POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Modélisation et estimation de l'état de charge d'un chauffe-eau électrique

ALFRED GAETAN COULEBETOUBA
Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie électrique

Août 2023

© Alfred Gaetan Coulebetouba, 2023.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Modélisation et estimation de l'état de charge d'un chauffe-eau électrique

présenté par **Alfred Gaetan COULEBETOUBA**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Richard GOURDEAU, président
Guchuan ZHU, membre et directeur de recherche
Roland MALHAMÉ, membre

DÉDICACE

En mémoire de Frédéric François Coulébétouba,
À mon père,
À ma mère,
À mes sœurs,
Au Pr Pierre-Marie Moyaux,
À toutes mes rencontres au
Centre Étudiant Dominicum(ou Benoît-Lacroix pour les anciens),
Aux Rockeurs et Rockeuses de Montréal,
Je vous aime ...

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier particulièrement mon père, Pierre Albert Coulébétouba pour son appui constant tout au long de mes études.
Je remercie le Pr Guchuan Zhu et Mme Véronique Delisle d'avoir cru en moi et de m'avoir fait confiance sur ce projet ainsi que Mr Louis-Philippe Proulx et Mr Alexandre Gagné pour leurs conseils et leur appui constant.
Merci au centre de recherche CanmetÉNERGIE de Ressource naturelles Canada à Varennes pour l'opportunité de stage et le banc d'essai mis à disposition pour les tests .

Je remercie ensuite les membres du jury, le Pr Richard Gourdeau et le Pr Roland Malhamé pour avoir accepté de lire mon mémoire et de participer à la soutenance.

Merci à Ignace Ciss et Valentine Poumaere, mes meilleurs amis. Vous êtes un soutien infaillible pour moi.

Je tiens aussi à remercier particulièrement certaines rencontres faites au CéDum cette année, notamment le directeur Gustavo Adolpho Garay Ortega pour sa présence et sa bienveillance constante à notre égard. Ce centre m'a permis de tenir, de m'enrichir et de ne rien lâcher tout au long de cette année.

Finalement, je remercie aussi Marian Daubioul, Angèle Poupard, Florence Payen, Augustin Mouwakdié et Ignace Ciss pour leur relecture et commentaires.

RÉSUMÉ

Le développement de réseaux intelligents est un sujet central dans la production et la gestion d'énergie d'aujourd'hui. Cependant, l'intégration des énergies renouvelables dans le réseau électrique est confrontée au caractère variable de ces sources. De plus, les problèmes de type gestion de la charge (ou Demand Response en anglais) nécessitent une flexibilité de la part des charges. Pour toutes ces raisons, une source de stockage est nécessaire afin de rendre les charges au sein du réseau électrique plus flexibles. Ainsi, le chauffe-eau électrique se présente comme un candidat important du fait de sa part non négligeable dans la consommation en énergie des foyers. Cependant, pour permettre un contrôle optimal de ces appareils dans le réseau, un modèle représentatif du profil énergétique de ce dernier est nécessaire.

Pour remplir cet objectif, après une revue de littérature sur l'état de l'art des différents modèles préexistants sur la thermodynamique au sein du réservoir, nous nous sommes penchés sur l'équation d'advection-diffusion-réaction qui décrit la dynamique de la distribution de température dans un réservoir. Le modèle fut par la suite discrétisé avec le schéma de Crank-Nicolson permettant une inconditionnelle stabilité par rapport aux pas de temps et d'espace. Par la suite, nous avons eu recours à deux méthodes d'estimation des paramètres afin de comparer leur efficacité à découvrir un modèle d'équations aux dérivées partielles donné. La première méthode est `DeepyMoD`, un module `python` assez récent qui se base sur une méthode de découverte de modèle pour estimer les paramètres, à laquelle on intègre de l'apprentissage profond. La seconde méthode est le module `scipy.optimize`, plus courante et qui fait une régression pour trouver les coefficients de son modèle.

Dans la seconde partie, nous étudions ensuite l'interfaçage du profil énergétique du réservoir. Ce dernier étant basé sur la répartition de la température et au vu de la non-linéarité du système discrétisé, nous avons appliqué et comparé deux observateurs. Il s'agit du filtre de Kalman pseudo-linéaire et du filtre de Kalman étendu. Par ailleurs, nous nous sommes servis d'une approche Bayésienne avec la méthode de Monte Carlo afin de déterminer la matrice de covariance adéquate du bruit de procédure.

Les évaluations de l'estimation des paramètres et des observateurs ont pu être réalisées sur les données réelles d'un banc d'essai de chauffe-eaux mis à disposition par centre de recherche CanmetÉNERGIE de Ressource naturelles Canada à Varennes . Avec ces données, nous avons pu conclure que l'utilisation d'un filtre de Kalman pseudo-linéaire présentait de meilleures performances pour l'estimation du profil énergétique.

ABSTRACT

The development of the Smart Grid is one of the most important issues for energy generation and management. However, due to randomness in electricity consumption and renewable energy generation, we have to find a reliable way to balance electrical energy generation and consumption which is an important factor for demand response problems. Water and space heating represent a significant portion of the household energy consumption. Therefore, water heating control could be a convenient way to make loads more flexible. The main objective of this research project is to estimate the water tank's state of charge to enable an optimal control of these devices in the context of demand response in the Smart Grid.

In the first part, after reviewing the existing modelization of the thermodynamics inside the tank, we selected a model based on diffusion-advection-reaction equation which is a nonlinear parabollic partial differential equation. This model is then discretized with Crank-Nicolson method to obtain a finite-dimensional lumped system. This scheme is unconditionally stable through space and time. Then, we compare two `python` packages for parameter estimation. The first one is `DeepyMoD`, which is based on a method of model discovery with deep learning. The other is `scipy.optimize` package, which is more popular and based on curve fitting for parameter estimation.

In the second part, we construct observers for estimating the state of charge through the temperature distribution inside the tank due to the non-linearity of the discretized system model, we designed an extended Kalman filter and a pseudo-linear Kalman filter. Moreover, a method based on a Bayesian approach with Monte Carlo's algorithm is used to estimate the covariance matrix of the processs noise.

The methods for system parameter estimation and the state observers have been evaluated by using an experimental water heater test bench at Natural Resources Canada's CanmetENERGY research centre in Varennes. The obtained results confirmed the validity of the developed solutions and show that overall the pseudo-linear Kalman filter has a better performance.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX x

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xiii

LISTE DES ANNEXES xv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

1.1 Contexte de la recherche 1

1.2 Éléments de la problématique 2

1.3 Objectifs de recherche 3

1.4 Plan du mémoire 3

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 4

2.1 Modélisation des chauffe-eaux électriques 4

2.1.1 Modèles à un nœud 4

2.1.2 Modèles multinodaux 4

2.1.3 Modèles basés sur des équations aux dérivées partielles 5

2.1.4 Conclusion sur les modèles 6

2.2 Découverte du modèle et identification des paramètres 7

2.3 Estimation de l'état du chauffe-eau 8

CHAPITRE 3 ACQUISISTION ET PRÉPARATION DES DONNÉES 10

3.1 Présentation du banc d'essai 10

3.2 Déroulement des tests et préparation des données 12

CHAPITRE 4 CONSTRUCTION DU MODÈLE DE CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUE 16
4.1 Modélisation du système 16
4.1.1 Thermodynamique au travers d'une équation aux différences partielles 16
4.1.2 Discrétisation et représentation d'état 19
4.2 Découverte du modèle 22
4.2.1 `DeepMoD` 23
4.2.2 `Scipy` 24
4.3 Détermination du modèle du système à partir de données expérimentales . . 24
4.3.1 Application des méthodes d'estimation 24
4.3.2 Estimation de α et γ 28
4.3.3 Estimation de η 34
4.3.4 Estimation de β 38
4.3.5 Bilan des méthodes d'estimation 40

CHAPITRE 5 ESTIMATION DU PROFIL ÉNERGÉTIQUE DU CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUE 44
5.1 Définitions du profil énergétique du réservoir 44
5.2 Application du filtre de Kalman dans l'estimation de l'état du système . . . 46
5.2.1 Filtre de Kalman pour les systèmes linéaires 46
5.2.2 Filtre de Kalman étendu 49
5.2.3 Filtre de Kalman pseudo-linéaire 50
5.3 Estimation de la matrice de covariance du bruit de procédé 52
5.4 Évaluation des filtres de Kalman sur les essais en conditions réelles du banc d'essai 54
5.4.1 Configuration pour l'application des filtres 54
5.4.2 Résultats de l'estimation de la matrice de covariance du bruit de mesure 56
5.4.3 Performances des filtres de Kalman 57
5.4.4 Application du filtre sur le réservoir CEE300 58
5.4.5 Application du filtre sur le réservoir CEE200 62
5.4.6 Application de l'estimation du profil énergétique au moyen de l'état estimé 66
5.4.7 Bilan sur les filtres de Kalman 69

CHAPITRE 6 CONCLUSION 71
6.1 Synthèse des travaux 71
6.2 Améliorations futures 72

RÉFÉRENCES 75

ANNEXES 79

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 α et γ estimés avec `DeepyMoD` 28
Tableau 4.2 α et γ estimés avec `Scipy` 28
Tableau 4.3 η estimés avec `DeepyMoD` 34
Tableau 4.4 η estimés avec `Scipy` 34
Tableau 4.5 β estimés avec `Scipy` 38
Tableau 5.1 Estimation de σ_Q selon la méthode de Monte carlo 57
Tableau A.1 Caractérisques des réservoirs selon leur fiche technique 79
Tableau A.2 Position des éléments chauffants et de leur thermostats correspondant en mm 80
Tableau A.3 Position des sondes control et reference dans les réservoirs 80

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Distribution de la consommation énergétique résidentielle au Canada 2019, Ressources naturelles Canada [1] 1
Figure 3.1 Photos du banc d'essai 10
Figure 3.2 Photo de l'installation d'une sonde du contrôleur control (à gauche) et reference (à droite) 11
Figure 3.3 Exemples de profil de consommation faible d'eau 12
Figure 3.4 Exemples des profils de consommation d'eau disponibles 13
Figure 4.1 Schéma d'un modèle de chauffe-eau électrique 16
Figure 4.2 Graphique des températures d'un test de type NullFlow_OFF sur 48h avec le CEE300 25
Figure 4.3 Graphique de la puissance consommée d'un test de type NullFlow_ON sur 24h avec le CEE200 25
Figure 4.4 Graphique de température d'un test de type NullFlow_ON sur 24h avec le CEE200 26
Figure 4.5 Graphique du débit de tirage d'un test de type StepFlow_OFF avec le CEE300 26
Figure 4.6 Graphique de température d'un test de type StepFlow_OFF avec le CEE300 27
Figure 4.7 Graphique de comparaison pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients théoriques 29
Figure 4.8 Graphique de comparaison pour un essai NullFlow_OFF 30
Figure 4.9 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_OFF 31
Figure 4.10 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_OFF estimés par `Scipy` 32
Figure 4.11 Comparaison des énergies pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients théoriques 32
Figure 4.12 Comparaison des énergies pour un essai NullFlow_OFF 33
Figure 4.13 Graphique des comparaisons pour un essai NullFlow ON 35
Figure 4.14 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_ON 36
Figure 4.15 Graphique de comparaison des énergie pour un essai NullFlow_ON . 37
Figure 4.16 Graphique des résultats pour un essai StepFlow_OFF 39
Figure 4.17 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et celle calculée par l'état estimé. 40

Figure 4.18 Graphique des résultats de la simulation d'un test RLC avec les paramètres estimés 42
Figure 4.19 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et celle calculée par l'état estimé 43
Figure 5.1 Graphique de la consommation électrique du réservoir à travers la puissance et le courant consommés 55
Figure 5.2 Graphique du résidu entre la puissance mesurée et estimée à travers le courant 56
Figure 5.3 Historique des tirages et puissance consommée d'un test CRC HU sur le CEE300 58
Figure 5.4 Résultats de l'application de l'EKF sur un profil HU pour le CEE300 59
Figure 5.5 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par l'EKF sur un profil HU pour le CEE300 60
Figure 5.6 Résultats de l'application du PLKF sur un profil HU pour le CEE300 61
Figure 5.7 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par le PLKF sur un profil HU pour le CEE300 . . . 62
Figure 5.8 Historique des tirages et puissance consommée d'un test CR HU sur le CEE200 62
Figure 5.9 Résultats de l'application de l'EKF sur un profil HU pour le CEE200 63
Figure 5.10 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par l'EKF sur un profil HU pour le CEE200 64
Figure 5.11 Résultats de l'application du PLKF sur un profil HU pour le CEE200 65
Figure 5.12 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par le PLKF sur un profil HU pour le CEE200 . . . 66
Figure 5.13 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU 67
Figure 5.14 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU pour le CEE300 68
Figure 5.15 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU pour le CEE200 69

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

CE	Chauffe-eau
CEE	Chauffe-eau électrique
RE	Représentation d'état
ÉdC	État de charge
CRC	Conditions réelles de consommation
GC	Gestion de la charge
LU	Low usage
MU	Medium usage
HU	High usage
ctrl	Control
ref	Reference
PLKF	Pseudo-linear Kalman filter
EKF	Extended Kalman filter

Notation

$\boldsymbol{x}$: Variable spatiale (m)
$\boldsymbol{\Delta x}$: Pas spatial (m)
$\boldsymbol{t}$: Variable temporelle (s)
$\boldsymbol{\Delta t}$: Pas temporel (s)
$\boldsymbol{L}$: Hauteur du réservoir (m)
$\boldsymbol{\delta_x}$: Diamètre d'un élèment chauffant (m)
$\boldsymbol{S}$: Surface transversale du réservoir (m^2)
$\boldsymbol{S_l}$: Surface longitudinale du réservoir (m^2)
$\boldsymbol{d}$: Diamètre du réservoir (m)
$\boldsymbol{V_{tot}}$: Volume total du réservoir (m^3)
$\boldsymbol{V_n}$: Volume de la n-ième couche (m^3)
$\boldsymbol{T(x,t)}$: Température à l'intérieur du réservoir (°C)
$\boldsymbol{\dot{m}(t)}$: Débit de tirage d'eau (m^3/s)
$\boldsymbol{P_i(t)}$: Puissance électrique consommée par le i-ème élément chauffant (W)
$\boldsymbol{i(t)}$: Courant électrique consommée (A)
$\boldsymbol{r}$: Résistance de l'élément chauffant (Ω)

$\boldsymbol{q}$: Nombre d'éléments chauffants dans le réservoir
$\boldsymbol{M}$: Nombre de points de mesure
$\boldsymbol{N}$: Nombre de couches découlant de la discrétisation spatiale
$\boldsymbol{x^i}$: Position du i-ème élément chauffant (m)
$\boldsymbol{x^i_{\text{th}}}$: Position du thermostat lié au i-ème élément chauffant (m)
$\boldsymbol{E_i}$: Index du i-ème élément chauffant dans l'espace discrétisé
$\boldsymbol{O_j}$: Index de la j-ème couche observée dans l'espace discrétisé
$\boldsymbol{T}_{\text{set}}$: Température de référence des thermostats (°C)
$\boldsymbol{T}_{\text{db}}$: Zone morte du thermostat (°C)
$\boldsymbol{\nu_k}$: Bruit de mesure
$\boldsymbol{w_k}$: Bruit de processus
$\boldsymbol{\hat{T}_{k|k-1}}$: Estimée à priori du vecteur d'état
$\boldsymbol{\hat{P}_{k|k-1}}$: Covariance de l'estimation à priori
$\boldsymbol{\hat{T}_{k|k}}$: Estimée à posteriori du vecteur d'état
$\boldsymbol{\hat{P}_{k|k}}$: Covariance de l'estimation à posteriori
$\boldsymbol{K_k}$: Matrice de gain
$\boldsymbol{\lambda}$: Coefficient de conductivité thermique de l'eau ($Wm^{-1}K^{-1}$)
$\boldsymbol{\rho}$: Masse volumique de l'eau (kg/m^3)
$\boldsymbol{C_v}$: Capacité thermique massique de l'eau ($JK^{-1}kg^{-1}$)
$\boldsymbol{\eta}_{\text{eff}}$: Efficacité énergétique des éléments chauffants
$\boldsymbol{\delta_{ij}}$: Delta de Kronecker appliqué à i et j

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Caractéristiques des réservoirs 79
Annexe B Détails du calcul de la Jacobienne de la fonction de transition d'état . 81

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte de la recherche

Dans un contexte planétaire de raréfaction des ressources et de changement climatique, l'augmentation de la part des énergies renouvelables variables dans la production d'énergie électrique est devenue une pierre angulaire dans les politiques et stratégies de transition énergétique voire de lutte contre le réchauffement climatique. D'ailleurs, le Canada est un chef de file international dans le domaine du mix énergétique et l'exemple le plus cité est l'intégration des énergies propres dans le réseau électrique.
Cependant, les variations et le caractère stochastique de la génération de ces énergies apparaissent comme des difficultés ou des limites pour qu'elles puissent se substituer de façon plus optimale ou intégrale aux énergies fossiles. Pourtant, plusieurs pistes de solution font l'objet de recherches, notamment l'utilisation du potentiel de flexibilité des charges. C'est dans ce cadre que rentrent les investigations sur certains appareils de charges faisant office de moyen de stockage de l'énergie (chauffe-eaux, voitures électriques ...) ou bien dont la coupure en périodes de forte demande n'impacterait pas le confort du client (plinthes chauffantes, thermostats ...). Cela permettrait en plus de réduire la consommation électrique du réseau lors des périodes de forte demande. Nous allons nous intéresser dans le cadre de ce mémoire au chauffe-eau électrique (CEE) qui fait partie de ces appareils pouvant rendre flexibles les charges et donc par ricochet le réseau électrique. Le potentiel de stockage thermique d'un chauffe-eau est important puisqu'"une élévation de 1°C de la température de l'eau d'un CE de 270 litres correspond à 0,313 kWh d'énergie" [2] ; ce qui n'est pas négligeable.

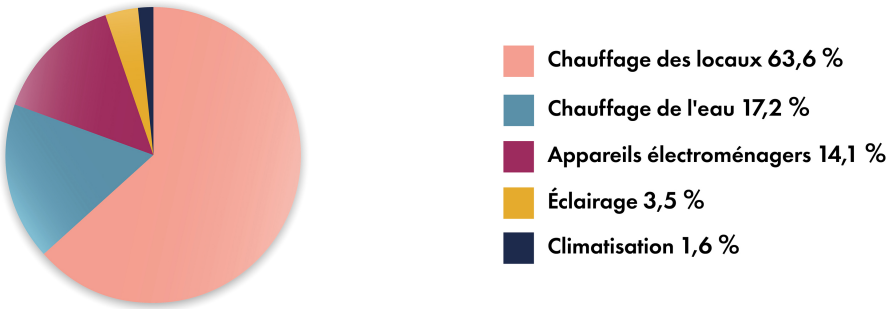


FIGURE 1.1 Distribution de la consommation énergétique résidentielle au Canada 2019, Ressources naturelles Canada [1]

De plus, environ 17% de la consommation en énergie d'un foyer au Canada provient du

chauffage de l'eau comme que montré à la figure 1.1. Ainsi, ce potentiel gagnerait à être flexible afin d'être mobilisable à tout moment sans affecter de façon significative la température de sortie de l'eau chaude.
C'est dans cet objectif que le centre de recherche CanmetÉNERGIE de Ressource naturelles Canada à Varennes s'est intéressé au potentiel de stockage des CEE pour la flexibilité des charges.Les centres de recherche CanmetÉNERGIE de Ressources naturelles Canada est le principal organisme au Canada pour la recherche et la technologie en matière d'énergie propre. Le programme d'intégration des énergies renouvelables, situé au centre de Varennes, répartit ses projets en 4 niveaux :

- **Appareils :** Technologie photovoltaïque et évaluation des ressources - Intégration des systèmes photo voltaïques aux bâtiments - Flexibilité de charge - Intégration de stockage
- **Systèmes :** Protocoles de test d'onduleur avancé - Gestion de la flexibilité de charges et de stockage - Normes en matières de réseau intelligent
- **Communautés :** Conception de communautés et de villes intelligentes - Communautés nordiques et éloignées durables - projets pilotes communautaires intelligents
- **Réseau à grande échelle :** Conception de systèmes de distribution et structures d'exploitation - Évaluation harmonisée de la capacité d'accueil - Modèles de réseau pour l'électrification - Coordination des modèles d'intégration au réseau national

De plus, l'intérêt pour les CEE dans ce programme n'est pas récent. En effet, des travaux sur la simulation d'une communauté de chauffe-eau [3] ou bien encore des essais en conditions réelles avec Hydro One pour de stratégies de contrôle ont déjà été réalisés par le passé. De plus, un banc d'essai de chauffe-eau a été mis en place pour pouvoir reproduire et étudier des profils de consommation.

De plus, il a été porté un intérêt tout particulier sur les CE haute température qui permettent, comme leur nom l'indique, d'atteindre des températures plus hautes et donc de stocker davantage d'énergie.

1.2 Éléments de la problématique

Notre projet de recherche s'inscrit, comme on peut s'en douter, dans les projets au niveau des appareils, c'est à dire, qui s'intéresse aux appareils des charges et plus particulièrement les CEE. Comme vu précédemment, l'intérêt a été plus mis sur la commande des CEE que sur l'interface de ces derniers par rapport aux réseaux électriques, ce qui est une simplification qui peut tendre à mésestimer la capacité de ces réservoirs dans le cas de tests ou d'un déploiement. Il y a donc un besoin de pouvoir estimer de manière fiable le profil de température à l'aide

d'un contrôleur pour :

- éviter qu'un utilisateur manque d'eau chaude
- utiliser le plein potentiel de chaque chauffe-eau lors d'évènement en gestion de la charge et pour l'intégration des énergies renouvelables variables.

1.3 Objectifs de recherche

L'objectif principal de cette recherche est le développement d'un modèle de type boîte grise pour l'estimation du profil énergétique d'un chauffe-eau électrique.
Afin de pouvoir parvenir à cet objectif, plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Faire un état de l'art des modèles de CE existants incluant les différents points forts et points faibles de chacun.
2. Faire des expérimentations sur le comportement thermique de CE haute température suivant différents profils de température.
3. Identifier des paramètres suivant l'équation (les équations) décrivant le mieux la thermodynamique au sein du réservoir.
4. Concevoir un observateur permettant d'estimer la répartition de température au sein du réservoir.
5. Comparer et valider notre modèle en utilisant les données expérimentales recueillies.
6. Proposer une interface représentant le profil énergétique du réservoir.

1.4 Plan du mémoire

Dans un premier temps, le chapitre 2 présente une revue de littérature sur les différents modèles et équations représentant la dynamique au sein du réservoir. Le chapitre 3 portera ensuite sur une présentation du banc d'essai sur lequel ont été effectués les essais et de la méthodologie pour l'obtention d'un jeu de données sur le comportement de l'eau au sein du réservoir. Ces deux premiers chapitres permettront, dans le chapitre 4, de proposer un modèle basé sur une équation aux dérivées partielles ainsi que les méthodes de comparaison des coefficients qui la compose. Enfin le chapitre 5 est consacré à la conception des observateurs basés sur le filtre de Kalman ainsi qu'à la validation de notre modèle et l'annexe soit au chapitre 6.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Modélisation des chauffe-eaux électriques

Différents modèles de CEE existent dans la littérature suivant la configuration de ce dernier et la méthode de résolution appliquée. De plus, certains proposent une définition du profil énergétique par l'état de charge du réservoir.
Nous pouvons répartir ces modèles suivant 3 principales catégories à savoir les modèles à un nœud, multinodaux et basés sur l'équation aux dérivées partielles (EDP)

2.1.1 Modèles à un nœud

Les modèles à un nœud, comme leur nom l'indique, considèrent que le réservoir a la même température en son sein. Par ailleurs, les phénomènes tels que le tirage de l'eau, les pertes thermiques ou l'apport énergétique d'un élément chauffant sont pris en compte donnant ainsi lieu à une modélisation au moyen d'une équation différentielle ordinaire comme dans [4]. Dans ces recherches, l'intérêt est plus axé sur le contrôle d'une population de CEE plutôt que sur l'appareil en lui-même d'où cette température qui représente le profil énergétique du réservoir qui peut être la température moyenne dans le cas où le réservoir est muni d'un capteur ou bien de celle du seul capteur du réservoir.

2.1.2 Modèles multinodaux

Dans le cas d'un modèle multinodal, on commence à prendre en compte la non-uniformité de la température au sein du réservoir.
Dans [2], le modèle consiste à représenter le réservoir par de petits volumes interagissant entre eux et l'extérieur nous donnant ainsi un système d'équations différentielles ordinaires. Pour ce qui est du profil énergétique en lui-même, il est représenté par une température moyenne pondérée par le volume de chaque nœud. Dans ce mémoire, Jérôme Solis prend le temps d'essayer d'estimer la durée du débit d'eau tiré au moyen d'une chaîne de Markov binaire. La limite de ce modèle, soulignée d'ailleurs par Solis, est le fait qu'on admette que n'importe quel tirage a le même débit malgré une méthode assez intéressante pour estimer sa durée.
Dans [5], on utilisa la même démarche de modélisation, mais pour les couches intermédiaires [5] un terme qui se rapproche du phénomène de diffusion entre les couches a été rajouté. Pour sa définition du profil énergétique, on a aussi l'état de charge défini par une moyenne de la température pondérée dont les coefficients changent en fonction du nombre de capteurs

à notre disposition, mais normalisée. Par la suite, un moyen d'estimer le débit à chaque pas de temps par un bilan d'énergie est proposé. Pour ce dernier, les résultats sont intéressants, mais dans le cas d'une configuration réaliste, l'estimation est assez insatisfaisante dès que le nombre de capteurs est réduit ou que le débit est important.

Dans [6], la modélisation de la dynamique des couches se fait avec un bilan d'énergie thermique. Comme pour [5], la diffusion est prise en compte dans les phénomènes. La particularité, c'est qu'il choisit d'interfacer le CEE avec 4 indicateurs clés à savoir P la puissance nominale, $E_{\max}$, $E_{\min}$ et SoC, l'état de charge. $E_{\max}$ et $E_{\min}$ n'ont pas une valeur fixe ici. En effet, ils décrivent respectivement l'énergie restante pour atteindre la pleine charge au sein du réservoir et l'énergie qu'il faut injecter aux couches dont la température est inférieure à $T_{\min}$ pour l'atteindre. De ce fait, $E_{\max}$ et $E_{\min}$ ne sont plus statiques. La définition de l'état de charge quant à elle reste la même par rapport aux autres à savoir une moyenne pondérée de la température et normalisée.

2.1.3 Modèles basés sur des équations aux dérivées partielles

Le modèle basé sur l'EDP est aussi intéressant, car permettant de décrire la nature de la répartition de température de l'eau dans le réservoir. La grande majorité des études montre que pour les modèles stratifiés, le modèle EDP unidimensionnel représente adéquatement la dynamique de la distribution de la température suivant la hauteur du réservoir.
Dans [7], il y est fait la comparaison d'une approche par EDP par rapport à un modèle à un nœud et un bi-masse. Ils n'ont pas cherché à avoir une métrique de performance poussée, mais juste la MAPE (Mean Absolute Percentage Error). Pour la résolution de l'EDP, la méthode de discrétisation numérique n'est pas détaillée, mais elle est d'ordre 2 par rapport à l'espace et d'ordre 1 par rapport au temps. Dans le modèle bi-masse, la "hauteur" d'eau chaude $h(t)$ est une variable à prendre en compte. Dans leurs résultats, il est noté que le modèle EDP montre une précision plus satisfaisante que les autres modèles utilisés dans cette étude.

L'EDP est assez complexe à résoudre dans le cas général. Dans [8] on s'intéresse à la situation où on essaye de décharger complètement le réservoir et donc on a un débit constant. Il est aussi considéré que le réservoir est complètement isolé. Il nous est alors proposé une solution analytique résolvant l'EDP sous forme d'une somme infinie. En raison d'un coût de calcul trop élevé pour une telle solution, l'intérêt d'une solution approximative a été étudié. Cette solution approximative offre des résultats satisfaisants tout en répondant aux contraintes de coût de calcul et de stabilité.

La notion de thermocline est utilisée dans [9] pour la modélisation du réservoir. En effet, cette dernière est définie comme la zone où on remarque un fort gradient de température. De

ce fait, un modèle à 2 strates est étudié cependant toujours avec une EDP comme équation. Dans le réservoir utilisé, nous avons le mélange d'un fluide et d'un solide comme moyen de stockage contrairement à un réservoir d'eau dans les autres études. De ce fait, la modélisation s'axe autour de la viscosité du fluide ainsi que les turbulences produites par un tirage.

Dans [10], la turbulence est aussi prise en compte pour un réservoir d'eau classique. Par ailleurs, la méthode de résolution utilisée est un schéma de discrétisation par Crank-Nicolson qui propose de bonnes caractéristiques en termes de stabilité [11]. Par la suite, la notion d'état de charge est introduite sous deux formes : comme une moyenne pondérée et normalisée de la température ou bien une normalisation de la température observée par le thermostat de l'élément chauffant. Plusieurs stratégies de contrôle sont utilisées sur des simulations. Au final, l'introduction de l'état de charge semble donner de meilleurs résultats pour respecter le confort de l'utilisateur.

Dans [12], le réservoir fait partie d'un système plus grand où le chauffage de l'eau se produit à l'extérieur de celui-ci et pour chaque fluide (chaud et froid), on a une entrée et une sortie comme pour [8]. La dynamique du fluide est étudiée à chaque étape ainsi que dans les transitions donnant une chaîne de Markov multi-états. Ainsi, la dynamique est modélisée par un système d'EDP. Par la suite, la résolution se fait par "Method of Line", c'est à dire, on ne discrétise que l'espace et on laisse la dépendance par rapport au temps continu. Cette méthode nous redonne la configuration qu'on retrouve dans les modèles multinodaux. Les simulations effectuées font preuve d'une assez grande robustesse, mais il est souligné que plus d'investigations doivent être menées concernant les phases de refroidissement.

2.1.4 Conclusion sur les modèles

Les modèles uninodaux, même s'ils manquent de précision, sont assez utilisés dans la littérature pour le comportement des chauffe-eaux. Ce genre de modèle ne permet pas forcément de tirer le plus d'informations sur l'état des CE et donc ne permettraient pas une pleine exploitation du potentiel de flexibilité des CE. Les modèles mutilnodaux permettent de représenter de manière plus fidèle la stratification à l'intérieur du réservoir tout en ayant une dynamique relativement facile à représenter. En effet, vu que l'on considère chaque couche comme un sous-système. Ce qui donne un système d'équations différentielles ordinaires et dont on obtient une expression analytique relativement simple. Partir sur les équations aux dérivées partielles rend la résolution plus complexe au premier abord, mais permet d'appréhender plus généralement la physique régissant la température au sein du réservoir et la résolution peut se faire par des schémas de discrétisation. Pour ces deux aspects, nous nous intéressons particulièrement à ce type de modélisation.

2.2 Découverte du modèle et identification des paramètres

En plus des modèles présents dans la littérature, il serait intéressant de pouvoir estimer la valeur des paramètres de l'équation en se basant sur des données expérimentales et trouver un modèle physique.

Le fait de "Découvrir" un modèle adéquat pour des phénomènes physiques complexes a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années. En effet, en plus d'être un moyen d'estimer les paramètres de notre équation, cela permettrait de mettre en exergue des phénomènes insoupçonnés. Ainsi, selon [13], la découverte du modèle (Model discovery en anglais) peut être répartie en 3 approches :

- La régression parsemée qui consiste à établir une liste de termes candidats (dérivées par rapport à l'espace, fonction non linéaire, etc.) représentant des phénomènes et appliquer une régression entre ces termes, avec un régulateur, pour estimer les paramètres les plus importants.
- L'approche par procédés gaussiens basée sur l'estimation par maximum de vraisemblance sur les paramètres inconnus de l'équation.
- L'approche par réseaux de neurones.

Dans [13, 14], la régression parsemée fut choisie. Cependant, la propagation du bruit par le calcul numérique des termes candidats est le principal défaut de cette méthode. Ainsi, [13] et [14] proposent une méthode basée sur un réseau de neurones pour pallier cela.

Par ailleurs, d'autres méthodes d'identification du modèle ont été étudiées. Dans [15] nous est présentée une combinaison de l'intégration d'Adam-Moult implicite et d'une régression linéaire. On peut aussi souligner l'utilisation d'un modèle NARMAX pour l'identification d'un système non linéaire dans [16]. Dans ce dernier, on essaye d'approximer la solution de l'équation par un modèle à dimension finie.

En partant d'un modèle dont la structure est connue (uni ou multinodal ou basé sur l'EDP), le but serait de pouvoir avoir une estimation des paramètres de ce modèle.

Comme résumé dans [17], la méthode la plus courante est l'erreur de prédiction. En effet, le modèle étant connu, une méthode de résolution doit être utilisée (p. ex. résolution des équations différentielles dans les cas nodaux, différences finies pour les EDP, etc.). L'expression paramétrique en découlant est donc la prédiction qui sera comparée aux données expérimentales en se servant de diverses méthodes d'optimisations.

De ce fait, dans [18], en résolvant l'équation aux dérivées partielles via la "Method of Line", une représentation d'état fut construite à partir du système d'équations différentielles ordinaire. Cette représentation d'état fut augmentée en y incluant les paramètres afin de les

estimer par le filtre Kalman. L'ajout des paramètres rendant le système non linéaire, le choix a été fait de se servir du filtre de Kalman étendu (extended Kalman filter en anglais).

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à évaluer la méthode d'identification du modèle par régression parsemée proposée par [14] et l'application d'une telle méthode sur notre équation qui sera non homogène. En comparaison, nous utiliserons aussi une méthode d'optimisation couplée à notre discrétisation de l'EDP.

2.3 Estimation de l'état du chauffe-eau

Après la mise en place du modèle mathématique, il est intéressant de regarder comment interfacer le profil énergétique de notre réservoir. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont employées.

La première est appelée par [19] la méthode empirique ou boîte noire. Cette méthode ne se sert que de la lecture des capteurs comme moyen d'interfaçage. Dans le cas de [19], on y ajoute la valeur de la puissance consommée pour représenter le profile énergétique par l'état de charge (ÉdC) qui est un rapport de l'enthalpie maximale du système sur l'enthalpie déduite des mesures. On peut associer à cette méthode la moyenne de température lue par les capteurs ou bien encore les moyennes pondérées obtenues par une méthode d'optimisation ou d'apprentissage. À cela, nous pouvons ajouter les modèles dits mathématiques. Dans [19], il s'agit d'attribuer une fonction paramétrique dont les paramètres sont définis par une méthode d'ajustement. Cette fonction correspondra à la répartition de la température au sein du réservoir.

De l'autre côté du spectre, nous avons bien sûr les méthodes se basant sur la physique du modèle. Dans un premier cas, nous avons les simulations qui consistent à résoudre l'équation servant de modèle afin de reproduire la répartition de température. Qu'il s'agisse des modèles nodaux ou basés sur l'EDP, le but est de résoudre les équations [19–21] et, au besoin, d'estimer les paramètres afin de réduire l'erreur au maximum. Ces méthodes ne s'appuient que sur les entrées du système (tirage, puissance consommée) pour estimer la répartition de la température. Dans le cas de [20], différentes équations furent proposées suivant la configuration du réservoir (au repos, en période de chauffe et/ou avec des tirages).

En plus des approches simulées, nous pouvons en énumérer une troisième qui se sert des méthodes des deux précédents groupes. En effet, la physique régissant la température est prise en compte ainsi que les valeurs des capteurs afin de minimiser l'erreur. Il s'agit des observateurs. Dans [22], on fait la comparaison entre un observateur de Luenberger et une version non linéaire de ce dernier. Les résultats trouvés sont meilleurs, mais l'article souligne que la

performance dépend grandement du placement des capteurs et aussi de l'estimation initiale. Cette importance du placement est aussi évoquée dans [23] où on compare un observateur de Luenberger avec un filtre de Kalman sans parfum (unscented Kalman filter) en supposant la présence de bruits internes et de mesures dans ce second cas. En effet, dans cet article, le modèle de la température est un système non linéaire et donc le filtre de Kalman classique ne peut être utilisé. Il est conclut que les algorithmes des deux observateurs se valent en terme de convergence et de rapidité pour reconstruire le profil thermique du réservoir.

Cette estimation de la répartition de température peut être la représentation de l'ÉdC du réservoir, mais peut être condensée pour interfacer le réservoir. On a bien sûr sa définition classique qui consiste en la quantité d'énergie dans le réservoir qui se voit normalisée [21]. La représentation par la variation de l'enthalpie est aussi utilisée. Elle est définie comme l'intégrale de la puissance thermique reçue par le réservoir entre un instant t et $t + \Delta t$. Dans ce cas, on se base plus sur un bilan de puissances que sur l'énergie interne du système qui est induite de la répartition de température. De plus, [19] souligne l'influence du pas d'espace sur la précision du modèle. Nous pouvons aussi noter les redéfinitions de [6] au sujet de l'interfaçage du réservoir.

Dans notre cas, nous avons choisi d'appliquer un filtre de Kalman étendu ainsi qu'un filtre de Kalman pseudo-linéaire au vu de la non-linéarité du système. De plus, nous nous sommes intéressés à la comparaison de certaines méthodes d'interfaçage du système.

CHAPITRE 3 ACQUISISTION ET PRÉPARATION DES DONNÉES

Les travaux menés pour ce mémoire ont été possibles grâce au concours du centre de recherche CanmetÉNERGIE à Varennes qui a mis à disposition son banc d'essai de chauffe-eaux, dont on peut voir des photos sur la figure 3.1, afin de pouvoir reproduire des comportements de consommation d'eau chaude et de nous permettre d'avoir un jeu de données sur lequel évaluer notre modèle et notre observateur.

3.1 Présentation du banc d'essai

Le banc d'essai se compose des éléments suivants :

- 2 chauffe-eaux commerciaux haute température : un grand (CEE300) et un petit (CEE200)
- 1 chauffe-eau traditionnel 60 gallons
- 4 réservoirs tampons
- 1 unité de condensation
- Des appareils de mesures (sondes de température, wattmètre, débitmètre, etc.)
- Le système mécanique et électrique permettant le déroulement des essais

Dans le cadre de notre étude, seuls les chauffe-eaux haute température seront considérés.



FIGURE 3.1 Photos du banc d'essai fournie par Ressources naturelles Canada

Chacun des chauffe-eaux est muni d'une sonde multipoint immergée dans le réservoir qui permet la lecture de température. De plus, ils sont munis de contrôleurs qui possèdent 3 sondes de température ainsi qu'un ampèremètre. Ces sondes de température sont placées

aux parois extérieures des réservoirs aux alentours des éléments chauffants comme montré sur la figure 3.2. Chaque chauffe-eau est équipé de deux contrôleurs ; l'un installé sur la paroi au moyen d'un adhésif pour une lecture "idéale" de la température et l'autre installé au moyen d'un embout en plastique représentant une configuration plus réaliste de ce qu'on peut trouver dans la vie courante. Le premier est nommé control (ctrl) car servant aussi à ouvrir et fermer l'alimentation des éléments chauffant du CEE et le second est nommé reference (ref). La position de ces sondes est aux alentours des éléments chauffants des CEE. En effet, au vu de la conception des réservoirs, il s'agit de la zone dédiée à l'installation des thermostats et des éléments chauffants et aussi celle sans isolant. Cette zone est recouverte d'un capot en plastique après installation des sondes.

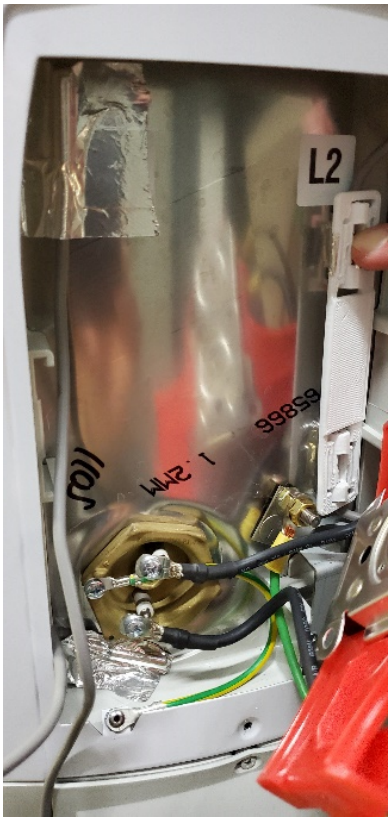


FIGURE 3.2 Photo de l'installation d'une sonde du contrôleur control (à gauche) et reference (à droite)

Pour les thermostats, il s'agit de thermostats mécaniques. Leur activation est gérée par une zone morte qui va s'ouvrir ou se fermer en fonction de la température souhaitée. Dans le cas de CEE300, les thermostats sont mis en série afin de prioriser, la chauffe de l'élément du haut.

Ainsi, nous avons 3 sources de température : celle de la sonde multipoint comme référence,

et celles des contrôleurs moins nombreux et représentant une situation réelle en vue d'un déploiement. À cela, nous ajoutons aussi un débitmètre pour les tirages et la consommation électrique du réservoir est mesurée pour un wattmètre dans le cas du banc d'essai et un ampèremètre dans le cas des contrôleurs.

3.2 Déroulement des tests et préparation des données

Pour lancer un test, nous nous servons du logiciel PcVue qui a besoin d'un fichier au format csv qui fait office de planificateur des tests qu'on veut lancer. De plus, les fichiers de tirage qui sont répertoriés dans le planificateur sont aussi au format csv et indique pour chaque tirage sa durée son débit et le temps d'inactivité avant de passer au prochain tirage. Les tests effectués sont des reproductions de conditions réelles de consommation (CRC) d'eau chaude. De ce fait, ils sont regroupés suivant le profil de consommation : **faible** (LU pour "Low Usage"), **moyen** (MU pour "Medium Usage") et **élevée** (HU pour "High Usage"). La figure 3.4 nous montre un exemple d'historique de tirage pour chaque profil de consommation sur une période de 24h. On peut voir que plus la consommation est grande plus la fréquence et l'amplitude des tirages sont importantes. De plus, d'autres facteurs tels que les jours de semaine ou de week-end ou la saison nous ont permis d'extraire plusieurs profils de tirage avec différentes températures d'entrée.

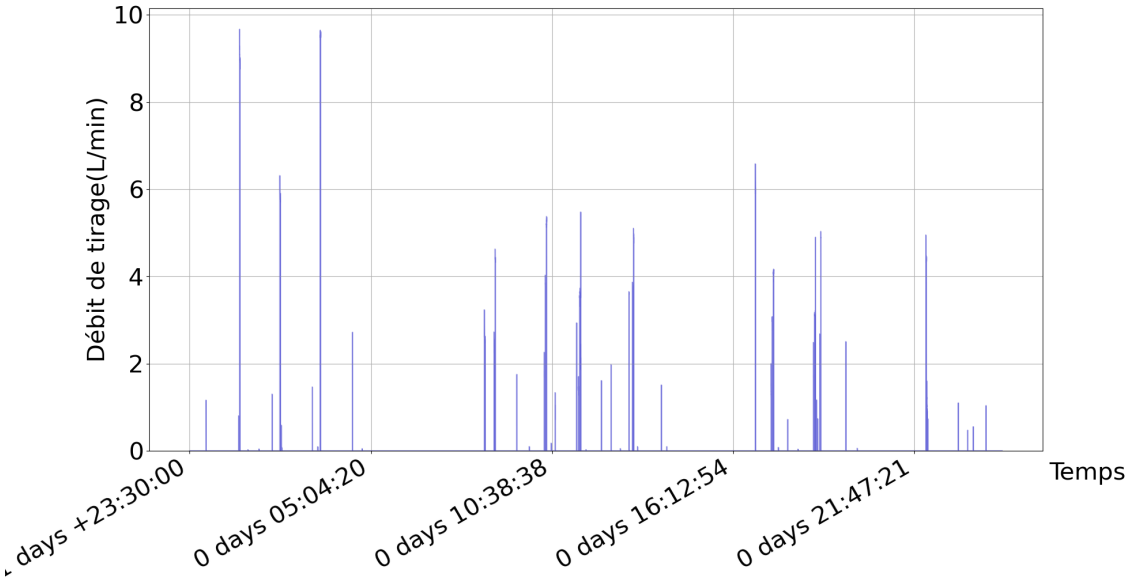
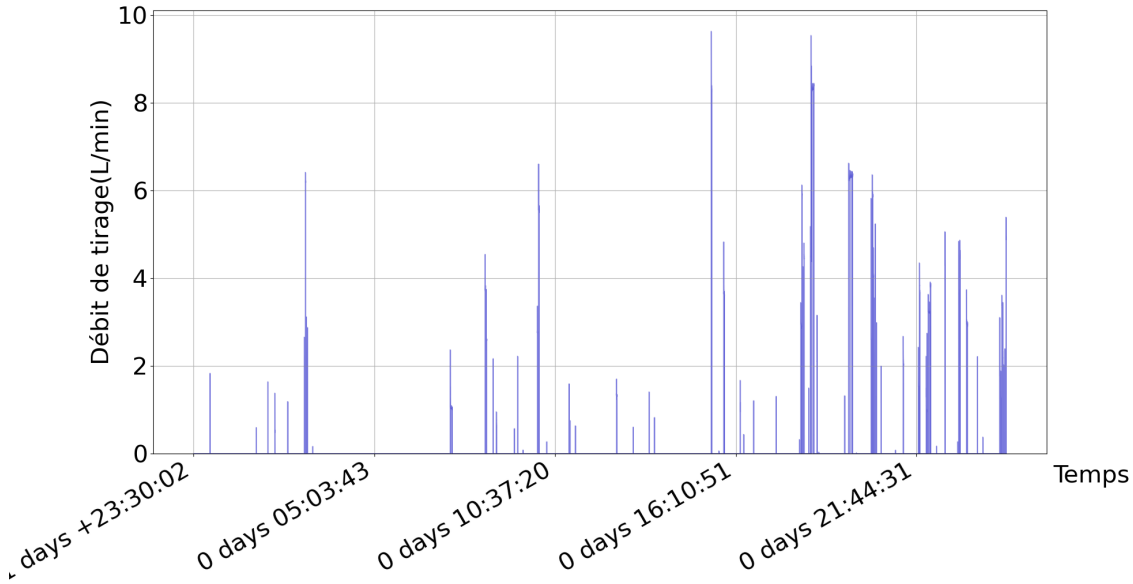
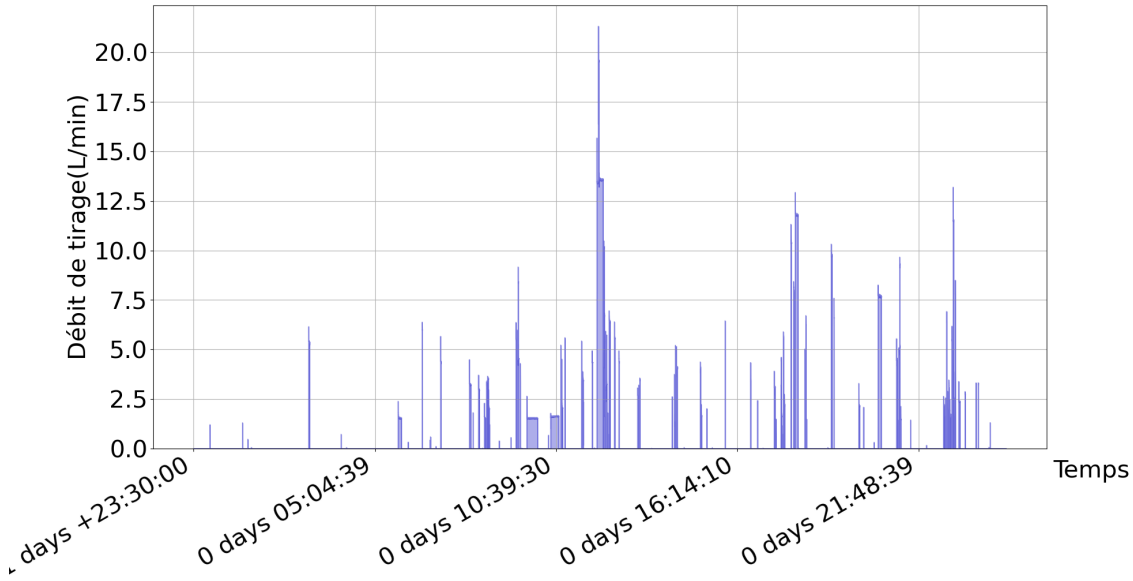


FIGURE 3.3 Exemples de profil de consommation faible d'eau



(a)



(b)

FIGURE 3.4 Exemples des profils de consommation d'eau disponibles : **(a)** Moyenne consommation.**(b)** Haute consommation.

Les fichiers de tirages ont été générés à partir de la base de données "Building America

Analysis Spreadsheets" qui a répertorié les habitudes de consommation d'eau chaude de plusieurs foyers au États-Unis. Les données extraites furent celles de la Ville de Burlington, car proche de Montréal, et plusieurs profils ont été sélectionnés selon le degré de consommation (petit, moyen et grand foyer) et à plusieurs jours de l'année. Par ailleurs, la mesure des tirages est effectuée au niveau des équipements et non du réservoir d'eau chaude et donc, deux tirages peuvent se chevaucher. De ce fait, il fallait réagencer les données pour avoir le débit global tiré ainsi qu'un format admissible par PcVue.

Évènements de type gestion de la charge

De plus, les tests sont effectués 2 fois supplémentaires afin d'étudier l'incidence d'un évènement de type gestion de la charge (GC). C'est deux évènements GC sont les suivants :

- **DRP1** : L'alimentation électrique du CEE est coupée durant les périodes 06:00 - 09:00 et 16:00 - 20:00. Cette période est inspirée du tarif flex D d'hydro Québec.
- **DRP2** : L'alimentation électrique du CEE est coupée durant les périodes 05:00 - 10:00 et 14:00 - 21:00.

Ainsi, l'ouverture et la fermeture de circuit des CEE étant gérée par le contrôleur, il fallait trouver un moyen de pouvoir détecter le départ des tests du banc d'essai. Cela nous permettait de synchroniser le banc d'essai avec les contrôleurs pour les évènements GC. Pour cette synchronisation, nous interrogions la base de données contenant les données enregistrées par PcVue et vérifions si les conditions suivantes sont respectées pour estimer l'heure de départ des tests :

- le réservoir pointé est celui du test en question
- la durée, le débit et le temps d'attente du tirage indiqués sont ceux de la première ligne de tirage du test en cours [1].
- la pompe assurant le tirage est marquée comme activée
- l'instant auquel ces conditions ci-dessus sont respectées est ultérieur à l'heure de départ théorique du test.

Par la suite, les données des tests sont extraites des 3 sources de mesures à savoir PcVue, les contrôleurs ctrl et ref. Le nettoyage de celles-ci s'opérait comme suit :

- Suppression des colonnes non essentielles (drapeaux d'alertes du banc d'essai, valeur des capteurs des autres réservoirs, etc.) et ajout colonne notifiant si l'échantillon a été modifié durant le nettoyage.
- Suppression des valeurs incohérentes (au-delà de 80 ou en dessous de 0 °C) que ce soit d'un point de vue physique ou des conditions des tests. Cela est de même pour toute

1. Pour être précis, j'évalue si la différence en valeur absolue entre ces variables et leur valeur de référence est <= 0.1 afin de relaxer cette contrainte et réduire le risque d'être bloqué dans une boucle infinie.

variation brusque de température (p. ex. variation supérieure à 5°C/s).

- Pour les consommations électriques, nous avons appliqué un minimum en dessous duquel on ne considère pas de consommation. En effet, les ampèremètre et wattmètre avaient une valeur minimale d'affichage non nulle dans le cas où le réservoir ne reçoit pas d'énergie. Il fallait donc imposer à ces valeurs 0.
- Déterminer le moment de début des tests et ramener la colonne de temps au format secondes par rapport à l'instant initial. Ce dernier est déterminé de la même manière que lors de la synchronisation pour les évènements RD et servira pour la simulation et l'observateur.
- Renommage des colonnes des capteurs pour les faire correspondre à leur hauteur dans le réservoir. Cela servira aussi pour la simulation et l'observateur.

CHAPITRE 4 CONSTRUCTION DU MODÈLE DE CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUE

Ce chapitre vise à la mise en place d'un modèle représentant la dynamique au sein du réservoir du chauffe-eau. Ainsi, après avoir détaillé l'équation sur laquelle sera basée notre modèle ainsi que notre méthode de résolution, nous évaluerons les méthodes de découvertes du modèle pour identifier ses paramètres.

4.1 Modélisation du système

Dans notre représentation de la dynamique au sein du CE, nous considérons qu'on a un cylindre de longueur L et de section transversale constante S.

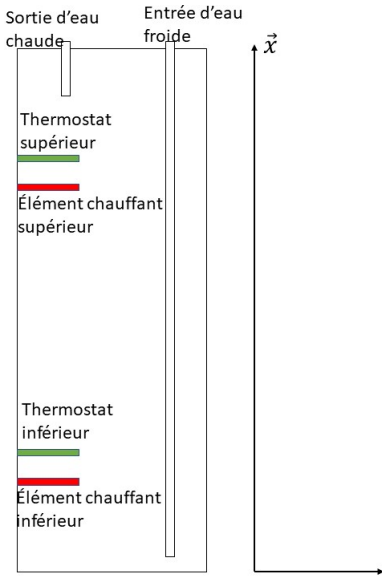


FIGURE 4.1 Schéma d'un modèle de chauffe-eau électrique

La figure 4.1 représente un schéma de chauffe-eau électrique avec deux éléments chauffants et leur thermostats respectifs. L'entrée d'eau froide se produit au bas du réservoir et la sortie dans le haut du réservoir. De plus, $\overrightarrow{x}$ sera notre axe longitudinal.

4.1.1 Thermodynamique au travers d'une équation aux différences partielles

Posons $T(\cdot, t)$ la température au sein du réservoir qui dépend des cordonnées spatiales "$\cdot$" et du temps t. Pour commencer, nous partons de l'équation de la chaleur homogène ayant pour

expression [24]

$$\frac{\partial T(\cdot,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho C_v}}_{\alpha} \Delta T(\cdot,t), \tag{4.1}$$

où α est le coefficient de diffusivité thermique avec λ la conductivité thermique de l'eau, ρ sa masse volumique, C_v sa capacité thermique massique et Δ l'opérateur Laplacien. Cependant dans notre étude, au vue de l'orientation et des dimensions du cylindre, nous sommes concentrés sur la **diffusion** suivant l'axe longitudinal $\overrightarrow{x}$ du réservoir. Ce choix est d'autant plus motivé que les modèles basés sur l'EDP tel que [7] ou encore [20], sont à une dimension. De ce fait, l'équation (4.1) devient

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+. \tag{4.2}$$

La **chauffe du réservoir**, d'origine électrique, est liée à la puissance instantanée des éléments chauffants. À noter que l'activation de ces éléments peut ne pas être simultanée ni avoir la même puissance. De ce fait, pour le i-ème élément chauffant dont la hauteur coordonnée suivant $\overrightarrow{x}$ est x_i, sa puissance $P_i(t)$ s'applique sur un volume d'eau d'épaisseur δx. Cette dernière représente l'épaisseur d'un élément chauffant. Clairement, $P_i(t) = 0$ si le i-ème élément chauffant n'est pas activé. En nous basant sur la représentation de l'apport d'énergie par les éléments chauffants données par [7], l'équation (4.2) devient

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\eta_{\text{eff}}}{\rho C_v S \delta_x}}_{\eta} \sum_{i=1}^{q} P_i(t) \varphi_{[\underline{x_i};\overline{x_i}]}(x), \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+ \tag{4.3}$$

où η est de le coefficient de chauffe avec η_{eff} l'efficacité énergétique des éléments chauffants et q le nombre d'éléments chauffants. De plus, le terme

$$\varphi_{[\underline{x_i};\overline{x_i}]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[x_i - \dfrac{\delta x}{2}; x_i + \dfrac{\delta x}{2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

permet de limiter l'apport d'énergie au volume d'eau aux alentours de l'élément chauffant. Ce qui nous amène à

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \eta \underbrace{\sum_{i=1}^{q} P_i(t) \varphi_{[\underline{x_i};\overline{x_i}]}(x)}_{U(x,t)}, \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

De plus, le chauffage va créer un **effet cheminée** qui va entraîner un déplacement des couches chauffées vers le haut. Cette montée se traduit par un terme additionnel à la diffusion local $D_a = f(T(x,t))$. En se basant sur [25], nous avons

$$D_a(T) = \begin{cases} (\kappa d)^2 \sqrt{-g\upsilon(T(x,t))\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}} & \text{si } \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.5}$$

avec κ la constante Von Kármán, d le diamètre du réservoir, g la constante gravitationnelle et υ le coefficient d'expansion thermique de l'eau. De ce fait, nous avons

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = (\alpha + D_a(T))\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \eta U(x,t), \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+. \tag{4.6}$$

En plus de la chauffe, le CEE est évidemment soumis à des tirages qui provoquent une **advection** [26]. L'entrée d'eau froide se fait au fond du réservoir et la sortie d'eau chaude en haut. Ainsi, à l'instar de la répartition de température, le mouvement aura pour direction l'axe $\overrightarrow{x}$, de sens opposé au flux de chaleur et sera de valeur constantes par rapport à $\overrightarrow{x}$. Ainsi, en posant $\dot{m}(t)$ le débit volumique de tirage, (4.6) devient

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = (\alpha + D_a(T))\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{1}{S}}_{\beta} \dot{m}(t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \eta U(x,t), \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+ \tag{4.7}$$

où β est le coefficient d'advection.
En plus de tous ces phénomènes, le réservoir échange forcément de la chaleur avec le milieu ambiant à la température T_{ambiant}. Bien sûr, l'isolant autour permet de réduire ces échanges le plus possible ce qui donne, en nous basant sur l'expression de [7] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} =& (\alpha + D_a(T))\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \beta \dot{m}(t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \\ & - \underbrace{h\frac{2S + S_l}{SL\rho C_v}}_{\gamma}(T(x,t) - T_{\text{ambiant}}) + \eta U(x,t), \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.8}$$

où γ est le coefficient de pertes thermiques avec h le coefficient de conductivité thermique par unité de surface de l'isolant et S_l la surface transversale du réservoir.

Ainsi notre modèle de la répartition de la température au sein du réservoir est l'équation aux

dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} =&(\alpha + D_a(T))\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \beta\dot{m}(t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \\ &- \gamma(T(x,t) - T_{\text{ambiant}}) + \eta U(x,t), \qquad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pour ce qui est des conditions aux limites, nous considérons que les flux de chaleur aux extrémités sont nuls. De plus, l'entrée d'eau se produit au fond du réservoir à la température T_{in} ce qui donne une condition supplémentaire pour la température au fond du réservoir [7]. Ce qui nous donne

$$\frac{\partial T(x=L,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0, \tag{4.10a}$$

$$\begin{cases} T(x=0,t) = T_{\text{in}} \text{ si } \dot{m}(t) > 0, \\ \dfrac{\partial T(x=0,t)}{\partial x} = 0 \text{ sinon}, \end{cases} \qquad t > 0. \tag{4.10b}$$

Enfin, la condition initiale est

$$T(x,0) = T_0(x),\ x \in [0,L]. \tag{4.11}$$

Ainsi, (4.9) est une **équation de diffusion-advection-réaction non linéaire**. Donc il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire de type parabolique.

4.1.2 Discrétisation et représentation d'état

Notre modèle basé sur l'équation aux dérivées partielles représentée par les équations (4.9), (4.10) et (4.11) est un modèle à dimension infinie. Nous procédons à une discrétisation par différences finies pour nous retrouver avec un modèle à dimension finie. Pour ce faire, le schéma de discrétisation de Crank-Nicolson [11, 27] sera utilisé. Ce schéma est d'ordre 2 par rapport à l'espace et d'ordre 1 par rapport au temps en plus de jouir d'une stabilité inconditionnelle par rapport aux pas de temps et d'espace. Elle se décrit comme suit :
$(x,t) \Leftrightarrow (x_n, t_k)$

$$T(x,t) \rightarrow \frac{T_{k+1}^n + T_k^n}{2}, \tag{4.12a}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \rightarrow \frac{T_{k+1}^n - T_k^n}{\Delta t}, \tag{4.12b}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \to \frac{1}{2}\left[\frac{T_{k+1}^{n+1} - T_{k+1}^{n-1}}{2\Delta x} + \frac{T_k^{n+1} - T_k^{n-1}}{2\Delta x}\right], \tag{4.12c}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \to \frac{1}{2}\left[\frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_{k+1}^{n} + T_{k+1}^{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{T_k^{n+1} - 2T_k^{n} + T_k^{n-1}}{\Delta x^2}\right]. \tag{4.12d}$$

Ainsi (4.9) devient,

$$\begin{aligned} &- \mu_{1_k}(T_k^n)T_{k+1}^{n-1} + \mu_{2_k}(T_k^n)T_{k+1}^{n} + \mu_{3_k}(T_k^n)T_{k+1}^{n+1} \\ =&\mu_{1_k}(T_k^n)T_k^{n-1} + \mu_{4_k}(T_k^n)T_k^{n} - \mu_{3_k}(T_k^n)T_k^{n+1} + \gamma T_{\text{ambiant}} + \eta U_k^n, \\ &\text{pour } (n,k) \in [\![2; N-1]\!] \times \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{4.13}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_{1_k}(T_k^n) =&\frac{\alpha}{2\Delta x^2} + \frac{\beta}{4\Delta x}\dot{m}_{k+1} + \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2} \\ =&\mu_{1_k} + \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2}, \end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\begin{aligned} \mu_{2_k}(T_k^n) =&\frac{1}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{D_a(T_k^n)}{\Delta x^2} \\ =&\mu_{2_k} + \frac{D_a(T_k^n)}{\Delta x^2}, \end{aligned} \tag{4.14b}$$

$$\begin{aligned} \mu_{3_k}(T_k^n) =&\frac{\alpha}{2\Delta x^2} - \frac{\beta}{4\Delta x}\dot{m}_{k+1} - \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2} \\ =&\mu_{3_k} - \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2}, \end{aligned} \tag{4.14c}$$

$$\begin{aligned} \mu_{4_k}(T_k^n) =&\frac{1}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{D_a(T_k^n)}{\Delta x^2} \\ =&\mu_{4_k} - \frac{D_a(T_k^n)}{\Delta x^2}. \end{aligned} \tag{4.14d}$$

Afin d'alléger la notation pour la suite, nous considérerons que $\mu_{\alpha_k}^n$ correspond $\mu_{\alpha_k}(T_k^n)$ pour $\alpha \in \{1,2,3,4\}$. Par la suite, (4.10a) et (4.10b) deviennent :

$$T_{k+1}^{N-1} - 4T_{k+1}^{N-2} + 3T_{k+1}^{N} = -T_k^{N-1} + 4T_k^{N-2} - 3T_k^{N}, \qquad k \in \mathbb{N}^*, \tag{4.15a}$$

$$T_{k+1}^1 = \begin{cases} T_{in} & \text{si } \dot{m}_{k+1} > 0 \\ \dfrac{4T_{k+1}^2 - T_{k+1}^3}{3} & \text{sinon} \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.15b}$$

Par la suite, en prenant la représentation d'état $T_k \in \mathbb{R}^N$ définie par $T_k = \begin{bmatrix} T_k^1 & T_k^2 & \dots & T_k^N \end{bmatrix}^\top$, nous obtenons l'équation d'état suivante :

$$Z_1(T_k)T_{k+1} = Z_2(T_k)T_k + Z_3 \begin{bmatrix} U_k^1 \\ \vdots \\ U_k^q \\ T_{\text{ambiant}} \end{bmatrix}, \tag{4.16a}$$

$$T_{k+1}^1 = \begin{cases} T_{in} & \text{si } \dot{m}_{k+1} > 0 \\ \dfrac{4T_{k+1}^2 - T_{k+1}^3}{3} & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.16b}$$

avec

$$Z_1(T_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{1_k}^2 & \mu_{2_k}^2 & \mu_{3_k}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{1_k}^3 & \mu_{2_k}^3 & \mu_{3_k}^3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_{1_k}^{N-1} & \mu_{2_k}^{N-1} & \mu_{3_k}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \tag{4.17a}$$

$$Z_2(T_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1_k}^2 & \mu_{4_k}^2 & -\mu_{3_k}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{1_k}^3 & \mu_{4_k}^3 & -\mu_{3_k}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{1_k}^{N-1} & \mu_{4_k}^{N-1} & -\mu_{3_k}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \tag{4.17b}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} \eta\delta_{1E_1} & \dots & \eta\delta_{1E_q} & 0 \\ \eta\delta_{2E_1} & \dots & \eta\delta_{2E_q} & \gamma \\ \vdots & & \vdots & \\ \eta\delta_{(N-1)E_1} & \dots & \eta\delta_{(N-1)E_q} & \gamma \\ \eta\delta_{NE_1} & \dots & \eta\delta_{NE_q} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.17c}$$

où pour

$$i \in \{E_1, \dots, E_q\} \subset \{1, \dots N\},\ \delta_{nE_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = E_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad n \in \{1, \dots N\}. \tag{4.18}$$

Posons $A(T_k) = Z_1(T_k)^{-1} Z_2(T_k)$, $B(T_k) = Z_1(T_k)^{-1} Z_3$ tels que

$$A(T_k) : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}, \tag{4.19}$$

$$B(T_k) : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N \times (q+1)} \tag{4.20}$$

et $U_k \in \mathbb{R}^{(q+1)}$ définie par $U_k = \begin{bmatrix} U_k^1 & \dots & U_k^q & T_{\text{ambiant}} \end{bmatrix}^\top$. Il est à préciser que $A(T_k)$ et $B(T_k)$ dépendent aussi de $\dot{m}_k$ le débit volumique de tirage mais pour simplifier la notation, nous n'avons exposé que leur dépendance à l'état T_k. Ainsi, le modèle du système peut s'écrire sous la forme

$$T_{k+1} = A(T_k) T_k + B(T_k) U_k. \tag{4.21}$$

Par la suite, pour M points de mesure, $M < N$, posons $C \in \mathbb{R}^{M \times N}$ la matrice d'observation définie par

$$C = \begin{bmatrix} \delta_{1O_1} & \dots & \delta_{NO_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{1O_M} & \dots & \delta_{NO_M} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Nous avons notre sortie $Y_k \in \mathbb{R}^M$ définie par

$$Y_k = C T_k. \tag{4.23}$$

Ainsi, les équations (4.21), (4.15b) et (4.23) constitueront la représentation d'état discrète décrivant la dynamique de notre système dans le cas déterministe. Cette dernière est une **représentation d'état pseudo-linéaire**. À noter qu'en plus des valeurs du vecteur d'entrée U_k à chaque pas de temps, la connaissance du débit, dont dépendent nos matrices $A(T_k)$ et $B(T_k)$, est nécessaire.

4.2 Découverte du modèle

L'objectif dans cette partie est de déterminer α, β, γ et η. En effet, leurs valeurs peuvent être déterminées en utilisant les quantités physiques, explicitées dans les équations (4.1) à (4.8), grâce aux caractéristiques du système. Cependant, notre objectif, en plus d'avoir un modèle le plus adéquat possible, c'est d'évaluer deux méthodes d'identification des paramètres. Elles

seront effectuées par le biais de modules `python`.

4.2.1 `DeepMoD`

C'est une contraction de Deep Learning Model Discovery. Il s'agit d'un procédé de "découverte" de l'EDP qui se base sur une régression parsemée [14, 28], c'est à dire, on évalue les coefficients pour une série de termes candidats et qu'on discrimine suivant l'ordre de grandeur des résultats. Pour ce qui est de l'algorithme, on s'est servi du module `python DeepyMoD` [1] développé par PhiMAL. Cette bibliothèque utilise le model discovery en y ajoutant de l'apprentissage profond afin de créer un substitut numérique de la fonction à évaluer pour éviter la progression du bruit pour les dérivées. Ainsi, cette méthode de découverte devrait pouvoir s'adapter à des données bruitées.

En nous basant sur les exemples et la documentation, voici l'algorithme pour estimer les paramètres d'une EDP à une dimension avec `DeepyMoD` :

1. **Préparation des données** : Nous stockons le jeu de données du test dans la classe Dataset. Dans la création de cette classe, nous pouvons aussi choisir de normaliser les "coordonnées" $(x, t, \dot{m}(t), \dots)$ et "données" $(T(x,t))$ et si nous voulons utiliser l'ensemble des données ou une partie. Par la suite, ce jeu de données est divisé entre un jeu de données qui servira à l'entraînement du modèle et celui qui servira à l'évaluer.
2. **Configuration de DeepMoD** : Comme mentionné plus tôt, un réseau de neurones est utilisé afin de créer un substitut numérique à la fonction dont nous voulons estimer l'équation. Dans cette partie, nous allons indiquer le nombre d'entrées (les "coordonnées" du jeu de données) et de sorties (les « données » du jeu de données) ainsi que le nombre de couches et de nœuds de ce réseau de neurones. Par la suite, nous avons à instancier la classe "Library". Elle sert à répertorier les termes candidats pour la régression. Par exemple, en posant $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2 & \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & T\frac{\partial T}{\partial x} & \dot{m}\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$, comme la liste des termes candidats, nous supposons que l'équation pourrait être de la forme $\frac{\partial T}{\partial t} = \xi_1 + \xi_2 T + \xi_3 T^2 + \xi_4 \frac{\partial T}{\partial x} + \dots = \Theta\xi$. Les exemples expliquent comment utiliser les librairies pré-construites ou bien comment en créer une personnalisée. Enfin, nous configurons l'estimateur ainsi que les seuils de convergence et de discrimination des coefficients.
3. **Entraînement** : Comme son nom laisse le sous-entendre, il s'agit de la partie où nous entraînons notre modèle d'apprentissage profond ainsi que la régression qui va s'effectuer dont la fonction objective est composée des termes :

1. Non mis à jour depuis Juin 2021

(a) $\boldsymbol{MSE(T, \hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |T(x,t)_i - \hat{T}_i|^2}$ [14] qui est l'erreur entre la fonction estimée par le réseau de neurones et les données expérimentales,

(b) $\boldsymbol{MSE(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}, \Theta\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}_i - \Theta_{ij}\xi_j|^2}$ [14] qui est l'erreur entre la dérivée temporelle de la fonction estimée et les termes candidats et

(c) $\boldsymbol{L_1(\xi)}$ le terme de régularisation de la régression. En supposant que des termes de notre équation peuvent être nuls, il s'agit ici d'une régression de type LASSO ($\lambda \sum_i \xi_i$) [14]

4. **Post traitement** : Après convergence, nous appliquons la discrimination qui permet de mettre à 0 les coefficients jugés comme peu impactants selon notre seuil défini au préalable [14]. Si nous avons appliqué une normalisation, il faudra "dénormaliser" les coefficients trouvés.

4.2.2 `Scipy`

Pour cette méthode nous nous servons de la librairie `Scipy` et plus précisément de la fonction `curve_fit` de `Scipy.optimize` qui permet de réduire l'erreur entre un modèle simulé et les mesures introduites. Facile d'utilisation, il suffit de mettre en place une simulation suivant le paramètre à estimer et à choisir la méthode d'optimisation voulue ainsi que les bornes de nos coefficients [29]. Comme nous le constatons, la fonction `curve_fit` n'est pas faite pour les EDP mais il suffit de discrétiser notre équation et d'utiliser la fonction `flatten` des `numpy array` pour pouvoir insérer l'évolution de notre vecteur d'état parmi les paramètres de `curve_fit`.

4.3 Détermination du modèle du système à partir de données expérimentales

4.3.1 Application des méthodes d'estimation

Afin d'estimer chacun des paramètres de notre équation, nous nous sommes servis du principe de superposition. A cet effet, un jeu de données de tests standards est disponible en plus de celui des tests en conditions réelles. Ces derniers sont classés en 3 catégories :

- Les tests de type **NullFlow_OFF** qui correspondent à la pahse de repos du réservoir donc sans tirage et avec les éléments chauffants désactivés sur une longue période comme le montre la figure 4.2. Le CE est complètement chargé au préalable avant le début de ces tests. Ainsi nous pouvons estimer α et γ.

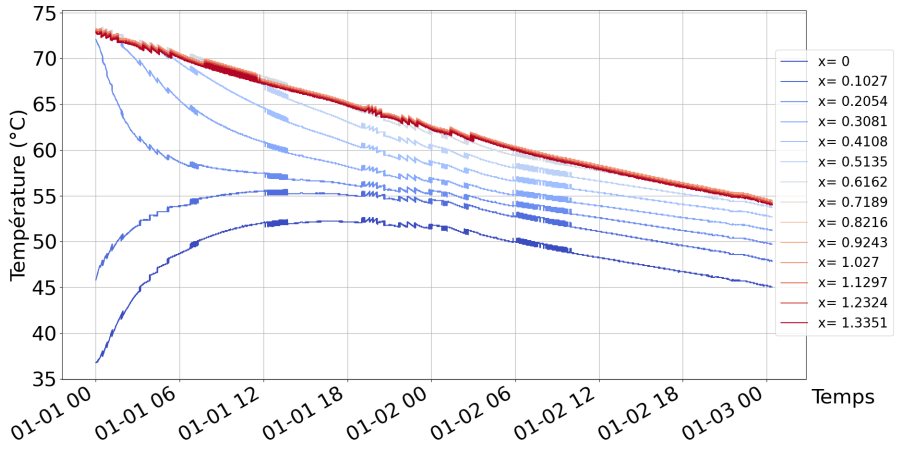


FIGURE 4.2 Graphique des températures d'un test de type NullFlow_OFF sur 48h avec le CEE300

- Les tests de type **NullFlow_ON** qui correspondent à la phase où les tirages sont toujours absents mais les éléments chauffants sont activés. Comme pour le NullFlow_OFF, nous partons d'une phase où le réservoir est totalement chargé comme indiqué à la figure 4.4 ne faisant intervenir que des apports d'énergie intermittents comme figurant à la figure 4.3. η sera estimé au travers de ces tests.

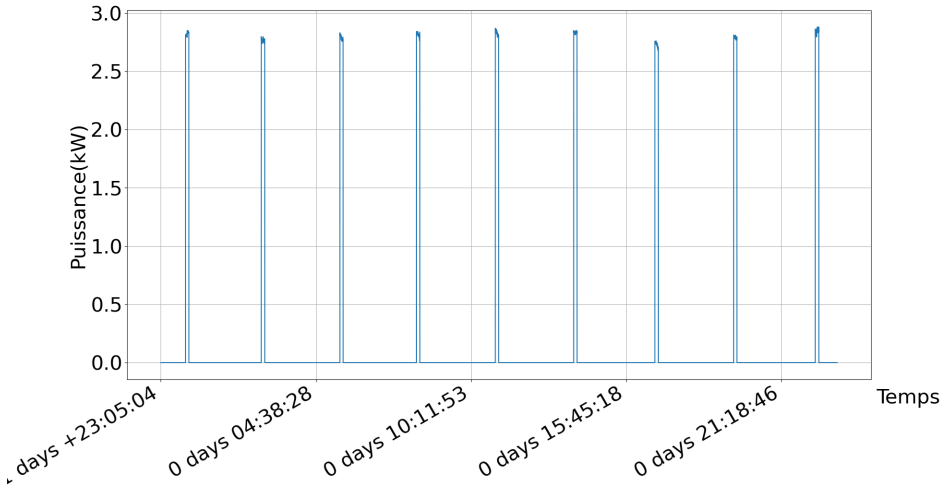


FIGURE 4.3 Graphique de la puissance consommée d'un test de type NullFlow_ON sur 24h avec le CEE200

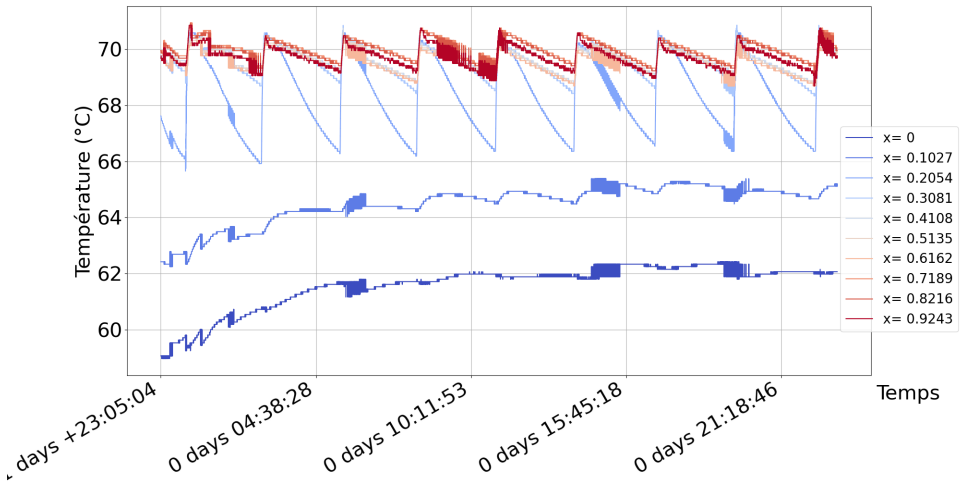


FIGURE 4.4 Graphique de température d'un test de type NullFlow_ON sur 24h avec le CEE200

- Les tests de type **ConstantFlow_OFF** et **StepFlow_OFF** qui correspondent aux cas où on applique des tirages en désactivant les éléments chauffants nous donnant une dynamique comme celle de la figure 4.6. La figure 4.5 nous montre des tirages effectués par incrément. Il nous permettront d'estimer β.

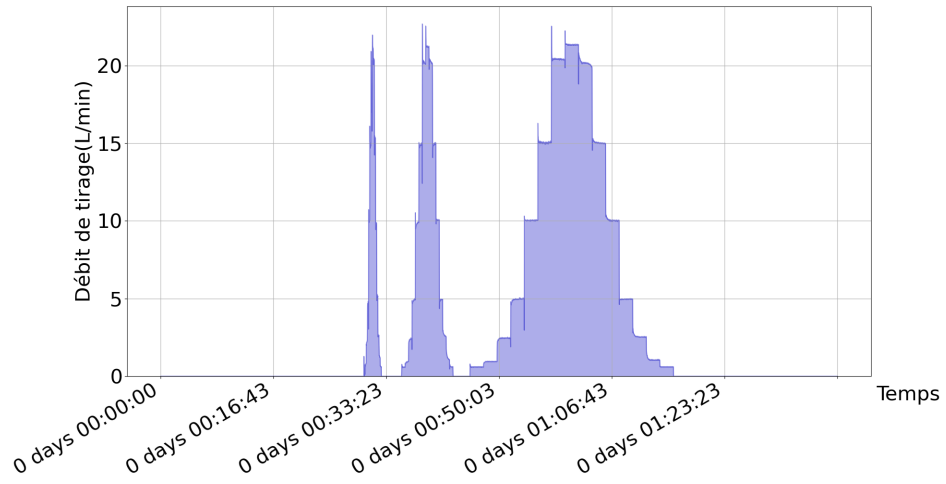


FIGURE 4.5 Graphique du débit de tirage d'un test de type StepFlow_OFF avec le CEE300

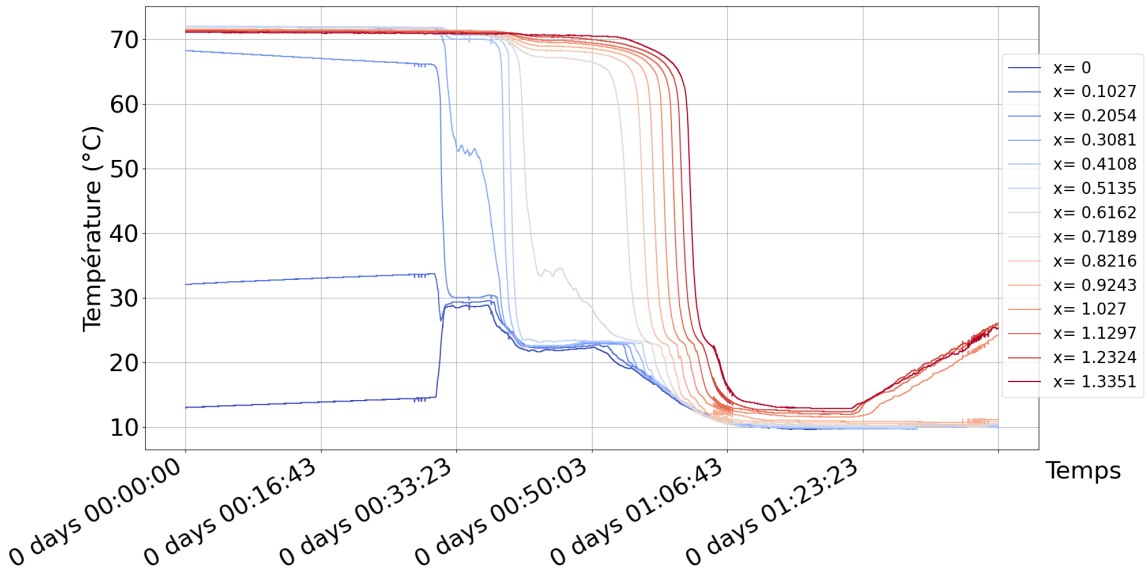


FIGURE 4.6 Graphique de température d'un test de type StepFlow_OFF avec le CEE300

En plus de ces tests standards, les tests en conditions réelles nous permettrons d'évaluer de manière globale notre estimation des paramètres. La performance du modèle est évaluée au moyen du **résidu par rapport aux mesures** de la simulation de la sonde multipoint ainsi que de la **quantité d'énergie brute** du modèle simulé et mesurée par le banc d'essai.

$$\text{Résidu relatif } (x_n, t) = \frac{\text{Mesure de la sonde à la couche } x_n(t) - \text{Simulation}(x_n, t)}{\text{Mesure de la sonde à la couche } x_n(t)}$$

$$\text{Énergie } (t) = \sum_{n=1}^{N} (\rho C_v S T_k^n \Delta x)$$

Pour l'identification des paramètres, nous avons pris les données provenant des sondes immergées du banc d'essai, le débitmètre et le wattmètre. En effet, ces dernières sont les mesures les plus précises quant à la température, le débit de tirage d'eau et la puissance consommée. Dans le cas du CEE300, nous avons 2 éléments chauffants ayant la même puissance nominale et dont l'activation ne peut être simultanée. Soit $\chi_i(t)$ le terme désignant l'activation ou non du i-ème élément chauffant, la politique d'activation pour notre réservoir OS300 est la suivant :

$$\chi_i(t) \in \{0; 1\} \text{ tel que } \chi_i(t) \begin{cases} 1 & \text{si } T(x_{th}^i, t) < T_{\text{set}} - T_{\text{db}} \text{ et } \chi_{i+1}(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{4.24}$$

De ce fait, il nous fallait identifier quel élément chauffant est actif. Ainsi, en se basant sur notre représentation du comportement dans l'équation (4.9), nous regardons la température lue par la sonde du contrôleur la plus proche du thermostat. En effet, les thermostats étant installés dans une configuration similaire aux sondes du contrôleur ctrl, c'est notre moyen le plus proche de lire la température vue par le thermostats et d'en déduire quel élément chauffant est actif. De plus, dans le cas d'un déploiement réel, à moins d'avoir des éléments chauffants avec des puissances nominales assez distinctes, nous n'avons pas d'autres méthode à proposer.

4.3.2 Estimation de α et γ

L'estimation de ces deux paramètres a été effectuée via `DeepMoD` et `Scipy`. Au vu de leurs expressions établies dans les équations (4.1) et (4.8), l'application numérique nous donne

$$\alpha_{th} \approx 1.45 \times 10^{-7}\ m^2/s$$

et

$$\gamma_{th} = \begin{cases} 5.06 \times 10^{-7}\ \text{(CEE300)} \\ 2.99 \times 10^{-7}\ \text{(CEE200)} \end{cases} \quad s^{-1}$$

Tableau 4.1 α et γ estimés avec `DeepyMoD`

Tests	α	γ
STD_NF_24H_OFF (CEE300)	7.39×10^{-7}	4.66×10^{-6}
STD_NF_48H_OFF (CEE300)	5.98×10^{-7}	3.81×10^{-6}
STD_NF_24H_OFF (CEE200)	2.75×10^{-7}	4.07×10^{-6}
STD_NF_48H_OFF (CEE200)	9.93×10^{-8}	3.59×10^{-6}

Tableau 4.2 α et γ estimés avec `Scipy`

Tests	α_{avg}	α_{std}	γ_{avg}	γ_{std}
STD_NF_24H_OFF(CEE300)	3.06×10^{-7}	3.43×10^{-10}	2.50×10^{-6}	6.48×10^{-10}
STD_NF_48H_OFF(CEE300)	4.02×10^{-7}	1.25×10^{-10}	3.46×10^{-6}	3.46×10^{-10}
STD_NF_24H_OFF(CEE200)	2.55×10^{-7}	6.62×10^{-11}	4.36×10^{-6}	4.36×10^{-10}
STD_NF_48H_OFF(CEE200)	4.41×10^{-8}	7.31×10^{-11}	2.05×10^{-6}	2.05×10^{-10}

On peut voir au vu des tableaux 4.1 et 4.2 que les coefficients proposés par `Scipy` semblent être plus réguliers que ceux de `DeepyMod` d'un test à l'autre.

On remarque un assez bon suivi entre l'estimation et la mesure sur les figures 4.7, 4.8a et 4.8b. Par ailleurs, les figures 4.11-4.12b nous montrent que les coefficients estimées par `DeepMoD` et par `Scipy` semblent sur-estimer les pertes thermiques pouvant survenir contrairement à la modélisation théorique où on observe une sous-estimation. Les tableaux 4.1 et 4.2, nous permettent de remarquer que les deux méthodes donnent des résultats dans le même ordre de grandeur mais comme indiqué plus haut, `Scipy` semble donner des estimations plus semblables d'un test à l'autre en plus d'avoir la plus faible erreur comme montré à la figure 4.9. Pour la suite, nous prendrons les coefficients estimés par les tests NullFlow_OFF_48H de chaque réservoir par `Scipy` pour la suite.

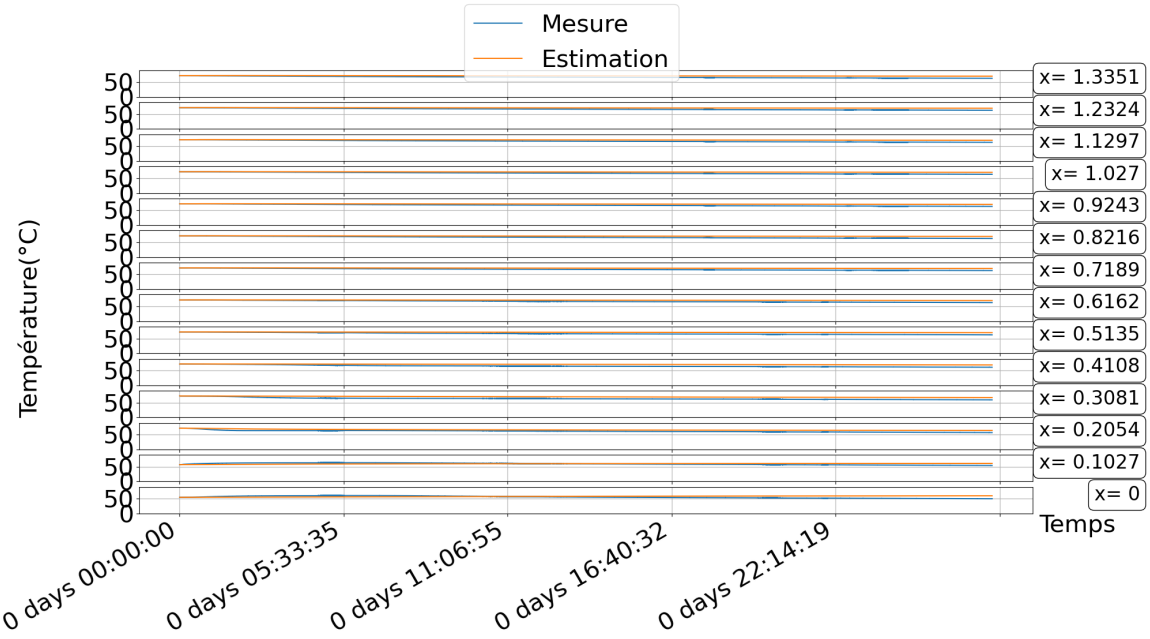
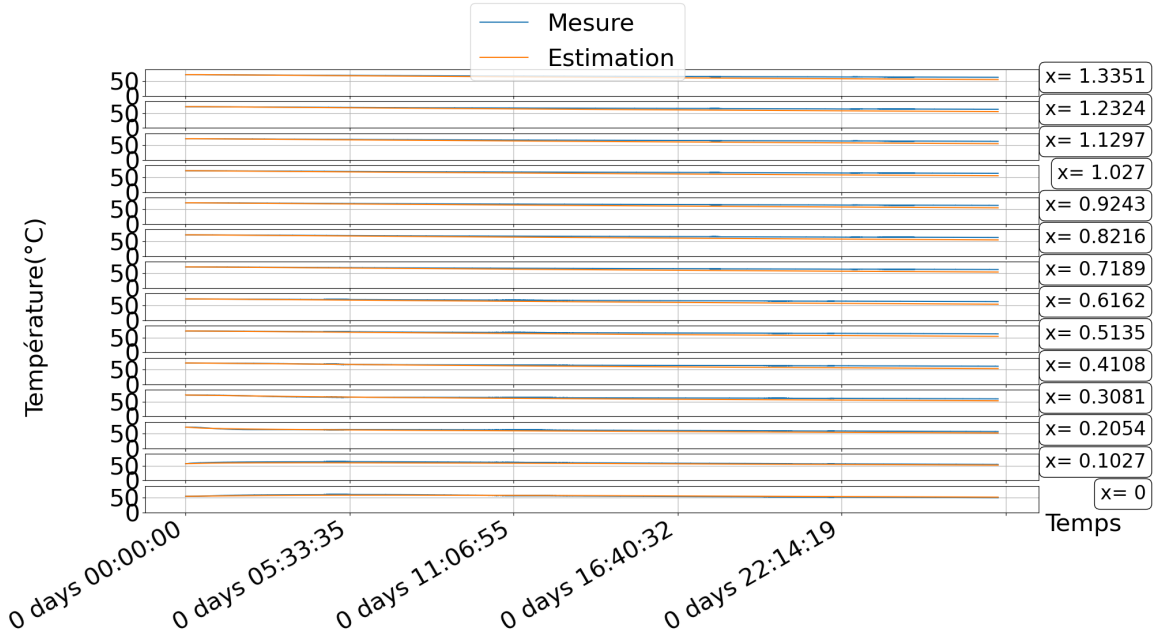
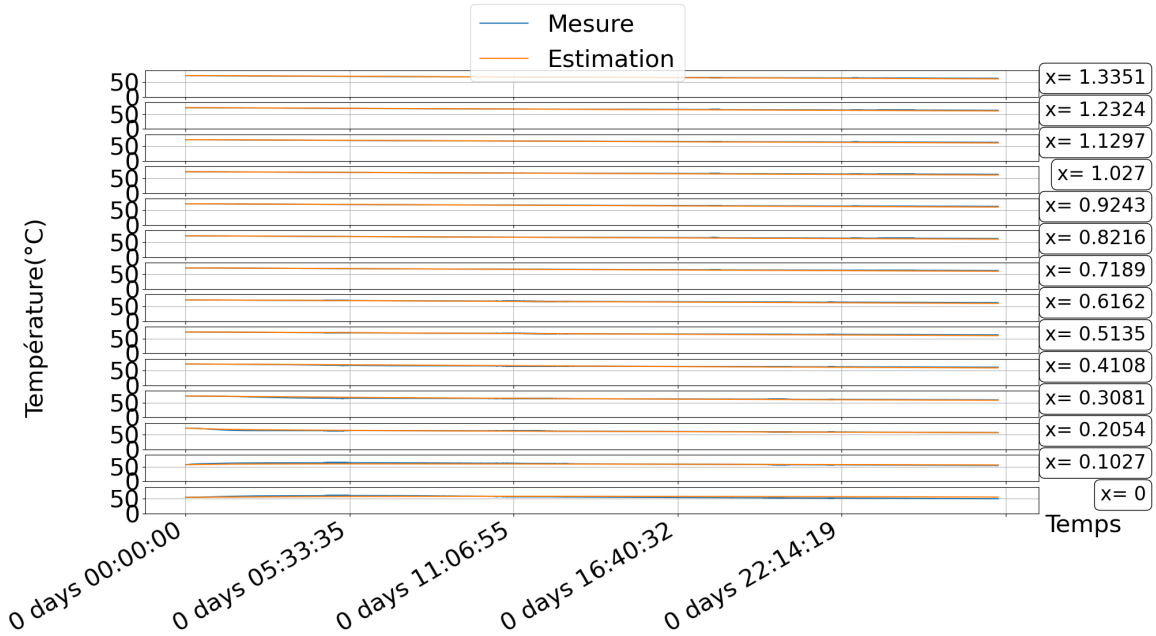


FIGURE 4.7 Graphique de comparaison pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients théoriques

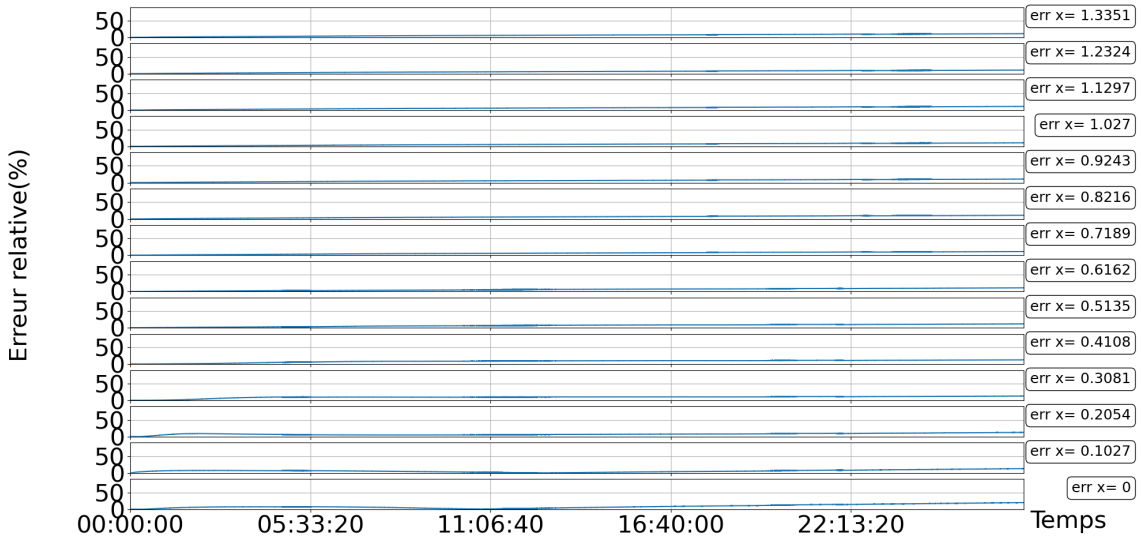


(a)

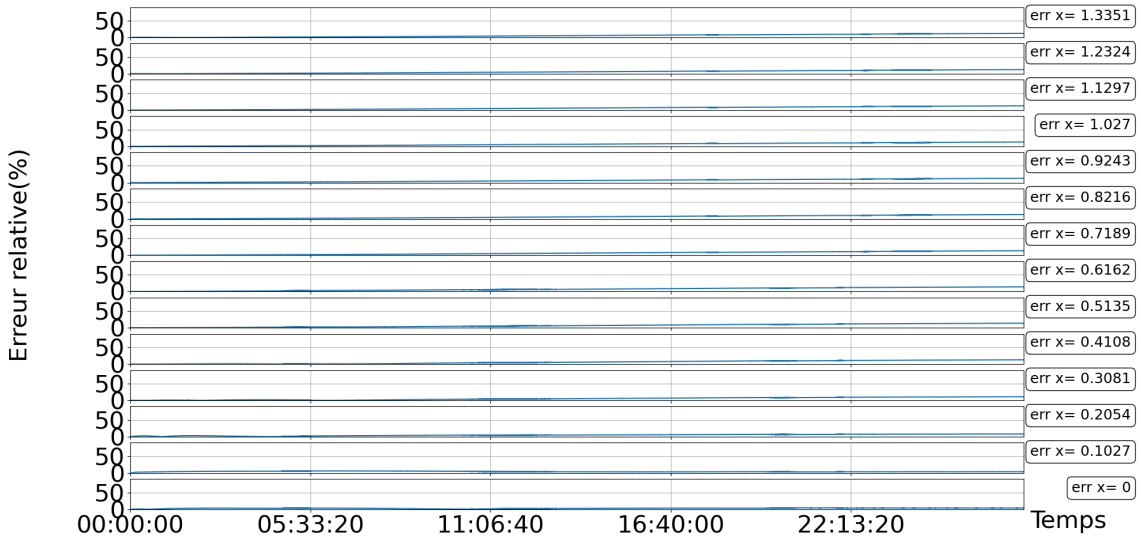


(b)

FIGURE 4.8 Graphique de comparaison pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients estimés par `DeepyMoD` **(a)** et `Scipy` **(b)**



(a)



(b)

FIGURE 4.9 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients théoriques **(a)** et estimés par DeepyMoD **(b)**

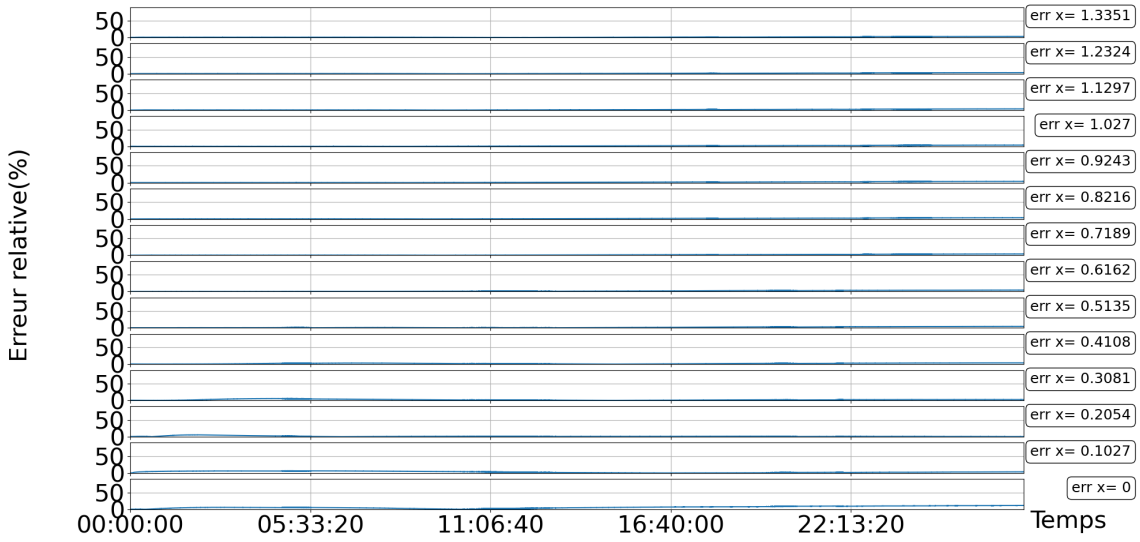


FIGURE 4.10 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_OFF estimés par `Scipy`

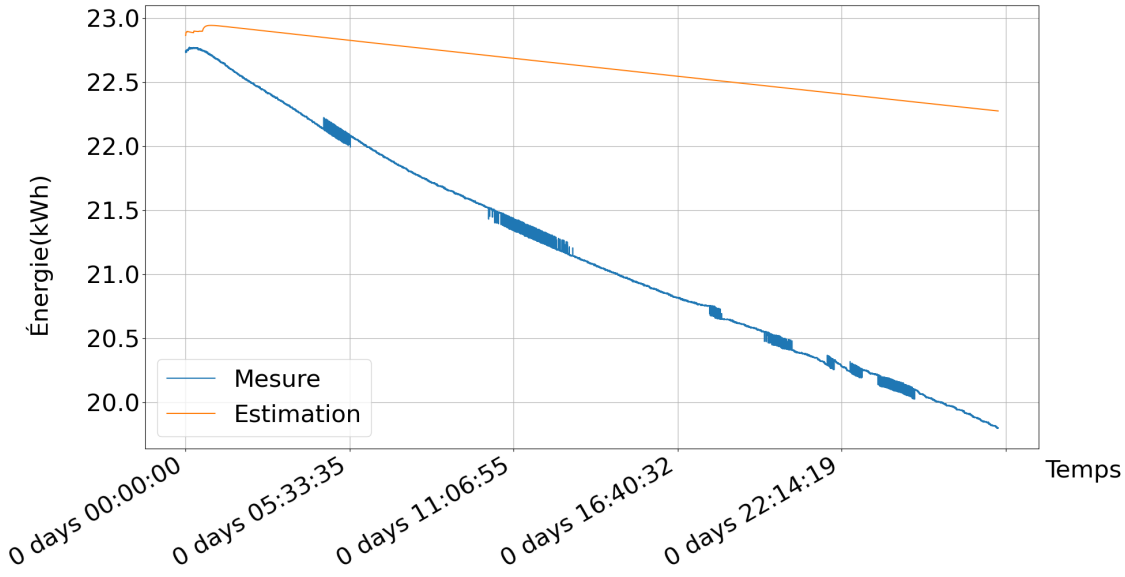
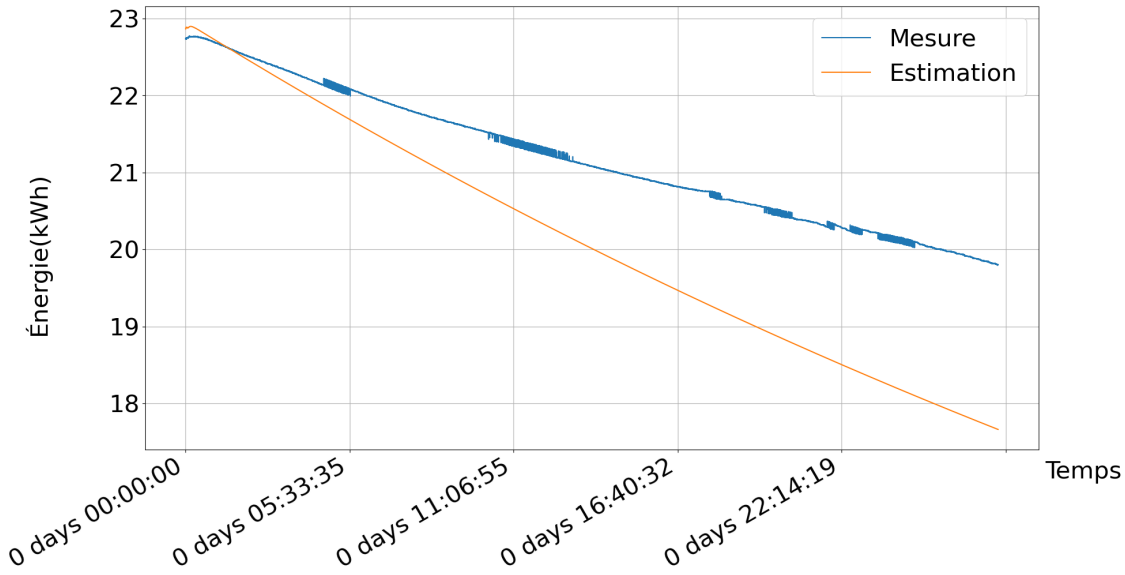
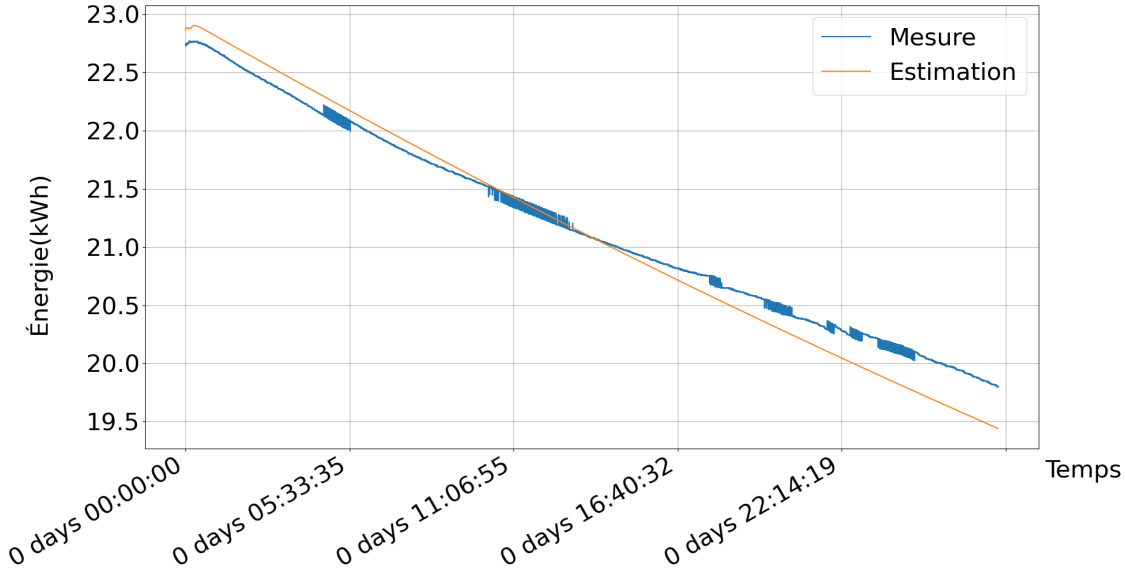


FIGURE 4.11 Comparaison des énergies pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients théoriques



(a)



(b)

FIGURE 4.12 Comparaison des énergies pour un essai NullFlow_OFF avec les coefficients estimés par `DeepyMoD` **(a)** et `Scipy` **(b)**

4.3.3 Estimation de η

Pour l'estimation de ces paramètres, on a fixé les paramètres évalués précédemment et utilisé les mêmes méthodes d'estimation. L'application numérique de l'expression théorique, établie à l'équation (4.3), nous donne $\eta_{th} \approx 7.25 \times 10^{-6}\ Ks^2/(m^2kg)$.

TABLEAU 4.3 η estimés avec `DeepyMoD`

Tests	η
STD_NF_24H_ON (CEE300)	-2.60×10^{-9}
STD_NF_CSA191_24H_ON (CEE300)	1.29×10^{-7}
STD_NF_24H_ON (CEE200)	-4.53×10^{-10}
STD_NF_CSA191_24H_ON (CEE200)	2.26×10^{-7}

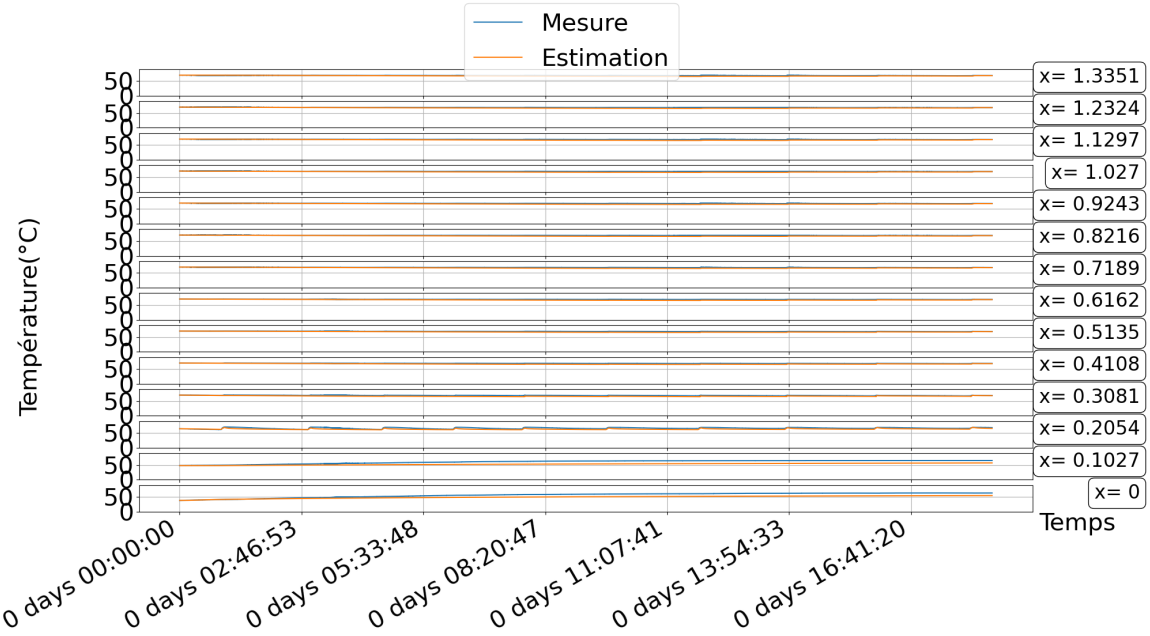
TABLEAU 4.4 η estimés avec `Scipy`

Tests	η_{avg}	η_{std}
STD_NF_24H_ON (CEE300)	3.37×10^{-6}	6.34×10^{-10}
STD_NF_CSA191_24H_ON (CEE300)	2.68×10^{-6}	1.69×10^{-9}
STD_NF_24H_ON (CEE200)	2.60×10^{-6}	3.04×10^{-10}
STD_NF_CSA191_24H_ON (CEE200)	1.64×10^{-6}	5.72×10^{-10}

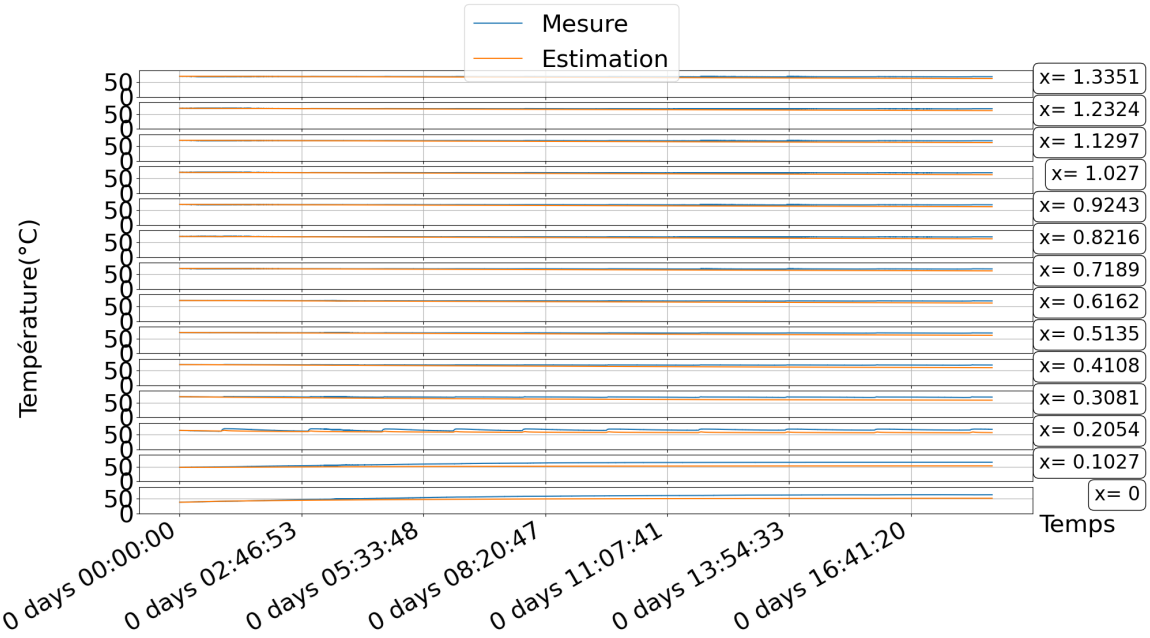
À l'instar de l'estimation de α et γ, le tableau 4.4 nous montre des résultats du même ordre de grandeur avec un écart type relativement faible par rapport à la valeur estimée. Par ailleurs, on remarque plus les limites de l'estimation par `DeepyMoD` exposées dans le tableau 4.3. En plus, nous ne pouvons mettre des bornes pour la régression ce qui nous donne des résultats non cohérents d'un point de vue physique comme les valeurs négatives au tableau 4.1 pour les tests STD_NF_24H_ON (CEE300 & CEE200). De plus, les ordres de grandeur ne sont pas les mêmes d'un test à l'autre ce qui nous a fait douter de l'utilité de cette méthode pour les équations aux dérivées partielles non homogènes. En effet, dans les exemples disponibles ainsi que dans les cas étudiés dans [14], les EDP étudiées sont homogènes. Bien sûr, il est possible de rajouter ce terme dans la liste des termes candidats en faisant sa "librairie de termes" personnalisée mais la particularité sur les équations non homogènes ne fut pas explicitement abordée. De plus, les termes liés à $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et $T - T_{amb}$ sont non nuls alors qu'on les a fixés dans le modèles. Ainsi, il a été décidé de ne pas poursuivre davantage pour l'estimation des paramètres avec cette méthode.

Nous observons un bon suivi de la dynamique à la figure 4.13 pour les deux coefficients. Cependant, nous remarquons que dans le cas du coefficient lié à la puissance, l'expression analytique présente un meilleur résultat que le coefficient estimé par `Scipy`. L'erreur relative

est bien moindre globalement en utilisant le coefficient théorique comme le montre les figures 4.14a et 4.14b.

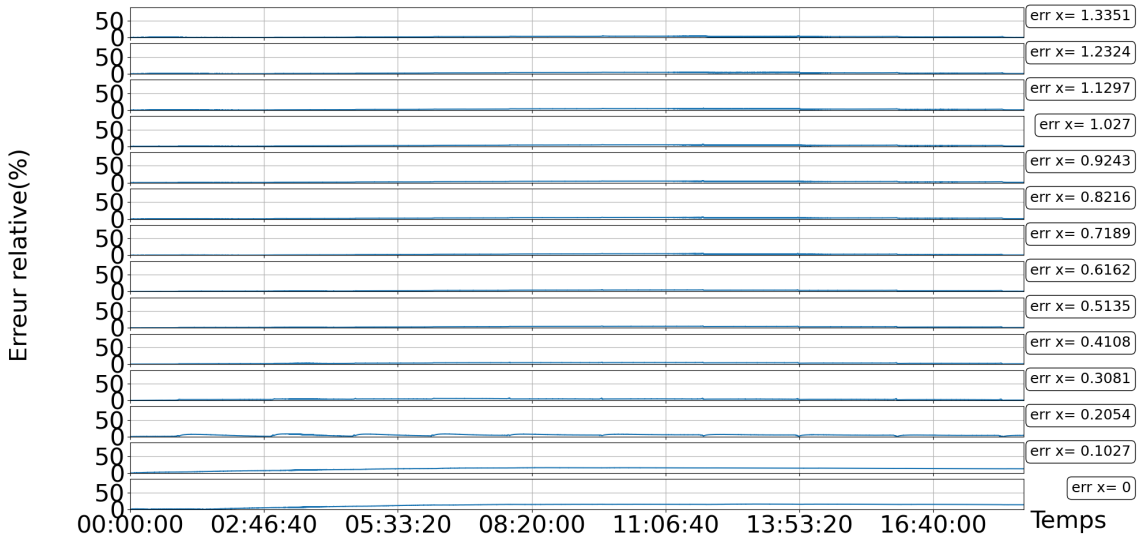


(a)

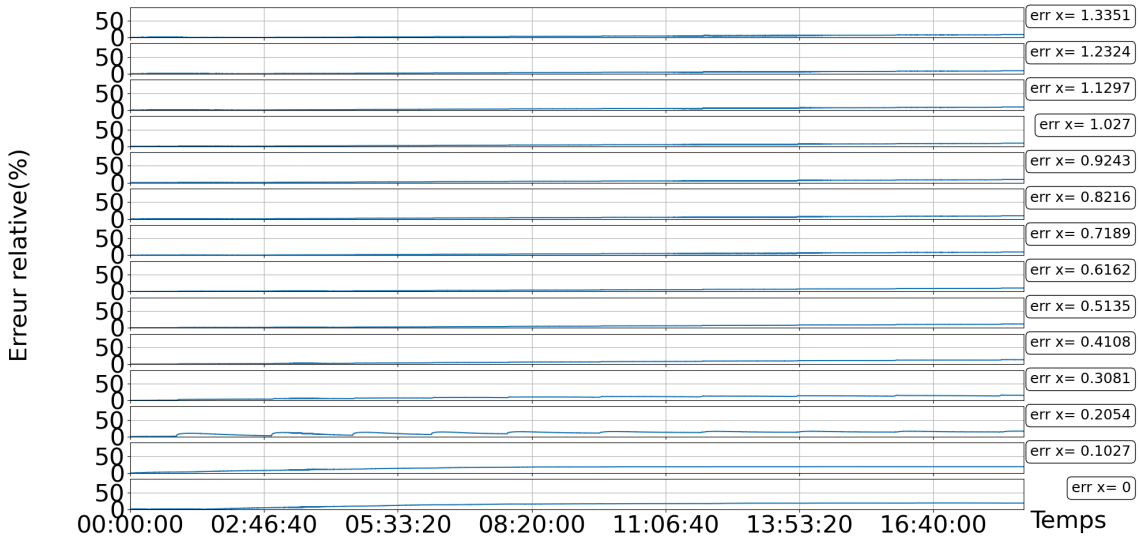


(b)

FIGURE 4.13 Graphique des comparaison pour un essai NullFlow ON avec les coefficients théoriques **(a)** et estimés par `Scipy` **(b)**

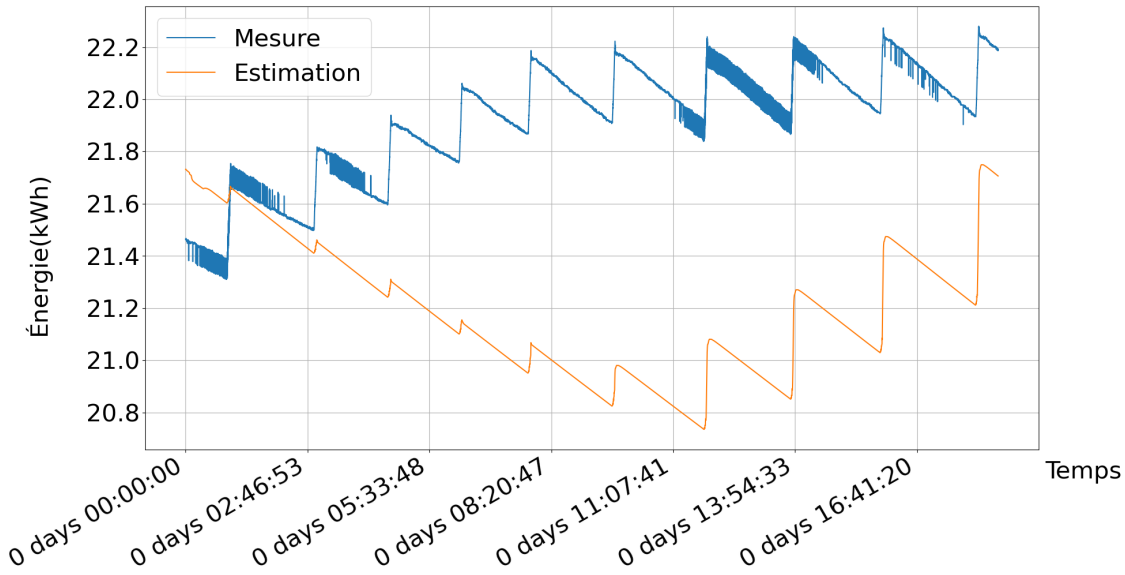


(a)

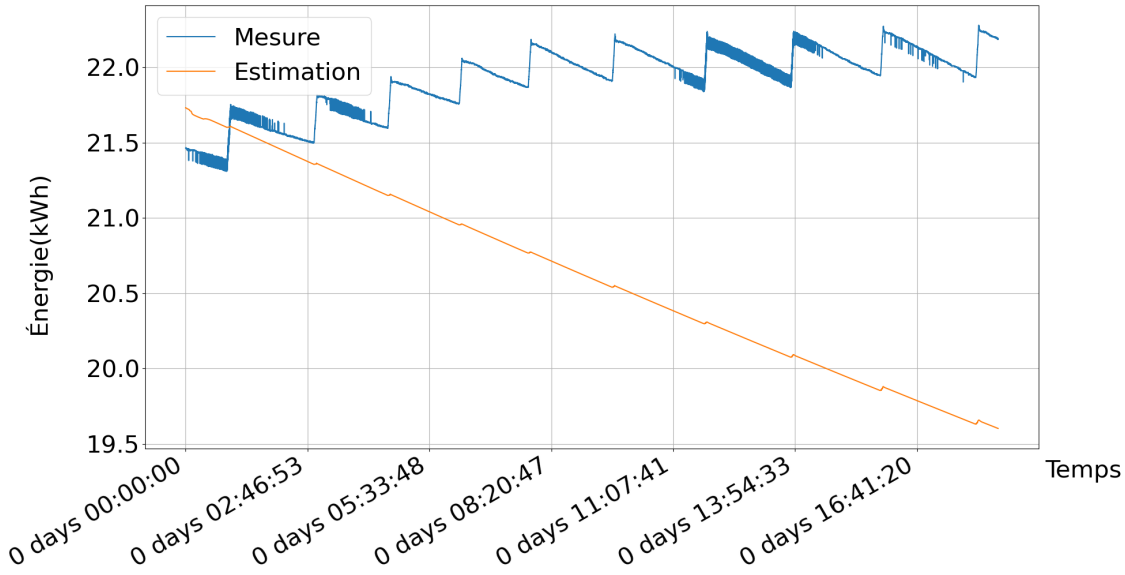


(b)

FIGURE 4.14 Graphique des erreurs relatives pour un essai NullFlow_ON avec les coefficients théoriques **(a)**et estimés par `Scipy` **(b)**



(a)



(b)

FIGURE 4.15 Graphique de comparaison des énergie pour un essai NullFlow_ON avec les coefficients théoriques **(a)** et estimés par `Scipy` **(b)**

De plus, l'énergie estimée ne présenta pas un bon suivi dans les deux cas comme indiqué par

la figure 4.15. Cela est dû à la non linéarité du système intervenant ici. en effet, la chauffe qui est étudiée ici va provoquer l'effet cheminé et donc la non nullité du seul terme non linéaire de l'équation $D_a(T)$, dont l'expression a été donnée à l'équation (4.5). Cependant, on remarquera sur la figure 4.15 que la simulation avec la valeur théorique de η donne un erreur bien moindre qu'avec `Scipy`. Cela pourrait s'expliquer par la méthode de d'optimisation de la fonction `curve_fit` qui a été utilisée pour l'estimation. Même si la méthode `Scipy` semble avoir du mal sur cette partie, nous continuons l'estimation avec cette méthode pour β car ses valeurs estimées étaient du même ordre de grandeur que η_{th} et le phénomène abordé dans cette partie est assez complexe en soit avec son terme non linéaire.

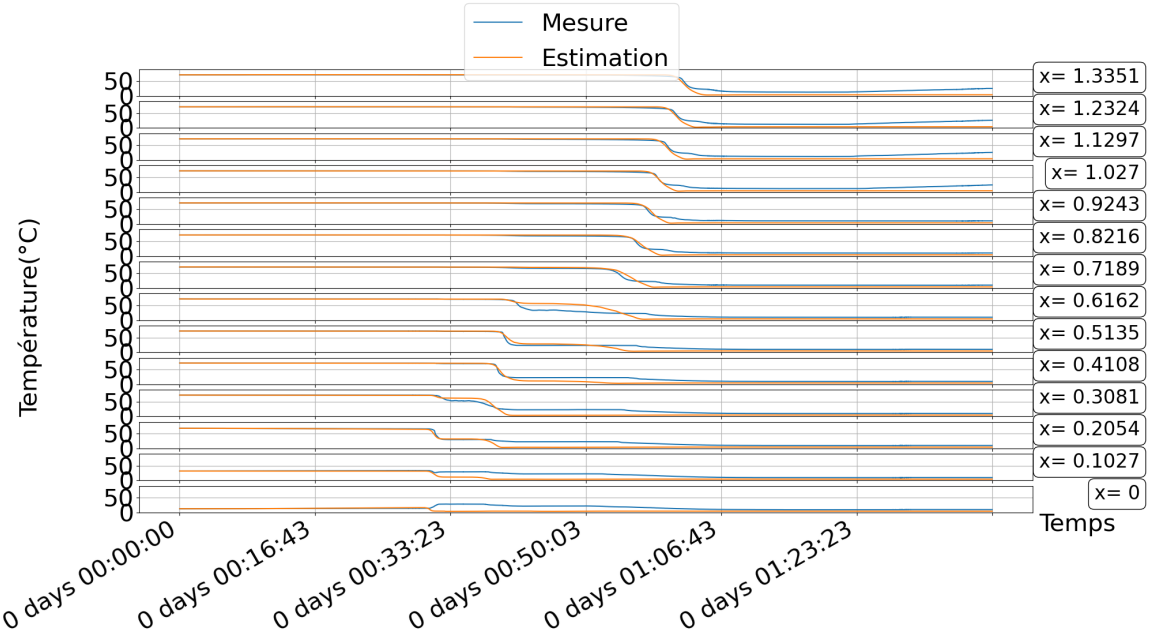
4.3.4 Estimation de β

L'estimation de ce paramètre ne fut effectuée qu'avec `Scipy` pour les raisons évoquées plus haut quant à `DeepyMoD`. L'application numérique de l'expression théorique, exprimée à l'équation (4.7) nous donne : $\beta_{th} \approx 4.895$.

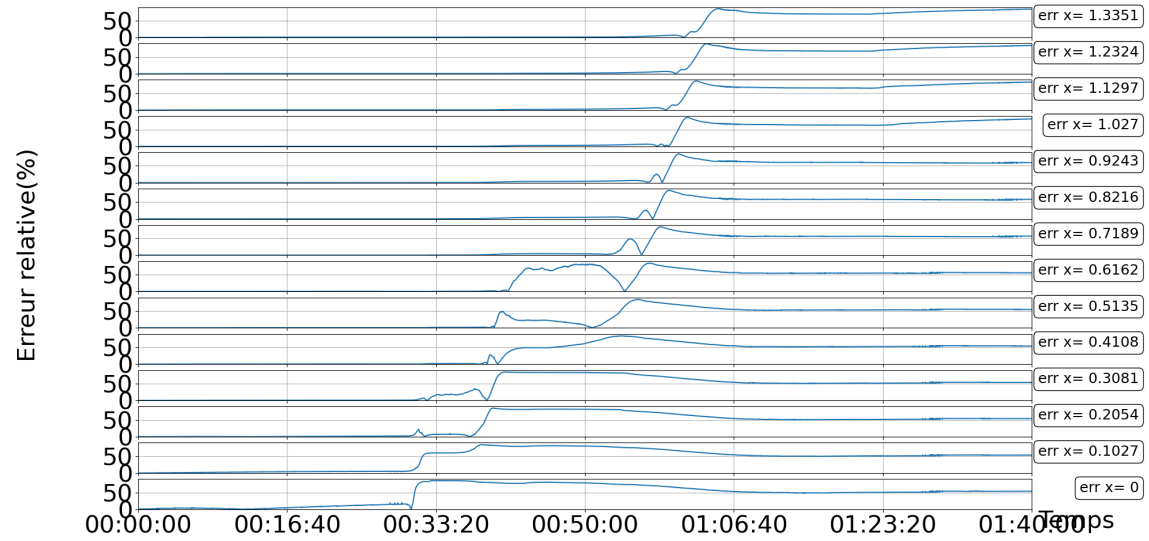
TABLEAU 4.5 β estimés avec `Scipy`

Tests	β_{avg}	β_{std}
STD_CF_5Lmin_5C_OFF (CEE300)	4.895193	2.04×10^{-7}
STD_CF_18Lmin_10C_OFF (CEE300)	4.895192	1.78×10^{-7}
STD_CF_5Lmin_5C_OFF (CEE200)	4.895192	7.88×10^{-8}
STD_CF_10Lmin_15C_OFF (CEE200)	4.895193	2.23×10^{-7}

Comme montré par les résultats au tableau 4.5, β_{th} est déjà bien définie. En effet, au vu de la valeur des écarts types, la valeur estimée à une précision de 10^{-7}. Nous observons un bon suivi entre la température estimée et celle mesurée à la figure 4.16a.



(a)



(b)

FIGURE 4.16 Graphique des résultats pour un essai StepFlow_OFF : **(a)** Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimée par simulation **(b)** Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation

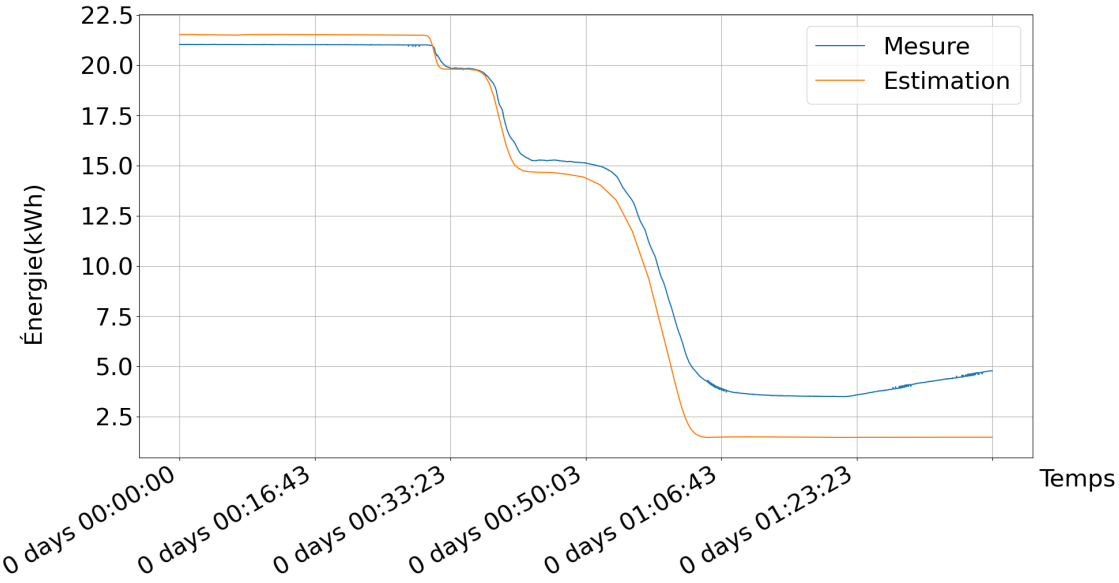


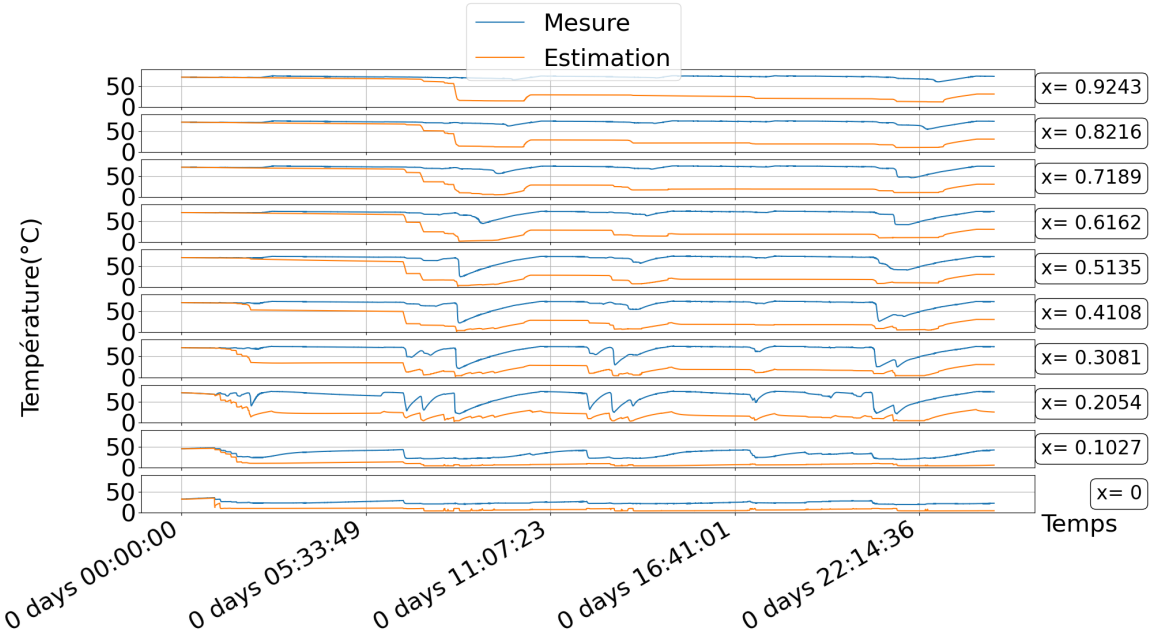
FIGURE 4.17 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et celle calculée par l'état estimé.

Dans le cas des erreurs relatives, la figure 4.16b nous montre qu'elles peuvent culminer jusqu'à 50% de manière ponctuelle dans cet essai mais tend vers une valeur non nulle au bout. De même, la figure 4.17 nous montre que la dynamique est bien reproduite malgré un décalage.

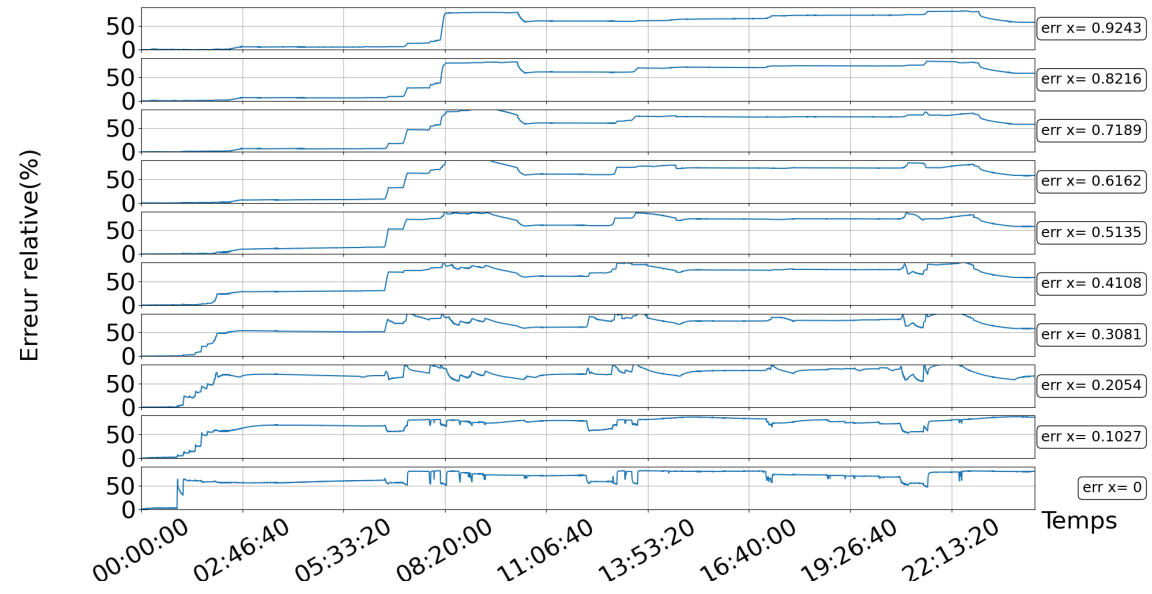
4.3.5 Bilan des méthodes d'estimation

Ainsi, parmi les deux méthodes utilisées pour l'estimation des paramètres, la bibliothèque `Scipy` semble être la méthode la plus efficace. De plus, elle est moins compliquée à implémenter et à exécuter. En effet, de par la présence d'un réseau de neurones dans son implémentation, l'utilisation de `DeepyMoD` requiert énormément de ressources. Pour son utilisation, nous nous sommes servis d'un noeud du cluster Beluga de Calcul Québec (8 cœurs, 1GPU de 16gb de VRAM, et 32 gb de RAM) et chaque essai de 24h prend entre **2 et 4h** pour estimer les paramètres. De l'autre coté, `Scipy` ne prend que **25 minutes** environ avec un ordinateur bien moins puissant (intel i7-1185G7 @ 3.00GHz-1.80GHz, 32gb de RAM et sans GPU). À noter aussi que la bibliothèque `DeepyMoD` a été développée dans le cadre d'un projet de thèse qui n'a pas été mise à jour depuis 2 ans à ce jour et donc que les diverses failles qu'il peut contenir ne sont pas réglées contrairement à `Scipy` qui est maintenu constamment. Et enfin on peut imposer des limites aux paramètres à estimer dans `Scipy` ce qui n'est pas le cas de DeepMoD qui peut trouver des valeurs incohérentes d'un point de vue physique quand on

estime des équations non-homogènes.
Dans une autre mesure, `Scipy` semble avoir bien estimé avec un grande précision 3 des 4 paramètres. Le cas de η peut être justifié par la méthode d'optimisation choisie dans les paramètres qui était celle par défaut de la fonction `curve_fit` ou bien que les coefficients liés aux termes externes d'une EDP doivent être estimés différemment.
Ainsi, on remarque avec la figure 4.19 que la simulation semble suivre la dynamique jusqu'à une certaine mesure d'un point de vue du profil énergétique mais quand on regarde les erreurs entre la simulation et les sondes, on remarque que l'erreur est assez importante, pouvant même atteindre 100% d'erreur relative comme le montre la figure 4.18b. L'écart que nous constatons peut être dû à la propagation de l'erreur d'estimation qui provient du terme non linéaire de notre équation. En effet, nous avons remarqué lors de nos estimations que même si on observait des erreurs entre la simulation et les mesure, ces dernières sont relativement minimes à l'exception du cas où la chauffe intervient. Comme souligné dans la section 4.3.3, la chauffe est à l'origine de non nullité de D_a et donc de la non linéarité du système. Cependant, les erreurs persistantes peuvent aussi être le fruit de phénomènes physiques non négligeable qui ne furent pas pris en compte dans notre modèle comme les turbulence de l'eau à entrante au fond du réservoir.
Ainsi, la connaissance du débit et de la puissance consommée et de ses paramètres ne suffisent pas pour reproduire l'état du système avec précision même si le schéma de Crank-Nicolson est relativement robuste [30]. Cela justifie encore plus le besoin d'un observateur afin de compenser ces erreurs de modélisation persistantes.



(a)



(b)

FIGURE 4.18 Graphique des résultats de la simulation d'un test RLC avec les paramètres estimés : **(a)** Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation par simulation. **(b)**Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation.

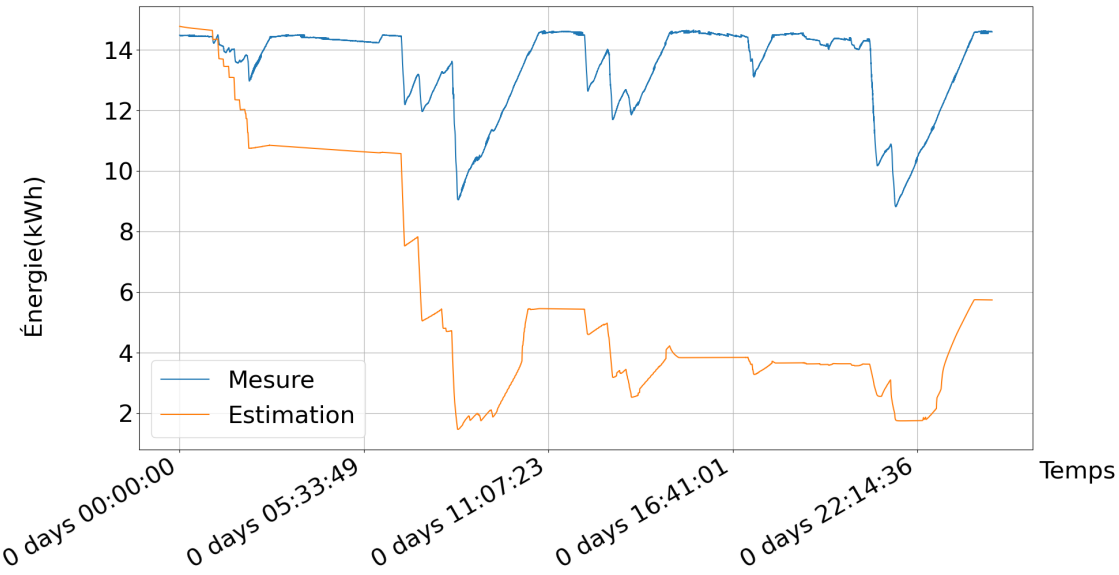


FIGURE 4.19 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et celle calculée par l'état estimé

CHAPITRE 5 ESTIMATION DU PROFIL ÉNERGÉTIQUE DU CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUE

L'estimation du profil énergétique d'un chauffe-eau est nécessaire pour une commande optimale des charges. Pour ce faire, nous avons besoin de connaître la répartition de la température. Du fait du nombre limité de capteurs dans les installations réelles, un observateur est nécessaire. En plus, évaluer la précision de l'estimation du profil énergétique fournit un moyen pour valider le modèle dynamique de chauffe-eau construit au chapitre précédent. Ainsi, dans cette partie après s'être intéressé aux définitions que nous trouvons pertinentes sur le profil énergétique, nous établirons et évaluerons notre observateur basé sur le filtre de Kalman.

5.1 Définitions du profil énergétique du réservoir

Dans cette partie, nous nous intéressons à un moyen d'interfacer notre CE. En effet, la répartition de la température au sein du réservoir est lourde comme information. Considérer une représentation d'état à N éléments pour chaque réservoir dans une population solliciterait grandement l'opérateur du réseau pour prendre une décision en fonction de la précision voulue. Il nous faut donc trouver une façon de pouvoir transmettre de manière intègre cette représentation d'état tout en étant concis. Afin d'interfacer le profil énergétique du réservoir, il a été choisi de prendre l'état de charge du réservoir.
L'état de charge est défini par la quantité d'énergie électrique que peut fournir une batterie à un moment déterminé, exprimée en pourcentage par rapport à sa capacité nominale. Vu qu'on considère le réservoir comme une batterie thermique, la notion de l'état de charge pourrait s'y appliquer. En se basant sur cette définition et sur celles vues dans la littérature, nous définissons l'état de charge, $SOC(t)$ pour "State of Charge", comme suit :

$$SoC(t) := \frac{E(t) - E_{\min}}{E_{\max} - E_{\min}}, \tag{5.1}$$

avec

$$E(t) := \int_0^L \rho C_v ST(x,t)dx$$

l'énergie thermique du réservoir,

$$E_{\max} = \rho C_v V_{\text{tot}} T_{\max}$$

l'énergie maximale du réservoir et

$$E_{\min} = \rho C_v V_{\text{tot}} T_{\min}$$

l'énergie mininimale. Nous avons choisi cette version normalisée de l'état de charge car ce qui intéresse l'opérateur et le consommateur c'est l'eau chaude contenue dans le réservoir d'où la présence de $E_{\min}$ dans l'expression de l'état de charge pour normaliser l'énergie contenue dans le réservoir. Par ailleurs, ces bornes de température pour l'eau chaude peuvent correspondre à des valeurs fixées par l'opérateur et donc communes à tous les individus du réseau. Cela peut aussi correspondre à la zone de confort de chaque utilisateur. De plus, étant donné le caractère discret de notre répartition de la température, (5.1) devient

$$SoC_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} (\rho C_v S T_k^n \Delta x) - E_{\min}}{E_{\max} - E_{\min}} \ . \tag{5.2}$$

Cette opération n'étant qu'une normalisation de la quantité d'énergie dans le réservoir, nous obtenons sensiblement la même allure au cours du temps. Pour l'application de l'équation (5.2), nous avons fixé $T_{\min} = 40°C$ et $T_{\max} = 75°\text{C}$. En effet, 75°C est la valeur maximum pouvant être enregistrée dans le réservoir. Bien évidemment, le 100% ne peut être atteint de par la disposition des éléments chauffants et la quantité d'eau du réservoir. $40°C$ est la température que nous considérons comme température minimale pour considérer l'eau comme "chaude".

Redéfinition de $E_{\max}$ et $E_{\min}$

Mentionné lors notre de la revue de littérature, comme dans [5], l'ÉdC garde la même définition (normalisation de l'énergie totale du réservoir avec normalisation par les températures minimale et maximale). Cependant, $E_{\max}$ et $E_{\min}$ n'ont plus la même fonction, ils définissent respectivement l'énergie restante pour atteindre la pleine charge au sein du réservoir et l'énergie qu'il faut injecter aux couches dont la température est inférieure à $T_{\min}$. Ainsi nous avons :

$$E_{\max} = \sum_{n=1}^{N} \rho C_v S \Delta x (T_{\max} - T_k^n), \tag{5.3a}$$

$$E_{\min} = \sum_{T_k^n < T_{\min}} \rho C_v S \Delta x (T_{\min} - T_k^n). \tag{5.3b}$$

Bien que cela reste un point de vue qui ne représente pas totalement la réalité au sein

du réservoir, cela s'en rapproche. En effet, ici, en plus de présenter la position de l'énergie restante pour atteindre le maximum, nous avons avec $E_{\min}$ une idée de la quantité restante d'eau chaude (de manière indirecte, certes).

Volume d'eau chaude équivalent restant

Comme vu précédemment, avec l'ÉdC et les redéfinitions de $E_{\max}$ et $E_{\min}$, nous avons déjà une assez bonne représentation des besoins en énergie du CEE de manière globale mais il serait plus intéressant de pouvoir avoir une information plus directe quant à la quantité d'eau chaude restante afin de pouvoir au mieux respecter le confort de l'utilisateur.
Il faut cependant prendre en compte que nous utilisons des CEE haute température et donc que le volume d'eau "chaude" disponible est bien supérieur au volume d'eau dont la température est supérieure à 40°C. Pour rappel, une valve de mixage mélange l'eau chaude en sortie avec de l'eau froide à la température d'entrée afin de donner toujours 40°C. Ainsi,

$$V_{\text{disponible}} = \sum_{T_k^n > T_{\min}} \frac{\Delta x S (T_k^n - T_{\text{in}})}{T_{\min} - T_{\text{in}}} \tag{5.4}$$

Il est à noter que cette valeur de volume d'eau chaude équivalente sortante dépend normalement du débit de tirage. Cependant, (5.4) nous permet d'avoir un indicatif quant au confort de l'utilisateur, ce qui permet donc à l'opérateur de l'inclure dans sa stratégie de commande.

Ainsi, comme nous pouvons le constater, ces représentations du profil énergétique dépendent toutes de la répartition de la température. Pour ce faire, nous allons élaborer des observateurs basés sur le filtre de Kalman.

5.2 Application du filtre de Kalman dans l'estimation de l'état du système

5.2.1 Filtre de Kalman pour les systèmes linéaires

Le but de notre observateur sera de reproduire la répartition de température au sein du CEE avec un nombre limité de points de mesures.
Au préalable, soit un système linéaire soumis à des bruits w_k et ν_k respectivement les vecteurs bruit de procédé et de mesure du système. Nous supposons que w_k sera de même dimension que le vecteur d'état, c'est à dire $w_k \in \mathbb{R}^N$. De même, ν_k sera de même taille que le vecteur de sortie donc $\nu_k \in \mathbb{R}^M$. On considère alors un système linéaire stochastique de la forme

suivante

$$T_{k+1} = A_k T_k + B_k U_k + w_k, \tag{5.5}$$
$$Y_k = C T_k + \nu_k \tag{5.6}$$

où

$$\begin{aligned} &A_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^{N\times N}, \\ &B_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^{N\times(q+1)}, \\ &C \in \mathbb{R}^{M\times N}, \\ &U_k :\in \mathbb{R}^{q+1}. \end{aligned}$$

En plus, $w_k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, Q)$ et $\nu_k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, R)$ avec $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $R \in \mathbb{R}^{M\times M}$, sont des bruits blancs Gaussiens et nous supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w_k \perp\!\!\!\perp \nu_k$, $w_k \perp\!\!\!\perp T_k$ et $\nu_k \perp\!\!\!\perp T_k$ [1] et que l'état initial du système est une Gaussienne $T_0 \sim \mathcal{N}(\bar{T}_0, \bar{P}_0)$.

Soient $\hat{T}_{k+1|k}$ et $\hat{T}_{k+1|k+1}$ respectivement l'estimation de l'état avant et après prise en compte de la mesure Y_{k+1}. En supposant un candidat au filtre de la forme

$$\hat{T}_{k+1|k} = A_k \hat{T}_{k|k} + B_k U_k, \tag{5.7a}$$
$$\hat{T}_{k+1|k+1} = \hat{T}_{k+1|k} + K_\mathrm{e}\left[Y_{k+1} - C\hat{T}_{k+1|k}\right] \tag{5.7b}$$

avec comme condition initiale

$$\hat{T}_{0|0} = \hat{T}_0 \tag{5.8}$$

où K_e est le gain du filtre. En prenant $e_k = T_k - \hat{T}_{k|k}$, l'erreur d'estimation, nous obtenons

$$e_{k+1} = (A_k + K_\mathrm{e} C) e_k. \tag{5.9}$$

La conception du filtre consiste alors à déterminer K_e de sorte à stabiliser la dynamique de l'erreur d'estimation, au sens $\mathcal{E}\{e_k\} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Étant en présence d'un système linéaire, nous allons faire une estimation par moindres carrées, c'est à dire, minimiser l'espérance des erreurs au carré. De ce fait, soit $\hat{P}_{k+1|k+1}$ la matrice de covariance de l'erreur d'estimation après mesure. Nous avons :

$$\hat{P}_{k+1|k+1} = \mathrm{cov}\{e_{k+1}, e_{k+1}\}$$

1. "$\perp\!\!\!\perp$" symbolise l'indépendance entre les deux variables

$$
\begin{aligned}
=&\mathcal{E}\{[(A_k - K_{\mathrm{e}}CA_k)e_k + (I - K_{\mathrm{e}}C)w_k - K_{\mathrm{e}}\nu_k] \\
&[(A_k - K_{\mathrm{e}}CA_k)e_k + (I - K_{\mathrm{e}}C)w_k - K_{\mathrm{e}}\nu_k]^T]\} \\
=&(I - K_{\mathrm{e}}C)[A_k\hat{P}_{k|k}{A_k}^T + Q](I - K_{\mathrm{e}}C)^T + K_{\mathrm{e}}R{K_{\mathrm{e}}}^T.
\end{aligned}
$$

Nous avons supposé que nous étions dans le cas d'une séquence **Gauss-Markov linéaire** donc l'optimum sera **le minimum de variance non biaisé de l'erreur** [31]. Ainsi, K_{e} optimal donné par le filtre de Kalman est la suite K_k définie selon [31] par

$$K_{k+1} = \hat{P}_{k+1|k}C^T(C\hat{P}_{k+1|k}C^T + R)^{-1} \tag{5.10}$$

avec

$$\hat{P}_{k+1|k} = A_k\hat{P}_{k|k}{A_k}^T + Q, \tag{5.11a}$$

$$\hat{P}_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C)\hat{P}_{k+1|k}, \tag{5.11b}$$

la séquence de la matrice de covariance.

Par la suite, intéressons nous aux conditions de convergence de notre filtre de Kalman. En partant de (5.16) et des définitions des matrices de covariance, la stabilité est assurée dans le cas où la paire $\{A_k, Q^{\frac{1}{2}}\}$ est uniformément complètement commandable et la paire $\{A_k, C\}$ est uniformément complètement observable [32, 33].

Précisément, soit $\Phi(p, r) = \prod_{k=r}^{p-1} A_k$, avec $r < p$. La matrice W_c définie par

$$W_c = \sum_{i=1}^{p-1} \Phi(p, i+1)Q^{\frac{1}{2}}(Q^{\frac{1}{2}})^\top \Phi(p, i+1)^\top \tag{5.12}$$

est le Gramien de commandabilité de la paire $\{A_k, Q^{\frac{1}{2}}\}$. Selon [33, 34], la commmandabilité est assurée s'il existe deux réels ϕ_1 et ϕ_2 strictement positifs tels que

$$\phi_1 I \leq W_c \leq \phi_2 I. \tag{5.13}$$

Par la suite, la matrice W_o définie par

$$W_o = \sum_{i=1}^{p-1} \Phi(p, i+1)^\top C^\top RC\Phi(p, i+1) \tag{5.14}$$

est le Gramien d'observabilité de la paire $\{A_k, C\}$. Selon [33, 35], l'observabilité est assurée

s'il existe deux réels ψ_1 et ψ_2 strictement positifs tels que

$$\psi_1 I \leq W_o \leq \psi_2 I. \tag{5.15}$$

Ces deux conditions que sont (5.13) et (5.15), permettent de borner la matrice de covariance.

5.2.2 Filtre de Kalman étendu

Notre système étant **non linéaire**, le filtre de Kalman dans sa version optimale ne semble pas pouvoir s'appliquer. Pour rappel, l'équation d'état de notre système dans le cas stochastique est de la forme :

$$T_{k+1} = A(T_k)T_k + B(T_k)U_k + w_k = f(T_k, U_k) + w_k, \tag{5.16}$$

$$Y_k = CT_k + \nu_k, \tag{5.17}$$

où $A(T_k)$, $B(T_k)$, et C sont respectivement définis par (4.19), (4.20) et (4.22). De plus, w_k et ν_k ont les mêmes caractéristiques que pour dans le cas linéaire. Il est à noter que dans la réalité, le bruit de procédé se propage aussi de manière non linéaire mais dans notre cas, nos le considérons comme additionnel au procédé. Ainsi, nous pouvons appliquer une des variantes les plus répandus à savoir le filtre de Kalman étendu (EKF pour "Extended Kalman Filter"). En effet, cette version consiste à contourner la non-linéarité en linéarisant localement les fonctions de transition et d'observation [36]. Comme (5.17) est linéaire, les termes liés à C dans notre filtre de Kalman resteront inchangés. De ce fait, posons F_k tel que

$$F_k := \nabla_{T_k} f(\hat{T}_{k|k}, U_k), \tag{5.18}$$

la Jacobienne de la fonction de transition par rapport au vecteur d'état T_k. En utilisant l'approximation par série de Taylor à l'ordre 1, comme expliqué dans [37], nous avons (5.16) qui est approximée localement par

$$T_{k+1} = F_k T_k + w_k. \tag{5.19}$$

Par la suite, nous avons pour l'étape de prédiction,

$$\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^\top + Q. \tag{5.20}$$

Ainsi, en découle l'algorithme 1 qui résume les étapes de notre filtre de Kalman étendu.

Algorithm 1 Pseudocode du filtre de Kalman étendu

Initialisation : $\hat{T}_{0|0}$, $\hat{P}_{0|0}$
for $k \leftarrow 0, \ldots, K-1$ **do**
    Prédiction :
    $\hat{T}_{k+1|k} = f(\hat{T}_k, U_k)$
    $F_k \leftarrow \nabla_{T_k} f(\hat{T}_{k|k}, U_k)$
    $\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} {F_k}^\top + Q$
    Correction :
    $K_{k+1} = \hat{P}_{k+1|k} C^\top (C \hat{P}_{k+1|k} C^\top + R)^{-1}$
    $\hat{T}_{k+1|k+1} = \hat{T}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C\hat{T}_{k+1|k})$
    $\hat{P}_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C)\hat{P}_{k+1|k}$
end for

Comme nous pouvons le voir dans l'algorithme 1, la grosse différence se situe au niveau de l'étape de prédiction. En effet, nous avons à effectuer le calcul de la Jacobienne à chaque itération. Cependant, comme expliqué dans [36], cette version du filtre en plus d'être sous-optimale, présente un risque de divergence puisque les matrices de covariance $P_{k|k}$ et de gain K_k dépendent de la Jacobienne. Ainsi, le choix de la valeur initiale de la matrice de covariance de l'erreur sera crucial pour la stabilité du filtre. De plus, le calcul de la Jacobienne peut entraîner un coût considérable dans l'implémentation du filtre ou bien peut être difficile à déterminer. Concernant cette dernière, les détails du calcul de F_k se trouvent à l'annexe B. Ainsi, la stabilité sera vérifiée numériquement en vérifiant que $P_{k|k}$ reste définie-positive.

5.2.3 Filtre de Kalman pseudo-linéaire

Il existe d'autres alternatives pour traiter la non-linéarité de certaines familles de systèmes ces dernières décennies. En analysant notre modèle de (5.16), nous remarquons que nous avons affaire à un système pseudo-linéaire. Par la suite, il s'agit de se baser sur l'équation de Riccati mais dépendant de l'état [38] (SDRE pour "State-Dependent Riccati Equation") pour trouver la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Ainsi, nous avons une linéarité à chaque pas de temps en évaluant les matrices $A(T_k)$ et $B(T_k)$ sur une état "gelé". L'estimation de l'état se fera donc de la même manière que pour le filtre de Kalman linéaire mais avec les matrices dépendant de l'état estimé $\hat{T}_{k|k}$. Comparé au filtre de Kalman étendu, nous n'avons pas à calculer une Jacobienne, ce qui pourrait s'avérer compliqué. Ainsi l'algorithme 2 résume le cheminement de ce type de filtre.

Algorithm 2 Pseudocode du filtre de Kalman pseudo-linéaire

Initialisation : $\hat{T}_{0|0}$, $\hat{P}_{0|0}$
for $k \leftarrow 0, \ldots, K-1$ **do**
  Prédiction :
  $\hat{T}_{k+1|k} = A(\hat{T}_{k|k})\hat{T}_{k|k} + B(\hat{T}_{k|k})U_k$
  $\hat{P}_{k+1|k} = A(\hat{T}_{k|k})\hat{P}_{k|k}A(\hat{T}_{k|k})^{\top} + Q$
  Correction :
  $K_{k+1} = \hat{P}_{k+1|k}C^{\top}(C\hat{P}_{k+1|k}C^{\top} + R)^{-1}$
  $\hat{T}_{k+1|k+1} = \hat{T}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C\hat{T}_{k+1|k})$
  $\hat{P}_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C)\hat{P}_{k+1|k}$
end for

Par la suite, intéressons nous aux conditions de convergence de notre filtre de Kalman pseudo-linéaire (PLKF pour "Pseudo-Linear Kalman Filetr"). Posons $|\cdot|$ la norme euclidienne d'un vecteur et $\|\cdot\|$ la norme induite d'une matrice. D'après [35] et [39], le PLKF est stable si le système peut vérifier les quatre conditions suivantes :

1. $A(T_k)$ est inversible et il existe un réel $\overline{a} > 0$ tel que pour tout $k > 0$,

$$\|A(T_k)\| \leq \overline{a}. \tag{5.21}$$

2. Pour toute estimée $\hat{T}_{k|k}$, la solution de la SDRE $\hat{P}_{k|k}$ est bornée tel que pour tout les $k > 0$,

$$\underline{p}I \leq \hat{P}_{k|k} \leq \overline{p}I, \tag{5.22}$$

   avec $\underline{p}$, $\overline{p} > 0$.

3. Ils existent des réels ϕ, $\psi > 0$ tels que pour tout $k > 0$

$$|T_k| \leq \phi \tag{5.23a}$$
$$|U_k| \leq \psi \tag{5.23b}$$

4. Les matrices $A(T_k)$ et $B(T_k)$ sont lipschitzienne pour tout $k > 0$, c'est à dire, il existe des réels k_A, $k_B > 0$ tels que pour T_k, $\hat{T}_{k|k} \in \mathbb{R}^N$, pour tout $k > 0$,

$$\|A(T_k) - A(\hat{T}_{k|k})\| \leq k_A|T_k - \hat{T}_{k|k}|^2, \tag{5.24a}$$
$$\|B(T_k) - B(\hat{T}_{k|k})\| \leq k_B|T_k - \hat{T}_{k|k}|^2, \tag{5.24b}$$

lorsque $|T_k - \hat{T}_{k|k}| \leq \varepsilon_A$ et $|T_k - \hat{T}_{k|k}| \leq \varepsilon_B$.

En considérant en plus les matrices de covariance des bruits de procédé Q et de mesure R définie-positives et sous les conditions (5.21) à (5.24), nous avons une erreur de covariance qui est exponentiellement bornée selon [35] et [39]. Dans le cas général, C devrait aussi être inclus dans les conditions (5.21) et (5.24) mais dans notre cas, C est une constante.

Concernant la condition (5.23), elle est validée dans notre cas puisque d'un point de vue physique, les valeurs de la température à l'intérieur du réservoir sont bornées, de même pour la puissance injectée.

Au vu de l'expression des matrices de notre système, une étude analytique de (5.21), (5.22) et (5.24) serait fastidieuse. Ainsi, nous vérifierons numériquement que la matrice de covariance $\hat{P}_{k|k}$ reste définie-positive ce qui est néanmoins une condition nécessaire pour s'assurer de la stabilité du filtre.

5.3 Estimation de la matrice de covariance du bruit de procédé

Afin de pouvoir mettre en place le filtre de Kalman, il nous faut déterminer les matrices de covariance des bruits de procédé et de mesure de notre système. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur la méthode présentée par [40] qui se base sur une approche bayésienne et une méthode de Monte Carlo pour trouver les matrices de covariance des bruits du système afin d'atteindre l'optimalité dans l'application du filtre de Kalman. Pour notre modèle, nous admettons que $Q = {\sigma_Q}^2 I$ et $R = {\sigma_R}^2 I$. Nous nous sommes basés sur la méthode de Monte Carlo non récursive qui est plus coûteuse en calcul selon [40] mais bien plus performante. Par ailleurs, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'estimation de σ_Q puisque σ_R est fixé avec les données constructeur.

En posant $\theta = \begin{bmatrix}\sigma_Q & \sigma_R\end{bmatrix}$, $\mathscr{Y}^\tau = \{Y_0, Y_1, \ldots, Y_\tau\}$ pour $\tau \in \{0, \ldots, T_{\max}\}$ et N_{MC} le nombre d'itération maximal pour notre méthode de Monte Carlo. Vu qu'elle consiste à tester plusieurs possibilités de θ, nous créons deux ensembles de termes candidats de départ $\mathscr{W} = \{\sigma_{Q_1}, \ldots, \sigma_{Q_{n_Q}}\}$ et $\mathscr{V} = \{\sigma_{R_1}, \ldots \sigma_{R_{n_R}}\}$ ce qui nous donne un ensemble $\mathscr{S}$ des combinaisons $[\sigma_{Q_i}; \sigma_{R_j}]$ ce qui fait qu'on a un ensemble de $n_S = n_Q \times n_R$ candidats de θ pour un filtre de Kalman. Ainsi, nous avons un ensemble $\mathscr{S}^{(0)}$ de départ et chaque candidat a une probabilité égale.

Par la suite, pour chacune des itérations, nous opérons des filtres de Kalman en parallèle pour chaque $\theta_i \in \mathscr{S}^{(n)}$ qui correspondent aux étapes de prédiction et correction de l'algorithme 2. Par la suite, nous calculons de la fonction de vraisemblance de θ_i appliquée la sortie Y_k. En

s'appuyant sur [40],

$$p(Y_k|\mathscr{Y}^{k-1}, \theta_i) = \mathscr{N}(\hat{y}_{k|k-1}; P_{y_{k|k-1}y_{k|k-1}})$$

avec

$$\hat{y}_{k|k-1} = C\hat{T}_{k|k-1}$$

et

$$P_{y_{k|k-1}y_{k|k-1}} = C\hat{P}_{k|k-1}C^T + R.$$

Nous calculons la probabilité postérieure de θ_i non normalisée

$$p'(\theta_i|\mathscr{Y}^k) = p(\theta_i|\mathscr{Y}^{k-1}) \times p(Y_k|\mathscr{Y}^{k-1}, \theta_i)$$

avec $p(\theta_i|\mathscr{Y}^0)$ qui suit une loi uniforme (toutes les combinaisons ont la même probabilité au début). Pour la normalisation, nous utilisons la formule suivante :

$$p(\theta_i|\mathscr{Y}^k) = \frac{p'(\theta_i|\mathscr{Y}^k)}{\sum\limits_{\theta_i \in \mathscr{S}^{(n)}} p'(\theta_i|\mathscr{Y}^k)}. \tag{5.25}$$

Au dernier temps de l'application des filtres de Kalman en parallèle, nous avons un ensemble de probabilités normalisées $\{p(\theta_i|\mathscr{Y}^{T_{\max}}), \theta_i \in \mathscr{S}^{(n)}\}$. À partir de celle-ci, nous estimons notre combinaison de paramètres ; soit en maximisant la probabilité à posteriori (MAP)

$$\hat{\theta}^{(n)}_{\text{MAP}} = \underset{\theta_i \in \mathscr{S}^{(n)}}{\arg\max}(p(\theta_i^{(n)}|\mathscr{Y}^{T_{\max}})) \tag{5.26}$$

ou bien par l'estimateur MS (Mean Squarred error)

$$\hat{\theta}^{(p)}_{\text{MS}} = \sum_{\theta_i \in \mathscr{S}^{(n)}} \theta_i^{(n)} p(\theta_i^{(n)}|\mathscr{Y}^{T_{\max}}). \tag{5.27}$$

De par l'ensemble $\{p(\theta_i^p|\mathscr{Y}^{T_{\max}}), \theta_i \in \mathscr{S}^{(p)}\}$, nous générons un nouvel ensemble de combinaisons candidates $\mathscr{S}^{(n+1)}$ pour la prochaine itération. En plus, nous pouvons ajouter une petite perturbation aux valeurs des nouvelles combinaisons, pour éviter une dégénérescence de la distribution.

Enfin, nous vérifions notre condition d'arrêt qui est la variation de notre estimée par rapport à sa valeur à l'itération précédente

$$\|\theta_i^{(n)} - \theta_i^{(n-1)}\| \leq \varepsilon,$$

ε étant fixé selon la précision voulue. Si cette condition n'est pas respectée, nous passons à l'itération suivante avec notre nouvel ensemble défini.

5.4 Évaluation des filtres de Kalman sur les essais en conditions réelles du banc d'essai

5.4.1 Configuration pour l'application des filtres

Comme mentionné précédemment, nous sommes partis sur un PLFK et un EKF pour estimer le profil énergétique du système. Pour ce qui est de la discrétisation temporelle, nous avons choisi comme **période d'échantillonnage 1 s** correspondant à celle du banc d'essai. Pour la discrétisation en espace le **modèle 14 couches pour le CEE300 et 10 couches pour le CEE200 sont les modèles de bases**. Ils correspondent au nombre de sondes immergées dans chacun des réservoirs. Cependant, dans le cas du **PLKF** nous prendrons aussi un modèle **100 couches**. Cependant, nous avons laissé le **modèle EKF à 14/10 couches** car étant plus lourd au niveau des calculs. Cela peut sembler déséquilibré mais nous avons testé le modèle 100 couches pour l'EKF et il ne présentait pas une meilleure estimation par rapport au modèle de base alors que le temps de calcul avait drastiquement augmenté. Enfin, nous soulignons qu'on a du appliquer un **saturateur** à la valeur estimée par l'EKF car l'estimée de ce dernier divergeait rapidement.

De plus, nous considérons 2 configurations pour notre filtre :

- **Cas 1** : Les mesures sont celles de la sonde multipoint (celle immergée), mais nous n'en avons pris que trois dont les positions correspondent à celle des contrôleurs. De plus, l'information sur la puissance est fournie par le wattmètre du banc d'essai. De même pour le débit d'eau tiré qui est connu via le débitmètre. Cette configuration idéale nous permet dans un premier temps de montrer la performance de nos filtres de Kalman.
- **Cas 2** : Les mesures prises en compte sont celles du contrôleur et la puissance n'est pas connue directement. En revanche, les contrôleurs sont munis d'ampèremètre. De ce fait, il nous est possible d'estimer la puissance électrique consommée. Ainsi cette configuration sera appliquée pour les contrôleurs *control* et *reference*. De plus, il est à souligner que la période d'échantillonnage passe de 1 seconde pour le banc d'essai à 1 minute pour les contrôleurs.

L'application de la seconde configuration pour nos filtres de Kalman n'a pas été abordée avant la rédaction de ce mémoire. En effet, les sondes étant sur la paroi (sur la partie non isolée certes) du réservoir, la dynamique qu'elles perçoivent est bien différente de celle des

sondes immergées. De ce fait, il faudrait étudier l'échange thermique entre l'intérieur et ces sondes ainsi que la façon dont sont acquises les données de ces sondes. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à l'estimation de la puissance consommée à partir du courant lu par l'ampèremètre du contrôleur. Concernant ce point, l'élément chauffant n'étant qu'une résistance électrique r, nous avons choisi

$$\hat{P}(t) = r \times i(t)^2. \tag{5.28}$$

Nous remarquons sur la figure 5.1 qu'il n'y pas de délai temporel marquant entre les graphiques de puissance et de courant, ce qui nous réconforte dans notre modèle de résistance. Après une régression linéaire entre $P(t)$ et $i(t)$sur plusieurs essais, nous avons une résistance d'environ 13.4Ω ce qui est cohérent avec la fiche technique des éléments chauffants ($r = 13\Omega$). Ainsi, cette valeur de r fut prise pour l'estimation de $P(t)$.

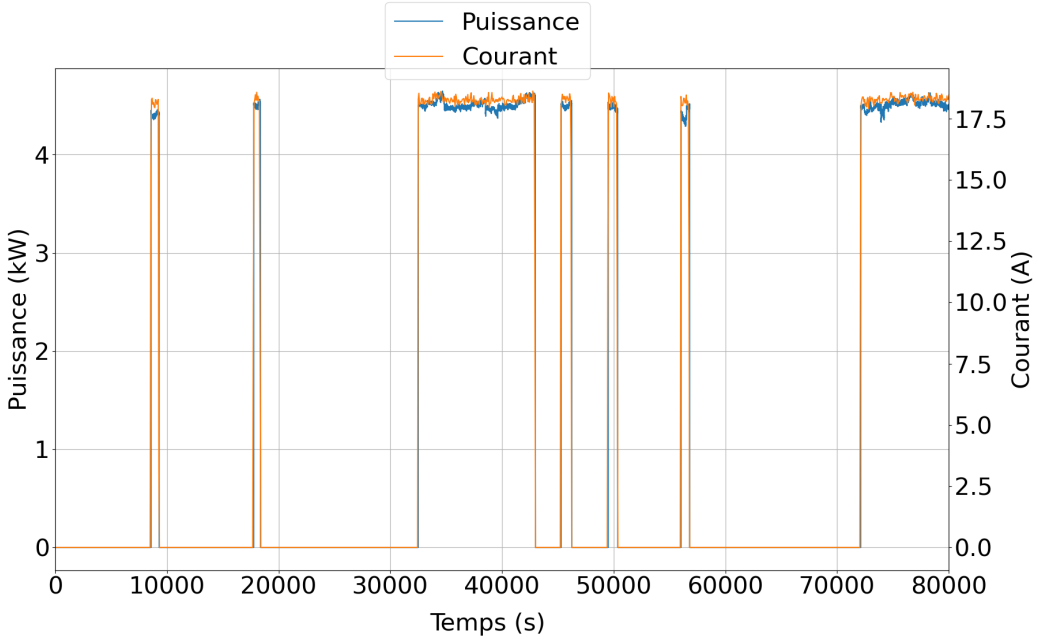


FIGURE 5.1 Graphique de la consommation électrique du réservoir à travers la puissance et le courant consommés

On remarque sur la figure 5.2 que le résidu est aux alentours de 0.1 kW. Cependant, lors des phases d'activation et de désactivation des éléments chauffants, l'erreur atteint les 2 kW. Cela est dû à la différence de période d'échantillonnage des deux appareils de mesure. En effet, le wattmètre du banc d'essai enregistre les données chaque seconde contre chaque minute pour l'ampèremètre du contrôleur. Ces pics d'erreur étant sporadiques, nous considérons que notre

estimation de la puissance au moyen du courant électrique est valable.

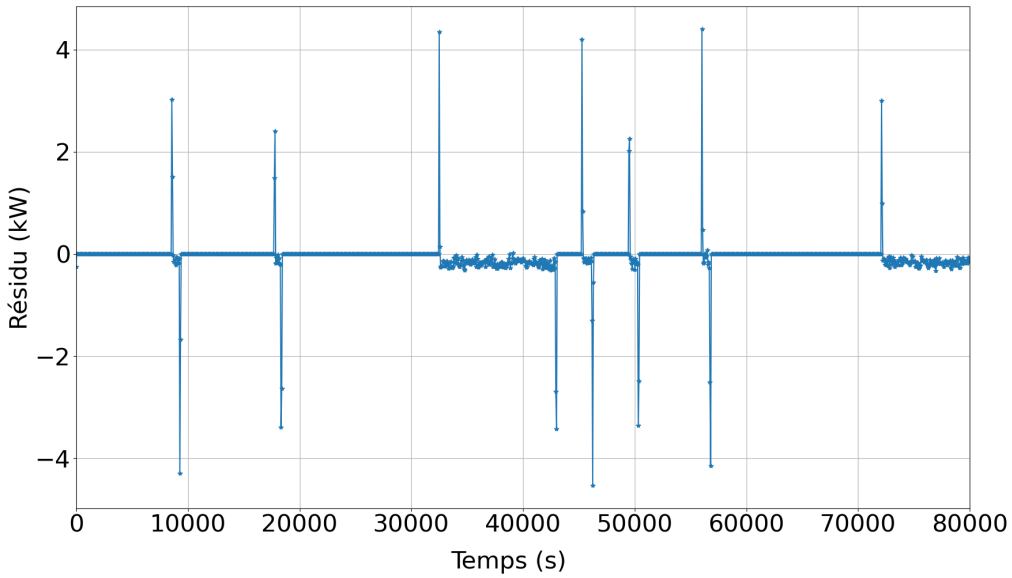


FIGURE 5.2 Graphique du résidu entre la puissance mesurée et estimée à travers le courant

5.4.2 Résultats de l'estimation de la matrice de covariance du bruit de mesure

Pour l'estimation des coefficients par la méthode de Monte Carlo, nous nous sommes servis des tests standards de type **StepFlow_ON** car la méthode est gourmande en ressource. En effet, nous testons chacune des possibilités des coefficients pour chaque pas de temps N_{MC} fois si la condition d'arrêt n'est pas remplie avant. Ainsi, sur des tests de 24h avec des données chaque seconde, le traitement devient assez long. Ainsi, les tests StepFlow_ON sont un bon compromis car durant moins de 2h mais contenant plusieurs tirages variables – selon un schéma non hasardeux certes – et avec l'intervention des éléments chauffants. Ainsi ces tests sont parmi les tests standards les plus proches des tests CRC tout en permettant de ne pas passer relativement trop de temps dans l'estimation.

Dans cette configuration du filtre de Kalman, seule la matrice de covariance du bruit de procédé, σ_Q, fut estimée. En effet, le bruit de mesure est donné par la fiche technique de la sonde multipoint. Ainsi $\boldsymbol{\sigma_R = 0.3}$.
Après quelques essais par dichotomie, nous avons conclu que l'ensemble dans lequel chercher la valeur de σ_Q serait $[0.01; 0.9]$ ou du moins cela constituera notre ensemble de valeurs initiales.
Concernant la perturbation à chaque itération, nous avons considéré un bruit suivant une loi

$\mathscr{U}_{[0.01;0.9]}$. De même, nous considérons une précision de l'ordre 10^{-3} pour notre estimée.

TABLEAU 5.1 Estimation de σ_Q selon la méthode de Monte carlo

Itérations	$\hat{\sigma}_Q^k$ (CEE300)	$\hat{\sigma}_Q^k$ (CEE200)
0	10^{-2}	1.84×10^{-1}
1	1.98×10^{-2}	1.91×10^{-1}
2	2.69×10^{-2}	1.99×10^{-1}
3	3.40×10^{-2}	2.03×10^{-1}
4	4.39×10^{-2}	2.03×10^{-1}
5	4.47×10^{-2}	

Les résultats exposés au tableau 5.1 montrent que la méthode semble converger après un faible nombre d'itérations même si elle a pris un temps assez conséquent (environ 10h). Cela s'explique par le nombre de combinaisons à tester sur un ensemble de données et un modèle assez lourds (représentation d'état à 100 éléments avec comme pas de temps de 1 s sur 2 h). Par ailleurs, la différence de coefficients d'un réservoir à l'autre surtout au niveau de l'ordre de grandeur pourrait être due au fait que la matrice d'observation C n'est pas la même entre le CEE200 et le CEE300 comme le réfère le tableau A.3. En effet, comme indiqué au chapitre 3, les sondes ont été placées au niveau des zones où le réservoir est dépourvu d'isolant (zone prévue pour le placement du thermostat) ce qui explique la différence de placement des points de mesure et donc de C.

5.4.3 Performances des filtres de Kalman

Dans cette partie nous nous intéresserons à l'application de nos filtres de Kalman dans le cas 1 décrit plus haut. Les filtres seront appliqués avec la valeur de σ_Q estimée précédemment. Nous comparerons les résultats des filtre sur des tests CRC de type HU pour chaque réservoir. En effet, ce type de test est celui sollicitant le plus le réservoir de par la fréquence et l'intensité de ses tirages. La condition initiale sera prise directement sur les valeurs initiales des mesures et on considère $\hat{P}_{0|0} = I_N$ la matrice identité de taille $N \times N$.

5.4.4 Application du filtre sur le réservoir CEE300

Pour cette partie, nous n'avons pas pris d'évènement GC. Nous pouvons voir sur la figure 5.3 que l'élément du haut a été activé à deux reprises. De plus, nous pouvons voir la durée et l'intensité des tirages d'eau auxquels a été soumis le réservoir durant le test.

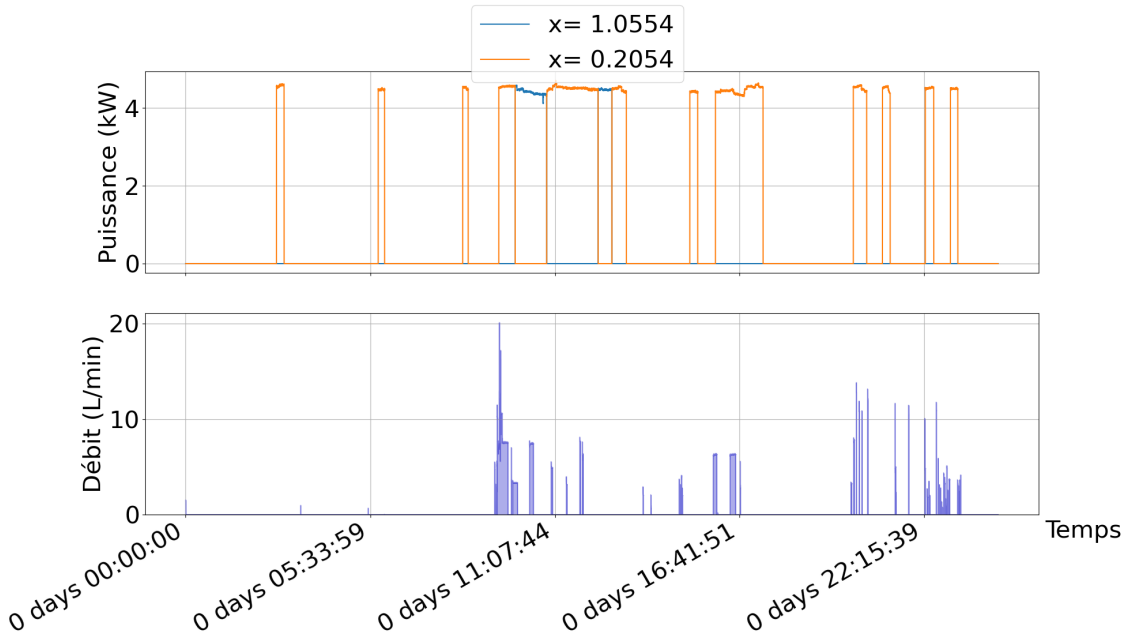
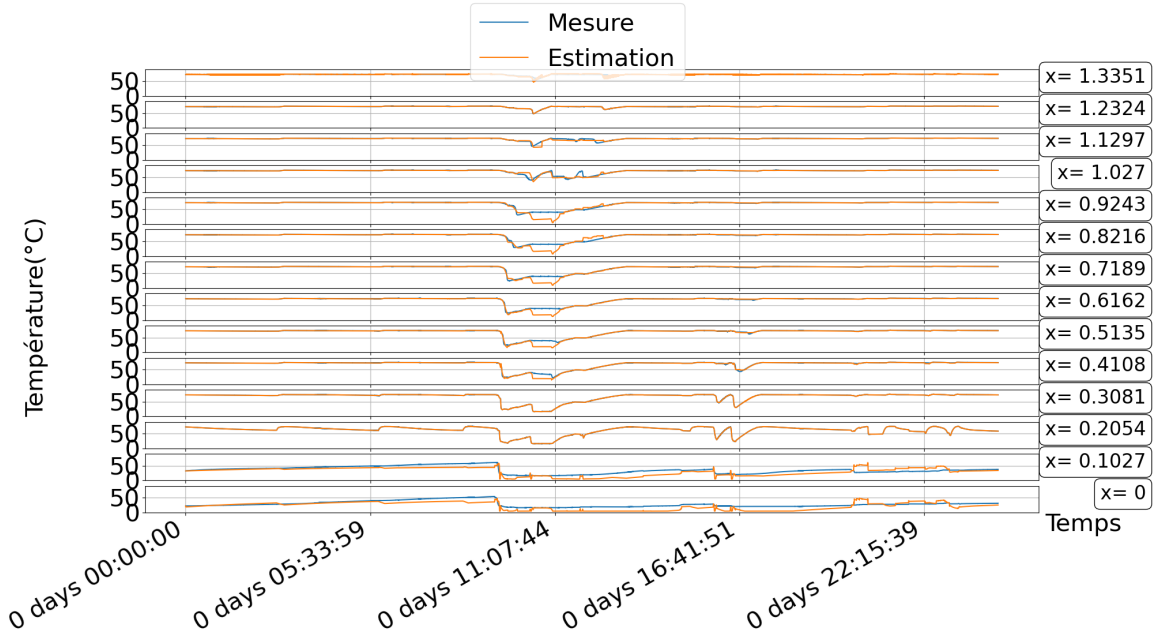


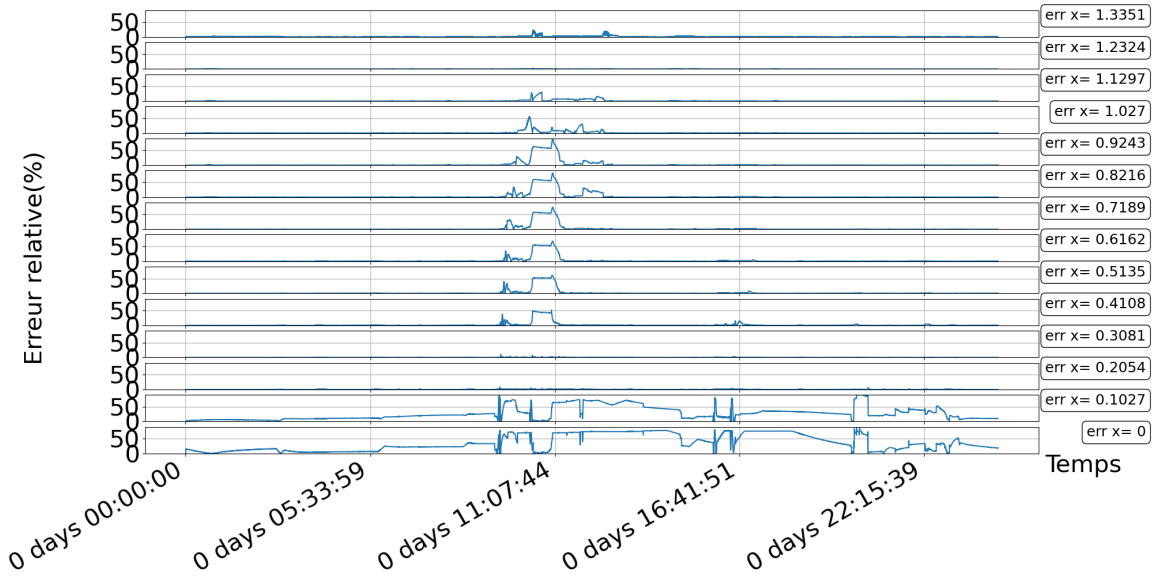
FIGURE 5.3 Historique des tirages et puissance consommée d'un test CRC HU sur le CEE300

Résultats avec le filtre de Kalman étendu

La sollicitation des couches supérieures se confirme avec la figure 5.4a où nous pouvons voir que leur température se retrouve impactée par la consommation élevée d'eau même sans évènement GC. Au niveau de l'erreur relative et du suivi, la figure 5.4b nous montre, un problème pour estimer les couches inférieures au vu des valeurs qu'atteignent leurs erreurs d'estimation relatives.



(a) Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation



(b) Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation

FIGURE 5.4 Résultats de l'application de l'EKF sur un profil HU pour le CEE300

Malgré cela, la figure 5.5 montre une assez bonne estimation de l'énergie à l'intérieur du réservoir avec quelques écarts même s'ils semblent modérés.

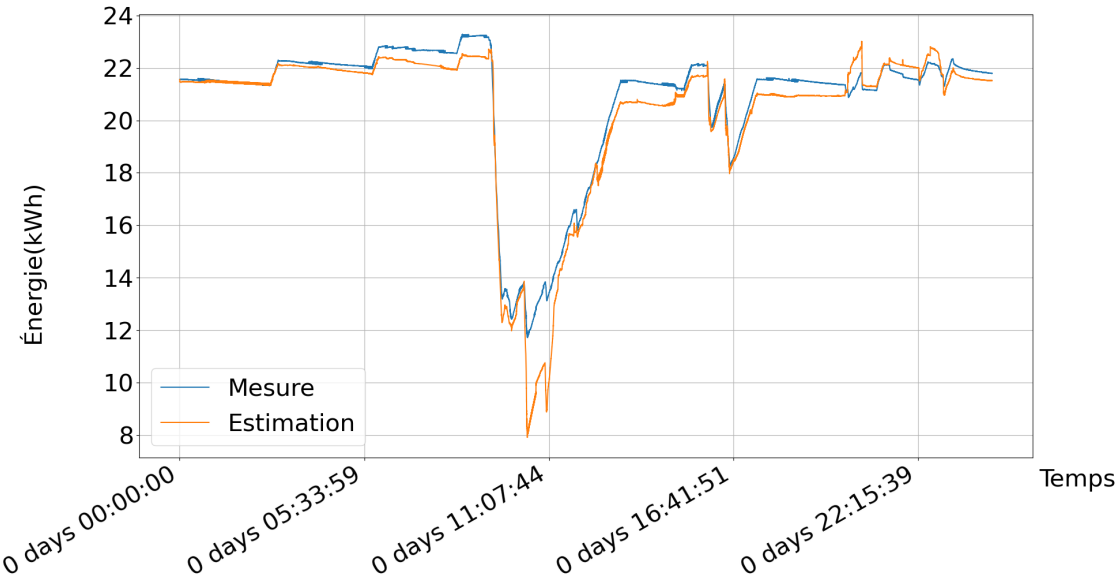


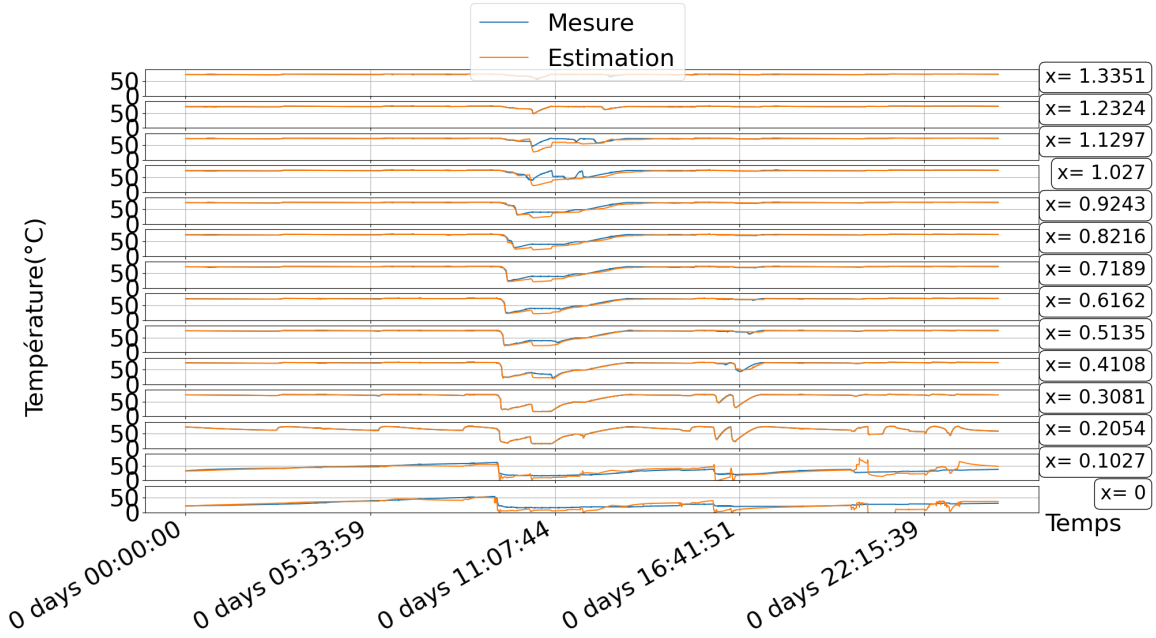
FIGURE 5.5 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par l'EKF sur un profil HU pour le CEE300

Résultats avec le filtre de Kalman pseudo-linéaire

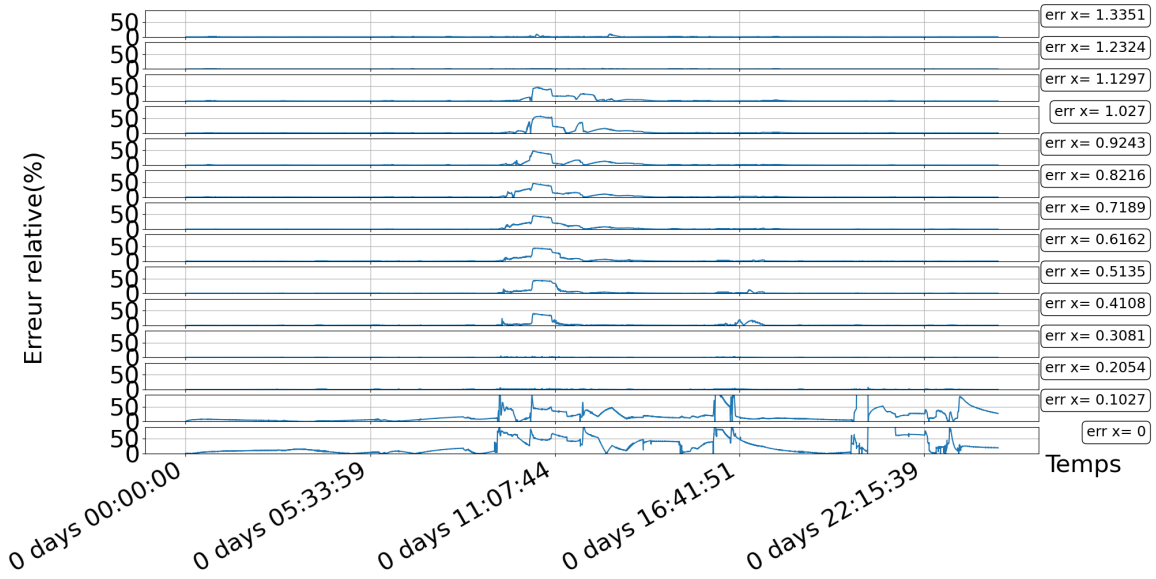
Dans le cas du PLKF, le suivi se produit sans grande difficulté comme le montre la figure 5.6a. Il n'y a pas de différence notable par rapport à l'EKF présenté à la figure 5.4a. De même au niveau de l'erreur relative, la figure 5.6b montre une erreur relative globalement faible. Cependant, les erreurs au niveau des couches inférieures sont moins importantes que dans le cas de l'EKF.

De même la figure 5.7, présente une approximation quasi-similaire que pour l'EKF.

Ainsi, pour le PLKF, nous n'observons pas de différence notable par rapport à l'EKF pour un essai CRC HU sur le CEE300. De plus, les deux filtres ont du mal dans l'estimation de la température des couches inférieures.



(a) Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation



(b) Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation

FIGURE 5.6 Résultats de l'application du PLKF sur un profil HU pour le CEE300

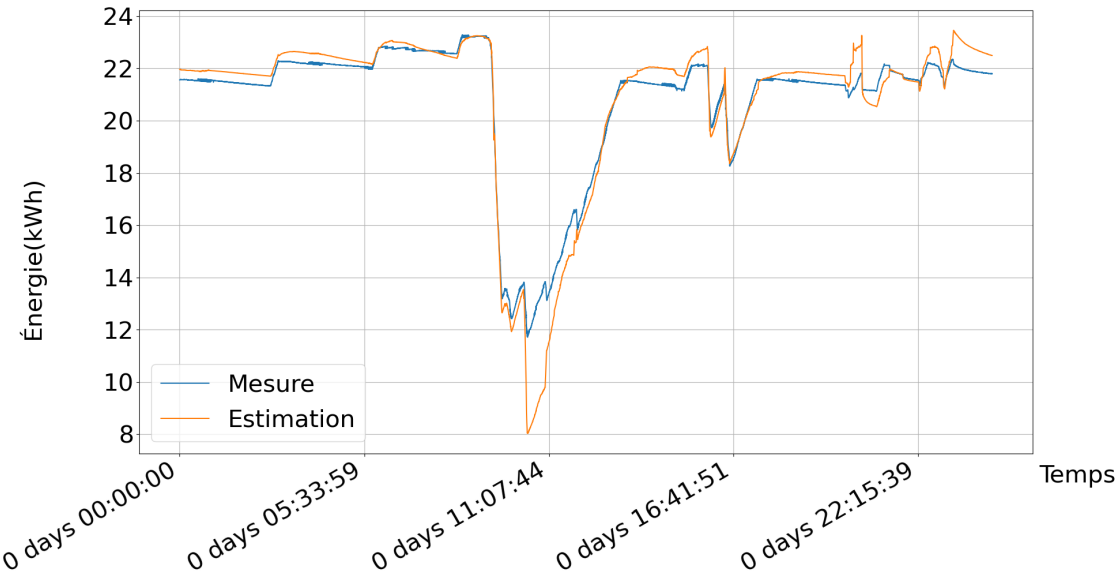


FIGURE 5.7 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par le PLKF sur un profil HU pour le CEE300

5.4.5 Application du filtre sur le réservoir CEE200

Dans le cas du CEE200, nous utilisons encore un test de type HU afin de solliciter au plus le réservoir comme le montre la figure 5.8.

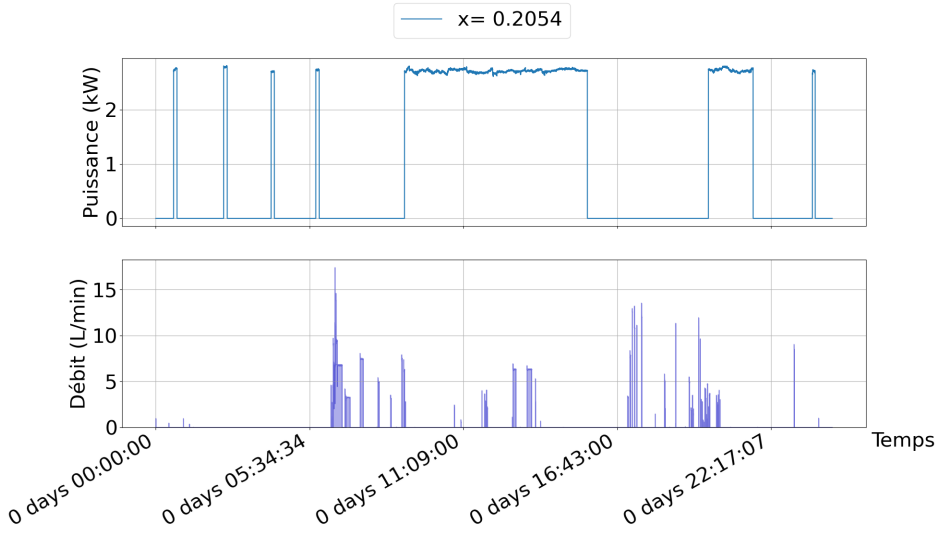
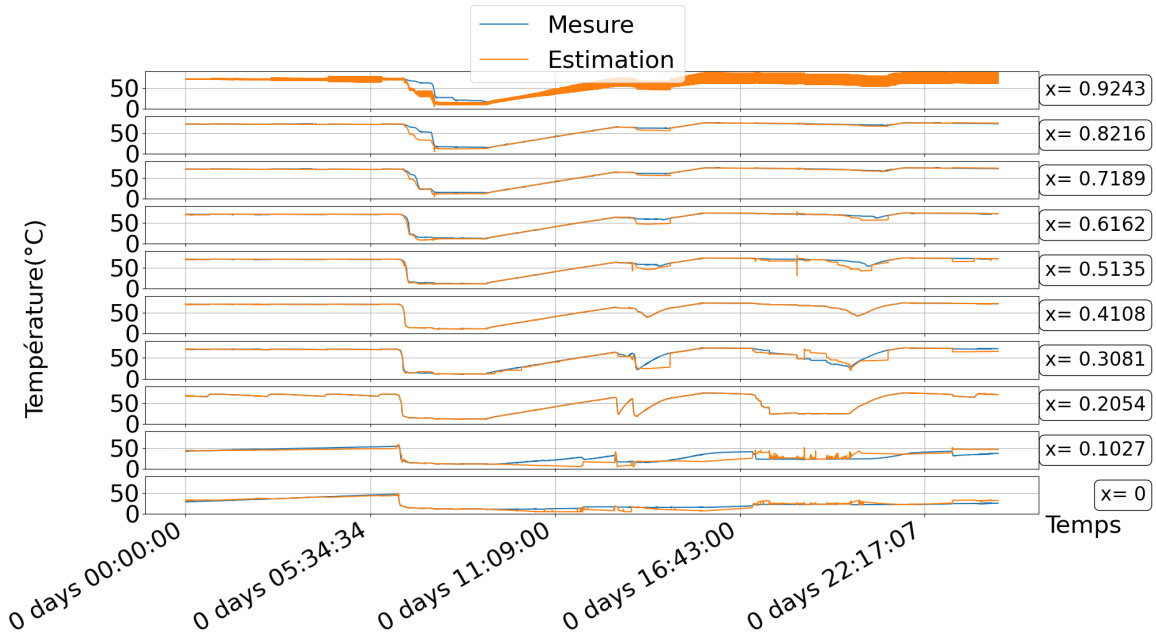
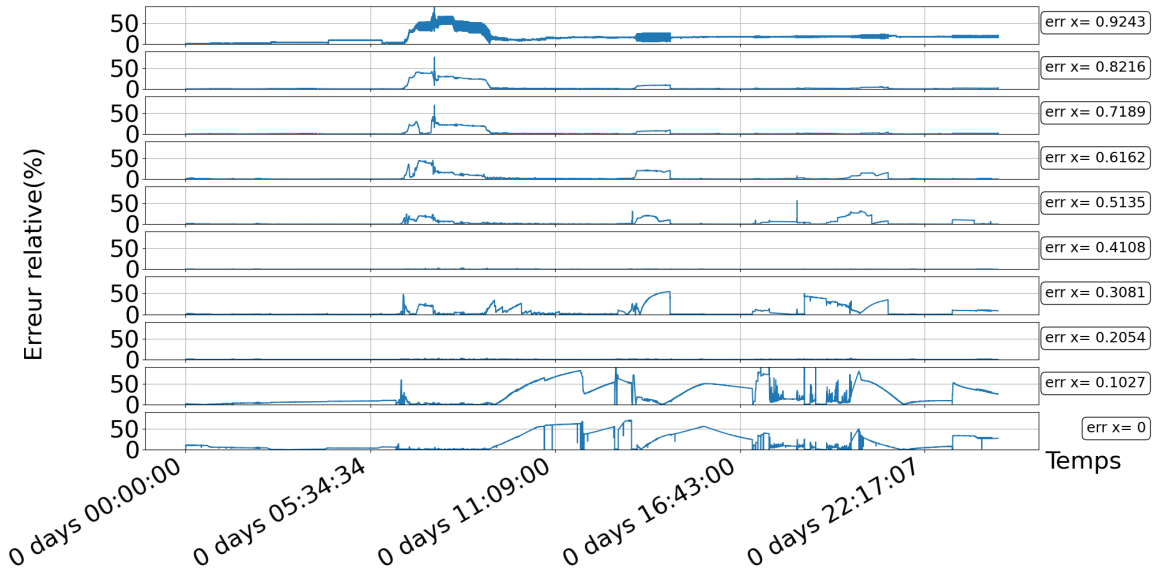


FIGURE 5.8 Historique des tirages et puissance consommée d'un test CR HU sur le CEE200

Résultats avec le filtre de Kalman étendu



(a) Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation



(b) Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation

FIGURE 5.9 Résultats de l'application de l'EKF sur un profil HU pour le CEE200

Pour le cas du filtre de Kalman étendu, la figure 5.4a nous constatons un assez bon suivi à l'exception de la couche supérieure où l'estimation est sujette à de fortes oscillations autour de la valeur réelle. De plus, la figure 5.9b nous révèle que l'erreur relative est bien plus importante avec plusieurs périodes d'oscillation qu'importe la couche. Il en est de même pour le figure 5.10 où les oscillations se sont propagées même dans l'estimation de l'énergie dans le réservoir.

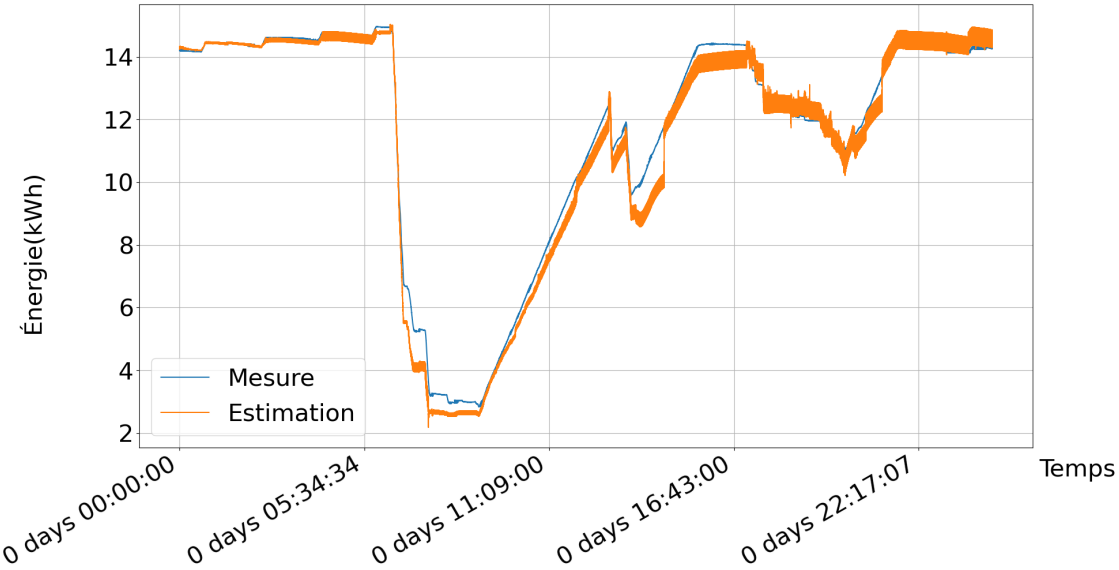
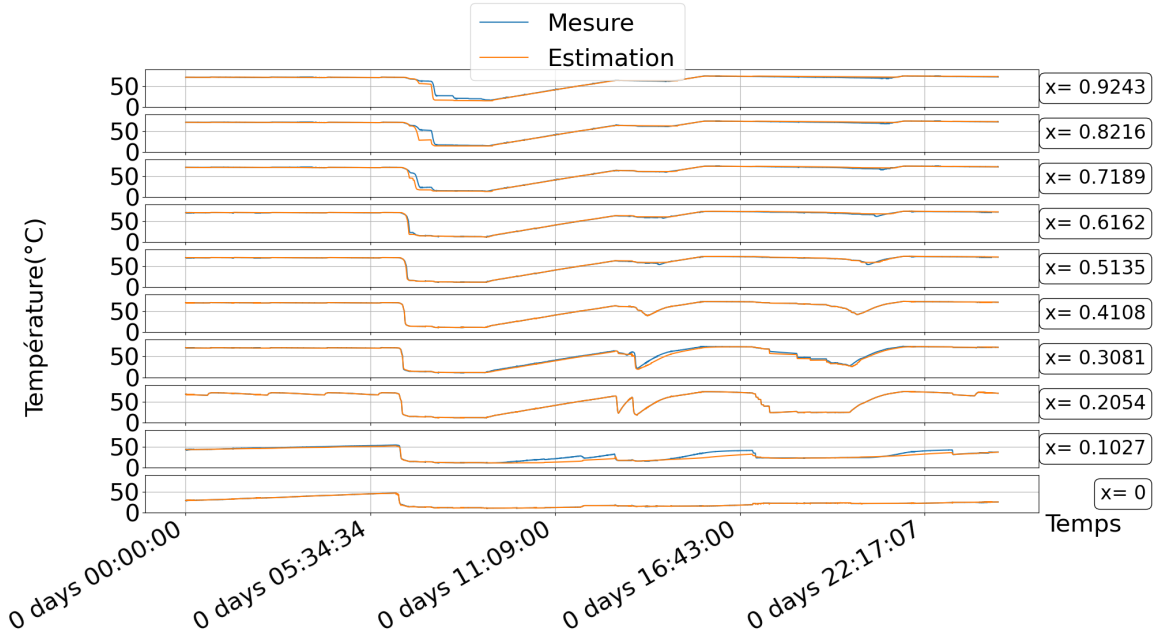


FIGURE 5.10 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par l'EKF sur un profil HU pour le CEE200

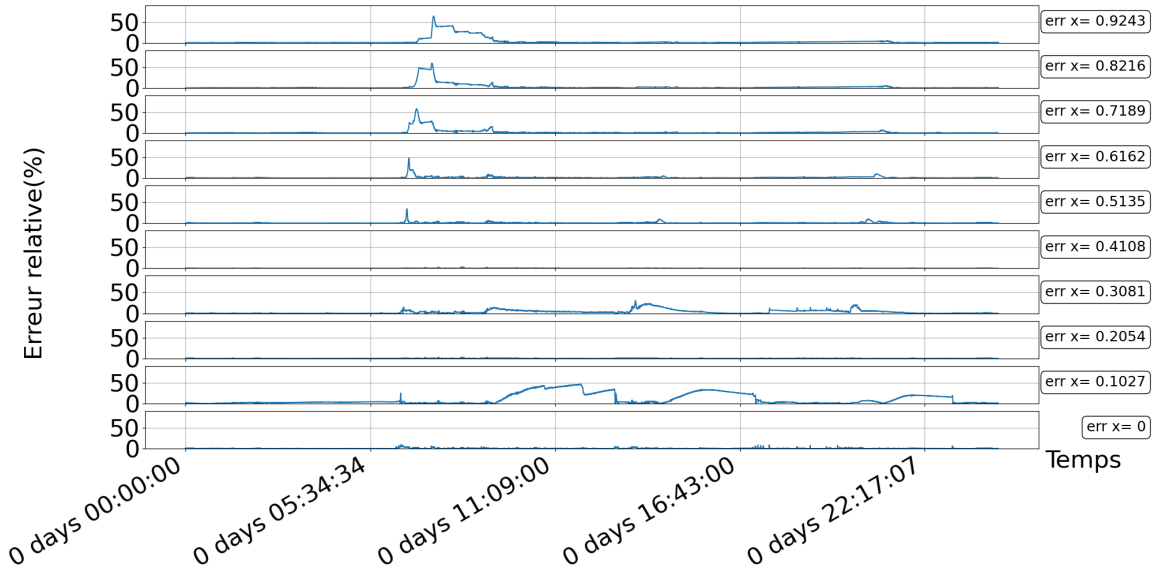
Ainsi, nous constatons une persistance du bruit dans notre estimation de la température pour notre filtre de Kalman étendu.

Résultats avec le filtre de Kalamn pseudo-linéaire

Nous observons bien sur la figure 5.11a que la température des couches supérieures se retrouve impactée lors de périodes de grand tirage et sans chauffe. Malgré cette forte perturbation, nous avons un bon suivi de la température par l'estimée. Pour ce qui est de l'erreur relative, la figure 5.11b montre de meilleurs résultats que dans le cas du CEE300. Nous pouvons notamment souligner que les couches sont bien estimées dans l'ensemble.



(a) Comparaison entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation



(b) Erreur relative entre les données mesurées de la sonde multipoint et leur estimation

FIGURE 5.11 Résultats de l'application du PLKF sur un profil HU pour le CEE200

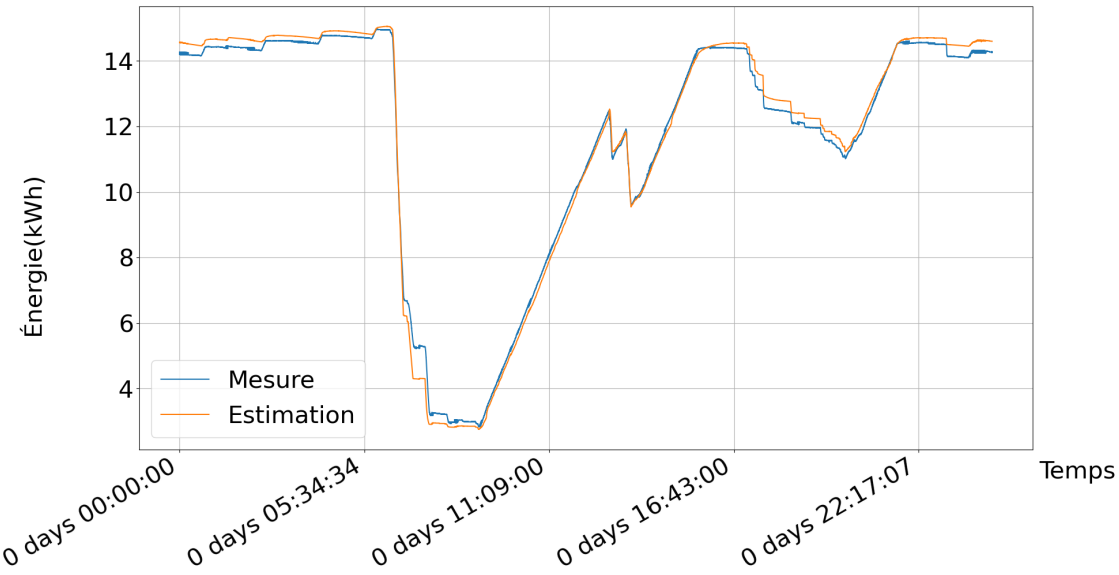


FIGURE 5.12 Comparaison entre l'énergie du système calculée par les données mesurées et estimée par le PLKF sur un profil HU pour le CEE200

De même l'estimation de l'énergie contenue dans le réservoir est bien meilleure que dans le CEE300 comme le montre la figure 5.12.

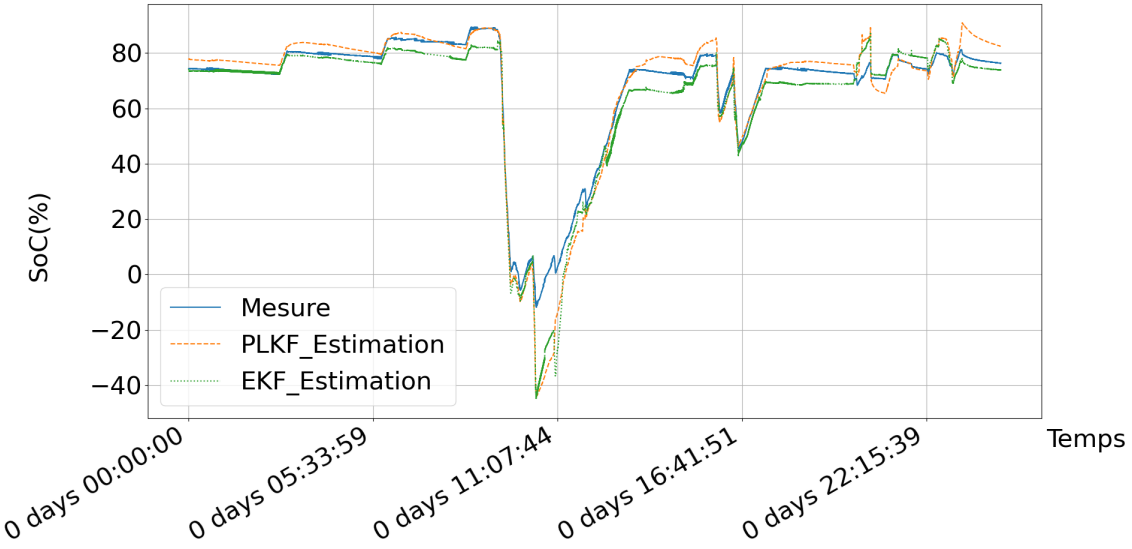
5.4.6 Application de l'estimation du profil énergétique au moyen de l'état estimé

Dans cette partie, nous allons estimer le profil énergétique du chauffe-eau à partir de la répartition de température obtenue au moyen de l'EKF et du PLKF.

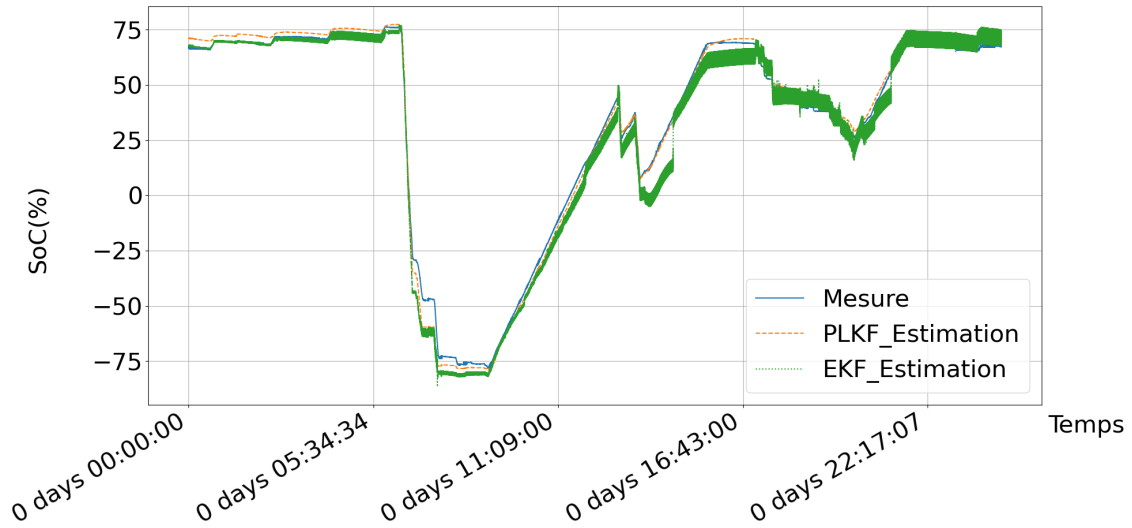
Résultats sur l'état de Charge

Prenons la figure 5.13 où nous sont montrés l'état de charge qui découle des mesures de la sonde multipoint et des estimations de la répartition de température. Nous constatons que notre valeur de l'état de charge peut prendre des valeurs négatives comme montré à la figure 5.13. Ce n'est pas incohérent en soi au vu de l'expression de (5.2). Cependant, elle pourrait ne pas suffire comme donnée pour que le réseau puisse prendre une décision. En effet, dans la figure 5.13a, aux alentours de 11:07, nous avons un état de charge négatif et pourtant, en regardant la figure 5.6a, nous avons encore des couches d'eau dont la température est supérieure à 40°C. Cela était à prévoir puisque de cette définition de l'état de charge qui revient à faire une température moyenne puis multiplier par un facteur constant, ce qui nous

cache de l'information. De ce fait, il serait intéressant de se tourner vers d'autres manières d'interfacer le profil énergétique.



(a)



(b)

FIGURE 5.13 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU pour le CEE300 **(a)** et le CEE200 **(b)**

Concernant les estimation de l'ÉdC, la figure 5.13a montre une bonne estimation induite avec

le PLKF qui est légèrement plus précis que l'EKF. Pour le cas du CEE200, la figure 5.13b nous montre une persistance du bruit déjà présente dans l'estimation la répartition de température pour l'EKF.

Résultats sur le volume équivalent

Ici encore, les figure 5.14 et 5.15 nous montrent la même allure que pour la quantité d'énergie mais nous pouvons bien voir que dans la même zone temporelle, aux alentours de 11:07, le réservoir est montré comme possédant une faible quantité d'eau chaude, ce qui est plus représentatif que d'indiquer un manque d'énergie global. Par ailleurs, tout comme pour l'estimation de l'état de charge, nous observons que le PLKF fait preuve d'une meilleure précision et que l'EKF présente encore un signal bruité.

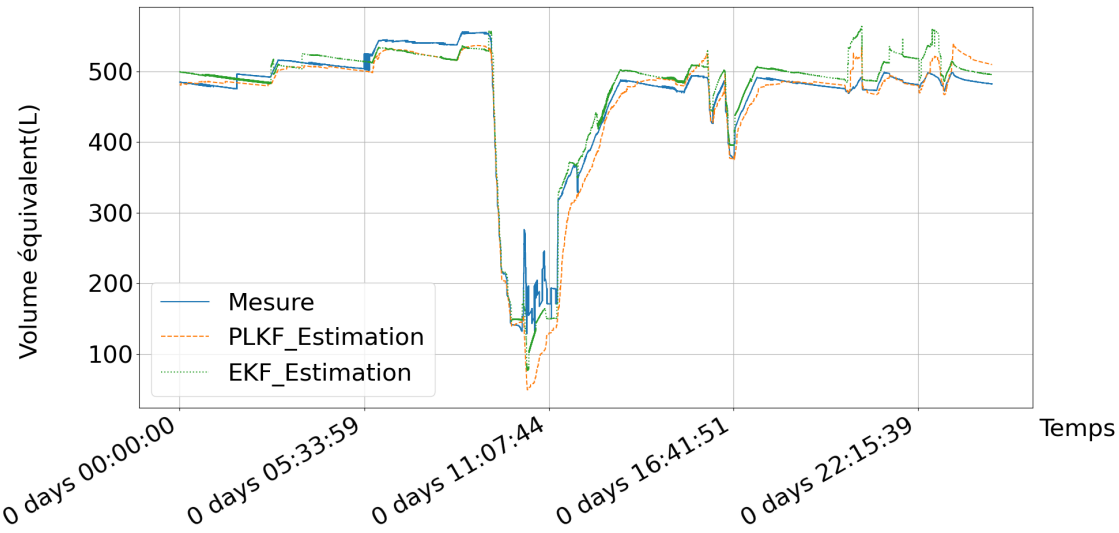


FIGURE 5.14 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU pour le CEE300

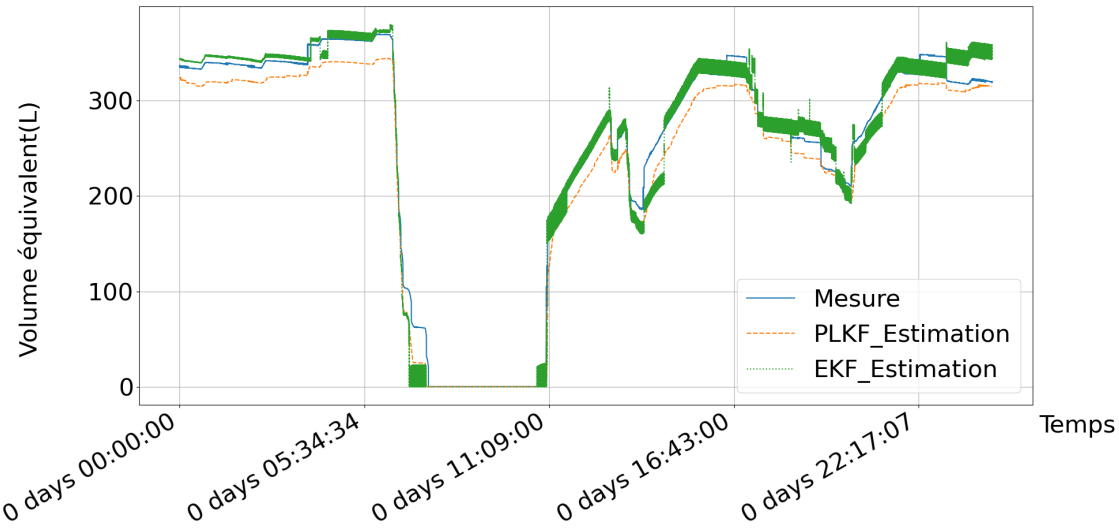


FIGURE 5.15 Estimation de l'état de charge par l'EKF et le PLKF sur un profil HU pour le CEE200

5.4.7 Bilan sur les filtres de Kalman

Nous remarquons au vu des résultats que le filtre de Kalman pseudo-linéaire estime assez bien l'état du CE selon les graphiques de comparaison, d'erreur relative et d'estimation de l'énergie. Cependant, nous constatons quand même une meilleure estimation dans le cas du CEE200 que pour CEE300. Deux explications peuvent être données quant à cette différence :

- Il peut s'agir de méthode de répartition de la puissance consommée par le CE parmi les éléments chauffants dans le cas du CEE300. En effet, nous nous sommes basés sur la température lue par les sondes de température du contrôleur ctrl puisque nous n'avons pas accès à la température perçue par le thermostat. Cependant, au vu des données de la sonde immergée dans les tests à la figure 5.6a et de celles de la répartition de la puissance à la figure 5.3, nous ne nous pencherons pas sur cette première hypothèse davantage.
- Il peut également s'agir des différentes positions des points d'observation qui diffèrent. En effet, cela est dû à la zone sans isolant disponible pour chaque réservoir et CEE200 n'ayant qu'une zone, la troisième sonde fut placée plus bas au travers de cette trappe et donc au plus proche du bas du réservoir. De ce fait, la couche du bas, la plus impactée lors des tirages, a du mal à être estimée par notre modèle dans le cas du CEE300. De plus, dans [41] le placement des capteurs fut abordé et la recommandation fut d'en placer deux le plus proches des extrémités du réservoir. Ainsi l'étude du nombre

optimal de capteurs et de leurs positions serait à réaliser.

Par ailleurs, le filtre de Kalman étendu a présenté une persistance du bruit dans le cas du test sur le CEE200. Cela peut être dû à la différence de discrétisation pour les modèles. En effet, le filtre de Kalman étendu tel que présenté dans l'algorithme 1 diverge très rapidement. De ce fait, nous avons eu à appliquer un **saturateur** à la valeur estimée de l'état $\hat{T}_{k|k}$ pour éviter cette divergence. Cela explique cette oscillation présente dans la couche du haut.

Ainsi, au vu des résultats présentés en haut, le filtre de Kalman pseudo-linéaire présente de meilleures caractéristiques que ce soit au niveau de la stabilité ou de la précision. De plus, son implémentation est bien moins coûteuse.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était, de développer un modèle de type boîte grise pour l'estimation de l'état de charge des CEE. Cela permettrait, en accord avec le projet du centre de recherche CanmetÉNERGIE à Varennes sur la flexibilité des charges, un contrôle plus effectif de ces appareils dans le réseau électrique. Ce modèle devrait permettre, avec un nombre limité de points de mesures, de reproduire la répartition de température au moyen d'une EDP et d'un filtre de Kalman pseudo-linéaire.

6.1 Synthèse des travaux

Les résultats présentés dans ce mémoire nous permettent de conclure qu'un tel modèle est réalisable. Il faut quand même noter que les conditions d'évaluation d'un tel modèle ont été réalisées à partir des données du banc d'essai et que son implémentation ainsi que l'application ne seront pas encore possibles avant quelques étapes supplémentaires. De plus, ce système ainsi que certaines méthodes d'estimation sont tout à fait perfectibles.

Comme mentionné dans la section 4.3, l'estimation des paramètres par la bibliothèque `Scipy` nous donne des résultats assez cohérents et constants d'un test à l'autre avec des degrés de précision dont l'ordre est au moins 10^{-3} fois celui de la valeur estimée. Ce qui nous donne une certaine confiance quant aux résultats estimés. De l'autre côté, la méthode par `DeepyMoD` présente trop d'irrégularités (dans l'ordre de grandeur par exemple) et d'incohérences physiques (signe du coefficient négatif) ce qui nous laisse assez perplexes sur cette méthode pour notre type d'équation aux dérivées partielles. Il est à noter que concernant le terme externe de l'apport de puissance, l'estimation n'a pas donné de meilleurs résultats que celui déterminé par la formule théorique. Ainsi, à part pour ce terme, les autres ont été fixés à leur valeur estimée par `Scipy`. Les simulations effectuées pour chacune des estimations nous donnent relativement une reproduction du comportement de la température, mais avec des erreurs constantes et pouvant avoisiner les 100% d'erreur relative.
Pour ce qui est des filtres de Kalman, comme attendu, ils font preuve d'une assez bonne stabilité pour ce qui est de l'estimation de la répartition de la température avec une erreur relative d'environ $5 - 10\%$ dans sa globalité. Cependant, nous ne pouvons ignorer les pics d'erreur d'estimation qui peuvent aller jusqu'à 50% et au-delà malgré la capacité du filtre à se stabiliser après coup. Il nous faut quand même noter que lors de notre estimation de la matrice de covariance du bruit de mesure, nous avons :

- supposé $Q = \sigma_Q^2 I$, ce qui n'est pas forcément véridique. En effet, une matrice diagonale

quelconque aurait permis d'estimer une matrice de covariance plus performante.

- effectué l'estimation sur un seul type d'essai par manque de temps qu'on a ensuite appliqué sur les tests CRC. Il aurait été plus judicieux, à l'instar de l'estimation des paramètres, d'estimer cette matrice suivant l'état dans lequel se trouvait le CEE (repos, tirage, charge, charge et tirage), et donc de se tourner vers un algorithme de filtre de Kalman adaptatif. Malgré tout, cela impacterait grandement l'implémentation. Il serait, donc, intéressant de proposer des matrices de covariance suivant un arbre de choix déterminé avec des méthodes d'optimisation ou d'apprentissage machine.

De plus, le filtre de Kalman pseudo-linéaire semble être une application plus stable pour l'estimation de la distribution de température. Par ailleurs, notre estimation se base sur les mesures partielles de la sonde multipoint et donc immergée. Dans la version finale, les données lues seront celles des sondes du contrôleur installé et le pas de temps ne sera pas aussi faible que dans notre cas. Une façon de remédier à ce problème serait d'intégrer la pose des sondes et du contrôleur à la fabrication des réservoirs afin d'avoir des sondes immergées.
Un autre élément assez important de l'application d'un tel filtre pose aussi problème à savoir la connaissance du débit de tirage de l'eau chaude. Idéalement, la mesure du débit ne serait pas incluse dans la solution finale puisque l'ajout d'un débitmètre augmenterait considérablement les coûts de production et d'installation d'un contrôleur de chauffe-eau . On pourrait considérer le débit comme variable supplémentaire dans la RE, mais cela rendrait (4.16) encore plus non linéaire et comme vu avec les résultats, le filtre de Kalman étendu a déjà des problèmes de convergence. En plus de complexifier l'implémentation d'une telle méthode, nous n'avons que très peu de certitude quant à la stabilité d'un tel modèle. Une chaîne de Markov multi-état pourrait être envisagée, mais aurait un coût conséquent pour ratisser large.

Enfin, comme on l'a défini, l'ÉdC du réservoir ne semble pas être une donnée suffisante et ne garantit pas forcément un meilleur contrôle dans une population car même si découlant d'une estimation de l'énergie assez fiable. Nous n'avons pas assez d'informations pour savoir si le réservoir a besoin de chauffer ou si le client est toujours dans sa zone de confort. En effet, il serait plus simple d'envoyer la RE au complet mais l'information serait trop lourde à transmettre. Les redéfinitions de $E_{\max}$ et $E_{\min}$ ainsi que le volume d'eau "chaude disponible" sont des moyens de transmettre cette information de manière concise. Il serait intéressant de voir leur efficacité sur une application réelle.

6.2 Améliorations futures

Afin d'améliorer la performance de notre modèle, on recommande ce qui suit :

- **Identification** : Même si scipy a montré de meilleurs résultats que DeepyMoD, il serait intéressant d'évaluer d'autres méthodes ou algorithmes de découverte du modèle pour les EDP non linéaires. Cela pourrait à l'identification de certains phénomènes non pris en compte dans notre modèle EDP. En effet, comme soulignés à la fin du chapitre 4, au delà de la propagation de l'erreur produite par le terme non linéaire D_a, des phénomènes physiques que nous avons omis dans notre modèle EDP seraient non négligeable. Nous pouvons déjà penser au turbulence qui peuvent survenir au bas du réservoir lors du tirage d'eau. De plus, le terme non linéaire D_a n'a pas eu de coefficient car nous avons supposé qu'il était bien défini. Il serait intéressant de lui en ajouter et d'estimer ce dernier.
- **Optimisation du filtre de Kalman** : Dans le cadre où on a la possibilité de mettre des capteurs à d'autres positions et à l'intérieur du réservoir, il serait intéressant de se pencher sur le nombre optimal de sondes de température et leur position pour avoir la meilleure estimation de la distribution de température. En effet, comme remarqué en comparant les estimations, le CEE200 grâce à ses sondes situées plus bas, arrive à de meilleures estimations mais les erreurs semblent plus importantes pour les sondes supérieures. De plus, l'estimation de la matrice de covariance pourrait être étudiée pour chaque état dans lequel se trouve le CEE. En effet, nous pourrons localement optimiser le filtre de Kalman, afin d'obtenir une plus faible erreur. Par ailleurs, d'autres filtres permettant d'appréhender la non-linéarité du système n'ont pas été étudiés, notamment le filtre de Kalman sans parfum, qui est réputé plus stable que le filtre de Kalman étendu tout en n'ayant pas besoin de procéder à une linéarisation du modèle.
- **Application du filtre sur les sondes externes** : Dans le cas où l'insertion des capteurs et leur positionnement ne peuvent pas être prédéfinis, il faudra réadapter notre modèle pour les sondes externes. Pour ce qui est de l'estimation de la puissance, nous avons conclu que cela ne poserait pas de problème. Cependant, le capteur étant à l'extérieur, une étude du transfert thermique entre l'intérieur du réservoir et sa paroi, dans la zone non isolée, serait nécessaire. De plus, il faudrait vérifier si l'hypothèse d'un bruit blanc Gaussien est toujours valide. À cela, s'ajoute le changement de période d'échantillonnage qui passe de 1 seconde à 1 minute. Il faut donc voir son impact sur nos filtres de Kalman ou bien se pencher sur un filtre de Kalman à multiples fréquences vu que les matrices de l'équation (5.16) dépendent de l'état et du temps.
- **Importance de la connaissance du débit** : Le système expérimental utilisé dans cette recherche est muni d'un débitmètre, ce qui n'est pas le cas pour beaucoup d'installations réelles. En plus, comme expliqué plus haut, le débit serait difficile à estimer. Il serait intéressant dans ce cas de déterminer un processus d'estimation plus fiable et

robuste. Il faudra aussi tester la robustesse de l'équation d'état quant à l'observabilité du système lorsque le débit est estimé en temps réel. Une étude comparative pour évaluer la nécessité d'un débit devra être effectuée de ce fait.

Finalement est-ce qu'on peut penser à étudier la conception de l'observateur en se basant sur le modèle EDP ? En plus, le modèle EDP fournit un formalisme mathématique convenable pour la recherche sur le placement optimal des actionneurs et capteurs.

RÉFÉRENCES

[1] Jun 2022. [En ligne]. Disponible : https://ressources-naturelles.canada.ca/efficacite-energetique/efficacite-energetique-produits/eclairage/13732

[2] J. Solis, "Développement d'un estimateur d'état énergétique d'un chauffe-eau pour un contrôle par champ moyen," Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, déc. 2015.

[3] M. S. Nazir, F. D. Galiana et A. Prieur, "Unit commitment incorporating histogram control of electric loads with energy storage," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 31, nº. 4, p. 2857–2866, juill. 2016.

[4] J. Laurent et R. Malhame, "A physically-based computer model of aggregate electric water heating loads," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, nº. 3, p. 1209–1217, août 1994.

[5] B. Bhattarai, M. Maharjan, S. Hanif, M. Cai et R. Pratt, "Transactive electric water heater agent : Design and performance evaluation," dans *2020 IEEE Power & Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*, Washington, DC, USA, févr. 2020, p. 1–5, iSSN : 2472-8152.

[6] K. Vanthournout, R. D'hulst, D. Geysen et G. Jacobs, "A smart domestic hot water buffer," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 3, nº. 4, p. 2121–2127, déc. 2012.

[7] Z. Xu, R. Diao, S. Lu, J. Lian et Y. Zhang, "Modeling of electric water heaters for demand response : A baseline PDE model," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 5, nº. 5, p. 2203–2210, sept. 2014.

[8] F. Müller, "Approximating the solution of the discharging process in a domestic hot water storage tank," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 27, nº. 1, p. 141–161, janv. 2021.

[9] I. A. S. Ehtiwesh et A. C. M. Sousa, "Numerical model for the thermal behavior of thermocline storage tanks," *Heat and Mass Transfer*, vol. 54, nº. 3, p. 831–839, mars 2018.

[10] E. Vrettos, S. Koch et G. Andersson, "Load frequency control by aggregations of thermally stratified electric water heaters," dans *2012 3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe)*, oct. 2012, p. 1–8, iSSN : 2165-4824.

[11] W. Qu et Y. Liang, "Stability and convergence of the Crank-Nicolson scheme for a class of variable-coefficient tempered fractional diffusion equations," *Advances in Difference Equations*, vol. 2017, nº. 1, p. 108, avr. 2017.

[12] T. Kreuzinger, M. Bitzer et W. Marquardt, “Mathematical modelling of a domestic heating system with stratified storage tank,” *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 14, n°. 3, p. 231–248, juin 2008.

[13] J. Berg et K. Nyström, “Data-driven discovery of PDEs in complex datasets,” *Journal of Computational Physics*, vol. 384, p. 239–252, mai 2019.

[14] G.-J. Both, S. Choudhury, P. Sens et R. Kusters, “Deepmod : Deep learning for model discovery in noisy data,” *Journal of Computational Physics*, vol. 428, p. 109985, mai 2021.

[15] L. Guo et S. A. Billings, “Identification of partial differential equation models for continuous spatio-temporal dynamical systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, vol. 53, n°. 8, p. 657–661, août 2006.

[16] D. Coca et S. A. Billings, “Identification of finite dimensional models of infinite dimensional dynamical systems,” *Automatica*, vol. 38, n°. 11, p. 1851–1865, nov. 2002.

[17] H.-X. Li et C. Qi, “Modeling of distributed parameter systems for applications—a synthesized review from time–space separation,” *Journal of Process Control*, vol. 20, n°. 8, p. 891–901, sept. 2010.

[18] M. Zuñiga, K. Agbossou, A. Cardenas et L. Boulon, “Parameter estimation of electric water heater models using extended Kalman filter,” dans *IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Beijing, China, oct. 2017, p. 386–391.

[19] M. Ferrari, A. Cuneo, M. Pascenti et A. Traverso, “Real-time state of charge estimation in thermal storage vessels applied to a smart polygeneration grid,” *Applied Energy*, vol. 206, p. 90–100, nov. 2017.

[20] N. Beeker, P. Malisani et N. Petit, “Dynamical modeling for electric hot water tanks,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, n°. 11, p. 78–85, 2015.

[21] I. De la Cruz-Loredo, D. Zinsmeister, T. Lickleder er, C. E. Ugalde-Loo, D. A. Morales, H. Bastida, V. S. Perić et A. Saleem, “Experimental validation of a hybrid 1-d multi-node model of a hot water thermal energy storage tank,” *Applied Energy*, vol. 332, p. 120556, févr. 2023.

[22] D. A. Morales Sandoval, I. De La Cruz Loredo, H. Bastida, J. J. Badman et C. E. Ugalde-Loo, “Design and verification of an effective state-of-charge estimator for thermal energy storage,” *IET Smart Grid*, vol. 4, n°. 2, p. 202–214, mars 2021.

[23] T. Kreuzinger, M. Bitzer et W. Marquardt, “State estimation of a stratified storage tank,” *Control Engineering Practice*, vol. 16, n°. 3, p. 308–320, mars 2008.

[24] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2022, vol. 19.

[25] M. Hawlader, T. Bong et T. Lee, "A thermally stratified solar water storage tank," *International Journal of Solar Energy*, vol. 6, n°. 2, p. 119–138, 1988.

[26] T. A. Zang, "On the rotation and skew-symmetric forms for incompressible flow simulations," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 7, n°. 1, p. 27–40, janv. 1991.

[27] J. Crank et P. Nicolson, "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type," *Advances in Computational Mathematics*, vol. 6, n°. 1, p. 207–226, 1996.

[28] G.-J. Both, "Model discovery of partial differential equations," Thèse de doctorat, Université Paris sciences et lettres, 2021.

[29] S. Rouchier, *Chapter 3 A bayesian data analysis workflow | Building energy statistical modelling*, Jul 2022.

[30] D. Yudianto et X. Yuebo, "A comparison of some numerical methods in solving 1-D steady-state advection dispersion reaction equation," *Civil Engineering and Environmental Systems*, vol. 27, n°. 2, p. 155–172, juin 2010.

[31] G. Bishop, G. Welch *et al.*, "An introduction to the Kalman filter," *Proc of SIGGRAPH, Course*, vol. 8, n°. 27599-23175, p. 41, 2001.

[32] B. Ni et Q. Zhang, "Stability of the Kalman filter for output error systems," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, n°. 28, p. 1106–1111, oct. 2015.

[33] Q. Zhang, "On stability of the Kalman filter for discrete time output error systems," *Systems & Control Letters*, vol. 107, p. 84–91, sept. 2017.

[34] A. Kozlov et T. Aleksandrovich, "Uniform complete controllability of linear discrete systems with varying structure," НАВУКОВА-ПРАКТЫЧНЫ ЧАСОПІС, 2020.

[35] C. Jaganath, A. Ridley et D. S. Bernstein, "A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems," dans *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.* IEEE, 2005, p. 3630–3635.

[36] M. I. Ribeiro, "Kalman and extended Kalman filters : Concept, derivation and properties," *Institute for Systems and Robotics*, vol. 43, n°. 46, p. 3736–3741, 2004.

[37] B. D. Anderson et J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Courier Corporation, 2012.

[38] S. R. Nekoo, "Tutorial and review on the state-dependent riccati equation," *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 8, n°. 2, p. 109–166, 2019.

[39] H. Beikzadeh et H. D. Taghirad, “Stability analysis of the discrete-time difference sdre state estimator in a noisy environment,” dans *2009 IEEE International Conference on Control and Automation*. IEEE, 2009, p. 1751–1756.

[40] P. Matisko et V. Havlena, “Noise covariance estimation for Kalman filter tuning using bayesian approach and monte carlo,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 27, n°. 11, p. 957–973, déc. 2013.

[41] T. Kreuzinger, M. Bitzer et W. Marquardt, “State estimation of a stratified storage tank,” *Control Engineering Practice*, vol. 16, n°. 3, p. 308–320, mars 2008.

ANNEXE A CARACTÉRISTIQUES DES RÉSERVOIRS

Le tableau A.1 montre les données qu'on a extraites de par la fiche technique du fabricant.

Tableau A.1 Caractérisques des réservoirs selon leur fiche technique

Réservoir	CEE300	CEE200
Volume (L)	281	193
Diamètre externe (mm)	580	580
Épaisseur de l'isolant (mm)	35	35
Puissance nominale des éléments chauffants (kW)	4.8	2.8
Efficacité énergétique	37%	37%
Nombre de capteurs immergés	14	10
Nombre d'éléments chauffants	2	1

Comme la hauteur indiquée est celle du réservoir dans sa globalité et non celle de la partie contenant l'eau, il nous fallait trouver la hauteur de notre réservoir. En considérant notre modèle de réservoir comme cylindrique, nous obtenons, en fonction du volume et du diamètre interne [1], nous trouvons comme hauteur équivalente

$$L = \begin{cases} 1376 \text{ mm pour le CEE300} \\ 945 \text{ mm pour le CEE200} \end{cases} \tag{A.1}$$

Par la suite, nous avons à travers le plan de la sonde multipoint que le capteur le plus bas se trouve à 1.27 cm par rapport au fond et chacun des capteurs est espacé de l'autre de 10.27cm. Dans notre modélisation nous avons négligé ce petit écart de 1.27 cm de la sonde la plus basse.

Par la suite, n'ayant pas de plan concernant le montage des réservoirs, il nous a fallu approximer la position des éléments chauffants, nous avons approximé leur valeur en observant les mesures des sondes lors de périodes de chauffe. Ce qui nous a permis de déterminer la position des éléments chauffants et de déduire par mesure celle de leur thermostat correspondant et des sondes des contrôleurs.

Enfin, le tableau A.3 résumant les positions des capteurs de contrôleurs suivant le réservoir.

1. diamètre interne = diamètre externe − 2 × épaisseur de l'isolant

TABLEAU A.2 Position des éléments chauffants et de leur thermostats correspondant en mm

Réservoir	CEE300	CEE200
Élément chauffant du bas	205.4	205.4
Thermostat du haut	285.4	285.4
Élément chauffant du haut	1055.4	
Thermostat du bas	1135.4	

TABLEAU A.3 Position des sondes control et reference dans les réservoirs

Sondes contrôleur	Position(mm)
CEE300_ctrl_sens1	175.4
CEE300_ctrl_sens2	345.4
CEE300_ctrl_sens3	1205.4
CEE300_ref_sens1	255.4
CEE300_ref_sens2	375.4
CEE300_ref_sens3	1135.4
CEE200_ctrl_sens1	35.4
CEE200_ctrl_sens2	175.4
CEE200_ctrl_sens3	365.4
CEE200_ref_sens2	265.4
CEE200_ref_sens3	335.4

ANNEXE B DÉTAILS DU CALCUL DE LA JACOBIENNE DE LA FONCTION DE TRANSITION D'ÉTAT

Dans cette partie, nous allons détailler les outils mathématiques utilisés pour l'élaboration de la jacobienne de la fonction de transition. De ce fait, posons les vecteurs $X, Z \in \mathbb{R}^N$ et la matrice $A(X) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ qui est fonction des éléments du vecteur X, on a

$$A(X) = \begin{bmatrix} a_{11}(X) & \dots & a_{1N}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(X) & \dots & a_{NN}(X) \end{bmatrix}.$$

Par la suite, en posant les fonctions

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\mapsto \mathbb{R}^N \\ (X, Z) &\mapsto A(X)Z, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^N &\mapsto \mathbb{R}^N \\ X &\mapsto h(X), \end{aligned}$$

nous avons

$$f_A(X, h(X)) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} a_{1i}(X)h(X)^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} a_{Ni}(X)h(X)^i \end{bmatrix}. \tag{B.1}$$

Par la suite, soit $\nabla_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_N} \end{bmatrix}$, l'opérateur nabla par rapport au vecteur X. Nous posons

$$J_{f_A} := \nabla_X f_A(X, h(X)) \tag{B.2}$$

la jacobienne de la fonction $f_A(X, h(X))$ par rapport au vecteur X, on a

$$J_{f_A} = \nabla_X \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} a_{1i}(X)h(X)^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} a_{Ni}(X)h(X)^i \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} [\nabla_X a_{1i}(X)] h(X)^i + a_{1i}(X)[\nabla_X h(X)^i] \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} [\nabla_X a_{Ni}(X)] h(X)^i + a_{Ni}(X)[\nabla_X h(X)^i] \end{bmatrix} \\
&= d_A(X, h(X)) + A(X)[\nabla_X h(X)] \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

avec

$$
d_A(X,Z) := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_1}(X) Z^i & \dots & \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_N}(X) Z^i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{Ni}}{\partial x_1}(X) Z^i & \dots & \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{Ni}}{\partial x_N}(X) Z^i \end{bmatrix}, \text{ pour tout } X, Z \in \mathbb{R}^N.
$$

Par la suite, nous supposons que A est inversible pour tout $X \in \mathbb{R}^N$, nous cherchons un moyen de calculer $d_{A^{-1}}(Z)$ sans avoir à connaître analytiquement $A^{-1}(X)$ vu qu'on le calcule numériquement. Pour ce faire, prenons, pour $X \in \mathbb{R}^N$, on a

$$
\begin{aligned}
\nabla_X h(X) =& \nabla_X (A(X) A^{-1}(X) h(X)) \\
=& d_A(X, A^{-1}(X)h(X)) + A(X)[d_{A^{-1}}(X, h(X)) + A^{-1}(X)[\nabla_X h(X)]] \\
\cancel{\nabla_X h(X)} =& d_A(X, A^{-1}(X)h(X)) + \cancel{\nabla_X h(X)} + A(X) d_{A^{-1}}(X, h(X)) \\
A(X) d_{A^{-1}}(X, h(X)) =& - d_A(X, A^{-1}(X)h(X)).
\end{aligned}
$$

Enfin, nous avons

$$
d_{A^{-1}}(X, h(X)) = -A^{-1}(X) d_A(X, A^{-1}(X) h(X)) \qquad \text{(B.4)}
$$

qui nous permet de calculer $d_{A^{-1}}(Z)$. Ainsi (B.3) et (B.4) nous permettront d'implémenter la Jacobienne à notre système.

Pour rappel, nous avons comme équation d'état

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} =& Z_{1_k}(T_k)^{-1} Z_{2_k}(T_k) T_k + Z_{1_k}(T_k)^{-1} Z_3 U_k \qquad \text{(B.5)} \\
=& f(T_k, U_k). \qquad \text{(4.21)}
\end{aligned}
$$

Pour l'implémentation de notre filtre de Kalman étendu, posons $F_k := \nabla_{T_k} f(\hat{T}_{k|k}, U_k)$ la Jacobienne de notre fonction de transition d'état appliquée à l'estimée au temps précédent,

nous avons

$$\begin{aligned}F_k =& {Z_1}_k^{-1}(\hat{T}_{k|k})[{Z_2}_k(\hat{T}_{k|k}) + d_{{Z_2}_k}(\hat{T}_{k|k}, \hat{T}_{k|k})] + d_{{Z_1}_k^{-1}}(\hat{T}_{k|k}, {Z_2}_k\hat{T}_{k|k}) \\ &+ d_{{Z_1}_k^{-1}}(\hat{T}_{k|k}, Z_3U_k) \\ =& {Z_1}_k^{-1}(\hat{T}_{k|k}){Z_2}_k(\hat{T}_{k|k}) + {Z_1}_k^{-1}(\hat{T}_{k|k})d_{{Z_2}_k}(\hat{T}_{k|k}, \hat{T}_{k|k}) \\ &+ d_{{Z_1}_k^{-1}}(\hat{T}_{k|k}, {Z_2}_k\hat{T}_{k|k}) + d_{{Z_1}_k^{-1}}(\hat{T}_{k|k}, Z_3U_k)\end{aligned}$$

Nous allons calculer $d_{{Z_2}_k}$. Pour rappel,

$$Z_{2_k}(T_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{1_k}^2 & \mu_{4_k}^2 & -\mu_{3_k}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{1_k}^3 & \mu_{4_k}^3 & -\mu_{3_k}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{1_k}^{N-1} & \mu_{4_k}^{N-1} & -\mu_{3_k}^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

avec

$$\mu_{1_k}^n = \mu_{1_k} + \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2},$$

$$\mu_{3_k}^n = \mu_{3_k} - \frac{D_a(T_k^n)}{2\Delta x^2},$$

$$\mu_{4_k}^n = \mu_{4_k} - \frac{D_a(T_k^n)}{\Delta x^2}.$$

De ce fait, pour $X \in \mathbb{R}^N$,

$$d_{{Z_2}_k}(T_k, X) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\nabla_{T_k} D_a(T_k^2)}{2\Delta x^2}(X^1 - 2X^2 + X^3) \\ \vdots \\ \frac{\nabla_{T_k} D_a(T_k^i)}{2\Delta x^2}(X^{i-1} - 2X^i + X^{i+1}) \\ \vdots \\ \frac{\nabla_{T_k} D_a(T_k^{N-1})}{2\Delta x^2}(X^{N-2} - 2X^{N-1} + X^N) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, pour $i \in \{2,\ \ldots,\ N-1\}$, on a

$$D_a(T_k^i) = \begin{cases} (\kappa d)^2 \sqrt{-g\upsilon(T_k^i)\dfrac{\partial T_k^{i+1} - T_k^{i-1}}{2\Delta x}} & \text{si } T_k^{i+1} < T_k^{i-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, nous avons

$$\nabla_{T_k} D_a(T_k^i) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^{i-1}} & \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^i} & \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^{i+1}} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

De ce fait,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^{i-1}} \\ \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^i} \\ \dfrac{\partial D_a(T_k^i)}{\partial T_k^{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{cases} (\kappa d)^2 \sqrt{\dfrac{g}{2\Delta x^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{\upsilon(T_k^i)}{T_k^{i+1} - T_k^{i-1}}} \\ \dfrac{\upsilon'(T_k^i)}{2}\sqrt{-\dfrac{T_k^{i+1} - T_k^{i-1}}{\upsilon(T_k^i)}} \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{\upsilon(T_k^i)}{T_k^{i+1} - T_k^{i-1}}} \end{bmatrix} & \text{si } T_k^{i+1} < T_k^{i-1} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \text{sinon} \end{cases},$$

avec $\upsilon'(T)$ la dérivée par rapport à T du coefficient d'expansion thermique. N'ayant pas de fonction analytique de ce coefficient, la dérivé sera obtenue numériquement.

De même, en observant l'expression de Z_{1_k}, nous avons que $d_{Z_{1_k}}(T_k, X) = -d_{Z_{2_k}}(T_k, X)$. En utilisant, l'équation (B.4), nous pouvons implémenter $\hat{T}_{k|k}$. Ainsi, nous avons tous les outils nécessaires au calcul de F_k