 3D de l'itération précédente. Dans l'étape 2, la section est discrétisée par des triangles à l'aide du logiciel *Gmesh*. La MEF 2D est utilisée à l'étape 3 afin de calculer les fonctions de gauchissement primaires,  $\psi_i^P$  et secondaires,  $\psi_i^S$  où i est respectivement x, et y:

$$\begin{aligned}\psi_X^S(x, y, z) &= \psi_X^P - X; \quad \text{avec } X = x - x_G^{i-1} \\ \psi_Y^S(x, y, z) &= \psi_Y^P - Y; \quad \text{avec } Y = y - y_G^{i-1}\end{aligned}\quad (4.1)$$

À l'étape 4, les contraintes sont calculées à l'aide des propriétés sectionnelles de l'itération précédente et des fonctions de gauchissement calculées. Les fonctions de gauchissement sont calculées à l'aide d'éléments triangulaires discrétisant l'aire non fissurée de la section de l'itération précédente.

(i) Contraintes de cisaillement primaires dues aux déformations de cisaillement primaire :

$$\tau_{xzS}^P = \frac{\partial \psi_G}{\partial x} + h_{nx}; \quad \tau_{yzS}^P = \frac{\partial \psi_G}{\partial y} + h_{ny} \quad (4.2)$$

(ii) Contraintes de cisaillement secondaires et contraintes normales secondaires dues aux déformations de cisaillement secondaire

$$\begin{aligned}\sigma_z^w &= EI_{\psi_x \psi_x} \frac{d\eta_y}{dz} \psi_x^S(x, y, z) + EI_{\psi_y \psi_y} \frac{d\eta_x}{dz} \psi_y^S(x, y, z) \\ \tau_{xz}^w &= G\gamma_x^S \psi_{x,x}^S(x, y, z) + G\gamma_y^S \psi_{y,x}^S(x, y, z); \\ \tau_{yz}^w &= G\gamma_y^S \psi_{x,y}^S(x, y, z) + G\gamma_x^S \psi_{y,y}^S(x, y, z)\end{aligned}\quad (4.3)$$

(iii) La contrainte totale de cisaillement est la somme des effets primaires et secondaires.

$$\tau_{xz}^V = \tau_{xzS}^P + \tau_{xz}^w; \quad \tau_{yz}^V = \tau_{yzS}^P + \tau_{yz}^w \quad (4.4)$$

Pour la section fissurée, on utilise une hypothèse pour obtenir la distribution des contraintes de cisaillement. À partir de la distribution des contraintes de cisaillement pour une section élastique, cette distribution est corrigée afin de respecter l'équilibre avec la charge appliquée à la section fissurée. Le principe de cette hypothèse est présenté à la Figure 4.3. Cette correction permet

d'obtenir la nouvelle distribution de contraintes de cisaillement sur la partie non fissurée de sorte que l'intégrale des contraintes de cisaillement est en équilibre avec la charge appliquée à la section. On utilise l'équation (4.5) avec  $V_x^c$ ,  $V_y^c$  qui correspondent aux efforts tranchants internes calculés par l'intégrale sur la partie non fissurée de la section,  $A_c$ .

$$\begin{aligned} V_x^c &= \int_{A_c} \tau_{xz}^V dA; \quad V_y^c = \int_{A_c} \tau_{yz}^V dA \\ \tau_{xz}^V &= \frac{V_x}{V_x^c} \tau_{xz}; \quad \tau_{yz}^V = \frac{V_y}{V_y^c} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.5)$$

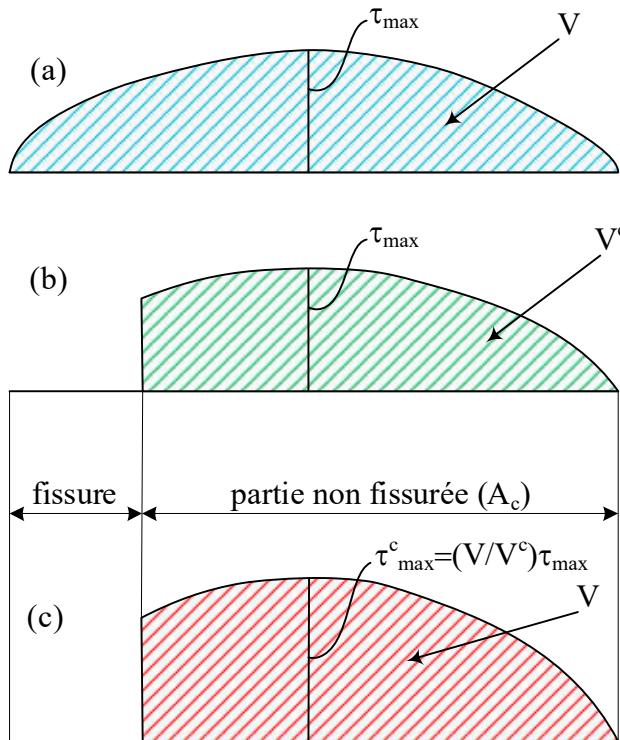


Figure 4.3 Principe de modification de la distribution de contrainte de cisaillement pour respecter l'équilibre entre les efforts internes et externes

À l'étape 5, il faut considérer les conditions de rupture en prenant les résultats de tous les effets de charges afin de calculer les nouvelles propriétés sectionnelles pour l'aire non fissurée mise à jour. On calcule aussi la nouvelle distribution des contraintes normales qui correspond avec les nouvelles propriétés géométriques recalculées à l'étape 6. On calcule la matrice de rigidité sectionnelle pour les sections aux points de Gauss à l'itération  $i^{\text{ème}}$  afin de poursuivre une nouvelle analyse non linéaire aux niveaux des éléments et de la structure globale.

Tableau 4.2 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour  $V_x$ - $V_y$  à la  $i^{\text{ème}}$  itération

1. Calcul des efforts internes de la section de l'itération précédente

$$F^{i-1}(z) = \begin{bmatrix} V_x^{P,S}; & V_y^{P,S}; & M_x^\psi; & M_y^\psi \end{bmatrix}^T; \begin{bmatrix} K_s^{VV}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s^{i-1}(z) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} K_s^{\theta\theta}(z) \end{bmatrix}$$

2. Discrétisation de la partie non fissurée de la section sélectionnée à l'aide de Gmesh.
3. Calcul des fonctions de gauchissement à l'aide de l'algorithme MEF 2D pour la partie non fissurée de la section
  - Fonctions de gauchissement primaires,  $\psi_X^p, \psi_Y^p$ .
  - Fonctions de gauchissement secondaires,  $\psi_X^s, \psi_Y^s$ .
4. Calcul des contraintes de cisaillements et contraintes normales.
5. Considération des critères de ruptures (utilisant les contraintes normales incluant les sous-pression et les contraintes de cisaillement).
6. Recalcul de la matrice de rigidité pour la section fissurée.

#### 4.4.3 Algorithme de résolution pour l'action de St-Venant et gauche

Le dernier algorithme de résolution sert à analyser la section sélectionnée pour les effets de torsion. Dans ce projet, il y a deux effets de torsion considérés : (i) la torsion de St-Venant et (ii) le bi-moment due au gauchissement. L'algorithme proposé dans cette partie est utilisé afin de calculer les contraintes de cisaillement et les contraintes normales selon le Tableau 4.3 sur la section comprimée sous l'effet de charges 3D. Au début, il faut calculer les efforts internes (Moment de Torsion et Bi-moment),  $F^{i-1}(z)$  et les déplacements,  $\{u(z)\}^{i-1}$  de la section de l'itération précédente en utilisant les fonctions d'interpolation des déplacements. À l'étape 2, il faut calculer les fonctions de gauchissement primaires et secondaires qui correspondent aux effets de torsion de St-Venant et de bi-moment de gauchissement.

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi_z = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = (y \cdot l - x \cdot m) \Big|_{z=0} \end{cases} \text{ avec } \quad (4.6)$$

$$\tau_{xzSV} = G \frac{d\theta^{(i-1)}}{dz} \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} - y \right); \quad \tau_{yzSV} = G \frac{d\theta^{(i-1)}}{dz} \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + x \right)$$

Effet de bi-moment de gauchissement :

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi_z^s = \left. \left( 2(1+\nu) \cdot \left( \frac{d^3 \theta}{dz^3} \right)^{i-1} \cdot \Psi_z \right) \right|_{z=z_0} \\ \frac{\partial \psi_s}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\sigma_z^{wz} = E \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^{i-1} \cdot \psi_z; \quad \tau_{xzW} = G \frac{\partial \Psi_z^s}{\partial x}; \quad \tau_{yzW} = G \frac{\partial \Psi_z^s}{\partial y}$$

À l'étape 3, les contraintes sont calculées en utilisant les déplacements,  $\{u(z)\}^{i-1}$  de la section considérée à l'itération précédente,  $i-1$  avec les fonctions de gauchissement primaires et secondaires obtenues. On calcule également la distribution des contrainte normales dues aux distorsions de cisaillement et dues aux deux effets de la torsion. Ces contraintes normales et de cisaillement sont un intrant pour le calcul des contraintes finales pour vérifier les conditions de rupture à l'étape 4. Enfin, la matrice de rigidité de la section est mise à jour en prenant la géométrie de la partie comprimée de la section de l'étape 5.

$$J(z)^i = \int_{A(z)} x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} dA; \quad C_w(z)^i = \int_{A(z)} \Psi_z^2 dA \quad (4.8)$$

Tableau 4.3 : Algorithme d'analyse sectionnelle pour la torsion à la  $i^{\text{ème}}$  itération

1. Calcul des efforts internes de la section sélectionnée

$$F^{i-1}(z) = [T \quad B]^T; \quad [K_s^T(z)] = [K_s^{i-1}(z)]$$

2. Calcul des fonctions de gauchissement à l'aide de l'algorithme MEF 2D avec les conditions aux frontières de torsion via les équations (4.6) et (4.7).
3. Calcul des contraintes normales et des contraintes de cisaillement par les équations (4.6) et (4.7).
  - Calcul des contraintes de cisaillement totales :
$$\tau_{xz}^T = \tau_{xzSV} + \tau_{xzW}; \quad \tau_{yz}^T = \tau_{yzSV} + \tau_{yzW}$$
4. Considération des critères de ruptures (utilisant les contraintes totales et les sous-pressions).
5. Recalcul de la matrice de rigidité pour la section fissurée.

#### 4.4.4 Considération des sous-pressions

Les algorithmes de calcul et de mise à jour des sous-pressions sont présentés à la section 3.7 pour deux types de structures hydrauliques (barrage-poids et piliers d'évacuateur de crue) avec deux approches différentes. Dans le logiciel *FIDAM 3D*, on peut choisir le modèle de sous-pression pour barrage-poids ou pilier dans le fichier d'entrées. On peut aussi décider de la méthode de calcul des sous-pressions : (1) la méthode de superposition des contraintes, ou (2) la méthode de calcul utilisant la résultante de forces de sous-pressions. L'effet des sous-pressions est mis à jour chaque itération selon le calcul des sections fissurées.

#### 4.4.5 Critères de convergences

Les critères de convergences sont proposés selon la condition d'équilibre de la section entre les forces internes et externes. Les erreurs de calcul,  $err_i$ , avec  $i = 1 \text{ à } 10$ , sont présentées par les

équations (4.9) pour les forces appliquées comme :  $P, M_x, M_y, M_x^{\psi\psi}, M_y^{\psi\psi}, B, T, V_x, V_y$ . La valeur admissible de  $err_i$  est approximativement nulle (comme  $10^{-3}$ ).

$$\begin{aligned}
 err_1 &= \left| \frac{\int_A \sigma_z dA - P}{P} \right|; \quad err_2 = \left| \frac{\int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA - M_y}{M_y} \right|; \quad err_3 = \left| \frac{\int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA - M_x}{M_x} \right| \\
 err_4 &= \left| \int_A \sigma_w dA \right|; \quad err_5 = \left| \frac{\int_A \sigma_z \cdot \psi_x^S \cdot dA - M_y^{\psi\psi}}{M_y^{\psi\psi}} \right|; \quad err_6 = \left| \frac{\int_A \sigma_z \cdot \psi_y^S \cdot dA - M_x^{\psi\psi}}{M_x^{\psi\psi}} \right| \\
 err_7 &= \left| \frac{\int_A \sigma_z \cdot \psi \cdot dA - B}{B} \right|; \quad err_8 = \left| \frac{\int_A (\tau_{xz} \cdot y + \tau_{yz} \cdot x) \cdot dA - T}{T} \right|; \\
 err_9 &= \left| \frac{\int_A (\tau_{xz}) \cdot dA - V_x}{V_x} \right|; \quad err_{10} = \left| \frac{\int_A (\tau_{yz}) \cdot dA - V_y}{V_y} \right|
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

## 4.5 Algorithme de résolution : niveau des éléments

La solution itérative demande le calcul des matrices de rigidité des éléments qui doivent être mises à jour par intégrales numériques des matrices de rigidité des sections sélectionnées aux points de Gauss. La matrice de rigidité d'un élément est formulée par une méthode mixte : (1) la méthode de flexibilité pour l'effet de  $P-M_x-M_y-V_x-V_y$  et (2) la méthode de rigidité pour l'effet de torsion. Toutes les équations sont présentées au Chapitre 3 afin d'obtenir la matrice de rigidité pour un élément fibre 3D ayant (i) des extensions rigides et incluant (ii) des déformations au gauchissement de cisaillement et (iii) de torsion. Dans cette section, on résume l'algorithme de résolution non linéaire pour une itération quelconque au niveau global de la structure. Cet algorithme est implémenté dans le logiciel *FIDAM 3D* selon la Figure 4.4 pour l'élément fibre 3D ayant deux nœuds,  $i-j$ . Dans l'étape 3, on fait une transposition de la matrice de rigidité en torsion,  $T$ , d'un élément avec appuis simples à la matrice de rigidité d'un élément avec les mouvements de corps rigide. On effectue le même type de transformation pour la matrice de rigidité qui considère les

effets PMMV à l'étape 2. Enfin, l'élément fibre 3D ayant des extensions rigides est formulé par la matrice de rigidité de l'étape 5 pour la prochaine étape, l'analyse au niveau structural.

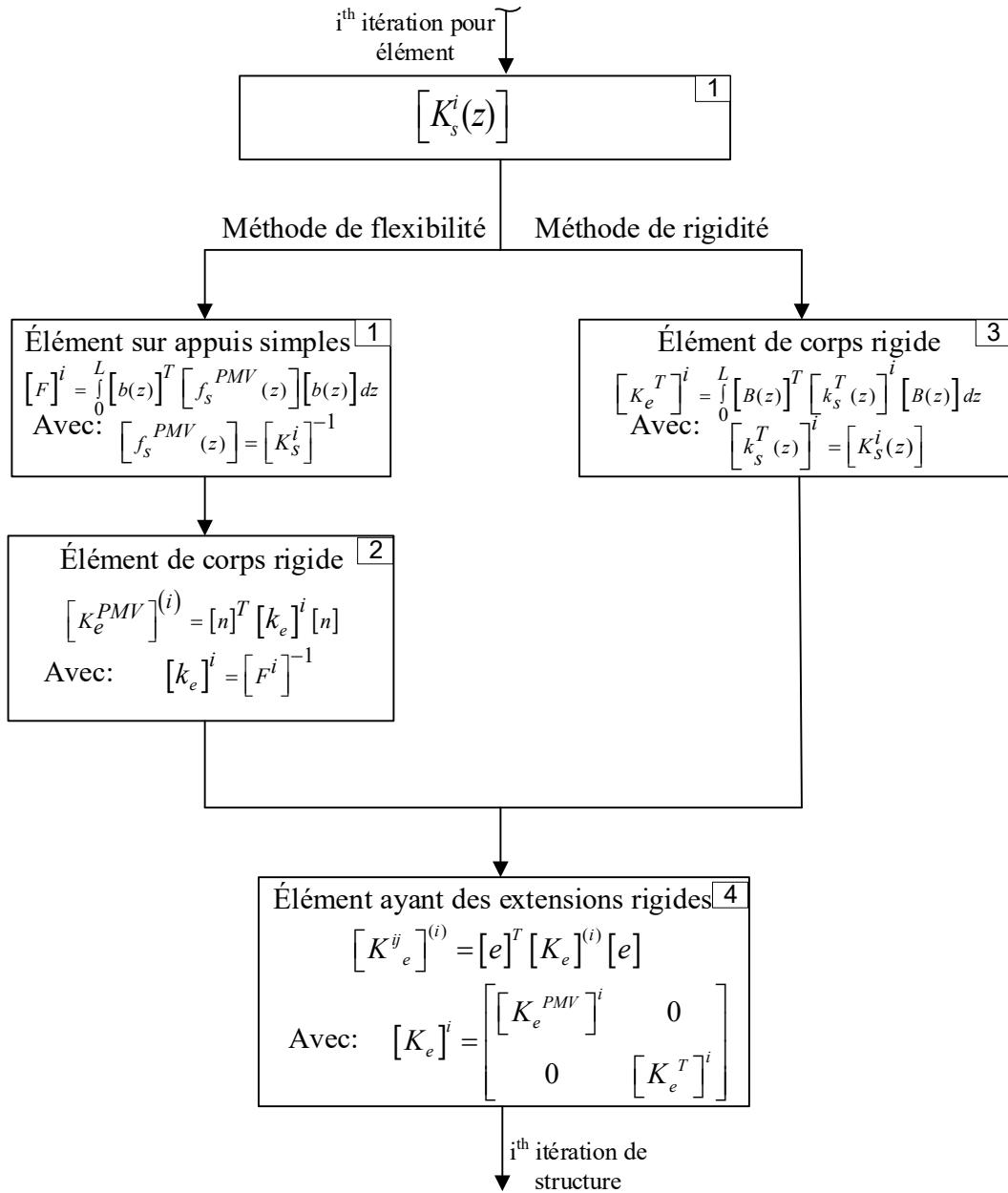


Figure 4.4 Algorithme de calcul de la matrice de rigidité pour un élément fibre dans *FIDAM 3D*

## 4.6 Algorithme de résolution : niveau de la structure

### 4.6.1 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution au niveau de la structure globale est non linéaire et itératif. La source de non-linéarité provient de la fissuration des sections analysées sous l'action des charges 3D et des sous-pressions qui doivent être mise à jour selon l'évolution de la fissuration. Quand certaines sections sont fissurées, toutes les propriétés géométriques sectionnelles sont modifiées en tenant compte la zone en compression qui est à même de reprendre des efforts. Donc, la matrice de rigidité des sections est changée. C'est-à-dire que les matrices de rigidité des éléments et de la structure sont aussi mises à jour afin de calculer l'état d'équilibre global. La Figure 4.5, présente l'algorithme général de résolution non linéaire par la méthode itérative qui a été implanté dans *FIDAM 3D*. La matrice tangente de la structure est mise à jour à chaque itération. Les itérations sont poursuivies jusqu'à l'atteinte des conditions de convergence.

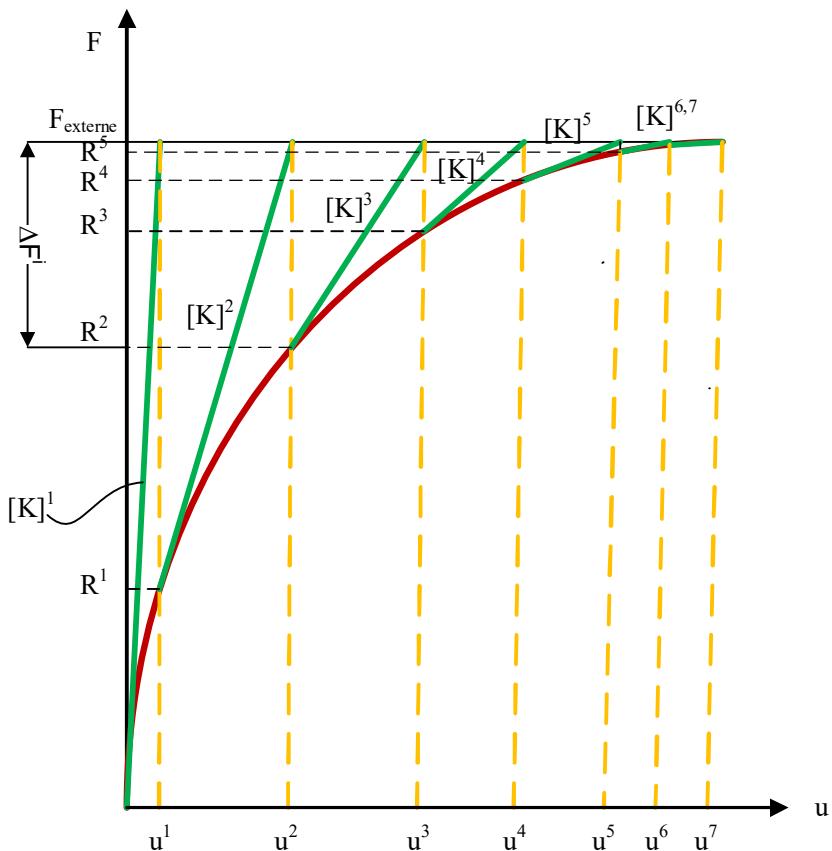


Figure 4.5 Algorithme itératif de résolution de *FIDAM 3D* au niveau structural.

Dans l'algorithme utilisé, le vecteur des forces externes est appliqué directement sur la structure. Il faut alors calculer la norme du vecteur des forces déséquilibrées,  $\{\Delta F\}$ , qui est égale à zéro ou à une valeur d'erreur acceptable (on propose de 0.1% de différence pour le critère de convergence), voir Tableau 4.4. Le calcul est effectué afin de calculer les déplacements à tous les DDL. Les déplacements sont mis à jour progressivement via les forces déséquilibrées à chaque itération aux étapes 3 et 4. À l'étape 5, il faut recalculer les efforts internes pour chaque élément fibre 3D. L'étape 6 est utilisée afin d'évaluer la convergence de calcul. Après convergence, on calcule les déplacements et les efforts internes pour chaque élément fibre 3D. Ces paramètres permettent de calculer les indicateurs de performance. Si le calcul n'est pas convergé, il faut mettre à jour la matrice de rigidité globale de la structure. Cette opération est effectuée en réutilisant les algorithmes des analyses sectionnelles et de formulation des éléments. On commence alors l'itération  $i+1$  par l'étape 2. Si le calcul ne peut pas satisfaire le critère de convergence même avec le grand nombre d'itérations spécifié, le calcul se termine. Dans ce cas, il faut vérifier les messages de *FIDAM 3D* pour identifier le problème de convergence. Si tout se passe bien la structure a alors atteint la rupture et il n'est plus possible d'obtenir une solution en équilibre.

Tableau 4.4 : Algorithme de résolution au niveau structural

1. Itération $i$ , $\{u^{i-1}\}, \{R^{i-1}\}, \{K^i\}$ sont obtenus
2. Calcul de la force déséquilibrée : $\Delta F^i = F_{ext} - R^{i-1}$
3. Résolution de l'équation : $[K^i] \{\Delta u\} = \{\Delta F\}$
4. Mise à jour des déplacements : $\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \{\Delta u\}$
5. Calcul des forces internes des éléments : $[K^i] \{u^i\} = \{F_e^i\}$
6. Vérification de la condition de convergence <ul style="list-style-type: none"> <li>Si la condition de convergence est satisfaite  <math display="block">\frac{\Delta F}{F_e} \leq m</math> Arrêt  Si non  Mise à jour de <math>\{u^{i-1}\}, \{R^{i-1}\}, \{K^i\}</math> pour la prochaine itération <math>i = i+1</math> </li> <li>Arrêt si <math>i = \text{maximum d'itération}</math>, vérifier les messages de <i>FIDAM 3D</i></li> </ul>

## 4.6.2 Critères de convergence

Le problème de convergence est important pour la résolution des problèmes non linéaires. Il y a deux façons afin d'évaluer la convergence dans FIDAM 3D au niveau structural global : (1) critère de forces ; (2) critère de déplacement. Le critère de force est basé sur la condition d'équilibre d'une structure entre les efforts internes et les charges appliquées. Le vecteur des forces nodales déséquilibrées est calculé par l'équation suivante :

$$\{\Delta F\} = \{F_{ext}\} - \{F_e\} \quad (4.10)$$

Les conditions de convergences dans le logiciel sont vérifiées par l'équation (4.11) :

$$erreur = \max \left| \frac{\Delta F(i)}{F_{ext}(i)} \right| \leq m \quad (4.11)$$

Le critère de déplacement est basé sur la convergence du vecteur des déplacements aux nœuds par l'équation suivante :

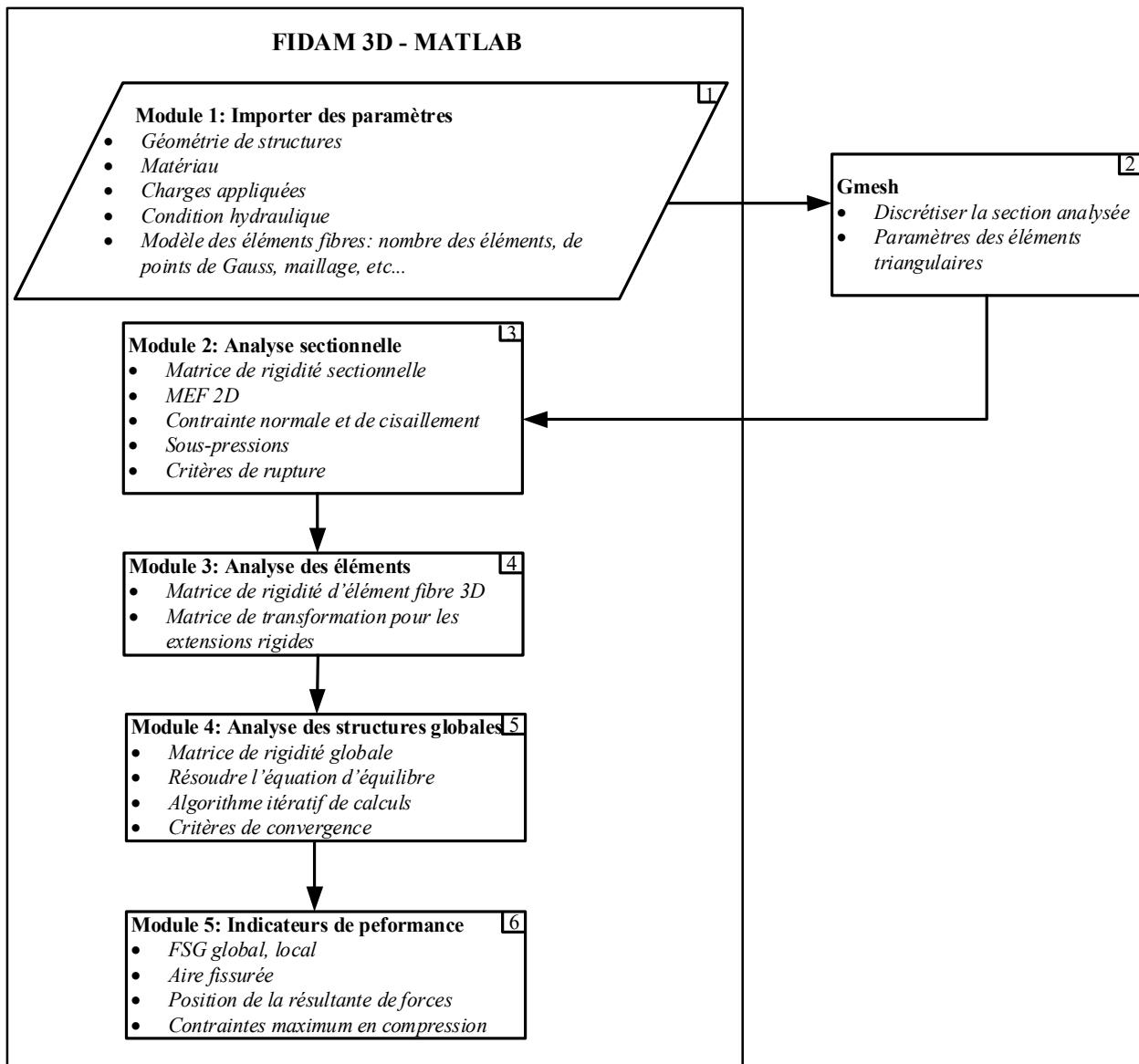
$$erreur = \max \left| \frac{(\{u^i\} - \{u^{i-1}\})}{\{u^i\}} \right| \leq m \quad (4.12)$$

La valeur de l'erreur admissible,  $m$ , est définie par l'utilisateur de *FIDAM 3D* qui spécifie également le nombre maximal d'itérations permises. On recommande d'utiliser une valeur de  $m$  de l'ordre de  $10^{-3}$  pour le critère de forces et  $10^{-6}$  pour le critère de déplacements afin de l'analyse des structures non linéaires via les comparaisons des solutions de FIDAM 3D avec les solutions analytiques et celles d'ABAQUS au chapitre 5 qui présente les procédures de V&V mis en œuvre.

## 4.7 Conclusions

Ce chapitre présente des procédures de développements et implémentations numériques pour les modèles constitutifs formulés au chapitre 3 par les algorithmes de calcul. Ces algorithmes sont implantés par modules dans *FIDAM 3D* à l'aide du logiciel MATLAB. Ces modules sont divisés

en trois niveaux : (1) le niveau sectionnel; (2) le niveau des éléments; (3) le niveau de la structure globale. Au niveau sectionnel, on construit les algorithmes pour l'analyse non linéaire des sections soumises aux charges 3D (PMMVVT) et des sous-pressions afin de calculer la matrice de rigidité d'une section quelconque et la distribution des contraintes normales et de cisaillement. Au niveau des éléments, la matrice de rigidité d'un élément fibre 3D ayant des extensions rigides est implantée et mise à jour en utilisant la méthode mixte et des intégrales numériques. Au niveau de la structure globale, les équations d'équilibre non linéaires sont résolues par l'algorithme itératif non linéaire qui a été implanté dans FIDAM 3D. Des critères de convergences sont proposés pour les analyses non linéaires dans FIDAM 3D. Les procédures de vérification et validation (V&V) sont effectuées au chapitre 5 pour vérifier et valider les algorithmes proposés dans le chapitre 4. Le résumé des modules constituant FIDAM 3D est présenté à la Figure 4.6.

Figure 4.6 Modules principaux de *FIDAM 3D*

## CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU LOGICIEL « FIDAM 3D »

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les processus mis en œuvre afin de vérifier et valider le logiciel « FIDAM 3D ». Les vérifications sont effectuées tout d'abord par des exemples simples dont on connaît les solutions analytiques. Par la suite les problèmes tests sont validés par les résultats de recherches publiées dans la littérature et l'utilisation de logiciels ayant des lois constitutives allant de simples (CADAM 3D) à complexes (ABAQUS). Les problèmes de vérification et validation sont divisés selon les catégories suivantes : (1) analyses sectionnelles (2) piliers avec matériau élastique; (3) piliers en béton non armé (fissuration avec et sans sous-pressions).

Les processus de vérification et validation sont divisés en 4 étapes selon le type de chargement appliqué : (a)  $P-M_y-V_x$  ; (b)  $P-M_x-M_y$ ; (c) T; (d)  $V_x-V_y$ ; (e)  $P-M_x-V_x$ -sous-pressions-hydrostatiques.

### 5.2 Stratégie de vérification et validation (V&V)

La vérification et validation (V&V) est un processus important pour utiliser avec confiance le modèle constitutif proposé. La procédure générale de V&V est présentée à la Figure 5.1 (Schlesinger, 1979). La "réalité d'intérêt" (*Reality of Interest*) de la Figure 5.1 représente la structure physique pour laquelle les résultats (*output*) sont obtenues. À la Figure 5.1, le "modèle mathématique" (*Mathematical Model*) est constitué des modèles conceptuels et des équations mathématiques avec les données de modélisations nécessaires afin de décrire la "réalité d'intérêt" (*Reality of Interest*). Les équations différentielles partielles, les conditions aux frontières, les géométries concernées sont utilisées pour décrire mathématiquement la physique du problème. Le modèle de calcul, **FIDAM 3D**, (*Computer Model*) représente la mise en œuvre du modèle mathématique, sous la forme de discrétisation numérique, d'algorithmes de résolution, et de critères de convergence. Le modèle de calcul comprend le logiciel d'analyse (code), les hypothèses conceptuelles et mathématiques de modélisation, les données d'entrées, les modèles constitutifs de matériaux et leurs paramètres: la taille du maillage, les options de solution et les tolérances de convergence. Les résultats obtenus du modèle de calcul (Computer Model) sont validés avec la

"réalité d'intérêt" (*Reality of Interest*). Le modèle de calcul et le modèle mathématique peuvent inclure un modèle de performance (ou rupture), ainsi qu'une méthode d'analyse d'incertitude. Les procédures de V&V sont répétées plusieurs fois à mesure que le développement du modèle progresse pour la résolution de problèmes simples à complexes.

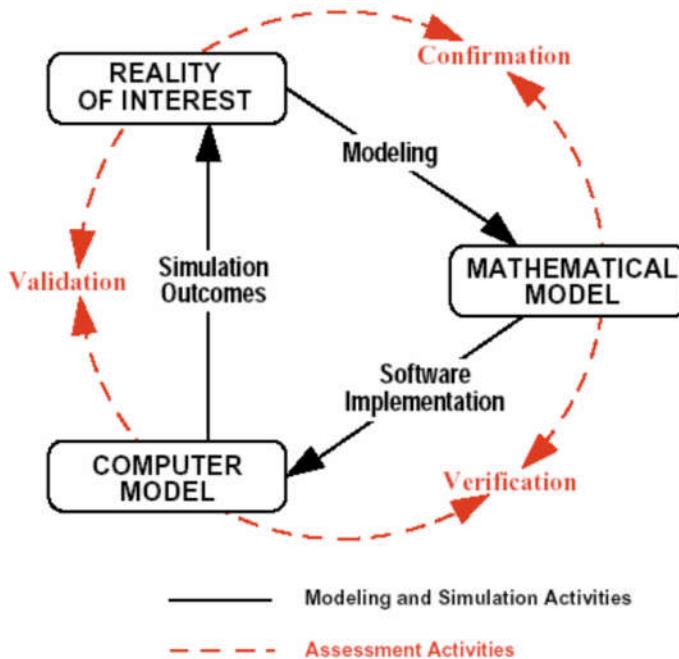


Figure 5.1 Schéma général de la stratégie de V&V (Schlesinger, 1979)

Les procédures de V&V dans ce projet sont décrites en détail à la Figure 5.2. Le modèle proposé est validé à l'aide de solutions analytiques et des logiciels (ABAQUS, OpenSees, CADAM 3D, Prokon etc...). Un problème test est défini par la géométrie, les conditions aux frontières, les propriétés de matériaux et le chargement. **FIDAM 3D** une fois vérifié est utilisé afin d'analyser les problèmes de validation. Les résultats obtenus de **FIDAM 3D** sont comparés et validés versus les résultats de références qui sont obtenus des logiciels existants par la procédure du *modèle de validation*. Les processus de *Comparaisons & Évaluations* indiquent si les résultats obtenus sont acceptables ou inacceptables. Dans le cas où la réponse est acceptable, le problème considéré est bien résolu. Au contraire, si la réponse est inacceptable, il faut retourner au modèle conceptuel pour vérifier et modifier ce modèle. La stratégie de V&V mise en œuvre pour FIDAM3D est présentée au Tableau 5.1 et à la Figure 5.3 pour la définition des problèmes de V&V. Chaque logiciel utilisé vise un objectif particulier de validation des problèmes considérés. Les problèmes tests de la stratégie de V&V sont décrits au Tableau 5.1.

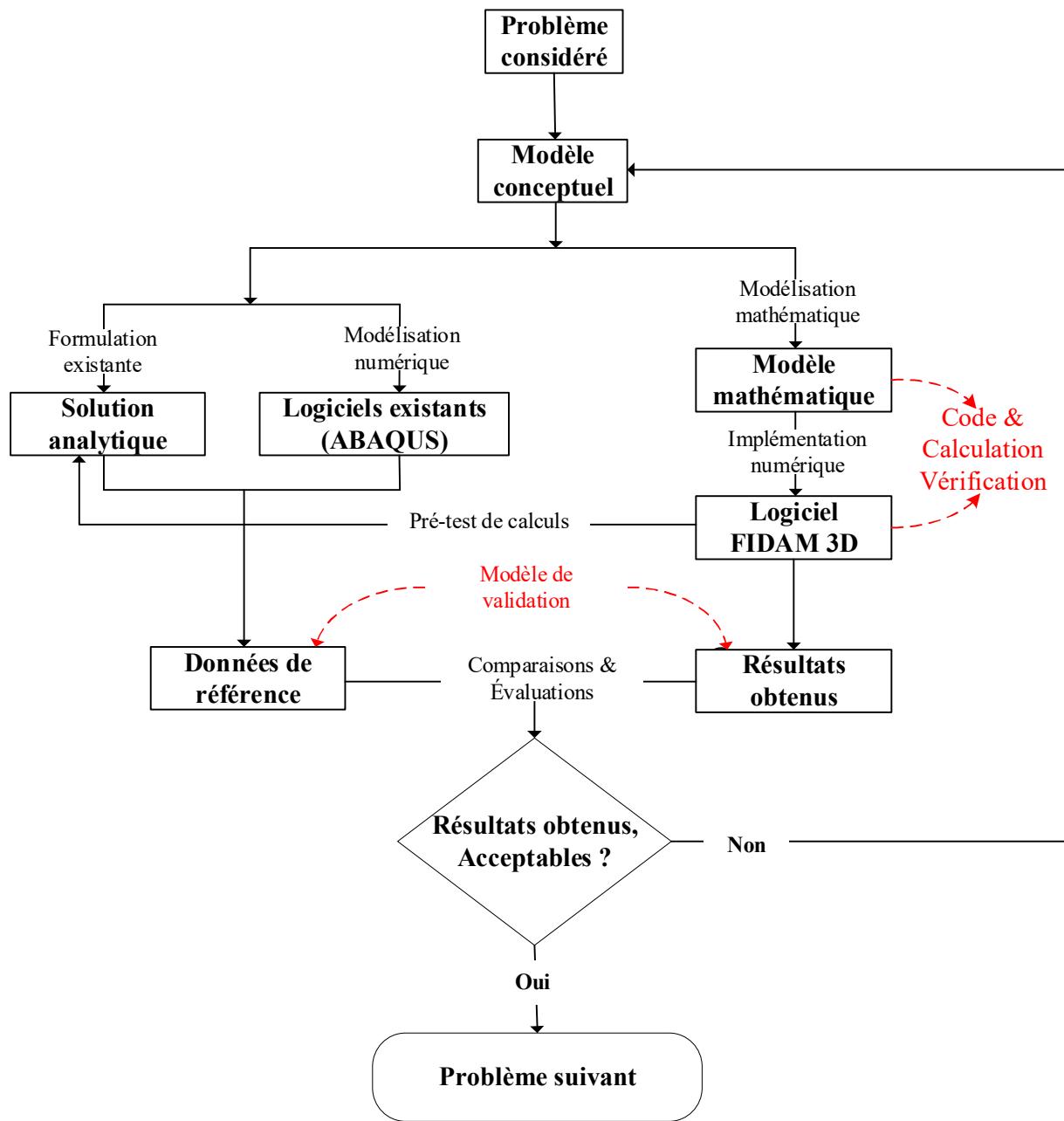


Figure 5.2 Stratégie de V&amp;V de FIDAM3D

Tableau 5.1 : Problèmes de validations : (procédure de V&amp;V)

Problème	Type de section	Objectif de validations	Références		
			Logiciels	Littérature	Commentaires*
1. Analyses sectionnelles	1.1. Section rectangulaire, asymétrique, et du pilier réel (Figure 1)	$V_x$ - $V_y$ - $T$	Prokon FlexPDE	Pilkey (2002); Dikaros et Sapounzakis (2012)	Propriétés sectionnelles et distribution de contraintes
2. Problèmes de structures globales	2.1. Poutre élancée (b) (Géométrie uniforme) (Figure 2)	$V_x$	ABAQUS;	Le Corvec (2012)	T-P. E.B; T-P. T
		$T$	ABAQUS	Le Corvec (2012)	EF- Solid 3D; T-P. E.B; T-P. T;
	2.2. Pilier rectangulaire : élastique et fissuré (Figure 3)	$P$ - $M_x$ - $M_y$ Fissuration, ( $f_t = 0$ ; $f_t \neq 0$ ) SP	ABAQUS CADAM 3D OPENSEES	Stefan et Léger (2008)	MG ; Élément fibre 3D; EF- Solides 3D
	2.3. Pilier rectangulaire profond (Figure 4)	$P$ - $M$ - $V$ - $T$ Élastique Fissuration ( $f_t = 0$ ; $f_t \neq 0$ ) SP	ABAQUS		T-P. T; Solution analytique : T.E; EF-Solide 3D
	2.4. Pilier rectangulaire (profond et géométrie variable) (Figure 5)	$P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$ - $T$ Élastique Fissuration ( $f_t = 0$ ; $f_t \neq 0$ ) SP	ABAQUS		T-P. T; Solution analytique : T.E; EF-Solide 3D
	2.5. Pilier d'évacuateur (Études de cas) (Figure 6)	$V_x$ $V_y$ $P$ - $M_x$ - $M_y$ - $V_x$ - $V_y$ - $T$ Élastique Fissuration ( $f_t = 0$ ; $f_t \neq 0$ ) Sous-pressions	ABAQUS	Stefan et Léger (2011) Stefan et Léger (2012)	EF- Solides 3D

\*T-P.E.B : Théorie de poutre d'Euler Bernoulli ;

\* T-P.T : Théorie de poutre de Timoshenko;

\* Solution analytique T.E : Solution analytique de la théorie d'Élasticité;

\*EF-Solide 3D : Éléments finis solides 3D;

\* MG : Méthode de gravité.

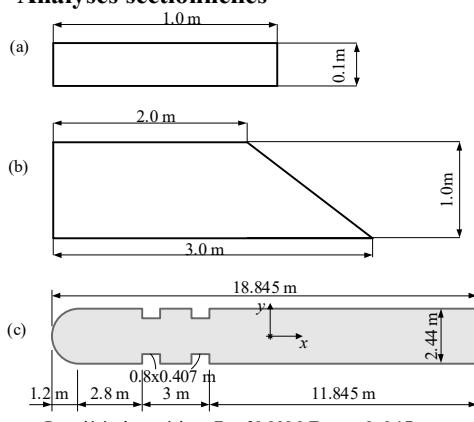
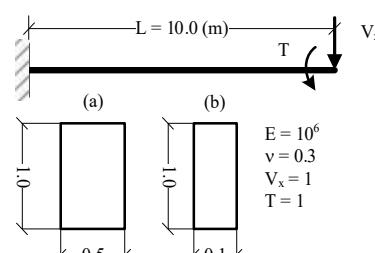
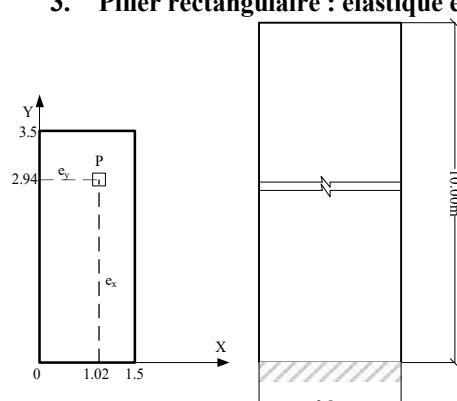
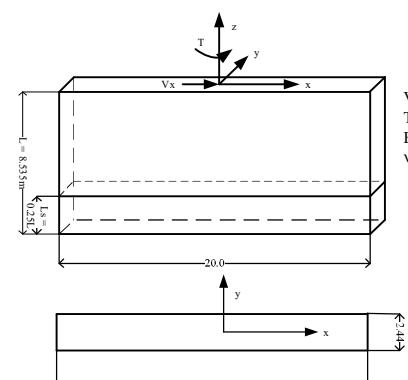
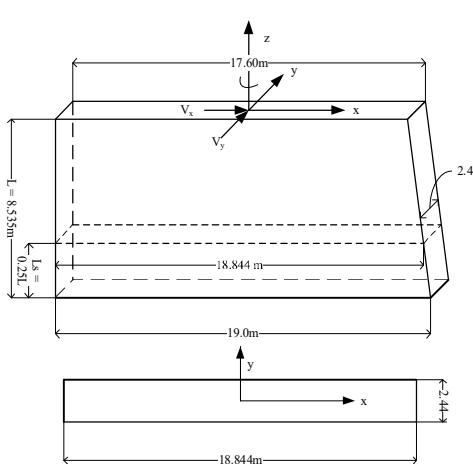
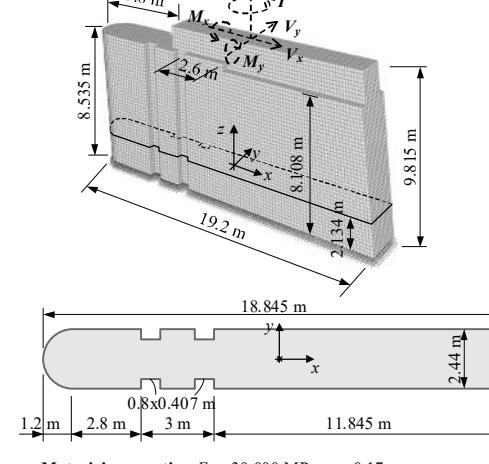
<p><b>1. Analyses sectionnelles</b></p>  <p>Propriétés de matériau : <math>E_c = 30,000 \text{ MPa}</math>, <math>\nu = 0</math>; 0.17</p>	<p><b>2. Poutre élancée (Le Corvec 2012) :</b>  <math>V_x = 1</math>; <math>T = 1</math></p>  <p>(a) <math>L = 10.0 \text{ (m)}</math> <math>T</math> <math>V_x</math>  (b) <math>E = 10^6</math>  <math>\nu = 0.3</math>  <math>V_x = 1</math>  <math>T = 1</math></p> <p>Figure 2: Poutre élancée en porte-à-faux : (a) Section de la poutre sous l'action d'un torque ; (b) soumise à <math>V_x</math></p>
<p><b>3. Pilier rectangulaire : élastique et fissuré</b></p> 	<p><b>4. Pilier profond</b></p>  <p><math>V_x = 1000 \text{ kN}</math>  <math>T = 100 \text{ kN.m}</math>  <math>E = 30\,000 \text{ MPa}</math>  <math>\nu = 0.17</math></p> <p>Figure 4: Pilier rectangulaire profond</p>
<p><b>5. Pilier rectangulaire profond et géométrie variable</b></p> 	<p><b>6. Pilier réel en béton (Étude de cas)</b></p>  <p>Material properties: <math>E_c = 30,000 \text{ MPa}</math>, <math>\nu = 0.17</math></p> <p>Figure 6: Pilier réel pour études de cas</p>

Figure 5.3 Géométrie des problèmes de V&amp;V

### 5.3 Analyses sectionnelles

L'élément fibre 3D est constitué de sections le long de l'axe de longitudinal aux points de Gauss. Chaque section est analysée afin d'obtenir la matrice de rigidité de la section, les propriétés sectionnelles ( $A$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ ), les constantes de torsion ( $J$  et  $C_w$ ), les coefficients de cisaillement de Timoshenko ( $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ ,  $\alpha_{xy}$ ). Par ailleurs, le logiciel FIDAM 3D peut calculer les constantes associées aux effets secondaires de cisaillement, de flexion secondaire ( $I_{\psi\psi x}$ ,  $I_{\psi\psi y}$ ,  $I_{\psi\psi xy}$ ) et les aires effectives de cisaillement secondaire.

Pour le premier exemple, si on considère une section rectangulaire ayant la géométrie de la Figure 5.4 avec le module d'élasticité  $E = 10^5$  kN/m<sup>2</sup> et  $G = 8333.40$  kN/m<sup>2</sup>. Cette section a été analysée par Dikaros et Sapountzakis (2014). On analyse cette section sous l'action des charges  $V_x$ - $V_y$ - $T$  unitaires par FIDAM 3D et deux logiciels : Prokon (Prosec) (Prokon, 2019) et Flex PDE (PDE Solutions Inc., 2015). Les distributions de contraintes de cisaillement sont présentées à la Figure 5.5 en comparaison avec la solution obtenue par Prokon. Les valeurs maximums de contraintes de cisaillements sont les mêmes, 15 Pa, pour les deux logiciels. Les propriétés sectionnelles sont présentées au Tableau 5.2. Prokon, donne seulement la solution pour chaque direction de la charge appliquée et exclut la solution secondaire du cisaillement. Dikaros et Sapountzakis (2014) ont présenté les propriétés sectionnelles secondaires de cisaillement mais seulement unidirectionnelles. Les valeurs obtenues de FIDAM 3D sont en accord avec les valeurs de la solution de Dikaros et Sapountzakis (2014) et le modèle mathématique de Flex PDE (solution par éléments finis). On considère également la section en béton avec un coefficient de Poisson,  $\nu = 0.17$ , afin de s'assurer que FIDAM 3D présente de bons résultats par rapport Prokon (Prosec) et Flex PDE. Ces résultats sont présentés au Tableau 5.3 et à la Figure 5.6. Dans l'exemple suivant, on considère une section non symétrique pour valider FIDAM 3D.

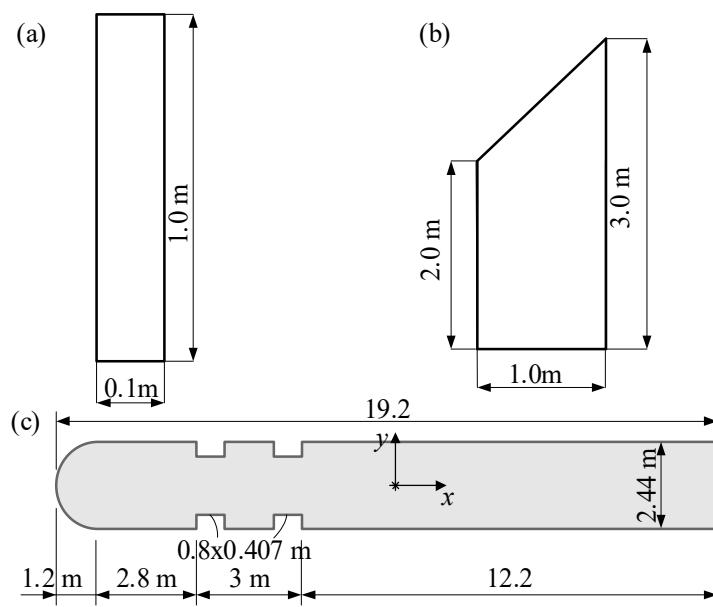


Figure 5.4 Sections analysées : (a) Section rectangulaire; (b) Section trapézoïdale; (c) Section du pilier réel

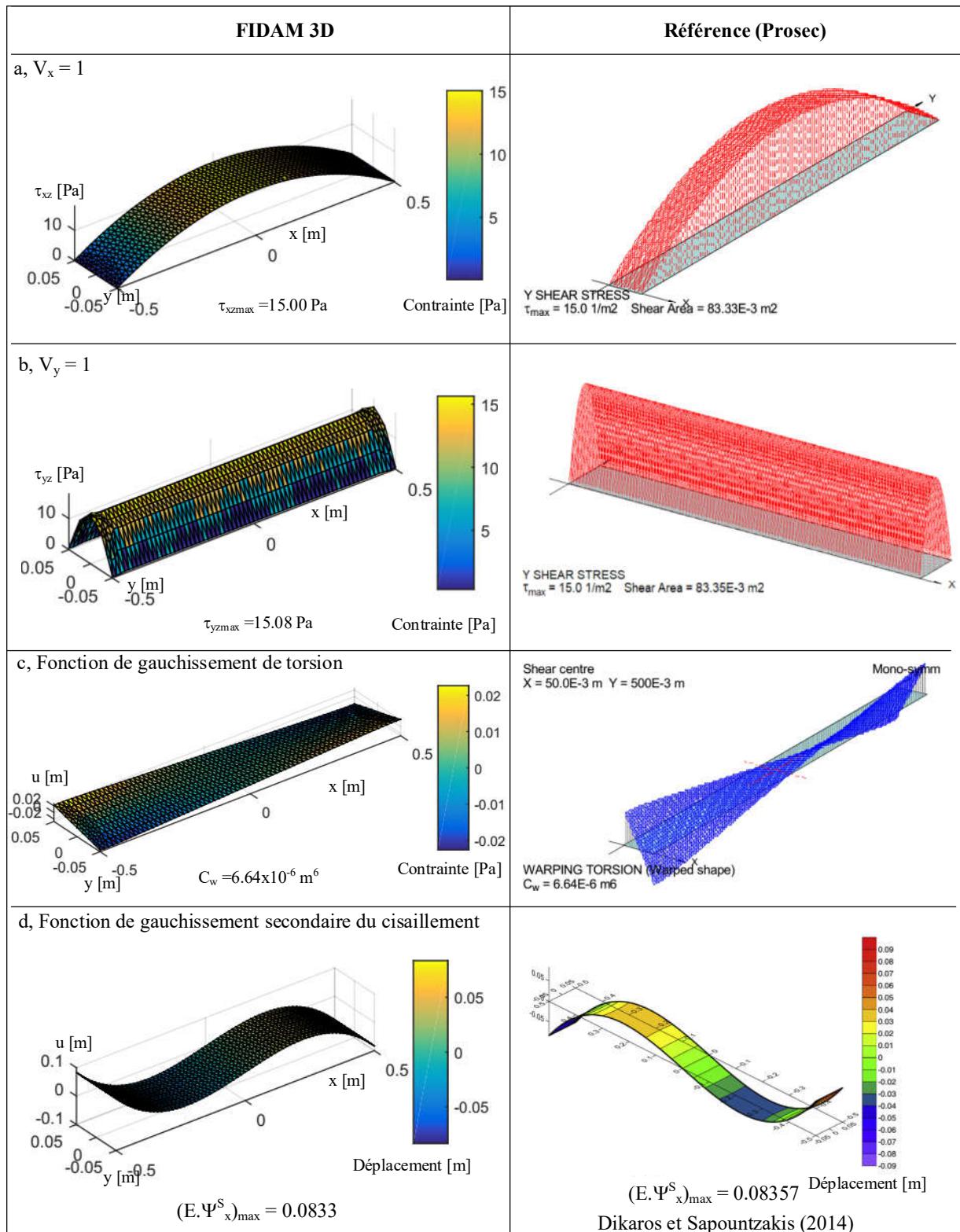


Figure 5.5 Section rectangulaire de Dikaros et Sapountzakis (2014)

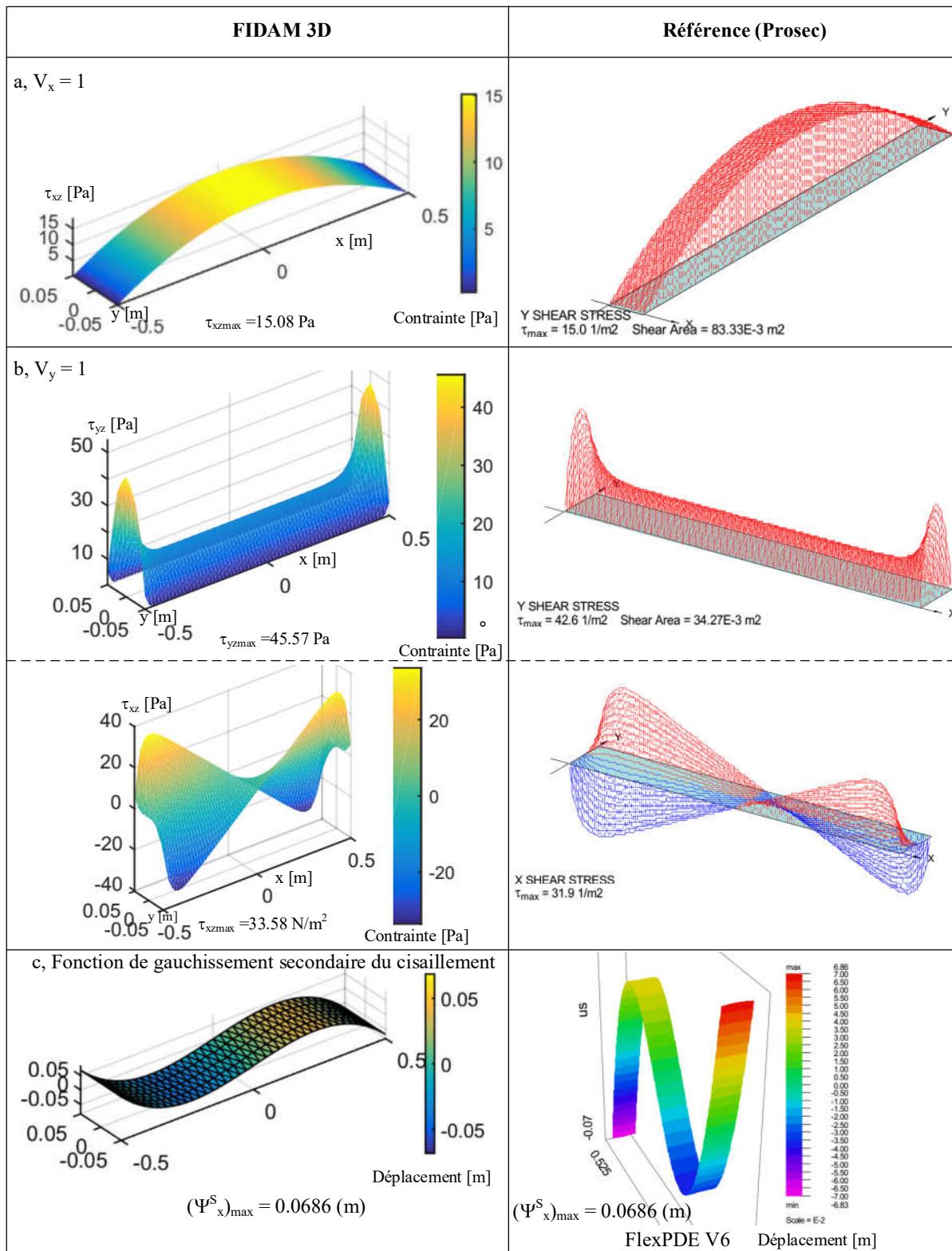
Figure 5.6 Section rectangulaire avec  $v = 0.17$

Tableau 5.2 : Propriétés de section rectangulaire de Dikaros et Sapountzakis (2014)

Propriétés sectionnelles	Dikaros et Sapountzakis (2014)	Prokon (Prosec)	Flex PDE	FIDAM 3D
$A (m^2)$	0.1	0.1	0.1	0.1
$I_x(m^4) \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$
$I_y(m^4) \times 10^{-3}$	8.30	8.30	8.30	8.30
$I_{xy}(m^4) \times 10^{-3}$	0	0	0	0
$J (m^4) \times 10^{-3}$	-	0.3124	0.3124	0.3124
$A_x^P (m^2)$	0.0833	0.0833	0.0833	0.0833
$A_{xy}^P (m^2)$	-	-	0	0
$A_y^P (m^2) \times 10^{-3}$	-	0.0833	0.0834	0.0834
$C_w (m^6) \times 10^{-3}$	-	$6.64 \times 10^{-3}$	$6.64 \times 10^{-3}$	$6.64 \times 10^{-3}$
$I_{\psi\psi x} (m^4) \times 10^{-3}$	-	-	$1.01 \times 10^{-3}$	$1.01 \times 10^{-3}$
$I_{\psi\psi y} (m^4) \times 10^{-3}$	$9.92 \times 10^{-3}$	-	$9.92 \times 10^{-3}$	$9.92 \times 10^{-3}$
$A_x^S (m^2)$	0.0167	-	0.0167	0.0167
$A_y^S (m^2)$	-	-	0.0166	0.0166

Tableau 5.3 : Propriétés de section rectangulaire ( $v = 0.17$ )

Propriétés sectionnelles	Prokon (Prosec)	Flex PDE	FIDAM 3D
$A (m^2)$	0.1	0.1	0.1
$I_x(m^4) \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$	$0.083 \times 10^{-3}$
$I_y(m^4) \times 10^{-3}$	0.0083	0.0083	0.0083
$I_{xy}(m^4) \times 10^{-3}$	0	0	0
$J (m^4) \times 10^{-3}$	0.3124	0.3124	0.3124
$A_x^P (m^2)$	0.0833	0.0833	0.0833
$A_{xy}^P (m^2)$	-	0	0
$A_y^P (m^2)$	0.0341	0.0341	0.0341
$C_w (m^6) \times 10^{-3}$	$6.64 \times 10^{-3}$	$6.64 \times 10^{-3}$	$6.64 \times 10^{-3}$
$I_{\psi\psi x} (m^4) \times 10^{-3}$	-	0.360	0.360
$I_{\psi\psi y} (m^4) \times 10^{-3}$	-	0.088	0.088
$A_x^S (m^2)$	-	0.0167	0.0167
$A_y^S (m^2)$	-	0.0660	0.0660

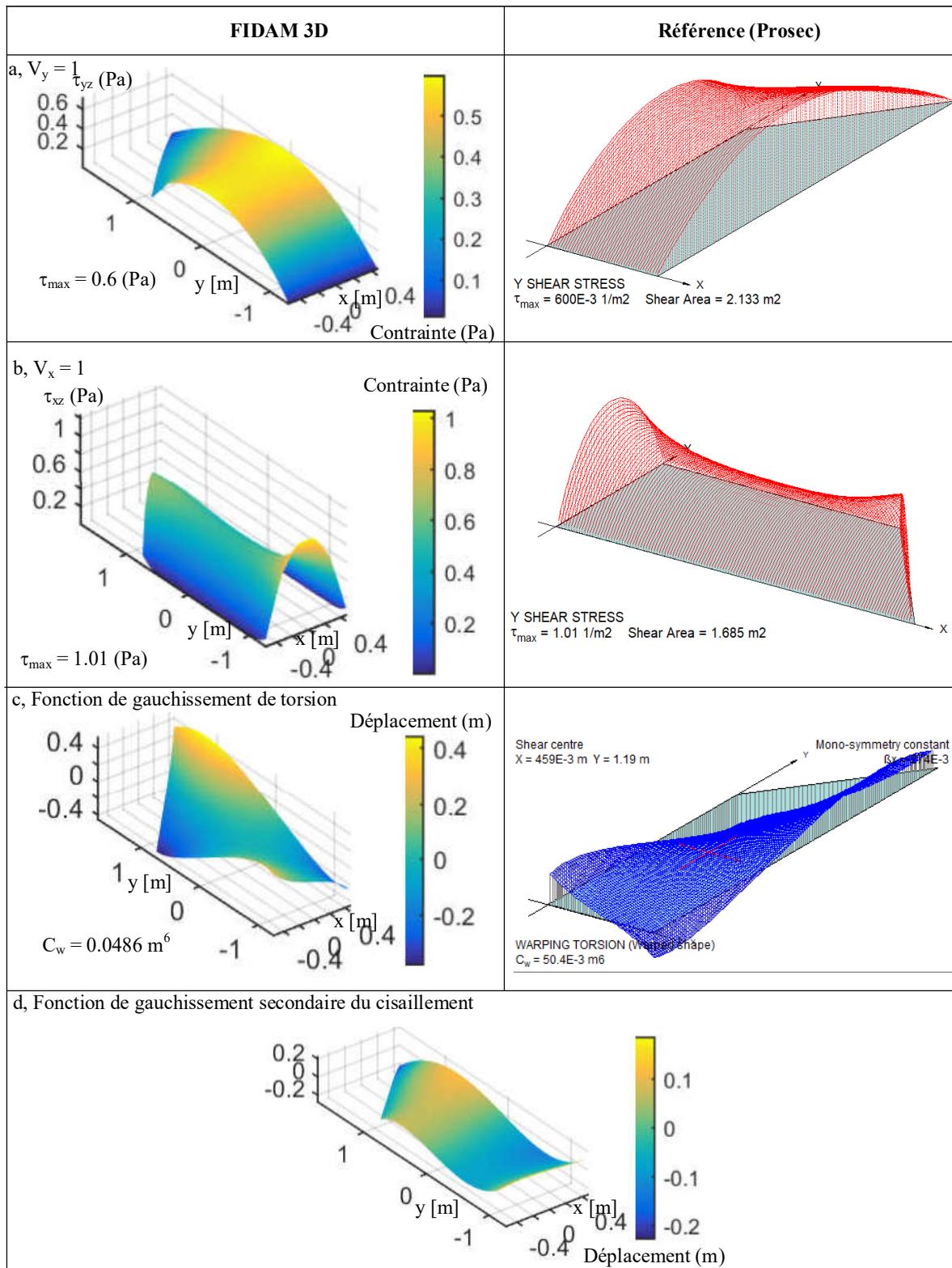
Figure 5.7 Section trapézoïdale avec  $\nu = 0.3$

Tableau 5.4 : Propriétés de section trapézoïdale ( $\nu = 0.3$ )

Propriétés sectionnelles	Prokon (Prosec)	Pilkey (2002)	FIDAM 3D
$A (m^2)$	2.50	2.50	2.50
$I_x(m^4)$	1.41	1.41	1.41
$I_y(m^4)$	0.21	0.21	0.21
$I_{xy}(m^4)$	-0.10	-0.10	-0.10
$J (m^4)$	0.59	-	0.59
$A_x^P (m^2)$	1.69	1.71	1.71
$A_{xy}^P (m^2)$	-	-32.89	-32.89
$\alpha_{xx}$	1.48	1.47	1.47
$A_y^P (m^2)$	2.13	2.14	2.14
$\alpha_{yy}$	1.17	1.17	1.17
$\alpha_{xy}$	-	-0.08	-0.08
$C_w (m^6)$	0.05	-	0.05
$x_G (m)$	0.53	0.53	0.53
$y_G (m)$	1.27	1.27	1.27
$x_S (m)$	0.46	0.46	0.46
$y_S (m)$	1.19	1.18	1.18
$I_{vyyx} (m^4)$	-	-	0.01
$I_{vyyx} (m^4)$	-	-	0.05
$A_x^S (m^2)$	-	-	0.36
$A_y^S (m^2)$	-	-	0.79

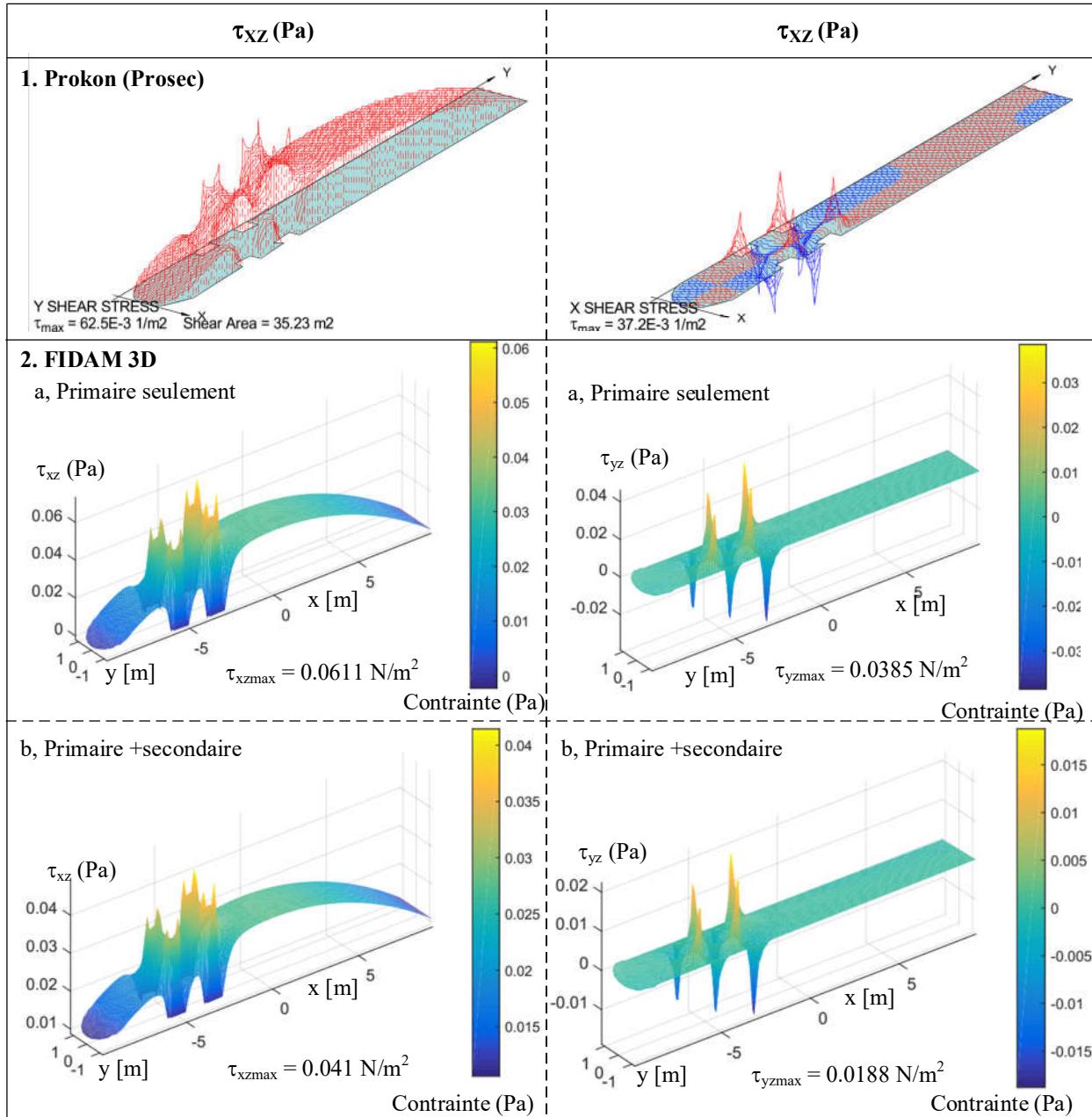
Pour le deuxième problème d'analyse sectionnelle, on considère une section non symétrique – section trapézoïdale à la Figure 5.4b (Pilkey 2002). Cette section est analysée par FIDAM 3D, Prokon (Prosec) et la solution de Pilkey (2002). Le Tableau 5.4 présente les propriétés sectionnelles calculées. Pour une section non symétrique le coefficient de cisaillement de Timoshenko,  $\alpha_{xy}$ , n'est pas zéro. Prokon (Prosec) ne calcule pas le coefficient associé,  $\alpha_{xy}$ , mais il peut calculer le centre de cisaillement. Les résultats sont présentés à la Figure 5.7 pour les distributions de contraintes du cisaillement pour chaque direction,  $V_x$ ,  $V_y$ .

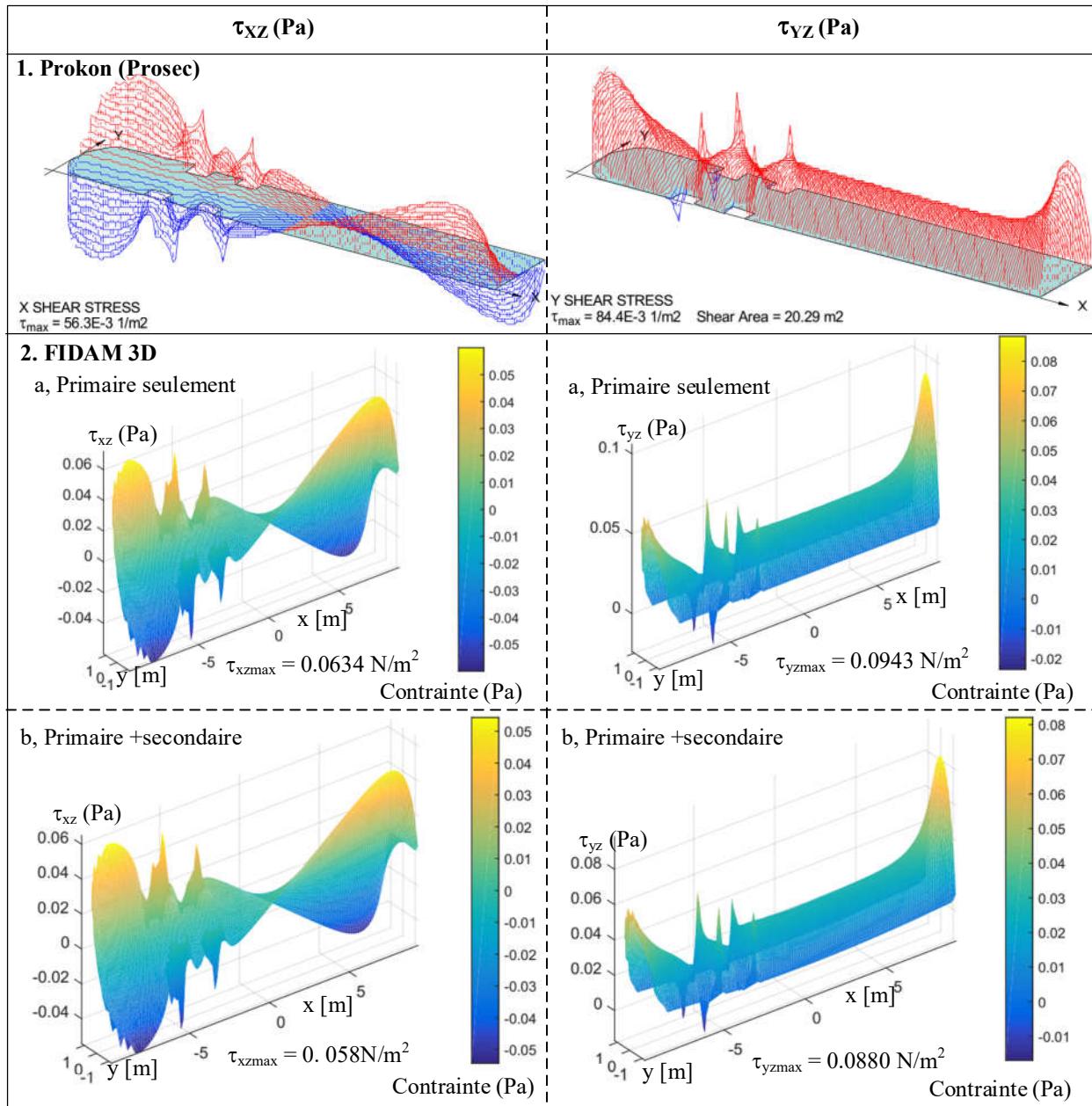
Le troisième problème est une section d'un pilier typique ayant la géométrie de la Figure 5.4c. Les propriétés sectionnelles sont présentées au Tableau 5.5. Pour le béton  $E_c = 30\,000 \text{ MPa}$ , et  $\nu = 0.17$ . Dans FIDAM 3D, deux modèles sont disponibles pour les distributions des contraintes de cisaillement : (i) effets primaires de cisaillement par FIDAM 3D 14DDL; (ii) effets primaires et secondaires de cisaillement par FIDAM 3D 18DDL. Le calcul a été effectué pour deux cas  $V_x = 1$  (charge unitaire) (Figure 5.8) et  $V_y = 1$  (charge unitaire) (Figure 5.9). Les distributions des

contraintes de cisaillement selon l'analyse sectionnelle de FIDAM 3D sont conformes aux résultats du logiciel Prokon (Prosec) pour la solution primaire. En considérant l'effet secondaire de cisaillement sur la section profonde, la distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 18DDL, est différente avec Prokon (Prosec). La solution de Prokon (Prosec) présente la distribution de cisaillement sous une forme parabolique qui est inexacte pour les sections profondes. La distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 18 DDL est validée par comparaison avec la solution de la méthode de éléments finis solides 3D (ABAQUS) pour la section profonde analysée au problème No.4.

Tableau 5.5 : Propriétés sectionnelles de la section du pilier réel

Propriétés sectionnelles	Prokon (Prosec)	FIDAM 3D-18DDL
$A (m^2)$	44.56	44.56
$I_x (m^2)$	20.99	20.99
$I_y (m^4)$	$1.35 \times 10^3$	$1.35 \times 10^3$
$I_{xy} (m^4)$	0	0
$J (m^4)$	71.98	71.93
$C_w (m^6)$	509.79	590.20
$A_x^P (m^2)$	35.23	35.14
$A_{xy}^P (m^2)$	-	0
$\alpha_{xx}$	1.27	1.27
$A_y^P (m^2)$	20.29	20.15
$\alpha_{yy}$	2.20	2.21
$\alpha_{xy}$	-	0
$x_G (m)$	9.89	9.89
$y_G (m)$	1.22	1.22
$x_S (m)$	10.3	10.31
$y_S (m)$	1.22	1.22
$I_{yyx} (m^4)$	-	61.71
$I_{yyx} (m^4)$	-	16.84
$A_x^S (m^2)$	-	9.42
$A_y^S (m^2)$	-	24.41

Figure 5.8 Section du pilier réel, cas  $V_x = 1N$

Figure 5.9 Section du pilier réel, cas  $V_y = 1\text{N}$

## 5.4 V&V des problèmes élastiques

Le but de ces problèmes est de vérifier et valider les modèles proposés dans FIDAM 3D (12DDL – Euler Bernoulli, 14 DDL – Timoshenko et 18 DDL) dans deux cas de structures élastiques et fissurées. Le calcul est tout d'abord effectué sur des structures simples. Par la suite les sections profondes sont étudiées. Les données qui sont utilisées pour valider FIDAM 3D, sont les solutions analytiques, les solutions publiées dans la littérature et la MEF 3D par les éléments solides.

### 5.4.1 Problème No.1 : Poutre élancée en porte-à-faux

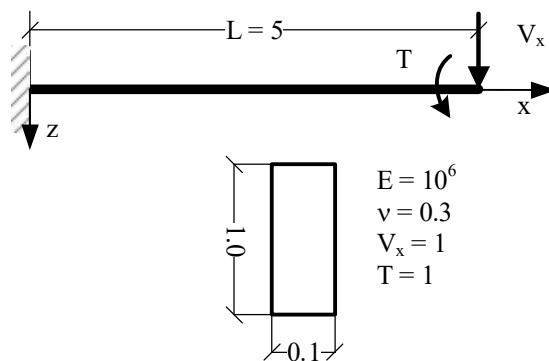


Figure 5.10 Poutre élancée en porte-à-faux sous deux cas de charges : (1)  $V_x = 1$  (Charge unitaire) et  $T=1$  (charge unitaire)

#### $V_x = 1$ unité : Effet de cisaillement

Le premier problème vérifie le comportement d'une poutre élancée en porte-à-faux de longueur  $L = 5$  unités et soumise à une charge latérale  $V_x = 1$  unité (Figure 5.10). Ce problème a été analysé par Le Corvec (2012) afin de valider un élément fibre. Les déplacements maximums à la tête de la poutre en porte-à-faux,  $U$ , sont présentés au Tableau 5.6. Les solutions analytiques sont issues de la théorie de poutre d'Euler Bernoulli ( $U_{EB}$ ) et de Timoshenko ( $U_T$ ) par les équations :

$$U_{EB} = \frac{V_z L^3}{3EI_y}; \quad U_T = \frac{V_z L^3}{3EI_y} + \frac{V_z L \alpha_{yy}}{GA} \quad (5.1)$$

Pour la section rectangulaire, le coefficient de cisaillement de Timoshenko,  $\alpha_{yy}$ , dans ce cas, est égal à 1.2. La structure est discrétisée par 5 éléments de poutre de 1 mètre de longueur. Les solutions FIDAM 3D (14 DDL et 18 DDL) sont très proches de la solution de la MEF 3D ( $5.155 \times 10^{-3}$  (m))

pour FIDAM 18DDL vs  $5.132 \times 10^{-3}$  (m) pour ABAQUS). Les variations des déplacements,  $U_z$ , selon la longueur de la poutre par les théories de poutres et la MEF 3D sont les mêmes sauf pour le modèle de la théorie d'Euler Bernoulli excluant l'effet de déformation de cisaillement (Figure 5.11).

Tableau 5.6 : Déplacement maximum à la tête de poutre en porte-à-faux

	Euler-Bernoulli	Timoshenko	Le Corvec (2012)	ABAQUS	FIDAM 3D
$U_z(\text{max}) \times 10^{-3} (\text{m})$	5.000	5.156	5.156	5.132	5.155

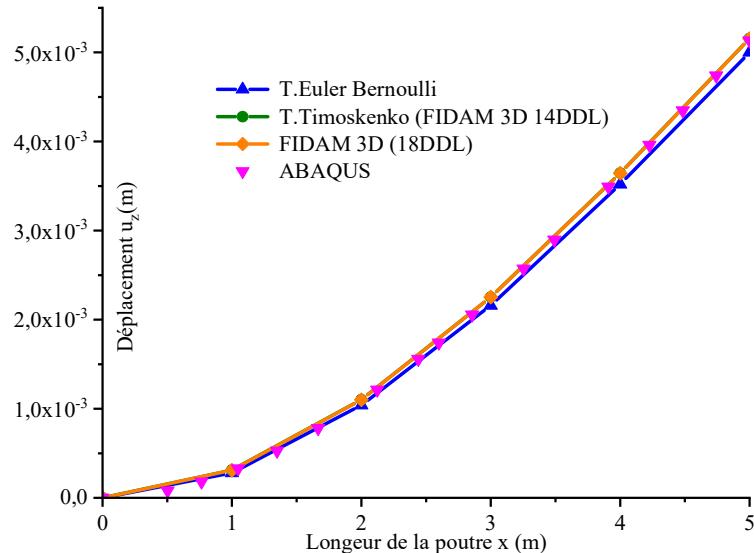


Figure 5.11 Déplacement selon l'axe z

On présente la distribution des contraintes normales et de cisaillement à une section distante de 2.5 (m) à partir de l'encastrement. Cette section satisfait le principe de St-Venant. La solution analytique est tirée de Capdeville (2016) pour une section rectangulaire sous l'action de la charge latérale  $V_x$  selon l'équation (5.2) où  $h$  est la hauteur de la section. Toutes les distributions de contraintes obtenues ont montré que FIDAM 3D présente une bonne précision en comparaison avec la solution analytique et la MEF 3D.

$$\tau_{zx} = \frac{V_z}{2I_y} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \quad (5.2)$$

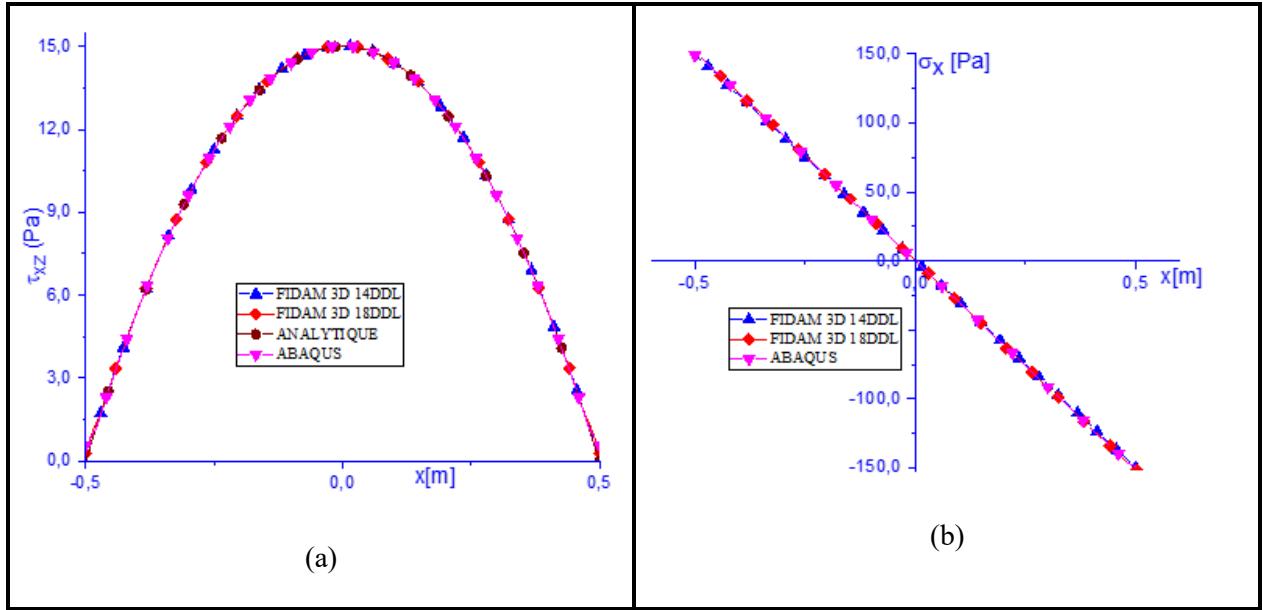


Figure 5.12 Distributions de contraintes à la section  $x = 2.5$  (m) : (a) contraintes de cisaillement ;  
(b) contraintes normales

Dans l'exemple ci-dessous, on considère une section qui est proche de l'encastrement ( $x = 0.2$ m). L'effet de déformation gauche due au cisaillement secondaire est considéré afin de calculer les contraintes sur la section. Les distributions des contraintes normales sont présentées à la Figure 5.13a. La distribution des contraintes issues de FIDAM 18 DDL est non linéaire et plus précise par rapport FIDAM 14 DDL, pour la théorie de poutre de Timoshenko, ainsi que celle d'Euler Bernoulli, en comparaison de la solution de la MEF 3D ABAQUS. La distribution des contraintes de cisaillement est améliorée. La distribution constante de contraintes de Le Corvec (2014) est obtenue de la théorie de poutre de Timoshenko (Figure 5.13b).

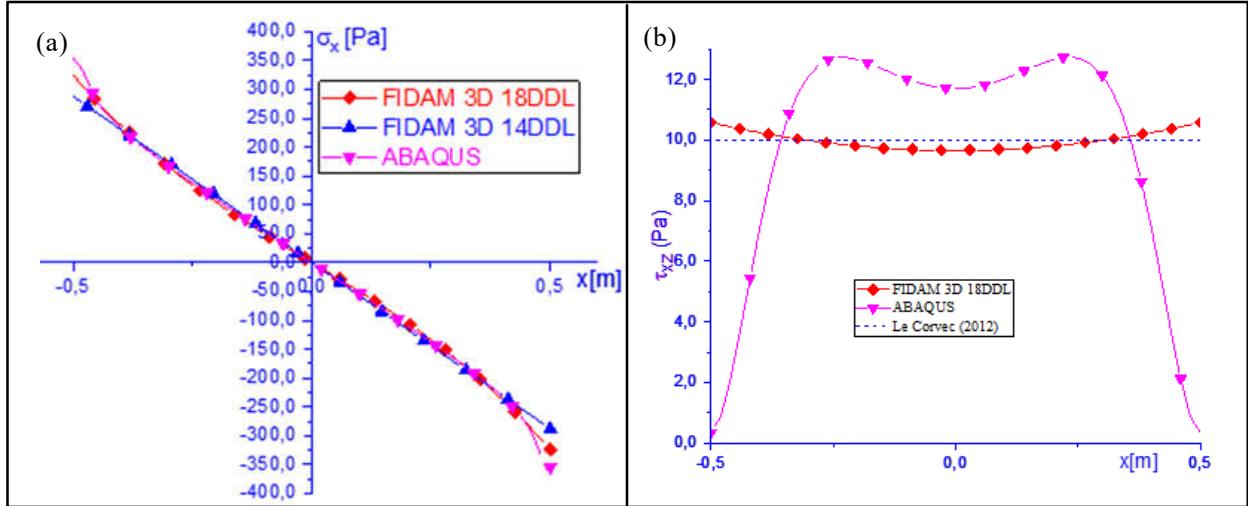


Figure 5.13 Distributions de contraintes normales et de cisaillement à la section 0.2m de l'encastrement

### Torsion $T = 1$ unité : Torsion et Torsion gauche

On considère maintenant cette poutre élancée soumise à un torque unitaire. La solution analytique de Cook et Young (1999) pour calculer la rotation sous l'action du torque incluant la déformation gauche est utilisée afin de vérifier et valider le comportement élastique du modèle FIDAM 3D ayant un DDL ajouté pour la torsion gauche. La rotation en fonction de la longueur de la poutre est présentée à la Figure 5.16. Le modèle FIDAM 3D incluant la déformation de gauchissement due à la torsion présente les mêmes résultats que ceux de la solution analytique et de la MEF 3D. La solution de FIDAM 12 DDL par la théorie de poutre d'Euler Bernoulli est différente car elle ne considère pas la déformation gauche due à la torsion. On constate alors 5% de différence par rapport à la solution d'ABAQUS. Les déformations gauches dues à la torsion n'influencent pas fortement le comportement des poutres élancées. Les autres solutions présentent approximativement 1% d'écart par rapport à la MEF 3D.

La solution analytique de Cook et Young (1999) est basée sur l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} - k^2 \beta = -k^2 \frac{T}{GK} \quad (5.3)$$

Avec  $\beta = \frac{d\theta_z}{dz}$  : le paramètre indépendant du gauchissement due à la torsion et  $k^2 = \frac{GJ}{EC_w}$

La solution de l'équation (5.3) est une fonction en sinus et cosinus hyperboliques :

$$\beta = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx + \frac{T}{GJ} \quad (5.4)$$

Où,  $C_1$  et  $C_2$ , ce sont des constantes d'intégration. Pour déterminer ces constantes on utilise les conditions limites. Pour une poutre avec une extrémité libre et l'autre encastrée, on a les conditions limites suivantes:

À la position d'enca斯特rement,  $x = 0$  et  $\beta = 0$  et à l'extrémité libre,  $x = L$  et  $\frac{d\beta}{dx} = 0$

La fonction de  $\beta$  est décrite en considérant les conditions aux frontières. L'angle de torsion,  $\theta$ , est déterminé par l'intégration de  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{T}{GJ} (\tanh kL \sinh kx - \cosh kx + 1) \\ \theta_z &= \frac{T}{GJ} \left( \frac{\tanh kL \cosh kx - \sinh kx}{k} + x \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quand  $x = L$ , on a:

$$\theta_z = \frac{TL}{GJ} \left( 1 - \frac{\tanh kL}{kL} \right) \quad (5.6)$$

Si la déformation de gauchissement n'est pas considérée, on a  $\theta_{z=L} = TL/GJ$ . Dans ce cas, cet angle de torsion est plus grand que celui si la déformation de gauchissement est considérée.

Les distributions des contraintes sont présentées à la Figure 5.15 en comparaison des résultats de FIDAM 3D 18DOFs et ABAQUS. L'évaluation des valeurs maximums des contraintes est décrite au Tableau 5.8. La différence maximale entre FIDAM 3D 18DOFs et la MEF 3D (ABAQUS) est de 7% pour la contrainte de cisaillement,  $\tau_{yz}$ . L'écart des contraintes normales est de 6%. Les écarts ont montré que FIDAM 3D DOFs est bien adapté pour analyser une poutre élastique élancée sous l'action d'un torque.

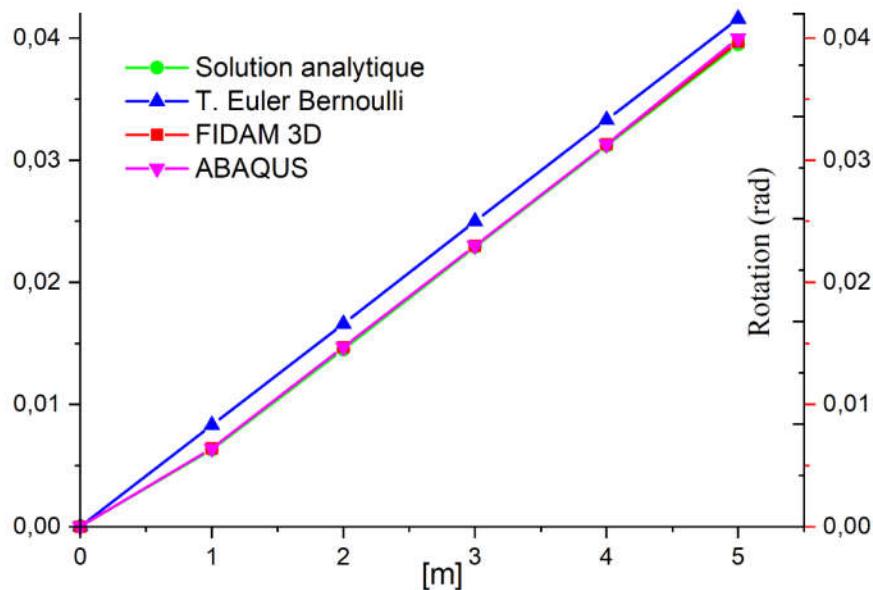


Figure 5.14 Rotation selon la longueur de la poutre

Tableau 5.7 : Évaluation de la rotation maximale à l'extrémité libre de la poutre

Rotation	T. Euler Bernoulli	FIDAM 3D18DOF	Solution analytique	ABAQUS
$\theta_z(\max)$ (rad)	0.0416	0.0395	0.0397	0.0400
Ratio/ABAQUS	1.04	0.99	0.99	1.00

Tableau 5.8 : Évaluation des contraintes maximales et minimales

Contraintes	FIDAM 3D18DOF (1)	ABAQUS (2)	(1) / (2)
$\sigma_{z\max}$ (Pa)	339.07	320.78	1.06
$\sigma_{z\min}$ (Pa)	-339.07	-320.78	1.06
$\tau_{xz\max}$ (Pa)	168.36	160.75	1.05
$\tau_{yz\max}$ (Pa)	179.41	167.11	1.07

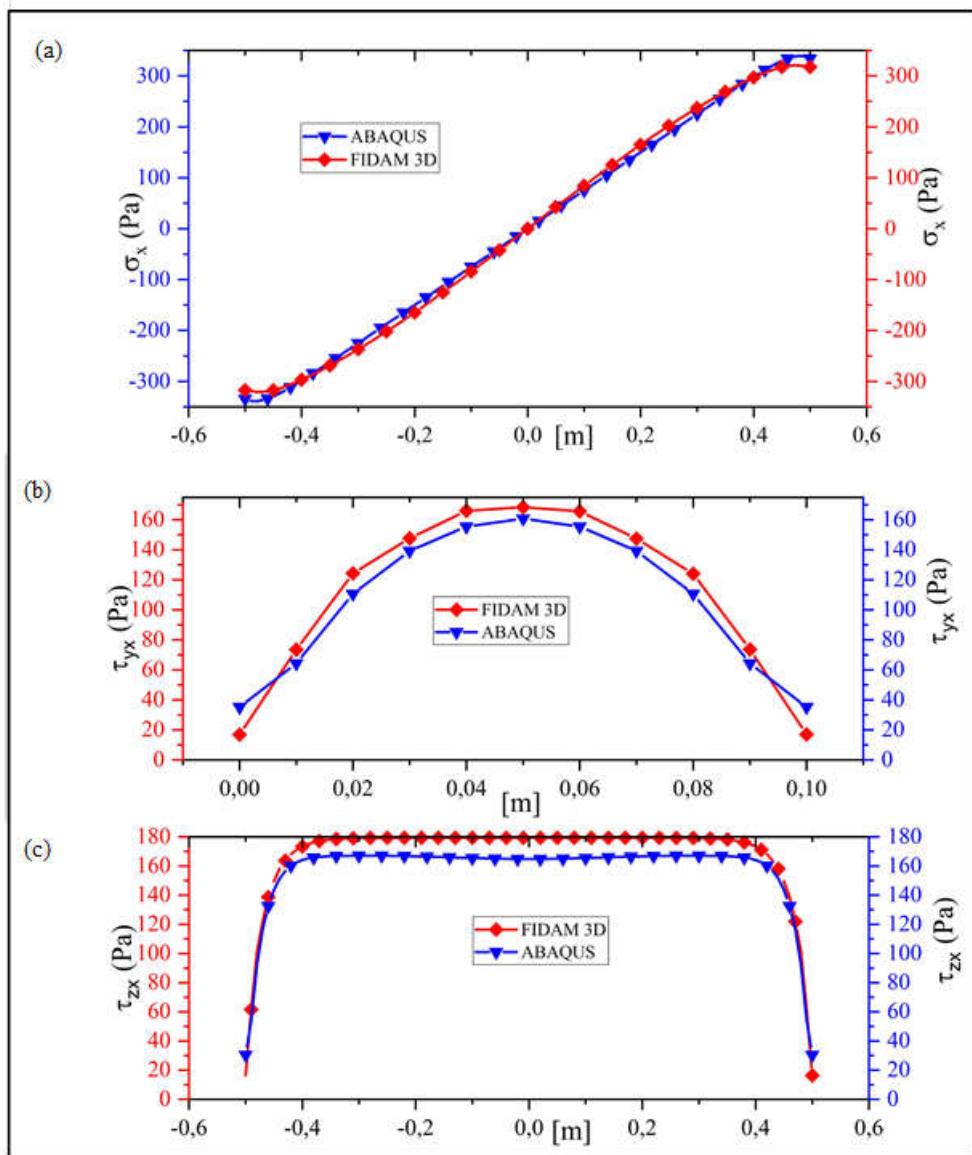


Figure 5.15 FIDAM 3D 18 et 14 DOFs vs ABAQUS, Distributions des contraintes à la section  $x = 2.5\text{m}$  : (a) contraintes normales; (b) et (c) contraintes de cisaillement

#### 5.4.2 Problème No.2 : Pilier profond rectangulaire élastique

Le problème No.2 est utilisé pour étudier une poutre profonde sous la forme d'un pilier de géométrie constante et de section rectangulaire (Figure 5.16). Les charges appliquées sont considérées pour deux cas : (1)  $P = -2300 \text{ kN}$ ,  $V_x = 3000 \text{ kN}$ ; et (2)  $T = 100 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Le modèle d'ABAQUS est constitué de 34 560 éléments solides (Figure 5.16b). Le modèle de FIDAM 3D 18DOFs discrétise le pilier par 4 éléments fibres ayant au total 45 DDL (Figure 5.16b).

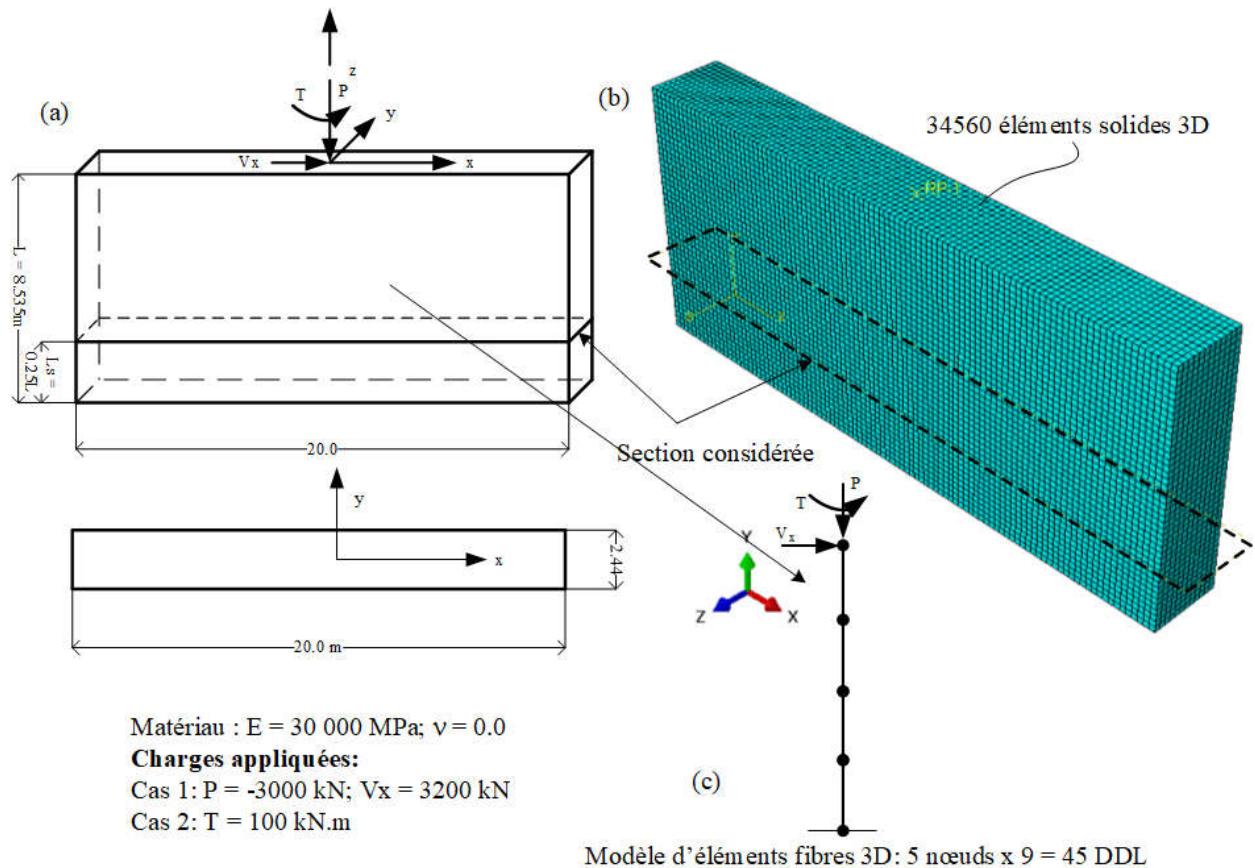


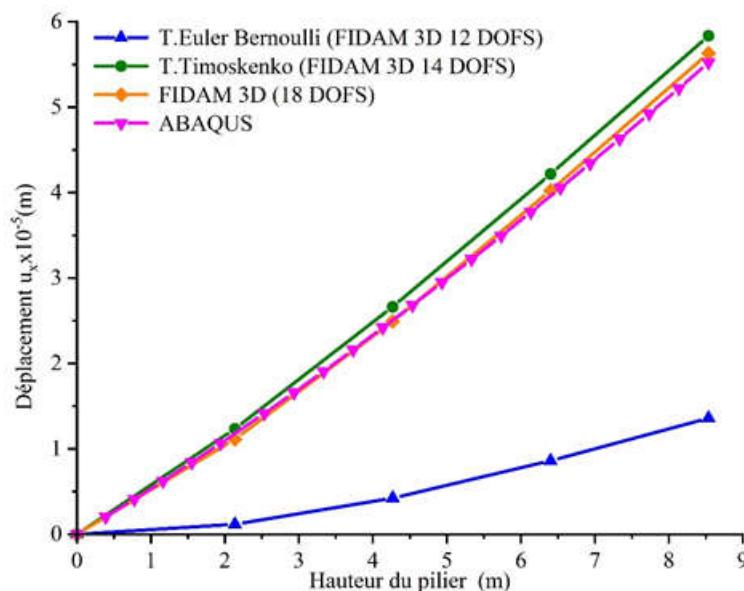
Figure 5.16 Pilier rectangulaire élastique : (a) géométrie ; (b) modèle ABAQUS avec 34 560 éléments solides 3D; (c) Modèle d’éléments fibres proposé, 4 éléments avec 45 DDL

### Cas 1 : $P = -3000 \text{ kN}$ , $V_x = 3200 \text{ kN}$

Le premier cas considère le chargement P-M-V selon la direction profonde de la section. Le déplacement selon l’axe x est présenté en fonction de la hauteur du pilier à la Figure 5.19. Ce résultat montre que FIDAM 3D 18DOFs capture correctement le comportement de poutre profonde par comparaison des déplacements entre les modèles considérés. La valeur maximale du déplacement est présentée au Tableau 5.9. FIDAM 12 DOFs, utilisant la théorie de poutre d’Euler Bernoulli, présente un écart de 75.4% par rapport à la solution MEF 3D ABAQUS. Le FIDAM 3D 14 DOFs améliore la solution du déplacement maximum avec 5.7% d’écart en comparaison avec ABAQUS mais la distribution des contraintes normales est encore linéaire à la Figure 5.18a. Cette limitation est améliorée par FIDAM 3D 18DOFs avec 2% de différence de déplacement par rapport à la solution de MEF 3D (ABAQUS). La distribution des contraintes normales est non linéaire comme la solution de la MEF 3D (Figure 5.18a).

Tableau 5.9 : Évaluation du déplacement maximal

Modèles	FIDAM 3D 18 DOFs	FIDAM 3D 14 DOFs	FIDAM 3D 12 DOFs	ABAQUS
$U_x \times 10^{-5}$ (m)	5.631	5.836	1.359	5.523
Ratio/ ABAQUS	1.020	1.057	0.246	1.000

Figure 5.17 Déplacement,  $U_x$ , selon la hauteur du pilier

On évalue ensuite les valeurs maximales et minimales des contraintes à la section considérée (Tableau 5.10). Les modèles de FIDAM 3D 12&14 DOFs utilisant la théorie de poutre d'Euler Bernoulli et de Timoshenko présentent un écart de 17% pour la valeur minimale de contrainte normale et de 37% pour celle maximale par rapport à la solution ABAQUS. FIDAM 3D 18 DOFs présente une bonne précision par rapport à la solution MEF 3D avec 3% de différence pour la contrainte minimale (en compression) et 7.1% de différence pour la contrainte maximale (en tension). FIDAM 3D 18 DOFs améliore la solution de FIDAM 12 DOFs et 14 DOFs pour la distribution des contraintes de cisaillement. FIDAM 12 & 14 DOFs présentent des résultats similaires aux solutions analytiques correspondantes avec 19% d'écart par rapport à la solution MEF 3D. Par ailleurs, FIDAM 18 DOFs, considérant l'effet secondaire du cisaillement, présente un écart de 11% par rapport à la MEF 3D. Les avantages de FIDAM 3D 18 DOFs sont clairement mis en évidence par rapport à la théorie de poutre d'Euler Bernoulli et de Timoshenko. Le modèle

proposé est bien adapté pour les structures élastiques ayant des sections profondes pour le cas de chargement P-M-V.

Tableau 5.10 : Évaluation de contraintes maximales et minimales

Indices	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 12 & 14 DOFs (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-232.16	1.03	-187.40	0.83	-225.83
$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	109.21	1.07	64.45	0.63	101.66
$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	87.15	1.11	93.88	1.19	78.66

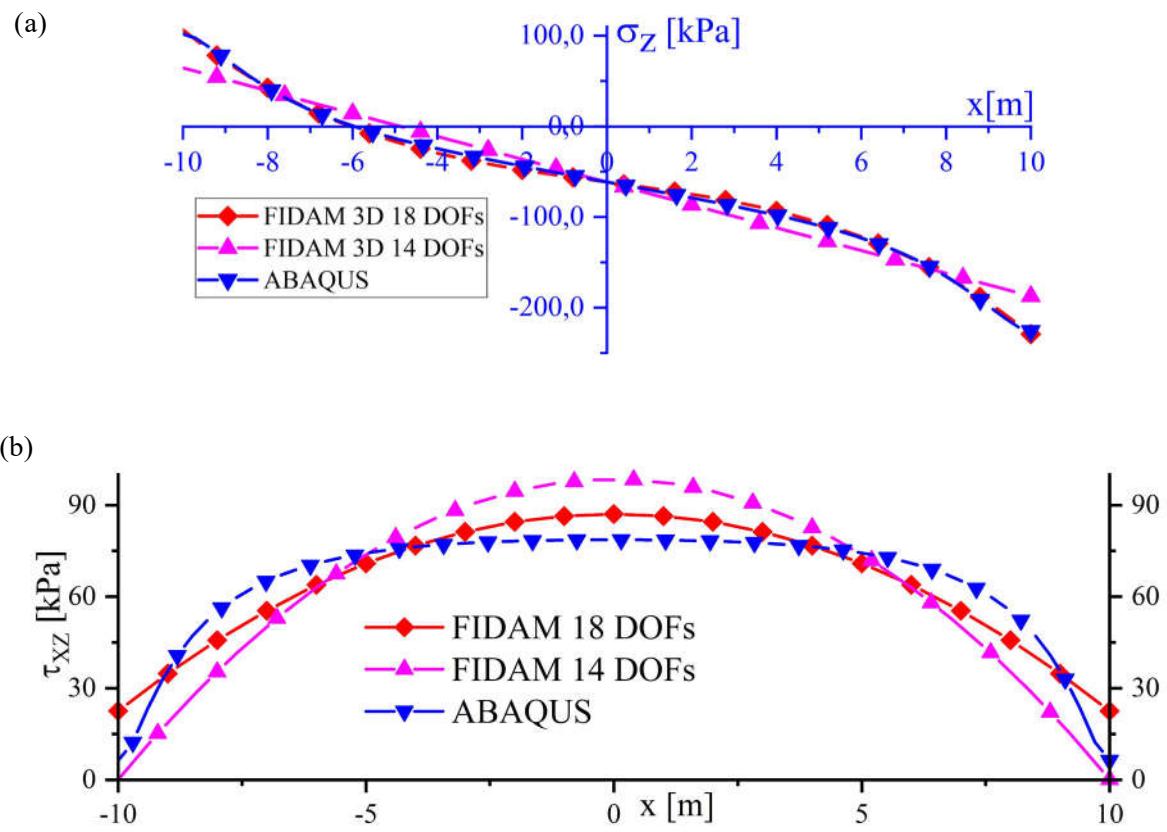


Figure 5.18 Distributions des contraintes à la section au niveau de  $L_s = 2.1334(\text{m})$  : (a) distribution de contraintes normales; (b) distribution de contraintes de cisaillement

### Cas 2 : $T = 100 \text{ kN.m}$

Le deuxième cas de charge considère un torque de  $T = 100 \text{ kN.m}$  afin de vérifier et valider le modèle de FIDAM 3D 18 DOFs pour les poutres profondes. La rotation maximum à la tête du pilier est présentée au Tableau 5.11. FIDAM 3D (14 et 18 DOFs présente 5% d'écart avec la solution de

ABAQUS. L'écart de la solution FIDAM 3D 12 DOFs est de 22%. La variation de la rotation sur la hauteur du pilier est présentée à la Figure 5.19.

Tableau 5.11 : Évaluation de la rotation à la tête du pilier

Modèles	FIDAM 3D 18 & 14 DOFs	Analytique	FIDAM 3D 12 DOFs	ABAQUS
$\theta_z \times 10^{-5}$ (rad)	0.03392	0.03393	0.06364	0.03567
Ratio/ ABAQUS	0.95	0.95	1.78	1.000

Tableau 5.12 : Évaluation des contraintes maximales et minimales

Indices	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 14 DOFs (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$\sigma_{\max}$ (kPa)	3.28	1.13	3.28	1.13	2.90
$\tau_{yz\max}$ (kPa)	-1.29	0.94	-1.29	0.94	-1.37
$\tau_{xz\max}$ (kPa)	1.01	0.95	1.01	0.95	1.06

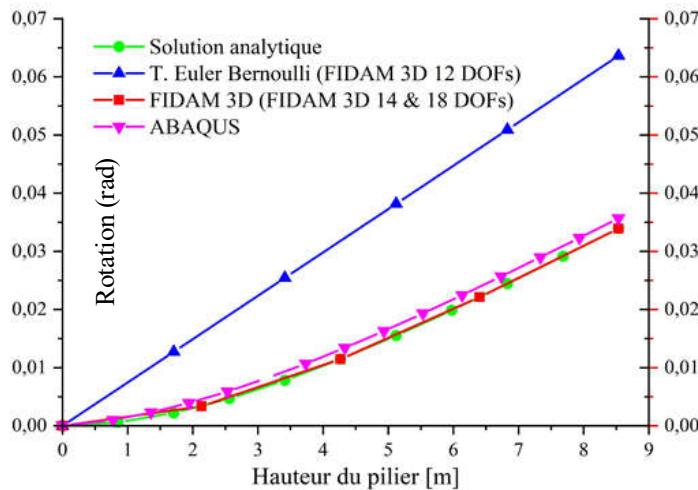


Figure 5.19 Rotation selon la hauteur du pilier

La Figure 5.20 présente les distributions des contraintes de FIDAM 3D et ABAQUS. Les résultats montrent 13% de différence entre FIDAM 3D (14-18DDL) et ABAQUS pour la valeur maximale de contraintes normales. Pourtant, l'écart maximum des contraintes de cisaillement est seulement de 5%. Ces écarts sont acceptables. Donc, le problème de torsion est résolu adéquatement par FIDAM 3D (14-18DDL) en considérant la torsion gauche. L'écart maximale des contraintes normales est de 13% car l'effet de torsion dans FIDAM 3D (14-18DOFs) est considéré seulement pour le premier ordre de la torsion gauche (bi-moment) pour une section rectangulaire. Les résultats

seraient plus précis si le deuxième ordre de la torsion gauche était considéré avec un autre DOF ajouté à chaque extrémité de l'élément (donc 20 DOFs). Si la section ayant un grand ratio d'élancement, comme pour les structures ayant des sections profondes (exemple le problème No.1 avec un élancement sectionnel = 10), les écarts de résultats sont réduits à 6%.

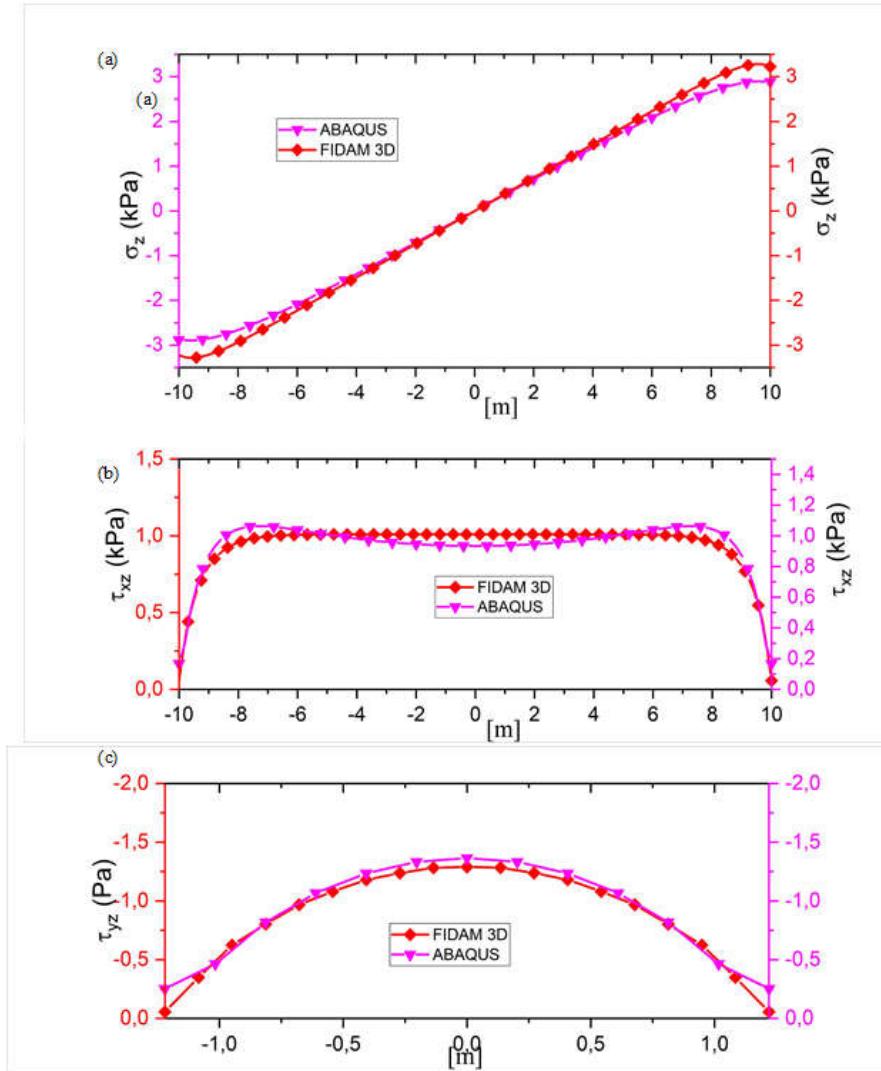


Figure 5.20 Distributions des contraintes normales et des contraintes de cisaillement à la section ( $L_s = 0.25 L$ )

#### Évaluation de l'influence des ratios $L/H$ et $H/B$ sur la distribution des contraintes normales

La solution analytique du problème hydrostatique est présentée dans la littérature par Timoshenko et Goodier (1970). Dans cette section, on considère les paramètres d'un pilier, comme (i) la hauteur,  $L$ , (ii) la profondeur de la section,  $H$  et (iii) la largeur de la section,  $B$ , qui influencent la distribution des contraintes normales (Figure 5.21). Cette étude permet de vérifier et valider FIDAM 3D versus

la solution analytique de la théorie d'élasticité. La variation du ratio de  $L/H$  est de 1 à 5. Le ratio d'élancement de la section ( $H/B$ ) est considéré avec les valeurs de 2 et 10. La section considérée est localisée à 0.25L de la hauteur du pilier. Les distributions des contraintes normales sont montrées à la Figure 5.22. Les distributions des contraintes normales sont non linéaires, et approchées par les solutions FIDAM 3D 18DOFs et la TE. Mais la solution de FIDAM 3D 14DOFs n'est pas valide pour les piliers profonds (à partir de  $L/H < 4$ ). Pour le ratio  $L/H$  égal à 1.0 la solution de la théorie d'élasticité n'est pas validée car la position de la section ne satisfait pas le principe de St-Venant. Dans ce cas, les différences de calcul entre FIDAM 3D 18 DOFs et la TE sont de 3% pour  $H/B = 2$ , et 37% pour  $H/B = 10$ . Afin de valider la solution de FIDAM 3D soumise une charge hydrostatique, on construit un modèle ABAQUS ayant deux ratios de  $L/H = 1$  et  $L/H = 0.5$  avec le ratio  $H/B = 10$ . Les résultats sont présentés à la Figure 5.22 et au Tableau 5.13. L'écart maximal entre ABAQUS et FIDAM 3D 18DOFs est de moins de 10%. Donc, FIDAM 3D 18 DOFs considérant les déformations de gauchissement de cisaillement, est bien adapté pour le cas de charge hydrostatique (charge répartie triangulaire) pour toutes les catégories de sections élancées et profondes. FIDAM 3D-18DOFS peut aussi s'affranchir du principe de St-Venant pour les sections qui sont proches de l'encastrement, ce qui est un avantage marquant de la solution développée.

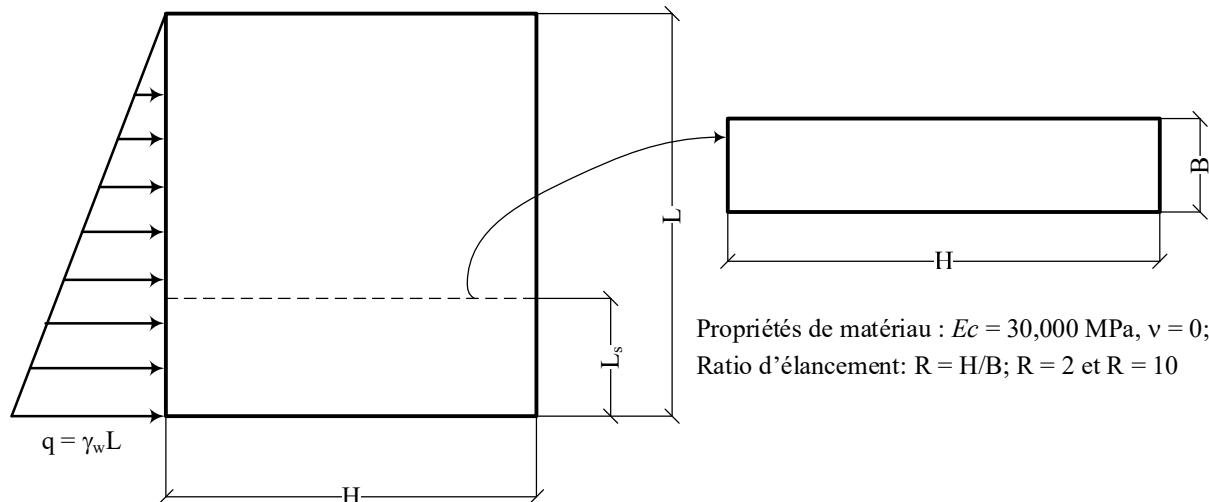


Figure 5.21 Pilier sous l'effet hydrostatique

Tableau 5.13 : Évaluation des contraintes normales selon la théorie de l'élasticité et FIDAM 3D  
pour la section  $L_s = 0.25L$  [kPa]

<b>Ratio d'élancement</b>	<b>L/H</b>	<b>FIDAM 3D 18DOFS (1)</b>	<b>(1)/(3)</b>	<b>FIDAM 3D 14DOFS (2)</b>	<b>(2)/(3)</b>	<b>T.E (3)</b>
2	5	1800.50	1.02	1804.89	1.02	1770.21
	3	296.82	1.00	311.09	1.05	296.75
	2	60.61	1.00	66.22	1.10	60.33
	1	2.10	0.97	2.45	1.13	2.18
10	5	5180.03	1.02	5242.22	1.03	5099.67
	3	1088.68	1.01	1132.32	1.06	1073.28
	2	310.17	1.03	331.09	1.10	301.66
	1	36.65	1.37	41.39	1.55	26.67

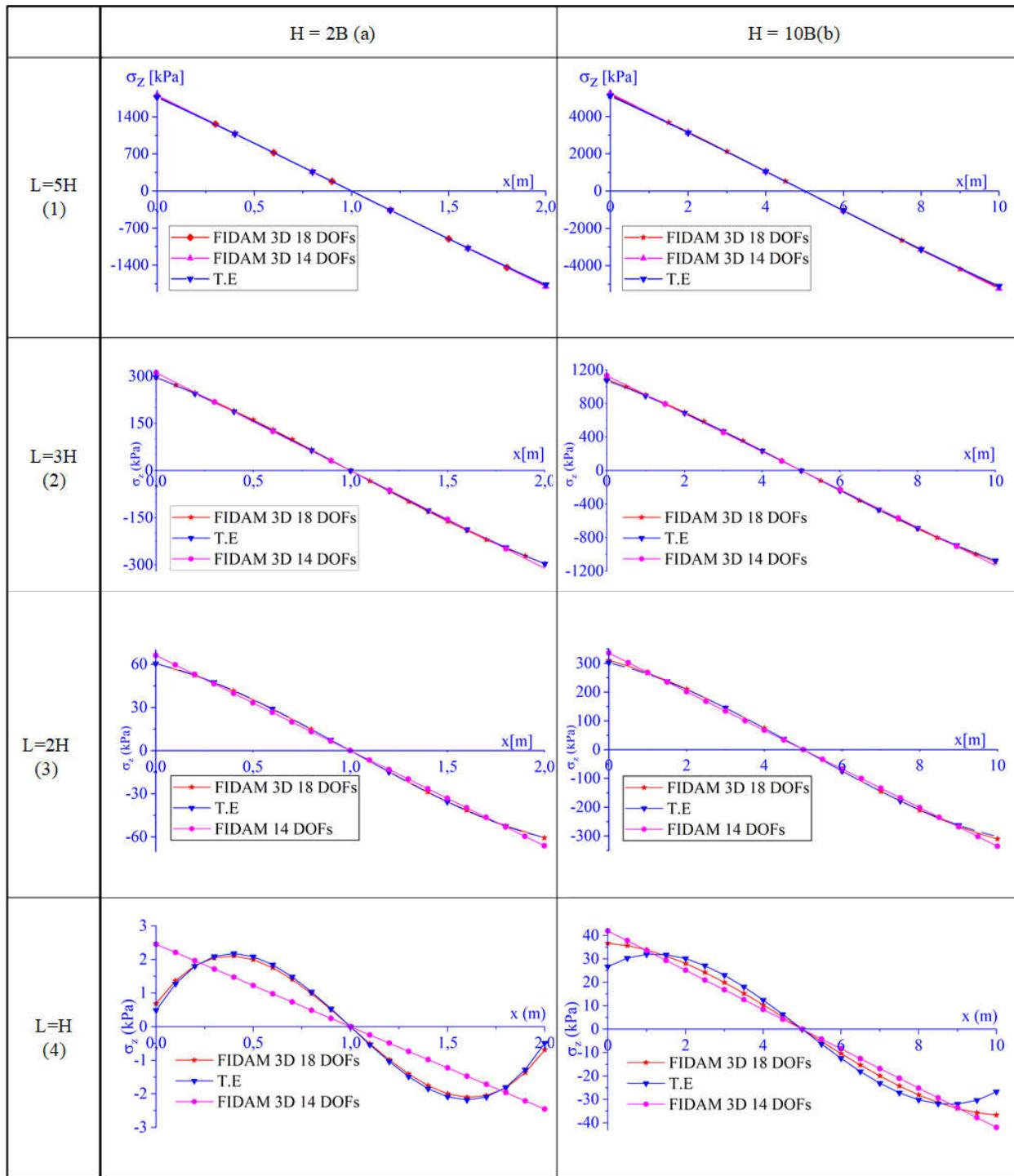


Figure 5.22 Distributions de contraintes normales selon les paramètres géométriques (H, B, L) pour la section  $L_s = 0.25L$ : (a) H = 2B ; (b) H = 10B.

Pour les sections proches de l'encastrement, qui ne satisfont pas le principe de Saint- Venant, on considère la section  $L_s = 0.1L$  dans le cas  $L = H = 10\text{m}$  et  $B = 1\text{m}$ . Les analyses sont effectuées par

FIDAM 3D (14 DOFs et 18DOFs) et ABAQUS. Les distributions des contraintes normales sont représentées à la Figure 5.23. La solution FIDAM 3D – 18DOFs est proche de la solution ABAQUS. Donc, le modèle FIDAM 3D-18DOFS améliore bien la solution du problème hydrostatique pour les sections profondes par rapport CADAM 3D (solution d'Euler Bernoulli) et la solution analytique de la TE.

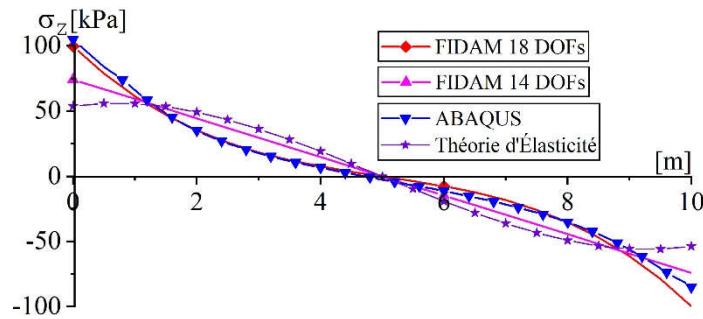


Figure 5.23 Distributions de contraintes normales à la section  $L_s = 0.1L$

### 5.4.3 Problème No.3 : Pilier profond rectangulaire élastique avec géométrie variable

On considère un pilier profond rectangulaire élastique avec la géométrie variable de la Figure 5.24, typique de plusieurs ouvrages existants. Dans ce problème, on va considérer deux cas de matériaux élastique avec un coefficient de Poisson,  $\nu = 0$  et  $0.17$  pour le béton et deux cas de charges : (i) cas 1 :  $P = -2300$  kN et  $V_x = 3000$  kN; (ii) cas 2 :  $V_y = 1000$  kN. Ce pilier est modélisé par ABAQUS utilisant 34 560 éléments solides 3D.

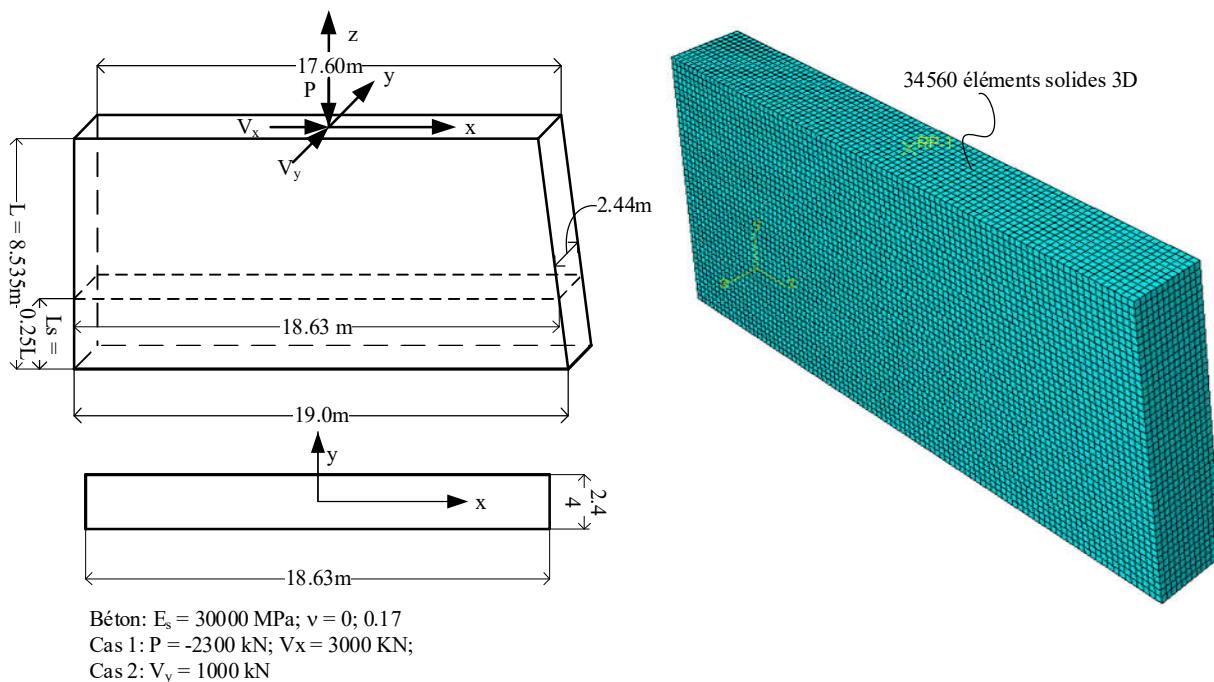


Figure 5.24 Géométrie variable, matériaux et charges appliquées pour un pilier élastique profond.

La distribution des contraintes est présentée à la Figure 5.25 pour les solutions FIDAM 3D (14 DOFs et 18 DOFs) versus la solution ABAQUS. Le résumé des résultats pour chaque cas de charges est décrit au Tableau 5.4 pour la section localisée à  $L_s = 0.25L$ . Les solutions de FIDAM 3D 14 DOFs sont correctes seulement pour le cas 2 ( $V_y = 1000$  kN) avec moins de 10% d'écart maximal. Cependant des écarts de 20% à 30% sont obtenus pour le cas 1 en raison de la présence de  $V_x$ , dans la direction profonde de la section. Toutes les solutions de FIDAM 3D 18DOFs présentent une excellente concordance par rapport à la solution ABAQUS avec (i) 2% d'écart pour le déplacement maximal à la tête du pilier (ii) 6% d'écart pour la valeur des contraintes normales

en compression et (iii) de 6% à 9% pour la valeur des contraintes normales en tension. Les contraintes de cisaillement de FIDAM 18DOFs présentent des écarts de 5% pour problème de cas 1 ( $P = -2300$  kN;  $V_x = 3000$  kN). Pour le cas 2 ( $V_x = 1000$  kN), la distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 18DOFs est proche de la solution ABAQUS. Des écarts existent pour les valeurs à la frontières aval à cause de l'influence de la pente. Les conditions aux frontières sont considérées afin d'assurer les conditions d'équilibres par l'équation (5.7). Pourtant, la solution de FIDAM 3D inclue des déformations de cisaillement secondaire qui sont générées par les contraintes normales dues aux effets de cisaillement secondaire (voir détails à la Figure 3.17). Ces déformations causent des contraintes de cisaillement aux points sur les côtés de la section analysée mais la distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 3D 18 DOFs pour les autres points de la section analysée est bien proche de la solution de ABAQUS. Il y a de grandes améliorations avec FIDAM 3D 18 DOFs pour les contraintes normales et les contraintes de cisaillement par rapport la solution de FIDAM 3D 14 DOFs considérant seulement l'effet primaire de cisaillement.

$$\left( \tau_{xz}^p l + \tau_{xz}^p m = -\sigma_z^p \cdot n_s \right) \Big|_{z=z_0} \Rightarrow \frac{\partial \psi_G}{\partial \vec{n}} = \left( -\sigma_z^p n_s - \vec{h}_n(x,y) \cdot \vec{n} \right) \Big|_{z=z_0} \quad (5.7)$$

Tableau 5.14 : Évaluation de contraintes normales FIDAM 3D versus ABAQUS pour la section

$$L_s = 0.25L \text{ [kPa]}$$

Cas	Indices	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 14 DOFs (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$P = -2300 \text{ kN};$ $V_x = 3000 \text{ kN},$ $\nu = 0$	$U_{x\max} \times 10^{-3}(\text{m})$	0.0582	1.0265	0.0593	1.0464	0.0567
	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-196.67	0.94	-177.13	0.85	-209.25
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	114.33	1.06	75.93	0.70	108.22
	$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	76.9	0.98	93.88	1.19	78.73
$V_y = 1000 \text{ kN},$ $\nu = 0$	$U_{y\max} \times 10^{-3}(\text{m})$	0.34	0.9959	0.35	1.03	0.34
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	354.10	1.05	355.25	1.05	338.75
	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	321.00	1.06	323.00	1.07	302.00
	$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	-54.54	1.22	-56.48	1.26	-44.81
	$\tau_{YZ\max}(\text{kPa})$	66.2	1.47	71.78	1.59	45.15
$P = -2300 \text{ kN};$ $V_x = 3000 \text{ kN},$ $\nu = 0.17$	$U_{x\max} \times 10^{-3}(\text{m})$	0.0654	1.0429	0.0669	1.0664	0.0627
	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-193.48	0.94	-177.13	0.86	-205.00
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	117.07	1.09	75.93	0.71	107.00
	$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	77.12	0.98	94.01	1.20	78.34
	$\tau_{YZ\max}(\text{kPa})$	1.03	0.95	0.98	0.90	1.09
$V_y = 1000 \text{ kN}, \nu = 0.17$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	305.61	1.04	327.56	1.12	293.21
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	339.57	1.01	356.64	1.07	334.63

Donc, les écarts présentés dans ce problème montrent que FIDAM 3D 18 DOFs est adéquat pour l'analyse de piliers rectangulaires profonds élastiques ayant une géométrie variable typique des ouvrages existants.

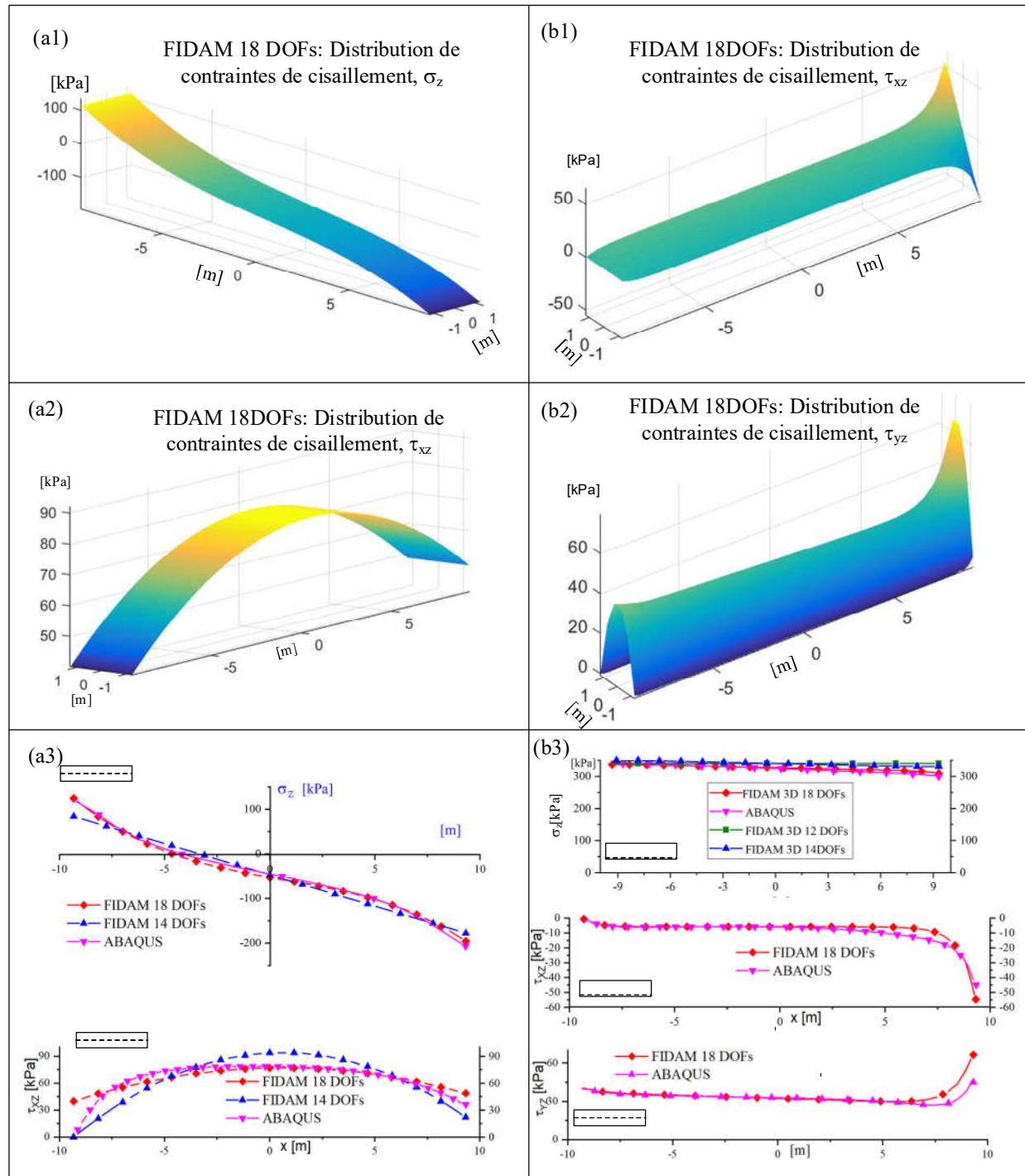
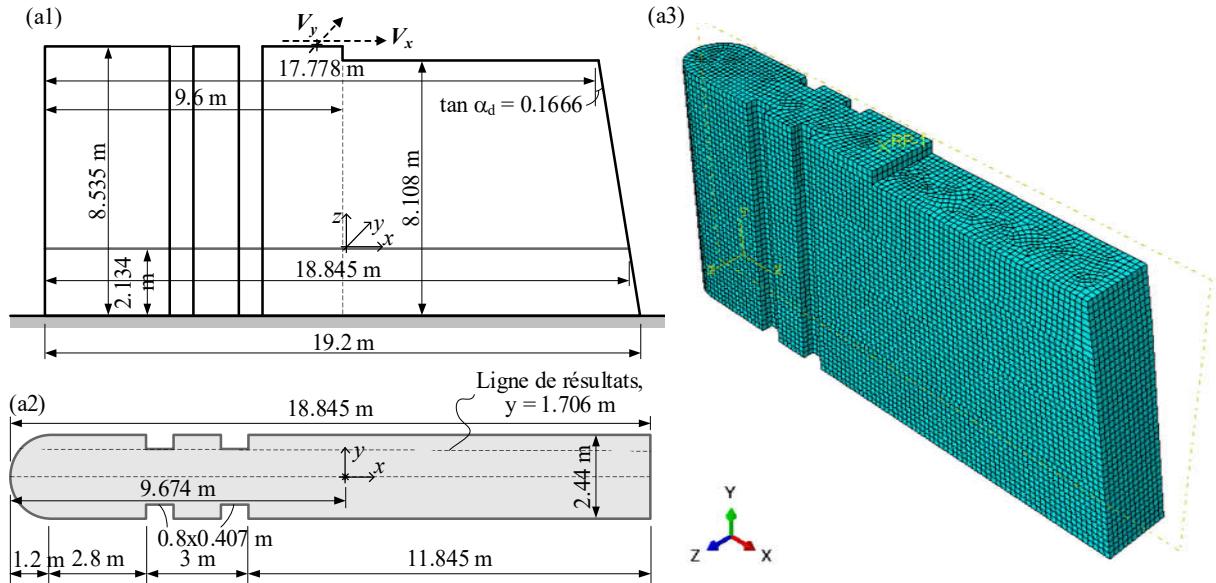


Figure 5.25 Distributions des contraintes; (1) Figs a<sub>1</sub> à a<sub>3</sub> pour le cas de charge P, V<sub>x</sub>; (2) Figs b<sub>1</sub> à b<sub>3</sub> pour le cas de charge V<sub>y</sub>

#### 5.4.4 Problème No.4 : Pilier existant élastique

Dans le contexte de ce problème, on considère un pilier existant en béton élastique soumis à des charges latérales ( $V_x$  et  $V_y$ ) afin de vérifier et valider FIDAM 3D par rapport à la solution d'analyse sectionnelle de Stefan et Léger (2011) et à la MEF 3D avec ABAQUS. La géométrie du problème est décrite à la Figure 5.26. Le calcul est effectué pour deux cas (1)  $V_x = 1000$  kN et (2)  $V_y = 1000$  kN.



Propriétés du matériau :  $E_c = 30,000$  MPa,  $\nu = 0$ ; 0.2

Cas 1:  $V_x = 1000$  kN; Cas 2 :  $V_y = 1000$  kN

Figure 5.26 Pilier existant sous l'action de  $V_x = 1000$  kN et  $V_y = 1000$  kN.

#### Premier cas : $\nu = 0$

Les distributions des contraintes normales et des contraintes de cisaillement sont dessinées à la Figure 5.27 pour la ligne de résultats,  $y = 1.706\text{m}$  sur la section transversale. On note un écart maximal de 12% entre la solution ABAQUS et FIDAM 3D 18DOFs pour la contrainte maximale de compression. Par ailleurs, la solution de FIDAM 3D 14 DOFs et Stefan et Léger (2011) ont 25% d'écart. Pour la valeur maximale des contraintes normales en tension, ABAQUS et FIDAM 3D 18DOFs présentent 1% d'écart. La solution de Stefan et Léger (2011) a présenté 19% de différence avec ABAQUS.

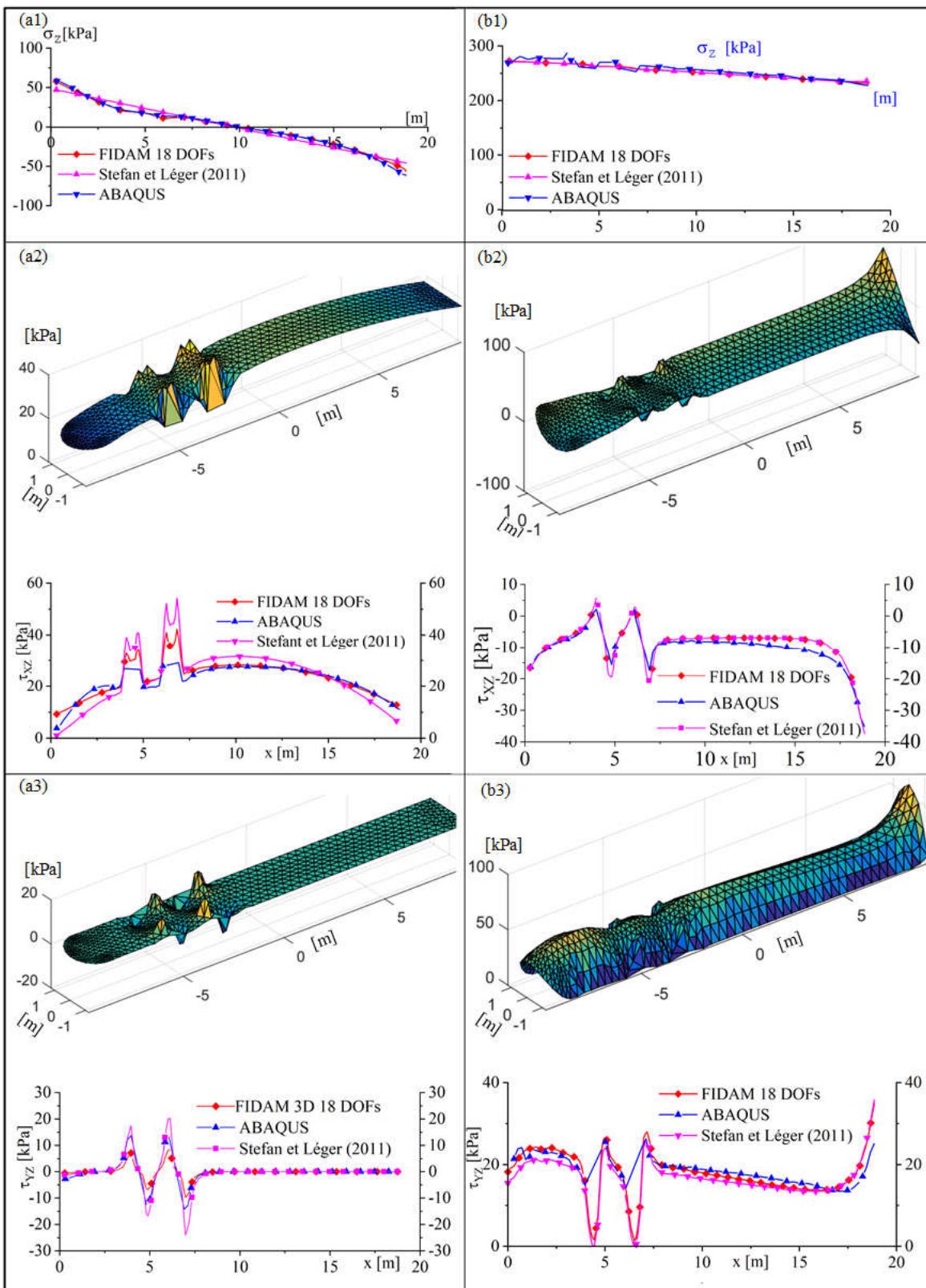


Figure 5.27 Distribution de contraintes normales et de cisaillement pour un pilier existant : Figs a1-a3 pour le cas  $V_x = 1000\text{kN}$  avec  $\nu = 0$  ; Figs b1-b3 pour le cas  $V_y = 1000\text{kN}$  avec  $\nu = 0$ .

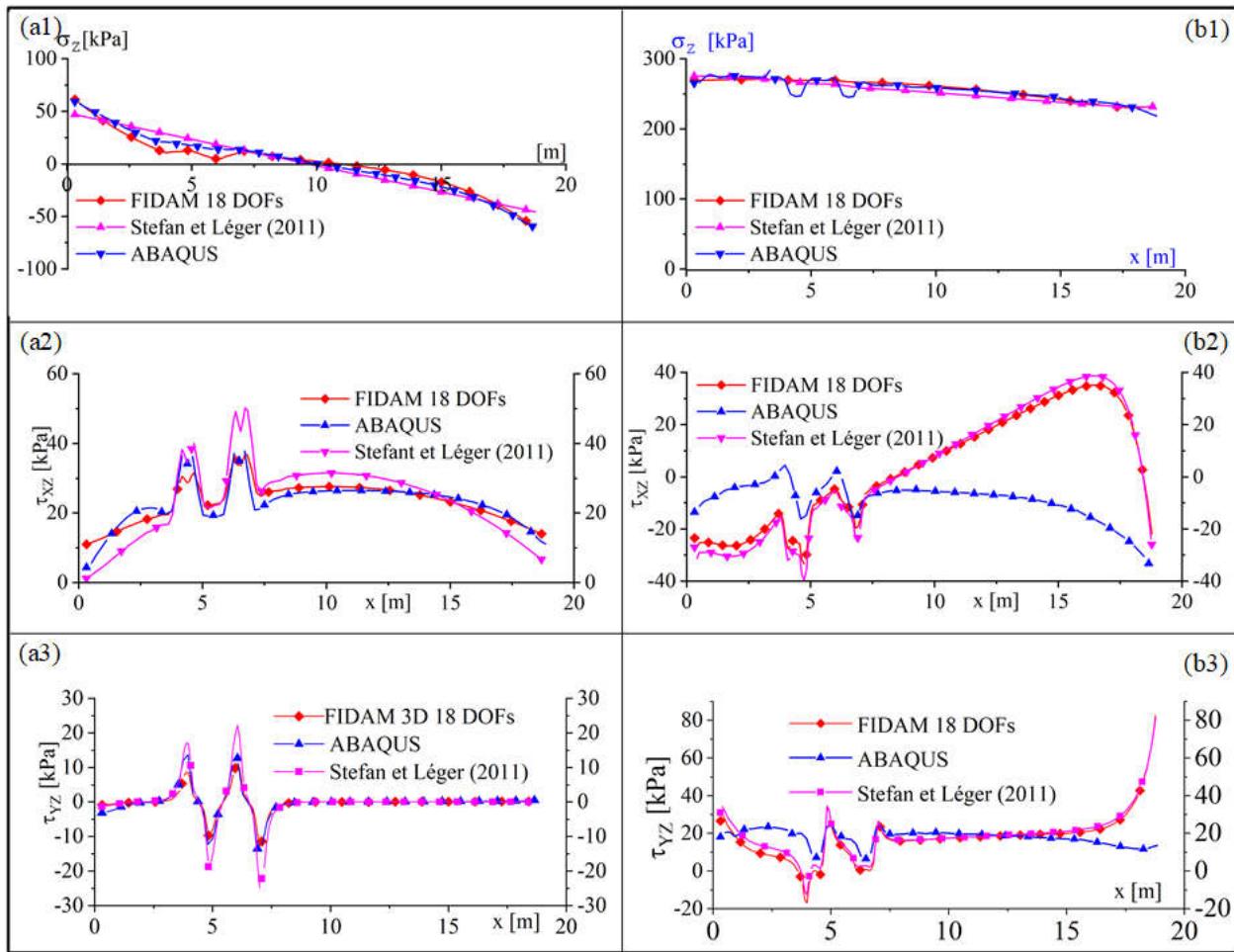


Figure 5.28 Distribution de contraintes normales et de cisaillement pour un pilier existant : Figs a1-a3 pour le cas  $V_x = 1000\text{kN}$  avec  $\nu = 0.2$  ; Figes b1-b3 pour le cas  $V_y = 1000\text{kN}$  avec  $\nu = 0.2$

La distribution des contraintes de cisaillement de la solution FIDAM 3D 18DOFs présente moins d'écart avec la solution ABAQUS par rapport à la solution de Stefan et Léger (2011) ainsi que celle de FIDAM 3D 14 DOFs (Figure 5.27 a2-a3 et b2-b3). Bien qu'il existe des différences relativement importantes à certaines positions locales, la distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 3D suit de près la distribution de la solution ABAQUS. Donc, FIDAM 3D 18DOFs incluant l'effet secondaire de cisaillement pour la section profonde est bien adapté pour l'étude des contraintes d'un pilier élastique ayant une géométrie complexe en comparaison de la solution ABAQUS. La solution FIDAM 3D 18 DOFs améliore significativement la solution de Stefan et Léger (2011).

Tableau 5.15 : Évaluation des contraintes de FIDAM 3D pour la section Ls = 0.25L [kPa]

Cas	Modèles	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	Stefan et Léger (2011) (2)	(2)/(3)	ABAQUS
$V_x = 1000 \text{ kN},$ $\nu = 0$	$\sigma_z \text{ min (kPa)}$	-56.09	0.91	-45.80	0.75	-61.46
	$\sigma_z \text{ max (kPa)}$	57.81	0.99	47.13	0.81	58.45
	$\tau_{xz} \text{ max (kPa)}$	27.83	1.01	30.81	1.12	27.52
$V_y = 1000 \text{ kN},$ $\nu = 0$	$\sigma_z \text{ max (kPa)}$	266.94	0.99	271.18	1.01	268.91
	$\sigma_z \text{ min (kPa)}$	225.99	0.99	235.48	1.03	227.87
	$\tau_{yz} \text{ max (kPa)}$	19.04	0.99	17.39	0.90	19.32
$V_x = 1000 \text{ kN},$ $\nu = 0.2$	$\sigma_z \text{ min (kPa)}$	-60.18	0.99	-45.80	0.75	-60.78
	$\sigma_z \text{ max (kPa)}$	61.45	1.04	47.13	0.80	59.15
	$\tau_{xz} \text{ max (kPa)}$	27.77	1.08	30.79	1.20	25.75
	$\tau_{yz} \text{ max (kPa)}$	11.28	0.89	22.22	1.75	12.66
$V_y = 1000 \text{ kN},$ $\nu = 0.2$	$\sigma_z \text{ max (kPa)}$	269.07	1.01	275.36	1.04	265.43
	$\sigma_z \text{ min (kPa)}$	233.96	1.07	231.81	1.06	218.94

### Premier cas : $\nu = 0.2$

Afin de considérer l'influence du coefficient de Poisson,  $\nu$  sur les solutions de FIDAM 3D pour un pilier existant en béton, on prend la valeur du coefficient de Poisson,  $\nu = 0.2$  pour le béton dans deux cas :  $V_x = 1000 \text{ kN}$  et  $V_y = 1000 \text{ kN}$ . Les résultats sont résumés à la Figure 5.28 et au Tableau 5.15. Dans le cas  $V_x = 1000 \text{ kN}$ , on note un écart de 1% différence entre FIDAM 3D 18 DOFs et ABAQUS pour la valeur de la contrainte normale maximale en compression. Cependant, cette valeur est de 25% pour la solution selon l'analyse sectionnelle par Stefan et Léger (2011) ainsi que FIDAM 3D 14DOFs excluant l'effet secondaire de cisaillement. De plus, l'écart de contrainte normale maximale en tension entre FIDAM 3D 18DOFs et ABAQUS est seulement de 4% de différence par rapport 20% de Stefan et Léger (2011). Par ailleurs, la distribution des contraintes normales de FIDAM 3D 18DOFs est bien proche de celle de ABAQUS (Figure 5.28 a1). Les distributions de contraintes de cisaillement sont représentées aux Figure 5.28 a2 et a3. La solution de FIDAM 3D 18DOFs suit bien la distribution des contraintes de cisaillement de ABAQUS avec un écart maximal à un point local de 8% (11%) par rapport de 20% (25%) de Stefan et Léger (2011). Donc, FIDAM 3D 18DOFs présente de bons résultats pour l'influence du coefficient de Poisson pour le cas de  $V_x$  appliquée selon la direction profonde de la section.

Dans le cas  $V_y = 1000$  kN, les distributions de contraintes de cisaillement ne sont pas bien approchées pour tous les points sur la section, surtout pour les points en périphérie de la section. La distribution des contraintes de cisaillement,  $\tau_{xz}$  présente un résultat différent par rapport la solution ABAQUS (Figure 5.28 b2-b3) mais en comparaison avec le logiciel Prokon (Prosec), cette distribution est bien suivie. Cet écart a montré que le coefficient de Poisson influence fortement les résultats de la méthode des éléments finis 2D (Prosec) qui résout l'équation de Poisson. Pour les éléments solides 3D, cette influence n'est pas aussi forte. Pourtant, les écarts maximums pour les contraintes normales de FIDAM 3D varient de 1% à 7% en comparaison des solutions de ABAQUS. Le calcul de FIDAM 3D afin d'évaluer les indicateurs de performance à l'aide d'analyse non linéaire sera fiable pour caractériser la fissuration causée par des valeurs de contraintes normales excessives en traction.

## 5.5 V&V des problèmes de fissuration

Dans les sections précédentes, on a considéré les procédures de V&V de FIDAM 3D pour les problèmes élastiques. Dans cette section, on considère quelques problèmes de fissuration pour vérifier et valider le FIDAM 3D lors d'analyses non linéaires. La fissuration des problèmes de vérification et validation est modélisée dans ABAQUS standard à l'aide (1) d'éléments contacts cohésifs (contact de surface) pour les reprises de bétonnage et (2) d'éléments solides élastiques 3D (C3D8) pour les corps des ouvrages en béton. On utilise l'approche classique de calcul de stabilité qui fait l'hypothèse que les fissures apparaissent seulement le long des joints de reprises de bétonnage, les éléments solides 3D sont donc des éléments élastiques. Les éléments de contacts cohésifs sont des éléments non linéaires « *contact cohesive behavior* » insérer entre deux blocs en béton. Ce type de contact est défini par des propriétés d'interaction de surfaces pour modéliser l'initiation et la propagation de la fissure. Ces éléments sont type de « zero-length » ayant les paramètres suivants : (1) un comportement linéaire élastique de traction-séparation; (2) un critère d'initiation des dommages en considérant le mode I de rupture; (3) les lois constitutives d'évolution des dommages.

### Comportement linéaire élastique de traction-séparation

Le modèle de traction-séparation disponible dans ABAQUS suppose un comportement élastique initialement linéaire suivi de l'initiation et de l'évolution des dommages. Le comportement élastique est écrit en termes d'une matrice constitutive élastique qui relie les contraintes normales et de cisaillement aux déplacements relatifs normaux et de cisaillement à travers l'interface.

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{sn} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{tn} & K_{ts} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \\ \delta_t \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} \quad (5.8)$$

Le vecteur des contraintes de traction nominales,  $\mathbf{t}$ , se compose de trois composantes:  $t_n$ ,  $t_s$ ,  $t_t$ , qui représentent respectivement la direction normale et les deux directions tangentialles de cisaillement. Les déplacements relatifs correspondantes sont désignés par  $\delta_n$ ,  $\delta_s$ , et  $\delta_t$ . Le comportement élastique peut alors s'écrire selon l'équation (5.8).

Dans ce projet, le modèle de traction-séparation est le plus simple avec les termes de rigidité normal et tangentiel non couplés. Pour l'interaction béton – béton, on propose d'utiliser les valeurs par

défaut d'ABAQUS des coefficients de pénalité pour modéliser le comportement traction-séparation. Ces valeurs  $K_{nn}$ ,  $K_{ss}$   $K_{tt}$  qui sont les valeurs de défauts proposées dans ABAQUS ou sont égales respectivement 32 GPa/m, 16 GPa/m et 16 GPa/m.

### Critère d'initiation des dommages

Il y a deux types de critère d'initiation des dommages dans le modèle du comportement cohésif d'ABAQUS pour les points de contact : (1) la contrainte normale maximale en traction ou (2) le déplacement relatif maximal. Ce projet utilise la valeur de la contrainte normale en traction comme le critère de l'initiation des dommages. Cette valeur est la résistance à la traction du joint,  $f_t$ .

### Comportement linéaire élastique de traction-séparation

Pour les éléments contacts cohésifs, ABAQUS présente deux modèles de comportement de traction-séparation : (1) élasto-fragile (déplacement maximum  $\delta_{cr}=\delta_u$ , Fig. 5.29b); (2) avec adoucissement en traction (énergie de fracture ( $G_f$ ), Fig 5.29 a). Dans ce projet, le comportement du joint est considéré comme un matériau quasi fragile (chapitre 3) (Figure 5.29b). Le comportement en cisaillement est toujours élastique car la mode de rupture considérée est le mode I et il n'y a pas de coefficient de friction et de cohésion tangentiel.

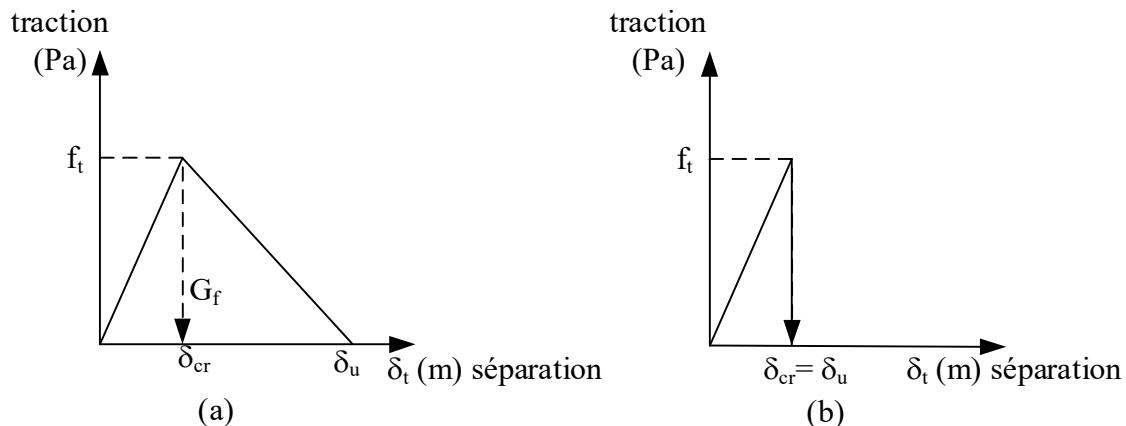


Figure 5.29 Comportement typique linéaire élastique de traction-séparation, (a) avec adoucissement en tension, (b) élasto-fragile.

### 5.5.1 Problème No.5 : Pilier rectangulaire élancé - fissuration

Premièrement, on considère un pilier rectangulaire ayant une section élancée avec un ratio H/B de 3.5/1.5 pour L = 10. La géométrie et les cas de charges sont présentés à la Figure 5.32. Le premier cas est la charge unidirectionnelle, P-M-V avec P = -1000 kN et Vx = 150 kN. La capacité de résistance à la traction du béton est fixée à 75 kPa. L'analyse est effectuée par FIDAM 14 DOFS, 18 DOFS, CADAM 3D et ABAQUS.

Les indicateurs de performance sont présentés à la Figure 5.32 et au Tableau 5.16. Les écarts de calcul entre les modèles FIDAM 3D, CADAM 3D et ABAQUS sont très petits. Pour ce pilier, l'influence des effets secondaires de cisaillement est négligeable. La distribution des contraintes normales est très similaire pour les trois modèles. Il y a une différence dans la zone proche de la pointe de fissure pour la distribution des contraintes de cisaillement en raison de la concentration de contraintes à cet endroit. Dans la partie non fissurée, la distribution des contraintes de cisaillement est très similaire entre FIDAM 3D 18 DOFs et ABAQUS. Donc, FIDAM 3D est bien adapté au problème de piliers ayant des sections rectangulaires, élancées susceptibles de fissurer.

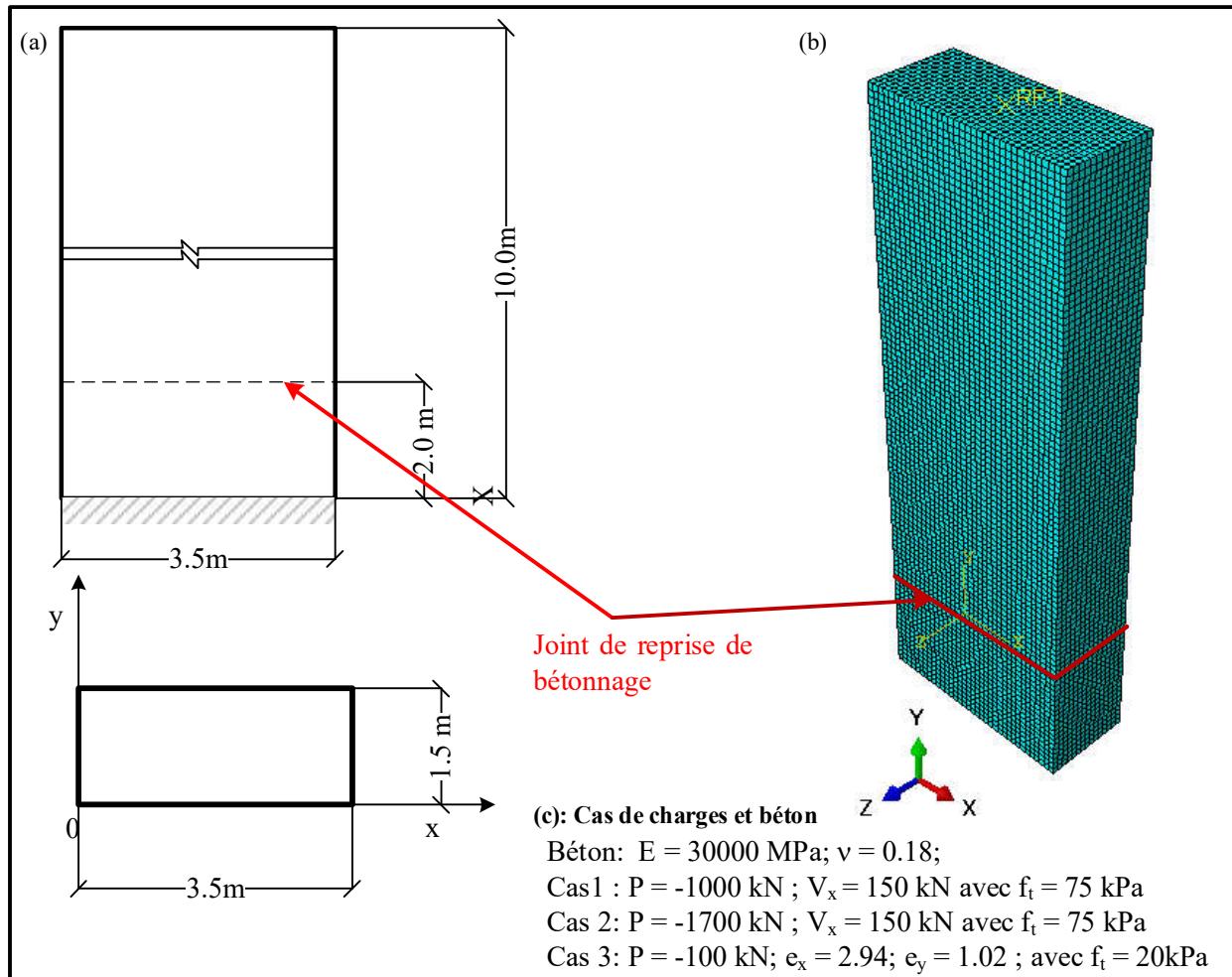


Figure 5.30 Pilier rectangulaire élancée fissuré : (a) Géométries ; (b) Modèle en ABAQUS ; (c) Cas de charges et propriétés du béton

Tableau 5.16 : Évaluation des indicateurs de performance à la section  $L_s = 2\text{m}$

Indicateurs de performance	FIDAM 3D 18 DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 14 DOFs & CADAM 3D (2)	(2)/(3)	ABAQUS
Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	2.81	1.00	2.78	0.99	2.81
Longueur de fissure (m)	1.63	1.00	1.65	1.01	1.63
$\sigma_z \text{ max(kPa)}$	-794.40	1.03	-799.42	1.03	-773.89
Position de la Résultante des forces de l'amont (m)	2.89	-	2.95	-	NA
FSG	6.67	1.00	6.67	1.00	6.67

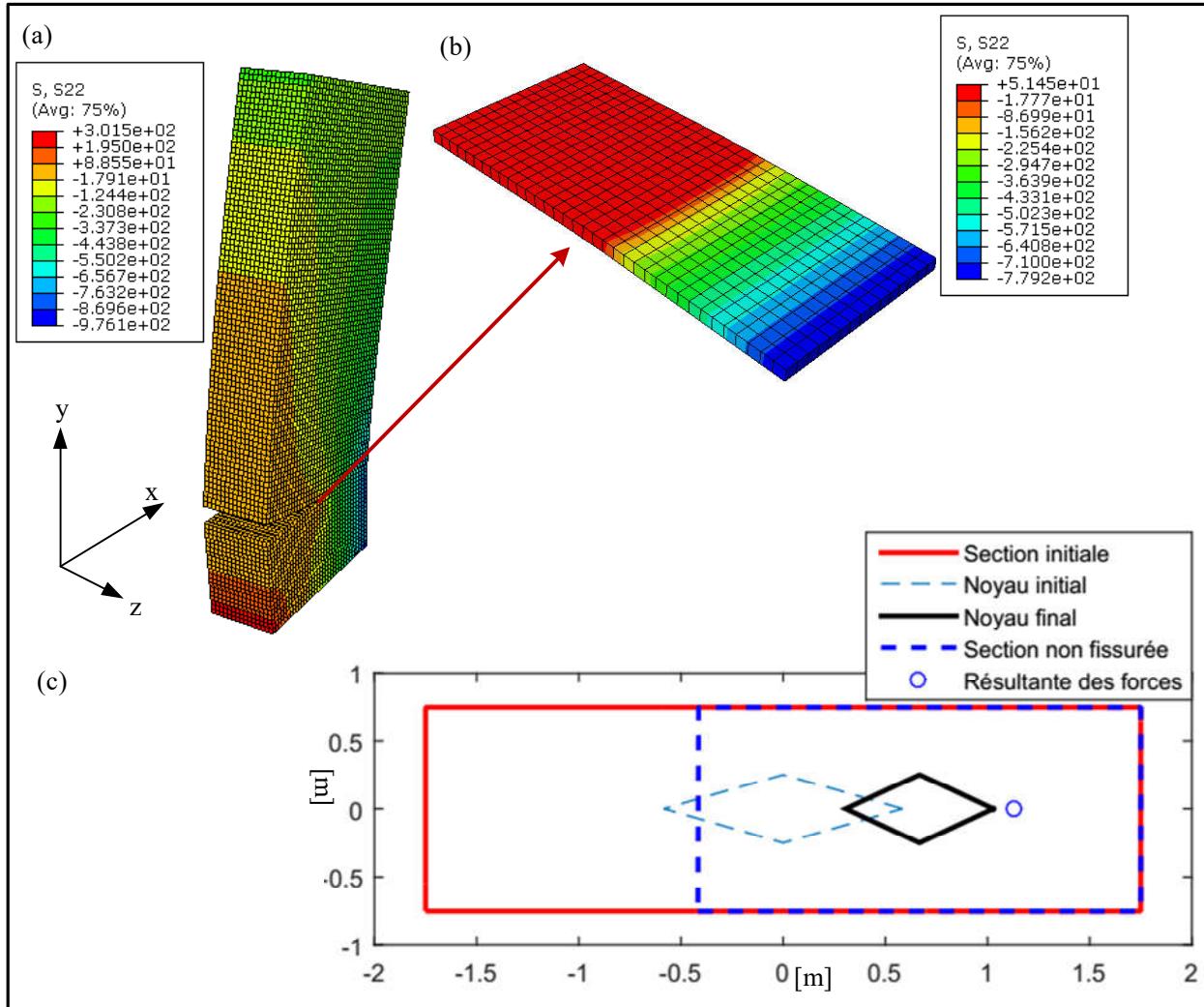


Figure 5.31 Pilier rectangulaire élancé pour le cas 1: (a) Modèle ABAQUS avec éléments de joints ( $S_{22} = \sigma_z$  (kPa)); (b) Distribution des contraintes normales par ABAQUS ; (c) Section du joint par FIDAM 3D.

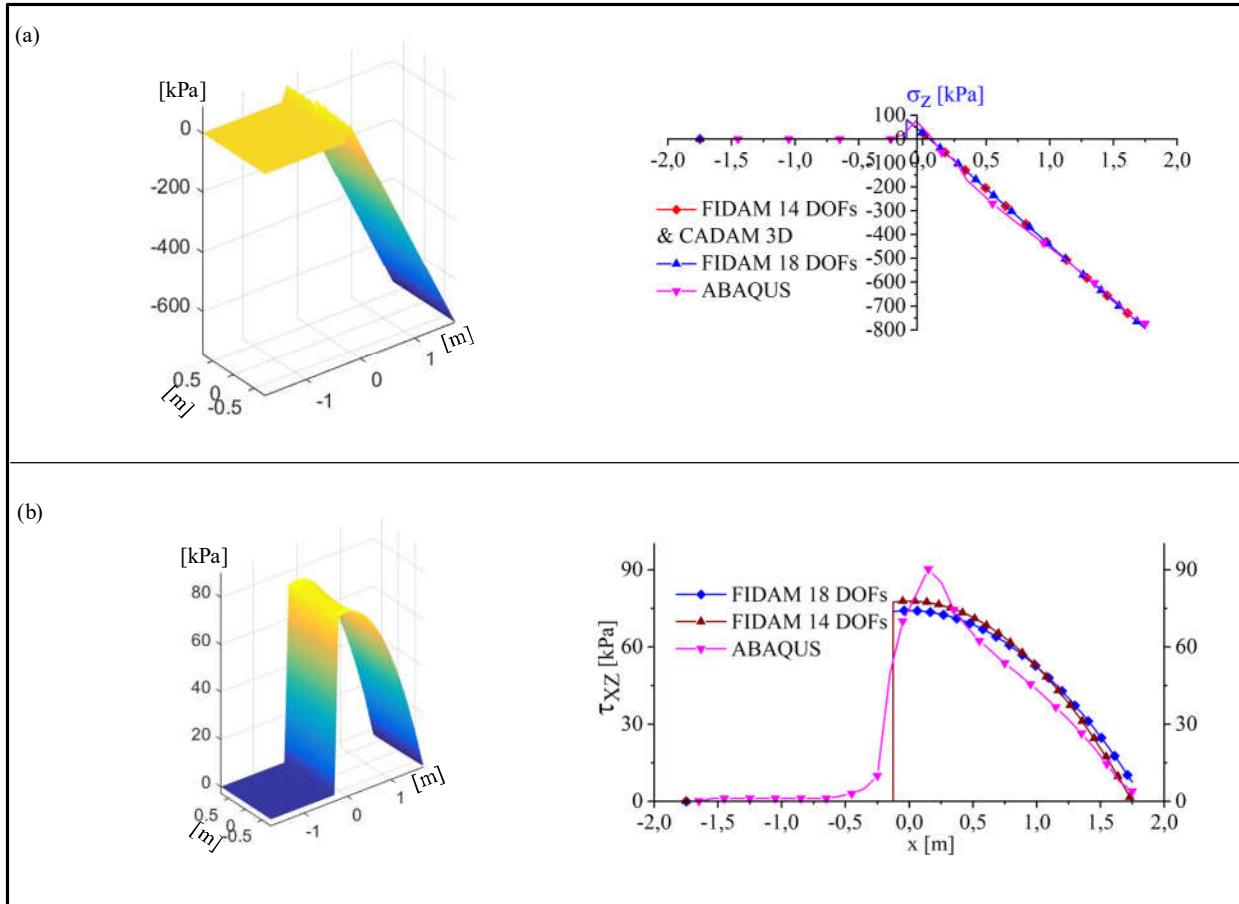


Figure 5.32 Distribution de contraintes pour le cas 1: (a) Contraintes normales ; (b) Contraintes en cisaillement.

#### • Charges amont/aval avec sous-pressions

Dans cet exemple, on valide le problème en incluant les sous-pressions dans les fissures. La géométrie du problème est présentée à la Figure 5.30 avec la hauteur d'eau en amont de 8 m ( $H_a = 8$  m); la hauteur de l'eau en aval est égale à zéro. À la hauteur de la fissure la pression est de 6m d'eau (58.9 kPa). Les charges appliquées sont la charge axiale,  $P = -1700$  kN et la charge latérale,  $V_x = 150$  kN. Les résultats sont présentés à la Figure 5.33 et au Tableau 5.17

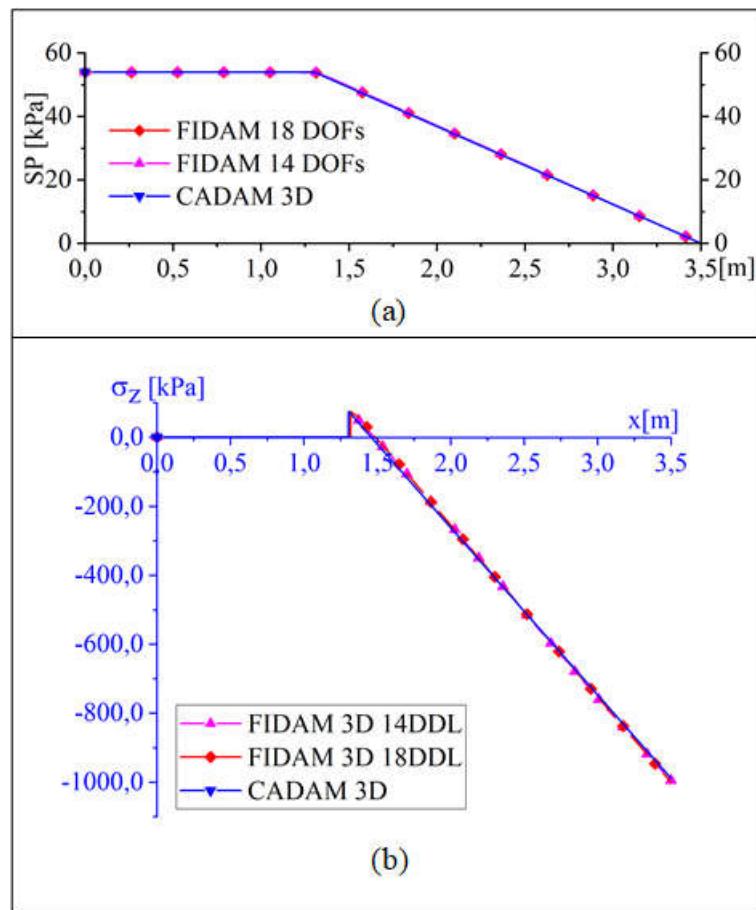


Figure 5.33 Pilier rectangulaire élancé sous l'action de  $P-V_x$ , hydrostatique et sous-pressions : (a) Distribution des sous-pressions pour la section fissurée; (b) Distribution des contraintes normales

Tableau 5.17 : Évaluation des critères de performances de la section au joint ( $L_s = 2.0\text{m}$ )

Critères	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 14DOFs (2)	(2)/(3)	CADAM 3D (3)
Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	3.27	0.99	3.29	1.00	3.29
$\sigma_z$ max (kPa)	74.83	1.00	74.61	0.99	75.00
$\sigma_z$ min (kPa)	-995.29	1.01	-1000.90	1.01	-989.53
Longueur de fissure (m)	1.32	1.01	1.31	1.00	1.31

### Cas 3 P-M-M

Dans cet exemple, on considère le pilier du cas 1 avec une charge axiale en compression et excentrée afin de vérifier et valider le modèle FIDAM 3D pour des charges biaxiales. Il y a deux cas de matériaux considérés au joint: (i) la résistance à la traction du joint est nulle ( $f_t = 0$ ); (ii)

celle-ci est égale à 20 kPa ( $f_t = 20$  kPa). Le pilier est discrétré par 10 éléments fibres de 1 mètre. Les joints de reprises du bétonnage sont situés à partir de niveau 1m jusqu'à 9 m. Les résultats sont comparés au Tableau 5.18 avec l'analyse sectionnelle de Stefan et Léger (2008) qui ont utilisé une extension de la méthode de gravité afin d'analyser une section rectangulaire sous l'action de la flexion composée. Les écarts de calcul entre les deux méthodes sont environs 1% de différence. Donc, FIDAM 3D est bien adapté aux problèmes de fissuration de piliers élancés sous l'action PMM.

Tableau 5.18 : Évaluation des critères de performances de la section de joint ( $L_s = 2.0\text{m}$ )

Cas	Critères	FIDAM 3D 18DOFS (1)	(1) / (3)	FIDAM 3D 14DOFS (2)	(2) / (3)	Stefan et Léger (2008) (3)
$f_t = 20$ (kPa)	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	3.00	1.00	3.00	1.00	2.99
	$\sigma_z \text{ max}$ (kPa)	19.99	1.00	19.99	1.00	20.04
	$\sigma_z \text{ min}$ (kPa)	-124.56	0.99	-124.56	0.99	-125.22
$f_t = 0$	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	2.06	0.99	2.06	0.99	2.07
	$\sigma_z \text{ min}$ (kPa)	-138.34	1.00	-138.34	1.00	-138.34

### 5.5.2 Problème No.6 : pilier rectangulaire profond et fissuration

On considère un pilier rectangulaire profond avec fissuration afin de vérifier et valider le modèle FIDAM 3D pour les sections profondes. La géométrie de ce pilier est présentée à la Figure 5.38a. La résistance à la traction du joint est de 75 kPa. Ce pilier est aussi modélisé à l'aide du logiciel ABAQUS par 34 560 éléments solides 3D. Au niveau du joint, on utilise des éléments contacts cohésifs (Figure 5.38b). La charge appliquée dans la direction amont/aval est  $P = -3500$  kN et  $V_x = 3200$  kN. Le modèle FIDAM 3D discrétré le pilier par 4 éléments fibres 3D ayant 45 DOFs. Ce pilier est aussi modélisé par CADAM 3D afin de vérifier la solution de FIDAM 3D.

La durée de calcul du modèle ABAQUS est de quatre heures (240 minutes) par rapport FIDAM 3D qui a pris 10 minutes avec 7 itérations de calcul non linéaires. Les résultats sont résumés au Tableau 5.19 pour les indicateurs de performance. Selon ces résultats, les modèles de CADAM 3D et FIDAM 14 DOFs ne présentent pas de fissuration au niveau du joint considéré. Au contraire, les modèles FIDAM 18 DOFs et ABAQUS détecte la fissuration du joint.

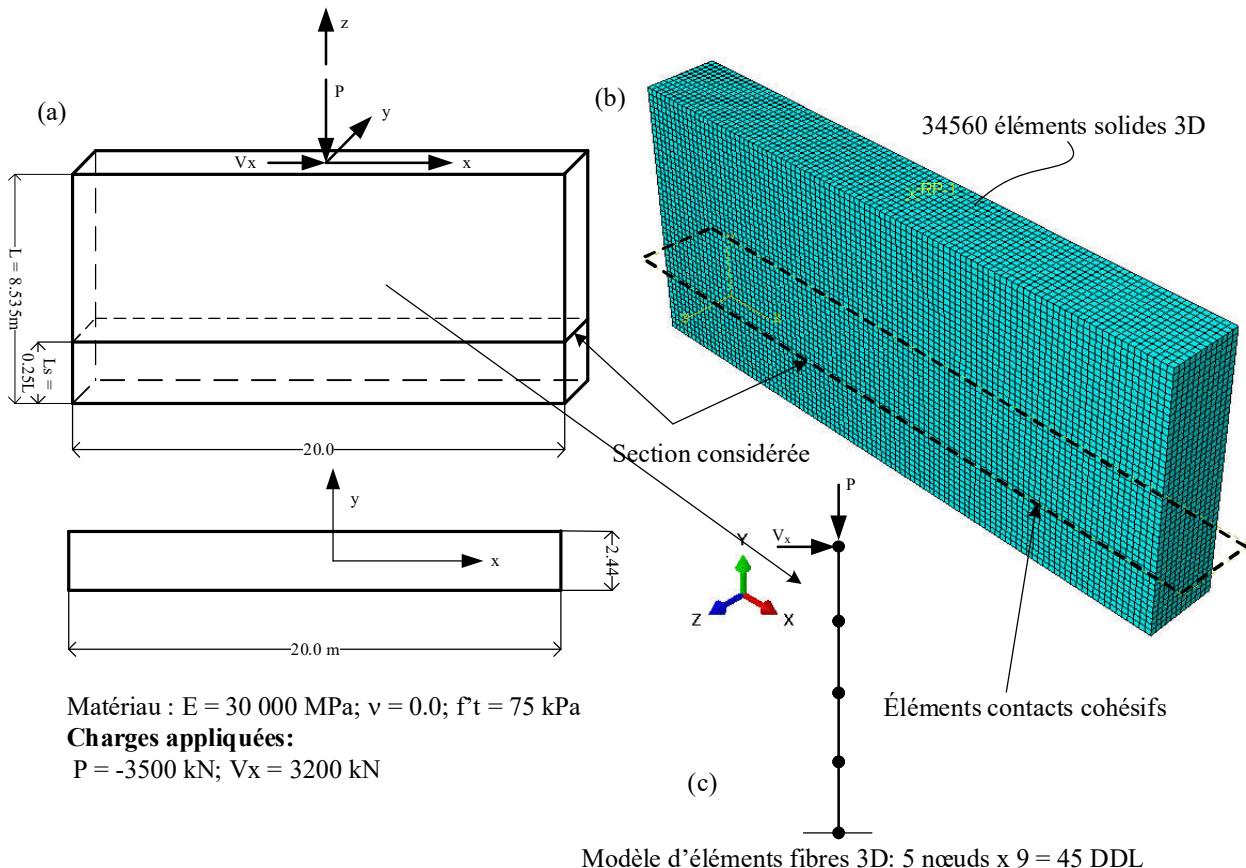


Figure 5.34 Pilier rectangulaire profond sous l'action de  $P-V_x$ : (a) Géométries et matériaux; (b) Modèle en ABAQUS ; (c) Discréétisation pour FIDAM 3D.

Tableau 5.19 : Évaluation de des critères de performances de la section de joint ( $L_s = 0.25L$ )

Indicateurs de performance	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	CADAM 3D et FIDAM 3D 14DOFs (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-251.98	1.03	-197.65	0.81	-245.12
$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	76.80	0.91	54.20	0.64	84.11
$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	90.52	1.10	97.36	1.18	82.32
Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	39.77	0.99	48.80	1.22	40.02
Longueur de fissure	3.70	1.03	0.00	0.00	3.60
FSG	1.09	1.00	1.09	1.00	1.09

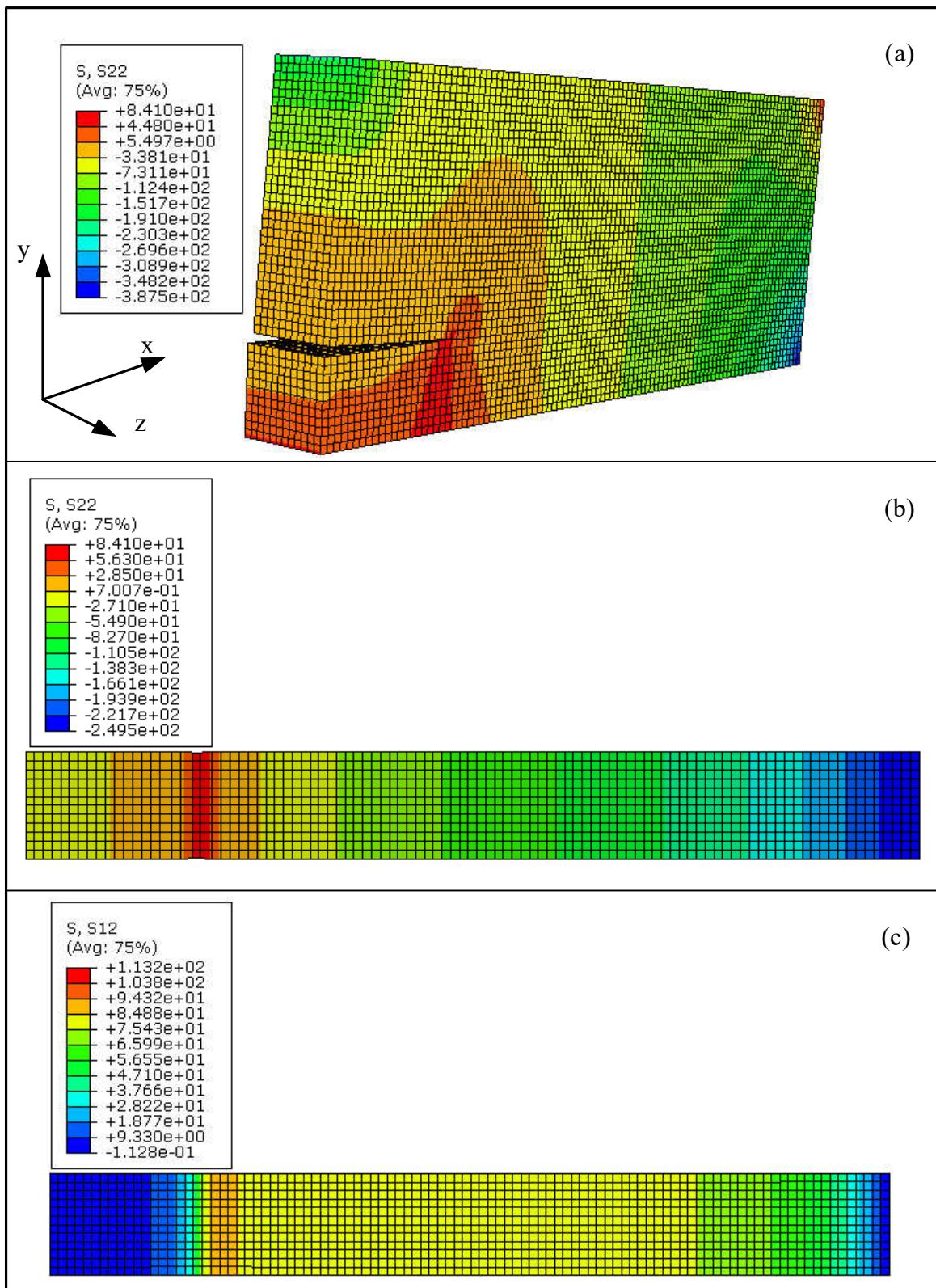


Figure 5.35 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales (Pa) ; (c) Distribution des contraintes de cisaillement (Pa).

FIDAM 14 DOFs et CADAM 3D ne considèrent pas de déformation causée par le gauchissement due à la force latérale sur une section profonde. Donc, les valeurs des contraintes normales en tension de FIDAM 14 DOFs et CADAM 3D sont plus petites que FIDAM 18 DOFs et ABAQUS. Les résultats de ABAQUS sont résumés à la Figure 5.35 avec la fissure qui est apparue au niveau du joint de reprise du bétonnage. Il y a quelques points de concentration de contraintes à la pointe de la fissure. Les résultats de ABAQUS et FIDAM 3D 18 DOFs, indiquent que la distribution des contraintes normales des deux solutions est très similaire (Figure 5.36a). La distribution des contraintes de cisaillement FIDAM 18 DOFs a bien suivi la solution ABAQUS sauf pour quelques points de concentration de contraintes et les points aux conditions frontières (Figure 5.36b). Mais surtout, FIDAM 3D 18 DOFs présente une solution en accord avec ABAQUS pour un pilier rectangulaire profond et fissuré.

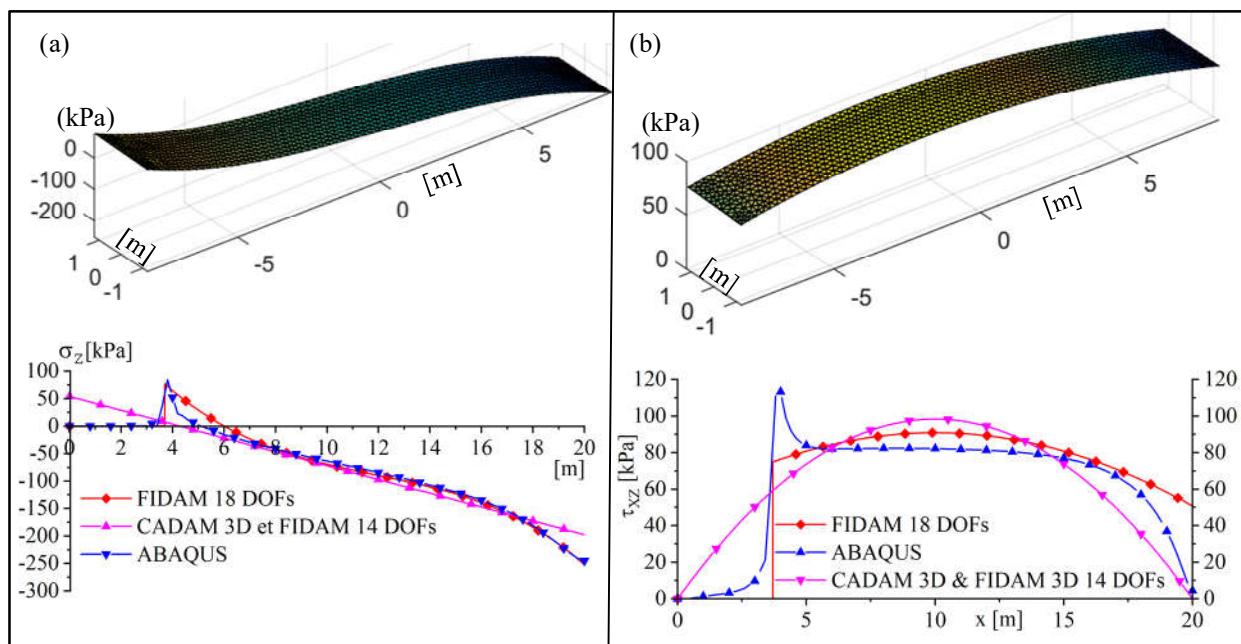


Figure 5.36 Distribution de contraintes: (a) Contrainte normale; (b) Contrainte de cisaillement.

### Vérification des sous-pressions pour d'un pilier d'évacuateur de crue

Dans cette section, on considère la distribution des sous-pressions pour un pilier d'évacuateur de crue. On considère un pilier avec la géométrie de la Figure 5.34. La position des vannes est de 2.785 m à partir de l'amont. La hauteur d'eau en amont est de 8.535m; celle en aval est zéro. L'algorithme de génération des sous-pressions a été présenté au chapitre 3. On obtient la

distribution des sous-pressions pour un pilier avec vannes à la Figure 5.37 pour la section  $L_s = 0.25L = 2.1334\text{m}$ .

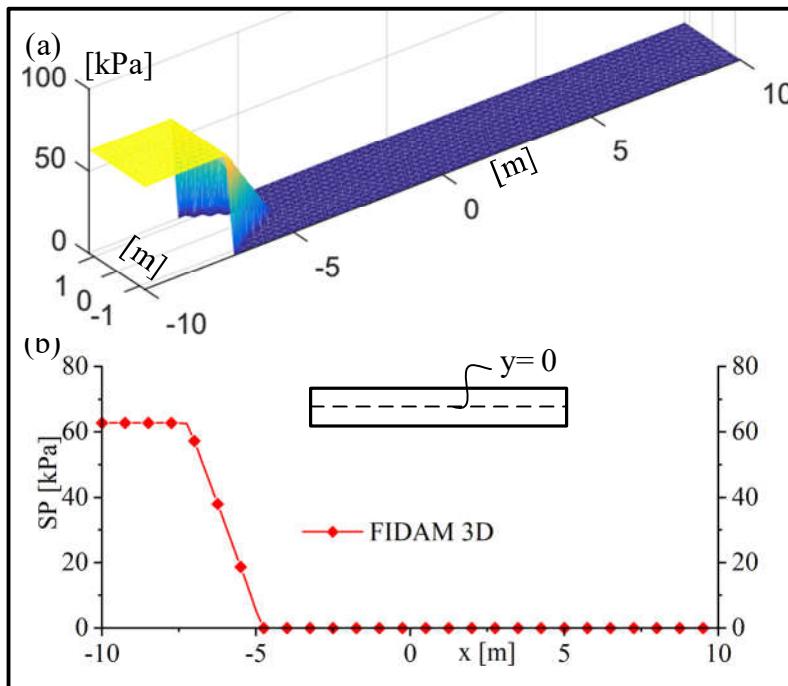


Figure 5.37 Distribution des sous-pressions pour un pilier : (a) Distribution 3D; (b) Sous-pressions à la ligne  $y = 0$

Pour vérifier et valider le modèle de sous-pression proposé dans la zone de transition proche de la vanne, on construit un modèle pour ce pilier dans CADAM 3D afin d'étudier la résultante des forces et les contraintes normales causées par les sous-pressions et la pression hydrostatique. Les résultats sont résumés au

Tableau 5.20 pour trois sections  $L_s = 0.25L$ ;  $0.5L$  et  $0.1L$ . Pour la résultante des forces, la valeur de FIDAM 3D est très proche de celle de CADAM 3D avec un écart maximal de 2%. De plus, la valeur maximale des contraintes normales à  $L_s = 0.25L$  de FIDAM 3D est très proche de la valeur de CADAM 3D. Ce phénomène est dû à la valeur du moment de flexion secondaire qui est presque à zéro à la position  $L_s = 0.25L$  (Figure 5.38). Il y a de grandes différences pour les contraintes normales maximales aux sections  $L_s = 0.5L$  et  $L_s = 0.1L$ . Les effets secondaires de cisaillement causés par les pressions hydrostatiques sont considérés dans FIDAM3D.

Tableau 5.20 : Résumés de résultats de sous-pressions pour un pilier d'évacuateur de crue

Résultats			FIDAM 3D (1)	(1)/(2)	CADAM 3D (2)
Ls = 0.25L	Résultantes de forces	Axiale (kN)	615.90	0.99	619.82
		Moment en flexion (kN.m)	-9536.20	0.98	-9758.97
		Cisaillement (kN)	2533.00	1.00	2532.23
	Contraintes normales	$\sigma_{\max}$ (kPa)	72.44	1.00	72.699
		$\sigma_{\min}$ (kPa)	-47.20	1.00	-47.29
Ls = 0.5L	Résultantes de forces	Axiale (kN)	391.87	0.99	394.35
		Moment en flexion (kN.m)	-4295.71	0.99	-4333.71
		Cisaillement (kN)	1033.00	1.01	1025.01
	Contraintes normales	$\sigma_{\max}$ (kPa)	29.80	0.86	34.72
		$\sigma_{\min}$ (kPa)	-13.74	0.74	-18.56
Ls = 0.1L	Résultantes de forces	Axiale (kN)	750.30	0.99	755.05
		Moment en flexion (kN.m)	-14878.20	1.00	-14807.23
		Cisaillement (kN)	-3544.00	-0.94	3757.66
	Contraintes normales	$\sigma_{\max}$ (kPa)	153.86	1.44	106.51
		$\sigma_{\min}$ (kPa)	-123.11	1.63	-75.56

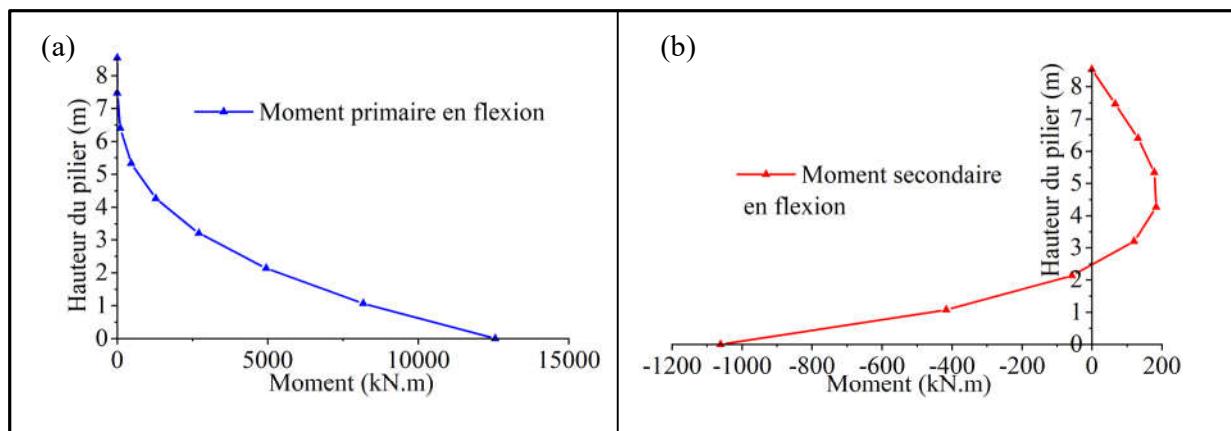


Figure 5.38 Diagramme des moments en flexion : (a) Moment primaire en flexion ; (b) Moment secondaire en flexion

### 5.5.3 Problème No.7 : pilier profond, géométrie variable et fissuration

Le dernier problème de V&V est un pilier profond ayant une géométrie variable pouvant se fissurer. La géométrie du problème est définie à la Figure 5.39a. La charge appliquée est la force l'axiale  $P = -3500$  kN et la force latérale  $V_x = 3200$  kN et le coefficient de Poisson,  $\nu = 0$  et  $\nu = 0.2$ . Les résultats de FIDAM3D sont comparés avec le modèle ABAQUS ayant 34 560 éléments solides 3D et des éléments cohésifs pour le joint béton-béton.

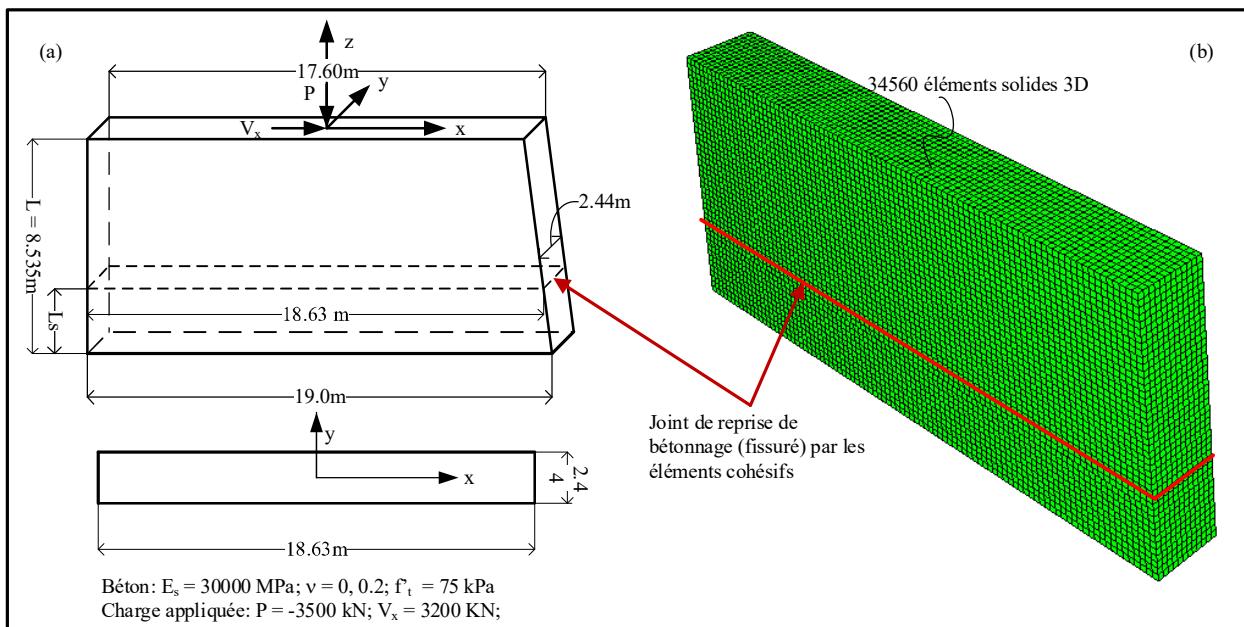


Figure 5.39 Pilier rectangulaire élancé sous l'action de  $P-V_x$ : (a) Géométries et matériaux; (b) Modèle en ABAQUS avec les éléments contacts cohésifs

FIDAM 3D-18DOFs a effectué le calcul en environ 10 minutes. Le modèle ABAQUS a pris 4 heures pour terminer les analyses non linéaires. Les résultats de ABAQUS sont présentés à la Figure 5.40 pour le modèle fissurée, la distribution de contrainte normale et la distribution de contrainte de cisaillement à la section du joint de reprise du bétonnage.

De plus, FIDAM 3D-18DOFs permet de présenter directement les indicateurs de performance par rapport au modèle ABAQUS qui a besoin de post-traitement afin de calculer les indicateurs de performance du Tableau 5.21. Ce tableau montre que l'écart maximal de FIDAM 3D 18DOFs et ABAQUS pour la valeur maximale des contraintes normales en compression est de 3% pour  $\nu = 0$  et de 4% pour  $\nu = 0.2$ . L'aire non fissurée de la section est pratiquement la même valeur avec un écart maximal de 3% pour les deux cas. Par ailleurs, les autres indicateurs de performance, comme

la longueur de fissure, et le facteur de sécurité au glissement sont calculés avec 3% de différence maximale. Les distributions des contraintes normales et des contraintes de cisaillement sont présentées à la Figure 5.41 pour  $\nu = 0$  et à la Figure 5.43 pour  $\nu = 0.2$  (FIDAM 18 DOFs, 14DOFs et ABAQUS). La distribution des contraintes normales de FIDAM 18 DOFs est non linéaire et très proche de la solution ABAQUS. Les solutions de FIDAM 14 DOFs ainsi que CADAM 3D ne sont pas précise en raison de la section profonde. La distribution des contraintes de cisaillement de FIDAM 3D-18DOFs est très proche de la solution ABAQUS avec des écarts dans la zone de concentration de contraintes.

Tableau 5.21 : Évaluation des critères de performances de la section au joint ( $L_s = 2.254\text{m}$ )

Cas	Indicateurs de performance	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	CADAM 3D et FIDAM 3D 14DOFs	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$\nu = 0$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-269.04	1.01	-214.83	0.80	-267.04
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	75.35	0.93	61.08	0.76	80.68
	$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	101.76	1.09	97.36	1.04	93.27
	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	36.07	1.01	45.46	1.27	35.79
	L de fissure (m)	3.85	0.97	0.00	0.00	3.96
	FSG	1.09	1.00	1.09	1.00	1.09
$\nu = 0.2$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-276.08	1.02	-214.83	0.80	-269.63
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	77.64	0.88	61.08	0.69	87.91
	$\tau_{XZ\max}(\text{kPa})$	95.25	1.06	97.36	1.08	90.05
	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	34.67	0.98	45.46	1.29	35.30
	L de fissure (m)	4.42	1.06	0.00	0.00	4.16
	FSG	1.09	1.00	1.09	1.00	1.09

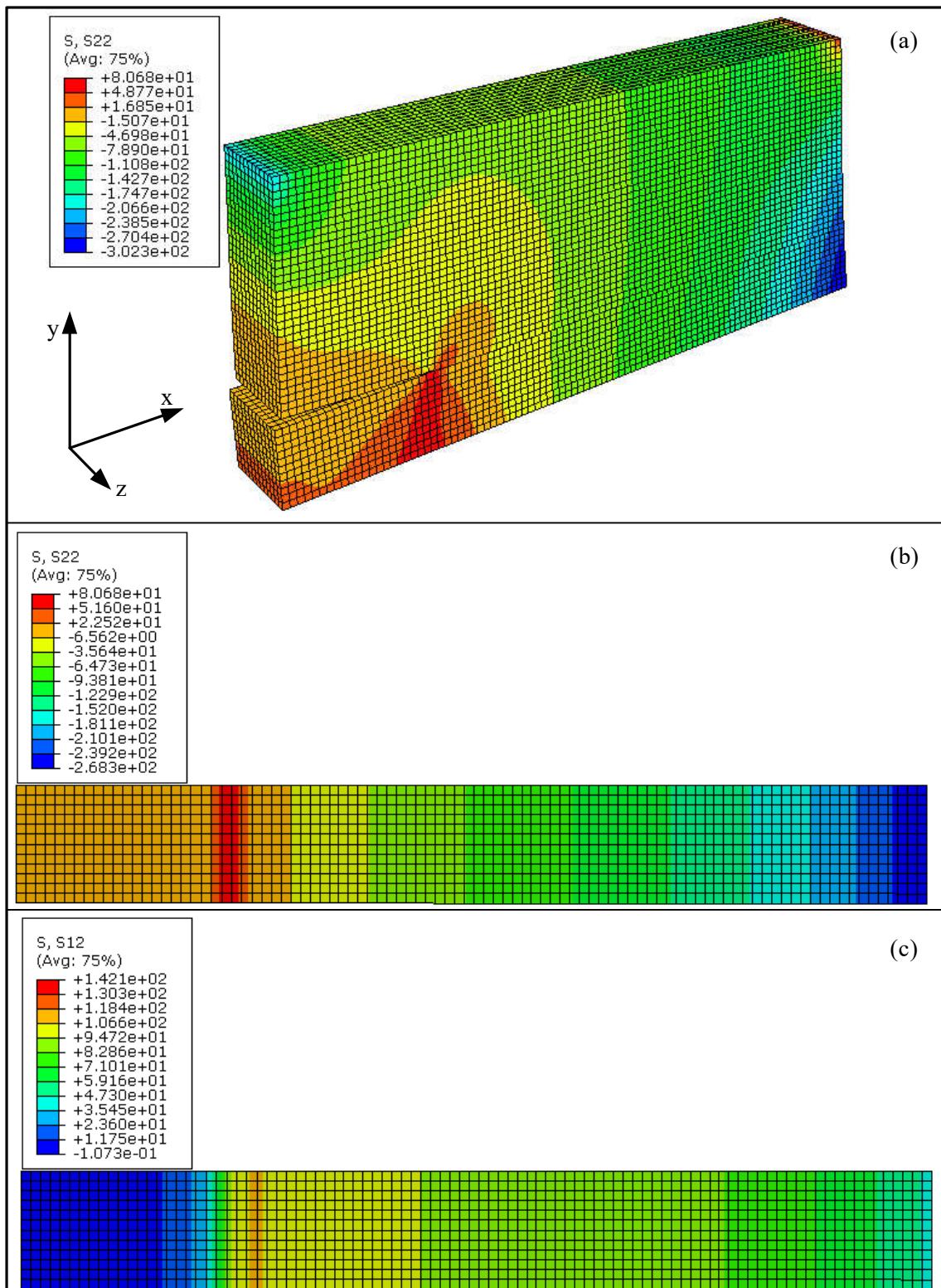


Figure 5.40 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS ayant un joint de reprise du bétonnage ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec  $\nu = 0$  : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales ( $S_{22} = \sigma_z(\text{Pa})$ ) ; (c) Distribution des contraintes en cisaillement ( $S_{12} = \tau_{xz} (\text{Pa})$ ).

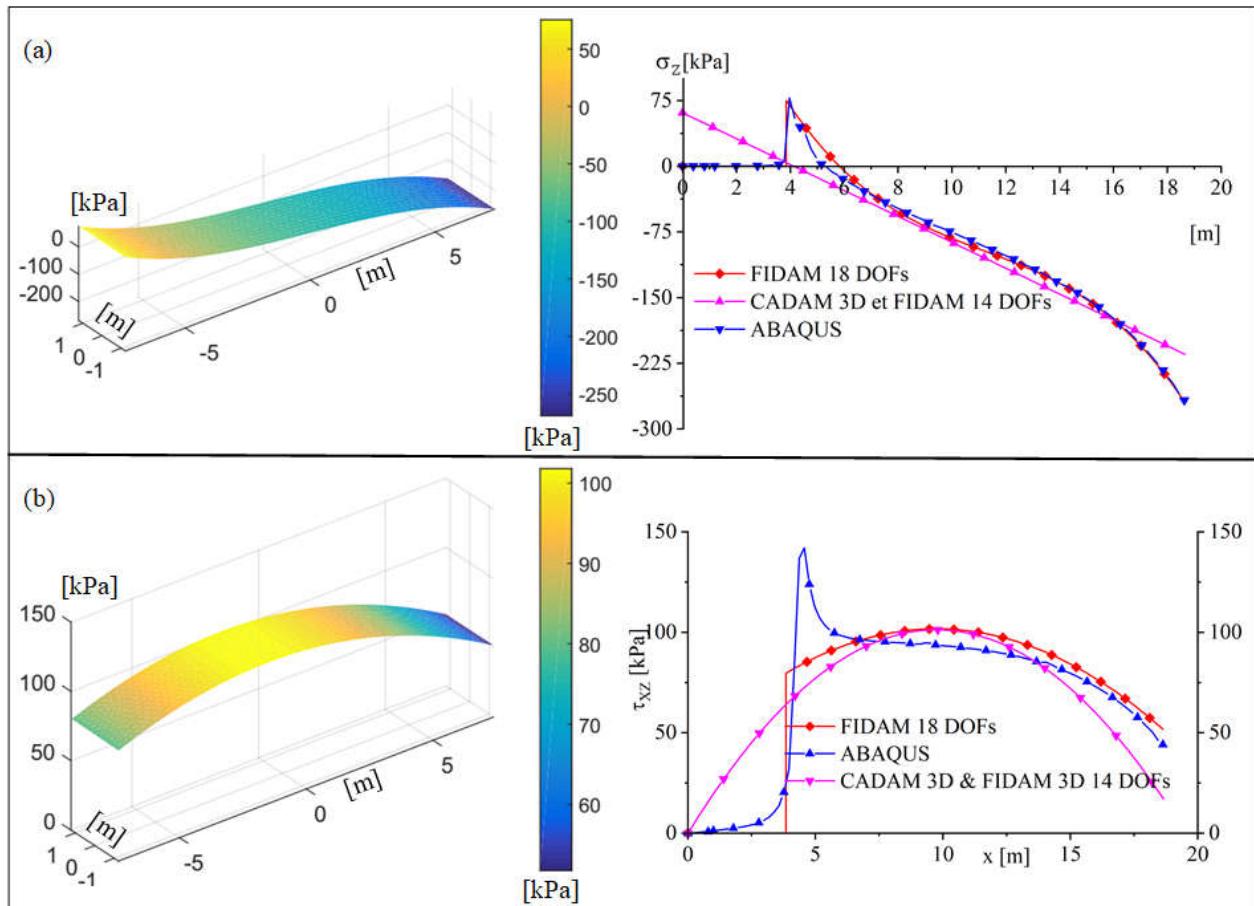


Figure 5.41 Distribution des contraintes : (a) Contraintes normales; (b) Contraintes de cisaillement pour la section du joint ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec  $\nu = 0$ .

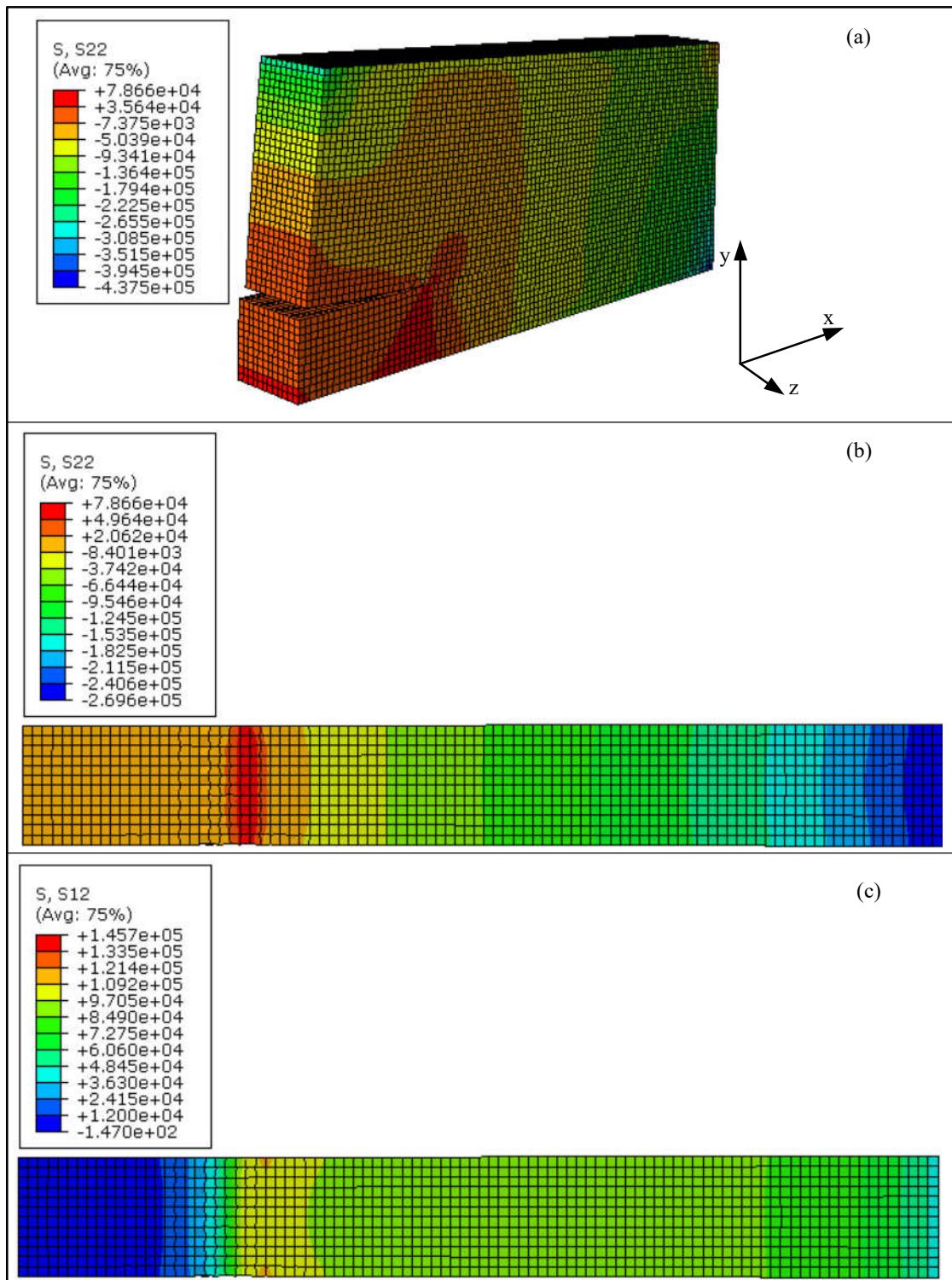


Figure 5.42 Pilier rectangulaire profond par ABAQUS ayant un joint de reprise du bétonnage ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec  $\nu = 0.2$  : (a) Modèle fissuré ; (b) Distribution des contraintes normales ( $S_{22} = \sigma_z$  (Pa)) ; (c) Distribution des contraintes en cisaillement ( $S_{12} = \tau_{xz}$  (Pa)).

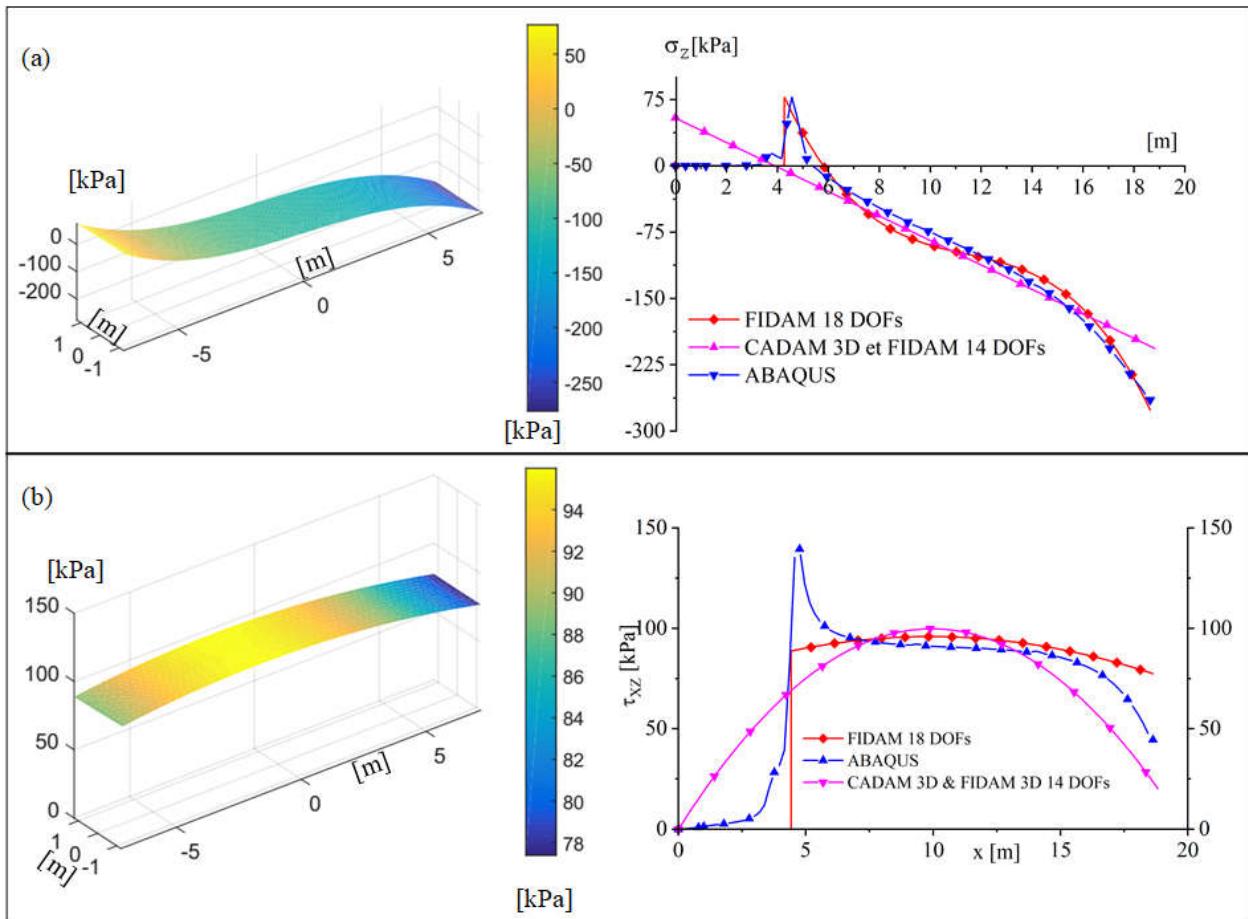


Figure 5.43 Distribution de contraintes : (a) Contrainte normale; (b) Contrainte de cisaillement pour la section du joint ( $L_s = 2.254\text{m}$ ) avec  $\nu = 0.2$

## 5.6 Synthèses et Conclusions

Dans ce chapitre, on a solutionné des problèmes de V&V à l'aide de FIDAM 3D afin de calculer les indicateurs de performance de piliers. Les problèmes de V&V ont été développés (i) de géométries sectionnelles simples à complexes, (ii) de matériaux élastiques à fissurés et (iii) de piliers élancés aux piliers profonds. Le calcul a été effectué par (i) FIDAM 14 DOFs qui est basé sur la théorie de poutre de Timoshenko incluant la déformation au gauchissement due à la torsion et (ii) FIDAM 18 DOFs qui inclut les déformations de gauchissement dues au cisaillement.

La première étape de V&V a été l'analyse sectionnelle afin de vérifier et valider les propriétés sectionnelles. Trois exemples ont été effectués: (i) section rectangulaire, (ii) section non symétrique (section trapézoïdale) et (iii) une section typique d'un pilier d'évacuateur de crue. Le calcul de FIDAM3D a été également effectué par le logiciel mathématique Flex PDE, et le logiciel

commercial d'analyse sectionnelle Prosec (Prokon). Les résultats ont aussi été comparés et vérifiés par rapport aux solutions disponibles dans la littérature (Dikaros et Sapountzakis (2014) et Pilkey (2002)). Cette étape a montré que FIDAM 3D est bien adapté à l'analyse sectionnelle de sections de géométrie quelconques avec des valeurs précises pour les propriétés (comme  $A$  ( $m^2$ ),  $I_x(m^4)$ ,  $I_y(m^4)$ ,  $I_{xy}(m^4)$ ,  $J(m^4)$ ,  $A^P_x(m^2)$ ,  $A^P_{xy}(m^2)$ ,  $A^P_y(m^2)$ ,  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_{yy}$ ,  $C_w(m^6)$ ,  $x_G(m)$ ,  $y_G(m)$ ,  $x_S(m)$ ,  $y_S(m)$ ,  $I_{\psi\psi x}(m^6)$ ,  $I_{\psi\psi y}(m^6)$ ,  $A^S_x(m^2)$ ,  $A^S_y(m^2)$ ).

La deuxième étape de V&V a été la considération de structures élastiques. Le calcul a été effectué à partir de structures élancées aux structures profondes. Les résultats obtenus de FIDAM 3D-14DOFs, 18DOFs ont été comparés (i) aux solutions analytiques, (ii) aux solutions publiées de la littérature, aux logiciels (iii) ABAQUS et (iv) CADAM 3D. Par ailleurs, les effets secondaires de cisaillement causés par le chargement hydrostatique ont été considérés et évalués en comparant FIDAM3D-18DOFs avec la solution de la théorie d'élasticité et ABAQUS. Les résultats obtenus ont montré que FIDAM 3D 18DOFs peut bien analyser des structures sous le chargement hydrostatique. De plus, FIDAM 3D 18DOFs peut améliorer la solution de la distribution des contraintes normales pour les sections proches de l'encastrement ce qui est une limitation de la théorie d'élasticité pour ce problème. Pour les exemples ayant des géométries simples, les écarts maximaux de calcul sont moins de 6% pour les contraintes normales dues à la torsion et moins de 3% pour les contraintes normales dues à la flexion composée. On a aussi analysé un pilier existant d'évacuateur de crue élastique afin de valider et vérifier FIDAM 3D-18DOFs pour un problème complexe. Les résultats ont été comparés à ABAQUS (avec des éléments solides 3D) et Stefan et Léger (2011). Les résultats obtenus ont montré que FIDAM 3D-18DOFs est capables de résoudre adéquatement des problèmes structuraux élastiques allant de géométries simples aux complexes.

La dernière étape de V&V a été l'analyse non linéaire des structures en béton en présence de souspressions. Le calcul a aussi été effectués sur des structures élancées et profondes. Dans les cas simples, FIDAM 3D-18DOFs a été validé par le calcul des indicateurs de performance pour des structures quelconques (i.e. l'aire fissurée, la longueur de fissure, la contrainte normale maximale, le facteur de sécurité au glissement et la position de la résultante des forces). Les résultats obtenus sont très proches de la solution CADAM 3D (pour les problèmes élancés) et de la solution ABAQUS pour les sections élancées et profondes. Les indicateurs de performance sont calculés beaucoup plus rapidement par FIDAM-18DOFs que par ABAQUS pour les problèmes complexes avec un écart maximal de  $\pm 3\%$ . Donc, FIDAM 3D est une alternative performante par rapport à la

MEF non linéaire 3D pour les problèmes de fissuration de poutres profondes en présence de pressions hydrostatiques et de sous-pressions.

Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent d'utiliser FIDAM 3D avec confiance pour évaluer la stabilité structurale 3D des piliers d'évacuateur de crue en béton non armé au Chapitre 6 – études de cas. FIDAM 3D-18DOFs est un moyen de calcul qui est plus précis que CADAM 3D et moins complexe à mettre en œuvre qu'ABAQUS.

## CHAPITRE 6 ÉTUDE DE CAS - PILIER EXISTANT

### 6.1 Introduction

Ce chapitre présente l'étude de cas d'un pilier d'évacuateur de crues existant en béton non armé. Il s'agit d'un des piliers de l'aménagement Coteau 1 qui se situe dans la région de Beauharnois au Québec. Le logiciel FIDAM3D est utilisé afin d'évaluer la stabilité structurale 3D d'un pilier profond soumis aux sollicitations PMM-VVT et la présence des sous-pressions selon les développements des chapitres 3 et 4. Les sollicitations 3D sont calculées selon les lignes directrices de CDA (2013). Les résultats obtenus sont les indicateurs de performance comme (i) le facteur de sécurité au glissement (FSG), (ii) la position de la résultante des forces, (iii) l'aire fissurée, (iv) la valeur maximale des contraintes normales en compression.

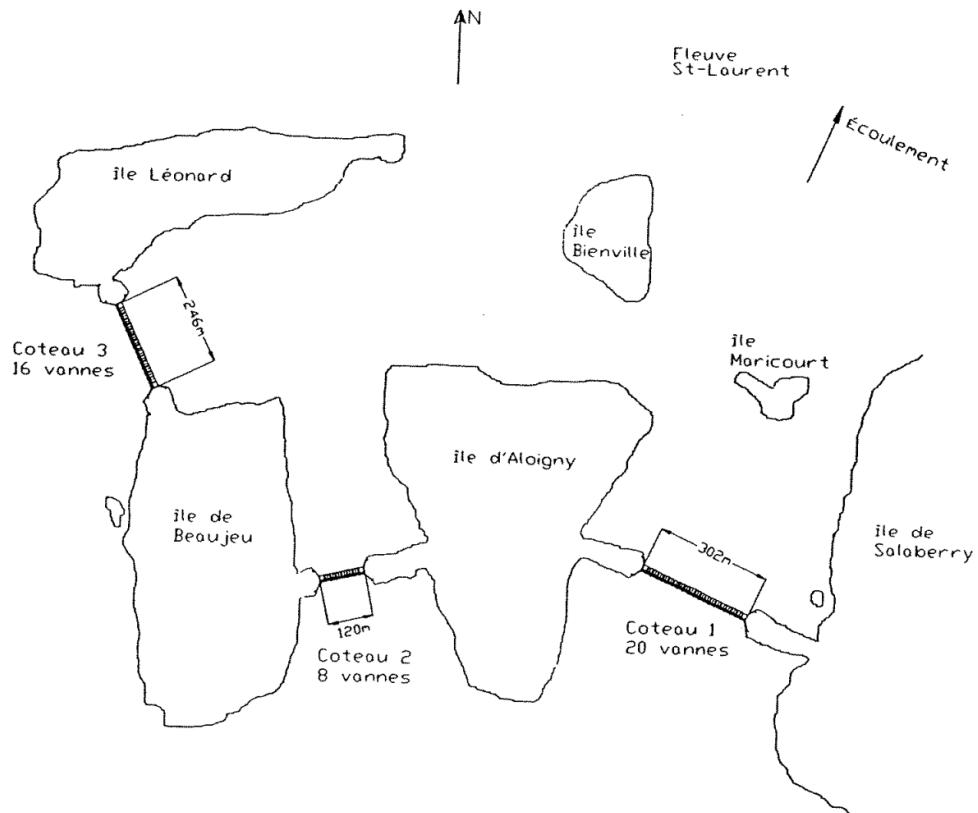


Figure 6.1 Plan général de l'aménagement de Coteau 1,2 et 3 (Miron, 1997)

La brève description du pilier typique de l'évacuateur de crues de Coteau 1, est essentiellement tirée des informations présentées dans les rapports de maîtrise et de stage de Miron (1997), Bourgeois (1999) et Ducharme (2001).

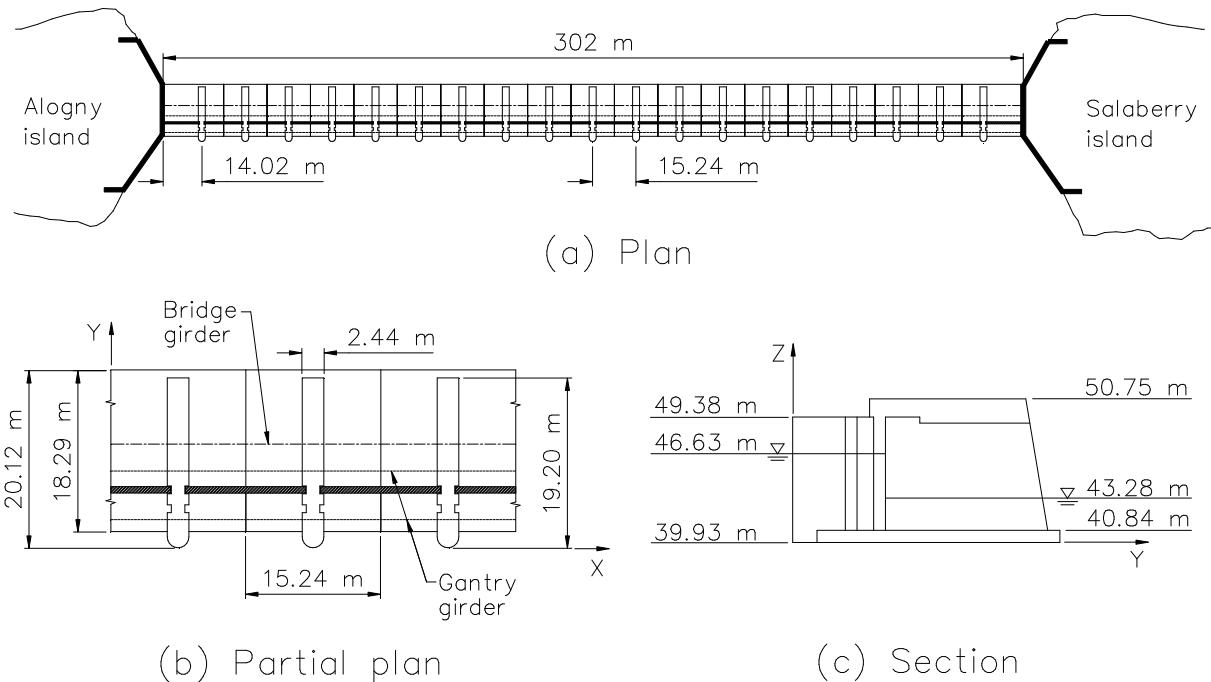


Figure 6.2 Plan général de l'aménagement de Coteau 1 : (a) plan des piliers; (b) plan partiel ; (c) Évaluation d'un pilier (Miron, 1997)

## 6.2 Description de l'ouvrage hydraulique étudié

L'ouvrage compensateur Coteau 1 est un ouvrage d'un ensemble de trois ouvrages (les autres : Coteau 2, et 3) pour retenir les eaux du lac Saint – François au bief amont et contrôler les débits du fleuve Saint Laurent pour les centrales hydroélectriques situés en aval de l'ouvrage (Les Cèdres, Beauharnois). Le plan de l'aménagement de ces ouvrages est présenté à la Figure 6.1. L'ouvrage Coteau 1 a été construit en 1933 et est situé entre l'île de Salaberry (Grande-Île) et l'île d'Aloigny (Thorn). Dans cet ouvrage, il y a 20 vannes qui sont posées sur 19 piliers. Les détails et l'historique des réparations sont indiquées dans les rapports de Miron (1997) et Ducharme (2001).

### 6.2.1 Géométrie d'un pilier typique étudié

Dans ce projet, on considère le pilier No.12 de l'ouvrage Coteau 1 qui est sélectionné pour l'étude de cas. La Figure 6.3 présente les vues en plan et en élévation du pilier No.12 pour identifier sa

position sur le plan de l'aménagement. Les coupes transversales et l'élévation sont présentées à la Figure 6.4.

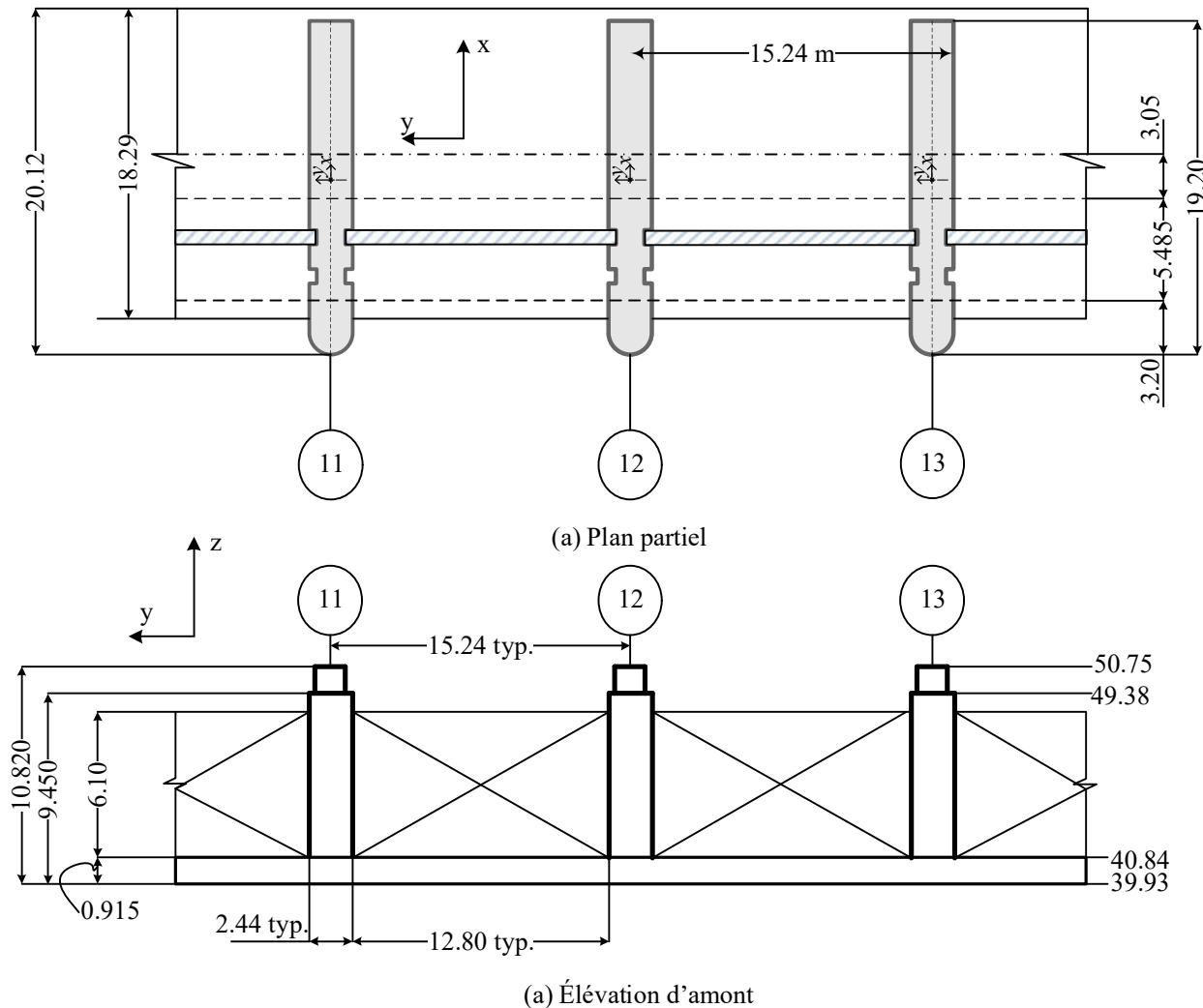


Figure 6.3 Pilier typique étudié No.12: (a) vue en plan; (b) vue en élévation (adapté de Miron 1997; Ducharme 2001)

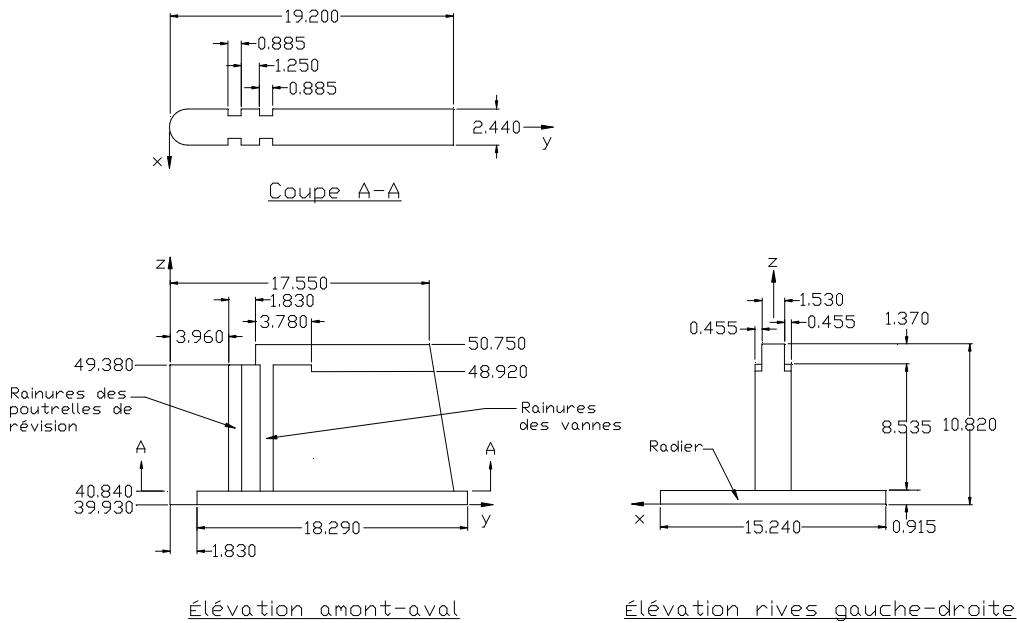


Figure 6.4 Coupes transversales et élévations pour les caractéristiques géométriques du pilier No.12 (adaptées de Miron 1997; Ducharme 2001)

## 6.2.2 Matériaux et chargement à considérer

Les propriétés du béton utilisées sont résumées au Tableau 6.1. Le pilier est constitué de levées de béton entre coupées par des joints de reprises de bétonnage qui sont plus faibles que la masse de béton. La résistance à la traction des joints est considérée pour deux cas : (1) la valeur est nulle (valeur conservatrice); et (2) 0.482 MPa (70 psi), ce qui correspond à une valeur représentative des aménagements de USBR (Dolen, 2011) qui ont été construits pendant la période de 1905 à 1933 pour des barrages affectés par la réaction alcalis-granulats (RAG) (l'ouvrage Coteau 1 a été construit en 1933 et est affecté par la RAG). Par ailleurs, l'angle de friction est sélectionné à  $45^\circ$  et la cohésion est prise égale à 0.482 MPa (70 psi) ce qui correspond aux valeurs moyennes pour les barrages construits de 1905 à 1993 lorsque les joints sont liés (Dolen 2011).

Tableau 6.1 : Propriétés mécaniques du béton et des joints de reprises de bétonnage.

<b>Propriétés mécaniques du béton du pilier</b>	<b>Valeurs</b>
Module d'élasticité, $E_b$ [MPa]	32000
Coefficient de Poisson, $\nu$	0.2
Masse volumique, $\rho_b$ (kg/m <sup>3</sup> )	2400
Résistance en compression $f_c$ [MPa]	30
Angle de friction ( $\phi$ ) (Dolen, 2011)	45°
Cohésion [MPa] (Dolen, 2011)	0 <sup>(1)</sup> 0.482
Résistance en tension, $f_t$ [MPa] (Dolen, 2011)	0 0.482

(1) On utilise  $f_t = 1 \text{ kPa} \equiv 0$  (dans le calcul numérique)

### 6.2.2.1 Combinaison de charges

Dans ce projet, le chargement considéré est statique ou statique équivalent. Les charges appliquées sont les poids propres du pilier, les pressions hydrostatiques, les sous-pressions, l'effet de vanne ouverte ou vanne fermée et l'impact de glace. Il y a quatre combinaisons de charges qui sont considérées afin de valider et appliquer le modèle proposé à l'aide du logiciel FIDAM3D pour évaluer la stabilité structurale 3D du pilier étudié. Ces quatre combinaisons de charges sont présentées au Tableau 6.2.

Tableau 6.2 : Combinaison de charges considérées

<b>Changement</b>	<b>Comb. 1 Normale 1</b>	<b>Comb. 2: Normale 2</b>	<b>Comb. 3 Glace</b>	<b>Comb. 4: Glace</b>
Poids propres	x	x	x	x
Hydrostatique	x	x	x	x
Sous-pressions	x	x	x	x
Vannes fermées	x			
Vannes ouvertes			x	
Vanne fermée + ouverte		x		x
Impact de glace			x(frontal)	x (latéral)

### 6.2.2.2 Niveaux de l'eau considérés

Selon le rapport de Miron (1997), les niveaux de l'eau pour l'ouvrage Coteau 1 sont présentés à la Figure 6.5. Les charges hydrostatiques, de sous-pressions et les poussées de vanne sont influencées par les niveaux de l'eau. En amont, les niveaux à retenir sont les suivants :

- niveau maximal d'exploitation en temps de crue : 46.63 m;
- niveau minimal d'exploitation : 46.36 m;
- niveau normal d'exploitation en hiver : 46.63 m.

En aval, les niveaux d'exploitation sont les suivants :

- niveau maximal d'exploitation en temps de crue : 45.05 m;
- niveau minimal d'exploitation : 41.45 m;
- niveau normal d'exploitation en hiver : 43.28 m.

Donc, dans ce projet, on propose d'utiliser les niveaux suivants afin de calculer les charges sur le pilier typique étudié :

- Niveau de l'eau en amont : 46.63 m;
- Niveau de l'eau en aval : 43.28 m;

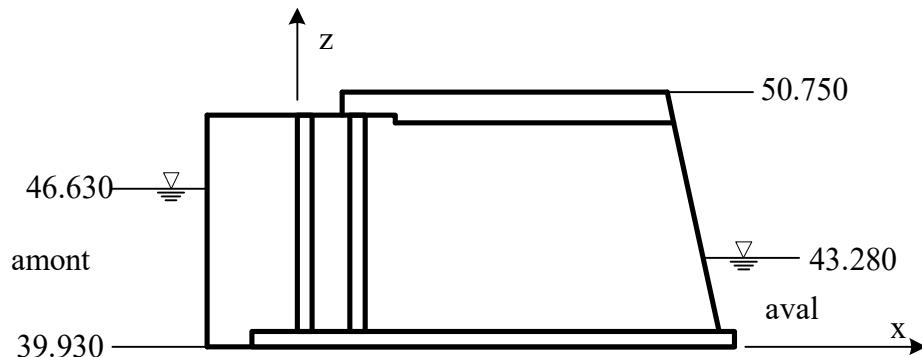


Figure 6.5 Niveaux de l'eau considérés pour les poussées hydrostatiques et sous-pressions

### 6.2.2.3 Chargement de vannes

Les poussées hydrostatiques sur les vannes produisent des charges qui génèrent sur le pilier une charge répartie appliquée à la surface de la rainure. Afin de calculer ces charges, on propose un modèle de plaques qui a des appuis simples pour obtenir les réactions causées par les poussées hydrostatiques des vannes. Le modèle est présenté à la Figure 6.6.

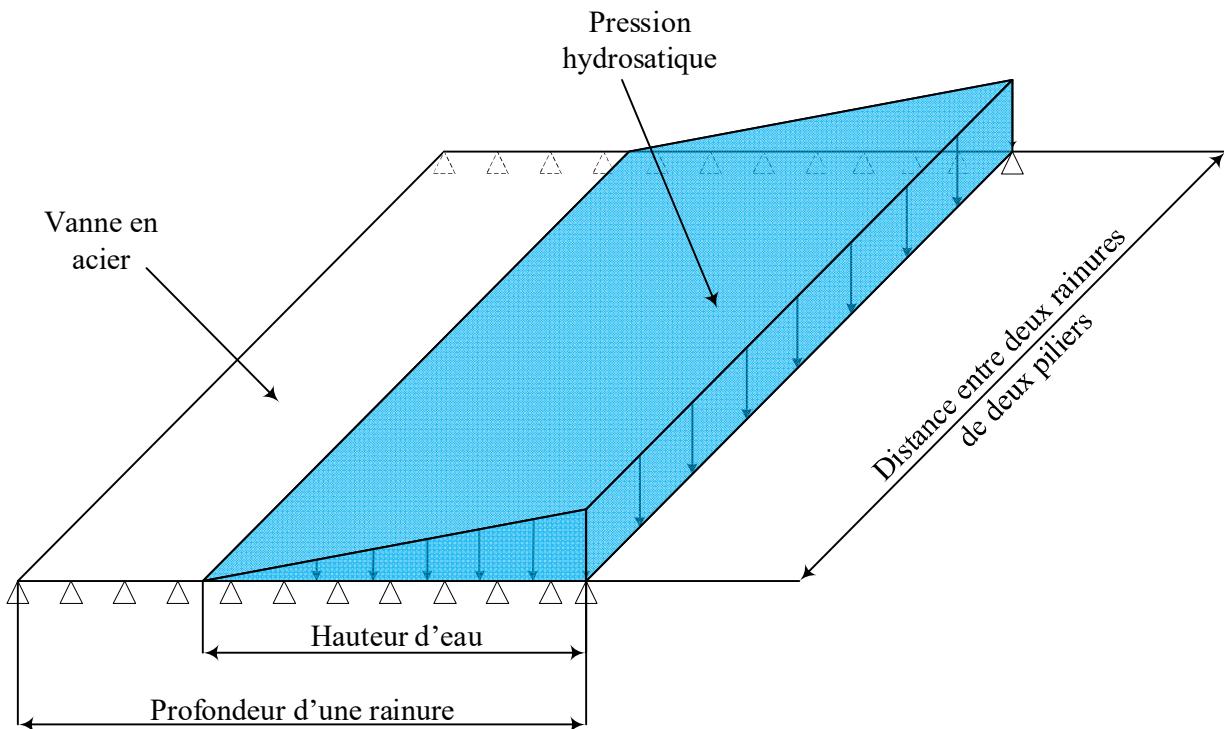


Figure 6.6 Modèle proposé pour calculer la charge de poussée des vannes

La procédure d'application des poussées hydrostatiques des vannes suit les étapes ci-dessous :

1. Modélisation des vannes par éléments finis comme une plaque sur deux séries d'appuis simples (réactions normales seulement et les conditions pour éviter les mouvements de corps rigide et l'effet de Poisson entre les appuis pour les deux côtés),
2. Application des charges réparties triangulaires de pression hydrostatique,
3. Calcul des réactions aux appuis,
4. Applications des réactions (charges hydrostatiques de vannes) aux nœuds des rainures pour le modèle EF ABAQUS.

5. Pour le modèle FIDAM 3D : on applique les réactions calculées avec le torque résultant de l'excentricité entre le centre de cisaillement et la ligne d'action du point d'application à la rainure (pour le cas vanne ouverte).

#### 6.2.2.4 Impact de glace

L'impact de glace est une source importante de sollicitation 3D pour les piliers d'évacuateur de crues surtout au Québec ayant des températures qui sont souvent très basses en hiver. Lors de la fonte des glaces au printemps des blocs flottent et frappent les piliers (Figs 1.2 b, c). L'impact de glace produit souvent des charges dans deux directions (selon le sens du courant et perpendiculaire au sens de courant) qui induisent des efforts selon l'axe faible du pilier et de la torsion. Dans le pilier étudié, l'effet de torsion est considéré avec le gauchissement pour une section profonde.

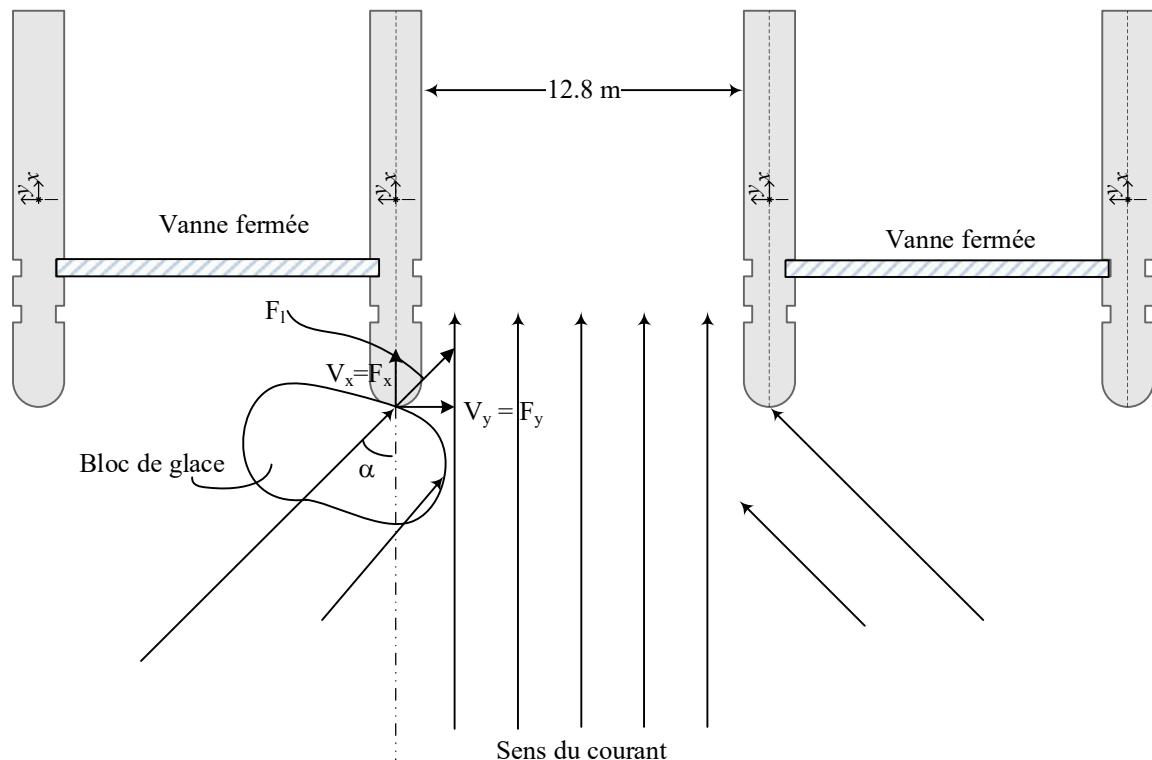


Figure 6.7 : Modèle proposée pour l'impact de glace

Les chargements de l'impact de glace sont calculés en se basant les recommandations de CÉSEC (1990) qui sont été rapportées dans le logiciel CADAM 3D (Leclerc et Léger, 2007). L'impact de glace peut causer deux forces sur le pilier : une force  $F_l$  agissant dans le sens du courant et une force  $F_t$  agissant et force latérale sur le nez du pilier (Figure 6.9).

$$F_l = m \cdot n \cdot h \cdot f_g \cdot B ; \quad F_t = 0.5 \cdot h \cdot f_g \cdot B \cdot \cos \alpha \quad (6.1)$$

Où :

m : coefficient de forme du nez du pilier (voir le Tableau 6.3);

n : coefficient d'inclinaison du pilier (voir le Tableau 6.4);

h : épaisseur de la glace;

$f_g$  : résistance en compression de la glace;

B : largeur du pilier;

$\alpha$  : angle du nez du pilier.

Tableau 6.3 : Coefficient de forme du nez (CÉSEC 1990 – tiré de CADAM 3D)

Demi-angle ( $\alpha$ )	15°	30°	45°	60°	90°
Nez angulaire où Angulaire arrondie	0.42	0.59	0.70	0.79	1
Nez elliptique	0.48	0.66	0.79	0.88	1

Tableau 6.4 : Coefficient d'inclinaison (CÉSEC 1990 – tiré de CADAM 3D)

Demi-angle ( $\alpha$ )	INCLINAISON, n			
	0°	15°	30°	45°
15	1	0.92	0.83	0.77
30	1	0.88	0.76	0.66
45	1	0.85	0.71	0.60
60	1	0.82	0.67	0.55
90	1	0.79	0.63	0.50

Dans ce projet, on considère deux cas d'impact de glace : 1<sup>er</sup> cas pour la seule force longitudinale,  $F_x$ , d'impact de glace causé par un glaçon percutant le pilier; 2<sup>ième</sup> cas pour la combinaison des forces d'impact de glace agissant dans les deux directions  $F_x$ ,  $F_y$  qui correspondent respectivement aux forces  $F_l$  qui suivent le sens de courant. Une série de forces d'impact est calculée au Tableau 6.5 selon divers paramètres. L'épaisseur du glaçon proposé pour calculer les forces d'impact est égale à  $h = 1.0$  m. La température du glaçon est de -5°C sa résistante en compression est de 900 kPa.

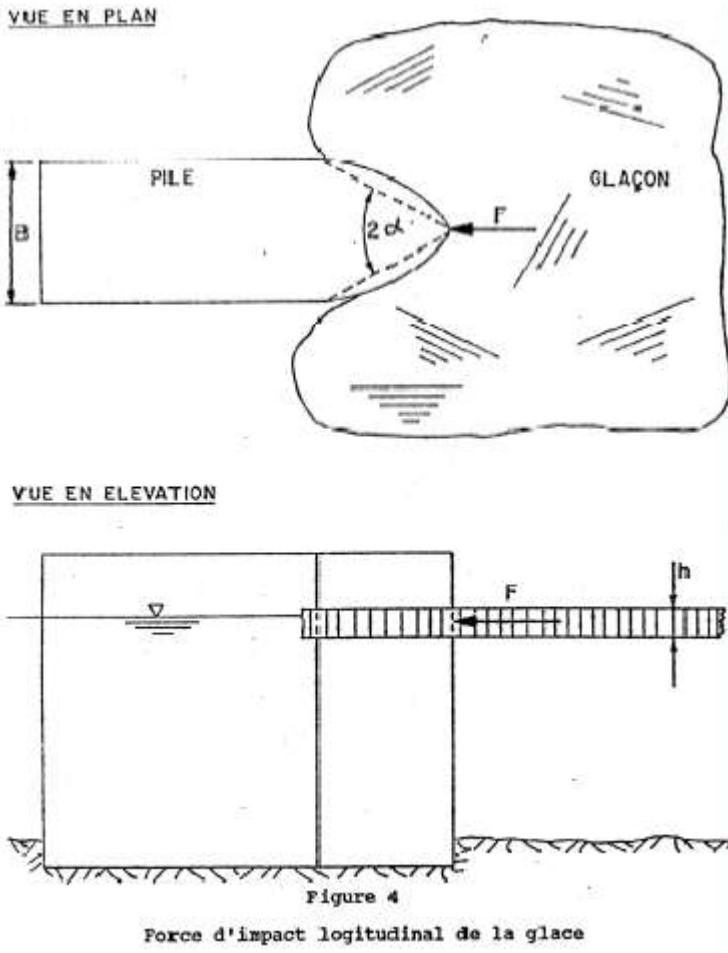


Figure 6.8 Force d'impact longitudinal de la glace (adapté CÉSEC 1990, tirée de Leclerc et Léger 2007)

Tableau 6.5 Calcul de forces d'impact de la glace

$h$ (m)	$T$ ( $^{\circ}$ C)	$f_g$ (kPa)	$m$	$n$	$\alpha$	$F_l$	$V_x$ (kN)	$V_y$ (kN)
1	0	450	0.79	1	0.79	867.42	613.36	613.36
<b>1</b>	<b>-5</b>	<b>900</b>	<b>0.79</b>	<b>1</b>	<b>0.79</b>	<b>1734.84</b>	<b>1226.72</b>	<b>1226.72</b>
1	-10	1100	0.79	1	0.79	2120.36	1499.32	1499.32
1	-15	1200	0.79	1	0.79	2313.12	1635.62	1635.62

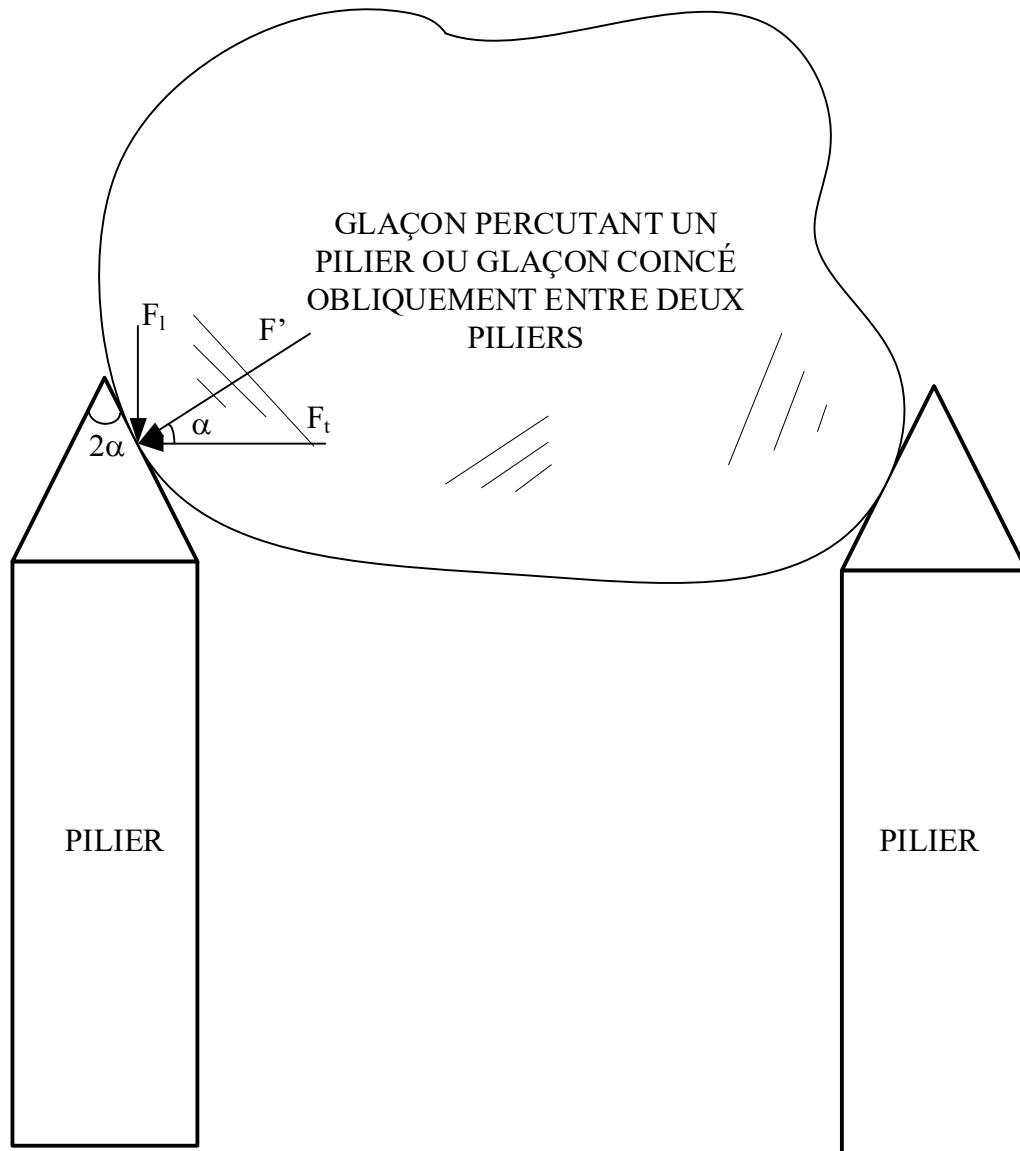


Figure 6.9 Force d'impact transversal de la glace (adapté CÉSEC 1990, tirée de Leclerc et Léger 2007)

### 6.3 Modèle CADAM 3D

Afin de vérifier FIDAM 3D, on a construit un modèle du pilier d'évacuateur de crues dans CADAM 3D (Figure 6.10). Le modèle CADAM 3D est utilisé pour vérifier les réactions et la distribution de contraintes normales de la combinaison 1 en comparaison avec FIDAM 3D et ABAQUS. Les propriétés des matériaux du béton et des joints sont présentées au Tableau 6.1 avec les niveaux d'eau de la Figure 6.5.

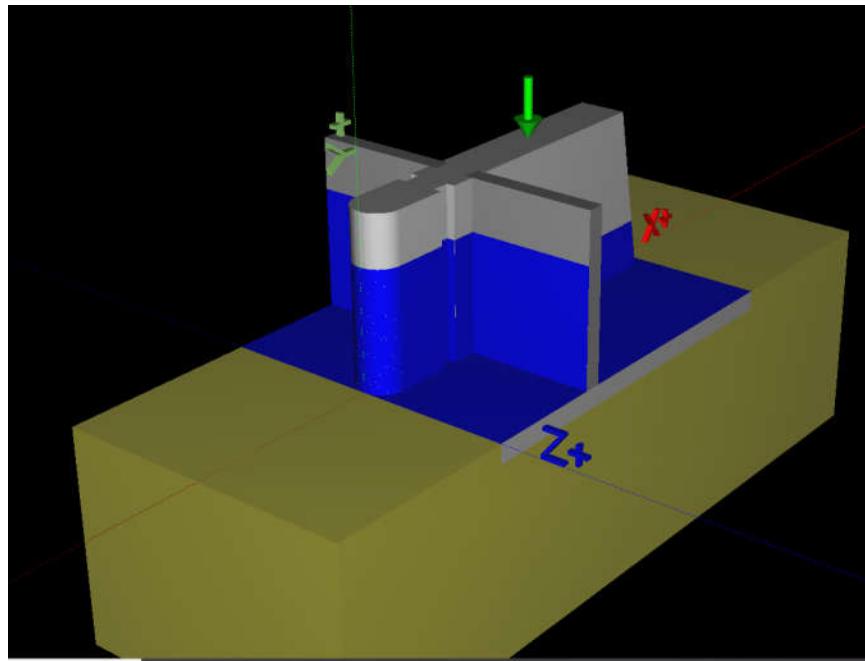


Figure 6.10 Modèle CADAM 3D d'un pilier typique

#### 6.4 Modèle FIDAM 3D

Le modèle proposé est constitué de dix éléments fibre 3D en forme « L » afin de modéliser un pilier d'évacuateur de crues ayant une géométrie variable et 9 joints de reprises du bétonnage (Figure 6.11). Dans chaque élément, il y a deux parties : (i) la partie déformable (élément vertical) qui peut être non linéaire; (ii) l'extension rigide (élément horizontal) qui transfert les efforts internes à l'élément vertical. Afin de bien approcher le comportement structural, l'élément vertical est discréétisé par 5 points de Gauss. Cependant on utilise deux points de Gauss inélastiques très proches des deux extrémités. Les autres de points de Gauss sont toujours élastiques. La formulation d'éléments fibre 3D a été présentée dans le chapitre 3.

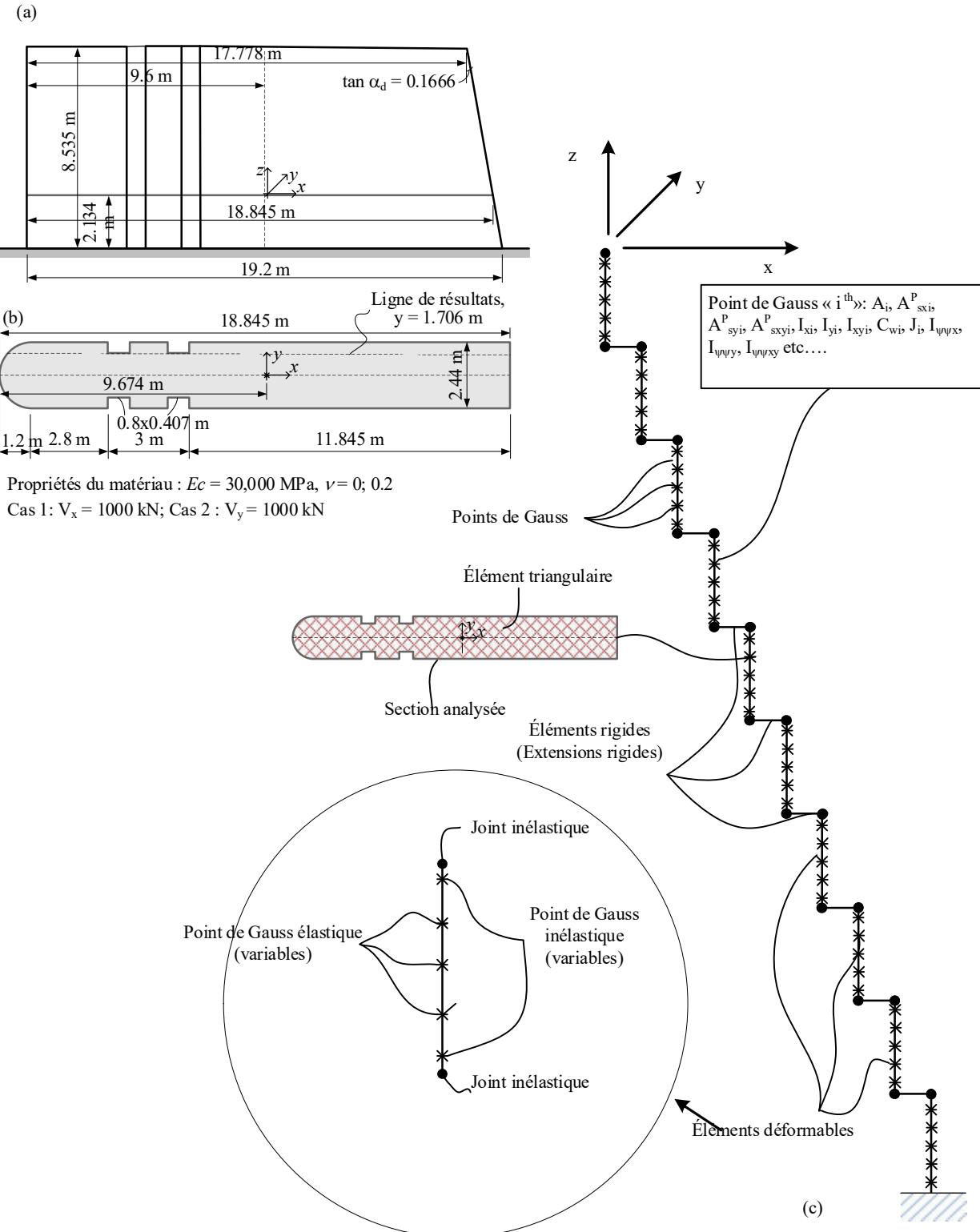


Figure 6.11 Modèle d'un pilier typique par les éléments fibres 3D dans FIDAM 3D (14 ou 18 DDL) : (a) et (b) géométrie du pilier étudié; (c) modèle d'éléments fibres 3D équivalent.

## 6.5 Modèle ABAQUS

Le modèle ABAQUS du pilier est modélisé à l'aide d'éléments solides 3D élastiques pour le béton de masse et de surfaces de contacts cohésives pour les joints de reprises de bétonnage (Figure 6.12). Ce modèle contient 42 416 éléments solides 3D C3D8R ayant une taille de 0.2m. Les surfaces de contact cohésifs sont de même type et propriétés que celles utilisées dans les problèmes de V&V du chapitre 5.

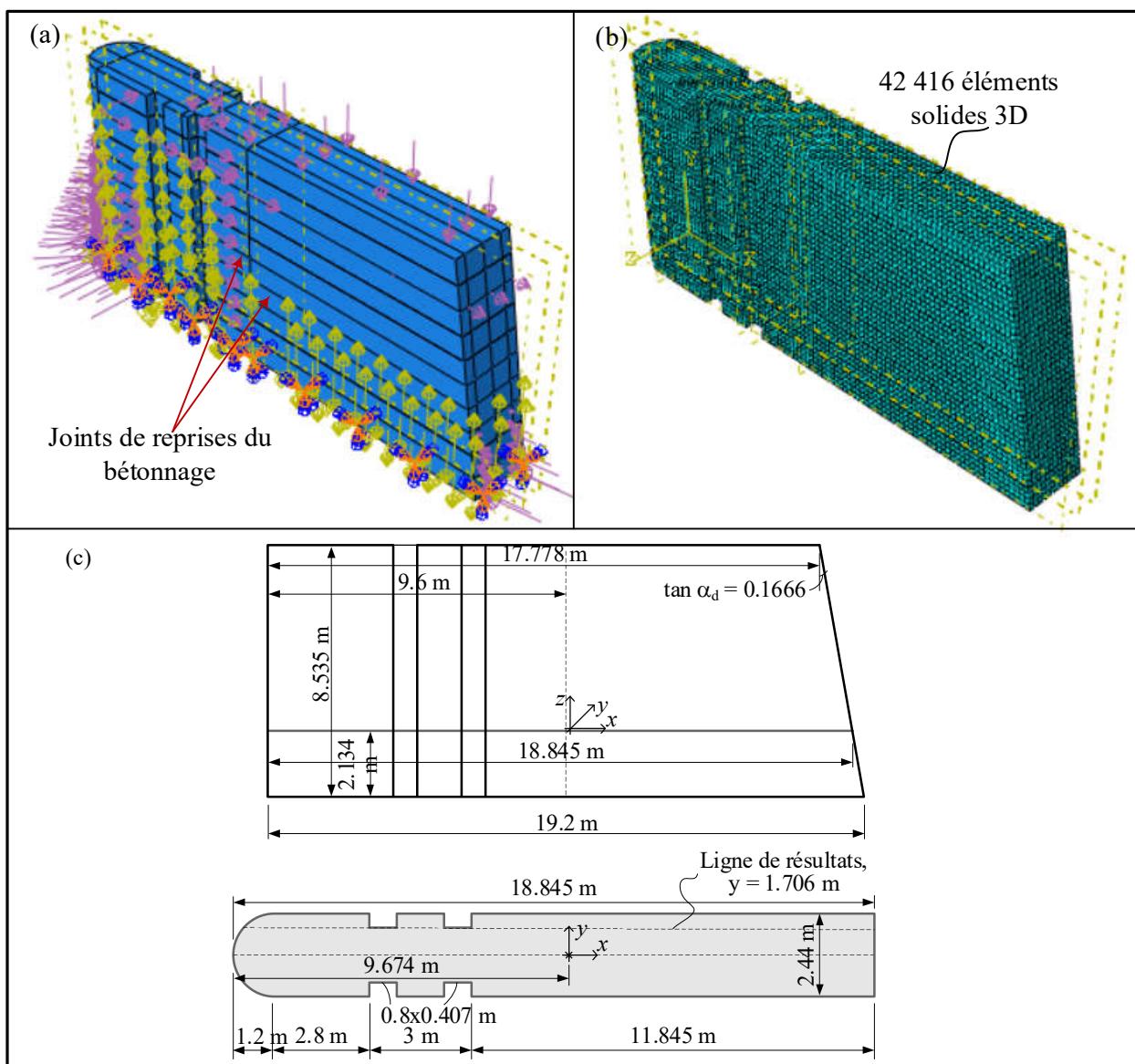


Figure 6.12 Modèle d'un pilier typique par ABAQUS : (a) Des joints de reprises de bétonnage et charges appliquées ; (b) Discrétisation du modèle 3D.

Une méthode approximative est utilisée afin de modéliser les forces causées par l'impact de la glace. Ces forces sont appliquées au niveau de l'eau en amont. Afin d'éviter les très grandes concentrations de contraintes sur le modèle ABAQUS et de construire une solution de référence cohérente avec le modèle proposé, FIDAM 3D, les charges concentrées sont appliquées selon une charge distribuée uniforme illustrée aux Figure 6.13b1 et b2. FIDAM 3D ne considère pas les effets locaux des concentrations de contraintes causées par les charges concentrées. Dans le modèle FIDAM 3D, les charges sont appliquées au point du nez du pilier et transférées au centre de gravité et puis au centre de cisaillement (Figure 6.13a)

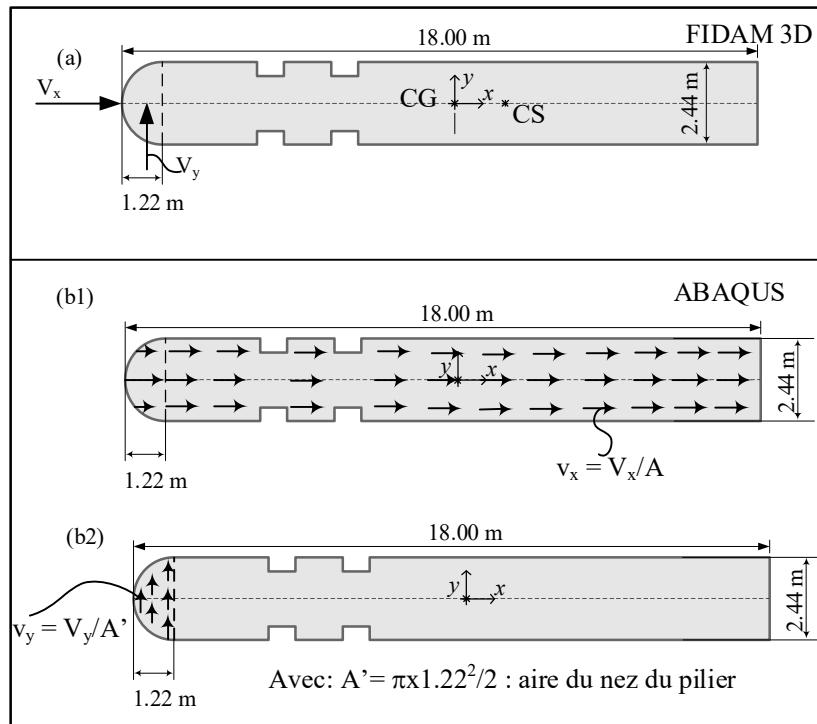


Figure 6.13 Modèle de chargement pour l'effet de l'impact de la glace : (a) Charges appliquées proposées dans FIDAM 3D ; (b1 et b2) Charges appliquées proposées dans ABAQUS.

## 6.6 Calcul et interprétation des indicateurs de performance

### 6.6.1 Combinaison 1

La première combinaison de charge est le cas normal avec deux vannes qui sont toujours fermées (Figure 6.14). Les charges considérées sont le poids-propres du pilier, les pressions hydrostatiques sur le pilier et sur les vannes, les sous-pressions au niveau des joints de reprises de bétonnage. Cette

combinaison est utilisée afin de vérifier et valider le modèle FIDAM 3D avec ABAQUS et CADAM 3D pour les réactions et les distributions de contraintes.

Les réactions sont présentées au Tableau 6.6 pour FIDAM 3D et la solution de référence, ABAQUS et CADAM 3D. L'écart maximal entre FIDAM 3D et les autres solutions est moins de 5% pour le moment en flexion autour de l'axe y. Cet écart vient du modèle FIDAM 3D pour le calcul des poids propres qui cause la majorité du moment en flexion dans cette combinaison.

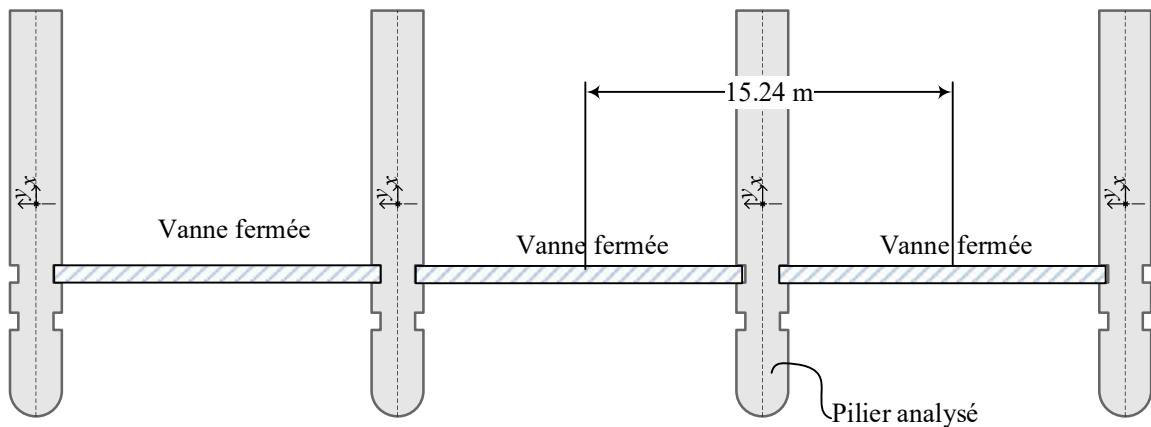


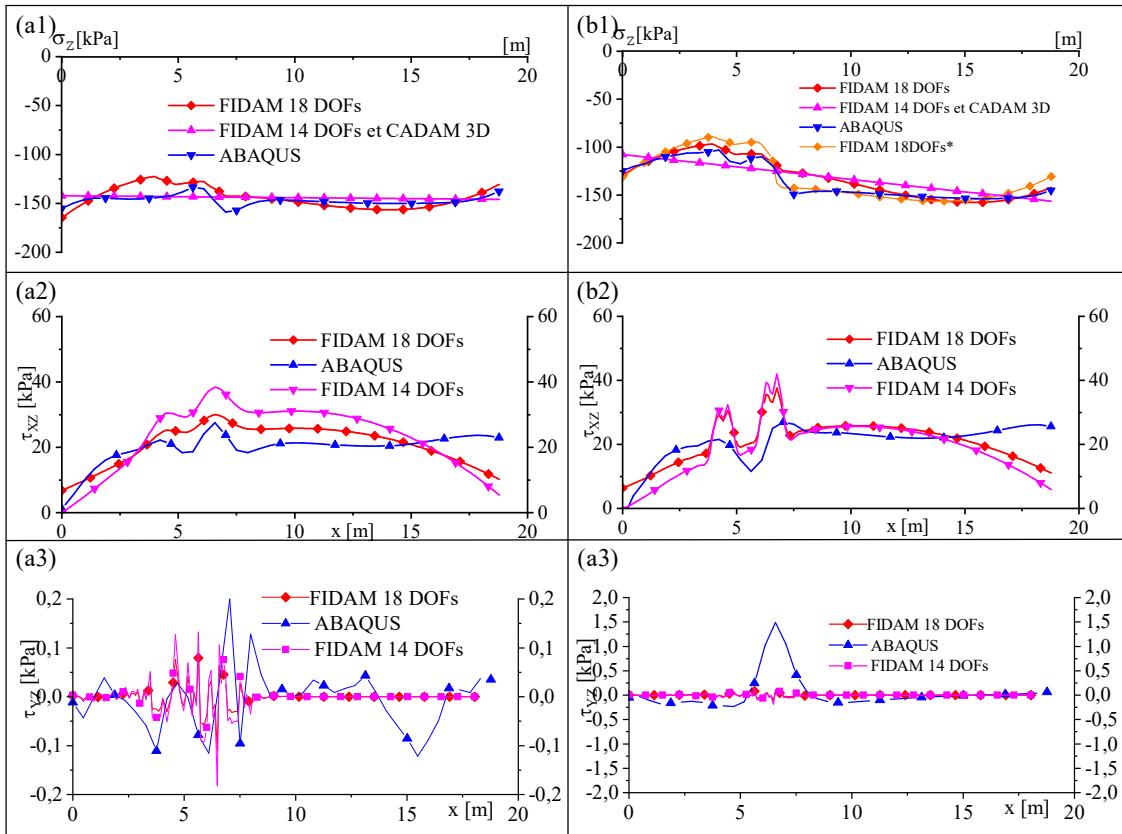
Figure 6.14 Combinaison de charge 1 avec toutes les vannes fermées

Tableau 6.6 Vérification des réactions à la base du pilier

Réactions	CADAM 3D (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$R_x$ (kN)	-2077	0.99	-2099.00	1.00	-2105.70
$R_y$ (kN)	0		0.00		0.00
$R_z$ (kN)	8974	1.00	8966.00	1.00	8980.00
$T$ (kN.m)					
$M_x$ (kN.m)			0.00		0.00
$M_y$ (kN.m)	2146	0.97	-2293.84	-1.04	2213.68

Les distributions des contraintes pour la combinaison 1 sont présentées à la Figure 6.15 pour deux cas au niveau de 0.3L le long d'un joint de reprise du bétonnage: (i) avec sous-pressions et (ii) sans sous-pression. La distribution des contraintes normales de FIDAM 3D pour les deux cas sont proches de la solution ABAQUS. Cependant, la solution CADAM 3D présente une distribution linéaire de contraintes normales qui est très différente par rapport FIDAM 3D et ABAQUS (Figure 6.15 a1-b1). Pour les distributions des contraintes de cisaillement, les solutions FIDAM 3D

18DOFs, incluant l'effet secondaire de cisaillement, sont améliorées par rapport aux solutions excluant cet effet (FIDAM 14 DOFs) en comparaison avec les solutions d'ABAQUS (Figure 6.15 a2-a3; b2-b3). Donc, lorsque le joint considéré demeure élastique, la solution FIDAM 3D est très proche de la solution ABAQUS.



*FIDAM 18DOFs \* : méthode de superposition pour la présence des SP.*

Figure 6.15 Distribution des contraintes pour un joint à 0.3L de la base : (a1-a3) le cas exclut les sous-pressions; (b1-b3) : le cas inclut les sous-pressions

## 6.6.2 Combinaison 2

Pour vérifier le comportement incluant l'effet de torsion pour le pilier, la combinaison 2 est considérée avec une vanne fermée et une vanne ouverte (Figure 6.16). Les réactions calculées par FIDAM3D, CADAM3D et ABAQUS sont indiquées au Tableau 6.7. La solution de FIDAM 3D est similaire à celle d'ABAQUS avec un écart maximal de 2%. Cependant, CADAM 3D ne peut pas tenir compte de l'effet de torsion. Car il est développé seulement pour les structures soumises à des charges unidirectionnelles amont/aval.

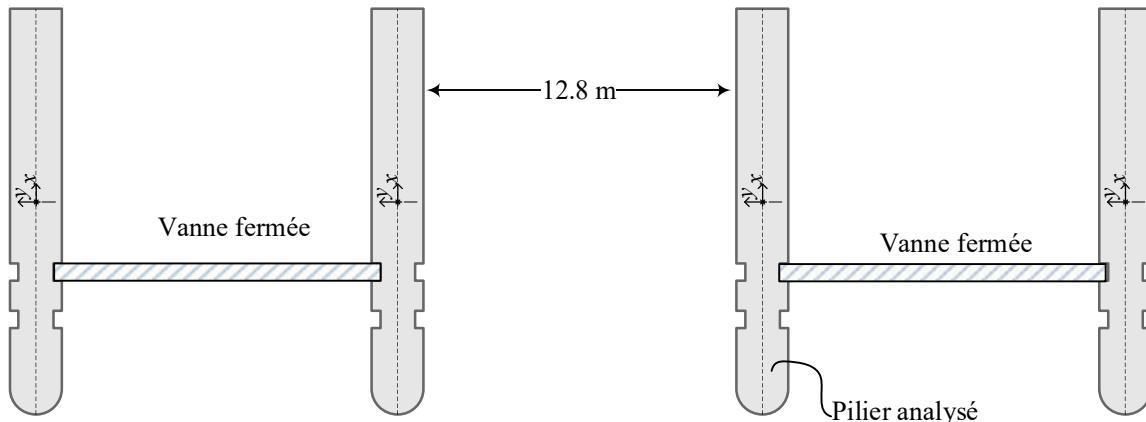


Figure 6.16 Pilier typique dans le cas d'une vanne fermée – une vanne ouverte

Tableau 6.7 : Vérification des réactions à la base du pilier – Combinaison 2

Réactions	CADAM 3D (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$R_x$ (kN)	-1205.61	-0.98	-1211.00	-0.99	1227.00
$R_y$ (kN)	0		0.00		0.00
$R_z$ (kN)	8963.85	1.00	8966.00	1.00	8980.00
$T$ (kN.m)		0.00	-710.00	0.99	-714.00
$M_x$ (kN.m)			0.00		0.00
$M_y$ (kN.m)	237.74	0.97	250.00	1.02	244.68

Pour les distributions des contraintes normales, FIDAM3D 18DOFs donne une solution proche de celle d'ABAQUS. Cependant, les distributions de FIDAM 14 DOFs et 18DOFs sont ici similaires car l'effet de cisaillement secondaire pour la combinaison de charge 2 n'est pas important. Par ailleurs, FIDAM 18 DOFs a légèrement amélioré la solution de FIDAM 14DOFs en comparaison avec la solution de référence du modèle ABAQUS (Figure 6.16b et c).

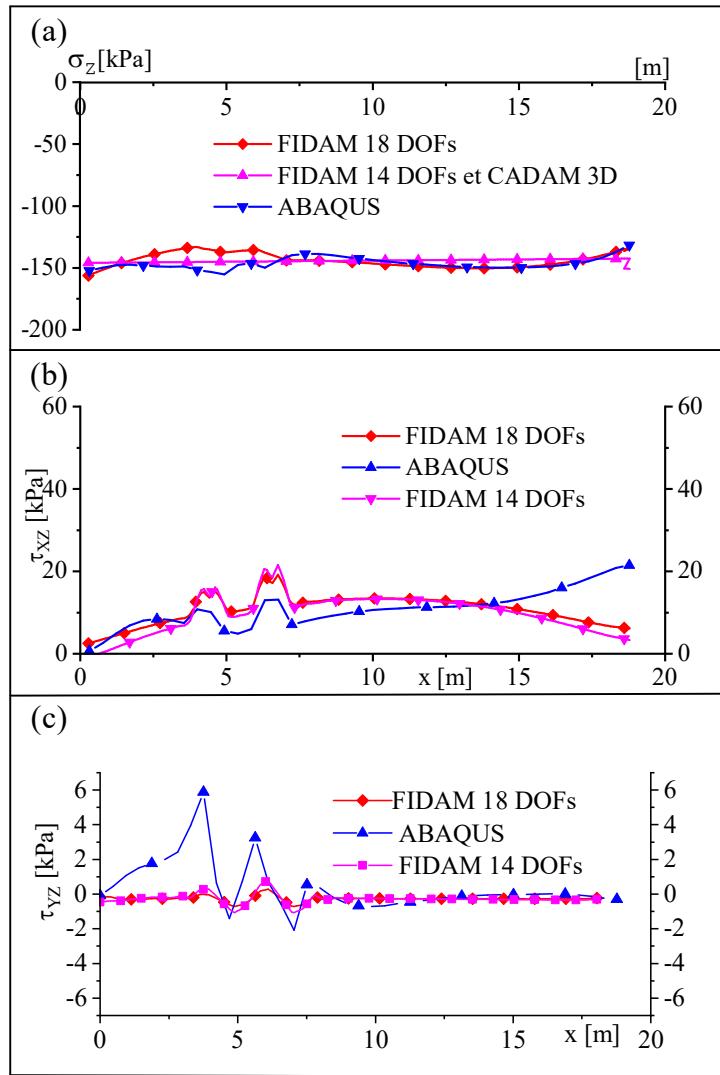


Figure 6.17 Distribution de contraintes – combinaison 2 pour un joint à  $L_s = 0.3L$  de la base :  
excluant les sous-pressions;

### 6.6.3 Combinaison 3

La combinaison 3 étudie le pilier No.12 soumis aux charges du poids-propres, de la pression hydrostatique pour le cas de deux vannes ouvertes, des sous-pressions et l'impact longitudinal de la glace où l'angle du glaçon d'impact est nul ( $F_1 = V_x, F_y = V_y = 0$ , Fig. 6.7). Le calcul est effectué par trois modèles : (i) FIDAM 18DOFs, (ii) FIDAM 14 DOFs et (iii) ABAQUS. L'impact de glace est  $V_x = 3469.5$  kN qui correspond à l'épaisseur d'un glaçon de 2.0 m avec une résistance en compression de 900 kPa. Les analyses non linéaires ont été effectuées par FIDAM 18DOFs avec 6 itérations et 10 éléments fibres 3D.

Les indicateurs de performance sont résumés au Tableau 6.8 pour le joint situé à  $L_s = 0.1L = 0.8535$  m. L'écart maximal entre FIDAM 18DOFs par rapport à la solution de ABAQUS est de 2% pour la valeur de contrainte normale de compression (négative). L'aire fissurée de la section ( $44.38 - 40.11 = 4.27 \text{ m}^2$ ) est la même que celle calculée par ABAQUS. Cependant, la solution de CADAM 3D et FIDAM 14 DOFs est toujours élastique (aire non fissurée  $44.38 \text{ m}^2$ ).

Tableau 6.8 : Indicateurs de performance pour la combinaison 3 avec  $f_t = 0 \text{ kPa}$   
pour le joint à  $L_s = 0.1L = 0.8535 \text{ m}$ .

Cas	Indicateurs de performance	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	CADAM 3D (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$f_t = 0 \text{ kPa};$ $c = 0 \text{ kPa};$ $\phi = 45^\circ;$ $L_s = 0.1L$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-367.00	1.02	-294.00	0.81	-361.00
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	0.00	0.00	-9.50	-0.42	22.70
	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	40.11	0.97	44.38	-	41.25
	Anf/Ag	0.90	0.97	1.00	-	0.93
	FSG	1.81	1.00	1.81	1.00	1.81

La distribution et la magnitude des contraintes normales de FIDAM 3D 18DOFs sont pratiquement identiques à la solution d'ABAQUS considérant la distribution non linéaire pour la section profonde (Figure 6.18a). La seule différence est localisée à la position des rainures pour laquelle la solution ABAQUS démontre un problème de singularité de contraintes. Par ailleurs, pour la solution ABAQUS, il y a quelques points sur la section du joint qui présente une valeur de contrainte normale qui n'a pas convergée. Cette valeur est supérieure de la résistance à la traction du joint ( $\sigma_{z\max} = 22.7 \text{ kPa}$  par rapport  $f'_t = 1 \text{ kPa} \approx 0 \text{ kPa}$ ). Pourtant, FIDAM 3D 18 DOFs converge à des contraintes normales égales à la résistance à la traction avec  $f'_t = 1 \text{ kPa}$ . Les distributions de contraintes de cisaillement sont proches de celles d'ABAQUS (Figure 6.18b et c). Il y a quelques points de concentration de contrainte de cisaillement à la position de l'axe neutre et aux points aux frontières de la surface inclinée du pilier qui présentent des différences entre les deux solutions. Cependant, la courbe FIDAM 3D 18 DOFs présente une bonne distribution et suit bien la solution ABAQUS.

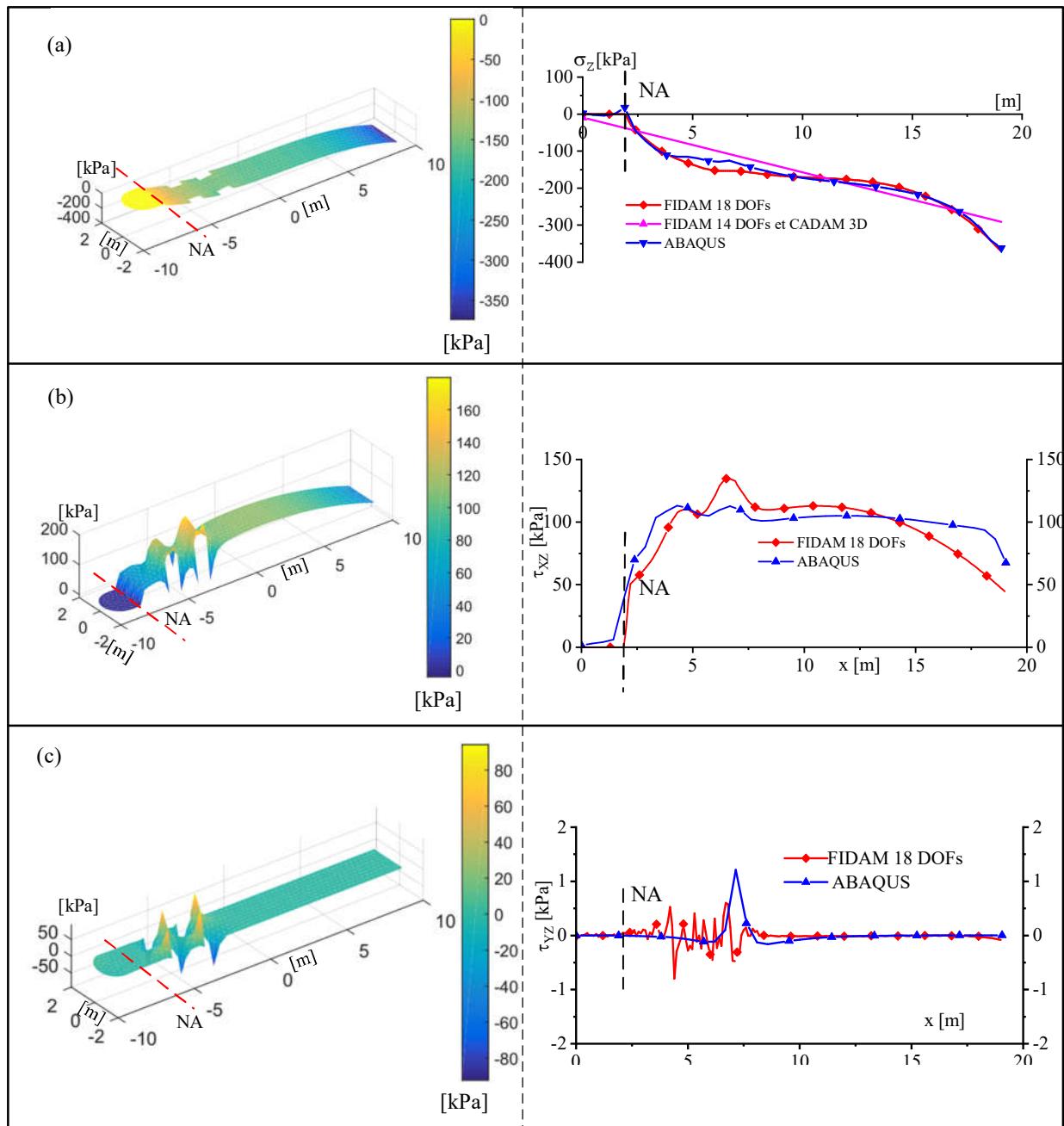


Figure 6.18 Distribution de contraintes pour la combinaison 3 pour un joint situé à  $L_s=0.1L$  : (a) distribution des contraintes normales; (b) distribution des contraintes de cisaillement,  $\tau_{xz}$ ; (c) distribution de contraintes de cisaillement,  $\tau_{yz}$ .

FIDAM 3D calcule aussi les autres indicateurs de performance comme le facteur de sécurité au glissement (FSG) (Tableau 6.8), la position de la résultante des forces (Figure 6.19). On peut constater que toutes les valeurs du FSG calculées par FIDAM 3D, ABAQUS et CADAM 3D sont les mêmes. La solution de CADAM 3D ne présente pas de fissuration. Ce phénomène est causé par le coefficient de cohésion,  $c$ , qui est négligé dans l'analyse. Dans le cas où le coefficient,  $c$ , n'est pas négligeable, en raison de l'aire en compression de FIDAM 3D, ABAQUS qui est moindre que celle de CADAM 3D, la valeur du FSG sera diminuée.

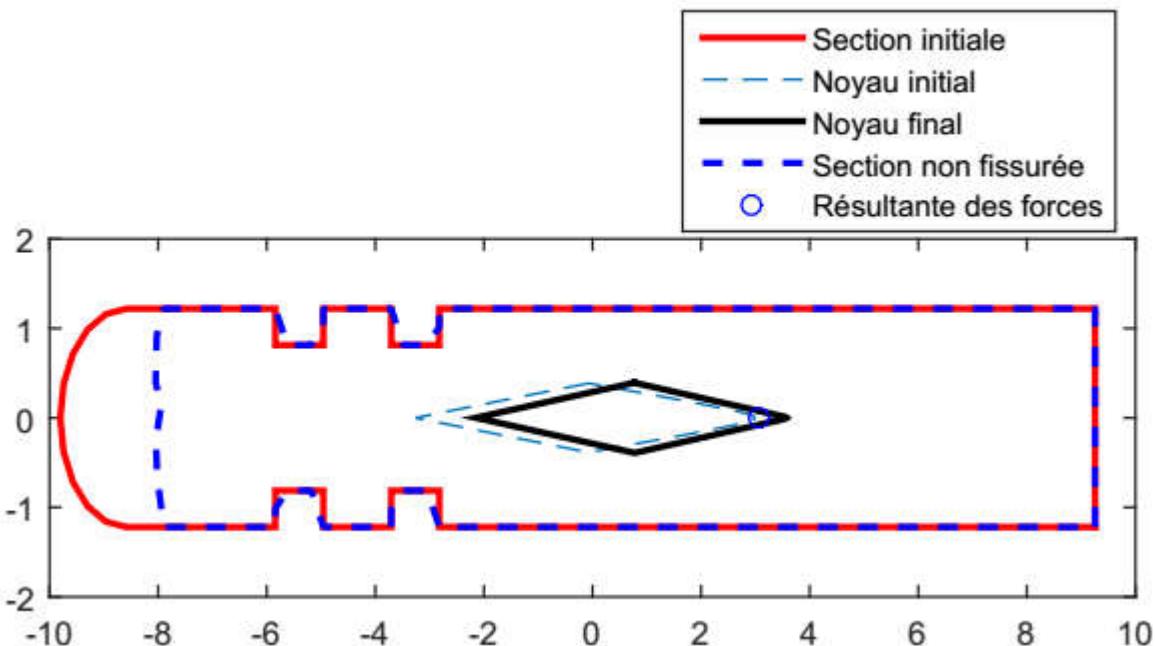


Figure 6.19 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs – Combinaison 3 joint à  $L_s=0.1L$ .

Dans cet exemple, on peut utiliser FIDAM 3D de façon très efficace pour le calcul du FSG et de l'aire non fissurée en fonction de l'intensité de l'impact de glace (Figure 6.20). Les résultats de CADAM 3D indique que jusqu'à un impact  $V_x = 3650$  kN, le joint est non fissuré. Cependant, FIDAM 3D indique le début de la fissuration à une charge  $V_x = 2000$  kN. Pour  $V_x=3650$  kN le joint présente une fissuration de 13% de son aire. Pour un cas de chargement inhabituel (impact de glace) le critère de CDA (2013) demande que l'aire fissuré ne dépasse pas 25% de l'aire totale du joint. FIDAM 3D indique une aire fissurée de plus de 25% pour un impact  $V_x=4200$  kN. Avec CADAM 3D on peut appliquer presque  $V_x = 6000$  kN avant d'atteindre 25%. Si on applique  $V_x = 6000$  kN, l'aire fissurée de FIDAM 3D est presque 60%. Donc, FIDAM 3D présente des valeurs des

indicateurs de performance qui sont plus réalistes que ceux de CADAM 3D, basé sur l'hypothèse des sections planes qui restent planes pour les piliers profonds soumis aux sollicitations des charges 3D et l'impact de glace.

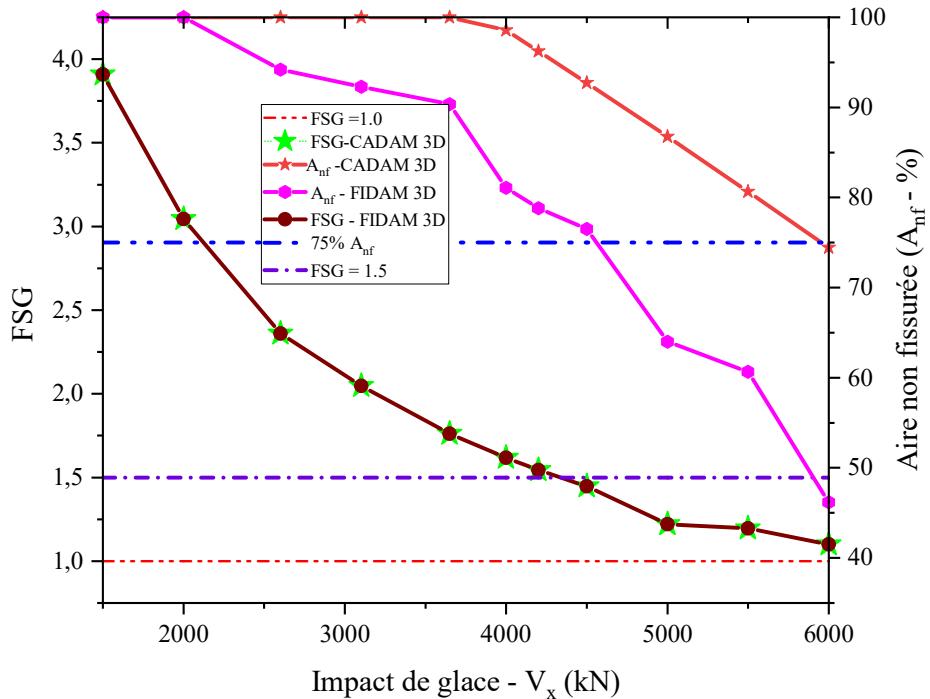


Figure 6.20 Influence de l'impact de glace sur les indicateurs de performance – Combinaison 3 avec impact de glace, variable joint à  $L_s=0.1L$

La combinaison 3, considère l'impact de glace appliqué dans la direction amont-aval incluant les effets de la pression hydrostatique, des sous-pressions et du poids-propre. FIDAM 3D dans ce cas a bien amélioré la solution de CADAM 3D et simplifié grandement la séries d'analyses et post-traitement qui auraient été nécessaires avec ABAQUS pour construire le graphique de la Figure 6.20 pour un problème de section profonde.

#### 6.6.4 Combinaison 4

Dans cette combinaison de charge, on considère le pilier soumis à la sollicitation d'impact de la glace combiné dans deux directions x et y. L'impact de la glace est calculé au niveau de l'eau de 46.630 m pour un glaçon ayant 2.5m de hauteur, 1.0 m de l'épaisseur et de 900 kPa pour la résistance en compression. La charge dans ce cas est  $F_l= 1734$  kN qui est divisée en deux directions

x et y avec un angle de 45° par rapport à l'axe x ( $V_x = 1226 \text{ kN}$  et  $V_y = 1226 \text{ kN}$ ). Le calcul est effectué pour deux cas : (i) la résistance à la traction du joint est nulle,  $f'_t \approx 0$  et (ii) celle-ci est différente de zéro avec  $f'_t = 482 \text{ kPa}$ . Le premier cas est calculé en appliquant 25% des charges d'impact de glace afin d'éviter la rupture du pilier. Le deuxième cas est considéré avec 80% de la charge totale de l'impact de glace calculée mais utilisant la résistance à la traction de 482 kPa. On considère les indicateurs de performance obtenus par calcul incluant la fissuration de FIDAM 18 DOFs, FIDAM 14 DOFs et ABAQUS. Les résultats sont résumés au Tableau 6.9 et la réponse de section du joint est démontrée à la Figure 6.22.

Tableau 6.9 : Indicateurs de performance pour la combinaison 4 avec  $f_t = 0$  et 482 kPa

pour le joint  $L_s = 0.1L = 0.8535 \text{ m}$ .

Cas	Indicateurs de performance	FIDAM 3D 18DOFs (1)	(1)/(3)	FIDAM 3D 14DOFs (2)	(2)/(3)	ABAQUS (3)
$f_t = 0 \text{ kPa};$ $c = 0 \text{ kPa};$ $\phi = 45^\circ;$ $L_s = 0.1L$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-367.53	0.96	-327.00	0.85	-383.84
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	0.00	0.00	0.00	0.00	27.00
	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	38.47	0.98	39.65	1.01	39.20
	$A_{nf}/A_g$	0.87	0.98	0.89	1.01	0.88
	FSG	5.12	1.05	5.12	1.05	4.90
$f_t = 482 \text{ kPa};$ $c = 482 \text{ kPa};$ $\phi = 45^\circ;$ $L_s = 0.1L$	$\sigma_{\min}(\text{kPa})$	-875.41	0.94	-781.00	0.84	-930.22
	$\sigma_{\max}(\text{kPa})$	479.38	0.99	477.00	0.98	485.00
	Aire non fissurée ( $\text{m}^2$ )	41.24	1.05	43.44	1.10	39.46
	$A_{nf}/A_g$	0.93	1.05	0.98	1.10	0.89
	FSG	9.58	0.90	10.37	0.97	10.65

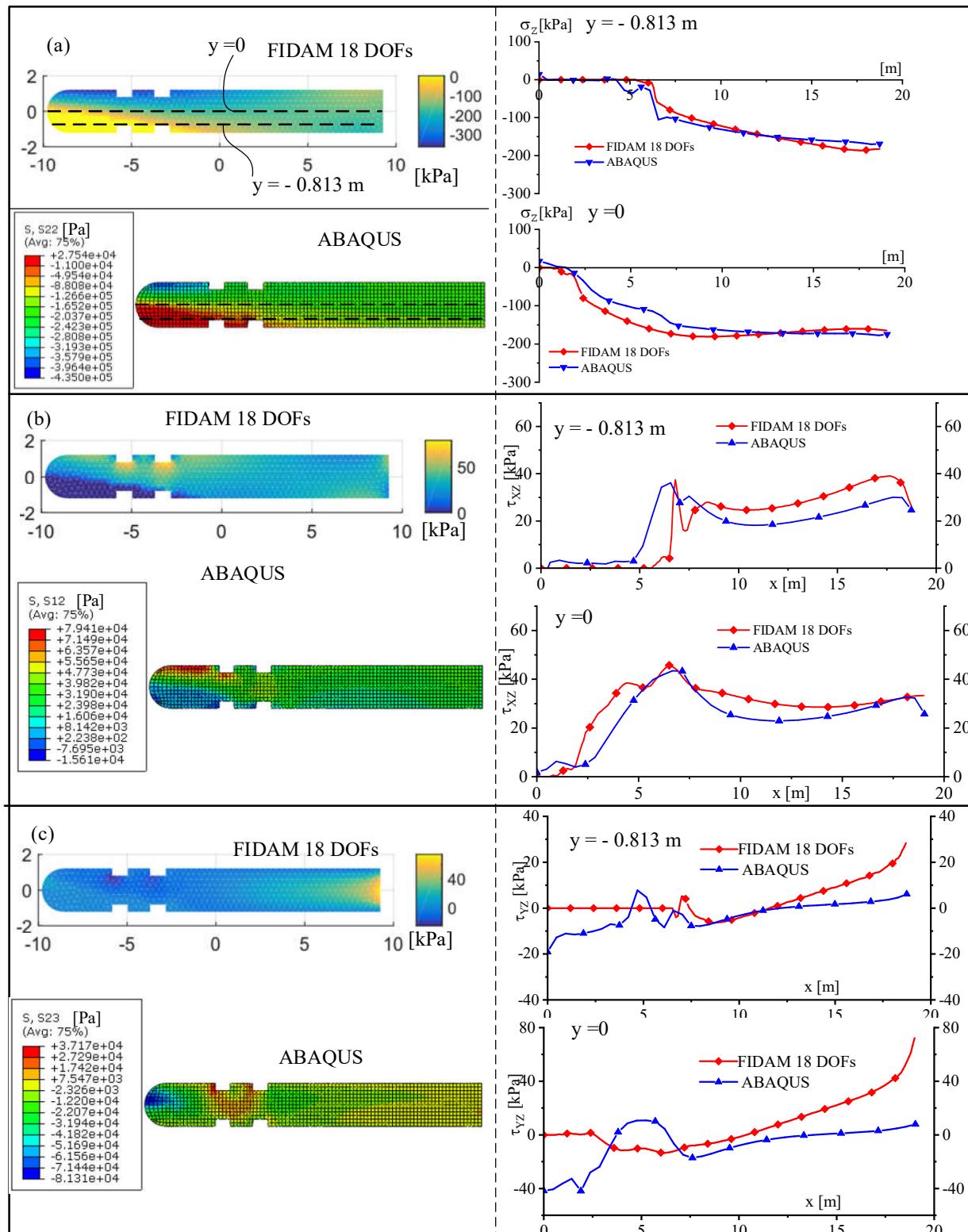


Figure 6.21 Distribution de contraintes pour la combinaison 4 avec  $f_t=0$  pour le joint à  $L_s=0.1L$  :  
(a) distribution des contraintes normales; distribution des contraintes de cisaillement (b)  $\tau_{xz}$ , (c)  $\tau_{yz}$ .

Pour  $f_t=0$ , les distributions de contraintes sont présentées à la Figure 6.21 pour la solution de FIDAM 3D 18 DOFs et ABAQUS. La distribution des contraintes normales tirée des deux solutions sont bien proches avec un écart des valeurs maximales de l'ordre de 6% pour FIDAM 3D 18DOFs vs ABAQUS. Cependant, cette valeur devient 15% pour le FIDAM 3D 14 DOFs. Les distributions des contraintes de cisaillement sont adéquates seulement pour la direction amont - aval, x, soit la direction de la section profonde. Pour la direction perpendiculaire, y, la distribution des contraintes de cisaillement ( $\tau_{yz}$ ) est différente par rapport à la solution de ABAQUS. Comme indiqué par les problèmes de V&V du chapitre 5 pour l'analyse de piliers élastiques soumis à  $V_y$ , une charge concentrée importante, il existe des écarts entre FIDAM 3D 18 DOFs et ABAQUS ainsi que la solution de Prosec (Prokon) qui considère seulement l'effet primaire de cisaillement. Cependant, cette limitation n'influence pas les indicateurs de performance si l'on considère la fissure qui est développée selon le mode I.

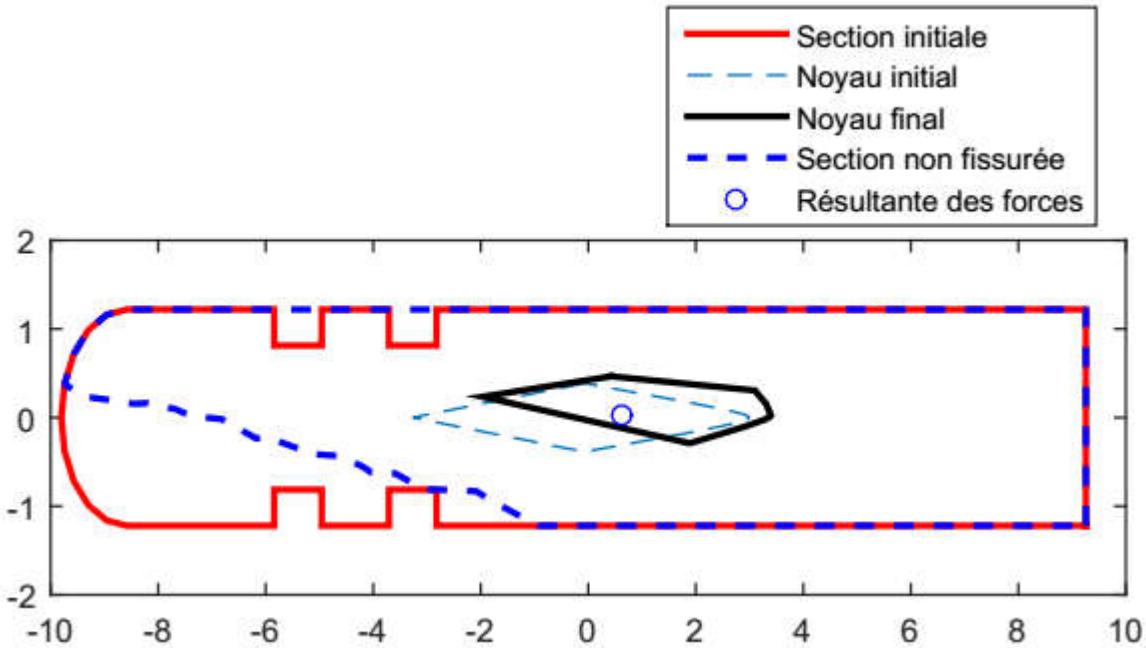


Figure 6.22 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs – Combinaison 4 ( $f_t \approx 0$ ) joint à  $L_s=0.1L$ .

Pour le cas avec  $f_t = 482$  kPa, les différences de résultats des indicateurs de performance sont du même ordre que pour le premier cas. Bien que les distributions de contraintes de cisaillement entre ABAQUS et FIDAM 3D restent encore des écarts locaux, leurs indicateurs de performance sont en très bon accord (Tableau 6.9 et Figure 6.24). Cet écart pour la contrainte en compression est

augmenté à 6% par rapport de 4% pour le cas  $f_t \approx 0$  en raison de la solution ABAQUS pour la zone à la traction ou  $f_t$  peut différer légèrement de 482 kPa selon la convergence obtenue. Donc, l'aire fissurée de ABAQUS est plus grande que celle de FIDAM 3D mais seulement de 3% de différence. En raison du transfert des charges au centre de gravité ou centre de cisaillement dans FIDAM 3D, pour le cas  $f_t = 482$  kPa, la distribution des contraintes normales est différente dans la zone non fissurée ce qui explique que le FSG de FIDAM 3D est plus petit de ABAQUS, mais cet écart est seulement de 2%. Le sommaire des résultats pour cette combinaison de charge est présenté à la Figure 6.23.

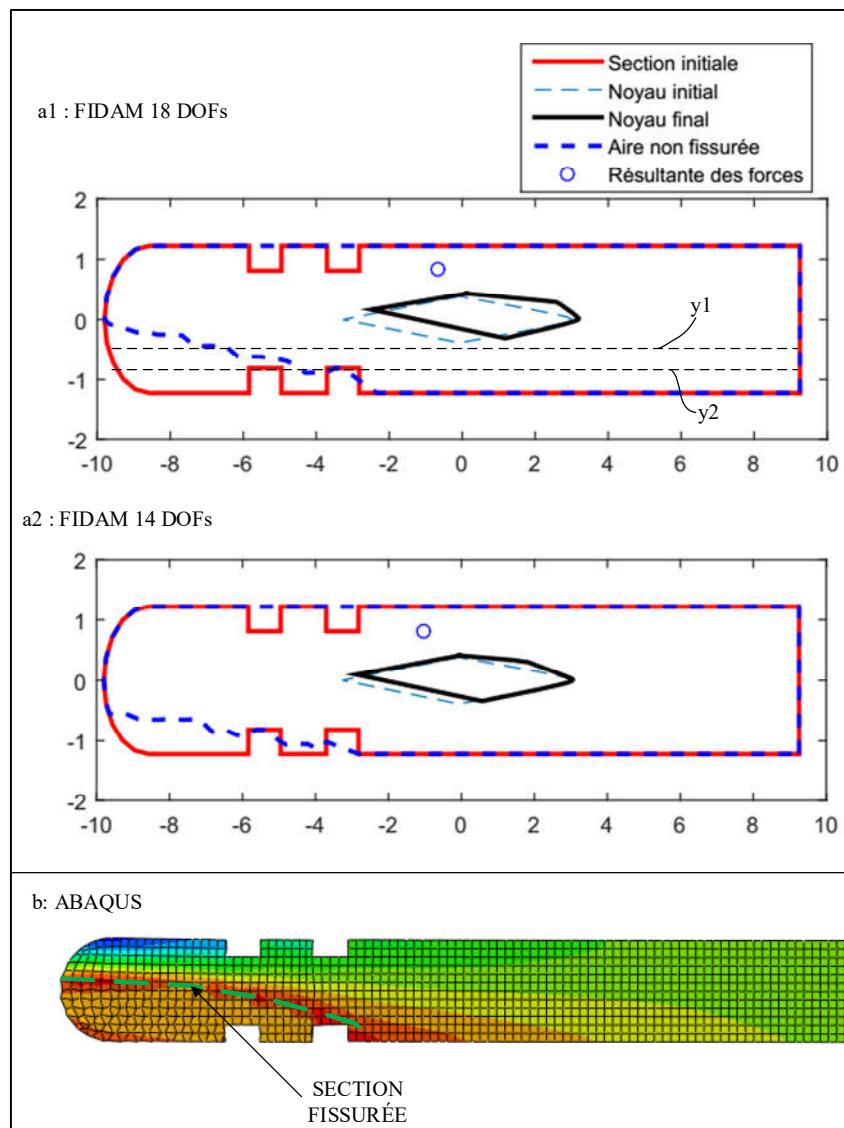


Figure 6.23 Résumé des résultats solution FIDAM3D 18DOFs, FIDAM3D 14DOFs – et ABAQUS, Combinaison 4 ( $f_t = 482$  kPa) joint à  $L_s=0.1L$ .

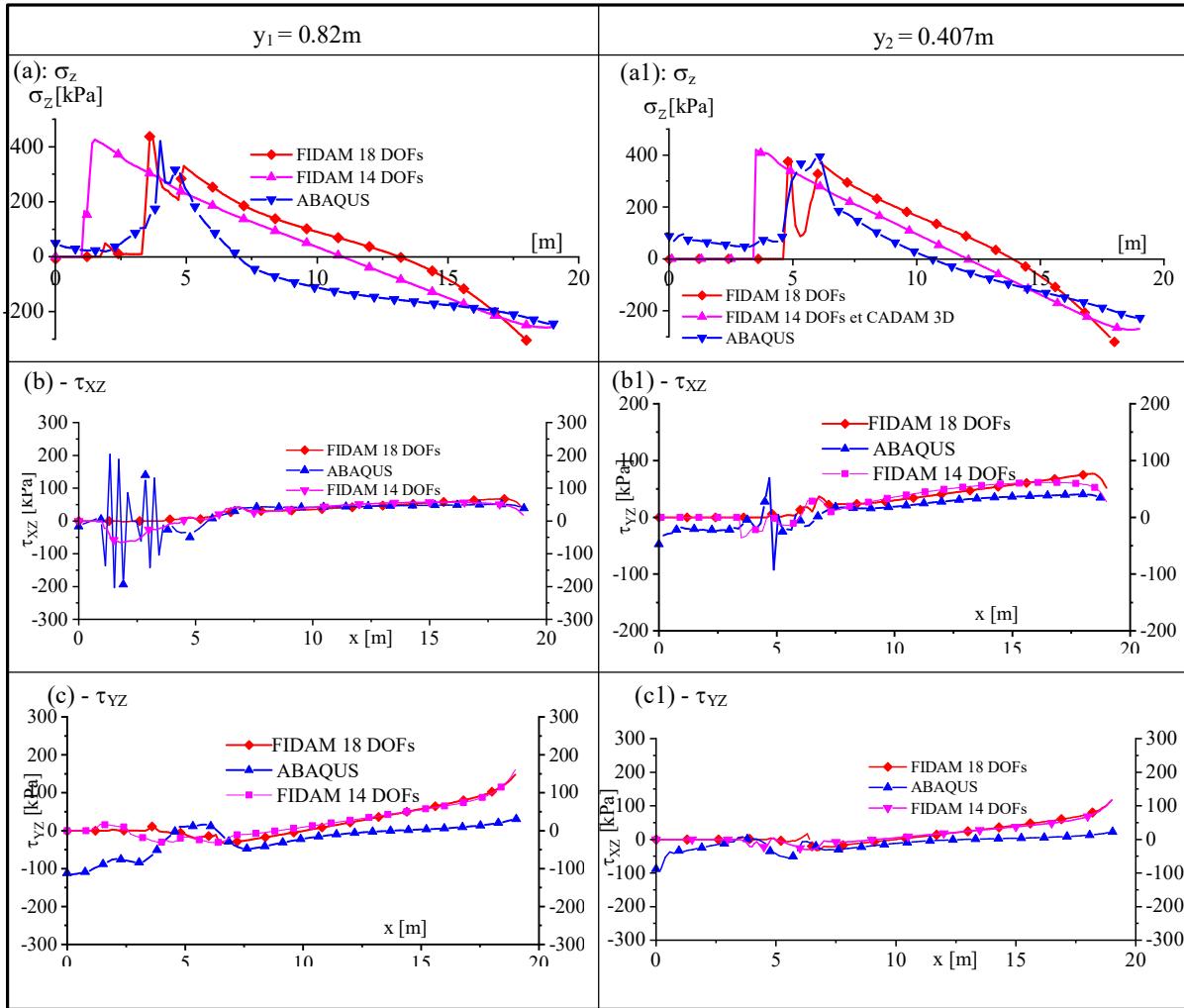


Figure 6.24 Distribution de contraintes par FIDAM 3D 14DOFs, 18 DOFs et ABAQUS, Combinaison 4,  $f_t = 482$  kPa : deux lignes de résultats  $y_1 = 0.82\text{m}$  et  $y_2 = 0.407\text{m}$

## 6.7 Conclusions

Ce chapitre a présenté quatre combinaisons de charges afin d'étudier la stabilité structurale d'un pilier typique réel d'évacuateur de crue de l'ouvrage Couteau 1 sous sollicitations PMM-VVT. Le modèle proposé, FIDAM 3D, incluant des déformations gauches de cisaillement et de torsion, est utilisé. Les combinaisons 1 et 2 permettent la comparaison et la validation de FIDAM 3D avec CADAM 3D et ABAQUS pour l'analyse linéaire. Les résultats de ces combinaisons de charges ont montré que FIDAM 3D 18 DOFs a bien calculé les solutions de référence avec moins de 5% de différence des réactions de forces à l'encastrement. Pour le calcul non linéaires (fissuration), la solution de FIDAM 3D a présenté des résultats pour les combinaisons de charges 3 et 4. Les indicateurs de performance sont bien calculés, adaptés et améliorés par FIDAM 3D en comparaison

de CADAM3D avec un écart maximal de 6% rapport aux solutions de références ABAQUS. En se basant sur résultats obtenus, les avantages de FIDAM 3D sont présentés ci-dessous :

1. FIDAM 3D procède à l'analyse non linéaire par éléments fibres 3D ayant des sections qui correspondent aux points de Gauss élastiques et inélastiques afin de modéliser le comportement d'un pilier ayant plusieurs joints de reprises de bétonnage. Ces éléments fibres 3D ont deux parties : un élément vertical qui est déformable; et un élément horizontal qui est une extension rigide.
2. FIDAM 3D considère tous les effets de charges facilement comme CADAM 3D par deux méthodes de calcul (superposition de contraintes et calcul de la résultante de forces causée par les sous-pressions). L'effet de sous-pressions dans la fissure est bien traité par FIDAM 3D comme CADAM 3D mais cet effet est beaucoup plus complexe à introduire dans la MEF. Il s'agit d'une limitation importante des modèles MEF 3D d'ABAQUS.
3. FIDAM 3D permet d'analyser la structure globale en considérant l'interaction entre les sections de calcul des indicateurs de performance et les efforts internes de toutes les sections. Dans CADAM 3D, les joints sont considérés indépendamment et sans interactions les uns des autres pour calculer les indicateurs de performance.
4. Les résultats de CADAM 3D sont très approximatifs pour les piliers profonds comme le pilier étudié. Les résultats montrés pour la combinaison 3, qui considère la charge de l'impact de glace unidirectionnelle amont/aval, ont indiqué qu'un joint de reprise de bétonnage qui est encore élastique pour l'analyse CADAM 3D devient fissuré lors de l'analyse FIDAM 3D et ABAQUS. Les résultats de FIDAM 3D et ABAQUS dans cette combinaison ont présenté un écart maximal de 3 % pour l'aire non fissurée et 2% pour la valeur de la contrainte normale minimale en compression.
5. La distribution des contraintes normales et de cisaillement de FIDAM 3D pour la combinaison de charge uni-direction amont/aval est très proche de celles en ABAQUS avec un écart maximal de 2% pour la contrainte normale.
6. Dans la combinaison 4, l'effet de l'impact de glace induit des efforts 3D importants (PMM-VVT). La solution de FIDAM 3D est capable de calculer des indicateurs de performances qui sont proches de la solution de référence (ABAQUS) avec 6% de différence entre la valeur minimale de contrainte normale pour FIDAM 3D 18DOFs et 24% pour FIDAM 3D

14DOFs qui considère seulement l'effet de gauchissement due à la torsion gauche. Les autres indicateurs de performance (FSG et aire non fissurée) sont bien calculés avec 2% d'écart pour FIDAM 18DOFs avec la solution ABAQUS. Mais ces valeurs de FIDAM 3D 14DOFs sont très grandes, respectivement 16% pour FSG et 10% pour l'aire non fissurée.

7. Comme CADAM 3D, FIDAM 3D permet aussi de calculer la position de la résultante des forces, un indicateur de performance qui ne peut pas être obtenu directement par ABAQUS. La position de la résultante par FIDAM 3D peut être calculée pour n'importe quelle géométrie et section fissurée.
8. FIDAM 3D et ABAQUS permettent d'analyser des joints qui sont proches de l'encastrement (combinaisons de charges 3 et 4). Ces joints ne sont pas bien représentés par CADAM 3D qui présume l'hypothèse des sections planes qui restent planes.

Dans ce chapitre, l'influence de l'impact de glace est aussi considérée par analyse incrémentale en appliquant une série de forces via CADAM 3D et FIDAM 3D. Les résultats ont indiqué que FIDAM 3D est un outil efficace par rapport à ABAQUS afin d'analyser un pilier profond. ABAQUS demande beaucoup de ressources de calcul et de pré, post-traitement et présente très souvent des difficultés de convergence au niveau des éléments de contacts.

À côté des avantages, il y a aussi des inconvénients et limitations de FIDAM 3D :

1. La distribution des contraintes de cisaillement est précise seulement pour la direction amont-aval. Si la charge appliquée est concentrée et perpendiculaire à la direction amont/aval causant également un moment de torsion important, la solution de FIDAM 3D a présenté des différences de l'ordre de 158% de l'écart moyen par rapport à la solution ABAQUS sans pour autant affecter très significativement les indicateurs globaux de performance. Cette erreur vient de la limitation des équations différentielles utilisées à résoudre les fonctions de contraintes de cisaillement pour une section trapue. La deuxième raison de la solution ABAQUS a montré que les contraintes de cisaillement qui ne sont pas nulles pour l'aire fissurée de la section, c'est aussi une limitation de la solution ABAQUS.
2. FIDAM 3D demande l'application des charges au centre de gravité ou au centre de cisaillement de la section. C'est-à-dire que FIDAM 3D ne traite pas le problème de concentration de contrainte aux points d'application des charges, ce qui explique certains des écarts observés entre FIDAM3D et ABAQUS;

## CHAPITRE 7 SOMMAIRE, CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### Sommaire du projet de recherche

Ce projet de recherche doctorale répond à la problématique du manque d'éléments finis de type poutre 3D en béton tenant compte de la fissuration pour le calcul des contraintes de sections profondes où l'hypothèse des sections planes qui restent planes après l'application des charges ne tient plus. Les déformations gauches, qui sont causées par l'effet secondaire cisaillement et l'effet de torsion gauche, ne sont alors pas négligeables. Les éléments fibres 3D de ce projet ont été développés en deux étapes : (i) formulation d'éléments fibres 3D ayant 14 degrés de libertés (DDL) pour inclure les déformations gauches dues à la torsion gauche, (bi-moment) (modèle FIDAM 3D 14 DOFs); (ii) l'ajout de 2 DDL pour chaque nœud afin de considérer les déformations de gauchissement dues aux effets secondaires de cisaillement (modèle FIDAM 3D 18 DOFs). Les déformations de gauchissement sont calculées à l'aide des fonctions de gauchissement primaires et secondaires qui sont mises à jour à chaque itération de calcul pour la partie de la section non fissurée.

Au niveau de l'analyse sectionnelle, l'élément fibre 3D permet d'étudier des sections sélectionnées qui correspondent aux points de Gauss (3 ou 5) utilisés pour obtenir la matrice de rigidité sectionnelle. Il y a trois effets qui sont considérés : (i) l'effet de flexion primaire qui respecte l'hypothèse d'Euler Bernoulli pour la force axiale, les moments en flexion primaire ( $P-M_x-M_y$ ) ; (ii) l'effet de cisaillement due aux efforts tranchants ( $V_x-V_y$ ) incluant des déformations de gauchissement causées par le cisaillement secondaire, qui est considéré par la méthode des éléments finis 2D appliquée à chaque point de Gauss à l'aide des fonctions de gauchissement; (iii) l'effet de torsion incluant les déformations gauches dues à la torsion (bi-moment) qui est considéré par la méthode des éléments finis 2D appliquée à chaque point de Gauss à l'aide des fonctions de gauchissement.

La matrice de rigidité des éléments fibres 3D est formulée par une méthode mixte qui utilise : (i) la méthode de flexibilité pour les effets des efforts axiales, des moments en flexion et les efforts tranchants, incluant les distorsions causées par l'effet secondaire de cisaillement; (2) la méthode de rigidité pour les effets de torsion de St-Venant et de gauchissement. De plus, l'élément fibre 3D a été développé pour les structures ayant une géométrie variable via des éléments verticaux qui sont déformables et des extensions rigides horizontales.

Le modèle constitutif proposé considère deux modes de rupture : (i) le mode I qui est contrôlé par la résistance à la traction des joints de reprises de bétonnage et (ii) le mode II qui considère la rupture par l'effet de compression-cisaillement selon la loi de Mohr-Coulomb. Le modèle proposé permet de considérer le mode I (fissuration en traction) ou les modes I et II ensemble.

Pour les ouvrages hydrauliques, l'élément fibre 3D considère les poussées hydrostatiques, les sous-pressions initiales et leurs modifications lors de la fissuration par deux méthodes différentes : (i) la méthode de superposition des contraintes et (ii) la méthode qui applique la résultante des forces causées par les sous-pressions. Les modèles proposés permettent aussi de calculer directement les indicateurs de performance structurale comme : (i) les contraintes normales minimales, maximales; (ii) l'aire fissurée de la section; (iii) le facteur de sécurité au glissement et (iv) la position de la résultante des forces pour les sections quelconques.

Le modèle d'élément fibre 3D proposé, a été implanté dans un nouveau logiciel de calcul, ***FIDAM 3D***, développé dans ce projet sous la plateforme MATLAB. Il a été vérifié et validé selon trois niveaux de complexité pour (i) les sections en régime élastique soumises aux chargements 3D ; (2) les structures élastiques élancées et profondes; (3) les structures inélastiques (fissuration) incluant les effets des pressions hydrostatiques, des sous-pressions initiales et dans les fissures. Les résultats sont comparés avec (i) des solutions analytiques, (ii) des solutions issues d'autres logiciels (Prokon, FLEX PDE, CADAM 3D et ABAQUS) et des résultats publiés dans la littérature. Les études de validation ont démontré la capacité de l'élément fibre 3D à capturer, avec généralement une très bonne précision, les déplacements et les contraintes normales et de cisaillement et les indicateurs globaux de performance.

Finalement, le logiciel ***FIDAM 3D*** est utilisé pour l'analyse de la stabilité d'un pilier typique d'évacuateur de crue, une structure profonde avec  $D \approx 2H$  et  $D \approx 10B$ , (où  $H= 8.535\text{m}$  est la hauteur de la structure, et  $D=19.2\text{m}$  est la profondeur de la section et  $B=2.44\text{m}$  est la largeur de la section). Il s'agit d'évaluer la stabilité structurale 3D, spécialement l'effet 3D de l'impact de blocs de glace flottante qui cause une torsion importante. Les résultats sont validés par comparaisons avec des solutions de référence à l'aide du logiciel ABAQUS (éléments finis 3D solides et éléments cohésifs pour modéliser les joints de reprises de bétonnage).

## Conclusions

- La formulation sectionnelle proposée pour les éléments fibres 3D est basée sur une extension itérative d'équations différentielles classiques de la résistance des matériaux et de la théorie de l'élasticité. La formulation proposée est très robuste et efficace pour l'analyse élastique et inélastique (fissuration) de sections quelconques sous la combinaison des efforts axiaux, des moments de flexion biaxiaux, des efforts de cisaillement biaxiaux, d'un torque et la présence de sous-pressions. Une caractéristique particulière de cette formulation est de capturer les déformations gauches dues au cisaillement et à la torsion qui induisent des contraintes normales non linéaires pour les sections profondes.
- Une formulation cohérente d'élément fibres hydromécaniques 3D, **FIDAM 3D**, est développée par un ensemble d'équations et d'algorithmes de résolution clairement défini. La détermination de l'état d'un élément est numériquement robuste et efficace dans le contexte de la plateforme de calcul MATLAB pour l'analyse non linéaire des structures soumises aux sollicitations de charges 3D (PMM-VVT). Un aspect novateur de la formulation est le couplage des réponses sectionnelles, via l'interpolation des efforts internes des éléments, qui est basée sur le principe de l'équilibre d'un élément (méthode de flexibilité), avec l'ajout des déformations de gauchissement dues à la torsion qui est basée sur les polynômes Hermite le long de l'axe de l'élément (méthode de rigidité).
- L'analyse non linéaire des sections est basée sur les points du maillage en éléments finis 2D sur la section avec le modèle constitutif des joints de reprises de bétonnage. Cette approche est simple et clairement alignée sur l'application des lignes directrices visant le calcul de stabilité des ouvrages hydrauliques en béton (CDA 2013). La fissuration est calculée et les propriétés sectionnelles sont itérativement mises à jour. L'algorithme de résolution proposé démontre d'excellentes propriétés de convergence, et est bien adapté pour la fissuration arbitraire de la section (la position de l'axe neutre est arbitraire et calculée selon la fissuration de la section),
- Les méthodes introduites pour considérer les sous-pressions initiales, et leurs évolutions dans les fissures, sont géométriquement polyvalentes pouvant s'adapter à des périmètres arbitraires de zones fissurées et non fissurées avec des gradients de pressions conformes aux règles de l'art. Ces méthodes permettent de très facilement mettre à jour l'intensité des sous-pressions selon l'aire fissurée de la section par rapport à la méthode des éléments finis comme ABAQUS.

- L'interaction entre les efforts internes et les sous-pressions est considérée effectivement afin de déterminer l'aire fissurée et les propriétés sectionnelles. Par ailleurs, les modes de défaillance ont été implémentés pour le mode I (traction) et II (compression-cisaillement) afin de considérer la stabilité et la marge de sécurité des sections.
- Les conditions de convergence démontrent clairement que les conditions d'équilibre issues de l'application des efforts internes et de l'intégration des contraintes internes sont satisfaites au niveau de chaque section.
- Les procédures de Vérification & Validation du modèle d'éléments fibres 3D, FIDAM 3D ont démontré la qualité des résultats obtenus par rapport à diverses solutions de références. La première étape de V&V, l'analyse sectionnelle pour calculer les propriétés de sections élastiques quelconques et l'intensité des contraintes de cisaillement, a présenté en même valeurs pour les propriétés sectionnelles en comparaison avec les logiciels Prokon (Prosec), FLEX PDE, utilisant la méthode des éléments finis et les solutions analytiques publiées. La deuxième étape de V&V pour les structures élancées élastiques présente moins de 1% d'écart maximal pour les contraintes normales et les contraintes de cisaillement avec la MEF 3D d'ABAQUS. Pour les structures profondes, FIDAM3D présente une bonne précision avec un écart maximal de 6% pour la valeur de la contrainte normale maximale due à la torsion et moins de 3% pour cette valeur due à la flexion en comparaison avec la solution d'ABAQUS. La dernière étape de V&V a consisté au calcul de structures (élancées et profondes) pouvant se fissurer et a indiqué un écart maximal de 3% pour les indicateurs de performance par rapport aux solutions de référence;
- L'application du modèle proposé FIDAM 3D pour le pilier existant au Chapitre 6 a mis en évidence le manque de précision environ de 30% pour le calcul des contraintes normales des piliers profonds de la méthode classique de gravité, basée sur l'hypothèse des sections planes qui restent planes (CADAM 3D). Les résultats de FIDAM 3D seront utiles afin d'améliorer la limitation de CADAM 3D pour les sections profondes pour lesquelles les déformations de cisaillement qui ne sont pas négligeables, tout particulièrement pour les sections qui sont proches des points d'appuis. L'écart maximal entre FIDAM 3D et la solution de la MEF 3D ABAQUS est seulement 6% pour les indicateurs de performance mais le calcul de FIDAM 3D est moins complexe que celui d'ABAQUS, maîtrise les problèmes de convergence de la position de l'axe neutre et l'introduction des sous-pressions dans la fissure.

- FIDAM 3D présente quelques avantages par rapport la MEF 3D ABAQUS comme le temps de calcul et les résultats obtenus. Le temps de calcul de FIDAM 3D pour l'étude de cas est environ 2 heures mais pour ABAQUS celui-ci est de plus de 24 heures ! De plus, les résultats obtenus de FDIAM 3D présentent directement les indicateurs de performance mais ceux de ABAQUS ont besoin encore de post-traitements pour calculer ces indicateurs. Par ailleurs, la MEF 3D dans ABAQUS demande une bonne expertise sur l'analyse non linéaire des structures et l'utilisation des modèles d'éléments de contact par des surfaces cohésives et les ressources informatiques requises.

- La limitation principale du modèle proposé est la méthode d'application du chargement. Pour un élément poutre, le chargement est toujours transféré au centre de gravité de la section puis au centre de cisaillement de la section. Donc, pour les zones qui sont proches de la position réelle des charges appliquées (par exemple sur la paroi extérieure), FIDAM 3D ne peut pas capturer les concentrations de contraintes typiques de la théorie de l'élasticité et de la MEF.

- Une autre limitation est que les sections de calcul se limitent à des plans horizontaux le long des joints de reprises de bétonnage qui possèdent habituellement une résistance mécanique plus faible que le béton de masse environnant. Il est possible qu'une fissure amorcée le long d'un joint veuille plonger dans le béton de masse en présence de contraintes de cisaillement importantes. Les facteurs de sécurité calculés pour des fissures horizontales seront alors plus grands que ceux associés à la propagation des fissures sans restriction géométriques.

- Une autre limitation est la qualité de la distribution des contraintes de cisaillement pour la section proche de l'appui qui a présenté des grandes erreurs par rapport la MEF 3D. L'ordre de fonction de gauchissement utilisée dans FIDAM 3D n'est pas suffisant pour capter la distribution de contrainte de cisaillement des sections proches de l'appui, il faudrait ajouter des DDL à la formulation.

## Perspectives

Il est possible d'élargir la gamme de l'application du modèle d'éléments fibres 3D proposé avec l'inclusion de modèles constitutifs supplémentaires de matériaux. En particulier, un modèle constitutif de l'armature afin d'analyser la stabilité des structures faiblement armées.

- Les fissures de FIDAM 3D sont toujours horizontales au niveau des joints de reprises de bétonnage. Cependant, la fissure va avoir tendance à suivre l'orientation des contraintes

principales. Dans ce cas, on devrait implanter un modèle combiné de fissuration pour le joint et ses propriétés et pour le béton de masse.

- Avec les vieux ouvrages hydrauliques, FIDAM 3D est un outil versatile afin d'évaluer la stabilité structurale avec une bonne précision. Cependant, il faut des développements supplémentaires pour introduire la technique de réparation par exemple : les plaques en acier, la post-tension, etc...
- Il y a plusieurs paramètres qui influencent fortement sur les indicateurs de performance structurale d'un ouvrage hydraulique comme : (i) la résistance à la traction du joint, (ii) l'angle de friction, (iii) la cohésion etc. La quantification des incertitudes demande un cadre de calcul probabiliste. Un module de la fiabilité structurale pourrait facilement se greffer au logiciel FIDAM 3D afin d'évaluer les incertitudes de ces paramètres sur la sécurité de l'ouvrage.
- FIDAM 3D présente une solution statique. Cependant avec la matrice de la rigidité développée, le volet de calcul dynamique seraient facilement inclus par l'ajout de la matrice de masse de l'élément fibre 3D.

## RÉFÉRENCE

- ACI-318. (2002). *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02)*. Farmington Hills, Mich., USA American Concrete Institute
- Bairan, J. M., & Mari, A. R. (2007). Multiaxial-coupled analysis of RC cross-sections subjected to combined forces. *Engineering Structures*, 29(8), 1722-1738. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.09.007>
- Bresler, B. (1960). Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending. *ACI Structural Journal*, 57(11), 481-490.
- Capdevielle, S. (2016). *Introduction du gauchissement dans les éléments finis multifibres pour la modélisation non linéaire des structures en béton armé*. (Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes).
- Capdevielle, S., Grange, S., Dufour, F., & Desprez, C. (2016). A multifiber beam model coupling torsional warping and damage for reinforced concrete structures. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 20(8), 914-935. doi:10.1080/19648189.2015.1084384
- Casaux, G., Ragueneau, F., Kotronis, P., & Mazars, J. (2004 2004). Enhanced 3D multifibre beam element accounting for shear and torsion. Communication présentée à Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures, Ia-FraMCos, Vail Colorado, United States (vol.2). Tiré de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01008135>
- Canadian Dam Association - CDA (2013), *Dam safety guidelines (2013 edition)*. Edmonton, Canada
- Ceresa, P., Petrini, L., Pinho, R., & Sousa, R. (2009). A fibre flexure-shear model for seismic analysis of RC-framed structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 38(5), 565-586. doi:10.1002/eqe.894
- Cowper, G. R. (1966). The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 33(2), 335-340.
- Dahake, A., Kapdis, P., Kalwane, U., & Salunkhe, U. (2018). Flexural Analysis of Deep Aluminum Beam. *Soft Computing in Civil Engineering*, 2(1), 71-84.
- Dikaros, I. C., & Sapountzakis, E. J. (2014). Nonuniform shear warping effect in the analysis of composite beams by BEM. *Engineering Structures*, 76(Supplement C), 215-234. doi:<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.07.009>
- Dolen, T. (2011). Selecting strength input parameters for structural analysis of aging concrete dams. Communication présentée à Proceedings of the 31st USSD Annual Conference, San Diego, CA.
- Federal Energy Regulatory Commission - FERC (2002). Chapter III Gravity Dams. *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects. Dept. of Energie, Wahsington, D.C.*
- Furlong, R. W., Hsu, C.-T. T., & Mirza, S. A. (2004). Analysis and design of concrete columns for biaxial bending-overview. *ACI Structural Journal*, 101(3), 413-422.

- Geuzaine, C., & Remacle, J. F. (2009). Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), 1309-1331.
- Ghugal, Y., & Shimpi, R. (2001). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 20(3), 255-272.
- Gulec, C. K., & Whittaker, A. S. (2009). *Performance-based assessment and design of squat reinforced concrete shear walls* (Rapport n° MCREER-09-0010). Buffalo, NY: University at Buffalo, State University of New York.
- Herrmann, L. R. (1965). Elastic torsional analysis of irregular shapes. *Journal of Engineering Mechanics*, 91(EM6), 11-19.
- Jafari, V., Vahdani, S. H., & Rahimian, M. (2010). Derivation of the consistent flexibility matrix for geometrically nonlinear Timoshenko frame finite element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(12), 1077-1085. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.fin.2010.07.015>
- Kostic, S. M., & Filippou, F. C. (2012). Section discretization of fiber beam-column elements for cyclic inelastic response. *Journal of Structural Engineering*, 138(5), 592-601. doi:10.1061/(asce) st.1943-541x.0000501
- Kusanale, A. A., Kadam, S. B., & Tande, S. N. (2014). Analysis of RC deep beam by finite element method. *International Journal of Modern Engineering Research* 2(4), 166-169.
- Le Corvec, V. (2012). *Nonlinear 3d frame element with multi-axial coupling under consideration of local effects*. (PhD Thesis). Tiré de <http://www.escholarship.org/uc/item/0sw164c3>
- Leclerc, M., & Léger, P. (2007). CADAM3D. Version 2 - User's manual. École Polytechnique de Montréal, Canada.
- Lee, C. L., & Filippou, F. C. (2009). Frame elements with mixed formulation for singular section response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(11), 1320-1344. doi:10.1002/nme.2531
- Li, N., Li, Z., & Xie, L. (2013). A fiber-section model based Timoshenko beam element using shear-bending interdependent shape function. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 12(3), 421-432. doi:10.1007/s11803-013-0183-z
- Lignola, G. P., Spena, F. R., Prota, A., & Manfredi, G. (2017). Exact stiffness-matrix of two nodes Timoshenko beam on elastic medium. An analogy with Eringen model of nonlocal Euler-Bernoulli nanobeams. *Computers & Structures*, 182, 556-572. Lu, X., Xie, L., Guan, H., Huang, Y., & Lu, X. (2015). A shear wall element for nonlinear seismic analysis of super-tall buildings using OpenSees. *Finite Elements in Analysis and Design*, 98, 14-25. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.fin.2015.01.006>
- Marmo, F. (2007). *A fiber-free approach to the inelastic analysis of reinforced concrete structures*. Ph.D Thesis, (Université de Napoli).
- Mazars, J., Kotronis, P., & Davenne, L. (2002). A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 31(4), 937-954. doi:10.1002/eqe.131

- Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., & Casaux, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion: Applications to concrete structural elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52), 7264-7281. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.053>
- Miron, M.-S. (1997). *Analyses statiques et sismiques 3D d'un évacuateur de crues par éléments finis*. Rapport de Maitrise, École Polytechnique Montréal:
- Mixon, B. D. (2008). *The development of a finite element tool for the calculation of beam cross section properties*. (Master Thesis , The University of Texas at Arlington).
- Moftakhar, M., & Ghafouri, H. R. (2011). Comparison of stability criteria for concrete dams in different approximate methods based on finite element analysis. *Procedia Engineering*, 14, 1672-1680. doi:<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.210>
- Mohareb, M., & Nowzartash, F. (2004). Closure to “Exact finite element for nonuniform torsion of open sections” by Magdi Mohareb and Farhood Nowzartash. *Journal of Structural Engineering*, 130(9), 1420-1421.
- Mokos, V. G., & Sapountzakis, E. J. (2011). Secondary torsional moment deformation effect by BEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(10), 897-909. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.08.001>
- Murín, J., Kutiš, V., Královič, V., & Sedlár, T. (2012). 3D beam finite element including nonuniform torsion. *Procedia Engineering* 48, 436-444.
- Neuenhofer, A., & Filippou, F. C. (1997). Evaluation of nonlinear frame finite-element models. *Journal of Structural Engineering - ASCE*, 123(7), 958-966.
- Neuenhofer, A., & Filippou, F. C. (1998). Geometrically nonlinear flexibility-based frame finite element. *Journal of Structural Engineering*, 124(6), 704-711.
- OpenSees. (2016). The Open System for Earthquake Engineering Simulation (Version 2.5.0). Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley. Tiré de <http://opensees.berkeley.edu/index.php>
- Palermo, D., & Vecchio, F. (2007). Simulation of cyclically loaded concrete structures based on the finite-element method. *Journal of Structural Engineering*, 133(5), 728-738.
- Patel, R., Dubey, S. K., & Pathak, K. K. (2014). Effect of depth span ratio on the behaviour of beams. *International Journal of Advanced Structural Engineering (IJASE)*, 6(2). doi:10.1007/s40091-014-0056-3
- Paulay, T., & Priestley, M. J. N. (1992). *Seismic design of RC and masonry buildings*: John Wiley.
- Pavazza, R., & Matoković, A. (2016). Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear, part I: Theory. *Thin-walled structures*. 116, 357-368.
- Pelletier, K. (2015). *Considération de la torsion pour l'analyse sismique non linéaire de noyaux en béton armé*. (Mémoire de Maitrise, Polytechnique Montréal).
- Pilkey, W. (2002). Analysis and Design of Elastic Beams–Computational Methods: John Wiley & Sons, New York.
- Prokon, S. (2019). Prokon frame. Prokon Software Consultants Ltd, Pretoria, South Africa.

- Ribas, C. A. (2011). *Finite element analysis of stresses in beam structures*. School of technology: AALTO university.
- Rodrigues, R. V. (2015). A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending. *Engineering Structures*, 104, 1-17.
- Ruiz, M. F., & Muttoni, A. (2007). On development of suitable stress fields for structural concrete. *ACI Structural journal*, 104(4), 495.
- Sapountzakis, E. J. (2000). Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method. *Computers & Structures*, 77(6), 659-667. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00020-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00020-1)
- Sapountzakis, E. J. (2013). Bars under Torsional Loading: A Generalized Beam Theory Approach. *ISRN Civil Engineering*, 2013, 1-39. doi:10.1155/2013/916581
- Sapountzakis, E. J., & Dikaros, I. C. (2015). Advanced 3D beam element of arbitrary composite cross section including generalized warping effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(1), 44-78. doi:10.1002/nme.4849
- Sapountzakis, E. J., & Mokos, V. G. (2004). Nonuniform torsion of bars of variable cross section. *Computers & Structures*, 82(9), 703-715. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.02.022>
- Saritas, A., & Filippou, F. C. (2009). Inelastic axial-flexure-shear coupling in a mixed formulation beam finite element. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8), 913-922.
- Schlesinger, S. (1979). Terminology for model credibility. *Simulation*, 32(3), 103-104.
- Schulz, M., & Filippou, F. C. (1998). Generalized Warping Torsion Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(3), 339-347. doi:doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:3(339)
- Slaughter, W. S. (2012). *The linearized theory of elasticity*: Springer Science & Business Media.
- Spacone, E., Filippou, F. C., & Taucer, F. F. (1996). Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7), 711-726.
- Stefan, L. (2011). *Modèle constitutif hydromécanique tridimensionnel pour l'analyse de stabilité des piliers d'évacuateur de crues*. (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal). Tiré de <http://publications.polymtl.ca/679/>
- Stefan, L., & Léger, P. (2008). Extension of the gravity method for 3d cracking analysis of spillway piers Including Uplift Pressures. *Journal of Structural Engineering - ASCE*, 134(8), 1035-1043.
- Stefan, L., & Léger, P. (2010). Multicriteria capacity envelopes for biaxial bending of concrete hydraulic structures. *Journal of Structural Engineering*, 136(9), 1035-1043. doi:doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000205
- Stefan, L., & Léger, P. (2011). Elastic sectional stress analysis of variable section piers subjected to three-dimensional loads. *Computers & Structures*, 90-91, 28-41. doi:10.1016/j.compstruc.2011.10.012

- Stefan, L., & Léger, P. (2012). Three-dimensional hydromechanical sectional analysis of cracked nonprismatic concrete spillway piers. *Journal of Structural Engineering*, 138(11), 1310-1320.
- Stramandinoli, R. S. B., & La Rovere, H. L. (2012). FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. *Engineering Structures*, 35, 244-253.
- Taylor, L. R., Filippou, C. F., Saritas, A., & Auricchio, F. (2003). A mixed finite element method for beam and frame problems. *Computational Mechanics*, 31(1), 192-203. doi:10.1007/s00466-003-0410-y
- Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. USA: McGraw-Hill.
- Triantafyllou, S. P., & Koumousis, V. K. (2011). An inelastic Timoshenko beam element with axial-shear-flexural interaction. *Computational Mechanics*, 48(6), 713-727. doi:10.1007/s00466-011-0616-3
- US. Army Corps of Engineers, Engineering and design -USACE (1995), *Gravity Dam Design (engineer manual)*. EM 1110-2-2200. Washington, D.C
- US. Bureau of Reclamation -USBR (1987). *Design of small dams*. Water Resources Technical Publication Series, Denver, Colorado.
- Vásquez, J. A., Llera, J. C., & Hube, M. A. (2016). A regularized fiber element model for reinforced concrete shear walls. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 45(13), 2063-2083.
- Vecchio, F. J., & Collins, M. P. (1986). The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Structural Journal*, 83-22, 219-231.
- Vu-Quoc, L., & Léger, P. (1992). Efficient evaluation of the flexibility of tapered I-beams accounting for shear deformations. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 33(3), 553-566.
- Zeris, C. A., & Mahin, S. A. (1991). Behavior of reinforced concrete structures subjected to biaxial excitation. *Journal Of Structural Engineering*, 117(9), 2657-2673.
- Zhan, C.-X., & Liu, Y.-h. (2015). Plane elasticity solutions for beams with fixed ends. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 16(10), 805-819.
- Zienkiewicz, O. C. (1963). Stress Analysis of Hydraulic Structures Including Pore Pressure Effects. *Water Power*, 15(3), 104-108.
- Zienkiewicz, O. C., & James, P. (1958). Effect of Pore Pressure on Stress Distribution in some Porous Elastic Solids *Water Power (1)* 12-19..