

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Étude de méthodes d'intégration temporelle non linéaire, A-stable et d'ordre
élevé à correction différée**

BAPTISTE BERLIOUX

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences* appliquées
Génie mécanique

Juillet 2023

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Étude de méthodes d'intégration temporelle non linéaire, A-stable et d'ordre
élevé à correction différée**

présenté par **Baptiste BERLIOUX**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences* appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Jérôme VÉTEL, président

André GARON, membre et directeur de recherche

Dominique PELLETIER, membre et codirecteur de recherche

Stéphane ÉTIENNE, membre et codirecteur de recherche

Ricardo CAMARERO, membre

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, André Garon, pour son soutien inébranlable, ses conseils éclairés et son expertise précieuse. Sa disponibilité, sa patience et son engagement constant ont grandement contribué à l'aboutissement de ce projet. J'ai particulièrement aimé l'ambiance de travail chaleureuse et nos discussions partagées lors des nombreux restaurants et pauses croissants. Je suis reconnaissant d'avoir eu la chance de travailler sous sa direction.

Je remercie également mes codirecteurs, Stéphane Étienne et Dominique Pelletier, pour leurs encadrements.

Je remercie aussi particulièrement Arthur. Tes connaissances approfondies en C++ et Linux ont été d'une grande aide pour moi, et je suis reconnaissant de t'avoir comme collègue. En dehors du travail, j'ai également apprécié notre amitié grandissante. Les pauses-café et les déjeuners partagés ont été des moments de détente où nous avons pu discuter de tout et de rien.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Yves Bourgault pour ses conseils précieux et ses échanges passionnants lors de nos nombreuses discussions sur Zoom. Je tiens également à le remercier de m'avoir donné l'opportunité de participer à la conférence CMS à Ottawa, une expérience extrêmement enrichissante,

Ma famille et mes amis méritent également une mention spéciale. Leur soutien indéfectible, leurs encouragements constants ont été mes sources de motivation pendant cette aventure. Leur confiance en moi m'a poussé à donner le meilleur de moi-même et à persévérer, même dans les moments difficiles.

RÉSUMÉ

En mécanique des fluides, les problèmes sont souvent raides, comme notamment ceux liés aux équations de Navier-Stokes, rendant les calculs numériques généralement instables. Il existe tout de même quelques méthodes d'intégrations temporelles stables telles que les méthodes BDF (Backward Differentiation Formulae) d'ordre 1 et 2. Cependant, la précision de ces méthodes est donc limitée. Ce document présente alors une méthodologie permettant d'augmenter progressivement l'ordre de ces deux méthodes à partir de corrections différées tout en conservant l'avantage de leurs stabilités inconditionnelles.

La stratégie adoptée consiste à substituer progressivement les termes dominants de l'erreur locale de troncature dans l'expression initiale des méthodes BDF1 et BDF2. Le terme substitué est alors la correction, interpolée par un polynôme de Newton basé sur la solution obtenue à partir de la méthode d'ordre inférieur, censée être la plus précise. Par récursivité de leurs constructions, il est démontré que l'ordre p de ces méthodes, appelées DC_p , peut être augmenté indéfiniment, permettant alors de dépasser la limite théorique des méthodes BDF. En effet, au-delà de l'ordre 6, les méthodes BDF ne sont plus A-stable, devenant inutilisables.

Pour donner suite à ce développement théorique, des tests numériques ont été menés démontrant progressivement la capacité de ces méthodes en la résolution d'équations aux dérivées ordinaires (EDO), d'équations aux dérivées partielles paraboliques (EDP) 1D puis 2D ainsi que les équations de Navier-Stokes. Ces études numériques ont été effectuées avec des méthodes allant jusqu'à l'ordre 5, suffisant pour observer le comportement général de ces méthodes. Cette limitation en ordre permet aussi de réduire la complexité de mise en œuvre ainsi que le coût de calcul. En effet, la correction différée d'ordre p est interpolée à partir des solutions d'ordre $p - 1$. Ainsi, plus cet ordre est élevé, plus il est nécessaire de conserver des solutions antérieures, augmentant ainsi le coût de calcul. Dans l'optique de limiter celui-ci, il est ambitionné de construire un algorithme à pas de temps adaptatifs afin de minimiser le nombre d'étapes de temps. Avant cela, la robustesse des méthodes quant à l'évolution des pas de temps est vérifiée. Pour les EDP, il s'avère que la configuration la plus délicate survient lorsque l'évolution des pas de temps est brusque. Cela entraîne des pertes de précision pour les méthodes dont les ordres théoriques sont les plus élevés. Ces pertes de précision sont encore plus importantes lorsque les conditions limites sont dépendantes du temps du fait d'une concentration des erreurs aux bords. La méthode de Verwer permet alors d'améliorer la précision des méthodes sans résoudre parfaitement ce phénomène de perte d'ordre. Finalement, il est démontré l'importance des paramètres propres aux problèmes révélant ou inhibant ce

comportement encore incompris.

Cependant, celui-ci apparaît pour une configuration extrême dans laquelle les pas de temps sont alternés, seule configuration problématique. En prêtant une attention particulière à l'évolution des pas de temps, leurs adaptations semblent envisageables, limitant ainsi le coût de calcul des méthodes DC/BDF.

ABSTRACT

In fluid mechanics, problems are often stiff, such as those related to the Navier-Stokes equations, making numerical calculations generally unstable. There are, however, a few stable time integration methods, such as the 1st and 2nd order BDF (Backward Differentiation Formulae). However, the accuracy of these methods is limited. This document therefore presents a methodology for progressively increasing the order of these two methods using deferred corrections, while retaining the advantage of their unconditional stability.

The strategy adopted consists in successively substituting the dominant terms of the local truncation error in the initial expression of the BDF1 and BDF2 methods. The substituted term is then the correction, interpolated by a Newton polynomial based on the solution obtained from the lower-order method, assumed to be the most accurate. By recursively of their constructions, it is shown that the order p of these methods, called DC_p , can be increased indefinitely, thus exceeding the theoretical limit of BDF methods. Indeed, beyond order 6, BDF methods are no longer A-stable, becoming unusable.

Following this theoretical development, numerical tests were carried out progressively demonstrating the ability of these methods to solve ordinary differential equations (ODEs), 1D then 2D parabolic partial differential equations (PDEs) and Navier-Stokes equations. These numerical studies were carried out with methods up to order 5, sufficient to observe the general behaviour of these methods. This limitation in order also makes it possible to reduce the complexity of implementation as well as the computational cost. Indeed, the deferred correction of order p is interpolated from solutions of order $p - 1$. The higher the order, the greater the need to retain previous solutions, thus increasing the computational cost. In order to limit the latter, we aim to build an algorithm with adaptive time steps to minimize the number of time steps. Prior to this, the robustness of the methods with respect to the evolution of time steps is verified. For PDEs, it turns out that the most delicate configuration occurs when the evolution of time steps is abrupt. This leads to accuracy losses for methods with the highest theoretical orders. These accuracy losses are even greater when the boundary conditions are time-dependent, as errors are concentrated at the edges. In this case, Verwer's method improves the accuracy of the methods, without perfectly resolving this loss-of-order phenomenon. Finally, the importance of problem-specific parameters in revealing or inhibiting this as yet misunderstood behaviour is revealed.

However, it appears for an extreme configuration in which time steps are in alternating sequence. This is the only problematic configuration. By careful attention to the evolution

of the time steps, their adaptation seems viable, thus limiting the computational cost of the DC/BDF methods.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xvii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xxi
LISTE DES ANNEXES	xxii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte	1
1.2 Objectifs de recherche	1
1.3 Plan du mémoire	2
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	3
CHAPITRE 3 CONSTRUCTION DES MÉTHODES DC/BDF1 NON LINÉAIRES	5
3.1 Méthode BDF1 - Ordre 1	6
3.2 Méthode DC2/BDF1 - Ordre 2	7
3.3 Méthode DC3/BDF1 - Ordre 3	8
3.4 Méthodes DC4/BDF1 et DC5/BDF1 - Ordres 4 et 5	10
3.5 Synthèse	11
3.6 Démarrage des méthodes	12
CHAPITRE 4 CONSTRUCTION DES MÉTHODES DC/BDF2 NON LINÉAIRES	14
4.1 Méthode BDF2 - Ordre 2	14
4.2 Méthode DC3/BDF2 - Ordre 3	15
4.3 Méthode DC4/BDF2 - Ordre 4	17
4.4 Méthodes DC5/BDF2 et DC6/BDF2 - Ordres 5 et 6	18

CHAPITRE 5	VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDO LINÉAIRES	19
5.1	Description du protocole de test	19
5.1.1	Solutions manufacturées	19
5.1.2	Norme infinie	20
5.1.3	Caractéristiques de résolution	20
5.1.4	Configurations des pas de temps	20
5.2	Configuration 1 - Pas de temps constants	21
5.3	Configuration 2 - Pas de temps croissants	22
5.4	Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants	24
5.5	Configuration 4 - Pas de temps alternés	25
5.6	Synthèse	26
CHAPITRE 6	VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDO NON LINÉAIRES	29
6.1	Configuration 1 - Pas de temps constants	30
6.2	Configuration 2 - Pas de temps croissants	30
6.3	Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants	31
6.4	Configuration 4 - Pas de temps alternés	32
6.5	Synthèse	33
CHAPITRE 7	DESCRIPTION DU PROTOCOLE DE VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 1D (DIFFUSION)	36
7.1	Résolution spatiale - Forme faible	36
7.2	Solutions manufacturées	37
7.3	Norme	38
7.4	Étude de convergence	38
7.5	Caractéristiques de résolution	39
CHAPITRE 8	VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 1D (DIFFUSION)	40
8.1	Paramètres	40
8.2	Configuration 1 - Pas de temps constants	40
8.3	Configuration 2 - Pas de temps croissants	41
8.4	Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants	42
8.5	Configuration 4 - Pas de temps alternés	43

8.6 Synthèse	45
CHAPITRE 9 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 2D (DIFFUSION)	48
9.1 Configuration 1 - Pas de temps constants	49
9.2 Configuration 2 - Pas de temps croissants	50
9.3 Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants	51
9.4 Configuration 4 - Pas de temps alternés	52
9.5 Synthèse	53
CHAPITRE 10 PARAMÈTRES D'INFLUENCES	57
10.1 Degré des polynômes d'interpolation spatiale	57
10.2 Influence du maillage	59
10.3 Conditions limites	62
10.3.1 Méthode de Verwer	62
10.3.2 Conditions de Neumann	65
10.4 Influence du coefficient de diffusion	67
10.5 Synthèse	69
CHAPITRE 11 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES	71
11.1 Premier problème de Stokes	72
11.2 Second problème de Stokes	75
11.3 Navier-Stokes : Problème de Poiseuille avec gradient de pression périodique	78
11.4 Synthèse	85
CHAPITRE 12 CONCLUSION	86
12.1 Synthèse des travaux	86
12.2 Limitations de la solution proposée	87
12.3 Améliorations futures	88
RÉFÉRENCES	89
ANNEXES	92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Table des différences divisées pour méthode DC2/BDF1 . . .	8
Tableau 5.1	Solutions manufacturées et leurs termes sources (EDO linéaire)	19
Tableau 5.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps constants	21
Tableau 5.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps constants	22
Tableau 5.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants	23
Tableau 5.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants	23
Tableau 5.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants puis décroissants	24
Tableau 5.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants puis décroissants	24
Tableau 5.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps alternés	25
Tableau 5.9	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps alternés	25
Tableau 6.1	Solutions manufacturées et leurs termes sources (EDO non linéaire)	29
Tableau 6.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps constants	30
Tableau 6.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps constants	30
Tableau 6.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants	31
Tableau 6.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants	31
Tableau 6.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants puis décroissants	32
Tableau 6.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants puis décroissants	32

Tableau 6.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps alternés	33
Tableau 6.9	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps alternés	33
Tableau 7.1	Solutions manufacturées et leurs termes sources	37
Tableau 7.2	Conditions limites des solutions T_1 et T_2	37
Tableau 8.1	Paramètres des études de convergence pour EDP paraboliques 1D	40
Tableau 8.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps constants	41
Tableau 8.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps constants	41
Tableau 8.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants	42
Tableau 8.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants	42
Tableau 8.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants puis décroissants	43
Tableau 8.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants puis décroissants	43
Tableau 8.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés	44
Tableau 8.9	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés	44
Tableau 9.1	Solutions manufacturées et leurs termes sources	48
Tableau 9.2	Paramètres des études de convergence pour EDP paraboliques 2D	49
Tableau 9.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps constants	49
Tableau 9.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps constants	50
Tableau 9.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants	51
Tableau 9.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants	51

Tableau 9.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants puis décroissants	52
Tableau 9.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants puis décroissants	52
Tableau 9.9	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps alternés	53
Tableau 9.10	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps alternés	53
Tableau 10.1	Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence de l'ordre d'interpolation spatiale	58
Tableau 10.2	Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du raffinement du maillage	59
Tableau 10.3	Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence de l'imposition des conditions limites	64
Tableau 10.4	Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du type de conditions limites	66
Tableau 10.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés et conditions de Neumann .	66
Tableau 10.6	Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du coefficient de diffusion k_D	67
Tableau 11.1	Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps constants	73
Tableau 11.2	Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants	73
Tableau 11.3	Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants puis décroissants	74
Tableau 11.4	Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps alternés	74
Tableau 11.5	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps constants	76
Tableau 11.6	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps croissants	76
Tableau 11.7	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps croissants puis décroissants	77

Tableau 11.8	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps alternés	77
Tableau 11.9	Paramètres pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression periodique	79
Tableau 11.10	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps constants	81
Tableau 11.11	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps croissants	82
Tableau 11.12	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps croissants puis décroissants	82
Tableau 11.13	Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps alternés	83
Tableau B.1	Table des différences divisées	97
Tableau C.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps constant	98
Tableau C.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps constant	98
Tableau C.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants	99
Tableau C.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants	99
Tableau C.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants puis décroissants	99
Tableau C.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants puis décroissants	100
Tableau C.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps alternés	100
Tableau C.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps alternés	100
Tableau D.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps constants	101

Tableau D.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps constants	101
Tableau D.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants	101
Tableau D.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants	102
Tableau D.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants puis décroissants	102
Tableau D.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants puis décroissants	102
Tableau D.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps alternés	103
Tableau D.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps alternés	103
Tableau E.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps constants	104
Tableau E.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps constants	104
Tableau E.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants	105
Tableau E.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants	105
Tableau E.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants puis décroissants	105
Tableau E.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants puis décroissants	106
Tableau E.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés	106
Tableau E.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés	106
Tableau F.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps constants	107
Tableau F.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps constants	107
Tableau F.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants	108

Tableau F.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants	108
Tableau F.5	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants puis décroissants	108
Tableau F.6	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants puis décroissants	109
Tableau F.7	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps alternés	109
Tableau F.8	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps alternés	109
Tableau G.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés et conditions de Neumann .	114
Tableau H.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps constants	116
Tableau H.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants	116
Tableau H.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants/décroissants .	117
Tableau H.4	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1 ^{er} problème de Stokes avec pas de temps alternés	117
Tableau I.1	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps constants	118
Tableau I.2	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps croissants	118
Tableau I.3	Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2 ^d problème de Stokes avec pas de temps croissants/décroissants .	119

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Schéma de la construction des méthodes DC/BDF1	12
Figure 5.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	26
Figure 5.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	27
Figure 5.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	27
Figure 5.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	28
Figure 6.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	34
Figure 6.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	34
Figure 6.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	35
Figure 6.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	35
Figure 8.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	45
Figure 8.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲- : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...●... : <i>Alternés</i>)	46

Figure 8.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	46
Figure 8.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	47
Figure 9.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	54
Figure 9.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	55
Figure 9.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	55
Figure 9.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 (—+ : <i>Constants</i> ; -x- : <i>Croissants</i> ; --▲ : <i>Croissants/Décroissants</i> ; ...● : <i>Alternés</i>)	56
Figure 10.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés (...● : P_2 ; -x- : P_3 ; --▲ : P_4) . . .	58
Figure 10.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés (...● : P_2 ; -x- : P_3 ; --▲ : P_4) . . .	59
Figure 10.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés (-x- : 5 elm; ...● : 10 elm; --▲ : 100 elm)	60
Figure 10.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés (-x- : 5 elm; ...● : 10 elm; --▲ : 100 elm)	60
Figure 10.5	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés (-x- : 5 elm; ...● : 10 elm; --▲ : 100 elm)	61
Figure 10.6	Répartition de l'erreur de la méthode DC5/BDF1 dans le domaine pour la solution T_2 avec des pas de temps alternés	62
Figure 10.7	Schéma du domaine	63
Figure 10.8	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés (...● : C.L fortes; --▲ : C.L faibles)	65

Figure 10.9	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\text{---}\blacktriangle\text{---}$: $k_D = 0.001$; $\text{---}\bullet\text{---}$: $k_D = 100$; $\text{---}\times\text{---}$: $k_D = 1000$)	68
Figure 10.10	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: $k_D = 0.001$; $\text{---}\bullet\text{---}$: $k_D = 100$; $\text{---}\times\text{---}$: $k_D = 1000$)	68
Figure 11.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour le 1 ^{er} problème de Stokes ($\text{---}\blacksquare\text{---}$: <i>Constants</i> ; $\text{---}\times\text{---}$: <i>Croissants</i> ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: <i>Croissants/Décroissants</i> ; $\text{---}\bullet\text{---}$: <i>Alternés</i>)	75
Figure 11.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour le 2 ^d problème de Stokes ($\text{---}\blacksquare\text{---}$: <i>Constants</i> ; $\text{---}\times\text{---}$: <i>Croissants</i> ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: <i>Croissants/Décroissants</i> ; $\text{---}\bullet\text{---}$: <i>Alternés</i>)	78
Figure 11.3	Profil de vitesse DC5/BDF1 en $x = 1.5$ de la solution numérique et exacte pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique ($-$: solution exacte, \times : solution numérique) .	80
Figure 11.4	Profil de pression DC5/BDF1 en $y = 0$ de la solution numérique et exacte pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique ($-$: solution exacte, \times : solution numérique) .	80
Figure 11.5	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la vitesse du problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique ($\text{---}\blacksquare\text{---}$: <i>Constants</i> ; $\text{---}\times\text{---}$: <i>Croissants</i> ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: <i>Croissants/Décroissants</i> ; $\text{---}\bullet\text{---}$: <i>Alternés</i>)	84
Figure 11.6	Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la pression du problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique ($\text{---}\blacksquare\text{---}$: <i>Constants</i> ; $\text{---}\times\text{---}$: <i>Croissants</i> ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: <i>Croissants/Décroissants</i> ; $\text{---}\bullet\text{---}$: <i>Alternés</i>)	84
Figure G.1	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\text{---}\bullet\text{---}$: P_2 ; $\text{---}\times\text{---}$: P_3 ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: P_4) . . .	110
Figure G.2	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\text{---}\bullet\text{---}$: P_2 ; $\text{---}\times\text{---}$: P_3 ; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: P_4) . . .	111
Figure G.3	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\text{---}\times\text{---}$: 5 elm; $\text{---}\bullet\text{---}$: 10 elm; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: 100 elm)	111
Figure G.4	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\text{---}\times\text{---}$: 5 elm; $\text{---}\bullet\text{---}$: 10 elm; $\text{---}\blacktriangle\text{---}$: 100 elm)	112

Figure G.5	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($--\times--$: 5 elm; $\dots\bullet\dots$: 10 elm; $--\blacktriangle--$: 100 elm)	113
Figure G.6	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: C.L fortes; $--\blacktriangle--$: C.L faibles)	114
Figure G.7	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($--\blacktriangle--$: $k_D = 0.001$; $\dots\bullet\dots$: $k_D = 100$; $--\times--$: $k_D = 1000$)	115
Figure G.8	Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés $--\blacktriangle--$: $k_D = 0.001$; $\dots\bullet\dots$: $k_D = 100$; $--\times--$: $k_D = 1000$)	115

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BDF	Backward Differentiations Formulae
C.L.	Conditions limites
DC	Deffered Correction
EDO	Équations aux Dérivées Ordinaires
EDP	Équations aux Dérivées Partielles
LBB	Ladyzenkaja-Babuska-Brezzi

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Expressions des coefficients $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$ des corrections . . .	92
Annexe B	Table des différences divisées	97
Annexe C	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 des solutions u_1 et u_2	98
Annexe D	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 u_3 et u_4 . . .	101
Annexe E	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 des solutions T_1 et T_2	104
Annexe F	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 des solutions T_3 et T_4	107
Annexe G	Parametres d'influence pour les méthodes DC/BDF2	110
Annexe H	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1 ^{er} problème de Stokes	116
Annexe I	Erreurs et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2 ^d problème de Stokes	118

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte

Aujourd'hui, les simulations numériques sont devenues des outils très largement utilisés dans divers secteurs d'activités. En effet, leurs emplois permettent de proposer des produits toujours plus optimisés tout en réduisant considérablement le coût et la durée de leurs développements. Un des domaines de prédilection est notamment la mécanique des fluides avec diverses applications permettant par exemple une meilleure compréhension des phénomènes aérodynamiques, thermiques, météorologiques, etc.

Cependant, la modélisation de ces phénomènes soulève de nombreux défis autant d'un point de vue spatial que temporel. Dans cette étude, nous nous intéressons à l'instationnarité de ces phénomènes et donc à leurs intégrations temporelles.

Ces problèmes sont généralement raides du fait de leurs fortes dépendances aux paramètres et à leurs échelles de temps hétéroclites. D'un point de vue mathématique, le problème $\dot{u} - F(u) = 0$ est dit raide si $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \text{Sp}(DF(u)), |\lambda_1| \ll |\lambda_2|$. Cette raideur a tendance à rendre les méthodes numériques instables. Il existe tout de même quelques méthodes d'intégrations temporelles stables. Parmi elles, on compte les méthodes explicites, dont l'implémentation est aisée. Cependant, leur stabilité est garantie par une condition restrictive sur le choix des pas de temps.

Par souci d'universalité, nous préférons opter pour des méthodes inconditionnellement stables. Celles-ci sont généralement implicites, nécessitant alors une résolution non linéaire du système. Particulièrement, nous nous intéressons aux méthodes Backward Differentiation formulae (BDF), adaptées pour la résolution de problèmes raides. En revanche, seules les méthodes BDF d'ordre 1 et 2 (BDF1 et BDF2) sont inconditionnellement stables, limitant alors la précision de la résolution.

1.2 Objectifs de recherche

L'objectif principal de l'étude est alors d'augmenter la précision (l'ordre) des méthodes BDF1 et BDF2 tout en conservant l'avantage de leurs stabilités inconditionnelles.

Ainsi, des schémas à corrections différées seront successivement appliqués à ces méthodes initiales, augmentant progressivement leurs ordres. Voulant limiter le coût de calcul de ces nouvelles méthodes dûment construites, nous démontrerons leurs A-stabilités dans la pers-

pective d'adapter les pas de temps.

En pratique, ces méthodes seront mises en place dans un algorithme d'éléments finis développé au sein du laboratoire démontrant leurs flexibilités.

1.3 Plan du mémoire

L'étude approfondie des schémas BDF sera le point de départ de l'élaboration d'une méthodologie permettant la construction de méthodes à correction différée (DC) d'ordre arbitraire. En suivant cette méthodologie, nous verrons comment construire des méthodes DC/BDF allant jusqu'à l'ordre 5.

Pour faire suite à ce développement théorique, des études numériques seront menées afin de valider et de vérifier le comportement adéquat de ces méthodes. Nous en profiterons pour regarder leurs robustesses quant à l'évolution des pas de temps. La complexité des problèmes testés deviendra de plus en plus accrue. D'abord, nous étudierons le comportement des méthodes pour la résolution d'équations aux dérivées ordinaires (EDO). Ensuite, nous résoudrons l'équation de la chaleur unidimensionnelle, puis avec l'ajout d'une dimension supplémentaire. Avant de passer à la résolution des équations de Navier-Stokes, nous regarderons l'influence de certains paramètres sur les résultats.

Enfin, nous pourrons conclure sur les méthodes DC/BDF et leur potentielle efficacité quant à l'adaptabilité des pas de temps.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Les méthodes d'intégration temporelle numérique sont un vaste domaine de recherche dans le domaine de la modélisation et de la simulation numérique. Les méthodes d'intégration temporelle sont utilisées pour résoudre des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) et des équations aux dérivées partielles (EDP) dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie. En particulier, une des applications notables est la modélisation d'écoulements de fluides visqueux. Ces problèmes étant souvent raides, la principale problématique est alors le développement des méthodes stables d'ordre supérieur à 2, efficaces pour ce type de problème. La difficulté majeure réside dans le fait d'allier précision et stabilité. Dépendant des choix de discrétisation temporelle, des pas de temps trop grands ne permettent pas la capture des variations brusques des phénomènes physiques.

Alors, plusieurs stratégies existent. D'abord, une des plus élémentaires consiste à utiliser des pas de temps fixes. La stabilité des méthodes explicites est alors conditionnée par le choix du pas de temps, généralement basé sur la taille de maille minimale et la vitesse du fluide (Garnier et al. [1] ou encore Wanner et Hairer [2]). Cependant, pour des problèmes excessivement raides, le pas de temps caractéristique peut s'avérer abusivement petit, faisant exploser le coût de calcul.

Ainsi, une autre stratégie consiste à adapter le pas de temps en fonction d'une tolérance cible, nécessitant l'estimation de l'erreur. Dans le contexte de modélisation d'écoulement fluide et d'interactions fluide-structure, cette stratégie a été introduite, entre autres, par Gresho et al. [3], John et Rang [4], Birken et al. [5] ou encore Mayr et al. [6]. Ainsi, de faibles pas de temps sont observés lors des fortes variations des caractéristiques physiques de l'écoulement et inversement. Cette adaptation permet donc de minimiser le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre le temps final.

L'adaptation des pas de temps a principalement été développée en utilisant des méthodes d'intégration temporelle connues pour leurs robustesses, particulièrement, les méthodes implicites Backward Differentiation Formulae (BDF) de Gear [7, 8]. Notamment, les méthodes BDF d'ordres 1 et 2 présentent l'avantage d'être A-stable (cf. définition (3.2)) contrairement à celles d'ordre supérieur pour lesquelles des conditions de plus en plus restrictives sur l'évolution des pas de temps sont nécessaires [9, 10].

De ce fait, la limitation à l'ordre 2 ne permet pas une forte précision des calculs numériques et peut s'avérer insuffisante pour la modélisation de problèmes fortement raides tels que des vagues déferlantes [11] ou encore des déformations importantes de bulles [12].

Fox [13–15] introduit alors le principe de correction différée. Ce principe consiste à obtenir une estimation initiale de la solution numérique à un pas de temps donné, puis à la corriger successivement afin d’augmenter l’ordre de convergence. Spécifiquement, Guermond et Mineev [16] ainsi que Bourgault et Loy [17] ont proposé une méthodologie permettant d’augmenter itérativement l’ordre des schémas BDF appliquée aux équations de Navier-Stokes. Cependant, l’ordre est encore limité à 3.

On mentionne également les travaux de Dutt et al. [18], Minion et al. [19,20] qui ont contribué au développement des méthodes à correction différée pour les éléments spectraux. Kress et Gustafsson [21–23] ont également exploré les corrections différées pour la méthode de Crank-Nicolson et des différences finies. Ces travaux ont largement contribué au développement des schémas à correction différée permettant maintenant d’obtenir des méthodes d’ordre arbitraire. En revanche, ces méthodes ont seulement été testées avec des pas de temps fixes.

Très récemment, Bourgault, Garon et Berthelin [24,25] ont adapté les corrections différées aux éléments finis et en se basant sur les méthodes BDF. Cependant, la non-linéarité des problèmes n’était pas prise en compte.

Nous proposons alors de reprendre la méthodologie de Bourgault et Garon, de l’adapter pour les problèmes non linéaires et l’élargir aux équations aux dérivées partielles. Nous regarderons également le comportement de ces nouvelles méthodes quant à l’évolution des pas de temps et vérifierons si la A-stabilité des méthodes initiales est conservée.

CHAPITRE 3 CONSTRUCTION DES MÉTHODES DC/BDF1 NON LINÉAIRES

En mécanique des fluides, les problèmes sont souvent raides, comme notamment ceux liés aux équations de Navier-Stokes, rendant les calculs numériques généralement instables. Afin de généraliser le propos, nous définissons alors le problème de référence (3.1), ci-dessous, fortement non linéaire¹.

$$\begin{cases} M(t, u)\dot{u} - F(t, u) = 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce problème fait intervenir une matrice masse $M(t, u)$, réversible, la dérivée temporelle de la solution \dot{u} et un terme source quelconque $F(t, u)$. Ce problème est initialisé au temps t_0 par u_0 .

Il existe quelques méthodes d'intégration temporelle stables telles que les méthodes **BDF** (*Backward Differentiation Formula*) d'ordre 1 et 2 [7, 8]. La stabilité de ces deux méthodes est inconditionnelle, contrairement aux BDF d'ordre supérieur² [9, 10].

Définition 3.1 (A-Stabilité) *En considérant l'équation (3.2) de Dahlquist ci-dessous, une méthode est dite inconditionnellement stable (ou A-stable) lorsque $u^n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, quels que soient les pas de temps $k > 0$ et $Re(\lambda) < 0$ [26].*

$$\dot{u} = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad u(t) = u_0 e^{\lambda t} \quad (3.2)$$

À noter que plus l'ordre devient élevé, plus les conditions de stabilité sont restrictives telles que les méthodes BDF d'ordre supérieur à 6 ne sont pas 0-stables, devenant alors inutilisables.

Définition 3.2 (0-Stabilité) *Une méthode linéaire à plusieurs étapes est 0-stable si toutes les racines r de l'équation caractéristique sont inférieures ou égales à 1, avec $r = 1$ unique, lorsque $\dot{u}(t) = 0$ [27].*

Afin de ne pas être limité par des conditions de stabilité, nous considérons seulement les méthodes BDF1 et BDF2. Cependant, en se limitant à l'ordre 1 et 2, la précision des solutions

1. À noter que nous aurions pu encore davantage généraliser le propos en considérant le problème sous la forme $G(t, u, \dot{u}) = 0$.

2. La méthode BDF2 est inconditionnellement stable à condition de respecter une certaine continuité des pas de temps.

numériques u^n est alors limitée. Il est possible d'augmenter l'ordre de ces méthodes par des corrections différées, tout en conservant la stabilité inconditionnelle. En revanche, les méthodes à correction différée, dites DC (Deferred Correction), rencontrées dans la revue de littérature, ne traitent pas des problèmes non linéaires dans le contexte d'une résolution éléments finis ; c'est-à-dire, lorsque la matrice masse est fonction à la fois du temps et de la solution. De plus, elles ont tendance à considérablement augmenter le coût de calcul.

Ainsi, dans ce chapitre, notre ambition est de construire des méthodes à correction différée basées d'abord sur le schéma BDF1 pour résoudre des problèmes non linéaires.

3.1 Méthode BDF1 - Ordre 1

Nous considérons le système d'équations (3.1). Le point de départ des méthodes DC/BDF1 est la discrétisation de la dérivée temporelle \dot{u} par un schéma de type **Backward Differentiation Formula** d'ordre 1 (**BDF1**)³ telle que :

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_1^n) \dot{u}_1^n - F(t^n, u_1^n) = 0 \\ \dot{u}_1^n = \frac{u_1^n - u_1^{n-1}}{k_n} \end{cases}} \quad (3.3)$$

avec k_n , le pas de temps à l'étape n défini tel que $k_n = t^n - t^{n-1}$.

En remplaçant les solutions numériques u^n et u^{n-1} par la solution exacte évaluée en t^n et t^{n-1} , nous obtenons l'erreur locale de troncature $\xi_1(t^n)$:

$$\begin{cases} \xi_1(t^n) = \frac{u(t^n) - u(t^{n-1})}{k_n} - \zeta(t^n, u(t^n)) \\ \text{avec } \zeta(t^n, u(t^n)) = M^{-1}(t^n, u(t^n))F(t^n, u(t^n)) \end{cases}$$

Remarque 3.1 La solution de l'équation caractéristique de la méthode, en posant $\dot{u}_1^n = 0$, est $r = 1$, démontrant la 0-stabilité de la méthode BDF1 (cf. définition 3.2).

Le développement en série de Taylor du terme $u(t^{n-1})$ au voisinage de t^n permet de faire apparaître l'erreur de troncature de la méthode BDF1 :

3. Ce schéma est identique à celui d'Euler implicite.

$$\begin{aligned}
\xi_1(t^n) &= \left(\frac{u(t^n)}{k_n} - \frac{u(t^n)}{k_n} + \dot{u}(t^n) - \ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} + \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!} + \dots \right) - \zeta(t^n, u(t^n)) \\
&= \underbrace{\dot{u}(t^n) - \zeta(t^n, u(t^n))}_{=0} + \left(-\ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} + \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!} + \dots \right) \\
&= \boxed{\left(-\ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} + \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!} + \dots \right)} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

L'expression de l'erreur de troncature permet de constater que la méthode BDF1 est bien d'ordre 1 puisque le terme prépondérant est facteur de k_n .

3.2 Méthode DC2/BDF1 - Ordre 2

Nous souhaitons maintenant augmenter l'ordre de la méthode initiale (BDF1). La stratégie consiste à substituer le terme dominant de l'erreur de troncature (3.4) dans l'expression initiale de la méthode (3.3). Ainsi, l'expression semi-discrète à l'ordre $\mathcal{O}(k_n^2)$ est obtenue :

$$\begin{cases} M(t^n, u_2^n) \dot{u}_2^n - F(t^n, u_2^n) = 0 \\ \dot{u}_2^n = \frac{u_2^n - u_2^{n-1}}{k_n} + \underbrace{\ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!}}_{d_2^n} \end{cases} \tag{3.5}$$

Cependant, cette expression, non-discrète, n'est pas viable. En effet, dans le contexte d'une résolution numérique, la valeur analytique de la dérivée seconde de la solution n'est pas accessible. Il est alors nécessaire d'interpoler ce terme à partir des solutions du BDF1. Plusieurs stratégies sont possibles. Nous faisons le choix d'approcher la dérivée seconde de la solution par un polynôme d'interpolation de Newton, $N_2(t)$, construit à l'aide de la table des différences divisées 3.1 telle que [28] :

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &\approx N_2(t) = \dot{u}_1^n + \delta_{11}^{\dot{u}_1} (t - t^n) \\
\ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_2(t^n) = \delta_{11}^{\dot{u}_1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

TABLEAU 3.1 Table des différences divisées pour méthode DC2/BDF1

k_n	t^n	\dot{u}_1^n	$\delta_{11}^{\dot{u}_1}$
	t^{n-1}	\dot{u}_1^{n-1}	

La correction d_2^n appliquée au schéma DC2/BDF1 s'écrit alors⁴ :

$$d_2^n = \ddot{u}(t) \frac{k_n}{2!} \approx \delta_{11}^{\dot{u}_1} \frac{k_n}{2!} = \frac{\dot{u}_1^n - \dot{u}_1^{n-1}}{k_n} \frac{k_n}{2!} = \left(\sum_{i=0}^1 a_{1,i} \dot{u}_1^{n-i} \right) \frac{k_n}{2!} \quad (3.7)$$

Et, finalement, on obtient la méthode discrète DC2/BDF1 telle que :

$$\begin{cases} M(t^n, u_2^n) \dot{u}_2^n - F(t^n, u_2^n) = 0 \\ \dot{u}_2^n = \frac{u_2^n - u_2^{n-1}}{k_n} + d_2^n \end{cases} \quad (3.8)$$

L'expression de l'erreur de troncature (3.9) ci-dessous montre que la méthode est bien d'ordre 2⁵.

$$\xi_2(t^n) = \left(-u^{(3)}(t^n) \frac{k_n^2}{12} + u^{(4)}(t^n) \frac{k_n^3}{4!} + \dots \right) \quad (3.9)$$

3.3 Méthode DC3/BDF1 - Ordre 3

Afin d'obtenir une méthode d'ordre 3, nous reprenons la même stratégie établie lors de la construction de la méthode DC2/BDF1 (cf. section 3.2). Les termes dominants de l'erreur de troncature (3.4) sont substitués dans l'expression (3.3). L'expression semi-discrète suivante est alors obtenue :

$$\begin{cases} M(t^n, u_3^n) \dot{u}_3^n - F(t^n, u_3^n) = 0 \\ \dot{u}_3^n = \frac{u_3^n - u_3^{n-1}}{k_n} + \underbrace{\ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} - \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!}}_{d_3^n} \end{cases} \quad (3.10)$$

4. L'expression explicite des coefficients $a_{1,i}$ est disponible en annexe A.

5. Le terme prépondérant étant facteur de k_n^2 .

Les dérivées seconde et troisième sont approximées à l'aide du polynôme d'interpolation de Newton, $N_3(t)$ basé sûr \dot{u}_2 ⁶ :

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &\approx N_3(t) = \dot{u}_2^n + \delta_{11}^{\dot{u}_2}(t - t^n) + \delta_{12}^{\dot{u}_2}(t - t^n)(t - t^{n-1}) \\ \ddot{u}(t) &\approx \dot{N}_3(t) = \delta_{11}^{\dot{u}_2} + \delta_{12}^{\dot{u}_2}(2t - t^n - t^{n-1}) \\ \ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_3(t^n) = 2\delta_{12}^{\dot{u}_2}\end{aligned}\quad (3.11)$$

évalué par la suite en t^n :

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_3(t^n) = \delta_{11}^{\dot{u}_2} + \delta_{12}^{\dot{u}_2}k_n \\ \ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_3(t^n) = 2\delta_{12}^{\dot{u}_2}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Les termes de différence divisée $\delta_{11}^{\dot{u}_2}$ et $\delta_{12}^{\dot{u}_2}$ sont construits à l'aide de la table, disponible en annexe B, tels que :

$$\left\{ \begin{aligned}\delta_{11}^{\dot{u}_2} &= \frac{1}{k_n}\dot{u}_2^n - \frac{1}{k_n}\dot{u}_2^{n-1} \\ \delta_{12}^{\dot{u}_2} &= \frac{1}{k_n + k_{n-1}}\delta_{11}^{\dot{u}_2} - \frac{1}{k_n + k_{n-1}}\delta_{21}^{\dot{u}_2} \\ &= \frac{1}{k_n} \frac{1}{k_n + k_{n-1}} \dot{u}_2^n - \left(\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_{n-1}} \right) \frac{1}{k_n + k_{n-1}} \dot{u}_2^{n-1} + \frac{1}{k_{n-1}} \frac{1}{k_n + k_{n-1}} \dot{u}_2^{n-2}\end{aligned}\right. \quad (3.13)$$

Ainsi, la correction différée d_3^n apportée au schéma (3.3) est donnée par l'expression ⁷ :

$$\begin{aligned}d_3^n &= \ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} - \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!} \\ &\approx \left(\delta_{11}^{\dot{u}_2} + \delta_{12}^{\dot{u}_2}k_n \right) \frac{k_n}{2!} - \left(2\delta_{12}^{\dot{u}_2} \right) \frac{k_n^2}{3!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^2 a_{2,i} \dot{u}_2^{n-i} \right) \frac{k_n}{2!} - \left(\sum_{i=0}^2 b_{2,i} \dot{u}_2^{n-i} \right) \frac{k_n^2}{3!}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Finalement, l'expression discrète ci-dessous est obtenue pour la méthode DC3/BDF1 :

6. La solution DC2/BDF1 étant la plus précise puisqu'elle est à l'ordre 2

7. Les expressions explicitées des coefficients $a_{2,i}$ et $b_{2,i}$ sont disponibles en annexe A.

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_3^n) \dot{u}_3^n - F(t^n, u_3^n) = 0 \\ \dot{u}_3^n = \frac{u_3^n - u_3^{n-1}}{k_n} + d_3^n \end{cases}} \quad (3.15)$$

Par construction, la méthode DC3/BDF1 est bien à l'ordre 3, la correction d_3^n permettant de s'affranchir des 2 premiers termes de l'erreur de troncature (3.4) de la méthode BDF1.

3.4 Méthodes DC4/BDF1 et DC5/BDF1 - Ordres 4 et 5

Les méthodes DC4/BDF1 et DC5/BDF1 sont construites similairement. Ainsi, respectivement, les expressions discrètes (3.16) et (3.17) ci-dessous sont obtenues.

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_4^n) \dot{u}_4^n - F(t^n, u_4^n) = 0 \\ \dot{u}_4^n = \frac{u_4^n - u_4^{n-1}}{k_n} + d_4^n \end{cases}} \quad (3.16)$$

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_5^n) \dot{u}_5^n - F(t^n, u_5^n) = 0 \\ \dot{u}_5^n = \frac{u_5^n - u_5^{n-1}}{k_n} + d_5^n \end{cases}} \quad (3.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_4^n &= \ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} - \ddot{u}(t^n) \frac{k_n^2}{3!} + u^{(4)}(t^n) \frac{k_n^3}{4!} \\ &\approx \left(\delta_{11}^{u_3} + \delta_{12}^{u_3} k_n + \delta_{13}^{u_3} k_n (k_n + k_{n-1}) \right) \frac{k_n}{2!} \\ &\quad - 2 \left(\delta_{12}^{u_3} + \delta_{13}^{u_3} (2k_n + k_{n-1}) \right) \frac{k_n^2}{3!} \\ &\quad + 6 \delta_{13}^{u_3} \frac{k_n^3}{4!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^3 a_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \right) \frac{k_n}{2!} - \left(\sum_{i=0}^3 b_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \right) \frac{k_n^2}{3!} + \left(\sum_{i=0}^3 c_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \right) \frac{k_n^3}{4!} \end{aligned} \quad (3.18)$$

et :

$$\begin{aligned}
d_5^n &= \ddot{u}(t^n) \frac{k_n}{2!} - \ddot{u}'(t^n) \frac{k_n^2}{3!} + u^{(4)}(t^n) \frac{k_n^3}{4!} - u^{(5)}(t^n) \frac{k_n^4}{5!} \\
&\approx \left(\delta_{11}^{\dot{u}_4} + \delta_{12}^{\dot{u}_4} k_n + \delta_{13}^{\dot{u}_4} k_n (k_n + k_{n-1}) + \delta_{14}^{\dot{u}_4} k_n (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) \right) \frac{k_n}{2!} \\
&\quad - 2 \left(\delta_{12}^{\dot{u}_4} + \delta_{13}^{\dot{u}_4} (2k_n + k_{n-1}) + \delta_{14}^{\dot{u}_4} (k_n^2 + k_{n-1}^2 + 4k_n k_{n-1} + 2k_n k_{n-2} + k_{n-1} k_{n-2}) \right) \frac{k_n^2}{3!} \\
&\quad + 6 \left(\delta_{13}^{\dot{u}_4} + \delta_{14}^{\dot{u}_4} (3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2}) \right) \frac{k_n^3}{4!} \\
&\quad - 24 \delta_{14}^{\dot{u}_4} \frac{k_n^4}{5!} \\
&= \left(\sum_{i=0}^4 a_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{k_n}{2!} - \left(\sum_{i=0}^4 b_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{k_n^2}{3!} + \left(\sum_{i=0}^4 c_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{k_n^3}{4!} - \left(\sum_{i=0}^4 d_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{k_n^4}{5!} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Les expressions explicitées des coefficients $a_{3,i}$, $b_{3,i}$, $c_{3,i}$, $a_{4,i}$, $b_{4,i}$, $c_{4,i}$ et $d_{4,i}$ sont disponibles en annexe A.

3.5 Synthèse

Finalement, dans ce chapitre, nous avons construit des méthodes de discrétisation temporelle allant théoriquement jusqu'à l'ordre 5. Ce même processus peut être itéré de nouveau afin d'obtenir des méthodes d'ordre encore supérieur. Nous pouvons facilement étendre le processus aux méthodes DC6/BDF1, DC7/BDF1, DC8/BDF1, ou encore DC9/BDF1, dépassant alors l'ordre maximal des méthodes BDF⁸. Cependant, nous faisons le choix de se limiter à l'ordre 5, suffisant pour constater le comportement général des méthodes DC/BDF1 du fait de la redondance de leurs constructions. Aussi, du fait de l'interdépendance des méthodes, la restriction de l'ordre permet de limiter la complexité de mise en œuvre ainsi que le coût de calcul. En effet, la correction différée d'ordre N est interpolée à partir des solutions d'ordre $N - 1$ (cf. figure 3.1). Et, plus cet ordre est élevé, plus il est nécessaire de conserver des solutions antérieures, augmentant ainsi le coût de calcul. Par exemple, la correction DC5/BDF1 est extrapolée à partir des 5 dernières solutions issues de la méthode DC4/BDF1.

8. Pour rappel, les méthodes BDF sont limitées à l'ordre 6 puisque, au-delà, elles ne sont plus 0-stables.

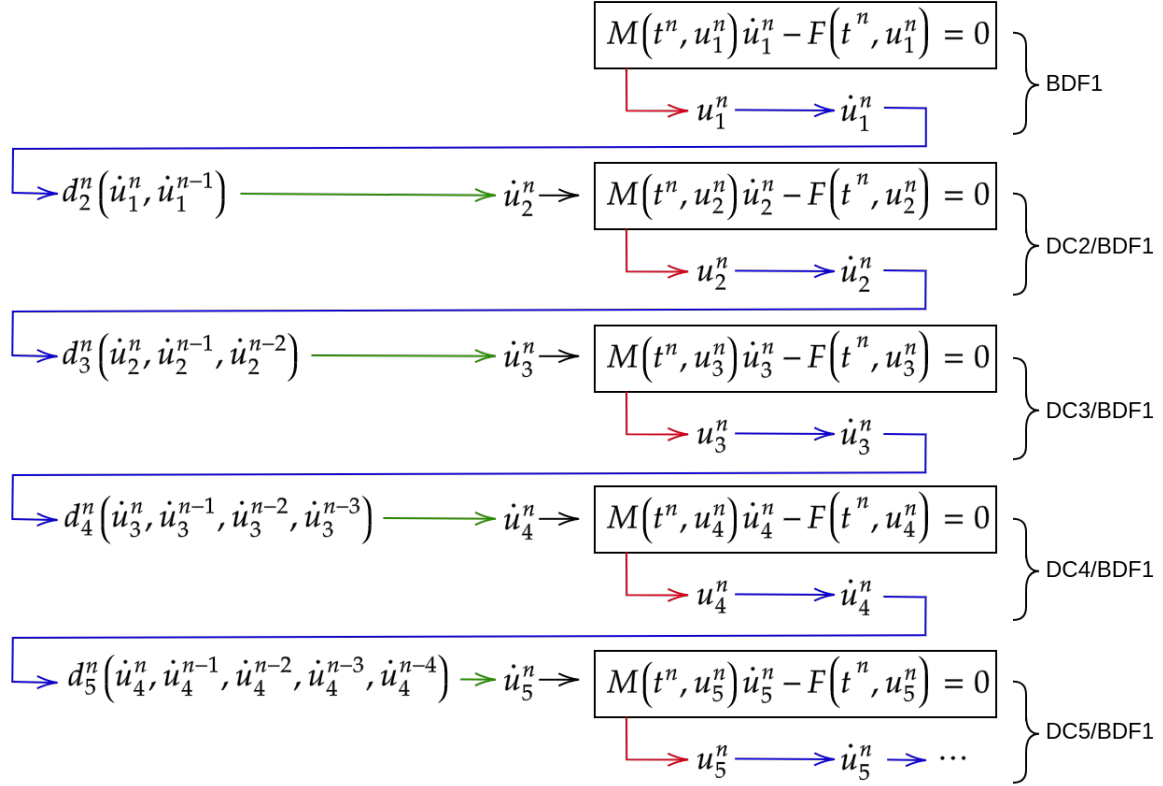


FIGURE 3.1 Schéma de la construction des méthodes DC/BDF1

3.6 Démarrage des méthodes

Dans ce chapitre, nous n'avons pas évoqué la problématique de l'initialisation de ces méthodes. Le démarrage des méthodes BDF1 et DC2/BDF1 est aisé, nécessitant seulement de la solution initiale u_1^0 (donnée connue). En revanche, à partir de DC3/BDF1, l'initialisation est davantage complexe. En effet, comme évoqué à l'instant, l'extrapolation de la correction d'ordre N nécessite les N dernières solutions de la méthode d'ordre $N - 1$. Ainsi, au temps t_1 , il est impossible d'évaluer la correction d_5^1 à partir des cinq dernières solutions de la méthode DC4/BDF1 qui, elle-même, ne peut accéder aux quatre dernières solutions DC3/BDF1 dont la correction est impossible à calculer, car seules deux solutions DC2/BDF1 existent (u_2^0 et u_1^1). Ainsi, il est alors, en pratique, seulement possible de démarrer les méthodes DC3/BDF1, DC4/BDF1 et DC5/BDF1 respectivement aux temps t^2 , t^3 et t^4 . Une alternative pour le calcul des solutions u_3^1 , u_4^1 , u_4^2 , u_5^1 , u_5^2 et u_5^3 est nécessaire.

Il existe différentes possibilités. D'abord, si la solution exacte est connue, celle-ci peut remplacer, au démarrage, les solutions numériques manquantes des différentes méthodes. Cependant,

hormis pour les problèmes de vérification, la solution exacte est généralement inconnue.

Une alternative permet de construire les solutions manquantes en modifiant légèrement l'expression des corrections. Ainsi, celles-ci sont adaptées à partir du polynôme d'interpolation de Newton $N(t)$ évalué aux temps problématiques.

Par exemple, lors de l'initialisation de la méthode DC3/BDF1, les solutions BDF1 et DC2/BDF1 sont calculées jusqu'au temps $t^n = t^2$. On peut alors écrire les relations suivantes⁹ :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\approx N_3(t) = \dot{u}_2^2 + \delta_{11}^{\dot{u}_2}(t - t^2) + \delta_{12}^{\dot{u}_2}(t - t^2)(t - t^1) \\ \ddot{u}(t^1) &\approx \dot{N}_3(t^1) = \delta_{11}^{\dot{u}_2} - \delta_{12}^{\dot{u}_2} k_1 \\ \ddot{u}(t^1) &\approx \ddot{N}_3(t^n) = 2\delta_{12}^{\dot{u}_2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La correction d_3^1 de la méthode DC3/BDF1 au temps t^1 s'écrit alors :

$$d_3^1 = \left(\delta_{11}^{\dot{u}_2} - \delta_{12}^{\dot{u}_2} k_1 \right) \frac{k_0}{2!} - \left(2\delta_{12}^{\dot{u}_2} \right) \frac{k_0^2}{3!} \quad (3.21)$$

Puis, la résolution est faite de manière classique telle que :

$$\begin{cases} M(t^1, u_3^1) \dot{u}_3^1 - F(t^1, u_3^1) = 0 \\ \dot{u}_3^1 = \frac{u_3^1 - u_3^0}{k_0} + d_3^1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Ensuite, pour les temps suivants, l'algorithme initial est repris.

9. Les expressions des $\delta_{ij}^{\dot{u}_2}$ restent inchangées par rapport à la section 3.3

CHAPITRE 4 CONSTRUCTION DES MÉTHODES DC/BDF2 NON LINÉAIRES

De la même manière, les méthodes à correction différée basées sur le schéma BDF2 (DC/BDF2) sont construites. Celles-ci sont très semblables aux méthodes basées sur BDF1. Cependant, le schéma initial (BDF2) étant d'ordre 2, un gain d'une extrapolation est fait par rapport aux méthodes DC/BDF1 pour atteindre un même ordre théorique. Par exemple, pour atteindre l'ordre 4, seules trois extrapolations sont nécessaires par rapport au schéma BDF2 contre quatre pour les méthodes DC/BDF1. Ceci se caractérise par une diminution du coût de calcul. En revanche, l'implémentation est légèrement plus complexe ainsi que l'initialisation des méthodes.

Avant d'entamer la construction des méthodes à correction différée, le schéma BDF2 est explicité.

4.1 Méthode BDF2 - Ordre 2

Le même système d'équations est considéré :

$$\begin{cases} M(t, u)\dot{u} - F(t, u) = 0 \\ u_0 = u(0) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $M(t, u)$, la matrice masse inversible.

Le point de départ des méthodes DC/BDF2 est la discrétisation de la dérivée temporelle \dot{u} par un schéma *Backward Differentiation Formula* d'ordre 2 (**BDF2**) :

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_2^n)\dot{u}_2^n - F(t^n, u_2^n) = 0 \\ \dot{u}_2^n = c_0 u_2^n + c_1 u_2^{n-1} + c_2 u_2^{n-2} = \sum_{i=0}^2 c_i u_2^{n-i} \end{cases}} \quad (4.2)$$

Les coefficients c_i sont donnés par la formule de Gear [7] tels que :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{t^n - t^{n-1}} + \frac{1}{t^n - t^{n-2}} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n + k_{n-1}} \\ c_1 &= \frac{1}{t^{n-1} - t^n} + \frac{1}{t^{n-2} - t^{n-1}} = -\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}} \\ c_2 &= \frac{t^n - t^{n-1}}{(t^{n-1} - t^{n-2})(t^n - t^{n-1})} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{k_n + k_{n-1}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Remarque 4.1 Les racines de l'équation caractéristique de la méthode sont données par $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{k_n^2}{k_{n-1}(2k_n + k_{n-1})}$. Ainsi, la 0-stabilité est garantie en respectant la condition $\frac{k_n}{k_{n-1}} < 1 + \sqrt{2}$ (cf. définition 3.2).

Et, en remplaçant les solutions numériques u_2^n , u_2^{n-1} et u_2^{n-2} par la solution exacte évaluée en t^n , t^{n-1} et t^{n-2} , nous obtenons l'erreur de troncature $\xi_2(t^n)$:

$$\begin{cases} \xi_2(t^n) = c_0 u(t^n) + c_1 u(t^{n-1}) + c_2 u(t^{n-2}) - \zeta(t^n, u(t^n)) \\ \text{avec } \zeta(t^n, u(t^n)) = M^{-1}(t^n, u(t^n))F(t^n, u(t^n)) \end{cases}$$

Le développement en série de Taylor des termes $u(t^{n-1})$ et $u(t^{n-2})$ au voisinage de t^n permet de faire apparaître l'erreur locale de troncature de la méthode BDF2 ci-dessous, permettant de constater que celle-ci est bien d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \xi_2(t^n) &= (c_0 + c_1 + c_2)u(t^n) - (c_1 k_n + c_2(k_n + k_{n-1}))\dot{u}(t^n) + \frac{1}{2}(c_1 k_n^2 + c_2(k_n + k_{n-1})^2)\ddot{u}(t^n) \\ &\quad - \frac{1}{6}(c_1 k_n^3 + c_2(k_n + k_{n-1})^3)\ddot{\dot{u}}(t^n) + \frac{1}{24}(c_1 k_n^4 + c_2(k_n + k_{n-1})^4) \\ &\quad - \frac{1}{120}(c_1 k_n^5 + c_2(k_n + k_{n-1})^5) + \dots \\ &= \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} u^{(j)}(t^n) (c_1 k_n^j + c_2(k_n + k_{n-1})^j) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 Méthode DC3/BDF2 - Ordre 3

La même stratégie est appliquée. Le terme dominant de l'erreur de troncature (4.4) est substitué dans l'expression initiale du schéma BDF2 (cf. équation (4.2)). L'expression semi-

discrète suivante à l'ordre $\mathcal{O}(k_n^3)$ est alors obtenue :

$$\begin{cases} M(t^n, u_3^n) \dot{u}_3^n - F(t^n, u_3^n) = 0 \\ \dot{u}_3^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_3^{n-i} - \underbrace{\left(\frac{(-1)^3}{3!} u^{(3)}(t^n) (c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3) \right)}_{d_3^n} \end{cases} \quad (4.5)$$

On discrétise maintenant la dérivée troisième $u^{(3)}(t^n)$ à partir de la solution issue de la résolution BDF2 à l'aide d'un polynôme d'interpolation de Newton $N_3(t)$. Celui-ci est construit à partir des coefficients $\delta_{ij}^{\dot{u}_2}$ de la table aux différences divisées disponible à l'annexe B.

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\approx N_3(t) = \dot{u}_2^n + \delta_{11}^{\dot{u}_2} (t - t^n) + \delta_{12}^{\dot{u}_2} (t - t^n)(t - t^{n-1}) \\ \ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_3(t^n) = \delta_{11}^{\dot{u}_2} + \delta_{12}^{\dot{u}_2} k_n \\ \ddot{u}(t^n) &\approx \dot{N}_3(t^n) = 2\delta_{12}^{\dot{u}_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Or, dans la section 3.3, nous avons vu que $2\delta_{12}^{\dot{u}_2}$ peut s'écrire comme la somme des dérivées premières issues de l'extrapolation précédente telle que :

$$2\delta_{12}^{\dot{u}_2} = \sum_{i=0}^2 b_{2,i} \dot{u}_2^{n-i}$$

Les coefficients $b_{2,i}$ sont donnés par l'expression en annexe A. Ainsi, la correction d_3^n correspondante à la méthode DC3/BDF2 s'écrit sous la forme :

$$d_3^n = -\frac{(-1)^3}{3!} 2\delta_{12}^{\dot{u}_2} (c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3) \quad (4.7)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^2 b_{2,i} \dot{u}_2^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} \quad (4.8)$$

Et, finalement, l'expression discrète ci-dessous est obtenue pour la méthode DC3/BDF2 :

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_3^n) \dot{u}_3^n - F(t^n, u_3^n) \\ \dot{u}_3^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_3^{n-i} + d_3^n \end{cases}} \quad (4.9)$$

Par construction, la méthode DC3/BDF2 est bien à l'ordre 3, la correction d_3^n permettant de s'affranchir du premier terme de l'erreur de troncature (4.4) de la méthode BDF2.

4.3 Méthode DC4/BDF2 - Ordre 4

De manière similaire, les deux premiers termes de l'erreur de troncature locale (4.4) sont substitués à partir des solutions obtenues lors de la résolution de l'extrapolation précédente, c'est-à-dire DC3/BDF2. Nous partons alors du schéma semi-discret suivant :

$$\begin{cases} M(t^n, u_4^n) \dot{u}_4^n - F(t^n, u_4^n) = 0 \\ \dot{u}_4^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_4^{n-i} + \underbrace{\left(u^{(3)}(t^n) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} \right) - \left(u^{(4)}(t^n) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \right)}_{d_4^n} \end{cases} \quad (4.10)$$

Les dérivées exactes $u^{(3)}(t^n)$ et $u^{(4)}(t^n)$ sont interpolées à partir du polynôme de Newton $N_4(t^n)$ de degré 4. Les coefficients $\delta_{ij}^{\dot{u}_3}$ issus de la table des différences divisées (cf. annexe B) sont construits à l'aide des dérivées premières de la solution obtenue lors de la résolution DC3/BDF2. Nous avons alors :

$$u^{(3)}(t^n) \approx 2\delta_{12}^{\dot{u}_3} + 2\delta_{13}^{\dot{u}_3} k_n (k_n + k_{n-1}) = \sum_{i=0}^3 b_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \quad (4.11)$$

$$u^{(4)}(t^n) \approx 6\delta_{13}^{\dot{u}_3} = \sum_{i=0}^3 c_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \quad (4.12)$$

avec $b_{3,i}$ et $c_{3,i}$ donnés par les expressions en annexe A.

Ainsi, la correction d_4^n appliquée à la méthode DC4/BDF2 est obtenue telle que :

$$d_4^n = \left(\sum_{i=0}^3 b_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} - \left(\sum_{i=0}^3 c_{3,i} \dot{u}_3^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \quad (4.13)$$

Et, on écrit le schéma discret correspondant :

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_4^n) \dot{u}_4^n - F(t^n, u_4^n) = 0 \\ \dot{u}_4^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_4^{n-i} + d_4^n \end{cases}} \quad (4.14)$$

4.4 Méthodes DC5/BDF2 et DC6/BDF2 - Ordres 5 et 6

Les méthodes DC5/BDF2 et DC6/BDF2 sont construites de manière similaire. Ainsi, respectivement, les expressions discrètes (4.15) et (4.16) ci-dessous sont obtenues.

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_5^n) \dot{u}_5^n - F(t^n, u_5^n) = 0 \\ \dot{u}_5^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_5^{n-i} + d_5^n \end{cases}} \quad (4.15)$$

$$\boxed{\begin{cases} M(t^n, u_6^n) \dot{u}_6^n - F(t^n, u_6^n) = 0 \\ \dot{u}_6^n = \sum_{i=0}^2 c_i u_6^{n-i} + d_6^n \end{cases}} \quad (4.16)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_5^n &= \ddot{u}(t^n) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} - u^{(4)}(t^n) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \\ &\quad + u^{(5)}(t^n) \frac{c_1 k_n^5 + c_2 (k_n + k_{n-1})^5}{5!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^4 b_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} - \left(\sum_{i=0}^4 c_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^4 d_{4,i} \dot{u}_4^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^5 + c_2 (k_n + k_{n-1})^5}{5!} \end{aligned} \quad (4.17)$$

et :

$$\begin{aligned} d_6^n &= \ddot{u}(t^n) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} - u^{(4)}(t^n) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \\ &\quad + u^{(5)}(t^n) \frac{c_1 k_n^5 + c_2 (k_n + k_{n-1})^5}{5!} - u^{(6)}(t^n) \frac{c_1 k_n^6 + c_2 (k_n + k_{n-1})^6}{6!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^5 b_{5,i} \dot{u}_5^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^3 + c_2 (k_n + k_{n-1})^3}{3!} - \left(\sum_{i=0}^5 c_{5,i} \dot{u}_5^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^4 + c_2 (k_n + k_{n-1})^4}{4!} \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^5 d_{5,i} \dot{u}_5^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^5 + c_2 (k_n + k_{n-1})^5}{5!} - \left(\sum_{i=0}^5 e_{5,i} \dot{u}_5^{n-i} \right) \frac{c_1 k_n^6 + c_2 (k_n + k_{n-1})^6}{6!} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les expressions des coefficients $b_{4,i}$, $c_{4,i}$, $d_{4,i}$, $b_{5,i}$, $c_{5,i}$, $d_{5,i}$ et $e_{5,i}$ sont données en annexe A.

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDO LINÉAIRES

La première étape de validation et vérification des méthodes DC/BDF présentées précédemment consiste en une étude de convergence sur un problème avec des équations aux dérivées ordinaires (EDO). Le recours à ces problèmes à une seule variable permet de s'affranchir, dans un premier temps, de l'erreur de discrétisation spatiale afin que le taux de convergence ne soit seulement influencé que par l'erreur temporelle. Nous vérifierons si celui-ci est en accord avec la théorie.

Le problème de référence présenté ci-dessous est utilisé :

$$\begin{cases} M(t, u) \frac{du}{dt} = F(u, t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Description du protocole de test

Un protocole de test est mis en place afin de « standardiser » les résultats. Il consiste en la résolution de différents problèmes dont les solutions analytiques sont connues afin de les comparer aux solutions numériques.

5.1.1 Solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées [29] permet, en partant d'une solution exacte quelconque, de construire un problème satisfaisant l'équation (5.1) et sa condition initiale. Ainsi, le tableau 5.1 présente les solutions utilisées. L'évaluation de leurs dérivées temporelles permet de déterminer les termes sources F respectifs (cf. tableau 5.1). Les matrices masses M , les périodes d'intégration $I = [t_0, t_f]$, et les conditions initiales u_0 sont également indiquées.

TABLEAU 5.1 Solutions manufacturées et leurs termes sources (EDO linéaire)

	u	F	M	I	u_0
u_1	t^2	$2t$	1	$[0, 1]$	0
u_2	$\cos(t)$	$-\sin(t)$	1	$[0, 2\pi]$	1

À chaque étape de temps t^n , la résolution de l'EDO permet ainsi d'obtenir une solution

numérique u^n que l'on compare à la solution exacte $u(t^n)$ grâce à la norme infinie.

5.1.2 Norme infinie

L'erreur est caractérisée par la norme infinie (5.2) définie ci-après. Cette norme évalue l'écart maximum entre la solution numérique et exacte sur l'intervalle d'intégration temporelle I .

$$\xi_k = \|u^n - u(t^n)\|_{\infty, I} = \max_{n=1, \dots, N} |u^n - u(t^n)| \quad (5.2)$$

La répétition de ce processus avec division successive du pas de temps permet d'évaluer le taux de convergence p . Successivement, le nombre de pas de temps N est doublé, ainsi le pas de temps est divisé par 2. Alors, le taux de convergence est donné par l'équation (5.3) ci-dessous.

$$p = \frac{\log\left(\frac{\xi_k}{\xi_{k/2}}\right)}{\log(2)} \quad (5.3)$$

5.1.3 Caractéristiques de résolution

L'initialisation des différentes méthodes est faite analytiquement. Pour chaque pas de temps, la solution est donnée par la méthode de Newton dont le critère d'arrêt est fixé à 1×10^{-10} sur le résidu et la correction. Aussi, nous avons recours à un solveur direct.

5.1.4 Configurations des pas de temps

Des études de convergence sont effectuées dans 4 configurations d'évolution du pas de temps différentes :

1. Pas de temps constants
2. Pas de temps croissants
3. Pas de temps croissants puis décroissants
4. Pas de temps alternés

L'intérêt de ces 4 scénarios est de déterminer la robustesse des méthodes quant à leurs stabilités lors de l'évolution du pas de temps. La première configuration est la plus simple : *pas de temps constants*. Ce test permet notamment de vérifier la bonne implémentation des méthodes en s'assurant que leurs taux de convergence concordent avec la théorie. Lors des

scénarios 2 et 3 (*pas de temps croissants*¹ et *pas de temps croissants puis décroissants*²), du fait de l'évolution progressive des pas de temps, nous faisons l'hypothèse que l'erreur restera stable. La dernière configuration (*pas de temps alternés*³) est la plus contraignante. La variation brusque des pas de temps restreint la stabilité des méthodes facilitant la propagation d'erreurs.

Ainsi, dans l'objectif de construire un algorithme à pas de temps adaptatifs, ces scénarios nous permettront de constater si les méthodes conservent leurs précisions malgré des pas de temps non constants. Et, sinon, nous déterminerons les conditions nécessaires pour permettre l'évolution du pas de temps sans craindre une perte de précision.

Aussi, pour ne pas densifier davantage le développement, nous présentons seulement les résultats pour les méthodes DC/BDF1. Ceux pour les méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe C. Le comportement entre ces méthodes est similaire. Seul le schéma d'origine les différencie (BDF1 et BDF2). Les conclusions apportées sont valables pour ces deux catégories de méthodes.

5.2 Configuration 1 - Pas de temps constants

Dans un premier temps, l'EDO (5.1) est résolue à l'aide des méthodes DC/BDF avec pas de temps k constant. La solution obtenue sert de référence. Le tableau 5.2 ci-dessous présente respectivement l'étude de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution manufacturée u_1 .

TABLEAU 5.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.00e-01	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.39e-17	/	3.33e-16	/
20	5.00e-02	1.00	3.33e-16	/	4.44e-16	/	3.33e-16	/	3.33e-16	/
40	2.50e-02	1.00	1.67e-16	/	2.22e-16	/	2.22e-16	/	3.33e-16	/
80	1.25e-02	1.00	2.22e-16	/	3.33e-16	/	3.33e-16	/	3.33e-16	/
160	6.25e-03	1.00	2.78e-16	/	3.33e-16	/	5.55e-16	/	5.55e-16	/

1. La croissance est décrite dans la section 5.3.
2. De même, l'évolution est décrite dans la section 5.4.
3. L'alternance est définie dans la section 5.5 ci-dessous.

Comme espéré, pour les méthodes d'ordre supérieur ou égal à 2, la solution est intégrée parfaitement étant donné que la solution analytique est un polynôme de degré 2. De plus, pour la méthode BDF1, le taux de convergence obtenu correspond à celui théorique, c'est-à-dire 1. Ces résultats sont conformes aux attentes.

Le tableau 5.3 présente les études de convergence pour les méthodes DC/BDF1 de la solution manufacturée u_2 . Les études de convergence des méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe C.

TABLEAU 5.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4.17e-02	/	3.83e-04	/	3.16e-05	/	1.02e-06	/	1.11e-07	/
20	2.09e-02	0.99	9.58e-05	2.00	4.17e-06	2.92	7.01e-08	3.87	4.21e-09	4.72
40	1.05e-02	1.00	2.39e-05	2.00	5.34e-07	2.96	4.56e-09	3.94	1.43e-10	4.88
80	5.25e-03	1.00	5.99e-06	2.00	6.76e-08	2.98	2.91e-10	3.97	4.64e-12	4.94
160	2.63e-03	1.00	1.50e-06	2.00	8.51e-09	2.99	1.83e-11	3.99	1.47e-13	4.98

Les taux de convergence obtenus sont conformes à ceux théoriques. Aucune perte d'ordre n'est constatée permettant d'affirmer que ces méthodes conservent leurs précisions même à faible pas de temps. Ainsi, pour un même pas de temps, la solution la plus précise sera toujours obtenue avec la méthode d'ordre le plus élevé.

Remarque 5.1 *Pour les méthodes d'ordre élevé ($p \geq 5$), pour de très faibles pas de temps, la précision est telle que l'erreur est de l'ordre de l'erreur machine. On peut alors observer une perte d'ordre causée par l'incertitude machine. Ce phénomène est davantage visible avec les études de convergence des méthodes DC/BDF2 (cf. annexe C).*

5.3 Configuration 2 - Pas de temps croissants

Pour la seconde configuration, les pas de temps croient progressivement [24]. Cette croissance est définie par une progression géométrique de raison r tout en respectant la période d'intégration telle que :

$$\begin{cases} r = \gamma^{1/(N-1)} \\ k_0 = t_f \frac{r-1}{r^N-1} \\ k_i = k_0 r^i \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (5.4)$$

et afin de pouvoir utiliser la formule (5.3) pour calculer le taux de convergence, nous imposons :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{k_N}{k_0} = 2 \\ \text{avec } k_N = \frac{t_f - t_0}{N} \end{cases} \quad (5.5)$$

Les résultats pour les méthodes DC/BDF1 sont présentés par les tableaux 5.4 et 5.5. Ceux pour les méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe C.

TABLEAU 5.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.05e-01	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.39e-17	/	3.33e-16	/
20	5.22e-02	1.01	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/
40	2.60e-02	1.00	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.67e-16	/	2.22e-16	/
80	1.30e-02	1.00	3.33e-16	/	4.44e-16	/	2.22e-16	/	2.22e-16	/
160	6.50e-03	1.00	4.44e-16	/	3.33e-16	/	8.88e-16	/	4.44e-16	/

TABLEAU 5.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4.21e-02	/	5.34e-04	/	3.98e-05	/	1.99e-06	/	2.07e-07	/
20	2.11e-02	1.00	1.31e-04	2.03	4.98e-06	3.00	1.36e-07	3.87	6.89e-09	4.91
40	1.06e-02	1.00	3.25e-05	2.01	6.23e-07	3.00	8.83e-09	3.94	2.20e-10	4.97
80	5.29e-03	1.00	8.08e-06	2.01	7.79e-08	3.00	5.63e-10	3.97	6.94e-12	4.99
160	2.65e-03	1.00	2.01e-06	2.00	9.74e-09	3.00	3.55e-11	3.99	2.17e-13	5.00

Les résultats obtenus correspondent à la théorie. En effet, les méthodes BDF1, DC2/BDF1, DC3/BDF1, DC4/BDF1 et DC5/BDF1 sont respectivement d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5 même

avec cette deuxième configuration de pas de temps. Aucune perte d'ordre n'est à déplorer. De plus, les erreurs sont quasi équivalentes à celles obtenues avec la première configuration.

5.4 Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants

Nous réalisons une troisième configuration. Cette fois, les pas de temps sont d'abord croissants sur l'intervalle $I_0^{t_m} = [0, t_f/2]$ puis décroissants sur le reste de la période d'intégration $I_{t_m}^{t_f} = [t_f/2, t_f]$. Sur $I_0^{t_m}$, la croissance des pas de temps est décrite par la progression géométrique (5.4) en remplaçant respectivement N et t_f par $N_2 = N/2$ et $t_m = t_f/2$. Ensuite, les pas de temps décroissent de façon symétrique par rapport à t_m .

De même, les résultats pour les méthodes DC/BDF1 sont présentés par les tableaux 5.6 et 5.7 ci-dessous. Ceux pour les méthodes DC/BDF2 sont en annexe C.

TABLEAU 5.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.06e-01	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.39e-17	/	3.33e-16	/
20	3.18e-02	1.73	5.55e-17	/	1.11e-16	/	5.55e-17	/	2.22e-16	/
40	1.45e-02	1.13	5.55e-17	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/
80	7.05e-03	1.04	1.67e-16	/	1.67e-16	/	1.67e-16	/	3.89e-16	/
160	3.49e-03	1.02	2.22e-16	/	2.78e-16	/	3.89e-16	/	2.78e-16	/

TABLEAU 5.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4.45e-02	/	4.60e-04	/	4.80e-05	/	1.70e-06	/	2.72e-07	/
20	1.47e-02	1.59	4.25e-05	3.43	3.16e-06	3.92	3.57e-08	5.57	3.99e-09	6.09
40	6.81e-03	1.11	9.41e-06	2.18	3.84e-07	3.04	2.31e-09	3.95	1.33e-10	4.91
80	3.32e-03	1.03	2.28e-06	2.05	4.78e-08	3.00	1.50e-10	3.95	4.30e-12	4.95
160	1.65e-03	1.01	5.62e-07	2.02	5.98e-09	3.00	9.55e-12	3.97	1.38e-13	4.97

Comme pour les configurations précédentes, les ordres obtenus pour les différentes méthodes satisfont la théorie. Et, de même, les ordres de grandeur des erreurs restent similaires aux deux dernières configurations.

5.5 Configuration 4 - Pas de temps alternés

Une dernière configuration de pas de temps est testée. Celle-ci est la plus contraignante, car la variation brusque des pas de temps influe sur la stabilité et la précision des méthodes. **Gear [30] et Tu [31] ont montré que pour certaines méthodes d'ordre p , la 0-stabilité de celles-ci est garantie seulement si p étapes de temps sont prises avant la modification du pas de temps.**

Ainsi, le test d'alternance des pas de temps permet de déterminer si les méthodes conservent leurs précisions malgré des variations brusques et répétées des pas de temps. Cette alternance est définie telle que $k_1/k_2 = 4$.

Remarque 5.2 *Le rapport $k_1/k_2 = 4$ est supérieur à la condition de 0-stabilité du schéma BDF2 telle que $4 > 1 + \sqrt{2}$ (cf. remarque 4.1). Cependant, Bourgault et Garon [24] ont démontré que la méthode BDF2 reste stable pour toutes séquences d'alternance k_1/k_2 .*

Les tableaux 5.8 et 5.9 ci-dessous présentent respectivement les études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 et u_2 . Les études de convergence des méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe C.

TABLEAU 5.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.36e-01	/	2.22e-16	/	1.11e-16	/	1.39e-17	/	3.33e-16	/
20	6.80e-02	1.00	3.33e-16	/	4.44e-16	/	7.77e-16	/	1.78e-15	/
40	3.40e-02	1.00	3.33e-16	/	3.33e-16	/	5.55e-16	/	1.67e-15	/
80	1.70e-02	1.00	3.33e-16	/	1.44e-15	/	1.44e-15	/	1.55e-15	/
160	8.50e-03	1.00	6.66e-16	/	1.55e-15	/	2.55e-15	/	2.66e-15	/

TABLEAU 5.9 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	5.69e-02	/	7.70e-04	/	4.66e-05	/	1.90e-06	/	1.70e-07	/
20	2.85e-02	1.00	1.96e-04	1.98	6.59e-06	2.82	1.32e-07	3.85	7.12e-09	4.58
40	1.43e-02	1.00	4.94e-05	1.99	8.71e-07	2.92	8.67e-09	3.93	2.51e-10	4.83
80	7.15e-03	1.00	1.24e-05	1.99	1.12e-07	2.96	5.54e-10	3.97	8.26e-12	4.92
160	3.57e-03	1.00	3.11e-06	2.00	1.42e-08	2.98	3.50e-11	3.98	2.69e-13	4.94

Pour cette configuration, les conclusions sont encore assez proches de celles des autres. En effet, les taux de convergence correspondent à la théorie. En revanche, nous notons des augmentations minimales des erreurs. Proches de l'erreur machine, ces augmentations sont sans réelles incidences.

5.6 Synthèse

Finalement, pour les EDO, les résultats obtenus sont très encourageants (résultats résumés par les graphiques de convergence 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 ci-dessous). En effet, pour toutes les méthodes, les taux de convergences optimaux ont été obtenus, et ce, pour l'ensemble des configurations réalisées. L'évolution du pas de temps n'a que très peu d'influence sur les résultats, laissant présager l'efficacité des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe C) pour les résolutions d'EDO avec pas de temps adaptatifs.

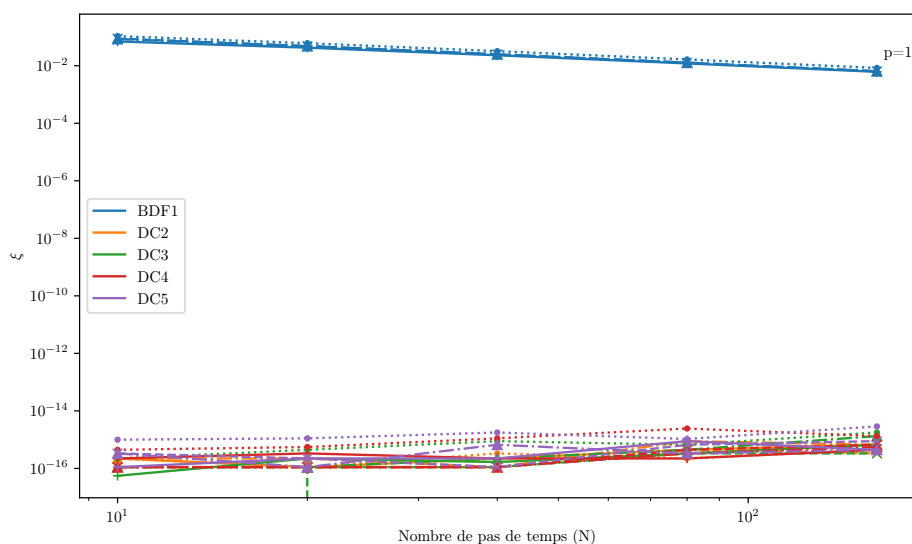


FIGURE 5.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_1 (— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

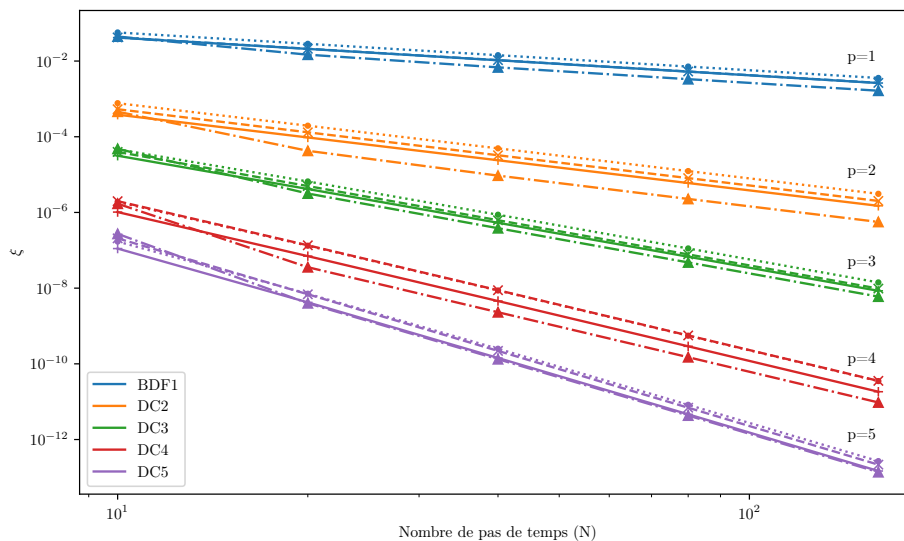


FIGURE 5.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_2 (—■ : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...● : Alternés)

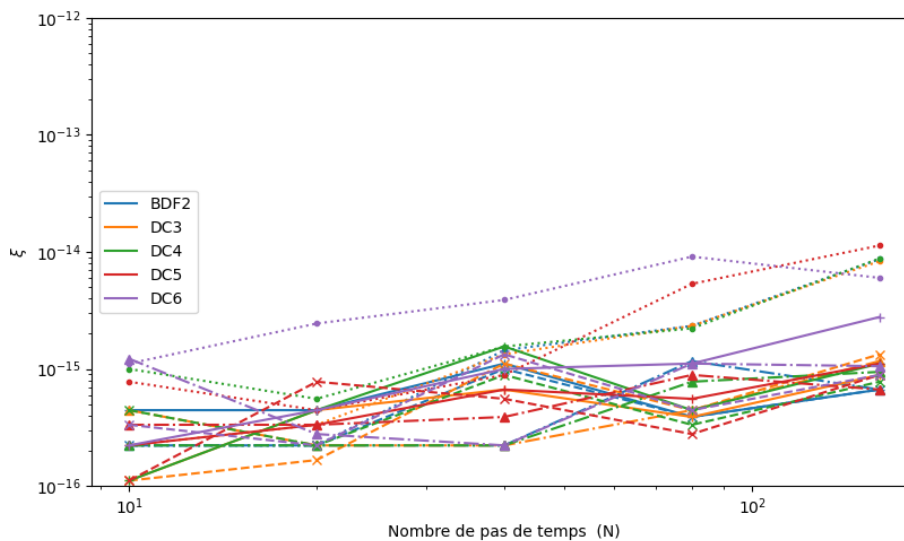


FIGURE 5.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 (—■ : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...● : Alternés)

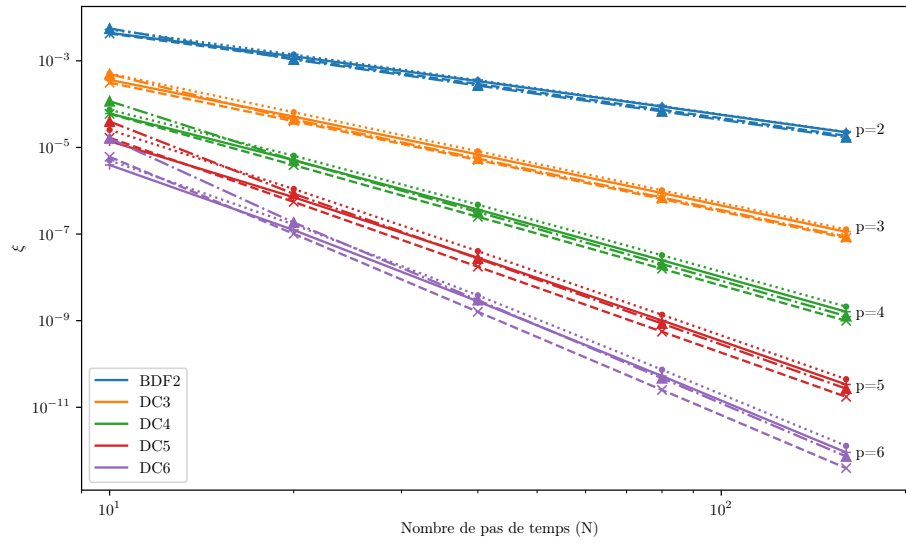


FIGURE 5.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 (—▲ : Constants; - -▲- : Croissants; - -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

CHAPITRE 6 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDO NON LINÉAIRES

Théoriquement, du fait de leurs constructions (cf. chapitre 3), les méthodes DC ont la capacité à résoudre des problèmes non linéaires. Dans ce chapitre, nous vérifions si les résultats numériques sont en accord avec la théorie. Les problèmes non linéaires (6.1) et (6.2) sont définis ci-dessous. Afin de pouvoir mener des études de convergence, des solutions particulières sont choisies. La solution $u_3 = 1/(t + 1)$ vérifie le problème (6.1). Concernant le problème (6.2), à l'aide de la méthode des solutions manufacturées (cf. section 5.1.1), nous optons pour la solution $u_4 = t^8 + 10t^5$ et son terme source correspondant $F_4 = (t^8 + 10t^5 + t)(8t^7 + 50t^4)$. Ces deux solutions sont également présentées dans le tableau 6.1 ci-dessous. Ces solutions sont intégrées sur l'intervalle de temps $I = [t_0 = 0, t_f = 1]$. Les méthodes sont initialisées analytiquement. Pour chaque étape de temps, la solution est donnée par la méthode de Newton dont le critère d'arrêt est fixé à 1×10^{-10} sur le résidu et la correction. Aussi, nous avons recours à un solveur direct.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -(u)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} (u + t) \frac{du}{dt} = F \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Comme lors du chapitre précédent, seuls les résultats pour les méthodes DC/BDF1 sont présentées afin de condenser l'exposer. L'annexe D présente les études de convergence pour les méthodes DC/BDF2.

TABLEAU 6.1 Solutions manufacturées et leurs termes sources (EDO non linéaire)

	u	$F(t, u)$	$M(t, u)$	\mathcal{I}	u_0
u_3	$\frac{1}{1+t}$	$-u^2$	1	[0, 1]	1
u_4	$t^8 + 10t^5$	$(t^8 + 10t^5 + t)(8t^7 + 50t^4)$	$t + u$	[0, 1]	0

6.1 Configuration 1 - Pas de temps constants

De même, des études de convergence sont menées dans les quatre configurations différentes de pas de temps. Nous commençons par celle de référence : pas de temps constants. Les résultats sont présentés par les tableaux 6.2 et 6.3.

TABLEAU 6.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.72e-02	/	4.86e-04	/	7.43e-05	/	1.84e-05	/	4.71e-06	/
20	8.89e-03	0.95	1.26e-04	1.95	1.16e-05	2.68	1.34e-06	3.78	1.93e-07	4.61
40	4.52e-03	0.98	3.22e-05	1.97	1.67e-06	2.80	9.00e-08	3.90	6.84e-09	4.82
80	2.28e-03	0.99	8.13e-06	1.99	2.26e-07	2.88	5.79e-09	3.96	2.28e-10	4.91
160	1.14e-03	0.99	2.04e-06	1.99	2.95e-08	2.94	3.67e-10	3.98	7.34e-12	4.95

TABLEAU 6.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.46E+00	/	2.19e-01	/	3.29e-02	/	4.63e-03	/	6.43e-04	/
20	7.22e-01	1.02	5.82e-02	1.91	4.48e-03	2.88	3.21e-04	3.85	2.30e-05	4.80
40	3.59e-01	1.01	1.51e-02	1.95	5.83e-04	2.94	2.11e-05	3.93	7.65e-07	4.91
80	1.79e-01	1.00	3.83e-03	1.98	7.43e-05	2.97	1.35e-06	3.97	2.46e-08	4.96
160	8.93e-02	1.00	9.65e-04	1.99	9.37e-06	2.99	8.53e-08	3.98	7.80e-10	4.98

À pas de temps constants, les méthodes implémentées convergent vers leurs taux théoriques, attestant ainsi l'aptitude de celles-ci pour la résolution de problèmes non linéaires.

6.2 Configuration 2 - Pas de temps croissants

Nous faisons maintenant évoluer les pas temps tels que décrit à la section 5.3. Les tableaux 6.4 et 6.5 présentent les études de convergence des méthodes DC/BDF1.

TABLEAU 6.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.66e-02	/	4.67e-04	/	6.27e-05	/	1.95e-05	/	5.93e-06	/
20	8.48e-03	0.97	1.21e-04	1.95	7.63e-06	3.04	1.19e-06	4.03	1.74e-07	5.09
40	4.29e-03	0.98	3.09e-05	1.97	9.65e-07	2.98	7.36e-08	4.02	5.26e-09	5.05
80	2.15e-03	0.99	7.81e-06	1.99	1.23e-07	2.97	4.58e-09	4.01	1.61e-10	5.03
160	1.08e-03	1.00	1.96e-06	1.99	1.55e-08	2.98	2.85e-10	4.00	5.00e-12	5.01

TABLEAU 6.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.94E+00	/	3.78e-01	/	7.81e-02	/	1.57e-02	/	3.17e-03	/
20	9.55e-01	1.03	1.02e-01	1.89	1.10e-02	2.83	1.16e-03	3.76	1.25e-04	4.66
40	4.73e-01	1.01	2.66e-02	1.94	1.46e-03	2.92	7.84e-05	3.89	4.37e-06	4.84
80	2.35e-01	1.01	6.80e-03	1.97	1.87e-04	2.96	5.09e-06	3.95	1.44e-07	4.92
160	1.17e-01	1.00	1.72e-03	1.98	2.37e-05	2.98	3.24e-07	3.97	4.63e-09	4.96

De même, la convergence des méthodes est optimale malgré l'augmentation progressive des pas de temps. Les méthodes BDF1, DC2/BDF1, DC3/BDF1, DC4/BDF1 et DC5/BDF1 sont respectivement d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5. De plus, les erreurs restent stables par rapport à celles de la première configuration de pas de temps.

6.3 Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants

Dans cette configuration, les pas de temps sont d'abord croissants puis décroissants tels que décrit dans la section 5.4. Les études de convergence des problèmes (6.1) et (6.2) sont respectivement présentées par les tableaux 6.6 et 6.7 ci-dessous.

TABLEAU 6.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.88e-02	/	5.17e-04	/	1.19e-04	/	3.41e-05	/	1.27e-05	/
20	9.61e-03	0.97	1.33e-04	1.96	1.43e-05	3.06	1.93e-06	4.14	3.51e-07	5.18
40	4.86e-03	0.98	3.38e-05	1.98	1.77e-06	3.01	1.14e-07	4.08	9.93e-09	5.14
80	2.44e-03	0.99	8.51e-06	1.99	2.20e-07	3.01	6.91e-09	4.04	2.94e-10	5.08
160	1.23e-03	1.00	2.14e-06	1.99	2.75e-08	3.00	4.25e-10	4.02	8.91e-12	5.04

TABLEAU 6.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.23E+00	/	1.54e-01	/	3.01e-02	/	1.44e-03	/	7.26e-06	/
20	6.07e-01	1.02	3.97e-02	1.96	4.01e-03	2.91	7.26e-05	4.31	1.89e-06	1.94
40	3.01e-01	1.01	1.01e-02	1.97	5.21e-04	2.94	3.84e-06	4.24	1.16e-07	4.03
80	1.50e-01	1.01	2.55e-03	1.99	6.69e-05	2.96	2.15e-07	4.16	4.70e-09	4.62
160	7.49e-02	1.00	6.41e-04	1.99	8.48e-06	2.98	1.26e-08	4.09	1.65e-10	4.83

Encore une fois, les méthodes implémentées convergent vers leurs taux théoriques respectifs. Les erreurs sont aussi stables par rapport aux dernières configurations.

6.4 Configuration 4 - Pas de temps alternés

Enfin, nous reprenons le rapport $k_1/k_2 = 4$ pour l'alternance des pas de temps comme expliqué dans la section 5.5. Les tableaux 6.8 et 6.9 présentent les études de convergence des problèmes (6.1) et (6.2).

TABLEAU 6.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.23e-02	/	7.34e-04	/	2.12e-04	/	3.49e-05	/	7.57e-06	/
20	1.18e-02	0.92	1.95e-04	1.91	2.99e-05	2.82	2.59e-06	3.75	2.71e-07	4.80
40	6.07e-03	0.96	5.02e-05	1.96	4.01e-06	2.90	1.68e-07	3.94	9.25e-09	4.87
80	3.08e-03	0.98	1.27e-05	1.98	5.19e-07	2.95	1.05e-08	4.01	3.04e-10	4.93
160	1.55e-03	0.99	3.21e-06	1.99	6.61e-08	2.97	6.48e-10	4.02	9.77e-12	4.96

TABLEAU 6.9 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.15e+00	/	4.86e-01	/	1.28e-01	/	3.98e-02	/	1.51e-02	/
20	1.03e+00	1.07	1.31e-01	1.89	2.00e-02	2.68	3.66e-03	3.44	8.67e-04	4.13
40	5.00e-01	1.04	3.39e-02	1.95	2.79e-03	2.84	2.76e-04	3.73	3.62e-05	4.58
80	2.46e-01	1.02	8.65e-03	1.97	3.68e-04	2.92	1.89e-05	3.87	1.30e-06	4.80
160	1.22e-01	1.01	2.18e-03	1.99	4.73e-05	2.96	1.24e-06	3.93	4.35e-08	4.90

Cette configuration de pas de temps est la plus délicate. Pourtant, les méthodes DC/BDF convergent tout de même avec leurs taux théoriques prouvant, encore une fois, la robustesse de ces méthodes quant à la résolution de problèmes non linéaires. On note tout de même une légère augmentation des erreurs par rapport à celles des précédentes configurations.

6.5 Synthèse

Ce chapitre démontre la capacité des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe D) pour la résolution de problèmes non linéaires. De plus, cette non-linéarité n'influence pas vraiment le comportement des méthodes. En effet, celles-ci conservent leurs ordres de convergence malgré l'évolution plus ou moins rapide des pas de temps (cf. figures 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4). Nous supposons alors leurs efficacités quant à la résolution d'EDO non linéaire avec des pas de temps adaptatifs.

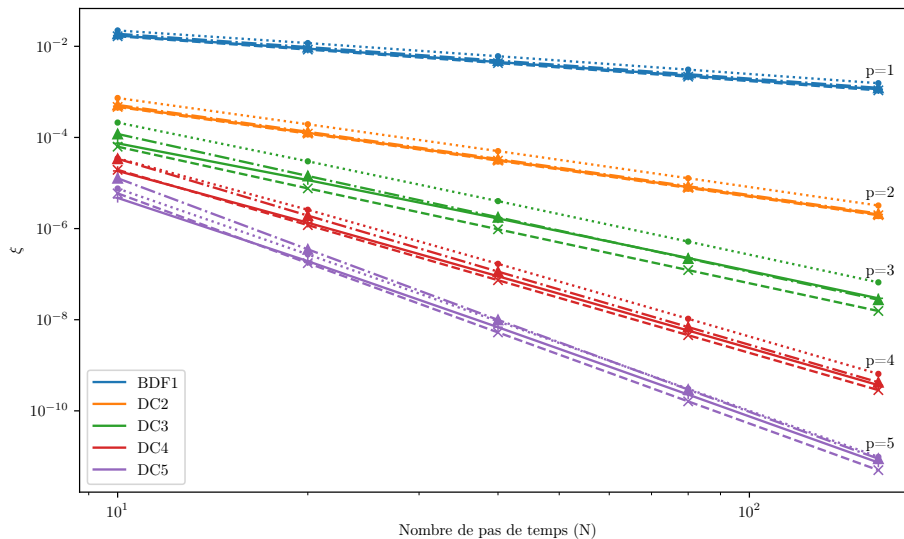


FIGURE 6.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_3 (—▲ : Constants; -×- : Croissants; -★- : Croissants/Décroissants; ...● : Alternés)

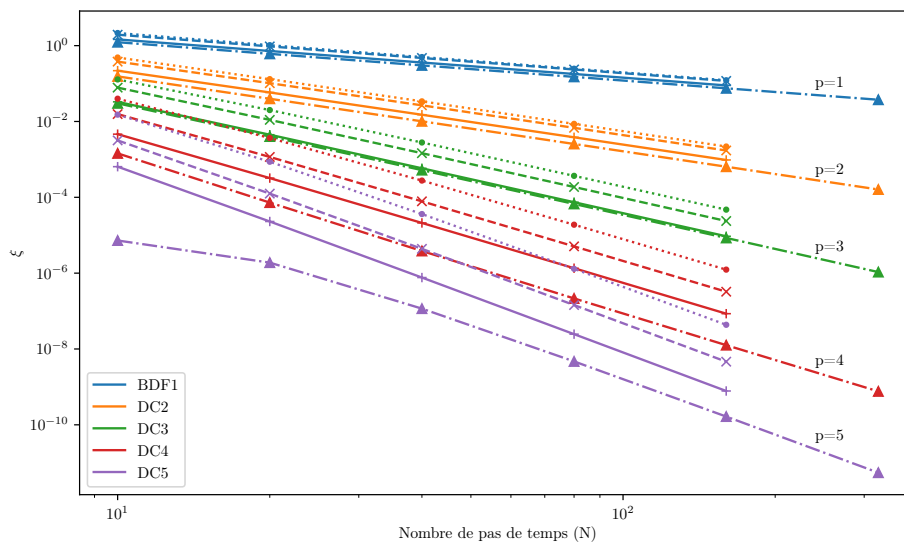


FIGURE 6.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution u_4 (—▲ : Constants; -×- : Croissants; -★- : Croissants/Décroissants; ...● : Alternés)

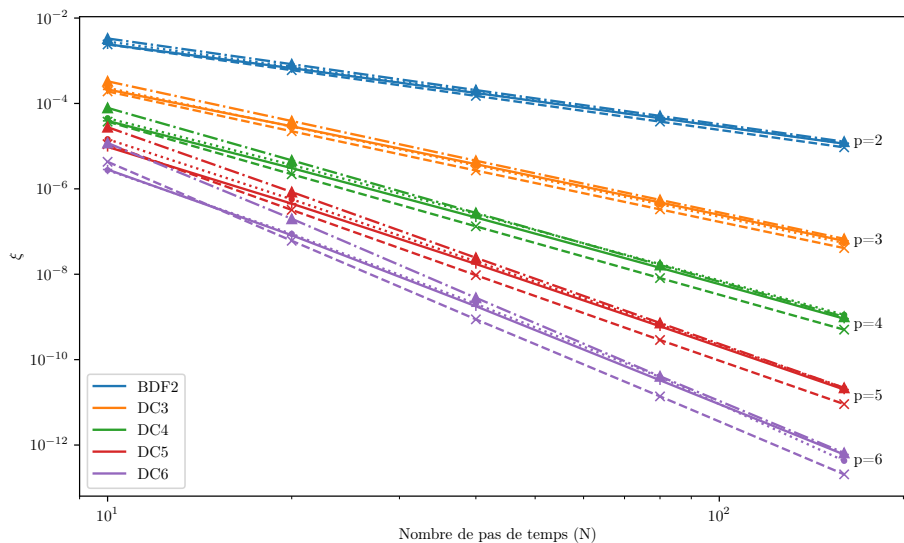


FIGURE 6.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 (— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

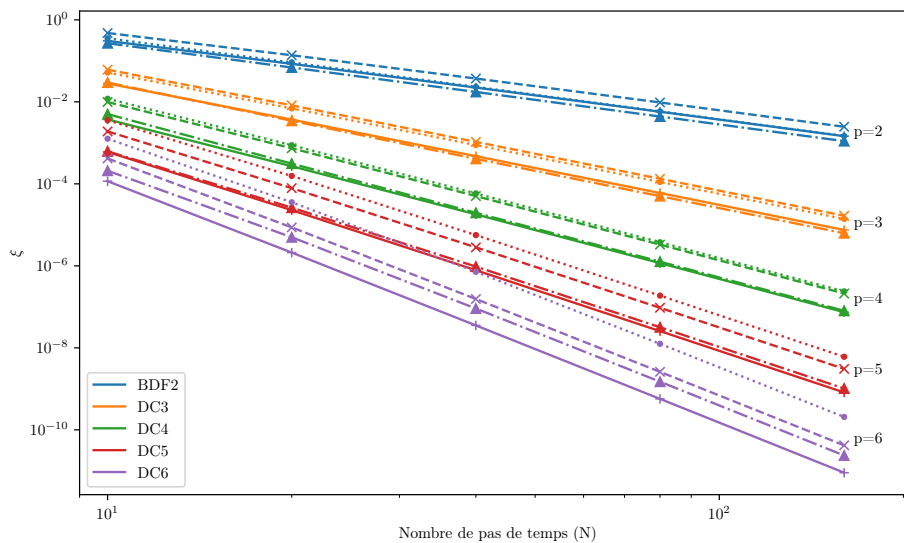


FIGURE 6.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 (— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

CHAPITRE 7 DESCRIPTION DU PROTOCOLE DE VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 1D (DIFFUSION)

Dans le cadre d'équations aux dérivées partielles (EDP), l'analyse pour la validation et la vérification des méthodes DC/BDF non linéaires devient plus complexe du fait des nombreux paramètres venant influencer la résolution. Le type d'équation, le maillage, l'interpolation spatiale, les conditions limites, etc., sont maintenant des facteurs à prendre en compte dans l'analyse.

Ainsi, initialement, nous avons décidé de nous intéresser principalement aux équations aux dérivées partielles paraboliques, et plus précisément à l'équation de la chaleur. Nous étudions alors le comportement des méthodes DC/BDF non linéaires quant à la résolution de ce type de problème. Dans un premier temps, nous regardons seulement les EDP paraboliques 1D. L'équation de la chaleur est alors définie par l'expression (7.1). Des conditions de Dirichlet sont imposées aux bords $\Gamma = \partial\Omega$ du domaine Ω .

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_D \frac{\partial T}{\partial x} \right) = F(T, x, t) \\ T(x, 0) = T_0(x) \\ T(x, t) = T_\Gamma(x, t) \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{cases} \quad (7.1)$$

avec k_D , le coefficient de diffusion.

Remarque 7.1 *Les observations numériques ne pourront s'appliquer seulement qu'à ce type d'EDP. Cependant, les informations recueillies seront utiles pour l'étude des équations de Navier-Stokes (cf. chapitre 11), qui parfois se simplifient à une équation parabolique.*

7.1 Résolution spatiale - Forme faible

Concernant la résolution spatiale du problème, la méthode des éléments finis est utilisée. En partant de l'expression (7.1), la formulation variationnelle (7.2) est définie en introduisant la fonction test w appartenant à l'espace solution $V = H_0^1(\Omega)$ telle que pour un temps t^n donné, on cherche $T^n \in H_0^1(\Omega) \times [t_0, t_f]$, solution de la formulation quasi-variationnelle implicite (7.2).

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\partial T^n}{\partial t} w \, d\Omega + \int_{\Omega} k_D \frac{\partial T^n}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \, d\Omega = \int_{\Omega} F^n w \, d\Omega} \quad (7.2)$$

Dans cette formulation, la dérivée temporelle $\frac{\partial T^n}{\partial t}$ est discrétisée par rapport au temps à l'aide des schémas DC/BDF construits précédemment (cf. chapitre 3).

7.2 Solutions manufacturées

Comme pour les EDO (voir chapitre 5), la méthode des solutions manufacturées est utilisée. À partir d'une solution exacte quelconque, le terme source F est défini tel qu'il satisfait l'équation (7.1). Pour la suite du développement, les deux solutions, définies dans le tableau 7.1 ci-dessous, sont utilisées. Nous en profitons pour définir leurs domaines spatiaux $\Omega = [x_A, x_B]$ ainsi que leurs périodes d'intégration temporelle $I = [t_0, t_f]$.

TABLEAU 7.1 Solutions manufacturées et leurs termes sources

	T	F	Ω	I
T_1	$x(x-5)t^6$	$6x(x-5)t^5 - 2k_D t^6$	$[0, 5]$	$[0, 1]$
T_2	$(x^2 - 25)t^6 + x^2 t^6 + 1$	$6(x^2 - 25)t^5 + 6x^2 t^5 - 4k_D t^6$	$[0, 5]$	$[0, 1]$

On note que les conditions limites, données ci-après (cf. tableau 7.2), sont indépendantes du temps pour la première solution manufacturée et dépendantes pour la seconde. Nous verrons dans la section 8.5 que, selon ces conditions, les résultats des études de convergence sont très différents.

TABLEAU 7.2 Conditions limites des solutions T_1 et T_2

	x_A	x_B
T_1	0	0
T_2	$-25t^6 + 1$	$25t^6 + 1$

À chaque étape de temps t^n , la résolution de l'EDP permet d'obtenir une solution numérique T^n que l'on viendra comparer à celle exacte, $T(t^n)$, en utilisant une norme.

7.3 Norme

La précision de la solution est influencée à la fois par **la discrétisation temporelle, mais également par la discrétisation spatiale**. Il faut alors prendre en considération ces deux erreurs qui coexistent.

Concernant la résolution spatiale, la méthode des éléments finis est utilisée. L'interpolation sur les éléments de taille caractéristique h est réalisée par des polynômes P_m de Lagrange de degré m . Ainsi, à un instant t^n , l'erreur spatiale ξ_x est mesurée à l'aide de la norme L_2 définie telle que :

$$\xi_x = \|T^n - T(x, t^n)\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (T^n - T(x, t^n))^2 dx} \sim \mathcal{O}(h^{m+1}) \quad (7.3)$$

Enfin, la norme infinie, sur l'ensemble des erreurs spatiales de la période d'intégration Ω_t , permet de caractériser l'erreur temporelle. Ainsi, l'erreur globale ξ peut être définie comme suit :

$$\xi = \|T^n - T(x, t)\|_{L^2(\Omega), L^\infty(I)} = \max_{n=1, \dots, N} \sqrt{\int_{\Omega} (T^n - T(x, t^n))^2 dx} \sim \mathcal{O}(k^p, h^{m+1}) \quad (7.4)$$

avec k le pas de temps et p l'ordre de la méthode utilisée.

7.4 Étude de convergence

Dans le but de vérifier et de valider le comportement des méthodes DC/BDF non linéaires, nous souhaitons nous affranchir de l'erreur spatiale. Les solutions manufacturées utilisées étant de degré 2 en espace (cf. tableau 7.1), l'utilisation de polynômes de Lagrange de type P_2 permet, en théorie, l'intégration exacte de la solution en espace à condition d'utiliser suffisamment de points de quadrature. L'influence de l'erreur spatiale dans l'erreur globale est alors minimisée devant celle temporelle, permettant d'écrire :

$$\xi_k \sim \mathcal{O}(k^p) \quad (7.5)$$

Ainsi, pour les prochaines études de convergence (chapitres 8 et 9), seul un raffinement des pas de temps est nécessaire et l'utilisation d'un maillage fixe avec un nombre d'éléments arbitrairement fixé est suffisant. Successivement, le nombre de pas de temps N est alors doublé, permettant le calcul du taux de convergence p tel que :

$$p = \frac{\log\left(\frac{\xi_k}{\xi_{k/2}}\right)}{\log(2)} \quad (7.6)$$

7.5 Caractéristiques de résolution

Nous utilisons une quadrature de Gauss-Legendre garantissant l'intégration exacte de tous polynômes de degré n avec $(2n - 1)$ points. Nous veillons à toujours respecter ce nombre minimum de points. De même, lors de la mesure de l'erreur de la norme L_2 , un nombre suffisant de points de quadrature est utilisé.

Aussi, l'initialisation des différentes méthodes est faite analytiquement. Pour chaque pas de temps, la solution est donnée par la méthode de Newton dont le critère d'arrêt est fixé à 1×10^{-10} pour la norme maximale du résidu et de la correction.

CHAPITRE 8 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 1D (DIFFUSION)

Les résultats concernant les méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe E.

8.1 Paramètres

Souhaitant toujours vérifier la robustesse des méthodes DC/BDF non linéaire quant à l'évolution des pas de temps, les études de convergence sont menées avec les mêmes configurations de pas de temps définies dans le chapitre 5.

Pour rappel, la résolution spatiale est supposée exacte du fait de l'utilisation de polynômes d'interpolation de Lagrange de type P_2 censés intégrer parfaitement les solutions manufacturées polynomiales de degré spatial inférieur ou égal à 2. Cette hypothèse nous permet d'utiliser un maillage fixe lors des études de convergence. Son nombre d'éléments est arbitrairement fixé à 10.

Aussi, des conditions de Dirichlet sont imposées fortement aux bords. Et, enfin, le coefficient de diffusion est arbitrairement fixé à 100.

Ces paramètres de résolution sont résumés dans le tableau suivant :

TABLEAU 8.1 Paramètres des études de convergence pour EDP paraboliques 1D

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Constants				
Croissants	P_2	10	Dirichlet fortes	100
Croissants/Décroissants				
Alternés				

8.2 Configuration 1 - Pas de temps constants

La première configuration est celle avec des pas de temps k constants. Les tableaux 8.2 et 8.3 montrent les résultats obtenus avec impositions fortes des conditions limites de Dirichlet. Nous rappelons aussi que l'initialisation des méthodes est faite analytiquement.

TABLEAU 8.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps constants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	3.11e-01	/	7.25e-02	/	1.37e-02	/	1.92e-03	/	5.46e-04	/
20	10	1.65e-01	0.91	2.03e-02	1.84	1.92e-03	2.83	1.30e-04	3.88	8.39e-06	6.02
40	10	8.52e-02	0.96	5.36e-03	1.92	2.54e-04	2.92	8.46e-06	3.94	1.53e-07	5.78
80	10	4.32e-02	0.98	1.38e-03	1.96	3.26e-05	2.96	5.39e-07	3.97	4.77e-09	5.00
160	10	2.18e-02	0.99	3.49e-04	1.98	4.13e-06	2.98	3.40e-08	3.99	1.49E-10	5.00
320	10	1.09e-02	0.99	8.78e-05	1.99	5.19e-07	2.99	2.14e-09	3.99	4.66E-12	5.00
640	10	5.48e-03	1.00	2.20e-05	2.00	6.51e-08	3.00	1.34E-10	4.00	1.48E-13	4.97

TABLEAU 8.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps constants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	6.56e-01	/	1.53e-01	/	2.89e-02	/	4.05e-03	/	3.27e-04	/
20	10	3.48e-01	0.91	4.28e-02	1.84	4.06e-03	2.83	2.74e-04	3.88	1.02e-05	5.00
40	10	1.80e-01	0.96	1.13e-02	1.92	5.36e-04	2.92	1.78e-05	3.94	3.20e-07	5.00
80	10	9.12e-02	0.98	2.91e-03	1.96	6.88e-05	2.96	1.14e-06	3.97	9.99e-09	5.00
160	10	4.59e-02	0.99	7.38e-04	1.98	8.72e-06	2.98	7.16e-08	3.99	3.12E-10	5.00
320	10	2.31e-02	0.99	1.86e-04	1.99	1.10e-06	2.99	4.50e-09	3.99	9.74E-12	5.00
640	10	1.15e-02	1.00	4.66e-05	2.00	1.38e-07	3.00	2.82E-10	4.00	2.96E-13	5.04

Comme espéré, les taux de convergence des différentes méthodes sont conformes à ceux théoriques. En effet, ils correspondent aux ordres des schémas temporels. La discrétisation spatiale n'influence donc pas les résultats venant confirmer que l'intégration spatiale est exacte.

Ainsi, à pas de temps constants, nos méthodes convergent au moins jusqu'au cinquième et sixième ordre (DC5/BDF1 et DC6/BDF2) avec des conditions de Dirichlet homogènes ou non.

8.3 Configuration 2 - Pas de temps croissants

La deuxième configuration testée est celle où les pas de temps augmentent progressivement tels que décrit dans la section 5.3. Les résultats suivants sont obtenus (tableaux 8.4 et 8.5) :

TABLEAU 8.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	4.08e-01	/	1.31e-01	/	3.78e-02	/	9.67e-03	/	2.16e-03	/
20	10	2.22e-01	0.88	3.87e-02	1.75	5.88e-03	2.68	7.76e-04	3.64	8.87e-05	4.61
40	10	1.15e-01	0.94	1.05e-02	1.88	8.18e-04	2.85	5.47e-05	3.83	3.16e-06	4.81
80	10	5.89e-02	0.97	2.75e-03	1.94	1.08e-04	2.92	3.63e-06	3.91	1.05e-07	4.91
160	10	2.98e-02	0.99	7.02e-04	1.97	1.38e-05	2.96	2.33e-07	3.96	3.40e-09	4.95
320	10	1.50e-02	0.99	1.77e-04	1.98	1.75e-06	2.98	1.48e-08	3.98	1.08E-10	4.98
640	10	7.50e-03	1.00	4.46e-05	1.99	2.20e-07	2.99	9.32E-10	3.99	3.40E-12	4.99

TABLEAU 8.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	8.61e-01	/	2.77e-01	/	8.03e-02	/	2.06e-02	/	4.60e-03	/
20	10	4.67e-01	0.88	8.21e-02	1.75	1.25e-02	2.68	1.65e-03	3.64	1.89e-04	4.60
40	10	2.44e-01	0.94	2.23e-02	1.88	1.74e-03	2.85	1.17e-04	3.83	6.75e-06	4.81
80	10	1.24e-01	0.97	5.83e-03	1.94	2.29e-04	2.92	7.73e-06	3.91	2.25e-07	4.91
160	10	6.28e-02	0.99	1.49e-03	1.97	2.94e-05	2.96	4.98e-07	3.96	7.25e-09	4.95
320	10	3.16e-02	0.99	3.76e-04	1.98	3.72e-06	2.98	3.16e-08	3.98	2.30E-10	4.98
640	10	1.58e-02	1.00	9.45e-05	1.99	4.68e-07	2.99	1.99e-09	3.99	7.25E-12	4.99

L'augmentation progressive du pas de temps n'a que très peu d'influence sur la convergence des méthodes. En effet, les résultats précédents permettent d'affirmer que toutes les méthodes implémentées convergent avec le taux théorique. L'homogénéité des conditions de Dirichlet n'a pas d'importance sur la convergence des méthodes.

8.4 Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants

Une troisième configuration est menée. Les pas de temps commencent par croître avant de diminuer progressivement. L'évolution du pas de temps est détaillée dans la section 5.4.

Les tableaux 8.6 et 8.7 présentent les résultats.

TABLEAU 8.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	2.31e-01	/	3.64e-02	/	9.95e-03	/	3.07e-03	/	1.87e-03	/
20	10	1.21e-01	0.93	9.27e-03	1.97	1.26e-03	2.98	2.48e-04	3.63	8.35e-05	4.49
40	10	6.21e-02	0.96	2.35e-03	1.98	1.64e-04	2.94	1.96e-05	3.66	4.56e-06	4.20
80	10	3.14e-02	0.98	5.92e-04	1.99	2.17e-05	2.92	1.37e-06	3.84	2.12e-07	4.43
160	10	1.58e-02	0.99	1.49e-04	1.99	2.83e-06	2.94	9.08e-08	3.92	7.80e-09	4.76
320	10	7.93e-03	1.00	3.73e-05	2.00	3.61e-07	2.97	5.84e-09	3.96	1.80e-09	4.87
640	10	3.97e-03	1.00	9.32e-06	2.00	4.56e-08	2.99	3.70E-10	3.98	4.02E-10	4.98

TABLEAU 8.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	4.85e-01	/	7.64e-02	/	2.12e-02	/	1.94e-03	/	3.50e-04	/
20	10	2.55e-01	0.93	1.95e-02	1.97	2.67e-03	2.99	9.45e-05	4.36	7.34e-06	5.58
40	10	1.31e-01	0.96	4.93e-03	1.98	3.43e-04	2.96	5.25e-06	4.17	2.26e-07	5.02
80	10	6.61e-02	0.98	1.24e-03	1.99	4.57e-05	2.91	3.10e-07	4.08	6.93e-09	5.03
160	10	3.32e-02	0.99	3.12e-04	1.99	6.01e-06	2.93	1.88e-08	4.04	2.14E-10	5.02
320	10	1.67e-02	1.00	7.81e-05	2.00	7.69e-07	2.96	1.16e-09	4.02	6.62E-12	5.01
640	10	8.35e-03	1.00	1.96e-05	2.00	9.74e-08	2.98	7.19E-11	4.01	1.94E-13	5.09

Les conclusions sont similaires aux précédentes configurations de pas de temps. Les ordres des méthodes correspondent à ceux théoriques allant de 1 à 5.

8.5 Configuration 4 - Pas de temps alternés

Enfin, les tableaux 8.8 et 8.9 présentent les études de convergence des méthodes avec alternance des pas de temps.

TABLEAU 8.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	4.49e-01	/	1.92e-01	/	1.34e-01	/	1.25e-01	/	1.43e-01	/
20	10	2.38e-01	0.92	6.35e-02	1.60	3.73e-02	1.84	2.98e-02	2.07	3.13e-02	2.19
40	10	1.21e-01	0.98	1.83e-02	1.79	7.48e-03	2.32	4.09e-03	2.86	3.14e-03	3.32
80	10	6.03e-02	1.00	4.90e-03	1.90	1.21e-03	2.63	4.06e-04	3.33	2.75e-04	3.51
160	10	3.00e-02	1.01	1.26e-03	1.96	1.74e-04	2.80	3.70e-05	3.46	3.18e-05	3.11
320	10	1.50e-02	1.00	3.21e-04	1.98	2.34e-05	2.89	3.56e-06	3.38	3.45e-06	3.20
640	10	7.47e-03	1.00	8.07e-05	1.99	3.06e-06	2.94	3.58e-07	3.31	3.63e-07	3.25

TABLEAU 8.9 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	9.48e-01	/	4.13e-01	/	3.05e-01	/	3.13e-01	/	4.12e-01	/
20	10	5.04e-01	0.91	1.41e-01	1.55	1.01e-01	1.60	1.13e-01	1.47	1.90e-01	1.12
40	10	2.56e-01	0.98	4.25e-02	1.72	2.73e-02	1.88	3.05e-02	1.90	5.36e-02	1.82
80	10	1.28e-01	1.00	1.20e-02	1.83	6.35e-03	2.10	6.49e-03	2.23	1.19e-02	2.18
160	10	6.35e-02	1.01	3.21e-03	1.90	1.33e-03	2.26	1.32e-03	2.29	2.60e-03	2.19
320	10	3.16e-02	1.01	8.37e-04	1.94	2.68e-04	2.31	2.66e-04	2.31	5.14e-04	2.34
640	10	1.58e-02	1.00	2.15e-04	1.96	5.28e-05	2.34	4.94e-05	2.43	8.87e-05	2.54

Pour cette dernière configuration, les résultats sont plus contrastés. Lorsque les conditions sont indépendantes du temps (T_1), seules les méthodes BDF1, DC2/BDF1 et DC3/BDF1 convergent respectivement avec leurs ordres théoriques. Concernant DC4/BDF1 et DC5/BDF1, des pertes d'ordre sont observées. Ces méthodes semblent maintenant converger avec un taux d'environ 3.3. De plus, les erreurs montrent qu'il n'y a pratiquement aucun gain de précision entre ces deux méthodes.

Concernant T_2 (conditions limites dépendantes du temps), des pertes d'ordre sont observées à partir de la méthode DC3/BDF1. Par ailleurs, elles sont encore plus importantes que pour la solution T_1 . DC3/BDF1, DC4/BDF1 et DC5/BDF1 convergent respectivement à l'ordre 2.34, 2.43 et 2.54. Le plus contrariant est le fait que les premiers résultats de l'étude de convergence pour DC5/BDF1 sont moins précis que ceux pour la méthode DC2/BDF1.

8.6 Synthèse

Les résultats précédemment obtenus et résumés par les graphiques 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4 ci-dessous sont, dans l'ensemble, très satisfaisants. En effet, l'ensemble des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe E) implémentées convergent avec leurs taux théoriques pour les trois premières configurations de pas de temps (constants, croissants, croissants/décroissants). Cette convergence suggère l'efficacité de ces méthodes lors de l'adaptation des pas de temps.

Cependant, une certaine continuité sur leurs évolutions est nécessaire. La dernière configuration a révélé un comportement délétère des méthodes quant à la conservation de leurs précisions lors d'une évolution trop brusque des pas de temps. Des pertes d'ordre sont observées pour les méthodes d'ordre les plus élevés, ne garantissant plus de gain de précision par rapport aux méthodes d'ordre théorique inférieur. L'intensité de ces pertes d'ordre est dépendante des conditions limites. Si celles-ci sont fonctions du temps, seule la première extrapolation (DC2/BDF1) se comporte correctement. Dans le cas de conditions limites non dépendantes du temps, les trois premières extrapolations convergent optimalement. Les méthodes DC/BDF2 se comportent similairement (cf. annexe E et graphiques 8.3 et 8.4).

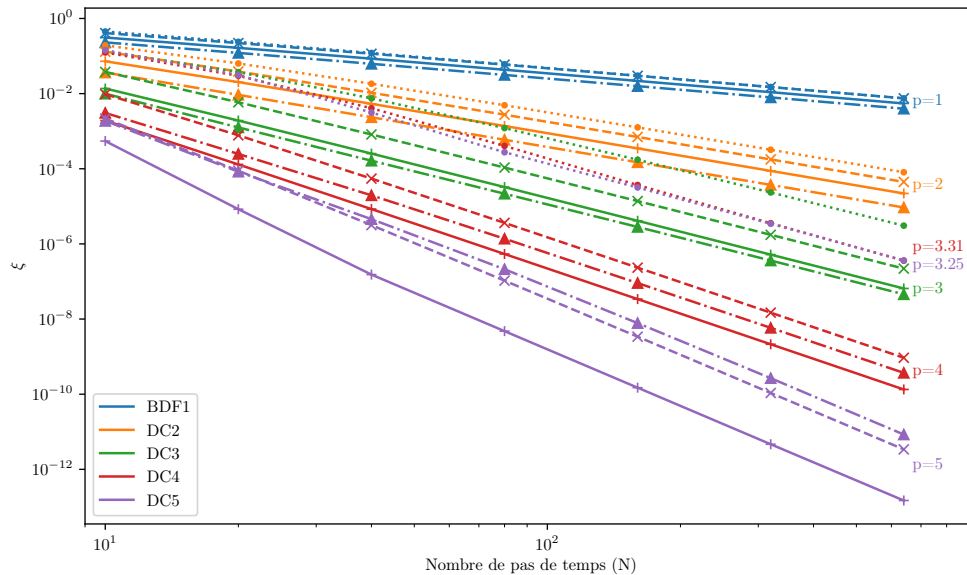


FIGURE 8.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 (—+— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ···●··· : Alternés)

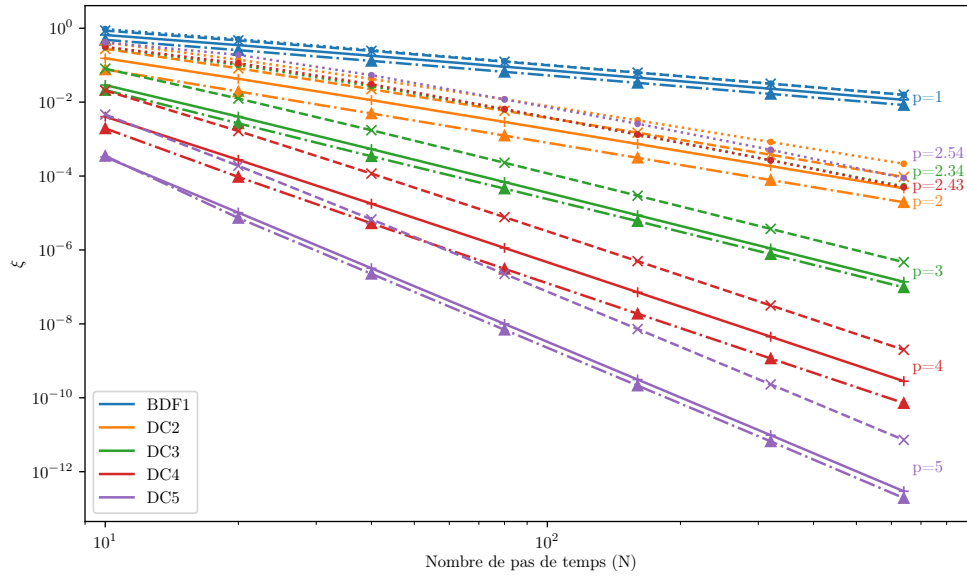


FIGURE 8.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 (—▲— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

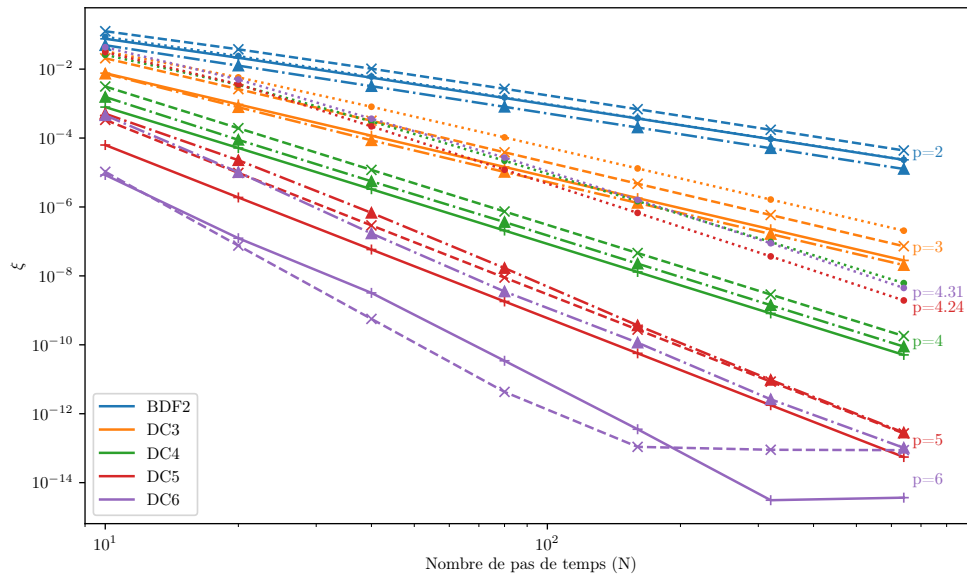


FIGURE 8.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 (—▲— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

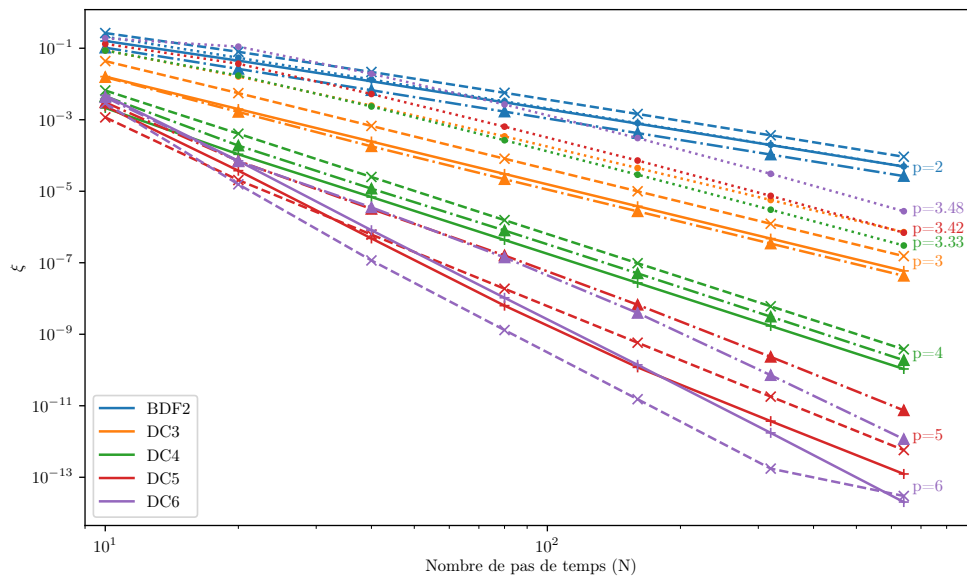


FIGURE 8.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 (— \times — : Constants; - \times - : Croissants; - \blacktriangle - : Croissants/Décroissants; ... \bullet ... : Alternés)

**CHAPITRE 9 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES
DC/BDF NON LINÉAIRES POUR DES EDP PARABOLIQUES 2D
(DIFFUSION)**

Forts de ces observations, nous poursuivons le protocole de vérification et validation des méthodes DC/BDF non linéaires. Nous regardons maintenant la capacité de ces méthodes en la résolution de problèmes à deux dimensions (2D). Par continuité du chapitre précédent, nous étudions l'équation de la chaleur 2D définie comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k_D \nabla T) = F(t, x, y) \\ T(t_0, x, y) = T_0 \\ T(t, x, y) = T_\Gamma(t, x, y) \quad \text{pour } \forall (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (9.1)$$

Des conditions limites de Dirichlet sont donc imposées au bord Γ du domaine Ω défini par une cavité telle que $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. La période d'intégration temporelle est définie comme $I = [0, 1]$. La méthode des solutions manufacturées est encore utilisée permettant définir les solutions T_3 et T_4 telles que :

TABLEAU 9.1 Solutions manufacturées et leurs termes sources

	T	F	Ω	I
T_3	$1 + t^6$	$6t^5$	$[0, 1] \times [0, 1]$	$[0, 1]$
T_4	$x^2 + y^2 + t^6$	$6t^5 - 4k_D$	$[0, 1] \times [0, 1]$	$[0, 1]$

Aussi, on remarque qu'au bord Γ , les conditions limites sont dépendantes du temps.

De même, les études de convergence sont menées avec les quatre mêmes configurations de pas de temps définies dans le chapitre 5. La résolution spatiale est supposée exacte du fait de l'utilisation de polynômes d'interpolation de Lagrange de type P_2 censés intégrer parfaitement les solutions manufacturées polynomiales de degré spatial inférieur ou égal à 2. Cette hypothèse nous permet d'utiliser un maillage fixe lors des études de convergence. Son nombre d'éléments est arbitrairement fixé à 16. Aussi, des conditions de Dirichlet sont imposées fortement aux bords. Et, enfin, le coefficient de diffusion est arbitrairement fixé à 100. Le tableau 9.2 montre plus explicitement les paramètres utilisés pour les études de convergence.

TABLEAU 9.2 Paramètres des études de convergence pour EDP paraboliques 2D

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Constants				
Croissants	P_2	16	Dirichlet fortes	100
Croissants/Décroissants				
Alternés				

Les études de convergence pour les méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe F.

9.1 Configuration 1 - Pas de temps constants

Les tableaux 9.3 et 9.4 ci-dessous présentent les résultats des études de convergence menées avec des **pas de temps constants** pour les solutions T_3 et T_4 .

TABLEAU 9.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	5.28e-03	/	1.27e-03	/	2.40e-04	/	3.27e-05	/	3.13e-05	/
20	16	2.82e-03	0.91	3.56e-04	1.83	3.36e-05	2.84	2.21e-06	3.89	6.67e-07	5.55
40	16	1.46e-03	0.95	9.42e-05	1.92	4.44e-06	2.92	1.43e-07	3.95	1.08e-08	5.95
80	16	7.40e-04	0.98	2.42e-05	1.96	5.70e-07	2.96	9.09e-09	3.97	1.76E-10	5.94
160	16	3.73e-04	0.99	6.14e-06	1.98	7.22e-08	2.98	5.73E-10	3.99	2.46E-12	6.15
320	16	1.87e-04	0.99	1.55e-06	1.99	9.08e-09	2.99	3.60E-11	3.99	7.69E-14	5.00
640	16	9.38e-05	1.00	3.88e-07	1.99	1.14e-09	3.00	2.26E-12	4.00	4.23E-13	-2.46

TABLEAU 9.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps constants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	5.28e-03	/	1.27e-03	/	2.40e-04	/	3.27e-05	/	3.13e-05	/
20	16	2.82e-03	0.91	3.56e-04	1.83	3.36e-05	2.84	2.21e-06	3.89	6.67e-07	5.55
40	16	1.46e-03	0.95	9.42e-05	1.92	4.44e-06	2.92	1.43e-07	3.95	1.08e-08	5.95
80	16	7.40e-04	0.98	2.42e-05	1.96	5.70e-07	2.96	9.09e-09	3.97	1.76E-10	5.94
160	16	3.73e-04	0.99	6.14e-06	1.98	7.22e-08	2.98	5.73E-10	3.99	2.46E-12	6.15
320	16	1.87e-04	0.99	1.55e-06	1.99	9.08e-09	2.99	3.60E-11	3.99	7.69E-14	5.00
640	16	9.38e-05	1.00	3.88e-07	1.99	1.14e-09	3.00	2.26E-12	4.00	4.23E-13	-2.46

Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus en 1D (cf. section 8.2). À pas de temps constants, les méthodes DC/BDF convergent respectivement avec leurs ordres théoriques malgré l'ajout d'une dimension spatiale. De plus, l'hypothèse de capture exacte de la solution spatiale est de nouveau vérifiée. En effet, les erreurs entre T_3 et T_4 sont identiques, montrant que seul le terme temporel (t^6) influence l'erreur globale.

Remarque 9.1 *Lors de la dernière itération, le taux de convergence de DC5/BDF1 ne correspond pas à celui théorique. Toutefois, il ne s'agit pas de perte d'ordre, simplement, les critères de tolérance sont atteints, limitant ainsi la précision de la méthode.*

9.2 Configuration 2 - Pas de temps croissants

Les tableaux 9.5 et 9.6 présentent les études de convergence pour les solutions T_3 et T_4 avec des **pas de temps croissants** tels que définis à la section 5.3.

TABLEAU 9.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	6.94e-03	/	2.32e-03	/	6.90e-04	/	1.80e-04	/	4.13e-05	/
20	16	3.80e-03	0.87	6.94e-04	1.74	1.09e-04	2.67	1.46e-05	3.62	1.70e-06	4.60
40	16	1.99e-03	0.93	1.90e-04	1.87	1.52e-05	2.84	1.04e-06	3.82	6.10e-08	4.81
80	16	1.02e-03	0.97	4.97e-05	1.93	2.00e-06	2.92	6.88e-08	3.91	2.04e-09	4.90
160	16	5.14e-04	0.98	1.27e-05	1.97	2.57e-07	2.96	4.43e-09	3.96	6.57E-11	4.95
320	16	2.59e-04	0.99	3.21e-06	1.98	3.26e-08	2.98	2.81E-10	3.98	2.09E-12	4.98
640	16	1.30e-04	1.00	8.08e-07	1.99	4.10e-09	2.99	1.77E-11	3.99	8.24E-13	1.34

TABLEAU 9.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	6.94e-03	/	2.32e-03	/	6.90e-04	/	1.80e-04	/	4.13e-05	/
20	16	3.80e-03	0.87	6.94e-04	1.74	1.09e-04	2.67	1.46e-05	3.62	1.70e-06	4.60
40	16	1.99e-03	0.93	1.90e-04	1.87	1.52e-05	2.84	1.04e-06	3.82	6.10e-08	4.81
80	16	1.02e-03	0.97	4.97e-05	1.93	2.00e-06	2.92	6.88e-08	3.91	2.04e-09	4.90
160	16	5.14e-04	0.98	1.27e-05	1.97	2.57e-07	2.96	4.43e-09	3.96	6.57E-11	4.95
320	16	2.59e-04	0.99	3.21e-06	1.98	3.26e-08	2.98	2.81E-10	3.98	2.09E-12	4.98
640	16	1.30e-04	1.00	8.08e-07	1.99	4.10e-09	2.99	1.77E-11	3.99	8.24E-13	1.34

De même, la convergence optimale des méthodes est constatée pour l'ensemble des méthodes lors de l'augmentation progressive des pas de temps.

9.3 Configuration 3 - Pas de temps croissants puis décroissants

Les tableaux 9.7 et 9.8 présentent les études de convergence pour les solutions T_3 et T_4 avec des **pas de temps croissants puis décroissants** tels que définis dans la section 5.4.

TABLEAU 9.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	3.81e-03	/	6.00e-04	/	1.84e-04	/	5.56e-05	/	6.37e-05	/
20	16	2.00e-03	0.93	1.51e-04	1.99	2.23e-05	3.05	5.41e-06	3.36	4.16e-06	3.94
40	16	1.03e-03	0.96	3.83e-05	1.98	3.27e-06	2.77	4.22e-07	3.68	2.39e-07	4.12
80	16	5.20e-04	0.98	9.61e-06	1.99	4.56e-07	2.84	2.95e-08	3.84	1.01e-08	4.57
160	16	2.62e-04	0.99	2.41e-06	2.00	6.01e-08	2.92	1.91e-09	3.95	3.47E-10	4.86
320	16	1.31e-04	1.00	6.03e-07	2.00	7.72e-09	2.96	1.21E-10	3.98	1.11E-11	4.97
640	16	6.57e-05	1.00	1.51e-07	2.00	9.78E-10	2.98	7.61E-12	3.99	3.50E-13	4.98

TABLEAU 9.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	3.81e-03	/	6.00e-04	/	1.84e-04	/	5.56e-05	/	6.37e-05	/
20	16	2.00e-03	0.93	1.51e-04	1.99	2.23e-05	3.05	5.41e-06	3.36	4.16e-06	3.94
40	16	1.03e-03	0.96	3.83e-05	1.98	3.27e-06	2.77	4.22e-07	3.68	2.39e-07	4.12
80	16	5.20e-04	0.98	9.61e-06	1.99	4.56e-07	2.84	2.95e-08	3.84	1.01e-08	4.57
160	16	2.62e-04	0.99	2.41e-06	2.00	6.01e-08	2.92	1.91e-09	3.95	3.47E-10	4.86
320	16	1.31e-04	1.00	6.03e-07	2.00	7.72e-09	2.96	1.21E-10	3.98	1.11E-11	4.97
640	16	6.57e-05	1.00	1.51e-07	2.00	9.78E-10	2.98	7.61E-12	3.99	3.50E-13	4.98

Concernant la configuration avec des pas de temps d'abord croissants puis décroissants, en 2D, les conclusions sont identiques à celles faites avec une dimension. Les méthodes convergent respectivement avec leurs ordres théoriques.

9.4 Configuration 4 - Pas de temps alternés

Les tableaux 9.9 et 9.10 présentent les études de convergence pour les solutions T_3 et T_4 menées avec la dernière configuration de pas de temps (**alternés**).

TABLEAU 9.9 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 avec pas de temps alternés

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	7.76e-03	/	3.89e-03	/	3.90e-03	/	5.20e-03	/	8.31e-03	/
20	16	4.23e-03	0.88	1.61e-03	1.27	1.91e-03	1.03	2.86e-03	0.86	5.54e-03	0.58
40	16	2.17e-03	0.96	5.96e-04	1.43	6.89e-04	1.47	9.44e-04	1.60	1.78e-03	1.64
80	16	1.08e-03	1.01	1.96e-04	1.61	1.87e-04	1.88	2.12e-04	2.15	3.84e-04	2.22
160	16	5.33e-04	1.02	5.80e-05	1.76	4.16e-05	2.17	4.31e-05	2.30	8.68e-05	2.14
320	16	2.62e-04	1.02	1.60e-05	1.86	8.66e-06	2.26	9.08e-06	2.25	1.81e-05	2.26
640	16	1.30e-04	1.02	4.25e-06	1.91	1.77e-06	2.29	1.75e-06	2.38	3.19e-06	2.50

TABLEAU 9.10 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 avec pas de temps alternés

		BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	7.76e-03	/	3.89e-03	/	3.90e-03	/	5.20e-03	/	8.31e-03	/
20	16	4.23e-03	0.88	1.61e-03	1.27	1.91e-03	1.03	2.86e-03	0.86	5.54e-03	0.58
40	16	2.17e-03	0.96	5.96e-04	1.43	6.89e-04	1.47	9.44e-04	1.60	1.78e-03	1.64
80	16	1.08e-03	1.01	1.96e-04	1.61	1.87e-04	1.88	2.12e-04	2.15	3.84e-04	2.22
160	16	5.33e-04	1.02	5.80e-05	1.76	4.16e-05	2.17	4.31e-05	2.30	8.68e-05	2.14
320	16	2.62e-04	1.02	1.60e-05	1.86	8.66e-06	2.26	9.08e-06	2.25	1.81e-05	2.26
640	16	1.30e-04	1.02	4.25e-06	1.91	1.77e-06	2.29	1.75e-06	2.38	3.19e-06	2.50

Comme attendu, à partir de trois extrapolations, des pertes d'ordre sont observées pour les méthodes. Seuls, la méthode initiale (BDF1) et la première extrapolation (DC2/BDF1) convergent avec leur ordre théorique (1 et 2). À partir de DC3/BDF1, la convergence n'est plus optimale telle que DC3, DC4 et DC5 convergent respectivement avec un taux de 2.3, 2.4 et 2.5. Ces résultats étaient prévisibles. En effet, ce même comportement a été constaté en 1D (cf. section 8.5) lorsque les conditions limites sont dépendantes du temps.

9.5 Synthèse

Ce chapitre confirme le comportement déjà observé en 1D. L'ajout d'une dimension spatiale à l'équation de la chaleur ne modifie pas le comportement des méthodes DC/BDF1 et

DC/BDF2 (cf. annexe F). Comme résumé par les graphiques de convergence 9.1, 9.2, 9.3 et 9.4 ci-dessous, les méthodes continuent de converger parfaitement pour les trois premières configurations de pas de temps, c'est-à-dire, lorsque l'évolution est régulière. Concernant la dernière configuration, l'alternance des pas de temps conduit à des pertes d'ordre. Notamment, du fait de conditions limites dépendantes du temps pour les deux solutions étudiées, des pertes d'ordre sont observées à partir de la troisième extrapolation.

Afin d'essayer de mieux comprendre ce comportement, l'influence de différents paramètres est analysée.

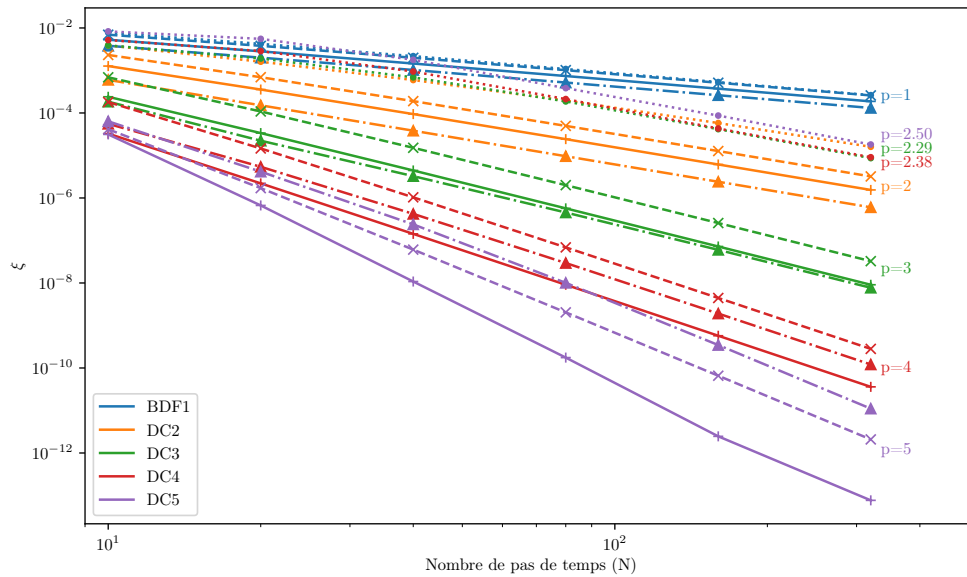


FIGURE 9.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_3 (—+— : Constants; -x- : Croissants; --*-- : Croissants/Décroissants; ...•... : Alternés)

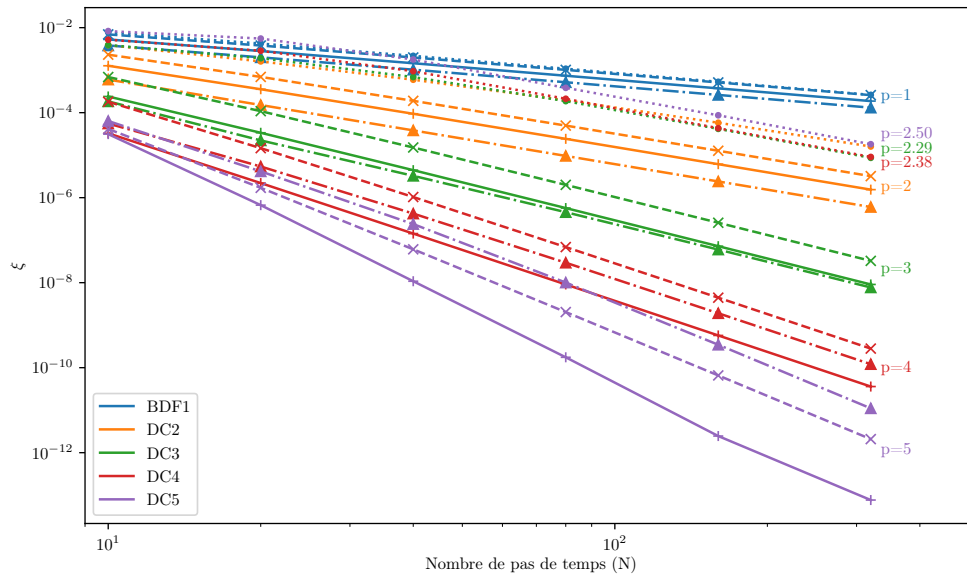


FIGURE 9.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_4 (— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

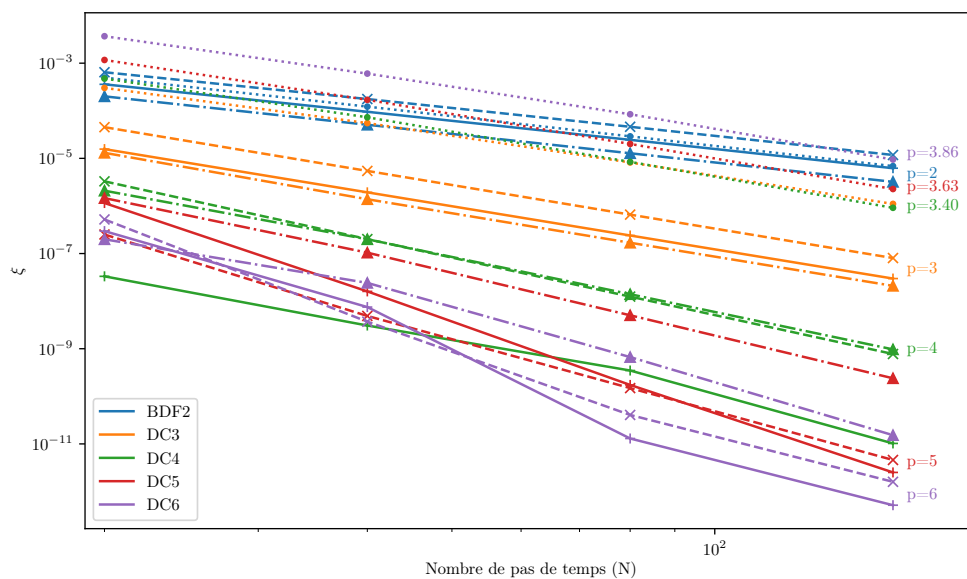


FIGURE 9.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 (— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

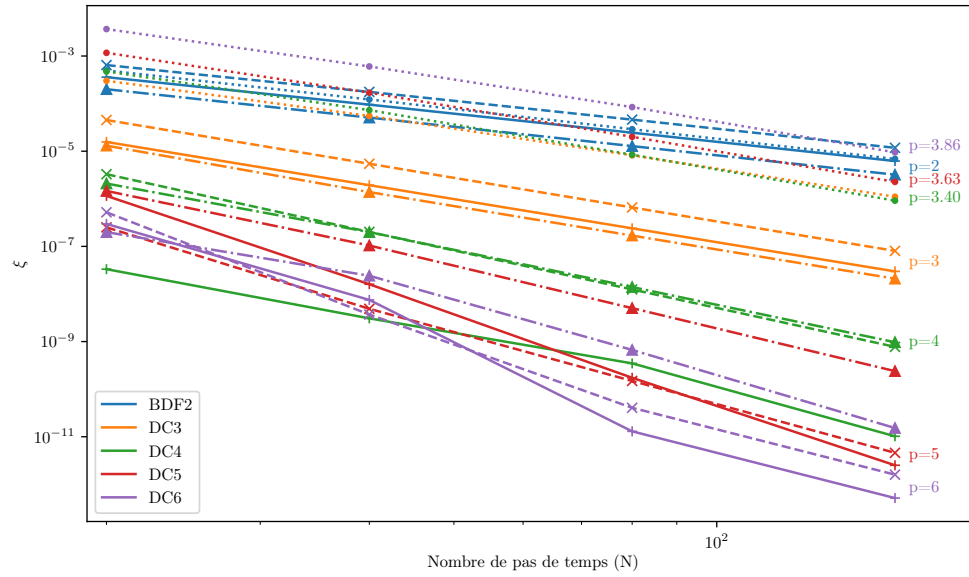


FIGURE 9.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 (—▲— : Constants; -x- : Croissants; -▲- : Croissants/Décroissants; ...●... : Alternés)

CHAPITRE 10 PARAMÈTRES D'INFLUENCES

La résolution d'EDP fait intervenir de nombreux paramètres. Ceux-ci ont une influence plus ou moins notable sur les résultats. Les études précédentes ont permis de relever un comportement délétère des méthodes lors de l'alternance des pas de temps. Ainsi, nous nous concentrons maintenant sur cette configuration de pas de temps et tentons de mieux comprendre ce phénomène de perte d'ordre en étudiant l'influence de divers paramètres sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF non linéaires.

Précédemment, l'ordre d'interpolation spatiale, le maillage, les conditions limites ainsi que le coefficient de diffusion ont été identifiés comme potentiels facteurs pouvant impacter la précision des résultats. Dans ce chapitre, nous nous focalisons alors sur l'influence de ces paramètres.

Au début de chaque nouvelle section, un tableau soulignera le paramètre étudié. Aussi, du fait du comportement similaire des méthodes DC/BDF en 1D ou 2D, nous nous concentrons seulement sur les solutions T_1 et T_2 étudiées au chapitre 8. Les conclusions apportées seront également valables en 2D.

Les résultats pour les méthodes DC/BDF2 sont disponibles en annexe G.

10.1 Degré des polynômes d'interpolation spatiale

Nous débutons par vérifier l'influence de l'ordre des polynômes d'interpolation spatiale. Pour rappel, la solution spatiale est supposée être « capturée » exactement dès lors que le degré du polynôme d'interpolation est supérieur ou égal à celui de la solution spatiale¹. Cette hypothèse a été précédemment vérifiée (cf. chapitres 8 et 9). Les graphiques de convergence 10.1 et 10.2 confirment encore cette hypothèse. En effet, la variation du degré des polynômes d'interpolation spatiale (voir tableau 10.1) ne modifie pas la précision des résultats. Les courbes se superposent parfaitement. On peut donc affirmer que l'ordre d'interpolation spatiale n'a pas d'impact sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe G).

1. À condition que celle-ci soit évidemment polynomiale.

TABLEAU 10.1 Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence de l'ordre d'interpolation spatiale

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Alternés	P_2 P_3 P_4	10	Dirichlet fortes	100

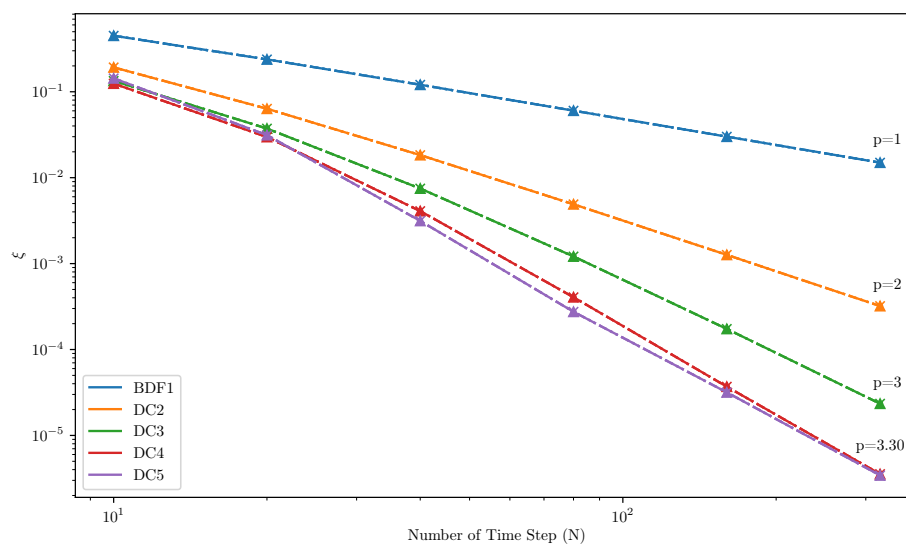


FIGURE 10.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: P_2 ; $-\times-\dots$: P_3 ; $-\star-\dots$: P_4)

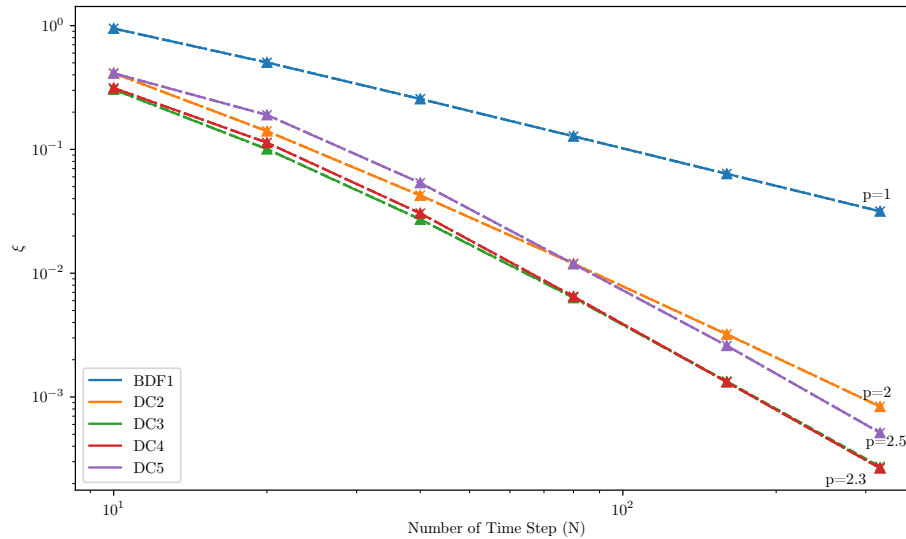


FIGURE 10.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: P_2 ; $-\times-\dots$: P_3 ; $-\blacktriangle\dots$: P_4)

10.2 Influence du maillage

Lors des études de convergences précédentes, le nombre d'éléments dans le maillage était fixé arbitrairement. Notamment, ce nombre était de 10. Dans cette section, nous regardons l'influence du raffinement du maillage sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF. Différentes simulations sont réalisées en faisant varier le nombre d'éléments du maillage (voir tableau 10.2). Les graphiques 10.3 et 10.4 présentent les études de convergence menées.

TABLEAU 10.2 Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du raffinement du maillage

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Alternés	P_2	5	Dirichlet fortes	100
		10		
		100		

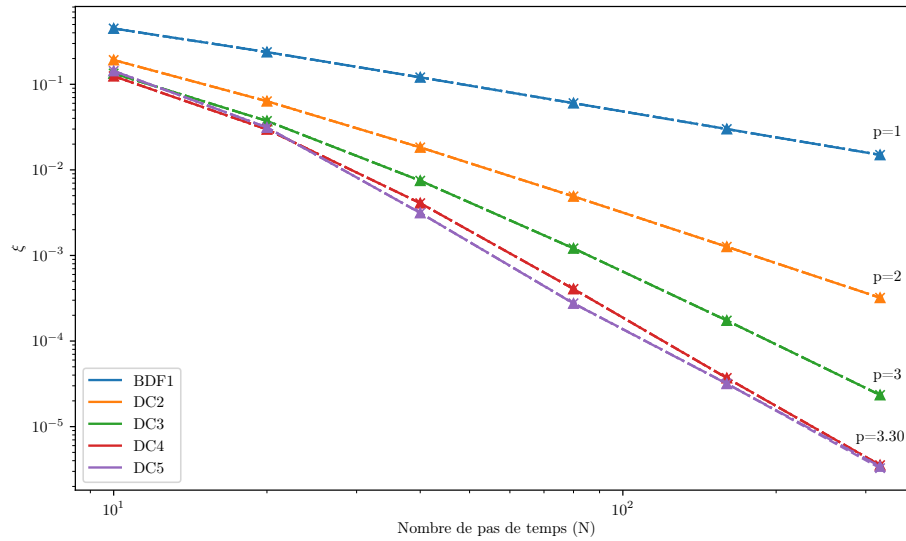


FIGURE 10.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($- \times -$: 5 elm ; $\dots \bullet \dots$: 10 elm ; $- \star \dots$: 100 elm)

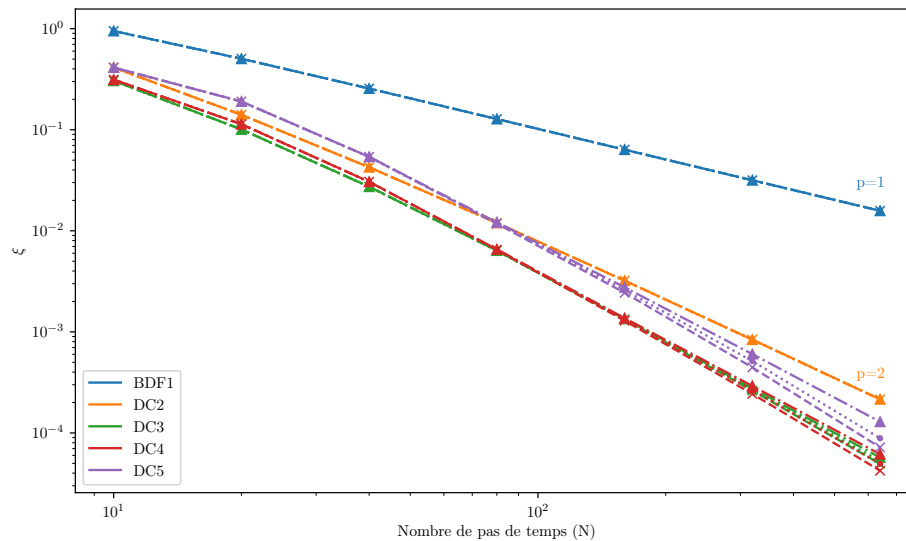
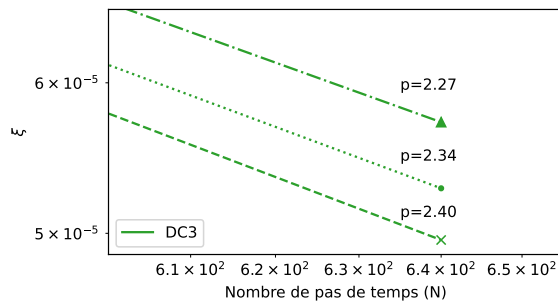


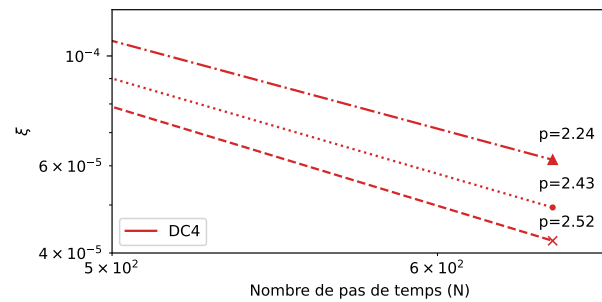
FIGURE 10.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($- \times -$: 5 elm ; $\dots \bullet \dots$: 10 elm ; $- \star \dots$: 100 elm)

Concernant T_1 (C.L. indépendantes du temps), le raffinement du maillage n'a aucune influence sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe G). En effet, le graphique 10.3 montre la superposition des courbes pour les études de convergence menées avec un maillage de 5 éléments, 10 éléments et 100 éléments.

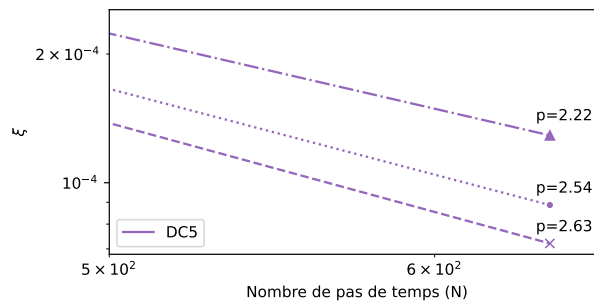
Pour T_2 , les résultats sont davantage intéressants. Le raffinement ne modifie pas le comportement des deux premières méthodes (BDF1 et DC2/BDF1). En revanche, pour les méthodes suivantes, comme nous pouvons mieux le constater sur les graphiques ci-dessous, plus le maillage est grossier, meilleur est la convergence et la précision des méthodes. De plus, ce comportement devient encore plus flagrant avec l'augmentation de l'ordre théorique des méthodes. Par exemple, avec 5 éléments, DC3, DC4 et DC5/BDF1 convergent respectivement avec un taux de 2.4, 2.52 et 2.63 contre un taux de 2.27, 2.24 et 2.22 avec 100 éléments. Les méthodes DC/BDF2 se comportent similairement (cf. annexe G).



(a) DC3/BDF1



(b) DC4/BDF1



(c) DC5/BDF1

FIGURE 10.5 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($- \times - -$: 5 elm ; $- \bullet - \bullet -$: 10 elm ; $- \star - \star -$: 100 elm)

Ce phénomène est totalement contre-intuitif : en augmentant le nombre d'éléments dans le maillage, une précision accrue est attendue. Cependant, en analysant la répartition de l'erreur dans le domaine (figure 10.6), une concentration excessive immédiatement au voisinage des bords est constatée, comportement que l'on observe seulement lorsque les conditions limites sont dépendantes du temps et les pas de temps sont alternés. De plus, ce phénomène s'amplifie plus les mailles aux bords sont petites, expliquant alors l'augmentation des erreurs avec le

raffinement du maillage.

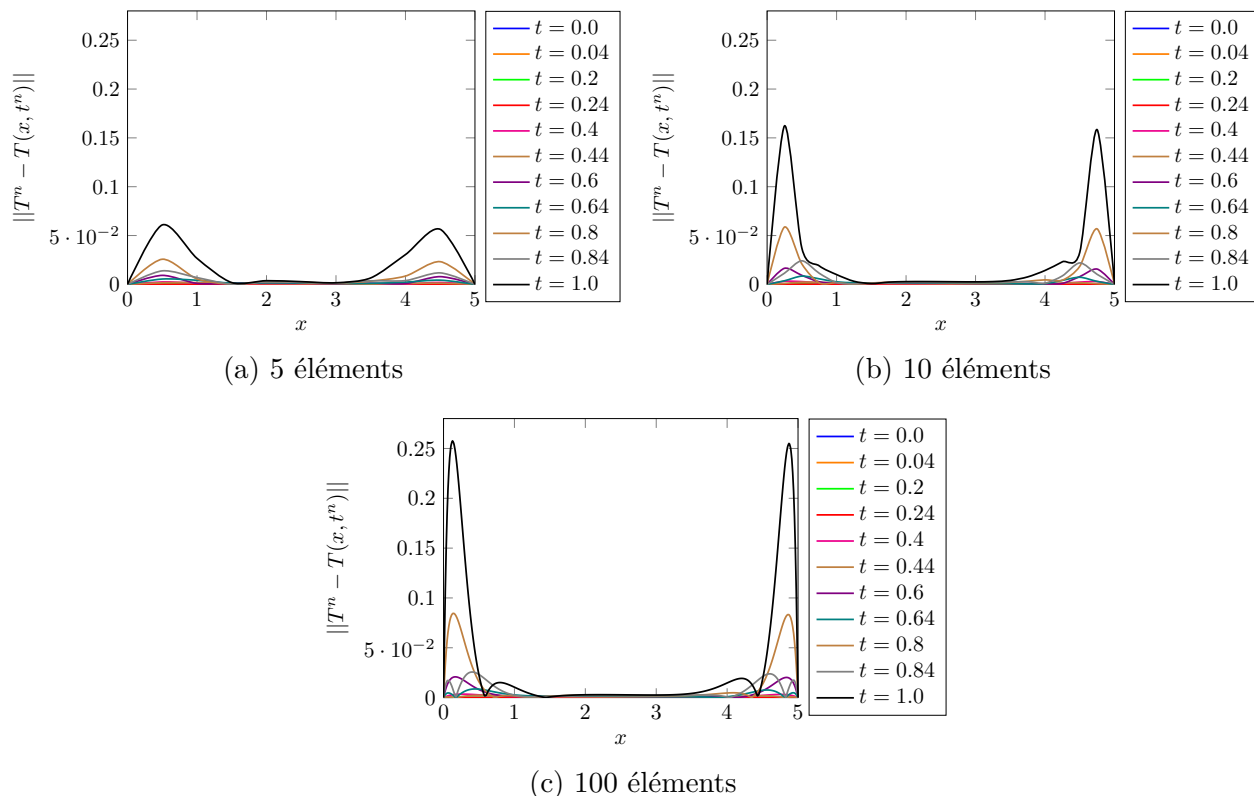


FIGURE 10.6 Répartition de l'erreur de la méthode DC5/BDF1 dans le domaine pour la solution T_2 avec des pas de temps alternés

10.3 Conditions limites

10.3.1 Méthode de Verwer

Ce phénomène de concentration d'erreurs couplé à des pertes d'ordre a déjà été décrit par Verwer [32] dans une configuration légèrement différente de la nôtre (méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 et des pas de temps constants). Lors de l'imposition forte des conditions limites de Dirichlet dépendantes du temps, ils observent des erreurs localisées proches des bords et des pertes d'ordre similaires à celles décrites dans les sections 8.5 et 9.4. Alors, Verwer propose de ne plus imposer fortement ces conditions limites, mais faiblement.

L'imposition faible des conditions limites dépendantes du temps revient à résoudre une EDO

au bord Γ (cf. figure 10.7) en introduisant une nouvelle variable v telle que :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \\ v(0) = \gamma(0) \end{cases} \quad (10.1)$$

avec γ , la solution exacte aux bords. La résolution de l'EDO est alors faite avec la même méthode que pour le reste du domaine, permettant ainsi d'éviter un écart trop important de précision entre les conditions limites et le domaine.

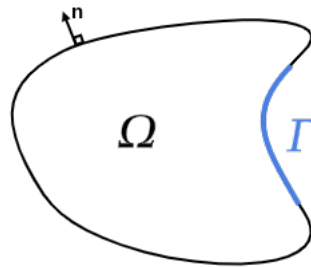


FIGURE 10.7 Schéma du domaine

L'équation de la chaleur devient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_D \frac{\partial T}{\partial x} \right) = F(T, x, t) \\ T(x, t_0) = T_0(x) \\ T(x, t) = T_\Gamma(x, t) \quad \forall x \in \Gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{Verwer}} \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_D \frac{\partial T}{\partial x} \right) = F(T, x, t) \\ T(x, t_0) = T_0(x) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \quad \forall x \in \Gamma \\ v(t_0) = \gamma_0 \end{cases} \quad (10.2)$$

Et, afin d'être cohérent avec la méthode des éléments finis, le recours à un multiplicateur de Lagrange λ permet d'imposer v comme valeur de T aux bords directement dans la forme faible du problème. Pour un problème de diffusion, on écrit alors :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} w \, d\Omega + \int_{\Omega} k_D \nabla T \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} w \lambda \, d\Gamma = \int_{\Omega} f w \, d\Omega \\ \int_{\Gamma} \hat{\lambda} (T - v) \, d\Gamma = 0 \\ \int_{\Gamma} \hat{v} \left(\frac{dv}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} \right) \, d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

avec $\hat{\lambda}$ et \hat{v} , les fonctions tests des variables λ et v .

Par analyse de la formulation variationnelle, on peut remarquer que, dans ce cas, le multiplicateur λ correspond aux flux de chaleur aux bords. Finalement, l'interprétation du multiplicateur peut être généralisée. Il s'agit toujours de la variable secondaire du problème. Par exemple, pour Navier-Stokes, il correspond aux forces de tractions.

Remarque 10.1 *Dans le cadre de la méthode des éléments finis, cette procédure semble inédite puisque jamais décrite auparavant. Ainsi, par volonté d'initialement vérifier son bon fonctionnement, nous nous permettons de ne pas définir davantage le multiplicateur et son espace de définition, et son approximation, une étude qui dépasse le cadre de ce mémoire.*

Nous regardons alors l'influence de l'imposition faible de conditions limites dépendantes du temps sur la précision et la convergence des méthodes². À l'aide du graphique 10.8, nous comparons l'imposition forte et faible pour les méthodes DC3, DC4 et DC5/BDF1, méthodes pour lesquelles le phénomène de concentration d'erreurs aux bords a été observé. Les paramètres définis par le tableau 10.3 sont utilisés.

TABLEAU 10.3 Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence de l'imposition des conditions limites

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Alternés	P_2	10	Dirichlet forte Dirichlet faible	100

2. Seule la solution T_2 est étudiée, car ses conditions limites sont dépendantes du temps, contrairement à T_1 .

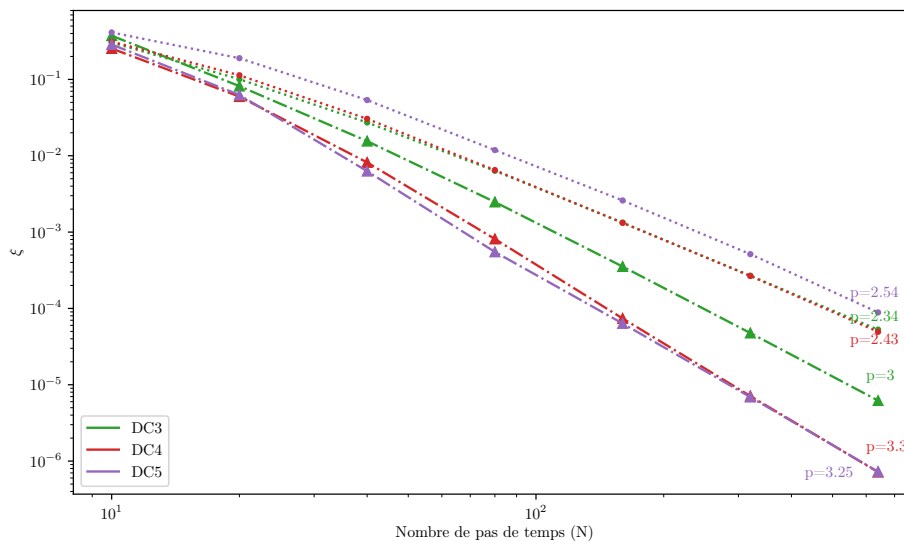


FIGURE 10.8 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: C.L fortes ; $\dots\blacktriangle\dots$: C.L faibles)

La méthode de Verwer s'avère bénéfique. En effet, la méthode DC3/BDF1 converge maintenant avec son ordre théorique. Aucune perte d'ordre n'est à déplorer. Concernant les méthodes DC4 et DC5/BDF1, celles-ci sont maintenant nettement plus précises et avec une meilleure convergence. Avec l'imposition faible, ces méthodes convergent avec un taux d'environ 3.3 contre un taux d'environ 2.45 avec l'imposition forte des conditions limites. Cependant, ces taux de convergence restent toujours en deçà de ceux théoriques.

De même, pour les méthodes DC/BDF2 (cf. annexe G), avec la méthode de Verwer, la troisième extrapolation (DC4/BDF2) converge maintenant optimalement, tandis que les pertes d'ordre pour DC5/BDF2 et DC6/BDF2 sont amenuisées.

Finalement, avec l'imposition faible, nous remarquons que la solution T_2 suit maintenant le même comportement que la solution T_1 pour laquelle les conditions limites sont indépendantes du temps.

Remarque 10.2 Dans une configuration encore différente, Kress a rencontré un problème similaire. Sa solution proposée est semblable à celle de Verwer, seule l'implémentation diffère [33].

10.3.2 Conditions de Neumann

Jusqu'à présent, seules des conditions de Dirichlet ont été imposées. Nous nous intéressons maintenant aux conditions de Neumann et vérifions si les méthodes DC/BDF se comportent

similairement.

Le problème de diffusion 1D avec conditions limites de Neumann (10.4) est défini ci-dessous. La solution manufacturée $T_1(x, t) = x(x - 5)t^6$ est utilisée, nous permettant de définir la condition initiale ainsi que les flux aux bords Γ du domaine $\Omega = [0; 5]$.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_D \frac{\partial T}{\partial x} \right) = f(T, x, t) \\ T(x, 0) = 0 \\ -k_D \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -5 k_D t^6 \quad \text{et} \quad k_D \frac{\partial T}{\partial x}(5, t) = 5 k_D t^6 \end{cases} \quad (10.4)$$

Nous notons que les conditions limites (C.L.) sont dépendantes du temps. Ainsi, en utilisant les paramètres définis dans le tableau 10.4, les pertes d'ordre observées à partir de la méthode DC3/BDF1 dans l'étude de convergence ci-dessous (voir tableau 10.5) ne sont pas surprenantes.

TABLEAU 10.4 Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du type de conditions limites

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Alternés	P_2	10	Neumann	100

TABLEAU 10.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés et conditions de Neumann

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	4.56e+00	0.00	5.15e-01	0.00	7.84e-02	0.00	3.33e-02	0.00	4.66e-02	0.00
20	10	2.09e+00	1.13	1.26e-01	2.04	1.43e-02	2.45	1.50e-02	1.15	2.75e-02	0.76
40	10	9.98e-01	1.07	3.10e-02	2.02	3.72e-03	1.94	4.37e-03	1.78	7.42e-03	1.89
80	10	4.87e-01	1.03	7.71e-03	2.01	8.76e-04	2.09	8.20e-04	2.41	1.19e-03	2.64
160	10	2.41e-01	1.02	1.93e-03	2.00	1.69e-04	2.37	1.22e-04	2.75	1.79e-04	2.74
320	10	1.20e-01	1.01	4.81e-04	2.00	2.88e-05	2.56	1.78e-05	2.78	2.76e-05	2.70
640	10	5.96e-02	1.00	1.20e-04	2.00	4.59e-06	2.65	2.66e-06	2.74	4.34e-06	2.67

Il résulte de cette étude de convergence que le type de conditions limites n'influence pas

vraiment le comportement des méthodes. En effet, celles-ci ont un comportement très similaire indépendamment du type de conditions limites. Avec des pas de temps alternés, les deux premières méthodes (BDF1 et DC2/BDF1) continuent de converger optimalement. Des pertes d'ordre sont observées pour les méthodes suivantes. Celles-ci sont du même ordre de grandeur que celles constatées dans les sections 8.5 et 9.4 lorsque les conditions de Dirichlet imposées fortement étaient dépendantes du temps. Un comportement similaire est observé pour les méthodes DC/BDF2 (cf. annexe G).

10.4 Influence du coefficient de diffusion

L'ensemble des tests précédemment menés ont été réalisés avec un coefficient de diffusion k_D arbitrairement fixé à 100. Dans cette section, nous regardons son influence sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF. Différentes simulations ont été réalisées avec plusieurs valeurs du coefficient de diffusion (voir tableau 10.6).

Remarque 10.3 *Afin d'alléger les graphiques de convergence, nous regardons l'influence du coefficient de diffusion seulement pour les méthodes DC4 et DC5/BDF1. En effet, maintenant, grâce à l'imposition faible de conditions limites dépendantes du temps, des pertes d'ordres persistent seulement pour ces deux méthodes.*

TABLEAU 10.6 Paramètres utilisés pour les études de convergence vérifiant l'influence du coefficient de diffusion k_D

Config. pas de temps	Degré Poly. Interpol.	Nb. Éléments maillage	C.L.	Coefficient Diffusion k_D
Alternés	P_2	10	T_1 : Dirichlet fortes	0.001
			T_2 : Dirichlet faibles	100
				1000

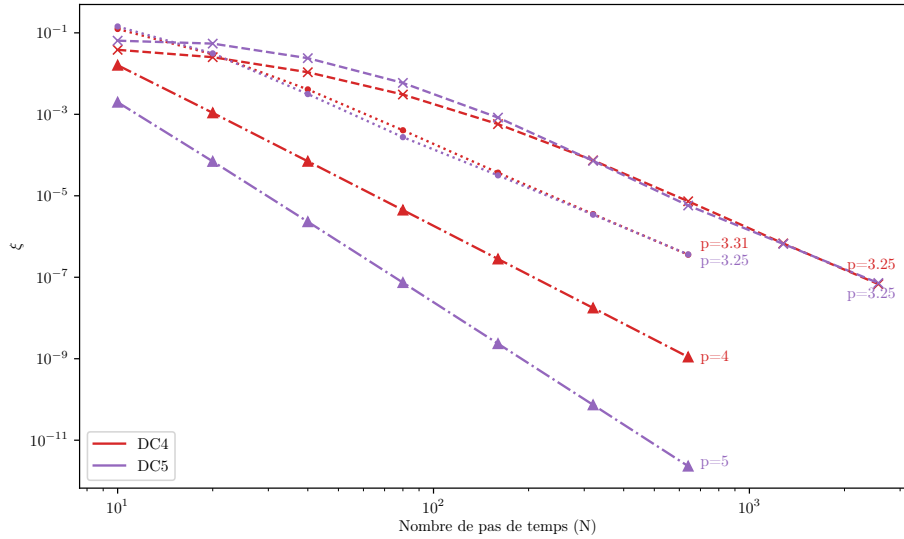


FIGURE 10.9 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($--\blacktriangle\dots$: $k_D = 0.001$; $\dots\bullet\dots$: $k_D = 100$; $-x\dots$: $k_D = 1000$)

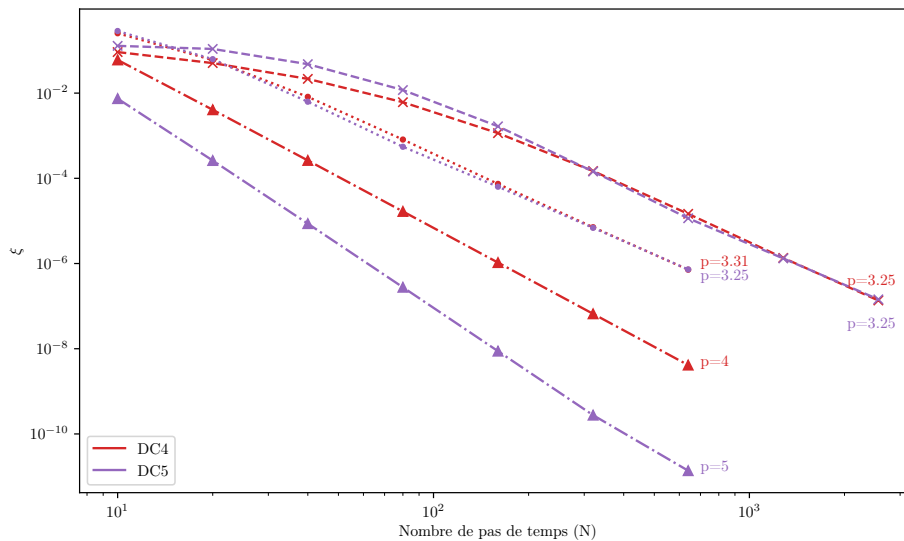


FIGURE 10.10 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés $--\blacktriangle\dots$: $k_D = 0.001$; $\dots\bullet\dots$: $k_D = 100$; $-x\dots$: $k_D = 1000$)

Il s'avère finalement que le coefficient de diffusion joue un rôle important quant à la convergence des solutions. La comparaison des résultats (figures 10.9 et 10.10) montrent que plus celui-ci est faible, meilleures sont la convergence et la précision des méthodes. Pour $k_D = 0.001$, la convergence des méthodes devient optimale, c'est-à-dire, DC4/BDF1 et DC5/BDF1

convergent respectivement à l'ordre 4 et 5. En revanche, en maximisant ce coefficient, la convergence de ces méthodes semble limitée à l'ordre 3.25, mais la précision se dégrade. Ce comportement est également observé pour les méthodes DC/BDF2 (cf. annexe G).

Ces résultats étaient relativement prévisibles. La minimisation du coefficient de diffusion revient à négliger le terme de diffusion dans l'équation de la chaleur (7.1). Ainsi, ceci revient alors à considérer un système d'EDO. Or, les chapitres 8 et 6 ont démontré l'efficacité des méthodes pour l'ensemble des configurations de pas de temps. Nous pouvons donc nous attendre à la convergence optimale des méthodes lors de la diminution du coefficient de diffusion.

En revanche, à plus gros coefficient, ce phénomène de perte d'ordre lors de l'alternance des pas de temps reste pour l'instant incompris et nécessite davantage d'investigations. Le coefficient de diffusion permet de mettre en lumière ce comportement délétère des méthodes et donne des indices concernant l'origine de ce phénomène (celui-ci semblerait venir du terme de diffusion).

Toutefois, ces pertes d'ordre n'apparaissent que dans cette configuration extrêmement délicate pour laquelle l'évolution des pas de temps est brutale. De plus, pour des cas réels, les coefficients de diffusion sont généralement très faibles, de l'ordre de 10^{-6} . Nous avons le choix de réaliser la plupart de nos études avec un coefficient arbitrairement fixé à 100 afin de révéler ce comportement et tenter de trouver une solution universalisant ainsi les méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2.

10.5 Synthèse

Ce chapitre a permis encore une meilleure compréhension du comportement des méthodes. L'influence de certains paramètres sur la précision et la convergence des méthodes DC/BDF1 et DC/BDF2 (cf. annexe G) a pu être observée lors de l'alternance des pas de temps. Notamment, dans la section 10.1, nous avons pu valider à nouveau l'hypothèse de « capture » exacte de la solution spatiale. En effet, l'augmentation du degré d'interpolation spatiale n'a pas eu d'incidence sur la précision des résultats. Ensuite, la comparaison des résultats avec différents raffinements de maillage a permis de révéler un phénomène de concentration d'erreur aux bords responsable de pertes d'ordre plus importantes lors de conditions limites dépendantes du temps (voir section 10.2). Ces pertes d'ordre ont pu partiellement être atténuées après le recours à la méthode de Verwer (voir section 10.3.1). À présent, les problèmes aux conditions limites dépendantes du temps se comportent de manière similaire à ceux aux conditions limites indépendantes du temps. Cependant, des pertes d'ordre persistent tout de même à

partir de 4 extrapolations. On note que le type de conditions limites influence peu le comportement des méthodes (voir section 10.3.2). Enfin, dans la dernière section (voir section 10.4), nous avons remarqué que le coefficient de diffusion joue un rôle important quant à la précision et la convergence des méthodes, telle que sa minimisation entraîne la convergence et une précision accrue de l'ensemble des méthodes. En revanche, à plus gros coefficient, le phénomène de perte d'ordre lors de l'alternance des pas de temps reste pour l'instant incompris et nécessite davantage d'études.

CHAPITRE 11 VÉRIFICATION ET VALIDATION DES MÉTHODES DC/BDF NON LINÉAIRES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Nous souhaitons maintenant résoudre les équations de Navier-Stokes (11.1) à l'aide de nos méthodes. Les études préliminaires sur l'équation de la chaleur (1D et 2D) ont permis une meilleure compréhension du comportement des méthodes DC/BDF non linéaires. Par exemple, nous recommandons une évolution régulière des pas de temps, l'imposition faible des conditions limites dépendantes du temps et une étude approfondie de l'influence des paramètres propres au problème. Ainsi, nous poursuivons le protocole de vérification et validation des méthodes DC/BDF non linéaires afin de vérifier si ces observations et conclusions apportées s'appliquent également aux équations de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \end{cases} \quad (11.1)$$

Dans ce chapitre, nous voulons étudier des problèmes plus concrets sans recourir à la méthode des solutions fabriquées pour vérifier et valider les méthodes DC/BDF. Alors, des études de convergence seront menées pour les deux premiers problèmes de Stokes. Enfin, la pression sera prise en compte. Nous résoudrons un problème comparable à celui de Poiseuille, mais avec un gradient de pression périodique. Ces problèmes disposent d'une solution analytique.

Pour les problèmes disposant d'une solution analytique, celles-ci ne sont plus polynomiales. La « capture » exacte de la solution spatiale est alors impossible. L'erreur globale est donc maintenant dépendante de la discrétisation temporelle, mais également spatiale, telle que¹ :

$$\xi \sim \mathcal{O}(k^p, h^{m+1}) \quad (11.2)$$

Ainsi, à présent, il est nécessaire de réaliser les études de convergence avec un raffinement simultané maillage/pas de temps. Cependant, en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation entre les erreurs spatiale et temporelle, afin de vérifier la convergence temporelle des

1. La norme L_2 est toujours utilisée pour quantifier l'erreur spatiale, d'où le terme h^{m+1} avec m le degré du polynôme d'interpolation.

méthodes, nous souhaitons occulter l'erreur spatiale devant celle temporelle. Ainsi, lors des études de convergence, la stratégie consiste à faire décroître plus rapidement l'erreur spatiale. En pratique, la taille de maille caractéristique (h) est maintenant divisée par 4 contre 2 pour le pas de temps caractéristique (k).

11.1 Premier problème de Stokes

Nous souhaitons maintenant examiner la capacité des méthodes en la résolution de problèmes à plusieurs variables et notamment les équations de Navier-Stokes. Dans notre démarche d'augmenter progressivement la complexité des problèmes, certaines hypothèses sont émises afin de simplifier les équations. On considère alors un fluide incompressible dans le demi-plan $y \geq 0$. À $t = 0$, celui-ci est au repos et soudainement pour $t > 0$, une plaque infiniment longue en $y = 0$ se met en mouvement avec une vitesse U_0 constante dans la direction x . La pression est supposée constante, le mouvement du fluide est donc uniquement engendré par le déplacement de la plaque. Les équations de Navier-Stokes se ramènent alors à :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(y, 0) = 0, \quad u(y = 0, t > 0) = U_0, \quad u(\infty, t > 0) = 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

avec ν , la viscosité cinématique du fluide.

La solution analytique de ce problème est donnée par [34] :

$$\begin{cases} u(y, t) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \\ v(x, y, t) = 0 \\ p(x, y, t) = C \end{cases} \quad (11.4)$$

avec C , une constante quelconque.

Remarque 11.1 *Les hypothèses simplificatrices permettent de ramener les équations de Navier-Stokes à une équation parabolique semblable à celle de la chaleur. Nous nous attendons alors à constater un comportement similaire des méthodes DC/BDF, c'est-à-dire, une convergence optimale de celles-ci lors de l'évolution régulière des pas de temps et des pertes de précision pour les méthodes d'ordre élevé lors de l'alternance des pas de temps.*

L'approximation vitesse-pression utilisée est celle de Taylor-Hood P_2P_1 , respectant la condi-

tion de compatibilité LBB (Ladyzenkaja-Babuska-Brezzi). Le domaine géométrique est représenté par une cavité définie par $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Aux limites, les vitesses analytiques sont imposées. Cependant, la vitesse horizontale étant dépendante du temps, elle est imposée via la méthode de Verwer. Une pression nulle est imposée en un point du domaine. Pour éviter l'indétermination en $t = 0$, la période d'intégration est définie comme $I = [0.01, 1]^2$. La viscosité dynamique ν est arbitrairement fixée à 1.

Les résultats des méthodes DC/BDF2 sont présentés en annexe H.

Les tableaux 11.1, 11.2, 11.3 et 11.4 ainsi que le graphique 11.1 ci-dessous, présentent les résultats des études de convergence sur la vitesse menées respectivement avec des pas de temps constants, croissants, croissants/décroissants et alternés.

TABLEAU 11.1 Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	2.07e-03	0.00	6.92e-04	0.00	6.83e-04	0.00	6.85e-04	0.00	6.92e-04	0.00
20	64	1.55e-03	0.42	2.22e-05	4.96	7.25e-06	6.56	7.26e-06	6.56	7.25e-06	6.58
40	1024	9.19e-04	0.75	6.47e-06	1.78	2.04e-07	5.15	1.13e-07	6.00	1.13e-07	6.00
80	16384	5.00e-04	0.88	1.79e-06	1.85	2.81e-08	2.86	2.03e-09	5.80	1.89e-09	5.91
160	262144	2.61e-04	0.94	4.73e-07	1.92	3.72e-09	2.92	1.01e-10	4.33	5.93e-11	4.99

TABLEAU 11.2 Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	5.37e-03	0.00	5.90e-04	0.00	5.67e-04	0.00	5.67e-04	0.00	5.64e-04	0.00
20	64	3.70e-03	0.54	8.14e-05	2.86	7.67e-06	6.21	6.61e-06	6.42	6.59e-06	6.42
40	1024	2.14e-03	0.79	2.36e-05	1.79	1.12e-06	2.78	1.08e-07	5.93	1.08e-07	5.93
80	16384	1.15e-03	0.89	6.39e-06	1.88	1.51e-07	2.89	5.97e-09	4.18	2.26e-09	5.58
160	262144	5.99e-04	0.95	1.66e-06	1.94	1.97e-08	2.94	3.85e-10	3.96	1.54e-10	3.87

2. La solution analytique n'est pas définie en $t = 0$.

TABLEAU 11.3 Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants puis décroissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	7.56e-03	0.00	6.82e-04	0.00	3.97e-04	0.00	4.23e-04	0.00	3.99e-04	0.00
20	64	5.85e-03	0.37	1.96e-04	1.80	2.99e-05	3.73	9.01e-06	5.55	5.55e-06	6.17
40	1024	3.55e-03	0.72	5.94e-05	1.72	4.46e-06	2.75	5.73e-07	3.97	1.05e-07	5.73
80	16384	1.95e-03	0.86	1.64e-05	1.86	6.08e-07	2.87	3.78e-08	3.92	2.04e-08	5.43
160	262144	1.03e-03	0.93	4.32e-06	1.93	7.95e-08	2.94	2.44e-09	3.95	4.36e-09	5.12

TABLEAU 11.4 Erreur et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps alternés

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	3.35e-03	0.00	7.21e-04	0.00	6.91e-04	0.00	6.90e-04	0.00	6.89e-04	0.00
20	64	2.27e-03	0.56	4.98e-05	3.86	7.24e-06	6.58	1.70e-04	4.65	1.65e-04	4.74
40	1024	1.30e-03	0.81	1.42e-05	1.81	3.58e-07	4.34	6.16e-05	3.38	5.58e-05	3.61
80	16384	6.94e-04	0.90	3.84e-06	1.89	4.87e-08	2.88	2.35e-05	3.20	2.28e-05	2.97
160	262144	3.59e-04	0.95	9.97e-07	1.94	6.37e-09	2.94	8.14e-06	3.52	8.60e-06	3.24

Les résultats ci-dessus sont ceux escomptés. Nous retrouvons un comportement similaire à celui observé pour l'équation de la chaleur. En effet, les méthodes DC/BDF convergent parfaitement pour les trois premières configurations de pas de temps. Les taux de convergence théoriques sont obtenus. En revanche, lors de l'alternance des pas de temps, des pertes d'ordre sont remarquées à partir de la quatrième extrapolation. Les conditions limites dépendantes du temps sont imposées faiblement, permettant d'éviter la concentration des erreurs aux bords et repoussant les pertes d'ordre d'une extrapolation. De plus, les taux de convergence des méthodes DC4/BDF1 et DC5/BDF1 lors de l'alternance des pas de temps sont similaires à ceux obtenus avec l'équation de la chaleur (voir section 9.4).

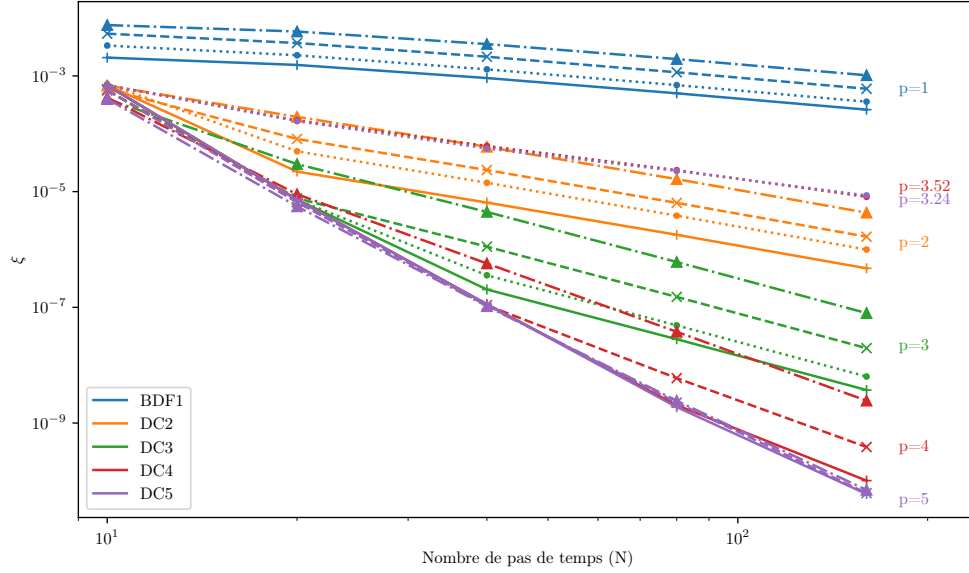


FIGURE 11.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour le 1^{er} problème de Stokes (—+— : Constants ; —x— : Croissants ; —▲— : Croissants/Décroissants ; —●— : Alternés)

11.2 Second problème de Stokes

Le second problème de Stokes est relativement similaire au premier. La différence réside dans le mouvement de la plaque en $y = 0$. Pour ce problème, la plaque oscille telle que $u(y = 0, t) = U_0 \cos(\omega t)$, avec ω , la fréquence d'oscillation. Les équations de Navier-Stokes se ramènent alors à :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(y = 0, t) = U_0 \cos(\omega t), \quad u(\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

La solution analytique du problème est donnée par [35] :

$$\begin{cases} u(y, t) = U_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \\ v(x, y, t) = 0 \\ p(x, y, t) = C \end{cases} \quad (11.6)$$

avec C , une constante quelconque.

L'approximation vitesse-pression utilisée est celle de Taylor-Hood P_2P_1 , respectant la condition de compatibilité LBB. Le domaine géométrique est représenté par une cavité définie par

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Aux limites, les vitesses analytiques sont imposées. Cependant, la vitesse horizontale étant dépendante du temps, elle est imposée via la méthode de Verwer. Une pression nulle est imposée en un point du domaine. La période d'intégration est définie comme $I = [0, 1]$. La viscosité dynamique ν et la fréquence ω sont respectivement fixées à 1 et 2.

Les résultats des méthodes DC/BDF2 sont présentés en annexe I.

Les tableaux 11.5, 11.6, 11.7, 11.8 et la figure 11.2 ci-dessous, présentent les résultats des études de convergence sur la vitesse menées respectivement avec des pas de temps constants, croissants, croissants/décroissants et alternés.

TABLEAU 11.5 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	64	4.80e-02	0.00	2.28e-03	0.00	1.89e-04	0.00	7.48e-05	0.00	7.26e-05	0.00
20	1024	3.35e-02	0.52	5.97e-04	1.93	2.93e-05	2.69	1.92e-06	5.28	9.95e-07	6.19
40	16384	1.92e-02	0.81	1.49e-04	2.01	4.07e-06	2.85	1.14e-07	4.08	3.10e-08	5.00
80	262144	1.02e-02	0.91	3.68e-05	2.01	5.35e-07	2.93	7.15e-09	3.99	6.91e-09	4.99

TABLEAU 11.6 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps croissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	64	5.93e-02	0.00	3.40e-03	0.00	2.70e-04	0.00	8.03e-05	0.00	7.23e-05	0.00
20	1024	3.58e-02	0.73	8.39e-04	2.02	3.39e-05	2.99	3.64e-06	4.46	9.90e-07	6.19
40	16384	1.92e-02	0.89	2.07e-04	2.02	4.27e-06	2.99	2.30e-07	3.99	1.55e-08	6.00
80	262144	9.95e-03	0.95	5.12e-05	2.01	5.35e-07	3.00	1.46e-08	3.98	9.04e-10	4.10

TABLEAU 11.7 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps croissants puis décroissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	64	6.67e-02	0.00	2.90e-03	0.00	3.82e-04	0.00	8.47e-05	0.00	7.30e-05	0.00
20	1024	4.10e-02	0.70	7.18e-04	2.02	4.92e-05	2.96	3.01e-06	4.82	1.03e-06	6.15
40	16384	2.19e-02	0.90	1.76e-04	2.03	6.12e-06	3.01	1.82e-07	4.04	1.76e-08	5.86
80	262144	1.12e-02	0.96	4.36e-05	2.02	7.61e-07	3.01	1.14e-08	4.00	9.97e-10	4.14

TABLEAU 11.8 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps alternés

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	64	7.57e-02	0.00	5.08e-03	0.00	3.56e-04	0.00	8.54e-05	0.00	7.59e-05	0.00
20	1024	4.82e-02	0.65	1.26e-03	2.01	5.20e-05	2.78	4.40e-06	4.28	3.92e-06	4.28
40	16384	2.67e-02	0.85	3.10e-04	2.02	7.00e-06	2.89	3.81e-07	3.53	4.12e-07	3.25
80	262144	1.40e-02	0.93	7.66e-05	2.02	9.07e-07	2.95	4.10e-08	3.22	4.35e-08	3.25

Les conclusions sont similaires à celles du premier problème de Stokes. En effet, les taux de convergence obtenus sont ceux escomptés : convergence optimale des méthodes pour les trois premières configurations de pas de temps. L'alternance de ceux-ci amène des pertes d'ordre similaire à partir de la quatrième extrapolation.

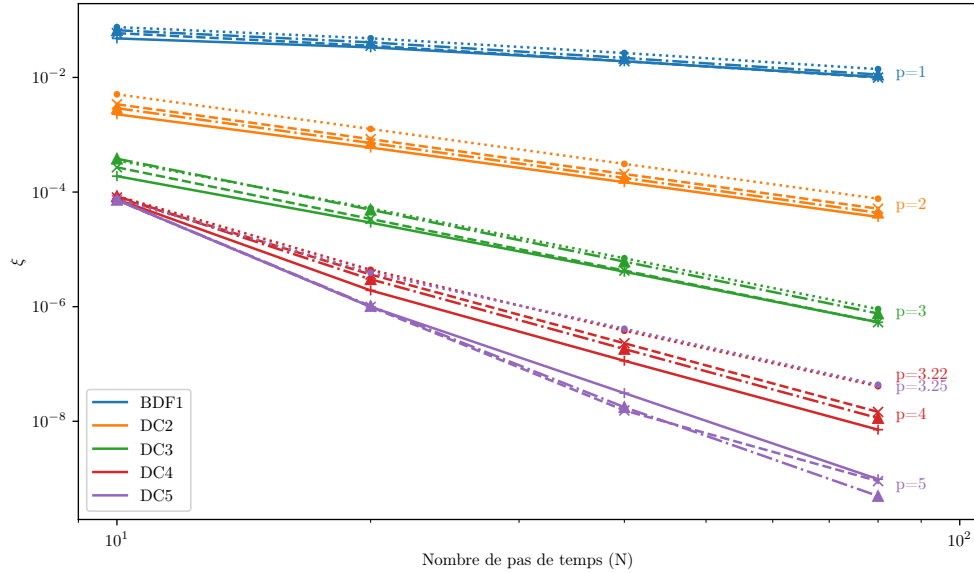


FIGURE 11.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour le 2^d problème de Stokes (—+— : Constants ; —x— : Croissants ; —▲— : Croissants/Décroissants ; ···· : Alternés)

11.3 Navier-Stokes : Problème de Poiseuille avec gradient de pression périodique

Jusqu'à présent, les vitesses étaient imposées sur l'ensemble des conditions limites. La pression était alors définie à une constante près, car il était alors impossible d'imposer le niveau de pression par une traction dans la direction normale à la paroi. La pression est imposée en un nœud du domaine pour éviter la création d'une matrice singulière. Cependant, nous souhaitons regarder l'influence de l'imposition de la pression sur la convergence des méthodes DC non linéaires. On étudie alors l'écoulement 2D plan d'un fluide pulsé dans une conduite de hauteur $h = 2a$ et de longueur L [36]. L'écoulement est considéré comme pleinement développé et le fluide est incompressible³. Les équations de Navier-Stokes se ramènent alors à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.7)$$

3. Ce problème est comparable au problème de Poiseuille, seule l'imposition d'un gradient de pression périodique diffère (pour le problème de Poiseuille classique, le gradient de pression est constant).

L'écoulement étant pulsé, nous avons :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho (p_0 + p_1 \cos(\omega t)) \quad (11.8)$$

Et, le profil de vitesse analytique est alors donné par⁴ :

$$u(y, t) = \frac{p_0}{2\nu} (a^2 - y^2) + \frac{p_1}{i\omega} \left(1 - \frac{\cosh(w_0 y)}{\cosh(w_0 a)} \right) e^{i\omega t} \quad (11.9)$$

avec $w_0 = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}$, p_0 et p_1 des constantes, représentant respectivement le terme de pression stationnaire et instationnaire.

Afin d'établir le gradient de pression périodique dans la conduite, nous imposons la traction normale et la vitesse tangentielle en sortie. Ailleurs, les vitesses sont imposées. Les conditions limites dépendantes du temps sont imposées à l'aide de la méthode de Verwer. La période d'intégration est définie comme $I = [0, 10]$. Les valeurs des paramètres sont données par le tableau 11.9. L'approximation vitesse-pression de Taylor-Hood P_2P_1 est utilisée, respectant la condition de compatibilité LBB.

TABLEAU 11.9 Paramètres pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression periodique

ρ	ν	ω	a	L	p_0	p_1
1	1	$\frac{2\pi}{3}$	1	3	1	1

Une première analyse qualitative est réalisée avec les figures 11.3 et 11.4 ci-dessous :

4. Afin d'alléger l'expression, la notation complexe est adoptée, cependant, nous traitons seulement sa partie réelle.

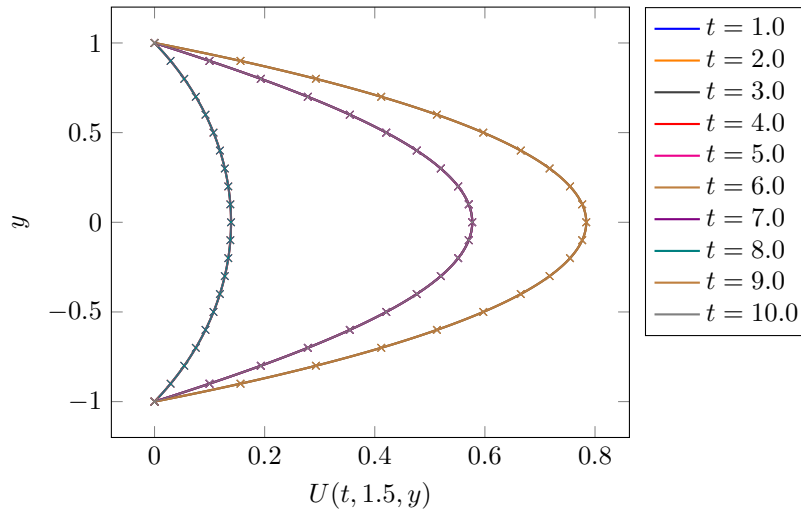


FIGURE 11.3 Profil de vitesse DC5/BDF1 en $x = 1.5$ de la solution numérique et exacte pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique (— : solution exacte, \times : solution numérique)

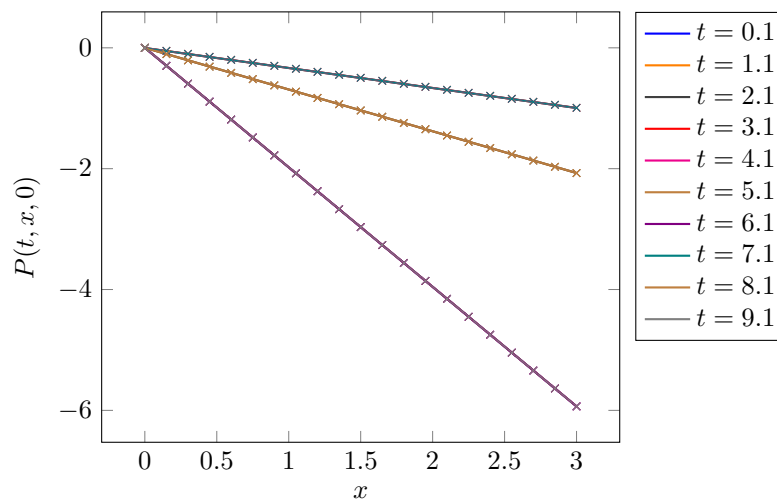


FIGURE 11.4 Profil de pression DC5/BDF1 en $y = 0$ de la solution numérique et exacte pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique (— : solution exacte, \times : solution numérique)

D'après les profils ci-dessus, les solutions numériques semblent proches de celles exactes. De plus, on observe bien une oscillation de la pression et de la vitesse en fonction du temps. Cette oscillation est telle que la période de l'oscillation T_w est en accord avec la pulsation ω imposée. Nous avons bien $T_w = \frac{2\pi}{\omega} = 3$.

Les tableaux 11.10, 11.11, 11.12 et 11.13, ci-dessous, présentent les résultats des études de convergence sur la vitesse et la pression menées respectivement avec des pas de temps constants, croissants, croissants/décroissants et alternés. Ces études viennent confirmer que les calculs numériques tendent à se rapprocher de la solution analytique.

TABLEAU 11.10 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
<i>Vitesse</i>											
10	16	5.65e-01	0.00	1.27e-01	0.00	5.73e-02	0.00	2.40e-02	0.00	2.68e-02	0.00
20	256	4.02e-01	0.49	2.49e-02	2.35	7.67e-03	2.90	2.36e-03	3.35	6.84e-04	5.29
40	4096	1.45e-01	1.47	8.36e-03	1.58	6.86e-04	3.48	1.69e-04	3.80	1.59e-05	5.43
80	65536	5.26e-02	1.46	2.16e-03	1.95	7.10e-05	3.27	1.06e-05	3.99	5.50e-07	4.86
160	1048576	3.06e-02	0.78	5.35e-04	2.01	2.83e-05	3.05	6.58e-07	4.02	1.23e-07	4.96
<i>Pression</i>											
10	16	2.67e+00	0.00	6.00e-01	0.00	2.75e-01	0.00	1.15e-01	0.00	1.27e-01	0.00
20	256	1.91e+00	0.49	1.17e-01	2.35	3.62e-02	2.93	1.11e-02	3.37	3.23e-03	5.29
40	4096	6.89e-01	1.47	3.95e-02	1.57	3.24e-03	3.48	7.99e-04	3.80	1.05e-04	4.94
80	65536	2.50e-01	1.46	1.02e-02	1.95	3.33e-04	3.28	5.03e-05	3.99	2.58e-06	5.35
160	1048576	1.45e-01	0.79	2.53e-03	2.01	1.34e-04	3.02	3.11e-06	4.02	5.68e-07	5.03

TABLEAU 11.11 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps croissants

Nb. pas de temps	Nb. elm	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
<i>Vitesse</i>											
10	16	7.31e-01	0.00	1.19e-01	0.00	5.79e-02	0.00	5.97e-02	0.00	5.55e-02	0.00
20	256	3.33e-01	1.13	3.94e-02	1.60	7.58e-03	2.93	5.23e-03	3.51	1.59e-03	5.12
40	4096	1.28e-01	1.38	1.03e-02	1.94	1.03e-03	2.88	3.32e-04	3.98	4.92e-05	5.02
80	65536	6.57e-02	0.96	2.58e-03	1.99	1.32e-04	2.96	2.02e-05	4.04	1.48e-06	5.05
160	1048576	3.53e-02	0.89	6.41e-04	2.01	1.68e-05	2.98	1.24e-06	4.02	4.56e-08	5.02
<i>Pression</i>											
10	16	3.47e+00	0.00	5.64e-01	0.00	2.81e-01	0.00	2.82e-01	0.00	2.59e-01	0.00
20	256	1.58e+00	1.13	1.85e-01	1.60	3.56e-02	2.98	2.47e-02	3.51	7.47e-03	5.12
40	4096	6.08e-01	1.38	4.85e-02	1.93	4.83e-03	2.88	1.56e-03	3.98	2.31e-04	5.01
80	65536	3.10e-01	0.97	1.22e-02	2.00	6.21e-04	2.96	9.50e-05	4.04	6.98e-06	5.05
160	1048576	1.67e-01	0.89	3.02e-03	2.01	7.87e-05	2.98	5.85e-06	4.02	1.53e-06	5.04

TABLEAU 11.12 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps croissants puis décroissants

Nb. pas de temps	Nb. elm	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
<i>Vitesse</i>											
10	16	8.97e-01	0.00	2.16e-01	0.00	1.28e-01	0.00	7.30e-02	0.00	9.59e-02	0.00
20	256	4.40e-01	1.03	3.19e-02	2.76	1.43e-02	3.17	5.24e-03	3.80	2.87e-03	5.06
40	4096	1.75e-01	1.33	8.04e-03	1.99	1.62e-03	3.14	3.48e-04	3.91	8.02e-05	5.16
80	65536	7.61e-02	1.20	2.02e-03	1.99	1.91e-04	3.09	2.19e-05	3.99	2.33e-06	5.11
160	1048576	3.54e-02	1.10	5.02e-04	2.01	2.31e-05	3.05	1.37e-06	4.00	7.00e-08	5.06
<i>Pression</i>											
10	16	4.25e+00	0.00	1.02e+00	0.00	6.12e-01	0.00	3.50e-01	0.00	4.63e-01	0.00
20	256	2.09e+00	1.03	1.51e-01	2.76	6.75e-02	3.18	2.48e-02	3.82	1.36e-02	5.09
40	4096	8.31e-01	1.33	3.79e-02	1.99	7.62e-03	3.15	1.65e-03	3.91	3.80e-04	5.16
80	65536	3.61e-01	1.20	9.54e-03	1.99	8.97e-04	3.09	1.04e-04	3.99	1.13e-05	5.07
160	1048576	1.68e-01	1.10	2.37e-03	2.01	1.08e-04	3.05	6.47e-06	4.00	2.48e-06	5.03

TABLEAU 11.13 Erreurs et taux de convergence temporels des méthodes DC/BDF1 pour le problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique avec pas de temps alternés

Nb. pas de temps	Nb. elm	BDF1		DC2/BDF1		DC3/BDF1		DC4/BDF1		DC5/BDF1	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
<i>Vitesse</i>											
10	16	1.03e+00	0.00	1.85e-01	0.00	1.08e-01	0.00	6.44e-02	0.00	4.58e-02	0.00
20	256	5.06e-01	1.03	6.28e-02	1.56	1.15e-02	3.23	5.15e-03	3.65	1.02e-03	5.49
40	4096	1.76e-01	1.52	1.79e-02	1.81	1.00e-03	3.52	3.32e-04	3.95	1.06e-04	3.28
80	65536	7.51e-02	1.23	4.49e-03	2.00	1.28e-04	2.96	2.10e-05	3.98	1.46e-05	2.86
160	1048576	5.59e-02	0.98	1.11e-03	2.02	5.24e-05	2.98	1.64e-06	3.69	1.60e-06	3.19
<i>Pression</i>											
10	16	4.91e+00	0.00	8.74e-01	0.00	5.11e-01	0.00	3.09e-01	0.00	2.16e-01	0.00
20	256	2.40e+00	1.03	2.97e-01	1.56	5.54e-02	3.21	2.38e-02	3.70	5.83e-03	5.21
40	4096	8.38e-01	1.52	8.49e-02	1.81	5.20e-03	3.41	1.68e-03	3.83	1.65e-03	1.82
80	65536	3.54e-01	1.24	2.12e-02	2.00	7.45e-04	2.80	2.33e-04	2.85	3.70e-04	2.16
160	1048576	2.65e-01	0.97	5.24e-03	2.02	3.07e-04	2.95	4.00e-05	2.54	6.89e-05	2.43

Ces résultats montrent que l'imposition de tractions plutôt que de vitesses ne modifie pas le comportement des méthodes. Comme précédemment, celles-ci convergent parfaitement pour les trois premières configurations de pas de temps. Cette convergence est valable pour les différentes variables du problème, c'est-à-dire la vitesse et la pression (cf. figures 11.5 et 11.6). Concernant la dernière configuration de pas de temps, des pertes d'ordre sont toujours recensées pour les méthodes DC4 et DC5/BDF1. Pour la vitesse, ces pertes d'ordre sont de même grandeur que celles observées lors des précédents tests. Pour la pression, ces pertes d'ordre sont plus importantes.

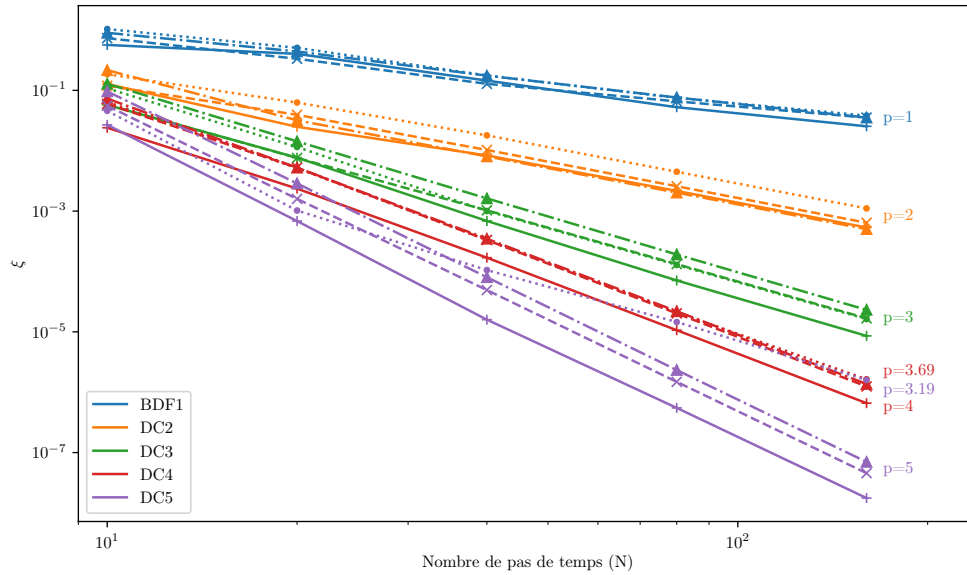


FIGURE 11.5 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la vitesse du problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique (—+— : *Constants*; -x- : *Croissants*; -▲- : *Croissants/Décroissants*; ...●... : *Alternés*)

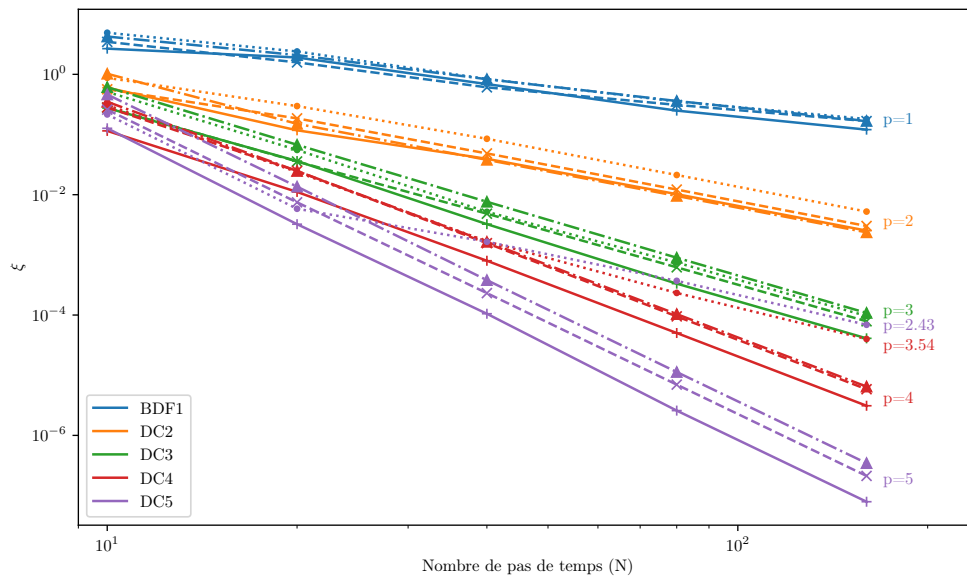


FIGURE 11.6 Études de convergence des méthodes DC/BDF1 pour la pression du problème de Poiseuille avec imposition d'un gradient de pression périodique (—+— : *Constants*; -x- : *Croissants*; -▲- : *Croissants/Décroissants*; ...●... : *Alternés*)

11.4 Synthèse

Ce chapitre démontre la capacité des méthodes DC/BDF en la résolution de problèmes à plusieurs variables, dont notamment ceux liés aux équations de Navier-Stokes. La résolution de problèmes plus concrets dont les solutions analytiques ne sont pas polynomiales ou même inconnues montre une certaine limite de nos méthodes DC/BDF. En effet, augmenter indéfiniment l'ordre des méthodes d'intégration temporelle n'est pas utile si l'interpolation spatiale reste grossière et n'est pas adaptée à l'interpolation temporelle. En effet, du fait de la coexistence des erreurs temporelle et spatiale, les choix de discrétisation sont importants venant prépondérer une de ces erreurs dans l'erreur globale. De ce fait, afin ne pas être limité par la convergence spatiale dès lors que $\mathcal{O}(k^p) \leq \mathcal{O}(h^{m+1})$, et afin d'étudier seulement la convergence temporelle des méthodes, lors des études de convergence, un raffinement plus important du maillage a dû être réalisé par rapport au raffinement des pas de temps.

Ainsi, la convergence temporelle est optimale pour les méthodes dans les configurations avec pas de temps constants, croissants et croissants/décroissants. La dernière configuration reste problématique. L'alternance des pas de temps ne permet pas la convergence idéale des méthodes d'ordre élevé. Des pertes d'ordre sont observées à partir de la méthode DC4/BDF1.

Cependant, les conclusions de ce chapitre restent très positives. Nos méthodes DC/BDF non linéaires convergent optimalement dès lors qu'une certaine régularité est admise sur l'évolution des pas de temps.

Remarque 11.2 *Pour le 1^{er} et 2^d problèmes de Stokes (cf. sections 11.1 et 11.2), on note une surconvergence des méthodes DC5/BDF1 pour les configurations de pas de temps croissants et croissants puis décroissants (tableaux 11.2, 11.3, 11.6 et 11.7). Celles-ci semblent converger à l'ordre 6. Cette surconvergence est une plus-value et ne remet pas en cause le comportement de cette méthode. Avec ces configurations, les premières étapes de la résolution sont faites avec des pas de temps minimales favorisant la précision des solutions numériques, expliquant peut-être ces gains de convergence.*

Aussi, lors de la dernière itération des études de convergence, la précision devient telle que la convergence des méthodes DC5/BDF1 est limitée par les critères d'arrêt de la méthode de Newton.

CHAPITRE 12 CONCLUSION

12.1 Synthèse des travaux

Dans ce mémoire, nous avons construit des méthodes d'intégration temporelles non linéaires, d'ordre élevé et A-stable à partir de corrections différées basées sur les schémas Backward Differentiation Formulae d'ordre 1 et 2. Pour faire suite à ce développement théorique, des études numériques ont été menées démontrant la robustesse de ces méthodes quant à l'évolution des pas de temps dans l'optique d'adapter ces derniers.

Finalement, ces derniers chapitres permettent de dresser un bilan intéressant sur les méthodes DC/BDF non linéaires. Les résultats, pour la plupart, sont très encourageants. Ils montrent une convergence systématique des méthodes DC vers leurs taux théoriques. Seules quelques configurations, très particulières, sont problématiques.

Dans les chapitres 5 et 6, nous avons pu observer la très bonne aptitude des méthodes DC quant à la résolution d'EDO linéaires ou non. Celles-ci conservent leurs précisions malgré des évolutions très brusques des pas de temps.

Concernant les EDP 1D, notamment l'équation de la chaleur, nous avons vu, dans le chapitre 8, que les méthodes convergeaient pour les configurations dans lesquelles l'évolution des pas de temps est régulière. En revanche, l'évolution trop brusque des pas de temps montre la difficulté des méthodes d'ordre élevé à converger, notamment lorsque les conditions limites (imposées fortement) dépendent du temps.

Le chapitre suivant (9), portant sur la résolution de l'équation de la chaleur en 2D, atteste de la cohérence du comportement des méthodes DC/BDF non linéaires. En effet, l'ajout d'une dimension spatiale ne modifie pas le comportement des méthodes. Celles-ci continuent de converger parfaitement pour les configurations d'évolution régulière des pas de temps. Des pertes d'ordre sont toujours constatées pour les méthodes d'ordre théorique élevé lors de l'alternance des pas de temps.

Le chapitre 10 permet de répertorier les paramètres influents et de quantifier leurs effets sur les résultats. Notamment, nous essayons de mieux comprendre le phénomène de perte d'ordre. Nous avons pu constater que le degré des polynômes d'interpolation spatiale n'a pas d'effet sur la précision et la convergence des méthodes. En analysant l'effet du raffinement du maillage, nous observons, lors de l'alternance des pas de temps, qu'une concentration excessive des erreurs apparaît aux bords lorsque les conditions limites sont dépendantes du temps. La méthode de Verwer permet de lisser ce phénomène et ainsi de limiter les pertes

d'ordre. De plus, de réels gains de précision sont observés entre les méthodes d'ordre élevé. En revanche, le type de condition limite ne modifie pas le comportement des méthodes. Aussi, le coefficient de diffusion joue un rôle important. Il obstrue ou révèle ce comportement délétère des méthodes lors de l'alternance des pas de temps. Ce phénomène reste pour l'instant incompris et nécessite davantage d'investigation.

Enfin, à travers le chapitre 11, le comportement des méthodes est étudié pour la résolution de problèmes à plusieurs variables dont, notamment, ceux liés aux équations de Navier-Stokes. Il s'avère qu'elles suivent un comportement similaire à celui observé dans les chapitres précédents. Leurs convergences sont optimales lors de l'évolution régulière des pas de temps et des pertes d'ordre sont constatées à partir de la quatrième extrapolation lorsque l'évolution est trop brusque.

Finalement, dans l'ensemble, ces résultats sont très satisfaisants. Et, toujours dans l'optique de réaliser un algorithme à pas de temps adaptatifs pour les méthodes DC/BDF non linéaires, ces conclusions permettent de dresser une liste de recommandations. Premièrement, l'évolution des pas de temps doit être régulière garantissant la préservation de la précision des méthodes. De même, l'imposition faible des conditions limites dépendantes du temps par la méthode de Verwer permet des gains de précisions plus importants entre les méthodes DC.

12.2 Limitations de la solution proposée

Malgré ces résultats encourageants et prometteurs, ces méthodes sont confrontées à quelques limitations.

D'abord, dans les chapitres 3 et 4, nous avons pu remarquer la récurrence de la construction de ces méthodes et la possibilité d'augmenter leurs ordres de convergence indéfiniment. Cependant, il s'avère inutile d'augmenter indéfiniment la précision de la résolution temporelle si la discrétisation spatiale limite la précision des calculs. Il est donc important de prêter une attention particulière quant aux choix des discrétisations temporelle et spatiale. Il est suggéré de corrélérer les précisions temporelle et spatiale.

Également, lors de conditions limites dépendantes du temps, nous préconisons leurs impositions faibles permettant une meilleure précision et convergence des méthodes. Cette imposition faible est réalisée à l'aide de la méthode Verwer et le recours à un multiplicateur de Lagrange. Dans le cadre des éléments finis, cette procédure semble inédite et nous nous sommes permis de ne pas définir davantage ce multiplicateur. La généralisation de son utilisation nécessite une étude approfondie de celui-ci et notamment de son espace de définition.

Aussi, les études de convergence ont été menées dans quatre configurations différentes de pas de temps (constants, croissants, croissants/décroissants et alternés). Seules des pertes d'ordre ont été observées pour la configuration la plus délicate, c'est-à-dire lors de l'alternance des pas de temps. Davantage d'études sont nécessaires pour tenter de mieux comprendre ce phénomène dans l'optique d'adapter les pas de temps.

12.3 Améliorations futures

La principale amélioration de ces méthodes est la construction d'un algorithme à pas de temps adaptatifs permettant la minimisation du nombre d'étapes de temps tout en conservant une précision adéquate. Cette mise en œuvre nécessite l'évaluation de l'erreur de la solution numérique. Pour des problèmes réels, la solution analytique est inconnue, et ne peut alors être comparée à celle numérique. Une estimation de cette dernière est donc nécessaire. Une des possibilités envisagées serait d'utiliser la solution numérique calculée avec la méthode d'ordre maximal comme solution de référence et d'estimer les erreurs des autres méthodes à partir de celles-ci. De premières investigations montrent l'efficacité de cette solution, notamment pour les EDO.

Aussi, comme mentionné lors des limitations de ces méthodes, des investigations supplémentaires sont nécessaires pour essayer de mieux cerner le phénomène de perte d'ordre. Lors du chapitre 10, un des paramètres non investigués est l'interpolation des termes de corrections. Celle-ci est réalisée à l'aide de polynômes de Newton. Il semblerait finalement que ceux-ci soient sensibles aux variations des pas de temps nécessitant une certaine régularité. D'autres possibilités d'interpolation sont donc à envisager. De premières investigations reprenant le principe de la méthode de Taylor ont été réalisées et semblent prometteuses. De plus, cette méthode permettrait de s'affranchir de la lourdeur du démarrage de nos méthodes actuelles.

RÉFÉRENCES

- [1] E. Garnier et al., “Evaluation of the unsteady rans capabilities for separated flows control,” Computers & Fluids, vol. 61, p. 39–45, 2012.
- [2] G. Wanner et E. Hairer, Solving ordinary differential equations II. Springer Berlin Heidelberg New York, 1996, vol. 375.
- [3] D. A. Kay et al., “Adaptive time-stepping for incompressible flow part ii : Navier–stokes equations,” SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 32, n°. 1, p. 111–128, 2010.
- [4] V. John et J. Rang, “Adaptive time step control for the incompressible navier–stokes equations,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, n°. 9-12, p. 514–524, 2010.
- [5] P. Birken et al., “A time-adaptive fluid-structure interaction method for thermal coupling,” Computing and visualization in science, vol. 13, p. 331–340, 2010.
- [6] M. Mayr, W. Wall et M. Gee, “Adaptive time stepping for fluid-structure interaction solvers,” Finite Elements in Analysis and Design, vol. 141, p. 55–69, 2018.
- [7] C. W. Gear, “The numerical integration of ordinary differential equations,” Mathematics of Computation, vol. 21, n°. 98, p. 146–156, 1967.
- [8] C. F. Curtiss et J. O. Hirschfelder, “Integration of stiff equations,” Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 38, n°. 3, p. 235–243, 1952.
- [9] A. Iserles, A first course in the numerical analysis of differential equations. Cambridge university press, 2009, n°. 44.
- [10] E. Süli et D. F. Mayers, An introduction to numerical analysis. Cambridge university press, 2003.
- [11] Y. Vautrin, “Modélisation et simulation numérique d’écoulements diphasiques de fluides séparés par une interface avec une méthode d’éléments finis adaptative en espace et en temps,” Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), 2020.
- [12] E. Muller, “Une méthode d’éléments finis adaptative pour les écoulements instationnaires complexes,” Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Montreal (Canada), 2020.
- [13] L. Fox, “Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations,” Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, vol. 190, n°. 1020, p. 31–59, 1947.

- [14] L. Fox et E. Goodwin, “Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations,” dans Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 45, n^o. 3. Cambridge University Press, 1949, p. 373–388.
- [15] L. Fox, Numerical solution of ordinary and partial differential equations : based on a summer school held in Oxford, August-September 1961. Elsevier, 2014.
- [16] J.-L. Guermond et P. Minev, “High-order time stepping for the incompressible navier–stokes equations,” SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 37, n^o. 6, p. A2656–A2681, 2015.
- [17] K. Loy et Y. Bourgault, “On efficient high-order semi-implicit time-stepping schemes for unsteady incompressible navier–stokes equations,” Computers & Fluids, vol. 148, p. 166–184, 2017.
- [18] A. Dutt, L. Greengard et V. Rokhlin, “Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations,” BIT Numerical Mathematics, vol. 40, p. 241–266, 2000.
- [19] M. L. Minion, “Semi-implicit spectral deferred correction methods for ordinary differential equations,” 2003.
- [20] R. Speck et al., “A multi-level spectral deferred correction method,” BIT Numerical Mathematics, vol. 55, n^o. 3, p. 843–867, 2015.
- [21] B. Gustafsson et W. Kress, “Deferred correction methods for initial value problems,” BIT Numerical Mathematics, vol. 41, 2001.
- [22] W. Kress et B. Gustafsson, “Deferred correction methods for initial boundary value problems,” Journal of scientific computing, vol. 17, p. 241–251, 2002.
- [23] W. Kress, “Error estimates for deferred correction methods in time,” Applied numerical mathematics, vol. 57, n^o. 3, p. 335–353, 2007.
- [24] Y. Bourgault et A. Garon, “Variable-step deferred correction methods based on backward differentiation formulae for ordinary differential equations,” BIT Numerical Mathematics, vol. 62, n^o. 4, p. 1789–1822, 2022.
- [25] S. Berthelin, “Étude de méthodes d’intégration temporelle basées sur des schémas de corrections différées d’ordres élevés et a-stables,” Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal, août 2022. [En ligne]. Disponible : <https://publications.polymtl.ca/10489/>
- [26] G. G. Dahlquist, “A special stability problem for linear multistep methods,” BIT Numerical Mathematics, vol. 3, n^o. 1, p. 27–43, 1963.
- [27] E. Hairer et al., “Classical mathematical theory,” Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems, p. 1–125, 1987.
- [28] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs. Presses inter Polytechnique, 2011.

- [29] P. J. Roache, Verification and validation in computational science and engineering. Hermosa Albuquerque, NM, 1998, vol. 895.
- [30] C. Geart et K. Tu, “The effect of variable mesh size on the stability of multistep methods,” SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 11, n^o. 5, p. 1025–1043, 1974.
- [31] K.-W. Tu, Stability and convergence of general multistep and multivalued methods with variable step size. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1972.
- [32] W. H. Hundsdorfer, J. G. Verwer et W. Hundsdorfer, Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations. Springer, 2003, vol. 33.
- [33] W. Kress, “Error estimates for deferred correction methods in time,” Applied Numerical Mathematics, vol. 57, n^o. 3, p. 335–353, 2007. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927406000870>
- [34] D. Acheson, “Elementary fluid dynamics : Oxford university press,” 1990.
- [35] C. Wang, “Exact solutions of the steady-state navier-stokes equations,” Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 23, n^o. 1, p. 159–177, 1991.
- [36] J. Majdalani et H. Chibli, “Pulsatory channel flows with arbitrary pressure gradients,” dans 3rd Theoretical Fluid Mechanics Meeting, 2002, p. 2981.

**ANNEXE A EXPRESSIONS DES COEFFICIENTS $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ ET $e_{i,j}$
DES CORRECTIONS**

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= \frac{1}{k_n} \\
a_{1,1} &= -\frac{1}{k_n} \\
a_{2,0} &= \frac{2k_n + k_{n-1}}{k_n(k_n + k_{n-1})} \\
a_{2,1} &= -\frac{k_n + k_{n-1}}{k_n k_{n-1}} \\
a_{2,2} &= \frac{k_n}{k_n + k_{n-1}} \\
a_{3,0} &= \frac{k_n(k_n + k_{n-1}) + k_n(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
a_{3,1} &= -\frac{k_n(k_n + k_{n-1}) + k_n(k_{n-1} + k_{n-2}) + k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})} \\
a_{3,2} &= \frac{k_n(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})}{k_{n-1} k_{n-2}(k_n + k_{n-1})} \\
a_{3,3} &= \frac{-k_n(k_n + k_{n-1})}{k_{n-2}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
a_{4,0} &= \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
&\quad + \frac{k_n(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3}) + (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
a_{4,1} &= -\frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + k_n(k_n + k_{n-1})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
&\quad - \frac{k_n(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3}) + k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
a_{4,2} &= \frac{k_n(k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3}) + (k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3}) + (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))}{k_{n-1} k_{n-2}(k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})} \\
a_{4,3} &= \frac{k_n(-2k_n - 2k_n k_{n-1} - k_n k_{n-2} - k_n k_{n-3} - 2k_{n-1} - k_{n-1} k_{n-2} - k_{n-1} k_{n-3})}{k_{n-2} k_{n-3}(k_n k_{n-1} + k_n k_{n-2} + k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} k_{n-2} + k_{n-2}^2)} \\
a_{4,4} &= \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})}{k_{n-3}(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
\\
b_{2,0} &= \frac{2}{k_n(k_n + k_{n-1})} \\
b_{2,1} &= -\frac{2}{k_n k_{n-1}} \\
b_{2,2} &= \frac{2}{k_{n-1}(k_n + k_{n-1})} \\
b_{3,0} &= 2 \frac{3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2}}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
b_{3,1} &= -2 \frac{2k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2}}{(k_n k_{n-1})(k_{n-1} + k_{n-2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{3,2} &= 2 \frac{2k_n + k_{n-1} + k_{n-2}}{(k_{n-1}k_{n-2})(k_n + k_{n-1})} \\
b_{3,3} &= -2 \frac{2k_n + k_{n-1}}{k_{n-2}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
b_{4,0} &= 2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1}) + k_n(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
&\quad + \frac{(2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3}) + (k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
b_{4,1} &= 2 \frac{-3k_n^2 - 6k_n k_{n-1} - 4k_n k_{n-2} - 2k_n k_{n-3} - 3k_{n-1}^2 - 4k_{n-1} k_{n-2} - 2k_{n-1} k_{n-3} - k_{n-2}^2 - k_{n-2} k_{n-3}}{k_n k_{n-1} (k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} k_{n-2} + k_{n-1} k_{n-3} + k_{n-2}^2 + k_{n-2} k_{n-3})} \\
b_{4,2} &= 2 \frac{3k_n^2 + 4k_n k_{n-1} + 4k_n k_{n-2} + 2k_n k_{n-3} + k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} k_{n-2} + k_{n-1} k_{n-3} + k_{n-2}^2 + k_{n-2} k_{n-3}}{k_{n-1} k_{n-2} (k_n k_{n-2} + k_n k_{n-3} + k_{n-1} k_{n-2} + k_{n-1} k_{n-3})} \\
b_{4,3} &= 2 \frac{-3k_n^2 - 4k_n k_{n-1} - 2k_n k_{n-2} - 2k_n k_{n-3} - k_{n-1}^2 - k_{n-1} k_{n-2} - k_{n-1} k_{n-3}}{k_{n-2} k_{n-3} (k_n k_{n-1} + k_n k_{n-2} + k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} k_{n-2} + k_{n-2}^2)} \\
b_{4,4} &= 2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1}) + k_n(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + (k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})}{k_{n-3}(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
b_{5,0} &= 2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3}) + (k_n(k_n + k_{n-1}))}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
b_{5,1} &= -2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + (2k_n + k_{n-1})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n k_{n-1} (k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad - 2 \frac{(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n k_{n-1} (k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad - 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n k_{n-1} (k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad - 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n k_{n-1} (k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
b_{5,2} &= 2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_{n-1} k_{n-2} (k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(2k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_{n-1} k_{n-2} (k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_{n-1} k_{n-2} (k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_{n-1} k_{n-2} (k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
b_{5,3} &= - \frac{8k_n^3 + 18k_n^2 k_{n-1} + 12k_n^2 k_{n-2} + 12k_n^2 k_{n-3} + 6k_n^2 k_{n-4} + 12k_n k_{n-1}^2 + 16k_n k_{n-1} k_{n-2} + 16k_n k_{n-1} k_{n-3}}{\text{Denum}_{b53}} \\
&\quad - \frac{8k_n k_{n-1} k_{n-4} + 4k_n k_{n-2}^2 + 8k_n k_{n-2} k_{n-3} + 4k_n k_{n-2} k_{n-4} + 4k_n k_{n-3}^2 + 4k_n k_{n-3} k_{n-4} + 2k_{n-1}^3 + 4k_{n-1}^2 k_{n-2}}{\text{Denum}_{b53}} \\
&\quad - \frac{4k_{n-1}^2 k_{n-3} + 2k_{n-1}^2 k_{n-4} + 2k_{n-1} k_{n-2}^2 + 4k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} + 2k_{n-1} k_{n-3}^2 + 2k_{n-1} k_{n-3} k_{n-4}}{\text{Denum}_{b53}} \\
b_{5,4} &= 2 \frac{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) + k_{n-4}(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))}{k_{n-3} k_{n-4} (k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
&\quad + 2 \frac{(k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_{n-3} k_{n-4} (k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
b_{5,5} &= 2 \frac{-k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}) - (k_n(k_n + k_{n-1}) + (2k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}{k_{n-4}(k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,0} &= \frac{6}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
c_{3,1} &= -\frac{6}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})} \\
c_{3,2} &= \frac{6}{k_{n-1} k_{n-2}(k_n + k_{n-1})} \\
c_{3,3} &= -\frac{6}{(k_{n-2}(k_{n-1} + k_{n-2}))(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})} \\
c_{4,0} &= 6 \frac{4k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
c_{4,1} &= 6 \frac{-3k_n - 3k_{n-1} - 2k_{n-2} - k_{n-3}}{k_n k_{n-1}(k_{n-1}^2 + 2k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-1}k_{n-3} + k_{n-2}^2 + k_{n-2}k_{n-3})} \\
c_{4,2} &= 6 \frac{3k_n + 2k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}}{k_{n-1}k_{n-2}(k_n k_{n-2} + k_n k_{n-3} + k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-1}k_{n-3})} \\
c_{4,3} &= 6 \frac{-3k_n - 2k_{n-1} - k_{n-2} - k_{n-3}}{k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1} + k_n k_{n-2} + k_{n-1}^2 + 2k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-2}^2)} \\
c_{4,4} &= 6 \frac{3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2}}{k_{n-3}(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
c_{5,0} &= 6 \frac{3k_n(2k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}) + k_{n-1}(3k_{n-1} + 4k_{n-2} + 2k_{n-3}) + k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 6 \frac{(3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4}) + (k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
c_{5,1} &= 6 \frac{-3k_n(2k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}) - k_{n-1}(3k_{n-1} + 4k_{n-2} + 2k_{n-3}) - k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3})}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 6 \frac{-(3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4}) - (k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
c_{5,2} &= 6 \frac{3k_n(2k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}) + k_{n-1}(3k_{n-1} + 4k_{n-2} + 2k_{n-3}) + k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3})}{k_{n-1}k_{n-2}(k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
&\quad + 6 \frac{(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4}) + (3k_n + 2k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}{k_{n-1}k_{n-2}(k_n + k_{n-1})(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
c_{5,3} &= 6 \frac{-6k_n^2 - 9k_n k_{n-1} - 6k_n k_{n-2} - 6k_n k_{n-3} - 3k_n k_{n-4} - 3k_{n-1}^2 - 4k_{n-1} k_{n-2} - 4k_{n-1} k_{n-3}}{Denum_{c53}} \\
&\quad + 6 \frac{-2k_{n-1} k_{n-4} - k_{n-2}^2 - 2k_{n-2} k_{n-3} - k_{n-2} k_{n-4} - k_{n-3}^2 - k_{n-3} k_{n-4}}{Denum_{c53}} \\
c_{5,4} &= 6 \frac{6k_n^2 + 9k_n k_{n-1} + 6k_n k_{n-2} + 3k_n k_{n-3} + 3k_n k_{n-4} + 3k_{n-1}^2 + 4k_{n-1} k_{n-2}}{Denum_{c54}} \\
&\quad + 6 \frac{2k_{n-1} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-4} + k_{n-2}^2 + k_{n-2} k_{n-3} + k_{n-2} k_{n-4}}{Denum_{c54}} \\
c_{5,5} &= 6 \frac{-3k_n(2k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3}) - k_{n-1}(3k_{n-1} + 4k_{n-2} + 2k_{n-3}) - k_{n-2}(k_{n-2} + k_{n-3})}{k_{n-4}(k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
d_{4,0} &= \frac{24}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})} \\
d_{4,1} &= -\frac{24}{k_n k_{n-1}(k_{n-1}^2 + 2k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-1}k_{n-3} + k_{n-2}^2 + k_{n-2}k_{n-3})} \\
d_{4,2} &= \frac{24}{k_{n-1}k_{n-2}(k_n k_{n-2} + k_n k_{n-3} + k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-1}k_{n-3})} \\
d_{4,3} &= -\frac{24}{k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1} + k_n k_{n-2} + k_{n-1}^2 + 2k_{n-1}k_{n-2} + k_{n-2}^2)} \\
d_{4,4} &= \frac{24}{k_{n-3}(k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{5,0} &= 24 \frac{5k_n + 4k_{n-1} + 3k_{n-2} + 2k_{n-3} + k_{n-4}}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
d_{5,1} &= 24 \frac{-4k_n - 4k_{n-1} - 3k_{n-2} - 2k_{n-3} - k_{n-4}}{Denum_{d51}} \\
d_{5,2} &= 24 \frac{4k_n + 3k_{n-1} + 3k_{n-2} + 2k_{n-3} + k_{n-4}}{Denum_{d52}} \\
d_{5,3} &= 24 \frac{-4k_n - 3k_{n-1} - 2k_{n-2} - 2k_{n-3} - k_{n-4}}{Denum_{d53}} \\
d_{5,4} &= 24 \frac{4k_n + 3k_{n-1} + 2k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4}}{Denum_{d54}} \\
d_{5,5} &= 24 \frac{-4k_n - 3k_{n-1} - 2k_{n-2} - k_{n-3}}{k_{n-4}(k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{5,0} &= \frac{120}{k_n(k_n + k_{n-1})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
e_{5,1} &= -\frac{120}{k_n k_{n-1}(k_{n-1} + k_{n-2})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})} \\
e_{5,2} &= \frac{120}{Denum_{e52}} \\
e_{5,3} &= -\frac{120}{Denum_{e53}} \\
e_{5,4} &= \frac{120}{Denum_{e54}} \\
e_{5,5} &= -\frac{120}{k_{n-4}(k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})(k_n + k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3} + k_{n-4})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{b53} &= k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1} k_{n-3} + k_n k_{n-1} k_{n-4} + k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-1}^2 k_{n-3} + k_{n-1}^2 k_{n-4} \\
&\quad + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-2}^2 k_{n-3} + k_{n-2}^2 k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{c53} &= k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1} k_{n-3} + k_n k_{n-1} k_{n-4} + k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-1}^2 k_{n-3} + k_{n-1}^2 k_{n-4} \\
&\quad + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-2}^2 k_{n-3} + k_{n-2}^2 k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{c54} &= k_{n-3}k_{n-4}(k_n k_{n-1} k_{n-2} + k_n k_{n-1} k_{n-3} + k_n k_{n-2}^2 + 2k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-3}^2 + k_{n-1}^2 k_{n-2} + k_{n-1}^2 k_{n-3} \\
&\quad + 2k_{n-1} k_{n-2}^2 + 4k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-3}^2 + k_{n-2}^3 + 3k_{n-2}^2 k_{n-3} + 3k_{n-2} k_{n-3}^2 + k_{n-3}^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{d51} &= k_n k_{n-1}(k_{n-1}^3 + 3k_{n-1}^2 k_{n-2} + 2k_{n-1}^2 k_{n-3} + k_{n-1}^2 k_{n-4} + 3k_{n-1} k_{n-2}^2 + 4k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} \\
&\quad + k_{n-1} k_{n-3}^2 + k_{n-1} k_{n-3} k_{n-4} + k_{n-2}^3 + 2k_{n-2}^2 k_{n-3} + k_{n-2}^2 k_{n-4} + k_{n-2} k_{n-3}^2 + k_{n-2} k_{n-3} k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{d52} &= k_{n-1}k_{n-2}(k_n k_{n-2}^2 + 2k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-2} k_{n-4} + k_n k_{n-3}^2 + k_n k_{n-3} k_{n-4} + k_{n-1} k_{n-2}^2 \\
&\quad + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-1} k_{n-3}^2 + k_{n-1} k_{n-3} k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{d53} &= k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1} k_{n-3} + k_n k_{n-1} k_{n-4} + k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-2} k_{n-4} \\
&\quad + k_{n-1}^2 k_{n-3} + k_{n-1}^2 k_{n-4} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2} k_{n-4} + k_{n-2}^2 k_{n-3} + k_{n-2}^2 k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{d54} &= k_{n-3}k_{n-4}(k_n k_{n-1} k_{n-2} + k_n k_{n-1} k_{n-3} + k_n k_{n-2}^2 + 2k_n k_{n-2} k_{n-3} + k_n k_{n-3}^2 + k_{n-1}^2 k_{n-2} \\
&\quad + k_{n-1}^2 k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-2}^2 + 4k_{n-1} k_{n-2} k_{n-3} + 2k_{n-1} k_{n-3}^2 + k_{n-2}^3 + 3k_{n-2}^2 k_{n-3} + 3k_{n-2} k_{n-3}^2 + k_{n-3}^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{e52} &= k_{n-1}k_{n-2}(k_n k_{n-2}^2 + 2k_n k_{n-2}k_{n-3} + k_n k_{n-2}k_{n-4} + k_n k_{n-3}^2 + k_n k_{n-3}k_{n-4} \\
&\quad + k_{n-1}k_{n-2}^2 + 2k_{n-1}k_{n-2}k_{n-3} + k_{n-1}k_{n-2}k_{n-4} + k_{n-1}k_{n-3}^2 + k_{n-1}k_{n-3}k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{e53} &= k_{n-2}k_{n-3}(k_n k_{n-1}k_{n-3} + k_n k_{n-1}k_{n-4} + k_n k_{n-2}k_{n-3} + k_n k_{n-2}k_{n-4} + k_{n-1}^2 k_{n-3} \\
&\quad + k_{n-1}^2 k_{n-4} + 2k_{n-1}k_{n-2}k_{n-3} + 2k_{n-1}k_{n-2}k_{n-4} + k_{n-2}^2 k_{n-3} + k_{n-2}^2 k_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Denum_{e54} &= k_{n-3}k_{n-4}(k_n k_{n-1}k_{n-2} + k_n k_{n-1}k_{n-3} + k_n k_{n-2}^2 + 2k_n k_{n-2}k_{n-3} + k_n k_{n-3}^2 + k_{n-1}^2 k_{n-2} \\
&\quad + k_{n-1}^2 k_{n-3} + 2k_{n-1}k_{n-2}^2 + 4k_{n-1}k_{n-2}k_{n-3} + 2k_{n-1}k_{n-3}^2 + k_{n-2}^3 + 3k_{n-2}^2 k_{n-3} + 3k_{n-2}k_{n-3}^2 + k_{n-3}^3)
\end{aligned}$$

ANNEXE B TABLE DES DIFFÉRENCES DIVISÉES

TABLEAU B.1 Table des différences divisées

k_n	t^n	\dot{u}^n	$\delta_{11}^{\dot{u}}$			
	t^{n-1}	\dot{u}^{n-1}		$\delta_{12}^{\dot{u}}$		
k_{n-1}			$\delta_{21}^{\dot{u}}$		$\delta_{13}^{\dot{u}}$	
	t^{n-2}	\dot{u}^{n-2}		$\delta_{22}^{\dot{u}}$		$\delta_{14}^{\dot{u}}$
k_{n-2}			$\delta_{31}^{\dot{u}}$		$\delta_{23}^{\dot{u}}$	
	t^{n-3}	\dot{u}^{n-3}		$\delta_{32}^{\dot{u}}$		
k_{n-3}			$\delta_{41}^{\dot{u}}$			
	t^{n-4}	\dot{u}^{n-4}				

ANNEXE C ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES DC/BDF2 DES SOLUTIONS U_1 ET U_2

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour des EDO linéaires avec $u_1 = t^2$ et $u_2 = \cos(t)$ (cf. chapitre 5).

TABLEAU C.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps constant

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4.44e-16	/	1.11e-16	/	1.11e-16	/	2.22e-16	/	2.22e-16	/
20	4.44e-16	/	4.44e-16	/	4.44e-16	/	3.33e-16	/	4.44e-16	/
40	1.11e-15	/	6.66e-16	/	1.55e-15	/	6.66e-16	/	9.99e-16	/
80	3.89e-16	/	3.89e-16	/	4.44e-16	/	5.55e-16	/	1.11e-15	/
160	6.66e-16	/	8.88e-16	/	1.11e-15	/	1.11e-15	/	2.78e-15	/

TABLEAU C.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps constant

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.33e-03	/	6.07e-05	/	1.65e-06	/	1.78e-07	/	6.25e-09	/
20	3.57e-04	1.89	8.19e-06	2.89	1.19e-07	3.79	7.02e-09	4.67	1.34e-10	5.54
40	9.25e-05	1.95	1.06e-06	2.95	7.97e-09	3.90	2.41e-10	4.86	2.38e-12	5.82
80	2.35e-05	1.97	1.35e-07	2.98	5.14e-10	3.95	7.87e-12	4.94	4.22e-14	5.82
160	5.93e-06	1.99	1.70e-08	2.99	3.26e-11	3.98	2.50e-13	4.98	5.33e-15	2.98

TABLEAU C.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.22e-16	/	1.11e-16	/	4.44e-16	/	1.11e-16	/	3.33e-16	/
20	2.22e-16	/	1.67e-16	/	2.22e-16	/	7.77e-16	/	2.22e-16	/
40	9.99e-16	/	1.11e-15	/	8.88e-16	/	5.55e-16	/	1.33e-15	/
80	3.89e-16	/	4.44e-16	/	3.33e-16	/	2.78e-16	/	4.44e-16	/
160	6.66e-16	/	1.33e-15	/	7.77e-16	/	8.88e-16	/	8.88e-16	/

TABLEAU C.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.72e-03	/	7.24e-05	/	2.92e-06	/	3.04e-07	/	1.49e-08	/
20	4.70e-04	1.87	9.54e-06	2.92	2.19e-07	3.74	1.09e-08	4.80	3.43e-10	5.44
40	1.23e-04	1.93	1.22e-06	2.97	1.50e-08	3.87	3.62e-10	4.92	6.48e-12	5.73
80	3.14e-05	1.97	1.54e-07	2.98	9.80e-10	3.93	1.16e-11	4.96	1.10e-13	5.88
160	7.95e-06	1.98	1.94e-08	2.99	6.27e-11	3.97	3.68e-13	4.98	2.78e-15	5.30

TABLEAU C.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.22e-16	/	4.44e-16	/	2.22e-16	/	3.33e-16	/	1.22e-15	/
20	2.22e-16	/	2.22e-16	/	2.22e-16	/	3.33e-16	/	2.78e-16	/
40	2.22e-16	/	2.22e-16	/	2.22e-16	/	3.89e-16	/	2.22e-16	/
80	1.17e-15	/	4.44e-16	/	7.77e-16	/	8.88e-16	/	1.11e-15	/
160	6.66e-16	/	1.17e-15	/	9.44e-16	/	6.66e-16	/	1.05e-15	/

TABLEAU C.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.62e-03	/	9.12e-05	/	2.78e-06	/	4.28e-07	/	1.40e-08	/
20	1.50e-04	3.43	5.94e-06	3.94	5.70e-08	5.61	6.18e-09	6.12	7.24e-11	7.59
40	3.46e-05	2.12	7.36e-07	3.01	3.81e-09	3.90	2.12e-10	4.86	1.49e-12	5.60
80	8.70e-06	1.99	9.36e-08	2.98	2.56e-10	3.90	7.09e-12	4.91	3.15e-14	5.56
160	2.19e-06	1.99	1.18e-08	2.98	1.67e-11	3.94	2.30e-13	4.95	4.00e-15	2.98

TABLEAU C.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_1 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.22e-16	/	2.22e-16	/	9.99e-16	/	7.77e-16	/	1.11e-15	/
20	2.22e-16	/	3.33e-16	/	5.55e-16	/	4.44e-16	/	2.44e-15	/
40	1.44e-15	/	1.33e-15	/	1.55e-15	/	8.88e-16	/	3.89e-15	/
80	2.33e-15	/	2.33e-15	/	2.22e-15	/	5.33e-15	/	9.10e-15	/
160	8.66e-15	/	8.33e-15	/	8.77e-15	/	1.13e-14	/	6.00e-15	/

TABLEAU C.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_2 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	1.43e-03	/	7.56e-05	/	2.36e-06	/	2.70e-07	/	9.73e-09	/
20	3.70e-04	1.95	9.64e-06	2.97	1.64e-07	3.85	9.67e-09	4.80	1.99e-10	5.61
40	9.41e-05	1.98	1.22e-06	2.99	1.07e-08	3.93	3.21e-10	4.91	3.44e-12	5.85
80	2.37e-05	1.99	1.53e-07	2.99	6.84e-10	3.97	1.03e-11	4.96	5.58e-14	5.94
160	5.96e-06	1.99	1.91e-08	3.00	4.32e-11	3.98	3.41e-13	4.92	2.29e-14	1.29

**ANNEXE D ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES
DC/BDF2 U_3 ET U_4**

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour des EDO non linéaires avec $u_3 = \frac{1}{t+1}$ et $u_4 = t^8 + 10t^5$ (cf. chapitre 6).

TABLEAU D.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.43e-03	/	2.13e-04	/	3.91e-05	/	9.62e-06	/	2.84e-06	/
20	6.71e-04	1.86	2.92e-05	2.87	3.06e-06	3.68	4.50e-07	4.42	8.20e-08	5.11
40	1.76e-04	1.93	3.79e-06	2.95	2.14e-07	3.84	1.74e-08	4.70	1.78e-09	5.53
80	4.52e-05	1.96	4.81e-07	2.98	1.42e-08	3.92	6.05e-10	4.84	3.29e-11	5.76
160	1.14e-05	1.98	6.06e-08	2.99	9.12e-10	3.96	1.99e-11	4.92	5.99e-13	5.78

TABLEAU D.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps constants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	3.06e-01	/	2.80e-02	/	3.72e-03	/	5.99e-04	/	1.16e-04	/
20	8.44e-02	1.86	3.69e-03	2.93	2.69e-04	3.79	2.28e-05	4.72	2.11e-06	5.78
40	2.23e-02	1.92	4.73e-04	2.96	1.80e-05	3.90	7.83e-07	4.87	3.53e-08	5.90
80	5.74e-03	1.96	5.98e-05	2.98	1.17e-06	3.95	2.56e-08	4.93	5.69e-10	5.95
160	1.46e-03	1.98	7.51e-06	2.99	7.41e-08	3.97	8.17e-10	4.97	9.02e-12	5.98

TABLEAU D.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.41e-03	/	1.91e-04	/	3.75e-05	/	1.11e-05	/	4.30e-06	/
20	6.03e-04	2.00	2.23e-05	3.10	2.20e-06	4.09	3.21e-07	5.11	6.08e-08	6.14
40	1.50e-04	2.00	2.69e-06	3.05	1.33e-07	4.05	9.51e-09	5.08	8.79e-10	6.11
80	3.76e-05	2.00	3.31e-07	3.02	8.13e-09	4.03	2.88e-10	5.04	1.38e-11	6.00
160	9.39e-06	2.00	4.10e-08	3.01	5.03e-10	4.01	9.09e-12	4.99	2.06e-13	6.06

TABLEAU D.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4.77e-01	/	6.09e-02	/	9.90e-03	/	1.90e-03	/	4.15e-04	/
20	1.37e-01	1.80	8.22e-03	2.89	7.38e-04	3.75	7.86e-05	4.59	8.67e-06	5.58
40	3.70e-02	1.89	1.06e-03	2.96	5.04e-05	3.87	2.83e-06	4.80	1.55e-07	5.80
80	9.65e-03	1.94	1.33e-04	2.99	3.30e-06	3.93	9.49e-08	4.90	2.60e-09	5.90
160	2.47e-03	1.97	1.67e-05	3.00	2.11e-07	3.97	3.07e-09	4.95	4.20e-11	5.95

TABLEAU D.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	3.33e-03	/	3.30e-04	/	7.88e-05	/	2.78e-05	/	1.19e-05	/
20	8.31e-04	2.00	3.87e-05	3.09	4.65e-06	4.08	8.43e-07	5.05	1.99e-07	5.90
40	2.06e-04	2.01	4.56e-06	3.09	2.73e-07	4.09	2.43e-08	5.12	2.81e-09	6.15
80	5.11e-05	2.01	5.51e-07	3.05	1.65e-08	4.05	7.23e-10	5.07	4.07e-11	6.11
160	1.27e-05	2.00	6.76e-08	3.03	1.01e-09	4.03	2.19e-11	5.05	6.54e-13	5.96

TABLEAU D.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps croissants puis décroissants

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.69e-01	/	2.96e-02	/	5.02e-03	/	6.21e-04	/	2.09e-04	/
20	6.88e-02	1.97	3.45e-03	3.10	3.11e-04	4.01	2.62e-05	4.56	4.97e-06	5.39
40	1.74e-02	1.98	4.07e-04	3.08	1.97e-05	3.98	9.59e-07	4.77	9.11e-08	5.77
80	4.39e-03	1.99	5.01e-05	3.02	1.27e-06	3.96	3.18e-08	4.91	1.49e-09	5.93
160	1.10e-03	1.99	6.25e-06	3.00	8.01e-08	3.98	1.02e-09	4.96	2.37e-11	5.98

TABLEAU D.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_3 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	2.82e-03	/	2.32e-04	/	4.51e-05	/	1.45e-05	/	2.74e-06	/
20	7.22e-04	1.97	2.87e-05	3.02	3.64e-06	3.63	5.69e-07	4.67	8.81e-08	4.96
40	1.83e-04	1.98	3.52e-06	3.02	2.59e-07	3.82	2.01e-08	4.83	2.03e-09	5.44
80	4.60e-05	1.99	4.35e-07	3.02	1.73e-08	3.90	6.66e-10	4.91	3.91e-11	5.70
160	1.15e-05	2.00	5.41e-08	3.01	1.12e-09	3.95	2.17e-11	4.94	4.27e-13	6.51

TABLEAU D.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution u_4 avec pas de temps alternés

Nombre de pas de temps	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	3.54e-01	/	5.18e-02	/	1.19e-02	/	3.55e-03	/	1.26e-03	/
20	9.13e-02	1.95	6.90e-03	2.91	8.75e-04	3.77	1.56e-04	4.51	3.55e-05	5.15
40	2.32e-02	1.98	8.82e-04	2.97	5.85e-05	3.90	5.63e-06	4.79	7.17e-07	5.63
80	5.85e-03	1.99	1.11e-04	2.99	3.76e-06	3.96	1.88e-07	4.90	1.25e-08	5.84
160	1.47e-03	1.99	1.39e-05	3.00	2.39e-07	3.98	6.06e-09	4.95	2.06e-10	5.92

ANNEXE E ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES DC/BDF2 DES SOLUTIONS T_1 ET T_2

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour des EDP paraboliques 1D (équation de la chaleur 1D) avec $T_1 = x(x-5)t^6$ et $T_2 = (x^2-25)t^6 + x^2t^6 + 1$ (cf. chapitre 8).

TABLEAU E.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	7.59e-02	/	7.64e-03	/	7.92e-04	/	6.28e-05	/	8.49e-06	/
20	10	2.13e-02	1.83	9.47e-04	3.01	5.15e-05	3.94	1.89e-06	5.06	1.24e-07	6.10
40	10	5.65e-03	1.92	1.17e-04	3.02	3.28e-06	3.97	5.82e-08	5.02	3.21e-09	5.27
80	10	1.46e-03	1.96	1.45e-05	3.01	2.07e-07	3.99	1.81e-09	5.00	3.44e-11	6.54
160	10	3.69e-04	1.98	1.81e-06	3.01	1.30e-08	3.99	5.67e-11	5.00	3.55e-13	6.60
320	10	9.30e-05	1.99	2.25e-07	3.00	8.15e-10	4.00	1.77e-12	5.00	3.10e-15	6.84
640	10	2.33e-05	1.99	2.81e-08	3.00	5.10e-11	4.00	5.53e-14	5.00	3.67e-15	-0.24

TABLEAU E.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps constants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	1.60e-01	/	1.61e-02	/	2.14e-03	/	2.40e-03	/	4.78e-03	/
20	10	4.49e-02	1.83	1.99e-03	3.01	1.08e-04	4.31	3.76e-05	6.00	7.07e-05	6.08
40	10	1.19e-02	1.92	2.46e-04	3.02	6.88e-06	3.97	4.79e-07	6.29	8.11e-07	6.45
80	10	3.06e-03	1.96	3.05e-05	3.01	4.34e-07	3.99	6.31e-09	6.25	1.05e-08	6.27
160	10	7.77e-04	1.98	3.80e-06	3.01	2.73e-08	3.99	1.19e-10	5.73	1.40e-10	6.23
320	10	1.96e-04	1.99	4.74e-07	3.00	1.71e-09	4.00	3.72e-12	5.00	1.74e-12	6.32
640	10	4.91e-05	1.99	5.91e-08	3.00	1.07e-10	4.00	1.24e-13	4.91	2.03e-14	6.43

TABLEAU E.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	1.26e-01	/	2.07e-02	/	3.13e-03	/	3.37e-04	/	1.05e-05	/
20	10	3.76e-02	1.74	2.63e-03	2.98	1.93e-04	4.02	9.76e-06	5.11	7.57e-08	7.11
40	10	1.03e-02	1.87	3.18e-04	3.05	1.19e-05	4.02	2.92e-07	5.06	5.65e-10	7.07
80	10	2.69e-03	1.94	3.86e-05	3.04	7.39e-07	4.01	8.92e-09	5.03	4.31e-12	7.04
160	10	6.87e-04	1.97	4.73e-06	3.03	4.60e-08	4.00	2.76e-10	5.02	1.09e-13	5.30
320	10	1.74e-04	1.98	5.85e-07	3.02	2.87e-09	4.00	8.56e-12	5.01	9.00e-14	0.28
640	10	4.37e-05	1.99	7.27e-08	3.01	1.80e-10	4.00	2.69e-13	4.99	8.77e-14	0.04

TABLEAU E.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	2.65e-01	/	4.37e-02	/	6.59e-03	/	1.16e-03	/	2.88e-03	/
20	10	7.93e-02	1.74	5.55e-03	2.98	4.08e-04	4.01	2.05e-05	5.82	1.56e-05	7.53
40	10	2.17e-02	1.87	6.71e-04	3.05	2.51e-05	4.02	6.14e-07	5.06	1.16e-07	7.07
80	10	5.67e-03	1.94	8.14e-05	3.04	1.56e-06	4.01	1.88e-08	5.03	1.31e-09	6.47
160	10	1.45e-03	1.97	9.97e-06	3.03	9.70e-08	4.00	5.80e-10	5.02	1.52e-11	6.43
320	10	3.67e-04	1.98	1.23e-06	3.02	6.05e-09	4.00	1.80e-11	5.01	1.75e-13	6.45
640	10	9.22e-05	1.99	1.53e-07	3.01	3.78e-10	4.00	5.76e-13	4.97	3.00e-14	2.54

TABLEAU E.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	4.95e-02	/	7.37e-03	/	1.56e-03	/	5.08e-04	/	4.59e-04	/
20	10	1.26e-02	1.97	7.86e-04	3.23	8.88e-05	4.13	2.27e-05	4.48	1.02e-05	5.49
40	10	3.20e-03	1.98	8.60e-05	3.19	5.55e-06	4.00	6.76e-07	5.07	1.70e-07	5.90
80	10	8.06e-04	1.99	1.04e-05	3.05	3.65e-07	3.93	1.69e-08	5.33	3.53e-09	5.59
160	10	2.02e-04	1.99	1.31e-06	2.99	2.27e-08	4.01	3.66e-10	5.53	1.16e-10	4.93
320	10	5.06e-05	2.00	1.64e-07	3.00	1.41e-09	4.00	9.58e-12	5.25	2.62e-12	5.46
640	10	1.27e-05	2.00	2.06e-08	3.00	8.89e-11	3.99	2.83e-13	5.08	1.02e-13	4.68

TABLEAU E.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	1.04e-01	/	1.55e-02	/	4.55e-03	/	3.07e-03	/	4.26e-03	/
20	10	2.64e-02	1.97	1.65e-03	3.23	1.89e-04	4.59	7.03e-05	5.45	6.85e-05	5.96
40	10	6.70e-03	1.98	1.81e-04	3.20	1.18e-05	4.00	3.20e-06	4.46	3.54e-06	4.27
80	10	1.69e-03	1.99	2.17e-05	3.05	7.99e-07	3.89	1.60e-07	4.33	1.41e-07	4.65
160	10	4.24e-04	1.99	2.74e-06	2.99	5.04e-08	3.99	6.68e-09	4.58	3.94e-09	5.16
320	10	1.06e-04	2.00	3.44e-07	3.00	3.11e-09	4.02	2.33e-10	4.84	7.17e-11	5.78
640	10	2.66e-05	2.00	4.31e-08	3.00	1.88e-10	4.04	7.44e-12	4.97	1.17e-12	5.94

TABLEAU E.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	8.64e-02	/	3.30e-02	/	2.61e-02	/	3.12e-02	/	4.32e-02	/
20	10	2.39e-02	1.86	5.77e-03	2.51	3.52e-03	2.89	3.63e-03	3.10	4.99e-03	3.11
40	10	6.07e-03	1.97	8.09e-04	2.84	3.04e-04	3.53	2.18e-04	4.06	3.64e-04	3.78
80	10	1.52e-03	2.00	1.04e-04	2.95	2.20e-05	3.79	1.20e-05	4.18	2.71e-05	3.75
160	10	3.77e-04	2.01	1.31e-05	2.99	1.48e-06	3.89	6.75e-07	4.16	1.61e-06	4.08
320	10	9.40e-05	2.00	1.64e-06	3.00	9.62e-08	3.94	3.68e-08	4.20	8.85e-08	4.18
640	10	2.35e-05	2.00	2.05e-07	3.00	6.17e-09	3.96	1.94e-09	4.24	4.47e-09	4.31

TABLEAU E.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	2.10e-01	/	8.73e-02	/	8.65e-02	/	1.32e-01	/	1.90e-01	/
20	10	5.43e-02	1.95	1.62e-02	2.43	1.72e-02	2.33	3.69e-02	1.85	1.11e-01	0.78
40	10	1.34e-02	2.02	2.49e-03	2.70	2.35e-03	2.87	5.24e-03	2.81	1.93e-02	2.52
80	10	3.27e-03	2.03	3.42e-04	2.86	2.67e-04	3.14	6.41e-04	3.03	2.67e-03	2.85
160	10	8.05e-04	2.02	4.47e-05	2.94	2.90e-05	3.20	7.23e-05	3.15	3.07e-04	3.12
320	10	1.99e-04	2.01	5.69e-06	2.97	3.05e-06	3.25	7.42e-06	3.28	3.08e-05	3.32
640	10	4.96e-05	2.01	7.17e-07	2.99	3.03e-07	3.33	6.93e-07	3.42	2.76e-06	3.48

**ANNEXE F ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES
DC/BDF2 DES SOLUTIONS T_3 ET T_4**

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour des EDP paraboliques 2D (équation de la chaleur 2D) avec $T_3 = 1 + t^6$ et $T_2 = x^2 + y^2 + t^6$ (cf. chapitre 9).

TABLEAU F.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps constants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	1.28e-03	/	1.27e-04	/	8.78e-06	/	5.82e-05	/	3.94e-05	/
20	16	3.60e-04	1.83	1.57e-05	3.02	3.32e-08	5.11	1.15e-06	5.66	2.96e-07	5.92
40	16	9.52e-05	1.92	1.93e-06	3.02	3.07e-09	3.97	1.60e-08	6.17	7.50e-09	6.38
80	16	2.45e-05	1.96	2.40e-07	3.01	3.48e-10	3.99	1.73e-10	6.53	1.30e-11	6.46
160	16	6.21e-06	1.98	2.98e-08	3.01	1.02e-11	3.99	2.52e-12	6.11	5.15e-13	6.12
320	16	1.56e-06	1.99	3.72e-09	3.00	3.17e-12	4.00	1.09e-13	4.53	7.79e-14	4.67
640	16	3.92e-07	1.99	4.64e-10	3.00	2.49e-14	4.00	5.04e-13	-2.21	4.02e-14	-1.85

TABLEAU F.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps constants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	1.28e-03	/	1.27e-04	/	8.78e-06	/	5.82e-05	/	3.94e-05	/
20	16	3.60e-04	1.83	1.57e-05	3.02	3.32e-08	5.11	1.15e-06	5.66	2.96e-07	5.92
40	16	9.52e-05	1.92	1.93e-06	3.02	3.07e-09	3.97	1.60e-08	6.17	7.50e-09	6.38
80	16	2.45e-05	1.96	2.40e-07	3.01	3.48e-10	3.99	1.73e-10	6.53	1.30e-11	6.46
160	16	6.21e-06	1.98	2.98e-08	3.01	1.02e-11	3.99	2.52e-12	6.11	5.15e-13	6.12
320	16	1.56e-06	1.99	3.72e-09	3.00	3.17e-12	4.00	1.09e-13	4.53	7.79e-14	4.67
640	16	3.92e-07	1.99	4.64e-10	3.00	2.49e-14	4.00	5.04e-13	-2.21	4.02e-14	-1.85

TABLEAU F.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	2.16e-03	/	3.58e-04	/	5.39e-05	/	2.65e-05	/	8.27e-05	/
20	16	6.45e-04	1.74	4.52e-05	2.99	3.29e-06	4.04	2.51e-07	6.72	5.21e-07	7.31
40	16	1.76e-04	1.87	5.44e-06	3.05	2.01e-07	4.03	4.89e-09	5.68	3.71e-09	7.13
80	16	4.61e-05	1.94	6.58e-07	3.05	1.25e-08	4.01	1.49e-10	5.04	4.06e-11	6.51
160	16	1.18e-05	1.97	8.05e-08	3.03	7.75e-10	4.01	4.60e-12	5.02	1.60e-12	4.67
320	16	2.98e-06	1.98	9.94e-09	3.02	4.84e-11	4.00	1.23e-12	1.90	1.74e-12	-0.12
640	16	7.49e-07	1.99	1.23e-09	3.01	3.02e-12	4.00	6.91e-13	0.84	9.79e-13	0.83

TABLEAU F.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	2.16e-03	/	3.58e-04	/	5.39e-05	/	2.65e-05	/	8.27e-05	/
20	16	6.45e-04	1.74	4.52e-05	2.99	3.29e-06	4.04	2.51e-07	6.72	5.21e-07	7.31
40	16	1.76e-04	1.87	5.44e-06	3.05	2.01e-07	4.03	4.89e-09	5.68	3.71e-09	7.13
80	16	4.61e-05	1.94	6.58e-07	3.05	1.25e-08	4.01	1.49e-10	5.04	4.06e-11	6.51
160	16	1.18e-05	1.97	8.05e-08	3.03	7.75e-10	4.01	4.60e-12	5.02	1.60e-12	4.67
320	16	2.98e-06	1.98	9.94e-09	3.02	4.84e-11	4.00	1.23e-12	1.90	1.74e-12	-0.12
640	16	7.49e-07	1.99	1.23e-09	3.01	3.02e-12	4.00	6.91e-13	0.84	9.79e-13	0.83

TABLEAU F.5 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	7.81e-04	/	1.19e-04	/	5.01e-05	/	5.64e-05	/	7.18e-06	/
20	16	2.01e-04	1.96	1.31e-05	3.18	2.09e-06	4.58	1.46e-06	5.27	1.99e-07	5.47
40	16	5.08e-05	1.98	1.38e-06	3.24	2.00e-07	3.39	1.04e-07	3.81	2.42e-08	4.15
80	16	1.28e-05	1.99	1.69e-07	3.04	1.40e-08	3.83	5.04e-09	4.37	6.67e-10	4.73
160	16	3.21e-06	1.99	2.10e-08	3.01	9.69e-10	3.85	2.39e-10	4.40	1.53e-11	5.45
320	16	8.05e-07	2.00	2.62e-09	3.00	4.94e-11	4.29	9.34e-12	4.68	2.66e-13	5.84
640	16	2.01e-07	2.00	3.27e-10	3.00	2.24e-12	4.46	2.98e-13	4.97	4.22e-15	5.98

TABLEAU F.6 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps croissants puis décroissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	7.81e-04	/	1.19e-04	/	5.01e-05	/	5.64e-05	/	7.18e-06	/
20	16	2.01e-04	1.96	1.31e-05	3.18	2.09e-06	4.58	1.46e-06	5.27	1.99e-07	5.47
40	16	5.08e-05	1.98	1.38e-06	3.24	2.00e-07	3.39	1.04e-07	3.81	2.42e-08	4.15
80	16	1.28e-05	1.99	1.69e-07	3.04	1.40e-08	3.83	5.04e-09	4.37	6.67e-10	4.73
160	16	3.21e-06	1.99	2.10e-08	3.01	9.69e-10	3.85	2.39e-10	4.40	1.53e-11	5.45
320	16	8.05e-07	2.00	2.62e-09	3.00	4.94e-11	4.29	9.34e-12	4.68	2.66e-13	5.84
640	16	2.01e-07	2.00	3.27e-10	3.00	2.24e-12	4.46	2.98e-13	4.97	4.22e-15	5.98

TABLEAU F.7 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_3 avec pas de temps alternés

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	1.85e-03	/	1.20e-03	/	1.73e-03	/	3.15e-03	/	4.83e-03	/
20	16	4.98e-04	1.90	3.02e-04	1.99	4.74e-04	1.87	1.17e-03	1.43	3.68e-03	0.39
40	16	1.22e-04	2.03	5.51e-05	2.46	7.29e-05	2.70	1.70e-04	2.78	6.04e-04	2.61
80	16	2.90e-05	2.08	8.20e-06	2.75	8.43e-06	3.11	2.01e-05	3.08	8.45e-05	2.84
160	16	6.88e-06	2.08	1.10e-06	2.89	9.15e-07	3.20	2.27e-06	3.14	9.45e-06	3.16
320	16	1.66e-06	2.05	1.43e-07	2.95	9.47e-08	3.27	2.20e-07	3.37	8.48e-07	3.48
640	16	4.04e-07	2.03	1.80e-08	2.98	8.95e-09	3.40	1.77e-08	3.63	5.83e-08	3.86

TABLEAU F.8 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_4 avec pas de temps alternés

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	16	1.85e-03	/	1.20e-03	/	1.73e-03	/	3.15e-03	/	4.83e-03	/
20	16	4.98e-04	1.90	3.02e-04	1.99	4.74e-04	1.87	1.17e-03	1.43	3.68e-03	0.39
40	16	1.22e-04	2.03	5.51e-05	2.46	7.29e-05	2.70	1.70e-04	2.78	6.04e-04	2.61
80	16	2.90e-05	2.08	8.20e-06	2.75	8.43e-06	3.11	2.01e-05	3.08	8.45e-05	2.84
160	16	6.88e-06	2.08	1.10e-06	2.89	9.15e-07	3.20	2.27e-06	3.14	9.45e-06	3.16
320	16	1.66e-06	2.05	1.43e-07	2.95	9.47e-08	3.27	2.20e-07	3.37	8.48e-07	3.48
640	16	4.04e-07	2.03	1.80e-08	2.98	8.95e-09	3.40	1.77e-08	3.63	5.83e-08	3.86

ANNEXE G PARAMETRES D'INFLUENCE POUR LES MÉTHODES DC/BDF2

Contexte : Nous regardons l'influence de certains paramètres sur la précision et la convergence des solutions T_1 et T_2 pour les méthodes DC/BDF2 lors de l'alternance des pas de temps (cf. chapitre 10).

Degré d'interpolation spatial

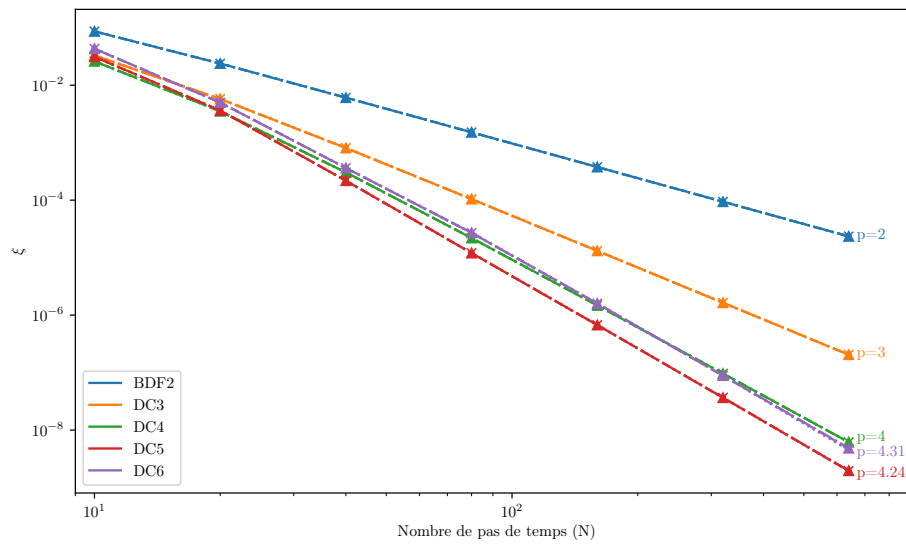


FIGURE G.1 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: P_2 ; $-\times-\dots$: P_3 ; $-\bullet-\dots$: P_4)

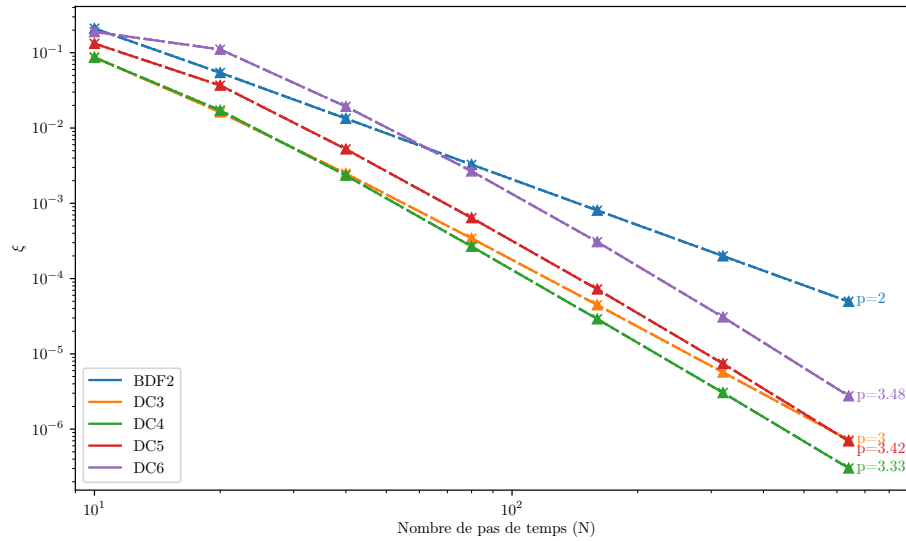


FIGURE G.2 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: P_2 ; $-\times-\dots$: P_3 ; $-\blacktriangle\dots$: P_4)

Influence du maillage

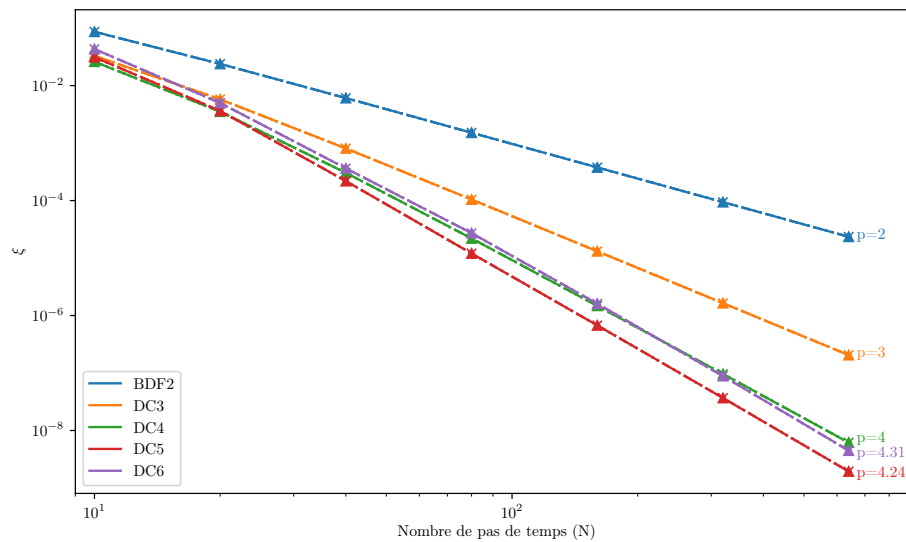


FIGURE G.3 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($-\times-\dots$: 5 elm; $\dots\bullet\dots$: 10 elm; $-\blacktriangle\dots$: 100 elm)

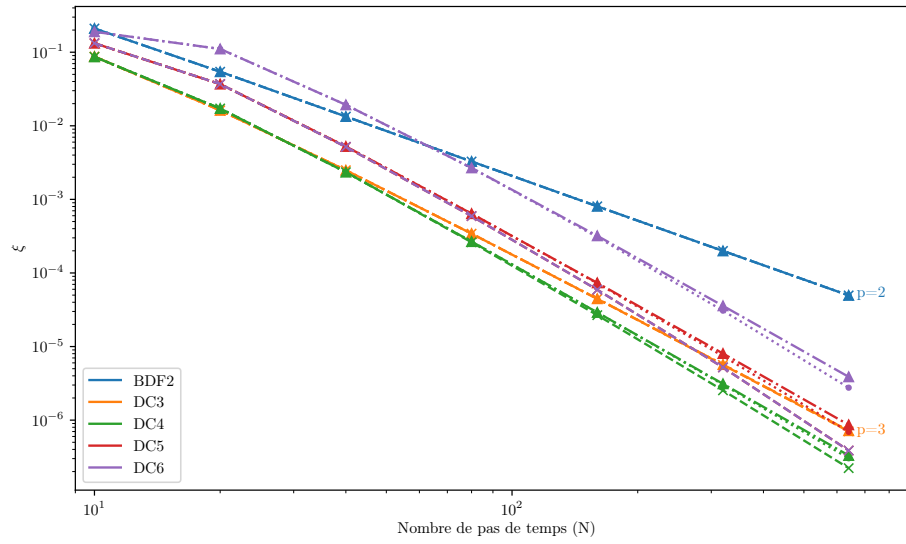
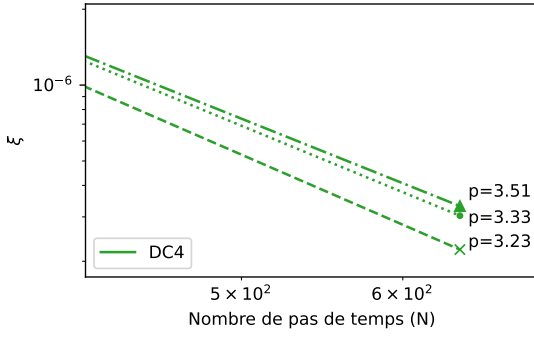
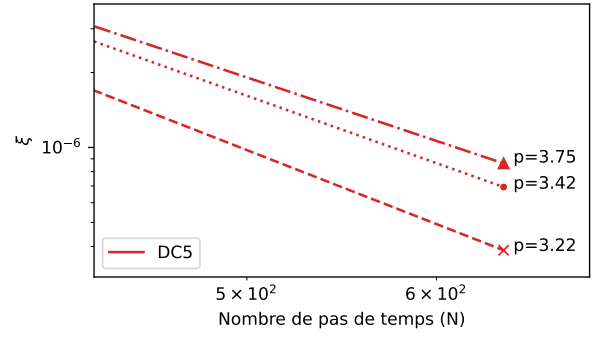


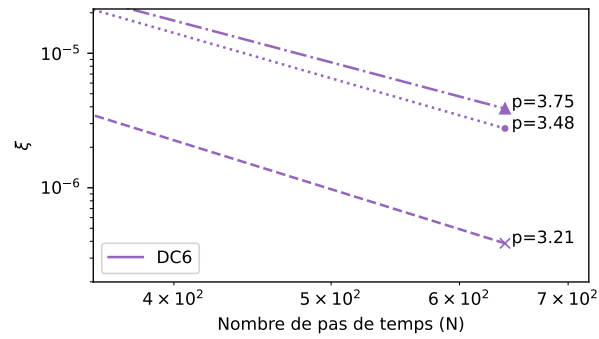
FIGURE G.4 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($-x-$: 5 elm ; $\dots\bullet\dots$: 10 elm ; $-*\dots$: 100 elm)



(a) DC4/BDF2



(b) DC5/BDF2



(c) DC6/BDF2

FIGURE G.5 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($-x-$: 5 elm ; $\dots\bullet\dots$: 10 elm ; $- \star -$: 100 elm)

Conditions limites

Méthodes de Verwer

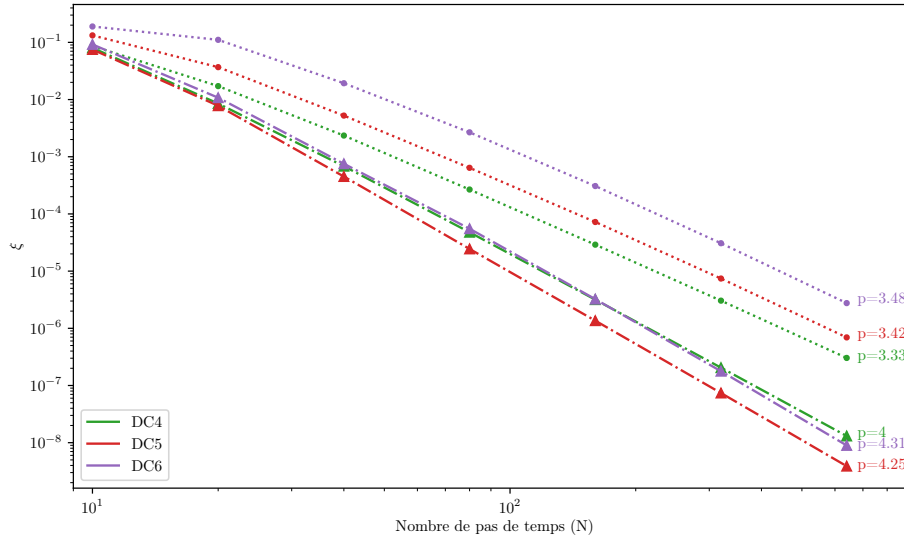


FIGURE G.6 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés ($\dots\bullet\dots$: C.L fortes; $\dashrightarrow\blackstar\dashrightarrow$: C.L faibles)

Conditions de Neumann

TABLEAU G.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés et conditions de Neumann

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	10	7.54e-01	/	8.60e-02	/	1.86e-02	/	1.49e-02	/	2.95e-02	/
20	10	2.09e-01	1.86	1.17e-02	2.88	2.49e-03	2.91	4.92e-03	1.60	1.40e-02	1.07
40	10	5.50e-02	1.92	1.55e-03	2.92	3.19e-04	2.96	6.01e-04	3.03	1.72e-03	3.02
80	10	1.41e-02	1.96	2.01e-04	2.95	3.10e-05	3.36	5.06e-05	3.57	1.62e-04	3.42
160	10	3.59e-03	1.98	2.56e-05	2.97	2.62e-06	3.57	4.04e-06	3.65	1.38e-05	3.55
320	10	9.03e-04	1.99	3.22e-06	2.99	2.09e-07	3.65	3.17e-07	3.67	1.15e-06	3.58
640	10	2.27e-04	1.99	4.04e-07	2.99	1.64e-08	3.67	2.59e-08	3.62	9.87e-08	3.54

Influence du coefficient de diffusion

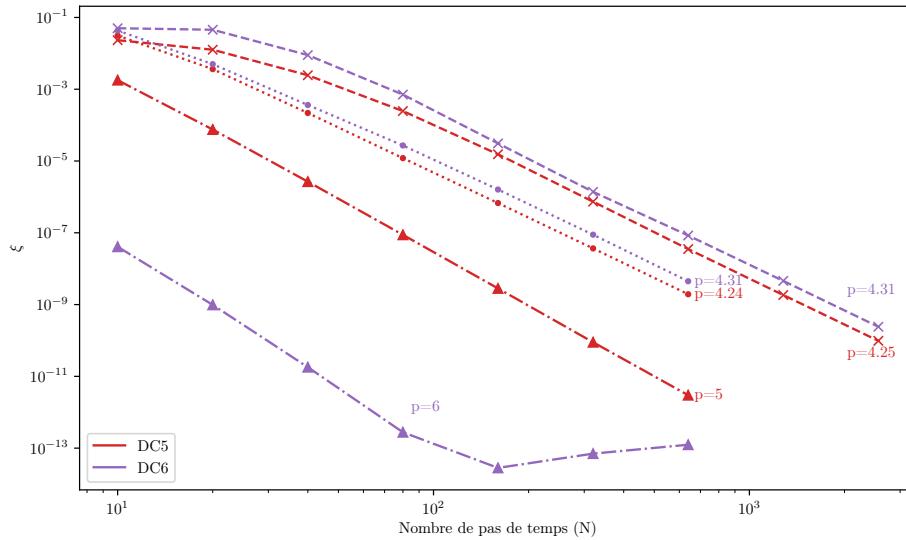


FIGURE G.7 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_1 avec pas de temps alternés ($\text{--}\blacktriangle\text{--}$: $k_D = 0.001$; $\text{--}\bullet\text{--}$: $k_D = 100$; $\text{--}\times\text{--}$: $k_D = 1000$)

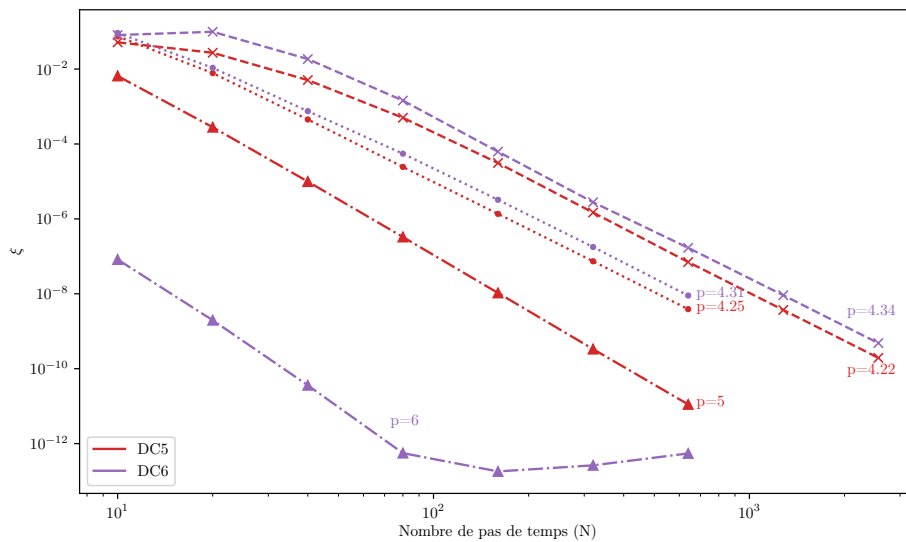


FIGURE G.8 Études de convergence des méthodes DC/BDF2 pour la solution T_2 avec pas de temps alternés $\text{--}\blacktriangle\text{--}$: $k_D = 0.001$; $\text{--}\bullet\text{--}$: $k_D = 100$; $\text{--}\times\text{--}$: $k_D = 1000$)

ANNEXE H ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES DC/BDF2 POUR LE 1^{ER} PROBLÈME DE STOKES

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour les équations de Navier-Stokes (1^{er} problème de Stokes) (cf. section 11.1).

TABLEAU H.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps constants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	6.41e-04	/	6.22e-04	/	6.26e-04	/	6.33e-04	/	6.41e-04	/
20	64	7.53e-05	3.09	6.86e-06	6.50	6.88e-06	6.51	6.87e-06	6.53	6.86e-06	6.55
40	1024	2.44e-05	1.63	3.69e-07	4.22	1.10e-07	5.97	1.10e-07	5.97	1.10e-07	5.97
80	16384	6.97e-06	1.81	5.39e-08	2.78	1.83e-09	5.91	1.83e-09	5.91	1.83e-09	5.91
160	262144	1.86e-06	1.90	7.29e-09	2.89	8.69e-11	4.40	2.98e-11	5.94	2.98e-11	5.94

TABLEAU H.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	9.65e-04	/	4.87e-04	/	4.88e-04	/	4.86e-04	/	4.95e-04	/
20	64	2.99e-04	1.69	1.36e-05	5.16	6.11e-06	6.32	6.08e-06	6.32	6.08e-06	6.35
40	1024	9.09e-05	1.72	2.12e-06	2.68	1.55e-07	5.30	1.03e-07	5.88	1.03e-07	5.88
80	16384	2.51e-05	1.86	2.95e-07	2.85	1.03e-08	3.91	1.78e-09	5.86	1.78e-09	5.86
160	262144	6.60e-06	1.93	3.88e-08	2.92	6.77e-10	3.93	2.93e-11	5.92	2.93e-11	5.92

TABLEAU H.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps croissants/décroissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	1.46e-03	/	3.05e-04	/	3.38e-04	/	3.08e-04	/	3.51e-04	/
20	64	7.13e-04	1.04	5.27e-05	2.53	1.33e-05	4.67	4.89e-06	5.97	4.96e-06	6.14
40	1024	2.29e-04	1.64	8.42e-06	2.65	9.57e-07	3.80	1.63e-07	4.90	9.27e-08	5.74
80	16384	6.46e-05	1.83	1.18e-06	2.83	6.54e-08	3.87	5.41e-09	4.92	1.68e-09	5.79
160	262144	1.71e-05	1.91	1.57e-07	2.91	4.29e-09	3.93	1.74e-10	4.96	3.07e-11	5.77

TABLEAU H.4 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 1^{er} problème de Stokes avec pas de temps alternés

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	6.57e-04	/	6.91e-04	/	7.49e-04	/	9.19e-04	/	1.76e-03	/
20	64	7.51e-05	3.13	7.06e-06	6.61	7.10e-06	6.72	7.52e-06	6.93	1.43e-05	6.94
40	1024	2.43e-05	1.63	4.08e-07	4.11	1.12e-07	5.99	1.12e-07	6.07	1.12e-07	7.00
80	16384	6.96e-06	1.81	6.00e-08	2.77	1.85e-09	5.92	1.85e-09	5.92	1.85e-09	5.92
160	262144	1.86e-06	1.90	8.14e-09	2.88	1.14e-10	4.02	3.68e-11	5.65	5.37e-11	5.11

ANNEXE I ERREURS ET TAUX DE CONVERGENCE DES MÉTHODES DC/BDF2 POUR LE 2^D PROBLÈME DE STOKES

Contexte : Validation et vérification des méthodes DC/BDF non linéaires pour les équations de Navier-Stokes (2^d problème de Stokes) (cf. section 11.2).

TABLEAU I.1 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps constants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	7.56e-03	/	7.82e-03	/	7.91e-03	/	7.96e-03	/	8.15e-03	/
20	64	2.22e-03	1.77	8.02e-05	6.61	7.18e-05	6.78	7.16e-05	6.80	7.20e-05	6.82
40	1024	5.77e-04	1.94	7.89e-06	3.35	9.94e-07	6.18	9.86e-07	6.18	9.86e-07	6.19
80	16384	1.45e-04	1.99	1.05e-06	2.91	1.67e-08	5.89	1.52e-08	6.02	1.52e-08	6.02
160	262144	3.64e-05	2.00	1.36e-07	2.95	8.17e-10	4.36	2.38e-10	6.00	2.38e-10	6.00

TABLEAU I.2 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps croissants

		BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
Nb. pas de temps	Nb. elm.	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	9.77e-03	/	7.39e-03	/	7.46e-03	/	7.63e-03	/	8.35e-03	/
20	64	3.02e-03	1.69	8.57e-05	6.43	7.12e-05	6.71	7.09e-05	6.75	7.10e-05	6.88
40	1024	7.87e-04	1.94	8.54e-06	3.33	9.92e-07	6.16	9.86e-07	6.17	9.86e-07	6.17
80	16384	2.00e-04	1.98	1.07e-06	3.00	2.77e-08	5.16	1.52e-08	6.01	1.52e-08	6.01
160	262144	5.04e-05	1.99	1.34e-07	3.00	1.63e-09	4.09	2.38e-10	6.00	2.38e-10	6.00

TABLEAU I.3 Erreur et taux de convergence des méthodes DC/BDF2 pour le 2^d problème de Stokes avec pas de temps croissants/décroissants

Nb. pas de temps	Nb. elm.	BDF2		DC3/BDF2		DC4/BDF2		DC5/BDF2		DC6/BDF2	
		ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p	ξ	p
10	4	9.77e-03	/	7.39e-03	/	7.46e-03	/	7.63e-03	/	8.35e-03	/
20	64	3.02e-03	1.69	8.57e-05	6.43	7.12e-05	6.71	7.09e-05	6.75	7.10e-05	6.88
40	1024	7.87e-04	1.94	8.54e-06	3.33	9.92e-07	6.16	9.86e-07	6.17	9.86e-07	6.17
80	16384	2.00e-04	1.98	1.07e-06	3.00	2.77e-08	5.16	1.52e-08	6.01	1.52e-08	6.01
160	262144	5.04e-05	1.99	1.34e-07	3.00	1.63e-09	4.09	2.38e-10	6.00	2.38e-10	6.00