PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Conception et développement d'un robot mobile innovant à manipulateurs parallèles intégrés
Auteur: Author:	Titouan Le Marec
Date:	2020
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Le Marec, T. (2020). Conception et développement d'un robot mobile innovant à manipulateurs parallèles intégrés [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/5453/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/5453/
Directeurs de recherche: Advisors:	Guchuan Zhu, & Richard Gourdeau
Programme: Program:	génie électrique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Conception et développement d'un robot mobile innovant à manipulateurs parallèles intégrés

TITOUAN LE MAREC
Département de Génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie aérospatial

Juillet 2020

© Titouan Le Marec, 2020.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Conception et développement d'un robot mobile innovant à manipulateurs parallèles intégrés

présenté par **Titouan LE MAREC**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

David SAUSSIÉ, président
Guchuan ZHU, membre et directeur de recherche
Richard GOURDEAU, membre et codirecteur de recherche
Jérôme LE NY, membre

REMERCIEMENTS

Un grand merci au professeur Guchuan Zhu, mon directeur de recherche, qui s'est embarqué avec moi dans ce projet de maîtrise original. Un grand merci au professeur Richard Gourdeau qui s'est joint à nous avec enthousiasme, en tant que co-directeur. Leurs conseils m'ont permis de transformer une vision abstraite en un travail passionnant. Mes remerciements vont également aux membres du jury, le professeur David Saussié et le professeur Jérôme Le Ny, pour le temps et l'attention qu'ils ont accordés à mon travail. Je remercie Chris Martins pour ses dessins d'artiste qui ancrent dans notre réalité cette idée lointaine. Je remercie le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour la subvention qui m'a été accordée.

Merci à Marie, Arnaud, Ibrahim, Magnüs, Maxence, Aline, Mélanie et Justin, ces amis rencontrés et retrouvés ici. Une pensée pour Thomas, Gabriel et Éric Tabarly, l'équipage des compétitions et aventures à venir.

RÉSUMÉ

Nous présentons dans ce mémoire une nouvelle architecture de robot mobile intégrant des manipulateurs parallèles. L'architecture est construite autour d'une boucle cinématique reliant les roues et est dépourvue de base centrale. Nous développons une modélisation du système incluant la dynamique mobile par rapport à un repère fixe et l'effet de la boucle cinématique. Nous expliquons comment, en générant des contraintes internes bien choisies dans la boucle cinématique, nous pouvons minimiser le couple de commande et ainsi gagner en autonomie énergétique. Par rapport à un contrôle ne générant pas de contraintes internes, nous réduisons le couple de commande de 55% à 75% sur les tâches effectuées en simulation.

Nous concevons ensuite un contrôleur global permettant au système de réaliser des tâches de référence de la robotique mobile. Nous implémentons un contrôleur par couple pré-calculé dans l'espace des articulations et dans l'espace opérationnel. Nous nous intéressons également aux déplacements sur un sol inégal. Grâce à la stabilité mécanique naturelle du système, nous montrons qu'une méthode bas niveau est suffisante pour permettre le déplacement sur un sol inégal. Nous implémentons une méthode classique d'adaptation cinématique et nous présentons une nouvelle méthode basée sur le contrôle hybride en force et position. Nous montrons que cette nouvelle méthode permet de se passer des capteurs d'efforts verticaux utilisés classiquement sur les rovers articulés.

Afin de compenser les perturbations non modélisées, nous introduisons un observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement. Nous démontrons la stabilité du système complet équipé de l'observateur et de chacun des contrôleurs conçus.

Nous concluons ce travail par une analyse des performances du robot qui découlent de son architecture et une validation par simulation. Nous demandons au système de réaliser une tâche de manipulation dans l'espace et de traverser un terrain inégal.

ABSTRACT

This thesis presents the development of a new mobile robot with fully integrated parallel manipulators. The architecture of this new system has no central base and is built around a kinematic loop connecting the wheels. A model of the system including the mobile dynamics with respect to a fixed reference frame and the internal constraints due to the kinematic loop is first established. These constraints are then exploited to minimize the control torque in order to gain energy autonomy. When compared to a control without this exploitation of internal constraint, the euclidean norm of the control torque is reduced by 55% to 75% over the course of the tasks implemented in numerical simulation.

A global controller is then designed, which allows the system to perform basic mobile robotic tasks. A pre-calculated torque controller is implemented in both joint space and operational space. The movement of the robot on uneven ground is also adressed. Due to the inherent stability of the robot, it can be shown that a low-level control scheme is sufficient to guarantee the stability. A classical method of kinematic adaptation is first implemented, and a new scheme based on hybrid force and position control is presented. It is shown that this new method makes it possible to operate the system without the vertical force sensors classically used in articulated rovers.

In order to compensate unmodelled disturbances, a momentum-based disturbance observer is introduced. Closed-loop stability of the complete system equipped with the observer and the designed controllers is assessed by the Lyapunov method.

Finally, the performance of the developed robotic system with the proposed control strategies is validated by numerical simulations while performing a manipulation task and crossing an uneven terrain.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iii

RÉSUMÉ iv

ABSTRACT v

TABLE DES MATIÈRES vi

LISTE DES TABLEAUX ix

LISTE DES FIGURES x

LISTE DES ANNEXES xii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Motivation et origine de la problématique 2
1.2 Problématique et objectifs de recherche 5
1.3 Plan du mémoire et contributions 5

CHAPITRE 2 CONCEPTS DE BASE DE LA ROBOTIQUE 7
2.1 Description d'un système multi-corps 7
2.1.1 Topologie d'un assemblage de corps rigides 7
2.1.2 Géométrie des connections entre les corps 9
2.1.3 Positionnement d'un corps dans l'espace 11
2.1.4 Algèbre et formalisme spatial 12
2.1.5 Utilisation des transformées de Plücker 13
2.1.6 Propriétés inertielles d'un corps 14
2.2 Considérations historiques sur les concepts fondamentaux de la robotique . . 14
2.2.1 Historique du contrôle en position 14
2.2.2 Intégration du contact au sol 15
2.2.3 Rejet des perturbations extérieures et gestion des erreurs de modélisations 16

CHAPITRE 3 ARCHITECTURE ET MODELISATION 17
3.1 Présentation du système développé 17
3.2 Modélisation du système 22
3.2.1 Représentation d'état dans l'espace articulaire 22

3.2.2 Représentation d'état dans l'espace opérationnel 22
3.2.3 Description du modèle géométrique 23
3.2.4 Description du modèle cinématique 24
3.2.5 Description du modèle de contact 25
3.2.6 Description du modèle dynamique 25
3.2.7 Particularité de la dynamique d'un robot mobile 28
3.2.8 Effet de la boucle cinématique 30
3.2.9 Optimisation par contraintes internes 32
3.2.10 Forme finale de la modélisation dynamique 33

CHAPITRE 4 COMPOSANTS DU CONTRÔLEUR 34
4.1 Aperçu de la structure de contrôle 34
4.2 Générateur de trajectoire 34
4.3 Systèmes de contrôle en position 35
4.3.1 Couple pré-calculé dans l'espace des articulations 35
4.3.2 Couple pré-calculé dans l'espace opérationnel 36
4.4 Déplacement sur un sol inégal 37
4.4.1 Spécification des tâches 37
4.4.2 Méthode 1 : Adaptation cinématique 41
4.4.3 Méthode 2 : Contrôle hybride 42
4.4.4 Intégration dans la boucle de contrôle 46
4.5 Observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement 46
4.5.1 Intégration avec le contrôleur en amont 47
4.5.2 Couple de régulation compensé 48
4.5.3 Dynamique du système en boucle fermée 48
4.6 Preuve de stabilité du système complet 50
4.6.1 Injection de la dynamique du contrôleur 51
4.6.2 Preuve de stabilité 53

CHAPITRE 5 PERFORMANCES, SIMULATION ET RESULTATS 58
5.1 Performances architecturales du système 58
5.1.1 Intégration de manipulateurs parallèles 58
5.1.2 Reconfiguration du système et espace de travail 58
5.1.3 Reconfiguration et suspensions actives 59
5.1.4 Architecture décentralisée 59
5.1.5 Résistance au renversement 61
5.2 Modélisation et implémentation numérique 62

5.2.1 Résumé des configurations de contrôleurs possibles 63
5.2.2 Réglages des gains 64
5.3 Résultats expérimentaux sur des tâches de références 64
5.3.1 Fonctionnement en conditions optimales 64
5.3.2 Ajouts d'éléments non-modélisés 69
5.3.3 Simulation d'une tâche de manipulation lors du déplacement sur un sol inégal 72

CHAPITRE 6 CONCLUSION 76
6.1 Synthèse des travaux 76
6.2 Limitations de la solution proposée 76
6.3 Améliorations futures 77

RÉFÉRENCES 78

ANNEXES 83

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Numérotation associée à la topologie d'un système	8
Tableau 2.2	Convention de Denavit-Hartenberg modifiée - Exemple	11
Tableau 2.3	Fonctions de construction des transformées de Plücker	13
Tableau 3.1	Description de Denavit-Hartenberg du premier quadrant	18
Tableau 3.2	Description de Denavit-Hartenberg d'une roue	19
Tableau 3.3	Architecture à quatre quadrants - Paramètres de Denavit-Hartenberg	21
Tableau 3.4	Architecture à quatre quadrants - Repères pour la fermeture de boucle	21
Tableau 3.5	Représentation par vecteur d'état dans l'espace articulaire	22
Tableau 3.6	Représentation par vecteur d'état dans l'espace opérationnel	23
Tableau 5.1	Gains des composants du contrôleur.	64
Tableau 5.2	Description des deux niveaux d'erreurs introduits pour simuler des perturbations.	69
Tableau A.1	Valeur des dimensions du système utilisés (cf. tableau 3.3)	83

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Exemples de robots bipèdes. De gauche à droite : WL-10 RD, ASIMO et ATLAS. 3
Figure 1.2 Exemples de robots multi-jambes. De gauche à droite : Cheetah, ANYmal et Spot Mini. 3
Figure 1.3 Exemples de rovers articulés. De gauche à droite : HYLOS, ATHLETE et SHERPA. 3
Figure 2.1 Topologie d'un manipulateur. 8
Figure 2.2 Topologie d'un manipulateur à base mobile. 8
Figure 2.3 Topologie d'un manipulateur mobile avec une boucle cinématique. . . 8
Figure 2.4 Convention de Denavit-Hartenberg modifiée - Exemple 11
Figure 3.1 Vue d'artiste du système équipé de quatres roues. 17
Figure 3.2 Vue d'artiste du système équipé d'un gripper et d'un conteneur. . . . 18
Figure 3.3 Schéma cinématique d'un quadrant équipé d'une roue. 19
Figure 4.1 Structure générale des algorithmes de commande. 34
Figure 5.1 Illustration de l'espace accessible du T_3. 59
Figure 5.2 Illustration de la reconfiguration de la posture du système pour s'adapter au terrain. 59
Figure 5.3 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture, avec une distribution uniforme de la masse. 60
Figure 5.4 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture, lorsqu'une forte charge est portée par T_1. La posture de droite recentre $\boldsymbol{G}$. 60
Figure 5.5 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture lorsque le torse T_3 est en mode manipulateur. 61
Figure 5.6 Illustration d'un renversement et de la conséquence 61
Figure 5.7 Structure de l'environnement de simulation 62
Figure 5.8 Schéma Simulink de l'environnement de simulation 63
Figure 5.9 Suivi de trajectoire en pointillés oranges par le torse T_2. 65
Figure 5.10 Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec les quatre configurations possibles de contrôleurs. Contrôleurs 1 et 2 à gauche et contrôleurs 3 et 4 à droite. 66
Figure 5.11 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec les contrôleurs 3 et 4. 66

Figure 5.12 Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 par le contrôleur 4, avec et sans optimisation du couple de commande. 67
Figure 5.13 Passage d'une rampe simulant un sol inégal. 68
Figure 5.14 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du passage sur une rampe avec les contrôleurs 3 et 4. 68
Figure 5.15 Évolution de la norme du couple de commande sur une tâche de déplacement en terrain inégal, avec et sans optimisation par contraintes internes. 69
Figure 5.16 Gauche : Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec le contrôleur 4 après introduction d'erreurs de modélisation. Droite : Effet de l'optimisation par contraintes internes sur le cas de l'erreur 1. . . . 70
Figure 5.17 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec le contrôleur 4 après introduction d'erreurs de modélisation. 71
Figure 5.18 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du passage sur une rampe avec le contrôleur 4 après introduction des erreurs 1 et 2. 72
Figure 5.19 Évolution de la norme du couple de commande sur une tâche de déplacement en terrain inégale, avec et sans optimisation par contraintes internes, avec l'erreur 1. 72
Figure 5.20 Illustration de la tâche combinant manipulation et déplacement sur sol inégal. 73
Figure 5.21 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors d'une tâche de manipulation en terrain inégal avec le contrôleur 4 après introduction de l'erreur 2. 74
Figure 5.22 Suivi en position du torse T_4. À gauche : par rapport au torse T_1. Àdroite : par rapport au repère fixe. 74

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Équations de la cinématique inverse 83

Annexe B Preuve de stabilité du système complet avec un contrôleur en position basé sur la passivité 87

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce travail aux défis de la robotique mobile. Nous rassemblons en trois critères, les caractéristiques majeures qu'un robot mobile doit posséder pour effectuer une mission classique :

Mobilité : L'aptitude à évoluer dans un environnement complexe.

Manipulabilité : L'aptitude à interagir avec l'environnement.

Autonomie énergétique : La durée pendant laquelle le robot peut réaliser les deux tâches précédentes.

Les performances d'un robot mobile mesurées selon ces trois caractéristiques sont définies par son architecture et l'algorithmique embarquée. Ces deux composantes sont liées, mais les capacités d'un robot sont ultimement définies et limitées par l'architecture. L'algorithmique permet d'exploiter le potentiel d'une architecture mais ne peut pas l'étendre. Aucun algorithme ne permettra à une voiture de nager.

Historiquement, les avancées en déploiement de robot mobile sont associées à l'augmentation de la puissance embarquée et à l'amélioration des batteries plutôt qu'aux progrès sur les architectures. En effet, les robots classiques avec de nombreux degrés de liberté sont théoriquement capables d'une grande mobilité et manipulabilité et ceci depuis plusieurs décennies. Par exemple, les premiers bipèdes et quadrupèdes furent capables de monter des escaliers il y a des décennies mais avec des mouvements très conservateurs. Nous donnons l'exemple du robot WL-10 RD datant de 1985 [1]. Leur complexité architecturale rend difficile le développement d'algorithmes pour les contrôler. La dynamique de leur centre de gravité doit être prise en compte pour éviter les renversements et les mouvements de tous les membres doivent être coordonnés pour ne pas déséquilibrer le robot. Si les systèmes modernes sont maintenant capables de monter des escaliers avec des trajectoires calculées dynamiquement tout en étant robustes aux chocs c'est grâce aux techniques de contrôle modernes et à la puissance de calcul disponible. Nous réitérons notre première observation : L'architecture mécanique défini et limite les capacités d'un robot tandis que l'algorithmique embarquée permet d'exploiter ces capacités du mieux possible, sans les étendre. Ce constat nous pousse à nous questionner sur la possibilité de créer une nouvelle architecture dont les capacités seraient supérieures à celles existantes. Notre démarche créative est avant tout centrée sur l'architecture et non l'algorithmique.

1.1 Motivation et origine de la problématique

Nous présentons dans cette section la motivation qui a mené au travail présenté dans ce mémoire. Les considérations qui suivent, sur les architectures classiques, furent essentielles à la création de notre architecture. Nous nous intéressons donc aux architectures robotiques à haute mobilité et capables de manipulation :

Bipèdes Par mimétisme de l'architecture humaine, ils sont naturellement adaptés aux environnements humains. Les bras servent de manipulateurs. Un historique des robots bipèdes peut être trouvé dans l'article [2]. Nous montrons sur la figure 1.1 les robots WL-10 RD [1], ASIMO [3] et ATLAS [4]. La forme de ces architectures a peu évolué et le travail se focalise sur l'algorithmique de contrôle. À cause de leur centre de gravité élevé et de leur faible marge de stabilité, ces architectures sont les plus difficiles à déployer sur le terrain.

Robots multi-jambes L'exemple notable des robots multi-jambes est le quadrupède. Ces robots possèdent une plus grand liberté de placement de jambes que les bipèdes. Il est possible d'utiliser les jambes comme manipulateur, ou d'installer un manipulateur dédié sur le châssis. Un historique des robots multi-jambes peut être trouvé dans l'article [2]. Parmi les quadrupèdes existants nous montrons sur la figure 1.2 les séries Cheetah du MIT [5], ANYmal de l'ETH Zurich [6] et Spot Mini de Boston Dynamics [7].

Rovers articulés Les rovers articulés représentent une classe hybride de robots multi-jambes bénéficiant des avantages de jambes articulées permettant un positionnement précis des points d'appui et de la faible demande énergétique des roues. Nous pouvons utiliser les jambes comme manipulateur, où en installer un sur le châssis. Plusieurs rovers à suspensions passives ont été déployés lors de missions spatiales, par exemple les rovers de la NASA [8]. La recherche actuelle s'intéresse aux suspensions actives, comme les séries HYLOS [9] ATHLETE [10] et plus récemment SHERPA [11]. La figure 1.3 montre ces systèmes.

Quels que soient l'époque et le type, ces architectures partagent une caractéristique : elles sont toutes construites autour d'une base centrale à laquelle sont fixés les membres. Le travail présenté dans ce mémoire a été motivé par un questionnement sur l'utilité de la base centrale. Les paragraphes suivants rassemblent nos constats et réflexions.

Origine biomimétique de la base centrale Pour un être humain la base centrale semble naturelle. La majorité des êtres vivants est équipée d'un torse auquel sont rattachés les

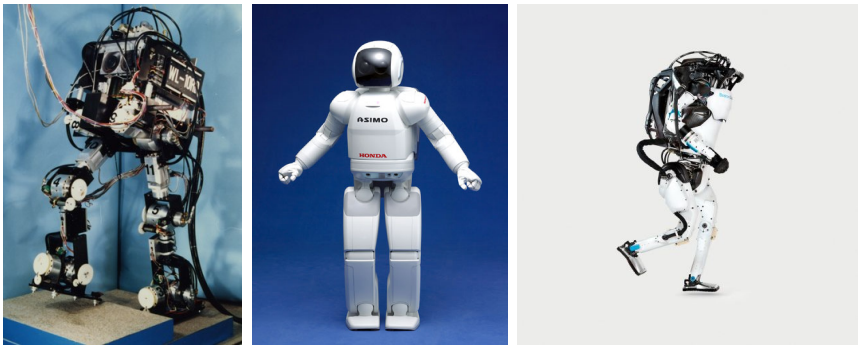

Figure 1.1 Exemples de robots bipèdes. De gauche à droite : WL-10 RD, ASIMO et ATLAS.

Figure 1.2 Exemples de robots multi-jambes. De gauche à droite : Cheetah, ANYmal et Spot Mini.

membres. L'intégration d'une base centrale sur un système robotique peut se justifier par un argument de biomimétique. Cette approche est peu risquée, des millions d'années d'évolution ont validé cette forme. De plus, nous disposons de références dans le monde animale qui simplifient la génération de trajectoire et le positionnement des actionneurs. Les quadrupèdes s'inspirent des musculatures et démarches des canidés et félins. De façon similaire, il semble logique de placer les organes vitaux dans cette base. En robotique, la base accueille naturellement les capteurs, la batterie et le microcontrôleur du robot.

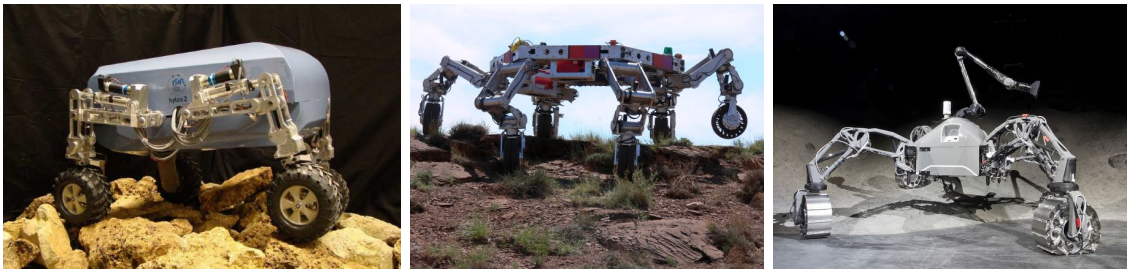

Figure 1.3 Exemples de rovers articulés. De gauche à droite : HYLOS, ATHLETE et SHERPA.

Un objet inerte qui impacte la mobilité Nous faisons le constat suivant, autant pour les êtres vivants que pour les robots : la base centrale est un objet inerte. Elle rassemble des fonctions vitales au fonctionnement mais ne permet pas le mouvement. Par exemple, un humain a besoin de son système cardiovasculaire pour marcher mais utilise ses jambes et ses bras pour le faire. Un robot a besoin de sa batterie pour se déplacer mais génère le mouvement avec ses membres. En pratique, la base crée des limitations sur les terrains traversables. Comme la base est inerte, une trajectoire n'est possible que si la base centrale peut éviter les obstacles. Par exemple, seul un véhicule au châssis élevé peut traverser une plaine rocailleuse. Mais une base centrale élevée réduit la stabilité car elle concentre la majorité de la masse et élève le centre de gravité.

Effort algorithmique nécessaire au mouvement Un être vivant réalise un travail sensoriel et neurologique pour conserver sa stabilité. Une chute est contre-productive voire même dangereuse. Lorsque nous sommes immobiles, nous conservons notre torse au dessus de nos pieds pour ne pas basculer. Et en mouvement, nous déplaçons nos pieds de façon à générer une accélération vers l'avant, tout autre mouvement est corrigé. Un travail similaire est nécessaire pour les robots mobiles possédant un grand nombre de degrés de libertés. L'objectif est identique, nous cherchons à éviter le renversement. La méthode classique est basée sur l'utilisation du *Zero-Moment-Point* (ZMP) [12]. Le ZMP est le point dans le plan du sol où les moments des forces de contact sont nulles. A travers le mouvement des membres et la position des contacts au sol, nous cherchons à positionner le ZMP dans une zone de stabilité pré-définie. On choisi typiquement le polygone dessiné par les points de contact du robot. Ceci nous garantit que le robot ne basculera pas. La position élevée du centre de gravité, à cause de la base centrale, limite l'ensemble de mouvements garantissant la stabilité. Lorsqu'il faut générer la trajectoire de quatre jambes, à haute fréquence et sur microcontrôleur embarqué, la tâche devient complexe. Par exemple, l'équipe de l'ETH Zurich embarque sur leur quadrupède ANYmal un générateur de mouvement utilisant l'optimisation quadratique [6, 13–15]. Ce genre d'implémentation n'a été rendu possible que récemment car elle nécessite une grande puissance de calcul et consomme beaucoup d'énergie.

Changement de paradigme Bien que le paradigme classique d'une architecture construite autour d'une base centrale semble naturel, il pose quelques limitations en terme de mobilité. La conception de notre nouvelle architecture fut motivée par la réflexion suivante : **Pouvons-nous supprimer la base centrale et créer une architecture composée uniquement de membres ?** Nous espérons par ce changement de paradigme augmenter la mobilité de notre architecture. Tout d'abord en supprimant cet objet inerte face aux obstacles du terrain

et en simplifiant le travail algorithmique nécessaire pour générer des mouvements garantissant la stabilité du système. Nous notons que l'absence de base centrale crée une série de problématiques nouvelles. Il sera nécessaire de placer les batteries, les capteurs et le microcontrôleur dans les membres.

1.2 Problématique et objectifs de recherche

L'objectif de ce travail de maîtrise est, premièrement, le design et la description d'une nouvelle architecture de robot mobile, et deuxièmement, le développement d'une suite d'algorithmes de contrôle permettant de valider en simulation les performances du système. Nous séparons le travail selon une liste de sous-objectifs :

1. Conceptualisation et description d'une nouvelle architecture de robot mobile ;
2. Modélisation de l'architecture en intégrant la dynamique mobile, et les contraintes internes dues à la boucle cinématique ;
3. Développement d'un contrôleur en position pour le système nominal (parfaitement modélisé) ;
4. Développement d'une technique bas niveau d'adapation à un sol inégal ;
5. Intégration d'un élément de robustesse pour compenser les erreurs de modélisation et les perturbations extérieures ;
6. Validation du système et des algorithmes de contrôle sur des tâches de référence de la robotique mobile.

Pour chaque étape, nous cherchons à capitaliser sur les propriétés architecturales du robot pour simplifier le travail et améliorer les performances.

1.3 Plan du mémoire et contributions

Nous établissons au chapitre 2 les concepts de base nécessaires à la compréhension du travail réalisé. Nous présentons un historique des concepts de base de la robotique. Puis, nous considérons le contrôle en position, l'intégration du contact au sol dans les schémas de contrôle et la gestion des perturbations subies lors du fonctionnement.

Nous établissons dans le chapitre 3 une description d'une nouvelle architecture de robot mobile en utilisant le formalisme présenté au chapitre 2. Cette nouvelle architecture est dépourvue de base centrale et organisée autour d'une boucle cinématique principale. Elle intègre naturellement des manipulateurs parallèles. Un modèle du système est établi sous la

forme des équations du mouvement. Une attention particulière est portée au formalisme pour unifier les différents aspects de ce robot complexe (robot mobile et architecture parallèle). Nous expliquons comment utiliser les contraintes internes créées par la boucle cinématique de notre architecture pour minimiser la norme du couple de commande et gagner en autonomie énergétique.

Le chapitre 4 présente les algorithmes de contrôle. Nous implémentons un contrôle en position par couple pré-calculé, d'abord dans l'espace des articulations puis dans l'espace opérationnel. Nous présentons ensuite deux méthodes bas niveau d'adaptation sur sol inégal : la méthode de référence d'adaptation cinématique [16] et une nouvelle méthode basée sur le contrôle hybride en force et en position. Nous montrons que cette méthode permet de traverser un terrain inégal sans capteurs d'efforts. Pour compenser les perturbations, nous ajoutons un observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement. Nous démontrons finalement la stabilité du système en boucle fermée lorsque les contrôleurs et l'observateur de perturbation sont utilisés pour le contrôler.

Nous concluons notre travail au chapitre 5 avec une analyse des performances de la nouvelle architecture et une validation des contrôleurs développés.

CHAPITRE 2 CONCEPTS DE BASE DE LA ROBOTIQUE

2.1 Description d'un système multi-corps

Pour faciliter la compréhension de l'architecture de notre système, nous définissons un modèle permettant de décrire un système multi-corps de façon unique et complète. Les notations utilisées ici sont basées sur le *Handbook of Robotics* de Siciliano et Khatib [17]. Le lecteur est référé aux chapitres 1 et 2. Nous considèrons ici un robot comme un système multi-corps composé de corps et de joints. Il faut alors définir les corps, les joints et la topologie du système complet.

2.1.1 Topologie d'un assemblage de corps rigides

Connectivité

Pour représenter la topologie d'un système multi-corps nous utilisons un *arbre de connectivité* comportant tous les corps et tous les joints :

- un nœud représente la base fixe ;
- les autres nœuds représentent les corps ;
- les arcs représentent les joints.

Un exemple est donné figure 2.1.

Système mobile et boucle cinématique

Pour un système mobile, par exemple un rover, nous distinguons deux bases : une base fixe et la base flottante du système. La base flottante possède six degrés de liberté par rapport à la base fixe dans le repère galiléen. Nous ajoutons alors un corps (la base fixe) et un joint à six degrés de liberté distingués par des pointillés dans l'arbre de connectivité (figure 2.2).

Si le système comporte des boucles cinématiques, nous extrayons un sous-arbre de connectivité en ouvrant les boucles. Nous distinguons les joints ouverts par une coupure dans l'arbre de connectivité (figure 2.3). Ces liens sont nommés *joints de fermeture de boucle*.

Numérotation

Pour identifier les liens et les joints, nous appliquons à l'arbre de connectivité le *schéma de numérotation régulière*. Les corps (nœuds) seront numérotées de 0 à N_B et les joints (arcs)

de 1 à N_J. Les boucles cinématiques indépendantes sont numérotées de 1 à $N_L = N_J - N_B$.

Tableau 2.1 Numérotation associée à la topologie d'un système

Paramètre	Définition
N_B	Nombre de corps mobiles (donc excluant la base fixe).
N_J	Nombre de joints.
$N_L = N_J - N_B$	Nombre de boucles cinématiques indépendantes.
$n = 6 + N_B$	Dimension du système mobile

Nous définissons les règles suivantes applicables à tout arbre de connectivité :

— le nœud représentant la base fixe est numéroté 0 ;

— les autres nœuds sont consécutivement numérotés de 1 à N_B dans un ordre quelconque tel que le nœud i à un numéro plus élevé que son parent ;

— les arcs sont numérotés de 1 à N_B, l'arc i connecte le nœud i à son parent ;

— les arcs restants sont numérotés de $N_B + 1$ à N_J. Il s'agit des joints de fermeture de boucle.

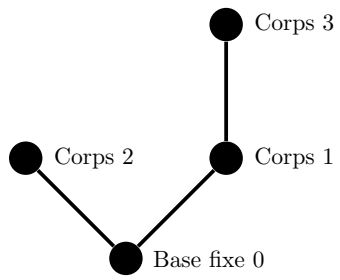

Figure 2.1 Topologie d'un manipulateur.

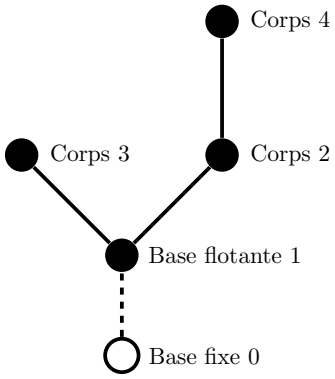

Figure 2.2 Topologie d'un manipulateur à base mobile.

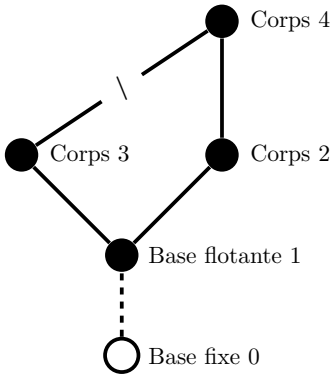

Figure 2.3 Topologie d'un manipulateur mobile avec une boucle cinématique.

Polarité des connections

L'arbre de connectivité n'est pas orienté mais nous définissons une polarité : chaque joint connecte deux corps, un prédécesseur et un successeur. Nous définissons l'ensemble :

$$\{p(\mathrm{i}), \mathrm{i} \in [1, N_B]\}\,, \tag{2.1}$$

tel que le joint i connecte le corps prédécesseur p(i) au corps successeur i. Le corps p(i) est le parent du corps i.

Description du joint de fermeture d'une boucle cinématique

Pour paramétrer un système comportant une boucle cinématique, nous décrivons d'abord le système équivalent en ouvrant la boucle au niveau du joint de fermeture.

Nous posons k $\in [N_B + 1, N_J]$ l'indice identifiant le joint de fermeture. Ce joint relie un corps prédécesseur p(k) et un corps successeur. Pour une architecture série, le joint i relie le prédécesseur p(i) au successeur i. Pour un joint de fermeture, le corps successeur n'est pas identifié par k. On crée un nouvel ensemble qui identifie les corps successeurs des joints de fermeture :

$$\{s(\mathrm{k}), \mathrm{k} \in [N_B + 1, N_J]\}\,. \tag{2.2}$$

A chacun de ces corps, nous associons deux repères de chaque coté de l'ouverture de boucle. Lorsque le joint de fermeture est fermé, ces deux repères se superposent exactement.

2.1.2 Géométrie des connections entre les corps

Une description complète de la connection de deux corps par un joint nécessite une description du joint et de la position du joint sur chaque corps.

Définitions de la dynamique des joints

Un joint impose une contrainte de mouvement entre les corps qu'il lie. Nous considérons ici uniquement les liaisons pivots. Un joint pivot permet une rotation selon son axe $\vec{z}$ et impose des vitesses nulles selon les cinq autres directions. Nous définissons $\boldsymbol{v}_J$ la vitesse du successeur relative au prédécesseur, exprimée dans le repère du joint. Nous posons alors $\dot{\boldsymbol{q}}$ le vecteur des variables de vitesses du joint. Pour notre joint pivot, il s'agit de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_z$ autour de l'axe $\vec{z}$. Nous pouvons alors définir la matrice $\mathbf{S}_{v,pivot}$ qui défini le sous-espace de transmission des mouvements du joint pivot :

$$\boldsymbol{v}_J = \mathbf{S}_{v,pivot}\,\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_z. \tag{2.3}$$

De façon similaire, nous définissons la force spatiale $\boldsymbol{f}_J$ transmise du prédécesseur au successeur. La force actant sur le successeur est $\boldsymbol{f}_J$ et celle sur le prédécesseur est $-\boldsymbol{f}_J$. Nous posons $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur des variables de force du joint. Pour notre joint pivot, il s'agit des moments M_x, M_y et des forces F_x, F_y et F_z. Nous pouvons alors définir la matrice $\mathbf{S}_{f,pivot}$ qui défini le sous-espace de transmission des forces du joint pivot :

$$\boldsymbol{f}_J = \mathbf{S}_{f,pivot}\,\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Paramètres de Denavit-Hartenberg

Nous présentons les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés par Khalil et Kleinfinger [18]. Cette version introduite en 1986 est plus adaptée aux robots en arbre et comportant des boucles cinématiques. Ils permettent de décrire la position des corps par rapport à leurs parents et expriment ainsi la topologie du système. Il est nécessaire de suivre les règles suivantes, réduites au cas d'un système comportant uniquement des joints pivots :

1. L'axe z_i est aligné avec l'axe de rotation du joint i.
2. L'axe x_i est la perpendiculaire commune à $z_{p(\mathrm{i})}$ et z_i, orienté de $z_{p(\mathrm{i})}$ vers z_i.

Nous définissons alors le repère R_i associé au corps i, défini par les axes z_i, x_i et y_i qui est défini de façon à former un repère direct. Nous nommons paramètres de Denavit-Hartenberg les paramètres suivants qui permettent de construire le repère R_i en partant du repère $R_{p(\mathrm{i})}$:

α_i : l'angle entre $z_{p(\mathrm{i})}$ et z_i autour de x_i ;

d_i : la distance entre $x_{p(\mathrm{i})}$ et x_i selon z_i ;

a_i : la distance entre $z_{p(\mathrm{i})}$ et z_i selon $x_{p(\mathrm{i})}$;

θ_i : l'angle entre $x_{p(\mathrm{i})}$ et x_i autour de z_i.

Si un corps $p(\mathrm{i})$ est parent de plus d'un corps, nous définissons l'axe x'_i avec γ_i l'angle entre x_i et x'_i et ϵ_i la distance selon z_i entre x_i et x'_i. Le reste de la paramétrisation se fait en utilisant x'_i à la place de x_i

Nous donnons avec le tableau 2.2 et la figure 2.4, un cas d'application.

Tableau 2.2 Convention de Denavit-Hartenberg modifiée - Exemple

Parent p(i)	Corps i	Nom du corps	Repère	α_{i}	d_{i}	a_{i}	θ_{i}	γ_{i}	ϵ_{i}
Base 0	1	Corps 1	R_1	$\alpha_1 = 0$	d_1	$a_1 = 0$	θ_1	0	0
1	2	Corps 2	R_2	α_2	d_2	a_2	θ_2	0	0

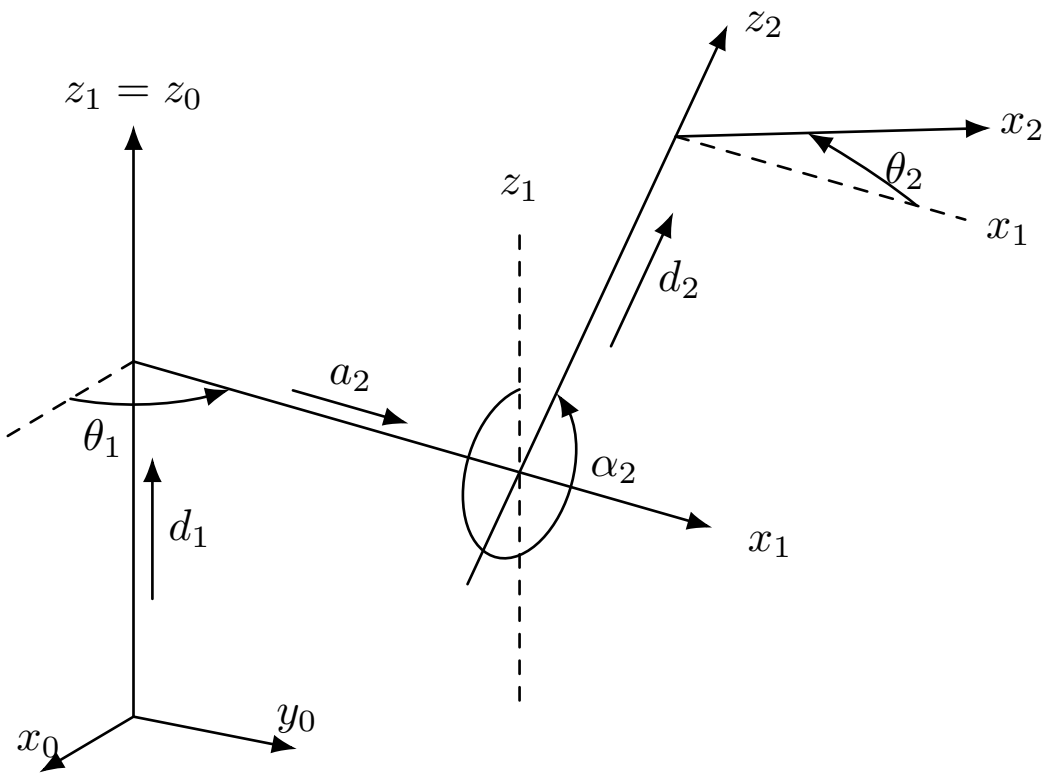

Figure 2.4 Convention de Denavit-Hartenberg modifiée - Exemple

2.1.3 Positionnement d'un corps dans l'espace

La convention de Denavit-Hartenberg modifiée introduite ci dessus permet de positionner relativement les repères associés à deux corps, liés par une liaison pivot, à l'aide d'un nombre minimal de quatre paramètres. Nous présentons maintenant les paramètres plus généraux permettant de positionner un repère dans l'espace par rapport à un autre. Il nous faut alors six paramètres. Pour exprimer les translations linéaires séparant un repère R_{i} d'un repère $R_{p(\mathrm{i})}$, nous utilisons le vecteur ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}$ regroupant les coordonnées cartésiennes du repère R_{i} exprimées dans le repère $R_{p(\mathrm{i})}$:

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\top}. \tag{2.5} $$

Pour exprimer la rotation entre ces repères, nous utilisons le vecteur d'orientation ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{o}_{\mathrm{i}}$ qui utilise les angles fixes ψ, θ et ϕ :

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{o}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^{\top}. \tag{2.6} $$

Les angles ψ, θ et ϕ représentent les rotations successives autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ du repère $R_{p(\mathrm{i})}$, pour passer du repère $R_{p(\mathrm{i})}$ à R_{i}.

Nous définissons également, pour un vecteur 3D, la forme de produit vectoriel défini par l'opérateur $\times$. Par exemple :

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7} $$

2.1.4 Algèbre et formalisme spatial

Nous présentons maintenant le formalisme du vecteur spatial définit par Rodriguez et al. [19]. Un vecteur spatial combine en six dimensions les aspects linéaires et angulaires des mouvements et des forces. Par exemple, ce formalisme regroupe efficacement les six paramètres nécessaires pour décrire la position d'un repère dans l'espace. Nous exprimons la position spatiale ${}^{p(\mathrm{i})}\mathbf{x}_{\mathrm{i}}$ du repère R_{i} par rapport au repère $R_{p(\mathrm{i})}$ en utilisant les vecteurs 3D d'orientation et de position :

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\mathbf{x}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{o}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix}. \tag{2.8} $$

De façon similaire à la position, nous définissons la vitesse spatiale $\mathbf{v}_{\mathrm{i}}$ du repère R_{i}, exprimée dans le repère $R_{p(\mathrm{i})}$, en utilisant ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}$ et ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ les vitesses angulaires et linéaires du repère R_{i} :

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\mathbf{v}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{o}}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix}. \tag{2.9} $$

Pour finir, nous définissons l'accélération spatiale du repère R_{i}. Nous commençons par rappeler la représentation classique de l'accélération qui consiste à différentier deux fois l'orientation et la position du repère R_{i} dans le repère $R_{p(\mathrm{i})}$:

$$ {}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{a}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\ddot{\boldsymbol{o}}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\ddot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix}. \tag{2.10} $$

Cette représentation classique de l'accélération d'un corps n'est pas la véritable dérivée de sa vitesse spatiale. En effet, lors de la différentiation de ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$ un terme supplémentaire apparaît dû à la vitesse de rotation ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}$ du repère R_{i} par rapport à $R_{p(\mathrm{i})}$. L'accélération spatiale, véritable dérivée de la vitesse spatiale, est donc :

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{p(\mathrm{i})}\ddot{\boldsymbol{o}}_{\mathrm{i}} \\ {}^{p(\mathrm{i})}\ddot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{i}} - {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{o}}_{\mathrm{i}} \times {}^{p(\mathrm{i})}\dot{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{i}} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

2.1.5 Utilisation des transformées de Plücker

Nous présentons maintenant la transformée de Plücker ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})}$ qui permet de transformer un vecteur spatial exprimé dans le repère $R_{p(\mathrm{i})}$, en son homologue exprimé dans le repère R_{i}. Nous présentons d'abord les fonctions de construction des transformées dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 Fonctions de construction des transformées de Plücker

$$\mathrm{rx}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ry}(\theta) = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rz}(\theta) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec : $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{xlt}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{p}\times & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rotx}(\theta) = \mathrm{rot}(\mathrm{rx}(\theta))$$
$$\mathrm{roty}(\theta) = \mathrm{rot}(\mathrm{ry}(\theta))$$
$$\mathrm{rotz}(\theta) = \mathrm{rot}(\mathrm{rz}(\theta))$$

Grâce aux fonctions de construction du tableau 2.3 nous pouvons représenter l'orientation du repère R_{i} par rapport à $R_{p(\mathrm{i})}$ à l'aide de la matrice de rotation ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})}$, construite à partir du vecteur d'orientation ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{o}_{\mathrm{i}}$ défini dans l'équation 2.6. Ces deux notations sont équivalentes et reliées par l'équation :

$${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})} = \mathrm{rz}(\phi)\,\mathrm{ry}(\theta)\,\mathrm{rx}(\psi). \tag{2.12}$$

Nous expliquons d'abord comment construire la transformée de Plücker ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})}$ en utilisant ${}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}$ la position de R_{i} exprimée dans le repère $R_{p(\mathrm{i})}$ et ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})}$ la matrice rotation de $p(\mathrm{i})$ vers i :

$${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})} & \boldsymbol{0} \\ -{}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})}\,{}^{p(\mathrm{i})}\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}\times & {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{p(\mathrm{i})} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Il est également possible de construire la transformée ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})}$ en utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg. On se place alors dans le cas où deux corps sont reliés par une liaison pivot. Nous construisons d'abord la transformée constante ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}p(\mathrm{i})}$ qui dépend uniquement de

la géométrie des corps, puis ${}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{J}p(\mathrm{i})}$ la transformée qui dépend de la variable de joint θ_{i}. En utilisant les paramètres présentés dans la section 2.1.2 nous obtenons l'équation :

$$ {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})} = {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{J}p(\mathrm{i})}\,{}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}p(\mathrm{i})} \text{ avec } \begin{cases} {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T}p(\mathrm{i})} = \mathrm{xlt}\begin{bmatrix} a_{\mathrm{i}} & 0 & d_{\mathrm{i}} \end{bmatrix}^{\top} \mathrm{rotx}(\alpha_i), \\ {}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{J}p(\mathrm{i})} = \mathrm{rotz}(\theta_{\mathrm{i}}). \end{cases} \tag{2.14} $$

2.1.6 Propriétés inertielles d'un corps

Nous exprimons finalement les informations inertielles du corps i. Nous construisons la matrice d'inertie généralisée $\boldsymbol{I}_{\mathrm{i}}$ du corps i exprimé au repère R_{i}. Sachant que m est la masse du corps, $\bar{\boldsymbol{I}}_{COG}$ la matrice d'inertie classique du corps exprimée au centre de gravité et $\boldsymbol{c}$ est la position du centre de gravité dans le repère R_{i} :

$$ \boldsymbol{I}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_{COG} + m\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}\times^{\top} & m\boldsymbol{c}\times \\ m\boldsymbol{c}\times^{\top} & m\mathbf{1}_3 \end{bmatrix}, \tag{2.15} $$

où $\mathbf{1}_3$ est la matrice identité de taille 3×3. Cette information est stockée en parallèle des paramètres de Denavit-Hartenberg pour décrire une architecture. Elle sera récupérée par les algorithmes qui construisent le modèle dynamique.

2.2 Considérations historiques sur les concepts fondamentaux de la robotique

Nous considérons un système robotique décrit par le formalisme établi à la section précédente. Nous abordons maintenant les concepts de base de la robotique.

2.2.1 Historique du contrôle en position

La première étape du déploiement d'un robot (manipulateur ou mobile) est l'intégration d'un contrôle en position. Lorsque le robot possède un grand nombre de degrés de liberté, nous atteignons les limites d'un simple contrôle au niveau cinématique. Notamment, la prise en compte des effets inertiels sur le mouvement de la base est nécessaire. La majorité des bipèdes, quadrupèdes et rovers articulés modernes sont contrôlés sur la base du modèle dynamique. Pour un robot dont le modèle dynamique est connu, la résolution du problème de dynamique inverse permet l'application de la linéarisation par rétroaction pour réduire le problème de commande en position au cas bien connu des systèmes linéaires [20, 21].

La modélisation dynamique d'un robot à nombreux degrés de liberté est coûteuse numériquement. Les algorithmes les plus performants se basent sur la formulation de Newton-Euler des

équations de mouvement. Il s'agit d'une généralisation aux assemblages de corps rigides des principes de la dynamique de Newton. Luh, Walker et Paul décrivent l'algorithme fondateur *Recursive Newton-Euler Algorithm* (RNEA) basé sur la propagation récursive des forces et des vitesses à travers le système pour résoudre le problème de dynamique inverse dans l'espace des articulations [22]. Différentes variations ont été développées avec le temps [23, 24].

Il est logique de représenter la dynamique d'un système dans l'espace opérationnel car les tâches qu'il réalise sont définies dans cet espace. Nous pouvons alors réaliser un suivi de trajectoire directement dans l'espace opérationnel. Nous supprimons ainsi la nécessité du modèle géométrique inverse qui transforme la trajectoire de référence exprimée dans l'espace opérationnel en une trajectoire dans l'espace articulaire. Le formalisme des équations de mouvement dans l'espace opérationnel est décrit par Khatib [25] puis étendu aux systèmes à plusieurs branches [26] et aux systèmes subissant des contraintes holonomes comme les boucles cinématiques [27]. Sentis et Khatib ont également étendu le contrôle dans l'espace opérationnel à un robot en vol [28]. Nous notons que les algorithmes récursifs pour résoudre la dynamique inverse ont été adaptés aux problèmes dans l'espace opérationnel [29, 30].

2.2.2 Intégration du contact au sol

Lors de la conception d'un contrôleur pour robot mobile il faut considérer le contact au terrain. Le contrôle de la position et des efforts sur les points de contacts influe sur la position du centre de gravité et la posture de la base. Park et Khatib ont itéré sur le contrôle de robot subissant des contraintes holonomes [27] pour permettre le contrôle d'humanoïdes [31]. Wensing utilise la redondance des contacts pour optimiser les forces sur les supports [32] puis généralise ce travail aux quadrupèdes [33].

Des études similaires sont dirigées vers les rovers articulés. L'utilisation de leurs jambes articulées permet une suspension active sur le terrain. Reid informe le contrôle en position en construisant une carte du terrain [34]. Cordes développe une technique d'adaptation cinématique où l'altitude désirée des points de contact est actualisée en fonction de la posture de la base et des forces sur chaque contact [16]. Wheeler, Sentis et le rover ATHLETE utilisent un modèle de contrôle par compliance des points de contact [10, 35, 36]. Hutter et Hyon utilisent le contrôle en force pour répartir les efforts et atteindre la posture désirée en générant des couples de corrections en fonction de l'erreur angulaire [37–39]. La méthode que nous présentons dans ce mémoire est basée sur le contrôle hybride en force et position [40] et permet le maintien de la posture sur un terrain inégal et inconnu, sans capteurs d'efforts.

2.2.3 Rejet des perturbations extérieures et gestion des erreurs de modélisations

La robustesse est importante pour les robots mobiles. Ils subissent des changements de masse et d'inertie lorsqu'ils portent une charge utile. Des contacts non modélisés peuvent survenir et les capteurs d'efforts sont peu performants. Le contrôle en position et en force par inversion dynamique peut être rendu plus résistant aux perturbations avec des méthodes de contrôle adaptatif [41,42], ou encore le contrôle robuste basé sur la passivité [43]. Nous nous intéressons dans ce mémoire à la méthode plus moderne des observateurs de perturbations [44–47].

CHAPITRE 3 ARCHITECTURE ET MODELISATION

3.1 Présentation du système développé

La nouvelle architecture remplit les fonctions d'un robot mobile manipulateur de type rover articulé. Contrairement au châssis central d'un rover, le système est composé de multiples bases chacune connectées à ses deux voisines immédiates. Nous réfèrerons aux bases par le nom *torses* par la suite. L'architecture robotique du système est ainsi organisée en une boucle cinématique dépourvue de base centralisée. Chaque torse permet l'installation d'instruments nécessaires à la mission. Par exemple, ils peuvent être équipés d'une roue, d'un *gripper* pour manipuler ou un conteneur pour porter davantage de charge utile. Les bras reliant les torses permettent de modifier la position relative des torses. L'architecture intègre simultanément des roues à suspension active et des manipulateurs parallèles sans complexité ajoutée. Des vues d'artiste réalisés par Chris Martins sont données figures 3.1 et 3.2.

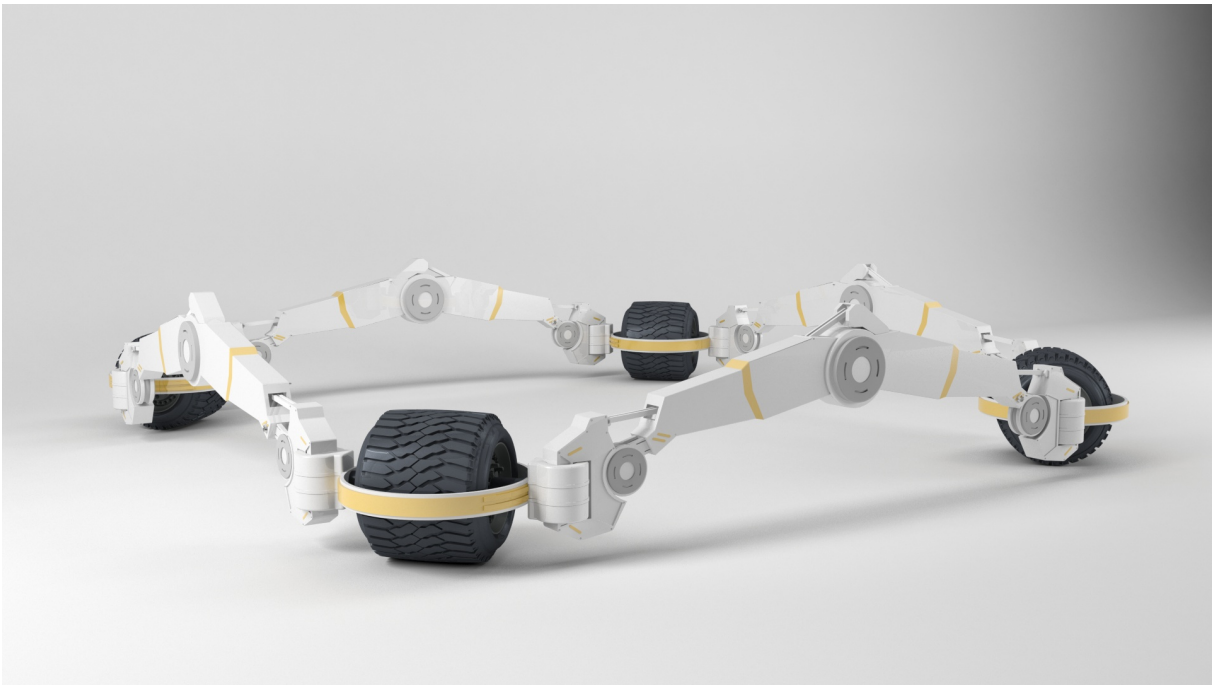

Figure 3.1 Vue d'artiste du système équipé de quatres roues.

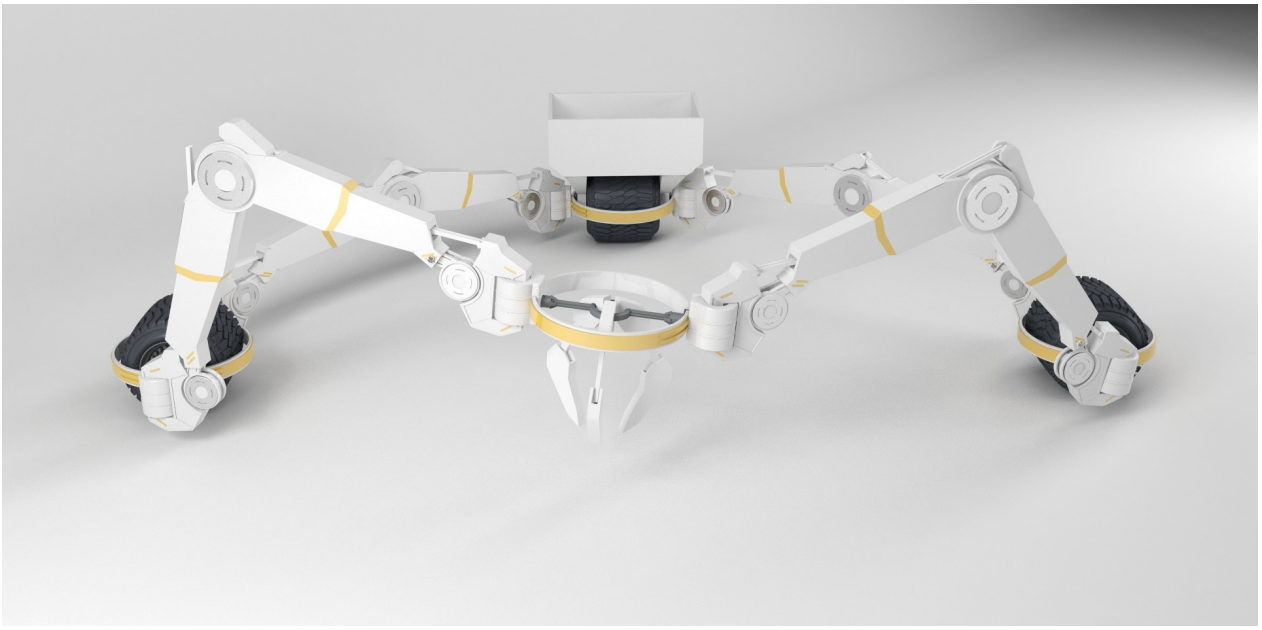

Figure 3.2 Vue d'artiste du système équipé d'un gripper et d'un conteneur.

Quadrant constitutif

La liaison entre deux torses voisins est faite par un bras articulé. Nous nommons quadrant l'ensemble {torse, bras}. Nous enchaînons les quadrants pour créer la boucle cinématique qui constitue le système complet. Pour une configuration comportant Q quadrants, le quadrant Q est relié au quadrant $Q-1$ et au quadrant 1. Nous donnons une description d'un quadrant en utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Description de Denavit-Hartenberg du premier quadrant

Parent $p(i)$	Corps i	Nom	Repère	α_i	d_i	a_i	θ_i	γ_i	ϵ_i
Base 0	1	Torse 1	Q_1, R_0	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
1	2	Épaule 1	Q_1, R_1	0	L_{torse}	0	θ_1	0	0
2	3	Biceps 1	Q_1, R_2	90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_2	0	0
3	4	Avant-Bras 1	Q_1, R_3	0	L_{bras}	0	θ_3	0	0
4	5	Poignet 1	Q_1, R_4	0	L_{bras}	0	θ_4	0	0
5	6	Torse 2	Q_1, R_5	-90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_5	0	0

Module - Roue

La roue est le module le plus communément fixé aux torses. Nous donnons une description d'une roue en utilisant les paramètres de Denavit-Hartenberg dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 Description de Denavit-Hartenberg d'une roue

Parent p(i)	Corps i	Nom	Repère	α_{i}	d_{i}	a_{i}	θ_{i}	γ_{i}	ϵ_{i}
1	21	Bassin 1	Q_1, R_6	0	$\frac{L_{\mathrm{torse}}}{2}$	0	θ_{21}	0	$-L_{\mathrm{abs}}$
21	22	Roue 1	Q_1, R_7	90	0	0	θ_{22}	0	0

Lorsque le torse du quadrant est équipé d'une roue, l'ensemble {quadrant, roue} est visualisé par le schéma cinématique figure 3.3.

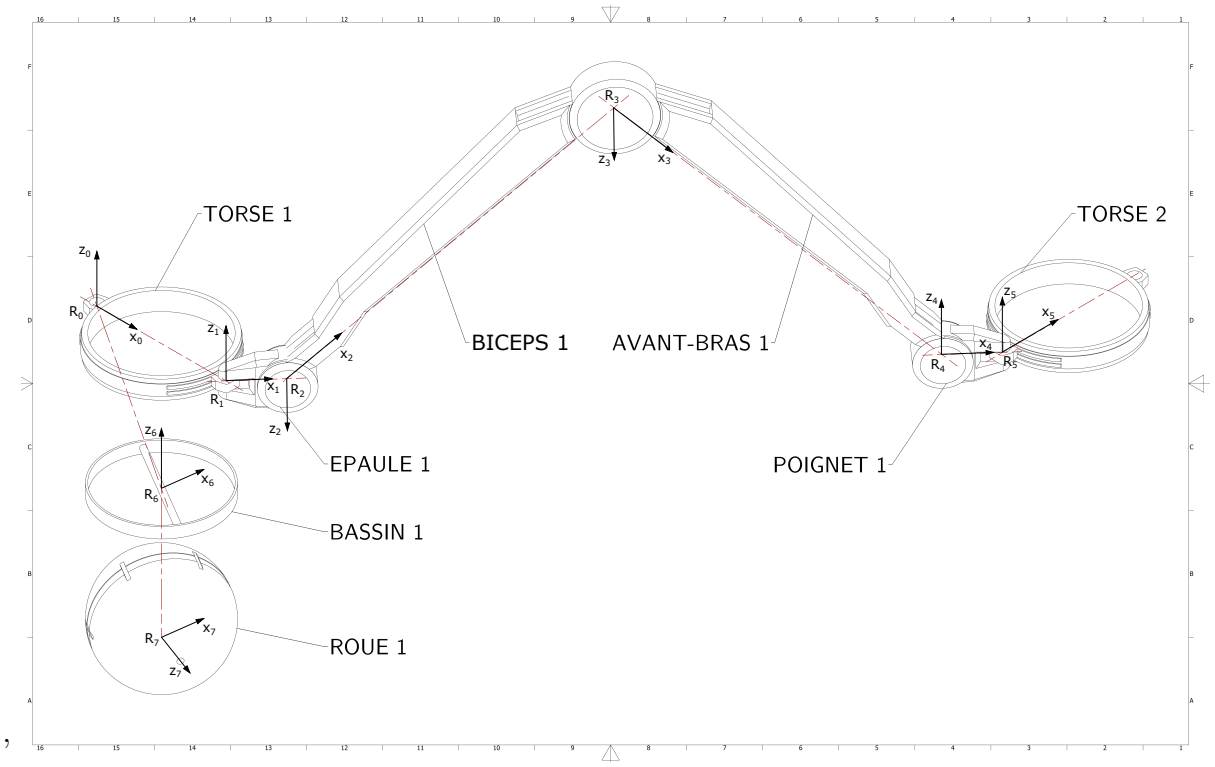

Figure 3.3 Schéma cinématique d'un quadrant équipé d'une roue.

De simples pieds peuvent être installés si nous désirons une architecture plus compacte et plus adaptée à un environnement plus délicat. Le système se comporte alors comme un robot multi-jambes.

Module - Gripper

Pour les fonctions nécessitant une action sur l'environnement, un module gripper peut être installé sur un torse. Nous pouvons par exemple adapter un système commercial.

Module - Conteneur

Un conteneur peut être installé sur un torse en complément d'une roue pour augmenter la quantité de charge utile transportable. Des emplacements de stockages plus réduits sont disponibles sur les bras.

Architecture à quatre quadrants

Un nombre minimal de trois quadrants est nécessaire pour garantir la stabilité statique sur le terrain. Un système à trois quadrants est isostatique sur tout terrain. Il est possible d'augmenter le nombre de quadrants en fonction de l'application. Un système à quatre quadrants permet l'utilisation d'un des torses comme manipulateur alors que les trois autres garantissent un contact isostatique avec le sol.
La version considérée pour l'illustration de ce travail comporte quatre quadrants équipés de quatre roues. Le système est entièrement caractérisé par la description paramétrique de Denavit-Hartenberg dans le tableau 3.3. Le tableau 3.4 décrit les deux repères 30 et 31 de fermetures de boucle, associés aux corps prédécesseur 11 et successeur 21. Ces concepts sont expliqués section 2.1.1. Nous rappelons que lorsque la boucle est fermée, les deux repères 30 et 31 se superposent parfaitement.

Tableau 3.3 Architecture à quatre quadrants - Paramètres de Denavit-Hartenberg

Parent $p(i)$	Corps i	Nom	Repère	α_i	d_i	a_i	θ_i	γ_i	ϵ_i
W	1	Torse 1	Q_1, R_0	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
1	2	Épaule 1	Q_1, R_1	0	L_{torse}	0	θ_1	0	0
2	3	Biceps 1	Q_1, R_2	90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_2	0	0
3	4	Avant-Bras 1	Q_1, R_3	0	L_{bras}	0	θ_3	0	0
4	5	Poignet 1	Q_1, R_4	0	L_{bras}	0	θ_4	0	0
5	6	Torse 2	Q_1, R_5	-90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_5	0	0
6	7	Épaule 2	Q_2, R_1	0	L_{torse}	0	θ_6	0	0
7	8	Biceps 2	Q_2, R_2	90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_7	0	0
8	9	Avant-Bras 2	Q_2, R_3	0	L_{bras}	0	θ_8	0	0
9	10	Poignet 2	Q_2, R_4	0	L_{bras}	0	θ_9	0	0
10	11	Torse 3	Q_2, R_5	-90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_{10}	0	0
1	12	Poignet 4	Q_4, R_5	0	0	0	θ_{11}	180	0
12	13	Avant-Bras 4	Q_4, R_4	90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_{12}	0	0
13	14	Biceps 4	Q_4, R_3	0	L_{bras}	0	θ_{13}	0	0
14	15	Épaule 4	Q_4, R_2	0	L_{bras}	0	θ_{14}	0	0
15	16	Torse 4	Q_4, R_1	-90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_{15}	0	0
16	17	Poignet 3	Q_3, R_5	0	L_{torse}	0	θ_{16}	0	0
17	18	Avant-Bras 3	Q_3, R_4	90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_{17}	0	0
18	19	Biceps 3	Q_3, R_3	0	L_{bras}	0	θ_{18}	0	0
19	20	Épaule 3	Q_3, R_2	0	L_{bras}	0	θ_{19}	0	0
20	21	Torse 3 *	Q_3, R_1	-90	$L_{\text{épaule}}$	0	θ_{20}	0	0
0	22	Abs 1	Q_1, R_6	0	$\frac{L_{\text{torse}}}{2}$	0	θ_{21}	0	$-L_{\text{abs}}$
22	23	Wheel 1	Q_1, R_7	90	0	0	θ_{22}	0	0
5	24	Abs 2	Q_2, R_6	0	$\frac{L_{\text{torse}}}{2}$	0	θ_{23}	0	$-L_{\text{abs}}$
24	25	Wheel 2	Q_2, R_7	90	0	0	θ_{24}	0	0
10	26	Abs 3	Q_3, R_6	0	$\frac{L_{\text{torse}}}{2}$	0	θ_{25}	0	$-L_{\text{abs}}$
26	27	Wheel 3	Q_3, R_7	90	0	0	θ_{26}	0	0
15	28	Abs 4	Q_4, R_6	0	$\frac{L_{\text{torse}}}{2}$	0	θ_{27}	0	$-L_{\text{abs}}$
28	29	Wheel 4	Q_4, R_7	90	0	0	θ_{28}	0	0

Tableau 3.4 Architecture à quatre quadrants - Repères pour la fermeture de boucle

Corps $a(i)$	Repère i	Nom	α_i	d_i	a_i	θ_i	γ_i	ϵ_i
11	30	T3 Boucle	0	L_{torse}	0	0	180	0
21	31	T3* Boucle	0	0	0	0	0	0

3.2 Modélisation du système

Nous basons l'établissement d'un modèle sur les paramètres de Denavit-Hartenberg des tableaux 3.3 et 3.4. Nous posons $N_B = 28$, $N_J = 29$ et $N_L = 1$. La dimension du système mobile est donc $n = 6 + N_B = 34$.

Nous dénombrons cinq torses $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$ correspondant aux corps $\{1, 6, 11, 16, 21\}$. Le torse T_5 est un torse virtuel identique au torse T_3 utilisé pour paramétriser la fermeture de boucle. La boucle cinématique introduit des contraintes internes dans le système, qu'il faut inclure dans la modélisation.

Nous posons $m = 5 \times 6 + 8 = 38$ le nombre de paramètres nécessaires pour représenter dans l'espace opérationnel la position des 5 torses et les 8 degrés de liberté des roues.

3.2.1 Représentation d'état dans l'espace articulaire

Nous représentons l'état du système dans l'espace articulaire à l'aide du vecteur $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{n=34}$ (tableau (3.5)).

Tableau 3.5 Représentation par vecteur d'état dans l'espace articulaire

$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1} \\ \theta_1 \\ \dots \\ \theta_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$	$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dots \\ \dot{\theta}_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$	$\ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dots \\ \ddot{\theta}_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Avec ${}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1} = {}^{0}\mathbf{x}_1$ les coordonnées cartésiennes de la base flottante (Torse 1) par rapport au repère galiléen w. Les vecteurs ${}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1}$ et ${}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1}$ sont la vitesse et accélération spatiales de la base flottante par rapport à w.

3.2.2 Représentation d'état dans l'espace opérationnel

Nous représentons l'état du système dans l'espace cartésien à l'aide du vecteur de coordonnées spatiales $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m=38}$ (tableau (3.6)). Le vecteur ${}^{p(T_{\mathrm{i}})}\mathbf{x}_{T_{\mathrm{i}}} \in \mathbb{R}^6$ décrit la position cartésienne d'un torse T_{i} par rapport à son torse parent $p(T_{\mathrm{i}})$. Nous conservons les coordonnées $\theta_{20}, ..., \theta_{28}$ pour décrire l'état des roues. Les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ sont la vitesse et accélération spatiales du système (tableau (3.6)).

Remarque. *La dimension m du vecteur $\mathbf{x}$ est supérieure à n celle du vecteur $\boldsymbol{q}$. Nous utiliserons des pseudo-inverses dans les relations entre $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{q}$.*

Tableau 3.6 Représentation par vecteur d'état dans l'espace opérationnel

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1} \\ {}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2} \\ {}^{T_2}\mathbf{x}_{T_3} \\ {}^{T_1}\mathbf{x}_{T_4} \\ {}^{T_4}\mathbf{x}_{T_5} \\ \theta_{20} \\ \dots \\ \theta_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1} \\ {}^{T_1}\mathbf{v}_{T_2} \\ {}^{T_2}\mathbf{v}_{T_3} \\ {}^{T_1}\mathbf{v}_{T_4} \\ {}^{T_4}\mathbf{v}_{T_5} \\ \dot{\theta}_{20} \\ \dots \\ \dot{\theta}_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$	$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1} \\ {}^{T_1}\dot{\mathbf{v}}_{T_2} \\ {}^{T_2}\dot{\mathbf{v}}_{T_3} \\ {}^{T_1}\dot{\mathbf{v}}_{T_4} \\ {}^{T_4}\dot{\mathbf{v}}_{T_5} \\ \ddot{\theta}_{20} \\ \dots \\ \ddot{\theta}_{28} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Astuce pour la gestion de l'architecture parallèle Nous insistons sur la forme du vecteur d'état dans l'espace opérationnel. Chaque torse est considéré relativement à son prédécesseur. Cette astuce nous permet d'éviter les problèmes des architectures parallèles. En effet, nous commandons indépendamment les torses qui sont liés entre eux par des bras séries. La gestion de la dynamique de la boucle cinématique se fait dans un second temps par l'introduction des contraintes internes qu'elle génère (section 3.2.8).

3.2.3 Description du modèle géométrique

Le modèle géométrique relie l'état articulaire d'un robot à l'état opérationnel.

Modèle géométrique direct

Déterminer le modèle géométrique direct revient à déterminer la fonction $\boldsymbol{Geo}$:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{Geo}(\boldsymbol{q}). \tag{3.1}$$

Même si l'architecture globale est parallèle, nous évitons les difficultés associées grâce à la forme du vecteur d'état $\mathbf{x}$. En effet, $\mathbf{x}$ contient les positions des torses relativement à leur prédécesseur. Par exemple, considérons la géométrique directe du premier quadrant. L'élément ${}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2}$ est fonction des joints θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et θ_5 qui forment un bras série :

$${}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2} = \boldsymbol{Geo}\left(\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5\end{bmatrix}^\top\right). \tag{3.2}$$

Plus précisément, pour obtenir le sous-vecteur d'état ${}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2}$ nous utilisons la transformée de Plücker ${}^{T_2}\boldsymbol{X}_{T_1}$ exprimant le passage de la base T_1 dans la base T_2. La transformée ${}^{T_2}\boldsymbol{X}_{T_1}$ est calculée à partir des variables de joints θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et θ_5 en utilisant l'équation (2.14).

Les équations complètes sont disponibles en annexe A.

Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse est nécessaire pour transformer une position dans l'espace opérationnel vers l'espace des articulations :

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Geo}^{-1}(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

La solution n'est pas toujours unique, et il n'existe pas de méthode systématique pour l'établir. Par un travail sur les transformées homogènes d'un quadrants nous pouvons obtenir la relation suivante :

$$\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5\end{bmatrix}^\top = \boldsymbol{Geo}^{-1}({}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2}). \tag{3.4}$$

Les équations complètes peuvent être trouvées en annexe A. Pour obtenir le modèle inverse global (équation (3.3)) il suffit d'appliquer ces formules à chaque quadrant.

3.2.4 Description du modèle cinématique

Le modèle cinématique relie la dérivé $\dot{\boldsymbol{q}}$ de l'état articulaire d'un robot à la vitesse spatiale $\mathbf{v}$ dans l'espace opérationnel.

Modèle cinématique directe

Par différentiation par rapport au temps du modèle géométrique nous obtenons la relation suivante :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{3.5}$$

où $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est la jacobienne analytique du système. Il est possible d'établir la jacobienne par un algorithme récursif utilisant les transformées de Plücker de l'ensemble $\{{}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{X}_{p(\mathrm{i})}$ tel que $\mathrm{i} \in [1, n]\}$ (section 1.8 de Siciliano et Khatib [17]).

Modèle cinématique inverse

L'établissement du modèle cinématique inverse est nécessaire pour transformer une vitesse dans l'espace cartésien en une vitesse dans l'espace des articulations. Cela nécessite l'inversion de la jacobienne. Nous utiliserons la matrice pseudo-inverse $\bar{\boldsymbol{J}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, défini par Khatib [25], pour obtenir la cinématique inverse :

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{J}}\mathbf{v}. \tag{3.6}$$

La relation pour le calcul de $\bar{\boldsymbol{J}}$ est donnée en section 3.2.6.

3.2.5 Description du modèle de contact

Tout corps du système est susceptible de subir des efforts extérieurs mais nous modélisons uniquement les contacts sur les modules attachés aux torses. Qu'il s'agisse de roue, de pied ou de gripper nous leur attribuons un point de contact où les efforts sont mesurés.

Nous définissons l'ensemble $\{contact\} = \{..., T_{\text{i}}, ...\}$ regroupant les torses T_{i} dont les modules sont en contact avec le sol. Nous définissons α_c le nombre de torses dans $\{contact\}$. Nous notons que dans notre cas, le torse T_5 est un torse virtuel au comportement identique au torse T_3. À ce titre nous définissons $\{\overline{contact}\} = \{contact\}\backslash\{T_5\}$ et $\bar{\alpha}_c$ le nombre de torses qu'il contient.

Nous utilisons la jacobienne de contact $\boldsymbol{J}_c \in \mathbb{R}^{6\bar{\alpha}_c \times n}$ qui projette les forces exprimées aux $\bar{\alpha}_c$ points de contacts en un couple exprimé dans l'espace articulaire. C'est le couple crée par les forces de contact et ressenti sur les joints du système. Avec une architecture à quatre quadrants, nous avons $\bar{\alpha}_c \in [1, 4]$. Le vecteur de forces spatiales $\boldsymbol{f}^e \in \mathbb{R}^{6\bar{\alpha}_c}$ est la concaténation des forces spatiales appliquées sur les points de contact ; l'effort dans l'espace des articulations dû aux forces de contact $\boldsymbol{\tau}^e$ est lié à $\boldsymbol{f}^e$ par la jacobienne de contact :

$$\boldsymbol{\tau}^e = \boldsymbol{J}_c^\top \boldsymbol{f}^e. \tag{3.7}$$

Nous pouvons aussi exprimer les efforts extérieurs dans l'espace opérationnel par le vecteur de forces spatiales $\boldsymbol{h}^e \in \mathbb{R}^m$ qui est lié à $\boldsymbol{\tau}^e$ par la jacobienne géométrique :

$$\boldsymbol{\tau}^e = \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{h}^e. \tag{3.8}$$

Nous notons que $\boldsymbol{h}^e = \bar{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{J}_c^\top \boldsymbol{f}^e$.

3.2.6 Description du modèle dynamique

Modèle dynamique - Espace des articulations

Nous pouvons condenser la dynamique du système sous la forme des équations du mouvement dans l'espace des articulations :

$$\boxed{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{h}^e + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^c + \boldsymbol{\tau}^d,} \tag{3.9}$$

où

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$	$\in \mathbb{R}^{n\times n}$	est une matrice symétrique définie positive matrice appelée matrice d'inertie généralisée du système ;
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$	$\in \mathbb{R}^{n\times n}$	est une matrice telle que le vecteur $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ exprime le couple dû aux effets de Coriolis et des forces centrifuges ;
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$	$\in \mathbb{R}^{n}$	est le couple dû aux effets de la gravité ;
$\boldsymbol{h}^e$	$\in \mathbb{R}^{n}$	est le couple dû aux forces agissant sur les points de contact ;
$\boldsymbol{\tau}$	$\in \mathbb{R}^{n}$	est le couple de régulation produit par les moteurs aux joints ;
$\boldsymbol{\tau}^c$	$\in \mathbb{R}^{n}$	est le vecteur des contraintes internes dues à la boucle cinématique ;
$\boldsymbol{\tau}^d$	$\in \mathbb{R}^{n}$	est un vecteur représentant tous les autres effets non modélisés.

Nous posons les postulats 1 et 2 ainsi que les hypothèses 1 et 2 portant sur les éléments des équations du mouvement.

Postulat 1. *Les matrices $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ et $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ ainsi que les vecteurs $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ et $\boldsymbol{h}^e$ sont incertains mais bornés :*

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ **vérifie :** $m^{-}\mathbf{1}_n \leq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \leq m^{+}\mathbf{1}_n$;

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ **vérifie :** $\|\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\| \leq C^{+}$;

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ **vérifie :** $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\| \leq g^{+}$.

$\boldsymbol{h}^e$ **vérifie :** $\|\boldsymbol{h}^e\| \leq h^{e,+}$.

Postulat 2. *La matrice $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ n'est pas unique. Nous choisissons la forme suivante pour faciliter nos calculs [48] :*

$$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{C}^{\top}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \forall (\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.10}$$

Hypothèse 1. *Nous supposons que les vecteurs $\boldsymbol{q}$ et $\dot{\boldsymbol{q}}$ sont parfaitement connus.*

Hypothèse 2. *Nous considérons que la trajectoire désirée $\boldsymbol{q}_{des}(t)$ (respectivement $\boldsymbol{x}_{des}$ dans l'espace opérationnel) et le couple de perturbation $\boldsymbol{\tau}^d(t)$ sont suffisamment lisses et uniformément bornés :*

— *soit* $\mathbf{q}_{des}(t) = \left[\boldsymbol{q}_{des}(t);\ \ldots\ ;\ \boldsymbol{q}^{(3)}_{des}(t)\right]$, *alors* $\exists\, \mathrm{q}^{+}_{des} > 0$ *tel que* $\|\mathbf{q}_{des}(t)\| \leq \mathrm{q}^{+}_{des},\ \forall t$;

— *soit* $\mathbf{t}^d(t) = \left[\boldsymbol{\tau}^d(t);\ \dot{\boldsymbol{\tau}}^d\right]$, *alors* $\exists\, \mathrm{t}^{d+} > 0$ *tel que* $\left\|\mathbf{t}^d(t)\right\| \leq \mathrm{t}^{d+},\ \forall t$.

Le calcul du modèle dynamique est basé sur les dimensions et les paramètres inertiels introduits dans la section 2. Malgré les techniques modernes d'usinage, des erreurs sont toujours introduites lors de la mesure de ces dimensions et lors du pesage des pièces. Nous ne pouvons

alors obtenir que des estimés $\bar{\boldsymbol{H}}$, $\bar{\boldsymbol{C}}$, $\bar{\boldsymbol{g}}$ des éléments de l'équation (3.9) dits éléments nominaux ou connus. En effet, même si $\boldsymbol{q}$ est parfaitement connu, la connaissance parfaite de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ nécessite la connaissance parfaite des masses du système. Les capteurs d'efforts modernes introduisant également des erreurs dans le calcul de $\boldsymbol{h}^e$, nous posons son homologue connu $\bar{\boldsymbol{h}}^e$. Nous estimons que ces éléments vérifient les mêmes propriétés que leurs homologues inconnus. Nous mettons en évidence dans le modèle dynamique les éléments connus et donc accessibles pour le contrôle :

$$\boxed{\underbrace{\bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}}_{\text{Connus}} = \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{\text{Régulation}} + \overbrace{\boldsymbol{\tau}^c}^{\text{Contraintes internes}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Inconnus}},} \tag{3.11}$$

où nous posons $\boldsymbol{\rho}$ et son homologue $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ pour simplifier les équations :

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{h}^e) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{h}^e, \tag{3.12}$$

et le vecteur $\mathbf{d}$. Ce vecteur regroupe les sources de perturbations dues aux éléments extérieurs non modélisés $\boldsymbol{\tau}^d$ et celles dues aux erreurs de modélisation du système $\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) - \bar{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})$, $\tilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \bar{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, $\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) - \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q})$ et $\tilde{\boldsymbol{h}}^e = \boldsymbol{h}^e - \bar{\boldsymbol{h}}^e$:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}^d - \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} - \tilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{h}^e). \tag{3.13}$$

Modèle dynamique - Espace opérationnel

Nous utilisons la jacobienne $\boldsymbol{J}$ pour projeter la dynamique du système dans l'espace opérationnel :

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{h}^e + \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{J}}^\top \boldsymbol{\tau}^c + \bar{\boldsymbol{J}}^\top \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{d}}, \\ &\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{f}; \end{aligned}} \tag{3.14}$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{J}^\top\right); \\ \bar{\boldsymbol{J}}^\top = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}; \\ \boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{J}}^\top \left(\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{d}\right) - \boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}}. \end{cases} \tag{3.15}$$

La matrice $\bar{\boldsymbol{J}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est connue comme l'inverse généralisé dynamiquement consistant de

la jacobienne $\boldsymbol{J}$ [25].

Inversion de $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ Comme $m = n + 4$, la matrice de masse $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ est symétrique positive avec quatre valeurs singulières nulles, associées aux quatre degrés de liberté dans l'espace opérationnel que nous ne pouvons pas commander. D'autres valeurs singulières nulles peuvent apparaitre aux singularités géométriques. Pour inverser $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ il est donc nécessaire de traiter ces valeurs singulières nulles. Pour cela, nous utilisons la décomposition en valeurs singulières. Nous posons :

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\top}, \tag{3.16}$$

alors

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{\#}\boldsymbol{U}^{\top}, \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{S}^{\#}$ est le pseudo-inverse de la matrice diagonale $\boldsymbol{S}$. Il est calculé de la manière suivante : tout coefficient de $\boldsymbol{S}$ au dessus du seuil de tolérance numérique est remplacé par son inverse. Les autres coefficients sont mis à zéro.

Nous concluons en écrivant la dynamique du système sous une forme séparant les données connues et inconnues :

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{h}}^{e} = \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{J}}^{\top}\boldsymbol{\tau}^{c} + \bar{\boldsymbol{J}}^{\top}\mathbf{d}, \\ &\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\top}\boldsymbol{f}. \end{aligned}} \tag{3.18}$$

Le modèle dans l'espace des articulations est plus rapide à calculer à l'aide des algorithmes récursifs. Le modèle dans l'espace opérationnel fait intervenir $\dot{\mathbf{v}}$ au lieu de $\ddot{\boldsymbol{q}}$, supprime l'étape de cinématique inverse et permet ainsi de traverser les singularités géométriques. En contrepartie, le calculer numériquement est plus compliqué. Il est judicieux d'utiliser les deux modèles de façon complémentaire. Nous notons que $\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{q}}$.

3.2.7 Particularité de la dynamique d'un robot mobile

Nous soulignons que notre système est un robot mobile. Sa base (corps 1 dans le tableau 3.3) est relié à la base fixe dans le repère galiléen w (corps 0) par un joint virtuel à six degrés de liberté. Dans le modèle global (3.9), nous pouvons distinguer le sous-manipulateur (indice $\square_m$ pour *manipulator*) composé du système complet comme si la base flottante était fixe (de dimension N_B). Et nous pouvons distinguer la dynamique du joint 1 (indice $\square_{fb}$ pour *floating base*) liant la base flottante à la base fixe (de dimension 6) [24] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}^c_{fb} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}^\top & \boldsymbol{H}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_m \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{fb}{}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1} + \boldsymbol{g}_{fb} \\ \boldsymbol{C}_m\dot{\boldsymbol{q}}_m + \boldsymbol{g}_m + \boldsymbol{d}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}^\top_{fb}\boldsymbol{h}^e_{fb} \\ \boldsymbol{J}^\top_m\boldsymbol{h}^e_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}^c_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^c} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}^d_{fb} \\ \boldsymbol{\tau}^d_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^d}. \tag{3.19}$$

où

$\boldsymbol{I}^c_{fb}$	$\in \mathbb{R}^{6\times 6}$	est la matrice d'inertie généralisée du corps composite regroupant le système complet ;
$\boldsymbol{F}$	$\in \mathbb{R}^{6\times N_B}$	est une matrice dont les colonnes sont les forces spatiales à appliquer sur la base flottante pour résulter en une accélération unitaire à chaque joints ;
$\boldsymbol{\tau}^d_{fb}$	$\in \mathbb{R}^6$	est le vecteur des effets non modélisés appliqué à la base flottante en considérant le système comme un seul corps composite.

Nous notons que les six premières composantes de $\boldsymbol{\tau}$ sont nulles car le joint 1 est virtuel et ne peut transmettre de couple de régulation. Les six premières composantes de $\boldsymbol{\tau}^c$ sont également nulles car les contraintes internes ne se répercutent pas en dehors de la boucle cinématique. Mettons le système (3.19) sous une forme séparant les données connues et inconnues :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}^c_{fb} & \bar{\boldsymbol{F}} \\ \bar{\boldsymbol{F}}^\top & \bar{\boldsymbol{H}}_m \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{H}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_m \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{C}}_{fb}{}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_{fb} \\ \bar{\boldsymbol{C}}_m\dot{\boldsymbol{q}}_m + \bar{\boldsymbol{\rho}}_m \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau}^c_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}^c} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{fb} \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}. \tag{3.20}$$

À partir de la forme des systèmes (3.19) et (3.20), nous pouvons obtenir une relation directe entre $\ddot{\boldsymbol{q}}_m$ et $\boldsymbol{\tau}_m$ en soustrayant à la seconde ligne $\boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}^c_{fb})^{-1}$ multipliée par la première ligne :

$$\begin{aligned} &\overbrace{\left(\bar{\boldsymbol{H}}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}^c_{fb})^{-1}\boldsymbol{F}\right)}^{\bar{\boldsymbol{H}}_{act}} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}_m + \overbrace{\left(\bar{\boldsymbol{C}}_m\dot{\boldsymbol{q}}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}^c_{fb})^{-1}\bar{\boldsymbol{C}}_{fb}{}^{\mathrm{w}}\mathbf{v}_{T_1}\right)}^{\{\bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}\}_{act}} \\ &+ \overbrace{\left(\bar{\boldsymbol{\rho}}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}^c_{fb})^{-1}\bar{\boldsymbol{\rho}}_{fb}\right)}^{\bar{\boldsymbol{\rho}}_{act}} = \boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}^c_m + \underbrace{\left(\mathbf{d}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}^c_{fb})^{-1}\mathbf{d}_{fb}\right)}_{\mathbf{d}_{act}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

L'équation (3.21) exprime la dynamique du système au même titre que les équations (3.9) et (3.11) mais en une relation direct entre $\ddot{\boldsymbol{q}}_m = \ddot{\boldsymbol{q}}_m$ et $\boldsymbol{\tau}_m$ indépendante de ${}^{\mathrm{w}}\dot{\mathbf{v}}_{T_1}$. Comme uniquement la partie $\boldsymbol{\tau}_m$ non nulle de $\boldsymbol{\tau}$ intervient, nous pouvons dire que cette relation

projette la dynamique du système dans son espace *actionnable* ($\square_{act}$).

Notamment, un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{fb}^\top & \boldsymbol{u}_m^\top \end{bmatrix}^\top$ ($\boldsymbol{u}_{fb} \in \mathbb{R}^6$ et $\boldsymbol{u}_m \in \mathbb{R}^{N_B}$) agissant sur la dynamique complète du système peut être projeté sur la dynamique du sous-manipulateur :

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{act} = \boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{F}^\top (\boldsymbol{I}_{fb}^c)^{-1} \boldsymbol{u}_{fb}} \tag{3.22}$$

Le terme $\boldsymbol{u}_{act} \in \mathbb{R}^{N_B}$ est la projection de $\boldsymbol{u}$ dans l'espace actionnable car il est projeté dans l'espace où nous pouvons spécifier des composantes de $\boldsymbol{\tau}$ non nulles.

Dans la suite du développement nous utilisons les éléments $\{\bar{\boldsymbol{H}}, \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}\}$ dans les équations de design des contrôleurs et de l'observateur de perturbation. Nous projetons alors tout élément obtenu (couple de régulation $\boldsymbol{\tau}^r$ ou estimé des perturbation $\hat{\mathbf{d}}$) dans l'espace actionnable en utilisant l'équation (3.22).

3.2.8 Effet de la boucle cinématique

Lemme 1 (Solution de norme minimale de Penrose [49])**.** *Soit la matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et r son rang. Soit l'équation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tel que $\boldsymbol{b}$ est dans l'image de $\boldsymbol{A}$. Ce qui revient à dire que l'équation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une solution. Nous posons $\boldsymbol{A}^\dagger$ la matrice pseudo-inverse de Moore de $\boldsymbol{A}$.*

Alors nécessairement, pour tout r, $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ est la solution de norme euclidienne minimale.

Nous modélisons l'effet de la boucle cinématique dans le modèle (3.9) à l'aide du couple $\boldsymbol{\tau}^c$ représentant l'effet du joint de fermeture de boucle sur le reste de l'arbre cinématique [24].

Nous posons $\boldsymbol{\tau}^c = \boldsymbol{\tau}^{géo} + \boldsymbol{\tau}^{act}$ où $\boldsymbol{\tau}^{géo}$ exprime les contraintes internes provenant des contraintes géométriques imposées par le joint de fermeture et $\boldsymbol{\tau}^{act}$ exprime le couple produit par l'actionneur du joint de fermeture. Le joint de fermeture choisi arbitrairement est une liaison complète placée entre le torse T_3 et le torse virtuel T_5. Nous avons donc $\boldsymbol{\tau}^{act} = 0$ et $\boldsymbol{\tau}^c = \boldsymbol{\tau}^{géo}$ est généré par des contraintes d'encastrement dans les six direction spatiales. Nous posons $n_c = 6$ la dimension de l'espace des contraintes de boucles.

Nous pouvons exprimer les contraintes géométriques sous la forme d'une équation matricielle (3.23) avec $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$ et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^{n_c}$. Nous définissons $\text{rang}(\boldsymbol{K}) = r_{\boldsymbol{K}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{K}\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{k}.} \tag{3.23}$$

Définition de $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{k}$

Le joint de fermeture de boucle est le joint $k = 29$. Il forme la liaison entre le corps prédécesseur $p(k) = 11$ (Torse 3) et le corps successeur $s(k) = 21$ (Torse 3 virtuel). Nous définissons $\boldsymbol{J}_K = \boldsymbol{J}_{s(k)} - \boldsymbol{J}_{p(k)}$ la jacobienne du joint de fermeture. Elle exprime la relation entre $\dot{\boldsymbol{q}}$ et la vitesse à travers le joint. Nous définissons aussi $\mathbf{S}_{f_k}$ le sous-espace de transmission de force au joint k. Ce joint étant une liaison complète $\mathbf{S}_{f_k} = \mathbf{1}_6$ mais il est conservé dans les équations pour généraliser. Nous pouvons alors définir $\boldsymbol{K}$ comme le sous-espace de transmission des efforts à travers le joint de fermeture :

$$\boldsymbol{K} = \mathbf{S}_{f_k}^{\top} \boldsymbol{J}_K = \mathbf{S}_{f_k}^{\top} \left(\boldsymbol{J}_{s(k)} - \boldsymbol{J}_{p(k)} \right). \tag{3.24}$$

Nous exprimons $\boldsymbol{k}$ en fonction des vitesses spatiales des corps $s(k)$ et $p(k)$ et des accélérations a^{vp} :

$$\boldsymbol{k} = -\mathbf{S}_{f_k}^{\top} \left(\boldsymbol{a}^{vp}_{s(k)} - \boldsymbol{a}^{vp}_{p(k)} + \boldsymbol{v}_{s(k)} \times \boldsymbol{v}_{p(k)} \right). \tag{3.25}$$

Le terme d'accélération a_{i}^{vp} n'est pas l'accélération totale du corps i mais celle que ce corps aurait si $\ddot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$. Il s'agit des effets de Coriolis et des forces centrifuges.

Forces de contraintes

Le joint k exerce une force $\boldsymbol{f}^c$ sur le corps $s(k)$ et une force $-\boldsymbol{f}^c$ sur le corps $sp(k)$. La force $\boldsymbol{f}^c$ peut être projetée dans l'espace des articulations en utilisant la jacobienne du joint de fermeture :

$$\boldsymbol{\tau}^c = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{K}}^{\top} \boldsymbol{f}^c. \tag{3.26}$$

Nous pouvons exprimer la force $\boldsymbol{f}^c$ à l'aide d'un vecteur de contraintes $\boldsymbol{\lambda}$ (multiplicateurs de Lagrange) de dimension n^c :

$$\boldsymbol{f}^c = \mathbf{S}_{f_k} \boldsymbol{\lambda}. \tag{3.27}$$

Dans notre cas $n^c = 6$ et $\mathbf{S}_{f_k} = \boldsymbol{I}_6$ donc $\boldsymbol{f}^c = \boldsymbol{\lambda}$. En utilisant les relations (3.24), (3.26) et (3.27) nous pouvons obtenir une relation entre $\boldsymbol{\tau}^c$ et $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}^c = \boldsymbol{K}^{\top} \boldsymbol{\lambda}.} \tag{3.28}$$

La dynamique du système peut alors s'exprimer en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$ dans l'espace des articulations et dans l'espace opérationnel :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{E. articulations} \rightarrow \left\{\bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d},\right. \\ \text{E. opérationnel} \rightarrow \begin{cases}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{h}}^e = \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{J}}^\top\boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{\lambda} + \bar{\boldsymbol{J}}^\top\mathbf{d}, \\ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^\top\boldsymbol{f}.\end{cases}\end{array}} \tag{3.29}$$

La matrice $\boldsymbol{K}$ est fonction de $\boldsymbol{q}$. D'après le postulat 1, $\boldsymbol{K}$ est connue parfaitement.

3.2.9 Optimisation par contraintes internes

En utilisant la boucle cinématique du robot, il est possible d'optimiser le couple $\boldsymbol{\tau}$ demandé aux actionneurs. Nous posons $\boldsymbol{K}^\dagger$ la matrice pseudo-inverse de Moore [49] de $\boldsymbol{K}$. On pose également la matrice $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= \mathbf{1} - \boldsymbol{K}^\top\boldsymbol{K}^{\top\dagger} \\ &= \mathbf{1} - \boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K} \\ &= \boldsymbol{G}^\top.\end{aligned} \tag{3.30}$$

La matrice $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est hermitienne, de rang $(n - r_{\boldsymbol{K}})$ et vérifie l'équation $\boldsymbol{G}\boldsymbol{K}^\top = \mathbf{0}$. Nous pouvons alors éliminer $\boldsymbol{\lambda}$ de la dynamique du système (3.29) pour obtenir l'équation (3.31). Nous projetons la dynamique du système dans un espace des tâches orthogonal à celui des contraintes [27] :

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{G}\left(\underbrace{\bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{d}}_{\bar{\boldsymbol{\tau}}}\right). \tag{3.31}$$

$\boldsymbol{G}$ étant de rang $(n - r_{\boldsymbol{K}})$ nous pouvons voir cette relation comme les $(n - r_{\boldsymbol{K}})$ contraintes imposées sur le couple par les contraintes géométriques. Nous disposons alors de $r_{\boldsymbol{K}}$ degrés de liberté sur le choix de $\boldsymbol{\tau}$, le couple final de régulation demandé aux moteurs.

Nous posons $\boldsymbol{G}^\dagger$ la matrice pseudo-inverse de Moore [49] de $\boldsymbol{G}$. D'après le lemme 1, la solution de norme minimale à l'équation (3.31) est déterminée par l'équation (3.32) :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{G}^\dagger\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{\tau}}. \tag{3.32}$$

Nous pouvons utiliser les propriétés des pseudo-inverses de Moore [49] pour simplifier cette

équation :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}^\dagger\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{G}^\top\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\top\right)^\dagger\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{G}\left(\mathbf{1}-2\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}^\dagger\underbrace{\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}}_{=\boldsymbol{K}}\right)^\dagger\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\dagger\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{G}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Nous pouvons donc calculer **le couple de norme minimale $\boldsymbol{\tau}$** à partir de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ en utilisant l'équation (3.34) basée sur la matrice des contraintes $\boldsymbol{K}$ et sa pseudo-inverse de Moore $\boldsymbol{K}^\dagger$:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathbf{1}-\boldsymbol{K}^\dagger\boldsymbol{K}\right)\bar{\boldsymbol{\tau}}.} \tag{3.34}$$

Remarque. *Les résultats établis dans cette section sont valables dans l'espace actionnable. Nous décomposons* $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{K}_m\end{bmatrix}$ *avec* $\boldsymbol{K}_m \in \mathbb{R}^{n_c\times N_B}$*, et l'équation de minimisation du couple par contraintes internes devient* $\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{G}_m\bar{\boldsymbol{\tau}}_m = \left(\mathbf{1}-\boldsymbol{K}_m^\dagger\boldsymbol{K}_m\right)\bar{\boldsymbol{\tau}}_m \in \mathbb{R}^{N_B}$*.*

3.2.10 Forme finale de la modélisation dynamique

Nous concluons cette section en présentant les formes finales de la dynamique modélisée du système. L'équation (3.31) met en évidence la dynamique du système sans contraintes de boucle. Dans les sections 4.3 et 4.4 nous basons notre travail sur ce système équivalent pour déterminer le couple de commande $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ en considérant que tous les joints sont actionnés. Nous projetons $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\tau}}_{fb}^\top & \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^\top\end{bmatrix}^\top$ dans l'espace actionnable pour obtenir $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{act}$ (équation (3.22)) et nous déterminons $\boldsymbol{\tau}_{act}$ le couple de commande optimisé par contraintes internes :

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{E. articulations} \rightarrow \begin{cases}\bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{d}\\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{act} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}_{fb}^c)^{-1}\bar{\boldsymbol{\tau}}_{fb}\\ \boldsymbol{\tau}_{act} = \boldsymbol{G}_m\bar{\boldsymbol{\tau}}_{act}\end{cases}\\ &\text{E. opérationnel} \rightarrow \begin{cases}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{h}}^e = \bar{\boldsymbol{f}} + \bar{\boldsymbol{J}}^\top\mathbf{d}, \text{ et } \bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{J}^\top\bar{\boldsymbol{f}}\\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{act} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_m - \boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I}_{fb}^c)^{-1}\bar{\boldsymbol{\tau}}_{fb}\\ \boldsymbol{\tau}_{act} = \boldsymbol{G}_m\bar{\boldsymbol{\tau}}_{act}\end{cases}\end{aligned}} \tag{3.35}$$

CHAPITRE 4 COMPOSANTS DU CONTRÔLEUR

4.1 Aperçu de la structure de contrôle

Nous basons la conception du contrôleur sur le modèle ouvert nominal, le système (3.35) en prenant $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. L'observateur de perturbation a pour rôle de compenser les perturbations pour que le système se comporte comme l'équivalent nominal. La structure du système en boucle fermée est donnée à la figure 4.1.

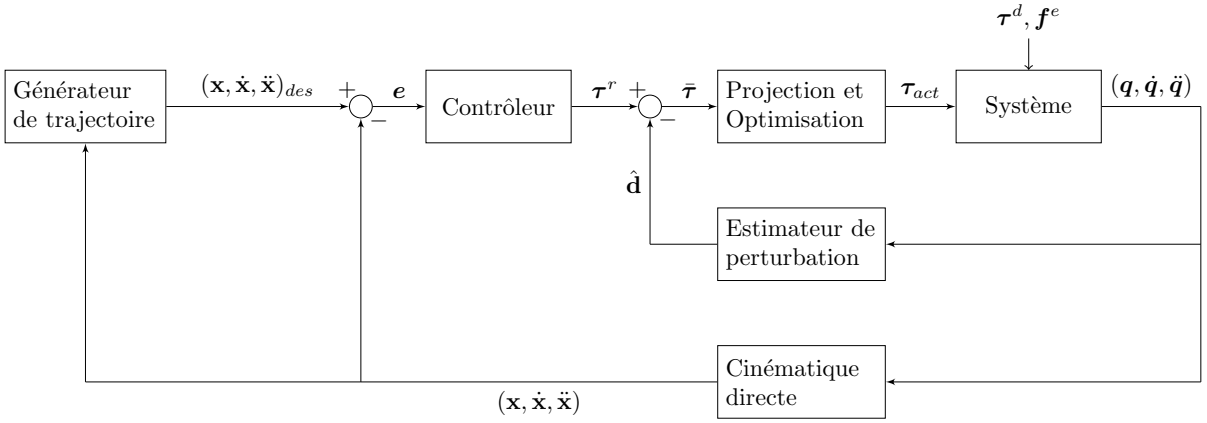

Figure 4.1 Structure générale des algorithmes de commande.

4.2 Générateur de trajectoire

Lors du déplacement, l'absence de base centrale modifie fondamentalement le travail du générateur de trajectoire. Pour les robots hautement articulés, la position de la base centrale évolue dynamiquement pour garantir la stabilité. Notre système ne possède pas ce degré de liberté supplémentaire ce qui réduit le travail demandé au générateur de trajectoire. Une trajectoire générée possède deux composantes. La première est la position dans l'espace de la base du robot ${}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1 des}$. Celle-ci est spécifiée par la mission et l'endroit à atteindre. La deuxième est la position relative des trois autres torses. Nous nous contentons de préciser leur position dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, leur altitude évolue dynamiquement avec la forme du terrain. Un algorithme de vision est nécessaire pour les environnements complexes par exemple le passage dans un tunnel ; il faut alors ajuster l'écartement des torses en fonction du tunnel. Afin d'adapter dynamiquement l'altitude des torses en fonction du terrain, nous présentons

section 4.4 deux méthodes d'adaptation au sol dont l'un des objectifs est le suivi des deux premières composantes de ${}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1 des}$: les orientations $\begin{bmatrix}\theta_R & \theta_P\end{bmatrix}$ autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Nous déterminons ainsi $\begin{bmatrix}{}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2 des} & {}^{T_2}\mathbf{x}_{T_3 des} & {}^{T_1}\mathbf{x}_{T_4 des} & {}^{T_4}\mathbf{x}_{T_5 des}\end{bmatrix}$.

Pour suivre les quatres dernières composantes de ${}^{\mathrm{w}}\mathbf{x}_{T_1 des}$: les trois composantes de position et l'orientation autour de l'axe $\vec{z}$, nous appliquons un schéma de contrôle de robot mobile classique que nous ne présentons pas ici en détail [50]. Nous calculons ainsi l'état désiré des roues, les variables articulaires désirées $\begin{bmatrix}\theta_{20} & \dots & \theta_{28}\end{bmatrix}$.

Nous notons que la position du centre de masse du système n'est pas aussi fondamentale que pour les architectures classiques ; nous nous en préoccupons uniquement lorsqu'un torse est élevé du terrain pour manipuler.

4.3 Systèmes de contrôle en position

Nous implémentons un contrôleur par couple pré-calculé dans l'espace des articulations et dans l'espace opérationnel [20, 21, 51].

4.3.1 Couple pré-calculé dans l'espace des articulations

Structure

Nous considérons le couple de commande $\boldsymbol{\tau}^r$ (4.1). Il est construit à partir d'une boucle interne linéarisant la dynamique nominale du système (3.35) autour de la commande $\ddot{\boldsymbol{q}}_r$ construite dans une boucle externe de régulation :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}^r = \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}.} \tag{4.1}$$

Les éléments de la dynamique $\{\bar{\boldsymbol{H}}, \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{\rho}}\}$ sont calculés par l'algorithme récursif de Newton-Euler [24]. Cette classe d'algorithme récursif est de complexité $\mathcal{O}(N_B)$. En injectant le couple de commande $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}^r$ dans le modèle dynamique nominal (3.35) nous obtenons une linéarisation parfaite :

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_r. \tag{4.2}$$

La boucle interne convertit notre problème de contrôle non linéaire en n problèmes linéaires découplées. Nous construisons la consigne $\ddot{\boldsymbol{q}}_r$ (équation (4.3)) avec l'accélération désirée et une compensation *proportionnel-dérivateur-intégrateur* pour garantir les performances en suivi et

en régulation :

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_r = \ddot{\boldsymbol{q}}_{des} + \boldsymbol{K}_{P,q}\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_{D,q}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{K}_{I,q}\int \tilde{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{d}t, \tag{4.3}$$

où nous définissons $\tilde{\boldsymbol{q}}$ l'erreur articulaire :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}_{des} - \boldsymbol{q}. \tag{4.4}$$

Dynamique de l'erreur et stabilité du système nominal

La dynamique d'erreur articulaires $\tilde{\boldsymbol{q}}$ résultante (4.5) lorsque le système est parfaitement modélisé, nous permet de conclure sur la stabilité en utilisant les théories d'analyse des systèmes linéaires :

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{K}_{P,q}\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_{D,q}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{K}_{I,q}\int \tilde{\boldsymbol{q}}\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}. \tag{4.5}$$

La dynamique des erreurs est stable si les n polynômes composant (4.5) sont Hurwitziens [17]. Nous choisissons des matrices de gain de la forme (4.6) pour garantir la stabilité :

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(k_1, ..., k_n) \text{ avec : } k_\mathrm{i} > 0, \forall \mathrm{i} \in [1, n]. \tag{4.6}$$

4.3.2 Couple pré-calculé dans l'espace opérationnel

Nous pouvons également utiliser le modèle dynamique dans l'espace opérationnel (3.35) qui permet de s'affranchir du modèle géométrique inverse et du modèle cinématique inverse.

Structure

Nous utilisons une structure similaire à l'inversion dynamique dans l'espace articulaire (section 4.3.1). Le couple de commande est calculé dans la boucle interne :

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{f}^r &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{h}}^e \\ \boldsymbol{\tau}^r &= \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{f}^r \end{aligned}} \tag{4.7}$$

La boucle interne linéarise la dynamique du système autour de la commande $\dot{\mathbf{v}}_r$:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_r. \tag{4.8}$$

Nous choisissons la commande $\dot{\mathbf{v}}_r$ dans une boucle externe intégrant l'accélération désirée et

une compensation *proportionnel-dérivateur-intégrateur* :

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \dot{\mathbf{v}}_{des} + \boldsymbol{K}_{P,x}\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{K}_{D,x}\tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{K}_{I,x}\int \tilde{\mathbf{x}}\mathrm{d}t, \tag{4.9}$$

où nous définissons $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}$ les erreurs opérationnelles :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_{des} - \mathbf{x}, \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}_{des} - \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Une implémentation algorithmique récursive peut être trouvée dans l'article [33].

Dynamique de l'erreur et stabilité du système nominal

La dynamique d'erreur opérationnelle $\tilde{\mathbf{x}}$ résultante lorsque le système est parfaitement modélisé est identique à celle de l'approche dans l'espace articulaire (4.5). La condition de stabilité est identique.

4.4 Déplacement sur un sol inégal

Nous cherchons à implémenter une méthode bas niveau permettant le déplacement sur un sol inégal en respectant les objectifs suivants :

Force Leveling Control (FLC) : Pour un nombre de contacts supérieur à 3, le contact au sol est hyperstatique. Il est alors nécessaire d'ajuster l'altitude de chaque roue pour garantir le contact au sol de chacune. Nous désirons respecter une répartition des forces de contact colinéaires à la gravité sur chaque roue.

Roll Pitch Angle (RPA) : Pour un robot mobile, la posture relative à un repère galiléen est fonction des contacts au sol. En ajustant les altitudes de chaque point de contact nous agissons directement sur la posture angulaire de la base du robot.

Grâce à son architecture, le centre de gravité du système est proche du plan des roues. **Pour garantir la stabilité du système sur un terrain inégal, il n'est pas nécessaire d'appliquer une technique tel que le Zero-Moment-Point.**

4.4.1 Spécification des tâches

Pour ce travail, il est naturel d'utiliser la modélisation du robot dans l'espace opérationnel (section 3.2.2). Nous présentons ici des notions de contrôle hybride en force et en position. Les deux solutions présentées utiliseront ce formalisme par simplicité. Nous utilisons les notations

du modèle de contact section 3.2.5. Le lecteur est référé à l'article de Villani [40] pour une présentation plus complète du principe de la commande hybride.

Espaces réciproques des positions et des forces

Nous commençons par définir le repère $\mathrm{Rg_i}$ qui partage la même origine que $\mathrm{R}_{T_\mathrm{i}}$ (repère fixé sur le torse T_i) mais dont le vecteur $\vec{z}$ est colinéaire avec $\vec{z}_g$, la direction du vecteur gravité. Nous définissons également la transformée composite $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ qui transforme un vecteur d'état exprimé dans les bases locales $\mathrm{Rg_i}$ vers les bases locales T_i.

Nous présentons maintenant notre solution pour le déplacement sur un sol inégal. Nous nous appuyons sur les concepts présentés dans la section 2.1.2, spécifiquement la définition de la dynamique des joints.

Afin de réagir à une variation de terrain il est nécessaire de modifier la position des torses tout en avançant. Notre solution est de simuler avec un torse se déplaçant dans l'espace, une liaison qui permet le mouvement dans toutes les directions sauf l'axe $\vec{z}_g$. Dans la direction $\vec{z}_g$, cette liaison virtuelle transmet une force. De façon similaire aux matrices $\mathbf{S}_{vpivot}$ et $\mathbf{S}_{f_{pivot}}$ définies pour la liaison pivot section 2.1.2, nous définissons les matrices de transmission des mouvements $\mathbf{\Sigma_v} \in \mathbb{R}^{m\times(m-\alpha_c)}$ et des forces $\mathbf{\Sigma_f} \in \mathbb{R}^{m\times\alpha_c}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma_v} &= \begin{bmatrix} ... & \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{v},\mathrm{i}} & ... \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Sigma_f} &= \begin{bmatrix} ... & \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{f},\mathrm{i}} & ... \end{bmatrix}, \forall \mathrm{i} \text{ tel que } T_\mathrm{i} \in \{contact\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

où les sous-matrices colonnes $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{v}\mathrm{i}}$ et $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{f}_\mathrm{i}}$ sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{v},\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6(\mathrm{i}-1)\times 5} \\ \mathbf{1}_{5\times 5} \\ \mathbf{0}_{1\times 5} \\ \mathbf{0}_{6(4-\mathrm{i})\times 5} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{f},\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6(\mathrm{i}-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{5\times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{6(4-\mathrm{i})\times 1} \end{bmatrix} \text{ si } T_\mathrm{i} \in \{contact\}, \\ \text{sinon } \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{v},\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6(\mathrm{i}-1)\times 6} \\ \mathbf{1}_{6\times 6} \\ \mathbf{0}_{6(4-\mathrm{i})\times 6} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{f},\mathrm{i}} \text{ est non-définie.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Nous définissons finalement $\mathbf{S}_v$ et $\mathbf{S}_f$ les matrices généralisées de transmission des mouvements

et des forces en incluant la transformée composite $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_v &= \mathbf{\Omega}\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{v}}, \\ \mathbf{S}_f &= \mathbf{\Omega}\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{f}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nous notons que par définition : $\mathbf{S}_f^\top \mathbf{S}_v = \mathbf{0}$.

Projection des accélérations et des forces sur les espaces réciproques

Le contrôle hybride classique considère que les forces et les vitesses existent dans des espaces parfaitement réciproques. La notion de réciprocité est ici similaire à la notion d'espaces orthogonaux mais s'applique ici à deux espaces qui ne partagent pas les mêmes dimensions. L'un est un espace où les données sont homogènes à des forces, l'autre est un espace où les données sont homogènes à des vitesses. Pour améliorer le comportement dynamique de notre système mobile nous nous abstenons de faire cette hypothèse très conservatrice. Nous décomposons l'accélération du système $\dot{\mathbf{v}}$ sur les deux sous-espaces des mouvements et des forces :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{S}_v \mathbf{S}_v^\top \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}_f \mathbf{S}_f^\top \dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{S}_v \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{S}_f \mathbf{S}_f^\top \dot{\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Avec un schéma classique de contrôle hybride, le deuxième terme de l'équation (4.14) est pris nul.

Le vecteur $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{S}_v^\top \dot{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{m-\alpha_c}$ représente le vecteur des accélérations dans l'espace des positions. Au même titre nous posons $\boldsymbol{x} = \mathbf{S}_v^\top \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-\alpha_c}$.

Nous projetons le couple nominal (connu) $\bar{\boldsymbol{h}}^e$ dû aux forces de contact sur les deux sous-espaces des mouvements et des forces :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{h}}^e &= \mathbf{S}_f \mathbf{S}_f^\top \bar{\boldsymbol{h}}^e + \mathbf{S}_v \mathbf{S}_v^\top \bar{\boldsymbol{h}}^e \\ &= \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}^e + \mathbf{S}_v \mathbf{S}_v^\top \bar{\boldsymbol{h}}^e. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\lambda}^e = \mathbf{S}_f^\top \bar{\boldsymbol{h}}^e \in \mathbb{R}^{\alpha_c}$ représente le sous-vecteur des forces dans l'espace des forces.

Posture et contacts désirés

Nous nous intéressons à la génération de la posture et des forces de contacts désirées.

Posture de la base La posture est donnée par les deux premières composantes (Roll/Roulis et Pitch/Tangage) $\begin{bmatrix} \theta_R & \theta_P \end{bmatrix}^\top$ de ${}^0\mathbf{x}_{T_1}$, la position de la base flottante (Torse 1) par rapport

au repère fixe 0. Nous précisons que le vecteur $\vec{z}$ du repère fixe est colinéaire avec $\vec{z}_g$. Les angles $\begin{bmatrix}\theta_{R,des} & \theta_{P,des}\end{bmatrix}^\top$ en sont les homologues désirés.

Répartition des efforts Nous effectuons le développement qui suit en omettant le torse virtuel T_5. À ce titre nous utilisons $\{\overline{contact}\} = \{contact\}\backslash\{T_5\}$ et $\bar{\alpha}_c$.

Nous posons donc le vecteur $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^e \in \mathbb{R}^{\bar{\alpha}_c}$ qui représente les forces appliquées par le sol aux $\bar{\alpha}_c$ torses (excepté T_5) le long du vecteur $\vec{z}_g$. $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,des}$ est son homologue désiré. La composante i de $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^e$ est la force $\bar{h}^e_{\vec{z}_g,T_\mathrm{i}}$ appliquée par le sol sur le torse T_i le long du vecteur $\vec{z}_g$.

Nous choisissons $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,des}$ en fonction de la répartition optimale des efforts donnés par la position $\boldsymbol{OG}$ du centre de gravité dans le plan (x, y) du repère Rg et M la masse totale du système. L'équation d'équilibre statique nous donne :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,des} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{OG}\\ 1\end{bmatrix} M \cdot g \\ \text{avec } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}... & \boldsymbol{A}_{T_\mathrm{i}} & ...\end{bmatrix}, \forall T_\mathrm{i} \in \{\overline{contact}\} \text{ avec : } \boldsymbol{A}_{T_\mathrm{i}} = \begin{bmatrix}{}^{\mathrm{Rg}_1}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_\mathrm{i}}\\ 1\end{bmatrix},\end{gathered} \tag{4.16}$$

où ${}^{\mathrm{Rg}_1}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_\mathrm{i}} = \begin{bmatrix}{}^{\mathrm{Rg}}p_{T_1,x} & {}^{\mathrm{Rg}}p_{T_1,z}\end{bmatrix}^\top$ est la position dans le plan $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ du torse T_i par rapport au repère Rg_1. Nous notons que $\boldsymbol{A}_{T_0} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$.

La matrice $\boldsymbol{A}$ est de taille $(3 \times \bar{\alpha}_c)$. Elle est de rang $\min(3, \alpha_c)$ car les points de contact ne peuvent pas se chevaucher. Si $\bar{\alpha}_c < 3$ le problème est indeterminé, l'équilibre statique est impossible. Si $\bar{\alpha}_c = 3$ l'équilibre est isostatique et nous pouvons résoudre l'équation (4.16) en inversant $\boldsymbol{A}$. Si $\bar{\alpha}_c > 3$ l'équilibre est hyperstatique, il existe une infinité de répartitions possibles.

Nous considérons $\bar{\alpha}_c \geq 3$ et nous définissons $\boldsymbol{A}^\dagger$ la pseudo-inverse à droite de $\boldsymbol{A}$ pondérée par la matrice de répartition des efforts $\boldsymbol{W}_c \in \mathbb{R}^{\bar{\alpha}_c \times \bar{\alpha}_c}$:

$$\boldsymbol{A}^\# = \boldsymbol{W}_c^{-1}\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_c^{-1}\boldsymbol{A}^\top)^{-1}. \tag{4.17}$$

D'après le lemme 1, la répartition de masse qui minimise la pondération donnée par $\boldsymbol{W}_c$ est donnée par l'équation :

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,des} = \boldsymbol{A}^\# \begin{bmatrix}\boldsymbol{OG}\\ 1\end{bmatrix} M \cdot g \in \mathbb{R}^{\bar{\alpha}_c}.} \tag{4.18}$$

Nous clôturons le calcul en ajoutant la présence du torse T_5 si le torse T_3 est en contact. Il ne subi aucune force mais doit être commandé en force pour ne pas gêner le mouvement de T_3 :

$$\boldsymbol{\lambda}^{e,des} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,des} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha_c}. \tag{4.19}$$

Remarque. *Si les masses de chaque composant sont mal connues, nous pouvons estimer la position du centre de gravité en utilisant le vecteur $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static}$ mesuré au repos. Nous pouvons même estimer ce vecteur avec l'observateur présenté en section 4.5 si nous désirons nous passer de capteurs :*

$$\boldsymbol{OG} = \begin{pmatrix} OG_x \\ OG_y \end{pmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^{4} {}^{Rg}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_i} \cdot \bar{\lambda}_i^{e,static}}{\left\| \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static} \right\|_1} \text{ et } M \cdot g = \left\| \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static} \right\|_1 . \tag{4.20}$$

Nous déterminons $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static}$ une seule fois après chaque changement de masse du robot alors que $\boldsymbol{OG}$ et ${}^{Rg}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_i}$ sont mis à jour en temps réel.

4.4.2 Méthode 1 : Adaptation cinématique

Nous implémentons cette méthode pour référence, en utilisant le formalisme du contrôle hybride. Avec une modification, le torse T_5 est commandé indépendamment ici et nous prenons $\lambda_5^{e,des} = \lambda_3^{e,des}$. Il suivra naturellement la même trajectoire que T_3. L'adaptation cinématique consiste à modifier le vecteur d'état désiré $\mathbf{x}_{des}$ dynamiquement en fonction des erreurs de suivi de la posture et de la répartition des efforts. Nous nous inspirons de la méthode développée par Cordes [16]. **Le choix du contrôleur est indépendant de cette méthode, nous pouvons utiliser un des deux contrôleurs de position présentés à la section 4.3**. Nous mettons à jour la trajectoire désirée $\mathbf{x}_{des}$ en remplaçant les termes sélectionnés par la matrice $\mathbf{S}_f$:

$$\mathbf{x}_{des} = \mathbf{x}_{des} + \mathbf{S}_f \mathbf{S}_f^{\top} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{des} \right) + \mathbf{S}_f \left(K_{FLC}\, \boldsymbol{o}^{FLC} + K_{RPA}\, \boldsymbol{o}^{RPA} \right), \tag{4.21}$$

avec $\boldsymbol{o}^{FLC}, \boldsymbol{o}^{RPA} \in \mathbb{R}^{\alpha_c}$ les offsets selon l'axe $\vec{z}_g$ générés par les modules FLC et RPA. $\boldsymbol{o}^{FLC} = \left[..., o_{\mathrm{i}}^{FLC}, ... \right]^{\top}$ $\forall$i tel que $T_{\mathrm{i}} \in \{contact\}$ et nous noterons $o_{T_{\mathrm{i}}}^{FLC} = o_{\mathrm{i}}^{FLC}$ pour clarifier les explications. K_{FLC} est une matrice de gain diagonale transformant une erreur en force en un offset en position. Ces éléments sont homogènes à des $\mathrm{m} \cdot \mathrm{N}^{-1}$. Et K_{RPA} est une matrice de gains diagonale adimensionnelle (au sens des unités).

Nous notons que l'hypothèse 2 impose que notre trajectoire désirée sois continument dérivable

trois fois. Cette hypothèse sera utilisée dans la section 4.6 lors de la preuve de stabilité du système en boucle fermée. Pour garantir la stabilité du système en pratique, nous sommes amenés à lisser les offsets en utilisant un filtre.

Module FLC

Nous calculons l'offset (exprimé dans Rg) dû à l'erreur sur la répartition des efforts pour le torse T_i porté par le torse $p(T_\mathrm{i})$ avec l'équation :

$$\forall \mathrm{i} \text{ tel que } T_\mathrm{i} \in \{contact\}, o_{T_\mathrm{i}}^{FLC} = \begin{cases} \left(\lambda_\mathrm{i}^{e} - \lambda_\mathrm{i}^{e,des}\right) - o_{p(T_\mathrm{i})}^{FLC} & \text{si } p(T_\mathrm{i}) \in \{contact\}, \\ \left(\lambda_\mathrm{i}^{e} - \lambda_\mathrm{i}^{e,des}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Comme chaque torse est attaché directement au précédent il est nécessaire de retrancher l'offset appliqué au torse parent $o_{p(T_\mathrm{i})}^{FLC}$.

Module RPA

Nous représentons l'erreur d'orientation $\begin{bmatrix}\theta_R & \theta_P\end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix}\theta_{R,des} & \theta_{P,des}\end{bmatrix}^\top$ sous la forme *angle - axe* $\{\boldsymbol{e}, \theta_e\}$. Nous notons que $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^2$ est unitaire et appartient toujours au plan (x, y) du repère Rg.

L'offset (exprimé dans Rg) à appliquer pour corriger l'erreur angulaire est fonction de la distance d_i du point de contact avec l'axe de rotation $\boldsymbol{e}$ alors que le signe est fonction de la position dans le plan (x, y) du repère fixe coupé par l'axe $\boldsymbol{e}$ (droite ou gauche) :

$$\begin{aligned} d_\mathrm{i} &= \left\| \boldsymbol{e} \times {}^{\mathrm{Rg}}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_\mathrm{i}} \right\|, \\ \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{e} \times \vec{z}_g. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Alors $\forall \mathrm{i}$ tel que $T_\mathrm{i} \in \{contact\}$:

$$o_{T_\mathrm{i},z}^{RPA} = \begin{cases} \mathrm{sign}({}^{\mathrm{Rg}}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n})\ d_\mathrm{i} \tan\theta_e - o_{p(T_\mathrm{i}),z}^{RPA} & \text{si } p(T_\mathrm{i}) \in \{contact\}, \\ \mathrm{sign}({}^{\mathrm{Rg}}\bar{\boldsymbol{p}}_{T_\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n})\ d_\mathrm{i} \tan\theta_e & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.24}$$

4.4.3 Méthode 2 : Contrôle hybride

Nous présentons ici un contrôleur venant s'ajouter à ceux de la section 4.3. Nous appliquons un contrôle hybride au système dans le but de respecter les objectifs d'adaptation au sol présentés en début de section 4.4. À notre connaissance, cette méthode n'a jamais été

appliquée à un robot mobile.

Commande par contrôle hybride

Nous utilisons le modèle dynamique nominal dans l'espace opérationnel (3.35) suivant le schéma de contrôle (4.25). Avec $\dot{\boldsymbol{\nu}}_r \in \mathbb{R}^{m-\alpha_c}$ la commande en position et $\boldsymbol{\lambda}^h \in \mathbb{R}^{\alpha_c}$ la commande en force est :

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{f}^r &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{S}_f\boldsymbol{\lambda}^h - \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^\top\bar{\boldsymbol{h}}^e, \\ \boldsymbol{\tau}^r &= \boldsymbol{J}^\top\boldsymbol{f}^r. \end{aligned}} \tag{4.25}$$

La commande $\dot{\boldsymbol{\nu}}_r$ est définie dans une boucle externe similaire à celle utilisée pour l'inversion dynamique (4.26) mais dans l'espace des mouvements :

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_r = \dot{\boldsymbol{\nu}}_{des} + \boldsymbol{K}_{P,h}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}_{D,h}\tilde{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{K}_{I,h}\int \tilde{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}t, \tag{4.26}$$

où nous posons les erreurs en position $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_{des} - \boldsymbol{x}$ et $\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}_{des} - \boldsymbol{\nu}$. La commande en force $\boldsymbol{\lambda}^h$ est définie par la boucle externe (4.27). Une simple compensation intégrale est suffisante dans le cas d'un terrain rigide :

$$\boldsymbol{\lambda}^h = \boldsymbol{\lambda}^{h,des} + \boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{\lambda}}\int \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\mathrm{d}t. \tag{4.27}$$

Si le terrain est modélisé comme un ressort, il faut modifier cette boucle externe. Nous posons l'erreur en force $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}^{h,des} - \boldsymbol{\lambda}^e$ avec $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\lambda}}$ une matrice de gains diagonale. Nous déterminons $\boldsymbol{\lambda}^{h,des} = \boldsymbol{\lambda}^{FLC} + \boldsymbol{\lambda}^{RPA}$ dans les modules FLC et RPA.

Module FLC

Nous prenons tout simplement $\boldsymbol{\lambda}^{FLC} = \boldsymbol{\lambda}^{e,des}$.

Module RPA

Pour corriger l'erreur angulaire, nous voulons générer le moment stabilisant $\boldsymbol{T}^{RPA}$:

$$\boldsymbol{T}^{RPA} = \begin{bmatrix} T^{RPA,x} \\ T^{RPA,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{\theta,P_1}(\theta_R - \theta_{R,des}) - K_{\theta,D_1}(\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_{R,des}) \\ -K_{\theta,P_2}(\theta_P - \theta_{P,des}) - K_{\theta,D_2}(\dot{\theta}_P - \dot{\theta}_{P,des}) \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Nous utilisons l'équation des moments pour déterminer $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{RPA}$, les forces appliquées aux points

de contact résultant au moment $\boldsymbol{T}^{RPA}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{RPA} &= \boldsymbol{T}^{RPA} \\ \text{donc } \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{RPA} &= \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{T}^{RPA}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

avec :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ... & \boldsymbol{A}_{\mathrm{i}} & ... \end{bmatrix}, \forall \mathrm{i} \in \{\overline{contact}\} \text{ avec : } \boldsymbol{A}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{Rg}}p_{T_{\mathrm{i}},y} \\ -{}^{\mathrm{Rg}}p_{T_{\mathrm{i}},x} \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

De façon similaire à $\boldsymbol{\lambda}^{e,des}$ nous obtenons $\boldsymbol{\lambda}^{RPA}$ en ajoutant une force nulle pour T_5 :

$$\boldsymbol{\lambda}^{RPA} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{RPA} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha_c}. \tag{4.31}$$

Dynamique de l'erreur et stabilité

Nous injectons le couple de commande $\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}^r$ (4.25) dans la dynamique nominale du système (3.35) :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \bar{\boldsymbol{h}}^e &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{S}_f\boldsymbol{\lambda}^h - \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^{\top}\bar{\boldsymbol{h}}^e, \\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_f\mathbf{S}_f^{\top}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{S}_f\boldsymbol{\lambda}^e - \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^{\top}\bar{\boldsymbol{h}}^e &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \mathbf{S}_f\boldsymbol{\lambda}^h - \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^{\top}\bar{\boldsymbol{h}}^e, \\ \mathbf{S}_f\left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e\right) + \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_f\mathbf{S}_f^{\top}\dot{\mathbf{v}} &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\left(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \dot{\boldsymbol{\nu}}\right), \end{aligned} \tag{4.32}$$

où nous utilisons les projections dans les espaces réciproques de commande en position et en force (section 4.4.1). Nous obtenons les dynamiques d'erreurs :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_v\left(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \dot{\boldsymbol{\nu}}\right) &= \mathbf{0}, \\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_f^{-1}\left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e\right) + \mathbf{S}_f^{\top}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

en posant $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_f = \left(\mathbf{S}_f^{\top}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\mathbf{S}_f\right)^{-1}$ et $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_v = \mathbf{S}_v^{\top}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v$.

Terrain à pente fixe Nous examinons d'abord le cas général d'un terrain à pente fixe. Dans ce cas $\mathbf{S}_f^{\top}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ car chaque torse suit la pente du terrain. Nous obtenons une compensation parfaite de la dynamique du système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^e = \boldsymbol{\lambda}^h \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\boldsymbol{\nu}}_r \end{cases} \tag{4.34}$$

et les deux objectifs d'adaptation au sol 4.4 sont remplis.

Terrain à pente variante Nous traitons maintenant le cas de la dynamique transitoire lors de la variation de la pente du terrain. Nous commençons par réécrire la dynamique des erreurs en force.

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e\right) &= -\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_f \mathbf{S}_f^\top \dot{\mathbf{v}}, \\ \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\lambda}}\right)\left(\boldsymbol{\lambda}^{h,des} - \boldsymbol{\lambda}^e\right) &= -\underbrace{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_f \mathbf{S}_f^\top}_{\geq \mathbf{0}} \dot{\mathbf{v}}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Nous nous intéressons au torse T_i. La ligne i de l'équation (4.35) nous donne donc :

$$\left(1 + K_{\boldsymbol{\lambda},\mathrm{i}}\right)\left(\lambda_\mathrm{i}^{h,des} - \lambda_\mathrm{i}^e\right) = -\bar{\Lambda}_{f,\vec{z}_g,\mathrm{i}}\, \dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,\mathrm{i}}, \tag{4.36}$$

où $\dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,i}$ est l'accélération du torse T_i selon l'axe $\vec{z}_g$ par rapport à son torse parent $p(T_\mathrm{i})$. Et $\bar{\Lambda}_{f,\vec{z}_g,i}$ la composante selon l'axe $\vec{z}_g$ de l'inertie généralisé du torse T_i, elle est homogène à une masse.

Un torse subissant une variation de terrain accélère donc de façon à suivre le terrain. Si un torse rencontre un terrain montant, la force de contact qu'il subit va croître et donc $\left(\lambda_\mathrm{i}^{h,des} - \lambda_\mathrm{i}^e\right) \leq 0$. D'après l'équation (4.36) $\dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,\mathrm{i}} \geq 0$, le torse monte et épouse la forme du terrain. La dynamique transitoire est donc stable.

Remarque. *Le cas du torse T_5 est particulier. Il n'est pas en contact avec le sol mais nous pouvons le considérer en contact avec le torse T_3. Dans l'équation* (4.36)*, nous prenons $K_{\boldsymbol{\lambda},5} = 0$ et nous avons $\lambda_5^{h,des} = 0$. De plus, λ_5^e est en fait l'action du torse T_3 sur T_5. La conclusion faite ci-dessus s'applique ici aussi, le torse T_5 se déplace selon l'axe $\vec{z}_g$ sans opposer de résistance aux mouvements de T_3. Au lieu d'épouser la forme du sol, il épouse les mouvements de T_3 qui lui épouse la forme du sol.*

Décollage d'un torse Même si la dynamique transitoire est stable, une réponse proportionnel à la pente du terrain n'est pas garantie, un torse peut perdre le contact. Durant le décollage du torse T_i, $\lambda_\mathrm{i}^e = 0$. De plus, nous verrons dans la section 5.3 (résultat) que les éléments du gain $\boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{\lambda}}$ sont négligeables devant 1. La dynamique du torse T_i selon l'axe $\vec{z}_g$ devient :

$$\lambda_\mathrm{i}^{h,des} = -\bar{\Lambda}_{f,\vec{z}_g,i} \dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,i}. \tag{4.37}$$

Nous considérons maintenant uniquement l'apport du module FLC : nous prenons $\lambda_\mathrm{i}^{h,des} = \lambda_\mathrm{i}^{FLC} = \lambda_\mathrm{i}^{e,des}$. Dans le cas où le centre de gravité est positionné selon la répartition nominale de masse décrite à la section 4.4.1, $\lambda_\mathrm{i}^{e,des} = \bar{\lambda}_\mathrm{i}^{e,static}$. La dynamique devient donc :

$$-\bar{\Lambda}_{f,\vec{z}_g,\mathrm{i}}\, \dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,\mathrm{i}} = \bar{\lambda}_\mathrm{i}^{e,static}. \tag{4.38}$$

Or $\bar{\lambda}_{\mathrm{i}}^{e,static}$ est la force appliquée selon $\vec{z}_g$ par le sol au torse T_{i} à l'équilibre. Nous pouvons donc l'exprimer en fonction de la gravité et de l'inertie composite du torse T_{i} : $\bar{\lambda}_{\mathrm{i}}^{e,static} = -\bar{\Lambda}_{f,\vec{z}_g,\mathrm{i}} g$. Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\dot{\mathrm{v}}_{\vec{z}_g,\mathrm{i}} = g.} \tag{4.39}$$

Dans ce cas idéal, la dynamique générée par le module FLC d'un torse qui décolle est une chute libre. La commande FLC n'influence pas les torses voisins et la posture du système. De plus, aucun effort de commande n'est fourni pour le ramener en contact avec le sol. En pratique, la commande du module RPA nous éloigne de ce cas idéal pour corriger la posture mais nous concluons que dans le cas d'un décollage le module FLC ne perturbe pas la posture.

4.4.4 Intégration dans la boucle de contrôle

Nous rappelons que la méthode 2 (section 4.4.3) est un contrôleur à part entière. La méthode 1 modifie la trajectoire désirée dynamiquement et s'utilise donc avec un des contrôleurs en position (sections 4.3.1 et 4.3.2). Nous rappelons également qu'un torse dans l'ensemble $\{contact\}$ participe à l'adaptation au sol. Sinon, il est contrôlé purement en position.

4.5 Observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement

Nos contrôleurs sont basés sur la dynamique nominale du système. Le rôle de l'observateur de perturbation est de compenser les perturbations $\mathbf{d}$ afin que le système réel se comporte comme le système nominal.

Nous présentons ici un observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement. La structure utilisée est inspirée de l'article de J. Back et W. Ha [46].

Nous cherchons à estimer le vecteur de perturbation composite $\mathbf{d}$ (3.13). Pour cela, nous construisons un observateur de perturbation basé sur la quantité de mouvement. Nous définissons la quantité de mouvement généralisée $\boldsymbol{p}$ (4.40) en utilisant la matrice d'inertie nominale $\bar{\boldsymbol{H}}$:

$$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{4.40}$$

Nous développons la dérivée temporelle de $\boldsymbol{p}$ en utilisant la relation entre $\dot{\boldsymbol{H}}$ et $\boldsymbol{C}$ (postulat 2)

et le modèle dynamique ouvert (3.35) :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= \dot{\bar{\boldsymbol{H}}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} \\ &= \left(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^{\top}\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\bar{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{d} - \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}+\right) \\ &= \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{d},\end{aligned} \tag{4.41}$$

en définissant $\bar{\boldsymbol{C}}_p = \bar{\boldsymbol{C}}^{\top}(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{p})\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}$. Nous en déduisons une expression des perturbations $\mathbf{d}$ que nous cherchons à estimer :

$$\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{p}} - \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}. \tag{4.42}$$

Nous choisissons d'estimer $\dot{\boldsymbol{p}}$ en construisant un filtre de premier ordre et nous posons $\boldsymbol{\chi}$ généré en filtrant le couple de commande envoyé au système :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= -\frac{\alpha}{\mu}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{p}), \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{p}(0), \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} &= -\frac{\alpha}{\mu}\left(\boldsymbol{\chi} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\right), \boldsymbol{\chi}(0) = \bar{\boldsymbol{\tau}}(0),\end{aligned} \tag{4.43}$$

avec $\alpha > 0$ et $\mu > 0$ des constantes. Si μ est suffisamment petit alors $\dot{\boldsymbol{\zeta}} \approx \dot{\boldsymbol{p}}$ et $\boldsymbol{\chi} \approx \bar{\boldsymbol{\tau}}$. Nous présentons un estimé $\hat{\mathbf{d}}$ des perturbations $\mathbf{d}$:

$$\boxed{\hat{\mathbf{d}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\chi}.} \tag{4.44}$$

Remarque. *Le paramètre μ est inversement proportionnel à la bande passante de certains éléments du système. Un μ trop petit peut rendre la boucle interne de l'estimateur sensible aux dynamiques très rapides. Nous devons nous assurer que les données prises en compte évoluent selon des dynamiques plus lentes que celle du système. C'est pour cette raison que $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, généré par le contrôleur, est filtré en $\boldsymbol{\chi}$. Au même titre, il est nécessaire de filtrer les données des capteurs d'efforts nous donnant $\bar{\boldsymbol{f}}^e$.*

4.5.1 Intégration avec le contrôleur en amont

Cette structure permet une séparation de design entre l'observateur fournissant $\hat{\mathbf{d}}$ et le contrôleur générant le couple de régulation $\boldsymbol{\tau}^r$.

4.5.2 Couple de régulation compensé

Le couple $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ est construit par le contrôleur et l'estimateur de perturbation :

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\tau}} &= \boldsymbol{\tau}^r - \hat{\mathbf{d}} \\ &= \boldsymbol{\tau}^r - \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\chi}.\end{aligned} \tag{4.45}$$

Nous rappelons que le couple optimisé qui est demandé aux actionneurs est $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{\tau}}$. Nous définissons $\boldsymbol{\xi}$ pour simplifier les équations :

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\alpha}\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{p}), \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{0}. \tag{4.46}$$

Nous exprimons alors la nouvelle dynamique simplifiée de l'observateur :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}} &= -\alpha\boldsymbol{\xi} - \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\chi}, \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \boldsymbol{\tau}^r + \alpha\boldsymbol{\xi} + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\chi}.\end{aligned}} \tag{4.47}$$

4.5.3 Dynamique du système en boucle fermée

Nous cherchons à exprimer la dynamique des erreurs du système complet composé du contrôleur basé sur la dynamique du système nominal et de l'estimateur de perturbation. Nous construisons le système (4.48) qui exprime la dynamique du système complet en utilisant les coordonnées $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi})$:

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\chi}) \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{p} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \left(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^\top\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right) \\ \mu\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\alpha\boldsymbol{\xi} - \dot{\boldsymbol{p}} \\ \mu\dot{\boldsymbol{\chi}} = -\alpha\left(\boldsymbol{\chi} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\right) \end{cases} \tag{4.48}$$

Théorie des perturbation singulières

Le système (4.48) est sous forme du modèle standard de perturbation singulière [52] avec μ le paramètre de perturbation. En posant $\mu = 0$ dans (4.48), nous déterminons ($\boldsymbol{\xi}^*$, $\boldsymbol{\chi}^*$) les valeurs en régime quasi-statique de ($\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\chi}$).

Valeur quasi-statique de $\boldsymbol{\xi}^*$

La quatrième équation du système (4.48) et l'équation du couple (4.47) nous donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}^* &= \boldsymbol{\tau}^r + \alpha\boldsymbol{\xi}^* + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\chi}^* \\ \text{donc } \boldsymbol{\xi}^* &= -\frac{1}{\alpha}\left(\boldsymbol{\tau}^r + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}}\right). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Valeur quasi-statique de $\boldsymbol{\chi}^*$

La troisième équation du système (4.48) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= -\alpha\boldsymbol{\xi}^* \\ \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right) &= \boldsymbol{\tau}^r - \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\chi}^* &= \boldsymbol{\tau}^r - \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{\rho}} - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right) \\ \text{donc } \boldsymbol{\chi}^* &= \boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\left(\boldsymbol{\tau}^r - \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} - \bar{\boldsymbol{\rho}}\right) - \left(\boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Nous posons maintenant les erreurs d'estimation :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^*, \text{ avec } \tilde{\boldsymbol{\xi}}(0) = -\boldsymbol{\xi}^*(0), \\ \tilde{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}^*, \text{ avec } \tilde{\boldsymbol{\chi}}(0) = \bar{\boldsymbol{\tau}}(0) - \boldsymbol{\chi}^*(0). \end{cases} \tag{4.51}$$

Nous cherchons alors à exprimer la dynamique du système complet en utilisant les coordonnées $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$.

Dynamique de $\dot{\boldsymbol{p}}$ en fonction de $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= \left(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^\top\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right) \\ &= \left(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^\top\right)\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\boldsymbol{\tau}^d - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\rho}\right) + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\chi}\right) \\ &= -\alpha\boldsymbol{\xi}^* + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}\right) \\ &= \boldsymbol{\tau}^r + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}\right). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dynamique de $\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}$ en fonction de $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$

$$\begin{aligned} \mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} &= \mu\dot{\boldsymbol{\xi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\xi}}^*) \\ &= -\alpha\boldsymbol{\xi} - \dot{\boldsymbol{p}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\xi}}^*) \\ &= -\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}\right) - \mu(\dot{\boldsymbol{\xi}}^*). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Dynamique de $\dot{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}$ en fonction de $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$

$$\begin{aligned}
\mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\chi}}} &= \mu\dot{\boldsymbol{\chi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\chi}}^*) \\
&= -\alpha\boldsymbol{\chi} + \alpha\bar{\boldsymbol{\tau}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\chi}}^*) \\
&= -\alpha\boldsymbol{\chi} + \alpha\left(\boldsymbol{\tau}^r + \alpha\boldsymbol{\xi} + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\chi}\right) - \mu(\dot{\boldsymbol{\chi}}^*) \\
&= \alpha^2\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\chi}}^*).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Nous exprimons alors la dynamique du système avec les coordonnées $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$:

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{p} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\tau}^r + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}\right) \\ \mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = -\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}) - \mu(\dot{\boldsymbol{\xi}}^*) \\ \mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\chi}}} = \alpha^2\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\chi}}^*) \end{cases} \tag{4.55}$$

Pour simplifier les équations nous posons les coordonnées $\boldsymbol{\psi}$, son analogue $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ ainsi que la matrice $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\psi}}$:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \alpha\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ \alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^* \\ \alpha\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\chi}^* \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} -\alpha\boldsymbol{I}_n & -\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & -\alpha\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.56}$$

Nous pouvons calculer la valeur quasi-statique $\boldsymbol{\psi}^*$ de $\boldsymbol{\psi}$ à l'aide de $\boldsymbol{\xi}^*$ et $\boldsymbol{\chi}^*$. Le système (4.57) exprime la dynamique du système complet en utilisant les coordonnées $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$:

$$\boxed{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{p}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\tau}^r + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}\right), \\ \mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \boldsymbol{A}_{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\psi}}^*). \end{cases}} \tag{4.57}$$

4.6 Preuve de stabilité du système complet

Nous considérons que le problème de suivi de trajectoire robuste est résolu par le contrôleur si pour une trajectoire désirée $\boldsymbol{q}_{des}(t)$ et un ε donné, tous les signaux dans le système en boucle fermée sont bornés et que l'erreur de trajectoire est bornée par ε :

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \|\boldsymbol{q}_{des}(t) - \boldsymbol{q}(t)\| \leq \varepsilon. \tag{4.58}$$

Nous cherchons donc à démontrer le théorème 1.

Théorème 1.
Soit $(r_{\boldsymbol{e}_r}, r_{\boldsymbol{\chi}}) > 0$ *et* $l > 0$ *tels que* $B(r_{\boldsymbol{e}_r}) \times B(r_{\boldsymbol{\chi}}) \subset \Omega_l$.
Nous définissons que :

$$(\boldsymbol{e}_r(0),\, \boldsymbol{\chi}(0)) \in B(r_{\boldsymbol{e}_r}) \times B(r_{\boldsymbol{\chi}}),$$

alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \mu^* > 0$ *tel que pour tout* $0 < \mu < \mu^*$ *le contrôleur et l'observateur garantissent :*

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{e}_r(t);\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)\right) \in \Omega_l,\ \forall t \geq 0, \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}_r(t)\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Lemme 2. *Pour toute matrice* $\boldsymbol{A}$ *définie positive bornée et vecteur* $\boldsymbol{x}$ *borné :*

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}) \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

où la fonction $\lambda_{\max}(.)$ *(resp.* $\lambda_{\min}(.)$*) donne la valeur propre maximale (resp. minimale) de la matrice* $\boldsymbol{A}$.

4.6.1 Injection de la dynamique du contrôleur

Nous cherchons désormais à intégrer la dynamique du contrôleur en exprimant la quantité $\boldsymbol{\tau}^r$. Nous utilisons la dynamique de la quantité de mouvement (4.41) dans le but d'exprimer la dynamique des erreurs de régulation :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\bar{\boldsymbol{H}}}\dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^\top)\dot{\boldsymbol{q}}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \left(\boldsymbol{\tau}^r + \bar{\boldsymbol{C}}_p\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{\rho}}\right) + \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{cases} \tag{4.59}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}^r = \left(\bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}\right) - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \boldsymbol{f}^r = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{J}_c\bar{\boldsymbol{f}}^e - \bar{\boldsymbol{J}}^T\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{cases} \tag{4.60}$$

Contrôle par couple pré-calculé dans l'espace des articulations

Nous rappelons le couple de régulation $\boldsymbol{\tau}^r$ donné par le contrôleur présenté section 4.3.1. Et nous rappelons que $\boldsymbol{q}_{des}$ respecte les contraintes de boucle donc $\boldsymbol{K}\ddot{\boldsymbol{q}}_{des} = \boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^r &= \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \\ \text{donc } \ddot{\boldsymbol{q}}_r - \ddot{\boldsymbol{q}} &= -\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Nous posons le vecteur $\boldsymbol{e_q} \in \mathbb{R}^{3n}$ la concaténation des erreurs de suivie et les matrices $\boldsymbol{A_q}$ et $\boldsymbol{B_q}$:

$$\boldsymbol{e_q} = \begin{bmatrix} \int \tilde{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{d}t \\ \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_q} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_n \\ -\boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{q}} & -\boldsymbol{K}_{P,\boldsymbol{q}} & -\boldsymbol{K}_{D,\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B_q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.62}$$

Nous en déduisons la dynamique des erreurs de régulation où $\boldsymbol{A_q}$ est une matrice de Hurwitz :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A_q}\boldsymbol{e_q} + \boldsymbol{B_q}\tilde{\boldsymbol{\psi}}.} \tag{4.63}$$

Contrôle par couple pré-calculé dans l'espace opérationnel

Nous rappelons le couple de régulation $\boldsymbol{\tau}^r$ donné par le contrôleur présenté section 4.3.2 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^r &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\dot{\mathbf{v}}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{J}_c\bar{\boldsymbol{f}}^e, \\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\left(\dot{\mathbf{v}}_r - \dot{\mathbf{v}}\right) &= -\bar{\boldsymbol{J}}^T\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \dot{\mathbf{v}}_r - \dot{\mathbf{v}} &= -\bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}\bar{\boldsymbol{J}}^T\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \text{donc } \dot{\mathbf{v}}_r - \dot{\mathbf{v}} &= -\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Nous posons le vecteur $\boldsymbol{e}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{3n}$ la concaténation des erreurs (4.65) et les matrice $\boldsymbol{A}_{\mathbf{x}}$ et $\boldsymbol{B}_{\mathbf{x}}$:

$$\boldsymbol{e}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \int \tilde{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}t \\ \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_n \\ -\boldsymbol{K}_{I,\mathbf{x}} & -\boldsymbol{K}_{P,\mathbf{x}} & -\boldsymbol{K}_{D,\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.65}$$

Nous en déduisons la dynamique des erreurs de régulation où $\boldsymbol{A}_{\mathbf{x}}$ est une matrice de Hurwitz :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{e}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{B}_{\mathbf{x}}\tilde{\boldsymbol{\psi}}.} \tag{4.66}$$

Contrôle hybride en position et force

Nous rappelons la force de régulation $\boldsymbol{f}^r$ donné par le contrôleur présenté section 4.4.3. Nous nous plaçons dans le cas où la pente du terrain est constante et $\mathbf{S}_f^\top\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^r &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{S}_f\boldsymbol{\lambda}^h - \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^\top\bar{\boldsymbol{h}}^e, \\ \text{donc } \mathbf{S}_f\left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e\right) - \bar{\boldsymbol{J}}^T\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 &= \bar{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{S}_v\left(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \dot{\boldsymbol{\nu}}\right). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Nous en déduisons la dynamique d'erreur en position :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_v^\top \bar{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{S}_v \left(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \dot{\boldsymbol{\nu}} \right) &= -\mathbf{S}_v^\top \bar{\boldsymbol{J}}^T \bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \left(\dot{\boldsymbol{\nu}}_r - \dot{\boldsymbol{\nu}} \right) &= -\mathbf{S}_v^\top \boldsymbol{J} \boldsymbol{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Et la dynamique d'erreur en force :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_f^\top \bar{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \mathbf{S}_f \left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e \right) &= \mathbf{S}_f^\top \bar{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \bar{\boldsymbol{J}}^T \bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \left(\boldsymbol{\lambda}^h - \boldsymbol{\lambda}^e \right) &= \mathbf{S}_f^\top \bar{\boldsymbol{J}}^T \bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Nous posons le vecteur $\boldsymbol{e}_h \in \mathbb{R}^{3n}$ la concaténation des erreurs en position et en force (4.70) et les matrice associées $\boldsymbol{A}_h$ et $\boldsymbol{B}_h$:

$$\boldsymbol{e}_h = \begin{bmatrix} \int \tilde{\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}t \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{\nu}} \\ \int \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \mathrm{d}t \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-\alpha_c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-\alpha_c} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{K}_{I,h} & -\boldsymbol{K}_{P,h} & -\boldsymbol{K}_{D,h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{S}_v^\top \boldsymbol{J} \boldsymbol{H}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_f^\top \bar{\boldsymbol{J}}^T \bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.70}$$

Nous en déduisons la dynamique des erreurs de régulation où $\boldsymbol{A}_h$ est une matrice de Hurwitz :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_h = \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{e}_h + \boldsymbol{B}_h \tilde{\boldsymbol{\psi}}.} \tag{4.71}$$

4.6.2 Preuve de stabilité

Nous pouvons unifier la preuve pour les trois contrôleurs car ils donnent une dynamique d'erreur linéaire pour le système nominal (équations 4.63, 4.66 et 4.71). Nous utilisons la forme générale (4.72) avec les coordonnées générales $(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$, la matrice de Hurwitz $\boldsymbol{A}_r$ et la matrice $\boldsymbol{B}_r$:

$$\boxed{(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_r = \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{B}_r \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \\ \mu \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \boldsymbol{A}_{\tilde{\psi}} \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\psi}}^*). \end{cases}} \tag{4.72}$$

Les coordonnées $(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$ représentent les erreurs de régulation et d'estimation. Nous allons donc étudier la stabilité à l'origine du système (4.72).

Nous définissons $\boldsymbol{P}_r > 0$ solution de l'équation de Lyapunov :

$$\boldsymbol{P}_r \boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{P}_r = -\mathbf{1}, \tag{4.73}$$

et la matrice $\boldsymbol{P}_\gamma$:

$$\boldsymbol{P}_\gamma = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_n,\, \gamma \boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{I}_n), \tag{4.74}$$

où γ est choisi en fonction des incertitudes de modélisation (postulat 1) :

$$\gamma = \frac{\kappa_{\max}^2}{4\alpha^2 \kappa_{\min}} \text{ avec } \begin{cases} \kappa_{\max} \geq \max\limits_{q} \lambda_{\max}(\bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1}), \\ \kappa_{\min} \leq \min\limits_{q} \lambda_{\min}(\bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}^{-1}). \end{cases} \tag{4.75}$$

Nous définissons la fonction $\mathrm{V}\left(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)$ de classe C^1 et définie positive, candidat de Lyapunov :

$$\mathrm{V}\left(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}}\right) = \boldsymbol{e}_r^\top \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^\top \boldsymbol{P}_\gamma \tilde{\boldsymbol{\psi}}. \tag{4.76}$$

Nous définissons l'ensemble compact Ω_l :

$$\Omega_l = \{(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \text{ tel que } \mathrm{V}(\boldsymbol{e}_r, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \leq l\} \text{ avec } l > 0. \tag{4.77}$$

Preuve.
Nous posons donc les conditions initiales :

$$(\boldsymbol{e}_r(0),\, \boldsymbol{\chi}(0)) \in B(r_{\boldsymbol{e}_r}) \times B(r_{\boldsymbol{\chi}}). \tag{4.78}$$

De par la continuité du système (4.72) et par la continue dérivabilité (hypothèse (2)) de $\boldsymbol{q}_{des}$ et $\boldsymbol{\tau}^d$ nous concluons qu'il existe $r_{\tilde{\psi}} > 0$ tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(0) \in B(r_{\tilde{\psi}}). \tag{4.79}$$

Nous dérivons maintenant le candidat de Lyapunov V (4.76) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{V}} &= \boldsymbol{e}_r^\top (\boldsymbol{P}_r \boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{A}_r^\top \boldsymbol{P}_r) \boldsymbol{e}_r + 2 \boldsymbol{e}_r^\top \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{B}_r \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^\top \boldsymbol{P}_\gamma \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} \\ &= -\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 + \underbrace{2 \boldsymbol{e}_r^\top \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{B}_r \tilde{\boldsymbol{\psi}}}_{(1)} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\psi}}^\top \boldsymbol{P}_\gamma \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}}_{(2)}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Nous majorons le terme (1) en posant $\kappa_1 = \max\limits_{q \in \mathbb{R}^n} \left\|2 \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{B}_r\right\|$:

$$2 \boldsymbol{e}_r^\top \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{B}_r \tilde{\boldsymbol{\psi}} \leq \kappa_1 \left\|\boldsymbol{e}_r\right\| \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|. \tag{4.81}$$

Nous travaillons sur le terme (2) de (4.80). Nous utilisons la dynamique de $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ décrite dans le

système complet (4.48) ainsi que les définitions de $\boldsymbol{A}_{\psi}$ (4.56) et $\boldsymbol{P}_{\gamma}$ (4.74) :

$$\begin{aligned}
(2) = \tilde{\boldsymbol{\psi}}^{\top}\boldsymbol{P}_{\gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} &= \frac{1}{\mu}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{\top}\boldsymbol{P}_{\gamma}\boldsymbol{A}_{\psi}\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^{\top}\boldsymbol{P}_{\gamma}(\dot{\boldsymbol{\psi}^{*}}) \\
&= \frac{1}{\mu}\left(-\alpha\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\right\| - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{\top}\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 - \alpha\gamma\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2^{\top}\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 - \alpha\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_3\right\|^2\right) - \tilde{\boldsymbol{\psi}}^{\top}\boldsymbol{P}_{\gamma}(\dot{\boldsymbol{\psi}^{*}}) \\
&\leq \frac{1}{\mu}\left(-\alpha\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\right\|^2 + \kappa_{\max}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\| - \alpha\gamma\kappa_{\min}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\|^2 - \alpha\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_3\right\|^2\right) + \kappa_3\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| \\
&\leq \frac{-\alpha}{\mu}\underbrace{\left(\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\right\|^2 - 2\frac{\kappa_{\max}}{2\alpha}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\| + \frac{\kappa_{\max}^2}{4\alpha^2}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\|^2\right)}_{\text{identité polynomial} > 0} - \frac{\alpha}{\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_3\right\|^2 + \kappa_3\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| \\
&\leq -\frac{\kappa_2}{\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 + \kappa_3\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|,
\end{aligned} \tag{4.82}$$

où nous avons posé $\kappa_2 \geq 0$ et κ_3 défini dans l'équation :

$$\kappa_3 = \max_{\left(\boldsymbol{e}_r;\,\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)\in\Omega_l}\left\|\boldsymbol{P}_{\gamma}(\dot{\boldsymbol{\psi}^{*}})\right\|. \tag{4.83}$$

En effet, nous pouvons montrer que $\boldsymbol{P}_{\gamma}(\dot{\boldsymbol{\psi}^{*}})$ est borné en utilisant les définitions de $\boldsymbol{P}_{\gamma}$ (4.76) et $\boldsymbol{\psi}^{*}$ (4.56) ainsi que le postulat 1 (Bornes de la dynamique du système $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{g}$, etc.), et le hypothèse 2 ($\|\mathbf{q}_{des}(t)\| \leq \mathbf{q}_{des}^{+}$ et $\left\|\mathbf{t}^{d}(t)\right\| \leq \mathbf{t}^{d^{+}}$).

Nous combinons ces résultats pour obtenir :

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 \underbrace{-\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 + \kappa_1\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| - \frac{\kappa_2}{2\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2}_{(3)} + \underbrace{\kappa_3\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| - \frac{\kappa_2}{2\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2}_{(4)}. \tag{4.84}$$

Nous travaillons temporairement sur (3) en utilisant la forme canonique du polynôme en $\|\boldsymbol{e}_r\|$ de degré deux :

$$\begin{aligned}
(3) &= -\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 + \kappa_1\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| - \frac{\kappa_2}{2\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\left\|\boldsymbol{e}_r\right\| - \kappa_1\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|\right)^2}_{<0} + \left(\frac{\kappa_1^2}{2} - \frac{\kappa_2}{2\mu}\right)\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Nous travaillons également sur (4) :

$$\kappa_3 \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| - \frac{\kappa_2}{2\mu}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 = \underbrace{-\frac{\kappa_2}{2\mu}\left(\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\| - \frac{\kappa_3\mu}{\kappa_2}\right)^2}_{<0} + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{4.86}$$

Nous remplaçons dans (4.84) :

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 + \left(\frac{\kappa_1^2}{2} - \frac{\kappa_2}{2\mu}\right)\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{4.87}$$

Nous choisissons μ_1^* tel que $\forall \mu < \mu_1^*$:

$$\left(\frac{\kappa_1^2}{2} - \frac{\kappa_2}{2\mu}\right) \leq -\frac{\max\{1,\gamma\}}{4\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)}. \tag{4.88}$$

Donc :

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 - \frac{\max\{1,\gamma\}}{4\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{4.89}$$

Nous rappelons l'expression de la fonction V :

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \boldsymbol{e}_r^\top \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^\top \boldsymbol{P}_\gamma \tilde{\boldsymbol{\psi}} \\ \mathrm{V} &\leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)\left\|\boldsymbol{e}_r\right\|^2 + \frac{1}{2}\max\{1,\gamma\}\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2. \end{aligned} \tag{4.90}$$

D'après les deux inégalités (4.90) et (4.89), et en posant $\beta = \frac{1}{2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)}$, pour tout $\mu \leq \mu_1^*$:

$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\beta \mathrm{V} + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{4.91}$$

Nous posons maintenant $\mu_2^* = \beta\frac{2\kappa_2}{\kappa_3^2}l$.

Alors $\forall \mu < \min\{\mu_1^*, \mu_2^*\}$, $\dot{\mathrm{V}} \leq -\beta\left(\mathrm{V} - l\right) \leq 0$ sur la bordure de Ω_l. Nous concluons que Ω_l est positivement invariant. Nous avons montré que $\left(\boldsymbol{e}_r(0);\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}(0)\right) \in \Omega_l$ ((4.78) et (4.79)) donc de par l'invariance de Ω_l,$\left(\boldsymbol{e}_r(t);\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)\right) \in \Omega_l,\ \forall t \geq 0$.

Nous pouvons également conclure sur la majoration des erreurs de suivi dans l'ensemble Ω_l. Nous appliquons le lemme de comparaison 3.4 du livre de H. Khalil [52] :

$$\mathrm{V} \leq \mathrm{V}(0)e^{-\beta t} + \frac{\kappa_3^2}{2\beta\kappa_2}\mu, \tag{4.92}$$

donc :

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \|\mathrm{V}\| &\leq \frac{\kappa_3^2}{2\beta\kappa_2}\mu \\ \text{et } \limsup_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}_r(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\kappa_3^2}{2\beta\kappa_2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)}\mu}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Nous posons $\mu_3^* = \frac{2\kappa_2}{\kappa_3^2}\beta\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_r)\varepsilon^2$ et donc $\forall\mu < \min\{\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*\}$ les erreurs de régulation restent bornées et satisfont :

$$\limsup_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}_r(t)\| \leq \varepsilon. \tag{4.94}$$

Ce qui complète la preuve.

□

Nous démontrons en annexe B la stabilité du système lorsqu'un contrôleur de position basé sur la passivité est utilisé.

CHAPITRE 5 PERFORMANCES, SIMULATION ET RESULTATS

5.1 Performances architecturales du système

Nous présentons dans cette section une analyse qualitative des performances architecturales du système. Nous démontrerons au mieux ces performances dans la section suivante en environnement de simulation.

5.1.1 Intégration de manipulateurs parallèles

Commençons par considérer un quadrupède classique. Il possède quatre jambes et les pieds qui y sont attachés se comportent comme des manipulateurs séries. Nous souhaitons transformer l'un de ces pieds en un manipulateur parallèle. Pour illustrer, nous pouvons considérer cette transformation comme l'ajout d'une cinquième jambe série reliée au pied d'une jambe existante. Le quadrupède comporte donc cinq jambes séries pour trois pieds agissant comme des manipulateurs séries et un seul agissant comme un manipulateur parallèle.

Considérons maintenant notre architecture. Elle possède quatre quadrants, les bras séries reliant les torses. Elle possède alors 4 effecteurs parallèles, les torses, et ceci grâce à 4 bras séries. En effet, les torses se comportent comme des manipulateurs parallèles car ils sont soutenus par deux quadrants. Le robot hérite donc des avantages des architectures parallèles sans en gagner la complexité.

5.1.2 Reconfiguration du système et espace de travail

L'espace accessible des torses est limité par plusieurs facteurs architecturaux ; premièrement le caractère parallèle. L'espace accessible d'un torse par rapport à ses deux voisins est réduit car il est composé de l'intersection de l'espace accessible en considérant le torse attaché à un seul voisin à la fois.

Deuxièmement, les bases soutenant un torse étant les torses voisins, elles sont situées au niveau du sol. La hauteur maximale atteignable par un torse est réduite par rapport à un robot ayant son manipulateur fixé plus haut ; par exemple sur le dos d'un quadrupède ou le torse d'un bipède.

Nous notons néanmoins que nous pouvons changer la position relative des deux torses soutenant le torse manipulateur et ainsi agir sur l'espace accessible (figure 5.1).

Nous notons également qu'en choisissant habilement les dimensions et positions des joints

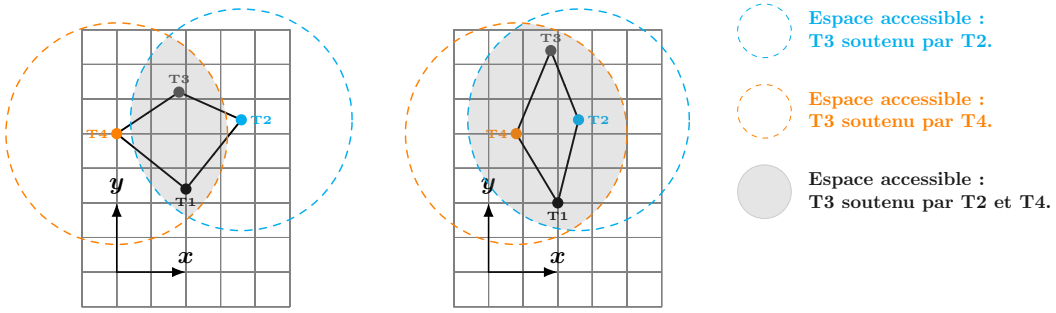

Figure 5.1 Illustration de l'espace accessible du T_3.

(tableau 3.3), un torse peut atteindre la majorité du reste du système, ce qui permet l'auto-entretien, la manipulation de charge à travers le système, etc.

5.1.3 Reconfiguration et suspensions actives

La reconfiguration de la position des torses permet une suspension active sur terrain inégal. Nous pouvons également franchir des obstacles discontinus comme des escaliers (figure 5.2).

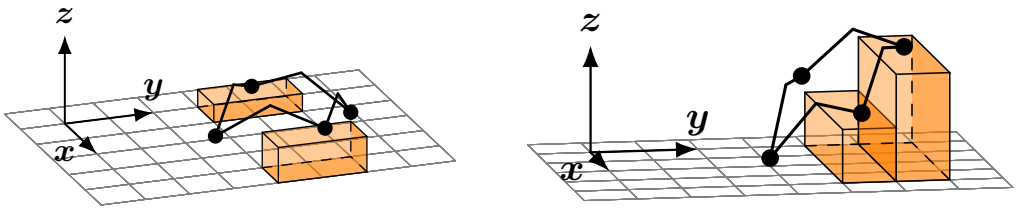

Figure 5.2 Illustration de la reconfiguration de la posture du système pour s'adapter au terrain.

5.1.4 Architecture décentralisée

L'absence d'un châssis central confère quelques propriétés mécaniques au système.

Mobilité et stabilité : Le centre de gravité est naturellement bas. Même dans des terrains complexes, lorsque toutes les roues sont en contact, le centre de gravité est situé dans le polygone de contact quelles que soient la distribution de masse et la position relative des roues (figure 5.3). Le schéma de droite sur la figure 5.3 illustre l'avantage d'un centre de gravité bas sur un terrain fortement incliné.

Mobilité et garde au sol : Le système est dépourvu de châssis central, la garde au sol est effectivement infinie et la configuration du système peut être adaptée au terrain (figure 5.2). Même les zones étroites sont accessibles.

Transport de charge utile : L'architecture est moins adaptée au transport de charge que les autres rovers articulés dotés d'un châssis central. Le port de charge utile nécessite un module dédié (section 3.1). Néanmoins, il est facile d'utiliser la reconfiguration du robot pour optimiser la position du centre de masse au-dessus du polygone de contact (figure 5.4).

Nous notons qu'avec le module conteneur, le poids de la charge est directement porté par la roue. Par rapport à une charge posée sur un châssis porté par des jambes, l'influence de la charge sur la dépense énergétique est diminuée.

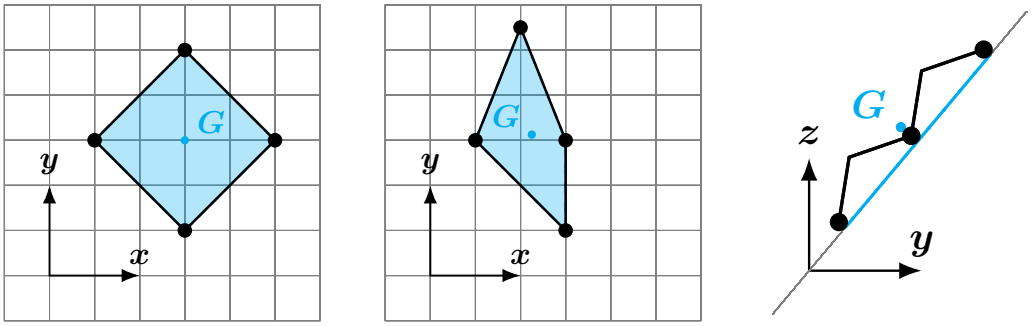

Figure 5.3 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture, avec une distribution uniforme de la masse.

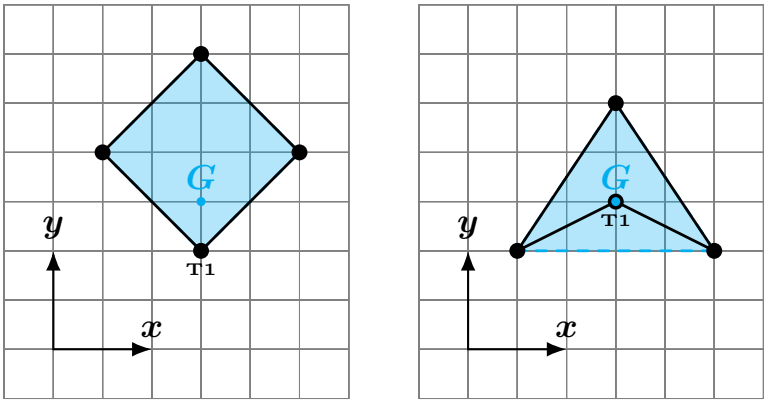

Figure 5.4 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture, lorsqu'une forte charge est portée par T_1. La posture de droite recentre $\boldsymbol{G}$.

5.1.5 Résistance au renversement

Nous soulignons ici un avantage majeur de l'architecture. Le renversement d'un robot est une situation critique qui peut signifier la fin de la mission. Nous abordons ici la situation qui pose le plus de chance de renversement et nous montrons qu'un renversement n'est pas critique pour le système.
L'absence de châssis central pose problème lorsqu'un torse est levé du sol pour manipuler. Le torse élevé et sa masse se trouvent loin du polygone de contact. Il faut travailler sur la posture et éventuellement la distribution de masse pour garantir la stabilité (figure 5.5).

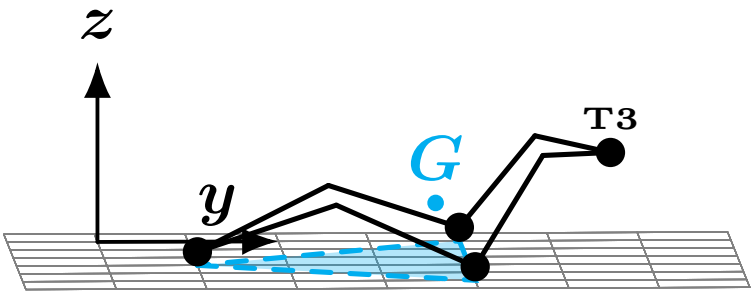

Figure 5.5 Évolution du centre de masse $\boldsymbol{G}$ et du polygône de contact en fonction de la posture lorsque le torse T_3 est en mode manipulateur.

Considérons le cas où le torse (**T3**) cause le renversement du système (figure 5.6). Le seul problème résultant est l'impact entre le torse et le sol. S'il manipule une charge délicate la situation est problématique mais pas autant que la chute d'un quadrupède ou un bipède.

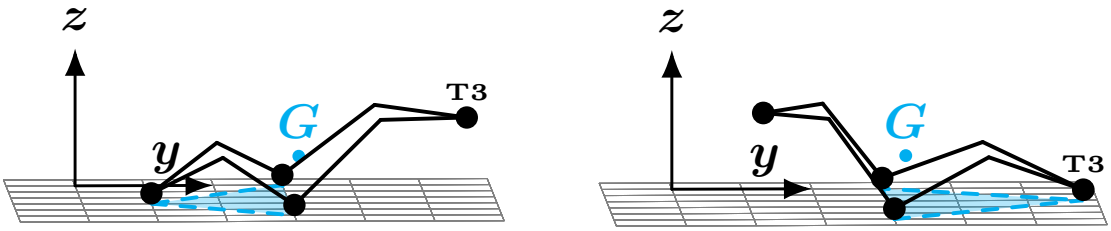

Figure 5.6 Illustration d'un renversement et de la conséquence

5.2 Modélisation et implémentation numérique

Nous utilisons Matlab pour créer un environnement de simulation. Nous utilisons Simscape comme moteur physique. D'un coté, Simscape simule le robot et son environnement en utilisant les dimensions et les informations inertielles définies dans un fichier Excel. Notamment, le contact avec le sol est modélisé et inclus de l'élasticité et du glissement. De l'autre, le contrôleur est implementé dans un schéma bloc Simulink à l'aide de fonctions Matlab. Nous notons que les composants du robot sont modélisés par CAO pour améliorer l'aspect visuel des simulations. La figure 5.7 présente l'organigramme de l'environnement de simulation et la figure 5.8 montre le schéma bloc Simulink et la structure du contrôle. La masse totale du robot est 9.2 kg. La distance torse à torse maximale d'un quadrant est de 0.7 m. Les dimensions complètes peuvent être trouvées en annexe A.

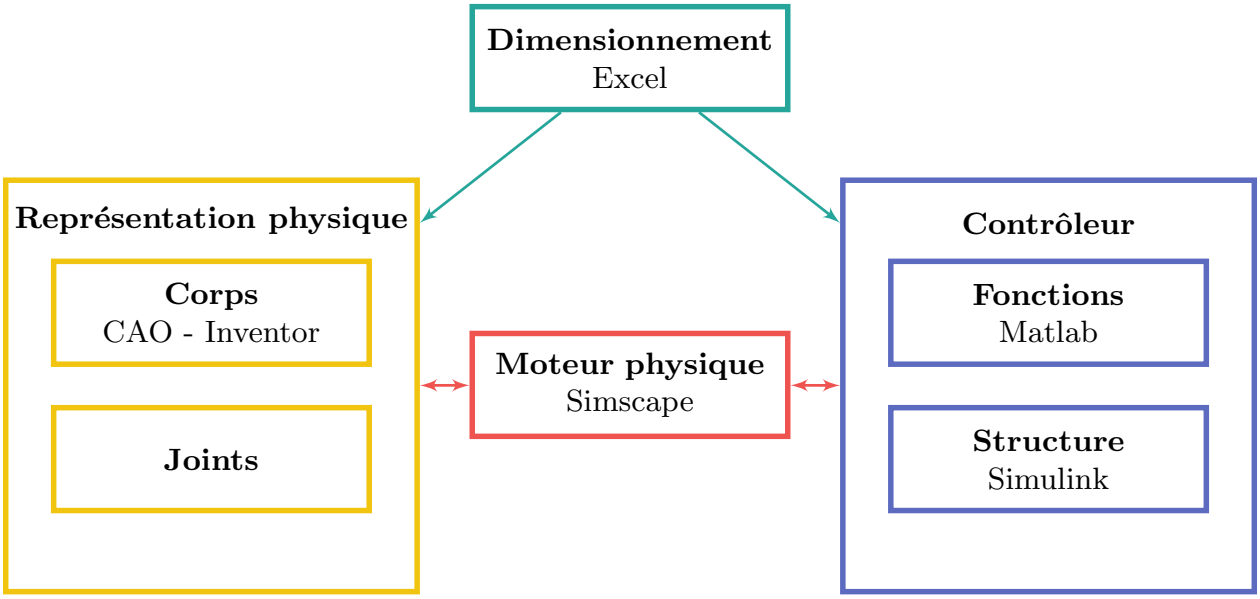

Figure 5.7 Structure de l'environnement de simulation

Nous utilisons le solver à temps fixe *ode3* (Bogacki-Shampine) avec un pas de temps de simulation de 10^{-4} s. Nous appliquons un filtre du premier ordre de paramètre 10^{-3} s au couple de commande afin de lisser la commande. Nous espérons nous approcher ainsi de l'implémentation réelle où la boucle de contrôle tourne à fréquence réduite.

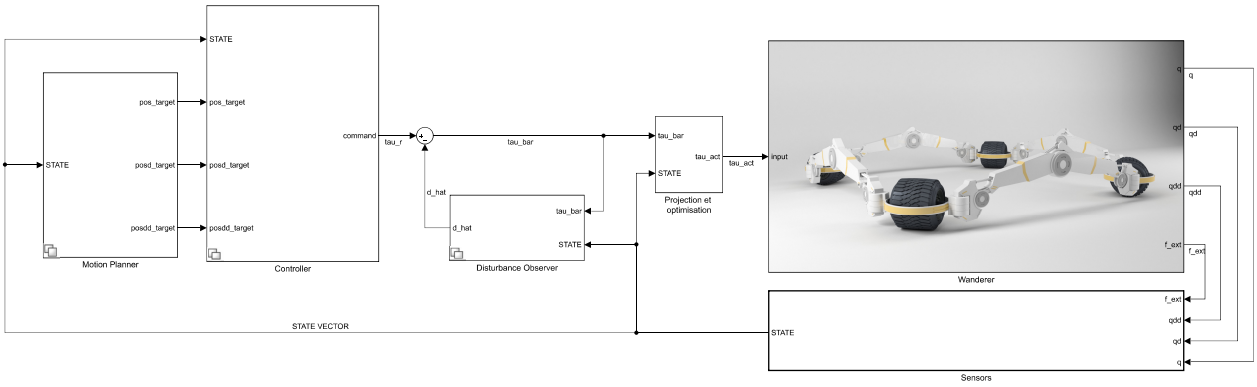

Figure 5.8 Schéma Simulink de l'environnement de simulation

5.2.1 Résumé des configurations de contrôleurs possibles

Nous rappelons les quatre configurations possibles de contrôleur, présentées dans ce mémoire :

Contrôleur 1 (C.1) : Couple pré-calculé dans l'espace des articulations (section 4.3.1) ;

Contrôleur 2 (C.2) : Couple pré-calculé dans l'espace opérationnel (section 4.3.2) ;

Contrôleur 3 (C.3) : Couple pré-calculé dans l'espace opérationnel et adaptation cinématique (section 4.4.2) ;

Contrôleur 4 (C.4) : Contrôle hybride en position et force (section 4.4.3).

Nous activerons au cas par cas l'observateur de perturbation (**Obs. P.**) décrit à la section 4.5 et l'optimisation par contraintes internes (**Opti.**) décrite section 3.2.9.

Nous rappelons que la position d'un torse est exprimée relativement à son torse parent. Seul le torse T_1 est positionné dans l'espace. Pour connaître la position dans l'espace d'un autre torse il faut considérer sa position par rapport à T_1 et la position de T_1 dans l'espace. Comme le travail sur le contrôle des roues n'est pas une priorité dans ce mémoire, nous considérerons uniquement les orientations $\begin{bmatrix}\theta_R & \theta_P\end{bmatrix}$ autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du torse T_1.

Nous notons qu'une analyse de la marge de stabilité n'est pas pertinente pour cette architecture car elle est dépourvue de base centrale. La position du centre de gravité est entièrement déterminée par la position des torses ; nous ne pouvons pas l'ajuster en déplaçant une base centrale.

5.2.2 Réglages des gains

Le tableau 5.1 présente les gains utilisés dans les diverses composantes du contrôleur. Ces gains furent obtenus par des itérations successives sur des simulations.

Tableau 5.1 Gains des composants du contrôleur.

Contrôleur 1 $\begin{cases} \boldsymbol{K}_{P,q} = 6000 \cdot \mathbf{1}_n \\ \boldsymbol{K}_{D,q} = 400 \cdot \mathbf{1}_n \\ \boldsymbol{K}_{I,q} = 40 \cdot \mathbf{1}_n \end{cases}$	Contrôleur 2 $\begin{cases} \boldsymbol{K}_{P,x} = 6000 \cdot \mathbf{1}_m \\ \boldsymbol{K}_{D,x} = 400 \cdot \mathbf{1}_m \\ \boldsymbol{K}_{I,x} = 40 \cdot \mathbf{1}_m \end{cases}$
Contrôleur 3 $\begin{cases} \boldsymbol{K}_{FLC} = 0.01 \cdot \mathbf{1}_{\alpha_c} \\ \boldsymbol{K}_{RPA} = 6 \cdot \mathbf{1}_{\alpha_c} \end{cases}$	Contrôleur 4 $\begin{cases} \boldsymbol{K}_{P,h} = 6000 \cdot \mathbf{1}_{m-\alpha_c} \\ \boldsymbol{K}_{D,h} = 400 \cdot \mathbf{1}_{m-\alpha_c} \\ \boldsymbol{K}_{I,h} = 40 \cdot \mathbf{1}_{m-\alpha_c} \\ \boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{\lambda}} = 0.1 \cdot \mathbf{1}_{\alpha_c} \\ \boldsymbol{K}_{\theta,P} = 400 \cdot \mathbf{1}_2 \\ \boldsymbol{K}_{\theta,D} = 200 \cdot \mathbf{1}_2 \end{cases}$
Observateur de perturbation : $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \mu = 10^{-3} \end{cases}$	

5.3 Résultats expérimentaux sur des tâches de références

Nous cherchons à valider les performances des contrôleurs, de l'observateur de perturbation et de l'optimisation par contraintes internes. Nous soumettons au système une tâche de manipulation et une tâche de déplacement sur un sol inégal. Nous désignons deux bornes d'erreurs : nous désirons conserver une erreur angulaire de posture inférieur à $\pm 5°$, et nous désirons conserver une erreur en position dans le repère fixe de $\pm$1cm. Ces bornes sont illustrées par des courbes en pointillés bleue autour de la trajectoire de référence.

5.3.1 Fonctionnement en conditions optimales

Suivi d'une trajectoire dans l'espace

Nous analysons les performances des contrôleurs sur une tâche de suivi de manipulation : le torse T_2 doit suivre une trajectoire carrée de coté 20 cm tandis que les autres doivent rester immobiles. La figure 5.9 montre l'environnement de simulation et la trajectoire à suivre. Le long du carré, le torse T_2 se déplace à $20\,\mathrm{cm.s^{-1}}$.

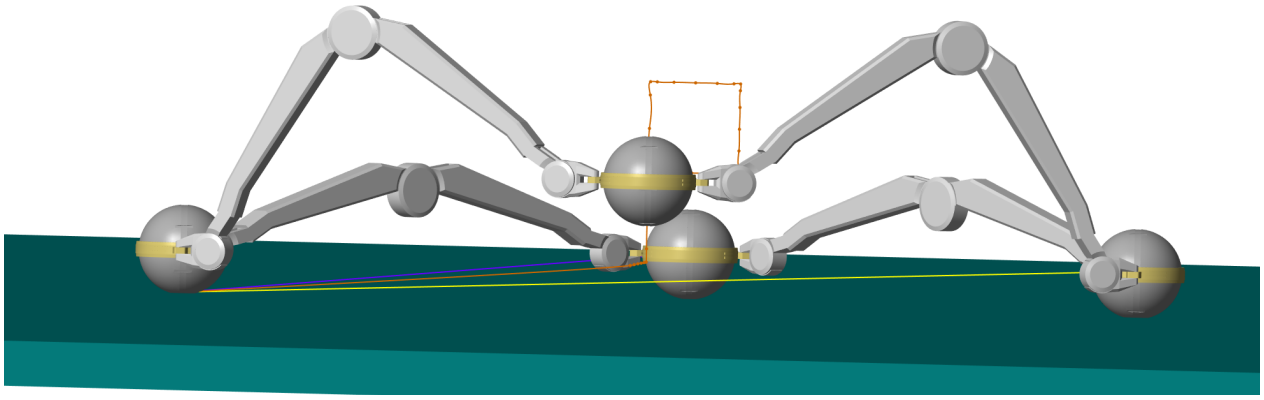

Figure 5.9 Suivi de trajectoire en pointillés oranges par le torse T_2.

Nous effectuons cette tâche avec les quatre configurations de contrôleurs. Nous donnons à la figure 5.10 la trajectoire du torse T_2 par rapport à son torse parent T_1. Au vu des performances des contrôleurs 1 et 2, nous pouvons valider l'implémentation du couple pré-calculé sur une tâche de manipulation. Comme pour cette situation le système est parfaitement modélisé, ces résultats sont attendus et n'apportent qu'une validation de l'implémentation.

Lorsque l'adapation au sol est utilisée (contrôleurs 3 et 4), le torse T_2 est contrôlé en position pour $t \geq 1$s et les autres selon la méthode d'adaptation au sol : $\{\overline{contact}\} = \{T_1, T_3, T_4\}$. Nous généralisons ainsi la simulation à une tâche de manipulation sur sol inégal. Nous constatons sans surprise sur la figure 5.10 que les performances de suivi en position par le torse T_2 restent identiques à celle du contrôleur 2. Nous montrons sur la figure 5.11 le respect des objectifs d'adaptation au sol par les contrôleurs 3 et 4. Nous remarquons la transition du torse T_2 en contrôle en position pur à 1 s. Le poids est alors réparti sur les trois autres torses.

Nous activons l'optimisation par contraintes internes du couple de commande avec le contrôleur 4. Nous constatons sur la figure 5.12 que l'optimisation par contraintes internes n'a aucun effet sur le mouvement et qu'elle permet sur cette tâche une réduction de la norme euclidienne du couple de commande de 70%.

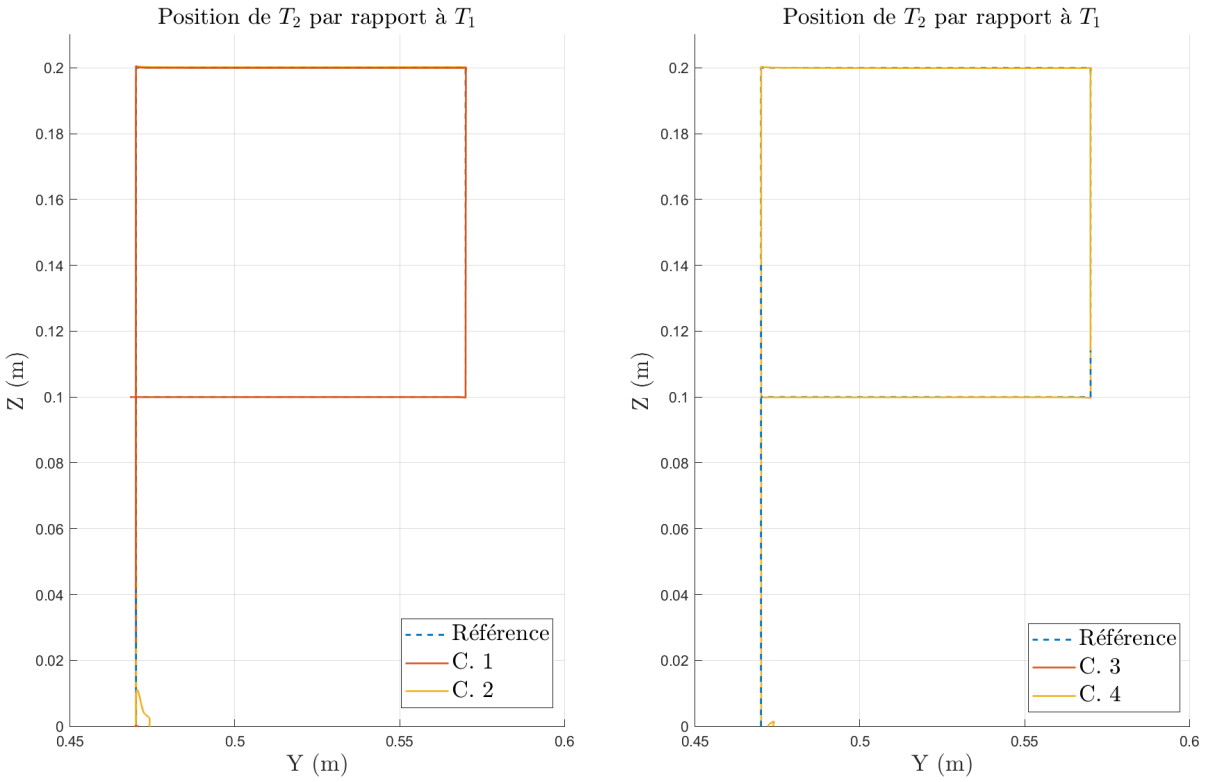

Figure 5.10 Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec les quatre configurations possibles de contrôleurs. Contrôleurs 1 et 2 à gauche et contrôleurs 3 et 4 à droite.

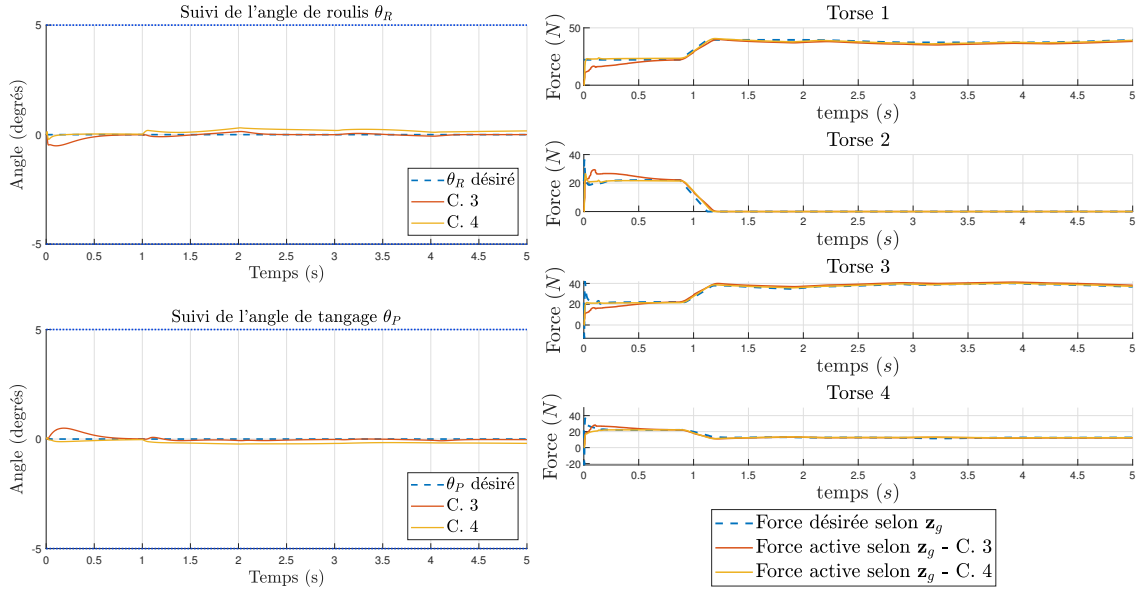

Figure 5.11 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec les contrôleurs 3 et 4.

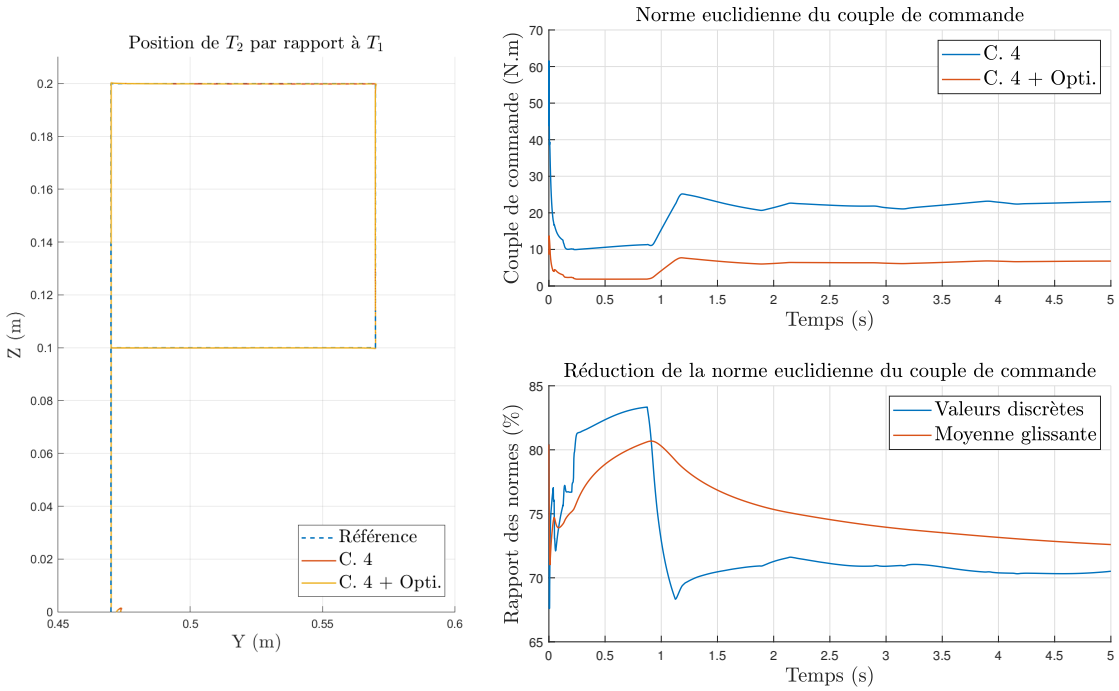

Figure 5.12 Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 par le contrôleur 4, avec et sans optimisation du couple de commande.

Évolution sur un sol inégal

Nous simulons une variation du sol avec une rampe sur laquelle passe le torse T_2. Une capture de la simulation est fournie à la figure 5.13. La rampe est inclinée de 30° et de hauteur maximale 25 cm. Nous analysons les performances des deux méthodes d'adaptation au sol par rapport aux objectifs d'adaptation au sol (section 4.4) : la tâche est d'avancer en conservant une posture horizontale et en répartissant les efforts sur les quatre torses. Notre analyse est similaire à celle réalisée par Cordes [16] et par Hyon [39].

Nous comparons figure 5.14 les performances des deux méthodes par rapport aux objectifs. Le robot avance à $1\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et rencontre la rampe à 1.5 s.

Les gains associés à la méthode 1 (adaptation cinématique) sont difficiles à régler pour atteindre de bonnes performances. Il faut adapter les gains en fonction du poids du système et des gains du contrôleur en position. La méthode 2 de contrôle hybride est bien plus systématique. Le contrôle en force étant indépendant du contrôle en position, le réglage des gains est indépendant.

Pour avancer une comparaison rigoureuse entre ces deux méthodes, une expérimentation sur un prototype physique s'imposerait. Nous concluons donc simplement que la nouvelle

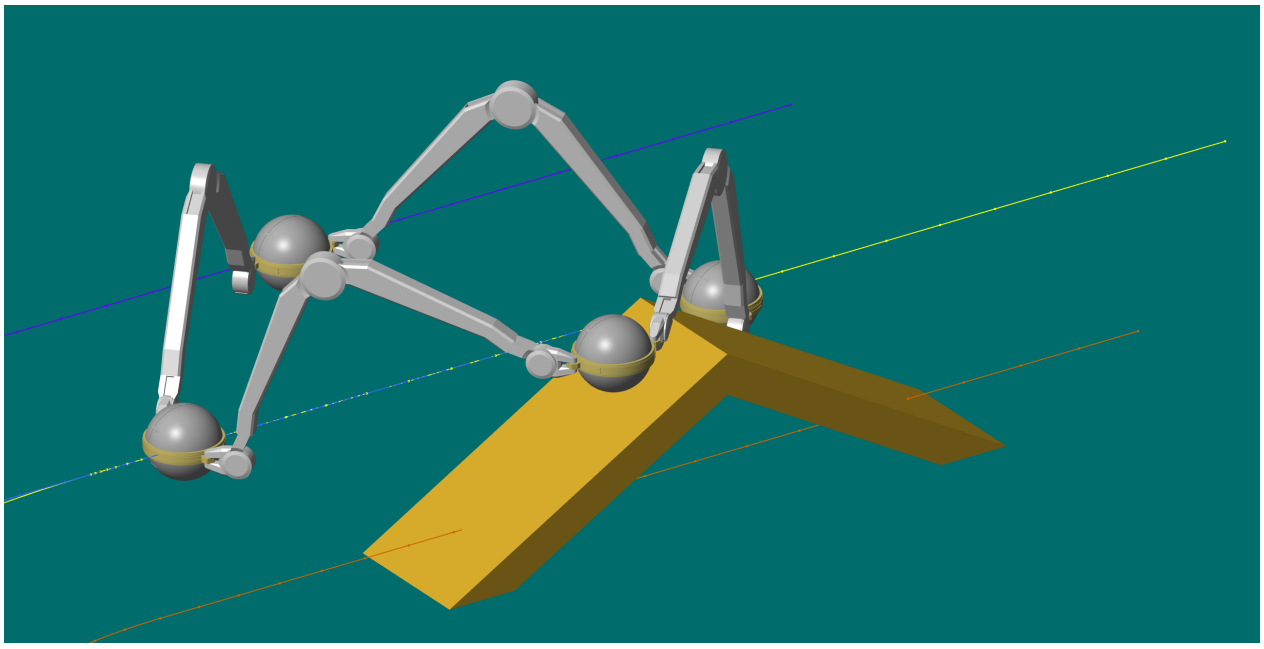

Figure 5.13 Passage d'une rampe simulant un sol inégal.

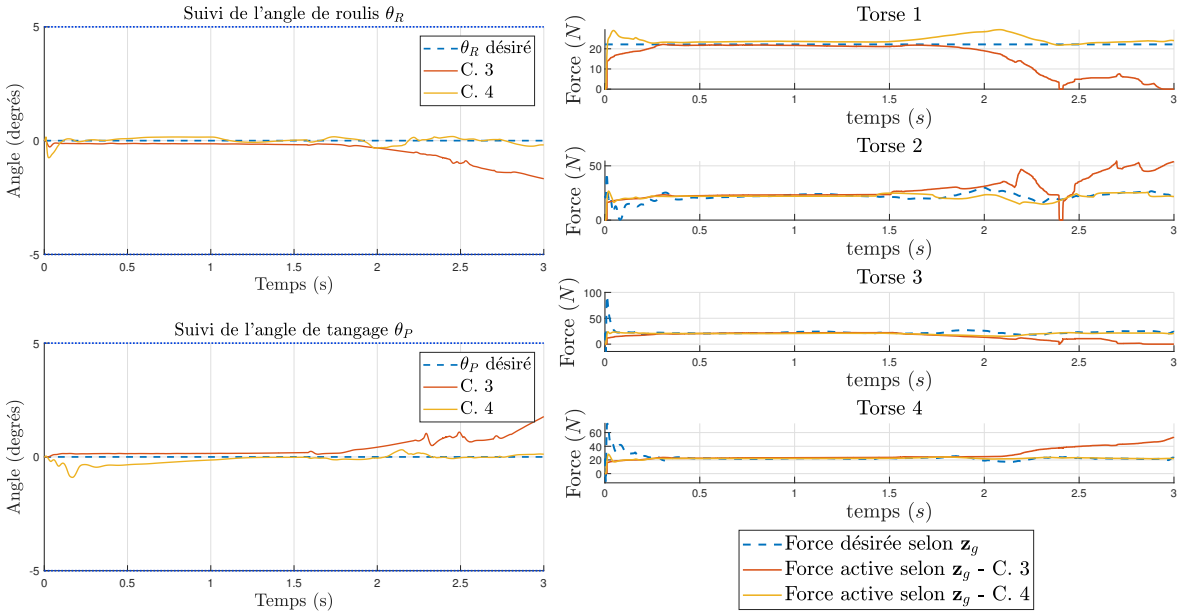

Figure 5.14 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du passage sur une rampe avec les contrôleurs 3 et 4.

méthode 2 basée sur la contrôle hybride est efficace et simple à implémenter.

Pour cette tâche aussi, nous constatons à la figure 5.15 que l'optimisation par contraintes internes permet sur cette tâche une réduction de la norme euclidienne du couple de commande de 65%.

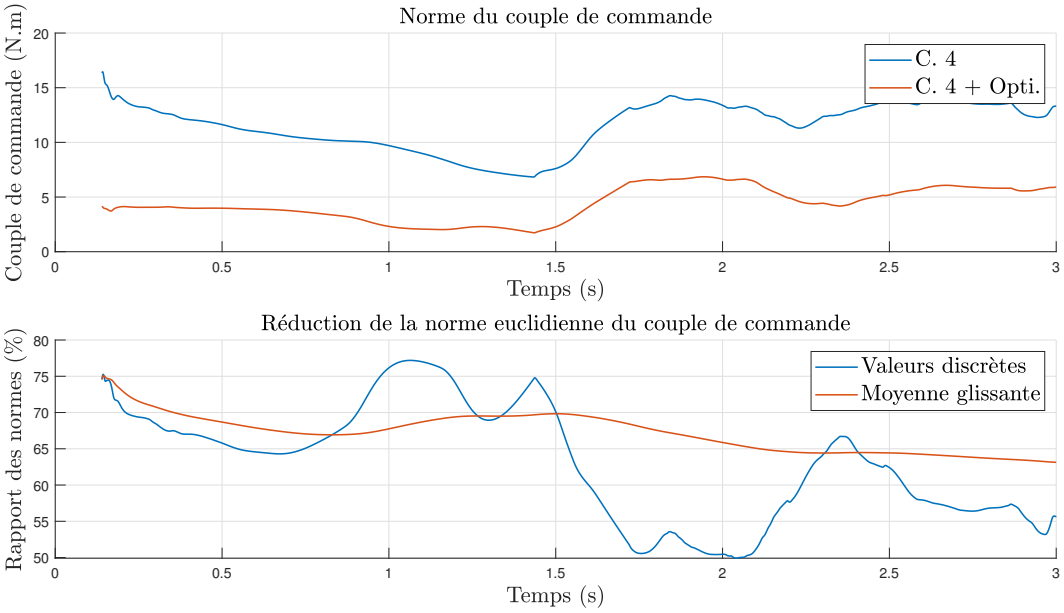

Figure 5.15 Évolution de la norme du couple de commande sur une tâche de déplacement en terrain inégal, avec et sans optimisation par contraintes internes.

5.3.2 Ajouts d'éléments non-modélisés

Nous ajoutons maintenant au système des éléments non modélisés. Nous ajoutons des masses simulant des charges utiles, ainsi qu'un frottement visqueux f_v aux liaisons. Chaque charge utile possède les propriétés inertielles d'un cube de 5 cm de coté. Nous présentons dans le tableau 5.2 deux niveaux de perturbations différents : Erreur 1 et Erreur 2. Dans le cas de Erreur 2, nous ajoutons 7 kg de masse non modélisée au système, soit 76% de la masse initiale du système.

Tableau 5.2 Description des deux niveaux d'erreurs introduits pour simuler des perturbations.

	masse sur T_2 (kg)	masse sur T_3 (kg)	masse sur T_4 (kg)	f_v $\left(\frac{N.m}{rad.s^{-1}}\right)$
Erreur 1	0.1	0.2	0.4	0.01
Erreur 2	1	2	4	0.1

Nous nous limitons à notre contrôleur principal, le contrôle hybride (4). Comme décrit sec-

tion 4.4.3, nous considérons que la répartition réelle des efforts statiques sur les torses $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static}$ est connue. Elle peut être estimée par l'observateur de perturbation après le chargement des charges utiles.

Suivi d'une trajectoire dans l'espace

Nous montrons à la figure 5.16 l'effet de l'erreur 1 sans et avec observateur de perturbation. Nous notons que le système est instable avec l'erreur 2 sans observateur. Nous constatons que l'élément de robustesse ajouté compense totalement les perturbations dans ce cas de simulation. Nous obtenons sur cette tâche une réduction de la norme euclidienne du couple de commande de 50% grâce à l'optimisation par contraintes internes, dans le cas de l'erreur 1.

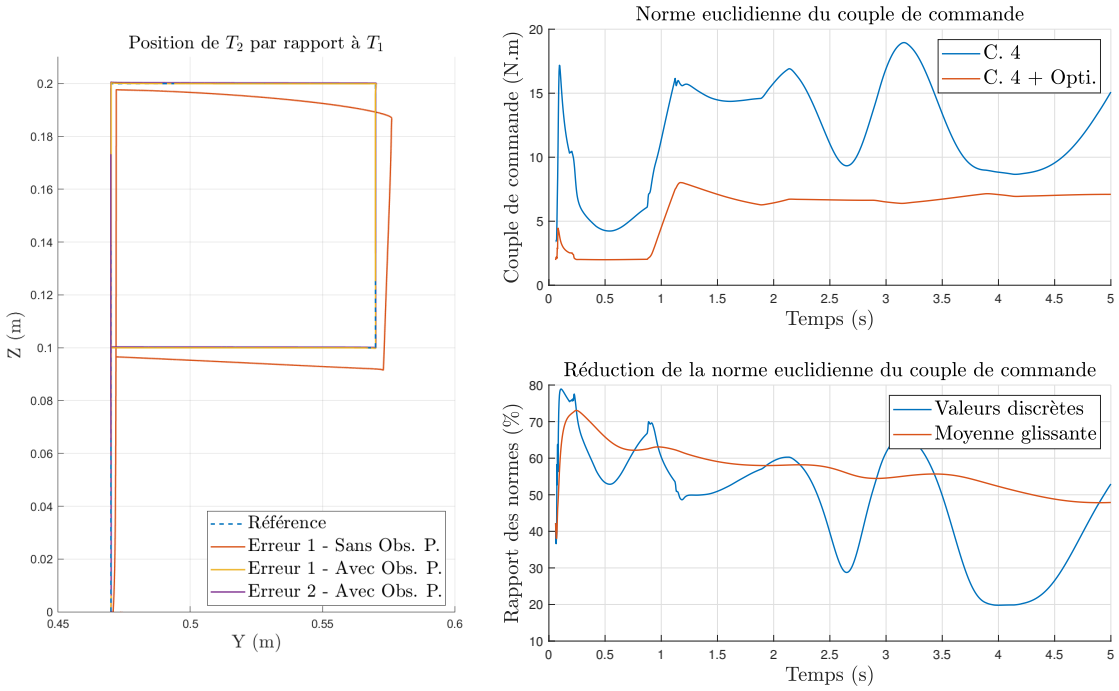

Figure 5.16 Gauche : Suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec le contrôleur 4 après introduction d'erreurs de modélisation. Droite : Effet de l'optimisation par contraintes internes sur le cas de l'erreur 1.

Nous notons sur la figure 5.17 que la connaissance de la répartition réelle des efforts statiques sur les torses $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{e,static}$ réduit la sensibilité du contrôle en force aux perturbations. L'observateur corrige les performances déjà bonnes.

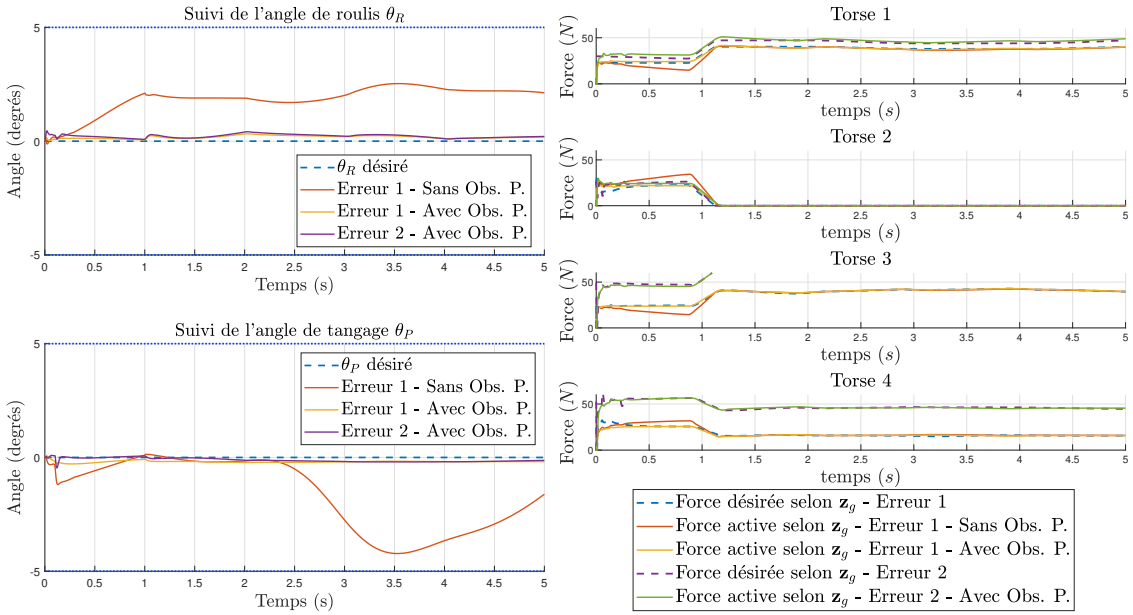

Figure 5.17 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du suivi d'une trajectoire dans l'espace par le torse T_2 avec le contrôleur 4 après introduction d'erreurs de modélisation.

Évolution sur un sol inégal

Le constat est le même pour la tâche de passage d'une rampe. Nous constatons à la figure 5.18 que la posture et la répartition des efforts sur les torses est peu sensible aux perturbations. L'observateur a peu d'influence sur les performances déjà bonnes. Nous réalisons sur cette tâche une réduction de la norme euclidienne du couple de commande de 70%, similaire à la situation nominale (figure 5.19).

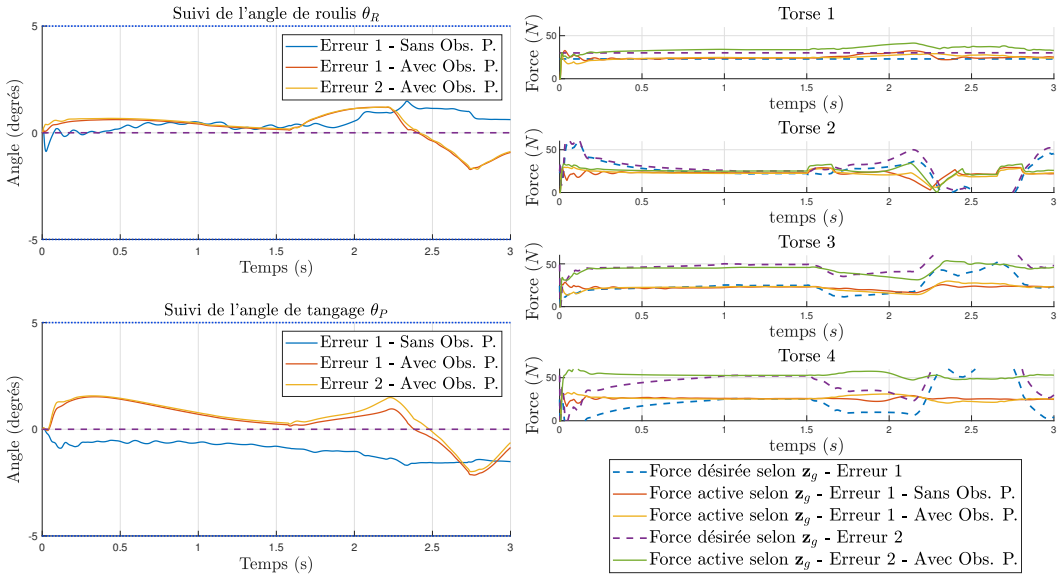

Figure 5.18 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors du passage sur une rampe avec le contrôleur 4 après introduction des erreurs 1 et 2.

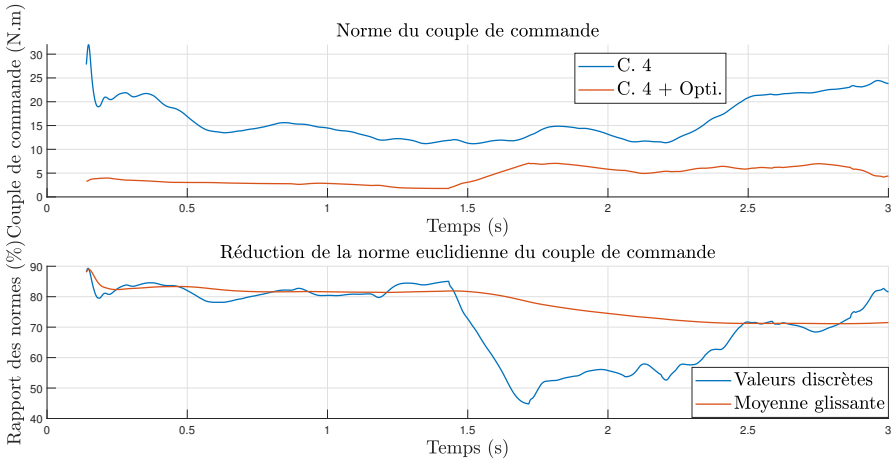

Figure 5.19 Évolution de la norme du couple de commande sur une tâche de déplacement en terrain inégale, avec et sans optimisation par contraintes internes, avec l'erreur 1.

5.3.3 Simulation d'une tâche de manipulation lors du déplacement sur un sol inégal

Nous combinons une tâche de manipulation et une tâche de déplacement. Le torse T_4 doit réaliser une trajectoire dans l'espace tandis que le robot avance et rencontre la rampe simulant un sol inégal. La figure 5.20 illustre la situation. La tâche est complexe car le robot doit conserver sa posture alors que trois torses uniquement servent à l'adaptation au sol et le torse T_2 décolle en sortie de rampe. Nous rappelons encore que le torse T_4 régule sa position

par rapport au torse T_1 qui le soutient. Si la posture du robot ne respecte pas celle désirée, la position de T_4 par rapport au repère fixe est fausse même si la position de T_4 par rapport à T_1 est suivie parfaitement. Une des pistes d'amélioration future est la prise en compte de cette erreur pour que le quadrant soutenant T_4 la corrige dynamiquement.

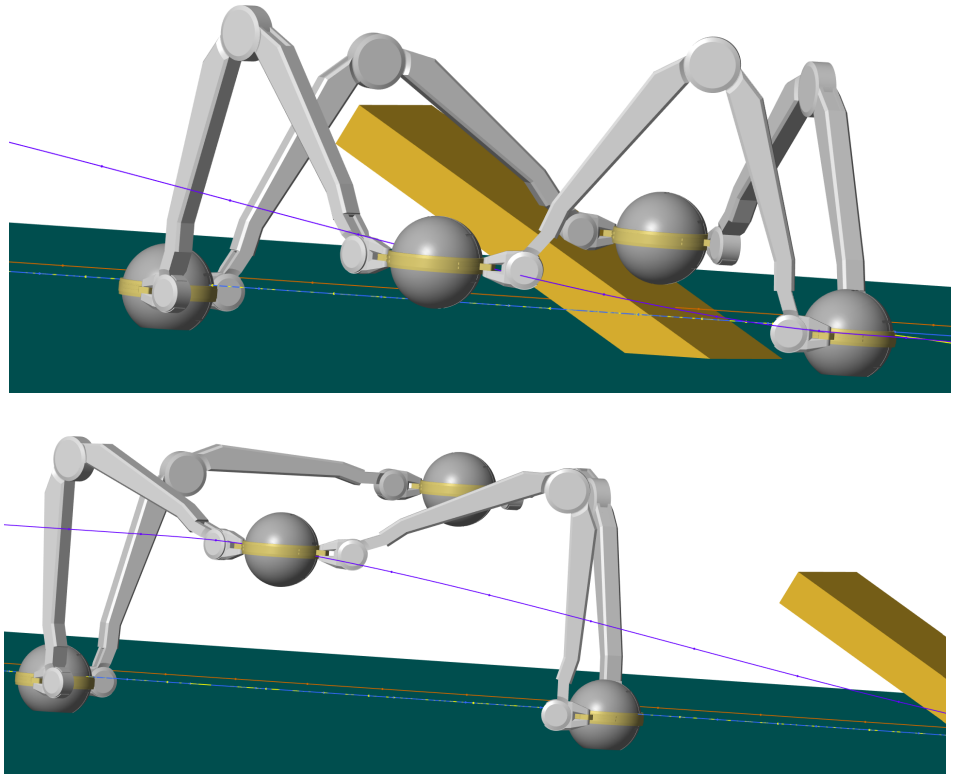

Figure 5.20 Illustration de la tâche combinant manipulation et déplacement sur sol inégal.

Nous réalisons la simulation avec deux configurations. La première utilise le contrôleur 4 avec l'observateur de perturbation et l'optimisation par contraintes internes. Nous ajoutons l'erreur 2 pour simuler des perturbations. La deuxième simulation est identique mais nous prenons $\boldsymbol{K}_{I,\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$. **Nous supprimons le retour en force et donc la nécessité d'utiliser un capteur d'effort dans la direction** $\vec{z}_g$. Les autres efforts sont toujours intégrés dans le modèle mais pour le contrôle en position. Nous soulignons que ceci est impossible avec la méthode 1 d'adaptation cinématique. Nous illustrons les performances du robot sur cette tâche sur la figure 5.21. Malgré la complexité de la tâche, le suivi en posture est correct avec une erreur maximale ne dépassant pas 5° et le suivi en position ne dépassant pas 1 cm. Autrement dit, le robot maintient son équilibre face à cette situation complexe. Nous constatons également que la suppression du retour de force détériore très peu les performances.

Nous ajoutons la figure 5.22 qui montre la position du repère T_4 par rapport au torse T_1 et

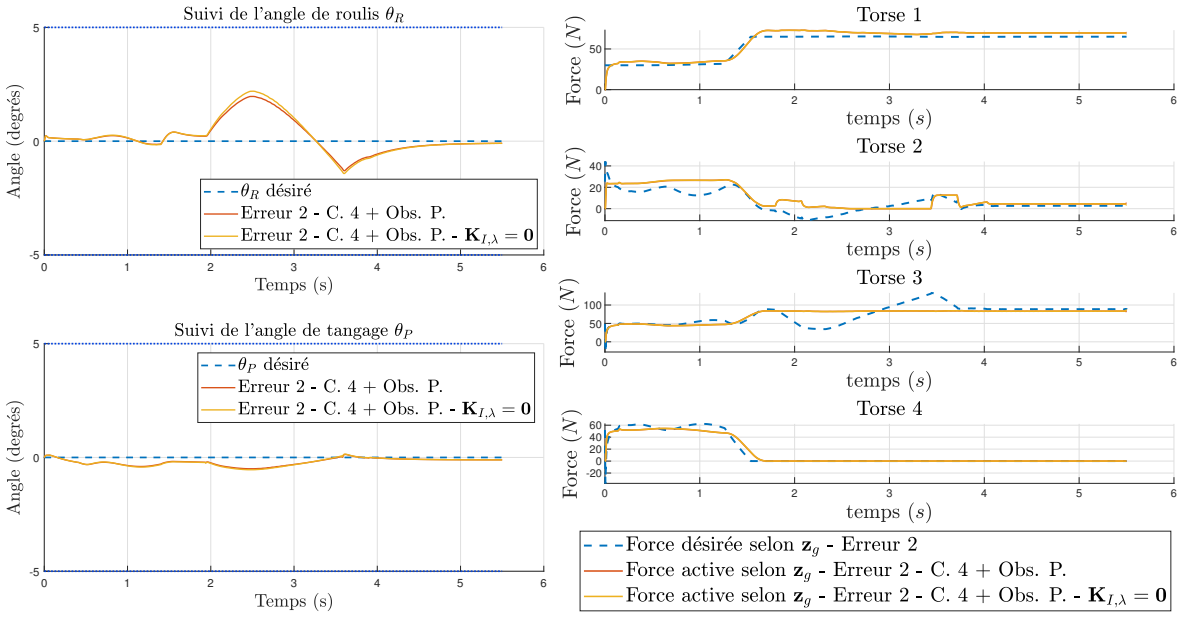

Figure 5.21 Respect des objectifs d'adaptation au sol lors d'une tâche de manipulation en terrain inégal avec le contrôleur 4 après introduction de l'erreur 2.

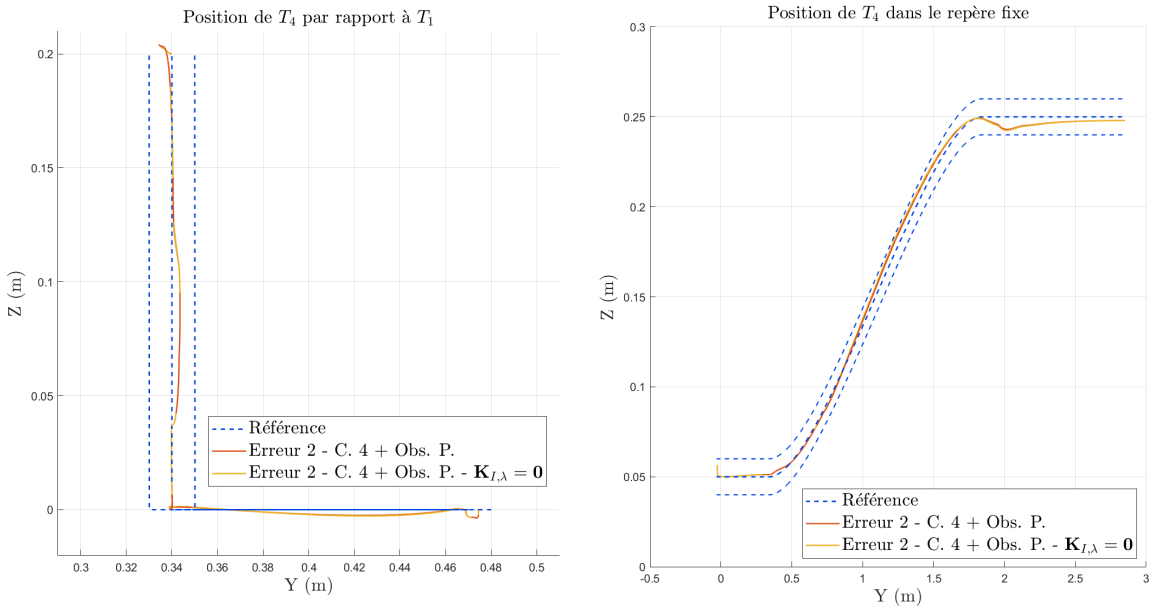

Figure 5.22 Suivi en position du torse T_4. À gauche : par rapport au torse T_1. Àdroite : par rapport au repère fixe.

par rapport au repère fixe. Nous concluons à partir des figures 5.21 et 5.22 que l'erreur en positionnement absolue est causée par une combinaison d'erreur de positionnement relatif et de suivi de posture.

Le suivi en posture et en position respecte les critères que nous nous sommes fixés. Nous pouvons conclure que le contrôle hybride sans retour en force est utilisable même dans des situations complexes de manipulation en terrain inégal.

Commentaire sur le chattering dû au contact au sol

Nous ne réalisons pas dans ce travail une étude du phénomène de chattering rencontré en robotique lors du contact avec une surface. Néanmoins nous soulignons que notre méthode d'adaptation au sol par contrôle hybride permet de supprimer les capteurs d'efforts selon l'axe $\vec{z}_g$ typiquement employés sur les rovers articulés. Ces capteurs sont une source majeure de chattering. Avec notre implémentation, un torse qui atterrit est soumis à l'élasticité du sol et rebondit naturellement.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

L'apport majeur de ce travail est la conception et la modélisation d'une nouvelle architecture. La construction d'une architecture de robot mobile dépourvue de base centrale et construite autour d'une boucle cinématique est nouvelle. Nous avons montré en quoi cette particularité est avantageuse par rapport aux architectures classiques. Nous pouvons utiliser la boucle cinématique pour gagner en autonomie. Les effecteurs finaux agissent comme des manipulateurs parallèles avec une topologie simple. L'absence de base centrale améliore la stabilité et permet l'utilisation de méthodes bas-niveau pour le déplacement sur terrain inégal.

Le travail de modélisation réalisé traite d'un cas complexe et peu commun : un robot mobile, avec une architecture parallèle. Une attention particulière a été portée au formalisme pour unifier ces aspects. Un schéma par couple pré-calculé a été implémenté pour le contrôle en position. Et deux méthodes bas niveau ont été implémentées pour l'adaptation au sol. Il semblerait que l'application du contrôle hybride pour stabiliser un rover articulé sur un sol inégal n'ait pas été utilisée avant. Nous avons montré dans ce travail que cette méthode est valide et simple à implémenter. Nous pouvons même nous passer de retour de force et de l'utilisation de capteurs d'effort. Cette caractéristique permet de limiter le chattering et les difficultés d'implémentation dues aux capteurs d'efforts.

Nous avons également étendu le champs d'application de l'observateur de perturbation en prouvant sa stabilité lorsqu'il est utilisé avec un contrôle hybride en force et position. Les études en simulation ont confirmé ses performances.

6.2 Limitations de la solution proposée

La modélisation utilisée omet la dynamique des actionneurs et des capteurs. Sur un système réel, les actionneurs créent des saturations qui dégradent les performances. Et les capteurs d'efforts sont difficiles à utiliser. La mesure qu'ils fournissent est souvent bruitée et ils sont sensibles à l'usure. Finalement, même si les capteurs angulaires modernes sont très performants, il faut prendre en compte leur fréquence de rafraîchissement lors du réglage des gains.

Comme expliqué plusieurs fois dans ce mémoire, les tâches de manipulations par les torses T_2 et T_4 (section 5.3) sont réalisées relativement au torse T_1. Dans la réalité, une tâche comme celle-ci est réalisée dans un repère fixe absolue ou relativement à un objet extérieur.

Finalement, nous soulignons que ce travail ne suffit pas à établir une comparaison rigoureuse des performances de la nouvelle architecture par rapport aux architectures classiques. Les conclusions sont issues de simulations ou basées sur des considérations sur l'architecture. Il faudrait calculer des indices de performances tel que le coût de transport ou l'indice de dextérité, ou encore comparer deux systèmes réels sur des tâches données.

6.3 Améliorations futures

Nous avons abordé plusieurs fois dans ce travail la différence entre le suivi de la position relative d'un torse par rapport à son torse parent et le suivi absolu nécessaire pour une tâche de manipulation réelle. Le suivi relatif ne compense pas une erreur introduite par une erreur de posture de la base T_1. Afin d'améliorer ce comportement, nous pouvons réaliser un suivi de la position absolue d'un torse. C'est principalement un problème de positionnement dans l'espace.

Nous avons montré que grâce au contrôle hybride, nous pouvons nous passer de mesurer les efforts selon l'axe $\vec{z}_g$. Nous pouvons envisager de supprimer totalement ces capteurs. Il faut d'abord déterminer la limite de performance de l'observateur de perturbation qui peut certainement compenser une partie des efforts extérieurs. Une estimation des efforts de contact basée sur une modélisation du sol peut être envisagée.

Nous pouvons également envisager une étude plus approfondie sur la boucle cinématique et l'optimisation par contraintes internes. Quelle est la contrainte interne créée durant l'optimisation du couple de commande ? Comment varie-t-elle avec le mouvement du système ? Quel est l'effet sur l'optimisation de l'ajout ou du retrait de degrés de liberté au système ?

La prochaine étape majeure de développement passe par une augmentation de la complexité de la modélisation, par exemple en utilisant un moteur physique plus poussé et en modélisant le micro-contrôleur et les capteurs embarqués. Le travail portera alors sur la discrétisation du contrôleur ou encore la gestion des saturations et de la dynamique des actionneurs, la finalité étant la réalisation d'un prototype réel.

RÉFÉRENCES

[1] A. Takanishi, M. Ishida, Y. Yamazaki et I. Kato, "The realization of dynamic walking by the biped walking robot WL-10 RD," *Journal of the Robotics Society of Japan*, vol. 3, n°. 4, p. 325–336, 1985.

[2] S. Kajita et B. Espiau, "Chapter 16 legged robots," *Springer Handbook of Robotics*, vol. 100, p. 361–389, 2008.

[3] Y. Sakagami, R. Watanabe, C. Aoyama, S. Matsunaga, N. Higaki et K. Fujimura, "The intelligent asimo : System overview and integration," dans *IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems*, vol. 3. Lausanne, Switzerland : IEEE, 2002, p. 2478–2483.

[4] S. Kuindersma, R. Deits, M. Fallon, A. Valenzuela, H. Dai, F. Permenter, T. Koolen, P. Marion et R. Tedrake, "Optimization-based locomotion planning, estimation, and control design for the atlas humanoid robot," *Autonomous Robots*, vol. 40, n°. 3, p. 429–455, mars 2016.

[5] G. Bledt, M. J. Powell, B. Katz, J. D. Carlo, P. M. Wensing et S. Kim, "MIT Cheetah 3 : Design and control of a robust, dynamic quadruped robot," dans *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Madrid, Spain, 2018, p. 2245–2252.

[6] C. D. Bellicoso, F. Jenelten, C. Gehring et M. Hutter, "Dynamic locomotion through online nonlinear motion optimization for quadrupedal robots," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, n°. 3, p. 2261–2268, juill. 2018.

[7] "Robot Spot Mini by Boston Dynamics," *Retrieve from http ://bostondynamics. com*, 2008.

[8] NASA, "Mars Exploration Rovers, https ://mars.nasa.gov/mer/," 2020.

[9] C. Grand, F. BenAmar, F. Plumet et P. Bidaud, "Decoupled control of posture and trajectory of the hybrid wheel-legged robot hylos," dans *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. 5, New Orleans (LA), USA, avr. 2004, p. 5111–5116.

[10] J. Townsend, J. Biesiadecki et C. Collins, "ATHLETE mobility performance with active terrain compliance," dans *2010 IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, Montana, USA, mars 2010, p. 1–7.

[11] F. Cordes, C. Oekermann, A. Babu, D. Kuehn, T. Stark, F. Kirchner et D. Bremen, "An active suspension system for a planetary rover," dans *Proceedings of the International*

Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (i-SAIRAS), Saint-Hubert, Quebec, Canada, 2014, p. 17–19.

[12] M. Vukobratović et B. Borovac, "Zero-moment point—thirty five years of its life," *International journal of humanoid robotics*, vol. 1, n°. 01, p. 157–173, 2004.

[13] C. D. Bellicoso, C. Gehring, J. Hwangbo, P. Fankhauser et M. Hutter, "Perception-less terrain adaptation through whole body control and hierarchical optimization," dans *2016 IEEE-RAS 16th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, Cancun, Mexico, nov. 2016, p. 558–564.

[14] C. D. Bellicoso, F. Jenelten, P. Fankhauser, C. Gehring, J. Hwangbo et M. Hutter, "Dynamic locomotion and whole-body control for quadrupedal robots," dans *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Vancouver, British Columbia, Canada : IEEE, 2017, p. 3359–3365.

[15] M. Bjelonic, C. D. Bellicoso, Y. de Viragh, D. Sako, F. D. Tresoldi, F. Jenelten et M. Hutter, "Keep rollin' - whole-body motion control and planning for wheeled quadrupedal robots," *arXiv :1809.03557 [cs]*, sept. 2018.

[16] F. Cordes, A. Babu et F. Kirchner, "Static force distribution and orientation control for a rover with an actively articulated suspension system," dans *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vancouver, Canada, sept. 2017, p. 5219–5224.

[17] B. Siciliano et O. Khatib, éditeurs, *Springer handbook of robotics*. Berlin : Springer, 2008.

[18] W. Khalil et J. Kleinfinger, "A new geometric notation for open and closed-loop robots," dans *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, San Francisco, CA, USA, 1986, p. 1174–1179.

[19] G. Rodriguez, A. Jain et K. Kreutz-Delgado, "Spatial operator algebra for multibody system dynamics," *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 40, n°. 1, p. 27–50, 1992.

[20] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, N.J : Prentice Hall, 1991.

[21] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3e édition. London : Springer-Verlag, 1995.

[22] J. Y. S. Luh, M. W. Walker et R. P. C. Paul, "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 102, n°. 2, p. 69–76, juin 1980.

[23] R. Featherstone et D. Orin, "Robot dynamics : equations and algorithms," dans *Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics*

and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065), vol. 1. San Francisco, CA, USA : IEEE, 2000, p. 826–834.

[24] R. Featherstone, *Rigid body dynamics algorithms*. New York : Springer, 2008.

[25] O. Khatib, "A unified approach for motion and force control of robot manipulators : The operational space formulation," *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 3, nº. 1, p. 43–53, févr. 1987.

[26] J. Russakow, O. Khatib et S. Rock, "Extended operational space formulation for serial-to-parallel chain (branching) manipulators," dans *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. 1, Nagoya, Japan, mai 1995, p. 1056–1061 vol.1.

[27] V. De Sapio et O. Khatib, "Operational space control of multibody systems with explicit holonomic constraints," dans *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, vol. 2005, mai 2005, p. 2950–2956.

[28] L. Sentis et O. Khatib, "Control of free-floating humanoid robots through task prioritization," dans *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Barcelona, Spain, avr. 2005, p. 1718–1723.

[29] K.-S. Chang et O. Khatib, "Efficient recursive algorithm for the operational space inertia matrix of branching mechanisms," *Advanced Robotics*, vol. 14, nº. 8, p. 703–715, janv. 2001.

[30] P. Wensing, R. Featherstone et D. E. Orin, "A reduced-order recursive algorithm for the computation of the operational-space inertia matrix," dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Minneapolis (MN), USA, mai 2012, p. 4911–4917.

[31] J. Park et O. Khatib, "Contact consistent control framework for humanoid robots," dans *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Orlando (FL), USA, mai 2006, p. 1963–1969.

[32] P. M. Wensing et D. E. Orin, "Generation of dynamic humanoid behaviors through task-space control with conic optimization," dans *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Karlsruhe, Germany, mai 2013, p. 3103–3109.

[33] P. M. Wensing, L. R. Palmer et D. E. Orin, "Efficient recursive dynamics algorithms for operational-space control with application to legged locomotion," *Autonomous Robots*, vol. 38, nº. 4, p. 363–381, avr. 2015.

[34] W. Reid, F. J. Pérez-Grau, A. H. Göktoğan et S. Sukkarieh, "Actively articulated suspension for a wheel-on-leg rover operating on a Martian analog surface," dans *2016 IEEE*

International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Stockholm, Sweden, mai 2016, p. 5596–5602.

[35] D. D. Wheeler, D. Chavez-Clemente et V. K. Sunspiral, "FootSpring : A compliance model for the ATHLETE family of robots," dans *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (i-SAIRAS)*, Sapporo, Japan, 2010.

[36] L. Sentis, J. Park et O. Khatib, "Compliant control of multicontact and center-of-mass behaviors in humanoid robots," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 26, n°. 3, p. 483–501, juin 2010.

[37] M. Hutter, P. Leemann, S. Stevsic, A. Michel, D. Jud, M. Hoepflinger, R. Siegwart, R. Figi, C. Caduff, M. Loher et S. Tagmann, "Towards optimal force distribution for walking excavators," dans *2015 International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, Istanbul, Turkey, juill. 2015, p. 295–301.

[38] M. Hutter, P. Leemann, G. Hottiger, R. Figi, S. Tagmann, G. Rey et G. Small, "Force control for active chassis balancing," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, n°. 2, p. 613–622, avr. 2017.

[39] S.-H. Hyon, Y. Ida, J. Ishikawa et M. Hiraoka, "Whole-Body Locomotion and Posture Control on a Torque-Controlled Hydraulic Rover," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 4, n°. 4, p. 4587–4594, oct. 2019.

[40] L. Villani et J. De Schutter, "Force control," dans *Springer Handbook of Robotics*, B. Siciliano et O. Khatib, éditeurs. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008, p. 161–185.

[41] J.-J. E. Slotine et W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6, n°. 3, p. 49–59, 1987.

[42] H. Wang, "On the recursive implementation of adaptive control for robot manipulators," dans *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, China, juill. 2010, p. 2154–2161.

[43] B. Siciliano et L. Villani, "A passivity-based approach to force regulation and motion control of robot manipulators," *Automatica*, vol. 32, n°. 3, p. 443–447, mars 1996.

[44] H. Yang, X. Fan, Y. Xia et C. Hua, "Robust tracking control for wheeled mobile robot based on extended state observer," *Advanced Robotics*, vol. 30, n°. 1, p. 68–78, janv. 2016.

[45] W. Ha et J. Back, "A disturbance observer-based robust tracking controller for uncertain robot manipulators," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 16, n°. 2, p. 417–425, avr. 2018.

[46] J. Back et W. Ha, "Robust tracking of robot manipulators via momentum-based disturbance observer and passivity-based controller," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 17, n°. 4, p. 976–985, avr. 2019.

[47] S. Chang, Y. Wang et Z. Zuo, "Fixed-time active disturbance rejection control and its application to wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, p. 1–11, 2020.

[48] L. Sciavicco et B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2e édition. London : Springer-Verlag, 2000.

[49] R. Penrose, "On best approximate solutions of linear matrix equations," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 52, n°. 1, p. 17–19, 1956.

[50] P. Morin et C. Samson, "Motion control of wheeled mobile robots." *Springer handbook of robotics*, p. 799–826, 2008.

[51] M. W. Spong et M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2008.

[52] H. K. Khalil et J. W. Grizzle, *Nonlinear systems*, 3e édition. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.

ANNEXE A ÉQUATIONS DE LA CINÉMATIQUE INVERSE

Nous donnons dans le tableau A.1, les valeurs numériques des dimensions utilisées dans le tableau 3.3 pour décrire l'architecture du robot. Nous ajoutons L_{roue} le rayon des roues.

Tableau A.1 Valeur des dimensions du système utilisés (cf. tableau 3.3)

Nom	Valeur (m)
L_{torse}	0.12
$L_{\text{épaule}}$	0.04
L_{bras}	0.3
L_{abs}	0
L_{roue}	0.05

Cinématique directe

Nous détaillons les équations de la cinématique directe d'un quadrant :

$$ {}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2} = \boldsymbol{Geo}\left(\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5\end{bmatrix}^\top\right). \tag{A.1}$$

Nous cherchons ${}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2} = \begin{bmatrix}o_x & o_y & o_z & x & y & z\end{bmatrix}^\top$. La méthode consiste à d'abord construire la transformée de Plücker :

$$ {}^{T_2}\boldsymbol{X}_{T_1} = {}^{T_2}\boldsymbol{X}_4(\theta_5)\,{}^4\boldsymbol{X}_3(\theta_4)\,{}^3\boldsymbol{X}_2(\theta_3)\,{}^2\boldsymbol{X}_1(\theta_2)\;{}^1\boldsymbol{X}_{T_1}(\theta_1). \tag{A.2}$$

Puis nous obtenons par décomposition sur ${}^{T_2}\boldsymbol{X}_{T_1}$:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{25}\Big(&2.5\cos(\theta_1) + 2.5(3\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)) - 2.5(3\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)) \\ &+ 2.5(3\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)) + (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)\cos(\theta_4)) \\ &- (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4)) - (\cos(\theta_1)\cos(\theta_3)\sin(\theta_2)\sin(\theta_4)) \\ &- (\cos(\theta_1)\cos(\theta_4)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)) + 3\Big); \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$ y = \frac{1}{50}\Big(\sin(\theta_1)(2\cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4) + 15\cos(\theta_2+\theta_3) + 15\cos(\theta_2) + 2)\Big); \tag{A.4}$$

$$z = \frac{1}{25}\Big(\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4) + 2.5(3\sin(\theta_2+\theta_3)) + 2.5(3\sin(\theta_2))\Big); \tag{A.5}$$

$$o_x = \text{atan2}\Big(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\Big); \tag{A.6}$$
$$o_y = \text{atan2}\Big(\frac{r_{21}}{\cos o_x}, \frac{r_{11}}{\cos o_x}\Big); \tag{A.7}$$
$$o_z = \text{atan2}\Big(\frac{r_{32}}{\cos o_x}, \frac{r_{33}}{\cos o_x}\Big); \tag{A.8}$$

avec :

$$r_{11} = \cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\cos(\theta_1)\cos(\theta_5) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_5); \tag{A.9}$$
$$r_{21} = -\cos(\theta_5)\sin(\theta_1) - \cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\cos(\theta_1)\sin(\theta_5); \tag{A.10}$$
$$r_{31} = -\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\cos(\theta_1); \tag{A.11}$$
$$r_{32} = -\sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\sin(\theta_1); \tag{A.12}$$
$$r_{33} = \cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4). \tag{A.13}$$

Cinématique inverse

Nous détaillons maintenant les équations de la cinématique inverse d'un quadrant. Par des manipulations sur la solution de la cinématique directe présentée si dessus nous obtenons la solution de l'équation :

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5\end{bmatrix}^\top = \boldsymbol{Geo}^{-1}({}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2}),\\ \text{avec } {}^{T_1}\mathbf{x}_{T_2} = \begin{bmatrix}o_x & o_y & o_z & x & y & z\end{bmatrix}^\top.\end{gathered} \tag{A.14}$$

Nous donnons la solution associée à la position haute du quadrant, avec les dimensions du tableau A.1 :

$$\theta_1 = \text{atan2}\left(y, x - \frac{3}{25}\right). \tag{A.15}$$

$$\theta_5 = \text{atan2}\Big(\cos(\theta_1)\cos(o_x)\sin(o_z) - \cos(o_y)\cos(o_z)\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\cos(o_z)\sin(o_x)\sin(o_y),$$
$$\cos(o_y)\sin(\theta_1)\sin(o_z) + \cos(\theta_1)\cos(o_x)\cos(o_z) - \cos(\theta_1)\sin(o_x)\sin(o_y)\sin(o_z)\Big). \quad \text{(A.16)}$$

$$\theta_{234} = -2\pi + \text{atan2}\Big(\cos(o_y)\sin(\theta_1)\sin(o_x) - \cos(\theta_1)\sin(o_y),\ \cos(o_x)\cos(o_y)\Big). \quad \text{(A.17)}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 = -2\pi + \text{atan2}\Bigg(1 - \Bigg(&\frac{2}{225}\Big(25z - \cos(\theta_5)\sin(o_x)\sin(o_z) + \cos(o_z)\sin(\theta_5)\sin(o_x) \\
&+ \cos(\theta_5)\cos(o_x)\cos(o_z)\sin(o_y) + \cos(o_x)\sin(\theta_5)\sin(o_y)\sin(o_z)\Big)^2 \\
&+ \frac{2}{225}\Big(3\cos(\theta_1) - 25x\cos(\theta_1) - 25y\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_5)\cos(o_y)\cos(o_z) \\
&+ \cos(\theta_5)\cos(o_x)\sin(\theta_1)\sin(o_z) - \cos(o_x)\cos(o_z)\sin(\theta_1)\sin(\theta_5) \\
&+ \cos(\theta_1)\cos(o_y)\sin(\theta_5)\sin(o_z) + \cos(\theta_5)\cos(o_z)\sin(\theta_1)\sin(o_x)\sin(o_y) \\
&+ \sin(\theta_1)\sin(\theta_5)\sin(o_x)\sin(o_y)\sin(o_z) + 1\Big)^2 - 1)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \\
&\frac{2}{225}\Big(25z - \cos(\theta_5)\sin(w_x)\sin(w_z) + \cos(w_z)\sin(\theta_5)\sin(w_x) \\
&+ \cos(\theta_5)\cos(w_x)\cos(w_z)\sin(w_y) + \cos(w_x)\sin(\theta_5)\sin(w_y)\sin(w_z)\Big)^2 \\
&+ \frac{2}{225}\Big(3\cos(\theta_1) - 25x\cos(\theta_1) - 25y\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_5)\cos(w_y)\cos(w_z) \\
&+ \cos(\theta_5)\cos(w_x)\sin(\theta_1)\sin(w_z) - \cos(w_x)\cos(w_z)\sin(\theta_1)\sin(\theta_5) \\
&+ \cos(\theta_1)\cos(w_y)\sin(\theta_5)\sin(w_z) + \cos(\theta_5)\cos(w_z)\sin(\theta_1)\sin(w_x)\sin(w_y) \\
&+ \sin(\theta_1)\sin(\theta_5)\sin(w_x)\sin(w_y)\sin(w_z) + 1\Big)^2 - 1\Bigg). \quad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan2}\Big(\sin(\theta_3),\ \cos(\theta_3)+1\Big) + \operatorname{atan2}\Bigg(\frac{1}{15}\Big(50x\cos(\theta_1) - 6\cos(\theta_1) + 50y\sin(\theta_1)$$
$$- 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_5)\cos(o_y)\cos(o_z) - 2\cos(\theta_5)\cos(o_x)\sin(\theta_1)\sin(o_z)$$
$$+ 2\cos(o_x)\cos(o_z)\sin(\theta_1)\sin(\theta_5) - 2\cos(\theta_1)\cos(o_y)\sin(\theta_5)\sin(o_z)$$
$$- 2\cos(\theta_5)\cos(o_z)\sin(\theta_1)\sin(o_x)\sin(o_y) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_5)\sin(o_x)\sin(o_y)\sin(o_z) - 2\Big),$$
$$\frac{1}{15}\Big(50z - 2\cos(\theta_5)\sin(o_x)\sin(o_z) + 2\cos(o_z)\sin(\theta_5)\sin(o_x)$$
$$+ 2\cos(\theta_5)\cos(o_x)\cos(o_z)\sin(o_y) + 2\cos(o_x)\sin(\theta_5)\sin(o_y)\sin(o_z)\Big)\Bigg). \quad \text{(A.19)}$$

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_3 - \theta_2. \quad \text{(A.20)}$$

ANNEXE B PREUVE DE STABILITÉ DU SYSTÈME COMPLET AVEC UN CONTRÔLEUR EN POSITION BASÉ SUR LA PASSIVITÉ

Nous n'implémentons pas ce contrôleur en position sur le système. En effet il s'agit d'un contrôleur en position dans l'espace des articulations qui s'agence mal avec les méthodes d'adaptation au sol développées section 4.4. Nous démontrons tout de même qu'il est possible de l'utiliser.

Contrôleur en position basé sur la passivité

Nous concevons un contrôleur en position basé sur la passivité [41] dans l'espace des articulations. Le couple de commande est calculé par une boucle interne :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}^r = \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q.} \tag{B.1}$$

Les matrices de gain $\boldsymbol{L}_P$, $\boldsymbol{L}_D$ et $\boldsymbol{\Gamma}$ sont diagonales définies positives, de la forme (4.6). Nous définissons les variables auxiliaires qui sont calculées dans une boucle externe en amont :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{q}_{des} - \boldsymbol{q}, \quad & \dot{\boldsymbol{q}}_r &= \dot{\boldsymbol{q}}_{des} + \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{q}}, \\ \boldsymbol{V}_q &= \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{q}}, \quad & \ddot{\boldsymbol{q}}_r &= \ddot{\boldsymbol{q}}_{des} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Nous posons la fonction associée V_{pass} :

$$\boxed{\mathrm{V}_{pass}(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{V}_q) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}^\top \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{V}_q.} \tag{B.3}$$

Nous pouvons montrer qu'il s'agit d'une fonction de Lyapunov en utilisant le lemme 2 et la défini positivité de $\boldsymbol{L}_P$ et $\bar{\boldsymbol{H}}$.

Injection de la dynamique de l'erreur avec un contrôleur basée sur la passivité

Nous rappelons l'équation du couple de commande $\boldsymbol{\tau}^r$ généré par le contrôleur basé sur la passivité :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^r &= \bar{\boldsymbol{H}}\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}_r + \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q, \\ \text{donc } \bar{\boldsymbol{H}}(\ddot{\boldsymbol{q}} - \ddot{\boldsymbol{q}}_r) &+ \bar{\boldsymbol{C}}(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_r) - \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q = \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Nous pouvons alors réécrire la dynamique des erreurs de régulation en utilisant les coordonnées $(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{V}_q)$:

$$\boxed{-\bar{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{V}}_q - \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{V}_q - \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q = \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2.} \tag{B.5}$$

Preuve de stabilité

Le système (B.6) exprime la dynamique des erreurs du système complet équipé du contrôleur basée sur la passivité en utilisant les coordonnées $(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{V}_q, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$:

$$\boxed{(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{V}_q, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) \rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} = \boldsymbol{V}_q - \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{q}}, \\ \bar{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{V}}_q = -\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{V}_q - \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2, \\ \mu\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \boldsymbol{A}_{\tilde{\psi}}\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \mu(\dot{\boldsymbol{\psi}}^*). \end{cases}} \tag{B.6}$$

Nous modifions le premier terme du candidat de Lyapunov (4.76) :

$$\mathrm{V}\left(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{V}_q, \tilde{\boldsymbol{\psi}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\mathrm{V}_q^\top\bar{\boldsymbol{H}}\mathrm{V}_q}_{\mathrm{V}_{pass}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^\top\boldsymbol{P}_\gamma\tilde{\boldsymbol{\psi}}. \tag{B.7}$$

Nous démontrons le théorème 1 à l'aide d'une preuve similaire à 4.6.2.

Preuve. Nous dérivons V_{pass} par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{V}}_{pass} &= \tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{V}_q^\top\bar{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{V}}_q + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top\dot{\bar{\boldsymbol{H}}}\boldsymbol{V}_q \\
&= \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{L}_P\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{V}_q^\top\bar{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{V}}_q + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top\dot{\bar{\boldsymbol{H}}}\boldsymbol{V}_q \\
&= \tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\left(\boldsymbol{V}_q - \Lambda\tilde{\boldsymbol{q}}\right) + \boldsymbol{V}_q^\top\left(-\bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{V}_q - \boldsymbol{L}_P\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q - \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top\left(\bar{\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{C}}^\top\right)\boldsymbol{V}_q \\
&= -\tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\Lambda\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{V}_q^\top\boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q - \boldsymbol{V}_q^\top\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 \\
&\leq -\tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\Lambda\tilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{V}_q^\top\boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q + \kappa_{\max}\left\|\boldsymbol{V}_q\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\| \\
&\leq -\tilde{\boldsymbol{q}}^\top\boldsymbol{L}_P\Lambda\tilde{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top\boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q + \underbrace{-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top\boldsymbol{L}_D\boldsymbol{V}_q + \kappa_{\max}\left\|\boldsymbol{V}_q\right\|\left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\|}_{(5)}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Nous travaillons temporairement sur (5). Nous isolons $\|\boldsymbol{V}_q\|$ en utilisant la forme canonique du polynôme en $\|\boldsymbol{V}_q\|$ de degrés deux.

$$
\begin{aligned}
(5) &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_q^\top \boldsymbol{L}_D \boldsymbol{V}_q + \kappa_{\max} \|\boldsymbol{V}_q\| \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\| \\
&\leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D) \|\boldsymbol{V}_q\|^2 + \kappa_{\max} \|\boldsymbol{V}_q\| \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\| \\
&\leq \underbrace{-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D) \left(\|\boldsymbol{V}_q\| - \frac{\kappa_{\max}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D)} \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\|\right)^2}_{<0} + \frac{\kappa_{\max}^2 \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_2\right\|^2}{2\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D)}.
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Nous utilisons la majoration de $\dot{\mathrm{V}}_{pass}$ et le résultat (4.82) pour majorer $\dot{\mathrm{V}}$:

$$
\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D) \|\boldsymbol{V}_q\|^2 - \Lambda\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_P) \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|^2 + \left(\frac{\kappa_{\max}^2}{2\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D)} - \frac{\kappa_1}{\mu}\right) \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 + \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2}\mu. \tag{B.10}
$$

Nous choisissons μ_1^* tel que :

$$
\left(\frac{\kappa_{\max}^2}{2\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D)} - \frac{\kappa_1}{\mu}\right) \leq -\frac{1}{2}\max\{1, \gamma\}, \tag{B.11}
$$

donc :

$$
\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_D) \|\boldsymbol{V}_q\|^2 - \Lambda\lambda_{\min}(\boldsymbol{L}_P) \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|^2 - \frac{1}{2}\max\{1, \gamma\} \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2 + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{B.12}
$$

Nous rappelons :

$$
\mathrm{V} \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\bar{\boldsymbol{H}}) \|\boldsymbol{V}_q\|^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L}_P) \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{2}\max(1, \gamma) \left\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right\|^2. \tag{B.13}
$$

D'après les deux inégalités (B.13) et (B.12), pour tout $\mu \leq \mu^*(\bar{\epsilon})$, il existe un $\lambda > 0$ tel que :

$$
\dot{\mathrm{V}} \leq -\lambda \mathrm{V} + \frac{\kappa_3^2}{2\kappa_2}\mu. \tag{B.14}
$$

Nous concluons de la même manière que pour la preuve 4.6.2. □